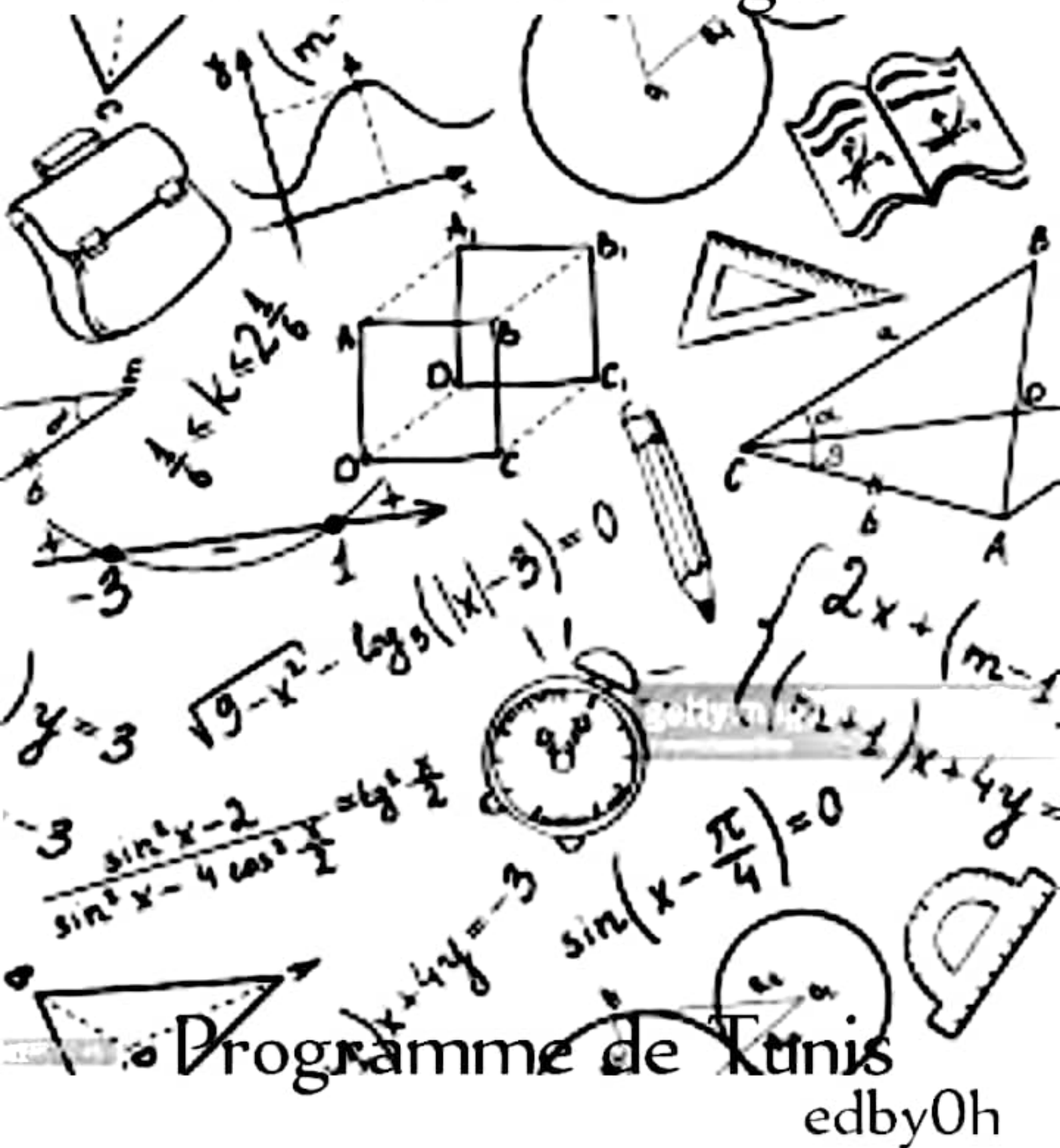


MATHÉMATIQUES T.C et S.M

Exercices Corrigés



L.S.El Riadh	<u>Arithmétique</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Exercices

Exercice 1:

Trouvez, suivant les valeurs de l'entier naturel n , le reste de la division euclidienne de 3^n par 8.

Quel est l'ensemble des entiers naturels n tels que le nombre $3^n \cdot n - 9n + 2$ soit divisible par 8?

Exercice 2:

Montrez que pour tout entier n , $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est divisible par 11.

Exercice 3:

Montrez que pour tout couple d'entiers relatifs (a, b) , si a et b ne sont pas divisibles par 7 alors

$a^2 + b^2$ n'est pas divisible par 7.

Montrez que pour tout n entier naturel, $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7.

Exercice 4:

Déterminez l'ensemble des x entiers relatifs tels que : $x^2 + 3x$ soit divisible par 7.

Exercice 5:

Montrez que pour tout entier $n \geq 1$, $3 \cdot 5^{2n-1} + 2^{3n-2}$ est divisible par 17 en effectuant un raisonnement par récurrence puis en faisant une démonstration directe.

Exercice 6:

Trouver les couples (a, b) d'entiers naturels tels que $0 < a < b$ dont le PGCD d et le PPCM m vérifient :

$2m + 3d = 78$ et tels que a ne soit pas un diviseur de b .

Exercice 7:

Déterminer les paires d'entiers naturels $\{a, b\}$ vérifiant: $m - 18d = 791$ où m est le PPCM et d le PGCD des nombres a et b .

L.S.El Riadh	<u>Arithmétique</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Exercices

Exercice 8:

Déterminer tous les couples (a,b) d'entiers naturels tels que $PGCD(a,b) + PPCM(a,b) = b + 9$.

Exercice 9:

Trouver les couples d'entiers naturels (a,b) vérifiant le système :

$$\begin{cases} a+b = 651 \\ PPCM(a,b) = 108PGCD(a,b) \end{cases}$$

Exercice 10:

Soient n et m deux entiers naturels non nuls. Soit z un nombre complexe vérifiant:

$$z^n = 1 \text{ et } z^m = 1.$$

Montrez que $z^d = 1$ où $d = PGCD(n,m)$

Exercice 11:

Déterminez tous les couples d'entiers naturels (a,b) tels que:

$$m^2 - 5d^2 = 2000$$

Puis déterminer tous les couples d'entiers naturels (a,b) tels que:

$$m^2 - 7d^2 = 2000$$

où $d = PGCD(a,b)$ et $m = PPCM(a,b)$

Exercice 12:

$(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'entiers naturels vérifiant la propriété suivante:

"Pour tout couple d'entiers naturels (n,p) ,

$$PGCD(U_n, U_p) = PGCD(U_n, U_{p+n})"$$

a: Montrer que pour tout n dans $\mathbb{N}$, U_n est un diviseur de U_0 .

b: Montrer que pour tout (n,p) couple d'entiers naturels, on a:

$$PGCD(U_n, U_p) = U_{PGCD(n,p)}.$$

Exercice 13:

Déterminez l'ensemble des couples (x,y) dans $\mathbb{Z}$ vérifiant les équations suivantes:

$$a) 5x + 12y = 20 \quad ; \quad b) x + 5y = 1 \quad ; \quad c) 2x - 5y = 10$$

$$d) 6x + y = 21 \quad ; \quad e) -2x + 3y = 9 \quad ; \quad f) 25x + 31y = 2$$

L.S.El Riadh	<i>Arithmétique</i>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Exercices

Exercice 14:

On considère l'équation (E) : $36x - 25y = 5$, $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$.

a: Déterminez deux entiers relatifs u et v tels que $36u + 25v = 1$.

b: Donnez alors une solution particulière de (E).

c: Quel est l'ensemble des solutions de (E) ?

d: (x, y) étant une solution particulière de (E), on appelle d le PGCD de x et y .

Quelles sont les valeurs possibles de d ?

Quelles sont les solutions (x, y) de (E) telles que x et y soient premiers entre eux?

Exercice 15:

On pose $a = 1234$ et $b = 1200$.

a: Déterminez le PGCD d et le PPCM m de a et b .

b: (E) est l'équation dans $\mathbb{Z}^2$: $ax + by = 2d.m$

Donnez une solution évidente de cette équation.

Déterminez l'ensemble des solutions de (E).

Exercice 16:

(E) est l'équation dans $\mathbb{Z}^2$: $36x - 49y = 13$.

a: Déterminez l'ensemble des solutions de (E).

b: Peut-on trouver un couple (x, y) dans $\mathbb{Z}$ tel que (x^2, y^2) soit solution de (E) ?

c: Peut-on trouver $x \in \mathbb{Z}$ tel que (x, x) soit solution de (E) ?

Exercice 17:

(E) est l'équation dans $\mathbb{Z}^2$: $2x + 5y = 1000$. et (F) est l'équation :

$$2x^2 + 5y^2 = 1000$$

a: Déterminez l'ensemble des solutions de (E).

b: Montrez que l'ensemble des solutions de (F) est fini.

c: Montrez que si (x, y) est solution de (F) alors $|x| < 23$ et $|y| < 15$.

d: En remarquant que (x, y) est solution de (F) si et seulement si $(|x|, |y|)$ est aussi solution

de (F), et en utilisant la question a: , montrez que (F) n'admet aucune solution.

e: On veut retrouver le résultat de la question précédente directement.

On suppose qu'il existe (x_0, y_0) solution de (F) avec x_0 et $y_0 \geq 0$

L.S.El Riadh	<u>Arithmétique</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Exercices

Montrez que x_0 est un multiple de 5 et que y_0 est un multiple de 2.

Montrez alors que l'équation (F1) : $5x^2 + 2y^2 = 100$ admet une solution (x_1, y_1) dans $\mathbb{N}$.

Montrez que x_1 est un multiple de 2 et que y_1 est un multiple de 5.

Montrez alors que l'équation (F2) : $2x^2 + 5y^2 = 10$ admet une solution (x_2, y_2) dans $\mathbb{N}$.

Montrez alors que l'équation (F3) : $5x^2 + 2y^2 = 1$ admet une solution dans $\mathbb{N}$.

Concluez!!

Exercice 18:

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on donne le point A (12 ; 18). On désigne par B un point de l'axe $(O; \vec{i})$ et par C un point de l'axe $(O; \vec{j})$ tels que : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$

On appelle x l'abscisse de B et y l'ordonnée de C.

1: Démontrer que le couple $(x; y)$ est solution de l'équation (E) :

$$2x + 3y = 78$$

2: On se propose de trouver tous les couples (B, C) de points ayant pour coordonnées des entiers relatifs.

a: Montrer que l'on est ramené à l'équation (E), avec x et y appartenant à l'ensemble des entiers relatifs $\mathbb{Z}$

b: A partir de la définition de B et de C, Trouver une solution particulière $(X_0; Y_0)$ de (E), avec X_0 et Y_0 appartenant à $\mathbb{Z}$.

c: Démontrer qu'un couple $(x; y)$ est solution de (E) si et seulement si il est de la forme $(12 + 3k; 18 - 2k)$ où k appartient à $\mathbb{Z}$.

d: Combien y-a-t-il de couples de points (B, C) ayant pour coordonnées des nombres entiers relatifs tels que:

$$-6 \leq x \leq 21 \text{ et } -5 \leq y \leq 14 ?$$

Exercice 19:

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ [unité graphique : 6 cm].

On considère la transformation f du plan qui a tout point M d'affixe z

associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = z e^{i \frac{5\pi}{6}}$

L.S.El Riadh	<u>Arithmétique</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Exercices

et on définit une suite de points (M_n) de la manière suivante:

M_0 a pour affixe $z_0 = e^{i\frac{\pi}{2}}$ et pour tout entier naturel n , $M_{n+1} = f(M_n)$.

On appelle z_n l'affixe de M_n .

1: Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f .

Placer les points M_0, M_1, M_2 .

2: Montrer que pour tout entier naturel n , on a l'égalité :

$$z_n = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{2}\right)}$$

(on pourra utiliser un raisonnement par récurrence).

3: Soient deux entiers n et p tels que n soit supérieur ou égal à p .

Montrer que deux points M_n et M_p sont confondus si et seulement si $(n - p)$ est multiple de 12.

4: a) On considère l'équation (E) : $12x - 5y = 3$ où x et y sont des entiers relatifs.

Après avoir vérifié que le couple $(4, 9)$ est solution, résoudre l'équation (E).

b) En déduire l'ensemble des entiers naturels n tels que M_n appartienne à la demi-droite $[Ox)$.

Exercice 20 :

1. On considère l'équation (E) : $6x + 7y = 57$ où x et y sont des entiers relatifs.

a. Déterminer un couple d'entiers relatifs (u, v) tel que $6u + 7v = 1$.

En déduire une solution particulière (x_0, y_0) de l'équation (E).

b. Déterminer les couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E).

2. Soit $(O; i, j, k)$ un repère orthonormal de l'espace.

On considère le plan P d'équation : $6x + 7y + 8z = 57$.

On considère les points du plan P qui appartiennent aussi au plan $(O; i, j)$.

Montrer qu'un seul de ces points a pour coordonnées des entiers naturels.

Déterminer les coordonnées de ce point.

3. On considère un point M du plan P dont les coordonnées x, y et z sont des entiers naturels.

a. Montrer que l'entier y est impair.

b. On pose $y = 2p + 1$ où p est un entier naturel.

Montrer que le reste dans la division euclidienne de $p + z$ par 3 est

L.S.El Riadh	<u>Arithmétique</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Exercices

égal à 1.

c. On pose $p + z = 3q + 1$ où q est un entier naturel.

Montrer que les entiers naturels x , p et q vérifient la relation :

$$x + p + 4q = 7$$

En déduire que q prend les valeurs 0 ou 1.

d. En déduire les coordonnées de tous les points de P dont les coordonnées sont des entiers naturels.

Exercice 21 :

On rappelle que 2003 est un nombre premier.

1: a: Déterminer deux entiers relatifs u et v tels que : $123u + 2003v = 1$.

b: En déduire un entier relatif k_0 tel que $123k_0 \equiv 1 [2003]$.

c: Montrer que, pour tout entier relatif x ,

$$123x \equiv 456 [2003] \text{ si et seulement si } x \equiv 456k_0 [2003]$$

d: Déterminer l'ensemble des entiers relatifs x tels que:

$$123x \equiv 456 [2003]$$

e: Montrer qu'il existe un unique entier n tel que:

$$1 \leq n \leq 2002 \text{ et } 123n \equiv 456 [2003]$$

2: Soit a un entier tel que: $1 \leq a \leq 2002$

a: Déterminer $\text{PGCD}(a, 2003)$

En déduire qu'il existe un entier m tel que : $am \equiv 1 [2003]$

b: Montrer que, pour tout entier b , il existe un unique entier x tel que:

$$0 \leq x \leq 2002 \text{ et } ax \equiv b [2003]$$

L.S.El Riadh	<u>Arithmétique</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Solutions

Exercice 1:

Le plus simple dans cet exercice, est alors de faire défiler les puissances de 3 modulo 8.

On obtient alors:

$$3 = 3 [8]$$

$$3^2 = 9 \text{ et } 3^2 = 1 [8]$$

$$3^3 = 27 \text{ et } 3^3 = 3 [8]$$

$$3^4 = 81 \text{ et } 3^4 = 1 [8] \text{ etc , etc ...}$$

Les restes possibles par la division euclidienne de 3^n par 8 sont donc 1 ou 3 suivant que n soit pair ou impair.

On veut maintenant l'ensemble des n entiers naturels tels que $3^n \cdot n - 9n + 2$ soit divisible par 8.

On cherche l'ensemble des n entiers naturels tels que

$$3^n \cdot n - 9n + 2 = 0 [8]$$

D'après le résultat précédent, on a 2 cas à étudier: n pair et n impair.

- Cas n pair:

Comme dans ce cas, $3^n = 1 [8]$, on peut écrire que :

$$n - 9n + 2 = 0 [8] \text{ ou encore } -8n + 2 = 0 [8] \text{ ou encore } 2 = 0 [8].$$

C'est impossible, donc pas de solution avec n pair.

- Cas n impair:

Comme dans ce cas, $3^n = 3 [8]$, on peut écrire :

$$3n - 9n + 2 = 0 [8], \text{ ou encore } , -6n + 2 = 0 [8], \text{ ou encore } , 2n + 2 = 0 [8], \text{ ou encore } , 2(n+1) = 0 [8].$$

$$\text{Or, } 2(n+1) = 0 [8] \Leftrightarrow 2(n+1) = 8k \text{ avec } k \text{ dans } \mathbb{Z}.$$

$$2(n+1) = 8k \Leftrightarrow (n+1) = 4k \Leftrightarrow n+1 = 0 [4]$$

$$\Leftrightarrow n = 3 [4]$$

- $n = 3 [4] \Leftrightarrow n = 3 \text{ modulo } 8 \text{ ou } n = 7 \text{ modulo } 8.$

n est donc de la forme $n = 8K + 3$ ou $n = 8K + 7$, où K est un entier naturel.

n est bien impair.

Conclusion

L'ensemble des entiers naturels n tels que $3^n \cdot n - 9n + 2$ est formé est entiers de la forme

(8K + 3) ou (8K + 7) où K est un entier naturel.

<i>L.S.El Riadh</i>	<i><u>Arithmétique</u></i>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		<i>Solutions</i>

Exercice 2:

Utilisons directement ce que l'on sait sur les congruences.

