maths

R. Pourret - C. Tubach

AVEC SOLUTIONS

EXO

POCHE

TERMINALE B

VUIBERT

12/1 70-

-50%

0,27

EXOPOCHE avec SOLUTIONS

MATHS

Terminale B

VUIBERT

ISBN : 2-7117-1524-8

63, bd St-Germain
75005Paris

LE BON USAGE D'EXOPOCHE T.B.

Qu'est-ce que travailler ? Quelques méthodes

Si vous avez le projet de réussir l'épreuve de mathématiques de votre bac B, ce livre est fait pour vous. En effet, les auteurs vous guident sur deux axes essentiels :

– **Comprendre** les concepts qui sont au cœur du programme.
– **Maîtriser** les outils qui opèrent dans les problèmes.

▶ FACILITER VOTRE COMPRÉHENSION par trois voies différentes :

1 – Par l'exemple associé aux idées délicates.

• On assimile souvent une notion nouvelle grâce à une situation qui montre ce que signifie le texte un peu abstrait de la définition ou du théorème. *Lisez l'exemple.*

• Les premiers exercices pour s'entraîner *reprennent* des situations simples qui consolident la première idée.

2 – Par la traduction économique ou sociale.

À chaque fois que cela est possible, des exercices comportent :

• soit une phase de mathématisation simple du concret (entreprise : coûts, salaires, bénéfice ; social : facteurs explicatifs du revenu, de l'éducation ; ajustements...) ;

• soit une phase d'utilisation d'un modèle pour simuler ou prévoir la réalité sous des hypothèses précises.

Ceci vous montre *à quoi servent les mathématiques* dans votre section. Faites le lien avec le cours d'économie.

3 – Par les changements de point de vue.

Comprendre un sujet c'est créer dans votre esprit des "ponts" entre trois types de langages :

– les symboles de l'algèbre et de l'analyse,
– le texte descriptif ou explicatif en français,
– le croquis, le schéma, le dessin.

Prenez en avantage ceci : *si un aspect vous bloque, passez à l'autre.*

▶ MAÎTRISER LES OUTILS — techniques, connaissances de base, enchaînements — *par l'exploitation de 6 règles de travail simples* :

1 – Mieux vaut faire 4 fois 2 exercices sur un même procédé à quelques jours de distance que 8 exercices le même jour.

Quatre fois une demi-heure est plus efficace que deux heures.

2 – Si vous n'arrivez pas à démarrer, c'est probablement que vous n'avez pas traduit l'énoncé dans les termes qui sont ceux du cours. Donc, il faut retourner voir le début du chapitre sur les points essentiels du cours. *Les rappels sont faits pour être utilisés.*

3 – Si vous vous enlisez dans un calcul, c'est probablement que vous avez négligé une règle fondamentale (parenthèse, barre de fraction ; produit de signes, etc.) ; il faut aller voir le corrigé, le prendre là où vous êtes arrêté, cacher la page *et retourner à votre recherche tout seul (toute seule).*

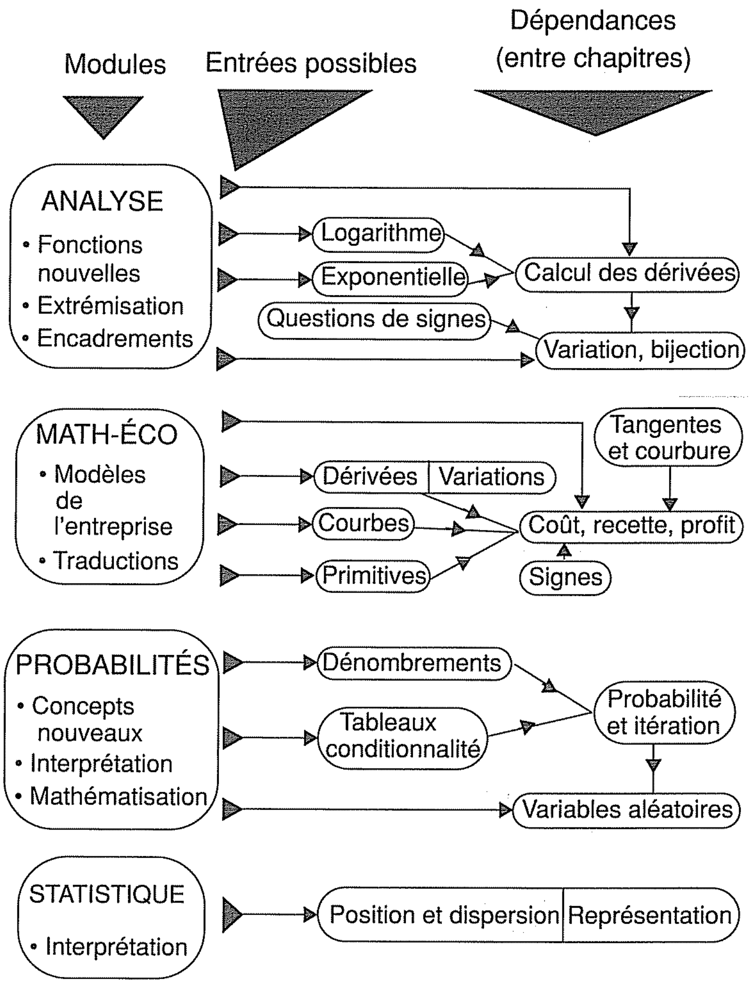
4 – Quand vous avez fait un pas en avant, assurez-vous le lendemain que l'idée ou la technique est acquise en reprenant un exercice sur le même sujet : *cela donne confiance, cela consolide.*

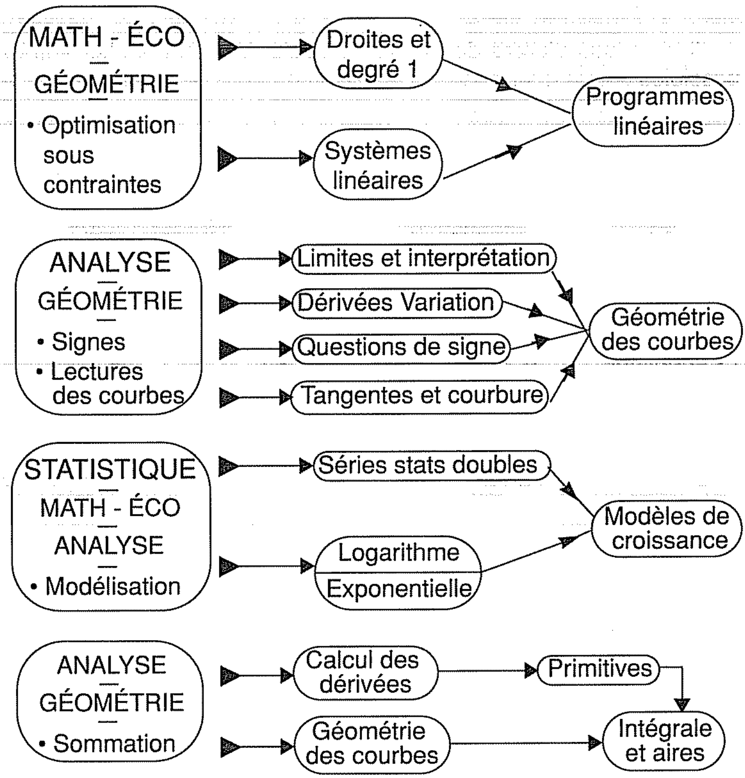
5 – Si vous êtes resté bloqué un assez long temps, il faut savoir s'arrêter, et reprendre le lendemain car *la nuit porte conseil.* Deux fois une demi-heure valent mieux qu'une heure.

6 – Ce livre peut être abordé par beaucoup de chapitres. Chaque technique venue d'un autre chapitre est présentée dans le corrigé avec les détails utiles. La qualité de ces *explications* vous aide à retenir et vous montre *comment il faudra rédiger votre copie.*

Structure du livre

Il n'y a pas d'ordre de travail privilégié. Voici toutes les entrées possibles :





Le bon usage de l'index

Il est fréquent qu'une question d'un problème d'un chapitre de ce livre utilise au moins une technique présentée dans un autre chapitre que celui qu'il illustre.

Il ne faut pas hésiter à aller rechercher cette technique là où elle est exposée (ou mise en œuvre à nouveau). Un index en fin de livre vous aidera à résoudre cette difficulté.

— Aucun chapitre ne peut tout aborder à la fois.

— Un problème opère une synthèse de plusieurs chapitres. Donc, travailler efficacement c'est aller chercher toutes les techniques utiles (et pas encore maîtrisées) là où elles sont, afin de résoudre le problème. Il peut donc arriver que l'on ne prenne dans un chapitre que la notion ou le procédé dont on a besoin. Soyez libres de vos mouvements...

Votre copie au bac : comment vous y prendre ?

PRINCIPE PREMIER : répondez aux questions que l'on vous pose.

Pour cela, il faut avoir bien compris l'énoncé. En outre, la réponse à chaque question doit être complète et formulée dans les termes exigés par l'énoncé.

Conséquences :

1° Il faut lire l'énoncé trois fois.

Une première fois pour comprendre les exercices qui sont proposés ; pour repérer les connaissances qui sont requises dans chaque partie.

Une seconde fois pour analyser l'énoncé que vous avez décidé de traiter : que vise-t-il ? Par quelle méthode propose-t-il d'y parvenir ?

Une troisième fois, très précise, pour comprendre dans quels termes il faut traiter la question.

2° La présentation de chaque réponse peut reprendre à la forme affirmative la formulation de la question posée.

PRINCIPE SECOND : vous devez prouver au correcteur, par votre rédaction :

— que vous savez mobiliser les connaissances utiles au problème posé,

— que vous êtes capable d'enchaîner les déductions afin de parvenir à la conclusion souhaitée.

Conséquences :

1° Justifiez tout ce que vous affirmez par des explications brèves montrant que vous savez raisonner. Utilisez des petites phrases déductives.

2° Mais ne racontez pas par le menu ce que vous faites. Justifier c'est utiliser des données de l'énoncé et des résultats connus (définitions et propriétés) pour atteindre un résultat.

DERNIER PRINCIPE : il faut être exact dans les calculs. La sécurité doit être préférée à la vitesse. Ce qui ne veut pas dire qu'il faut être lent ; mais il faut éviter la précipitation.

Conséquences :

1° On mène un calcul ou une démarche en visant un objectif ; donc le calcul se conduit. Il ne prendra pas la même tournure selon que l'on veut étudier un signe ou faire un changement de variable (factorisation ou pas ; regroupements...).

2° Un calcul se vérifie par divers moyens. Soit il existe une seconde voie pour vérifier ; soit on regarde l'ordre de grandeur, soit on s'assure de la cohérence du résultat avec les autres conclusions dégagées auparavant.

En résumé, les qualités à développer sont :

— **Lucidité :** dans la lecture du texte, dans la conduite du travail.

— **Fiabilité :** dans les calculs, dans les déductions.

— **Clarté :** dans l'argumentation et l'interprétation.

Mieux vaut un travail sans erreurs, argumenté mais inachevé, qu'une copie "complète" avec erreurs, non justifiée, incohérente.

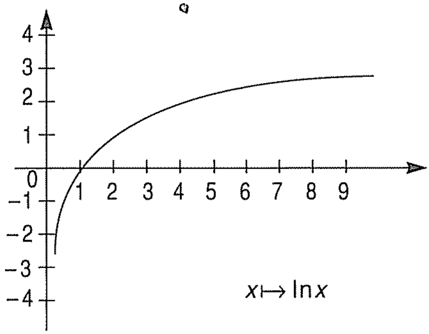
UN ULTIME CONSEIL : même si vous maîtrisez toutes les techniques classiques, il y aura sans doute une surprise pour vous dans le sujet de bac. Sachez-le ; adaptez-vous calmement et pensez que vous êtes capable de résoudre le problème posé : l'éventail de vos connaissances est, de toute façon, suffisant pour y parvenir. En effet, le sujet de l'épreuve a été conçu en fonction des connaissances d'un élève moyen de terminale B.

Bien se préparer, c'est s'entraîner à tous les types de difficultés classiques afin de limiter les surprises le jour de l'épreuve.

SOMMAIRE

1 LE LOGARITHME NÉPÉRIEN

CE QU'IL FAUT RETENIR



1° $\ln x$ existe si $x > 0$.
Son ensemble de définition est $]0\,;+\infty[$.
De même, $\ln[u(x)]$ existe si $u(x) > 0$

2° Limites.

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty.$$

1. Le logarithme népérien

Deux formules particulières à noter :

$$\lim_{x \to 0^+} x^n \ln x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0.$$

3° Dérivés et variations.

La fonction logarithme népérien est dérivable :

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Puisque $\frac{1}{x} > 0$ quand $x \in]\,0\,;+\infty\,[$, la fonction logarithme népérien est croissante sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

Tableau de variation :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

La dérivée seconde est $(\ln x)'' = -\frac{1}{x^2}$.

Remarquons que x^2 étant un carré, $-\frac{1}{x^2}$ est négatif. La croissance de la fonction est ralentie.

Cas d'une fonction composée :

$$\ln[u(x)]' = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

4° Propriétés algébriques.

a) $\boxed{\ln 1 = 0}$ $\boxed{\ln e = 1}$.

b) Le logarithme du produit de deux nombres est égal à la somme des logarithmes de ces nombres :

$$\boxed{\ln(a \times b) = \ln a + \ln b}.$$

c) Le logarithme du carré d'un nombre est le double du logarithme de ce nombre :

$$\boxed{\ln a^2 = 2\ln a} \quad \boxed{\ln a^p = p\ln a} \quad \boxed{\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a}.$$

d) Le logarithme de l'inverse d'un nombre est l'opposé du logarithme de ce nombre :

$$\boxed{\ln \frac{1}{a} = -\ln a}.$$

e) Le logarithme du quotient de deux nombres est la différence des logarithmes de ces nombres :

$$\boxed{\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b}.$$

5° Pour tout réel x $\boxed{\ln e^x = x}$.

Pour tout réel x strictement positif $\boxed{e^{\ln x} = x}$.

EXERCICES POUR S'ENTRAÎNER

1° Déterminer l'ensemble de définition de :

$f_1 : x \mapsto \ln(-x)$

$f_2 : x \mapsto \ln(2x - 3)$

$f_3 : x \mapsto \ln(x^2 - 4)$

2° Calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition des fonctions f_1, f_2 et f_3 ainsi que de $f_4 : x \mapsto x - 2\ln x$.

3° Calculer la dérivée des fonctions :

$g_1 \;: x \mapsto x\ln x$

$g_2 : x \mapsto \dfrac{x+1}{\ln x}$

$g_3 : x \mapsto \ln(3x^2+1)$

$g_4 : x \mapsto x^2 - 3x - \dfrac{1}{2}x\ln x$

$g_5 : x \mapsto \ln(5e^x)$

4° Transformer l'écriture de :

$a = \ln(3e)$ $\quad b = 1 + \ln 5$

$c = 3 + \ln 2$ $\quad d = \ln\dfrac{1}{2} - \ln\dfrac{1}{3}$

$e = \ln(x-5) + \ln(2x^2-1)$ $\quad f = \ln(x-2) - \ln\left(\dfrac{1}{2}x+2\right)$

$g = \ln(x^2-9) - \ln(x-3)$ $\quad h = 5\ln x - \ln(x^2)$.

◆ Solution

1° $D_{f_1} =]-\infty ; 0[$, car $-x > 0$ équivaut à $x < 0$.

$D_{f_2} = \left]\dfrac{3}{2} ; +\infty\right[$, car $2x - 3 > 0$ équivaut à $x > \dfrac{3}{2}$.

$D_{f_3} =]-\infty ; -2[\cup]2 ; +\infty[$, car $x^2 - 4 > 0$ équivaut à $(x+2)(x-2) > 0$. Faire un tableau de signes.

2° Limite de f_1 en $-\infty$: $\lim\limits_{x \to -\infty} f_1(x) = +\infty$ car $-x$ tend vers $+\infty$.

Limite de f_1 en 0 : $\lim\limits_{x \to 0^-} f_1(x) = -\infty$ car $-x$ tend vers 0.

Limite de f_2 en $\dfrac{3}{2}$: $\lim\limits_{x \xrightarrow{+} \frac{3}{2}} f_2(x) = -\infty$ car $2x-3$ tend vers 0.

Limite de f_2 en $+\infty$: $\lim\limits_{x \to +\infty} f_2(x) = +\infty$ car $2x-3$ tend vers $+\infty$,

Limite de f_3 en $-\infty$: $\lim\limits_{x \to -\infty} f_3(x) = +\infty$

Limite de f_3 en $+\infty$: $\lim\limits_{x \to +\infty} f_3(x) = +\infty$

car x^2-4 tend vers $+\infty$ dans ces deux cas.

Limite de f_3 en -2 : $\lim\limits_{x \to -2} f_3(x) = -\infty$

Limite de f_3 en $+2$: $\lim\limits_{x \to 2^+} f_3(x) = -\infty$

car x^2-4 tend vers 0 dans ces 2 cas.

$f_4(x) = x - 2\ln x$. $f_4(x)$ existe quand $\ln x$ existe $D_{f_4} =]0\ ;\ +\infty[$.

Limite de f_4 en 0 : $\lim\limits_{x \to 0^+} f_4(x) = +\infty$ car si x tend vers 0, $\ln x$ tend vers $-\infty$. $-2\ln x$ tend vers $+\infty$.

Limite de f_4 en $+\infty$: $\lim\limits_{x \to +\infty} f_4(x) = +\infty$ x tend vers $+\infty$, $2\ln x$ aussi.

Il y a indétermination : on factorise $f_4(x) = x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)$.

$1 - \dfrac{\ln x}{x}$ tend vers 1 et $x\left(1 - \dfrac{\ln x}{x}\right)$ tend vers $+\infty$.

3° $g'(x) = \ln x + x \times \dfrac{1}{x} = \ln x + 1$ (c'est la dérivée d'un produit).

$$g'(x) = \frac{1 \times \ln x - (x+1)\dfrac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{x\ln x - x - 1}{x(\ln x)^2}$$

(dérivée d'un quotient).

$$g'(x) = \frac{6x}{3x^2+1}$$

$$g'(x) = 2x - 3 - \frac{1}{2}\left[\ln x + x \times \frac{1}{x}\right] = 2x - \frac{7}{2} - \frac{1}{2}\ln x$$

$$g'(x) = \frac{5e^x}{5e^x} = 1.$$

Remarquer que $g_5(x) = (\ln 5 + \ln e^x) = \ln 5 + x.$

4° $a = \ln 3 + \ln e = \ln 3 + 1.$
$b = 1 + \ln 5 = \ln e + \ln 5 = \ln(5e).$
$c = 3 + \ln 2 = 3\ln e + \ln 2 = \ln e^3 + \ln 2 = \ln(2e^3).$
$d = \ln\frac{1}{2} - \ln\frac{1}{3} = -\ln 2 + \ln 3 = \ln\frac{3}{2}.$
$e = \ln[(x-5)(2x^2-1)].$

$$f = \ln\left(\frac{x-2}{\frac{1}{2}x+2}\right) = \ln\left(\frac{2x-4}{x+4}\right).$$

$$g = \ln\left(\frac{x^2-9}{x-3}\right) = \ln\left[\frac{(x+3)(x-3)}{x-3}\right] = \ln(x+3).$$

$$h = \quad h = 5\ln x - \ln(x^2) = \ln(x^5) - \ln(x^2) = \ln\left(\frac{x^5}{x^2}\right)$$

$$= \ln x^3 = 3\ln x.$$

PROBLÈMES AVEC SOLUTIONS

1^er^ problème

◆ Énoncé

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations :

a) $\ln(2x-1) + \ln(x-2) = \ln 5.$

b) $\ln(2x^2-5x+2) = \ln 5.$

◈ Solution

a) ln $(2x-1)$ existe si $2x-1>0 \quad x>\frac{1}{2}$.

ln $(x-2)$ existe si $x-2>0 \quad x>2$.

L'ensemble de définition de cette équation est $]\,2\,;+\infty\,[$.

L'équation ***a)*** est équivalente à $\ln[(2x-1)(x-2)] = \ln 5$, donc à

$$e^{\ln[(2x-1)(x-2)]} = e^{\ln 5},$$

et à

$$(2x-1)(x-2) = 5.$$

On effectue $\begin{cases} 2x^2-5x+2=5 \\ 2x^2-5x-3=0. \end{cases}$

Cherchons les racines de ce trinôme du second degré.

Calcul du discriminant : $\Delta = b^2-4ac = 25-4 \times 2 \times (-3) = 49$.

$\Delta > 0$, il y a 2 racines : $x' = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{5+7}{4} = 3$.

$$x'' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5-7}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Remarquons que 3 appartient à D, mais pas $-\frac{1}{2}$.

L'équation ***a)*** admet une seule solution : $\boxed{\boldsymbol{x=3}}$.

b) ln $(2x^2-5x+2)$ existe si $2x^2-5x+2>0$.

Nous reconnaissons le trinôme étudié au ***a)*** et dont les racines sont

$$x' = 2 \quad x'' = \frac{1}{2}.$$

Rappelons que lorsque le discriminant est positif, le trinôme est "du signe de a" à l'extérieur des racines et "du signe opposé à celui de a" entre les racines.

Nous avons donc :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		2		$+\infty$
$2x^2-5x+2$	$+$	0	$-$	0	$+$	

$2x^2-5x+2>0$ si $x \in \ ]-\infty \ ; \ \frac{1}{2}[\ \cup \ ]2 \ ; \ +\infty[$

L'ensemble de définition de l'équation ***b)*** est $]-\infty \ ; \frac{1}{2}[\text{U}]2 \ ;+\infty[$.

L'équation ***b)*** est

$$\ln(2x^2-5x+2)=\ln 5$$

Elle est équivalente à

$$e^{\ln(2x^2-5x+2)}=e^{\ln 5}$$

$$2x^2-5x+2=5.$$

Nous reconnaissons l'équation ***a)*** dont les solutions sont

$$x' = -\frac{1}{2} \text{ et } x'' = 3.$$

Ces deux nombres appartiennent à D, donc l'équation ***b)*** admet deux solutions $\boxed{\boldsymbol{x'} = -\frac{1}{2}}$ et $\boxed{\boldsymbol{x''} = 3}$.

2^e problème

◆ Énoncé

On donne les trois fonctions :

$f_1 : x \mapsto \ln x$ $\qquad f_2 : x \mapsto \ln(-x)$ $\qquad f_3 : x \mapsto -\ln x.$

1° Pour chacune d'elles :

a) Déterminer l'ensemble de définition.

b) Calculer sa dérivée, étudier son signe, en déduire les variations de la fonction. Aucun calcul de limites n'est demandé.

2° Représenter ces trois fonctions dans un même repère.

◈ Solution

• $f_1 : x \mapsto \ln x$

a) $\ln x$ existe si $x > 0$, $D_{f_1} =]0 ; +\infty[$.

b) $f'(x) = \frac{1}{x}$.

Signe de la dérivée : $\frac{1}{x} > 0$ si $x > 0$ donc pour tout x de D_{f_1}.
f_1 est croissante sur $]0 ; +\infty[$.

• $f_2 : x \mapsto \ln(-x)$

a) $\ln(-x)$ existe si $-x > 0$, si $x < 0$ $D_{f_2} =]-\infty ; 0[$.

b) $f'_2(x)$ se calcule à l'aide de la formule $(\ln(u(x)))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

$u(x) = -x \quad u'(x) = -1$.

$f'_2(x) = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x}$.

Signe de $f'_2(x)$: quand $x < 0$, $\frac{1}{x} < 0$, $f'_2(x) < 0$ pour tout x de D_{f_2}.
f_2 est décroissante sur $]-\infty ; 0[$.

• $f_3 : x \mapsto -\ln x$

a) $f_3(x)$ existe quand $\ln x$ existe, donc quand $x > 0$, $D_{f_3} =]0 ; +\infty[$.

b) $f'_3(x) = -(\ln x)' = -\dfrac{1}{x}$.

Signe de $f'_3(x)$: quand $x > 0$ $\dfrac{1}{x} > 0$ et $-\dfrac{1}{x} < 0$.

$f'_3(x) < 0$ pour tout x de D_{f_3}.

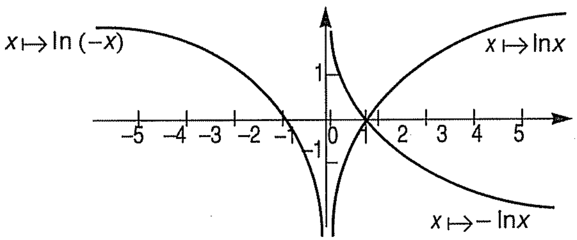
$f_3(x)$ est décroissante.

Résumons à l'aide des trois tableaux de variation :

x	0	$+\infty$
$f'_1(x)$	+	
$f_1(x)$	↗	

x	$-\infty$	0
$f'_2(x)$	−	
$f_2(x)$	↘	

x	0	$+\infty$
$f'_3(x)$	−	
$f_3(x)$	↘	



3^e problème

◆ Énoncé

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $I = \left[\dfrac{1}{e}\ ;\ e^2\right]$ par :

$$f(x) = x(1 - \ln x).$$

a) Exprimer en fonction de e : $f\left(\frac{1}{e}\right)$; $f(\sqrt{e})$; $f(e)$; $f\left(e^2\right)$.

b) Étudier les variations de f sur I.

c) Déterminer une équation de la tangente à (C) au point T d'abscisse e.

◈ **Solution**

a) • $f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}\left(1-\ln\frac{1}{e}\right)$,

$f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}\ (1+\ln e)$, car $\ln\frac{1}{a}=-\ln a$.

$f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}\ (1+1)$, car $\ln e=1$

$$\boxed{f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{2}{e}}$$

• $f(\sqrt{e})=\sqrt{e}(1-\ln\sqrt{e})$,

$f(\sqrt{e})=\sqrt{e}(1-\ln e^{1/2})$, car $\sqrt{a}=a^{1/2}$

$f(\sqrt{e})=\sqrt{e}(1-\frac{1}{2}\ln e)$, car $\ln a^p=p\ln a$.

$f(\sqrt{e})=\sqrt{e}(1-\frac{1}{2})$, car $\ln e=1$

$$\boxed{f(\sqrt{e})=\frac{\sqrt{e}}{2}}$$

• $f(e)=e\,(1-\ln e)$

$f(e)=e\,(1-1)$ car $\ln e=1$

$$\boxed{f(e)=0}$$

• $f(e^2)=e^2\,(1-\ln e^2)$

$f(e^2)=e^2\,(1-2\ln e)$, car $\ln a^p=p\ln a$

$f(e^2)=e^2\,(1-2)$, car $\ln e=1$

$$\boxed{f(e^2)=-e^2.}$$

b) Variations.

Calcul de la dérivée :

$f'(x) = (u \times v)' = u'v + uv'$

où $u = x \qquad u' = 1$

$v = 1 - \ln x \qquad v' = -\dfrac{1}{x}.$

$f'x = 1\,(1 - \ln x) + x\left(-\dfrac{1}{x}\right)$

$f'(x) = 1 - \ln x - 1,$

$\boxed{\mathbf{f'(x) = -\ln x.}}$

Signe de la dérivée :

$f'(x) > 0$
si $\qquad \ln x < 0$
donc si $\qquad 0 < x < 1.$

Dans I on aura :

$$\boxed{\begin{array}{ll} \text{si } \dfrac{1}{e} < x < 1 & f'(x) > 0. \\ \text{si } 1 < x < e^2 & f'(x) < 0. \end{array}}$$

$f(1) = 1\,(1 - \ln 1) = 1$ car $\ln 1 = 0.$

D'où le tableau de variation :

x	$\frac{1}{e}$		1		e^2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\frac{2}{e}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-e^2$

c) Équation de la tangente au point T. T(e ; 0).

Le coefficient directeur de la tangente est $f'(e) = -\ln e = -1$.

L'équation de la tangente s'écrit $y = -1x + b$.

Les coordonnées de T vérifient l'équation

$$0 = -1 \times e + b$$
$$b = e.$$

L'équation de la tangente à (C) au point T est $\boxed{y = -x + e.}$

4^e problème

◆ Énoncé

Soit la fonction f définie par $f(x) = \ln\left(\dfrac{x+2}{3-x}\right)$.

a) Déterminer son ensemble de définition D_f.

b) Calculer les limites de f aux bornes de l'ensemble D_f.

c) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

d) Construire la courbe (C) représentative de la fonction f.

◆ Solution

a) $\ln\left(\dfrac{x+2}{3-x}\right)$ existe si $\dfrac{x+2}{3-x}$ existe et si $\dfrac{x+2}{3-x} > 0$.

Étude du signe de $\dfrac{x+2}{3-x}$.

$x + 2 > 0$ si $x > -2$ $\qquad$ $3 - x > 0$ si $x > 3$

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$3-x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$\dfrac{x+2}{3-x}$		$-$	0	$+$	||	$-$	

Donc $\dfrac{x+2}{3-x} > 0$ si $-2 < x < 3$.

L'ensemble de définition de f est $D_f =]-2\,;\,3[$.

b) Limites : il faut étudier la limite en -2^+ et en 3^-.

Lorsque x tend vers -2^+ $\quad$ $x + 2$ tend vers 0

$3 - x$ tend vers $+5$

donc $\dfrac{x+2}{3-x}$ tend vers 0.

$$\boxed{\lim_{x \to -2^+} f(x) = -\infty}$$

La droite d'équation $x = -2$ est asymptote verticale à la courbe (C).

Lorsque x tend vers 3^- $\quad$ $x + 2$ tend vers 5

$3 - x$ tend vers 0.

Faisons un tableau de signes au voisinage de 3, afin de déterminer la limite de $\dfrac{x+2}{3-x}$.

x		3	
$x+2$	$+$		$+$
$3-x$	$+$	0	$-$
$\dfrac{x+2}{3-x}$	$+$	||	$-$

donc $\displaystyle\lim_{x \to 3^-} \frac{x+2}{3-x} = +\infty$ et $\boxed{\displaystyle\lim_{x \to 3^-} f(x) = +\infty}$.

La droite d'équation $x = 3$ est asymptote verticale à la courbe (C).

c) Calcul de la dérivée de f.

$f(x)$ est de la forme $\ln u$, sa dérivée sera $\dfrac{u'}{u}$ où $u = \dfrac{x+2}{3-x}$.

Pour calculer u' il faut utiliser la formule de dérivée d'un quotient :

$$\left(\frac{U}{V}\right)' = \frac{U'V - UV'}{V^2}$$

$$U = x + 2\ ;\quad U' = 1\ ;\quad V = 3 - x\ ;\quad V' = -1.$$

$$\left(\frac{x+2}{3-x}\right)' = \frac{1\,(3-x) - (x+2)\,(-1)}{(3-x)^2} = \frac{5}{(3-x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\dfrac{5}{(3-x)^2}}{\dfrac{x+2}{3-x}} = \frac{5\,(3-x)}{(3-x)^2\,(x+2)}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{5}{(3-x)\,(x+2)}}\ .$$

Etude du signe de $f'(x)$.

Le numérateur est positif.

L'étude de signe faite au ***a)*** prouve que $(3 - x)(x + 2) > 0$ lorsque $x \in D_f$.

$f'(x) > 0$, et donc f est croissante sur I.

Tableau de variation :

x	-2		3
$f'(x)$	‖	$+$	‖
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$ ‖

d) *Voir courbe, p. 29*

5e problème

◈ Énoncé

Soit f la fonction étudiée au 4e problème :

$$f : x \mapsto \ln\left(\frac{x+2}{3-x}\right).$$

On appelle (C) la courbe représentative de f.

Montrer que le point $I\left(\frac{1}{2}\,;0\right)$ est centre de symétrie de la courbe (C).

◈ Solution

Montrer que le point I est centre de symétrie de la courbe équivaut à montrer que dans le repère $(I, \vec{i}, \vec{j})$, cette courbe est la représentation graphique d'une fonction impaire.

Soit M un point du plan.

M a pour coordonnées $(x\,;y)$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, donc

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

M a pour coordonnées (X ; Y) dans le repère $(I, \vec{i}, \vec{j})$, donc

$$\overrightarrow{IM} = X\vec{i} + Y\vec{j}.$$

D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM}$,

donc $(x\vec{i} + y\vec{j}) = \frac{1}{2}\vec{i} + (X\vec{i} + Y\vec{j})$.

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} + X \\ y = Y. \end{cases}$$

La courbe (C) a pour équation $y = \ln \frac{x+2}{3-x}$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Nous remplaçons : $Y = \ln\left(\dfrac{\frac{1}{2} + X + 2}{3 - \left(\frac{1}{2} + X\right)}\right)$

$$Y = \ln\left(\dfrac{X + \frac{5}{2}}{\frac{5}{2} - X}\right).$$

Posons $\varphi : X \mapsto \ln\left(\dfrac{X + \frac{5}{2}}{\frac{5}{2} - X}\right)$ et montrons que φ est impaire.

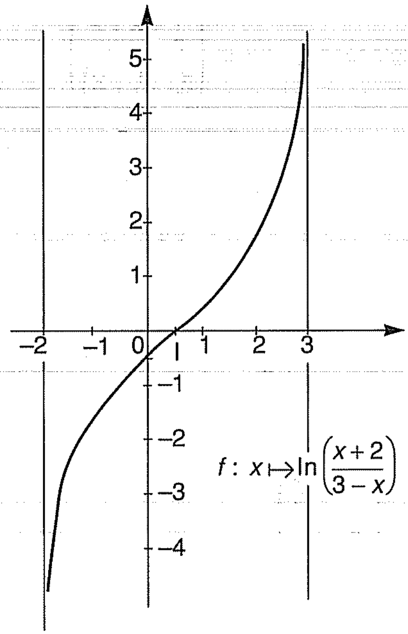
$$\varphi(-X) = \ln\left(\dfrac{-X + \frac{5}{2}}{\frac{5}{2} + X}\right)$$

$$\varphi(-X) = \ln\left(\dfrac{1}{\dfrac{X + \frac{5}{2}}{\frac{5}{2} - X}}\right) = -\ln\left(\dfrac{X + \frac{5}{2}}{\frac{5}{2} - X}\right)$$

$$\boxed{\varphi(-X) = -\varphi(X)}$$

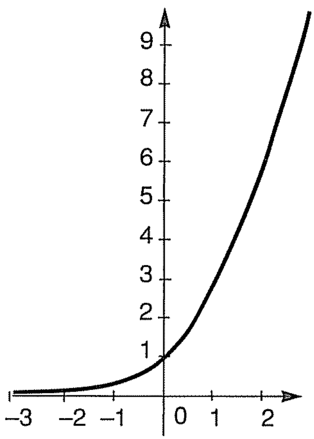
Donc φ est une fonction impaire.

Le point $I\left(\frac{1}{2}\,;\,0\right)$ est centre de symétrie de la courbe.


5
4
3
2
1
–2
–1
0
1
2
3
–1
–2
–3
–4
$f : x \mapsto \ln\left(\dfrac{x+2}{3-x}\right)$

2
LA FONCTION EXPONENTIELLE

CE QU'IL FAUT RETENIR



$x \mapsto e^x$

1° La fonction exponentielle de base e est définie pour tout réel x. e^x existe pour tout x.

Son ensemble de définition est $\mathbb{R}$.

Remarquons que $e^{u(x)}$ existe lorsque $u(x)$ existe.

2° Limites.

$\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty}$. $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0}$.

Deux formules particulières à noter :

$\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{e^x}{x^n}\right) = +\infty}$. $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0}$.

3° Dérivée et variations.

La fonction exponentielle est dérivable

$$(e^x)' = e^x.$$

Puisque $e^x > 0$ pour tout x, la fonction exponentielle est croissante sur $\mathbb{R}$.

Tableau de variation :

x	$-\infty$		$+\infty$
$(e^x)'$		$+$	
e^x	0	$\nearrow$	$+\infty$

Remarquons que la dérivée seconde est encore e^x, par conséquent elle est positive pour tout réel x. La croissance de la fonction exponentielle est accélérée.

Cas d'une fonction composée : $\boxed{\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x) \times e^{u(x)}}$

4° Propriétés algébriques.

a) $e^x > 0$ pour tout réel x.

b) $\boxed{e^0 = 1}$ et $\boxed{e^1 = e}$.

c) L'exponentielle de la somme de deux nombres est égale au produit des exponentielles de ces nombres.

$$\boxed{e^{x+y} = e^x \times e^y}.$$

d) Le carré de l'exponentielle d'un nombre est l'exponentielle du double de ce nombre.

$$\boxed{(e^x)^2 = e^{2x}} \qquad \boxed{(e^x)^p = e^{px}}.$$

e) L'inverse de l'exponentielle d'un nombre est l'exponentielle de l'opposé de ce nombre.

$$\boxed{\frac{1}{e^x} = e^{-x}}.$$

f) L'exponentielle de la différence de deux nombres est le quotient des exponentielles de ces nombres.

$$\boxed{e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}}.$$

5° La fonction exponentielle et la fonction logarithme népérien sont deux fonctions réciproques.

- si $x > 0$ $\quad \ln x = a$ $\quad$ équivaut à $\quad x = e^a$.
- si $b > 0$ $\quad e^x = b$ $\quad$ équivaut à $\quad x = \ln b$.

EXERCICES POUR S'ENTRAÎNER

1° **Ecrire autrement :**

$a = e^{\ln 8}$

$b = \ln e^{-5}$

$c = 5e^{\ln 3}$

$d = 2\ln e^7$

$f = e^{-\ln 2}$

$g = e^{2\ln x}$

$h = \ln((x+1)e^x)$

$j = \ln e^{\frac{1}{3}} + \ln e^{-3}$.

2° Ecrire autrement :

$$e^{\frac{1}{2}},\qquad \frac{e^x}{e},\qquad e^{1+\ln 3},\qquad e^{1+5\ln x},\qquad \frac{e^{x-3}}{e^x}.$$

3° Etudier les variations des trois fonctions suivantes et les représenter dans le même repère.

$$f_1 : x \mapsto e^x \qquad f_2 : x \mapsto e^{-x} \qquad f_3 : x \mapsto -e^x.$$

(Le calcul des limites n'est pas demandé.)

4° Après avoir déterminé leur ensemble de définition, calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$f_1 : x \mapsto e^x + x + 1, \qquad f_2 : x \mapsto (3x-5)\,e^x,$$

$$f_3 : x \mapsto \frac{e^x+3}{2e^x-1}, \qquad f_4 : x \mapsto \frac{1}{1+e^{-x}}.$$

5° Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition des fonctions f_3 et f_4.

◆ Solution

1° $a = e^{\ln 8} = 8$;

$b = \ln e^{-5} = -5$;

$c = 5e^{\ln 3} = 5 \times 3 = 15$;

$d = 2\ln e^7 = 2 \times 7 = 14$;

$$f = e^{-\ln 2} = e^{\left(\ln \frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2};$$

$g = e^{2\ln x} = e^{\ln(x^2)} = x^2$;

$h = \ln((x+1)e^x) = \ln(x+1) + \ln e^x = \ln(x+1) + x$;

$$j = \ln e^{\frac{1}{3}} + \ln e^{-3} = \frac{1}{3} - 3 = -\frac{8}{3}.$$

2° $e^{\frac{1}{2}} = \sqrt{e}$; $\dfrac{e^x}{e} = e^{x-1}$;

$e^{1+\ln 3} = e^1 \times e^{\ln 3} = 3e$;

$e^{1+5\ln x} = e^1 \times e^{5\ln x} = e \times e^{\ln x^5} = e \times x^5$;

$\dfrac{e^{x-3}}{e^x} = e^{x-3-x} = e^{-3} = \dfrac{1}{e^3}$.

3° • $f_1 : x \mapsto e^x$ $\quad D_{f_1} = \mathbb{R}$ $\quad f'_1(x) = e^x$ $\quad f'_1(x) > 0$.

$f_1(x)$ est croissante sur $\mathbb{R}$.

• $f_2 : x \mapsto e^{-x}$ $\quad D_{f_2} = \mathbb{R}$ $\quad f'_2(x)$ se calcule à l'aide de la formule $(e^{u(x)})' = u'(x)\, e^{u(x)}$ $\quad u(x) = -x$ $\quad u'(x) = -1$.

$f'_2(x) = -1 \times e^{-x} = -e^{-x}$.

Signe de $f'_2(x)$: $e^{-x} > 0$ donc $f'_2(x) < 0$.

f_2 est décroissante sur $\mathbb{R}$.

• f_3: $x \mapsto -e^x$ $\quad D_{f_3} = \mathbb{R}$.

$f'_3(x) = -(e^x)' = -e^x$.

$e^x > 0$ donc $f'_3(x) < 0$.

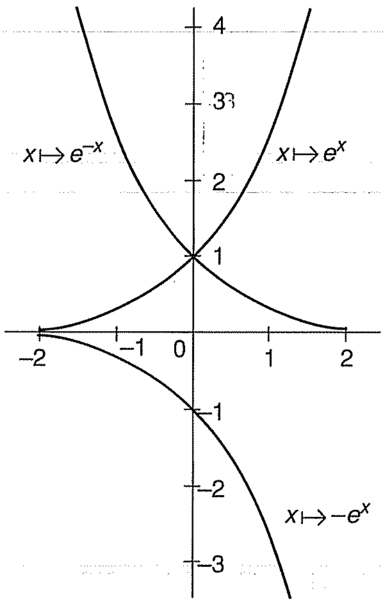
f_3 est décroissante sur $\mathbb{R}$.

Résumons dans les tableaux de variation :

x	$-\infty$	$+\infty$
f'_1	+	
f_1	$\nearrow$	

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
f'_2	$-$
f_2	↘

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
f'_3	$-$
f_3	↘



4° • $f_1 : x \mapsto e^x + x + 1$.

• e^x existe pour tout x, $x + 1$ aussi $\boxed{D_{f_1} = \mathbb{R}}$.

• $\boxed{f'_1(x) = e^x + 1}$.

• $f_2 : x \mapsto (3x-5)\, e^x$.

e^x existe pour tout x, $3x-5$ aussi $\boxed{D_{f_2} = \mathbb{R}}$.

$f_2(x)$ est de la forme $f_2(x) = u \times v$ $\quad u = 3x-5 \quad u' = 3$

$v = e^x \quad v' = e^x$

Sa dérivée est de la forme

$f'_2(x) = u'v + uv' = 3e^x + (3x-5)\, e^x$.

$$\boxed{f'_2(x) = (3x-2)\, e^x}.$$

• $f_3 : x \mapsto \dfrac{e^x+3}{2e^x-1}$.

$e^x + 3$ et $2e^x - 1$ existent pour tout x.

$2e^x - 1 = 0$ si $2e^x = 1$ donc $e^x = \dfrac{1}{2}$.

Appliquons le logarithme $\ln e^x = \ln\dfrac{1}{2}$, $\quad x = -\ln 2$.

$$\boxed{D_{f_3} = \mathbb{R} - \{-\ln 2\}}.$$

$f_3(x)$ est de la forme $f_3(x) = \dfrac{u}{v}$.

$u = e^x + 3 \quad u' = e^x$

$v = 2e^x - 1 \quad v' = 2e^x$.

$f'_3(x)$ est de la forme $\dfrac{u'v - uv'}{v^2} = \dfrac{e^x(2e^x-1) - 2e^x(e^x+3)}{(2e^x-1)^2}$

$$f'_3(x) = \frac{2e^{2x} - e^x - 2e^{2x} - 6e^x}{(2e^x-1)^2},$$

$$\boxed{f'_3(x) = \frac{-7e^x}{(2e^x-1)^2}}.$$

• $f_4 : x \mapsto \dfrac{1}{1+e^{-x}}$

e^{-x} existe pour tout x.

$1 + e^{-x} = 0$ équivaut à $e^{-x} = -1$.

Ce qui est impossible car e^{-x} ne peut être négatif.

$$\boxed{D_{f_4} = \mathbb{R}}.$$

$f_4(x)$ est de la forme $\frac{1}{U}$

$U = 1 + e^{-x} \quad U' = -e^{-x}$

$f'_4(u)$ est de la forme $\frac{-U'}{U^2}$

$$f'_4(x) = \frac{-(-e^{-x})}{(1+e^{-x})^2}$$

$$\boxed{f'_4 = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}}.$$

5° *a)* $f_3 : x \mapsto \frac{e^x + 3}{2e^x - 1}$. $\quad D_{f_3} = \mathbb{R} - \{-\ln 2\}$.

Il faut déterminer les limites en $+\infty$, en $-\infty$ et en $-\ln 2$.

• *Limite en* $+\infty$.

Lorsque x tend vers $+\infty$, e^x tend vers $+\infty$
donc $e^x + 3$ tend vers $+\infty$ et $2e^x - 1$ aussi.

Il s'agit d'un forme indéterminée. Factorisons e^x au numérateur et au dénominateur :

$$f_3(x) = \frac{e^x(1+3e^{-x})}{e^x(2-e^{-x})} = \frac{1+3e^{-x}}{2-e^{-x}}.$$

Lorsque x tend vers $+\infty$, $-x$ tend vers $-\infty$, et e^{-x} tend vers 0,
donc $1 + 3e^{-x}$ tend vers 1, $\quad 2 - e^{-x}$ tend vers 2.

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f_3(x) = \frac{1}{2}}.$$

La droite d'équation $y = \frac{1}{2}$ est asymptote horizontale à la courbe.

• *Limite en* $-\infty$.

Lorsque x tend vers $-\infty$, e^x tend vers 0,

$f_3(x)$ tend vers $\dfrac{0+3}{2\times 0-1} = -3$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f_3(x) = -3}.$$

La droite d'équation $y=-3$ est asymptote horizontale à la courbe.

• *Limite en* $x_0 = -\ln 2$.

Lorsque x tend vers $-\ln 2$ e^x+3 tend vers $e^{-\ln 2}+3 = e^{\frac{1}{2}}+3 = \dfrac{7}{2}$

$2e^x-1$ tend vers 0.

Faisons un tableau de signes au voisinage de $-\ln 2$:

x		$-\ln 2$	
e^x+3	$+$		$+$
$2e^x-1$	$-$	0	$+$
$f_3(x)$	$-$	‖	$+$

$2e^x-1>0$, si $e^x > \dfrac{1}{2}$ donc si $x > -\ln 2$.

$$\boxed{\lim_{x\to-\ln 2^-} f_3(x) = -\infty} \qquad \boxed{\lim_{x\to-\ln 2^+} f_3(x) = +\infty}.$$

La droite d'équation $x=-\ln 2$ est asymptote verticale à la courbe.

b) $f_4 : x \mapsto \dfrac{1}{1+e^{-x}}$. $D_f = \mathbb{R}$.

Il faut déterminer les limites en $+\infty$ et $-\infty$.

• *Limite en* $+\infty$.

Si x tend vers $+\infty$ e^{-x} tend vers 0.

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f_4(x) = 1}.$$

La droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à la courbe.

• *Limite en* $-\infty$.

Lorsque x tend vers $-\infty$ e^{-x} tend vers $+\infty$,

$1 + e^{-x}$ tend vers $+\infty$, $\dfrac{1}{1+e^{-x}}$ tend vers 0.

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f_4(x) = 0}.$$

La droite d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses) est asymptote horizontale à la courbe.

PROBLÈMES AVEC SOLUTIONS

1^er^ problème

◆ Énoncé

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations :

a) $(e^x + 3)(e^x - 1) = 0$,

b) $\dfrac{e^x + 1}{e^{3x}} = \dfrac{1}{4}$,

c) $2e^{2x} - e^x - 3 > 0$,

d) $(e^{2x} - 4)(2e^x - 1) \leq 0$.

◈ Solution

Remarquons tout d'abord que ces quatre équations et inéquations sont définies pour tout réel x : leur ensemble de définition est $\mathbb{R}$.

a) Pour qu'un produit soit nul, il faut et il suffit que l'un des facteurs du produit soit nul.

$(e^x + 3)(e^x - 1) = 0$ équivaut donc à $e^x + 3 = 0$ ou $e^x - 1 = 0$

$e^x = -3$ ou $e^x = 1$.

Or $e^x > 0$ donc e^x ne peut pas être égal à -3.

$e^x = 1$ équivaut à $\ln e^x = \ln 1 \quad x = 0$.

$$\boxed{\text{L'équation } \boldsymbol{(a)} \text{ admet une solution } x = 0}.$$

b) $\dfrac{e^{x+1}}{e^{3x}} = \dfrac{1}{4}$ peut s'écrire $e^{(x+1)-3x} = \dfrac{1}{4}$

ou encore $e^{-2x+1} = \dfrac{1}{4}$.

Pour exprimer x, appliquons le logarithme aux deux membres :

$$\ln(e^{-2x+1}) = \ln\frac{1}{4}$$

d'où

$$-2x+1 = -\ln 4$$

$$-2x = -\ln 4 - 1$$

$$x = \frac{1+\ln 4}{2}.$$

$\boxed{\text{L'équation } \boldsymbol{(b)} \text{ admet une solution : } x = \dfrac{1+\ln 4}{2}}$ en valeur exacte, soit : une valeur approchée de x à 10^{-2} près est 1,19.

c) $2e^{2x} - e^x - 3 > 0$.

Cette inéquation peut s'écrire $2(e^x)^2 - e^x - 3 > 0$.

En posant $e^x = X$ elle devient $2X^2 - X - 3 > 0$.

Pour résoudre cette inéquation, cherchons les racines du trinôme $2X^2 - X - 3$.

$\Delta = 1 - 4 \times 2 \times (-3) = 25.$

Il y a 2 racines $X' = \dfrac{1+5}{4} = \dfrac{3}{2}$, $X'' = \dfrac{1-5}{4} = -1.$

Factorisons $2X^2 - X - 3 = 2\left(X - \dfrac{3}{2}\right)(X+1).$

L'inéquation ***(c)*** peut s'écrire $2\left(X - \dfrac{3}{2}\right)(X+1)$

ou encore $2\left(e^x - \dfrac{3}{2}\right)(e^x + 1) > 0.$

- $e^x - \dfrac{3}{2} > 0$ si $e^x > \dfrac{3}{2}$, donc si $\ln e^x > \ln\dfrac{3}{2}$ ou $x > \ln\dfrac{3}{2}$.
- $e^x + 1 > 0$ si $e^x > -1$ ce qui est vrai pour tout réel x.

Faisons un tableau de signes :

x	$-\infty$	$\ln\frac{3}{2}$	$+\infty$
$e^x - \frac{3}{2}$	$-$	0	$+$
$e^x + 1$	$+$		$+$
$2\left(e^x - \frac{3}{2}\right)(e^x+1)$	$-$	0	$+$

donc $\boxed{2xe^{2x} - e^x - 3 > 0 \quad \text{quand} \quad x \in \left]\ln\frac{3}{2}\,;+\infty\right[}$.

d) $(e^{2x} - 4)(2e^x - 1) \leq 0.$

Il s'agit d'étudier le signe d'un produit

- $e^{2x} - 4 > 0$ si $e^{2x} > 4,$

$$\ln e^{2x} > \ln 4,$$
$$2x > 2\ln 2,$$
$$x > \ln 2,$$

• $2e^x - 1 > 0$ si $2e^x > 1,$

$$e^x > \frac{1}{2},$$
$$\ln e^x > \ln\frac{1}{2},$$
$$x > -\ln 2.$$

Faisons un tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$\ln 2$		$+\infty$
$e^{2x} - 4$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$2e^x - 1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$(e^{2x} - 4)(2e^x - 1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc $\boxed{(e^{2x} - 4)(2e^x - 1) \leq 0 \text{ quand } x \in [-\ln 2\ ;\ \ln 2]\,.}$

2^e problème

◆ Énoncé

Soit la fonction définie par $f : x \mapsto \dfrac{3e^x - 4}{e^x + 2}$.

1° Déterminer son ensemble de définition D_f.

2° Déterminer les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition D_f.

3° Etudier les variations de f.

4° Calculer l'image de 0, ln2, 3ln2, –ln2 (écrire les calculs).

5° Résoudre l'équation $f(x) = 1$.

◈ Solution

$$f(x) = \frac{3e^x - 4}{e^x + 2}.$$

1° e^x existe pour tout x et $e^x + 2 = 0$ si $e^x = -2$, ce qui est impossible (car $e^x > 0$) donc $f(x)$ est définie pour tout réel.

$$D_f = \mathbb{R}.$$

2° *Limite en* $+\infty$: si x tend vers $+\infty$.

$$f(x) = \frac{e^x(3 - 4e^{-x})}{e^x(1 + 2e^{-x})}.$$

$$f(x) = \frac{3 - 4e^{-x}}{1 + 2e^{-x}}.$$

e^{-x} tend vers 0 donc $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 3}$.

Limite en $-\infty$: si x tend vers $-\infty$ e^x tend vers 0.

Donc $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \frac{-4}{2} = -2}$.

3° $f(x)$ est un quotient $\frac{u}{v}$ et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$,

où $\begin{cases} u = 3e^x - 4 & u' = 3e^x. \\ v = e^x + 2 & v' = e^x. \end{cases}$

Donc $f'(x) = \dfrac{3e^x(e^x+2) - e^x(3e^x-4)}{(e^x+2)^2}$.

$$\boxed{f'(x) = \frac{10e^x}{(e^x+2)^2}}.$$

Signe de f'(x)

- $10e^x > 0$ car $e^x > 0$ pour tout réel x.
- $(e^x + 2)^2 > 0$ car c'est un carré.

Donc $f'(x) > 0$ pour tout x, f est croissante sur $\mathbb{R}$.

Tableau de variation de f :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	-2	$\nearrow$	3

4° $f(0) = \dfrac{3e^0-4}{e^0+2} = \dfrac{3-4}{1+2} = \boxed{-\dfrac{1}{3}}$ car $e^0 = 1$.

$f(\ln 2) = \dfrac{3e^{\ln 2}-4}{e^{\ln 2}+2} = \dfrac{3\times 2-4}{2+2} = \dfrac{2}{4} = \boxed{\dfrac{1}{2}}$ car $e^{\ln 2} = 2$.

$f(3\ln 2) = \dfrac{3e^{3\ln 2}-4}{e^{3\ln 2}+2} = \dfrac{3e^{\ln 8}-4}{e^{\ln 8}+2} = \dfrac{24-4}{8+2} = \dfrac{20}{10} = \boxed{2}$

car $3\ln 2 = \ln 2^3$ et $e^{\ln 8} = 8$.

$$f(-\ln 2) = \frac{3e^{-\ln 2}-4}{e^{-\ln 2}+2} = \frac{3e^{\ln\frac{1}{2}}-4}{e^{\ln\frac{1}{2}}+2} = \frac{\frac{3}{2}-4}{\frac{1}{2}+2} = \frac{-\frac{5}{2}}{\frac{5}{2}} = \boxed{-1}$$

car $-\ln 2 = \ln \frac{1}{2}$ et $e^{\ln \frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$.

5° $f(x) = 1$ équivaut à $\dfrac{3e^x - 4}{e^x + 2} = 1$

et à $3e^x - 4 = e^x + 2$ car $e^x + 2 \neq 0$.

donc à $2e^x = 6$

à $e^x = 3$

et, en appliquant le logarithme $\ln e^x = \ln 3$

d'où $x = \ln 3$.

$$\boxed{f(x) = 1 \quad \text{quand} \quad x = \ln 3.}$$

3 CALCUL DES DÉRIVÉES

La fonction dérivée f' d'une fonction f a de nombreuses applications : étude des variations, recherche des extrema, construction des tangentes à la courbe, etc.

La fonction dérivée f' permet donc d'obtenir un grand nombre de renseignements sur la fonction f, aussi, le calcul de la dérivée est-il une technique indispensable dans l'étude des fonctions.

Ce calcul exige la connaissance des dérivées des fonctions usuelles, des résultats concernant la dérivation de sommes, produits, quotients, etc., ainsi que la maîtrise de la dérivation des fonctions continues.

Ce chapitre propose un outil, il ne sera donc pas suivi de problèmes résolus, mais d'exercices pour s'entraîner seulement.

Pour bien s'entraîner, il est préférable de calculer des dérivées de façon régulière : au cours des chapitres du présent livre, on trouvera de nombreuses dérivées à calculer.

3. Calcul des dérivées

CE QU'IL FAUT RETENIR

1° Dérivée des fonctions usuelles.

Fonction	Dérivée	Ensemble de dérivation
$f(x) = a$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$n > 0$ $f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0\,;+\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$n > 1$ $f(x) = \dfrac{1}{x^n}$	$f'(x) = \dfrac{-n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \ln x$	$f'(x) = \dfrac{1}{x}$	$]0\,;+\infty[$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$	$\mathbb{R}$

2° Formules de calcul.

Dérivée d'une somme $(u + v)' = u' + v'$

d'une différence $(u - v)' = u' - v'$

d'un produit $(u \times v)' = u'v + uv'$

d'un quotient $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

du produit par un réel $(ku)' = ku'$

3° Dérivée des fonctions composées.

Fonction	Dérivée	Remarques
$[u(x)]^n$	$n[u(x)]^{n-1} \times u'(x)$	$n \geq 0$
$\dfrac{1}{[u(x)]^n}$	$\dfrac{-nu'(x)}{[u(x)]^{n+1}}$	$u(x) \neq 0 \quad n \geq 1$
$\sqrt{u(x)}$	$\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$	$u(x) > 0$
$\ln(u(x))$	$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$	$u(x) > 0$
$e^{u(x)}$	$u'(x)\, e^{u(x)}$	$\mathbb{R}$

EXERCICES POUR S'ENTRAÎNER

1er exercice

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes, puis, calculer leur dérivée. Donner le résultat après réduction au même dénominateur, s'il y a lieu.

$f_1 : x \mapsto 2 \ln x - x^2,$

$f_2 : x \mapsto 4x\sqrt{x},$

$f_3 : x \mapsto \dfrac{2x + 2}{x^2 + 3x + 5},$

$f_4 : x \mapsto \ln(2x) - \ln(x + 1),$

$f_5 : x \mapsto (4x - 7)^5,$

$f_6 : x \mapsto \dfrac{1}{(2x+3)^4}$,

$f_7 : x \mapsto (x+1)\,e^{1-x}$,

$f_8 : x \mapsto \dfrac{1+\ln x}{1+x}$,

$f_9 : x \mapsto x\sqrt{3x-1}$,

$f_{10} : x \mapsto \dfrac{e^x+3}{2e^x-1}$.

◆ Solution

• $f_1 : x \mapsto 2\ln x - x^2$.

$f_1(x)$ existe si $\ln x$ existe. Donc si $x > 0$. Donc $D_{f_1} =]0\,;+\infty[$.

Calculons la dérivée :

$$f'_1(x) = 2(\ln x)' - (x^2)',$$

$$f'_1(x) = 2 \times \frac{1}{x} - 2x,$$

$$f'_1(x) = \frac{2}{x} - 2x,$$

$$\boxed{f'_1(x) = \frac{2-2x^2}{x}}.$$

• $f_2 : x \mapsto 4x\sqrt{x}$

f_2 (x) existe si $\sqrt{x}$ existe, donc si $x \geq 0$ $D_{f_2} = [\,0\ ;\ +\infty[$.

Calculons la dérivée $f'_2(x) = 4(x\sqrt{x})'$.

C'est la dérivée d'un produit : $(u \times v)' = u'v + uv'$.

Posons $u = x$, $u' = 1$ et

$$v = \sqrt{x}, \ v' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

On a donc $f'_2(x) = 4\left(1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$,

$$f'_2(x) = 4\left(\sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}}\right),$$

$$f'_2(x) = 4\left(\frac{2x + x}{2\sqrt{x}}\right),$$

$$f'_2(x) = \frac{6x}{\sqrt{x}} = 6\sqrt{x},$$

$$\boxed{f'_2(x) = 6\sqrt{x}}.$$

• $f_3 : x \mapsto \dfrac{2x + 2}{x^2 + 3x + 5}$.

$f_3(x)$ existe si $x^2 + 3x + 5 \neq 0$. Résolvons $x^2 + 3x + 5 = 0$.
Calculons le discriminant : $\Delta = 9 - 4\,(1) \times (5) = -11$.
$\Delta < 0$, il n'y a pas de racines, donc $x^2 + 3x + 5 \neq 0$ pour tout x.

Donc $D_{f_3} = \mathbb{R}$.

Calculons la dérivée. $f_3(x)$ est un quotient : $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

Posons $\quad u = 2x + 2 \qquad u' = 2$
et $\quad v = x^2 + 3x + 5, \qquad v' = 2x + 3$.

$$f'_3(x) = \frac{2\,(x^2 + 3x + 5) - (2x + 2)\,(2x + 3)}{(x^2 + 3x + 5)^2},$$

$$f'_3(x) = \frac{2x^2 + 6x + 10 - (4x^2 + 4x + 6x + 6)}{(x^2 + 3x + 5)^2},$$

$$\boxed{f'_3(x) = \frac{-2x^2 - 4x + 4}{(x^2 + 3x + 5)^2}}.$$

• $f_4 : x \mapsto \ln(2x) - \ln(x + 1)$.
$f_4(x)$ existe si $\ln(2x)$ existe et si $\ln(x + 1)$ existe.
Donc si $2x > 0$ et si $x + 1 > 0$.
Donc si $x > 0$ et si $x > -1$.
Par conséquent $D_{f_4} =]0 ; +\infty[$.

Calculons la dérivée : $f'_4(x) = (\ln(2x))' - (\ln(x + 1))'$.

Rappelons que $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$.

Posons $u = 2x$ $\quad u' = 2 \quad (\ln(2x))' = \dfrac{2}{2x} = \dfrac{1}{x}$.

Posons $u_1 = x + 1 \quad u'_1 = 1 \quad (\ln(x + 1))' = \dfrac{1}{x + 1}$.

On obtient donc $f'_4(x) = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x + 1}$,

$$f'_4(x) = \frac{x + 1 - x}{x(x + 1)}$$

$$\boxed{f'_4(x) = \frac{1}{x(x + 1)}}.$$

• $f_5 : x \mapsto (4x - 7)^5$
$f_5(x)$ existe pour tout réel x ; donc $D_{f_5} = \mathbb{R}$.

Calculons la dérivée :

$f_5(x)$ est de la forme u^5 et $(u^n)' = nu^{n-1}u'$.

Posons $u = 4x - 7$, $u' = 4$.

$f'_5(x) = 5(4x - 7)^4 \times 4$,

$$\boxed{f'_5(x) = 20(4x - 7)^4}.$$

• $f_6 : x \mapsto \dfrac{1}{(2x + 3)^4}$.

$f_6(x)$ existe si $(2x + 3)^4 \neq 0$, donc si $2x + 3 \neq 0$ donc

$D_{f_6} = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{3}{2}\right\}$.

Calculons la dérivée :

$f_6(x)$ est de la forme $\dfrac{1}{u^n}$ et $\left(\dfrac{1}{u^n}\right)' = \dfrac{-nu'}{u^{n+1}}$.

Posons $u = 2x + 3$, $u' = 2$.

On obtient : $f'_6(x) = \dfrac{-4 \times 2}{(2x + 3)^5}$.

$$\boxed{f'_6(x) = \dfrac{-8}{(2x + 3)^5}}.$$

• $f_7 : x \mapsto (x + 1)e^{1 - x}$

$f_7(x)$ existe pour tout réel x ; donc $D_{f_7} = \mathbb{R}$.

