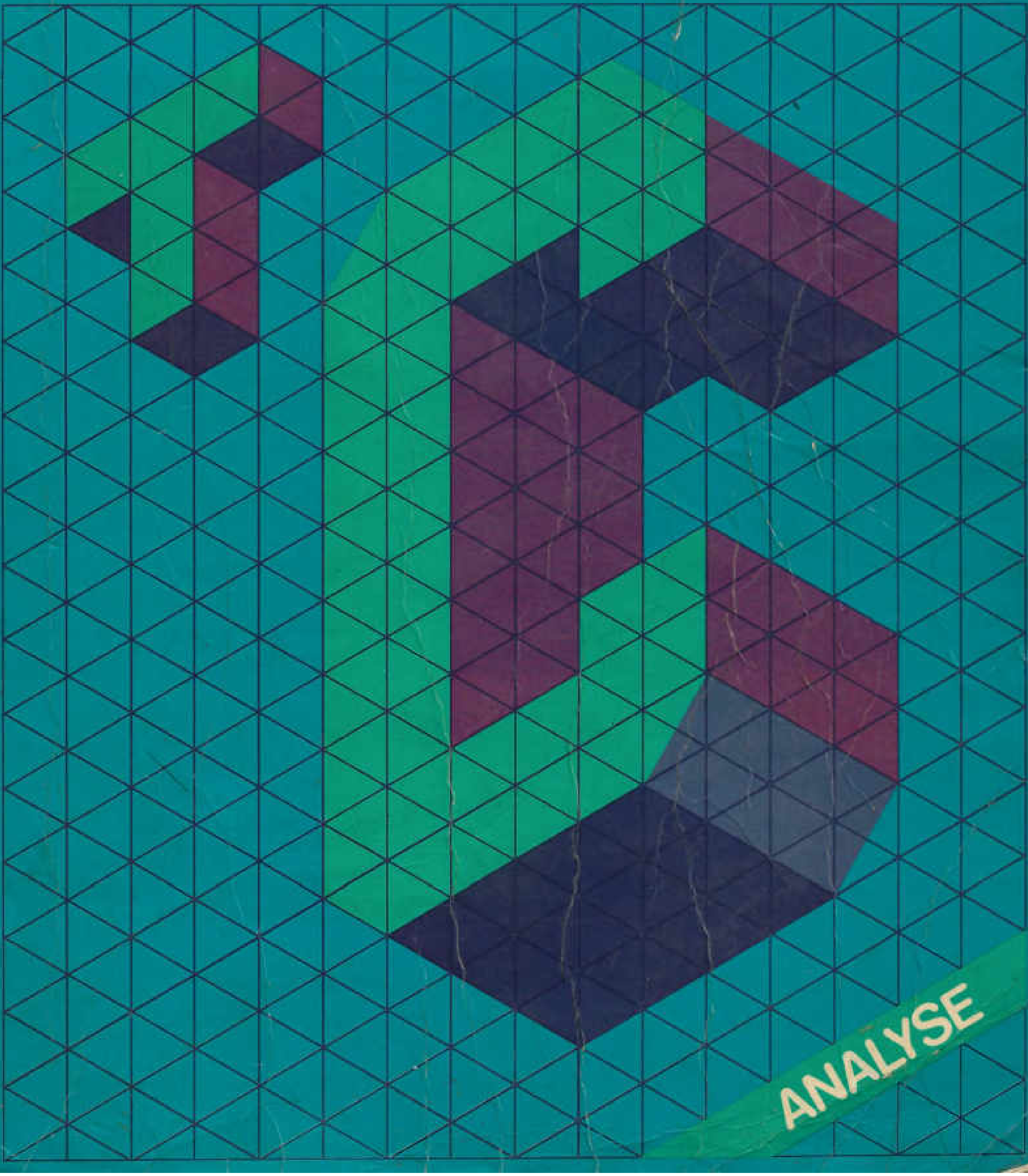
MATHEMATIQUE

HACHETTE

TERMINALE C et E



ANALYSE

MATHEMATIQUE
TERMINALES C ET E

ANALYSE ET STATISTIQUE

C. GAUTIER
P. ROYER
C. THIERCE

HACHETTE

TABLE DES MATIÈRES

79, boulevard Saint-Germain
F 75006 Paris

ISBN 2.01.0091 44.2

AVANT-PROPOS

Le présent ouvrage présente le programme d'analyse, de combinatoire et de statistique du programme des classes de Terminale C et Terminale E. Comme cela fut le cas pour les ouvrages des classes de Seconde et de Première, le manuscrit a été relu et remanié à la lumière des nombreuses et pertinentes critiques ainsi obtenues.

Nous nous sommes attachés à la réalisation d'un ouvrage permettant de répondre aux différents besoins des utilisateurs. Nous espérons ainsi mettre à la disposition des élèves un outil que chacun pourra utiliser selon ses besoins, selon son niveau, avec l'aide du professeur. On y trouvera, en particulier, de très nombreux exercices de natures et de difficultés très diverses, parmi lesquels on pourra puiser au gré des besoins et des préoccupations de chacun.

La participation active de l'élève est indispensable à l'assimilation du cours et à la compréhension des concepts introduits. Cette participation active est constamment sollicitée par de nombreuses activités et de nombreux exemples et exercices d'application immédiate. L'étude attentive de ces activités et de ces exercices peut permettre, notamment au cours des séances de travaux dirigés, de déceler les éventuels blocages, et d'y remédier afin de pouvoir progresser efficacement dans l'étude du programme. En outre, par l'intermédiaire de nombreuses séries d'exercices et de problèmes classés par centres d'intérêt, on pourra aborder l'étude de nombreux thèmes suivant l'intérêt et la motivation de l'élève.

On ne bâtit rien de durable sans de solides fondations. C'est pourquoi nous avons jugé utile de fournir à chacun, dans un premier chapitre, la possibilité de faire le point sur les résultats et techniques de base rencontrés en classe de Première. Il est en tout état de cause intéressant de faire le point, même à propos de ce que l'on croit bien savoir. En particulier, il est important de bien maîtriser le principe de récurrence, qui est sans conteste l'un des principes de base des mathématiques. Nous avons également présenté dans ce chapitre les règles essentielles du langage mathématique formalisé.

C'est bien vivement que nous recommandons la lecture attentive de l'introduction de ce chapitre, dans laquelle on trouvera un panorama des préoccupations essentielles de l'analyse, dont certaines font par ailleurs l'objet du chapitre 9. Cette lecture est de nature à permettre une vision plus globale de l'organisation du cours et de préciser les raisons de l'introduction de telle ou telle notion dans le cours.

C'est intentionnellement que ce chapitre n'est pas numéroté. Il est conçu pour servir de référence constante (de même que les tableaux des pages 295 à 298, complétés progressivement par le lecteur).

Le chapitre le plus important du livre est sans doute le chapitre 9. On y a regroupé, sous quatre titres, des activités et des exercices et problèmes se rapportant à des questions et méthodes fondamentales, indispensables à l'étude de toutes les sciences qui utilisent l'outil mathématique. L'étude des fonctions, la résolution d'équations sont en effet des questions primordiales, et les méthodes de comparaison sont à la base même de l'analyse, en particulier par l'étude des fonctions convexes.

Ce chapitre très riche n'est pas conçu pour être traité systématiquement et isolément, mais plutôt pour servir de fil conducteur. Son utilisation peut se concevoir de diverses manières, en particulier à l'occasion des séances de travaux dirigés. Il permettra de distinguer et d'illustrer les interactions entre les différents concepts étudiés dans le cours, d'introduire l'étude de nouveaux concepts, rendue nécessaire par un blocage constaté dans la résolution de tel ou tel problème. On y rencontrera également des activités et exercices délicats, préparant l'élève aux études supérieures.

Conformément aux indications du programme, le chapitre 1 est consacré à l'introduction de la fonction logarithme. Cette étude est menée à partir des notions rencontrées en classe de Première. Pour permettre une pleine utilisation des propriétés originales de la fonction logarithme, nous avons inclus dans ce premier chapitre l'étude des fonctions composées, dont l'utilisation permet de construire de nombreuses fonctions.

Dans le chapitre 2, l'étude des fonctions continues sur un intervalle et des fonctions réciproques débouche sur la définition des fonctions exponentielles.

Nous avons tenu, en raison de son importance théorique et pratique dans de nombreuses sciences, à présenter au plus vite les définitions et techniques du calcul intégral. C'est ce qui a été fait au chapitre 3, où l'accent est mis sur les techniques de calcul approché d'intégrales. Les chapitres 4 à 6 présentent des compléments sur l'étude des suites et des fonctions (limites, dérivées). Il va de soit que ces notions, déjà rencontrées en Première auront été utilisées dans les chapitres précédents. Le but de ces chapitres est d'apporter des compléments permettant d'étudier des suites et des fonctions dans certains cas où les méthodes déjà rencontrées sont insuffisantes ou inopérantes. Le théorème des accroissements finis permet, en particulier, de relier les propriétés d'une fonction à celles de sa fonction dérivée, et d'établir des règles de comparaison intéressantes.

Un problème essentiel est la détermination d'une fonction liée à ses fonctions dérivées par certaines propriétés. Le chapitre 7 constitue une introduction à l'étude du vaste problème des équations différentielles. Aucun algorithme ne permet de déterminer systématiquement les primitives d'une fonction, ni à plus forte raison, les solutions d'une équation différentielle quelconque. Le programme propose l'étude de quelques cas simples, qui sont abordés au cours de ce chapitre.

Dans le chapitre 8, les propriétés des développements limités d'ordre 1 sont étendues aux approximations polynomiales d'une fonction au voisinage d'un point x_0. Lorsque x_0 est infini, l'étude de telles approximations polynomiales débouche sur l'étude des courbes asymptotes.

Dans le chapitre 10, les techniques d'étude des fonctions numériques sont investies dans l'étude des fonctions vectorielles, qui débouche elle-même sur la cinématique du point, exemple d'étude mathématique d'un problème physique.

Les chapitres 11 et 12 sont consacrés aux problèmes de dénombrement (et à une brève introduction au calcul des probabilités) et aux statistiques à deux caractères permettant de mettre en évidence des liaisons de fait entre des phénomènes pour lesquels on dispose de séries de mesures sans maîtriser leurs interactions causales.

Le plan de cet ouvrage ainsi évoqué est un plan possible pour l'étude du programme. Mais les mathématiques ne se déroulent pas linéairement. Les interactions sont constantes entre les différentes notions et les problèmes. Les notions se précisent et s'affinent par ces interactions, et au contact des problèmes. « Faire » des mathématiques, c'est en effet avant tout chercher des problèmes. Nous avons donc voulu présenter un vaste choix d'exercices et de problèmes, de natures et de difficultés fort diverses. On rencontrera, par exemple, des exercices d'application et d'entraînement, des exercices et problèmes d'exposition et de synthèse, souvent composés à partir d'extraits d'annales du baccalauréat, du concours général, ou autres examens et concours du niveau Terminale.

On rencontrera aussi des exercices de recherche, aux énoncés volontairement succints, et qu'il ne faut pas avoir honte de chercher longuement. Les énoncés de ces exercices sont souvent issus d'épreuves d'« Olympiades », ou de « Rallyes mathématiques » divers. Nous remercions ici tout particulièrement notre collègue Denis Gerll pour son ouvrage « *Les olympiades internationales de mathématiques* » (Éditions Hachette) et pour les énoncés originaux dont il est l'auteur.

Nous remercions également tous nos collègues qui ont relu et critiqué le manuscrit, pour l'aide qu'ils ont apporté à la confection de cet ouvrage.

Nous espérons que cet ouvrage répondra au mieux à l'attente des utilisateurs et à leurs besoins divers. C'est avec reconnaissance que nous accueillerons les remarques, critiques et suggestions qu'ils voudront bien nous adresser, et par avance, nous les en remercions.

Les Auteurs

CHAPITRE 0

METHODES ET TECHNIQUES DE BASE

I – INTRODUCTION

• La nécessité de construire un langage commun à propos des opérations courantes de **dénombrement** amène à la construction de l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels. Dans cet ensemble, on est rapidement conduit à la résolution d'équations, c'est-à-dire à la détermination de nombres possédant certaines propriétés.

Or, on peut prouver que dans $\mathbb{N}$, certaines équations (comme : $x + 2 = 0$) n'ont pas de solutions. On est ainsi conduit à la construction de l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs, puis, par un processus analogue (avec, par exemple : $3x - 1 = 0$), à la construction de l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels, puis à l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels (par exemple : $x^2 - 2 = 0$), et enfin à l'ensemble $\mathbb{C}$ des complexes (par exemple : $x^2 + 1 = 0$). On peut démontrer que, dans ce dernier ensemble $\mathbb{C}$, toute équation de la forme $P(x) = 0$, où $P(x)$ désigne un polynôme de degré n à coefficients complexes, admet n racines, chacune étant comptée avec son ordre de multiplicité.

• L'étude des nombres réels est particulièrement importante. En premier lieu se pose le problème de définir chaque nombre réel. L'utilisation d'un système de numération (le plus souvent le système décimal) permet de représenter, grâce à un ensemble fini de symboles, les éléments de $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$. Mais il en va tout autrement pour les réels non rationnels. L'utilisation de signes particuliers, comme les exposants fractionnaires (ou les radicaux) permet de représenter certains irrationnels, et des noms particuliers ont été attribués à certains autres (π et e). Mais ces artifices ne permettent pas à eux seuls de préciser la position de l'irrationnel envisagé par rapport aux rationnels voisins.

Pour traiter ce problème, on utilise le fait que, quel que soit l'irrationnel x donné et quelle que soit la précision désirée 10^{-p}, il existe deux décimaux d_1 et d_2 tels que : $d_1 < x < d_2$ et $d_2 - d_1 \leqslant 10^{-p}$.

Un tel encadrement peut, pour des valeurs de p dépendant du matériel utilisé, être déduit des indications données par une calculatrice.

Ainsi, lorsqu'un réel est défini par certaines conditions, un problème important est sa détermination, exacte si possible, sinon par des valeurs approchées. Dans ce dernier cas, on tentera de définir un algorithme permettant de déterminer des valeurs approchées aussi précises que l'on veut.

• Dans le cas d'équations définies sur $\mathbb{R}$, il ne suffit pas de savoir prouver qu'il existe des solutions, mais il faut encore réussir à déterminer un moyen pour déterminer au moins des valeurs approchées de ces solutions.

Les équations que l'on peut résoudre exactement ne sont pas en fait très nombreuses. On connaît la résolution des équations polynomiales de degrés 1 et 2 (ainsi que 3 et 4, cf. chapitre 9), mais, dans le cas d'équations de degré strictement supérieur à 4, ne présentant pas de particularité permettant de se ramener à un cas connu, on est désarmé.

La résolution d'équations rebelles à une résolution algébrique nécessite des techniques d'étude de fonctions. L'**étude** d'un point de vue **global** de la fonction f définissant l'équation conduit à préciser le nombre et la localisation des racines de l'équation définie par $f(x) = 0$. L'**étude locale** de la fonction f dans un voisinage d'une racine permet de préciser des **algorithmes de résolution,** débouchant sur l'étude de suites et de leur limite éventuelle.

• L'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un ensemble très vaste, et très compliqué. De la même façon que l'on a cherché dans $\mathbb{R}$ à approcher un réel par un décimal (et même par un décimal contenant un ensemble pas trop important de « chiffres après la virgule »), on peut être tenté de rechercher des **approximations d'une fonction** par des éléments d'un ensemble de fonctions connues. Le choix de cet ensemble de référence n'est pas aisé, et dépend aussi du but visé.

On utilise principalement l'ensemble des fonctions polynômes, l'ensemble des fonctions en escalier, ou encore l'ensemble des fonctions trigonométriques. Il existe deux autres ensembles de référence, d'autant plus importants qu'ils permettent de modéliser de nombreuses situations dans les domaines les plus divers (physique, biologie, économie, géographie,...). C'est pourquoi il est important d'étudier au plus tôt les **fonctions logarithmes et exponentielles.**

Le problème de l'approximation d'une fonction par une autre n'est pas simple. Il revêt essentiellement deux aspects :
— Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, b]$. On peut chercher à déterminer celle qui, parmi les fonctions φ d'une certaine famille de référence $\mathcal{F}$, approche « le mieux » f sur l'intervalle $[a, b]$. Le critère de qualité de cette approximation dépend beaucoup du problème posé. On peut par exemple chercher, s'il en existe, une fonction φ_0 de $\mathcal{F}$ telle que, pour toute fonction φ de $\mathcal{F}$ et tout x de $[a, b]$, on ait :

$$|\varphi_0(x) - f(x)| \leqslant |\varphi(x) - f(x)|.$$

Si une telle fonction φ_0 n'existe pas, on peut par exemple s'attacher au critère :

$$\int_a^b |\varphi_0(x) - f(x)|\, \mathrm{d}x \leqslant \int_a^b |\varphi(x) - f(x)|\, \mathrm{d}x,$$

ou à tout autre critère pertinent lié à la spécificité du problème posé nécessitant l'approximation cherchée.
— Soit f une fonction définie au voisinage d'un réel x_0. On peut chercher, s'il en existe, celle qui, parmi les fonctions ψ d'une certaine famille de référence $\mathcal{F}$, approche le mieux f au voisinage de x_0, c'est-à-dire une fonction ψ_0 telle qu'il existe un réel positif non nul α de façon que, pour toute fonction ψ de $\mathcal{F}$, et tout réel x de $]x_0 - \alpha, \ x_0 + \alpha[$, on ait : $|\psi_0(x) - f(x)| \leqslant |\psi(x) - f(x)|$. On dit alors que ψ_0 est **la meilleure approximation locale** de f au voisinage de x_0, suivant la famille $\mathcal{F}$. Si une telle fonction ψ_0 n'existe pas, on essaye de résoudre le problème pour la restriction de f à $]x_0, +\infty[$ et à $]-\infty, x_0[$.

La résolution de ces problèmes d'approximation passe par l'utilisation de certains nombres réels attachés à la fonction étudiée, et résumant certaines propriétés de f sur l'intervalle $[a, b]$, ou au voisinage de x_0 $\left(\text{par exemple } \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x, \quad f'(x_0), \lim\limits_{x_0} f, \ldots\right)$.
On peut s'attendre à ce que l'approximation soit d'autant meilleure que ces nombres respectivement attachés à φ_0(ou ψ_0) et à f seront voisins, mais ceci demande dans chaque cas une étude approfondie et des conclusions précises.

• La détermination et surtout le contrôle de la qualité des approximations rendent nécessaires la comparaison d'autres fonctions, et d'autres nombres, et l'étude des interactions entre les comparaisons des fonctions et des nombres qui leurs sont associés. Les activités de comparaison de nombres ou de fonctions apparaissent comme les activités essentielles de l'analyse. Le lecteur pourra dès maintenant, se référer au chapitre 9 où des activités de synthèse sur les études de fonctions et d'équations permettent à tout moment de motiver l'étude et d'investir les connaissances.

II – ENTIERS NATURELS ET RÉCURRENCE

1. L'ENSEMBLE DES ENTIERS NATURELS

L'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels est muni d'une addition et d'une multiplication telles que :

- L'addition est associative et commutative. Le nombre 0 est neutre pour l'addition, et tout élément de $\mathbb{N}$ est simplifiable (ont dit aussi régulier) pour l'addition.
- La multiplication est associative et commutative. Le nombre 1 est neutre pour la multiplication, et tout élément de $\mathbb{N}^*$ ($= \mathbb{N} \setminus \{0\}$) est simplifiable pour la multiplication.
- La multiplication est distributive par rapport à l'addition.
- La relation $\leqslant$ est une relation d'ordre total sur $\mathbb{N}$, compatible avec l'addition (c'est-à-dire que, quels que soient les entiers naturels a, b et c :

$$\text{si} \quad a \leqslant b, \quad \text{alors} \quad a + c \leqslant b + c).$$

- Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément.
- Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément.

Principe de récurrence

Soit une propriété qui, pour un nombre entier naturel a peut être vraie ou fausse.

On suppose que :

a) la propriété est vraie pour $a = 0$,

b) lorsque la propriété est vraie pour $a = p$, alors elle est vraie aussi pour $a = p + 1$, et ceci quel que soit p;

alors on peut conclure que la propriété est vraie pour tout nombre n de $\mathbb{N}$.

Autre forme

On suppose que :

a) la propriété est vraie pour $a = n_0$,

b) lorsque la propriété est vraie pour $a = p$, alors elle est vraie aussi pour $a = p + 1$, et ceci quel que soit p supérieur ou égal à n_0;

alors, on peut conclure que la propriété est vraie pour tout entier naturel supérieur à n_0.

REMARQUES :

1° Le principe de récurrence pose de nombreux problèmes d'ordre logique, et aussi philosophique. On peut en effet imaginer que, de proche en proche, on pourrait prouver la propriété pour tout entier naturel, mais on sait de façon certaine que l'on ne peut pas expliciter cette infinité de preuves successives. Comme dans de nombreux cas, la richesse et la cohérence des résultats obtenus apportent une justification *a posteriori* à ce principe de démonstration. Certains auteurs estiment que le principe de récurrence est le responsable principal de la fécondité des mathématiques qui, sans lui, ne seraient qu'une tautologie stérile.

2° Pour effectuer une démonstration par récurrence, il importe d'avoir, au préalable, une idée du résultat que l'on veut prouver. Il est donc nécessaire de commencer l'étude par une phase expérimentale. Mais cette phase expérimentale doit se poursuivre par une phase de démonstration (voir 4, 7° et 8°).

2. EXERCICES RÉSOLUS

1° Démontrer que, pour tout élément de $\mathbb{N}$, on a : $2^n > n$.

• La propriété est vraie pour $n = 0$, car $2^0 = 1$ et $1 > 0$.
Elle est également vraie pour $n = 1$.
Supposons que la propriété soit vraie pour un entier naturel p supérieur ou égal à 1 :

$$2^p > p$$

alors : $$2^{p+1} = 2 \times 2^p = 2^p + 2^p.$$

Par hypothèse de récurrence $2^p > p \geqslant 1$; donc : $2^p + 2^p > p + 1$; par suite :

$$2^{p+1} > p + 1.$$

D'après le principe de récurrence, on peut donc conclure que la propriété étudiée est vraie pour tout entier naturel.

2° Soit x un nombre réel non multiple de 2π. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul :

$$S_n = \sin x + \sin 2x + \ldots + \sin nx = \frac{\sin \dfrac{(n+1)x}{2} \sin \dfrac{nx}{2}}{\sin \dfrac{x}{2}}.$$

Pour $n = 1$, on a bien : $$S_1 = \frac{\sin x \sin \dfrac{x}{2}}{\sin \dfrac{x}{2}}.$$

Supposons que, pour un entier naturel p non nul, on ait :

$$S_p = \frac{\sin \dfrac{(p+1)x}{2} \sin \dfrac{px}{2}}{\sin \dfrac{x}{2}}.$$

Calculons alors :

$$S_{p+1} = S_p + \sin (p+1)x = \frac{\sin \dfrac{(p+1)x}{2} \sin \dfrac{px}{2}}{\sin \dfrac{x}{2}} + 2 \sin \frac{(p+1)x}{2} \cos \frac{(p+1)x}{2}.$$

Donc $$S_{p+1} = \sin \frac{(p+1)x}{2} \left[\frac{\sin \dfrac{px}{2}}{\sin \dfrac{x}{2}} + 2 \cos \frac{(p+1)x}{2} \right]$$

$$= \sin \frac{(p+1)x}{2} \, \frac{\sin \dfrac{px}{2} + 2 \cos (p+1) \dfrac{x}{2} \sin \dfrac{x}{2}}{\sin \dfrac{x}{2}}.$$

Or, $2 \sin a \cos b = \sin (a+b) + \sin (a-b)$; d'où :

$$2 \cos (p+1) \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2} = \sin (p+2) \frac{x}{2} - \sin \frac{px}{2}.$$

Il en résulte que : $S_{p+1} = \dfrac{\sin \dfrac{(p+1)x}{2} \sin \dfrac{(p+2)x}{2}}{\sin \dfrac{x}{2}}$.

La propriété est donc vraie pour tout entier n non nul.
Remarquons que l'on peut établir directement la relation demandée en calculant :

$$S_n \sin \frac{x}{2} = \sin x \sin \frac{x}{2} + \sin 2x \sin \frac{x}{2} + \dots + \sin nx \sin \frac{x}{2}.$$

On remarque alors que :

$$\sin kx \sin \frac{x}{2} = \frac{1}{2}\left[\sin\left(k + \frac{1}{2}\right)x - \sin\left(k - \frac{1}{2}\right)x\right].$$

La propriété cherchée en découle par remplacement dans l'expression ci-dessus.

3° On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 35}$ et $u_0 = 0$.
Prouver par récurrence que cette suite est croissante et majorée par 7.

Pour tout entier n, et par définition, on a $u_n \geqslant 0$. Pour prouver que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée par 7, il suffit de prouver que u_n^2 est majoré par 49, pour tout entier n.
Or, $49 - u_{n+1}^2 = 49 - (35 + 2u_n) = 14 - 2u_n = 2(7 - u_n)$.
On a bien : $u_0 \leqslant 7$; et si $u_n \leqslant 7$, alors :

$$7 - u_n \geqslant 0 \quad \text{et} \quad 49 - u_{n+1}^2 \geqslant 0.$$

Il en résulte que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée par 7.

Pour prouver que la suite étudiée est croissante, constatons tout d'abord que $u_0 \leqslant u_1$.
Supposons ensuite que $u_n \leqslant u_{n+1}$. On a alors :

Par conséquent : $u_{n+2} - u_{n+1} = \sqrt{2u_{n+1} + 35} - \sqrt{2u_n + 35}$.

$$u_{n+2} - u_{n+1} = \frac{2u_{n+1} + 35 - (2u_n + 35)}{\sqrt{2u_{n+1} + 35} + \sqrt{2u_n + 35}},$$

$$= \frac{2(u_{n+1} - u_n)}{\sqrt{2u_{n+1} + 35} + \sqrt{2u_n + 35}}.$$

Les différences $u_{n+2} - u_{n+1}$ et $u_{n+1} - u_n$ sont donc de même signe.
Il en résulte que :

$$u_{n+2} \geqslant u_{n+1}.$$

La suite étudiée est donc croissante.

REMARQUE :

Si l'on pose $f(x) = \sqrt{2x + 35}$, pour $x \in \mathbb{R}_+$, on a :

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x + 35}}.$$

La dérivée de f étant positive, la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
La propriété découle, par récurrence, de la constatation : $u_{n+1} = f(u_n)$. (Voir chapitre 4.)

3. CHERCHER L'ERREUR

Les trois « raisonnements » ci-dessous sont faux. On demande de trouver l'erreur, et de commenter.

1° Soit à démontrer que pour tout entier naturel n, $10^n + 1$ *est divisible par 9.*

On a : $10^{n+1} + 1 = 10 \times 10^n + 1 = (9+1)10^n + 1,$
$$= 9 \times 10^n + 10^n + 1.$$

Donc, si $10^n + 1$ est divisible par 9, il en est de même de $10^{n+1} + 1$, ce qui prouve le résultat annoncé.

2° Soit à démontrer que tout entier naturel est égal à zéro.

Considérons la propriété suivante : « Tout entier p inférieur à n est égal à zéro ».

Cette propriété est vraie pour $n = 0$.

Supposons qu'elle soit vraie au rang n, c'est-à-dire que tous les entiers inférieurs à n soient nuls, et envisageons la propriété au rang $n + 1$.

Par hypothèse de récurrence, tout entier p inférieur ou égal à n est nul.

Il ne reste donc plus qu'à montrer que $n + 1$ est nul. Or, n et 1 sont nuls par hypothèse de récurrence. Il en est donc de même de $n + 1$, ce qui prouve le résultat annoncé.

3° Soit à prouver que tout ensemble fini a tous ses éléments égaux.

Si dans tout ensemble E_n à n éléments, tous les éléments sont égaux, alors, soit E_{n+1} un ensemble de $n + 1$ éléments : $E_{n+1} = \{x_1, x_2, x_3, ..., x_n, x_{n+1}\}$.

Avec l'ensemble de n éléments $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, on a, par hypothèse de récurrence :
$$x_1 = x_2 = ... = x_n.$$

Avec l'ensemble de n éléments $\{x_2, x_3, ..., x_{n+1}\}$, on a de même :
$$x_2 = x_3 = ... = x_{n+1}.$$

Donc $x_1 = x_2 = x_3 = x_n = ... = x_{n+1}$.

Comme la propriété est vraie pour $n = 1$ (cas d'un singleton), il en résulte que tout ensemble de n éléments a tous ses éléments égaux.

4. ACTIVITÉS

1° Démontrer que tout entier n supérieur ou égal à 24 peut s'écrire sous la forme :
$$n = 5a + 7b \quad ; \quad (a, b) \in \mathbb{N}^2.$$
$n+1 = 5a + 7b + 1$

2° Soit f une fonction numérique définie et dérivable sur un intervalle I.
Prouver que la fonction f^n *est dérivable pour tout entier naturel n non nul, et que :*
$$[f^n]'(x) = nf^{n-1}(x)f'(x).$$

*3° **a)** En calculant les premières valeurs, conjecturer une expression donnant, en fonction de n, la somme* $S_n^p = 1^p + 2^p + 3^p + ... + n^p$*, pour* $p \in \{1, 2, 3, 4\}$.
Démontrer ensuite le résultat par récurrence.

***b)** Déterminer directement la somme* S_n^p *en fonction des sommes* S_n^q*, avec* $q < p$. *(On utilisera le développement de* $(k+1)^{p+1}$ *par la formule du binôme, voir livre de Première, p. 111.)*

4° *a*) *Soit x un nombre réel non multiple de* 2π. *Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :*

$$S_n = \frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \dots + \cos nx = \frac{\sin (2n+1)\dfrac{x}{2}}{2 \sin \dfrac{x}{2}}.$$

b) *Établir directement la formule ci-dessus, en calculant* $2S_n \sin \dfrac{x}{2}$.

5° *Établir une formule donnant la dérivée n-ième de la fonction f sur son ensemble de définition.*

a) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$; *b*) $f(x) = \dfrac{1}{2x-1}$; *c*) $f(x) = \sin (ax+b)$; *d*) $f(x) = \cos (ax+b)$.

6° *Soit* $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ *la suite définie par* $u_{n+1} = 5u_n - 6u_{n-1}$ *et* $u_1 = 1$, $u_2 = -5$.
Établir que, pour tout entier naturel supérieur ou égal à 2 :

$$u_n = 4 \times 2^n - 7 \times 3^{n-1}.$$

7° *Prouver que* 5 040 *est divisible par tout entier n compris entre* 1 *et* 10. *Peut-on en déduire que* 5 040 *est divisible par tout entier n ?*

8° *Prouver que pour tout entier n tel que* $0 \leqslant n \leqslant 40$, $n^2 - n + 41$ *est un nombre premier. Peut-on en déduire que* $n^2 - n + 41$ *est premier pour tout entier n?* (Euler)

III – L'ENSEMBLE ℝ ET SES SOUS-ENSEMBLES

1. RÈGLES DE CALCUL DANS ℝ

L'ensemble ℝ des nombres réels est muni d'une addition, d'une multiplication et d'une relation d'ordre. Récapituler ci-dessous les propriétés de ces opérations et de cette relation.

a. L'addition

A_1. L'addition dans ℝ est **associative :**
Quels que soient les réels x, y et z, on a :

A_2. Le réel 0 est **neutre** pour l'addition dans ℝ :
Quel que soit le réel x, on a :

A_3. Tout réel x admet un **opposé** dans ℝ. Cet opposé est noté $-x$.
Quel que soit le réel x, le réel $-x$ est tel que:

DÉFINITION 1	**Soit E un ensemble muni d'une opération (que nous notons $*$). On dit que l'opération $*$ munit E d'une *structure de groupe* (ou que $(E, *)$ est un groupe), pour exprimer que :** **– L'opération $*$ est associative dans E.** **– L'ensemble E contient un élément (que nous notons e), qui est neutre dans E pour $*$.** **– Tout élément de E est symétrisable dans E. C'est-à-dire que, si x est élément de E, alors E contient un élément x' tel que $x * x' = x' * x = e$.**

Il résulte de la définition et des propriétés ci-dessus que : $(\mathbb{R}, +)$ est un groupe.

A_4. L'addition dans $\mathbb{R}$ est **commutative :**
Quels que soient les réels x et y, on a : ______________________________

DÉFINITION 2

Soit $(E, *)$ un groupe. On dit que c'est un groupe *abélien* (ou *commutatif*) pour exprimer que l'opération $*$ est commutative dans E.

L'addition des réels munit l'ensemble $\mathbb{R}$ d'une structure de groupe abélien.

b. La multiplication

M_1. La multiplication munit l'ensemble $\mathbb{R}^*$ $(= \mathbb{R} \setminus \{0\})$ d'une structure de groupe abélien :

____

____

____

____

M_2. La multiplication dans $\mathbb{R}$ est **distributive** par rapport à l'addition dans $\mathbb{R}$.
Quels que soient les réels x, y, z, on a : ______________________________

DÉFINITION 3

Soit K un ensemble muni de deux opérations (que nous notons $*$ et $\circ$). On dit que $(K, *, \circ)$ est *un corps commutatif* pour exprimer que :
— $(K, *)$ est un groupe abélien (d'élément neutre e).
— $(K \setminus \{e\}, \circ)$ est un groupe abélien.
— La loi $\circ$ est distributive par rapport à $*$ dans K.

Il résulte de ce qui précède que $(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif.

M_3. Le nombre 0 est élément **absorbant** (ou **permis**) pour la multiplication dans $\mathbb{R}$:
Quel que soit le réel x, on a : $0 \times x =$ ______________________________
Cette propriété est vraie dans tout corps commutatif. L'élément neutre pour la première opération est absorbant pour la seconde loi.

M_4. Un produit de réels est nul, si, et seulement si, un au moins de ces réels est nul :
Quels que soient les réels x et y, alors, si $xy = 0$, on a : ______________
Cette propriété n'est pas vraie dans tout corps commutatif. Il existe des corps commutatifs pour lesquels elle n'est pas vraie.

c. Puissances et racines carrées

• Quels que soient les réels non nuls x et y, et quels que soient les entiers relatifs m et n, on a :

$x^1 =$ ________ ; $x^0 =$ ________ ; $0^m =$ ________ ; $x^{-m} =$ ________ .

$x^m x^n =$ ________ ; $(xy)^m =$ ________ ; $(x^m)^n =$ ________ .

$\dfrac{x^m}{x^n} =$ ________ ; $\left(\dfrac{x}{y}\right)^m =$ ________ .

$(x+y)^2 =$ ________ ; $(x+y)^3 =$ ________ ; $(x+y)^4 =$ ________ .

$(x-y)^2 =$ ________ ; $(x-y)^3 =$ ________ ; $(x-y)^4 =$ ________ .

$x^2 - y^2 =$ ________ ; $x^3 - y^3 =$ ________ ; $x^4 - y^4 =$ ________ .

• Si x et y sont deux réels, l'écriture $y = \sqrt{x}$ signifie que :

1) ______ 2) ______ 3) ______

Quels que soient les réels positifs x et y : $\sqrt{xy} =$ ______ ; $\sqrt{\dfrac{x}{y}} =$ ______ $(y \neq 0)$.

Quels que soient le réel x et l'entier n : $\sqrt{x^{2n}} =$ ______

d. L'ordre

O_1. Quels que soient les réels x et y, $x \leqslant y$ signifie que : $y - x \in$ ______

$x \leqslant 0$ si, et seulement si, $x \in$ ______ ;

$x \geqslant 0$ si, et seulement si, $x \in$ ______ .

O_2. L'ordre dans $\mathbb{R}$ est une relation **réflexive, antisymétrique et transitive;** c'est-à-dire :

______

______

______

O_3. L'ordre dans $\mathbb{R}$ est un ordre **total;** c'est-à-dire :

______

O_4. L'ordre dans $\mathbb{R}$ est **compatible avec l'addition.**
Quels que soient les réels x, y, z, si $x \leqslant y$, alors : ______
Quels que soient les réels x, y, z, t, si $x \leqslant y$ et $z \leqslant t$, alors : ______

O_5. L'ordre dans $\mathbb{R}$ est compatible avec la multiplication par un réel **positif :**
Quels que soient les réels x et y tels que $x \leqslant y$,

si z est dans $\mathbb{R}_+$, alors : ______

si z est dans $\mathbb{R}_-$, alors : ______

O_6. Si deux réels positifs x et y sont tels que $0 < x \leqslant y$, alors :

$$x^2 \ \_\_\_\_ \ y^2 \quad ; \quad \frac{1}{x} \ \_\_\_\_ \ \frac{1}{y}.$$

O_7. Si $0 < x < 1$, alors : x ____ x^2.
Si $0 < 1 < x$, alors : x ____ x^2.

Les propriétés ci-dessus sont également vraies dans le corps commutatif $\mathbb{Q}$.

Le corps $\mathbb{R}$ possède, vis-à-vis de l'ordre des propriétés supplémentaires qui ne sont pas vraies dans $\mathbb{Q}$. Pour préciser ces propriétés, rappelons que :

– Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On dit que A est **majoré** s'il existe un réel M tel que, pour tout x de A, on ait $x \leqslant M$. Le **majorant** M est le plus grand élément de A si, et seulement si, il appartient à A.

– De même, on dit que A est **minoré** s'il existe un réel m tel que, pour tout x de A, on ait $m \leqslant x$. Le **minorant** m est le plus petit élément de A si, et seulement si, il appartient à A.

– Si A est majoré et minoré, on dit qu'il est **borné**.

– La borne supérieure S (resp. inférieure i) de A est, s'il existe, le plus petit élément de l'ensemble des majorants de A (resp. le plus grand élément de l'ensemble des minorants). On note : $S = \sup A$ (resp. : $i = \inf A$).

La propriété essentielle de l'ordre dans $\mathbb{R}$ s'énonce alors :

Toute partie majorée non vide de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure dans $\mathbb{R}$.

REMARQUES

1° Il en résulte que toute partie minorée de $\mathbb{R}$ admet une borne inférieure.
2° Il existe des parties majorées non vides de $\mathbb{Q}$ qui n'admettent pas de borne supérieure dans $\mathbb{Q}$. C'est le cas, par exemple, de l'ensemble des rationnels positifs dont le carré est inférieur à 2.

2. SOUS-ENSEMBLES DE $\mathbb{R}$

★ Activité 1

*1° **a)** L'addition des réels munit-elle l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels d'une structure de groupe? Pourquoi?*
***b)** Mêmes questions pour l'ensemble $\mathbb{Z}$ des entiers relatifs.*

2° On rappelle que l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels est l'ensemble des réels x tels qu'il existe un couple (p, q) d'entiers relatifs, de façon que $x = \frac{p}{q}$.
***a)** A quelle condition des couples (p, q) et (p', q') d'entiers relatifs définissent-ils le même rationnel?*
***b)** Quels sont les couples d'entiers relatifs qui ne définissent pas de rationnel?*
***c)** Rappeler la règle permettant d'ajouter les rationnels $x = \frac{p}{q}$ et $y = \frac{p'}{q'}$.*
En déduire que $(\mathbb{Q}, +)$ est un groupe abélien.

DÉFINITION 4	**Soit $(E, *)$ un groupe. On dit que $(F, *)$ est un *sous-groupe* de $(E, *)$ (ou plus simplement, s'il n'y a pas d'ambiguïté, que F est un sous-groupe de E), pour exprimer que :** **— F est un sous-ensemble de E;** **— $(F, *)$ est un groupe.**

$\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$ sont des sous groupes additifs de $\mathbb{R}$.

★ Activité 2

*1° **a)** On note $2\mathbb{Z}$ l'ensemble des nombres pairs. Montrer que $2\mathbb{Z}$ est un sous-groupe additif de $\mathbb{Z}$.*
***b)** Soit α un réel. On note $\alpha\mathbb{Z}$ l'ensemble des réels de la forme αz, où z est un entier relatif : $\alpha\mathbb{Z} = \{\alpha z, z \in \mathbb{Z}\}$. Prouver que $\alpha\mathbb{Z}$ est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$.*
***c)** Soit G un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$. Supposons en outre que l'ensemble $G \cap \mathbb{R}_+^*$ des éléments strictement positifs de G admette un plus petit élément (soit α).*
Prouver que G contient $\alpha\mathbb{Z}$.
Soit x un élément de G. En considérant la partie entière z de $\frac{x}{\alpha}$, prouver que x est nécessairement élément de $\alpha\mathbb{Z}$. Conclure.
***d)** Démontrer que l'ensemble des rationnels strictement positifs n'admet pas de plus petit élément. En déduire qu'il n'existe pas de réel α tel que $\mathbb{Q} = \alpha\mathbb{Z}$.*
e)** Soit H un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$. Prouver que, si $(H \cap \mathbb{R}_+^*)$ n'admet pas de plus petit élément, et si a et b sont deux éléments de H tels que $a < b$, alors il existe un élément c de H tel que $a < c < b$. **On dit alors que l'ordre dans H est divisible, ou que H est dense pour l'ordre. C'est le cas pour l'ensemble $\mathbb{Q}$ et aussi pour $\mathbb{R}$ lui-même.

2° Prouver que $(\mathbb{Q}, +, \times)$ est un corps commutatif. En est-il de même de $(\mathbb{Z}, +, \times)$?

3° Prouver que $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}^*, \times)$. En est-il de même de $(\mathbb{R}_-^*, \times)$?

3. EXERCICES D'APPLICATION

★ **Activité 3**

1° *On considère la suite* (u_n) *définie par* $u_0 = 2$ *et* $u_{n+1} = 2 + \frac{1}{u_n}$.

a) *Calculer* u_n *pour* $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

b) *Comparer les réels* u_7, u_8, u_9 *et* u_{10}.

c) *L'expérimentation ci-dessus permet d'envisager un certain nombre d'hypothèses. Tenter une démonstration par récurrence de ces hypothèses.*

2° *Comparer les réels X et Y dans les cas suivants. La seule utilisation de votre calculatrice permet-elle de conclure?*

a) $X = \dfrac{103\,993}{33\,102}$; $Y = \dfrac{104\,348}{33\,215}$;

b) $X = \dfrac{29\,521\,473}{205\,599\,946}$; $Y = \dfrac{31\,521\,473}{220\,650\,310}$;

c) $X = \sqrt{21} + \sqrt{10}$; $Y = \sqrt{24} + \sqrt{7}$;

d) $X = \sqrt{2 + \sqrt{3}}$; $Y = \dfrac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{2}}$;

e) $X = \dfrac{1}{\sqrt{6} - \sqrt{5}}$; $Y = \dfrac{3}{\sqrt{5} - \sqrt{2}} + \dfrac{4}{\sqrt{6} + \sqrt{2}}$.

3° *Transformer les quotients suivants de façon que le dénominateur ne contienne plus de radical :*

a) $X = \dfrac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{4}}$;

b) $Y = \dfrac{1}{\sqrt{7} - 2\sqrt{5} + \sqrt{3}}$.

4° *Transformer les quotients suivants de façon que le numérateur ne contienne plus de radical :*

a) $X = \dfrac{\sqrt{7} - \sqrt{5}}{\sqrt{2}}$;

b) $X = \dfrac{\sqrt{5} + 2\sqrt{3} - \sqrt{2}}{3}$;

5° *Déterminer les entiers a, b et c tels que* $X = (a + b\sqrt{c})^2$, *dans les cas suivants :*

a) $X = 7 + 4\sqrt{3}$;

b) $X = 21 - 4\sqrt{5}$;

c) $X = 22 + 12\sqrt{2}$;

d) $X = 37 - 12\sqrt{7}$.

6° *Après avoir calculé* X^2, *donner une écriture simplifiée de X :*

a) $X = \sqrt{4 + \sqrt{7}} + \sqrt{4 - \sqrt{7}}$;

b) $X = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} - \sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$;

c) $X = \sqrt{12 - 3\sqrt{7}} - \sqrt{12 + 3\sqrt{7}}$;

d) $X = \sqrt{7 - 4\sqrt{3}} - \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$.

IV – FONCTIONS DE RÉFÉRENCE

1. POLYNÔMES

★ Activité 4

On considère les polynômes définis par :
$P(x) = x^2(1 - x) + x^2 - 1$; $Q(x) = (x - 1)(x^2 + 1) + x + 5$.

*1° **a)** Développer, réduire et ordonner $P(x)$ et $Q(x)$. Préciser leur degré.*
***b)** Même question que le **a)** pour les polynômes $(P + Q)(x)$; $(P - Q)(x)$; $(PQ)(x)$; $(3P - 5Q)(x)$.*

*2° **a)** Calculer $P(1)$; $P(-1)$; $Q(1)$; $Q(-1)$; $P(\sqrt{2})$; $Q(-\sqrt{3})$.*
***b)** Développer, réduire et ordonner les polynômes $P_1(x) = P(x^2)$ et $Q_1(x) = Q(x^2)$. Préciser leur degré.*
***c)** Même question que le **b)** pour les polynômes $P(x^2 + x + 1)$ et $Q(2x^2 - x - 1)$.*

*3° **a)** Factoriser $P(x)$ et $Q(x)$.*
***b)** Déterminer deux polynômes $R(x)$ et $S(x)$ tels que :*
$(PQ)(x) = (x^2 + x + 1)R(x) + S(x)$; *avec* $d^\circ S(x) \leqslant 1$.

2. FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

★ Activité 5

1° Dans les tableaux ci-dessous, récapituler les propriétés des fonctions trigonométriques. Illustrer chaque résultat sur un cercle trigonométrique.

$\cos^2 x + \sin^2 x =$ 1 .	$1 + \tan^2 x =$ $\frac{1}{\cos^2 x}$.
$\tan x =$ $\frac{\sin x}{\cos x}$.	$1 + \cot^2 x =$ $\frac{1}{\sin^2 x}$.
$\cot x =$ $\frac{\cos x}{\sin x}$.	

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin x$	[illegible]	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\tan x$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–

x	$x + 2\pi$	$-x$	$x + \pi$	$\pi - x$	$x + \frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2} - x$
$\cos x$						
$\sin x$						
$\tan x$						

$\sin x = \sin a$ *si, et seulement si :* [illegible]

$\cos x = \cos a$ *si, et seulement si :* ______

$\tan x = \tan a$ *si, et seulement si :* ______

$\cos(x+y) =$ ______	$\cos 2x =$ ______
$\sin(x+y) =$ ______	$1-\cos 2x =$ ______
$\cos(x-y) =$ ______	$1+\cos 2x =$ ______
$\sin(x-y) =$ ______	$\sin 2x =$ ______
$\tan(x+y) =$ ______	$\tan 2x =$ ______
$\tan(x-y) =$ ______	

$2\sin a\cos b =$ ______	*Si* $\tan\frac{x}{2} = t$, *on a :*
$2\cos a\cos b =$ ______	
$2\sin a\sin b =$ ______	$\cos x =$ ______
$\sin p + \sin q =$ ______	$\sin x =$ ______
$\sin p - \sin q =$ ______	$\tan x =$ ______
$\cos p + \cos q =$ ______	
$\cos p - \cos q =$ ______	

2° *Résoudre les équations et systèmes définis ci-dessous :*

a) $\sin x = \sin(\pi - 3x)$.

b) $\cos 2x = \cos(\pi - 3x)$.

c) $\tan x = \tan\left(\frac{\pi}{2} + 2x\right)$.

d) $\sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right) = \cos\frac{x}{4}$.

e) $\sin 2x = \cos^2 x$.

f) $\sin x \tan\frac{x}{2} = \cos x$.

g) $\begin{cases} \sin x + \sin y = 0. \\ \cos x + \cos y = \sqrt{3}. \end{cases}$

h) $\begin{cases} x + y = \frac{4\pi}{3}. \\ \cos x + \cos y = -\frac{1}{2}. \end{cases}$

3° ***a)*** *Déterminer les polynômes* T_n *tels que* $\cos nx = T_n(\cos x)$, *pour* $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. *Déterminer* T_{2n} *en fonction de* T_n.

b) *Même question que le **a)** pour les polynômes* U_n *tels que* $\frac{\sin(n+1)x}{\sin x} = U_n(\cos x)$.

3. SUITES ARITHMÉTIQUES ET GÉOMÉTRIQUES

★ Activité 6

1° *Soit* (u_n) *la suite définie par* $u_{n+1} = \frac{u_n}{1-u_n}$ *et* $u_0 = -2$.

Soit (v_n) *la suite telle que* $v_n = \frac{u_n + 1}{u_n}$.

a) *Rappeler la définition d'une suite arithmétique. Quelle est la somme des n premiers termes d'une suite arithmétique de raison r et de premier terme a?*

b) *Montrer que* (v_n) *est une suite arithmétique. Quelle en est la raison?*

c) *Déterminer* v_n *en fonction de n. En déduire* u_n *en fonction de n.*

d) *Calculer la somme* $s_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$.

2° *Soit* (u_n) *la suite définie par :* $2u_n + u_{n-1} = 1$ *et* $u_0 = 2$.

Soit (v_n) *la suite définie par :* $v_n = u_n - 1$.

a) *Rappeler la définition d'une suite géométrique. Quelle est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison q et de premier terme a?*

b) *Montrer que* (v_n) *est une suite géométrique. Quelle en est la raison?*

c) *Déterminer* v_n *en fonction de n. En déduire* u_n *en fonction de n.*

d) *Calculer les sommes :* $s_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$;

$\sigma_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

(Attention au nombre des termes.)

V – NOMBRES ET FONCTIONS ATTACHÉS A D'AUTRES FONCTIONS

1. RACINES D'ÉQUATIONS

★ Activité 7

En utilisant les méthodes algébriques de calcul dans $\mathbb{R}$, *expliciter, grâce aux symboles du calcul dans* $\mathbb{R}$, *la valeur exacte de chacune des solutions de chacune des équations définies ci-dessous. Préciser de même l'ensemble des solutions des inéquations proposées.*

1° a) $x^2 + 7x + 10 = 0$ *b)* $13x^2 - 5\sqrt{2}x + \sqrt{7} = 0$

c) $\sqrt{2}x^2 - 2x + 4 = 0$ *d)* $2x^2 - 2\sqrt{6}x + 3 = 0$

2° a) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ *b)* $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$

c) $-x^4 - x^2 + 6 = 0$ *d)* $\sqrt{2}x^4 + 2\sqrt{3}x^2 + \sqrt{6} = 0$

e) $x^2 + |x| - 6 = 0$ *f)* $2x + \sqrt{x} - 3 = 0$

3° a) $x^3 + 3x^2 - 6x - 8 = 0$ *b)* $x^7 + 27x^4 - x^3 - 27 = 0$

4° a) $\dfrac{(x^2+x-2)(x^2+2x-3)}{x^2+3x+2} < 0$ *b)* $\dfrac{(x^4+2x^2-3)(x^5+x^3-2x)}{x^4-3x^2-10} > 0$

c) $\dfrac{(x^4+4)(x^3-8)(1-x^2)}{x^3+x^2+x+1} \leqslant 0$ *d)* $\dfrac{(-3x^2+4x+7)(5x^2+3x-2)}{(x^2-4)(-3x^2-7x+10)} \geqslant 0$

5° a) $\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2x-1} < \dfrac{1}{4x^2}$ *b)* $x - 3 \geqslant \sqrt{x^2 - 2x}$

c) $x + 1 < \sqrt{x+4}$ *d)* $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 > 0$

e) $\sqrt{4-x} - \sqrt{5+2x} \geqslant 0$ *f)* $\sqrt{x^2-2x} - \sqrt{2x-3} < 0$

★ Activité 8

Résoudre dans $\mathbb{R}$ *(ou* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$*) les systèmes définis ci-dessous :*

1° a) $\begin{cases} 6x + 18y = 15; \\ 2x + 6y = 5. \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} (\sqrt{3} - \sqrt{2})x + y = \sqrt{2}; \\ x + (\sqrt{3} + \sqrt{2})y = \sqrt{6}. \end{cases}$

c) $\begin{cases}(2x+3y-1)(x-y+4)=0;\\(x-2y+1)(x+y-1)=0.\end{cases}$ *d*) $\begin{cases}(4x+6y+2)(x+y-1)=0;\\(6x+9y+3)(x-y+1)=0.\end{cases}$

e) $\begin{cases}x+2y=3;\\-x+4y=3;\\5x-2y=3.\end{cases}$ *f*) $\begin{cases}2x+3=6y;\\6x-5y=10;\\4x=3+7y.\end{cases}$

g) $\begin{cases}5\sqrt{x}+4\sqrt{y}=21;\\4\sqrt{x}+\sqrt{y}=8.\end{cases}$ *h*) $\begin{cases}3x^2+4y^2=1;\\5x^2+12y^2=7.\end{cases}$

2° *a*) $\begin{cases}x^2-12x-45<0;\\-3x+15\geqslant 0.\end{cases}$ *b*) $\begin{cases}|x^2-1|\leqslant 3;\\2-x<x^2.\end{cases}$

c) $5<x^2-14x+50\leqslant 26.$ *d*) $2\leqslant\dfrac{(x-3)^2}{(x+1)^2}<3.$

3° *a*) $\begin{cases}x+y=27;\\xy=50.\end{cases}$ *b*) $\begin{cases}x+y=72;\\xy=1\,296.\end{cases}$

c) $\begin{cases}x+y=-43;\\xy=442.\end{cases}$ *d*) $\begin{cases}x+y=\sqrt{2}+\sqrt{3};\\xy=\sqrt{6}.\end{cases}$

2. LIMITES

★ Activité 9

1° a) Récapituler dans le tableau de la page 297 les limites que vous connaissez.
b) Rappeler et illustrer par un exemple les règles de calcul sur les limites de suites, et les théorèmes de comparaison.

2° Étudier le sens de variation et la convergence des suites définies ci-dessous :

a) $u_n=\dfrac{\cos n\pi}{n-1}$; *b*) $u_n=\dfrac{2n-3}{4n+2}$; *c*) $u_n=\dfrac{2^{3n}}{3^{2n}}$;

d) $u_n=\dfrac{8^n}{n!}$ $\left(\text{\textit{étudier} } \dfrac{u_{n+1}}{u_n}\text{\textit{, et comparer} } (u_n) \text{ \textit{à une suite géométrique}}\right)$;

e) $u_n=3u_{n-1}-5$ *et* $u_0=1$.

★ Activité 10

1° a) Récapituler dans le tableau de la page 297 les limites que vous connaissez.
b) Rappeler et illustrer par un exemple les règles de calcul sur les limites, et les théorèmes de comparaison.

2° Étudier les limites ci-dessous :

a) $\lim\limits_{x\to 0} x\sin\dfrac{1}{x}$; *b*) $\lim\limits_{x\to 0} xE\left(\dfrac{1}{x}\right)$ (*E*(*x*) *est la partie entière de x*) ;

c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x^2-1}$; *d*) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+x-2}{x-2}$; *e*) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{\tan 2x}$;

f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{1-\cos 2x}$; *g*) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2+3x-1}{2x^2+x-2}$; *h*) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x+1}{x^2+x+1}$.

3. DÉRIVÉE ET DÉVELOPPEMENT LIMITÉ D'ORDRE 1

★ Activité 11

1° Rappeler les définitions ci-dessous :
***a)** Développement limité d'ordre 1 en x_0 de la fonction f.*
***b)** Nombre dérivé en x_0 de la fonction f.*
***c)** Fonction dérivée de la fonction f.*

2° Récapituler dans le tableau de la page 298 les règles de dérivation que vous connaissez.

3° Déterminer la fonction dérivée de la fonction f dans les cas suivants :

***a)** $f(x) = (x+1)^6(x-1)^5$;* ***b)** $f(x) = \dfrac{2x^2+3x-1}{x^2+x-7}$;*

***c)** $f(x) = \dfrac{2\sin x - 1}{3\cos x + 2}$;* ***d)** $f(x) = \sqrt{1+x}\cos x$;*

***e)** $f(x) = \cos 3x + \sin\left(2x - \dfrac{\pi}{2}\right)$;* ***f)** $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x+1}}{\tan(3x+2)}$.*

*4° **a)** Déterminer le développement d'ordre 1 en x_0 (lorsqu'il existe) de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{a+x}$, où a désigne un réel quelconque.*
***b)** Utiliser les résultats du **a)** pour déterminer les limites suivantes :*

$$l = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{9+x}-3}{\sqrt{16+x}-4} \quad ; \quad l' = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x+4}-\sqrt{3x+4}}{\sqrt{x+1}-1}.$$

***c)** En posant $x = 2 + h$, et en utilisant la méthode ci-dessus, déterminer :*

$$\lim_{x \to 2} \frac{x - \sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3}.$$

***d)** Déterminer :*

$$\lim_{x \to -2} \frac{\sqrt{3x+8}-\sqrt{-3x-4}}{\sqrt{2x+7}-\sqrt{-x+1}}.$$

5° Donner deux exemples de fonctions continues en zéro, mais non dérivables en zéro.

★ Activité 12

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, et soit x_0 un élément de I. Supposons que de plus, il existe un réel positif M tel que, pour tout élément x de I, on ait $|f'(x)| \leqslant M$.
On considère la fonction g définie par $g(x) = |f(x) - f(x_0)| - M|x - x_0|$.
***a)** Étudier le signe de la dérivée de g sur I, dans les différents cas.*
***b)** En déduire le sens de variation de la fonction g.*
***c)** Conclure que, pour tout réel x de I, on a $|f(x) - f(x_0)| \leqslant M|x - x_0|$.*

4. PRIMITIVES

★ Activité 13

1° Récapituler dans le tableau de la page 298 les règles de calcul concernant les primitives que vous connaissez.

2° Trouvez, sur un intervalle que l'on précisera, une primitive de la fonction f dans chacun des cas suivants :

***a)** $f(x) = 2x^2 + 3x - 5$;* ***b)** $f(x) = x + 1 - \dfrac{1}{x^2}$;*

c) $f(x) = \dfrac{2x^3 - 5x^2 + 1}{x^2}$; d) $f(x) = \cos(5x - 3)$;

e) $f(x) = \sqrt{2x + 5}$; f) $f(x) = \cos(-2x + 1) + \tan^2(2x - 1)$.

3° *Déterminer la primitive de la fonction f qui s'annule en x_0, dans les cas suivants :*

a) $f(x) = 3x^2 - 7x + 1$, $x_0 = 5$;

b) $f(x) = \dfrac{1}{\cos^2 x} + \sin 3x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

VI – LE LANGAGE DES PROPRIÉTÉS

1. THÉORIE MATHÉMATIQUE

• Une théorie mathématique met en jeu des objets dont on étudie les propriétés. Ces objets peuvent être représentés par des signes spécifiques, ou simplement par des lettres. Certaines lettres représentent tel ou tel objet bien déterminé. Ces lettres sont appelées des **constantes.** D'autres lettres représentent l'un quelconque des objets d'un ensemble donné. Ces lettres sont alors appelées des **variables.** Il n'y a aucune différence fondamentale entre une constante et une variable. Tout dépend du raisonnement dans lequel cette lettre intervient. Dans certains raisonnements, il arrive qu'une même lettre soit d'abord considérée comme constante, puis comme une variable (ou le contraire). Dans un tel cas, on parle parfois de **paramètre.**

• Les propriétés mettant en jeu des objets mathématiques d'une théorie mathématique donnée sont exprimées par des énoncés contenant des lettres (variables, constantes). Ces énoncés sont susceptibles d'être vrais ou faux dans le cadre de la théorie étudiée. On les appelle alors les **propositions** de la théorie.

• L'étude d'une théorie mathématique consiste à énoncer les propriétés des objets mathématiques que l'on envisage, en distinguant parmi les propositions qui les font intervenir celles qui sont vraies de celles qui sont fausses.
Pour établir la valeur de vérité d'une proposition, on dispose des règles de déduction. Mais pour pouvoir déduire, il faut un point de départ. Ce point de départ est constitué par un ensemble de propositions dont la valeur de vérité est donnée *a priori*, c'est-à-dire sans démonstration. Ces propositions et la valeur de vérité de chacune d'elles sont appelées les **axiomes** de la théorie. Les propositions vraies que l'on déduit des axiomes sont appelées des **théorèmes.**

REMARQUES :

1° Il est fréquent, en mathématiques, que l'on ne précise pas la valeur de vérité d'une proposition. En général, c'est que la proposition est vraie. Quand une proposition est fausse, on l'indique toujours. Dans ce cas, l'expression « la proposition P est fausse » est une proposition vraie et donc un théorème.
Toutefois, cette convention usuelle, d'ailleurs souvent tacite, a l'inconvénient de ne pas permettre de distinguer aisément les propositions que l'on tient comme vraies, de celles sur la vérité desquelles on s'interroge. Le contexte doit permettre une telle distinction.

2° Une théorie est donc déterminée par la donnée de ses objets mathématiques, et d'un système d'axiomes qui précise quel est le « mode d'emploi » des objets de la théorie. De ce système d'axiomes, on déduit des théorèmes, et l'on peut introduire de proche en proche, par des définitions, d'autres objets mathématiques de la théorie (dans un but de simplification).

3° Les axiomes d'une théorie ne sont pas quelconques. En particulier, le système d'axiomes ne doit pas être contradictoire, c'est-à-dire que la négation d'un des axiomes ne doit pas être un théorème de la théorie.

2. LES PROPOSITIONS ET LES ENSEMBLES

• Une proposition d'une théorie $\mathcal{T}$ est un énoncé sans variable pour lequel il est possible de dire sans ambiguïté, dans le cadre de la théorie $\mathcal{T}$, s'il est vrai ou faux.

• Une fonction propositionnelle définie sur un ensemble E d'objets mathématiques d'une théorie $\mathcal{T}$ est une application qui, à tout élément de E, fait correspondre une proposition de la théorie étudiée. L'énoncé définissant la fonction propositionnelle est appelée : forme propositionnelle sur E.

• Soit $\mathcal{P}(x)$ une forme propositionnelle définie sur un ensemble E d'objets de la théorie $\mathcal{T}$. Soit A l'ensemble des éléments x de E tels que $\mathcal{P}(x)$ soit une proposition vraie. On note :

$$A = \{ x;\ x \in E,\ \mathcal{P}(x) \}.$$

On dit alors que A est défini en compréhension par la forme propositionnelle $\mathcal{P}(x)$.
Résoudre dans E l'équation définie par la forme propositionnelle $\mathcal{P}(x)$, c'est, autant que possible, et avec toute la précision possible, déterminer l'ensemble A (ensemble des solutions de l'équation) si possible en extension, sinon en utilisant dans chaque cas particulier des méthodes convenables, éventuellement graphiques.

3. CONNECTEURS LOGIQUES

Soit $\mathcal{P}(x)$ et $\mathcal{Q}(x)$ deux formes propositionnelles définies sur un ensemble E.
Soit : $A = \{ x;\ x \in E,\ \mathcal{P}(x) \}$;
$B = \{ x;\ x \in E,\ \mathcal{Q}(x) \}$.

• On appelle **négation** de $\mathcal{P}(x)$, et on note $\overline{\mathcal{P}(x)}$ la forme propositionnelle définie par :

« $\overline{\mathcal{P}(x)}$ est vraie si, et seulement si, $\mathcal{P}(x)$ est fausse ».

L'ensemble $\overline{A} = \{ x;\ x \in E,\ \overline{\mathcal{P}(x)} \}$ est le **complémentaire** de A dans E

• On appelle **conjonction** de $\mathcal{P}(x)$ et $\mathcal{Q}(x)$, et l'on note $\mathcal{P}(x) \wedge \mathcal{Q}(x)$ la forme propositionnelle définie par :

« $\mathcal{P}(x) \wedge \mathcal{Q}(x)$ est vraie si, et seulement si, $\mathcal{P}(x)$ et $\mathcal{Q}(x)$ sont vraies ».

L'ensemble $A \cap B = \{ x;\ x \in E,\ \mathcal{P}(x) \wedge \mathcal{Q}(x) \}$ est l'**intersection** de A et B.

• On appelle **disjonction** de $\mathcal{P}(x)$ et $\mathcal{Q}(x)$, et l'on note $\mathcal{P}(x) \vee \mathcal{Q}(x)$ la forme propositionnelle définie par :

« $\mathcal{P}(x) \vee \mathcal{Q}(x)$ est vraie si, et seulement si, $\mathcal{P}(x)$ est vraie ou $\mathcal{Q}(x)$ est vraie ».

L'ensemble $A \cup B = \{ x;\ x \in E,\ \mathcal{P}(x) \vee \mathcal{Q}(x) \}$ est la **réunion** de A et B.

REMARQUE :

Si $\mathcal{P}(x) \wedge \mathcal{Q}(x)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(x) \vee \mathcal{Q}(x)$ est vraie. On a : $A \cap B \subset A \cup B$.
La disjonction est aussi appelée **« disjonction inclusive »**.

• On dit que $\mathcal{P}(x)$ **implique** $\mathcal{Q}(x)$, et l'on note $\mathcal{P}(x) \Rightarrow \mathcal{Q}(x)$ si, et seulement si :

$$A \subset B.$$

• On dit que $\mathcal{P}(x)$ et $\mathcal{Q}(x)$ sont **équivalentes**, et l'on note $\mathcal{P}(x) \Leftrightarrow \mathcal{Q}(x)$ si, et seulement si :

$$A = B.$$

4. QUANTIFICATEURS

a. Définitions

• Lorsque pour tout élément x de l'ensemble E, $\mathcal{P}(x)$ est une proposition vraie, c'est que : $E = A$.

Dans ce cas, on écrit : $\forall x \in E, \quad \mathcal{P}(x)$.

Le signe $\forall$ est le **quantificateur universel.**

• Lorsqu'il existe dans E un élément x, au moins, tel que $\mathcal{P}(x)$ soit une proposition vraie, c'est que : $A \neq \varnothing$.

Dans ce cas, on écrit : $\exists x \in E, \quad \mathcal{P}(x)$.

Le signe $\exists$ est le **quantificateur existentiel.**

b. Variable muette, variable parlante

Soit E un ensemble et $\mathcal{P}(x)$ une fonction propositionnelle définie sur E. La variable x désignant un élément de E, la valeur de vérité de $\mathcal{P}(x)$ dépend de la valeur attribuée à x.

On dit alors que x est une variable parlante.

Par contre, la valeur de vérité de chacun des énoncés :

$$\forall x \in E, \quad \mathcal{P}(x)$$
$$\exists x \in E, \quad \mathcal{P}(x)$$

est définie sans ambiguïté, indépendamment de la variable x qui ne joue donc aucun rôle dans la détermination des valeurs de vérité. On dit alors que x est une variable muette.

REMARQUE :

Les quantificateurs $\forall$ et $\exists$ rendent donc muettes les variables auxquelles ils s'appliquent. Il existe d'autres opérations rendant muettes des variables. Par exemple : $I = \int_0^1 f(t)\, dt$ ne dépend pas de la variable t, laquelle est donc une variable muette.

c. Ordre des quantificateurs

Dans un énoncé où figurent des quantificateurs différents, l'ordre dans lequel ces quantificateurs interviennent est fondamental pour la signification de cet énoncé.
C'est ainsi, par exemple, que :

$$\forall x \in \mathbb{N}, \quad \exists y \in \mathbb{N}, \quad x < y$$

signifie que, pour tout entier x, on peut trouver un entier y supérieur à x. Cette proposition est vraie. Pour le prouver, il suffit de constater que $y = x + 1$ répond à la question $(x + 1 > x)$.

Par contre : $\exists y \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{N}, \quad x < y$

signifie que l'on peut trouver un entier y supérieur à tous les entiers x.
Cette proposition est fausse.

d. Négation d'une phrase quantifiée

Soit $A = \{x;\ x \in E,\ \mathcal{P}(x)\}$.

La proposition $\forall x \in E, \quad \mathcal{P}(x)$ est fausse si, et seulement si, $A \neq E$, c'est-à-dire si l'on peut trouver un élément x de E qui ne soit pas dans A.

Or, un elément x de E n'est pas dans A si, et seulement si, $\mathcal{P}(x)$ est fausse, c'est-à-dire si, et seulement si, $\overline{\mathcal{P}(x)}$ vraie.

Donc : $\overline{\forall x \in E,\ \mathcal{P}(x)}$ a même signification que $\exists x \in E,\ \overline{\mathcal{P}(x)}$.

De même : $\overline{\exists x \in E,\ \mathcal{P}(x)}$ a même signification que $\forall x \in E,\ \overline{\mathcal{P}(x)}$.

Retenons également que :

$$\overline{[\forall x \in E,\ \mathcal{P}(x) \Rightarrow \mathcal{Q}(x)]} \text{ a même signification que } [\exists x \in E,\ \mathcal{P}(x) \wedge \overline{\mathcal{Q}(x)}]$$

5. ACTIVITÉS

1° *Les propriétés ci-dessous sont-elles vraies? Écrire leur négation.*

a) $\forall x \in \mathbb{R},\ \ x^2 > 0$; *b)* $\forall x \in \mathbb{R},\ \ \dfrac{3x-5}{2x+2} \in \mathbb{R}$;

c) $\exists x \in \mathbb{Z}^*,\ \ x^2 \leqslant 0$; *d)* $\exists x \in \mathbb{R},\ \ \dfrac{3x+5}{x^2-4} \notin \mathbb{R}$.

2° *Expliquer la propriété :*

$$\overline{[\forall x \in E,\ \mathcal{P}(x) \Rightarrow \mathcal{Q}(x)]} \text{ a même signification que } [\exists x \in E,\ \mathcal{P}(x) \wedge \overline{\mathcal{Q}(x)}].$$

3° *Expliciter les propriétés ci-dessous. Sont-elles vraies? Écrire leur négation.*

a) $\forall x \in \mathbb{R},\ \ x \geqslant 0 \Rightarrow \dfrac{1}{x} \geqslant 0$; *b)* $\forall x \in \mathbb{N},\ \ \exists y \in \mathbb{N},\ \ x > y$;

c) $\exists x \in \mathbb{R},\ \ \forall y \in \mathbb{R},\ \ xy = 1$; *d)* $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*,\ \ \exists \eta \in \mathbb{R}_+^*,\ \ \forall x \in \mathbb{R},\ \ |x| < \eta \Rightarrow \left|\dfrac{1}{x}\right| < \varepsilon$.

Photo extraite du LAROUSSE XX^e siècle. Photothèque Hachette.

John NAPIER (connu en France sous le nom de NEPER), mathématicien écossais (1550-1617). Il contribua à la simplification des calculs trigonométriques par l'invention de réglettes chiffrées qui portent son nom et découvrit les logarithmes dits « népériens ». Les tables logarithmiques qu'il établit connurent un succès immédiat.

CHAPITRE 1

LOGARITHMES. FONCTIONS COMPOSÉES

I – ACTIVITÉS PRÉLIMINAIRES

★ Activité 1 : Étude de fonctions

Étudier et représenter graphiquement la fonction f. On s'attachera à réaliser cette étude avec méthode et précision, en rappelant les résultats obtenus en classe de Première.

a) $f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 1}{x^2 - x + 1}$;

b) $f(x) = x + \sqrt{3x(8 - x)}$.

★ Activité 2 : Fonctions composées. Dérivées et primitives

1° Déterminer la fonction dérivée de la fonction f, dans les cas suivants :

a) $f(x) = \cos(3x - 5)$;

b) $f(x) = (9x - 5)^{17}$.

2° Déterminer une fonction primitive de la fonction g, dans les cas suivants :

a) $g(x) = x^3$

b) $g(x) = \sin(2x + 4)$;

c) $g(x) = x^n \quad (n \neq -1)$;

d) $g(x) = \sqrt{x}$.

★ Activité 3 : Une équation fonctionnelle

Soit f une fonction numérique telle que, quels que soient les réels a et b de son ensemble de définition, on ait : $f(ab) = f(a) + f(b)$.
Supposons de plus que f est dérivable sur son ensemble de définition.

1° Prouver que si la fonction f n'est pas constante, alors elle n'est pas définie en zéro. Quelle est nécessairement la valeur de $f(1)$?

2° On suppose que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}_+^*$, l'un des deux intervalles disjoints constituant $\mathbb{R}^*$ (on pourrait aussi bien travailler sur $\mathbb{R}_-^*$).
Pour tout réel a strictement positif, on considère la fonction g définie par :

$$g(x) = f(ax).$$

a) *Calculer la fonction dérivée g', en fonction de a et de f'.*

b) *En utilisant la propriété de définition, écrire $g(x)$ sous une autre forme. En déduire une autre expression de $g'(x)$.*

a) *En égalant les deux expressions de $g'(x)$ obtenues ci-dessus, et en appliquant à $x = 1$, prouver qu'il existe un réel k tel que, pour tout réel a strictement positif :*

$$f'(a) = \frac{k}{a}.$$

II – LOGARITHMES

1. DÉFINITION

• Les astronomes ont été assez vite confrontés à des calculs d'une extrême complication. C'est pour alléger cette charge que peu à peu s'est fait jour l'idée de remplacer les multiplications par des additions. Les règles de calcul sur les exposants donnent en effet un exemple de tel phénomène. C'est ainsi que, pour calculer $a^n \times a^m$, il suffit de calculer $n + m$, et de se reporter à une éventuelle table des valeurs, pour déterminer a^{n+m}.

• On est donc conduit à étudier les fonctions numériques f telles que, pour tout couple (a, b) de leur ensemble de définition, on ait $f(ab) = f(a) + f(b)$.
Pour que l'utilisation et l'étude de ces fonctions soient facilitées, on se borne à envisager des fonctions dérivables sur leur ensemble de définition.
On a vu (Activité **3**) que, si une telle fonction est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, alors elle a pour dérivée une fonction de la forme : $f'(x) = \dfrac{k}{x}$.
Commençons donc par étudier les primitives sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $\left[x \mapsto \dfrac{1}{x}\right]$.

• La formule donnant les primitives d'une fonction puissance ne s'applique pas au cas de la fonction inverse. En effet, pour $n = -1$, l'expression $\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ n'a pas de sens.

• Or, on a admis, en classe de Première, qu'une fonction f continue sur un intervalle I admet sur I des primitives. De plus, on sait qu'une telle primitive est déterminée par sa valeur en un point de I.
La fonction $f : \left[x \mapsto \dfrac{1}{x}\right]$ est continue sur l'intervalle $I = \mathbb{R}_+^*$. Il existe donc une fonction F unique telle que, pour tout réel x strictement positif, on ait $F'(x) = \dfrac{1}{x}$, et $F(1) = 0$.
On démontre, et nous l'admettrons, que la fonction F ne peut s'exprimer à l'aide des fonctions déjà connues. On donne alors la définition suivante :

DÉFINITION 1	**La fonction *logarithme népérien* est l'unique primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction $\left[x \mapsto \dfrac{1}{x}\right]$, qui s'annule pour $x = 1$. On note cette fonction : ln.**

REMARQUE :

On rencontre encore la notation $\text{Log } x$ (avec un L majuscule) pour $\ln x$.

Premières propriétés

Il résulte de la définition que la fonction ln est définie, continue, dérivable et strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$.

On a : $\ln' x = \dfrac{1}{x}$ et $\ln 1 = 0$.

Donc, quel que soit le réel x strictement positif, si $x > 1$, alors $\ln x > 0$; si $0 < x < 1$, alors $\ln x < 0$.

REMARQUE :

Insistons sur le fait que la fonction ln n'est définie que sur $\mathbb{R}_+^*$.

2. PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES

Soit a un réel strictement positif. On considère la fonction g_a définie par :

$$g_a(x) = \ln ax.$$

Compte tenu des règles de dérivation rencontrées en classe de Première, on a :

$$g'_a(x) = a \ln' ax = \frac{a}{ax} = \frac{1}{x}.$$

Les fonctions g_a et ln ont donc la même dérivée sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$. Il en résulte qu'elles diffèrent d'une constante sur cet intervalle.

Il existe un réel C tel que, pour tout réel strictement positif x :

$$\ln ax = \ln x + C.$$

Pour $x = 1$, cette égalité s'écrit :

$$\ln a = \ln 1 + C.$$

Soit, puisque $\ln 1 = 0$:

$$\ln a = C.$$

Il en résulte le théorème suivant :

THÉORÈME 1	**Quels que soient les réels strictement positifs a et x, on a :** $\mathbf{\ln ax = \ln a + \ln x}$.

REMARQUE :

Il résulte du calcul ci-dessus que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \ln |x|$ est une primitive sur $\mathbb{R}^*$ de la fonction $\left[x \mapsto \frac{1}{x}\right]$.

3. MORPHISMES

La fonction ln transforme donc le produit de deux éléments de $\mathbb{R}_+^*$, en la somme de leurs transformés.

Plus généralement, considérons deux ensembles E et F, munis respectivement des opérations $*$ et $\circ$. Parmi les applications f de E vers F, certaines possèdent la propriété de transformer le composé de deux éléments de E en le composé dans F des transformés de ces éléments. C'est-à-dire que, pour deux éléments quelconques x et y de E, on a : $f(x * y) = f(x) \circ f(y)$. On dit alors :

DÉFINITION 2	**Soient E et F deux ensembles munis respectivement des opérations $*$ et $\circ$. Une application f de E vers F est un *morphisme* de la structure $(E, *)$ vers la structure $(F, \circ)$ si, et seulement si, quels que soient les éléments x et y de E, on a $f(x * y) = f(x) \circ f(y)$.**

Compte tenu de cette définition, la propriété rencontrée ci-dessus s'énonce :

THÉORÈME 2	**La fonction ln est un morphisme du groupe $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ vers le groupe $(\mathbb{R}, +)$.**

Exercices d'application

1. Prouver que l'application $x \mapsto 2x$ est un morphisme du groupe $(\mathbb{R}, +)$ vers lui-même.

2. Soit a un réel. On considère l'ensemble $A = \{a^n, n \in \mathbb{Z}\}$.

a) Prouver que $(A, \times)$ est un groupe.

b) Démontrer que l'application $[n \mapsto a^n]$ est un morphisme du groupe $(\mathbb{Z}, +)$ vers le groupe $(A, \times)$.

4. CONSÉQUENCES

Soit x un réel strictement positif.

- On a : $x \dfrac{1}{x} = 1$.

Il en résulte, d'après le théorème 1 : $\ln\left(x \dfrac{1}{x}\right) = \ln x + \ln \dfrac{1}{x} = \ln 1 = 0$.

Par suite : $\ln \dfrac{1}{x} = -\ln x$.

- On a : $\ln x^2 = \ln(xx) = \ln x + \ln x = 2 \ln x$.

D'autre part, si l'on suppose que, pour un entier naturel n : $\ln x^n = n \ln x$, on a alors :

$$\begin{aligned}\ln x^{n+1} = \ln(x^n x) &= \ln x^n + \ln x,\\ &= n \ln x + \ln x,\\ &= (n+1) \ln x.\end{aligned}$$

Il en résulte, en vertu du principe de démonstration par récurrence, que, pour tout entier naturel n : $\ln x^n = n \ln x$.

- Pour tout entier négatif m, on a :

$$x^m = \frac{1}{x^{-m}}$$

$$\ln x^m = -\ln x^{-m}$$

L'entier $-m$ étant positif, on peut appliquer le résultat ci-dessus, et l'on a :

$$\ln x^m = -(-m) \ln x = m \ln x.$$

- On a : $x = (\sqrt{x})^2$.

Par suite, $\ln x = 2 \ln \sqrt{x}$, et : $\ln \sqrt{x} = \dfrac{1}{2} \ln x$.

Cette propriété, par comparaison avec les propriétés précédentes, permet de justifier la notation : $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$.

THÉORÈME 3

Pour tout réel x strictement positif, et pour tout entier relatif n, on a :

$$\ln x^n = n \ln x.$$

On a également :

$$\ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln x.$$

- Il résulte des propriétés ci-dessus que, quels que soient les réels strictement positifs a et b, on a :

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a + \ln \frac{1}{b} = \ln a - \ln b.$$

THÉORÈME 4	**Quels que soient les réels strictement positifs a et b :** $$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b.$$

Exercice d'application

3. Résoudre les équations définies sur $\mathbb{R}$ par :
(On admettra que $\ln a = \ln b$ si, et seulement si, $a = b$.)

a) $\ln(x+3) + \ln(x+2) = \ln(x+11)$;

b) $\ln(x^2+5x+6) = \ln(x+11)$;

c) $\ln(-x-2) = \ln\left(\dfrac{-x-11}{x+3}\right)$;

d) $\ln(x+2) = \ln(-x-11) - \ln(x+3)$.

5. VARIATION ET REPRÉSENTATION GRAPHIQUE

On sait que la fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, et que $\ln 1 = 0$. Pour préciser le comportement de la fonction ln, et en particulier étudier les limites en $+\infty$ et en 0, le comportement à l'infini et au voisinage de certains points particuliers, nous allons comparer la fonction ln avec des fonctions dont le comportement est connu.

★ Activité

A — Comportement au voisinage de $x_0 = 1$

*1° **a)** Écrire l'équation de la tangente Δ à la courbe représentative Γ de la fonction* ln, *au point A d'abscisse* 1.

***b)** Étudier les variations de la fonction φ définie par* $\varphi(x) = x - 1 - \ln x$.

***c)** En déduire que, pour tout réel strictement positif x :* $x - 1 \geqslant \ln x$ *(voir figure 1).*

*2° **a)** Déterminer les réels a et b tels que la courbe représentative H de la fonction h définie par* $h(x) = a + \dfrac{b}{x}$ *passe par A et soit tangente à Δ en A.*

***b)** Étudier la variation de la fonction α définie par :* $\alpha(x) = 1 - \dfrac{1}{x} - \ln x$.

***c)** En déduire le signe de α, et la position respective des courbes Γ et H (figure 1).*

***d)** Montrer que Γ et H admettent la même tangente en A.*

3° En utilisant l'encadrement obtenu ci-dessus, encadrer $\ln x$ *pour :*

$$x \in \{0{,}8 \ ; \ 0{,}9 \ ; \ 0{,}97 \ ; \ 1{,}01 \ ; \ 1{,}17\}.$$

B — Limites

*1° **a)** Déduire de ce qui précède que* $\ln 2$ *est compris entre* $\dfrac{1}{2}$ *et* 1.

***b)** En déduire que, pour tout entier n naturel non nul :* $\dfrac{n}{2} < \ln 2^n < n$.

***c)** En déduire que la suite* $(\ln 2^n)$ *diverge vers* $+\infty$.

***d)** Soit B un réel strictement positif. Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que, si* $x > 2^{n_0}$, *alors* $\ln x > B$.

***e)** En déduire la limite de* ln *en* $+\infty$.

2° Déduire de ce qui précède, et de la propriété $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$, *la limite en* 0 *de la fonction* ln.

THÉORÈME 5	$\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty \quad ; \quad \lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty.$

C — Comportement asymptotique.

1° Soit g la fonction définie par $g(x) = \sqrt{x-1}$.

a) *Étudier la variation de la fonction* $[x \mapsto \ln x - \sqrt{x-1}]$.
b) *En déduire la position respective de la courbe représentative* Γ *de la fonction* ln, *et de la courbe représentative P de la fonction g.*

2° **a)** *Déduire de ce qui précède la limite en* $+\infty$ *de la fonction* $h = \left[x \mapsto \frac{\ln x}{x}\right]$.

b) *Interpréter* $\frac{\ln x}{x}$ *comme le coefficient directeur d'une certaine droite.*

c) *Interpréter géométriquement le résultat concernant la limite en* $+\infty$ *de la fonction h.*

THÉORÈME 6	$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$

D — Courbe représentative

1° **a)** *En utilisant une calculatrice, préciser une valeur approchée du nombre réel* e *tel que :* ln e = 1.
b) *Prouver que la tangente à* Γ *au point de coordonnées* (e, 1) *contient l'origine O du repère.*

2° Préciser une valeur approchée à 10^{-3} *près de* ln 2, *et de* ln 3.

On rencontrera dans les chapitres ultérieurs des méthodes permettant de déterminer de telles valeurs approchées. La courbe Γ est représentée sur la figure 1.

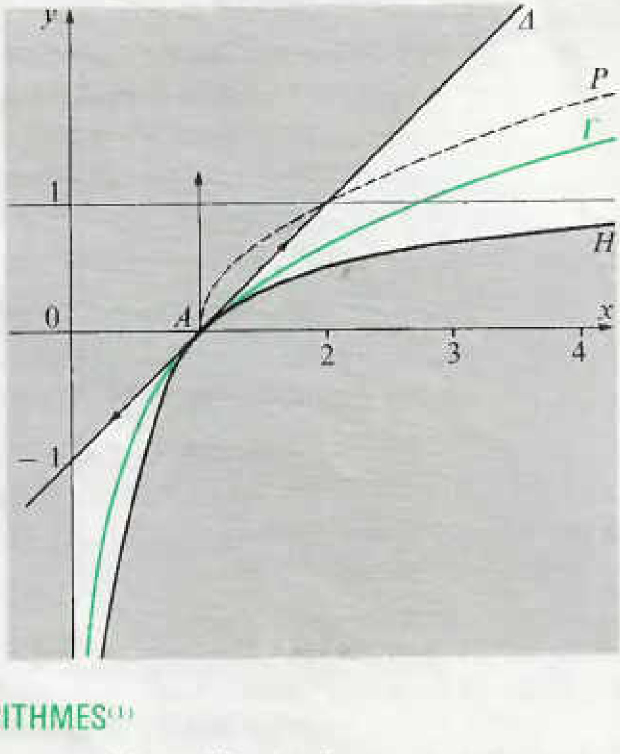


Figure 1 ▸

6. AUTRES FONCTIONS LOGARITHMES[1]

• La fonction logarithme népérien est un morphisme dérivable du groupe $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ vers le groupe $(\mathbb{R}, +)$. Réciproquement (voir Activité préliminaire 3), si f est un tel morphisme, alors, il existe un réel k tel que, pour tout réel x strictement positif :

$$f'(x) = \frac{k}{x}.$$

[1] Seule la fonction logarithme décimal figure explicitement au programme.

La fonction ln correspondant à $k = 1$, il en résulte qu'alors :

$$f(x) = k \ln x.$$

• Pour préciser chaque fonction f, et par raison de commodité, on donne la définition suivante :

DÉFINITION 3	**Pour tout réel a de $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, on appelle *fonction logarithme de base a*, et on note $\log_a$ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :** $$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}.$$

La fonction $\log_a$ est un morphisme de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ vers $(\mathbb{R}, +)$, et :

$$\log_a' x = \frac{1}{x \ln a}; \qquad \log_a a = 1.$$

On a donc, pour tout entier relatif n : $\log_a a^n = n$.
Le fait que la numération usuelle soit à base 10 conduit à privilégier la fonction logarithme à base 10, encore appelée « logarithme vulgaire ».
On note : $\log_{10} x = \lg x$ (ou parfois $\log_{10} x = \log x$, avec un l minuscule).

REMARQUES :

1° On note e le réel tel que $\ln e = 1$. Il en résulte que la fonction ln peut être considérée comme la fonction logarithme à base e :
Pour tout réel strictement positif x : $\ln x = \log_e x$.

Ce nombre e est très important en analyse.

2° Des définitions ci-dessus, il résulte que, quels que soient les réels strictement positifs a et b différents de 1, et pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$:

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a} = \frac{\ln x}{\ln b} \cdot \frac{\ln b}{\ln a};$$

$$\log_a x = \log_a b \cdot \log_b x.$$

• Exercice d'application

4. Résoudre l'équation définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\log_3 x \cdot \log_9 x = 2.$$

III – FONCTIONS COMPOSÉES

1. ACTIVITÉ PRÉLIMINAIRE

★ Activité

1° Soit f et g les fonctions définies par :

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-1} \quad ; \quad g(x) = \frac{x+1}{x-2}.$$

a) *Préciser les ensembles de définition de f et g.*

b) *Pour tout x, déterminer $f \circ g(x)$ et $g \circ f(x)$. Quels sont les ensembles de définition de $f \circ g$ et de $g \circ f$?*

2° *On considère les fonctions f et g définies par :*

$$f(x) = \frac{2x+1}{x-1}; \qquad g(x) = 2x^2 + 3x + 1.$$

Déterminer les fonctions $f \circ g$ et $g \circ f$. Préciser leurs ensembles de définition, et leurs fonctions dérivées.

3° *Déterminer les fonctions dérivées des fonctions définies ci-dessous :*

a) $f(x) = \cos(3x - 7)$; ***b)*** $g(x) = (2x+5)^8$;

c) $h(x) = \cos 2x \sin 3x$.

2. ENSEMBLE DE DÉFINITION

• Soit u et v des fonctions numériques. La fonction $u \circ v$ est définie par $u \circ v(x) = u(v(x))$.

Soit $\mathcal{D}_u$ et $\mathcal{D}_v$ les ensembles de définition respectifs de u et v. La fonction $u \circ v$ est définie pour tout x de $\mathcal{D}_v$ tel que $v(x)$ soit élément de $\mathcal{D}_u$.

REMARQUE :

1° Si l'on note $\bar{v}^{1}\langle A \rangle = \{x, v(x) \in A\}$, on a $\mathcal{D}_{u \circ v} = \mathcal{D}_v \cap \bar{v}^{1}\langle \mathcal{D}_u \rangle$.

2° En général, les fonctions $u \circ v$ et $v \circ u$ sont différentes.

3° La définition de la fonction $u \circ v$ est illustrée par le schéma ci-contre :

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{R} \arrow[dr, "v"] & \\ \mathbb{R} \arrow[ur, "u"] \arrow[rr, "v \circ u"'] & & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Exemple :

Soit $u(x) = \ln x$ et $v(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$. La fonction $u \circ v$ est définie par $u \circ v(x) = \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$.

Un réel x est élément de $\mathcal{D}_{u \circ v}$ si, et seulement si : $\begin{cases} x - 1 \neq 0 \\ \dfrac{x+1}{x-1} > 0 \end{cases}$

C'est-à-dire :

$$\mathcal{D}_{u \circ v} =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[.$$

La fonction $v \circ u$ est définie par :

$$v \circ u(x) = \frac{\ln x + 1}{\ln x - 1}.$$

Un réel x est élément de $\mathcal{D}_{v \circ u}$ si et seulement si $\begin{cases} x \in \mathbb{R}_+^* \\ \ln x \neq 1 \end{cases}$.

On note e l'unique réel tel que $\ln e = 1$. On a donc :

$$\mathcal{D}_{v \circ u} = \mathbb{R}_+^* \setminus \{e\}.$$

• Exercice d'application

5. Déterminer les ensembles de définition de $u \circ v$ et $v \circ u$, dans les cas suivants :

a) $u(x) = \dfrac{1}{x}$, $v(x) = \ln(\sqrt{x} - 1)$;

b) $u(x) = \sqrt{x}$, $v(x) = \ln x$;

c) $u(x) = \dfrac{2x^2 - x - 1}{x}$, $v(x) = \ln x$.

3. DÉRIVÉE

Si on reprend l'exemple ci-dessus, on constate que :

$$(v \circ u)'(x) = \frac{\frac{1}{x}(\ln x - 1) - \frac{1}{x}(\ln x + 1)}{(\ln x - 1)^2} = \frac{-2}{x(\ln x - 1)^2} = \frac{1}{x} v'(\ln x).$$

Mais le calcul de $(u \circ v)'(x)$ n'est pas aussi simple. On peut se demander s'il existe une règle générale concernant la dérivation des fonctions composées.

Soit v une fonction dérivable en un point x_0 de son ensemble de définition. Le développement limité d'ordre 1 de v en x_0 s'écrit :

$$v(x_0 + h) = v(x_0) + hv'(x_0) + h\varepsilon(h), \quad \text{avec} \quad \lim_0 \varepsilon = 0 \quad (\text{et} \quad \varepsilon(0) = 0).$$

• Soit u une fonction dérivable en un point y_0 de son ensemble de définition. Le développement limité d'ordre 1 de u en y_0 s'écrit :

$$u(y_0 + k) = u(y_0) + ku'(y_0) + k\varepsilon_1(k), \quad \text{avec} \quad \lim_0 \varepsilon_1 = 0 \quad (\text{et} \quad \varepsilon_1(0) = 0).$$

Si $y = v(x)$ et $y_0 = v(x_0)$, on obtient :

$$u(v(x)) = u(v(x_0) + k), \quad \text{avec} \quad k = hv'(x_0) + h\varepsilon(h).$$

Soit : $u(v(x)) = u(v(x_0)) + (hv'(x_0) + h\varepsilon(h))u'(v(x_0)) + k\varepsilon_1(k)$.

C'est-à-dire : $u(v(x)) = u(v(x_0)) + hv'(x_0)u'(v(x_0)) + h\varepsilon_2(h)$;

avec : $\varepsilon_2(h) = u'(v(x_0))\varepsilon(h) + (v'(x_0) + \varepsilon(h))\varepsilon_1(hv'(x_0) + h\varepsilon(h))$.

La fonction ε_1 étant continue en zéro, la propriété $\lim_0 \varepsilon = 0$, permet de conclure que : $\lim_0 \varepsilon_2 = 0$. On a en outre $\varepsilon_2(0) = 0$.

Il en résulte que la fonction $u \circ v$ admet un développement limité d'ordre 1 en x_0, et par conséquent qu'elle est dérivable en x_0.

THÉORÈME 7

Soit u et v des fonctions numériques. La fonction $u \circ v$ est dérivable pour tout x tel que v soit dérivable en x et u dérivable en $v(x)$. Dans ces conditions, on a :

$$(u \circ v)'(x) = v'(x) \,.\, (u' \circ v)(x).$$

REMARQUES :

1° Insistons sur le caractère asymétrique de la formule ci-dessus. Les fonctions u et v interviennent différemment. On peut rétablir une certaine symétrie, en constatant que le nombre dérivé de $u \circ v$ en x est le produit du nombre dérivé de v en x et du nombre dérivé de u en $v(x)$.

2° On note souvent : $\frac{df}{dx} = f'(x)$. Avec ces notations (dont il faut souligner le caractère parfois abusif), on a :

$$\frac{d(u \circ v)}{dx} = \frac{d(u \circ v)}{dv} \cdot \frac{dv}{dx} = u' \circ v \,.\, v'.$$

On retrouve ainsi formellement la formule du théorème 7.

Exemples :

1° Soit $f(x) = \sqrt{\ln x}$.

La fonction f est définie sur $[1, +\infty[$. Pour tout x de $]1, +\infty[$, on a :

$$\frac{df(x)}{dx} = \frac{1}{x} \times \frac{1}{2\sqrt{\ln x}} = \frac{1}{2x\sqrt{\ln x}}.$$

2° Soit $g(x) = \ln(2 - \cos x)$.

La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$. Pour tout réel x, on a :

$$\frac{\mathrm{d}g(x)}{\mathrm{d}x} = \sin x \cdot \frac{1}{2 - \cos x} = \frac{\sin x}{2 - \cos x}.$$

Exercice d'application

6. Déterminer la fonction dérivée de f, et préciser son ensemble de définition, dans les cas suivants :

a) $f(x) = \cos(\ln x)$;

b) $f(x) = \log_2(\sin x + 2)$;

c) $f(x) = (\ln x)^3$;

d) $f(x) = \sin\left(\ln \dfrac{2x^4 + 3x^2 + 2}{x^2 + 1}\right)$.

Cas particuliers

En vertu du résultat ci-dessus :

• Si $g(x) = f(ax + b)$, alors : $g'(x) = af'(ax + b)$.
On retrouve ainsi un résultat déjà rencontré en classe de Première.

• Si $h(x) = (u(x))^n$, alors : $h'(x) = nu'(x)(u(x))^{n-1}$.
(Ce résultat est valable pour tout entier relatif n.)

• Si $k(x) = \sqrt{u(x)}$, alors : $k'(x) = \dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$.

$\left(\text{Remarquons que ce résultat est un cas particulier du résultat ci-dessus, pour } n = \dfrac{1}{2}.\right)$

• Si $f(x) = \ln u(x)$, alors : $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

On dit parfois que la fonction $\dfrac{u'}{u}$ est la **dérivée logarithmique** de la fonction u.

Exercice d'application

7. On considère deux fonctions u et v, à valeurs positives sur un intervalle I.

a) Déterminer la dérivée logarithmique de la fonction $f = uv$.

b) En déduire que, pour tout élément x de I : $\ln f(x) = \ln u(x) + \ln v(x)$.

c) Retrouver ainsi la propriété fondamentale du logarithme.

4. APPLICATION A LA RECHERCHE DE PRIMITIVES

Il est important de savoir reconnaître, et éventuellement introduire, des dérivées de fonctions composées (et particulièrement celles qui font l'objet des cas particuliers ci-dessus), lorsqu'on cherche des primitives.

Exercices résolus

1 — *Déterminer une primitive de la fonction f définie par :* $f(x) = \dfrac{4x + 2}{x^2 + x + 1}$.

Si on pose $u(x) = x^2 + x + 1$, on a $u'(x) = 2x + 1$.

Il en résulte que : $f(x) = \dfrac{2u'(x)}{u(x)}$.

Par suite, la fonction f admet pour primitive la fonction F définie par :

$$F(x) = 2 \ln |u(x)| = 2 \ln |x^2 + x + 1|.$$

II — *Déterminer une primitive de la fonction f définie par :* $f(x) = \dfrac{x}{(x+1)^2}$.

Si on pose $u(x) = x^2 + 2x + 1$, on a $u'(x) = 2x + 2$.
De même, avec : $v(x) = (x+1)$, on a $v'(x) = 1$.

Or :
$$f(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}.$$

Il en résulte que : $f(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{u'(x)}{u(x)} - \dfrac{v'(x)}{(v(x))^2} = \dfrac{1}{2}\dfrac{u'(x)}{u(x)} - v'(x)(v(x))^{-2}$.

Or, une primitive de la fonction $\dfrac{u'}{u}$ est la fonction $\ln |u|$.

De même, une primitive de la fonction $v'v^n$ est la fonction $\dfrac{v^{n+1}}{n+1}$, si $n \neq -1$.
Il en résulte que la fonction f admet pour primitive la fonction F définie par :

$$F(x) = \frac{1}{2}\ln (x+1)^2 - \frac{(x+1)^{-1}}{-1}.$$

$$F(x) = \ln |x+1| + \frac{1}{x+1}.$$

On aurait pu également remarquer que :

$$f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2}.$$

• Exercice d'application

8. Déterminer une primitive de la fonction f, dans les cas suivants :

a) $f(x) = \dfrac{4}{2x+1}$;

b) $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$;

c) $f(x) = \dfrac{1}{x \ln x}$;

d) $f(x) = \tan x$;

e) $f(x) = \dfrac{\cos (\ln x)}{x}$;

f) $f(x) = \dfrac{3x+1}{x^2-1}$.

REMARQUE :

Pour tout réel x tel que $u(x) \neq 0$, une primitive de $\dfrac{u'}{u}$ est $\ln |u|$. Il est important de noter qu'en général, cette fonction n'est pas définie sur un intervalle. L'ensemble des primitives de $\dfrac{u'}{u}$ n'est donc pas, en général l'ensemble des fonctions φ telles que $\varphi(x) = \ln |u(x)| + C$.
Par exemple, la fonction f définie par $f(x) = \ln |x| + \dfrac{|x|}{x}$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} f(x) = \ln |x| + 1 & \text{si } x \text{ est élément de } \mathbb{R}_+^* \\ f(x) = \ln |x| - 1 & \text{si } x \text{ est élément de } \mathbb{R}_-^* \end{cases}$$

est une primitive sur $\mathbb{R}^*$ de la fonction $\left[x \mapsto \dfrac{1}{x}\right]$. Mais cette primitive n'est pas de la forme $[x \mapsto \ln |x| + C]$. Elle est de cette forme sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}^*$.

EXERCICES ET PROBLÈMES

ÉQUATIONS ET SYSTÈMES

*Dans les exercices **1** à **6**, on demande de résoudre les équations définies dans $\mathbb{R}$ par :*

1. $\ln(x+3) + \ln(x+5) = \ln 15.$

2. $\ln(x-2) + \ln(x+2) = \ln 45.$

3. $\ln(x-3) + \ln(x+1) = \ln(x^2+5).$

4. $2\ln(x-4) = \ln x - 2\ln 2.$

5. $\frac{1}{2}\ln(3x-1) + \frac{1}{2}\ln(8x-2) = \ln(4x-1).$

6. $2\ln(2x-1) - \ln(3x-2x^2) = \ln(4x-3) - \ln x.$

*Dans les exercices **7** et **8**, on demande de résoudre les systèmes définis dans $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ par :*

7. $\begin{cases} x + y = 65 \\ \ln x + \ln y = \ln 1\,000. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 169 \\ \ln x + \ln y = \ln 60 \end{cases}$

9. Calculer y sachant que :
$\ln y = \ln(7 + 5\sqrt{2}) + 8\ln(\sqrt{2}+1) + 7\ln(\sqrt{2}-1).$

10. Démontrer l'égalité :

$$\frac{7}{16}\ln(3 + 2\sqrt{2}) - 4\ln(\sqrt{2}+1) = \frac{25}{8}\ln(\sqrt{2}-1).$$

11. Prouver que, quels que soient les réels distincts a et b, strictement positifs :

$$\ln(a+b) > e + \frac{1}{2}(\ln a + \ln b).$$

LOGARITHME DE BASE *a* (THÈME)

12. *a*) Démontrer que, pour tout réel strictement positif a différent de 1, on a :

pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$, $\log_a x \times \log_{a^2} x = \frac{1}{2}(\log_a x)^2.$

b) Résoudre l'équation définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\log_3 x \log_3 x = 2.$$

13. Démontrer que, quels que soient les réels a et b de $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$:

$\log_a b = \log_{a^n} b^n$ (pour tout n de $\mathbb{N}$).

14. Prouver que, pour tout réel x de $\mathbb{R}_+^*$:

$$\log_2 x + \log_{\sqrt{2}} x + \log_{\frac{1}{2}} x = 2.$$

15. Démontrer que, pour tout triplet (a, b, c) d'éléments de $\mathbb{R}_+^*$:

$$\log_a b \cdot \log_b c \cdot \log_c a = 1.$$

Généraliser à plus de trois nombres.

16. Soit (a, b, c) un triplet d'éléments de $\mathbb{R}_+^*$. Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \log_a x \cdot \log_b x + \log_b x \cdot \log_c x + \log_c x \cdot \log_a x.$$

1° Exprimer f à l'aide de la fonction ln.

2° Prouver que $f(x) = \dfrac{\log_a x \cdot \log_b x \cdot \log_c x}{\log_{abc} x}.$

*Dans les exercices **17** à **19**, on demande de résoudre les systèmes définis dans $\mathbb{R}^2$ par :*

17. $\begin{cases} 4(\log_x y + \log_y x) = 17 \\ xy = 243 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 7(\log_y x + \log_x y) = 50 \\ xy = 256 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 2\log_x y + 2\log_y x = -5 \\ xy = e \end{cases}$

*Dans les exercices **20** à **23**, on demande de résoudre les inéquations définies dans $\mathbb{R}$ par :*

20. $\log_a x > \log_{a^2}(3x-2).$

21. $\dfrac{6}{2x+1} > \dfrac{1 + \log_2(2+x)}{x}.$

22. $\log_x \dfrac{1}{4} + \log_4\left(\dfrac{1}{x}\right) \leqslant -2.$

23. $\log_9(x+2) - \log_3 x < 0.$

*Dans les exercices **24** à **29**, on demande de démontrer que :*

24. $\dfrac{1}{\log_{17} 34 - \log_{34} 68} > 20.$

25. $\dfrac{1}{\log_{\sqrt{2}} \pi} + \dfrac{1}{\log_{\sqrt{5}} \pi} > 1.$

26. $\dfrac{1}{\log_2 \pi} + \dfrac{1}{\log_5 \pi} > 2.$

27. $\log_2 6 > \left(\dfrac{5}{4}\right)^4.$

28. $\log_2 7 > \left(\dfrac{6}{5}\right)^4.$

29. $\log_{xy} z + \log_{yz} x + \log_{zx} y \geqslant \dfrac{3}{2}.$

30. Soit $\log_{40} 100 = a$. Calculer $\log_{16} 25$ en fonction de a.

LIMITES. DÉRIVÉES. PRIMITIVES

31. Déterminer la limite en $+\infty$ des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \ln x - x;$

b) $g(x) = (\ln x)^2 - \sqrt{x};$

c) $h(x) = \dfrac{\ln x + 1}{\ln x}.$

32. Déterminer la limite en 0 des fonctions suivantes :

a) $f(x) = \sqrt{x}\,(\ln x)^3$;

b) $g(x) = \sqrt[5]{x}\,(\ln x)^8$.

*Dans les exercices **33** à **36**, on demande de calculer la dérivée de la fonction f.*

33. $f(x) = \ln\left|\tan\dfrac{x}{2}\right|$.

34. $f(x) = \ln|\cos ax + b|$.

35. $f(x) = \ln|\ln x|$.

36. $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

*Dans les exercices **37** à **42**, on demande de déterminer les primitives de la fonction f, sur un intervalle que l'on précisera.*

37. $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$.

38. $f(x) = \dfrac{3\sin x}{1 + \cos^2\dfrac{x}{2}}$.

39. $f(x) = \dfrac{1}{\sin 2x}$.

40. $f(x) = \dfrac{1 + \cos^2 x}{1 + \cos 2x}$.

41. $f(x) = \dfrac{\cos 2x}{\sin^2 x \cos^2 x}$.

42. $f(x) = \tan^2 x$.

SUITES

43. *1°* Étudier les fonctions :

$$u = \left[x \mapsto \ln x - \frac{x-1}{x}\right]; \quad v = [x \mapsto x - 1 - \ln x].$$

En déduire que :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad x > 1 \Rightarrow \frac{x-1}{x} < \ln x < x - 1.$$

2° Appliquer l'inégalité trouvée au nombre e, puis au nombre $\sqrt{e}$.

3° Appliquer l'inégalité au nombre $\sqrt[n]{e}$. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\},\quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \frac{1}{\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n}.$$

44. A — *1°* Étudier la variation de la fonction f définie par :

$$f(x) = x - \ln(1 + x).$$

2° En déduire que, pour tout entier naturel k :

$$\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k < e < 3.$$

B — *1°* Prouver que, pour tout entier naturel k :

$$k! > \left(\frac{k+1}{3}\right)^k.$$

2° En déduire que si n est un entier supérieur à 3 :

$$(k+1)! > n\left(\frac{k+1}{n}\right)^{k+1}.$$

3° Prouver que, pour tout entier naturel supérieur à 3 :

$$(n!)! > n[(n-1)!]^n.$$

45. Soient a et b deux réels de $\mathbb{R}_+^*$.

1° Prouver que, pour tout entier n non nul :

$$(a + b)^n > a^n + na^{n-1}b.$$

2° En déduire que :

a) $(n + 1)^n > 2n^n$.

b) $(n + 1)^{10n} > 1\,000\, n^{10n}$.

3° Prouver que : $\ln(n + 1) > \dfrac{3}{10n} + \ln n$.

4° Prouver que : $\ln n! > \dfrac{3n}{10}\left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dots + \dfrac{1}{n}\right)$.

46. Calculer : $a_n = \displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$.

En déduire la limite de (a_n) en $+\infty$.

47. Calculer : $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 - \tan^2\frac{a}{2^k}\right)$ (avec $0 < a < \pi$).

En déduire la limite de (u_n) en $+\infty$.

48. Même exercice qu'à l'exercice **47**, avec :

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \tan^2\frac{a}{2^k}\right).$$

FONCTIONS

49. A l'aide de transformations géométriques simples, déduire de la courbe représentative de la fonction ln, les courbes représentatives des fonctions :

a) $\left[x \mapsto \dfrac{1}{2}\ln(x + 1)\right]$;

b) $\left[x \mapsto 2\ln\left(\dfrac{x+3}{2}\right)\right]$.

50. Étudier les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + kx)}{x}$;

b) $\displaystyle\lim_{x \to e} \frac{\ln x - 1}{x - e}$;

c) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\ln(a + x) - \ln a}{x}$.

51. En étudiant la variation de la fonction f définie par : $f(x) = \ln(1 + x) - x + \dfrac{x^2}{2}$, prouver que :

- pour $x \geqslant 0$, alors $\ln(1 + x) \geqslant x - \dfrac{x^2}{2}$;
- pour $-1 < x < 0$, alors $\ln\dfrac{1}{1 + x} > -x + \dfrac{x^2}{2}$.

52. Soit a et b deux réels tels que $0 < a < b$.
Soit la fonction f telle que :

$$f(x) = \frac{\ln(ax+1)}{\ln(bx+1)}.$$

1° Pour quelles valeurs de x, f est-elle définie?
2° Calculer $f'(x)$.
3° On pose :

$$g(x) = a(bx+1)\ln(bx+1) - b(ax+1)\ln(ax+1).$$

Calculer $g'(x)$, et en déduire que f est strictement croissante.
4° Démontrer que : $\ln\left(\frac{a}{b}+1\right)\ln\left(\frac{b}{a}+1\right) < (\ln 2)^2$.

53. Soit $f(x) = \dfrac{\ln x}{1+x}$.
1° Construire la courbe C représentative de f dans un repère orthonormal.
2° Déterminer l'intersection de C avec l'axe des abscisses, et la tangente à C en ce point.
3° On considère la fonction g définie par :

$$g(x) = \frac{\ln x}{1+x}\cos^2 x,$$

dont la courbe représentative est notée Γ. Préciser les points de Γ où Γ et C sont tangents, puis les points de Γ où Γ est tangente à l'axe des abscisses.

54. Étudier les variations et construire dans un repère orthonormé la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = \ln|\ln x|$.
Préciser les tangentes aux points d'intersection avec l'axe des abscisses, ainsi qu'aux points d'inflexion.

55. Étudier les variations de la fonction f_α définie par : $f_\alpha(x) = x^\alpha \ln x$ (ou α désigne un réel strictement supérieur à 1). Tracer la courbe représentative pour $\alpha = \frac{3}{2}$, $\alpha = 2$, $\alpha = 3$.

56. *1°* Étudier la variation de la fonction numérique f définie par :

$$f(x) = n\sqrt[n]{x} - e\ln x \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

2° Tracer les courbes représentatives C et Γ des fonctions g et h définies par :

$$g(x) = n\sqrt[n]{x} \quad \text{et} \quad h(x) = e\ln x.$$

Prouver que C et Γ ont un point commun A et même tangente en ce point.
3° Démontrer que, pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$: $\ln x \leqslant \dfrac{n\sqrt[n]{x}}{e}$.
En déduire la limite en $+\infty$ de $\dfrac{\ln x}{x}$.

57. On se propose de déterminer s'il existe des polynômes A et B tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln x = \frac{A(x)}{B(x)}.$$

1° On suppose que de tels polynômes existent. Démontrer que l'on aurait alors :

$$\frac{B^2(x)}{x} = B(x)A'(x) - A(x)B'(x).$$

En déduire que B^2 contiendrait nécessairement x en facteur.
2° En étudiant les polynômes B de la forme $B(x) = x^n C(x)$, $n \in \mathbb{N}$, où C est un polynôme tel que $C(0) \neq 0$, démontrer que la condition obtenue au *1°* implique une contradiction. (*On distinguera deux cas : $n = 1$ et $n > 1$.*)
3° Déduire de ces résultats que la fonction ln n'est pas une fonction rationnelle.
4° Retrouver ce résultat en faisant tendre x vers $+\infty$.

58. Soit a un réel plus grand que 1. On pose $k = \ln a$. On considère dans un repère orthonormal les deux courbes : $C_1 : y = \ln x$, $C_k : y = \log_a x$.
On désigne par A le point de (Ox) d'abscisse 1.
1° Déterminer par ses coordonnées, en fonction de k, le point B_k de la courbe C_k où la tangente à C_k est parallèle à la droite d'équation $y = x$.
2° Pour k différent de 1, la droite (AB_k) coupe l'axe $(O'y)$ en S_k; la tangente en A à C_1 coupe $(O'y)$ en S_1.
Calculer l'ordonnée y_k de S_k en fonction du nombre réel positif k. Étudier les variations de y_k en fonction de k.
Démontrer que, si l'on pose $y'_k = -y_k$, l'application $[k \mapsto y'_k]$ détermine une bijection de $]0, +\infty[$ sur lui-même.
3° *a)* Démontrer que C_k est transformée de C_1 par une homothétie dont on déterminera le centre et le rapport en fonction de k.
En déduire que, pour k et k' positifs, C_k et $C_{k'}$ se correspondent dans une homothétie que l'on déterminera.
b) Démontrer qu'il existe un cercle Γ_1, et un seul, centré sur (Oy), tangent à C_1 en D_1, dont le rayon est égal à $d(A, D_1)$. En déduire le nombre des cercles Γ centrés sur (Oy), de rayon R donné, tels qu'il existe une courbe C_k tangente à Γ en un point D_k tel que $R = d(B_k, D_k)$.
4° *a)* Soit k un réel strictement positif différent de 1. Démontrer que C_1 et C_k admettent une tangente commune T_k, les points de contact de T_k avec C_1 et C_k étant respectivement P_k et Q_k. Former, en fonction de k, les expressions des coordonnées de P_k et Q_k et l'équation de T_k. Trouver la limite de l'abscisse de Q_k lorsque k tend vers zéro.
b) Soit k et k' deux réels positifs, différents de 1. Démontrer que, si $kk' = 1$, T_k et $T_{k'}$ se coupent sur $(O'x)$.

CHAPITRE 2

FONCTIONS CONTINUES SUR UN INTERVALLE EXPONENTIELLES

I – ACTIVITÉS PRÉLIMINAIRES

★ Activité 1 : Images d'intervalles

Soit f une fonction numérique, et A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. On note $f\langle A\rangle$ l'ensemble des images par f des éléments de A :

$$f\langle A\rangle = \{f(x),\ x \in A\}.$$

Déterminer $f\langle A\rangle$ dans les cas suivants et illustrer graphiquement :

1° $f(x) = 5x - 2$,

a) $A = [-3, 5[$; **b)** $A = [2, +\infty[$.

2° $f(x) = x^2$,

a) $A =]-1, 2[$; **b)** $A =]-3, -1] \cup [2, 4[$.

3° $f(x) = \sqrt{x}$,

a) $A = [1, 4]$; **b)** $A = \mathbb{R}_+^*$.

4° $f(x) = E(x)$ (*E désigne la fonction partie entière*),

a) $A = [-5, 3]$; **b)** $A =]2, 3[$.

5° $f(x) = \dfrac{1}{x}$ *pour x non nul, et* $f(0) = 0$,

a) $A = [-1, 1]$; **b)** $A = [1, +\infty[$.

6° $f(x) = x - E(x)$,

a) $A = \left[\dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{3}\right]$; **b)** $A = \mathbb{R}$.

7° $f(x) = \tan x$,

a) $A = \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$; **b)** $A = \left]0, \dfrac{\pi}{3}\right]$.

★ Activité 2 : Fonctions réciproques

On considère la fonction numérique f. Déterminer la fonction φ telle que, sur un ensemble que l'on déterminera, $f(\varphi(x)) = x$. Représenter ensuite les fonctions f et φ dans un même repère orthonormal. Étudier la fonction $\varphi \circ f$.

a) $f(x) = 2x + 5$;

b) $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$;

c) $f(x) = x^2 - 1$, *pour* $x \in \mathbb{R}_+$.

II – FONCTIONS CONTINUES SUR UN INTERVALLE

1. PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

Une fonction numérique f est dite continue sur un intervalle I si elle est continue en tout point x_0 de I.

On démontre, et nous admettrons, le théorème fondamental suivant :

THÉORÈME 1 — **Si f est une fonction définie et continue sur un intervalle I, alors l'image $f\langle I \rangle$ de l'intervalle I par la fonction f est un intervalle.**

REMARQUES :

1° Une fonction f est continue sur un intervalle I si, et seulement si, elle n'est discontinue pour aucun point x_0 de I.

2° Un sous-ensemble E de $\mathbb{R}$ est dit non connexe s'il existe un réel x_0 tel que :

$]-\infty, x_0[\cap E \neq \varnothing$;
$]x_0, +\infty[\cap E \neq \varnothing$;
$E \supset]-\infty, x_0[\cup]x_0, +\infty[$.

Les intervalles de $\mathbb{R}$ sont (nous l'admettrons) les sous-ensembles connexes de $\mathbb{R}$.
Le théorème 1 signifie que l'image par une fonction continue d'un sous-ensemble connexe de $\mathbb{R}$ est un sous-ensemble connexe de $\mathbb{R}$.

3° Le théorème **1** est une condition *suffisante* pour que l'image $f\langle I \rangle$ d'un intervalle soit un intervalle. Mais cette condition n'est *pas nécessaire*. Il peut se faire que $f\langle I \rangle$ soit un intervalle, sans que f soit continue (voir remarque **3** du § **2** ci-dessous). Il peut d'ailleurs également se faire que $f\langle I \rangle$ soit un intervalle sans que I soit un intervalle.

Exemples :

Soit la fonction f définie par $f(x) = \sin x$. Cette fonction est continue sur tout intervalle I de $\mathbb{R}$.

a) Si $I = \mathbb{R}$, alors $f\langle I \rangle = [-1, 1]$;
b) Si $I = [0, 2\pi[$, alors $f\langle I \rangle = [-1, 1]$;
c) Si $I =]-2\pi, 2\pi[$, alors $f\langle I \rangle = [-1, 1]$;
d) Si $I = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, alors $f\langle I \rangle =]0, 1[$;
e) Si $I = [0, \pi]$, alors $f\langle I \rangle = [0, 1]$;
f) Si $I =]0, \pi[$, alors $f\langle I \rangle =]0, 1]$.

• Les exemples ci-dessus montrent que les intervalles I et $f\langle I \rangle$ ne sont pas nécessairement de même nature. On peut toutefois préciser lorsque I est un intervalle fermé borné (un segment).

On démontre alors, et nous l'admettrons, le théorème suivant :

THÉORÈME 2 — **L'image $f\langle I \rangle$ d'un intervalle fermé borné I par une fonction f continue sur I est un intervalle fermé borné.**

Il en résulte que si I est un segment, et si $f\langle I \rangle$ n'est pas un segment, c'est que f n'est pas continue en tout point de I. (Voir Activités préliminaires n° 1 ; 4°, 5° et 6°.)

2. CONSÉQUENCES

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$.

D'après le théorème 2 ci-dessus, il existe deux réels m et M tels que :

$$f\langle [a, b] \rangle = [m, M].$$

Il s'ensuit que, pour tout réel λ de l'intervalle $[m, M]$, il existe un élément c de l'intervalle $[a, b]$ tel que $f(c) = \lambda$.

Remarquons alors que $m = \inf\limits_{[a,b]} f$ et $M = \sup\limits_{[a,b]} f$.

Le théorème **2** s'énonce parfois sous cette forme.

THÉORÈME 2 BIS

Une fonction f définie et continue sur un intervalle fermé borné I :
***a*) est bornée, et atteint ses bornes;**
***b*) prend, au moins une fois, toute valeur comprise (au sens large) entre ses bornes.**

REMARQUES :

1° La partie *b*) du théorème ci-dessus est connue sous le nom de « théorème des valeurs intermédiaires ».

2° La figure 1 présente une illustration de ce théorème.

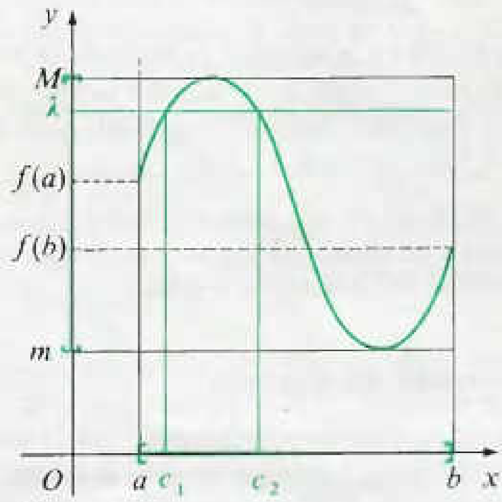


Figure 1

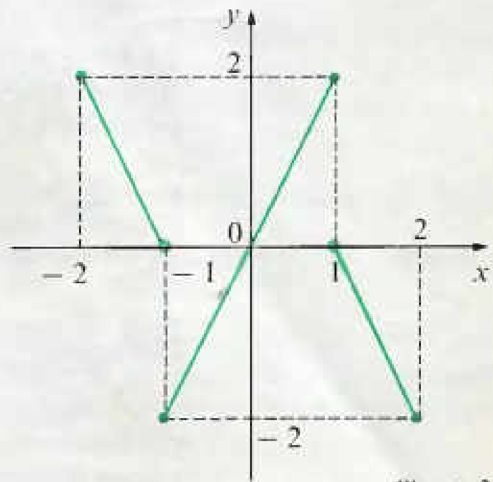


Figure 2

3° Une fonction f, définie sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ telle que $f\langle [a, b] \rangle = [m, M]$, et donc prenant toutes les valeurs de l'intervalle $[m, M]$, peut ne pas être continue sur $[a, b]$. Il en est ainsi par exemple, de la fonction f définie par (voir figure 2) :

$$\begin{array}{lll} f(x) = -2x - 2, & \text{pour} \quad x \text{ élément de} & [-2, -1[; \\ f(x) = \quad 2x \quad , & \text{pour} \quad x \text{ élément de} & [-1, 1]; \\ f(x) = -2x + 2, & \text{pour} \quad x \text{ élément de} &]1, 2]. \end{array}$$

Application à la résolution d'équations

Considérons une équation définie dans $\mathbb{R}$ par une relation de la forme $f(x) = c$ (où f désigne une fonction numérique continue). Le théorème des valeurs intermédiaires permet de prouver l'existence de solutions, et d'en donner des encadrements. On s'appuie pour cela sur l'un des résultats suivants, qui constituent des corollaires évidents du théorème 2 :

COROLLAIRE 1	**Une fonction f, définie et continue sur l'intervalle fermé borné $[a, b]$ prend au moins une fois sur cet intervalle toute valeur comprise entre $f(a)$ et $f(b)$.**

COROLLAIRE 2	**Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle fermé borné $[a, b]$, et telle que $f(a)$ et $f(b)$ soient non nuls et de signes contraires. Alors il existe au moins un nombre c de l'intervalle $]a, b[$ tel que $f(c)$ soit nul.**

REMARQUES :

1° Le corollaire 1 est parfois, lui aussi, appelé « **théorème des valeurs intermédiaires** ».
Il est à rapprocher du fait que, si $f(a)$ et $f(b)$ sont deux éléments de l'intervalle $[m, M]$, alors tout réel λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$ est également un élément de l'intervalle $[m, M]$. Signalons (et admettons-le), que dans le cas de sous-ensembles de $\mathbb{R}$, il y a équivalence entre convexité (voir chapitre 9) et connexité. Cette propriété n'est en général pas vraie dans le cas d'ensembles différents de $\mathbb{R}$.

2° Le corollaire 2, est parfois appelé « **théorème de Cauchy** ». Son application ne permet pas, à elle seule, de préciser le nombre des racines comprises entre a et b, sauf si f est strictement monotone sur $[a, b]$.
Signalons également que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires si, et seulement si : $f(a)\,f(b) < 0$.

Exemple :

Soit $f(x) = (x - 3)(x - 1)(x + 1)$ et $g(x) = (4x - 5)(x - 1)(4x - 3)$.
On a $f(0) = 3$, $f(2) = -3$; $g(0) = -15$, $g(2) = 15$.
Dans les deux cas, le polynôme s'annule au moins une fois entre 0 et 2, mais en réalité, le polynôme g s'annule trois fois entre 0 et 2.

• La méthode ci-dessus est d'une grande importance théorique dans la résolution des équations. Mais de nombreuses autres méthodes permettent une approximation plus rapide des solutions cherchées (voir chapitre 9, § **II**).

Application à la représentation des fonctions

Soit f une fonction continue sur un intervalle I. La fonction f admet un minimum et un maximum sur tout intervalle fermé borné inclus dans I. De plus, elle prend toutes les valeurs comprises entre ces bornes. Si on sait que si la fonction f est monotone sur un intervalle fermé borné $[a, b]$, alors on peut donner sans difficulté l'allure de la courbe. Cette allure peut être notablement précisée par le tracé des tangentes aux points de coordonnées $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.

On peut ainsi tracer avec une bonne précision les courbes représentatives des fonctions monotones par intervalles, dont on connaît le sens de variation.

Lorsqu'on sait que la fonction étudiée est monotone par intervalles, mais qu'on n'en connaît pas le sens de variation, la détermination de quelques points particuliers ne permet pas toujours de donner sans erreur la forme de la courbe; mais en considérant les variations de f sur des intervalles de longueur de plus en plus petite, on arrive, dans la plupart des cas usuels, à partager la courbe en portions de courbe différant très peu d'un segment de droite.

Mais il faut bien être conscient du fait que cette représentation point par point d'une courbe n'est possible que dans le cas de fonctions dérivables, et monotones par intervalles.

En tout état de cause, il convient d'accompagner cette étude expérimentale par d'autres considérations (sens de variation, dérivabilité, ...) qui pourront permettre de ne considérer qu'un petit nombre de points bien choisis tout en étant sûr de ne pas commettre d'erreur grossière sur la forme de la courbe.

★ Activité

1° Soit $f(x) = x^4 - 2x^2$. *Montrer que le calcul de* $f(0)$ *et* $f(2)$ *ne suffit pas à donner la forme de la courbe sur l'intervalle* $[0, 2]$.

2° Soit $g(x) = 66x^3 - 199x^2 + 200x$. *Quels calculs faut-il effectuer pour représenter point par point la fonction* g *au voisinage de* $x_0 = 1$?

3° Soit $h(x) = \sin \dfrac{1}{x}$. *Peut-on représenter* h *au voisinage de* 0? *Pourquoi? Le calcul des valeurs de* $h(x)$ *pour certaines valeurs particulières de* x *apporte-t-il des précisions sur la courbe représentative de* h?

REMARQUE :

Le tracé d'une courbe est la matérialisation de la trajectoire d'un instrument traçant. A chaque instant, cet instrument traçant se déplace dans une direction bien déterminée, qui est la direction intuitive de la tangente à la courbe. On ne peut ainsi tracer que les courbes représentatives de fonctions dérivables par intervalles.

Mais toute fonction dérivable par intervalles n'est pas non plus nécessairement représentable par une courbe. Soit par exemple la fonction f définie par $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$ sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et sa dérivée f' est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Toutefois, cette dérivée change de signe une infinité de fois sur tout intervalle $]0, \alpha[$, ce qui rend impossible une représentation graphique au voisinage de zéro.

Pour interpréter cette remarque, considérons une courbe comme un trait sans épaisseur. Lorsqu'on regarde une partie de la courbe à un grossissement de plus en plus fort, le trait peut apparaître comme de plus en plus sinueux, de sorte que la direction de la tangente dépend de l'échelle à laquelle on le considère. Un excellent exemple est donné par les cartes géographiques. Par exemple, si l'on considère une portion du littoral qui pourrait paraître rectiligne sur une carte, on voit souvent apparaître, sur les cartes plus détaillées, des anfractuosités, des découpures bien différentes de celles données par la carte initiale. Si une fonction possède une telle propriété, aucune représentation graphique ne pourra rendre compte de la totalité des propriétés de cette fonction. (De telles « courbes » sont parfois appelées des « fractals »).

Nous ne rencontrerons cette année $\left(\text{sauf cas exceptionnel du genre } x \mapsto x \sin \dfrac{1}{x}\right)$ que des fonctions dont la dérivée est continue par intervalles, et de signe constant sur un ensemble fini d'intervalles recouvrant l'ensemble d'étude. Ce sont de telles fonctions que l'on peut représenter graphiquement (parfois à l'aide d'artifices géométriques).

3. FONCTIONS CONTINUES STRICTEMENT MONOTONES

Soit f une fonction continue, strictement monotone, sur un intervalle fermé borné $[a, b]$. D'après le § **2** ci-dessus, f définit une application surjective de $[a, b]$ sur un intervalle fermé borné $[m, M]$.

La fonction f étant strictement monotone sur $[a, b]$, on a, quels que soient les réels x_1 et x_2 de l'intervalle $[a, b]$, tels que $x_1 < x_2$:

si f est croissante, alors $f(x_1) < f(x_2)$;
si f est décroissante, alors $f(x_2) < f(x_1)$.

Dans les deux cas, si $x_1 \neq x_2$, alors $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Il en résulte que f est une bijection de $[a, b]$ sur $[m, M]$, avec :

$m = f(a)$ et $M = f(b)$ si f est croissante;
$m = f(b)$ et $M = f(a)$ si f est décroissante.

THÉORÈME 3 — **Une fonction continue, strictement monotone sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ est une bijection de $[a, b]$ sur l'intervalle fermé borné $[f(a), f(b)]$.**

C'est ainsi, par exemple, qu'il existe un réel unique e tel que $\ln e = 1$.

Application

L'utilisation de ce théorème, joint à l'étude des variations de la fonction f, permet de donner des encadrements aussi précis qu'il est nécessaire des solutions d'une équation définie dans $\mathbb{R}$, par une relation de la forme $f(x) = 0$. (Voir également chapitre 9.)

Exercice résolu

Encadrer les solutions de l'équation définie dans $\mathbb{R}$ par : $4x^3 - 3x^2 - 6x + 2 = 0$.
Soit $f(x) = 4x^3 - 3x^2 - 6x + 2$.
On a $f'(x) = 12x^2 - 6x - 6 = 6(2x^2 - x - 1)$.
Le tableau de variations de la fonction f est donné ci-dessous :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

On a $f\left(-\frac{1}{2}\right) = 3{,}75$; $f(1) = -3$;
$f(-1) = 1$; $f(0) = 2$;
$f(-2) = -30$; $f(2) = 10$.

La fonction f définit des bijections :

de $[-2, -1]$ sur $[-30, 1]$;
de $[0, 1]$ sur $[2, -3]$;
de $[1, 2]$ sur $[-3, 10]$.

Il en résulte que chacun des intervalles $]-2, -1[$, $]0, 1[$, $]1, 2[$ contient une racine et une seule, (car un polynôme de degré 3 admet au plus trois racines) de l'équation proposée[1].

On peut déterminer des encadrements plus précis de ces racines en utilisant la méthode de dichotomie, fondée sur le principe ci-dessus.

Soit $0 < \alpha < 1$, avec $f(\alpha) = 0$, $f(0) = 2$ et $f(1) = -3$.

Calculons $f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4}$. Il en résulte que $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. On a $\frac{1}{2}\left(0 + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$.

Calculons $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{3}{8}$. Il en résulte que $\frac{1}{4} < \alpha < \frac{1}{2}$. On a $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{8}$.

[1] On dit que l'on a séparé les zéros du polynôme f.

Calculons $f\left(\frac{3}{8}\right) \approx -0{,}461$. Il en résulte que $\frac{1}{4} < \alpha < \frac{3}{8}$. On a $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\right)=\frac{5}{16}$.

Calculons $f\left(\frac{5}{16}\right) \approx -0{,}046$. Il en résulte que $\frac{1}{4} < \alpha < \frac{5}{16}$. On a $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}+\frac{5}{16}\right)=\frac{9}{32}$.

Calculons $f\left(\frac{9}{32}\right) \approx -0{,}164$. Il en résulte que $\frac{9}{32} < \alpha < \frac{5}{16}$.

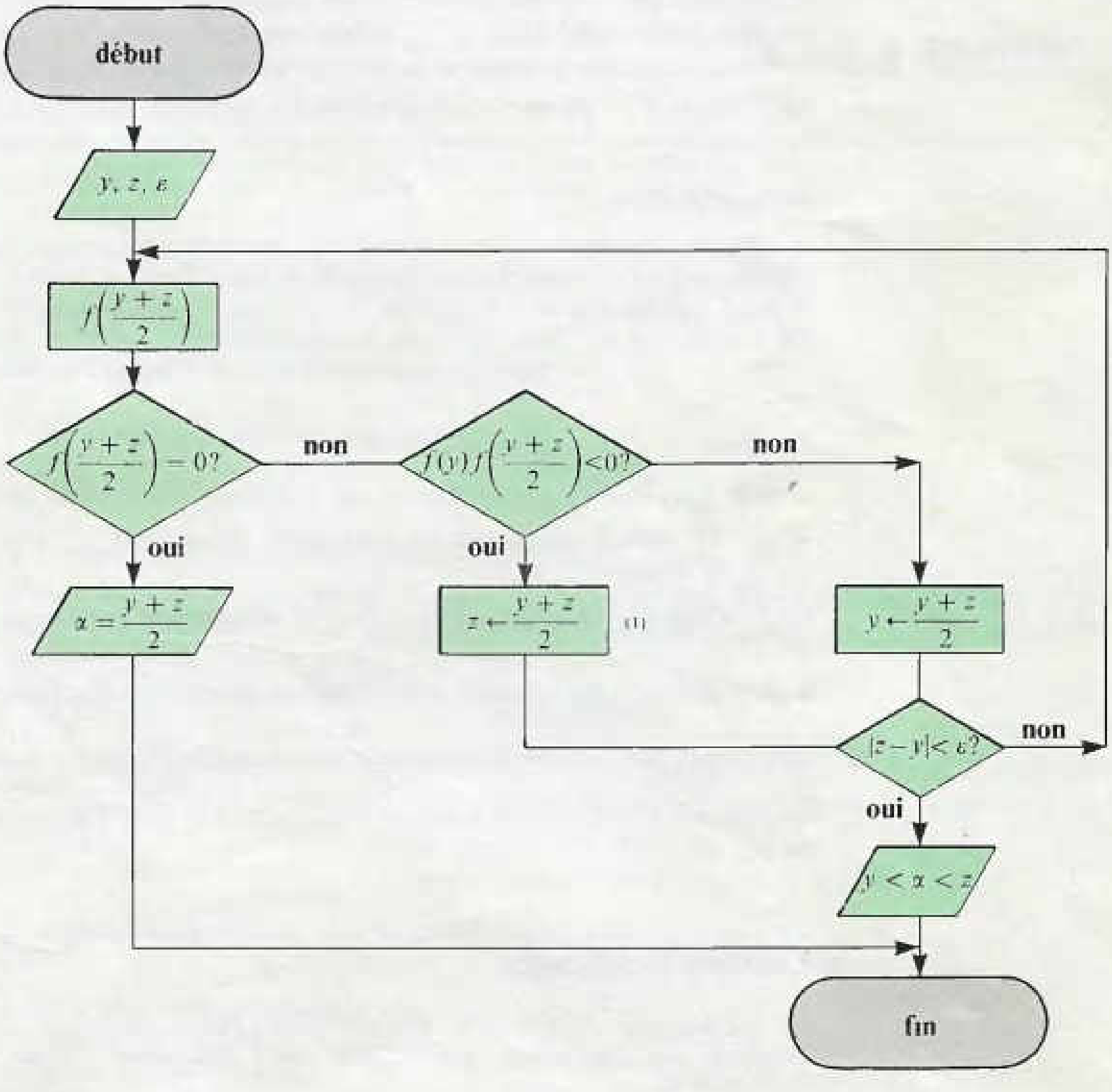
On obtient ainsi l'encadrement : $0{,}281\,25 < \alpha < 0{,}316\,25$.

On peut être tenté de calculer $f(0{,}3)$ et $f(0{,}31)$: $f(0{,}3) = 0{,}038$; $f(0{,}31) = -0{,}029$.

On obtient ainsi l'encadrement : $0{,}3 < \alpha < 0{,}31$.

L'utilisation de cette méthode peut permettre d'encadrer chacune des solutions de l'équation étudiée, avec la précision désirée.

Les calculs correspondant à la méthode de dichotomie sont symbolisés par l'organigramme ci-dessous :



(1) La notation $z \leftarrow a$ signifie que, dans la suite des calculs, z est remplacé par a. Rappelons que l'on note également $z := a$.

Exercices d'application

1. Encadrer, à 10^{-3} près, les solutions de l'équation proposée à l'exercice résolu ci-dessus.

2. Encadrer, à 10^{-2} près, les solutions des équations définies dans $\mathbb{R}$ par :

a) $2x^3 - 3x^2 - 12x + 5 = 0$;

b) $2x^3 + 3x^2 + 6x - 7 = 0$.

III – FONCTION RÉCIPROQUE

1. THÉORÈME FONDAMENTAL

Le résultat du théorème **3** ci-dessus s'étend, nous l'admettrons, au cas d'une fonction continue strictement monotone sur un intervalle quelconque, fermé ou non, borné ou non. Or toute application bijective admet une application réciproque. Nous admettrons le théorème fondamental :

THÉORÈME 4

Toute fonction f continue, et strictement monotone, définie sur un intervalle I, admet une fonction réciproque, notée f^{-1}, définie sur l'intervalle $J = f\langle I\rangle$. Cette fonction f^{-1} est continue et strictement monotone, de même sens de variation que la fonction f. La fonction f^{-1} prend ses valeurs dans I.

REMARQUES :

1° L'application du théorème **4** ci-dessus nécessite la connaissance préalable de l'intervalle J, laquelle ne peut s'obtenir qu'avec l'étude de la fonction f.

2° Pour tout élément de x l'intervalle I : $y = f(x)$ si, et seulement si, $x = f^{-1}(y)$.
On a alors : $(f \circ f^{-1})(y) = y$ pour tout y de J;
$(f^{-1} \circ f)(x) = x$ pour tout x de I (voir Activité préliminaire **2**).

Exemples :

• Soit $f(x) = x^2$. La fonction f est continue, strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$. Elle admet une fonction réciproque définie par $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, sur l'intervalle $f\langle \mathbb{R}_+ \rangle = \mathbb{R}_+$.
La fonction racine carrée est continue et strictement croissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+$.

• Soit $g(x) = \dfrac{1}{x}$. La fonction g est continue strictement décroissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$.
Elle admet une fonction réciproque, définie par $g^{-1}(x) = \dfrac{1}{x} = g(x)$.
La fonction g est égale à sa fonction réciproque. On dit que g est une application **involutive** de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}_+^*$.

Exercices d'application

3. La fonction f, telle que $f(x) = x^2$, est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_-$.
Déterminer l'application réciproque de la bijection de $\mathbb{R}_-$ sur $\mathbb{R}_+$ ainsi définie.

4. Prouver que la fonction f est une application continue, strictement croissante de l'intervalle I sur un intervalle J que l'on déterminera. Préciser l'application réciproque.

a) $f(x) = x\,|x|$, $I = \mathbb{R}$

b) $f(x) = \dfrac{4}{4 + x^2}$, $I = \mathbb{R}_+$, puis $I = \mathbb{R}_-$.

c) $f(x) = 5x + 3$, $I = \mathbb{R}$

2. DÉRIVÉE DE f^{-1}

Soit f une fonction continue, strictement monotone d'un intervalle I sur l'intervalle $J = f\langle I\rangle$. Supposons que f est dérivable en un point x_0 de I. Soit f^{-1} l'application réciproque de f, et posons $y = f(x)$ et $y_0 = f(x_0)$.

Pour étudier la dérivabilité de f^{-1} en y_0, considérons le quotient :

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}.$$

La fonction f étant dérivable en x_0 :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

Il en résulte que, si $f'(x_0)$ est non nul :

$$f'(y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{f'(x_0)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}.$$

La fonction f^{-1} est donc dérivable pour tout y_0 tel que $f'(f^{-1}(y_0))$ soit non nul.

On énonce :

THÉORÈME 5

Soit f une fonction numérique admettant une fonction réciproque f^{-1}. La fonction dérivée de cette fonction réciproque est donnée par :

$$(f^{-1})' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

REMARQUES :

1° La notation différentielle permet d'écrire $x = f(y)$, soit :

$$\frac{dx}{dy} = f'(y) \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

2° L'ensemble de définition de la fonction dérivée $(f^{-1})'$ ne contient pas les points y_0 de J tels que $y_0 = f(x_0)$ et $f'(x_0) = 0$.

Exemple :

Soit f l'application de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$ définie par $f(x) = x^2$. On a $f'(x) = 2x$.

D'autre part $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, donc $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

Notons que la dérivée de f^{-1} n'est pas définie pour $x_0 = 0$.

3. REPRÉSENTATION GRAPHIQUE

Soit f une fonction numérique admettant une fonction réciproque f^{-1}.

Soit C la courbe représentative de la fonction f, et C' la courbe représentative de la fonction f^{-1}, dans un repère orthonormal.

C est l'ensemble des points M_0 de coordonnées (x_0, y_0), tels que $y_0 = f(x_0)$.

On a alors $x_0 = f^{-1}(y_0)$, et par suite, le point $M'_0(y_0, x_0)$ est élément de la courbe C'. Il en

résulte (figure 3) que les courbes C' et C sont symétriques par rapport à la droite D d'équation $y = x$.
Remarquons que les tangentes aux courbes C et C' aux points d'abscisses respectives x_0 et $y_0 = f(x_0)$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice. Il en résulte que, si $f'(x_0) = 0$, la tangente à C au point (x_0, y_0) est parallèle à (Ox), et la tangente à C' au point (y_0, x_0) est parallèle à (Oy). Elle n'admet donc pas de coefficient directeur. C'est ainsi que s'interprète la non-dérivabilité de f^{-1} en y_0.

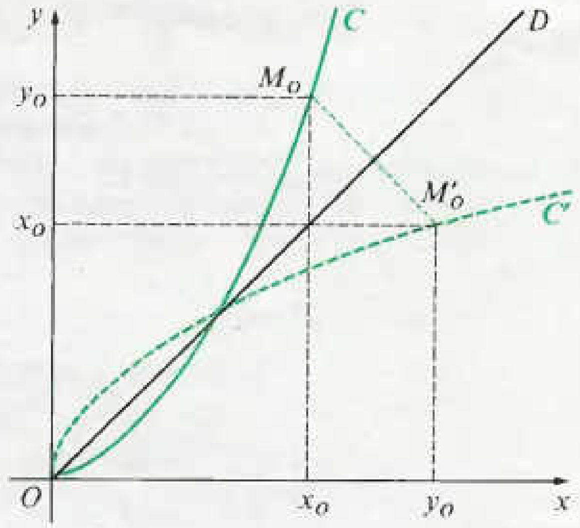


Figure 3

- **Exercice d'application**

5. Représenter soigneusement la fonction f et sa fonction réciproque f^{-1} dans le cas des fonctions f rencontrées à l'activité préliminaire 2, et à l'exercice d'application n° 4.

4. EXEMPLES

a. Fonctions racines

Pour tout entier naturel non nul n, la fonction f_n définie par $f_n(x) = x^n$, est continue et strictement croissante sur l'intervalle $I = [0, +\infty[$. Elle admet donc sur cet intervalle une application réciproque f_n^{-1}, appelée « fonction racine n-ième ». On note :

$$f_n^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}.$$

On a $y = \sqrt[n]{x}$ si, et seulement si, $x \in \mathbb{R}_+$, $y \in \mathbb{R}_+$, et $y^n = x$.

La fonction racine n-ième est définie, pour tout entier naturel n, sur $\mathbb{R}_+$, et prend ses valeurs dans $\mathbb{R}_+$. Elle est continue et strictement croissante sur son ensemble de définition. Sa fonction dérivée est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$(f_n^{-1})'(x) = \frac{1}{f_n'(f_n^{-1}(x))}.$$

Soit :

$$(f_n^{-1})'(x) = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}.$$

REMARQUE :

Dans le cas où n est impair, la fonction $f_n = [x \mapsto x^n]$ est continue, strictement monotone sur $\mathbb{R}$. On peut donc définir une fonction racine n-ième sur $\mathbb{R}$. Toutefois, on convient de réserver la notation $\sqrt[n]{x}$ à des réels x positifs. Il arrivera peut-être que l'on rencontre la notation $\sqrt[n]{x}$ avec n impair et x négatif. C'est un abus de langage commode, mais qu'il faut utiliser avec précautions (voir § **V-1**, Remarque 2).

b. Fonctions circulaires réciproques

• Soit l'intervalle $I = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Soit la fonction f définie sur l'intervalle I par $f(x) = \sin x$. Cette fonction est continue et strictement croissante sur I. Sa fonction réciproque f^{-1} est définie sur l'intervalle $J = [-1, 1]$, et est appelée fonction « arc sinus ». On note :

$$f^{-1}(x) = \arcsin x.$$

Cette définition se traduit par l'équivalence :

$$\left.\begin{aligned} & x \in [-1, 1] \\ & y = \arcsin x \end{aligned}\right\} \text{ si, et seulement si, } \left\{\begin{aligned} & x = \sin y \\ & y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]. \end{aligned}\right.$$

Les calculatrices scientifiques permettent de déterminer des valeurs approchées des valeurs prises par cette fonction, et l'on peut ainsi résoudre des équations de la forme $\sin x = c$. La fonction arcsin figure parfois sur les calculatrices sous la notation abusive de $\sin^{-1}$.

• Pour $f(x) = \sin x$, on a $f'(x) = \cos x$.

Il en résulte, si $x \in]-1, 1[$, que : $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{\cos[\arcsin x]}$.

Or, si $\arcsin x = y$, on a $\sin y = x$, donc $\cos^2 y = 1 - x^2$.

Comme y appartient à l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, son cosinus est positif. Il en résulte que $\cos y = \sqrt{1 - x^2}$.

Par conséquent : $(\arcsin)'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$.

• La fonction arcsin est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[-1, 1]$. Sa courbe représentative fait l'objet de la figure 4.

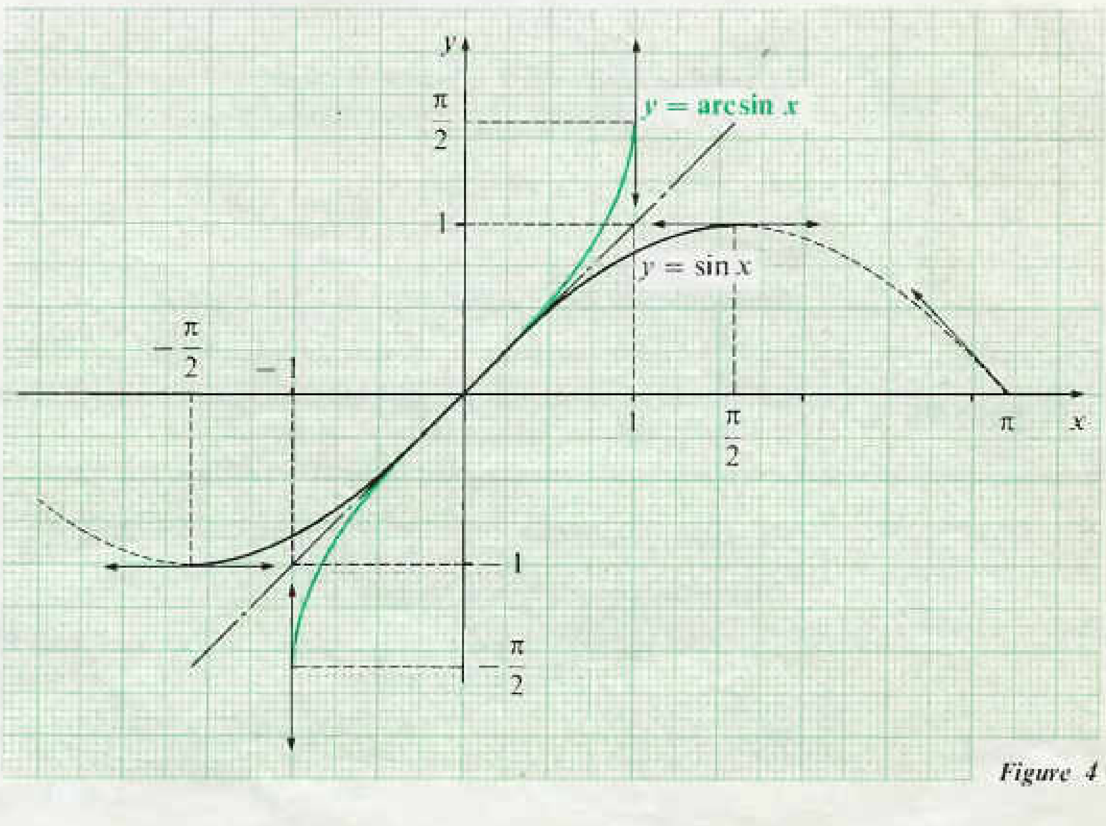


Figure 4

Exercices d'application

6. Étudier et représenter soigneusement la fonction f^{-1}. Préciser la dérivée $(f^{-1})'$.
a) $f(x) = \cos x$, pour $x \in [0, \pi]$. (On note $f^{-1}(x) = \arccos x$.)
b) $f(x) = \tan x$, pour $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.
(On note $f^{-1}(x) = \arctan x$.)

7. En utilisant une calculatrice, déterminer des valeurs approchées de $\arcsin x - \sin x$, pour $x \in \{0,1 ; 0,2 ; 0,3 ; 0,4 ; 0,5\}$.

IV – FONCTION EXPONENTIELLE

1. DÉFINITION

La fonction logarithme népérien étudiée au chapitre précédent est une application continue, strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$. C'est donc une bijection.
Quels que soient les réels x et y strictement positifs :

$$\ln x = \ln y \quad \text{si, et seulement si,} \quad x = y;$$
$$\ln x < \ln y \quad \text{si, et seulement si,} \quad x < y.$$

La fonction ln admet donc une application réciproque :

DÉFINITION 1 | **La bijection réciproque de la fonction ln est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+^*$, appelée *fonction exponentielle*.**

La fonction ln est une bijection continue, strictement croissante de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$. De plus, la fonction ln est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et l'on a, pour tout réel x strictement positif :

$$(\ln)'(x) = \frac{1}{x}.$$

Le nombre dérivé de la fonction ln est donc non nul pour tout réel x de $\mathbb{R}_+^*$.
Il résulte du théorème **5** ci-dessus que la fonction $\ln^{-1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et que :

$$(\ln^{-1})'(x) = \frac{1}{(\ln)'(\ln^{-1}(x))} = \frac{1}{\dfrac{1}{\ln^{-1}(x)}} = \ln^{-1}(x).$$

Nous noterons (provisoirement) : $\ln^{-1}(x) = \exp x$.

THÉORÈME 6 | **La fonction exponentielle est une bijection continue, dérivable, strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle est égale à sa fonction dérivée.**

Premières propriétés

• Il résulte de ce qui précède que :

$$\left.\begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \\ y = \exp x \end{array}\right\} \quad \text{si, et seulement si,} \quad \left\{\begin{array}{l} y \in \mathbb{R}_+^* \\ x = \ln y \end{array}\right.$$

D'où :

$$y \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exp \ln y = y$$
$$x \in \mathbb{R}, \quad \ln \exp x = x$$

• Pour tout réel x : $\exp x > 0$
$\exp 0 = 1$

• Quels que soient les réels x et y,

$x = y$ si, et seulement si, $\exp x = \exp y$,
$x > y$ si, et seulement si, $\exp x > \exp y$,
$x > 0$ si, et seulement si, $\exp x > 1$,
$x < 0$ si, et seulement si, $0 < \exp x < 1$.

2. PROPRIÉTÉ FONDAMENTALE

La fonction ln est un morphisme bijectif (on dit un isomorphisme) du groupe $(\mathbb{R}_+^*, \times)$ sur le groupe $(\mathbb{R}, +)$.

Il en résulte que la fonction exponentielle est un morphisme bijectif du groupe $(\mathbb{R}, +)$ sur le groupe $(\mathbb{R}_+^*, \times)$.

THÉORÈME 7	**Quels que soient les réels x et y :** $$\exp(x+y) = \exp x \,.\, \exp y.$$

Conséquences

• Pour tout réel x et tout entier naturel n :

$$\exp nx = (\exp x)^n.$$

Il en résulte que, pour tout entier naturel n :

$$\exp n = (\exp 1)^n.$$

• Le réel exp 1 est le nombre dont le logarithme népérien est égal à 1. On peut prouver que ce nombre est irrationnel, et on peut en déterminer des valeurs approchées. (Voir problèmes **202** et **203**, page 118.) Ce nombre est un des nombres les plus importants en mathématiques (avec 0, 1, π, i...). On le note e, et l'on a :

$$e \approx 2{,}718\,281\,828\,5.$$

On peut donc noter, pour tout entier naturel n : $\exp n = e^n$
Compte tenu de ce résultat, la propriété qui fait l'objet du théorème **7** s'écrit, avec les entiers n et n' :

$$e^{n+n'} = e^n \,.\, e^{n'}.$$

et apparaît donc comme une des règles classiques du calcul des exposants.

• Pour tout entier naturel n, on a :

$$\exp 0 = \exp(n - n) = 1.$$

Par suite : $\exp n \exp(-n) = 1$;

et : $\exp(-n) = \dfrac{1}{\exp n} = \dfrac{1}{e^n} = e^{-n}$.

On peut donc noter, pour tout entier relatif n : $\exp n = e^n$.

• D'autre part, pour tout réel x : $\exp x = \exp\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) = \left(\exp \frac{x}{2}\right)^2$.

Par suite : $\exp \frac{x}{2} = \sqrt{\exp x}$.

En particulier, pour $x = 1$, on a : $\exp \frac{1}{2} = \sqrt{e} = e^{1/2}$.

• On a également pour tout entier naturel n :

$$(e^{1/n})^n = \left(\exp \frac{1}{n}\right)^n = \exp\left(n \cdot \frac{1}{n}\right) = \exp 1 = e.$$

Comme $e^{1/n}$ est nécessairement un réel positif, on a :

$$e^{1/n} = \sqrt[n]{e}.$$

• Pour tout rationnel $r = \frac{p}{q}$; $(p, q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$:

$$(e^{p/q})^q = \left(\exp \frac{p}{q}\right)^q = \exp\left(q \cdot \frac{p}{q}\right) = \exp p = e^p.$$

Comme $e^{p/q}$ est positif, on a : $e^{p/q} = \sqrt[q]{e^p}$.

• On peut donc conclure des propriétés ci-dessus que, pour tout rationnel r:

$$\exp r = e^r.$$

Pour tout irrationnel x, la notation e^x peut être définie par $e^x = \exp x$, car cette notation n'a pas encore de signification.

NOTATION	**Pour tout réel x, on note : $e^x = \exp x$.**

• Exercices d'application

8. Simplifier les écritures suivantes : $a = e^{3 \ln 2}$; $b = \ln \sqrt{e}$; $c = \ln e^{\frac{1}{3}}$; $d = e^{-3 \ln 2}$; $k = \ln e^{-\frac{1}{2}}$.

9. Résoudre les équations définies ci-dessous (en posant $y = e^x$).

a) $e^x - e^{-x} = \frac{8}{3}$;

b) $e^{2x} - 3\,e^x + 2 = 0$.

10. Étudier la fonction f définie par :

$$f(x) = x\, e^{\frac{1}{2}|\ln x^2|}.$$

3. VARIATION ET REPRÉSENTATION GRAPHIQUE

La fonction exponentielle est donc une fonction continue strictement croissante de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}_+^*$. Elle est également dérivable sur $\mathbb{R}$, et : $(e^x)' = e^x$.

La fonction exponentielle étant la fonction réciproque de la fonction ln :

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty \quad (\text{car : } \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty)$$

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \quad (\text{car : } \lim_{x \to 0} \ln x = -\infty).$$

Courbe représentative

La courbe représentative Γ de la fonction exponentielle est symétrique de la courbe représentative de la fonction logarithme népérien par rapport à la droite D d'équation $y = x$ (figure 5). Elle admet l'axe des abscisses comme asymptote en $-\infty$.

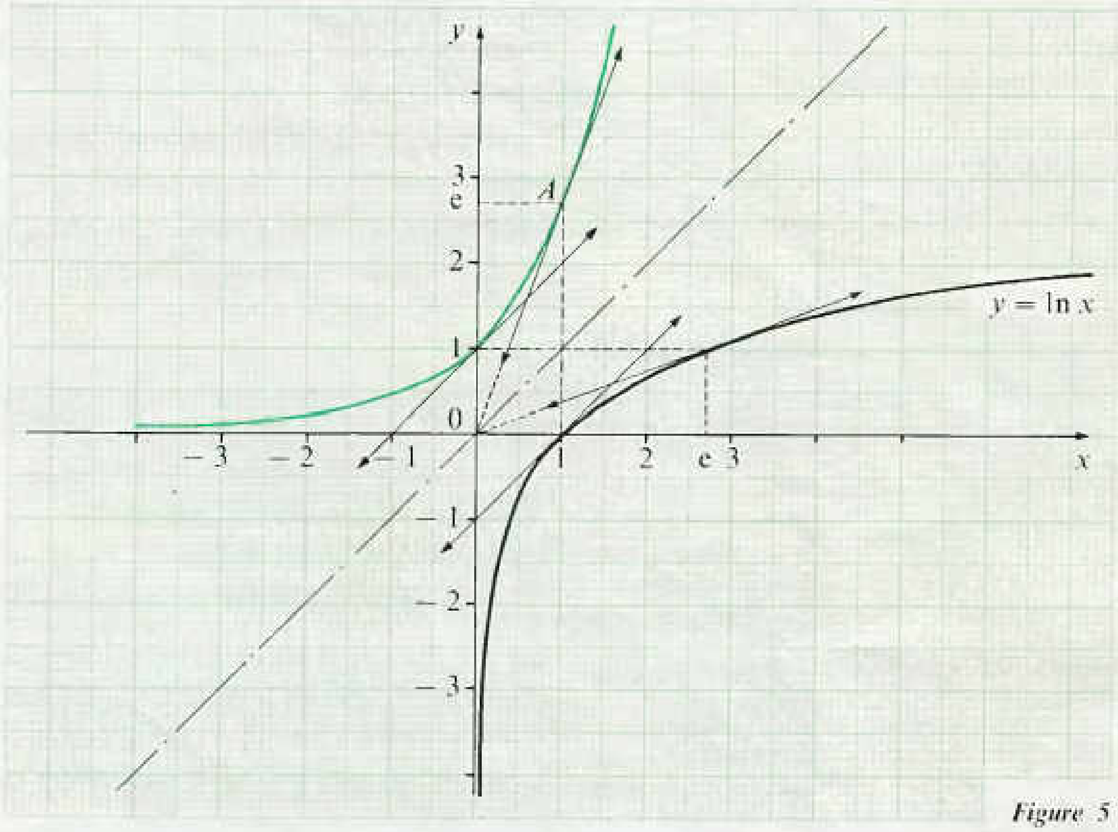


Figure 5

Exercice d'application

11. Prouver que la tangente à la courbe Γ au point A de coordonnées $(1, e)$ passe par l'origine O du repère.

4. AUTRES FONCTIONS EXPONENTIELLES

Pour tout réel a de $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, la fonction $\log_a$ est une fonction continue, strictement monotone de $\mathbb{R}_+^*$ sur $\mathbb{R}$. Elle admet donc une application réciproque, la fonction exponentielle de base a :

$$\left.\begin{array}{l} x \in \mathbb{R} \\ y = \exp_a x \end{array}\right\} \quad \text{si, et seulement si,} \quad \left\{\begin{array}{l} y \in \mathbb{R}_+^*, \\ x = \log_a y. \end{array}\right.$$

On a alors $x = \log_a y = \dfrac{\ln y}{\ln a}$, et $\ln y = x \ln a$, soit $y = e^{x \ln a}$.

Pour tout entier n, on a $e^{n \ln a} = (e^{\ln a})^n = a^n$. On donne la définition suivante :

DÉFINITION 2 — **Pour tout réel a de $\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, la fonction réciproque $\exp_a$ de la fonction logarithme de base a, est la *fonction exponentielle de base a*.**

a. Propriétés

$a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$; $x \in \mathbb{R}$; $y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\exp_a x = a^x &= e^{x \ln a};\\
\ln a^x &= x \ln a;\\
a^0 &= 1;\\
a^1 &= 1; \quad \text{faux}\\
a^{x+y} &= a^x a^y;\\
a^{xy} &= (a^x)^y;\\
a^x &= a^y \quad \text{si, et seulement si,} \quad x = y;\\
(a^x)' &= (a^x) \ln a,
\end{aligned}$$

Si $a > 1$, $x < y$ si, et seulement si, $a^x < a^y$;
si $a < 1$, $x < y$ si, et seulement si, $a^x > a^y$.

REMARQUES :

1° Remarquons que les fonctions exponentielles possédent la propriété d'être proportionnelles à leur dérivée. En effet, quel que soit le réel k,

$$\text{si } f(x) = e^{kx}, \quad \text{alors} \quad f'(x) = k\,e^{kx}.$$

La fonction f est alors la fonction exponentielle de base $a = e^k$.

2° La fonction exponentielle est l'exponentielle de base e.

3° Pour $a = 1$, on a, pour tout réel x, $1^x = 1$; mais cette fonction exponentielle n'est pas une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

4° Notons que la définition ci-dessus permet d'attribuer une signification aux notations : π^π, $(\sqrt{3})^\pi$, $3^{\sqrt{2}}$, $(\sqrt{3})^{1/\pi}$, e^π, π^e, ... Des valeurs approchées de ces réels peuvent être calculées grâce aux calculatrices (qui fonctionnent d'ailleurs à l'aide de valeurs approchées décimales des réels envisagés).
Notons qu'en général, il n'est pas simple de préciser si ces nombres sont des rationnels ou non.

b. Représentation graphique

On a représenté une fonction exponentielle de base a, et la fonction logarithme de même base, pour $a > 1$ (figure 6) et pour $a < 1$ (figure 7).

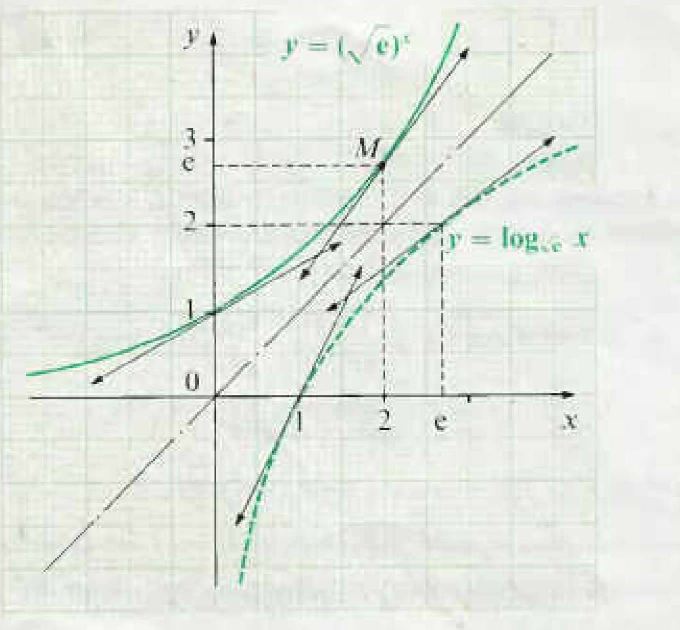


Figure 6

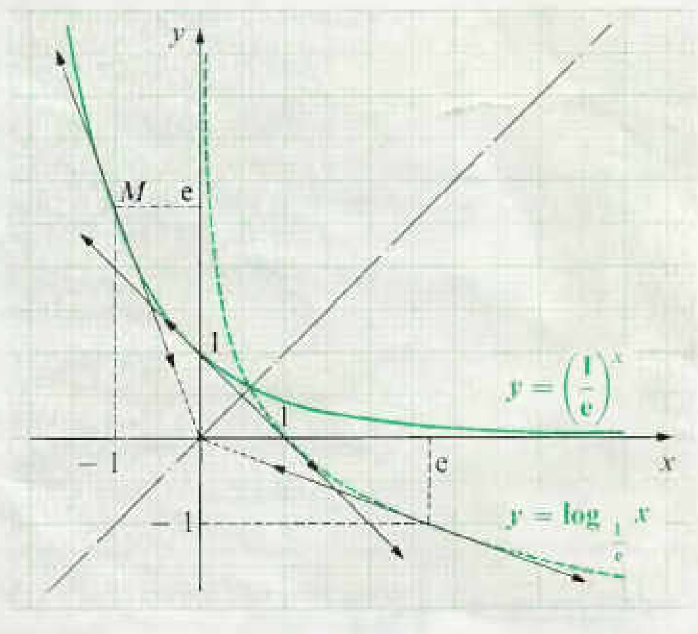


Figure 7

Soit M le point d'ordonnée e de la courbe représentative Γ_a de la fonction exponentielle de base a. L'abscisse de M est définie par $a^x = \mathrm{e} = \mathrm{e}^{x \ln a}$. Elle est donc égale à $\dfrac{1}{\ln a}$. Le coefficient directeur de la tangente en M à Γ_a est donc :

$$(\ln a)a^{1/\ln a} = \ln a \; \mathrm{e}^{(1/\ln a)\ln a} = \mathrm{e} \ln a$$

Il en résulte qu'une équation de la tangente en M à Γ_a est :

$$y - \mathrm{e} = \mathrm{e} \ln a\left(x - \frac{1}{\ln a}\right) = \mathrm{e} \ln ax - \mathrm{e}.$$

C'est-à-dire $y = (\mathrm{e} \ln a)x$. Cette tangente passe donc par l'origine.