On veut ici vérifier que $3^{n+3} - 4^{4n+2}$ est congru à 0 modulo 11.

$$3^{n+3} - 4^{4n+2} = 3^3 \cdot 3^n - 4^2 \cdot (4^4)^n$$

$$= 5 \cdot 3^n + 6 \cdot 3^n [11] \text{ car } 3^3 = 5 [11], 4^2 = 6[11] \text{ et } 4^4 = 3[11]$$

$$= 11 \cdot 3^n \text{ modulo } 11$$

$$= 0[11]$$

Exercice 3:

Dans le cadre de cet exercice, dire que a et b ne sont pas divisibles par 7 revient seulement à dire qu'ils sont congrus à des entiers A et B compris entre 1 et 6.

Si on fait la liste des carrés de ces entiers modulo 7, on obtient alors:

- $1^2 = 1 [7]$
- $2^2 = 4 [7]$
- $3^2 = 2 [7]$
- $4^2 = 2 [7]$
- $5^2 = 4 [7]$
- $6^2 = 1 [7]$

On constate alors que les carrés modulo 7 sont

- $1 = 1^2 = 6^2 [7]$
- $2 = 4^2 = 3^2 [7]$
- $4 = 2^2 = 5^2 [7]$

Aucune somme de deux de ces carrés ne peut donc être congrue à 0 modulo 7.

Donc, si a et b sont non divisibles par 7, la somme $a^2 + b^2$ n'est pas divisible par 7.

Maintenant, en utilisant les diverses propriétés des congruences (compatibilité avec la somme et le produit), on peut écrire que, à modulo 7 près, on a:

L.S.El Riadh	<u>Arithmétique</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Solutions

$$\begin{aligned}
& \bullet \quad 3^{2n+1} + 2^{n+2} = 3(3^2)^n + 2^2 \cdot 2^n \\
& \bullet \quad \quad \quad = 3 \cdot 2^n + 4 \cdot 2^n \quad [7] \\
& \bullet \quad \quad \quad = 7 \cdot 2^n \quad [7] \\
& \bullet \quad \quad \quad = 0 \quad [7]
\end{aligned}$$

$3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est bien divisible par 7 pour tout entier naturel n .

Exercice 4:

$x^2 + 3x$ est divisible par 7 si et seulement si $x^2 + 3x = 0 [7]$.

Ou encore si et seulement si $x(x+3) = 0 [7]$.

Or, 7 est premier donc d'après le théorème de Gauss, il ne peut diviser un produit d'entiers que si il divise au moins un de ces entiers. On a donc:

$x(x+3) = 0 [7]$ si et seulement si $x = 0 [7]$ ou $(x+3) = 0 [7]$.

Ce qui peut s'écrire: $x = 0 [7]$ ou $x = 4 [7]$.

Les entiers relatifs x tels que $x^2 + 3x$ soit divisible par 7 sont donc les entiers de la forme $7K$ ou de la forme $7K + 4$, où K est un entier relatif quelconque.

Exercice 5:

Par Récurrence

Appelons $P(n)$ la propriété suivante : " $3 \cdot 5^{2n-1} + 2^{3n-2}$ est divisible par 17".

Pour $n = 1$, la propriété s'écrit : $P(1)$: " $3 \cdot 5 + 2$ est divisible par 17"

Comme $3 \cdot 5 + 2 = 17$, on en déduit que $P(1)$ est vraie.

Faisons alors l'hypothèse de récurrence $P(n)$, n étant un entier ≥ 1 .

On suppose donc que " $3 \cdot 5^{2n-1} + 2^{3n-2}$ est divisible par 17"

Alors, cette hypothèse s'écrit plus simplement " $3 \cdot 5^{2n-1} + 2^{3n-2} = 0$ modulo 17"

On a donc:

$$3 \cdot 5^{2n-1} + 2^{3n-2} = 0 [17] \text{ donc } 25 \cdot (3 \cdot 5^{2n-1} + 2^{3n-2}) = 0 [17]$$

$$\text{Donc } 3 \cdot 5^{2n+1} + 25 \cdot 2^{3n-2} = 0 [17]$$

On remarque alors que

$$25 = 8 [17] \text{ et que } 8 = 2^3 \text{ DONC}$$

<i>L.S.El Riadh</i>	<i>Arithmétique</i>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		<i>Solutions</i>

$$\begin{aligned}
 3.5^{2n+1} + 25.2^{3n-2} &= 3.5^{2n+1} + 2^3.2^{3n-2} \quad [17] \\
 &= 3.5^{2n+1} + 2^{3n+1} \quad [17]
 \end{aligned}$$

D'où :

$$3.5^{2n+1} + 2^{3n+1} = 0 [17]$$

$$3.5^{2(n+1)-1} + 2^{3(n+1)-2} = 0 [17]$$

Cette dernière égalité est la propriété $P(n+1)$.

Conclusion:

$P(1)$ est vraie et pour tout $n \geq 1$, On a $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

Par récurrence, la propriété est donc vraie pour tout $n \geq 1$.

Exercice 6:

On peut commencer par remarquer que d est $\leq m$ et sont tous deux > 0 .

Donc, s'ils vérifie $2m + 3d = 78$ alors on doit avoir $d < 27$.

Si on pose a' et b' définis par : $a = a'.d$ et $b = b'.d$, on sait que, d étant le PGCD de a et b alors a' et b' sont premiers entre eux.

Comme $\text{PGCD}(a,b) \cdot \text{PPCM}(a,b) = a.b$, on en déduit que :

$$m = a'.b'.d$$

L'équation peut alors s'écrire: $d(2a'.b' + 3) = 78$.

Comme $(2a'.b' + 3)$ est impair, d est pair et doit être un diviseur de 78 inférieur à 27.

Donc, $d = 2$ ou 6 .

Si $d = 2$ alors $(2a'.b' + 3) = 39$ et $a'.b' = 18$.

Comme a' et b' sont premiers entre eux, on a:

$(a' = 1 \text{ et } b' = 18)$ ou $(a' = 2 \text{ et } b' = 9)$.

D'où $(a = 2 \text{ et } b = 36)$ ou $(a = 4 \text{ et } b = 18)$ (on a $a < b$).

Comme a ne doit pas diviser b , la première solution n'est pas envisageable.

Si $d = 6$ alors $(2a'.b' + 3) = 13$ et $a'.b' = 5$.

D'où $a = 6$ et $b = 30$. Mais a ne doit pas diviser b donc cette solution n'est pas acceptable.

Seule solution $\{(4, 18)\}$

Exercice 7

a' et b' sont définis par : $a = a'.d$ et $b = b'.d$

On peut toujours supposer que $a \leq b$.

On sait que a' et b' sont premiers entre eux.

<i>L.S.El Riadh</i>	<i><u>Arithmétique</u></i>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		<i>Solutions</i>

On sait aussi que $m = d.a'.b'$

Alors, $d(a'.b' - 18) = 791$.

d est donc un diviseur de 791. La décomposition de 791 en facteurs premiers est : $791 = 7 \times 113$. D'où 4 cas possibles:

- $d = 1$: alors $a'b' = 809$. Comme 809 est premier, on a $a' = 1$ et $b' = 809$ d'où une solution : $\{a, b\} = \{1, 809\}$
- $d = 7$: alors $a'b' = 113$. Ce nombre est aussi premier, on a donc : $a' = 1$ et $b' = 113$ d'où la solution $\{7, 917\}$
- $d = 113$: alors $a'b' = 7$. Comme a' et b' sont premiers entre eux, on a : $a' = 1$ et $b' = 7$ d'où la solution $\{113, 2828\}$
- $d = 791$: alors $a'b' = 1$. Nombre premier donc $a' = 1$ et $b' = 1$ d'où la solution $\{791, 15029\}$

Conclusion:

Les paires $\{a, b\}$ solutions sont :

$\{1, 809\}, \{7, 917\}, \{113, 2828\}, \{791, 15029\}$

Exercice 8:

Posons $d = \text{PGCD}(a, b)$ et $m = \text{PPCM}(a, b)$.

On sait alors que $d.m = a.b$

Comme d est un diviseur de b et de m , la relation : $d + m = b + 9$

implique que d doit être aussi un diviseur de 9.

Les valeurs possibles de d sont donc : 1 ou 3 ou 9.

- **Si $d = 1$.**

Dans ce cas, a et b sont premiers entre eux.

La relation s'écrit : $1 + a.b = b + 9$ ou encore : $b(a - 1) = 8$.

On obtient alors :

$b = 1$ et $a - 1 = 8$ donc $a = 9$. Le couple $(9, 1)$ est solution
OU

$b = 2$ et $a - 1 = 4$ donc $a = 5$. Le couple $(5, 2)$ est solution.
OU

$b = 4$ et $a - 1 = 2$ donc $a = 3$. Le couple $(3, 4)$ est solution.
OU

$b = 8$ et $a - 1 = 1$ donc $a = 2$. Non solution car non-premiers entre eux.

L.S.El Riadh	<u>Arithmétique</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Solutions

• **Si $d = 3$.**

Dans ce cas la relation s'écrit, comme $m = (ab / d)$:

$$9 + a.b = 3b + 27 \text{ ou encore } b(a - 3) = 18.$$

Comme b doit être un multiple de $d = 3$, les valeurs possibles de b sont alors: 3 ou 6 ou 9 ou 18. D'où les cas:

$b = 3$ et $a - 3 = 6$ donc $a = 9$. Le couple $(9,3)$ est solution.

$b = 6$ et $a - 3 = 3$ donc $a = 6$. Non solution car leur PGCD n'est pas 3.

$b = 9$ et $a - 3 = 2$ donc $a = 5$. Non solution car leur PGCD n'est pas 3.

$b = 18$ et $a - 3 = 1$ donc $a = 4$. Non solution car leur PGCD n'est pas 3.

• **Si $d = 9$.**

Dans ce cas, comme $m = ab / d$, la relation s'écrit :

$$81 + ab = 9b + 81 \text{ ou encore } ab = 9b.$$

Si b est non nul, alors $a = 9$.

Les solutions obtenues sont alors de la forme $(9, 9k)$ k est un entier naturel nul quelconque (car b est divisible par 9).

Si $b = 0$ alors a est quelconque.

Mais comme $\text{PGCD}(a, 0) = a$ et $\text{PPCM}(a, 0) = 0$, la relation s'écrit dans ce cas : $a + 0 = 0 + 9$ donc $a = 9$ et le couple $(9, 0)$ est solution.

Conclusion:

L'ensemble des couples d'entiers naturels (a, b) vérifiant :

$$\text{PGCD}(a, b) + \text{PPCM}(a, b) = b + 9$$

est formé des éléments :

$(9, 1)$, $(5, 2)$, $(3, 4)$, $(9, 3)$, $(9, 9k)$ où k est un entier naturel.

Exercice 9:

On cherche tous les couples d'entiers (a, b) vérifiant :

$$a + b = 651 \text{ et } \text{PPCM}(a, b) = 108. \text{PGCD}(a, b).$$

Posons, comme d'habitude, $m = \text{PPCM}(a, b)$ et $d = \text{PGCD}(a, b)$.

On sait que $a.b = m.d$.

Première remarque:

Comme $a + b = 651$ et que d est un diviseur de a et b , d est aussi un diviseur de 651. Or, la décomposition de 651 en facteurs premiers est : $651 = 3 * 7 * 31$.

L.S.El Riadh	<u>Arithmétique</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Solutions

Les diviseurs de 651 sont donc : 1 - 3 - 7 - 31 - 21 - 93 - 217 - 651.

Deuxième remarque:

En multipliant par d dans la relation : $PPCM(a, b) = 108.PGCD(a, b)$, on peut alors écrire que le couple (a, b) doit vérifier :

$$a + b = 651 = S \quad \text{et} \quad a.b = 108.d^2 = P.$$

a et b doivent donc être les solutions de l'équation du second degré :

$$X^2 - S.X + P = 0 \quad \text{ou encore} \quad X^2 - 651.X + 108.d^2 = 0$$

Le discriminant de cette équation est : $\Delta = 651^2 - 432.d^2$.

En fonction de d les valeurs possibles de a et b sont alors, en utilisant l'expression des racines d'une équation du second degré en fonction du discriminant:

$$a = \frac{651 - \sqrt{651^2 - 432d^2}}{2} \quad \text{et} \quad b = \frac{651 + \sqrt{651^2 - 432d^2}}{2}$$

Mais comme d doit être un diviseur de 651 et que l'existence de ces racines suppose que le discriminant soit positif, les seuls cas à étudier sont :

$$d = 1 \text{ ou } 3 \text{ ou } 7 \text{ ou } 21 \text{ ou } 31.$$

- Pour $d = 1$ ou 3 ou 7 , les valeurs a et b obtenues ne sont pas entières.
- Pour $d = 21$, on obtient $a = 84$ et $b = 567$.
- Pour $d = 31$, on obtient $a = 279$ et $b = 372$.

Il ne reste plus qu'à tester ces éventuelles solutions:

- **Pour $a = 84$ et $b = 567$** , on a :
 $PGCD(84, 567) = 21$ et $PPCM(84, 567) = 2268 = 108 * 21$.
Donc $(84, 567)$ est une solution, et par symétrie, on a aussi $(567, 84)$.
- **Pour $a = 279$ et $b = 372$** , on a :
 $PGCD(279, 372) = 93$ (et non 31 comme prévu!!!) et
 $PPCM(279, 372) = 1116$ qui n'est pas égal à $108*93$.
Ce n'est pas une solution.

L.S.El Riadh	<u>Arithmétique</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Solutions

Conclusion:

Les seuls couples vérifiant $a + b = 651$ et $PPCM(a, b) = 108.PGCD(a, b)$ sont $(84, 567)$ et $(567, 84)$

Exercice 10:

Pour n et m sont deux entiers naturels, considérons la division euclidienne de m par n .

$$m = Q.n + R \text{ avec } 0 \leq R < n.$$

Si z est un nombre complexe vérifiant $z^n = z^m = 1$ alors :

$$1 = z^m = z^{Q.n + R} = (z^n)^Q \cdot z^R = 1^Q \cdot z^R = z^R$$

De même, si R' est le reste de la division euclidienne de n par R alors $z^{R'} = 1$

Comme le PGCD de n et m est le dernier reste non nul dans l'Algorithme d'Euclide, on en déduit que $z^{PGCD(n, m)} = 1$.

Autre méthode, avec l'identité de Bachet-Bezout:

On sait que qu'il existe u et v dans $\mathbb{Z}$ tels que $PGCD(n, m) = u.n + v.m$. On en déduit alors que :

$$z^{PGCD(n, m)} = z^{u.n + v.m} = z^{u.n} \cdot z^{v.m} = (z^n)^u \cdot (z^m)^v = 1^u \cdot 1^v = 1$$

Exercice 11:

On sait que si d et m sont respectivement le PGCD et le PPCM de a et b alors:

1: $ab = md$

2: Il existe A et B premiers entre eux tels que $a = Ad$ et $b = Bd$.

3: m est un multiple de d .

Pour l'équation : $m^2 - 5d^2 = 2000$, comme d^2 divise m^2 , d^2 doit donc être aussi un diviseur de 2000.

L.S.El Riadh	<u>Arithmétique</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Solutions

Décomposons alors 2000 en facteurs premiers. $2000 = 2^4 \times 5^3$.

Les diviseurs carrés de 2000 sont alors :

$$1, 2^2, 2^4, 5^2, 2^2 \times 5^2, 2^4 \times 5^2.$$

Les valeurs possibles de d sont donc

$$1, 2, 4, 5, 10, 20.$$

De la relation $m^2 = 2000 + 5d^2$, on voit alors que la seule possibilité pour d est $d = 10$, car bien sûr, m doit être entier. Dans ce cas, la valeur de m est : $m = 50$.

Comme $ab = md$, on a alors $ab = 500$. Si on écrit $a = Ad$ et $b = Bd$ avec A et B premiers entre eux, alors on obtient :

$$ABd^2 = 500 \text{ d'où, comme } d = 10, AB = 5.$$

A et B sont premiers entre eux donc il n'y a que deux cas possibles à voir:

$$(A = 1 \text{ et } B = 5) \quad \text{ou} \quad (A = 5 \text{ et } B = 1).$$

Dans le premier cas, on a la solution $(a, b) = (10, 50)$

Dans le second cas, on a la solution $(a, b) = (50, 10)$.

Pour l'équation : $m^2 - 7d^2 = 2000$, on utilise la même démarche et on constate qu'il n'y a pas de solution.

Exercice 12:

a) On sait que $\text{PGCD}(U_n, U_p) = \text{PGCD}(U_n, U_{p+n})$, donc en particulier:

$$\text{PGCD}(U_n, U_0) = \text{PGCD}(U_n, U_{0+n}) = \text{PGCD}(U_n, U_n) = U_n.$$

Ceci implique bien sûr que U_n est un diviseur de U_0 .

b) Posons $n = qp + r$ avec q entier et r dans $\{0; 1; \dots; p-1\}$. C'est la division euclidienne de n par p .

On a :

$$\text{PGCD}(U_p, U_r) = \text{PGCD}(U_p, U_{p+r}) = \text{PGCD}(U_p, U_{2p+r}) = \dots = \text{PGCD}(U_p, U_{qp+r}).$$

D'où $\text{PGCD}(U_p, U_r) = \text{PGCD}(U_n, U_p)$ où r est le reste de la division euclidienne de n par p .