Calculons la dérivée :

$f_7(x)$ est un produit et $(u \times v)' = u'v + uv'$.

Posons $u = x + 1$ $\quad u' = 1$

$v = e^{1 - x}$ $\quad v' = -e^{1 - x}$.

Rappelons que $(e^v)' = v'e^v$.

On obtient $f'_7(x) = 1 \times e^{1 - x} + (x + 1) \times (-e^{1 - x})$,

$f'_7(x) = e^{1 - x} - (x + 1)e^{1 - x}$,

$$f'_7(x) = (1 - x - 1)\,e^{1-x},$$

$$\boxed{f'_7(x) = -xe^{1-x}}.$$

• $f_8 : x \mapsto \dfrac{1 + \ln x}{1 + x}$.

$\ln x$ existe si $x > 0$.

Si $x > 0$, $x + 1 > 0$, donc $x + 1 \neq 0$, $D_f =]\,0\,;+\infty\,[$.

Calculons la dérivée :

$f_8(x)$ est un quotient et $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

Posons $u = 1 + \ln x$ donc $u' = \dfrac{1}{x}$

$v = 1 + x$ donc $v' = 1$.

$$f'_8(x) = \frac{\frac{1}{x}(1 + x) - 1\,(1 + \ln x)}{(1 + x)^2},$$

$$f'_8(x) = \frac{\dfrac{1 + x - x - x\ln x}{x}}{(1 + x)^2},$$

$$f'_8(x) = \frac{1 - x\ln x}{x(1 + x)^2},$$

Donc $\boxed{f'_8(x) = \dfrac{1 - x\ln x}{x(1+x)^2}}$.

• $f_9 : x \mapsto x\sqrt{3x - 1}$.

$f_9(x)$ existe si $\sqrt{3x - 1}$ existe,

donc si $3x - 1 > 0$ c'est-à-dire si $x > \dfrac{1}{3}$.

Donc $D_{f_9} = [\, \frac{1}{3}\ ; +\infty\, [$.

Calculons la dérivée : $f_9(x)$ est un produit, et $(u \times v)' = u'v + uv'$.

Posons $u = x \qquad u' = 1$

$$v = \sqrt{3x-1} \qquad v' = \frac{3}{2\sqrt{3x-1}}.$$

Rappelons que $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$.

On obtient $f'_9(x) = 1 \times \sqrt{3x-1} + x \times \dfrac{3}{2\sqrt{3x-1}}$,

$$f'_9(x) = \frac{2(3x-1) + 3x}{2\sqrt{3x-1}},$$

$$\boxed{f'_9(x) = \frac{9x-2}{2\sqrt{3x-1}}}.$$

• $f_{10} : x \mapsto \dfrac{e^x + 3}{2e^x - 1}$.

$f_{10}(x)$ existe si $2e^x - 1 \neq 0$.

Résolvons $2e^x - 1 = 0$,

$$2e^x = 1,$$

$$e^x = \frac{1}{2},$$

donc $\ln e^x = \ln\frac{1}{2}$,

$$x = -\ln 2.$$

Par conséquent $D_{f_{10}} = \mathbb{R} - \{-\ln 2\}$.

Calculons la dérivée :

$f_{10}(x)$ est un quotient et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Posons $u = e^x + 3 \quad u' = e^x$

$v = 2e^x - 1 \quad v' = 2e^x$.

On obtient $f'_{10}(x) = \dfrac{e^x(2e^x - 1) - (e^x + 3)(2e^x)}{(2e^x - 1)^2}$,

$$f'_{10}(x) = \frac{2(e^x)^2 - e^x - (2(e^x)^2 + 6e^x)}{(2e^x - 1)^2},$$

$$\boxed{f'_{10}(x) = \frac{-7e^x}{(2e^x - 1)^2}}.$$

2e exercice

Faire le même travail sur les fonctions suivantes ; cette fois–ci l'on trouvera seulement le résultat, le raisonnement étant laissé à la charge du lecteur.

$g_1 : x \mapsto x + \ln(-x)$,

$g_2 : x \mapsto 4e^{\frac{1}{2}x - 1}$,

$g_3 : x \mapsto (x^2 - 3x + 5)\, e^{-x}$,

$g_4 : x \mapsto \ln\left(\dfrac{x + 3}{2x - 5}\right)$,

$g_5 : x \mapsto \dfrac{x^2 - 1}{1 + \ln x}$,

$g_6 : x \mapsto \dfrac{5}{1 + 2e^{-x}}$,

$g_7 : x \mapsto \sqrt{4x^2 - 9}$,

$g_8 : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x - 1}$.

◈ Solution

$g_1 : x \mapsto x + \ln(-x)$ $\qquad D_{g_1} =]-\infty\,;0[$

$$\boxed{g'_1(x) = \frac{x + 1}{x}},$$

$g_2 : x \mapsto 4e^{\frac{1}{2}x - 1}$ $\qquad D_{g_2} = \mathbb{R}$

$$\boxed{g'_2(x) = 2e^{\frac{1}{2}x - 1}}.$$

$g_3 : x \mapsto (x^2 - 3x + 5)\,e^{-x}$ $\qquad D_{g_3} = \mathbb{R}$

$$\boxed{g'_3(x) = (-x^2 + 5x - 8)\,e^{-x}}.$$

$g_4 : x \mapsto \ln\left(\dfrac{x + 3}{2x - 5}\right)$ $\qquad D_{g_4} =]-\infty\,;-[3\,[\cup]\,\dfrac{5}{2}\,;+\infty[$

$$\boxed{g'_4(x) = \frac{-11}{(x + 3)\,(2x - 5)}}.$$

3. Calcul des dérivées

$g_5 : x \mapsto \dfrac{x^2 - 1}{1 + \ln x}$ $\qquad D_{g_5} = \left]0\,;\ \dfrac{1}{e}\right[\cup \left]\dfrac{1}{e}\,;+\infty\right[$

$$\boxed{g'_5(x) = \frac{2x^2\ln x + x^2 + 1}{x(1 + \ln x)^2}.}$$

$g_6 : x \mapsto \dfrac{5}{1 + 2e^{-x}}$ $\qquad D_{g_6} = \mathbb{R}$

$$\boxed{g'_6(x) = \frac{10e^{-x}}{(1 + 2e^{-x})^2}.}$$

$g_7 : x \mapsto \sqrt{4x^2 - 9}$ $\qquad D_{g_7} = \left]-\infty\,;-\dfrac{3}{2}\right] \cup \left[\dfrac{3}{2}\,;+\infty\right[$

$$\boxed{g'_7(x) = \frac{4x}{\sqrt{4x^2 - 9}}.}$$

$g_8 : x \mapsto \dfrac{\ln x}{x - 1}$ $\qquad D_{g_8} =]0\,;1[\cup]1\,;+\infty[$

$$\boxed{g'_8(x) = \frac{x - 1 - x\ln x}{x(x - 1)^2}.}$$

4
DÉRIVATION : VARIATIONS, BIJECTIONS

CE QU'IL FAUT RETENIR

Dans tout ce paragraphe, f est une fonction dérivable sur $[a ; b]$.

1° **Une fonction f est croissante** sur chacun des intervalles où sa dérivée est positive.

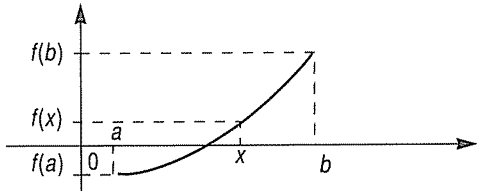
2° **Une fonction f est décroissante** sur chacun des intervalles où sa dérivée est négative.

3° Si f est une fonction croissante sur $[a ; b]$, pour tout x de $[a ; b]$ on a

$f(a) \leq f(x)$

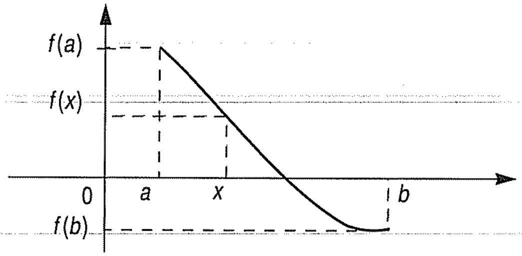
et $f(x) \leq f(b)$.

En général si $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) \leq f(x_2)$.



4° Si f est une fonction décroissante sur $[a\,;b]$, pour tout x de $[a\,;b]$ on a :
$f(a) \geq f(x)$
et $f(x) \geq f(b)$.

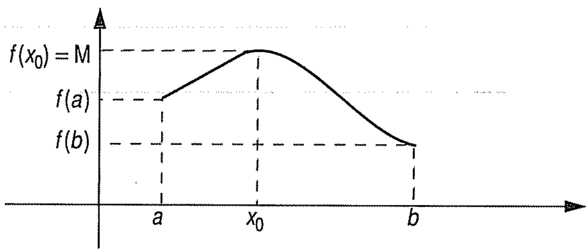
En général, *si* $x_1 < x_2$ *alors* $f(x_1) \geq f(x_2)$.



5° Une fonction f admet un maximum pour $x = x_0$
si $f'(x_0) = 0$
et si pour tout x voisin de x_0
$f'(x_0) > 0$ pour $x < x_0$,
$f'(x_0) < 0$ pour $x > x_0$.

x		x_0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	M	$\searrow$

6° Si f admet un maximum égal à M sur $[a\,;b]$, alors pour tout x de $[a\,;b]$ on a $f(x) \leq$ M .



7° Une fonction f admet un minimum pour $x = x_0$

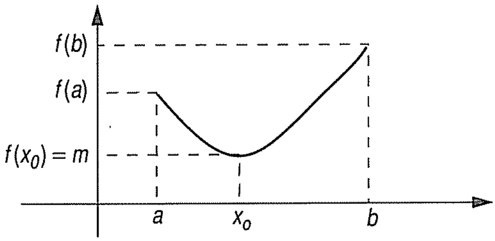
si $f'(x_0) = 0$

et si pour tout x voisin de x_0 $f'(x_0) < 0$ si $x < x_0$

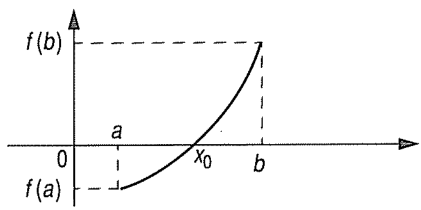
et $f'(x_0) > 0$ si $x > x_0$.

x		x_0	
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	m	$\nearrow$

8° Si f admet un minimum égal à m sur $[a\,;b]$, alors pour tout x de $[a\,;b]$ on a : $f(x) \geq m$



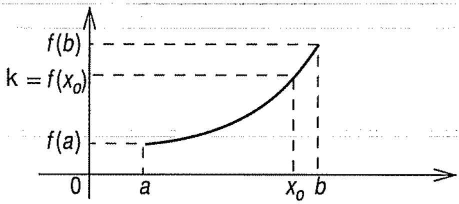
9° Si $f(a) < 0$ et si $f(b) > 0$, alors il existe un réel x_0 de $]a\,;b[$ et un seul tel que $f(x_0) = 0$.



10° Si f est croissante sur $[a\,;b]$, alors f est une bijection de $[a\,;b]$ sur l'intervalle $[f(a)\,;f(b)]$.

C'est-à-dire que pour tout réel k tel que $f(a) < k < f(b)$, il existe un réel x_0 et un seul de $]a\,;\,b[$ tel que $f(x_0) = k$.

Note : on obtient une propriété analogue si f est décroissante sur $[a\,;\,b]$.



EXERCICES POUR S'ENTRAÎNER

1° Sur quels intervalles les fonctions suivantes sont-elles croissantes ?

$f_1 : x \mapsto x^3 - 5{,}5x^2 - 4x + 1$,

$f_2 : x \mapsto \dfrac{-3x-4}{3x+2}$,

$f_3 : x \mapsto x^2e^x$.

2° Déterminer un encadrement de $f(x)$ sur l'intervalle I.

a) $f_1 : x \mapsto (x^3 - 5{,}5x^2 - 4x + 1)$ sur $\mathrm{I}_1 = [0\,;3]$ puis sur $\mathrm{I}_2 = [3\,;6]$.

b) $f_2 : x \mapsto \dfrac{-3x-4}{3x+2}$ sur $\mathrm{I} = [0\,;3]$.

c) $f_3 : x \mapsto x^2e^x$ sur $\mathrm{I} = [-3\,;0]$.

3° ***a)*** Montrer que $x^2e^x \leq \dfrac{4}{e^2}$ pour tout x négatif.

b) Est-il vrai que $0 \leq x^2 e^x \leq 1$ pour tout x négatif ?

4° Déterminer à 0,1 près les solutions de l'équation $x^3 - 5,5x^2 - 4x + 1 = 0$ dans l'intervalle $[0\,;6]$.

◆ Solutions

1° • $f_1 : x \mapsto x^3 - 5{,}5x^2 - 4x + 1$. $D_{f_1} = \mathbb{R}$.

Calculons la dérivée : $f'_1(x) = 3x^2 - 11x - 4$.

Étude du signe de $f'_1(x)$: on calcule le discriminant

$$\Delta = 121 - 4 \times 3 \times (-4) = 169 = 13^2.$$

Il y a 2 racines : $x' = \dfrac{11+13}{6} = 4$ $\qquad x'' = \dfrac{11-13}{6} = -\dfrac{1}{3}$.

$3x^2 - 11x - 4 > 0$ à l'extérieur des racines et $3x^2 - 11x - 4 < 0$ entre les racines.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		4		$+\infty$
$f'_1(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$f'_1(x) \geq 0$ si $x \in \left]-\infty\,;\,-\dfrac{1}{3}\right]$ si $x \in [4\,;\,+\infty[$.

$$\boxed{\text{Donc } f_1 \text{ est croissante sur } \left]-\infty\,;\,-\frac{1}{3}\right] \text{ et sur } [4\,;\,+\infty[}\,.$$

• $f_2 : x \mapsto \dfrac{-3x-4}{3x+2}$. $f_2(x)$ existe si $3x + 2 \neq 0$, donc si $x \neq -\dfrac{2}{3}$

$D_{f_2} = \mathbb{R} - \left\{-\dfrac{2}{3}\right\}$.

Calculons la dérivée : c'est un quotient, on utilise la formule

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, où $u = -3x - 4$ donc $u' = -3$ et $v = 3x + 2$ donc $v' = 3$.

$$f'_2(x) = \frac{-3\,(3x+2) - 3\,(-3x-4)}{(3x+2)^2} = \frac{-9x - 6 + 9x + 12}{(3x+2)^2}$$

$$\boxed{f'e(x) = \frac{6}{(3x+2)^2}}.$$

Étudions le signe de $f'_2(x)$: 6 est positif,

$(3x + 2)^2$ est positif car c'est un carré.

Donc $f'_2(x)$ est positif sur D_f.

$$\boxed{\text{Donc } f_2 \text{ est croissante sur } \left]-\infty\,;-\frac{2}{3}\right[\text{ et sur } \left]-\frac{2}{3}\,;+\infty\right[}.$$

• $f_3 : \mapsto x^2 e^x$ e^x existe pour tout x, x^2 aussi donc $D_{f_3} = \mathbb{R}$.

Calculons la dérivée : c'est un produit, on utilise la formule

$(u \times v)' = u'v + uv'$ où $u = x^2$ donc $u' = 2x$ et $v = e^x$ donc $v' = e^x$.

$f'_3(x) = 2xe^x + x^2e^x = \boxed{(2x + x^2)\,e^x}$.

Étudions le signe de $f'_3(x)$: $e^x > 0$ pour tout x.

Factorisons : $2x + x^2 = x(2 + x)$.
Ce "trinôme" admet 2 racines 0 et −2.
Il est positif (du signe de "*a*") à l'extérieur des racines.
On a donc :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
e^x		+	|	+	|	+	
$2x + x^2$		+	0	−	0	+	
$f'_3(x)$		+	|	−	|	+	

$f'_3(x) \geq 0$ si $x \in \left]-\infty\,;\,-2\right] \cup \left[0\,;\,+\infty\right[$.

Donc f_3 est croissante sur $\left]-\infty\,;\,-2\right]$ et sur $\left[0\,;+\infty\right[$.

2° a) $f_1 : x \mapsto x^3 - 5,5x^2 - 4x + 1$.

• $I_1 = [0\ ;\ 3]$.

À l'exercice 1, nous avons établi que $f'_3(x) \leq 0$ si $x \in \left[-\frac{1}{2} \,;\, 4\right]$.

Nous en déduisons que f est décroissante sur l'intervalle [0 ; 3].

On a donc pour tout x de [0 ; 3] $f(0) \geq f(x) \geq f(3)$.

$f(0) = 1$, $f(3) = 27 - 5,5 \times 9 - 12 + 1 = -33,5$,

donc $\boxed{\text{si } x \in [0, 3] \text{ alors } -33,5 \leq f(x) \leq 1}$.

• $I_2 = [3 ; 6]$.

Toujours d'après l'exercice 1, $f'_1(x) \leq 0$ si $x \in \left[-\frac{1}{2} \,;\, 4\right]$ et

$f'_1(x) \geq 0$ si $x \in [4 \,;\, +\infty[$.

On a donc l'extrait de tableau de variation :

x	$-1/2$	3	4	6	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	↘	$-33,5$	↘ -39	↗ -5	↗

$f(4) = 64 - 5,5 \times 16 - 16 + 1 = -39$.

Sur l'intervalle [3 ; 6] la fonction f_1 admet un minimum égal à -39, on a donc :

$f(x) \geq -39$ pour tout x de [3 ; 6].

Nous avons calculé $f(3) = -33,5$.

Calculons $f(6) = 6^3 - 5,5 \times 6^2 - 4 \times 6 + 1$.

$f(6) = -5$, donc $f(6) > f(3)$.

Donc si $\boxed{x \in [3,6] \quad -39 \leq f(x) \leq -5}$.

b) $f_2 : x \mapsto \dfrac{-3x-4}{3x+2}$ et $I = [0 \;;\; 3]$.

Nous avons vu à l'exercice 1 que f_2 est croissante sur $\left]-\frac{2}{3} \,;\, +\infty\right[$ donc f_2 est croissante sur I, et pour tout x de I on a :

$$f_2(0) \leq f_2(x) \leq f_2(3).$$

$$f_2(0) = \frac{-4}{2} = -2, f_2(3) = \frac{-9-4}{9+2} = -\frac{13}{11}.$$

Donc si $\boxed{x \in [0' ; 3] \quad -2 \leq f_2(x) \leq -\frac{11}{13}}$.

c) $f_3 : x^2e^x \qquad I = [-3 ; 0]$.

Nous avons vu à l'exercice 1 que f'_3 est positive sur $]-\infty ; -2]$ et négative sur $[-2 ; 0]$. Nous avons donc le tableau de variation :

x	$-\infty$	-3	-2		0	
$f'_3(x)$	+		0	−	0	+
$f_3(x)$	↗		$4\ e^{-2}$	↘	0	↗

$f_3(-2) = (-2)^2\ e^{-2} = 4\ e^{-2}$.

$f_3(0) = 0$.

f_3 admet donc un maximum égal à $4\ e^{-2}$ sur $[-3 ; 0]$.

On a donc $f_3(x) \leq 4\ e^{-2}$ pour $x \in [-3 ; 0]$.

$f_3(-3) = 9e^{-3} \approx 0,45$ et $f_3(0) = 0$ donc $f(0) \leq f(-3)$.

Donc $\boxed{\text{si } x \in [-3 ; 0]\ 0 \leq f_3(x) \leq 4\ e^{-2}}$.

3° $f : x \mapsto x^2e^x$

D'après le tableau de variation établi à l'exercice 2, f_3 admet un maximum égal à $4\ e^{-2}$ pour $x_0 = -2$. De plus, si $x \leq -2$, alors $f_3(x) \leq f_3(-2)$, car f_3 est croissante sur $]-\infty ; -2]$ et si $-2 \leq x \leq 0$,

alors $f_3(0) \leq f_3(x) \leq f_3(-2)$, car f_3 est décroissante sur $[-2 ; 0]$.

Des éléments précédents, nous pouvons conclure que si $x \in [-2 ; 0]$, alors $0 \leq f_3(x) \leq 4\ e^{-2}$.

Remarquons d'autre part que x^2e^x est toujours positif.

On a donc $\boxed{\text{pour tout } x \text{ négatif } 0 \leq f_3(x) \leq 4\,e^{-2}}$,

or $4e^{-2} = \dfrac{4}{e^2}$, $\boxed{\text{donc pour } x \text{ négatif } 0 \leq x^2 e^x \leq \dfrac{4}{e^2}}$

4° $x^3 - 5,\ 5x^2 - 4x + 1 = 0$.

Nous reconnaissons $f_1(x) = 0$, où f_1 a été étudiée à l'exercice 1 et à l'exercice 2.

Rappelons le tableau de variation de f_1.

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$	0		4		6	$+\infty$
$f'_1(x)$		$+$	0		$-$	0	$+$		
$f_1(x)$		↗		1	↘	-39	↗	-5	↗

On a : $f_1(0) = 1$ et $f_1(4) = -39$, c'est-à-dire $f_1(0) > 0$ et $f_1(4) < 0$. et f_1 est décroissante sur $[0\,;4]$.

Donc l'équation $f_1(x) = 0$ admet une solution x_0 dans $]0\,;4[$.

Pour encadrer cette solution, calculons $f_1(1) = -7{,}5$, donc $f_1(1) < 0$.

D'après la propriété précédente $x_0 \in\ ]0\,;1[$.

Calculons d'autres images dans l'intervalle $]\,0\,;1\,[$:

$f_1(0{,}1) = 0{,}546$,

$f_1(0{,}2) = -0{,}012$,

$f_1(0{,}2) < 0$.

Appliquons la propriété $x_0 \in\ ]0{,}1\ ;\ 0{,}2[$.

Donc une solution de l'équation $f_1(x) = 0$ *appartient à l'intervalle* $]0{,}1\,;0{,}2[$.

Cherchons s'il existe une solution dans $[4\,;6]$.

$f_1(4) = -39$,

$f_1(6) = -5$.

L'intervalle $[-39\ ;\ -5\ ]$ ne contient pas 0, donc 0 n'a pas d'antécédent par f_1 dans $[4\,;6]$.

En résumé, l'équation $x^3 - 5,5x^2 - 4x + 1 = 0$ admet une seule solution x_0 dans [0 ; 6], et on a $\boxed{0,1 < x_0 < 0,2}$.

PROBLÈMES AVEC SOLUTIONS

1er problème

◆ Énoncé

1° Étudier les variations de la fonction $g : x \mapsto e^x - (1 + x)$ et dresser son tableau de variation. (Les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition ne sont pas demandées.)

2° Soit la fonction $f : x \mapsto e^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right)$.

Calculer la dérivée de f. Utiliser les résultats de la 1re question pour établir le tableau de variation de f.

◆ Solution

1° $g : x \mapsto e^x - (1 + x)$. $D_g = \mathbb{R}$.

Calculons la dérivée de g : $g'(x) = e^x - 1$.

Étudions le signe de $g'(x)$ $e^x - 1 > 0$ si $e^x > 1$.

d'où, en utilisant le logarithme, $\ln e^x > \ln 1$,

ou $x > 0$.

Résumons dans un tableau :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	

Donc g est décroissante sur $]-\infty\ ;0]$ et croissante sur $[0\ ;+\infty[$.

Nous avons le tableau de variation

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

$g(0) = e^0 - 1 = 1 - 1 = 0.$

Nous remarquons que $g(x)$ admet un minimun égal à 0 pour $x_0 = 0$.

2° $f : x \mapsto e^x - \left(1 + x + \dfrac{x^2}{2}\right)$. $D_f = \mathbb{R}$.

Calculons la dérivée de f : $f'(x) = e^x - (1 + x) = g(x)$.

Étudions le signe de $f'(x)$. C'est le signe de $g(x)$. Or $g(x)$ admet un miminum égal à 0 pour $x_0 = 0$ donc $g(x) \geq 0$ pour tout réel x.

Donc $f'(x) \geq 0$ et f est croissante sur $\mathbb{R}$.

On a donc le tableau de variation :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$			$\nearrow$		

2^e^ problème

◆ Énoncé

Soit la fonction $f : x \mapsto 10\,(x-1)^2 e^{-x}$ définie pour tout réel x.

1° Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.
(On admettra que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.)

2° Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

3° À l'aide du tableau de variations, déterminer en fonction du nombre réel m, le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$.

◆ Solution

$D_f = \mathbb{R}$.

1° Lorsque x tend vers $-\infty$, $-x$ tend vers $+\infty$ et e^{-x} tend vers $+\infty$.
$x-1$ tend vers $-\infty$ et $(x-1)^2$ tend vers $+\infty$.

Donc $10(x-1)^2\,e^{-x}$ tend vers $+\infty$.

On a donc $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty}$.

2° Calculons la dérivée de f.
$f'(x)$ est de la forme $k \times u \times v$; sa dérivée sera de la forme

$$k(u \times v)' = k(u'v + uv')$$

où $u = (x-1)^2$ $\quad u' = 2(x-1)$ $\quad$ formule $(u^2)' = 2u \times u'$.

$v = e^{-x}$ $\quad v' = -e^{-x}$ $\quad$ formule $(e^u)' = u'e^u$.

Donc $\quad f'(x) = 10\left((2x-2)\,e^{-x} - (x-1)^2 e^{-x}\right)$.

$$f'(x) = 10\,e^{-x}(-x^2 + 4x - 3).$$

Étudions le signe de $f'(x)$: $10\,e^{-x} > 0$ pour tout réel x.

Pour étudier le signe de $-x^2 + 4x - 3$, calculons le discriminant.

$\Delta = 16 - 4(-1)(-3) = 16 - 12 = 4.$

Il y a deux racines, $x' = \dfrac{-4+2}{-2} = 1$ $\qquad x'' = \dfrac{-4-2}{-2} = 3.$

$-x^2 + 4x - 3$ est négatif (du signe de "a") à l'extérieur des racines, et positif entre les racines.

On a donc :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$10e^{-x}$		+	|	+	|	+	
$-x^2+4x-3$		−	0	+	0	−	
$f'(x)$		−	0	+	0	−	

Nous pouvons dresser le tableau de variation.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$f'(x)$		−	0	+	0	−	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$40\,e^{-3}$	$\searrow$	0

$f(1) = 0.$
$f(3) = 10 \times 2^2 \times e^{-3}$
$\quad = 40\,e^{-3} \approx 1{,}99.$

3° Le tableau de variation de f permet de visualiser que $f(x) \geq 0$ pour tout x. En effet, sur $]-\infty\,;3]$ f admet un minimum égal à 0, pour $x_0 = 1$.

Sur $[3\,;+\infty[$, f est décroissante et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0.$

On a donc $f(x) \geq 0$ pour $x \in [3\ ;+\infty[$.

L'équation $f(x) = m$ n'a pas de solution si $m < 0$.

Elle a une solution si $m = 0$: $x_0 = 1$.

trois solutions si $0 < m < 40\,e^{-3}$.

deux solutions si $m = 40\,e^{-3}$ $x_0 = 3$ et $x_1 < 1$.

une solution si $m > 40\,e^{-3}$ et cette solution est inférieure à 1.

5 MATHÉMATISATION : COÛTS, RECETTES, PROFITS

Cette liaison entre mathématiques et économie est désormais mise en œuvre en terminale B et présente au bac.

Elle s'appuie sur la connaissance de quelques notions acquises durant les cours de sciences économiques et sociales en première et en terminale.

CE QU'IL FAUT RETENIR

• Il s'agit d'exprimer ce que coûte la production d'un bien en fonction de la quantité produite.

• La durée n'intervient pas ; l'équipement de l'entreprise (le capital investi) est supposé constant. La production est la seule variable explicative envisagée : on la note q. On supposera q réel positif.

• Les économistes distinguent trois points de vue distincts.

1° **Le coût total,** qui est la somme du coût fixe et du coût variable.

$\mathrm{CT}(q) = \mathrm{CF}(q) + \mathrm{CV}(q)$ où CT est le coût total

avec CF : coûts fixes $\mapsto$ fonction constante

et CV : coûts variables $\mapsto$ fonction croissante de q.

2° **Le coût marginal,** qui est le coût de la dernière unité produite.

Si la production est grande, le coût marginal est assimilable à la dérivée du coût total.

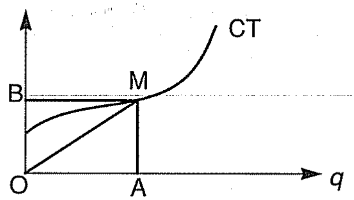
$C_m(q) = CT'(q)$ où C_m est le coût marginal.

3° Le coût moyen, qui est le coût d'une unité produite.

C'est le quotient du coût total par la production.

$$CM(q) = \frac{CT(q)}{q}$$: on l'appelle aussi coût unitaire moyen.

Graphiquement :



Le coût moyen est le coefficient directeur de la droite (OM) où M est le point courant de la courbe de coût total.

$$m = \frac{AM}{OA} = \frac{OB}{OA} = \frac{CT(q)}{q} = CM(q).$$

Note : en économie, les coûts marginal et moyen n'existent pas pour la quantité $q = 0$.

Si pour un prix de vente p unitaire, l'entreprise peut vendre tout ce qu'elle produit, on s'intéresse alors à la recette qu'elle en retire et au bénéfice, ou profit, qui en résulte.

Quelques notions simples sont alors utilisées.

4° La recette totale, qui est le produit du prix unitaire p par la quantité q produite et vendue.

$RT(q) = p.q.$

5° La recette moyenne et **la recette marginale** qui se confondent lorsque le prix est une constante.

En effet : $$RM(q) = \frac{RT(q)}{q} = \frac{pq}{q} = p,$$

et $R_m(q) = RT'(q) = (pq)' = p.$

6° **Le bénéfice total** (ou **profit**), qui est la différence entre la recette totale et le coût total.

$\pi(q) = BT(q) = RT(q) - CT(q)$.

Note : lorsque la quantité absorbée par le marché est liée au prix, la recette totale s'écrit : $RT(q) = p(q) \cdot q$ où le prix $p(q)$ est la fonction de demande. Dans le cas où : $p = aq + b$, alors RM, R_m sont des fonctions non constantes de q.

EXERCICES POUR S'ENTRAÎNER

1° Un contrat de location de voiture sans chauffeur comporte un forfait de 540 F, puis 2,31 F du kilomètre parcouru. Ecrire la dépense du client (notée y) en fonction de la distance (notée x).

2° Le coût marginal de production d'un article est : $C_m = \frac{1}{10}e^{\frac{1}{2}q}$.
Déterminer le coût total associé qui s'annule pour $q = 0$.

3° Le coût total de production d'un bien est exprimé par :

$$f(x) = 0{,}1\,x^3 - 50x^2 + 10\,000x.$$

Distinguer deux phases dans la production selon que le coût total augmente de moins en moins vite ou de plus en plus vite.

4° Dans la fonction $f(x) = 0{,}1x^3 - 50x^2 + 10\,000\,x$, la quantité produite x est exprimée en articles du bien et CT en francs.

a) Calculer le coût moyen pour une production de 200 articles.

b) Déterminer l'expression algébrique du coût moyen en milliers de francs, en fonction de la quantité en centaines d'articles.

5° La fonction de coût de production du bien A est :
$CT(q) = q^2 + 64$ où q est exprimé en milliers d'articles et CT en francs. Le prix de vente d'un article A est 20 F.

a) Déterminer le minimum du coût moyen et la production pour laquelle il est atteint.

b) Déterminer la plage de production sur laquelle l'entreprise réalise un gain.

◆ Solution

1° Distance parcourue : x. Dépense de location : y.
Fonction : $y = 540 + 2{,}31 . x$ avec x en francs.

2° $C_m = f(q) = \frac{1}{10}e^{\frac{1}{2}q}$ dont une primitive est :

$$F(q) = \frac{2}{10}e^{\frac{1}{2}q} + k, \text{ or } F(0) = \frac{1}{5} + k \text{ donc } k = -\frac{1}{5}.$$

3° $f(x) = CT(x) = 0{,}1x^3 - 50x^2 + 10\,000x$.
$f'(x) = C_m(x) = 0{,}3x^2 - 100x + 10\,000$, positive sur $\mathbb{R}$ (car $\Delta < 0$).
$f''(x) = C'm(x) = 0{,}6x - 100$.

$C'm(x) > 0$ si, et seulement si, $x > \frac{100}{0{,}6}$.

• Pour $x \in [0\ ; 166{,}7]$ le coût total est croissant et le coût marginal est décroissant, donc le coût total "croît de moins en moins vite."

• Pour $x \in [166{,}7\ , +\infty[$, le coût total est croissant, et le coût marginal est croissant, donc le coût total "croît de plus en plus vite."

4° $f(x) = 0{,}1x^3 - 50x^2 + 10\,000x = CT(x)$.

a) $CM(x) = \frac{f(x)}{x} = 0{,}1x^2 - 50x + 10\,000$.

Production de 200 articles : CM (200) = 4 000 F. Quand la production est de 200, un article revient à 4 000 F.

b) Changement de variable. Posons pour CM :
$y = f(x)$ où x en articles ; y en francs.
$\mathrm{Y} = \Phi(\mathrm{X})$ où X en centaines et Y en milliers de francs.

La correspondance entre variables est : $\begin{cases} x = 100 \cdot \mathrm{X} \\ y = 1\ 000 \cdot \mathrm{Y} \end{cases}$

• $y = f(x)$ est : $y = 0,1x^2 - 50x + 10\ 000$.

• Il devient : $1\ 000\mathrm{Y} = 0,1.\ (100.\mathrm{X})^2 - 50.\ (100\mathrm{X})^1 + 10\ 000$, en divisant les 2 membres par 1 000,
c'est-à-dire : $\mathrm{Y} = \mathrm{X}^2 - 5\mathrm{X} + 10$ donc $\mathrm{Y} = \Phi(\mathrm{X})$,
avec $\Phi(\mathrm{X}) = \mathrm{X}^2 - 5\mathrm{X} + 10$ où Y en milliers de francs et X en centaines d'articles.

5° *a)* $\mathrm{CM}(q) = q + \dfrac{64}{q}$ donc $\mathrm{CM}'(q) = 1 - \dfrac{64}{q^2}$.

C'est-à-dire : $\mathrm{CM}'(q) = \dfrac{q^2 - 64}{q^2} = \dfrac{(q-8)\ (q+8)}{q^2}$.

q	0		8		$+\infty$
CM'	‖	−	0	+	
CM	‖	↘	16	↗	

q en milliers d'unités ; CM en francs.
Minimum 16 F atteint pour 8 000 articles.

b) Gain si le bénéfice unitaire est positif :
20 F est le prix unitaire ; il faut : $20 \geq \mathrm{CM}(q)$.

$20 - \left(q + \dfrac{64}{q}\right) \geq 0$, ou encore $-q^2 + 20q - 64 \geq 0$.

Résolution de l'équation : $\Delta = 144$ donc $\sqrt{\Delta} = 12$.
$q_1 = 4$ ou $q_2 = 16$ sont les racines de l'équation.

Le trinôme est positif pour $q \in [4\ ;16]$.

Plage de rentabilité : production entre 4 000 et 16 000 articles.

PROBLÈMES AVEC SOLUTIONS

1^er^ problème

◆ Énoncé

Le coût total de production d'un produit industriel pulvérulent est estimé par $C(x) = 0,1x^2 + 250$ où x est la quantité mesurée en tonnes du produit et C comptabilisé en kilofrancs.

1° ***a)*** Étudier la fonction C pour $x \in [0\ ;150]$. Compléter le tableau suivant :

x	20	50	60	100	120	150
$C(x)$						

b) Si le prix du marché s'établit à p kilofrancs la tonne, écrire la fonction de recette totale R. Quelle sera la nature de la courbe associée à R ?

2° Tracer dans un même repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$ du plan la courbe de coût total (C) et la courbe de recette totale (R) en supposant que le prix p soit 12 500 F la tonne.

3° ***a)*** Par lecture du dessin : déterminer la plage de production $[x_1\ ;\ x_2]$ sur laquelle cette entreprise réalise un gain.

b) Retrouver ceci par le calcul en expliquant la démarche.

4° Reprendre les questions **2°** et **3°** (***a***) sur le dessin précédent si le prix p s'établit à 15 000 F la tonne. Comparer. Faire une brève traduction économique.

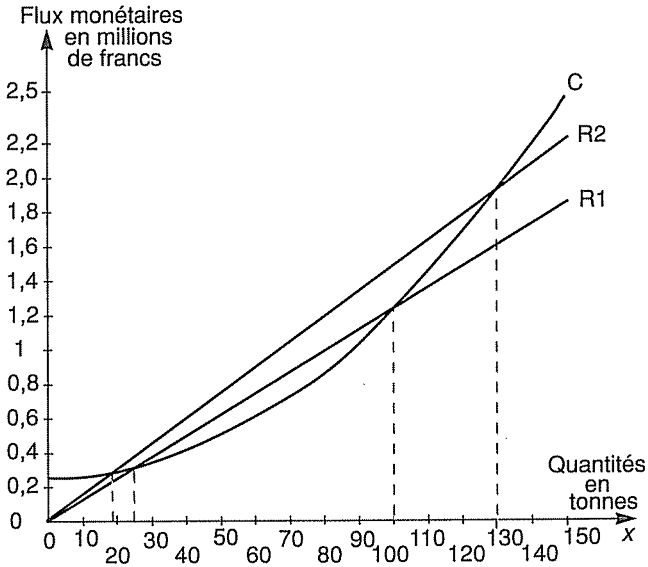
◈ Solution

1° ***a)*** $C(x) = 0,1x^2 + 250$ a pour dérivée : $C'(x) = 0,2\ x$ et cette dérivée est positive pour x positif, donc la fonction C est croissante sur I = [0 ; 150].

Valeurs x	0	20	50	60	100	120	150
Images par C	250	290	500	610	1 250	1 690	2 500

b) la fonction de recette totale exprimée dans les mêmes unités que C est telle que : $R(x) = p \cdot x$ où p est constant ; donc c'est une fonction linéaire (images du type $y = ax$). La courbe représentative de R est une droite passant par l'origine ; de pente $a = p$.

2° Sur le dessin ci-dessous, on lit les courbes utilisées en **3°** et **4°**.



3° Cas où le prix du marché est 12 500 F la tonne.

a) La droite des recettes est au-dessus de la courbe des coûts sur l'intervalle [25 ; 100]. Ceci signifie que l'entreprise réalise un gain pour une production comprise entre 25 tonnes et 100 tonnes ; et des pertes si la production est inférieure à 25 *t* ou supérieure à 100 *t*.

b) Par le calcul. Le bénéfice total doit être positif.
On étudie le signe de la fonction B = R – C.

La fonction $B(x) = 12,5x - (0,1x^2 + 250)$

s'écrit encore $B(x) = -0,1x^2 + 12,5x - 250$. C'est un trinôme du second degré dont on étudie le signe.

$\Delta = 56,25$ positif et $\sqrt{\Delta} = 7,5$, donc il existe deux racines : $x_1 = 25$ et $x_2 = 100$. Ce trinôme est du signe de (–0,1) à l'extérieur de l'intervalle $[x_1 \; ; \; x_2]$ et du signe positif à l'intérieur. On retrouve les résultats du ***a)***.

4° Cas où le prix du marché serait 15 000 F la tonne : la plage de rentabilité $[x'_1 \; ; \; x'_2]$ est plus étendue que lorsque le prix était 12 500 F. Le calcul montre que les valeurs approchées sont : $x'_1 \approx 19,1$ et $x'_2 \approx 130,9$

2e problème

◆ Énoncé

Les coûts de fabrication d'un robot ménager se décomposent pour une année en : 160 000 F de coûts fixes ; 200 F l'unité de coûts proportionnels et un terme $0,04\,q^2$ de coûts complémentaires où *q* est la quantité en unités produites.

1° ***a)*** Ecrire la fonction de coût total $CT : [\,0 \; ; +\infty\,[\;\mapsto\; \mathbb{R}$
$q \mapsto CT\,(a)$.

En déduire l'expression de la fonction de coût moyen CM.

b) Étudier la fonction CM sur $[0\ ;\ +\infty[$: sens de variation et limites.

c) Déterminer le minimum du coût moyen. Pour quelle valeur de q est-il atteint ?

2° Le prix de vente unitaire du robot ménager est de 432 F.

a) Quel est le bénéfice unitaire si la quantité produite et vendue est de 2 000 unités ? Et le bénéfice total ?

b) Pour ce prix, le marché pourrait absorber 6 000 unités : si l'entreprise le fait, cela sera-t-il rentable ?

3° ***a)*** Le prix est fixé à 432 F. On notre RM la fonction de recette moyenne. Montrer qu'elle est constante.

b) Tracer dans un même repère du plan les courbes CM et RM sur l'intervalle [0 ; 8 000].

c) Déterminer par simple lecture la plage de production rentable pour cette entreprise. Retrouver les résultats du **2°**.

◈ Solution

1° ***a)*** Le coût total est la somme des trois types de coûts donc : $CT(q) = 160\ 000 + 200q + 0,04q^2$. On en déduit le coût moyen :

$$CM(q) = \frac{160\ 000}{q} + 200 + 0,04q.$$

b) • Dérivée de CM : $CM'(q) = \dfrac{-160\ 000}{q^2} + 0,04.$

• Étude de son signe : $CM'q = \dfrac{0,04\ q^2 - 160\ 000}{q^2}$. Son numérateur se factorise en $(0,2q - 400)\ (0,2q + 400)$, trinôme dont les racines sont $\pm\ \dfrac{400}{0,2}$ soit $\pm\ 2\ 000$.

Ce trinôme est positif à l'extérieur de $[-2\,000 ; +2\,000]$, donc sur $[0 ; +\infty[$ le signe de CM' s'en déduit.

• Limite en $q = 0$: on a $\lim\limits_{\substack{q \to 0 \\ q > 0}} CM = +\infty$, donc l'axe (0) est asymptote à la courbe CM.

• Limite en $+\infty$: on a : $\lim\limits_{q \to +\infty} CM = +\infty$ et $\lim\limits_{q \to +\infty} \dfrac{160\,000}{q} = 0$.

Donc la droite d'équation $y = 200 + 0{,}04.q$ est asymptote à CM.

• Tableau de variation :

q	0		[2 000]		$+\infty$
CM'		$-$	0	$+$	
CM	$-\infty$	↘	360	↗	$+\infty$

Image de 2 000 : CM (2 000) = 360.

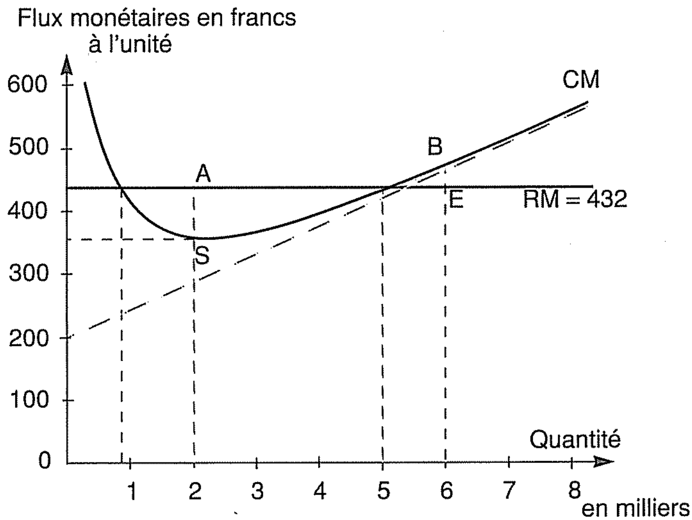
c) Le minimum du coût (unitaire) moyen est de 360 F.
Il est atteint pour une production de 2 000 unités.

2° ***a)*** La recette unitaire est égale au prix, c'est donc 432 F.
Le bénéfice unitaire quand $q = 2\,000$ est la différence
RM (2 000) – CM(2 000) = 432 – 360 = 72 F.
Donc le bénéfice total est alors BT = $72 \times 2\,000$.
BT (2 000) = 144 000 F.

b) Pour 6 000 unités le coût moyen est CM (6 000) = 466,67 donc le bénéfice unitaire est 432 – 466,67 = –34,67 F, c'est-à-dire une perte. Il n'est pas rentable de produire une telle quantité compte tenu de la taille de l'entreprise.

3° ***a)*** La recette moyenne est la recette unitaire qui est le prix, lequel ne dépend pas de la quantité produite. Donc RM est la fonction constante RM(q) = 432.

b) Recette et coût pour une unité produite : représentation graphique.



c) La plage de production rentable pour cette entreprise est environ : [800 ; 5 000].

Note : Le calcul des racines de l'équation CM(q) = 432 permet d'obtenir ces valeurs exactement.

Lecture :

• Pour une production de 2 000 unités, on lit que le bénéfice unitaire SA est maximal.

• Pour une production de 6 000 unités, on lit que l'entreprise fait une perte BE.

4^e problème

◆ Énoncé

Une entreprise fabrique une quantité x d'un produit. Le coût de production $f(x)$ exprimé en milliers de francs est donnée par :

$f(x) = x^3 - 30x^2 + 300x$, où x est un réel compris entre 0 et 20.

Toute la production est vendue au prix de 84 000 F l'unité.

1° ***a)*** Exprimer la recette totale g en milliers de francs et le bénéfice total h en fonction de la quantité x.

b) Étudier le signe de la fonction h sur $I = [\,0\,;20\,]$ en explicitant les solutions de l'équation $h(x) = 0$.

2° ***a)*** Étudier les variations de la fonction h sur I.
Tracer la courbe représentative de h sur I en repère bien choisi.

b) Interpréter cette courbe ainsi que le signe de h en terme de bénéfice. Déduire de cette étude la quantité x_1 qui engendre une perte maximale et la quantité x_2 qui engendre un gain maximal. On donnera une valeur approchée de ces quantités à 10^{-2} près, et une valeur approchée des bénéfices associés au franc près.

(Sujet de bac modifié)

◆ Solution

1° ***a)*** La recette totale pour un prix $p = 84$ milliers de franc constant est : $g(x) = 84.\ x$ et le bénéfice total qui en résulte est la différence : $h(x) = g(x) - f(x)$.

b) Étude du signe de la fonction h.

$$h(x) = 84x - [x^3 - 30x^2 + 300x]$$
$$\text{donc } h(x) = -x^3 + 30x^2 - 216x.$$

On peut mettre x en facteur donc : $h(x) = x\,(-x^2 + 30x - 216)$.

Or sur I on a : $x \geq 0$ donc le signe de h est celui du trinôme

$$t(x) = x^2 + 30x - 216.$$

Cherchons ses racines éventuelles : $\Delta = 36$ donc $\sqrt{\Delta} = 6$, et les racines sont : $x' = 12$ et $x'' = 18$.

Le trinôme est du signe de $a = -1$ à l'extérieur des racines et du signe contraire à l'intérieur de l'intervalle $[\,12\,;18\,]$.

Bilan : si $x \in\,]0\,;12[\, \cup\,]18\,;20]$ alors $h(x) < 0$,
si $x \in\,]12\,;18[$ alors $h(x) > 0$

2° ***a)*** Dérivée de h : $h'(x) = -3x^2 + 60x - 216$.

Signe de la dérivée : c'est un trinôme dont le discriminant est $\Delta = 1\,008$ (cas réduit : $\Delta' = 28$).

Il y a deux racines :
$x_1 = 10 - \sqrt{28} \approx 4{,}71$ et $x_2 = 10 + \sqrt{28} \approx 15{,}29$.

Ce trinôme est du signe de (–3) à l'extérieur des racines et du signe contraire à l'intérieur de l'intervalle.

Tableau des variations de h :

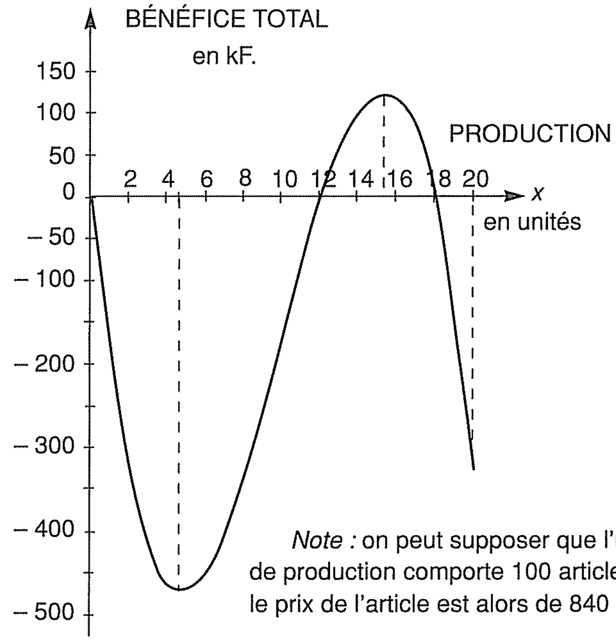
x	0		x_1		x_2		20
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$	0	$\searrow$	$h(x_1)$	$\nearrow$	$h(x_2)$	$\searrow$	

Valeurs utiles :

$h(0) = 0$, $\quad h(x_1) = h(4{,}71) \approx -456{,}324$,

$h(x_2) = h(15{,}29) \approx 136{,}324$, $\quad h(20) = -320$.

Tracé du bénéfice en fonction de la quantité produite pour $p = 84$ kF



Note : on peut supposer que l'unité de production comporte 100 articles ; le prix de l'article est alors de 840 F.

b) Interprétation.

Le signe du bénéfice permet de découper :

• deux plages de perte pour $x \in]\,0\,;\,12\,[$ et pour $x \in]\,18\,;\,20\,[$,

• une plage de rentabilité pour $x \in [\,12\,;\,18\,]$.

• Les pertes passent par un maximum pour la production $x_1 = 4{,}71$ unités.

• Les gains (profits) passent par un maximum pour $x_2 = 15{,}29$ unités.

La production et la vente de 4,71 unités (ou 471 articles) provoquerait une perte de 456 324 F.

La production et la vente de 15,29 unités (ou 1 529 articles) procure un profit de 136 324 F.

6
DÉNOMBREMENTS : PROCÉDÉS ET OPÉRATIONS

Ce chapitre essentiel à la compréhension des probabilités ne comportera pas de problème, mais seulement des exercices d'entraînement couvrant une large gamme de situations.

CE QU'IL FAUT RETENIR

1° On appellera *cardinal* A le nombre des éléments de l'ensemble fini A. On note : Card A = n.

Si une *épreuve* consiste à tirer une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes, on dira que le nombre total de tirages distincts possibles est le cardinal de l'*univers* Ω, et on écrira :

$$\text{Card } \Omega = 32.$$

Les tirages sont alors nommés *éventualités* : $\omega \in \Omega$.

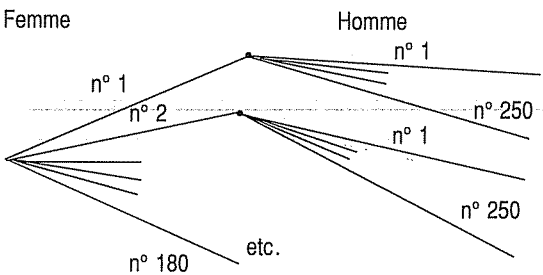
2° Si, pour dénombrer les éventualités associées à une épreuve, on est ramené à 2 choix (indépendants l'un de l'autre), tels que le premier se fasse parmi r éléments d'un ensemble A et le second parmi s éléments d'un ensemble B, alors le nombre total d'éventualités est égal au produit $r \times s$.

Exemple : décompter tous les couples de représentants possibles d'une association qui comporte 250 hommes et 180 femmes sous contrainte que le couple comprenne un homme et une femme.

3° Ce type de dénombrement (couples) peut être schématisé :
— *par un tableau à double entrée : avec 250 lignes et 180 colonnes.*

F / H	Individu n° 1	n° 2	------	n° 180
Individu n° 1	(1,1)	(1,2)	-----	(1,180)
n° 2	(2,1)	------	-----	------
⋮	⋮	⋮	⋱	------
n° 250	n° 250	⋰	------	(250,180)

Il y a donc en tout N = 250 x 180 soit 45 000 cases dans le tableau.
— *par un arbre à deux niveaux de branches :*



Il y a donc en tout N = 180 x 250 = 45 000 terminaisons à cet arbre.

On dit alors que l'ensemble des couples (x ; y) où $x \in$ A et $y \in$ A est *produit cartésien :* Ω = A x B.

4° Généralisons : la représentation par arbre permet d'étendre la réflexion à plus de deux choix ; pas le tableau.

Si un processus suppose un premier choix à 5 voies, un second choix à 20 issues et un dernier choix à 2 valeurs, alors le nombre total de possibilités distinctes est :

$$N = 5 \times 20 \times 2 = 200$$

5° Exemple : on jette un dé quatre fois de suite. Il est bien équilibré. Le nombre total de suites de quatre résultats possibles est $N = 6 \times 6 \times 6 \times 6$ ou $N = 6^4$.

On dit aussi que l'on a formé des *4-listes* d'éléments de l'ensemble A = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6}. Il y a répétition possible d'un élément de A dans une telle liste : en effet, la liste 6 636 est un résultat possible de cette épreuve.

Si un ensemble A comporte n éléments, alors le nombre de $-p$ listes d'éléments de A est $N = n^p$.

6° **Exemple :** une course de chevaux comporte 12 partants. Le nombre total de tiercés distincts possibles a priori, si l'on suppose tous les chevaux de force égale, est N = 12 x 11 x 10 car le cheval qui occupe la 1ère place ne peut être joué de nouveau, et ainsi de suite. On a N = 1 320 tiercés possibles.

On dit que l'on a formé un *arrangement* 3 à 3 des 12 éléments possibles. Les éléments d'une telle suite sont tous distincts.

Si un ensemble A comporte n éléments, alors le nombre d'arrangements p à p que l'on peut former avec les éléments de A est $N = n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1)$.

On écrit ce nombre : A_n^p

Procédé de calcul : $A_{17}^5 = \underbrace{17 \times 16 \times 15 \times 14 \times 13} = 742\ 560$.

Il y a 5 nombres à partir de 17.

7° Dans le cas où l'arrangement comporte les n éléments de A, on parle de permutation.

Le nombre de permutations d'un ensemble A comportant n éléments est $n\,! = n(n-1)(n-2)\ldots \times 3 \times 2 \times 1$.

On dit : factorielle n.

Procédé de calcul : 8 ! = 8 x 7 x 6 x ... x 2 x 1 = 40 320.

8° **Exemple :** reprenons la course avec les 12 partants. On veut étendre la probabilité de gagner en jouant non plus le tiercé $a\,b\,c$ mais les 6 tiercés possibles avec $a\,b\,c$: ceci s'appelle un tiercé dans le désordre. Cherchons tous ces tiercés :

il y en a $N = \dfrac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1} = 220$.

On a formé des *parties* à 3 éléments avec les 12 éléments possibles. On dit aussi des *combinaisons* 3 à 3 de 12 éléments.

> Si un ensemble A comporte n éléments, alors le nombre de parties à p éléments de A est $N = \dfrac{A_n^p}{p!}$.

On écrit ce nombre : C_n^p ou encore $\binom{n}{p}$.

9° Propriétés des C_n^p.

Dans un ensemble à 8 éléments, il y a autant de parties à 3 éléments que de parties à $8-3=5$ éléments.
On écrit :

$$\boxed{C_n^p = C_n^{n-p}}.$$

Propriété du triangle de Pascal :

$n \backslash p$	1	2	3	4	5	6	7	8	
1	1	1							
2	1	2	1						
3	1	3	3	1					
4	1	4	6	4	1				
5	1	5	10	10	5	1			
6	1	6	15	20	15	6	1		
7	1	7	21	35	35	21	7	1	
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1

Ce triangle est construit à l'aide de la remarque $\boxed{C_{n+1}^{p+1} = C_n^p + C_n^{p+1}}$ pour tout n et pour tout p entiers naturels.

10° Les coefficients du triangle de Pascal sont aussi ceux du *développement d'un binôme.*

$$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2,$$
$$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3,$$

$$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4,$$

soit $(a+b)^4 = C_4^0a^4 + C_4^1a^3b + C_4^2a^2b^2 + C_4^3ab^3 + C_4^4b^4.$

11° Si, pour dénombrer les éventualités associées à une épreuve, on est amené à *un seul choix entre deux voies exclusives* l'une de l'autre, l'une qui compte p éléments (d'une partie E) et l'autre qui compte q éléments (d'une partie F), alors le nombre total de cas possibles est la somme $p+q$.

Ceci se généralise à un seul choix parmi plusieurs voies exclusives les unes des autres.

Exemple : un joueur dispose de 250 F pour sa soirée.

Il peut jouer à un jeu A où la mise est de 50 F et à un jeu B où la mise est de 120 F ; il aime également les deux jeux.

Le nombre de parties possibles se décompose en trois voies :

— soit il fait 2 parties de B : Card E = 2,

— soit il fait 5 parties de A : Card F = 5,

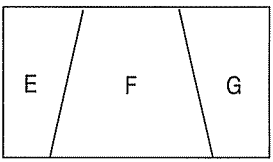
— soit il fait 1 partie de B et 2 parties de A : Card G = 3.

Donc, au total, il dispose de dix choix possibles.

12° Ce type de dénombrement peut être schématisé par un diagramme de Venn. L'univers est découpé en trois parties telles que :

— leur réunion rassemble tous les cas possibles : $\Omega = E \cup F \cup G$;

— ces parties sont disjointes deux à deux :



$$E \cap F = \varnothing$$
$$F \cap G = \varnothing$$
$$E \cap G = \varnothing$$

On dit que E, F, G forment *une partition* de l'univers Ω.

Card Ω = Card E + Card F + Card G.

Le vocabulaire des événements :

- Univers = ensemble des cas possibles .... noté Ω.
- Eventualité = cas possible .... notée ω_i.
- Evénement = partie de Ω .... par exemple A.

• Evénement contraire de A = complémentaire de A dans Ω, c'est-à-dire ensemble des éventualités qui ne sont pas dans A.

Noté le plus souvent $\overline{\mathrm{A}}$

$$\boxed{\text{Si Card } \Omega = n \text{ et Card A} = p \text{ alors Card } \overline{\mathrm{A}} = n - p.}$$

• Evénement impossible = partie vide $\varnothing$. On a : Card $\varnothing = 0$.

• Evénements incompatibles A et B = deux parties dont la partie commune soit vide, donc telles que : $A \cap B = \varnothing$.

• Evénements indépendants = voir chapitre sur tableaux de contingence et conditionnalité.

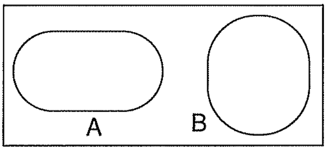
• Réunion de deux événements A et B = ensemble des éventualités qui sont :

— soit dans A,
— soit dans B,
— soit dans $A \cap B$.

Exemple : supposons que A contienne 18 éventualités et que B contienne 25 éventualités.

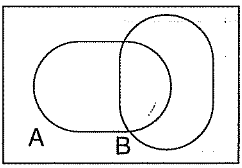
• Si, en outre, A et B sont incompatibles, alors Card $A \cup B = 18 + 25$.

$$\boxed{\text{Card } A \cap B = \text{Card A} + \text{Card B.}}$$



• Si, par contre, A et B ont 5 éventualités en commun, alors Card $A \cup B = 18 + 25 - 5$.

$$\boxed{\text{Card } A \cup B = \text{Card A} + \text{Card B} - \text{Card } A \cap B.}$$



EXERCICES POUR S'ENTRAÎNER

Reconnaître des situations-types ou s'y ramener.

1° ***a)*** On lance un dé cubique. Combien de résultats différents peut-on obtenir ?

b) On lance ce dé sept fois de suite, et on note la suite des résultats obtenus. Combien existe-t-il de suites différentes possibles ?

2° Dans le Val-de-Marne, les plaques d'immatriculation des véhicules sont constituées d'un nombre de quatre chiffres (au plus), de deux lettres et de l'indicatif 94. Combien de véhicules peut-on immatriculer ?

3° Un Questionnaire à Choix Multiples propose, pour chaque question, 4 réponses possibles dont une seule est bonne. Il y a dix questions posées.

a) Combien peut-on obtenir de copies différentes ?

b) Parmi ces copies, combien auront "tout juste" ?

c) Quel est le contraire d'avoir "tout juste" ?

4° Dans le système décimal, combien y a-t-il d'entiers naturels de trois chiffres, où le chiffre des unités est strictement inférieur à 7, le chiffre des dizaines est un multiple de 3, le chiffre des centaines est impair ?

5° Parmi les 23 conseillers municipaux d'une petite ville, on doit élire un maire, un premier adjoint, un second adjoint et un troisième adjoint.

Combien y a-t-il de résultats possibles ?

6° Une revue propose à ses lecteurs une liste de quatre chanteurs et leur demande un classement par ordre de préférence.

Combien existe-t-il de classements différents ?

7° On écrit les lettres du nom SPINOZA sur des petits morceaux de carton

S P I N O Z A

On tire successivement trois de ces cartons et on les place devant soi pour former un "mot" de trois lettres. ("Mot", ici, signifie suite de trois lettres, que le "mot" ait un sens ou non, qu'il soit prononçable ou non).

a) Combien de "mots" de trois lettres peut-on former ?
b) Combien commencent par la lettre Z ?
c) Combien finissent par la lettre A ?

8° Combien y a-t-il de façons de choisir deux délégués dans une classe de 35 élèves ?

9° Une urne contient dix boules numérotées de 0 à 9.

a) $1^{\text{ère}}$ épreuve : on tire simultanément deux boules. Combien existe-t-il de tirages différents ?

b) $2^{\text{ème}}$ épreuve : on tire simultanément trois boules. Même question.

10° *a)* Combien peut-on envisager de mains différentes de cinq cartes avec un jeu de 32 cartes ?
b) Parmi ces mains, combien contiendront les quatre as ?
c) Combien contiendront quatre cartes de la même valeur ?
d) Combien ne contiendront que des cartes de la même couleur ?
e) Combien seront formées de trois piques et deux cœurs ?
f) Combien ne contiendront pas de trèfle ?
g) Combien contiendront au moins un trèfle ?

11° On fait asseoir quatre personnes côte à côte au hasard sur un banc. Combien de façons distinctes y a-t-il de les placer ?

Univers associés à différents types de tirages.

12° Une urne contient dix boules numérotées de 0 à 9.

a) On tire une boule, on note son numéro, et on la remet dans l'urne — ceci s'appelle tirage avec remise. Cette opération est effectuée cinq fois de suite.

On cherche combien il existe de suites de cinq numéros obtenus par ce procédé. On notera Card Ω_a le résultat.

b) On tire une boule, on note son numéro, mais on ne la remet pas dans l'urne — ceci se nomme tirage sans remise (ou encore tirage exhaustif). Cette opération est effectuée cinq fois de suite. Le nombre de suites de cinq numéros obtenus par ce procédé sera noté Card Ω_b.

c) On tire simultanément les cinq boules. Calculer le nombre de suites de cinq numéros obtenus et le noter Card Ω_c.

d) Si on cherche à obtenir la suite 76 901 : quel est le procédé de tirage qui offre les plus grandes chances de réussite ?