Exercices d'application

12. Résoudre les équations définies dans $\mathbb{R}$ par :

a) $3^{x+2} + 9^{x-1} = 1\,458.$

b) $2^{2x-1} + 3^x + 4^{x+\frac{1}{2}} - 9^{\frac{x}{2}+1} = 0.$

13. Quelle transformation géométrique simple permet de transformer la courbe représentative de la fonction exponentielle de base e en celle de la fonction exponentielle de base $\dfrac{1}{\mathrm{e}}$?

5. CROISSANCE EXPONENTIELLE

• L'étude des phénomènes naturels conduit souvent à considérer deux grandeurs X et Y dont les mesures x et y, dans des conditions déterminées varient simultanément de façon que l'on puisse considérer y comme fonction de x. Les propriétés régissant le phénomène étudié se traduisent alors par une fonction f telle que $y = f(x)$. Dans la plupart des cas, on a intérêt à supposer que x et y peuvent prendre toutes les valeurs d'un certain intervalle de $\mathbb{R}$, et ceci même dans les cas où x et y sont par essence des entiers. Dans ce cas, on considérera que $f(x+1) - f(x)$, ou $f(x) - f(x-1)$, sont des valeurs approchées de la dérivée $f'(x)$. (Il arrive également que l'on prenne, pour cette valeur approchée la valeur : $\dfrac{f(x+1) - f(x-1)}{2}$).

• Dans les conditions ci-dessus, il est fréquent que l'accroissement Δy de y soit proportionnel à y et à l'accroissement Δx de x. C'est en particulier le cas lorsque l'on étudie en fonction du temps l'accroissement d'une population. Cet accroissement est bien entendu proportionnel à la population et à la durée envisagée. C'est ainsi que :

$$\Delta y = ky\,\Delta x.$$

Si x et y peuvent prendre toutes les valeurs réelles d'un certain intervalle, on a alors :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = ky$$

Lorsque l'accroissement Δx tend vers zéro, le rapport $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ tend vers la valeur de la dérivée de y au point considéré. On a donc :

$$f'(x) = kf(x).$$

On considérera cette relation comme une approximation de la réalité, dans le cas où x ne peut prendre que des valeurs entières.

• Les fonctions f telles que : $f_a(x) = a\mathrm{e}^{kx}$ satisfont à la condition ci-dessus. On démontre que ce sont les seules (exercice **79**). D'autre part, la valeur de a est parfaitement déterminée si l'on sait par exemple qu'à la valeur x_0 correspond la valeur y_0. Le phénomène étudié est alors régi par : $y = y_0\,\mathrm{e}^{k(x-x_0)}$.

Exemples :

1. A température constante, la pression atmosphérique est fonction de l'altitude. Lorsqu'on descend d'un mètre, l'accroissement de la pression est proportionnel au poids d'une couche d'air d'un mètre d'épaisseur à l'altitude envisagée, lequel poids est lui-même proportionnel à la pression qui règne à cette altitude. La loi de variation de cette pression en fonction de l'altitude est donc une fonction exponentielle. C'est la formule barométrique de Laplace.

2. Pendant un intervalle de temps déterminé, une fraction constante d'un échantillon de matière radioactive se détruit spontanément. Cette radioactivité se traduit donc par une diminution de masse proportionnelle à la masse de l'échantillon, et à la durée envisagée. La décroissance de masse est donc une fonction exponentielle du temps.

3. En l'absence de facteurs inhibiteurs, l'accroissement d'une population est proportionnel à la population et à la durée. La croissance d'une population est une fonction exponentielle du temps.
Supposons par exemple que le taux annuel d'accroissement de la population mondiale est égal à 2 %.
On aura : $P(x+1) - P(x) = 0{,}02\ P(x)$, et par suite, approximativement :
$$P(x) = P(x_0)\ \mathrm{e}^{0{,}02(x-x_0)}.$$
Si l'on sait que : $P(1966) = 3 \times 10^9$, on a : $P(x) = 3 \times 10^9 \cdot \mathrm{e}^{0{,}02(x-1966)}$.
La population en l'an 2500 est alors donnée par :
$$P(2500) = 3 \times 10^9 \cdot \mathrm{e}^{0{,}02 \times 534} \approx 1{,}3 \times 10^{14}.$$

REMARQUE :

La loi exponentielle intervient dans les domaines les plus divers, comme : physique, chimie, économie, biologie, probabilités et statistique, médecine, etc.

V – FONCTIONS PUISSANCES

1. DÉFINITION. PROPRIÉTÉS

Soit α un réel. La fonction f_α telle que $f_\alpha(x) = x^\alpha$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f_\alpha(x) = x^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \ln x}$.

La dérivée de f_α est donnée par :

$$f'_\alpha(x) = (\alpha \ln x)'\,\mathrm{e}^{\alpha \ln x} = \frac{\alpha}{x}\,\mathrm{e}^{\alpha \ln x} = \alpha\frac{x^\alpha}{x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

THÉORÈME 9	**Quel que soit le réel α, la fonction f_α telle que $f_\alpha(x) = x^\alpha$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, et sa dérivée est donnée par :** $$f'_\alpha(x) = \alpha x^{\alpha-1}.$$

REMARQUES :

1° La formule donnant la dérivée de la fonction puissance α coïncide avec les formules de dérivation des fonctions puissance déjà rencontrées $\left(\text{puissances entières, puissance } \frac{1}{2}\right)$.

2° A proprement parler, les fonctions puissances sont définies seulement sur $\mathbb{R}_+^*$. On étend la définition à $\mathbb{R}_-$ sans difficulté lorsque l'exposant est entier. Sinon, il faut être très circonspect, même dans les cas qui semblent ne pas poser de problème.
C'est ainsi que l'utilisation intempestive de l'exponentiation de nombres négatifs peut conduire à des erreurs grossières du genre :

« $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$, donc $(-8)^{\frac{1}{3}} = (-8)^{\frac{2}{6}}$; or, $(-8)^{\frac{1}{3}} = -2$, et $(-8)^{\frac{2}{6}} = 2$. Donc : $2 = -2$ (!!) »

2. VARIATION ET REPRÉSENTATION GRAPHIQUE

• Pour $\alpha > 0$, la fonction f'_α ne prend que des valeurs strictement positives. La fonction f_α est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

D'autre part, on a alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \alpha \ln x = +\infty$, et $\lim\limits_{x \to 0} \alpha \ln x = -\infty$. Donc

$$\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = +\infty, \text{ et } \lim_{x \to 0} x^\alpha = 0.$$

Le tableau de variation de la fonction f_α, pour $\alpha > 0$ est donné par :

x	0		$+\infty$
$f'_\alpha(x)$	‖	$+$	
$f_\alpha(x)$	‖ 0	↗	$+\infty$

Pour préciser la forme de la courbe représentative, il arrive qu'on s'intéresse à la variation de la dérivée. L'étude de cette variation permet de préciser les intervalles où le coefficient directeur de la tangente à la courbe est croissant, et ceux où ce coefficient directeur est décroissant. Cette étude peut se faire grâce à la dérivée seconde.

Ici, on a : $f''_\alpha(x) = (f'_\alpha)'(x) = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha - 1}$.

Le signe de cette dérivée seconde est constant sur $\mathbb{R}_+^*$, et dépend de la position de α par rapport à 1.

a) Si $0 < \alpha < 1$, alors $f''_\alpha(x)$ est négatif pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe est positif et décroît lorsque x croît. La courbe est de « moins en moins penchée » sur l'axe des abscisses. (Voir figure 8 et chapitre 9.)

b) Si $\alpha = 1$, alors $f''_\alpha(x)$ est nul pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$. On a $f_1(x) = x$. La courbe représentative est la droite d'équation $y = x$. (Le coefficient directeur de la tangente à la courbe est constant.)

c) Si $\alpha > 1$, alors $f''_\alpha(x)$ est positif pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe est positif. Il croît lorsque x croît. La courbe est de « plus en plus penchée » sur l'axe des abscisses. (Voir figure 8 et chapitre 9.)

• Pour $\alpha = 0$, on a $f_0(x) = x^0 = 1$, pour tout réel strictement positif x.

• Pour $\alpha < 0$, la fonction f'_α ne prend que des valeurs strictement négatives. La fonction f_α est donc strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

D'autre part, on a alors :

$$\lim_{x \to +\infty} \alpha \ln x = -\infty, \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0} \alpha \ln x = +\infty.$$

Donc :

$$\lim_{x \to +\infty} x^\alpha = 0, \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0} x^\alpha = +\infty.$$

Le tableau de variation de la fonction f_α, pour $\alpha < 0$ est donné par :

x	0		$+\infty$
$f'_\alpha(x)$	‖	$-$	
$f_\alpha(x)$	‖ $+\infty$	↘	0

Le signe de la dérivée seconde est constant sur $\mathbb{R}_+^*$: il est positif. Le coefficient directeur de la tangente à la courbe croît lorsque x croît. Mais ce coefficient directeur est négatif, la courbe est de « moins en moins penchée » sur l'axe des abscisses, car la valeur absolue du coefficient directeur de la tangente à la courbe décroît lorsque x croît. (Voir figure 8.)

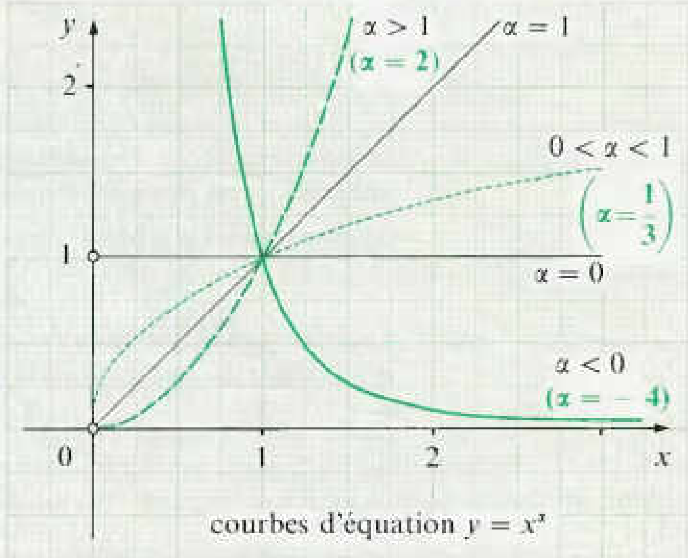


Figure 8

REMARQUE :

Pour tout réel α différent de 0, la fonction f_α est strictement monotone. Sa fonction réciproque est la fonction $f_{1/\alpha}$.

VI – FONCTIONS COMPOSÉES

1. GÉNÉRALITÉS

• Si u est une fonction numérique :

a) La fonction $f = e^u$, définie par $f(x) = e^{u(x)}$ admet le même ensemble de définition que u.

Sur cet ensemble de définition : $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$.

b) La fonction $g = \ln u$, telle que $g(x) = \ln u(x)$ est définie si, et seulement si, $u(x)$ est défini et strictement positif. L'ensemble de définition de g est donc l'ensemble $\overset{(-1)}{u}\langle \mathbb{R}_+^* \rangle$ des antécédents par u des réels strictement positifs.

Sur cet ensemble de définition : $g'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

c) La fonction $h = u^\alpha$ est définie pour tout réel α par :

$$h(x) = [u(x)]^\alpha = e^{\alpha \ln u(x)} = e^{\alpha g(x)}.$$

admet le même ensemble de définition que g, c'est-à-dire $\overset{(-1)}{u}\langle \mathbb{R}_+^* \rangle$.

Sur cet ensemble de définition :

$$\begin{aligned} h'(x) &= \alpha g'(x)\, e^{\alpha g(x)} \\ &= \frac{\alpha u'(x)}{u(x)} [u(x)]^\alpha \\ &= \alpha u'(x) [u(x)]^{\alpha - 1}. \end{aligned}$$

• Si u et v sont deux fonctions numériques, la fonction $k = u^v$ est définie par :

$$k(x) = u(x)^{v(x)} = e^{v(x)\ln u(x)}.$$

Elle admet le même ensemble de définition que la fonction $[x \mapsto v(x) \ln u(x)]$, c'est-à-dire l'ensemble $D_v \cap \overset{(-1)}{u} \langle \mathbb{R}_+^* \rangle$.
On a $\ln k(x) = \ln u(x)^{v(x)} = v(x) \ln u(x)$; la fonction dérivée de la fonction k est donc définie par :

$$k'(x) = [v(x) \ln u(x)]' \, e^{v(x)\ln u(x)}.$$

C'est-à-dire :

$$k'(x) = \left[v'(x) \ln u(x) + \frac{v(x)u'(x)}{u(x)} \right] u(x)^{v(x)}.$$

REMARQUE :

Ces résultats ne sont pas à retenir; le calcul doit être effectué directement dans chaque cas.

• Exercice d'application

14. Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f, sa fonction dérivée f', et l'ensemble de définition de f', dans les cas suivants :

a) $f(x) = e^{1/(x+3)}$;

b) $f(x) = \ln \dfrac{1+x}{2-x}$;

c) $f(x) = (\ln x)^{\frac{5}{3}}$;

d) $f(x) = [(2-x)\ln(x+1)]^{\sqrt{2}}$;

e) $f(x) = x^x$;

f) $f(x) = (\cos x)^{\sin x}$.

2. APPLICATION A LA RECHERCHE DE PRIMITIVES

Il est important de savoir reconnaître (et éventuellement introduire), dans la recherche des primitives d'une fonction, les dérivées de fonctions de la forme e^u, $\ln u$, ou u^α. (Voir ch. **1, III, 3**.)

■ Exercices résolus

I — *Déterminer une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :* $f(x) = x e^{x^2}$.

Si on pose $u(x) = x^2$, on a $u'(x) = 2x$, donc $f(x) = \dfrac{1}{2} u'(x) \, e^{u(x)}$.

Et la fonction F définie par $F(x) = \dfrac{1}{2} e^{x^2}$ est une primitive de f.

II — *Déterminer une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$f(x) = \sin 2x \sqrt[3]{1 + \cos^2 x}.$$

Si on pose : $u(x) = 1 + \cos^2 x$, on a $u'(x) = -2\sin x \cos x = -\sin 2x$.
Par suite $f(x) = -u'(x)u(x)^{\frac{1}{3}}$.

Donc la fonction F définie par $F(x) = -\dfrac{u(x)^{\frac{1}{3}+1}}{\dfrac{1}{3}+1} = -\dfrac{3}{4}u(x)^{\frac{4}{3}}$ est une primitive de la fonction f :

$$F(x) = -\frac{3}{4}\sqrt[3]{(1 + \cos^2 x)^4}.$$

Exercice d'application

15. Déterminer une primitive de la fonction f, dans les cas suivants :

a) $f(x) = (x+1)\,e^{x^2+2x+3}$;

b) $f(x) = (1+\tan^2 x)\,e^{\tan x}$;

c) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{(\ln x)^2}}{x}$;

d) $f(x) = \cos x\sqrt{e^{5\sin x}}$.

3. LIMITES

• L'étude des limites d'une fonction composée, construite avec des exponentielles et des logarithmes, repose sur l'utilisation des règles générales sur les limites, et sur les règles suivantes :

$$\lim_{x\to x_0} u(x) = l \text{ si, et seulement si, } \lim_{x\to x_0} \ln u(x) = \ln l,$$
$$\text{ou } \lim_{x\to x_0} e^{u(x)} = e^l.$$

• On ne négligera pas d'utiliser également les renseignements que peut donner la connaissance des dérivées :

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0).$$

• L'étude d'une telle limite peut se révéler délicate. Elle peut être facilitée par la connaissance des résultats fondamentaux auxquels on peut se ramener. (Par exemple, théorème 6, ch. 1, p. 26.) Des compléments sur l'étude des limites seront donnés au chapitre 5.

Exercices résolus

I — *Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction f telle que :* $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$.

Pour tout réel x non nul, on a : $\ln f(x) = x - \ln x = x\left(1 - \dfrac{\ln x}{x}\right)$.

Or (voir chapitre 1) : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

Donc : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln f(x) = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Ce résultat doit être considéré comme classique. Il s'interprète géométriquement par le fait que la droite (OM) admet la position limite (Oy) lorsque x tend vers l'infini (M est le point de coordonnées (x, e^x).)

II — *Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction f telle que :* $f(x) = \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$.

Pour tout réel strictement positif, on a :

$$\ln f(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) - \ln 1}{\left(1+\frac{1}{x}\right) - 1}.$$

Or, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1$.

Il en résulte que : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln f(x) = \ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$. Par suite : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = e^1 = e$.

III – *Étudier la limite en 0 de la fonction f telle que :* $f(x) = x^x$.

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Pour tout réel x de $\mathbb{R}_+^*$, on a : $\ln f(x) = x \ln x$.

Soit $\dfrac{1}{x} = y$, $\lim\limits_{x \to 0^+} y = +\infty$.

On a alors : $\ln f(x) = -\dfrac{\ln y}{y}$, et par suite : $\lim\limits_{x \to 0} \ln f(x) = \lim\limits_{y \to +\infty} -\dfrac{\ln y}{y} = 0$.

Donc : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = e^0 = 1$.

REMARQUE :

On veillera à ne pas conclure hâtivement dans les cas de limites se présentant sous la forme « 1^∞ » (exercice résolu **II**) « 0^0 » (exercice résolu **III**) ou encore « ∞^0 ».

Exercices d'application

16. Étudier les limites de la fonction f définie par $f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$, en $+\infty$, en $-\infty$, en 0 à droite, et en 0 à gauche.

17. On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = x[\ln(x+1) - \ln x].$$

Étudier la limite de f en $+\infty$. $\left(\text{On remarquera que } x + 1 = x\left(1 + \dfrac{1}{x}\right).\right)$

18. Étudier les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha}$;

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x+1}{x}}$;

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$;

d) $\lim\limits_{x \to +\infty} x\, e^x$;

e) $\lim\limits_{x \to e} \dfrac{\ln x - 1}{x - e}$;

f) $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{1-x}$.

4. EXEMPLE D'ÉTUDE DE FONCTION

Exercice résolu

Soit à étudier la fonction f définie par $f(x) = e^{1/x}$.

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$.

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{1/x} = e^0 = 1$,

$\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{1/x} = e^0 = 1$,

$\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$, donc $\lim\limits_{x \to 0^+} e^{1/x} = +\infty$,

$\lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{1}{x} = -\infty$, donc $\lim\limits_{x \to 0^-} e^{1/x} = 0$.

Pour tout réel non nul x, on a :

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} e^{1/x}.$$

La fonction f est donc décroissante sur tout intervalle de son ensemble de définition.
Pour étudier la demi-tangente à gauche en zéro, considérons :

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - 0}{x - 0} = \frac{e^{1/x}}{x} = \frac{1}{x} e^{1/x}.$$

Pour x strictement négatif $\ln\left(-\frac{1}{x}e^{1/x}\right) = \ln\left(-\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x}$

$$= -\frac{1}{x}\left[\frac{\ln\left(-\frac{1}{x}\right)}{-\frac{1}{x}} - 1\right].$$

Si $y = -\frac{1}{x}$, alors $\lim\limits_{x \to 0^-} y = +\infty$ et $\lim\limits_{y \to +\infty} \frac{\ln y}{y} = 0$, donc :

$$\lim_{x \to 0^-} -\frac{1}{x}\left[\frac{\ln\left(-\frac{1}{x}\right)}{-\frac{1}{x}} - 1\right] = -\infty.$$

Il en résulte que $\lim\limits_{x \to 0^-} \ln(-\varphi(x)) = -\infty$, donc :

$$\lim_{x \to 0^-} (-\varphi(x)) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0^-} \varphi(x) = 0.$$

La demi-tangente à gauche en zéro est donc l'axe des abscisses (figure 9).

Figure 9 ►

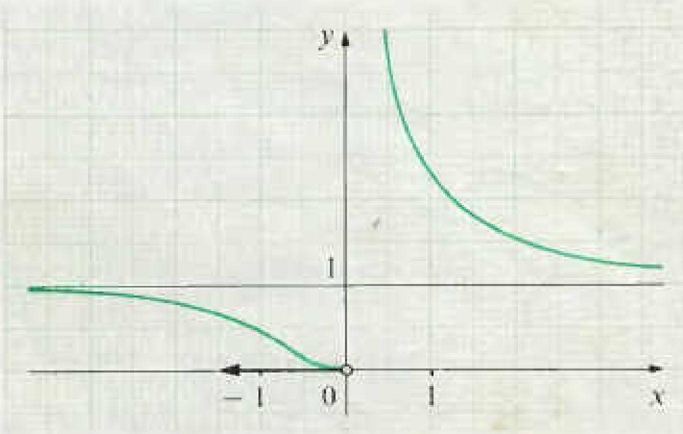


Tableau de variation :

x	$-\infty$		0			$+\infty$
$f'(x)$		$-$	‖		$-$	
$f(x)$	1	↘	0 ‖ $+\infty$		↘	1

Exercice d'application

19. Étudier la fonction f définie par :

a) $f(x) = x \ln x$;

b) $f(x) = x\, e^{-x}$;

c) $f(x) = e^{\frac{x-1}{x^2}}$.

EXERCICES ET PROBLÈMES

ÉQUATIONS ET SYSTÈMES

*Dans les exercices **1** à **9**, on demande de résoudre les équations définies par :*

1. $x \in \mathbb{R}$ et $e^{4x+2} - \dfrac{e^2}{e^{4x+2}} = e^2 - 1.$

2. $x \in \mathbb{Q}_+$ et $2^{3x+1} = 8^{5x-3}.$

3. $x \in \mathbb{Q}_+$ et $3^{4x} = 9^{\frac{8x-5}{8x-8}}.$

4. $x \in \mathbb{R}$ et $4e^{-5x} + 3e^{-3x} - e^{-x} = 0.$

5. $x \in \mathbb{R}$ et $e^{\ln(1-x^2)} = -2x + 1.$

6. $x \in \mathbb{R}$ et $(x^2 - 1)e^{\ln(x-2)} = \ln e^{x+1}.$

7. $x \in \mathbb{R}$ et $2^x + \dfrac{6}{2^x} = 5.$

8. $x \in \mathbb{R}$ et $7^{x+\frac{4}{3}} - 5^{3x} = 2(7^{x+\frac{1}{3}} + 5^{3x-1}).$

9. $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et $5^{\sin x} + \dfrac{2}{5^{\sin x}} = 3.$

10. Discuter, suivant les valeurs du paramètre réel a, l'existence de solutions pour le système :

$$\begin{cases} e^x e^{2y} = a, \\ 2xy = 1, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2. \end{cases}$$

Résoudre complètement dans le cas $a = \sqrt{e^5}$.

11. Prouver que, quel que soit l'entier naturel non nul n, et le réel a strictement supérieur à 1 : $e^{a^n} \geqslant a^{ne}$.

12. Prouver que pour tout x de $]0,1[$: $2^x < x + 1$.

FONCTIONS CONTINUES SUR UN INTERVALLE

*Dans les exercices **13** à **18**, on demande de résoudre à 10^{-3} près les équations définies dans $\mathbb{R}$ par :*

13. $x^3 + x + 1 = 0.$

14. $x - \cos x = 0.$

15. $2x^4 + 3x^2 - 7x + 1 = 0.$

16. $x^2 - \sin x = 0.$

17. $2^x - 2x = 0.$

18. $e^{x-1} - \ln(x + 1) = 0.$

19. Soit f une fonction définie et continue sur $[0, 1]$ et telle que $f\langle[0, 1]\rangle \subset [0, 1]$.
1° Démontrer qu'il existe un réel x_0 de l'intervalle $[0, 1]$ tel que $f(x) = x$.
2° Supposons qu'en outre f soit dérivable sur $]0, 1[$ et telle que, pour tout x de $]0, 1[$, on ait $|f'(x)| < 1$. Prouver qu'alors le réel x_0 est unique. Montrer par un contre-exemple que ce n'est pas toujours le cas quand la condition n'est pas remplie.

20. Soit f une fonction définie et continue sur $[0, 1]$, telle que $f(0) = f(1)$. Démontrer que, pour tout entier non nul n, il existe un réel x_0 de l'intervalle $[0, 1]$ tel que :

$$f(x_0) = f\left(x_0 + \frac{1}{n}\right).$$

21. Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$. Soit $x_1, x_2, \ldots, x_n$, n valeurs de cet intervalle. Prouver qu'il existe un élément c de $[a, b]$ tel que :

$$f(c) = \frac{1}{n}[f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_n)].$$

FONCTIONS RÉCIPROQUES

*Dans chacun des cas ci-dessous (exercices **22** à **27**), montrer que la fonction envisagée admet, sur un intervalle que l'on précisera, une fonction réciproque que l'on déterminera.*

22. $f(x) = \sqrt{4 + 2x^2}.$

23. $f(x) = \dfrac{x}{2} + \sqrt{\dfrac{1}{4}x^2 - 1}.$

24. $f(x) = 2 + \sqrt[3]{x}.$

25. $f(x) = \dfrac{1 - \sqrt{1 + 4x}}{1 + \sqrt{1 + 4x}}.$

26. $\sqrt[3]{1 + \sqrt{1 + x}} + \sqrt[3]{1 - \sqrt{1 + x}}$

($y = \sqrt[3]{X}$ signifie que $X^3 = y$).

27. $f(x) = \ln(1 + x^2).$

28. Démontrer que, quels que soient les réels a, b, c strictement positifs, et quel que soit le réel d, la fonction $[x \mapsto ax^5 + bx^3 + cx + d]$ admet sur $\mathbb{R}$ une fonction réciproque.

29. Soit les fonctions g et h définies par :

$$g(x) = x + \frac{1}{x} \quad ; \quad h(x) = a^x \quad (a > 0 \quad \text{et} \quad a \neq 1).$$

Déterminer la fonction $f = g \circ h$. Admet-elle une fonction réciproque?

30. Soit f une fonction numérique continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$, telle que $f \circ f$ soit injective. Démontrer que f est injective et que $f \circ f$ est strictement croissante.

31. Démontrer les propriétés suivantes :

a) $\forall x \in [-1, 1]$, $\arcsin(-x) = -\arcsin x$.
b) $\forall x \in [-1, 1]$, $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$.
c) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\arctan(-x) = -\arctan x$.
d) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{arccot}(-x) = \pi - \operatorname{arccot} x$.

32. Démontrer les propriétés suivantes :

a) $\forall x \in [-1, 1]$, $\arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}$.

b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\qquad \arctan x + \operatorname{arccot} x = \dfrac{\pi}{2}$.

c) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\qquad \arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} = \dfrac{\pi}{2}$.

d) $\forall x \in \mathbb{R}_-^*$, $\qquad \arctan x + \arctan \dfrac{1}{x} = -\dfrac{\pi}{2}$.

33. Étudier, sur l'intervalle $[0, 1]$, la fonction $f = [x \mapsto x^4 - 2x^2]$ et sa fonction réciproque f^{-1}.

34. Étudier, sur l'intervalle $[0, 1]$, la fonction $f = \left[x \mapsto \dfrac{2x+1}{x+1}\right]$ et sa fonction réciproque f^{-1}.

35. On donne la fonction f telle que $f(x) = x \sin x$ et $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.
a) Montrer que f admet une fonction réciproque, f^{-1}.
b) Étudier la dérivabilité de f et calculer la dérivée de f lorsqu'elle existe.
c) Étudier la dérivabilité de f^{-1} et calculer la dérivée de f^{-1} lorsqu'elle existe.
d) Construire sur un même graphique, le repère étant orthonormal, les courbes représentatives de f et de f^{-1}.

36. *1°* Étudier la fonction f telle que :

$$f(x) = 2\cos x - \cos 2x.$$

2° Soit F la fonction définie par :

$$x \in \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right], \quad F(x) = 2\cos x - \cos 2x.$$

La fonction F est la restriction de f à $\left[\dfrac{\pi}{3}, \pi\right]$.
a) Démontrer que F admet une fonction réciproque G, dont on précisera l'ensemble de définition et les propriétés.
b) Étudier la courbe représentative de G dans un repère orthonormal.
c) Calculer les valeurs de G et de sa dérivée pour x élément de l'ensemble $\left\{-\sqrt{2}, -\dfrac{1}{2}, 1\right\}$.

37. *1°* Démontrer que, pour tout nombre réel x, on a : $-1 < \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} < 1$.
Étudier la fonction numérique f, qui est une application, de $\mathbb{R}$ dans $]-1, +1[$, définie par $f(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$.
Construire sa courbe dans un repère orthonormal.
2° Démontrer que f est une bijection. Pour x donné dans $]-1, +1[$, calculer $f^{-1}(x)$.

38. *a)* Étudier la variation de la fonction f, définie dans $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ par :

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}.$$

b) Calculer $f(x) + f(-x)$ et en déduire une propriété géométrique de la courbe représentative de la fonction f. Construire cette courbe.

c) Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque, f^{-1}. Expliciter cette fonction sous la forme $y = f^{-1}(x)$.

39. Soit f la restriction à $\left]-\dfrac{\pi}{2}, +\dfrac{\pi}{2}\right[$ de la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \tan x - x$.
Définir la fonction dérivée de f, en déduire le sens de variation de f et montrer que f est une bijection de $\left]-\dfrac{\pi}{2}, +\dfrac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$. Soit F la fonction réciproque de f.
Construire, dans un repère orthonormal, les représentations graphiques de f et F.

PUISSANCES

40. Soit les fonctions $f = [x \mapsto \sqrt[q]{x^p}]$ et $g = [x \mapsto \sqrt[p]{x^q}]$, où p et q sont des entiers non nuls. Vérifier que $f = g^{-1}$.

41. Classer, par ordre de grandeur croissante, les nombres suivants :

$$\sqrt[3]{28}, \quad \sqrt[4]{15}, \quad \sqrt{13}, \quad \sqrt[9]{80}, \quad \sqrt[12]{100}.$$

42. En utilisant l'identité :

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2),$$

transformer l'écriture $A = \dfrac{1}{\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{3}}$ en une écriture équivalente à dénominateur entier.

43. Simplifier l'expression :

$$\frac{a^3 - 2a^{1/2}b^{3/4} - a^{5/2}b^{1/3} + 2b^{13/12}}{a^{1/2} - b^{1/3}}.$$

44. Démontrer que la relation $x^{2/3} + y^{2/3} = z^{2/3}$ implique la relation :

$$(x^2 + y^2 - z^2)^3 + 27x^2y^2z^2 = 0.$$

45. Calculer les nombres :

a) $x = \dfrac{\sqrt[5]{4}\sqrt{8}\left(\sqrt[5]{\sqrt[3]{4}}\right)^2}{\sqrt{\sqrt{2}}}$. $\qquad$ *b)* $x = \dfrac{\sqrt[3]{9}\sqrt{\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{3}}}{\sqrt[5]{27\sqrt{6}}}$.

c) $x = \dfrac{\sqrt{4}\sqrt{8}\left(\sqrt[3]{\sqrt{4}}\right)^2}{\sqrt[3]{\sqrt{2}}}$. $\qquad$ *d)* $x = \dfrac{\sqrt[15]{3}\sqrt[3]{9}(\sqrt{9})^3}{\sqrt[4]{27}\left(\sqrt{\sqrt{3}}\right)^2}$.

ÉTUDES DE FONCTIONS

Dans les exercices **46** *à* **51**, *on demande d'étudier et de représenter graphiquement la fonction f :*

46. $f(x) = (2 - x)\,e^x$. $\qquad$ **47.** $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

48. $f(x) = e^{\frac{1}{\cos x}}$. $\qquad$ **49.** $f(x) = \dfrac{e^x}{|x - 1|}$.

50. $f(x) = e^{\frac{1}{x-1}}$ $\qquad$ **51.** $f(x) = \dfrac{e^x + 2}{1 - 3\,e^x}$.

Déterminer les primitives sur $\mathbb{R}$ des fonctions définies dans les exercices **52** *à* **57** *:*

52. $[x \mapsto e^{3x}]$. **53.** $[x \mapsto x\, e^{x^2}]$.

54. $\left[x \mapsto \dfrac{e^x}{1+e^x}\right]$. **55.** $[x \mapsto \cos x\, e^{\sin x}]$.

56. $[x \mapsto x\, e^{\sqrt{x}}]$. **57.** $[x \mapsto (ax^2+bx+c)\, e^{2x}$.

58. Étudier pour n et p rationnels positifs, les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln x)^n}{x^p}$; *b)* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^n}{e^{px}}$;

c) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln x)^n}{e^{px}}$; *d)* $\lim\limits_{x \to 0} x^n(\ln|x|)^p$;

e) $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n\, e^{px}$; *f)* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^{px}-1}{x^n}$.

59. Soit la fonction f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \sqrt{e^x - e^{2x}}.$$

1° Quel est son ensemble de définition?

2° Trouver la limite de $\dfrac{e^x - 1}{x}$ quand x tend vers 0.

En déduire la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ quand x tend vers 0 par valeurs négatives.

3° Étudier la variation de f et tracer sa courbe représentative C. Quelle est la tangente à la courbe C au point O origine des axes?

60. Étudier les deux fonctions réelles f et g suivantes, de la variable réelle x :

$$f : \; x \mapsto \ln|e^x - 1| \quad \text{et} \quad g : \; x \mapsto (e^x + 1).$$

Tracer les courbes représentatives F et G dans un repère orthonormal. Montrer que la première bissectrice est axe de symétrie pour $F \cup G$.

61. *1°* Résoudre l'équation : $x \in \mathbb{R} \quad e^{\frac{1}{x}} - 2 = 0$.

2° x_0 étant la solution de l'équation précédente, on désigne par $\mathbb{R}_1$ l'ensemble des nombres réels positifs, dont on a exclu le nombre x_0. On considère alors la fonction f définie sur $\mathbb{R}_1$ de la façon suivante :

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{2}{e^{\frac{1}{x}} - 2}, \text{ pour tout } x \text{ non nul de } \mathbb{R}_1.$$

Étudier la variation de la fonction f. La fonction f est-elle continue à droite de 0?

Construire la courbe représentative C de la fonction f dans un plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On précisera la demi-tangente à la courbe C pour $x = 0$.

62. Étudier la fonction numérique, de la variable réelle x, définie par :

$$f(x) = x - \frac{1}{2}\ln|2e^x - 1|.$$

On pourra écrire : $2e^x - 1 = 2e^x\left(1 - \dfrac{1}{2}e^{-x}\right)$.

Construire, dans un plan rapporté à un repère orthonormal, la courbe représentant la variation de cette fonction (on tracera les asymptotes de cette courbe).

63. Soit f l'application, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$f(x) = \ln\left[\frac{1+e^x}{2}\right].$$

1° Étudier la variation de la fonction f.

2° Déterminer l'application f, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, vérifiant, pour tout x, l'égalité $\ln[g(x)] = f(x) - x$.

3° On désigne par C la courbe représentative de f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Déduire de la question *2°* l'existence d'une droite asymptote à C non parallèle à (Ox). Construire C.

64. *1°* Étudier la variation de la fonction f définie par :

$$x \mapsto f(x) = e^x + x(\ln x - 1 - e).$$

On pourra préciser le signe de $f''(x)$ pour étudier le signe de $f'(x)$.

2° Construire, dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, l'unité de longueur étant le centimètre, la courbe C représentant la fonction f.

3° Soit $g(x) = x^2 \ln x - x$. Calculer $g'(x)$. En déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}_+^*$.

65. Soit un réel α et un entier naturel non nul n. On considère la fonction f_n définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$f_n(x) = n^\alpha x^2\, e^{-nx^2}$$

1° Étudier la variation de f_n.

2° Soit M_n le point représentatif du maximum de f_n. On suppose $\alpha < 1$. Quel est l'ensemble des points M lorsque n varie. Sur quelle courbe Γ_α se situent-ils?

66. *1°* Soit $f(x) = \dfrac{1}{2}(e^x - e^{-x}) - x$.

En étudiant la variation de la fonction f, démontrer que, pour tout réel strictement positif u : $\dfrac{1}{2}(e^u - e^{-u}) > u$.

2° Soit n un entier strictement positif.

a) Étudier les fonctions g et h définies par :

$$g(x) = e^{\frac{x^2}{n}} - 1 - \frac{x^2}{n} \quad ; \quad h(x) = e^{-\frac{x^2}{n}} - 1 + \frac{x^2}{n}.$$

b) Prouver que $g(x) \geqslant h(x)$.

c) En supposant $n = 10$, $x = 10^{-1}$, calculer $f(x) - h(x)$ à 10^{-8} près.

3° Déduire de ce qui précède que, pour tout réel x tel que $0 < x \leqslant \sqrt{n}$:

$$\left(1 - \frac{x^2}{n}\right)^n \leqslant e^{-x^2} \leqslant \left(1 + \frac{x^2}{n}\right)^{-n}.$$

67. *1°* Étudier la variation de la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = x^n\, e^{-x} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$.

2° En déduire que, quel que soit le réel x strictement positif :

$$e^x \geqslant \left(\frac{x}{n}\right)^n.$$

3° Étudier les limites en $+\infty$ de $\left[x \mapsto \dfrac{e^x}{x}\right]$ et $\left[x \mapsto \dfrac{e^x}{x^n}\right]$.

68. On considère la fonction f_m définie pour x réel par $f_m(x) = e^x - mx$, m étant un paramètre réel positif.
Soit C_m le graphique de f_m par rapport à un repère orthonormé.
1° Étudier la variation de la fonction f_m. Démontrer que, quel que soit m, la courbe C_m admet une asymptote dont on trouvera l'équation. Déterminer les coordonnées du point M correspondant au minimum de la fonction f_m.
2° Trouver, quand m varie, l'équation de l'ensemble Γ des points M et construire l'ensemble Γ.

69. On considère la fonction f de la variable réelle x :

$$f = \left[x \mapsto \frac{\ln x}{x}\right].$$

1° Étudier la variation de f. Construire, relativement à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe C d'équation $y = \dfrac{\ln x}{x}$.
2° En remarquant que f peut s'écrire uu', déterminer une fonction primitive, F, de la fonction f.
3° *a*) Étudier l'ensemble de définition et la dérivée de la fonction g définie par $g(x) = \ln\left|\ln|\ln|x||\right|$
b) Résoudre l'équation $g(x) = 0$.

70. *1°* Résoudre l'inéquation définie par : $\ln|x| < 1$.
2° On considère la fonction f d'une variable réelle définie comme suit :

$$\begin{cases} y = f(x) = 2x - x\ln|x| & \text{pour } x \neq 0 \\ f(0) = 0. \end{cases}$$

Étudier la continuité de la fonction f, puis sa variation.
(Pour l'étude à l'origine, on pourra poser $x = \dfrac{1}{X}$, où X tend vers l'infini.)
3° Dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, construire la courbe représentant la variation de f. Préciser la symétrie, la tangente au point d'abscisse zéro, les branches infinies.

71. Soit f la fonction définie pour x réel par : $f(x) = (1 - x)e^x$.
1° *a*) Étudier la variation de f et les représenter dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
b) Déterminer les réels a et b tels que la fonction F définie par $F(x) = (ax + b)e^x$ soit une primitive de f.
2° Représenter graphiquement la fonction g :
a) $g(x) = |1 - x|e^x$; *b*) $g(x) = |f(x)|$;
c) $g(x) = f(|x|)$; *d*) $g(x) = (1 - x)e^{-|x|}$.

72. Soit, pour tout m réel, la fonction f_m définie par : $f_m(x) = x^{mx}$.
1° Étudier suivant les valeurs de m, la variation de f_m.
2° *a*) Étudier la variation de la fonction φ définie par : $\varphi(x) = x(1 + \ln x)^2$.
Représenter graphiquement φ dans un repère orthonormal.
b) En déduire le nombre des points d'inflexion de la courbe C_m représentative de f_m.
3° Démontrer que les courbes C_m contiennent deux points fixes A et B.
4° Tracer les courbes C_{-2}, C_0, C_2, C_{e^2}.

73. *1°* Représenter graphiquement la fonction exponentielle de base 2.
2° A l'aide de transformations géométriques simples, déduire du *1°* le tracé des courbes représentatives des fonctions :

a) $[x \mapsto 2^{x-1}]$; *b*) $\left[x \mapsto \dfrac{1}{12} 2^{\frac{x}{2}}\right]$;
c) $[x \mapsto 2^{|x|}]$; *d*) $[x \mapsto 1 - 2^{x-2}]$;
e) $\left[x \mapsto \dfrac{1}{3} 2^{\frac{x-1}{2}} + 1\right]$.

SUITES

74. Considérons la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Soit, d'autre part, la suite (v_n) définie par : $v_n = \ln u_n$.
1° Démontrer que la suite (v_n) converge. Donner sa limite.
2° En déduire que la suite (u_n) converge. Quelle est sa limite?

75. Démontrer que pour tout entier naturel supérieur à 8 : $n^{\sqrt{n+1}} > (n + 1)^{\sqrt{n}}$.

76. On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}}.$$

En étudiant la fonction g définie par $g(x) = x^{\frac{1}{x}}$, déterminer la limite en $+\infty$ de la suite (u_n). Quel est le plus grand terme de la suite (u_n)?

77. *1°* Soit $f(x) = \ln \sin x$. Construire une suite (u_n) telle que $(f(u_n))$ diverge.
En déduire que f n'est pas bornée sur son ensemble de définition.
2° Soit $g(x) = 2^{x \sin x}$. Construire deux suites (u_n) et (v_n) telles que $(g(u_n))$ diverge vers $+\infty$, et $(g(v_n))$ converge vers zéro. Que peut-on en conclure pour la fonction g?

FONCTIONS HYPERBOLIQUES

78. **A** — Soit $\mathcal{A}$, l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
1° Soit $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ les ensembles des applications respectivement paires et impaires de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Démontrer que les lois définies dans $\mathcal{A}$ munissent les parties $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$ de $\mathcal{A}$ d'une structure d'espace vectoriel réel.
2° Déterminer $\mathcal{P} \cap \mathcal{I}$, intersection des ensembles $\mathcal{P}$ et $\mathcal{I}$.

3° Soit F un élément quelconque de $\mathcal{A}$. On considère les deux éléments p_F et i_F de $\mathcal{A}$ définis par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad p_F(x) = \frac{1}{2}[F(x) + F(-x)],$$

et : $$i_F(x) = \frac{1}{2}[F(x) - F(-x)].$$

Démontrer que : $p_F \in \mathcal{P}$ et que : $i_F \in \mathcal{I}$; en déduire que tout élément de $\mathcal{A}$ est, de manière unique, la somme d'un élément de $\mathcal{P}$ et d'un élément de $\mathcal{I}$.

B — Dans cette question, on considère le cas particulier où F est la fonction exponentielle de base e et l'on désigne par ch et sh les deux applications p_F et i_F associées à F.

1° Étudier les variations des fonctions :

$$\text{ch} : x \mapsto \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \quad \text{et} \quad \text{sh} : x \mapsto \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}).$$

2° Déterminer :

$$\lim_{x \to +\infty}\left(\text{ch}\, x - \frac{1}{2}e^x\right) \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty}\left(\text{sh}\, x - \frac{1}{2}e^x\right).$$

Tracer sur un même graphique les courbes C et S d'équations cartésiennes :

$$C : \quad y = \text{ch}\, x \quad \text{et} \quad S : \quad y = \text{sh}\, x.$$

3° Déduire du **B** — *1°* l'existence d'une application, sh^{-1}, réciproque de sh.
Déterminer $\text{sh}^{-1}\, a$. Pour cela, on pourra résoudre l'équation : $x \in \mathbb{R}, \quad \text{sh}^{-1}\, x = a.$

4° Prouver que la restriction de la fonction ch à $\mathbb{R}_+$ admet une application réciproque ch^{-1} que l'on déterminera.

5° Étudier les dérivées des fonctions ch^{-1} et sh^{-1}.

6° Représenter graphiquement ch^{-1} et la restriction de sh^{-1} à $\mathbb{R}_+$.

7° Étudier et représenter graphiquement la fonction th définie par : $$\text{th}\, x = \frac{\text{sh}\, x}{\text{ch}\, x}.$$

8° Prouver que la fonction th admet une fonction réciproque th^{-1}, que l'on déterminera.

9° Étudier la dérivée de la fonction th^{-1}, et représenter graphiquement la fonction th^{-1}.

C — *1°* Prouver que, pour tout réel x :

$$\text{ch}^2\, x - \text{sh}^2\, x = 1.$$

Comparer avec une relation analogue mettant en jeu les fonctions cos et sin.

2° Exprimer $\text{ch}\,(x + y)$ et $\text{sh}\,(x + y)$ en fonction de $\text{ch}\, x$, $\text{ch}\, y$, $\text{sh}\, x$ et $\text{sh}\, y$. Comparer avec les formules analogues concernant sinus et cosinus.

ÉQUATIONS FONCTIONNELLES

79. **A** — On considère les fonctions dérivables non nulles de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, vérifiant :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad f(x)f(y) = f(x + y).$$

1° Montrer que, pour tout réel x : $f(x) \neq 0$.

2° Montrer que $f(0) = 1$.

3° Montrer que, pour tout réel x, $f(x)$ est strictement positif.

4° Montrer que, pour tout entier relatif n et pour tout réel x : $$f(nx) = [f(x)]^n.$$

5° Soit $a = f(1)$. Prouver que, quel que soit le rationnel $r = \frac{p}{q}$: $$f(r) = a^r.$$

6° Soit x un réel. On considère une suite (u_n) de rationnels, de limite x (par exemple la suite des valeurs décimales approchées par défaut de x). En utilisant ce qui précède, et la continuité de la fonction exponentielle de base a, prouver que, nécessairement $f(x) = a^x$.

7° Conclure.

B — Soit k un réel non nul. On considère l'ensemble E des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = kf(x) \quad \text{et} \quad f(0) = 1.$$

1° Prouver que E est non vide.

2° Soit $g(x) = h(x)\, e^{kx}$.
Prouver que $g(x)$ est élément de E seulement si $h(x) = 1$.

3° Conclure.

80. On suppose qu'il existe une fonction continue unique f, définie sur $\mathbb{R}$, vérifiant :

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x + y) + x + y = [f(x) + x][f(y) + y], \tag{1}$$

et : $$f(1) = e - 1. \tag{2}$$

1° En posant $x = y = \frac{t}{2}$, vérifier que :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(t) + t \geqslant 0, \tag{3}$$

et démontrer que, s'il existe un réel x_0 tel que $f(x_0) + x_0 = 0$, alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) + x = 0. \tag{4}$$

En déduire, par considération de (2), que $f(x) + x$ n'est jamais nul et établir que $f(0) = 1$.

2° Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad f(nx) = [f(x) + x]^n - nx. \tag{5}$$

Posant $y = -x$ dans (1), calculer $f(-x) - x$ et établir que (5) reste vérifiée pour tout réel x et tout entier relatif n.

3° Calculer, en fonction du nombre e et de l'entier q, l'expression $f\left(\frac{1}{q}\right) + \frac{1}{q}$.
Démontrer, en utilisant (5), que l'on a :

$$\forall x \in \mathbb{Q}, \quad f(x) = e^x - x. \tag{6}$$

4° On admet, dans la suite, que la fonction f ainsi déterminée sur les rationnels est encore définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = e^x - x.$$

(On vérifiera que (1) a lieu.)

a) Trouver, lorsque x tend vers $+\infty$ et lorsque x tend vers $-\infty$, les limites de $\frac{e^x}{x} - 1$.

En déduire, dans les mêmes conditions, les limites de $f(x)$.

Étudier et représenter graphiquement la variation de f, en soignant particulièrement l'étude des branches infinies.
Que peut-on dire de la tangente à la courbe représentative au point $x = 1$?
b) Évaluer l'aire $\mathcal{A}(X)$ de la portion de plan comprise entre la courbe, son asymptote et les droites d'équations $x = 0$ et $x = X$ $(X < 0)$. Que peut-on dire de $\mathcal{A}(X)$ lorsque X tend vers $-\infty$?
5° a) Démontrer que l'on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ 1 + x \leqslant e^x$. (7)
b) On pose : $P_n(a) = (1 + a)(1 + a^2) \ldots (1 + a^n)$, pour $a > 0$.
Vérifier que $P_n(a)$ est une fonction croissante de n satisfaisant à :

$$0 < P_n(a) < e^{a\frac{1-a^n}{1-a}} \quad (n \geqslant 0). \tag{8}$$

Démontrer enfin que, pour $0 < a < 1$, il existe des nombres M dépendant de a et vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad P_n(a) < M. \tag{9}$$

Préciser, en fonction de a, une valeur possible de M.

81. **A** — On note F l'ensemble des applications f *continues* de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\begin{cases} \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 & f(x + y)f(x - y) = (f(x)f(y))^2 \\ f(0) \geqslant 0 \end{cases} \tag{1}$$

1° Vérifier que la fonction $x \mapsto 2^{-x^2}$ appartient à F.
2° Écrire ce que devient la relation (1) dans chacun des cas suivants :

$$x = 0,\quad y = 0,\quad x = y.$$

Quelles sont les valeurs possibles de $f(0)$?
3° Montrer que $f(0) = 0$ si, et seulement si, f est l'application nulle notée $\tilde{0}$.
4° On suppose que f s'annule pour une valeur $a \neq 0$.
a) On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n = \frac{a}{2^n}.$$

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite.
b) Montrer par récurrence sur l'entier n que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) = 0$ (utiliser la question 2).
En déduire alors que $f(0) = 0$.
5° On suppose $f \neq \tilde{0}$. Calculer $f(0)$.
Montrer que f ne s'annule jamais et que, pour tout x réel, $f(x) > 0$. Montrer que f est une fonction paire.

B — Soit G l'ensemble des fonctions g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par :

$$\exists f \in F \setminus \{\tilde{0}\},\quad \forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = \ln(f(x)).$$

1° Montrer à l'aide de la relation (1) vérifiée par f, que tout élément g de G vérifie la relation :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\quad g(x + y) + g(x - y) = 2[g(x) + g(y)]. \tag{2}$$

2° Déterminer $g(0)$ et montrer que g est une fonction paire.
3° Montrer à l'aide de la relation (2) que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \forall x \in \mathbb{R},\quad g(nx) = n^2 g(x). \tag{3}$$

Montrer que la relation (3) reste vérifiée pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{Z}$.

4° Montrer que :

$$\forall r \in \mathbb{Q},\quad \forall x \in \mathbb{R},\quad g(rx) = r^2 g(x)$$

$$\left(\text{on pourra poser } r = \frac{p}{q},\ \text{où } p \in \mathbb{Z} \text{ et } q \in \mathbb{N}^*\right).$$

On pose $g(1) = \lambda$. En déduire que $\forall r \in \mathbb{Q},\ g(r) = \lambda r^2$. En déduire $f(r)$ pour tout $r \in \mathbb{Q}$.

C — On admet dans toute la suite que les fonctions de F distinctes de $\tilde{0}$ sont les fonctions de la forme f_λ, où λ est un paramètre quelconque, définies par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^2,\quad f_\lambda(x) = e^{\lambda x^2}.$$

On note C_λ la courbe représentative de f_λ dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
1° Étudier la variation de f_λ suivant les valeurs de λ.
Pour quelles valeurs de λ la courbe C_λ admet-elle une asymptote?
2° Montrer que, si $\lambda > 0$, il existe sur C_λ deux points A_λ et B_λ en lesquels la tangente passe par l'origine.
Exprimer les coordonnées de A_λ et B_λ en fonction de λ.
Quel est l'ensemble formé par les points A_λ et B_λ lorsque λ varie dans $\mathbb{R}_+^*$?

FONCTIONS PUISSANCES

82. **A** — *1°* A tout réel m, on associe la fonction f_m de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}_+^*$ définie par $f_m(x) = x^m$
Étudier, suivant les différentes valeurs de m, la variation de cette fonction. On appelle C_m la courbe représentative de f_m dans un plan P rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Déterminer l'équation de la tangente à C_m au point d'abscisse 1.

2° Construire sur une même figure C_{-1}, C_0, $C_{1/2}$, C_1 et C_2.

3° Montrer que, pour $m \neq 0$, la fonction f_m possède une fonction réciproque égale à $f_{1/m}$. Montrer qu'il existe une application affine du plan qui transforme la courbe C_m en $C_{1/m}$.

B — A tout réel m on associe la fonction g_m de $\mathbb{R}^*$ vers $\mathbb{R}_+^*$ définie par :

$$g_m(x) = e^{m|\ln|x||}.$$

1° Montrer que g_m est paire.

2° Déterminer un intervalle I de $\mathbb{R}$ tel que les restrictions de g_m et de f_m à I soient égales.

3° Étudier, suivant les différentes valeurs de m, les variations de la fonction g_m.

4° g_m est-elle continue en $x = 1$? Est-elle dérivable en ce point?

5° Donner, sur des figures différentes, dans des plans rapportés à des repères orthonormaux, les allures des courbes représentatives des fonctions g_{-2}, g_{-1}, $g_{-1/2}$, g_0, $g_{1/2}$, g_1 et g_2.

6° Comparer, pour tout x réel non nul, $g_m\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et $g_m(x)$.

PROBLÈMES DIVERS

83. Pour tout nombre réel, α, strictement positif, on désigne par f_α la fonction numérique, de variable réelle, définie par la relation $f_\alpha(x) = \dfrac{\ln(\alpha x)}{x}$ et par C_α la courbe représentative de f_α dans un repère orthonormal.

A — *1°* Étudier la variation de f_1 et construire C_1. Plus généralement, étudier la variation de f_α, préciser les asymptotes à la courbe C_α et déterminer son intersection avec l'axe (Ox).

2° *a)* Déterminer une primitive F_α de f_α sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) On pose, pour tout réel a tel que $0 < a < \dfrac{e}{\alpha}$:

$$\mathcal{A}_\alpha(a) = F_\alpha\left(\frac{e}{\alpha}\right) - F_\alpha(a).$$

Étudier la limite en zéro de $\mathcal{A}_\alpha(a)$.

B — *1°* Soit a un nombre réel strictement positif. Déterminer, suivant les valeurs de a, le nombre de solutions de l'équation $a^x = x$, avec $x \in \mathbb{R}$.
(On pourra utiliser la variation de f_1.)

2° En utilisant de même la variation de f_1, montrer qu'il existe un couple (b, c), et un seul, d'entiers naturels non nuls tels que $b^c = c^b$, avec : $b < c$. Déterminer ce couple.

C — *1°* Soit α_1 et α_2 deux nombres réels strictement positifs et λ un nombre réel différent de 1. Pour tout nombre réel x strictement positif, on note M_1 et M_2 les points des courbes C_{α_1} et C_{α_2} admettant x pour abscisse et l'on désigne par M le barycentre des points M_1 et M_2 affectés respectivement des coefficients 1 et $-\lambda$.
Démontrer que l'ensemble décrit par M lorsque x parcourt $]0, +\infty[$ est l'une des courbes C_α.

2° Soit t un nombre réel strictement positif. Écrire l'équation de la tangente T_α à la courbe C_α au point d'abscisse t.
Démontrer que, lorsque α varie, t restant fixe, les droites T_α passent par un point fixe, I_t. Déterminer l'ensemble H des points I_t quand t parcourt $]0, +\infty[$, et construire H.

84. On admet que l'ensemble $\mathcal{F}$ des fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
Soit A, B, C les fonctions numériques définies sur $\mathbb{R}$ par $A(x) = x\,e^x$, $B(x) = e^x$, $C(x) = e^{-x}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.
Soit E le sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}$ engendré par A, B, C, c'est-à-dire l'espace vectoriel des fonctions f, de la forme $f = aA + bB + cC$, où a, b, c sont des nombres réels.

1° Montrer que toute fonction f appartenant à E est dérivable, et que sa dérivée appartient à E.
Soit α, β, γ des nombres réels. Déterminer les fonctions f de E telles que $f(0) = \alpha$, $f'(0) = \beta$, $f''(0) = \gamma$. En déduire que les fonctions A, B, C sont linéairement indépendantes. Quelle est la dimension de E?

2° Pour tout nombre réel λ, soit f_λ la fonction $f_\lambda(x) = x\,e^x + \lambda\,e^{-x}$.
Étudier, selon les valeurs de λ, les limites à l'infini de la fonction f_λ, ainsi que celles de la fonction :

$$x \mapsto \frac{f_\lambda(x)}{x}.$$

(Distinguer $\lambda < 0$, $\lambda = 0$, $\lambda > 0$.)
Étudier la variation de la fonction f_0 et tracer sa courbe représentative.
Quelle est la variation de la fonction g définie par :

$$g(x) = \frac{1}{2e^2}\, f_0[2(x+1)]?$$

En s'aidant de la fonction g, étudier la variation de la fonction f_λ selon les valeurs de λ. Tracer la courbe représentative de la fonction f_λ, pour $\lambda = -\dfrac{1}{2e^3}$ et pour $\lambda = 1$.

3° Montrer que l'application D de E dans E, définie par $D(f) = f'$, pour toute f de B, est une application linéaire bijective. Déterminer les coefficients réels a, b, c de façon que la fonction $f = aA + bB + cC$ ait pour dérivée une fonction donnée $h = rA + sB + tC$, appartenant à E.

4° Montrer que si $ac \neq 0$, la fonction

$$f = aA + bB + cC$$

et les fonctions f' et f'' sont linéairement indépendantes. Exprimer dans ce cas f''' comme combinaison linéaire de f, f', f'', et vérifier que la relation ainsi obtenue entre f, f', f'' et f''' reste valable pour tout élément f de E.

85. A — On considère les expressions suivantes où a et b sont des réels :

$$y_1 = \frac{1}{a-b}\ln\frac{b}{a}, \qquad y_2 = \frac{1}{a-b}\ln\frac{b^2}{a^2}.$$

1° A tout couple (a, b), on associe le point M du plan, de coordonnées cartésiennes (a, b) dans un repère orthonormal.
a) Déterminer le sous-ensemble E_1 du plan dans lequel y_1 est défini. (On construira un graphique où seront indiquées sans ambiguïté les régions qui conviennent.)
b) Déterminer le sous-ensemble E_2 du plan dans lequel y_2 est défini.
c) Déterminer le sous ensemble E'_1 du plan dans lequel y_1 est positif.
d) Déterminer le sous-ensemble E'_2 du plan dans lequel y_2 est positif.

2° y_1 admet-il une limite quand b tend vers a? Si oui, laquelle?

B — *1°* Résoudre chacune des équations définies ci-dessous :

$$x \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad a\,e^{ax} = b\,e^{bx} \quad (a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R});$$
$$x \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad a^2 e^{ax} = b^2 e^{bx} \quad (a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}).$$

2° Soit la fonction $f_{a,b}$ qui, au nombre réel t, associe le nombre réel $e^{at} - e^{bt}$.
Comparer les graphes de $f_{a,b}$, $f_{b,a}$ et $f_{-a,-b}$.

3° Étudier les fonctions $f_{a,0}$ et $f_{0,b}$. Représentations graphiques.

4° Étudier, dans le seul cas où $a > b > 0$, la fonction $f_{a,b}$ et la représenter graphiquement.

CROISSANCE EXPONENTIELLE

86. En une seconde, un échantillon de radium perd $1{,}37 \times 10^{-9}$ pour cent de sa masse.
Au bout de combien de temps la masse de l'échantillon sera-t-elle divisée par deux?

87. Les tissus vivants contiennent du carbone 14 radioactif dont la demi-vie est de 5568 ans. (C'est la période au bout de laquelle la moitié du carbone 14 figurant dans l'échantillon a disparu.)
1° Exprimer en fonction du temps la proportion de carbone 14 figurant dans un échantillon.
2° Quel est l'âge d'un échantillon contenant les $\frac{4}{5}$ de la quantité initiale de carbone 14?

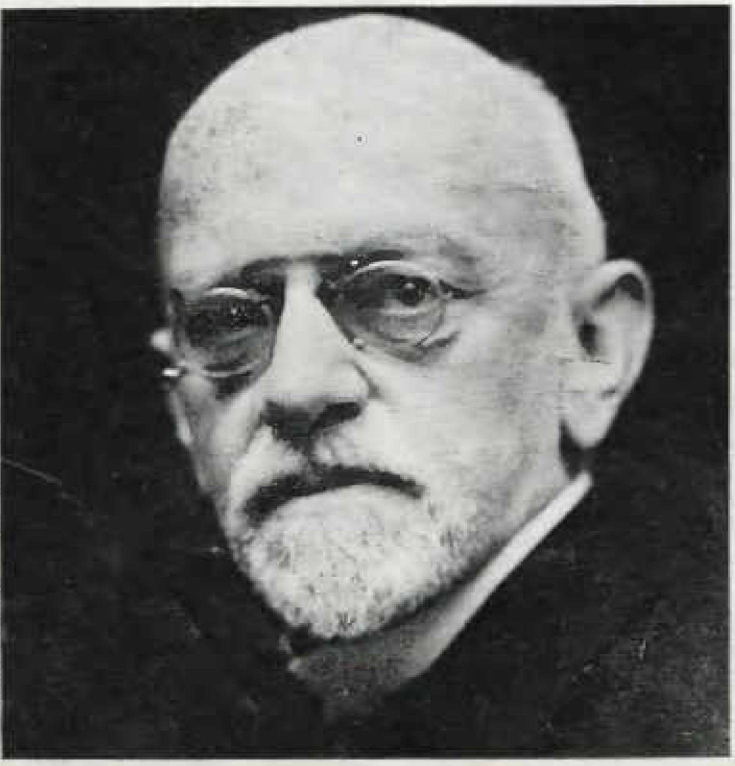
88. Soit un corps à la température T, plongé dans un milieu à la température constante T_0. La loi du refroidissement de Newton exprime que le taux de variation de la température avec le temps est à chaque instant proportionnel à $T - T_0$. Sachant qu'un corps porté à 100° et plongé dans une enceinte à 20° est ramené à 50° au bout de 10 min, combien de temps faudra-t-il pour que la température du corps soit ramenée à 30°, à 25°?

89. On considère une population de bactéries, que l'on observe toutes les heures. On constate que, au bout de 3 heures, la population contient 10000 individus, et au bout de 4 heures, 20000. Au bout de combien de temps la population contiendra-elle 100000 individus? (On suppose que la population évolue en milieu ouvert, c'est-à-dire que rien ne s'oppose à sa multiplication.)

90. Un réservoir d'une capacité de 100 litres contient initialement une solution d'eau salée, la quantité de sel dissous étant 5 kg. Le réservoir est alimenté en eau pure par un robinet qui débite 10 litres par minute, le trop plein de solution se déverse à la même vitesse. La solution est maintenue homogène par une agitation permanente.
1° Quelle est la quantité de sel contenue dans le réservoir t minutes après l'ouverture du robinet?
2° Au bout de combien de temps restera-t-il 1 kg de sel dans le réservoir?

91. Une lame de verre absorbe 4 % de la lumière qui la traverse. Quelle est la proportion de la lumière incidente qui traverse 20 lames identiques superposées? Combien faut-il de lames pour absorber 40 % de la lumière incidente?

92. Un capital est placé à intérêts composés, au taux annuel de 10 %, capitalisation annuelle. Quelle est la valeur de l'approximation obtenue en supposant la capitalisation instantanée (c'est-à-dire en interprétant la variation du capital comme exponentielle)?



Ullstein Bilderdienst – Berlin West.

David HILBERT, mathématicien allemand (1862-1943).
A propos des équations intégrales, il a introduit les espaces de fonctions et de suites de carré sommable.

CHAPITRE 3

CALCUL INTEGRAL. PRIMITIVES

I – ACTIVITÉS PRÉLIMINAIRES

Aires

• Nous admettrons que, si P est un plan, il existe une application φ qui associe à certaines parties de P un réel positif, appelé son aire, et telle que :

– Tout rectangle R de longueur a et de largeur b admet une aire :

$$\varphi(R) = ab.$$

– La réunion et l'intersection de deux parties de P admettant une aire admettent également une aire :

$$\varphi(A \cup B) = \varphi(A) + \varphi(B) - \varphi(A \cap B).$$

– L'ensemble vide a une aire nulle : $\varphi(\emptyset) = 0$.

– Si $A \subset B$, alors : $\varphi(A) \leqslant \varphi(B)$.

– Si B est image de A par une isométrie $i\,(B = i\langle A \rangle)$ et si A admet une aire, alors A et B ont même aire :

$$\varphi(A) = \varphi(i\langle A \rangle).$$

• La notion d'aire est dans une large mesure intuitive. Nous ne la préciserons pas plus. La détermination des aires a été depuis longtemps une préoccupation essentielle des mathématiciens.

Les domaines plans dont on sait déterminer l'aire simplement ne sont pas nombreux ; c'est le cas d'un rectangle, d'un triangle, d'un trapèze. Dans d'autres cas, on peut partager le domaine plan étudié en une réunion finie de rectangles ou de triangles deux à deux disjoints. On obtient alors l'aire cherchée en effectuant la somme des aires de chacun des domaines élémentaires ainsi obtenus.

Lorsqu'un domaine plan n'est pas d'une forme permettant un tel découpage en domaines rectangulaires, on a imaginé d'encadrer l'aire cherchée par les aires de domaines rentrant dans la catégorie ci-dessus. Pour augmenter la précision, dans cette méthode, on est conduit à effectuer des encadrements de l'aire cherchée par les aires de domaines comportant de plus en plus de domaines élémentaires, chacun d'entre eux étant de plus en plus petit. L'aire cherchée apparaît comme la limite d'une suite, dont chaque terme est une somme d'aires élémentaires.

★ Activité 1

1° Rappeler l'aire d'un trapèze de hauteur h, et dont les bases mesurent respectivement a et b.

2° On considère la fonction f définie par : $f(x) = 1 - x^2$.

Soit C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal.

Représenter soigneusement la courbe C pour x compris entre -1 *et* 1 (on pourra utiliser une feuille de papier millimétré).

3° Soit A le point de C d'abscisse 0 *et soit B le point de C d'ordonnée* 0.

Soit N le point de C d'abscisse $\frac{1}{2}$. *Calculer l'aire du polygone OANB.*

4° *Écrire les équations des tangentes* T_A, T_B *et* T_N *à la courbe C aux points A, B et N.*
Soit I le point d'intersection de T_A *et* T_N, *soit I′ le point d'intersection de* T_N *et* T_B.
Déterminer les coordonnées de I et I′. En déduire l'aire du polygone OAII′B (figure 1).

5° *Déduire des 3° et 4° un encadrement de l'aire S.*

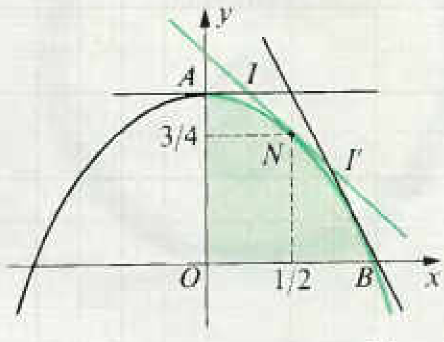


Figure 1

6° *Mêmes questions qu'aux 3°, 4° et 5°, en utilisant les points* M_1, M_2, M_3 *de C ayant pour abscisses respectives* $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ *et* $\frac{3}{4}$.

7° *Mêmes questions qu'aux 3°, 4° et 5°, avec les points* $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6, P_7$ *de C dont les abscisses sont* $\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{3}{8}, \frac{1}{2}, \frac{5}{8}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}$.

★ Activité 2

On considère une fonction numérique f, définie, continue et croissante sur l'intervalle [0, 1]. *Soit C la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal. Soit A l'aire du domaine plan délimité par les axes, la courbe C et la droite d'équation* $x = 1$, *cette aire étant mesurée avec, pour unité, l'aire du carré construit sur les vecteurs unités du repère* (*figure* 2).

a) *Prouver, en s'inspirant de la figure 2, que :*

$$\frac{1}{n}\left(f(0) + f\left(\frac{1}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n-1}{n}\right)\right) < A < \frac{1}{n}\left(f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + f(1)\right).$$

b) *Déterminer A comme limite commune à deux suites lorsque* $f(x) = 3x$. $\left(\textit{On rappelle que } 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.\right)$

c) *Même question qu'au* **b)**, *avec* $f(x) = x^2$.
On rappelle que :

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

d) *Même question qu'au* **b)**, *avec :* $f(x) = x^2 + x$.

e) *Même question qu'au* **b)**, *avec :* $f(x) = 3x^2 + x + 2$.

f) *Quelles modifications doit-on apporter au* **a)** *dans le cas d'une fonction f décroissante sur l'intervalle* [0, 1]?
Appliquer à $f(x) = -2x + 2$, *puis à* $f(x) = -x^2 - 1$.

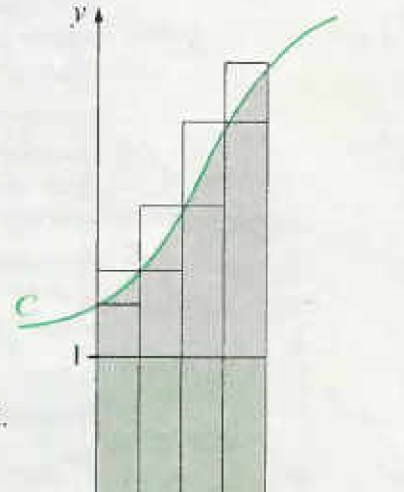


Figure 2

• Des méthodes de décomposition, parfois très sophistiquées sont longtemps intervenues, non seulement dans des calculs d'aires, mais aussi dans des calculs de

volumes, de moments, etc. C'est l'apparition (très tardive) de la notion de primitive, et l'éclaircissement de ses rapports avec les problèmes précédents qui rendit beaucoup plus aisé ce genre de calcul. Cependant cette notion de primitive ne résoud pas tous les problèmes car la recherche de primitives n'est pas un problème simple, et sa résolution ne peut pas être rendue aussi automatique que la recherche de dérivées.
Le rapport entre l'intégrale et la mesure des aires, ou des volumes, n'est qu'un des multiples aspects des rapports entre l'intégration et la mesure. C'est ce rapport très riche qui explique l'intervention du calcul intégral dans les domaines les plus divers et parfois même les plus inattendus (physique, probabilités,...).

• Dans le cas où le domaine dont on cherche l'aire est délimité par l'axe des abscisses, et la courbe représentative d'une fonction f sur un intervalle $[a, b]$, l'aire cherchée dépend de la fonction f. Le but de l'activité **3** ci-dessous est d'explorer cette dépendance dans le cas de fonctions simples.

★ Activité 3

1° On considère la fonction f définie par : $f(x) = k$. Sa courbe représentative est une droite parallèle à l'axe des abscisses.
a) *On suppose que k est un réel positif (figure 3). Déterminer l'aire $F(x)$ du rectangle OMPK. Quel rapport existe-t-il entre les fonctions F et f?*
b) *Quelle modification doit-on apporter aux résultats du* **a)** *lorsque k est un réel négatif (figure 4)?*
c) *Dans chacun des deux cas ci-dessus, déterminer l'aire $F_1(x)$ du rectangle AMPB. Calculer $F_1(x)$ au moyen de la fonction F.*

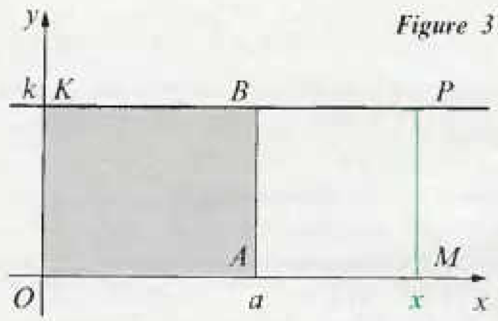


Figure 3

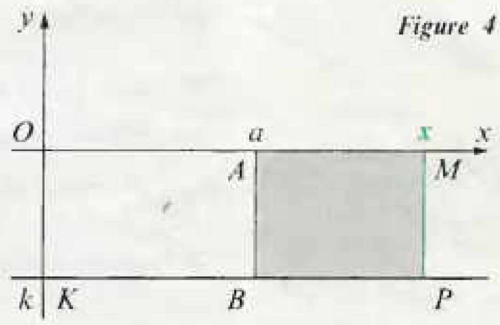


Figure 4

d) *Reprendre les questions* **a)**, **b)**, **c)** *ci-dessus dans le cas des figures 5 et 6.*

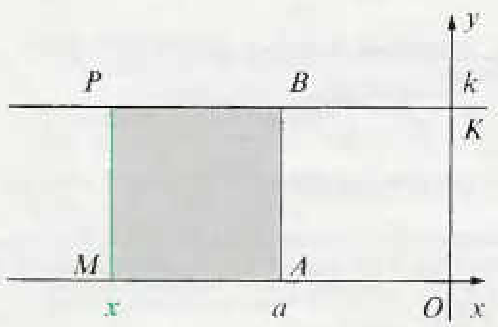


Figure 5

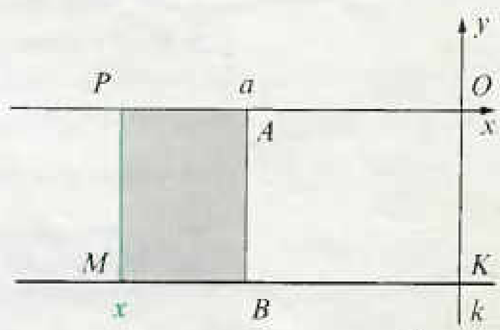


Figure 6

2° Reprendre la question 1°, avec $f(x) = kx$, dans les quatre cas envisagés. Les points O et K sont confondus, et les rectangles de la question 1° deviennent dans cette question des triangles ou des trapèzes.

3° Reprendre la question 1°, avec $f(x) = kx + b$

II – INTÉGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE ENTRE DEUX RÉELS

1. DÉFINITION

Soit f une fonction numérique définie et continue sur un intervalle fermé borné $I = [a, b]$. On a admis en classe de Première que f admet sur I au moins une primitive F ; c'est-à-dire qu'il existe une fonction numérique F, définie et dérivable sur I, et telle que, pour tout réel x de I, on ait :

$$F'(x) = f(x).$$

On sait également que si G est une autre primitive de f sur I, alors il existe un réel C tel que, pour tout élément x de I :

$$G(x) = F(x) + C.$$

Il en résulte que :

$$G(b) - G(a) = F(b) - F(a).$$

DÉFINITION 1

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $I = [a, b]$, et soit F une primitive de f sur I. Le réel $F(b) - F(a)$ est indépendant du choix de la primitive de f. On l'appelle *intégrale de a à b, de la fonction f*. On note :

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(t)\,dt = [F(x)]_a^b.$$

REMARQUES :

1° On lit $\int_a^b f(t)\,dt$: « somme de a à b de $f(t)\,dt$ », ou « intégrale de a à b de $f(t)\,dt$ ».
On rencontre encore la notation :

$$\int_a^b f(t)\,dt = F(x)|_a^b.$$

2° Dans ces notations, les lettres t et x n'interviennent pas explicitement. On aurait tout aussi bien :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(u)\,du.$$

Les variables t, x, u ci-dessus sont des variables muettes, de même d'ailleurs que dans les notations $[F(t)]_a^b$ ou $F(x)|_a^b$.

3° Pour x élément de $[a, b]$, la fonction Φ définie par :

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt = F(x) - F(a)$$

est telle que $\Phi'(x) = f(x)$. C'est l'unique primitive de f sur $[a, b]$ qui s'annule pour $x = a$.

4° Si f est une fonction définie et continue sur un intervalle quelconque I, elle est définie et continue sur tout intervalle fermé borné $[a, b]$, où a et b sont deux éléments quelconques de I.

Exemples :

Quels que soient les réels a et b, on a :

$$\int_a^b dt = b - a \quad ; \qquad \int_a^b x\,dt = xb - xa = x(b-a) \quad ;$$

$$\int_a^b t \, \mathrm{d}t = \left[\frac{x^2}{2}\right]_a^b = \frac{b^2 - a^2}{2} \quad ; \quad \int_a^b \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} = [2\sqrt{x}]_a^b = 2(\sqrt{b} - \sqrt{a}) \quad (a > 0 \quad \text{et} \quad b > 0).$$

On a également :

$$\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln x; \qquad \int_0^1 \mathrm{e}^t \, \mathrm{d}t = [\mathrm{e}^x]_0^1 = \mathrm{e} - 1;$$

$$\int_0^\pi \cos t \, \mathrm{d}t = [\sin x]_0^\pi = 0; \qquad \int_0^\pi \sin t \, \mathrm{d}t = [-\cos x]_0^\pi = 2.$$

- **Exercice d'application**

1. Calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \sin t \, \mathrm{d}t;$

b) $\displaystyle\int_2^3 \left(t^2 + t + \sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}} + \frac{1}{t} - \frac{1}{t^2}\right) \mathrm{d}t;$

c) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (1 + \tan^2 t) \, \mathrm{d}t;$

d) $\displaystyle\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} t \, \mathrm{e}^{t^2} \, \mathrm{d}t.$

Premières conséquences

Il résulte de la définition que, quels que soient les réels a et b :

- $\displaystyle\int_a^a f(t) \, \mathrm{d}t = 0;$
- $\displaystyle\int_b^a f(t) \, \mathrm{d}t = -\int_a^b f(t) \, \mathrm{d}t;$
- $\displaystyle\int_a^b 0 \, \mathrm{d}t = 0.$

2. PROPRIÉTÉS

a. Relation de Chasles

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I contenant trois réels a, b et c. Alors, si F est une primitive de f sur I,

$$\int_a^b f(t) \, \mathrm{d}t = F(b) - F(a),$$

$$= F(b) - F(c) + F(c) - F(a).$$

Soit :

$$\int_a^b f(t) \, \mathrm{d}t = \int_a^c f(t) \, \mathrm{d}t + \int_c^b f(t) \, \mathrm{d}t.$$

THÉORÈME 1

Si f est une fonction continue sur un intervalle I, alors, quels que soient les éléments a, b et c de I :

$$\int_a^b f(t) \, \mathrm{d}t = \int_a^c f(t) \, \mathrm{d}t + \int_c^b f(t) \, \mathrm{d}t.$$

REMARQUES :

1° On constatera l'analogie de la propriété ci-dessus, avec la relation de Chasles pour les vecteurs, où au lieu du vecteur $\overrightarrow{ab}$ figurerait l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$.

On remarquera de même que : $\int_a^b f(t)\,dt + \int_b^a f(t)\,dt = 0.$

et que :
$$\int_c^d f(t)\,dt = \int_a^d f(t)\,dt - \int_a^c f(t)\,dt.$$

2° La formule de Chasles permet de définir l'intégrale sur $[a, b]$ d'une fonction continue par intervalles sur $[a, b]$, c'est-à-dire une fonction f telle qu'il existe une suite finie, strictement croissante, d'éléments $c_1, c_2, ..., c_n$ de $]a, b[$, avec $a = c_0$ et $b = c_{n+1}$, tels que f soit continue sur tout intervalle $[c_i, c_{i+1}]$. On a alors :
$$\int_a^b f(t)\,dt = \sum_{i=0}^{n} \int_{c_i}^{c_{i+1}} f(t)\,dt.$$

Exercice d'application

2. Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_{-3}^{5} (|x-1| + |x| + |x+1|)\,dx$;

b) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} \sin |t|\,dt.$

b. Linéarité

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$, soit F et G des primitives respectives de f et g sur $[a, b]$, et soit λ et μ des réels.

On sait que $\lambda F + \mu G$ est une primitive de $\lambda f + \mu g$. On a donc :
$$\begin{aligned}\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)\,dt &= (\lambda F + \mu G)(b) - (\lambda F + \mu G)(a)\\ &= \lambda F(b) + \mu G(b) - \lambda F(a) - \mu G(a)\\ &= \lambda[F(b) - F(a)] + \mu[G(b) - G(a)]\\ &= \lambda \int_a^b f(t)\,dt + \mu \int_a^b g(t)\,dt.\end{aligned}$$

THÉORÈME 2

Si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$, alors, quels que soient les réels λ et μ :
$$\int_a^b (\lambda f + \mu g)(t)\,dt = \lambda \int_a^b f(t)\,dt + \mu \int_a^b g(t)\,dt.$$

REMARQUE :

Le théorème **2** ci-dessus signifie que, si $\mathcal{F}$ est l'espace vectoriel des fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$, alors l'application $\mathfrak{I}$ de $\mathcal{F}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :
$$\mathfrak{I}(f) = \int_a^b f(t)\,dt$$
est une application linéaire de $\mathcal{F}$ dans $\mathbb{R}$. (On dit encore une forme linéaire sur $\mathcal{F}$.)

Exercice d'application

3. Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (2 \sin t + 3 \cos t)\,dt$;

b) $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 t\,dt.$

c. Comparaison

• Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, et soit F une primitive de f sur $[a, b]$.

Supposons que, pour tout réel x de l'intervalle $[a, b]$, $f(x)$ soit positif. La fonction F est alors croissante sur $[a, b]$, puisqu'elle y admet une dérivée positive. Par suite, si $a \leqslant b$, alors $F(a) \leqslant F(b)$. Il en résulte alors que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt = F(b) - F(a)$ est positive.

THÉORÈME 3	**Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ tel que $a \leqslant b$. Si f est positive sur $[a, b]$ (c'est-à-dire si, pour tout x de $[a, b]$, le réel $f(x)$ est positif), alors l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ est un réel positif.**

• Soit f et g des fonctions définies et continues sur l'intervalle $[a, b]$, avec $a \leqslant b$. Supposons que, pour tout réel x de $[a, b]$, on ait $f(x) \leqslant g(x)$. La fonction h définie par $h(x) = g(x) - f(x)$ est donc positive sur $[a, b]$. Il en résulte que :

$$\int_a^b h(t)\,dt \geqslant 0, \quad \text{c'est-à-dire :} \quad \int_a^b [g(t) - f(t)]\,dt \geqslant 0.$$

Soit encore :

$$\int_a^b g(t)\,dt \geqslant \int_a^b f(t)\,dt.$$

THÉORÈME 4	**Soit f et g des fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$ tel que $a \leqslant b$. Si pour tout x de $[a, b]$ on a $f(x) \leqslant g(x)$, alors on a : $\int_a^b f(t)\,dt \leqslant \int_a^b g(t)\,dt$.**

• Exercices d'application

4. Prouver que, si $x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right]$, alors $\cos x \in [0{,}866,\ 1]$.
En déduire un encadrement de l'intégrale :

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos t\,dt.$$

5. Prouver que, si $x \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, alors $\frac{2\sqrt{2}}{\pi} x \leqslant \sin x \leqslant x$.

En déduire un encadrement de l'intégrale :

$$\int_{0{,}3}^{0{,}7} \sin t\,dt.$$

6. Montrer que, si f est une fonction continue et positive sur un intervalle $[a, b]$, alors, quels que soient les réels c et d de cet intervalle $(a \leqslant c \leqslant d \leqslant b)$, alors :

$$\int_c^d f(t)\,dt \leqslant \int_a^b f(t)\,dt.$$

★ Activité

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ tel que $a < b$, et telle que, pour tout x de $[a, b]$, on ait $f(x) \geqslant 0$. Supposons en outre qu'il existe un élément x_0 de $[a, b]$ tel que $f(x_0) > 0$.

1° On suppose que $x_0 \in]a, b[$.

a) *Prouver qu'il existe un réel strictement positif tel que :*

$$]x_0 - \alpha,\ x_0 + \alpha[\subset]a, b[\quad \text{et} \quad \forall x \in]x_0 - \alpha,\ x_0 + \alpha[,\ f(x) > \frac{f(x_0)}{2}.$$

b) *Commenter et illustrer le* **a**). *En particulier, quel est le rôle du réel* $\frac{f(x_0)}{2}$ *?*

c) *On considère la fonction* g *définie par :*

$$\forall x \in [a, x_0 - \alpha] \quad , \ g(x) = 0;$$
$$\forall x \in]x_0 - \alpha,\ x_0 + \alpha[,\ g(x) = \frac{f(x_0)}{2};$$
$$\forall x \in [x_0 + \alpha,\ b[\quad , \ g(x) = 0.$$

Prouver que, pour tout x *de* $[a, b]$, $f(x) \geqslant g(x)$.

d) *Déduire de ce qui précède que* (voir § **2. a**) Remarque **2°**) :

$$\int_a^{x_0-\alpha} f(t)\,dt \geqslant \int_a^{x_0-\alpha} g(t)\,dt;$$
$$\int_{x_0-\alpha}^{x_0+\alpha} f(t)\,dt \geqslant \int_{x_0-\alpha}^{x_0+\alpha} g(t)\,dt;$$
$$\int_{x_0+\alpha}^{b} f(t)\,dt \geqslant \int_{x_0+\alpha}^{b} g(t)\,dt.$$

e) *En déduire que :* $\int_a^b f(t)\,dt > 0$.

f) *Conclure par un théorème.*

2° *Reprendre ce qui précède dans le cas où* $x_0 = a$, *puis* $x_0 = b$.

3° *En s'inspirant de ce qui précède, prouver que, si* f *est une fonction continue sur un intervalle* $[a, b]$, *avec* $a < b$, *telle que* $\forall x \in [a, b]$, $f(x) \leqslant 0$, *et telle qu'il existe un réel* x_0 *de* $[a, b]$ *pour lequel* $f(x_0) < 0$, *alors* $\int_a^b f(t)\,dt < 0$.

d. Valeur absolue

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$.

Soit f_1 (resp. f_2) la partie positive (resp. négative) de f :

$$\begin{cases} f_1(x) = f(x) \quad \text{et} \quad f_2(x) = 0 & \text{lorsque} \quad f(x) \geqslant 0, \\ f_1(x) = 0 \quad \text{et} \quad f_2(x) = -f(x) & \text{lorsque} \quad f(x) < 0. \end{cases}$$

On a alors, pour tout x de $[a, b]$: $\begin{cases} f(x) = f_1(x) - f_2(x), \\ |f(x)| = f_1(x) + f_2(x). \end{cases}$

Soit $f_1(x) = \frac{1}{2}(|f(x)| + f(x))$, $f_2(x) = \frac{1}{2}(|f(x)| - f(x))$.

Il en résulte que les fonctions f_1 et f_2 sont continues sur l'intervalle $[a, b]$, et que :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b f_1(t)\,dt - \int_a^b f_2(t)\,dt,$$
$$\int_a^b |f(t)|\,dt = \int_a^b f_1(t)\,dt + \int_a^b f_2(t)\,dt.$$

Par conséquent : $\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant \left|\int_a^b f_1(t)\,dt\right| + \left|\int_a^b f_2(t)\,dt\right|.$

Mais, pour tout réel x de $[a, b]$: $f_1(x) \geqslant 0$ et $f_2(x) \geqslant 0$. Donc :

$$\int_a^b f_1(t)\,dt \geqslant 0 \quad \text{et} \quad \int_a^b f_2(t)\,dt \geqslant 0.$$

Par suite :
$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^b f_1(t)\,dt + \int_a^b f_2(t)\,dt.$$

Soit :
$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

THÉORÈME 5

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $[a, b]$. Alors :

$$\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,dt.$$

e. Théorème de la moyenne

Les fonctions les plus simples définies sur un intervalle $[a, b]$ sont les fonctions constantes.

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. On peut se demander s'il existe une fonction constante dont l'intégrale sur $[a, b]$ est égale à l'intégrale sur $[a, b]$ de la fonction f.

La fonction f étant continue sur $[a, b]$ est bornée et atteint ses bornes sur $[a, b]$. Soit $m = \inf\limits_{x \in [a,b]} f(x)$ et $M = \sup\limits_{x \in [a,b]} f(x)$.

Pour tout réel x de $[a, b]$, on a alors $m \leqslant f(x) \leqslant M$.

Il en résulte que (si $a \leqslant b$) : $\int_a^b m\,dt \leqslant \int_a^b f(t)\,dt \leqslant \int_a^b M\,dt$; c'est-à-dire :

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(t)\,dt \leqslant M(b-a),$$

ou encore :
$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(t)\,dt}{b-a} \leqslant M.$$

Soit : $\mu = \dfrac{\int_a^b f(t)\,dt}{b-a}$, on a :

$$\int_a^b f(t)\,dt = \mu(b-a) = \int_a^b \mu\,dt.$$

Le réel μ apparaît donc comme la valeur d'une fonction constante dont l'intégrale sur $[a, b]$ est égale à l'intégrale sur $[a, b]$ de la fonction f.

DÉFINITION 2

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. *La valeur moyenne* de f sur $[a, b]$ est le nombre : $\mu = \dfrac{\int_a^b f(t)\,dt}{b-a}$.

REMARQUE :

La vitesse moyenne d'un véhicule sur un certain parcours est la vitesse constante qu'il faudrait adopter pour effectuer le même parcours dans le même temps. Le terme de « valeur moyenne » fait référence à cette remarque.

THÉORÈME 6 (Inégalité de la moyenne)

La valeur moyenne d'une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$ est comprise entre les bornes m et M de f sur $[a, b]$.

La fonction f, continue sur l'intervalle $[a, b]$ prend, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, toute valeur comprise entre ses bornes. Il en résulte :

COROLLAIRE

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$. Alors il existe un réel c de l'intervalle $[a, b]$ tel que :

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = f(c).$$

REMARQUE :

Soit $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, où f est continue sur $[a, b]$. Il existe alors un réel c de $[a, b]$ tel que $\frac{F(b) - F(a)}{b - a} = F'(c)$.

Ce résultat est un cas particulier d'un résultat très important (voir chapitre 6).

• Exercices d'application

7. Déterminer la valeur moyenne :

a) de $[x \mapsto \sin x]$ sur $[0, \pi]$;

b) de $[x \mapsto \cos^2 x]$ sur $[0, \pi]$.

8. Encadrer au mieux la différence
$$\ln(n+1) - \ln n,$$
a) pour $n = 2$;
b) pour $n = 10$;
c) pour $n = 100$

3. INTERPRÉTATION GRAPHIQUE

Les activités préliminaires du présent chapitre semblent indiquer un lien entre les primitives d'une fonction continue f sur un intervalle $[a, b]$, et l'aire du domaine plan délimité par la courbe représentative C de la fonction f, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

• Soit une fonction f continue et positive sur un intervalle $[a, b]$ avec $a < b$. Soit C sa courbe représentative dans un repère orthonormal (voir figure 7).

Soit $\mathcal{A}(x)$ l'aire du domaine plan délimité par la courbe C, l'axe des abscisses, et les droites parallèles à Oy, d'abscisses respectives a et x (figure 7).

Soit x_0 un point de $[a, b]$. La fonction f est continue sur $[a, b]$, donc, *a fortiori*, sur l'intervalle $[x, x_0]$. Elle y est donc bornée et y atteint ses bornes.

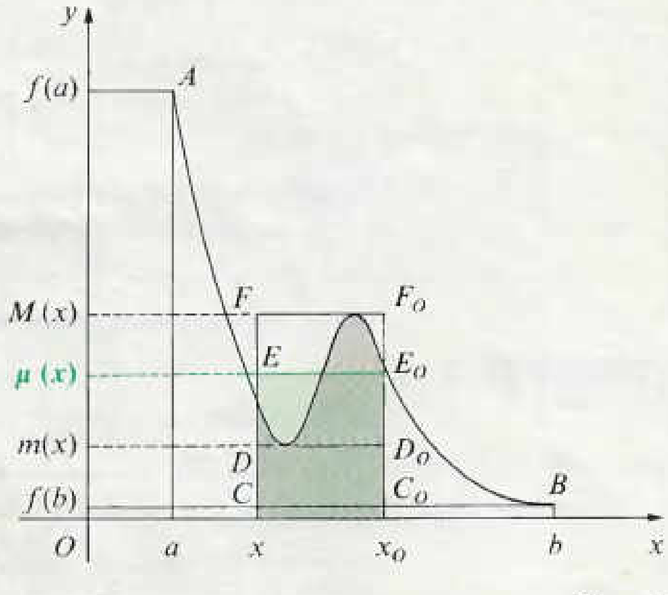


Figure 7

Soient $m(x)$ et $M(x)$ les bornes de f sur l'intervalle $[x, x_0]$.
La différence $A = \mathcal{A}(x_0) - \mathcal{A}(x)$ représente, en valeur absolue, l'aire du domaine plan figuré en grisé sur la figure 7, et le réel positif $\dfrac{A}{x_0 - x} = \mu(x)$ est la longueur du rectangle CEE_0C_0, de largeur $|x_0 - x|$ et dont l'aire est A. (Ce rectangle est hachuré sur la figure 7.)
Compte tenu des définitions, on a : $m(x) \leqslant \mu(x) \leqslant M(x)$.
C'est-à-dire : $m(x) \leqslant \dfrac{\mathcal{A}(x_0) - \mathcal{A}(x)}{x_0 - x} \leqslant M(x)$.
La fonction f étant continue sur l'intervalle $[x, x_0]$, on peut choisir un réel $c(x)$ de l'intervalle $[x, x_0]$ tel que : $\quad f(c(x)) = \dfrac{\mathcal{A}(x_0) - \mathcal{A}(x)}{x_0 - x}$.
Il en résulte que $\lim\limits_{x \to x_0} c(x) = x_0$.
Et, par suite, puisque la fonction f est continue en x_0 : $\lim\limits_{x \to x_0} f(c(x)) = f(x_0)$.

Par conséquent : $\quad \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{\mathcal{A}(x_0) - \mathcal{A}(x)}{x_0 - x} = f(x_0) = \mathcal{A}'(x_0)$.

Or, ceci est vrai pour tout x_0 de l'intervalle $[a, b]$.
Donc la fonction $\mathcal{A}$ est la primitive de f qui s'annule pour $x = a$. D'où

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \mathcal{A}(x).$$

• L'aire d'un domaine plan est un nombre positif. Donc, si la fonction f est négative sur $[a, b]$ (avec $a \leqslant b$), on a : $\quad \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = -\mathcal{A}(x)$.

De même, pour $a \geqslant b$, si f est positive sur $[b, a]$: $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = -\mathcal{A}(x)$,

et si f est négative sur $[b, a]$: $\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = \mathcal{A}(x)$.

• En tout état de cause, on a le résultat suivant :

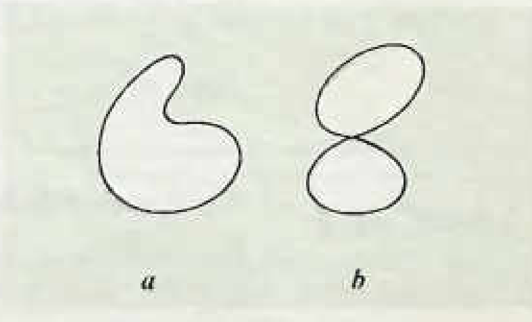
THÉORÈME 7

Soit f une fonction continue et de signe constant sur un intervalle $[a, b]$. Soit A l'aire du domaine plan délimité dans un repère par la courbe représentative de f, l'axe des abscisses, et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$. (L'unité d'aire est l'aire du parallélogramme construit sur les vecteurs unitaires du repère.) On a alors :

$$A = \left| \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \right|.$$

• Pour rendre compte du signe de l'intégrale, introduisons la notion d'aire algébrique.
Nous considérons comme intuitive la notion de courbe simple fermée (figure 8 a) et la notion de courbe fermée non simple (figure 8 b). Nous admettrons qu'une courbe simple fermée partage le plan en deux régions dont l'une, la région intérieure, admet une aire.

Figure 8



Une courbe simple orientée est une courbe simple sur laquelle est défini un « sens de parcours » (notion intuitive). Dans ces conditions, on donne la définition suivante (figure 9) :

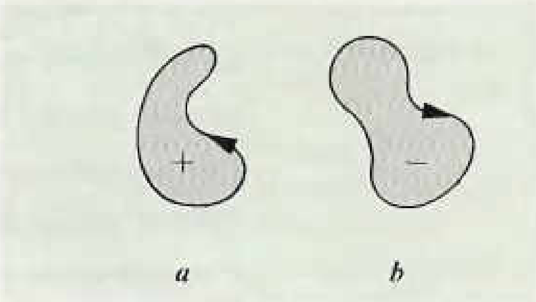


Figure 9

DÉFINITION 3

Soit Γ une courbe simple fermée orientée du plan. *L'aire algébrique* du domaine plan délimité par Γ est un nombre algébrique dont la valeur absolue est l'aire de ce domaine plan, et dont le signe est $+$ si Γ est orienté dans le sens trigonométrique (positif), et $-$ si Γ est orientée dans le sens rétrograde.

Avec cette définition, si f est une fonction continue et de signe constant sur un intervalle $[a, b]$, le sous-ensemble plan associé sur $[a, b]$ dans un repère R à la fonction f est délimité par un contour fermé simple, orienté naturellement par le vecteur $\overrightarrow{AB}$ ($A(a, 0)$, $B(b, 0)$) (figures 10 à 13).
Avec ces conventions, on énonce :

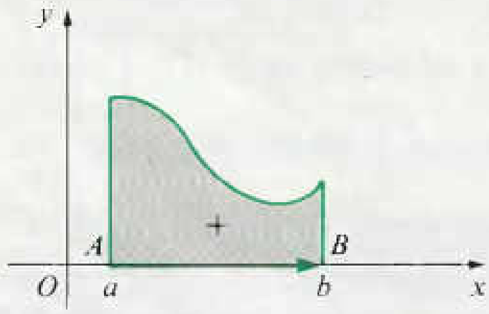


Figure 10

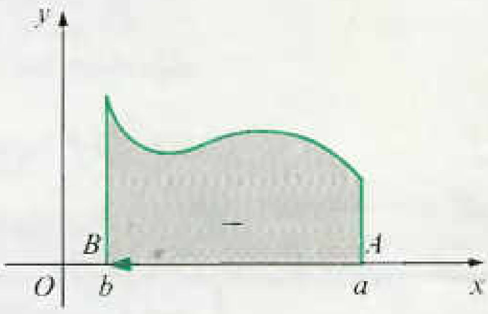


Figure 11

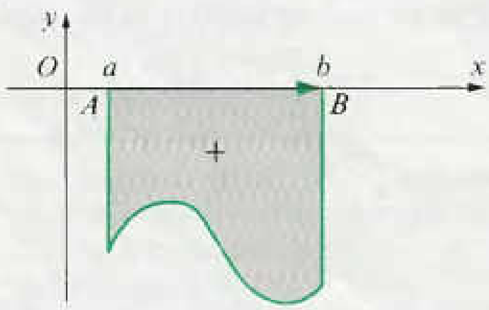


Figure 12

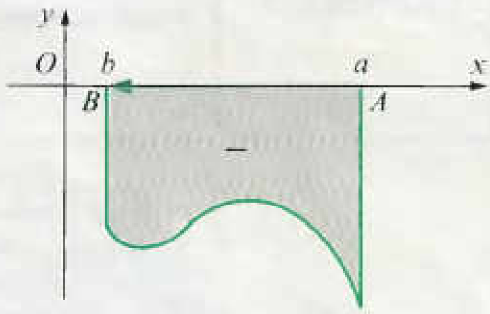


Figure 13

THÉORÈME 8

L'aire orientée du domaine plan associé à la fonction f, continue et de signe constant sur l'intervalle $[a, b]$ est égale à : $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$.

Cas d'une fonction quelconque

Si f est une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, et si elle est de signe constant par intervalles, le nombre $\int_a^b f(t)\,dt$ est une somme algébrique d'aires.

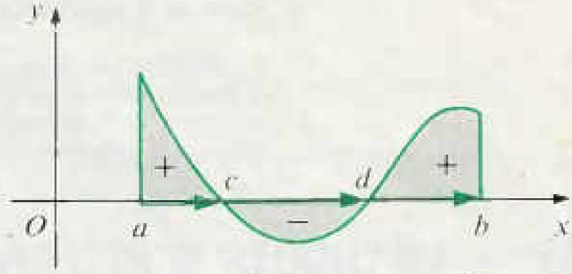


Figure 14

Pour avoir l'aire du domaine plan associé à la fonction f, on partage $[a, b]$ en intervalles sur chacun desquels la fonction f garde un signe constant, on calcule les aires arithmétiques des sous-ensembles plans associés à f dans chacun de ces intervalles, puis on fait la somme (figure 14).

Exercice résolu

Soit $f(x) = x^2 - 1$. Déterminer l'aire du domaine plan associé à la fonction f dans un repère orthonormal d'unité de longueur 2 cm, et sur l'intervalle $[-1, 1]$, puis sur l'intervalle $[-2, 2]$ (figure 15).

Sur l'intervalle $[-1, 1]$, la fonction donnée est négative. L'aire A_1 cherchée est donc (en unités d'aire u) :

$$A_1 = \left|\int_{-1}^{1} (t^2 - 1)\,dt\right| = \left|\left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{-1}^{1}\right| = \frac{4}{3}u.$$

L'unité d'aire valant $2 \times 2 = 4\ \text{cm}^2$:

$$A_1 = \frac{4}{3} \times 4 = \frac{16}{3}\ \text{cm}^2.$$

Sur l'intervalle $[-2, 2]$, on décompose l'aire A cherchée sous la forme :

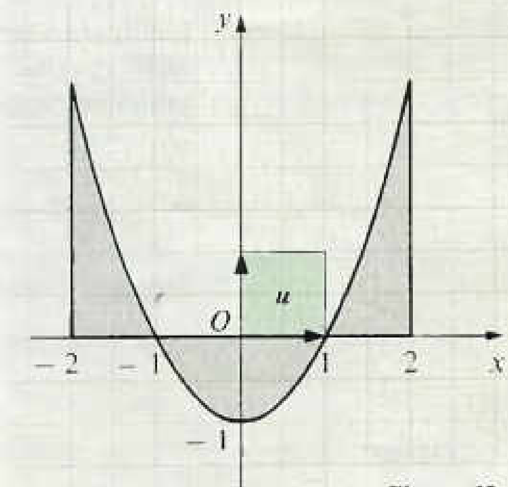


Figure 15

$$A = \left|\int_{-2}^{-1}(t^2 - 1)\,dt\right| + \left|\int_{-1}^{1}(t^2 - 1)\,dt\right| + \left|\int_{1}^{2}(t^2 - 1)\,dt\right|.$$

On a : $\displaystyle\int_{-2}^{-1}(t^2 - 1)\,dt = \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_{-2}^{-1} = \frac{4}{3};$

$$\int_{-1}^{1}(t^2 - 1)\,dt = -A = -\frac{4}{3};$$

$$\int_{1}^{2}(t^2 - 1)\,dt = \frac{4}{3}.$$

Donc : $A = \dfrac{12}{3}u = 4u.$ L'unité d'aire valant $4\ \text{cm}^2$, on a $A = 16\ \text{cm}^2$.

Il est à remarquer que les trois portions de plan constituant le domaine étudié ont la même aire.

Exercice d'application

9. Déterminer l'aire arithmétique du sous-ensemble plan associé sur l'intervalle $[0, 2]$ dans un repère orthonormal $\mathcal{R}$, d'unité 3 cm, à la fonction f telle que :

a) $f(x) = x^3 - x$;
b) $f(x) = 8x^2 - 8x + 1$.
c) $f(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} x\right)$.

III – MÉTHODES D'INTÉGRATION

1. CALCUL EXACT

La valeur exacte d'une intégrale peut être déterminée par différentes méthodes. L'une des plus élémentaires consiste à chercher explicitement une primitive F de f et d'utiliser la formule :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = F(b) - F(a).$$

Les règles de dérivation permettent d'établir des méthodes grâce auxquelles on peut dans certains cas déterminer explicitement une telle primitive. Malheureusement, ces cas sont en pratique très rares. Il est fréquent en effet que l'on sache qu'une primitive existe, mais qu'on ne sache pas l'expliciter.

a. Méthodes élémentaires

L'utilisation des règles élémentaires concernant les intégrales et les fonctions dérivées, et du tableau des primitives usuelles (voir p. 298) permet dans certains cas de déterminer des primitives, et par conséquent de calculer des intégrales.

• **Combinaisons linéaires de fonctions de primitives connues :**
Ce cas est le plus simple, et ne nécessite aucun commentaire.

Exercice résolu

Déterminer une primitive F sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction f définie par :

$$f(x) = \mathrm{e}^{2x} + 5x^2 - 3\sqrt{x} + \frac{1}{x} - \frac{2}{\sqrt{x^3}} + 5\cos 2x.$$

On a : $$f(x) = \mathrm{e}^{2x} + 5x^2 - 3x^{\frac{1}{2}} + x^{-1} - 2x^{-\frac{3}{2}} + 5\cos 2x.$$

On sait que une primitive de e^{kx} est $\dfrac{\mathrm{e}^{kx}}{k}$,

une primitive de x^α est $\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ (pour $\alpha \neq -1$),

une primitive de $\dfrac{1}{x}$ est $\ln x$,

une primitive de $\cos 2x$ est $\dfrac{\sin 2x}{2}$.

On a donc : $$F(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2} + \frac{5}{3}x^3 - \frac{3x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \ln x - \frac{2x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + \frac{5}{2}\sin 2x.$$

C'est-à-dire : $$F(x) = \frac{\mathrm{e}^{2x}}{2} + \frac{5}{3}x^3 - 2\sqrt{x^3} + \ln x + \frac{4}{\sqrt{x}} + \frac{5}{2}\sin 2x.$$

Exercices d'application

10. Déterminer une primitive de la fonction f :

a) $f(x) = 3x - \sin \frac{x}{2} + 5 \cos 3x$;

b) $f(x) = \tan^2 2x$;

c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. (Voir ch. 2, **III**, 4, b.)

11. Calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_{-1}^{3} (2^t - t^2 + 3t - 5\sqrt{t})\, dt$;

b) $\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{4}} (\cos 2t - \sin 3t + \tan^2 5t)\, dt$.

• **Polynômes trigonométriques :**

On sait que toute puissance des fonctions sinus et cosinus peut être transformée en combinaison linéaire des sinus et cosinus de multiples entiers de la variable (voir page 295).

C'est ainsi, par exemple, que :

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}; \qquad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}.$$

Cette opération prend le nom de « linéarisation de polynômes trigonométriques », et peut se mener à bien en utilisant les formules d'Euler (voir volume « Géométrie », page 104) :

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \qquad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i},$$

où i désigne le nombre complexe, tel que $i^2 = -1$.

Lorsqu'un polynôme trigonométrique est linéarisé, on sait en trouver une primitive grâce aux méthodes ci-dessus.

Exercice résolu

Calculer l'intégrale $I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (1 + \cos t + \cos^2 t)\, dt$.

Pour tout réel t, on a :

$$1 + \cos t + \cos^2 t = 1 + \cos t + \frac{1 + \cos 2t}{2} = \frac{3}{2} + \cos t + \frac{1}{2} \cos 2t.$$

Il en résulte que :

$$I = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \left(\frac{3}{2} + \cos t + \frac{1}{2}\cos 2t\right) dt = \left[\frac{3t}{2} + \sin t + \frac{1}{4}\sin 2t\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$$

$$= \left(\frac{3\pi}{2} + \sin \pi + \frac{1}{4}\sin 2\pi\right) - \left(\frac{3\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\sin\frac{2\pi}{2}\right)$$

$$= \frac{3\pi}{2} - \frac{3\pi}{4} - 1 = \frac{3\pi}{4} - 1.$$

Exercices d'application

12. a) Sans utiliser les formules d'Euler, linéariser $\cos^3 x$, $\sin^3 x$, $\cos^4 x$ et $\sin^4 x$.

b) En déduire une primitive de la fonction f définie par :

$$f(x) = \cos^3 x - \sin^3 x + \cos^4 x + \sin^4 x.$$

13. Calculer les intégrales suivantes :

a) $I = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}} (1 + \cos^2 t + \cos^4 t)\, dt$;

b) $I = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (\sin t + \sin^3 t)\, dt$.

- **Reconnaissance de formes usuelles :**

L'étude de la dérivation des fonctions composées a conduit à des formes remarquables de dérivées, qu'il faut savoir reconnaître de façon à déterminer rapidement une primitive de fonctions se présentant sous ces formes.

On sait en particulier que, si u désigne une fonction, et sur un ensemble à préciser, que :

— une primitive de : $\dfrac{u'}{u}$ est $\ln|u|$;

— pour tout réel α non nul, une primitive de $u'[u]^{\alpha-1}$ est : $\dfrac{1}{\alpha}[u]^{\alpha}$;

— une primitive de $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ est $\sqrt{u}$;

— une primitive de $u'\,e^u$ est e^u.

(Voir tableau récapitulatif p. 298.)

Exercice résolu

Déterminer une primitive de la fonction f, dans les cas suivants :

a) $f(x) = \dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-x+1}}$; b) $f(x) = \tan x$; c) $f(x) = \cos x\sqrt{e^{3\sin x}}$.

a) Soit $u(x) = x^2 - x + 1$. On a $f(x) = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} = u'(x)[u(x)]^{-\frac{1}{2}}$.

Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F telle que :

$$F(x) = 2\sqrt{u(x)} = 2\sqrt{x^2-x+1}.$$

b) Soit $u(x) = \cos x$. On a $f(x) = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x} = -\dfrac{u'(x)}{u(x)}$.

Une primitive de f sur un ensemble de définition est la fonction F telle que :

$$F(x) = -\ln|\cos x|.$$

c) On a $f(x) = \cos x\, e^{\frac{3}{2}\sin x}$. Posons $u(x) = \dfrac{3}{2}\sin x$.

Alors $f(x) = \dfrac{2}{3}\,u'(x)\,e^{u(x)}$.

Par suite, une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$ est la fonction F définie par :

$$F(x) = \frac{2}{3}\,e^{\frac{3}{2}\sin x} = \frac{2}{3}\sqrt{e^{3\sin x}}.$$

Exercices d'application

14. Déterminer une primitive de la fonction f, sur un ensemble que l'on précisera :

a) $f(x) = \dfrac{\sqrt{\ln|x|}}{x}$;

b) $f(x) = (x-1)\,e^{x^2-2x+3}$;

c) $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x^2}$.

15. Calculer les intégrales suivantes :

a) $I = \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (\tan t + \tan^3 t)\,dt$;

b) $I = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\tan t} + \tan t\right) dt$.

b. Changement de variable

La formule de dérivation des fonctions composées conduit à une méthode d'intégration.

• Soit g une fonction continue sur un intervalle $[\alpha, \beta]$, et soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, tel que $g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$ et $g\langle[\alpha, \beta]\rangle = [a, b]$.
Si de plus la fonction g' est continue sur $[\alpha, \beta]$, la fonction φ définie par :

$$\varphi(t) = f \circ g(t) \,.\, g'(t)$$

est continue sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$ et y admet donc une primitive. Soit :

$$\Phi(x) = \int_\alpha^x (f \circ g)(t) \,.\, g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

alfa

Soit d'autre part la fonction F définie par :

$$F(x) = \int_a^x f(u)\,\mathrm{d}u.$$

α

La fonction $F \circ g$ est définie et continue sur $[\alpha, \beta]$, et l'on a :

$$(F \circ g)'(x) = g'(x) \,.\, F'(g(x)),$$

c'est-à-dire, puisque $F' = f$:

$$(F \circ g)'(x) = (f \circ g)(x) \,.\, g'(x).$$

Les fonctions Φ et $F \circ g$ admettent donc sur l'intervalle $[\alpha, \beta]$ la même fonction dérivée. Par suite, il existe un réel C tel que, pour tout x de $[\alpha, \beta]$:

$$(F \circ g)(x) = \Phi(x) + C,$$

c'est-à-dire : $\displaystyle\int_a^{g(x)} f(u)\,\mathrm{d}u = \int_a^x (f \circ g)(t) \,.\, g'(t)\,\mathrm{d}t + C.$

Pour $x = \alpha$: $\displaystyle\int_a^{g(\alpha)} f(u)\,\mathrm{d}u = C.$ D'où $C = 0$, puisque $g(\alpha) = a$.

Donc $\displaystyle\int_\alpha^x (f \circ g)(t) \,.\, g'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{g(x)} f(u)\,\mathrm{d}u = \int_{g(\alpha)}^{g(x)} f(u)\,\mathrm{d}u.$

Soit g une fonction continue et dérivable sur un intervalle $[\alpha, \beta]$, et soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, tel que $g(\alpha) = a$, $g(\beta) = b$, et $g\langle[\alpha, \beta]\rangle = [a, b]$. Si de plus la fonction g' est continue sur $[\alpha, \beta]$, alors :

$$\int_\alpha^\beta (f \circ g)(t) \,.\, g'(t)\,\mathrm{d}t = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(u)\,\mathrm{d}u.$$

REMARQUES :

1° La notation différentielle est particulièrement adaptée à l'utilisation du changement de variable. En effet, si l'on pose $u = g(t)$, on a : $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = g'(t)$ soit : $\mathrm{d}u = g'(t)\,\mathrm{d}t$. D'autre part, on a $a = g(\alpha)$ et $b = g(\beta)$. La formule découle tout naturellement de ces notations par remplacement dans $\displaystyle\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$ de u par $g(t)$.

2° L'application pratique de ce théorème se présente sous deux aspects :

• Si la fonction φ dont on cherche une primitive, ou dont on calcule l'intégrale, se présente naturellement, ou après quelques transformations, sous la forme $(f \circ g) \,.\, g'$, et si F est une primitive de f, alors $F \circ g$ est une primitive de φ. Ce mode d'utilisation est simple, mais nécessite la reconnaissance d'une forme de fonction permettant de retrouver une dérivée connue de fonction composée. C'est à proprement parler ce que nous avons rencontré plus haut sous le titre « reconnaissance de formes usuelles ». Mais un tel changement de variable peut rendre des services, même en l'absence de forme reconnue.

• L'utilisation de la formule dans l'autre sens pose des problèmes plus délicats.

Si, pour calculer l'intégrale $\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$, on envisage un changement de variable de la forme : $u = g(t)$, en espérant qu'il sera plus aisé de déterminer une primitive de $(f \circ g)g'$ qu'une primitive de f, il restera à calculer t en fonction de u si l'on veut terminer le calcul d'une primitive, ou simplement à calculer α et β pour terminer le calcul de l'intégrale $\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$.

Ces calculs peuvent se faire aisément lorsque la fonction g possède une fonction réciproque simple.

Nous n'envisagerons systématiquement que le cas où g est une fonction affine, et nous traiterons quelques exemples plus délicats.

Exercice résolu

Calculer $I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan t\,\mathrm{d}t$.

On a $\tan t = \dfrac{\sin t}{\cos t}$. Si l'on pose $u = \cos t$, on a $\mathrm{d}u = -\sin t\,\mathrm{d}t$, et par suite :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin t\,\mathrm{d}t}{\cos t} = \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{-\,\mathrm{d}u}{u} = \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\mathrm{d}u}{u} = [\ln u]_{\frac{1}{2}}^1$$

Donc : $$I = \ln 1 - \ln \frac{1}{2} = \ln 2.$$

Exercice d'application

16. Après avoir reconnu une forme usuelle, utiliser un changement de variable pour calculer les intégrales suivantes :

a) $\displaystyle\int_2^3 \frac{\mathrm{d}t}{t(\ln t)^2}$;

b) $\displaystyle\int_{-1}^b (2t-1)\,\mathrm{e}^{t^2-t+1}\,\mathrm{d}t$; *c)* $\displaystyle\int_1^2 \frac{t\,\mathrm{d}t}{1-3t^2}$;

d) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos 2t\,\mathrm{e}^{\sin 2t}\,\mathrm{d}t$;

e) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{3}{4}} \frac{\sin t\,\mathrm{d}t}{\cos^3 t}$ (on utilisera successivement deux méthodes : $u = \cos t$, puis $v = \tan t$).

• **Changement de variable affine :**

Soit $\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$.

Posons $u = \alpha t + \beta$. On a $\mathrm{d}u = \alpha\,\mathrm{d}t$ et (pour $\alpha \neq 0$) : $t = \dfrac{u-\beta}{\alpha}$, et par suite :

THÉORÈME 9

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $[a, b]$. Quels que soient les réels α et β tels que $\alpha \neq 0$, on a :

$$\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u = \int_{\frac{a-\beta}{\alpha}}^{\frac{b-\beta}{\alpha}} \alpha f(\alpha t + \beta)\,\mathrm{d}t.$$

Exercices résolus

1 — *Soit f une fonction continue périodique de période T. Prouver que le nombre I défini par* $I = \int_a^{a+T} f(u)\,\mathrm{d}u$ *est indépendant du choix de a.*

On a $I = \int_a^0 f(u)\,\mathrm{d}u + \int_0^T f(u)\,\mathrm{d}u + \int_T^{a+T} f(u)\,\mathrm{d}u.$

Considérons $J = \int_T^{a+T} f(u)\,\mathrm{d}u$, et posons $u = T + t$.

On a alors $t = u - T$, et $J = \int_0^a f(T + t)\,\mathrm{d}t$.

Or, la fonction f est périodique de période T. Par suite : $f(T + t) = f(t)$.

Donc $J = \int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_a^0 f(u)\,\mathrm{d}u$. Il en résulte que :

$$I = \int_a^0 f(u)\,\mathrm{d}u - \int_a^0 f(u)\,\mathrm{d}u + \int_0^T f(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^T f(u)\,\mathrm{d}u.$$

II — *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[-a, a]$. Prouver que :*

$$\int_{-a}^a f(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^a [f(t) + f(-t)]\,\mathrm{d}t.$$

Que peut-on en déduire, si f est paire? Si f est impaire?

On a $\int_{-a}^a f(u)\,\mathrm{d}u = \int_{-a}^0 f(u)\,\mathrm{d}u + \int_0^a f(u)\,\mathrm{d}u$.

Considérons $J = \int_{-a}^0 f(u)\,\mathrm{d}u$, et posons $u = -t$.

On a alors $J = \int_a^0 -f(-t)\,\mathrm{d}t = \int_0^a f(-t)\,\mathrm{d}t$. Il en résulte que :

$$\int_{-a}^a f(u)\,\mathrm{d}u = \int_0^a f(u)\,\mathrm{d}u + \int_0^a f(-t)\,\mathrm{d}t = \int_0^a [f(t) + f(-t)]\,\mathrm{d}t.$$

Si f est impaire, pour tout t, on a $f(-t) = -f(t)$, et $\int_{-a}^a f(u)\,\mathrm{d}u = 0$.

Si f est paire, pour tout t, on a $f(-t) = f(t)$, et $\int_{-a}^a f(u)\,\mathrm{d}u = 2\int_0^a f(u)\,\mathrm{d}u$.

Exercices d'application

17. *a*) Prouver que :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(a + b - t)\,\mathrm{d}t.$$

b) En déduire l'intégrale :

$$I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (\sqrt{\cos t} - \sqrt{\sin t})\,\mathrm{d}t.$$

c) Retrouver par cette méthode que, si f est impaire, alors : $\int_{-a}^a f(t)\,\mathrm{d}t = 0$.

18. On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{1}{1 - x^2}$.

a) Déterminer les réels a et b tels que :

$$f(x) = \frac{a}{1 + x} + \frac{b}{1 - x}.$$

b) Calculer l'intégrale : $\int_2^3 \frac{\mathrm{d}t}{1 + t}$. (On pourra poser $1 + t = u$, ce qui revient à reconnaître une forme usuelle.)

c) Calculer de façon analogue l'intégrale : $\int_2^3 \frac{\mathrm{d}t}{1 - t}$.

d) En déduire $\int_2^3 \frac{\mathrm{d}t}{1 - t^2}$.

e) On considère l'intégrale :

$$J = \int_7^9 \frac{\mathrm{d}u}{5 - 6u + u^2}.$$

Décomposer $5 - 6u + u^2$ sous la forme $(u - p)^2 - q^2$.
Calculer J en utilisant le changement de variable : $u = qt + p$.

• **Autres exemples de changement de variable :**

Exercices résolus

I — *Calculer l'intégrale* $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

L'existence du groupement $1 - t^2$ peut donner l'idée d'un changement de variable de la forme $t = \sin u$ $\left(\text{avec } u \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\right)$ ou $t = \cos v$ (avec $v \in]0, \pi[$).

• Si l'on pose $t = \sin u$, on a :

$$dt = \cos u \, du; \qquad 1 - t^2 = 1 - \sin^2 u = \cos^2 u.$$

Or, pour tout u de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, $\cos u$ est positif.

Donc : $\sqrt{1-t^2} = \cos u$.

D'autre part, $\sin 0 = 0$ et $\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

Donc $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos u \, du}{\cos u} = \int_0^{\frac{\pi}{6}} du = \frac{\pi}{6}$.

• Si l'on pose $t = \cos v$, on a de même :

$$dt = -\sin v \, dv, \qquad 1 - t^2 = \sin^2 v;$$

$$\sqrt{1-t^2} = \sin v;$$

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0; \qquad \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

Donc $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{3}} -\frac{\sin v \, dv}{\sin v} = \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} dv = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$.

Remarquons que la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ est la dérivée de la fonction arcsin (chapitre **2**, **III**, **4**, ***a***).

II — *Déterminer une primitive sur* $[-1, +\infty[$ *de la fonction* f *définie par :*

$$f(x) = \frac{1}{1 + \sqrt{1+x}}.$$

Une primitive sur $[-1, +\infty[$ de la fonction f est la fonction F définie par :

$$F(x) = \int_0^x \frac{dt}{1 + \sqrt{1+t}}.$$

Posons $1 + t = z^2$ (avec $z \in \mathbb{R}_+$).

On a alors $dt = 2z \, dz$ et $F(x) = \int_1^{\sqrt{1+x}} \frac{2z \, dz}{1+z}$.

Or : $\frac{2z}{1+z} = \frac{2z+2}{1+z} - \frac{2}{1+z} = 2 - \frac{2}{1+z}$.

Donc : $F(x) = \int_1^{\sqrt{1+x}} 2\,dz - \int_1^{\sqrt{1+x}} \frac{2\,dz}{1+z}$.

En posant $u = 1 + z$, on obtient : $\int_1^{\sqrt{1+x}} \frac{2\,dz}{1+z} = \int_2^{1+\sqrt{1+x}} \frac{2\,du}{u}$

$$= 2[\ln u]_2^{1+\sqrt{1+x}}.$$

Il en résulte que : $F(x) = 2\sqrt{1+x} - 2 - 2\ln(1+\sqrt{1+x}) + 2\ln 2$;

$$= 2[\sqrt{1+x} - \ln(1+\sqrt{1+x})] + 2(\ln 2 - 2).$$

Une primitive de la fonction f est donc la fonction Φ définie par :

$$\Phi(x) = 2[\sqrt{1+x} - \ln(1+\sqrt{1+x})].$$

Exercices d'application

19. En utilisant le changement de variable indiqué, valable sur un intervalle que l'on précisera, calculer les intégrales suivantes :

a) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dt}{1+t^2}$; $t = \tan u$;

b) $\int_2^5 \frac{t^3\,dt}{\sqrt{t-1}}$; $t - 1 = z^2$.

20. Déterminer, sur un intervalle que l'on précisera, une primitive de la fonction f :

a) $f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x}}$;

b) $f(x) = \frac{1}{2+\cos x}$. On pourra poser $t = \tan\frac{u}{2}$.

c. Intégration par parties

Soient F et G des fonctions dérivables sur un intervalle $[a, b]$, et dont les dérivées f et g sont continues sur $[a, b]$. La règle de dérivation d'un produit de fonctions permet d'écrire :

$$(FG)'(x) = F(x)g(x) + f(x)G(x);$$

ou encore : $\quad dFG = F\,dG + G\,dF.$

Cette règle de dérivation permet, inversement, de conclure que le produit FG est la somme d'une primitive de Fg et d'une primitive de Gf. On a, sur $[a, b]$:

$$\int_a^b F(t)g(t)\,dt + \int_a^b G(t)f(t)\,dt = [F(t)G(t)]_a^b.$$

Ce résultat permet de transformer la recherche d'une primitive, ou le calcul d'une intégrale portant sur la fonction Fg, en la recherche d'une primitive, ou le calcul d'une intégrale portant sur la fonction fG, qui peut être plus simple.

Cette méthode porte le nom d'**intégration par parties.**

THÉORÈME 10

Soient F et G deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a, b]$ et dont les dérivées f et g sont continues sur $[a, b]$. Alors :

$$\int_a^b F(t)g(t)\,dt = [F(t)G(t)]_a^b - \int_a^b G(t)f(t)\,dt.$$

On emploie souvent l'intégration par parties :

— Dans le cas où la fonction à intégrer contient en facteur une fonction dont la dérivée est simple (par exemple la fonction ln).

— Lorsque la fonction à intégrer est le produit d'un polynôme par une fonction dont l'on connaît des primitives successives.

— Pour trouver des relations de récurrence, dans le cas où l'on cherche les primitives de fonctions dépendant d'un entier n.

REMARQUE :

Il est important d'appliquer très précisément la formule du Théorème **10**, en précisant bien les bornes d'intégration, et ce, même dans le cas où l'on cherche une primitive. Une utilisation inconsidérée pourrait en effet conduire à (par exemple)

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = x\frac{1}{x} + \int x\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = 1 + \int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$$

D'où $\quad 0 = 1 \quad$ (erreur grossière).

Exercices résolus

I — *Calculer l'intégrale :* $I = \displaystyle\int_1^2 \ln t\,\mathrm{d}t$.

Posons $\quad F(t) = \ln t \quad$ et $\quad \mathrm{d}G(t) = \mathrm{d}t = g(t)\,\mathrm{d}t$.

On a alors $\quad f(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}F(t) = \dfrac{\mathrm{d}t}{t} \quad$ et (par exemple) $\quad G(t) = t$.

L'application de la formule d'intégration par parties donne alors :

$$\int_1^2 \ln t\,\mathrm{d}t = [t \ln t]_1^2 - \int_1^2 \frac{t}{t}\,\mathrm{d}t = [t \ln t]_1^2 - [t]_1^2.$$

Soit :
$$\int_1^2 \ln t\,\mathrm{d}t = 2\ln 2 - 1.$$

II — *Déterminer une primitive de la fonction φ définie par :* $\varphi(x) = (x^2 + x + 1)\sin x$.

• La fonction Φ définie par $\Phi(x) = \displaystyle\int_0^x (t^2 + t + 1)\sin t\,\mathrm{d}t$ est la primitive de φ qui s'annule en zéro.

Posons $\quad F(t) = t^2 + t + 1 \quad$ et $\quad \mathrm{d}G(t) = g(t)\,\mathrm{d}t = \sin t\,\mathrm{d}t$.
Soit alors $\quad f(t) = 2t + 1 \quad$ et $\quad G(t) = -\cos t$, $\quad$ soit :

$$\Phi(x) = [-(t^2 + t + 1)\cos t]_0^x + \int_0^x (2t + 1)\cos t\,\mathrm{d}t.$$

• Nous allons calculer $\displaystyle\int_0^x (2t + 1)\cos t\,\mathrm{d}t$ à l'aide d'une seconde intégration par parties.

Posons $\quad F_1(t) = 2t + 1 \quad$ et $\quad \mathrm{d}G_1(t) = g_1(t)\,\mathrm{d}t = \cos t\,\mathrm{d}t$.

On a alors $\quad f_1(t)\,\mathrm{d}t = 2\,\mathrm{d}t \quad$ et $\quad G_1(t) = \sin t$, $\quad$ d'où :

$$\begin{aligned}\int_0^x (2t + 1)\cos t\,\mathrm{d}t &= [(2t + 1)\sin t]_0^x - \int_0^x 2\sin t\,\mathrm{d}t \\ &= [(2t + 1)\sin t]_0^x - [-2\cos t]_0^x.\end{aligned}$$

• Il en résulte que :

$$\Phi(x) = [-(t^2 + t + 1)\cos t]_0^x + [(2t+1)\sin t]_0^x + [2\cos t]_0^x,$$

soit : $$\Phi(x) = -(x^2 + x + 1)\cos x + 1 + (2x+1)\sin x + 2\cos x - 2;$$
$$= (-x^2 - x + 1)\cos x + (2x+1)\sin x - 1.$$

• Une primitive de la fonction φ est donc la fonction Φ_1, définie par :

$$\Phi_1(x) = (-x^2 - x + 1)\cos x + (2x+1)\sin x.$$

III – *Soit* $I_n(x) = \displaystyle\int_0^x t^n \sin t \, dt.$

a) Déterminer une relation de récurrence entre I_n *et* I_{n-2}.
b) Calculer $I_0(x)$ *et* $I_1(x)$. *En déduire* $I_2(x)$ *et* $I_3(x)$.

a) Posons $F(t) = t^n$ et $dG(t) = g(t)\,dt = \sin t\,dt$.

Soit alors $f(t)\,dt = nt^{n-1}\,dt$ et $G(t) = -\cos t$; d'où :

$$\int_0^x t^n \sin t\,dt = [-t^n \cos t]_0^x - \int_0^x nt^{n-1}\cos t\,dt.$$

$$\int_0^x t^n \sin t\,dt = [-t^n \cos t]_0^x + n\int_0^x t^{n-1}\cos t\,dt.$$

• Nous allons calculer $\displaystyle\int_0^x t^{n-1}\cos t\,dt$ à l'aide d'une seconde intégration par parties.

Posons $F_1(t) = t^{n-1}$ et $dG_1(t) = \cos t\,dt$.

Soit alors $f_1(t) = (n-1)t^{n-2}$ et $G_1(t) = \sin t$.

Donc : $$\int_0^x t^{n-1}\cos t\,dt = [t^{n-1}\sin t]_0^x - \int_0^x (n-1)t^{n-2}\sin t$$
$$= [t^{n-1}\sin t]_0^x - (n-1)I_{n-2}(x).$$

• Il en résulte que : $I_n(x) = [-t^n\cos t]_0^x + n[t^{n-1}\sin t]_0^x - n(n-1)I_{n-2}(x).$

$$I_n(x) = -x^n\cos x + nx^{n-1}\sin x - n(n-1)I_{n-2}(x).$$

b) D'autre part :

• $I_0(x) = \displaystyle\int_0^x \sin t\,dt = [-\cos t]_0^x = 1 - \cos x.$

• $I_1(x) = \displaystyle\int_0^x t\sin t\,dt.$

Posons $F(t) = t$ et $dG(t) = \sin t\,dt$. Soit alors $f(t) = 1$ et $G(t) = -\cos t$.

Donc $I_1(x) = [-t\cos t]_0^x + \displaystyle\int_0^x \cos t\,dt = [-t\cos t]_0^x + [\sin t]_0^x$

$$= -x\cos x + \sin x.$$

Par suite : $$I_2(x) = -x^2\cos x + 2x\sin x - 2I_0(x)$$
$$= -x^2\cos x + 2x\sin x - 2(1-\cos x)$$
$$= (2-x^2)\cos x + 2x\sin x - 2;$$

$$I_3(x) = -x^3\cos x + 3x^2\sin x - 6I_1(x)$$
$$= -x^3\cos x + 3x^2\sin x - 6(\sin x - x\cos x)$$
$$= (6x - x^3)\cos x + (3x^2 - 6)\sin x.$$

Exercices d'application

21. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction f définie par :

$$f(x) = x^n \ln x \quad (\text{où } n \in \mathbb{N}^*).$$

22. Calculer l'intégrale $\int_0^1 t^2 e^{-t}\,dt$.

23. On pose $J_n(x) = \int_0^x t^n \cos t\,dt$.

a) Déterminer une relation de récurrence entre J_n et J_{n-2}.

b) Calculer J_0 et J_1. En déduire J_2 et J_3.

2. CALCUL APPROCHÉ

Le calcul exact d'une intégrale par l'intermédiaire d'une primitive n'est pas toujours possible, ni même rentable, car la plupart du temps on ne connaîtra d'une telle primitive que des valeurs approchées. En réalité, il est possible de déterminer des valeurs approchées, voire des encadrements de l'intégrale étudiée, en se référant à l'interprétation géométrique (voir Activités préliminaires).

Pour réaliser de tels encadrements, on peut :

— utiliser des encadrements de la fonction f par des fonctions plus simples (voir Théorème **4**);

— encadrer le domaine D dont on cherche l'aire, par des réunions de rectangles ou de trapèzes (voir activités préliminaires). En réalité ce second aspect revient à encadrer la fonction étudiée par des fonctions affines par intervalles. Mais en opérant de cette manière, on peut, en affinant la décomposition, agir sur la précision de l'encadrement.

Certaines calculatrices disposent d'une touche permettant le calcul de $\int_a^b f(x)\,dt$ (avec la précision de la machine).

a. Exemples d'encadrements

Exercices résolus

I — *En comparant des puissances de x, pour $x > 1$, encadrer* ln 2.

• Pour tout réel x strictement supérieur à 1, on a : $x^2 > x > \sqrt{x}$.

Donc : $$\frac{1}{x^2} < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Par suite : $$\int_1^2 \frac{dt}{t^2} < \int_1^2 \frac{dt}{t} < \int_1^2 \frac{dt}{\sqrt{t}}.$$

Il en résulte que : $$\left[-\frac{1}{t}\right]_1^2 < \ln 2 < [2\sqrt{t}]_1^2;$$
$$0{,}5 < \ln 2 < 0{,}83.$$

• Pour obtenir un encadrement de meilleure qualité, considérons :

$$x^{1,1} > x > x^{0,9},$$

Soit : $$\frac{1}{x^{1,1}} < \frac{1}{x} < \frac{1}{x^{0,9}}.$$

Par suite : $$\int_1^2 \frac{dt}{t^{1,1}} < \int_1^2 \frac{dt}{t} < \int_1^2 \frac{dt}{t^{0,9}}.$$

C'est-à-dire : $$\left[\frac{t^{-0,1}}{-0,1}\right]_1^2 < \ln 2 < \left[\frac{t^{0,1}}{0,1}\right]_1^2$$
$$-10\left(\frac{1}{\sqrt[10]{2}} - 1\right) < \ln 2 < 10(\sqrt[10]{2} - 1).$$

L'utilisation d'une calculatrice donne : $\sqrt[10]{2} \approx 1{,}071\,77$.

D'où l'encadrement : $0{,}669 < \ln 2 < 0{,}718$.

• On peut également envisager : $x^{1{,}01} > x > x^{0{,}99}$, etc.

II – *Encadrer* $I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{(3 + 2\cos t)^2}$.

On a : $\dfrac{1}{2} < \dfrac{\pi}{6}$. Donc si $0 < t < \dfrac{1}{2}$, alors $\dfrac{\sqrt{3}}{2} < \cos t < 1$.

Il en résulte que : $\dfrac{1}{25} < \dfrac{1}{(3 + 2\cos t)^2} < \dfrac{1}{(3 + \sqrt{3})^2}$.

Soit, en intégrant : $\dfrac{1}{50} < I < \dfrac{1}{2(3 + \sqrt{3})^2}$. On obtient alors $0{,}02 < I < 0{,}022\,33$.

• Exercice d'application

24. Encadrer l'intégrale :
$$I = \int_0^1 \frac{dt}{(5 + 3\cos t)^2}.$$

b. Méthode des rectangles

• Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a, b]$, avec $a < b$. L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\, dt$ mesure, en unités d'aire, le domaine plan associé dans un repère orthonormal à la fonction f (figure 16). Considérons une suite finie, strictement croissante d'éléments de $[a, b]$:

$$(x_0 = a, x_1, x_2, ..., x_n = b).$$

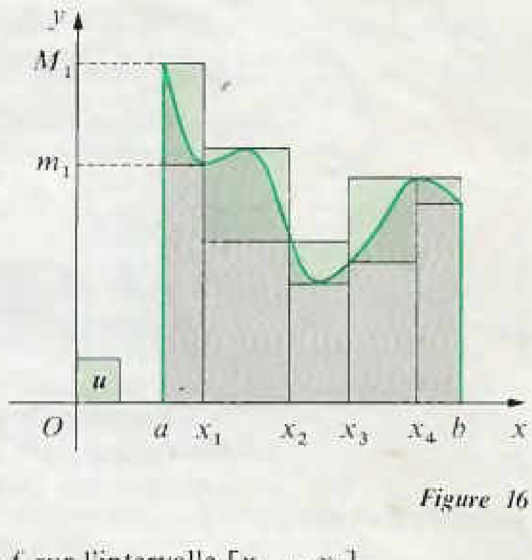


Figure 16

Dans tout intervalle $[x_{k-1}, x_k]$ ($k \in \{1, ..., n\}$), la fonction f est continue. Elle est donc bornée et atteint ses bornes. Soient m_k et M_k respectivement la borne inférieure et la borne supérieure de f sur l'intervalle $[x_{k-1}, x_k]$.

Pour tout réel x de l'intervalle $[x_{k-1}, x_k]$, on a donc : $m_k \leqslant f(x) \leqslant M_k$.

Il en résulte : $$\int_{x_{k-1}}^{x_k} m_k\, dt \leqslant \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)\, dt \leqslant \int_{x_{k-1}}^{x_k} M_k\, dt.$$

C'est-à-dire : $$m_k(x_k - x_{k-1}) \leqslant \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t)\, dt \leqslant M_k(x_k - x_{k-1}).$$

Ceci étant vrai pour tout intervalle $[x_{k-1}, x_k]$, on en déduit :

$$\sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) \leqslant \int_a^b f(t)\,dt \leqslant \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}).$$

REMARQUE :

La réalisation de cet encadrement revient à effectuer un encadrement de f par deux fonctions en escalier Φ et φ sur $[a, b]$.

• L'amplitude de cet encadrement est : $\varepsilon = \sum_{k=1}^{n} (M_k - m_k)(x_k - x_{k-1})$.

Soit $\alpha = \sup_{k \in \mathbb{N}_n} (M_k - m_k)$.

On a alors $\varepsilon \leqslant \alpha \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})$, soit :

$$\varepsilon \leqslant \alpha(x_n - x_0);$$
$$\varepsilon \leqslant \alpha(b - a).$$

• Soit $(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ une suite finie d'éléments de $[a, b]$, tels que :

$$\xi_k \in [x_{k-1}, x_k].$$

Pour tout k, on a $m_k \leqslant f(\xi_k) \leqslant M_k$.

Par suite, la somme $S = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) f(\xi_k)$ est une valeur approchée de l'intégrale $I = \int_a^b f(t)\,dt$ avec une incertitude $\alpha(b - a)$.

Ce résultat est en particulier vrai pour $\xi_k = x_k$ et pour $\xi_k = x_{k-1}$.

Les sommes $S_1 = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) f(x_k)$,

$$S_2 = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) f(x_{k-1}),$$

sont donc des valeurs approchées de l'intégrale I, à l'incertitude $\alpha(b - a)$, où :

$$\alpha = \sup_{k \in \mathbb{N}_n} (M_k - m_k).$$

REMARQUE :

On dit que $S = \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1}) f(\xi_k)$ est une somme de Riemann relative à la fonction f et à la subdivision $(x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

• On suppose que la fonction f est dérivable et que sa dérivée est bornée, c'est-à-dire qu'il existe un réel M tel que, pour tout x de $[a, b]$, on ait, $|f'(x)| \leqslant M$. Dans ces conditions, on sait que, quel que soit x_0, on a, pour tout x de $[a, b]$:

$$|f(x) - f(x_0)| \leqslant M\,|x - x_0|.$$

La fonction f est continue sur l'intervalle $[x_{k-1}, x_k]$. Elle est donc bornée et elle atteint ses bornes sur cet intervalle. Soient α_k et β_k des réels de $[x_{k-1}, x_k]$, tels que $f(\alpha_k) = m_k$ et $f(\beta_k) = M_k$. D'après la propriété ci-dessus, on a :

$$|f(\beta_k) - f(\alpha_k)| \leqslant M\,|\beta_k - \alpha_k|.$$

Comme α_k et β_k sont des éléments de l'intervalle $[x_{k-1}, x_k]$, on a :

$$|\beta_k - \alpha_k| \leqslant x_k - x_{k-1}.$$

Il en résulte que, quel que soit k :

$$M_k - m_k \leqslant M(x_k - x_{k-1}).$$

Une incertitude sur la détermination de l'intégrale par la méthode des rectangles est donc $\alpha(b-a)$, avec :

$$\alpha = M \sup_{k \in \mathbb{N}_n} (x_k - x_{k-1}).$$

• En général, le choix de la suite $(x_0, x_1, x_2, ..., x_n)$ n'est pas quelconque. On choisit souvent $x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$, ce qui a pour effet de réaliser une subdivision régulière de l'intervalle $[a, b]$ en intervalles de longueur $\dfrac{b-a}{n}$.

On a donc $\alpha = M\dfrac{b-a}{n}$, et $\varepsilon \leqslant M\dfrac{(b-a)^2}{n}$.

REMARQUE :

La recherche, suivant le problème étudié, de la « meilleure » subdivision $(x_0, x_1, ..., x_n)$ est un des problèmes majeurs du calcul approché d'intégrales.

En conclusion :

Soit f une fonction continue et dérivable sur l'intervalle $[a, b]$, telle que, pour tout x de $[a, b]$, on ait $|f'(x)| \leqslant M$. Soit $(x_0, x_1, x_2, ..., x_n)$ la suite d'éléments de $[a, b]$ définie pour n entier naturel non nul par : $x_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$.

Dans ces conditions, les sommes S_1 et S_2 ci-dessous sont des valeurs approchées de l'intégrale $I = \displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$, à l'incertitude $M\dfrac{(b-a)^2}{n}$:

$$S_1 = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k); \qquad S_2 = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}).$$

Il en résulte que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) = \lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_{k-1}) = \int_a^b f(t)\,dt.$

Exercice résolu

Déterminer une valeur approchée de $J = \displaystyle\int_{10}^{11}\frac{dt}{t}$.

Prenons $n = 10$, et calculons :

$$S_1 = \frac{1}{10}\sum_{k=1}^{10} f\left(10 + \frac{k}{10}\right) \quad \text{et} \quad S_2 = \frac{1}{10}\sum_{k=1}^{10} f\left(10 + \frac{k-1}{10}\right).$$

a) $\displaystyle S_1 = \frac{1}{10}\sum_{k=1}^{10}\frac{10}{100+k} = \sum_{k=1}^{10}\frac{1}{100+k}$

$$= \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \frac{1}{103} + \frac{1}{104} + \frac{1}{105} + \frac{1}{106} + \frac{1}{107} + \frac{1}{108} + \frac{1}{109} + \frac{1}{110}.$$

Soit (après calcul à la machine) : $S_1 \approx 0{,}094\,857$.

L'incertitude sur l'approximation de I par S_1 étant $\dfrac{M}{10}$, avec $M = \displaystyle\sup_{t\in[10,11]}\left(\frac{1}{t^2}\right)$, c'est-à-dire $M = \dfrac{1}{100}$. S_1 est donc une valeur approchée de I à 10^{-3} près : $I \approx 0{,}095$.

$$b)\ S_2 = \frac{1}{10}\sum_{k=1}^{10} f\left(10 + \frac{k-1}{10}\right) = \frac{1}{10}\sum_{k=1}^{10} \frac{10}{100+k-1} = \sum_{k=1}^{10} \frac{1}{99+k}$$
$$= \frac{1}{100} + \frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \frac{1}{103} + \frac{1}{104} + \frac{1}{105} + \frac{1}{106} + \frac{1}{107} + \frac{1}{108} + \frac{1}{109}.$$

Soit (après calcul à la machine) : $S_2 \approx 0{,}095\,766$.

L'incertitude sur l'approximation de I par S_2 est également de 10^{-3} : $I \approx 0{,}096$.

• Remarquons que la fonction f est strictement décroissante sur l'intervalle $[10, 11]$.
Il en résulte que $S_1 < I < S_2$.
Remarquons également que $I = \ln 1{,}1$.
La calculatrice donne $\ln 1{,}1 \approx 0{,}095\,31$. L'approximation obtenue est de bonne qualité.

Exercice d'application

25. Déterminer une valeur approchée de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$. (On prendra $n = 10$.)

c. Application à l'étude de limites de suites

• Soit f une fonction définie, continue et dérivable sur un intervalle $[a, b]$ et dont la dérivée f' est bornée sur $[a, b]$. Considérons la suite $(u_n)_{n \geq 1}$ définie par :

$$u_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a + k\left(\frac{b-a}{n}\right)\right).$$

D'après ce qui précède : $$\lim_{n \to +\infty} u_n = \int_a^b f(t)\,dt.$$

Ou encore : $$\lim_{n \to +\infty} \frac{u_n}{b-a} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt.$$

La valeur moyenne de f sur l'intervalle $[a, b]$ est précisément $\dfrac{\int_a^b f(t)\,dt}{b-a}$.

On peut conclure :

La valeur moyenne sur $[a, b]$ de la fonction f est la limite en $+\infty$ de la moyenne arithmétique des valeurs prises par la fonction en n points de $[a, b]$, espacés de $\frac{b-a}{n}$ en $\frac{b-a}{n}$.

Ce résultat justifie *a postériori* la dénomination de « valeur moyenne ».

Exercice résolu

Interpréter ln 2 *comme limite d'une suite.*

On a $\ln 2 = \displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{t}$.

Posons $u_n = \dfrac{1}{n}\left[\dfrac{1}{1+\frac{1}{n}} + \dfrac{1}{1+\frac{2}{n}} + \dfrac{1}{1+\frac{3}{n}} + \dots + \dfrac{1}{1+\frac{n}{n}}\right]$.

D'après ce qui précède, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ln 2$.

Or : $u_n = \dfrac{1}{n}\left(\dfrac{n}{n+1} + \dfrac{n}{n+2} + \dots + \dfrac{n}{2n}\right)$

$= \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \dots + \dfrac{1}{2n}$.

Donc :
$$\lim_{n \to +\infty}\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}\right) = \ln 2.$$

Remarquons que, en considérant la suite $v_n = \dfrac{1}{n}\left[\dfrac{1}{1} + \dfrac{1}{1+\frac{1}{n}} + \dfrac{1}{1+\frac{2}{n}} + \dots + \dfrac{1}{1+\frac{n-1}{n}}\right]$,

on obtient le résultat : $\lim\limits_{n \to +\infty}\left(\dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+1} + \dots + \dfrac{1}{2n-1}\right) = \ln 2$.

On peut également remarquer que, pour tout entier n, $\ln 2$ est compris entre u_n et v_n. On peut en déduire un encadrement de $\ln 2$, mais, pour obtenir une bonne précision, il faut utiliser de grandes valeurs de n.

• Exercice d'application

26. Déterminer la limite de la suite (u_n) définie par :
$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2}.$$

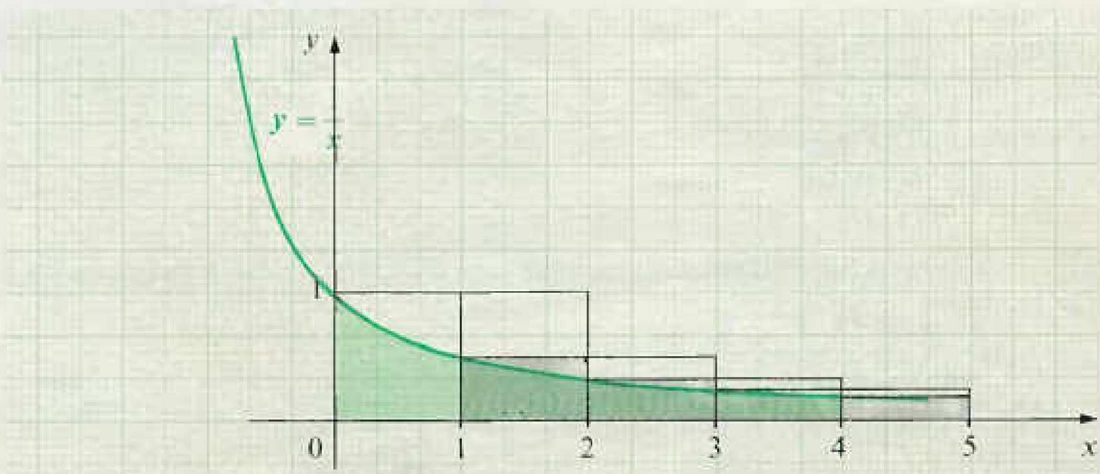
(Voir exercice d'application **19**.)

• L'utilisation d'intégrales permet d'obtenir des encadrements qui permettent de préciser si une suite est convergente, ou divergente.

Soit par exemple la suite (u_n) définie par : $u_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dots + \dfrac{1}{n}$.

Considérons la fonction en escalier φ prenant la valeur $\dfrac{1}{n}$ sur l'intervalle $[n, n+1[$ (figure 17). On a, pour tout x supérieur à 1 : $\varphi(x) \geqslant \dfrac{1}{x}$.

Figure 17



Il en résulte que : $$\int_1^n \varphi(t)\,dt \geqslant \int_1^n \frac{dt}{t}.$$

Or : $\int_1^n \varphi(t)\,dt = u_n$ et $\int_1^n \frac{dt}{t} = \ln n$.

Donc, pour tout entier naturel non nul n : $u_n \geqslant \ln n$.

Or : $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln n = +\infty$; donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Exercice d'application

27. Prouver que la suite (u_n) définie par $u_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ est majorée.

Déterminer un encadrement de la limite de u_n, et interpréter graphiquement.

d. Autres méthodes d'approximation

Pour un intervalle donné, le rectangle peut se révéler une approximation très grossière, et, alors, n'assurer qu'une convergence très lente vers l'intégrale, lorsque le pas de la subdivision tend vers zéro. On peut espérer de meilleures approximations en remplaçant les rectangles par des domaines de formes plus complexes.

Considérons par exemple $\ln 2 = \int_1^2 \frac{dt}{t}$.

L'utilisation de la méthode des rectangles, jointe au fait que la fonction $\left[x \mapsto \frac{1}{x}\right]$ est décroissante sur l'intervalle $[1, 2]$ conduit, avec dix points de subdivision, à l'encadrement $0{,}668\,77 < \ln 2 < 0{,}718\,77$.

• Considérons directement la courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$ (figure 18).

Le réel $\ln 2 = \int_1^2 \frac{dt}{t}$ est encadré par les aires des trapèzes $ABCD$ et $AEFD$, où les points $ABCD$ sont définis par leurs coordonnées :

$A : (1, 0)$;
$B : (1, 1)$;
$C : \left(2, \frac{1}{2}\right)$;
$D : (2, 0)$;

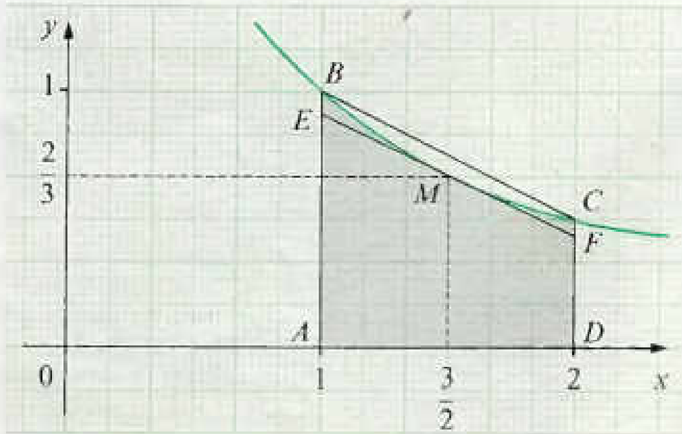


Figure 18

les points E et F étant les intersections avec les droites AB et CD de la tangente à la courbe au point $M : \left(\frac{3}{2}, \frac{2}{3}\right)$.

Une équation de cette tangente est :

$$y - \frac{2}{3} = -\frac{4}{9}\left(x - \frac{3}{2}\right).$$

On a donc, pour $x = 1$, $y = -\frac{4}{9} \times \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{3} = +\frac{2}{9} + \frac{6}{9} = \frac{8}{9}$;

pour $x = 2$, $y = -\frac{4}{9} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = -\frac{2}{9} + \frac{6}{9} = \frac{4}{9}$.

Aire de $ABCD = \dfrac{1 + \frac{1}{2}}{2} \times 1 = \frac{3}{4} = 0{,}75$.

Aire de $AEFD = \dfrac{\frac{8}{9} + \frac{4}{9}}{2} \times 1 = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \approx 0{,}66$.

On a donc $0{,}66 < \ln 2 < 0{,}75$.

★ Activité 1

Pour obtenir un encadrement de meilleure qualité de ln 2, *recommencer le travail ci-dessus dans l'intervalle* $\left[1, \frac{3}{2}\right]$, *puis dans l'intervalle* $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$.
Refaire le même calcul en utilisant quatre intervalles.
Comparer les encadrements obtenus avec l'encadrement résultant de la méthode des rectangles.

★ Activité 2

On considère une fonction f continue et positive sur l'intervalle $[a, b]$, et l'on envisage de déterminer une valeur approchée de l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ *en utilisant l'aire délimitée par la ligne polygonale joignant les points M_0 à M_n, où le point M_k a pour coordonnées :*

$$\left(a + k\frac{b-a}{n},\ f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right) \text{ (figure 19).}$$

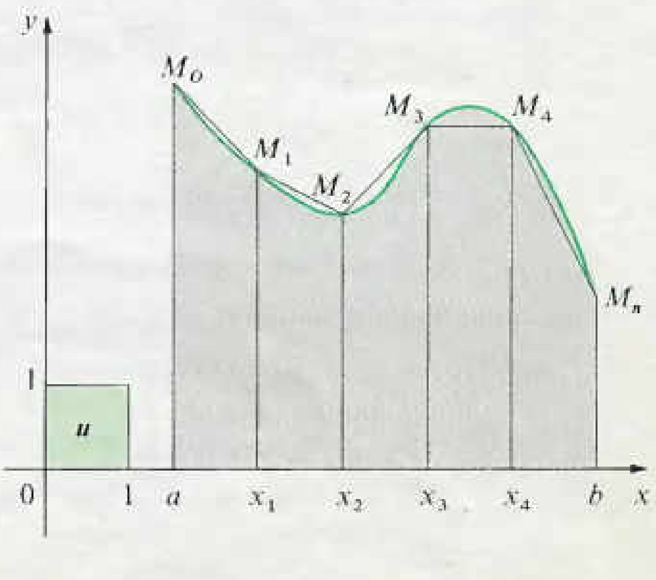
a) *On rappelle que l'aire d'un trapèze de hauteur h, et dont les bases mesurent B et b est :*

$$h\frac{B+b}{2}.$$

Déterminer la valeur approchée obtenue avec $n = 5$ (figure 19). Déterminer la valeur approchée obtenue avec n quelconque. Dans quel cas connaît-on le sens de l'approximation?

b) *Appliquer pour $n = 10$ à la détermination d'une valeur approchée par excès de* ln 2.

Figure 19



REMARQUE :

Lorsque la fonction f' n'est pas monotone, les méthodes ci-dessus permettent de déterminer de bonnes approximations de l'intégrale étudiée, mais on ne peut pas toujours préciser un encadrement de l'intégrale cherchée. Il devient alors nécessaire de préciser l'étude pour donner une incertitude sur l'approximation obtenue.

• On peut également envisager d'approcher la fonction f sur l'intervalle $[a, b]$ par des fonctions simples (par exemple des fonctions polynômes). Cette méthode permet souvent d'obtenir des résultats remarquables, mais elle ne permet pas de maîtriser simplement l'incertitude sur l'approximation.

★ Activité 3

On considère les points $B(1, 1)$, $M\left(\frac{3}{2}, \frac{2}{3}\right)$, $C\left(2, \frac{1}{2}\right)$.

a) *Déterminer les réels a, b et c tels que la courbe d'équation :*

$$y = ax^2 + bx + c.$$

contienne les points B, M et C. Tracer soigneusement cette courbe.

b) *Soit* $f(x) = ax^2 + bx + c$, *où a, b et c ont les valeurs déterminées en* **a**).

Calculer $\int_1^2 f(t)\,\mathrm{d}t$. *Comparer avec les valeurs précédemment obtenues pour* ln 2.

c) *Reprendre la méthode ci-dessus en considérant la parabole contenant les points B, M et* $N : \left(\frac{5}{4}, \frac{4}{5}\right)$, *et la parabole contenant les points M, C et* $P\left(\frac{7}{4}, \frac{4}{7}\right)$.

Rendre compte de cette méthode par une figure soignée.

★ Activité 4

Une fonction f continue sur un intervalle $[a, b]$ *est dite convexe sur* $[a, b]$ *si, et seulement si, quels que soient les réels* α *et* β *de* $[a, b]$, *on a* (voir chapitre 9) :

$$f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \leqslant \frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}.$$

1° **a)** *Prouver la fonction* $[x \mapsto x^2]$ *est convexe. Interpréter cette propriété à l'aide de la notion de barycentre.*

b) *Même question pour la fonction* $\left[x \mapsto \frac{1}{x}\right]$.

2° **a)** *Prouver que, si f est convexe sur* $[\alpha, \beta]$, *alors :*

$$(\beta - \alpha) f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \leqslant \int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant (\beta - \alpha)\frac{f(\alpha) + f(\beta)}{2}.$$

b) *Interpréter graphiquement et commenter.*

3° **a)** *Déterminer un encadrement de* ln 2 *en prenant* $\alpha = 1$, $\beta = 2$, $f(t) = \frac{1}{t}$.

b) *Même question en refaisant le même travail :*

d'abord avec : $\alpha = 1$, $\beta = \frac{1}{2}$, $f(t) = \frac{1}{t}$,

puis avec : $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = 2$, $f(t) = \frac{1}{t}$.

c) *Reprendre le calcul avec cinq points de subdivision. Comparer avec les méthodes précédentes.*

IV – APPLICATIONS

1. EXEMPLES D'ÉTUDE DE FONCTIONS PRIMITIVES

On sait qu'une fonction f continue sur un intervalle $[a, b]$ admet sur cet intervalle des primitives. On peut donc envisager les fonctions φ définies par $\varphi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.

• On a vu que, dans certains cas, $\varphi(x)$ peut s'exprimer comme combinaison de différentes fonctions connues, mais parfois ce n'est pas le cas. On peut néanmoins étudier de telles fonctions φ, et, si leur importance mathématique ou pratique le justifie, on est alors conduit à leur donner un nom spécifique. C'est ce qui a été fait pour la fonction ln.

★ Activité 1

1° On considère la fonction f définie par $f(x) = e^{-x^2}$

***a)** Étudier la variation de la fonction f.*

***b)** Représenter soigneusement la fonction f dans un repère orthonormal.*

On placera la courbe par rapport à ses tangentes aux points d'abscisses respectives $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et $-\frac{1}{\sqrt{2}}$.

2° On considère la fonction F définie par $F(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt$.

***a)** Prouver que F est une fonction impaire.*

***b)** Étudier les variations de la fonction F.*

***c)** Déterminer des valeurs approchées à 10^{-2} près de $F(1)$, $F(2)$, $F(3)$. (On s'aidera de la représentation graphique obtenue au 1°.)*

*3° **a)** Prouver que, pour tout réel x supérieur à 1 : $e^{-x^2} \leqslant e^{-x}$.*

***b)** En déduire que F est une fonction croissante majorée.*

***c)** Soit : $l = \lim_{x \to +\infty} F(x)$. Encadrer au mieux l.*

4° Représenter soigneusement la fonction F dans un repère orthonormal.

*5° **a)** En utilisant une intégration par parties, déterminer, en fonction de F, la fonction G telle que : $G(x) = \int_0^x F(t)\,dt$.*

***b)** Représenter graphiquement la fonction G.*

★ Activité 2

On donne la fonction F définie par : $F(x) = \int_x^{x^2} \frac{t\,dt}{1 + |t|}$.

*1° **a)** Étudier et représenter graphiquement la fonction f définie par :*

$$f(t) = \frac{t}{1 + |t|}.$$

***b)** Interpréter graphiquement la fonction F.*

2° a) Étudier directement les variations de la fonction F. (On apportera un soin tout particulier au calcul de la dérivée de F.)

b) Représenter graphiquement la fonction F.

3° Expliciter la fonction F à l'aide de fonctions connues. Vérifier les résultats de l'étude ci-dessus.

2. CALCUL D'AIRES

• Soit f une fonction continue et de signe constant sur un intervalle $[a, b]$. Soit C la courbe représentative de f dans un repère orthogonal $\mathcal{R}$. Soit D l'ensemble des points du plan dont les coordonnées (x, y) satisfont à : $\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b; \\ 0 \leqslant y \leqslant f(x). \end{cases}$

L'ensemble D est ce que nous avons appelé « sous-ensemble plan associé à f sur $[a, b]$ dans $\mathcal{R}$ ». On sait (**II, 3**) que, si u désigne l'aire du rectangle défini par les vecteurs-unités de $\mathcal{R}$, l'aire A de D est donnée par : $A = \left| \int_a^b f(t)\, dt \right| u.$

• Si la fonction f n'est pas de signe constant sur l'intervalle $[a, b]$, l'aire de domaine D se calcule en découpant l'intervalle $[a, b]$ en sous-intervalles, sur chacun desquels f est de signe constant, et en ajoutant les résultats partiels obtenus.

• Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$ et telles que, pour tout réel x de $[a, b]$, on ait $f(x) \leqslant g(x)$.

Soit S l'ensemble des points du plan dont les coordonnées (x, y) satisfont à : $\begin{cases} a \leqslant x \leqslant b; \\ f(x) \leqslant y \leqslant g(x). \end{cases}$

L'aire de l'ensemble S se calcule comme différence de l'aire A du domaine plan associé à g sur $[a, b]$ dans $\mathcal{R}$, et du domaine plan associé à f sur $[a, b]$ dans $\mathcal{R}$ (figure 20). Il résulte, d'après la linéarité de l'intégrale que :

$$A = \int_a^b [g(t) - f(t)]\, dt.$$

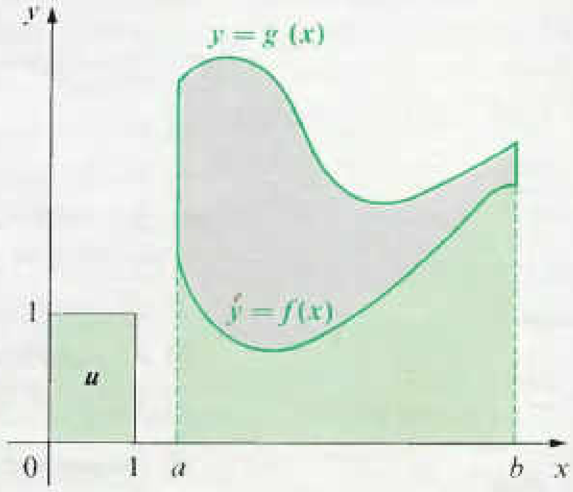


Figure 20

• Si, sur l'intervalle $[a, b]$, aucune des deux fonctions f et g n'est supérieure à l'autre, on partage l'intervalle $[a, b]$ en sous-intervalles où cette propriété est vérifiée, et l'on ajoute les résultats partiels obtenus.

• Le lecteur vérifiera que la formule suivante englobe tous les cas recensés ci-dessus :

$$A = \left| \int_a^b |g(t) - f(t)|\, dt \right|$$

(y compris le cas où $g(x) = 0$ pour tout x de $[a, b]$).

Exercices résolus

1 — *Calculer l'aire du cercle d'équation $x^2 + y^2 = 1$. (Le repère est orthonormal, et les unités sont de 1 cm sur chaque axe.)*

Le demi-cercle d'ordonnées positives a pour équation $y = \sqrt{1 - x^2}$.

Le demi-cercle d'ordonnées négatives a pour équation $y = -\sqrt{1 - x^2}$.