On retrouve alors le principe de l'Algorithme d'Euclide de recherche du PGCD.

On pose $d = \text{PGCD}(n, p)$. d est le dernier reste non nul obtenu dans cet algorithme.

$$\text{On a donc : } \text{PGCD}(U_n, U_p) = \text{PGCD}(U_d, U_0).$$

L.S.El Riadh	<u>Arithmétique</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Solutions

Or, $\text{PGCD}(U_d, U_0) = U_d$ (voir question précédente) d'où on a bien
 $\text{PGCD}(U_n, U_p) = \text{PGCD}(U_d, U_0) = U_d$ où $d = \text{PGCD}(n, p)$

Exercice 13:

Rappel:

Les équations de la forme (E) : $ax + by = c$ où a, b et c sont dans $\mathbf{Z}$ se résolvent de la façon suivante:

- Si a et b sont premiers entre eux, on cherche une **solution particulière** (x_0, y_0) .

Toute autre solution (x, y) doit alors vérifier :

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0 \text{ donc : } a(x - x_0) = b(y_0 - y).$$

Comme a et b sont premiers entre eux, cette dernière relation implique (d'après le Théorème de Gauss)

que a divise $(y_0 - y)$

donc qu'il existe un entier k dans $\mathbf{Z}$ tel que $(y_0 - y) = ka$.

En remplaçant dans l'équation précédente, on obtient alors

$$a(x - x_0) = bka \text{ d'où } (x - x_0) = kb.$$

Toute solution est donc de la forme : $(x = x_0 + kb, y = y_0 - ka)$. où k est un entier relatif

On vérifie alors sans problème que ces couples sont bien des solutions .

CONCLUSION:

Les solutions de (E) sont les couples $(x_0 + kb, y_0 - ka)$

où (x_0, y_0) est une solution particulière de (E) et k un entier relatif quelconque.

Pour déterminer un couple particulier de solution, on utilise, par exemple, **l'Algorithme d'Euclide**

qui permet de déterminer un couple (u, v) dans $\mathbf{Z}$ tel que $au + bv = 1$.

On sait qu'un tel couple existe si a et b sont premiers entre eux.

Le couple (cu, cv) est alors une solution particulière de (E).

- Si a et b ne sont pas premiers entre eux, alors si d est le PGCD de a et b , et si d ne divise pas c

alors l'équation (E) n'admet aucune solution dans $\mathbf{Z}^2$.

Si d divise c , on sait alors qu'il existe A, B et C tels que $a = Ad, b = Bd$ et $c = Cd$

où A et B sont premiers entre eux.

L'équation (E) s'écrit alors : $Ax + By = C$.

L.S.El Riadh	<u>Arithmétique</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Solutions

On est alors dans le **cas précédent**.

(a) : $5x + 12y = 20$

Un solution particulière évidente est $(-20, 10)$ car

$$5 \cdot (-20) + 12 \cdot 10 = -100 + 120 = 20.$$

Si (x, y) est une solution générale de (a), alors on a :

$$5x + 12y = 20$$

$$5 \cdot (-20) + 12 \cdot 10 = 20$$

$$\text{Donc, } 5(x + 20) + 12(y - 10) = 0 \text{ ou encore } 5(x + 20) = 12(10 - y).$$

Comme 5 et 12 sont premiers entre eux, cette égalité implique que 5 divise $10 - y$.

Il existe donc k dans $\mathbb{Z}$ tel que $5k = 10 - y$.

$$\text{Ceci conduit à : } 5(x + 20) = 12k \text{ donc : } x + 20 = 12k$$

Toute solution de (a) est donc de la forme $(x = -20 + 12k, y = 10 - 5k)$ où k est un entier relatif.

On vérifie alors que le couple $(-20 + 12k, 10 - 5k)$ est bien solution de (a) pour tout k dans $\mathbb{Z}$.

$$5(-20 + 12k) + 12(10 - 5k) = 20.$$

L'ensemble des solutions de (a) est donc

$$S = \{ (-20 + 12k, 10 - 5k) ; k \in \mathbb{Z} \}$$

(b) : $x + 5y = 1$

$$S = \{ (5k - 4, k + 1) ; k \in \mathbb{Z} \}$$

(c) : $2x - 5y = 10$

Un solution particulière évidente est $(x = 5, y = 0)$.

$$S = \{ (5 - 5k, -2k) ; k \in \mathbb{Z} \}$$

(c) : $6x + y = 21$

$$S = \{ (3 + k, 3 - 6k) ; k \in \mathbb{Z} \}$$

(d) : $-2x + 3y = 9$

$$S = \{ (3k, 3 + 2k) ; k \in \mathbb{Z} \}$$

(e) : $25x + 31y = 2$

On cherche une solution particulière. Appliquons alors l'algorithme d'Euclide.

$$31 = 25 \cdot 1 + 6$$

$$25 = 6 \cdot 4 + 1$$

On déduit alors que 31 et 25 sont premiers entre (ce que l'on pouvait

<i>L.S.El Riadh</i>	<i>Arithmétique</i>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		<i>Solutions</i>

voir!!) et que :

$$6 = 31 - 25 \text{ donc } 1 = 25 - 6 \cdot 4 = 25 - 4 \cdot (31 - 25) = -4 \cdot 31 + 5 \cdot 25$$

On a donc $5 \cdot 25 - 4 \cdot 31 = 1$ ou encore $10 \cdot 25 - 8 \cdot 31 = 2$.

Une solution particulière est donc : $(x = 10, y = -8)$.

De là, on en déduit que l'ensemble des solutions de (e) est :

$$S = \{ (10 + 31k, -8 - 25k) ; k \in \mathbb{Z} \}$$

Exercice 14:

$$(E) : 36x - 25y = 5.$$

$$a: 36u + 25v = 1$$

On applique l'Algorithme d'Euclide.

$$36 = 1 \cdot 25 + 11, 25 = 2 \cdot 11 + 3, 11 = 3 \cdot 3 + 2, 3 = 1 \cdot 2 + 1.$$

D'où

$$11 = (36 - 25), 3 = (25 - 2 \cdot 11) = 25 - 2 \cdot (36 - 25) = 3 \cdot 25 - 2 \cdot 36$$

$$2 = 11 - 3 \cdot 3 = (36 - 25) - 3 \cdot (3 \cdot 25 - 2 \cdot 36) = 7 \cdot 36 - 10 \cdot 25$$

$$1 = 3 - 1 \cdot 2 = (3 \cdot 25 - 2 \cdot 36) - (7 \cdot 36 - 10 \cdot 25) = 13 \cdot 25 - 9 \cdot 36$$

On a donc la relation : $36u + 25v = 1$ avec $u = -9$ et $v = 13$.

$$b: \text{Solution particulière de } 36x - 25y = 5$$

En solution particulière de (E) est alors : $x_0 = 5 \cdot u, y_0 = -5 \cdot v$

ou encore $(x_0 = -45, y_0 = -65)$

On peut aussi voir directement que $(5, 7)$ est une solution de (E)

L'ensemble des solutions de (E) est donc l'ensemble des couples $(x = -45 + 25k, -65 + 36k)$

où k est quelconque dans $\mathbb{Z}$.

C'est aussi l'ensemble des couples $(5 + 25k, 7 + 36k)$.

$$c: d = \text{PGCD}(x, y)$$

Dire que d est le PGCD de x et y revient à dire qu'il existe k et k'

premiers entre eux tels que:

$$x = kd \text{ et } y = k'd.$$

Si de plus (x, y) est solution, on a : $36kd - 25k'd = 5$ ou encore $d(36k - 25k') = 5$.

Or, 5 est premier. Cette dernière égalité montre alors que $d = 1$ ou $d = 5$.

x et y sont premiers entre eux si et seulement si $d = 1$.

D'après le résultat précédent, comme $d = 1$ ou 5, on peut dire que x et y solutions et (E)

L.S.El Riadh	<u>Arithmétique</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Solutions

et premiers entre eux si et seulement si ils ne sont pas tous les deux divisibles par 5.

Or, les solutions de (E) sont $x = -45 + 25k$ et $y = -65 + 36k$, avec $k \in \mathbb{Z}$. Comme x est divisible par 5 pour toute valeur k , on peut dire que x et y sont premiers entre eux si et seulement si y n'est pas divisible par 5.

Or, $-65 \equiv 0 [5]$ et $36 \equiv 1 [5]$ donc pour tout k dans $\mathbb{Z}$, on a :

$$-65 + 36k \equiv k [5].$$

y est donc non-multiple de 5 si et seulement si k n'est pas congru à 0 modulo 5.

Les solutions (x, y) de (E) telles que x et y soient premiers entre eux sont donc les solutions $(-45 + 25k, -65 + 36k)$ telles que $k \in \mathbb{Z} \setminus 5\mathbb{Z}$ où $5\mathbb{Z}$ est l'ensemble des multiples de 5.

On peut aussi utiliser la forme des solutions de (E), $(x = 5 + 25k, y = 7 + 36k)$.

(x, y) est solution de (E) avec x et y premiers entre eux si et seulement si y n'est pas divisible par 5 ou encore si $7 + 36k$ n'est pas congru à 0 modulo 5.

$$\text{Or } 7 + 36k \equiv 2 + k [5].$$

y n'est donc pas divisible par 5 si et seulement si k n'est pas congru à 3 modulo 5.

Les solutions (x, y) de (E) telles que x et y soient premiers entre eux sont donc les solutions $(5 + 25k, 7 + 36k)$ telles que k ne soit pas congru à 3 modulo 5.

Exercice 15:

$$a = 1234 \text{ et } b = 1200.$$

a: PGCD et PPCM

Pour déterminer le PGCD de a et b , on peut tout aussi bien décomposer ces deux entiers

en facteurs premiers ou utiliser l'algorithme d'Euclide.

$$1234 = 2 \cdot 617 \text{ (617 est premier)}$$

L.S.El Riadh	<u>Arithmétique</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Solutions

$$1200 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5^2.$$

Donc PGCD(1234 , 1200) = 2 et PPCM(1234 , 1200) = $2^4 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 617 = 740400$.

Avec l'algorithme d'Euclide, on a:

$$1234 = 1200 \cdot 1 + 34$$

$$1200 = 35 \cdot 34 + 10$$

$$34 = 3 \cdot 10 + 4$$

$$10 = 2 \cdot 4 + 2$$

$4 = 2 \cdot 2$. Dernier reste non-nul , $R = 2$. Donc PGCD(1234 , 1200) = 2.

De plus, on sait que PGCD(a , b).PPCM(a , b) = ab.

On a donc : PGCD(1234 , 1200) = (1234*1200)/2 = 740400.

b: (E) : ax + by = 2dm

On sait que $dm = ab$. Donc on a une solution évidente de (E), à savoir le couple (a , b).

Comme $a = Ad$ et $b = Bd$ avec A et B premiers entre eux, l'équation (E) peut s'écrire:

$$(E) : Ax + By = 2m$$

Comme (a , b) est une solution particulière, on en déduit que l'ensemble des solutions de (E)

est formé des couples $(a + Bk, b - Ak)$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Dans le cas de $a = 1234$ et $b = 1200$, on a $A = 617$ et $B = 600$.

L'ensemble des solutions de (E) s'écrit alors :

$$(617 + 1200k, 1200 - 1234k), k \in \mathbb{Z}.$$

Exercice 16:

(E) : 36x - 49y = 13

a: On peut remarquer qu'une solution particulière de (E) est $(x = -1, y = -1)$.

L'ensemble des solutions de (E) est donc formé des couples

$$(x = -1 + 49k, -1 + 36k) \text{ où } k \in \mathbb{Z}.$$

On peut aussi déterminer une solution particulière de (E) en utilisant l'Algorithme d'Euclide, mais pourquoi ne pas faire simple quand cela est possible?

b: Dire que (x^2, y^2) est solution de (E) revient à dire que l'on a :

$$36x^2 - 49y^2 = 13.$$

L.S.El Riadh	<u>Arithmétique</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Solutions

Or $36x^2 - 49y^2 = (6x - 7y)(6x + 7y)$.

On obtient alors l'égalité : $(6x - 7y)(6x + 7y) = 13$.

Comme 13 est premier, ces seuls diviseurs sont : 1, -1, 13 et -13.

On peut alors dire que (x^2, y^2) est solution de (E) si et seulement si :

$$(6x - 7y = 1 \text{ et } 6x + 7y = 13) \\ \text{ou } (6x - 7y = -1 \text{ et } 6x + 7y = -13)$$

Si $(6x - 7y = 1 \text{ et } 6x + 7y = 13)$ alors $12x = 14$. Impossible car x est entier.

Si $(6x - 7y = -1 \text{ et } 6x + 7y = -13)$ alors $12x = -14$. Impossible aussi.

Conclusion: Il n'existe aucun couple de la forme (x^2, y^2) solution de (E).

c: Dire que (x, x) est solution de (E) revient à dire que $-13x = 13$.

Donc la seule valeur possible pour x est : $x = -1$.

Exercice 17:

(E) : $2x + 5y = 1000$ et (F) : $2x^2 + 5y^2 = 1000$

a. Une solution particulière de (E) est : $(x = 500, y = 0)$.

L'ensemble des solutions de (E) est alors formé des couples

$(500 + 5k, -2k)$

où $k \in \mathbb{Z}$.

b. On traite simultanément les question b: et c:

Si (x, y) est solution de (F) alors $2x^2 \leq 1000$ et $5y^2 \leq 1000$. D'où $x^2 \leq 500$ et $y^2 \leq 200$. On a bien alors $|x| < 23$ et $|y| < 15$ car x et y sont entiers.

L'ensemble des solutions de (F) est donc inclu dans l'ensemble des couples (x, y)

appartenant à $\{-22, -21, \dots, 21, 22\} \times \{-14, -13, \dots, 13, 14\}$.

Cet ensemble est fini (produit cartésien de deux ensembles finis)

donc l'équation (F) possède un nombre fini de solutions dans $\mathbb{Z}^2$.

c. Voir au-dessus.

d. On remarque que (x, y) est solution de (F) si et seulement si $(|x|, |y|)$ l'est aussi. Simple problème de parité. On peut se contenter de chercher les solutions de (F) telles que $x \geq 0$ et $y \geq 0$.

Or (x, y) est solution de (F) avec x et $y \geq 0$ si et seulement si (x^2, y^2) est solution de (E) donc, si et seulement si il existe k dans $\mathbb{Z}$ tel que :

L.S.El Riadh	<u>Arithmétique</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Solutions

$$x^2 = 500 + 5k \text{ et } y^2 = -2k.$$

On en déduit que y est pair. Les valeurs possibles de y sont alors 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12 et 14.

Les valeurs de k correspondantes sont : 0, -2, -8, -18, -32, -50, -72, -98.

Les valeurs de x^2 correspondantes sont : 500, 490, 460, 410, 340, 250, 140, 10.

Comme aucune de ces dernières valeurs n'est un carré dans $\mathbb{N}$, on en déduit que (F) n'admet aucune solution.

Si (x_0, y_0) est une solution de (F) avec x_0 et $y_0 \geq 0$, alors :

$$2x_0^2 = 1000 - 5y_0^2 \text{ d'où}$$

$2x_0^2 = 5(200 - y_0^2)$. 5 est 2 sont premiers entre eux donc 5 divise x_0^2 , (Théorème de Gauss).

De plus, comme 5 est un nombre premier, s'il divise x_0^2 alors il divise x_0 .

De même, y_0 est divisible par 2.

Posons alors $x_0 = 5x_1$ et $y_0 = 2y_1$. En remplaçant dans (F), on obtient alors :

$$2(5x_1)^2 + 5(2y_1)^2 = 1000 \text{ d'où } 5x_1^2 + 2y_1^2 = 100.$$

L'équation (F1) : $5x^2 + 2y^2 = 100$ admet donc une solution dans $\mathbb{N}$.

On vérifie alors comme précédemment, que x_1 est divisible par 2 et que y_1 est divisible par 5.

On pose alors $x_1 = 2x_2$ et $y_1 = 5y_2$ et on vérifie que $2x_2^2 + 5y_2^2 = 10$.

L'équation (F2) : $2x^2 + 5y^2 = 10$ doit donc admettre une solution dans $\mathbb{N}$.

On réitère encore une fois ce procédé et on montre alors que l'équation (F3) : $5x^2 + 2y^2 = 1$ admet une solution dans $\mathbb{N}$.

Ceci est évidemment faux.

Donc, l'hypothèse que (F) admet des solutions est fausse.

Exercice 18:

1. B est sur l'axe des abscisses et C sur l'axe des ordonnées. Donc les coordonnées de B sont $(x ; 0)$ et celles de C sont $(0 ; y)$. D'où les coordonnées des vecteurs :

$$\overrightarrow{AB}(x - 12, -18) \text{ et } \overrightarrow{AC}(-12, y - 18)$$

La relation $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$ implique que le produit scalaire

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0, \text{ d'où}$$

$$x \text{ et } y \text{ vérifient la relation } -12(x-12) - 18(y-18) = 0$$

L.S.El Riadh	<u>Arithmétique</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Solutions

D'où le couple $(x ; y)$ vérifie l'équation $2x + 3y = 78$ après simplification.