Dépouillement de questionnaire.

13° On a interrogé 1 000 personnes à propos de deux produits concurrents A et B.

Ont répondu oui aux questions :

— utilisez-vous A ? 456;

— utilisez-vous B ? 280.

En outre, 168 personnes ont répondu oui conjointement aux deux questions ci-dessus.

a) Combien de personnes parmi cet échantillon n'utilisent ni A, ni B ?

b) Combien de personnes utilisent A exclusivement ? B exclusivement? (Seuls ces deux produits sont en jeu).

c) Combien de personnes utilisent au moins l'un des deux produits ?

14° Un sac contient dix jetons indiscernables au toucher. Ils sont numérotés de 1 à 10 : les quatre permiers numéros sont rouges ; les six suivants sont bleus.

a) On tire au hasard 4 jetons simultanément. Dénombrer l'univers ainsi obtenu.

b) Dénombrer les événements suivants :

U : le tirage est unicolore.

B : le tirage est bicolore (il y a ici deux procédés possibles).

Arrangements et combinaisons ; un peu de calcul :

15° ***a)*** Calculer A_{70}^{7}, en déduire C_{70}^{7}.

b) Calculer C_{25}^{3} et C_{25}^{4} ; en déduire C_{25}^{22} et C_{26}^{4}.

c) En utilisant le binôme, démonter que le nombre total de parties d'un ensemble à cinq éléments est 2^5.

d) Reconstituer la $10^{\text{ième}}$ ligne du triangle de Pascal. En déduire C_{10}^{6} par lecture de cette ligne.

◆ Solutions

1° ***a)*** Le dé comporte six faces, donc, si l'on jette le dé une seule fois, il y a six résultats différents possibles.

b) On lance le dé sept fois, on forme donc une 7-liste d'éléments pris parmi les six possibles. Le nombre de 7-listes est donc 6^7.

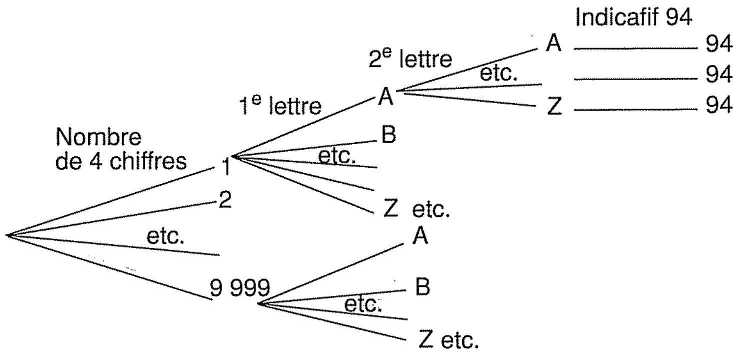
Explication : pour le 1^{er} jet, il y a six résultats possibles,
pour le 2^{e} jet, il y a six résultats possibles,
pour le 7^{e} jet, il y a six résultats possibles.

On obtient donc $\underbrace{6 \times 6 \times 6 \times \ldots \times 6}_{\text{7 facteurs}} = 6^7$ résultats.

Le nombre de suites différentes est 6^7, soit 279 936.

2° Un arbre va résumer la situation. Nous savons qu'il existe 10 000 nombres de quatre chiffres au plus si l'on compte le nombre 0, et 9 999 si l'on exclut 0, ce qui est le cas pour l'immatriculation des véhicules. De plus, l'alphabet comporte 26 lettres, mais les lettre I et O ne sont pas utilisées il reste donc 24 lettres.

Faisons cet arbre :



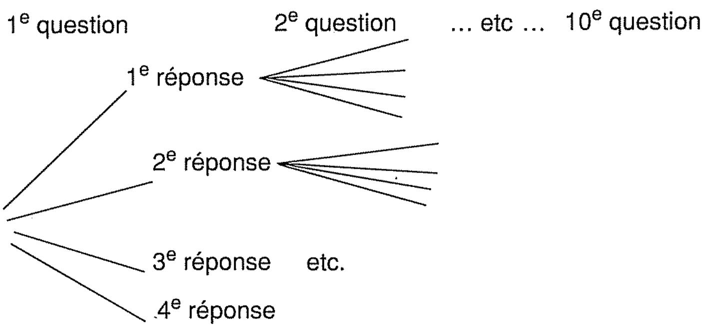
La dernière branche de l'arbre ne comporte qu'une issue, car l'indicatif 94 est imposé.

Comptons le nombre d'immatriculations :

$$9\ 999 \times 24 \times 24 \times 1 \ = \ 5\ 759\ 424.$$

Par conséquent, 5 794 424 véhicules pourront être immatriculés dans le Val-de-Marne, par ce procédé.

3° *a)* Illustrons la situation par un arbre:



A chaque question, il y a quatre réponses possibles, donc le nombre de copies différentes est $\underbrace{4 \times 4 \times 4 \times \ldots \times 4}_{10 \text{ facteurs}}$ soit 4^{10}.

Il y a 1 048 576 copies différentes possibles.

b) Avoir "tout juste" signifie avoir donné la bonne réponse à chaque question posée. Or une seule réponse par question est bonne, donc, il y a une seule copie qui aura tout juste.

c) Le contraire d'avoir tout juste, c'est avoir au moins une erreur à une question posée.

4° Le chiffre des unités est un élément de {0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6}, il y a donc sept possibilités.

Le chiffre des dizaines est un élément de {0 ; 3 ; 6 ; 9}, il y a donc quatre possibilités.

Le chiffre des centaines est un élément de {1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 9}, il y a donc cinq possibilités.

Le nombre d'entiers naturels possibles est $7 \times 4 \times 5 = 140$.

5° Pour le choix du maire, il y a 23 possibilités.

Pour le choix du 1^{er} adjoint, il n'y en a plus que 22.

Pour le choix du 2^e adjoint, il n'y en a plus que 21.

Pour le choix du 3^e adjoint, il n'y en a plus que 20.

Nous obtenons un total de $23 \times 22 \times 21 \times 20 = 212\,520$.

Remarquons que ce nombre est l'arrangement de quatre individus pris parmi 23.

$$A_{23}^{4} = 23 \times 22 \times 21 \times 20 = 212\,520.$$

6° Il y a quatre chanteurs à classer par ordre de préférence.

Pour la 1^{re} place, il y a quatre choix possibles.

Pour la 2^e place, il y a trois choix possibles.

Pour la 3^e place, il y a deux choix possibles.

Pour la 4^e place, il ne reste plus qu'un choix.

Nous retrouvons donc ici le nombre de permutations d'un ensemble de 4 éléments : 4!

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24.$$

Il y a 24 classements possibles.

7° ***a)*** Le mot SPINOZA comporte sept lettres distinctes.

Lorsque l'on tire la 1^re^ lettre, il y a sept choix possibles.

Lorsque l'on tire la 2^e^ lettre, il y a six choix possibles.

Lorsque l'on tire la 3^e^ lettre, il y a cinq choix possibles

Le nombre de choix est donc $A_7^3 = 7 \times 6 \times 5 = 210$.
Il y a 210 "mots" formés avec les lettres de SPINOZA.

b) Le mot commence par Z, donc il y a un seul choix pour la 1^re^ lettre, six choix pour la 2^e^, cinq choix pour la 3^e^.

Parmi les 210 mots, 6×5 commenceront par un Z. Il y a 30 mots commençant par Z.

c) Le mot finit par la lettre A. Le raisonnement est le même.

Il y a six choix pour la 1^re^ lettre (A est exclu).

Il y a cinq choix pour la 2^e^ lettre et un seul pour la 3^e^.

Donc il y a également 30 mots terminant par A.

8° Il s'agit de choisir deux élèves parmi 35, donc de former une partie à deux éléments dans un ensemble de 35 éléments.

Le nombre de possibilités se calcule à l'aide de la combinaison

$$C_{35}^2 = \frac{A_{35}^2}{2!} = \frac{35 \times 34}{2} = 595.$$

Il y a donc 595 choix différents de deux délégués dans une classe de 35 élèves.

9° ***a)*** Tirer deux boules simultanément revient à former un sous-ensemble de deux boules parmi les dix boules contenues dans l'urne.

Le nombre de tirages est donné par C_{10}^2.

$$C_{10}^2 = \frac{A_{10}^2}{2!} = \frac{10 \times 9}{2} = 45.$$

Il y a donc 45 tirages différents de deux boules.

b) Tirer simultanément trois boules revient à former un sous-ensemble de trois éléments pris parmi dix. Le nombre de ces sous-ensembles est $C_{10}^3 = \dfrac{A_{10}^3}{3!} = \dfrac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} = 120.$

Il y a 120 tirages différents de trois boules.

10° ***a)*** Une main de cinq cartes prises dans un jeu de 32 cartes est un sous-ensemble de cinq éléments pris parmi 32. Leur nombre est :

$$C_{32}^5 = \frac{A_{32}^5}{5!} = \frac{32 \times 31 \times 30 \times 29 \times 28}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 201\ 376.$$

Il y a donc 201 376 mains de cinq cartes différentes.

b) Une main qui comporte les quatre as comporte aussi une 5^e carte prise parmi les 28 cartes restantes. Il y aura donc 28 possibilités : 28 mains comportent les quatre as.

c) Le raisonnement précédent s'applique à chaque valeur de carte. Or, il y a huit valeurs différentes. Le nombre de possibilités est donc $8 \times 28 = 224$.

Pour raisonner autrement, disons qu'une main contenant les quatre cartes de même valeur contient les quatre as, et une autre carte *ou* les quatre rois et une autre carte *ou* les quatre dames, et une autre carte *ou* ... etc ... *ou* les quatre sept et une autre carte.

Le nombre de mains possibles est donc

$$\underbrace{28 + 28 + 28 + \ldots + 28}_{8 \text{ termes}} = 28 \times 8.$$

Il y a donc 224 mains contenant quatre cartes de même valeur.

d) Une main cherchée contient cinq cœurs pris parmi huit *ou* cinq piques pris parmi huit *ou* cinq trèfles pris parmi huit *ou* cinq carreaux pris parmi huit.

Le nombre de mains est donc : $C_8^5 + C_8^5 + C_8^5 + C_8^5 = 4 \times C_8^5.$

or $\quad C_8^5 = C_8^3. \quad (C_n^p = C_n^{n-p})$.

$$C_8^5 = C_8^3 = \frac{A_8^3}{3!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = 56.$$

Le nombre de mains contenant cinq cartes de la même couleur est donc $4 \times 56 = 224$.

e) Une main formée de trois piques et deux cœurs est un ensemble formé de trois piques choisis parmi huit *et* deux cœurs choisis parmi huit.

Le nombre de mains est donc $C_8^3 \times C_8^2$.

$$C_8^3 \times C_8^2 = \frac{A_8^3}{3!} \times \frac{A_8^2}{2!} = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} \times \frac{8 \times 7}{2 \times 1} = 56 \times 28 = 1\ 568\,.$$

Il y a donc 1 568 mains contenant trois piques et deux cœurs.

f) Si une main ne contient pas de trèfle, cela veut dire que ses cinq cartes ont été choisies parmi les 24 cartes restantes.

Leur nombre est

$$C_{24}^5 = \frac{A_{24}^5}{5!} = \frac{24 \times 23 \times 22 \times 21 \times 20}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 42\ 504.$$

Il y a 42 504 mains ne contenant pas de trèfles.

g) Nous sommes en présence de l'événement contraire du précédent.

Le nombre de mains contenant au moins un trèfle est égal au nombre de mains possibles (calculé au ***a***) moins le nombre de mains ne contenant pas de trèfles (calculé au ***f***), c'est-à-dire

$$201\ 376 - 42\ 504 = 158\ 872.$$

158 872 mains différentes contiennent au moins un trèfle.

11° L'énoncé suggère qu'il y a quatre places sur le banc. L'on va donc procéder à des arrangements quatre à quatre de quatre éléments, donc à des permutations.

Le nombre de permutations est $4! = 24$.

Autre mode de raisonnement :

Pour la 1re place, il y a quatre choix de personne, pour la 2e place, il y a trois choix, pour la 3e il reste deux choix et un seul pour la dernière place.

On a donc $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 4! = 24$ choix.

Il y a 24 façons distinctes de placer quatre personnes côte à côte sur un banc.

12° ***a)*** Chaque fois que l'on tire une boule, on se trouve devant la situation de choisir une boule entre dix.

Le nombre de choix possibles est Card $\Omega_a = 10^5 = 100\ 000$.

b) Cette fois-ci, puisque la boule n'est pas remise dans l'urne, le nombre de choix diminue de un à chaque tirage.
Le nombre de choix possibles est donc

Card $\Omega_b = A_{10}^5 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6$.

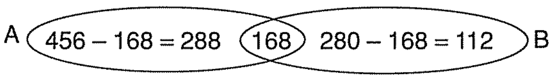
Card $\Omega_b = 30\ 240$.

c) Si on tire simultanément cinq boules, on forme un sous-ensemble de cinq éléments pris parmi dix.

Donc Card $\Omega_c = C_{10}^5 = \dfrac{A_{10}^5}{5!} = 252$.

d) Plus le nombre d'éventualités d'un univers est faible, plus chacune d'elles a de "chances" d'être réalisée. Donc, ici, pour obtenir la suite 76 901, le second procédé de tirage sera le meilleur : il vaut mieux tirer les cinq boules sans remise.

13° Illustrons la situation par un diagramme de Venn.



a) Card $A \cup B$ = Card A + Card B – Card $A \cap B$,
Card $A \cup B = 456 + 280 - 168 = 568$.
Donc 568 personnes utilisent A ou B.
$1\ 000 - 568 = 432$ donc 432 personnes n'utilisent ni A ni B.
b) Le nombre de personnes utilisant exclusivement A est donc $456 - 168 = 288$.
Le nombre de personnes utilisant exclusivement B est donc $280 - 168 = 112$.
c) Nous avons vu au ***a)*** que 568 personnes utilisent A ou B.

14° ***a)*** Soit Ω l'univers obtenu en tirant simultanément quatre jetons : on a formé un sous-ensemble de quatre jetons, donc le cardinal de Ω est $C_{10}^4 = \dfrac{A_{10}^4}{4!} = \dfrac{10 \times 9 \times 8 \times 7}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 210.$

b) Le tirage est unicolore signifie : les quatre jetons sont rouges *ou* les quatre jetons sont bleus,

donc $\text{Card } U = C_4^4 + C_6^4$ mais $C_6^4 = C_6^2$ $\quad (C_n^p = C_n^{n-p})$,

$\text{Card } U = C_4^4 + C_6^2$,

$$\text{Card } U = 1 + \frac{A_6^2}{2!} = 1 + \frac{6 \times 5}{2} = 16.$$

Le tirage est bicolore :

1e procédé : le tirage comporte un jeton rouge et trois bleus,
ou deux jetons rouges *et* deux bleus,
ou trois jetons rouges *et* un bleu.

Donc $\text{Card } B = C_4^1 \times C_6^3 + C_4^2 \times C_6^2 + C_4^3 \times C_6^1$,

$$\text{Card } B = 4 \times \frac{6 \times 5 \times 4}{3 \times 2 \times 1} + \frac{4 \times 3}{2 \times 1} \times \frac{6 \times 5}{2 \times 1} + 4 \times 6 = 80 + 90 + 24 = 194$$

2e procédé : l'événement B est le contrainte de l'événement U, donc $\text{Card } U + \text{Card } B = \text{Card } \Omega$.

$\text{Card } B = \text{Card } \Omega - \text{Card } U = 210 - 16 = 194.$

15° ***a)*** $A_{70}^7 = 70 \times 69 \times 68 \times 67 \times 66 \times 65 \times 64 = 6\,041\,824\,588\,800$'

$$C_{70}^7 = \frac{A_{70}^7}{7!} = \frac{70 \times 69 \times 68 \times 67 \times 66 \times 65 \times 64}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 1\,198\,774\,720.$$

b) $C_{25}^3 = \dfrac{A_{25}^3}{3!} = \dfrac{25 \times 24 \times 23}{3 \times 2 \times 1} = 2\,300.$

$$C_{25}^{4} = \frac{A_{25}^{4}}{4!} = \frac{25 \times 24 \times 23 \times 22}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 12\,650.$$

$$C_{25}^{22} = C_{25}^{3} = 2\,300 \text{ car } C_n^p = C_n^{n-p}.$$

$$C_{26}^{4} = C_{25}^{3} + C_{25}^{4} \text{ car } C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p}.$$

$$C_{26}^{4} = 2\,300 + 12\,650 = 14\,950.$$

c) La formule du binôme, lorsque $n = 5$, peut s'écrire $(a+b)^5 =$ $C_5^0\ a^5 + C_5^1\ a^4 b + C_5^2\ a^3 b^2 + C_5^3\ a^2 b^3 + C_5^4\ a^1 b^4 + C_5^5\ b^5$.

Si on pose $a = 1$ et $b = 1$, on obtient :

$$(1+1)^5 = C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = 2^5.$$

Or C_5^0 est le nombre de parties à 0 élément d'un ensemble à cinq éléments. De même C_5^1, C_5^2, etc. C_5^5 sont les nombres de parties à 1 élément, à 2 éléments, etc.

Donc 2^5 est le nombre total des parties d'un ensemble à cinq éléments.

d) Triangle de Pascal

n = 0	1										
n = 1	1	1									
n = 2	1	2	1								
n = 3	1	3	3	1							
n = 4	1	4	6	4	1						
n = 5	1	5	10	10	5	1					
n = 6	1	6	15	20	15	6	1				
n = 7	1	7	21	35	35	21	7	1			
n = 8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
n = 9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
n = 10	1	10	45	120	210	252	$\boxed{210}$	120	45	10	1
							C_{10}^{6}				

$C_{10}^{6} = 210.$

7

PROBABILITÉS ET ITÉRATIONS D'UNE ÉPREUVE

CE QU'IL FAUT RETENIR

1° Si un univers Ω comporte n éventualités et si chacune d'elles a la même chance d'être réalisée que les autres, alors on dit qu'il y a *équiprobabilité !*

- La probabilité de toute éventualité est $\frac{1}{n}$.
- La probabilité d'un événement A est $\boxed{p(\mathrm{A}) = \frac{\text{Card A}}{\text{Card } \Omega}}$.

Exemple : l'épreuve étant tirer une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes ; la probabilité de tirer "l'as de pique" est $\frac{1}{32}$; la probabilité de tirer une carte "pique" est $\frac{8}{32} = \frac{1}{4}$.

2° Propriétés usuelles d'une probabilité .

- Pour tout événement A on a : $0 \leq p(\mathrm{A}) \leq 1$.
- On a : $p(\Omega) = 1$ on dit que Ω est l'événement certain.
- Soit $\overline{\mathrm{A}}$ est le contraire de A, on a : $\boxed{p(\overline{\mathrm{A}}) = 1 - p(\mathrm{A})}$.
- $\boxed{\text{Si A et B sont incompatibles, alors } p(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}) = p(\mathrm{A}) + p(\mathrm{B})}$,

sinon $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.

• Si $A_1\ A_2 \ldots A_k$ forment une partition de Ω,

alors on a : $p(\Omega) = p(A_1) + p(A_2) + \ldots + p(A_k)$.

3° Situations non équiprobables.

Exemple : dans une course de 12 chevaux, les pronostiqueurs donnent pour chaque cheval les probabilités de succès suivantes :

Cheval n°	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Probabilité de gagner	0,05	0,10	0,12	0,02	0,05	0,15	0,05	0,25	0,12	0,05	0,02	0,02

• Au regard de l'épreuve "jouer gagnant un cheval dans cette course", l'univers Ω n'est pas équiprobable.

• Si un joueur J a parié sur les chevaux numéros 3, 5, 6 et 12, la probabilité de l'événement "le cheval gagnant est dans le jeu de monsieur J" est

$$p = 0{,}12 + 0{,}05 + 0{,}15 + 0{,}02 = 0{,}34.$$

4° Test de Bernoulli.

• Si une épreuve n'admet que deux issues possibles, l'une sera nommée succès et l'autre échec. On a : $p(S) + p(\overline{S}) = 1$.

On parle d'épreuve ou de test de Bernoulli.

Exemple : au basket-ball, lancer le ballon "dans" le filet.

L'univers se compose de deux éventualités ; l'une est plus probable que l'autre. Ici, cela dépend de la qualité du joueur et la probabilité du succès est très difficile à évaluer !

• La question intéressante est d'évaluer le nombre de succès lorsqu'on réitère de nombreuses fois l'épreuve...

Note : pour répondre à cette question, il ne s'agit pas d'ajouter la probabilité du succès comme certains le croient, sinon on dépasserait vite les 100 chances sur 100.

Le procédé est résumé ci-dessous.

5° Distribution binômiale.

Exemple : on lance 3 fois une pièce de monnaie mal équilibrée, telle que

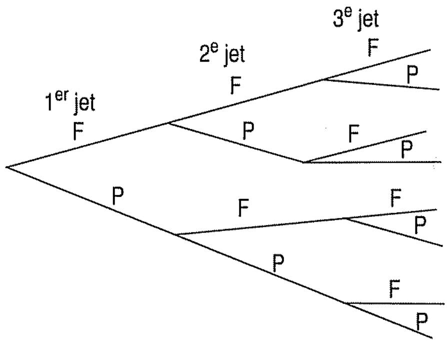
$p(\text{Face}) = \dfrac{2}{5}$ et $p(\text{Pile}) = \dfrac{3}{5}$. On notera F et P.

Nommons "tirer face" le succès sur un jet. On a un test de Bernoulli. Sur 3 jets, les possibilités de succès sont nombreuses : FPP est un "succès" mais FPF aussi.

• Le nombre de succès dans une séquence de 3 jets va de 0 à 3.

On notera ici : $p\,(s = k)$ la probabilité d'obtenir k succès avec k élément de $\{0\ ;\ 1\ ;2\ ;3\}$.

Schéma en arbre :



$p\,(\text{FFF}) = \left(\dfrac{2}{5}\right)^3 = 0{,}064.$ $\qquad p\,(\text{PFF}) = \dfrac{3}{5} \times \left(\dfrac{2}{5}\right)^2.$

$p\,(\text{FFP}) = \left(\dfrac{2}{5}\right)^2 \times \dfrac{3}{5} = 0{,}096.$ $\qquad p\,(\text{PFP}) = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{2}{5} \times \dfrac{3}{5}.$

$p\,(\text{FPP}) = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{3}{5} \times \dfrac{3}{5},$ $\qquad p\,(\text{PPF}) = \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 \times \dfrac{2}{5}.$

$p\,(\text{FPP}) = \dfrac{2}{5} \times \left(\dfrac{3}{5}\right)^2 = 0{,}144.$ $\qquad p\,(\text{PPP}) = \left(\dfrac{3}{5}\right)^3 = 0{,}216.$

Les résultats successifs sont indépendants de ceux qui les précèdent : on multiplie les probabilités.

• L'univers comporte $2^3 = 8$ éventualités et l'événement E_k "obtenir k succès" a une probabilité fonction de k. En voici la distribution :

k	0	1	2	3	Total
$p(E_k)$	0,064	0,288	0,432	0,216	1,000

La loi binomiale se résume ainsi :

Si la probabilité du succès sur une épreuve est p, alors la probabilité d'obtenir k succès sur n épreuves est :

$$p(E_k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}.$$

Note : cette loi sera reprise du point de vue des variables aléatoires.

EXERCICES POUR S'ENTRAÎNER

Des cartes et des boules...

1° Dans un jeu de 32 cartes, on tire trois cartes simultanément et au hasard. Calculer la probabilité des événements suivants :

A : Tirer trois as.
B : Tirer un as et un seulement.
C : Tirer un as et deux rois.
D : Tirer l'as de pique.
E : Tirer au moins un as.

2° Dans un jeu de 32 cartes on tire cinq cartes simultanément et au hasard. Quelle est la probabilité d'obtenir :

a) Quatre cartes de même valeur ?
b) Trois cartes de même valeur ?
c) Cinq cartes de la même couleur ?
d) Trois piques et deux cœurs ?

3° Un sac contient deux boules vertes, six boules jaunes et douze boules rouges.

On tire au hasard et simultanément cinq boules :

Chaque boule verte rapporte 100 F, chaque boule jaune 50 F, chaque boule rouge rien du tout.

Déterminer la probabilité :

a) De gagner 150 F.
b) De gagner 50 F.
c) De ne rien gagner.

Des chevaux et des hommes...

4° Vingt chevaux prennent le départ d'une course. Il y a un super favori dont les chances sont triples de celles des favoris selon les pronostiqueurs. Il y a quatre favoris dont les chances sont doubles de celles des chevaux ordinaires. Tous les autres sont considérés comme de même force.

Déterminer la probabilité de gagner de chacune des trois catégories de chevaux.

5° Au terme d'un sondage auprès de 1 000 personnes
on sait que : 456 personnes lisent un quotidien
280 personnes lisent un hebdomadaire
parmi lesquelles : 168 personnes lisent un quotidien et un hebdomadaire.

On interroge l'une de ces personnes, au hasard, par téléphone.

Déterminer la probabilité des événements suivant :

A : elle ne lit aucun journal.

B : elle lit un quotidien et pas d'hebdomadaire.

La tête et les jambes...

6° Un QCM (questionnaire à choix multiples) comporte dix questions dont chacune comporte trois réponses plausibles.

Une seule parmi les trois réponses cependant est exacte.

Afin de comparer les résultats obtenus par les candidats sérieux avec ceux qu'obtiendrait un candidat totalement ignorant qui répondrait au hasard, recherchez les probabilités suivantes pour ce dernier type de candidat :

a) Rendre une copie sans faute.

b) Rendre une copie comportant au moins une réponse juste.

c) Rendre une copie comportant quatre réponses justes et six fausses.

7° Un joueur de basket réussit quatre paniers sur cinq en moyenne. Si dans une partie il envoie vingt fois la balle au panier. Quelle est la probabilité pour qu'il réussisse : un panier, quatre paniers, dix paniers, seize paniers, vingt paniers ?

Note : on rappelle que $C_n^p = C_n^{n-p}$ et on donne $C_{20}^{10} = 184\,756$.

◆ Solution

1° L'univers est constitué par des parties à trois éléments pris parmi 32, donc : Card $\Omega = C_{32}^{3} = \dfrac{32 \times 31 \times 30}{3 \times 2} = 4\ 960$. Univers équiprobable.

• **Événement A :** on prend trois as parmi quatre dans le cas favorable, donc Card A $= C_{4}^{3} = 4$ et $p(\mathrm{A}) = \dfrac{4}{4\ 960} = \dfrac{1}{1\ 240} = 0{,}0008$.

• **Événement B :** on tire un as parmi quatre cartes et deux cartes quelconques parmi les 28 restante ; et ces deux choix sont indépendants, il faut donc multiplier les nombres (procédé par arbre).

On a : Card B $= C_{4}^{1} \times C_{8}^{2} = 4 \times \dfrac{28 \times 27}{2} = 1\ 512$,

et $p(\mathrm{B}) = \dfrac{1\ 512}{4\ 960} = 0{,}3048$.

Soit $p_{\mathrm{B}} = 0{,}305$.

• **Événement C :** on tire un as parmi quatre et deux rois parmi quatre, donc Card C $= C_{4}^{1} \times C_{4}^{2} = 4 \times \dfrac{4 \times 3}{2} = 24$.

Donc $p(\mathrm{C}) = \dfrac{24}{4\ 960} = 0{,}0048$.

Soit $p_{\mathrm{C}} = 0{,}005$.

• **Événement D :** on prend l'as de pique et deux cartes parmi les 31 restantes, donc Card D $= 1 \times C_{31}^{2} = 1 \times \dfrac{31 \times 30}{2} = 465$.

D'où $p(\mathrm{D}) = \dfrac{465}{4\ 960} = 0{,}0938$.

Soit $p_{\mathrm{D}} = 0{,}094$.

• **Événement E :** cet événement est la réunion de trois événements disjoints :

— Soit "tirer un as parmi quatre et deux cartes parmi 28", c'est l'événement B : card $E_1 = 1\ 512$.

— Soit "tirer deux as parmi quatre et un carte parmi 28".

On a : Card $E_2 = C_{4}^{2} \times C_{28}^{1} = \dfrac{4 \times 3}{2} \times 28 = 168$.

— Soit "tirer les trois as parmi quatre as" : événement A.

On a : Card $E_3 = C_4^3 = 4$.

On réunit les événements, donc on ajoute les cardinaux :

$1\ 512 + 168 + 4 = 1684$, et $p(\mathrm{E}) = \dfrac{1\ 684}{4\ 960} = 0,3395$. Soit $p_{\mathrm{E}} = 0,340$

On constate qu'il est plus "facile" de tirer au moins un as (n'importe lequel) que tous les autres cas envisagés ici.

Remarque : on aurait pu obtenir la probabilité de E par passage au contraire. En effet, le contraire $\bar{\mathrm{E}}$ de E est le fait de "ne tirer aucun as", donc trois cartes parmi 28 ;

d'où Card $\bar{\mathrm{E}} = C_{28}^3 = 3\ 276$ et $p(\bar{\mathrm{E}}) = 0,6605$;

d'où $p(\mathrm{E}) = 1 - p(\bar{\mathrm{E}}) = 1 - 0,6605 = 0,3395$.

2° Les éventualités sont des parties à cinq éléments pris parmi 32 (ou des combinaisons 5 à 5 de 32 éléments).

On a donc : Card $\Omega = C_{32}^5 = \dfrac{32 \times 31 \times 30 \times 29 \times 28}{5 \times 4 \times 3 \times 2} = 201\ 376$.

a) "Quatre cartes de même valeur" signifie, dans cet univers :
— soit quatre as et une carte prise parmi 28 : soit $1 \times 28 = 28$;
— soit quatre rois et une carte prise parmi 28 : soit 28 ;
— et ainsi de suite… On a donc : Card $(a) = 8 \times 28 = 224$.
Or il y a équiprobabilité de cet univers,

donc $p(a) = \dfrac{224}{201\ 376} = 0,0011$

soit $\boxed{p_a = 0,001}$.

b) "Trois cartes de même valeur" signifie :
— soit trois sept et deux cartes prises parmi les 28 "non sept",

donc $C_4^3 \times C_{28}^2 = 1\ 512$;

— soit trois huit et deux cartes parmi les "non huit" : idem;
— et ainsi de suite.

Au total, on a : $p(b) = 8 \times \dfrac{1\ 512}{201\ 376} = 0{,}0601$.

Donc $\boxed{p_b = 0{,}060}$.

c) "Cinq cartes de la même couleur" signifie :
par exemple, cinq piques, d'où : $C_8^5 = 56$.

Or il y a quatre "couleurs" (pique, cœur, trèfle, carreau), d'où

$$p(c) = 4 \times \frac{56}{201\ 376} = 0{,}0011.$$

Donc $\boxed{p_c = 0{,}001}$.

Note : le mot "couleur" est ambigu ; on aurait pu raisonner sur le noir et le rouge, auquel cas, on aurait : $p(c) = 2 \times \dfrac{C_{16}^5}{C_{32}^5}$.

d) "Trois piques et deux cœurs" est clair : $C_8^3 \times C_8^2 = 1\ 568$.

D'où : $p(d) = \dfrac{1\ 568}{201\ 376} = 0{,}0078$.

Donc : $\boxed{p_d = 0{,}008}$.

3° Il y a au total 20 boules dans le sac. Tirer cinq boules, c'est former une partie à cinq éléments, donc Card $\Omega = C_{20}^5 = 15\ 504$.

On a la correspondance :

$$\begin{aligned} V &\mapsto 100\ \text{F} \\ J &\mapsto 50\ \text{F} \\ R &\mapsto 0\ \text{F}. \end{aligned}$$

a) L'événement "gagner 150 F" est réalisé de deux manières distinctes :

• Soit si l'on tire une verte, une jaune, trois rouges :

$$\text{Card}\ (a_1) = C_2^1 \times C_6^1 \times C_{12}^3 = 2\ 640\ .$$

On a multiplié car il s'agit de triplets (3 choix).

• Soit si l'on tire trois jaunes et deux rouges :

$$\text{Card}\ (a_2) = C_6^3 \times C_{12}^2 = 1\ 320,$$

car il s'agit de couples (2 choix).

• La réunion des deux événements a pour cardinal :
Card (a) = Card (a_1) + Card (a_2) car ils sont disjoints.

D'où : Card $(a) = 2\ 640 + 1\ 320 = 3\ 960$.

Donc $p(a) = \dfrac{3\ 960}{15\ 504} = 0{,}2554$, soit $\boxed{p_a = 0{,}255}$.

b) L'événement "gagner 50 F" correspond à une jaune et quatre rouges, d'où : Card $(b) = C_6^1 \times C_{12}^4 = 2\ 970$.

Donc $p(b) = \dfrac{2\ 970}{15\ 504} = 0{,}1916$ soit $\boxed{p_b = 0{,}192}$.

c) L'événement "ne rien gagner" est réalisé si l'on tire cinq boules rouges, donc Card $(c) = C_{12}^5 = 792$.

Donc $p(c) = \dfrac{792}{15\ 504} = 0{,}0511$ soit $\boxed{p_c = 0{,}051}$.

4° Cet univers n'est pas équiprobable.

Résumons les forces relatives des trois types de chevaux.

Notons S le super favori ; F les favoris ; O les "ordinaires".

On a : $p(\text{S}) = 3 \cdot p(\text{F})$ et $p(\text{F}) = 2 \cdot p(\text{O})$.

La somme des probabilités de gagner les 20 chevaux est 1, donc on a : $p(\text{S}) + 4 \times p(\text{F}) + 15 \times p(\text{O}) = 1$;
c'est-à-dire : $6\ p(\text{O}) + 4 \times 2\ p(\text{O}) + 15\ p(\text{O}) = 29\ p(\text{O}) = 1$.

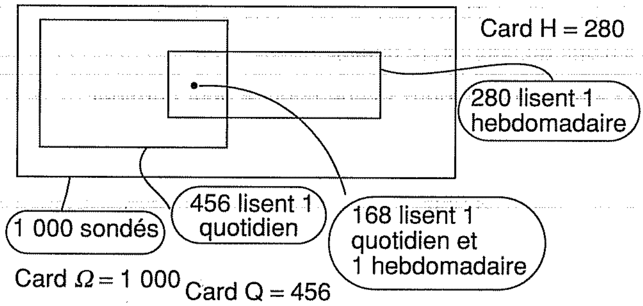
Donc les probabilités respectives des trois catégories sont :

$p(\text{O}) = \dfrac{1}{29} = 0{,}035$, soit 3,5 chances sur 100.

$p(\text{F}) = \dfrac{2}{29} = 0{,}069$, soit 6,9 chances sur 100.

$p(\text{S}) = \dfrac{6}{29} = 0{,}207$, soit 20,7 chances sur 100.

5° Résumons par un diagramme les événements en jeu :



Card H = 280

Card Ω = 1 000 Card Q = 456

Card $(Q \cap H)$ = 168

A. Les lecteurs d'au moins un quotidien ou un hebdomadaire sont donc au nombre de 456 + 280 − 168 = 568.

[Car on a : Card $(Q \cup H)$ = Card Q + Card H − Card $(Q \cap H)$].

Donc ceux qui ne lisent aucun journal sont au nombre de :
Card A = 1000 − 568 = 432.

[Car Card $\overline{(Q \cup H)}$ = Card Ω − Card $(Q \cup H)$].

D'où $p(A) = \dfrac{432}{1\ 000} = 0,432$, car l'univers est équiprobable.

B. Le nombre de personnes de cet échantillon qui lisent un quotidien sans lire d'hebdomadaire est 456 − 168 = 288.

[Car Card (Q/H) = Card Q − Card $(Q \cap H)$].

Donc on a : $p(B) = \dfrac{288}{100} = 0,288$. Soit 28,8 % de l'échantillon.

6° Répondre à une question comporte deux issues seulement en fait au regard de l'examen des connaissances :

— Soit la réponse est correcte : $p(C) = \dfrac{1}{3}$ pour un ignorant !

— Soit la réponse est fausse : $p(F) = 1 - p(C) = \dfrac{2}{3}$ pour l'ignorant.

En répétant dix fois ce test, on entre dans une loi binomiale.

a) On en déduit : $p(a) = C_{10}^{10}\left(\frac{1}{3}\right)^{10}\left(\frac{2}{3}\right)^{0} = 0{,}0000169.$

Probabilité négligeable.

b) "Avoir au moins une réponse juste" est le contraire de "avoir toutes les réponses fausses", donc :

$$p(b) = 1 - C_{10}^{10}\left(\frac{1}{3}\right)^{0}\left(\frac{2}{3}\right)^{10} = 1 - 0{,}0173 = 0{,}9827.$$

Donc $\boxed{p(b) = 0{,}983.}$

c) $p(c) = C_{10}^{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{6} = 0{,}2276.$ Donc $p(c) = 0{,}228.$

7° Face au panier, soit il réussit : $p(R) = \frac{4}{5}$, soit il échoue : $p = \frac{1}{5}$.

Répétons ce test de Bernoulli 20 fois ; la loi binomiale répond aux questions.

$$p(R=1) = C_{20}^{1}\left(\frac{4}{5}\right)^{1}\left(\frac{1}{5}\right)^{19} = 20 \times \frac{4}{5} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{19} = 8{,}4 \times 10^{-13}$$

Probabilité négligeable.

$$p(R=4) = C_{20}^{4}\left(\frac{4}{5}\right)^{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{16} = 4\,845 \times \left(\frac{4}{5}\right)^{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{16} = 1{,}3 \times 10^{-8}$$

Probabilité négligeable.

$p(R=10) = C_{20}^{10}\left(\frac{4}{5}\right)^{10}\left(\frac{1}{5}\right)^{10} = 0{,}002$, soit 2 chances sur 1 000.

$p(R=16) = $ or $C_{20}^{16}\left(\frac{4}{5}\right)^{16}\left(\frac{1}{5}\right)^{4}$ $C_{20}^{16} = C_{20}^{4} = 4\,845.$

On trouve à la machine : $p(R=16) = 0{,}218$,
soit presque 22 chances sur 100 de réussir 16 paniers.

$$p(R=20) = C_{20}^{20}\left(\frac{4}{5}\right)^{20}\left(\frac{1}{5}\right)^{0} = \left(\frac{4}{5}\right)^{20},$$

soit 1 chance sur 100.

PROBLÈMES AVEC SOLUTIONS

1er problème

◆ Énoncé

Un dé parfait a six faces numérotées 1, 2, 3, 4, 5, 6. On le lance dix fois de suite. A chaque jet, on note le nombre marqué sur la face supérieure du dé.

Calculez la probabilité de chacun des événements suivants (vous donnerez pour chaque résultat une valeur décimale approchée à 0,001 près par défaut) :

A : "On obtient deux fois le nombre 6 et deux fois seulement."
B : "On obtient au moins une fois le nombre 6."
C : "On obtient un 6 pour la première fois au troisième jet."
D : "On obtient un 6 au troisième jet (pour la première fois ou non) et un multiple de 3 au septième jet."

◆ Solution

Le dé est équilibré, donc pour toute face i on a : $p(i) = \frac{1}{6}$.

On le lance dix fois de suite.

A : *deux n° 6 exactement.*

On a une loi binomiale avec le test de Bernoulli $p(6) = \frac{1}{6}$ et $p(\bar{6}) = \frac{5}{6}$, ou $\bar{6}$ signifie "non 6".

On a : $n = 10$ et $k = 2$, donc :

$$p(A) = C_{10}^{2}\left(\frac{1}{6}\right)^{2}\left(\frac{5}{6}\right)^{8} = 0{,}2907,$$

soit :

$\boxed{p(A) = 0{,}290}$ par défaut.

B : *au moins une fois le n° 6*. Il s'agit de la même loi binomiale qu'en A, mais avec le contraire de “aucune fois le 6”,

d'où : $p(\mathrm{B}) = 1 - p(\bar{\mathrm{B}}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{10} = 0,8385,$

soit p(B) = 0,838 par défaut.

C : *le n°6 pour la première fois au $3^{ième}$ jet* signifie que avant, il n'y a pas de 6 et qu'après le $3^{\text{ième}}$, cela peut être 6 ou $\bar{6}$, donc

$$p(\mathrm{C}) = \frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6} \times 1^7 = \frac{25}{6^3} = \frac{25}{216},$$

d'où : p(C) = 0,1157,

soit $\boxed{p(\mathrm{C}) = 0{,}115}$ par défaut.

D : *on a le n° 6 au $3^{ième}$ jet et soit 3 soit 6 au $7^{ième}$ jet* d'où :

$$p(\mathrm{D}) = 1 \times 1 \times \frac{1}{6} \times 1 \times 1 \times 1 \times \frac{1}{3} \times 1 \times 1 \times 1 = \frac{1}{18} = 0{,}0556,$$

d'où : $\boxed{p\,(\mathrm{D}) = 0{,}055}$ par défaut.

8
TABLEAUX DE CONTINGENCE

En économie et en sciences sociales, on croise productions et régions ; ou profession du père et du fils. Les techniques de base sont ici résumées, expliquées, utilisées.

CE QU'IL FAUT RETENIR

1° *Un tableau de contingence* consigne les effectifs d'une population finie au regard de deux caractères A et B : la case numérotée (i, j) contient le nombre des individus qui vérifient la modalité i de A *et* la modalité j de B.

$$n_{ij} = \text{Card}\,(A_i \cap B_j),$$

où $\cap$ est le symbole de la conjonction (on lit : A_i et B_j).

• On dit aussi que A_i et B_j sont vérifiées conjointement.

Exemple : un échantillon de 1 100 ménages est étudié du double point de vue du nombre d'enfants et du revenu disponible :

Revenu mensuel \ Nombre d'enfants	Sans	Un	Deux	Plus de 2	
Moins de 6 000 F	50	30	10	0	90
6 000 ≤ R ≤ 10 000	120	400	90	30	640
Plus de 10 000 F	75	160	110	25	370
	245	590	210	55	1 100

Caractère A : le revenu en francs – caractère continu – découpé en trois classes : $i \in \{1 ; 2 ; 3\}$.

Caractère B : le nombre d'enfants – caractère discret – ramené à quatre modalités : $j \in \{1 ; 2 ; 3 ; 4\}$.

2° *La part des ménages qui ont "2 enfants" et "moins de 6 000 F"* est le rapport $\frac{10}{1\,100} = 0{,}009$. C'est une fréquence simple : $f_{13} = \frac{n_{13}}{N}$.

$$\boxed{f(A_1 \cap B_3) = \frac{\text{Card } (A_1 \cap B_3)}{\text{Card } E}}.$$

Ici Card E = N = 1 100.

3° L'effectif des ménages qui "gagnent moins de 6 000 F" par mois est le nombre 50 + 30 + 10 = 90. On le note : $n_{1\bullet} = 90$.

La part des ménages qui "gagnent moins de 6 000 F" est le rapport $\frac{90}{1100} = 0{,}082$. C'est une fréquence marginale : $f_{1\bullet} = \frac{n_{1\bullet}}{N}$.

$$\boxed{f(A_1) = \frac{\text{Card } A_1}{\text{Card } E}}.$$

4° *La part des ménages* "sans enfants" *sachant* qu'ils "gagnent moins de 6 000 F" est le rapport $\frac{50}{90} = 0{,}556$.

C'est une fréquence conditionnelle notée $f(B_1/A_1) = \frac{n_1}{n_{1\bullet}}$, on lit : fréquence de la modalité B conditionnée par A_1, ou encore : fréquence de B sachant A_1.

$$\boxed{f(B_3/A_1) = \frac{\text{Card }(B_3 \cap A_1)}{\text{Card } A_1}}.$$

5° Si l'on choisit un individu au hasard (c'est-à-dire un ménage dans cet échantillon), la probabilité qu'il appartienne à l'événement F est égale à la fréquence observée de F : $p(F) = \dfrac{\text{Card F}}{\text{Card E}}$.

Ainsi : $\quad p(B_2 \cap A_3) = f(B_2 \cap A_3) = \dfrac{160}{1\ 100} = 0{,}146.$

$$p(B_1) = f(B_1) = \frac{245}{1\ 100} = 0{,}223.$$

6° Pour tout événement F et pour tout événement G de probabilité non nulle, on a :

$$\boxed{p(F/G) = \frac{p(F \cap G)}{p(G)}}.$$

On lit : probabilité de F sachant G.

7° La probabilité d'être un ménage qui "a deux enfants" *et* "un revenu moyen" peut être évaluée par deux méthodes :

— soit en adoptant le point de vue : avoir 2 enfants sachant que l'on a un revenu moyen ;

— soit en adoptant le point de vue : avoir un revenu moyen sachant que l'on a deux enfants.

Pour tout couple d'événements de probabilités non nulles, on dispose de deux voies pour probabiliser leur conjonction :

$$\boxed{\begin{array}{l} p(F \cap G) = p(F/G) \times p(G) \\ p(F \cap G) = p(G/F) \times p(F) \end{array}}.$$

8° Supposons que le fait "d'avoir un enfant" soit *indépendant* du "revenu" cela se traduirait par : $p(B_2/A_1) = p(B_2/A_2) = p(B_2/A_3)$. En effet, les probabilités d'avoir un enfant sont égales quel que soit le niveau de revenu du ménage.

Cela a pour conséquence : $p(B_2/A_i) = p(B_2)$ pour tout $i \in \{1 ; 2 ; 3\}$

Deux événements F et G sont indépendants si, et seulement si, l'on a $p(F \cap G) = p(F) \times p(G)$.

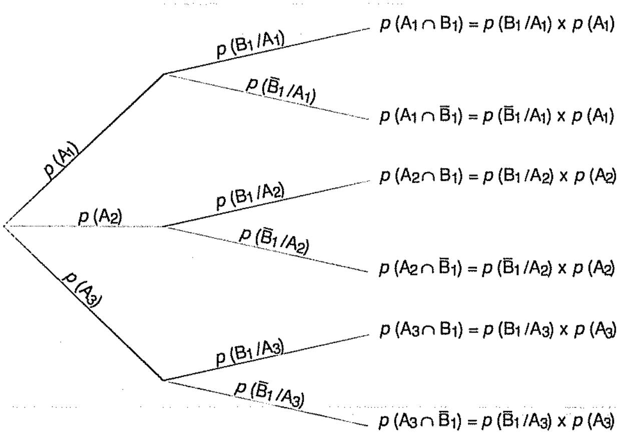
9° *Arbre et probabilités "totales"* :

Distinguons les ménages sans enfants des ménages avec enfants.

L'analyse de la situation peut se faire alors :

— soit par un tableau à trois lignes et deux colonnes;

— soit par un arbre — exemple ci-dessous.



Si l'on connaît les probabilités conditionnelles de B_1 par rapport aux événements A_i, alors on a :

$$p(B_1) = p(B_1 \cap A_1) + p(B_1 \cap A_2) + p(B_1 \cap A_3),$$

parce que A_1, A_2, A_3 constituent une partition de l'univers E.

EXERCICES POUR S'ENTRAÎNER

1° Trois machines A, B, C fabriquent respectivement 60 %, 30 % et 10 % du nombre total des pièces produites par une unité de production. Les taux de pièces défectueuses sont respectivement de 2 %, 3 % et 4 %.

a) Croiser les trois provenances et les deux qualités d'une pièce sous forme d'un arbre et calculer les probabilités des six conjonctions.

b) Déterminer la probabilité qu'une pièce produite par cette usine soit défectueuse.

2° Soit la distribution d'une population E selon deux caractères A et B.

A l'aide du tableau de fréquences conditionnelles et de la distribution des effectifs marginaux du caractère B, reconstituer le tableau des effectifs.

A \ B		Modalités	
		1	2
Modalités	1	16	35
	2	84	65
		100	100

Caractère	Modalités	
B	1	2
Effectifs marginaux	5 600	7 400

3° Reprendre les données concernant les 1 100 ménages considérés selon le revenu mensuel et le nombre d'enfants :

a) Construire le tableau des fréquences simples.

b) Construire le tableau des fréquences conditionnées par le nombre d'enfants.

c) Construire le tableau des fréquences conditionnées par le revenu.

d) Y a-t-il indépendance entre les événements "avoir un enfant" et les trois niveaux de "revenu mensuel" du point de vue probabiliste ?

e) Traduire en français et comparer : $f(B_3/A_1)$; $f(A_1/B_3)$.

4° Dans une entreprise, 58 % des employés ont moins de 40 ans et on dispose des renseignements suivants :

Parmi les moins de 40 ans	Parmi les 40 ans et plus âgés	Salaire mensuel
44 %	26 %	gagnent moins de 10 000 F
47 %	59 %	gagnent de 10 000 F à moins de 20 000 F
9 %	15 %	gagnent plus de 20 000 F

a) Quel est le pourcentage des plus de 40 ans dont le salaire appartient à la tranche [10 000 ; 20 000[?

b) Déterminer les fréquences respectives des trois tranches de salaire dans l'entreprise.

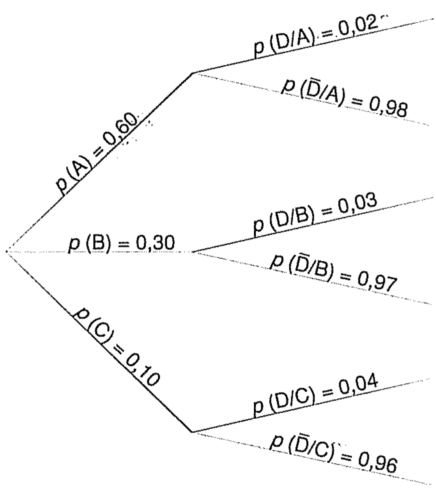
c) Déterminer la fréquence des plus de 40 ans, sachant qu'ils gagnent plus de 20 000 F. Traduire ce résultat par une phrase.

d) Déterminer la fréquence des moins de 40 ans, sachant qu'ils gagnent moins de 10 000 F. Traduire ceci par une phrase.

◈ Solution

1° ***a)*** Nommons respectivement A, B, C, les événements "être fabriqué par la machine…" et D l'événement "être défectueux" dans l'univers E des pièces produites par l'usine.

$\overline{D}$ désigne l'événement contraire de D, c'est-à-dire "être sans défaut". On peut alors représenter les différentes éventualités — obtenues par croisement des deux caractères — par les branches d'un arbre :



$p\,(A \cap D) = 0{,}6 \times 0{,}02 = 0{,}012,$

$p\,(A \cap \overline{D}) = 0{,}6 \times 0{,}98 = 0{,}988,$

$p\,(B \cap D) = 0{,}3 \times 0{,}03 = 0{,}009,$

$p\,(B \cap \overline{D}) = 0{,}3 \times 0{,}97 = 0{,}291,$

$p\,(C \cap D) = 0{,}1 \times 0{,}04 = 0{,}004,$

$p\,(C \cap \overline{D}) = 0{,}1 \times 0{,}96 = 0{,}096.$

b) $p(D) = p(A \cap D) + p(B \cap D) + p(C \cap D) = 0{,}025$. Soit 2,5% de pièces défectueuses à la sortie de l'usine, ou encore une probabilité de 0,025 qu'une pièce produite soit défectueuse.

2° Les fréquences fournies par le tableau sont conditionnelles par rapport aux modalités B_1 et B_2. Ainsi $0{,}35 = f\,(A_1/B_2)$,

or $f(A_1/B_2) = \dfrac{\text{Card }(A_1 \cap B_2)}{\text{Card } B_2} = \dfrac{n_{12}}{n\,.\,2}$ avec n_{12} inconnu et

$n_{\bullet 2} = 7\,400$. D'où l'effectif : $n_{12} = f(A_1/B_2) \times n_{\bullet 2} = 0{,}35 \times 7\,400$. D'où : $n_{12} = 2\,590$.

On remplit ainsi le tableau :

A \ B	B1	B2	Totaux lignes
A1	896	2 590	3 486
A2	4 704	4 810	9 514
Totaux colonnes	5 600	7 400	13 000

- Le premier indice de n_{ij} indique le numéro de la ligne : i.
- Le second indice de n_{ij} indique le numéro de la colonne : j.

3° On arrondira les fréquences au millième le plus proche.
Le calcul des fréquences suppose que les marges du tableau des effectifs aient été calculées. On applique alors les définitions.

Effectifs avec marges :

50	30	10	0	90
120	400	90	30	640
75	160	110	25	370
245	590	210	55	1100

a) Fréquences simples et marginales

0,046	0,027	0,009	0,000	0,082
0,109	0,364	0,082	0,027	0,582
0,068	0,146	0,100	0,023	0,336
0,223	0,536	0,191	0,050	1,000

b) Fréquences sachant le nombre d'enfants

0,204	0,051	0,048	0,000
0,490	0,678	0,429	0,546
0,306	0,271	0,524	0,455
1,000	1,000	1,000	1,000

c) Fréquences sachant le revenu

0,596	0,333	0,111	0,000	1,000
0,188	0,625	0,141	0,047	1,000
0,203	0,432	0,297	0,068	1,000

d) Il n'y a pas indépendance statistique entre le fait d'avoir un seul enfant et les différents niveaux de revenus.

En effet, les fréquences de B_2 conditionnées par A_1, par A_2, par A_3 sont toutes distinctes et diffèrent de 0,536 = $f(B_2)$.

e) On a $f(B_3/A_1) = 0{,}111$ et $f(A_1/B_3) = 0{,}048$.

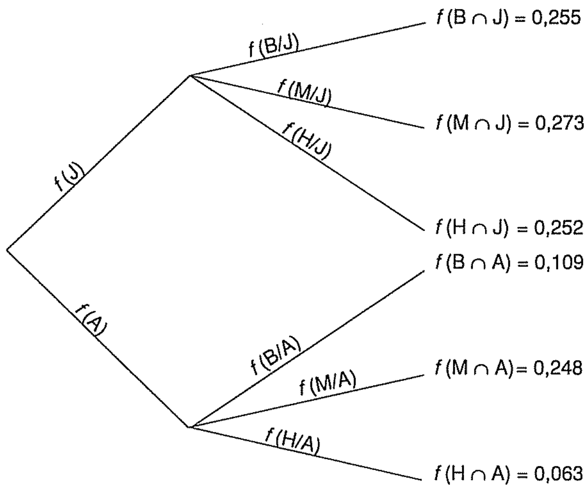
Ceci signifie qu'il y a parmi les ménages à bas revenu 11,1 % qui ont deux enfants, et que parmi les ménages qui ont deux enfants, 4,8 % ont un bas revenu.

Ou encore que la part des ménages à deux enfants est plus forte parmi les bas revenus que la part des ménages à bas revenu parmi les ménages qui ont deux enfants.

4° Adoptons un vocabulaire simple pour désigner les modalités des deux caractères que l'on croise ici — l'âge et le salaire.

J : "jeunes", les moins de 40 ans $f(J) = 0{,}58$.
A : "anciens", les plus de 40 ans $f(A) = 1 - f(J) = 0{,}42$.
B : "bas salaires", avec : $f(B/J) = 0{,}44$ et $f(B/A) = 0{,}26$.
M : "salaires moyens", avec : $f(M/J) = 0{,}47$ et $f(M/A) = 0{,}59$.
H : "hauts salaires", avec : $f(H/J) = 0{,}09$ et $f(H/A) = 0{,}15$.

Résumée en arbre à deux étages, la situation se décrit comme suit :



a) Formulation ambiguë : si nous interprétons le "dont" comme un "et", le pourcentage recherché est $f(A \cap M) = f(M/A) \times f(A)$, c'est-à-dire : $f(A \cap M) = 0,247$, donc 24,7 %.

Si nous l'interprétons comme un "parmi", alors le pourcentage recherché est $f(A/M)$ que l'on ne peut calculer avant la seconde partie de cet exercice.

b) Fréquences marginales du salaire :

$$\begin{aligned} f(B) &= f(B \cap J) + f(B \cap A) \\ &= f(B/J) \times f(J) + f(B/A) \times f(A) = 0{,}255 + 0{,}109 = 0{,}364. \end{aligned}$$

De la même manière, on obtiendra :

$f(M) = 0{,}273 + 0{,}248 = 0{,}520.$

$f(H) = 0{,}052 + 0{,}063 = 0{,}115.$

c) Fréquence conditionnelle :

$$f(A/H) = \frac{f(A \cap H)}{f(H)} = \frac{0,063}{1,115} = 0,548.$$

Dans un commentaire en français, ce résultat pourrait être évalué ainsi : "parmi les plus hauts salaires de cette entreprise, plus de la moitié sont des anciens."

d) Fréquence conditionnelle :

$$f(J/B) = \frac{f(J \cap B)}{f(B)} = \frac{0,255}{0,364} = 0,701.$$

"Parmi les bas salaires, plus des deux tiers sont des jeunes."

Note : les élèves en sciences économiques et sociales doivent savoir rédiger ainsi le résultat de la lecture d'un tableau ou d'un calcul, sans ambiguité dans les termes employés.

PROBLÈMES AVEC SOLUTIONS

1er problème

◆ Énoncé

Une usine fabrique des pièces dont 1,8 % sont défectueuses. Le contrôle des pièces s'effectue selon les probabilités conditionnelles suivantes :

— sachant qu'une pièce est bonne, elle est acceptée avec une probabilité de 0,97 ;
— sachant qu'une pièce est mauvaise, elle est refusée avec une probabilité de 0,99.

1° Quelle est la probabilité pour qu'une pièce soit défectueuse ?

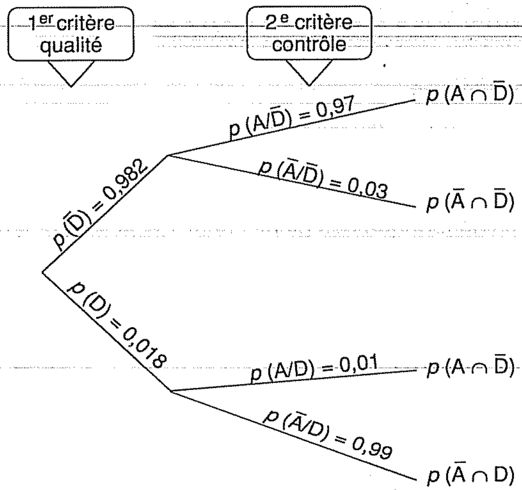
2° ***a)*** Montrer que la probabilité pour qu'une pièce soit défectueuse et acceptée est 0,000 18.
b) Montrer que la probabilité pour qu'une pièce soit bonne et refusée est 0,029 46.
c) Calculer la probabilité pour qu'il y ait une erreur dans le contrôle.

3° Si on effectue cinq contrôles de suite, quelle est la probabilité pour qu'il y ait exactement 2 erreurs de contrôle ?
(d'après un sujet de bac B)

◆ Solution

Mise en forme d'arbre. Nommons les événements :

D : être défectueuse $\overline{D}$
$\overline{D}$: être de bonne qualité.
A : être acceptée
$\overline{A}$: être refusée.



Cet arbre résulte d'une lecture attentive de l'énoncé

et de : $p(A/\bar{D}) + p(\bar{A}/\bar{D}) = 1$

ainsi que : $p(A/D) + p(\bar{A}/D) = 1$.

1° La probabilité qu'une pièce soit défectueuse se lit directement dans l'énoncé ; c'est $p(D) = 0{,}018$.

2° ***a)*** Il s'agit du premier type d'erreur ; la pièce défectueuse n'a pas été décelée au contrôle (risque de perte de clients) :

$$p(D \cap A) = p(A \cap D) = p(A/D) \times p(D)$$
$$= 0{,}01 \times 0{,}018 = 0{,}00018,$$

soit 18 pièces sur 100 000.

b) Il s'agit du second type d'erreur ; la pièce est bonne mais le contrôleur se trompe et la refuse (pertes en invendus) :

$$p(\bar{D} \cap \bar{A}) = p(\bar{A} \cap \bar{D}) = p(\bar{A}/\bar{D}) \times p(\bar{D})$$
$$= 0{,}03 \times 0{,}982 = 0{,}02946,$$

soit 29 pour 1 000 environ.

c) La probabilité qu'il y ait une erreur dans le contrôle de la qualité des pièces produites est égale à la somme des probabilités des deux types d'erreurs, car leur intersection est vide :

$p(\mathrm{D} \cap \mathrm{A}) + p(\overline{\mathrm{D}} \cap \overline{\mathrm{A}}) = 0,02964.$

3° Le problème quitte le domaine des tableaux croisés pour faire appel à la répétition d'un test de Bernoulli cinq fois de suite.

En effet : prendre une pièce au hasard et la contrôler comporte un risque d'erreur global de 0,02964, c'est ce que l'on nommera la probabilité de l'echec et une probabilité de réussite (pas d'erreur de contrôle) de 1 – 0,02964 = 0,97036.

Il n'y a donc que deux issues ; répéter un tel test cinq fois et chercher la probabilité de se tromper deux fois nous place dans les conditions d'application de la loi binomiale (voir chapitre utile).

On a : $p = C_5^2 (0,02964)^2 (0,97036)^3 = 0,00803$,
soit moins de une chance sur cent de réaliser deux erreurs sur cinq contrôles.

2e problème :

◈ Énoncé

Dans une entreprise, le personnel est composé de 65 % d'hommes et de 35 % de femmes.

Parmi les hommes, il y a 30 % de cadres. Parmi les femmes, il y a 15 % de cadres.

1° ***a)*** Faire le tableau des fréquences simples.

b) On prend une personne au hasard sur la liste alphabétique du personnel. Quelle est la probabilité que ce soit un cadre (homme ou femme) ?

c) On prend un nom au hasard sur la liste des cadres : quelle est la probabilité que ce soit une femme ?

2° ***a)*** Y a-t-il indépendance entre le sexe et la position dirigeant/exécutant dans cette entreprise ?

b) En conservant les fréquences marginales de la 1re partie ; construire le tableau des fréquences simples qui caractériserait l'indépendance entre le sexe et la position exécutive dans cette entreprise.

◆ Solution

Commençons par résumer l'énoncé sous la forme d'un arbre, en nommant les événements simplement.

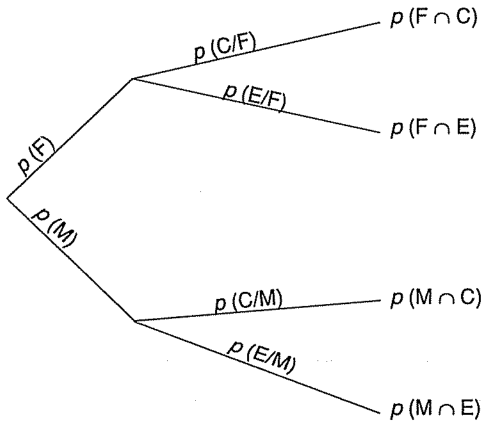
Evénements :

- *Sexe :* F : féminin p (F) = 0,35
  M : masculin $p(\text{M}) = 0,65$.

- *Position :* C : cadre
  E : exécutant

$p(\text{C/M}) = 0,30$, donc $p(\text{E/M}) = 0,70$.
$p(\text{C/F}) = 0,15$ donc $p(\text{E/F}) = 0,85$.