L'aire cherchée est : $A = \int_{-1}^{1} (\sqrt{1 - t^2} + \sqrt{1 - t^2})\,dt$

$= \int_{-1}^{1} 2\sqrt{1 - t^2}\,dt.$

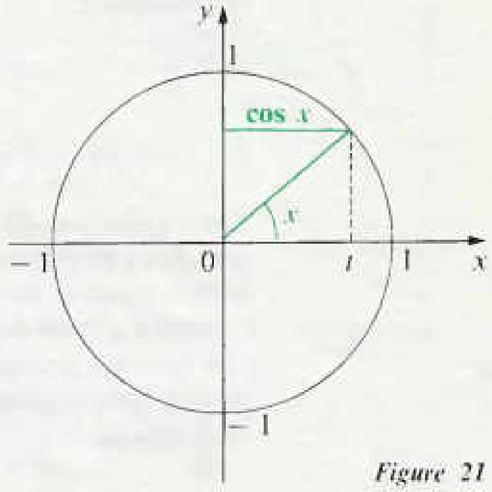


Figure 21

Posons : $t = \cos x$ $(x \in [0, \pi])$.

On a : $\sqrt{1 - t^2} = \sin x$ (car $\sin x$ est positif),

et $dt = -\sin x\,dx$.

Donc : $A = -2\int_{\pi}^{0} \sin^2 x\,dx$,

or : $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$.

Par suite : $A = -\int_{\pi}^{0} (1 - \cos 2x)\,dx$

$= -\left[x - \dfrac{\sin 2x}{2}\right]_{\pi}^{0} = \pi$ (en cm²).

L'interprétation géométrique du changement de variable utilisé ci-dessus fait l'objet de la figure 21.

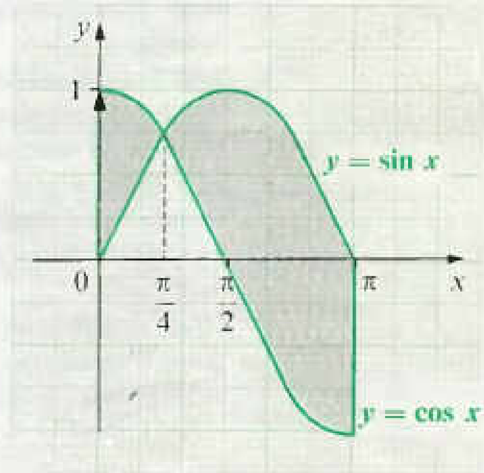


Figure 22

II — *On considère un repère* $\mathcal{R}$ *orthogonal tel que, en ordonnée, l'unité soit de 2 cm, et qu'en abscisse, 3 cm représentent* π. *Déterminer en* cm² *l'aire délimitée par les courbes représentatives de la fonction sinus et de la fonction cosinus, entre* 0 *et* π (figure 22).

Les courbes représentatives se coupent pour $x = \dfrac{\pi}{4}$. Soit A l'aire cherchée, en unités d'aire :

$$A = \int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (\cos t - \sin t)\,dt + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} (\sin t - \cos t)\,dt.$$

On a donc : $A = [\sin t + \cos t]_0^{\pi/4} + [-\cos t - \sin t]_{\pi/4}^{\pi}$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1 + 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}.$$

D'autre part, l'unité d'aire est $2 \times \dfrac{3}{\pi}$ cm². L'aire cherchée est donc :

$$A = \frac{12\sqrt{2}}{\pi}\ \text{cm}^2.$$

Exercices d'application

28. Le repère $\mathcal{R}$ est orthonormal, et l'unité de longueur vaut 2 cm sur chaque axe. Déterminer l'aire de l'ensemble plan délimité par les courbes représentatives des fonctions f et g. Illustrer graphiquement.

a) $f(x) = x^2 + x - 1$; $g(x) = -2x^2 + 2x + 1$.
b) $f(x) = x^3 - 3x$; $g(x) = x^2 + x$.

29. Le repère $\mathcal{R}$ est orthogonal. En ordonnée, l'unité est de 2 cm, et en abscisses, 5 cm représentent π. Calculer sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{3}\right]$ l'aire délimitée par les courbes d'équations $y = \cos x$ et $y = \tan x$.

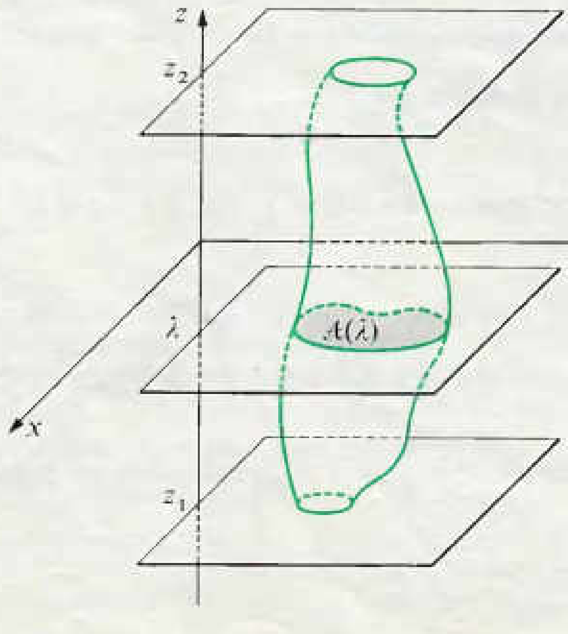
3. AUTRES APPLICATIONS

Les applications de la notion d'intégrale sont multiples et variées. Elles sont en général liées à des problèmes de sommation d'un grand nombre (tendant vers l'infini) de petits termes (tendant vers zéro). C'est le cas en particulier des aires que l'on peut interpréter comme la somme des aires d'un très grand nombre de rectangles de largeur très petite (que l'on note Δt). Le signe d'intégration peut s'interpréter comme le passage à la limite d'un signe Σ lorsque le nombre des termes à additionner tend vers l'infini et que chacun d'eux tend vers zéro.

a. Volumes

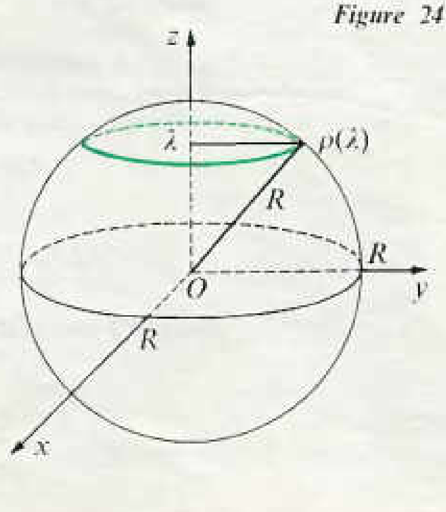
Nous considérerons comme intuitive la notion de volume d'un ensemble de points de l'espace.
Soit Σ un ensemble de points de l'espace. Nous dirons que Σ est une surface simple de l'espace si tout plan qui rencontre Σ la coupe en une courbe plane fermée simple Γ, ou une réunion de telles courbes, délimitant un sous-ensemble plan possédant une aire.
Soit D un domaine de l'espace, délimité par une surface simple Σ. Soit $\mathcal{R}$ un repère orthonormal de l'espace. Soit P_λ le plan d'équation $z = \lambda$ dans $\mathcal{R}$, qui rencontre Σ suivant la courbe plane Γ_λ délimitant un sous-ensemble plan dont l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ est fonction de λ (figure 23).
Nous admettrons, dans ces conditions, que le volume V du domaine délimité par Σ et les plans d'équations respectives $z = z_1$ et $z = z_2$, et mesuré avec, pour unité, le volume du cube construit sur les vecteurs de base, est donné par :

$$V = \left| \int_{z_1}^{z_2} \mathcal{A}(\lambda)\, \mathrm{d}\lambda \right|.$$



◄ *Figure 23*

Figure 24



En effet : $\mathcal{A}(\lambda)\ \Delta\lambda$ est le volume d'un cylindre droit dont la directrice a pour aire $\mathcal{A}(\lambda)$, et de hauteur $\Delta\lambda$. Le volume cherché est décomposé en un grand nombre de tels cylindres élémentaires. C'est l'équivalent de la décomposition d'une aire en rectangles élémentaires.

Exercice résolu

Calculer le volume d'une sphère de rayon R cm.

Soit $\mathcal{R}$ un repère orthonormal dont l'origine est le centre de la sphère, et dont l'unité est 1 cm. Le rayon de la sphère est R cm. (figure 24).

Le plan P_λ d'équation $z = \lambda$ coupe la sphère Σ, pour $|\lambda| \leqslant R$, suivant un cercle Γ_λ dont le rayon $\rho(\lambda)$ est tel que $\rho(\lambda)^2 + \lambda^2 = R^2$. Donc $\rho(\lambda)^2 = R^2 - \lambda^2$.

L'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ du cercle Γ_λ est donc : $\mathcal{A}(\lambda) = \pi\rho(\lambda)^2 = \pi(R^2 - \lambda^2)$.

Le volume V de la sphère est donc donné, en cm^3, par :

$$V = \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - \lambda^2)\,\mathrm{d}\lambda = \pi\left[R^2\lambda - \frac{\lambda^3}{3}\right]_{-R}^{R} = \pi\left[\left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) - \left(\frac{R^3}{3} - R^3\right)\right] = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Exercices d'application

30. Soit Γ une courbe simple fermée, plane, délimitant une surface plane dont l'aire est $\mathcal{A}$. Soit S un point situé à une distance h du plan Γ. On appelle surface conique de sommet S et de directrice Γ, l'ensemble des droites contenant S et rencontrant la courbe Γ. Déterminer le volume du domaine d'espace délimité par cette surface conique, le point S et le plan de Γ. (Si deux sous-ensembles sont homothétiques dans un rapport k, le rapport de leurs aires est k^2.)

31. Soit un repère orthonormal de l'espace $(R = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}))$. On considère la courbe Γ du plan $(O, \vec{j}, \vec{k})$ définie pour $y \in [0, 2]$ par $z = y^2$. On appelle surface de révolution d'axe $(O, \vec{k})$, et de génératrice Γ la surface engendrée par les images de Γ dans les rotations d'axe $(O, \vec{k})$. Déterminer le volume du solide de révolution délimité par la surface de révolution d'axe $(O, \vec{k})$ et de génératrice Γ.

b. Masses, moments d'inertie

L'étude des masses et des moments d'inertie, ainsi que celle des centres d'inertie, est possible grâce à la notion d'intégrale. Cependant, en général, cette étude nécessite des notions dépassant le cadre du programme. Néanmoins, dans certains cas (par exemple solides homogènes), on peut utiliser les notions rencontrées dans le présent chapitre. On pourra aussi envisager des solides non homogènes, à condition que la densité soit fonction de la variable qui sert à intégrer.

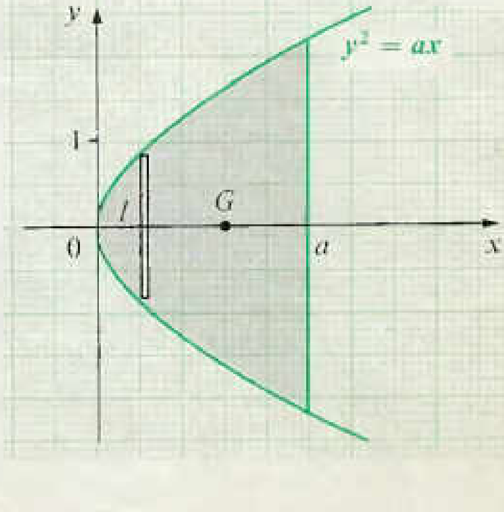
Exercices résolus

1 — *Déterminer le centre d'inertie G du solide plan homogène, de densité* α, *délimité par la parabole d'équation* $y^2 = ax$, *et par la droite d'équation* $x = a$ (figure 25).

Le centre d'inertie du système de points pondérés (M_i, α_i) a pour coordonnées :

$$\xi = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}; \qquad \eta = \frac{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i}.$$

Figure 25



Par raison de symétrie, le centre d'inertie G du solide S a une ordonnée nulle.
Pour déterminer l'abscisse ξ de ce centre d'inertie, considérons l'ensemble des points de S d'abscisse l, et assimilons-le à un rectangle de longueur $2\sqrt{al}$, et de largeur Δl.
La masse Δm de ce rectangle élémentaire est $\alpha \,.\, 2\sqrt{al}\,\Delta l$. On a alors :

$$\xi = \frac{\int_0^a 2\alpha\sqrt{al}\, l \, \mathrm{d}l}{\int_0^a 2\alpha\sqrt{al}\, \mathrm{d}l} = \frac{2\alpha\sqrt{a}\int_0^a l^{3/2}\, \mathrm{d}l}{2\alpha\sqrt{a}\int_0^a l^{1/2}\, \mathrm{d}l}$$

$$= \frac{\frac{2}{5}[l^{5/2}]_0^a}{\frac{2}{3}[l^{3/2}]_0^a} = \frac{3}{5}\frac{a^{5/2}}{a^{3/2}} = \frac{3}{5}a.$$

II — *Déterminer le moment d'inertie d'un disque homogène pesant de rayon R par rapport à un de ses diamètres Δ* (figure 26).

L'ensemble des points du disque à distance ρ de Δ est constitué par deux segments de droite de longueur $2\sqrt{R^2-\rho^2}$. Cet ensemble de points peut être assimilé à un rectangle unique de longueur $4\sqrt{R^2-\rho^2}$ et de largeur (infiniment petite) $\Delta\rho$. La masse de ce rectangle est : $\Delta m = 4\mu\sqrt{R^2-\rho^2}\,\Delta\rho$ (où μ désigne la masse par unité de surface de la matière constituant le disque). Le moment d'inertie élémentaire de ce rectangle est donc :

$$4\mu\rho^2\sqrt{R^2-\rho^2}\,\Delta\rho.$$

Par suite, en passant à la limite, le moment d'inertie I_Δ cherché est égal à :

$$I_\Delta = \int_0^R 4\mu\rho^2\sqrt{R^2-\rho^2}\,\mathrm{d}\rho.$$

Posons $\rho = R\sin\theta$, avec $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

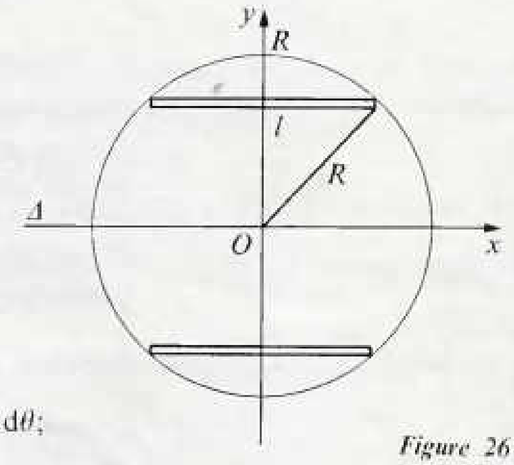


Figure 26

On obtient alors :

$$I_\Delta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\mu R^2 \sin^2\theta\sqrt{R^2 - R^2\sin^2\theta}\, R\cos\theta\,\mathrm{d}\theta;$$

$$= 4\mu R^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta = 4\mu R^4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\sin 2\theta)^2}{4}\,\mathrm{d}\theta$$

$$= \mu R^4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos 4\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta = \mu R^4\left[\frac{\theta}{2} - \frac{\sin 4\theta}{8}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \mu R^4\,\frac{\pi}{4}.$$

Or, $M = \mu R^2$ est la masse du disque. On a donc : $I_\Delta = \dfrac{MR^2}{4}$.

III — *Déterminer le moment d'inertie d'un cylindre de révolution homogène, de masse volumique μ, de rayon R, de hauteur h, par rapport à son axe Δ.*

L'ensemble des points situés à une distance r de Δ est assimilable à un tube d'épaisseur Δr, de rayon r et de hauteur h.
La masse de ce tube est : $\Delta m = \mu 2\pi r h \, \Delta r$.
Le moment d'inertie élémentaire de ce tube est donc : $\Delta I = r^2 \, dm = \mu \,.\, 2\pi r^3 h \, \Delta r$.

Par suite, si I_Δ désigne le moment d'inertie cherché :

$$I_\Delta = \int_0^R \mu \, 2\pi r^3 h \, dr = 2\pi\mu h \left[\frac{R^4}{4}\right]_0^R = 2\pi\mu h \frac{R^4}{4}.$$

Or, $M = \pi R^2 h \mu$ est la masse du cylindre, donc : $I_\Delta = \dfrac{MR^2}{2}$.

IV — *Calculer la masse d'une boule de rayon R, sachant que la densité varie en fonction de la distance au centre selon l'expression* $\mu(r) = ar + b$ $(r \in [0, R])$.

L'ensemble des points situés à une distance r du centre de la boule peut être assimilé à une coquille sphérique d'épaisseur très petite Δr, et d'aire $4\pi r^2$. La masse de l'ensemble de ces points est donc : $4\pi r^2(ar + b)\,\Delta r$.
La masse de la boule est donc :

$$\begin{aligned} M &= \int_0^R 4\pi r^2(ar + b)\, dr = 4\pi a\left[\frac{r^4}{4}\right]_0^R + 4\pi b\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R \\ &= \pi a R^4 + \frac{4}{3}\pi b R^3 \\ &= \frac{4}{3}\pi R^3\left(\frac{3aR}{4} + b\right) = V\left(\frac{3aR}{4} + b\right). \end{aligned}$$

• Exercices d'application

32. Déterminer le centre d'inertie d'un solide plan homogène, en forme de demi-disque.

33. Déterminer les moments d'inertie :
a) d'une barre pesante homogène par rapport à un axe de son plan médiateur;
b) d'une barre pesante par rapport à un axe perpendiculaire contenant une de ses extrémités;
c) d'une boule homogène par rapport à un de ses diamètres.

34. La densité superficielle de la Terre est d'environ 2,7 t/m³, et la densité au centre de la Terre est évaluée à 16 t/m³. En supposant que cette densité varie linéairement (suivant une loi de la forme $\mu(r) = ar + b$), déterminer :

a) la masse de la Terre (supposée sphérique);

b) le moment d'inertie de la Terre par rapport à son centre.

c. Valeur efficace

On considère un conducteur de résistance R parcouru par un courant d'intensité $i = I_0 \sin \omega t$. L'intensité d'un courant continu produisant le même effet Joule s'appelle intensité efficace, et est notée I_e.

L'énergie ΔW libérée par effet Joule pendant le temps Δt est :

$$\Delta W = Ri^2 \, \Delta t.$$

Soit W l'énergie libérée pendant la période $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$:

$$\begin{aligned} W &= \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} RI_0^2 \sin^2 \omega t \, dt \\ &= \frac{RI_0^2}{2} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} (1 - \cos^2 \omega t) \, dt \\ &= \frac{RI_0^2}{2} \left[t - \frac{1}{2\omega} \sin 2\omega t \right]_0^{\frac{2\pi}{\omega}} \\ &= \frac{RI_0^2 \pi}{\omega}. \end{aligned}$$

La puissance moyenne libérée est donc :

$$\frac{W}{\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{\omega W}{2\pi} = \frac{RI_0^2}{2}.$$

Un courant continu d'intensité I_e libère une puissance de RI_e^2.

Donc : $$I_e = \frac{I_0}{\sqrt{2}}.$$

DÉFINITION 4

On appelle *valeur efficace Y_e* d'une fonction périodique g, de période T, la racine carrée de la valeur moyenne de g^2 sur un intervalle de longueur T :

$$Y_e^2 = \frac{1}{T} \int_0^T g^2(t) \, dt$$

d. Facteur de puissance

Soit u la tension aux bornes d'un circuit, et i l'intensité aux bornes de ce circuit. Supposons que $u = U_0 \sin \omega t$ et $i = I_0 \sin (\omega t - \varphi)$. (La tension et l'intensité sont déphasées de φ.)

La puissance instantanée transformée dans cette portion de circuit étant ui, l'énergie totale libérée pendant une période T est :

$$\begin{aligned} W &= \int_0^T ui \, dt = \int_0^T U_0 I_0 \sin \omega t \sin (\omega t - \varphi) \, dt \\ &= U_0 I_0 \int_0^T \frac{1}{2} [\cos \varphi - \cos (2\omega t - \varphi)] \, dt \\ &= \frac{1}{2} U_0 I_0 \left[t \cos \varphi - \frac{\sin (2\omega t - \varphi)}{2\omega} \right]_0^T \\ &= T \frac{u_0}{\sqrt{2}} \frac{I_0}{\sqrt{2}} \cos \varphi. \end{aligned}$$

La puissance moyenne sur une période est donc :

$$P = \frac{W}{T} = U_e I_e \cos \varphi.$$

$\cos \varphi$ s'appelle le facteur de puissance, $U_e I_e$ s'appelle la puissance apparente.

EXERCICES ET PROBLÈMES

PROPRIÉTÉS DE L'INTÉGRALE

Généralités

1. Soit f et g des fonctions continues sur un intervalle fermé borné $[a, b]$. Quel est le signe de $\int_a^b [f(t) + \lambda g(t)]^2\,dt$, où λ désigne un nombre réel?
En déduire l'inégalité suivante, appelée *inégalité de Schwarz* :
$$\left[\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right]^2 \leqslant \int_a^b [f(t)]^2\,dt \int_a^b [g(t)]^2\,dt.$$
(On pourra développer $\int_a^b [f(t) + \lambda g(t)]^2\,dt$, et la considérer comme un trinôme du second degré en λ.)

2. Démontrer que, si f et g sont des fonctions numériques continues, positives sur un intervalle $[a, b]$ $(a < b)$ telles que, pour tout x de $[a, b]$, $f(x)g(x) \geqslant 1$, alors : $\int_a^b f(x)\,dx \int_a^b g(x)\,dx \geqslant (b - a)^2$. (On pourra utiliser le résultat de l'exercice **1**.)

3. Soit f et g des fonctions continues sur $[a, b]$. Démontrer que, si $g(x)$ garde un signe constant sur $[a, b]$, alors, m et M désignant les bornes de f sur $[a, b]$, on a :
$$m \leqslant \frac{\int_a^b f(t)g(t)\,dt}{\int_a^b g(t)\,dt} \leqslant M.$$

4. Soit f une fonction numérique continue sur un intervalle $[a, b]$, et soit $M = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$. On suppose que $a < b$ et que $M > 0$.

1° Prouver que : $\int_a^b |f(t)|^n\,dt \leqslant (b-a)M^n$.

2° Démontrer que $\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{\int_a^b |f(t)|^n\,dt} \leqslant M$.

3° Démontrer quel que soit le réel strictement positif ε, il existe un intervalle $[\alpha, \beta]$ inclus dans $[a, b]$ tel que pour tout x de $[\alpha, \beta]$: $|f(x)| \geqslant M - \varepsilon$.
En déduire que :
$$\int_a^b |f(t)|^n\,dt \geqslant (M - \varepsilon)^n(\beta - \alpha).$$

5. Prouver que :
$$\int_0^1 x^m(1 - x)^n\,dx = \int_0^1 x^n(1 - x)^m\,dx.$$

6. Démontrer que :
$$\int_a^b x f''(x)\,dx = [bf'(b) - f(b)] - [af'(a) - f(a)].$$

7. Démontrer que :
$$\int_x^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int_1^{\frac{1}{x}} \frac{dt}{1+t^2} \quad \text{(pour } x > 0\text{)}.$$

8. Soit f une fonction numérique définie et continue sur $[a, b]$, et telle que, pour tout réel x : $f(x) = f(a + b - x)$.
Prouver que $\int_a^b t f(t)\,dt = \frac{a+b}{2}\int_a^b f(t)\,dt$.

Comparaison

9. Soit f une fonction numérique continue sur un intervalle $[a, b]$. Prouver que si :
$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| = \int_a^b |f(x)|\,dx,$$
alors $f(x)$ a un signe constant.

10. Démontrer que, si f et g sont des fonctions continues sur $[a, b]$ telles que g soit positive sur $[a, b]$, et $|f|$ majorée par A sur $[a, b]$, alors :
$$\left|\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right| \leqslant A\int_a^b g(t)\,dt.$$

11. Soit f une fonction continue positive, soit F une primitive de f. Prouver que, quels que soient les réels strictement positifs a et h :
$$\frac{F(a+h) - F(a)}{2\sqrt{a+h}} \leqslant \int_{\sqrt{a}}^{\sqrt{a+h}} f(t^2)\,dt \leqslant \frac{F(a+h) - F(a)}{2\sqrt{a}}.$$

12. Trouver un encadrement de chacune des intégrales suivantes :
$$I_1 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{(3+2\cos t)^2} \quad ; \quad I_2 = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^5}}.$$

13. Démontrer que :
$$1{,}13 < \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt[3]{4 - \cos^2 t}\,dt < 1{,}20.$$

14. Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :
$$f(\alpha) = \int_0^1 \sqrt{1 - x^\alpha}\,dx.$$

1° Prouver que, pour $x \in [0, 1]$:
$$1 - x^\alpha \leqslant \sqrt{1 - x^\alpha} \leqslant 1 - \frac{1}{2}x^\alpha.$$

2° En déduire que : $\frac{\alpha}{1+\alpha} < f(\alpha) < \frac{\alpha + \frac{1}{2}}{\alpha + 1}$.

15. Soit f une fonction numérique continue sur $[0, 1]$ et telle que, pour tout x de $[0, 1]$:
$$\int_x^1 f(t)\,dt \geqslant \frac{1 - x^2}{2}.$$
Soit F une primitive de f sur $[0, 1]$.

1° Prouver que : $F(1) = \int_0^1 x f(x)\,dx + \int_0^1 F(x)\,dx$.

2° En déduire que : $\int_0^1 x f(x)\,dx \geqslant \frac{1}{3}$.

3° En déduire que : $\int_0^1 [f(x)]^2\,dx \geqslant \frac{1}{3}$.

16. Soit f et g des fonctions continues sur un intervalle $[a, b]$ (avec $a < b$).
On suppose que f est croissante et que g prend ses valeurs dans $[0, 1]$. On pose :

$$\ell = \int_a^b g(t)\,dt.$$

a) Étudier la variation de la fonction G définie par :

$$G(x) = \int_a^x g(t)\,dt.$$

Montrer que $a + G(x) \leqslant x$.
b) Comparer les fonctions φ et ψ définies par :

$$\varphi(x) = \int_a^b f(t)g(t)\,dt \quad \text{et} \quad \psi(x) = \int_a^{a+G(x)} f(t)\,dt.$$

c) Démontrer que :

$$\int_a^b f(t)g(t)\,dt \geqslant \int_a^{a+\ell} f(t)\,dt.$$

Dans quel cas a-t-on l'égalité?

17. Démontrer que, pour tout entier naturel n :

$$\frac{1}{2(n+1)} \leqslant \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,dx \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

18. *1°* Étudier la variation de la fonction f définie par :

$$f(x) = e^{x^2} - (e-1)x^2 - 1.$$

2° Prouver que : $\dfrac{4}{3} < \displaystyle\int_0^1 e^{x^2}\,dx < \dfrac{e+2}{3}$.

Valeur moyenne

19. Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}$.
1° Préciser son ensemble de définition.
2° On pose $I(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{\ln t}$, pour $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$.
3° Prouver qu'il existe un réel c de l'intervalle $]x, x^2[$ tel que :

$$I(x) = (x^2 - x)f(c) + [\ln(t-1)]_x^{x^2}.$$

4° En déduire la limite de $I(x)$ lorsque x tend vers 1.

20. Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
1° Soit $I = \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$. Effectuer le changement de variable $x = \alpha t + \beta$.
On obtient : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_l^m g(t)\,dt$. Comparer les valeurs moyennes de f sur $[a, b]$ et de g sur $[l, m]$.

2° En déduire que :

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = \int_0^1 f[a + (b-a)t]\,dt.$$

3° Le résultat du *1°* est-il valable pour un autre changement de variable?
(On s'attachera à trouver un contre-exemple, et on expliquera le résultat.)

21. Soit f une fonction continue sur $[0, \pi]$ et telle que :

$$\int_0^\pi f(t)\cos t\,dt = \int_0^\pi f(t)\sin t\,dt = 0.$$

Démontrer qu'il existe deux réels α et β tels que :

$$0 < \alpha < \beta < \pi \quad \text{et} \quad f(\alpha) = f(\beta) = 0.$$

22. Soit la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{x-1}{|x^2 - 2x| + 1}.$$

Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[1, m]$ ($m \in \mathbb{R}$).

23. Soit f une fonction numérique admettant une dérivée seconde continue sur l'intervalle $[a, b]$.
1° Déterminer une primitive de la fonction φ telle que :

$$\varphi(x) = (f''(x) + f(x))\sin(x - a).$$

2° En déduire $\displaystyle\int_a^b \varphi(t)\,dt$.
3° On suppose que $b - a = \pi$ et que f est strictement positive sur $[a, b]$. Prouver qu'il existe un réel α de $[a, b]$ tel que $f''(\alpha) + f(\alpha) > 0$.

CALCUL DE PRIMITIVES ET D'INTÉGRALES

*Dans les exercices **24** à **68**, on demande de déterminer l'ensemble des primitives de la fonction f sur un intervalle I que l'on précisera :*

24. $f(x) = \left(x^2 + \dfrac{1}{x^2}\right)^2$. **25.** $f(x) = \left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^2$.

26. $f(x) = \dfrac{(1-\sqrt{x})^2}{\sqrt{x}}$. **27.** $f(x) = \dfrac{x^{\frac{5}{3}} + x^{\frac{2}{3}} - 2}{x^{\frac{1}{3}}}$.

28. $f(x) = \dfrac{(1 - \sqrt{x} + \sqrt{x^3})^2}{\sqrt{x}}$.

29. $f(x) = \dfrac{6x^5 + 21x - 12\sqrt{x}}{\sqrt{x^5}}$.

30. $f(x) = \dfrac{2x^5 + 2x}{(x^4-1)^2}$
$\left(\text{écrire } f(x) = \dfrac{ax+b}{(x^2-1)^2} + \dfrac{cx+d}{(x^2+1)^2}\right)$.

31. $f(x) = \dfrac{x^4 - 2x^2 + 2}{(x-1)^2}$.

32. $f(x) = \dfrac{5x^4 + 40x^2 + 20x + 80}{(x^2+4)^2}$.

33. $f(x) = \sin^2 x$. **34.** $f(x) = \cos^3 x$.

35. $f(x) = (\sin x + \cos x)^5$.

36. $f(x) = 2\cos^2 x - \sin^2 x$.

37. $f(x) = 5\cos 3x - 3\sin 3x$.

38. $f(x) = \sin^5 x - \cos^4 x$.

39. $f(x) = e^{3x}$. **40.** $f(x) = x\,e^{-x^2}$.

41. $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$. **42.** $f(x) = \cos x\, e^{\sin x}$.

43. $f(x) = x\,e^{\sqrt{x}}$. **44.** $f(x) = ax^2$.

45. $f(x) = e^x \cos x$. **46.** $f(x) = (x^2 + x - 1)e^{2x}$.

47. $f(x) = \dfrac{1}{x^2 - 9}$. **48.** $f(x) = \dfrac{3x}{x^2+1}$.

49. $f(x) = \dfrac{4}{2x+1}$. **50.** $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$.

51. $f(x) = \dfrac{1}{x \ln |x|}$. **52.** $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos^3 x}$.

53. $f(x) = \dfrac{\cos(\ln x)}{x}$. **54.** $f(x) = \dfrac{3\sin x}{1 + \cos^2 \dfrac{x}{2}}$.

55. $f(x) = \dfrac{\cos^2 \dfrac{x}{2}}{x + \sin x}$. **56.** $f(x) = \dfrac{1}{2 + \sqrt{x}}$.

57. $f(x) = \cos x \ln(1 + \cos x)$.

58. $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$.

59. $f(x) = (x^2 + 3x - 1)\ln x$.

60. $f(x) = x \ln x$.

61. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x^2}$. **62.** $f(x) = x \tan x^2$.

63. $f(x) = \tan^2 x$. **64.** $f(x) = x\sqrt{(1+x^2)^3}$.

65. $f(x) = \dfrac{x}{(k^2 + x^2)^2}$. **66.** $f(x) = \dfrac{2x + \cos x}{\sqrt{x^2 + \sin x}}$.

67. $f(x) = (3x^2 - 7x + 1)\,[2\cos(3x+1) + 4\sin(3x-1)]$.

68. $f(x) = \arctan x$.

A l'aide des changements de variable indiqués, trouver les primitives des exercices **69** *à* **72** *(on choisira* x_0 *et on précisera l'intervalle I auquel x appartient).*

69. $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{dt}{1+\cos t}$, $\quad u = \tan\dfrac{t}{2}$.

70. $\displaystyle\int_{x_0}^{x} t^2 \sqrt{a+t}\, dt$, $\quad u = \sqrt{a+t}$.

71. $\displaystyle\int_{x_0}^{x} \frac{t\, dt}{\sqrt{t+1}}$, $\quad u = \sqrt{t+1}$.

72. $\displaystyle\int_{x_0}^{x} t\sqrt{t+k^2}\, dt$, $\quad u = \sqrt{t+k^2}$.

Dans les exercices **73** *à* **89**, *on demande de calculer les intégrales.*

73. $\displaystyle\int_2^7 (x^3 - 7x + 15)\, dx$. **74.** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 3x\, dx$.

75. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x+2}\, dx$. **76.** $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x\, dx$.

77. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(x+5)^3}}$. **78.** $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan x}{\cos x}\, dx$.

79. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos x\, dx$. **80.** $\displaystyle\int_0^{2\pi} x^2 \sin 2x\, dx$.

81. $\displaystyle\int_0^2 [1 - |x-1|]^3\, dx$.

82. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin 3x\, dx$.

83. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{x}{\cos^2 x}\, dx$.

84. $\displaystyle\int_{-3}^{3} \frac{|x-3| + k}{|x-k| + 3}\, dx$.

85. $\displaystyle\int_0^{2\pi} (|\sin x| + |\cos x|)\, dx$.

86. $\displaystyle\int_{-6}^{4} |x^2 - 2x - 3|\, dx$.

87. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} (x\cos^2 x + \sin^4 x)\, dx$.

88. $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}\, dx$.

89. $\displaystyle\int_1^n (|x-1| + |x-2| + \dots + |x-n|)\, dx \quad (n \in \mathbb{N}^*)$.

90. *1°* A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale :

$$\int_0^x \frac{3 \arcsin t\, dt}{\sqrt{1-t^2}} \quad (x \in]-1, 1[).$$

2° En déduire : $\displaystyle\int_0^x \frac{3 \arccos t\, dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

$\left(\text{On rappelle que } \arcsin x + \arccos x = \dfrac{\pi}{2}.\right)$

91. Soit I et J les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^x \cos^2 t \, dt, \qquad J = \int_0^x \sin^2 t \, dt.$$

Calculer simultanément I et J.

92. Calculer simultanément les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^x (at^2 + bt + c) \cos^2 t \, dt,$$

$$J = \int_0^x (at^2 + bt + c) \sin^2 t \, dt.$$

93. *1°* Vérifier que, pour tout entier naturel m non nul, $\frac{1}{m} \sin mx$ est une primitive de $\cos mx$.

2° On considère les intégrales :

$$A = \int_{-\pi}^{\pi} \cos 2x \cos 4x \, dx,$$

$$B = \int_{-\pi}^{\pi} \sin 2x \sin 4x \, dx.$$

Calculer $A + B$ et $A - B$. En déduire A et B.

3° On considère maintenant :

$$C = \int_{-\pi}^{\pi} \cos px \cos qx \, dx,$$

$$D = \int_{-\pi}^{\pi} \sin px \sin qx \, dx,$$

où p et q sont des entiers naturels non nuls. Calculer C et D.

94. Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Un point M se déplace dans ce plan. A la date t $t = 0$, où commence le mouvement, le point M est en O et son vecteur-vitesse est nul. A toute date t positive, le vecteur-accélération du point M a pour coordonnées $(6t, 2)$.

1° Donner, en fonction de t, les expressions des coordonnées de M à la date t.

2° Tracer la trajectoire de M et discuter l'existence d'une tangente à cette trajectoire ayant une direction donnée.

95. On considère les deux intégrales :

$$A = \int_0^x e^t \cos 2t \, dt, \quad B = \int_0^x e^t \sin 2t \, dt.$$

1° A l'aide de la formule d'intégration par parties appliquée à A et à B, établir deux relations entre A et B. En déduire les valeurs de A et de B.

2° On pose : $I = \int_0^x e^t \cos^2 t \, dt$, $J = \int_0^x e^t \sin^2 t \, dt$.

Calculer $I + J$ et $I - J$. En déduire les valeurs de I et J.

96. Calculer : $\int_1^x 2t \, e^{t^2+1} \, dt$. En déduire, par une intégration par parties : $\int_1^x 2t^3 \, e^{t^2+1} \, dt$.

97. *1°* Soit f une fonction continue et dérivable sur un intervalle I. Donner, en fonction de f et de f', l'expression de la dérivée de la fonction F définie sur I par $F(x) = \frac{f(x)}{e^x}$.

2° Démontrer qu'il existe un couple (A, B) de réels tel que, quel que soit x $(x \neq -1)$, on ait :

$$\frac{x+2}{(x+1)^2} = \frac{A}{(x+1)^2} + \frac{B}{x+1}.$$

En déduire qu'il existe une fonction v telle que :

$$v(x) - v'(x) = \frac{x+2}{(x+1)^2}.$$

3° Quel est l'ensemble des primitives de la fonction F lorsque $f(x) = \frac{x+2}{(x+1)^2}$?

CALCULS APPROCHÉS D'INTÉGRALES

Dans les exercices **98** *à* **105**, *on demande de déterminer un encadrement à 10^{-3} près, des intégrales et de déterminer ensuite une valeur approchée en utilisant une méthode plus performante, mais ne permettant pas de préciser* a priori *un encadrement. (On considérera, le cas échéant, que la fonction figurant sous le signe d'intégration est prolongée par continuité.)*

98. $\int_0^3 e^{-t^2} \, dt.$ **99.** $\int_0^1 \frac{\cos \pi x}{x} \, dx.$

100. $\int_0^1 \sqrt{1 + t^4} \, dt.$ **101.** $\int_0^5 \frac{dx}{\ln x}.$

102. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - 0{,}1 \sin^2 t} \, dt.$ **103.** $\int_0^3 \frac{\sin x}{x} \, dx.$

104. $\int_{-2}^2 x^2 e^{-x^2} \, dx.$ **105.** $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} \, dx.$

106. Soit $I = \int_a^b f(t) \, dt \quad (a < b).$

On pose $I = (b - a) f\left(\frac{a+b}{2}\right) + R.$

Si on suppose que f est croissante sur $[a, b]$, prouver que :

$$(b-a)\left[f(a) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] < R < (b-a)\left[f(b) - f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right].$$

Formule d'interpolation de Lagrange

107. *1°* On désigne par $\mathcal{E}$ l'espace vectoriel réel des applications polynômiales de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, de degré inférieur à 2. On rappelle que $\mathcal{E}$ est de dimension 3.

Soit a un nombre réel tel que $a^2 \neq 1$. On considère les trois applications polynômiales R_a, S_a, T_a définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$R_a(x) = \frac{(x-1)(x-a)}{2(1+a)}, \quad S_a(x) = \frac{x^2-1}{a^2-1},$$
$$T_a(x) = \frac{(x+1)(x-a)}{2(1-a)}.$$

a) Calculer les valeurs de R_a, S_a, T_a aux points $-1, a, 1$ et en déduire que ces trois applications polynômiales sont linéairement indépendantes. Constituent-elles une base de E?

b) Soit α, β et γ des nombres réels. Montrer qu'il existe un élément P de E et un seul tel que :

$$P(-1) = \alpha, \quad P(a) = \beta, \quad P(1) = \gamma$$

en cherchant à exprimer P à l'aide de R_a, S_a, T_a.

2° *a)* Soit f l'application de $[-1; 1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3+x} + \frac{1}{3-x}\right); \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1.$$

Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx$.

b) Déterminer l'élément Q_0 de E qui prend aux points $-1, 0, 1$ les mêmes valeurs que f et calculer $Q_0(x) - f(x)$, ainsi que $\displaystyle\int_{-1}^{1} Q_0(x)\,dx$.

c) On pose $\displaystyle\Delta = \int_{-1}^{1} (Q_0(x) - f(x))\,dx$.

En minorant et majorant $9 - x^2$ lorsque $|x| \leqslant 1$, montrer que :

$$\frac{1}{819} \leqslant \Delta \leqslant \frac{1}{720}$$

d) En déduire un encadrement de ln 2 par des nombres décimaux dont la différence est 16×10^{-5} ;

3° On considère à nouveau, lorsque $a^2 \neq 1$, les polynômes R_a, S_a, T_a, introduits au 1°.

a) Calculer les intégrales :

$$\int_{-1}^{1} R_a(x)\,dx, \qquad \int_{-1}^{1} S_a(x)\,dx, \qquad \int_{-1}^{1} T_a(x)\,dx.$$

b) On suppose que $(a^2-1)(a^2-9) \neq 0$. Soit Q_a l'élément de E qui prend aux points $-1, a, 1$ les mêmes valeurs que f. Calculer :

$$I(a) = \int_{-1}^{1} Q_a(x)\,dx.$$

(Il est conseillé de vérifier que pour $a = 0$, on obtient le résultat trouvé en 2° *b*).)

c) Étudier la variation de $I(a)$, lorsque a parcourt l'intervalle $]-1; 1[$.

d) En déduire qu'il existe un nombre a_0 tel que :

$$-1 < a_0 < 1 \quad \text{et} \quad I(a_0) = \ln 2.$$

Formule des cinq niveaux

108. A — Étudier et représenter graphiquement la fonction polynôme Q, de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$, définie par : $Q(x) = 63x^4 - 70x^2 + 15$.

Montrer que l'équation $Q(x) = 0$ admet deux racines positives, que l'on désignera par a et b, en convenant : $0 < a < b$. Donner des valeurs numériques approchées de a et b, à 10^{-5} près.

B — Soit (α, β) un couple de réels tel que $0 < \alpha < \beta$.

1° Montrer qu'on peut associer à (α, β) un triplet (λ, μ, ν) de réels, et un seul, tel que l'égalité :

$$(1) \quad \int_{-1}^{+1} P(x)\,dx = \lambda P(0) + \mu(P(\alpha) + P(-\alpha)) + \nu(P(\beta) + P(-\beta))$$

soit vérifiée dans chacun des cas où P est l'une des fonctions monômes :

$$x \mapsto 1, \qquad x \mapsto x^2, \qquad x \mapsto x^4.$$

(On exprimera λ, μ et ν en fonction de α et β.)

Que peut-on dire de l'égalité (1) dans chacun des cas où P est l'une des fonctions monômes :

$$x \mapsto x, \qquad x \mapsto x^3, \qquad x \mapsto x^5?$$

2° Le triplet (λ, μ, ν) ayant été associé à (α, β) comme il a été dit au 1°, montrer que l'égalité (1) est vérifiée lorsque P est l'une quelconque des fonctions polynômes dont le degré n'excède pas 5.

C — Dans toute la suite, on reprend les notations de la question **B**, en supposant en outre que α et β sont respectivement égaux aux réels a et b introduits dans la question **A**.

1° Montrer qu'ici : $\mu\alpha^6 + \nu\beta^6 = \dfrac{1}{7}$; $\mu\alpha^8 + \nu\beta^8 = \dfrac{1}{9}$.

En déduire que l'égalité (1) est vérifiée lorsque P est l'une quelconque des fonctions polynômes dont le degré n'excède pas 9.

2° Donner des valeurs numériques approchées de λ, μ et ν. Pour cela, on commencera par vérifier qu'ici :

$$\mu = \frac{21}{50}\,\frac{3-5\beta^2}{7\alpha^2-3}; \qquad \nu = \frac{21}{50}\,\frac{3-5\alpha^2}{7\beta^2-3};$$
$$\lambda = 2(1-\mu-\nu).$$

3° A toute application continue f de $[-1, 1]$ dans $\mathbb{R}$ on associe :

$$I(f) = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx$$

et on adopte :

$$J(f) = \lambda f(0) + \mu(f(\alpha) + f(-\alpha)) + \nu(f(\beta) + f(-\beta))$$

pour valeur approchée de $I(f)$ (formule des cinq niveaux). En utilisant les valeurs numériques approchées de $\alpha, \beta, \lambda, \mu, \nu$ déjà obtenues, donner un majorant de l'erreur $|I(f) - J(f)|$ ainsi commise lorsque f est l'application $x \mapsto \cos x$.

SUITES

Récurrence

109. On pose : $\displaystyle I_n = \int_0^1 t^n \sin \pi t\,dt \qquad (n \in \mathbb{N}^*)$.

1° Démontrer que, pour tout n : $\displaystyle 0 < I_n < \int_0^1 t^n\,dt$.

2° Démontrer : $\lim\limits_{n \to +\infty} \int_0^1 t^n \, dt = 0$.
3° En déduire que : $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$.

110. Pour tout entier naturel n, on pose :

$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^{2n+1} x}.$$

1° Prouver qu'il existe des réels a et b tels que, pour tout x de $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$: $\dfrac{1}{\cos x} = \dfrac{a \cos x}{1 - \sin x} + \dfrac{b \cos x}{1 + \sin x}$.
En déduire le calcul de I_0.
2° Démontrer que $2nI_n = (2n-1)I_{n-1} + \dfrac{2^n}{\sqrt{2}}$.
En déduire I_2.

111. On pose :

$$A_n(x) = 1 + 2x + \ldots + nx^{n-1},$$
$$B_n(x) = 1 \times 2 + 2 \times 3x + \ldots + n(n+1)x^{n-1},$$
$$C_n(x) = 1 + 1^2 x + 2^2 x^2 + \ldots + n^2 x^n.$$

1° Déterminer la primitive F_n de A_n qui est égale à 1 pour $x = 0$. En déduire une expression de $A_n(x)$.
2° Démontrer que $B_n(x) = A'_{n+1}(x)$, et que

$$C_n(x) = 1 + xA_n(x) + x^2 A'_n(x).$$

3° En déduire des expressions de $B_n(x)$ et $C_n(x)$.

112. Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \frac{1}{x(x+1)}.$$

1° Trouver deux entiers relatifs a et b tels que :

$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}.$$

En déduire, pour x appartenant à $]0, +\infty[$:

$$F(x) = \int_1^x f(t) \, dt.$$

2° On considère la suite s définie, pour n entier naturel non nul, par :

$$s(n) = F(1) + F(2) + \ldots + F(n).$$

Cette suite admet-elle une limite quand n tend vers $+\infty$?

113. Soit : $I_n = \int_0^x \cos^n t \, dt$, $J_n = \int_0^x \sin^n t \, dt$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

1° Démontrer que, pour tout entier n supérieur à 2, on a :

$nI_n = \cos^{n-1} x \sin x + (n-1)I_{n-2}$,
$nJ_n = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1)J_{n-2}$.

2° Calculer I_2, J_2, I_5 et J_3.
3° Peut-on, lorsque n est impair, calculer I_n et J_n à l'aide d'un changement de variable simple?

114. On considère la fonction f définie, pour x réel positif, par : $f(x) = x[x - E(x)]$;
en désignant par $E(x)$ le plus grand entier inférieur à x.
a) Dans le plan, rapporté à un repère orthonormal, construire le graphique de f pour x élément de $[0, 3[$.
b) Soit k un entier naturel. Donner l'expression de $f(x)$ pour x élément de $[k, k+1[$, puis calculer $u_k = \int_k^{k+1} f(x) \, dx$.
Calculer $(u_{k+1} - u_k)$. En déduire que la suite finie $(u_0, u_1, \ldots, u_{n-1})$ est une suite arithmétique dont on donnera la raison et le premier terme.
Calculer $\int_0^n f(x) \, dx$, n étant un entier naturel.

115. Soit : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$ $(n \in \mathbb{N}^*)$.

1° Justifier l'existence de I_n. Calculer I_1 et I_2.
2° Établir une relation de récurrence entre I_n et I_{n-2}. En déduire l'expression de I_n en fonction de n.
3° On pose : $u_p = \left(\dfrac{2.4 \ldots (2p-2)}{3.5 \ldots (2p-1)}\right)^2 2p$.
Démontrer que u_p est une valeur approchée par excès de $\dfrac{\pi}{2}$, avec : $u_p - \dfrac{\pi}{2} < \dfrac{u_p}{2p+1}$.

116. Soit n un entier naturel supérieur à 2. Pour tout entier naturel $k \leqslant n$, on pose :

$$I_{k,n} = \int_0^1 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \, dx.$$

Comparer $I_{k,n}$ et $I_{k+1,n}$. En déduire $I_{k,n}$ en fonction de n.

117. On pose $I(a, n) = \int_0^1 x^a (1-x)^n \, dx$, $a \in \mathbb{N}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $I(a, 0) = \int_0^1 x^a \, dx$.

1° En intégrant par parties, montrer que :

$$I(a+1, n) = \frac{a+1}{n+1} I(a, n+1).$$

2° Établir que $I(a, n) - I(a, n+1) = I(a+1, n)$. En déduire que : $I(a, n+1) = \dfrac{n+1}{n+a+2} I(a, n)$.
3° a étant fixé ($a \in \mathbb{N}^*$), calculer $I(a, 0)$ et démontrer par récurrence sur n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$I(a, n) = \frac{1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (n-1) \times n}{(a+1)(a+2)\ldots(a+n+1)}.$$

118. *1°* Soit p et q des rationnels positifs. Pour $x \in [0, 1[$, on pose : $f_{p,q}(x) = \int_0^x t^p (1-t)^q \, dt$.
Justifier cette notation; déterminer la fonction dérivée de $f_{p,q}$.
En se limitant à $p \geqslant 1$, montrer qu'il existe un triplet $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, dépendant du couple (p, q), tel que, pour tout $x \in [0, 1[$:

$$af_{p,q}(x) + bf_{p-1,q-1}(x) = x^p (1-x)^q (cx - q).$$

On distinguera les cas $q = 0$ et $q \neq 0$. Dans le second cas, on montrera qu'il existe une solution, et une seule, à savoir :

$$a = (p+q)(1+p+q); \quad b = -pq; \quad c = p+q.$$

2° Pour $x \in [0, 1[$ et $n \in \mathbb{N}$, donner une expression de

$$F_n(x) = \int_0^x \sqrt[3]{\frac{t^n}{(1-t)^{n+3}}}\, dt,$$

dans laquelle n'intervient aucun signe d'intégration. (On mettra la fonction F_n sous la forme $f_{p-1,q-1}$.)

119. Soit $F_n(x) = \int_0^x e^{-t} \sin^{2n} t \, dt$.

1° Prouver que F_n est croissante et majorée par 1.
2° Soit $I_n = \lim_{x \to +\infty} F_n(x)$.

$\left(\text{On note } I_n = \int_0^{+\infty} e^{-t} \sin^{2n} t \, dt.\right)$

Prouver que $I_n = (2n-1)I_{n-1} - 2nI_n$.
3° En déduire I_2, I_3, puis I_n en fonction de n.
4° Étudier la limite de la suite (I_n).

120. Soit $I_n = \int_0^1 \frac{dx}{(1+x^n)\sqrt[n]{1+x^n}}$.

1° Calculer I_1, I_2.

2° Calculer I_n en intégrant par parties $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt[n]{1+x^n}}$.

3° Étudier la limite en $+\infty$ de la suite (I_n) suivant les valeurs de x.

121. Soit $f(x) = -x \ln x$ et $f(0) = \lim_{x \to 0} f(x) = l$.

1° Préciser la valeur de l. Représenter graphiquement la fonction f.

2° Calculer $I_1 = \int_0^1 f(x)\, dx$.

3° On pose :

$$I_k = \int_0^1 \frac{(f(x))^k}{k!}\, dx \quad \text{et} \quad H_{h,k} = \int_0^1 x^h (\ln x)^k \, dx.$$

Prouver que $H_{h,k} = -\frac{k}{h+1} H_{h,k-1}$.

4° Calculer $H_{h,0}$. En déduire $H_{h,k} = \frac{(-1)^k k!}{(h+1)^{k+1}}$.

5° En déduire I_k.

122. Soit f la fonction de la variable réelle x, définie par $f(x) = x\, e^x$.
1° Calculer les dérivées première et seconde de f et en déduire, par récurrence, la dérivée d'ordre n.
2° Étudier les variations de la fonction f_n définie par : $f_n(x) = (x+n)\, e^x$, où n est un entier relatif. Tracer les courbes représentatives C_{-1}, C_0 et C_1 des fonctions f_{-1}, f_0 et f_1.
3° Calculer :

$$I_0(h) = \int_0^h f_0(x)\, dx \quad \text{et} \quad I_n(h) = \int_{-n}^{-n+h} f_n(x)\, dx$$

en fonction de h, et établir la relation :

$$I_n(h) = e^{-n} I_0(h).$$

Convergence

123. Soit $u_n = \frac{\ln n!}{\ln n^n}$.

1° Prouver que $\ln n! > \int_1^n \ln x \, dx$.

2° En déduire que $u_n > 1 - \frac{n-1}{n \ln n}$.

3° Démontrer que la suite (u_n) converge vers 1.

124. Soit $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$.

1° Prouver que, pour tout entier naturel $k \geqslant 2$:

$$\int_k^{k+1} \frac{dx}{x^2} < \frac{1}{k^2} < \int_k^{k+1} \frac{dx}{(x-1)^2}.$$

2° En déduire que (u_n) converge. Préciser un encadrement de sa limite.

125. Prouver que, pour tout entier naturel n :

$$\int_1^n \ln x \, dx < \ln n! < \int_1^{n+1} \ln x \, dx.$$

En déduire la limite de la suite (u_n) telle que $u_n = \frac{\ln n!}{n \ln n}$.

Dans les exercices **126** *à* **138**, *on demande d'étudier la limite de la suite* (u_n).

126. $u_n = \frac{1}{n} \sqrt[n]{(n+1)(n+2) - 2n}$.

127. $u_n = \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \dots + \sqrt{n}}{n}$.

128. $u_n = \frac{\sum_{i=1}^{k} n^i}{n^{k+1}}$.

129. $u_n = \frac{1}{an} + \frac{1}{an+b} + \dots + \frac{1}{an+b(n-1)}$.

130. $u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^{n} \ln C_n^k$.

131. $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

132. $u_n = \frac{1}{n}\left[1 + \cos^2 \frac{\pi}{n} + \cos^2 \frac{2\pi}{n} + \dots + \cos^2 \frac{n\pi}{n}\right]$.

133. $u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{2}{\sqrt{n+2}} + \dots + \frac{n}{\sqrt{2n}}\right)$.

134. $u_n = \frac{n}{n^2} + \frac{n}{1+n^2} + \frac{n}{2^2+n^2} + \dots + \frac{n}{(n-1)^2+n^2}$.

135. $u_n = \sqrt[n+1]{n+1}\ \sqrt[n+2]{n+2} \ldots \sqrt[2n]{2n}.$

136. $u_n = \sqrt[n]{\sin\frac{\pi}{n}\sin\frac{2\pi}{n}\ldots\sin\frac{(n-1)\pi}{n}}.$

137. $u_n = \frac{1}{n^2}\sum_{p=1}^{n}\sqrt{p(n-p)}.$

138. $u_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{(2k)^3 + n^3}.$

139. *1°* Prouver que, si $x \in \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[\setminus \{0\}$, alors :

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x.$$

2° Étudier la limite de la suite (u_n) telle que :

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\left(1 + \frac{2}{n^2}\right)\ldots\left(1 + \frac{n}{n^2}\right).$$

3° Étudier pour a réel non nul, la limite de la suite (v_n) telle que :

$$v_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1 + \frac{ka}{n^2}\right).$$

4° Établir, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

5° Étudier la limite de la suite (w_n) telle que :

$$w_n = \left[\frac{\left(1 + \frac{a}{n}\right)^n}{e^a}\right]^n$$

140. Soit p et q deux entiers naturels non nuls. Prouver que :

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\sqrt[n]{p^k q^{n-k}} = \frac{p-q}{\ln p - \ln q}.$$

(On pourra faire intervenir la fonction f définie par $f(x) = \left(\frac{p}{q}\right)^x$.)

EXERCICES DIVERS

141. Soit $I_{(m,n)} = \int_a^b (x-a)^m (b-x)^n \, dx.$

1° Calculer I :

a) en utilisant le changement de variable $x - a = t$ et la formule du binôme,

b) en établissant, par intégration par parties, une relation de récurrence entre $I_{(m,n)}$ et $I_{(m-1,n+1)}$, puis en déduisant $I_{(m,n)}$ du calcul de $I_{(0,m+n)}$.

2° Déduire de ce qui précède que :

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{(-1)^i}{m+1+i}C_n^i = \frac{1}{m+n+1}C_{m+n}^m$$

142. Soit $I(a) = \int_0^1 |x^2 + a| \, dx.$

Prouver que pour tout a : $I(a) \geqslant I\left(-\frac{1}{4}\right).$

143. On considère, dans un repère orthonormal, la courbe H d'équation $y = \frac{1}{x}$.

Soit x un nombre strictement positif. On désigne par P et P' deux points de l'axe $(O'x)$ tels que $\overline{OP} = x$, $\overline{OP'} = \frac{e^2}{x}$.

Soit M et M' les points de la courbe H qui se projettent orthogonalement en P et P' sur l'axe (Ox).

1° Calculer l'aire, S, de la surface limitée par l'axe des abscisses, les droites (MP) et $(M'P')$ et la courbe H.

2° On considère la fonction S définie par :

$$S(x) = 2 - 2\ln x, \quad \text{pour : } 0 < x \leqslant e,$$
$$S(x) = 2\ln x - 2, \quad \text{pour : } x \geqslant e.$$

Calculer la dérivée de la fonction S pour : $x \neq e$.
Étudier la variation de S et construire son graphique.
Préciser les tangentes à ce graphique au point d'abscisse $x = e$.

3° Calculer les valeurs de x pour lesquelles l'aire S est égale à 2.

4° Étudier la limite en e de la fonction :

$$\left[x \mapsto \frac{S(x)}{2(x-e)}\right].$$

(On étudiera éventuellement les limites à droite et à gauche.)

144. On considère la fonction f, de la variable réelle x, définie par :

$$f(x) = \frac{\sin x}{\cos x + \sin x}.$$

1° Étudier son ensemble de définition. Démontrer qu'elle est périodique de période π et étudier sa variation dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[$.

Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.

2° Calculer les primitives de f. On pourra mettre $f(x)$ sous la forme :

$$f(x) = A + B\left(\frac{-\sin x + \cos x}{\cos x + \sin x}\right),$$

où A et B sont des constantes à préciser.

En déduire la valeur de l'aire du domaine compris entre la courbe, l'axe des abscisses et les deux droites d'équations $x = 0$, $x = \frac{\pi}{2}$, parallèles à l'axe des ordonnées.

145. Soit la fonction $f = [x \mapsto f(x) = \ln(x^2)]$. Elle est définie pour tout x réel non nul.

1° Étudier la variation de f et la représenter graphiquement par rapport à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit C la courbe représentative.

2° Écrire l'équation de la tangente à C au point E ayant pour abscisse le nombre e.
3° Vérifier que la fonction F, définie par :
$$F(x) = x \ln x^2 - 2x,$$
est une primitive de la fonction définie par :
$$f(x) = \ln x^2$$
dans chacun des intervalles où cette dernière est définie.
4° Évaluer l'aire du domaine plan limité par l'axe des abscisses, $(O'x)$, la courbe C et la tangente à C au point E.

FONCTIONS DÉFINIES PAR DES INTÉGRALES. INTÉGRALES IMPROPRES

146. Soit $A(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t}(\cos t + \sin t)\,dt.$
1° Prouver que : $A(x) = 1 - e^{-x}\cos x$.
2° Étudier la limite de A en $+\infty$.

147. Soit F l'application de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par :
$$F(x) = \int_1^{\frac{1}{x}} \sin t \sin \frac{1}{t}\,dt + \int_1^x \frac{1}{t^2} \sin t \sin \frac{1}{t}\,dt.$$
Calculer $F'(x)$. Que peut-on en déduire pour F?

148. Soit f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :
$$f_n(x) = \int_1^x t^{-n} \ln t\,dt.$$
1° Calculer $f_1(x)$.
2° Calculer $f_n(x)$, pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.
3° Montrer que $f_n(x)$ admet une limite en $+\infty$. La calculer.

Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle $]a, +\infty[$. Soit b un élément de $]a, +\infty[$. Soit $\varphi(x) = \displaystyle\int_b^x f(t)\,dt$ et $\psi(x) = \displaystyle\int_x^b f(t)\,dt$.
Si φ admet une limite finie l en $+\infty$, on note
$$\int_b^{+\infty} f(t)\,dt = l.$$
Si ψ admet une limite finie l' en a, on note $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt = l'$.
Si φ et ψ admettent des limites finies l et l', on note $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = l + l'$.

Dans ces trois cas, on dit que les intégrales convergent. Étudier la convergence des intégrales des exercices **149** *à* **162**.

149. $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{dt}{(3t-27)^3}.$ **150.** $\displaystyle\int_{-3}^{-\frac{7}{3}} \frac{dt}{\sqrt[3]{7+3t}}.$

151. $\displaystyle\int_3^5 \frac{dt}{\sqrt{3+1}}.$ **152.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|}\,dt.$

153. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt[3]{(12+4t)^5}}.$ **154.** $\displaystyle\int_0^3 \frac{dt}{\sqrt[5]{(12-4t)^3}}.$

155. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{t^2}.$ **156.** $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{dt}{\sqrt[4]{(3-5t)^5}}.$

157. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{12t+4}.$ **158.** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln t\,dt.$

159. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}.$ **160.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}.$

161. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+4)^3}.$ **162.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} \sin \frac{1}{t}\,dt.$

163. On considère la fonction f définie par :
$$f(x) = \int_0^x \sqrt{t(2-t)}\,dt.$$
1° *a*) Étudier la variation de la fonction f, et prouver que la courbe représentative Γ admet un point d'inflexion I.
b) On pose $t = 1 + \sin\theta$, $x = 1 + \sin\varphi$, avec
$$\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ et } \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$
Exprimer $f(x)$ en fonction de θ et de φ. En déduire que I est centre de symétrie de Γ.
c) Construire Γ en précisant les points d'abscisses $\frac{1}{2}$, 1, $\frac{3}{2}$ et 2.
2° Calculer l'aire du domaine limité par Γ, l'axe (Ox) et les droites d'équations $x = 0$, $x = 2$. Le résultat était-il prévisible?

164. 1° Étudier la variation de la fonction φ telle que $\varphi(x) = x - \ln x$.
2° Soit $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{t - \ln t}$.
Quel est l'ensemble de définition de f?
3° Étudier la variation de f. Montrer qu'elle décroît sur $[\ln 2, +\infty[$.
4° Prouver que f est minorée sur $]0, +\infty[$. En déduire que f converge en $+\infty$.
5° Démontrer que $\lim\limits_{x \to 0} f = 0$. On pose $f(0) = 0$.
Montrer que f est dérivable à droite en 0. Préciser $f'(x)$.
6° Représenter graphiquement les variations de f.
7° Pour tout x de $\mathbb{R}_+$, on pose :
$$f_0(x) = f(x) \quad \text{et} \quad f_{n+1} = \int_0^x f_n(t)\,dt.$$
Prouver que $f_n(x) \geqslant 0$ pour tout $x \geqslant 0$. En déduire que f_n est croissante pour tout entier naturel non nul.
8° Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on pose $u_n = f_n(1)$.
Prouver que (u_n) est décroissante et minorée.

165. Soit $\varphi(x) = -\int_0^x \ln \cos y \, dy$ *(intégrale de Dirichlet)*.

En utilisant le changement de variable $y = \frac{\pi}{2} - z$, prouver que :

$$\varphi(x) = 2\varphi\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2}\right) - 2\varphi\left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\right) - x \ln 2.$$

En déduire $-\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos y \, dy$.

APPLICATIONS

Aires

Dans les exercices **166** *à* **172**, *on demande de construire dans un repère* $\mathcal{R}$ *la courbe* Γ *d'équation* $y = f(x)$, *puis calculer l'aire du sous-ensemble plan D dont les limites sont précisées :*

166. $f(x) = \frac{1}{x^3}$; D est limité par la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

167. $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$; D est associé à f dans $\mathcal{R}$, pour l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

168. $f(x) = 3x^2 - x + 5$; D est associé dans $\mathcal{R}$ à f, pour l'intervalle $[-1, 2]$.

169. $f(x) = \sin x - 2 \cos x$;
D est associé dans $\mathcal{R}$ à f, pour l'intervalle $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

170. $f(x) = x^3 - x - 6$; D est délimité par Γ et l'axe des abscisses du repère.

171. $f(x) = (2 + \cos x) \sin x$; D est l'un des sous-ensembles plans délimités par la courbe et l'axe des abscisses du repère.

172. $f(x) = x^2(3 - x)$; D est délimité par Γ et l'axe des abscisses du repère.

173. Soit f et g les fonctions définies sur l'intervalle $[-3, -2]$ par :

$$f(x) = \frac{x}{x+1}; \qquad g(x) = -\frac{1}{x+1}.$$

Calculer l'aire du sous-ensemble plan délimité dans un repère $\mathcal{R}$ par les courbes représentatives de f et g, sur l'intervalle $[-3, -2]$.

174. Évaluer l'aire du sous-ensemble plan délimité par les courbes d'équations :

$$y = -\frac{1}{x^2}, \quad y = \frac{1}{x}, \quad y = x, \quad y = -x, \quad x = 4.$$

175. Évaluer l'aire du sous-ensemble plan délimité par les courbes d'équations :

$$y = 2x^2, \qquad y = x^3, \qquad y = \sqrt[4]{x}.$$

176. Évaluer l'aire du sous-ensemble plan délimité par les courbes d'équations :

$$y = \tan x, \qquad y = \cos x, \qquad x = -\frac{\pi}{4}, \qquad x = 0.$$

177. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \sqrt{4 + x} + \sqrt{4 - x} - 2\sqrt{2}.$$

1° Étudier f et en faire une représentation graphique Γ (repère $\mathcal{R}$).
2° Calculer l'aire du sous-ensemble plan délimité par Γ et l'axe des abscisses du repère $\mathcal{R}$.

178. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{8x}{(x^2 - 4)^2}$.

1° Étudier f et en faire une représentation graphique Γ (repère $\mathcal{R}$).
2° Déterminer des réels a et b tels que :

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}, \quad f(x) = \frac{a}{(x-2)^2} + \frac{b}{(x+2)^2}.$$

3° Calculer l'aire du sous-ensemble plan compris entre l'axe des abscisses du repère $\mathcal{R}$, la courbe Γ et les droites d'équations respectives $x = -1$ et $x = \frac{3}{2}$.

179. *1°* Construire dans un repère $\mathcal{R}$ le graphique Γ de la fonction f définie par :

$$x \in [0, 1] \quad \text{et} \quad f(x) = x - x^3.$$

2° Déterminer a pour que la droite d'équation $y = ax$ partage le sous-ensemble plan limité par Γ et l'axe des abscisses du repère en deux sous-ensembles plans d'aires égales.

180. Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x}{2} + p + \frac{q}{x^2}$.

1° Calculer p et q pour que $f(-1) = 0$ et pour que f admette un minimum pour $x = 2$. Tracer le graphique Γ de f dans un repère $\mathcal{R}$ (on déterminera son asymptote Δ « oblique »).
2° Calculer l'aire du sous-ensemble plan compris entre Γ, Δ et les droites d'équations respectives $x = 3$ et $x = X$. Cette aire a-t-elle une limite lorsque X tend vers $+\infty$?

Dans les exercices **181** *à* **186**, *on demande de déterminer l'aire A du sous-ensemble plan D délimité par les courbes représentatives dans un repère* $\mathcal{R}$ *des fonctions* f *et* g *définies par :*

181. $f(x) = \frac{x^2}{4}$; $g(x) = -\frac{x^2}{4} + x + 12$.

182. $f(x) = \cos x$; $g(x) = \frac{2}{\pi} x + 1$.

183. $f(x) = x^4$; $g(x) = \sqrt[4]{x}$.

184. $f(x) = x^4 - x^2 + 1$; $g(x) = -\frac{1}{2} x^4 + 2$.

185. $f(x) = x^2$;
$g(x) = x + 2$.

186. $f(x) = x^3$;
$g(x) = 3x^2 - 1$.

187. On considère la fonction $f_{a,b}$, réelle, de variable réelle, définie par $f_{a,b}(x) = a \sin x + b \sin^3 x$.

1° Calculer $f'_{a,b}(x)$ et $f''_{a,b}(x)$.

2° En déduire l'expression générale des primitives de la fonction $f_{a,b}$.

3° Quelle est, parmi les fonctions données, celle dont la courbe représentative C passe par le point $A\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ et a une tangente au point d'abscisse zéro parallèle à la première bissectrice? Soit f cette fonction.

4° Étudier alors la variation de f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. L'unité de longueur est 2 cm.

5° Calculer l'aire comprise entre la courbe C, l'axe des abscisses et les parallèles à (Oy) passant par les points d'abscisses 0 et $\frac{\pi}{2}$, respectivement, et donner le résultat en centimètres carrés.

188. *1°* On donne la fonction

$$f_a = \left[x \mapsto \frac{(x+1)^2}{x^2 + ax + 1}\right],$$

où a est un nombre réel donné.
Pour quelles valeurs de a cette fonction est-elle définie quelle que soit la valeur attribuée à x? En supposant qu'il en est ainsi, étudier la variation de cette fonction.

2° Construire la courbe C_0 représentant la fonction f_0. Démontrer que la courbe C_0 a un centre de symétrie, A. Déterminer la tangente en A à la courbe.

3° Soit M le point de C_0 représentant le maximum de la fonction f_0. Calculer l'aire de la surface comprise entre l'arc AM de C_0 et sa corde. $\left(\text{On notera que } f_0(x) \text{ peut s'écrire sous la forme } f_0(x) = 1 + \frac{2x}{x^2+1}.\right)$

189. *1°* Déterminer toutes les racines du polynôme $2x^3 + x^2 - 3$, en remarquant qu'il s'annule pour $x = 1$.

2° Étudier la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x^3 + x^2 + 3}{x}$$

et en construire la courbe représentative C dans un repère orthonormal.

3° Préciser la position de C par rapport à la parabole P d'équation : $y = x^2 + x$.

4° Calculer, en fonction de a, l'aire de la région limitée par la courbe C, la parabole P, la droite $x = 1$ et la droite $x = a$ $(a > 1)$.

5° Déterminer a, à 0,01 près, pour que cette aire soit égale à 1.

Volumes

190. Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On donne : les points $\omega\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $F(1, 0)$ et le cercle C de centre ω et passant par F.
Soit $M(x, y)$ un point de C. Soit φ une mesure en radians de l'angle $(\overrightarrow{O\omega}, \overrightarrow{OM})$. A tout point $M(x, y)$ appartenant au cercle C, on fait correspondre le point $M'(X, Y)$ défini de la façon suivante :

$$X = \sin^2 \varphi - x; \qquad Y = \frac{-2y \cos 2\varphi}{1 + \cos 2\varphi}.$$

1° Calculer le rapport $\frac{X}{Y}$ en fonction de $\tan \varphi$ et démontrer que le support du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ passe par un point fixe, que l'on déterminera, quand M décrit le cercle C.

2° Trouver l'équation de la courbe, ensemble des points M' quand $M(x, y)$ se déplace sur le cercle C avec : $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$.

3° Étudier la variation de la fonction :

$$f = \left[x \mapsto x\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\right]$$

et tracer son graphique Γ.

4° Pour cette partie du problème, on suppose que l'unité choisie sur les axes est le centimètre; Γ coupe l'axe (Ox) en un point A autre que l'origine. Quelle est l'abscisse, a, de ce point?
On fait tourner le graphique autour de l'axe (Ox). L'arc OA du graphique Γ engendre dans cette rotation un solide de révolution V. On coupe ce solide par un plan perpendiculaire à l'axe (Ox) en un point H d'abscisse x tel que : $a < x < 0$. Calculer en fonction de x l'aire $S(x)$ de la section obtenue.
Calculer une primitive $V(x)$ de la fonction $S(x)$. En déduire le volume du solide V. On donne : $\ln 2 \approx 0{,}69$.

191. En utilisant le fait que ce sont des solides de révolution, retrouver les formules donnant les volumes des solides suivants :
a) Cylindre de révolution. *b)* Cône de révolution.
c) Sphère.

192. Calculer le volume d'une lentille biconvexe dont les rayons sont égaux, sachant que son épaisseur est 4 cm et que le diamètre de la lentille est 16 cm.

193. On appelle *segment sphérique* le solide délimité par une sphère et deux plans parallèles. Calculer le volume d'un segment sphérique en fonction de sa hauteur h (distance des plans parallèles) et de l'aire de ses bases (disques déterminés par les intersections de la sphère avec les plans).

194. On partage le diamètre d'un demi-cercle en cinq parties égales et, par chacun des points de division, on trace des perpendiculaires à ce diamètre. On fait tourner la figure obtenue autour du diamètre. Calculer, en fonction du rayon R, le volume de chacun des cinq segments sphériques engendrés par cette révolution. A quels nombres entiers ces cinq volumes sont-ils proportionnels?

195. On appelle *anneau sphérique* le volume engendré par un segment de cercle en tournant autour d'un diamètre qui ne le traverse pas.

Déterminer le volume d'un anneau sphérique. Démontrer que le résultat peut se mettre sous la forme :

$$V = \frac{\pi}{6}\, AB^2 \cdot ab$$

(notation de la figure 27).

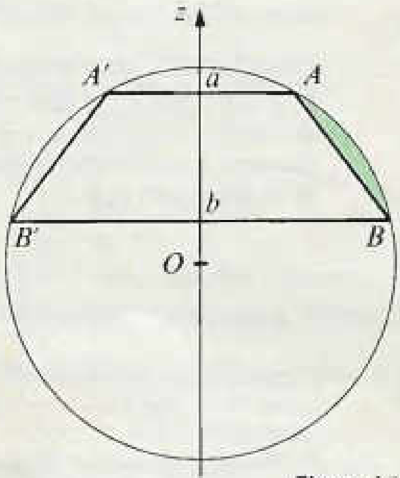


Figure 27

196. *Volume du secteur sphérique.* On appelle *secteur sphérique* le solide engendré par un secteur circulaire en tournant autour d'un diamètre qui ne le traverse pas. Démontrer que le volume d'un tel secteur est donné par la formule :

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h,$$

où h est la hauteur de la zone qui limite le secteur.

197. On appelle *ellipsoïde de révolution* la surface engendrée par une ellipse en tournant autour de l'un de ses axes (l'ellipsoïde est allongé ou aplati selon que l'ellipse tourne autour de son grand ou de son petit axe). Déterminer le volume limité par un ellipsoïde de révolution.

Moments d'inertie

198. Déterminer directement le moment d'inertie d'une boule homogène par rapport à un plan diamétral. Retrouver ainsi les moments d'inertie par rapport à un diamètre et par rapport au centre.

199. Déterminer les moments d'inertie d'une boule homogène : par rapport à un plan tangent, par rapport à une droite tangente.

200. Déterminer les moments d'inertie d'un carré homogène par rapport à ses axes, à son centre, à ses diagonales, à ses côtés, à ses sommets.

201. Soit Σ un solide homogène de révolution (masse spécifique ρ), d'axe D. Soit P un plan orthogonal à D. Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormal tel que $(O, \vec{k})$ soit un repère de D et $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère de P. Soit z_0 et z_1 les cotes extrêmes des points de Σ.

a) Démontrer que l'on a :

$$I_P = \int_{z_0}^{z_1} \pi\rho z^2 r^2(z)\,dz, \qquad I_D = \int_{z_0}^{z_1} \pi\rho \frac{r^4(z)}{2}\,dz,$$

où $r(z)$ désigne le rayon du disque commun au plan de cote z et à Σ.

$$\left[\text{Remarquer que } I_D = \int_{z_0}^{z_1}\left[\int_0^{r(z)} 2\pi\rho x\, x^2\,dx\right]dz.\right]$$

b) Déterminer, à l'aide de I_P et I_D, les moments d'inertie de Σ par rapport à trois axes rectangulaires dont l'un est l'axe de Σ (axes de coordonnées), et par rapport à l'origine des coordonnées.

c) Retrouver à l'aide de ces formules les moments d'inertie d'une boule par rapport à son centre, un diamètre et un plan diamétral.

PROBLÈMES

Le nombre e

202. *1°* On considère l'application f_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n!}e^{1-x} \quad (n \text{ entier naturel non nul}).$$

a) Calculer la limite de $\ln\left[\dfrac{x^n}{e^x}\right]$ quand x tend vers $+\infty$.

En déduire la limite de $\dfrac{x^n}{e^x}$ quand x tend vers $+\infty$.

b) Donner le tableau de variation de f_n en distinguant les deux cas suivants :

n est pair et n est impair.

c) Tracer, dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les courbes représentatives des fonctions f_2 et f_3; on précisera la position relative de ces courbes.

d) En revenant au cas général, montrer que, si $0 \leqslant x \leqslant 1$, alors on a :

$$0 \leqslant f_n(x) \leqslant \frac{1}{n!}.$$

2° Soit $I_n = \displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{n!}e^{1-t}\,dt.$

a) Quelle est la dérivée de l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui, à t, associe e^{1-t}?

En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, la valeur de I_1.

b) De même, en intégrant I_n par parties, vérifier la relation de récurrence :

$$I_n - I_{n-1} = -\frac{x^n}{n!}e^{1-x}.$$

c) Démontrer que l'on a :

$$I_n = e - e^{1-x}\left[1 + \frac{x}{1!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}\right],$$

c'est-à-dire : $I_n = e - e^{1-x}\left[\displaystyle\sum_{p=0}^{n}\frac{x^p}{p!}\right].$

Quelle est la limite, pour n fixé, de I_n quand x tend vers $+\infty$?

3° Dans toute cette question, on donne à x la valeur 1 et l'on pose :

$$J_n = \int_0^1 \frac{t^n}{n!}e^{1-t}\,dt.$$

a) Démontrer que : $0 \leqslant J_n \leqslant \dfrac{1}{n!}.$

En déduire, en utilisant le calcul de I_n, que l'on a :

$$0 \leqslant e - \left[\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}\right] \leqslant \frac{1}{n!},$$

et : $$\left[\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}\right] \leqslant e \leqslant \left[\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}\right] + \frac{1}{n!}.$$

b) Quelle est la limite, quand n tend vers $+\infty$, de $\left[\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}\right]$?

c) En calculant $\left[\sum_{p=0}^{7} \frac{1}{p!}\right]$, donner le meilleur encadrement, permis par ce calcul, du nombre e.

203. A — Dans tout ce paragraphe, x désigne un nombre réel et t une variable réelle.

1° En utilisant la formule d'intégration par parties, démontrer que :

$$\int_0^x t\, e^t\, dt = x\, e^x - \int_0^x e^t\, dt.$$

En déduire, par un calcul de l'intégrale $\int_0^x (x-t)\, e^t\, dt$, que :

$$e^x = 1 + x + \int_0^x (x-t)\, e^t\, dt.$$

2° On considère l'intégrale $\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t\, dt$, où $n \in \mathbb{N}^*$.
Démontrer l'égalité :

$$\int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t\, dt = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \int_0^x \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!} e^t\, dt.$$

3° Démontrer par récurrence sur n la formule :

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} e^t\, dt.$$

B — On pose : $P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}$,

$$I_n = \int_0^1 (1-t)^n\, e^t\, dt \quad \text{et} \quad J_n = \int_{-1}^0 (1+t)^n\, e^t\, dt.$$

1° Pour $(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3$, on considère $H = ae + b + ce^{-1}$.

Dans les deux premières questions, on suppose $|a| + |c| \neq 0$.

a) Démontrer que l'on a :
$n!\, H = n!\, [aP_n(1) + b + cP_n(-1)] + aI_n + (-1)^{n+1} cJ_n$.

b) Démontrer que l'on a :

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{e}{n+1} \quad \text{et} \quad 0 \leqslant J_n \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

En déduire la limite de $h(n) = aI_n + (-1)^{n+1} cJ_n$ quand n augmente indéfiniment.

c) Démontrer que $Q_n = n!\, [aP_n(1) + b + cP_n(-1)]$ est un nombre entier relatif.
Démontrer que, pour tout entier n, avec $n > 1$, on a :

$$Q_n - [a + (-1)^n c] \quad \text{est multiple de } n.$$

2° Si l'on a $|a| \neq |c|$, démontrer que l'on peut trouver un entier n_0 tel que, pour tout entier n vérifiant $n > n_0$, Q_n n'est pas nul.

En déduire qu'il existe une infinité d'entiers n pour lesquels $Q_n \neq 0$.

3° *a)* Démontrer, en utilisant en particulier la question C — *1°*, *b)*, que H ne peut être nul que si $a = b = c = 0$.
b) Démontrer que e ne peut pas être solution d'une équation du second degré à coefficients dans $\mathbb{Q}$.
Le nombre e est-il rationnel?

Fonctions définies par une intégrale

204. On rappelle que si f et g sont des fonctions numériques continues sur l'intervalle fermé borné $[a, b]$, avec $a < b$, telles que $f(t) \leqslant g(t)$, pour tout t de $[a, b]$, alors :

$$\int_a^b f(t)\, dt \leqslant \int_a^b g(t)\, dt.$$

On note $\mathbb{R}$ l'ensemble des nombres réels et $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des nombres réels positifs.

A — *1°* On considère la fonction de $\left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $x \mapsto \tan x$. Démontrer que c'est une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$ sur $\mathbb{R}$.
Dans toute la suite du problème, on désignera par φ la fonction réciproque de cette bijection. Préciser le domaine de définition de φ, ainsi que les nombres $\varphi(0)$, $\varphi(1)$, $\varphi(\sqrt{3})$ et $\lim_{x \to +\infty} \varphi(x)$.
Tracer dans un repère orthonormal la courbe représentative de la fonction de $\left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $x \mapsto \tan x$; en déduire sur le même graphique la courbe représentative de la fonction φ.

2° Démontrer que $\varphi'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

Calculer $\varphi'(0)$ et en déduire la valeur de $\lim_{x \to 0} \frac{\varphi(x)}{x}$.
Démontrer alors que la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $x \mapsto \frac{\varphi(x)}{x}$ pour $x \neq 0$ et par $0 \mapsto 1$, est continue en 0.
Démontrer ensuite qu'elle est continue sur tout $\mathbb{R}$.
3° En étudiant les variations des deux fonctions de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$ définies par $x \mapsto x - \varphi(x)$ et par $x \mapsto x - \frac{x^3}{3} - \varphi(x)$, démontrer que :

$$0 \leqslant x - \varphi(x) \leqslant \frac{x^3}{3}, \quad \text{pour tout} \quad x > 0.$$

B — Dans toute la suite du problème, on considère la fonction f, de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}$,

$$f(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \frac{\varphi(t)}{t}\,\mathrm{d}t \quad \text{si} \quad x > 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 1$$

(on ne cherchera pas à calculer l'intégrale qui définit f).

1° Démontrer que :

$$1 - f(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \frac{t - \varphi(t)}{t}\,\mathrm{d}t, \quad \text{si} \quad x > 0.$$

2° En utilisant **A** — *3°* et **B** — *1°*, démontrer que :

$$0 \leqslant 1 - f(x) \leqslant \frac{x^2}{9}, \quad \text{si} \quad x > 0.$$

En déduire que f est continue à droite en 0 et que la dérivée à droite de f en 0 est 0.

3° Démontrer que si $x \geqslant 1$:

$$0 \leqslant \int_1^x \frac{\varphi(t)}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{\pi}{2}\int_1^x \frac{\mathrm{d}t}{t} = \frac{\pi}{2}\ln x$$

En écrivant : $f(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^1 \frac{\varphi(t)}{t}\,\mathrm{d}t + \dfrac{1}{x}\int_1^x \frac{\varphi(t)}{t}\,\mathrm{d}t$, démontrer que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

C — *1°* Vérifier que :

$$x^2 f'(x) = -\int_0^x \frac{\varphi(t)}{t}\,\mathrm{d}t + \varphi(x),$$

pour tout $x > 0$.

2° On pose $g(x) = x^2 f'(x)$, pour tout $x > 0$. Vérifier que :

$$xg'(x) = -\varphi(x) + \frac{x}{1 + x^2}.$$

3° Étudier la variation de la fonction h de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, définie par $h(x) = xg'(x)$. En déduire le signe de $g'(x)$, puis de $f'(x)$ pour tout $x > 0$.

4° Rassembler les résultats de **B** et **C** pour donner l'allure de la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

205. On désigne par $\mathcal{C}$ l'ensemble des fonctions numériques d'une variable réelle continues sur $\mathbb{R}_+^*$.

A — *1°* Montrer que, f étant un élément de $\mathcal{C}$, on peut associer à tout réel a strictement positif un réel, noté $F(a)$, défini par :

$$F(a) = \int_a^{3a} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

2° a décrivant $\mathbb{R}_+^*$, on définit ainsi une fonction F de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad F(x) = \int_x^{3x} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad F'(x) = \frac{f(3x) - f(x)}{x}.$$

La fonction F est-elle élément de $\mathcal{C}$?

3° Définir F dans les deux cas particuliers suivants :

a) $f : \; t \mapsto \dfrac{1}{t}$;

b) $f : \; t \mapsto 1$.

B — On étudie le cas où f est l'application $f : \; t \mapsto \cos t$, c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad F(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Le but de cette question est de dégager quelques propriétés de la fonction F définie par une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer.

1° Déterminer :

a) le signe de $F\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$; *b)* le signe de $F\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.

2° Montrer que : $\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad \left|\dfrac{f(t)}{t}\right| \leqslant \dfrac{1}{t}$,

et que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad |F(x)| \leqslant \ln 3$.

3° Démontrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln 3 - F(x) = 2\int_x^{3x} \frac{\sin^2 \dfrac{t}{2}}{t}\,\mathrm{d}t$$

et que : $0 \leqslant \ln 3 - F(x) \leqslant 2x^2$.

En déduire que F admet une limite à droite au point 0.

4° Soit m la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$m(x) = \frac{\ln 3 - F(x)}{x}.$$

Étudier la limite de m à droite au point 0.

C — Soit G la fonction réelle telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad G(x) = F(x)$$
$$G(0) = \ln 3.$$

1° Démontrer que G est continue sur $\mathbb{R}_+$.

2° En exploitant la méthode d'intégration par parties, établir que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \left|G(x) - \frac{\sin 3x - 3\sin x}{3x}\right| \leqslant \frac{2}{3x}.$$

En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad |G(x)| \leqslant \dfrac{2}{x}$ et étudier la limite de G en $+\infty$.

3° Démontrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad G'(x) = \frac{-4\cos x \sin^2 x}{x}.$$

4° Déterminer l'ensemble des réels pour lesquels la fonction G présente un extrémum.

Déterminer les intervalles sur lesquels G est :

a) croissante,

b) décroissante.

5° On désigne par G_1 la restriction de G à l'intervalle $[0, 2\pi]$.

a) Donner le tableau de variation de G_1. Donner une valeur approchée des extrémums.
b) En déduire que G_1 admet un zéro sur l'intervalle $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Intégrale dépendant d'un paramètre

206. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des fonctions numériques de la variable réelle x, définies sur l'ensemble $\mathbb{R}_+^*$ des nombres réels strictement positifs.
Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions numériques de la variable réelle t, définies et continues sur $[0, \pi]$, ainsi que leur fonction dérivée première.
On rappelle que chacun de ces deux ensembles, muni de l'addition des fonctions et de la multiplication d'une fonction par un réel, a une structure d'espace vectoriel sur le corps des nombres réels.

I — *1°* Calculer l'intégrale $I(x) = \int_0^\pi e^{-tx}\,dt$, x étant un paramètre réel strictement positif.
2° *a*) Soit g la fonction numérique de la variable réelle x donnée par :

$$g(x) = e^{\pi x} - 1 - \pi x.$$

Étudier le sens de variation de g; en déduire que, pour tout réel x strictement positif, $g(x)$ est strictement positif.
b) Étudier la variation de la fonction numérique I de la variable réelle x, définie pour tout réel x strictement positif, par :

$$I(x) = \int_0^\pi e^{-tx}\,dt.$$

On ne demande pas de tracer la courbe représentative.

II — *1°* Soit L l'application de $\mathcal{E}$ dans $\mathcal{F}$ qui, à tout élément f de $\mathcal{E}$, associe la fonction F, définie pour tout réel x strictement positif, par :

$$F(x) = \int_0^\pi e^{-tx} f(t)\,dt.$$

Démontrer que L est une application linéaire.
2° Pour toute fonction f de $\mathcal{E}$, on pose

$$L(f) = F; \qquad L(f') = F^*.$$

Démontrer que la fonction F^* est définie, pour tout réel x strictement positif, par :

$$F^*(x) = e^{-\pi x} f(\pi) - f(0) + xF(x).$$

III — Soit f_1, f_2, f_3 les trois fonctions numériques définies sur $[0, \pi]$ par

$$f_1(t) = 1 \quad , \quad f_2(t) = \cos 2t \quad , \quad f_3(t) = \sin 2t.$$

Soit $\mathcal{E}_1$ l'ensemble des fonctions numériques

$$af_1 + bf_2 + cf_3,$$

pour tout triplet (a, b, c) de nombres réels.
1° Démontrer que $\mathcal{E}_1$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, dont une base $\mathcal{B}$ est (f_1, f_2, f_3).
2° On note L_1 la restriction de L à $\mathcal{E}_1$, c'est-à-dire l'application de $\mathcal{E}_1$ dans $\mathcal{F}$ définie par :

$$(\forall f \in \mathcal{E}_1) \quad (L_1(f) = L(f) = F).$$

a) Déterminer les fonctions $F_1 = L_1(f_1)$; $F_2 = L_1(f_2)$; $F_3 = L_1(f_3)$.
b) Soit f un élément de $\mathcal{E}_1$ exprimé dans la base $\mathcal{B}$. Calculer $F(x)$, pour tout nombre réel x strictement positif.
c) Démontrer que L_1 est une application injective.
3° *a*) Soit f un élément de $\mathcal{E}_1$. Justifier le fait que $f([0; \pi])$ est un intervalle fermé $[m, M]$, avec $m \leqslant M$.
b) Démontrer que, pour tout réel x strictement positif, on a :

$$m\frac{1 - e^{-\pi x}}{x} \leqslant \int_0^\pi e^{-tx} f(t)\,dt \leqslant M\frac{1 - e^{-\pi x}}{x}.$$

c) x étant donné égal à x_0, démontrer qu'il existe au moins un réel t_0 de l'intervalle $[0, \pi]$ tel que :

$$F(x_0) = f(t_0)\,\frac{1 - e^{-\pi x_0}}{x_0}.$$

Calculer t_0 dans le cas particulier :

$$f = f_1 + f_2 + f_3 \quad \text{et} \quad x_0 = 2.$$

Intégrales eulériennes

207. A — Soit f une primitive, sur $\mathbb{R}$, de l'application φ qui, à tout réel t, associe :

$$\varphi(t) = \frac{1}{2t^2 - 2t + 1}.$$

1° Soit g l'application de l'intervalle $S = \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(u) = f\left(\frac{1 + \tan u}{2}\right)$. Prouver que g est dérivable sur S, puis que g est une fonction affine.
2° Montrer que :

$$\frac{\pi}{2} = \int_0^1 \frac{dt}{2t^2 - 2t + 1}.$$

B — On considère l'application I de $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$I(p, q) = \int_0^1 t^p(1 - t)^q\,dt.$$

1° En majorant convenablement $t(1 - t)$ pour $t \in [0, 1]$, trouver la limite de la suite u telle que $u_0 = 1$ et :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*), \quad u_n = I(n, n).$$

2° Montrer que :

$$\forall (p, q) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, \quad I(p + 1, q + 1) = \frac{q + 1}{p + 2}\,I(p + 2, q)$$

(on pourra utiliser une intégration par parties), puis que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I(n, n) = \frac{(n!)^2}{(2n + 1)!}$$

C — *1°* Après avoir remarqué que :
$$2t^2 - 2t + 1 = 1 - 2t(1 - t),$$
simplifier : $\dfrac{1}{2t^2 - 2t + 1} - 1 - \sum_{k=1}^{n} 2^k t^k (1-t)^k$;

2° On considère la suite v telle que $v_0 = 1$ et :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!}.$$
Quelle est la limite de la suite w telle que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \sum_{k=1}^{n} v_k ?$$

Intégrale de Poisson

208. **A** — Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{x}{\cos^2 t}}\, dt.$$
Montrer que $\forall x \geqslant 0,\ f(x) \leqslant e^{-x}$.
Quelle est la limite de f quand x tend vers $+\infty$?

B — *1°* Montrer que, pour tout réel b strictement positif :
$$(\forall x \in \mathbb{R}), \quad \left[x \leqslant b \Rightarrow e^x - 1 - x \leqslant \frac{1}{2} e^b x^2 \right]$$
et
$$\left[x \geqslant -b \Rightarrow e^x - 1 - x \geqslant \frac{1}{2} e^{-b} x^2 \right].$$
2° Montrer que, pour tout réel a, il existe une application φ_a, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue en a, telle que $\varphi_a(a) = 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}$:
$$f(x) - f(a) = (x - a)\left[-\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{-\frac{a}{\cos^2 t}}}{\cos^2 t}\, dt + \varphi_a(x) \right].$$
En déduire que f est dérivable.
Préciser la dérivée f' de f.

C — Soit P une primitive (sur $\mathbb{R}$) de l'application $u \mapsto e^{-u^2}$.
A tout réel x, on associe l'application Q_x, de $I = \left] -\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2} \right[$ dans $\mathbb{R}$, telle que :
$$\forall t \in I, \quad Q_x(t) = P(x \tan t).$$
Montrer que Q_x est différentiable sur I; expliciter sa fonction dérivée.
Prouver que :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_0^x e^{-u^2}\, du = x \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{-x^2 \operatorname{tg}^2 t}}{\cos^2 t}\, dt.$$

D — Soit g l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $g(x) = f(x^2)$.
Montrer que $g'(x) = -\, e^{-x^2} \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\, dt.$
Que peut-on dire de la fonction h telle que :
$$h(x) = g(x) - \left(\int_0^x e^{-t^2}\, dt \right)^2 ?$$
Quelle est la limite de $\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\, dt$ quand x tend vers $+\infty$?

Convolution

209. On rappelle que l'ensemble $\mathcal{A}$ des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, muni de l'addition des fonctions et de la multiplication par un réel, est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des applications f de $\mathcal{A}$ admettant pour tout entier naturel non nul n une dérivée d'ordre n, notée $f^{(n)}$.

A — *1°* *a)* Montrer que $\mathcal{D}$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.
b) On considère l'ensemble E des applications de $\mathcal{A}$ définies par : $f_{a,b}(x) = a\, e^{2x} + b\, e^{-2x}$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.
Établir que E est un espace vectoriel de base $(f_{1,0}; f_{0,1})$ tel que : $\forall f_{a,b} \in E,\ \ \forall x \in \mathbb{R},\ \ (f''_{a,b} - 4f_{a,b})(x) = 0.$
2° Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, l'application Φ_n dans $\mathcal{A}$ qui à $f_{a,b} \in E$ associe $f^{(n)}_{a,b}$ est un endomorphisme de E; en donner la matrice dans la base $(f_{1,0}; f_{0,1})$.
En déduire que :
a) pour n pair, Φ_n est une homothétie vectorielle dont on précisera le rapport;
b) pour n impair, Φ_n est la composée d'une homothétie vectorielle et d'une symétrie vectorielle que l'on précisera.
3° *a)* Montrer que l'ensemble P des fonctions paires de E, et l'ensemble J des fonctions impaires de E, sont deux droites vectorielles de E de bases respectives $f_{1,1}$ et $f_{1,-1}$ telles que tout élément de E est, de manière unique, la somme d'un élément de P et d'un élément de J.
b) Étudier et représenter graphiquement les fonctions $f_{1,1}$ et $f_{1,-1}$.
Vérifier que $f_{1,-1}$ est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$; définir sa bijection réciproque.

B — On pose, pour f et g de $\mathcal{D}$,
$$(f * g)(x) = \int_0^{+\infty} f(t)g(x-t)\, dt$$
$$\left(= \lim_{a \to +\infty} \int_0^a f(t)g(x-t)\, dt \right).$$
1° *a)* Établir que :
$\forall (f, h, g) \in \mathcal{D}^3, \qquad (f + g) * h = (f * h) + (g * h),$
$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \ \ \forall (f, g) \in \mathcal{D}^2, \qquad (\alpha f) * g = \alpha (f * g).$
b) A étant l'élément de $\mathcal{D}$ défini par : $A(x) = 2x^2 - 1$, calculer $(f_{1,0} * A)(x)$ et $(f_{0,1} * A)(x)$ (on pourra intégrer par parties).
2° Déduire du **B**, *1°* que l'application :
$$\Phi : \ f \in \mathcal{D} \mapsto f * A \in \mathcal{A}$$
est linéaire et que l'image $\Phi\langle E \rangle$ de E par Φ est un espace vectoriel de dimension 2 dont on précisera une base.

210. Soient f et g des fonctions réelles périodiques de période 2π, continues sur $\mathbb{R}$. Soit :
$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(x-t)\, dt.$$
1° Démontrer que $f * g$ est une fonction numérique périodique de période 2π.
2° Prouver que, quel que soit le réel a :
$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_a^{a+2\pi} f(t)g(x-t)\, dt.$$
3° En déduire que $f * g = g * f$.

CHAPITRE 4

SUITES NUMERIQUES (COMPLEMENTS)

I – ACTIVITÉS PRÉLIMINAIRES

★ Activité 1 : *Révision des notions de base*

1° On considère la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_n = \dfrac{2n+5}{n+1}$.

a) *Étudier le sens de variation de la suite (u_n). Cette suite est-elle monotone?*

b) *Prouver que, pour tout n, on a $u_n = \alpha + v_n$, où α est un réel, et où la suite (v_n) converge vers zéro.*

En déduire la limite de la suite (u_n).

2° *Étudier le sens de variation et la convergence de la suite (u_n).*

a) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2+1}$; **b)** $u_n = \dfrac{1}{n} + \sin \dfrac{n\pi}{4}$;

c) $u_n = \dfrac{4n+1}{n-1}$; **d)** $u_n = E\left(\dfrac{n}{1\,000}\right)$ *(E(x) désigne la partie entière de x.)*

3° **a)** *Rappeler les définitions, sens de variation, et convergence des suites arithmétiques (raison r) et géométriques (raison q).*

b) *Quelle est la somme des n premiers termes d'une suite arithmétique de raison r, et de premier terme a?*

c) *Quelle est la somme s_n des n premiers termes d'une suite géométrique de raison q, et de premier terme a? Discuter, suivant les valeurs de q, de la convergence de la suite (s_n).*

d) *Étudier le sens de variation et la convergence des suites définies ci-dessous :*

$$u_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n}; \qquad v_n = 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} - \frac{1}{5^3} + \dots + \frac{(-1)^n}{5^n}.$$

$$s_n = 1 + \frac{3}{2} + \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{3}{2}\right)^n; \qquad t_n = 1 - \frac{5}{3} + \frac{5^2}{3^2} - \frac{5^3}{3^3} + \dots + \left(-\frac{5}{3}\right)^n.$$

★ Activité 2 : *Comparaison avec une suite géométrique*

1° On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par[1] : $u_n = \dfrac{2^n}{n!}$.

a) *Étudier la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$* définie par : $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$. *En déduire le sens de variation de la suite (u_n).*

---

[1] *On rappelle que $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$, se lit « factorielle n » (ou « n factorielle »), et que $0! = 1$.*

b) Prouver qu'il existe une suite géométrique (t_n), de raison $\frac{1}{4}$, et un entier n_0 tels que, si $n \geqslant n_0$, alors $u_n \leqslant t_n$.

c) Soit $s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$. Calculer s_1, s_2, s_3, s_4.

*Déduire du **b)** une majoration de (s_n), et un encadrement de s_n, pour n supérieur à n_0.*

*2° Reprendre le **1°** avec $u_n = \frac{n^{10}}{6^n}$.*

*3° Utiliser une méthode analogue à celle du **1°, b)** pour encadrer la limite (dont on suppose qu'elle existe) de la suite (u_n) définie par $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.*

★ Activité 3 : *Exemples de suites définies par des sommes*

1° On considère la suite $(h_n)_{n \geqslant 1}$ définie par :

$$h_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

a) Calculer $h_{2n} - h_n$ pour $n \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

b) Prouver que, pour tout entier naturel non nul n, $h_{2n} - h_n$ est minoré par $\frac{1}{2}$.

*c) Déduire du **b)** que, pour tout entier p : $h_{2^p} > 1 + \frac{p}{2}$.*

d) Prouver que (h_n) est monotone croissante. En déduire qu'il existe un entier n_0 tel que, pour tout n supérieur à n_0, on ait $h_n > 100$.

e) Prouver que, pour tout réel positif A, il existe un réel n_0 tel que si $n > n_0$, alors $h_n > A$.

*f) Comparer le résultat obtenu ci-dessus avec le chapitre **3, III, 2°, c)**.*

2° On considère la suite $(s_n)_{n \geqslant 1}$ définie par :

$$s_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

a) Étudier le sens de variation de la suite (s_n). En déduire que $s_n < s_{2n+1}$.

b) Organiser les calculs, et déterminer (à la machine) des encadrements de s_n, pour $n \in \{10, 20, 30, 50, 100\}$.

c) Prouver que $\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} < \frac{2}{n^2}$.

*d) Déduire du **c)** que $s_{2n+1} < 1 + \frac{1}{2} s_n$.*

e) Déduire de ce qui précède une majoration de s_n, pour tout entier naturel non nul n.

f) On suppose que $(s_n)_{n \geqslant 1}$ converge. Déterminer un encadrement de sa limite l.

★ Activité 4 : *Application à la résolution d'équations (voir chapitre 9)*

1° On considère la suite $(u_n)_{n \geqslant \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_0 = 2; \qquad u_{n+1} = \frac{1}{4} u_n + 1.$$

a) Déterminer le réel α tel que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par $v_n = u_n + \alpha$ soit une suite géométrique, dont on précisera le premier terme et la raison.

*b) Déduire du **a)** une expression de u_n en fonction de n.*

c) *Étudier le sens de variation et la convergence de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
d) *Sur un graphique, tracer les droites D et Δ d'équations respectives :*

$$D : y = \frac{1}{4}x + 1; \quad \Delta : y = x.$$

Quelle est l'ordonnée du point de D d'abscisse u_n?
Quelle est l'abscisse du point de Δ d'ordonnée u_{n+1}?
En déduire une construction des points d'abscisses u_2, u_3, u_4.
A quel point correspond l'abscisse $l = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$?

2° *a*) *En s'inspirant du 1° d), interpréter graphiquement la formation des termes consécutifs de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *définie par :*

$$u_0 = 1; \qquad u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}.$$

b) *Calculer* u_n, *pour* $n \in \{2, 3, 4, 5, 10, 20, 50\}$. *Comparer avec l'abscisse d'un point remarquable du graphique.*
3° *a*) *Reprendre le 2°, avec* $u_0 = 1$, $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$.
b) *Montrer que l'on peut interpréter la suite* (u_n) *ci-dessus à l'aide des courbes D et P d'équations respectives :* $D : y = x + 1$; $P : y = x^2$.

II – GÉNÉRALITÉS. RAPPELS

• Une suite numérique peut être considérée comme une application de $\mathbb{N}$ (ou d'une partie de $\mathbb{N}$) vers $\mathbb{R}$. L'image $u(n)$ de l'entier n par la suite u se note le plus souvent : u_n (« u indice n »). La suite elle-même se note $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} = (u_0, u_1, u_2, ..., u_n, ...)$, dans le cas où l'ensemble de départ est $\mathbb{N}$. Dans d'autres cas, on a, par exemple :

$$(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*} = (u_1, u_2, u_3, ..., u_n, ...);$$
$$(u_n)_{n\geq 5} = (u_5, u_6, u_7, ..., u_n, ...).$$

Dans tous les cas, on prendra garde à la numérotation du premier terme de la suite, qui conditionne la numérotation du n-ième terme.

• Une suite peut être définie :

***a*)** Par la donnée d'une méthode (algorithme de calcul) permettant de calculer u_n connaissant n. Cette méthode peut être résumée par un organigramme. Dans les cas simples, on peut trouver une fonction f telle que $u_n = f(n)$. C'est à ce cas que l'on tentera de se ramener chaque fois que possible, car les propriétés de la fonction f peuvent simplifier l'étude de la suite (u_n). En particulier, si $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$, alors la suite (u_n) converge aussi vers l.

***b*)** Par la donnée d'une relation (relation de récurrence) permettant de calculer le terme u_n en fonction de termes d'indices inférieurs. Dans ce cas, la donnée des premiers termes (en nombre suffisant) permet de calculer de proche en proche les autres termes de la suite. Le calcul ne peut évidemment pas, dans la pratique, être conduit jusqu'à des termes d'indices très grands. C'est pourquoi on essaye, chaque fois que possible, de se ramener au cas ***a*)**. C'est le cas en particulier pour les suites arithmétiques et géométriques, et de la somme des n premiers termes d'une telle suite (voir « Activité préliminaire **1** » et tableau récapitulatif, page 296).

***c*)** Par l'intermédiaire d'une ou de plusieurs autres suites. Signalons en particulier les suites $(u_n + v_n)_{n\geq a}$, $(u_n v_n)_{n\geq a}$ définies par l'intermédiaire des suites $(u_n)_{n\geq a}$ et $(v_n)_{n\geq a}$.

Signalons également les suites $(s_n)_{n \geqslant a}$ et $(p_n)_{n \geqslant a}$ définies par l'intermédiaire de la suite $(u_n)_{n \geqslant a}$ par :

$$s_n = \sum_{k=a}^{n} u_k = u_a + u_{a+1} + \ldots + u_{n-1} + u_n;$$

$$p_n = \prod_{k=a}^{n} u_k = u_a \quad u_{a+1} \ldots u_{n-1} \quad u_n.$$

Beaucoup d'autres cas peuvent être envisagés. Rappelons en particulier la notation simplificatrice :

$$n! = \prod_{k=1}^{n} k = 1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (n-1) \times n.$$

(Avec la convention $0! = 1$.)

• En présence d'une suite, on peut étudier les points suivants :

a) L'expression de u_n en fonction de n (le cas échéant). Cette étude peut ne pas être facile, ni même possible. (Voir **VI**.)

b) Le sens de variation de u_n. Pour cela, on peut étudier :
– le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$ suivant les valeurs de n;
– dans le cas où les termes u_n sont strictement positifs, la position par rapport à 1 du quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

c) La convergence (existence d'une limite, valeur exacte de cette limite, ou valeurs approchées et qualité de l'approximation). (Voir **III**, **IV**.)

III – SUITES CONVERGENTES

1. RAPPELS

• On dit que la suite (u_n) converge vers le réel l pour exprimer que, quel que soit le réel ε strictement positif (dans la pratique on prend ε sous la forme 10^{-p}), il existe un entier n_0 tel que, si n est supérieur à n_0, alors on a : $|u_n - l| < \varepsilon$.
La suite (u_n) converge vers l si, et seulement si, la suite $(u_n - l)$ converge vers 0.

• La limite l d'une suite (u_n) dont tous les termes, à partir d'un certain rang, sont positifs, est un réel positif. On ferait une remarque analogue dans le cas d'une suite à termes négatifs.

• Pour prouver qu'une suite converge vers zéro, on dispose (voir tableau p. 296) :
– de suites de référence;
– des théorèmes sur les limites;
– des règles de comparaison;
– des propriétés concernant les limites des fonctions.

• Pour prouver qu'une suite est bornée, on dispose :
– de méthodes de comparaison avec des suites de référence (en particulier l'étude du quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ peut permettre une comparaison avec des suites géométriques, ou avec la somme des termes d'une suite géométrique dans le cas où $v_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$);
– de méthodes de comparaison avec une intégrale (chapitre **3**, **III**, **2**, ***c)***).

• Pour déterminer la limite éventuelle d'une suite, on dispose :
– des théorèmes sur les limites (suites et fonctions);
– dans certains cas, de l'interprétation à l'aide de la valeur moyenne d'une intégrale (chapitre **3**, **III**, **2**, ***c)***).

• Pour prouver qu'une suite converge, sans connaître par ailleurs sa limite éventuelle, les paragraphes **2** et **3** ci-dessous fournissent des outils très précieux.

2. SUITES MONOTONES BORNÉES

On démontre, et nous l'admettrons, le théorème fondamental suivant :

THÉORÈME 1	**Toute suite croissante et majorée (ou décroissante et minorée) de nombres réels est convergente.**

Cette propriété est une propriété fondamentale de la structure de l'ensemble des réels. Il existe des corps commutatifs totalement ordonnés dans lesquels elle n'est pas vraie. C'est le cas, en particulier, de l'ensemble $\mathbb{Q}$ des rationnels dans lequel, par exemple, la suite des valeurs décimales approchées par défaut du nombre $\sqrt{2}$ constitue une suite croissante majorée, mais non convergente dans $\mathbb{Q}$ (sa limite $\sqrt{2}$ n'est pas élément de $\mathbb{Q}$).

• Le théorème **1** permet de prouver la convergence d'une suite, mais il ne permet pas à lui seul de déterminer la limite. Il permet de terminer l'étude de suites monotones bornées dont on connaît, par ailleurs, une limite éventuelle. D'autre part, il permet de définir des nombres réels comme limites de suites monotones bornées. Dans le cas où l'on ne sait pas déterminer ce nombre réel en fonction d'autres nombres réels connus, la définition de la suite permet (théoriquement) de donner des valeurs approchées, aussi précises que l'on veut, de cette limite. Dans le cas d'une suite croissante, on obtient des valeurs approchées par défaut, et dans le cas d'une suite décroissante, des valeurs approchées par excès. Pour obtenir des encadrements du réel ainsi défini, on peut essayer de trouver deux suites de même limite, l'une croissante, l'autre décroissante (on dit alors que l'on est en présence de deux suites adjacentes).

■ Exercice résolu

On considère les suites définies par : $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$ *et* $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$.

a) Prouver que (u_n) est croissante et que (v_n) est décroissante.

b) Prouver que, quels que soient les entiers naturels n et p, on a $u_n < v_p$.

c) En déduire que (u_n) et (v_n) sont deux suites convergentes. Prouver qu'elles ont même limite.

d) Déterminer l'encadrement de la limite obtenue pour $n = 9$. Comparer cet encadrement avec un réel connu.

a) $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{(n+1)!}$. Pour tout n : $u_{n+1} - u_n > 0$, donc la suite (u_n) est une suite croissante.

$$v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} - u_n - \frac{1}{n!} = \frac{2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{2n! - (n+1)!}{n!(n+1)!}$$
$$= \frac{2-(n+1)}{(n+1)!} = \frac{1-n}{(n+1)!}.$$

Pour tout n supérieur à 1, $v_{n+1} - v_n \leqslant 0$. Donc la suite (v_n) est une suite décroissante à partir du rang $n = 1$.

b) On a évidemment, pour tout entier n : $u_n < v_n$. Compte tenu de *a*) :

$$\text{Si} \quad n \leqslant p, \quad u_n \leqslant u_p < v_p.$$
$$\text{Si} \quad p < n, \quad u_n < v_n < v_p.$$

Donc, dans tous les cas $u_n < v_p$.

c) Il résulte des questions précédentes que (u_n) est croissante et majorée (par tout v_p) et que (v_n) est décroissante et minorée (par tout u_p). D'après le théorème 1, (u_n) et (v_n) sont deux suites convergentes.
Pour comparer les limites de ces deux suites, étudions la différence $(v_n - u_n)$:

$$v_n - u_n = \frac{1}{n!}.$$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n - u_n = 0 = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n - \lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.
Il en résulte que les suites (u_n) et (v_n) ont même limite.

d) L'utilisation de la machine permet d'obtenir les encadrements suivants :

$$1 \leqslant 1 \leqslant 1$$
$$1 \leqslant \frac{1}{1} \leqslant 1$$
$$0{,}5 \leqslant \frac{1}{2!} \leqslant 0{,}5$$
$$0{,}166\,666\,6 \leqslant \frac{1}{3!} \leqslant 0{,}166\,666\,7$$
$$0{,}041\,666\,6 \leqslant \frac{1}{4!} \leqslant 0{,}041\,666\,7$$
$$0{,}008\,333\,3 \leqslant \frac{1}{5!} \leqslant 0{,}008\,333\,4$$
$$0{,}001\,388\,8 \leqslant \frac{1}{6!} \leqslant 0{,}001\,388\,9$$
$$0{,}000\,198\,4 \leqslant \frac{1}{7!} \leqslant 0{,}000\,198\,5$$
$$0{,}000\,024\,8 \leqslant \frac{1}{8!} \leqslant 0{,}000\,024\,9$$
$$0{,}000\,002\,7 \leqslant \frac{1}{9!} \leqslant 0{,}000\,002\,8$$

On obtient ainsi $u_9 \geqslant 2{,}718\,281\,2$.
$v_9 \leqslant 2{,}718\,284\,7$.
Et par suite, si l est la limite commune $2{,}718\,281\,2 \leqslant l \leqslant 2{,}718\,284\,7$.

Cet encadrement est à rapprocher de la valeur de e (chapitre **2**, **IV**, **2**). On prouve effectivement (voir problème **202**, page 118) que $l = e$.

• Exercices d'application

1. Prouver que la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ définie par : $u_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + + ... + \frac{1}{n^2}$ est convergente.
Déterminer une valeur approchée par défaut de la limite obtenue pour $n = 30$. Améliorer le majorant obtenu à l'Activité préliminaire n° **3**. (On pourra utiliser une intégrale.)

2. *a*) Prouver que tout développement décimal illimité définit un nombre réel.
b) Sachant qu'un développement décimal illimité périodique définit un nombre rationnel, déterminer ce rationnel x pour :

$$x = 2{,}373\,217\,\underbrace{321}...$$

c) Définir trois développements décimaux permettant de définir un nombre réel irrationnel.

3. Soit $u_n = 1 + \frac{1}{n}$. Prouver que u_n est minorée par 0. Quelle est la limite de la suite (u_n)?

3. IMAGE PAR UNE FONCTION CONTINUE

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergeant vers un réel l, et soit f une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert contenant l, et continue en l.

La fonction f étant continue en l, quel que soit le réel strictement positif ε, il existe un réel strictement positif α, tel que, si $|x - l| < \alpha$, alors $|f(x) - f(l)| < \varepsilon$. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, convergeant vers l, pour tout réel strictement positif α, il existe un entier n_0 tel que, si $n > n_0$, alors $|u_n - l| < \alpha$. Il en résulte, d'après ce qui précède, que $|f(u_n) - f(l)| < \varepsilon$. La suite $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est donc convergente, et elle converge vers $f(l)$.

THÉORÈME 2 — **Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de limite l, et soit une fonction f, définie sur un intervalle ouvert contenant l, et continue en l. La suite $(f(u_n))$ est alors convergente, et converge vers $f(l)$.**

Ce théorème comporte des conséquences importantes.

- Soit (u_n) une suite satisfaisant à une relation de récurrence de la forme :

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

où f désigne une fonction continue. Le théorème **2** permet d'affirmer que, si la suite (u_n) converge vers une limite l, alors cette limite l satisfait à :

$$l = \lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} u_{n+1}$$
$$\lim_{n \to +\infty} f(u_n) = f(l).$$

Il en résulte que l est nécessairement solution de l'équation définie dans $\mathbb{R}$ par $l = f(l)$.

COROLLAIRE — **Soit f une fonction continue. Si (u_n) est une suite convergente telle que $u_{n+1} = f(u_n)$, alors la limite l de la suite (u_n) est une solution de l'équation définie dans $\mathbb{R}$ par :**

$$l = f(l).$$

REMARQUE :

Il est important de constater que :

— dans le cas où l'équation possède plusieurs solutions, une seule de ces solutions peut être la limite de la suite (u_n);

— il faut, pour conclure à la convergence de (u_n) vers l, prouver par ailleurs que (u_n) converge. Cette démonstration peut être facilitée par le fait de connaître la limite éventuelle.

Exercices résolus

1 — *On considère la suite (u_n) telle que : $u_{n+1} = 2u_n - 3$ et $u_0 = 4$. Déterminer la limite éventuelle l de la suite (u_n). Étudier la suite (v_n) telle que $v_n = u_n - l$. En déduire que (u_n) ne converge pas.*

La limite éventuelle l de la suite (u_n) satisfait à $l = 2l - 3$.

On a donc nécessairement $l = 3$.

Mais $v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = 2(u_n - 3) = 2v_n$.

La suite (v_n) est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $v_0 = 1$. Donc : $v_n = 2^n$. La suite (v_n) ne converge pas vers zéro, ce qui prouve que la suite (u_n) ne converge pas vers 3, et donc ne converge pas, puisque 3 est la seule limite possible.

II – *Étudier la convergence de la suite (u_n) définie par :*

$$u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{1}{u_n}\right) \quad et \quad u_0 = \frac{1}{2}.$$

La limite éventuelle l de la suite (u_n) satisfait à *la relation* :

$$x = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

C'est-à-dire $2x^2 = x^2 + 1$. Soit $x^2 = 1$.

Il y a donc deux limites possibles $l = 1$, ou $l = -1$.

Mais, si u_n est positif, il en est de même de u_{n+1}. Comme u_0 est positif, tout terme u_n de la suite est un réel positif. La limite l de la suite est donc nécessairement un réel positif. La seule limite éventuelle est donc $l = 1$.

On a $u_{n+1} - 1 = \dfrac{u_n^2 + 1 - 2u_n}{u_n} = \dfrac{(u_n - 1)^2}{u_n}$.

Comme tous les u_n sont positifs, il en résulte que, quel que soit l'entier naturel non nul n :

$u_n \geqslant 1$.

D'autre part :

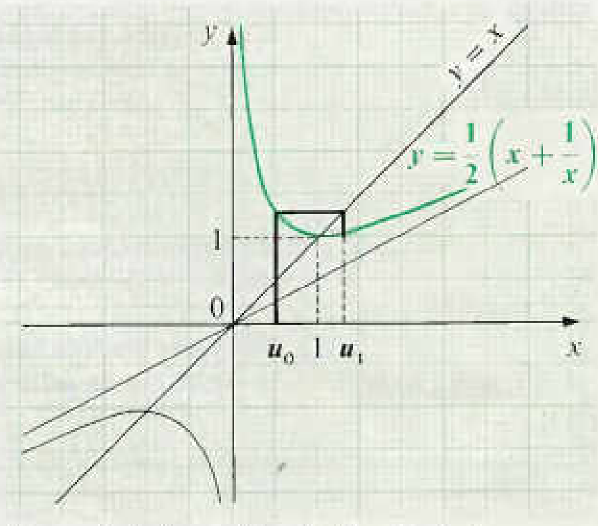
$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{1}{u_n} - 2u_n\right);$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1 - u_n^2}{u_n}\right).$$

D'après ce qui précède, on a, pour tout entier n supérieur à 1 :

$$u_{n+1} - u_n < 0.$$

La suite (u_n) est donc minorée et décroissante à partir du rang $n = 1$. Elle est donc convergente, et de limite 1.

Figure 1



La figure 1 présente une illustration graphique de la formation de la suite (u_n).

Exercices d'application

4. Étudier et illustrer graphiquement la convergence de la suite (u_n) telle que :

$$u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n},$$

dans les cas suivants :

a) $u_0 = 1$;
b) $u_0 = -1$;
c) $u_0 = 3$;
d) $u_0 = 2$.

5. Étudier et illustrer graphiquement la convergence de la suite (v_n) telle que :

$$v_{n+1} = v_n^2 - 2v_n + 2.$$

dans les cas suivants :

a) $v_0 = 0$;
b) $v_0 = 1$;
c) $v_0 = \frac{3}{2}$;
d) $v_0 = 2$;
e) $v_0 = 3$.

• Le théorème **2** permet de ramener l'étude de certaines limites à celle de suites de limites connues (en utilisant, par exemple, les fonctions *logarithme* et *exponentielle*).

Rappelons à ce sujet que : $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln n}{n} = 0.$

■ **Exercice résolu**

Étudier la convergence de la suite (u_n) définie par : $u_n = n^{1/n}$.

On a $\ln u_n = \frac{1}{n} \ln n$. Il en résulte que $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln u_n = 0$. Et donc :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} e^{\ln u_n} = e^0 = 1.$$

En conclusion :

$$\lim_{n \to +\infty} n^{1/n} = 1.$$

● **Exercice d'application**

6. Étudier la convergence de la suite (u_n) :

a) $u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$;

b) $u_n = \left(1 + \frac{3}{n}\right)^n$;

c) $u_n = \left(\frac{n}{1+n}\right)^n$.

IV — SUITES DIVERGENTES

Toute suite convergente est bornée. Il en résulte que toute suite non bornée est divergente. Mais il existe aussi des suites bornées non convergentes.

1. EXEMPLES DIVERS

★ **Activité 1** : ***Suites monotones non bornées.***

1° On considère la suite (u_n) définie par : $u_n = 5n + 3$.
***a)** Prouver que (u_n) est une suite croissante non majorée.*
***b)** En déduire que (u_n) ne converge pas.*

2° On considère la suite (v_n) définie par : $v_n = -\frac{n}{2} + 5$.

Prouver que (v_n) est monotone, mais non convergente.

3° Prouver que la suite (u_n) est monotone non convergente :

***a)** $u_n = \sqrt{n}$; **b)** $u_n = n^2$; **c)** $u_n = \ln\left(\frac{1}{n}\right)$; **d)** $u_n = e^n$.*

★ **Activité 2** : ***Suite non monotones***

Prouver que la suite (u_n) n'est pas monotone. Préciser si elle est bornée ou non bornée, convergente ou non convergente.

***a)** $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$;* ***b)** $u_n = \sin \frac{n\pi}{4}$;*

***c)** $u_n = n \cos \frac{n\pi}{3}$;* ***d)** $u_n = n + (-1)^n$.*

REMARQUE :

Une suite monotone est convergente si, et seulement si, elle est bornée.
Une suite monotone, non bornée, n'est pas convergente.
Une suite non monotone, bornée, peut être convergente, ou ne pas l'être.

2. SUITES TENDANT VERS L'INFINI

Parmi les suites non convergentes, on peut distinguer celles qui sont bornées et celles qui ne le sont pas. Parmi les suites non convergentes et non bornées, nous allons en distinguer certaines, non nécessairement monotones, mais dont le comportement est à remarquer.

DÉFINITION 1

On dit que la suite (u_n) *tend vers* (ou *diverge vers*) *« plus l'infini »* (resp. *« moins l'infini »*) pour exprimer que, quel que soit le réel A, il existe un rang n_0 à partir duquel u_n est supérieur (resp. inférieur) à A.
On note $\lim (u_n) = +\infty$, ou $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
(resp. $\lim (u_n) = -\infty$, ou $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$).

REMARQUES :

1° Dire que la suite (u_n) diverge vers « plus l'infini » signifie que, quel que soit le réel A, il existe un entier n_0 tel que tous les termes u_n tels que n soit supérieur à n_0 soient supérieurs à A. La suite (u_n) peut ne pas être monotone et satisfaire à cette propriété. Il en est par exemple ainsi de $u_n = n + (-1)^n$.

2° La suite (u_n) diverge vers « moins l'infini » si, et seulement si, la suite $(-u_n)$ diverge vers « plus l'infini ».

Exemples :

1° Soit $u_n = 2n + 3$. Pour tout A, pour que : $u_n > A$, il suffit que $n > \dfrac{A-3}{2}$.

On pourra par exemple prendre $n_0 = E\left(\dfrac{A}{2}\right)$ $\left(\text{partie entière de } \dfrac{A}{2}\right)$.

En effet, $E\left(\dfrac{A}{2}\right) > \dfrac{A-3}{2}$, d'où, si n est supérieur à $E\left(\dfrac{A}{2}\right)$, il sera supérieur à $\dfrac{A-3}{2}$ (*a fortiori*), et donc, u_n sera supérieur à A.

2° Soit $u_n = n + (-1)^n$.

Pour tout n : $u_n > n - 1$.

Donc, si A est un réel, et si $n > A + 1$, on aura $n - 1 > A$, et donc $u_n > A$.
La suite (u_n) diverge vers $+\infty$, mais elle n'est pas croissante.
En effet,
$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= (n+1) + (-1)^{n+1} - n - (-1)^n \\ &= 1 + 2(-1)^{n+1}. \end{aligned}$$

Si $n + 1$ est pair, alors : $u_{n+1} - u_n = 3$ est positif.
Si $n + 1$ est impair, alors : $u_{n+1} - u_n = -1$ est négatif.

• Pour prouver qu'une suite diverge vers $+\infty$, ou vers $-\infty$, on peut utiliser la définition, mais il est souvent préférable d'utiliser les propriétés et les règles de comparaison qui permettent de déduire le résultat dans de nombreux cas, à partir de suites de références.

3. PROPRIÉTÉS

• Nous admettrons sans démonstration les résultats ci-dessous :

THÉORÈME 3

La divergence d'une suite vers $+\infty$ (ou vers $-\infty$) n'est pas modifiée par l'addition d'une suite bornée, ou par la multiplication par une suite admettant un minorant strictement positif.

REMARQUES :

1° Le théorème **3** signifie que :

a) Soit (u_n) une suite bornée :

– si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = +\infty$,

– si $\lim v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = -\infty$;

b) Soit (u_n) une suite telle qu'il existe un réel k, et un entier n_0 de façon que, si n est supérieur à n_0, alors $0 < k \leqslant u_n$:

– si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, alors $\lim u_n v_n = +\infty$,

– si $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim u_n v_n = -\infty$.

2° Il est important de constater que le théorème **3** ne permet pas de conclure quant à la somme de deux suites divergeant vers l'infini. On peut cependant énoncer le résultat suivant :

THÉORÈME 4

Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = +\infty$.
Si $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n + v_n) = -\infty$.

Le cas épineux concerne la suite $(u_n + v_n)$ lorsqu'une des deux suites (u_n) et (v_n) diverge vers $+\infty$, et l'autre vers $-\infty$. Dans ce cas, une étude directe s'impose. On ne peut pas prévoir le résultat (voir Activité ci-dessous).

3° De même, le théorème **3** ne permet pas de conclure quand au produit d'une suite divergeant vers l'infini par une suite de limite zéro, même si cette suite est à termes positifs. Dans ce cas, une étude directe s'impose. On ne peut pas prévoir le résultat (voir activité ci-dessous).

★ Activité

1° En utilisant le théorème **3**, *étudier la limite de la suite* (u_n) :

a) $u_n = (2 + \sin n)e^n$; ***b)*** $u_n = \sin n - n + (-1)^n$.

2° Dans les cas suivants, montrer que le théorème 4 ne s'applique pas, et étudier directement la convergence de la suite (u_n).

a) $u_n = (n + a) + (-n)$ $(a \in \mathbb{R})$; ***b)*** $u_n = 2n + (-n)$;

c) $u_n = n + (-2n)$; ***d)*** $u_n = n + (-1)^n + (-n)$.

3° Déduire du 2° le résultat ci-dessous :

La somme d'une suite divergeant vers $+\infty$ et d'une suite divergeant vers $-\infty$ peut ne pas avoir de limite, diverger vers l'infini, ou converger vers une limite quelconque.

4° Dans les cas suivants, montrer que le théorème **3** *ne s'applique pas, et étudier directement la convergence de la suite* (u_n) :

a) $u_n = an\left(\dfrac{1}{n}\right)$ $(a \in \mathbb{R}^*)$;

b) $u_n = an^2\left(\dfrac{1}{n}\right)$ $(a \in \mathbb{R}^*_+$, *puis* $a \in \mathbb{R}^*_-)$;

c) $u_n = \sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\right)$;

d) $u_n = \frac{(-1)^n}{n} an \qquad (a \in \mathbb{R})$;

e) $u_n = (-1)^n n^2 \frac{1}{\sqrt{n}}$.

5° *Déduire du* 4° *le résultat ci-dessous :*

Le produit d'une suite divergeant vers l'infini et d'une suite de limite nulle peut ne pas avoir de limite, diverger vers l'infini, ou converger vers une limite quelconque.

• Exercices d'application

7. Étudier le comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers l'infini :

a) $u_n = \frac{n^2 + n + 1}{n}$;

b) $u_n = (2 + \sin n)\sqrt{n}$;

c) $u_n = (1 + \cos^2 n)(\ln n)$;

d) $u_n = (-1 - \tan^2 n)\sqrt[n]{n}$.

8. *a)* On considère la suite (u_n) définie par : $u_n = \frac{\ln n}{n}$. Montrer que le théorème **3** ne s'applique pas. Prouver que : $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$. (Voir ch. **1**, **II**, **3**.).

b) On considère la suite (v_n) définie par :

$$v_n = n - \ln n.$$

Montrer que le théorème **3** ne s'applique pas directement. En utilisant le *a)*, et le théorème **3**, trouver la limite de la suite (v_n).

• Un autre résultat rend de fréquents services. Nous l'admettrons également sans démonstration.

THÉORÈME 5

Soit (u_n) une suite dont tous les termes, à partir d'un certain rang, sont strictement positifs. Alors, (u_n) converge vers zéro si, et seulement si, la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ diverge vers $+\infty$.

REMARQUES :

1° Si la suite (u_n) a des termes tous strictement négatifs à partir d'un certain rang, et converge vers zéro, alors la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ diverge vers $-\infty$.

2° Si la suite (u_n) converge vers zéro sans que ses termes soient de signe constant à partir d'un certain rang, alors la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ ne diverge ni vers $+\infty$, ni vers $-\infty$. Cette suite n'est ni majorée, ni minorée, et n'admet pas de limite.

• Exercice d'application

9. Étudier le comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers l'infini :

a) $u_n = \frac{3}{\ln n}$; *b)* $u_n = \frac{1}{n + \ln n}$.

4. RÈGLES DE COMPARAISON

La connaissance de la divergence vers l'infini d'un certain nombre de suites de référence permet l'étude d'autres suites, par l'intermédiaire des règles de comparaison. Nous retiendrons le résultat suivant, qui résulte directement des définitions :

THÉORÈME 6 **Soit (u_n) et (v_n) des suites. Si (u_n) diverge vers $+\infty$, et s'il existe un entier n_0 tel que, pour tout n supérieur à n_0, on ait $u_n \leqslant v_n$, alors (v_n) diverge vers $+\infty$.**

Le cas de suites (u_n) divergeant vers $-\infty$ se traite de façon analogue, en remarquant que la suite $(-u_n)$ diverge alors vers $+\infty$.

Exercice résolu

Étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $u_n = \dfrac{2^n}{n^3}$.

Pour étudier le sens de variation de (u_n), et puisque tous les termes de la suite sont strictement positifs, étudions le quotient $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

On a :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)^3}\cdot\frac{n^3}{2^n} = 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^3.$$

La suite (u_n) est croissante pour tout n tel que $2\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^3 \geqslant 1$.

C'est-à-dire $\dfrac{n}{n+1} \geqslant \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$, soit $n \geqslant \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}}$.

Le calcul à la machine donne $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}} \approx 4{,}847\,322$.

La suite (u_n) est donc croissante à partir du rang $n_0 = 5$.

D'autre part, on prouve que la suite (v_n) définie par $v_n = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)^3$ est croissante, et que $v_{10} \approx 0{,}751\,314\,8$. Donc $\dfrac{u_{11}}{u_{10}} = 2v_{10} > \dfrac{3}{2}$.

La suite (v_n) étant croissante, pour tout n supérieur à 10, on aura : $u_{n+1} > \dfrac{3}{2}u_n$.

Il en résulte que $u_{n+1} > \left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-10} u_{10}$.

La suite (u_n) est donc minorée par une suite géométrique divergeant vers $+\infty$. Elle diverge elle-même vers $+\infty$.

REMARQUE :

Pour étudier la limite de la suite (u_n), on peut utiliser la méthode suivante :

Soit $v_n = \ln(u_n) = \ln\dfrac{2^n}{n^3} = n\ln 2 - 3\ln n$, c'est-à-dire $v_n = n\left(\ln 2 - 3\dfrac{\ln n}{n}\right)$.

Comme $\left(\dfrac{\ln n}{n}\right)$ converge vers zéro, la suite $\left(\ln 2 - 3\dfrac{\ln n}{n}\right)$ converge vers $\ln 2$. Puisque $\ln 2$ est strictement positif, $\ln 2 - 3\dfrac{\ln n}{n}$ est minoré à partir d'un certain rang par un réel strictement positif.

Il en résulte d'après le théorème **3** que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$.

Comme $u_n = e^{v_n}$, on en conclut que : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Exercice d'application

10. Étudier le comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers l'infini : | a) $u_n = \frac{n!}{n^5}$; b) $u_n = \frac{n!}{5^n}$.

5. SUITES DE RÉFÉRENCES

On connaît plusieurs familles de suites qui divergent vers l'infini. Nous les récapitulons ci-dessous, en nous bornant à celles dont les termes sont strictement positifs, et qui divergent vers $+\infty$.

Ces suites qui divergent vers $+\infty$ diffèrent par la rapidité de leur divergence. Pour comparer deux suites (u_n) et (v_n) qui divergent vers $+\infty$, on étudie leur quotient $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$. On dit que u_n est infiniment grand par rapport à v_n, et l'on note : $u_n \gg v_n$ si, et seulement si, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{v_n} = +\infty$ $\left(\text{c'est-à-dire, lorsque } (u_n) \text{ et } (v_n) \text{ sont à termes positifs, si, et seulement si, } \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{v_n}{u_n} = 0.\right)$

A — Les logarithmes

Pour tout réel a tel que $a > 1$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty} \log_a n = +\infty$.

D'autre part : $\log_a n = \frac{\ln n}{\ln a}$.

Soient a et b deux réels tels que $1 < a < b$. Alors :

$$\frac{\log_b n}{\log_a n} = \frac{\ln n}{\ln b} \cdot \frac{\ln a}{\ln n} = \frac{\ln a}{\ln b}.$$

Aucune suite $(\log_a n)$ n'est infiniment grande par rapport aux autres.

Cependant, si $1 < a < b$, alors, pour tout entier n non nul : $\log_a n > \log_b n$.

B — Les suites arithmétiques de premier terme nul, et de raison positive

• Pour tout réel strictement positif a, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} an = +\infty$.

Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$, alors :

$$\frac{bn}{an} = \frac{b}{a}.$$

Aucune suite arithmétique n'est infiniment grande par rapport aux autres.

Cependant, si $0 < a < b$, alors, pour tout entier n non nul : $an < bn$.

• Pour comparer une suite arithmétique (bn) et une suite $(\log_a n)$, étudions le quotient $\frac{\log_a n}{bn} = \frac{\ln n}{\ln a} \cdot \frac{1}{bn} = \frac{1}{b \ln a} \cdot \frac{\ln n}{n}$.

On sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$.

Donc, puisque b est positif, et si a est supérieur à 1 : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{bn}{\log_a n} = +\infty$.

On peut donc conclure :

Quels que soient les réels a et b tels que $a > 1$ et $b > 0$, la suite (bn) est infiniment grande par rapport à la suite $(\log_a n)$: $(bn \gg \log_a n)$.

C – Les puissances

• Pour tout réel strictement positif a, on a $\lim_{n \to +\infty} n^a = +\infty$.

Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$. Alors :

$$\frac{n^b}{n^a} = n^{b-a}.$$

La suite (n^b) est donc infiniment grande par rapport à la suite (n^a), pour $0 < a < b$.

• Pour comparer la suite (n^b) à la suite arithmétique (an), étudions le quotient :

$$\frac{n^b}{an} = \frac{1}{a} n^{b-1}.$$

Pour $b > 1$, $\lim_{n \to +\infty} \frac{n^b}{an} = +\infty$, (n^b) est infiniment grande par rapport à (an);

pour $b = 1$, $\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{an} = \frac{1}{a}$;

pour $0 < b < 1$, $\lim_{n \to +\infty} \frac{n^b}{an} = 0$; (an) est infiniment grande par rapport à (n^b).

• Dans ce dernier cas, les suites (n^b), pour $0 < b < 1$, et $(\log_c n)$, avec $c > 1$ sont infiniment petites par rapport aux suites (an). Pour comparer ces suites, étudions le rapport :

$$\frac{n^b}{\log_c n} = n^b \frac{\ln c}{\ln n} = \ln c \frac{n^b}{\ln n}.$$

Pour étudier la limite de $u_n = \frac{n^b}{\ln n}$, considérons $v_n = \ln u_n$.

On a $v_n = b \ln n - \ln(\ln n)$, soit $v_n = \ln n\left(b - \frac{\ln(\ln n)}{\ln n}\right)$.

C'est-à-dire, si $X = \ln n$: $v_n = X\left(b - \frac{\ln X}{X}\right)$.

On a $\lim_{n \to +\infty} X = +\infty$ et $\lim_{X \to +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$. Donc $\lim_{n \to +\infty} \frac{\ln(\ln n)}{\ln n} = 0$.

Il en résulte, puisque b est strictement positif, que : $\lim_{n \to +\infty} v_n = +\infty$;

et par conséquent que :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = +\infty.$$

Comme $c > 1$, on peut conclure :

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^b}{\log_c n} = +\infty.$$

Autrement dit, la suite (n^b) est infiniment grande par rapport à la suite $(\log_c n)$, et ceci pour tout $b \in]0, 1[$, et tout $c \in]1, +\infty[$.

D – Les suites géométriques de premier terme égal à 1, et de raison strictement supérieure à 1

• Pour tout réel a strictement supérieur à 1, on a $\lim_{n \to +\infty} a^n = +\infty$.

Soient a et b deux réels tels que $1 < a < b$. Alors :

$$\frac{b^n}{a^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n, \quad \text{avec} \quad \frac{b}{a} > 1.$$

Il en résulte que : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{b^n}{a^n} = +\infty$.

Donc la suite (b^n) est infiniment grande par rapport à la suite (a^n).

Pour comparer la suite (b^n) avec la suite (n^α) ($b > 1$ et $\alpha > 0$), étudions le quotient :

$$v_n = \frac{b^n}{n^\alpha}.$$

On a $\ln v_n = n \ln b - \alpha \ln n = n\left(\ln b - \alpha \frac{\ln n}{n}\right)$.

Comme $b > 1$, alors $\ln b > 0$; et d'autre part $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$.

Il en résulte que $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln v_n = +\infty$. Par conséquent $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} e^{v_n} = +\infty$.

Toute suite géométrique de raison strictement supérieure à 1 et de premier terme égal à 1 est donc infiniment grande par rapport à toute suite « puissance ».

Parmi les résultats précédents, on retiendra en particulier :

THÉORÈME 7	**Quels que soient les réels a et α tels que $a > 1$ et $\alpha > 0$:** $$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^\alpha}{\log_a n} = +\infty;$$ $$\lim_{n \to +\infty} \frac{a^n}{n^\alpha} = +\infty.$$

E — Autres suites

★ Activité 1

1° a) Prouver que la suite (u_n) définie par $u_n = n^n$ diverge vers $+\infty$.

b) Comparer la suite (u_n) avec la suite (a^n) $(a > 1)$.

2° a) Prouver que la suite (v_n) définie par $v_n = n!$ diverge vers $+\infty$.

b) Pour comparer les suites (u_n) et (v_n), considérons le quotient $s_n = \frac{u_n}{v_n}$. Calculer $\frac{s_{n+1}}{s_n}$.

Prouver que $\frac{s_{n+1}}{s_n}$ converge vers e.

En déduire que (s_n) est minorée à partir d'un certain rang par une suite géométrique divergente.

c) Déduire du b) la comparaison entre les suites (u_n) et (v_n).

3° Soit a un réel strictement positif. On considère la suite (w_n) définie par $w_n = \left(\frac{n}{a}\right)^n$.

a) Prouver que la suite (w_n) diverge vers $+\infty$.

b) *En s'inspirant de la méthode du 2°* ***b)****, comparer la suite (w_n) et la suite (v_n). Montrer qu'il existe une valeur de a pour laquelle cette méthode ne permet pas de conclure. Préciser la comparaison suivant la position de a par rapport à cette valeur particulière.*
c) *Comparer les suites (w_n) avec les suites (α^n) $(\alpha > 1)$.*

★ Activité 2

En s'inspirant du travail ci-dessus, répertorier et classer les familles remarquables de suites positives de limite nulle. On dira, si $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$, que v_n est infiniment petit par rapport à u_n si $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{v_n}{u_n} = 0$, et l'on notera $v_n \ll u_n$.

V – EXEMPLES D'ÉTUDES DE SUITES

En présence d'une suite, on s'intéresse à son sens de variation, éventuellement à l'expression du terme u_n en fonction de n (cas des suites définies par récurrence). Mais la principale préoccupation est la convergence de la suite et, lorsqu'elle converge, la valeur de sa limite. On pourra toujours déterminer, dans ce cas, des valeurs approchées de cette limite, surtout lorsque l'on pourra disposer de suites adjacentes de même limite (voir **III, 2**). Déterminer si cette limite peut s'exprimer en fonction des nombres réels connus, à l'aide des opérations élémentaires et des fonctions connues est un problème délicat, qu'on ne sait pas résoudre dans tous les cas. La résolution de ce problème peut faire intervenir des méthodes nombreuses et variées.

1. SUITES DÉFINIES PAR $u_{n+1} = f(n)$. SOMME DES TERMES D'UNE TELLE SUITE

★ Activité 1 : Propriétés

Soit f une fonction numérique, et soit (u_n) la suite définie par : $u_n = f(n)$.

1° ***a)*** *Prouver que, si f est croissante (ou décroissante), alors il en est de même pour (u_n).*

b) *Soit $f(x) = 2x - E(x)$. La fonction f est-elle monotone?*
Prouver que la suite (u_n) telle que $u_n = f(n)$ est monotone. Conclure.

c) *Trouver d'autres exemples de fonctions non monotones définissant des suites monotones.*

2° ***a)*** *Prouver que, si f converge en $+\infty$, alors (u_n) converge vers la même limite que f.*

b) *Prouver que, si f diverge vers $+\infty$ en $+\infty$, alors (u_n) diverge vers $+\infty$.*

c) *On pose $f(x) = \sin \pi x$. La fonction f converge-t-elle en $+\infty$?*
Prouver que la suite (u_n) telle que $u_n = f(n)$ converge. Conclure.

d) *On pose $g(x) = x \cos 2\pi x$. La fonction g diverge-t-elle vers $+\infty$ en $+\infty$?*
Prouver que la suite (v_n) telle que $v_n = g(n)$ diverge vers $+\infty$. Conclure.

e) *Trouver d'autres exemples illustrant les* ***c)*** *et* ***d)****.*

3° ***a)*** *Soit $f(x) = \cos x$. Prouver que (u_n) n'est pas périodique.*

b) *Soit $g(x) = x \sin \pi x + \cos \dfrac{\pi}{4} x$. Prouver que g n'est pas périodique, alors que (v_n), définie par $v_n = g(n)$, est périodique.*

c) *Conclure.*

★ Activité 2 : Comparaison avec une suite géométrique

1° On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{1}{(2n+1)!}$.

a) *Prouver que u_n est strictement positif pour tout entier naturel n.*

b) *Calculer* $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

c) *Prouver qu'il existe un entier naturel n_0 tel que, pour $n \geqslant n_0$, alors* $v_n \leqslant \dfrac{1}{10}$.

d) *En déduire que, à partir du rang n_0, (u_n) est majorée par une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{10}$. En déduire que (u_n) converge.*

e) *Soit $s_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$. Déduire de ce qui précède que la suite (s_n) converge.*
f) *Déterminer, en utilisant ce qui précède, un encadrement de la limite de la suite (s_n).*

2° On considère la suite (s_n) définie par $s_n = \dfrac{1}{3} + \dfrac{4}{25} + ... + \left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n$.

a) *Soit $u_n = \left(\dfrac{n}{2n+1}\right)^n$, et soit $v_n = \sqrt[n]{u_n}$. Prouver qu'il existe un entier n_0 tel que, pour tout entier n supérieur à n_0, on ait : $v_n \leqslant \dfrac{3}{4}$.*

b) *En déduire que, à partir du rang n_0, u_n est majoré par le terme général d'une suite géométrique de raison $\dfrac{3}{4}$.*

c) *En déduire que la suite (s_n) converge. Préciser un encadrement de la limite l de cette suite.*

★ Activité 3 : Exemple : suite (u_n) définie par $u_n = n^{1/n}$

a) *Soit $f(x) = x^{\frac{1}{x}}$. Étudier la variation de la fonction f.*
b) *En déduire le sens de variation de la suite (u_n).*
c) *En étudiant la suite (v_n) définie par $v_n = \ln u_n$, étudier la convergence de la suite (u_n).*

★ Activité 4 : Exemples de suites définies par des sommes

1° En interprétant à l'aide de la valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle, étudier la convergence et la limite de la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \frac{1}{n\sqrt{n}}(1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + ... + \sqrt{n}).$$

2° On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \left(\dfrac{n!}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$.

a) *On pose $v_n = \ln u_n$. Étudier la limite de la suite (v_n), en interprétant à l'aide de la valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle.*
b) *En déduire la limite de la suite (u_n).*
c) *En déduire qu'il existe un entier n_0 tel que, à partir du rang n_0, la suite (w_n) définie par $w_n = \dfrac{n!}{n^n}$ est majorée par une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.*

d) *Déduire de ce qui précède que la suite (s_n) définie par $s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k!}{k^k}$ converge. Préciser un encadrement de sa limite.*

3° *a*) *On considère la suite* (h_n) *définie par :* $h_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}$. *En comparant* h_n *avec une intégrale, prouver que* (h_n) *diverge vers* $+\infty$.

b) *Utiliser le résultat ci-dessus pour préciser le comportement des suites* (u_n) *et* (v_n) *définies par* $u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}}$ *et* $v_n = \frac{2}{3} + \frac{3}{8} + ... + \frac{n}{n^2 - 1}$.

4° *Étudier la convergence de la suite* (u_n) *définie par* $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$.

$\left(\right.$*On pourra remarquer que* $\frac{1}{k(k+1)}$ *se décompose simplement sous forme d'une différence.*$\left.\right)$

★ Activité 5 : Utilisation de sous-suites adjacentes

On considère la suite (u_n) *définie par* $u_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + ... + \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

a) *Soit la suite* (v_n) *définie par* $v_n = u_{2n}$. *Prouver que cette suite est décroissante.*

b) *Soit la suite* (w_n) *définie par* $w_n = u_{2n+1}$. *Prouver que cette suite est croissante.*

c) *Prouver que la suite* $(w_n - v_n)$ *converge vers zéro.*

d) *Prouver que, quels que soient les entiers* n *et* p : $w_n < v_p$.

e) *En déduire que les suites* (v_n) *et* (w_n) *ont même limite* l, *et que* l *est également la limite de la suite* (u_n). *Encadrer* l *en utilisant* v_{10} *et* w_{10}.

2. SUITES RÉCURRENTES

A — Suites telles que $u_{n+1} = f(u_n)$

Si f est une fonction continue, et si la suite (u_n) converge vers la limite l, on sait que la suite (v_n) définie par $v_n = f(u_n)$ converge vers $f(l)$. Il en résulte que, si une suite (u_n) est telle que $u_{n+1} = f(u_n)$, et converge vers une limite l, cette limite est une des racines de l'équation définie par $x = f(x)$. Une telle racine est un « point fixe » de la fonction f.

Si une fonction f n'admet pas de point fixe, la suite (u_n) associée ne converge pas.

Mais si la fonction f admet un point fixe, il n'en résulte pas que la suite (u_n) associée converge.

De plus, un seul de ces points fixes peut être la limite éventuelle.

L'étude de la convergence de la suite nécessite donc des études supplémentaires, et peut d'ailleurs dépendre de la donnée du premier terme.

L'étude de telles suites peut permettre la détermination de valeurs approchées des racines d'une équation (voir chapitre 9, § III).

• Soit C la courbe représentative, dans un repère orthonormal, de la fonction f.

La limite éventuelle de la suite (u_n) est l'abscisse d'un des points communs de la courbe C et de la droite D d'équation $y = x$.

La formation des termes de la suite (u_n) s'interprète géométriquement sur la figure (figures 2 et 3, page 142).

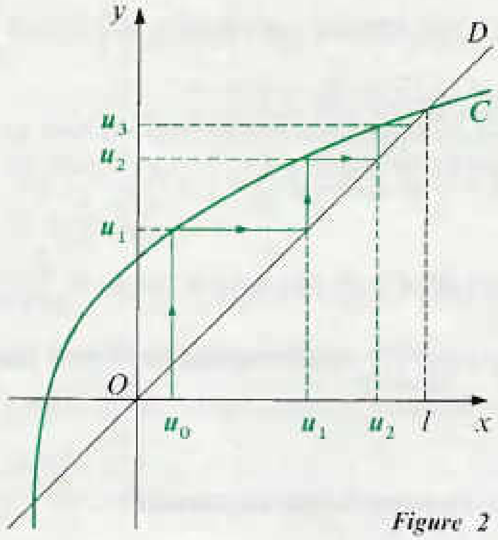


Figure 2

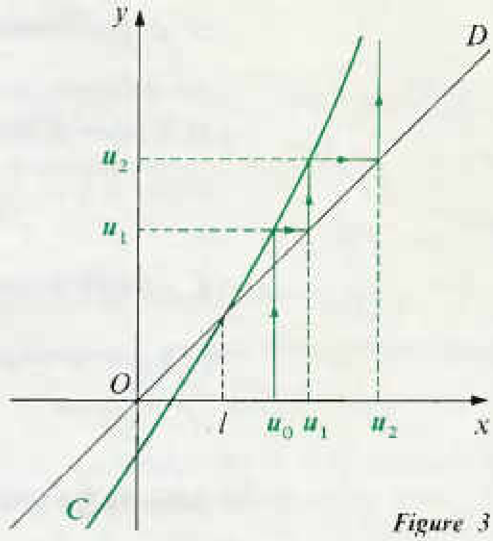


Figure 3

REMARQUE :

Une relation de la forme $u_{n+1} = f(u_n) + \varphi(n)$ définit ce que l'on appelle une « équation aux différences finies du premier ordre ». Résoudre une telle équation, c'est déterminer en fonction de n le terme général u_n d'une suite quelconque satisfaisant à la relation de récurrence. On définit de même des équations du second ordre, etc.

★ Activité 1 : Récurrences linéaires du premier ordre

Nous proposons dans cette activité, l'étude d'exemples de suites satisfaisant à une relation de la forme : $u_{n+1} = au_n + \varphi(n)$, où a désigne un réel, et φ, une suite numérique.

1° Soit (u_n) une suite numérique définie par son premier terme u_0, et par la relation de récurrence : $$u_{n+1} = au_n \qquad (1).$$
a) *Étudier la suite (u_n), et préciser son comportement (sens de variation, limite) pour les différentes valeurs de a.*
b) *Illustrer graphiquement dans chaque cas.*

2° Soit a et b des réels non nuls, et soit (u_n) une suite numérique définie par son premier terme u_0, et par la relation de récurrence : $u_{n+1} = au_n + b$ (2).
a) *Étudier la suite (u_n) obtenue pour $a = 1$. Illustrer graphiquement.*
b) *Soit $a \neq 1$. Déterminer la limite éventuelle l de la suite (u_n).*
c) *Étudier la suite (v_n) définie par : $v_n = u_n - l$.*
d) *En déduire l'expression de u_n en fonction de n, et préciser le comportement de la suite (u_n), pour les différentes valeurs de a.*
e) *Illustrer graphiquement dans chaque cas.*
f) *Soient (u_n) et (w_n) des suites satisfaisant à la relation de récurrence (2). Prouver que la suite $(u_n - w_n)$ satisfait à la relation (1).*
Réciproquement, démontrer que la suite (u_n), solution la plus générale de l'équation définie par (2) est la somme de la solution générale de l'équation (1), et d'une solution particulière de (2).

3° **a)** *On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = u_n + n$. Prouver qu'il existe un seul polynôme P (du second degré) tel que la suite $(P(n))$ satisfasse à la relation de récurrence étudiée.*
b) *Soit une suite (v_n) telle que, pour tout entier n : $v_{n+1} = v_n + n$. Que peut-on dire de la suite $(u_n - v_n)$? En déduire l'expression de toutes les suites (v_n) satisfaisant à la relation $v_{n+1} = v_n + n$.*

4° a) Reprendre le 3° avec la relation de récurrence $v_{n+1} = v_n + n^2$.
b) Même question avec $v_{n+1} = v_n + n^3$.

5° Utiliser les résultats obtenus ci-dessus pour déterminer v_n *en fonction de n, lorsque la suite* (v_n) *est telle que :*
a) $v_{n+1} = v_n + 2n$;
b) $v_{n+1} = v_n + n + n^2$;
c) $v_{n+1} = v_n + 5n^3 + 2n^2 - n + 3$.

6° On considère les suites (v_n) *telles que* $\quad v_{n+1} = 3v_n + n \qquad (3).$
a) Déterminer les réels a et b tels que la suite (u_n) *définie par* $u_n = an + b$ *satisfasse à la relation (3).*
b) Déterminer l'ensemble des suites $(v_n - u_n)$.
c) En déduire l'expression de v_n *en fonction de n et de* v_0.

7° S'inspirer du **6°** *pour résoudre les équations aux différences finies ci-dessous :*

a) $v_{n+1} = \dfrac{1}{2} v_n + n^2$;

b) $v_{n+1} = -\dfrac{2}{3} v_n + 1 + n + n^2$;

c) $v_{n+1} = 2v_n - 2 + 3n + n^2 - n^3$.

8° En s'inspirant des résultats ci-dessus, donner une méthode de résolution des équations aux différences finies du premier ordre définies par $u_{n+1} = au_n + P(n)$, *où a désigne un réel non nul, et P un polynôme de degré p. On précisera la différence entre les cas* $a = 1$ *et* $a \neq 1$, *et on l'expliquera.*

★ Activité 2 : Applications

1° a) Un épargnant place 1 000 F à intérêts composés, au taux annuel de 8,5 %. Soit u_n *la valeur en francs du placement au premier janvier de la* $n^{\text{ième}}$ *année* $(u_0 = 1\,000)$.
Calculer u_n *en fonction de n. Étudier le comportement de la suite* (u_n). *Au bout de combien de temps* u_n *dépassera-t-il pour la première fois 2 000?*
b) On suppose que de plus, l'épargnant ajoute chaque année la somme fixe de 500 F à son placement. Calculer la valeur v_n *du placement au premier janvier de la* $n^{\text{ième}}$ *année. Étudier le comportement de la suite* (v_n). *Au bout de combien de temps* v_n *dépassera-t-il pour la première fois 2 000?*
Au bout de combien de temps l'épargnant aura-t-il doublé son apport?
c) Reprendre le **b)** *avec un apport annuel de (100n) F.*
d) L'épargnant décide un apport annuel dont la valeur constante serait de 100 F de l'année zéro. On suppose que le taux de dépréciation de l'argent est de 12 %. Il en résulte que le premier apport (année 1) sera de 112 F, etc.
Calculer l'apport annuel a_n, *en fonction de n* $(n \geqslant 1)$.
Déterminer l'équation aux différences finies liant la valeur w_{n+1} *du placement au premier janvier de l'année* $n + 1$ *à la valeur* w_n *du placement au premier janvier de l'année n.*
Trouver une suite géométrique solution de cette équation, et en déduire w_n, *en s'inspirant des méthodes rencontrées à l'activité* ***1.***

2° Un porc est commercialisé après 18 mois d'élevage. Au moment d'entreprendre l'élevage d'un troupeau de porcs, l'éleveur tient compte du cours du marché pour déterminer, en fonction de ses espérances, l'effectif de son troupeau. Mais la commercialisation ne se faisant que 18 mois plus tard, c'est à un cours différent qu'il présentera ses bêtes à la vente. C'est ainsi que l'offre des porcs se fait sur le marché en fonction du prix p_{n-1}, *et que la demande est, elle, fonction du prix* p_n, *une période d'élevage (18 mois) plus tard.*

On peut schématiser cette situation par les fonctions d'offre et de demande :

$$\mathcal{O}(n) = a + bp_{n-1}; \qquad \mathcal{D}(n) = c + dp_n.$$

(p_n désigne le cours du porc à la période n, chaque période étant de 18 mois.)

a) *Quels sont les signes de b et d?*

b) *Si l'on admet que l'équilibre entre l'offre et la demande se réalise à chaque période n, étudier la suite (p_n), suivant les valeurs de a, b, c et d.*

c) *Interpréter les résultats obtenus. Préciser pourquoi le modèle retenu n'est qu'approximatif.*

3° *La croissance d'une population est proportionnelle à cette population. Mais, lorsque cette population évolue en milieu fermé, c'est-à-dire dans un milieu ne pouvant contenir une population supérieure à une population limite P, cette croissance est freinée, et d'autant plus freinée que la population est proche de la limite P.*

Soit u_n l'effectif de la population à l'époque n. On peut admettre que les mécanismes de régulation interviennent après l'apparition de la génération de l'époque $n + 1$, et par conséquent que l'accroissement de la population est proportionnel à la différence $P - u_{n+1}$. On aura ainsi :

$$u_{n+1} - u_n = ku_n(P - u_{n+1}).$$

a) *On pose $v_n = \dfrac{1}{u_n}$. Déterminer v_n en fonction de n.*

b) *En déduire u_n en fonction de n et de u_0. Préciser l'étude pour $P = 10$, $u_0 = 5$, $k = \dfrac{1}{10}$.*

★ Activité 3 : Suites telles que $u_{n+1} = \sqrt{a + u_n}$ ou $u_{n+1} = \sqrt{a - u_n}$.

1° *On considère la suite (u_n) définie par $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$ et $u_0 = 1$.*

a) *Prouver que, pour tout entier naturel n : $0 < u_n < 2$.*

b) *Étudier la différence $u_{n+1} - u_n$. Déduire de **a)** que (u_n) est croissante.*

c) *Démontrer que la suite (u_n) converge. Quelle est sa limite?*

d) *Interpréter graphiquement.*

2° *Étudier la suite (v_n) définie par $v_{n+1} = \sqrt{2 + v_n}$ et $v_0 = 4$.*

3° *On considère la suite (w_n) définie par $w_{n+1} = \sqrt{2 - w_n}$ et $w_0 = 0$.*

a) *Prouver que, pour tout entier naturel n : $0 < u_n < 2$. En déduire que w_n est défini pour tout entier n.*

b) *On pose $x_n = w_{2n}$ et $y_n = w_{2n+1}$. Étudier le sens de variation des suites (x_n) et (y_n). Comparer x_n et y_n. Illustrer graphiquement.*

c) *Prouver que la suite (w_n) converge. Quelle est sa limite?*

4° *Reprendre le **3°** avec la suite (t_n) définie par $t_{n+1} = \sqrt{2 - t_n}$ et $t_0 = \dfrac{3}{4}$.*

5° a) *La condition $r_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1}{2} - r_n}$ permet-elle de définir une suite, avec $r_0 = 0$? Avec $r_0 = \dfrac{1}{3}$? Illustrer graphiquement.*

b) *Peut-on trouver un r_0 tel que la condition du **a)** permette de définir une suite?*

★ Activité 4 : Récurrences homographiques

1° On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_{n+1} = \frac{2u_n - 4}{u_n - 3} \quad et \quad u_0 = 0.$$

a) *Quelles sont les limites éventuelles de la suite (u_n)?*

b) *Soient l et l' ces limites éventuelles. Calculer $\dfrac{u_{n+1} - l}{u_{n+1} - l'}$.*

c) *Déduire de ce qui précède que la suite (u_n) converge si elle est définie. (C'est-à-dire si aucun u_n n'est égal à 3.) Quelle est la limite?*

d) *Interpréter graphiquement.*

e) *Prouver que u_n est défini pour tout n.*

2° Reprendre le 1° pour la suite (v_n) définie par : $v_{n+1} = \dfrac{2v_n - 4}{v_n - 3}$ et $v_0 = 5$.

3° On considère la suite (w_n) définie par :

$$w_{n+1} = \frac{w_n + 1}{3 - w_n} \quad et \quad w_0 = 0.$$

a) *Quelles sont les limites éventuelles l de la suite (w_n)?*

b) *Calculer $\dfrac{1}{w_{n+1} - l}$ en fonction de $\dfrac{1}{w_n - l}$. Conclure.*

c) *Illustrer graphiquement.*

★ Activité 5 : Autre exemple

Le comportement d'une suite n'est pas toujours aisé à élucider. La présente activité met en scène une suite dont on ne connaît le comportement (à notre connaissance), que pour certaines valeurs de u_1.

a) *Soit la suite (u_n) définie par l'organigramme ci-contre, et la donnée du premier terme u_1.*
Calculer les 100 premiers termes de cette suite dans les cas suivants :

$u_1 = 121$; $u_1 = 16$;
$u_1 = -11$;
$u_1 = -20$; $u_1 = -17$.

b) *Mêmes questions qu'au* **a)**, *en remplaçant :*

- « u_n pair » *par* « u_n multiple de 3 »;
- « $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2}$ » *par* « $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{3}$ »;
- « $u_{n+1} = 3u_n + 1$ » *par* « $u_{n+1} = 4u_n + 1$ ».

★ Activité 6 : Récurrences linéaires d'ordres supérieurs à 1

*1° **a)** Prouver que l'ensemble $\mathcal{S}$ des suites numériques (ensemble des applications de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$) est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.*
***b)** Soit a et b des réels. Soit $\mathcal{U}$ l'ensemble des suites numériques (u_n) telles que, pour tout entier n : $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$.*
Prouver que $\mathcal{U}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{S}$.
***c)** Montrer que tout élément de $\mathcal{U}$ est défini par la donnée des deux réels u_0 et u_1.*
Nous admettrons que $\mathcal{U}$ est de dimension 2.