2. **a:** En passant par les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, on peut voir que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$

si et seulement si

$$\frac{-12 + (y - 18)i}{(x - 12) - 18i} = ki \quad \text{avec } k \text{ un réel } < 0$$

Ceci peut aussi s'écrire: $(-12 + (y-18)i)(x - 12 + 18i) = Ki$
avec K réel < 0 .

D'où $(x ; y)$ vérifie :

$$-12(x - 12) - 18(y - 18) + i[(y-18)(x-12) - 216] = Ki \text{ avec } K \text{ réel } < 0$$

Ce qui conduit à:

$$2x + 3y = 78 \text{ et } (y-18)(x-12) - 216 < 0.$$

Or, si $2x + 3y = 78$ alors $(y - 18)(x - 12) - 216 = -(2/3)x^2 + 16x - 312$
et $-(2/3)x^2 + 16x - 312 < 0$ pour tout x réel (second degré et discriminant < 0)

Donc la condition pour avoir $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$ se résume à

$$"2x + 3y = 78".$$

b: Une solution particulière est $x_0 = 12$ et $y_0 = 78$.

c: $(x ; y)$ solution de (E) si et seulement si $2x + 3y = 78$

Or, $2x_0 + 3y_0 = 78$ donc $(x ; y)$ solution de (E) si et seulement si

$$2(x - x_0) + 3(y - y_0) = 0$$

$$D'où, si et seulement si $2(x - x_0) = -3(y - y_0)$$$

2 et 3 sont premiers entre eux. La relation précédente montre que 3 divise $2(x - x_0)$

donc 3 divise $(x - x_0)$ donc il existe k entier relatif tel que $x - x_0 = 3k$
ou encore $x = 3k + x_0$

$$D'où $6k = -3(y - y_0)$ d'où $y = y_0 - 2k$. avec $x_0 = 12$ et $y_0 = 78$$$

Donc les solutions de (E) sont nécessairement de la forme

$$(x = 12 + 3k ; y = 78 - 2k) \text{ avec } k \text{ entier relatif.}$$

On vérifie alors que le couple $(12 + 3k ; 78 - 2k)$ est bien une solution de (E).

Donc que l'on a bien toutes les solutions sous cette forme.

d: $-6 \leq x \leq 21$ si et seulement si $-6 \leq 12 + 3k \leq 21$ si et seulement si

L.S.El Riadh	<u>Arithmétique</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Solutions

$$-6 \leq k \leq 3$$

$-5 \leq y \leq 14$ si et seulement si $-5 \leq 18 - 2k \leq 14$ si et seulement si $2 \leq k \leq 11,5$

D'où, comme k est entier relatif, $k = 2$ ou $k = 3$.

D'où les deux seuls couples correspondants $(18 ; 12)$ et $(21 ; 9)$

Exercice 19:

1.

Il est immédiat que f est la rotation de centre O et d'angle de mesure $\frac{5\pi}{6}$.

2.

Pour $n = 0$ la formule est vérifiée.

Si $z_n = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{2}\right)}$, alors par définition de M_{n+1} et de f ,

$$z_{n+1} = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{2}\right)} e^{\frac{5i\pi}{6}}$$

Soit : $z_{n+1} = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5(n+1)\pi}{2}\right)}$: la formule est donc encore vraie à l'ordre $n + 1$.

En résumé si la formule est vraie à l'ordre n , elle est encore vraie à l'ordre $n + 1$.

Il en résulte donc bien que la formule est vraie pour tout entier naturel n .

3.

Deux points M_n et M_p sont confondus si et seulement si

$\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{2} - \left(\frac{\pi}{2} + \frac{5p\pi}{2}\right)$ est multiple de 2π , c'est à dire $\frac{5(n-p)}{2}$ est multiple de 2.

Ces deux points sont donc confondus si et seulement si $5(n-p)$ est multiple de 4, c'est à dire que 4 divise $5(n-p)$.

4 est premier avec 5 : il divise donc $(n-p)$ (théorème de Gauss).

Par conséquent les points M_n et M_p sont confondus si et seulement si $(n-p)$ est multiple de 4.

4.

<i>L.S.El Riadh</i>	<i>Arithmétique</i>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		<i>Solutions</i>

- a. On vérifie : $12 \cdot 4 - 5 \cdot 9 = 48 - 45 = 3$.
 Le couple $(4 ; 9)$ est bien solution de (E).
 Si $12x - 5y = 3$ et 12, alors $12(x-4) - 5(y-9) = 0$ ou encore
 $12(x-4) = 5(y-9)$.
 5 divise $12(x-4)$, et est avec 12 donc 5 divise $(x-4)$.
 Les solutions sont alors les couples $(4+5k ; 9+12k)$ avec k dans $\mathbb{Z}$.
- b. M_n appartient à la demi-droite $[Ox)$ si et seulement si
 $\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{6}$ est multiple de 2π ,
 (pour le voir, considérer les arguments des nombres complexes!)
 c'est à dire $3+5n$ est multiple de 12 ou encore, il existe x entier relatif tel que
 $3+5n = 12x$.. c'est à dire de $12x - 5n = 3$.
 D'après (a), les entiers naturels n sont $n = 9 + 12k$, avec k entier naturel quelconque.

Figure demandée à la question 1.

Exercice 20:

1. Une solution particulière de $6x + 7y = 1$ est $(x, y) = (-1, 1)$
 Donc une solution particulière de $6x + 7y = 57$ est
 $(x, y) = (-57, 57)$
 Si (x, y) est une solution de $6x + 7y = 57$
 comme $6(-57) + 7(57) = 57$, on a: $6(x+57) + 7(y-57) = 0$
 6 et 7 sont premiers entre eux, donc 6 divise $(y-57)$.
 Donc il existe un entier relatif k tel que $(y-57) = 6k$ ou encore,
 $y = 6k + 57$.
 On remplace alors y par $6k + 57$ dans $6(x+57) + 7(y-57) = 0$
 et on obtient $x = -7k - 57$.
 On vérifie alors que pour tout entier relatif k , $(-7k - 57, 6k + 57)$
 est bien solution de (E)
 L'ensemble des solutions de (E) est donc formé des couples
 $(-7k - 57, 6k + 57)$
 où k est un entier relatif quelconque.

L.S.El Riadh	<u>Arithmétique</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Solutions

2. Le point $M(x,y,z)$ appartient au plan $(O;i,j)$ si et seulement si $z=0$
Donc $M(x,y,z)$ appartient à P et à $(O;i,j)$ si et seulement si ses coordonnées vérifient
 $z=0$ et $6x+7y=57$
Si les coordonnées de M sont entières, d'après la question 1:, il existe un entier relatif k tel que:
 $x=-7k-57$ et $y=6k+57$
Comme on veut x et y entiers naturels, on a donc $-7k-57 \geq 0$ et $6k+57 \geq 0$
D'où $k \leq -57/7$ et $k \geq -57/6$. D'où, k étant un entier, on a: $k=-9$.
On a alors $x=6$ et $y=3$
Conclusion:
Il existe un unique point à coordonnées entières naturelles répondant à la question:
C'est le point $M(6;3;0)$.
3. a: Si $6x+7y+8z=57$ alors $7y \equiv 57 [2]$ donc $y \equiv 1 [2]$, c'est à dire, y est impair.
b: Encore une question de congruence!
 $6x+7y+8z \equiv 2y+2z [3]$ et $57 \equiv 0 [3]$
Donc, en posant $y=2p+1$, on a: $2(2p+1)+2z \equiv 0 [3]$
Ou encore: $p+z \equiv 0 [3]$
On a alors: $p+z \equiv -2 [3]$ ou encore $p+z \equiv 1 [3]$
Donc, le reste de la division euclidienne de $p+z$ par 3 est $R=1$.
c: $p+z=3q+1$ donc $z=3q+1-p$.
On a $6x+7y+8z=57$ donc $6x+7(2p+1)+8(3q+1-p)=57$
Ce qui donne $6x+6p+24q=42$ et donc $x+p+4q=7$
Comme x, p et q sont des entières naturels, on a alors
 $0 \leq 4q \leq 7$
d'où $q=0$ ou $q=1$
d: Pour $q=0$, on a $p+z=1$, donc ($p=0$ et $z=1$) ou ($p=1$ et $z=0$)
---- Si $p=0$ et $z=1$ alors $y=1$ et $x=(57-7y-8z)/6=7$. On a alors la solution $(7,1,1)$
----- Si $p=1$ et $z=0$ alors $y=3$ et $x=6$. On a alors la solution $(6,3,0)$
Pour $q=1$, on a $p+z=4$ donc ($p=0$ et $z=4$) ou ($p=1$ et $z=3$) ou ($p=2$ et $z=2$) ou ($p=3$ et $z=1$) ou ($p=4$ et $z=0$)
----- Si $p=0$ alors de ' $x+p+4q=7$ ', on a $x=3$, d'où la solution $(3,1,4)$
----- Si $p=1$ alors on a $x=2$ d'où la solution $(2,3,3)$
----- Si $p=2$ alors on a $x=1$ d'où la solution $(1,5,2)$

L.S.El Riadh	<u>Arithmétique</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Solutions

----- Si $p = 3$ alors on a $x = 0$ d'où la solution $(0, 7, 1)$
 ----- Si $p = 4$ alors $x = -1$, et la solution obtenue n'est entière naturelle.

Exercice 21:

1: Passer par l'algorithme d'Euclide: Posons $a = 2003$ et $b = 123$

a) $a = 16b + 35$, $b = 3 \times 35 + 18$, $35 = 1 \times 18 + 17$, $18 = 1 \times 17 + 1$.

Donc,

$35 = a - 16b$ et $18 = b - 3 \times 35$ donc $18 = b - 3(a - 16b) = 49b - 3a$

$17 = 35 - 18$ donc $17 = (a - 16b) - (49b - 3a) = 4a - 65b$

$1 = 18 - 17$ donc $1 = (49b - 3a) - (4a - 65b) = 114b - 7a$.

On a donc une solution u et v : $u = 114$ et $v = -7$

b) La relation $114 \times 123 - 7 \times 2003 = 1$ implique que $114 \times 123 \equiv 1 [2003]$.

Il existe donc bien un entier relatif k_0 répondant à la question.

On peut choisir $k_0 = 114$.

c) On sait que $123k_0 \equiv 1 [2003]$. Soit x un entier relatif:

Si $123x \equiv 456 [2003]$ alors $k_0 \times 123x \equiv 456k_0 [2003]$ donc $x \equiv 456k_0 [2003]$

Si $x \equiv 456k_0 [2003]$ alors $123x \equiv 456k_0 \times 123 [2003]$ donc $123x \equiv 456 [2003]$

On a bien l'équivalence demandée.

d) Les entiers relatifs vérifiant $123x \equiv 456 [2003]$ sont ceux vérifiant $x \equiv 456k_0 [2003]$

Or, $456k_0 \equiv 1909 [2003]$ donc l'ensemble des x entiers relatifs vérifiant: $123x \equiv 456 [2003]$

est l'ensemble des x tels que $x \equiv 1909 [2003]$ donc de la forme $x = 2003k + 1909$

où k est un entier relatif quelconque.

e) Et pour cause! C'est $x = 1909$

2: $1 \leq a \leq 2002$

a) 2003 est premier donc il est premier avec tout entier a compris entre 1 et 2002.

Donc $\text{PGCD}(a, 2003) = 1$

D'après le Théorème de Bachet-Bezout, on sait qu'il existe alors deux

2010-2011

<i>L.S.El Riadh</i>	<i><u>Arithmétique</u></i>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		<i>Solutions</i>

entiers relatifs

n et m tels que $2003n + am = 1$.

Donc: tels que $2003n + am \equiv 1 \pmod{2003}$ d'où il existe bien m entier tel que $am \equiv 1 \pmod{2003}$

b) Si b est un entier quelconque, alors en particulier, on a : $abm \equiv b \pmod{2003}$.

Or, il existe un entier x tel que $0 \leq x \leq 2002$ et $x \equiv bm \pmod{2003}$

x est simplement le reste dans la division euclidienne de bm par 2003.

De plus, si existe un autre entier y compris entre 0 et 2002 vérifiant $ay \equiv b \pmod{2003}$

alors $ax \equiv ay \pmod{2003}$ donc $a(x-y) \equiv 0 \pmod{2003}$.

$a(x-y)$ est alors divisible par 2003. a est premier avec 2003 donc 2003 divise $(x-y)$.

Comme x et y sont entre 0 et 2002, on a $|x-y| < 2003$. Donc la seule possibilité est $|x-y| = 0$.

D'où $x = y$.

Conclusion: Il y a bien existence ET unicité de la solution de

$0 \leq x \leq 2002$ et $ax \equiv b \pmod{2003}$

L.S.El Riadh	Nombres Complexes	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Exercices

Exercice 1:

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ et I le milieu de $[AB]$. On considère l'application f de $P \setminus \{I\}$ dans P qui à tout point M d'affixe $z \neq \frac{1+i}{2}$ associe le point M' d'affixe $z' = \frac{z^2 - i}{2z - (1+i)}$.

1) a) montrer que A et B sont les seuls points invariants par f .

b) préciser les affixes des antécédents de I par f .

2) a) soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{1, \frac{1+i}{2}\}$. Montrer que $\frac{z'-i}{z'-1} = \left(\frac{z-i}{z-1}\right)^2$.

b) en déduire que pour tout $M \in P \setminus \{A, B, I\}$ on a $\frac{BM'}{AM'} = \left(\frac{BM}{AM}\right)^2$ et que

$$(\overrightarrow{AM'}, \overrightarrow{BM'}) \equiv 2(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) [2\pi].$$

c) sur quel ensemble se déplace le point M' lorsque M se déplace sur le cercle de diamètre $[AB]$ privé de A et B .

3) soit Δ la médiatrice de $[AB]$. On suppose que M est un point de $\Delta \setminus \{I\}$.

a) vérifier que $M' \in \Delta$.

b) construire le point M à l'aide d'un point M' de $\Delta \setminus \{I\}$.

Exercice 2:

1) résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$(E): z^2 - (2\cos \theta + i)z + 1 + \sin \theta + i\cos \theta = 0; \theta \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

2) le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$; soit A et B les points d'affixes respectives $z_A = e^{-i\theta}$ et $z_B = i + e^{i\theta}$; I le milieu de $[AB]$

a) déterminer l'ensemble des points des points B et I lorsque θ décrit $[0, \frac{\pi}{2}]$.

b) écrire z_B sous forme exponentielle.

c) déterminer θ pour que O, A et B soient alignés.

3) déterminer l'affixe du point C pour que $OACB$ soit un rectangle.

Exercice 3:

Soit θ un réel de $]0, \pi[$ et (E) l'équation:

$$(1-i)z^2 - 2(1+e^{i\theta})z + (1+i)(1+e^{i\theta})^2 = 0$$

1) a) résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) .

b) écrire chacune des solutions de (E) sous forme exponentielle.

L.S.El Riadh	Nombres Complexes	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Exercices

2) le plan P est munie d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on désigne par M_1 et M_2 les points d'affixes respectives

$z_1 = 1 + e^{i\theta}$ et $z_2 = i(1 + e^{i\theta})$. Déterminer et construire l'ensemble des points M_1 et M_2 lorsque θ décrit $]0, \pi[$.

3) a) montrer que OM_1M_2 est un triangle rectangle et isocèle en O .

b) soit B le point d'affixe $2i$. Déterminer le réel θ pour que OM_1BM_2 soit un carré.

Exercice 4:

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. on

considère les points A et B d'affixes respectives i et $\frac{1+i}{2}$. Soit f

l'application de P dans P qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = (1-i)z - 1$.

1) a) vérifier que f admet un seul point invariant que l'on précisera.

b) on pose $z = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\theta}$; $\theta \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$. Déterminer la forme exponentielle de z' .

2) a) on suppose que $M \neq B$; montrer que $\arg z' \equiv -\frac{\pi}{4} + (\vec{i}, \overrightarrow{BM}) [2\pi]$.

b) en déduire l'ensemble $E = \{M(z); z' \in \mathbb{R}^* \}$.

3) on suppose que $M \neq A$.

a) montrer que le triangle AMM' est rectangle et isocèle.

b) on se donne un point M d'affixe z ($z \neq i$)

déduire une construction géométrique de chacun des points :

- M' tel que $z' = (1-i)z - 1$.
- M'' d'affixe $z'' = (1+i)\bar{z} - 1$

Exercice 5:

1) résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E): $z^2 - 2iz - 1 + e^{2i\theta} = 0$; $\theta \in]\pi, 2\pi[$.

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points A , M' et M'' d'affixes respectives $2i$, $z' = i + ie^{i\theta}$ et $z'' = i - ie^{i\theta}$.

a) montrer que $\frac{z''}{z'} = -itg(\frac{\theta}{2})$.

b) Montrer que pour $\theta \in]\pi, 2\pi[$, $OM'AM''$ est un rectangle.

c) Déterminer θ pour que $OM'AM''$ soit un carré.

d) Déterminer l'ensemble des points M' lorsque θ décrit $] \pi, 2\pi [$.

L.S.El Riadh	Nombres Complexes	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Exercices

Exercice 6:

le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On considère pour tout $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, l'équation $(E_\theta) : z^2 - 2ie^{i\theta}z - 4(1-i)e^{2i\theta} = 0$.