Croisement des deux caractères :



1° *a)* On déduit le tableau des fréquences simples des terminaisons de l'arbre ainsi :

Position / Sexe	Cadre	Exécut.
F	0,053	0,298
M	0,195	0,455

Par exemple : $f(\mathrm{F} \cap \mathrm{C}) = f(\mathrm{C}/\mathrm{F}) \times f(\mathrm{F}) = 0,15 \times 0,35.$
Donc $f(\mathrm{F} \cap \mathrm{C}) = 0,053.$

b) La probabilité qu'un membre du personnel soit cadre est égale à la fréquence marginale des cadres (somme 1re colonne) :
$p(\mathrm{C}) = p(\mathrm{F} \cap \mathrm{C}) + p(\mathrm{M} \cap \mathrm{C}) = 0,053 + 0,195 = 0,248.$

c) La probabilité de trouver une femme parmi les cadres est conditionnelle , c'est :

$$p(\mathrm{F}/\mathrm{C}) = \frac{p(\mathrm{F} \cap \mathrm{C})}{p(\mathrm{C})} = \frac{0,053}{0,248} = 0,214.$$

Soit 21,4 chances sur 100.

2° ***a)*** La question de l'indépendance statistique se ramène à la comparaison de la part d'un des deux sexes dans une catégorie et dans l'ensemble de l'institution : si elles sont égales, alors il n'y a pas dépendance de la position et du sexe.

On sait que : $p(\mathrm{F}/\mathrm{C}) = 0,214$ et $p(\mathrm{F}) = 0,35$, ceci prouve qu'il y a dépendance statistique.

b) Simulons l'indépendance théorique parfaite avec les partages homme/femme et cadre/exécutant, qui sont ceux de cette entreprise.

On notera p_{T} ces probabilités théoriques.

On appliquera :

$$p_{\mathrm{T}}(\mathrm{F} \cap \mathrm{C}) = p(\mathrm{F}) \times p(\mathrm{C}) = 0,35 \times 0,248 = 0,087.$$

Et ainsi de suite :

$p_{\mathrm{T}}(\mathrm{M} \cap \mathrm{C}) = p(\mathrm{M}) \times p(\mathrm{C}) = 0,65 \times 0,248 = 0,16.$
$p_{\mathrm{T}}(\mathrm{F} \cap \mathrm{E}) = p(\mathrm{F}) \times p(\mathrm{E}) = 0,35 \times 0,752 = 0,263.$
$p_{\mathrm{T}}(\mathrm{M} \cap \mathrm{E}) = p(\mathrm{M}) \times p(\mathrm{E}) = 0,65 \times 0,752 = 0,489.$

Tableau d'indépendance statistique :

Sexe \ Position	Cadre	Exécut.	Marge sexe
F	0,087	0,263	0,35
M	0,161	0,489	0,65
Marge posit.	0,248	0,752	1,00

Commentaire explicatif sur la situation exploitée par ce problème :

La contribution des sexes à la fonction dirigeante est : 21,4% de femmes et 78,6% d'hommes.

Cet écart très important est dû au cumul de deux effets. D'une part les femmes sont moins nombreuses que les homme : 35% au lieu de 65%. D'autre part il y a moitié moins de femmes parmi les cadres que d'hommes parmi les cadres : 15% au lieu de 30%.

On confirme ceci en examinant les formules :

$$p(F/C) = \frac{1}{p(C)} \cdot p(C/F) \times p(F).$$

$$p(M/C) = \frac{1}{p(C)} \cdot p(C/M) \times p(M)$$

avec $p(C/F) < p(C/M)$ et $p(F) < p(M)$.

9
MATHÉMATISATION DU RISQUE : VARIABLE ALÉATOIRE

CE QU'IL FAUT RETENIR

1° Exemple : une loterie foraine est constituée par une roue portant les 50 premiers nombres entiers à partir de 1.

Contre un droit d'entrée, chacun peut miser sur un de ces nombres avant que la roue ne soit lancée.

Certains numéros permettent de gagner un lot dont la valeur est indiquée ci-dessous :

Numéros sortants ω	Valeur du lot x_j
de 1 à 29	0 F
de 30 à 39	5 F
de 40 à 46	20 F
de 47 à 49	80 F
le 50	150 F

On nomme Ω l'ensemble des 50 premiers entiers.

9. *Mathématisation du risque : variable aléatoire*

On associe un nombre à chacune des 50 éventualités : la valeur du lot.

On a donc créé une application de Ω vers $\mathbb{R}$: c'est une *variable aléatoire* sur l'ensemble fini Ω.

On note cette application : $X : \Omega \mapsto \mathbb{R}$

$$\omega \mapsto x_j$$

où j varie de 1 à 5.

Attention : le mot "variable" ici n'a pas le sens usuel, car il désigne une fonction ; mais on le garde néanmoins par tradition...

2° La probabilité de l'événement "gagner 20 F" à cette loterie est obtenue en ajoutant les probabilités de toutes les éventualités qui permettent de réaliser ce gain. On écrit $p\,(X = 20)$ pour montrer qu'il s'agit de *prendre en compte tous les antécédents ω de 20 par l'application* X.

Ici : $p\,(X = 20) = \dfrac{7}{50} = \dfrac{14}{100} = 0{,}14$ si la roue est équilibrée.

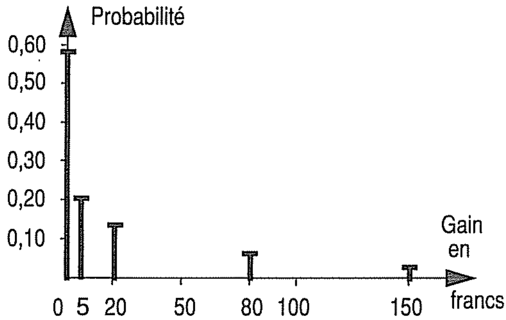
Envisageons tous les gains possibles :

Gains x_j	Probabilité $p\,(X = x_j)$
0	0,58
5	0,20
20	0,14
80	0,06
150	0,02
Total	1,00

Ce tableau définit une application de $X(\Omega)$ vers $[0\,;1]$ qui est nommée loi de probabilité ou encore distribution de la variable aléatoire X.

3° Représentation de la distribution de X.

On utilise un diagramme en bâtons dont les hauteurs sont proportionnelles aux probabilités des valeurs images de X.



4° Le forain se pose une question légitime : à quel niveau faut-il placer le droit d'entrée dans le jeu pour ne pas perdre d'argent à long terme (et même en gagner) ? La question se ramène *à équilibrer les entrées et les sorties* de la caisse du forain : à partir de ce niveau, tout tarif supérieur lui procurera un gain au sens statistique.

Ce raisonnement repose sur le fait que sur un grand nombre d'épreuves, la fréquence d'occurrence de chaque numéro de la roue se stabilisera à $\frac{1}{50}$.

La valeur qui équilibre le jeu sur une grande série est la moyenne des gains possibles pondérés par leurs probabilités d'occurrence ; ce nombre s'appelle *espérance mathématique* de la variable aléatoire X. On le note : E(X).

$E(X) = x_1 \,.\, p\,(X = x_1) + x_2 \,.\, p\,(X = x_2) + \ldots + x_n \,.\, p\,(X = x_n)$,

soit :

$$\boxed{E\,(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p\,(X = x_i)}\,.$$

Ici :

$E(X) = 0 \times 0{,}58 + 5 \times 0{,}2 + 20 \times 0{,}14 + 80 \times 0{,}06 + 150 \times 0{,}02$,

c'est-à-dire $E(X) = 11{,}6$.

Si le forain fixe le droit d'entrée à plus de 11,60 F la partie, il fera des gains, sauf si une série "noire" prolongée le met en faillite.

Examinons une mesure de ce risque.

5° *La dispersion des gains possibles autour du gain moyen* E(X) est évaluée par l'écart quadratique moyen ou variance de X.

• La *variance* V(X) de la variable aléatoire X est la moyenne des carrés des écarts à l'espérance. C'est donc :

$$\boxed{V(X) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i) \cdot [x_i - E(X)]^2}.$$

Une autre version est : $V(X) = \sum_{i=1}^{n} p(x_i) \cdot x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} p(x_i) \cdot x_i\right)^2$,

c'est-à-dire : $\boxed{V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2}$.

L'écart type est la racine carrée de la variance $\boxed{\sigma_x = \sqrt{V(X)}}$.

6° Fonction de répartition.

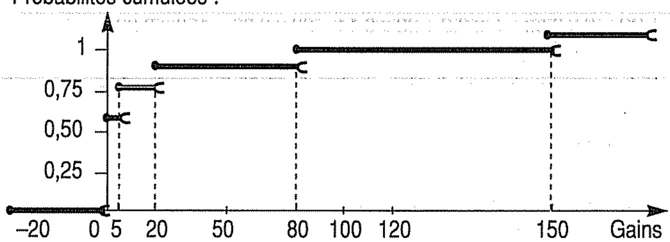
C'est la fonction qui permet de calculer la probabilité de réaliser un gain au plus égal à une somme *x*.

• Elle est définie par : $F : \mathbb{R} \to [0\,;1]$
$x \mapsto F(x) = p(X \leq x)$.

• C'est une fonction en escalier, croissante sur $\mathbb{R}$.

Ici on a : si $x \in \left]-\infty\,;0\right[$: $F(x) = 0$
si $x \in [0\,;\,5[$: $F(x) = 0{,}58$
si $x \in [5\,;\,20[$: $F(x) = 0{,}78$
si $x \in [20\,;\,80[$: $F(x) = 0{,}92$
si $x \in [80\,;\,150[$: $F(x) = 0{,}98$
si $x \in [150\,;+\infty[$: $F(x) = 1$.

Probabilités cumulées :



7° Retour sur la distribution binomiale.

Le schéma de Bernoulli, répété n fois, fournit naturellement une variable aléatoire. Le nombre associé à chaque éventualité (liste de n résultats) est le nombre de succès qu'elle réalise. C'est pourquoi on parle de loi binomiale pour désigner la distribution des succès et de leurs probabilités $p\,(X = k)$ associées.

EXERCICES POUR S'ENTRAÎNER

1° On jette une pièce bien équilibrée trois fois de suite.

On crée un jeu régi par la règle suivante ; attachée à l'épreuve ci-dessous.

Au bout des trois jets ; si
- aucune fois face : perte de 300 F,
- une fois face : perte de100 F,
- deux fois face : gain de100 F,
- trois fois face : gain de 300 F.

a) Construire la loi de probabilité associée à ce jeu ; pour ce faire, on notera G la variable aléatoire : gain algébrique.

b) Représenter la distribution de G et sa fonction de répartition F.

2° On jette un dé équilibré une seule fois. On construit le jeu suivant :

N° de la face	1	2	3	4	5	6
Gain réalisé	1	1	1	5	5	20

a) Donner toutes les valeurs-images de cette variable aléatoire X. Construire sa loi de probabilité. La représenter en distribution.

b) Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

En déduire la valeur que prendrait le droit d'entrée pour que le jeu soit équilibré à long terme.

3° Calculer l'espérance, la variance et l'écart type de la loi associée à la variable donnée par le carré de la face obtenue par un jet d'un seul dé équilibré.

4° ***a)*** Calculer l'espérance du jeu X qui fait gagner le montant de la face qui sort lors du jet d'un dé bien équilibré si ce nombre est premier, et qui fait perdre ce montant si le nombre n'est pas premier.

b) Reprendre la question (*a*) avec le jeu Y qui fait gagner le montant si le nombre est pair, et qui fait perdre si le nombre est impair. Lequel de ces deux jeux est le plus favorable ?

5° Une urne contient dix jetons indiscernables au toucher : quatre jetons sont numérotés 1 et les six autres sont numérotés 5.

On tire simultanément deux jetons. La variable aléatoire X sera la somme des nombres portés par les deux jetons.

a) Etudier la loi de probabilité de X ; en donner un diagramme.

b) Etudier et représenter la fonction de répartition de X.

◆ Solution

1° ***a)*** Quand on jette trois fois de suite une pièce bien équilibrée pour jouer à pile ou face, on peut modéliser cette expérience par un test de Bernoulli (probabilité de face = $\frac{1}{2}$; probabilité de pile = $\frac{1}{2}$) répété trois fois.

Donc la variable aléatoire G suit une loi binomiale dont les paramètres sont : $p = \frac{1}{2}$; $q = 1 - p = \frac{1}{2}$; $n = 3$.

Calcul des probabilités associées. Par exemple :

$p\,(\mathrm{G} = 100) = \mathrm{C}_3^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^2$, ce qui se réduit à :

$$p\,(G = 100) = C_3^1 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = C_3^1 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{8}.$$

G = montant du gain algébrique	− 300	− 100	+ 100	+ 300
Nombre de "faces"	0	1	2	3
Probabilité associée	$\frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$	$\frac{3}{8} = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3$	$\frac{3}{8} = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3$	$\frac{1}{8} = \left(\frac{1}{2}\right)^3$

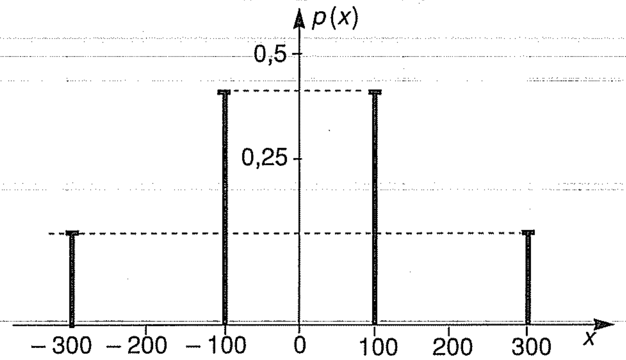
b) • La distribution est symétrique par rapport à G = 0.

On dit que cette loi de probabilité est centrée : son espérance est nécessairement nulle.

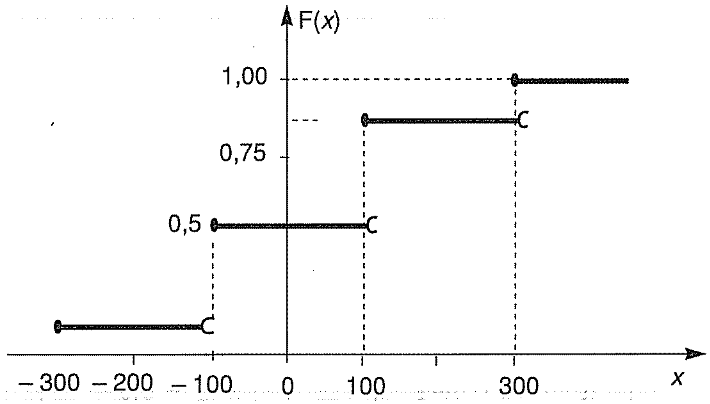
• La fonction de répartition prend en compte tous les gains réels et fournit la probabilité $F(x) = p\,(G \leq x)$: valeurs dans le tableau ci-dessous.

Pour tout x élt de	F(x) vaut
$]-\infty\,;-300\,[$	0
$[-300\,;-100\,[$	$\frac{1}{8} = 0{,}125$
$[-100\,;+100\,[$	$\frac{1}{8} + \frac{3}{8} = \frac{1}{2} = 0{,}5$
$[+100\,;+300\,[$	$\frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8} = 0{,}875$
$[+300\,;+\infty\,[$	1

Représentations :



Distribution de G

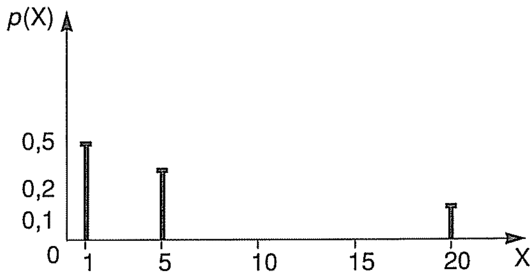


Répartition de G

2° *a)* Les images de la variable X sont X (Ω) = {1 ; 5 ; 20} car ce sont *les trois gains possibles*. Calculons la probabilité de chacun d'eux, ce qui revient à chercher les probabilités de toutes les éventualités qui réalisent chacun d'eux et à les ajouter :

k	$p(X = k)$	Valeur décimale
1	$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$	= 0,5
5	$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$	= 0,333
20	$\frac{1}{6}$	= 0,167

Ceci constitue la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
On la représente par un diagramme en bâtons :



C'est aussi la distribution de X.

b) L'espérance mathématique de X est la moyenne des trois valeurs de X pondérées par leur probabilité d'occurrence :

$$E(X) = \frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{3} \times 5 + \frac{1}{6} \times 20 = \frac{33}{6} = \frac{11}{2} \text{ donc } E(X) = 5{,}5.$$

Pour que le jeu équilibre les gains et les pertes d'un joueur sur une très longue série de jeux, ou les recettes et les dépenses de celui qui organise le jeu (le casino, ...), il suffit de fixer le droit d'entrée à 5,5.

Note : cette analyse est purement mathématique : le droit d'entrée est ici la recette du "casino" et la "perte" du joueur. Dans les faits, les jeux sont plus complexes, d'une part ; et le "casino" fonctionne en logique marchande, il doit faire un bénéfice, donc il doit fixer le droit d'entrée beaucoup plus haut que 5,5 et le joueur est "perdant" à long terme...

3° Variable C : il y a six faces au dé et six images possibles.

ω	C	$p(C)$
1	1	$\frac{1}{6}$
2	4	$\frac{1}{6}$
3	9	$\frac{1}{6}$
4	16	$\frac{1}{6}$
5	25	$\frac{1}{6}$
6	36	$\frac{1}{6}$

• La probabilité est uniforme : toutes les éventualités ont la même probabilité de sortir.

• La loi de probabilité de la variable aléatoire C est aussi uniforme ; en effet chaque valeur de C est obtenue par une seule éventualité ω.

Calculs de l'espérance et de la variance :

• $E(C) = \frac{1}{6}(1+4+9+16+25+36) = \frac{91}{6} = 15{,}1667$ arrondi à 15,17.

• $V(C) = \frac{1}{6}\left[\left(1-15{,}7^2+(4-15{,}17)^2\right)+\ldots(36-15{,}17)^2\right]$

un peu long...

... ou encore : $V(C) = \frac{1}{6}(1^2+4^2+9^2+16^2+25^2+36^2) - \left(\frac{91}{6}\right)^2,$

soit $V(C) = \frac{1}{6} \cdot 2\,275 - \frac{1}{36} \cdot 8\,281 = 149{,}14.$

• On en déduit la valeur de l'écart type : $\sigma = 12{,}21$.

4° Comparons les deux " jeux ".

On rappelle que 1, 4, 6 ne sont pas premiers parce qu'ils ont un nombre de diviseurs différent de deux alors que 2, 3, 5 sont nombres premiers. Comparons les deux lois de probabilité.

i	x_i	$p(X = x_i)$
1	+ 1	$\frac{1}{6}$
2	− 2	$\frac{1}{6}$
3	− 3	$\frac{1}{6}$
4	+ 4	$\frac{1}{6}$
5	− 5	$\frac{1}{6}$
6	+ 6	$\frac{1}{6}$

i	y_i	$p(Y = y_i)$
1	− 1	$\frac{1}{6}$
2	+ 2	$\frac{1}{6}$
3	− 3	$\frac{1}{6}$
4	+ 4	$\frac{1}{6}$
5	− 5	$\frac{1}{6}$
6	+ 6	$\frac{1}{6}$

On a : $E(X) = \frac{1}{6}(+1 - 2 - 3 + 4 - 5 + 6) = \frac{1}{6}.$

$$E(Y) = \frac{1}{6}(-1 + 2 - 3 + 4 - 5 + 6) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Donc le jeu Y est plus favorable que le jeu X.

5° ***a)*** Loi de probabilité de X.

Les valeurs possibles de la variable aléatoire X sont :
$1 + 1 = 2, \quad 1 + 5 = 6, \quad 5 + 5 = 10.$

Le nombre total de tirages des deux jetons est le nombre de parties à deux éléments pris parmi dix : Card $\Omega = C_{10}^{2} = 45$.

• Il y a C_4^2 façon de tirer " 1 et 1 ", donc $p\,(X = 2) = \dfrac{6}{45} = \dfrac{2}{15}$.

• Il y a quatre jetons n° 1 et six jetons n° 5.

Donc $4 \times 6 = 24$ façons de tirer " 1 et 5 ", donc $p\,(X = 6) = \dfrac{24}{45} = \dfrac{8}{15}$.

• Il y a C_6^2 façons de tirer " 5 et 5 ", donc

$p\,(X = 10) = \dfrac{15}{45} = \dfrac{5}{15} = \dfrac{1}{3}$.

On vérifie que : $\dfrac{2}{15} + \dfrac{8}{15} + \dfrac{5}{15} = \dfrac{15}{15} = 1$.

La loi recherchée est :

k	2	6	10
$p\,(X = k)$	$\dfrac{2}{15}$	$\dfrac{8}{15}$	$\dfrac{5}{15}$
	0,133	0,533	0,333

b) Fonction de répartition de X.
C'est une fonction en escalier de bornes successives 2 ; 6 ; 10.
Si $x < 2$: la probabilité qu'un tirage donne au plus x est nulle.

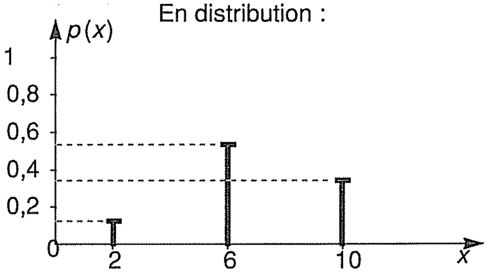
Si $2 \leq x < 6$: la probabilité qu'un tirage donne au plus x est $\dfrac{2}{15}$.

Si $6 \leq x < 10$: la probabilité qu'un tirage donne au plus x est $\dfrac{2}{15} + \dfrac{8}{15} = \dfrac{10}{15}$.

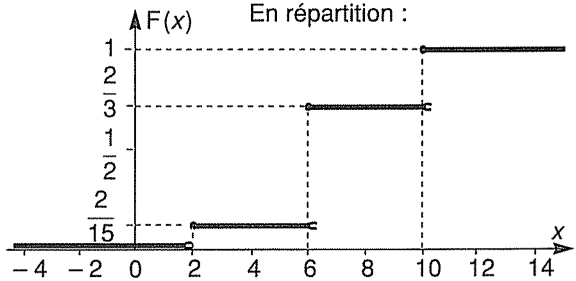
Si $10 \leq x$: la probabilité cumulée est : $\dfrac{2}{15} + \dfrac{8}{15} + \dfrac{5}{15} = 1$.

Les deux représentations de X :

En distribution :



En répartition :



PROBLÈMES AVEC SOLUTIONS

1^er^ problème

◆ Énoncé

Un groupe de cinq étudiants se présente à un examen auquel le taux de réussite moyen est de 60 %. On suppose que ces cinq étudiants ne sont pas mieux, ni plus mal préparés que l'ensemble des candidats.

1° Calculer les probabilités,
a) que tous les cinq soient reçus ;
b) qu'au moins l'un d'entre eux échoue.

2° ***a)*** Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire R définie par le nombre de reçus dans ce groupe. La représenter.

b) En déduire le nombre de reçus qui est le plus probable.

◈ Solution

1° Un candidat qui se présente à cet examen définit un test de Bernoulli dont la probabilité du succès est 0,6 et celle de l'échec 0,4.

Si cinq candidats se présentent, le nombre de reçus au sein du groupe est une variable aléatoire dont la loi est binomiale.

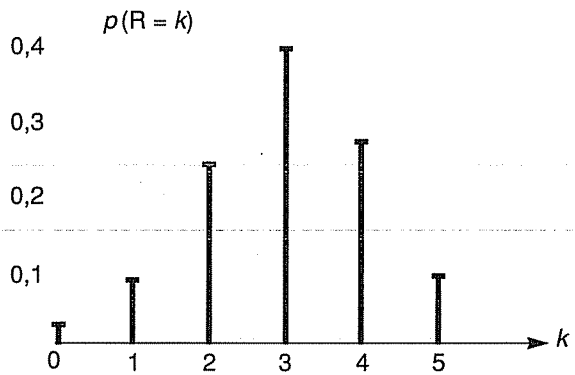
On a donc : $p(\mathrm{R} = k) = C_5^k \; 0{,}6^k \; 0{,}4^{5-k}$.

a) La probabilité $p(\mathrm{R} = 5) = 0{,}6^5 = 0{,}0778$ indique qu'il y a environ 8 chances sur 100 pour que les cinq soient reçus.

b) "Au moins un d'entre eux échoue" est l'événement contraire de "tous sont reçus" ; on en déduit qu'il y a 92 chances sur 100 pour que l'un au moins échoue.

2° ***a)*** Déterminer la loi, c'est calculer les probabilités des six valeurs possibles de la variable R.

k	0	1	2	3	4	5
$p(\mathrm{R} = k)$	0,0102	0,0768	0,2304	0,3456	0,2592	0,0778



b) La modalité qui a le plus de chance d'être réalisée est "il y a trois reçus" avec 35 %. Mais les modalités "il y a quatre reçus" et "il y a deux reçus" sont cependant assez probables : respectivement 26 % et 23 %.

2^e problème

◈ Énoncé

Soit L la variable aléatoire associée au montant de la vente d'un article d'une gamme de produits par un vendeur dans une boutique. Au cours de la journée, on a relevé :

i	1	2	3	4	5	→ référence article
x_i	0*	50	500	1 000	2 000	→ prix en francs
n_i	873	100	20	5	2	→ nombres d'articles vendus

1° Combien d'articles ont été vendus ? Quel est le montant total de la recette de la journée ?

2° Déterminer la fonction de distribution, puis celle de répartition (on présentera ces fonctions en tableau) de la variable aléatoire L.

3° Quelle est la probabilité que le prix d'un article vendu pris au hasard :

a) soit 50 F ?
b) soit inférieur ou égal à 600 F ?
c) soit compris entre 200 F et 1 500 F ?
On utilisera les résultats de la question 2°.

4° Calculer l'espérance mathématique, la variance, l'écart type.
— Quelle interprétation donner ici à l'espérance L ?
— La dispersion est-elle faible ou forte ? Pourquoi ?
* *Note :* cet article est un cadeau pour promouvoir les ventes.

◆ Solution

1° Nombre d'articles : 1 000.
Recette totale : $100 \times 50 + 20 \times 500 + 5 \times 1\,000 + 2 \times 2\,000 = 24\,000$ F.

2° Fonctions caractéristiques de la variable aléatoire L.

Gain k	Distribution $p(L = k)$	Intervalle x	Répartition $p(L \leq x)$
0	0,873	$]-\infty ; 0[$	0
50	0,100	[0 ; 50 [	0,873
500	0,020	[50 ; 500 [	0,973
1 000	0,005	[500 ; 1 000 [	0,993
2 000	0,002	[1 000 ; 2 000 [	0,998
		$[2\,000 ; +\infty[$	1,000

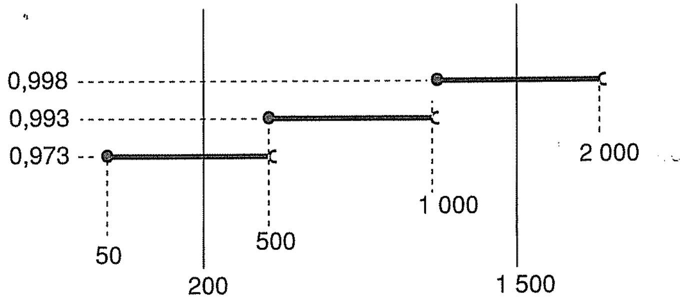
3° Un article est pris au hasard dans les ventes de la journée :

a) La probabilité que son prix soit 50 F est 10 chances sur 100 ; c'est effet $p\,(L = 50) = 0{,}10$.

b) La probabilité que son prix soit inférieur ou égal à 600 F est 0,973, puisque pour tout nombre $x \in [500 ; 1\,000[$ la probabilité de gagner une somme $L \leq x$ est 0,973.

c) La probabilité que son prix soit compris entre 200 F et 1 500 F est égale à la probabilité de gagner une somme L égale, soit à 500 F, soit à 1 000 F, donc c'est la somme des probabilités :

$0{,}020 + 0{,}005 = 0{,}025$.



Note : on peut aussi le retrouver en écrivant :

$$p(500 < L \leq 1\,000) = p(L \leq 1\,000) - p(L \leq 500) = 0{,}998 - 0{,}973.$$

4° *Espérance mathématique :*

$E(L) = 0 \times 0{,}873 + 50 \times 0{,}100 + 500 \times 0{,}02 + 1\,000 \times 0{,}005 + 2\,000 \times 0{,}002$,

donc $E(L) = 24$.

C'est le prix moyen des articles vendus dans la journée, ou encore, c'est la dépense moyenne des clients de cette boutique pour cette journée. C'est la notion de recette moyenne qui est en jeu.

Variance : calculons d'abord $E(L^2)$.

$$E(L^2) = 0^2 \times 0{,}873 + 50^2 \times 0{,}1 + 500^2 \times 0{,}02 + 1000^2 \times 0{,}05 + 2000^2 \times 0{,}02,$$

d'où $E(L^2) = 18\,250$,

et $V(L) = E(L^2) - [E(L)]^2 = 18\,250 - 24^2 = 17\,674$.

On en déduit *l'écart type* : $\sigma = \sqrt{V(L)} = 132{,}94$.

Cet indicateur est fort comparé à l'espérance ; cela est dû au fait que la distribution est dissymétrique et que les prix élevés sont très éloignés de l'espérance.

10
SÉRIES STATISTIQUES À UN CARACTÈRE

CE QU'IL FAUT RETENIR

1° Observer une population selon un caractère, c'est décompter le nombre n_i d'individus de la population qui possèdent la valeur x_i (ou la modalité) du caractère pour chacune de ces valeurs : $i \in [1 ; k]$ si k est le nombre des valeurs.

On définit ainsi la série statistique X : $(x_i \; ; \; n_i)$.

Exemples :

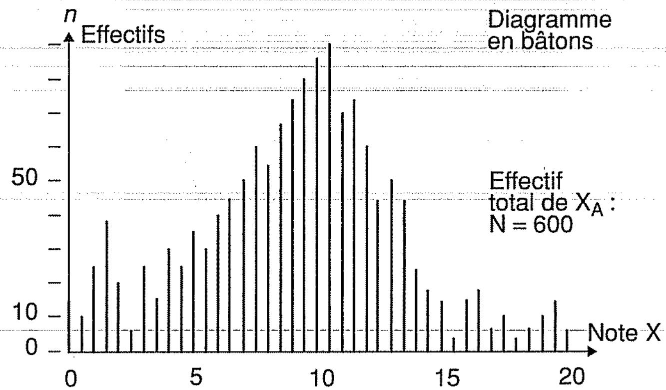
A : Candidats à un examen considérés du point de vue de la note. S'il y a 600 candidats, ils seront répartis sur les 21 notes possibles de 0 à 20. Le caractère est *quantitatif discret.* Série X_A.

B : Salariés d'une entreprise, considérés du point de vue du salaire mensuel en francs. Ils seront répartis en classes de salaire car le caractère est *quantitatif continu* (on ne peut donc pas représenter tous les salaires possibles). Série X_B.

C : Une assemblée nationale de 500 députés, considérée du point de vue des partis. Le caractère est *qualitatif.* Série X_C.

2° Représenter une série à caractère quantitatif discret.

Exemple A : candidats à l'examen.



Note	x_i	0	1	2	3	... 10 ...	19	20
Effectif	n_i	15	8	25	38	... 103 ...	12	6

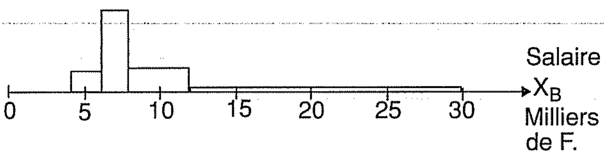
3° Représenter une série à caractère quantitatif continu.

Exemple B : entreprise comptant 120 000 employés

i	Classe de salaire	Effectif	Amplitude	Hauteur
1	[4 000 ; 6 000[	2 600	2 000	1,30
2	[6 000 ; 8 000[	10 500	2 000	5,25
3	[8 000 ; 12 000[	5 700	4 000	1,43
4	[12 000 ; 30 000[	1 200	18 000	0,07

Les aires des rectangles de l'histogramme représentatif sont proportionnelles aux effectifs des classes associées.

Note : les hauteurs n'ont pas de signification concrète.

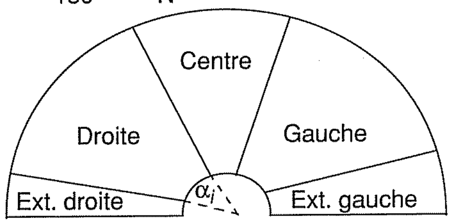


4° Représenter une série à caractère qualitatif.

Camembert ou demi-camembert dont les secteurs angulaires sont proportionnels aux effectifs des classes.

Exemple C : parlement et partis.

α_i est tel que : $\frac{\alpha_i}{180} = \frac{n_i}{N}$ où α_i est l'angle en degrés.



5° Evaluer une série en position (caractères quantitatifs).

On peut résumer les informations d'une série à caractère quantitatif par une valeur centrale :

— soit le *mode* : valeur qui a le plus grand effectif;

— soit la *moyenne arithmétique pondérée* (avec *k* valeurs) :

Série discrète	Série continue
$\bar{x} = \frac{x_1 x_1 + \dots + n_k + x_k}{n_1 + n_2 + \dots + n_k}$.	On nomme C_i les milieux des classes et on applique la même formule :
Formule généralisée :	
$\boxed{\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{i=k} n_k x_k}{\sum_{i=1}^{i=k} n_k}}$	$\boxed{\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{i=k} n_i c_i}{\sum_{i=1}^{i=k} n_i}}$

Exemple B :

$$\bar{x} = \frac{2\,600 \times 5\,000 + 10\,500 \times 7\,000 + 5\,700 \times 10\,000 + 1\,200 \times 21000}{2\,600 + 10\,500 + 5\,700 + 1\,200}$$

On obtient : $\bar{x} = 8\ 435$ F salaire moyen mensuel.

6° Evaluer une série en dispersion (caractères quantitatifs).

Pour résumer l'information concernant les variations des valeurs de la série de part et d'autre de la moyenne, on utilise un indicateur de dispersion :

— soit *l'étendue* : écart entre la valeur la plus élevée et la valeur la plus faible ;

— soit *l'écart type* : lequel est la racine carrée de la variance.

La variance est la moyenne arithmétique pondérée des carrés des écarts $(x_i - \bar{x})$ à la moyenne.

C'est donc : $$\boxed{V(X) = \frac{\sum_{i=1}^{i=k} n_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{i=k} n_i}}$$

qui s'écrit aussi sous la forme : $V(X) = \overline{(x_i^2)} - (\bar{x})^2$.

Exemple B :

$$\overline{(x_i^2)} = \frac{2\ 600 \times 5^2 + 10\ 500 \times 7^2 + 5\ 700 \times 10^2 + 1\ 200 \times 21^2}{2\ 600 + 10\ 500 + 5\ 700 + 1\ 200} = 83{,}94\ .$$

Les calculs ont été simplifiés en utilisant comme unité le millier de francs. La variance est mesurée en carrés d'unités.

On a donc : $V(X) = 83{,}94 - (8{,}44)^2 = 12{,}71\ (kF)^2$

et $\sigma(X) = \sqrt{12{,}71} = 3{,}56$ milliers de franc $(kF)^2$.

L'écart type vaut donc 3 560 F. Il évalue la dispersion de X_B.

7° Utiliser les fréquences cumulées croissantes.

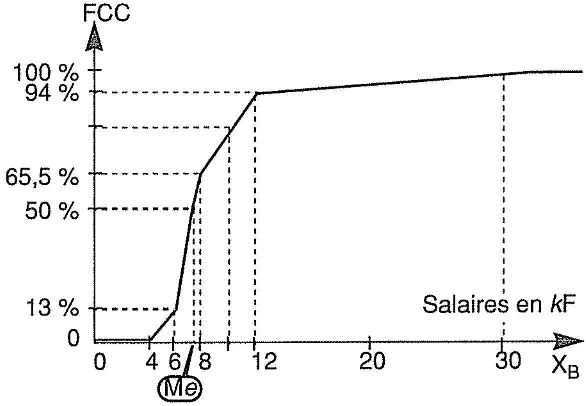
- Evaluons la part de chaque classe de salaire dans l'entreprise.
- Evaluons ensuite pour tout niveau de salaire *x*, la part des salariés qui ont un salaire inférieur ou égal à *x*.
- Dans le premier cas, cette part est la fréquence de la classe n_i :

on a : $f_i = \dfrac{n_i}{\sum_{i=1}^{i=k} n_i}$ c'est-à-dire $f_i = \dfrac{n_i}{N}$.

• Dans le second cas, on accumule les fréquences associées à tous les salaires inférieurs à x. Une interpolation linéaire est nécessaire le plus souvent en cas de calcul précis, sinon la lecture du diagramme associé suffit pour apprécier $p(X \leq x) = \text{FCC}(x)$.

Exemple B :

Classe de salaire $[x_i ; x_i + 1[$	Effectif n_i	Fréquence f_i	Fréquence cumulée croissante
4 000 ; 6 000	2 600	0,130	0,130
6 000 ; 8 000	10 500	0,525	0,655
8 000 ; 12 000	5 700	0,285	0,940
12 000 ; 30 000	1 200	0,060	1,000
N =	30 000		



La recherche de la part des salariés qui gagnent moins de 10 000 F par lecture de ce diagramme : l'image de 10 est : $f = 80$ %.

8° Médiane d'une série statistique continue.

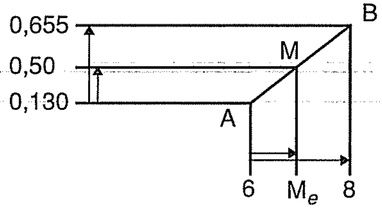
• C'est la valeur du caractère M_e telle que la moitié de la population soit en dessous et l'autre au dessus (du point de vue des valeurs de ce caractère).

Sur le dessin ci-dessus, on lit : $M_e = 6\,700$ F.

• Le calcul plus précis repose sur l'interpolation linéaire entre les points A et B du diagramme des fréquences cumulées croissantes.

• La médiane M_e est l'antécédent de 0,50 par ce diagramme.

Interpolation linéaire entre A *et* B *:* le calcul de M_e repose sur la proportionnalité des écarts des images (FCC) aux écarts de la variable (x).



On a : $$\frac{M_e - 6}{8 - 6} = \frac{0,500 - 0,130}{0,655 - 0,130},$$

c'est-à-dire : $$\frac{M_e - 6}{2} = \frac{0,370}{0,525} = 0,705,$$

d'où $M_e - 6 = 2 \times 0,705$ donc $M_e = 7,410$ *k*F.

Le salaire médian de l'entreprise est 7 410 F par mois.

Cela signifie qu'il y a dans cette entreprise autant d'employés qui gagnent moins de 7 410 F que d'employés qui gagnent plus.

EXERCICES POUR S'ENTRAÎNER

Ce chapitre reprend des connaissances déjà enseignées dans les classes antérieures à la terminale. L'exercice qui suit a pour seul but d'entretenir le patrimoine accumulé et de montrer l'utilisation qui peut en être faite en terminale. Ces notions sont fondamentales dans la compréhension du concret économique. Pour s'entraîner, on pourra avantageusement utiliser ***EXOPOCHE*** de première B.

Exercice :

Ci-dessous, les distributions des employés de deux sociétés concurrentes A et B selon le salaire mensuel :

A — Classes en kF	Effectifs
[4 ; 8 [	450
[8 ; 12 [	600
[12 ; 16 [	1 050
[16 ; 30 [	280
[30 ; 50 [	120

B — Classes en kF	Effectifs
[4 ; 7 [	600
[7 ; 10 [	1 000
[10 ; 15 [	1 000
[15 ; 20 [	300
[20 ; 50 [	100

Un jeune diplômé peut être recruté dans les deux sociétés. Il hésite et fait l'étude comparée de ces deux distributions. On utilisera les calculatrices.

a) Calculer la moyenne et l'écart type de ces deux séries statistiques. Interpréter ces résultats et les comparer : rédiger ceci par des phrases.

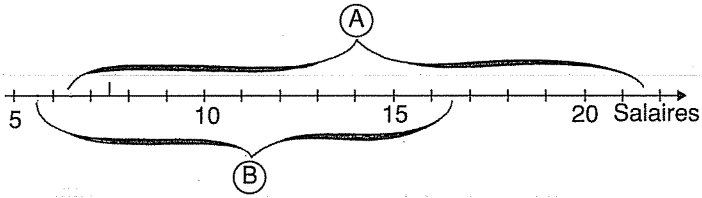
b) Calculer les fréquences cumulées croissantes associées à chacune des deux séries.

Déterminer par le dessin (puis précisez éventuellement par le calcul – si cela est nécessaire...), la société dans laquelle il a le plus de chance de recevoir plus de 18 000 F. On admet que la vitesse de promotion est la même dans les deux firmes.

◆ Solution

a) Comparaison.

Série : salaires de A.	Série : salaires de B.
$\bar{x} = 13{,}856$ kF	$\bar{x} = 11{,}017$ kF
$\sigma_x = 7{,}540$ kF	$\sigma_x = 7{,}540$ kF
Intervalle $I = [\,x - \sigma : x + \sigma\,]$	Intervalle I
$I_A = [6{,}3 \text{ kF} ; 21{,}4 \text{ kF}]$	$I_B = [5{,}3 \text{ kF} ; 16{,}7 \text{ kF}]$
Étendue : 15,1 kF	Étendue : 11,4 kF



Les salaires de la société A sont en moyenne plus élevés que ceux de la société B, et leur dispersion est plus grande.

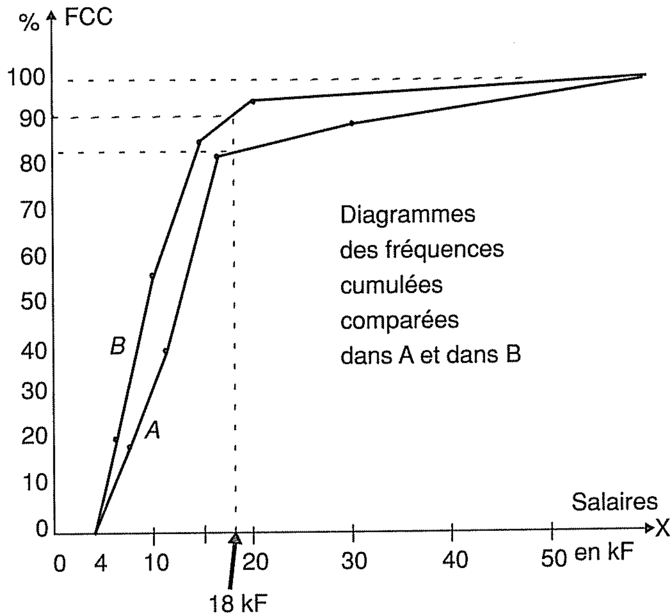
Cependant, les étendues des deux séries sont identiques.

En fait, la majorité des salariés de la société B se situe dans un intervalle de salaire I_B, plus étroit que celui de la société A.

b) Fréquences cumulées croissantes.

	Classes de salaire		Effectifs	Fréquences	Fréquences cumulées
A	4	8	450	0,180	0,180
	8	12	600	0,240	0,420
	12	16	1 050	0,420	0,840
	16	30	280	0,112	0,952
	30	50	120	0,048	1,000
			2 500		

	Classes de salaire		Effectifs	Fréquences	Fréquences cumulées
B	4	7	600	0,200	0,200
	7	10	1 000	0,333	0,533
	10	15	1 000	0,333	0,866
	15	20	300	0,100	0,966
	20	50	100	0,033	0,999 = 1
			3 000		



Les parts des salariés qui reçoivent plus de 18 000 F par mois sont : 100 – 92 = 8 % pour la société B et 100 – 86 = 14 % pour A.

Donc c'est dans la société A qu'il a la plus grande probabilité d'atteindre un salaire au moins égal à cette somme.

11 MATHÉMATISATION : MODÈLES LINÉAIRES à n VARIABLES ($n = 1, 2, 3$).

CE QU'IL FAUT RETENIR

1° Les droites et les fonctions à une variable de degré 1.

Exemple : le salaire mensuel d'un vendeur est la somme d'une partie fixe 4 000 F et d'une partie proportionnelle au montant des ventes qu'il réalise : 300 F par 10 000 F vendus.

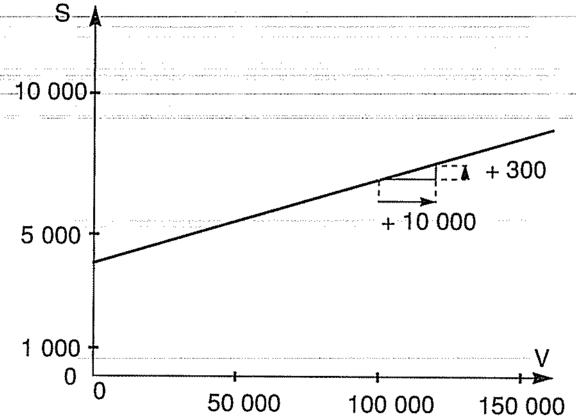
La forme algébrique du salaire S en fonction du montant des ventes V est donc :

$$\boxed{S(V) = 4\,000 + 0{,}03 \,.\, V}$$

où V et S sont exprimés en francs.

• La variable S est fonction affine de la variable V ou encore S est l'image de V par une fonction de type : $x \mapsto ax + b$.

• Graphiquement : la courbe représentative de cette fonction est la droite (D).



— de coefficient directeur $\boxed{a = 0{,}03}$: pour 100 F de vente, il reçoit 3 F.

— d'ordonnée à l'origine $\boxed{b = 4\ 000}$: si la vente est nulle, il reçoit 4 000 F.

2° Inéquations à une inconnue de degré 1.

Exemple : le niveau de vente à partir duquel son salaire dépassera 8 000 F résulte de la résolution de l'inéquation $S \geq 8\ 000$ soit $4\ 000 + 0{,}03 \cdot V \geq 8\ 000$.

Graphiquement :

• S = 8 000 est représenté par la droite (Δ) parallèle à l'axe (0x) d'ordonnée 8 000 pour toute abscisse :

c'est la traduction géométrique de la fonction constante S(V) = 8 000.

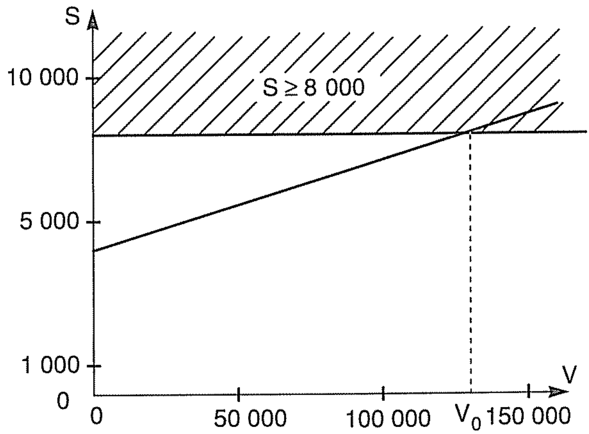
• $S \geq 8\ 000$ est représenté par le demi-plan (P) bordé par (Δ) comportant tous les points qui sont au-dessus de (Δ).

• On lit une valeur approchée de la solution de l'inéquation en prenant l'abscisse V_0 du point d'intersection des deux droites (D) et (Δ).

- Pour $V \geq V_0$ on a $S \geq 8\ 000$.
- Le calcul fournit une valeur précise de V_0 :

$$0,03 \cdot V \geq 4\ 000$$

équivaut à : $V \geq \dfrac{4\ 000}{0,03}$ soit : $V \geq 133\ 333$ F



3° Les droites et les fonctions à deux variables de degré 1.

Exemple : le budget "boisson" d'un ménage s'élève à 300 F pour le mois. Il est consacré à l'achat exclusif d'eau minérale à 2 F la bouteille de 1,5 litre et de bière à 6 F la bouteille de 33 cl. Les combinaisons d'achats possibles sont nombreuses.

Quelques exemples qui épuisent exactement le budget :

Nombres bouteilles	Eau n_e	150	147	144	...	120	...	36	...	12	...	0
	Bière n_b	0	1	2	...	10	...	28	...	46	...	50

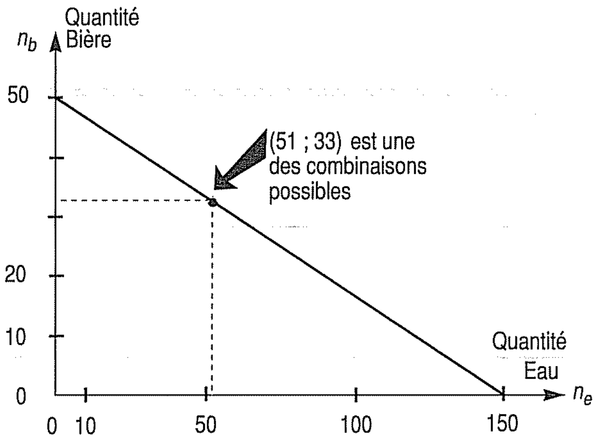
Mais le couple (50 ; 33) ne convient pas, car 50 x 2 + 33 x 6 = 298 n'est pas égal à 300 et (50 ; 34) ne convient pas non plus.

Graphiquement : tous les points associés à l'équation $\boxed{2n_e + 6n_b = 300}$ appartiennent à un segment d'une droite $\mathcal{D}_1$.

Elle passe par les points : A(150 ; 0) et B(0 ; 50).

Son coefficient directeur est un réel m, tel que : $6n_b = -2n_e + 300$,

soit $n_b = -\dfrac{1}{3}n_e + 50$, d'où $m = -\dfrac{2}{6} = -\dfrac{1}{3}$.



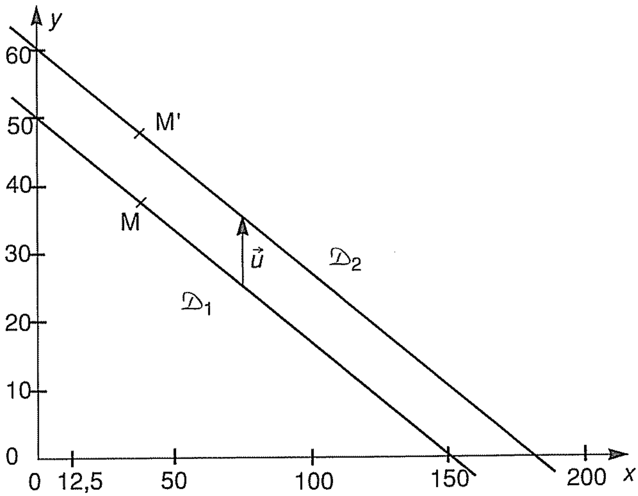
> Si les variables x et y sont réelles, alors l'ensemble des points M(x ; y) tels que $ax + by = c$ est une droite de coefficient directeur $-\dfrac{a}{b}$; d'ordonnée à l'origine $\dfrac{c}{b}$.

4° Translation : droites parallèles.

Exemple : le budget boisson de ce ménage s'accroît de 60 F par mois. Les couples de consommation possibles vérifient désormais l'équation :

$$\boxed{2n_e + 6n_b = 360}.$$

Ils appartiennent à une droite $\mathcal{D}_2$ parallèle à $\mathcal{D}_1$. En effet, le coefficient directeur est : $m = -\dfrac{2}{6}$, mais l'ordonnée à l'origine est passée de $\dfrac{300}{6} = 50$ à l'ordonnée $\dfrac{360}{6} = 60$.



On passe de la droite $\mathcal{D}_1$ à la droite $\mathcal{D}_2$ par une translation de vecteur $\vec{u} = 0\vec{i} + 10\vec{j}$.

• Si les variables initiales sont notées $(x\,;\,y)$ alors les nouvelles $(X\,;\,Y)$ sont telles que : $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$,

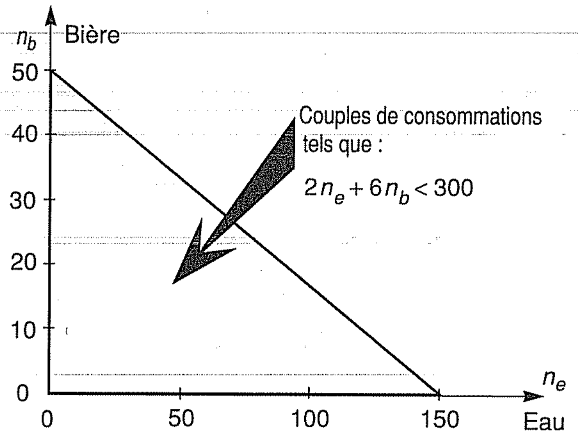
c'est-à-dire : $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{MM'}$ ou encore $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + \vec{u}$

où l'on a : $M(x\,;\,y)$; $M'\,(X,Y)$ et $\vec{u}\,(0\,;\,10)$ donc : $\begin{cases} X = x + 0 \\ Y = y + 10 \end{cases}$

L'équation $2x + 6y = 300$ se transforme en écrivant $x = X$ et $y = Y - 10$; elle devient $2X + 6Y = 360$.

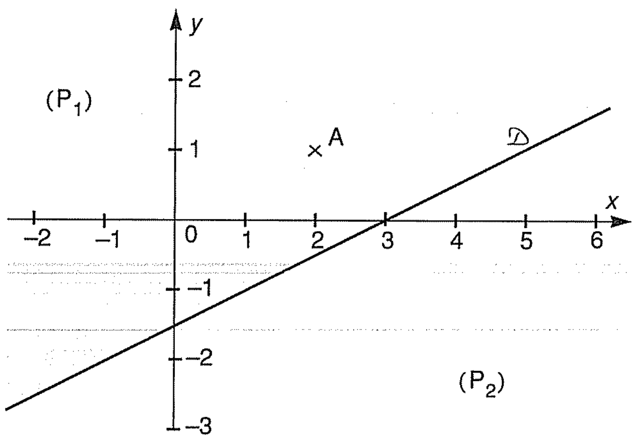
5° Inéquations à deux inconnues de degré 1.

Exemple : dans tous les cas où le ménage n'épuise pas le budget de 300 F affecté à la boisson, on obtient des points du demi-plan bordé par $\mathcal{D}_1$ inférieur à $\mathcal{D}_1$.



D'une façon plus générale, une droite sépare le plan en deux demi-plans, l'un est associé à l'inéquation $ax + by > c$, l'autre est associé à l'inéquation $ax + by < c$.

> Si les variables x et y sont réelles, l'ensemble des points M $(x\,;\,y)$ tels que $ax + by > c$ est l'un des deux demi-plans dont la frontière est la droite d'équation $ax + by = c$.



Pour déterminer lequel est solution : choisir un point au hasard et le tester.

Exemple : $2x - 4y < 3$ dans $\mathbb{R}^2$.

• La frontière est la droite $\mathcal{D}$ d'équation $2x - 4y = 3$.

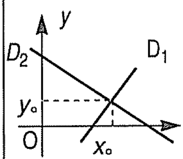
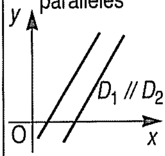
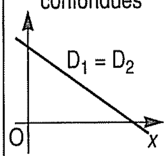
• Choisissons par exemple le point A (2 ; 1) et substituons ses coordonnées dans l'inéquation $2x - 4y < 3$, elle devient : $2 \times 2 - 4 \times 1 < 3$, c'est-à-dire $0 < 3$. Cette inégalité est vraie donc tous les points au-dessus de $\mathcal{D}$ sont solutions. $2x - 4y < 3$ est caractérisé par P_1 grisé.

6° Intersections de droites : systèmes de deux équations à deux inconnues.

• On peut résoudre le système $(S) \left\{ \begin{array}{l} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{array} \right|$ dans $\mathbb{R}^2$,

en utilisant la méthode de substitution, ou la méthode de combinaison ou bien même les deux. (Voir exercices.)

• Trois cas sont possibles qui correspondent aux trois configurations possibles de deux droites D_1 et D_2 et donc à trois cas algébriques distincts, caractérisés par les relations entre les six coefficients.

Nombre de solutions dans $\mathbb{R}^2$	Un seul couple $(x_\circ,\ y_\circ)$	Aucun couple	Tous les couples d'une droite
Configurations géométriques du plan P	droites sécantes 	droites parallèles 	droites confondues 
Relations entre coefficients	$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$	$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$
Signification analytique	• pentes distinctes (en effet : $-\frac{a_1}{b_1} \neq -\frac{a_2}{b_2}$)	• pentes égales • ord. à l'origine distinctes	• pentes égales • ord. à l'origine égales

7° Systèmes de trois équations à trois inconnues de degré 1.

Ce sont les systèmes qui peuvent se mettre sous la forme

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3. \end{cases}$$

• On peut parfois résoudre un tel système par combinaisons et substitutions, mais le plus souvent on a recours à une méthode systématique : dite méthode d'élimination de Gauss. Cette méthode repose sur une propriété :

On obtient un système équivalent en remplaçant une ligne L_i par toute combinaison du type aL_i+bL_j où a et b sont des réels et L_j une autre ligne du système.

On vise l'objectif de ramener le système initial à un système équivalent triangulaire comme indiqué ci-dessous.

Exemple : soit à résoudre

$$(S)\begin{cases} 2x+3y-4z=12 \\ x+3y+\ \ z=6 \\ -x-2y+3z=-8 \end{cases}$$

par la méthode systématique dans $\mathbb{R}^3$.

• Eliminons les termes $\boxed{x}$ à la ligne 2 (L_2) et $\boxed{-x}$ à la ligne 3(L_3) :

$$\text{ainsi}\quad \begin{array}{l|} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2-\frac{1}{2}L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3+\frac{1}{2} \end{array}\ \text{on obtient}\ \begin{cases} 2x+3y-4z=12 \\ \frac{3}{2}y+3z=0 \\ -\frac{1}{2}y+z=-2 \end{cases}$$

• Revenons à des coefficients entiers pour plus de facilité,

$$\text{ainsi}\quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow 2L_2 \\ L_3 \leftarrow 2L_3 \end{array}\qquad \begin{cases} 2x+3y-4z=12 \\ 3y+6z=0 \\ -y+2z=-4 \end{cases}$$

• Eliminons le terme $\boxed{-y}$ à la ligne 3,

ainsi $\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 + \frac{1}{3}L_2 \end{array}$ $\left\{\begin{array}{r} 2x+3y-4z = 12 \\ 3y+6z = 0 \\ 4z = -4 \end{array}\right.$ système triangulaire recherché.

• On achève la résolution en partant de la ligne 3 : en effet $z=-1$, substitué dans la ligne 2, permet d'écrire : $3y=-6z=6$, d'où $y=2$.

Enfin $z=-1$ et $y=2$, substitués dans la ligne 1, permettent de calculer : $2x=-3y+4z+12=-6-4+12=2$ soit $x=1$.

• Le système (S) admet un seul triplet de $\mathbb{R}^3$ pour solution, c'est : $(1 ; 2 ; -1)$.

Note : un système 3×3 peut n'admettre aucune solution ; ou bien une infinité.

EXERCICES POUR S'ENTRAÎNER

1° Les vendeurs d'une société ont le choix entre trois formules de rémunération mensuelle :

A – soit un fixe de 11 000 F ;

B – soit une partie fixe de 6 000 F et une partie proportionnelle aux ventes réalisées par ce vendeur à raison de 4 % de celles-ci ;

C – soit entièrement en fonction des ventes à raison de 7 % de celles-ci.

a) Calculer le salaire mensuel correspondant à un montant de ventes de 120 000 F par chacune des trois formules.

b) Exprimer algébriquement les trois formules : on notera x le montant des ventes, et respectivement $A(x)$; $B(x)$; $C(x)$ les salaires associés, exprimés en francs.

c) Déterminer graphiquement quel sera le choix salarial d'un vendeur chevronné, d'un vendeur débutant. Justifiez votre réponse. Précisez les bornes par le calcul.

2° On donne le barême d'impôt caractérisé par le revenu imposable R et le taux d'imposition de la dernière tranche *i* ainsi :

Tranche n^o	Tranche de revenu. R	Taux d'imposition. *i*
1	[0 ; 20 000 [	0 %
2	[20 000 ; 35 000 [	10 %
3	[35 000 ; 45 000 [	20 %
4	[45 000 ; 50 000 [	30 %

a) Calculer l'impôt correspondant à un revenu de 37 000 F pour un célibataire. (Il paie une part.)

b) Exprimer l'impôt I en fonction du revenu sur l'intervalle [0 ; 50 000 [: on tiendra compte des tranches pour la définir.

c) Représenter graphiquement cette fonction.

3° Un fabricant de boissons sucrées dispose de 1 500 litres de sirop à répartir entre la boisson A qui contient 20 cl par bouteille et la boisson B qui contient 30 cl par bouteille.

En outre, il ne peut vendre plus de 4 500 bouteilles de A et plus de 6 000 bouteilles de B sur la période correspondante.

a) Ecrire les contraintes qui pèsent sur le nombre x de bouteilles de A et le nombre y de bouteilles de B sous forme d'inégalités à une ou à deux inconnues.

b) Représenter graphiquement l'ensemble des solutions. Les coordonnées des points possibles sont-elles réelles ou entières ?

4° Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

$$S_1 \begin{cases} 3x - 7y = 1 \\ 5x + 2y = 29 , \end{cases}$$

$$S_2 \begin{cases} x - 3y = -7 \\ -2x + 6y = 14 , \end{cases}$$

$$S_3 \begin{cases} u - 2v = \dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2}u + v = \dfrac{1}{4}\ , \end{cases}$$

$$S_4 \begin{cases} 2a + b = 7 \\ 3a - 5b = 4\ , \end{cases}$$

$$S_5 \begin{cases} 2\ 000x + 700y = 3\ 500 \\ 1\ 500x - 350y = 1\ 000\ , \end{cases}$$

$$S_6 \begin{cases} 0,6x + 0,2y = 5 \\ -0,1x + y = -3,2\ . \end{cases}$$

5° Résoudre les systèmes suivants dans $\mathbb{R}^3$ par la méthode d'élimination de Gauss.

$$(S_1) \begin{cases} 5x + 2y + 3z = 32 \\ 2x + 4y + 3z = 28 \\ 7x + 6y + 4z = 52\ , \end{cases}$$

$$(S_2) \begin{cases} x + y + 2z = 9 \\ 2x - 2y + 3z = 7 \\ 3x + y - 5z = -10\ , \end{cases}$$

$$(S_3) \begin{cases} 2x + 12y + 17z = 53 \\ x + 5y + 7z = 22 \\ 3x + 22y + 19z = 35\ . \end{cases}$$

6° Le personnel d'une entreprise est composé d'hommes et de femmes. L'entreprise emploie 107 personnes. Si elle embauche 8 femmes de plus, alors la composition de femmes représente les 40% de l'effectif total.

Quelle est la composition du personnel de cette entreprise ?

◈ Solution

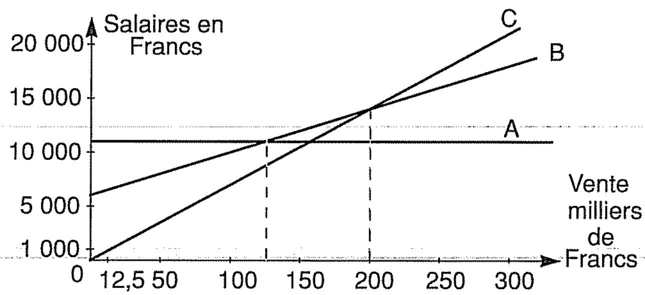
1° *a)* Pour une vente mensuelle de 120 000 F, le vendeur rétribué à la formule A reçoit : 11 000 F, à la formule B reçoit : 6 000 + 4 800 = 10 800 F ; à la formule C reçoit : 8 400 F.

b) $A(x) = 11\ 000$: fonction constante.