2° Soit $a = -1$ et $b = 6$. Pour déterminer l'ensemble $\mathcal{U}_1$ des suites (u_n) telles que :

$$u_{n+2} = -u_{n+1} + 6u_n,$$

on cherche deux suites linéairement indépendantes de $\mathcal{U}_1$.
***a)** Déterminer r de façon que la suite géométrique de premier terme 1 et de raison r appartienne à $\mathcal{U}_1$.*
***b)** Prouver que les deux suites géométriques obtenues au **a)** sont linéairement indépendantes.*
***c)** En déduire l'expression du terme général u_n d'une suite quelconque de $\mathcal{U}_1$, en fonction de deux paramètres α et β. Exprimer α et β en fonction de u_0 et u_1.*

*3° Reprendre le **2°** avec $a = 3$ et $b = -2$.*

4° Soit $a = 4$ et $b = -4$. Soit $\mathcal{U}_2$ l'ensemble des suites (u_n) telles que :

$$u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n.$$

***a)** Déterminer r de façon que la suite géométrique de premier terme 1 et de raison r appartienne à $\mathcal{U}_2$.*
***b)** La question **a)** ne permet de trouver qu'un élément de $\mathcal{U}_2$. Prouver que la suite (v_n) définie par $v_n = nr^n$, où r désigne le réel trouvé au **a)**, est également élément de $\mathcal{U}_2$.*
***c)** Démontrer que les deux suites obtenues aux **a)** et **b)** sont linéairement indépendantes. En déduire l'expression du terme général u_n d'une suite quelconque de $\mathcal{U}_2$, en fonction de u_0 et de u_1.*

*5° Reprendre le **4°** avec $a = 2$ et $b = -1$. Commenter le résultat.*
*Aurait-on pu l'obtenir sans reprendre toute la méthode du **4°**?*

6° Soit $a = -1$ et $b = -1$. Soit $\mathcal{U}_3$ l'ensemble des suites (u_n) telles que

$$u_{n+2} = -u_{n+1} - u_n.$$

***a)** Si r est la raison d'une suite géométrique de premier terme 1, appartenant à $\mathcal{U}_3$, alors r est racine d'une équation du second degré. Déterminer les racines complexes de cette équation du second degré. Écrire ces racines sous forme trigonométrique.*
***b)** En utilisant la formule de Moivre, expliciter le nombre complexe r^n dans les deux cas obtenus au **a)**.*
***c)** En s'inspirant des formules d'Euler, déduire du **b)** deux suites à termes réels appartenant à $\mathcal{U}_3$. Vérifier.*
***d)** Prouver que les suites obtenues au **c)** sont linéairement indépendantes dans l'espace vectoriel $\mathcal{U}_3$. En déduire l'expression du terme général u_n d'une suite quelconque de $\mathcal{U}_3$, en fonction de u_0 et u_1.*

*7° Reprendre le **6°** avec $a = \sqrt{2}$ et $b = 1$.*

*8° En s'inspirant des méthodes de l'activité **1** ci-dessus, déterminer l'ensemble des suites (u_n) satisfaisant aux relations suivantes :*
***a)** $u_{n+2} = -u_{n+1} + 6u_n + 4$. (On cherchera une solution particulière constante.)*
***b)** $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n - 3$. (On cherchera une solution particulière de la forme (kn).)*
***c)** $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n + 1$. (On cherchera une solution particulière de la forme (kn^2).)*
***d)** $u_{n+2} = -u_{n+1} - u_n - 2$.*

★ Activité 7 : *Suite de Fibonacci*

A l'occasion de recherches mathématiques sur la prolifération des lapins, Léonard de Pise (dit Fibonacci) rencontra, au XIIe siècle, la situation ci-dessous. C'est ainsi que fut définie la suite la plus célèbre de l'histoire des Mathématiques, qui alimente encore de nombreux travaux contemporains. Les hypothèses simplificatrices qui sont à la base de l'étude peuvent paraître artificielles; cependant, on peut considérer que, si la population de lapins est assez importante, et si le milieu où elle évolue est assez vaste, les choses se passent en moyenne de cette façon :
Un couple de lapins, né à la date 0, donne naissance, à partir du deuxième mois de son existence, à un nouveau couple chaque mois. Ces nouveaux couples suivent la même loi de reproduction. On suppose que tous les lapins nés restent vivants au cours de l'étude.
a) *Calculer le nombre de couples de lapins au bout d'un an.*
b) *On note u_n le nombre de couples de lapins vivant au bout de n mois.*
Calculer u_n pour n entier compris entre 1 et 24. Représenter graphiquement les résultats obtenus.
c) *Prouver que $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$ (avec $u_0 = u_1 = 1$).*
d) *En déduire, en s'inspirant de l'activité* **6**, *l'expression de u_n en fonction de n.*
e) *Étudier la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$. La limite Φ de cette suite (v_n) est appelée « nombre d'or » et possède de nombreuses propriétés.*
f) *Prouver que :*

$$\Phi = 1 + \frac{1}{\Phi}.$$

$$\Phi^n = u_n\Phi + u_{n-1}.$$

g) *Expliquer les relations :*

$$\Phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \dots}}}.$$

$$\Phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}.$$

3. VITESSE DE CONVERGENCE

★ Activité 1

1° On considère les suites géométriques (a_n), (b_n) et (c_n), définies par $a_n = (0{,}9)^n$, $b_n = (0{,}5)^n$, $c_n = (0{,}1)^n$.
a) *Calculer les dix premiers termes de chacune de ces trois suites.*
b) *Représenter les résultats du* **a)** *sur un même axe, en utilisant trois couleurs différentes. Laquelle de ces trois suites converge le plus rapidement?*
c) *Soit (u_n) une suite convergeant vers zéro. On suppose que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = k$. Sur un axe où l'on suppose placés 0 et u_n, placer u_{n+1} dans les cas suivants : $k = 0{,}1$; $k = 0{,}5$; $k = 0{,}9$. Expliquer les résultats du* **b)**.

2° On considère la suite (r_n) définie par $r_{n+1} = \sqrt{r_n}$ et $r_0 = 2$.
On considère également la suite (t_n) définie par $t_n = r_n - 1$.
a) *Calculer les dix premiers termes des suites (r_n) et (t_n).*

b) *Prouver que pour tout entier naturel n, on a* $r_n > 1$ *et* $\frac{t_{n+1}}{t_n} < \frac{1}{2}$. *En déduire que la suite* (t_n) *converge vers zéro, et que la suite* (r_n) *converge vers* 1.
c) *Sur un même axe, représenter les dix premiers termes de* (t_n) *et de* (a_n) *(voir le* ***1°****).*
Reprendre le même travail avec (t_n) *et* (b_n), *puis avec* (t_n) *et* (c_n). *Que peut-on dire de la vitesse de convergence de la suite* (t_n) *par rapport à celle des suites* (a_n), (b_n) *et* (c_n)?
d) *Étudier la limite de la suite* $\left(\frac{t_{n+1}}{t_n}\right)$. *Le résultat apporte-t-il une justification au résultat pressenti au* ***c)****?*
e) *On considère la suite* (r'_n) *définie par* $r'_n = 2r_{n+1} - r_n$.
Prouver que la suite (r'_n) *converge vers* 1. *Calculer les dix premiers termes de* (r'_n) *et comparer avec les dix premiers termes de* (r_n). *Laquelle des deux suites converge le plus vite?*
f) *Étudier la limite de la suite* $\left(\frac{r'_{n+1} - 1}{r'_n - 1}\right)$. *Le résultat apporte-t-il une justification au résultat pressenti au* ***e)****?*

★ Activité 2

On considère les quatre suites (u_n), (v_n), (w_n) *et* (t_n) *définies par :*

$$u_n = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1};$$

$$v_n = \frac{2}{1 \times 3} + \frac{2}{5 \times 7} + \frac{2}{9 \times 11} + \dots + \frac{2}{(4n+1)(4n+3)};$$

$$w_n = 1 - \frac{2}{3 \times 5} - \frac{2}{7 \times 9} - \frac{2}{11 \times 13} - \dots - \frac{2}{(4n-1)(4n+1)};$$

$$t_n = \frac{1}{2} + \frac{4}{1 \times 3 \times 5} + \frac{4}{5 \times 7 \times 9} + \dots + \frac{4}{(4n-3)(4n-1)(4n+1)}.$$

On admet que ces quatre suites ont la même limite, qui est $\frac{\pi}{4}$.

a) *Calculer les 20 premiers termes de chacune de ces suites. Présenter les résultats dans un même tableau, puis, autant que possible, sur un même graphique (avec des couleurs différentes).*
b) *Classer ces suites suivant la rapidité avec laquelle le terme de rang n semble se rapprocher de la valeur limite* $\frac{\pi}{4}$.
c) *On définit la suite* (u'_n) *par* $u'_n = \dfrac{u_{n+1} - \frac{\pi}{4}}{u_n - \frac{\pi}{4}}$ *et, de même, les suites* (v'_n), (w'_n) *et* (t'_n).
Calculer les 19 premiers termes de chacune des suites (u'_n), (v'_n), (w'_n) *et* (t'_n). *Présenter les résultats dans un même tableau, puis sur un même graphique.*
d) *Classer les suites* (u_n), (v_n), (w_n), (t_n) *suivant les valeurs de* u'_{19}, v'_{19}, w'_{19} *et* t'_{19}. *Comparer avec le classement obtenu au* ***b)****.*

EXERCICES ET PROBLÈMES

SUITES ARITHMÉTIQUES ET GÉOMÉTRIQUES

1. Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_1 = 1$ et de raison $r = 6$.
Déterminer n de façon que

$$S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = 280.$$

Calculer alors u_n pour cette valeur de n.

2. Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_1 = 2$, et de raison $r = -3$.
Déterminer n de façon que

$$S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = -49.$$

Calculer alors u_n, pour la valeur de n trouvée.

3. Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme $u_0 = -3$ et de raison $r = 4$. Déterminer n de façon que :

$$S_n = u_0 + u_1 + ... + u_{n-1} = 88.$$

Calculer alors u_{n-1} pour la valeur de n trouvée.

4. Prouver que, si a^2, b^2 et c^2 sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique, il en est de même pour $\dfrac{a}{b+c}$, $\dfrac{b}{c+a}$ et $\dfrac{c}{a+b}$. La réciproque est-elle vraie?

5. Prouver que, si les réels a, b, c tels que $0 < a < b < c$ sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique, il en est de même pour les réels :

$$\frac{1}{\sqrt{b}+\sqrt{c}}, \quad \frac{1}{\sqrt{c}+\sqrt{a}}, \quad \frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}.$$

6. Prouver que, si les réels a, b, c sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique, il en est de même pour $a^2 - bc$, $b^2 - ca$, $c^2 - ab$, et aussi pour $b^2 + bc + c^2$, $c^2 + ca + a^2$, $a^2 + ab + b^2$. Montrer que la réciproque est vraie si $a + b + c \neq 0$.

7. On considère une suite géométrique de premier terme u_1, de n-ième terme u_n, de raison q, de somme S_n :
a) Calculer u_n et S_n connaissant $u_1 = 2$, $q = 3$, $n = 5$.
b) Calculer q et S_n connaissant $u_1 = 5$, $n = 6$, $u_n = 160$.
c) Calculer u_1 et S_n connaissant $q = 3$, $n = 4$, $u_n = 54$.
d) Calculer u_1 et u_n connaissant $q = \dfrac{1}{2}$, $n = 6$, $S = 63$.

8. Calculer trois termes consécutifs a, b, c, d'une suite géométrique, connaissant $a + b + c = S$ et $c - a = d$.
Exemple : $S = 312$; $d = 192$.

9. Calculer cinq termes consécutifs a, b, c, d, e, d'une suite géométrique, connaissant la somme S' des termes de rangs impairs et la somme S'' des termes de rangs pairs. Exemple : $S' = 21$; $S'' = 10$.

10. Calculer trois termes consécutifs a, b, c, d'une suite arithmétique, connaissant :

$$a + b + c = 171 \quad \text{et} \quad a^2 + b^2 + c^2 = 22\,869.$$

11. Calculer la somme des cubes des n premiers nombres entiers, puis la somme des carrés des n premiers nombres impairs.

12. Déterminer une suite arithmétique de premier terme a telle que la somme de ses n premiers termes soit $an^2 + bn$ quel que soit n (a et b sont des nombres donnés).

13. Démontrer que, si (a, b, c) est une suite géométrique, on a :

$$(ab + bc + ca)^3 = abc(a + b + c)^3.$$

14. Soit a, b et c des réels. On note f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = a \cos \frac{\pi}{2} x + b \sin \frac{\pi}{2} x + c.$$

1° Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n non nul :

$$f^{(n)}(x) = \left(\frac{\pi}{2}\right)^n \left[a \cos\left(\frac{\pi}{2}x + n\frac{\pi}{2}\right) + b \sin\left(\frac{\pi}{2}x + n\frac{\pi}{2}\right)\right].$$

2° On pose $u_n = \dfrac{1}{4^n} f^{(2n)}(0)$.
Calculer u_1. Prouver que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
3° Calculer en fonction de a, si elle existe, la limite de la suite (s_n) telle que :

$$s_n = u_1 + u_2 + ... + u_n.$$

15. Quelles sont les suites arithmétiques dont au moins les trois premiers termes sont éléments de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$?
Même question pour les suites géométriques.

16. Étant donnée une suite arithmétique à termes entiers, peut-on en extraire une sous-suite géométrique non constante?
Même question si les termes ne sont pas entiers.

SUITES DÉFINIES PAR $u_n = f(n)$

Dans les exercices **17** *à* **37**, *on demande d'étudier la suite* (u_n).

17. $u_n = 3n - 2$.

18. $u_n = \dfrac{2n^2 - n + 1}{n^2 - 2}$.

19. $u_n = 2^n + 3$.

20. $u_n = \dfrac{n^2 - 1}{n^3}$.

21. $u_n = (-2)^n + 2^n$.

22. $u_n = (-0{,}7)^n + (0{,}7)^n$.

23. $u_n = \dfrac{n^2}{n(n-1)} - (0{,}8)^n$.

24. $u_n = \dfrac{2n}{n!}$.

25. $u_n = \dfrac{n^7}{(1{,}1)^n}$.

26. $u_n = \dfrac{n^5}{n!}$.

27. $u_n = \dfrac{n \sin \frac{n\pi}{2} + 2}{n \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right)}$.

28. $u_n = \dfrac{n \sin n \frac{\pi}{4}}{n - 1}$.

29. $u_n = \dfrac{-n + \sqrt{n}}{2\sqrt{n}}$.

30. $u_n = \dfrac{n^2 + (-1)^n}{n^2 + 1}$.

31. $u_n = \sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n + 1}$.

32. $u_n = \sqrt{n^4 + n^2 - 2} - n^2 - n$.

33. $u_n = n\left(1 + n \sin \dfrac{n\pi}{2}\right)$.

$u_n = \sqrt[n]{n}$.

35. $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$.

36. $u_n = \dfrac{a^n}{(\ln n)^a}$ $(a \in \mathbb{R}_+^*)$.

37. $u_n = \dfrac{\ln (n + 1)}{\ln n}$.

38. *1°* Quelle est la limite de la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{(\ln n)^2}{\sqrt{n}}$?

En déduire qu'il existe un entier n_0 tel que, pour tout entier n supérieur ou égal à n_0 :

$$(\ln n)^2 \leqslant \frac{\sqrt{n}}{2}.$$

2° Soit $v_n = \dfrac{n^{\ln n}}{e^{\sqrt{n}}}$.

a) Prouver que $v_n \leqslant e^{-\frac{\sqrt{n}}{2}}$.

b) Démontrer que $e^{\frac{\sqrt{n}}{2}} \geqslant \left(\dfrac{\sqrt{n}}{2}\right)^4$ et en déduire que $v_n \leqslant \dfrac{16}{n^2}$.

c) Prouver que v_n converge.

39. Pour quelles valeurs de α la suite (u_n) converge-t-elle?

a) $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^\alpha}$; *b)* $u_n = \dfrac{\tan^{2n+1} \alpha}{2n + 1}$;

c) $u_n = \sqrt{n} \cos \alpha \sin^n \alpha$ $(\alpha \in [0, \pi])$;

d) $u_n = n^2 \sin \dfrac{1}{n^\alpha}$ $(\alpha \neq 0)$

40. Soit $f(n) = (n!)^{\frac{1}{n}}$.

On considère la suite (u_n) telle que : $u_n = \dfrac{f(n + 1)}{f(n)}$.

1° Exprimer $\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)^{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} = v_n$.

2° Prouver que $v_n < (n!)^{\frac{1}{n}} \dfrac{1}{n + 1} \left(1 + \dfrac{1}{n + 1}\right)^{\frac{n+1}{2}}$.

3° Montrer que $(n!)^{\frac{1}{n}} < \dfrac{n + 1}{2}$.

4° En déduire que (u_n) est décroissante, et convergente.

41. Soit, pour x réel, $u_n = \dfrac{n!}{n^n} x^{2n}$.

1° Étudier la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$.

2° En déduire que (u_n) converge pour $x^2 < e$.

SUITES DÉFINIES À L'AIDE D'UNE RÉCURRENCE

*Dans les exercices **42** à **50**, on demande d'étudier la suite (u_n). On exprimera u_n en fonction de n.*

42. $u_n = u_{n-1} + 5 - n + n^2$, $u_0 = 1$.

43. $u_{n+1} = 2u_n - 3n^3 - 3n^2 + n + 5$, $u_0 = -1$.

44. $u_{n+1} = 5u_n + 4n^3 + 3n^2 + 2n + 1$, $u_0 = 0$.

45. $u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1}$, $u_0 = 1$, $u_1 = 2$.

46. $u_{n+1} = 3u_n + u_{n-1}$, $u_0 = 0$, $u_1 = 1$.

47. $u_{n+1} = u_n - u_{n-1}$, $u_0 = u_1 = 1$.

48. $2u_{n+1} = -3u_n + u_{n-1}$, $u_0 = -1$, $u_1 = 2$.

49. $3u_{n+1} = -u_n - u_{n-1}$, $u_0 = u_1 = 2$.

50. $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$, $u_0 = u_1 = 1$.

*Dans les exercices **51** à **56**, on demande d'étudier la suite (u_n) et d'illustrer graphiquement cette étude.*

51. $u_{n+1} = \sqrt{5 + u_n}$, $u_0 = 3$.

52. $u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}$, $u_0 = 1$, puis $u_0 = \dfrac{1}{2}$.

53. $u_{n+1} = \sqrt{1 - u_n}$, discuter suivant les valeurs de $u_0 = a$.

54. $u_{n+1} = \dfrac{2 - 3u_n}{1 - u_n}$, $u_0 = -1$.

55. $u_{n+1} = \dfrac{3 + 2u_n}{1 + u_n}$, $u_0 = 2$.

56. $u_{n+1} = \dfrac{1 - u_n}{1 + u_n}$, $u_0 = 3$.

57. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $2u_n = u_{n+1} + 1$.

a) Démontrer que la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - 1$ est une suite géométrique.

b) Calculer u_n en fonction de n.

c) Étudier la convergence de (u_n).

58. On définit une suite (u_n) par la donnée de u_1 et la condition $u_{n+1} = \dfrac{5u_n + 3}{u_n + 3}$.

a) On pose $v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n + 1}$. Montrer que (v_n) est une suite géométrique, dont on précisera la raison. Calculer v_n en fonction de u_1 et de n.
b) Étudier la suite (u_n) et sa convergence, dans les cas suivants : $u_1 = 3$; $u_1 = -1$; $u_1 = 4$.

59. On considère la suite réelle définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{1}{u_n}\right)$.

a) Montrer qu'elle est à termes strictement positifs.
b) On pose $w_n = \dfrac{-1 + u_n}{1 + u_n}$ pour tout entier naturel n.
Trouver une relation entre w_{n+1} et w_n. En déduire la limite de w_n quand n tend vers $+\infty$, puis celle de (u_n).

60. Soit a un réel. Soit (u_n) la suite de nombres réels définie par ses deux premiers termes : $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, et par la relation :

$$u_{n+1} = au_n + (1-a)u_{n-1}.$$

Soit (v_n) la suite définie par : $v_n = u_{n+1} - u_n$.
a) Prouver que (v_n) est une suite géométrique. Calculer v_n pour tout entier naturel n, en fonction de a et de n.
b) En déduire u_n en fonction de a et de n.
Comment choisir a pour que (u_n) soit convergente? Quelle est alors la limite?

61. On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 3; \qquad u_n = \frac{1}{3}u_{n-1} - 4 \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

a) Étudier le sens de variation de cette suite.
b) Soit (v_n) la suite définie par $v_n = u_n - 6$. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique, et trouver sa limite.
c) Déterminer le plus petit des entiers n_0 tels que, si n est supérieur ou égal à n_0, alors : $u_n < -5{,}99$.

62. On considère la suite (u_n) de réels, définie par :

$$u_0 = 1; \qquad u_n = \frac{u_{n-1} - 3}{2} \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

On pose $v_n = u_n + 3$.
a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison.
b) Exprimer v_n en fonction de n.
c) Étudier $\lim (v_n)$, et en déduire $\lim (u_n)$.

63. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_1 = 2; \qquad u_n = \frac{1}{4}u_{n-1} + 1.$$

a) Déterminer le nombre réel α tel que la suite (v_n) définie, pour tout entier n non nul, par $v_n = u_n + \alpha$, soit une suite géométrique; enpréciser le premier terme et la raison.
b) En déduire que (u_n) est une suite convergente et préciser sa limite.
c) Calculer en fonction de n le nombre :

$$s_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n.$$

La suite (s_n) est-elle convergente?

64. *1°* Soit (u_n) la suite définie par $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$ et $u_0 = 1$.

a) Quelle est la limite éventuelle de cette suite?
b) Prouver que (u_n) est croissante et majorée.
c) Étudier de même la suite (v_n) définie par :

$$v_{n+1} = \sqrt{1 + v_n} \quad \text{et} \quad v_0 = 3.$$

2° Soit (w_n) la suite définie par $w_n = 1 + \dfrac{1}{w_{n-1}}$ et $w_0 = 1$.
a) Prouver que pour tout entier n, w_n est un réel positif. En déduire que la limite éventuelle l de (w_n) est un réel positif. Déterminer l.
b) Prouver que, si $w_n < l$, alors $w_{n+1} > l$ et que, si $w_n > l$, alors $w_{n+1} < l$.
c) Calculer $w_{n+2} - w_n$. Prouver que la suite (s_n) définie par $s_n = w_{2n}$ est croissante et majorée par l. Prouver de même que la suite (t_n) définie par $t_n = w_{2n+1}$ est décroissante et minorée par l.
d) Prouver que (s_n) et (t_n) sont convergentes. Quelles sont leurs limites?
e) En déduire que (w_n) converge vers l. Comparer avec le résultat du *1°*.

65. On définit la suite réelle (u_n) par $u_0 = 0$, $u_1 = a$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = pu_{n+1} - (p-1)u_n,$$

où p appartient à $\mathbb{R}_+ \setminus \{0, 1, 2\}$.
1° On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $w_n = u_{n+1} - u_n$; montrer que (w_n) est une suite géométrique et calculer w_n en fonction de p, n et a.
2° On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $t_n = u_{n+1} - (p-1)u_n$; montrer que (t_n) est une suite constante et calculer t_n en fonction de a.
3° Calculer u_n en fonction de w_n et t_n, puis en fonction de p, n et a.
4° On définit une suite (v_n) par :

$$v_0 = 1, \quad v_1 = e^a \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+2} = \frac{(v_{n+1})^p}{(v_n)^{p-1}}.$$

Justifier la définition en montrant que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n > 0$.
Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ln(v_n) = u_n$.
En déduire v_n en fonction de p, n et a. Déterminer, suivant les valeurs de p et a, la limite de v_n quand n tend vers $+\infty$.

66. On considère la suite (u_n) définie par la donnée du réel strictement positif u_1, et par la relation : $u_{n+1} = \dfrac{1 + u_n^2}{2u_n}$.

1° Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.
2° Démontrer que (u_n) est minorée par 1 (pour $n \geqslant 2$).
3° Démontrer que (u_n) est décroissante et converge vers une limite que l'on déterminera. Étudier plus particulièrement le cas où $u_1 = 1$.

67. Étudier la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad u_{n-1} - u_n = \frac{n}{(n+1)!}.$$

68. Soit la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_n = 1 + \frac{2}{u_{n-1}}.$$

1° Démontrer que u_n est supérieur à 1 pour tout entier n.
2° On considère les suites (v_n) et (w_n) telles que :

$$v_n = u_{2n} \quad \text{et} \quad w_n = u_{2n+1}.$$

a) Démontrer par récurrence que v_n est inférieur à 2 pour tout n, et que (v_n) est une suite croissante.
b) Prouver que (w_n) est décroissante et minorée par 2.
3° Prouver que $\lim\limits_{n \to +\infty} (v_n - w_n) = 0$.
En déduire que (u_n) converge vers une limite que l'on précisera.

69. Soit la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = u_n + \frac{1}{2}(a^2 - u_n) \quad (a \in [-1, 1])$$

1° Prouver que $0 \leqslant u_n \leqslant |a|$.
2° Démontrer que (u_n) est croissante et converge vers une limite l que l'on déterminera.

70. On considère le polynôme :

$$f(x) = c(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_p)$$

(où $c \in \mathbb{R}^*_+$ et $0 < a_1 \leqslant a_2 \leqslant \dots \leqslant a_p$) tel que, de plus, $f(0) \leqslant a_1$ et p entier naturel pair.
Soit u_1 tel que $0 \leqslant u_1 \leqslant a_1$. On définit la suite (u_n) par :

$$u_{n+1} = u_n + f(u_n).$$

1° Démontrer que pour tout u tel que $0 \leqslant u \leqslant a_1$, alors :

$$0 \leqslant f(u) \leqslant a_1 - u.$$

2° En déduire que (u_n) est une suite croissante, majorée par a_1.
3° Établir que $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = a_1$.
4° Illustrer par un exemple avec $p = 4$, et un autre avec $p = 6$.

71. Soit la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_n = u_{n-1} + \frac{1}{u_{n-1}}.$$

1° Montrer que, pour tout n, u_n est supérieur à 1.
2° Montrer que (u_n) est croissante.
3° Prouver que (u_n) diverge vers $+\infty$.
4° *a)* Démontrer que, pour n supérieur à 1 :

$$2 \leqslant u_n^2 - u_{n-1}^2 \leqslant 2 + u_n - u_{n-1}.$$

b) En déduire que $2n \leqslant u_n^2 - 1 \leqslant 2n + u_n - 1$.
5° *a)* Démontrer que $1 - \dfrac{1}{u_n} \leqslant \dfrac{2n}{u_n^2} \leqslant 1 - \dfrac{1}{u_n^2}$.
b) Prouver que $\dfrac{\sqrt{2n}}{u_n}$ a une limite, que l'on calculera, lorsque n tend vers l'infini.

72. *1°* Prouver que, pour tout couple (x, x') de réels :

$$|\sin x - \sin x'| \leqslant |x - x'|.$$

2° Soit a et t des réels. On définit la suite (u_n) par :

$$u_0 = a \quad \text{et} \quad u_{n+1} = a + t \sin u_n.$$

a) Prouver que : $|u_{n+1} - u_n| \leqslant |a|\,|t^{n+1}|$.
b) Démontrer que, si $|t| < 1$ et $m \geqslant n$:

$$|u_m - u_n| \leqslant \frac{|a|\,|t^{n+m}|}{1 - |t|}.$$

c) En déduire que, si $|t| < 1$, la suite (u_n) converge et que sa limite est solution de l'équation définie par $x = a + t \sin x$. Combien cette équation admet-elle de solutions?

73. Soit u_0 et v_0 deux réels tels que $u_0 < v_0$. On considère les suites (u_n) et (v_n) telles que :

$$u_n = \frac{u_{n-1} + v_{n-1}}{2} \quad ; \quad v_n = \frac{u_{n-1} + 2v_{n-1}}{3}.$$

1° Démontrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $v_n > u_n$.
2° Prouver que (u_n) est monotone croissante et (v_n) monotone décroissante.
3° Prouver que (u_n) et (v_n) convergent et que

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} v_n.$$

4° Interpréter géométriquement.

74. Soit u_0 et v_0 deux réels tels que $0 < v_0 < u_0$. On définit les suites (u_n) et (v_n) par :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \quad , \quad v_{n+1} = \frac{2u_nv_n}{u_n + v_n}.$$

1° Démontrer par récurrence que :
a) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 < u_n\,v_n$.
b) (u_n) est décroissante et (v_n) croissante.
2° Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.

75. On définit une suite réelle u par la donnée des deux premiers termes u_1 et u_2 et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = au_n + bu_{n-1}. \qquad (1)$$

A – *1°* Calculer u_3, u_4, u_5, u_6, u_7 en fonction de u_1, u_2, a et b.
2° *a)* On suppose $a^2 + 4b > 0$. Montrer qu'il existe deux réels α et β tels que :

$$\alpha + \beta = a \quad \text{et} \quad \alpha\beta = -b.$$

b) Montrer que la suite v définie par :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \alpha u_n \quad \text{pour} \quad n \geqslant 1$$

est une suite géométrique de raison β.
Qu'en déduit-on pour la suite w définie par :

$$w_{n+1} = u_{n+1} \pm \beta u_n?$$

c) Exprimer v_{n+1} et w_{n+1} en fonction de u_1, u_2, α, β et n. En déduire l'expression de u_{n+1} en fonction de u_1, u_2, α, β et n.

B — On suppose $a^2 + 4b = 0$.
1° Montrer que la relation (1) peut s'écrire :

$$u_{n+1} - \alpha u_n = \alpha(u_n - \alpha u_{n-1})$$

2° On pose $u_n = \alpha^n s_n$. Montrer que la suite (s_n) est une suite arithmétique.
En déduire l'expression de s_n, puis de u_n, en fonction de n, α, u_1 et u_2.
3° Montrer que l'expression trouvée pour u_{n+1} est la limite de celle obtenue au **A** quand on fait tendre β vers α.

C — On suppose $a^2 + 4b < 0$.
1° On désigne par α et β les racines complexes de l'équation $x^2 - ax - b = 0$.
Montrer qu'il existe un réel positif r et un nombre $\theta \in]0, \pi[$ tels que la relation (1) s'écrive :

$$u_{n+1} = u_n 2r\cos\theta - r^2 u_{n-1}. \qquad (2)$$

2° Montrer qu'il existe des nombres réels A et B tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = r^n(A\cos n\theta - B\sin n\theta).$$

3° *a)* En déduire la relation :

$$u_{n+1} = \frac{r^{n-1}}{\sin\theta}[u_2 \sin n\theta - r u_1 \sin(n-1)\theta].$$

b) En comparant le nombre u_7 donné par cette relation et l'expression trouvée pour u_7 au **A** — *1°*, exprimer $\sin 5\theta$ et $\sin 6\theta$ en fonction de $\sin\theta$ et $\cos\theta$.

SUITES DÉFINIES PAR DES SOMMES

Dans les exercices **76** *à* **84**, *on demande d'étudier la suite* (u_n).

76. $u_n = \sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{2}{7}\right)^k$. **77.** $u_n = \sum_{k=1}^{n} 2^k$.

78. $u_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k k$. **79.** $u_n = \sum_{k=1}^{n} \sin\frac{2k\pi}{3}$.

80. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$. **81.** $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

82. $u_n = \dfrac{1 - 2 + 3 - 4 + \dots - 2n}{\sqrt{1 + n^2}}$

83. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(\ln k)^a}$ $(a \in \mathbb{R}_+^*)$

84. $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ $\left(\text{on prouvera que } e^{-\sqrt{n}} < \frac{1}{n^2}\right)$.

85. Étudier la convergence de la suite (u_n) définie par :

$$u_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{p-1} + \sqrt{p}}.$$

86. *a)* On considère la suite s_n définie par :

$$s_n = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}.$$

Calculer s_n en fonction de n et de x. Étudier la limite de (s_n) pour $0 < x < 1$.
b) Même exercice pour :

$$t_n = 1 + 3x + \dots + \frac{n(n+1)}{2}x^{n-1}.$$

87. *1°* On pose :

$$u_n = \frac{1! + 2! + \dots + (n-1)! + n!}{n!}.$$

En écrivant :

$$u_n = 1 + \frac{1! + 2! + \dots + (n-2)! + (n-1)!}{n!},$$

démontrer que :

$$u_n < 1 + \frac{(n-2)(n-2)! + (n-1)!}{n!},$$

$$u_n < 1 + \frac{2n-3}{n(n-1)}.$$

2° En déduire que : $\lim\limits_{+\infty} (u_n) = 1$.

88. *1°* Calculer : $S_n = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}$.
Si : $0 < x < 1$, étudier : $\lim\limits_{+\infty} (S_n)$.
[On remarquera que :

$$S_n = (1 + x + \dots + x^{n-1}) + (x + \dots + x^{n-1}) + \dots + (x^{n-1}).]$$

2° Même exercice pour :

$$S_n = 1 + 3x + \dots + \frac{n(n+1)}{2}x^{n-1}.$$

$\left(\text{On remarquera que : } \frac{n(n+1)}{2} = 1 + \dots + n.\right)$

89. On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{n^2+3}{(n-1)!}$.
1° Prouver que (u_n) converge vers zéro.
2° Soit $v_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.
a) Montrer que $u_n = \dfrac{1}{(n-3)!} + \dfrac{3}{(n-2)!} + \dfrac{4}{(n-1)!}$
(pour $n \geqslant 3$).
b) En déduire la convergence et la limite de la suite (v_n).
$\left(\text{On pourra utiliser le fait que la suite } \left(\sum_{p=0}^{n} \frac{1}{p!}\right) \text{ converge vers e.}\right)$

90. Soit la suite (u_n) de terme général :

$$u_n = \frac{1}{(n-1)! + n!}$$

On considère la suite (v_n) définie par : $v_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.
1° Calculer v_n en fonction de n.
2° En déduire que (v_n) est monotone et bornée. Préciser sa limite.

91. *1°* Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation définie par :

$$1 - \frac{x}{2} < \frac{1}{\sqrt{1+x}}.$$

2° Soit $g(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x}}$.

Prouver que : $x - \dfrac{x^2}{2} < g(x) < x$.

3° Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \sum_{k=1}^{n} g\left(\dfrac{k}{n^2}\right)$.

Démontrer que (u_n) converge vers $\dfrac{1}{2}$.

92. Soit (s_n) la suite définie par $s_n = \sum_{p=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{p}}$.

1° Démontrer par récurrence que $s_n > 2\sqrt{n+1} - 2$.
2° On considère la suite (u_n) définie par $u_n = s_n - 2\sqrt{n}$.
a) Démontrer que $u_n < 0$.
b) Démontrer que (u_n) est minorée par -2 et est convergente.
3° Retrouver les résultats ci-dessus en comparant s_n avec des intégrales.

93. On donne une suite croissante (q_n) d'entiers naturels telle que $q_0 \geqslant 2$.
On construit la suite (u_n) par :

$$u_0 = \frac{1}{q_0};\quad u_1 = \frac{1}{q_0} + \frac{1}{q_0 q_1};\ \ldots;$$
$$u_n = \frac{1}{q_0} + \frac{1}{q_0 q_1} + \ldots + \frac{1}{q_0 \cdots q_n}.$$

1° Montrer que (u_n) est croissante et peut être majorée par une suite convergente.
2° En déduire que (u_n) converge et que sa limite est élément de $]0, 1]$.

94. Moyenne de Cesaro

Soit (u_n) une suite convergeant vers une limite réelle l. On considère la suite (v_n) définie par :

$$v_n = \frac{1}{n}(u_1 + u_2 + \ldots + u_n).$$

1° On suppose $l = 0$.
a) Soit ε un réel strictement positif. Montrer qu'il existe un entier p tel que pour tout entier n supérieur ou égal à p : $\quad u_n \leqslant \varepsilon$.

b) En déduire que pour tout n supérieur à p :

$$|v_n| \leqslant \frac{|u_1 + u_2 + \ldots + u_p|}{n} + \varepsilon.$$

c) Montrer qu'il existe un entier n_0 tel que, pour tout n supérieur à n_0 : $\quad |v_n| \leqslant 2\varepsilon$.

d) En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$.

2° Pour l quelconque, on pose :

$$u_n = l + u'_n \quad \text{et} \quad v_n = l + v'_n.$$

a) Montrer que $v'_n = \dfrac{1}{n}(u'_1 + u'_2 + \ldots + u'_n)$.

b) En déduire que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = l$.

c) Énoncer le résultat obtenu.
d) Montrer, par un contre-exemple, que l'on peut avoir :

$$\lim_{n \to +\infty} v_n = l$$

sans que la suite (u_n) admette la limite l.
3° *a)* Démontrer que, si la suite (u_n) à termes positifs converge vers l, alors il en est de même de la suite (w_n) définie par $w_n = \sqrt[n]{u_1 u_2 \ldots u_n}$.
b) La réciproque de cette propriété est-elle vraie?
4° Soit (u_n) une suite. On définit les suites (v_n) et (w_n) par :

$$v_n = \frac{1}{n}(u_1 + u_2 + \ldots + u_n) \quad , \quad w_n = \frac{1}{n}(u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2).$$

a) Prouver que (voir chapitre 9) :

$$(u_1 + u_2 + \ldots + u_n)^2 \leqslant n(u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2).$$

b) Montrer que, si $\lim (w_n) = 0$, alors $\lim (v_n) = 0$.
c) La réciproque de cette propriété est-elle vraie?

SUITES DÉFINIES PAR UNE INTÉGRALE

95. Soit $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n e^x \, dx$.

Établir une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n. En déduire I_n pour tout entier naturel n. Étudier la suite (I_n).

96. Soit la suite (u_n) définie par $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{1+t^n}$.

Étudier le sens de variation et la convergence de (u_n). Préciser sa limite.

97. Reprendre l'exercice **96** avec $u_n = \displaystyle\int_0^1 \sqrt[n]{1+t^2}\, dt$.

98. Soit $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx$.

1° Prouver que (I_n) est une suite décroissante, à termes positifs, et convergeant vers zéro.
2° Prouver que $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$. Expliciter I_n.
3° Prouver que la suite (u_n) telle que $u_n = (n+1)I_n I_{n+1}$ est constante.
4° Prouver que $\left(\dfrac{I_{n+1}}{I_n}\right)$ converge vers 1.

99. Soit $u_n = \displaystyle\int_1^{1+\frac{1}{n}} \sqrt{1+x^n}\, dx$. Démontrer que (u_n) converge vers zéro.
(On pourra utiliser le théorème de la moyenne.)

100. Soit $u_n = \displaystyle\int_2^n \frac{dt}{t(\ln t)^p}$.

1° Calculer u_n pour $p = 1$.
2° Calculer u_n pour $p \neq 1$.
3° Étudier la convergence de (u_n) suivant les valeurs de p.

PROBLÈMES CONDUISANT A DES RELATIONS DE RÉCURRENCE

101. On considère un escalier formé de N marches identiques de hauteur h. La marche est de largeur h. La largeur de l'escalier est L. A l'instant

$t = 0$, un flot d'eau de débit constant G inonde le bas de la première marche.
Soit t_n le temps nécessaire à l'inondation de la n-ième marche.

a) Montrer que $t_{n+1} = t_n + (n+1)\dfrac{h^2L}{G}$.

b) Déterminer t_n en fonction de n. Quel est le temps nécessaire à l'inondation totale de l'escalier?
c) Étudier ce qui se passe lorsque h tend vers zéro (inondation d'un plan incliné).
(Remarquons que, dans ce cas, N tend vers l'infini.)

102. **A** — Soit $E_n = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ un ensemble fini à n éléments. Une permutation de E_n est une bijection de E_n sur E_n. Soit u_n le nombre de permutations de E_n, sans point fixe, c'est-à-dire sans invariant.
a) Montrer que $u_n = (n-1)(u_{n-1} + u_{n-2})$.
b) On pose $d_n = u_n - nu_{n-1}$.
Montrer que $d_n = (-1)^n$.
c) En déduire que

$$u_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + ... + \frac{(-1)^n}{n!}\right).$$

d) Étudier la convergence de la suite (v_n) définie par $v_n = \dfrac{u_n}{n!}$.

B — *a)* Une secrétaire tape n lettres et n adresses sur n enveloppes. Elle met les lettres dans les enveloppes sans regarder les adresses. Quelle est la probabilité pour qu'une lettre au moins soit dans l'enveloppe qui lui est destinée?
b) Des hommes laissent chacun leur chapeau au vestiaire. Le préposé au vestiaire rend les chapeaux au hasard. Quelle est la probabilité pour qu'au moins un homme récupère son chapeau? (Il y a n hommes avec chacun un chapeau.)

103. De combien de façons peut-on vider un tonneau de n litres avec un pot de 1 litre? et un pot de 2 litres?

PROBLÈMES

X

Série harmonique, constante d'Euler

à faire

104. **A** — *1°* Démontrer que, pour tout entier n supérieur à 2, on a :

$$\frac{1}{n} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{dx}{x} \leqslant \frac{1}{n-1}.$$

2° On pose :

$$\alpha_n = \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n}, \quad \beta_n = \ln n, \quad \gamma_n = 1 + ... + \frac{1}{n-1}.$$

Déduire du *1°* que, pour tout entier n supérieur à 2, on a : $\alpha_n \leqslant \beta_n \leqslant \gamma_n$.
3° On sait que $\beta_n = \ln n$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. Démontrer que α_n et γ_n tendent vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

B — *1°* Étudier la fonction g définie par

$$g(x) = \frac{1}{x} - \ln\frac{x+1}{x}$$

et tracer la courbe représentative. Faire de même pour la fonction h définie par :

$$h(x) = \frac{1}{x+1} - \ln\frac{x+1}{x}.$$

Montrer que les graphes de g et de h sont symétriques par rapport au point $\left(-\dfrac{1}{2}, 0\right)$.

2° Déduire du **A** — *1°* ou du **B** — *1°* que la suite de terme général :

$$U_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n-1} - \ln n \quad (n \geqslant 2)$$

est croissante, et que la suite de terme général :

$$V_n = 1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \ln n \quad (n \geqslant 2)$$

est décroissante.
3° Démontrer que, pour n supérieur ou égal à 2, on a $U_n \leqslant 1$ et $V_n \geqslant 0$ (on pourra utiliser le **A** — *2°*).
4° On sait que toute suite croissante majorée a une limite, et que toute suite décroissante minorée a une limite. En déduire que les suites (U_n) et (V_n) ont chacune une limite.
Démontrer que ces limites sont égales à un nombre C de l'intervalle $]0, 1[$. On donne $\ln 2 = 0{,}70$ à 10^{-2} près par excès.
5° Montrer qu'il existe un nombre $\theta_n \in [0, 1]$ tel que :

$$1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{n} - \ln n = C + \frac{\theta_n}{n}.$$

Quelle valeur faut-il donner à n pour être sûr d'avoir une valeur approchée de C à 10^{-5} près par excès?

Série de Riemann d'exposant 2

à faire

105. On notera $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels, $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls, $\mathbb{N}'$ l'ensemble des entiers naturels privé des nombres 0 et 1.

A — On considère les suites u et v définies sur $\mathbb{N}^*$ par $u_1 = 1$ et $v_1 = 1$ et, pour tout élément n de $\mathbb{N}'$:

$$u_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{n^2}$$

$$\text{et : } v_n = 1 + \frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + ... + \frac{1}{(n-1)n}.$$

a) Trouver deux réels A et B tels que, pour tout n, élément de $\mathbb{N}'$:

$$\frac{1}{(n-1)n} = \frac{A}{n-1} + \frac{B}{n}.$$

En déduire que, pour tout n, élément de $\mathbb{N}'$,

$$v_n = 2 - \frac{1}{n}.$$

b) Montrer que la suite u est croissante, que, pour tout n élément de $\mathbb{N}'$, $u_n \leqslant v_n$ et que la suite u est majorée.

B — On rappelle que si q est un nombre complexe différent de 1 et n un élément de $\mathbb{N}$

$$1 + q + q^2 + ... + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

1° Soit f un élément de $[0, \pi]$; on pose pour n, élément de $\mathbb{N}^*$:

$$C_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \cos kt \quad \text{et} \quad S_n(t) = \sum_{k=1}^{n} \sin kt.$$

a) Calculer le nombre complexe $C_n(t) + iS_n(t)$.
En déduire que si t est un élément de $]0, \pi]$:

$$C_n(t) = \frac{\sin \frac{nt}{2} \cos \frac{n+1}{2} t}{\sin \frac{t}{2}} \quad \text{et si} \quad t = 0, \quad C_n(0) = n.$$

b) L'application C_n de $[0, \pi]$ dans $\mathbb{N}$ est-elle continue sur $[0, \pi]$?
2° Vérifier que pour tout t, élément de $]0, \pi]$:

$$1 + 2C_n(t) = \frac{\sin \frac{2n+1}{2} t}{\sin \frac{t}{2}}$$

et montrer que l'application de $]0, \pi]$ dans $\mathbb{R}$ qui à t associe $\dfrac{\sin \frac{2n+1}{2} t}{\sin \frac{t}{2}}$ peut être prolongée en une fonction g_n continue sur $[0, \pi]$.
3° Montrer que pour tout n, élément de $\mathbb{N}^*$:

$$\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) \cos nt \, dt = \frac{1}{n^2}$$

en déduire que $u_n = \displaystyle\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right) C_n(t) \, dt.$

4° Vérifier que $\dfrac{1}{2} \displaystyle\int_0^\pi \left(t - \frac{t^2}{2\pi}\right) dt = \frac{\pi^2}{6}$ et que, pour tout n élément de $\mathbb{N}^*$:

$$\frac{\pi^2}{6} - u_n = \frac{1}{2} \int_0^\pi \left(t - \frac{t^2}{2\pi}\right) g_n(t) \, dt.$$

C — On considère la fonction numérique f définie sur $[0, \pi]$ par $f(0) = 2$ et, pour tout t élément de $]0, \pi]$:

$$f(t) = \frac{t - \frac{t^2}{2\pi}}{\sin \frac{t}{2}}.$$

1° Montrer que f est continue sur $[0, \pi]$; en déduire l'existence d'un réel M tel que, pour tout t, élément de $[0, \pi]$:

$$0 \leqslant f(t) \leqslant M.$$

2° Soit α un réel fixé tel que $0 < \alpha < \pi$.
a) Montrer que, pour tout n, élément de $\mathbb{N}$:

$$\left| \int_0^\alpha f(t) \sin \frac{2n+1}{2} t \, dt \right| \leqslant \alpha M.$$

b) Montrer que f est dérivable sur $[\alpha, \pi]$ et que f' est continue sur ce segment. En déduire l'existence d'un réel M' tel que, pour tout t de $[\alpha, \pi]$:

$$|f'(t)| \leqslant M'.$$

c) On pose, pour tout n élément de $\mathbb{N}$:

$$I_n = \int_\alpha^\pi f(t) \sin \frac{2n+1}{2} t \, dt.$$

Montrer en utilisant une intégration par parties, que $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0$.
3° Déduire du *2°* que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{\pi^2}{6} - u_n\right) = 0.$

Série harmonique alternée

106. On considère la fonction f, de $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ dans $\mathbb{R}$, définie par $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ et, pour tout entier naturel non nul n, la fonction f_n, de $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ dans $\mathbb{R}$, définie par $f_n(x) = \dfrac{x^n}{1+x}$.

1° a) Prouver que, pour tout réel x distinct de -1 :

$$f_1(x) = 1 - f(x) \quad \text{et} \quad f_2(x) = x - 1 + f(x).$$

b) Étudier les variations de la fonction f_2 et construire sa courbe représentative C_2 dans un repère orthonormal d'axes (Ox) et (Oy). Préciser les asymptotes et montrer que le point Ω de coordonnées $(-1, -2)$ est centre de symétrie pour C_2.
c) Calculer l'aire du domaine plan intérieur au contour fermé déterminé par C_2, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = h$ $(h > 0)$ (on pourra utiliser un résultat démontré en *a)*).
2° Étant donné un réel x, on considère la somme $S_n(x)$ des n premiers termes de la suite géométrique de raison $(-x)$ et de premier terme 1.
a) Montrer que, pour $x \neq -1$, on a l'égalité : $S_n(x) = f(x) - (-1)^n f_n(x)$.
b) Montrer que, pour $|x| < 1$, $S_n(x)$ admet une limite lorsque n tend vers l'infini. En est-il de même pour $x = 1$?
3° Soit x un réel positif. On pose :

$$\sigma_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}.$$

a) Montrer, sans calculer l'intégrale, que :

$$\sigma_n(x) + (-1)^n \int_0^x f_n(t) \, dt - \ln(1+x)$$

est une constante. En déduire que, pour tout x réel positif ou nul :

$$\ln(1+x) = \sigma_n(x) + (-1)^n \int_0^x f_n(t) \, dt.$$

b) Montrer que :

- si n est pair, on a : $\sigma_n(x) \leqslant \ln(1+x)$,
- si n est impair, on a : $\sigma_n(x) \geqslant \ln(1+x)$.

Donner, en fonction de n et de x, un majorant de la valeur absolue de l'erreur commise en remplaçant $\ln(1+x)$ par $\sigma_n(x)$. On pourra remarquer que :

$$\frac{1}{1+x} \leqslant 1, \quad \text{si} \quad x \geqslant 0.$$

c) Étant donné un nombre réel x de l'intervalle $[0, 1]$, prouver que $\ln(1+x)$ est la limite de $\sigma_n(x)$ lorsque n tend vers l'infini. En déduire la limite de :

$$s_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n},$$

lorsque n tend vers l'infini.

107. Formule de Stirling

A — 1° Comment choisir les constantes réelles a, b et c pour que le polynôme P : $x \mapsto P(x) = ax^2 + bx + c$ vérifie l'équation :
$$xP'(x) - 2P(x) = 0$$
pour tout x réel?

2° Soit f une fonction dérivable de l'intervalle $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, et soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par $g(x) = \dfrac{f(x)}{x^2}$. Vérifier que g est dérivable en tout point x de l'intervalle $]0, +\infty[$ et démontrer que, pour que f vérifie :
$$xf'(x) - 2f(x) = \ln x \qquad (1)$$
pour tout x réel > 0, il faut et il suffit que g soit une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln x}{x^3}$.

3° Quel est l'ensemble des primitives de la fonction :
$$x \mapsto \frac{\ln x}{x^3}?$$
(On pourra faire une intégration par parties.)

4° En déduire que l'ensemble des fonctions dérivables de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant (1) pour tout $x > 0$ est l'ensemble des fonctions $x \mapsto -\dfrac{1 + \ln(x^2)}{4} + ax^2$, où a désigne une constante réelle arbitraire.

5° On désigne par φ la fonction :
$$x \mapsto -\frac{1 + \ln(x^2)}{4} + \frac{1}{4}x^2, \quad \text{où} \quad x \in]0, +\infty[.$$
Étudier la variation de φ et construire sa représentation graphique dans un repère orthonormal.

B — 1° Soit λ un nombre réel strictement positif. Calculer en fonction de λ l'intégrale :
$$I(\lambda) = \int_\lambda^1 \varphi(x)\,dx$$
(les primitives de la fonction logarithme népérien peuvent s'obtenir au moyen d'une intégration par parties).

2° Montrer que, lorsque λ tend vers 0, $I(\lambda)$ admet une limite égale à $\dfrac{1}{3}$.

3° Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Montrer que, pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant n-1$ et pour tout x tel que $\dfrac{k}{n} \leqslant x \leqslant \dfrac{k+1}{n}$, on a :
$$\varphi\left(\frac{k+1}{n}\right) \leqslant \varphi(x) \leqslant \varphi\left(\frac{k}{n}\right).$$
Montrer que :
$$\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) < I\left(\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} \varphi\left(\frac{k}{n}\right).$$
En déduire :
$$I\left(\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) < \frac{1}{n}\varphi\left(\frac{1}{n}\right) + I\left(\frac{1}{n}\right).$$
(On pourra aider le raisonnement par une interprétation géométrique.)

4° Déduire des 2° et 3° que, lorsque n tend vers l'infini, $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right)$ admet une limite. La calculer.

5° a) Montrer que :
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \varphi\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{4n^3}\left[\sum_{k=1}^{n} k^2\right] + \frac{1}{2n}\left[\sum_{k=1}^{n} \ln\left(\frac{n}{k}\right)\right] - \frac{1}{4}.$$
b) Établir les égalités :
$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$
$$\sum_{k=1}^{n} \ln\frac{n}{k} = \ln\left(\frac{n^n}{n!}\right).$$
c) Utiliser les résultats précédents pour démontrer que les deux suites :
$$n \mapsto v_n = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{n^n}{n!}\right) \quad \text{et} \quad n \mapsto u_n = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$$
ont des limites lorsque n tend vers l'infini. Calculer ces limites.

Divers

108. 1° Soit $I = \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ et soit f l'application de I dans $\mathbb{R}$ définie par :
$$f(x) = \frac{1}{\sin x} - x.$$
Étudier la variation de f. Montrer l'existence d'un seul réel α tel que $f(\alpha) = 0$. Vérifier que $\alpha \in \left]\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

2° On rappelle que : $\forall x \in I$, $\sin x < x < \tan x$. Démontrer que :
$$\forall x \in I, \quad \frac{1}{x} + \sin x - \frac{1}{\sin x} > 0.$$
En déduire que : $\forall x \in I$, $f(x) < \dfrac{1}{x}$.

3° Pour tout entier naturel n, on note I_n l'intervalle :
$$\left]n\pi, n\pi + \frac{\pi}{2}\right[.$$
Montrer l'existence d'une suite réelle $n \mapsto u_n$ telle que :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in I_n \quad \text{et} \quad u_n|\sin u_n| = 1.$$

4° On pose $x_n = u_n - n\pi$. Montrer que $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.
Quelle est la limite de la suite $n \mapsto nx_n$?
Comparer $\pi n x_n$ à 1. (On pourra utiliser la dernière égalité obtenue au 2°.)
Indiquer un entier n_0 tel que :

$$\forall n \geqslant n_0, \quad x_n \leqslant 10^{-3}.$$

5° On pose $E = \{x | \exists k \in \mathbb{Z}, \quad x = k\pi\}$.
Soit g l'application de $\mathbb{R} \setminus E$ dans $\mathbb{R}$, telle que :

$$g(x) = \ln\left(\left|\tan\frac{x}{2}\right|\right).$$

Montrer que g est dérivable en tout point de $\mathbb{R}\setminus E$ et calculer sa dérivée.
On pose :

$$a_n = \int_{n\pi + x_n}^{n\pi + \frac{\pi}{2}} \left(x - \frac{1}{|\sin x|}\right) dx.$$

La suite $n \mapsto x_n a_n$ admet-elle une limite?

109. **A** — On considère l'application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} - 1.$$

1° Étudier la variation de f.
2° Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un plan rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Trouver l'équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point de coordonnées $(0, f(0))$.
Déterminer les points communs à $\mathcal{C}$ et à cette tangente.
3° Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) < x$.
4° Le repère étant orthonormal et l'unité 4 centimètres tracer la tangente à $\mathcal{C}$ au point de coordonnées $(0, f(0))$, les asymptotes de $\mathcal{C}$ et dessiner avec soin la courbe $\mathcal{C}$.

B — On considère la suite (u_n) définie par u_0 et $u_{n+1} = f(u_n)$, pour tout n de $\mathbb{N}$; autrement dit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{\sqrt{u_n^2 + 1}} - 1.$$

1° Démontrer que la suite (u_n) est constante si, et seulement si, u_0 prend deux valeurs, que l'on précisera.
2° On prend u_0 dans l'intervalle $]-1, 0[$.
a) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $-1 < u_n < 0$, et que (u_n) est une suite décroissante (on pourra utiliser la question **A** — 3°).
b) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 < u_{n+1} + 1 \leqslant \frac{1}{\sqrt{u_0^2 + 1}}(u_n + 1).$$

c) On pose $k = \dfrac{1}{\sqrt{u_0^2+1}}$. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$0 < u_n + 1 \leqslant k^n(u_0 + 1).$$

En déduire que la suite (u_n) admet une limite l que l'on précisera.

110. **A** — Soit la fonction f définie par :

$$f(t) = \frac{1}{t(t+1)^2}.$$

a) Étudier la fonction f et tracer sa courbe représentative en repère orthonormal.
b) Déterminer des constantes a, b et c telles que :

$$f(t) = \frac{a}{(t+1)^2} + \frac{b}{t+1} + \frac{c}{t} \quad (t \neq -1 \text{ et } t \neq 0).$$

c) Pour $0 < x < y$, on pose : $A(x, y) = \displaystyle\int_x^y f(t)\, dt$.

Démontrer : $A(x, y) = \dfrac{x - y}{(x+1)(y+1)} + \ln\dfrac{y(x+1)}{x(y+1)}$.

B — On considère la fonction $g = \left[t \mapsto \dfrac{-1}{t^2(t+1)}\right]$.

a) Vérifier que : $g(t) - f(t) = -\dfrac{2t+1}{(t^2+t)^2}$.
Déterminer une primitive de la fonction $g - f$.
b) En déduire : $B(x, y) = \displaystyle\int_x^y R(t)\, dt$, avec $0 < x < y$.
c) En considérant x fixe, positif, déterminer, lorsque y tend vers $+\infty$, les limites de $A(x, y)$ et $B(x, y)$ nommées respectivement $\Phi(x)$ et $\Gamma(x)$.

C — *a)* Démontrer que : $\Gamma(x) < 0 < \Phi(x)$.
b) En déduire que, pour x positif, on a :

$$\left(\frac{1+x}{x}\right)^x < e < \left(\frac{1+x}{x}\right)^{x+1}.$$

c) n étant un entier naturel non nul, établir les inégalités :

$$1 < \frac{e}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} < 1 + \frac{1}{n}.$$

En déduire la limite de $\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ lorsque n tend vers $+\infty$.

111. Une suite réelle f, application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$ donne de n l'image $f(n)$ notée f_n. Soit a et α deux réels tels que $a \neq 0$ et $0 \leqslant \alpha < \pi$.
On considère l'ensemble F des suites f qui vérifient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad f_{n+2} = (2a\cos\alpha) f_{n+1} - a^2 f_n.$$

1° *On suppose dans cette question que $\alpha \neq 0$.*
Démontrer que les suites u et v définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = a^n \cos n\alpha \quad \text{et} \quad v_n = a^n \sin n\alpha,$$

sont deux éléments de F. Démontrer que les vecteurs (u_0, u_1), (v_0, v_1) sont linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^2$.
2° *On suppose dans cette question que $\alpha = 0$.*
Démontrer que les suites r et s définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad r_n = a^n \quad \text{et} \quad s_n = na^n,$$

sont deux éléments de F. Démontrer que les vecteurs (r_0, r_1), (s_0, s_1) sont linéairement indépendants dans $\mathbb{R}^2$.

3° a) Établir que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$, espace vectoriel des suites réelles.
b) Démontrer que f est déterminée par la donnée du couple (f_0, f_1) et en déduire que l'application φ de F dans $\mathbb{R}^2$ définie par $\varphi(f) = (f_0, f_1)$ est bijective.
c) Démontrer que φ est une application linéaire. Quelle est la dimension de F? On rappelle que, compte tenu de la notation f_n :

$$(f + g)(n) = f_n + g_n \quad \text{et} \quad (kf)(n) = kf_n, \quad k \in \mathbb{R}.$$

4° Soit φ^{-1} l'application réciproque de φ définie dand $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans F. Montrer que si W_1 et W_2 sont deux vecteurs indépendants de $\mathbb{R}^2$, alors $\varphi^{-1}(W_1)$ et $\varphi^{-1}(W_2)$ sont deux vecteurs de F indépendants.
En déduire que si $\alpha \neq 0$, (u, v) est une base de F et que si $\alpha = 0$, (r, s) est une base de F. Indiquer dans les deux cas une forme générale des éléments de F.
5° *Soit b un réel non nul.* On considère l'ensemble C des suites réelles c telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_{n+2} - (2a \cos \alpha)c_{n+1} + a^2 c_n = b^n.$$

a) Si $\alpha = 0$ et $b = a$, démontrer qu'il existe un réel λ tel que la suite t définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad t_n = \lambda n^2 a^n,$$

appartient à C.
b) Si $\alpha \neq 0$ ou $b \neq a$, démontrer qu'il existe un réel μ tel que la suite t' définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad t'_n = \mu b^n$$

appartient à C.
c) L'ensemble C est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R})$?
6° *Si* $\alpha = 0$ et $b = a$, c appartenant à C, démontrer que la suite de terme général $(c_n - t_n)$ est un élément de F.
Inversement, si f appartient à F, montrer que la suite de terme général $(f_n + t_n)$ appartient à C. En déduire une forme générale des éléments de C.
7° Déterminer de même une forme générale des éléments de C lorsque $\alpha \neq 0$ ou $b \neq a$.

112. n est un entier naturel non nul, x est une variable réelle, positive ou nulle. On considère l'expression :

$$f_n(x) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} x^{\frac{n}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}$$

où $\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$ est une constante définie par la relation de récurrence : $\Gamma(k + 1) = k\Gamma(k)$

et par les valeurs initiales $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma(1) = 1.$

I – 1° Évaluer $\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$ en distinguant deux cas suivant que n est pair $(n = 2p)$ ou impair $(n = 2p + 1)$.

2° Calculer la dérivée $f'_n(x)$ de $f_n(x)$ par rapport à x.
3° Étudier les variations des fonctions $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$, $f_5(x)$, et tracer leur représentation graphique dans un repère orthogonal Ox, Oy; le cas échéant, on précisera la tangente à l'origine (on ne demande pas de tracer ces courbes sur une même figure).
Calculer, à 0,001 près, les valeurs maximales de ces fonctions.

4° On pose : $F_p(x) = \int_0^x f_{2p}(t)\,dt$; $x \geqslant 0$.

p est un entier naturel supérieur ou égal à 1.
Trouver une relation de récurrence entre $F_p(x)$ et $F_{p-1}(x)$. En déduire l'expression de $F_p(x)$ en fonction de p et de x, puis la limite de $F_p(x)$ lorsque, p restant fixe, x tend vers $+\infty$.

II – 1° Représenter graphiquement la fonction $f_{10}(x)$; sur l'axe Ox, le segment unité mesure 1 cm; sur l'axe Oy, le segment unité mesure 50 cm. On calculera à 10^{-5} près les valeurs de $f_{10}(x)$ pour les valeurs suivantes de x : 2, 4, 6, 8, 10, 12.
2° Tracer sur la même figure la courbe qui représente la fonction :

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{40\pi}} e^{-\frac{(x-10)^2}{40}} \quad (x \geqslant 0).$$

On calculera à 10^{-5} près les valeurs de $g(x)$ pour les valeurs suivantes de x : 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12.
3° Étudier la position relative des courbes obtenues au II 1° et 2° (on ne demande pas de calculer des valeurs approchées des coordonnées des points communs).

III – 1° Soit : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,dx$. Calculer I_1 et I_2.

A partir de la dérivée de $\sin^{n-1} x \cos x$, établir une relation de récurrence[1] entre I_n et I_{n-2}. En déduire le calcul de I_n en fonction de n.
2° En revenant à l'interprétation géométrique de I_n, démontrer que I_n est une fonction décroissante de n.
En déduire que $u_p = \left(\frac{2.4...(2p-2)}{3.5...(2p-1)}\right)^2 2p$ est une valeur approchée par excès de $\frac{\pi}{2}$, avec

$$u_p - \frac{\pi}{2} < \frac{u_p}{2p+1}.$$

3° Démontrer que l'équation $f_n(x) = f_{n+1}(x)$ a une racine r_n strictement positive. Évaluer r_n et démontrer que r_n croît avec n.
4° Étudier les variations de la fonction

$$\varphi(t) = \ln(1 + t) - t.$$

En déduire $(1 + \alpha t)^{\frac{1}{\alpha}} < e^t$ quels que soient t et α positifs.
5° Utiliser les résultats du III – 2° et 4° pour démontrer que le maximum de $f_n(x)$ $(n \geqslant 3)$ est une fonction décroissante de l'entier n.

Photo Hachette

Georg Ferdinand Ludwig Philipp CANTOR, mathématicien allemand (1845-1918).
Il s'est essentiellement intéressé à des études en théorie des nombres.
C'est en déterminant la limite d'une suite « fondamentale », au moyen des nombres existants, qu'il démontre que les nombres réels forment un système complet.

CHAPITRE 5

LIMITES DE FONCTIONS (COMPLEMENTS)

I – ACTIVITÉS PRÉLIMINAIRES

★ Activité 1

1° Étudier la convergence en $+\infty$ *et en* $-\infty$ *de la fonction* f :

a) $f(x) = \dfrac{3x^2 - 5x + 1}{x^2 + 4}$; **b)** $f(x) = \dfrac{2x^2 + 3x - 1}{-x^3 - x + 1}$;

c) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$; **d)** $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^4 + 2}}{x^2 + 1}$; **e)** $f(x) = \sqrt{x^2 - x} - x$.

2° Étudier la limite en x_0 *de la fonction* f *(existence, valeur éventuelle) :*

a) $f(x) = \dfrac{x^5 + 1}{x^3 + 1}$, $x_0 = -1$; **b)** $f(x) = \dfrac{2x - \sqrt{x + 1} - 4}{(x + 1)(x - 3)}$, $x_0 = 3$;

c) $f(x) = \dfrac{x - 9}{\sqrt{x} - 3}$, $x_0 = 9$; **d)** $f(x) = \dfrac{\sqrt{x + 4} - \sqrt{3x + 4}}{\sqrt{x + 1} - 1}$, $x_0 = 0$.

★ Activité 2

1° Soit f *une fonction définie sur un intervalle ouvert* I *contenant* x_0, *et dérivable en* x_0.

a) *Rappeler la définition du développement limité d'ordre 1 de* f *en* x_0.

b) *Utiliser le* **a)** *pour déterminer la limite en 0 de la fonction* $\left[x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}\right]$.

c) *Utiliser le* **a)** *pour déterminer la limite en* $x_0 = 1$ *de la fonction* $\left[x \mapsto \dfrac{\ln x}{1 - x}\right]$.

2° En utilisant des développements limités d'ordre 1, étudier la limite en x_0 *de la fonction* f :

a) $f(x) = \dfrac{x - \sqrt{x + 2}}{\sqrt{4x + 1} - 3}$, $x_0 = 2$;

b) $f(x) = \dfrac{\sin x}{\sqrt{1 + x} - 1}$, $x_0 = 0$,

c) $f(x) = \dfrac{\sin 3x}{\tan 6x}$, $x_0 = \dfrac{\pi}{3}$;

d) $f(x) = \dfrac{\sin 5x \tan x}{(\sqrt{1 - x} - 1)^2}$, $x_0 = 0$.

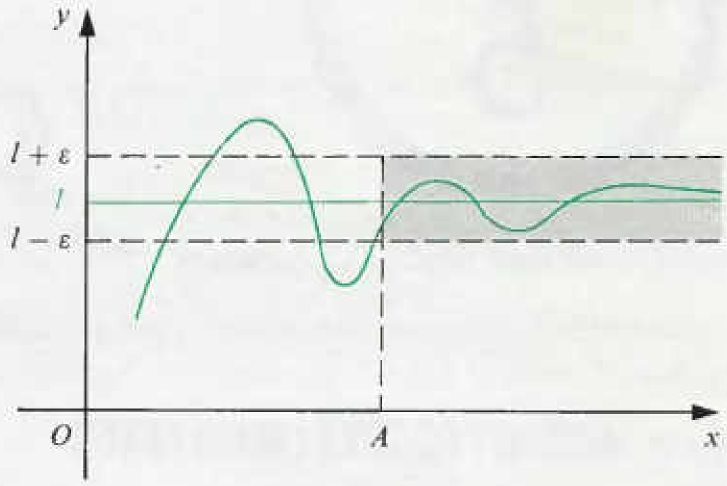
II – LIMITES FINIES

1. RAPPELS

a. Définitions

• On dit que la fonction f admet le réel l pour limite en $+\infty$ (resp. en $-\infty$) si, quel que soit le réel ε strictement positif (dans la pratique $\varepsilon = 10^{-p}$) on peut trouver un réel A tel que, si x est supérieur à A (resp. inférieur à A) alors : $|f(x) - l| < \varepsilon$ (voir figure 1).

Figure 1



On note alors :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \quad \text{(resp : } \lim_{x \to -\infty} f(x) = l\text{)}.$$

et l'on dit aussi que : « **$f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers plus (resp. moins) l'infini** ».

On dit également que **f converge vers l en $+\infty$ (resp en $-\infty$)**.

• On dit que la fonction f admet la limite l en x_0 pour exprimer que, quel que soit le réel ε strictement positif, on peut trouver un réel positif α (dans la pratique, on utilise ε et α sous la forme 10^{-p}) tel que, si $|x - x_0| < \alpha$, alors $|f(x) - l| < \varepsilon$ (voir figure 2).

On note alors :

$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ (ou encore $\lim_{x_0} f = l$).

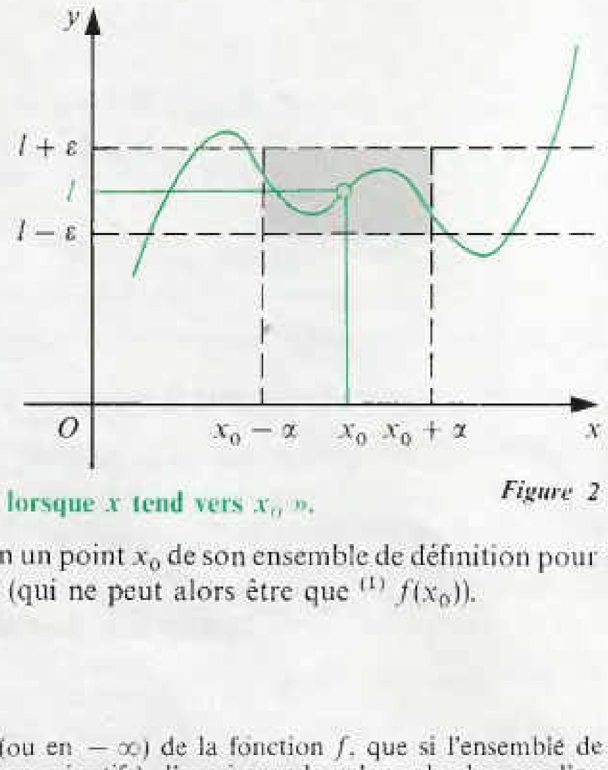


Figure 2

et l'on dit aussi que : « **$f(x)$ tend vers l lorsque x tend vers x_0** ».

• On dit que la fonction f est continue en un point x_0 de son ensemble de définition pour exprimer que f admet en x_0 une limite (qui ne peut alors être que [1] $f(x_0)$).

REMARQUES :

1° On n'étudiera la convergence en $+\infty$ (ou en $-\infty$) de la fonction f, que si l'ensemble de définition de f contient des réels positifs (resp. négatifs), d'aussi grande valeur absolue que l'on veut; c'est-à-dire s'il existe un réel A tel que $[A, +\infty[\subset D_f$ (resp. $]-\infty, A] \subset D_f$). On dit alors que **f est définie au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$)**.

2° On n'étudiera la limite d'une fonction en x_0 que si l'ensemble de définition de f contient des réels aussi voisins que l'on veut de x_0; c'est-à-dire s'il existe un réel strictement positif a tel que $]x_0 - a, x_0 + a[\setminus \{x_0\} \subset D_f$. On dit alors que **$f$ est définie au voisinage de x_0**.

[1] Rappelons que les programmes de mathématiques des classes de Premières et Terminales proposent désormais l'étude des limites simples, et non plus l'étude des limites par valeurs différentes.

3° Nous disons qu'une fonction f **admet une limite à droite (resp. à gauche)** égale à l en x_0 si la restriction de f à $[x_0, +\infty[$ (resp. à $]-\infty, x_0]$) admet la limite l en x_0 (voir figure 3). On note :

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = l.$$

4° Conformément aux définitions, si la fonction f admet une limite l en un point x_0 de son ensemble de définition, alors cette limite ne peut être que[1] $l = f(x_0)$, et la fonction **f est continue en x_0**.

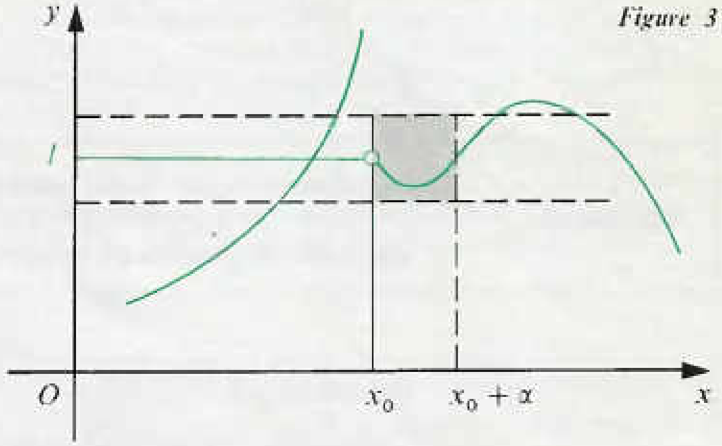


Figure 3

Exemples :

1° La fonction *partie entière* est continue à droite, mais non continue à gauche; en tout entier n_0, on a : $\lim_{x \to n_0^+} E(x) = n_0$, mais la fonction E n'a pas de limite à gauche en n_0.

Soit n_0 un entier, et soit E^* la restriction de E à $\mathbb{R} \setminus \{n_0\}$. La question de la continuité de E^* en n_0 ne se pose pas, et l'on a :

$$\lim_{x \to n_0^+} E^*(x) = n_0 \quad ; \quad \lim_{x \to n_0^-} E^*(x) = n_0 - 1.$$

2° Soit la fonction f définie par $f(x) = 1$ si $x \in \mathbb{R}^*$, et $f(0) = 0$.
Cette fonction n'admet pas de limite en 0. Par contre, la restriction f^* de f à $\mathbb{R}^*$ admet la limite 1 en 0.

b. Propriétés, règles d'étude

• Soit f une fonction définie sur un intervalle I, sauf peut-être en un point x_0 de I, et admettant en x_0 (ou en $+\infty$, ou en $-\infty$) une limite l. Alors :

— la limite l en x_0 est unique,

— si d'autre part $f(x)$ est positif ou nul pour tout x de I, alors l est positif ou nul.

• Pour prouver que la fonction f admet le réel l pour limite en x_0 (ou en $+\infty$, ou en $-\infty$), on peut prouver que la fonction g définie par $g(x) = f(x) - l$ admet pour limite zéro dans les conditions étudiées.

• Pour prouver que la fonction f admet la limite l (le plus souvent $l = 0$), dans certaines conditions, on dispose (voir p. 297) :

— des théorèmes sur les limites,

— des règles de comparaison,

— des fonctions de référence,

— des méthodes de factorisation et de simplification,

— des développements limités d'ordre 1 (voir aussi chapitre 6),

— d'autres méthodes particulières (voir chapitre 6, exercice **48**).

• On rencontre ci-dessous (et aussi au chapitre 8) des propriétés, et des méthodes permettant de prouver l'existence d'une limite en x_0 pour une fonction f, et éventuellement de préciser cette limite, dans certains cas où les méthodes ci-dessus se montrent inopérantes.

2. FONCTIONS MONOTONES BORNÉES

• On démontre, et nous l'admettrons, le théorème fondamental suivant (voir figure 4) :

THÉORÈME 1	**Soit f une fonction dont l'ensemble de définition est un intervalle $I =]a, b[$, avec $a < b$ et $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Si f est croissante sur I, et majorée sur I, alors elle admet une limite (à gauche), au point b.**

REMARQUE :

On peut également constater que, si M est un **majorant** de f sur I et si l est la **limite** de f en b, alors on a : $l \leqslant M$ (figure 4).

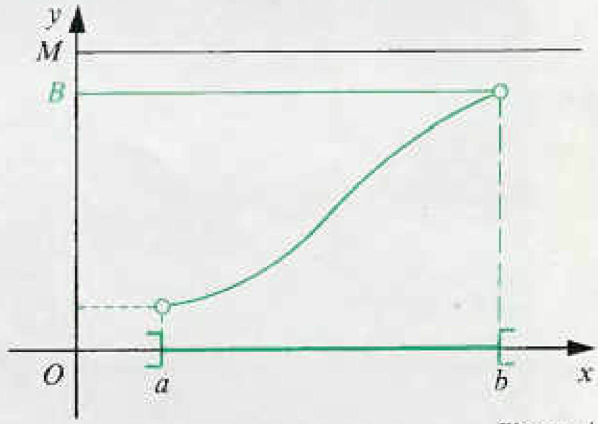


Figure 4

Exercice résolu

On considère la fonction f définie sur $I = [0, 1[$ par :

$$f(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Prouver que f admet une limite en 1, et donner un encadrement de cette limite.

• Pour tout réel t de l'intervalle I, on a : $\sqrt{1-t^2} = \sqrt{(1-t)(1+t)} > \sqrt{1-t}$.

Donc : $\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} < \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$.

Par suite : $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} < \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t}}$ (pour tout x de I).

Or : $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t}} = -2\sqrt{1-x} + 2.$ Donc : $\displaystyle\lim_{x \to 1} \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t}} = 2.$

Comme pour tout t de I, $\dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ est positif, la fonction $\left[x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t}}\right]$ est croissante sur I, et, pour tout x de I :

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t}} < 2.$$

Il en résulte que la fonction f est majorée sur I par 2. Comme d'autre part, cette fonction f est croissante, il en résulte qu'elle admet en 1 une limite l (d'après le théorème 1) :

$$\lim_{x \to 1} \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = l \quad \text{et} \quad l \leqslant 2.$$

• D'autre part, pour tout réel t de I : $\sqrt{1-t^2} < \sqrt{1+t}$.

Donc : $\dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}} > \dfrac{1}{\sqrt{1+t}}$ et $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t}} < \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ (pour tout x de I).

Or : $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t}} = 2\sqrt{1+t} - 2.$

Donc : $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1+t}} = 2\sqrt{2} - 2.$

Il en résulte, puisque f admet la limite l, que $2\sqrt{2} - 2 \leqslant l$.

• On peut donc conclure que f admet une limite l, comprise entre $2\sqrt{2}-2$ et 2. On convient de noter cette limite : $l = \displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

Remarquons que (voir chapitres 2 et 3) : $f(x) = \arcsin x$ et, par suite, que $l = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$. On peut vérifier que $\frac{\pi}{2}$ est bien compris entre $2\sqrt{2}-2$ et 2.

On peut également, en utilisant d'autres fonctions, obtenir un meilleur encadrement de l.

★ Activité

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$

1° Prouver que f est croissante sur $\mathbb{R}$.

2° Majorer $\frac{1}{1+t^2}$ sur $[0, 1]$ par une constante. En déduire une majoration de $f(1)$.

3° Prouver que, pour tout t de $[1, +\infty[$, $\frac{1}{1+t^2} < \frac{1}{t^2}$.

En déduire une majoration sur $[1, +\infty[$ de f par une fonction g.

4° Déduire de ce qui précède que f admet une limite l en $+\infty$.

5° Préciser un encadrement de l.

6° Améliorer, si possible la majoration obtenue par la méthode ci-dessus.

7° Quelle est la valeur exacte de l? Comparer avec les encadrements obtenus.

• Le théorème **1** comporte des corollaires que nous admettrons ici.

COROLLAIRES

Soit f une fonction dont l'ensemble de définition est un intervalle $]a, b[$, avec $a < b$, où a et b désignent des éléments de l'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
Si f est croissante et minorée sur I, ou si f est décroissante et majorée sur I, alors la fonction f admet une limite (à droite) en a.
Si f est décroissante et minorée sur I, alors la fonction f admet une limite (à gauche) en b.

• Exercices d'application

1. On considère la fonction f définie par $f(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt$. Démontrer que la fonction f converge en $+\infty$ et en $-\infty$ vers deux limites opposées. Encadrer au mieux la valeur absolue de cette limite.

2. Déterminer α de façon que la fonction f_α définie par :

$$f_\alpha(x) = \int_1^x t^{-\alpha}\,dt$$

admette une limite finie en zéro (à droite).

III – LIMITES INFINIES

Toute fonction admettant en x_0 ($x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$) une limite réelle l, est bornée au voisinage de x_0. Il en résulte que, si une fonction n'est pas bornée au voisinage de x_0, alors elle n'admet pas de limite réelle en x_0.

Remarquons d'autre part qu'il existe des fonctions bornées au voisinage de x_0, et qui n'admettent pas de limite en x_0.

1. EXEMPLES DIVERS

★ Activité

1° Prouver que la fonction f définie par $f(x) = 2x + 3$ est croissante sur $\mathbb{R}$, non majorée au voisinage de $+\infty$, et non minorée au voisinage de $-\infty$.

2° Prouver que la fonction f est monotone et non bornée au voisinage de $+\infty$:
a) $f(x) = x^3$;
b) $f(x) = \ln x$;
c) $f(x) = e^x$.

3° Prouver que la fonction f est non bornée au voisinage de x_0 :

a) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, $\quad x_0 = 0$;

b) $f(x) = \tan x$, $\quad x_0 = \dfrac{\pi}{2}$;

c) $f(x) = \dfrac{2x - 1}{x + 1}$, $\quad x_0 = -1$;

d) $f(x) = \ln x$, $\quad x_0 = 0$;

e) $f(x) = \dfrac{1}{x} \sin \dfrac{1}{x}$, $\quad x_0 = 0$;

f) $f(x) = (-2)^{E\left(\frac{1}{x}\right)}$, $\quad x_0 = 0$.

*4° Préciser ce qui distingue le comportement au voisinage de x_0 des fonctions f définies aux **e)** et **f)** du 3°, du comportement des autres fonctions définies au 3°.*

5° Prouver que la fonction f est bornée au voisinage de x_0, mais n'admet pas de limite en x_0 :
a) $f(x) = \cos x$, $\quad x_0 = +\infty$;

b) $f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$, $\quad x_0 = 0$;

c) $f(x) = x - E(x)$, $\quad x_0 = 4$.

2. DÉFINITIONS

Parmi les fonctions non bornées au voisinage de x_0 ($x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$), on distingue certaines, dont le comportement présente une certaine régularité (voir Activité ci-dessus, *3°* et *4°*).

DÉFINITIONS

1 **Soit f une fonction définie sur un intervalle $[a, +\infty[$. On dit que f admet en $+\infty$ la limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) si, quel que soit le réel B, il existe un réel A tel que, pour tout x supérieur à A, $f(x)$ est supérieur à B (resp. inférieur à B). On note alors :**

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \quad (\text{resp. } \lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty).$$

2 **Soit f une fonction définie sur un intervalle $]-\infty, a]$. On dit que f admet en $-\infty$ la limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) si, quel que soit le réel B, il existe un réel A tel que, pour tout x inférieur à A, $f(x)$ est supérieur à B (resp. inférieur à B). On note alors :**

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \quad (\text{resp. } \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty).$$

3 **Soit I un intervalle ouvert, x_0 un élément de I, et f une fonction définie sur $I \setminus \{x_0\}$. On dit que f admet en x_0 la limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) si, quel que soit le réel B, il existe un réel strictement positif α tel que, si x est élément de l'intervalle $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha]$, alors $f(x)$ est supérieur à B (resp. inférieur à B). On note alors :**

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \quad (\text{resp. } \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty).$$

REMARQUES :

1° Si $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ (voir figure 5) (ou $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$), alors la fonction f ne peut être définie en x_0. Sinon, $f(x_0)$ serait un réel, et, d'après les définitions, ce réel devrait être supérieur à tous les réels, ce qui est absurde. Le cas échéant, on parlera de la limite en x_0 de la restriction f^* de f à $D \setminus \{x_0\}$.
Soit par exemple la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ et $f(0) = 0$. Cette fonction n'admet pas de limite en 0. Par contre, sa restriction f^* à $\mathbb{R}^*$, définie par $f^*(x) = \dfrac{1}{x^2}$, admet en 0 la limite $+\infty$.

2° La définition **3** ci-dessus s'adapte sans difficulté au cas de limites infinies en x_0 à droite ou à gauche (voir exercice d'application **3** ci-dessous).

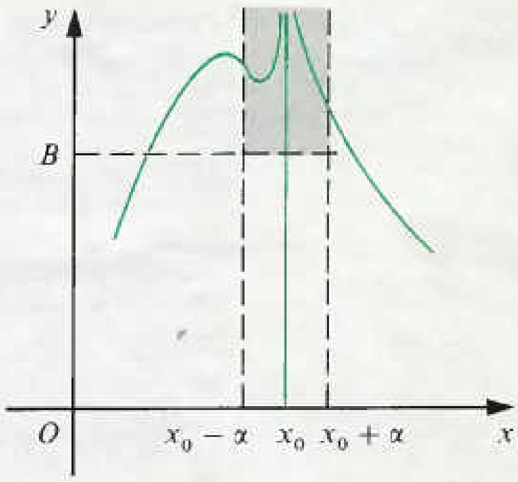


Figure 5

Exercices d'application

3. Définir, en cohérence avec les définitions déjà rencontrées, et illustrer graphiquement les notations :

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty;$$

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty; \quad \lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty.$$

4. Étudier la limite, limite à droite, ou limite à gauche de la fonction f en x_0 :
a) $f(x) = \ln|x|$, $x_0 = 0$;
b) $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x_0 = 0$;
c) $f(x) = \tan x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$;
d) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$, $x_0 = 0$.

• Pour prouver qu'une fonction admet en x_0 une limite infinie, on peut utiliser la définition, mais il est souvent préférable d'utiliser les propriétés et les règles de comparaison.

3. PROPRIÉTÉS, RÈGLES D'ÉTUDE

• Soient A et $f(x)$ deux réels strictement positifs. Pour que $f(x) > A$, il faut et il suffit que $\dfrac{1}{f(x)} < \dfrac{1}{A}$. Il en résulte le théorème suivant :

THÉORÈME 2

Soit f une fonction à valeurs strictement positives (resp. négatives) au voisinage de x_0 ($x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$). Alors $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ (resp. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$) si, et seulement si, $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

REMARQUES :

1° Nous disons que f est **à valeurs strictement positives au voisinage de x_0** pour exprimer que :
– si $x_0 \in \mathbb{R}$, il existe un réel strictement positif α tel que, pour tout élément x de $]x_0 - \alpha, x_0 + \alpha[\setminus \{x_0\}$, $f(x)$ est strictement positif;
– si $x_0 = +\infty$ (resp. $-\infty$), il existe un réel A tel que, pour tout x de $]A, +\infty[$ (resp. $]-\infty, A[$), $f(x)$ est strictement positif.

2° Si f n'est pas de signe constant au voisinage de x_0, et si $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$, alors $f(x)$ n'a pas de limite en x_0.

Par exemple, soit $f(x) = \dfrac{(-1)^{E\left(\frac{1}{x}\right)}}{x}$. On a $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

En effet, $-x \leqslant \dfrac{x}{(-1)^{E\left(\frac{1}{x}\right)}} \leqslant x$ et $\lim\limits_{x \to 0} x = \lim\limits_{x \to 0} (-x) = 0$.

Mais, quel que soit le réel strictement positif α, $f(x)$ prend des valeurs positives et négatives sur l'intervalle $]-\alpha, \alpha[$. De plus, $f(x)$ n'est pas bornée au voisinage de zéro. Elle n'admet pas de limite en zéro.

3° Le théorème 2 ci-dessus s'adapte sans difficulté au cas des limites à droite et à gauche en un réel x_0. C'est ainsi que :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

$\left(\dfrac{1}{x}\right.$ est strictement positif sur $\mathbb{R}_+^*$ et strictement négatif sur $\left.\mathbb{R}_-^*.\right)$

Exercice résolu

Soit $f(x) = \dfrac{2x - 1}{(x + 1)^2(x + 2)}$. *Étudier les limites de f en -1 et en -2.*

L'étude du signe de $f(x)$ en fonction des valeurs de x conduit au tableau suivant :

x	$-\infty$		-2		-1		$1/2$		$+\infty$
$2x - 1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x + 1)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$x + 2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$f(x)$		$+$	‖	$-$	‖	$-$	0	$+$	

Il en résulte que $f(x)$ est négatif au voisinage de -1, négatif au voisinage à droite de -2, et positif au voisinage à gauche de -2.

D'autre part : $\dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{(x+1)^2(x+2)}{2x-1}$. On a : $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{1}{f(x)} = \lim\limits_{x \to -2} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

Il en résulte que : $\lim\limits_{x \to -1} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -2^+} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -2^-} f(x) = +\infty$.

Exercices d'application

5. Étudier la limite éventuelle en x_0 de la fonction f :

a) $f(x) = \dfrac{-x^2+9}{(x+3)(x-1)^2(2-x)}$, $x_0 \in \{-3, 1, 2\}$

b) $f(x) = \dfrac{x^2+x+1}{x \ln x}$ $x_0 \in \{0, 1\}$, puis $x_0 = +\infty$.

6. Déterminer α de façon que la fonction f, définie par :

$$f_\alpha(x) = \int_1^x t^\alpha \, \mathrm{d}t$$

admette en 0 à droite une limite infinie.

• Les définitions permettent d'énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME 3

Soient f et g deux fonctions définies au voisinage de x_0 ($x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$).
Si, au voisinage de x_0, on a : $g \leqslant f$ et si $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = +\infty$, alors on a également :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty.$$

Si, au voisinage de x_0, on a $g \geqslant f$ et si $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = -\infty$, alors on a également :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty.$$

Exercice d'application

7. *a)* Prouver que, pour $x \geqslant 2$, alors $\ln x \leqslant x$.

b) Comparer, pour $x \geqslant 2$, les réels

$$g(x) = \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{t} \quad \text{et} \quad f(x) = \int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}.$$

c) En déduire la limite en $+\infty$ de la fonction f.

• Nous admettrons le théorème suivant :

THÉORÈME 4

Soit g_1 une fonction majorée au voisinage de x_0. Dans ces conditions :

$$\text{si} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty, \quad \text{alors} \quad \lim_{x \to x_0} [f(x) + g_1(x)] = -\infty.$$

Soit g_2 une fonction minorée au voisinage de x_0. Dans ces conditions :

$$\text{si} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty, \quad \text{alors} \quad \lim_{x \to x_0} [f(x) + g_2(x)] = +\infty.$$

Soit h une fonction admettant au voisinage de x_0 un minorant strictement positif :

$$\text{si} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty, \quad \text{alors} \quad \lim_{x \to x_0} [f(x)h(x)] = +\infty;$$

$$\text{si} \quad \lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty, \quad \text{alors} \quad \lim_{x \to x_0} [f(x)h(x)] = -\infty.$$

REMARQUES :

1° Il est à noter que le théorème ci-dessus permet de conclure dans le cas où h admet au voisinage de x_0 un majorant strictement négatif. On a en effet :

$$h(x)f(x) = [-h(x)][-f(x)],$$

et $-h$ admet au voisinage de x_0 un minorant strictement positif.

2° Il est important de constater que le théorème **4** permet de conclure dans le cas de la somme de deux fonctions admettant en x_0 *la même* limite infinie ($+\infty$ ou $-\infty$), mais qu'il ne permet pas de conclure dans le cas de la somme de deux fonctions admettant en x_0, l'une la limite $+\infty$, l'autre la limite $-\infty$. On dit parfois dans ce cas que, en x_0, $f(x)+g(x)$ se présente sous la forme indéterminée « $\infty - \infty$ » (voir Activité ci-dessous).

3° De même, le théorème **4** ne permet pas de conclure face au produit d'une fonction de limite infinie en x_0, par une fonction de limite nulle en x_0. On se trouve alors devant la forme indéterminée « $0 \times \infty$ », que l'on peut reconnaître (théorème **2**) sous la forme « $\frac{0}{0}$ » ou encore « $\frac{\infty}{\infty}$ » (voir Activité ci-dessous).

★ Activité

1° En utilisant le théorème **4**, *étudier la limite en x_0 de la fonction f :*

a) $f(x) = [-2 + \cos(\ln x)]\, e^x$, $\quad x_0 = +\infty$;

b) $f(x) = [1 + E(1-x)] \ln(1-x)$, $\quad x_0 = 1$;

c) $f(x) = \dfrac{1+x}{2x-1} + \ln x$, $\quad x_0 = +\infty$;

d) $f(x) = \dfrac{1}{x^2} + \ln \dfrac{1}{x}$, $\quad x_0 = 0$

2° Dans les cas suivants, montrer que le théorème **4** *ne s'applique pas, et étudier directement la limite en x_0 de la fonction f :*

a) $f(x) = \ln x + \ln \dfrac{1}{x^2}$, $\quad x_0 = +\infty$, *puis* $x_0 = 0$;

b) $f(x) = \ln(x-1) + \ln \dfrac{3}{x}$, $\quad x_0 = +\infty$;

c) $f(x) = \ln x + \sin x - \ln 2x$, $\quad x_0 = +\infty$.

3° ***a)*** *Déduire du 2° le résultat ci-dessous, pour* $x_0 = +\infty$:

La somme d'une fonction de limite $+\infty$ en x_0, et d'une fonction de limite $-\infty$ en x_0 peut ne pas avoir de limite, ou avoir une limite infinie, ou une limite réelle quelconque.

b) *Montrer par des exemples que ce résultat est valable pour* $x_0 = -\infty$ *et* $x_0 \in \mathbb{R}$.

4° Dans les cas suivants, montrer que le théorème **4** *ne s'applique pas, et étudier directement la limite en x_0 de la fonction f :*

a) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, $\quad x_0 = +\infty$;

b) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$, $\quad x_0 = +\infty$;

c) $f(x) = x(\sin x + 2)\dfrac{1}{x+1}$, $\quad x_0 = +\infty$.

5° ***a)*** *Déduire du 4° le résultat ci-dessous pour* $x_0 = +\infty$:

Le produit d'une fonction de limite nulle en x_0 par une fonction de limite infinie en x_0 peut ne pas avoir de limite en x_0, avoir en x_0 une limite infinie, ou une limite réelle quelconque.

b) *Montrer par des exemples que ce résultat est valable pour* $x_0 = -\infty$, *puis* $x_0 \in \mathbb{R}$.

IV – FONCTIONS COMPOSÉES

1. THÉORÈME FONDAMENTAL

• Soit g une fonction définie sur un intervalle I contenant x_0, sauf peut-être en x_0, et admettant en x_0 une limite l ($l \in \mathbb{R}$). Quel que soit le réel a strictement positif, il existe un réel strictement positif α tel que, pour tout x de l'ensemble de définition de g, si $|x - x_0| < \alpha$, alors : $|g(x) - l| < a$.
Soit, d'autre part, une fonction f définie sur un intervalle J contenant l, et continue en l. Pour tout réel strictement positif ε, il existe alors un réel a strictement positif, tel que, pour tout y de J, si $|y - l| < a$, alors $|f(y) - f(l)| < \varepsilon$.
Il résulte de ce qui précède (en posant $y = g(x)$) que, quel que soit le réel strictement positif ε, il existe un réel α strictement positif tel que, si $|x - x_0| < \alpha$, alors $|f(g(x)) - f(l)| < \varepsilon$.
On en déduit que, dans les conditions précisées, la fonction $f \circ g$ admet la limite $f(l)$ en x_0.

• En particulier, soit φ une fonction définie sur un intervalle J contenant l, mais non définie en l, et admettant en l la limite L. Supposons, en outre, que la fonction $\varphi \circ g$ soit définie sur un intervalle contenant x_0, sauf peut-être en x_0. La fonction f définie par :

$$f(x) = \varphi(x) \quad \text{pour tout } x \text{ de } J, \quad \text{et} \quad f(l) = L$$

est continue en l. Il en résulte que la fonction $f \circ g$ admet en x_0 la limite $f(l) = L$.
Or, pour tout $g(x)$ différent de l, $(f \circ g)(x) = (\varphi \circ g)(x)$. La fonction $\varphi \circ g$ étant définie sur un intervalle contenant x_0, sauf peut-être en x_0, il en résulte que la fonction $\varphi \circ g$ admet en x_0 la limite L.

• Plus généralement, nous admettrons que le théorème **5** ci-dessous est valable pour :

$$l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} \quad \text{et} \quad L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

THÉORÈME 5	**Soit g une fonction admettant la limite l en x_0 ($x_0 \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$).** **Soit φ une fonction admettant la limite L en l.** **Alors, si la fonction $\varphi \circ g$ est définie au voisinage de x_0, elle admet en x_0 la limite L.**

REMARQUES :

1° Le théorème **5**, convenablement adapté, est valable pour les limites à droite et à gauche en x_0.

2° Nous avons déjà utilisé, dans des cas simples, le résultat faisant l'objet du théorème **5**, ce qui constituait alors un abus. Le lecteur justifiera *a posteriori* les résultats alors obtenus.

3° Le théorème **5** justifie la méthode de changement de variable dans la recherche de limites.

Exercice résolu

Étudier la limite de la fonction f en x_0 :

a) $f(x) = \dfrac{\sin 3x}{3x}$, $x_0 = 0$; *b*) $f(x) = x \ln x$, $x_0 = 0$;

c) $f(x) = x \ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$, $x_0 = +\infty$; *d*) $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$, $x_0 = +\infty$.

a) Soit $g(x) = 3x$ et $\varphi(y) = \dfrac{\sin y}{y}$. On a $f(x) = (\varphi \circ g)(x)$.
Alors : $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = 0$ et $\lim\limits_{y \to 0} \varphi(y) = 1$. Il en résulte que : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$.

b) Soit $g(x) = \frac{1}{x}$. On a $f(x) = -\ln \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{\frac{1}{x}}$. Soit donc $\varphi(y) = -\frac{\ln y}{y}$.

Alors : $\lim_{x \to 0^+} g(x) = +\infty$ et $\lim_{y \to +\infty} \varphi(y) = 0$. Il en résulte que : $\lim_{x \to 0^+} f(x) = 0$.

c) Soit $g(x) = \frac{1}{x}$ et $\varphi(y) = \frac{\ln(1+y)}{y}$. On a $f(x) = (\varphi \circ g)(x)$.

Alors : $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$ et $\lim_{y \to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = \lim_{y \to 0} \frac{\ln(1+y) - \ln 1}{(1+y) - 1} = 1$.

Il en résulte que : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

d) Soit $g(x) = \frac{1}{x}$ et $\varphi(y) = \frac{\sin y}{y}$. On a $f(x) = (\varphi \circ g)(x)$.

Alors : $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$ et $\lim_{y \to 0} \varphi(y) = 1$. Il en résulte que : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

Exercice d'application

8. Étudier la limite en x_0 de la fonction f :

a) $f(x) = \frac{\tan 2x}{x}$, $x_0 = 0$;

b) $f(x) = \frac{\sin 3x}{\tan \pi x}$, $x_0 = 0$;

c) $f(x) = \frac{x}{\sin 2x + \tan 3x}$, $x_0 = 0$ $\left(\text{On commencera par étudier } \frac{1}{f}\right)$;

d) $f(x) = \frac{1 - \sin x}{\left(\frac{\pi}{2} - x\right)^2}$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$;

e) $f(x) = x^2\left(1 - \cos \frac{1}{x}\right)$, $x_0 = -\infty$.

• Le théorème **5** comporte des conséquences importantes, en particulier grâce à l'utilisation des fonctions logarithme et exponentielle.

COROLLAIRE 1

Une fonction f admet la limite l en x_0 si, et seulement si, la fonction e^f admet la limite e^l en x_0.
Une fonction f, à valeurs strictement positives au voisinage de x_0, admet en x_0 la limite l, où $l > 0$, si, et seulement si, la fonction $\ln f$ admet en x_0 la limite $\ln l$.

REMARQUE :

Nous admettrons que le corollaire ci-dessus est valable pour des limites infinies, en posant

« $e^{+\infty} = +\infty$ », « $e^{-\infty} = 0$ », « $\ln +\infty = +\infty$ », « $\ln 0 = -\infty$ ».

Exercice résolu

Étudier la limite en $+\infty$ de la fonction f définie par $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

Pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$, $f(x)$ est défini et strictement positif. Étudions la fonction $\ln f$:

$$\ln f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right).$$

Or (exercice résolu ci-dessus) : $\lim\limits_{x \to +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1 = \ln e.$

Il en résulte que : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = e.$

- **Exercice d'application**

9. Étudier la limite en x_0 de la fonction f :

a) $f(x) = \left(1 + \frac{3}{x}\right)^x$, $x_0 = +\infty$;

b) $f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)^{2x}$, $x_0 = +\infty$;

c) $f(x) = (1 + 2x)^{\frac{3}{x}}$, $x_0 = 0$;

d) $f(x) = x^x$, $x_0 = 0$.

2. SUITES ET FONCTIONS

Une suite numérique étant une fonction de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{R}$, le théorème **5** comporte le corollaire suivant, que l'on peut rapprocher du théorème **2** du chapitre 4 (voir figure 6).

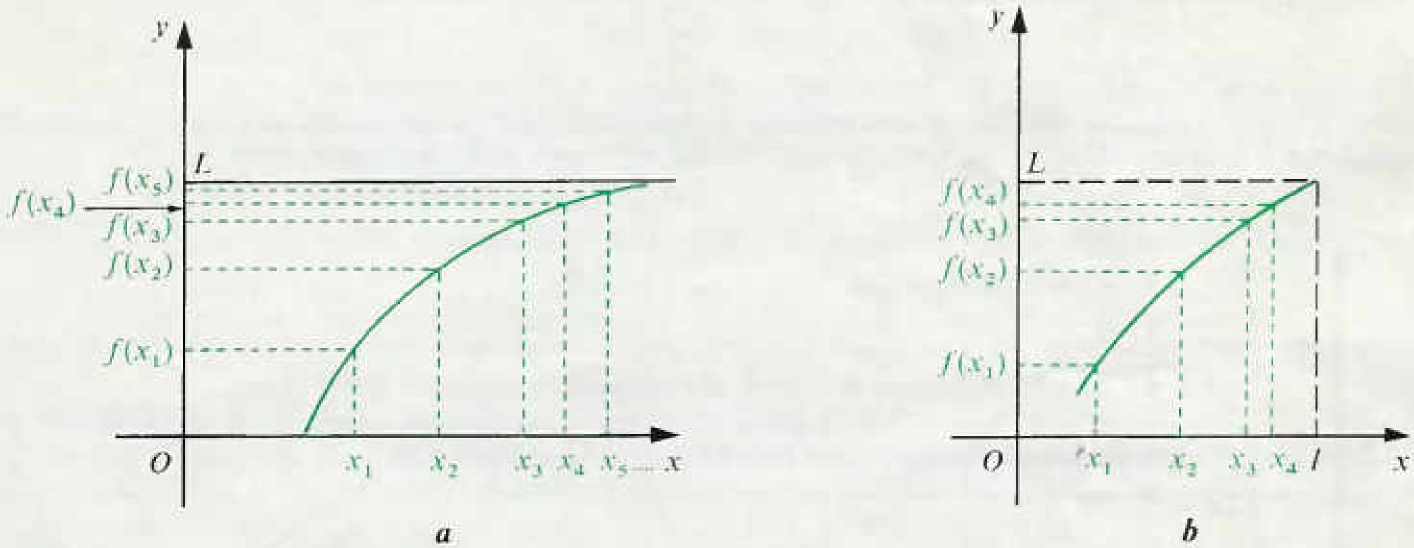


Figure 6

COROLLAIRE 2 — **Soit (x_n) une suite numérique admettant la limite l. Soit, d'autre part, une fonction numérique f, définie au voisinage de l, et admettant en l une limite L. Alors, si la suite $(f(x_n))$ est définie à partir d'un certain rang n_0, elle admet la limite L.**

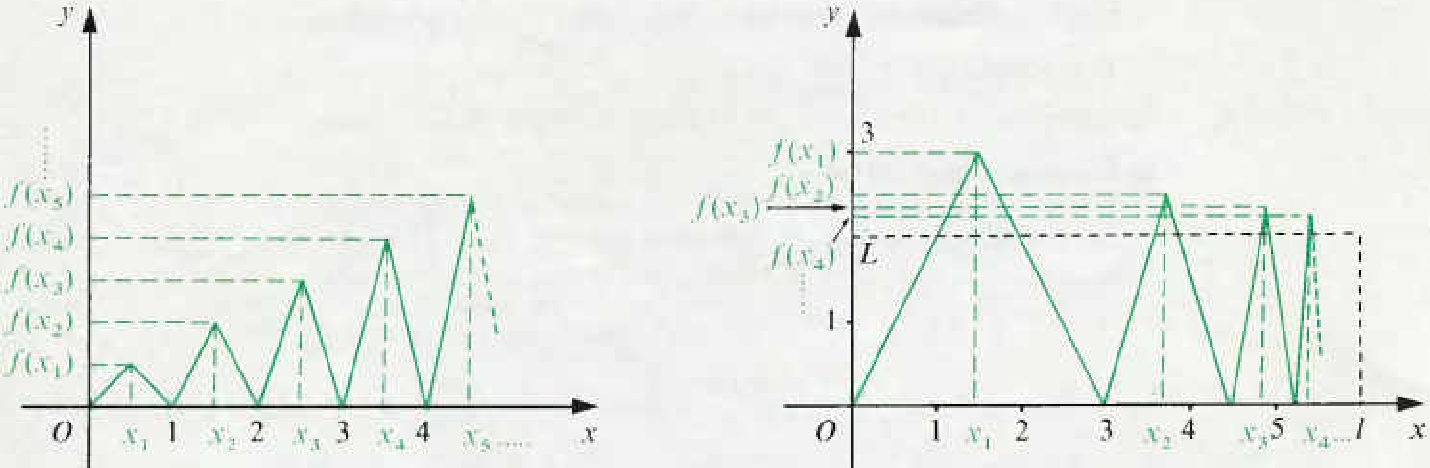
- La réciproque de ce corollaire est fausse. C'est ainsi qu'il ne suffit pas qu'il existe une suite (x_n) de limite l telle que $(f(x_n))$ ait pour limite L pour que la fonction f ait pour limite L en l.

Par exemple, soit la fonction f définie par $f(x) = \sin 2\pi x$. La suite $f(n)$ est constante, donc convergente, et pourtant la fonction f n'a pas de limite en $+\infty$.

De même, soit $g(x) = \cos \frac{2\pi}{x}$. La suite $g\left(\frac{1}{n}\right)$ est constante, donc convergente, et pourtant la fonction g n'admet pas de limite en 0 $\left(0 = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n}\right)$ (voir aussi figure 7).

Toutefois, si l'on sait par ailleurs que la fonction f admet une limite en l, cette limite ne peut être égale qu'à L.

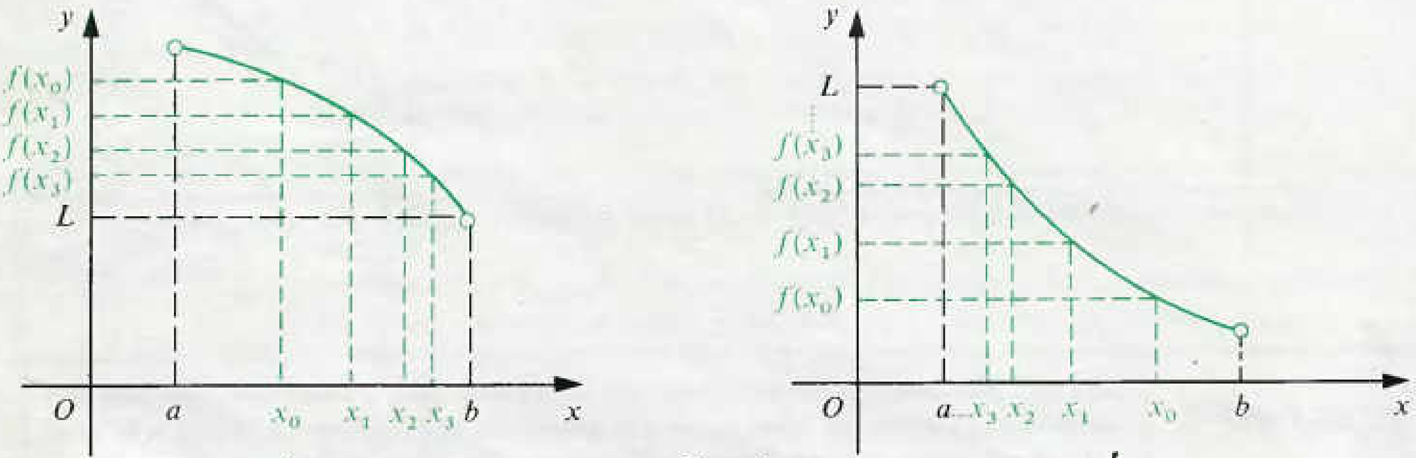
Considérons par exemple une fonction f monotone croissante telle qu'il existe une suite monotone strictement croissante (x_n) de limite l, de façon que la suite $(f(x_n))$ admette une limite L (l et L étant des réels). Pour tout réel x de $D_f \cap]x_0, l[$, il existe un entier n tel que : $x_n < x < l$.



a *Figure 7* *b*

La fonction f étant croissante, il en résulte que : $f(x_n) \leqslant f(x) \leqslant L$.
Il en résulte que la fonction f, croissante et majorée sur l'intervalle $]x_0, l[$, admet en l une limite à gauche qui, d'après le corollaire **2** ci-dessus ne peut être égale qu'à L (figure 7).

• Nous admettrons les résultats du théorème suivant, qui sont valables pour a, b et L éléments de $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ (voir figure 8, l'illustration de quelques cas particuliers).



a *Figure 8* *b*

THÉORÈME 6	**Soit f une fonction monotone dont l'ensemble de définition est un intervalle ouvert $I =]a, b[$ (a et b éléments de $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$).** **S'il existe une suite (x_n) croissante de limite b telle que la suite $(f(x_n))$ admette une limite L ($L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$), alors la fonction f admet une limite (à gauche) en b, égale à L** **S'il existe une suite (x_n) décroissante de limite a telle que la suite $(f(x_n))$ admette une limite L ($L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$), alors la fonction f admet une limite (à droite) en a, égale à L.**

REMARQUES :

1° Nous avons déjà utilisé ce résultat au chapitre 1.

2° Soit (x_n) une suite d'éléments de $]a, b[$ de limite b. Nous admettrons qu'il est possible d'extraire de cette suite une sous-suite croissante et de limite b (le lecteur pourra tenter de prouver cette propriété).
Il en résulte que le théorème 6 reste valable si les suites (x_n) ne sont pas monotones.

3° Soit f une fonction définie sur $D_f =]a, l[\cup]l, b[$, et monotone sur chacun des intervalles de D_f. Soit (x_n) une suite d'éléments de D_f, convergeant vers l, et telle que les deux intervalles $]a, l[$ et $]l, b[$ contiennent chacun une infinité de valeurs x_n. Dans ces conditions, si la suite $f(x_n)$ admet la limite L, il en est de même de la fonction f en l (voir figure 9).

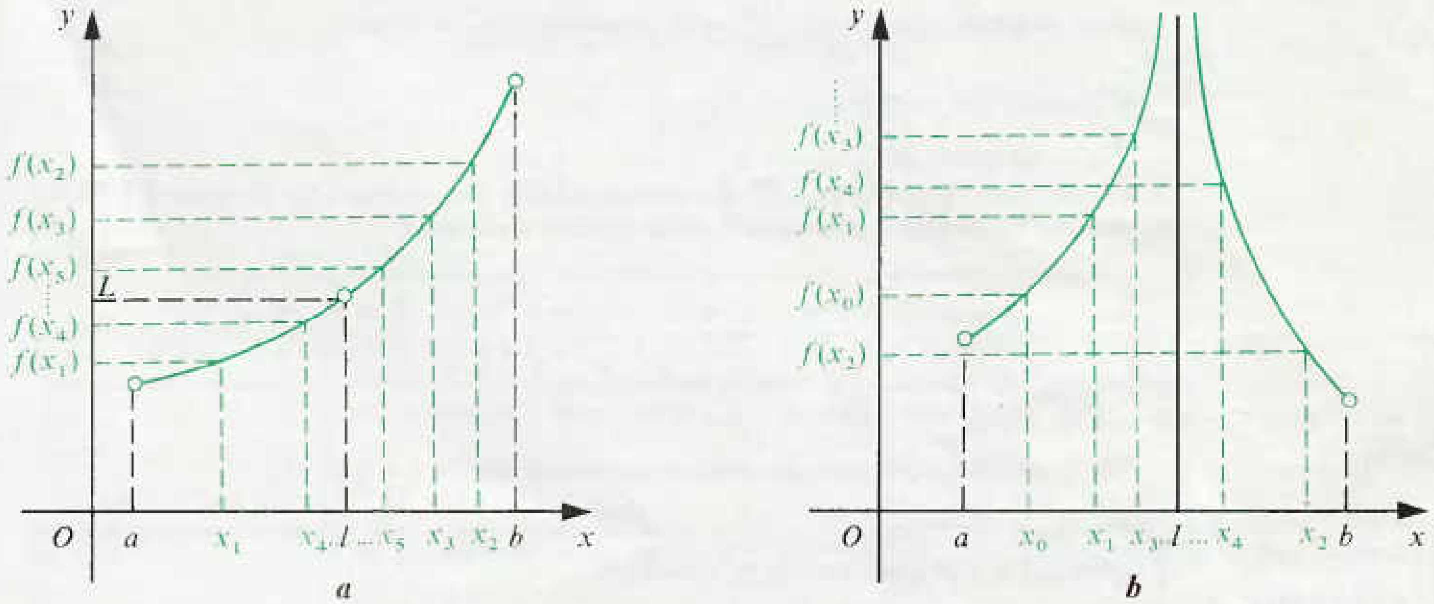


Figure 9

V – ÉCHELLES DE FONCTIONS

L'utilisation des règles de comparaison et de changement de variable permet d'utiliser les résultats concernant les limites de certaines fonctions, pour en déduire les limites de beaucoup d'autres fonctions.

Rappelons par exemple que :

– pour x_0 et l réels : $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ si, et seulement si, $\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) - l = 0$;

– pour l réel : $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ si, et seulement si, $\lim_{x \to +\infty} f(x) - l = 0$;

– pour x_0 réel : $\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ si, et seulement si, $\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = +\infty$;

– pour $f(x)$ strictement positif :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \quad \text{si, et seulement si,} \quad \lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0;$$

– pour tout l : $\lim_{x \to 0^+} f(x) = l$ si, et seulement si, $\lim_{x \to +\infty} f\left(\frac{1}{x}\right) = l$.

Nous récapitulons ci-dessous certains résultats concernant des familles de fonctions connues, ainsi que les résultats concernant la comparaison de ces différentes familles (voir chapitre 4).

Limite $+\infty$ ***en*** $+\infty$

Parmi les fonctions admettant la limite $+\infty$ en $+\infty$, on distingue :
- les **fonctions logarithmes de base** a, pour a strictement supérieur à 1,
- les **fonctions puissances**,
- les **fonctions linéaires (et affines)** de coefficient directeur strictement positif,
- les **fonctions exponentielles de base** a, pour a strictement supérieur à 1.

Pour préciser la vitesse respective avec laquelle ces fonctions tendent vers l'infini, on peut étudier leur rapport. Nous noterons ainsi :

$$f(x) \ll g(x) \quad (\text{en } +\infty)$$

pour exprimer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0 \left(\text{ou } \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{g(x)}{f(x)} = +\infty\right)$.

C'est ainsi par exemple que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{x} = +\infty$.

Par conséquent, en $+\infty$, on a : $x \ll x^2$.

Le théorème **6** ci-dessus (§ **IV-2**) permet, à l'aide des résultats du chapitre 4 § **VI**, de déduire les résultats consignés dans le tableau ci-dessous :

$\log_a x < \log_b x \ll$	$x^\alpha \ll x^\beta$	$\ll ax < bx \ll$	$x^{\alpha'} \ll x^{\beta'}$	$\ll a^x \ll b^x$
$1<a<b$	$0<\alpha<\beta<1$	$0<a<b$	$1<\alpha'<\beta'$	$1<a<b$

On lit en particulier dans ce tableau (rappelons que $\ln x = \log_e x$) :

THÉORÈME 7

Quel que soit le réel strictement positif α :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = 0.$$

Une démonstration directe de ces propriétés est proposée dans l'Activité ci-dessous.

★ Activité

1° Soit α un réel strictement positif.

a) *Prouver que pour tout réel x strictement positif :*

$$\frac{\ln x}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha}\frac{\ln x^\alpha}{x^\alpha}.$$

b) *En déduire, en posant $y = x^\alpha$, que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0$.*

2° Soit α un réel positif.

a) *Déterminer :* $\ln\left(\dfrac{x^\alpha}{e^x}\right)$.

b) *En factorisant par x l'expression obtenue en **a)**, déterminer la limite en $+\infty$ de* $\ln\left(\dfrac{x^\alpha}{e^x}\right)$.

c) *En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^\alpha}{e^x} = 0$.*

Exemple de comparaison de limites infinies 0 et en $-\infty$

★ Activité

1° Soit α *un réel positif, et soit à étudier la limite en 0 de la fonction :*

$$f_\alpha = [x \mapsto x^\alpha \ln x].$$

a) *Quel est l'ensemble de définition de la fonction* f_α *?*

b) *Montrer que* f_α *est le quotient de deux fonctions de limites infinies en* 0^+.

c) *On pose* $y = \dfrac{1}{x}$. *Déterminer la fonction* g_α *telle que* $g_\alpha(y) = f_\alpha\left(\dfrac{1}{y}\right)$.

d) *Déterminer la limite en* $+\infty$ *de la fonction* g_α.

e) *En déduire la limite en 0 de la fonction* f_α.

2° *Soit* α *un réel positif, et soit à étudier la limite en* $-\infty$ *de la fonction :*

$$\varphi_\alpha = [x \mapsto |x|^\alpha e^x].$$

a) *Quel est l'ensemble de définition de* φ_α *?*

b) *Montrer que* φ_α *est le quotient de deux fonctions de limites infinies en* $-\infty$.

c) *En utilisant le changement de variable* $z = -x$, *déterminer la limite en* $-\infty$ *de la fonction* φ_α.

Les résultats obtenus dans cette activité doivent être considérés comme classiques :

THÉORÈME 8	**Quel que soit le réel strictement positif** α **:** $\displaystyle\lim_{x \to 0} x^\alpha \ln x = 0$ **et** $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} |x|^\alpha e^x = 0$

● Exercice d'application

10. Étudier directement la limite en x_0 de la fonction f :

a) $f(x) = \dfrac{\log_a x}{x^\alpha}$, $a > 1$, $\alpha > 0$, pour $x_0 = +\infty$.

b) $f(x) = x^\alpha \log_a x$, $a > 1$, $\alpha > 0$, pour $x_0 = 0$.

c) $f(x) = \dfrac{x^\alpha}{a^x}$, $a > 1$, $\alpha > 0$, pour $x_0 = +\infty$.

d) $f(x) = |x|^\alpha a^x$, $a > 1$, $\alpha > 0$, pour $x_0 = -\infty$.

e) $f(x) = \dfrac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, pour $x_0 = +\infty$.

f) $f(x) = x^\alpha (\ln x)^\beta$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, pour $x_0 = 0$.

g) $f(x) = |x|^\alpha e^{\beta x}$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, pour $x_0 = -\infty$.

EXERCICES ET PROBLÈMES

ÉTUDE DE LIMITES

*Étudier les limites des exercices **1** à **82**. On pourra, le cas échéant, utiliser des propriétés algébriques (par exemple* $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ *ou* $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$*) ou des propriétés de trigonométrie (voir page 299) pour se ramener à des limites connues (voir page 301) ou à des combinaisons de telles limites.*

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2-1} + x.$ **2.** $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2-1} + x.$

3. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-1}+x}{x}.$ **4.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt{x^2-1}+3}{\sqrt{x^2-1}}.$

5. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^5-3x^2}{-5x^3+1}.$ **6.** $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{x^2+x-12}{x-3}.$

7. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3-3x+2}{x-2}.$ **8.** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^2+7}{x^3-5x+1}.$

9. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x^3-7x+1}{x^2+x-1}.$ **10.** $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x-3}{x^2-3x}.$

11. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2-2x-1}{x-1}.$ **12.** $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{3x^2-5x+1}{x-1}.$

13. $\lim\limits_{x \to \frac{1}{4}} \dfrac{12x-3}{4x-1}.$ **14.** $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^3-x-6}{x^2-4}.$

15. $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^2-x+1} + 2x.$

16. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x}.$

17. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2-3x+2}{x^3-8}.$ **18.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x^2}}{x}.$

19. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}.$ **20.** $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x}-2}{x^2-5x+4}.$

21. $\lim\limits_{x \to 9} \dfrac{3-\sqrt{x}}{x^2-81}.$ **22.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{x+1}{\sqrt{x}}.$

23. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x(x+1)} - \dfrac{1}{x}.$ **24.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}-1}.$

25. $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x+5}-3}{x-4}.$ **26.** $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+7}-3}.$

27. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x-\sqrt{x+2}}{\sqrt{4x+1}-3}.$

28. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+4}-\sqrt{3x+4}}{\sqrt{x+1}-1}.$

29. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{2}{x^2-1} - \dfrac{1}{x-1}.$

30. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2-5x+1}}.$

31. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x+\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2-5x+1}}.$

32. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{x^2-\sqrt{x^2+1}}.$

33. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x-\sqrt{x^2+1}}{x^2-\sqrt{x^2+1}}.$

34. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x-\sqrt{x^2-x+1}}{2x-\sqrt{4x^2+x}}.$

35. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x-\sqrt{x^2-x+1}}{2x-\sqrt{4x^2+x}}.$

36. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{\sqrt{x+1}} - \dfrac{x}{\sqrt{x+2}}.$

37. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2+x-2} - (x^2-1).$

38. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x} - \sqrt{x}.$

39. $\lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{x^4+2x-1} - (x^2+1).$

40. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1-\sqrt{2-\sqrt{4-3x}}}{1-\sqrt{2-\sqrt{\dfrac{1}{3-2x}}}}.$

41. $\lim\limits_{x \to 8} \dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{\sqrt[3]{x+19}-3}.$

42. $\lim\limits_{x \to 10} \dfrac{\sqrt[3]{x+54}-4}{2\sqrt[3]{x+17}-\sqrt[3]{20x+16}}.$

43. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan 2x}{\sqrt{1-\cos x}}.$ **44.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^2 x}{\tan^2 2x}.$

45. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{\sin^2 \pi x}.$ **46.** $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos \pi x}{\tan x}.$

47. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\sin 3x}{1-2\cos x}.$

48. $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)-\tan x}{1-\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}$

49. $\displaystyle\lim_{x\to\frac{2\pi}{3}} \frac{\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)-\sin\frac{x}{4}}{\tan 3x}$.

50. $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\tan 6x}{1-2\sin x}$.

51. $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{2\cos 2x-1}{\cos 3x}$ **52.** $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{6}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)}{1-2\sin x}$.

53. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin x-\cos x}$. **54.** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{\sqrt[3]{(1-\cos x)^2}}$.

55. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\tan x}$.

56. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+\cos x}}{\sin^2 x}$.

57. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x\sin x}-\sqrt{\cos 2x}}{\tan^2\frac{x}{2}}$.

58. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x\sqrt{\cos 2x}}{x^2}$.

59. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{3x}$. **60.** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{2}{x}\right)^{x}$.

61. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{3}{x}\right)^{2x-3}$. **62.** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x+3}{x-1}\right)^{x+2}$.

63. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x-1}{x+1}\right)^{x}$. **64.** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x+1}{2x-1}\right)^{2x+3}$.

65. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{3x-4}{3x+2}\right)^{\frac{x+1}{3}}$. **66.** $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$.

67. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x}$.

68. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+2}\right)^{x}$.

69. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+kx)}{x}$.

70. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(a+x)-\ln a}{x}$ $(a\in\mathbb{R}_+^*)$.

71. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{ax}-e^{bx}}{x}$ $((a, b)\in\mathbb{R}^2)$.

72. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x(e^{\frac{1}{x}}-1)$.

73. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-\cos x}{x^2}$. **74.** $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^{x}-e^{-x}}{\sin x}$.

75. $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln\cos x}{x^2}$. **76.** $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin x}}$.

77. $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\cos x+\sin x)^{\frac{1}{x}}$. **78.** $\displaystyle\lim_{x\to 0} (1+\tan^2\sqrt{x})^{\frac{1}{2x}}$.

79. $\displaystyle\lim_{x\to 0} (\tan x)(\ln x)$. **80.** $\displaystyle\lim_{x\to 0} [\ln(1+x)]^{x}$.

81. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x[\ln(x+1)-\ln x]$.

82. $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{\ln x^p-\ln a^p}{\sin x-\sin a}$ $(p\in\mathbb{N}^*,\ a\in\mathbb{R}_+^*)$.

83. Soit $f(x)=\dfrac{\ln\tan x}{\ln\tan 3x}$. Pour étudier la limite de f en $\dfrac{\pi}{2}$, on pose $x=\dfrac{\pi}{2}-t$. Soit $y(t)=f(x)$.

a) Rappeler les limites $\displaystyle\lim_{X\to+\infty}\frac{\ln X}{X}$ et $\displaystyle\lim_{Y\to 0}\frac{\tan Y}{Y}$.

b) En déduire la limite cherchée.

c) Peut-on étudier de même la limite en $\dfrac{\pi}{2}$ de $\dfrac{\ln\tan x}{\ln\tan(-3x)}$?

84. Soit $f(x)=\left[1-\dfrac{\ln(1+x)}{\ln x}\right]^{\frac{1}{x}}$.

a) Quel est l'ensemble de définition de la fonction f?

b) Étudier la limite de f pour $x_0=1$.

c) Montrer que $\ln f(x)=\dfrac{1}{x}\ln(1+h(x))$, avec

$$h(x)=\frac{\ln(1+x)}{\ln\frac{1}{x}}.$$

d) Étudier $\displaystyle\lim_{x\to 0} h(x)$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{h(x)}{x}$.

e) En déduire $\displaystyle\lim_{x\to 0}\ln f(x)$. Quelle est la limite en 0 de la fonction f?

85. *a*) Démontrer que, quels que soient les réels positifs a et b, et quel que soit l'entier naturel non nul p :

$$(a-b)= \left(a^{\frac{1}{p}}-b^{\frac{1}{p}}\right)\left(a^{\frac{p-1}{p}}+a^{\frac{p-2}{p}}b^{\frac{1}{p}}+\dots+a^{\frac{1}{p}}b^{\frac{p-2}{p}}+b^{\frac{p-1}{p}}\right)$$

b) Soit $f(x)=x\left[\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{1}{p}}-1\right]$. Étudier la limite de la fonction f en $+\infty$.

c) Soit, pour n entier naturel supérieur à 2, la fonction f_n définie par :

$$f_n(x)=\frac{(\sqrt{\cos x}-1)(\sqrt[3]{\cos x}-1)\dots(\sqrt[n]{\cos x}-1)}{x^{2n-2}}.$$

Déterminer la limite en 0 de la fonction f_n.

86. Soit g la fonction numérique définie par

$$g(x) = x \ln |x| - (x-2) \ln |x| - |2|,$$

et par $g(0) = g(2) = 2 \ln 2$.
Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

87. Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{\ln |x-2|}{\ln |x|}$.
Étudier, et déterminer si elles existent les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} f(x); \quad \lim_{x\to 1} f(x); \quad \lim_{x\to 2} f(x); \quad \lim_{x\to +\infty} f(x);$$
$$\lim_{x\to -\infty} f(x); \quad \lim_{x\to -1^-} f(x); \quad \lim_{x\to -1^+} f(x).$$

88. Soit n un entier naturel. Calculer en fonction de x les sommes :

$$s(x) = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin nx,$$
$$\sigma(x) = \sin^2 x + \sin^2 2x + \dots + \sin^2 nx.$$

En déduire les limites en 0 des fonctions f et g définies par :

$$f(x) = \frac{s(x)}{x} \quad ; \quad g(x) = \frac{\sigma(x)}{x}.$$

INTÉGRALES IMPROPRES

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle $[a, b[$. Pour tout x de $[a, b[$, on pose $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Lorsque la fonction F admet en b une limite réelle l, on dit que l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ converge, et l'on note $l = \int_a^b f(t)\,dt$.
Soit g une fonction définie et continue sur un intervalle $]a, b[$. S'il existe un réel c de $]a, b[$ tel que les intégrales $\int_a^c g(t)\,dt$ et $\int_c^b g(t)\,dt$ convergent, alors on dit que l'intégrale $\int_a^b g(t)\,dt$ converge et l'on note :

$$\int_a^b g(t)\,dt = \int_a^c g(t)\,dt + \int_c^b g(t)\,dt.$$

Une intégrale impropre non convergente est dite divergente.
Étudier la convergence des intégrales des exercices **89** *à* **110.** *Évaluer chaque fois que possible la valeur de l'intégrale impropre étudiée.*

89. $\displaystyle\int_3^5 \frac{dt}{\sqrt{3+t}}$. **90.** $\displaystyle\int_{-\infty}^0 \frac{dt}{(3t-27)^5}$.

91. $\displaystyle\int_{-3}^{-\frac{7}{3}} \frac{dt}{\sqrt[3]{7+3t}}$. **92.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt[4]{(12+4t)^5}}$.

93. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{12t+4}$. **94.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2}$.

95. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{(t+4)^3}$. **96.** $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\,dx$.

97. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$. **98.** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2(1+e^t)}$.

99. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t+1}{\sqrt{t^3}}\,dt$. **100.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

101. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x^3}\right| dx$. **102.** $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t+2t^3}}$.

103. $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx$. **104.** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t\sqrt{t^2-1}}$.

105. $\displaystyle\int_0^{\infty} x\,e^{-x^2}\,dx$. **106.** $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} \sin x\,dx$.

107. $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{dt}{t \ln t}$. **108.** $\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{t \ln t}$.

109. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{\ln t}$. **110.** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\ln \sin x}{\sqrt{x}}\,dx$.

111. Soit $f(x) = \displaystyle\int_0^x \cos\frac{1}{t}\,dt$ et $f(0) = 0$.

a) Déterminer la fonction dérivée f'. Cette fonction admet-elle une limite en 0?

b) Montrer que $f(x) = -x^2 \sin\dfrac{1}{x} + \displaystyle\int_0^x 2t \sin\frac{1}{t}\,dt$.

c) En déduire que f est dérivable en 0. Déterminer $f'(0)$.

112. *a*) Prouver que, pour tout réel :

$$1 - \frac{x^2}{2} \leqslant \cos x \leqslant 1.$$

b) En déduire que la fonction f définie par :

$$f(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t}\,dt$$

admet en 0 une limite que l'on déterminera.

113. Étudier la convergence de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x} \sin\dfrac{1}{x^2}}{\ln(1+x)}\,dx.$$

(On ne demande pas de préciser la valeur de cette intégrale impropre.)

114. *a*) Prouver que, quel que soit l'entier naturel n non nul, il existe un réel x_0 tel que, si $x > x_0$, alors $\sqrt[n]{x} > \ln x$.

b) En déduire que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{dx}{(\ln x)^n}$ diverge.

115. *1°* *a)* Sachant que $1 - \frac{x^2}{2} \leqslant \cos x \leqslant 1$ pour tout réel x, et en utilisant les propriétés de l'intégrale, prouver que, pour tout réel positif x :

$$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} \leqslant \sin x \leqslant x - \frac{x^3}{6}.$$

b) Préciser un encadrement de $\sin x$ pour x négatif.
c) En déduire la limite en 0 de la fonction g définie par $g(x) = \frac{x - \sin x}{x^3}$.

2° Soit $\mathscr{C}$ un cercle de centre O et de rayon r. On considère un secteur circulaire AOB d'angle θ $(0 < \theta < \pi)$.
a) Montrer que l'aire s du segment de disque déterminé par la corde AB est :

$$s = \frac{1}{2} r^2(\theta - \sin \theta).$$

b) Les tangentes en A et B au cercle $\mathscr{C}$ se coupent en T. Montrer que l'aire S du triangle (ABT) est : $S = \frac{1}{2} r^2 \tan^2 \frac{\theta}{2} \sin \theta$.

c) Déterminer la limite en 0 du quotient $\frac{s}{S}$.

116. On considère un segment de droite $[A, B]$ de longueur 1. Sur ce segment, on considère les $n - 1$ points $C_1, C_2, C_3, \dots, C_{n-1}$ tels que les segments $[A, C_1]$, $[C_1, C_2]$, $[C_2, C_3], \dots, [C_{n-2}, C_{n-1}]$ et $[C_{n-1}, B]$ aient tous pour longueur $\frac{1}{n}$.
On considère enfin les demi-cercles construits sur ces segments dans un même demi-plan par rapport à (AB). Calculer la longueur de la ligne ainsi obtenue. Quelle est la limite de cette longueur lorsque n tend vers l'infini? Pourquoi ce résultat est-il surprenant?

117. Soit un demi-cercle de rayon r, de diamètre $[A, B]$. On divise ce demi-cercle en n arcs de même mesure par les $n - 1$ points $C_1, C_2, \dots, C_{n-1}$.
a) Soit S la somme des mesures des cordes $[A, C_1]$, $[A, C_2]$, ..., $[A, C_{n-1}]$, $[A, B]$.
Prouver que

$$S = 2r\left(1 + \cos \frac{\pi}{2n} + \dots + \cos \frac{(n-1)\pi}{2n}\right).$$

b) Déterminer la limite de la moyenne arithmétique de ces cordes lorsque n tend vers l'infini.

118. Soit C un cercle de centre O et soit P un point extérieur à C. Soit A le point où (OP) coupe C. De P on mène une tangente (PT) au cercle. Soit N le projeté orthogonal de T sur (OP). Déterminer la limite du rapport des longueurs des segments $[A, P]$ et $[A, N]$ lorsque P tend vers A.

119. Soit un cercle C, soit A et B deux points non diamétralement opposés du cercle C, et M le milieu de l'arc de cercle $\widehat{AB}$ qui a une mesure inférieure à π. Les tangentes en A et B au cercle C se rencontrent en T et la tangente en M à C coupe (AT) en A' et (BT) en B'.
Déterminer la limite du rapport des aires des triangles (TAB) et $(TA'B')$ lorsque l'arc $\widehat{AB}$ tend vers zéro.

Photo HACHETTE

Jean le Rond d'ALEMBERT, mathématicien et philosophe français (1717-1783). L'Académie des sciences lui ouvre ses portes alors qu'il n'a que vingt-trois ans. Il collabore avec Denis DIDEROT dans l'« Encyclopédie ». Ses travaux sur le calcul différentiel l'opposèrent à EULER.

CHAPITRE

6

DERIVATION (COMPLEMENTS) ACCROISSEMENTS FINIS

I – ACTIVITÉS PRÉLIMINAIRES

★ Activité 1 : Tangentes parallèles à une corde

1° Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Écrire une équation cartésienne de la tangente à la courbe représentative de f au point M_0 d'abscisse x_0 ($x_0 \in I$).

2° *Soit P la courbe représentative dans un repère cartésien de la fonction f définie par $f(x) = x^2$.*

a) *Soit A et B les points de P d'abscisses respectives 1 et 3. Déterminer, s'il en existe, les points de P où la tangente est parallèle à la droite (AB).*

b) *Même question qu'au **a)** avec les abscisses respectives -2 et 5.*

c) *Même question qu'au **a)** avec les abscisses respectives x_1 et x_2. Énoncer le résultat obtenu.*

3° *Reprendre le **2°** avec $f(x) = -3x^2 + 4x - 1$.*

4° *Reprendre le **2°** avec $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Préciser l'ensemble de définition de f, et la position des points A et B envisagés par rapport à cet ensemble de définition, dans chacun des cas proposés.*

★ Activité 2 : Encadrement par des fonctions affines

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, et soit x_0 un point de I. Soit C la courbe représentative de f dans un repère cartésien, et soit M_0 le point de C d'abscisse x_0. On suppose en outre qu'il existe deux réels m et M tels que $m < f'(x_0) < M$.

1° Préciser la zone du plan dans laquelle se situe la tangente à C en M_0.

2° Dessiner soigneusement ce domaine du plan, pour $m = 1$, $M = 2$, $x_0 = 2$, $f(x_0) = -1$.

★ Activité 3 : Signe de la dérivée et sens de variation

1° Soit f une fonction définie sur un intervalle fermé borné $[a, b]$, telle que $f(a) = f(b)$, et dérivable sur l'intervalle ouvert $I =]a, b[$.

a) *Prouver qu'il existe un réel x_0 de $]a, b[$ tel que $f(x_0)$ soit une borne de f sur I.*

b) *On suppose que $f(x_0)$ est la borne supérieure de f sur I, et l'on considère le taux de variation φ de f entre x et x_0 ($x \in I$) :*

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Prouver que, pour tout x de $]a, x_0[$, $\varphi(x)$ est positif, et que pour tout x de $]x_0, b[$, $\varphi(x)$ est négatif.

c) Déduire de ce qui précède que : $f'(x_0) = 0$.

d) Reprendre la démonstration ci-dessus en supposant que $f(x_0)$ est la borne inférieure de f sur I.

e) Énoncer le résultat obtenu.

2° Soit g une fonction définie sur un intervalle fermé borné $[a, b]$, et dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$. On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = g(x) - g(a) - \frac{g(b) - g(a)}{b - a}(x - a).$$

a) Prouver que f satisfait aux conditions du 1° ci-dessus, et appliquer le résultat du 1° à la fonction f.

b) Quel résultat peut-on en déduire concernant la fonction g? Interpréter géométriquement.

3° Soit g une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, et dont la dérivée est nulle en tout point de I.

a) Soient a et b deux points distincts de I. Prouver, en utilisant le résultat du 2°, que $g(a) = g(b)$.

b) En déduire que g est constante sur I.

4° Sous les mêmes hypothèses qu'au 3°, on suppose que la dérivée g' garde un signe constant sur l'intervalle I. Étudier le sens de variation de g suivant le signe de g'.

II — GÉNÉRALITÉS. RAPPELS

1. DÉFINITIONS. NOTATIONS

Soit f une fonction définie sur un intervalle I, et soit x_0 un élément de I.

• On dit que f est **dérivable** (resp. dérivable à droite, resp. dérivable à gauche) en x_0, si le taux de variation $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ admet en x_0 une limite (resp. à droite, resp. à gauche), qui est un nombre réel. Ce nombre réel est le **nombre dérivé** (resp. à droite, resp. à gauche) de f en x_0, et est noté $\boldsymbol{f'(x_0)}$ (resp. $f'_d(x_0)$, resp. $f'_g(x_0)$).

• La fonction f admet en x_0 le nombre dérivé $f'(x_0)$ si, et seulement si, la fonction ε définie par $\varepsilon(x) = \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)$ admet en x_0 la limite 0. On définit alors, par continuité, $\varepsilon(0) = 0$.

On a alors : $f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + (x - x_0)\varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = \varepsilon(0) = 0$.

La fonction affine $[x \mapsto f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)]$ est alors la **fonction affine tangente** à f en x_0. Sa courbe représentative est la tangente au point $M_0(x_0, f(x_0))$ à la courbe représentative de f.

• La fonction f', qui à tout x de I associe, s'il existe, le nombre dérivé $f'(x)$ de f en x, est la **fonction dérivée** de la fonction f. On utilise souvent la notation : $f' = \dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$.

• La fonction f' peut à son tour être dérivable pour certaines valeurs de I. On définit ainsi la **dérivée seconde** de f : $(f')' = f'' = \dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$.

Le signe de la dérivée seconde de f permet de préciser le sens de la concavité de la courbe représentative. Ses changements de signe correspondent à des **points d'inflexion** (voir Activité **2**, page 235).

• De proche en proche, et par le même processus, on définit la dérivée n-ième de f

$(n \in \mathbb{N}^*)$, et l'on note : $(f^{(n-1)})' = f^{(n)} = \dfrac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$.

2. PROPRIÉTÉS. RÈGLES DE CALCUL

• Soit f une fonction définie sur un intervalle I. Si f est **dérivable** pour une valeur x_0 de I, alors f est continue en x_0.

• Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. On sait que :
- si pour tout x de I : $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I;
- si pour tout x de I : $f'(x) \geqslant 0$, alors f est croissante sur I;
- si pour tout x de I : $f'(x) \leqslant 0$, alors f est décroissante sur I.

• Une fonction f définie sur un intervalle I est **strictement croissante** sur I si elle est croissante sur I, et si elle n'est constante sur aucun sous-intervalle de I non réduit à un point. Il en résulte que la dérivée d'une fonction strictement croissante sur I peut s'annuler, à condition que les valeurs annulant cette dérivée ne constituent pas un sous-intervalle de I. (C'est le cas, par exemple, de la fonction f telle que $f(x) = x + \sin x$ (figure 1).)

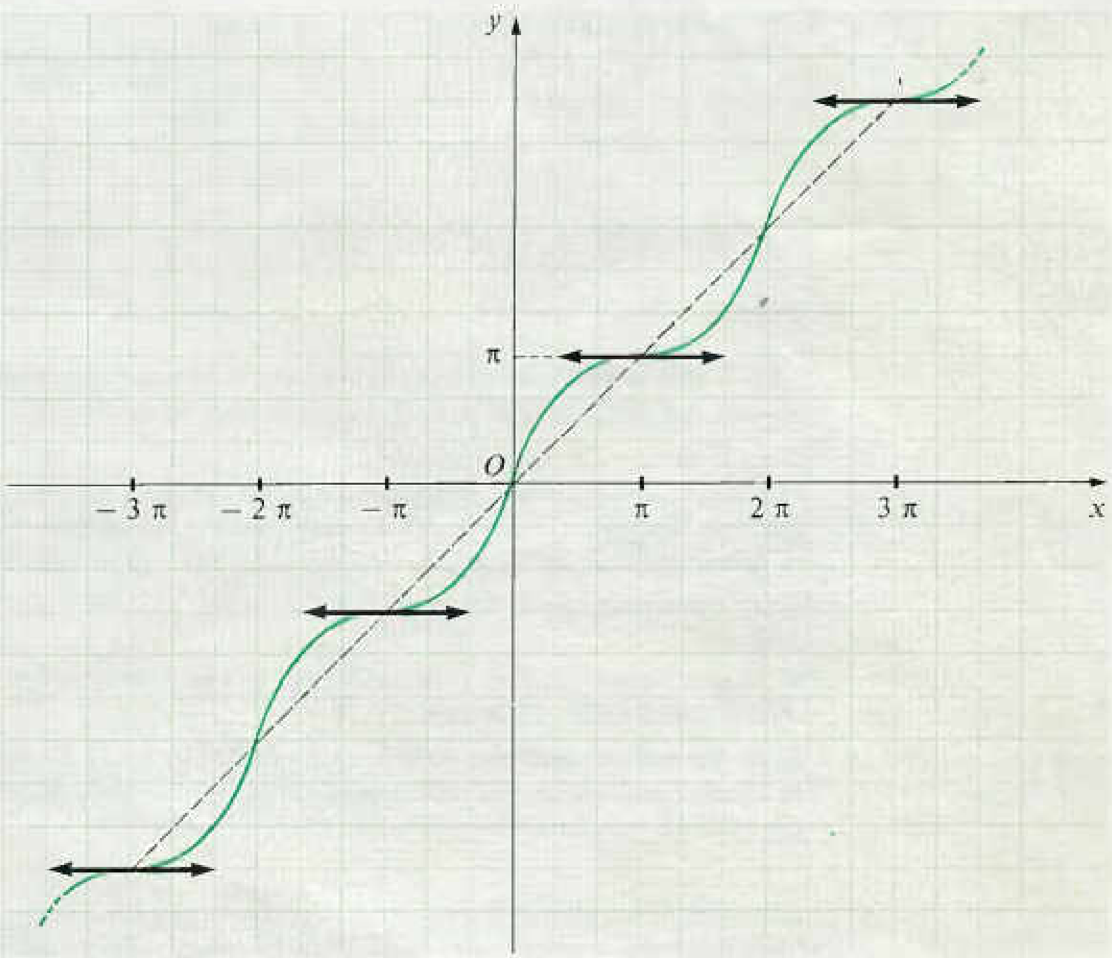


Figure 1

Dans le cas où la dérivée f' d'une fonction strictement croissante s'annule en x_0, on est en présence d'un point d'inflexion à tangente parallèle à (Ox) (figure 1).
On aurait bien évidemment les mêmes résultats avec une fonction décroissante.

• Les propriétés ci-dessus ne sont pas valables pour une fonction définie sur un ensemble qui n'est pas un intervalle. Par exemple, soit $f(x) = \frac{1}{x}$. On a $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, et la fonction dérivée est négative pour tout x de l'ensemble de définition $\mathbb{R}^*$. Cependant cette fonction n'est pas décroissante sur $\mathbb{R}^*$ (par exemple $f(-1) < f(1)$).

De même, la fonction g telle que $g(x) = \frac{|x|}{x}$ a une dérivée nulle pour tout x de $\mathbb{R}^*$ mais elle n'est pas constante sur $\mathbb{R}^*$.

• Les règles de calcul des fonctions dérivées sont récapitulées dans le tableau ci-contre, où u et v désignent des fonctions définies sur un intervalle convenable.

Exercices d'application

1. Déterminer la fonction dérivée f', et comparer son ensemble de définition D' avec l'ensemble de définition D de f :

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$;

b) $f(x) = e^{\frac{2x}{x^2-1}}$;

c) $f(x) = x \ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right|$;

d) $f(x) = \left(\ln \frac{x+1}{x-1}\right)\left(\ln \frac{x-1}{x+1}\right)$;

e) $f(x) = (1 + \cos x)^{\sin x}$;

f) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$.

2. On considère la fonction polynôme P telle que :

$$P(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4.$$

Déterminer les fonctions dérivées successives $\frac{d^nP}{dx^n}$, pour $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
Calculer les coefficients a, b, c, d et e en fonction des valeurs prises en 0 par ces fonctions dérivées.

3. FONCTIONS DE PLUSIEURS VARIABLES. DÉRIVÉES PARTIELLES

★ Activité

L'aire S et le volume V d'une boîte de conserve cylindrique dépendent de son rayon R et de sa hauteur h. C'est pourquoi nous les noterons S(R, h) et V(R, h).

*1° **a)** Calculer S(R, h) et V(R, h).*
***b)** Étudier et représenter graphiquement les fonctions S(5, h) et V(5, h). Préciser leurs fonctions dérivées, et représenter les deux courbes sur le même graphique.*
***c)** Même question qu'au **b)** pour les fonctions S(R, 10) et V(R, 10).*

*2° **a)** On suppose que le volume de la boîte est de* 100π *(en* cm^3*). En déduire h en fonction de R.*
***b)** Étudier la fonction S(R, h(R)) qui donne l'aire de la boîte en fonction du rayon R, pour un volume constant de* $100\pi\ \text{cm}^2$.

*3° **a)** On suppose que l'aire de la boîte est de* 80π *(en* cm^2*). En déduire h en fonction de R.*
***b)** Étudier la fonction V(R, h(R)) qui donne le volume de la boîte en fonction du rayon R, pour une aire constante de* $80\pi\ \text{cm}^2$.

• L'étude de nombreux phénomènes nécessite la prise en compte de plusieurs grandeurs. C'est ainsi par exemple que l'aire d'un rectangle dépend de sa longueur L et de sa largeur l. De même, le volume d'un cylindre de révolution dépend de sa hauteur h et du rayon R de sa base.

	FORMULES GÉNÉRALES		CAS PARTICULIERS	
RÈGLES DE CALCUL	f	f'	f	f'
$(a, b) \in \mathbb{R}^2$	$au + bv$	$au' + bv'$		
	uv	$u'v + uv'$	u^2	$2uu'$
Si $v(x) \neq 0$	$\dfrac{u}{v}$	$\dfrac{u'v - uv'}{v^2}$	$\dfrac{1}{v}$	$-\dfrac{v'}{v^2}$
	$u \circ v$	$(u' \circ v)v'$	u^α	$\alpha u^{\alpha-1}u'$
			$\sqrt{u}$	$\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
Fonction réciproque	u^{-1}	$\dfrac{1}{u' \circ u^{-1}}$		
FONCTIONS USUELLES	$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$\alpha \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}$	x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$	c	0
			x	1
			$\dfrac{1}{x}$	$-\dfrac{1}{x^2}$
			$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$
	$\sin u(x)$	$u'(x) \cos u(x)$	$\sin x$	$\cos x$
			$\sin(ax + b)$	$a \cos(ax + b)$
	$\cos u(x)$	$-u'(x) \sin u(x)$	$\cos x$	$-\sin x$
			$\cos(ax + b)$	$-a \sin(ax + b)$
	$\tan u(x)$	$u'(x)[1 + \tan^2 u(x)]$	$\tan x$	$1 + \tan^2 x = \dfrac{1}{\cos^2 x}$
		$= \dfrac{u'(x)}{\cos^2 u(x)}$	$\tan(ax + b)$	$a[1 + \tan^2(ax + b)]$
				$= \dfrac{a}{\cos^2(ax + b)}$
	$\ln\lvert u(x)\rvert$	$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln\lvert x\rvert$	$\dfrac{1}{x}$
			$\ln kx$	$\dfrac{1}{x}$
			$\log_a x$	$\dfrac{1}{x \ln a}$
	$e^{u(x)}$	$u'(x) e^{u(x)}$	e^x	e^x
			e^{kx}	$k\, e^{kx}$
			a^x	$a^x \ln a$

• Une fonction f de deux (resp. trois) variables réelles est une application d'un sous-ensemble D de $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$) dans $\mathbb{R}$. On note simplement :

$$f((x, y)) = f(x, y) \quad (\text{resp. } f((x, y, z)) = f(x, y, z)).$$

• Soit f une fonction de deux variables réelles x et y. Pour chaque valeur y_0 de y, la fonction $[x \mapsto f(x, y_0)]$ est une fonction numérique d'une variable réelle. De même, pour chaque valeur x_0 de x, la fonction $[y \mapsto f(x_0, y)]$ est une fonction numérique d'une variable réelle. Ces fonctions peuvent ou non être dérivables. On donne la définition suivante :

DÉFINITION	**Soit f une fonction de deux variables réelles x et y. On appelle *dérivée partielle* de f par rapport à la première variable, et l'on note f'_x, ou $\frac{\partial f}{\partial x}$, la dérivée de la fonction d'une variable $[x \mapsto f(x, y)]$, où y est considérée comme constante.** **On définit de même la dérivée f'_y $\left(\text{ou } \frac{\partial f}{\partial y}\right)$ de f par rapport à la seconde variable.**

REMARQUES :

1° Si f est une fonction de trois variables réelles x, y et z, on définit de même :

• $f'_x = \dfrac{\partial f}{\partial x}$: dérivée de $[x \mapsto f(x, y, z)]$, avec y et z constantes;

• $f'_y = \dfrac{\partial f}{\partial y}$: dérivée de $[y \mapsto f(x, y, z)]$, avec x et z constantes;

• $f'_z = \dfrac{\partial f}{\partial z}$: dérivée de $[z \mapsto f(x, y, z)]$, avec x et y constantes.

2° Si f est une fonction de deux variables, on a :

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$
$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h} = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}.$$

3° Les fonctions f'_x, f'_y, f'_z sont des fonctions de plusieurs variables qui peuvent admettre à leur tour des dérivées partielles.

Exemples :

1° Soit $f(x, y) = x^2y$. On a : $f'_x(x, y) = 2xy$ et $f'_y(x, y) = x^2$.

2° Soit $f(x, y, z) = x \ln y + \dfrac{xy}{z} - \cos z$. On a :

$$f'_x(x, y, z) = \ln y + \frac{y}{z}; \quad f'_y(x, y, z) = \frac{x}{y} + \frac{x}{z}; \quad f'_z(x, y, z) = -\frac{xy}{z^2} + \sin z.$$

• Exercices d'application

3. Déterminer les dérivées partielles de la fonction f.

a) $f(x, y) = x^3y - y^3x$;

b) $f(x, y, z) = \ln(x + y + z^2)$;

c) $f(x, t) = 2xe^{-t} + 3t$;

d) $f(\rho, \theta) = \rho e^{\theta}$;

e) $f(x, y, z) = (\sin x)^{yz}$;

f) $f(x, y) = \ln \tan \dfrac{x}{y}$.

4. On donne :

$$f(x, y) = x^3y^3 + y\sqrt{x} + \cos xy^2.$$

a) Déterminer $f'_x(x, y)$ et $f'_y(x, y)$.

b) Déterminer :

$(f'_x)'_x$ que l'on note $f''_{x^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$;

$(f'_x)'_y$ que l'on note $f''_{xy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$;

$(f'_y)'_x$ que l'on note $f''_{yx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$;

$(f'_y)'_y$ que l'on note $f''_{y^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

Fonctions composées

Soit f une fonction de deux variables x et y, et soit $x = \varphi(t)$ et $y = \psi(t)$. La fonction g définie par $g(t) = f(\varphi(t), \psi(t))$ est une fonction d'une variable.
Soit t_0 un réel tel que φ et ψ soient dérivables en t_0, et tel que la fonction f admette des dérivées partielles continues en $x_0 = \varphi(t_0)$ et $y_0 = \psi(t_0)$.
Dans ces conditions, étudions la dérivabilité de g en t_0. On a :

$$\begin{aligned}\frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} &= \frac{f(\varphi(t), \psi(t)) - f(\varphi(t_0), \psi(t_0))}{t - t_0} \\ &= \frac{f(\varphi(t), \psi(t)) - f(\varphi(t_0), \psi(t))}{t - t_0} + \frac{f(\varphi(t_0), \psi(t)) - f(\varphi(t_0), \psi(t_0))}{t - t_0}\end{aligned}$$

Or : $$\frac{f(\varphi(t), \psi(t)) - f(\varphi(t_0), \psi(t))}{t - t_0} = \frac{f(\varphi(t), \psi(t)) - f(\varphi(t_0), \psi(t))}{\varphi(t) - \varphi(t_0)} \cdot \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0}.$$

Les fonctions φ et ψ étant dérivables en t_0 sont continues en t_0. Donc :

$$\lim_{t \to t_0} \varphi(t) = \varphi(t_0) \quad ; \quad \lim_{t \to t_0} \psi(t) = \psi(t_0).$$

Nous admettrons qu'il en résulte que :

$$\lim_{t \to t_0} \frac{f(\varphi(t), \psi(t)) - f(\varphi(t_0), \psi(t))}{t - t_0} = f'_x(\varphi(t_0), \psi(t_0)) \cdot \varphi'(t_0).$$

On prouve de même que :

$$\lim_{t \to t_0} \frac{f(\varphi(t_0), \psi(t)) - f(\varphi(t_0), \psi(t_0))}{t - t_0} = f'_y(\varphi(t_0), \psi(t_0)) \cdot \psi'(t_0).$$

Il en résulte que :

$$g'(t_0) = f'_x(\varphi(t_0), \psi(t_0)) \cdot \varphi'(t_0) + f'_y(\varphi(t_0), \psi(t_0)) \cdot \psi'(t_0).$$

Soit : $$\frac{dg}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Exemple :

Supposons que $f(x, y) = xy$. On a alors $g(t) = \varphi(t) \cdot \psi(t)$.
Or : $f'_x(x, y) = y$ et $f'_y(x, y) = x$. Donc : $y'(t) = \psi(t)\,\varphi'(t) + \varphi(t)\,\psi'(t)$.
On retrouve ainsi la règle de dérivation du produit.

• Exercices d'application

5. On pose $f(x, y) = x^y$. Déterminer les fonctions dérivées partielles f'_x et f'_y.
En déduire la dérivée de la fonction g définie par $g(t) = (\cos t)^{\sin t}$.

6. Soit f une fonction de deux variables. Supposons que la relation $f(x, y) = 0$ définit une fonction φ : $y = \varphi(x)$.
a) Déterminer la dérivée de la fonction φ, en utilisant le fait que $f(x, \varphi(x)) = 0$, et en fonction des dérivées partielles f'_x et f'_y.
b) Appliquer à $e^y - e^x + xy = f(x, y) = 0$.

III – ACCROISSEMENTS FINIS

1. INÉGALITÉ DES ACCROISSEMENTS FINIS

• Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ ($a < b$), et dérivable sur l'intervalle $]a, b[$. On suppose en outre que f' est bornée sur l'intervalle $]a, b[$, c'est-à-dire qu'il existe des réels m et M tels que, pour tout x de $]a, b[$, on ait :

$$m \leqslant f'(x) \leqslant M.$$

Considérons alors les fonctions g et k définies sur $[a, b]$ par :

$$g(x) = f(x) - mx \quad ; \quad k(x) = f(x) - Mx.$$

On a : $$g'(x) = f'(x) - m \quad ; \quad k'(x) = f'(x) - M.$$

Compte tenu des hypothèses, il en résulte que :
– pour tout x de $]a, b[$, $g'(x) \geqslant 0$, donc g est croissante sur $]a, b[$;
– pour tout x de $]a, b[$, $k'(x) \leqslant 0$, donc k est décroissante sur $]a, b[$.
D'autre part, puisque g est somme de deux fonctions continues en a, elle est elle-même continue en a, et : $\lim\limits_{x \to a} g(x) = g(a)$.
Supposons qu'il existe un x_0 de $]a, b[$ tel que $g(a) > g(x_0)$. Soit alors $\varepsilon = g(a) - g(x_0)$.
Compte tenu de la continuité de g en a, il existerait alors un réel strictement positif α tel que, si x est élément de $[a, a + \alpha[$, alors $|g(a) - g(x)| < \varepsilon$, c'est-à-dire :

$$g(x) \in]g(a) - \varepsilon, g(a) + \varepsilon[.$$

Or : $g(a) - \varepsilon = g(x_0)$. Par suite, pour tout x de $[a, a + \alpha[$, on aurait : $g(x) > g(x_0)$.
Ce résultat est contradictoire avec le fait que g est croissante sur $]a, b[$, car l'intervalle $[a, a + \alpha[$ contient des éléments de l'intervalle $]a, b[$.
Il est donc absurde de supposer que $g(a)$ est strictement supérieur à $g(x_0)$.
Il en résulte que g est croissante sur $[a, b[$
On démontre ainsi, et de manière analogue, que g est croissante sur $[a, b]$, et k, décroissante sur $[a, b]$[1].

Il en résulte que : $$g(b) \geqslant g(a) \quad \text{et} \quad k(b) \leqslant k(a),$$
c'est-à-dire $$f(b) - mb \geqslant f(a) - ma,$$
et : $$f(b) - Mb \leqslant f(a) - Ma.$$
Par suite : $$m \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant M.$$

THÉORÈME 1

Soit f une fonction continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$ (avec $a < b$), et dérivable sur l'intervalle $]a, b[$.
Si de plus il existe des réels m et M tels que, pour tout x de $]a, b[$:

$$m \leqslant f'(x) \leqslant M,$$

alors : $$m \leqslant \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leqslant M.$$

[1] Le lecteur pourra admettre ce résultat, en première lecture.

Interprétation graphique

Soit C la courbe représentative dans un repère cartésien de la fonction f, soit A le point d'abscisse a de C, et B le point d'abscisse b de C. Le réel $\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$ est le coefficient directeur de la droite (AB). Le théorème **1** ci-dessus permet donc de conclure que la droite (AB) se situe entre les droites de coefficients directeurs m et M, contenant A. Comme on peut reprendre le raisonnement en faisant varier le point B, on peut conclure que toute la courbe C se trouve entre ces deux droites.
On tiendrait le même raisonnement à partir des droites de coefficients directeurs m et M et contenant B.
En définitive, le théorème **1** permet de conclure que la courbe C se trouve toute entière dans un certain parallélogramme (figure 2).

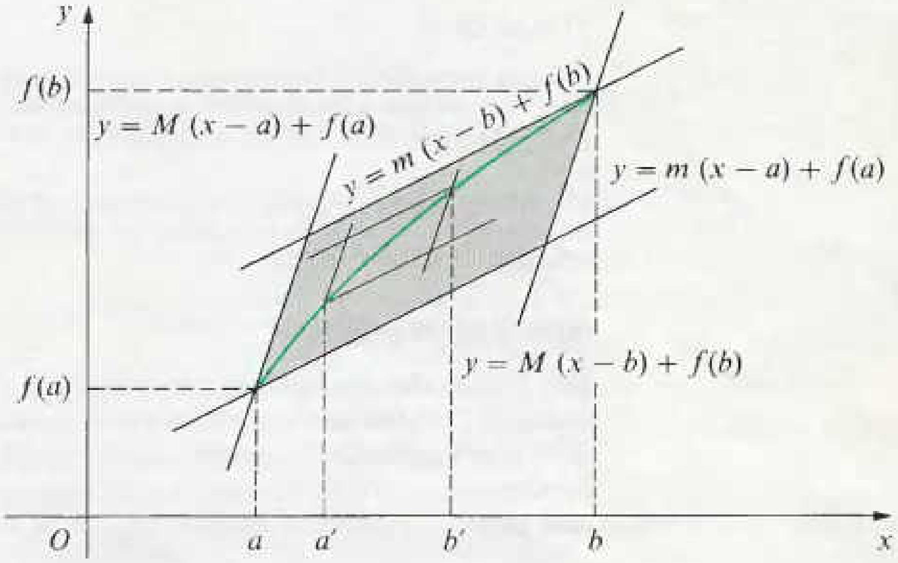


Figure 2

REMARQUES :

1° Il faut constater que les points de la courbe C dont les abscisses sont comprises entre a' et b' se trouvent tous dans un parallélogramme analogue, et ce, quels que soient les réels a' et b' de l'intervalle $[a, b]$.

2° On peut également remarquer que, dans le cas où l'on connaît le signe de la dérivée, une interprétation analogue est possible, avec $m = 0$ et $M = +\infty$ pour une dérivée positive, et $m = -\infty$ et $M = 0$ pour une dérivée négative, à condition de considérer que les droites parallèles à (Oy) ont un coefficient directeur infini (figure 3). On peut également envisager une interprétation de ce type lorsque la dérivée est simplement majorée, ou lorsqu'elle est simplement minorée.

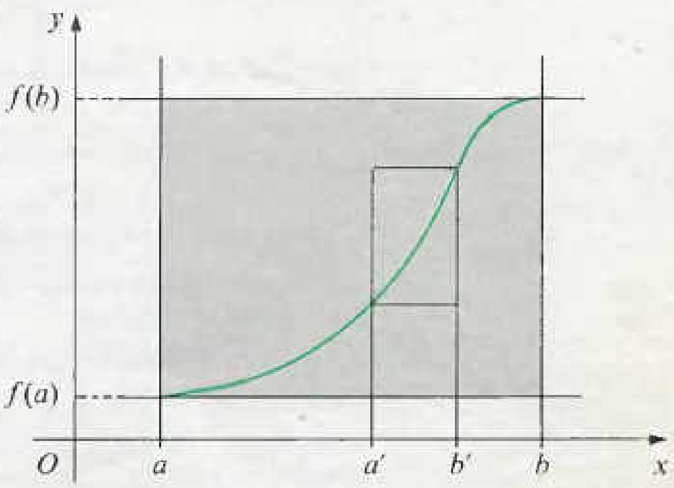


Figure 3 ▶

2. THÉORÈME DE ROLLE

Dans le cas où $f(a) = f(b)$, et sous les conditions du théorème **1**, ce théorème permet de conclure que m et M sont de signes contraires. Si la fonction f' est continue, on peut donc conclure qu'il existe un réel c de l'intervalle $]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.
Le résultat ci-dessous est plus général, car il ne suppose pas que la fonction f' est continue. (Voir Activité préliminaire **3**).

THÉORÈME 2

Théorème de Rolle :
Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle fermé borné $[a, b]$, et dérivable sur l'intervalle $]a, b[$. Si $f(a) = f(b)$, alors il existe un réel c de l'intervalle $]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

REMARQUES :

1° Le *théorème de Rolle* indique que, pour une fonction dérivable sur un intervalle, entre deux zéros de la fonction, il existe au moins un zéro de la dérivée. (Notons qu'il peut en exister plusieurs, et que, parmi ces zéros de la dérivée, il en existe au moins un qui correspond à un extrémum de la fonction f.)

2° L'interprétation cinématique du *théorème de Rolle* pour un mobile se déplaçant sur une droite de façon que sa vitesse à chaque instant soit définie, est que le mobile M ne peut rebrousser chemin sans que sa vitesse s'annule.

Interprétation graphique

Soit Γ la courbe représentative de la fonction f dans un repère cartésien. Soit A et B les points de Γ d'abscisses respectives a et b. Le *théorème de Rolle* permet de conclure que, si f est continue sur $[a, b]$, et dérivable sur $]a, b[$, et si de plus $f(a) = f(b)$, alors il existe *au moins* un point C de Γ compris strictement entre A et B, et tel que la tangente en C à Γ soit parallèle à l'axe des abscisses (figure 4), c'est-à-dire parallèle à (AB).

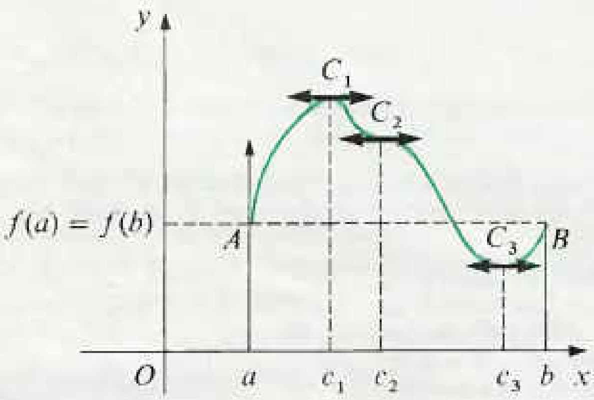


Figure 4

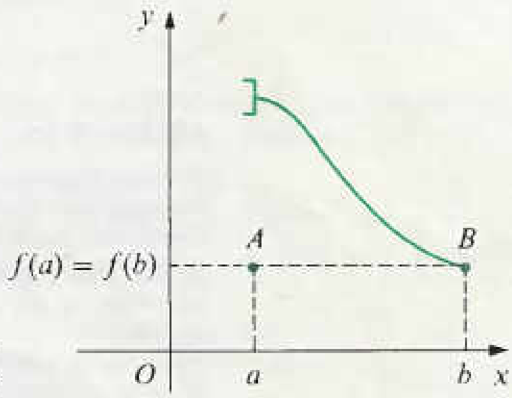


Figure 5

- La figure 4 illustre également le fait que la dérivabilité en a n'est pas nécessaire.
- La figure 5 illustre le fait que la condition de continuité de f sur $[a, b]$ est indispensable pour pouvoir conclure.
- La figure 6 illustre le fait que la condition de dérivabilité sur $]a, b[$ est indispensable pour pouvoir conclure.
- La figure 7 illustre le fait que la condition $f(a) = f(b)$ est indispensable pour pouvoir conclure.