1/ résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_θ) .

2/ on considère les points M' et M'' d'affixes respectives $2e^{i\theta}$ et $-2(1-i)e^{i\theta}$ et le point N image de M' par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a/ montrer que pour tout $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, M' appartient à un cercle ζ que l'on précisera.

b/ déterminer l'affixe n du point N .

c/ montrer que $OM'NM''$ est un parallélogramme.

d/ en déduire une construction du point M'' à partir de M' .

3/ a/ déterminer en fonction de θ le module et un argument de $-2(1-i)e^{i\theta}$.

b/ déterminer l'ensemble des points M'' lorsque θ varie dans $]0, \frac{\pi}{2}[$.

4/ Soit $(E'_\theta) : (\sqrt{2}z - 1)^3 = (-2 + 2i)e^{i\theta}z^3$.

a/ déterminer les racines cubiques du nombre complexe $(-2 + 2i)e^{i\theta}$.

b/ soit $x \in]0, 2\pi[\setminus \{\pi\}$; montrer l'équivalence :

$$\frac{\sqrt{2}z - 1}{z} = \sqrt{2}e^{ix} \Leftrightarrow z = \frac{\sqrt{2}}{4}(1 + i \cot g(\frac{x}{2}))$$

c/ en déduire les solutions de l'équation (E'_θ) .

Exercice 7:

le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on désigne par A et K les points d'affixes respectives 1 et $1+i$ et I et J les affixes de i et $-i$.

1/ ζ le cercle de centre O et de rayon 1 , soit N un point de ζ distinct de I et J ; on note $(\vec{u}, \vec{ON}) = t[2\pi]$.

a/ quelle est la nature du triangle INJ ?

b/ montrer que pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, K \in \mathbb{Z}\}$ le nombre $\frac{e^{it} + i}{e^{it} - i}$ est

imaginaire pur.

2/ on désigne par Γ le cercle de centre A et de rayon 1 , soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a/ tracer Γ et son image Γ' par r .

b/ on note $M' = r(M)$, ou M un point du plan; exprimer l'affixe z' de M' en fonction de l'affixe z de M .

c/ déduire l'antécédent H de K par r .

L.S.El Riadh	Nombres Complexes	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Exercices

3/ dans cette question $M \in \Gamma$ distinct de H et K d'affixe z , on

note $(\vec{u}, \vec{AM}) = \theta [2\pi]$.

a/ vérifier que $z = 1 + e^{i\theta}$.

b/ montrer que $\frac{z' - (1+i)}{z - (1+i)} = i \frac{e^{i\theta} + i}{e^{i\theta} - i}$

c/ montrer que M , K et M' sont alignés.

d/ en déduire une construction de M' connaissant M .

Exercice 8:

f est l'application du plan dans le plan qui à tout point M d'affixe z

associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{z^2 - 1}{2z - 2\cos\theta}$, $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $z \neq \cos\theta$.

1/ déterminer les points invariants par f .

2/a/ démontrer que $2\cos\theta e^{i\theta} - 1 = e^{2i\theta}$.

b/ prouver que pour $z \neq \cos\theta$ on a: $\frac{z' - e^{i\theta}}{z' - e^{-i\theta}} = \left(\frac{z - e^{i\theta}}{z - e^{-i\theta}} \right)^2$.

c/ en déduire que $(\overrightarrow{M'B}, \overrightarrow{M'A}) = 2(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) [2\pi]$ et $\frac{M'B}{M'A} = \left(\frac{MB}{MA} \right)^2$ avec

$A(e^{i\theta})$ et $B(e^{-i\theta})$.

3/ a/ montrer que si M appartient au cercle ζ de diamètre $[AB]$ alors M' appartient au segment $[AB]$.

b/ le cercle ζ coupe la droite des abscisses $(O, \vec{e}_1)$ en E et F ; montrer que $f(E) = f(F) = A * B$.

4/ montrer que si M appartient à un cercle de centre I et passant par A et B alors les points A , B , M' et I sont sur un même cercle ou alignés.

Exercice 9:

pour tout $z \in \mathbb{C}$ on pose $P(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6$.

1/ montrer que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ on a $P(z) = \frac{1 - z^7}{1 - z}$.

2/ déterminer les racines septième de l'unité dans $\mathbb{C}$; en déduire les solutions de l'équation $P(z) = 0$.

3/ montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$; $P(z) =$

$$(z^2 - 2\cos\frac{2\pi}{7}z + 1)(z^2 - 2\cos\frac{4\pi}{7}z + 1)(z^2 - 2\cos\frac{6\pi}{7}z + 1).$$

4/ montrer que $P(z) = 0$ signifie $Z = z + \frac{1}{z}$
 $Z^3 + Z^2 - 2Z - 1 = 0$

en déduire que $\cos\frac{2\pi}{7}$; $\cos\frac{4\pi}{7}$ et $\cos\frac{6\pi}{7}$ sont racines de l'équation (E):

$$8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0$$

L.S.El Riadh	Nombres Complexes	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Exercices

5/ on pose $w = e^{\frac{2i\pi}{7}}$.

a/ montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a $P(z) = (z-w)(z-w^2)(z-w^3)(z-w^4)(z-w^5)(z-w^6)$.

b/ en déduire que $(1-w)(1-w^2)(1-w^3)(1-w^4)(1-w^5)(1-w^6) = 7$.

c/ en utilisant un calcul de modules, montrer que :

$$\sin \frac{\pi}{7} \sin \frac{2\pi}{7} \sin \frac{3\pi}{7} \sin \frac{4\pi}{7} \sin \frac{5\pi}{7} \sin \frac{6\pi}{7} = \frac{7}{2^6}.$$

Exercice 10 :

soit l'équation (E) : $z^2 - 2(1 + i \cos \theta)z + 2i \cos \theta = 0$; ou $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

1/a) résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

b) on note $z_1 = 1 + ie^{i\theta}$ et $z_2 = 1 + ie^{-i\theta}$; écrire z_1 et z_2 sous forme exponentielle.

2/a) déterminer chacun des ensembles des points M_1 et M_2 d'affixes z_1 et z_2

lorsque θ décrit $]0, \frac{\pi}{2}[$.

b) soit I le milieu de $[M_1 M_2]$; quel est l'ensemble décrit par I lorsque θ décrit $]0, \frac{\pi}{2}[$?

3/ soit l'application $r : P \rightarrow P$; $M(z) \mapsto M'(z')$ tel que $z' = e^{-2i\theta}z + 2i \sin \theta e^{-i\theta}$.

a) caractériser l'application r .

b) montrer que $M_2 = r(M_1)$.

c) déterminer alors la nature du triangle $AM_1 M_2$ ou $A(1)$.

déterminer θ pour que $AM_1 M_2$ soit rectangle isocèle.

4/a) montrer que lorsque θ varie sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ la droite $(M_1 M_2)$ a une direction fixe.

b) en déduire θ pour que $OAM_2 M_1$ soit un losange.

Exercice 11:

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit l'équation (E) : $z^3 = i(z-1)^3$.

1/ montrer que si z est solution de (E) alors $|z| = |z-1|$.

A quelle ensemble δ appartient alors M l'image de z ?

2/ on pose $\arg(z) = \theta[2\pi]$.

a) montrer que si $M(z) \in \delta$ alors $\arg(z) + \arg(z-1) = \pi[2\pi]$.

b) pour quelles valeurs de θ , z est solution de (E) ?

3/a) construire dans le plan les images des solutions de (E).

<i>L.S.El Riadh</i>	<u>Nombres Complexes</u>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		Exercices

b) déduire la forme exponentielle de ces solutions.

Exercice 12:

soit $\theta \in \mathbb{R}$ et l'équation (E) : $e^{2i\theta}z^2 - e^{i\theta}z + 1 = 0$.

1/ résoudre (E) et mettre ses solutions sous forme exponentielle.

2/ on pose $z_1 = e^{i(-\theta - \frac{\pi}{3})}$ et $z_2 = e^{i(-\theta + \frac{\pi}{3})}$; M_1 et M_2 les points d'affixes z_1 et z_2 .

a) vérifier que $\overline{z_1} = e^{2i\theta} z_2$.

b) déterminer θ dans chacun des cas suivants :

i/ M_1 et M_2 sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

ii/ M_1 et M_2 sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

c) est-il possible que M_1 et M_2 soient symétriques par rapport à l'origine.

3/ on pose pour $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = z_1^n + \overline{z_1}^n$ et $S'_n = z_2^n + \overline{z_2}^n$.

a) calculer en fonction de n et θ : S_n et S'_n .

b) vérifier que si $n=3p$, $p \in \mathbb{N}^*$ alors $S_n = S'_n$.

c) montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n + S'_n}{n} = 0$.

<i>L.S.El Rjadh</i>	<u>Nombres complexes</u>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		<i>Solutions</i>

Exercice 1:

1)a) $M(z)$ invariant par $f \Leftrightarrow f(M)=M$

$$\Leftrightarrow z = \frac{z^2 - i}{2z - (1+i)} \Leftrightarrow z^2 - (1+i)z + i = 0 \Leftrightarrow z = i = z_B \text{ ou } z = 1 = z_A$$

d'où les points A et B sont les seuls points invariants par f .

b) $f(M)=I \Leftrightarrow$

$$z_I = \frac{z^2 - i}{2z - (1+i)} \Leftrightarrow \frac{1+i}{2} = \frac{z^2 - i}{2z - (1+i)} \Leftrightarrow 2z(z - (1+i)) = 0$$

$$\Leftrightarrow z = 0 \text{ ou } z = 1+i$$

les antécédents de I sont O et le point d'affixe $1+i$.

1) a)

$$\frac{z' - i}{z' - 1} = \frac{\frac{z^2 - i}{2z - (1+i)} - i}{\frac{z^2 - i}{2z - (1+i)} - 1} = \frac{z^2 - i - 2iz + i(1+i)}{z^2 - i - 2z + (1+i)} = \frac{z^2 - 2iz - 1}{z^2 - 2z + 1} = \frac{(z-i)^2}{(z-1)^2} = \left(\frac{z-i}{z-1}\right)^2$$

$$b) \left| \frac{z' - i}{z' - 1} \right| = \left| \left(\frac{z-i}{z-1}\right)^2 \right| \Leftrightarrow \frac{|z' - i|}{|z' - 1|} = \left(\frac{|z-i|}{|z-1|}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{BM'}{AM'} = \left(\frac{BM}{AM}\right)^2$$

$$\arg\left(\frac{z' - i}{z' - 1}\right) \equiv \arg\left(\frac{z-i}{z-1}\right)^2 [2\pi] \equiv 2 \arg\left(\frac{z-i}{z-1}\right) [2\pi]$$

$$(\overrightarrow{AM'}, \overrightarrow{BM'}) \equiv 2(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) [2\pi]$$

c) M est sur le cercle de diamètre $[AB]$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \Rightarrow 2(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{BM}) \equiv 0 [\pi] \Rightarrow (\overrightarrow{AM'}, \overrightarrow{BM'}) \equiv 0 [\pi]$$

$\Rightarrow M'$ est sur la droite (AB) privée de A et B .

2) a) $M \in \Delta \Rightarrow MB=MA \Rightarrow BM'=AM' \Rightarrow M' \in \Delta$.

b) le point M' est le centre du cercle circonscrit au triangle AMB .

Exercice 2:

$$1) \Delta = (2\cos \theta + i)^2 - 4(1 + \sin \theta + i\cos \theta) = 4\cos^2 \theta - 4\sin \theta - 5 = 4 - 4\sin^2 \theta - 4\sin \theta - 5 = [i(2\sin \theta + 1)]^2$$

$$z' = \frac{(2\cos \theta + i) + (2i\sin \theta + i)}{2} = i + \cos \theta + i\sin \theta = i + e^{i\theta}$$

$$z'' = \frac{(2\cos \theta + i) - (2i\sin \theta + i)}{2} = \cos \theta - i\sin \theta = e^{-i\theta}$$

$$S_{\mathbb{C}} = \{i + e^{i\theta}, e^{-i\theta}\}$$

<i>L.S.El Rjadh</i>	<u>Nombres complexes</u>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		<i>Solutions</i>

2)

$$z_B = i + e^{i\theta} \Leftrightarrow z_B - i = e^{i\theta} \Leftrightarrow \begin{cases} |z_B - i| = |e^{i\theta}| \\ \arg(z_B - i) \equiv \arg(e^{i\theta}) [2\pi] \equiv \theta [2\pi] \end{cases} \quad \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} JB = 1 \\ (\vec{i}, \vec{JB}) \equiv \theta [2\pi] \end{cases} \quad \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] ; J(i)$$

$\Leftrightarrow B$ décrit l'arc LP du cercle de centre $J(0,1)$ et de rayon 1 ou $L(1+i)$ et $P(2i)$.

$$z_I = \frac{z_A + z_O}{2} = \frac{i + e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \frac{1}{2}i + \cos \theta$$

$$\begin{aligned} \text{On a } & \Rightarrow I \begin{cases} x_I = \cos \theta & \theta \in [0, \frac{\pi}{2}] \\ y_I = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow I \begin{cases} y_I = \frac{1}{2} \\ x_I \in [0, 1] \end{cases} \end{aligned}$$

I décrit le segment $[RQ]$ avec $R(\frac{1}{2}i)$ et $Q(\frac{1}{2}i + 1)$

b)

$$\begin{aligned} z_B &= i + e^{i\theta} = i(1 - ie^{i\theta}) = i(1 + e^{i(\theta - \frac{\pi}{2})}) \\ &= e^{i\frac{\pi}{2}} \left(e^{i(\frac{\theta - \pi}{2})} (e^{-i(\frac{\theta - \pi}{2})} + e^{i(\frac{\theta - \pi}{2})}) \right) = e^{i\frac{\pi}{2}} e^{i(\frac{\theta - \pi}{4})} 2 \cos(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}) \\ &= 2 \cos(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}) e^{i(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})} \end{aligned}$$

$$\text{on a : } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \leq \frac{\theta}{2} \leq \frac{\pi}{4} \Rightarrow -\frac{\pi}{4} \leq \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4} \leq 0 \Rightarrow \cos(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}) > 0.$$

<i>L.S.El Rjadh</i>	<u>Nombres complexes</u>	Mr Zribi
4^{ème} Maths		Solutions

c)

$$O, A, B \text{ alignés} \Leftrightarrow (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv 0[\pi] \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right) \equiv 0[\pi]$$

$$\Leftrightarrow \arg z_B - \arg z_A \equiv 0[\pi] \Leftrightarrow \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} - (-\theta) \equiv 0[\pi] \Leftrightarrow \frac{3\theta}{2} \equiv -\frac{\pi}{4}[\pi]$$

$$\Leftrightarrow \theta = -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3}; k \in \mathbb{Z}$$

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \leq -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \leq -\frac{1}{6} + \frac{2}{3}k \leq \frac{1}{2}; k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{4} \leq k \leq 1 \Rightarrow k = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$3) OACB \text{ rectangle} \Leftrightarrow OACB \text{ est un parallélogramme et } (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi].$$

$$\blacksquare I \text{ est le milieu de } [OC] \Rightarrow \frac{z_C}{2} = z_I \Rightarrow z_C = 2\cos\theta + i$$

$\blacksquare$

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \Rightarrow \frac{3\theta}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} + \frac{4k\pi}{3}; \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}$$

$$\Rightarrow z_C = \sqrt{3} + i$$

Exercice 3:

1)a)

$$\Delta = 4(1 + e^{i\theta})^2 - 8(1 + e^{i\theta})^2 = -4(1 + e^{i\theta})^2 = [2i(1 + e^{i\theta})]^2$$

$$z' = \frac{2(1 + e^{i\theta}) + 2i(1 + e^{i\theta})}{2(1 - i)} = \frac{(1 + i)(1 + e^{i\theta})}{(1 - i)} = i(1 + e^{i\theta})$$

$$z'' = \frac{2(1 + e^{i\theta}) - 2i(1 + e^{i\theta})}{2(1 - i)} = 1 + e^{i\theta}$$

$$S_{\mathbb{C}} = \{1 + e^{i\theta}, i(1 + e^{i\theta})\}$$

b)

$$1 + e^{i\theta} = e^{\frac{i\theta}{2}}(e^{-\frac{i\theta}{2}} + e^{\frac{i\theta}{2}}) = 2\cos\frac{\theta}{2} e^{\frac{i\theta}{2}} \quad \left(\frac{\theta}{2} \in]0, \frac{\pi}{2}[\Rightarrow \cos\frac{\theta}{2} > 0\right)$$

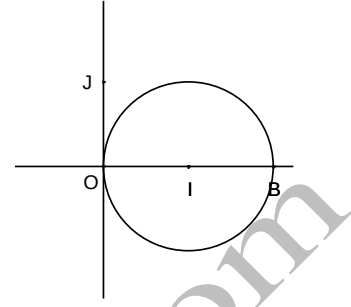
$$i(1 + e^{i\theta}) = e^{\frac{i\pi}{2}} 2\cos\frac{\theta}{2} e^{\frac{i\theta}{2}} = 2\cos\frac{\theta}{2} e^{i(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2})}$$

<i>L.S.El Rjadh</i>	<u>Nombres complexes</u>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		Solutions

2)

$$z_1 = 1 + e^{i\theta} \Leftrightarrow z_1 - 1 = e^{i\theta} \Leftrightarrow \begin{cases} |z_1 - 1| = |e^{i\theta}| \\ \arg(z_1 - 1) = \arg(e^{i\theta}) [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} IM_1 = 1 \\ (\vec{i}, \overrightarrow{IM_1}) \equiv \theta [2\pi] \end{cases} ; I(1)$$



$\Leftrightarrow M_1$ décrit le demi cercle supérieur privé de O et B(2)

$$z_2 = i(1 + e^{i\theta}) = -\sin \theta + i(1 + \cos \theta)$$

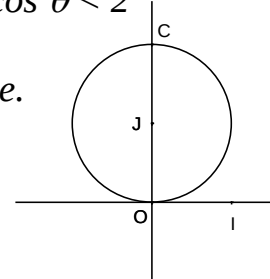
donc le point M_2 est de coordonnées : $\begin{cases} x = -\sin \theta \\ y = 1 + \cos \theta \end{cases}$

on a : $x^2 + (y-1)^2 = 1 \Rightarrow M_2$ est sur le cercle de centre $J(0,1)$ et de rayon 1.