$B(x) = 6\ 000 + 0{,}04.x$: fonction affine.

$C(x) = 0{,}07.x$: fonction linéaire.

c) Traçons les trois droites associées aux trois fonctions.



• Le vendeur chevronné, assuré de faire un gros "chiffre" de vente, choisira la formule C parce qu'elle lui permet d'atteindre un salaire à partir d'un montant $V_C = 200\ 000$ F.

• Le vendeur débutant, qui n'est pas assuré de réaliser un gros montant de vente, choisira le salaire fixe de façon à assurer un minimum de 11 000 F par mois. Ceci sera intéressant pour lui jusqu'à un montant $V_D = 125\ 000$ F.

• Les valeurs exactes sont telles que :

$$0{,}07\,x = 6\ 000 + 0{,}07\,x, \text{ d'où : } V_C = \frac{6\ 000}{0,\ 03} = 200\ 000 \text{ F}.$$

$$11\ 000 = 6\ 000 + 0{,}04\,x, \text{ d'où : } V_D = \frac{5\ 000}{0{,}04} = 125\ 000 \text{ F}.$$

2° *a)* Si R = 37 000, un célibataire qui paie une part entière aura un impôt calculé sur trois "tranches" :

• $I_1 = 0$ pour la première tranche de 20 000 F (complète).

- $I_2 = 15\,000 \times 0{,}10 = 1\,500$ F pour la seconde (complète).
- $I_3 = \;\; 2\,000 \times 0{,}20 = 400$ F pour la dernière (non complète).

Soit $I = I_1 + I_2 + I_3 = 1\,900$ F.

Note : son taux moyen d'imposition est $\dfrac{1\,900}{37\,000} = 0{,}051$, soit 5,1 % et son taux marginal est 20 % car c'est celui de la dernière tranche qui le frappe.

b) • Si $R \in [0\,;\,20\,000\,[$, alors $I = 0$.

• Si $R \in [20\,000\,;\,35\,000\,[$, alors $I = 0{,}10 \times (R - 20\,000)$,

c'est-à-dire : $\boxed{I = 0{,}10.R - 2\,000}$.

• Si $R \in [35\,000\,;\,45\,000\,[$, alors les deux premières tranches sont complètes, donc il paye la seconde en entier : $I_2 = 15\,000 \times 0{,}10 = 1\,500$ et une partie de la troisième : $I_3 = 0{,}20 \times (R - 35\,000) = 0{,}20\,R - 7\,000$,

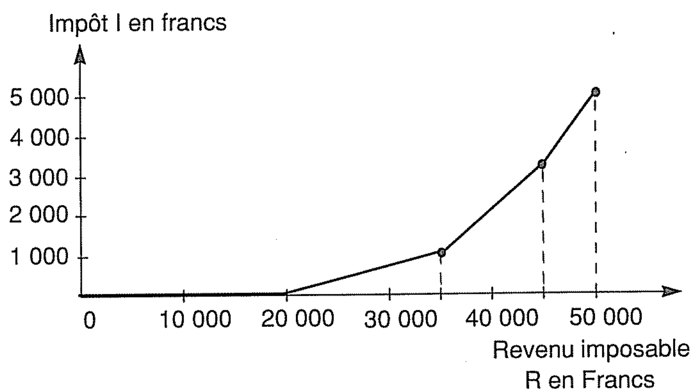
d'où : $I = I_2 + I_3 =$ $\boxed{0{,}20.R - 5\,500 = I}$.

• Si $R \in [45\,000\,;\,50\,000\,[$, on a : $I_2 = 1\,500$; $I_3 = 2\,000$ et $I_4 = 0{,}30 \times (R - 45\,000) = 0{,}30R - 13\,500$,

d'où un total $\boxed{I = 0{,}30.R - 10\,000}$.

C'est donc une fonction affine par morceaux ; il y a quatre segments car elle est définie en quatre intervalles.

La pente de chacun d'eux est le taux d'imposition de la tranche considérée.



3° ***a)*** Soit x litres de A et y litres de B. Il y a trois contraintes.

L'une sur le sirop : $0,20 \cdot x + 0,30 \cdot y \leq 1\,500$. (1)

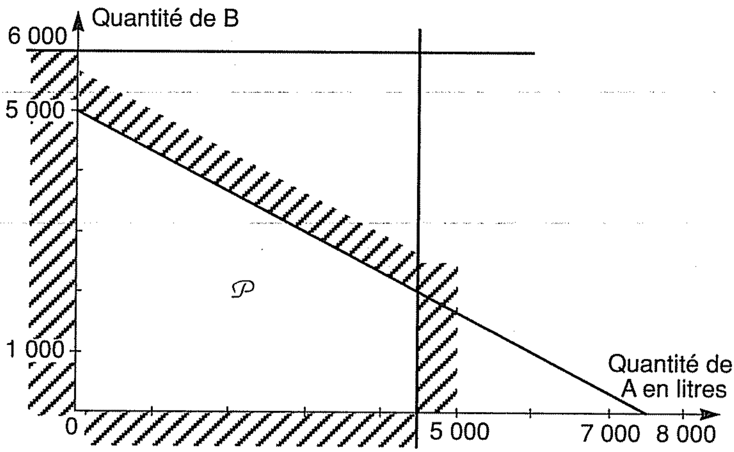
L'une sur la vente de A : $0 \leq x \leq 4\,500$. (2)

L'autre sur la vente de B : $0 \leq y \leq 6\,000$. (3)

b) La frontière de (1) est la droite D_1 d'équation :
$2x + 3y = 15\,000$, elle passe par : $M(0\,;\,5\,000)$ et $N(7\,500\,;\,0)$.

Les frontières de (2) sont les deux verticales ($x = 0$) et ($x = 4\,500$).

Les frontières de (3) sont les deux horizontales ($y = 0$) et ($y = 6\,000$).



D'où la zone des possibles à l'intérieur du polygone délimité par les quatre droites : $\mathcal{P}$.

L'une des contraintes est en effet inopérante compte tenu des précédentes coordonnées entières.

4° Systèmes de deux équations à deux inconnues du premier degré.

• (S_1) a une solution unique dans $\mathbb{R}^2$: le couple (5 ; 2).

• (S_2) a une infinité de couples solutions dans $\mathbb{R}^2$, ce sont les couples (x ; y) tels que $x - 3y = -7$ par exemple.

• (S_3) équivaut à : $\left\{\begin{array}{l} 2u-4v = 1 \\ 2u-4v = -1 \end{array}\right|$ ce qui est contradictoire,

donc il n'y a aucune solution dans $\mathbb{R}^2$.

• (S_4) a un couple solution (3 ; 1).

• (S_5) se simplifie en $\left\{\begin{array}{ll} 200x+70y = 350. & (1) \\ 150x-35y = 100. & (2) \end{array}\right.$

On peut combiner $\left\{\begin{array}{l} 200x+70y = 350 \\ 300x-70y = 200 \end{array}\right.$

En additionnant : $500x = 550$ donc $x = \dfrac{11}{10} = 1{,}1$.

On en déduit y par : $70y = 350 - 200 \times 1{,}1 = 130$,

d'où : $y = \dfrac{13}{7} = 1{,}857$. D'où : $S = \left\{ \left(\dfrac{11}{10} ; \dfrac{13}{7}\right) \right\}$.

• (S_6) se simplifie en $\left\{\begin{array}{ll} 6x+2y = 50. & (1) \\ -x+10y = -32. & (2) \end{array}\right.$

Combinons : $\left| \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow 6 \times L_2 \end{array} \right. \quad \left\{\begin{array}{l} 6x+2y = 50 \\ -6x+60y = -192. \end{array}\right.$

En additionnant : $62y = -142$ d'où $y = \dfrac{71}{31} = 2{,}290$.

On en déduit x par : $x = 10y + 32$ soit $x = \dfrac{710}{31} + 32$,

c'est-à-dire $x = \dfrac{710+992}{31} = \dfrac{1\,702}{31} = 54{,}903$.

Donc une seule solution, le couple $\left(\dfrac{1\,702}{31} ; \dfrac{71}{31}\right)$.

5° Méthode de Gauss

• Détail de la première résolution :

$$\begin{cases} 5x+2y+3z=32 \\ 2x+4y+3z=28 \\ 7x+6y+4z=52 \end{cases} \quad \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{5}L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2 \\ L_3 \leftarrow \frac{1}{7}L_3 \end{array} \begin{cases} x+\frac{2}{5}y+\frac{3}{5}z=\frac{32}{5} \\ x+2y+\frac{3}{2}z=14 \\ x+\frac{6}{7}y+\frac{4}{7}z=\frac{52}{7} \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array} \begin{cases} x+\frac{2}{5}y+\frac{3}{5}z=\frac{32}{5} \\ \frac{8}{5}y+\frac{9}{10}z=\frac{38}{5} \\ \frac{16}{35}y-\frac{1}{35}z=\frac{36}{35} \end{cases} \text{ d'où } \begin{cases} 5x+2y+3z=32 \\ 16y+9z=76 \\ 16y-z=36 \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 \\ L_2 \leftarrow L_2 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \end{array} \begin{cases} 5x+2y+3z = 32 \\ 16y+9z = 76 \\ -10z = -40 \end{cases}$$

, il est clair que $z=4$.

Dans L_2 on obtient alors : $16y=76-9z=40$,

d'où $y = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$.

Dans L_1 on obtient enfin : $x = -\frac{2}{5}y-\frac{3}{5}z+\frac{32}{5} = \frac{15}{5} = 3$.

D'où un triplet solution dans $\mathbb{R}^3$ $S = \left\{ \left(3 \; ; \; \frac{5}{2} \; ; \; 4\right) \right\}$.

• Solutions de (S_2) : le seul triplet (1 ; 2 ; 3).
• Solutions de (S_3) : le seul triplet (2 ; – 3 ; 5).

6° Soit x, le nombre d'hommes et y, le nombre de femmes. Traduisons l'énoncé en algèbre, cela donne deux équations :
• Total du personnel : $x + y = 107$. (1)
• Fiction : $y + 8 = 0{,}40\ x\,(x + y + 8)$. (2)

Développons (2) : $y + 8 = 0{,}4\ x + 0{,}4y + 3{,}2$.

D'où le système à résoudre $\begin{cases} x + y = 107 \\ 0{,}4x - 0{,}6y = 4{,}8. \end{cases}$

On trouve : $x = 69$ et $y = 38$. On peut vérifier alors l'énoncé.

12 MATHÉMATISATION : OPTIMISER SOUS CONTRAINTES

CE QU'IL FAUT RETENIR

1° **Un problème de programmation linéaire** se pose lorsqu'il s'agit de produire deux biens à l'aide de deux, trois ou quatre facteurs économiques, dont les quantités disponibles sont limitées. Il y a production sous contraintes.

Exemple : une usine fabrique deux sortes de pièces p_A et p_B à l'aide de deux types de machines m_E et m_F.

Chacune des pièces doit passer successivement sur les deux machines dans n'importe quel ordre pendant les temps ci-dessous.

	m_E	m_F
p_A	50	20
p_B	25	60

Les machines m_E sont disponibles 3 700 minutes par jour et les machines m_F le sont 3 180 minutes par jour.

2° Traduction algébrique des contraintes.

Choisissons pour variables x le nombre de pièces p_1,
y le nombre de pièces p_2,
fabriquées chaque jour par cette unité de production.

- Le nombre x est entier positif : $x \in \mathbb{N}$.
- Le nombre y est entier positif : $y \in \mathbb{N}$.
- L'usinage de x pièces p_A sur la machine m_E prend $(50x)$ minutes et de y pièces p_B sur m_E prend $(25y)$ minutes.

Or le temps maximal d'utilisation de m_E chaque jour est 3 700, donc on a $50x + 25y \leq 3\,700$.

De la même manière, l'utilisation de m_F pour l'usinage de p_A et de p_B est soumis à : $20x + 60y \leq 3\,180$.

3° Traduction graphique des contraintes.

- Chacune des quatre inéquations à deux inconnues se traduit dans le plan par un demi-plan solution. (Voir chapitre précédent.)
- Leur intersection est le polygône des productions réalisables ou polygône $\mathcal{P}$ des programmes $(x\,;\,y)$ possibles.

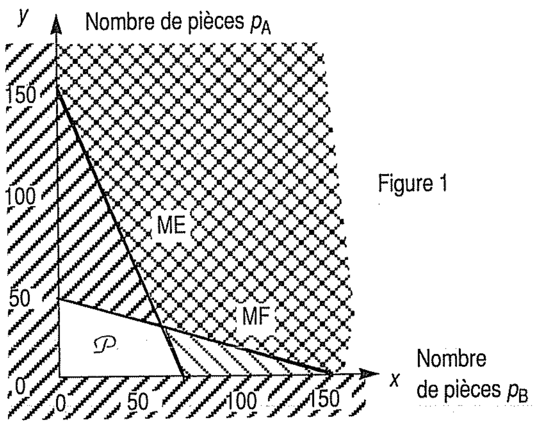


Figure 1

Légende : sont hachurées les zones non-réalisables.

4° Expression d'une fonction d'objectif économique.

Exemple : l'objectif est ici de réaliser un bénéfice maximal sachant que le gain réalisé sur la vente d'une pièce p_A est 125 F et que le gain unitaire sur p_B est 100 F.

• La fonction d'objectif est B $(x\,;y) = 125\,x + 100\,y$, puis x unités p_A engendrent un bénéfice 125•x en Francs.

• Si l'entreprise se fixe un objectif de 6 000 F pour la journée , les productions qui le réalisent sont les couples $(x\,;\,y)$ de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ qui appartiennent au polygône $\mathcal{P}$. Ils appartiennent à la droite Δ_1 d'équation : $125x + 100y = 6\,000$. (Voir figure 2.)

• Si l'entreprise se fixe un objectif de 8 000 F, les points sont sur la droite Δ_2 d'équation : $125x + 100y = 8\,000$. (Figure 2.)

5° Maximisation de la fonction d'objectif à deux variables.

Lorsque le bénéfice total de la journée augmente, les droites Δ sont parallèles et leur ordonnée à l'origine augmente. Le point I de la figure 2 ci-dessous est ici celui qui appartient à $\mathcal{P}$ et qui autorisera un bénéfice maximal.

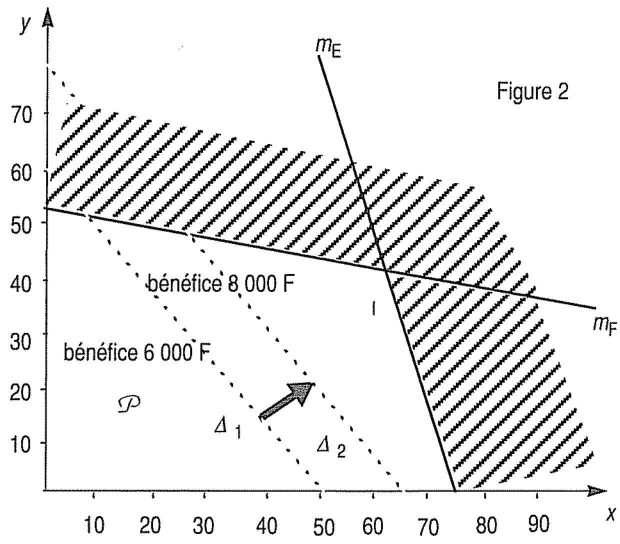


Figure 2

Ses coordonnées sont celles de l'intersection des droites (m_E) et (m_F).

On a donc : $\begin{cases} 50x+25y = 3\,700 \\ 20x+60y = 3\,180 \end{cases}$ de solution : $(x\,;y) = (57\,;34)$.

Il convient, car ses coordonnées sont entières. Si tel n'était pas le cas, il aurait fallu un point proche à coordonnées entières dans $\mathcal{P}$.

6° Maximum de la fonction d'objectif.

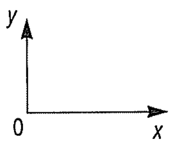
Il est réalisé par le couple (57 ; 34) ; il vaut :
B (57 ; 34) = 125 x 57 + 100 x 34 = 10 525 F pour la journée.

7° Remarques générales.

• Le meilleur sommet du polygône du point de vue de la fonction d'objectif peut être dans certains cas sur l'un des deux axes.

• La fonction d'objectif est parfois un coût à minimiser.

• Les contraintes $x \geq 0$ et $y \geq 0$ sont presque toujours imposées par le contexte économique. Elles se traduisent par le fait que le polygône $\mathcal{P}$ est inclus dans le premier quadrant



8° La marche à suivre...

Les étapes de la méthode graphique sont bien déterminées ; résumons-les :

1 – Choisir les inconnues.

2 – Ramener les données à un tableau croisant les biens et les facteurs.

3 – Traduire les contraintes en inéquations.

4 – Représenter chaque inéquation (à deux inconnues du 1er degré) par un demi plan.

5 – Déterminer le polygône des productions possibles.

6 – Recherche du sommet qui réalise l'objectif.

7 – Calculer le profil maximal ou le coût minimal.

8 – Rechercher éventuellement à récupérer les facteurs non totalement employés.

EXERCICES POUR S'ENTRAÎNER

1° Résoudre graphiquement le système ci-contre de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$(S)\begin{cases} x-2y+2 \leq 0 \\ x+y+1 \leq 0 \\ x-2 \leq 0 \end{cases}$$

2° ***a)*** Déterminer l'ensemble D des points du plan dont les coordonnées sont solutions du système ci-contre de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$$(S_3)\begin{cases} x+y \leq 1 \\ x-y \geq -1 \\ x-y \leq 1 \end{cases}$$

b) Parmi les points de l'ensemble D, déterminer ceux qui maximisent la fonction définie par :
$F(x\,;\,y) = x + 2y$. Résoudre par lecture du dessin.

c) On pose la même question pour : $G(x\,;\,y) = 2x + y$.

d) Minimiser la fonction F sous le système de contrainte (S_3).

3° ***a)*** Traduire graphiquement le système de contraintes ci-contre,

$$(C)\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ 5x+2y \leq 20 \\ x+y \leq 7 \\ x-y \leq 2 \end{cases}$$

avec $x \in \mathbb{R}$; $y \in \mathbb{R}$.

b) Maximiser la fonction définie par $H(x\,;\,y) = x + y$ sous le système de contraintes (C). On lira le dessin.

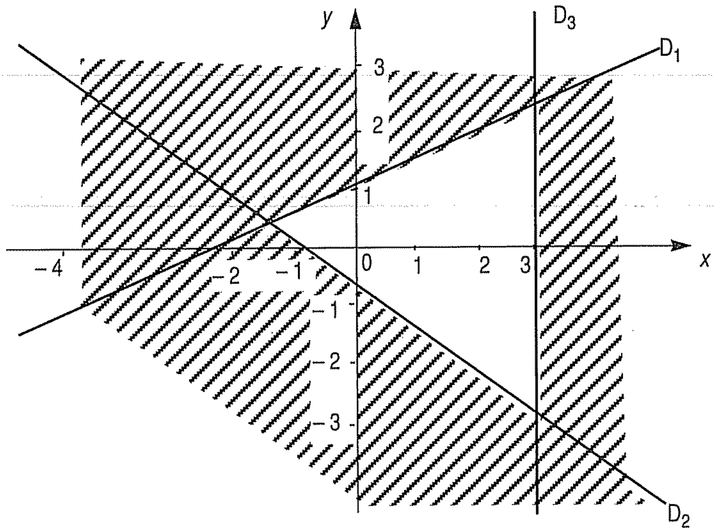
◆ Solution

1° $x-2y+2 \leq 0$ équivaut à $x-2y \leq -2$, on reconnaît une inéquation à deux inconnues.

• Les solutions sont les couples (x, y) associés aux points d'un demi-plan bordé par la droite (D_1) d'équation : $x-2y=-2$.

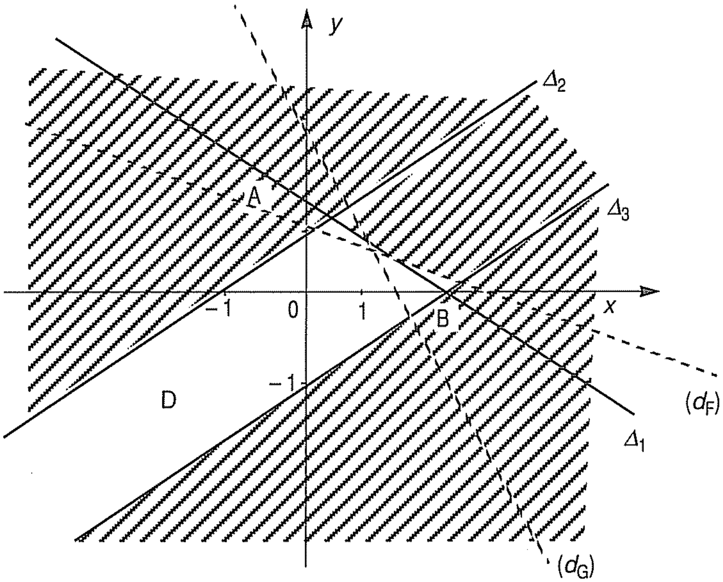
• Le point A(1 ; 1) vérifie l'inéquation, donc c'est le demi-plan inférieur à (D_1) qui convient, car il contient le point A.

• Les autres demi-plans sont obtenus de façon semblable.



2° ***a)*** Trois raisonnements de même type aboutissent à l'ensemble D ci-dessous (non hachuré), en nommant Δ_1 Δ_2 Δ_3 les trois frontières associées respectivement aux trois équations

$$\begin{cases} x+y = 1 \\ x-y = -1 \\ x-y = 1 \end{cases}$$



b) La pente des droites associées aux équations $F(x\,;\,y) = \text{Cste}$ est telle que : $2y = -x + \text{Cste}$, donc $y = -\dfrac{1}{2}x + k$.

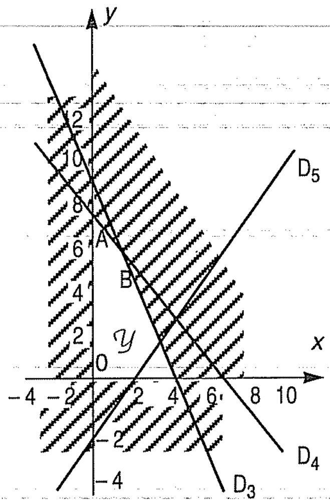
La droite (d_F) est l'une d'entre elles. Le sommet qui maximise F est donc le point A de coordonnées (0 ; 1) (obtenu par lecture).

c) La pente des droites associées aux équations $G(x\,;\,y) = \text{Cste}$ est -2. La droite (d_G) est l'une d'elles. Le sommet qui maximise G est donc le point B de coordonnées (1 ; 0) (par lecture).

d) Par lecture du dessin il apparaît que l'on pourra dessiner toutes les parallèles à (d_F) dont l'ordonnée à l'origine est inférieure à celle de (d_F).

La fonction F n'admet pas de minimum dans D.

3° ***a)*** On obtient l'ensemble des couples solutions dans $\mathbb{R}^2$ par l'intérieur du polygône ci-dessous. Nommons-le $\mathcal{Y}$.



b) Les droites associées aux équations de type $x + y = k$ sont parallèles à la droite frontière D_4. Celle qui a la plus forte ordonnée à l'origine et qui a des points communs avec la region $\mathcal{Y}$ du plan est $x + y = 7$.

Tous les points du segment [AB] avec A(0 ; 7) et B(2 ; 5) maximisent la fonction H.

PROBLÈME CORRIGÉ

Ce chapitre reprend un procédé déjà enseigné dans les classes antérieures à la terminale. Un seul problème sera proposé, il s'agit d'un bac B récent : c'est donc un thème possible au baccalauréat.

Les lecteurs qui souhaitent s'entraîner plus peuvent refaire le problème utilisé en exemple ou utiliser le livre ***EXOPOCHE*** de première B. L'intérêt économique de ce chapitre est évident. Le sujet de bac qui suit est un peu naïf sur le plan économique, mais il vous guide très bien sur le plan mathématique : suivez-le.

Problème

◆ Énoncé

Un marchand de glaces vend des glaces en cornet, les unes à une boule, les autres à deux boules. Le but du problème est de déterminer le bénéfice maximal qu'il peut espérer faire en un jour, compte tenu de la quantité de crème glacée et du nombre de cornets dont il dispose.

On désignera par P un plan rapporté à un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

1° On note x le nombre de cornets à une boule et y le nombre de cornets à deux boules vendus en un jour par le marchand.

a) Le bénéfice réalisé est de 1 F pour un cornet à une boule et de 2,50 F pour un cornet à deux boules. Quel est le bénéfice $f(x, y)$ réalisé en un jour ?

b) A l'aide d'inégalités faisant intervenir x et y, exprimer chacune des conditions suivantes :

i. Chaque jour, le marchand dispose de 60 cornets prévus pour une boule.

ii. Chaque jour, le marchand dispose de 60 cornets prévus pour deux boules.

iii. Le marchand vend au plus 100 cornets par jour.

iv. Le marchand dispose d'une quantité de crème glacée lui permettant de faire 150 boules par jour.

2° L'objet de la question est de procéder à des représentations graphiques.

Elles seront exécutées avec le plus grand soin, sur papier millimétré.

a) Représenter dans le plan P les droites :

D_1 d'équation $x + y = 100$,

D_2 d'équation $x + 2y = 150$,

D_3 d'équation $x = 60$,

D_4 d'équation $y = 60$.

Indiquer les coordonnées du point d'intersection I des droites D_2 et D_1.

b) Hachurer verticalement l'ensemble Δ des points du plan P dont les coordonnées (x, y) vérifient simultanément les inéquations :

$$\begin{aligned} x+y &\leq 100, \\ x+2y &\leq 150, \\ 0 \leq x &\leq 60, \\ 0 \leq y &\leq 60. \end{aligned}$$

3° ***a)*** Représenter dans le plan P l'ensemble des points dont les coordonnées (x, y) vérifient l'équation $f(x, y) = 75$, puis l'ensemble des points dont les coordonnées (x, y) vérifient l'équation $f(x, y) = 150$.

b) Hachurer horizontalement l'ensemble Ω des points dont les coordonnées (x, y) vérifient l'inéquation $f(x, y) \geq 180$. Montrer que I, point d'intersection des droites D_2 et D_4, appartient à Ω ; déterminer graphiquement l'intersection des ensembles Δ et Ω.

c) Utiliser ***b)*** pour calculer le bénéfice maximal que peut réaliser chaque jour le marchand de glaces.

(D'après un bac B)

◆ Solution

Objectif : maximiser le bénéfice réalisé en un jour en vendant des glaces en cornet sans contrainte de stock.

1° Expression de la fonction d'objectif et des contraintes.

a) Fonction de bénéfice quotidien : $f(x\,;\,y)$ telle que :

x est le nombre de cornets à une boule : bénéfice unitaire 1 F,

y est le nombre de cornets à deux boules : bénéfice unitaire 2,50 F, donc $f(x\,;\,y) = 1.x + 2{,}5.y$.

b) Inéquations représentatives des contraintes :

i. $x \leq 60$.

ii. $y \leq 60$.

iii. $x + y \leq 100$.

iv. Le nombre de boules fabriquées par jour est $x + 2y$, donc la contrainte sur la crème glacée est $x + 2y \leq 150$.

2° Représentations graphiques des contraintes.

a) Chacune des inégalités ci-dessus porte sur deux variables de degré 1 (l'une étant éventuellement affectée d'un coefficient nul), donc elle se traduit par un demi-plan dont la frontière est une droite.

On restera dans le 1er quadrant car $x \geq 0$ et $y \geq 0$.

Caractérisons chacune des quatre droites :

D_1 : $x + y = 100$, prenons deux points A_1 (30 ; 70) et B_1 (70 ; 30).

D_2 : $x + 2y = 150$, prenons deux points A_2 (0 ; 75) et B_2 (50 ; 50).

D_3 : $x = 60$ parallèle à l'axe (O_y) passant par A_3 (60 ; 0).

D_4 : $y = 60$ parallèle à l'axe (O_x) passant par A_4 (0 ; 60).

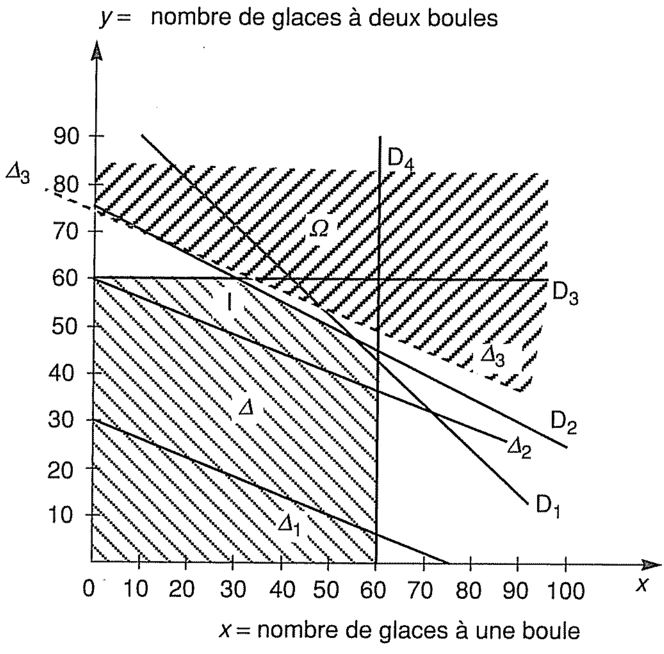
Le point I d'intersection des droites D_1 et D_4 a pour coordonnées : $y = 60$ et x tel que : $x = 150 - 2y = 150 - 120 = 30$, donc I(30 ; 60).

b) Chaque demi-plan est associé à une inégalité : un seul point suffit à caractériser celui des deux demi-plans qui convient ; prenons le point O.

p_1 bordé par D_1 : $0 + 0 \leq 100$: vrai, donc p_1 contient l'origine O.

p_2 bordé par D_2 : $0 + 0 \leq 150$: vrai, donc p_2 contient l'origine O.

Il en est de même pour p_3 et p_4.



3° Recherche du meilleur sommet du polygône des possibles.

a) $f(x\,;y) = 75$ est l'équation $x + 2{,}5y = 75$ de la "droite" Δ_1 dont tous les points à coordonnées entières rapportent un bénéfice total de 75 F : droite *d'iso-bénéfice.*

Prenons deux points : M_1 (0 ; 30) et N_1 (75 ; 0).

$f(x\,;y) = 150$ est l'équation $x + 2{,}5y = 150$ de la "droite" Δ_2 d'iso-bénéfice 150.

Prenons deux points : M_2 (0 ; 60) et N_2 (75 ; 30).

b) $f(x\,;y) = 180$ est l'équation $x + 2{,}5y = 180$ de la "droite" Δ_3 d'iso-bénéfice 180.

Prenons deux points : M_3 (30 ; 60) et N_3 (55 ; 50).

L'ensemble des points $(x\,;y)$ qui vérifient $f(x\,;y) \geq 180$ est le demi-plan Ω bordé par Δ_3 qui ne contient pas l'origine.

Le point I(30 ; 60) appartient à la zone Ω car on a :

$30 + 2{,}5 \times 60 = 180 \geq 180$. Il est sur la frontière Δ_3.

Graphiquement, on constate que I est le point d'intersection de (Δ) et (Ω).

c) Le point I est le plus éloigné de O dans la zone (Δ) au sens du bénéfice : en effet, quand on passe de Δ_1 à Δ_2 puis à Δ_3, le bénéfice augmente.

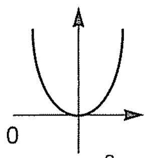
Si on cherche à réaliser un bénéfice supérieur à 180 F, on "sort" de (Δ) (on "entre" dans (Ω)). Le bénéfice maximal que peut réaliser le marchand de glaces est atteint pour 30 glaces à une boule et 60 glaces à deux boules ; il s'élève à $f(30\,;60) = 180$ F.

13 RECHERCHE DES LIMITES

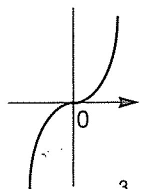
CE QU'IL FAUT RETENIR

1° $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} x^n = +\infty}$.

2° $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$.



$x \to x^2$

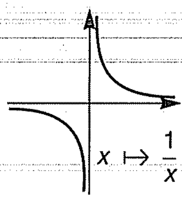


$x \to x^3$

$\boxed{\text{Si } n \text{ est pair, alors } \lim\limits_{x \to -\infty} x^n = +\infty}$.

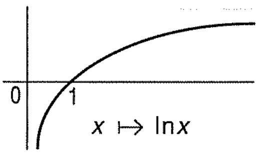
$\boxed{\text{Si } n \text{ est impair, alors } \lim\limits_{x \to -\infty} x^n = -\infty}$.

3° $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0.$

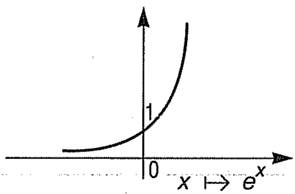


$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x^n} = 0} \text{ et } \boxed{\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^n} = 0}.$$

4° $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty}$.



5° $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty}$ et $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0}$.



6° Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = a$, alors la droite d'équation $y = a$ est asymptote horizontale à la courbe.

7° Recherche pratique d'une limite à l'infini :

Cas d'un polynôme : exemple $f(x) = x^2 - 5x + 3$.

On met en facteur le terme de plus haut degré

$$f(x) = x^2\left(1 - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2}\right).$$

Lorsque x tend vers $+\infty$ (ou $-\infty$) $\frac{5}{x}$ et $\frac{3}{x^2}$ tendent vers 0, donc

$$\left(1 - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2}\right) \text{ tend vers 1.}$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^2\left(1 - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2}\right) = +\infty.$$

Donc $\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$.

De même, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^2\left(1 - \frac{5}{x} + \frac{3}{x^2}\right)$.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty.$$

Cas d'une fonction rationnelle. Exemple : $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2+x+1}$.

La technique est semblable :

$$f(x) = \frac{x\left(1 - \frac{3}{x}\right)}{x^2\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1 - \frac{3}{x}}{x\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}.$$

Lorsque x tend vers $+\infty$; $\frac{3}{x}$, $\frac{1}{x}$ et $\frac{1}{x^2}$ tendent vers 0,

donc $\left(1 - \frac{3}{x}\right)$ tend vers 1 et $\left(1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)$ tend vers 1.

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1 - \dfrac{3}{x}}{x\left(1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right)} = 0.$

De même, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1 - \dfrac{3}{x}}{x\left(1 + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right)} = 0.$

Donc $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0}$ et $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0}$.

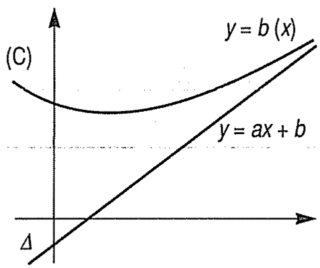
8° La droite Δ d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à la courbe (C) d'une fonction f en $+\infty$ si on a :

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (ou $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$).

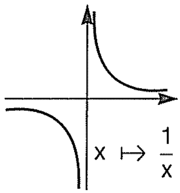
- $f(x) = ax + b + \varphi(x)$

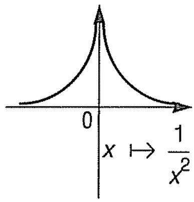
où $\varphi(x)$ est une fonction telle que $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$.

On obtient de façon analogue la définition d'une asymptote oblique en $-\infty$.



9° $\boxed{\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty}$.

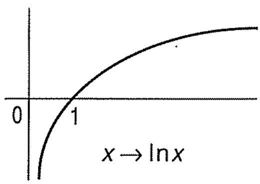




$\boxed{\text{Si } n \text{ est pair,} \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^n} = +\infty}$.

$\boxed{\text{Si } n \text{ est impair,} \quad \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x^n} = -\infty}$.

10° $\boxed{\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty}$.



11° Si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = +\infty$ (ou $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = -\infty$), alors la droite d'équation $x = x_0$ est asymptote verticale à la courbe.

12° Recherche pratique d'une limite en x_0. (f doit être définie au voisinage de x_0).

Exemple : $f(x) = \dfrac{2x-3}{x+1}$, $D_f =]-\infty\,;-1[\cup]-1\,;+\infty[$.

On cherche donc la limite lorsque x tend vers -1.
Lorsque x tend vers -1 : $2x-3$ tend vers -5
$x+1$ tend vers 0.
La limite sera infinie ; il faut déterminer son signe.
Faisons un tableau de signe au voisinage de -1.

x		-1	
$2x-3$	$-$		$-$
$x+1$	$-$	0	$+$
$\dfrac{2x-3}{x+1}$	$+$	‖	$-$

$\lim\limits_{x \to -1^-} f(x) = +\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$

13° Formules particulières.

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty}.$$

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} x^n e^x = 0}.$$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0} \quad \boxed{\lim_{x \to 0^+} x^n \ln x = 0}.$$

EXERCICE POUR S'ENTRAÎNER

Déterminer les limites aux bornes de l'ensemble de définition des fonctions suivantes et préciser les asymptotes éventuelles.

$f_1 : x \mapsto \dfrac{x-2}{x+5}$.

$f_2 : x \mapsto x^2 - \ln x$.

$f_3 : x \mapsto (x+1)\, e^x$.

$f_4 : x \mapsto \dfrac{2\ln x}{x-3}$.

◈ Solution

• $\boldsymbol{f_1 : x \mapsto \dfrac{x-2}{x+5}}$

$f_1(x)$ existe si $x + 5 \neq 0$ donc si $x \neq -5$.

$D_{f_1} = \mathbb{R} - \{-5\}$.

Calcul des limites à l'infini.

$$f_1(x) = \frac{x\left(1 - \dfrac{2}{x}\right)}{x\left(1 - \dfrac{5}{x}\right)} = \frac{1 - \dfrac{2}{x}}{1 + \dfrac{5}{x}}.$$

Lorsque x tend vers $+\infty$ (ou lorsque x tend vers $-\infty$) $\dfrac{2}{x}$ et $\dfrac{5}{x}$ tendent vers 0, donc $\dfrac{1 - \dfrac{2}{x}}{1 + \dfrac{5}{x}}$ tend vers 1.

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f_1(x) = 1} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{x \to -\infty} f_1(x) = 1}.$$

La droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à la courbe.

Calcul des limites en -5.

$$f_1(x) = \frac{x-2}{x+5}.$$

Lorsque x tend vers -5, $x-2$ tend vers -7 et $x+5$ tend vers 0. $f_1(x)$ tend vers l'infini. Etudions le signe de $f_1(x)$ au voisinage de -5.

x		-5	
$x-2$	$-$		$-$
$x+5$	$-$	0	$+$
$f_1(x)$	$+$	||	$-$

Nous déduisons :

$$\boxed{\lim_{x \to +5^-} f_1(x) = +\infty}. \qquad \boxed{\lim_{x \to -5^+} f_1(x) = -\infty}.$$

La droite d'équation $x = -5$ est asymptote verticale à la courbe.

• $\boldsymbol{f_2}$: $x \mapsto x^2 - \ln x$.

$f_2(x)$ existe si $\ln x$ existe, donc si $x > 0$

$D_{f_2} =]\,0\,;+\infty\,[$.

Calcul de la limite en $+\infty$:

$f_2(x) = x^2\left(1 - \dfrac{\ln x}{x^2}\right)$. Lorsque x tend vers $+\infty$, $\dfrac{\ln x}{x^2}$ tend vers 0 et x^2 tend vers $+\infty$.

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f_2(x) = +\infty}.$$

Calcul de la limite en 0.

Lorsque x tend vers 0, x^2 tend vers 0,

$\ln x$ tend vers $-\infty$,

$-\ln x$ tend vers $+\infty$.

$$\lim_{x \to 0^+} f_2(x) = +\infty.$$

La droite d'équation $x = 0$ (l'axe des ordonnées) est asymptote verticale à la courbe.

• $\boldsymbol{f_3 : x \mapsto (x+1)\, e^x}$.

$f_3(x)$ existe pour tout réel x

$D_{f_4} = \mathbb{R}$.

Calcul de la limite en $+\infty$.

Lorsque x tend vers $+\infty$, $x + 1$ tend vers $+\infty$,

e^x tend vers $+\infty$.

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f_3(x) = +\infty}.$$

Calcul de la limite en $-\infty$.

$$(x+1)\, e^x = x(1 + \frac{1}{x})\, e^x.$$

Quand x tend vers $-\infty$, $1 + \dfrac{1}{x}$ tend vers 1,

xe^x tend vers 0.

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} f_4(x) = 0}.$$

La droite d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses) est asymptote horizontale à la courbe.

• $\boldsymbol{f_4 : x \mapsto \dfrac{2\ln x}{x-3}}$.

$f_5(x)$ existe si $\ln x$ existe, donc si $x > 0$

et si $x - 3 \neq 0$, donc si $x \neq 3$.

$D_{f_4} =]\,0\,;3\,[\ \cup\ ]\,3\,;+\infty\,[$.

Calcul de la limite en $+\infty$ *:* $(x) = \dfrac{2\ln x}{x\left(1 - \dfrac{3}{x}\right)}$.

Lorsque x tend vers $+\infty$, $\dfrac{\ln x}{x}$ tend vers 0,

$1 - \dfrac{3}{x}$ tend vers 1.

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f_4(x) = 0}.$$

L'axe des abscisses est asymptote horizontale à la courbe.

Calcul de la limite en 0 .

Lorsque x tend vers 0^+, $\ln x$ tend vers $-\infty$,

$x - 3$ tend vers -2.

$$\boxed{\lim_{x \to 0^+} f_4(x) = +\infty}.$$

L'axe des ordonnées est asymptote verticale à la courbe.

Calcul des limites en 3.

Lorsque x tend vers 3, $2\ln x$ tend vers 2 ln 3,

$x - 3$ tend vers 0.

La limite est infinie : étudions le signe de $f_5(x)$ au voisinage de 3 : ln 3 ≈ 1,1.

x		3	
2 ln 3	+		+
$x - 3$	−	0	+
$f_4(x)$	−	‖	+

$$\boxed{\lim_{x \to 3^-} f_4(x) = -\infty} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{x \to 3^+} f_4(x) = +\infty}.$$

La droite d'équation $x = 3$ est asymptote verticale à la courbe.

PROBLÈMES AVEC SOLUTIONS

1er problème

◆ Énoncé

Soit la fonction $f: x \mapsto \dfrac{x^2+3x-1}{x+2}$.

1° Déterminer son ensemble de définition D_f.

2° Calculer les limites de $f(x)$ aux bornes de D_f.

3° Déterminer les trois réels a, b et c tels que, pour tout x de D_f, l'on ait : $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+2}$.

4° Montrer que la droite Δ d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à la courbe.

◆ Solution

$$f: x \mapsto \frac{x^2+3x-1}{x+2}.$$

1° $f(x)$ existe si $x + 2 \neq 0$, donc si $x \neq -2$.
$D_f = \mathbb{R} - \{-2\}$.

2° *Calcul des limites à l'infini.*

$$f(x) = \frac{x^2\left(1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)} = \frac{x\left(1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{1+\frac{2}{x}}.$$

Lorsque x tend vers $+\infty$, $1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}$ tend vers 1, et $1+\frac{2}{x}$ tend vers 1 $\dfrac{x\left(1+\frac{3}{x}-\frac{1}{x^2}\right)}{1+\frac{2}{x}}$ tend vers $+\infty$.

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}.$$

Lorsque x tend vers $-\infty$, $\boxed{\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty}$.

Calcul des limites en -2.

Lorsque x tend vers -2, x^2+3x-1 tend vers -3 et $x+2$ tend vers 0. La limite est infinie.

Faisons un tableau de signes $f(x)$ au voisinage de -2

x		-2	
x^2+3x-1	$-$		$-$
$x+2$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+$	‖	$-$

Nous en déduisons :

$$\boxed{\lim_{x \to -2^-} f(x) = +\infty} \text{ et } \boxed{\lim_{x \to -2^+} f(x) = -\infty}.$$

La droite d'équation $x=-2$ est asymptote verticale à la courbe.

3° *Calculons a, b, c tels que* $ax+b+\dfrac{c}{x+2}=\dfrac{x^2+3x-1}{x+2}$.

Réduisons au même dénominateur :

$$\frac{ax^2+2ax+bx+2b+c}{x+2}=\frac{x^2+3x-1}{x+2}$$

et

$$\frac{ax^2+(2a+b)x+2b+c}{x+2}=\frac{x^2+3x-1}{x+2}.$$

Identifions $\begin{cases} a = 1 \\ 2a + b = 3 \\ 2b + c = -1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = -3 \end{cases}$

Donc pour tout x de D_f, $f(x) = x + 1 - \dfrac{3}{x+2}$.

4° Nous avons montré à la 2^e^ question que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Nous avons montré que $f(x) = x + 1 - \dfrac{3}{x+2}$.

Montrons que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{-3}{x+2} = 0$.

Lorsque x tend vers $+\infty$, $x + 2$ tend vers $+\infty$,

$\dfrac{-3}{x+2}$ tend vers 0.

Nous déduisons de ceci que la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique à la courbe.

Remarque : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{-3}{x+2} = 0$.

La droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote à la courbe en $+\infty$ et en $-\infty$.

2^e^ problème

◆ Énoncé

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $]\ 1, +\infty\ [$ par :

$f(x) = x + 1 + 2\,[\ln x - \ln (x - 1)]$

où le symbole ln désigne le logarithme népérien.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé (unité : 1 cm).

1° Montrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $]1, +\infty[$, on a $f(x) = x + 1 + 2\ln\dfrac{x}{x-1}$.

2° Déterminer les limites de f aux bornes de l'intervalle de définition.

3° Etudier le sens de variation de f et consigner les résultats dans un tableau.

4° Montrer que la droite Δ d'équation $y = x + 1$ est asymptote à $\mathcal{C}$. Préciser la position de $\mathcal{C}$ par rapport à Δ.

5° Tracer avec soin $\mathcal{C}$ et Δ.

(D'après bac B)

◆ Solution

$f(x) = x + 1 + 2\,[\ln x - \ln(x-1)]$. $\quad D_f =]1\,;+\infty[$.

1° Nous savons que $\ln a - \ln b = \ln\dfrac{a}{b}$,

donc $\ln x - \ln(x-1) = \ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$.

Remarquons que si $x \in]1\,;+\infty[$, alors $x > 1$, donc $x - 1 > 0$ et $x > 0$.

$\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$ existe pour tout x de $]1\,;+\infty[$.

Pour tout x de $]1\,;+\infty[$, on a : $f(x) = x + 1 + 2\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$.

2° *Limite à l'infini :*

Lorsque x tend vers $+\infty$, $x + 1$ tend vers $+\infty$,

$$\frac{x}{x-1} = \frac{x}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{1-\frac{1}{x}}.$$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{x}} \text{ tend vers 1.}$$

Donc $\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$ tend vers ln 1, c'est-à-dire 0.

$$\lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) = 0,$$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}.$$

Calcul de la limite en 1 :

Lorsque x tend vers 1, $x + 1$ tend vers 2,

$\ln x$ tend vers 0,

$\ln(x - 1)$ tend vers $-\infty$.

$$f(x) = x + 1 + 2\,[\ln x - \ln(x - 1)].$$

Donc $$\boxed{\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty}.$$

La droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à la courbe.

3° *Calcul de la dérivée :*

On utilise la forme $f(x) = x + 1 + 2\,[\ln x - \ln(x - 1)]$.

$$f'(x) = 1 + 2\left[\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}\right].$$

Réduisons au même dénominateur :

$$f'(x) = \frac{x(x-1) + 2(x-1-x)}{x(x-1)}.$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x(x-1)}}.$$

Etude du signe de $f'(x)$: calculons le discriminant de $x^2 - x - 2$.

$\Delta = 1 - 4 \times 1 \times (-2) = 9.$

Il y a deux racines : $x' = \frac{1+3}{2} = 2$ et $x'' = \frac{1-3}{2} = -1$.

$x^2 - x - 2$ est positif (du signe de "a") à l'extérieur des racines, et négatif entre des racines.

$x-1>0$ si $x>1$.

On a le tableau de signes :

x	$-\infty$		-1		0		1		2		$+\infty$
x^2-x-2		$+$	0	$-$		$-$		$-$	0	$-$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{x^2-x-2}{x(x-1)}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

Nous en déduisons le tableau de variation de f sur $]1\,;+\infty[$

$f(2)=2+1+2\ln\left(\dfrac{2}{1}\right)$,

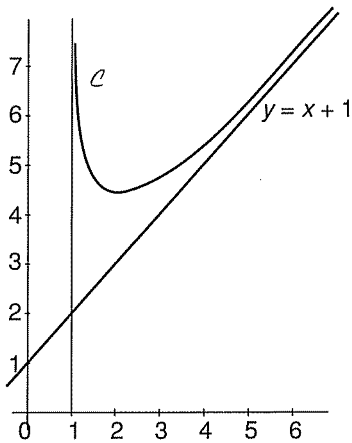
$f(2)=3+2\ln 2$.

x	1		2		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$3+2\ln 2$	$\nearrow$	$+\infty$

4° Nous avons montré que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

D'autre part, $f(x)=x+1+2\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$, et nous avons montré que $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$.

Donc la droite d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique à la courbe.



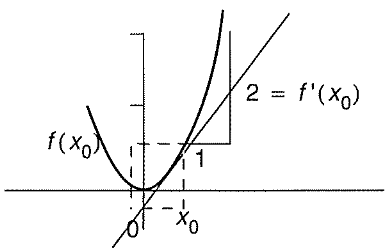
14
DÉRIVATION : TANGENTES ET COURBURES

CE QU'IL FAUT RETENIR

1° Le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse x_0 est le nombre dérivé $f'(x_0)$.

Exemple : $f(x) = x^2$ et $x_0 = 1$.

$f'(x) = 2x, \quad f'(1) = 2.$

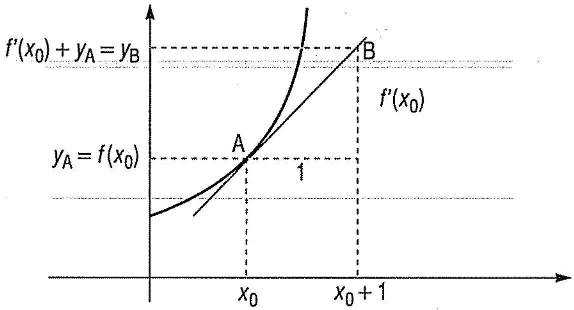


2° Construction de la tangente en un point A $(x_0\ ;\ f(x_0))$.
A partir du point A, on obtient un point B de la façon suivante :
L'abscisse de B est celle de A augmentée de 1 :

$$x_B = x_A + 1.$$

L'ordonnée de B est celle de A augmentée de $f'(x_0)$:

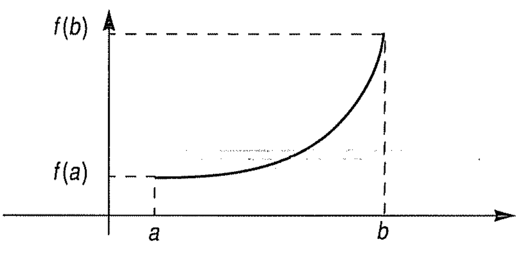
$$y_B = y_A + f'(x_0).$$



3° Equation de la tangente au point A d'abscisse x_0.

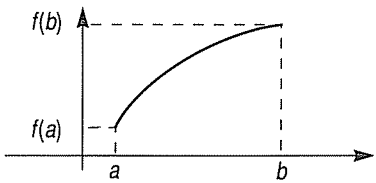
L'équation d'une droite est de la forme $y = ax + b$. Le coefficient directeur a est égal à $f'(x_0)$. Le nombre b se calcule en remplaçant x et y par les coordonnées de A, car les coordonnées de A vérifient l'équation de la droite.

4° Si f est croissante sur $[a ; b]$, et si la dérivée f' est croissante sur $[a ; b]$, alors la courbe associée à f est du type ci dessous :



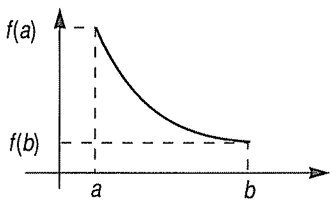
On a $f'(x) > 0$ et $f''(x) > 0$ pour tout x de $[a ; b]$. On dit que la *croissance* de f est *accélérée* sur $[a ; b]$. f croît de plus en plus vite.

5° Si f est croissante sur $[a\,;\,b]$ et si f' est décroissant sur $[a\,;\,b]$, alors la courbe de f est du type :



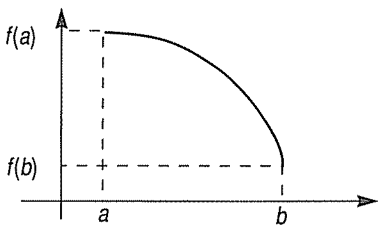
On a $f'(x) > 0$ et $f''(x) < 0$. On dit que la croissance de f est *ralentie.* f croît de moins en moins vite.

6° Si f est décroissante sur $[a\,;\,b]$ et si f' est croissante sur $[a\,;\,b]$, alors la courbe de f est du type :



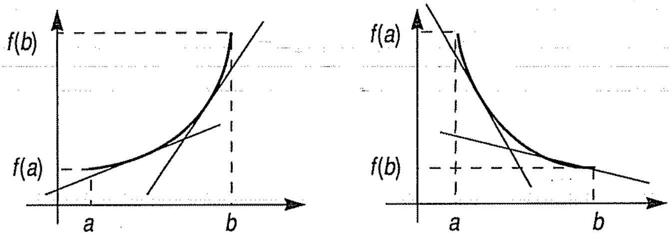
On a $f'(x) < 0$ et $f''(x) > 0$.
On dit que f décroît de moins en moins vite.

7° Si f est décroissante sur $[a\,;\,b]$ et si f' est décroissante sur $[a\,;\,b]$, alors la courbe de f est du type :

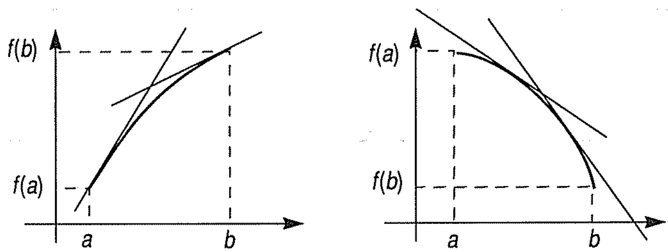


On a $f'(x) < 0$ et $f''(x) < 0$.
On dit que f décroît de plus en plus vite.

8° Quand $f''(x) > 0$ sur $[a\,;\,b]$, la courbe de f est située au-dessus de ses tangentes en tout point de $[a\,;\,b]$.



9° Quand $f''(x) < 0$ sur $[a\,;\,b]$, la courbe de f est située en dessous de ses tangentes en tout point de $[a\,;\,b]$.



EXERCICES POUR S'ENTRAÎNER

1° Sans calculer leur équation, tracer les droites :

D_1 de coefficient directeur 2 et passant par A (1 ; – 3).

D_2 de coefficient directeur $\frac{1}{3}$ et passant par B (– 2 ; 3).

D_3 de coefficient directeur $-\frac{1}{2}$ et passant par C (2 ; 2).

D_4 de coefficient directeur 0 et passant par E (– 3 ; 5).

2° Calculer une équation de chacune des deux droites D_1 et D_4 de chacune des deux droites D_1 et D_4 de l'exercice 1.

3° Soit $f : x \mapsto \ln(2x+3)$, définie sur $]-\frac{3}{2} ; +\infty[$.

a) Déterminer le coefficient directeur des tangentes à la courbe de f aux points A et B d'abscisses $x_A = -1$ $x_B = 3$.

b) Construire ces tangentes.

4° Déterminer l'abscisse des points où la courbe de f admet une tangente de coefficient directeur m.

$f_1 : x \mapsto x^2 - 4x + 1 \qquad m = -2.$

$f_2 : x \mapsto \dfrac{-4}{x+1} \qquad m = 1.$

$f_3 : x \mapsto \ln(2x+1) \qquad m = 2.$

5° Construire sommairement la courbe des fonctions suivantes et, sans aucun calcul, déterminer le signe de f, de f', de f''.

$f_1 : x \mapsto \ln x.$

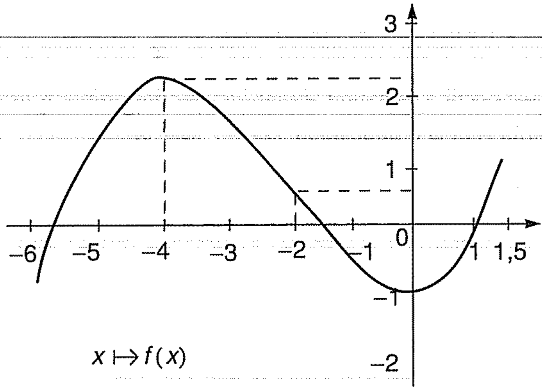
$f_2 : x \mapsto e^x.$

$f_3 : x \mapsto x^2 + x.$

$f_4 : x \mapsto \dfrac{1}{x+1}.$

Contrôler à l'aide des dérivées.

6° Dans le repère ci-dessous est représentée une fonction f. On note $f'(x)$ et $f''(x)$ les dérivées première et seconde de $f(x)$.



a) Sur quels intervalles a-t-on $f'(x) > 0$? $f'(x) < 0$?

b) Sur quels intervalles la fonction dérivée f' est-elle croissante ? Est-elle décroissante ?

c) Pour quelles valeurs de x a-t-on $f'(x) = 0$?

d) Dessiner une représentation graphique possible de la fonction dérivée $f'(x)$ sur l'intervalle $[-6 ; 1{,}5]$.

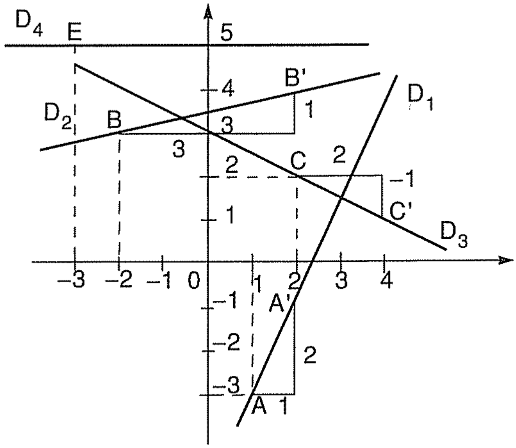
◆ Solution

1° Pour construire D_1, on construit le point A' à partir du point A en augmentant l'abscisse de 1 et l'ordonnée de 2.

Pour construire D_2, on construit le point B' à partir du point B en augmentant l'abscisse de 3 et l'ordonnée de 1.

Pour construire D_3, on construit le point C' à partir du point C en augmentant l'abscisse de 2 et en diminuant l'ordonnée de 1.

Pour construire D_4, de coefficient directeur nul, nous remarquons que cette droite est parallèle à l'axe des abscisses.



2° • Equation de D_1.

D_1 a une équation du type $y = ax + b$.

D'après l'énoncé, $a = 2$, l'équation s'écrit donc $y = 2x + b$.

Cette droite passe par A : les coordonnées de A vérifient l'équation de D_1. $A(1\,;-3)$, donc $-3 = 2 \times 1 + b$,

$$b = -5.$$

$$\boxed{D_1 \text{ a pour équation } y = 2x - 5.}$$

• Equation de D_4 : D_4 a une équation du type $y = ax + b$.

Son coefficient directeur est zéro, donc $a = 0$ et $y = b$.

Cette droite passe par le point E, les coordonnées de E vérifient l'équation de D_4 : $5 = b$.

$$\boxed{D_4 \text{ a pour équation } y = 5}\,.$$

3° $f : x \mapsto \ln(2x+3)$ sur $\left]-\dfrac{3}{2}\,;+\infty\right[$.

a) Le coefficient directeur des tangentes à la courbe est le nombre dérivé correspondant.

Calculons la dérivée $f'(x)$: $f(x)$ de la forme $\ln u$ et $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$.

Posons $u = 2x + 3$ et $u' = 2$.

$$f'(x) = \frac{2}{2x+3}.$$

Coefficient directeur au point A : $x_A = -1$ $f'(-1) = \dfrac{2}{1} = 2$.

au point B : $x_B = 3$ $f'(3) = \dfrac{2}{9}$.

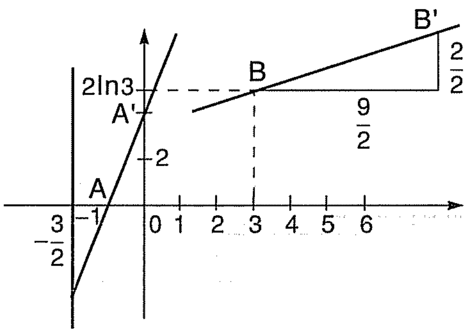
b) Calculons l'ordonnée de A et celle de B.

$y_A = f(x_A) = \ln(-2+3) = \ln 1 = 0.$ A $(-1\ ;\ 0)$.

$y_B = f(x_B) = \ln(2\times 3+3) = \ln 9 = 2\ln 3.$ B $(3\ ;\ 2\ln 3)$.

Pour construire la tangente au point A, on construit le point A' à partir du point A en augmentant l'abscisse de 1 et l'ordonnée de 2.

Pour construire la tangente au point B, on construit le point B' à partir du point B en augmentant l'abscisse de $\dfrac{9}{2}$ et l'ordonnée de $\dfrac{2}{2}$. (Voir chapitre sur la droite.)



La construction de la courbe point par point permet de contrôler les constructions des tangentes.

4° • $f_1 : x \mapsto x^2 - 4x + 1$. $m = -2$. $D_{f_1} = \mathbb{R}$.

La courbe admet une tangente de coefficient directeur égal à m au point d'abscisse x_0 si $f'(x_0) = m$.

Calculons $f'_1(x) = 2x - 4$.

Résolvons $2x - 4 = -2$

$x = 1$.

> Au point d'abscisse 1, la courbe admet une tangente de coefficient directeur égal à -2.

• $f_2 : x \mapsto \dfrac{-4}{x+1}$. $m = 1$. $D_{f_2} = \mathbb{R} - \{-1\}$.

La courbe admet une tangente de coefficient directeur égal à m au point d'abscisse x_0 si $f'(x_0) = m$.

Calculons $f'_2(x) = -4\left(\dfrac{-1}{(x+1)^2}\right)$ $\left(\text{formule : } \left(\dfrac{1}{u}\right)' = \dfrac{-u'}{u^2}\right)$

$$f'_2(x) = \frac{4}{(x+1)^2}.$$

Résolvons $\dfrac{4}{(x+1)^2} = 1$,

$4 = (x+1)^2$ car $x \neq -1$ dans D_{f_2}

$(x+1)^2 - 4 = 0$.

Factorisons $(x+1+2)(x+1-2) = 0$,

$(x+3)(x-1) = 0$,

$x = -3$ ou $x = 1$.