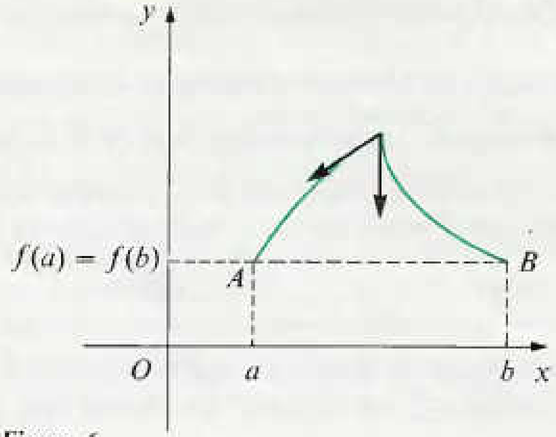


Figure 6

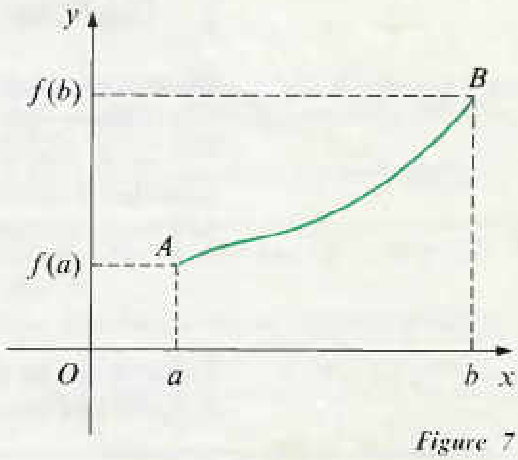


Figure 7

• Les conditions du *théorème de Rolle* sont des conditions suffisantes pour qu'il existe un point C de l'arc $\widehat{AB}$ où la courbe admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses. Mais ces conditions ne sont pas nécessaires, ainsi que l'illustre la figure 8.

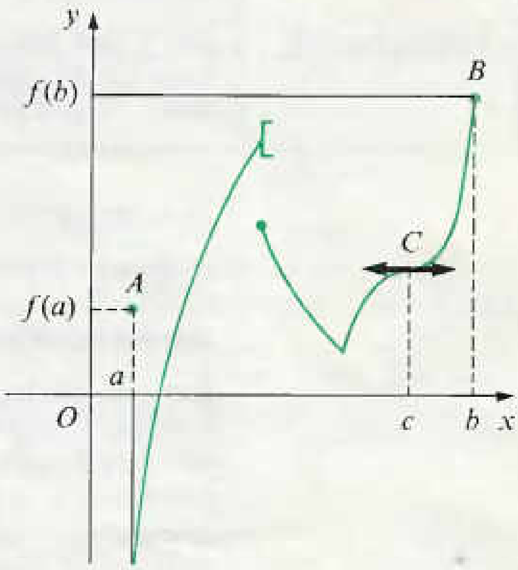


Figure 8 ▸

Exercices d'application

7. Préciser si la fonction f satisfait sur l'intervalle $[a, b]$ aux conditions du *théorème de Rolle*. Si oui, déterminer explicitement les réels c tels que $f'(c) = 0$. Dans tous les cas, illustrer graphiquement.

a) $f(x) = e^{|x|}$, $\quad x \in [-1, 1]$;

b) $f(x) = e^{x^2}$, $\quad x \in [-1, 1]$;

c) $f(x) = \ln(1 + |x|)$, $\quad x \in [-1, 1]$;

d) $f(x) = \tan x$, $\quad x \in \left[0, \dfrac{\pi}{4}\right[$,

puis $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$;

e) $f(x) = \cot x$, $\quad x \in \left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{\pi}{2}\right]$,

$f(x) = \sin \dfrac{1}{x}$, $\quad x \in \left[\dfrac{4}{33\pi}, \dfrac{4}{\pi}\right]$.

8. Soit f une fonction non constante, continue sur un intervalle fermé borné $[a, b]$, dérivable sur l'intervalle $]a, b[$, et telle que :

$$f(a) = f(b) = 0.$$

Soit k un réel. En appliquant le *théorème de Rolle* à la fonction g définie par :

$$g(x) = e^{-kx} f(x),$$

prouver qu'il existe un réel c, élément de $]a, b[$ tel que :

$$\frac{f'(c)}{f(c)} = k.$$

9. Soit f une fonction non constante, continue sur un intervalle $[a, +\infty[$, dérivable sur l'intervalle $]a, +\infty[$, et telle que :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = f(a).$$

a) Soit x_0 un élément de $]a, +\infty[$ tel que $f(x_0) \neq f(a)$, soit y un réel strictement compris entre $f(x_0)$ et $f(a)$. Prouver qu'il existe deux réels x_1 et x_2 tels que :

$$f(x_1) = f(x_2) = y.$$

b) En déduire qu'il existe un réel c de l'intervalle $]a, +\infty[$ tel que $f'(c) = 0$.

c) Énoncer le résultat obtenu, et illustrer graphiquement.

d) Étendre de façon analogue le *théorème de Rolle* à une fonction f continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, et tel que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

3. THÉORÈME DES ACCROISSEMENTS FINIS

Dans le cas général, où $f(a)$ et $f(b)$ sont quelconques, le théorème **1** permet de conclure que $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ est compris entre les bornes m et M de la dérivée f'.

Dans le cas où cette dérivée est continue, elle prend toutes les valeurs comprises entre ses bornes, et par conséquent, il existe un réel c de l'intervalle $]a, b[$ tel que :

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Le *théorème de Rolle* permet de démontrer que ce résultat est valable même si on ne suppose pas que la fonction f' est continue. On obtient ainsi le résultat suivant :

THÉORÈME 3

Théorème des accroissements finis :

Soit f une fonction définie et continue sur l'intervalle fermé borné $[a, b]$, et dérivable sur l'intervalle $]a, b[$. Il existe alors un réel c de l'intervalle $]a, b[$ tel que : $f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$.

REMARQUE :

Le *théorème de Rolle* apparaît comme cas particulier du théorème **3**, dans le cas où $f(a) = f(b)$.

Interprétation graphique

Soit Γ la courbe représentative de la fonction f dans un repère cartésien. Soit A et B les points de Γ d'abscisses respectives a et b. Le *théorème des accroissement finis* permet de conclure que, si f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$, alors il existe *au moins* un point C de Γ, compris strictement entre A et B, et tel que la tangente à Γ en C soit parallèle à la droite (AB) $\left(\text{dont le coefficient directeur est } \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)$ (figure 9).

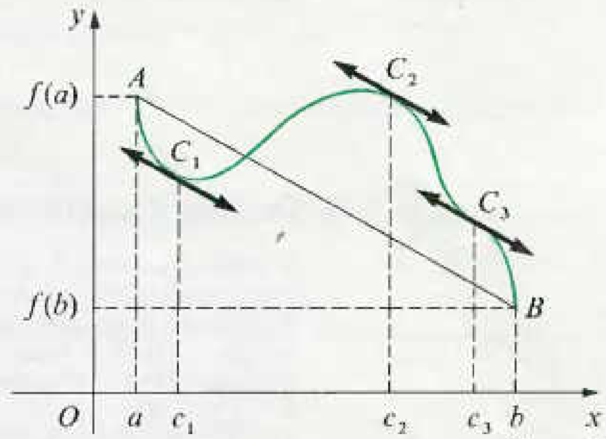


Figure 9

★ Activité

S'inspirer des figures 5 à 8 pour illustrer le fait que les conditions du théorème **3** *sont indispensables pour pouvoir conclure, mais qu'elles ne constituent qu'un ensemble de conditions suffisant pour la conclusion, mais non nécessaire.*

Autre forme de la formule des accroissements finis

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, avec $a < b$, et dérivable sur l'intervalle $]a, b[$. Quels que soient les réels a' et b' tels que $a \leqslant a' < b' \leqslant b$, la fonction f est continue sur $[a', b']$ et dérivable sur $]a', b'[$. D'après le théorème **3**, il existe alors un réel c de l'intervalle $]a', b'[$ tel que : $f(b') - f(a') = (b' - a')f'(c)$.

Posons $a' = x_0$ et $b' - a' = h$. Tout réel c de l'intervalle $]a', b'[$ peut s'écrire $c = x_0 + \theta h$, où θ est un réel de l'intervalle $]0, 1[$.

On obtient alors le résultat suivant :

THÉORÈME 4	**Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, avec $a < b$, et dérivable sur l'intervalle $]a, b[$. Alors, pour tout réel x_0 de l'intervalle $[a, b]$, et pour tout h tel que $x_0 + h$ soit élément de $[a, b]$, il existe un réel θ de l'intervalle $]0, 1[$ tel que :** $$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0 + \theta h).$$

Exercices d'application

10. Préciser si la fonction f satisfait sur l'intervalle $[a, b]$ aux conditions du *théorème des accroissements finis*. Si oui, déterminer explicitement les réels c tels que

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(c).$$

Dans tous les cas, illustrer graphiquement.

a) $f(x) = x^2 - 8x + 12$, $x \in [0, 1]$;

b) $f(x) = x^3 - 3x + 2$, $x \in [1, 2]$;

c) $f(x) = 2x + \sin x$, $x \in [0, \pi]$;

d) $f(x) = \sqrt{|1 - x|}$, $x \in [0, 2]$;

e) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 4} - 1$, $x \in [0, 2]$; $x \in [-2, 0]$;

f) $\begin{cases} f(x) = 2x, & x \in [0, 1] \\ f(x) = x^2 + 1, & x \in]1, 2] \end{cases}$ $x \in [0, 2]$;

g) $\begin{cases} f(x) = 3x^2, & x \in [0, 1] \\ f(x) = x^3 + 2, & x \in]1, 2] \end{cases}$ $x \in [0, 2]$.

11. Appliquer le *théorème des accroissements finis* sous la forme du théorème **4**, à la fonction f, entre x_0 et $x_0 + h$.

Préciser la fonction θ dans chaque cas.

a) $f(x) = ax^2 + bx + c$. Interpréter le résultat obtenu.

b) $f(x) = \ln(1 + x)$, avec $x_0 = 0$;

c) $f(x) = a + bx + c\,e^{kx}$. Montrer que θ ne dépend pas de x_0. Interpréter graphiquement.

IV – APPLICATIONS

Les théorèmes rencontrés au § **III** ci-dessus comportent de nombreuses applications pratiques et théoriques. Nous nous bornerons à explorer quelques applications du théorème **1**, lequel peut être, à de nombreux égards, considéré comme fondamental. Il permet de préciser de nombreux encadrements.

1. CALCUL NUMÉRIQUE

Connaissant un encadrement des valeurs de la dérivée de f sur l'intervalle $[a, b]$, les théorèmes **1** et **3** permettent de préciser un encadrement de $f(b)$, connaissant $f(a)$.

Exercice résolu

Donner un encadrement de $\sqrt{10\,001}$, en utilisant le théorème des accroissements finis.

On pose $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 10\,000$, $b = 10\,001$.

On a donc $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, et par suite, pour tout x de $[a, b]$:

$$\frac{1}{2\sqrt{10\,001}} < f'(x) < \frac{1}{200}.$$

Il en résulte donc que : $\dfrac{1}{2\sqrt{10\,001}} < \sqrt{10\,001} - 100 < \dfrac{1}{200}$.

Or : $\sqrt{10\,001} < 101$. Donc : $\dfrac{1}{202} < \dfrac{1}{2\sqrt{10\,001}}$. Par suite :

$$100 + \frac{1}{202} < \sqrt{10\,001} < 100 + \frac{1}{200}.$$

Soit : $$100{,}004\,95 < \sqrt{10\,001} < 100{,}005.$$

Exercice d'application

18. En utilisant le *théorème des accroissements finis*, préciser un encadrement de chacun des réels suivants :

a) $\ln(e^8 - 1)$; *b)* $\lg 10\,001$; *c)* $\cos 48°$. (*Attention à la dérivée de la fonction* $[x \mapsto \cos x°]$.)

2. APPLICATION À DES RECHERCHES DE LIMITES

Exercices résolus

I — *Appliquer le théorème des accroissements finis à la fonction* ln *entre deux entiers* n *et* $n + 1$ *strictement positifs.*

En déduire que la suite (S_n) *définie par* $S_n = 1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dots + \dfrac{1}{n}$ *diverge vers* $+\infty$.

Soit $f(x) = \ln x$. Entre $a = n$ et $b = n + 1$, la fonction f satisfait aux conditions du théorème **1.**

On a donc : $$\frac{1}{n+1} < \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}.$$

En effectuant la somme membre à membre des inégalités analogues pour les valeurs 1 à $n - 1$, on obtient :

$$S_{n+1} - 1 < \ln(n+1) < S_n.$$

Or : $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(n+1) = +\infty$. Il en résulte que : $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$.

II — *En utilisant la formule des accroissements finis sous la forme du théorème* **4** *avec* $x_0 = 0$, *étudier la limite en* 0 *de la fonction* f *telle que* $f(x) = \dfrac{\ln \cos x}{x}$.

Soit $g(x) = \ln \cos x$. On a : $g'(x) = -\dfrac{\sin x}{\cos x}$.

Donc : $g(x) = g(0) + xg'(\theta x)$, avec $\theta \in]0, 1[$.

Or : $g(0) = \ln 1 = 0$. Il en résulte que :

$$f(x) = \frac{xg'(\theta x)}{x} = g'(\theta x).$$

Comme θ est borné : $\lim\limits_{x \to 0} \theta x = 0$, et comme g' est continue en 0 :

$$\lim_{x \to 0} f(x) = g'(0) = 0.$$

Exercices d'application

13. En utilisant le *théorème des accroissements finis*, appliqué à une fonction bien choisie, étudier le comportement en $+\infty$ de la suite (s_n) définie par :

$$s_n = \frac{1}{2\ln 2} + \frac{1}{3\ln 3} + \dots + \frac{1}{n\ln n} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k\ln k}.$$

14. Étudier la limite de f en 0 :

a) $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{\sin x}$;

b) $f(x) = \dfrac{x - \sin x}{x - \tan x}$.

3. THÉORÈME DE PROLONGEMENT DE LA DÉRIVÉE

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ (avec $a < b$), et admettant une fonction dérivée définie sur l'intervalle $]a, b[$. Supposons en outre que la fonction f' admet en a une limite l ($l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$).
D'après le théorème **4**, pour tout h de l'intervalle $]0, \ b-a[$, il existe un réel θ de l'intervalle $]0, 1[$ tel que :

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a+\theta h).$$

Il en résulte que : $$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a+\theta h).$$

Or : $\lim_{h\to 0} (a+\theta h) = a.$

Donc : $\lim_{h\to 0} f'(a+\theta h) = \lim_{x\to a} f'(x) = l.$

Par suite : $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = l.$

Ou encore, en posant : $h = x - a$: $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l.$

THÉORÈME 5

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, et dérivable sur l'intervalle $]a, b[$. Si la fonction dérivée f' admet au point a une limite l, alors on a également : $\displaystyle\lim_{x\to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l.$

REMARQUES :

1° Il va de soi que le résultat ci-dessus s'applique également au point b.

2° On peut démontrer le théorème **5** en utilisant seulement le théorème 1, et en constatant que, si $m(h)$ et $M(h)$ désignent respectivement les bornes inférieure et supérieure de la fonction f' sur l'intervalle $]a, a+h[$, alors on a $\lim_{h\to 0} m(h) = \lim_{h\to 0} M(h) = \lim_{x\to a} f'(x) = l.$

3° Il est important de constater que la réciproque du théorème **5** est fausse. Il peut en effet se faire qu'une fonction f soit dérivable en a sans que la dérivée n'admette de limite en a. Soit par exemple la fonction f définie par $f(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{x}$ et $f(0) = 0$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. On a en effet :

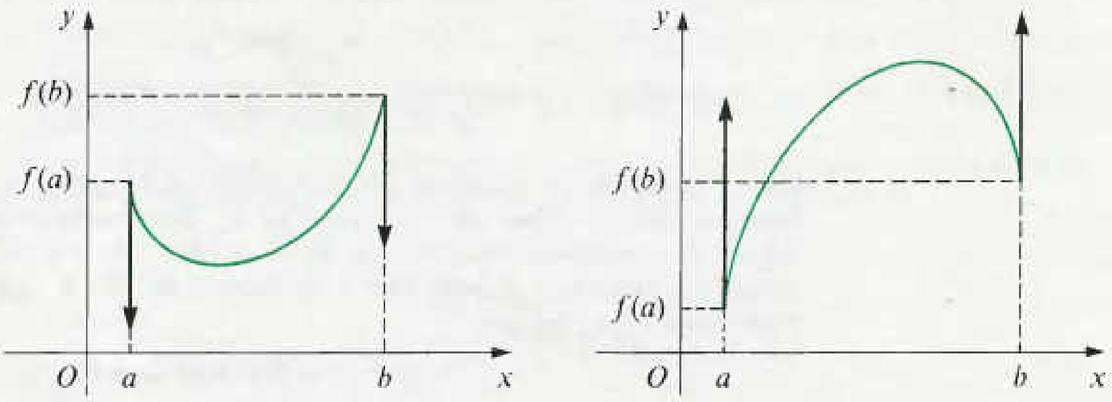
– pour $x \neq 0$, $f'(x) = 2x \sin \dfrac{1}{x} - \cos \dfrac{1}{x}$;

– pour $x = 0$, $f'(0) = \displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x\to 0} x \sin \frac{1}{x} = 0.$

Cependant la fonction f' n'admet pas de limite en 0.

Interprétation graphique

Soit Γ la courbe représentative d'une fonction f, continue sur un intervalle $[a, b]$ et dérivable sur l'intervalle $]a, b[$. Alors, si la fonction dérivée f' admet une limite l en a, la courbe Γ admet au point A de coordonnées $(a, f(a))$, une tangente de coefficient directeur l, si l est un réel, et une tangente parallèle à (Oy) si l est infini (figure 10).



a Cas où $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to b} f'(x) = +\infty$

b Cas où $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to b} f'(x) = -\infty$

Figure 10

■ Exercice résolu

Étudier, au voisinage de 0, la courbe représentative de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x \ln x - x}{x + 1}.$$

On a : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$; $f'(x) = \dfrac{x + \ln x}{(x+1)^2}$. Et : $\lim\limits_{x \to 0} f'(x) = -\infty$.

Il en résulte que la courbe représentative de f est tangente à l'origine à l'axe des ordonnées.

Remarquons que l'on a : $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{\ln x - 1}{x + 1}$. Et : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$.

REMARQUE :

Pour étudier la limite en a de la fonction $\left[x \mapsto \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}\right]$, on dispose de deux méthodes (étude directe ou étude de la limite de $f'(x)$ en $x = a$). On choisira la plus rapide, ou la plus simple.

● Exercice d'application

15. Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite l en a de la fonction f, puis la limite en a de la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{f(x) - l}{x - a}$.

a) $f(x) = \ln |\cos x|$, $\quad a = 0$;

b) $f(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}}$, $\quad a = 0^-$;

c) $f(x) = \dfrac{x^2}{4}(2 \ln x - 3)$, $\quad a = 0^+$;

d) $f(x) = e^{\tan x} \cos x$, $\quad a = \dfrac{\pi}{2}^+$.

EXERCICES ET PROBLÈMES

DÉRIVÉES ET DÉRIVÉES PARTIELLES

Dans les exercices **1** *à* **12**, *on demande de calculer la dérivée de la fonction f.*

1. $f(x) = \dfrac{\ln \sin x}{\ln \cos x}$. **2.** $f(x) = \sin x \, e^{\cos x}$.

3. $f(x) = \sin^2 x \sin x^2$.

4. $f(x) = \sqrt{1 + \tan^2 x + \tan^4 x}$.

5. $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x + \sqrt{x}}}$.

6. $f(x) = \ln \dfrac{1}{x + \sqrt{x^2 - 1}}$.

7. $f(x) = \ln x + \sqrt{x^2 - 1} - \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

8. $f(x) = \ln (e^x \cos x + e^{-x} \sin x)$.

9. $f(x) = \left(1 + \tan x \tan \dfrac{x}{2}\right) \cos x$.

10. $f(x) = \dfrac{(1 + \sin x)^2}{\sin x(1 - \sin x)}$.

11. $f(x) = \sqrt{\dfrac{1 + \sin x}{1 - \sin x}}$. **12.** $f(x) = \sqrt{\dfrac{x \sin x}{1 - \cos x}}$.

Soit f^{-1} la fonction réciproque de la fonction f (on suppose établie l'existence de cette fonction réciproque sur un intervalle I). Dans les exercices **13** *à* **16**, *on demande de préciser la dérivée de la fonction f^{-1} (f^{-1} figure dans l'expression de $(f^{-1})'(x)$, mais on s'en affranchira chaque fois que possible).*

13. $f(x) = x^x$. **14.** $f(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

15. $f(x) = e^x - e^{-x}$. **16.** $f(x) = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1 + x}{1 - x}$.

Dans les exercices **17** *à* **22**, *on demande de déterminer les dérivées partielles d'ordre 1 et d'ordre 2 de la fonction de plusieurs variables f. En déduire la dérivée de la fonction numérique φ.*

17. $f(x, y) = e^{x - 2y}$; $\varphi(t) = e^{\sin t - 2t^3}$.

18. $f(x, y) = \ln (e^x + e^y)$; $\varphi(t) = \ln (e^{\sin t} + e^{\cos t})$.

19. $f(x, y) = x^2 \ln y$; $\varphi(t) = e^{2t} \ln \cos t$.

20. $f(x, y) = \cos x \sin y$;
$\varphi(t) = \cos (\sin t) \,.\, \sin (\cos t)$

21. $f(x, y, z) = xyz^3 + z \ln x + \sin y$;
$$\varphi(t) = \frac{1}{t} e^{\sqrt{t}} + \sqrt{t} \ln t + \sin \frac{1}{t^2}$$

22. $f(x, y, z) = \sin x \ln (y + \cos z)$;
$\varphi(t) = \sin e^t \ln (\sin t + \cos t)$.

23. *1°* Soit f la fonction : $[x \mapsto \sqrt{x + \sqrt{1 + x^2}}]$.
Calculer sa dérivée première f' et vérifier la relation :
$$2\sqrt{1 + x^2} f'(x) = f(x).$$
2° En déduire que la dérivée seconde f'' vérifie la relation :
$$4(1 + x^2)f''(x) + 4xf'(x) - f(x) = 0.$$

24. Soit la fonction : $f = [x \mapsto \sin^2 x]$.
1° Calculer f' et f''.
2° Établir entre f et f'' une relation indépendante de x.
3° Mêmes questions pour la fonction :
$$g = [x \mapsto \cos^2 x].$$

25. Calculer la dérivée seconde de la fonction :
$$f = [x \mapsto 3 \cos (2x - 1) + 5 \sin (3x + 7)].$$

26. Calculer la dérivée d'ordre 10 de la fonction :
$$f = [x \mapsto \sin 2x].$$

27. Calculer la dérivée d'ordre 49 de la fonction :
$$f = \left[x \mapsto \sin \frac{x}{3}\right].$$

28. Calculer la dérivée d'ordre 3 de la fonction :
$$f = [x \mapsto e^{ax} e^{bx}].$$

29. Démontrer que la dérivée d'une fonction paire est une fonction impaire, et inversement.

30. Démontrer que la dérivée d'une fonction périodique est une fonction périodique de même période.

31. Trouver une fonction polynôme P qui soit égale au produit par un nombre A du carré de sa dérivée. (Déterminer d'abord le degré de P.)

32. *1°* P désignant une fonction polynôme de degré n, quel est le degré de sa dérivée d'ordre $p - 1$ $(2 \leqslant p \leqslant n + 1)$?
On appelle Q cette dérivée.
2° Déterminer p en fonction de n pour que l'on ait l'égalité :
$$\forall x \in \mathbb{R} \quad P(x) = A[Q(x)]^p. \tag{1}$$
A étant une constante.
3° En déduire la forme du polynôme P vérifiant la relation (1).

ENSA 90

33. On pose $P(x) = 5x^3 + ax^2 + bx + c$.
1° Déterminer la constante k pour que l'on ait :
$$P(x) + k(x - 1)P'(x) + (x^2 - 1)P''(x) = 0.$$
2° Calculer les coefficients a, b, c.
3° Démontrer que $P(x)$ est divisible par $(x - 1)$ et calculer le quotient.

34. Soit la fonction : $f = \left[x \mapsto \dfrac{1 - x^5}{1 - x}\right]$.
1° Calculer sa dérivée dans $\mathbb{R} - \{1\}$.

2° En déduire l'égalité :

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 = \frac{1 - 5x^3 + 4x^5}{(1-x)^2}.$$

3° Généraliser le résultat précédent à :

$$1 + 2x + 3x^2 + ... + nx^{n-1},$$

puis à : $2 + 6x + 12x^3 + ... + n(n+1)x^{n-1}$.

35. 1° Écrire la formule qui donne le développement de $x(1+x)^n$.
2° Dériver les deux membres par rapport à x et remplacer x par 1 dans le résultat.
3° En déduire :

$$1 + 2C_n^1 + 3C_n^2 + ... + (n+1)C_n^n = 2^{n-1}(n+2).$$

36. Trouver un polynôme de degré n tel que :

$$P(x) + P'(x) = \frac{x^n}{n!}.$$

37. 1° Calculer la dérivée n-ième de $\frac{1}{x+1}$ et de $\frac{1}{x-1}$.

2° En déduire la dérivée n-ième de $\frac{2x}{x^2-1}$.

38. Soit f une fonction numérique indéfiniment dérivable sur un intervalle I. Calculer la dérivée n-ième de la fonction g telle que $g(x) = xf(x)$ (pour $n \in \mathbb{N}$).
En déduire la dérivée d'ordre $n+1$ de la fonction f_n définie par $f_n(x) = x^n \ln x$.
(On remarquera que $f_n(x) = xf_{n-1}(x)$.)

FORMULE DE LEIBNIZ

39. Soit u et v des fonctions numériques indéfiniment dérivables sur un intervalle I.
Montrer que la dérivée n-ième de uv est donnée par :

$$(uv)^{(n)} = \sum_{p=0}^{n} C_n^p u^{(p)} v^{(n-p)} \quad \textit{(formule de Leibniz)}.$$

Expliquer l'analogie avec le *binôme de Newton*.

40. 1° On pose $f(x) = (x^2-1)^n$, n entier naturel.
Démontrer que l'on a $(x^2-1)f'(x) = 2nxf(x)$.
2° En dérivant $(n+1)$ fois les deux membres de cette relation, par la *formule de Leibniz*, démontrer que, si l'on appelle g la dérivée n-ième de f, on a :

$$(x^2-1)g''(x) + 2xg'(x) - n(n+1)g = 0. \qquad (2)$$

Application. Former g pour $n = 2$ et $n = 3$, et vérifier la relation (2) pour ces valeurs de n.

41. 1° Soit la fonction : $f = \left[x \mapsto \frac{1}{1+x^2}\right]$.
Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
Démontrer, par récurrence, que la dérivée n-ième est définie par :

$$f_{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}},$$

où $P_n(x)$ est un polynôme de degré n.
Démontrer que l'on a :

$$P_{n+1}(x) = (1+x^2)P'_n(x) - (2n+2)xP_n(x). \qquad (1)$$

Former : P_1, P_2, P_3, P_4.
2° En dérivant n fois le produit $f(x)(1+x^2)$ par la *formule de Leibniz*, établir la formule (2) :

$$P_n(x) + 2nxP_{n-1}(x) + n(n-1)(1+x^2)P_{n-2}(x) = 0 \quad (2)$$

En augmentant n d'une unité dans (2) et en tenant compte de (1), démontrer que :

$$P'_n + n(n+1)P_{n-1} = 0. \qquad (3)$$

3° En utilisant les relations obtenues, démontrer que :

$$(1+x^2)P''_n - 2nxP'_n + n(n+1)P_n = 0. \qquad (4)$$

Vérifier les relations (2), (3) et (4) pour $n = 3$ et $n = 4$.

42. 1° On pose $f(x) = \sqrt{1+x^2}$.
Démontrer que l'on a $(1+x^2)f'(x) = xf(x)$.
2° Calculer les dérivée $(n+1)$-ième des deux membres par la *formule de Leibniz* et en déduire :

$$(1+x^2)f^{(n+2)}(x) + (2n+1)xf^{(n+1)}(x) + (n^2-1)f^{(n)}(x) = 0.$$

Démontrer que toutes les dérivées d'ordre impair sont nulles pour $x = 0$.

43. 1° Calculer la dérivée n-ième de :

$$f = [x \mapsto (x-a)^n(x-b)^n],$$

en utilisant la *formule de Leibniz*.
2° Remplacer b par a dans le résultat obtenu et comparer avec le calcul direct de la dérivée n-ième de $(x-a)^{2n}$.
3° En déduire :

$$1 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + ... + (C_n^n)^2 = \frac{2n(2n-1)...(n+1)}{n!} = C_{2n}^n.$$

PROPRIÉTÉS DIVERSES. THÉORÈMES DE ROLLE ET DES ACCROISSEMENTS FINIS

44. Le *théorème de Rolle* affirme que, sous des hypothèses convenables, entre deux zéros consécutifs de f, il y a au moins un zéro de f'. Que peut-on dire inversement des zéros de f compris entre deux zéros consécutifs de sa dérivée f'?

45. Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I, et admettant sur I une dérivée f' et une dérivée seconde f'' continue.
a) On suppose que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions a et b sur I. Prouver que $f'(a)f'(b) \leqslant 0$.
b) On suppose dans cette question que $f(x)$ s'annule pour exactement trois valeurs a, b et c de I. Prouver qu'il existe au moins un réel λ de I tel que $f''(\lambda) = 0$.

46. Soit f une fonction numérique continue et dérivable sur $I = [a, b]$, et telle qu'il existe un réel α de $]a, b[$ pour lequel $f(\alpha) = 0$. On considère deux réels c_1 et c_2 tels que $a < c_1 < \alpha < c_2 < b$. Appliquer le *théorème des accroissements finis* à la fonction F telle que $F(x) = (f(x))^2$ sur les intervalles $[c_1, \alpha]$ et $[\alpha, c_2]$. En déduire que $f(x)f'(x)$ change de signe en α. Interpréter graphiquement.

47. Soit f et g deux fonctions numériques définies et continues sur un intervalle $[a, b]$, et dérivables sur $]a, b[$. On suppose que les fonctions f' et g' n'ont sur $]a, b[$ aucun zéro commun, que g' n'est pas la fonction nulle sur $]a, b[$, et que $g(a) \neq g(b)$.
1° Déterminer le réel λ tel que la fonction φ, définie par :
$$\varphi(x) = f(x) - \lambda g(x),$$
soit telle que $\varphi(a) = \varphi(b)$.
2° Prouver qu'il existe au moins un réel c de $]a, b[$ tel que :
$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$
3° Calculer c lorsque $f(x) = \cos x$ et $g(x) = \sin x$. Montrer qu'il peut exister plusieurs valeurs de c.
4° Calculer le réel c lorsque :
$$f(x) = x^3 - 3x \quad \text{et} \quad g(x) = x^2 - 2x,$$
avec a et b tels que $(a-1)(b-1) > 0$. Vérifier que $(c-a)(c-b) < 0$.

48. Soit f et g des fonctions continues sur un intervalle ouvert I. Soit a un élément de I. On suppose que f et g sont dérivables sur $I \setminus \{a\}$, que $g'(x)$ ne s'annule pas sur $I \setminus \{a\}$, et que $f(a) = g(a) = 0$. En utilisant le *théorème des accroissements finis* sur l'intervalle $[a, x]$ (pour $x \in I$), prouver que, si :
$$\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = l, \quad (l \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}),$$
alors : $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = l$
Prouver que la réciproque de la propriété ci-dessus est fausse, en étudiant le cas $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$, $f(0) = 0$; et $g(x) = \sin x$, pour $a = 0$.

49. *1°* Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I contenant un réel x_0.
a) Étudier la limite en 0 de la fonction :
$$\left[h \mapsto \frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}\right].$$
b) Étudier le cas où : $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$; $f(0) = 0$.
La fonction f est-elle dérivable en 0? Que peut-on conclure?
2° La fonction f étant dérivable deux fois sur I, étudier la limite en 0 de la fonction :
$$\left[h \mapsto \frac{f(x_0 + h) + f(x_0 - h) - 2f(x_0)}{h^2}\right].$$

50. Soit f une fonction numérique, définie et continue sur un intervalle $[a, b]$, dérivable sur $[a, b[$, et dont la dérivée f' est strictement croissante sur $[a, b[$.
1° Démontrer que, pour tout x de $]a, b]$, il existe un réel c unique de $]a, b[$ tel que :
$$f(x) - f(a) = (x - a)f'(c).$$
2° Pour tout réel t de $]a, b]$, on pose :
$$g(t) = \frac{f(t) - f(a)}{t - a}.$$
Montrer que la fonction g est strictement croissante sur $]a, b]$.

51. Soit f une fonction numérique n fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et s'annulant pour n valeurs réelles $x_1 < x_2 < x_3 < ... < x_n$. Soit α un réel différent de ces n valeurs.
On pose $\varphi(x) = f(x) - k(\alpha - x_1)(\alpha - x_2) ... (\alpha - x_n)$,
où $k = \dfrac{f(\alpha)}{(\alpha - x_1) ... (\alpha - x_n)}$.
Démontrer qu'il existe un réel λ de l'intervalle $]x_1, x_n[$ tel que $\varphi^{(n)}(\lambda) = 0$.
En déduire que, pour tout réel α, il existe un réel λ de $]x_1, x_n[$ tel que :
$$f(\alpha) = (\alpha - x_1)(\alpha - x_2) ... (\alpha - x_n) \frac{f^{(n)}(\lambda)}{n!}.$$

52. Soit f une application surjective, dérivable, de l'intervalle $[a, b]$ sur lui-même. Démontrer qu'il existe des réels x_1, x_2, x_3, x_4 de $[a, b]$ tels que :
$$\int_a^b f(t)\, dt = f(x_1)f'(x_2)(x_3 - x_4).$$

53. On considère une fonction numérique f définie et deux fois dérivable sur l'intervalle $[a, b]$, et telle que $f(a) = f(b) = 0$.
Soit c un réel de $]a, b[$. On définit la fonction φ par :
$$\varphi(x) = \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)} f(c).$$
En appliquant le *théorème de Rolle* aux fonctions f_1 et f_2 définies par :
$$f_1(x) = f(x) - \varphi(x) \quad \text{et} \quad f_2(x) = f'(x) - \varphi'(x),$$
démontrer qu'il existe un réel γ de l'intervalle $]a, b[$ tel que :
$$f(c) = \frac{1}{2}(c-a)(c-b)f''(\gamma).$$

54. Soit f une application de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, dérivable sur $[0, 1]$ telle que :
$$\int_0^1 f(t)\, dt = f(0) = f(1).$$
Démontrer qu'il existe deux réels x_1 et x_2 de l'intervalle $]0, 1[$ tels que $f'(x_1) = f'(x_2) = 0$.

55. Soit f une fonction numérique définie et continue sur l'intervalle $I = [a, b]$, deux fois dérivable sur $]a, b[$, telle que $f(a) = f(b) = 0$, et que, pour tout x de $]a, b[$, $f(x) > 0$. Soit M la borne supérieure de f sur I.
1° Démontrer qu'il existe des réels c_1 et c_2 de l'intervalle $]a, b[$ tels que :
$$f'(c_1) - f'(c_2) \geqslant \frac{4M}{b - a}.$$

2° On suppose que la fonction f'' est continue sur I, et que l'intégrale $\int_a^b \frac{|f''(x)|}{f(x)} \mathrm{d}x$ converge (voir page 180).
Montrer que l'on a alors :

$$\int_a^b \frac{|f''(x)|}{f(x)} \mathrm{d}x \geqslant \frac{4}{b-a}.$$

56. Soit f une fonction numérique continue dérivable sur un intervalle $[a, b]$, et à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$. On pose $m(c) = \frac{f'(c)}{f(c)}$, $c \in [a, b]$.
Démontrer qu'il existe c tel que :

$$\frac{f(b)}{f(a)} = \mathrm{e}^{(b-a)m(c)}.$$

57. Soit f une fonction numérique deux fois dérivable sur l'intervalle $[0, 1]$ et dont la dérivée est à valeurs strictement positives sur $[0, 1]$.
1° Démontrer qu'il existe un réel λ strictement positif tel que pour tout x de $[0, 1]$: $f'(x) \geqslant \lambda$.
2° Démontrer que si $f(0) = 0$, alors $f(x) \geqslant \lambda x$ pour tout x de $[0, 1]$.

TERME COMPLÉMENTAIRE

*Dans chacun des exercices **58** à **63**, appliquer le théorème des accroissements finis sous la forme :*

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0 + \theta h), \quad \theta \in]0, 1[.$$

*Expliciter θ en fonction de h et étudier sa limite lorsque h tend vers zéro (on pourra éventuellement utiliser la propriété faisant l'objet de l'exercice **48**.)*

58. $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$; x_0 quelconque.

59. $f(x) = \frac{1}{1+x}$; $x_0 = 0$.

60. $f(x) = \frac{1}{x}$; $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$.

61. $f(x) = \sqrt{x}$; $x_0 = 1$.

62. $f(x) = \mathrm{e}^x$; $x_0 = 0$.

63. $f(x) = \ln(3 + x)$; $x_0 = 0$.

64. Soit $f(x) = \ln(1 + \lambda x)$, où $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.
Soit a et b des réels tels que $-\frac{1}{\lambda} < a \leqslant b$.
Prouver qu'il existe un réel α unique tel que :

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(\alpha).$$

Déterminer α.

65. Soit $f(x) = \mathrm{e}^x$. Soit a et b des réels tels que $a \leqslant b$.
Prouver qu'il existe un réel unique α tel que :

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(\alpha).$$

Déterminer α.

66. Soit a, b, a', b' des réels tels que $aa' \neq 0$. Soit m et n des entiers strictement supérieurs à 1.
Soit $f(x) = (ax + b)^m(a'x + b')^n$.
Prouver que le réel $\frac{mab' + nba'}{aa'(m+n)}$ est compris entre $\frac{b}{a}$ et $\frac{b'}{a'}$.

ENCADREMENTS

67. En appliquant le *théorème des accroissements finis*, déterminer un majorant de l'erreur commise en prenant 200 pour valeur approchée de $\sqrt{40\,001}$.

68. Même exercice qu'à l'exercice **67** en prenant 1 pour valeur approchée de $\sqrt{(1{,}001)^5}$.

69. Même exercice qu'à l'exercice **67** en prenant $\frac{1}{\sqrt{2}}$ pour valeur approchée de $\sin 0{,}78$.

*En utilisant le théorème des accroissements finis sur un intervalle convenable, on demande, dans les exercices **70** à **77** d'encadrer le réel x.*

70. $x = \ln(2{,}01)$. **71.** $x = \ln 2{,}7$.

72. $x = \cos 35°$. **73.** $x = \sin 44°$.

74. $x = \lg 9\,997$. **75.** $x = \ln(\mathrm{e}^5 + 3)$.

76. $x = \frac{1}{\sqrt{9\,997}}$. **77.** $x = \frac{1}{\sqrt{20\,402}}$.

78. Démontrer que, pour tout réel x de l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $\tan x \geqslant x$.

79. Démontrer que, quels que soient les réels a et b tels que $0 < b \leqslant a$:

$$\frac{a-b}{a} \leqslant \ln\frac{a}{b} \leqslant \frac{a-b}{b}.$$

80. Démontrer que, quels que soient les réels α et β tels que $0 < \beta \leqslant \alpha < \frac{\pi}{2}$:

$$\frac{\alpha-\beta}{\cos^2\beta} \leqslant \tan\alpha - \tan\beta \leqslant \frac{\alpha-\beta}{\cos^2\alpha}.$$

En déduire un encadrement de $\tan 0{,}78$ et de $\tan 0{,}8$.

81. Démontrer que, quels que soient les réels x et h tels que $0 \leqslant x < x + h \leqslant \frac{\pi}{2}$:

$$\sin(x + h) < \sin x + h\cos x.$$

ÉQUATIONS

82. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x+1)x(x-1)(x-3)(x-5).$$

Prouver que les fonctions f', f'' et f''' ont respectivemen 4, 3 et 2 zéros.

83. Montrer que la fonction $[x \mapsto x^n + px + q]$ ne peut posséder plus de deux racines réelles pour n pair et plus de trois pour n impair.

84. Démontrer que l'équation définie par

$$\frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{(x+1)^2} = 0$$

admet au moins une racine réelle appartenant à l'intervalle $]2\pi, 3\pi[$.

85. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par .

$$f(x) = x - \cos x.$$

1° Prouver que l'équation définie par $f(x) = 0$ admet une racine unique x_0 contenue dans l'intervalle $\left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right[$.

2° Démontrer qu'il existe un réel c de l'intervalle $\left]x_0, \frac{\pi}{4}\right[$ tel que :

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\frac{\pi}{4} - x_0\right)f'(c).$$

3° Montrer que $f'(c) > \frac{3}{2}$ et en déduire que :

$$\frac{\pi}{4} - \frac{2}{3}f\left(\frac{\pi}{4}\right) < x_0 < \frac{\pi}{4}.$$

86. On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = x - e^{-x}.$$

1° Prouver que l'équation définie par $f(x) = 0$ admet une solution et une seule, α, sur $\mathbb{R}$, et que : $\frac{1}{e} < \alpha < 1$.

2° Soit la suite (u_n) définie par la donnée de u_0 et par la relation $u_{n+1} = e^{-u_n}$. Démontrer que, quel que soit le réel u_0, pour tout entier n supérieur à 3, u_n est élément de l'intervalle $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$.

3° En utilisant le *théorème des accroissements finis*, prouver qu'il existe un réel k strictement inférieur à 1 tel que, pour tout entier naturel n supérieur à 3 :

$$|u_{n+1} - \alpha| < k\,|u_n - \alpha|.$$

En déduire que la suite (u_n) converge vers α.

87. Soit f une fonction continue de $[0, 1]$ dans lui-même.
1° Montrer qu'il existe au moins un réel α tel que $f(\alpha) = \alpha$.
2° On suppose que f est dérivable sur I et que, pour tout x de $[0, 1]$: $|f'(x)| < 1$.
Démontrer alors que α est l'unique solution sur $[0, 1]$ de l'équation définie par $x = f(x)$.
3° On considère la suite (u_n) définie par la donnée de $u_1 \in [0, 1]$ et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$. On suppose en outre que pour tout x de $[0, 1]$, $|f'(x)| < 1$. Démontrer qu'il existe un réel k de l'intervalle $]0, 1[$ tel que :

$$|u_{n+1} - \alpha| < k\,|u_n - \alpha|.$$

En déduire que la suite (u_n) converge vers α.

88. En s'inspirant de l'exercice **87**, étudier les suites définies ci-dessous :
1° $u_n = \sqrt{6 + u_{n-1}}$; $u_0 = 0$.
2° $u_n = \sqrt{6 - u_{n-1}}$; $u_0 = \sqrt{6}$.

Photo Hachette

Pierre Simon de LAPLACE, mathématicien français (1749-1827). Ses travaux portèrent essentiellement sur la mécanique céleste et le calcul des probabilités. Son traité « Théorie analytique des probabilités » est publié en 1812. On y trouve un procédé qui est utilisé, pour la première fois, dans la résolution des équations différentielles au moyen d'intégrales définies.

CHAPITRE

7

EQUATIONS DIFFERENTIELLES

I – ACTIVITÉS PRÉLIMINAIRES

1. POSITION DU PROBLÈME

• De nombreuses lois de la physique, de la chimie, de la biologie, de l'économie, etc., s'expriment par l'intermédiaire d'une fonction et de ses dérivées.

Exemples :

1° La loi fondamentale de la dynamique du solide :

Soit M un solide de masse m dont la position est repérée dans un référentiel galiléen. Soit $\vec{v}$ son vecteur vitesse en fonction du temps. On a alors, si $\Sigma \vec{f}$ désigne la somme des forces appliquées au solide : $m \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \Sigma \vec{f}$.

Si on remarque que $\vec{v} = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$, on a alors : $m \dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \Sigma \vec{f}$.

2° La loi d'Ohm pour l'auto-inductance :

L'intensité i traversant une branche de circuit AB, d'auto-inductance L et de résistance R est fonction du temps, et on a : $v_A - v_B = Ri.\, L \dfrac{di}{dt}$ (où $v_A - v_B$ désigne la différence de potentiel aux bornes du circuit).

3° Le coefficient directeur de la tangente à une courbe :

Si la droite d'équation $y = ax + b$ est tangente en $(x_0, f(x_0))$ à la courbe représentative de la fonction f, alors $a = f'(x_0)$.

4° En économie :

Il arrive, principalement dans ce secteur, que les variables ne puissent prendre qu'un ensemble discret de valeurs. Cependant, lorsque les populations envisagées sont importantes, on a souvent intérêt à considérer que la variable envisagée est continue. Soit par exemple la fonction C qui détermine le coût d'un nombre entier n de certains appareils ménagers : on peut envisager la fonction C de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Dans ce cas $C'(x)$ n'a pas de signification exacte, mais est une valeur approchée de $\dfrac{C(x+1) - C(x)}{(x+1) - x}$, qui représente l'augmentation du coût occasionné par une unité supplémentaire. Cette quantité est appelée le « coût marginal » pour la valeur x, et $C'(x)$ est une valeur approchée d'autant meilleure que la population étudiée est grande.

5° En biologie :

Les remarques ci-dessus sont souvent valables. Si l'on considère par exemple une population P de bactéries, cette population dépend du temps, et en l'absence de facteurs limitant la croissance, on admet que la vitesse d'augmentation de cette population est proportionnelle à la population. En considérant P comme une fonction réelle d'une variable réelle, cette règle se traduira par la condition : $P'(t) = kP(t)$.

• Les circonstances particulières régissant le comportement d'un système géométrique, physique, chimique, biologique, économique, etc., se traduisent donc souvent par des relations entre certaines fonctions et leurs dérivées. Si l'on sait déterminer les fonctions satisfaisant à ces relations, on saura déterminer la fonction régissant le comportement du phénomène étudié.

REMARQUES :

1° L'étude d'équations différentielles est un cas particulier de recherche de fonctions satisfaisant à des conditions portant sur cette fonction. Par exemple, nous pouvons chercher des fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que $f(xy) = f(x) + f(y)$. On dit alors que l'on étudie une **équation fonctionnelle.**

2° Dans le cas où un phénomène physique est régi par une fonction de plusieurs variables, les conditions du phénomène étudié peuvent se traduire par des conditions faisant intervenir les dérivées partielles de cette fonction : on dit alors que l'on est en face d'une **équation aux dérivées partielles.**

2. ACTIVITÉS

★ Activité 1 : Mises en équation

I — *Soit C une courbe d'équation* $y = f(x)$.

1° A quelle condition le coefficient directeur de la tangente en chaque point est-il proportionnel à l'abscisse de ce point? Quelles sont les fonctions f *satisfaisant à la condition?*

2° Même question qu'au 1° avec un coefficient directeur proportionnel à l'ordonnée du point. Préciser une fonction f *répondant à la question et telle que, de plus,* $f(0) = 3$.

3° A quelle condition la tangente en tout point M de C rencontre-t-elle les axes en deux points A et B tels que M soit le milieu de (A, B)?

II — *1° Soit M un solide de masse m suspendu à un ressort. Soit* $x(t)$ *l'abscisse de M en fonction du temps sur un axe vertical. Le ressort applique à M une force de rappel proportionnelle (coefficient de proportionnalité k) à l'abscisse de M. Écrire la condition résumant, dans ce cas particulier, la loi fondamentale de la dynamique.*
Même question en supposant qu'en outre le solide M est soumis à une résistance proportionnelle à la vitesse (coefficient de proportionnalité h).

2° Le freinage d'un disque tournant dans un liquide est proportionnel à la vitesse de rotation ω. *Traduire ce freinage par une condition portant sur la vitesse de rotation en fonction du temps.*

3° Un point matériel est animé d'un mouvement rectiligne tel que son énergie cinétique à l'instant t soit proportionnelle à la vitesse moyenne du mouvement dans l'intervalle de temps $[0, t]$. *A quelle condition doit satisfaire l'abscisse* $x(t)$ *de ce point?*

III — *1° Un billot cylindrique de bois, de hauteur h, d'aire de base S et de densité* γ, *est entièrement plongé verticalement dans l'eau, puis lâché sans vitesse initiale. Sachant que la force de frottement est proportionnelle (coefficient k) à la hauteur immergée, à quelle condition doit satisfaire l'abscisse* $x(t)$ *du centre d'inertie du solide, sur un axe vertical?*

2° Supposons que des bactéries se reproduisent à une vitesse proportionnelle à leur nombre (coefficient a) et qu'en même temps elles sécrètent un poison qui les détruit à une vitesse proportionnelle à la quantité de poison et au nombre de bactéries (coefficient b). Supposons par ailleurs que la vitesse de sécrétion du poison est proportionnelle au nombre de bactéries *(coefficient c). Le nombre N de bactéries étant considéré comme une fonction réelle du temps t, décrire les conditions ci-dessus par une condition portant sur N et ses dérivées.*

3° Dans une population de P individus, soit $x(t)$ le nombre des individus atteints à l'instant t par une maladie contagieuse. La vitesse de propagation de l'épidémie est proportionnelle au nombre des individus atteints, et aussi à la différence $P - x(t)$ des individus sains. En considérant que x est une fonction réelle d'une variable réelle, traduire les conditions ci-dessus par une condition portant sur la fonction x et sa dérivée.

★ Activité 2 : Résolution dans quelques cas simples

I — *Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I.*

1° Rappeler une condition nécessaire et suffisante, portant sur la dérivée de f, pour que f soit une fonction constante sur I.

2° Prouver que f est une fonction affine si et seulement si, pour tout réel x de I, on a : $f''(x) = 0$.

3° Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la fonction f soit une fonction polynôme. A quelle condition cette fonction polynôme est-elle de degré n? (On s'inspirera des conditions faisant l'objet des *1°* et *2°*).

II — *1° Citer deux fonctions différentes définies sur $\mathbb{R}$, et telles que, pour tout réel x, on ait $f'(x) = f(x)$.*

2° En déduire une famille infinie de fonctions proportionnelles à leur dérivée, et définies sur $\mathbb{R}$ (c'est-à-dire telles qu'il existe un réel k de façon que, pour tout réel x, on ait $f'(x) = kf(x)$).

★ Activité 3 : Un exemple d'application à la dynamique

On laisse tomber, dans le champ de la pesanteur, un corps M, de masse m, et l'on suppose que le corps éprouve une résistance de la part de l'air, proportionnelle à la vitesse ($r = kv$). La vitesse v du centre d'inertie G du corps M est fonction du temps t de chute, et satisfait à la loi fondamentale : $m\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \Sigma f$, où Σf désigne la somme des forces agissant sur le corps dans le sens du mouvement.

Rappelons que l'accélération de la pesanteur est notée g.

1° Écrire la condition à laquelle doit satisfaire la fonction v.

2° Prouver que les fonctions v définies par : $v(t) = \dfrac{mg}{k} + C\,\mathrm{e}^{-(k/m)t}$, où C désigne un réel, satisfont à la condition ci-dessus.

3° On suppose qu'une vitesse initiale v_0 est imprimée à l'instant 0 au corps M. Calculer C en fonction de v_0, m, g et k. En déduire la vitesse v du corps M dans ce cas.

4° On considère la fonction φ définie par $\varphi(k) = v$, où v est l'expression obtenue au 3°. Déterminer la limite en 0 de la fonction φ.
Montrer que l'on retrouve ainsi l'expression de la vitesse d'un corps en chute libre dans le vide (c'est-à-dire sans résistance de l'air).

II – GÉNÉRALITÉS

1. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

• Lorsqu'on cherche à traduire un phénomène d'un point de vue quantitatif par une fonction numérique f, il est fréquent que les conditions mathématiques auxquelles doit satisfaire la fonction f, et qui rendent compte des règles physiques régissant le phénomène étudié, se traduisent par des relations faisant intervenir la fonction f et ses dérivées successives sur un intervalle I (voir *Activités préliminaires*).
Une telle relation se présente sous la forme suivante, où Φ est une fonction de $n+1$ variables :

$$\forall x \in I, \quad \Phi(x, f(x), f'(x)\ f''(x), ..., f^{(n)}(x)) = 0.$$

Si une fonction f satisfait à la condition ci-dessus, on dit qu'elle est solution de l'**équation différentielle** définie par cette relation.
Remarquons que, si Id désigne l'identité de l'intervalle I, et θ la fonction nulle, une solution de l'équation différentielle ci-dessus satisfait à l'équation d'inconnue f définie dans l'ensemble $\mathbb{R}^I$ des applications de I vers $\mathbb{R}$ par :

$$\Phi(\mathrm{Id},\ f,\ f',\ f'',\ ...,\ f^{(n)}) = \theta.$$

Dans la plupart des cas, on désigne la fonction cherchée par y, et il arrive que, lorsque le contexte permet d'éviter les ambiguïtés, on identifie $f(x)$ et y.

• Si la dérivée n-ième de f intervient explicitement dans la définition de l'équation différentielle, alors qu'aucune dérivée d'ordre strictement supérieur à n n'intervient dans Φ, on dit que l'équation différentielle est **d'ordre n.**

Exemples :

1° La propriété fondamentale de la fonction exponentielle se traduit par le fait que la fonction exponentielle est solution de l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$ par : $y' = y$, c'est-à-dire $y' - y = 0$.

2° Soit $f(x) = \cos \omega x$. On a $f'(x) = -\omega \sin \omega x$ et $f''(x) = -\omega^2 \cos \omega x$.
On peut donc conclure que la fonction f est solution de l'équation différentielle définie sur $\mathbb{R}$: $y'' = -\omega^2 y$, c'est-à-dire : $y'' + \omega^2 y = 0$.

3° Les relations les plus diverses peuvent définir des équations différentielles. (Par exemple : $y''' + y' = 0$, $f'' \circ f' = \cos f$.)

REMARQUE :

Inversement, on peut envisager de caractériser une fonction ou toute une famille de fonctions par une relation entre la variable, la fonction et certaines de ses dérivées successives. On définit ainsi une équation différentielle à laquelle satisfont les fonctions de la famille étudiée. (Il restera à étudier si les fonctions de cette famille sont les seules solutions de cette équation différentielle.)

• L'étude des équations différentielles est une partie fondamentale des mathématiques, et ses résultats interviennent dans la plupart des sciences (physiques, biologiques, humaines, ...).

2. RÉSOLUTION

• Soit Φ l'équation différentielle définie sur un intervalle I par la relation :

$$\Phi(x,\ y,\ y',\ y'',\ ...,\ y^{(n)}) = 0.$$

Toute fonction f telle que, pour tout réel x de I, on ait :

$$\Phi(x, f(x), f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x)) = 0.$$

est **une solution** (ou **une intégrale**) de l'équation différentielle étudiée.

• Résoudre une équation différentielle, c'est déterminer l'ensemble des fonctions solutions.
Chacune de ces fonctions solutions est une **intégrale particulière** de l'équation.
On appelle solution de l'équation (ou **intégrale générale** de l'équation) l'ensemble de toutes les fonctions solutions.
Il arrive souvent que, sauf quelques équations particulières, l'intégrale générale puisse se décrire comme une famille de fonctions dépendant d'un ou plusieurs paramètres. Les intégrales particulières qui ne peuvent pas s'exprimer par l'intermédiaire de cette expression générale et qui ainsi se singularisent, prennent le nom d'intégrales singulières de l'équation.
Dans de nombreux cas, si l'on dispose de l'intégrale générale sous la forme d'une famille de fonctions dépendant de paramètres, on peut déterminer ces paramètres pour obtenir l'intégrale particulière (si elle existe), satisfaisant à certaines conditions, appelées **conditions initiales.** Ces conditions concernent en général les valeurs prises par la fonction ou certaines dérivées pour une valeur x_0 de la variable.

• Pour certaines formes simples, l'outillage dont dispose un élève de Terminale C ou de Terminale E permet de mettre en place des méthodes de résolution. Certaines de ces méthodes sont l'amorce de méthodes générales. Mais il n'y a pas de méthode mathématique universelle pour résoudre les équations différentielles. Il y a des méthodes plus particulièrement adaptées à telle ou telle forme d'équation différentielle, et il existe des équations différentielles qui résistent jusqu'à présent à tout traitement. On utilise alors des méthodes d'intégration approchée.

3. EXEMPLES

a.

La recherche des primitives sur un intervalle I d'une fonction continue f est un cas particulier d'une équation différentielle d'ordre 1. On résout en effet l'équation définie sur I par : $y'(x) = f(x)$ (où y désigne la fonction inconnue).
Si F désigne une primitive sur I de la fonction f, la solution générale de cette équation différentielle est donnée par : $y(x) = F(x) + C$, où C désigne une constante réelle.
La condition supplémentaire $y(x_0) = y_0$ permet de déterminer la constante C.
L'équation différentielle définie sur I par $y'(x) = f(x)$ admet une intégrale particulière unique satisfaisant à la condition initiale $y(x_0) = y_0$. Cette intégrale particulière est donnée par :

$$y = F(x) + y_0 - F(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt + y_0.$$

b.

L'équation différentielle définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $y' = \dfrac{3y}{x}$ est telle que :

— La fonction nulle est solution.

— Sur tout intervalle où la fonction y ne s'annule pas, on a : $\dfrac{y'}{y} = \dfrac{3}{x}$.

Or, $\frac{y'}{y}$ est la dérivée de $\ln|y|$. Donc, pour toute solution, on a :

$$\ln|y| = 3\ln x + C,$$

où C est un réel quelconque. Posons $C = \ln\alpha$, où α est strictement positif, et on a alors :

$$\ln|y| = \ln \alpha x^3,$$

c'est-à-dire : $$|y| = \alpha x^3.$$

– Il en résulte que toute fonction y définie par $y(x) = kx^3$ (avec $k \in \mathbb{R}$) est une solution de l'équation différentielle étudiée.

– Réciproquement, toute solution y de l'équation différentielle est telle que $|y| = \alpha x^3$. Pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$, on doit donc avoir $y = \alpha x^3$ ou bien $y = -\alpha x^3$. Or la fonction y est dérivable, donc continue sur $\mathbb{R}_+^*$. Il en résulte que y ne peut pas changer de signe sans s'annuler, et donc que, si α est non nul, soit $y = \alpha x^3$ pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$, soit $y = -\alpha x^3$ pour tout x de $\mathbb{R}_+^*$.

Il en résulte que l'intégrale générale de l'équation différentielle étudiée est donnée par $y(x) = kx^3$, où k désigne un réel quelconque.

– Si, de plus, on cherche une intégrale prenant par exemple la valeur 40 pour $x_0 = 2$, on obtient :

$$40 = k \times 2^3 \quad \text{soit} \quad k = 5.$$

La seule intégrale particulière de l'équation différentielle étudiée et satisfaisant de plus à la condition initiale donnée est $y(x) = 5x^3$.

c.

Soit f la fonction définie par : $f(x) = ax^2 + 2x + b$, avec $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

Soit $y = f(x)$. On a : $y' = 2ax + 2$ et : $\frac{y'-2}{2x} = a$, si $x \neq 0$.

Donc $\left(\frac{y'-2}{2x}\right)' = 0$, et : $2xy'' - 2y' + 4 = 0$.

Cette relation définit une équation différentielle dont $y = ax^2 + 2x + b$ est la solution générale sur $\mathbb{R}_+^*$ (nous l'admettrons).

d.

L'équation différentielle définie par $y^2(1 - y'^2) = 1$ admet (nous l'admettrons) l'intégrale générale donnée par :

$$(x - C)^2 + y^2 = 1 \quad \text{(où } C \text{ est un réel).}$$

Mais les fonctions constantes définies par $y_1(x) = 1$ et $y_2(x) = -1$ sont des intégrales particulières qu'on ne peut pas obtenir en donnant à C une valeur particulière. Ce sont des intégrales singulières. Remarquons qu'il existe deux solutions telles que $y(0) = 1$. Ce sont $y_1(x) = \sqrt{1 - x^2}$ et $y_2(x) = 1$.

e.

L'équation différentielle définie par $y = (x + 1)y'^2$ admet (nous l'admettrons) l'intégrale générale donnée par :

$$y(x) = (C + \sqrt{1 + x})^2,$$

et l'intégrale singulière $y_1(x) = 0$.

Il existe deux solutions telles que $y(-1) = 0$. Ce sont $y_1(x) = 1 + x$ et $y_2(x) = 0$.

III – ÉQUATIONS LINÉAIRES A COEFFICIENTS CONSTANTS

Une équation différentielle est dite linéaire si elle se présente sous la forme :

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + \dots + a_n(x)y^{(n)} = f(x).$$

L'intérêt de telles équations est que l'équation associée définie par :

$$a_0(x)y + a_1(x)y' + \dots + a_n(x)y^{(n)} = 0.$$

admet un ensemble de solutions qui est un espace vectoriel, que l'on peut définir par l'une de ces bases.

1. ÉQUATIONS DU PREMIER ORDRE

a. Équations de la forme $ay' + by = 0$ (1)

Soit a et b deux réels non nuls, et soit l'équation différentielle définie par :

$$ay' + by = 0.$$

• La fonction nulle est solution de cette équation différentielle.
D'autre part, sur tout l'intervalle où la fonction y ne s'annule pas, on a :

$$\frac{y'}{y} = -\frac{b}{a}.$$

Or, $(\ln|y|)' = \dfrac{y'}{y}$. Il en résulte que, nécessairement, il existe une constante k telle que :

$$\ln|y| = -\frac{b}{a}x + k.$$

Soit : $|y| = e^k e^{-\frac{b}{a}x} = \lambda e^{-\frac{b}{a}x}$, avec $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ $(\lambda = e^k)$.

Donc : $y = \lambda e^{-\frac{b}{a}x}$ et $y = -\lambda e^{-\frac{b}{a}x}$ sont solutions de l'équation différentielle (1)

• Réciproquement, soit y une solution de l'équation différentielle (1). Posons :

$$Y(x) = y(x)\, e^{-\frac{b}{a}x}$$

On a alors : $Y'(x) = \left[y'(x) + \dfrac{b}{a} y(x) \right] e^{\frac{b}{a}x}$. Par suite : $Y'(x) = 0$.

La fonction Y est constante. Il existe donc un réel C tel que, pour tout x de $\mathbb{R}$: $Y(x) = C$.
Par suite : la solution générale de l'équation différentielle (1) est donnée par :

$$y(x) = C\ e^{-\frac{b}{a}x}$$

(où C est un réel quelconque).

• Si d'autre part la fonction cherchée doit satisfaire à $y(x_0) = y_0$, on a :

$$y_0 = C e^{-\frac{b}{a}x_0}.$$

Soit : $C = y_0 e^{\frac{b}{a}x_0}$. Par suite : $y(x) = y_0 e^{-\frac{b}{a}(x - x_0)}$.

En particulier pour $x_0 = 0$, on aura $y = y_0 e^{-\frac{b}{a}x}$.

• On peut conclure :

La solution générale de l'équation différentielle $ay' + by = 0$ est $y(x) = Ce^{-\frac{b}{a}x}$. Pour tout x_0, il existe une solution particulière unique prenant en x_0 la valeur y_0. Cette solution particulière est donnée par : $y(x) = y_0 e^{-\frac{b}{a}(x-x_0)}$.

b. Ensemble des solutions de l'équation (1)

Si y_1 et y_2 sont deux intégrales particulières de l'équation différentielle (1), on a alors :

$$a(\lambda y_1 + \mu y_2)' + b(\lambda y_1 + \mu y_2) = \lambda(ay'_1 + by_1) + \mu(ay'_2 + by_2) = 0.$$

Il en résulte que, quels que soient les réels λ et μ, la fonction $\lambda y_1 + \mu y_2$ est également solution de l'équation différentielle (1).
Comme la fonction nulle est solution de (1), l'ensemble des solutions est non vide et est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
D'autre part, on a : $\left(\dfrac{y_1}{y_2}\right)' = \dfrac{y'_1 y_2 - y_1 y'_2}{y_2^2}$, avec :

$$y'_1 = -\frac{b}{a}y_1 \quad \text{et} \quad y'_2 = -\frac{b}{a}y_2.$$

Par suite : $\left(\dfrac{y_1}{y_2}\right)' = 0$ et $\dfrac{y_1}{y_2} = k$ (soit $y_1 = ky_2$).
Il en résulte que deux vecteurs quelconques de l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle (1) sont linéairement dépendants. Cet espace vectoriel est donc de dimension 1 (car il n'est pas réduit à $\{0\}$).

REMARQUE :

Le résultat ci-dessus est obtenu indépendamment de la résolution du *a*). On aurait pu l'utiliser pour résoudre l'équation. Il aurait alors suffit de déterminer une solution particulière non nulle.
Il en résulte également qu'aucune fonction solution non nulle de (1) ne s'annule sur $\mathbb{R}$.

c. Équations de la forme : $ay' + by = f(x)$ (2)

★ Activité

*1° **a)** Prouver que, si y_1 et y_2 sont deux solutions particulières de l'équation différentielle (2), alors $y_1 - y_2$ est solution de (1).*
***b)** Soit y_1 une solution particulière de (2), et y une solution de (1). Prouver que $y + y_1$ est solution de (2).*
***c)** Déduire de ce qui précède que la solution générale de (2) est la somme d'une solution particulière de (2) et de la solution générale de (1).*

2° Soit à résoudre l'équation différentielle définie par $ay' + by = c$, où a, b et c sont des réels, $a \neq 0$.
***a)** Déterminer une solution particulière constante.*
***b)** En déduire l'intégrale générale.*

3° Soit à résoudre l'équation différentielle définie par $ay' + by = e^x$, où a et b sont des réels, $a \neq 0$.
***a)** Montrer que l'équation différentielle proposée n'admet pas de solution constante.*
***b)** On sait que l'intégrale générale de (1) est donnée par $y(x) = Ce^{-\frac{b}{a}x}$.*
Pour déterminer une intégrale particulière de l'équation différentielle proposée, une méthode consiste à décomposer la fonction inconnue y en le produit d'une fonction

inconnue z et d'une fonction connue qui joue un rôle particulier pour l'équation différentielle étudiée. Dans le cas présent, posons : $y(x) = z(x)\,e^{-\frac{b}{a}x}$ (ici la fonction connue est solution de l'équation (1)).

Calculer $ay'(x) + by(x)$.

c) *En déduire $z(x)$ de façon que y soit solution de l'équation différentielle étudiée.*

d) *Préciser la solution générale de l'équation différentielle définie par :*

$$ay' + by = e^x.$$

4° *Utiliser la méthode ci-dessus pour déterminer une intégrale particulière des équations différentielles ci-dessous. En déduire l'intégrale générale.*

a) $y' + 2y = x^2 - x + 1$;

b) $y' + \ \ y = e^{-x} \cos x$.

d. Exemple d'application

Une solution aqueuse dont la salinité est de 0,3 kg par litre se déverse à la vitesse de 2 L à la minute dans un réservoir contenant initialement 10 L d'eau pure. On suppose que le mélange est homogène à chaque instant. Le mélange s'écoule du réservoir à la même vitesse. Déterminer la quantité de sel présente dans le réservoir en fonction du temps t.

Soit $y(t)$ la quantité de sel contenue dans le réservoir t minutes après le début de l'expérience ($y(0) = 0$). Étudions la variation Δy de la quantité de sel entre les instants t et $t + \Delta t$:

– En Δt minutes, le réservoir reçoit $2\,\Delta t$ litres de solution, donc $0{,}6\,\Delta t$ kg de sel.

– Dans le réservoir, il y a $y(t)$ kg de sel, donc les $2\,\Delta t$ litres de solution qui s'écoulent contiendront $2\,\Delta t\,\dfrac{y(t)}{10} = 0{,}2y(t)\,\Delta t$ kg de sel. (Si Δt est assez petit pour que l'on puisse considérer que la concentration du sel ne varie pas entre les instants t et $t + \Delta t$.)

On a donc : $\Delta y = (0{,}6 - 0{,}2y)\,\Delta t$. Soit, pour Δt tendant vers zéro :

$$y'(t) + 0{,}2y(t) = 0{,}6.$$

La solution générale de cette équation différentielle est donnée par :

$$y(t) = k\,e^{-0{,}2t} + 3.$$

Comme on doit avoir $y(0) = 0$, on a nécessairement $k = -3$, d'où la fonction cherchée :

$$y(t) = 3(1 - e^{-0{,}2t}).$$

2. ÉQUATIONS DU DEUXIÈME ORDRE DE LA FORME $ay'' + by' + cy = 0$ (3)

Soient a, b et c trois réels tels que a soit non nul, et soit l'équation différentielle définie par :

$$ay'' + by' + cy = 0.$$

Puisque a est non nul, cette équation différentielle équivaut à l'équation différentielle définie par :

$$y'' + \frac{b}{a}y' + \frac{c}{a}y = 0.$$

Considérons donc, pour deux réels p et q, l'équation différentielle définie par :

$$y'' + py' + qy = 0 \qquad (3')$$

a. Espace vectoriel des solutions

• Soit y_1 et y_2 des solutions de l'équation différentielle (3') (et donc aussi de l'équation différentielle (3)). On a :

$$\begin{cases} y_1'' + py_1' + qy_1 = 0 \\ y_2'' + py_2' + qy_2 = 0 \end{cases}$$

Quels que soient les réels λ et μ, on a alors :

$$\lambda(y_1'' + py_1' + qy_1) + \mu(y_2'' + py_2' + qy_2) = 0,$$

c'est-à-dire : $(\lambda y_1 + \mu y_2)'' + p(\lambda y_1 + \mu y_2)' + q(\lambda y_1 + \mu y_2) = 0.$

Il en résulte que $\lambda y_1 + \mu y_2$ est également une solution de l'équation différentielle (3'). Comme la fonction nulle est une intégrale particulière de l'équation différentielle étudiée, l'ensemble des intégrales de cette équation différentielle est non vide, et puisqu'il est stable par combinaison linéaire, c'est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

b. Équation de la forme $y'' - k^2y = 0$ (pour $k \in \mathbb{R}^*$)

• La connaissance des propriétés de l'exponentielle permet d'aborder la résolution de ce cas simple de l'équation différentielle (3'). En effet, si $y(x) = e^{kx}$, on sait que $y''(x) = k^2 e^{kx}$. On sait donc que les fonctions $[x \mapsto e^{kx}]$ et $[x \mapsto e^{-kx}]$ sont solutions de l'équation différentielle $y'' - k^2y = 0$. Il en résulte, d'après ce qui précède, que toute combinaison linéaire de ces deux fonctions est solution de l'équation différentielle proposée.

• Considérons, s'il en existe, une intégrale y de l'équation différentielle définie pour $k \neq 0$ par : $y'' - k^2y = 0$, telle que, de plus, $y(0) = y'(0) = 0$.

Posons $z = y' - ky$. On a : $z' = y'' - ky'$.

Par suite : $z' + kz = y'' - k^2y = 0$.

Il en résulte (d'après le § **I A** ci-dessus) : $z(x) = C\, e^{-kx}$.

D'autre part : $z(0) = y'(0) - ky(0) = 0$.

Donc : $C = 0$; la fonction z est la fonction nulle.

Il en résulte que la fonction y satisfait à l'équation différentielle : $y' - ky = 0$.

Donc, il existe un réel λ tel que $y = \lambda\, e^{kx}$.

Comme $y(0) = 0$, on en conclut que y est la fonction nulle. Donc :

La fonction nulle est la seule intégrale de l'équation différentielle $y'' - k^2y = 0$ telle que $y(0) = y'(0) = 0$.

REMARQUE :

Il en résulte que les fonctions $[x \mapsto e^{kx}]$ et $[x \mapsto e^{-kx}]$ sont linéairement indépendantes dans l'espace vectoriel des solutions.

• Soit z une intégrale quelconque de l'équation différentielle $z'' - k^2z = 0$.
Soit α et β des réels tels que, si $y(x) = \alpha\, e^{kx} + \beta\, e^{-kx}$, on ait :

$$z(0) = y(0) \quad \text{et} \quad z'(0) = y'(0).$$

On a : $\begin{cases} \alpha + \beta = z(0) \\ k\alpha - k\beta = z'(0) \end{cases}$ soit (pour $k \neq 0$) : $\begin{cases} \alpha + \beta = z(0) \\ \alpha - \beta = \dfrac{z'(0)}{k}. \end{cases}$

Les réels α et β sont donc définis de façon unique.
Considérons alors la fonction u telle que : $u(x) = z(x) - \alpha\, e^{kx} - \beta\, e^{-kx}$.

Cette fonction, étant somme de deux intégrales de l'équation différentielle linéaire définie par $y'' - k^2y = 0$, est également une intégrale de cette équation différentielle. De plus, on a, par construction : $u(0) = 0$ et $u'(0) = 0$.
La fonction u est donc la fonction nulle d'après le résultat ci-dessus, et l'on peut conclure :

THÉORÈME 1	**La solution générale de l'équation différentielle définie pour $k \in \mathbb{R}^*$ par $y'' - k^2y = 0$ est donnée par : $y(x) = A\, e^{kx} + B\, e^{-kx}$. Les constantes A et B sont définies par les conditions initiales (par exemple par la donnée de $y(0)$ et $y'(0)$).**

REMARQUES :

1° On a ainsi prouvé que l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle $y'' - k^2y = 0$ est de dimension 2, et qu'une de ses bases est formée par les fonctions $[x \mapsto e^{kx}]$ et $[x \mapsto e^{-kx}]$.

2° Remarquons que k et $-k$ sont les solutions de l'équation $X^2 - k^2 = 0$.

c. Équation de la forme $y'' + \omega^2 y = 0$ (pour $\omega \in \mathbb{R}^*$)

• La connaissance des propriétés des fonctions trigonométriques permet d'aborder la résolution de ce cas simple de l'équation différentielle (3'). En effet, si $y(x) = \cos \omega x$, on a $y'(x) = -\omega \sin \omega x$ et $y''(x) = -\omega^2 \cos \omega x = -\omega^2 y(x)$.
De même, si $y(x) = \sin \omega x$, on a $y''(x) = -\omega^2 y(x)$. Il en résulte que toute combinaison linéaire $[x \mapsto A \cos \omega x + B \sin \omega x]$ est solution de l'équation différentielle proposée.

★ Activité

1° Une fonction Φ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est définie par la donnée de deux fonctions f et g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$: $\Phi(x) = f(x) + i\,g(x)$.
On a alors : $\Phi'(x) = f'(x) + i\,g'(x)$.

a) *Considérons, pour k réel, l'équation différentielle définie par :* $Y' - ikY = 0$.
*En s'inspirant du § **1 a** ci-dessus, prouver que la solution générale de cette équation différentielle est définie par :* $Y(x) = C\, e^{ikx}$.
Préciser les parties réelles et imaginaires de e^{ikx}, *et vérifier.*

b) *On considère l'équation différentielle* $y'' + \omega^2 y = 0$.
*En s'inspirant du § **2 b** ci-dessus (avec* $z = y' + i\omega y$*), prouver que :*
La fonction nulle est la seule intégrale de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ telle que $y(0) = y'(0) = 0$.

2° *Soit z une intégrale de l'équation différentielle* $z'' + \omega^2 z = 0$.

a) *Prouver qu'il existe un couple unique* (α, β) *de réels tel que, si* $y(x) = \alpha \cos \omega x + \beta \sin \omega x$, *on ait :* $z(0) = y(0)$ *et* $z'(0) = y'(0)$.

b) *En s'inspirant de ce qui précède, démontrer que :*

THÉORÈME 2	**La solution générale de l'équation différentielle définie pour $\omega \in \mathbb{R}^*$ par $y'' + \omega^2 y = 0$ est donnée par : $y(x) = A \cos \omega x + B \sin \omega x$. Les constantes A et B sont définies par les conditions initiales (par exemple par la donnée de $y(0)$ et $y'(0)$).**

*3° **a)** Préciser la dimension et une base de l'espace vectoriel des solutions de l'équation différentielle* $y'' + \omega^2 y = 0$.
***b)** Montrer que* $i\omega$ *et* $-i\omega$ *sont les racines d'une équation du second degré associée à l'équation différentielle étudiée. Rappeler comment* $\cos \omega x$ et $\sin \omega x$ *s'expriment comme combinaisons linéaires de* $e^{i\omega x}$ *et* $e^{-i\omega x}$. *Exprimer la solution générale du théorème **2** comme combinaison linéaire de ces deux exponentielles complexes.*

d. Cas général : Équation $y'' + py' + qy = 0$ (3')

★ Activité

Soit à résoudre l'équation différentielle définie par $y'' + py' + qy = 0$.
*1° **a)** Pour tout réel* λ, *on pose* $y(x) = e^{\lambda x} z(x)$ $\left(\text{soit } z(x) = \dfrac{y(x)}{e^{\lambda x}}\right)$.
Calculer $y'(x)$ *et* $y''(x)$ *en fonction de* $z(x)$, $z'(x)$ *et* $z''(x)$.
***b)** Montrer que* y *est une solution de (3') si, et seulement si,* z *est solution de l'équation différentielle définie par :*

$$z'' + (2\lambda + p)z' + (\lambda^2 + \lambda p + q)z = 0.$$

***c)** On pose* $\lambda = -\dfrac{p}{2}$. *Montrer que la fonction* y *définie par* $y(x) = e^{-\frac{p}{2}x} z(x)$ *est solution de (3') si, et seulement si,* z *est solution d'une équation différentielle que l'on précisera.*
***d)** Déterminer, en utilisant les résultats déjà obtenus ci-dessus (théorèmes **1** et **2**), l'intégrale générale de l'équation différentielle (4') dans chacun des trois cas :*

$$p^2 - 4q > 0 \quad ; \quad p^2 - 4q = 0 \quad ; \quad p^2 - 4q < 0.$$

2° Déterminer dans chacun des trois cas ci-dessus, une solution de l'équation différentielle (3') satisfaisant en outre aux conditions initiales : $y(0) = a$ et $y'(0) = b$.
Prouver que cette solution est unique.

*3° **a)** A quelle condition la fonction* y *définie par* $y = e^{kx}$ *est-elle solution de l'équation différentielle (3')?*
***b)** Retrouver par ce moyen la discussion ci-dessus.*
***c)** Exprimer l'intégrale générale de (3') comme combinaison linéaire de fonctions exponentielles complexes, lorsque* $p^2 - 4q < 0$.

On retiendra les résultats de cette activité sous la forme suivante :

THÉORÈME 3

L'intégrale générale de l'équation différentielle définie par :

$$y'' + py' + qy = 0$$

s'exprime à l'aide des racines r_1 et r_2 de son *équation caractéristique* :

$$X^2 + pX + qy = 0.$$

***a)* Si $p^2 - 4q > 0$, alors r_1 et r_2 sont réels, et l'intégrale générale est :**

$$x(x) = A\, e^{r_1 x} + B\, e^{r_2 x}.$$

***b)* Si $p^2 - 4q = 0$, alors $r_1 = r_2$ est un nombre réel, et l'intégrale générale est :**

$$y(x) = e^{r_1 x}(Ax + B).$$

***c)* Si $p^2 - 4q < 0$, alors r_1 et r_2 sont complexes conjugués.**
Soit $r_1 = \alpha + i\beta$ et $r_2 = \alpha - i\beta$. L'intégrale générale est alors :

$$y(x) = e^{\alpha x}(A \cos \beta x + B \sin \beta x).$$

Dans tous les cas, il existe une solution unique satisfaisant aux conditions initiales $y(0) = y_0$ et $y'(0) = y'_0$.

REMARQUES :

1° Dans tous les cas, l'espace vectoriel des solutions est de dimension 2.

2° Dans le cas où $p^2 - 4q < 0$, l'intégrale générale peut aussi s'écrire :

$$y(x) = C\,e^{\alpha x} \cos(\beta x + \varphi),$$

où C et φ désignent des réels quelconques. Calculer C et φ en fonction de A et B.

2. EXERCICE RÉSOLU

Résoudre les équations différentielles suivantes, et déterminer la solution particulière satisfaisant aux conditions initiales données.

a) $y'' + 2y' - 3y = 0$; $x_0 = 1$, $y_0 = 1$, $y'_0 = 1$;
b) $y'' + 2y' + 5y = 0$; $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $y'_0 = 1$;
c) $y'' + 4y' + 4y = 0$; $x_0 = -1$, $y_0 = 1$, $y'_0 = 2$.

a) L'équation caractéristique est : $X^2 + 2X - 3 = 0$.

Or, $X^2 + 2X - 3 = (X - 1)(X + 3)$.

La solution générale de l'équation différentielle étudiée est donc définie par :

$$y = C_1\,e^x + C_2\,e^{-3x}.$$

Les conditions initiales conduisent au système : $\begin{cases} C_1 e + C_2 e^{-3} = 1 \\ C_1 e - 3C_2 e^{-3} = 1 \end{cases}$.

D'où $C_2 = 0$ et $C_1 = \dfrac{1}{e}$.

L'intégrale cherchée est donc définie par : $y = e^{x-1}$.

b) L'équation caractéristique est : $X^2 + 2X + 5 = 0$.

Elle admet les racines complexes $-1 + 2i$ et $-1 - 2i$.

L'intégrale générale de l'équation différentielle étudiée est donc définie par :

$$y = e^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x).$$

Les conditions initiales conduisent au système :

$$\begin{cases} C_1 = 0 \\ 2C_2 = 1 \end{cases}.$$

L'intégrale cherchée est donc définie par : $y = \dfrac{1}{2}\,e^{-x} \sin 2x$.

c) L'équation caractéristique est : $X^2 + 4X + 4 = 0$.

Or, $X^2 + 4X + 4 = (X + 2)^2$.

L'intégrale générale de l'équation différentielle étudiée est donc définie par :

$$y = (C_1 x + C_2)\,e^{-2x}.$$

Les conditions initiales conduisent au système :

$$\begin{cases} (-C_1 + C_2)e^2 = 1 \\ (3C_1 - 2C_2)e^2 = 2 \end{cases}$$

Il en résulte que : $C_1 = \dfrac{4}{e^2}$ et $C_2 = \dfrac{5}{e^2}$.

L'intégrale cherchée est donc définie par : $y = (4x + 5)\,e^{-2x-2}$.

3. ÉQUATIONS DE LA FORME $ay'' + by' + cy = f(x)$ (4)

★ Activités

I – *1° Prouver que, si y_1 et y_2 sont des solutions de l'équation différentielle* (4), *alors* $y_1 - y_2$ *est solution de l'équation différentielle* $ay'' + by' + cy = 0$ (3)

2° *Soit y_1 une solution de* (4), *et y une solution de* (3). *Prouver que* $y + y_1$ *est solution de* (4).

3° Déduire de ce qui précède que la solution générale de (4) *est la somme d'une solution particulière de* (4) *et de la solution générale de* (3).

II – *Soit à résoudre l'équation différentielle :* $ay'' + by' + cy = d$.

1° Prouver que cette équation différentielle admet une solution particulière constante.

2° Résoudre les équations différentielles suivantes, et déterminer la solution particulière satisfaisant aux conditions initiales données :

- $y'' + 2y' - 3y = 9$; $y(1) = 1$, $y'(1) = 1$;
- $y'' + 2y' + 5y = -10$; $y(0) = 0$; $y'(0) = 1$;
- $y'' + 4y' + 4y = 9$; $y(-1) = 1$, $y'(-1) = 2$.

III – *Soit à résoudre l'équation différentielle :* $y'' + y' - 2y = x^2 + 2x - 1$.

1° Prouver que cette équation différentielle admet pour intégrale particulière une fonction polynôme de degré 2.

2° En déduire l'intégrale générale de l'équation différentielle proposée.

3° Déterminer, s'il en existe, une intégrale particulière satisfaisant aux conditions initiales suivantes : $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.

IV – *Soit l'équation différentielle :* $y'' + y' - 2y = x^2\, e^x$.

1° Prouver que cette équation différentielle admet pour intégrale particulière une fonction φ définie par : $\varphi(x) = P(x)\, e^x$, *où P est une fonction polynôme de degré* 3.

2° En déduire l'intégrale générale de l'équation différentielle proposée.

V – *Soit l'équation différentielle :* $y'' - 4y' + 4y = (x^2 - 1)e^{2x}$.

1° Prouver que cette équation différentielle admet pour intégrale particulière une fonction φ définie par : $\varphi(x) = Q(x)e^{2x}$, *où Q est une fonction polynôme de degré* 4.

2° En déduire l'intégrale générale de l'équation différentielle proposée.

VI – *Soit l'équation différentielle :* $y'' + 2y' + 5y = 2 \cos x$.

a) *Prouver que cette équation différentielle admet une solution particulière de la forme :* $[x \mapsto A \cos x + B \sin x]$.

b) *En déduire la solution générale de l'équation différentielle proposée.*

VII – *Soit l'équation différentielle :* $y'' + 9y = \cos 3x$.

1° Prouver que cette équation différentielle admet une solution particulière de la forme : $[x \mapsto x(A \cos 3x + B \sin 3x)]$.

2° En déduire la solution générale de l'équation différentielle proposée.

VIII – *Résoudre les équations différentielles ci-dessous :*

a) $2y'' + y' - y = 2e^x$;

b) $y'' - 7y' + 6y = \sin x$;

c) $y'' + y + \sin 2x = 0$, *avec les conditions initiales* $y(\pi) = y'(\pi) = 1$.

d) $5y'' - 6y' + 5y = \sin \frac{4}{5} x$, *avec les conditions initiales* $y(0) = y'(0) = 0$.

EXERCICES ET PROBLÈMES

Résoudre les équations différentielles des exercices **1** *à* **19.** *Préciser, dans chaque cas, l'intégrale particulière satisfaisant aux conditions initiales données.*

1. $y' - 2y = 0, \quad y(0) = 1.$

2. $3y' + 7y = 0, \quad y(2) = -5.$

3. $y'' - 9y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1.$

4. $y'' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

5. $y'' + 4y = 0, \quad y(0) = 6, \quad y'(0) = 10.$

6. $y'' - \pi y = 0, \quad y(0) = y'(0) = \pi.$

7. $y'' - 4y' + 3y = 0, \quad y(0) = 6, \quad y'(0) = 10.$

8. $y'' + 4y' + 29y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 15.$

9. $y'' - 2y' + y = 0, \quad y(0) = y'(0) = 1.$

10. $y'' + y' + y = 0, \quad y(0) = y'(0) = 1.$

11. $4y'' - 8y' + 5y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

12. $25y'' - 20y' + 4y = 0, \quad y(0) = y'(0) = 1.$

13. $y'' - 4y' = 0, \quad y(0) = 8, \quad y' = 4.$

14. $y'' + 9y' = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2.$

15. $y'' + 2y' = 0, \quad y(0) = y'(0) = 2.$

16. $5y'' - 3y' = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

17. $y''' + 2y'' + y' = 0, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 1.$

18. $y''' + 2y'' - 3y' = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1.$

19. $y''' + 2y'' + 3y' = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1.$

Pour chacune des équations différentielles des exercices **20** *à* **29,** *on cherchera une intégrale particulière (on pourra poser* $y = z\,e^{-\frac{b}{a}x}$*, et déterminer* z*). En déduire, dans chaque cas, l'intégrale générale.*

20. $7y' + 2y = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1.$

21. $2y' - 3y = 5\,e^{-2x}(x^2 + x + 1).$

22. $y' + y = x\,e^{-x}.$

23. $y' + y = e^{2x}.$

24. $y' + y = \cos x.$

25. $y' - y = e^x \ln x.$

26. $y' - y = \sin x.$

27. $y' - y = e^x \tan x.$

28. $3y'' + 2y' = x^3 - x^2.$

29. $y'' - 2y' = e^x.$

Résoudre les équations différentielles des exercices **30** *à* **38,** *en déterminant une intégrale particulière par la méthode indiquée.*

30. $y'' - y' = x^2 + x.$
Chercher une intégrale particulière sous la forme d'une fonction polynôme de degré 3.

31. $y'' + y = (x + 1)\,e^x.$
Effectuer le changement de variable $y(x) = z(x)\,e^x.$

32. $y'' + 9y = \cos x.$
Chercher une intégrale particulière sous la forme $\lambda \cos x + \mu \sin x.$

33. $y'' - 2y' + 3y = e^{-x} \cos x.$
Chercher une intégrale particulière sous la forme $e^{-x}(\lambda \cos x + \mu \sin x).$

34. $y'' + y' - 2y = 8 \sin 2x.$
Chercher une intégrale particulière sous la forme $\lambda \cos 2x + \mu \sin 2x.$

35. $y'' + 2y' - 3y = x\,e^{-x}.$
Chercher une intégrale particulière sous la forme $P(x)\,e^{-x}$*, où* $P(x)$ *est un polynôme.*

36. $y'' + 2y' - 3y = x\,e^x.$
Chercher une intégrale particulière sous la forme $Q(x)\,e^x$*, où* $Q(x)$ *est un polynôme.*

37. $y'' + y' + y = x\,e^{-x}.$
Chercher une intégrale particulière sous la forme $P(x)\,e^{-x}$*, où* $P(x)$ *est un polynôme.*

38. $y'' + 2y' + 3y = \cos x.$
Chercher une intégrale particulière sous la forme $\lambda \cos x + \mu \sin x.$

APPLICATIONS DIVERSES

Dans chacun des exercices **39** *à* **47,** *on écrira l'équation différentielle rendant compte des conditions de l'énoncé, et on la résoudra si possible.*

39. Un réservoir contient 20 l d'air (80 % d'azote et 20 % d'oxygène). Il reçoit 0,1 l d'azote par seconde. La même quantité de mélange (supposé homogène) s'échappe du réservoir. Étudier en fonction du temps le pourcentage d'azote contenu dans le mélange. Au bout de combien de temps le réservoir contiendra-t-il 99 % d'azote?

40. Un réservoir contient 100 l d'eau, mélangée avec 10 kg de sel, de l'eau pure coule dans le réservoir à une vitesse de 5 litre à la minute. Étudier en fonction du temps la quantité de sel contenue dans le réservoir. Combien y aura-t-il de sel dans le réservoir au bout d'une heure?

41. Trouver une courbe passant par le point de coordonnées (2, 3) et telle que les axes de coordonnées interceptent sur toute tangente un segment admettant le point de contact pour milieu.

42. Trouver les courbes pour lesquelles le segment de tangente compris entre le point de contact et l'axe des abscisses est coupé en son milieu par l'axe des ordonnées.

43. Un point matériel de masse m est animé d'un mouvement rectiligne sous l'action d'une force directement proportionnelle au temps et inversement proportionnelle à la vitesse du point. Écrire et intégrer si possible l'équation différentielle du mouvement.

44. Un point matériel de masse m est sollicité par deux centres, les forces étant proportionnelles à la distance, le facteur de proportionnalité est k. La distance entre les deux centres est $2c$. Le corps se trouve à l'instant initial sur la ligne des centres à une distance a du milieu, et la vitesse initiale est nulle. Trouver la loi du mouvement.

45. Un solide de 4 kg accroché à un ressort l'allonge de 1 cm. Trouver la loi du mouvement sachant que l'extrémité supérieure effectue des oscillations définies par $z = \sin(\sqrt{100g})t$ (où z désigne l'élongation verticale).

46. Un tube long et étroit tourne horizontalement à une vitesse angulaire ω autour d'un axe vertical. A l'instant initial, à une distance a_0 de l'axe, et à l'intérieur du tube se trouve une boule de masse m.
1° Écrire l'équation du mouvement de la boule par rapport au tube sachant que sa vitesse initiale (par rapport au tube) est nulle.
2° Même question qu'au *1°* en supposant que le milieu intérieur du tube oppose au mouvement de la boule une résistance proportionnelle à la vitesse (coefficient de proportionnalité h).
3° Reprendre les *1°* et *2°* ci-dessus en supposant que la boule est fixée à un ressort de longueur a_0, de raideur k, et dont l'autre extrémité est fixée au point O (intersection de l'axe et du tube).

47. Étudier les équations différentielles obtenues aux mises en équation de l'Activité préliminaire I. Les résoudre chaque fois que possible.

OSCILLATIONS

48. On considère un ressort à boudin de longueur l et de raideur k, suspendu par l'une de ses extrémités O. A l'autre extrémité, on attache un mobile de masse m. Soit x l'abscisse du mobile sur un axe vertical, d'origine O.
1° *a*) Calculer l'abscisse de la position d'équilibre du solide.
b) Écrire l'équation différentielle à laquelle satisfait la fonction x (x est fonction du temps t).
c) Déterminer $x(t)$ en fonction des constantes du problème (on notera x_0 l'abscisse pour $t = 0$, et v_0 la vitesse pour $t = 0$).
2° On suppose en outre que le milieu oppose au mouvement du mobile une force proportionnelle à la vitesse (coefficient de proportionnalité : h).
a) Écrire l'équation différentielle à laquelle satisfait alors la fonction x.
b) Déterminer $x(t)$ en fonction des constantes du problème (on discutera suivant les valeurs de ces constantes).
3° On suppose que le mobile est excité par une force supplémentaire verticale, fonction du temps $F = F_m \cos \omega t$.
a) Écrire l'équation différentielle à laquelle satisfait la fonction x, dans le cas d'oscillations libres, puis dans le cas d'oscillations amorties.
b) Résoudre l'équation différentielle obtenue dans chacun des cas.
4° Commenter les résultats, et se reporter au cours de physique.

49. Un pendule de torsion est constitué par un fil de torsion vertical de constante C, fixé au centre d'un disque horizontal, de moment d'inertie J. Soit θ l'angle formé par le disque avec sa position d'équilibre.

1° *a*) Écrire l'équation différentielle à laquelle satisfait la fonction θ (θ est fonction du temps t).
b) Déterminer $\theta(t)$ en fonction des constantes du problème (on notera θ_0 l'angle pour $t = 0$, et on considérera que la vitesse initiale est nulle).

2° On suppose en outre que le disque subit un freinage proportionnel à la vitesse angulaire (coefficient H).
a) Écrire l'équation différentielle à laquelle satisfait alors la fonction θ.
b) Déterminer $\theta(t)$ en fonction des constantes du problème (on discutera suivant les valeurs de ces constantes).

3° On suppose que le pendule de torsion est excité par une force $F_m \cos \omega t$, appliquée dans le plan du disque, tangentiellement à ce disque, à une distance r du centre.
a) Écrire l'équation différentielle à laquelle satisfait alors la fonction θ, dans le cas d'oscillations libres, puis dans le cas d'oscillations amorties.
b) Résoudre l'équation différentielle obtenue, dans chacun des cas.

50. Un circuit électrique est formé d'une bobine d'inductance L et d'un condensateur de capacité C montés en série.

1° *a*) Écrire l'équation différentielle à laquelle satisfait la charge q fonction du temps, du condensateur.
b) Déterminer $q(t)$ et $i(t) = \dfrac{dq}{dt}$ en fonction des constantes du problème.

2° On suppose en outre que le circuit comporte une résistance R montée en série.
a) Écrire l'équation différentielle à laquelle satisfait alors la fonction q.
b) Déterminer $q(t)$ et $i(t)$ en fonction des constantes du problème.

3° On suppose le circuit décrit au *2°* est ouvert, et on impose aux bornes une différence de potentiel $u(t) = U_m \cos \omega t$.
a) Écrire l'équation différentielle à laquelle satisfait alors la fonction q.
b) Déterminer $q(t)$ et $i(t)$ en fonction des constantes du problème.

4° Commenter les résultats, et se reporter au cours de physique.

PROBLÈMES DIVERS

51. On se propose de résoudre sur l'intervalle
$$I =]0, +\infty[$$
l'équation différentielle définie par :
$$x^2 f''(x) + x f'(x) = 0. \qquad (1)$$

1° *a)* Montrer que les fonctions $f_1 = [x \mapsto \ln x]$ et $f_2 = [x \mapsto 1]$ sont des solutions de l'équation différentielle (1).
b) On pose $g(x) = x f'(x)$ (pour $x \in I$).
A quelle équation différentielle la fonction g satisfait-elle?
En déduire l'intégrale générale de (1).

2° On considère l'équation différentielle définie sur I par :
$$x^2 f''(x) + x f'(x) = \frac{4 + \ln x}{x}.$$
La résoudre en cherchant une solution particulière de la forme $\left[x \mapsto \dfrac{a \ln x + b}{x}\right]$.

52. A — On se propose de déterminer l'ensemble F des fonctions f numériques d'une variable réelle définies sur $]-1, +\infty[$, dérivables sur cet intervalle vérifiant :
$$\forall x \in]-1, +\infty[, \quad (1 + x) f'(x) + f(x) = 1 + \ln(1 + x).$$

1° Soit $f \in F$ et soit g définie par :
$$\forall x \in]-1, +\infty[, \quad g(x) = (1 + x) f(x).$$
Démontrer que g est dérivable sur $]-1, +\infty[$ et que g est une primitive de la fonction h définie par :
$$\forall x \in]-1, +\infty[, \quad h(x) = 1 + \ln(1 + x).$$
Réciproquement, soit g_1 une primitive de la fonction h. Démontrer que la fonction f_1 définie par :
$$\forall x \in]-1, +\infty[, \quad f_1(x) = \frac{g_1(x)}{1 + x}$$
est un élément de F.

2° *a)* Déterminer des réels A et B tels que :
$$\forall x \in]-1, +\infty[, \quad \frac{x}{1 + x} = A + \frac{B}{1 + x}.$$
b) A l'aide d'une intégration par parties déterminer l'ensemble des primitives de la fonction h.

3° En déduire l'ensemble F.

B — On considère l'ensemble des fonctions f_k de $]-1, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définies par :
$$\forall x \in]-1, +\infty[, \quad f_k(x) = \ln(1 + x) + \frac{k}{1 + x}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

1° Discuter suivant les valeurs de k, le sens de variation des fonctions f_k.

2° Tracer, avec soin, dans un même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les représentations graphiques des fonctions f_1, f_0 et f_{-1}.

3° Soit $M_1(t)$, $M_2(t)$, $M_3(t)$ les points d'abscisse t sur les représentations graphiques respectives des fonctions f_{k_1}, f_{k_2}, f_{k_3}. Démontrer que le rapport $\dfrac{\overline{M_1(t)M_2(t)}}{\overline{M_1(t)M_3(t)}}$ est indépendant de t.

C — *1°* Soit :
$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k x^k = 1 - x + x^3 - x^2 + \dots - x^{2n-1}.$$
Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geqslant 1$ et pour tout réel x, $x \in]-1, +\infty[$:
$$f'_0(x) = P_n(x) + \frac{x^{2n}}{1 + x}.$$

2° Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \ \forall x \in [0, 1], \ \dfrac{x^{2n}}{1 + x} \leqslant x^{2n}$.
En déduire pour tout entier $n \geqslant 1$ la double inégalité :
$$0 \leqslant \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1 + x} \, dx \leqslant \frac{1}{2n + 1}.$$

3° On considère la suite (w_n) définie par :
$\forall n \in \mathbb{N}^*$,
$$w_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2n}.$$
Démontrer que
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f_0(1) = w_n + \int_0^1 \frac{x^{2n}}{1 + x} \, dx.$$
En déduire que la suite (w_n) admet, lorsque n tend vers $+\infty$, une limite que l'on précisera. Trouver un entier n_0 tel que $\ln 2 - w_{n_0} < 0{,}1$.

53. On se propose d'étudier l'ensemble E des fonctions φ de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$, deux fois dérivables vérifiant :
$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* \quad x^2 \varphi''(x) - x \varphi'(x) + \varphi(x) = 0. \qquad (1)$$

1° Montrer que E n'est pas vide.

2° On cherche une fonction φ de E sous la forme
$$\varphi(x) = x u(x).$$
où u est une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
Vérifier que (1) équivaut à $x u''(x) = A$ (où A est une constante arbitraire) pour tout x dans $\mathbb{R}_+^*$.
En déduire la forme générale des fonctions u, puis celle des fonctions de E.

3° On considère la fonction $h : x \mapsto x \ln x$ définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
a) Montrer qu'elle appartient à E.
b) On désigne par $\tilde{h}$ le prolongement de h défini de la façon suivante : $\tilde{h}(x) = h(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^*$
$$\tilde{h}(0) = 0$$
La fonction $\tilde{h}$ est-elle continue au point $x = 0$? Est-elle dérivable en ce point?
c) Étudier la variation et représenter le graphe de $\tilde{h}$.

54. Soit n un réel strictement positif et h la fonction numérique de la variable réelle x, $x \in \mathbb{R}_+^*$, définie par :

$$h(x) = \int_0^1 t^n \sin(tx)\,dt.$$

1° Établir que $h(x) = \dfrac{1}{x^{n+1}} \displaystyle\int_0^x v^n \sin v\,dv.$

2° Montrer que h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
3° Établir que :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad xh'(x) + (n+1)h(x) = \sin x.$$

4° Trouver une fonction ψ telle que :

$$x\psi'(x) + 3\psi(x) = \sin x.$$

(On exprimera $\psi(x)$ sans signe d'intégration.)

55. Soit y_1 et y_2 deux solutions particulières de l'équation différentielle définie par :

$$y'' + py' + qy = 0.$$

On pose $W(x) = y_1 y_2' - y_1' y_2 = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$.

1° *a*) Montrer que W satisfait à l'équation différentielle :

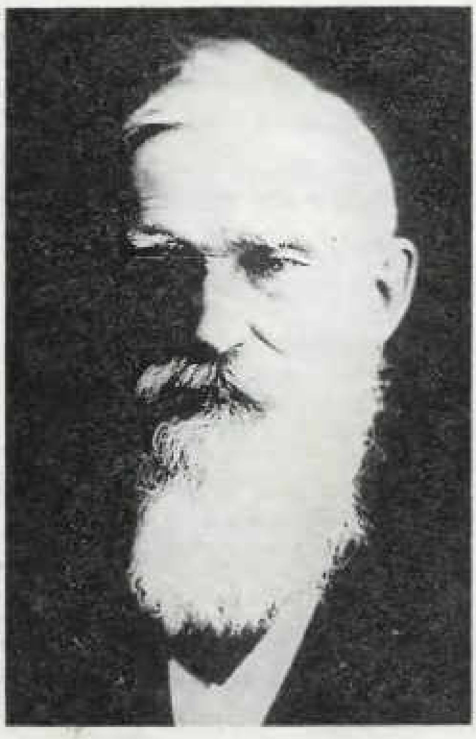
$$W'(x) + pW(x) = 0.$$

b) En déduire la fonction W.
2° *a*) Que peut-on dire de la fonction W s'il existe un réel x_0 tel que $W(x_0) = 0$?
b) En déduire que, si y_1 et y_2 ne sont pas proportionnelles, alors, pour tout réel x, $W(x)$ est non nul.
c) En déduire que, s'il existe un réel x_0 tel que $W(x_0) \neq 0$, alors y_1 et y_2 ne sont pas proportionnelles.

56. On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{C}$ définie par $f(t) = x(t) + iy(t)$, où x et y sont deux fonctions de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$. Soit $k = a + ib$ et $\lambda = \alpha + i\beta$. On cherche f de façon que :

$$f'(t) = kf(t) \quad \text{et} \quad f(0) = \lambda.$$

1° *a*) Dans le cas particulier $b = 0$, traduire les conditions de l'énoncé par un système d'équations différentielles permettant de déterminer les fonctions x et y.
b) Terminer la résolution dans le cas $b = 0$.
2° Reprendre le *1°* dans le cas particulier $a = 0$.
3° Dans le cas général où $a \neq 0$ et $b \neq 0$, on pose $f(t) = e^{at} g(t)$. Montrer que g est solution de l'équation différentielle définie par $g'(t) = ibg(t)$. En déduire la solution dans le cas général.



Collection Palais de la Découverte.

Pafnoutiy Lvovitch TCHEBICHEV, mathématicien russe (1821-1894). Ses travaux portèrent essentiellement sur les nombres premiers, les fonctions orthogonales, l'approximation des fonctions continues par des polynômes et le calcul des probabilités.

CHAPITRE 8

APPROXIMATIONS POLYNOMIALES

I – ACTIVITÉS PRÉLIMINAIRES

1. POSITION DU PROBLÈME

• L'ensemble des fonctions numériques d'une variable réelle est un ensemble très vaste. Lorsqu'on étudie une fonction, il est souvent intéressant de réaliser des approximations de cette fonction par des fonctions dont on connaît le comportement.
Ce problème d'approximation par une fonction se présente essentiellement sous deux aspects :
***a*)** La fonction f étant définie sur un intervalle $[a, b]$, approcher la fonction f par une fonction φ de type déterminé, de façon que φ réalise la meilleure approximation de f sur $[a, b]$ vis-à-vis d'un certain critère. On dit alors que l'approximation est **globale** sur $[a, b]$.
***b*)** La fonction f étant définie sur un voisinage $]x_0 - \alpha, \ x_0 + \alpha[$ d'un réel x_0, approcher la fonction f par une fonction ψ de type déterminé, de façon que l'approximation de $f(x)$ par $\psi(x)$ soit d'autant meilleure que x est voisin de x_0, et la meilleure obtenue par les fonctions du type envisagé. On dit alors que ψ est une approximation **locale** de $f(x)$ en x_0.

• Nous avons rencontré, en classe de Première, des exemples d'approximations locales d'une fonction par une fonction affine. Cette étude nous a conduit à la notion de dérivabilité d'une fonction en un point. Dans ce chapitre, nous allons nous préoccuper d'approximations d'une fonction par des fonctions polynômes, au voisinage d'une valeur x_0 (éventuellement infinie).

• Notons que l'on peut envisager d'autres types d'approximations que des approximations polynomiales. Citons par exemple l'approximation des fonctions par des fonctions trigonométriques.

2. ACTIVITÉS

★ Activité 1 : Fonction affine tangente

*1° **a**) Soit f une fonction définie au voisinage d'un point x_0, et dérivable en x_0. Rappeler la définition du nombre dérivé de f en x_0. Écrire le développement limité de f à l'ordre 1 en x_0.*
***b**) Quelle est la meilleure approximation locale en x_0 de f par une fonction affine? Expliquer pourquoi.*

2° Dans chacun des cas suivants, écrire le développement limité de f à l'ordre 1 en x_0. Interpréter géométriquement en traçant sur un graphique soigné, la courbe d'équation $y = f(x)$ et sa tangente au point d'abscisse x_0.

a) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, $x_0 = 0$;

b) $f(x) = \sin x$, $x_0 = 0$;

c) $f(x) = e^{-x^2+x}$, $x_0 = 0$;

d) $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$.

*3° **a)** Soit $y = ax + b$ l'équation de la tangente à la courbe d'équation $y = f(x)$ au point d'abscisse x_0. Interpréter géométriquement le signe de $f(x) - (ax + b)$.*
b) *Illustrer le **a)** dans chacun des cas faisant l'objet du **2°**.*

★ Activité 2 : Approximation polynomiale locale de $\dfrac{1}{1-x}$ en 0

a) *Pour tout réel x, on pose :* $S_4 = 1 + x + x^2 + x^3$.
Calculer $xS_4 - S_4$.
En déduire une expression de S_4.
b) *Prouver qu'il existe une fonction ε telle que, pour tout réel x différent de 1 :*

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^3\varepsilon(x),$$

avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

c) *Construire sur un même graphique les courbes représentatives des fonctions :*

$$[x \mapsto 1 + x] \quad ; \quad [x \mapsto 1 + x + x^2] \quad ; \quad [x \mapsto 1 + x + x^2 + x^3] \quad ; \quad \left[x \mapsto \frac{1}{1-x}\right].$$

d) *Étudier les limites suivantes :*

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 1}{x} \quad ; \quad \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 1 - x}{x^2} \quad ; \quad \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 1 - x - x^2}{x^3}.$$

*Préciser le rapport entre les résultats obtenus et la question **b)**.*

★ Activité 3 : Approximation locale en 0 de $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$

On considère la fonction F définie sur ℝ par : $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$.

*1° **a)** Prouver que la fonction f est impaire.*
b) *Calculer $F''(x)$. Déterminer un réel M strictement positif tel que, pour tout réel x de l'intervalle [0, 1], on ait :* $-M \leqslant F''(x) \leqslant 0$.
c) *En déduire que, pour tout réel x de l'intervalle [0, 1], on a :*

$$-Mx \leqslant F'(x) - F'(0) \leqslant 0.$$

(On pourra utiliser, en les précisant avec soin, des propriétés de l'intégrale.)
d) *Déduire de ce qui précède que, pour tout réel x de l'intervalle [0, 1], on a :*

$$-M\frac{x^2}{2} \leqslant F(x) - x \leqslant 0.$$

e) *En déduire un encadrement de* $F(x) - x$ *sur l'intervalle* $[-1, 1]$.

f) *Interpréter graphiquement le résultat ci-dessus par une figure soignée.*

2° *a*) *Calculer* $F'''(x)$ *et* $F^{(4)}(x)$.

b) *Déterminer un encadrement de* $F^{(4)}(x)$ *pour* x *élément de* $[0, 1]$.

c) *En opérant de proche en proche, comme au* 1°, *déterminer un encadrement de* $F(x) - x + \frac{x^3}{3}$, *pour* x *élément de* $[0, 1]$, *puis pour* x *élément de* $[-1, 1]$.

d) *Interpréter graphiquement le résultat par une figure soignée.*

★ Activité 4 : Approximations polynomiales en l'infini

1° *On considère la fonction* f *définie par :*

$$f(x) = \frac{2x^3 + 3x^2 - 2x - 4}{x^2 - 1}.$$

a) *Déterminer les réels* a, b, c *et* d *tels que, pour tout* x *de* $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ *:*

$$f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{x^2 - 1}.$$

(On pourra utiliser la division des polynômes.)

b) *Montrer que* $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - ax - b) = 0 = \lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - ax - b)$.

c) *Interpréter graphiquement le résultat ci-dessus, en traçant sur une même figure, les courbes représentatives des fonctions* $[x \mapsto ax + b]$ *et* f.

d) *Prouver que* $a = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ *et* $b = \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - ax$.

2° *Reprendre le* 1° *avec :* $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + x}{x + 1} = ax^2 + bx + c + \frac{d}{x + 1}$.

(On représentera graphiquement f et $[x \mapsto ax^2 + bx + c]$.)

II – DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

1. DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS AU VOISINAGE DE 0

DÉFINITION 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant 0, sauf éventuellement en 0. On dit que f admet un *développement limité polynomial d'ordre n en 0* pour exprimer qu'il existe des réels $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$, et une fonction ε tels que :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + ... + a_n x^n + x^n \varepsilon(x),$$

avec : $$\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

REMARQUES :

1° Nous dirons **« développement limité »** pour **« développement limité polynomial »**.

2° On prolonge éventuellement la fonction ε par continuité en 0 : $\varepsilon(0) = 0$.

3° Pour $n = 1$, on retrouve la définition du développement limité à l'ordre 1.

4° On aura rencontré dans les Activités préliminaires des exemples de développements limités.

• Déterminer le développement limité à l'ordre n de la fonction f au voisinage de 0, c'est déterminer les coefficients $a_0, a_1, ..., a_n$. Les méthodes permettant cette détermination sont multiples (voir Activités préliminaires). On a en particulier :

$$a_0 = f(0) \quad ; \quad a_1 = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - a_0}{x} \quad ; \quad a_2 = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - a_0 - a_1 x}{x^2} \quad ; \quad \text{etc.}$$

Il en résulte que le développement limité de f à l'ordre n au voisinage de 0 est unique, s'il existe.
Mais la détermination de ces limites n'est pas nécessaire à la recherche des développements limités. Beaucoup de méthodes permettent de parvenir au résultat, et ainsi d'obtenir directement certaines limites (voir Activités préliminaires, et ci-dessous).

REMARQUE :

On peut définir le développement limité de f en 0 à l'ordre n, même si f n'est pas définie en 0, à condition que f soit définie au voisinage de 0, et que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = a_0$ soit un réel. On peut également définir les développements limités d'une fonction à droite et à gauche de 0.

2. UN THÉORÈME DE COMPARAISON

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $[a, b]$, et dont la fonction dérivée est bornée sur $[a, b]$. Le *théorème des accroissements finis* et les propriétés de l'intégrale, permettent de déterminer un encadrement de $f(b) - f(a)$. Nous allons nous intéresser aux encadrements que l'on peut déduire de certains encadrements de la fonction dérivée de f par des fonctions puissance.

Supposons que pour tout réel x de l'intervalle $[-a, a]$, on ait :

$$|f'(x)| \leqslant M|x|^n \quad (\text{où} \quad M \in \mathbb{R}_+ \quad \text{et} \quad n \in \mathbb{N})$$

• Pour tout x de $[0, a]$, cette inégalité équivaut à l'encadrement :

$$-Mx^n \leqslant f'(x) \leqslant Mx^n.$$

Il en résulte (voir chapitre 3) que, si f' est continue sur $[-a, a]$:

$$\int_0^x -Mt^n \, dt \leqslant \int_0^x f'(t) \, dt \leqslant \int_0^x Mt^n \, dt,$$

c'est-à-dire que :

$$-M\frac{x^{n+1}}{n+1} \leqslant f(x) - f(0) \leqslant M\frac{x^{n+1}}{n+1},$$

ou encore que :

$$|f(x) - f(0)| \leqslant \frac{M}{n+1}|x|^{n+1}.$$

• Pour tout x de $[-a, 0]$:
– Si n est pair, on a $-Mx^n \leqslant f'(x) \leqslant Mx^n$.
Il en résulte que $\displaystyle\int_x^0 -Mt^n \, dt \leqslant \int_x^0 f'(t) \, dt \leqslant \int_x^0 Mt^n \, dt$;
c'est-à-dire que :

$$M\frac{x^{n+1}}{n+1} \leqslant f(0) - f(x) \leqslant -M\frac{x^{n+1}}{n+1},$$

ou encore que : $|f(x) - f(0)| \leqslant \dfrac{M}{n+1}|x|^{n+1}$.

— Si n est impair, on a $Mx^n \leqslant f'(x) \leqslant -Mx^n$.

Il en résulte que $\int_x^0 Mt^n \, dt \leqslant \int_x^0 f'(t) \, dt \leqslant \int_x^0 -Mt^n \, dt$;

c'est-à-dire que :

$$-M\frac{x^{n+1}}{n+1} \leqslant f(0) - f(x) \leqslant M\frac{x^{n+1}}{n+1},$$

ou encore que : $|f(x) - f(0)| \leqslant \frac{M}{n+1}|x|^{n+1}$.

On peut donc énoncer :

THÉORÈME 1

Soit f une fonction dérivable, et dont la dérivée est continue sur un intervalle $[-a, a]$. S'il existe un réel positif M et un entier n tels que, pour tout x de l'intervalle $[-a, a]$, on ait :

$$|f'(x)| \leqslant M|x|^n,$$

alors, pour tout réel x de $[-a, a]$, on a :

$$|f(x) - f(0)| \leqslant \frac{M}{n+1}|x|^{n+1}.$$

REMARQUE :

Le théorème ci-dessus peut se démontrer sans recours aux propriétés de l'intégrale, en étudiant le sens de variation sur $[0, a]$ et sur $[-a, 0]$ de la fonction $\left[x \mapsto f(x) - M\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]$, et d'autres fonctions analogues. Cette méthode ne suppose pas que f' est continue sur $[-a, a]$. Le lecteur étudiera cette méthode à titre d'exercice.

3. DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS USUELS

• Pour tout réel x, on a : $|\cos x| \leqslant 1$.
Il en résulte d'après le théorème **1** ci-dessus que :

$$|\sin x - \sin 0| \leqslant |x|, \quad \text{soit :} \quad |\sin x| \leqslant |x|;$$

puis que : $$|-\cos x + \cos 0| \leqslant \frac{x^2}{2}, \quad \text{soit :} \quad |1 - \cos x| \leqslant \frac{x^2}{2}.$$

De même, successivement : $|x - \sin x| \leqslant \frac{|x^3|}{6}$; $\left|\frac{x^2}{2} + \cos x - 1\right| \leqslant \frac{x^4}{24}$;

$$\left|\frac{x^3}{6} - x + \sin x\right| \leqslant \frac{|x^5|}{120} \quad ; \quad \left|\frac{x^4}{24} - \frac{x^2}{2} - \cos x + 1\right| \leqslant \frac{x^6}{720};$$

$$\left|\frac{x^5}{120} - \frac{x^3}{6} + x - \sin x\right| \leqslant \frac{|x^7|}{5\,040}.$$

Posons : $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + x^4\varepsilon_1(x)$

et : $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5\varepsilon_2(x)$.

On a donc : $\varepsilon_1(x) = \dfrac{1}{x^4}\left(\cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^4}{4}\right)$,

et : $\varepsilon_2(x) = \dfrac{1}{x^5}\left(\sin x - x + \dfrac{x^3}{6} - \dfrac{x^5}{120}\right)$.

D'après les calculs ci-dessus, on a :

$$|\varepsilon_1(x)| \leqslant \frac{x^2}{720}, \quad \text{et} \quad |\varepsilon_2(x)| \leqslant \frac{x^2}{5\,040}.$$

Il en résulte que : $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon_1(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon_2(x) = 0$.

On a donc ainsi prouvé que les fonctions sinus et cosinus admettent un développement limité au voisinage de 0 :

— à l'ordre 4 : $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + x^4\varepsilon_1(x)$, avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon_1(x) = 0$

— à l'ordre 5 : $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + x^5\varepsilon_2(x)$, avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon_2(x) = 0$.

REMARQUES :

1° Remarquons que : $2 = 2!$; $6 = 3!$; $24 = 4!$; $120 = 5!$.

2° Si l'on pose $\varepsilon_1(x) = x\alpha_1(x)$ et $\varepsilon_2(x) = x\alpha_2(x)$, on a $\lim\limits_{x \to 0} \alpha_1(x) = \lim\limits_{x \to 0} \alpha_2(x) = 0$.

On peut donc écrire :

à l'ordre 5 : $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{24} + x^5\alpha_1(x)$, avec $\lim\limits_{x \to 0} \alpha_1(x) = 0$;

à l'ordre 6 : $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + x^6\alpha_2(x)$, avec $\lim\limits_{x \to 0} \alpha_2(x) = 0$.

• Soit $f(x) = \ln\ (1 + x)$. Pour tout x de $]-1, +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{1+x} &,\quad f'(0) &= 1;\\
f''(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2} &,\quad f''(0) &= -1;\\
f'''(x) &= \frac{2}{(1+x)^3} &,\quad f'''(0) &= 2;\\
f^{(4)}(x) &= -\frac{6}{(1+x)^4} &,\quad f^{(4)}(0) &= -6.
\end{aligned}$$

Pour tout a de $]0, 1[$, la fonction $f^{(4)}$ est continue sur l'intervalle $[-a, a]$. Elle est donc bornée sur cet intervalle, et il existe un réel M tel que, pour tout x de l'intervalle $[-a, a]$:

$$|f^{(4)}(x)| \leqslant M.$$

D'après le théorème **1**, il en résulte successivement :

$$\begin{aligned}
&|f'''(x) - f'''(0)| \leqslant M|x|, &&\text{soit} \quad |f'''(x) - 2| \leqslant M|x|;\\
&|g''(x) - 2x - f''(0)| \leqslant M\frac{x^2}{2}, &&\text{soit} \quad |f''(x) - 2x + 1| \leqslant M\frac{x^2}{2};\\
&|f'(x) - x^2 + x - f'(0)| \leqslant M\frac{|x^3|}{6}, &&\text{soit} \quad |f'(x) - x^2 + x - 1| \leqslant M\frac{|x^3|}{6};\\
&\left|f(x) - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x - f(0)\right| \leqslant M\frac{x^4}{24}, &&\text{soit} \quad \left|f(x) - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - x\right| \leqslant M\frac{x^4}{24}.
\end{aligned}$$

Posons donc : $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x)$.

On a alors : $\varepsilon(x) = \frac{1}{x^3}\left(\ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right)$ et, d'après le résultat ci-dessus : $|\varepsilon(x)| \leqslant \frac{M|x|}{24}$.

Il en résulte que : $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

La fonction f admet donc un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 :

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon(x), \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

• Soit la fonction g définie par $g(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$.
On a, pour tout x de $]-1, +\infty[$:

$$g'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}, \quad g'(0) = \frac{1}{2};$$

$$g''(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4(1+x)\sqrt{1+x}}, \quad g''(0) = -\frac{1}{4};$$

$$g'''(x) = \frac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}} = \frac{3}{\sqrt{8(1+x)^2}\sqrt{1+x}}, \quad g'''(0) = \frac{3}{8};$$

$$g^{(4)}(x) = -\frac{15}{16}(1+x)^{-\frac{7}{2}} = -\frac{15}{16(1+x)^3\sqrt{1+x}}, \quad g^{(4)}(0) = -\frac{15}{16}.$$

La fonction $g^{(4)}$ est continue sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$. Elle est donc bornée sur cet intervalle, et il existe un réel M tel que, pour tout x de $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, on ait : $|g^{(4)}(x)| \leqslant M$.

En utilisant le théorème **1**, on obtient successivement, pour tout x de $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$:

$$\left|g'''(x) - \frac{3}{8}\right| \leqslant M|x|;$$

$$\left|g''(x) - \frac{3x}{8} + \frac{1}{4}\right| \leqslant M\frac{x^2}{2},$$

$$\left|g'(x) - \frac{3x^2}{16} + \frac{x}{4} - \frac{1}{2}\right| \leqslant M\frac{|x^3|}{6}$$

Donc : $\left|g(x) - \frac{3x^3}{3\times 16} + \frac{x^3}{2\times 4} - \frac{x}{2} - 1\right| \leqslant \frac{Mx^4}{24}$.

Posons : $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + x^3\varepsilon(x)$. On a alors :

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{x^3}\left(\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} - \frac{x^3}{16}\right).$$

Et, d'après le résultat ci-dessus : $|\varepsilon(x)| \leqslant \frac{M|x|}{24}$. Il en résulte que : $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

La fonction g admet donc un développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 :

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + x^3\varepsilon(x), \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0.$$

★ Activité 1

En utilisant la même méthode que ci-dessus, déterminer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction h définie par $h(x) = e^x$.

• En résumé :

THÉORÈME 2

On a les développements limités suivants, au voisinage de 0 :

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^3\varepsilon_1(x), \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to 0} \varepsilon_1(x) = 0;$$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + x^3\varepsilon_2(x), \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to 0} \varepsilon_2(x) = 0;$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + x^3\varepsilon_3(x), \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to 0} \varepsilon_3(x) = 0;$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + x^3\varepsilon_4(x), \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to 0} \varepsilon_4(x) = 0;$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} + x^5\varepsilon_5(x), \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to 0} \varepsilon_5(x) = 0;$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + x^6\varepsilon_6(x), \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to 0} \varepsilon_6(x) = 0;$$

★ Activité 2

Retrouver le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 *de la fonction* $f = [x \mapsto \sqrt{1+x}]$ *en étudiant successivement les limites :*

$$a_0 = \lim_{x \to 0} f(x) \quad ; \quad a_1 = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - a_0}{x} \quad ; \quad a_2 = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - a_0 - a_1 x}{x^2} \quad ;$$

$$a_3 = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - a_0 - a_1 x - a_2 x^2}{x^3}$$

4. AUTRES DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS AU VOISINAGE DE ZÉRO

• La méthode ci-dessus s'applique à toute fonction f admettant, sur un intervalle ouvert I contenant 0, des dérivées successives bornées sur I, jusqu'à un certain ordre k. On obtient ainsi un développement limité d'ordre $k - 1$.

• Il existe beaucoup de méthodes permettant d'aboutir à la détermination du développement limité éventuel d'une fonction f au voisinage de zéro. En particulier, à partir des développements limités usuels ci-dessus, on peut déduire les développements limités de nombreuses fonctions obtenues simplement à partir des fonctions faisant l'objet du théorème 2.

■ Exercice résolu

Déterminer un développement limité à l'ordre n de la fonction f, au voisinage de 0 :

a) $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$, $n = 5$; *b)* $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $n = 4$.

a) On a : $\sin x = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + x^6\varepsilon(x)$, avec : $\lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Donc : $\dfrac{\sin x}{x} = 1 - \dfrac{x^2}{3!} + \dfrac{x^4}{5!} + x^5\varepsilon(x)$, avec : $\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0$.

b) On a : $\sqrt{1+X} = 1 + \dfrac{X}{2} - \dfrac{X^2}{8} + \dfrac{X^3}{16} + X^3\varepsilon(X)$, avec : $\lim_{X\to 0} \varepsilon(X) = 0$.

Donc :
$$\sqrt{1-x^2} = 1 + \frac{-x^2}{2} - \frac{(-x^2)^2}{8} + \frac{(-x^2)^3}{16} + (-x^2)^3\varepsilon(-x^2)$$
$$= 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + x^4\left[-\frac{x^2}{16} - x^2\varepsilon(-x^2)\right]$$

Soit : $\varepsilon_1(x) = -\dfrac{x^2}{16} - x^2\varepsilon(-x^2)$.

Compte tenu de l'hypothèse $\lim_{X\to 0} \varepsilon(X) = 0$, et de $\lim_{x\to 0} (-x^2) = 0$, on en déduit : $\lim_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0$. Le développement limité cherché est donc :

$$\sqrt{1-x^2} = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{8} + x^4\varepsilon_1(x), \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon_1(x) = 0.$$

Exercice d'application

1. Déterminer le développement limité à l'ordre n de la fonction f, au voisinage de 0 :

a) $f(x) = \dfrac{1-\sqrt{1+x^2}}{x}$, $n = 3$;

b) $f(x) = \dfrac{1-\cos x}{x^2}$, $n = 5$.

5. DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS AU VOISINAGE DE x_0

Soit f une fonction numérique telle que la fonction $[h \mapsto f(x_0 + h)]$ admette un développement limité d'ordre n au voisinage de zéro.

On a : $f(x_0 + h) = a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + \ldots + a_n h^n + h^n\varepsilon(h)$, avec $\lim_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$.

Posons : $h = x - x_0$. On a alors :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n\varepsilon_1(x),$$

avec : $\varepsilon_1(x) = \varepsilon(x - x_0)$. Donc : $\lim_{x\to x_0} \varepsilon_1(x) = 0$.

On obtient ainsi ce que l'on appelle le développement limité de f à l'ordre n au voisinage de x_0.

Pour obtenir un tel développement limité, on peut utiliser le changement de variable $x = x_0 + h$, et déterminer le développement limité au voisinage de zéro de la fonction de h ainsi obtenu.

Exercice résolu

Déterminer, s'il existe, le développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0, de la fonction f :

a) $f(x) = \ln x$, $x_0 = 1$, $n = 3$;

b) $f(x) = \ln x$, $x_0 = 2$, $n = 4$;

c) $f(x) = \sqrt{1+x}$, $x_0 = 1$, $n = 3$.

a) On a $\ln x = \ln(1 + h)$, avec $h = x - 1$; or :

$$\ln(1 + h) = h - \frac{h^2}{2} + \frac{h^3}{3} + h^3\varepsilon(h), \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to 0} \varepsilon(h) = 0.$$

Donc : $\ln x = (x-1) - \dfrac{(x-1)^2}{2} + \dfrac{(x-1)^3}{3} + (x-1)^3\varepsilon_1(x)$, avec $\lim\limits_{x\to 1} \varepsilon_1(x) = 0$;

b) De même : $\ln x = \ln(2+h)$, avec $h = x-2$; or :

$$\ln(2+h) = \ln 2\left(1+\frac{h}{2}\right) = \ln 2 + \ln\left(1+\frac{h}{2}\right)$$

$$\text{et : } \ln\left(1+\frac{h}{2}\right) = \frac{h}{2} - \frac{h^2}{2\times 2^2} + \frac{h^3}{3\times 2^3} + \frac{h^3}{2^3}\varepsilon(h), \text{ avec } \lim_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0.$$

Donc : $\ln x = \ln 2 + \dfrac{x-2}{2} - \dfrac{(x-2)^2}{8} + \dfrac{(x-2)^3}{24} + (x-2)^3\varepsilon_1(x)$, avec $\lim\limits_{x\to 2}\varepsilon_1(x) = 0$.

c) On a : $\sqrt{1+x} = \sqrt{2+h}$, avec $h = x-1$; or :

$$\sqrt{2+h} = \sqrt{2}\left(\sqrt{1+\frac{h}{2}}\right) = \sqrt{2}\left(1 + \frac{h}{2\times 2} - \frac{h^2}{8\times 2^2} + \frac{h^3}{16\times 2^3} + \frac{h^3}{2^3}\varepsilon(h)\right),$$

avec $\lim\limits_{h\to 0}\varepsilon(h) = 0$.

Donc : $\sqrt{1+x} = \sqrt{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{4}(x-1) - \dfrac{\sqrt{2}}{32}(x-1)^2 + \dfrac{\sqrt{2}}{128}(x-1)^3 + (x-1)^3\varepsilon_1(x)$,

avec $\lim\limits_{x\to 1}\varepsilon_1(x) = 0$.

• Exercice d'application

2. Déterminer le développement limité à l'ordre n au voisinage de x_0 de la fonction f :

a) $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$, $x_0 = 2$, $n = 3$;

b) $f(x) = e^x$, $x_0 = 1$, $n = 3$;

c) $f(x) = \cos x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$, $n = 5$;

d) $f(x) = \sin x$, $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$, $n = 5$.

6. APPLICATIONS

a. *Calculs approchés*

Soit f une fonction admettant en un point x_0 un développement limité à l'ordre n :

$$f(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n + (x-x_0)^n\varepsilon(x),$$

avec $\lim\limits_{x\to x_0}\varepsilon(x) = 0$.

Posons $P_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n$.

($P_n(x)$ est la **partie régulière** du développement limité de $f(x)$.)

Pour tout réel x, $P_n(x)$ est une valeur approchée de $f(x)$ d'autant meilleure que x est voisin de x_0.

Nous admettrons que :

Si la fonction f admet sur un intervalle $[x_0-\alpha,\ x_0+\alpha]$ des dérivées successives jusqu'à l'ordre $n+1$ inclus, et si la dérivée $f^{(n+1)}$ est majorée en valeur absolue par un réel M sur $[x_0-\alpha,\ x_0+\alpha]$ (c'est-à-dire si, pour tout x de $[x_0-\alpha,\ x_0+\alpha]$, on a : $|f^{(n+1)}(x)| \leqslant M$); alors, pour tout x de $[x_0-\alpha,\ x_0+\alpha]$, $P_n(x)$ est une valeur approchée de $f(x)$ à l'incertitude $\dfrac{M|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$.

Exercice résolu

En utilisant un développement limité, déterminer une valeur approchée de :
a) ln 2,1; *b)* $\sqrt{0{,}98}$.

a) On a (voir § 6) : $\ln x = \ln 2 + \dfrac{x-2}{2} - \dfrac{(x-2)^2}{8} + \dfrac{(x-2)^3}{24} + (x-2)^3\varepsilon_1(x)$, et :

$$P_3(2{,}1) = \ln 2 + \frac{0{,}1}{2} - \frac{0{,}01}{8} + \frac{0{,}001}{24}$$
$$P_3(2{,}1) \approx \ln 2 + 0{,}05 - 0{,}001\,25 + 0{,}000\,041\,67$$
$$P_3(2{,}1) \approx \ln 2 + 0{,}048\,791\,67$$

D'autre part : $f^{(4)}(x) = -\dfrac{6}{x^4}$. Donc, pour tout réel x de l'intervalle $[2, 3]$, on a : $|f^{(4)}(x)| \leqslant \dfrac{3}{8}$.

Par suite :
$$|f(2{,}1) - P_3(x)| \leqslant \frac{3}{8}\frac{(0{,}1)^4}{4!},$$

soit : $|f(2{,}1) - P_3(x)| \leqslant \dfrac{0{,}000\,1}{64}$, c'est-à-dire : $|f(2{,}1) - P_3(x)| \leqslant 1{,}57 \times 10^{-6}$.

On obtient alors :

$$\ln 2 + 0{,}48\,791\,66 - 0{,}000\,001\,57 \leqslant f(2{,}1) \leqslant \ln 2 + 0{,}048\,791\,67 + 0{,}000\,001\,57.$$

Le réel ln 2 est également donné par une valeur approchée. On obtient alors l'encadrement :

$$0{,}693\,147\,18 + 0{,}048\,790\,09 \leqslant \ln 2{,}1 \leqslant 0{,}693\,147\,19 + 0{,}048\,793\,24$$
$$0{,}791\,937\,27 \leqslant \ln 2{,}1 \leqslant 0{,}741\,940\,43$$

c'est-à-dire:
$$0{,}741\,937 \leqslant \ln 2{,}1 \leqslant 0{,}741\,941.$$

L'amplitude de l'encadrement ainsi obtenu est 4×10^{-6}.

Et : $\ln 2{,}1 \approx 0{,}741\,939$ à 2×10^{-6} près.

(Le calcul direct à la machine donne : $\ln 2{,}1 \approx 0{,}741\,937\,345$.)

b) De même : $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{x^3}{16} + x^3\varepsilon(x)$.

$$P_3(0{,}98) = 1 + \frac{-0{,}02}{2} - \frac{(-0{,}02)^2}{8} + \frac{(-0{,}02)^3}{16},$$
$$P_3(0{,}98) = 1 - 0{,}01 - 0{,}000\,05 - 0{,}000\,000\,5,$$
$$P_3(0{,}98) = 0{,}989\,949\,5.$$

D'autre part : $f^{(4)}(x) = -\dfrac{15}{16(1+x)^3\sqrt{1+x}}$. Pour tout réel x de l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right]$:

$$|f^{(4)}(x)| \leqslant \frac{15}{16\left(\dfrac{3}{2}\right)^3\sqrt{\dfrac{3}{2}}}, \quad \text{soit} \quad |f^{(4)}(x)| \leqslant \frac{5\sqrt{2}}{18\sqrt{3}}.$$

Donc, pour tout réel x de l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right]$: $|f^{(4)}(x)| \leqslant \dfrac{1}{4}$.

Par suite : $|\sqrt{0{,}98} - P_3(0{,}98)| \leqslant \dfrac{1}{4}\dfrac{(-0{,}2)^4}{24}$,

Donc : $|\sqrt{0{,}98} - P_3(0{,}98)| \leqslant 0{,}000\,016\,7.$

Soit :

c'est-à-dire :

$$0{,}989\,949\,5 - 0{,}000\,016\,7 \leqslant \sqrt{0{,}98} \leqslant 0{,}989\,949\,5 + 0{,}000\,016\,7.$$

$$0{,}989\,932\,8 \leqslant \sqrt{0{,}98} \leqslant 0{,}989\,966\,2.$$

$$0{,}989\,93 \leqslant \sqrt{0{,}98} \leqslant 0{,}989\,97.$$

L'amplitude de l'encadrement ainsi obtenu est 4×10^{-5}.

Et : $\sqrt{0{,}98} \approx 0{,}989\,95$, à 2×10^{-5} près.

(Le calcul direct à la machine conduit à : $\sqrt{0{,}98} \approx 0{,}989\,949\,49$.)

Exercice d'application

3. En utilisant un développement limité au voisinage d'une valeur x que l'on déterminera, calculer une valeur approchée de :

a) $e^{0,1}$; *b)* $e^{2,1}$;
c) cos 46° (on se ramènera à une mesure en radians).

b. Étude des limites

Dans de nombreux cas, l'étude de la limite d'une fonction n'est pas aisée, et l'utilisation d'un développement limité peut rendre de nombreux services, car ses coefficients sont des limites de fonctions, et qu'il peut être déterminé par des méthodes ne nécessitant pas d'étude de limites.

Exercice résolu

Déterminer les limites suivantes :

a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} - x}{x^3}$; *b)* $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x^3}$.

a) $\sqrt{1+x} = 1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{x^3}{16} + x^3\varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$;

$\sqrt{1-x} = 1 - \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} - \dfrac{x^3}{16} - x^3\varepsilon_1(x)$, avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon_1(x) = 0$.

Donc : $\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} = x + \dfrac{x^3}{8} + x^3(\varepsilon(x) - \varepsilon_1(x))$. Par suite :

$$\frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} - x}{x^3} = \frac{1}{8} + \varepsilon(x) - \varepsilon_1(x).$$

Il en résulte que : $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x} - x}{x^3} = \frac{1}{8}$.

b) $\sin x = x - \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{x^5}{120} + x^6\varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$,

$x\cos x = x - \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{x^5}{24} + x^6\varepsilon_1(x)$, avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon_1(x) = 0$.

Donc : $\sin x - x\cos x = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^5}{30} + x^6(\varepsilon - \varepsilon_1(x))$. Par suite :

$$\frac{\sin x - x\cos x}{x^3} = \frac{1}{3} - \frac{x^2}{30} + x^3(\varepsilon - \varepsilon_1(x)).$$

Il en résulte que : $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x^3} = \frac{1}{3}$.

Exercice d'application

4. En utilisant des développements limités, déterminer les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x\,e^x - e^x + 1}{x^2 - x^3}$;

b) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{1 + 2x} - (1 + \sin x)}{x^2}$;

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^3}\left(e^x - \dfrac{x^2}{2} - 1 - \sin x\right)$;

d) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x^3}\left(\dfrac{\ln(1 + x)}{1 + x} - x\,e^{-\frac{3}{2}x}\right)$;

e) $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x(x - 1)} - x$;

f) $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2[\ln(1 + x) - \ln x]$.

c. Étude locale d'une fonction

Soit f une fonction admettant au voisinage de x_0 un développement limité à l'ordre n :

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \dots + a_n(x - x_0)^n + (x - x_0)^n \varepsilon(x),$$

avec $\lim\limits_{x \to x_0} \varepsilon(x) = 0$. Soit : $P_k(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_k(x - x_0)^k$.

La courbe Γ d'équation $y = f(x)$, et les courbes C_k d'équations $y = P_k(x)$ sont très voisines lorsque x est voisin de x_0. Les courbes C_k sont en général plus simples à tracer que la courbe Γ (surtout pour les petites valeurs de k), et peuvent permettre de préciser la forme de la courbe Γ au voisinage de x_0.

La position de Γ par rapport à chaque courbe C_k est définie, au voisinage de x_0, par le signe du terme $a_{k+1}(x - x_0)^{k+1}$ (si $a_{k+1} \neq 0$), ou plus généralement du premier terme non nul ne figurant pas dans $P_k(x)$.

★ Activité 1

Sur un graphique très soigné, tracer au voisinage de 0 les courbes C_k obtenues à l'aide des développements limités du théorème **2**, *ainsi que la courbe Γ pour :*

a) $f(x) = \dfrac{1}{1 - x}$; **b**) $f(x) = \sqrt{1 + x}$; ***c***) $f(x) = \ln(1 + x)$;

d) $f(x) = e^x$; ***e***) $f(x) = \cos x$; ***f***) $f(x) = \sin x$.

★ Activité 2

1° Soit f une fonction numérique définie et dérivable sur un intervalle $[-a, a]$, et admettant une dérivée seconde sur $[-a, a]$, sauf peut-être en 0. On suppose en outre que $f''(x)$ change de signe en 0 (pour fixer les idées, supposons que $f''(x)$ est du signe de x).

a) *Pour $x \in]0, a[$, on a donc : $f''(x) > 0$.*
En déduire que $f'(x) - f'(0) > 0$, puis que $f(x) > f(0) + xf'(0)$.

b) *Pour $x \in [-a, 0[$, on a : $f''(x) < 0$.*
En déduire que : $f(x) < f(0) + xf'(0)$.

c) *Que représente la droite D d'équation $y = xf'(0) + f(0)$ pour la courbe Γ d'équation $y = f(x)$?*

d) *Déduire de ce qui précède la position de Γ par rapport à la droite D.*

e) *Représenter soigneusement D et Γ pour la fonction f définie par :*

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2}{2} & \text{si } x \geqslant 0, \\[2ex] f(x) = -\dfrac{x^2}{2} & \text{si } x \leqslant 0. \end{cases}$$

Cette fonction admet-elle en 0 une dérivée seconde?

2° Reprendre le 1° pour une fonction f définie et dérivable sur un intervalle $I = [x_0 - \alpha,\ \ x_0 + \alpha]$, et admettant une dérivée seconde sur I sauf peut-être en x_0. On suppose en outre que $f''(x)$ change de signe en x_0 (on supposera que $f''(x)$ est du signe de $x_0 - x$).

3° Tracer soigneusement la courbe représentative de la fonction f, et sa tangente en x_0 :

a) $f(x) = e^{-x^2}$; $x_0 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

b) $f(x) = \sin x$; $x_0 = 0$.

4° Soit Γ la courbe représentative d'une fonction numérique f. Un point M_0 où Γ traverse sa tangente est un *point d'inflexion*. D'après ce qui précède, si la dérivée seconde de f change de signe en x_0, la courbe Γ admet un point d'inflexion d'abscisse x_0.

Déterminer les points d'inflexion de la courbe Γ dans les cas suivants :

a) $f(x) = \dfrac{x^3 + 3x}{3x^2 + 1}$; ***b)*** $f(x) = x \ln x - x^2$;

c) $f(x) = (x + 2)e^{\frac{1}{x}}$; ***d)*** $\dfrac{x^3}{|x|} + \ln(1 + x)$.

7. CARACTÈRE LOCAL D'UN DÉVELOPPEMENT LIMITÉ

Il est important de remarquer qu'un développement limité d'une fonction f au voisinage de x_0 ne permet de donner des valeurs approchées de $f(x)$ que pour les valeurs de x voisines de x_0 (voir Activité préliminaire **2 c.** et § **6 c.** Activité 1).

Les polynômes P_k ne permettent en général pas de préciser le comportement global de la fonction f. Ces fonctions polynômes P_k sont déterminées, lorsque f est indéfiniment dérivable en x_0, par les valeurs des dérivées successives de f en x_0 (voir Activité **1** ci-dessous), et deux fonctions peuvent être globalement très différentes et cependant avoir toutes leurs dérivées égales pour une certaine valeur x_0 (voir Activité **2** ci-dessous).

★ Activité 1

Soit f une fonction cinq fois dérivable sur l'intervalle $[-1, 1]$, et telle que la dérivée cinquième $f^{(5)}$ soit bornée sur $[-1, 1]$.

(On suppose qu'il existe un réel strictement positif M tel que, pour tout x de $[-1, 1]$ $|f^{(5)}(x)| \leqslant M$.)

a) *Utiliser la méthode du § **II** pour déterminer, en fonction des valeurs prises en 0 par les dérivées successives de f, le développement limité de $f(x)$ à l'ordre 4, au voisinage de 0.*

b) *Retrouver, en particulier, le résultat rencontré en classe de Première, concernant le développement limité à l'ordre 1 au voisinage de zéro.*

c) *On suppose que* $f(x) = a_0 + a_1 + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + x^5\varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

Déterminer, à l'aide de ce qui précède, un majorant sur l'intervalle $[-\alpha,\ \ \alpha]$ de $|x^5\varepsilon(x)|$.

★ Activité 2

On considère la fonction f définie par : $f(x) = e^{-1/x^2}$ *et* $f(0) = 0$.

1° Étudier et représenter graphiquement la fonction f. Est-elle dérivable en 0?

2° Prouver par récurrence que, pour tout entier n, il existe une fonction polynôme Q_n telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f^{(n)}(x) = Q_n\left(\frac{1}{x}\right)e^{-1/x^2}.$$

3° En déduire que, pour tout entier naturel n : $f^{(n)}(0) = 0$.

4° En déduire que, pour tout entier naturel k, $P_k(x) = 0$.

(La fonction f et la fonction nulle admettent donc, pour tout k, des développements limités d'ordre k ayant la même partie régulière $P_k(x)$. Or ces fonctions sont distinctes. On ne peut donc pas, sans conditions supplémentaires, caractériser une fonction par la suite des parties régulières de ses développements limités en zéro.)

III – APPROXIMATIONS AU VOISINAGE DE L'INFINI

1. ACTIVITÉ

1° On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{x^2 + x + 1}{x + 1}$.

a) *Démontrer qu'il existe des réels a, b et c, que l'on déterminera, tels que :*

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x + 1}.$$

b) *Représenter graphiquement les fonctions* $[x \mapsto ax + b]$ *et* $\left[x \mapsto \dfrac{c}{x + 1}\right]$.

c) *En déduire la représentation de la fonction f.*

d) *Déterminer un réel* x_0 *tel que, pour tout réel x supérieur à* x_0, $ax + b$ *soit une valeur approchée de* $f(x)$ *à* 10^{-3} *près.*

2° On considère la fonction g définie par : $g(x) = \dfrac{x^3 + 3x^2 - 7x + 1}{x + 2}$.

a) *On envisage d'écrire* $g(x)$ *sous la forme* $g(x) = P(x) + \dfrac{k}{x + 2}$, *où* $P(x)$ *désigne un polynôme. Quel doit être* a priori *le degré de* $P(x)$?

b) *Déterminer le polynôme P et la constante k.*

c) *Représenter graphiquement les fonctions* $[x \mapsto P(x)]$ *et* $\left[x \mapsto \dfrac{k}{x + 2}\right]$.

d) *En déduire la représentation graphique de la fonction g.*

3° On considère la fonction h définie par $h(x) = \sqrt{4x^2 + x}$.

a) *Pourquoi peut-on dire que, pour les grandes valeurs de x (en valeur absolue), h(x) se comporte comme* $\sqrt{4x^2}$?

b) *Étudier la limite en* $+\infty$ *de* $h(x) - 2x$.
En déduire qu'il existe un réel b et une fonction ε tels que :

$$h(x) = 2x + b + \varepsilon(x), \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to +\infty} \varepsilon(x) = 0.$$

c) *Étudier la limite en* $-\infty$ *de* $h(x) + 2x$.
En déduire qu'il existe un réel b′ et une fonction ε′ tels que :

$$h(x) = -2x + b' + \varepsilon'(x), \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to -\infty} \varepsilon'(x) = 0.$$

d) *Construire soigneusement les courbes représentatives des fonctions* $[x \mapsto 2x + b]$, $[x \mapsto -2x + b']$ *et h.*

2. COURBES ASYMPTOTES

• Soit f une fonction définie au moins sur un intervalle de la forme $]A, +\infty[$ (resp. $]-\infty, A[$). On dit qu'une fonction polynôme P est **une approximation polynomiale**

de f au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$) pour exprimer que la fonction ε définie par $\varepsilon(x) = f(x) - P(x)$ a pour limite 0 en $+\infty$ (resp. en $-\infty$), c'est-à-dire que :

$$f(x) = P(x) + \varepsilon(x), \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to +\infty} \varepsilon(x) = 0 \quad \left(\text{resp.} \lim_{x \to -\infty} \varepsilon(x) = 0\right).$$

• Soit $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_k x^k$.

On a alors : $\dfrac{f(x)}{x^k} = \dfrac{a_0}{x^k} + \dfrac{a_1}{x^{k-1}} + \dfrac{a_2}{x^{k-2}} + \ldots + \dfrac{a_{k-1}}{x} + a_k + \dfrac{\varepsilon(x)}{x^k}$.

Et, par conséquent : $a_k = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x^k} \left(\text{ou} \quad \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x^k}\right)$.

De même :

$$a_{k-1} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x) - a_k x^k}{x^{k-1}} \qquad \left(\text{ou} \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x) - a_k x^k}{x^{k-1}}\right)$$

$$a_{k-2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x) - a_k x^k - a_{k-1} x^{-1}}{x^{k-2}} \quad \left(\text{ou} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x) - a_k x^k - a_{k-1} x^{k-1}}{x^{k-2}}\right).$$

etc.

Il en résulte que si la fonction f admet en $+\infty$ (resp. en $-\infty$) une approximation polynomiale de degré k, celle-ci est unique. De plus, la fonction f n'admet alors pas d'approximation polynomiale en $+\infty$ (resp. en $-\infty$) de degré différent de k.

• Plus généralement une fonction φ quelconque est dite **approximation de f au voisinage de $+\infty$** (resp. de $-\infty$) si $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - \varphi(x)) = 0$ (resp. $\lim\limits_{x \to -\infty} (f(x) - \varphi(x)) = 0$).

Par exemple, soit $f(x) = \dfrac{x - \sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1}$.

On a alors : $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{\sqrt{x} - 1}$.

La fonction $\varphi = [x \mapsto \sqrt{x}]$ est une approximation de f au voisinage de $+\infty$.

• Soit $f(x) = \varphi(x) + \varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x \to +\infty} \varepsilon(x) = 0$. Soit C la courbe d'équation $y = \varphi(x)$ et Γ la courbe d'équation $y = f(x)$. Si M est le point de Γ d'abscisse x et P le point de C d'abscisse x, $|\varepsilon(x)|$ est la distance de M à P. Cette distance tend vers zéro lorsque x tend vers l'infini. Les courbes C et Γ sont très proches pour x très grand (on aurait les mêmes remarques en $-\infty$) (figure 1).

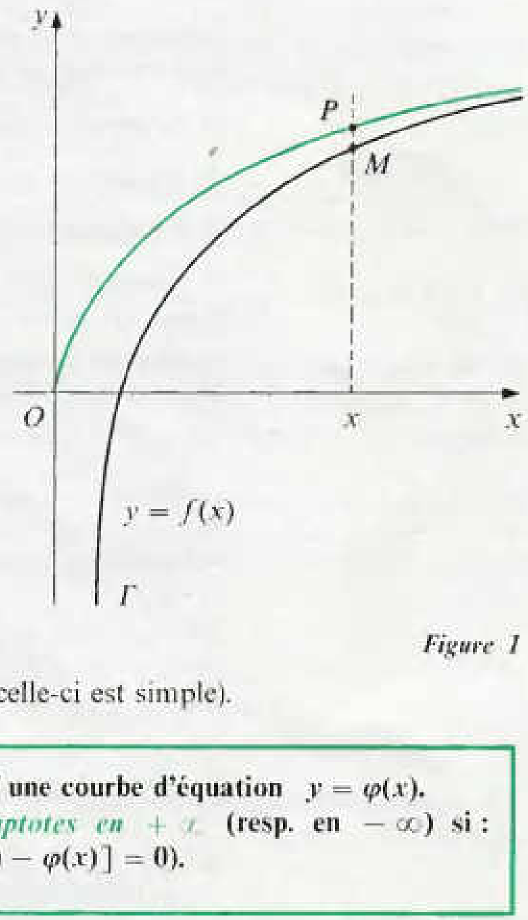


Figure 1

Pour préciser le tracé de Γ, on aura intérêt à tracer la courbe C (surtout lorsque celle-ci est simple).

DÉFINITION 2

Soit Γ une courbe d'équation $y = f(x)$ et C une courbe d'équation $y = \varphi(x)$. On dit que les courbes Γ et C sont *asymptotes en $+\infty$* (resp. en $-\infty$) si : $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - \varphi(x)) = 0$ (resp. $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - \varphi(x)] = 0$).

REMARQUES :

1° On dit parfois que les fonctions f et φ sont **asymptotes en** $+\infty$ (resp. en $-\infty$).

2° Lorsque la courbe C sert à préciser le tracé de la courbe Γ, on dit que **C est asymptote à Γ** (et que **φ est asymptote à f) en $+\infty$** (resp. en $-\infty$).

3° Lorsque φ est une fonction polynôme, on dit que c'est **la fonction polynôme asymptote à f en $+\infty$** (resp. en $-\infty$).

4° La position relative des courbes Γ et C est définie par le signe de $f(x) - \varphi(x)$.

5° Pour prouver que les courbes Γ et C sont asymptotes, il suffit de prouver que $f(x) = \varphi(x) + \varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x \to +\infty} \varepsilon(x) = 0$ (ou $\lim\limits_{x \to -\infty} \varepsilon(x) = 0$).

Toute méthode permettant d'arriver à ce résultat peut être appliquée.
Dans la plupart des cas, on ne connaît pas *a priori* la fonction φ. L'étude de certaines limites peut permettre de déterminer φ lorsqu'il s'agit d'un polynôme. Mais dans la plupart des cas, on aura intérêt à évaluer le poids des termes en jeu pour se faire une idée de la forme de la fonction φ.

6° Dans la pratique, les courbes utilisables pour préciser les branches infinies des courbes sont les droites, les paraboles, et exceptionnellement des courbes polynomiales de degré supérieur à 3, ou des courbes bien maîtrisées comme les courbes représentatives de la fonction ln, ou de la fonction exponentielle.

Exemples :

1° Soit $f(x) = \sqrt{x(x-1)}$.
En $+\infty$, comme en $-\infty$, $x(x-1)$ se comporte comme x^2 et $f(x)$ se comporte comme $\sqrt{x^2} = |x|$.

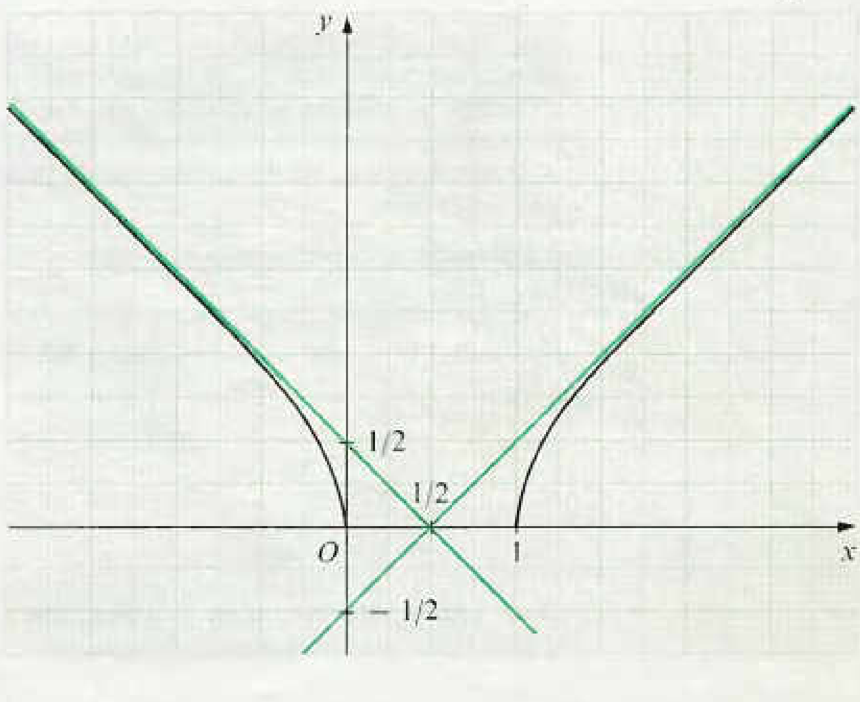
Étudions donc en $+\infty$: $f(x) - x = \sqrt{x^2 - x} - x = \dfrac{x^2 - x - x^2}{\sqrt{x^2 - x} + x}$

c'est-à-dire : $f(x) - x = \dfrac{-x}{x\left(\sqrt{1 - \frac{1}{x}} + 1\right)} = -\dfrac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x}} + 1}$. Par conséquent :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - x = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad f(x) - x = -\frac{1}{2} + \varepsilon(x), \quad \text{avec} \quad \lim_{x \to +\infty} \varepsilon(x) = 0.$$

Il en résulte que la droite d'équation : $y = x - \dfrac{1}{2}$ est asymptote en $+\infty$ à la courbe Γ d'équation $y = \sqrt{x(x-1)}$. On prouve de même que la droite d'équation $y = -x + \dfrac{1}{2}$ est asymptote à la courbe Γ en $-\infty$ (figure 2).

Figure 2



2° Soit $f(x) = \dfrac{x^3 + 2}{2x}$.

On a : $f(x) = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{x}$.

La parabole P d'équation $y = \dfrac{x^2}{2}$ est donc asymptote à la courbe Γ en $+\infty$ et en $-\infty$.

D'autre part,

$$f(x) - \frac{x^2}{2} = \frac{1}{x}$$

est du signe de x. Γ est « au-dessus » de P pour x positif; et « en dessous » de P pour x négatif (figure 3).

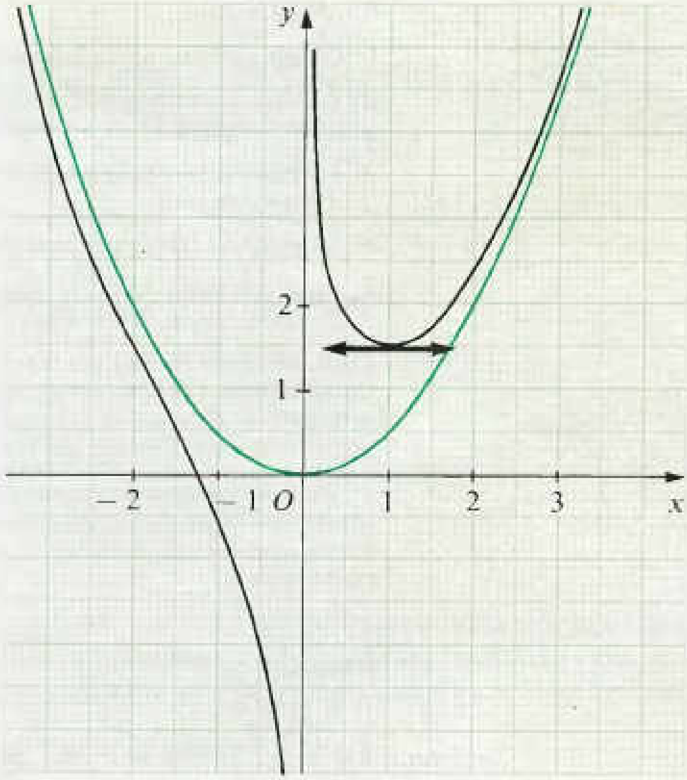


Figure 3

3° Soit $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 - 5x + 1}{x + 2}$.

• En $+\infty$, comme en $-\infty$, $f(x)$ se comporte comme x^2. On peut alors étudier :

$$g(x) = f(x) - x^2 = \frac{x^3 - 2x^2 - 5x + 1 - x^3 - 2x^2}{x + 2} = \frac{-4x^2 - 5x + 1}{x + 2}.$$

En $+\infty$, comme en $-\infty$, $g(x)$ se comporte comme $-4x$. On peut alors étudier :

$$h(x) = g(x) + 4x = f(x) - x^2 + 4x = \frac{-4x^2 - 5x + 1 + 4x^2 + 8x}{x + 2} = \frac{3x + 1}{x + 2}.$$

En $+\infty$, comme en $-\infty$, $h(x)$ se comporte comme 3. On obtient ainsi la fonction polynôme asymptote : $P(x) = x^2 - 4x + 3$. L'étude de $f(x) - P(x)$ permettra d'étudier la position relative des courbes C et Γ.

• Pour obtenir le résultat ci-dessus, on peut également utiliser la technique de division des polynômes :

La division ci-contre conduit au résultat :

$$\frac{x^3 - 2x^2 - 5x + 1}{+3 \quad x + 2} = x^2 - 4x + 3 - \frac{5}{x + 2}$$

$$\begin{array}{r|l}
x^3 - 2x^2 - 5x + 1 & x + 2 \\
\underline{-(x^3 + 2x^2)} & \overline{x^2 - 4x + 3} \\
-4x^2 - 5x & \\
\underline{-(-4x^2 - 8x)} & \\
3x + 1 & \\
\underline{-(3x + 6)} & \\
-5 &
\end{array}$$

Il en résulte que la courbe Γ d'équation $y = f(x)$ admet une parabole asymptote d'équation $y = x^2 - 4x + 3$.

• Exercice d'application

5. Soit Γ la courbe d'équation $y = f(x)$. Déterminer si Γ admet pour $|x|$ infini, des courbes asymptotes, et interpréter graphiquement :

a) $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + 2x + 2}{x - 1}$;

b) $f(x) = \dfrac{2x^3 - 3x^2 - 2x + 4}{x^2 - 1}$;

c) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$;

d) $f(x) = \dfrac{1}{x} + \ln x$.

3. UTILISATION DE DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

★ Activité 1

Soit $f(x) = \sqrt{x(x-1)}$.

1° Calculer $f\left(\dfrac{1}{X}\right) = g(X)$.

2° a) Pour X strictement positif, donner un développement limité à l'ordre 3 de $g(X)$ au voisinage de 0.

b) En déduire $f(x)$ sous la forme $f(x) = \varphi(x) + \varepsilon(x)$, *avec* $\lim\limits_{x \to +\infty} \varepsilon(x) = 0$.

c) En déduire l'équation de la droite asymptote à la courbe d'équation $y = f(x)$ *en* $+\infty$.

3° Reprendre le 2° pour X strictement négatif.

4° Comparer avec l'exemple 1° ci-dessus.

★ Activité 2

Utiliser la méthode employée à l'activité **1** *pour étudier la courbe d'équation* $y = x^2[\ln(1 + x) - \ln x]$ *au voisinage de* $+\infty$.

IV — DROITES ASYMPTOTES

1. ASYMPTOTES EN x_0

Soit f une fonction numérique telle que $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$. Lorsque x est voisin de x_0, le point d'abscisse x et d'ordonnée $f(x)$ est très voisin du point d'ordonnée $f(x)$ de la droite d'équation $x = x_0$. On dit que cette droite est une **asymptote « verticale »** en x_0 à la courbe Γ d'équation $y = f(x)$ (figure 4 *a*). On parle également d'asymptote verticale (ou parallèle à (Oy)) en x_0, dans tous les cas où $f(x)$ admet en x_0 une limite, une limite à droite, ou une limite à gauche infinie (figure 4 *b*).

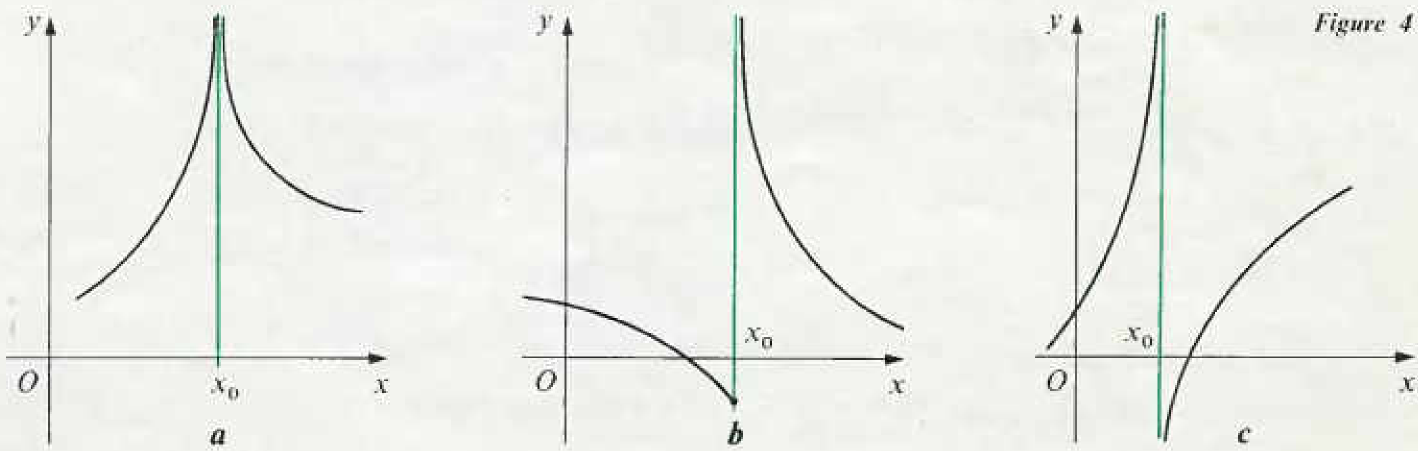


Figure 4

2. ASYMPTOTES EN $+\infty$

Soit f une fonction telle que $f(x) = ax + b + \varepsilon(x)$, avec $\lim\limits_{x \to +\infty} \varepsilon(x) = 0$.
La droite D d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe Γ d'équation $y = f(x)$.
Dans ces conditions, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = a$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - ax = b$.
Réciproquement, si ces conditions sont réalisées, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - (ax + b) = 0$.
Et la droite D est bien asymptote à la courbe Γ. On a bien entendu des résultats analogues en $-\infty$.