Comme : $0 < \theta < \pi \Rightarrow -1 \leq -\sin \theta < 0$ et $0 < 1 + \cos \theta < 2$

Alors $-1 \leq x < 0$ et $0 < y < 2$

Par suite M_2 décrit le demi cercle indiqué sur la figure.



3) a)

$$OM_1 = |z_1| = 2 \cos \frac{\theta}{2} ; OM_2 = |z_2| = 2 \cos \frac{\theta}{2}$$

$OM_1 = OM_2 \Rightarrow$ le triangle OM_1M_2 est isocèle en O.

$$(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}) \equiv \arg \frac{z_2}{z_1} [2\pi] \equiv \arg z_2 - \arg z_1 [2\pi] \equiv \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{\theta}{2} [2\pi]$$

$$(\overrightarrow{OM_1}, \overrightarrow{OM_2}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$\Rightarrow$ le triangle OM_1M_2 est rectangle en O.

b) l'abscisse du milieu de $[OB]$ est i

$$\text{l'abscisse du milieu de } [M_1M_2] \text{ est } \frac{(1 + e^{i\theta})(1 + i)}{2}$$

OM_1BM_2 est un parallélogramme si et seulement si:

$$(1 + e^{i\theta})(1 + i) = 2i \Leftrightarrow 1 + e^{i\theta} = \frac{2i}{1+i} \Leftrightarrow e^{i\theta} = \frac{2i}{1+i} - 1 = \frac{-1+i}{1+i} = i = e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$\text{et } \theta \in]0, \pi[\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

<i>L.S.El Rjadh</i>	<u>Nombres complexes</u>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		<i>Solutions</i>

pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ OM_1BM_2 est un parallélogramme et OM_1M_2 est un triangle rectangle isocèle en O alors OM_1BM_2 est un carré.

Exercice 4:

1) a) $M(z)$ invariant par $f \Leftrightarrow f(M)=M \Leftrightarrow z=(1-i)z-1 \Leftrightarrow z=i$
le point A est le seul point invariant par f .

b)

$$z' = \frac{1-i}{\sqrt{2}} e^{i\theta} - 1 = e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{i\theta} - 1 = e^{i(\theta - \frac{\pi}{4})} - 1$$

$$= e^{i(\frac{\theta - \pi}{2})} \left(e^{i(\frac{\theta - \pi}{2})} - e^{-i(\frac{\theta - \pi}{2})} \right) = e^{i(\frac{\theta - \pi}{2})} 2i \sin\left(\frac{\theta - \pi}{2}\right)$$

$$= 2 \sin\left(\frac{\theta - \pi}{2}\right) e^{i(\frac{\theta - \pi}{2} + \frac{\pi}{2})} = 2 \sin\left(\frac{\theta - \pi}{2}\right) e^{i(\frac{\theta}{2} + \frac{3\pi}{8})}$$

$$\text{on a : } \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \Rightarrow \frac{\pi}{4} \leq \frac{\theta}{2} \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{8} \leq \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{8} \leq \frac{3\pi}{8} \Rightarrow \sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{8}\right) > 0.$$

2) a)

$$\begin{aligned} \arg(z') &\equiv \arg((1-i)z-1)[2\pi] \equiv \arg\left((1-i)\left(z - \frac{1}{1-i}\right)\right)[2\pi] \\ &\equiv \arg(1-i) + \arg\left(z - \frac{1+i}{2}\right)[2\pi] \equiv -\frac{\pi}{4} + (\vec{i}, \overrightarrow{BM})[2\pi] \end{aligned}$$

b)

$$z' \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \arg z' \equiv \pi[2\pi] \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} + (\vec{i}, \overrightarrow{BM}) \equiv \pi[2\pi]$$

$$\Leftrightarrow (\vec{i}, \overrightarrow{BM}) \equiv \frac{5\pi}{4}[2\pi]$$

par suite $E = [BA] \setminus \{B\}$.

3) $z' = z - iz - 1 \Leftrightarrow z' - z = i(i - z)$

$$\bullet |z' - z| = |i||i - z| \Leftrightarrow |z' - z| = |i - z| \Leftrightarrow MM' = MA \text{ donc } MAM' \text{ est isocèle en } M.$$

$$\bullet \arg\left(\frac{z' - z}{i - z}\right) \equiv \arg i[2\pi] \Leftrightarrow (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MM'}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

d'ou MAM' est rectangle en M.

b)

<i>L.S.El Rjadh</i>	<u>Nombres complexes</u>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		<i>Solutions</i>

- Étant donnée un point M , on place le point M' tel que MAM' est un triangle direct rectangle isocèle en M . ($M' = r_{(M, \frac{\pi}{2})}(A)$)
- $z'' = \overline{z'}$ par suite $M'' = S_{(O, i)}(M')$.
étant donnée un point M , on place le point M' puis le point $M'' = S_{(O, i)}(M')$

Exercice 5:

$$1) \Delta = -4 + 4(1 - e^{2i\theta}) = -4e^{2i\theta} = (2ie^{i\theta})^2$$

$$z' = \frac{2i + 2ie^{i\theta}}{2} = i + ie^{i\theta} \quad ; \quad z'' = \frac{2i - 2ie^{i\theta}}{2} = i - ie^{i\theta}$$

$$S_{\mathbb{C}} = \{i + ie^{i\theta}, i - ie^{i\theta}\}$$

2) a)

$$\frac{z''}{z'} = \frac{i - ie^{i\theta}}{i + ie^{i\theta}} = \frac{1 - e^{i\theta}}{1 + e^{i\theta}} = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} - e^{i\frac{\theta}{2}})}{e^{i\frac{\theta}{2}}(e^{-i\frac{\theta}{2}} + e^{i\frac{\theta}{2}})} = \frac{-2i \sin \frac{\theta}{2}}{2 \cos \frac{\theta}{2}} = -itg \frac{\theta}{2}$$

$$b) \frac{z' + z''}{2} = i \quad \text{et} \quad \frac{z_A - z_O}{2} = i$$

$\Rightarrow OM'AM''$ est un parallélogramme.

$$(\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OM''}) \equiv \arg \frac{z''}{z'} [2\pi] \equiv \arg(-itg \frac{\theta}{2}) [2\pi] \equiv \frac{-\pi}{2} [2\pi]$$

$\Rightarrow OM'AM''$ est un rectangle.

$$c) \text{ on a : } \left| \frac{z''}{z'} \right| = tg \frac{\theta}{2} = \frac{OM''}{OM'}$$

pour que $OM'AM''$ soit un carré il suffit que $OM' = OM''$

$$OM' = OM'' \Leftrightarrow tg \frac{\theta}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{\theta}{2} = \frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{2} + \frac{k\pi}{2}$$

$$\text{comme } \pi < \theta < 2\pi \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{2}$$

$$\text{si } \theta = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow OM'AM'' \text{ est un carré.}$$

d)

<i>L.S.El Rjadh</i>	<u>Nombres complexes</u>	Mr Zribi
4^{ème} Maths		Solutions

$$z' - i = ie^{i\theta} = e^{i(\theta + \frac{\pi}{2})} \Leftrightarrow \begin{cases} |z' - i| = |e^{i(\theta + \frac{\pi}{2})}| = 1 \\ \arg(z' - i) \equiv \arg(e^{i(\theta + \frac{\pi}{2})}) [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} JM' = 1 \\ (\vec{i}, \overrightarrow{JM'}) \equiv \theta + \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases} \quad J(i)$$

$$\text{comme } \pi < \theta < 2\pi \Rightarrow \frac{3\pi}{2} < (\vec{i}, \overrightarrow{JM'}) < \frac{5\pi}{2}$$

par suite M' décrit l'arc OA du cercle de centre J et de rayon 1 privé des points O et A .

Exercice 6:

$$1/a/ \Delta = e^{2i\theta}(12-16i) = e^{2i\theta}(4-2i)^2 \text{ d'où une racine de } \Delta \text{ est } \delta = e^{i\theta}(4-2i)$$

$$z'' = \frac{2ie^{i\theta} - e^{i\theta}(4-2i)}{2} = 2e^{i\theta}(i-1) \quad ; \quad z' = \frac{2ie^{i\theta} + e^{i\theta}(4-2i)}{2} = 2e^{i\theta}$$

en fin $S_C = \{z', z''\}$.

2/ a/ on a $OM' = |2e^{i\theta}| = 2$ d'où M' appartient au cercle de centre O et de rayon 2.

b/ $N = r(M')$ alors $n = iz' = 2ie^{i\theta}$.

c/ on a $\text{aff}(\overrightarrow{M'O}) = -2e^{i\theta}$ et $\text{aff}(\overrightarrow{NM''}) = -2e^{i\theta}$ d'où $\overrightarrow{M'O} = \overrightarrow{NM''}$ et par suite $M'OM''N$ est un parallélogramme.

d/ on a : $\overrightarrow{M'O} = \overrightarrow{NM''}$ d'où $t_{\overrightarrow{M'O}}(N) = M''$ et par suite $M'' = t_{\overrightarrow{M'O}} \circ r(M')$

M' étant donné on place le point $M'' = t_{\overrightarrow{M'O}} \circ r(M')$.

$$3/a/ -2(1-i)e^{i\theta} = e^{i\pi} 2 \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}} e^{i\theta} = 2\sqrt{2} e^{i(\theta + \frac{3\pi}{4})}$$

$$b/ \text{ on a } z'' = 2\sqrt{2} e^{i(\theta + \frac{3\pi}{4})} \text{ signifie } OM'' = 2\sqrt{2} \text{ et } \alpha = (\vec{u}, \overrightarrow{OM''}) = \theta + \frac{3\pi}{4} [2\pi]$$

Si $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ alors M'' est sur le cercle de centre O et de rayon $2\sqrt{2}$ et est tel que

$$\alpha \in]-\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}[.$$

4/a/ les racines cubiques de $-2(1-i)e^{i\theta}$ sont les racines dans C de l'équation $u^3 = -2(1-i)e^{i\theta}$

$$\text{on pose } u = re^{i\beta} \text{ d'où } r^3 e^{3i\beta} = 2\sqrt{2} e^{i(\theta + \frac{3\pi}{4})} \Leftrightarrow r^3 = 2\sqrt{2} \text{ et } 3\beta = \theta + \frac{3\pi}{4} + 2k\pi,$$

$$k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{d'où } u \in \{ \sqrt{2} e^{i(\frac{\theta}{3} + \frac{\pi}{4})}; \sqrt{2} e^{i(\frac{\theta}{3} + \frac{11\pi}{12})}; \sqrt{2} e^{i(\frac{\theta}{3} + \frac{19\pi}{12})} \}$$

$$b/ x \in]0, 2\pi[\setminus \{\pi\}; \quad \frac{\sqrt{2}z-1}{z} = \sqrt{2}e^{ix} \Leftrightarrow z = \frac{\sqrt{2}}{2(1-e^{ix})} \quad \left(\text{on a : } e^{ix} = \frac{i + \cotg \frac{x}{2}}{-i + \cotg \frac{x}{2}} \right)$$

<i>L.S.El Rjadh</i>	<u>Nombres complexes</u>	Mr Zribi
4^{ème} Maths		Solutions

1/ $M(z)$ est invariant par $f \Leftrightarrow f(z)=z \Leftrightarrow z = \frac{z^2-1}{2z-2\cos\theta} \Leftrightarrow z^2-2\cos\theta z+1=0$

$\Delta' = \cos^2\theta - 1 = -\sin^2\theta$ une racine carrée de Δ' est $\delta = i \sin\theta$.

$Z' = \cos\theta - i \sin\theta$; $z'' = \cos\theta + i \sin\theta$

d'où f admet deux points invariants $A(e^{i\theta})$ et $B(e^{-i\theta})$.

2/a/ $2\cos\theta e^{i\theta} - 1 = 2\cos^2\theta - 1 + 2i \cos\theta \sin\theta = \cos 2\theta + i \sin 2\theta = e^{2i\theta}$.

$$b/ \frac{z' - e^{i\theta}}{z' - e^{-i\theta}} = \frac{z^2 - 1 - 2ze^{i\theta} + 2\cos\theta e^{i\theta}}{z^2 - 1 - 2ze^{-i\theta} + 2\cos\theta e^{-i\theta}} = \frac{z^2 - 2ze^{i\theta} + e^{2i\theta}}{z^2 - 2ze^{-i\theta} + e^{-2i\theta}} = \frac{(z - e^{i\theta})^2}{(z - e^{-i\theta})^2} = \left(\frac{z - e^{i\theta}}{z - e^{-i\theta}}\right)^2$$

$$c/ \frac{z' - e^{i\theta}}{z' - e^{-i\theta}} = \left(\frac{z - e^{i\theta}}{z - e^{-i\theta}}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$(\overrightarrow{M'B}, \overrightarrow{M'A}) \equiv 2(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) [2\pi] \quad \text{et} \quad \frac{M'B}{M'A} = \left(\frac{MB}{MA}\right)^2.$$

3/ a/ si M appartient au cercle de diamètre $[AB] \Rightarrow$

$$(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \Rightarrow (\overrightarrow{M'B}, \overrightarrow{M'A}) \equiv \pi [2\pi]$$

$\Rightarrow M \in [AB]$.

b/ soit $E' = f(E)$; $z_E \in \mathbb{R} \Rightarrow z_{E'} \in \mathbb{R}$ d'où $E \in (O, \vec{e}_1)$ et d'après 3/a/ $E' \in [AB]$
alors $\{E'\} = [AB] \cap (O, \vec{e}_1)$.

mais A et B sont symétriques par rapport à $(O, \vec{e}_1)$ alors $(O, \vec{e}_1)$ est la médiatrice de $[AB]$ alors

$[AB] \cap (O, \vec{e}_1)$ est le milieu de $[AB]$; en fin $E' = A * B$

De même pour le point F

En conclusion $f(E) = f(F) = A * B$

4/ on a $(\overrightarrow{M'B}, \overrightarrow{M'A}) \equiv 2(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) [2\pi]$

or $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IA}) \equiv 2(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) [\pi]$ alors $(\overrightarrow{M'B}, \overrightarrow{M'A}) \equiv (\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IA}) [\pi]$

d'où M', A, B et I sont alignés ou sur un même cercle.

Exercice 9 :

1/ $z \neq 1$; $P(z)(1-z) = (1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6)(1-z) = 1-z^7$

$$\Leftrightarrow z \neq 1 ; \quad P(z) = \frac{1-z^7}{1-z}$$

2/ les racines septièmes de l'unité sont les racines dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^7=1$
on pose $z = re^{i\theta}$ $r \in \mathbb{R}_+$ et $\theta \in \mathbb{R}$; $z^7=1 \Leftrightarrow r^7=1$ et $7\theta=2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow r=1 \text{ et } \theta = \frac{2k\pi}{7}, k \in \mathbb{Z}.$$

d'où $z \in \{1, e^{\frac{2i\pi}{7}}, e^{\frac{4i\pi}{7}}, e^{\frac{6i\pi}{7}}, e^{\frac{8i\pi}{7}}, e^{\frac{10i\pi}{7}}, e^{\frac{12i\pi}{7}}\}$.