Remarquons que -3 et 1 appartiennent à l'ensemble de définition de f_2.

Aux points d'abscisse -3 et 1, la courbe admet une tangente de coefficient directeur égal à 1.

• $f_3 : x \mapsto \ln(2x+1)$. $m = 2$. $D_{f_3} = \left]-\frac{1}{2} ; +\infty\right[$.

La courbe admet une tangente de coefficient directeur égal à m au point d'abscisse x_0 si $f'(x_0) = m$.

Calculons $f'_3(x) = \dfrac{2}{2x+1}$ (formule : $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$).

Résolvons $\dfrac{2}{2x+1} = 2$,

$2 = 2(2x+1)$ car $x \neq -\frac{1}{2}$ dans D_{f_3}.

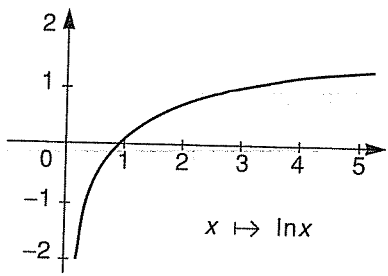
$4x = 0$,

$x = 0$.

Remarquons que 0 appartient à l'ensemble de définition de f_3, donc

au point d'abscisse 0, la courbe admet une tangente de coefficient directeur égal à 2.

5° • $f_1 : x \mapsto \ln x$ $D_{f_1} = \left]0 ; +\infty\right[$.



D'après l'allure de la courbe, f_1 est croissante donc $f'_1(x) > 0$.

La courbe est en dessous de ses tangentes donc $f''_1(x) < 0$.

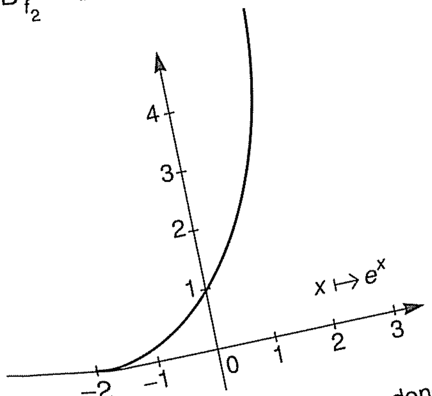
$f(x) > 0$ si $x > 1$ et $f(x) < 0$ si $x < 1$.

En effet, la courbe est au-dessus de l'axe des abscisses pour $x > 1$ et en dessous pour $x < 1$.

Vérification : $f'_1(x) = \dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{1}{x} > 0$ pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$.

$f''_1(x) = \dfrac{-1}{x^2}$ et $-\dfrac{1}{x^2} < 0$ pour tout x de $]0\,;\,+\infty[$.

• $f_2 : x \mapsto e^x$. $D_{f_2} = \mathbb{R}$.

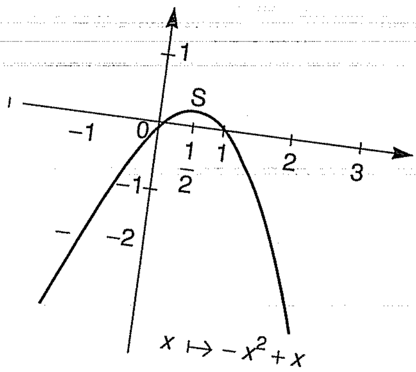


Nous constatons que f_2 est croissante donc $f'_2(x) > 0$ et $f''_2(x) > 0$, car la courbe est au-dessus de ses tangentes. De plus, la courbe est au-dessus de l'axe des abscisses donc $f_2(x) > 0$.

Vérification : $f'_2(x) = e^x$ et $e^x > 0$ pour tout x.

$f''_2(x) = e^x$ et $e^x > 0$ pour tout x.

- $f_3 : x \mapsto -x^2 + x$. $\qquad D_{f_3} = \mathbb{R}$.



La courbe est une parabole de sommet S $\left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{4}\right)$.

f_3 est croissante sur $]-\infty ; \frac{1}{2}[$ et décroissante sur $]\frac{1}{2} ; +\infty[$, donc $f'_3(x) > 0$ sur $]-\infty ; \frac{1}{2}]$ et $f'_3(x) < 0$ sur $]\frac{1}{2} ; +\infty[$.

La courbe est en dessous de ses tangentes, donc $f''_3(x) < 0$.

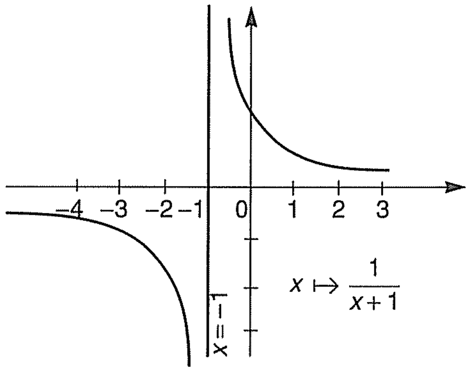
La courbe est en dessous de l'axe des abscisses pour $x < 0$ et pour $x > 1$, elle est au-dessus pour $0 < x < 1$.

Donc $f_3(x) < 0$ si $x < 0$ si $x > 1$ et $f_3(x) > 0$ si $0 < x < 1$.

Vérification : $f'_3(x) = -2x + 1$ et $-2x + 1 > 0$ si $x < \frac{1}{2}$.

$f''_3(x) = -2, \quad f''_3(x) < 0$.

• $f_4 : x \mapsto \dfrac{1}{x+1}$. $\qquad D_{f_4} = \mathbb{R} - \{-1\}$.



La fonction f_4 est décroissante sur $]-\infty\,; -1[$ et sur $]-1, +\infty[$, donc $f'_4(x) < 0$ pour tout x de D_{f_4}.

Lorsque $x < -1$ la courbe est en dessous de ses tangentes donc $f''_4(x) < 0$ si $x \in\ ]-\infty\,; -1[$.

Lorsque $x > -1$, la courbe est au-dessus de ses tangentes, donc $f''_4(x) > 0$ si $x \in\ ]-1\,; +\infty[$.

Lorsque $x < -1$ la courbe est au-dessous de l'axe des abscisses, donc $f_4(x) < 0$ si $x \in\ ]-\infty\,; -1[$.

Lorsque $x > -1$, la courbe est au-dessus de l'axe des abscisses, donc $f_4(x) > 0$ si $x \in\ ]-1\,; +\infty[$.

Vérification $f'_4(x) = \dfrac{-1}{(x+1)^2}$ formule $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = \dfrac{-u'}{u^2}$.

$f'_4(x) < 0$ pour tout x de D_{f_4}.

$f''_4(x) = \dfrac{2}{(x+1)^3}$ formule $\left(\dfrac{1}{u^n}\right)' = \dfrac{-n \times u'}{u^{n+1}}$.

$f''_4(x) > 0$ si $(x+1)^3 > 0$ donc si $x+1>0$, c'est-à-dire $x > -1$,
et $f''_4(x) < 0$ si $(x+1)^3 > 0$ donc si $x+1>0$, c'est-à-dire $x < -1$.

6° ***a)*** $f'(x) > 0$ quand la fonction f est croissante. Pour cette fonction, en nous limitant à l'intervalle $[-6\,;1{,}5]$, nous avons donc

$f'(x) \geq 0$ si $x \in [-6\,;-4]$ ou si $x \in [0\,;1{,}5]$.

$f'(x) \leq 0$ si $x \in [-4\,;0]$.

b) La fonction dérivée f' est croissante si sa dérivée f'' est positive, donc si la courbe est située au-dessus de ses tangentes.

Donc f' est croissante si $x \in [-2\,;1{,}5]$.

f' est décroissante si $x \in [-6\,;-2]$.

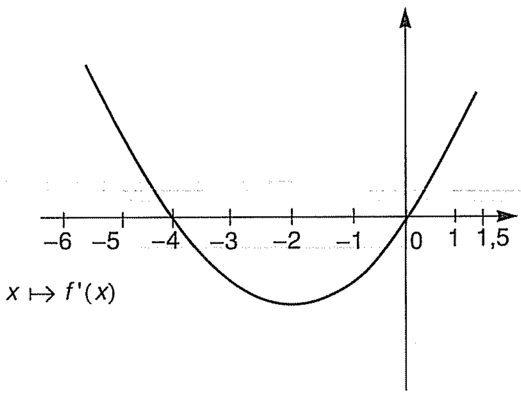
c) $f'(x) = 0$ si la courbe admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses, donc $f'(x) = 0$ si $x = -4$ ou si $x = 0$.

d) La représentation grahique ci-dessous de $f'(x)$ correspond bien aux résultats déterminés aux questions précédentes :

a) La courbe est au-dessus de l'axe des abscisses, $(f'(x) \geq 0)$ si $x \in [-6\,;-4] \cup [0\,;1{,}5]$.

b) La fonction croît sur $[-2\,;1{,}5]$ et décroît sur $[-6\,;-2]$.

c) $f'(-4) = 0$ et $f'(0) = 0$.



15
ÉTUDES DE SIGNES ET INÉQUATIONS

CE QU'IL FAUT RETENIR

1° Signe du binôme du 1^er degré $ax + b$ ($a \neq 0$).

Exemple : $2x + 3 \geq 0$ équivaut à $2x \geq -3$,

donc à $x \geq -\frac{3}{2}$.

Donc $2x + 3$ est positif quand $x \in \left[-\frac{3}{2}\ ;\ +\infty\right[$.

Faisons un tableau :

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		$+\infty$
$2x + 3$		$-$	0	$+$	

Le binôme $ax + b$ est du signe de a pour les réels x supérieurs à sa racine $-\frac{b}{a}$.

2° Signe de l'expression $a \ln x + b$.

Exemple : $2\ln x + 3 \geq 0$ équivaut à $\ln x \geq -\frac{3}{2}$.

La fonction exponentielle étant croissante sur $\mathbb{R}$, $e^{\ln x} \geq e^{-\frac{3}{2}}$

ou encore $x \geq e^{-\frac{3}{2}}$.

$2\ln x + 3$ est positif si $x \in \left[e^{-\frac{3}{2}} \; ; \; +\infty \right[$.

3° Signe de l'expression $ae^x + b$.

Exemples :

a) $2e^x + 3 \geq 0$ équivaut à $e^x \geq -\frac{3}{2}$.

Ce résultat est toujours vrai car $e^x > 0$ pour tout réel x.
Donc $e^x + 3 \geq 0$ pour tout réel x.

b) $e^x - 5 \geq 0$ équivaut à $e^x \geq 5$.
La fonction logarithme népérien étant croissante, $\ln e^x \geq \ln 5$
ou encore $x \geq \ln 5$.
$e^x - 5$ est positif si $x \in [\ln 5 \; ; +\infty[$.

4° Signe du trinôme du 2^e^ degré $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$).

Rappelons que le discriminant Δ se calcule $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta < 0$, $ax^2 + bx + c$ est du signe de a pour tout réel x.
- Si $\Delta = 0$, $ax^2 + bx + c$ est du signe de a pour tout réel x, et s'annule pour $x = \frac{-b}{2a}$.

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

• Si $\Delta > 0$, il y a deux racines x' et x''

$ax^2 + bx + c$ est "du signe de a" à l'extérieur des racines et "du signe opposé à celui de a" entre les racines.

$$ax^2 + bx + c = a\,(x - x')\,(x - x'').$$

x	$-\infty$		x'		x''		$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	Signe de a		0	Signe de $(-a)$	0	Signe de a	

5° Signe de l'expression $ae^{2x} + be^x + c$.

Notons que $e^{2x} = (e^x)^2$. On a donc : $ae^{2x} + be^x + c = a(e^x)^2 + be^x + c$.

Effectuons le changement de variable $X = e^x$ (alors $X > 0$).

On obtient $ae^{2x} + be^x + c = aX^2 + bX + c$.

Nous sommes amenés à étudier le signe d'un binôme du 2ᵉ degré (voir paragraphe 4).

6° Signe d'une fonction rationnelle.

Exemple : étudier le signe de $\dfrac{(2x+1)\,(1-x)}{x^2\,(x-2)}$ sur $\mathbb{R} - \{0\ ;\ 2\}$.

Etudions le signe de chaque binôme :

$$2x + 1 \geq 0 \text{ si } x \geq -\frac{1}{2},$$

$$1 - x \geq 0 \text{ si } x \leq 1,$$

$$x - 2 \geq 0 \text{ si } x \geq 2.$$

Remarquons que $x^2 \geq 0$ car c'est un carré.

Faisons un tableau de signes

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		1		2		$+\infty$
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
x^2		$+$		$+$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{(2x+1)(1-x)}{x^2(x-2)}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

$\dfrac{(2x+1)\,(1-x)}{x^2\,(x-2)}$ est positif quand $x \in \left]-\infty\ ;\ -\frac{1}{2}\right] \cup [1\ ;\ 2[$.

$\dfrac{(2x+1)\,(1-x)}{x^2\,(x-2)}$ est négatif quand

$$x \in \left[-\frac{1}{2}\ ;\ 0\right[\cup \left]0\ ;\ 1\right] \cup \left]2\ ;\ +\infty\right[.$$

7° Signe de l'expression $e^{u(x)}$.

L'exponentielle de $u(x)$ est positive pour tous les réels x tels que $u(x)$ existe : $e^{u(x)} > 0$ pour tout $x \in D_u$.

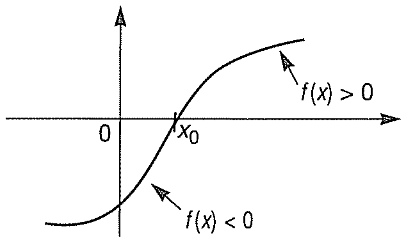
8° Signe de l'expression ln($u(x)$).

$\ln(u(x)) \geq 0$ équivaut à $e^{\ln(u(x))} \geq e^0$,

donc à $u(x) \geq 1$.

Le logarithme népérien de $u(x)$ est positif pour tous les réels x tels que $u(x) \geq 1$.

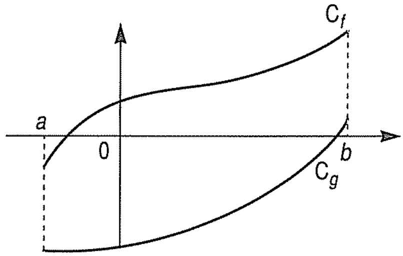
9° Si $f(x) \geq 0$, alors la courbe de f est située au-dessus de l'axe des abscisses.



Si $x < x_0$, $\quad f(x) < 0$.

Si $x > x_0$, $\quad f(x) > 0$.

10° Si $f(x) \geq g(x)$, alors la courbe de f est située au-dessus de la courbe de g.



$f(x) \geq g(x)$

EXERCICES POUR S'ENTRAÎNER

1° Etudier le signe de $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1}$,

de $1 - \dfrac{2e^x}{e^x + 1}$,

de $e^{2x} + e^x - 2$,

de $\dfrac{3\ln x}{\ln x+1}$.

2° Résoudre les inéquations : $\dfrac{1}{x+7} \geq -3$.

$$x+2 \leq \frac{1}{x}.$$

$$x \geq \frac{1}{-x+3}.$$

$$\ln(x+1) - \ln(2x-3) \geq \ln 2.$$

$$2e^x - 1 \geq \frac{1}{2-e^x}.$$

3° Soit la fonction f définie par $f(x) = (x+2)(1+e^{-x})$.
Déterminer la position de la courbe (C) de f par rapport à la droite Δ d'équation $y = x + 2$.

◈ Solution

1° • Signe de $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1}$.

$\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1}$ est défini si $x \neq 0$ et si $x \neq 1$, $D = \mathbb{R} - \{0\ ;\ 1\}$.

Réduisons au même dénominateur : $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{x-1+x}{x(x-1)}$

$$= \frac{-1}{x(x-1)}.$$

$x - 1 \geq 0$ si $x \geq 1$.

Nous avons le tableau de signes :

x	$-\infty$	0		1	$+\infty$
-1	$-$		$-$		$-$
x	$-$	0	$+$		$+$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$\dfrac{-1}{x(x-1)}$	$-$		$+$		$-$

$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-1}$ est positif si $x \in \,]\,0\,;1\,[$,
et négatif si $x \in \,]-\infty\,;0\,[\,\cup\,]\,1\,;+\infty\,[$.

• Signe de $1-\dfrac{2e^x}{e^x+1}$.

Notons que puisque e^x est strictement positif, e^x+1 ne peut pas être égal à 0, l'expression $1-\dfrac{2e^x}{e^x+1}$ est définie pour tout réel x.

Réduisons au même dénominateur :

$$1-\frac{2e^x}{e^x+1}=\frac{e^x+1-2e^x}{e^x+1}=\frac{1-e^x}{e^x+1}.$$

Etudions le signe :

$1-e^x \geq 0$ si $1 \geq e^x$, donc si $\ln 1 \geq \ln e^x$
enfin si $x \leq 0$.

$e^x+1 \geq 0$ pour tout réel x, le signe de $\dfrac{1-e^x}{e^x+1}$ est celui de $1-e^x$.

En conclusion : $\boxed{1 - \dfrac{2e^x}{e^x+1} \text{ est positif si } x \in \,]-\infty\,;\,0] \text{ et négatif si } x \in [0\,;+\infty[.}$

• Signe de $e^{2x} + e^x - 2$.

$e^{2x} + e^x - 2$ existe pour tout réel x.

Nous savons que $e^{2x} = (e^x)^2$ donc $e^{2x} + e^x - 2 = (e^x)^2 + e^x - 2$.

Posons $X = e^x$ alors $e^{2x} + e^x - 2 = X^2 + X - 2$.

Calculons le discriminant $\Delta = 1 - 4 \times 1 \times (-2) = 9$.

Il y a deux racines $X' = \dfrac{-1+3}{2} = 1$ et $X'' = \dfrac{-1-3}{2} = -2$.

Factorisons : $X^2 + X - 2 = (X-1)(X+2)$,

donc $e^{2x} + e^x - 2 = (e^x - 1)(e^x + 2)$.

Remarquons que $e^x + 2 > 0$, pour tout réel x.

et $e^x - 1 > 0$ si $e^x > 1$,

donc si $\ln e^x > \ln 1$,

c'est-à-dire si $x > 0$.

Donc $\boxed{\begin{array}{l} e^{2x} + e^x - 2 \geq 0 \text{ si } x \geq 0. \\ e^{2x} + e^x - 2 \leq 0 \text{ si } x \leq 0. \end{array}}$

• Signe de $\dfrac{3\ln x}{\ln x + 1}$.

$\ln x$ existe si $x > 0$ et $\ln x + 1 \neq 0$ si $\ln x \neq -1$.

Or $\ln x = -1$ si $e^{\ln x} = e^{-1}$ donc si $x = \dfrac{1}{e}$.

L'ensemble de définition est $\left]0\ ;\ \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{e}\ ;\ +\infty\right[$.

$\ln x > 0$ si $x > 1$.

$\ln x + 1 > 0$ si $\ln x > -1$, donc si $e^{\ln x} > e^{-1}$, si $x > \frac{1}{e}$,

car la fonction exponentielle est croissante.

D'où le tableau de signes :

x	0		$\frac{1}{e}$		1		$+\infty$
$3\ln x$	‖	$-$		$-$	0	$+$	
$\ln x + 1$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{3\ln x}{\ln x + 1}$	‖	$+$	‖	$-$		$+$	

Donc
$$\boxed{\begin{array}{l} \dfrac{3\ln x}{\ln x+1} \geq 0 \text{ si } x \in \left]0\ ;\ \dfrac{1}{e}\right[\text{ ou si } x \in [1\ ;\ +\infty[. \\ \dfrac{3\ln x}{\ln x+1} \leq 0 \text{ si } x \in \left]\dfrac{1}{e}\ ;\ 1\right]. \end{array}}$$

• $\dfrac{1}{x+7} \geq -3$.

$\dfrac{1}{x+7}$ existe si $x + 7 \neq 0$, donc si $x \neq -7$ $D = \mathbb{R} - \{-7\}$.

$\dfrac{1}{x+7} \geq -3$ équivaut à $\dfrac{1}{x+7} + 3 \geq 0$,

donc à $\dfrac{1 + 3(x+7)}{x+7} \geq 0$,

c'est-à-dire $\dfrac{3x + 22}{x + 7} \geq 0$.

Faisons un tableau de signes :

x	$-\infty$		$-\frac{22}{3}$		-7		$+\infty$
$3x+22$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+7$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{3x+22}{x+7}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	

$3x + 22 \geq 0$ si $x \geq \dfrac{-22}{3}$,

$x+7 \geq 0$ si $x \geq -7$.

$$\boxed{\frac{1}{x+7} \geq -3 \text{ si } x \in \left]-\infty\ ;\ \frac{-22}{3}\right] \text{ ou si } x \in\ ]-7\ ;\ +\infty[.}$$

- $x+2 \leq \dfrac{1}{x}$.

$\dfrac{1}{x}$ existe si $x \neq 0$, $D = \mathbb{R} - \{0\}$.

$x+2 \leq \dfrac{1}{x}$ équivaut à $x+2-\dfrac{1}{x} \leq 0$,

ou à $\dfrac{x(x+2)-1}{x} \leq 0$,

ou à $\dfrac{x^2+2x-1}{x} \leq 0$.

Étudions le signe de x^2+2x-1.

$\Delta = 4-4 \times 1 \times (-1) = 8$.

Il y a deux racines : $x' = \dfrac{-2+\sqrt{8}}{2} = \dfrac{-2+2\sqrt{2}}{2} = -1+\sqrt{2}$.

$$x'' = \frac{-2-\sqrt{8}}{2} = -1-\sqrt{2}.$$

x^2+2x-1 est positif (du signe de a) à l'extérieur des racines et négatif entre les racines.

Nous avons le tableau de signes :

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		0		$-1+\sqrt{2}$	
x^2+2x-1		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$
$\dfrac{x^2+2x-1}{x}$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$

$$\boxed{x+2 \leq \frac{1}{x} \text{ si } x \in \left]-\infty\,;\,-1-\sqrt{2}\,\right] \text{ ou si } x \in \left]\,0\,;\,-1+\sqrt{2}\,\right[.}$$

• $\ln(x+1) - \ln(2x-3) \geq \ln 2$.

$\ln(x+1)$ existe si $x+1>0$ donc si $x>-1$.

$\ln(2x-3)$ existe si $2x-3>0$ donc si $2x>+3$ et si $x>\dfrac{3}{2}$.

$D = \left]\dfrac{3}{2}\,;\,+\infty\right[$.

Nous savons que $\ln a - \ln b = \ln\left(\dfrac{a}{b}\right)$,

donc l'inéquation s'écrit $\ln\left(\dfrac{x+1}{2x-3}\right) \geq \ln 2$.

La fonction logarithme népérien est croissante : $\dfrac{x+1}{2x-3} \geq 2$.

Cette inéquation équivaut à $\dfrac{x+1}{2x-3} - 2 \geq 0$,

$$\text{ou à } \frac{x+1-2(2x-3)}{2x-3} \geq 0,$$

$$\frac{-3x+7}{2x-3} \geq 0.$$

Faisons un tableau de signes :

$-3x+7 \geq 0$ si $-3x \geq -7$,

donc si $x \leq \frac{7}{3}$.

$2x-3 \geq 0$ si $2x \geq 3$,

donc si $x \geq \frac{3}{2}$.

x	$\frac{3}{2}$		$\frac{7}{3}$		$+\infty$
$-3x+7$	‖	$+$	0	$-$	
$2x-3$	‖	$+$		$+$	
$-\frac{3x+7}{2x-3}$	‖	$+$	0	$-$	

$$\boxed{\text{Donc } \ln(x+1) - \ln(2x-3) \geq \ln 2 \text{ si } x \in \left]\frac{3}{2}\,;\,\frac{7}{3}\right[.}$$

• $2e^x - 1 \geq \dfrac{1}{2-e^x}$.

Cette inéquation a un sens si $2 - e^x \neq 0$.

Or $2 - e^x = 0$ si $e^x = 2$,

$\ln e^x = \ln 2$,

$x = \ln 2$.

L'ensemble de définition est $\mathcal{D} = \mathbb{R} - \{\ln 2\}$.

$2e^x - 1 \geq \dfrac{1}{2 - e^x}$ équivaut à $2e^x - 1 - \dfrac{1}{2 - e^x} \geq 0$,

donc à $\dfrac{(2e^x - 1)\,(2 - e^x) - 1}{(2 - e^x)} \geq 0$,

ou à $\dfrac{-2\,(e^x)^2 + 5e^x - 3}{2 - e^x} \geq 0$.

Etudions le signe de $-2(e^x)^2 + 5e^x - 3$.
Posons $X = e^x$:
$-2(e^x)^2 + 5e^x - 3 = -2X^2 + 5X - 3$.

Calculons le discriminant :

$\Delta = 25 - 4 \times (-2) \times (-3) = 1$.

Il y a deux racines $X' = \dfrac{-5+1}{-4} = 1$ et $X'' = \dfrac{-5\ -1}{-4} = \dfrac{3}{2}$,

ou encore $e^{x'} = 1$ et $e^{x''} = \dfrac{3}{2}$.

ou $\ln(e^{x'}) = \ln 1$ et $\ln(e^{x''}) = \ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$,

donc $x' = 0$ et $x'' = \ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$.

$-2X^2 + 5X - 3$ est négatif (du signe de a) à l'extérieur des racines et positif entre les racines,

donc $-2\,(e^x)^2 + 5e^x - 3 \geq 0$ si $x \in \left[0\ ;\ \ln\dfrac{3}{2}\right]$,

$-2\,(e^x)^2 + 5e^x - 3 \leq 0$ si $x \in \ ]-\infty\ ;\ 0]$

ou $x \in \left[\ln\dfrac{3}{2}\ ;\ +\infty\right[$.

Étudions le signe de $2 - e^x$.

$2 - e^x \geq 0$ si $-e^x \geq -2$, donc si $e^x \leq 2$,

ou $\ln e^x \leq \ln 2$,

$x \leq \ln 2$.

Nous avons le tableau de signes :

x	$-\infty$	0		$\ln\frac{3}{2}$		$\ln 2$	$+\infty$
$-2(e^x)^2 + 5e^x - 3$	$-$	0	$+$	0	$-$	|	$-$
$2 - e^x$	$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$
$\dfrac{-2(e^x)^2 + 5e^x - 3}{2 - e^x}$	$-$	0	$+$	0	$-$	||	$+$

Donc $\boxed{2e^x - 1 \geq \dfrac{1}{2 - e^x} \text{ si } x \in \left[0\ ;\ \ln\dfrac{3}{2}\right] \text{ ou si } x \in \left]\ln 2\ ;\ +\infty\right[.}$

3° $f(x) = (x + 2)(1 + e^{-x})$.

La courbe (C) est au dessus de la droite Δ si $f(x) \geq x + 2$.

$f(x) \geq x + 2$ équivaut à $(x+2)(1 + e^{-x}) \geq (x+2)$,

et à $(x+2)(1 + e^{-x}) - (x+2) \geq 0$,

et à $(x+2)(1 + e^{-x} - 1) \geq 0$,

donc à $(x+2)\, e^{-x} \geq 0$.

Or $e^{-x} > 0$ pour tout réel x, donc cette inéquation équivaut à $x + 2 \geq 0$, c'est-à-dire $x \geq -2$.

Donc si $x \geq -2$, la courbe (C) de f est située au-dessus de la droite Δ d'équation $y = x + 2$.

PROBLÈMES AVEC SOLUTIONS

1^er^ problème

◆ Énoncé

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par

$$f(x) = \frac{x^3 - 4x - 2}{(x+1)^2}.$$

a) Déterminer quatre réels a, b, c, d, tels que pour tout x différent de -1 on ait : $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x+1} + \dfrac{d}{(x+1)^2}$.

b) Etudier la position de la courbe (C) de f par rapport à la droite Δ d'équation $y = x - 2$.

◆ Solution

$$\textbf{\textit{a)}}\ ax + b + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{(x+1)^2} = \frac{(ax+b)\,(x+1)^2 + c(x+1) + d}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{(ax+b)\,(x^2+2x+1) + c(x+1) + d}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{ax^3 + (2a+b)\,x^2 + (a+2b+c)\,x + (b+c+d)}{(x+1)^2}$$

Identifions.

$$\begin{cases} a = 1 \\ 2a + b = 0 \\ a + 2b + c = -4 \\ b + c + d = -2 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = -4 - 1 + 4 = -1 \\ d = -2 + 2 + 1 = 1 \end{cases}$$

Donc pour $x \neq -1$, $\boxed{f(x) = x - 2 - \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{(x+1)^2}}$.

b) La courbe (C) est au-dessus de la droite Δ si $f(x) \geq x - 2$,

donc si $\quad x - 2 - \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{(x+1)^2} \geq x - 2,$

ou encore $\quad -\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{(x+1)^2} \geq 0.$

Réduisons au même dénominateur : $\dfrac{-(x+1)+1}{(x+1)^2} \geq 0$,

c'est-à-dire $\quad \dfrac{-x}{(x+1)^2} \geq 0.$

$-x \geq 0$ si $x \leq 0$.

$(x+1)^2 \geq 0$ pour tout $x \neq 1$.

Donc $\dfrac{-x}{(x+1)^2} \geq 0$ si $x \in \ ]-\infty\,;-1[$ ou $x \in \ ]-1\,;\,0]$.

> La courbe (C) est au-dessus de la droite Δ si x est négatif : $x \in \ ]-\infty\,;-1[$ ou $x \in \ ]-1\,;\,0]$.

2^e^ problème

◆ Énoncé

Les coûts de production d'un bien de grande consommation sont calculés par l'expression $CT(x) = 0{,}1x^2 + 16\,000$, où x est le nombre d'unités produites et $CT(x)$ le coût total en francs de la production de x unités. Chaque article étant vendu 100 F pièce, la recette totale de l'entreprise est $RT(x) = 100x$, et le bénéfice se calcule :

$BT(x) = RT(x) - CT(x)$.

L'entreprise peut produire au maximum 1 000 unités.

1° Etudier le sens de variation de la fonction CT(x) sur l'intervalle I = [0 ; 1 000] et représenter cette fonction dans un repère orthogonal où 1cm représente 100 unités sur l'axe des abscisses et 10 000 F sur l'axe des ordonnées.

2° Représenter la fonction RT(x) dans le même repère. D'après le graphique, sur quel intervalle la courbe de RT est-elle au-dessus de celle de CT ?

3° Etudier le signe de la fonction BT(x). A quel intervalle doit appartenir x pour que l'entreprise réalise un bénéfice ?

◈ Solution

1° $CT(x) = 0{,}1x^2 + 16\,000$. I = [0 ; 1 000]

Pour étudier le sens de variation de CT(x), calculons sa dérivée.
$CT'(x) = 0{,}2x$.

Si $x > 0$, $CT'(x) > 0$, donc la fonction CT(x) est croissante.

Nous avons le tableau de variation :

x	0	1 000
CT'(x)	+	
CT(x)	16 000 ↗	116 000

CT(0) = 16 000.
CT(1 000) = 116 000.

2° $RT(x) = 100x$. La fonction RT est une fonction linéaire, sa représentation graphique est une droite.

D'après le graphique, la courbe de RT est au-dessus de celle de CT si $x \in [200 ; 800]$.

3° $BT(x) = RT(x) - CT(x)$,

$BT(x) = 100x - (0{,}1x^2 + 16\,000)$,

$BT(x) = -\,0{,}1x^2 + 100x - 16\,000$.

Pour étudier le signe de $BT(x)$, calculons le discriminant :

$\Delta = 100^2 - 4 \times (-\,0{,}1) \times (-\,16\,000) = 3\,600 = 60^2$.

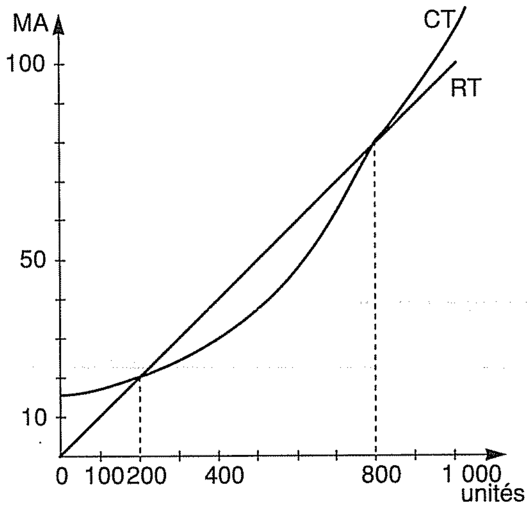
Il y a deux racines $x' = \dfrac{-\,100 + 60}{-\,0{,}2} = 200$,

$$x'' = \frac{-\,100 - 60}{-\,0{,}2} = 800.$$

$BT(x)$ est négatif (du "signe de a") à l'extérieur des racines, et positif entre les racines.

x	0		200		800		1 000
$BT(x)$		–	0	+	0	–	

Pour réaliser un bénéfice, l'entreprise doit produire plus de 200, et moins de 800 unités.



3^e^ problème

◆ Énoncé

1° Etudier le sens de variation de la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 2\ln x$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

2° Soit g la fonction définie par $g(x) = x^2$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$. Résoudre l'inéquation $f(x) \geq g(x)$.

◆ Solution

$f(x) = x^2 - 2\ln x$ est définie pour tout réel x de $]0\ ;\ +\infty[$.

Calculons sa dérivée : $f'(x) = 2x - \frac{2}{x}$.

Etudions le signe de $f'(x)$.

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 2}{x} = \frac{2(x^2-1)}{x},$$

$$f'(x) = \frac{2(x+1)(x-1)}{x}.$$

Notons que dans l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, on a $x > 0$ et $x + 1 > 0$.

Donc le signe de $f'(x)$ est celui de $x - 1$.

En résumé : $f'(x) < 0$ si $x \in\ ]0\ ;\ 1[$,

$f'(x) > 0$ si $x \in\ ]1\ ;\ +\infty[$.

Nous obtenons le tableau de variation :

$f(1) = 1 - 2\ln 1 = 1$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$		$+$	
$f(x)$	‖	↘	1	↗	

f est décroissante sur $]0\ ;\ 1[$ et croissante sur $]1\ ;+\infty[$.

2° $f(x) \geq g(x)$ équivaut à $x^2 - 2\ln x \geq x^2$,

ou encore à $\quad -2\ln x \geq 0$,

c'est-à-dire $\quad \ln x \leq 0$,

enfin $\quad x \leq 1$.

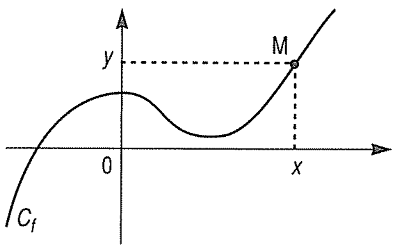
$$\boxed{\begin{array}{l} f(x) \geq g(x) \text{ si } x \in\ ]0\ ;\ 1], \\ f(x) \leq g(x) \text{ si } x \in [1\ ;\ +\infty[\end{array}}\ .$$

16 LA GÉOMÉTRIE DES COURBES

CE QU'IL FAUT RETENIR

Dans tout ce paragraphe les courbes dont on parle sont associées à des fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ représentées en repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

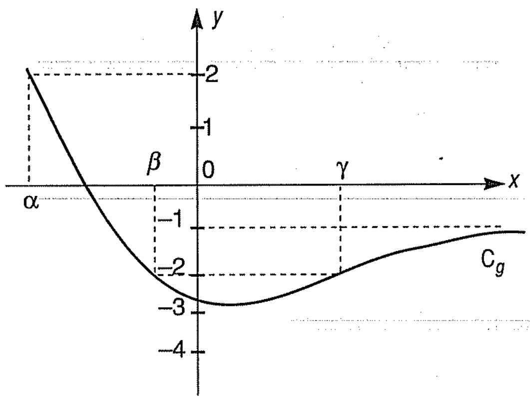
1° Tout point M de la courbe (C) associée à *f* donne lieu à deux lectures :



– l'ordonnée *y* de M est l'image du réel *x* par la fonction *f*.
– l'abscisse *x* de M est l'un des antécédents de *y* par *f*.

Conséquence : la résolution graphique de toute équation du type $f(x) = m$ où m est un réel donné, consiste à lire les valeurs approchées des antécédents de m par f sur la courbe.

Exemple : si g est la fonction associée à la courbe ci-dessous :



- L'équation $g(x) = 2$ admet la seule solution α.
- L'équation $g(x) = -2$ admet les solutions β et γ.
- L'équation $g(x) = -4$ n'admet pas de solution.

2° Ajouter le réel a à toute image $f(x)$ c'est translater la courbe (C_f) associée à f du vecteur $\vec{u} = a\vec{j}$.

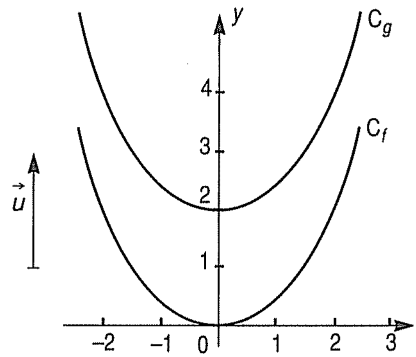
Exemple : $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, $g(x) = \frac{1}{2}x^2 + 2$.

On a : $\boxed{g(x) = f(x)} + a$ avec $a = +2$ ici.

La courbe (C_g) se déduit de la courbe (C_f) par la translation de vecteur

$\vec{u}\begin{pmatrix} 0 \\ +2 \end{pmatrix}$.

Il s'agit d'un déplacement de tous les points de (C_f) parallèlement à l'axe (O_y) "de deux unités vers le haut".



3° On passe de l'équation de (C_f) $y = \frac{1}{2}x^2$ à l'équation de (C_g) $y = \frac{1}{2}x^2 - 2$ par le changement de variables suivant :

$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$, c'est-à-dire : $\begin{cases} X - x = 0 \\ Y - y = -2 \end{cases}$ soit $\boxed{\begin{cases} x = X \\ y = Y + 2. \end{cases}}$

4° Ajouter le réel *a* à toute valeur de la variable *x*, c'est translater la courbe (C_f) associée à *f* du vecteur $\vec{u} = -a\vec{i}$.

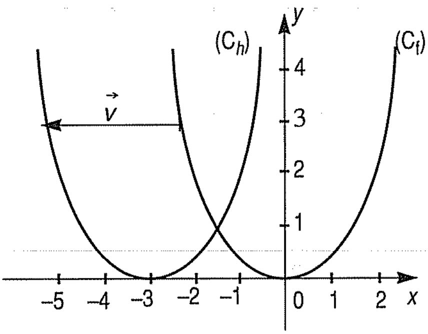
Exemple : $f(x) = \frac{1}{2}x^2$, $h(x) = \frac{1}{2}(x+3)^2$.

On a : $h(x) = f(x + a)$ avec $a = 3$ ici.

La courbe (C_h) se déduit de la courbe (C_f) par la translation de vecteur $\vec{v}\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

5° On passe de l'équation de (C_f) $y = \frac{1}{2}x^2$ à l'équation de (C_g) $Y = \frac{1}{2}(X+3)^2$, c'est-à-dire : $Y = \frac{1}{2}(X^2 + 6X + 9)$ par le *changement de variables* :

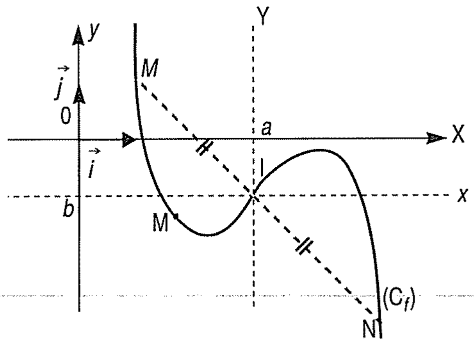
$\overrightarrow{MM'} = \vec{v}$, c'est-à-dire $\begin{cases} X - x = 3 \\ Y - y = 0 \end{cases}$ soit $\boxed{\begin{cases} x = X - 3 \\ y = Y \end{cases}}$.



6° Centre de symétrie d'une courbe.

L'énoncé "la courbe (C_f) admet le point I $(a\,;b)$ pour centre de symétrie" équivaut à l'énoncé "la fonction Φ déduite de f par la translation qui place l'origine en I est impaire".

Graphiquement :



Pour tout M $\in (C_f)$, on a : MI = I N et N est aussi sur (C_f).

La courbe (C_f) admet I pour centre de symétrie dans le repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

Si on peut exprimer l'ordonnée Y de M en fonction de X dans le repère $(I, \vec{i}, \vec{j})$ par une fonction Φ, alors Φ est impaire.

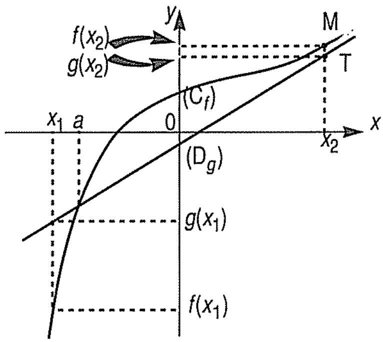
7° Axe de symétrie d'une courbe.

On reprendrait ce qui est écrit ci-dessus en remplaçant la propriété Φ est impaire par Φ est paire.

Note : beaucoup de fonctions ne sont ni paires, ni impaires.

8° Placer la courbe (C_f) par rapport à la droite (D_g) sur l'intervalle $[a\,;b]$, c'est étudier le signe de la différence $f(x) - g(x)$ sur l'intervalle considéré.

Exemple :



Sur le dessin ci-dessus on lit que la différence $f(x) - g(x) = d(x)$ est :

• positive si $x \in\ ]\,a\,;+\infty\,[$;

• négative si $x \in\ ]-\infty\,;a\,[$.

Ecrivons : $g(x) = ax + b$.

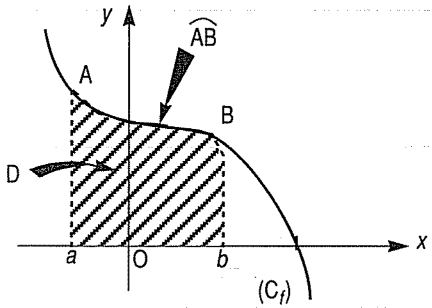
Cas particulier :

Si $f(x) = ax + b + \varphi(x)$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$ alors (D) est asymptote à (C_f) lorsque x tend vers + l'infini.

9° Désigner un arc de $\overset{\frown}{AB}$ de la courbe (C_f) consiste à joindre à l'écriture $y = f(x)$ la condition $x \in [a\,;b]$ où a est l'abscisse de A et b l'abscisse de B.

10° Désigner le domaine $\mathcal{D}$ compris entre la courbe (C_f) ; l'axe (O_x) ; et deux droites $(x = a)$ et $(x = b)$ c'est écrire que les points M $(x\,;\,y)$ vérifient (si C est au-dessus de O_x).

$$\mathcal{D}\begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$$



EXERCICES POUR S'ENTRAÎNER

1° Démontrer que la courbe (C) associée à la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{5}x^3 - 3x^2 + 15x - 23$ admet le point I (5 ; 2) pour centre de symétrie.

2° A partir de la courbe représentative du logarithme népérien, tracer la courbe (C) associée à la fonction $f(x) = \ln|x|$.

On précisera l'ensemble de définition, mais on ne procédera pas à l'étude de la fonction f.

3° Mettre le trinôme $t(x) = x^2 - 4x + 3$ sous la forme canonique.
En déduire que la courbe (C) associée à t est une parabole dont on précisera le sommet et l'axe de symétrie.

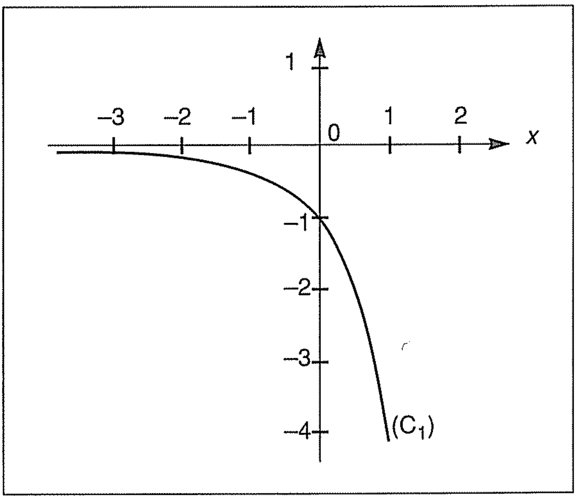
4° A partir de la courbe représentative de la fonction "puissance 3", tracer la courbe (C_1) associée à la fonction $f_1(x) = x^3 + 2$ et la courbe (C_2) associée à la fonction $f_2(x) = (x - 2)^3$.

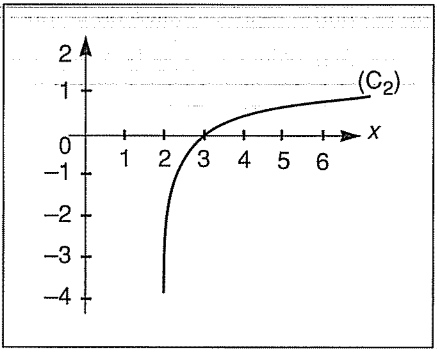
Développer l'expression de f_2.

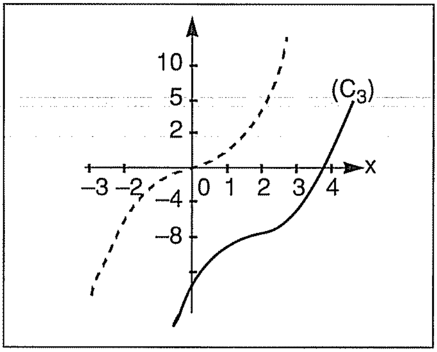
5° La courbe représentative de la fonction $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 9}$ admet-elle un centre de symétrie ? On pourra réaliser une rapide étude de f afin de répondre à la question.

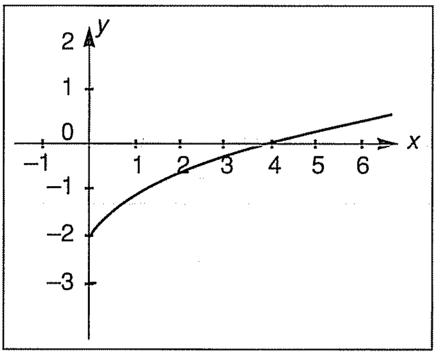
Si oui, préciser ce centre et démontrez votre réponse.

6° Les courbes ci-dessous résultent de l'action de translations ou de symétries simples sur des courbes de fonctions usuelles. Pour chacune d'elle, reconnaître la fonction élémentaire puis donner l'équation $y = f(x)$ de la courbe étudiée.



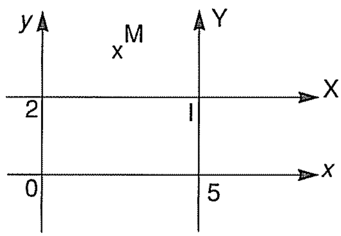

(C2)
x
2
1
0
–1
–2
–3
–4
1 2 3 4 5 6


(C3)
x
10
5
2
–4
–8
–3 –2 0 1 2 3 4


y
x
2
1
0
–1
–2
–3
–1 1 2 3 4 5 6

◈ Solution

1° Faisons le changement de variables qui envoie $(O\,;\,\vec{i}\,;\vec{j}\,)$ sur $(I\,;\,\vec{i}\,;\vec{j}\,)$:



On écrit que pour tout M de la courbe (C) on a : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM}$.

Or, les coordonnées de M par rapport à O sont $(x\,;y)$ et par rapport à I (X, Y).

En outre, les coordonnées de I dans le repère d'origine O sont (5; 2),

d'où : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM}$ se traduit : $\begin{cases} x = 5 + X \\ y = 2 + Y \end{cases}$.

Substituons dans l'équation : $y = \dfrac{1}{5}x^3 - 3x^2 + 15x - 23$,

il vient : $2 + Y = \dfrac{1}{5}(X+5)^3 - 3(X+5)^2 + 15(X+5) - 23$.

Développons : $(X + 5)^3 = X^3 + 3X^2.5 + 3.X.5^2 + 5^3$,

c'est-à-dire : $(X + 5)^3 = X^3 + 15X^2 + 75\,X + 125$

et $(X + 5)^2 = X^2 + 2.5X + 5^2 = X^2 + 10\,X + 25$.

On en déduit :

$$Y + 2 = \frac{1}{5}(X^3 + 15X^2 + 75X + 125) - 3(X^2 + 10X + 25)$$
$$+15(X+5) - 23,$$

$$Y + 2 = \frac{1}{5}X^3 + 3X^2 + 15X + 25 - 3X^2 - 30X - 75 + 15X + 75 - 23,$$

c'est-à-dire : $Y + 2 = \frac{1}{5}X^3 + 2$ ou encore : $Y = \frac{1}{5}X^3$.

L'expression de la fonction dans $(I; \vec{i}; \vec{j})$ est

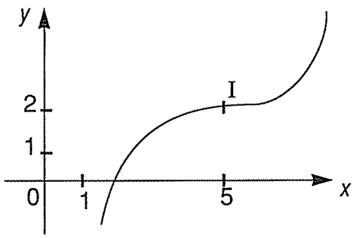
$$\begin{cases} y = \Phi(x) \\ \text{avec } \Phi(x) = \frac{1}{5}x^3. \end{cases}$$

Or Φ vérifie : $\Phi(-X) = \frac{1}{5}\left(-X\right)^3 = \frac{1}{5}\left(-X^3\right) = -\left(\frac{1}{5}X\right)^3 = -\Phi(X)$,

ce qui établit qu'elle est impaire.

Donc le point I est centre de symétrie de la courbe (C), la courbe doit donc le vérifier.

Note : La courbe (C) a cette allure :

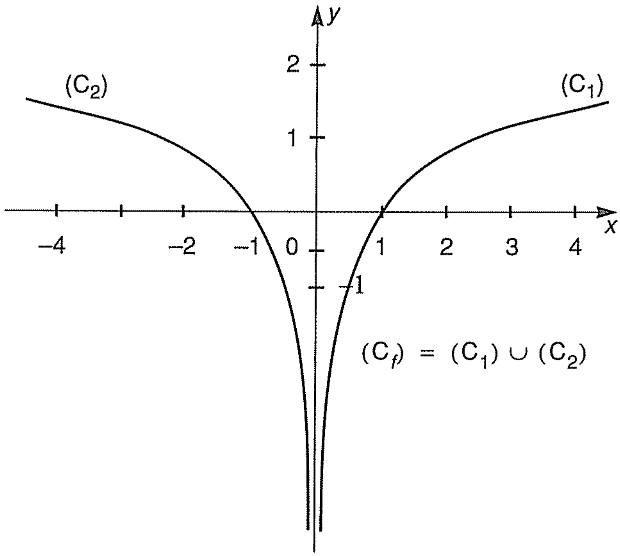


2° Il faut distinguer deux cas afin de retirer la valeur absolue :

- Si $x > 0$ alors $f(x) = \ln x$, qui existe sur $]\,0\,;+\infty\,[$
- Si $x < 0$ alors $|x| = -x$, d'où $f(x) = \ln(-x)$, qui existe

sur $]-\infty\,;\,0\,[$.

L'arc (C_1) associé à $]\,0\,;+\infty\,[$ est la courbe du logarithme et l'arc (C_2) associé à $]-\infty\,;\,0\,[$ est le symétrique de (C_1) par rapport à l'axe (O_y).



3° L'équation $y = t(x)$ est : $y = x^2 - 4x + 3$,
or $x^2 - 4x$ est le début du carré $(x - 2)^2$,
d'où l'on déduit : $y = (x - 2)^2 - 4 + 3$,
d'où : $y = (x - 2)^2 - 1$: forme canonique du trinôme $t(x)$.

On a enfin, en transposant 1 : $y + 1 = (x - 2)^2$.

• Il suffit alors de poser : $Y = y + 1$ et $X = x - 2$ pour faire apparaître $Y = X^2$, équation d'une parabole de référence ($y = x^2$), dans le repère d'origine O' tel que : $X = 0$ et $Y = 0$.

$X = 0$ équivaut à $x - 2 = 0$, c'est-à-dire : $x = 2$.
$Y = 0$ équivaut à $y + 1 = 0$, c'est-à-dire : $y = -1$.

• La parabole de sommet O' (2 ; –1) admet par axe de symétrie la droite parallèle à (O_y) passant par le point O', c'est donc la droite d'équation : ($x = 2$).

Figure exercice 3

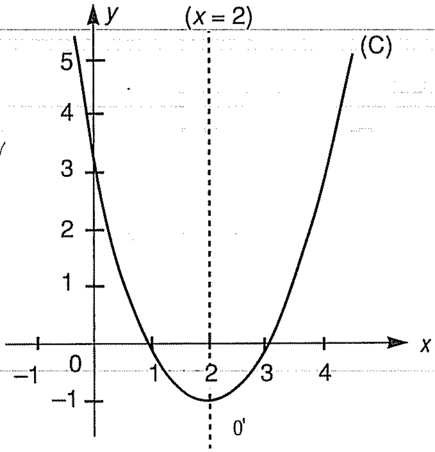
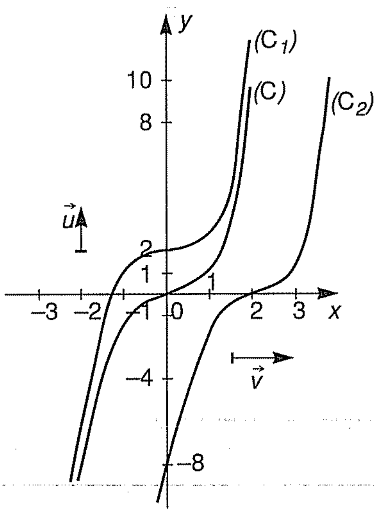


Figure exercice 4



4° • La courbe (C_1) se déduit de la courbe (C) cubique de référence ($y = x^3$), par une translation de vecteur $\vec{u} = 2\vec{j}$.

• La courbe (C_2) se déduit de (C) par une translation de vecteur $\vec{v} = 2\vec{i}$.

5° Etude rapide de la fonction : $f(x) = \dfrac{x}{x^2 - 9}$.

• Définie sur
$Df =]-\infty\ ;\ -3[\ \cup\ ]-3\ ;\ +3[\ \cup\ ]+3\ ;\ +\infty[$.

• Limite en l'infini : $f(x) = \dfrac{x}{x^2\left(1 - \dfrac{9}{x^2}\right)} = \dfrac{1}{x\left(1 - \dfrac{9}{x^2}\right)}$,

donc $\lim\limits_{\pm\infty} f(x) = 0$ (car $x \neq 0$).

Donc l'axe (O_x) est asymptote à la courbe lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

• Signe de $f(x)$

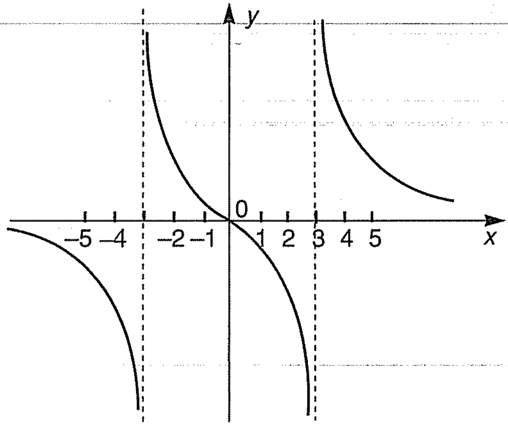
x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
x		$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
x^2-9		$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	|	$+$	|	$-$	|	$+$	

Les limites suivantes en découlent :

$\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x < -3}} f(x) = -\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{\substack{x \to -3 \\ x > -3}} f(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{\substack{x \to +3 \\ x < 3}} f(x) = -\infty$ $\qquad$ $\lim\limits_{\substack{x \to 3 \\ x > 3}} f(x) = +\infty$.

• Calcul de $f'(x) = \dfrac{-x^2 - 9}{(x^2 - 9)^2}$, dont le signe est négatif sur D_f ; donc f est décroissante sur les trois intervalles.



Le dessin fait apparaître un centre de symétrie probable : l'origine O. Vérifions en étudiant la parité de la fonction f :

$$f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2-9} = \frac{-x}{-x^2-9} = -\left(\frac{-x}{x^2-9}\right) = -f(x)$$

f est impaire, cela confirme la conjecture proposée sur le point O.

6° La courbe (C_1) est déduite de l'exponentielle $y = e^x$ par une symétrie d'axe (O_x)

Donc : $\boxed{f_1(x) = -e^x}$.

La courbe (C_2) se déduit du logarithme $y = \ln x$ par une translation de vecteur $\vec{u} = 2\vec{i}$.

Donc : $\boxed{f_2(x) = \ln(x-2)}$.

La courbe (C_3) est la translatée de $y = x^3$ par le vecteur $\vec{u}\left(\frac{2}{-5}\right)$.

On a donc : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IM}$

$$\begin{cases} x = 2 + x \\ y = -5 + y \end{cases}$$ que l'on substitue dans $y = x^3$.

Il vient : $Y - 5 = (X + 2)^3$ d'où : $Y = X^3 + 6X^2 + 12X + 8 + 5$, c'est-à-dire $\Phi(X) = X^3 + 6X^2 + 12X + 13$.

On en déduit que : $\Phi(x) = \boxed{x^3 + 6x^2 + 12x + 13}$.

La courbe (C_4) est la translatée de la racine carrée $y = \sqrt{x}$ par le vecteur $\vec{u} = -2\vec{j}$.

Donc on a : $f_4(x) = \sqrt{x-2}$, ou encore $\boxed{f_4(x) = -2 + \sqrt{x}}$.

PROBLÈME CORRIGÉ

Problème

◆ Énoncé

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 e^{-2x}$.

1° Calculer la dérivée f' de la fonction f.
En déduire les variations de la fonction f.

2° *a)* Étudier la limite de f en $-\infty$.

b) Etudier la limite de f en $+\infty$. Pour cela on utilisera le résultat suivant : la limite en $+\infty$ de $x^2 e^{-x}$ est nulle.

3° Soit C la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Construire la courbe C.

4° *a)* Déterminer graphiquement en fonction du réel m le nombre et le signe des solutions de l'équation $f(x) = m$.

b) En déduire que l'équation $x^2 = e^{2x}$ a une solution unique dont on précisera le signe.

◈ Solution

$f(x) = x^2 e^{-2x}$. Étude sur $\mathbb{R}$.

1° Dérivée : $f'(x) = 2x \cdot e^{-2x} + x^2(-2e^{-2x})$.

Factorisons e^{-2x}, il vient : $f'(x) = (2x - 2x^2)\, e^{-2x}$,

ou encore : $f'(x) = 2x(1-x)\, e^{-2x}$, dont le signe est celui du trinôme $2x\,(1-x)$ car e^{-2x} est positif sur tout $\mathbb{R}$.

• Le signe de ce produit est négatif à l'extérieur de $[0\ ;\ 1]$, d'où le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
Signe f'		$-$	0	$+$	0	$-$	
var. f		↘		↗		↘	

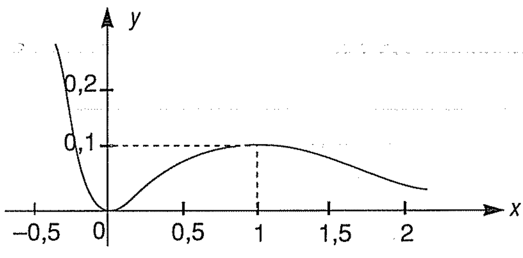
• Le minimum local est atteint en 0 : $f(0) = 0$.

• Un maximum local est atteint en 1 : $f(1) = e^{-2} = 0{,}135$.

2° ***a)*** $\lim\limits_{-\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{-\infty} e^{-x} = +\infty$, donc $\lim\limits_{-\infty} f(x) = +\infty$.

b) $f(x) = (xe^{-x})^2$, or $\lim\limits_{+\infty} (xe^{-x}) = 0$, donc $\lim\limits_{+\infty} f(x) = 0$.

3° La courbe (C) s'en déduit.



4° *a)* Lecture du nombre d'antécédents du réel m par la fonction $f(x)$.

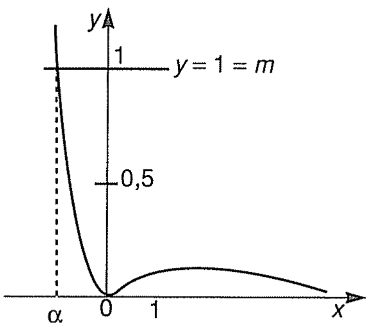
Cela donne lieu à une discussion :

	Nombre
si $m > 0{,}135$	1
si $m = 0{,}135$	2
si $0 < m < 0{,}135$	3
si $m = 0$	1
si $m < 0$	0

b) L'équation : $x^2 = e^{2x}$ équivaut à : $x^2\, e^{-2x} = 1$, c'est-à-dire à $f(x) = 1$.

Le cas où $m = 1$ correspond à une seule solution.

Changeons l'échelle du dessin : l'abscisse du point d'intersection de ($y = 1$) avec (C) est un réel $\alpha < 0$, donc la solution est négative.



17
AJUSTEMENT LINÉAIRE D'UNE DOUBLE SÉRIE STATISTIQUE

CE QU'IL FAUT RETENIR

1° On représente n individus statistiques observés selon deux caractères X et Y par un nuage de points du plan.

Si le nuage n'est pas trop éloigné d'une droite, il peut être pertinent de chercher à calculer les valeurs de la variable Y comme images par une fonction affine des valeurs de la variable X.

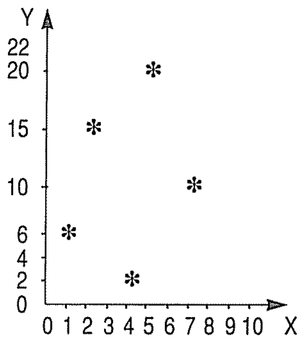
X est dit variable explicative.

Y est dit variable expliquée ou dépendante.

Exemple 1 :

S_1

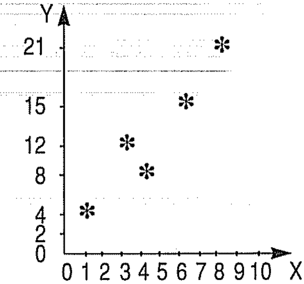
i	1	2	3	4	5
x_i	1	2	4	5	7
y_i	6	15	2	20	10



Exemple 2 :

S_2

i	1	2	3	4	5
x_i	1	3	4	6	8
y_i	4	12	8	15	21



Le nuage associé à S_2 semble raisonnablement ajustable par une droite, tandis que le nuage associé à S_1 ne l'est pas.

2° Le coefficient de *corrélation* r permet d'apprécier la pertinence de l'ajustement du nuage par une droite.

On a : $-1 \leq r \leq +1$.

• Si r a un signe positif, alors l'ajustement est croissant, si r a un signe négatif, alors il est décroissant.

• Si $|r| = 1$, c'est-à-dire : $r = +1$ ou $r = -1$, alors Y est fonction affine de X : c'est un lien fonctionnel et non plus seulement statistique.

• Si $|r|$ est proche de 1 : la corrélation linéaire est forte ou très forte selon la proximité de $|r|$ à 1.