THÉORÈME 3

Soit f une fonction définie au voisinage de $+\infty$ (resp. $-\infty$).
La courbe Γ d'équation $y = f(x)$ admet en $+\infty$ (resp. $-\infty$) la droite asymptote d'équation $y = ax + b$ si, et seulement si :

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) - ax = b.$$

$$\left(\text{resp. } \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = a \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) - ax = b\right).$$

REMARQUE :

Dans le cas où $a = 0$, la condition $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$ (ou $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$) suffit à assurer l'existence de l'asymptote d'équation $y = b$. On parle alors d'**asymptote « horizontale »** (ou parallèle à (Ox)).

• Exercice d'application

6. Déterminer les (droites) asymptotes à la courbe d'équation :

$$y = f(x).$$

a) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^3}{x-1}}$; b) $f(x) = \dfrac{x^2 e^{\frac{1}{x}}}{x+1}$

EXERCICES ET PROBLÈMES

LIMITES

En utilisant éventuellement des développements limités à un ordre convenable, étudier les limites des exercices **1** *à* **45**.

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 3x}{\ln(1+x)}$. **2.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 2x}{x}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos^3 x}{x \sin 2x}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1+\sin x-\cos x}{1-\sin x-\cos x}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x-\sin x}{\sin x - x}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos\left(\dfrac{\pi}{3}+x\right)-\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right)}{x}$.

7. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+2h\right)-2\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+h\right)+\sin\dfrac{\pi}{6}}{h^2}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+\alpha x)}{x}$. **9.** $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{e^{3t}-1}{\sin 5t}$.

10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-e^{-x}}{\ln(1+x)}$. **11.** $\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\sqrt{1+y^2}-1}{y}$.

12. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x\cos x}{x(1-\cos x)}$. **13.** $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\cos mh-\cos nh}{h^2}$.

14. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x-\sin x}{\sin x(\cos 2x-\cos x)}$.

15. $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{5\sin t-7\sin 2t+3\sin 3t}{t^3}$.

16. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+2x}-e^x}{x^2}$. **17.** $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-\sin^2 x}{x^2\sin^2 x}$.

18. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}$.

19. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x-\dfrac{1}{2}\sin^2 x}{x^4}$.

20. $\lim\limits_{x\to 0} (1+x^2)^{\frac{1}{x}}$. **21.** $\lim\limits_{x\to 0} (1+3x)^{\frac{1}{\tan x}}$.

22. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln x}{x-1}$. **23.** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\ln(2x-1)}{\cos\dfrac{\pi}{2}x}$.

24. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{e}{e^x-e}-\dfrac{1}{x-1}$. **25.** $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1-x-\ln x}{1-\sqrt{2x-x^2}}$.

26. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x\sqrt{3x-2x^4}-x\sqrt[5]{x}}{1-\sqrt[3]{x^2}}$.

27. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^3}-1+\sqrt{(x-1)^3}}{\sqrt{(x^2-1)^3}-x+1}$.

28. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}}$.

29. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}$.

30. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{1-\sin\dfrac{x}{2}}{\cos\dfrac{x}{2}\left(\cos\dfrac{x}{4}-\sin\dfrac{x}{4}\right)}$.

31. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{e^x-e^2}{(x-4)e^x+xe^2}$.

32. $\lim\limits_{x\to \pi} \dfrac{\sin\dfrac{x}{2}+\cos x}{1+\sin^2 x+\cos x}$.

33. $\lim\limits_{x\to e} (\ln x - 1)\ln(x-e)$.

34. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$.

35. $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$.

36. $\lim\limits_{x\to -\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$.

37. $\lim\limits_{x\to +\infty} x(\sqrt{x^2+1}-x)$.

38. $\lim\limits_{x\to +\infty} x[\ln(1+x)-\ln x]$.

39. $\lim\limits_{x\to -\infty} (2x\sqrt{x(x-1)}+2x-1)$.

40. $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(x^3\sin\dfrac{1}{x}-x^2\cos\dfrac{1}{x}\right)$.

41. $\lim\limits_{x\to -\infty} (\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2+1})$.

42. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2\sin\dfrac{1}{x}}{x^2+1}$.

43. $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x\cos\dfrac{1}{x}}{x^2+1}$.

44. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2\left[\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)+\ln\left(1-\dfrac{1}{x}\right)\right]$.

45. $\lim\limits_{x\to +\infty} x^3\left[1-\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\ln\dfrac{x+1}{x}\right]$.

COURBES ASYMPTOTES

Dans les exercices **46** *à* **81**, *on demande de déterminer l'équation de courbes asymptotes à la courbe C d'équation* $y = f(x)$ *et de représenter graphiquement la courbe C et ses courbes asymptotes.*

46. $f(x) = x + \sqrt{1 + x^2}$. **47.** $f(x) = x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$.

48. $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+1}}$. **49.** $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2-1}{x^2-4}}$.

50. $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 5}$. **51.** $f(x) = x + \sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$.

52. $f(x) = x\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2$.

53. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4} - \sqrt{x^2 - 1}$.

54. $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x} + \sqrt{x^2 - 1}$.

55. $f(x) = \sqrt{2 - x^2(x^2 + 4)}$.

56. $f(x) = \dfrac{(x+1)^2}{x^2+1}$.

57. $f(x) = 2x - 1 + \sqrt{x - 4}$.

58. $f(x) = 1 - x + \sqrt{x^2 + x + 1}$.

59. $f(x) = x\sqrt{4x^2 - 8x}$.

60. $f(x) = \sqrt{x^2 + 2|x| + 3}$.

61. $f(x) = \sqrt{2x + |x^2 - 3|}$.

62.[1] $f(x) = \sqrt[3]{x^2(1-x)}$.

63.[1] $f(x) = \sqrt[5]{x^3(x^2-1)}$.

64. $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 + x - 1}{2x + 1}$.

65. $f(x) = \dfrac{x^4 - 1}{x^2 + 1}$. **66.** $f(x) = \dfrac{e^x + 2}{1 - 3e^x}$.

67. $f(x) = x - \dfrac{1}{2}\ln|2e^x - 1|$.

68. $f(x) = \ln\dfrac{1 + e^x}{2}$. **69.** $f(x) = x\,e^{\frac{1}{x+3}}$.

70. $f(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x}} + 1}{e^{\frac{1}{x}} - 1}$. **71.** $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x}\,e^{\frac{1}{x}}$.

72. $f(x) = (x+2)\,e^{\frac{1}{x}}$. **73.** $f(x) = x\ln|e^x - 1|$.

74. $f(x) = \ln\dfrac{e^{2x} + 1}{e^x + 1}$. **75.** $f(x) = (2x^2 + 3x)\,e^{\frac{1}{x}}$.

76. $f(x) = 1 + \left(x - \dfrac{1}{2}\right)\ln\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)$.

[1] Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on note $\sqrt[3]{\ }$ la fonction réciproque de la fonction $x \mapsto x^3$.
En réalité, cette fonction réciproque est définie, pour $x \neq 0$, par $x \mapsto \dfrac{x}{|x|}\sqrt[3]{|x|}$. On a les mêmes remarques pour $\sqrt[5]{\ }$.

77. $f(x) = (x-2)\,e^{\frac{1}{x-3}}$.

78. $f(x) = x^2 - x^3\ln\left(1 + \dfrac{1}{x}\right)$.

79. $f(x) = \ln|x| + e^{-x^2}$.

80. $f(x) = \ln(2x+1)(x+2)$.

81. $f(x) = \dfrac{x^2\ln x + x^2 - x - 1}{2x^2 - 1}$.

ÉTUDE LOCALE

Dans les exercices **82** *à* **96**, *on demande de déterminer le développement limité à l'ordre 3 de* f *en* x_0, *puis pour* $k \leqslant 3$, *de représenter graphiquement les courbes* C_k *d'équations respectives* $y = P_k(x)$, *où* $P_k(x)$ *désigne la partie régulière du développement limité de* f *au voisinage de* x_0 *à l'ordre* k. *Placer ensuite soigneusement la courbe* Γ *d'équation* $y = f(x)$ *par rapport aux courbes* C_k. *On déterminera également et on construira avec soin les courbes asymptotes éventuelles.*

82. $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$; $x_0 = 0$, puis $x_0 = e - 1$.

83. $f(x) = \dfrac{x^2}{4}(2\ln x - 3)$; $x_0 = 1$, puis $x_0 = e$.

84. $f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 1}{x^2 - x + 1}$; $x_0 = -1$, puis $x_0 = 0$, puis $x_0 = 2$.

85. $f(x) = \sqrt{3x(8-x)}$; $x_0 = 4$.

86. $f(x) = x + \sqrt{3x(8-x)}$; $x_0 = 6$.

87. $f(x) = 6\sin x + x^2$ $\left(x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]\right)$; $x_0 = 0$, puis $x_0 = \dfrac{\pi}{2}$, puis $x_0 = -\dfrac{\pi}{2}$.

88. $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x + \sin x}$; $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$.

89. $f(x) = 2x - x\ln|x|$; $x_0 = e$.

90. $f(x) = \ln^2 x$; $x_0 = 1$.

91. $f(x) = \dfrac{(1 + \ln x)^2}{x}$; $x_0 = \dfrac{1}{e}$, puis $x_0 = 1$, puis $x_0 = e$.

92. $f(x) = x^2 - 7x + 3\ln x$; $x_0 = \dfrac{1}{2}$, puis $x_0 = 3$.

93. $f(x) = x(\ln|x|)^2$; $x_0 = \dfrac{1}{e^2}$, puis $x_0 = 1$.

94. $f(x) = x + \dfrac{e^x}{2e^x - 1}$; $x_0 = 0$, puis $x_0 = -\ln 4$.

95. $f(x) = |x - 1|\,e^x$; $x_0 = 0$, puis $x_0 = 1$ (à droite et à gauche).

96. $f(x) = e^x(x^2 - 1)$; $x_0 = -1 - \sqrt{2}$, puis $x_0 = -1 + \sqrt{2}$.

CALCULS APPROCHÉS

97. Dans un tableau, inscrire les valeurs approchées à 10^{-6}, données par une machine, de :

$$\sin x, \quad x - \frac{x^3}{6} \quad \text{et} \quad x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120},$$

pour $x \in \{0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5\}$;
puis pour $x \in \{0,01; 0,02; 0,03; 0,05; 0,07\}$.

98. Même exercice qu'à l'exercice **97** :

$$[x \mapsto \cos x], \quad \left[x \mapsto 1 - \frac{x^2}{2}\right] \quad \text{et} \quad \left[x \mapsto 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right].$$

99. Même exercice qu'à l'exercice **97** pour les fonctions :

$$[x \mapsto \ln(1+x)], \quad \left[x \mapsto x - \frac{x^2}{2}\right]$$

$$\text{et} \quad \left[x \mapsto x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right].$$

En utilisant un développement limité au voisinage d'un point x_0, à un ordre n que l'on déterminera, effectuer les calculs des exercices **100** *à* **111**, *à la précision indiquée.*

100. $f(x) = x^{10} - 3x^6 + x^2 + 2$;
calculer $f(1,03)$ à 10^{-3} près.

101. $f(x) = x^8 - 2x^7 + 5x^6 - x + 3$;
calculer $f(2,02)$ et $f(1,97)$ à 10^{-3} près.

102. Calculer $\sqrt{e}$ à 10^{-3} près.

103. Calculer $e^{1,1}$ à 10^{-3} près.

104. Calculer $e^{-1,4}$ à 10^{-3} près.

105. Calculer $\ln 1,2$ à 10^{-3} près.

106. Calculer $\ln 2,03$ à 10^{-3} près.

107. Calculer $\sin(30,1)^\circ$ à 10^{-6} près.

108. Calculer $\sin 0,08$ à 10^{-5} près.

109. Calculer $\cos 59^\circ$ à 10^{-3} près.

110. Calculer $\cos 1,57$ à 10^{-5} près.

111. Calculer $\cos 10^\circ$ à 10^{-3} près.

112. Calculer l'accroissement du volume d'une sphère lorsque le rayon $r = 20$ cm s'accroît de 5 mm.

113. On considère $f(x) = 2^x$. Calculer une valeur approchée à 10^{-3} près de $2^{2,04}$.

114. Soit un carré de côté 8 cm. Quel est l'accroissement de son aire correspondant à un accroissement de ses côtés de 1 mm, de 0,5 mm?

115. *1°* Déterminer le développement limité à l'ordre 5 au voisinage de zéro de la fonction f définie par :

$$f(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

2° Appliquer le résultat ci-dessus à $x = \dfrac{1}{2n+1}$, pour $n \in \mathbb{N}$.
3° En déduire un calcul approché de $\ln(n+1)$ connaissant $\ln n$.
4° Appliquer le résultat ci-dessous au calcul de $\ln 2$, $\ln 3$, $\ln 5$, $\ln 7$, $\ln 11$, $\ln 13$.
Comparer les résultats obtenus avec les résultats donnés par la calculatrice.

AUTRES DÉVELOPPEMENTS LIMITÉS

116. *1°* Calculer les dérivées d'ordre inférieur à 3 de la fonction tangente.
2° En déduire, en utilisant le théorème **1**, page 227, le développement limité à l'ordre 3 de la fonction tangente au voisinage de 0.
3° En déduire :

a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - \sin x - \cos x + 1}{\tan x - x}$;

b) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\tan x}{\sqrt{(1-\cos x)^2}}$; *c)* $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1}{\tan^2 x} - \frac{1}{x^2}$;

d) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\tan 3x - 3\tan x}{3\sin x - \sin 3x}$; *e)* $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{2\tan x - \sin 2x}{\sin^3 x}$;

f) $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{\ln(2x^2-1)}{\tan(x-1)}$; *g)* $\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(x \tan x - \frac{\pi}{2\cos x}\right)$.

117. On rappelle que la fonction arctan est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$y = \arctan x \iff \tan y = x \quad \text{et} \quad y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

On rappelle également que $(\arctan)'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.
1° En utilisant le théorème 1, établir le développement limité à l'ordre 5 de la fonction arctan au voisinage de 0.
2° En déduire : $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{x - \arctan x}{x^3}$.
3° Établir le développement limité à l'ordre 5 de la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x}.$$

Comparer avec le résultat du *1°*.
4° En déduire :

a) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(1-x) - 2\arctan x}{x^2}$.

b) $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(1-x) + 2\arctan x - 2x}{x^5}$.

118. Soit $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$.
1° Calculer $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, $f^{(4)}(x)$.
2° En déduire le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction f.

$3°$ On rappelle que la fonction arcsin est définie sur $[-1, 1]$ et que sa dérivée est définie sur $]-1, 1[$ par :
$(\arcsin)'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
Déduire de ce qui précède le développement limité à l'ordre 5 de la fonction arcsin.
$4°$ On pose $g(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$. Calculer $g'(x)$. Déduire de ce qui précède le développement limité à l'ordre 5 de la fonction g. Comparer avec le $3°$.

119. Déterminer le développement limité à l'ordre 6 des fonctions f et g :

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad ; \quad g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Comparer avec des développements limités connus.

120. En utilisant les développements limités des fonctions :

$$\left[x \mapsto \frac{1}{1+x}\right] \quad \text{et} \quad [x \mapsto \ln(1+x)].$$

Déterminer le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de 0 de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{1+x}$.
Déterminer de même le développement limité à l'ordre 3 au voisinage de $e - 1$ de la fonction f. Illustrer graphiquement.

121. Soit $f(x) = (1+x)^\alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$.
$1°$ Déterminer $f'(x)$, $f''(x)$, $f'''(x)$, $f^{(4)}(x)$.
$2°$ En déduire le développement limité de $f(x)$ au voisinage de 0 à l'ordre 3.
$3°$ En déduire un encadrement de $|(1+x)^\alpha - (1+\alpha x)|$.
$4°$ Déduire du $2°$ une valeur approchée (à une précision que l'on déterminera) de :

$a)$ $\sqrt{0{,}98}$; $b)$ $\dfrac{1}{\sqrt{1{,}01}}$; $c)$ $\sqrt{(1{,}03)^2}$

FORMULES DE TAYLOR ET MACLAURIN

122. Soit f une fonction définie et indéfiniment dérivable sur un intervalle ouvert I contenant 0.

A — Supposons que la fonction f soit la fonction polynôme définie par :

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n.$$

Calculer $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ en fonction des valeurs en 0 des dérivées successives de f.

B — Pour tout x de l'intervalle I, on a :

$$f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)\,dt.$$

$1°$ $a)$ Calculer $\displaystyle\int_0^x f'(t)\,dt$ en utilisant une intégration par parties.
$b)$ En déduire que :
$f(x) = f(0) + xf'(x) - \displaystyle\int_0^x t f''(t)\,dt$.

$c)$ Démontrer que : $xf'(x) = xf'(0) + x\displaystyle\int_0^x f''(t)\,dt$.
$d)$ En déduire que :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \int_0^x (x-t) f''(t)\,dt.$$

$2°$ $a)$ Calculer $\displaystyle\int_0^x (x-t) f''(t)\,dt$ en utilisant une intégration par parties.
$b)$ En s'inspirant du $1°$, montrer que :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2} f'''(t)\,dt.$$

$3°$ Démontrer par récurrence que, pour tout entier n :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}\,dt.$$

C — Soit x un réel de l'intervalle I, et soit A le réel tel que :

$$f(x) - f(0) - xf'(0) - \frac{x^2}{2} f''(0) - A\frac{x^3}{3!} = 0.$$

Soit φ la fonction définie par :

$$\varphi(t) = f(t) - f(0) - tf'(0) - \frac{t^2}{2} f''(0) - A\frac{t^3}{3!}.$$

$1°$ La fonction φ est dérivable sur l'intervalle $[0, x]$ et $\varphi(0) = \varphi(x) = 0$.
En déduire qu'il existe un réel a compris dans l'intervalle $]0, x[$ tel que $\varphi'(a) = 0$.
$2°$ Prouver de façon analogue qu'il existe un réel b de $]0, x[$ tel que $\varphi''(b) = 0$, et un réel c tel que $\varphi'''(c) = 0$.
En déduire qu'il existe un élément c de $]0, x[$ tel que $A = f'''(c)$.
$3°$ Démontrer de façon analogue que, pour tout entier n, il existe un réel c de $]0, x[$ tel que :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c).$$

(On écrit souvent c sous la forme $c = \theta x$, avec $0 < \theta < 1$.)

D — Reprendre les parties **B** et **C** dans le cas d'une fonction f définie sur un intervalle $[a, b]$. On cherchera à calculer $f(b) - f(a)$ en s'inspirant des méthodes utilisées.

REMARQUE :

Les formules obtenues ci-dessus concernent des propriétés de la fonction f sur un intervalle (sur $[0, x]$, ou sur $[a, b]$), alors que la formule analogue :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + \frac{x^2}{2} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + x^n \varepsilon(x)$$

que l'on peut déduire de l'application du théorème **1** concerne des propriétés locales de la fonction f en 0. En effet, cette dernière formule ne revêt de signification qu'à travers la condition $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

CHAPITRE 9

ACTIVITES DE SYNTHESE (ANALYSE)

Les activités que nous avons regroupées dans ce chapitre autour de quelques thèmes mathématiques fondamentaux permettront de faire un bilan de l'apport de l'étude du programme de Terminale C à la résolution de ces problèmes mathématiques majeurs. Les préoccupations liées à ces problèmes sont en réalité un moteur pour la recherche, et une justification à l'introduction de telle ou telle notion. C'est ainsi que le va-et-vient souhaitable entre l'étude théorique et l'application aux problèmes fondamentaux est matérialisé par l'existence, tout au long des chapitres précédents, d'activités liées à ces problèmes fondamentaux. Les activités qui composent ce chapitre doivent, d'une part, enrichir les études précédentes et permettre certains bilans théoriques et méthodologiques, et d'autre part, à travers les questions non encore résolues que l'on peut se poser à leur sujet, être le point de départ de développements ultérieurs.

I – MAJORER, MINORER, ENCADRER [1]

1. BUTS ET MÉTHODES

• La résolution de nombreux problèmes d'analyse passe par des majorations, des minorations, des encadrements de nombres, de suites ou de fonctions. C'est ainsi que l'on peut réaliser des approximations d'un réel par différentes suites, et étudier la valeur des approximations obtenues, en particulier pour ce qui concerne des nombres attachés à des fonctions ou des suites (limites, intégrales, nombres dérivés, extremums, ...). Ces méthodes de comparaison peuvent également, à travers certains théorèmes fondamentaux, permettre de prouver l'existence de tel ou tel être mathématique. Par exemple, la convergence de suites monotones, ou l'existence d'une limite pour des fonctions monotones peuvent se prouver grâce à un processus de majoration ou de minoration. Des majorations de la forme

$$|f(x) - f(x')| < A\,|x - x'| \quad \text{ou} \quad |f(x) - f(x') - A(x - x')| < M(x - x')^2$$

permettent de prouver la continuité, ou la dérivabilité d'une fonction. Elles permettent également d'obtenir des majorations de certaines suites par des suites géométriques. Des majorations sont également nécessaires pour préciser la qualité d'approximations numériques, ou d'approximations polynomiales de fonctions, dans certaines conditions. Ces préoccupations d'approximation peuvent également être vues à travers la recherche de modèles mathématiques adéquats aux phénomènes physiques, biologiques,

---

[1] *« C'est ainsi que Dieu a donné la définition de l'Analyse »* comme a pu le dire Jean Dieudonné, mathématicien contemporain de renom.

économiques, et surtout à la détermination d'approximations des solutions des problèmes mathématiques ainsi posés (dans le cas le plus fréquent où on ne sait pas les résoudre exactement).

- Pour réaliser des majorations (ou minorations), on dispose :

– de méthodes algébriques, par exemple :
 manipulations d'inégalités,
 transformation d'expressions,
 utilisation de valeurs absolues,
 raisonnement par récurrence,
 conditions d'existence des racines d'une équation (deuxième ou troisième degré) (voir § **III**);

– de méthodes de l'analyse, par exemple :
 comparaison avec des suites ou des fonctions de comportement connu,
 comparaison avec des intégrales,
 comparaison d'intégrales,
 étude de variations de fonctions (principe de Lagrange, représentation graphique),
 théorème des accroissements finis,
 utilisation de développements limités,
 théorème des valeurs intermédiaires,
 le fait qu'une fonction de limite l en x_0 est bornée au voisinage de x_0,
 convexité (voir § **IV**);

– d'autres méthodes, issues par exemple de l'étude des espaces vectoriels.

Le lecteur est invité, pour chacune de ces méthodes, à se référer au chapitre correspondant.

2. EXEMPLES D'ÉTUDE DE SUITES

★ Activité 1 : Récurrence

Dans la résolution de l'équation définie par $x = \sqrt{2x + 35}$, *on peut introduire la suite* (u_n) *définie par :* $u_{n+1} = \sqrt{2u_n + 35}$ *et* $u_0 = 0$.

1° Interpréter graphiquement la formation des termes successifs de la suite (u_n).

2° Utiliser l'étude ci-dessus pour conjecturer le sens de variation de la suite (u_n), *et un majorant de* u_n.

3° Prouver que la suite (u_n) *est croissante.*

4° Démontrer par récurrence que la suite (u_n) *est majorée par* 7.

5° Conclure à la convergence de (u_n) *vers un réel* l *solution de l'équation* $x = \sqrt{2x + 35}$.

★ Activité 2 : Manipulations d'expressions algébriques

Soit $u_n = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{15} + \dfrac{1}{35} + \dots + \dfrac{1}{(2n+1)(2n+3)}$.

1° Prouver que $\dfrac{2}{(2k+1)(2k+3)} = \dfrac{1}{2k+1} - \dfrac{1}{2k+3}$.

2° En déduire une expression de u_n *en fonction de* n.

3° Déduire de ce qui précède que (u_n) *est majorée par* 1, *et converge vers* 1.

★ Activité 3 : Utilisation d'une fonction

On considère la suite (u_n) *définie par :* $u_{n+1} = \frac{1}{3}\left(2u_n + \frac{2}{u_n^2}\right)$ et $u_0 = 2$.

1° Étudier et représenter graphiquement la fonction f *définie par :*

$$f(x) = \frac{1}{3}\left(2x + \frac{2}{x^2}\right).$$

2° Prouver que pour tout entier naturel n, u_n *est strictement positif.*

3° Montrer que pour tout n, u_n *est minoré par* $\sqrt[3]{2}$.

4° Prouver que (u_n) *est décroissante. En déduire qu'elle converge. Quelle est sa limite?*

★ Activité 4 : Comparaison avec une intégrale

On considère la suite (s_n) *définie par :* $s_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2}$.

1° Soit $f(x) = \frac{1}{x^2}$. *Encadrer* s_n *en utilisant le calcul d'une intégrale par la méthode des rectangles. En déduire que la suite* (s_n) *est croissante et majorée par* 2.

2° Calculer une valeur approchée de la limite de s_n *à* 10^{-3} *près.*

★ Activité 5 : Comparaison de suites

1° On considère la suite (u_n) *définie par :* $u_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \dots + \frac{1}{n^\alpha}$, *où* α *est un réel supérieur à* 2.

a) *Prouver que, pour tout entier strictement positif* k : $\frac{1}{k^\alpha} \leqslant \frac{1}{k^2}$.

b) *En déduire que, pour tout entier naturel* n : $u_n \leqslant s_n$ (notations de l'Activité **4**).

c) *En déduire que* u_n *est majoré par 2, et que* (u_n) *converge* (voir Activité **4**).

2° On considère la suite (v_n) *définie par :* $v_n = 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!}$.

a) *Prouver que, pour tout entier naturel* n : $n! \geqslant 2^{n-1}$.

b) *En déduire que :* $\frac{1}{n!} \leqslant \frac{1}{2^{n-1}}$.

c) *Prouver que, pour tout réel* a *différent de* 1 : $1 + a + a^2 + \dots + a^n = \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a}$.

d) *En déduire que* v_n *est majoré par 3 et que* (v_n) *converge.*

e) *Calculer une valeur approchée de la limite de* (v_n) *à* 10^{-5} *près.*

★ Activité 6 : Comparaison avec une suite géométrique

1° On considère la suite (u_n) *définie par :* $u_n = \frac{5^n}{n!}$.

a) *Calculer* u_0, u_1, u_2, u_3, u_4. *Que peut-on en déduire?*

b) *Calculer* $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

c) *En déduire que, si* $n \geqslant 9$, *alors* $u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2} u_n$.

d) *En déduire que, si* $n \geqslant 9$, *alors* $u_n \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-9} u_9$.

e) *Quelle est la limite de la suite* (u_n)*? Comparer avec le* ***a***).

2° Soit : $v_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

a) *Soit* $s_n = u_9 + u_{10} + \ldots + u_n$. *Prouver que* $s_n < u_9\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-9}\right)$.

b) *En utilisant le résultat concernant la somme des termes d'une suite géométrique de raison a, déterminer un majorant de* v_n.

c) *En déduire que la suite* (v_n) *converge. Déterminer une valeur approchée de sa limite à* 10^{-2} *près.*

3. EXEMPLES D'ÉTUDE DE FONCTIONS

★ Activité 7 : Comparaison d'intégrales

1° Soit la fonction f définie sur $]-1, +\infty[$ *par :* $f(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^3}$.

a) *Prouver que, pour tout t de* $]0, +\infty[$: $\frac{1}{1+t^3} < \frac{1}{t^3}$.

b) *En déduire que f est croissante et majorée, donc admet une limite finie en* $+\infty$.

c) *Calculer, par la méthode des trapèzes une valeur approchée de* $\int_0^6 \frac{dt}{1+t^3}$. *Préciser une incertitude sur cette approximation.*

d) *En déduire une valeur approchée de* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$. *Préciser une incertitude sur cette approximation.*

2° Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ *par :* $g(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$.

En procédant comme au 1°, prouver que g admet une limite finie en $+\infty$, *et préciser un encadrement de cette limite.*

★ Activité 8 : Théorème des accroissements finis

a) *En utilisant le théorème des accroissements finis, prouver que, quels que soient les réels strictement positifs a et b, on a, si* $a < b$: $\frac{b-a}{b} \leqslant \ln\frac{b}{a} \leqslant \frac{b-a}{a}$.

b) *En déduire que, pour tout entier n naturel non nul :*

$$\frac{1}{n+1} \leqslant \ln(n+1) - \ln n \leqslant \frac{1}{n}.$$

c) *En déduire que :* $1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} > \ln(n+1)$.

d) *En déduire que la suite* (u_n) *définie par* $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$ *diverge.*

e) *Préciser* n_0 *de façon que* $u_{n_0} > 10$.

f) *On pose :* $v_n = u_n - \ln n$.

Prouver que, pour n supérieur à 2 : $0 < v_n < 1$.

g) *Soit* $\varphi(n) = \frac{1}{x+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.

Étudier le sens de variation de φ *et sa limite en* $+\infty$.

En déduire que (v_n) *est décroissante.*

h) *Déduire de ce qui précède que la suite* (v_n) *converge. La limite de* (v_n) *est appelée constante d'Euler et est souvent notée* γ *(parfois C).*

★ Activité 9 : Manipulation d'inégalités

1° Soit $F(x) = \dfrac{1}{x^2}\left|\sqrt{1+x} - \left(1 + \dfrac{x}{2}\right)\right|$.

a) *Prouver que* $F(x) = \dfrac{1}{4\left|\sqrt{1+x} + \left(1 + \dfrac{x}{2}\right)\right|}$.

b) *Montrer que pour* $x \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$, *on a :* $F(x) \leqslant \dfrac{1}{4(\sqrt{0{,}5} + 0{,}75)}$.

c) *En déduire que, pour tout x de* $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$: $\left|\sqrt{1+x} - \left(1 + \dfrac{x}{2}\right)\right| < 0{,}2x^2$.

2° On considère l'application f définie par : $f(x) = xE\left(\dfrac{1}{x}\right) - 1$, *où* $E(X) \in \mathbb{Z}$, *avec* $E(X) \leqslant X < E(X) + 1$.

a) *Prouver que, pour tout réel x, on a :* $\left|xE\left(\dfrac{1}{x}\right) - 1\right| \leqslant |x|$.

b) *En déduire l'existence et la valeur de la limite en 0 de la fonction g telle que* $g(x) = xE\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

★ Activité 10 : Valeurs approchées

1° Sachant que $1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415$:

a) *Encadrer* $X = \dfrac{2 + \sqrt{2}}{3 - \sqrt{2}}$.

b) *Reprendre le problème après avoir transformé l'écriture de X.*

2° *Soit* $f(x) = -6 + 5x$ *et* $g(x) = \dfrac{2+x}{3-x}$.

a) *Appliquer le théorème des accroissements finis pour préciser l'erreur commise sur* $f(\sqrt{3})$ *et* $g(\sqrt{3})$ *en prenant* $\sqrt{3} \approx 1{,}732$ *(valeur approchée par défaut à* 10^{-3} *près).*

b) *Comparer et commenter les résultats obtenus.*

EXERCICES ET PROBLÈMES

1. Étudier la convergence de la suite (u_n). Préciser le cas échéant un encadrement de la limite :

$a)$ $u_n = \dfrac{\ln n}{2^n}$ $b)$ $u_n = \dfrac{e^n}{n!}$.

2. Soit la suite $(u_n)_{n>0}$ telle que :

$$u_n = \frac{\ln 1 + \ln 2 + \ldots + \ln n}{n}.$$

Prouver que, pour tout n : $u_{2n} - u_n \geqslant \dfrac{\ln 2}{2}$. En déduire que (u_n) diverge vers l'infini. La suite $(\sqrt[n]{n!})_{n>0}$ converge-t-elle?

3. Soit $f_n(x) = x^2 \sin \dfrac{1}{nx}$.

$a)$ Montrer que, pour tout x de $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$: $\dfrac{2x}{\pi} \leqslant \sin x \leqslant x$.

$b)$ Étudier la limite de f_n en 0.

$c)$ Étudier la convergence de la suite $(f_n(x))$ (où x est un réel donné).

$d)$ Montrer que la fonction f_n n'est pas bornée sur $\mathbb{R}$.

4. Démontrer les propriétés suivantes :

a) $\forall x \in [-1, 1]$, $\left|\sqrt{1+x} - 1 - \frac{1}{2}x\right| \leqslant \frac{x^2}{8}$.

b) $\forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, $\left|\frac{1}{\sqrt{1+x}} - 1 + \frac{1}{2}x\right| \leqslant \frac{3x^2}{8}$.

c) $\forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, $\left|\frac{1}{1-x} - 1 - x - x^2\right| \leqslant 2x^3$.

d) $\forall x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, $\left|\frac{1}{1-x^2} - 1 - x^2\right| \leqslant 2x^4$.

e) $\forall x \in [0, 1]$, $|\sin x - x| \leqslant \frac{|x|^3}{6}$.

5. Soit p et q des réels supérieurs à 1 et tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
On considère pour tout réel strictement positif y la fonction φ_y définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\varphi_y(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} - xy.$$

1° Calculer $\varphi'_y(x)$. Prouver que cette dérivée s'annule pour une valeur x_0 unique.
2° Démontrer que $\varphi''_y(x_0) > 0$. En déduire que φ_y admet en x_0 un minimum.
3° Déduire de ce qui précède que, pour tout couple (x, y) d'éléments de $\mathbb{R}_+^*$:

$$xy \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}.$$

6. Soit a et b des réels positifs non nuls tels que $a + b = 1$. Démontrer que :

$$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 + \left(b + \frac{1}{b}\right)^2 \geqslant \frac{25}{2}.$$

(On pourra utiliser une fonction trigonométrique définie sur $]0, \pi[$.)

7. Soit a et b des réels strictement positifs et p un réel de l'intervalle $[0, 1]$. Prouver que : $(a+b)^p \leqslant a^p + b^p$.

8. Soit a et b des réels. Prouver que :

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leqslant \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}.$$

9. a) Connaissant $\sqrt{3}$ à 10^{-3} près et $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, calculer $\cos 15°$ et $\sin 15°$ en utilisant les formules de duplication. Quelle est alors la précision obtenue?
b) Déduire $\sin 15°$ et $\cos 15°$ des formules

$$\cos(45° - 30°) \quad \text{et} \quad \sin(45° - 30°).$$

Quelle est la précision obtenue, si l'on connaît $\sqrt{3}$ et $\sqrt{2}$ par les encadrements :

$$1{,}732 < \sqrt{3} < 1{,}733 \quad \text{et} \quad 1{,}414 < \sqrt{2} < 1{,}415?$$

10. On connaît ln 2, ln 3, ln 5 et ln 7 à 10^{-3} près. En déduire $\ln x$ pour

$$x \in \{4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16\}.$$

Préciser les encadrements obtenus.

11. Soit $f(x) = \frac{x^2}{x + \cos(\ln x) + 1}$. Prouver que, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$: $0 < f(x) \leqslant x$. En déduire la limite de f en 0.

12. *1°* Soit f une fonction numérique d'une variable réelle, continue, positive et décroissante sur l'intervalle $\mathbb{R}_+^*$. Démontrer que pour tout entier n de $\mathbb{N}^* \setminus \{1\}$:

$$\int_n^{n+1} f(t)\,dt \leqslant f(n) \leqslant \int_{n-1}^n f(t)\,dt.$$

2° On pose : $u_n = \sum_{p=1}^{n} f(p)$ et $I_n = \int_1^n f(t)\,dt$.
Démontrer que : $I_{n+1} - I_2 \leqslant u_n - f(1) \leqslant I_n$.
En déduire que les suites (u_n) et (I_n) sont convergentes ou divergentes en même temps.
3° a) Démontrer que la suite (v_n) définie par

$$v_n = u_n - I_n$$

est convergente, et que sa limite l vérifie :

$$0 \leqslant l \leqslant f(1).$$

b) Si la suite (I_n) converge, soit I sa limite. Prouver que :

$$I \leqslant \lim_{x \to +\infty} (u_n) \leqslant I + f(1).$$

4° Soit les fonctions f_1, f_2, f_3, f_4 définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f_1(x) = \frac{1}{x} \quad ; \quad f_2(x) = \frac{1}{x^\alpha} \quad (\text{avec } \alpha > 1) \quad ;$$

$$f_3(x) = e^{-\beta x} \quad (\beta > 0) \quad ; \quad f_4(x) = \frac{1}{x \ln x}.$$

Pour chacune de ces fonctions, calculer I_n et étudier la convergence de la suite (I_n). Dans le cas de convergence, préciser un encadrement de la limite.

13. Soit $f(x) = \frac{\ln x}{x}$.
1° Étudier f et tracer sa représentation graphique.
2° Pour tout entier n supérieur à 3, on pose :

$$u_n = \frac{\ln 3}{3} + \frac{\ln 4}{4} + \dots + \frac{\ln n}{n}.$$

Comparer u_n à $\int_3^{n+1} f(t)\,dt$. En déduire la convergence de (u_n).

14. Soit $f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$.
1° Étudier f et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormal.
2° a) Montrer que f définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-1, 1[$. Soit $g = f^{-1}$.
b) Montrer que g est dérivable sur $]-1, 1[$ et que $g'(x) = \frac{1}{1-x^2}$.
3° a) Soit m un réel de l'intervalle $]-1, 1[$. Résoudre l'équation définie dans $\mathbb{R}$ par $g(x) = m$.
b) En déduire l'expression de $g(x)$ pour tout x de $]-1, 1[$.

c) Prouver que $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dt}{1-t^2} = \ln 3$.

4° Pour tout entier naturel n, et tout réel x, on pose :

$$h_n(x) = 1 + x^2 + x^4 + \ldots + x^{2n}.$$

a) Calculer pour $x \neq 1$ et $x \neq -1$: $\dfrac{1}{1-x^2} - h_n(x)$.

b) Montrer que, pour tout x de $\left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$:

$$0 \leqslant \frac{1}{1-x^2} - h_n(x) \leqslant \frac{4}{3} x^{2n+2}.$$

c) On pose $u_n = \displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} h_n(x)\,dx$.

Montrer que (u_n) converge. Quelle est sa limite?

d) Calculer u_2 et en déduire un encadrement de ln 3.

15. Soit F la fonction de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $F(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} e^{-t^2}\,dt$.

1° Déterminer $F'(x)$. Montrer qu'il existe un réel unique α de $\mathbb{R}_+^*$ tel que $F'(\alpha) = 0$.

Donner la valeur exacte de α et un encadrement de α à 10^{-2} près. Étudier la variation de F.

2° Montrer que, pour tout x de $]0, +\infty[$, $F(x)$ est compris entre :

$$e^{-x^2}\int_x^{x^2} \frac{dt}{t} \quad \text{et} \quad e^{-x^4}\int_x^{x^2} \frac{dt}{t}.$$

En déduire l'existence d'une limite en $+\infty$ pour $F(x)$. La fonction F admet-elle une limite en 0?

16. On considère la fonction f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = \frac{1}{1-x} - 1 - x - x^2 - x^3.$$

1° Mettre $f(x)$ sous la forme $\dfrac{P(x)}{1-x}$, où P est une fonction polynôme. Étudier la variation de f et construire sa courbe représentative, le plan étant rapporté au repère orthogonal $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$, ($\|\vec{i}\| = 2$ cm, $\|\vec{j}\| = 1$ cm).

2° Soit $x \in [0, 1[$. Calculer $\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1-t}$.

En déduire que pour tout $x \in [0, 1[$:

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \int_0^x f(t)\,dt.$$

3° Démontrer que pour $x \in [0, 1[$, il existe $c \in [0, x]$ tel que :

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - x f(c).$$

4° Démontrer que pour $x \in]0, 1[$ et pour $c \in [0, x]$, la quantité $\varepsilon(x) = \dfrac{f(c)}{x^3}$ vérifie $0 \leqslant \varepsilon(x) \leqslant \dfrac{x}{1-x}$.

En déduire :

$$\forall x \in]0, 1[, \quad \ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - x^4\varepsilon(x),$$

avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

17. Soit a un réel strictement positif. On considère l'application f de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, définie par $f(x) = \dfrac{2}{3}x + \dfrac{a^3}{3x^2}$.

1° Construire la courbe représentative. On étudiera particulièrement le point d'intersection avec la droite $y = x$ et la tangente en ce point.

2° Soit $x_0 \in \mathbb{R}$, $x_0 > a$. On pose $x_n = f(x_{n-1})$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Démontrer que l'on a $a < x_n < x_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Établir : $0 \leqslant f'(x) \leqslant \dfrac{2}{a}(x-a)$ pour $x \geqslant a$.

En déduire l'inégalité $x_n - a \leqslant \dfrac{2}{a}(x_{n-1} - a)^2$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3° Démontrer une inégalité de la forme :

$$\frac{x_n - a}{a} \leqslant A_n\left(\frac{x_0 - a}{a}\right)^{u_n}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

où A_n et u_n sont des entiers que l'on déterminera en fonction de n.

On suppose $\dfrac{x_0 - a}{a} \leqslant \dfrac{1}{10}$. Quel est le plus petit des entiers n pour lesquels $\dfrac{x_n - a}{a} \leqslant 10^{-8}$?

18. Encadrement de ln 2

A tout entier naturel non nul n, on associe les fonctions numériques Q_n et J_n définies sur l'intervalle $[0, 1[$ par :

$$Q_n(x) = -\left(x + \frac{x^2}{2} + \ldots + \frac{x^n}{n}\right) \quad \text{et} \quad J_n(x) = -\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt.$$

1° a) Montrer que pour tout réel x de $[0, 1[$:

$$\ln(1-x) = Q_n(x) + J_n(x).$$

b) Prouver que, pour tout réel x de $\left[0, \dfrac{1}{2}\right]$, on a :

$$|J_n(x)| \leqslant 2\frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

2° a) Montrer que :

$$\ln 2 = \lim_{n \to +\infty}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3 \times 2^3} + \ldots + \frac{1}{n \times 2^n}\right).$$

b) Déduire de ce qui précède une majoration de $\left|\ln 2 + Q_n\left(\dfrac{1}{2}\right)\right|$.

c) Déterminer un entier naturel p tel que : $\left|\ln 2 + Q_p\left(\frac{1}{2}\right)\right| < 10^{-3}$.
d) En déduire un encadrement de ln 2.

19. Encadrement de π

Soit $I = \displaystyle\int_0^{2-\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$.

A – 1° Calculer $\tan\theta$ en fonction de $t = \tan\frac{\theta}{2}$. En déduire que $\tan\frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$.

2° Soit f l'application de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(x) = \tan x$.
a) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormal.
b) Prouver que f admet une application réciproque $g = f^{-1}$.
c) Démontrer que g est dérivable et que $g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
d) En déduire que $I = \frac{\pi}{12}$.

B – 1° a) Calculer $(2-\sqrt{3})^3$ et $(2-\sqrt{3})^4$ en fonction de $\sqrt{3}$.
b) Vérifier que $\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{1+x^2}$.

2° Calculer $J = \displaystyle\int_0^{2-\sqrt{3}} (1-x^2)\,dx$ en fonction de $\sqrt{3}$.

3° Soit $K = \displaystyle\int_0^{2-\sqrt{3}} \frac{x^4\,dx}{1+x^2}$.
a) Montrer que, pour tout réel positif x : $\frac{x^4}{1+x^2} \leqslant \frac{x^2}{2}$.
b) En déduire que $0 \leqslant K \leqslant \frac{97}{8} - 7\sqrt{3}$.

4° a) Déduire de ce qui précède que :

$$4\sqrt{3} - \frac{20}{3} \leqslant I \leqslant \frac{131}{24} - 3\sqrt{3}.$$

b) En déduire un encadrement de π (avec $1{,}732\,05 < \sqrt{3} < 1{,}732\,06$).

20.

A – Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\ln x} \quad \text{pour} \quad x \neq 1 \quad \text{et} \quad f(0) = 0.$$

1° Étudier et représenter graphiquement la fonction f (ou préciser la demi-tangente à l'origine O du repère).

2° On pose pour $0 \leqslant x < 1$, $F(x) = \displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{x} f(t)\,dt$,

et pour $x > 1$, $G(x) = \displaystyle\int_2^x f(t)\,dt$.

Déterminer $F'(x)$ et $G'(x)$.
Dire pourquoi on n'a pas le droit d'écrire $F'(x) = G'(x)$.

B – On pose, pour $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$: $H(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} f(t)\,dt$.

1° a) Montrer que $H(x)$ est positif pour tout x.
b) Montrer que $H(x)$ s'exprime, suivant les cas, à l'aide de F ou de G. En déduire l'expression de $H'(x)$.
c) Soit φ une fonction numérique définie et continue sur $[0, 1[$. Établir que $\displaystyle\int_x^{x^2} \varphi(t)\,dt$ tend vers zéro lorsque x tend vers 0 par valeurs positives. (On pourra désigner par Φ une primitive de φ.) En déduire la limite en 0^+ de $H(x)$.

2° On pose, pour $x \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$: $K(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{dt}{t\ln t}$.
a) Calculer la dérivée de la fonction qui, à x strictement positif et distinct de 1, fait correspondre $\ln|\ln x|$.
En déduire que $K(x)$, qu'on calculera, garde une valeur constante, qu'on précisera, quand x varie dans $]0, 1[$ et dans $]1, +\infty[$.
b) On pose pour x strictement positif et distinct de 1 :

$$\varphi(x) = \frac{x-1}{x\ln x}.$$

Montrer que $\varphi_1(x)$ tend vers une limite l, qu'on précisera, lorsque x tend vers 1. (On pourra poser $x = 1 + X$).
Soit alors $\bar{\varphi}_1$ la fonction définie par :

$$\begin{cases} \bar{\varphi}_1(x) = \varphi_1(x) \text{ pour } x \text{ de } \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}. \\ \bar{\varphi}_1(1) = l \end{cases}$$

En s'inspirant de $B - 1°$ c), montrer que $\displaystyle\int_x^{x^2} \bar{\varphi}_1(t)\,dt$ tend vers 0 lorsque x tend vers 1.
c) Montrer que $H(x) - K(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers 1.
En déduire qu'on peut définir à partir de H une fonction à valeurs réelles $\overline{H}$, définie et continue sur $[0, +\infty[$, coïncidant avec H sur $]0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$.

3° a) Montrer que, quel que soit $x > 0$, $x \neq 1$,

$$\frac{x^2 - x}{2\ln x} \leqslant \overline{H}(x) \leqslant \frac{x^2 - x}{\ln x}$$

b) En déduire la limite de $\frac{\overline{H}(x)}{x}$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives.
c) En déduire également les limites de $\overline{H}(x)$ et de $\frac{\overline{H}(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$.
d) Rassemblant les résultats des trois questions du **B**, étudier les variations de $\overline{H}$ et tracer sa courbe représentative dans un repère orthonormal. (On précisera la demi-tangente à l'origine O du repère; par ailleurs, en admettant que la dérivée de $\overline{H}$ existe au point $x = 1$, et que $\overline{H}'(1) = \lim\limits_{x\to 1} \overline{H}'(x)$, on précisera la tangente au point d'abscisse 1).

21. *1°* On considère l'application :

$$\varphi : \quad t \mapsto \sin t - t + \frac{t^3}{6} \quad \text{de } [0, +\infty[\text{ dans } \mathbb{R}.$$

Dresser un tableau donnant les variations de φ'', φ' et φ.

En déduire :

$$(1) \qquad \forall t \in [0, +\infty[, \quad t - \frac{t^3}{6} \leqslant \sin t \leqslant t.$$

2° A tout réel x, on associe l'application f_x de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ dans $\mathbb{R}$ déterminée par $t \mapsto \cos(x \sin t)$.

On désigne par Γ_x la représentation graphique de f_x dans un plan rapporté à un repère orthonormé (unité graphique : 4 cm).

Étudier f_x (continuité, dérivabilité, sens de variation, construction de Γ_x) pour les valeurs $0, \frac{\pi}{2}, \pi, 2\pi$ de x.

Dans les questions suivantes on ne cherchera pas à calculer les primitives des fonctions f_x.

3° A tout réel x on associe l'intégrale :

$$F(x) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_x(t)\,dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x \sin t)\,dt.$$

On se propose d'étudier l'application F de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ ainsi définie.

a) Montrer que, pour tout $(x, h) \in \mathbb{R}^2$, on a :

$$(2) \quad F(x+h) - F(x) = -2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\left(\frac{h}{2}\sin t\right).\sin\left(\left(x + \frac{h}{2}\right)\sin t\right) dt,$$

$$(3) \qquad \left|\sin\left(\frac{h}{2}\sin t\right).\sin\left(\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin t\right)\right| \leqslant \frac{|h|}{2}$$

et :

$$(4) \qquad |F(x+h) - F(x)| \leqslant \frac{\pi|h|}{2}.$$

b) Déduire de *a)* que F est continue sur $\mathbb{R}$ et monotone sur $[0, \pi]$.

c) Soit x un réel. Pour tout réel non nul h, on pose :

$$\Delta(h) = \frac{F(x+h) - F(x)}{h} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t.\sin\left(\left(x + \frac{h}{2}\right)\sin t\right) dt.$$

En utilisant les inégalités (que l'on justifiera) :

$$\left|\sin\left(\frac{h}{2}\sin t\right) - \frac{h}{2}\sin t\right| \leqslant \frac{|h|^3}{48}|\sin^3 t| \leqslant \frac{|h|^3}{48},$$

vérifier : $|\Delta(h)| \leqslant \dfrac{\pi h^2}{48}$.

En déduire $\lim\limits_{h \to 0} \Delta(h) = 0$.

Montrer que F est dérivable au point x.

4° On se propose de trouver un encadrement du réel $F(\pi)$. On écrit $F(\pi) = I + J$, avec :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos(\pi \sin t)\,dt \quad \text{et} \quad J = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\pi \sin t)\,dt.$$

On désigne par A, B, C les points d'abscisses $0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}$ de la courbe Γ_π.

a) Par des considérations d'aires, montrer que :

$$0 < I < \frac{\pi}{6}.$$

b) Soit $g : t \mapsto at + b$ la fonction affine qui est représentée par la droite (BC). On pose $h = g - f_\pi$.

Vérifier que :

$$\forall t \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right] \quad h''(t) \leqslant 0$$

et que : $$h'\left(\frac{\pi}{6}\right) > 0, \quad h'\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0.$$

En déduire : $\forall t \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right]$, $h(t) \geqslant 0$.

Par des considérations d'aires, montrer :

$$-\frac{\pi}{3} < J < -\frac{\pi}{6}.$$

c) Conclure, et représenter graphiquement la variation de la restriction de F à $[0, \pi]$.

22. A — *1°* Étudier l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}.$$

Variation. Représentation graphique.

2° *a)* Montrer, sans chercher à calculer l'intégrale, que

$$x \mapsto \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt.$$

détermine une application u de $[0, +\infty[$ dans $[0, +\infty[$. Quel est le sens de variation de u?

b) Montrer que, pour tout réel t de l'intervalle $[1, +\infty[$:

$$\frac{1}{1+t^2} \leqslant \frac{1}{t^2}.$$

En déduire que, pour tout réel x de l'intervalle $[1, +\infty[$,

$$\int_1^x \frac{1}{1+t^2}\,dt \leqslant 1 - \frac{1}{x}.$$

c) Montrer que, pour tout réel t de l'intervalle $\mathbb{R}$, $\dfrac{1}{1+t^2} \leqslant 1$. En déduire : $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt \leqslant 1$ et $u(x) \leqslant x$.

d) Montrer que, pour tout réel x de l'intervalle $[0, +\infty[$, $u(x) \leqslant 2$.

e) Montrer que l'ensemble $u\langle [0, +\infty[\rangle$ possède une borne supérieure l telle que $0 \leqslant l \leqslant 2$, et que u tend vers l lorsque x tend vers $+\infty$.

B — *1° a)* Montrer que $x \mapsto \tan x$ détermine une bijection v de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur $[0, +\infty[$. On note v^{-1} la bijection réciproque de v.

b) On dispose ainsi d'une application $w = u \circ v$ de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ dans $[0, +\infty[$.

Montrer que w est dérivable en tout point x de l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et calculer $w'(x)$.

En déduire qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que pour tout réel x de l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$: $w(x) = x + k$.

Calculer $w(0)$.

Montrer que w tend vers 0 lorsque x tend vers 0 par valeurs positives. On pourra commencer par montrer que pour tout réel x de l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$:

$$0 \leqslant w(x) \leqslant \tan x.$$

d) Déduire de cette étude pour tout réel x de l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$:

$$(u \circ v)(x) = x.$$

En résulte-t-il que les applications u et v^{-1} sont égales? Quelle est la valeur du réel l introduit en A — *1°, e)*?

2° Tracer les représentations graphiques des applications, u et v dans un plan rapporté à un repère orthonormal.

INTÉGRALE DE POISSON

23. $\mathcal{F}$ désigne l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On rappelle que $\mathcal{F}$ muni de l'addition des applications et de la multiplication par un réel est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

I — *1°* Soit u la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$u(x) = ax + b \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

Montrer que u vérifie la propriété :

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |u(x) - u(y)| \leqslant |a| . |x - y|.$$

2° Soit V la fonction définie par :

$$V(x) = \sqrt{x^2 + 1}.$$

Montrer que V vérifie :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |V(x) - V(y)| \leqslant |x - y|.$$

3° Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue et bornée sur $\mathbb{R}$:

$$\exists M \in \mathbb{R}_+, \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad |f(t)| \leqslant M.$$

a) Montrer qu'il existe une fonction F, continue sur $\mathbb{R}$, définie par :

$$F(x) = \int_0^x f(t)\, dt.$$

b) Montrer que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |F(x) - F(y)| \leqslant M\, |x - y|.$$

c) En déduire que les applications F_1 et F_2 définies par :

$$F_1 : \quad x \mapsto \sin x,$$
$$F_2 : \quad x \mapsto \ln (e^x + 1),$$

vérifient respectivement :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |F_1(x) - F_1(y)| \leqslant |x - y|,$$
$$|F_2(x) - F_2(y)| \leqslant |x - y|.$$

II — On se propose d'étudier ensemble (L) des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, vérifiant la proposition :

$$\forall f \in L, \quad \exists \lambda_f, \lambda_f \in \mathbb{R}_+, \quad \forall (x, y), (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$
$$|f(x) - f(y)| \leqslant \lambda_f\, |x - y|.$$

1° Montrer que L est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathcal{F}$.

2° Établir que : $\forall f_1, \ f_1 \in L, \forall f_2, \ f_2 \in L, \ f_2 \circ f_1 \in L$.

3° Montrer que toute application de L est continue en tout point de $\mathbb{R}$.

III — *1°* Soit φ l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$x \mapsto \varphi(x) = \pi + \frac{1}{3} \sin x.$$

Vérifier que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad |\varphi(x) - \varphi(y)| \leqslant \frac{1}{3}\, |x - y| \quad \text{et} \quad \varphi(\pi) = \pi.$$

2° Soit (u_n) la suite réelle définie par $u_0 \in \mathbb{R}$,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \varphi(u_{n-1}).$$

Établir que : $\forall n \in \mathbb{N}, \ |u_n - \pi| \leqslant \dfrac{1}{3^n}\, |u_0 - \pi|$.

En déduire que la suite (u_n) est convergente. Donner sa limite.

IV — On définit les deux applications suivantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$:

$$\theta : \quad x \mapsto e^{-x^2},$$
$$G : \quad x \mapsto G(x) = \int_0^x e^{-t^2}\, dt.$$

(On ne cherchera pas à calculer $G(x)$.)

1° Étudier la fonction θ. Tracer sa représentation graphique dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2° Montrer que : $\forall t, \ t \in \mathbb{R}, \quad e^{-t^2} \leqslant 1$.

En déduire que G appartient à L.

3° Montrer que G est dérivable en tout point de $\mathbb{R}$. Étudier le sens de variation de G.

4° Établir que : $\forall x \in [1, +\infty[, \quad \displaystyle\int_1^x e^{-t^2}\, dt \leqslant \int_1^x e^{-t}\, dt$.

En déduire que la fonction G est bornée et admet une limite ℓ (qu'on ne calculera pas) lorsque x tend vers $+\infty$.

24. **I** — Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-\frac{x}{\cos^2 t}}\, dt.$$

Montrer que, $\forall x \geqslant 0, \quad f(x) \leqslant e^{-x}$.
Quelle est la limite de f quand x tend vers $+\infty$?

II – *1°* Montrer que, pour tout réel b strictement positif,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \left[x \leqslant b \quad \Rightarrow e^x - 1 - x \leqslant \frac{1}{2} e^b x^2\right]$$

$$\text{et} \quad \left[x \geqslant -b \Rightarrow e^x - 1 - x \geqslant \frac{1}{2} e^{-b} x^2\right].$$

2° Montrer que, pour tout réel a, il existe une application φ_a, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continue en a, telle que $\varphi_a(a) = 0$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) - f(a) = (x - a)\left[-\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{-\frac{a}{\cos^2 t}}}{\cos^2 t} dt + \varphi_a(x)\right].$$

En déduire que f est dérivable.
Préciser la dérivée f' de f.

III – Soit P une primitive (sur $\mathbb{R}$) de l'application $u \mapsto e^{-u^2}$.

A tout réel x, on associe l'application Q_x, de $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ dans $\mathbb{R}$, telle que :

$$\forall t \in I, \quad Q_x(t) = P(x \tan t).$$

Montrer que Q_x est dérivable sur I; expliciter sa fonction dérivée.
Prouver que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_0^x e^{-u^2} du = x \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{-x^2 \tan^2 t}}{\cos^2 t \, dt}.$$

IV – Soit g l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = f(x^2)$$

Soit g' sa dérivée.
Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = -2 e^{-x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt$.
Que peut-on dire de la fonction h telle que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = g(x) + \left(\int_0^x e^{-t^2} dt\right)^2 ?$$

Quelle est la limite de $\int_0^x e^{-t^2} dt$ quand x tend vers $+\infty$?

II – ÉTUDES DE FONCTIONS

1. GÉNÉRALITÉS

L'étude théorique d'une fonction s'appuie sur de nombreuses propriétés et notions développées dans les chapitres 1 à 8. Mais, dans la pratique, ces propriétés et notions risquent de ne pas être utilisables. Il peut, en effet, se faire que l'étude du signe de la dérivée ne soit pas possible directement, et également que les limites ne soient pas déterminables avec les méthodes connues. Il peut également se faire que le calcul théorique exact des valeurs prises par la fonction ne soit pas possible $\left(\text{par exemple : } f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt \right.$ ou $\left. g(x) = \int_2^x \frac{dt}{\ln t}\right)$. Dans ces cas, l'utilisation de calculatrices permettant le calcul approché rapide des valeurs cherchées est très précieuse. Mais l'on ne saurait en tout état de cause se borner à un simple calcul de valeurs, si nombreuses soient-elles. Il est nécessaire même dans ce cas de se référer chaque fois que possible aux règles théoriques connues. L'étude d'une fonction apparaît donc comme une dialectique entre l'étude théorique et l'étude « point par point ».

2. PLAN D'ÉTUDE

L'étude d'une fonction numérique nécessite la prise en compte de plusieurs aspects. Nous récapitulons ci-dessous un plan possible. L'ordre proposé n'est qu'indicatif, et peut être modifié selon les objectifs de l'étude ou les particularités de la fonction.

a. Ensemble de définition, ensemble d'étude

Il peut se faire que l'ensemble de définition D_f de la fonction f soit malaisé voire impossible à déterminer. On le précise alors par les conditions le définissant (par exemple $f(x) = \tan [\ln (x \sin x)]$).
Soit D_f l'ensemble de définition de la fonction f. L'étude de la parité et de la périodicité de f peut permettre de déterminer un sous-ensemble E (ensemble d'étude de f) de D_f, sur lequel on étudiera f, pour en déduire ensuite les résultats concernant D_f tout entier.

Pour faciliter l'étude ultérieure, on précise, le cas échéant, les différentes formes de $f(x)$ suivant les valeurs de x, ou les différentes écritures de $f(x)$ pouvant permettre des simplifications.

b. Dérivabilité

L'étude de la dérivabilité de la fonction f permet de conclure qu'elle est continue pour toutes les valeurs où elle est dérivable. On étudiera éventuellement la dérivabilité à droite et à gauche.

c. Continuité (éventuellement)

Il reste simplement, le cas échéant, à étudier directement les points pour lesquels f n'est pas dérivable.

d. Limites aux bornes

L'étude des points précédents permet en général de partager l'ensemble E en intervalles sur lesquels la fonction est continue. Le comportement de f aux bornes de ces différents intervalles doit être étudié avec soin (en particulier en $+ \infty$ et en $- \infty$). Dans certains cas, on n'arrivera pas à déterminer de limite, soit parce qu'il n'en existe pas, soit parce que les méthodes connues ne permettent pas de déterminer cette limite[1].
Dans ce dernier cas, si l'on a réussi à prouver que la limite existe, on pourra envisager de déterminer par différents moyens une valeur approchée de la limite cherchée.

e. Sens de variation

Dans la plupart des cas que l'on rencontre dans les classes des lycées, l'étude du signe de la dérivée peut se mener par des méthodes algébriques. Il peut également se faire que l'étude de la variation de f' puisse se faire aisément à l'aide d'une dérivée seconde simple. Dans ce cas, on utilise le théorème des valeurs intermédiaires et les méthodes de calcul approché pour préciser le sens de variation de la fonction étudiée *(principe de Lagrange)*.
Mais hors de ce cadre scolaire, il peut se faire que l'étude du signe de la dérivée soit très malaisée. On s'adaptera alors à chaque cas particulier, en utilisant les possibilités du calcul à la machine.

f. Tableau de variation

Les résultats de l'étude peuvent être consignés dans un tableau, au fur et à mesure qu'on les obtient. Les valeurs figurant dans le tableau sont des valeurs exactes, éventuellement représentées par des lettres, et il est d'usage d'adjoindre un tableau (tableau de valeurs) récapitulant les valeurs approchées utilisées pour la construction de la courbe.

---

[1] Remarquons qu'il n'est pas aisé de savoir si l'on est dans ce cas, ou si l'on n'a pas su utiliser les méthodes connues pour arriver au résultat.

g. Points et tangentes remarquables

Parmi les points remarquables de la courbe représentative de f, signalons :

- Les points dont l'abscisse est une borne d'un intervalle de continuité.
  - Si $x_0 \in D_f$, on est en présence d'un **point d'arrêt** (figure 1, page 260).
  - Si la restriction de f à $D_f \setminus \{x_0\}$ admet en x_0 une limite (ou une limite à droite, ou une limite à gauche) infinie, la droite d'équation $x = x_0$ est **asymptote** à la courbe (figure 2, page 260).
  - Si $x_0 \notin D_f$, et si la fonction f admet en x_0 une limite (ou une limite à droite, ou une limite à gauche) réelle, on est en présence d'un **point limite** (figure 3, page 260).

Le coefficient directeur de la (ou des) demi-tangente(s) éventuelle(s) au point d'arrêt, ou au point limite, est donné par l'étude de la dérivabilité en x_0 de f ou de son prolongement par continuité en x_0. Cette étude peut être menée directement (limite du taux de variation), mais on n'oubliera pas, pour les fonctions satisfaisant aux conditions du théorème de Rolle, les conclusions que l'on peut tirer de l'existence d'une limite (éventuellement infinie) de la dérivée en x_0.

- Les points où le nombre dérivé est nul. La tangente est alors parallèle à l'axe des abscisses. Ces points ne correspondent à des extremums que s'ils correspondent à un changement de signe de la dérivée (figure 4, page 260).

- Les points où la fonction est continue mais non dérivable.
  - Si le taux de variation en x_0 admet une limite infinie, la tangente à la courbe est parallèle à (Oy), la courbe traverse sa tangente. On a un **point d'inflexion** à tangente parallèle à (Oy) (figure 5, page 260).
  - Si le taux de variation de f en x_0 admet des limites à droite ($f'_d(x_0)$) et à gauche $f'_g(x_0)$) différentes, et non infinies toutes les deux, on a un **point anguleux.** Les demi-tangentes en un point anguleux forment un angle non nul (figure 6, page 260).
  - Si $f'_d(x_0) = +\infty$ et $f'_g(x_0) = -\infty$, ou bien $f'_d(x_0) = -\infty$ et $f'_g(x_0) = +\infty$, on est en présence d'un **point de rebroussement** à tangente parallèle à (Oy) (figure 7, page 260).

- Les points où la dérivée admet un extremum. Ces points correspondent aux points où la dérivée seconde change de signe. On est alors en présence d'un **point d'inflexion** (figure 8, page 260). (Voir Activité **2**, page 235.)

Remarquons que ce cas se présente en particulier lorsque le nombre dérivé de f est nul en x_0, mais que la dérivée ne change pas de signe en x_0.
L'étude des annulations de la dérivée seconde est un outil permettant l'étude du signe de cette dérivée seconde.
La courbe traverse sa tangente en un point d'inflexion.
Dans tout intervalle où $f''(x)$ est positif, la concavité de la courbe représentative est tournée vers les ordonnées positives; dans tout intervalle où $f''(x)$ est négatif, la concavité de la courbe représentative est tournée vers les ordonnées négatives. (Voir Activité **3**, page 293.)

h. Branches infinies

Pour préciser le comportement de la fonction en l'infini, on cherche des courbes simples, asymptotes à la courbe représentative de la fonction étudiée. Le cas de droites asymptotes peut être l'objet d'une recherche systématique.

i. Représentation graphique

L'étude de la fonction débouche sur la construction de sa courbe représentative Γ dans un repère $\mathcal{R}$. Ce repère doit être choisi de façon à utiliser au mieux la feuille de papier dont

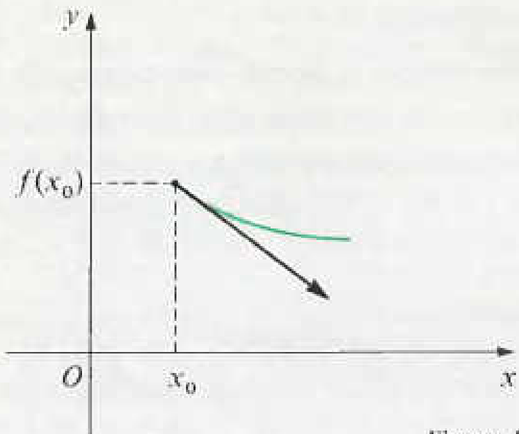


Figure 1

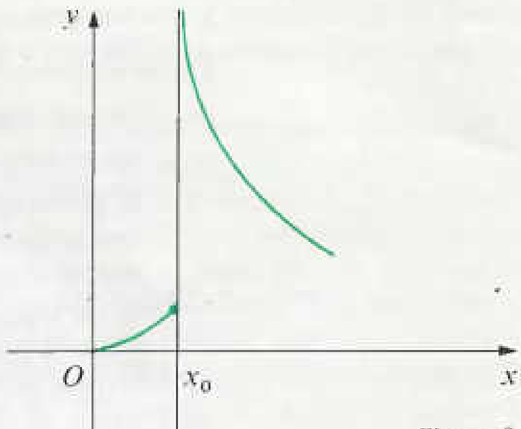


Figure 2

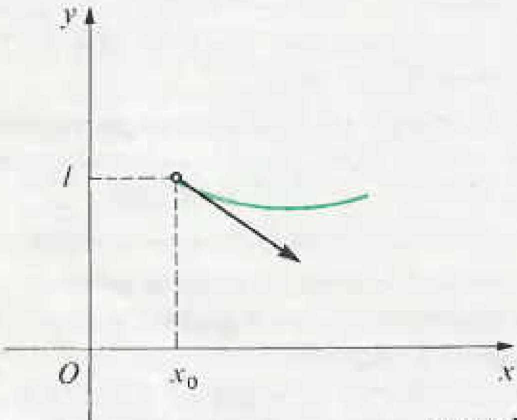


Figure 3

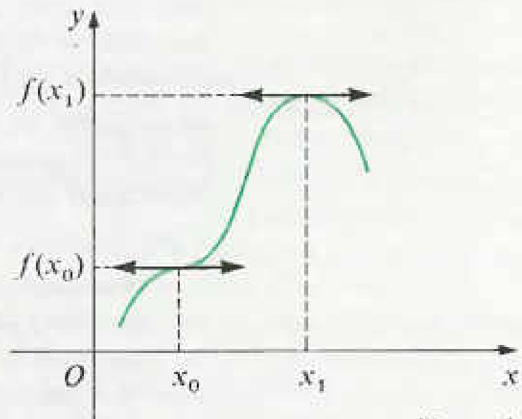


Figure 4

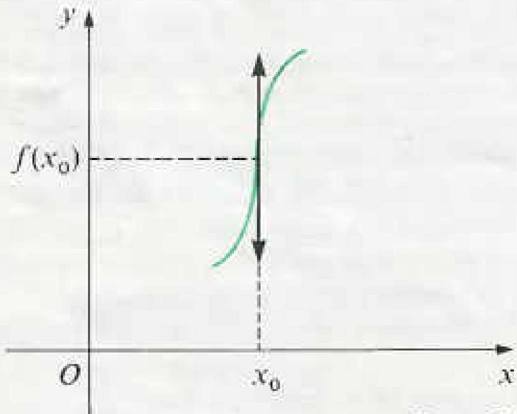


Figure 5

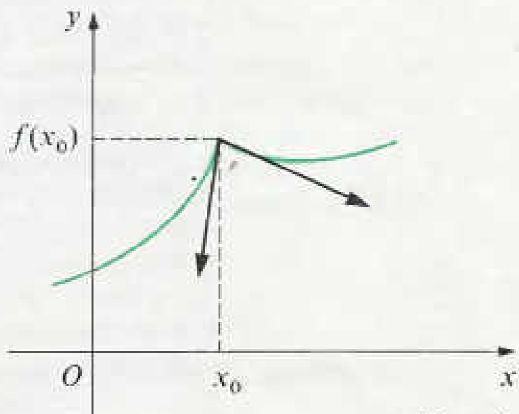


Figure 6

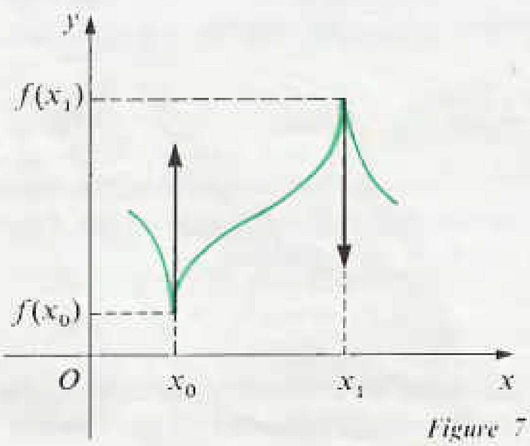


Figure 7

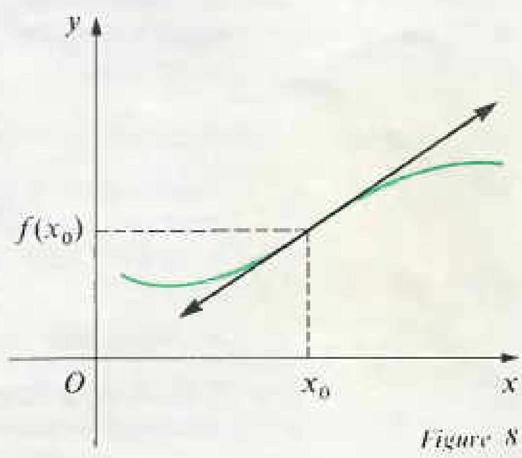


Figure 8

on dispose, pour faire un graphique clair et soigné. Il sera en général orthogonal, mais il peut se faire qu'il ne soit pas orthonormal. Dans ce cas, on fera très attention à ne pas commettre d'erreur dans la représentation des droites.
Pour tracer ce graphique :

• On étudie éventuellement l'existence d'éléments de symétrie. Cette étude ne s'envisage que si l'étude précédente peut faire penser qu'il existe un tel élément de symétrie.
Rappelons que : La droite D d'équation $x = x_0$ est axe de symétrie pour Γ si, et seulement si, quel que soit le réel t tel que $x_0 + t \in D_f$, alors $x_0 - t \in D_f$ et :

$$f(x_0 + t) = f(x_0 - t).$$

Le point S de coordonnées (x_0, y_0) est centre de symétrie pour Γ si, et seulement si, quel que soit le réel t tel que $x_0 + t \in D_f$, alors $x_0 - t \in D_f$ et

$$y_0 = \frac{1}{2}\,[f(x_0 + t) + f(x_0 - t)].$$

• On place les points et tangentes remarquables déterminés au cours de l'étude.

• On place également les courbes asymptotes éventuelles.

• En cas de doute, on étudie précisément la position de la courbe par rapport aux tangentes remarquables, aux courbes asymptotes, et éventuellement par rapport à toute courbe remarquable.

• Il peut se faire que les études précédentes ne permettent pas de tracer une branche de courbe avec une assez bonne précision. On place alors certains points particuliers (par exemple, les intersections avec les axes des points de Γ d'abscisses simples).

• On trace alors la courbe Γ en joignant les éléments obtenus dans les études ci-dessus, en suivant les indications du tableau de variation.

• Le cas échéant, on complète la courbe en utilisant les propriétés de parité ou de périodicité rencontrées au cours de l'étude.

REMARQUE :

Une représentation graphique doit toujours être tracée avec le plus grand soin. Pour cela, il est recommandé d'utiliser du papier millimétré. La précision des valeurs approchées données dépend de ce qu'il est possible d'apprécier sur le repère choisi. Cette précision sera naturellement plus grande lorsqu'on utilise du papier millimétré.

3. PREMIER EXEMPLE : $f(x) = x\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}$

• La fonction f est définie sur $D_f =]-\infty, -1[\,\cup\,[1, +\infty[$.

• On a $[f(x)]^2 = x^2\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$. D'où :

$$2f(x)f'(x) = \frac{(3x^2 - 2x)(x+1) - x^2(x-1)}{(x+1)^2} = \frac{2x(x^2 + x - 1)}{(x+1)^2}.$$

Il en résulte que f est dérivable pour tout x de D_f tel que $f(x)$ soit non nul. La fonction f est donc dérivable (et par suite continue) sur $]-\infty, -1[\,\cup\,]1, +\infty[$.

• D'autre part : $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 0 = f(0)$.
La fonction f est donc continue à droite en 1.

• On a : $\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

• D'après le calcul ci-dessus, $f(x)f'(x)$ est du signe de $2x(x^2 + x - 1)$.
Comme $f(x)$ est du signe de x, il en résulte que $f'(x)$ est du signe de $x^2 + x - 1$.

Or, les racines de $x^2 + x - 1$ sont : $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ et $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Seul $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ appartient à D_f et correspond à une annulation de la dérivée avec changement de signe. Le tableau de variation de la fonction f est alors :

x	$-\infty$		$\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$				$+$	
$f'(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	M	$\searrow$	$+\infty$		0	$\nearrow$	$+\infty$

• Pour $x_0 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$, la courbe représentative admet un point à tangente parallèle à (Ox), qui correspond à un maximum M de la fonction f. On a :

$$M = f(x_0), \quad \text{avec} \quad x_0^2 + x_0 - 1 = 0, \quad \text{soit} \quad x_0 = \frac{1}{x_0 + 1}.$$

Il en résulte que : $M^2 = \left(x_0\sqrt{\dfrac{x_0 - 1}{x_0 + 1}}\right)^2 = x_0^2\,\dfrac{x_0 - 1}{x_0 + 1} = x_0^3(x_0 - 1)$.
Or, $x_0^2 = 1 - x_0$.
Donc :

$$M^2 = (1 - x_0)(x_0^2 - x_0) = (1 - x_0)(1 - 2x_0) = 1 - 3x_0 + 2x_0^2 = 3 - 5x_0,$$

soit : $M^2 = 3 + \dfrac{5}{2}(1 + \sqrt{5}) = \dfrac{11 + 5\sqrt{5}}{2}$

et : $M = -\dfrac{\sqrt{22 + 10\sqrt{5}}}{2}$.
On a : $M \approx -3{,}33$, avec $x_0 \approx -1{,}62$.
– La droite d'équation $x = -1$ est asymptote à la courbe.
– Pour $x_0 = 1$, on a $\lim\limits_{x \to 1^+} 2f(x)f'(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{2x(x^2 + x - 1)}{(x + 1)^2} = \dfrac{1}{2}$.

Comme $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = 0$ et que, pour $x > 1$, $f(x) > 0$, alors :

$$\lim_{x \to 1^+} f'(x) = +\infty.$$

Il en résulte que la tangente au point d'arrêt (1, 0) est parallèle à l'axe des ordonnées.

• Soit $f\left(\dfrac{1}{X}\right) = \dfrac{1}{X}\sqrt{\dfrac{1 - X}{1 + X}} = \dfrac{\sqrt{1 - X^2}}{X(1 + X)}$.
Au voisinage de 0, on a :

$$\sqrt{1 - X^2} = 1 - \frac{X^2}{2} + X^2\varepsilon(X), \qquad \text{avec} \quad \lim_{X \to 0} \varepsilon(X) = 0;$$

$$\frac{1}{1 + X} = 1 - X + X^2 - X^3 + X^3\varepsilon_1(X), \quad \text{avec} \quad \lim_{X \to 0} \varepsilon(X) = 0.$$

Donc :

$$f\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{1}{X}\left(1 - \frac{X^2}{2} + X^2\varepsilon(X)\right)(1 - X + X^2 - X^3 + X^3\varepsilon_1(X))$$
$$= \frac{1}{X} - 1 + \frac{X}{2} + X\varepsilon_2(X), \quad \text{avec} \quad \lim_{X\to 0} \varepsilon_2(X) = 0.$$

Au voisinage de l'infini, on a :

$$f(x) = x - 1 + \frac{1}{2x} + \frac{1}{x}\,\varepsilon_3(x), \quad \text{avec} \quad \lim_{x\to+\infty} \varepsilon_3(x) = \lim_{x\to-\infty} \varepsilon_3(x) = 0.$$

Il en résulte que la courbe représentative de f admet une droite asymptote d'équation $y = x - 1$. La courbe est « au-dessus » de son asymptote pour x positif, et « en dessous » pour x négatif.

• L'étude ci-dessus laisse penser que la courbe admet un point d'inflexion.

On a : $f(x)f'(x) = \dfrac{x(x^2 + x - 1)}{(x+1)^2}$, d'où :

$$[f'(x)]^2 + f(x)f''(x) = \frac{(3x^2 + 2x - 1)(x+1) - 2(x^3 + x^2 - x)}{(x+1)^3}$$
$$= \frac{x^3 + 3x^2 + 3x - 1}{(x+1)^3}$$

c'est-à-dire :
$$f(x)f''(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 3x - 1}{(x+1)^3} - \frac{x^2(x^2 + x - 1)^2}{(x+1)^4[f(x)]^2}$$
$$= \frac{x^3 + 3x^2 + 3x - 1}{(x+1)^3} - \frac{x^2(x^2 + x - 1)^2(x+1)}{(x+1)^4x^2(x-1)}$$
$$= \frac{(x^3 + 3x^2 + 3x - 1)(x-1) - (x^2 + x - 1)^2}{(x+1)^3(x-1)}$$
$$= \frac{x^2 - 2x}{(x+1)^3(x-1)}.$$

$f(x)$ étant du signe de x, $f''(x)$ est du signe de $\dfrac{x-2}{(x+1)^3(x-1)}$.

Pour tout x de D_f, $(x+1)^3(x-1)$ est positif. Donc $f''(x)$ est du signe de $x - 2$.

La courbe admet donc un point d'inflexion pour $x = 2$.

On a : $f(2) = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$, $f(2) \approx 1{,}15$, et :

$$f(2)f'(2) = \frac{2(4 + 2 - 1)}{(2+1)^2} = \frac{10}{9},$$

soit : $f'(2) = \dfrac{10}{9} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{5\sqrt{3}}{9}$, $f'(2) \approx 0{,}96$.

• La courbe représentative de la fonction f fait l'objet de la figure 9, page 264.

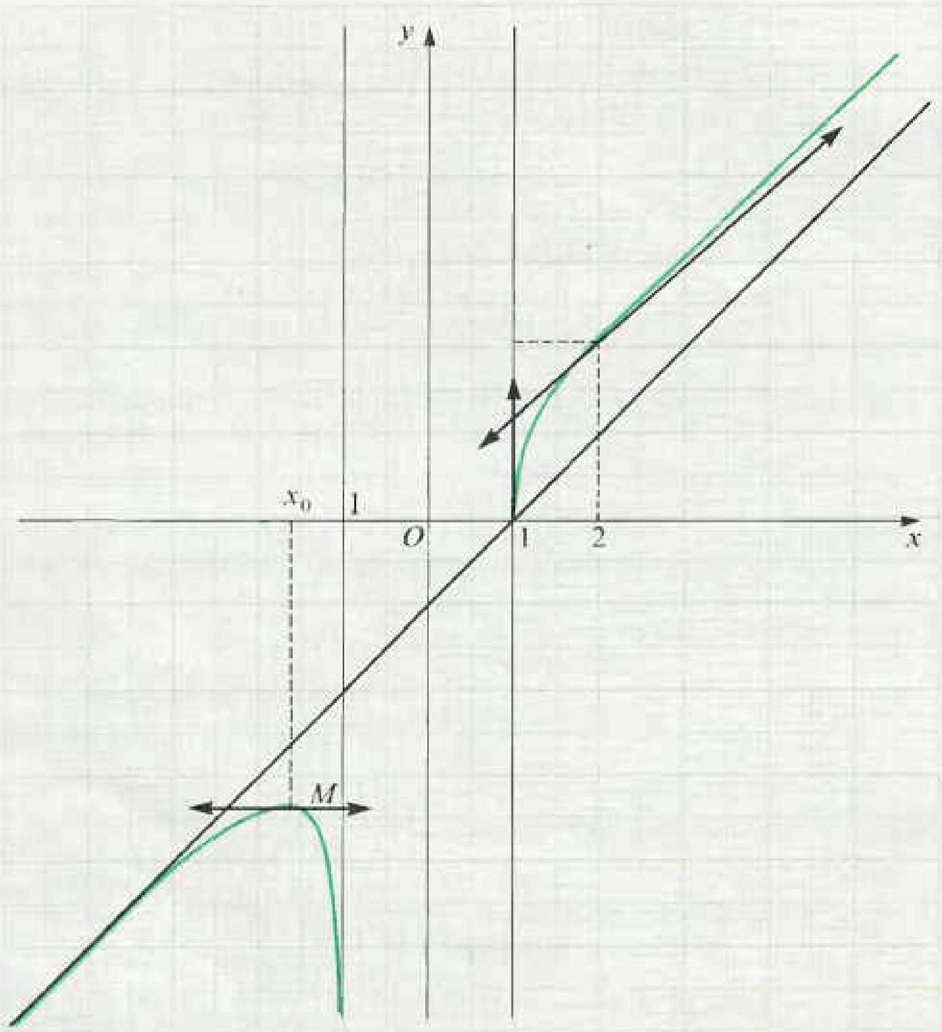


Figure 9

x	$-\infty$		α		-1		1			$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		//////		$(-\infty)$	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	M	$\searrow$	$-\infty$	//////	0		$\nearrow$	$+\infty$

$$\alpha = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \approx -1{,}62$$

$$M = -\frac{\sqrt{22+10\sqrt{5}}}{2} \approx -3{,}33$$

Inflexion :

$$f(2) = \frac{2}{\sqrt{3}} \approx 2{,}12 \qquad\qquad f'(2) = \frac{5\sqrt{3}}{9} \approx 0{,}96$$

REMARQUE :

Le lecteur construira, à partir de cette étude, la courbe d'équation : $(x+1)y^2 = (x-1)x^2$.

4. DEUXIÈME EXEMPLE : $f(x) = \sin^2 x \cos 2x$

— La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.

— C'est une fonction paire et périodique, dont une période est π. Nous l'étudierons donc sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, et nous en déduirons l'étude sur $\mathbb{R}$.

— On sait que $\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$, donc $f(x) = \dfrac{\cos 2x - \cos^2 2x}{2}$.

D'autre part : $\cos^2 2x = \dfrac{1 + \cos 4x}{2}$.

Par suite : $f(x) = \dfrac{2\cos 2x - 1 - \cos 4x}{4}$.

• On a : $f'(x) = \dfrac{1}{4}(-4\sin 2x + 4\sin 4x) = \sin 4x - \sin 2x$.

$= \sin 2x(2\cos 2x - 1)$.

La fonction f est dérivable, donc continue pour tout réel x.

• On a $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = f(0) = 0$, $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} f(x) = f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$.

• La dérivée $f'(x)$ s'annule et change de signe (et ne peut changer de signe sans s'annuler, car elle est continue) pour :

$\sin 2x = 0$, c'est-à-dire, si $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$: $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2}$;

$\cos 2x = \dfrac{1}{2}$, c'est-à-dire, si $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$: $x = \dfrac{\pi}{6}$.

On a : $f\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = \dfrac{1}{8}$.

Le tableau de variation dans l'intervalle d'étude est donc :

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{8}$	$\searrow$	-1

$\dfrac{\pi}{6} \approx 0{,}52.$

$\dfrac{\pi}{2} \approx 1{,}57.$

• — La courbe représentative admet en $0, \dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{2}$ trois points à tangentes parallèles à (Ox) correspondant tous les trois à des extremums pour la fonction.

— L'étude ci-dessus fait penser à l'existence de deux points d'inflexion, l'un dont l'abscisse est comprise entre 0 et $\dfrac{\pi}{6}$, et l'autre dont l'abscisse est comprise entre $\dfrac{\pi}{6}$ et $\dfrac{\pi}{2}$.

On a : $f''(x) = 4\cos 4x - 2\cos 2x = 4(2\cos^2 2x - 1) - 2\cos 2x$

$= 8\cos^2 2x - 2\cos 2x - 4$

$= 2(4\cos^2 2x - \cos 2x - 2)$

Soit $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 4 \times (-2) = 33$.

La fonction f'' s'annule en changeant de signe pour :

$$\cos 2x = \frac{1+\sqrt{33}}{8} \approx 0{,}84 \quad \text{ou} \quad \cos 2x = \frac{1-\sqrt{33}}{8} \approx -0{,}59.$$

On obtient ainsi des valeurs approchées des abscisses des points d'inflexion :

$$x_0 \approx 0{,}28 \quad ; \quad f(x_0) \approx 0{,}06 \quad ; \quad f'(x_0) \approx 0{,}37.$$
$$x_1 \approx 1{,}1 \quad ; \quad f(x_1) \approx -0{,}47 \quad ; \quad f'(x_1) \approx -1{,}76.$$

• La courbe fait l'objet de la figure 10. On l'obtient à partir de la portion étudiée, en complétant par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées, et par translations d'amplitude π parallèlement à l'axe des abscisses. (Le repère n'est pas orthonormal.)

Remarquons que la courbe recoupe l'axe des abscisses pour $x = \frac{\pi}{4}$, avec $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1$.

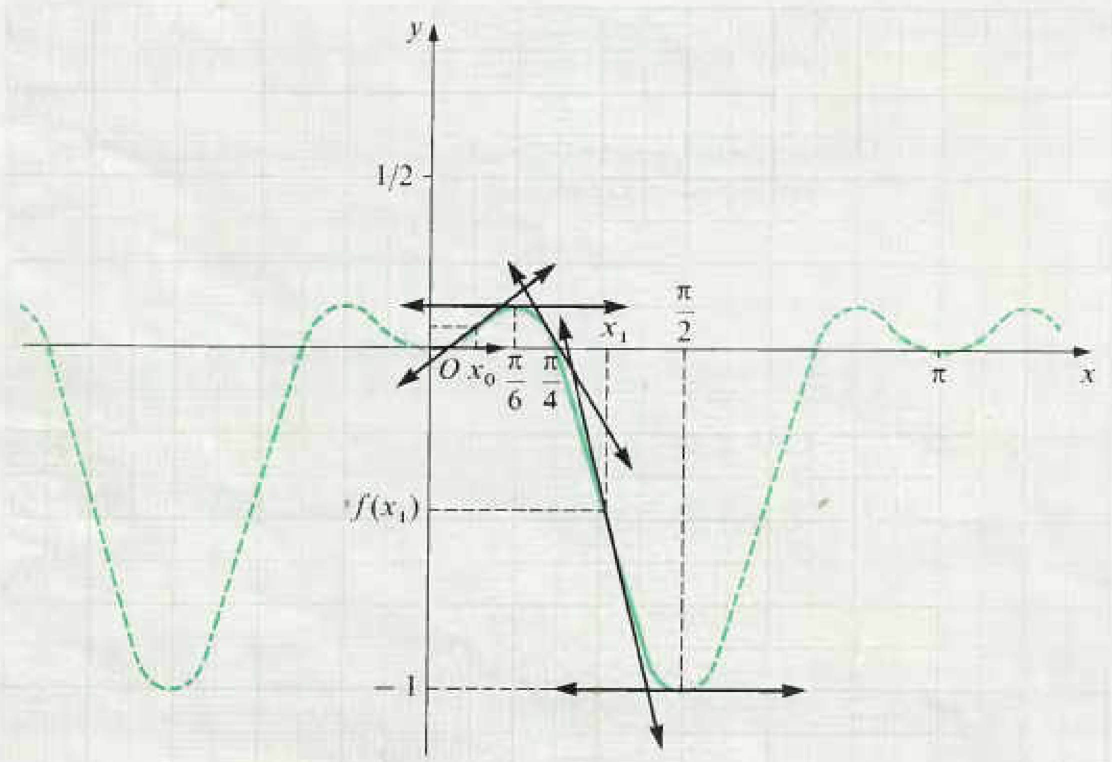


Figure 10

x	0		$\pi/6$		$\pi/2$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0
$f(x)$	0	↗	$1/8$	↘	1

$\frac{\pi}{6} \approx 0{,}52$

$\frac{\pi}{2} \approx 1{,}57$

Inflexions :

$x_0 \approx 0{,}28$; $f(x_0) \approx 0{,}006$; $f'(x_0) \approx 0{,}37$

$x_1 \approx 1{,}1$; $f(x_1) \approx -0{,}47$; $f'(x_1) \approx -1{,}76$

5. TROISIÈME EXEMPLE : $f(x) = \frac{x^2}{4}(2 \ln x - 3)$ et $f(0) = 0$

• La fonction f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

On a : $f'(x) = \frac{x}{2}(2 \ln x - 3) + \frac{x^2}{4}\frac{2}{x}$,
$= x \ln x - x = x(\ln x - 1)$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, donc continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

• On sait que : $\lim\limits_{x \to 0} x \ln x = 0$.
Il en résulte que : $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$. La fonction f est donc continue en 0.

• Pour étudier la dérivabilité de la fonction f en 0, étudions directement le taux d'accroissement $\frac{f(x)}{x} = \frac{x}{4}(2 \ln x - 3)$.

On a : $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} = 0$. (Remarquons également que $\lim\limits_{x \to 0^+} f'(x) = 0$.)
La fonction f est donc dérivable à droite en zéro.

• Le tableau de variation de la fonction f est donc :

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$		$\nearrow$	

• — La courbe représentative admet deux points à tangentes parallèle à (Ox) : pour $x = 0$, $y = 0$; pour $x = e$, $y = f(e) = -\frac{e^2}{4}$.

— La forme de la courbe permet de penser à l'existence d'un point d'inflexion pour une abscisse comprise entre 0 et e. On a : $f''(x) = \ln x$.
La dérivée seconde s'annule et change de signe pour $x = 1$. On a alors :

$$f(1) = -\frac{3}{4} \quad ; \quad f'(x) = -1.$$

— La courbe représentative recoupe l'axe des abscisses pour $2 \ln x - 3 = 0$, soit $\ln x = \frac{3}{2}$, c'est-à-dire : $x = e^{\frac{3}{2}} = e\sqrt{e}$.

On a alors : $f(e\sqrt{e}) = 0$, , $f'(e\sqrt{e}) = \frac{e\sqrt{e}}{2}$.

• L'activité ci-dessous permettra de préciser la branche infinie de la courbe Γ d'équation $y = f(x)$.

★ Activité 1

1° Prouver que la courbe Γ n'admet pas de droite asymptote en $+\infty$.

2° Prouver que la courbe Γ n'admet pas de parabole asymptote en $+\infty$.

3° Prouver qu'il n'existe pas de polynôme de degré 3 dont la courbe représentative soit asymptote en $+\infty$ à la courbe Γ.

4° a) Déterminer a, b et c de façon que la courbe P d'équation $y = ax^2 + bx + c$ *passe par les points* $\left(e, -\dfrac{e^2}{4}\right)$, *et* $(e\sqrt{e}, 0)$, *et admette en ce dernier point une tangente de coefficient directeur* 1.

b) *Tracer soigneusement la courbe P, et préciser la position relative des courbes Γ et P.*

5° a) Déterminer $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ *de façon que la courbe C d'équation* $y = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ *passe par les points* $\left(e, -\dfrac{e^2}{4}\right)$, *et* $(e\sqrt{e}, 0)$, *et admette en ces points les mêmes tangentes que la courbe Γ.*

b) *Tracer soigneusement la courbe C, et préciser la position relative des courbes Γ, P et C.*

REMARQUE :

Si une courbe d'équation $y = f(x)$ est telle que :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty,$$

on dit qu'elle admet une branche parabolique de direction (Oy).

- La courbe représentative de la fonction f fait l'objet de la figure 11.

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$-\dfrac{e^2}{4}$	↗	$+\infty$

$e \approx 2{,}72$

$-\dfrac{e^2}{4} \approx -1{,}85$

$e\sqrt{e} \approx 4{,}48$, $\dfrac{e\sqrt{e}}{2} \approx 2{,}24$

Inflexion :

$x_0 = 1$; $f(1) = -\dfrac{3}{4}$;

$f'(1) = -1$

Intersection avec (Ox) :

$x_1 = e\sqrt{e}$; $f(x_1) = 0$;

$f'(x_1) = \dfrac{e\sqrt{e}}{2}$

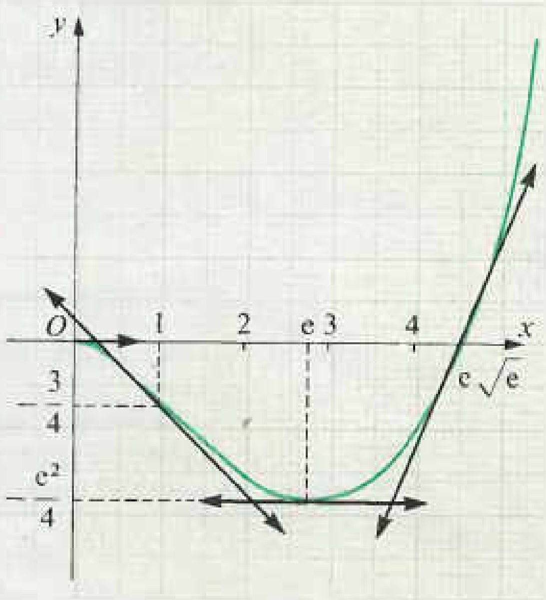


Figure 11

★ Activité 2

1° Représenter graphiquement sur la même figure que la fonction f *les fonctions définies par :*

a) $g(x) = f(|x|)$; ***b)*** $h(x) = |f(x)|$;

c) $k(x) = |f(|x|)|$; ***d)*** $l(x) = \dfrac{x}{4}(2\ln\sqrt{|x|} - 3)$.

2° Représenter graphiquement les fonctions φ *et* ψ *définies par :*

$$\varphi(x) = f(|\cos x|) \quad ; \quad \psi(x) = f(|\sin x|).$$

3° On considère, pour tout réel α, *la fonction* f_α *définie par :*

$$f_\alpha(x) = x^\alpha\left(\frac{\ln x}{2} - \frac{3}{4}\right) \quad \text{et} \quad f_\alpha(0) = 0.$$

a) *Pour quelles valeurs de* α *la fonction* f_α *est-elle continue en* 0?
b) *Soit* C_α *la courbe représentative de la fonction* f_α *dans un repère* $(O, \vec{i}, \vec{j})$. *Montrer que, pour tout* α, *la courbe* C_α *contient trois points indépendants de* α *que l'on déterminera.*
c) *Déterminer en fonction de* α *les coordonnées du point* M_α *de* C_α *correspondant à l'extremum de* C_α. *Étudier l'ensemble des points* M_α *lorsque* α *décrit* $\mathbb{R}_+^*$.
d) *Tracer les courbes* C_0, C_1, C_2, C_3 *sur le même graphique.*

EXERCICES ET PROBLÈMES

Dans les exercices **25** *à* **122**, *on demande d'étudier et représenter graphiquement la fonction* f.

25. $f(x) = x^2 + 2\sqrt{x^2}$. **26.** $f(x) = \sqrt{x^6} - \sqrt{x^2}$.

27. $f(x) = x + \sqrt{x^6}$.

28. $f(x) = |x^2 - 3x| + 2$.

29. $f(x) = \sqrt{(x^2 + 2x)^2} - x^2 + 3$.

30. $f(x) = \left|\dfrac{x^4 - 16x^2}{64}\right| - \left|\dfrac{x^4 - 9x^2}{20}\right|$.

31. $f(x) = (x + \sqrt{x^2})^2 + x^2\sqrt{x^2} + \sqrt{x^2}$.

32. $f(x) = |x^3 - |x + 1||$.

33. $f(x) = \dfrac{2x - 3}{x^2 + x - 1}$. **34.** $f(x) = \dfrac{2x^2 + x - 1}{x^2 + 2x + 3}$.

35. $f(x) = \dfrac{x^2 + 3x}{x^2 + x + 3}$.

36. $f(x) = \dfrac{2x^2 + 4x + 5}{x + 1}$.

37. $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2}$. **38.** $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{(x - 2)^2}$.

39. $f(x) = \left(\dfrac{x + 1}{x - 1}\right)^2$.

40. $f(x) = \dfrac{1}{-x^2 + 2x - 1}$.

41. $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 3x + 2}$.

42. $f(x) = \dfrac{2x^2 - 7x + 8}{x^2 - 4x + 3}$.

43. $f(x) = \dfrac{x^2}{x^2 - x + 1}$. **44.** $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 5}{x^2 + 5x + 5}$.

45. $f(x) = \dfrac{x^2 + 7x + 7}{x^2 + 2x + 2}$. **46.** $f(x) = \dfrac{x^2 - x + 2}{x - 2}$.

47. $f(x) = \dfrac{x^2 - 5}{\sqrt{x^4 - x^2}}$.

48. $f(x) = \dfrac{x(3 + 2x^2)}{3\sqrt{(1 + x^2)^3}}$.

49. $f(x) = \dfrac{x^3 + 9}{x^2 - 1}$. **50.** $f(x) = \dfrac{(x + 1)^3}{(x - 1)^2}$.

51. $f(x) = x\sqrt{\dfrac{x}{x - 1}}$. **52.** $f(x) = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}}$.

53. $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 + x}{(x - 1)(2x + 1)}$.

54. $f(x) = x + \sqrt{\dfrac{x - 1}{x + 1}}$.

55. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{x^2 - x}}$. **56.** $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$.

57. $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 1}}$. **58.** $f(x) = -\sqrt{\dfrac{x}{x^2 + 1}}$.

59. $f(x) = x\sqrt{\dfrac{x - 1}{3x + 1}}$. **60.** $f(x) = \dfrac{x^4}{x^3 - 1}$.

61. $f(x) = |x + 1|\sqrt{\dfrac{x + 1}{x - 1}}$.

62. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x - 1}\sqrt{|x|}$.

63. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^4 - 1}}{x + 2}$.

64. $f(x) = x(x + \sqrt{1 + x^2})$.

65. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2 - 7x + 10}}{x + 1}$.

66. $f(x) = \sqrt{x^2 + 2|x| + 3}$.

67. $f(x) = \sqrt{2x + |x^2 - 3|}$.

68. $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 3x^2}$.

69. $f(x) = \sqrt[3]{x^2(1 - x)}$. 70. $f(x) = \sqrt[5]{x^3(x^2 - 1)}$.

71. $f(x) = \sin x + \dfrac{1}{2} \sin 2x + \dfrac{1}{3} \sin 3x$.

72. $f(x) = \sin^3 x + \cos^3 x$.

73. $f(x) = \sin x + \sqrt{3} \cos x$.

74. $f(x) = \tan x + \cos x$.

75. $f(x) = \dfrac{\cos 2x}{\sin x}$. 76. $f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{2 + \cos x}$.

77. $f(x) = \cos x + \tan \dfrac{x}{2}$.

78. $f(x) = 2 \sin x - \tan x$.

79. $f(x) = \sin^2 x + \sin 2x$.

80. $f(x) = \sin x + \cos x + \sin x \cos x$.

81. $f(x) = \dfrac{(1 + \sin x)^2}{\sin x(1 - \sin x)}$.

82. $f(x) = \dfrac{\cos 3x}{1 + \cos 2x}$.

83. $f(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{\cos 2x}$.

84. $f(x) = \dfrac{3 \sin x}{2 \sin x - 1}$.

85. $f(x) = \dfrac{4 \sin x - 3 \cos x}{3 \sin x + 4 \cos x}$.

86. $f(x) = \dfrac{\sqrt{2} \cos x - 1}{1 - 2 \cos x}$.

87. $f(x) = \dfrac{3 + \sin x}{1 + \sin x}$. 88. $f(x) = \dfrac{3 \sin x}{2 \sin x - 1}$.

89. $f(x) = \left(\dfrac{1 - 2 \sin x}{1 + 2 \sin x}\right)^2$.

90. $f(x) = \cos \dfrac{1 - x}{1 + x}$.

91. $f(x) = x(2 + \cos x) - 3 \sin x$.

92. $f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{2 + \cos x} - \dfrac{x^2}{6}$ $(x \in]-\pi, \pi[)$.

93. $f(x) = \dfrac{1}{x(1 + \ln x)}$.

94. $f(x) = \ln \dfrac{\sqrt{x^2 + 1} - x}{\sqrt{x^2 + 1} + x}$.

95. $f(x) = \sqrt{x^2 + 4} + 3 \ln (x + \sqrt{x^2 + 4})$.

96. $f(x) = \dfrac{x - 1}{x + 1} (\ln x + 1)$.

97. $f(x) = 1 + x + \dfrac{2x \ln |x|}{1 - x}$.

98. $f(x) = x + \dfrac{\ln |x|}{|x|}$.

99. $f(x) = \dfrac{x}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$.

100. $f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}} - x^2 - x - \dfrac{1}{2}$.

101. $f(x) = \dfrac{2x^2 - 1}{x} e^{\frac{1}{x}}$.

102. $f(x) = |x + 1| e^{-|x-1|}$.

103. $f(x) = \left(2x + 1 - \dfrac{1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}}$.

104. $f(x) = \dfrac{x \ln x}{x - 1}$.

105. $f(x) = (2 e^x - e^{-x})^{\frac{1}{x}}$.

106. $f(x) = x \ln \left|1 + \dfrac{1}{x}\right|$.

107. $f(x) = \ln \left(x^2 - \dfrac{1}{x}\right)$. 108. $f(x) = \ln (1 + |x|)$.

109. $f(x) = 2(x + 2) - 3 \ln \dfrac{x - 1}{x + 1}$.

110. $f(x) = \ln |\ln|\ln| x|||$.

111. $f(x) = e^{\sin^2 x} \cos x$. 112. $f(x) = (\ln x)^{\ln x}$.

113. $f(x) = \dfrac{x^{\frac{1}{x}}}{x - 1}$. 114. $f(x) = \ln (2 - e^{\frac{1}{x}})$.

115. $f(x) = |x|^{x + \frac{1}{x}}$.

116. $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}}$.

117. $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{dt}{(2 - t)\sqrt{1 - t^2}}$.

118. $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{e}{t} \, dt$.

119. $f(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\ln (1 + t^2)}{t} \, dt$.

120. $f(x) = \displaystyle\int_{e^2}^x \frac{dt}{t \ln (\ln t)}$.

121. $f(x) = \displaystyle\int_0^x \ln \cos t \, dt$. 122. $f(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{t} \, dt$.

Dans les exercices **123** *à* **135**, *on demande de tracer dans un repère* $\mathcal{R}$ *la courbe* Γ *donnée par une de ses équations.*

123. $x^2 + y^2 - 5 = 2x$. **124.** $x = 2y^2 + 3y - 5$.

125. $x^2 - y^2 = 2x + y - 1$.

126. $y^2 - x^4 + 2x^3 - x^2 = 0$.

127. $y^2 = x^3 + x^2$. **128.** $y^2 = \dfrac{x^2 - x^3}{3x + 1}$.

129. $y^2 = \dfrac{2x^2}{1 + x}$. **130.** $y^2(4 - x) - x^3 = 0$.

131. $4y^2 - x^3(3 - x) = 0$.

132. $y^2 = x^2 - x^4$.

133. $(x^2 + y)^2 = x^2 - y^2$.

134. $xy^2 = 9(3 - x)$.

135. $3y^2(x + 1) - x^2(x - 3) = 0$.

136. On considère la fonction sgn définie par :

$$\operatorname{sgn} x = 1, \quad \text{pour} \quad x \in \mathbb{R}_+^*;$$
$$\operatorname{sgn} x = -1, \quad \text{pour} \quad x \in \mathbb{R}_-^*;$$
$$\operatorname{sgn} 0 = 0.$$

a) Étudier et représenter graphiquement les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = \operatorname{sgn}(\sin x) \quad ; \quad g(x) = \operatorname{sgn}(\cos x).$$

b) Étudier et représenter graphiquement la fonction h définie par :

$$h(x) = \inf(\cos x \operatorname{sgn}(\sin x), \sin x \operatorname{sgn}(\cos x)).$$

PARTIE ENTIÈRE

Dans ce qui suit, le symbole $E(u)$ *qui se lit « partie entière de u » désigne le plus grand entier n qui soit inférieur à u :* $n \leqslant u < n + 1$. $E(u)$ *se note aussi parfois* $[u]$.

137. *1°* Étudier et représenter la variation de la fonction E.

2° Résoudre l'équation : $E(\sqrt{x}) = \sqrt{E(x)}$.

3° Représenter graphiquement, sur trois figures distinctes, les ensembles des solutions (x, y) de chacune des équations définies par :

a) $E(\sqrt{x}) = E(\sqrt{y})$. *b*) $E(\sqrt{x}) = \sqrt{E(y)}$.

c) $\sqrt{E(x)} = \sqrt{E(y)}$.

4° Dresser le catalogue des discontinuités de chacune des fonctions f_1 et f_2 :

$$f_1 = \left[x \mapsto E\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right)\right],$$
$$f_2 = [x \mapsto E[(\sqrt{2} - 1)\sqrt{x}]].$$

5° On considère la fonction g :

$$g = \left[x \mapsto 2E\left(\sqrt{\frac{x}{2}}\right) - E(\sqrt{x}) - E[(\sqrt{2} - 1)\sqrt{x}]\right].$$

Calculer $g(x)$ pour : $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.
Étudier la variation de g et construire le graphique lorsque x varie de 0 à 7.

Étudier et représenter graphiquement les fonctions des exercices **138** *à* **150**.

138. $f(x) = [E(x)]^2 - x$. **139.** $f(x) = \dfrac{1}{E(x)}$.

140. $f(x) = E(3x + 5)$. **141.** $f(x) = E(x^2)$.

142. $f(x) = \dfrac{x}{E(x)}$. **143.** $f(x) = \dfrac{E(x)}{x}$.

144. $f(x) = 1 - xE(x)$. **145.** $f(x) = 1 - xE\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

146. $f(x) = E(x) - 2x$. **147.** $f(x) = E(2x) - x$.

148. $f(x) = E(x^4 - 4x^2)$.

149. $f(x) = [2E(x) + 1]x - E(x)[E(x) - 1]$.

150. $f(x) = E(x) + \sqrt{x - E(x)}$.

151. *a*) Étudier et représenter graphiquement la fonction f_0 définie par : $f_0(x) = E(x) + E(-x)$.

b) Même question pour les fonctions définies par :

$$f_1(x) = \sqrt{f_0(x)}; \quad f_2(x) = \frac{1}{f_0(x)};$$
$$f_3(x) = f_1(x) + f_2(x).$$

c) Même question pour les fonctions définies par :

$$g_1(x) = [1 + f_0(x)]x^2; \quad g_2(x) = -x^2 f_0(x);$$
$$g_3(x) = \frac{f_0(x)}{x}; \quad g_4(x) = \frac{1 + f_0(x)}{x}.$$

d) Étudier les fonctions définies par :

$$h_1(x) = g_1(x) + g_2(x);$$
$$h_2(x) = [1 + g_1(x)][1 + g_2(x)].$$

152. Soit D une droite sur laquelle on a défini un repère $(O, \vec{i})$. On désigne par A_k ($k \in \mathbb{Z}$) le point d'abscisse k et soit M un point d'abscisse x.
On définit l'application, f, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui, à l'abscisse de tout point $M \in D$, associe le produit des distances de M aux deux points A_k les plus proches.

1° *a*) Vérifier que, si $E(x)$ désigne la partie entière de x, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = [x - E(x)][E(x) + 1 - x].$$

b) Montrer que f est une fonction périodique.

c) La fonction f est-elle continue et dérivable sur $[0, 1]$? Est-elle continue et dérivable sur $\mathbb{R}$?

d) Étudier la variation de f pour x appartenant à $[0, 1]$.
On considère un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$; tracer avec soin par rapport à ce repère l'arc de courbe correspondant à $x \in [0, 1]$. En déduire le tracé de la courbe d'équation $y = f(x)$, pour $x \in \mathbb{R}$.

2° Soit g la fonction définie par :

$$g(x) = [E(x+1)][f(x)].$$

a) Calculer $g(x)$ pour x appartenant à $[k, k+1]$, $k \in \mathbb{Z}$. La fonction g est-elle continue et dérivable sur $\mathbb{R}$? Construire la courbe Γ d'équation $y = g(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
b) Calculer l'aire, A_k, du domaine compris entre Γ, l'axe des x et les droites d'équations respectives $x = k$ et $x = k+1$.
c) Calculer $S_k = \sum_{i=0}^{i=k} A_i$.

153. Soit $f_n(x) = [x^n]^{\frac{1}{n}}$, où n est un entier naturel non nul et $[x^n]$ la partie entière du réel x^n. On se propose d'étudier la convergence de la suite $(f_n(x))$ pour x fixé.

A — *1°* Démontrer que, quels que soient les réels a et b positifs non nuls :

$$a - b = (\sqrt[n]{a} - \sqrt[n]{b}) \sum_{k=0}^{n-1} (\sqrt[n]{a})^{n-k-1} (\sqrt[n]{b})^k.$$

2° Démontrer que, si k, p, n sont des entiers naturels, avec $n \neq 0$, alors :

$$\sqrt[n]{k^n + p + 1} - \sqrt[n]{k^n + p} < \frac{1}{n}.$$

B — *1°* Calculer $f_n(x)$ pour $0 \leqslant x < 1$. En déduire la nature de la suite $(f_n(x))$.
2° On suppose $n \geqslant 1$ et on pose $k = [x]$. On pose :

$$[x^n] = k^n + p.$$

Prouver que : $0 \leqslant x - f_n(x) < \dfrac{1}{n}$.

3° Qu'en résulte-t-il lorsque, x étant fixé, n tend vers l'infini?

154. *1°* Démontrer que, pour tout réel x, il existe un entier relatif unique $[x]$, appelé partie entière de x, tel que :

$$[x] \leqslant x < [x] + 1.$$

2° Étudier les applications qui associent successivement à x les nombres :

$$[x], \quad [-x], \quad [x] + [1-x], \quad -[x] - [-x].$$

3° Parmi les relations suivantes :

$$x > n, \quad [x] > n, \quad [x] \geqslant n, \quad x \geqslant n \quad (n \in \mathbb{Z}),$$

choisir tous les couples (R, R') de relations telles que l'implication $(R \Rightarrow R')$ soit vraie. (On pourra tracer un diagramme.)
4° Même problème avec :

$$x \leqslant n, \quad [x] \leqslant n, \quad [x] < n, \quad x < n.$$

5° Même problème avec :

$$x > y, \quad [x] > [y], \quad [x] \geqslant [y], \quad x \geqslant y.$$

6° y étant strictement positif, on pose :

$$f(x, y) = \left[\frac{1}{y}[xy]\right].$$

Démontrer l'inégalité : $f(x, y) \leqslant [x]$.
Démontrer l'égalité : $f(x, y) = [x]$ si y est entier.
7° y étant strictement supérieur à 1, on pose :

$$g(x, y) = \left[\frac{1}{[y]}[xy]\right].$$

Démontrer l'inégalité $g(x, y) \geqslant [x]$ si x est positif.
8° Calculer un couple (x, y) et un couple (x, y) tels que :

$$f(x, y) < [x] < g(x, y).$$
$$x' < 0, \quad f(x', y') < [x'], \quad g(x', y') < [x'].$$

9° Si x est un réel et a, b, c trois entiers strictement positifs, démontrer l'égalité :

$$\left[\frac{x}{abc}\right] = \left[\frac{1}{a}\left[\frac{1}{b}\left[\frac{x}{c}\right]\right]\right].$$

10° Tracer les représentations graphiques des applications qui associent successivement à x les nombres :

$$\delta(x) = \left[\frac{1}{x^2+1}\right], \qquad \omega(x) = \left[\frac{x}{x^2+1}\right].$$
$$s(x) = \omega(x) - \omega(-x), \quad v(x) = s(x).$$

Comparer $v(x)$ et $|x|$.
11° Étudier l'application définie par :

$$\varphi = \left[x \mapsto \left[\frac{x^2+x+1}{x^2+1}\right]([x] + [1-x])\right].$$

12° Démontrer que les nombres d'entiers appartenant aux intervalles $]a, b]$, $[a, b[$, $[a, b]$ sont donnés par les formules respectives :

$$[b] - [a], \quad [-a] - [-b], \quad [b] + [1-a].$$

13° a et b étant deux entiers premiers entre eux, on pose $x = \dfrac{a}{b}$.
Démontrer l'égalité :

$$[x] + [2x] + \dots + [(b-1)x] = \frac{(a-1)(b-1)}{2}.$$

14° Démontrer l'égalité : $\displaystyle\sum_{m=0}^{n} \left[\frac{2m}{3}\right] = \left[\frac{n^2}{3}\right]$.

15° Démontrer l'égalité : $\left[x + \dfrac{1}{2}\right] = [2x] - [x]$ et sa généralisation : $[nx] = \displaystyle\sum_{m=0}^{n-1} \left[x + \frac{m}{n}\right[$.

PROBLÈMES DIVERS

155. On désigne par P le plan rapporté à un repère orthonormal d'axes Ox, Oy (unité de longueur : 3 cm).
1° a) Soit f la fonction de la variable réelle x définie par : $f(x) = (x-1)\sqrt{2x}$.
Quel est son ensemble de définition? Est-elle dérivable en tout point de cet ensemble?
Étudier la variation de cette fonction f et tracer dans P la portion C_1 de sa courbe représentative correspondant aux valeurs de x telles que $0 \leqslant x \leqslant 2$.
b) Soit C l'ensemble des points M de P dont les coordonnées x et y satisfont à l'équation

$$y^2 - 2x(x-1)^2 = 0$$

et à la condition $0 \leqslant x \leqslant 2$.
Montrer que C est l'union de C_1 et d'une courbe C_2, que l'on dessinera, déduite de C_1 par une transformation simple de P.
Préciser les coordonnées des points communs à C et à la droite Δ d'équation $y = x$.

c) Soit Γ l'ensemble des points M de P dont les coordonnées x et y satisfont à l'équation

$$(y^2 + 4x^2)^2 - 4x^2(x^2+1)^2 = 0$$

et à la condition $-2 \leqslant x \leqslant 2$.
Montrer que Γ est l'union de C et d'une courbe C', transformée de C dans une symétrie, que l'on précisera. Dessiner Γ sur une figure distincte de la figure utilisée aux paragraphes *a* et *b*.
d) On considère enfin l'ensemble Γ' des points M de P dont les coordonnées x et y satisfont à l'équation $(x^2+4y^2)^2 - 4y^2(y^2+1)^2 = 0$ et à la condition $-2 \leqslant y \leqslant 2$.
Montrer que Γ' se déduit de Γ par une symétrie, que l'on précisera (on ne dessinera pas Γ dans cette question).

156. *1°* On partage l'intervalle $[-1, 1]$ au moyen des réels distincts ordonnés :

$$a_0 = -1, \quad a_1, \quad \ldots \quad a_k, \quad \ldots \quad a_{n-1}, \quad a_n = +1;$$

on définit, sur $[-1, 1]$, la fonction f par

$$f(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{k=n} |x - a_k|.$$

Sur $[a_k, a_{k+1}]$, f est fonction affine, $f(x) = A_k x + B_k$; calculer A_k. En déduire le sens de variation de f sur $[-1, 1]$. Déterminer, selon la parité de n, la valeur, ou les valeurs, de x rendant f minimale.
Il n'est demandé au *1°* aucun autre calcul.

2° A un entier n fixé, $n \geqslant 2$, on associe la partition P_n de $[-1, 1]$ définie par les réels :

$$b_0 = -1, \quad b_1, \quad \ldots, \quad b_k, \quad \ldots, \quad b_{n-1}, \quad b_n = +1$$

qui satisfont à : $b_{k+1} - b_k = \frac{1}{2}(b_k - b_{k-1})$, $k = 1, 2, \ldots,$ avec $n-1$.
Calculer $l = b_1 - b_0$, puis calculer b_k.
Pour chaque entier n, $n \geqslant 2$, on définit alors sur $[-1, 1]$ la fonction f_n par $f_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n} |x - b_k|$.
Donner les expressions de $f_2(x)$ et de $f_3(x)$ où figurent respectivement trois et quatre telles valeurs absolues.
3° On se borne ici aux partitions P_n où n est pair : $n = 2p$. Démontrer que la valeur c_p de x qui rend f_{2p} minimale et la valeur correspondante de f_{2p} sont :

$$\frac{2^p - 1}{2^p + 1} \quad \text{et} \quad \frac{1}{p} \cdot \frac{2^{p+1} - 1}{2^p + 1}.$$

Démontrer l'égalité, vraie pour tout p, $f_{2p}(c_p) = g(c_p)$, avec :

$$u(x) = 3x + 1, \quad v(x) = \ln \frac{1+x}{1-x}$$

$$\text{et } g(x) = \frac{\ln 2}{2} \cdot \frac{u(x)}{v(x)}.$$

4° Étudier, sur l'intervalle $]0, 1[$ seulement, la variation de g.
A cet effet, on constatera d'abord que, u' et v' étant les dérivées de u et v, $w = vu' - uv'$ a une dérivée strictement négative sur $]0, 1[$; on en déduira le sens de variation et le signe constant de w sur $]0, 1[$.

Construire avec soin la représentation graphique Γ de g dans un repère orthonormé, l'unité de longeur étant 5 cm; préciser sur Γ plusieurs points de coordonnées rationnelles.

Pour étudier $\frac{g(x)}{x-1}$ au voisinage de $x = 1$, on pourra poser $x = 1 - X$.

N. B. — On pourra utiliser sans démonstration :
a) au 2° et au 3°, l'égalité

$$(1-q)(1 + q + \ldots + q^{n-1}) = 1 - q^n;$$

b) au 4°, l'expression de $g(x)$, telle qu'elle est donnée au 3°.

157. **A** — Soit φ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par : $\varphi(x) = \frac{e^x - 1}{x}$.

1° Démontrer qu'il existe une fonction f continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout x de $\mathbb{R}^*$, $\varphi(x) = f(x)$.

2° Étudier et représenter graphiquement la fonction f. Donner le développement limité de $f(x)$ au voisinage de 0 à l'ordre 2, et en déduire la position de la courbe par rapport à sa tangente au point d'abscisse 0.

3° *a*) Prouver que pour tout réel x : $f(x) > 0$.

b) Déterminer la limite en 0 de $\frac{1}{x}[f(x) - 1]$.

B — Soit g la fonction numérique définie par : $g(x) = \frac{1}{x} \ln f(x)$.

1° Déterminer l'ensemble de définition de g.

2° *a*) Démontrer que $\lim_{x \to 0} \frac{xg(x)}{f(x) - 1} = 1$.

b) Étudier la limite de g en 0.
c) Montrer qu'il existe une fonction continue g_1 de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout x de $\mathbb{R}^*$: $g_1(x) = g(x)$.
3° Étudier les limites de g_1 en $+\infty$ et en $-\infty$.

4° *a*) Calculer $\frac{g_1(x) - g_1(0)}{x} = t(x)$.

b) Étudier la limite en 0 de la fonction t. En déduire que g_1 est dérivable en 0 (on pourra utiliser des développements limités).

158. On considère la fonction numérique f définie par $f(x) = \frac{x \ln x}{(x^2+1)^2}$.

1° Quel est l'ensemble de définition E de f?
2° *a*) Déterminer la fonction dérivée de f.
b) Montrer que la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation $f'(x) = 0$ se ramène à la recherche des points d'intersection de la courbe Γ_1 d'équation $y = \ln x$ et de la courbe Γ_2 d'équation $y = \frac{1+x^2}{3x^2-1}$.

c) Tracer Γ_1 et Γ_2 sur un même graphique, et montrer qu'il existe deux réels x_1 et x_2 tels que

$$f'(x_1) = f'(x_2) = 0.$$

d) Montrer que $0 < x_1 < \frac{1}{\sqrt{3}} < 1 < x_2 < 2$.

e) Déterminer un encadrement à 10^{-1} près des réels x_1 et x_2.

3° Étudier le sens de variation de la fonction f.

4° Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)}{x}$.

5° Représenter graphiquement la fonction f. On précisera les points d'abscisses respectives 1, 2, 3 et 4. (On prendra pour unités : 2 cm en abscisse, et 20 cm en ordonnées.)

FAMILLES DE FONCTIONS

159. A chaque entier naturel n non nul, on associe la fonction f_n qui, à tout réel x strictement positif, associe le nombre réel $y = f_n(x) = \frac{x^n + 1}{4x^2}$.

1° Étudier les fonctions f_1 et f_2 et construire leurs courbes représentatives C_1 et C_2 dans un plan P rapporté à un repère orthonormal $\mathcal{R}(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2° Pour $n > 2$, étudier la fonction f_n :

a) Sa continuité.

b) Son sens de variation; on désignera par x_n la valeur de x pour laquelle f_n présente un minimum.

c) Les valeurs limites $\lim\limits_{x \to 0} f_n(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f_n(x)$. On étudiera, suivant la valeur de l'entier n, l'existence d'asymptotes à la courbe C_n.
Construire la courbe C_3 représentative de la fonction f_3 dans le repère $\mathcal{R}$.

3° Dans cette question, on désire encadrer le nombre x_n.

a) Suivant la valeur de l'entier n strictement supérieur à 2, comparer les nombres x_n et 1.

b) Démontrer que la différence $x_n - \frac{1}{2}$ a même signe que la différence $x_n^n - \frac{1}{2^n}$.

On considère la fonction, φ, qui, à tout nombre réel x strictement positif, associe le nombre

$$\varphi(x) = 2^{x+1} - x + 2.$$

Étudier la variation de la fonction φ et montrer qu'elle est strictement positive, quel que soit le nombre réel x strictement positif. Montrer que, pour tout entier n strictement supérieur à 4, le réel x_n appartient à l'intervalle $\left]\frac{1}{2}, 1\right[$.

4° Étudier l'intersection des courbes C_n et $C_{n'}$, pour deux entiers distincts n et n'. En déduire que toutes les courbes C_n passent par un même point, B, dont on précisera les coordonnées.
On suppose $n < n'$; comparer, suivant les valeurs de x strictement positives, les nombres $f_n(x)$ et $f_{n'}(x)$.
En déduire la position relative des courbes C_n et $C_{n'}$.

5° Construire, dans le repère $\mathcal{R}$, la courbe représentative, C, de la fonction qui, à tout réel x strictement positif, associe le nombre $y = \frac{1}{4x^2}$.

Soit n un entier naturel, montrer que la courbe C est située en dessous de la courbe C_n et calculer l'aire $A(t)$ de la partie du plan P qui est limitée par les courbes C et C_n et par les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = t$. Étudier la limite de $A(t)$ lorsque t tend vers 0.

160. *1°* Soit f_n la fonction numérique définie par :

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1 + e^{-x}} \quad (n \text{ entier naturel}).$$

a) Étudier la variation de la fonction f_0. Tracer la courbe C_0 représentative de f_0 dans un repère orthonormé $\mathcal{R}$ (unité : 4 cm). Démontrer que C_0 admet un centre de symétrie.

b) Comparer $f_1(x)$ et $f_0(-x)$. Tracer la courbe C_1 représentative de la fonction f_1 dans le repère $\mathcal{R}$ précédent.

2° On considère la suite dont le terme général u_n est donné par $u_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$.

a) Mettre $f_0(x)$ sous la forme $\frac{z'(x)}{z(x)}$, avec $z'(x) = e^x$.
Calculer u_0 et u_1.
Vérifier que $u_0 + u_1 = 1$.

b) Démontrer que, pour

$$n > 1, \quad u_n + u_{n-1} = \frac{1 - e^{1-n}}{n - 1}.$$

En déduire successivement : le calcul de u_2 et l'inégalité $u_2 < 1$, la limite de la somme $u_n + u_{n-1}$ quand n tend vers l'infini, la limite de u_n quand n tend vers l'infini (après avoir précisé le signe de u_n).

3° Soit E l'ensemble des fonctions numériques G définies par la relation $G(x) = \alpha + \beta e^{-x} + \gamma e^{-2x}$, où α, β, γ sont des nombres réels.

a) Démontrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$, dont une base $\mathcal{B}$ est formée des trois fonctions h, k, m définies respectivement par $h(x) = 1$, $k(x) = e^{-x}$, $m(x) = e^{-2x}$.

b) A toute fonction G de E, de coordonnées α, β, γ relativement à la base $\mathcal{B}$, on associe la fonction numérique G_1 définie par :

$$G_1(x) = \int_0^1 \frac{G(t + x)}{1 + e^{-t}}\,dt.$$

Démontrer que la fonction G_1 appartient à E et qu'elle est l'image de G par une application linéaire φ de E dans E.

c) On pose :

$$\varphi^2 = \varphi \circ \varphi, \quad \varphi^3 = \varphi \circ \varphi^2, \ldots, \varphi^n = \varphi \circ \varphi^{n-1}.$$

Trouver en fonction de n et des coordonnées α, β, γ de G (dans la base $\mathcal{B}$) les coordonnées α_n, β_n, γ_n de $\varphi^n(G)$.
Ces coordonnées α_n, β_n, γ_n tendent-elles vers une limite lorsque n tend vers l'infini?

161. Pour chaque entier k strictement positif, on définit une application f_k de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout x associe $f_k(x) = \dfrac{x^k}{\sqrt{x^2+1}}$. On appelle f_0 l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ qui à tout x associe $f_0(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

1° *a)* Démontrer que pour chaque $k \geqslant 1$, la fonction f_k est croissante sur $\mathbb{R}^+$; en déduire, suivant la parité de l'entier k, le sens de variation des fonctions f_k.
b) Étudier, en discutant suivant les valeurs de $k \geqslant 1$, les limites de $f_k(x)$ et de $\dfrac{f_k(x)}{x}$ quand x tend vers $+\infty$;
Que peut-on en déduire pour les branches infinies des courbes représentatives C_k des fonctions f_k?
c) Démontrer que les courbes C_k passent par deux points fixes; construire sur une même figure et dans un plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ les courbes C_1, C_2, C_3. On précisera, s'il y a lieu, les asymptotes. (On prendra 2 cm pour unité.)

2° Soit $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par

$$I_k = \int_0^1 f_k(x)\,dx.$$

a) Démontrer que la fonction $x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2-1})$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$.
En déduire la valeur de I_0.
b) Calculer I_1.
c) Démontrer que, pour tout entier $k \geqslant 2$, on a la relation :

$$kI_k = \sqrt{2} - (k-1)I_{k-2}.$$

En déduire I_2 et I_3.
d) Démontrer que $I_k \leqslant \dfrac{1}{k+1}$ et en déduire la limite de la suite I_k quand k tend vers $+\infty$.

3° Soit u_0 un nombre réel tel que $0 < u_0 < 1$; on définit par récurrence une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant :

$$\text{pour } k > 0 \text{ fixé}, \quad u_1 = f_k(u_0),$$
$$u_n = f_k(u_{n-1}) \quad \text{pour } n \geqslant 1.$$

a) Démontrer par récurrence que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
b) On suppose que $k \geqslant 2$.
Vérifier que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $u_n < \dfrac{u_{n-1}}{\sqrt{2}}$.
En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a une limite (que l'on précisera) quand n tend vers $+\infty$.

4° Pour chaque entier k strictement positif, on définit une application g_k de $[0, 1]$ dans $\left[0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$ par $g_k(x) = f_k(x)$.
a) Démontrer que pour chaque entier $k \geqslant 1$, la fonction g_k admet une fonction réciproque g_k^{-1}.
b) Construire sur la figure précédente les courbes représentatives des fonctions g_k^{-1} pour $k = 1, 2, 3$.
c) Donner l'expression des fonctions g_1^{-1} et g_2^{-1}.

162. Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on note f_k l'application de $[0; 1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\text{si} \quad k \neq 0, \quad f_k(x) = x^k\sqrt{1-x}$$
$$\text{et} \qquad f_0(x) = \sqrt{1-x}.$$

A — *1°* Étudier la continuité et la dérivabilité de f_k.
2° Donner, en distinguant selon la valeur de k, le tableau de variation de f_k.
Dans un plan rapporté à un repère orthonormé, tracer les courbes C_0, C_1 et C_2 représentatives de f_0, f_1 et f_2.
3° Calculer $\displaystyle\int_0^1 f_0(x)\,dx$.
4° Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $I_k = \displaystyle\int_0^1 f_k(x)\,dx$.
Montrer, en intégrant par parties, que, pour tout entier $k \geqslant 1$:

$$I_k = \frac{2k}{2k+3}\,I_{k-1}.$$

En déduire une expression de I_k (que l'on ne cherchera pas à simplifier).
5° Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^1 f_k(x)\,dx \leqslant \frac{1}{k+1}.$$

B — On considère la fonction numérique F de la variable réelle x définie sur l'intervalle fermé $[0; 1]$ par :

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \quad \text{si} \quad x \in [0; 1[\quad \text{et} \quad F(1) = 0.$$

1° Étudier la continuité de F sur $[0; 1]$.
Présenter le tableau de variation.
2° Dans la suite du problème, pour tout entier $n > 0$, on note F_n la fonction définie pour tout $x \in [0; 1]$ par :

$$F_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + \dots + f_{n-1}(x).$$

Calculer $F_n(x)$ et montrer que, pour tout x réel fixé dans $[0; 1]$, $F(x)$ est la limite quand n tend vers $+\infty$ de $F_n(x)$.
3° Pour tout entier $n \geqslant 2$ on désigne par A_n l'intégrale :

$$\int_0^{1-\frac{1}{n}} F(x)\,dx.$$

Calculer A_n. Déterminer la limite de A_n quand n tend vers $+\infty$.
4° Établir que $\displaystyle\int_0^1 F_n(x)\,dx$ tend vers 2 quand n tend vers $+\infty$.
On pourra écrire :

$$\int_0^1 F_n(x)\,dx = \int_0^{1-\frac{1}{n}} \frac{dx}{\sqrt{1-x}} - \int_0^{1-\frac{1}{n}} \frac{x^n}{\sqrt{1-x}}\,dx + \int_{1-\frac{1}{n}}^1 F_n(x)\,dx,$$

majorer la deuxième intégrale du second membre en majorant $\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ par $\sqrt{n}$, et majorer la dernière intégrale en majorant $F_n(x)$ par $\sqrt{n}$.

163. Soit λ un réel *non nul*, on considère la fonction f_λ, définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$f_\lambda(x) = x + \lambda(x+1)\,e^{-x}$$

On désigne par C_λ la courbe représentative de la fonction f_λ dans un plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
N.B. Les parties B et C de ce problème sont indépendantes.

A — *1°* Déterminer f'_λ et f''_λ les fonctions dérivées première et seconde de f_λ.
Étudier les variations de f'_λ.
2° Discuter, selon le réel λ, le nombre de solutions de l'équation d'inconnue x :

$$f'_\lambda(x) = 0$$

Préciser la position de ces solutions par rapport à 0 et à 1. (On distinguera les 4 cas $\lambda < 0$; $0 < \lambda < e$; $\lambda = e$; $\lambda > e$.)
3° Déduire de ce qui précède, le sens de variation de f_λ suivant les valeurs du réel λ.
4° Étudier les limites de f_λ en $+\infty$ et en $-\infty$.
Préciser les branches infinies de la courbe C_λ.
5° Montrer qu'il existe un unique point commun A à toutes les courbes C_λ.
6° Soit I_λ le point de C_λ dont l'abscisse est 1. Écrire une équation de la tangente D_λ en I_λ à la courbe C_λ.
Montrer que les droites D_λ ont un point commun B.
7° On se propose de tracer avec précision les courbes C_{-1}, C_e, C_4. Les courbes seront tracées sur une même figure sur papier millimétré en prenant 2 cm comme unité.
a) On prend $\lambda = -1$. Montrer que l'équation $f'_{-1}(x) = 0$ n'a qu'une solution notée x_1 comprise entre $-0{,}57$ et $-0{,}56$.
Construire la courbe C_{-1}.
b) Tracer C_e.
c) Montrer que l'équation d'inconnue x $f'_4(x) = 0$ a deux solutions : x_1 comprise entre 0,35 et 0,36 et x_2 comprise entre 2,15 et 2,16.
Tracer C_4.

B — *1°* Montrer que la fonction f_λ admet des primitives sur $\mathbb{R}$ et déterminer l'ensemble de ces primitives.
2° Montrer que, pour chaque réel non nul λ, on peut définir une suite de fonctions continues $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \varphi_1(x) = \int_0^x f_\lambda(t)\,dt - 2\lambda$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\varphi_{n+1}(x) = \int_0^x \varphi_n(t)\,dt + (-1)^{n+1}(n+2)\lambda.$$

Calculer φ_1. Montrer, par récurrence, pour tout naturel n non nul, et tout réel x,

$$\varphi_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + (-1)^n\lambda(x+n+1)\,e^{-x}.$$

C — On suppose dans cette partie $-\dfrac{1}{e} < \lambda < 0$.

1° Montrer que le réel x_1 tel que $f'_\lambda(x_1) = 0$ est strictement inférieur à -1.
En déduire que si $-1 < x < 0$, alors, $-1 < f_\lambda(x) < 0$.
2° On considère la suite u définie par

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) = u_n + \lambda(u_n+1)\,e^{-u_n}. \end{cases}$$

Montrer que : *a)* $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad -1 < u_n < 0$
b) La suite u est décroissante
c) $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < u_{n+1} + 1 < (1+\lambda)(u_n+1)$.
En déduire que la suite u est convergente et trouver sa limite.

164. Soit la famille de fonctions définie par :

$$f_k(x) = \frac{\ln x}{x^2} - kx \qquad (k \in [0, 1]).$$

1° Étudier et représenter graphiquement la fonction f_0.
2° On suppose $k \neq 0$.
a) Calculer $f'_k(x)$ et montrer que l'étude du signe de f'_k se déduit de l'étude du signe de $1 - 2\ln x - kx^3 = g_k(x)$.
b) Étudier la fonction g_k et montrer qu'il existe un réel α tel que :

$$g_k(\alpha) = 0 \quad \text{et} \quad 1 < \alpha < \sqrt{2}$$

3° Donner l'allure de la courbe représentative C_k d'une fonction f_k. Préciser s'il y a lieu les asymptotes.
4° Soit k_1 et k_2 deux valeurs de k. Calculer $f_{k_1}(x) - f_{k_2}(x)$.
Préciser la position respective des courbes C_{k_1} et C_{k_2}.
5° Représenter C_0, $C_{1/4}$, $C_{1/2}$, $C_{3/4}$ et C_1 sur la même figure.

165. Étudier la famille de fonctions définie par :

$$f_m(x) = x^{\frac{1}{x}+m} \qquad (m \in \mathbb{R}).$$

Déterminer l'ensemble des extrémum de ces fonctions.

166. On considère la famille de fonctions définie par :

$$f_m(x) = \ln x + 1 - x + m\left(1 - \frac{1}{x}\right) \qquad (m \in \mathbb{R}_+).$$

1° *a)* Étudier la variation de f_m et indiquer l'allure de sa courbe représentative G_m.
b) Quelle est l'équation de la tangente à G_m au point I d'abscisse 1 ? Déterminer m pour que G_m coupe l'axe des abscisses au point A d'abscisse a ($a > 1$). Quelle est la limite de m quand a tend vers 1 ?
2° Trouver une primitive de f_m et calculer, en fonction de a seulement l'aire $S(a)$ de la surface déterminée par le segment $[I, A]$ et l'arc IA de G_n et exprimer $S(a)$ sous la forme :

$$S(a) = u(a) + v(a)\ln a + w(a)\ln^2 a.$$

3° Tracer G_0, G_1, G_2, G_3 sur la même figure.

167. Étudier la famille de fonctions définie par :

$$\varphi_\lambda(x) = \lambda\,e^x(x^2 + 3x + 2) + x + 1 \qquad (\lambda \in \mathbb{R}).$$

Montrer que les courbes représentatives Γ_λ contiennent deux points fixes A et B. Étudier les variations de φ_λ suivant les valeurs de λ.
Tracer sur un même graphique les courbes Γ_λ pour $\lambda \in \left\{-40, -\dfrac{e^5}{5}, -1, 0, 1, e^2, 10\right\}$.

168. On considère la famille de fonctions définie par :

$$f_\alpha(x) = x^{1-x^\alpha}.$$

A chaque valeur de α est associée une courbe C_α d'équation $y = f_\alpha(x)$.

Étudier la variation de f_α suivant les valeurs de α. On montrera que $f'_\alpha(x)$ est du signe de

$$-\alpha \ln x + \frac{1}{x^\alpha} - 1 = \varphi_\alpha(x)$$

et on étudiera $\varphi'_\alpha(x)$. On sera amené à distinguer les cas

$$\alpha > 0, \quad \alpha = 0, \quad -1 \leqslant \alpha < 0, \quad \alpha < -1.$$

Tracer sur le même graphique une courbe correspondant à chacun de ces cas.

169. On considère les fonctions f_n définies pour $n \in \mathbb{N}$ sur $[-1, 1]$ par :

$$f_n(x) = \frac{\displaystyle\int_0^x (1-t^2)^n \, dt}{\displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^n \, dt}.$$

1° Démontrer que f_n est impaire.

2° Démontrer que $\displaystyle\int_0^1 (1-t^2)^n \, dt \geqslant \int_0^1 (1-t)^n \, dt$.

3° Démontrer que $1 - f_n(x) \leqslant (n+1)(1-x^2)^n(1-x)$.

4° Déterminer la limite de $1 - f_n(x)$ quand n tend vers l'infini, pour x fixé.

5° Quelle est la limite de $f_n(x)$ quand n tend vers l'infini, *a)* pour $-1 \leqslant x < 0$? *b)* pour $x = 0$?

III – RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS DANS $\mathbb{R}$

1. GÉNÉRALITÉS

• Soit f une fonction numérique et E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$. Résoudre dans E l'équation définie par $f(x) = 0$, c'est déterminer les éléments de E dont l'image par f est nulle. La résolution de telles équations intervient dans de nombreuses branches des mathématiques, et d'autres disciplines.

• Une résolution algébrique est parfois possible, et permet de déterminer exactement les solutions de l'équation étudiée en fonction d'éléments convenablement choisis de E. Il est à noter que l'ensemble des solutions d'une équation dépend du sous-ensemble E. Par exemple, l'équation $3x + 5 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}$, mais en a dans $\mathbb{Q}$; l'équation $x^2 - 3 = 0$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}$, mais en a dans $\mathbb{R}$.
Cette résolution algébrique se fait parfois par l'intermédiaire de changements de variable qui amènent à la résolution d'équations plus simples dont les solutions permettent de calculer les solutions de l'équation initiale.

• Le plus souvent, de telles manipulations algébriques ne permettent pas d'aboutir à la détermination des valeurs exactes des solutions. La résolution de l'équation consiste alors à :

1. Prouver l'existence et l'unicité d'une solution sur certains intervalles inclus dans E. Cette étape prend le nom de **« séparation des racines »**. Il s'agit de déterminer des intervalles contenant chacun une unique solution, qui sera ainsi encadrée.

2. Déterminer des valeurs approchées de chaque solution. Cette étape s'accompagne de l'évaluation d'une incertitude sur la détermination de valeur approchée effectuée. On s'attachera chaque fois que possible à déterminer des algorithmes permettant d'envisager l'obtention de valeurs approchées successives avec des incertitudes de plus en plus faibles, jusqu'à l'incertitude désirée, à étudier la convergence de ces algorithmes et à comparer leurs performances.

2. MÉTHODES

• Les méthodes algébriques de factorisation s'appliquent essentiellement à des équations définies par $f(x) = 0$, où f est une fonction polynôme (où à des équations pouvant se ramener à ce type). Mais on sait, depuis les travaux d'Abel et Galois, qu'en l'absence de particularité du polynôme, ces méthodes sont inopérantes lorsque le degré de $f(x)$ est supérieur ou égal à 5. On utilisera chaque fois que possible les particularités éventuelles présentées par le polynôme $f(x)$.

• L'étude de la variation de la fonction f, et les propriétés des fonctions continues sur un intervalle, permettent parfois d'opérer la séparation des racines d'une équation.
L'intervention, le cas échéant, d'une fonction réciproque peut permettre de préciser directement les solutions de l'équation, dans le cas où les valeurs de cette fonction réciproque figurent dans des tables numériques, ou sont données par une calculatrice. Dans le cas où l'on ne peut obtenir aussi simplement des valeurs approchées des solutions, on s'ingénie à préciser des encadrements de chacune d'entre elles, et à mettre au point des processus permettant de préciser des valeurs approchées aussi précises que nécessaire. De tels processus débouchent sur la définition de suites dont il convient d'étudier la convergence vers la solution étudiée. On envisagera également, éventuellement, la comparaison des performances de diverses méthodes, et la précision obtenue par chacune d'entre elles.
Les méthodes d'étude des suites numériques, les rapports entre les fonctions continues et les suites convergentes revêtent naturellement une grande importance dans l'étude des suites confectionnées pour qu'elles convergent vers une solution d'une équation.

• Les activités ci-dessous présentent un certain nombre de ces méthodes de résolution. Elles interviennent après la séparation des racines. Nous supposerons que, dans chacun des cas rencontrés, il est possible de séparer les racines de telle façon que ces méthodes puissent s'appliquer sur chaque intervalle de séparation.
Nous avons présenté ces diverses méthodes à travers un même exemple pour permettre, à propos de cet exemple, une comparaison de ces méthodes. Mais il est bien entendu que, d'une part, le catalogue de méthodes présenté n'est nullement exhaustif, et que, d'autre part, les conclusions relatives à la comparaison entre les méthodes à propos de l'exemple étudié ne sont valables que pour cet exemple. Une méthode donnant de mauvais résultats dans l'exemple proposé peut donner de bons résultats dans un autre cas.

• Dans de nombreuses méthodes de résolution, on est conduit à calculer les images, par une fonction, de nombreuses valeurs. Ces calculs seront largement facilités par l'utilisation de calculatrices, de préférence programmables. On envisagera dans chaque cas différents algorithmes de calculs de $f(x)$, pour utiliser le plus rapide (par exemple, le calcul de $P(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ est plus rapide sous la forme : $((dx + c)x + b)x + a$).

3. RÉSOLUTION ALGÉBRIQUE

a. Équations de degré 3

★ Activité 1

Lorsqu'on connaît une racine d'un polynôme du troisième degré, on peut le factoriser et déterminer les autres racines (s'il en existe) à l'aide du polynôme quotient, qui est du second degré.
Résoudre les équations définies dans $\mathbb{R}$ par :
a) $x^3 - 8 = 0$; **b)** $x^3 + 27 = 0$; **c)** $x^3 + x^2 - 2 = 0$;
d) $x^3 - 2x^2 + 3 = 0$; **e)** $2x^3 - 5x + 3 = 0$; **f)** $x^3 + 2x^2 + 3x - 6 = 0$.

★ Activité 2 : Méthode de Cardan

1° On considère le polynôme $P(X) = aX^3 + bX^2 + cX + d$ (où a, b, c, d sont des réels tels que $a \neq 0$). On pose $X = x + h$.
a) *Écrire le polynôme $Q(x)$ obtenu.*
b) *Montrer que l'on peut déterminer h tel que $Q(x) = a(x^3 + px + q)$.*
c) *Soit x_0 une racine du polynôme $Q(x)$. En déduire une racine du polynôme P.*

d) Déterminer $Q_1(x)$ sachant que $P_1(X) = X^3 - 5X^2 + 2X + 3$.

2° On considère la fonction φ définie par : $\varphi(x) = x^3 + px + q$.
a) Étudier la variation de φ en distinguant deux cas suivant le signe de p.
b) Prouver que φ admet deux extremums de signes contraires si, et seulement si : $4p^3 + 27q^2 < 0$.
c) En déduire, suivant le signe de $D = 4p^3 + 27q^2$, *le nombre de solutions de l'équation :*

$$\varphi(x) = 0.$$

d) Quel est le nombre de solutions de l'équation définie dans ℝ par :

$$X^3 - 5X^2 + 2X + 3 = 0?$$

e) Résoudre l'équation définie dans ℝ par : $x^3 - 12x + 16 = 0$.

3° On considère le polynôme $Q(x) = x^3 + px + q$.
a) Prouver que $x^3 + b^3 + c^3 - 3xbc$ *est factorisable par* $x + b + c$. *Effectuer la factorisation.*
b) A quelle condition peut-on déterminer des réels b et c tels que $q = b^3 + c^3$ *et* $p = -3bc$?
c) Montrer que, lorsque cette condition est remplie, le polynôme Q(x) admet une racine unique. Exprimer cette racine unique en fonction de p et q (en notant $\sqrt[3]{\alpha}$ *la solution unique dans ℝ de l'équation définie par* $x^3 = \alpha$*).*
d) Résoudre l'équation définie dans ℝ par : $x^3 - 12x + 16 = 0$.
e) En utilisant les nombres complexes, utiliser ce qui précède pour calculer les trois racines du polynôme : $x^3 - 15x - 4 = 0$.
f) Résoudre l'équation définie dans ℝ par : $X^3 - 5X^2 + 2X + 3 = 0$.

b. Équations de degré 4

★ Activité 3 : Équations bicarrées

Soit l'équation définie dans ℝ par $aX^4 + bX^2 + c = 0$. Le changement de variable $X^2 = x$ conduit à l'équation définie dans $\mathbb{R}_+$ par : $ax^2 + bx + c = 0$. On termine la résolution sans difficulté lorsque le discriminant de cette équation du second degré est positif. Dans le cas où le discriminant de cette équation est strictement négatif, on peut utiliser les nombres complexes, ou encore l'égalité : $x^4 + q = (x^2 + \sqrt{q})^2 - 2\sqrt{q}x^2$.
Résoudre les équations définies dans ℝ par :
a) $x^4 + 3x^2 - 4 = 0$; *b)* $x^4 + 4 = 0$;
c) $5x^4 - 3x^2 - 14 = 0$; *d)* $x^4 + x^2 + x = 0$.

★ Activité 4 : Méthode de Ferrari

1° a) Factoriser $P(x) = (x^2 - 1)^2 - (4x + 5)^2$ *en un produit de polynômes de degré 2.*
b) En déduire les solutions de l'équation $P(x) = 0$.

2° Soit $Q(x) = x^4 - 18x^2 - 40x - 24$.
a) Soit m un réel. Prouver que l'on peut trouver des réels a, b et c, dépendant éventuellement de m, tels que, pour tout réel x : $x^4 - 18x^2 - 40x - 24 = (x^2 - m)^2 - (ax^2 + bx + c)$.
b) Prouver qu'il existe deux valeurs de m pour lesquelles le polynôme f_m *défini par :* $f_m(x) = (18 - 2m)x^2 + 40x + 24 + m^2$ *est le carré d'un polynôme du premier degré.*
c) Déduire de ce qui précède les racines du polynôme Q.

3° On cherche à résoudre l'équation définie dans ℝ par :

$$R(x) = x^4 - 10x^3 + 35x^2 - 50x + 24 = 0.$$

a) Soit m un réel. Déterminer les réels a et b tels que :

$$S_m(x) = (ax^2 + bx + m)^2 - R(x)$$

soit un trinôme du second degré dépendant du paramètre m.
b) Prouver qu'il existe au moins une valeur de m telle que $S_m(x)$ soit le carré d'un polynôme de degré 1.
c) En déduire une factorisation de R en un produit de trinômes du second degré.
d) Quelles sont les racines du polynôme R?

★ Activité 5

Résoudre (le plus simplement possible) les équations définies dans ℝ par :
a) $x^4 + 6x^3 + 9x^2 + 100 = 0$;
b) $x^4 + 2x^2 - 24x + 72 = 0$;
c) $x^4 + 3x^3 - 2x^2 - 7x + 6 = 0$;
d) $x^4 + 4x^3 - 5x^2 - 14x + 15 = 0$.

c. Équations réciproques

★ Activité 6

Soit $f(x) = 3x^4 - 7x^3 + 8x^2 - 7x + 3$.
a) Montrer que $\dfrac{f(x)}{x^2}$ *est fonction de* $y = x + \dfrac{1}{x}$.
b) En déduire un procédé de résolution de l'équation : $f(x) = 0$.
c) Résoudre dans ℝ l'équation : $x^4 - 10x^3 - 37x^2 - 10x + 1 = 0$.
d) Résoudre dans ℝ l'équation : $x^6 - x^5 + 2x^4 - x^3 + 2x^2 - x + 1 = 0$.

4. MÉTHODE GRAPHIQUE

L'étude de la fonction f permet de préciser le nombre des solutions d'une équation définie par $f(x) = 0$, et sa représentation graphique soignée permet d'estimer une valeur approchée de chacune d'entre elles. Un tel procédé ne permet pas d'envisager des approximations arbitrairement précises, mais il permet une séparation des racines assez élaborée.
De même, l'étude soignée de l'intersection des courbes d'équations respectives $y = f(x)$ et $y = g(x)$ permet une résolution approchée de l'équation définie dans ℝ par $f(x) = g(x)$.
En général, une même équation est susceptible d'être traitée graphiquement de plusieurs manières.

★ Activité 7

1° Résoudre graphiquement les équations définies dans ℝ par :

a) $x^3 - 5x^2 + 2x + 3 = 0$; *b)* $x^3 = 5x^2 - 2x - 3$; *c)* $2x = x^3 - 5x^2 + 3$;

d) $x = \dfrac{5x^2 - 3}{x^2 + 2}$; *e)* $x = \sqrt{\left|\dfrac{2x + 3}{5 - x}\right|}$.

2° Comparer les résultats. Imaginer d'autres procédés.

★ Activité 8

Résoudre graphiquement les équations définies dans $\mathbb{R}$ par :

a) $\ln x = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$; **b)** $e^x = \ln(-x)$, **c)** $x + e^{-x} = -\ln|x|$.

★ Activité 9

1° Déterminer x_0, y_0 et r de façon que les abscisses des points d'intersection de la parabole P d'équation $y = x^2$ et du cercle C d'équation $(y - y_0)^2 + (x - x_0)^2 = r^2$ soient solutions de l'équation : $x^4 + px^2 + qx + s = 0$.

2° Résoudre en utilisant ce qui précède :
a) $x^4 - 10x^2 - 16x + 5 = 0$;
b) $x^4 + 3x^2 - x - 2 = 0$;
c) $x^4 + 3x^2 - 2x + 2 = 0$.

5. MÉTHODE DE LAGRANGE

La séparation des racines est la première étape de la résolution d'une équation. Mais, par le biais de changements de variable successifs et de séparations successives, on peut encadrer la racine étudiée, avec une bonne précision.

★ Activité 10

Soit $P(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 3$.

1° **a)** *Représenter graphiquement la fonction P.*

b) *En déduire que le polynôme P admet trois racines α, β et γ, que l'on encadrera par des entiers consécutifs.*

2° **a)** *Supposons acquis que la racine β est élément de l'intervalle $]1, 2[$, et posons $x = 1 + y$. Résoudre l'équation définie par $P(x) = 0$ dans $]1, 2[$ revient à résoudre l'équation définie par $P(1 + y) = 0$ dans $]0, 1[$.*
Déterminer le polynôme $P(1 + y)$

b) *On pose $y = \dfrac{1}{z}$. Résoudre l'équation définie par $P(1 + y) = 0$ dans $]0, 1[$ revient à résoudre $z^3 P\left(1 + \dfrac{1}{z}\right) = 0$ dans $]1, +\infty[$.*

Déterminer le polynôme $Q(z) = z^3 P\left(1 + \dfrac{1}{z}\right)$.

c) *Prouver que $Q(z)$ n'a qu'une racine β' dans $]1, +\infty[$. Exprimer cette racine β' en fonction de β.*

d) *Montrer que $5 < \beta' < 6$.*

e) *En déduire que $1 + \dfrac{1}{6} < \beta < 1 + \dfrac{1}{5}$.*

3° Reprendre le 2° en posant $z = 5 + h$, puis $t = \dfrac{1}{h}$.

En déduire un encadrement de β.

4° Poursuivre le processus ci-dessus jusqu'à l'obtention d'un encadrement de β à 10^{-3} près.

5° Reprendre la méthode pour déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de β et γ.

★ Activité 11

1° Montrer que l'équation $x^3 - 2x^2 + x + 0{,}1 = 0$ *admet deux racines dans l'intervalle* $[0, 1]$. *Encadrer ces racines à* 10^{-2} *près.*

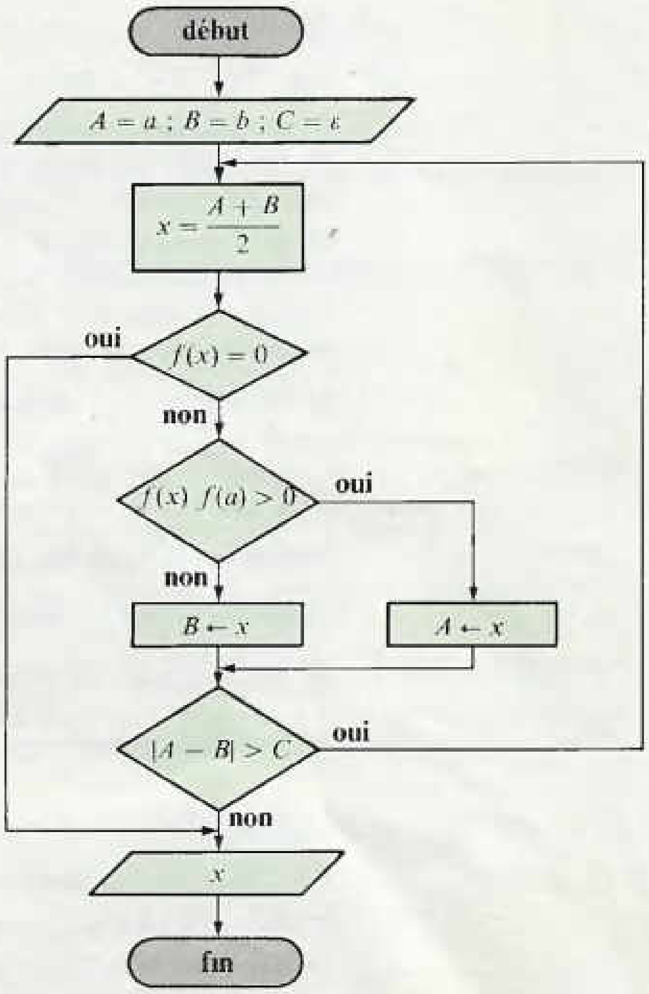
2° Montrer que l'équation définie par $2 \sin x = x$ *admet deux solutions dans l'intervalle* $[0, \pi]$.

3° Montrer que l'équation définie par $x^4 - 3x^3 + 3x^2 - 2 = 0$ *a deux racines dans* $\mathbb{R}$, *et une seule comprise dans l'intervalle* $[1, 2]$.

6. MÉTHODE DE DICHOTOMIE

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, et telle que $f(a)f(b) < 0$.
Soit l'équation définie par $f(x) = 0$. Cette équation admet au moins une solution sur l'intervalle $[a, b]$. Supposons en outre que l'étude de la séparation des racines a prouvé que l'intervalle $]a, b[$ contient une solution, et une seule, de l'équation proposée.
Calculons $f\left(\dfrac{a+b}{2}\right)$. La comparaison du signe du résultat avec les signes de $f(a)$ et $f(b)$ permet de préciser dans lequel des deux intervalles $\left]a, \dfrac{a+b}{2}\right[$ et $\left]\dfrac{a+b}{2}, b\right[$ se situe la solution cherchée $\left(\text{si cette solution n'est pas égale à } \dfrac{a+b}{2}\right)$. On recommence le processus jusqu'à l'obtention de la précision désirée.

L'organigramme ci-contre résume cette méthode. (On y utilise les mémoires A, B et C. La notation $A \leftarrow x$ signifie que le contenu de la mémoire A est remplacée par x.)



★ Activité 12

Utiliser la méthode de dichotomie pour donner un encadrement à 10^{-2} près de chacune des racines a, b et c de l'équation $x^3 - 5x^2 + 2x + 3 = 0$.

7. MÉTHODE D'INTERPOLATION LINÉAIRE

Dans la méthode de dichotomie, on partage systématiquement l'intervalle de séparation de la solution étudiée en deux parties de même longueur. Or, dans la plupart des cas, la séparation des racines conduit à étudier la fonction dans un intervalle où sa courbe représentative est voisine d'une droite. Il semble donc que l'on ait intérêt à utiliser la méthode de dichotomie, non pas en utilisant systématiquement le milieu $\frac{a+b}{2}$, mais (par exemple) l'intersection c de l'axe des abscisses avec la corde $[A_0, B_0]$ (où $A_0(a, f(a))$ et $B_0(b, f(b))$ (figure 12).

L'équation de (A_0B_0) est :

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a).$$

L'intersection de (A_0B_0) avec l'axe des abscisses a donc pour abscisse c tel que :

$$f(a) + (f(b) - f(a))\left(\frac{c - a}{b - a}\right) = 0.$$

Soit : $$c = a - \frac{f(a)}{f(b) - f(a)}(b - a) = \frac{af(b) - bf(a)}{f(b) - f(a)}$$

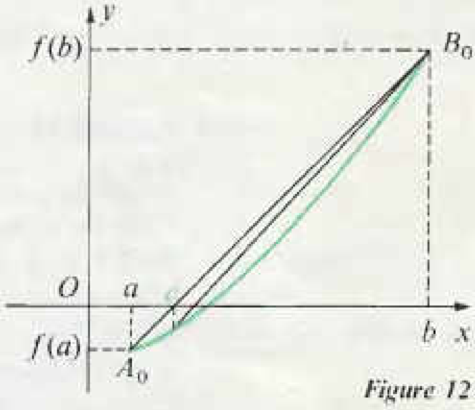


Figure 12

• Tout ce qui a été dit à propos de la méthode de dichotomie reste valable, y compris les conditions d'application, à ceci près qu'il convient de remplacer l'instruction $x = \frac{A + B}{2}$ par l'instruction $x = \frac{Af(B) - Bf(A)}{f(B) - f(A)}$.

REMARQUE :
L'utilisation de cette méthode revient à partager l'intervalle $[a, b]$ dans le rapport $\frac{-f(a)}{f(b)}$. On appelle parfois cette méthode : « méthode des parties proportionnelles ».

★ Activité 13

Soit $P(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 3$. *On sait que P admet trois racines réelles, dont une, notée b, dans l'intervalle* $]1, 2[$.

*1° **a)** Représenter soigneusement la fonction P, pour x élément de* $[1, 2]$. *Soit* $A(1, 1)$ *et* $B(2, -5)$.

***b)** La corde* $[A, B]$ *coupe l'axe des abscisses en* I_1 *d'abscisse* u_1. *Calculer* u_1.

***c)** Soit* A_1 *le point de coordonnées* $(u_1, P(u_1))$. *La corde* $[A_1, B]$ *coupe l'axe des abscisses en* I_2, *d'abscisse* u_2. *Calculer* u_2.

***d)** On répète le processus, avec* $A_n(u_n, P(u_n))$, *on définit* I_{n+1} *comme intersection de* $[A_n, B]$ *avec l'axe des abscisses. Prouver que* $u_{n+1} = \frac{2u_n^2 - 6u_n - 3}{u_n^2 - 3u_n - 4}$. *Estimer* u_5.

2° Déterminer de manière analogue, des valeurs approchées des autres solutions a et c de l'équation étudiée.

8. MÉTHODE DE NEWTON

Au lieu d'utiliser l'intersection de la corde $[A_0, B_0]$ avec l'axe des abscisses, on peut utiliser l'intersection c' avec l'axe des abscisses de la tangente en A_0 (ou en B_0) à la courbe représentative de f sur l'intervalle $[a, b]$ (figure 13).

On recommence jusqu'à ce que la valeur obtenue soit assez proche de la valeur cherchée.

Notons que l'utilisation conjointe de la méthode de Newton, et de la méthode des parties proportionnelles permet souvent d'obtenir un encadrement de la valeur cherchée.

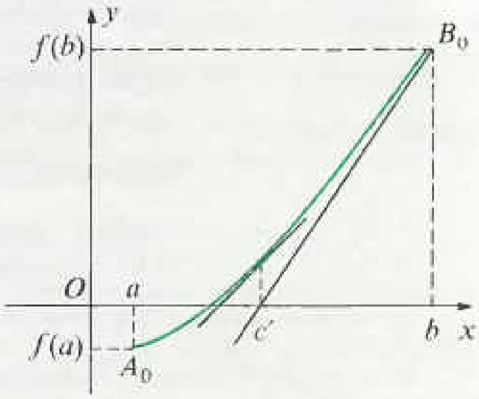


Figure 13

★ Activité 14

*1° **a)** La tangente en A au graphique de f coupe l'axe des abscisses en J_1, d'abscisse v_1. Calculer v_1 en fonction de a, $f(a)$ et $f'(a)$.*

***b)** Soit A_n le point de coordonnées $(v_n, f(v_n))$. La tangente à la courbe en A_n coupe l'axe des abscisses en J_{n+1}, d'abscisse v_{n+1}. Calculer v_{n+1} en fonction de v_n, de $f(v_n)$ et de $f'(v_n)$.*

2° Soit $P(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 3$. On sait que $P(x)$ admet trois racines réelles, dont une, notée b, dans l'intervalle $]1, 2[$.

***a)** Représenter soigneusement la fonction P, pour x élément de $[1, 2]$.*

***b)** En utilisant la méthode de Newton, montrer que l'on aboutit à :*

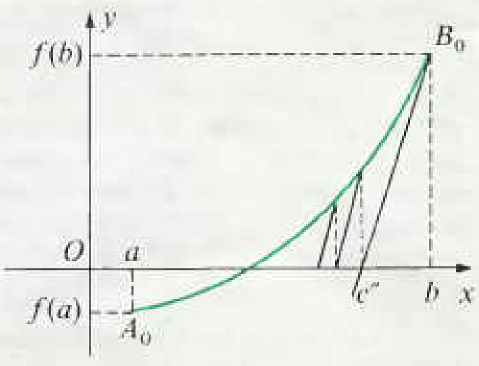
$$v_{n+1} = \frac{2v_n^3 - 5v_n^2 - 3}{3v_n^2 - 10v_n + 2}.$$

***c)** Estimer v_5.*

***d)** Préciser un encadrement de β (voir § 7).*

3° Déterminer, de manière analogue, des valeurs approchées des autres solutions α et γ de l'équation obtenue.

Figure 14



9. MÉTHODE DES SÉCANTES PARALLÈLES

Pour simplifier les calculs dans la méthode de Newton, on peut considérer des droites successives, dont le coefficient directeur constant est égal à $f'(a)$ (par exemple).

On opère comme dans les méthodes précédentes (figure 14). Notons que, si l'on gagne en simplicité, on perd en vitesse de convergence.