<i>L.S.El Rjadh</i>	<i>Nombres complexes</i>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		<i>Solutions</i>

$$P(z)=0 \Leftrightarrow z \neq 1 ; \frac{1-z^7}{1-z}=0 \Leftrightarrow z^7=1 \Leftrightarrow z \in \{1,$$

$$e^{\frac{2i\pi}{7}}, e^{\frac{4i\pi}{7}}, e^{\frac{6i\pi}{7}}, e^{\frac{8i\pi}{7}}, e^{\frac{10i\pi}{7}}, e^{\frac{12i\pi}{7}}\}.$$

$$S_C = \{1, e^{\frac{2i\pi}{7}}, e^{\frac{4i\pi}{7}}, e^{\frac{6i\pi}{7}}, e^{\frac{8i\pi}{7}}, e^{\frac{10i\pi}{7}}, e^{\frac{12i\pi}{7}}\}.$$

$$\begin{aligned} 3/ P(z) &= (z - e^{\frac{2i\pi}{7}})(z - e^{\frac{12i\pi}{7}})(z - e^{\frac{4i\pi}{7}})(z - e^{\frac{10i\pi}{7}})(z - e^{\frac{6i\pi}{7}})(z - e^{\frac{8i\pi}{7}}) \\ &= (z - e^{\frac{2i\pi}{7}})(z - e^{\frac{-6i\pi}{7}})(z - e^{\frac{4i\pi}{7}})(z - e^{\frac{-4i\pi}{7}})(z - e^{\frac{6i\pi}{7}})(z - e^{\frac{-6i\pi}{7}}) \\ &= (z^2 - z(e^{\frac{2i\pi}{7}} + e^{\frac{-6i\pi}{7}}) + 1)(z^2 - z(e^{\frac{4i\pi}{7}} + e^{\frac{-4i\pi}{7}}) + 1)(z^2 + z(e^{\frac{6i\pi}{7}} + e^{\frac{-6i\pi}{7}}) + 1) \\ &= (z^2 - 2z\cos\frac{2\pi}{7} + 1)(z^2 - 2z\cos\frac{4\pi}{7} + 1)(z^2 - 2z\cos\frac{6\pi}{7} + 1). \end{aligned}$$

$$4/ P(z)=0 \Leftrightarrow 1+z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6=0 \Leftrightarrow (z+\frac{1}{z})^3 + (z+\frac{1}{z})^2 - 2(z+\frac{1}{z}) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow Z^3 + Z^2 - 2Z - 1 = 0 \quad \text{et} \quad Z = z + \frac{1}{z}$$

les racines de « $P(z)=0$ » sont les racine de $Z = z + \frac{1}{z}$ et $Z^3 + Z^2 - 2Z + 1 = 0$

$z = e^{\frac{2i\pi}{7}}$ est une solution de $P(z)=0$ d'où $Z = e^{\frac{2i\pi}{7}} + e^{\frac{-6i\pi}{7}} = 2\cos\frac{2\pi}{7}$ est solution

de $Z^3 + Z^2 - 2Z - 1 = 0$

d'où

$$(2\cos\frac{2\pi}{7})^3 + (2\cos\frac{2\pi}{7})^2 - 2\cos\frac{2\pi}{7} - 1 = 0 \text{ alors}$$

$$8(\cos\frac{2\pi}{7})^3 + 4(\cos\frac{2\pi}{7})^2 - 4\cos\frac{2\pi}{7} - 1 = 0$$

ainsi $\cos\frac{2\pi}{7}$ est solution de $8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0$

de même $\cos\frac{4\pi}{7}$ et $\cos\frac{6\pi}{7}$ sont les deux autres racines de l'équation :

$$8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0.$$

5/a/ $w, w^2, w^3, w^4, w^5, w^6$ sont les racines de

$$P(z)=0 \Leftrightarrow P(z)=(z-w)(z-w^2)(z-w^3)(z-w^4)(z-w^5)(z-w^6).$$

$$b/ P(1)=7 \text{ d'où } (1-w)(1-w^2)(1-w^3)(1-w^4)(1-w^5)(1-w^6)=7$$

$$c/ \text{ on a } |(1-w)(1-w^2)(1-w^3)(1-w^4)(1-w^5)(1-w^6)|=7$$

$$|1 - e^{\frac{2i\pi}{7}}| = |e^{i0} - e^{\frac{2i\pi}{7}}| = |e^{\frac{i\pi}{7}}(e^{\frac{-i\pi}{7}} - e^{\frac{i\pi}{7}})| = |e^{\frac{-i\pi}{7}} - e^{\frac{i\pi}{7}}| = |-2i \sin\frac{\pi}{7}| = 2\sin\frac{\pi}{7}$$

$$\text{de même : } |1 - e^{\frac{4i\pi}{7}}| = 2\sin\frac{2\pi}{7} ; |1 - e^{\frac{6i\pi}{7}}| = 2\sin\frac{3\pi}{7} ; |1 - e^{\frac{8i\pi}{7}}| = 2\sin\frac{4\pi}{7}$$

$$|1 - e^{\frac{10i\pi}{7}}| = 2\sin\frac{5\pi}{7} ; |1 - e^{\frac{12i\pi}{7}}| = 2\sin\frac{6\pi}{7}.$$

$$\text{d'où } 2^6 \sin\frac{\pi}{7} \sin\frac{2\pi}{7} \sin\frac{3\pi}{7} \sin\frac{4\pi}{7} \sin\frac{5\pi}{7} \sin\frac{6\pi}{7} = 7$$

L.S.El Rjadh	Nombres complexes	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Solutions

En fin $\sin \frac{\pi}{7} \sin \frac{2\pi}{7} \sin \frac{3\pi}{7} \sin \frac{4\pi}{7} \sin \frac{5\pi}{7} \sin \frac{6\pi}{7} = \frac{7}{2^6}$.

Exercice 10:

$1/\Delta' = (1 + i\cos\theta)^2 - 2i\cos\theta = \sin^2\theta$.

Une racine carrée de Δ' est $\delta = \sin\theta$.

D'où $z' = 1 + i\cos\theta - \sin\theta$ et $z'' = 1 + i\cos\theta + \sin\theta$. En fin $S_C = \{z', z''\}$.

$2/z_1 = 1 + e^{i(\theta + \frac{\pi}{2})} = e^{i(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})} (e^{i(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})} + e^{-i(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})}) = 2\cos(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}) e^{i(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})}$.

On a $0 < \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} < \frac{\pi}{2}$ donc $2\cos(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}) > 0$

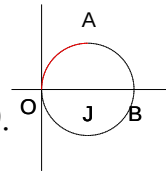
D'où $z_1 = 2\cos(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}) e^{i(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})}$.

$z_2 = 1 + e^{i(-\theta + \frac{\pi}{2})} = e^{i(-\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})} (e^{i(-\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})} + e^{-i(-\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})}) = 2\cos(-\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}) e^{i(-\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})}$

on a $0 < (-\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}) < \frac{\pi}{4}$ donc $2\cos(-\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}) > 0$

d'où $z_2 = 2\cos(-\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}) e^{i(-\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})}$.

2/ a/ pour tout $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ on pose $M(x, y)$ et $M'(x', y')$.



$z_1 = 1 - \sin\theta + i\cos\theta \Leftrightarrow (x = 1 - \sin\theta \text{ et } y = \cos\theta)$

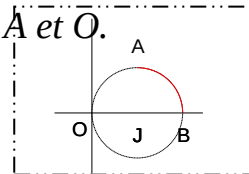
$\Leftrightarrow (1 - x = \sin\theta \text{ et } y = \cos\theta) \Leftrightarrow ((x-1)^2 + y^2 = 1)$.

D'où M décrit l'arc [AO] du cercle $\zeta_{(J(1,0),1)} = \zeta$ privé de A et O.

$z_2 = 1 + \sin\theta + i\cos\theta \Leftrightarrow (x' = 1 + \sin\theta \text{ et } y' = \cos\theta)$

$\Leftrightarrow (x'-1)^2 + y'^2 = 1$

d'où M' décrit l'arc [BA] du cercle ζ privé de A et B



b/ $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$; $z_I = 1 + i\cos\theta \Leftrightarrow x_I = 1 \text{ et } y_I = \cos\theta$

$\Leftrightarrow I$ décrit le segment $[JA] \setminus \{J, A\}$

3/ a/ on a $z' = az + b$ avec $|a| = 1$ et $\arg(a) = -2\theta[2\pi]$

r est la rotation d'angle -2θ , de centre le point invariant w d'affixe z_w :

$(1 - e^{-2i\theta})z_w = 2i\sin\theta e^{-i\theta} \Leftrightarrow z_w = \frac{2i\sin\theta e^{-i\theta}}{1 - e^{-2i\theta}} = \frac{2i\sin\theta e^{-i\theta}}{e^{-i\theta}(e^{i\theta} - e^{-i\theta})} = 1$

b/ soit $L = r(M_1)$

$z_L = e^{-2i\theta}(1 + ie^{i\theta}) + 2i\sin\theta e^{-i\theta} = e^{-i\theta}(e^{-i\theta} + i + 2i\sin\theta) = e^{-i\theta}(i + \cos\theta + i\sin\theta)$
 $= e^{-i\theta}(i + e^{i\theta}) = 1 + i e^{-i\theta} = z_{M_2}$.

D'où $r(M_1) = M_2$.

c/ on a $r(M_1) = M_2$ d'où AM_1M_2 est un triangle isocèle.

L.S.El Rjadh	Nombres complexes	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Solutions

Pour tout $\theta \in]0, \frac{\pi}{2}[$: AM_1M_2 isocèle rectangle $\Leftrightarrow$

$\overrightarrow{AM_1}$ et $\overrightarrow{AM_2}$ sont orthogonaux

$$\Leftrightarrow \frac{z_2 - 1}{z_1 - 1} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow e^{2i\theta} \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \cos 2\theta \in i\mathbb{R}$$

Exercice 11:

1/ si z est solution de (E) alors $|z|^3 = |i|(z-1)^3$ alors $|z|^3 = |z-1|^3$ alors $|z| = |z-1|$.

d'où $OM = BM$ avec $M(z)$ et $B(1)$ et par suite M décrit la médiatrice δ de $[OB]$.

2/a/ si z est solution de (E) alors $|z| = |z-1| \Rightarrow$

$$\overline{z}z = (z-1)\overline{(z-1)} \Rightarrow \overline{z}z = \overline{z}z - z - \overline{z} + 1$$

$$\Rightarrow z-1 = -\overline{z} \Rightarrow \arg(z-1) = \arg(-\overline{z}) [2\pi]$$

$$\Rightarrow \arg(z-1) = \pi + \arg \overline{z} [2\pi]$$

$$\Rightarrow \arg(z-1) = \pi - \arg z [2\pi]$$

$$\Rightarrow \arg(z-1) + \arg z = \pi [2\pi]$$

b/ si z est solution de (E)

$$\Rightarrow 3\arg(z) = \arg(i) + 3\arg(z-1) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow 3\arg(z) = \frac{\pi}{2} + 3\arg(z-1) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{6} + \arg(z-1) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

d'après 2/a/ on a $\arg(z-1) = \pi - \arg(z) + 2k'\pi, k' \in \mathbb{Z}$

$$\text{d'où } 2\arg z = \frac{7\pi}{6} + 2k'\pi + \frac{2k\pi}{3} \quad k \text{ et } k' \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \arg z = \frac{7\pi}{12} + k'\pi + \frac{k\pi}{3} \quad k \text{ et } k' \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \arg z = \frac{7\pi}{12} + \frac{\pi}{3}(3k' + k) \quad k \text{ et } k' \in \mathbb{Z} \text{ on pose } k'' = 3k' + k$$

$$\Rightarrow \theta = \frac{7\pi}{12} + \frac{\pi}{3}k'', k'' \in \mathbb{Z}$$

$$\text{en fin } \theta \in \left\{ \frac{7\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}, \frac{15\pi}{12}, \frac{19\pi}{12}, -\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{4} \right\}.$$

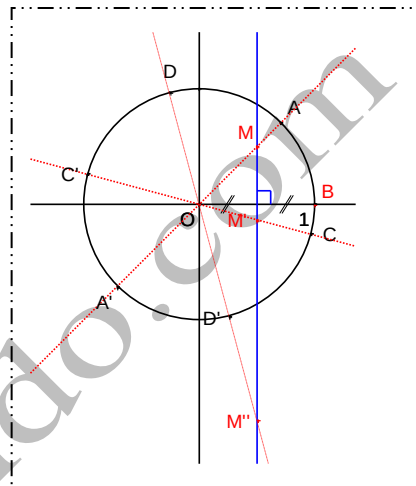
3/a/ les images des solutions de (E) sont M, M' et M'' . (voir figure)

b/ les solutions de (E) sont :

$$z = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) e^{i\frac{\pi}{4}} \quad ; \quad z' = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{-\pi}{12}\right) e^{-i\frac{\pi}{12}} \quad \text{et } z'' = \frac{1}{2} \cos\left(\frac{19\pi}{12}\right) e^{i\frac{19\pi}{12}}$$

Exercice 12:

1/ on a $\Delta = -3e^{2i\theta} = 3e^{2i(\theta + \frac{\pi}{2})}$; une racine carrée de Δ est $\delta = \sqrt{3}e^{i(\theta + \frac{\pi}{2})}$.



<i>L.S.El Rjadh</i>	<u>Nombres complexes</u>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		<i>Solutions</i>

$$D'ou z' = \frac{1 - \sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{2}}}{2 e^{i\theta}} \quad et \quad z'' = \frac{1 + \sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{2}}}{2 e^{i\theta}}.$$

En fin $S_c = \{z', z''\}$.

La forme trigonométrique des racines :

$$z' = \frac{1 - \sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{2}}}{2 e^{i\theta}} = \frac{2 e^{-i\frac{\pi}{3}}}{2 e^{i\theta}} = e^{-i(\theta + \frac{\pi}{3})} \quad et \quad z'' = \frac{1 + \sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{2}}}{2 e^{i\theta}} = \frac{2 e^{i\frac{\pi}{3}}}{2 e^{i\theta}} = e^{i(\frac{\pi}{3} - \theta)}.$$

$$2/a/ \quad \overline{z_1} = e^{2i\theta} e^{-i\theta + \frac{\pi}{3}} = e^{2i\theta} z_2.$$

b/ M_1 et M_2 sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses

$$\Leftrightarrow \overline{z_1} = z_2 \quad \Leftrightarrow e^{2i\theta} z_2 = z_2$$

$$\Leftrightarrow z_2(e^{2i\theta} - 1) = 0; z_2 \neq 0 \quad \Leftrightarrow e^{2i\theta} = 1 \Leftrightarrow 2\theta = 2k\pi; k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = k\pi; k \in \mathbb{Z}.$$

ii/ M_1 et M_2 sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées

$$\Leftrightarrow \text{Im}(z_1) = \text{Im}(z_2) \Leftrightarrow \sin(-\theta - \frac{\pi}{3}) = \sin(-\theta + \frac{\pi}{3})$$

$$\Leftrightarrow -2\theta = \pi + 2k; k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = -\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

c/ M_1 et M_2 sont symétriques par rapport à l'origine

$$\Leftrightarrow z_1 = -z_2 \Leftrightarrow e^{-i(\theta + \frac{\pi}{3})} = e^{i(-\theta + \frac{4\pi}{3})} \Leftrightarrow -\theta - \frac{\pi}{3} = -\theta + \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-5\pi}{3} = 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ ce qui est impossible}$$

par suite il n'existe pas une valeur de θ pour laquelle M_1 et M_2 sont symétriques par rapport à l'origine.

$$3/a/ \quad S_n = e^{i(n\theta + \frac{\pi}{3})} + e^{-i(n\theta + \frac{\pi}{3})} = 2\cos(n\theta + n\frac{\pi}{3}).$$

$$S'_n = e^{i(-n\theta + \frac{\pi}{3})} + e^{-i(-n\theta + \frac{\pi}{3})} = 2\cos(-n\theta + n\frac{\pi}{3}).$$

b/ $n \in \mathbb{N}$, si $n = 3p$:

$$S_n = 2\cos(3p\theta + p\pi) = 2\cos(-3p\theta - p\pi) = 2\cos(-3p\theta + p\pi) = S'_n.$$

$$c/ \quad S_n + S'_n = 2(\cos(n\theta + n\frac{\pi}{3}) + \cos(-n\theta + n\frac{\pi}{3})) = 4\cos(n\frac{\pi}{3})\cos(n\theta).$$

On a $|\cos(n\frac{\pi}{3})\cos(n\theta)| \leq 1$

$$D'ou \quad \left| \frac{S_n + S'_n}{n} \right| \leq \frac{4}{n}$$

$$\text{Comme } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4}{n} = 0 \quad \text{alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n + S'_n}{n} = 0$$

<i>L.S.El Rjadh</i>	<i><u>Nombres complexes</u></i>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		<i>Solutions</i>

zribimaths.jimdo.com

<i>L.S.El Riadh</i>	<u>Limites et continuité</u>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		Exercices

Exercice 1:

Calculer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition:

$$1 / f(x) = \frac{x-3}{1-x} \quad 2 / f(x) = \frac{x+2}{2x^2-18}$$

$$3 / f(x) = \frac{x^2+1}{(x-1)^2} \quad 4 / f(x) = 1 - \frac{3x-5}{4-x^2}$$

Exercice 2:

Calculer:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2}{\sin x} \quad b) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{2}{\cos x}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\tan x)^2 \quad c) \lim_{x \rightarrow -\infty} \sin \frac{1}{x}$$

Exercice 3:

Calculer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition

$$1 / f(x) = \sqrt{2x^2+1} - \sqrt{x^2-3x+2} \quad 2 / f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-3}} - \frac{1}{x^2-9}$$

$$2 / f(x) = \frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1} \quad 4 / f(x) = \sqrt{4x^2-2x-2} - 2x + 1$$

Exercice 4:

Calculer:

$$a) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2-1)}{x^2-1} \quad b) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan(x - \frac{\pi}{4})}{x - \frac{\pi}{4}}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x + \frac{\pi}{2}) - 1}{x + \frac{\pi}{2}} \quad c) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x}$$

Exercice 5:

Soit f la fonction définie par $f(x) = 2 - \sqrt{1 - \frac{1}{x}}$

1/ déterminer le domaine de définition de f .