• Si $|r|$ est proche de 0 : la corrélation linéaire est faible.

Exemples : les coefficients de corrélation associés aux séries S_1 et S_2 valent respectivement $r_1 = 0{,}1851$ et $r_{=}$ 0,9368.

3° Calcul du coefficient r : $\boxed{r = \dfrac{\text{cov}(x\ ;\ y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y}}$.

où cov (X ; Y) est la *covariance* de X et de Y et $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$,

V(X) est la variance de X.

Pour trois points, par exemple, on a :

cov (X, Y) =

$$\frac{1}{3}\left[(x_1 - \bar{x})(y_1 - \bar{y}) + (x_2 - \bar{x})(y_2 - \bar{y}) + (x_3 - \bar{x})(y_3 - \bar{y})\right]$$

et $V(X) = \frac{1}{3}\left[(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + (x_3 - \bar{x})^2\right]$.

Ce qui se note ainsi : $\boxed{\operatorname{cov}(X, Y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}$,

et $\boxed{V(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$.

4° Disposition de ces calculs en tableau :

Exemple : série S_1.

i	x_i	y_i	$x_i - \bar{x}$	$y_i - \bar{y}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
1	1	6	−2,8	−4,6	7,84	21,16	12,88
2	2	15	−1,8	4,4	3,24	19,36	−7,92
3	4	2	0,2	−8,6	0,04	73,96	−1,72
4	5	20	1,2	9,4	1,44	88,36	11,28
5	7	10	3,2	−0,6	10,24	0,36	−1,92
	19	53			22,80	203,20	12,60

• Les moyennes sont : $\bar{x} = \frac{19}{5} = (3,8)$ et $\bar{y} = \frac{53}{5} = 10,6$.

• Le calcul de r_1 se fait en simplifiant par $\frac{1}{5}$ le numérateur et le dénominateur : $r_1 = \frac{12,6}{\sqrt{22,8}\,\sqrt{203,2}} = 0,1851$.

5° Autre voie de calcul.

On utilise une autre expression des variances et covariance :

$$\bullet\ V(X) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right) - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}{n} - (\bar{x})^2.$$

V(X) est la moyenne des carrés diminuée du carré de la moyenne.

• $\text{cov}(X, Y) = \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) - \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i\right)$.

• cov (X , Y) est la moyenne des produits diminuée du produit des deux moyennes.

6° Equation de la droite de régression de Y en X.

Si on exprime y* en fonction de x par : $y^* = \hat{a}x + \hat{b}$,
alors les coefficients de cette droite sont tels que :

$$\boxed{\hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) - (n\,\bar{x}\,.\,\bar{y})}{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 - n \cdot \bar{x}^2} = \hat{a}}$$

et $\boxed{\hat{b} = (\bar{y} - \hat{a} \cdot \bar{x})}$.

Note : y^* est la valeur calculée par l'ajustement et non la valeur observée. En pratique, en terminale, on écrit cependant *y*.

7° Disposition des calculs en tableau.

• La disposition adoptée au **4°** fournit tous les résultats intermédaires utiles au calcul de $\hat{a}$ et $\hat{b}$ par la première voie.

• Si l'on préfère adopter l'autre voie, on doit alors adopter la disposition ci-dessous.

Exemple : série S_1.

i	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i y_i$
1	1	6	1	36	6
2	2	15	4	225	30
3	4	2	16	4	8
4	5	20	25	400	100
5	7	10	49	100	70
	19	53	95	765	214

où $\bar{x} = \frac{19}{5} = 3{,}8$, et $\bar{y} = \frac{53}{5} = 10{,}6$.

$$\text{Donc } \hat{a} = \frac{214 - 5 \times 3,8 \times 10,6}{95 - 5 \times (3,\ 8^2)}.$$

D'où $\hat{a} = 0{,}5526$ et $\hat{b} = 10{,}6 - \hat{a} \,.\, 3{,}8$ soit $\hat{b} = 8{,}5000$.

L'équation recherchée est $y = 0,5526 \cdot x + 8{,}5$.

Note : dans le cas présent, cette droite présente peu d'intérêt puisque la corrélation est très faible : $r_1 = 0{,}1851$.

8° *Attention :* sur les calculatrices, le programme de calcul des coefficients de la droite de régression utilise la notation américano-japonaise :

A désigne l'ordonnée à l'origine $\hat{b}$,

B désigne le coefficient directeur $\hat{a}$.

On écrit alors Y = A + Bx.

9° *Attention :* une forte corrélation ne signifie pas nécessairement qu'il y ait lien de causalité entre deux variables économiques ou sociales X et Y. Il peut y avoir par exemple explication commune des variables X et Y par une troisième variable Z.

EXERCICES POUR S'ENTRAÎNER

1° Reprendre les données de la série statistique S_2 fournie en exemple et présenter les calculs selon les deux types de tableau possibles afin de calculer : r_2, $\hat{a}$ et $\hat{b}$

2° Soit la série $\mathcal{Q}$

x_i	2	3	4	6	8
y_i	1	3	5	9	13

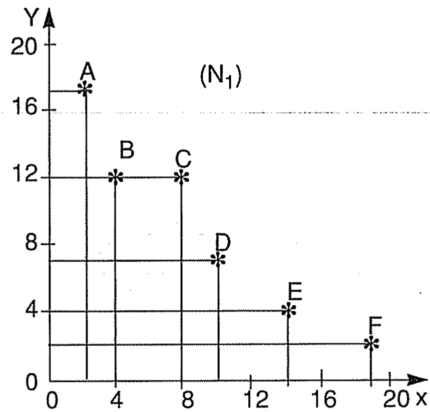
a) Disposer les calculs en tableau afin de calculer le coefficient de corrélation. Commenter ce coefficient.

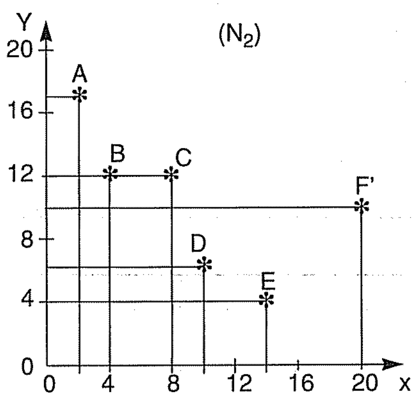
b) Si la corrélation linéaire vous semble assez forte, alors déterminez les coefficients de la droite de régression de y en x.

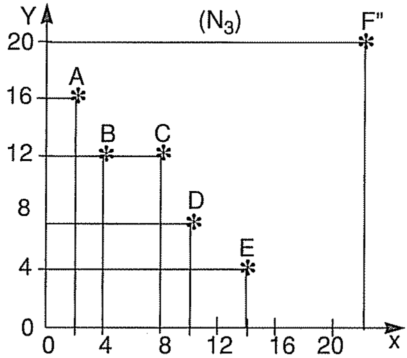
c) Représenter le nuage de point et retrouver les résultats précédents.

3° Considérons les trois nuages de points ci-dessous.

Le nuage N_2 se déduit du nuage $N_1 = \{A, B, C, D, E, F\}$ par modification du point F, et le nuage N_3 se déduit de N_2 par modification du point F'.







a) Pour chacun des nuages, relever les coordonnées des six points et calculer, à l'aide du programme spécialisé de votre machine, le coefficient de corrélation. (Les coordonnées sont entières.)

b) Comparer les formes des nuages et leurs coefficients.

4° L'essai d'une automobile sur route en Corse — édité par une revue — permet de comparer les distances parcourues et les consommations d'essence. L'unité de temps utilisée est le quart d'heure.

Durée	0	1	2	3	4	5	6	7	T
Distance (en km)	0	35	60	80	105	112	127	157	D
Consommation (en *l*)	0	4	5,75	7,25	9	11,5	12,5	16,5	C

a) Calculer le coefficient de corrélation et juger de la pertinence d'un ajustement linéaire.

b) Déterminer l'équation de la droite de régression de la consommation en fonction de la distance parcourue.

Quelle signification concrète peut-on donner au coefficient directeur de cette droite ?

c) Comparer la consommation moyenne réalisée aux 100 km avec celle de 7,5 *l* aux 100 km indiquée par le constructeur pour une voiture roulant à vitesse stabilisée sur le circuit fermé de Montlhéry.

◆ Solution

1° Série statistique S_2.

Premier procédé de calcul :

i	x_i	y_i	$x_i - \bar{x}$	$y_i - \bar{y}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
1	1	4	–3,4	–8	11,56	64	27,2
2	3	12	–1,4	0	1,96	0	0,0
3	4	8	–0,4	–4	0,16	16	1,6
4	6	15	1,6	3	2,56	9	4,8
5	8	21	3,6	9	12,96	81	32,4
	22	60			29,20	170	66,0

$$\bar{x} = \frac{22}{5} = 4{,}4, \quad \bar{y} = \frac{60}{5} = 12{,}0,$$

$$r = \frac{66}{\sqrt{29,2}\sqrt{170}}, \text{ c'est-a-dire } r = 0{,}9368.$$

Second procédé de calcul :

i	x_i	y_i	x_i^2	y_i^2	$x_i\ y_i$
1	1	4	1	16	4
2	3	12	9	144	36
3	4	8	16	64	32
4	6	15	36	225	90
5	8	21	64	441	168
	22	60	126	890	330

$$r = \frac{330 - 5 \times 4,4 \times 12,0}{\sqrt{126 - 5 \times (4,4^2)}\sqrt{890 - 5 \times (12^2)}}, \text{ donc } r = 0{,}9368.$$

$$\hat{a} = \frac{330 - 5 \times 4,4 \times 12}{126 - 5 \times 4,4^2} = \frac{66}{29,2} = 2{,}2603.$$

D'où : $\hat{b} = 12 - \hat{a} \,.\, 4{,}4 = 2{,}0548.$

Forte corrélation car r est proche de 1 et droite de régression de Y en X d'équation :

$$y = 2{,}2603 \,.\, x + 2{,}0548.$$

2° Série statistique $\mathcal{Y}$.

a) Calcul du coefficient r par tableau :

i	x_i	y_i	$x_i - \bar{x}$	$y_i - \bar{y}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
1	2	1	−2,6	−5,2	6,76	27,04	13,52
2	3	3	−1,6	−3,2	2,56	10,24	5,12
3	4	5	−0,6	−1,2	0,36	1,44	0,72
4	6	9	1,4	2,8	1,96	7,84	3,92
5	8	13	3,4	6,8	11,56	46,24	23,12
	23	31			23,20	92,80	46,40

$$\bar{x} = \frac{23}{5} = 4{,}6,$$

$$\bar{y} = 6{,}2,$$

$$r = \frac{46,40}{\sqrt{23,2}\sqrt{92,8}} = 1.$$

Ceci indique que les points sont alignés : il y a une fonction affine qui exprime exactement les valeurs de Y comme images des valeurs de X.

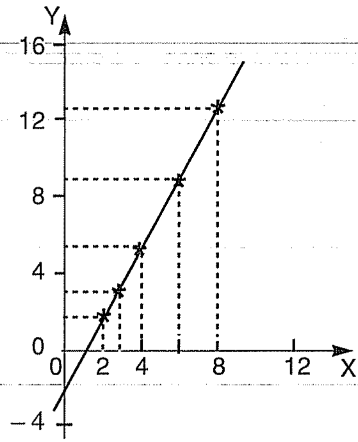
b) La dépendance étant totale, cherchons l'équation de la droite :

on a : $\hat{a} = \dfrac{46,4}{23,2} = 2$ et $\hat{b} = y - \hat{a} \,.\, \hat{x} = 6{,}2 - 2 \times 4,\ 6 = -3.$

c) Les points sont donc alignés sur la droite d'équation :

$\boxed{y = 2x - 3}$

On peut lire la pente $m = 2$ sur le dessin et l'ordonnée à l'origine $y_0 = -3$.



3° ***a)*** Trois séries statistiques : (calculs faits à la machine)

(N_1)

x_i	2	4	8	10	14	19
y_i	17	12	12	7	4	2

dont le coefficient est $r_1 = -0{,}8917$.

(N_2)

x_i	2	4	8	10	14	20
y_i	17	12	12	7	4	10

dont le coefficient est $r_2 = -0{,}5371$.

(N_3)

x_i	2	4	8	10	14	21
y_i	17	12	12	7	4	20

dont le coefficient est $r = 0{,}1697$.

b) Le nuage N_1 est proche d'un alignement et la tendance est décroissante : le coefficient r_1 est négatif et assez proche de -1.

Le point F' s'éloigne de l'alignement : le coefficient r_2 est moins proche de -1 (plus proche de 0).

Le point F' monte à un tel niveau que le coefficient r_3 change de signe en s'approchant de 0.

4° Essai d'une automobile dans la montagne Corse.

a) Le coefficient r vaut 0,9901 : un ajustement linéaire est donc très pertinent.

b) L'équation de la droite de régression de C en D est :

$$\boxed{C = 0{,}1006 \cdot D - 0{,}1913}.$$

Le coefficient directeur 0,101 est un taux d'accroissement ; c'est-à-dire un nombre du type $\frac{C_2 - C_1}{D_2 - D_1}$, c'est donc une consommation unitaire : 0,101 litre au kilomètre ou encore 10,1 *l* aux 100 km.

c) La consommation moyenne sur l'anneau de Montlhéry à vitesse constante est nécessairement plus faible que celle mesurée sur un circuit réel accidenté avec des côtes et des accélérations.

PROBLÈMES AVEC SOLUTIONS

1er problème

◆ Énoncé

On dispose pour six catégories socio-professionnelles en 1985 des données suivantes :

		V	R
E S A	Exploitants et salariés agricoles	6,8	44 000
C S L	Cadres supérieurs et professions libérales	60,3	142 000
E M P	Employés	25,4	62 500
O U V	Ouvriers	16,0	55 800
P I C	Patrons industrie & commerce	22,3	113 500
C M O	Cadres moyens	46,6	85 900

où V est le taux de départ en vacances sur l'ensemble de l'année et R est le revenu fiscal moyen du ménage pour l'année.

1° Déterminer l'équation de la droite de régression (D) de V en R. On présentera les calculs en tableau.

2° Placer les points représentatifs des six CSP avec leur code en repère cartésien du plan et tracer la droite de régression (D).

3° Interpréter la position des points CMO et PIC.
Indication : on considérera pour chacun d'eux successivement deux points de la droite (D) : — de même revenu fiscal,
— de même taux de départ,
afin de développer un commentaire statistique naturel sur le comportement statistique des agents de la CSP considérée.

◆ Solution

1° Le revenu sera exprimé en milliers de francs (kF) afin d'alléger les calculs ; les taux seront conservés en pourcents.

R_i	V_i	R_i^2	V_i^2	R_iV_i
44	6,8	1 936	46,24	299,2
142	60,3	20 164	3 636,09	8 562,6
62,5	25,4	3 906,25	645,16	1 587,50
113,5	16,0	3 113,64	256	892,80
55,8	22,3	12 882,25	497,29	2 531,05
85,9	46,6	7 378,21	2 171,56	4 002,94
503,7	177,4	49 380,95	7 252,34	17 876,09

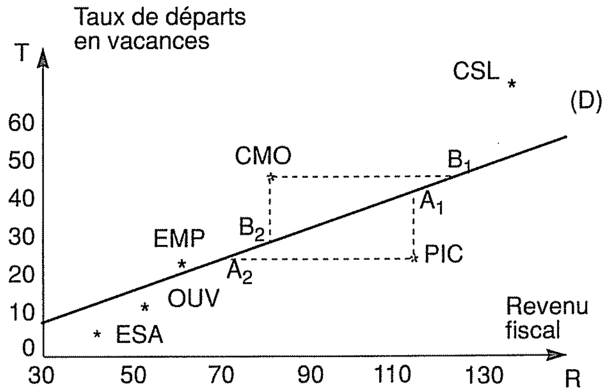
On en déduit :

$\hat{a} = 0{,}4205$. On arrondit au centième, soit $\hat{a} = 0{,}42$ et $\hat{b} = \bar{y} - \hat{a} \,.\, \bar{x}$,
$\hat{b} = -5{,}73$.

La droite régression de V en R est donc :

$\boxed{V = 0{,}42 \,.\, R - 5{,}73}$ avec R en kilofrancs.

2° Droite de régression et nuage :



3° Interprétation :

Le point PIC est nettement en dessous de la droite (D), ce qui signifie que les patrons de l'industrie et du commerce prennent moins de vacances que leur niveau de revenu le leur permettrait. S'ils se conformaient à la tendance nationale définie par (D), le point PIC serait en A_1 où le taux de départs est de 42 % environ (il suffit de substituer dans l'équation :

$$V = 0{,}42 \times 113{,}5 - 5{,}73 = 41{,}94\ \%).$$

En fait, ils ont un taux de départ en vacances qui correspond à A_2, c'est-à-dire à un revenu de 68 000 F environ (calcul précis par résolution de l'équation : $22{,}3 = 0{,}42 \times R - 5{,}73$, ce qui donne un revenu de 66,738 kF).

Le point CMO est nettement au-dessus de la droite (D), ce qui signifie que les cadres moyens partent plus en vacances que ne le

ferait la moyenne de la population à ce niveau de revenu (au point B_2, le taux de départ serait $V = 0{,}42 \times 85{,}9 - 5{,}73 = 30{,}35$ %).
Le taux de départ du point MCO est celui du point B_1 : il correspond à un revenu plus élevé que celui des cadres moyens (ce revenu est solution de : $46{,}6 = 0{,}42 \times R - 5{,}73$, c'est-à-dire 124,595 kF).

Note : dans ce type d'utilisation de la droite de régression, il est clair que la corrélation a moins d'importance que si l'on cherche à prévoir ou à simuler, c'est pourquoi il n'est pas fait usage du coefficient *r* dans cet exercice.

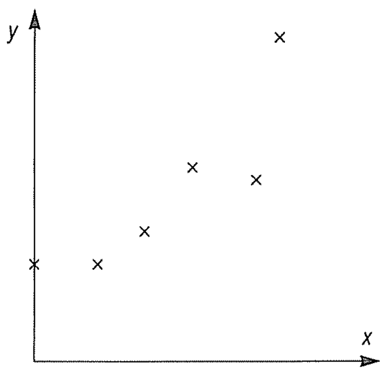
18 MATHÉMATISATION : TYPES DE CROISSANCE

CE QU'IL FAUT RETENIR

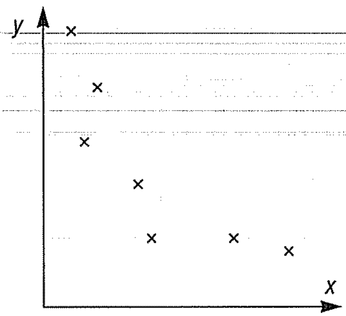
1° Si un nuage de points a une forme qui se rapproche plus d'une courbe que d'une droite, on peut chercher à l'ajuster par une fonction non linéaire.

Exemples : Le modèle affine sera peu pertinent pour ajuster les deux nuages ci-dessous.

Pour chacun une tendance se dessine, qui est...



... à croissance accélérée ;



... à la décroissance ralentie.

2° Pour atteindre cet objectif, on dispose de trois types de changement de variables.

A partir d'un même nuage (N) initial formé par les couples (x_i ; y_i), on peut poser :

— soit $\boxed{X = \ln x \text{ et } Y = y}$: nommons (N_l) le nuage associé aux couples correspondants ($\ln x_i$; y_i) ;

— soit $\boxed{X = x \text{ et } Y = \ln y}$: nommons (N_e) le nuage associé aux couples correspondants (x_i ; $\ln y_i$). ;

— soit $\boxed{X = \ln x \text{ et } Y = \ln y}$: nommons (N_p) le nuage associé aux couples correspondants ($\ln x_i$; $\ln y_i$).

3° Si l'un de ces trois nuages est plus proche d'une droite que le nuage initial (N), cela indique le type de changement de variable à utiliser.

Le calcul des coefficients de corrélation r_l r_e r_p comparés entre eux et avec le coefficient r associé à (N) permet de choisir le meilleur des quatre modèles de façon certaine.

4° Si on procède à un ajustement linéaire sur le nuage (N_l), alors l'équation de régression $Y = aX + b$ permet d'exprimer y en fonction de x par :

$$\boxed{y = a \ln x + b}$$

On parle de modèle *d'ajustement logarithmique.*

5° Si on procède à un ajustement linéaire sur le nuage (N_e), alors l'équation de régression $Y = aX + b$ permet d'exprimer y en fonction de x par : $\boxed{y = B \cdot e^{ax}}$ avec $B = e^b$.

On parle de modèle exponentiel (de base $A = e^a$).

6° Si on procède à un ajustement linéaire sur le nuage (N_p), alors l'équation de régression $Y = aX + b$ permet d'exprimer y en fonction de x par : $\boxed{y = B \cdot x^a}$ avec $B = e^b$.

On parle de modèle puissance (d'exposant a réel).

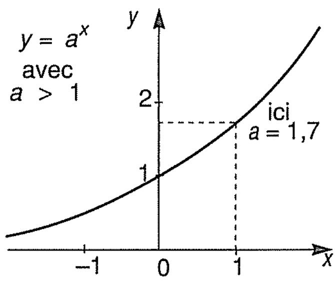
7° Les croissances exponentielles :

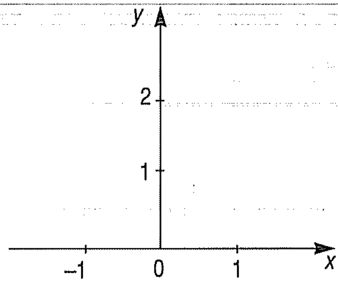
• Toute fonction $\boxed{f \text{ définie sur tout } \mathbb{R} \text{ par } f_a(x) = e^{x \ln a}}$ peut s'exprimer aussi sous la forme $f(x) = a^x$ et se nomme exponentielle de base où a est un réel positif.

• Leur dérivée est $\boxed{f'(x) = e^{x \ln a}}$.

Si $a > 1$, alors :	Si $0 < a < 1$, alors :
$f(x) = a^x$ est croissante sur $\mathbb{R}$,	$f(x) = a^x$ est décroissante sur $\mathbb{R}$,
$\lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty$,	$\lim\limits_{x \to +a} a^x = 0$,
$\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$	$\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty$

Exemples :





8° Fonction exponentielle, suite géométrique et pourcentage.

Si l'on restreint la fonction $f(x) = 1{,}12^x$ à la source $\mathbb{N}$, alors les images des entiers n forment une suite géométrique $u_n = 1{,}12^n$ dont la raison est : $1{,}12 = q$.

On a donc : $\boxed{u_{n+1} = 1{,}12\ u_n}$ pour tout n entier,
ce qui signifie aussi : $u_{n+1} - u_n = 0{,}12 \,.\, u_n$

$\boxed{\text{L'écart } u_{n+1} - u_n = 0{,}12 \,.\, u_n \text{ est proportionnel à la valeur } u_n}$,
ou encore :

$$\boxed{\frac{u_{n+1} - u_n}{u_n} = 0{,}12} \text{ la grandeur } u_n$$

a augmenté de 12 % lorsque n a augmenté d'une unité.

En économie , 0,12 est le taux de croissance de la période :
si n est le temps évalué en années, 0,12 est un taux annuel.

Attention : taux de croissance n'est pas taux d'accroissement.

9° Les croissances puissances α où α est réel quelconque.

• Toute fonction $\boxed{f \text{ définie sur }]\,0\,;+\infty\,[\text{ par } f_\alpha(x) = e^{\alpha \ln x}}$ peut s'exprimer aussi sous la forme $f(x) = x^\alpha$, et se nomme puissance d'exposant α où α est un réel.

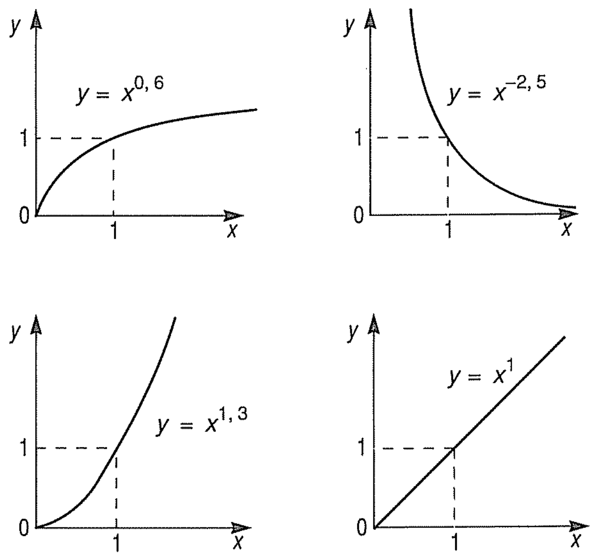
• Sa dérivée première est $\boxed{f'(x) = \alpha x^{\alpha - 1}}$.

• Sa dérivée seconde est $f''(x) = \alpha(\alpha - 1)\, x^{\alpha - 1}$.

Typologie des fonctions puissances :

- $\alpha > 0$: *f* est croissante sur] 0 ; + ∞ [
  - $\alpha > 1$: elle croît de plus en plus vite
  - $\alpha = 1$: elle est linéaire
  - $0 < \alpha < 1$: elle croît de moins en moins vite
- $\alpha = 0$: *f* est constante sur] 0 ; + ∞ [
- $\alpha < 0$: *f* est décroissante sur] 0 ; + ∞ [

Exemples :



10° Comparaisons des croissances lorsque x tend vers $+\infty$.

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} x^{\alpha} \cdot e^{-x} = 0}.$$

Pour $\alpha > 0$ on a : $\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x}}{x^{\alpha}} = +\infty}$.

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha}} = 0}.$$

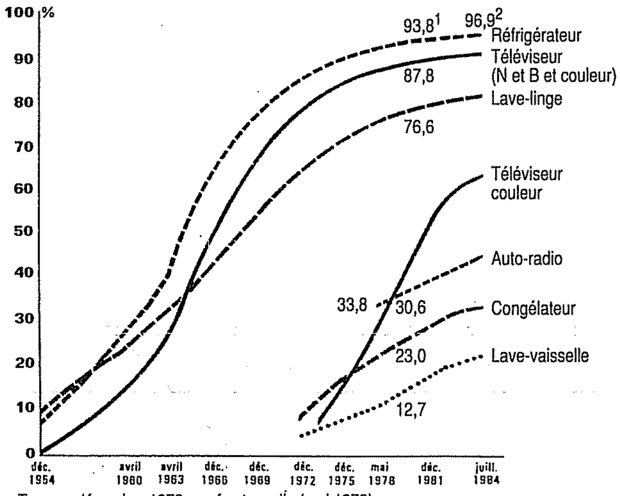
• Lorsque l'on doit comparer a^x avec x^{α}, pour utiliser les résultats ci-dessus, il suffit de se ramener à la forme :

$$a^x = e^{x \ln a} = e^{\beta . x} \text{ où } \beta = \ln a.$$

• En pratique, vous n'aurez à traiter que l'un des trois cas encadrés.

11° Un modèle original : les fonctions logistiques.

Évolution des taux d'équipement des ménages pour quelques biens durables :



1 – Taux en décembre 1978, sauf auto-radio (mai 1978).
2 – Taux en juillet 1984.
Source : INSEE, enquêtes de conjoncture auprès des ménages.

Les courbes ont toutes la même allure. Comme elles résultent de l'observation statistique ; cela signifie que l'on peut modéliser la diffusion d'un nouveau produit sur le marché par une fonction bien choisie. Ce modèle s'exprime par une famille de fonctions qui dépendent de plusieurs paramètres : chaque cas concret donne alors une fonction par détermination des paramètres. Ces fonctions sont du type : $f(x) = \dfrac{k}{1 + e^{b-ax}}$ k, b, a réels.

EXERCICES POUR S'ENTRAÎNER

1° Exprimer plus simplement :

$e^{4\ln 7}$; $e^{-2\ln 3}$; $e^{\frac{1}{2}\ln 5}$; $e^{\frac{1}{2}\ln x}$; $e^{x\ln\frac{1}{2}}$; $e^{4\ln x}$; $e^{x\ln 4}$; $e^{3\ln x + 2}$.

2° Utiliser le procédé réciproque pour mettre sous la forme $e^{a\ln b}$ les expressions suivantes :

x^3 ; 3^x ; $x^{1/3}$; $x^{1,2}$; 2^x ; $1,2^x$; 5.2^x ; $x^{-0,8}$; 3^5 ; a^b ;

ainsi que $2.x^{0,7}$; $\frac{1}{2}\cdot 6^{-x+1}$; $2^{0,5.x}$; $0,8^{2x}$.

3° ***a)*** Sachant que : $z = \ln y$ et : $y = 2x + 3$, exprimer z en fonction de x.

b) Sachant que : $\ln y = \frac{1}{2}\ln x + 5$, exprimer y en fonction de x.

c) Sachant que : $z = \ln x$ et $y = -\frac{2}{3}x + 1$, exprimer y en fonction de z.

d) Sachant que : $\ln y = \frac{3}{2}x - 4$ exprimer y en fonction de x.

4° Sachant que : $y = e^{2x-1}$, exprimer y sous la forme $A^x \times B$ où A et B sont deux constantes que l'on déterminera en valeur exacte, puis en valeur approchée à 10^{-4} près par défaut.

5° Sachant que : $y = 2^x .3$, exprimer y sous la forme $y = e^{ax+b}$ où a et b sont deux constantes à déterminer. On en donnera la valeur approchée décimale la plus proche à 10^{-3} près après avoir donné l'expression théorique exacte des constantes.

6° ***a)*** Exprimer les fonctions suivantes sous la forme x^{α}.

$f_7 : x \mapsto x^2\sqrt{x}$,

$f_8 : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x}}{x^6}$,

$f_9 : x \mapsto (x\sqrt{x})^3$,

$f_{10} : x \mapsto \sqrt[4]{x^7}$.

b) Donner f_7 et f_8 sous la forme : $e^{a\ln b}$.

7° Soit la série double (S)

x_i	1	2	4	5	6
y_i	3	5	10	14	22

a) Représenter le nuage de points associés. Calculer le coefficient de corrélation r associé à ce nuage.

b) Reprendre le même travail avec la série (S') des (x_i ; $\ln y_i$). On nomme r' son coefficient.

c) Reprendre le même travail avec la série (S") des ($\ln x_i$; $\ln y_i$). On nomme r'' son coefficient.

d) Déterminer quel est le meilleur ajustement et exprimer alors y en fonction de x.

8° Un capital $C_0 = 25\,000$ F est placé dans un organisme financier à intérêts composés au taux annuel de 12 %.

a) Calculer les valeurs acquises successives au bout de 1 an ; 2 ans ; .... ; 10 ans. Représenter cette suite.

b) Exprimer la valeur acquise V_n au bout de n années en fonction de n. Quelle est la nature de la suite V_n ? Quels sont ses éléments caractéristiques ?

9° Etudier la fonction définie par $f(x) = 0{,}8^x$, en déduire l'étude de $g(x) = 1 + 3 \,.\, 0{,}8^x$, et représenter sur un même dessin les courbes C_e, C_f, C_g respectivement représentatives des fonctions e^{-x} ; $f(x)$; $g(x)$.

◈ Solutions

1° • $e^{4\ln 7} = e^{(\ln 7)\cdot 4} = (e^{\ln 7})^4 = 7^4$. (Voir les propriétés de l'exponentielle, si vous avez du mal à comprendre ces calculs.)

• $e^{-2\ln 3} = (e^{\ln 3})^{-2} = 3^{-2} = \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{1}{9}$.

• $e^{\frac{1}{2}\ln 5} = (e^{\ln 5})^{1/2} = 5^{1/2} = \sqrt{5}$.

• $e^{\frac{1}{2}\ln x} = (e^{\ln x})^{1/2} = x^{1/2} = \sqrt{x}$ fonction définie sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

• $e^{x\ln\frac{1}{2}} = \left(e^{\ln\frac{1}{2}}\right)^x = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x = \dfrac{1}{2^x}$ fonction définie sur $\mathbb{R}$.

• $e^{4\ln x} = x^4$. $e^{x\ln 4} = 4^x$ fonction définie sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

• $e^{3\ln x+2} = e^{3\ln} \,.\, e^2 = e^2 \,.\, x^3$ on rappelle que e^2 est un nombre réel.

2° Mise sous forme $e^{a \ln b}$ de membres et de fonctions :

- $x^3 = e^{3 \ln x}$, en effet si $y = x^3$ alors $\ln y = 3 \ln x$,

donc $y = e^{3 \ln x}$. Ce procédé vous servira à chaque fois que vous aurez des doutes sur l'expression correcte.

- $3^x = e^{x \ln 3}$.
- $x^{1/3} = e^{1/(3 \ln x)}$.
- $x^{1,2} = e^{1,2 \ln x}$.
- $2^x = e^{x \ln 2}$.
- $1,2^x = e^{x \ln 1,2}$.
- $5 \times 2^x = 5e^{x \ln 2}$.
- $x^{-0,8} = e^{-0,8 \ln x}$.
- $3^5 = e^{5 \ln 3}$.
- $a^b = e^{b \ln a}$.
- $2x^{0,7} = 2 \,.\, e^{0,7 \ln x}$.
- $\frac{1}{2}6^{-x+1} = \frac{6}{2}e^{-x \ln 6} = 3e^{-xn6}$.
- $2^{0,5x} = e^{0,5x \ln 2} = e^{x \ln (2^{0,5})} = e^{x \ln \sqrt{2}}$.
- $0,8^{2x} = e^{2x \ln 0,8} = e^{x \ln (0,8^2)} = e^{x \ln 0,64}$.

3° a) $\boxed{z = \ln (2x + 3)}$ que l'on ne peut plus réduire.

b) $\ln y = \frac{1}{2} \ln + 5$,

donc $y = e^{\left(\frac{1}{2} \ln x + 5\right)} = e^{\frac{1}{2} \ln x} \,.\, e^5$,

c'est-à-dire : $y = e^5 \,.\, (e^{\ln x})^{1/2}$

soit $y = e^5 \,.\, x^{1/2}$, ou encore : $\boxed{y = e^5 \,.\, \sqrt{x}}$.

c) $\boxed{y = -\frac{2}{3}e^{z} + 1}$ car $z = \ln x$ équivaut à $x = e^{z}$.

d) $\ln y = \frac{3}{2}x - 4$, donc : $y = e^{\left(\frac{3}{2}x-4\right)} = e^{\frac{3}{2}x} \cdot e^{-4}$,

c'est-à-dire $\boxed{y = e^{-4} \cdot e^{\frac{3}{2}x}}$.

4° $y = e^{2x} \cdot e^{-1} = (e^{2})^{x} \cdot \frac{1}{e}$,

or $e^{2} = 7{,}3890$ par défaut et $\frac{1}{e} = 0{,}3678$ par défaut ;

donc une autre écriture est : $\boxed{y = 0{,}3678 \times 7{,}3890^{x}}$ de type $B \times A^{x}$.

Dans cet exemple , la première forme était plus facile à manipuler.

5° $y = 2^{x}.3$,

donc : $\ln y = x\ln 2 + \ln 3$, donc : $y = e^{x\ln 2} \cdot e^{\ln 3}$,
or $\ln 2 = 0{,}693$, plus proche de 0,6931 , et $\ln 3 = 1{,}099$ plus proche de 1,0986.

D'où aussi : $\boxed{y = e^{0,693 \cdot x} \times e^{1,099}}$, qui est de type $y = e^{ax} \cdot e^{b}$.

Dans cet exemple, la première forme était plus facile à manipuler.

6° *a)* $f_7(x) = x^{2}\sqrt{x} = x^{2}x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{5}{2}}$;

$f_8(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x^{6}} = x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-6} = x^{-\frac{5}{2}}$;

$f_9(x) = (x\sqrt{x})^{3} = x^{3}x^{\frac{3}{2}} = x^{\frac{9}{2}}$;

$f_{10}(x) = (x^{7})^{1/4} = x^{7/4}$.

b) $f_7(x) = x^{5/2} = e^{\frac{5}{2}\ln x}$;

$f_8(x) = x^{-5/2} = -e^{-\frac{5}{2}\ln x}$.

7°

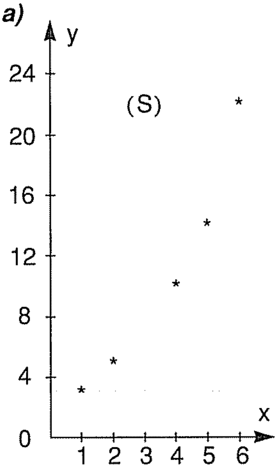
i	x_i	$\ln x_i$	y_i	$\ln y_i$
1	1	0	3	1,099
2	2	0,693	5	1,609
3	4	1,386	10	2,303
4	5	1,609	14	2,639
5	6	1,792	22	3,091

S $(x_i\ ;\ y_i)$

S' $(x_i\ ;\ \ln y_i)$

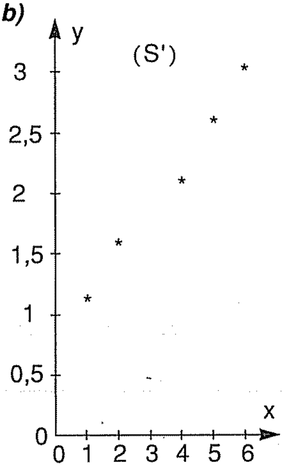
S" $(\ln x_i\ ;\ \ln y_i)$.

a)



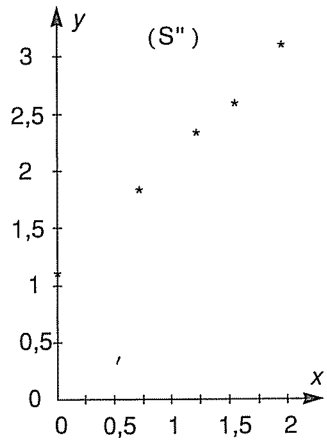
$r = 0{,}9618$

b)



$r' = 0{,}9978$

c)



$r'' = 0{,}9814$

d) La comparaison des coefficients confirme ce que le dessin laissait deviner : le meilleur ajustement est le second.

L'ajustement linéaire des ($\ln y_i$) en (x_i) fournit les coefficients :

$$\hat{a} = 0{,}384 \quad \text{et} \quad \hat{b} = 0{,}766.$$

Note : on rappelle que ceci se lit sur les écrans des calculatrices spécialisées à : A = 0,766 et B = 0,384 notation anglo-américano-japonaise.

On en déduit que la fonction qui exprime y est telle que :

$\ln y = 0{,}384x + 0{,}766$, soit $y = e^{0{,}384x} \,.\, e^{0{,}766}$.

On peut aussi écrire : $\boxed{y = 2{,}151 \,.\, e^{0{,}384\,x}}$,

ou encore : $\boxed{y = 2{,}151 \,.\, 1{,}468^{x}}$.

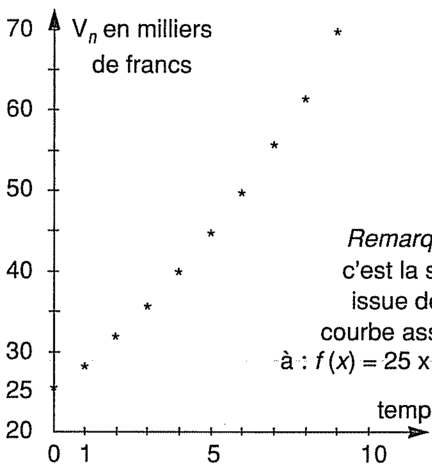
C'est un modèle exponentiel qui ajuste mieux (S).

8° Valorisation d'un capital à intérêts composés : taux annuel 12 %.

a) En un an, le capital C_0 produit un intérêt $I = 0{,}12 \times C_0$, donc la valeur acquise V_1 est : $V_1 = C_0 + 0{,}12.\ C_0 = C_0(1 + 0{,}12)$.

On construit ainsi le tableau ci-dessous puis la représentation.

Année	Capital en début d'année	Intérêt produit dans l'année
1	25 000 F	3 000 F
2	28 000 F	3 360 F
3	31 360 F	3 763 F
4	35 123 F	4 215 F
5	39 338 F	4 721 F
6	44 059 F	5 287 F
7	49 346 F	5 922 F
8	55 268 F	6 632 F
9	61 900 F	7 428 F
10	69 328 F	8 319 F



Remarque :
c'est la suite issue de la courbe associée à : $f(x) = 25 \times 1{,}12^x$

b) Forme générale : $V_n = C_0(1 + i)^n$.
C'est une suite géométrique de raison $q = 1 + i = 1{,}12$.

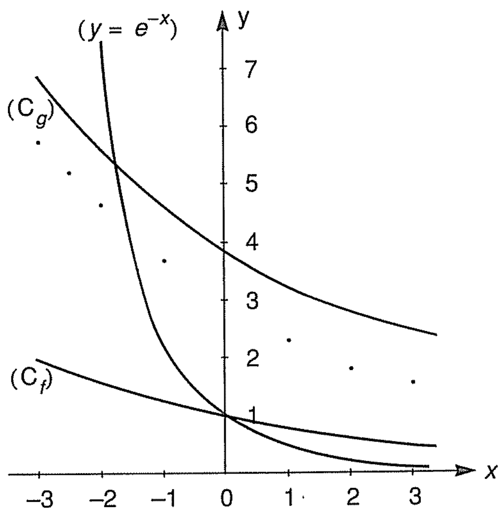
9° ***a)*** $f(x) = 0{,}8^x$ est définie sur $\mathbb{R}$;

et se dérive sous la forme $f(x) = e^{x\ln 0{,}8}$ en $f'(x) = \ln 0{,}8 \, . \, e^{x\ln 0{,}8}$, or $0{,}8 < 1$, donc $\ln 0{,}8 < 0$ et $f'(x)$ est donc négative sur $\mathbb{R}$. On a f décroissante sur $\mathbb{R}$.

En outre : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x\ln 0{,}8} = -\infty$ car $\ln 0{,}8 < 0$, donc $(y = 0)$ est asymptote à la courbe (C_f) lorsque x tend vers $+\infty$.

Enfin : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x\ln 0{,}8} = +\infty$.

b) L'étude de $g(x) = 1 + 3 \, . \, 0{,}8^x$ est alors quasi-évidente. Le sens de variation est le même, car multiplier f par 3 et lui ajouter 2 ne change pas ce sens. La droite d'équation $(y = 2)$ est asymptote à la courbe (C_g) lorsque x tend vers $+\infty$.



Un commentaire "économique" dirait que :

• $0{,}8^X$ décroît moins vite que e^{-X}.

• $1 + 3 \,.\, 0{,}8^X$ décroît plus vite que $0{,}8^X$ mais en restant toujours à un niveau plus élevé.

PROBLÈMES AVEC SOLUTIONS

1^er^ problème

◆ Énoncé

Une entreprise dispose des données suivantes où :
P_i désigne sa production l'année i ;
B_i désigne ses bénéfices l'année i.
(i est un entier compris entre 1 et 5.)

i	1	2	3	4	5
P_i	2	4	16	20	38
B_i	2	9	129	200	720
$X_i = \ln P_i$	0,693	1,386	2,773	2,996	3,638
$Y_i = \ln B_i$	0,693	2,197	4,860	5,298	6,579

A – Faire deux dessins distincts :
1° L'un avec le nuage (P,B).
2° L'autre avec le nuage (X,Y).

B – 1° Calculer le coefficient de corrélation entre X_i et Y_i.

2° Le coefficient de corrélation entre P_i et B_i est 0,96 ; celui entre P_i et Y_i est 0,93.

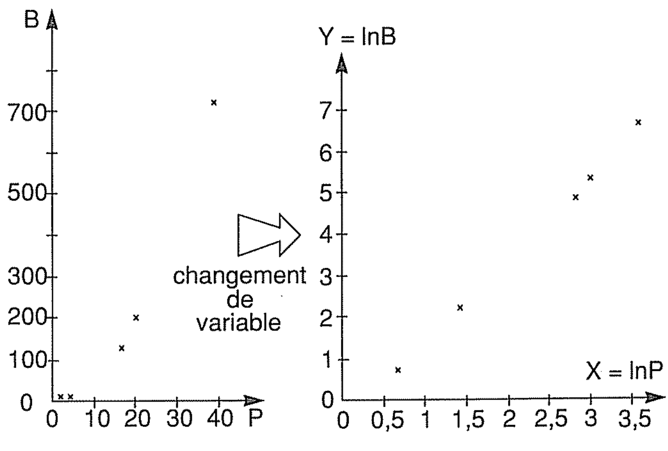
Donner la raison pour laquelle on décide de choisir l'ajustement affine de Y_i en fonction de X_i pour déterminer une relation exprimant le mieux possible B_i en fonction de P_i.

C – Déterminer une équation de la droite de régression de Y_i en fonction de X_i (un tableau des calculs est exigé). En déduire l'expression de B_i en fonction de P_i.

(D'après un sujet de bac B)

◈ Solution

A – Dessins des deux nuages (P ; B) et (lnP ; lnB)



L'action du changement de variable semble avoir créé un nuage plus proche d'une droite que le nuage initial.

B – 1° Une machine fournit le coefficient de corrélation entre $X = \ln P$ et $Y = \ln B$; c'est $r = 0{,}9998$.

2° Le coefficient entre P et B est 0,96.

Celui entre P et lnB est 0,93. Donc, le meilleur ajustement linéaire est celui entre X et Y.

Ce sera un modèle puissance α qui exprimera B en fonction de P.

C – Recherche de l'équation de la régression de Y en X par tableau :

i	X_i	Y_i	X_i^2	Y_i^2	$X_i Y_i$
1	0,693	0,693	0,480	0,480	0,480
2	1,386	2,197	1,921	4,827	3,045
3	2,773	4,860	7,690	23,620	13,477
4	2,996	5,298	8,976	28,069	15,872
5	3,638	6,579	13,235	43,283	23,934
	11,486	19,627	32,302	100,279	56,808

On en déduit :

$\overline{X} = 2{,}297$

$\overline{Y} = 3{,}925$

$$\hat{a} = \frac{56{,}808 - 5 \times (\overline{X} \cdot \overline{Y})}{32{,}302 - 5 \times (\overline{X}^2)}.$$

Donc $\hat{a} = 1{,}981$ et $\hat{b} = \overline{Y} - \hat{a}X = -0{,}626$.

On a donc : $Y = 1{,}981 . X - 0{,}626$,

c'est-à-dire : $\ln B = 1{,}981 . \ln P - 0{,}626$, d'où : $B = e^{1{,}981 . \ln P} . e^{-0{,}626}$

ou encore $\boxed{B = e^{-0{,}626} . P^{1{,}981}}$

ou encore $\boxed{B = 0{,}535 . P^{1{,}981}}$.

2^e^ Problème

◈ Énoncé

A – Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$

$$t \rightarrow y = \frac{1}{1 + 20\,e^{-t}}.$$

1° Calculer les images de 1, 2, 5, 10 par *f*. Déterminer $\lim_{t \to +\infty} f(t)$.

2° Calculer la fonction dérivée de *f* et étudier son signe.

3° Calculer la dérivée seconde de *f*, étudier son signe.

4° A l'aide de 2° et de 3°, décrire la croissance de $y = f(t)$.
Tracer la courbe représentative de *f* sur [0 ; 10].

B – La fonction *f* modélise le taux d'équipement des ménages d'un pays P en un bien durable avec *t* variable de temps.

On prendra $t = 0$ au 1^er^ janvier 1950 et l'année comme unité.

1° Quel était le taux d'équipement au début de 1952 ?

2° A partir de quelle date 50 % des ménages étaient-ils équipés ? 90 % des ménages ? 98 % des ménages ?

◈ Solution

A – 1° Quelques images :

t	1	2	5	10
$f(t)$	0,119	0,269	0,881	0,999

f est définie sur $\mathbb{R}$. $\lim\limits_{t \to +\infty} f(t) = 1$ car $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-t} = 0$.

Ce qui signifie que la droite d'équation ($y = 1$) est asymptote à la courbe (C).

On aura besoin de $f(0) = \dfrac{1}{21} = 0,048$.

2° $f'(t) = \dfrac{20e^{-t}}{(1 + 20e^{-t})^2}$, qui est positive sur tout $\mathbb{R}$ puisque numérateur et dénominateur sont tous deux positifs non nuls.

La fonction f est donc croissante sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $]0\,;+\infty[$.

3° Dérivée seconde : $f''(t) = \dfrac{20e^{-t}(20e^{-t} - 1)}{(1 + 20e^{-t})^3}$, toutes simplifications faites.

Le signe de f'' est celui du numérateur, car le dénominateur $(1 + 20e^{-t})$ est positif.

En outre, $20e^{-t}$ est positif, il reste donc à étudier le signe de $(20e^{-t} - 1)$. Pour ce faire, on résout l'inéquation (par exemple) : $20e^{-t} - 1 > 0$ qui équivaut à $20e^{-t} > 1$.

C'est-à-dire à $e^{-t} > \dfrac{1}{20}$, ou encore à $e^{t} < 20$.

Or l'exponentielle est croissante, donc : $t < \ln 20$.

Ce qui montre que $f''(t) > 0$ si et seulement si $t < 2,996$.

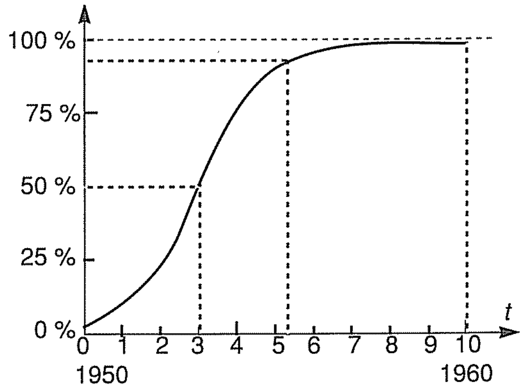
On en déduit que $f''(t) < 0$ par $t > 2,996$.

4° On peut donc caractériser les deux phases de la croissance de f.

Sur $[0\,;3[$, f connaît une croissance accélérée.

Sur $]0\,;+\infty[$, f connaît une croissance ralentie.

Courbe représentative de la fonction f.



B - 1° On a calculé $f(2) = 0{,}269$. Donc, au début de 1952, le taux valait 26,9 %.

2° La date à partir de laquelle 50 % des ménages étaient équipés est le réel t, tel que : $f(t) > 0{,}50$.

Résolvons cette inéquation : $\dfrac{1}{1 + 20e^{-t}} > \dfrac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow 1 + 20e^{-t} < 2 \quad \Leftrightarrow \quad 20e^{-t} < 1 \quad \Leftrightarrow \quad \ln 20 < t$$

que l'on a déjà résolu.

On trouve donc $t > 2{,}996$, on peut arrondir à $t = 3$.

Donc, à partir du début de 1953, 50 % des ménages étaient équipés en ce bien.

• $f(t) > 0{,}9 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{1}{1 + 20e^{-t}} > 0{,}9$

$$\Leftrightarrow \quad 1 > 0{,}9\,(1 + 20e^{-t}) \quad \Leftrightarrow \quad 1 - 0{,}9 > 20e^{-t}$$

$$\Leftrightarrow \quad 0{,}1 > 20e^{-t} \quad \Leftrightarrow \quad 0{,}1\,e^{t} > 20$$

$$\Leftrightarrow \quad e^{t} > 200 \quad \Leftrightarrow \quad t > \ln 200 \quad \Leftrightarrow \quad t > 5{,}29.$$

Soit environ le 1er trimestre de 1955.

• $f(t) > 0{,}98 \;\Leftrightarrow\; t > \ln 980$, c'est-à-dire environ le 6e mois de 1956. (Détail des équivalences laissé à votre initiative.)

19
CALCUL DES PRIMITIVES ET DES INTÉGRALES

Ce chapitre, d'apprentissage de calcul, ne compte pas de problèmes avec solution.

CE QU'IL FAUT RETENIR

1° Si la fonction f est la dérivée d'une fonction F, alors F est une primitive de f.

Exemple : $F(x) = x^2 - = 3x + 1$ et $f(x) = 2x - 3$.

$$\boxed{\text{F a pour dérivée } f\text{, donc F est une primitive de } f.}$$

2° Si une fonction f est dérivable sur un intervalle I, alors elle admet des primitives sur I.

3° Si f admet une primitive F sur I, alors elle admet une infinité de primitives sur I et l'on a

$G(x) = F(x) +$ constante (où G est une autre primitive de f).

Exemple : si $G(x) = x^2 - 3x + 4$, alors $G(x) = F(x) + 3$.

G est donc une autre primitive de f.

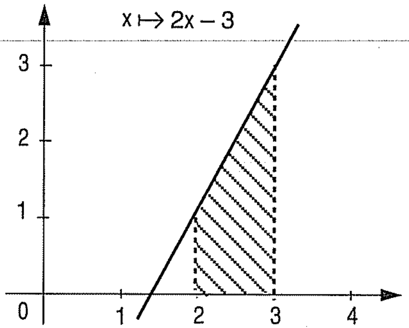
4° Si f est une fonction positive sur [a ; b], et admet sur cet intervalle une primitive F, alors la différence F(b) – F(a) s'appelle "intégrale de a à b de f ".

On note : $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

C'est l'aire de la partie du plan définie par

$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

Exemple : calcul de l'aire de la partie du plan hachurée :
$f : x \mapsto 2x - 3$.



Sur l'intervalle [2 ; 4], on a $2x - 3 \geq 0$. Cette partie est définie par

$$\begin{cases} 2 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq 2x - 3 \end{cases}$$

L'aire se calcule par l'intégrale $\int_2^4 (2x-3)\,dx$, et on a

$$\int_2^4 (2x-3)\,dx = F(4) - F(2) = [x^2 - 3x + 1]_2^4,$$

$$= [4^2 - 3x + 1] - [2^2 - 3 \times 2 + 1],$$

$$= 5 - (-1),$$

$$= 6.$$

L'unité est 1cm sur chaque axe du repère, donc l'aire est 6 cm^2.

5° Tableau des primitives des fonctions usuelles.

Fonction	Primitive	Intervalle de validité
a	$ax + c$	$\mathbb{R}$
x	$\frac{x^2}{2} + c$	$\mathbb{R}$
ax	$\frac{ax^2}{2} + c$	$\mathbb{R}$
x^2	$\frac{x^3}{3} + c$	$\mathbb{R}$
$x^n \quad n \geq 0$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + c$	$]0\,;+\infty[$
	$\ln(-x) + c$	$]-\infty\,;0[$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + c$	$]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$
$\frac{1}{x^2}$	$\frac{-1}{x} + c$	$]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$
$\frac{1}{x^n} \quad n \geq 2$	$\frac{-1}{(n-1)\,x^{n-1}} + c$	$]-\infty\,;0[$ ou $]0\,;+\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + c$	$]0\,;+\infty[$
$\sqrt{x}\left(\text{ou } x^{\frac{1}{2}}\right)$	$\frac{2}{3}x\sqrt{x} + c$	$]0\,;+\infty[$
e^x	$e^x + c$	$\mathbb{R}$

6° Primitive de sommes, différences de fonctions et du produit d'une fonction par un réel.

Soit f et g deux fonctions admettant pour primitive F et G sur I.

$f+g$ a pour primitive F + G + C.
$f-g$ a pour primitive F − G + C.
kf a pour primitive kF + C.

Remarque : il n'y a aucune formule permettant de calculer la primitive d'un produit $f \times g$ ni celle d'un quotient $\frac{f}{g}$.

7° Primitives des fonctions composées.

Soit u une fonction dérivable, et u' sa dérivée :

Fonction	Primitive	Remarques sur u
$u'(x) \,.\, [u(x)]^n$ $\quad n \geq 0$	$\frac{[u(x)]^{n+1}}{n+1} + c$	—
$\frac{u'(x)}{[u(x)]^n}$ $\quad n \geq 2$	$\frac{-1}{(n-1)\,[u(x)]^{n-1}} + c$	$u(x) > 0$ ou $u(x) < 0$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln(u(x)) + c$	si $u(x) > 0$
	$\ln(-u'(x)) + c$	si $u(x) < 0$
$\frac{u'(x)}{u(x)}$	$\ln\lvert u(x)\rvert + c$	$u(x)$ est de signe constant
$u'(x) .\, e^{u(x)}$	$e^{u(x)} + c$	—
$\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	$2\sqrt{u(x)} + c$	$u(x) > 0$
$u'(x) \times \sqrt{u(x)}$	$\frac{2}{3} u(x) \times \sqrt{u(x)} + c$	$u(x) > 0$

EXERCICES POUR S'ENTRAÎNER

1° Déterminer les primitives des fonctions suivantes et préciser leur intervalle de validité.

$$f_1 : x \mapsto 4(3x+2)^5,$$

$$f_2 : x \mapsto \frac{5}{(4x-1)^3},$$

$$f_3 : x \mapsto \frac{4x+2}{(x^2+x+1)^2},$$

$$f_4 : x \mapsto \frac{4}{3-2x},$$

$$f_5 : x \mapsto \frac{x+1}{x^2+2x+2},$$

$$f_6 : x \mapsto e^{-x},$$

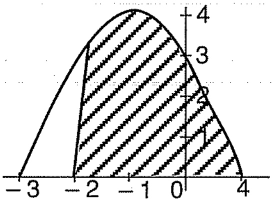
$$f_7 : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{3x+2}},$$

$$f_8 : x \mapsto x\sqrt{x^2+1}.$$

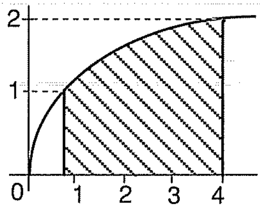
2° Déterminer la primitive F de f qui vérifie $F(x_0) = y_0$.

$f_1 : x \mapsto x^2 + x - 2$	$x_0 = 1,$	$y_0 = 1.$
$f_2 : x \mapsto x + \dfrac{1}{x}$	$x_0 = 1,$	$y_0 = 2.$
$f_3 : x \mapsto e^x - x$	$x_0 = 0,$	$y_0 = \dfrac{1}{2}.$

3° Calculer les aires hachurées.



$f : x \mapsto -x^2 - 2x + 3.$



$f_2 : x \mapsto \sqrt{x}.$

4° Calculer les intégrales.

$$I_1 = \int_{-1}^{4} (x+2)\,dx,$$

$$I_2 = \int_{-5}^{-2} \frac{dx}{2x+3},$$

$$I_3 = \int_{0}^{1} [e^{1-x} + e^{2x}]\,dx, \qquad I_4 = \int_{-2}^{2} \frac{dx}{(x-3)^2},$$

$$I_5 = \int_{0}^{4} \frac{5}{\sqrt{3x+2}}\,dx, \qquad I_6 = \int_{0}^{2} \frac{x\,dx}{3x^2+4}.$$

◆ **Solution**

1° • $f_1 : x \mapsto 4\,(3x+2)^5$. $f_1(x)$ existe pour tout x.

Cherchons une primitive de $(3x+2)^5$.

La formule est $u' \times u^n$ a pour primitive $\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$ où $n = 5$, $u = 3x + 2$ $u' = 3$.

$3\,(3x+2)^5$ a pour primitive $\dfrac{(3x+2)^6}{6}$.

$(3x+2)^5$ a pour primitive $\dfrac{1}{3} \times \dfrac{(3x+2)^6}{6}$.

$4(3x+2)^5$ a pour primitive $\dfrac{4}{3} \times \dfrac{(3x+2)^6}{6}$.

$$\boxed{F_1(x) = \frac{2\,(3x+2)^6}{9} + c}\,.$$

L'intervalle de validité est $\mathbb{R}$.

• $f_2 : x \mapsto \dfrac{5}{(4x-1)^3}$.

$f_2(x)$ existe si $(4x-1)^3 \neq 0$, donc si $4x - 1 \neq 0$, c'est-à-dire $x \neq \dfrac{1}{4}$.

Les primitives de f_2 seront définies sur

$$\left]-\infty\ ;\ \frac{1}{4}\right[\text{ ou sur } \left]\frac{1}{4}\ ;\ +\infty\right[.$$

Cherchons une primitive de $f_2\,(x)$.

La formule est $\dfrac{u'}{u^n}$ a pour primitive $\dfrac{-1}{(n-1)\,u^{n-1}}$

où $n = 3$, $u = 4x - 1$ et $u' = 4$.

$\dfrac{4}{(4x-1)^3}$ a pour primitive $\dfrac{-1}{2\,(4x-1)^2}$,

$\dfrac{1}{(4x-1)^3}$ a pour primitive $\dfrac{1}{4} \times \dfrac{-1}{2\,(4x-1)^2}$,

$\dfrac{5}{(4x-1)^3}$ a pour primitive $\dfrac{5}{4} \times \dfrac{-1}{2\,(4x-1)^2}$,

$$\boxed{F_2(x) = \frac{-5}{8(4x-1)^2} + c}.$$

• $f_3 : x \mapsto \dfrac{4x+2}{(x^2+x+1)^2}$.

$f_3(x)$ existe si $(x^2 + x + 1)^2 \neq 0$, donc si $x^2 + x + 1 \neq 0$.

Calculons le discriminant $\Delta = 1 - 4 \times 1 \times 1 = -3$.

$\Delta < 0$, il n'y a pas de racines. $x^2 + x + 1 \neq 0$ pour tout x.

Les primitives de $f_3(x)$ existent sur $\mathbb{R}$.

Cherchons une primitive de $f_3(x)$.

Nous reconnaissons la formule $\dfrac{u'}{u^n}$ qui a pour primitive $\dfrac{-1}{(n-1)\,u^{n-1}}$.

Posons $n = 2$, $u = x^2 + x + 1$, $u' = 2x + 1$.

$\dfrac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$ a pour primitive $\dfrac{-1}{x^2+x+1}$,

$\dfrac{2(2x+1)}{(x^2+x+1)^2}$ a pour primitive $2 \times \dfrac{-1}{x^2+x+1}$.

$$\boxed{F_3(x) = \frac{-2}{x^2+x+1} + c}.$$

• $f_4 : x \mapsto \dfrac{4}{3-2x}$.

f_4 existe si $3 - 2x \neq 0$, donc si $x \neq \dfrac{3}{2}$.

Les primitives de f seront définies sur

$$\left]-\infty\,;\,\frac{3}{2}\right[\text{ ou sur } \left]\frac{3}{2}\,;\,+\infty\right[.$$

Cherchons une primitive de $f_4(x)$.

Nous reconnaissons la formule $\dfrac{u'}{u}$ qui a pour primitive $\ln |u|$.

Posons $u = 3 - 2x$ $\quad u' = -2$.

$\dfrac{-2}{3-2x}$ a pour primitive $\ln|3-2x|$,

$\dfrac{1}{3-2x}$ a pour primitive $-\dfrac{1}{2}\text{x} \ln|3-2x|$,

$\dfrac{4}{3-2x}$ a pour primitive $-\dfrac{4}{2}\text{x} \ln|3-2x|$.

Si $x \in \left]-\infty\,;\,\dfrac{3}{2}\right[$ alors, $|3-2x| = 3-2x$ et $F_4(x) = -2\ln(3-2x) + c$,

Si $x \in \left]\dfrac{3}{2}\,;+\infty\right[$ alors, $|3-2x| = 2x-3$ et $F_4(x) = -2\ln(2x-3) + c$

• $f_5 : x \mapsto \dfrac{x+1}{x^2+2x+2}$.