★ Activité 15

1° a) La tangente en A au graphique de f coupe l'axe des abscisses en K_1, d'abscisse w_1. Calculer w_1.
b) Soit A_n le point de coordonnées $(w_n, f(w_n))$. La droite passant par A_n et parallèle à la tangente en A coupe l'axe des abscisses en w_{n+1}. Calculer w_{n+1} en fonction de w_n.
2° Soit $P(x) = x^3 - 5x^2 + 2x + 3$.
a) Montrer que l'utilisation de la méthode ci-dessus sur l'intervalle $[1, 2]$ conduit à :

$$w_{n+1} = \frac{w_n^3 - 5w_n^2 + 7w_n - 3}{5}.$$

b) Estimer w_5.
c) Déterminer de manière analogue, des valeurs approchées des autres solutions a et c de l'équation obtenue.

10. MÉTHODES D'ITÉRATION

• Dans les méthodes ci-dessus, on aboutit à la définition par récurrence d'une suite (u_n) par : $u_0 = a$ et $u_{n+1} = \varphi(x_n)$ (où φ est une fonction continue). L'utilisation d'une telle suite peut servir à résoudre l'équation définie par $x = \varphi(x)$ (voir chapitre 4). Toute solution de cette équation est un **« point fixe »** pour l'application φ.
Supposons que sur l'intervalle de séparation $[a, b]$, il existe un réel k tel que, pour tout x de $[a, b]$: $|\varphi'(x)| < k$. Soit l la solution unique dans $[a, b]$ de l'équation définie par $x = \varphi(x)$. Pour tout u_n de l'intervalle $[a, b]$, on a, d'après le *théorème des accroissements finis* :

$$|\varphi(x_n) - \varphi(l)| < k|u_n - l|,$$

c'est-à-dire :

$$|u_{n+1} - l| < k|u_n - l|.$$

Il en résulte que la suite (u_n) converge vers l si $k < 1$, car la suite $(|u_n - l|)$ est majorée par la suite géométrique de premier terme $|u_0 - l|$ et de raison k.
On peut également, avec cette méthode, donner un majorant de l'erreur commise :

$$|u_n - l| < k^n|b - a|.$$

• Les remarques ci-dessus s'appliquent à toute équation de la forme $x = \varphi(x)$. En général, lorsqu'une équation est définie par une relation de la forme $f(x) = 0$, il existe plusieurs façons de la mettre sous la forme $x = \varphi(x)$.
C'est ainsi que, par exemple, l'équation définie par :

$$x^3 - 5x^2 + 2x + 3 = 0$$

peut s'écrire :

$x = f_1(x) = \dfrac{2x^2 - 6x - 3}{x^2 - 3x - 4}$ (méthode d'interpolation linéaire),

$x = f_2(x) = \dfrac{2x^3 - 5x^2 - 3}{3x^2 - 10x + 2}$ (méthode de Newton),

$x = f_3(x) = \dfrac{x^3 - 5x^2 + 7x - 3}{5}$ (méthode des sécantes parallèles).

mais aussi de bien d'autres façons, par exemple :

$$x = f_4(x) = \frac{-x^3 + 5x^2 - 3}{2},$$

$$x = f_5(x) = \frac{x^3 + 3}{5x - 2},$$

$$x = f_6(x) = \sqrt{\frac{2x + 3}{5 - x}}.$$

★ Activité 16

1° a) En utilisant la forme $x = \dfrac{2x^2 - 6x - 3}{x^2 - 3x - 4}$, *déterminer un majorant de l'erreur commise sur b par l'approximation* u_n.

b) Reprendre la question précédente avec les autres formes ci-dessus. Préciser pourquoi la fonction f_4 *ne peut pas convenir.*

c) Illustrer géométriquement les processus ci-dessus en représentant graphiquement la fonction $[x \mapsto x^3 - 5x^2 + 2x + 3]$ *et la fonction* f_i $(i \in \{1, 2, 3, 4, 5\})$ *dans un même repère, et en suivant sur la figure le processus de formation des termes successifs de la suite* (u_n) (voir chapitre 4).

2° Reprendre le 1° pour la détermination de valeurs approchées des racines α *et* γ *de l'équation* $x^3 - 5x^2 + 2x + 3 = 0$.

★ Activité 17

1° Résoudre par une méthode d'itération les équations définies ci-dessous. Donner un majorant de l'erreur commise.

a) $x = \cos x$;

b) $x = \sqrt{3 + x}$;

c) $x = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{5}{x^2}\right)$.

2° a) $x^2 - 10 = 0$.

$\left(\text{Prendre, par exemple : } x = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{10}{x}\right), \quad \text{avec} \quad x_0 = 4.\right)$

b) $x^3 - 5 = 0$.

$\left(\text{Prendre, par exemple : } x = \dfrac{1}{3}\left(2x + \dfrac{5}{x^2}\right), \quad \text{avec} \quad x_0 = 2.\right)$

*c) Montrer que la méthode préconisée aux **a)** et **b)** correspond à la méthode de Newton. Envisager d'autres méthodes d'itération permettant de résoudre les équations proposées.*

3° a) Montrer que cette méthode permet de déterminer des valeurs approchées de $\sqrt[3]{y}$ *en résolvant l'équation définie par* $x = \sqrt{\sqrt{xy}}$.

b) Calculer de cette façon une valeur approchée à 10^{-5} *près de* $\sqrt[3]{3}$ *et* $\sqrt[3]{7}$.

c) Mettre sur pied une méthode analogue pour déterminer $\sqrt[7]{y}$, *puis* $\sqrt[5]{y}$ *en n'utilisant que la racine carrée.*

d) Calculer de cette façon une valeur approchée à 10^{-5} *près de* $\sqrt[7]{3}$, $\sqrt[7]{7}$, $\sqrt[5]{3}$, $\sqrt[5]{7}$.

EXERCICES ET PROBLÈMES

Dans chacun des exercices **170** *à* **180** :
— *Représenter graphiquement la fonction f et, en utilisant le graphique obtenu, tenter de prévoir quelle méthode de résolution de l'équation définie dans* $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = 0$ *donnera de bons résultats rapidement.*
— *Interpréter graphiquement la résolution de l'équation* $f(x) = 0$ *de plusieurs manières.*
— *Déterminer un encadrement à* 10^{-3} *près de chaque racine de l'équation étudiée.*
— *Envisager si possible une résolution algébrique.*

170. $f(x) = x^3 - 3x^2 + 15x - 7.$

171. $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x + 1.$

172. $f(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - x + 5.$

173. $f(x) = 2x^3 - 24x - 48.$

174. $f(x) = \cos x - x.$

175. $f(x) = \sin x - x^2.$

176. $f(x) = \cos x^0 - x.$

177. $f(x) = \sin 2x - x.$

178. $f(x) = x^3 - 1{,}5x^2 + 1{,}15x - 1.$

179. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 5x - 7 = 0.$

180. $f(x) = \tan x - 2x \quad (x \in]-\pi, \pi[).$

181. Résoudre et discuter l'équation définie dans $\mathbb{R}$ par :

$$2x^3 - 9x^2 + 12x + k = 0. \qquad (k \in \mathbb{R})$$

182. Déterminer a pour que l'équation définie dans $\mathbb{R}$ par :

$$x^5 - 5a^4x + 4a^3 = 0$$

admette 1 pour racine double. Terminer la résolution dans ce cas.

183. Soit $f_n(x) = 1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dots + \dfrac{x^n}{n!} \quad (n \in \mathbb{N}^*).$

Démontrer que l'équation définie dans $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = 0$ n'a pas de racine pour n pair et une seule racine pour n impair (on pourra procéder par récurrence).

184. Soit l'équation définie, pour tout réel a, dans $\mathbb{R}$ par :

$$3x^4 - 4x^3 - 6(1 + a^2)x^2 + 12(1 - a^2)x + 4a + 12 = 0.$$

Démontrer que, si a est supérieur à 6, toutes les racines sont réelles.

185. Pour n entier et a réel strictement positif, résoudre et discuter l'équation :

$$\frac{1}{2x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \dots + \frac{1}{x-n} = a.$$

186. Résoudre et discuter l'équation définie dans $\mathbb{R}$ par :

$$\frac{1}{4}x^5 - mx + 1 = 0.$$

Interpréter graphiquement de deux manières.

187. Résoudre et discuter l'équation définie dans $\mathbb{R}$ par :

$$20 \ln (1 + x^2) - 12x^2 + x^4 + m = 0 \qquad (m \in \mathbb{R}).$$

188. Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$, et soit $x_1, x_2, \dots, x_n$, n nombres de cet intervalle. Démontrer que l'équation définie dans $[a, b]$ par :

$$nf(x) = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)$$

admet au moins une solution.

189. Soit f et g des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ telles que f soit positive sur $\mathbb{R}$ et g négative sur $\mathbb{R}$. On suppose en outre qu'il existe x_1 et x_2 tels que :

$$f(x_1) = x_1 \quad \text{et} \quad g(x_2) = x_2.$$

Démontrer qu'il existe un réel x_3 tel que :

$$f(x_3) + g(x_3) = x_3.$$

190. Soit f une fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe un réel k tel que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f'(x)| \leqslant k < 1.$$

A — *1°* *a*) Démontrer que l'équation (1) définie dans $\mathbb{R}$ par $x = f(x)$ admet au plus une racine.
b) En appliquant le théorème des accroissements finis à l'intervalle $[0, x]$, prouver qu'il existe un x_0 et un x_1 tels que :
- si $x > x_0$, alors $x - f(x) > 0$;
- si $x < x_1$, alors $x - f(x) < 0$.

c) En déduire que l'équation (1) admet une racine unique r.
2° *a*) On considère la suite (x_n) définie par la donnée de x_0, réel, et par la relation de récurrence $x_{n+1} = f(x_n)$. Montrer que, pour tout entier naturel n :

$$|x_{n+1} - r| \leqslant k\,|x_n - r|.$$

b) En déduire que (x_n) converge vers r.
c) Soit $[a, b]$ un intervalle contenant x_0 et r, et soit ε un réel strictement positif.
Prouver que, si

$$n > \frac{\ln \varepsilon - \ln |b - a|}{\ln k},$$

alors $|x_n - r| < \varepsilon$.

B — *a*) Résoudre l'équation définie par :

$$x^3 + 6x - 1 = 0,$$

à 10^{-5} près en utilisant la méthode du **A**.
b) Même question pour l'équation définie dans $\mathbb{R}$ par $x^3 - 5x + 1 = 0$.

IV – FONCTIONS CONVEXES

1. DÉFINITIONS. NOTATIONS

a. Ensembles convexes

• Un sous-ensemble E du plan ou de l'espace est dit convexe si, quels que soient les points A et B de E, le segment $[A, B]$ est inclus dans E.

• On suppose que le plan est rapporté à un repère $\mathcal{R}$. Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I, et soit Γ sa courbe représentative dans $\mathcal{R}$. Soit M un point de coordonnées (a, b) dans $\mathcal{R}$, avec $a \in I$. Nous dirons que M est au-dessus (resp. strictement au-dessus, en dessous, strictement en dessous) de Γ lorsque : $b \geqslant f(a)$ (resp. $b > f(a)$, $b \leqslant f(a)$, $b < f(a)$).

★ Activité 1

*1° **a)** Démontrer qu'étant donné deux points distincts A et B du plan ou de l'espace, pour tout point M de $[A, B]$ il existe un réel unique λ tel que :*

$$\lambda \in [0, 1] \quad et \quad \lambda\overrightarrow{MA} + (1 - \lambda)\overrightarrow{MB} = \vec{0}. \tag{1}$$

En déduire les coordonnées de M en fonction de λ et des coordonnées (a, a') et (b, b') de A et B. Exprimer λ en fonction des coordonnées de M, de A et de B.
***b)** Soit E un ensemble convexe du plan ou de l'espace et $A_1, A_2, ..., A_n$, n points distincts de E affectés de masses $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ strictement positives. Prouver que leur barycentre G appartient à E. La réciproque de cette propriété est-elle vraie?*

2° Soit $A(a, a')$, $B(b, b')$ $C(c, c')$ trois points d'un plan rapporté à un repère $\mathcal{R}$, tels que $a < b < c$. Démontrer que B est en dessous de la droite (AC) si, et seulement si :

$$\frac{b' - a'}{b - a} \leqslant \frac{c' - a'}{c - a} \leqslant \frac{c' - b'}{c - b}. \tag{2}$$

Que se passe-t-il si les inégalités ci-dessus sont strictes?

b. Fonctions convexes

• On dit qu'une fonction f définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ est convexe sur I pour exprimer que, quels que soient les réels x_1 et x_2 de I $(x_1 < x_2)$, tout point M de la courbe Γ d'équation $y = f(x)$, d'abscisse x tel que $x_1 < x < x_2$ est en dessous de la droite $(M_1 M_2)$ (où M_1 et M_2 désignent respectivement les points de Γ d'abscisses x_1 et x_2).

• Une fonction f est dite **concave** sur I si, la fonction $-f$ est convexe sur I.

★ Activité 2

1° Représenter graphiquement les fonctions numériques suivantes :

***a)** $f(x) = x^2$, pour $x \in [-2, 3]$.*
***b)** $f(x) = x^2$, pour $x \in]-1, 2[$; $f(-1) = 2$; $f(2) = 5$.*
***c)** $f(x) = x^2$, pour $x \in]-2, 3[$; $f(-2) = 5$; $f(3) = 0$.*
***d)** $f(x) = -x^2$, pour $x \in [-2, 3]$.*

e) $f(x) = 0$, pour $x \in]-2, 4[$; $f(-2) = f(4) = 1$.

f) $\begin{cases} f(x) = x(x-2), & \text{pour } x \in [1, 0] \cup [3, 4]; \\ f(x) = x, & \text{pour } x \in [0, 3]. \end{cases}$

g) $f(x) = 2x + 1$, pour $x \in [-2, 2]$.

h) $f(x) = |x|$, pour $x \in [-2, 3]$.

2° ***a)*** *Dans chacun des cas ci-dessus, colorier l'ensemble E_f des points situés au-dessus de la courbe Γ (bien préciser les frontières de E_f).*

b) *Quels sont les ensembles E_f convexes?*

c) *Quelles sont parmi les fonctions précédentes celles qui sont convexes? celles qui sont concaves?*

3° ***a)*** *Démontrer que f est convexe sur I si, et seulement si, quels que soient les réels x_1 et x_2 distincts de I, et quel que soit λ de $[0, 1]$:*

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \leqslant \lambda f(x_1) + (1-\lambda)f(x_2). \tag{3}$$

(L'inégalité (3) est appelée *« inégalité de convexité ».*)

b) *Prouver que f est convexe si, et seulement si, l'ensemble E_f des points du plan situés au-dessus de la courbe Γ, d'équation $y = f(x)$, est convexe.*

c) *Prouver que, si x et h sont des réels tels que $x \in I$ et $x + h \in I$, alors, pour tout réel λ de l'intervalle $]0, 1[$, on a :*

$$\frac{f(x+\lambda h) - f(x)}{\lambda h} \leqslant \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

d) *Que peut-on dire d'une fonction convexe dont la courbe représentative Γ admet trois points alignés?*

4° ***a)*** *Démontrer que les fonctions $[x \mapsto x^2]$, $[x \mapsto |x|]$, $[x \mapsto ax + b]$ sont convexes dans $\mathbb{R}$.*

b) *Les ensembles définis ci-dessous dans un plan rapporté à un repère $\mathcal{R}$ sont-ils convexes? sont-ils concaves?*

$$E : \ |x| < 1; \qquad F : \ |x| \leqslant 1 \ \text{ et } \ |y| \leqslant 1.$$
$$G : \ |x| + |y| \leqslant 1; \qquad H : \ xy \geqslant 1 \ \text{ et } \ x > 0.$$

c) *Soit* $f(x) = e^x$. *On pose* $\varphi(x) = \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) - f(\lambda x + (1-\lambda)y)$.
Calculer $\varphi'(x)$ et montrer que, pour $\lambda \in]0, 1[$, φ admet un minimum pour $x = y$. En déduire que la fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$.

2. CONVEXITÉ ET DÉRIVÉES

★ Activité 3

1° *Soit f une fonction convexe sur un intervalle ouvert I, et soit a un élément de I. On considère la fonction T définie par :*

$$T(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad (\text{pour } x \in I \setminus \{a\})$$

a) *Démontrer que la fonction T est croissante.*

b) *Prouver qu'il existe un réel α strictement positif tel que T soit bornée sur l'intervalle $]a - \alpha, a + \alpha[$. En déduire que f est dérivable à droite et à gauche en a. Qu'en résulte-t-il relativement à la continuité de la fonction f sur I?*

c) *La propriété faisant l'objet du **b)** est-elle vraie si f est fermé, ou semi-ouvert? (on pourra utiliser un contre-exemple, voir Activité **2**).*

d) *On suppose que la fonction f est dérivable sur I. Prouver que la fonction f' est croissante sur I. Qu'en résulte-t-il pour f" si f est deux fois dérivable sur I?*
e) *Les fonctions convexes rencontrées au 1° de l'Activité* **2** *sont-elles continues, bornées, dérivables sur leur ensemble de définition? Calculer f" chaque fois que possible.*
f) *Reprendre la question* **e)** *pour les fonctions g et h définies par :*

$$g(x) = -\sqrt{1-x^2}, \quad sur \quad [-1, 1].$$
$$h(x) = \frac{1}{1-x^2}, \qquad sur \quad]-1, 1[.$$

2° Soit f une fonction définie sur l'intervalle ouvert]a, b[, deux fois dérivable sur]a, b[, et telle que f" soit positive sur]a, b[.
a) *Qu'en résulte-t-il pour f'?*
b) *Soit $a < x_1 < x_2 < x_3 < b$. En utilisant le théorème des accroissements finis, prouver que :*

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leqslant \frac{f(x_3) - f(x_2)}{x_3 - x_2}.$$

c) *En déduire que f est convexe sur]a, b[. Dans quel cas f est-elle strictement convexe?*

3° a) *Énoncer une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction f deux fois dérivable sur un intervalle ouvert I soit convexe, pour qu'elle soit strictement convexe.*
b) *On considère la fonction $f = [t \mapsto t^\alpha]$ où $\alpha \in]0, 1[$, sur $I = \mathbb{R}_+$. Démontrer que f est concave. En déduire que : $t^\alpha \leqslant \alpha t + 1 - \alpha$.*
c) *Prouver que :* $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \ln x \leqslant \dfrac{x}{e}$.
d) *Démontrer que :* $\forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right], \qquad \dfrac{2}{\pi} x \leqslant \sin x \leqslant x;$

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \quad 1 - \frac{2}{\pi} x \leqslant \cos x \leqslant \frac{\pi}{2} - x.$$

4° Soit f une fonction convexe dérivable sur un intervalle I et x_0 un point de I. Soit M_0 le point d'abscisse x_0 de la courbe Γ d'équation $y = f(x)$. M le point de Γ d'abscisse x, et P le point d'abscisse x de la tangente en M_0 à Γ.
a) *Calculer* $\varphi(x) = \overline{PM}$.
b) *Prouver que pour tout x de I,* $\varphi(x) \geqslant 0$.
c) *En déduire la position de Γ par rapport à chacune de ses tangentes si f est strictement convexe. Que se passe-t-il si f est strictement concave?*

3. APPLICATIONS AUX INÉGALITÉS

La convexité des fonctions permet d'établir de nombreuses inégalités entre les nombres réels. Ces inégalités sont souvent précieuses pour majorer, minorer, encadrer, activités qui sont essentielles en analyse (voir § **1** du présent chapitre). De nombreux problèmes peuvent se résoudre élégamment par utilisation des inégalités de convexité (voir par exemple l'ouvrage « *Les olympiades internationales de mathématiques* » par D. Gerll et G. Girard, Hachette).

★ Activité 4

1° a) *Démontrer par récurrence que, si f est convexe sur un intervalle I, et si $x_1, x_2, ..., x_n$ sont des éléments de I, alors :*

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}\right) \leqslant \frac{f(x_1) + f(x_2) + ... + f(x_n)}{n} \qquad (4)$$

b) *En utilisant la notion de barycentre, prouver que, avec les notations du* **a)**, *et quels que soient les réels positifs* $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ *tels que* $\lambda_1 + \lambda_2 + ... + \lambda_n = 1$:

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(x_i). \tag{5}$$

c) *Que deviennent les inégalités* (4) *et* (5) *lorsque la fonction* f *est strictement convexe? lorsqu'elle est concave? strictement concave?*

2° **a)** *Soit* p *un réel strictement supérieur à* 1. *Prouver que la fonction* $[x \mapsto x^p]$ *est convexe sur* $\mathbb{R}_+$.

b) *En déduire que, pour tout entier naturel* k *et quels que soient les réels positifs* $x_1, x_2, ..., x_n$:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^{2k} \leqslant n^{2k-1} \sum_{i=1}^{n} x_i^{2k}.$$

3° *Soit* $x_1, x_2, ..., x_n$ *des réels strictement positifs. Les moyennes arithmétique* m_a, *quadratique* m_q, *harmonique* m_h *et géométrique* m_g *de ces* n *nombres sont définies par* :

$$m_a = \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \quad ; \quad m_q = \sqrt{\frac{x_1^2 + x_1^2 + ... + x_n^2}{n}};$$

$$m_h = \frac{n}{\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + ... + \dfrac{1}{x_n}} \quad ; \quad m_g = \sqrt[n]{x_1 x_2 ... x_n} \quad .$$

a) *En considérant la fonction* $[x \mapsto x^2]$, *prouver que, quels que soient les réels* $x_1, x_2, ..., x_n$ *strictement positifs* :

$$(x_1 + x_2 + ... + x_n)^2 \leqslant n(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2).$$

Comparer m_a *et* m_q.

b) *En considérant la fonction* $\left[x \mapsto \dfrac{1}{x}\right]$, *prouver que, quels que soient les réels* $x_1, x_2, ..., x_n$ *strictement positifs* :

$$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right) \geqslant n^2.$$

Comparer m_a *et* m_h.

c) *En considérant la fonction* $[x \mapsto \ln x]$, *comparer* m_h *et* m_g.

d) *Conclure en classant les quatre moyennes* m_a, m_q, m_h *et* m_g *par ordre croissant. Dans quel cas a-t-on* $m_a = m_q = m_h = m_g$?

4° **a)** *En utilisant les fonctions* $[x \mapsto -\sin x]$ *pour* $x \in [0, \pi]$ *et* $[x \mapsto \cos x]$ *pour* $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$, *établir que* :

$$\sin x_1 + \sin x_2 + ... + \sin x_n \leqslant n \sin \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \quad (x_i \in [0, \pi])$$

$$\cos x_1 + \cos x_2 + ... + \cos x_n \leqslant n \cos \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \quad \left(x_i \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$$

b) *En posant* $x_k = e^k$, *prouver que, quels que soient les réels strictement positifs* $x_1, x_2, ..., x_n$:

$$\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_3} + \frac{x_3}{x_4} + ... + \frac{x_n}{x_1} \geqslant n.$$

EXERCICES ET PROBLÈMES

190. Soit m un entier naturel non nul. On cherche à déterminer des entiers naturels non nuls x, y, z, t tels que :

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{t}+\frac{t}{x}=m.$$

a) Prouver que le problème n'a pas de solution pour $m \in \{2, 3\}$.
b) Déterminer x, y, z, t pour $m = 4$.

191. Soit n réels strictement positifs $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ tels que $\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n=1$. Prouver que :

a) $\prod_{i=1}^{n} \lambda_i(1-\lambda_i) \leqslant \frac{(n-1)^n}{n^{2n}} \quad \left(\text{avec } \prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 a_2 \dots a_n\right).$

b) $\sum_{i=1}^{n} a_i^{-k} > n^{k+1} \quad (k \in \mathbb{N}).$

192. Démontrer que, si a et b sont des réels strictement positifs, et n un entier relatif :

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^n+\left(1+\frac{b}{a}\right)^n \geqslant 2^{n+1}.$$

193. Soit P un polynôme de degré n à coefficients positifs, et n nombres réels $x_1, x_2, \dots, x_n$ strictement positifs. On se propose de démontrer que :

$$\left[P\left(\frac{x_1}{x_2}\right)\right]^2+\left[P\left(\frac{x_2}{x_3}\right)\right]^2+\dots+\left[P\left(\frac{x_n}{x_1}\right)\right]^2 \geqslant n[P(1)]^2.$$

a) Prouver que, quel que soit l'entier k compris entre 0 et n :

$$\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{n-k}+\left(\frac{x_2}{x_3}\right)^{n-k}+\dots+\left(\frac{x_n}{x_1}\right)^{n-k} \geqslant n.$$

b) En déduire que :

$$P\left(\frac{x_1}{x_2}\right)+P\left(\frac{x_2}{x_3}\right)+\dots+P\left(\frac{x_n}{x_1}\right) \geqslant nP(1).$$

c) Conclure en utilisant l'inégalité $m_a \leqslant m_q$.

194. Soit $f(x)=\frac{e^{-x}}{1+x}$.

a) Étudier la fonction f sur l'intervalle $I=[0, +\infty[$. Prouver que f est convexe sur I.

b) Soit $I=\int_0^x f(t)\,dt$. Prouver que $\frac{1}{4}<I<1$.

195. On considère une fonction f de $I=[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f''(x)>0$ pour tout x de $[0, 1]$.

1° Prouver que : $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$.

2° Établir que :

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(t)\,dt = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{1}{2}+\frac{k}{2n}\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{1+\frac{k}{n}}{2}\right).$$

3° Démontrer que :

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(t)\,dt \leqslant \frac{1}{4}f(1)+\frac{1}{4}\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right).$$

4° En déduire que :

$$4\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(t)\,dt \leqslant f(1)+\int_0^1 f(t)\,dt.$$

196. I — Pour toute application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on note $\mathcal{P}$ la propriété suivante : « Pour tout élément a de $\mathbb{R}$, il existe une application F_a de $[a, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$, continue au point a, telle que :

$$\forall x \in [a, +\infty[, \quad f(x)=f(a)+(x-a)F_a(x). \text{ »}$$

A — *1°* Cette propriété $\mathcal{E}$ entraîne-t-elle la continuité de f ?

2° $\mathcal{E}$ désignant l'ensemble des applications continues possédant la propriété $\mathcal{P}$, établir que si f et g sont des éléments de $\mathcal{E}$ et λ un élément de $\mathbb{R}$, alors $f+g$, fg et λf sont aussi des éléments de $\mathcal{E}$.

B — Dans cet alinéa, f désigne un élément de $\mathcal{E}$ qui vérifie la propriété $\mathcal{P}'$: « $\forall a \in \mathbb{R}, \quad 0 \leqslant F_a(a)$ ».

1° Montrer que

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad \forall \beta \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exists \alpha \in]a, +\infty[, \quad \forall x \in [a, \alpha],$$
$$0 \leqslant f(x)-f(a)+\beta(x-a).$$

2° ε désignant un élément de $\mathbb{R}_+^*$ et a un élément de $\mathbb{R}$, on considère l'ensemble des nombres réels u, tels que :

$$a \leqslant u \quad \text{et} \quad \forall x \in [a, u], \quad 0 \leqslant f(x)-f(a)+\varepsilon(x-a).$$

Montrer que cet ensemble n'admet pas de plus grand élément, et qu'il n'admet pas non plus de borne supérieure.

3° Montrer que f est croissante.

C — Une application h d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est dite convexe si : $\forall (s, t) \in I^2, \quad \forall \lambda \in [0, 1]$

$$0 \leqslant \lambda h(s)+1-\lambda h(t)-h(\lambda s+(1-\lambda)t).$$

1° Dans cette question, f désigne un élément de $\mathcal{E}$ qui vérifie la propriété $\mathcal{P}''$:

« l'application $a \mapsto F_a(a)$ est croissante ».

Montrer qu'alors f est convexe (on pourra utiliser les applications du type :

$$x \mapsto \lambda f(a)+(1-\lambda)f(x)-f(\lambda a+(1-\lambda)x).$$

2° Une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, qui admet une application dérivée croissante, est-elle convexe?

II — On considère l'application φ, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par : $\forall x \in [-1, 0], \quad \varphi(x) = 0,$

$\forall x \in [0, 1], \quad \varphi(x) = x,$

$\forall x \in [1, 2[, \quad \varphi(x) = 1,$

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x+3) = 3 + \varphi(x).$

Soit Φ l'application telle que,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi(x) = \int_0^x \varphi(t)\,dt.$$

1° Montrer que Φ est convexe.

2° *a)* Représenter graphiquement l'application $x \mapsto x - \varphi(x)$.

b) Expliciter $\Phi(x)$ pour tout réel x de l'intervalle $[3p, 3p+3]$ $(p \in \mathbb{Z})$ et donner une représentation graphique de la restriction de Φ à un tel intervalle.

3° Soit Θ l'application $\Theta(x) = \displaystyle\int_0^x \left(\frac{t^2}{2} - \Phi(t)\right) dt.$

Existe-t-il des réels a et b tels que l'application :

$$x \mapsto \Theta(x) - ax - b$$

admette pour limite 0 quand x tend vers $+\infty$.

4° Décrire l'ensemble Δ des points en lesquels Φ n'est pas dérivable. Montrer que toute restriction ρ, de Φ, à un intervalle J ne rencontrant pas Δ, vérifie :

$$\forall x \in J, \quad \rho(x) = x\rho'(x) - \frac{1}{2}[\rho'(x)]^2.$$

5° Pour tout élément n de $\mathbb{N}^*$, on considère l'application Φ_n, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$\Phi_n(x) = \frac{n}{2}\int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} \Phi(t)\,dt.$$

a) Φ_n est-elle convexe?

b) Soit I un intervalle borné de $\mathbb{R}$. Montrer que :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \quad \forall (x, x') \in I^2$$
$$(|x - x'| < \alpha \Rightarrow |\Phi(x) - \Phi(x')| < \varepsilon$$

puis que : $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exists N \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in I, \quad \forall n \in \mathbb{N},$

$$N \leqslant n \Rightarrow |\Phi_n(x) - \Phi(x)| < \varepsilon$$

c) Φ_n admet-elle une dérivée seconde en tout point de $\mathbb{R}$?

III — On se propose de construire une suite $(n \mapsto \Psi_n)$ d'applications, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, qui possède les propriétés suivantes :

1° Pour tout entier naturel n, Ψ_n est convexe et admet une dérivée seconde Ψ_n'' continue en tout point de $\mathbb{R}$.

2° $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \quad \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$

$N \leqslant n \Rightarrow |\Psi_n(x) - \Phi(x)| < \varepsilon$

A — Dans ce qui suit, u désigne un élément de $\mathbb{R}_+^*$.

1° Comment choisir α, β et λ $(\alpha \in \mathbb{N}^*, \beta \in \mathbb{N}^*$ et $\lambda \in \mathbb{R}^*)$ de façon que, pour tout élément n de $\mathbb{Z}$, l'application F_n, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$\forall x \in]-\infty, n], \qquad F_n(x) = nx - \dfrac{n^2}{2},$

$\forall x \in]n, n+u[, \qquad F_n(x) = \dfrac{x^2}{2} + \lambda(x-n)^2(x-n-u)^2,$

$\forall x \in [n+u, +\infty[, \quad F_n(x) = \dfrac{x^2}{2},$

admette une dérivée seconde en tout point de $\mathbb{R}$?

2° Pour tout élément n de $\mathbb{Z}$, on note f_n l'application du segment $[n, n+u]$ dans $\mathbb{R}$, définie par

$$f_n(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2u^3}(x-n)^2(x-n-u)^3.$$

Montrer que, pour tout réel x du segment $[n, n+u]$,

$$0 \leqslant f_n'(x) \quad \text{et} \quad \left|f_n(x) - \frac{x^2}{2}\right| \leqslant \frac{u^2}{2}.$$

3° Indiquer, pour tout élément n de $\mathbb{Z}$, une application h_n du segment $[n-u, n]$ dans $\mathbb{R}$ et une application H_n de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, pourvue d'une dérivée seconde en tout point de $\mathbb{R}$, qui vérifient les propriétés suivantes :

$\forall x \in]-\infty, n-u], \quad H_n(x) = \dfrac{x^2}{2},$

$\forall x \in [n-u, n], \qquad H_n(x) = h_n(x)$ et $0 \leqslant h_n(x)$

et $\left|h_n(x) - \dfrac{x^2}{2}\right| \leqslant \dfrac{u^2}{2},$

$\forall x \in [n, +\infty[, \qquad H_n(x) = nx - \dfrac{n^2}{2}.$

B — Dans un plan, rapporté à un repère $r(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère la parabole Π d'équation $2y = x^2$. Pour tout élément n de $\mathbb{Z}$, on note M_n le point, de Π, d'abscisse n.

1° Préciser les coordonnées du point Ω intersection des tangentes, Π aux points M_{n-1} et M_{n+1}.

2° On considère les vecteurs $\vec{I} = \vec{i} + n\vec{j}$ et $\vec{J} = \vec{j}$ et le repère $\mathcal{R}(\Omega; \vec{I}, \vec{J})$. Soit M un point du plan, x et y ses coordonnées par rapport à r, X et Y ses coordonnées par rapport à $\mathcal{R}$.

Exprimer x et y, en fonction de X et de Y, et X et Y, en fonction de x et de y. Former, relativement au repère $\mathcal{R}$, des équations des tangentes à Π aux points M_{n-1} et M_{n+1}.

3° A tout élément (α, β) de $\mathbb{R}^2$, on associe l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées X et Y vérifient :

$$Y = X + (X-u)^3(\alpha X + \beta) \quad \text{et} \quad |X| \leqslant u.$$

Comment choisir (α, β) pour que cet ensemble soit invariant par l'application affine qui, à tout point M $(\overrightarrow{\Omega M} = X\vec{I} + Y\vec{J})$, associe le point M'

$$(\overrightarrow{\Omega M'} = -X\vec{I} + Y\vec{J})?$$

On note E l'ensemble correspondant à ce choix.

4° Soit M un point de E : $(\overrightarrow{\Omega M} = X\vec{I} + Y\vec{J})$.

Montrer que, si X appartient au segment $[0, u]$, $|Y - X| \leqslant \dfrac{u}{2}$ et que si X appartient au segment $[-u, 0]$, $|Y + X| \leqslant \dfrac{u}{2}$.

5° *a)* Préciser le polynôme g_n tel que E soit inclus dans l'ensemble des points M dont les coordonnées x et y $(\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j})$ vérifient $y = g_n(x)$.

b) Montrer que, $\forall x \in [n-u, n+u]$, $0 \leqslant g_n(x)$.

c) Montrer que l'application G_n, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie par

$$\forall x \in]-\infty, n-u], \quad G_n(x) = (n-1)x - \frac{(n-1)^2}{2},$$

$$\forall x \in [n-u, n+u], \quad G_n(x) = g_n(x),$$

$$\forall x \in [n+u, +\infty[, \quad G_n(x) = (n+1)x - \frac{(n+1)^2}{2},$$

admet une dérivée seconde en tout point de $\mathbb{R}$.

C – Lorsque le réel u appartient à l'intervalle $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ de $\mathbb{R}$, on note $\mathcal{F}_u$ l'application, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, définie de la façon suivante :

- pour tout élément p de $\mathbb{Z}$:

$$\forall x \in [3p, 3p+u], \qquad \mathcal{F}_u(x) = f_{3p}(x),$$
$$\forall x \in [3p+1-u, 3p+1], \qquad \mathcal{F}_u(x) = h_{3p+1}(x),$$
$$\forall x \in [3p+2-u, 3p+2+u], \qquad \mathcal{F}_u(x) = g_{3p+2}(x).$$

- pour tout autre réel x, $\mathcal{F}_u(x) = \Phi(x)$.

1° Étudier $\mathcal{F}''_u(x)$.

2° $\mathcal{F}_u$ est-elle convexe?

3° Montrer que :

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^*_+ \quad \exists \alpha \in \mathbb{R}^*_+,$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall u \in \left]0, \frac{1}{2}\right[, \quad u < \alpha \Rightarrow |\mathcal{F}_u(x) - \Phi(x)| < \varepsilon.$$

4° Construire une suite $(n \mapsto \Psi_n)$ d'applications, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, qui possède les propriétés suivantes :

- Quel que soit l'entier naturel n, Ψ_n est convexe et admet une dérivée seconde Ψ''_n continue sur $\mathbb{R}$.

- $$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^*_+, \quad \exists N \in \mathbb{N},$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad N \leqslant n \Rightarrow |\Psi_n(x) - \Phi(x)| < \varepsilon.$$

V – TABLEAUX RÉCAPITULATIFS

Nous présentons ci-dessous des tableaux où le lecteur récapitulera soigneusement, au fur et à mesure de leur obtention, les résultats essentiels concernant les limites, les dérivées, les primitives et les fonctions trigonométriques. Une fois complétés, ces tableaux constitueront des références utiles.

TABLEAU 1 : FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

$\cos^2 a + \sin^2 a =$ ______ $\tan a =$ ______ $1 + \tan^2 a =$ ______ $\cot a =$ ______	$\cos(a+b) =$ ______ $\cos(a-b) =$ ______ $\sin(a+b) =$ ______ $\sin(a-b) =$ ______ $\tan(a+b) =$ ______ $\tan(a-b) =$ ______
$\cos 2a =$ ______ $\cos 2a =$ ______ $\cos 2a =$ ______ $\sin 2a =$ ______ $\tan 2a =$ ______	Si $t = \tan \frac{a}{2}$: $\cos a =$ ______ $\sin a =$ ______ $\tan a =$ ______
$\cos a \cos b =$ ______ $\sin a \sin b =$ ______ $\sin a \cos b =$ ______ $\cos a \sin b =$ ______ $\cos^2 a =$ ______ $\sin^2 a =$ ______	$\cos p + \cos q =$ ______ $\cos p - \cos q =$ ______ $\sin p + \sin q =$ ______ $\sin p - \sin q =$ ______ $1 + \cos a =$ ______ $1 - \cos a =$ ______

TABLEAU 2 : FONCTIONS USUELLES

Fonction	Définition	Dérivée	Primitives	Remarques
$f(x) = \ln x$	$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}$			$x \in \mathbb{R}_+^*$
$f(x) = e^x$	$\ln e^x = x$			
$f(x) = x^\alpha$	$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$			$x \in \mathbb{R}_+^*$, $\alpha \in \mathbb{R}$
$f(x) = \log_a x$				
$f(x) = a^x$				
$f(x) = \sin(ax + b)$				
$f(x) = \cos(ax + b)$				
$f(x) = \tan(ax + b)$				

SUITES USUELLES

- Suite arithmétique de premier terme $u_0 = a$ et de raison r.

  Relation de récurrence : ....

  Terme de rang n : $u_{n-1} =$ ....

  Convergence : ....

  Somme des n premiers termes : $s_n = u_0 + u_1 + ... + u_{n-1} =$ ....

- Suite géométrique de premier terme $v_0 = \alpha$ et de raison q :

  Relation de récurrence : ....

  Terme de rang n : $v_{n-1} =$ ....

  Convergence : ....

  Somme des n premiers termes : $\sigma_n = v_0 + v_1 + ... + v_{n-1} =$ ....

TABLEAU 3 : LIMITES

Règles de calcul

$\lim\limits_{x \to x_0} f$	$\lim\limits_{x \to x_0} g$	$\lim\limits_{x \to x_0} f+g$	$\lim\limits_{x \to x_0} fg$	$\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f}{g}$
l	$l' \neq 0$	______	______	______
$l(>0)$	0^+	______	______	______
$l(<0)$	0^+	______	______	______
$l(>0)$	0^-	______	______	______
$l(<0)$	0^-	______	______	______
0	0	______	______	______
$l(>0)$	$+\infty$	______	______	______
$l(<0)$	$+\infty$	______	______	______
$l(>0)$	$-\infty$	______	______	______
$l(<0)$	$-\infty$	______	______	______
0	$+\infty$	______	______	______
0	$-\infty$	______	______	______
$+\infty$	$+\infty$	______	______	______
$+\infty$	$-\infty$	______	______	______
$+\infty$	0^+	______	______	______
$+\infty$	0^-	______	______	______
$+\infty$	0^-	______	______	______
$-\infty$	0^+	______	______	______
$-\infty$	0^-	______	______	______

Limites usuelles

$\forall n \in \mathbb{N}^* : \lim\limits_{x \to 0} x^n =$ ______ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} x^n =$ ______

$\forall m \in \mathbb{Z}^*_- : \lim\limits_{x \to 0} x^m =$ ______ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} x^m =$ ______

$\lim\limits_{x \to 0} \sqrt{x} =$ ______ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} =$ ______

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x^2} =$ ______ $\quad \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x}{x} =$ ______

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2} =$ ______

$\lim\limits_{x \to 0} \ln x =$ ______ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \ln x =$ ______

$\lim\limits_{x \to 0} x \ln x =$ ______ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} =$ ______

$\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\ln x}{x - 1} =$ ______

$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^{*2}_+ : \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{(\ln x)^\alpha}{x^\beta} =$ ______

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x =$ ______ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} e^x =$ ______

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x} =$ ______ $\quad \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} =$ ______

$\lim\limits_{x \to -\infty} x e^x =$ ______

$\forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^{*2}_+ : \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{\alpha x}}{x^\beta} =$ ______

Règles de comparaison

Si $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant g(x)$ et si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = l$ et $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l'$, alors :

____

Si $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$ et si $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = 0$, alors :

____

Si $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant g(x)$ et si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$, alors :

____

TABLEAU 4 : DÉRIVÉES

RÈGLES GÉNÉRALES			CAS PARTICULIERS	
Fonction	**Dérivée**	**Remarques**	**Fonction**	**Dérivée**
$au + bv$		$(a, b) \in \mathbb{R}^2$	u^2	
uv			$\frac{1}{v}$	
			u^α	
$\frac{u}{v}$		sur tout intervalle où $v(x) \neq 0$	$\sqrt{u}$	
			$\sin u$	
$u \circ v$			$\cos u$	
u^{-1}		fonction réciproque de u	$\tan u$	
			$\ln \lvert u \rvert$	
			e^u	

TABLEAU 5 : PRIMITIVES

RÈGLES GÉNÉRALES			CAS PARTICULIERS	
Fonction	**Une primitive**	**Remarques**	**Fonction**	**Primitives**
u	U		$u(x) = 0$	
v	V		$u(x) = x$	
$au + bv$			$u(x) = \sqrt{x}$	
$uV + vU$			$u(x) = \frac{1}{x}$	
$\frac{uV - vU}{V^2}$			$u(x) = \sin x$	
$v.(u \circ V)$			$u(x) = \cos x$	
$x \mapsto u(ax + b)$			$u(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$	
vV^α		$\alpha \in \mathbb{R}$	$u(x) = 1 + \tan^2 x$	
$\frac{u}{U}$			$u(x) = \tan x$	
$u e^U$			$u(x) = \sin(\omega x + \varphi)$	
			$u(x) = \cos(\omega x + \varphi)$	
			$u(x) = e^{kx}$	

CHAPITRE 10

FONCTIONS VECTORIELLES D'UNE VARIABLE REELLE. CINEMATIQUE

I – GÉNÉRALITÉS

Si l'on étudie au cours du temps le mouvement du centre de gravité G d'un objet quelconque, à chaque instant t il occupe une position $G(t)$. Un repère $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace étant donné, les coordonnées $(f(t), g(t), h(t))$ du vecteur $\overrightarrow{OG}(t)$ dans le repère $\mathcal{R}$ déterminent la position de $G(t)$.
Ainsi, pour l'étude d'un mouvement, on est ramené à l'étude des applications d'une partie de $\mathbb{R}$ dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, suivant que le mouvement est sur une droite, dans un plan ou dans l'espace.

★ **Activité**

1° Soit $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ *et* $\mathcal{R}_1 = (O_1, \vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$ *des repères de l'espace tels que :*

$$\overrightarrow{OO_1} = a\vec{i}_1 + b\vec{j}_1 + c\vec{k}_1\,;$$
$$\vec{i} = \alpha_1\vec{i}_1 + \alpha_2\vec{j}_1 + \alpha_3\vec{k}_1;$$
$$\vec{j} = \beta_1\vec{i}_1 + \beta_2\vec{j}_1 + \beta_3\vec{k}_1;$$
$$\vec{k} = \gamma_1\vec{i}_1 + \gamma_2\vec{j}_1 + \gamma_3\vec{k}_1.$$

a) *Si $G(t)$ a pour coordonnées $(f(t), g(t), h(t))$ dans $\mathcal{R}$, quelles sont les coordonnées $(f_1(t), g_1(t), h_1(t))$ de $G(t)$ dans le repère $\mathcal{R}_1$?*
b) *En déduire que si f, g, h sont continues (resp. dérivables) en t_0, alors les fonctions coordonnées f_1, g_1, h_1 de $G(t)$, dans le repère $\mathcal{R}_1$, sont continues (resp. dérivables) en t_0. Dans le cas où f, g, h sont dérivables, montrer que :*

$$f'(t_0)\vec{i} + g'(t_0)\vec{j} + h'(t_0)\vec{k} = f'_1(t_0)\vec{i}_1 + g'_1(t_0)\vec{j}_1 + h'_1(t_0)\vec{k}_1.$$

2° $\overrightarrow{U}(t)$ est un vecteur de l'espace vectoriel $\mathcal{W}$ des vecteurs de l'espace, pour chaque réel t d'un intervalle I de $\mathbb{R}$.

a) *Si $(f(t), g(t), h(t))$ sont les coordonnées de $\overrightarrow{U}(t)$ par rapport à la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, quelles sont les coordonnées $(f_1(t), g_1(t), h_1(t))$ de $\overrightarrow{U}(t)$ dans la base $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$, en prenant les mêmes notations que dans le **1°**?*
b) *En déduire que si f, g, h sont continues (resp. dérivables) en t_0, alors les fonctions f_1, g_1, h_1 sont continues (resp. dérivables) en t_0. Dans le cas où f, g, h sont dérivables en t_0, montrer que :*

$$f'(t_0)\vec{i} + g'(t_0)\vec{j} + h'(t_0)\vec{k} = f'_1(t_0)\vec{i}_1 + g'_1(t_0)\vec{j}_1 + h'_1(t_0)\vec{k}_1.$$

On note :

$$\frac{d\overrightarrow{U}}{dt}(t_0) = f'(t_0)\vec{i} + g'(t_0)\vec{j} + h'(t_0)\vec{k}.$$

DÉFINITION 1

On appelle *fonction vectorielle d'une variable réelle* toute application d'une partie de $\mathbb{R}$ dans un espace vectoriel réel E.

REMARQUES :

1° Le cas des fonctions numériques correspond à $E = \mathbb{R}$.

2° $\mathbb{C}$ étant identifié à $\mathbb{R}^2$, si l'on associe au couple de réels (a, b) le nombre complexe $a + ib$, toute fonction vectorielle, d'une variable réelle à valeurs dans $\mathbb{R}^2$, peut être considérée comme fonction d'une variable à valeurs complexes.

3° Pour faciliter l'exposé, on énoncera les définitions et les résultats pour des applications vectorielles d'une partie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$. En liaison avec l'aspect cinématique de cette étude, la variable sera notée t.

4° Soit $t \mapsto \vec{U}(t)$ une application d'une partie de $\mathbb{R}$ dans l'espace vectoriel $\mathcal{W}$ des vecteurs de l'espace. Étant donné une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\mathcal{W}$, étudier $t \mapsto \vec{U}(t)$ revient à étudier la fonction vectorielle dans $\mathbb{R}^3$ $t \mapsto (f(t), g(t), h(t))$, où $(f(t), g(t), h(t))$ est le triplet des coordonnées de $\vec{U}(t)$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. LIMITE, CONTINUITÉ D'UNE FONCTION VECTORIELLE

DÉFINITION 2

Soit $\vec{F}$ une fonction vectorielle définie sur un intervalle $[t_0 - a, t_0 + a]$ (a est un réel strictement positif), sauf peut-être en t_0, par $\vec{F}(t) = (f(t), g(t), h(t))$. La fonction $\vec{F}(t)$ admet une limite $\vec{\ell} = (\ell_1, \ell_2, \ell_3)$ quand t tend vers t_0 si $f(t), g(t), h(t)$ admettent respectivement ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 pour limites quand t tend vers t_0. On écrit $\lim\limits_{t_0} \vec{F} = \vec{\ell}$ ou $\lim\limits_{t \to t_0} \vec{F}(t) = \vec{\ell}$. On dit aussi que $\vec{F}$ admet pour limite $\vec{\ell}$ en t_0.

D'après l'unicité de la limite d'une fonction numérique, lorsqu'elle existe, on peut énoncer :

THÉORÈME 2

Si une fonction vectorielle $\vec{F}$ admet une limite $\vec{\ell}$ en t_0 et une limite $\vec{L}$ en t_0, alors $\vec{\ell} = \vec{L}$.

Notons : $\|\vec{F}(t) - \vec{\ell}\| = \sqrt{(f(t) - \ell_1)^2 + (g(t) - \ell_2)^2 + (h(t) - \ell_3)^2}$. Si $\vec{F}$ admet pour limite $\vec{\ell} = (\ell_1, \ell_2, \ell_3)$ en t_0, alors : $\lim\limits_{t_0} f = \ell_1$, $\lim\limits_{t_0} g = \ell_2$, $\lim\limits_{t_0} h = \ell_3$, donc : $\|\vec{F}(t) - \vec{\ell}\|$ tend vers 0 quand t tend vers t_0.

Réciproquement, comme :

$$\sqrt{(f(t) - \ell_1)^2 + (g(t) - \ell_2)^2 + (h(t) - \ell_3)^3} \geqslant |f(t) - \ell_1|,$$
$$\sqrt{(f(t) - \ell_1)^2 + (g(t) - \ell_2)^2 + (h(t) - \ell_3)^3} \geqslant |g(t) - \ell_2|,$$
$$\sqrt{(f(t) - \ell_1)^2 + (g(t) - \ell_2)^2 + (h(t) - \ell_3)^2} \geqslant |h(t) - \ell_3|,$$

on en conclut que si $\|\vec{F}(t) - \vec{\ell}\|$ tend vers 0 lorsque t tend vers t_0, $f(t), g(t), h(t)$ tendent respectivement vers ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 quand t tend vers t_0. Énonçons :

THÉORÈME 1

$\vec{F}$ tend vers $\vec{\ell}$ en t_0 si, et seulement si, $\|\vec{F}(t) - \vec{\ell}\|$ tend vers 0 quand t tend vers t_0.

DÉFINITION 3

Une fonction vectorielle $\vec{F}$ définie sur un intervalle $[t_0 - a, t_0 + a]$ est continue en t_0 si $\vec{F}(t)$ tend vers $\vec{F}(t_0)$ quand t tend vers t_0.

Exemples :

Soit
$$\vec{F}(t) = \left(\frac{\sin t}{t}, \frac{\sin 2t}{t}, \frac{\sin 3t}{t}\right) \quad \text{pour} \quad t \neq 0,$$
$$\vec{G}(t) = (\sqrt{1 + t}, t, (t - 1)) \quad \text{pour} \quad t \geqslant -1.$$

On a : $\lim\limits_{t \to 0} \overrightarrow{F}(t) = (1, 2, 3)$; $\lim\limits_{t \to 0} \overrightarrow{G}(t) = (1, 0, -1)$; $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sqrt{1+t^2}}{2}\overrightarrow{F}(t) = \left(\dfrac{1}{2}, 1, \dfrac{3}{2}\right)$.

• Exercices d'application

1. Soit $\overrightarrow{F}(t) = \left(\dfrac{\tan 2t}{\sin t}, \dfrac{\tan 3t}{\sin 2t}\right)$.
Déterminer la limite en 0 de $\overrightarrow{F}$.

2. Soit $\overrightarrow{G}(t) = \left(\dfrac{e^t - 1}{t}, \dfrac{2t}{\ln(1+t)}, \dfrac{1 - \cos t}{4t^2}\right)$.
Déterminer la limite en 0 de $\overrightarrow{G}$.

2. DÉRIVÉE D'UNE FONCTION VECTORIELLE

Soit $\overrightarrow{F}$ une fonction vectorielle définie sur $[t_0 - a, t_0 + a]$ par :

$$\overrightarrow{F}(t) = (f(t), g(t), h(t)).$$

On a :
$$\frac{\overrightarrow{F}(t) - \overrightarrow{F}(t_0)}{t - t_0} = \left(\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}, \frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0}, \frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0}\right).$$

Ainsi, $\dfrac{\overrightarrow{F}(t) - \overrightarrow{F}(t_0)}{t - t_0}$ a une limite lorsque t tend vers t_0 si, et seulement si, f, g, h sont dérivables en t_0. Dans ce cas, on a alors : $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{\overrightarrow{F}(t) - \overrightarrow{F}(t_0)}{t - t_0} = (f'(t_0), g'(t_0), h'(t_0))$.

DÉFINITION 4 ET THÉORÈME 2

Soit $\overrightarrow{F}$ une fonction vectorielle définie sur $[t_0 - a, t_0 + a]$. La fonction $\overrightarrow{F}$ est *dérivable* en t_0 si la fonction vectorielle $t \mapsto \dfrac{\overrightarrow{F}(t) - \overrightarrow{F}(t_0)}{t - t_0}$ admet une limite quand t tend vers t_0.
Lorsque cette limite existe, on la note $\overrightarrow{F}'(t_0)$ ou encore $\dfrac{d\overrightarrow{F}}{dt}(t_0)$ et on a, si $\overrightarrow{F}(t) = (f(t), g(t), h(t))$:

$$\overrightarrow{F}'(t_0) = (f'(t_0), g'(t_0), h'(t_0)).$$

Une fonction vectorielle $\overrightarrow{F}$ définie sur l'intervalle I est dite **dérivable sur I** si $\overrightarrow{F}$ est dérivable en chaque point de I.

3. PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS VECTORIELLES DÉRIVABLES

1° Soit $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{G}$ des fonctions vectorielles définies sur $]t_0 - a, t_0 + a[$:

$$\overrightarrow{F}(t) = (f(t), g(t), h(t)) \quad , \quad \overrightarrow{G}(t) = (f_1(t), g_1(t), h_1(t)) ,$$
$$\overrightarrow{F}(t) + \overrightarrow{G}(t) = (f(t) + f_1(t), g(t) + g_1(t), h(t) + h_1(t)).$$

Si $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{G}$ sont dérivables en t_0, alors f, f_1, g, g_1, h, h_1 sont dérivables en t_0; par suite, la fonction vectorielle $\overrightarrow{F} + \overrightarrow{G} : t \mapsto \overrightarrow{F}(t) + \overrightarrow{G}(t)$ est dérivable en t_0, et on a :

$$\boxed{(\overrightarrow{F} + \overrightarrow{G})'(t_0) = \overrightarrow{F}'(t_0) + \overrightarrow{G}'(t_0)}$$

Nous retiendrons :

THÉORÈME 4

La somme de deux fonctions vectorielles dérivables est dérivable, et sa dérivée est la somme des dérivées des deux fonctions vectorielles.

2° Soit $\vec{F}$ une fonction vectorielle définie sur $]t_0 - a, t_0 + a[$ et φ une fonction **numérique** définie sur $]t_0 - a, t_0 + a[$.
Si $\vec{F}(t) = (f(t), g(t), h(t))$, on a : $\varphi(t)F(t) = (\varphi(t)f(t), \varphi(t)g(t), \varphi(t)h(t))$.
Si φ et $\vec{F}$ sont dérivables en t_0, φf, φg, φh sont dérivables en t_0 et :

$$(\varphi f)'(t_0) = \varphi'(t_0)f(t_0) + \varphi(t_0)f'(t_0)\,,$$
$$(\varphi g)'(t_0) = \varphi'(t_0)g(t_0) + \varphi(t_0)g'(t_0)\,,$$
$$(\varphi h)'(t_0) = \varphi'(t_0)h(t_0) + \varphi(t_0)h'(t_0)\,.$$

Donc $\varphi\vec{F}$ est dérivable en t_0, et on a :

$$\boxed{(\varphi\vec{F})'(t_0) = \varphi'(t_0)\vec{F}(t_0) + \varphi(t_0)\vec{F}'(t_0)}$$

Nous retiendrons :

THÉORÈME 5

Le produit d'une fonction vectorielle $\vec{F}$ dérivable en t_0 par une fonction numérique φ dérivable en t_0 est dérivable en t_0 et :

$$(\varphi\vec{F})'(t_0) = \varphi'(t_0)\vec{F}(t_0) + \varphi(t_0)\vec{F}'(t_0).$$

3° Soit $\vec{F}$ et $\vec{G}$ des fonctions vectorielles définies sur $]t_0 - a, t_0 + a[$:

$$\vec{F}(t) = (f(t), g(t), h(t)) \quad , \quad \vec{G}(t) = (f_1(t), g_1(t), h_1(t)).$$

Le **produit scalaire de $\vec{F}$ par $\vec{G}$** est la fonction notée $\vec{F} \cdot \vec{G}$, définie par :

$$(\vec{F} \cdot \vec{G})(t) = f(t)f_1(t) + g(t)g_1(t) + h(t)h_1(t).$$

Si $\vec{F}$ et $\vec{G}$ sont dérivables en t_0, l'application numérique $t \mapsto (\vec{F} \cdot \vec{G})(t)$ est dérivable en t_0, et on a :

$$(\vec{F} \cdot \vec{G})'(t_0) = f'(t_0)f_1(t_0) + f(t_0)f'_1(t_0) + g'(t_0)g_1(t_0) + g(t_0)g'_1(t_0) + h'(t_0)h_1(t_0) + h(t_0)h'_1(t_0)\,,$$

soit : $$\boxed{(\vec{F} \cdot \vec{G})'(t_0) = \vec{F}'(t_0) \cdot \vec{G}(t_0) + \vec{F}(t_0) \cdot \vec{G}'(t_0)}$$

Énonçons :

THÉORÈME 6

Le produit scalaire de deux fonctions vectorielles $\vec{F}$ et $\vec{G}$ dérivables est dérivable, et on a :

$$(\vec{F} \cdot \vec{G})'(t) = \vec{F}'(t) \cdot \vec{G}(t) + \vec{F}(t) \cdot \vec{G}'(t)\,.$$

4° Soit $\vec{F}$ et $\vec{G}$ des fonctions vectorielles définies sur $]t_0 - a, t_0 + a[$:

$$\vec{F}(t) = (f(t), g(t), h(t)) \quad , \quad \vec{G}(t) = (f_1(t), g_1(t), h_1(t))\,.$$

On appelle **produit vectoriel de $\vec{F}$ par $\vec{G}$** la fonction vectorielle notée $\vec{F} \wedge \vec{G}$, définie par :

$$(\vec{F} \wedge \vec{G})(t) = (g(t)h_1(t) - g_1(t)h(t), h(t)f_1(t) - h_1(t)f(t), f(t)g_1(t) - f_1(t)g(t)).$$

Si $\vec{F}$ et $\vec{G}$ sont dérivables en t_0, on constate que $\vec{F} \wedge \vec{G}$ est dérivable en t_0, et on a :

$$\boxed{(\vec{F} \wedge \vec{G})'(t_0) = \vec{F}'(t_0) \wedge \vec{G}(t_0) + \vec{F}(t_0) \wedge \vec{G}'(t_0)}$$

ce qui se vérifie aisément.

Nous retiendrons :

THÉORÈME 7	**Le produit vectoriel de deux fonctions vectorielles $\vec{F}$ et $\vec{G}$ dérivables est une fonction vectorielle dérivable, et on a :** $$(\vec{F} \wedge \vec{G})'(t) = \vec{F}'(t) \wedge \vec{G}(t) + \vec{F}(t) \wedge \vec{G}'(t).$$

5° Soit $\vec{F}$ une fonction vectorielle définie sur $]t_0 - a, t_0 + a[$:

$$\vec{F}(t) = (f(t), g(t), h(t)).$$

On appelle **norme de $\vec{F}$**, et on note $\|\vec{F}\|$ la fonction définie par :

$$\|\vec{F}\|(t) = \|\vec{F}(t)\| = \sqrt{f^2(t) + g^2(t) + h^2(t)} = \sqrt{\vec{F}(t) \cdot \vec{F}(t)}.$$

Si $\vec{F}$ est dérivable en t_0 et si $\vec{F}(t_0) \neq \vec{0}$, alors $\|\vec{F}\|$ est dérivable en t_0, et on a :

$$\|\vec{F}\|'(t_0) = \frac{f(t_0)f'(t_0) + g(t_0)g'(t_0) + h(t_0)h'(t_0)}{\sqrt{(f(t_0))^2 + (g(t_0))^2 + (h(t_0))^2}} = \frac{\vec{F}(t_0) \cdot \vec{F}'(t_0)}{\|\vec{F}(t_0)\|}.$$

Nous retiendrons :

THÉORÈME 8	**La norme d'une fonction vectorielle $\vec{F}$ dérivable est dérivable en tout point où elle ne s'annule pas, et on a :** $$\|\vec{F}\|'(t) = \frac{\vec{F}(t) \cdot \vec{F}'(t)}{\|\vec{F}(t)\|}.$$

Conséquence :

Une fonction vectorielle $\vec{F}$ dérivable sur un intervalle I, de norme constante sur cet intervalle, admet en tout point t de l'intervalle I un vecteur dérivé $\vec{F}'(t)$ orthogonal à $\vec{F}(t)$.

En effet, il existe un réel C tel que, pour tout réel t de l'intervalle I, $\vec{F}(t) \cdot \vec{F}(t) = C^2$. Donc, par dérivation, on obtient :

$$2\vec{F}(t) \cdot \vec{F}'(t) = 0 \quad , \quad \text{soit :} \quad \vec{F}(t) \cdot \vec{F}'(t) = 0.$$

6° Changement de paramètre :

Soit $\vec{F}$ une fonction vectorielle définie sur $]t_0 - a, t_0 + a[$ par :

$$\vec{F}(t) = (f(t), g(t), h(t)).$$

Supposons que la fonction numérique φ définie sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ prenne ses valeurs dans $]t_0 - a, t_0 + a[$.

On peut alors considérer la fonction vectorielle $u \mapsto \vec{F}(\varphi(u))$, notée $\vec{F} \circ \varphi$, et on a :

$$\vec{F}(\varphi(u)) = (f(\varphi(u)), g(\varphi(u)), h(\varphi(u))).$$

Si $\vec{F}$ et φ sont dérivables, alors $f \circ \varphi$, $g \circ \varphi$, $h \circ \varphi$ sont dérivables et

$$(\vec{F} \circ \varphi)'(u) = (f'(\varphi(u))\varphi'(u), g'(\varphi(u))\varphi'(u), h'(\varphi(u))\varphi'(u)),$$

donc : $$\boxed{(\vec{F} \circ \varphi)'(u) = \varphi'(u)\vec{F}'(\varphi(u))}$$

Conséquence :

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, soit le vecteur unitaire $\vec{u}$ tel que $\vec{u} = \cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{j}$, où θ est une mesure en radians de l'angle $(\widehat{\vec{i}, \vec{u}})$.

On a : $$\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}\theta}(\theta) = -\sin\theta\,\vec{i} + \cos\theta\,\vec{j}\,.$$

Le vecteur $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}\theta}(\theta)$ est le vecteur unitaire directement orthogonal à $\vec{u}$ (figure 1).

Soit $t \mapsto M(t)$ une fonction de $\mathbb{R}$ dans le plan.
Si $M(t) \neq O$, soit $\theta(t)$ une mesure en radians de l'angle orienté de vecteurs $(\vec{i}, \overrightarrow{OM}(t))$.
Posons $r(t) = \|\overrightarrow{OM}(t)\|$.

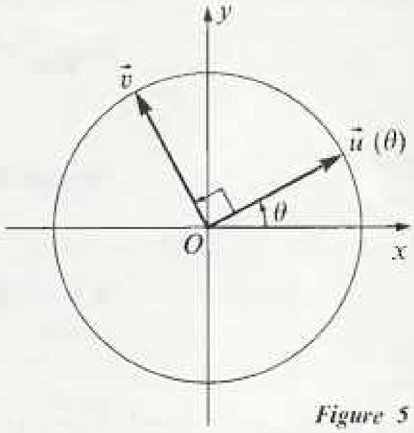


Figure 5

On a : $$\boxed{\overrightarrow{OM}(t) = r(t)\vec{u}(\theta(t)).}$$

où $\vec{u}(\theta(t))$ est le vecteur unitaire tel que :
$$\vec{u}(\theta(t)) = \cos(\theta(t))\vec{i} + \sin(\theta(t))\vec{j}.$$

Supposons que la fonction vectorielle soit dérivable. **On démontre, et nous l'admettrons,** que l'on peut choisir $\theta(t)$ de façon que $t \mapsto \theta(t)$ soit dérivable.

Alors : $$\boxed{\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t) = r'(t)\vec{u}(\theta(t)) + r(t)\theta'(t)\vec{v}(\theta(t))\ ;}$$

où $\vec{v}(\theta(t)) = -\sin(\theta(t))\vec{i} + \cos(\theta(t))\vec{j}\,.$

7° Dérivées d'ordre supérieur d'une fonction vectorielle

Si $\vec{F}$ est une fonction vectorielle dérivable sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, $\vec{F}'$ est une fonction vectorielle définie sur I.
A son tour, si $\vec{F}'$ est dérivable sur I, sa dérivée est notée $\vec{F}''$, on l'appelle dérivée seconde, ou dérivée d'ordre 2, de $\vec{F}$. De proche en proche, on définit la dérivée d'ordre p de $\vec{F}$ (p est un entier naturel non nul) notée $\vec{F}^{(p)}$.
Soit $t \mapsto M(t)$ une fonction vectorielle et $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de l'espace. On pose $\overrightarrow{OM}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j}) + h(t)\vec{k}$.
On dit que la fonction vectorielle est p fois dérivable (où p est un entier naturel non nul) si les fonctions numériques f, g, h sont p fois dérivable.
D'après l'activité du début de paragraphe, cette définition est indépendante du repère choisi.

On note : $$\frac{\mathrm{d}^p\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^p}(t) = f^{(p)}(t)\vec{i} + g^{(p)}(t)\vec{j} + h^{(p)}(t)\vec{k}.$$

II – COURBES PARAMÉTRÉES

1. EXEMPLE

Soit $\vec{F}(t) = (R\cos t,\ R\sin t)$, où R est un réel strictement positif.

Dans un repère orthonormal direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan, le point $M(t)$ de coordonnées $(R \cos t,\ R \sin t)$ décrit le cercle C de centre O et de rayon R lorsque t décrit l'intervalle $[0, 2\pi[$ (figure 2).

$$\frac{\vec{F}(t) - \vec{F}(t_0)}{t - t_0} = \left(R\frac{\cos t - \cos t_0}{t - t_0},\ R\frac{\sin t - \sin t_0}{t - t_0} \right).$$

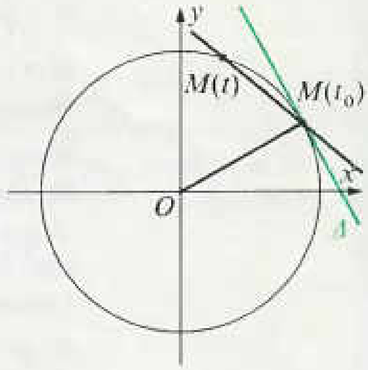


Figure 2

Ce couple de réels représente les coordonnées du vecteur $\dfrac{\overrightarrow{M(t_0)M(t)}}{t - t_0}$, vecteur directeur de la droite Δ_t passant par $M(t_0)$ et $M(t)$.

Lorsque t tend vers t_0, $\dfrac{\vec{F}(t) - \vec{F}(t_0)}{t - t_0}$ tend vers $(-R \sin t_0,\ R \cos t_0)$.

Soit Δ la droite passant par $M(t_0)$ et admettant pour vecteur directeur le vecteur de coordonnées $(-R \sin t_0,\ R \cos t_0)$:

On dit que la droite Δ_t tend vers la droite Δ lorsque t tend vers t_0.

Δ est appelée **tangente au cercle C en $M(t_0)$.**

2. DÉFINITION

Plus généralement, soit la fonction vectorielle $\vec{F}$ définie par :

$$\vec{F}(t) = (f(t),\ g(t),\ h(t)).$$

Dans un repère $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, considérons le point $M(t)$ tel que $\overrightarrow{OM}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j} + h(t)\vec{k}$ pour chaque réel t de l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de $\vec{F}$.

L'ensemble Γ des points $M(t)$ est appelé courbe de l'espace. Le mode de parcours de cette courbe est défini par :

$$\text{(I)} \quad \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}$$

coordonnées de $M(t)$ dans le repère $\mathcal{R}$.

Le système (I) est appelé représentation paramétrique de Γ.

DÉFINITION 5

On appelle courbe paramétrée γ de l'espace $\mathcal{E}$ toute application $t \mapsto M(t)$ d'une partie $\mathcal{D}$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{E}$. L'ensemble Γ des points $M(t)$ s'appelle l'indicatrice de γ.

Si $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère de $\mathcal{E}$, une telle application est définie par la donnée des coordonnées $(f(t),\ g(t),\ h(t))$ de $M(t)$ dans $\mathcal{R}$.

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t)\ , \quad t \in \mathcal{D}, \text{ est une représentation paramétrique de } \Gamma. \\ z = h(t) \end{cases}$$

Une courbe paramétrée est dite continue (respectivement dérivable) en t_0 si, relativement à un repère de l'espace, sa représentation paramétrique $t \mapsto (f(t),\ g(t),\ h(t))$ est continue (respectivement dérivable) en t_0.

L'activité du début de ce chapitre montre que cette définition est indépendante du repère choisi.

3. TANGENTE À UNE COURBE PARAMÉTRÉE EN $M(t_0)$

Soit γ une courbe paramétrée d'indicatrice Γ.
Supposons que pour t différent de t_0 et assez voisin de t_0, on ait $M(t) \neq M(t_0)$.

Pour t distinct de t_0 et assez voisin de t_0, il passe une droite Δ_t par les points $M(t_0)$ et $M(t)$. Si $\overrightarrow{V}(t)$, vecteur directeur de Δ_t, admet une **limite non nulle** $\overrightarrow{V}$ lorsque t tend vers t_0, la droite Δ de repère $(M(t_0), \overrightarrow{V})$ est dite tangente à Γ en $M(t_0)$.
On dit que la droite Δ est limite des droites Δ_t lorsque t tend vers t_0. On démontre, et nous l'admettrons, qu'il y a unicité de la limite.

Condition suffisante d'existence de tangente

Soit γ une courbe paramétrée d'indicatrice Γ, $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de l'espace et $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$ une représentation paramétrique de γ dans le repère $\mathcal{R}$.
Posons $\overrightarrow{F}(t) = (f(t), g(t), h(t))$. Supposons $\overrightarrow{F}$ dérivable en t_0.
L'activité du début de ce chapitre montre que $\overrightarrow{F}'(t_0)$ est indépendant du repère $\mathcal{R}$ choisi.
On pose alors $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t_0) = f'(t_0)\vec{i} + g'(t_0)\vec{j} + h'(t_0)\vec{k}$. **Si $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t_0) \neq \vec{0}$, alors Γ admet une tangente en $M(t_0)$.**

En effet, $\dfrac{\overrightarrow{F}(t) - \overrightarrow{F}(t_0)}{t - t_0} = \left(\dfrac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}, \dfrac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0}, \dfrac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0}\right)$ et l'un au moins des trois nombres $f'(t_0)$, $g'(t_0)$, $h'(t_0)$ étant non nul, pour t assez voisin de t_0 et différent de t_0, l'un au moins des trois nombres $\dfrac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}$, $\dfrac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0}$, $\dfrac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0}$ est non nul, ainsi $M(t) \neq M(t_0)$.
De plus, le vecteur $\overrightarrow{V_t}$ de coordonnées $\left(\dfrac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}, \dfrac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0}, \dfrac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0}\right)$ est un vecteur directeur de la droite Δ_t passant par $M(t_0)$ et $M(t)$, et, lorsque t tend vers t_0, le vecteur $\overrightarrow{V_t}$ tend vers le vecteur de coordonnées $(f'(t_0), g'(t_0), h'(t_0))$. Ce vecteur est non nul; la droite Δ de repère $\left(M(t_0), \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t_0)\right)$ est donc tangente à Γ en $M(t_0)$.

THÉORÈME 3	**Si la courbe paramétrée $t \mapsto M(t)$ est dérivable en t_0 et si $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t_0) \neq \vec{0}$, alors la droite de repère $\left(M(t_0), \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t_0)\right)$ est tangente à la courbe en $M(t_0)$.**

4. EXEMPLES

1° Représentation paramétrique d'une droite :

$$\begin{cases} x = a + \alpha t \\ y = b + \beta t \\ z = c + \gamma t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \text{où } (\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0).$$

Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, l'ensemble décrit par $M(t)$ de coordonnées $(a + \alpha t, b + \beta t, c = \gamma t)$, quand t décrit $\mathbb{R}$, est la droite passant par le point A de coordonnées (a, b, c) et de vecteur directeur de coordonnées (α, β, γ). Notons que $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}(t) = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}$.

2° Représentation paramétrique d'une ellipse :

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}, \quad t \in [0, 2\pi[, \quad \text{où } a, b \text{ sont des réels strictement positifs.}$$

Dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan, l'ensemble décrit par $M(t)$ de coordonnées $(a \cos t, b \sin t)$, quand t décrit $[0, 2\pi[$, est l'ellipse d'équation cartésienne :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

3° Représentation paramétrique d'une hyperbole :

$$\begin{cases} x = \dfrac{a}{2}\left(t + \dfrac{1}{t}\right) \\ y = \dfrac{b}{2}\left(t - \dfrac{1}{t}\right) \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}^*, \quad a, b \text{ sont des réels strictement positifs.}$$

Dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan, l'ensemble décrit par $M(t)$ de coordonnées $\left(\dfrac{a}{2}\left(t + \dfrac{1}{t}\right), \dfrac{b}{2}\left(t - \dfrac{1}{t}\right)\right)$, quand t décrit $\mathbb{R}^*$, est l'hyperbole d'équation cartésienne :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

4° Représentation paramétrique d'une courbe d'équation $y = f(x)$:

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases}, \quad t \in \mathcal{D}_f$$

Dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan, l'ensemble des points $M(t)$ de coordonnées $(t, f(t))$ est la courbe représentative de f. Notons que si f est dérivable, $\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t) = \vec{i} + f'(t)\vec{j}$.

Exercices résolus

I – *Soit la courbe paramétrée γ :* $\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \\ z = t^3 \end{cases}$.

Trouver un système d'équations de la tangente au point $M(3)$.

$M(3)$ a pour coordonnées $(3, 9, 27)$. $\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(3)$ a pour coordonnées $(1, 6, 27)$.

Ainsi, pour que le point P de coordonnées (x, y, z) appartienne à la tangente à γ en $M(3)$, il faut, et il suffit, que le vecteur de coordonnées $(x - 3, y - 9, z - 27)$ soit colinéaire au vecteur de coordonnées $(1, 6, 27)$.

$\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-9}{6} = \dfrac{z-27}{27}$ est un système d'équations de la tangente en $M(3)$ à γ.

II – *Soit la courbe paramétrée γ :* $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \\ z = t^4 \end{cases}$

Montrer que γ admet une tangente en $M(0)$.

On remarque que $\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(0) = \vec{0}$ et $M(0) = 0$.

Pour $t \neq 0$, la droite $(OM(t))$ a pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{V_t}$ de coordonnées $(1, t, t^2)$. Lorsque t tend vers 0, $\overrightarrow{V_t}$ tend vers le vecteur de composantes $(1, 0, 0)$.

Les droites $(OM(t))$ admettent donc pour limite, quand t tend vers 0, la droite Δ passant par O et ayant pour vecteur directeur le vecteur de coordonnées $(1, 0, 0)$. **Δ est la tangente en $M(0)$ à γ.**

Exercices d'application

3. Déterminer les fonctions vectorielles dérivées des fonctions vectorielles définies par :

a) $\overrightarrow{F}(t) = (et^2, \ln(2-t), \ln(\sin t))$;

b) $\overrightarrow{G}(t) = \left(2\ln t, \dfrac{e^t - 1}{e^t + 1}, -t^t\right)$;

c) $\overrightarrow{H}(t) = (t - \ln t)\overrightarrow{F}(t) + \overrightarrow{G}(\ln t)$.

4. On donne les fonctions vectorielles $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{G}$ définies par :

$$\overrightarrow{F}(t) = (t, -1) \quad ; \quad \overrightarrow{G}(t) = (\ln t, t).$$

Déterminer la dérivée de chacune des fonctions numériques : $\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{G}$, $\|\overrightarrow{F}\|$, $\|\overrightarrow{G}\|$.

5. Soit la courbe paramétrée H définie par : $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = ht$, où a et h sont des réels strictement positifs.
Montrer que H admet une tangente en chaque point $M(t)$. Déterminer les coordonnées d'un vecteur directeur de la tangente à H en $M(t)$. Montrer qu'elle fait un angle constant avec l'axe Oz.

6. Soit γ une courbe paramétrée de l'espace $t \mapsto M(t)$. Soit O un point de l'espace. On suppose que l'application $t \mapsto \overrightarrow{OM}(t)$ est dérivable sur l'intervalle I, et qu'il existe un vecteur non nul $\vec{k}$ tel que, pour tout t de I, $\vec{k} \wedge \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \vec{0}$.
Montrer que le support de γ est inclus dans une droite de vecteur directeur $\vec{k}$.

7. Soit γ une courbe paramétrée $t \mapsto M(t)$ dérivable sur l'intervalle I telle que $t \mapsto \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t)$ soit continue sur I (O est un point de l'espace). On suppose qu'il existe un point A tel que, pour tout t de I :

$$\overrightarrow{AM}(t) \wedge \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \vec{0} \qquad (1).$$

Montrer que l'indicatrice Γ de γ est inclus dans des droites passant par A. (On pourra se donner un repère orthonormal direct d'origine A et utiliser les équations différentielles définies par (1).)

8. Soit O un point de l'espace et γ une courbe paramétrée $t \mapsto M(t)$ deux fois dérivable sur l'intervalle I telle que, pour tout t de I :

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t) \neq \vec{0} \quad \text{et} \quad \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t) \wedge \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}(t) = \vec{0}.$$

a) Considérer, pour chaque t de l'intervalle I, le point $m(t)$ tel que $\overrightarrow{Om}(t) = \dfrac{\alpha \overrightarrow{OM}}{dt}$. Montrer que la courbe paramétrée $t \mapsto m(t)$ a pour indicatrice une partie d'une droite passant par O. (On utilisera l'exercice **7.**)

b) En utilisant l'exercice **6.**, en déduire que l'indicatrice de γ est incluse dans une droite.

III – EXEMPLES DE COURBES PARAMÉTRÉES

1. CYCLOÏDES

Supposons qu'un cercle roule sans glisser sur une droite Δ. La courbe décrite par un point M de ce cercle est appelée cycloïde. Nous nous proposons de chercher une représentation paramétrique de cette courbe.

A l'instant 0, le point M est en contact avec la droite Δ. Considérons la position du cercle à l'instant t (figure 3).

La condition de roulement sans glissement signifie $\|\overrightarrow{OI}\| = \ell(\widehat{IM})$, où $\ell(\widehat{IM})$ désigne la longueur de l'arc $\widehat{IM}$.

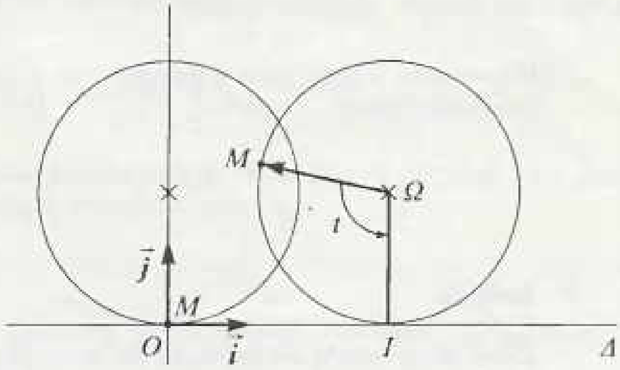


Figure 3

Soit t la mesure en radians de l'angle $(\widehat{\overrightarrow{\Omega I}, \overrightarrow{\Omega M}})$ telle que $\ell(\widehat{IM}) = Rt$.
Dans le repère orthonormal direct $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$, où l'axe des abscisses est Δ muni d'un sens positif, on a :

$$(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{\Omega M}}) = (\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{\Omega I}}) + (\widehat{\overrightarrow{\Omega I}, \overrightarrow{\Omega M}}) ;$$

Il en résulte que $-t-\dfrac{\pi}{2}\quad[2\pi]$ est une mesure en radians de l'angle $(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{\Omega M}})$.

Les coordonnées de $\overrightarrow{\Omega M}$, dans le repère $\mathcal{R}$, sont donc :

$$\left(R\cos\left(-t-\frac{\pi}{2}\right), R\sin\left(-t-\frac{\pi}{2}\right)\right).$$

Comme $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O\Omega} + \overrightarrow{\Omega M}$, les coordonnées x et y de M dans le repère $\mathcal{R}$ sont :

$$\begin{cases} x = Rt + R\cos\left(-t-\dfrac{\pi}{2}\right) \\ y = R + R\sin\left(-t-\dfrac{\pi}{2}\right), \end{cases}$$

soit :

$$\begin{cases} x = R(t-\sin t) \\ y = R(1-\cos t) \end{cases}.$$

On vient d'obtenir une représentation paramétrique de la cycloïde. L'allure de cette courbe est illustrée par la figure 4. Au point $M(\pi)$, la tangente est horizontale; aux points $M(0)$ et $M(2\pi)$, les tangentes sont verticales.

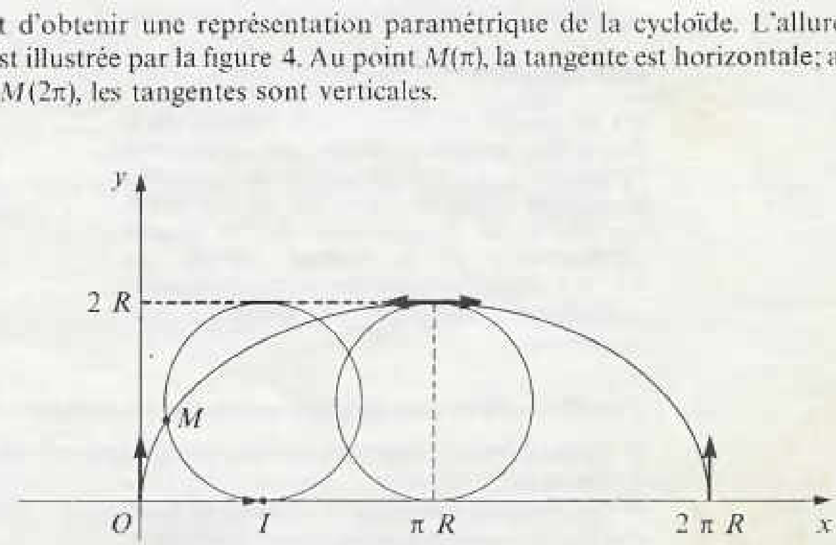


Figure 4 **arche de cycloïde**

2. ÉTUDE LOCALE D'UNE COURBE PARAMÉTRÉE

On suppose le plan muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et soit la courbe paramétrée définie sur un intervalle I par :

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$$

★ Activité

Étude de la courbe au voisinage du point $M(t_0)$

a) *On suppose que f et g admettent des développements limités à l'ordre deux au voisinage de t_0 :*

$$\begin{cases} x = f(t) = a_0 + a_1(t - t_0) + a_2(t - t_0)^2 + (t - t_0)^2\varepsilon_1(t), \\ y = g(t) = b_0 + b_1(t - t_0) + b_2(t - t_0)^2 + (t - t_0)^2\varepsilon_2(t), \\ \lim\limits_{t_0} \varepsilon_1 = 0 \quad et \quad \lim\limits_{t_0} \varepsilon_2 = 0. \end{cases}$$

Montrer que, si f et g sont supposées deux fois dérivables, on a : $f'(t_0) = a_1$ et $f''(t_0) = 2a_2$, *de même :* $g'(t_0) = b_1$ et $g''(t_0) = 2b_2$.
(On pourra donner le développement limité de f' en t_0, en déduire celui de f et utiliser l'unicité d'un développement limité.)

En déduire que $\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t_0) = a_1\vec{i} + b_1\vec{j}$ et $\dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}(t_0) = 2a_2\vec{i} + 2b_2\vec{j}$.

b) *On pose* $\vec{u} = a_1\vec{i} + b_1\vec{j}$ *et* $\vec{v} = a_2\vec{i} + b_2\vec{j}$. *On suppose que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont linéairement indépendants. Montrer que $M(t)$ a pour coordonnées, dans le repère $(M(t_0), \vec{u}, \vec{v})$:*

$$\begin{cases} X = (t - t_0)(1 + (t - t_0)\alpha_1(t)) \\ Y = (t - t_0)^2(1 + \alpha_2(t)) \end{cases},$$

où $\lim\limits_{t_0} \alpha_1 = 0$ *et* $\lim\limits_{t_0} \alpha_2 = 0$.

En déduire que, si t est assez voisin de t_0, on a :

$$\operatorname{sgn} X = \operatorname{sgn}(t - t_0) \quad et \quad Y \geqslant 0.$$

*On obtient ainsi l'allure de la courbe au **voisinage** du point $M(t_0)$* (figure 5). *La flèche indique le sens du parcours suivant les « t croissants ».*

REMARQUE :

S'il est possible de trouver t en fonction de x, c'est-à-dire lorsque f admet une application réciproque f^{-1}, la construction de la courbe paramétrée définie par $x = f(t)$ et $y = g(t)$ se ramène à la construction de la courbe représentative de la fonction définie par $y = g(f^{-1}(x))$. Cette dernière équation s'appelle, naturellement, équation cartésienne de la courbe paramétrée.

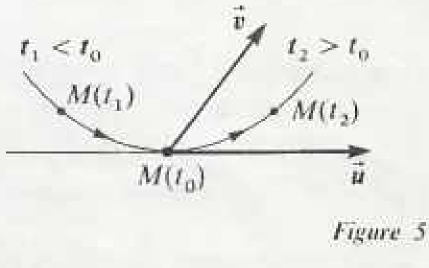


Figure 5

Conseils pratiques pour l'étude d'une courbe paramétrée :

a) On peut réduire l'intervalle d'étude pour l'examen de la périodicité de la fonction $t \mapsto M(t)$ et des symétries éventuelles.

b) On étudie les variations de x et de y en fonction de t. Celles-ci s'effectuent à l'aide du signe des dérivées lorsque ces fonctions sont dérivables.

c) On étudie l'allure de l'indicatrice au voisinage de quelques points bien choisis. En particulier, on détermine les points aux tangentes parallèles aux axes.

Les points $M(t_0)$ tels que $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \vec{0}$ sont appelés points stationnaires. Des indications seront données par l'énoncé pour étudier l'allure de la courbe au voisinage de tels points.

d) On trace approximativement la courbe à l'aide des indications précédentes. On peut orienter la courbe dans le sens des « t croissants » par l'utilisation de flèches et indiquer pour quelques points particuliers les valeurs correspondantes de t.

3. COURBE DE LISSAJOUS

Soit la courbe paramétrée définie par : $\begin{cases} x = \sin 2t \\ y = \sin 3t. \end{cases}$

Nous remarquons que x et y ont 2π pour période commune.
Ainsi $M(t + 2\pi) = M(t)$.
$M(-t)$ et $M(t)$ sont symétriques par rapport à O.
$x(t+\pi) = x(t)$ et $y(t+\pi) = -y(t)$, donc $M(t)$ et $M(t+\pi)$ sont symétriques par rapport à Ox parallèlement à Oy.
Il suffit donc d'étudier la courbe sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, puis d'effectuer une symétrie par rapport à O et une symétrie par rapport à Ox, pour avoir toute la courbe.
A cette fin, dressons un tableau de variation de x et y.

$$\begin{cases} x' = 2 \cos 2t \\ y' = 3 \cos 3t \end{cases}$$

t	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
x'	2	$+$		$+$	0	$-$	-1		-2
x	0	↗	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	↗	1	↘	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	↘	0
y	0	↗	1	↘	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	↘	0	↘	-1
y'	3	$+$	0	$-$		$-$	-3		0

On remarque que la courbe est dans le carré de centre O, de côtés de longueur 2 et parallèles aux axes (figure 6).

- En $M(0)$, la tangente admet pour vecteur directeur le vecteur de composantes $(2, 3)$;
- en $M\left(\dfrac{\pi}{6}\right)$, la tangente est horizontale;
- en $M\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$, la tangente est verticale;
- en $M\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$, la tangente est horizontale.

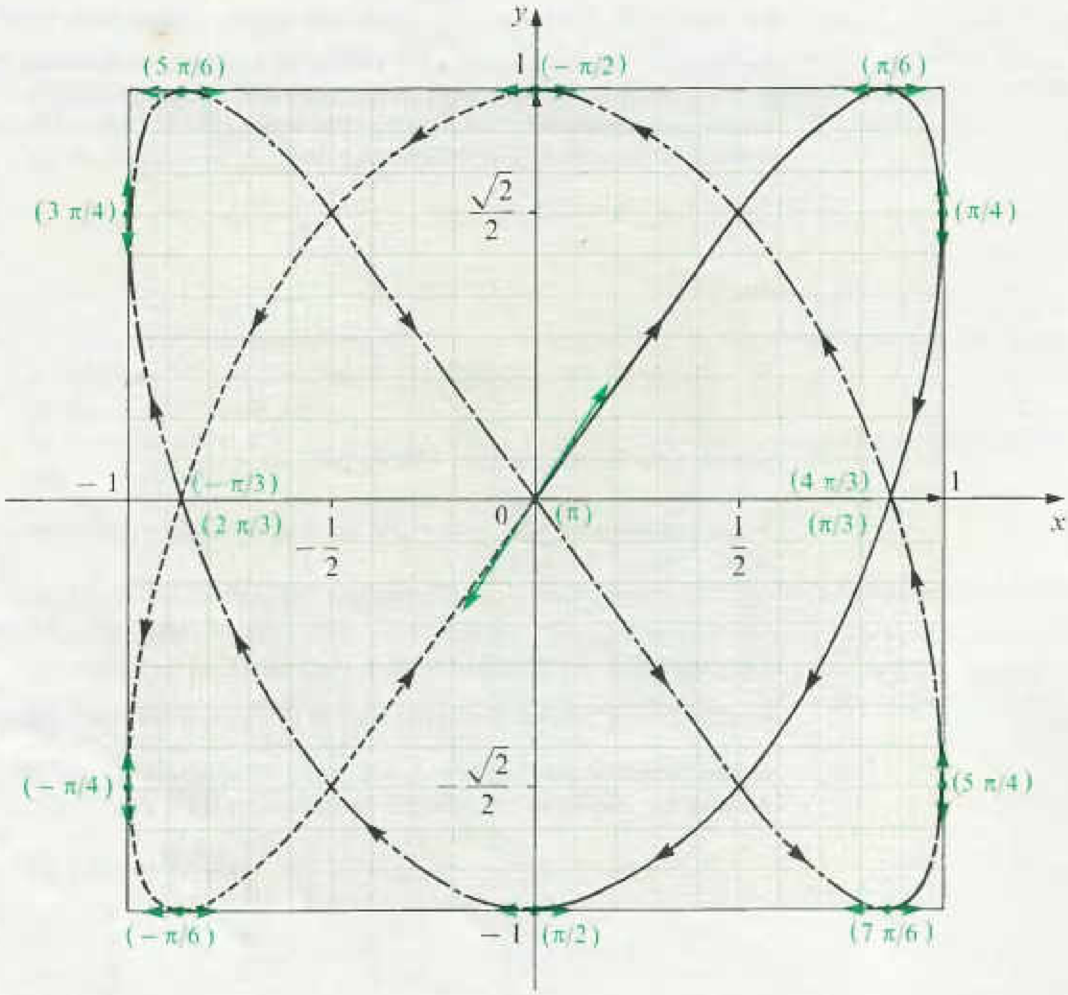


Figure 6

La courbe en trait plein est obtenue pour t parcourant $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

La courbe en pointillé est obtenue pour t parcourant $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$.

La courbe tracée en tiret-point est obtenue pour t parcourant $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

La flèche indique le sens de parcours suivant les « t croissants ».

REMARQUES :

1° La précision du tracé de la courbe dépend du nombre de points au voisinage desquels on fait l'étude.

2° Le tracé de la courbe met en évidence des points tels que $M(t_1) = M(t_2)$, pour $t_1 < t_2$. On les appelle **points multiples.**

Déterminons-les, pour t_1 et t_2, dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

$\sin 2t_1 = \sin 2t_2$ et $\sin 3t_1 = \sin 3t_2$ signifie :

$$\sin(t_2 - t_1)\cos(t_1 + t_2) = 0 \quad \text{et} \quad \sin\frac{3(t_2 - t_2)}{2}\cos\frac{3(t_1 + t_2)}{2} = 0.$$

Avec les conditions imposées,

$\sin(t_2 - t_1) = 0$ équivaut à : $t_2 - t_1 = \pi$;

$\sin \dfrac{3(t_2 - t_1)}{2} = 0$ équivaut à : $\dfrac{3(t_2 - t_1)}{2} = \pi$ ou $\dfrac{3(t_2 - t_1)}{2} = 2\pi$,

c'est-à-dire : $t_2 - t_1 = \dfrac{2\pi}{3}$ ou $t_2 - t_1 = \dfrac{4\pi}{3}$;

$\cos(t_1 + t_2) = 0$ équivaut à :

$$t_1 + t_2 = -\frac{\pi}{2} \text{ ou } t_1 + t_2 = \frac{\pi}{2} \text{ ou } t_1 + t_2 = \frac{3\pi}{2} \text{ ou } t_1 + t_2 = \frac{5\pi}{2};$$

$\cos \dfrac{3(t_1 + t_2)}{2} = 0$ équivaut à : $\dfrac{3}{2}(t_1 + t_2) = -\dfrac{\pi}{2}$ ou $\dfrac{3}{2}(t_1 + t_2) = \dfrac{\pi}{2}$ ou $\dfrac{3}{2}(t_1 + t_2) = \dfrac{3\pi}{2}$

ou $\dfrac{3}{2}(t_1 + t_2) = \dfrac{5\pi}{2}$ ou $\dfrac{3}{2}(t_1 + t_2) = \dfrac{7\pi}{2}$ ou $\dfrac{3}{2}(t_1 + t_2) = \dfrac{9\pi}{2}$,

c'est-à-dire : $t_1 + t_2 = -\dfrac{\pi}{3}$ ou $t_1 + t_2 = \dfrac{\pi}{3}$ ou $t_1 + t_2 = \pi$

ou $t_1 + t_2 = \dfrac{5\pi}{3}$ ou $t_1 + t_2 = \dfrac{7\pi}{3}$ ou $t_1 + t_2 = 3\pi$.

Comme $\sin(t_2 - t_1) = 0$ et $\sin \dfrac{3(t_2 - t_1)}{2} = 0$ sont incompatibles, ainsi que $\cos(t_1 + t_2) = 0$ et $\cos \dfrac{3(t_2 + t_1)}{2} = 0$, on a : $M(t_1) = M(t_2)$ si, et seulement si :

$$\Big[t_2 - t_1 = \pi \text{ et } \Big(t_1 + t_2 = -\frac{\pi}{3} \text{ ou } t_1 + t_2 = \frac{\pi}{3}$$
$$\text{ou } t_1 + t_2 = \pi \text{ ou } t_1 + t_2 = \frac{5\pi}{3} \text{ ou } t_1 + t_2 = \frac{7\pi}{3} \text{ ou } t_1 + t_2 = 3\pi\Big)\Big]$$

$$\text{ou : }\Big[\Big(t_2 - t_1 = \frac{2\pi}{3} \text{ ou } t_2 - t_1 = \frac{4\pi}{3}\Big)$$
$$\text{et } \Big(t_1 + t_2 = -\frac{\pi}{2} \text{ ou } t_1 + t_2 = \frac{\pi}{2} \text{ ou } t_1 + t_2 = \frac{3\pi}{2} \text{ ou } t_1 + t_2 = \frac{5\pi}{2}\Big)\Big].$$

$t_2 - t_1 = \pi$ et $t_1 + t_2 = -\dfrac{\pi}{3}$ équivaut à $t_2 = \dfrac{\pi}{3}$ et $t_1 = -\dfrac{2\pi}{3}$.

$t_2 - t_1 = \pi$ et $t_1 + t_2 = \dfrac{\pi}{3}$ équivaut à $t_2 = \dfrac{2\pi}{3}$ et $t_1 = -\dfrac{\pi}{3}$.

$t_2 - t_1 = \pi$ et $t_1 + t_2 = \pi$ équivaut à $t_2 = \pi$ et $t_1 = 0$.

$t_2 - t_1 = \pi$ et $t_1 + t_2 = \dfrac{5\pi}{3}$ équivaut à $t_2 = \dfrac{4\pi}{3}$ et $t_1 = \dfrac{\pi}{3}$.

$t_2 - t_1 = \pi$ et $t_1 + t_2 = \dfrac{7\pi}{3}$ équivaut à $t_2 = \dfrac{5\pi}{3}$ et $t_1 = \dfrac{2\pi}{3}$.

$t_2 - t_1 = \pi$ et $t_1 + t_2 = 3\pi$ équivaut à $t_2 = 2\pi$ et $t_1 = \pi$.

$t_2 - t_1 = \dfrac{2\pi}{3}$ et $t_1 + t_2 = -\dfrac{\pi}{2}$ équivaut à $t_2 = \dfrac{\pi}{12}$ et $t_1 = \dfrac{-7\pi}{12}$.

$t_2 - t_1 = \dfrac{2\pi}{3}$ et $t_1 + t_2 = \dfrac{\pi}{2}$ équivaut à $t_2 = \dfrac{7\pi}{12}$ et $t_1 = -\dfrac{\pi}{12}$.

$t_2 - t_1 = \dfrac{2\pi}{3}$ et $t_1 + t_2 = \dfrac{3\pi}{2}$ équivaut à $t_2 = \dfrac{13\pi}{12}$ et $t_1 = \dfrac{5\pi}{12}$.

$t_2 - t_1 = \dfrac{2\pi}{3}$ et $t_1 + t_2 = \dfrac{5\pi}{2}$ équivaut à $t_2 = \dfrac{19\pi}{12}$ et $t_1 = \dfrac{11\pi}{12}$.

$t_2 - t_1 = \dfrac{4\pi}{3}$ et $t_1 + t_2 = -\dfrac{\pi}{2}$ équivaut à $t_2 = \dfrac{5\pi}{12}$ et $t_1 = -\dfrac{11\pi}{12}$.

$t_2 - t_1 = \frac{4\pi}{3}$ et $t_1 + t_2 = \frac{\pi}{2}$ équivaut à $t_2 = \frac{11\pi}{12}$ et $t_1 = -\frac{5\pi}{12}$.

$t_2 - t_1 = \frac{4\pi}{3}$ et $t_1 + t_2 = \frac{3\pi}{2}$ équivaut à $t_2 = \frac{17\pi}{12}$ et $t_1 = \frac{\pi}{12}$.

$t_2 - t_1 = \frac{4\pi}{3}$ et $t_1 + t_2 = \frac{5\pi}{2}$ équivaut à $t_2 = \frac{23\pi}{12}$ et $t_1 = \frac{7\pi}{12}$.

En conclusion, puisque t_1 et t_2 sont cherchés dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$, on a :

$$M(0) = M(\pi) = (0, 0),$$

$$M\left(-\frac{\pi}{3}\right) = M\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right),$$

$$M\left(\frac{\pi}{3}\right) = M\left(-\frac{4\pi}{3}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right),$$

$$M\left(7\frac{\pi}{12}\right) = M\left(\frac{-\pi}{12}\right) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$M\left(\frac{5\pi}{12}\right) = M\left(\frac{13\pi}{12}\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$M\left(\frac{11\pi}{12}\right) = M\left(-\frac{5\pi}{12}\right) = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

$$M\left(\frac{17\pi}{12}\right) = M\left(\frac{\pi}{12}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

On peut visualiser les courbes de Lissajous sur un oscillographe cathodique.

4. EXEMPLE OÙ L'ON PEUT SE RAMENER À UNE ÉQUATION CARTÉSIENNE

Dans le plan muni d'un repère orthonormal, on considère la courbe paramétrée Γ définie par :

$$M(t)\begin{cases} x = -1 + \ln t \\ y = -2t + t \ln t \end{cases}, \quad \textit{où} \quad t > 0.$$

Déterminer une équation cartésienne de Γ et construire cette courbe.

On a : $\ln t = x + 1$, donc : $t = e^{x+1}$, par suite : $y = -2\,e^{x+1} + e^{x+1}(x+1)$,

soit : $$y = e^{x+1}(x-1).$$

Une équation cartésienne de Γ est $y = e^{x+1}(x-1)$ avec x réel.

De plus, $\frac{dy}{dx} = e^{x+1}x$ et $\frac{d^2y}{dx^2} = e^{x+1}(x+1)$, d'où le tableau de variation :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$\frac{dy}{dx}$			$-$		0		$+$		
y	0	↘	-2	↘	$-e$	↗	0	↗	$+\infty$

Quand x tend vers $-\infty$, e^{x+1} tend vers 0 et $x\,e^{x+1}$ tend vers 0, car
$\ln|x\,e^{x+1}| = \ln|x| + x + 1 = x\left(\dfrac{\ln|x|}{x} + 1 + \dfrac{1}{x}\right)$, donc $\ln|x\,e^{x+1}|$ tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$.
La courbe change de concavité au point d'abscisse -1. Pour x inférieur à -1, elle est concave et, pour x supérieur à -1, elle est convexe (figure 7).

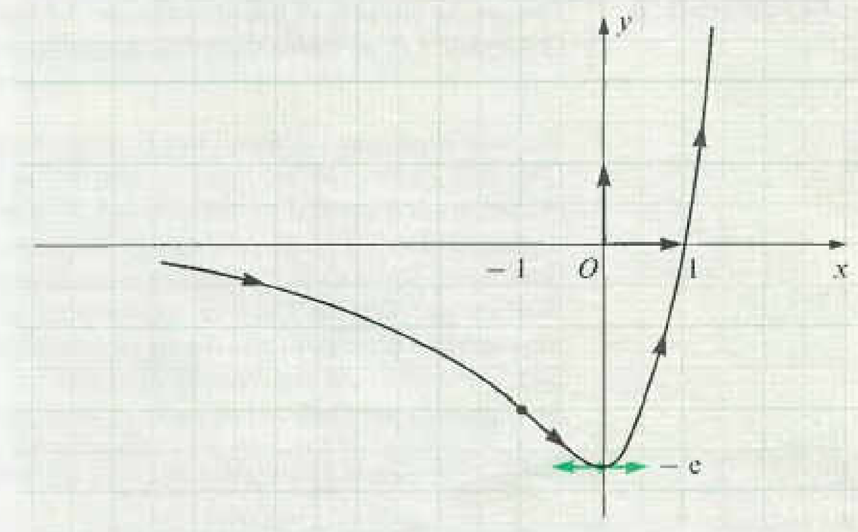


Figure 7

Exercices d'application

9. Construire la courbe paramétrée :
$$\begin{cases} x = \cos 3t \\ y = \cos \sin t \end{cases}$$

10. Construire la courbe paramétrée :
$$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t + t^3 \end{cases}$$
Étudier la forme de la courbe au voisinage de $M\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

11. Construire la courbe paramétrée :
$$\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$$
On montrera qu'en $M(0)$ la courbe admet une tangente horizontale et qu'en $M\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ elle admet une tangente verticale.
Étudier la forme de la courbe au voisinage de $M\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.

12. Construire la courbe paramétrée :
$$\begin{cases} x = \cos 4t + 4\cos t \\ y = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}\sin 3t \end{cases}$$
Préciser la forme de la courbe au voisinage du point $M\left(\dfrac{\pi}{3}\right)$.

13. Construire la courbe paramétrée :
$$\begin{cases} x = -\dfrac{1}{2}(e^t - e^{-t}) \\ y = \dfrac{2-\sqrt{3}}{2}e^t + \dfrac{2+\sqrt{3}}{2}e^{-t} \end{cases}$$
On pourra exprimer e^t et e^{-t} à l'aide de $x(t)$ et $y(t)$.

14. Construire la courbe paramétrée :
$$\begin{cases} x = t - 1 \\ y = 1 - \dfrac{1}{t} - \ln t \end{cases}$$
avec $t \geqslant 1$.
On précisera le sens de parcours quand t augmente.

IV – CINÉMATIQUE DU POINT

1. MOUVEMENT PONCTUEL

DÉFINITION 6

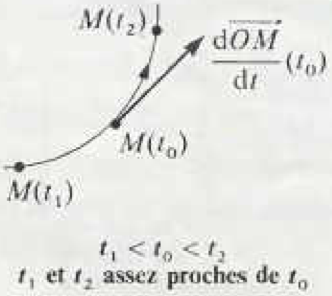
Un mouvement ponctuel **est une application $t \mapsto M(t)$ d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans l'espace, au moins deux fois dérivable sur I. C'est donc une courbe paramétrée définie sur l'intervalle I et au moins deux fois dérivable sur I.**

On peut généraliser la définition d'un mouvement ponctuel de la manière suivante :
C'est une application continue $t \mapsto M(t)$ d'un intervalle I de $\mathbb{R}$ dans l'espace, deux fois dérivable sur I privé d'un nombre fini de points.
Cette définition a l'avantage d'inclure l'étude des mouvements ponctuels avec chocs : aux instants où il y a choc, la fonction $t \mapsto M(t)$ peut ne plus être deux fois dérivable.
Notons que l'étude d'un tel mouvement se ramène à celle d'un nombre fini de mouvements ponctuels au sens de notre définition.
Soit $t \mapsto M(t)$ un mouvement ponctuel.
Sa **trajectoire** est l'indicatrice de la courbe paramétrée définie par ce mouvement.
Son **vecteur vitesse à l'instant t** est $\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t)$, où O est un point de l'espace. On sait que ce vecteur est indépendant de O. On note $\vec{V}_M(t) = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t)$, ou encore $\vec{V}(t) = \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t)$.
$\|\vec{V}(t)\|$ est le **module** de la vitesse à l'instant t et est aussi appelé **vitesse arithmétique** du point M à l'instant t.
Son **vecteur accélération à l'instant t** est $\dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}(t)$. On note $\vec{\Gamma}_M(t) = \dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}(t)$, ou encore $\vec{\Gamma}(t) = \dfrac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}(t)$. Le vecteur accélération est aussi noté $\vec{a}(t)$.
Si O est un point de l'espace, la trajectoire du point $P(t)$ tel que $\overrightarrow{OP}(t) = \vec{V}_M(t)$ s'appelle l'**hodographe, relatif au point O** du mouvement ponctuel. On remarquera que les hodographes d'un mouvement ponctuel se déduisent les uns des autres par translations.

REMARQUE :

Si $\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t_0) \neq \vec{0}$, on sait que la trajectoire du mouvement admet une tangente au point $M(t_0)$ dont $\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t_0)$ est un vecteur directeur. On a alors l'un des deux cas de figure suivants :

◄ *Figure 8*



$t_1 < t_0 < t_2$
t_1 et t_2 assez proches de t_0

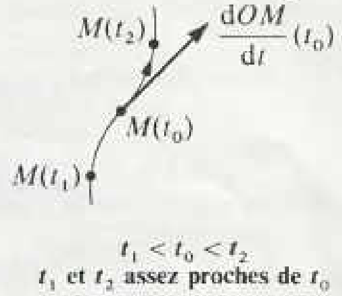


Figure 9 ►

$t_1 < t_0 < t_2$
t_1 et t_2 assez proches de t_0

2. MOUVEMENT ACCÉLÉRÉ, RETARDÉ

DÉFINITION 7

Un mouvement est dit *accéléré*, sur l'intervalle J, lorsque le module de la vitesse est une fonction croissante sur J.
Un mouvement est dit *retardé*, sur l'intervalle J, lorsque le module de la vitesse est une fonction décroissante sur J.
Un mouvement est dit *uniforme* lorsque le module de la vitesse est constant.

THÉORÈME 9

Pour qu'un mouvement soit accéléré sur l'intervalle J, il faut, et il suffit, que quel que soit l'instant t de J : $\vec{V}_M(t) \cdot \vec{\Gamma}_M(t) \geqslant 0$.
Pour qu'un mouvement soit retardé sur l'intervalle J, il faut, et il suffit, que quel que soit l'instant t de J : $\vec{V}_M(t) \cdot \vec{\Gamma}_M(t) \leqslant 0$.

La démonstration résulte de l'étude de $f(t) = \left\| \dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t) \right\|$. Nous savons en effet que cette fonction est dérivable en tout point t tel que $\dfrac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t) \neq \vec{0}$ et que sa dérivée vérifie $f'(t) = \dfrac{\vec{V}_M(t) \cdot \vec{\Gamma}_M(t)}{\|\vec{V}_M(t)\|}$ (voir la dérivée de la norme d'une fonction vectorielle).

Exercices résolus

1 — *Soit le mouvement ponctuel défini dans un repère orthonormal $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan par :*

$$M(t) \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \ln t \\ y = \ln (t-1) \end{cases} \quad \textit{pour} \quad t > 1.$$

Ce mouvement est-il retardé ou accéléré?

Calculons les coordonnées des vecteurs $\vec{V}_M(t)$ et $\vec{\Gamma}_M(t)$ dans $(\vec{i}, \vec{j})$:

$$\vec{V}_M(t) \begin{cases} \dfrac{1}{2t} \\ \dfrac{1}{t-1} \end{cases} \quad \text{et} \quad \vec{\Gamma}_M(t) \begin{cases} \dfrac{-1}{2t^2} \\ -\dfrac{1}{(t-1)^2} \end{cases}.$$

Calculons le produit scalaire de $\vec{V}_M(t)$ et $\vec{\Gamma}_M(t)$:

$$\vec{V}_M(t) \cdot \vec{\Gamma}_M(t) = -\frac{1}{4t^3} - \frac{1}{(t-1)^3}.$$

Ce nombre est négatif pour $t > 1$, donc le mouvement est retardé.

REMARQUE :

On a $t = e^{2x}$ et $x > 0$, donc $y = \ln(e^{2x} - 1)$ avec $x > 0$. Ainsi, obtient-on une équation cartésienne de la trajectoire.

II — *Soit le mouvement ponctuel défini dans le repère orthonormal* $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ *par :*

$$M(t)\begin{cases} x = e^{-t} \\ y = 1 - 2t - e^{-t} \end{cases} \quad \text{pour} \quad t \geqslant 0.$$

Ce mouvement est-il accéléré ou retardé?

Calculons les coordonnées de $\vec{V}_M(t)$ et $\vec{\Gamma}_M(t)$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$:

$$\vec{V}_M(t)\begin{cases} -e^{-t} \\ -2 + e^{-t} \end{cases} \quad \text{et} \quad \vec{\Gamma}_M(t)\begin{cases} e^{-t} \\ -e^{-t} \end{cases}.$$

Calculons le produit scalaire de $\vec{V}_M(t)$ et $\vec{\Gamma}_M(t)$:

$$\vec{V}_M(t) \cdot \vec{\Gamma}_M(t) = -e^{-2t} + 2e^{-t} - e^{-2t} = 2e^{-t}(1 - e^{-t}) \geqslant 0, \quad \text{pour} \quad t \geqslant 0.$$

Le mouvement est donc accéléré.

REMARQUE :

On a : $-t = \ln x$ et $0 \leqslant x \leqslant 1$, donc $y = 1 + 2\ln x - x$. Ainsi, obtient-on une équation cartésienne de la trajectoire.

III — *Soit le mouvement ponctuel défini dans le repère orthonormal* $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ par :

$$M(t)\begin{cases} x = t - 2 \\ y = t + 2 + \dfrac{6}{t-3} \end{cases}, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2.$$

Construire la trajectoire du mouvement et examiner s'il est retardé ou accéléré.

Une équation cartésienne de la trajectoire est $y = x + 4 + \dfrac{6}{x-1}$, pour $-2 \leqslant x \leqslant 0$.

On a :
$$\vec{V}_M(t)\begin{cases} 1 \\ 1 - \dfrac{6}{(t-3)^2} \end{cases} \quad \text{et} \quad \vec{\Gamma}_M(t)\begin{cases} 0 \\ \dfrac{12}{(t-3)^3} \end{cases}.$$

Ainsi :

$$\vec{V}_M(t) \cdot \vec{\Gamma}_M(t) = \frac{12}{(t-3)^3}\left(1 - \frac{6}{(t-3)^2}\right) = \frac{12}{(t-3)^3}\left(\frac{(t-3-\sqrt{6})(t-3+\sqrt{6})}{(t-3)^2}\right).$$

Le tableau suivant nous renseigne sur l'allure du mouvement :

t	0	$3-\sqrt{6}$	2
$\vec{V}_M(t) \cdot \vec{\Gamma}_M(t)$	$-$	0	$+$
allure du mouvement	le mouvement est retardé		le mouvement est accéléré

Recherche d'une équation cartésienne du mouvement :

$$t = x + 2, \quad \text{donc :} \quad y = x + 4 + \frac{6}{x-1} \quad \text{et} \quad -2 \leqslant x \leqslant 0.$$

$M(3 - \sqrt{6})$ a pour coordonnées $(1 - \sqrt{6}, 5 - 2\sqrt{6})$; la tangente en $M(3 - \sqrt{1})$ est horizontale (figure 10).

La tangente en $M(0)$ a pour vecteur directeur

$$\overrightarrow{V_M}(0) \begin{cases} 1 \\ 1 - \dfrac{6}{9} = \dfrac{1}{3} \end{cases}.$$

La tangente en $M(2)$ a pour vecteur directeur

$$\overrightarrow{V_M}(2) \begin{cases} 1 \\ 1 - 6 = -5 \end{cases}.$$

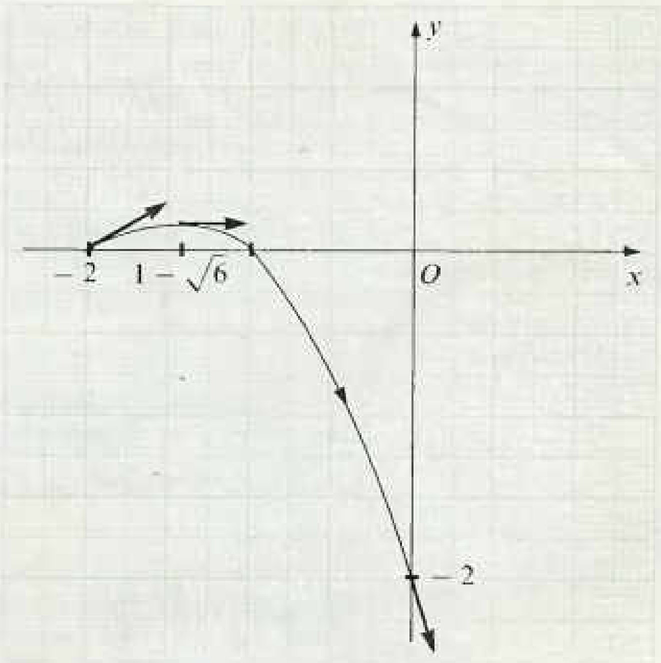


Figure 10

IV — Lancer d'un projectile

Un projectile est lancé, à l'instant $t = 0$ du point O avec un vecteur-vitesse initiale de coordonnées $(0, y'_0, z'_0)$ dans le repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, où $\vec{k}$ est le vecteur unitaire de la direction verticale du lieu dirigé vers le haut. Le mouvement du centre de gravité $M(t)$ du projectile est régi par l'équation :

$$m\overrightarrow{\Gamma_M}(t) = -mg\vec{k}, \tag{1}$$

où m désigne la masse du projectile et g l'accélération de la pesanteur, si l'on convient que la résistance de l'air est nulle.

Si $(x(t), y(t), z(t))$ désignent les coordonnées de $M(t)$, l'équation vectorielle (1) se traduit par trois équations :

$$x''(t) = 0, \quad y''(t) = 0, \quad z''(t) = -g.$$

Ainsi, $x(t) = a_1 t + b_1$, $y(t) = a_2 t + b_2$ et $z(t) = -\dfrac{gt^2}{2} + ct + d$.

Comme $x(0) = y(0) = z(0) = 0$, on a $b_1 = b_2 = d = 0$.
Comme $x'(0) = 0$, $y'(0) = y'_0$, $z'(0) = z'_0$, on a $a_1 = 0$, $a_2 = y'_0$ et $c = z'_0$.
Le mouvement de $M(t)$ est donc défini par :

$$\begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = y'_0 t \\ z(t) = -g\dfrac{t^2}{2} + z'_0 t = t\left(-\dfrac{gt}{2} + z'_0\right) \end{cases}$$

On constate que le mouvement s'effectue dans le plan yOz et que $M(t)$ décrit un arc de la parabole d'équation $z = -\dfrac{gy^2}{2y_0'^2} + \dfrac{z'_0 y}{y'_0}$ (figure 11).

D'autre part, le projectile tombera ($z = 0$) à l'instant $\dfrac{2z'_0}{g}$ et à une distance d du point de lancement telle que $d = \dfrac{2\,|y'_0 z'_0|}{g}$.

Si $z'_0 = y'_0 \tan\alpha$, avec $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, on a $d = 2y_0'^2 \dfrac{\tan\alpha}{g}$.

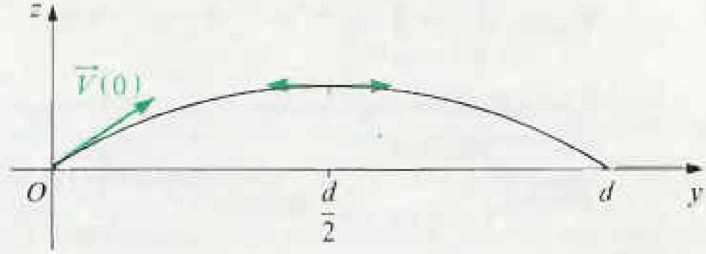


Figure 11

Enfin, le projeté orthogonal $m(t)$, de $M(t)$ sur l'axe Oy, a pour abscisse $y(t) = y'_0 t$. Il est donc animé d'un mouvement rectiligne uniforme.

Le sommet de la parabole a pour abscisse $\dfrac{d}{2}$ (figure 11).

V — Déviation d'un faisceau d'électrons dans un champ électrique.

On suppose qu'un champ électrique uniforme est créé par deux plaques parallèles (figure 12) *dans le vide d'un tube électronique. Les lignes de champ sont normales aux plaques.*

On suppose que le faisceau d'électrons est normal aux lignes de champ et aborde ce champ au point O, chaque électron ayant la même vitesse $\vec{v}_0$.

Soit $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ un repère orthonormal de l'espace tel que $\vec{e}_1$ soit colinéaire et de même sens que $\vec{v}_0$, et $\vec{e}_2$ normal aux plaques comme il est indiqué sur la figure 12.

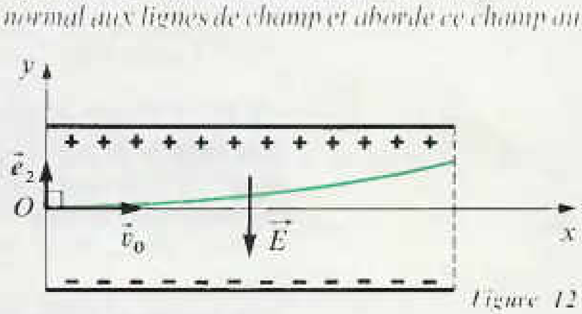


Figure 12

Soit un électron M de masse m et de charge $-e$. Supposons que l'action sur l'électron de la pesanteur soit nulle, qu'il n'y ait aucune résistance et que la vitesse $\|\vec{v}_0\|$ soit négligeable devant celle de la lumière. Soit E l'intensité constante du champ électrique.

Le mouvement de l'électron M est alors régi par l'équation différentielle :

$$m\overrightarrow{\Gamma}_M(t) = eE\vec{e}_2. \tag{1}$$

Si $(x(t), y(t), z(t))$ désignent les coordonnées de M, de (1) il résulte :

$$x''(t) = 0, \quad y''(t) = \frac{eE}{m}, \quad z''(t) = 0.$$

D'où : $$x(t) = a_1 t + b_1, \quad y(t) = \frac{eE}{2m} t^2 + ct + d, \quad z(t) = a_2 t + b_2.$$

D'après les conditions initiales, on a :

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t \\ y(t) = \dfrac{eE}{2m} t^2 \quad \text{en posant} \quad v_0 = \|\vec{v}_0\| . \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

L'électron décrit donc un arc de parabole d'équation :

$$\boxed{y = \frac{eE}{2m} \frac{x^2}{v_0^2} .}$$

3. MOUVEMENTS RECTILIGNES

DÉFINITION 8 | **Un mouvement ponctuel est rectiligne lorsque sa trajectoire est incluse dans une droite.**

Conséquences :

Soit $(O, \vec{i})$ un repère d'une droite Δ. Un mouvement de trajectoire incluse dans Δ est défini par $x = f(t)$, abscisse du point $M(t)$ à l'instant t :

$$\vec{V}_M(t) = f'(t)\vec{i} \quad \text{et} \quad \vec{\Gamma}_M(t) = f''(t)\vec{i}.$$

Remarquons que, quel que soit l'instant t, $\vec{i} \wedge \vec{V}_M(t) = \vec{0}$.

★ Activité : Propriétés caractéristiques d'un mouvement rectiligne

Soit $t \mapsto M(t)$ un mouvement ponctuel défini sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$.

1° *On suppose qu'il existe un vecteur $\vec{i}$ non nul tel que pour tout t de I : $\vec{i} \wedge \vec{V}_M(t) = \vec{0}$. Montrer que le mouvement est rectiligne.*

2° *On suppose qu'il existe un point A de l'espace tel que, quel que soit t de l'intervalle I :*

$$\overrightarrow{AM(t)} \wedge \vec{V}_M(t) = \vec{0}. \tag{1}$$

Dans un repère orthonormal $(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, le mouvement est défini par :

$$M(t) \begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \\ z = h(t) \end{cases}.$$

a) *Montrer que, quel que soit l'instant t de I :*

$$\begin{cases} g(t)h'(t) - g'(t)h(t) = 0 \\ f'(t)h(t) - f(t)h'(t) = 0 \\ f(t)g'(t) - f'(t)g(t) = 0 \end{cases}.$$

b) *On suppose qu'à un instant t_0, $g(t_0) \neq 0$. Montrer qu'il existe un intervalle J contenant t_0 tel que J soit inclus dans I et tel que g ne s'annule pas sur J. En déduire qu'il existe des constantes réelles λ et μ telles que, pour tout instant t de J, $\dfrac{f(t)}{g(t)} = \lambda$ et $\dfrac{h(t)}{g(t)} = \mu$.*
Montrer que le mouvement restreint à l'intervalle J est rectiligne.

c) *On suppose $I = \mathbb{R}$ et $f(t) = t^3$, $g(t) = 0$, $h(t) = 0$ pour $t \leqslant 0$, et $f(t) = 0$, $g(t) = t^3$, $h(t) = 0$ pour $t > 0$. Vérifier que les fonctions f, g, h sont deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ et que la relation (1) est bien satisfaite. Quelle est la trajectoire du mouvement?*

d) *Conclure de ce qui précède que tout mouvement ponctuel vérifiant (1) a une trajectoire incluse dans une réunion de droites passant par A.*

Exemples :

1° Le centre de gravité d'une pierre lâchée sans impulsion, d'un point O du haut d'une tour, est animé d'un mouvement rectiligne. Soit m la masse de la pierre et g l'accélération de la pesanteur à cet endroit; si l'on convient que la résistance de l'air est nulle, le mouvement est régi par l'équation différentielle :

$$m\vec{\Gamma}_M(t) = -mg\vec{k}, \tag{1}$$

où $\vec{k}$ est le vecteur unitaire normal au plan du sol et dirigé vers le haut.

Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormal direct. De l'équation vectorielle (1), il résulte :

$$x'' = 0, \quad y'' = 0, \quad z'' = -g.$$

Donc :

$$x(t) = a_1 t + b_1, \quad y(t) = a_2(t) + b_2, \quad z(t) = -\frac{g}{2}t^2 + ct + d.$$

L'instant $t = 0$ étant le moment où la pierre est lâchée, on a : $x(0) = 0$, $y(0) = 0$, $z(0) = 0$ et $x'(0) = y'(0) = z'(0) = 0$ puisqu'il n'y a pas impulsion initiale.
Ainsi :

$$a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = 0 \quad \text{et} \quad c = d = 0.$$

On obtient donc :

$$z = -\frac{g}{2}t^2.$$

2° On dit qu'un mouvement rectiligne est uniformément varié si l'abscisse du point mobile est de la forme $x = at^2 + bt + c$.
On a alors $x(0) = c$, $x' = 2at + b$, donc $x'(0) = b$ et $x'' = 2a$: l'accélération est constante.

3° Un mouvement rectiligne est uniforme si l'abscisse du point mobile est de la forme $x = at + b$.
En effet, si $(O, \vec{i})$ est un repère de la droite contenant la trajectoire, l'abscisse $x = f(t)$ du point mobile est telle qu'il existe une constante réelle α vérifiant : quel que soit l'instant t de l'intervalle d'étude I du mouvement, $|f'(t)| = \alpha$. La fonction $t \mapsto f'(t)$ est continue sur l'intervalle I puisqu'elle est dérivable; donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, on a, pour tout t de l'intervalle I, $f'(t) = \alpha$ ou, pour tout t de l'intervalle I, $f'(t) = -\alpha$. Ainsi, il existe un réel a tel que, pour tout t de l'intervalle I, $f'(t) = a$. Par suite, il existe un réel b tel que, pour tout t de l'intervalle I, $f(t) = at + b$.

4. MOUVEMENTS CIRCULAIRES

DÉFINITION 9 | **Un mouvement ponctuel $t \mapsto M(t)$ est circulaire si sa trajectoire est incluse dans un cercle.**

Conséquences :

Un mouvement ponctuel $t \mapsto M(t)$ est circulaire s'il existe un plan P et un point O de P, tels que, pour tout instant t, $M(t)$ soit dans P et $\|\overrightarrow{OM(t)}\|$ soit constant.
Soit $t \mapsto M(t)$ un mouvement circulaire.
Il existe un point O et un réel a tels que, pour tout t de l'intervalle d'étude I, $\|\overrightarrow{OM(t)}\|^2 = a$, c'est-à-dire $\overrightarrow{OM}(t) \cdot \overrightarrow{OM}(t) = a$. Par dérivation, on obtient $2\overrightarrow{OM}(t) \cdot \vec{V}_M(t) = 0$, d'où $\overrightarrow{OM}(t) \cdot \vec{V}_M(t) = 0$.
Réciproquement, si $t \mapsto M(t)$ est un mouvement plan tel que, pour tout t, on ait $\overrightarrow{OM}(t) \cdot \vec{V}_M(t) = 0$, la fonction $t \mapsto \overrightarrow{OM}(t) \cdot \overrightarrow{OM}(t)$ est constante sur l'intervalle d'étude I. Le mouvement est donc circulaire.
Soit $t \mapsto M(t)$ un mouvement circulaire, de trajectoire incluse dans le cercle C de centre O, orienté. Au point $M(t)$, le cercle C admet une tangente T et une normale N; N passe par O. Soit $\vec{n}$ le vecteur unitaire directeur de N de même sens que $\overrightarrow{M(t)O}$ et $\vec{\tau}$ le

vecteur unitaire directeur de T tel que la base $(\vec{\tau}, \vec{n})$ soit directe (figure 13).
$\vec{\Gamma}_M(t)$ se décompose sur la base $(\vec{\tau}, \vec{n})$:
$\vec{\Gamma}_M(t) = \gamma_T\vec{\tau} + \gamma_N\vec{n}$.
γ_T est appelé accélération **tangentielle** du mouvement circulaire.
γ_N est appelé accélération **normale** du mouvement circulaire.
Considérons un repère orthonormal direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ du plan de C. On **démontre,** et **nous l'admettrons,** qu'il existe une fonction deux fois dérivable $t \mapsto \theta(t)$ telle que $\theta(t)$ soit une mesure en radian de l'angle de vecteurs $(\vec{e}_1, \overrightarrow{OM}(t))$.

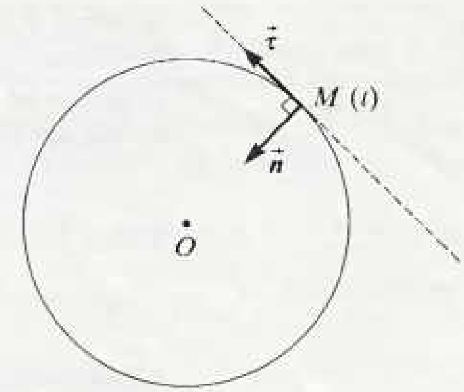


Figure 13

Dans le repère $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, le mouvement est défini par :

$$M(t) \begin{cases} x = R\cos\theta(t) \\ y = R\sin\theta(t) \end{cases},$$

où R est le rayon du cercle C; on a :

$$\vec{V}_M(t) \begin{cases} -R\theta'(t)\sin\theta(t) \\ \quad R\theta'(t)\cos\theta(t) \end{cases},$$

d'où :

$$\|\vec{V}_M(t)\| = R\,|\theta'(t)|.$$

$\theta'(t)$ s'appelle la vitesse angulaire à l'instant t du mobile.

5. MOUVEMENT CIRCULAIRE UNIFORME

Soit $t \mapsto M(t)$ un mouvement circulaire uniforme, de trajectoire incluse dans le cercle C, du plan, de centre O et de rayon R. Dans un repère orthonormal direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, le mouvement est défini par :

$$M(t) \begin{cases} x = R\cos\theta(t) \\ y = R\sin\theta(t) \end{cases},$$

où $\theta(t)$ est une mesure en radians de $\widehat{(\vec{e}_1, \overrightarrow{OM}(t))}$ et $t \mapsto \theta(t)$ est deux fois dérivable.
Le mouvement étant uniforme, la fonction $t \mapsto R\,|\theta'(t)|$ est constante. Par suite, $t \mapsto \theta'(t)$ est constante, puisque θ' est continue sur l'intervalle I d'étude.
Posons $\omega = \theta'(t)$. On a $\theta(t) = \omega t + \varphi$.

Ainsi :

$$M(t) \begin{cases} x = R\cos(\omega t + \varphi) \\ y = R\sin(\omega t + \varphi) \end{cases} \qquad (1)$$

Si $\omega = 0$, le point est fixe.
Si $\omega > 0$, le mouvement s'effectue dans le sens positif.
Si $\omega < 0$, le mouvement s'effectue dans le sens négatif.
Réciproquement, tout mouvement $t \mapsto M(t)$ défini par (1) est un mouvement circulaire uniforme.

Retenons :

1° Un mouvement circulaire uniforme sur un cercle, de centre O et de rayon R, est défini dans un repère orthonormal direct d'origine O par :

$$M(t) \begin{cases} x = R\cos(\omega t + \varphi) \\ y = R\sin(\omega t + \varphi) \end{cases}.$$

$(R\cos\varphi,\ R\sin\varphi)$ est le couple des coordonnées du point à l'instant 0.
Le vecteur vitesse $\vec{V}_M(t)$ a pour coordonnées $(-R\omega\sin(\omega t+\varphi), R\omega\cos(\omega t+\varphi))$, et $\|\vec{V}_M(t)\| = |\omega|\,R$.
Le vecteur accélération $\vec{\Gamma}_M(t)$ a pour coordonnées :

$$(-R\omega^2\cos(\omega t+\varphi),\ -R\omega^2\sin(\omega t+\varphi)).$$

Ainsi :

$$\boxed{\vec{\Gamma}_M(t) = -\,\omega^2\,\overrightarrow{OM}(t).}$$

L'accélération tangentielle est nulle; l'accélération normale est donnée par $\gamma_N = \omega^2 R$.

2° On constate que le point $M(t)$ d'affixe $Re^{i(\omega t+\varphi)}$ est animé d'un mouvement circulaire uniforme sur le cercle dont le centre est l'origine des coordonnées et le rayon R. L'utilisation des nombres complexes est ainsi un moyen commode pour décrire un mouvement circulaire uniforme. $\mathbb{R}^2$ étant identifié à $\mathbb{C}$ par l'application $(a, b) \mapsto a + bi$, si nous posons $F(t) = R\,e^{i(\omega t+\varphi)}$, on obtient $F'(t) = i\omega R\,e^{i(\omega t+\varphi)}$ et $F''(t) = -\,\omega^2 R\,e^{i(\omega t+\varphi)}$, soit :

$$\boxed{F''(t) = -\,\omega^2 F(t).}$$

3° Le nombre réel ω est appelé pulsation du mouvement ou, encore, **vitesse angulaire du mobile.**

Si $\omega \neq 0$, on a $M\left(t + \dfrac{2\pi}{\omega}\right) = M(t)$; $T = \dfrac{2\pi}{|\omega|}$ est la période du mouvement.

Exercices résolus

I — *Un point M décrit un cercle, de rayon R (cm) d'un mouvement uniforme de façon que le module de la vitesse soit le tiers de la norme du vecteur accélération.*
a) *L'unité de temps étant la seconde, calculer la vitesse angulaire du mobile.*
b) *Calculer à une unité près le nombre de tours par heure.*
c) *Calculer $\|\vec{V}_M(t)\|$ et $\|\vec{\Gamma}_M(t)\|$.*

a) On a $R\,|\omega| = \dfrac{1}{3}R\omega^2$, d'où $|\omega| = 3$.

b) Un tour est décrit en $\dfrac{2\pi}{|\omega|}$ secondes, c'est-à-dire en $\dfrac{2}{3}\pi$ secondes.

En une heure, le mobile décrit : $\dfrac{2}{3\pi} \times 3\,600$ tours.

Comme $\dfrac{2}{3\pi} \times 3\,600 = \dfrac{2\,400}{\pi} \approx 764$, le mobile décrit 764 tours (à un tour près) en une heure.

c)
$$\|\vec{V}_M(t)\| = R\,|\omega| = 3R \text{ cm/s},$$
$$\|\vec{\Gamma}_M(t)\| = R\omega^2 = 9R \text{ cm/s}^2.$$

II — *Dans un repère orthonormal direct $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ du plan, un mouvement ponctuel est défini par :*

$$M(t)\begin{cases} x = R(1+\cos t), \\ y = R\sin t \end{cases}$$

où R est un réel strictement positif.

a) *Montrer que le mouvement est circulaire uniforme.*
b) *Calculer* $\|\vec{V}_M(t)\|$ *et* $\|\vec{\Gamma}_M(t)\|$.

a) Considérons le point A de coordonnées $(R, 0)$. Dans le repère $(A, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, $M(t)$ a pour coordonnées $(R \cos t,\ R \sin t)$. Ainsi, le mouvement est-il circulaire uniforme sur un cercle de centre A et de rayon R.
Sa vitesse angulaire est 1.
b) $\|\vec{V}_M(t)\| = R$ et $\|\vec{\Gamma}_M(t)\| = R$.

6. OSCILLATEUR HARMONIQUE A SUPPORT RECTILIGNE

1° Considérons un mouvement circulaire uniforme sur un cercle C de centre O. Soit un repère orthonormal $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ tel que le mouvement soit défini par :

$$M(t) \begin{cases} x = R\cos \omega t \\ y = R \sin \omega t \end{cases},$$

dans ce repère.
Considérons un diamètre D du cercle muni d'un repère $(O, \vec{i})$ normal (figure 14).
Soit φ une mesure en radians de l'angle de vecteurs $\widehat{(\vec{e}_1, \vec{i})}$.
Alors $\omega t - \varphi$ est une mesure en radians de l'angle $\widehat{(\vec{i}, \overrightarrow{OM(t)})}$
L'abscisse X du point $m(t)$, projeté orthogonal de $M(t)$ sur D, est définie par $X = R\cos(\omega t - \varphi)$.
Le mouvement de $m(t)$ est appelé **oscillateur harmonique à support rectiligne.**
Le point $m(t)$ se déplace entre les deux extrémités du diamètre D et on a $m\left(t + \dfrac{2\pi}{\omega}\right) = m(t)$. Son mouvement est périodique de période $\dfrac{2\pi}{|\omega|}$. Le point O s'appelle le **centre de l'oscillateur harmonique.**

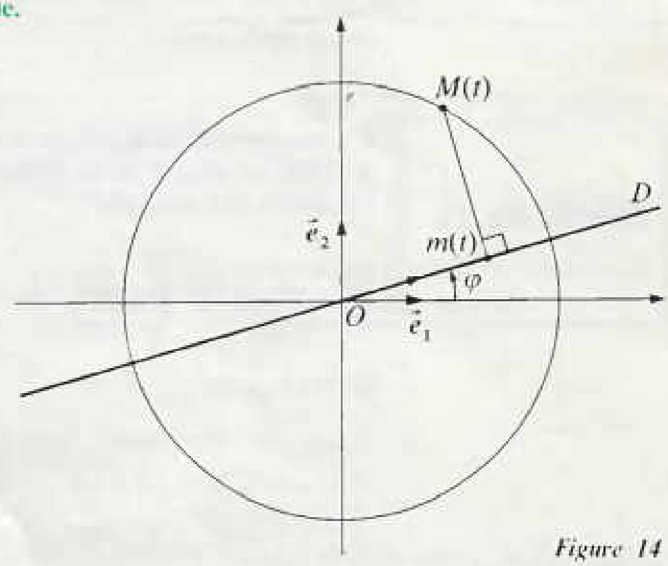


Figure 14

DÉFINITION 10

On appelle oscillateur harmonique à support rectiligne D, tout mouvement défini dans un repère de D par $x = a\cos(\omega t + \varphi)$, où a, ω, φ sont des réels donnés avec ω non nul. $|a|$ est appelé amplitude de l'oscillateur, ω sa pulsation et $\dfrac{2\pi}{|\omega|}$ sa période.

2° Caractérisation d'un oscillateur harmonique à support rectiligne, $t \mapsto M(t)$, de centre O.

On a :

$$\begin{aligned} x &= a\cos(\omega t+\varphi), \\ x' &= -a\omega\sin(\omega t+\varphi), \\ x'' &= -a\omega^2\cos(\omega t+\varphi) = -\omega^2 x, \end{aligned}$$

d'où :

$$\boxed{x'' = -\omega^2 x\,.}$$

Si $(O, \vec{i})$ est un repère de support du mouvement, on a :

$$\vec{V}_M(t) = -a\omega\sin(\omega t+\varphi)\vec{i}\,,$$
$$\vec{\Gamma}_M(t) = -\omega^2\overrightarrow{OM}(t)\,.$$

Réciproquement, soit un mouvement rectiligne $t \mapsto M(t)$ sur une droite (D). Supposons que l'abscisse $x(t)$ de $M(t)$, dans un repère de D, satisfait $x'' = -\omega^2 x$, où ω est un réel fixé non nul. On démontre en analyse (voir chapitre 7) qu'il existe un réel positif a et un réel φ tels que :

$$x(t) = a\cos(\omega t+\varphi).$$

Les réels a et φ sont définis par les conditions « initiales », $x(0)$ et $x'(0)$, qui sont respectivement la position et la vitesse à l'instant $t = 0$ du mobile $M(t)$. On a :

$$x(0) = a\cos\varphi \quad \text{et} \quad x'(0) = -a\omega\sin\varphi\,,$$

donc :

$$a = \frac{\sqrt{(\omega x(0))^2 + (x'(0))^2}}{|\omega|}\,.$$

$a = 0$ si, et seulement si, $x(0) = x'(0) = 0$. Le point $M(t)$ est stationnaire dans le cas où $a = 0$.

Lorsque $a \neq 0$, φ est défini, modulo 2π, par : $\cos\varphi = \dfrac{x(0)}{a}$ et $\sin\varphi = -\dfrac{x'(0)}{a\omega}$.

Nous retiendrons :

THÉORÈME 10	**Un mouvement rectiligne sur la droite D est un oscillateur harmonique si, et seulement si, il existe un repère de la droite D dans lequel l'abscisse $x(t)$ du point mobile vérifie l'équation différentielle :** $$x'' = -\omega^2 x,$$ **où ω est un réel fixé non nul.**

REMARQUES :

1° Soit un mouvement rectiligne, sur la droite (D), vérifiant dans un repère $(O_1, \vec{i})$: $x_1'' = -\omega^2 x_1 + \alpha$, où ω est un réel fixé non nul et α un réel fixé. Posant $x = x_1 - \dfrac{\alpha}{\omega^2}$, on a : $x'' = -\omega^2 x$. C'est donc un oscillateur harmonique de centre O tel que $\overrightarrow{O_1O} = \dfrac{\alpha}{\omega^2}\vec{i}$.

2° Soit $x = a\cos(\omega t+\varphi)$ l'équation d'un oscillateur harmonique sur la droite de repère $(O, \vec{i})$. Soit A' le point d'abscisse $-a$ et A le point d'abscisse a. Le mouvement s'effectue entre les points A et A' (figure 15).

Figure 15

Des relations $x = a\cos(\omega t + \varphi)$ et $x' = -a\omega\sin(\omega t + \varphi)$, il résulte :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(x')^2}{a^2\omega^2} = 1.$$

Cette dernière relation s'écrit aussi :

$$\boxed{(x')^2 = \omega^2(a^2 - x^2)\,.}$$

Les modules des vitesses du mobile, en deux points symétriques par rapport à O, sont donc égaux.

3° Étude du mouvement $x = a\cos\omega t$

On suppose $a > 0$ et $\omega > 0$. On pose $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.

$x' = -a\omega\sin\omega t$ et $x'' = -a\omega^2\cos\omega t$. On en déduit le tableau de variation suivant :

t	0		$\frac{T}{4}$		$\frac{T}{2}$		$\frac{3T}{4}$		T
x''		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
x'	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0
x	a	$\searrow$	0	$\searrow$	$-a$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	a
allure du mouvement		mouvement accéléré		mouvement retardé		mouvement accéléré		mouvement retardé	

4° Exemples d'oscillateurs harmoniques

1 — *Deux masses identiques sont suspendues à un ressort à boudin. Ce système étant en équilibre, on suppose que l'une des masses se détache et on demande de trouver le mouvement de l'autre. On appelle a l'allongement du ressort sous l'action d'une seule masse au repos. On suppose que le ressort a une résistance proportionnelle à son allongement.*

La figure 16 illustre la disposition de ce système.

Soit k le coefficient d'élasticité du ressort et g l'accélération de la pesanteur.

On a $mg = ka$.

Dans le repère $(O, \vec{i})$, où O est l'extrémité du ressort au repos sans masse accrochée, soit $x(t)$ l'abscisse de l'extrémité du ressort. On a $x(0) = 2a$ et $x'(0) = 0$ (figure 16).

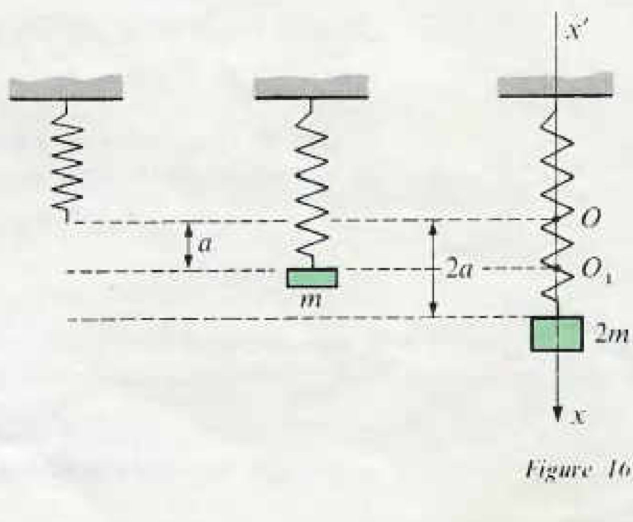


Figure 16

De plus, le mouvement est régi par l'équation différentielle :

$$mx'' = mg - kx \quad \text{(expression de la loi de Newton : } \vec{F} = m\vec{\Gamma}\text{)},$$

c'est-à-dire :

$$x'' + \frac{g}{a}x = g.$$

Considérons le point O_1 d'abscisse a. Dans le nouveau repère $(O_1, \vec{i})$, l'abscisse $x_1 = x - a$ satisfait :

$$x_1'' + \frac{g}{a}x_1 = 0.$$

Il s'ensuit qu'il existe un réel positif α et un réel φ tels que :

$$x_1 = \alpha \cos\left(\sqrt{\frac{g}{a}}t + \varphi\right).$$

Comme $x_1(0) = a$ et $x_1'(0) = 0$, on a :

$$a = \alpha \cos \varphi \quad \text{et} \quad 0 = -\alpha\sqrt{\frac{g}{a}} \sin \varphi.$$

D'où $a^2 \dfrac{g}{a} = \alpha^2 \dfrac{g}{a}$, soit $\alpha = a$ et, par suite, $\varphi \equiv 0 \quad [2\pi]$.

Le mouvement, dans le repère $(O_1, \vec{i})$, est donc défini par :

$$x_1 = a \cos\left(\sqrt{\frac{g}{a}}t\right).$$

II — *Un point matériel de masse m est sollicité par deux centres A et B. Les forces d'attraction sont proportionnelles à la distance et le coefficient de proportionalité est k pour chaque centre. La distance des centres attractifs est d. On suppose qu'à l'instant $t = 0$, le point matériel est sur la ligne des centres à la distance non nulle a du milieu O du segment $[A, B]$. La vitesse initiale est nulle. Quel est le mouvement du point?*

La figure suivante illustre le dispositif :

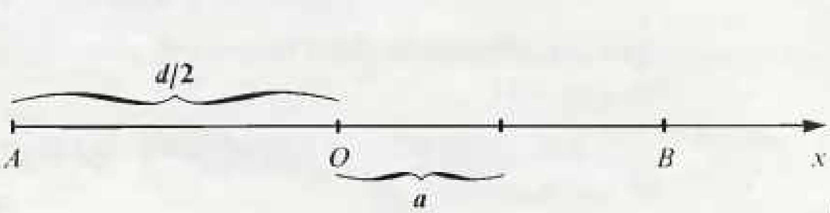


Figure 17

Soit $(O, \vec{i})$ un repère de la droite AB, de façon que l'abscisse de la position initiale soit a. L'abscisse $x(t)$ du point matériel vérifie l'équation différentielle :

$$mx'' = -k(x + d) + k(c - x).$$

C'est-à-dire :

$$mx'' + 2kx = 0\,,$$

d'où :
$$x = a \cos\sqrt{\frac{2k}{m}}\, t,$$

compte tenu des conditions initiales.

III — *Soit un circuit électrique formé d'une bobine, d'inductance L, et d'un condensateur, de capacité C, montés en série (figure 18). Soit $q(t)$ la charge, en fonction du temps, du condensateur.*

Figure 18

Les lois de l'électricité permettent d'écrire que q satisfait l'équation différentielle :

$$Lq'' + \frac{q}{c} = 0.$$

Dans un repère $(O, \vec{i})$ d'une droite D, le point $M(t)$ d'abscisse $q(t)$ est un oscillateur harmonique.
On dit que le système électrique précédent est un oscillateur harmonique.

IV — *Soit un disque horizontal, accroché en son centre à un fil de torsion vertical, de moment de torsion Γ (figure 19). J désigne le moment d'inertie du disque par rapport à son axe. On note θ l'élongation angulaire (en radians) à partir de l'état d'équilibre d'un point du disque.*

D'après les lois de la mécanique, on a :

$$J\theta'' + \Gamma\theta = 0.$$

Le système ainsi formé est appelé pendule de torsion : il définit un oscillateur harmonique.

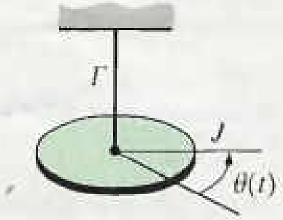


Figure 19

Exercices d'applications

15. Montrer que le mouvement rectiligne, défini dans un repère $(O, \vec{i})$ par $x = \cos^2 t$, est un oscillateur harmonique.
Trouver le centre et la période du mouvement.

16. Même question par $x = \sin^2 t$.

17. Dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère une droite D passant par O et tournant autour de O avec une vitesse angulaire constante ω. A l'instant $t = 0$, D coïncide avec Ox. D coupe en M le cercle fixe C, de rayon R, passant par O et centré sur Ox.

a) Étudier le mouvement du point M sur D.
b) La tangente en M au cercle C rencontre la tangente en O à C en un point T. Calculer la vitesse du point T en fonction de $y = \overline{OT}$, de R et de ω.

18. Montrer que le mouvement rectiligne défini dans un repère $(O, \vec{i})$ par

$$x = a_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + a_2 \cos(\omega t + \varphi_2),$$

est un oscillateur harmonique. On déterminera l'amplitude, le centre et la pulsation.

EXERCICES ET PROBLÈMES

1. Soit α un réel tel que $0 < \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$. Soit M un point mobile, dans le plan P, dont les coordonnées à la date t sont :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{a}\cos(\alpha \cos^2 t) \\ y(t) = \sin(\alpha \cos^2 t) \end{cases},$$

dans un repère orthonormal $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

Étudier les fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$.
En déduire la trajectoire de M et décrire le mouvement de M (on ne cherchera pas à vérifier si le mouvement est accéléré ou retardé).

2. Dans le plan $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, M est un point mobile dont les coordonnées à la date t ($t > 0$) sont :

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{t}\cos 2t \\ y = \dfrac{1}{t}\sin 2t \end{cases}$$

a) Déterminer les vecteurs $\vec{V}_M(t)$ et $\vec{\Gamma}_M(t)$. Vérifier que le mouvement de M est retardé sur $]0, +\infty[$.
b) Vérifier que l'application $t \mapsto \|\overrightarrow{OM}\|$ est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$. Déterminer une mesure de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$.
c) Calculer $\lim\limits_{t \to 0^+} f(t)$ et $\lim\limits_{t \to 0^+} g(t)$, puis $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t)$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} g(t)$.
d) Représenter, dans $\mathscr{P}$, les positions de M aux instants $\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \pi$ et 2π.
e) Donner l'allure de la trajectoire de M sur $]0, +\infty[$.

Dans les exercices **3** *à* **7**, *on se donne un mouvement ponctuel,* $t \mapsto M(t)$, *dans le plan muni d'un repère orthonormal.*

3. $\begin{cases} x = e^t \\ y = t\,e^t \end{cases}$, t réel.

a) Déterminer l'équation cartésienne de la trajectoire du point M.
b) Étudier le mouvement du point M.

4. $\begin{cases} x = e^{-t} \\ y = -2\,e^{-t}(t+1) \end{cases}$.

a) Déterminer l'équation cartésienne de la trajectoire de M.
b) Déterminer, suivant les valeurs de t, l'allure du mouvement.

(D'après Bac E — Lyon 81)

5. $\begin{cases} x = 2\cos(\pi \ln(t+1)) \\ y = 1 + \sin(\pi \ln(t+1)) \end{cases}$, $t \geqslant 0$.

a) Montrer que le mouvement est circulaire. On pose $A = M(0)$.
b) Calculer les coordonnées du vecteur vitesse $\vec{V}(t)$ et du vecteur accélération $\vec{\Gamma}(t)$ du mobile à l'instant t.
c) On désigne par $t_1 > 0$ la date du premier passage du mobile M en A, par t_2 la date de son deuxième passage en A, et, d'une manière générale, par t_n la date de son n-ième passage en A.
Calculer t_n en fonction de l'entier naturel n.
En déduire $\vec{V}_n = \vec{V}(t_n)$ et $\vec{\Gamma}_n = \vec{\Gamma}(t_n)$.
d) On considère les suites (a_n), (b_n), (c_n), (d_n), définies pour tout entier naturel n, par :

$$a_n = \vec{V}_n \cdot \vec{i} \;,\quad b_n = \vec{V}_n \cdot \vec{j} \;,\quad c_n = \vec{\Gamma}_n \cdot \vec{i} \;,\quad d_n = \vec{\Gamma}_n \cdot \vec{j}\,,$$

où $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormal du plan.
Montrer que ce sont quatre suites géométriques dont on donnera les éléments caractéristiques. En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \vec{V}_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \vec{\Gamma}_n$.
e) Déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle le temps, mis par le mobile entre le n-ième et le $(n+1)$-ième passages en A, est supérieur à 100.

6. $\begin{cases} x = 1 + \ln t \\ y = \dfrac{2 + \ln t}{t}, \end{cases}$ avec $t \geqslant 1$.

a) Trouver une équation cartésienne de la trajectoire du point mobile. Tracer cette trajectoire.
b) Calculer les coordonnées du vecteur vitesse et du vecteur accélération du point M à l'instant t. Montrer qu'il existe un instant t_1 où ces vecteurs sont colinéaires. Situer alors le mobile M à l'instant t_1 et construire des représentants, d'origine M, des vecteurs vitesse et accélération de M à l'instant t_1.

7. $\begin{cases} x(t) = \ln t \\ y(t) = \ln(t^2 - 4t + 3) \end{cases}$, $t > 3$.

a) Trouver l'équation cartésienne de la trajectoire. Construire cette trajectoire C.
b) Calculer les coordonnées des vecteurs vitesse et accélération du mobile à l'instant t.
c) Soit M_O la position du mobile à l'instant $t = 4$. Placer M_O sur C et tracer les représentants d'origine M_O des vecteurs vitesse et accélération à cet instant.

8. Démontrer que le mouvement rectiligne défini par :

$$x = 5 - 2\cos^2 t$$

est un oscillateur harmonique.
a) Trouver le centre, la période et l'amplitude de ce mouvement.
b) Déterminer à la date t, la vitesse et l'accélération de ce mouvement et les exprimer en fonction de x.

9. Soit l'espace muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Dans le plan de repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on note C le cercle de centre O et de rayon 1.
Soit D la droite du plan de repère $(O, \vec{i}, \vec{k})$ dont l'équation est $z = 2$. Une tige AB, de longueur $AB = \sqrt{5}$, s'appuie, par l'extrémité A, sur le cercle C et, par l'extrémité B, sur la droite D. Le point A est animé, sur le cercle C, d'un mouvement uniforme de vitesse angulaire ω. Étudier le mouvement de B (on suppose qu'à la date $t = 0$, le point A a pour coordonnées $(0, 1, 0)$).

10. Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\mathcal{R}$. Les coordonnées d'un point mobile M sont données en fonction du temps t par :

$$x(t) = -t + 2, \quad y(t) = -t^3 + 6t^2 - 9t + 4.$$

1° Former l'équation cartésienne de la trajectoire et la construire pour : $0 \leqslant t \leqslant 4$.
Indiquer le sens du déplacement du mobile sur la trajectoire.
2° Calculer les composantes du vecteur vitesse et celles du vecteur accélération en fonction du temps. Représenter ces vecteurs à la date $t = \frac{1}{2}$.
3° A quelles dates le module du vecteur vitesse est-il minimum? Quelle est alors sa valeur? Que peut-on dire dans ce cas du vecteur vitesse et du vecteur accélération?

11. Un point M est en mouvement sur la parabole d'équation $y^2 - 4ax = 0$ dans un repère orthonormal $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$. Le projeté m de M sur l'axe défini par $(O, \vec{j})$ a un mouvement défini par :

$$\overrightarrow{Om} = \varphi(t)\vec{j} = a \sin \omega t\vec{j}.$$

Étudier le mouvement du projeté m_1 de M sur l'axe défini par $(O, \vec{i})$.

12. Soit $\mathcal{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormal du plan. Soit C un cercle de rayon R, passant par le point O et centré sur l'axe des abscisses.
Soit $\overrightarrow{k(t)}$ un vecteur unitaire tel que : $(\vec{i}, \overrightarrow{k(t)}) = \omega t$ $(\omega \in \mathbb{R})$. Soit enfin $D(t)$ la droite passant par O et de vecteur directeur $\overrightarrow{k(t)}$. $D(t)$ coupe C en O et $M(t)$.
1° Étudier le mouvement de $M(t)$ sur le cercle C.
2° Étudier le mouvement de $M(t)$ sur la droite D; ($M(t)$ est en mouvement sur la droite D considérée comme fixe.)

13. Un point M est mobile dans un plan muni d'un repère orthonormal $\mathcal{R}$ et ses coordonnées, en fonction du temps t, sont données par les relations :

$$x(t) = a(1 + \cos t), \qquad y(t) = b \sin t.$$

a et b étant deux longueurs données $(a > b)$.
1° Démontrer que la trajectoire du point M est une ellipse. Position de cette ellipse.
2° Calculer, à une date quelconque, la vitesse du mobile, et chercher à quelles dates la vitesse du mobile a une valeur absolue égale à un nombre positif donné v. Discuter.
3° Le vecteur vitesse peut-il être orthogonal au vecteur accélération?
4° Déterminer l'hodographe du mouvement du point M.

14. Le plan étant rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on donne les coordonnées d'un point mobile M en fonction du temps :

$$\begin{cases} x = \sin t \\ y = -2 - \cos 2t. \end{cases}$$

1° Déterminer une relation indépendante de t liant x et y.
2° Caractériser la trajectoire du mobile M et tracer son graphe dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, lorsque t appartient à $[0, 2\pi]$. On donne $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2$ cm.
3° Calculer, à la date $t = \frac{3\pi}{4}$, les coordonnées :
a) du vecteur espace $\overrightarrow{OM}$;
b) du vecteur vitesse $\vec{V}$;
c) du vecteur accélération $\vec{\Gamma}$.
4° Tracer les représentants d'origine O des vecteurs $\overrightarrow{OM}$, $\vec{V}$ et $\vec{\Gamma}$.

15. 1° Dans un repère orthonormal, les coordonnées d'un mobile M sont exprimées, en fonction du temps t, par :

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \cos 3t - 1. \end{cases}$$

Déterminer l'équation cartésienne de la trajectoire du mobile. Construire cette trajectoire.
2° Le mouvement débute à l'instant $t = 0$. A quelles dates le mobile passe-t-il pour la première fois aux points M_1 et M_2 de la trajectoire d'abscisses respectives $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $-\frac{1}{2}$? Calculer les composantes du vecteur vitesse et celles du vecteur accélération correspondant à chacun de ces deux points.

16. La lettre t désignant le temps, soit la fonction vectorielle définie dans le repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ par $t \mapsto \overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$, avec :

$$x = 2 + 2\cos^2 t, \qquad y = 4 \sin t \cos t.$$

1° Trouver une équation cartésienne de la trajectoire de M et les caractéristiques simples qui permettent de construire cette trajectoire.
2° Calculer les composantes du vecteur vitesse $\vec{V}$ de M.
3° Calculer les composantes du vecteur accélération $\vec{\Gamma}$ de M.
4° Pour quelles valeurs de t les vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{\Gamma}$ sont-ils orthogonaux?
5° On suppose : $0 \leqslant t \leqslant \pi$. Pour quelles valeurs de t le produit scalaire $\vec{V} \cdot \vec{\Gamma}$ est-il positif? Que peut-on dire alors du mouvement?
Quelle propriété de la fonction $(\vec{V})^2$ en déduit-on?

17. Étudier le mouvement plan du point M défini dans un repère orthonormal par ses coordonnées en fonction de la date t :

$$\begin{cases} x = a(\cos t - \sin t + 2) \\ y = b(\cos t + \sin t - 1), \end{cases}$$

où a et b sont des constantes positives telles que : $a > b$.

1° Déterminer la trajectoire du point M.
2° Déterminer le vecteur vitesse $\vec{V}$, le vecteur accélération $\vec{\Gamma}$, et la période du mouvement.
3° Déterminer les intervalles de temps pendant lesquels le mouvement est accéléré.

18. Dans un plan P rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère le points M_1 dont les coordonnées sont définies en fonction du temps t par $x = a \cos t$ et $y = a \sin t$, et le point M_2 dont les coordonnées sont définies par $x = a \cos 2t$ et $y = -a \sin 2t$.
a) Quelles sont les trajectoires des points M_1 et M_2?
b) Soit M le point défini par $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}(2\overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2})$. A quelles dates M, M_1 et M_2 sont-ils confondus?
c) Démontrer que M appartient au segment $[M_1, M_2]$ quand ce segment est défini. Soit $\vec{V}$ le vecteur vitesse du point M. Démontrer que $\vec{V}$ et $\overrightarrow{M_1M_2}$ sont orthogonaux à une date quelconque.

19. Dans le plan affine euclidien rapporté à un repère orthonormal, les coordonnées x et y d'un point mobile, M, sont définies en fonction du temps t (t appartenant à l'intervalle $[0, \pi]$) par :

$$x = \sqrt{2} \sin t, \quad y = \frac{1}{2} \cos 2t.$$

1° La trajectoire du mobile est une courbe, dont on déterminera une équation cartésienne et que l'on construira.
2° Calculer les coordonnées du vecteur vitesse, $\vec{V}$, et du vecteur accélération, $\vec{\Gamma}$, du point M à l'instant t. Déterminer t pour que $\vec{V}$ et $\vec{\Gamma}$ soient orthogonaux.

20. **A** — Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = x\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

1° Après une étude complète de la fonction, en dessiner la représentation graphique Γ; [on utilisera un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$].
2° Montrer que les coordonnées de tout point M de Γ (tel que $x \neq 1$) vérifient $\mathscr{R}$.
B — Un point mobile M, de coordonnées x et y dans le plan rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, se déplace. Soit t le temps, $0 \leqslant t < \frac{\pi}{2}$; on a :

$$x = \cos 2t \quad \text{et} \quad y = \sin 2t - \tan t.$$

1° Montrer que M appartient à Γ.
2° Quelle est la position de M lorsque : $t = 0$? $t = \frac{\pi}{4}$?
3° Décrire le mouvement de M sur Γ. (On dira s'il est accéléré ou retardé.)

21. Dans un plan affine euclidien muni du repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on définit, en fonction de la variable réelle t, un point M de coordonnées $(x(t), y(t))$ telles que :

$$x(t) = 2\,\frac{1-\cos^2 t}{1+\cos^2 t}, \quad y(t) = 4\,\frac{\cos t}{1+\cos^2 t}.$$

1° Calculer la norme du vecteur $\overrightarrow{OM}$. En déduire que la trajectoire de M est une partie, que l'on précisera, d'un cercle. Déterminer le vecteur $\vec{V}(t)$, vecteur dérivé de $\overrightarrow{OM}$.
2° On pose $F(t) = [\vec{V}(t)]^2$. Étudier le signe de la fonction dérivée de $F(t)$. Décrire le mouvement du point M sur sa trajectoire.

22. On suppose que la variable t représente le temps et que t appartient à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Dans le plan P rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère le point $M(t)$ de coordonnées $x(t) = \sin^2 t$ et $y(t) = \cos^2 t$.
1° Déterminer la trajectoire de $M(t)$.
2° Déterminer le vecteur vitesse, $\vec{V}$, et le vecteur accélération, $\vec{\Gamma}$, du point M à l'instant t.
3° Calculer le produit sclaire $\vec{V} \cdot \vec{\Gamma}$ et trouver les valeurs de t, appartenant à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, telles que $\vec{V} \cdot \vec{\Gamma} = 0$.

23. Dans un plan, rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, un point mobile M a pour coordonnées, exprimées en fonction de la date t : $\begin{cases} x = t^2 \\ y = t. \end{cases}$
1° Quelle est l'équation de la courbe C_1 décrite par M lorsque t varie dans l'intervalle $[0, +\infty[$? Construire C_1.
2° Quelle est l'équation de la courbe C_2 décrite par M lorsque t varie dans l'intervalle $]-\infty, 0[$? Construire C_2.
3° Soit, à une date t_1 ($t_1 \geqslant 0$), M_1 la position du mobile sur C_1 et $\vec{v}_1$ le vecteur vitesse; soit, à une date t_2 ($t_2 \leqslant 0$), M_2 la position du mobile sur C_2 et $\vec{v}_2$ le vecteur vitesse. Trouver les positions M_1 et M_2 lorsque $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ satisfont à la fois aux deux propriétés suivantes : $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont orthogonaux, $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ ont même norme.