$f_5(x)$ existe si $x^2 + 2x + 2 \neq 0$.

Calculons le discriminant : $\Delta = 4 - 4 \times 1 \times 2 = -4$.

$\Delta < 0$, il n'y a pas de racines, $x^2 + 2x + 2 \neq 0$ pour tout x.

Les primitives de $f_5(x)$ sont définies sur $\mathbb{R}$.

Cherchons une primitive de $f_5(x)$.

Nous reconnaissons la formule $\dfrac{u'}{u}$ qui a pour primitive $\ln|u|$.

Posons $u = x^2 + 2x + 2$, $\quad u' = 2x + 2$.

$\dfrac{2x+2}{x^2+2x+2}$ a pour primitive $\ln|x^2 + 2x + 2|$,

$\dfrac{x+1}{x^2+2x+2}$ a pour primitive $\dfrac{1}{2}\ln|x^2 + 2x + 2|$.

Nous avons vu que $x^2 + 2x + 2 \neq 0$ pour tout x, car $\Delta < 0$.

De plus $x^2 + 2x + 2$ est positif (du signe de a) pour tout x

$$\boxed{F_5(x) = \frac{1}{2}\ln\left(x^2 + 2x + 2\right) + c}\,.$$

• $f_6 : x \mapsto e^{-x}$.

$f_6(x)$ existe pour tout x. Les primitives de f_6 seront définies sur $\mathbb{R}$.

Cherchons une primitive de $f_6(x)$.

Nous reconnaissons la formule $u' \times e^u$ qui a pour primitive e^u.
Posons $u = -x$, $u' = -1$.
$-1 \times e^{-x}$ a pour primitive e^{-x},
e^{-x} a pour primitive $-e^{-x}$

$$\boxed{F_6(x) = -\ e^{-x} + c}.$$

• $f_7 : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{3x+2}}$.

$f_7(x)$ existe si $3x + 2 > 0$, donc si $x > -\dfrac{2}{3}$.

Les primitives de f_7 seront définies sur $\left]-\dfrac{2}{3}\,;+\infty\right[$.

Cherchons une primitive de $f_7(x)$.

Nous reconnaissons la formule $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ qui a pour primitive $2\sqrt{u}$.

Posons $u = 3x + 2$, donc $u' = 3$.

$\dfrac{3}{\sqrt{3x+2}}$ a pour primitive $2\sqrt{3x+2}$.

$\dfrac{1}{\sqrt{3x+2}}$ a pour primitive $\dfrac{1}{3} \times 2\sqrt{3x+2}$.

$$\boxed{F_7(x) = \frac{2\sqrt{3x+2}}{3} + c}.$$

• $f_8 : x \mapsto x\sqrt{x^2+1}$.

$x^2 + 1 > 0$ pour tout x, donc $f_8(x)$ existe pour tour réel x.
Les primitives de $f_8(x)$ sont définies sur $\mathbb{R}$.

Cherchons une primitive de $f_8(x)$.

Nous reconnaissons la formule : $u'\sqrt{u}$ qui a pour primitive

$\frac{2}{3}u\sqrt{u}$.

Posons $u = x^2 + 1$, donc $u' = 2x$.

$2x\sqrt{x^2+1}$ a pour primitive $\frac{2}{3}\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}$,

$x\sqrt{x^2+1}$ a pour primitive $\frac{1}{3}\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}$.

$$\boxed{F_8(x) = \frac{1}{3}\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+1}}.$$

2° • $f_1 : x \mapsto x^2 + x - 2,\quad x_0 = 1,\quad y_0 = 1.$

Cherchons une primitive de $f_1(x)$:

$$F_1(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + C.$$

Nous cherchons $F_1(x)$ pour que $F_1(1) = 1$.

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 2 + C = 1,$$

$$C = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2,$$

$$C = \frac{13}{6}.$$

Donc $$\boxed{F_1(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 2x + \frac{13}{6}}.$$

• $f_2 : x \mapsto x + \frac{1}{x}\quad x_0 = 1\qquad y_0 = 2.$

$f_2(x)$ est définie sur $]-\infty\,;0\,[$ et sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

Cherchons une primitive de $f_2(x)$

$$F_2(x) = \frac{x^2}{2} + \ln|x| + C.$$

Remarquons que $x_0 \in]0 ; +\infty[$, sur cet intervalle, $|x| = x$.

$$F_2(x) = \frac{x^2}{2} + \ln x + C.$$

Nous cherchons C pour que $F_2(1) = 2$.

$$F_2(1) = \frac{1}{2} + \ln 1 + C = \frac{1}{2} + C \quad \text{car } \ln 1 = 0.$$

$$\frac{1}{2} + C = 2,$$

$$C = \frac{3}{2}.$$

Donc $\boxed{F_2(x) = \frac{x^2}{2} + \ln x + \frac{3}{2}}$.

- $f_3 : x \mapsto e^x - x \qquad x_0 = 0 \qquad y_0 = \frac{1}{2}$.

$f_3(x)$ existe pour tout x.
Cherchons une primitive de $f_3(x)$.

$$F_3(x) = e^x - \frac{x^2}{2} + C.$$

Calculons C pour qui $F_3(0) = \frac{1}{2}$.

$e^0 - 0 + C = \frac{1}{2}$, or $e^0 = 1$,

$$C = -\frac{1}{2}.$$

Donc $\boxed{F_3(x) = e^x - \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}}$.

3° • $f_1 : x \mapsto -x^2 - 2x + 3$.

La partie du plan hachurée est définie par

$$\begin{cases} -2 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq -x^2 - 2x + 3 \end{cases}$$

Son aire se calcule à l'aide de l'intégrale :

$$I = \int_{-2}^{1} (-x^2 - 2x + 3)\, dx.$$

Cherchons une primitive de $f_1(x)$:

$$F_1(x) = -\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x.$$

Nous avons

$$\int_{-2}^{1} (-x^2 - 2x + 3)\, dx = \left[-\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x\right]_{-2}^{1},$$

$$= \left(-\frac{1}{3} - 1 + 3\right) - \left(-\frac{-8}{3} - 4 - 6\right)$$

$$= \frac{5}{3} - \left(-\frac{22}{3}\right) = \left(-\frac{27}{3}\right) = 9.$$

L'unité est 1cm sur chaque axe, donc

$$\boxed{\text{l'aire hachurée mesure } 9 \text{ cm}^2}.$$

• $f_2 : x \mapsto \sqrt{x}$.

La partie du plan hachurée est définie par : $\begin{cases} 1 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq \sqrt{x} \end{cases}$.

Son aire se calcule à l'aide de l'intégrale $I = \int_1^4 \sqrt{x}\, dx$.

Nous savons que $\sqrt{x}$ a pour primitive $\frac{2}{3}x\sqrt{x}$.

Donc $\displaystyle\int_1^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{2}{3}x\sqrt{x}\right]_1^4$

$$= \left(\frac{2}{3}\times 4\sqrt{4}\right) - \left(\frac{2}{3}\times 1\sqrt{1}\right)$$

$$= \frac{16}{3} - \frac{2}{3} = \frac{14}{3}.$$

L'unité est 1cm sur l'axe des abscisses et 2 cm sur l'axe des ordonnées, donc

> l'aire hachurée mesure $1\times 2\times \frac{14}{3}$, c'est-à-dire $\frac{28}{3}$ cm^2 (environ 9,33 cm^2).

4° • $\displaystyle I_1 = \int_{-1}^{4} (x+2)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}+2x\right]_{-1}^{4} = \left(\frac{16}{2}+8\right) - \left(\frac{1}{2}-2\right)$,

$$I_1 = 16 + \frac{3}{2} = \frac{33}{2} = 17,5.$$

$$I_1 = \boxed{17,5\,.}$$

• $\displaystyle I_2 = \int_{-5}^{-2} \frac{\mathrm{d}x}{2x+3}$.

Cherchons une primitive de $\dfrac{1}{2x+3}$.

Nous reconnaissons : $\dfrac{u'}{u}$ qui a pour primitive $\ln|u|$.

Posons $u = 2x+3 \quad u' = 2$

$\dfrac{2}{2x+3}$ a pour primitive $\ln|2x+3|$,

$\dfrac{1}{2x+3}$ a pour primitive $\dfrac{1}{2}\ln|2x+3|$.

Si $-5 \leq x \leq -2$, alors $2x+3<0$ et $|2x+3| = -2x-3$.

$$I_2 = \int_{-5}^{-2} \frac{dx}{2x+3} = \left[\frac{1}{2}\ln(-2x-3)\right]_{-5}^{-2} = \left(\frac{1}{2}\ln 1\right) - \left(\frac{1}{2}\ln 7\right).$$

Donc

$$I_2 = \frac{1}{2}\ln 7 = \boxed{-\ln\sqrt{7}} \approx -0{,}97.$$

Remarquons que si $2x+3<0$, alors la courbe est située en dessous de l'axe des abscisses, l'aire correspondante sera donc affectée du signe –.

- $I_3 = \int_0^1 [e^{1-x} + e^{2x}]\,dx.$

Cherchons une primitive de e^{1-x}.

Nous reconnaissons la formule $u' \times e^u$ qui a pour primitive e^u.

Posons $u = 1 - x$ donc $u' = -1$.

$-e^{1-x}$ a pour primitive e^{1-x},

e^{1-x}a pour primitive $-e^{1-x}$.

De même posons $u = 2x \quad u' = 2$.

$2\,e^{2x}$ a pour primitive e^{2x},

e^{2x} a pour primitive $\frac{1}{2}\,e^{2x}$.

$$\text{Donc } I_3 = \int_0^1 (e^{1-x} + e^{2x})\,dx = \left[-e^{1-x} + \frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^1$$

$$I_3 = \left(-e^0 + \frac{1}{2}e^2\right) - \left(-e^1 + \frac{1}{2}e^2\right),$$

$$I_3 = -1 + \frac{1}{2}e^2 + e - \frac{1}{2},$$

$$I_3 = \boxed{\frac{1}{2}e^2 + e - \frac{3}{2}} \approx 4{,}9.$$

- $I_4 = \int_{-2}^{2} \frac{dx}{(x-3)^2}$.

Cherchons une primitive de $\frac{1}{(x-3)^2}$.

Nous reconnaissons la formule $\frac{u'}{u^n}$ qui a pour primitive $\frac{-1}{(n-1)\,u^{n-1}}$.

Posons $n = 2$, $u = x - 3$, $u' = 1$.

$\frac{1}{(x-3)^2}$ a pour primitive $\frac{-1}{x-3}$.

$$I_4 = \int_{-2}^{2} \frac{dx}{(x-3)^2} = \left[\frac{-1}{x-3}\right]_{-2}^{2} = \left(\frac{-1}{-1}\right) - \left(\frac{-1}{-5}\right).$$

Donc

$$I_4 = 1 - \frac{1}{5} = \boxed{\frac{4}{5}}.$$

- $I_5 = \int_{0}^{4} \frac{5}{\sqrt{3x+2}}dx$.

Cherchons une primitive de $\frac{5}{\sqrt{3x+2}}$.

Nous reconnaissons la formule $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ qui a pour primitive $2\sqrt{u}$.

Posons $u = 3x + 2$ $u' = 3$

$\frac{3}{\sqrt{3x+2}}$ a pour primitive $2\sqrt{3x+2}$,

$\frac{5}{\sqrt{3x+2}}$ a pour primitive $\frac{10}{3}\sqrt{3x+2}$.

$$I_5 = \int_0^4 \frac{5}{\sqrt{3x+2}}\,dx = \left[\ \frac{10}{3}\sqrt{3x+2}\ \right]_0^4.$$

Donc

$$I_5 = \boxed{\frac{10}{3}\sqrt{14} - \frac{10}{3}\sqrt{2}} \approx 7{,}76.$$

• $$I_6 = \int_0^2 \frac{x}{3x^2+4}\,dx.$$

Cherchons une primitive de $\dfrac{x}{3x^2+4}$.

Nous reconnaissons la formule $\dfrac{u'}{u}$ qui a pour primitive $\ln|\,u\,|$.

Posons $u = 3x^2 + 4$, $\quad u' = 6x$.

$\dfrac{6x}{3x^2+4}$ a pour primitive $\ln|\,3x^2 + 4\,|$,

$\dfrac{x}{3x^2+4}$ a pour primitive $\dfrac{1}{6}\ln|\,3x^2 + 4\,|$.

Notons que si $0 \le x \le 2$, $\quad 3x^2 + 4 \ge 0 \quad$ et $\quad |\,3x^2 + 4\,| = 3x^2 + 4$.

Donc $I_6 = \displaystyle\int_0^2 \frac{x}{3x^2+4}\,dx = \left[\frac{1}{6}\ln(3x^2+4)\right]_0^2 = \left(\frac{1}{6}\ln 16\right) - \left(\frac{1}{6}\ln 4\right),$

$$I_6 = \frac{1}{6}\left(\ln 16 - \ln 4\right) = \frac{1}{6}\ln\left(\frac{16}{4}\right) \text{ car } \ln a - \ln b = \ln\left|\frac{a}{b}\right|,$$

$$I_6 = \boxed{\frac{1}{6}\ln 4} \approx 0{,}23.$$

20 INTÉGRALES ET CALCUL D'AIRES

CE QU'IL FAUT RETENIR

Soit f et g des fonctions admettant des primitives sur $[a\,;b]$.

1° Si pour tout x de $[a\,;b]$, on a $f(x) \geq 0$, alors $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0$.

2° Si pour tout x de $[a\,;b]$, on a $f(x) \leq 0$ alors $\int_a^b f(x)\,dx \leq 0$.

3° Si pour tout x de $[a\,;b]$ $f(x) \leq g(x)$ alors $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.

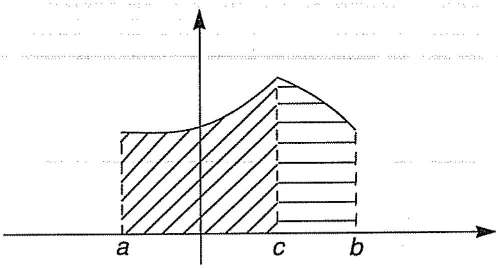
4° $\boxed{\int_a^b [f(x) + g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.}$

5° $\boxed{\int_a^b [k\ f(x)]\,dx = k \times \int_a^b f(x)\,dx.}$ (k est un réel constant.)

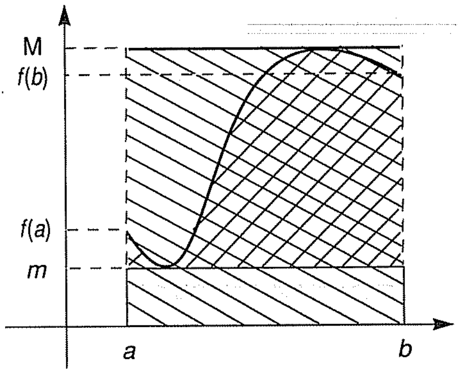
Cas particulier : $k=-1$, $\int_a^b [-f(x)]\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$.

6° Relation de Chasles : soit $c \in [a\,;b]$.

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x}.$$



7° Si pour tout x de $[a\,;b]$, $m \leq f(x) \leq \mathrm{M}$,
alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \mathrm{M}(b-a)$.



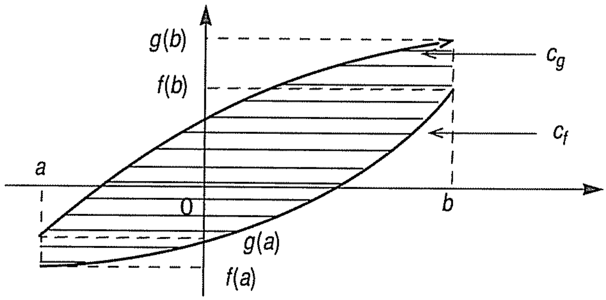
8° Si pour tout x de $[a\,;b]$ $|f(x)| \leq \mathrm{M}$,
alors $\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \mathrm{M}(b-a)$.

9° Valeur moyenne μ d'une fonction sur $[a\,;b]$.

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

10 ° Si pour tout x de $[a, b]$ $f(x) \leq g(x)$, alors l'aire de la partie du plan définie par $\left\{\begin{matrix} a \leq x \leq b \\ f(x) \leq y \leq g(x) \end{matrix}\right\}$ se calcule à l'aide de l'intégrale :

$$\int_a^b [g(x) - f(x)]\, dx$$



11° Intégration par parties.

u et v sont des fonctions dérivables, et donc admettant des primitives sur $[a\,;b]$

$$\boxed{\int_a^b u(x)\, v'(x)\, dx = [u(x)\, v(x)]_a^b - \int_a^b v'(x)\, u(x)\, dx.}$$

EXERCICES POUR S'ENTRAÎNER

1° Calculer l'aire des régions hachurées :

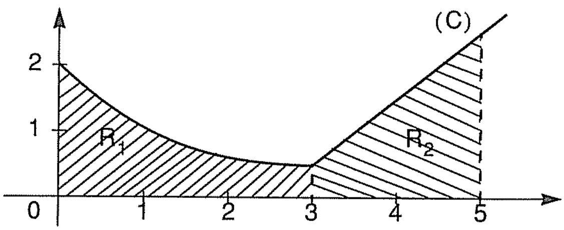


Figure 1

Figure 1 : $\begin{cases} \text{si } x \in [0;3]\ f(x) = \dfrac{2}{x+1} \\ \text{si } x \in [3;5]\ f(x) = x - \dfrac{5}{2} \end{cases}$

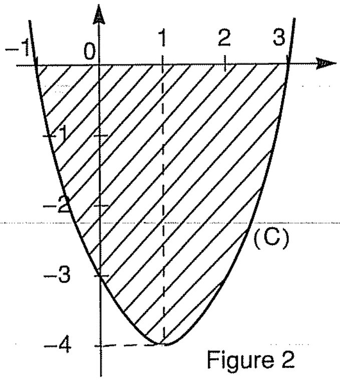


Figure 2

Figure 2 : $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

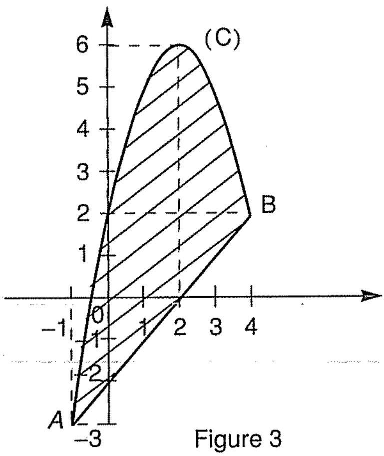


Figure 3

Figure 3 : $f(x) = -x^2 + 4x + 2$.

2° Soit la fonction définie par $f(x) = -x^2 + 3$.

a) Montrer que f est une fonction paire. Quelle en est la conséquence graphique ?

b) Calculer les intégrales $I_1 = \int_0^1 f(x)\,dx$, $I_2 = \int_{-1}^0 f(x)\,dx$.

En déduire le calcul de $I = \int_{-1}^1 f(x)\,dx$.

3° Calculer l'intégrale $\int_0^4 |x-3|\,dx$.

4° A l'aide d'une intégration par parties calculer les intégrales $I = \int_0^1 2xe^x dx$ et $J = \int_1^e x \ln x\, dx$.

◈ Solutions

1° • **Figure 1 :** l'aire est celle de deux régions du plan :

$$R_1 \begin{cases} 0 \le x \le 3 \\ 0 \le y \le \dfrac{2}{x+1} \end{cases} \quad \text{et} \quad R_2 \begin{cases} 3 \le x \le 5 \\ 0 \le y \le x - \dfrac{5}{2}. \end{cases}$$

Cette aire se calcule par la somme de deux intégrales :

$$A = \int_0^3 \frac{2}{x+1}dx + \int_3^5 \left(x - \frac{5}{2}\right).$$

$\dfrac{2}{x+1}$ a pour primitive $2\ \ln|x+1|$.

$x - \dfrac{5}{2}$ a pour primitive $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{5}{2}x$.

Donc $A = [2\ln|x+1|]_0^3 + \left[\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{5}{2}x\right]_3^5$.

$$A = (2\ln 4 - 2\ln 1) + \left[\left(\frac{25}{2} - \frac{25}{2}\right) - \left(\frac{9}{2} - \frac{15}{2}\right)\right].$$

$\boxed{A = 2\ln 4 + 3}$.

L'unité étant 1cm sur chaque axe, une valeur approchée de l'aire est 5,77 cm^2.

• **Figure 2 :** $f(x) = x^2 - 2x - 3$

La partie du plan hachurée est définie par $\begin{cases} -1 \leq x \leq 3 \\ f(x) \leq y \leq 0. \end{cases}$

L'aire se calcule à l'aide de l'intégrale $I = \int_{-1}^{3} [0 - f(x)]\,dx$.

Donc $I = \int_{-1}^{3} (-f(x))\,dx = -\int_{-1}^{3} f(x)\,dx$.

$$-\int_{-1}^{3} f(x)\,dx = -\int_{-1}^{3} (x^2 - 2x - 3)\,dx = -\left[\frac{x^3}{3} - x^2 - 3x\right]_{-1}^{3}$$

$$-\int_{-1}^{3} f(x)\,dx = -\left(\frac{27}{3} - 9\right) - \left(9 + \frac{-1}{3} - 1 + 3\right) = \left(\ 9 - \right)\frac{5}{3} = \left(-\frac{32}{3}\right).$$

Donc $\boxed{I = \frac{32}{3}}$.

L'unité est 1 cm sur chaque axe, donc l'aire est égale à 10,67 cm^2 environ.

• **Figure 3 :**

La partie du plan hachurée est définie par : $\begin{cases} -1 \leq x \leq 4 \\ g(x) \leq y \leq f(x) \end{cases}$,

où $g(x)$ est la fonction représentée par la droite (AB).
Cherchons une équation de (AB) : $y = ax + b$.

Son coefficient directeur est $a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{2+3}{4+1} = 1$.

Les coordonnées du point B vérifient l'équation de la droite :
$2 = a \times 4 + b$.
$2 = 4 + b \qquad b = -2$.
(AB) a pour équation $y = x - 2$, et représente la fonction $g(x) = x - 2$.

L'aire hachurée se calcule par l'intégrale :

$$A = \int_{-1}^{4} [(-x^2+4x+2) - (x-2)]\,dx = \int_{-1}^{4} (-x^2+3x+4)\,dx.$$

$$A = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + 4x\right]_{-1}^{4} = -\left(\frac{64}{3} + 24 + 16\right) - \left(-\frac{(-1)^3}{3} + \frac{3}{2} - 4\right).$$

$$A = -\left(\frac{64}{3} + 40\right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{3}{2} - 4\right) = \frac{-128 + 240 - 29 + 24}{6}.$$

$$\boxed{A = \frac{125}{6}}.$$

L'unité est 0,5 cm sur chaque axe, donc l'aire vaut 0,25 x $\dfrac{125}{6}$, c'est-à-dire 5,21 cm^2 environ.

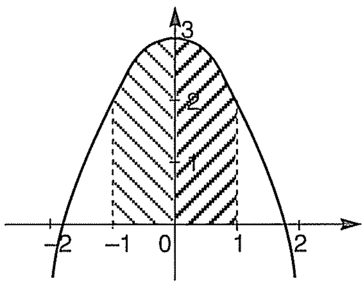
2° $f(x) = -x^2 + 3$.

Son ensemble de définition est $\mathbb{R}$.

a) $f(-x) = -(-x)^2 + 3 = -x^2 + 3$.

On a $f(-x) = f(x)$ donc f est une fonction paire.

Sa représentation graphique est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



b) $I_1 = \int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (-x^2+3)\,dx.$

$$I_1 = \left[-\frac{x^3}{3} + 3x\right]_0^1 = \left(-\frac{1}{3} + 3\right) - 0 = \frac{8}{3}.$$

$$I_2 = \int_{-1}^{0} (-x^2+3)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3}+3x\right]_{-1}^{0}.$$

$$I_2 = 0-\left(\frac{1}{3}-3\right) = -\left(\frac{8}{3}\right)=\frac{8}{3}\cdot$$

Nous constatons que $I_1 = I_2$. Ces intégrales représentent l'aire de deux parties symétriques du plan .

$I = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx+\int_{0}^{1} f(x)\,dx$ d'après la relation de Chasles.

$\boxed{I = 2\int_0^1 f(x)\,dx}$. $\boxed{I = 2\times\frac{8}{3} = \frac{16}{3}}$.

3° $\int_0^4 |x-3|\,dx$.

Nous savons que $x-3 \geq 0$ si $x \geq 3$, et par conséquent :

si $x\in\ ]-\infty\,;3]$, alors $|x-3| = -x+3$;

Si $x\in [3\ ;\ +\infty[$, alors $|x-3| = x-3$.

Nous pouvons écrire

$$\int_0^4 |x-3|\,dx = \int_0^3 (-x+3)\,dx+\int_3^4 (x-3)\,dx.$$

$$\int_0^4 |x-3|\,dx = \left[-\frac{x^2}{2}+3x\right]_0^3 + \left[\frac{x^2}{2}-3x\right]_3^4,$$

$$\int_0^4 |x-3|\,dx =\left(-\frac{9}{2}+9\right)-0 + \left(\frac{6}{12}+12\right)-\ (-\ \frac{9}{2})-9,$$

$$\int_0^4 |x-3|\,dx = \frac{9}{2}-4-\left(-\frac{9}{2}\right)=\boxed{5}\cdot$$

4° Calcul de $I = \int_0^1 2xe^x\,dx$.

Posons $u = 2x$, alors $u' = 2$,

et $v' = e^x$, alors $v = e^x$.

Appliquons la formule de l'intégration par parties :

$$\int_0^1 2xe^x\,dx = [2xe^x]_0^1-\int_0^1 2e^x\,dx,$$

$$\int_0^1 2xe^x \, dx = (2e - 0) - [2e^x]_0^1,$$

$$\int_0^1 2xe^x \, dx = 2e - (2e - 2 \times 1,$$

$$\int_0^1 2xe^x \, dx = \boxed{2}.$$

Calcul de $J = \int_1^e x \ln x \, dx$.

Posons $u = \ln x$, alors $u' = \frac{1}{x}$

$v' = x$, alors $v = \frac{x^2}{2}$.

Appliquons la formule de l'intégration par parties :

$$\int_1^e x \ln x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \times \frac{x^2}{2} \, dx,$$

$$\int_1^e x \ln x \, dx = \left(\frac{e^2}{2} \ln e - \frac{1}{2} \ln 1 \right) - \int_1^e \frac{x}{2} \, dx,$$

$$\int_1^e x \ln n \, dx = \left(\frac{e^2}{2} - 0 \right) - \left[\frac{x^2}{4} \right]_1^e,$$

$$\int_1^e x \ln x \, dx = \frac{e^2}{2} - \left(\frac{e}{4} - \frac{1}{4} \right) = \boxed{\frac{e^2 + 1}{4}}.$$

PROBLÈMES AVEC SOLUTIONS

1er problème

◈ Énoncé

Soit la fonction définie pour tout réel x de l'intervalle $I = [-2 ; 2]$ par $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$. On appelle (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonomé. (Unité : 2 cm.)

1° Etudier les variations de f sur I.

2° Montrer que f est une fonction impaire ; quelle particularité peut-on en déduire pour la courbe (C) ?

3° Calculer l'aire A_1 de la partie du plan limitée par la droite d'équation $x = 2$, les axes de coordonnées et la courbe (C).

En déduire l'aire totale A des parties du plan situées entre l'axe des abscisses, la courbe (C) et les droites d'équation $x = 2$ et $x = -2$.

◆ Solution

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1}.$$

f est définie sur $[-2\,;\,2]$.

Calculons la dérivée : $f'(x)$ est la dérivée d'un quotient $\frac{u}{v}$.

Posons $u = x$, donc $u' = 1$, et $v = x^2 + 1$ donc $v' = 2x$.

Nous savons que $\left(\frac{u}{v}\right)^1 = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

$$\text{Donc } f'(x) = \frac{1\,(x^2+1) - x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{(1+x)\,(1-x)}{(x^2+1)^2}.$$

Etudions le signe de $f'(x)$: $(x^2 + 1)^2 > 0$ car c'est un carré,

$1 + x > 0$ si $x > -1$,

$1 - x > 0$ si $x < 1$.

Nous avons le tableau de signes

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$(x^2+1)^2$		$+$	|	$+$	|	$+$	
$1+x$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$1-x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

$f'(x) > 0$ si $x \in \,]-1\,;1\,[$ et $f'(x) < 0$

si $x \in \,]-\infty\,;-1\,[$ ou si $x \in \,]\,1\,;\,+\infty\,[$.

Nous en déduisons le tableau de variations de f sur I :

x	-2		-1		1		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\frac{2}{5}$	↘	$-\frac{1}{2}$	↗	$\frac{1}{2}$	↘	$\frac{2}{5}$

$$f(1) = \frac{1}{2}\,, \qquad f(-1) = \frac{-1}{2}\,,$$

$$f(2) = \frac{2}{5}\,, \qquad f(-2) = \frac{-2}{5}\,.$$

2° Montrons que f est impaire : calculons $f(-x)$.

$$f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2+1} = \frac{-x}{x^2+1} \text{ donc } f(-x) = -f(x).$$

La fonction f est impaire, sa courbe admet l'origine du repère pour centre de symétrie.

3° Cette aire est celle de la partie du plan définie par

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq z \\ 0 \leq y \leq f(x)\,. \end{cases}$$

Elle se calcule à l'aide de l'intégrale $\int_0^2 f(x)\,dx$.

Cherchons une primitive de $\dfrac{x}{x^2+1}$.

Nous reconnaissons la forme $\dfrac{u'}{u}$ qui a pour primitive $\ln|u|$.

Ici $u = x^2 + 1$ donc $u' = 2x$.

$\dfrac{2x}{x^2+1}$ a pour primitive $\ln|x^2+1|$,

donc $\dfrac{x}{x^2+1}$ a pour primitive $\dfrac{1}{2}\ln|x^2+1|$.

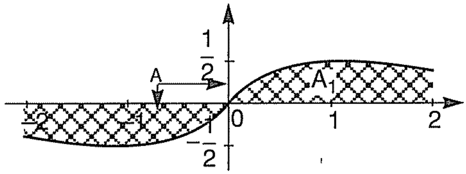
$x^2 + 1 > 0$ pour tout x, donc la primitive est $\dfrac{1}{2}\ln(x^2+1)$.

$$\int_0^2 f(x)\,dx = \left[\frac{1}{2}\ln(x^2+1)\right]_0^2 = \frac{1}{2}\ln 5 - \frac{1}{2}\ln 1 = \frac{1}{2}\ln 5.$$

L'unité est 2 cm sur chaque axe, donc l'aire A_1 est $4 \times \dfrac{1}{2}\ln 5$, c'est-à-dire 3,22 cm^2 environ.

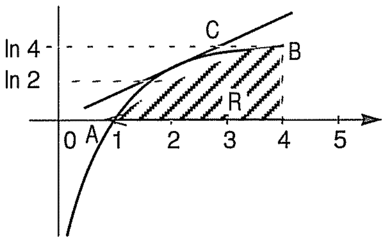
La courbe étant symétrique par rapport au point O, origine du repère, l'aire de la partie du plan définie par $\begin{cases} -2 \leq x \leq 0 \\ f(x) \leq y \leq 0 \end{cases}$ est la même que l'aire calculée précédemment. L'aire totale A est donc 2 fois l'aire A_1.

$$\boxed{A \approx 2A_1 \approx 6,44 \text{ cm}^2}.$$



2e problème

◆ Énoncé



Le graphique ci-dessus est la représentation graphique de la fonction f : $x \to \ln x$. Le but du problème est de déterminer un encadrement de l'aire $\mathcal{A}$ de la région R hachurée, puis de calculer la valeur exacte de cette aire.

1° Donner un encadrement de $f(x)$ lorsque x appartient à l'intervalle $[1, 4]$, en déduire un encadrement de l'intégrale $\int_1^4 \ln \; x \; dx$, puis de l'aire $\mathcal{A}$.

2° ***a)*** Soit A le point d'abscisse 1 de la courbe et B le point d'abscisse 4. Déterminer une équation de la droite (AB).

b) Soit T la tangente à la courbe au point C d'abscisse 2. Déterminer une équation de T.

c) On admettra que pour tout x de [1, 4], la courbe est située au-dessus de la droite (AB) et en dessous de la droite T. En déduire un encadrement de $f(x)$ par deux fonctions affines sur [1 ; 4], puis un encadrement de l'aire $\mathcal{A}$.

3° Soit la fonction définie par $F(x) = x \ln x - x$.

a) Calculer la dérivée de $F(x)$.

b) Déterminer la valeur exacte de l'aire $\mathcal{A}$.

◈ Solution

La fonction f est croissante sur l'intervalle [1 ; 4].

Pour tout x de [1 ; 4] on a $f(1) \leq f(x) \leq f(4)$,

donc $\quad 0 \leq \ln x \leq \ln 4$,

ou $\quad 0 \leq \ln x \leq 2\ln 2$.

Or, nous savons que si pour tout x de $[a, b]$ on a $m \leq f(x) \leq \mathrm{M}$.

On peut en déduire l'encadrement

$$\boxed{m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \mathrm{M}\ (b-a)}.$$

Nous pouvons donc écrire :

$$0(4-1) \leq \int_1^4 \ln x\,\mathrm{d}x \leq 2\ln 2\,(4-1),$$

ou

$$\boxed{0 \leq \int_1^4 \ln x\,\mathrm{d}x \leq 6\ln 2},$$

$$\boxed{0 \leq \mathcal{A} \leq 4,16} \text{ en cm}^2.$$

2° ***a)*** A(1,0) et B(4, 2ln 2). L'équation de (AB) s'écrit $y = ax + b$.

Le coefficient directeur de (AB) est $a = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{2\ln 2}{3}$.

Les coordonnées du point A vérifient l'équation de la droite :

$$0 = \frac{2\ln 2}{3} \times 1 + b \qquad \text{donc} \qquad b = \frac{-2\ln 2}{3}.$$

La droite (AB) a pour équation $y = \dfrac{2\ln 2}{3}x - \dfrac{2\ln 2}{3}$.

b) La tangente T a pour coefficient directeur $f'(2)$, or $f'(x) = \frac{1}{x}$, donc $f'(2) = \frac{1}{2}$.

L'équation de la tangente s'écrit $y = \frac{1}{2}x + b$.

Les coordonnées du point C vérifient l'équation de T

$\ln 2 = \frac{1}{2} \times 2 + b$ donc $b = \ln 2 - 1$.

La tangente T a pour équation $y = \frac{1}{2}x + \ln 2 - 1$.

c) La courbe est au-dessus de la droite (AB), donc $f(x) \geq \frac{2\ln 2}{3}x - \frac{2\ln 2}{3}$. La courbe est au-dessus de la tangente T, donc $f(x) \leq \frac{1}{2}x + \ln 2 - 1$.

En résumé $\frac{2\ln 2}{3}x - \frac{2\ln 2}{3} \leq f(x) \leq \frac{1}{2}x + \ln 2 - 1$.

Nous en déduisons :

$$\int_1^4 \left(\frac{2\ln 2}{3}x - \frac{2\ln 2}{3}\right) dx \leq \int_1^4 f(x)\, dx \leq \int_1^4 \left(\frac{1}{2}x \ln 2 - 1\right) dx \cdot$$

Calcul de $\int_1^4 \left(\frac{2\ln 2}{3}x\frac{2\ln 2}{3}\right) dx = \left[\frac{\ln 2}{3}x^2 - \frac{2\ln 2}{3}x\right]_1^4$,

$$I = \left(\frac{\ln 2}{3} \times 16 + -\frac{8\ln 2}{3}\right) - \left(\frac{\ln 2}{3} \times 1 - \frac{2\ln 2}{3}\right),$$

$$I = \frac{\ln 2\,(16 - 8 - 1 + 2)}{3} = 3\ln 2.$$

Calcul de $J = \int_1^4 \left(\frac{1}{2}x + \ln 2 - 1\right) dx = \left[\frac{x^2}{4} + \ln 2 \times x - x\right]_1^4$,

$$J = \left(\frac{16}{4} + 4\ln 2 - 4\right) - \left(\frac{1}{4} + 2\ln - 1\right) = 3\ln 2 + \frac{3}{4}$$

Nous avons obtenu l'encadrement

$$\boxed{3\ln 2 \leq \int_1^4 \ln x \, dx \leq 3\ln 2 + \frac{3}{4}}.$$

ou, pour l'aire en cm^2 $\boxed{2,08 \leq \mathcal{A} \leq 2,83}$.

3° *a)* $F(x) = x\ln x - x.$

Calculons la dérivée $F'(x)$.

$x\ln x$ est un produit.

Posons $u = x$, donc $u' = 1$, et $v = \ln x$ donc $v' = \frac{1}{x}$.

Nous savons que $(uv)' = u'v + uv'$ donc

$F'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x} - 1.$

$F'(x) = \ln x + 1 - 1 = \ln x.$

b) F a pour dérivée *f*, donc F est une primitive de *f*, et nous pouvons calculer

$\int_1^4 \ln x \, dx = [x \ln x - x]_1^4.$

$\int_1^4 \ln x \, dx = (4\ln 4 - 4) - (1\ln 1 - 1) = 8\ln 2 - 3.$

En résumé $\boxed{\int_1^4 \ln x \, dx = 8\ln 2 - 3}$.

$\boxed{\text{L'aire } \mathcal{A} \text{ est égale à } 2,55 \text{ cm}^2 \text{ environ}}$.

21 PROBLÈMES DE SYNTHÈSE

Ce chapitre propose des problèmes avec leur solution. Ce sont des sujets de bac B qui font intervenir une large part des notions acquises en terminale B.

Pour résoudre ces problèmes, il est important d'en saisir la ligne directrice, afin de pouvoir réinvestir les résultats des premières questions dans les questions suivantes : une lecture attentive de l'énoncé s'impose.

1er problème

◆ Énoncé

Le but du problème est la représentation graphique de deux fonctions et l'étude de la position relative des deux courbes obtenues.

Le plan P est rapporté à un repère orthogonal $(0, \vec{i}, \vec{j})$ (unités graphiques : 3 cm sur l'axe des abscisses ; 10 cm sur l'axe des ordonnées). L'axe des ordonnées est à gauche de la feuille prise dans le sens de la longueur.

A

I. La fonction f est définie sur]0, 8] par :

$$f(x) = \frac{1}{x^2}.$$

C est la courbe représentative de f dans P.

Étudier f (sens de variation, limite en 0, tableau de variation), puis construire C.

II. La fonction g est définie sur]0, 8] par :

$$g(x) = \frac{1+3\ln x}{x^3}.$$

Γ est la courbe représentative de g dans P.

Étudier g (dérivée, sens de variation, limite en 0, tableau de variation), puis construire Γ.

B

Montrer que la différence $g(x) - f(x)$ a le même signe que :

$$h(x) = 1+3\ln x - x.$$

I. Étudier h (dérivée, sens de variation, tableau de variation) sur l'intervalle]0, 8].

II. Calculer $h(1)$. Qu'en déduit-on pour C et Γ ?

III. Calculer $h(3)$, et $h(8)$; montrer que l'équation $h(x) = 0$ a une solution unique x_0 dans l'intervalle [3, 8].

IV. Des questions **B I., II., III.,** déduire la position relative de C et Γ.

V. En utilisant une calculatrice, déterminer un encadrement de x_0 d'amplitude 1, puis 10^{-1}, puis 10^{-2} (on indiquera les calculs faits sur la copie).

(D'après bac B)

◈ Solution

A

I. $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ sur l'intervalle]0 ; 8].

Dérivée de f : $\boxed{f'(x) = \dfrac{-2}{x^3}}$.

Signe de $f'(x)$: $x^3 > 0$ quand $x \in$]0 ; 8] et $-2 < 0$,

Donc $f'(x) < 0$ sur]0 ; 8] et f est décroissante.

Limite en 0 : quand x tend vers 0, x^2 tend vers 0 et reste positif,

donc $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty}$.

Tableau de variation de f :

$$f(8) = \frac{1}{64} = 0,016$$

x	0	8
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$\frac{1}{64}$

II. $g(x) = \dfrac{1 + 3\ln x}{x^3}$ sur l'intervalle]0 ; 8].

Dérivée de $g(x)$: c'est un quotient : $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$.

Posons $u = 1 + 3\ln x$ donc $u' = \dfrac{3}{x}$,

$v = x^3$ donc $v' = 3x^2$.

$$g'(x) = \frac{\frac{3}{x} \times x^3 - 3x^2(1+3\ln x)}{x^6} = \frac{9x^2 \ln x}{x^6} = \frac{-9 \ln x}{x^4}.$$

Signe de $g'(x)$: si $x \in]0\,;8]$, alors $x^4 > 0$.

$\ln x > 0$ si $x > 1$ et $-9 < 0$.

Nous avons le tableau de signes

x	0	1	8
-9	$-$		$-$
$\ln x$	$-$	0	$+$
x^4	$+$		$+$
$g'(x)$	$+$	0	$-$

g est croissante sur $]0\,;1]$ et décroissante sur $[1\,;8]$.

Limite en 0 :

quand x tend vers 0,

$\ln x$ tend vers $-\infty$,

$1 + 3\ln x$ tend vers $-\infty$,

x^3 tend vers 0 et reste positif,

$\frac{1}{x^3}$ tend vers $+\infty$,

donc $(1+3\ln x) \times \frac{1}{x^3}$ tend vers $-\infty$.

$$\boxed{\lim_{x \to 0} g(x) = -\infty}$$

Tableau de variation de g :

$$g(1) = \frac{1+3\ln 1}{1^3} = 1.$$

$$g(8) = \frac{1+3\ln 8}{8^3} \approx 0,014.$$

x	0		1		8
$g'(x)$	‖	+	0	−	
$g(x)$	‖	$-\infty$ ↗	1	↘	0,014

B

Calculons $\quad g(x) - f(x) = \dfrac{1+3\ \ln x}{x^3} - \dfrac{1}{x^2},$

$$g(x) - f(x) = \frac{1+3\ \ln x - x}{x^3} = \frac{h(x)}{x^3}.$$

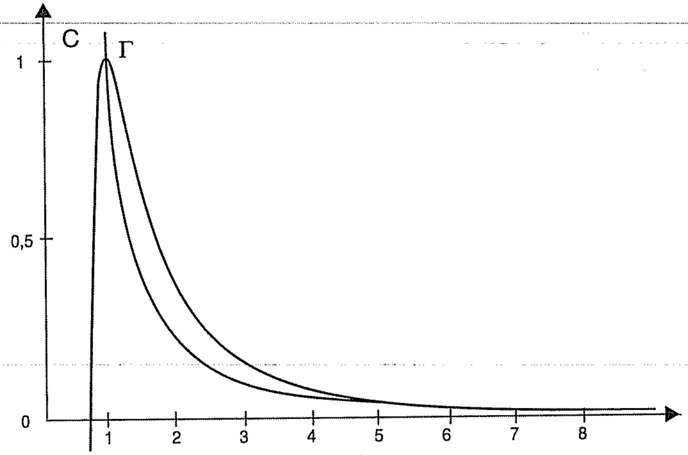
Puisque x est positif, x^3 est positif et le signe de $g(x) - f(x)$ est celui de $h(x)$.

$$h(x) = 1 + 3\ \ln x - x.$$

Signe de $h'(x)$:

$x > 0$ car $x \in \left]0\ ;8\right]$,

$3 - x > 0$ si $x < 3$.



C est la courbe de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$.

Γ est la courbe de $g : x \mapsto \dfrac{1 + 3 \ln x}{x^3}$.

D'où le tableau de signes :

x	0		3		8
$3 - x$	‖	+	0	−	
x	‖	+		+	
$h'(x)$	‖	+	0	−	

h est croissante sur]0 ; 3] et décroissante sur [3 ; 8].

Limite en 0 : si x tend vers 0, $\ln x$ tend vers $-\infty$,

$3 \ln x$ tend vers $-\infty$,

$1 - x$ tend vers 1.

$$\boxed{\lim_{x \to 0} h(x) = -\infty}$$

Tableau de variation de h :

$h(3) = 1+3 \ln 3-3 = 3 \ln 3-2 \approx 1{,}3.$

$h(8) = 1+3 \ln 8-8 = 3 \ln 8-7 \approx -0{,}76.$

x	0		3		8
$h'(x)$	‖	+	0	−	
$h(x)$	‖ $-\infty$	↗	$3 \ln 3-2$	↘	$3 \ln 8-7$

II. $h(1) = 1 + 3 \ln 1 - 1 = 0.$

$h(1) = 0$, donc $g(1) - f(1) = 0$: les courbes C et Γ se coupent au point d'abscisse 1.

III. $h(3) = 3 \ln 3 - 2$, $h(3) > 0$ et $h(8) = 3\ln 8 - 7$, $h(8) < 0$.

La fonction h est décroissante sur l'intervalle [3 ; 8], $h(3) > 0$ et $h(8) < 0$. C'est une bijection de l'intervalle [3 ; 8] sur l'intervalle $[3 \ln 8 - 7 ; 3 \ln 3 - 2]$. Or 0 appartient à ce dernier intervalle, il a donc un antécédent et un seul par h dans [3 ; 8].

Donc l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique x_0 dans l'intervalle [3 ; 8].

IV. Résumons dans un tableau le signe de $h(x)$ sur l'intervalle]0 ; 8], en tenant compte du fait que h est croissante sur]0 ; 3]

x	0		1		3		x_0		8
$h(x)$	‖	−	0	+		+	0	−	

h est croissante h est décroissante

Donc $g(x) - f(x) \geq 0$ si $x \in [1 ; x_0]$.

La courbe Γ est au-dessus de la courbe C si $x \in [1 \; ; \; x_0]$.

$g(x) - f(x) < 0$ si $x \in]0' \; ; 1[$ ou $x \in]x_0 \; ; \; 8]$.

La courbe Γ est en dessous de la courbe C si $x \in]0' \; ; 1[$ ou si $x \in]x_0 \; ; \; 8]$.

$$\left.\begin{array}{l} h(6) = \; 0,375 \\ h(7) = -0,162 \end{array}\right\} h \text{ est décroissante sur } [6 \; ; 7],$$

$h(6) > 0$ et $h(7) < 0$ donc x_0, solution de $h(x) = 0$, est dans l'intervalle $[6 \; ; 7]$. $6 \leq x_0 \leq 7$.

De même $\left.\begin{array}{l} h(6{,}7) = 0,049 \\ h(6{,}8) = -0,049 \end{array}\right\}$ donc $\begin{array}{l} x_0 \in [6{,}7 \; ; \; 6{,}8]. \\ 6{,}7 \leq x_0 \leq 6{,}8. \end{array}$

Enfin : $\left.\begin{array}{l} h(6{,}71) = 0,0008 \\ h(6{,}72) = -0,0047 \end{array}\right\}$ donc $\begin{array}{l} x_0 \in [6{,}71 \; ; \; 6{,}72]. \\ 6{,}71 \leq x_0 \leq 6{,}72. \end{array}$

2^e problème

◆ Énoncé

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - 2 + \frac{2}{e^x + 1}$$

et (C) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormal $(0 \; ; \; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 5 cm).

I. Étudier les limites de f quand x tend vers $-\infty$ et quand x tend vers $+\infty$.

II. 1° Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = x$ est asymptote à (C) quand x tend vers $-\infty$. Préciser les positions relatives de (C) et (Δ).

2° Montrer que la droite (Δ') d'équation $y = x - 2$ est asymptote à

(C) quand x tend vers $+\infty$. Préciser les positions relatives de (C) et (Δ').

III. Calculer $f'(x)$ et étudier les variations de f.

IV. Tracer (C), ses asymptotes dans le repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

V. On se propose de déterminer, en cm^2, l'aire A de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite (Δ') d'équation $y = x - 2$, et les droites d'équations $x = 2$, $x = 3$.

1° Colorier cette partie du plan sur le graphique.

2° Vérifier que l'on peut écrire $\dfrac{2}{e^x+1} = 2 - 2\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = e^x + 1$.

En déduire une primitive de la fonction $x \to \dfrac{2}{e^x+1}$.

3° Calculer A. En donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

(Bac B)

◈ Solution

$f(x) = x - 2 + \dfrac{2}{e^x+1}$ définie sur $\mathbb{R}$.

I. *Limite en* $-\infty$

Lorsque x tend vers $-\infty$, e^x tend vers 0

$\dfrac{2}{e^x+1}$ tend vers 2.

Donc $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty}$

Limite en $+\infty$.

Lorsque x tend vers $+\infty$, e^x tend vers $+\infty$,

$e^x + 1$ tend vers $+\infty$,

$\dfrac{2}{e^x+1}$ tend vers 0.

Donc $\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$.

II. 1° La droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe quand x tend vers $-\infty$ si

- $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ (vu au **I**).
- $f(x) = x + \varphi(x)$, ici $\varphi(x) = -2 + \dfrac{2}{e^x+1}$.
- $\lim_{x \to -\infty} \varphi(x) = 0$, or nous avons vu $\lim_{x \to -\infty} \dfrac{2}{e^x+1} = 2$,

donc $\lim_{x \to -\infty} \left(-2 + \dfrac{2}{e^x+1}\right) = -2+2 = 0$.

Donc la droite Δ d'équation $y = x$ est bien asymptote à la courbe (C)

Δ est au-dessus de (C) si $x > f(x)$ ou si $x - f(x) > 0$.

$$x - f(x) = x - \left(x - 2 + \frac{2}{e^x+1}\right) = 2 - \frac{2}{e^x+1} = \frac{2e^x + 2 - 2}{e^x+1} = \frac{2e^x}{e^x+1}.$$

Or $e^x > 0$ pour tout x, donc $2e^x > 0$ et $e^x + 1 > 0$.

En conclusion, $x - f(x) > 0$, la droite Δ est au-dessus de (C).

2° La droite Δ' d'équation $y = x - 2$ est asymptote à la courbe (C) quand x tend vers $+\infty$ si

- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (vu au **I**).
- $f(x) = x - 2 + \varphi(x)$, ici $\varphi(x) = \dfrac{2}{e^x+1}$.
- $\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = 0$.

Or, nous avons vu que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{e^x+1} = 0$.

Donc la droite Δ' d'équation $y = x-2$ est bien asymptote à la courbe (C).

(C) est au-dessus de Δ' si $f(x) > x-2$ ou si $f(x) - (x-2) > 0$.

$$f(x) - (x-2) = \left(x-2+\frac{2}{e^x+1}\right) - (x-2) = \frac{2}{e^x+1}.$$

Or $e^x + 1 > 0$, donc $\dfrac{2}{e^x+1} > 0$ pour tout x.

$f(x) > (x-2)$, et la courbe (C) est au-dessus de la droite Δ'.

III. Calcul de $f'(x)$.

$$f(x) = x-2+\frac{2}{e^x+1},$$

$$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$$

$$f'(x) = 1-\frac{2e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{(e^x+1)^2-2e^x}{(e^x+1)^2} = \frac{e^{2x}+2e^x+1-2e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^{2x}+1}{(e^x+1)^2}$$

Or $e^{2x} > 0$ pour tout x, donc $e^{2x} + 1 > 0$.

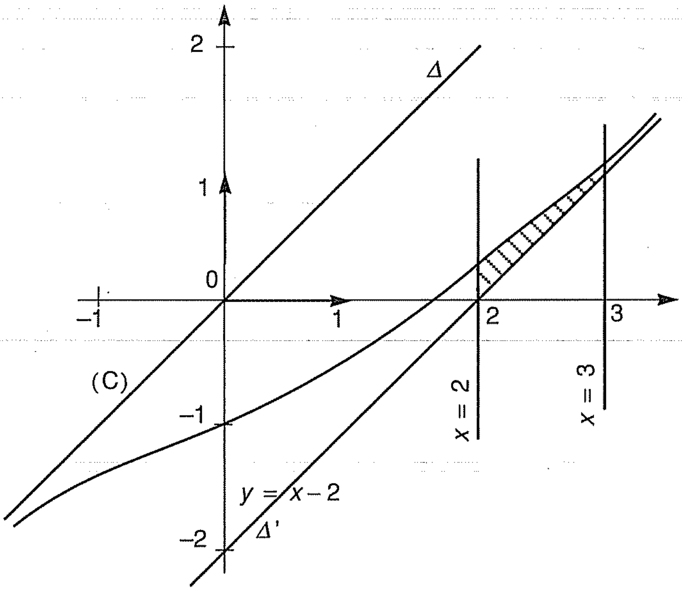
et $(e^x + 1)^2 > 0$ car c'est un carré.

Donc $f'(x) > 0$ pour tout x, f est croissante sur $\mathbb{R}$.

Tableau de variation de f :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

IV.



Dessin à l'échelle réduite : le faire à l'échelle demandée en plaçant soigneusement le repère.

V. 2° Peut-on écrire $\dfrac{2}{e^x+1} = 2 - 2\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x) = e^x + 1$?

Si $u(x) = e^x + 1$, alors $u'(x) = e^x$ et $\dfrac{u'(x)}{u(x)} = \dfrac{e^x}{e^x+1}$.

Donc $2 - 2\dfrac{u'(x)}{u(x)} = 2 - \dfrac{2e^x}{e^x+1} = \dfrac{2e^x + 2 - 2e^x}{e^x+1} = \dfrac{2}{e^x+1}$.

$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ a pour primitive $\ln|u(x)|$.

$\dfrac{e^x}{e^x+1}$ a pour primitive $\ln|e^x+1| = \ln(e^x+1)$ car $e^x+1>0$.

$2-2\dfrac{e^x}{e^x+1}$ a pour primitive $2x-2\ \ln(e^x+1)$.

3° L'aire A est celle du domaine défini par $\begin{cases} 2 \le x \le 3. \\ x-2 \le y \le f(x). \end{cases}$

Cette aire se calcule à l'aide de l'intégrale $\mathrm{I} = \displaystyle\int_2^3 [f(x) - (x-2)]\,\mathrm{d}x$.

$$\mathrm{I} = \int_2^3 \left[\left(x-2+\frac{2}{e^x+1}\right) - (x-2)\ \mathrm{d}x\right] = \int_2^3 \frac{2}{e^x+1}\mathrm{d}x = [2x-2\ \ln(e^x+1)]_2^3$$

$$\mathrm{I} = |6-2\ \ln(e^3+1)| - |4-2\ \ln(e^2+1)|$$

$$\mathrm{I} = 2-2|\ln(e^3+1) - \ln(e^2+1)| = 2-2\ \ln\left(\frac{e^3+1}{e^2+1}\right).$$

L'unité est 5 cm sur chaque axe, donc l'aire A est égale à :
A = 5 x 5 x I = 25 I.
A = 3,92 à 10^{-2} près en cm^2.

3^e problème

◈ Énoncé

Une entreprise fabrique une quantité x d'un produit, exprimée en milliers de tonnes, dont le coût marginal C_m est défini sur [0 ; 10] par

$$\mathrm{C}_m(x) = x + \frac{4}{x+1}.$$

Le but du problème est de. déterminer le coût total CT puis d'étudier le coût moyen CM de la production afin de déterminer la production qui minimise ce dernier.

Les coûts sont exprimés en milliers de francs.

1° Recherche de CT et de CM.

a) La fonction CT est la primitive de C_m qui s'annule pour $x = 0$.

Montrer que $CT(x) = \frac{x^2}{2} + 4 \ln(x+1)$.

b) En déduire l'expression de CM. (CM est défini sur]0 ; 10]).

2° Étude d'une fonction auxiliaire *f*.

Soit la fonction *f* définie sur [0 ; 10] par :

$$f(x) = x^2 + \frac{8x}{x+1} - 8 \ln(x+1).$$

a) Montrer que la fonction dérivée f' de f est donnée par

$$f'(x) = \frac{2x(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}.$$

b) Dresser le tableau de variations de *f* sur l'intervalle [0 ; 10].

En déduire que *f* s'annule pour une valeur *a* unique de]0 ; 10[.

Vérifier que 1,712 est une valeur approchée par défaut à 10^{-3} près de *a*.

c) En déduire le signe de *f* sur [0 ; 10].

3° Étude du coût moyen CM.

a) Calculer la dérivée $CM'(x)$ au point *x*.

Vérifier que l'on peut écrire $CM'(x) = \frac{f(x)}{2x^2}$ où *f* est la fonction précédente.

b) Étudier le sens de variation de CM sur]0 ; 10].

Pour quelle production l'entreprise a-t-elle un coût moyen minimum, et quel est ce coût ?

(Sujet de bac modifié)

◈ Solution

1° *a)* Recherche du coût total.

Les primitives de C_m sont du type

$$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4 \ln|x+1| + k.$$

Or $x \geq 0$ donc $x + 1 > 0$.

Donc $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4 \ln(x+1) + k$ sur [0 ; 10].

Celle qui s'annule pour $x = 0$ est CT(x).

F(0) = 0 équivaut à : $4 \ln 1 + k = 0$, c'est-à-dire : $k = 0$.

Donc $CT(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4 \ln(x+1)$.

***b)* Recherche du coût moyen.**

Par définition $CM(x) = \frac{CT(x)}{x}$,

donc : $CM(x) = \frac{x}{2} + 4 \frac{\ln(x+1)}{x}$.

2° Étude de la fonction auxiliaire *f*.

$$f(x) = x^2 + \frac{8x}{x+1} - 8 \ln(x+1).$$

a) Dérivée : $f'(x) = 2x + \frac{8(x+1) - 8x}{(x+1)^2} - \frac{8}{x+1}$

que l'on met au même dénomintateur :

$$f'(x) = \frac{2x[(x+1)^2 - 4]}{(x+1)^2}.$$

Or $(x+1)^2 - 4 = (x+1+2)(x+1-2) = (x+3)(x-1)$.

Donc $f'(x)$ se factorise en $\frac{2x(x+3)(x-1)}{(x+1)^2}$.

Le signe de cette fonction est celui du numérateur.

Or ici $x \geq 0$, donc le signe se ramène à celui de $(x+3)(x-1)$.

Ce signe est positif à l'extérieur de l'intervalle [− 3 ; 1] car ce produit est un trinôme du second degré. Le signe est négatif dans]− 3 ; 1[.

Compte tenu de $x \geq 0$, on a donc :

si $x > 1$, alors $f'(x) > 0$,

si $0 \leq x \leq 1$, alors $f'(x) \leq 0$.

b) Variations de f :

Valeurs utiles :

$f(0) = 0$,

$f(1) = -0{,}545$,

$f(10) = 88{,}089$.

x	0		1		10
$f'(x)$	0	−	0	+	
$f(x)$	0	↘	− 0,55	↗	88,09

Exploitation de ce tableau et utilisation d'un théorème :

f est dérivable et croissante sur [1 ; 10] et

$f(1) < 0$ et $f(10) > 0$, donc il existe un réel a de l'intervalle]1 ; 10] tel que $f(a) = 0$.

On pourrait chercher a par approximations successives, mais l'énoncé propose simplement de vérifier que 1,712 est une valeur approchée par défaut à 10^{-3} près de a.

On programme la calculatrice et l'on calcule $f(1{,}712)$ puis $f(1{,}713)$.

On obtient $f(1{,}712) = -0{,}0004$

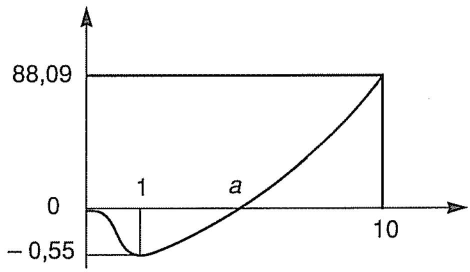
$f(1{,}713) = 0{,}0012$.

Donc on a : $1{,}712 < a < 1{,}713$, ce qu'il fallait vérifier.

c) Il découle du sens de variation de f (voir schéma ci-dessous) que :

f est positive si $x \in \ ]a\ ;\ 10]$.

f est négatif si $x \in \ ]0\ ;\ a[$.
f est nulle si $x = 0$ ou $x = a$.



3° Retour au coût moyen : étude et minimisation.

$$CM(x) = \frac{CT(x)}{x} = \frac{x}{2} + 4\,\frac{\ln(x+1)}{x} \text{ non définie en 0.}$$

a) Dérivée : $CM'(x) = \dfrac{1}{2} + 4\left[\dfrac{\dfrac{1}{x+1}\cdot x - \ln(x+1)}{x^2}\right]$.

D'où, en mettant le numérateur sur le dénominateur $(x+1)$:

$$CM'(x) = \frac{1}{2} + 4\cdot\frac{\dfrac{x-(x+1)\ln(x+1)}{x+1}}{x^2},$$

or $\dfrac{\frac{a}{b}}{c} = \dfrac{a}{bc}$, donc

$$CM'(x) = \frac{1}{2} + 4\,\frac{(x-(x+1)\ln(x+1))}{x^2(x+1)}.$$

Il reste à mettre l'ensemble sur le dénominateur commun $2x^2(x+1)$;

on obtient : $CM'(x) = \dfrac{x^2(x+1) + 8[x-(x+1)\ln(x+1)]}{2x^2(x+1)}$, c'est-à-dire : $CM'(x) = \dfrac{x^2(x+1) + 8x - 8(x+1)\ln(x+1)}{2x^2(x+1)}$.

Que l'on peut écrire : $CM'(x) = \dfrac{1}{2x^2}\left[x^2 + \dfrac{8x}{x+1} - 8\ \ln(x+1)\right]$.

On reconnaît dans les crochets la fonction auxiliaire f.

Donc : $CM'(x) = \dfrac{f(x)}{2x^2}$.

b) On déduit du quotient précédent que le signe de CM' est celui de $f, (2x^2 > 0)$. D'où le tableau des variations du coût moyen :

x	0		a		10
$CM'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$CM(x)$	‖	↘	$CM(a)$	↗	

Note : les valeurs aux bornes sont ici inutiles.

Le coût moyen passe par un minimum pour $x = a$; donc la production qui le minimise est $a = 1{,}712$. Puisque l'unité est le millier de tonnes, on a donc un coût moyen minimal pour une production de 1 712 tonnes.

Le coût moyen minimal est donc $CM(1{,}712)$, c'est-à-dire $CM = 3{,}187$ milliers de francs, soit $CM = 3\ 187$ F.

INDEX

Dans cet index ne figurent en principe que des concepts différents de ceux présentés au sommaire. Il se peut cependant qu'un même concept se trouve à la fois dans le sommaire et dans l'index. Dans ce cas, la référence indiquée dans l'index renvoie à un exercice proposé hors du chapitre qui traite du concept.

Achevé d'imprimer sur les presses de
l'Imprimerie Hérissey à Évreux
Dépôt légal : n° 5867 - Novembre 1991
N° d'imprimeur : 56546

ISBN 2-7117-1254-6

Exopoche maths

Terminale B

Rédigé par deux enseignants en terminale B, spécialistes de la liaison mathématiques-économie, cet ouvrage est destiné aux élèves de terminale B qui appliquent la mathématique aux sciences économiques et sociales.

Pour permettre à l'utilisateur de comprendre la mathématique, s'entraîner et maîtriser son outil, lui sont proposés :

— de rappels de cours : «ce qu'il faut retenir» ;

— des exercices pour s'entraîner, avec les solutions ;

— des problèmes corrigés et commentés.

9 782711 715244

ISBN 2-7117-1524-8