24. Dans le plan P on considère le point $M(t)$ mobile en fonction du temps t, dont les coordonnées x et y sont définies par :

$$\begin{cases} t \geqslant 0; \\ x = e^{t-1}; \\ y = t^2 e^{1-t}. \end{cases}$$

Quelle est la trajectoire du point $M(t)$? Préciser son sens de parcours. Calculer les coordonnées des vecteurs vitesse $\vec{V}(t)$ et accélération $\vec{\Gamma}(t)$ du point $M(t)$. Placer $M(1)$ et $M(2)$ sur la figure avec les représentants de leurs vecteurs vitesse et accélération d'origine ces points.

25. Le plan étant rapporté au repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère le point mobile N dont les coordonnées à l'instant t sont données par

$$\begin{cases} x = 1 + \ln t, \quad t \geqslant 1 \\ y = [-\ln^2 t + \ln t + 1]\, t\, e \end{cases}$$

a) Préciser la position de N à l'instant $t = 1$. Quelle est la trajectoire du point N?
b) Déterminer les vecteurs vitesse $\vec{V}(t)$ et accélération $\vec{\Gamma}(t)$.
c) Construire ces vecteurs à l'instant $t = 1$.

26. Soit le point M mobile dans P de coordonnées

$$x = \cos t,$$
$$y = \sqrt{2\cos t - \frac{1}{2}\cos 2t + \frac{5}{2}}, \quad t \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

1° Déterminer avec précision la trajectoire $\mathcal{C}$ du point M; préciser le mouvement de M.

2° A l'instant $t_1 = -\frac{\pi}{2}$ préciser la position du point M_1 sur $\mathcal{C}$ et construire un représentant du vecteur vitesse.

27. Dans le plan de repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère le mobile M dont les coordonnées en fonction du temps t sont données par :

$$\begin{cases} x = t + 1, \\ y = \ln(t^2 - 4), \qquad \text{pour } t \geqslant \sqrt{5}. \end{cases}$$

Déterminer

- la trajectoire de ce mobile,
- le vecteur vitesse à l'instant t,
- le vecteur accélération à l'instant t.

28. Les coordonnées d'un mobile M sont données en fonction du temps t ($t \geqslant 0$), dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, par :

$$\begin{cases} x = 2e^t, \\ y = t + \dfrac{e^{-t} - 1}{2}. \end{cases}$$

Calculer, en fonction de t, les coordonnées du vecteur vitesse $\vec{V}(t)$ et du vecteur accélération $\vec{\Gamma}(t)$.
Pour quelle valeur de t les vecteurs $\vec{V}(t)$ et $\vec{\Gamma}(t)$ sont-ils colinéaires?
Quelle est la trajectoire du mobile M?

29. Un mobile M a pour coordonnées :

$$x = \frac{e^t}{2} \quad \text{et} \quad y = -\frac{e^{2t}}{4} - t + \ln 2 \quad (\text{où} \quad t \in \mathbb{R}).$$

a) Calculer les coordonnées du vecteur vitesse et du vecteur accélération à la date t.
b) A quelle date le vecteur vitesse et le vecteur accélération ont-ils la même direction?

30. Soit M un point matériel en mouvement dans le plan P muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. A tout instant t de l'intervalle de temps $]0, +\infty[$, la position de M est donnée par :

$$\overrightarrow{OM} = (\ln t)\vec{i} + \sqrt{\frac{t}{t+1}}\,\vec{j}.$$

1° Quelle est la trajectoire de M?
2° Calculer les composantes du vecteur vitesse et du vecteur accélération de M à l'instant t.

31. Dans le plan $\mathcal{P}$, on considère le point mobile M dont les coordonnées (x, y) à la date $t \geqslant 1$ vérifient

$$\begin{cases} x = 1 - \ln t, \\ y = -\dfrac{e \ln t}{t}. \end{cases}$$

a) Déterminer la trajectoire de M; dans quel sens est-elle décrite?
b) Déterminer le vecteur vitesse $\vec{V}$ et le vecteur accélération $\vec{\Gamma}$ par leurs composantes à la date t.
c) Construire ces vecteurs à la date $t_0 = 1$; le mouvement est-il alors accéléré ou retardé?

32. Le plan étant rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les coordonnées d'un point mobile M sont données, pour $t > 1$, par :

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{\ln t}, \\ y(t) = \dfrac{2t - t\ln t}{\ln t}. \end{cases}$$

a) Déterminer la trajectoire du point mobile $M(t)$ et préciser le sens de déplacement de M sur sa trajectoire.
b) Déterminer la position $M(e^2)$ du point mobile à l'instant $t = e^2$ et calculer les coordonnées du vecteur vitesse $\vec{V}$ et du vecteur accélération $\vec{\Gamma}$ à cet instant.

33. Un point mobile M a des coordonnées dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ définies par :

$$\begin{cases} x = 1 + e^t, \quad t \geqslant 0, \quad t \text{ désignant le temps;} \\ y = 2e^t + 3 + t - \ln(e^t + 2). \end{cases}$$

1° Montrer que M décrit une courbe C, que l'on précisera.
2° Indiquer à chaque instant les expressions des vecteurs vitesse et accélération du point M. Au cours du temps le mouvement est-il accéléré ou retardé?

34. Un point M se déplace sur un axe orienté, d'origine O et de vecteur $\vec{i}$ entre les instants $t = 0$ et $t = 10$.
A l'instant $t = 0$, M a pour abscisse $+8$.
La vitesse à chaque instant t est définie par la relation vectorielle

$$\vec{v}(t) = v(t)\vec{i} = \frac{5 - t}{1 + t}\vec{i} \qquad \forall t \in [0, 10]$$

1° Indiquer selon les valeurs de t le sens du mouvement ainsi que son allure (accélérée ou retardée).
2° Calculer

$$f(t) = 8 + \int_0^t v(x)\,dx$$

Que représente $f(t)$?
3° Quelle est la distance parcourue par le point M entre les instants $t = 0$ et $t = 10$? En donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

35. Dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'un plan affine euclidien P les coordonnées d'un point mobile M à chaque date t de l'intervalle $[0, 2\pi]$ sont données par :

$$\begin{cases} x = 3\cos t - 1 \\ y = -2\cos t + 1. \end{cases}$$

1° Trouver l'équation du support de la trajectoire de M. Préciser cette trajectoire et la tracer.
2° *a)* Trouver les coordonnées à la date t du vecteur vitesse $\vec{V}$ et du vecteur accélération $\vec{\Gamma}$ du point M.

Quelle est à la date t la norme du vecteur vitesse de M? Étudier sur quels intervalles de temps le mouvement est accéléré ou retardé.
b) Quelle est la distance parcourue par le mobile M entre les dates 0 et π? Quelle est la vitesse d'un mobile se déplaçant sur la trajectoire de M d'un mouvement uniforme qui parcourrait cette distance dans le même temps que M (ou vitesse moyenne de M entre les dates 0 et π)?
A quelles dates de l'intervalle $[0, 2\pi]$ la vitesse instantanée de M est-elle égale à cette vitesse moyenne?

36. *1°* Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 - 2z + \frac{1}{\cos^2 t} = 0$$

où t est un réel donné appartenant à

$$\left]0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[.$$

2° Soient z_1 et z_2 les deux solutions. Donner suivant les valeurs de t le module et un argument de z_1 et z_2.
3° Le plan complexe étant muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on désigne par M_1 et M_2 les points d'affixes respectives z_1 et z_2.
On suppose désormais que t appartient à $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ et désigne le temps.
a) Quelles sont les trajectoires des points mobiles M_1 et M_2?
b) Déterminer les coordonnées de $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ vecteurs vitesse des points M_1 et M_2.
c) Montrer qu'à chaque instant :

$$OM_1^2 = \|\vec{v}_1\| - OM_2^2 = \|\vec{v}_2\|.$$

37. **A** — Au nombre complexe z de module 1, d'argument $\theta\,(0 < \theta \leqslant \pi)$, on associe le nombre complexe z' tel que

$$z' = \frac{z(z+1)}{(z-1)^2}.$$

1° $\bar{z}'$ désignant le nombre complexe conjugué de z', déterminer $\bar{z}'$ en fonction de z. On remarquera que $\bar{z} = \frac{1}{z}$.
z' peut-il être un réel non nul?
2° *a*) Déterminer en fonction de $\frac{\theta}{2}$ le module et l'argument de $z+1$, $z-1$, $(z-1)^2$.
b) Calculer le module et l'argument de z'.
En déduire la partie réelle X et la partie imaginaire Y de z'. On note $X = g(\theta)$ et $Y = h(\theta)$.
z' peut-il être imaginaire pur non nul?
3° On considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé, un point mobile M de coordonnées $X = g(\theta)$ et $Y = h(\theta)$ $(0 < \theta \leqslant \pi)$.
a) Trouver une relation indépendante de θ entre les coordonnées X et Y de M. Tracer dans le plan complexe la trajectoire de M.
b) Déterminer les vecteurs vitesse $\overrightarrow{V}$ et accélération $\overrightarrow{\Gamma}$ de M à l'instant θ. Le mouvement est-il accéléré ou retardé?
Construire les vecteurs $\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{\Gamma}$ à l'instant $\theta = \pi$.

38. Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère le point mobile M dont le vecteur vitesse $\overrightarrow{V}$ à l'instant $t\,(t > 0)$ a pour composantes

$$\begin{cases} \dfrac{1}{t} \\[2ex] 1 - \dfrac{1}{t} \end{cases}$$

1° Déterminer les coordonnées de M en fonction de t, sachant qu'à l'instant $t = 1$ elles sont $x = 0$ et $y = 1$. Écrire l'équation de la trajectoire de M sous la forme $y = f(x)$.
2° Étudier la fonction f. Montrer que sa courbe représentative admet comme asymptote la droite d'équation $y = -x$. Tracer cette courbe dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$; préciser le sens dans lequel la trajectoire est décrite.
3° Calculer les composantes du vecteur accélération $\overrightarrow{\Gamma}$. Montrer qu'il est colinéaire à un vecteur fixe.
4° A quel instant les vecteurs $\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{\Gamma}$ sont-ils orthogonaux? Placer le point M correspondant et tracer les représentants des vecteurs $\overrightarrow{V}$ et $\overrightarrow{\Gamma}$ d'origine M.

CHAPITRE 11

DENOMBREMENT

Dans ce chapitre, nous supposerons connus l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels, les propriétés des opérations dans $\mathbb{N}$: addition et multiplication, ainsi que les propriétés de la relation d'ordre $\leqslant$. Pour tout entier naturel *non nul* n, nous noterons $\mathbb{N}_n$ l'ensemble formé des entiers 1, 2, ..., n :

$$\mathbb{N}_n = \{ i \in \mathbb{N} | 1 \leqslant i \leqslant n \}.$$

I – ENSEMBLES FINIS

Intuitivement, un *ensemble fini* est un ensemble E à qui l'on peut associer un entier naturel n obtenu en *comptant* ses éléments : l'ensemble des élèves de la classe est fini. Précisons cette notion :

DÉFINITION 1	**On dit qu'un *ensemble* E est *fini* s'il est vide ou s'il existe un entier naturel non nul n et une bijection f de $\mathbb{N}_n$ sur E.**

Un ensemble non fini est dit infini, c'est le cas de $\mathbb{N}$, de $\mathbb{Z}$, de $\mathbb{Q}$, de $\mathbb{R}$.

1. CARDINAL D'UN ENSEMBLE FINI

Soit E un ensemble fini.

a) Si E n'est pas vide, il existe un entier naturel non nul n et une bijection f de $\mathbb{N}_n$ sur E. On démontre, et nous l'admettrons, que cet entier n est unique. On l'appelle le **cardinal** de E et on le note Card E.

b) Si E est vide, son cardinal est, par définition, l'entier 0 : Card $\varnothing = 0$.

Dénombrer un ensemble fini E, c'est calculer son cardinal.
A noter que tout ensemble E, fini, non vide, de cardinal n, peut s'écrire sous la forme $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$. En effet, comme il existe une bijection f de $\mathbb{N}_n$ sur E, les éléments de E sont $f(1)$, $f(2)$, ..., $f(n)$.
Si, pour tout i de $\mathbb{N}_n$, on note $x_i = f(i)$, on obtient :

$$E = \{x_1, x_2, ..., x_n\}.$$

A noter également que l'ensemble vide est le seul ensemble de cardinal égal à 0.

2. PROPRIÉTÉS DES ENSEMBLES FINIS

1° S'il existe une bijection g d'un ensemble E sur un ensemble F, l'application réciproque de g, notée g^{-1}, est une bijection de F sur E. On dit alors que E et F sont **équipotents.**

Considérons un ensemble E, fini, non vide, de cardinal n, et un ensemble F équipotent à E. Il existe une bijection f de $\mathbb{N}_n$ sur E et une bijection g de E sur F. L'application composée $g \circ f$ est alors une bijection de $\mathbb{N}_n$ sur F. Il en résulte que F est fini et que $\text{Card } F = n$.

PROPRIÉTÉ 1	**Tout ensemble F équipotent à un ensemble fini E est fini et de même cardinal que E.**

2° On démontre, et nous admettrons, les résultats suivants, intuitivement évidents :

PROPRIÉTÉ 2	**Toute partie d'un ensemble fini est finie.**
PROPRIÉTÉ 3	**La réunion de deux ensembles finis E et F disjoints, c'est-à-dire d'intersection vide, est un ensemble fini dont le cardinal est la somme des cardinaux de E et F.**

Conséquences

a) Précisons la propriété **2.**
Soit E un ensemble fini et F une partie de E; on a :

$$E = F \cup \complement_E F \quad \text{et} \quad F \cap \complement_E F = \varnothing ,$$

d'où :

$$\text{Card } E = \text{Card } F + \text{Card } \complement_E F .$$

Il en résulte :

$$\text{Card } F \leqslant \text{Card } E .$$

De plus, si $\text{Card } F = \text{Card } E$, alors $\text{Card } \complement_E F = 0$, et, par suite, $\complement_E F = \varnothing$, c'est-à-dire $F = E$. Par suite :

PROPRIÉTÉ 4	**Pour toute partie F d'un ensemble fini E, on a $\text{Card } F \leqslant \text{Card } E$. De plus, si $\text{Card } F = \text{Card } E$, alors $F = E$.**

b) Soit E et F deux ensembles finis.
On note $F \setminus E$ l'ensemble des éléments de F qui ne sont pas éléments de E. On a :

$$E \cup (F \setminus E) = E \cup F \quad \text{et} \quad E \cap (F \setminus E) = \varnothing ,$$

$$F = (E \cap F) \cup (F \setminus E) \quad \text{et} \quad (E \cap F) \cap (F \setminus E) = \varnothing .$$

Il en résulte :

$$\text{Card } E + \text{Card } (F \setminus E) = \text{Card } (E \cup F) ,$$

$$\text{Card } F = \text{Card } (E \cap F) + \text{Card } (F \setminus E) ,$$

d'où, par addition membre à membre de ces deux égalités, puis simplification :

$$\boxed{\textbf{Card } E + \textbf{Card } F = \textbf{Card } (E \cup F) + \textbf{Card } (E \cap F)}$$

En particulier, si E et F sont disjoints, on retrouve la propriété 2 :

$$\text{Card } (E \cup F) = \text{Card } E + \text{Card } F .$$

c) On démontre, de proche en proche, en utilisant la propriété **2** :

PROPRIÉTÉ 5	**Le cardinal de la réunion de n ensembles finis $E_1, E_2, ..., E_n$, deux à deux disjoints, est tel que :** $$\textbf{Card } (E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_n) = \textbf{Card } E_1 + \textbf{Card } E_2 + ... + \textbf{Card } E_n .$$

3° Cardinal d'un produit cartésien

Soit E et F deux ensembles finis de cardinaux respectifs n et p.
Si l'on note $E = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$, le produit cartésien $E \times F$ peut s'écrire sous la forme :

$$E \times F = (\{x_1\} \times F) \cup (\{x_2\} \times F) \cup ... \cup (\{x_n\} \times F),$$

où, pour tout entier i de $\mathbb{N}_n$, $\{x_i\} \times F$ est l'ensemble des couples (x_i, y) lorsque y décrit F.
Il est immédiat que $\text{Card}(\{x_i\} \times F) = \text{Card } F$ et que, si i est différent de j, les ensembles $\{x_i\} \times F$ et $\{x_j\} \times F$ sont disjoints.
Il en résulte que $E \times F$ est fini et que :

$$\text{Card}(E \times F) = \sum_{i=1}^{n} \text{Card}(\{x_i\} \times F) = \sum_{i=1}^{n} p = np.$$

PROPRIÉTÉ 6	**Le produit cartésien de deux ensembles finis E et F est fini et tel que :** $\mathbf{Card}(E \times F) = (\mathbf{Card}\ E)(\mathbf{Card}\ F)$.

Cette formule se généralise par récurrence; le produit cartésien de n ensembles finis $E_1, E_2, ..., E_n$ est fini et tel que :

$$\text{Card}(E_1 \times E_2 \times ... \times E_n) = (\text{Card } E_1)(\text{Card } E_2) ... (\text{Card } E_n).$$

En particulier, si $E_1 = E_2 = ... = E_n = E$, on obtient la formule :

$$\boxed{\mathbf{Card}(E^n) = (\mathbf{Card}\ E)^n}$$

★ Activité 1

Soit E et F deux ensembles finis.

1° *On appelle* ***différence*** *de E et F l'ensemble, noté $E \setminus F$, formé des éléments de E qui ne sont pas éléments de F. Démontrer que :*

$$\text{Card}(E \setminus F) = \text{Card } E - \text{Card}(E \cap F).$$

2° *On appelle* ***différence symétrique*** *de E et F l'ensemble noté $E \Delta F$ défini par :*

$$E \Delta F = (E \setminus F) \cup (F \setminus E).$$

($E \Delta F$ est l'ensemble formé des éléments qui appartiennent à un et à un seul des deux ensembles E et F.)
Démontrer que : $\text{Card}(E \Delta F) = \text{Card } E + \text{Card } F - 2 \text{ Card}(E \cap F)$.

★ Activité 2

Soit E et F deux ensembles finis de même cardinal n, et f une application de E dans F.
1° *On suppose, dans cette question, que f est injective.*
Calculer Card $f\langle E \rangle$ *et en déduire que f est surjective.*
($f\langle E \rangle$ est l'ensemble des images par f des éléments de E).

2° *On suppose, dans cette question, que f est surjective. On note F sous la forme $\{y_1, y_2, ..., y_n\}$. A tout élément y_i de F on associe l'ensemble E_i de ses antécédents par f :*

$$E_i = \{x \in E \mid f(x) = y_i\}.$$

a) *Démontrer que* $\text{Card } E_i \geqslant 1$.

b) Démontrer que les ensembles E_1, E_2, ..., E_n forment une partition de E. En déduire que :
$\text{Card } E_1 + \text{Card } E_2 + \ldots + \text{Card } E_n = n$.
c) Démontrer que, quel que soit i élément de $\mathbb{N}_n$, $\text{Card } E_i = 1$. *En déduire que f est injective.*

On peut conclure cette étude par le théorème suivant :

THÉORÈME 1	***E* et *F* étant deux ensembles finis de même cardinal, une application *f* de *E* dans *F* est injective si, et seulement si, elle est surjective.**

● Exercices d'application

1. On considère deux ensembles finis A et B et on note : $\text{Card } A = a$, $\text{Card } B = b$, $\text{Card } (A \setminus B) = c$. Calculer, en fonction de a, b, c, les cardinaux des ensembles $A \cap B$, $A \cup B$, $A \Delta B$.

2. Le cardinal de la réunion de deux ensembles finis A et B est donné par la formule :

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card } A + \text{Card } B - \text{Card}(A \cap B).$$

Établir une formule donnant le cardinal de la réunion de trois ensembles finis A, B, C.

3. On considère un ensemble *fini* G muni d'une loi associative notée multiplicativement : $(a, b) \mapsto ab$. On suppose que G possède un élément neutre e pour cette loi et que tout élément a de G est régulier (si $ab = ac$, alors $b = c$; si $ba = ca$, alors $b = c$).
Soit a un élément de G.
1° Démontrer que l'application f de G dans G qui à x associe ax est injective; en déduire que f est surjective et qu'il existe un élément a' de G tel que $aa' = e$.
2° Démontrer de même qu'il existe un élément a'' de G tel que $a''a = e$.
3° En considérant le produit $(a''a)a'$, démontrer que $a' = a''$. En déduire que l'élément a possède un symétrique.
Conclure en énonçant un théorème.

4. On considère, dans le plan $\mathcal{P}$, n droites $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \ldots, \mathcal{D}_n$ deux à deux sécantes et trois à trois non concourantes. On note a_n le nombre de régions délimitées par ces n droites.
1° Calculer a_1, a_2, a_3.
2° Les droites $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \ldots, \mathcal{D}_{n-1}$ délimitent a_{n-1} régions. Combien d'entre elles sont-elles traversées par la droite $\mathcal{D}_n$? (On déduira cet entier du nombre de points d'intersection de $\mathcal{D}_n$ avec $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \ldots, \mathcal{D}_{n-1}$.)
En déduire que $a_n = a_{n-1} + n$.
3° Calculer a_n en fonction de l'entier n.

5. On considère l'entier $n = 2^a \times 3^b \times 5^c \times 7^d$, où a, b, c, d sont des entiers naturels non nuls.
1° Démontrer que les diviseurs de n sont de la forme $2^\alpha \times 3^\beta \times 5^\gamma \times 7^\delta$, où $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont des entiers tels que $0 \leqslant \alpha \leqslant a$, $0 \leqslant \beta \leqslant b$, $0 \leqslant \gamma \leqslant c$, $0 \leqslant \delta \leqslant d$. En déduire le nombre des diviseurs de n.
2° Quel est le nombre de diviseurs de l'entier 169 047 648?

6. Soit n un entier naturel donné.
1° Dénombrer l'ensemble des couples (x, y) d'entiers naturels solutions de l'équation :

$$x + y = n.$$

2° Même question pour l'équation :

$$x + 2y = n.$$

(On distinguera les cas n pair et n impair.)

II – APPLICATIONS ENTRE ENSEMBLES FINIS

1. NOMBRE D'APPLICATIONS DE *A* DANS *E*

Soit $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_p\}$ un ensemble fini non vide de cardinal p et E un ensemble fini non vide de cardinal n.
On se propose de déterminer le cardinal de l'ensemble $\mathcal{F}$ des applications de A dans E.
A tout élément f de $\mathcal{F}$ associons le p-uplet $(f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_p))$, élément du produit cartésien E^p. On définit ainsi une application φ de $\mathcal{F}$ dans E^p :

$$\varphi : \quad f \mapsto (f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_p)).$$

Cette application φ est bijective. En effet, tout élément $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ de E^p possède un antécédent f par φ et un seul, à savoir l'application de A dans E telle que :

$$f(a_1) = x_1, \quad f(a_2) = x_2, \quad \ldots, \quad f(a_p) = x_p.$$

Les ensembles $\mathcal{F}$ et E^p sont donc *équipotents*. Comme E^p est fini et de cardinal n^p, il en est de même pour $\mathcal{F}$.

Nous retiendrons :

THÉORÈME 2	**A et E étant deux ensembles finis non vides, l'ensemble $\mathcal{F}$ des applications de A dans E est fini et Card $\mathcal{F} = (\text{Card } E)^{\text{Card } A}$.**

On note souvent E^A l'ensemble des applications de A dans E.
Lorsque A et E sont finis et non vides, on peut alors écrire :

$$\text{Card } E^A = (\text{Card } E)^{\text{Card } A}.$$

★ Activité

Soit E un ensemble et A une partie de E. On appelle **fonction caractéristique** de A l'application, notée f_A, de E dans $\{0, 1\}$ ainsi définie :

- pour tout élément x de E appartenant à A, $f(x) = 1$;
- pour tout élément x de E n'appartenant pas à A, $f(x) = 0$.

1° Définir les applications $f_\varnothing$ et f_E.

2° Soit f une application de E dans $\{0,1\}$. Démontrer qu'il existe une partie A de E, unique, telle que $f = f_A$.

3° On note $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E et $\mathcal{F}$ l'ensemble des applications de E dans $\{0,1\}$. Démontrer que $\mathcal{P}(E)$ est équipotent à $\mathcal{F}$.
En déduire, lorsque E est fini et de cardinal n, que Card $\mathcal{P}(E) = 2^n$.

Nous retiendrons :

THÉORÈME 3	**L'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties d'un ensemble fini E est fini et de cardinal $2^{\text{Card } E}$.**

Applications :

4° Soit E un ensemble fini de cardinal n et A une partie de E de cardinal p. Dénombrer les parties de E contenant A.

5° Soit E un ensemble fini de cardinal n et soit A et B des parties de E de cardinaux respectifs p et q.

a) *A quelle condition l'équation $A \cup X = B$ a-t-elle au moins une solution X appartenant à $\mathcal{P}(E)$? Cette condition étant remplie, dénombrer les solutions de l'équation.*

b) *Reprendre la question **a)** pour l'équation $A \cap X = B$.*

2. NOMBRE D'INJECTIONS DE A DANS E

Soit A et E deux ensembles finis de cardinaux respectifs p et n.
L'ensemble $\mathcal{I}$ des injections de A dans E est fini, puisque c'est une partie de l'ensemble fini $\mathcal{F}$ des applications de A dans E. De plus, Card $\mathcal{I} \leqslant$ Card $\mathcal{F}$. Déterminons le cardinal de $\mathcal{I}$.

a) Soit f une injection de A dans E, s'il en existe, et $f\langle A \rangle$ l'ensemble des images par f des éléments de A.
L'application f définit une bijection de A sur $f\langle A \rangle$, d'où Card $f\langle A \rangle$ = Card A. De plus, comme $f\langle A \rangle$ est une partie de E, on a Card $f\langle A \rangle \leqslant$ Card E et, par suite, Card $A \leqslant$ Card E.

Par conséquent, s'il existe une injection de A sur E, alors $\text{Card } A \leqslant \text{Card } E$.
Il en résulte que si $\text{Card } A > \text{Card } E$, il n'existe pas d'injection de A dans E. Le cardinal de l'ensemble $\mathfrak{I}$ est alors nul.

b) Supposons maintenant que $\text{Card } A \leqslant \text{Card } E$.
Écrivons l'ensemble A sous la forme $A = \{ a_1, a_2, ..., a_p \}$.
Pour construire une injection de A dans E, on choisit successivement :

- un élément x_1 de E comme image de a_1;
- un élément x_2 de $E \setminus \{ x_1 \}$ comme image de a_2;
- un élément x_3 de $E \setminus \{ x_1, x_2 \}$ comme image de a_3;

$\vdots$

- un élément x_p de $E \setminus \{ x_1, x_2, ..., x_{p-1} \}$ comme image de a_p.

Le choix de x_1 peut se faire de n façons, celui de x_2 de $n-1$ façons, celui de x_3 de $n-2$ façons, ..., et enfin celui de x_p de $n-(p-1)$ façons.
On peut donc construire ainsi $n(n-1)(n-2)...(n-p+1)$ injections de A dans E.
Les injections ainsi construites sont deux à deux distinctes puisqu'elles diffèrent par l'image de a_1, ou par l'image de a_2, ..., ou par l'image de a_p. De plus, on les obtient toutes puisqu'une injection quelconque f de A dans E telle que $f(a_1) = y_1$, $f(a_2) = y_2$, ..., $f(a_p) = y_p$, correspond aux choix successifs $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, ..., $x_p = y_p$.

THÉORÈME 4 | **A et E étant deux ensembles finis de cardinaux respectifs p et n, le nombre d'injections de A dans E est nul si $p > n$, et est égal au produit $n(n-1)...(n-p+1)$ si $p \leqslant n$.**

REMARQUE :

Il est important de bien comprendre pourquoi on obtient le nombre d'injections de A dans E en effectuant le *produit* des entiers n, $n-1$, ..., $n-p+1$ et non pas leur somme.
Posons $A' = A \setminus \{ a_p \}$.
Si f est une injection de A dans E, sa restriction à A' est une injection de A' dans E.
Réciproquement, pour chaque injection g de A' dans E, il existe $n-(p-1)$ injections de A dans E dont g soit la restriction à A'. Ainsi le nombre d'injections de A dans E est égal au *produit* du nombre d'injections de A' dans E par $n-(p-1)$.

3. NOMBRE DE BIJECTIONS DE E SUR E

Il résulte du théorème **1** établi dans l'activité de la page 337, que lorsque les ensembles A et E ont même cardinal n, une application f de A dans E est bijective si, et seulement si, elle est injective.
Il s'ensuit que le nombre de bijections de A sur E est égal au produit :

$$n \times (n-1) \times ... \times 2 \times 1$$

que l'on convient de noter $n!$ (lire « *factorielle* n »).
En particulier :

THÉORÈME 5 | **Le nombre des bijections d'un ensemble fini E de cardinal n sur lui-même est égal à $n!$**

Une bijection d'un ensemble E sur lui-même est aussi appelée une **permutation** de E.

4. ARRANGEMENTS

Soit E un ensemble fini non vide de cardinal n, et p un entier tel que $1 \leqslant p \leqslant n$.

DÉFINITION 2 | **On appelle *arrangement sans répétition d'ordre p* de E toute injection de $\mathbb{N}_p$ dans E.**

A noter qu'une injection de $\mathbb{N}_p$ dans E n'est autre qu'une suite $(x_1, x_2, ..., x_p)$ de p éléments de E *deux à deux distincts*. Ainsi, un arrangement sans répétition d'ordre p de E est une suite de p éléments de E deux à deux distincts.

On note A_n^p le nombre des arrangements sans répétition d'ordre p de E; on obtient cet entier en appliquant le théorème 4 :

$$A_n^p = n(n-1)...(n-p+1)\,. \tag{1}$$

Si $p = n$, la formule (1) devient $A_n^n = n!$

Si $p < n$, on peut écrire :

$$A_n^p = \frac{1 \times 2 \times ... \times (n-p) \times (n-p+1) \times ... \times n}{1 \times 2 \times ... \times (n-p)}\,,$$

soit :

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}\,. \tag{2}$$

Pour $p = n$, la formule (2) s'écrit : $A_n^n = \dfrac{n!}{0!}$ Or $A_n^n = n!$ Il est donc naturel de poser $0! = 1$, puisque, avec cette convention, la formule (2) est valable quels que soient les entiers n et p tels que $1 \leqslant p \leqslant n$.

• Exercices d'application

7. Soit E un ensemble fini non vide de cardinal n. Dénombrer les applications non surjectives de E dans E.

8. On range n dossiers numérotés $1, 2, ..., n$ dans n tiroirs numérotés $1, 2, ..., n$ en plaçant un dossier par tiroir.

1° Dénombrer les différents rangements possibles.

2° Dénombrer les rangements suivants :

a) le dossier numéroté i est dans le tiroir numéroté i $(1 \leqslant i \leqslant n)$;

b) les dossiers i et j sont respectivement dans les tiroirs i et j $(1 \leqslant i < j \leqslant n)$;

c) les dossiers $i_1, i_2, ..., i_k$ sont respectivement dans les tiroirs $i_1, i_2, ..., i_k$ $(1 \leqslant i_1 < i_2 < ... < i_k \leqslant n)$.

9. Soit n un entier naturel donné. Déterminer les couples (p, q) d'entiers naturels tels que $A_n^p = A_n^q$.

10. Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geqslant 1$. On se propose de dénombrer l'ensemble des applications f de E dans E telles que $f \circ f = f$.

1° Soit f une application de E dans E. On note $f\langle E \rangle$ l'ensemble des images par f de tous les éléments de E. Démontrer que l'application f est telle que $f \circ f = f$ si, et seulement si, tout élément de $f\langle E \rangle$ est invariant par f.

2° Soit A une partie non vide de E de cardinal p. Dénombrer les applications f de E dans E telles que $f \circ f = f$ et $f\langle E \rangle = A$.

3° Dénombrer les applications f de E dans E telles que $f \circ f = f$. (On rappelle que le cardinal de l'ensemble des parties non vides de E est $2^n - 1$.)

11. Soit E un ensemble à n éléments $(n \geqslant 3)$ et a un élément donné de E.

1° On classe les arrangements sans répétition d'ordre p de E $(1 < p < n)$ selon le critère suivant :

- ceux contenant a;
- ceux ne contenant pas a.

En déduire que $A_n^p = pA_{n-1}^{p-1} + A_{n-1}^p$.

Vérifier cette formule en utilisant les expressions de A_n^p, A_{n-1}^{p-1} et A_{n-1}^p.

2° En déduire une méthode de calcul des coefficients A_n^p en construisant le tableau ci-dessous (jusqu'à la ligne 7).

$n \backslash p$	1	2	3	4	...
1	1				
2	2	2			
3	3	6	6		
4	4	12	24	24	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

III – SOUS-ENSEMBLES D'UN ENSEMBLE FINI

1. COMBINAISONS SANS RÉPÉTITION

Soit E un ensemble fini et p un entier naturel.

DÉFINITION 3 **On appelle *combinaison sans répétition d'ordre p* de E toute partie de E à p éléments.**

Désignons par $\mathcal{P}_p(E)$ l'ensemble des parties à p éléments de E. Cet ensemble est fini puisqu'il est inclus dans l'ensemble, fini, de toutes les parties de E. Dénombrons-le.
a) Si l'entier p est strictement supérieur au cardinal n de E, l'ensemble $\mathcal{P}_p(E)$ est vide et donc de cardinal nul.
b) Supposons maintenant $p \leqslant n$ et examinons quelques cas particuliers.

• Si $p = 0$, $\mathcal{P}_0(E)$ ne contient que la partie vide de E; donc : Card $\mathcal{P}_0(E) = 1$.

• Si $p = 1$, $\mathcal{P}_1(E)$ est l'ensemble des parties à *un* élément, ou **singletons**, de E; donc : Card $\mathcal{P}_1(E) = n$.

• Si $p = n$, la seule partie de E à n éléments est E, donc : Card $\mathcal{P}_n(E) = 1$.

Dans le cas d'un entier p tel que $0 < p \leqslant n$, considérons l'ensemble $\mathcal{A}_p(E)$ des arrangements sans répétition d'ordre p de E et, à tout élément $(x_1, x_2, ..., x_p)$ de $\mathcal{A}_p(E)$, associons la partie $\{x_1, x_2, ..., x_p\}$.
On définit ainsi une application φ de $\mathcal{A}_p(E)$ dans $\mathcal{P}_p(E)$.
Soit $A = \{a_1, a_2, ..., a_p\}$ un élément de $\mathcal{P}_p(E)$. Ses antécédents par φ sont les arrangements sans répétition d'ordre p de E formés avec les éléments $a_1, a_2, ..., a_p$, c'est-à-dire les arrangements sans répétition d'ordre p de A. Il y en a $p!$.
Si l'on note N le cardinal de $\mathcal{P}_p(E)$, on peut écrire cet ensemble sous la forme $\mathcal{P}_p(E) = \{A_1, A_2, ..., A_N\}$. Pour tout entier $i \in \{1, 2, ..., N\}$, désignons par X_i l'ensemble des antécédents de A_i par φ. On a :

$$\mathcal{A}_p(E) = X_1 \cup X_2 \cup ... \cup X_N .$$

De plus, si $i \neq j$, $X_i \cap X_j = \varnothing$. En effet, tout antécédent de A_i est distinct de tout antécédent de A_j, puisqu'il s'agit de deux arrangements sans répétition qui ne sont pas formés avec les mêmes éléments.
L'application de la propriété **5** donne :

$$\text{Card } \mathcal{A}_p(E) = \text{Card } X_1 + \text{Card } X_2 + ... + \text{Card } X_N.$$

Or, pour tout entier $i \in \{1, 2, ..., N\}$, on a : Card $X_i = p!$.
Il en résulte, A_n^p étant le cardinal de $\mathcal{A}_p(E)$: $A_n^p = Np!$, et, par suite :

$$N = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

A noter que cette formule, établie pour un entier p tel que $0 < p \leqslant n$, s'applique aussi, compte tenu de la convention $0! = 1$, pour $p = 0$.
En effet, dans ce cas, on a d'une part $N = 1$ et d'autre part $\dfrac{n!}{0!(n-0)!} = 1$.

Nous retiendrons :

THÉORÈME 6 **Le cardinal de l'ensemble des parties à p éléments d'un ensemble fini E de cardinal n est nul si $p > n$ et égal à $\dfrac{n!}{p!(n-p)!}$, si $0 \leqslant p \leqslant n$.**

2. COEFFICIENTS BINOMIAUX

Pour tout couple (n, p) d'entiers naturels tel que $0 \leqslant p \leqslant n$, on appelle **coefficient binomial** d'indices n et p, et on note C_n^p ou $\binom{n}{p}$, le cardinal de l'ensemble des parties à p éléments d'un ensemble à n éléments. Lorsque l'entier p est tel que $p > n$, on convient de poser $C_n^p = 0$.

Ainsi :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \textbf{si} \quad p > n, & C_n^p = 0 \\ \textbf{si} \quad 0 \leqslant p \leqslant n, & C_n^p = \dfrac{n!}{p!(n-p)!} \end{array}}$$

Tout coefficient binomial est un entier naturel; par exemple :

$$C_7^0 = 1 \quad , \quad C_7^1 = 7 \quad , \quad C_7^2 = 21, \quad , \quad C_7^3 = 35 \quad , \quad C_7^4 = 35 \quad , \quad ...$$

REMARQUE :

L'appellation « coefficient binomial » trouvera sa justification au paragraphe **3** ci-dessous.

Propriétés des coefficients binomiaux

1° Soit E un ensemble fini de cardinal n. L'ensemble $\mathcal{P}(E)$ des parties de E est la réunion des ensembles de parties de E contenant respectivement 0, 1, 2, ..., n éléments :

$$\mathcal{P}(E) = \mathcal{P}_0(E) \cup \mathcal{P}_1(E) \cup ... \cup \mathcal{P}_n(E).$$

De plus, si i et j sont deux entiers distincts appartenant à $\mathbb{N}_n$, toute partie de E à i éléments est distincte de toute partie de E à j éléments. D'où : $\mathcal{P}_i(E) \cap \mathcal{P}_j(E) = \varnothing$.

Il en résulte : $$\text{Card } \mathcal{P}(E) = \sum_{i=1}^{n} \text{Card } \mathcal{P}_i(E).$$

Or : $$\text{Card } \mathcal{P}(E) = 2^n \quad \text{et} \quad \text{Card } \mathcal{P}_i(E) = C_n^i.$$

Par suite : $$\boxed{2^n = \sum_{i=1}^{n} C_n^i}$$

2° A toute partie A de E à p éléments associons sa partie complémentaire relativement à E. On définit ainsi une application φ de $\mathcal{P}_p(E)$ dans $\mathcal{P}_{n-p}(E)$. Tout élément B de $\mathcal{P}_{n-p}(E)$ possède un antécédent unique par φ, à savoir $A = \complement_E B$. Il en résulte que l'application φ est bijective, et donc que les ensembles $\mathcal{P}_p(E)$ et $\mathcal{P}_{n-p}(E)$ ont même cardinal.

THÉORÈME 7	**Pour tout couple (n, p) d'entiers naturels tel que $0 \leqslant p \leqslant n$, on a :** $$C_n^p = C_n^{n-p}.$$

A noter qu'on peut vérifier aisément cette égalité en utilisant la formule de définition d'un coefficient binomial.

3° Soit E un ensemble fini non vide de cardinal n, et p un entier tel que $0 < p < n$. Un élément a de E étant choisi, on peut classer les parties de E à p éléments suivant le critère suivant :

- celles ne contenant pas a;
- celles contenant a.

Les premières sont les parties à p éléments de $E\setminus\{a\}$; leur nombre est C^p_{n-1}.
Les secondes s'obtiennent en ajoutant a aux parties à $p-1$ éléments de $E\setminus\{a\}$; leur nombre est C^{p-1}_{n-1}.
On peut donc considérer $\mathcal{P}_p(E)$ comme la réunion de deux sous-ensembles disjoints, l'un de cardinal C^{p-1}_{n-1}, l'autre de cardinal C^p_{n-1}. Par conséquent :

THÉORÈME 8

Pour tout couple (n, p) d'entiers naturels tels que $0 < p < n$, on a :

$$C^p_n = C^{p-1}_{n-1} + C^p_{n-1}.$$

Là encore, il est facile de vérifier cette égalité en utilisant la formule de définition d'un coefficient binomial.

4° Triangle de Pascal

De la formule $C^p_n = C^{p-1}_{n-1} + C^p_{n-1}$ découle un *algorithme* de calcul des coefficients binomiaux connu sous le nom de **triangle de Pascal.**
Le triangle de Pascal est un tableau à double entrée dans lequel la valeur de chaque coefficient binomial C^p_n, inscrite à l'intersection de la n-ième ligne et de la p-ième colonne, est obtenue de la façon suivante :
Dans la colonne d'indice 0, tous les coefficients sont égaux à 1, puisque $C^0_n = 1$.
La ligne d'indice 0 contient le coefficient C^0_0 égal à 1.
La ligne d'indice 1 contient les coefficients C^0_1 et C^1_1 égaux à 1.
Dans la ligne d'indice 2, C^1_2 s'obtient à partir de l'égalité $C^1_2 = C^0_1 + C^1_1$; quant au coefficient C^2_2, il est égal à 1.
Supposons que le tableau soit rempli jusqu'à la ligne d'indice $n-1$.
La ligne d'indice n est ainsi construite : pour tout entier p tel que $0 < p \leqslant n-1$, on calcule C^p_n en ajoutant C^{p-1}_{n-1} et C^p_{n-1} ; quant à C^n_n, il est égal à 1.

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5	6	...	$p-1$	p
0	1									
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					
5	1	5	10	10	5	1				
6	1	6	15	20	15	6	1			
⋮										
$n-1$	C^0_{n-1}	C^1_{n-1}	C^2_{n-1}	C^3_{n-1}	C^4_{n-1}	C^5_{n-1}	C^6_{n-1}	...	C^{p-1}_{n-1}	C^p_{n-1}
n	C^0_n	C^1_n	C^2_n	C^3_n	C^4_n	C^5_n	C^6_n	...		C^p_n

Exercices d'application

12. Soit E un ensemble fini de cardinal $n \geqslant 2$ et a et b deux éléments distincts de E. Soit p un entier tel que $2 \leqslant p \leqslant n$.
On classe les parties de E à p éléments de la façon suivante :

- celles ne contenant ni a ni b;
- celles contenant un, et un seul, des deux éléments a, b;
- celles contenant a et b.

En déduire la relation :

$$C_n^p = C_{n-2}^p + 2C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p-2}.$$

13. *1°* Démontrer que l'égalité $C_n^p = C_n^q$, où n, p, q sont des entiers naturels tels que $p \leqslant n$ et $q \leqslant n$, implique : $p = q$ ou $p + q = n$.
2° Résoudre, dans $\mathbb{N}$, l'équation :

$$C_{10+x}^{x+4} = C_{10+x}^{2x-10}.$$

14. Résoudre, dans $\mathbb{R}$, l'équation :

$$x^2 - xC_n^p + C_{n-1}^{p-1}C_{n-1}^p = 0,$$

où n et p sont deux entiers tels que $0 < p < n$.

15. Démontrer les relations :
a) $C_{p+1}^q = C_p^q + C_{p-1}^{q-1} + C_{p-2}^{q-2} + \dots + C_{p-q}^0$, où $0 \leqslant q \leqslant p$;
b) $C_{n+1}^{p+1} = C_p^p + C_{p+1}^p + C_{p+2}^p + \dots + C_n^p$, où $0 \leqslant p \leqslant n$;
c) $C_{n-1}^p + C_{n-2}^{p-1} + C_{n-3}^{p-2} + \dots + C_{n-p}^1 + 1 = C_n^p$, où $0 < p \leqslant n$.

16. Pour tout couple (n, p) d'entiers naturels tels que $0 \leqslant p \leqslant n-1$, démontrer que $C_n^p \geqslant C_{n-1}^p$. Dans quels cas y-a-t-il égalité?

17. Soit E et F deux ensembles finis de cardinaux respectifs n et $n - 1$ $(n \geqslant 2)$.
1° Soit f une application surjective de E sur F. Montrer qu'il existe un élément a' de F ayant deux antécédents, a et b, par φ et que tous les autres éléments de F ont un seul antécédent, différent de a et de b.
2° En déduire une méthode de construction d'une surjection de E sur F. Dénombrer l'ensemble de ces surjections.

18. Soit E et F deux ensembles finis de cardinaux respectifs n et p $(n \geqslant 2$ et $p \geqslant 2)$.
Dénombrer les applications f de E dans F telles que $\operatorname{Card} f\langle E \rangle = 2$. (On rappelle que $f\langle E \rangle$ est l'ensemble des images par f des éléments de E.)

19. On considère un polygone convexe à n côtés $(n \geqslant 4)$.
1° Combien a-t-il de diagonales?
2° Combien les diagonales ont-elles, au plus, de points d'intersection à l'intérieur du polygone? (On constatera que l'on peut associer à chaque point d'intersection de deux diagonales, quatre sommets du polygone.)

20. Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur un ensemble E. Rappelons que le graphe G de $\mathcal{R}$ est l'ensemble des couples (a, b) du produit cartésien $E \times E$ tels que $a \mathcal{R} b$. L'ensemble G est une partie de $E \times E$. Réciproquement, toute partie G de $E \times E$ détermine une relation binaire sur E de graphe G.
On suppose que l'ensemble E est fini, de cardinal n.
1° Dénombrer les relations binaires sur E.
2° Dénombrer les relations binaires réflexives.
3° Dénombrer les relations binaires symétriques.

21. Résoudre, dans $\mathbb{N}^{*2}$, l'équation :

$$C_x^{y-1} = C_{x-1}^y.$$

3. FORMULE DU BINÔME

Soit à calculer $(a+b)^n$, où a et b sont des réels et n un entier naturel.
Lorsque $n = 0$, on convient que $(a+b)^0 = 1$.
Lorsque l'entier n n'est pas nul, $(a+b)^n$ est le produit π de n facteurs égaux à $a + b$:

$$\pi = (a+b)(a+b)\dots(a+b).$$

De la distributivité de la multiplication par rapport à l'addition, il ressort que le produit π est la somme de tous les termes obtenus en choisissant, dans chaque facteur, un des deux réels a, b, puis en effectuant le produit des n réels choisis.
Si b est retenu dans i facteurs $(i \in \{0, 1, 2, \dots, n\})$, a l'est dans les $n - i$ autres et le produit correspondant est $a^{n-i}b^i$, compte tenu de l'associativité et de la commutativité de la multiplication dans $\mathbb{R}$.
Pour obtenir un terme $a^{n-i}b^i$, il convient donc, parmi les n facteurs du produit π, d'en choisir i dans lesquels on retient b et de retenir a dans les autres.
Or, il y a C_n^i façons de choisir i facteurs parmi n. Il y a donc C_n^i termes égaux à $a^{n-i}b^i$.
Finalement, π est la somme de C_n^0 termes égaux à $a^n b^0$, de C_n^1 termes égaux à $a^{n-1}b$, ..., de C_n^i termes égaux à $a^{n-i}b^i$, ... et de C_n^n termes égaux à $a^0 b^n$.

Autrement dit :

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^{n-i} b^i} \tag{1}$$

Cette formule est connue sous le nom de **formule du binôme de Newton.**
Pour l'établir, on a uniquement utilisé les propriétés d'associativité et de commutativité de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{R}$, et la propriété de distributivité de la multiplication par rapport à l'addition.
Il en résulte que la formule du binôme s'applique dans un anneau commutatif A.
Dans un anneau A quelconque, elle s'applique pour deux éléments a et b qui *commutent* entre eux, c'est-à-dire qui sont tels que $ab = ba$. En effet, dans ce cas, tout produit formé de i facteurs égaux à b et de $n-i$ égaux à a vaut $a^{n-i}b^i$, quel que soit l'ordre des facteurs.
On peut donner de la formule du binôme une démonstration par récurrence sur l'entier n.

Applications

1° Pour $a = b = 1$, la formule du binôme donne :

$$\boxed{2^n = \sum_{i=1}^{n} C_n^i} \tag{2}$$

On retrouve ainsi un résultat établi page 343.

2° Écrivons la formule du binôme pour $a = b = 1$, puis pour $a = 1$ et $b = -1$:

$$2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \dots + C_n^n\,,$$
$$0 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 \dots + (-1)^n C_n^n\,.$$

Par addition de ces deux égalités, on obtient :

$$2^n = 2[C_n^0 + C_n^2 + \dots + C_n^{2i} + \dots]\,,$$

soit :

$$\boxed{2^{n-1} = C_n^0 + C_n^2 + \dots + C_n^{2i} + \dots} \tag{3}$$

Dans la formule (3), le dernier coefficient binomial écrit est C_n^n si n est pair et C_n^{n-1} si n est impair.
Par soustraction des égalités initiales, puis simplification par 2, on obtient :

$$\boxed{2^{n-1} = C_n^1 + C_n^3 + \dots + C_n^{2i+1} + \dots} \tag{4}$$

Dans la formule (4), le dernier coefficient binomial écrit est C_n^n si n est impair et C_n^{n-1} si n est pair.

3° Pour $a = 1$ et $b = x$, la formule du binôme s'écrit : $(1+x)^n = \sum\limits_{i=0}^{n} C_n^i x^i$.

Dérivons les deux fonctions : $f : x \mapsto (1+x)^n$ et $g : x \mapsto \sum\limits_{i=0}^{n} C_n^i x^i$:

$$f'(x) = n(1+x)^{n-1}\,,$$
$$g'(x) = C_n^1 + 2xC_n^2 + 3x^2C_n^3 + \dots + nx^{n-1}C_n^n\,.$$

Comme les fonctions f et g sont égales, il en est de même de leurs fonctions dérivées. En particulier, $f'(1) = g'(1)$; d'où :

$$\boxed{n2^{n-1} = C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + nC_n^n}$$

★ Activité

Soit E et F deux ensembles finis, disjoints, de même cardinal n.

1° En évaluant de deux façons différentes le nombre des parties à n éléments de $E \cup F$, démontrer que : $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$.

2° Retrouver cette formule en utilisant l'égalité $(1 + x)^{2n} = (1 + x)^n(1 + x)^n$.

3° En déduire que : $(C_n^1)^2 + 2(C_n^2)^2 + \dots + n(C_n^n)^2 = \dfrac{n}{2} C_{2n}^n$.

• Exercices d'application

22. *1°* Pour tout réel x strictement positif et pour tout entier n supérieur à 2, démontrer que $(1 + x)^n > 1 + nx$.
2° En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_n = a^n$, où a est un réel tel que $a > 1$.

23. Utiliser l'identité :
$(x + 1)^p(x + 1)^q = (x + 1)^{p+q}$, où p et q sont deux entiers naturels, pour démontrer que :

$$C_{p+q}^p = \sum_{i=0}^{p} C_p^i C_q^{p-i}.$$

24. *1°* Pour tout couple (a, b) d'entiers naturels, démontrer que $(a + b)^5 - a^5 - b^5$ est un entier naturel divisible par 5.
2° Généraliser ce résultat en montrant, par récurrence, que si $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont des entiers naturels :

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n)^5 - (a_1^5 + a_2^5 + \dots + a_n^5)$$

est un entier naturel divisible par 5.
3° En déduire que, pour tout entier naturel n, $n^5 - n$ est divisible par 5.

25. En développant $(1 + x + x)^n$ de deux façons différentes, démontrer que :

$$2^p C_n^p = C_n^0 C_n^p + C_n^1 C_{n-1}^{p-1} + C_n^2 C_{n-2}^{p-2} + \dots + C_n^p C_{n-p}^0.$$

26. On pose $z = \cos\theta + i \sin\theta$, où θ est un réel et i le nombre complexe tel que $i^2 = -1$ et dont un argument est $\pi/2$.
1° Exprimer $\cos\theta$ puis $\cos^n\theta$ en fonction de z et $\bar{z}$.
2° En déduire, pour tout entier n tel que $2 \leqslant n \leqslant 5$, une expression de $\cos^n\theta$ en fonction des cosinus de certains multiples de θ.

27. Développer $(1 + i)^n$ par la formule du binôme, puis, en utilisant la formule de Moivre; en déduire les valeurs des réels A et B :
- $A = C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - \dots + (-1)^p C_n^{2p}$, où $2p$ est le plus grand entier pair inférieur à n;
- $B = C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - \dots + (-1)^p C_n^{2p+1}$, où $2p + 1$ est le plus grand entier impair inférieur à n.

(Pour calculer A et B, on distinguera quatre cas suivant le reste de n dans la division par 4.

IV – DÉNOMBREMENT ET PROBABILITÉ

1. EXPÉRIENCE ALÉATOIRE

Quand, dans un sac contenant six jetons numérotés 1, 2, 3, 4, 5, 6, on tire *deux* jetons *au hasard*, on peut obtenir différents résultats.
Une telle opération dont le résultat est imprévisible est une **expérience aléatoire.**
Dans ce qui suit, c'est à partir de cet exemple que nous introduisons le vocabulaire des probabilités.

Univers des possibles

Il est naturel de représenter le résultat d'un tirage par la paire formée des numéros des deux jetons tirés, par exemple $\{2, 5\}$, $\{3, 5\}$, ... L'ensemble des résultats possibles, ou **univers des possibles**, est donc l'ensemble des parties à deux éléments de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. On le note Ω. Son cardinal est $C_6^2 = 15$.

2. ÉVÉNEMENT

Le résultat $\{2, 5\}$ *réalise l'événement* « la somme des points est 7 ».
Deux autres résultats : $\{1, 6\}$ et $\{3, 4\}$ réalisent également cet événement que l'on peut

représenter par la partie de l'univers des possibles formée des éléments $\{1, 6\}$, $\{2, 5\}$, $\{3, 4\}$.
De même, « le plus petit point est 3 » est un événement représenté par la partie de Ω :

$$\{\{3,4\}, \{3,5\}, \{3,6\}\}.$$

Plus généralement, on appelle **événement** toute partie de l'univers des possibles.
Un événement peut être défini par une formulation comme « la somme des points est 7 », « le plus petit point est 3 », ou par la donnée des résultats qui le réalisent.
Ainsi, la formulation « la somme des points est 7 » et la partie $\{\{1,6\}, \{2,5\}, \{3,4\}\}$ définissent le même événement.
Le cardinal d'un événement est inférieur à celui de l'univers des possibles Ω.

Événement impossible

La partie vide de l'univers Ω des possibles est l'**événement impossible.** Ainsi, « la somme des points est 12 » est-elle l'événement impossible : aucun résultat ne le réalise.

Événement certain

La partie Ω est l'**événement certain.** Ainsi, « la somme des points est supérieure à 2 » est l'événement certain : il est réalisé par tous les résultats.

Événement élémentaire

L'événement « le plus grand des points est 2 » est réalisé par le seul résultat $\{1, 2\}$: on dit que c'est un **événement élémentaire.**

Événement contraire d'un événement

Soit A un événement, c'est-à-dire une partie de l'univers des possibles Ω. La partie complémentaire de A relativement à Ω est aussi un événement, appelé **événement contraire** de A et noté $\overline{A}$.
Par exemple, « la somme des points est 7 » a pour événement contraire « la somme des points est différente de 7 ».
A noter que, pour tout événement A, on a : $\text{Card } A + \text{Card } \overline{A} = \text{Card } \Omega$.

Événements incompatibles

Un événement A et son contraire $\overline{A}$ sont tels que $A \cap \overline{A} = \varnothing$. On peut aussi exprimer cette propriété en disant qu'un même résultat ne peut réaliser à la fois un événement A et son contraire $\overline{A}$.
Plus généralement, on dit que deux événements A et B sont **incompatibles** si $A \cap B = \varnothing$, c'est-à-dire s'il n'existe aucun résultat qui les réalise simultanément.
« La somme des points est 5 » et « le plus petit des points est 3 » sont deux événements incompatibles.

3. PROBABILITÉ D'UN ÉVÉNEMENT

Dans l'expérience aléatoire considérée dans ce paragraphe **IV**, les tirages se font au hasard. Il est donc légitime de penser que les résultats ont tous la même chance de sortir : une sur quinze.
Cette hypothèse peut être vérifiée expérimentalement en effectuant un grand nombre de tirages et en notant le nombre de sorties de chaque résultat. On constate que les quotients $\dfrac{\text{nombre de sorties d'un résultat}}{\text{nombre de tirages effectués}}$ sont voisins de $\dfrac{1}{15}$.
On exprime ce fait en disant que les événements élémentaires sont **équiprobables** et on convient d'affecter à chacun d'eux la **probabilité** $\dfrac{1}{15}$.

Il est alors naturel d'affecter à un événement A de cardinal p, c'est-à-dire réalisé par p résultats, la probabilité $p \times \frac{1}{15}$ égale à $\frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega}$.

DÉFINITION 4

Dans une expérience aléatoire, quand les événements élémentaires sont équiprobables, la *probabilité d'un événement A* est le réel, noté $p(A)$, défini par :

$$p(A) = \frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega}, \quad \text{où } \Omega \text{ est l'univers des possibles.}$$

Il résulte immédiatement de cette définition les propriétés suivantes :

1° La probabilité de l'événement impossible est nulle.

2° La probabilité de l'événement certain est égale à 1.

3° Pour tout événement A, $p(A) \in [0, 1]$.

4° Pour tout événement A, d'événement contraire $\overline{A}$, on a : $p(A) + p(\overline{A}) = 1$.

On utilise cette formule pour déterminer $p(A)$ lorsque le calcul de $p(\overline{A})$ est plus simple que celui de $p(A)$.

Exemple :

On tire quatre cartes au hasard d'un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins un as?

L'univers des possibles Ω est l'ensemble des parties à 4 éléments de l'ensemble des 32 cartes. Donc : Card $\Omega = C_{32}^4$.

L'événement A dont on demande la probabilité est l'ensemble des parties à 4 éléments contenant au moins un as. Son contraire $\overline{A}$ est l'ensemble des parties à 4 éléments ne contenant pas d'as; $\overline{A}$ est donc l'ensemble des parties à 4 éléments des 28 cartes qui ne sont pas des as.

D'où : Card $\overline{A} = C_{28}^4$. Il en résulte : $p(\overline{A}) = \frac{C_{28}^4}{C_{32}^4}$ et, par suite :

$$p(A) = 1 - p(\overline{A}) = 1 - \frac{C_{28}^4}{C_{32}^4} \approx 0{,}43.$$

4. CONCLUSION

Pour calculer la probabilité d'un événement A, on définit un univers des possibles Ω dont A est une partie. Si les événements élémentaires sont équiprobables, la probabilité de A est donnée par :

$$P(A) = \frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega}.$$

Attention. Lorsque les événements élémentaires ne sont pas équiprobables, on ne peut appliquer cette formule. Par exemple, si dans le tirage décrit dans ce paragraphe on considère la somme des points obtenus en tirant les deux jetons comme expérience aléatoire, l'univers des possibles est $\{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$.
Pour cet univers, les événements élémentaires ne sont pas équiprobables; l'ignorer conduirait à affecter à l'événement « la somme des points est 7 » la probabilité $\frac{1}{9}$, alors que cette probabilité est $\frac{3}{15}$.
Ceci montre l'importance du choix de l'univers des possibles associé à l'expérience aléatoire considérée et l'intérêt de choisir, lorsque c'est possible, un univers pour lequel les événements élémentaires sont équiprobables, même si le cardinal de cet univers est plus important. L'activité suivante donne un exemple d'un tel choix.

★ Activité

Considérons l'expérience aléatoire consistant à jeter deux dés.
Il est toujours possible de différencier les dés par un signe permettant de les discerner et de définir un premier dé et un second.

Les résultats possibles sont de deux types : un même point i répété deux fois, deux points i et j distincts. Les premiers sont obtenus d'une seule façon : les deux dés marquent i; les seconds de deux façons : le premier dé marque i et le second j, ou le second marque i et le premier j. Les résultats ne sont donc pas équiprobables.
On est donc amené à considérer comme résultat le couple (i_1, i_2), où i_1 et i_2 sont respectivement les points marqués par le premier et le second dé. Chacun de ces couples étant obtenu d'une seule façon, les résultats sont maintenant équiprobables.
L'univers des possibles est alors le produit cartésien $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}^2$ de cardinal 36.
1° Calculer les probabilités des événements suivants : la somme des points est 7, le plus grand point est 5, au moins un as, un as et un seul, deux points distincts.

2° On jette trois dés. Calculer la probabilité d'obtenir :
a) *trois points deux à deux distincts;*
b) *au moins deux points égaux;*
c) *exactement deux points égaux;*
d) *au moins un as;*
e) *exactement un as;*
f) *une somme de points égale à 10;*
g) *une somme de points supérieure à 12;*
h) *une somme de points inférieure à 11;*

i) 4 , 2 , 1.

3° On jette quatre dés. Calculer la probabilité d'obtenir :
a) *un carré (quatre fois un point a);*
b) *un brelan (trois fois un point a et un autre point b);*
c) *une double paire (deux fois un point a et deux fois un autre point b);*
d) *une disposition banale (quatre points deux à deux distincts).*

• Exercices d'application

27. Un sac contient 5 jetons numérotés 1, 2, 3, 4, 5. On les tire au hasard, un par un, en les plaçant les uns à côté des autres, de gauche à droite de manière à former un nombre n de 5 chiffres. Calculer la probabilité que :
1° n soit pair;
2° n soit supérieur à 23 000.

28. On marque n points sur un cercle. On en choisit deux au hasard. Quelle est la probabilité qu'ils soient voisins? Même question lorsque les points sont sur une droite.

29. Une urne contient $n-2$ boules blanches et 2 boules noires. On les tire une à une, au hasard, sans les remettre.
1° Calculer la probabilité d'obtenir la seconde boule noire au k-ième tirage ($k \in \{2, 3, \dots n\}$).
2° Calculer la probabilité d'obtenir les deux boules noires consécutivement.

30. On range, au hasard, n boules numérotées 1, 2, ..., n dans n tiroirs numérotés 1, 2, ..., n, en mettant une boule par tiroir. Quelle est la probabilité que la boule 3 soit dans le tiroir 3? Que les boules 3 et 5 soient respectivement dans les tiroirs 3 et 5?

31. Une urne contient n boules. On en tire, au hasard, une partie A non vide. Quelle est la probabilité pour que A ait un cardinal pair?

32. Une urne contient b boules blanches et n boules noires ($b \geqslant 2$ et $n \geqslant 2$). On tire 2 boules, au hasard, simultanément. Quelle est la probabilité d'un tirage de deux boules blanches, de deux boules noires, d'une boule noire et d'une boule blanche?

33. Une urne contient n boules numérotées 1, 2, ..., $n (n \geqslant 3)$. On tire 3 boules, au hasard, simultanément.
1° Quelle est la probabilité que le plus petit des numéros tirés soit égal à k ($k \in \{1, 2, \dots, n\}$)?
2° Même question pour le plus grand des numéros tirés.

34. On tire 5 cartes, au hasard, d'un jeu de 32 cartes. Quelle est la probabilité d'avoir :
1° l'as de cœur;
2° un as et un seul;
3° deux as et deux seulement;
4° les quatre as;
5° au moins un as?

35. Une urne contient 3 boules blanches et 5 boules noires. On en tire 4, au hasard, simultanément. Quelle est la probabilité d'avoir k boules blanches ($k \in \{0, 1, 2, 3\}$)?

36. n personnes disposent chacune d'un jeu de 32 cartes. Chaque personne tire une carte au hasard. Quelle est la probabilité pour que parmi les cartes tirées il n'y en ait pas deux identiques?

37. Quelle est la probabilité pour que parmi n personnes choisies au hasard il y ait au moins deux personnes dont l'anniversaire ait lieu le même jour?

38. Dans une urne, 6 boules portent les numéros 1, 1, 1, 2, 2, 3. On tire deux boules, au hasard, simultanément. Pour tout entier k tel que $2 \leqslant k \leqslant 5$, déterminer la probabilité pour que la somme des points obtenus soit égale à k.

EXERCICES ET PROBLÈMES

1. Combinaisons avec répétition

Soit E un ensemble de cardinal n. On appelle combinaison avec répétition (c.a.r.) d'ordre p de E tout objet mathématique formé de p éléments de E pris dans un ordre quelconque, chaque élément pouvant être répété jusqu'à p fois. *Exemple :* $[aaabbc]$, $[aaaabb]$, $[aaaaaa]$ sont trois c.a.r. d'ordre 6 de l'ensemble $\{a, b, c\}$. On désigne par Γ_n^p le nombre des c.a.r. d'ordre p de E.

1° Calculer Γ_n^1, Γ_n^2, Γ_2^3 Γ_n^3.

2° On suppose écrites toutes les c.a.r. d'ordre p de E. Démontrer qu'un élément donné a de E est écrit $\frac{p}{n}\Gamma_n^p$ fois.

3° Montrer que le nombre de c.a.r. d'ordre p contenant a au moins une fois est égal au nombre de c.a.r. d'ordre $p-1$. En déduire :

$\frac{p}{n}\Gamma_n^p = \Gamma_n^{p-1} + \frac{p-1}{n}\Gamma_n^{p-1}$, puis $\Gamma_n^p = C_{n+p-1}^p$.

4° Applications : On répartit p boules dans n tiroirs numérotés $1, 2, \dots, n$, puis on inscrit dans des colonnes marquées $1, 2, \dots, n$ le nombre de boules contenues dans les tiroirs correspondants.
Dénombrer les différentes listes d'entiers qu'on peut obtenir par ce procédé. (A chaque répartition des boules dans les tiroirs, on associera la c.a.r. obtenue en répétant chaque numéro de tiroir non vide autant de fois qu'il y a de boules dans le tiroir.)

5° Dénombrer l'ensemble des n-uplets d'entiers naturels, solutions de l'équation $x_1 + x_2 + \dots + x_n = p$, où p est un entier naturel donné.

6° On répartit, au hasard, p boules dans n tiroirs, chaque tiroir pouvant recevoir un nombre de boules compris entre 0 et p. Calculer la probabilité pour que le premier tiroir contienne k boules ($k \in \{0, 1, 2, \dots, p\}$).

2. *1°* Soit n et k deux entiers naturels tels que $1 \leqslant k \leqslant n$. Dénombrer les k-uplets d'entiers tels que :

$$1 \leqslant x_1 < x_2 < \dots < x_k \leqslant n.$$

2° Montrer que le nombre trouvé à la question précédente est le nombre des k-uplets d'entiers vérifiant : $\forall i \in \{1, 2, \dots, k\}$, $y_i \geqslant 1$ et $y_1 + y_2 + \dots + y_k \leqslant n$.
(Utiliser l'application

$$(x_1, x_2, \dots, x_k) \mapsto (x_1, x_2 - x_1, x_3 - x_2, \dots, x_k - x_{k-1}).)$$

3° Dénombrer les k-uplets vérifiant : $\forall i \in \{1, 2, \dots, k\}$, $z_i \geqslant 0$ et $z_1 + z_2 + \dots + z_k \leqslant m$ ($m \in \mathbb{N}$).

4° Dénombrer les k-uplets vérifiant : $\forall i \in \{1, 2, \dots, k\}$, $t_i \geqslant 0$ et $t_1 + t_2 + \dots + t_k = m$ ($m \in \mathbb{N}$).

5° Soit n et k deux entiers naturels. Dénombrer les k-uplets d'entiers tels que $1 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \dots \leqslant x_k \leqslant n$.

3. Soit n et k deux entiers : $n \geqslant 0$, $k \geqslant 1$.

a) Montrer que le nombre des k-uplets d'entiers naturels $(x_1, x_2, \dots, x_k)$ tels que $x_1 + 2x_2 + \dots + kx_k = n$ est égal au nombre des k-uplets $(y_1, y_2, \dots, y_k)$ tels que $y_1 \geqslant y_2 \geqslant \dots \geqslant y_k \geqslant 0$ et $y_1 + y_2 + \dots + y_k = n$. Ce nombre est noté $a(n, k)$.
(On pourra utiliser l'application

$$(x_1, x_2, \dots, x_k) \mapsto (x_1 + x_2 + \dots + x_k, x_2 + x_3 + \dots + x_k, \dots, x_k).$$

b) Montrer que :
si $n \geqslant k$, $a(n, k) = a(n-k, k) + a(n, k-1)$;
si $n < k$, $a(n, k) = a(n, k-1)$.

c) Montrer que : $a(n, k) = \sum_{i=1}^{\inf(k, n)} a(n-i, i)$.

d) Calculer les $a(n, k)$ pour $0 \leqslant n \leqslant 10$ et $1 \leqslant k \leqslant 10$ en utilisant un procédé analogue à celui utilisé pour le triangle de Pascal. Présenter les résultats sous la forme d'un tableau.

4. Applications croissantes de $\mathbb{N}_p$ dans $\mathbb{N}_n$

Soit n et p deux entiers naturels non nuls.

1° Une application f de $\mathbb{N}_p$ dans $\mathbb{N}_n$ est une **injection croissante** si $1 \leqslant f(1) < f(2) < \dots < f(p) \leqslant n$.
Démontrer que le nombre d'injections croissantes de $\mathbb{N}_p$ dans $\mathbb{N}_n$ est C_n^p. (A chaque injection croissante f de $\mathbb{N}_p$ dans $\mathbb{N}_n$, on associera la partie $\{f(1), f(2), \dots, f(p)\}$ de $\mathbb{N}_n$.)

2° Soit f une application croissante de $\mathbb{N}_p$ dans $\mathbb{N}_n$: $1 \leqslant f(1) \leqslant f(2) \leqslant \dots \leqslant f(p) \leqslant n$. A f on associe l'application g qui à tout entier k de $\mathbb{N}_p$ associe l'entier $g(k)$ tel que : $g(k) = f(k) + k - 1$.

Démontrer que g est une injection croissante de $\mathbb{N}_p$ dans $\mathbb{N}_{n+p-1}$.
En déduire que le nombre d'applications croissantes de $\mathbb{N}_p$ dans $\mathbb{N}_n$ est C_{n+p-1}^p.

5. Système complet d'événements

Soit Ω un univers des possibles associé à une expérience aléatoire.
On suppose que les événements élémentaires sont équiprobables. Pour tout événement A, on a donc $P(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega}$.

1° On appelle **système complet d'événements** toute suite $A_1, A_2, \dots, A_p$ d'événements qui forment une partition de Ω. Démontrer que : $\sum_{i=1}^{p} P(A_i) = 1$.

2° Dans une urne contenant n boules blanches et n boules noires, on tire n boules simultanément, au hasard.

a) Calculer le nombre de tirages possibles en supposant que les boules soient différenciées.

b) Pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$, on note A_k l'événement : « le tirage donne k boules blanches et $n-k$ boules noires ». Calculer la probabilité de A_k.

c) Démontrer que $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$ forment un système complet d'événements. En déduire que $C_{2n}^n = \sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2$.

6. Dénombrement des involutions d'un ensemble fini

I — Soit A un ensemble fini non vide de cardinal pair :

$$\text{Card } A = 2p, \ p \in \mathbb{N}^*.$$

On note π l'ensemble des partitions de E formées de paires d'éléments de E. Par exemple, si

$A = \{a, b, c, d, e, f\}$, la partition $\{a, b\}, \{c, e\}, \{d, f\}$ est un élément de π.
On se propose de déterminer le cardinal de π, que l'on note u_{2p}.
1° Démontrer que $u_{2p} = (2p - 1)u_{2p-2}$.
2° En déduire que $u_{2p} = \dfrac{(2p)!}{2^p p!}$.

II — Soit f une application involutive d'un ensemble E dans lui-même : $f \circ f = \mathrm{Id}_E$.
On définit sur E la relation binaire $\mathcal{R}$ par :

$$a \mathcal{R} b \quad \text{si, et seulement si,} \quad a = b \text{ ou } f(a) = b.$$

1° Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2° Déterminer le cardinal de la classe d'équivalence d'un élément a de E. (On distinguera les deux cas : $f(a) = a$ et $f(a) \neq a$.)
3° On sait que les classes d'équivalence d'une relation d'équivalence sur E forment une partition de l'ensemble E. Les classes de $\mathcal{R}$ forment donc une partition de E faite de parties à *un* ou *deux* éléments.
Montrer, réciproquement, que la donnée d'une partition de E, faites de parties à un ou deux éléments, définit une involution de E.
4° On suppose, dans cette question, que E est fini et de cardinal pair : Card $E = 2n$, $n \in \mathbb{N}^*$.
a) Dénombrer les involutions de E sans élément invariant.
b) Dénombrer les involutions de E possédant deux éléments invariants.
c) Dénombrer les involutions de E possédant $2k$ éléments invariants $(1 \leqslant k \leqslant n)$.
d) Dénombrer toutes les involutions de E.
5° On suppose, dans cette question, que E est fini et de cardinal impair : Card $E = 2n + 1$, $n \in \mathbb{N}$.
a) Démontrer que E possède un nombre impair d'éléments invariants.
b) Dénombrer les involutions de E.

7. Problème du scrutin

Une urne électorale contient a bulletins de vote pour un candidat A et b bulletins pour le candidat B. On suppose $a > b$. On a effectué le dépouillement en retirant les bulletins un par un et en notant au fur et à mesure le score de chaque candidat.
1° Montrer que l'on peut représenter chaque dépouillement possible par un $(a + b)$-uplet où figurent a termes A et b termes B. En déduire le nombre des dépouillements possibles.
2° A chaque dépouillement, on peut associer, dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O, \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, le chemin aléatoire $A_0A_1A_2 \dots A_{a+b}$ ainsi défini :
• $A_0 = O$;
• si le premier bulletin tiré est pour A (resp. B), $\overrightarrow{A_0A_1} = \overrightarrow{OI}$ (resp. $\overrightarrow{OJ}$);
• si le i-ième bulletin tiré est pour A (resp. B), $\overrightarrow{A_{i-1}A_i} = \overrightarrow{OI}$ (resp. $\overrightarrow{OJ}$).
Soit C l'ensemble des chemins aléatoires possibles. Calculer Card C.
3° On note Δ la bissectrice de l'angle IOJ. On considère la partition $\{C_1, C_2, C_3\}$ de C ainsi définie :
• C_1 est l'ensemble des chemins passant par I et ayant avec Δ le seul point O commun;
• C_2 est l'ensemble des chemins passant par I et ayant avec Δ au moins deux points communs;
• C_3 est l'ensemble des chemins passant par J.
a) Démontrer que Card C_2 = Card C_3.
b) Calculer Card C_3 et en déduire Card C_1.
4° Quelle est la probabilité pour qu'au cours du dépouillement le candidat A soit constamment en tête?

8. Dénombrement des surjections de A sur B

Soit A et B deux ensembles finis non vides de cardinaux respectifs n et p.
On se propose de dénombrer les applications surjectives de A sur B.
On note S_n^p le cardinal cherché.
1° Calculer les entiers S_n^1, S_n^n et S_n^p pour $p > n$.
Dans tout ce qui suit, on suppose $p \leqslant n$.
2° Soit a un élément de A. Les surjections f de A sur B sont de deux sortes :
• celles pour lesquelles la restriction à $A \setminus \{a\}$ est une surjection de $A \setminus \{a\}$ sur B;
• celles pour lesquelles la restriction à $A \setminus \{a\}$ est une surjection de $A \setminus \{a\}$ sur l'ensemble B privé d'un de ses éléments. Déduire de ce constat que :

$$S_n^p = p(S_{n-1}^{p-1} + S_{n-1}^p).$$

3° Calculer S_n^p pour $1 \leqslant n \leqslant 6$ et $1 \leqslant p \leqslant 6$, et noter les résultats dans le tableau ci-dessous.
4° Démontrer, par récurrence sur p, que :

$$S_n^p = \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} C_p^k k^n.$$

n \ p	1	2	3	4	5	6
1						
2						
3						
4						
5						
6						

9. Soit G un groupe dont la loi est notée multiplicativement : $(a, b) \mapsto ab$ et e son élément neutre.
On appelle sous-groupe de G toute partie H de G vérifiant les propriétés :
• H est non vide;
• le produit de deux éléments quelconques de H est un élément de H;
• le symétrique a^{-1} de tout élément a de H est un élément de H.
1° Soit H un sous-groupe de G. On définit sur G la relation binaire $\mathcal{R}$ par $a \mathcal{R} b$ si, et seulement si, $a^{-1}b \in H$.
a) Démontrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
b) Démontrer que la classe d'équivalence de a est l'ensemble noté $C(a)$ des produits ah lorsque h décrit H. En déduire que H et $C(a)$ sont équipotents.
2° On suppose que le groupe G est fini et de cardinal n. On note p le cardinal de H et q le nombre de classes d'équivalence de la relation $\mathcal{R}$. (On rappelle que deux classes d'équivalence distinctes sont disjointes et que la réunion de toutes les classes d'équivalence est l'ensemble G.) Démontrer que $n = pq$.
Conclure en énonçant un théorème.

CHAPITRE 12

STATISTIQUE

I – SÉRIE STATISTIQUE SIMPLE. RAPPELS

1. POPULATION, ÉCHANTILLON

Toute étude statistique porte sur une **population** E d'objets, de personnes, d'animaux, de pays, etc. Chaque élément de E est un **individu** de la population.
Lorsque le nombre d'individus de E est très élevé, ou lorsqu'on ne peut contacter tous les individus, ou encore lorsque le relevé à effectuer est coûteux ou qu'il occasionne la destruction des individus, on ne fait porter l'étude que sur un **échantillon** de la population E.
Un échantillon n'a évidemment d'intérêt que s'il est *représentatif* de la population, de façon que des conclusions relatives à cet échantillon puissent être généralisées à la population toute entière.

2. CARACTÈRE

Pour chaque individu d'une population, ou d'un échantillon de population, on relève la valeur d'un ou de plusieurs **caractères.** Par exemple :

- pour les élèves d'une classe, l'âge, la taille, le poids;
- pour les salariés d'une entreprise, le salaire mensuel brut;
- pour les pays de la C.E.E. ou du Comecon, la production annuelle d'acier;
- pour les habitants d'un département, le sexe et le groupe sanguin;
- pour la population active d'un pays, la catégorie socio-professionnelle.

Certains de ces caractères sont **qualitatifs** : sexe, groupe sanguin, catégorie socio-professionnelle. Les autres sont **quantitatifs** et s'expriment par des nombres réels : âge, taille, poids, salaire, production d'acier.
Un caractère quantitatif X d'une population E est aussi appelé **variable statistique numérique;** d'un point de vue mathématique, X est l'application de E dans $\mathbb{R}$ qui, à tout individu e de E, associe la valeur $X(e)$ du caractère X pour l'individu e.
On dit que les réels $X(e)$ sont les **modalités** du caractère X ; l'ensemble des modalités de X est noté $X\langle E\rangle$.

3. SÉRIE STATISTIQUE SIMPLE

Considérons un caractère numérique X relatif à une population, ou à un échantillon de population, E.

1° Lorsque le cardinal p de l'ensemble $X\langle E\rangle$ des modalités de X est faible, on classe les modalités par ordre croissant : $x_1 < x_2 < ... < x_p$, et à chaque modalité x_j on associe l'**effectif** n_j de x_j, c'est-à-dire le nombre des individus de E pour lesquels le caractère X prend la valeur x_j.

DÉFINITION 1 | **L'ensemble des couples $(x_j, n_j)_{j \in \mathbb{N}_p}$ est la *série statistique simple* associée au caractère X.**

Une série statistique simple est aussi appelée **statistique simple.** Le qualificatif *« simple »* souligne qu'elle est définie à partir d'un seul caractère de la population. Une telle série est présentée sous forme d'un tableau :

Modalités	x_1	x_2	...	x_j	...	x_p
Effectifs	n_1	n_2	...	n_j	...	n_p

2° Lorsque le cardinal de l'ensemble $X\langle E \rangle$ des modalités de X est élevé, on recouvre cet ensemble par des intervalles, ou classes :

$$c_1 = [a_0, a_1[, \quad c_2 = [a_1, a_2[, \quad \ldots \quad , \quad c_p = [a_{p-1}, a_p[,$$

ayant en général la même *amplitude*, et à chaque classe c_j on associe l'**effectif** de c_j, c'est-à-dire le nombre des individus de E pour lesquels le caractère X prend une valeur appartenant à la classe c_j.

L'ensemble des couples $(c_j, n_j)_{j \in \mathbb{N}_p}$ est une **série statistique simple exprimée en classes.**

4. FRÉQUENCES ET POURCENTAGES

Soit $(x_j, n_j)_{j \in \mathbb{N}_p}$, ou $(c_j, n_j)_{j \in \mathbb{N}_p}$, une série statistique simple relative à une population d'effectif total n.

On appelle **fréquence** de la modalité x_j, ou de la classe c_j, le réel f_j défini par $f_j = \dfrac{n_j}{n}$.

Toute fréquence f_j est un réel de l'intervalle $[0, 1]$; de plus, $\sum_{j=1}^{p} f_j = 1$.

En pratique, on préfère souvent utiliser les **pourcentages** p_j obtenus en multipliant les fréquences f_j par 100 : $p_j = 100 f_j$.

La série $(x_j, n_j)_{j \in \mathbb{N}_p}$ peut aussi être présentée sous la forme $(x_j, f_j)_{j \in \mathbb{N}_p}$, ou $(x_j, p_j)_{j \in \mathbb{N}_p}$.

5. VALEUR MOYENNE ET ÉCART-TYPE

L'étude des séries statistiques simples a été développée dans le cours de Première.

Rappelons deux définitions importantes.

Soit X un caractère d'une population d'effectif total n, et soit $(x_j, n_j)_{j \in \mathbb{N}_p}$ la série statistique associée à X. On appelle **valeur moyenne** et **écart-type** du caractère X, ou de la série associée, les réels respectivement notés $\overline{X}$ et $\sigma(X)$ et définis par :

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{p} n_j x_j \qquad (1)$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{p} n_j (x_j - \overline{X})^2} \qquad (2)$$

Le réel $\overline{X}$, barycentre du système $(x_j, n_j)_{j \in \mathbb{N}_p}$, représente la valeur moyenne des modalités de X; c'est un **paramètre de position.**

Quant à l'écart-type $\sigma(X)$, il exprime le plus ou moins grand éparpillement des modalités de X autour de leur valeur moyenne $\overline{X}$: c'est un **paramètre de dispersion.** Le carré de l'écart-type est appelé **variance** de X et noté $V(X)$.

Si on peut calculer $\sigma(X)$ à partir de la formule (2) de définition, on préfère généralement utiliser la formule suivante qui découle de (2) :

$$\boxed{\sigma(X) = \sqrt{\frac{1}{n}\left(\sum_{j=1}^{p} n_j x_j^2\right) - \overline{X}^2}} \qquad (3)$$

Quelle que soit la formule choisie, le calcul de $\sigma(X)$ implique celui de $\overline{X}$.

Pour calculer la valeur moyenne et l'écart-type d'une série statistique exprimée en classes, on se ramène au cas précédent en convenant de concentrer l'effectif de chaque classe c_j en son centre x_j.

Exemple

A partir d'un relevé des prix, exprimés en francs, de 400 robes en vente dans un grand magasin, on a établi le tableau statistique :

Classes	[300, 400[	[400, 500[	[500, 600[	[600, 700[	[700, 800[
Effectifs	25	90	145	90	50

Pour calculer la valeur moyenne et l'écart-type de cette série statistique exprimée en classes, on se ramène à la suivante :

Modalités	350	450	550	650	750
Effectifs	25	90	145	90	50

On en déduit : $\frac{1}{400}\sum_{j=1}^{5} n_j x_j = 562{,}5$; $\frac{1}{400}\sum_{j=1}^{5} n_j x_j^2 = 328\,250$, et par suite :

$$\overline{X} = 562{,}5 ; \quad V(X) = 11\,843{,}75 ; \quad \sigma(X) = 108{,}83.$$

Exercices d'application

1. Procéder à 200 jets de deux dés et, pour chaque jet, noter le plus grand, X, des points amenés et la valeur absolue, Y, de la différence des points amenés. On définit ainsi deux séries statistiques simples. Pour chacune d'elles :
1° Calculer la valeur moyenne et l'écart-type.
2° Déterminer le pourcentage des jets pour lesquels :
a) $X \in [\overline{X} - \sigma(X), \overline{X} + \sigma(X)]$.
b) $Y \in [\overline{Y} - \sigma(Y), \overline{Y} + \sigma(Y)]$.

2. Le service comptable d'une banque donne la statistique suivante portant sur les sommes X déposées par ses clients :

Somme déposée à la banque	1 000	3 000	5 000
Pourcentage de clients	12	18	25
Somme déposée à la banque	10 000	50 000	100 000
Pourcentage de clients	20	15	10

Calculer la valeur moyenne et l'écart-type de X.

3. On considère la série statistique suivante, relative à la répartition de la population active d'un pays, par âge, en centaines de milliers de personnes.

[20, 25[	[25, 30[	[30, 35[	[35, 40[	[40, 45[
10	30	40	35	25
[45, 50[	[50, 55[	[55, 60[	[60, 65[	
24	18	12	6	

Déterminer la valeur moyenne m et l'écart-type σ de cette série.
Déterminer le pourcentage de personnes dont l'âge appartient à l'intervalle $[m-\sigma,\ m+\sigma]$.

4. On considère un échantillon de 1 000 assurés pris parmi ceux qui n'ont eu aucun accident pendant l'année 1980. Le tableau ci-après indique la distribution de ces assurés suivant les tranches d'âge :

Tranches d'âge (en années)	[18, 25[	[25, 35[	[35, 45[
Effectifs	29	270	490
Tranches d'âge (en années)	[45, 55[	[55, 65[	[65, 75[
Effectifs	195	14	2

1° Calculer la moyenne m et l'écart-type σ.
2° Déterminer le pourcentage des assurés dont l'âge appartient à l'intervalle $[m-\sigma,\ m+\sigma]$.

5. Les résultats d'un test de durée de vie de 400 tubes fluorescents sont consignés dans le tableau ci-dessous.

Durée de vie (en heures)	Nombre de tubes fluorescents
[300, 400[	15
[400, 500[	46
[500, 600[	54
[600, 700[	78
[700, 800[	70
[800, 900[	64
[900, 1 000[	45
[1 000, 1 100[	20
[1 100, 1 200[	8

1° Préciser la série statistique ainsi définie et calculer sa moyenne m et son écart-type σ.
2° Estimer le pourcentage des tubes dont la durée de vie :
a) n'excède pas 600 heures;
b) est supérieure ou égale à 800 heures;
c) est comprise entre 500 et 1 000 heures;
d) est comprise entre 680 et 920 heures.

6. Soit E une population et X un caractère numérique. Démontrer que l'écart-type de X est nul si, et seulement si, X est constant

II – ÉTUDE CONJOINTE DE DEUX CARACTÈRES

Quand on observe une population E, on s'intéresse à divers caractères X, Y, Z, ... des individus de E que l'on peut étudier séparément en calculant notamment leurs valeurs moyennes et écarts-types respectifs.
On peut aussi faire une étude *conjointe* de deux caractères X et Y, se demander s'il existe un *lien*, une *relation*, entre X et Y et, dans l'affirmative, chercher à mesurer le degré de cette relation.
Examinons d'abord quelques exemples.

★ Activité 1

Pays	Allemagne Fédérale	Belgique	Danemark	France	Grèce
X	43,8	12,3	0,7	23,2	0
Y	33,1	7,5	1,8	30,6	12,6

Pays	Irlande	Italie	Luxembourg	Pays-Bas	Royaume-Uni
X	0	26,5	4,6	5,3	11,3
Y	1,9	42	1,1	3,7	14,8

Le tableau ci-dessus donne pour les dix pays du Marché Commun les productions X d'acier et Y de ciment, exprimées en millions de tonnes, en 1980.

1° Dans un repère orthonormal, où 1 cm représente 2×10^6 tonnes, marquer, pour chaque pays e, le point de coordonnées $(X(e), Y(e))$.

2° De l'examen de l'ensemble des points obtenus peut-on conclure à l'existence d'une relation entre X et Y?

★ Activité 2

Mathématiques	3	13	6	11	2	10	7	10	13	10	9	12	0	10	17
Langue vivante	8	10	6	7	6	6	12	20	6	14	11	14	7	15	12

Le tableau ci-dessus donne les notes X de mathématiques et Y de langue vivante, sur 20, obtenues par quinze candidats au baccalauréat C.

1° Dans un repère orthonormal, marquer pour chaque élève le point de coordonnées (x, y), où x et y sont respectivement les notes de mathématiques et de langue vivante.

2° Peut-on conclure à l'existence d'une relation entre X et Y?

★ Activité 3

Une enquête portant sur 100 ménages a consisté à relever, pour chaque ménage, le nombre X d'enfants et le nombre Y de pièces de l'appartement occupé.
Les résultats sont consignés dans le tableau ci-contre.
On y lit, par exemple, que 16 ménages ont 2 enfants et occupent un appartement de 3 pièces.

Y \ X	0	1	$\boxed{2}$	3	4	5
1	6	4	1	0	0	0
2	3	11	10	5	1	0
$\boxed{3}$	1	3	$\boxed{16}$	13	4	1
4	0	1	3	5	8	4

1° Dans un repère orthonormal porter en abscisses les modalités 0, 1, 2, 3, 4, 5 de X et en ordonnées celles 1, 2, 3, 4 de Y. Représenter tout couple (x_j, y_k), où x_j est une modalité de X et y_k une modalité de Y, par un carré centré au point de coordonnées (x_j, y_k) et dont l'aire est proportionnelle au nombre n_{jk} des ménages ayant x_j enfants et occupant un appartement de y_k pièces.
(Si $n_{jk} = 0$, le couple (x_j, y_k) n'est pas représenté.)

2° Peut-on déduire du graphique obtenu l'existence d'une relation entre X et Y?

1. SÉRIE STATISTIQUE DOUBLE

Considérons deux caractères numériques X et Y relatifs à une même population E, et tels que :

$$X\langle E\rangle = \{x_1, x_2, ..., x_p\} \quad \text{et} \quad Y\langle E\rangle = \{y_1, y_2, ..., y_q\},$$

avec $x_1 < x_2 < ... < x_p$ et $y_1 < y_2 < ... < y_q$.

A chaque couple (x_j, y_k), où x_j et y_k sont respectivement une modalité de X et une modalité de Y, associons l'**effectif** n_{jk} du couple (x_j, y_k), c'est-à-dire le nombre des individus de E pour lesquels les caractères X et Y prennent respectivement les valeurs x_j et y_k.

DÉFINITION 2 | **L'ensemble des triplets (x_j, y_k, n_{jk}) est la *série statistique double* associée au couple de caractères (X, Y).**

Une série statistique double est aussi appelée **statistique double.** Le qualificatif *double* rappelle qu'elle est associée à *deux* caractères de la population.

Soit n l'effectif total de la population : $n = \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} n_{jk}$. Comme pour une statistique simple, on définit la **fréquence** f_{jk} et le **pourcentage** p_{jk} du couple (x_j, y_k) par :

$$f_{jk} = \frac{n_{jk}}{n} \quad \text{et} \quad p_{jk} = 100 f_{jk}.$$

La série double (x_j, y_k, n_{jk}) peut alors être présentée sous la forme (x_j, y_k, f_{jk}) ou (x_j, y_k, p_{jk}).

Présentation en tableaux

Lorsque le cardinal n de E est faible, on se contente généralement de donner le *relevé statistique* indiquant pour chaque individu e_i de E les valeurs x_i et y_i des deux caractères étudiés X et Y. C'est ce que l'on a fait dans l'Activité **1** pour les productions d'acier et de ciment des dix pays du Marché Commun.

Comme dans l'Activité **2**, on peut même supprimer dans un tel tableau l'indication de l'identité des individus de E qui n'intervient pas dans l'étude de la relation entre les caractères X et Y. Une telle présentation du couple (X, Y), *individu par individu*, est dite *linéaire*.

Lorsque le cardinal de E est élevé, on utilise plutôt pour décrire le couple (X, Y) un tableau à double entrée qui représente très exactement la série statistique double associée à (X, Y), puisqu'il donne les pq triplets (x_j, y_k, n_{jk}) qui constituent cette série.

A noter que la donnée d'une des deux présentations du couple (X, Y), tableau linéaire ou tableau à double entrée, permet d'établir l'autre.

$Y \backslash X$	x_1	x_2	...	x_j	...	x_p
y_1	n_{11}	n_{21}		n_{j1}		n_{p1}
y_2	n_{12}	n_{22}		n_{j2}		n_{p2}
$\vdots$						
y_k	n_{1k}	n_{2k}		n_{jk}		n_{pk}
$\vdots$						
y_q	n_{1q}	n_{2q}		n_{jq}		n_{pq}

Exemples :

1° Au tableau linéaire de l'Activité **1** correspond un tableau à double entrée que l'on construira.

2° Au tableau à double entrée de l'Activité **3** correspond la présentation linéaire formé de 6 couples (0,1), 3 couples (0,2), 1 couple (0,3), 4 couples (1,1), etc...

Statistiques marginales d'une statistique double

Considérons un couple (X, Y) de caractères relatifs à une population E et sa série statistique double associée $(x_j, y_k, n_{jk})_{j \in \mathbb{N}_p, k \in \mathbb{N}_q}$ présentée sous forme de tableau à double entrée.

Lorsqu'on somme les effectifs $n_{11}, n_{12}, \ldots, n_{1q}$ de la colonne x_1, on obtient le nombre λ_1 des individus de la population pour lesquels le caractère X prend la valeur x_1, c'est-à-dire l'effectif de la modalité x_1.

$Y \backslash X$	x_1	x_2	...	x_p	
y_1	n_{11}	n_{21}	...	n_{p1}	μ_1
y_2	n_{12}	n_{22}	...	n_{p2}	μ_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$			$\vdots$
y_q	n_{1q}	n_{2q}	...	n_{pq}	μ_q
	λ_1	λ_2	...	λ_p	

En procédant ainsi pour les colonnes $x_2, \ldots, x_p$, on obtient les effectifs $\lambda_2, \ldots, \lambda_p$ des modalités $x_2, \ldots, x_p$.

De même, la somme des effectifs $n_{11}, n_{21}, \ldots, n_{p1}$ de la ligne y_1 donne l'effectif μ_1 de la modalité y_1. Les effectifs $\mu_2, \ldots, \mu_q$ des modalités $y_2, \ldots, y_q$ s'obtiennent parallèlement. Il est donc possible, à partir du tableau de la série statistique double associée à (X, Y), de reconstituer les séries statistiques simples $(x_j, \lambda_j)_{j \in \mathbb{N}_p}$ et $(y_k, \mu_k)_{k \in \mathbb{N}_q}$ respectivement associées à X et Y.

On dit que (x_j, λ_j) et (y_k, μ_k) sont les **séries marginales** de la série double (x_j, y_k, n_{jk}).

Quand un couple (X, Y) de caractères est présenté sous la forme d'un tableau à double entrée, on complète en général ce tableau par les effectifs des modalités de X et de Y. Cela permet notamment de calculer les valeurs moyennes et les écarts-types respectifs des caractères X et Y.

REMARQUE :

Si n est le cardinal de la population E, on a : $n = \sum_{j=1}^{p} \sum_{k=1}^{q} n_{jk} = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j = \sum_{k=1}^{q} \mu_k$.

2. NUAGE DE POINTS ASSOCIÉ A (X, Y)

Lorsque le couple (X, Y) est présenté sous la forme linéaire $(e_i, x_i, y_i)_{i \in \mathbb{N}_n}$, on lui associe, dans le plan muni d'un repère orthogonal, l'ensemble ou **nuage**, des points M_i de coordonnées (x_i, y_i).

Il peut se faire qu'un même point soit répété plusieurs fois; c'est le cas lorsque pour plusieurs individus les caractères X et Y prennent respectivement les mêmes valeurs. Un tel point est alors accompagné de l'indication du nombre d'individus qu'il représente. On peut aussi le marquer par une tache circulaire ou carrée d'autant plus étendue qu'il est répété.

Lorsque le couple (X, Y) est représenté par sa série statistique associée $(x_j, y_k, n_{jk})_{j \in \mathbb{N}_p, k \in \mathbb{N}_q}$, on obtient son nuage en marquant tous les points M_{jk} de coordonnées (x_j, y_k) dont l'effectif n_{jk} n'est pas nul.

Chacun de ces points est accompagné de l'indication de son effectif ou représenté par une tache dont l'étendue est proportionnelle à l'effectif.

Barycentre du nuage

Le barycentre G des points M_{jk} affectés des coefficients respectifs n_{jk} a pour coordonnées, n désignant la somme de tous les entiers n_{jk} :

$$x_G = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{q} n_{jk}x_j, \quad y_G = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{q} n_{jk}y_k.$$

Or : $\displaystyle \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{q} n_{jk}x_j = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{k=1}^{q} n_{jk}\right)x_j = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{p}\lambda_j x_j = \overline{X},$

et : $\displaystyle \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{q} n_{jk}y_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{q}\left(\sum_{j=1}^{p} n_{jk}\right)y_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{q}\mu_k y_k = \overline{Y}.$

Il en résulte que le point G a pour coordonnées $(\overline{X}, \overline{Y})$; on dit aussi que ce point est le **barycentre,** ou **point moyen,** du nuage.

Inertie du nuage par rapport à un point

Soit $(M_i)_{i\in\mathbb{N}_n}$ le nuage de points du couple (X, Y) et soit M un point quelconque de coordonnées (x, y). Il est légitime d'exprimer l'écart du point $M_i(x_i, y_i)$ au point $M(x, y)$ par le réel positif d_i tel que : $d_i^2 = (x_i - x)^2 + (y_i - y)^2$.
A noter que le réel d_i n'est pas une distance au sens usuel du terme, dans la mesure où les unités en abscisses et en ordonnées ne sont pas, en général de même nature (par exemple kg et cm).

On appelle inertie du nuage par rapport au point M, et on note I_M, le réel défini par :

$$I_M = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - x)^2 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - y)^2. \tag{1}$$

Lorsque le point M est en $G(X, Y)$, barycentre du nuage, la formule (1) donne :

$$I_G = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2 + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{Y})^2,$$

soit : $$I_G = V(X) + V(Y).$$

Étudions la différence $I_M - I_G$:

$$\begin{aligned} I_M - I_G &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[(x_i - x)^2 - (x_i - \overline{X})^2] + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}[(y_i - y)^2 - (y_i - \overline{Y})^2] \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\overline{X} - x)(2x_i - x - \overline{X}) + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\overline{Y} - y)(2y_i - y - \overline{Y}) \\ &= \frac{1}{n}(\overline{X} - x)\left(\sum_{i=1}^{n} 2x_i - x - \overline{X}\right) + \frac{1}{n}(\overline{Y} - y)\left(\sum_{i=1}^{n} 2y_i - y - \overline{Y}\right). \end{aligned}$$

Or $\displaystyle \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 2x_i - x - \overline{X} = \overline{X} - x$ et $\displaystyle \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 2y_i - y - \overline{Y} = \overline{Y} - y$. D'où :

$$I_M - I_G = (x - \overline{X})^2 + (y - \overline{Y})^2.$$

Ce résultat montre que pour tout point M distinct de G : $I_M > I_G$.
Nous retiendrons :
L'inertie du nuage de points d'un couple de caractères par rapport à un point M est minimum lorsque M est en G, barycentre du nuage.

★ Activité

Les résultats d'une enquête effectuée en 1982 dans une grande agglomération, et portant sur les charges locatives Y de 100 appartements classés suivant leur valeur locative X sont consignés dans le tableau ci-contre. (*X et Y sont exprimés en milliers de francs.*)

Y \ X	[4, 12[	[12, 20[	[20, 28[	[28, 36[	[36, 44[
[2, 4[	8	2	0	0	0
[4, 6[	1	15	6	0	0
[6, 8[	0	4	23	6	0
[8, 10[	0	0	6	16	4
[10, 12[	0	0	0	2	7

1° Calculer la moyenne et l'écart-type de X et de Y. (On rappelle que dans le cas d'une série statistique simple exprimée en classes, les calculs demandés se font en concentrant l'effectif de chaque classe en son centre.)

2° En procédant comme à la question 1°, c'est-à-dire en concentrant les effectifs des classes en leur centre, construire le nuage de points associé au couple (X, Y) et placer le point moyen du nuage. Peut-on conclure à l'existence d'une relation entre X et Y ?

● Exercices d'application

7. Pour chaque individu d'une population de 20 personnes on a relevé la taille X, en cm, et la masse Y, en kg. On a obtenu les résultats suivants :

X	1,50	1,70	1,52	1,80	1,58
Y	48	73	54	67	60
X	1,53	1,57	1,71	1,63	1,90
Y	61	49	74	65	85
X	1,83	1,47	1,50	1,72	1,48
Y	79	58	50	80	45
X	1,77	1,79	1,52	1,60	1,45
Y	80	70	48	58	47

1° Déterminer les moyennes et les écarts-types des caractères X et Y.
2° Dessiner le nuage de points associé au couple (X, Y) et marquer le point moyen du nuage.

8. Le tableau ci-dessous donne pour les dix pays de la C.E.E. les productions X de ciment, en millions de tonnes, et Y d'électricité, en milliards de kWh, en 1980 :

Pays	Allemagne fédérale	Belgique	Danemark	France	Grèce
X	33,1	7,5	1,8	30,6	12,6
Y	368,7	53,6	27,1	243,2	22,1
Pays	**Irlande**	**Italie**	**Luxembourg**	**Pays-Bas**	**Royaume-Uni**
X	1,9	42	1	3,7	14,8
Y	10,9	185	1,1	64,8	285

1° Dessiner le nuage de points associé au couple (X, Y) ; marquer le point moyen du nuage.
2° Peut-on en déduire l'existence d'une relation entre X et Y ?

9. Le tableau suivant donne l'évolution entre janvier 1980 et juin 1981 de l'indice mensuel X des prix (indice des 295 articles) et de l'indice Y des prix alimentaires (base 100 en janvier 1980).

	Janv. 80	Fév. 80	Mars 80	Avr. 80	Mai 80	Juin 80
X	100	101,9	102,7	103,6	104,4	104,9
Y	100	101,3	101,9	103,8	104,5	104,9
	Juil. 80	**Août 80**	**Sept. 80**	**Oct. 80**	**Nov. 80**	**Déc. 80**
X	105,5	107	108,2	108,7	109,1	109,7
Y	106	107,3	108,3	109,1	109,4	110,8

	Janv. 81	Fév. 81	Mars 81	Avr. 81	Mai 81	Juin 81
X	111	111,9	112,9	113,6	114,6	115,1
Y	111,8	114,8	116,2	117,2	118,6	119,6

Dessiner le nuage de points associés au couple (X, Y) et marquer le point moyen.

10. On jette deux dés 100 fois de suite. A chaque jet, on note le plus petit, X, des points amenés et la valeur absolue, Y, de la différence des deux points amenés. Les résultats sont consignés dans le tableau du haut de la page 362.

1° Dessiner le nuage de points associé au couple (X, Y).
2° Calculer $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$.

Y \ X	1	2	3	4	5	6
0	2	3	4	2	1	3
1	4	6	5	8	5	0
2	6	6	4	6	0	0
3	6	5	7	0	0	0
4	5	5	0	0	0	0
5	7	0	0	0	0	0

11. On effectue 100 jets de deux dés. A chaque jet on relève le nombre X des six obtenus et la somme Y des deux points.
Les résultats sont consignés dans le tableau ci-contre.

1° Dessiner le nuage de points associé au couple (X, Y).

2° Calculer les valeurs moyennes et les variances des caractères X et Y.

Y \ X	0	1	2
2	3	0	0
3	7	0	0
4	9	0	0
5	10	0	0
6	15	0	0
7	9	5	0
8	8	4	0
9	6	6	0
10	2	5	0
11	0	7	0
12	0	0	4

III – VALEURS CARACTÉRISTIQUES D'UN COUPLE DE CARACTÈRES

1. COVARIANCE

Soit E une population d'effectif n et soit (X, Y) un couple de caractères défini par un tableau linéaire $(e_i, x_i, y_i)_{i \in \mathbb{N}_n}$.
Les valeurs moyennes des caractères X et Y sont respectivement :

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \quad , \quad \overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i .$$

Pour chaque individu e_i de la population, le produit $(x_i - \overline{X})(y_i - \overline{Y})$ exprime l'*écart algébrique* entre le couple (x_i, y_i) et le couple $(\overline{X}, \overline{Y})$ des valeurs moyennes de X et Y.
La moyenne de tous ces écarts : $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{X})(y_i - \overline{Y})$, exprime donc l'écart algébrique moyen entre les couples (x_i, y_i) et le couple $(\overline{X}, \overline{Y})$.

DÉFINITION 3

On appelle *covariance* d'un couple (X, Y) de caractères défini par un tableau linéaire $(e_i, x_i, y_i)_{i \in \mathbb{N}_n}$, le réel noté cov (X, Y), tel que :

$$\mathrm{cov}\,(X, Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{X})(y_i - \overline{Y}). \qquad (1)$$

Calcul de la covariance

1° En développant la formule (1) ci-dessus, on obtient :

$$\mathrm{cov}\,(X, Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (x_i y_i - \overline{X}\, y_i - \overline{Y}\, x_i + \overline{X}\,\overline{Y})$$

Soit : $$\operatorname{cov}(X, Y) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) - \overline{X}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\right) - \overline{Y}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right) + \frac{1}{n}(n\overline{X}\,\overline{Y})$$
$$= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \overline{X}\,\overline{Y} - \overline{Y}\,\overline{X} + \overline{X}\,\overline{Y}.$$

Finalement : $$\boxed{\operatorname{cov}(X, Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \overline{X}\,\overline{Y}} \qquad (2)$$

C'est cette formule que l'on utilise habituellement pour calculer cov (X, Y).

2° A partir de la série statistique double $(x_j, y_k, n_{jk})_{j \in \mathbb{N}_p, k \in \mathbb{N}_q}$, associée au couple (X, Y), on peut reconstituer le tableau linéaire de (X, Y) et appliquer la formule (1), ce qui consiste à diviser par l'effectif n de la population, la somme de n_{11} termes égaux à $(x_1 - \overline{X})(y_1 - \overline{Y})$, de n_{12} termes égaux à $(x_1 - \overline{X})(y_2 - \overline{Y})$, etc.

On obtient :

$$\boxed{\operatorname{cov}(X, Y) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{q} n_{jk}(x_j - \overline{X})(y_k - \overline{Y})} \qquad (3)$$

De même, en appliquant la formule (2), on obtient :

$$\boxed{\operatorname{cov}(X, Y) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{q} n_{jk} x_j y_k - \overline{X}\,\overline{Y}} \qquad (4)$$

On préfère habituellement la formule (4) à la formule (3) pour calculer la covariance d'un couple (X, Y) présenté sous la forme d'un tableau à double entrée.

Exemple :

Soit à calculer la covariance du couple (X, Y) défini à l'Activité **3** de la page 357. Le couple (X, Y) est présenté sous la forme d'un tableau à double entrée.
Complétons ce tableau par les effectifs des modalités des caractères X et Y et calculons les valeurs moyennes $\overline{X}$ et $\overline{Y}$:

Y \ X	0	1	2	3	4	5	
1	6	4	1	0	0	0	**11**
2	3	11	10	5	1	0	**30**
3	1	3	16	13	4	1	**38**
4	0	1	3	5	8	4	**21**
	10	**19**	**30**	**23**	**13**	**5**	

$$\overline{X} = \frac{1}{100}(10 \times 0 + 19 \times 1 + 30 \times 2 + 23 \times 3 + 13 \times 4 + 5 \times 5) = 2{,}25,$$
$$\overline{Y} = \frac{1}{100}(11 \times 1 + 30 \times 2 + 38 \times 3 + 21 \times 4) = 2{,}69.$$

On calcule ensuite la somme des produits $n_{jk} x_j y_k$, soit 687.

D'où la covariance cherchée, par application de la formule (4) :
$$\operatorname{cov}(X, Y) = 6{,}87 - (2{,}25 \times 2{,}69) = 0{,}82.$$

2. COEFFICIENT DE CORRÉLATION LINÉAIRE

★ **Activité**

1° On se propose de montrer que, quels que soient les éléments $(a_1, a_2, ..., a_n)$ et $(b_1, b_2, ..., b_n)$ de $\mathbb{R}^n$, on a :

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \times \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}. \quad (1)$$

a) *On suppose d'abord que les réels $a_1, a_2, ..., a_n$ et $b_1, b_2, ..., b_n$ sont positifs. Démontrer l'inégalité (1) pour $n = 1$, pour $n = 2$, puis, par récurrence, pour tout entier naturel n.*
b) *Déduire de la question précédente que l'inégalité (1) est vérifiée quels que soient les réels $a_1, a_2, ..., a_n$ et $b_1, b_2, ..., b_n$.*

2° Soit E une population d'effectif n et soit (X, Y) un couple de caractères défini par un tableau linéaire (e_i, x_i, y_i). On note $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ les valeurs moyennes respectives de X et Y, $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$ leurs écarts-types respectifs. On rappelle :

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{X})^2}, \quad \sigma(Y) = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{Y})^2}.$$

On suppose que les caractères X et Y ne sont pas constants, ce qui implique $\sigma(X) > 0$ et $\sigma(Y) > 0$. Démontrer que le quotient $\dfrac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}$, noté $\rho(X, Y)$, est tel que :

$$|\rho(X, Y)| \leqslant 1.$$

3° Pour chacun des couples de caractères suivants, dessiner le nuage de points associé et calculer le réel $\rho(X, Y)$:

a)

x_i	1	1,5	2,1	3,5	4,2	5
y_i	6,4	6,75	7,17	8,15	8,64	9,2

b)

x_i	1	1,5	2	3	4	5	6
y_i	5	4	3,8	3,8	3	2,7	1,9

c)

x_i	2	2,5	3	3,5	4	4	4	5	5,5	5,5
y_i	3	4	3	4,5	3	4	5,5	4,5	5	6

d)

x_i	2	2	3	4	4	5	5	6	6,5	7
y_i	3	5	2	4	6	2	4	5	6	3

Conclusion

Le fait que le nuage d'un couple (X, Y) de caractères soit aplati suivant une direction de droite, étiré, allongé, traduit l'existence d'une relation linéaire entre les caractères X et Y. C'est cette relation qu'on appelle la **corrélation linéaire.**
Pour les couples (X, Y) de caractères étudiés ci-dessus, la confrontation de la forme du nuage et de la valeur du réel $\rho(X, Y)$ conduit à l'idée suivante : plus le nuage est *allongé*, plus le réel $\rho(X, Y)$ est voisin de 1 où de -1, ces valeurs étant atteintes lorsque les points sont alignés.

A l'inverse plus le nuage est *arrondi*, plus le réel $\rho(X, Y)$ est voisin de zéro.
Nous admettrons que ce constat est général.
On peut en donner l'explication suivante :
La covariance d'un couple (X, Y) de caractères est un élément numérique qui dépend de trois facteurs : la dispersion de chaque caractère autour de sa valeur moyenne et une corrélation entre X et Y.
En divisant $\text{cov}(X, Y)$ par le produit $\sigma(X)\sigma(Y)$, produit qui exprime la dispersion de X et de Y, tout se passe comme si on éliminait les facteurs dispersion pour ne conserver que le facteur corrélation.
Il est intéressant de faire le rapprochement avec le produit scalaire de deux vecteurs. Pour deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls, le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ dépend de trois facteurs : les normes des deux vecteurs et leur angle θ.
En divisant $\vec{u} \cdot \vec{v}$ par le produit des normes de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on ne conserve que le facteur angulaire : $\dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|} = \cos\theta$.
A noter que le coefficient $\rho(X, Y)$ mesure une corrélation particulière entre X et Y : le plus ou moins grand aplatissement rectiligne du nuage de points associé au couple (X, Y). Cette corrélation, dite *linéaire*, n'est pas la seule qui puisse exister entre X et Y. Par exemple, si les points du nuage sont situés sur une parabole d'équation $y = ax^2$, il existe une corrélation entre X et Y, parfaite, mais qui ne se traduit pas par la valeur 1 où -1 du coefficient $\rho(X, Y)$.

DÉFINITION 4

On appelle *coefficient de corrélation linéaire* d'un couple (X, Y) de caractères et on note $\rho(X, Y)$ le nombre réel défini par :

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}.$$

On a établi, dans l'Activité de la page 364, que le coefficient de corrélation linéaire d'un couple (X, Y) de caractères appartient à l'intervalle $[-1, 1]$. On démontre, et nous l'admettrons qu'il est égal à 1 ou à -1 si, et seulement si, les points du nuage de (X, Y) sont alignés, c'est-à-dire si, et seulement si, la corrélation linéaire entre X et Y est parfaite.

Calcul de $\rho(X, Y)$

Pour obtenir le coefficient de corrélation linéaire de deux caractères X, Y, il convient de calculer successivement $\overline{X}$, $\overline{Y}$, $\sigma(X)$, $\sigma(Y)$, $\text{cov}(X, Y)$.

Exemples :

1° Les tailles x_i en centimètres et les masses y_i en kilogrammes de douze étudiants du sexe masculin sont données par le tableau :

x_i	175	160	182	154	167	175	185	165	158	164	162	170
y_i	72	66	85	50	63	80	78	68	52	68	58	70

On a :

$$\sum_{i=1}^{12} x_i = 2\,017, \quad \sum_{i=1}^{12} x_i^2 = 340\,033, \quad \sum_{i=1}^{12} y_i = 810, \quad \sum_{i=1}^{12} y_i^2 = 55\,934, \quad \sum_{i=1}^{12} x_i y_i = 137\,165.$$

Il en résulte :

$$\overline{X} = 168{,}08, \quad \overline{Y} = 67{,}50, \quad \sigma(X) = 9{,}23, \quad \sigma(Y) = 10{,}24, \quad \text{cov}(X, Y) = 85{,}02.$$

Par suite : $\rho(X, Y) = 0{,}90$. La corrélation linéaire entre la taille et le poids est très forte.

I

y_k \ x_j	[2, 6[	[6, 10[	[10, 14[	[14, 18[
[4, 8[	12	25	10	0
[8, 12[	8	38	36	1
[12, 16[	0	6	14	2

II

y_k \ x_j	4	8	12	16	
6	12	25	10	0	**47**
10	8	38	36	1	**83**
14	0	6	14	2	**22**
	20	**69**	**60**	**3**	

2° Les notes x_j sur 20, à l'épreuve de mathématiques d'un concours, et y_k à l'épreuve d'histoire-géographie, sont données par le tableau **I** :
Concentrons l'effectif de chaque classe en son centre et bordons le tableau **II** ainsi obtenu par les modalités de X et de Y.
On a :

$$\overline{X} = 9{,}21, \quad \overline{Y} = 9{,}34, \quad \sigma(X) = 2{,}87, \quad \sigma(Y) = 2{,}62, \quad \text{cov}\,(X, Y) = 2{,}93.$$

D'où : $\rho(X, Y) = 0{,}39$.
La corrélation linéaire entre la note de mathématiques et celle d'histoire-géographie est faible.

Exercices d'application

12. Calculer les coefficients de corrélation linéaire des couples (X, Y) définis aux exercices **8**, **10** et **11**.
Pour chaque couple (X, Y), indiquer si la corrélation linéaire entre les deux caractères est faible ou élevée.

13. Calculer le coefficient de corrélation de la statistique double défini dans l'exemple de la page 363.

IV – AJUSTEMENT LINÉAIRE

★ Activité préliminaire

Lors d'une visite médicale, les élèves d'une classe de CM2 ont été mesurés et pesés. Leurs tailles X, en centimètres, et leurs masses Y, en kilogrammes, sont consignés dans le tableau ci-contre.

x_i	y_i	x_i	y_i
152	46	142	38
154	51	135	36
135	30	130	28
133	33	155	49
139	34	133	32
139	43	138	34
138	37	158	50
144	46	153	44
130	31	138	28
149	51	142	32
148	47	137	34

A – *Dans un repère orthogonal, on porte en abscisses les tailles x_i (graduer à partir de 130, en prenant 0,5 cm pour 1 cm de taille), et en ordonnée les masses (graduer à partir de 28, en prenant 0,5 cm pour 1 kg).*

1° Dessiner le nuage de points du couple (X, Y).
Déterminer le barycentre G du nuage.

2° Parmi toutes les droites passant par G, tracer celle, Δ, qui vous paraît passer « le plus près possible de tous les points du nuage ».
Une équation de Δ est de la forme $y = ax + b$. Évaluer a et b.
Quel intérêt présente la droite Δ?

B — *Refaire le tableau initial en ordonnant les couples* (x_i, y_i) *suivant les valeurs croissantes de* x_i *et partager l'ensemble des couples en deux parties de même effectif (s'il y avait un nombre impair de couples l'un des groupes contiendrait un couple de plus que l'autre).*
Déterminer les barycentres G_1 *et* G_2 *des deux nuages de points correspondant à chacun des deux groupes.*
Tracer la droite (G_1G_2) *et déterminer son équation. Démontrer qu'elle passe par le barycentre G du nuage.*

1. AJUSTEMENT LINÉAIRE

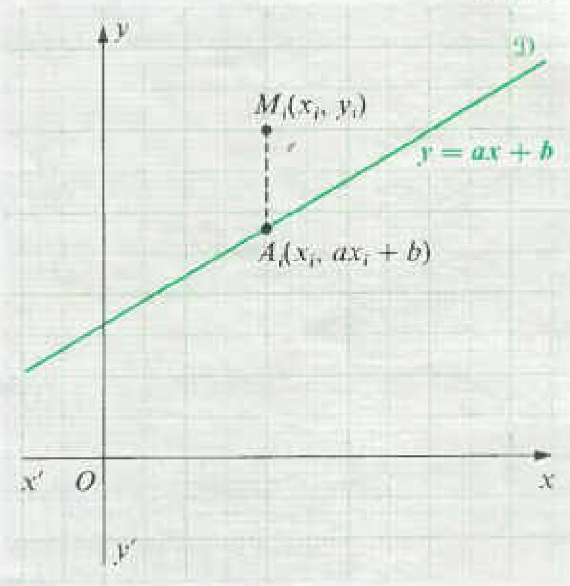
Lorsque le nuage de points associé à un couple (X, Y) de caractères est bien allongé suivant une direction de droite, il est légitime de chercher à exprimer Y comme fonction affine de X : $Y = ax + b$, ou X comme fonction affine de Y : $X = \alpha Y + \beta$.
On appelle **ajustement linéaire** toute méthode de détermination de telles fonctions affines, ou, ce qui revient au même, toute méthode de détermination d'une droite qui, sans passer par tous les points du nuage de (X, Y), puisque ceux-ci sont en général non alignés, passe « le plus près possible » des points.
Nous avons présenté dans l'activité préliminaire deux méthodes d'ajustement linéaire : la méthode dite **à main levée** dans la partie A et la **méthode de Mayer** dans la partie B.
Nous allons en exposer une autre dont le mérite est de préciser le sens de la formulation « le plus près possible ».

2. MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS

Droite de régression de Y en X

Considérons le nuage de points $(M_i)_{i\in\mathbb{N}_n}$ associé à un couple (X, Y) de caractères. Les coordonnées de M_i sont (x_i, y_i). On suppose que le caractère X n'est pas constant, c'est-à-dire que tous les points M_i ne sont pas alignés sur une même parallèle à l'axe des ordonnées Oy.
Soit $\mathcal{D}$ une droite non parallèle à Oy, d'équation $y = ax + b$ (figure 1).
A tout point M_i associons son projeté A_i sur $\mathcal{D}$ parallèlement à Oy; le point A_i a pour coordonnées $(x_i, ax_i + b)$. Il en résulte :

Figure 1



$$\overline{A_iM_i}^2 = (y_i - ax_i - b)^2 = b^2 - 2b(y_i - ax_i) + (y_i - ax_i)^2,$$

et par suite :

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{A_iM_i}^2 = nb^2 - 2b \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i) + \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i)^2.$$

La somme des carrés $\sum_{i=1}^{n} \overline{A_iM_i}^2$ dépend des réels a et b; notons-la $\varphi(a, b)$.

Problème :

Peut-on déterminer les réels a et b de manière que $\varphi(a, b)$ soit minimal?
Pour déterminer ce minimum, nous allons procéder en deux étapes.
a) Supposons, dans un premier temps, que le réel a soit fixé et que seul b varie: $\varphi(a, b)$ est alors une fonction trinôme du second degré de la variable b, qui est minimale pour :

$$b_a = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i),$$

c'est-à-dire, $\overline{X}$ et $\overline{Y}$ désignant respectivement les valeurs moyennes de X et Y, pour :

$$b_a = \overline{Y} - a\overline{X}.$$

Cette valeur minimale est :

$$\begin{aligned}\varphi(a, b_a) &= \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - \overline{Y} + a\overline{X})^2\\ &= \sum_{i=1}^{n} [(y_i - \overline{Y}) - a(x_i - \overline{X})]^2\\ &= a^2 \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{X})^2 - 2a \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{X})(y_i - \overline{Y}) + \sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{Y})^2.\end{aligned}$$

b) Dans un deuxième temps, cherchons, lorsque a varie, le minimum de $\varphi(a, b_a)$.
Le réel $\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{X})^2$ est positif. S'il était nul on aurait, pour tout entier i appartenant à $\mathbb{N}_n$, $x_i - \overline{X} = 0$, soit, $x_i = \overline{X}$. Les points M_i seraient alors alignés sur la droite d'équation $x = \overline{X}$, parallèle à l'axe des ordonnées, ce qui est contraire à l'hypothèse de départ.
Il en résulte $\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{X})^2 > 0$; $\varphi(a, b_a)$ est donc une fonction trinôme du second degré de la variable a, qui est minimale pour :

$$a_0 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{X})(y_i - \overline{Y})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{X})^2},$$

c'est-à-dire, en utilisant la covariance du couple (X, Y) et la variance de X, pour :

$$a_0 = \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{V(X)}.$$

Désignons par b_0 la valeur de b_a correspondant à $a = a_0$:

$$b_0 = b_{a_0} = \overline{Y} - a_0\overline{X},$$

et vérifions que $\varphi(a, b)$ est minimum pour le couple (a_0, b_0).

Quel que soit le couple (a, b), on a :

$$\varphi(a, b) \geqslant \varphi(a, b_a) \quad \text{et} \quad \varphi(a, b_a) \geqslant \varphi(a_0, b_0),$$

d'où : $\varphi(a, b) \geqslant \varphi(a_0, b_0)$.
On peut préciser ce résultat en remarquant que, si $(a, b) \neq (a_0, b_0)$, alors $\varphi(a, b) > \varphi(a_0, b_0)$. En effet supposons $(a, b) \neq (a_0, b_0)$.

- Si $a = a_0$ et donc si $b \neq b_0$, on a : $\varphi(a, b) = \varphi(a_0, b) > \varphi(a_0, b_0)$.
- Si $a \neq a_0$, on a : $\varphi(a, b) \geqslant \varphi(a, b_a) > \varphi(a_0, b_0)$.

Il en résulte que le couple (a_0, b_0) pour lequel $\varphi(a, b)$ est minimum est unique.

Conclusion

La droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = ax + b$, où $a = \dfrac{\operatorname{cov}(X, Y)}{V(X)}$ et $b = \overline{Y} - a\overline{X}$, est la droite pour laquelle la somme des carrés $\sum_{i=1}^{n} \overline{A_iM_i}^2$ est minimale.

On dit que $\mathcal{D}$ est la **droite de régression de Y en X.**

L'égalité $\overline{Y} = a\overline{X} + b$ montre que $\mathcal{D}$ passe par le point G de coordonnées $(\overline{X}, \overline{Y})$, barycentre du nuage.

REMARQUES :

1° Si l'on convient qu'une droite passe le plus près possible des points du nuage lorsque $\sum_{i=1}^{n} \overline{A_iM_i}^2$ est minimal, la droite de régression de Y en X réalise l'ajustement linéaire aux points du nuage.

2° Lorsque les points du nuage sont alignés sur une droite $\mathcal{D}$ non parallèle à l'axe des ordonnées, $\mathcal{D}$ est la droite de régression de Y en X puisque, pour $\mathcal{D}$, la somme $\sum_{i=1}^{n} \overline{A_iM_i}^2$ est nulle et donc minimale.

Droite de régression de X en Y

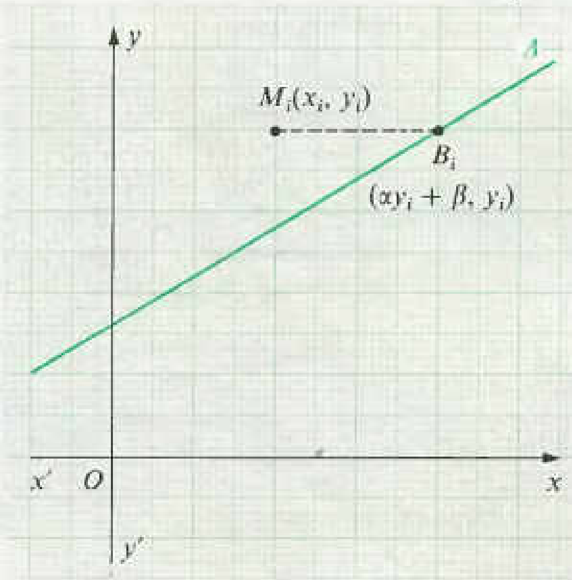
★ Activité

Considérons le nuage de points $(M_i)_{i \in \mathbb{N}_n}$ associé à un couple (X, Y) de caractères. Les coordonnées de M_i sont (x_i, y_i). On suppose que le caractère Y n'est pas constant, c'est-à-dire que les points M_i ne sont pas tous alignés sur une même parallèle à l'axe des abscisses Ox.

Soit Δ une droite non parallèle à Ox, d'équation $x = \alpha y + \beta$ (figure 2).

A tout point M_i associons son projeté B_i sur Δ parallèlement à Ox.

Figure 2



1° Démontrer que $\sum_{i=1}^{n} \overline{B_iM_i}^2 = n\beta^2 - 2\beta \sum_{i=1}^{n} (x_i - \alpha y_i) + \sum_{i=1}^{n} (x_i - \alpha y_i)^2$.

2° On pose $\psi(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^{n} \overline{B_iM_i}^2$. *Démontrer que $\psi(\alpha, \beta)$ est minimal pour :*

$$\alpha = \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{V(Y)} \quad \text{et} \quad \beta = \overline{X} - \alpha\overline{Y}.$$

Conclusion

La droite Δ d'équation $x = \alpha y + \beta$, où $\alpha = \dfrac{\operatorname{cov}(X, Y)}{V(Y)}$ et $\beta = \overline{X} - \alpha\overline{Y}$, est la droite pour laquelle la somme des carrés $\sum_{i=1}^{n} \overline{B_iM_i}^2$ est minimale.

On dit que Δ est la **droite de régression de X en Y.**

L'égalité $\overline{X} = \alpha\overline{Y} + \beta$ montre que Δ passe par le point G de coordonnées $(\overline{X}, \overline{Y})$, barycentre du nuage.

Propriétés des droites de régression

1° Les deux droites de régression $\mathcal{D}$ et Δ passent par le barycentre G du nuage de (X, Y).

a) Si $\operatorname{cov}(X, Y) = 0$, les droites $\mathcal{D}$ et Δ ont pour équations respectives $y = \overline{Y}$ et $x = \overline{X}$ (figure 3).

b) Si $\operatorname{cov}(X, Y) \neq 0$, les coefficients directeurs respectifs de $\mathcal{D}$ et Δ sont respectivement :

$$a = \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{V(X)}$$

et

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{V(Y)}{\operatorname{cov}(X, Y)}.$$

Comme les variances $V(X)$ et $V(Y)$ sont des réels strictement positifs (les caractères X et Y ont été supposés non constants), les réels a et $\frac{1}{\alpha}$ ont même signe : celui de $\operatorname{cov}(X, Y)$.

Le signe de $\operatorname{cov}(X, Y)$ donne donc une indication sur la position des droites $\mathcal{D}$ et Δ (figures 4 et 5).

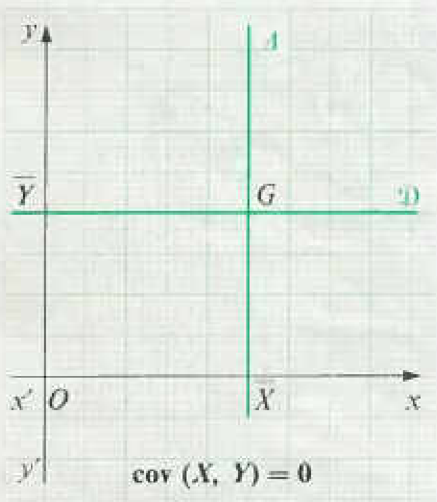


Figure 3

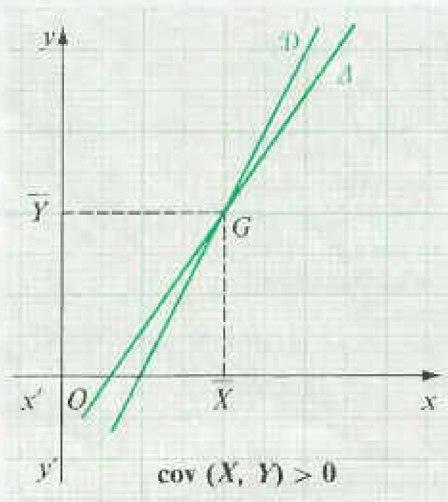


Figure 4

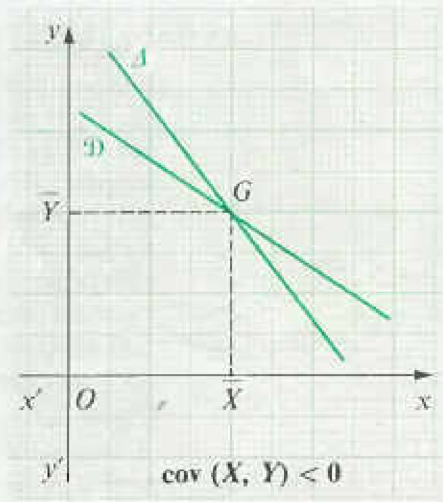


Figure 5

2° Rappelons que le coefficient de corrélation linéaire du couple (X, Y) est défini par :

$$\rho(X, Y) = \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}, \quad \text{où} \quad \sigma(X) = \sqrt{V(X)} \quad \text{et} \quad \sigma(Y) = \sqrt{V(Y)}.$$

L'égalité $a\alpha = \dfrac{\operatorname{cov}^2(X, Y)}{V(X)V(Y)}$ donne alors $a\alpha = \rho^2(X, Y)$.

Comme $\rho(X, Y)$, a et α ont le même signe, il en résulte :

$$\boxed{\rho(X, Y) = \varepsilon\sqrt{a\alpha}, \quad \text{où} \quad \varepsilon = \operatorname{sgn} a = \operatorname{sgn} \alpha}$$

3° Lorsque les droites de régression $\mathcal{D}$ et Δ sont confondues, on a : $a = \frac{1}{\alpha}$, d'où $a\alpha = 1$ et, par suite, $|\rho(X, Y)| = 1$ ou $\rho(X, Y) \in \{-1, 1\}$.

Dans ce cas, les points du nuage associé au couple (X, Y) sont alignés : la corrélation linéaire entre X et Y est parfaite.

Réciproquement, si les points du nuage sont alignés, les deux droites de régression sont confondues avec la droite sur laquelle sont situés tous les points du nuage.

Lorsque l'angle des droites $\mathcal{D}$ et Δ est faible, les coefficients directeurs a et $\frac{1}{\alpha}$ sont peu différents et le produit $a\alpha$ est voisin de 1, tout en étant inférieur à 1. Le coefficient de corrélation linéaire $\rho(X, Y)$ est alors voisin de 1 ou de -1 : il existe une forte corrélation linéaire entre X et Y.

Réciproquement, si $\rho(X, Y)$ est voisin de 1 ou de -1, le produit $a\alpha$ est voisin de 1 et les réels a et $\frac{1}{\alpha}$ sont peu différents : l'angle des droites $\mathcal{D}$ et Δ est faible.

L'angle des droites $\mathcal{D}$ et Δ est maximal lorsque $\mathcal{D}$ et Δ sont orthogonales. Cela ne peut se produire que si $\operatorname{cov}(X, Y) = 0$, c'est-à-dire si $\rho(X, Y) = 0$. Dans ce cas, la corrélation linéaire entre X et Y est inexistante.

Résumons :

Soit (X, Y) un couple de caractères non constants.
Les *droites* $\mathcal{D}$ et Δ *de régression* de Y en X et de X en Y ont pour équations respectives :

$$\mathcal{D}: \quad y = ax + b, \quad \text{où} \quad a = \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{V(X)} \quad \text{et} \quad b = \overline{Y} - a\overline{X},$$

$$\Delta: \quad x = \alpha y + \beta, \quad \text{où} \quad \alpha = \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{V(Y)} \quad \text{et} \quad \beta = \overline{X} - \alpha\overline{Y}.$$

Les droites $\mathcal{D}$ et Δ passent par le barycentre $G(\overline{X}, \overline{Y})$ du nuage associé à (X, Y).
Le *coefficient de corrélation linéaire* du couple (X, Y) est tel que :

$$\rho(X, Y) = \varepsilon\sqrt{a\alpha}, \quad \text{où} \quad \varepsilon = \operatorname{sgn} a = \operatorname{sgn} \alpha.$$

L'angle des droites $\mathcal{D}$ et Δ exprime le *degré de corrélation linéaire* entre X et Y.
Si l'angle est petit, la corrélation est forte; si l'angle est grand $\left(\text{voisin de } \frac{\pi}{2}\right)$; la corrélation est faible.

Exercices résolus

1 — *Le tableau ci-dessous donne, pour 15 salariés interrogés au cours d'une enquête, le revenu X au cours de l'année 1982 et l'épargne Y correspondante. X et Y sont exprimés en milliers de francs :*

x_i	48	43	86	72	48	58	144	62	96	58	72	77	43	58	120
y_i	5	0	18	5	2	7	24	10	12	10	15	14	5	8	20

1° Représenter graphiquement le nuage de points associé au couple (X, Y).

2° Déterminer les droites de régression de Y en X et de X en Y et construire ces droites sur le graphique de la question 1°.

3° Calculer le coefficient de corrélation linéaire du couple (X, Y).

1° Le nuage du couple (X, Y) est représenté sur le graphique ci-dessous. Sur l'axe des abscisses, 1 cm représente 10×10^3 francs, et on a gradué à partir de 4×10^3 sur l'axe des ordonnées, 1 cm représente 2×10^3 francs.

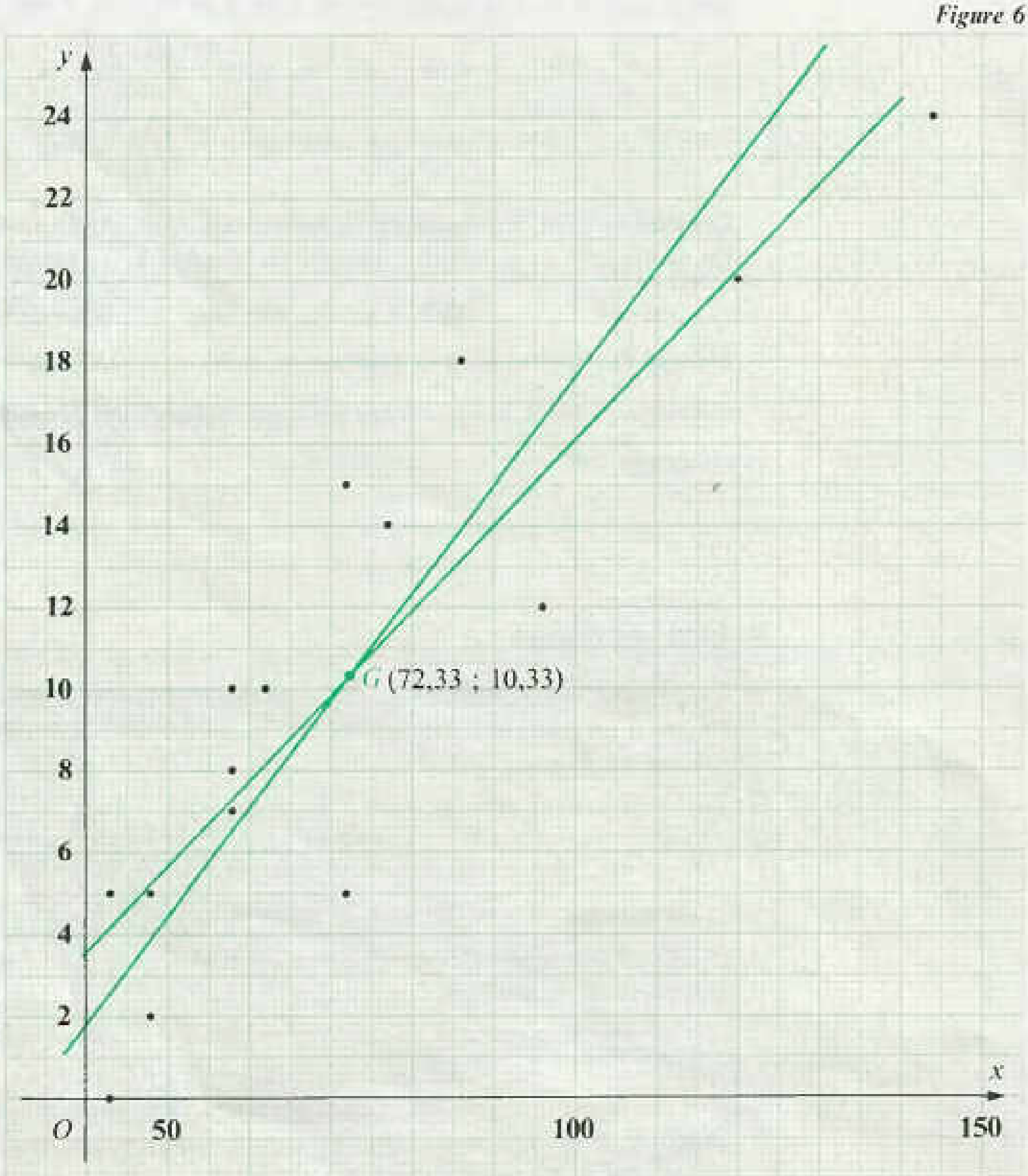
2° **Calculs intermédiaires.**

$$\sum_{i=1}^{15} x_i = 1\,085 \quad ; \quad \sum_{i=1}^{15} x_i^2 = 90\,287 \;;$$
$$\sum_{i=1}^{15} y_i = 155 \quad ; \quad \sum_{i=1}^{15} y_i^2 = 2\,257 \;;$$
$$\sum_{i=1}^{15} x_i y_i = 13\,695.$$

Il en résulte :

$$\overline{X} = \frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15} x_i \approx 72{,}33 \quad ; \quad V(X) = \frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15} x_i^2 - \overline{X}^2 \approx 787{,}50 \;;$$
$$\overline{Y} = \frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15} y_i \approx 10{,}33 \quad ; \quad V(Y) = \frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15} y_i^2 - \overline{Y}^2 \approx 43{,}76 \;;$$
$$\text{cov}\,(X, Y) = \frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15} x_i y_i - \overline{X}\,\overline{Y} \approx 165{,}83.$$

Figure 6



Équation de la droite de régression de Y en X :

$$y = ax + b, \quad \text{où} \quad a = \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{V(X)} \approx 0{,}21 \quad \text{et} \quad b = \overline{Y} - a\overline{X} \approx -4{,}86,$$

soit : $y = 0{,}21x - 4{,}86.$

Équation de la droite de régression de X en Y :

$$x = \alpha y + \beta, \quad \text{où} \quad \alpha = \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{V(Y)} \approx 3{,}79 \quad \text{et} \quad \beta = \overline{X} - \alpha\overline{Y} \approx 33{,}18,$$

soit : $x = 3{,}79y + 33{,}18.$

3° Le coefficient de corrélation linéaire du couple (X, Y) est donné par :

$$\rho(X, Y) = \varepsilon\sqrt{a\alpha}, \quad \text{où} \quad \varepsilon = \operatorname{sgn} a = \operatorname{sgn} \alpha,$$

soit : $\rho(X, Y) \approx 0{,}89.$

II — *A l'oral d'un concours, deux examinateurs A et B s'entretiennent avec chaque candidat et, à la fin de l'entretien, donnent, sans se concerter, une note prise parmi l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. On désigne par X la note de A et par Y celle de B. La série statistique double associée au couple (X, Y) est donnée par le tableau ci-contre.*
Construire le nuage de points et les deux droites de régression; calculer le coefficient de corrélation linéaire.

Y \ X	0	1	2	3	4	5	
0	1	2	1	0	0	0	4
1	4	5	3	1	0	0	13
2	0	4	15	13	5	0	37
3	0	2	10	7	3	3	25
4	0	0	3	6	4	3	16
5	0	0	0	2	1	2	5
	5	13	32	29	13	8	

Complétons le tableau du couple (X, Y) en indiquant les effectifs des modalités de X et de Y.

Calculs intermédiaires :
$\overline{X} = 2{,}56$; $\overline{Y} = 2{,}51$;
$V(X) = 1{,}55$; $V(Y) = 1{,}37$;
$\operatorname{cov}(X, Y) = 0{,}87.$

Équation de la droite de régression de Y en X :

$$y = 0{,}56x + 1{,}08.$$

Équation de la droite de régression de X en Y :

$$x = 0{,}64y + 0{,}95.$$

Coefficient de corrélation linéaire :

$$\rho(X, Y) = 0{,}60.$$

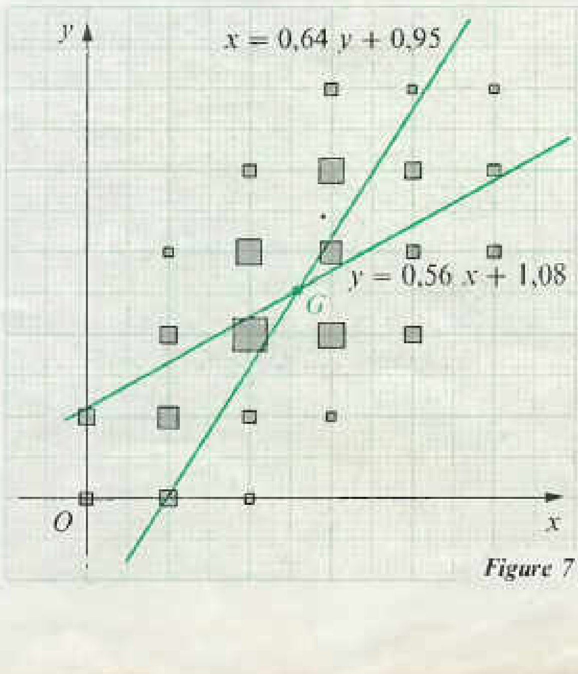


Figure 7

3. APPLICATION AUX CHRONIQUES

Lorsqu'on relève tous les jours à heure fixe, 14 heures par exemple, la température en un endroit donné, l'ensemble des observations (dates, températures) constitue une **série chronologique** ou **chronique.**
Plus généralement, lorsqu'un caractère varie dans le temps, l'ensemble des couples (date, valeur du caractère à cette date) constitue une **série chronologique.**
Le caractère peut aussi dépendre de la date et de la durée d'un intervalle de temps. C'est le cas, par exemple, de la production annuelle d'acier de la France.
On peut associer à une chronique un nuage de points et procéder à un ajustement linéaire du caractère X en fonction du temps T. (Dans le cas d'une série chronologique la droite de régression de X en T s'appelle le **Trend.**)

★ Activité 1

Le tableau suivant donne le pourcentage X de familles françaises possédant une automobile au 1^er^ janvier de l'année considérée :

1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980
40,5	44	47,5	50	52,5	54	56	58	57	60,5

Prenons comme origine des temps le 1^er^ janvier 1970, et comme unité de temps une année; cela revient à donner la date 1 au 1^er^ janvier 1971, la date 2 au 1^er^ janvier 1972, etc. On obtient le tableau :

Année	1971	1972	1973	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980
Date T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Pourcentage X	40,5	44	47,5	50	52,5	54	56	58	57	60,5

1° Construire le nuage de points du couple (T, X) de caractères et déterminer la droite de régression de X en T.

2° Si l'évolution se poursuit de la même manière, évaluer le pourcentage en 1985 et l'année à partir de laquelle plus de 75 % des familles posséderont une automobile.

★ Activité 2

1° On a relevé le chiffre d'affaires hors taxes, en milliers de francs, d'une entreprise de bonneterie au cours des huit dernières années :

t	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981
y	6400	7750	8950	9700	10250	12000	13400	17700

Tracer sur une feuille de papier millimétré l'évolution du chiffre d'affaires en fonction du temps t.
Déterminer par la méthode des moindres carrés une droite d'ajustement.
Quel chiffre d'affaires peut-on prévoir pour 1982? pour 1985?

2° Un salon a lieu tous les ans au mois de février. Les chiffres d'affaires hors taxes, en milliers de francs enregistrés par l'entreprise lors de ces salons ont été :

t	1974	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981
x	167	232	243	253	286	257	274	313

Déterminer par la méthode des moindres carrés une droite d'ajustement.
Quel chiffre d'affaires peut-on prévoir pour 1982? pour 1985?

3° Représenter sur une feuille de papier millimétré le chiffre d'affaires global en fonction du chiffre d'affaires du salon, c'est-à-dire l'ensemble des couples (x, y).
Déterminer une droite d'ajustement de y *en* x.
Sachant qu'une année le chiffre d'affaires du salon a été de 382×10^3 F, *quel chiffre d'affaires global peut-on prévoir pour cette année?*

4. EXEMPLES D'AJUSTEMENTS NON LINÉAIRES

★ Activité 3 : Ajustement exponentiel

On se propose d'étudier l'évolution de la production annuelle d'électricité en France de 1950 *à* 1981, *à partir du tableau* **I** :

Année	1950	1960	1970	1975	1976	1977	1978	1979	1980	1981
Production d'électricité en milliards de kWh	33,2	72,2	140,7	178,5	194,8	202,5	217,2	231	245,8	264

1° On affecte à l'année 1950 *le rang* 0, *et aux années* 1960, 1970, 1975, 1976, ... *les rangs respectifs* 10, 20, 25, 26, ...
Dessiner le nuage de points de la chronique (t_i, x_i), *où* t_i *est le rang d'une année et* x_i *la production d'électricité pendant cette année (en milliards de* kWh*).*
Est-il légitime de considérer que x_i *est une fonction affine de* t_i*?*

2° Compléter le tableau **I** *par la ligne* $\lg x_i$ *des logarithmes décimaux des réels* x_i, *arrondis à* 10^{-2} *près. Dessiner les points de coordonnées* $(t_i, \lg x_i)$. *Que constate-t-on?*

3° Déterminer la droite de régression de $\lg x_i$ *en* t_i.
En déduire $x_i \approx 35{,}4 \times 1{,}07^{t_i}$.

4° Prévoir la production d'électricité en 1990, *en* 2000.

Remarque : Quand on dessine les points de coordonnées (t_i, x_i) sur du *papier semi-logarithmique*, on constate qu'ils sont presque alignés.
La propriété mise en évidence à la question *2°* apparaît alors sans qu'il soit besoin de calculer les nombres $\lg x_i$.

★ Activité 4 : Ajustement par une fonction puissance

Soient les séries statistiques :

	Nombre d'enseignants en 1967 (en milliers)	Dépenses publiques afférentes à l'enseignement (en millions de dollars)
Afrique	925	2 170
Amérique du Nord	2 794	49 940
Amérique Latine	1 920	4 000
Asie	5 469	94 700
Europe et U.R.S.S.	6 163	52 110
Océanie	184	1 400

1° Compléter le tableau suivant :

x	y	$r = \lg x$	$s = \lg y$
925	2 170		
2 794	49 940		
1 920	4 000		
5 469	9 470		
6 163	52 110		
184	1 400		

2° Représenter les points de coordonnées (r, s) sur papier millimétré.

3° Déterminer par la méthode des moindres carrés l'équation de la droite d'ajustement linéaire des points de coordonnées (r, s), ou droite de régression de s en r.

4° En déduire a et b tels que $y = ax^b$ (logarithmes arrondis à 0,000 5 près).

(D'après E.S.C.A.E.-1973.)

Exercices d'application

14. Le tableau ci-dessous donne, pour dix ménages interrogés au cours d'une enquête, le revenu X au cours de l'année 1982 et l'épargne Y correspondante (en milliers de francs) :

X	75	80	45	60	125	65	105	70	70	130
Y	13	12	0	4	16	8	12	4	8	24

1° Faire le nuage de points du couple (X, Y) et marquer le point moyen du nuage.
2° Calculer le coefficient de corrélation linéaire du couple (X, Y).
3° Faire un ajustement linéaire de Y (épargne) en X (revenu).

15. On considère la série statistique double :

x_i	20	27	41	34	55	62	55	62
y_i	212	190	179	179	157	168	135	113

1° Dessiner le nuage de points et déterminer le point moyen du nuage.
2° Déterminer les droites de régression de y en x et de x en y.
3° Calculer le coefficient de corrélation linéaire de la série.

16. On considère les notes x_i de mathématiques (sur 60) et y_i de langue (sur 40) obtenues par douze candidats à un concours :

x_i	14	20	24	25	28	32	36	43	49	53	57	57
y_i	9	7	8	11	10	13	12	16	24	21	17	18

1° Dessiner le nuage de points et marquer le barycentre du nuage.
2° Déterminer les droites de régression.
3° Calculer le coefficient de corrélation linéaire de la série double (x_i, y_i).

17. Les statistiques d'une compagnie d'assurances pour l'exercice 1979 ont permis d'établir le tableau ci-dessous dans lequel :

X désigne la variable statistique indiquant le nombre x_i d'accidents enregistrés sur le dossier d'un client;

Y désigne la variable statistique indiquant le nombre y_j de véhicules assurés simultanément par ce client;

les autres nombres du tableau représentent les fréquences $f_{i,j}$ de clients ayant eu à la fois x_i accidents déclarés en 1979 et y_j véhicules assurés simultanément pendant cette année.

Y \ X	0	1	2	3	4
1	0,3	0,09	0,075	0,02	0,002 5
2	0,272 5	0,05	0,025	0,02	0,007 5
3	0,087 5	0,02	0,015	0,01	0,005

1° Déterminer la valeur moyenne et la variance de chacune des deux variables statistiques X et Y.
2° Calculer la covariance du couple (X, Y) et son coefficient de corrélation.
3° Déterminer la droite de régression de X en Y.

18. La série statistique double suivante :

X	10	15	20	25	40	50	60	80
Y	280	420	525	580	905	1 030	1 380	1 680

donne le coût Y d'une activité en fonction de la production X (en unités).
Calculer le coefficient de corrélation linéaire et déterminer la droite de régression de Y en X.

19. On considère la série statistique double suivante :

x_i	43	45	47	53	55	57	61	65	67
y_i	163	169	175	169	184	178	193	181	187

1° Dessiner le nuage de points.
2° Déterminer et construire les deux droites de régression.
3° Calculer le coefficient de corrélation linéaire.

20. Un relevé statistique des tailles X en cm et des masses Y en kg d'un échantillon de 100 collégiens a permis de construire le tableau suivant :

X \ Y	[40, 45[	[45, 50[	[50, 55[	[55, 60[
[150, 155[	18	10	2	0
[155, 160[	3	16	5	1
[160, 165[	0	5	13	5
[165, 170[	0	2	6	14

1° Déterminer la valeur moyenne et la variance de chacun des caractères X et Y.
2° Déterminer les droites de régression de Y en X et de X en Y.
3° Calculer le coefficient de corrélation linéaire du couple (X, Y).

21. Dans une compétition, deux arbitres A et B classent dix candidats par ordre de préférence :

Candidats	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5
Classement de A	5	3	9	1	4
Classement de B	4	5	7	3	2

Candidats	e_6	e_7	e_8	e_9	e_{10}
Classement de A	10	2	7	8	6
Classement de B	10	1	6	9	8

1° Dessiner le nuage de points.
2° Déterminer les droites de régression de Y (rang donné par l'arbitre B) en X (rang donné par A) et de X en Y.
3° Calculer le coefficient de corrélation linéaire du couple (X, Y).
Quel jugement peut-on porter sur la qualité de l'accord des arbitres A et B?

EXERCICES ET PROBLÈMES

1. *1°* On considère les suites (x_n) et (y_n), où $0 \leqslant n \leqslant 5$, définies par le tableau ci-dessous :

n	0	1	2	3	4	5
x_n	0	1	1	3	5	11
y_n	1	0	2	2	6	10

Calculer les nombres $\sum_{n=0}^{5} x_n$, $\sum_{n=0}^{5} y_n$, $\sum_{n=0}^{5} x_n^2$, $\sum_{n=0}^{5} y_n^2$, $\sum_{n=0}^{5} x_n y_n$, ainsi que les variances des suites (x_n) et (y_n), que l'on interprétera comme des séries statistiques.
En déduire les coefficients a, b, α et β des droites de régression d'équations $y = ax + b$ et $x = \alpha y + \beta$ de y par rapport à x et de x par rapport à y.
On donnera tous les nombres précédents sous forme rationnelle irréductible et sous forme décimale approchée à 10^{-2} près.
En déduire une valeur approchée à 10^{-2} près du coefficient de corrélation ρ.
2° On désigne par p un entier naturel non nul. Pour tout entier naturel n strictement inférieur à p, on pose :

$$x_n = \frac{1}{3}\,[2^n - (-1)^n], \quad y_n = \frac{1}{3}\,[2^n + 2(-1)^n].$$

Calculer les nombres $\sum_{n=0}^{p-1} x_n$, $\sum_{n=0}^{p-1} y_n$, $\sum_{n=0}^{p-1} x_n^2$, $\sum_{n=0}^{p-1} y_n^2$ et $\sum_{n=0}^{p-1} x_n y_n$.
Expliciter le cas particulier, où p est un entier naturel pair, de la forme $p = 2q$.
3° On suppose encore que $p = 2q$. On note $y = a_q x + b_q$ l'équation de la droite de régression de y par rapport à x. Déterminer les limites de a_q et b_q, lorsque q tend vers $+\infty$. Préciser si a_q atteint sa limite par valeurs supérieures ou inférieures.

(H.E.C. – 1975 – Extraits)

2. Étude de l'évolution du stock d'une entreprise commerciale.

Année	i	1975	1976	1977	1978	1979	1980
Rang de l'année	t_i	1	2	3	4	5	6
Nombre d'articles en stock	Q_i	6 400	7 200	8 700	10 400	12 600	15 000

1° Représenter, sur papier semi-logarithmique, le nuage des points $M_i(t_i; \lg Q_i)$.
2° Afin de vérifier la validité d'un ajustement linéaire de ce nuage, calculer le coefficient de corrélation linéaire entre t et $\lg Q$ (les logarithmes décimaux seront arrondis au plus proche à 0,000 1 près; les calculs seront présentés sous forme de tableau et, en dehors des valeurs de t_i et de t_i^2, tous les nombres de ce tableau seront arrondis au plus proche à 0,000 1 près).
3° Déterminer, par la méthode des moindres carrés, l'équation de la droite ajustant les valeurs de $\lg Q$ à celles de t.
En déduire, sous la forme $Q = kc^t$, l'ajustement des valeurs de Q à celles de t (c sera arrondi au plus proche à 0,001 près et k à une unité près).

(E.S.C.A.E. – 1981)

N°3. Dans une banque on procède à une étude statistique sur un échantillon E de 1 000 clients. Pour chacun des clients, on a relevé d'une part une estimation du revenu mensuel, et d'autre part la valeur du solde moyen du compte courant.
Les variables statistiques « revenu d'un client » et « solde moyen du compte courant d'un client » sont respectivement notées X et Y.
On donne ci-dessous le tableau des effectifs correspondant à la distribution du couple (X, Y) sur l'échantillon E observé. Dans ce tableau, on a regroupé en classes les valeurs de X et de Y exprimées en francs.

classes de X \ classes de Y	$0 \leqslant Y < 1\,000$	$1\,000 \leqslant Y < 2\,000$	$2\,000 \leqslant Y < 3\,000$	$3\,000 \leqslant Y < 4\,000$	$4\,000 \leqslant Y < 5\,000$
$3\,000 \leqslant X < 5\,000$	60	30	10	0	0
$5\,000 \leqslant X < 7\,000$	70	100	20	10	0
$7\,000 \leqslant X < 9\,000$	80	100	150	18	2
$9\,000 \leqslant X < 11\,000$	40	60	90	50	10
$11\,000 \leqslant X < 13\,000$	10	20	45	15	10

1° Calculer la moyenne et l'écart-type de chacune des deux variables X et Y.
2° Calculer la valeur du coefficient de corrélation linéaire du couple (X, Y).
3° Déterminer la droite de régression de Y en X.

(D'après E.S.C.A.E. – 1980)

4. Dans cet exercice, TOUS les nombres figurant dans le tableau de calcul seront arrondis, au plus proche, à 0,001 près et les calculs seront effectués UNIQUEMENT à partir de ces valeurs. Les résultats demandés seront indiqués avec la même précision.
On considère la statistique ci-dessous dans laquelle :
x_i représente un revenu en francs;
N_i représente le nombre de revenus supérieurs à x_i.

x_i	N_i
10 000	3 156 558
20 000	471 637
30 000	122 924
50 000	48 492
100 000	5 075
200 000	976
300 000	235
500 000	54

1° On pose $u_i = \lg x_i$ et $v_i = \lg N_i$.
Reproduire et compléter le tableau ci-dessous :

u_i	v_i
...	...
...	...
...	...

Représenter, sur papier millimétré, le nuage des points $M_i(u_i, v_i)$.
Axe des u : origine : point d'abscisse 4; unité : 10 cm;
Axe des v : origine : point d'ordonnée 1; unité : 4 cm.
2° On se propose d'ajuster ce nuage par une droite en utilisant la méthode des moindres carrés.
a) Compléter le tableau du *1°* afin de faire apparaître tous les résultats nécessaires au calcul demandé en *c)*.
b) Citer les formules donnant les coefficients de l'équation cherchée.
c) Donner l'équation de la droite des moindres carrés ajustant v par rapport à u.
d) Tracer cette droite d'ajustement sur le graphique précédent.
3° En déduire les réels A et α, compris entre 1 et 10, et l'entier naturel k tels que $N = \dfrac{A 10^k}{x^\alpha}$.

(E.S.C.A.E. – 1980)

5. Le plan $\mathbb{R}^2$ est rapporté à un repère orthonormal.

A – *1°* Soit D une droite d'équation :

$$x \cos \theta + y \sin \theta - p = 0.$$

Que représentent les nombres θ et p?
2° Calculer la distance du point $M(x_0, y_0)$ à la droite D (on la notera $d(M, D)$).
3° Caractériser les équations des droites passant par M (on mettra les équations sous la même forme que celle de D).
4° Calculer le minimum de la fonction :

$$f(\theta) = a \cos^2 \theta + b \sin^2 \theta + 2c \sin \theta \cos \theta.$$

(On étudiera en particulier le cas $a = b$.)

B – Soit F un ensemble fini de n points $M_i(x_i, y_i)$.
On appelle distance de F à D le nombre positif $d(F, D)$ défini par :

$$d^2(F, D) = \sum_{i=1}^{n} d^2(M_i, D).$$

1° On considère deux droites parallèles D et D', D' passant par le centre de gravité des points de F. Comparer $d(F, D)$ et $d(F, D')$.
2° Étudier l'existence et l'unicité éventuelle d'une droite D rendant minimal le nombre $d(F, D)$. Si une telle droite existe et est unique, on la notera D_F.
3° On considère les droites $D(x = 0)$, $\Delta(y = 0)$ et les deux ensembles :

$$F = \{(1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1)\}$$
$$F' = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (-1, -2), (-2, -1)\}.$$

Calculer $d(F, D)$, $d(F, \Delta)$, $d(F', D)$, $d(F', \Delta)$.
Caractériser, le cas échéant, les droites D_F et $D_{F'}$.

C – On appelle dispersion linéaire de l'ensemble F le nombre $d^2(F)$, minimum de $d^2(F, D)$ lorsque D varie.
1° Que peut-on dire de F si $d^2(F) = 0$?
2° Montrer que $d^2(F)$ ne peut pas diminuer si l'on ajoute un point à F.
3° Dans quel cas $d^2(F)$ reste-t-il constant quand on ajoute un point à F?
4° Soit F l'ensemble :

$$F = \{A(4, 4), B(4, -4), C(-4, 4)\}.$$

Étudier D_F et $d^2(F)$.
5° Soient F' l'ensemble obtenu en ajoutant un point M à l'ensemble F, et α la dispersion linéaire de cet ensemble. Étudier l'ensemble des positions possibles du point M dans les cas :

$$\alpha = \frac{64}{3}, \qquad \alpha = 64.$$

D – *1°* Soit F l'ensemble :

$$F = \{(4, -1), (2, 0), (-1, 4), (3, 4), (0, 3), (4, 2)\}.$$

Déterminer et construire sur un même graphique :
a) la droite D_F,
b) la droite de régression de y en x (moindres carrés),
c) la droite de régression de x en y (on prendra le centimètre comme unité sur les axes).
2° Même problème avec l'ensemble :

$$F = \{(\sqrt{3}, 2\sqrt{3}), (-\sqrt{3}, 0), (-3\sqrt{2}, \sqrt{3})\}.$$

(On déterminera explicitement la pente de la droite D_F, à la fois sous la forme trigonométrique et sous la forme d'un nombre irrationnel défini à l'aide d'un radical.)

(H.E.C. – 1971)

6. Dans une population P composée de cent ménages, on considère les deux variables statistiques X et Y (X : nombre d'enfants dans un ménage; Y = nombre de pièces d'habitation d'un ménage).
Pour chaque couple de valeurs (x_i, y_j) du couple de variables (X, Y), on donne l'effectif n_{ij} observé dans la population P :

$Y \backslash X$	0	1	2	3	4	5
1	6	4	1	0	0	0
2	3	11	10	5	1	0
3	1	3	16	13	4	1
4	0	1	3	5	8	4

Exemple : 1 ménage de 4 enfants habite dans 2 pièces.
Les calculs seront faits au 1/100 près.
1° *a)* Calculer sur la population P la moyenne m_X et l'écart-type σ_X de la variable X.
b) Calculer sur la population P la moyenne m_Y et l'écart-type σ_Y de la variable Y.
2° *a)* Marquer dans un repère cartésien R d'axes (Ox, Oy), l'ensemble des points M_i qui représentent les différents couples de valeurs (x_i, y_j) du couple de variables (X, Y).
On indiquera en chaque point (x_i, y_j) du nuage la fréquence correspondant au couple (x_i, y_j).
b) Déterminer l'équation cartésienne de la droite de régression de Y en X; tracer cette droite dans le repère R.
c) Déterminer l'équation cartésienne de la droite de régression de X en Y; tracer cette droite dans le repère R.
d) Déduire des § *b)* et *c)* la valeur du coefficient de corrélation linéaire du couple de variables (X, Y). Que peut-on en conclure?

(E.S.C.P. – 1973)

7. Le coût Y d'une activité exercée dans un secteur d'entreprise peut être considéré comme une fonction affine d'une production X :

$$Y = aX + b.$$

1° Déterminer les valeurs à prendre pour les constantes a et b en procédant à l'ajustement linéaire, par la méthode des moindres carrés, des données numériques du tableau ci-dessous résultant de l'observation :

Valeurs observées	
Nombre d'unités de la production X	Coût de l'activité Y
10	280
15	420
20	525
25	580
40	905
50	1 030
60	1 380
80	1 680

2° Porter un jugement sur la valeur de cet ajustement.

(E.S.C.P. – 1970)

Couverture : Fred Schneider Création.
Conception et réalisation de la maquette : Louis de CAYEUX.
Réalisation des schémas : Rémi PICARD.

Imprimé en France par BRODARD GRAPHIQUE - Coulommiers-Paris.
Dépôt légal n° 6824-6-1983 – Collection n° 63 – Édition n° 01.
I.S.B.N. 2.01.009.144.2.

13/4631/1

9 782010 091445

83,00 FF TTC.

fredSchneider identities design

13/4631/1

Imprimé en France
par AUCLAIR-BAGNEUX