2/ déterminer les limites de f aux bornes de son domaine de définition et interpréter géométriquement les résultats obtenus.

Exercice 6:

L.S.El Riadh	<u>Limites et continuité</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Exercices

Soit la f la fonction définie par $f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

Interpréter géométriquement les résultats obtenus.

Exercice 7 :

Soit la fonction définie par $f(x) = 2x + 5 - \sqrt{x^2 + 2x}$. On désigne par ζ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- déterminer le domaine de définition de f .
- calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- montrer que la droite $\Delta: y = x + 4$ est asymptote oblique de ζ au voisinage de $+\infty$.
- Montrer que ζ possède une asymptote oblique que l'on précisera au voisinage de $-\infty$.

Exercice 8:

Soit f la fonction définie par
$$\begin{cases} f(x) = \frac{3 - \sqrt{2x+5}}{x-2} & \text{si } x \neq 2 \\ f(2) = m \end{cases}$$

Déterminer m pour que f soit continue en 2.

Exercice 9:

Soit f la fonction définie par
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x+1}{x-3} & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = \frac{2m-x}{2-x} & \text{si } 1 < x \leq \frac{3}{2} \\ f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+2x-4} & \text{si } x > \frac{3}{2} \end{cases}$$

1/ déterminer m pour que f soit continue en 1.

2/ pour la valeur de m trouver:

- étudier la continuité de f en $\frac{3}{2}$.
- déterminer le domaine de continuité de f .

L.S.El Riadh	<u>Limites et continuité</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Exercices

Exercice 10:

Soit f la fonction définie par
$$\begin{cases} f(x) = \frac{\cos(\frac{\pi}{2}x)}{x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ f(1) = \frac{-\pi}{2} \end{cases}$$

1/ Étudier la continuité de f en 1.

2/ déterminer le domaine de continuité de f .

Exercice 11:

Soit f la fonction définie par
$$\begin{cases} f(x) = x + a + \sqrt{x^2 + x + 1} & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = x^2 - x & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ f(x) = bx - \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

1/ calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

2/ déterminer a et b pour que f soit continue en 0 et 1.

Exercice 12:

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{(a-1)x^2 + x + 3}{x-2}$.

1/ étudier suivant a les limites:

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ b) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

2/ soit la fonction g définie par $g(x) = \sqrt{x^2 - x} - 2x$

a) déterminer le domaine de définition de g .

b) calculer les limites:

$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) + x)$

c) en déduire une équation de l'asymptote à ζ_g au voisinage de $+\infty$.

Exercice 13:

Soit la fonction f définie par:
$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2 + x + 2} - \frac{3}{2}x & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 2}{x-1} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

1/ quel est le domaine de définition de f ?

2/ f est-elle continue en 1?

3/ calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

L.S.El Riadh	<u>Limites et continuité</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Exercices

Exercice 14:

1-soit la fonction f définie par: $f(x) = \frac{-x^2 + 10x + 11}{2x^2 + x - 1}$.

a) déterminer le domaine de définition de f .

b) calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} xf(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$.

2/ déterminer suivant les valeurs du réel a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{9x^2 + 2} - ax$

3/ soit la fonction g définie par: $g(x) = \frac{3x - 1 - \sqrt{x^2 - 7x + 10}}{x - 1}$.

a) déterminer le domaine de définition de g .

b) déterminer les limites respectives de g en $+\infty$, en $-\infty$ et en 1.

a) Déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} xg(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x}$

<i>L.S.El Riadh</i>	<u><i>Limites et continuité</i></u>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		<i>Solutions</i>

Exercice 1:

$$1 / f(x) = \frac{x-3}{1-x}$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{-x} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-x} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
1-x	+	0	-

$$2 / f(x) = \frac{x^2+1}{(x-1)^2}$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
(1-x) ²	+	0	+

$$3 / f(x) = \frac{x+2}{x^2-9}$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = -\infty$$

x	$-\infty$	-3	3	$+\infty$
x ² -9	+	0	0	+

<i>L.S.El Riadh</i>	<i><u>Limites et continuité</u></i>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		<i>Solutions</i>

$$3 / f(x) = 1 - \frac{3x+5}{x^2-4}$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty$$

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
x^2-4	+	0	-	0	+

Exercice 2:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2}{\sin x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \frac{2}{\cos x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} (\tan x)^2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

x	0			
sinx	-	0	+	

x	$\frac{\pi}{2}$			
cosx	+	0	-	

Exercice 3:

$$1/ f(x) = \sqrt{2x^2+1} - \sqrt{x^2-3x+2} \quad ; \quad D_f = \{x \in \mathbb{R}; 2x^2+1 \geq 0 \text{ et } x^2-3x+2 \geq 0\}$$

$$D_f =]-\infty, 1] \cup [2, +\infty[$$

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$	
x^2-3x+2	+	0	-	0	+

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} |x| \sqrt{2 + \frac{1}{x^2}} - |x| \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{2 + \frac{1}{x^2}} - \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} |x| \sqrt{2 + \frac{1}{x^2}} - |x| \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x) \left(\sqrt{2 + \frac{1}{x^2}} - \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} \right) = +\infty$$

2010-2011

<i>L.S.El Riadh</i>	<u><i>Limites et continuité</i></u>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		<i>Solutions</i>

$$2/ f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-3}} - \frac{1}{x^2-9} \quad ; \quad D_f = \{x \in \mathbb{R}; x^2-9 \neq 0 \text{ et } x-3 > 0\} =]3, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{\sqrt{x-3}}{x-3} - \frac{1}{(x-3)(x+3)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x-3} \left(\sqrt{x-3} - \frac{1}{x+3} \right) = +\infty \left(0 - \frac{1}{6} \right) = -\infty \end{aligned}$$

$$3/ f(x) = \frac{\sqrt{x-3}-2}{x-1} \quad ; \quad D_f = \{x \in \mathbb{R}; x-3 \geq 0 \text{ et } x-1 \neq 0\} = [3, +\infty[$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+3}+2} = 0 \end{aligned}$$

$$4/ f(x) = \sqrt{4x^2-2x-2} - 2x + 1 \quad ; \quad D_f = \{x \in \mathbb{R}; 4x^2-2x-2 \geq 0\} =]-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [1, +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty + \infty = +\infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x^2-2x-2-(2x-1)^2}{\sqrt{4x^2-2x-2}+2x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-3}{\sqrt{4x^2-2x-2}+2x-1} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(2-\frac{3}{x})}{x \left(\sqrt{4-\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}} + 2 - \frac{1}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2-\frac{3}{x}}{\sqrt{4-\frac{2}{x}-\frac{2}{x^2}} + 2 - \frac{1}{x}} = \frac{2}{2+2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Exercise 4:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2-1)}{x^2-1} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg}(x-\frac{\pi}{4})}{x-\frac{\pi}{4}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} t}{t} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(x+\frac{\pi}{2})-1}{(x+\frac{\pi}{2})} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos t - 1}{t} = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin \frac{1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$$

<i>L.S.El Riadh</i>	<u>Limites et continuité</u>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		<i>Solutions</i>

Exercice 5:

$$1/ D_f = \{x \in \mathbb{R}; \frac{x-1}{x} \geq 0; x \neq 0\} =]-\infty, 0[\cup [1, +\infty[.$$

2/

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

3/ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \Rightarrow \Delta: y=1$ est une asymptote horizontale de ζ_f au voisinage de $+\infty$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 \Rightarrow \Delta: y=1$ est une asymptote horizontale de ζ_f au voisinage de $-\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \Rightarrow D: x=0$ est une asymptote verticale.

Exercice 6:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = 2$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \Rightarrow \Delta: y=2$ est une asymptote horizontale de ζ_f au voisinage de $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = 1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = 0$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \Rightarrow \Delta: y=0$ est une asymptote horizontale de ζ_f au voisinage de $-\infty$

Exercice 7:

a) $D_f = \{x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x \geq 0\} =]-\infty, -2] \cup [0, +\infty[.$

b)

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + 5 - |x| \sqrt{1 + \frac{2}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(2 + \frac{5}{x} - \sqrt{1 + \frac{2}{x}} \right) = +\infty \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + 5 - |x| \sqrt{1 + \frac{2}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(2 + \frac{5}{x} + \sqrt{1 + \frac{2}{x}} \right) = -\infty \end{aligned}$$

c)

<i>L.S.El Riadh</i>	<u>Limites et continuité</u>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		Solutions

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x+4) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} x+1 - \sqrt{x^2+2x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x+1)^2 - (x^2+2x)}{x+1 + \sqrt{x^2+2x}} \\
 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1 + \sqrt{x^2+2x}} = 0
 \end{aligned}$$

d'ou $\Delta: y=x+4$ est une asymptote oblique de ζ au voisinage de $+\infty$.

d)

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+5 - \sqrt{x^2+2x}}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+5}{x} - \frac{\sqrt{x^2+2x}}{x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+5}{x} + \sqrt{\frac{x^2+2x}{x^2}} \\
 &= 2+1=3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - 3x &= \lim_{x \rightarrow -\infty} 5 - (x + \sqrt{x^2+2x}) \\
 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} 5 - \frac{x^2 - (x^2+2x)}{x - \sqrt{x^2+2x}} \\
 &= 5 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x(1 + \sqrt{1 + \frac{2}{x}})} \\
 &= 5 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{1 + \sqrt{1 + \frac{2}{x}}} = 5+1=6
 \end{aligned}$$

d'ou $D: y=3x+6$ est une asymptote oblique de ζ au voisinage de $-\infty$.

Exercice 8:

$$\begin{aligned}
 \lim_{x \rightarrow 2} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3 - \sqrt{2x+5}}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{9 - (2x+5)}{(x-2)(3 + \sqrt{2x+5})} \\
 &= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2(x-2)}{(x-2)(3 + \sqrt{2x+5})} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2}{3 + \sqrt{2x+5}} = \frac{-1}{3}
 \end{aligned}$$

f est continue en 2 $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) \Leftrightarrow m = 2$

Exercice 9:

1/

<i>L.S.El Riadh</i>	<u>Limites et continuité</u>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		<i>Solutions</i>

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x+1}{x-3} = -1 = f(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2m-x}{2-x} = 2m-1$$

$$f \text{ est continue en } 1 \Leftrightarrow 2m-1 = -1 \Leftrightarrow m=0$$

2/ a)

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^-} \frac{-x}{2-x} = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^+} \frac{x^2+1}{x^2+2x-4} = \frac{13}{5}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^+} f(x) \Rightarrow f \text{ n'est pas continue en } \frac{3}{2}.$$

b) continuité de f sur $]-\infty, 1[$:

$$x \mapsto \frac{x+1}{x-3} \text{ est continue sur } \mathbb{R} \setminus \{3\} \Rightarrow f \text{ est continue sur }]-\infty, 1[$$

continuité de f sur $]1, \frac{3}{2}[$

$$x \mapsto \frac{-x}{2-x} \text{ est continue sur } \mathbb{R} \setminus \{2\} \Rightarrow f \text{ est continue sur }]1, \frac{3}{2}[$$

continuité de f sur $] \frac{3}{2}, +\infty [$:

$$x \mapsto \frac{x^2+1}{x^2+2x-4} \text{ est continue sur } \mathbb{R} \setminus \{-1-\sqrt{5}, -1+\sqrt{5}\} \Rightarrow f \text{ est continue sur }] \frac{3}{2}, +\infty [$$

En conclusion f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{3}{2}\}$.

Exercice 10:

1/

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{2})}{t}$$

on pose $t = x - 1$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{-\sin(\frac{\pi}{2}t)}{t} = -\frac{\pi}{2}$$

$\Rightarrow f$ est continue en 1.

<i>L.S.El Riadh</i>	<i><u>Limites et continuité</u></i>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		<i>Solutions</i>

2/ continuité de f sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$:

$x \mapsto \cos(\frac{\pi}{2}x)$ est continue sur $\mathbb{R}$ et en particulier sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

$x \mapsto x-1$ est continue et non nulle sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

$\Rightarrow f$ est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$

en conclusion f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + a + \sqrt{x^2 + x + 1} = a + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x + 1 - x^2}{\sqrt{x^2 + x + 1} - x}$$

$$= a + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(1 + \frac{1}{x})}{-x(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1)} = a + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{-(\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1)} = a - \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} bx - \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} bx - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(1-\frac{1}{x})}{x(\sqrt{1+\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x}})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} bx - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x}}}$$

$$= -1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} bx$$

$$\text{si } b=0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$$

$$\text{si } b < 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\text{si } b > 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

2/

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x + a + \sqrt{x^2 + x + 1} = a + 1 = f(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 - x = 0$$

f est continue en 0 $\Leftrightarrow a+1=0 \Leftrightarrow a=-1$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 - x = 0 = f(1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} bx - \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2} = b - \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(x-1)(x+1)}$$

$$= b - \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^2+3}+2}{x+1} = b - 2$$

f est continue en 1 $\Leftrightarrow b-2=0 \Leftrightarrow b=2$.

2010-2011

L.S.El Riadh	<u>Limites et continuité</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Solutions

Exercice 12:

$$1/a) \text{ 1^{er} cas: } a-1=0 \Leftrightarrow a=1; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} = 1$$

$$2^{\text{ème}} \text{ cas: } a-1 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 1;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(a-1)x^2}{x} = (a-1) \lim_{x \rightarrow +\infty} x$$

$$\text{si } a > 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\text{si } a < 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 2} (a-1)x^2 + x + 3 = 2a + 3$$

$$1^{\text{er}} \text{ cas: } a > \frac{-3}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$$

$$2^{\text{ème}} \text{ cas: } a < \frac{-3}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = -\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$$

$$3^{\text{ème}} \text{ cas: } a = -\frac{3}{2}$$

$$f(x) = \frac{-\frac{5}{2}(x-2)(x+\frac{3}{5})}{x-2} = \frac{-5}{2}(x+\frac{3}{5})$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{-13}{2}$$

$$2/a) D_g = \{x \in \mathbb{R}; x^2 - x \geq 0\} =]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\sqrt{1 - \frac{1}{x}} - 2) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) + x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{\sqrt{x^2 - x} + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{1 - \frac{1}{x}} + 1} = \frac{-1}{2}$$

c) d'après b) on a :

<i>L.S.El Riadh</i>	<u>Limites et continuité</u>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		Solutions

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) - (-x + \frac{1}{2}) = 0$ donc $\Delta : y = -x + \frac{1}{2}$ est une asymptote au voisinage de $+\infty$ de ζ_g .

Exercice 13:

$1/x \mapsto x^2 + x - 2$ est positive donc $x \mapsto \sqrt{x^2 + x + 2}$ est définie sur $\mathbb{R}$, par suite f est définie sur $] -\infty, 1]$.

$x \mapsto \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 2}{x - 1}$ est définie sur $\{x \in \mathbb{R}; x^2 + 3 \geq 0; x - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ donc f est

définie sur $]1, +\infty[$

Ainsi $D_f = \mathbb{R}$.

2/

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \sqrt{x^2 + x + 2} - \frac{3}{2}x = \frac{1}{2} = f(1)$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x+1)(x-1)}{(x-1)(\sqrt{x^2 + 3} + 2)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 3} + 2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$\Rightarrow f$ est continue en 1.

$$3/ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x + 2} - \frac{3}{2}x = \lim_{x \rightarrow -\infty} x(-\sqrt{1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}} - \frac{3}{2}) = +\infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 2}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(\sqrt{1 + \frac{3}{x^2}} - \frac{2}{x})}{x(1 - \frac{1}{x})} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{3}{x^2}} - \frac{2}{x}}{1 - \frac{1}{x}} = 1 \end{aligned}$$

Exercice 14:

1/ a) $D_f = \{x \in \mathbb{R}; 2x^2 + x - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, \frac{1}{2}\}$

b)

<i>L.S.El Riadh</i>	<u><i>Limites et continuité</i></u>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		<i>Solutions</i>

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{2x^2} = -\frac{1}{2} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} xf(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3}{2x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty$$

$$f(x) = \frac{-(x+1)(x-11)}{2(x+1)(x-\frac{1}{2})} = \frac{-(x-11)}{2x-1} \quad \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -4$$

2/

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{9x^2 + 2} - ax = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\sqrt{9 + \frac{2}{x^2}} - a \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{9 + \frac{2}{x^2}} - a = 3 - a$$

$$1^{er} \text{ cas: } 3-a > 0 \Leftrightarrow 3 > a; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{9x^2 + 2} - ax = +\infty$$

$$2^{mer} \text{ cas: } 3-a < 0 \Leftrightarrow 3 < a; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{9x^2 + 2} - ax = -\infty$$

$$3^{ème} \text{ cas: } a=3; \quad \sqrt{9x^2 + 2} - 3x = \frac{2}{\sqrt{9x^2 + 2} + 3x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{9x^2 + 2} - 3x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{9x^2 + 2} + 3x} = 0$$

$$3/D_g =]-\infty, 2] \cup [5, +\infty[.$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(3 - \frac{1}{x} - \sqrt{1 - \frac{7}{x} + \frac{10}{x^2}})}{x(1 - \frac{1}{x})} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(3 - \frac{1}{x} + \sqrt{1 - \frac{7}{x} + \frac{10}{x^2}})}{x(1 - \frac{1}{x})} = 4$$

$$g(x) = \frac{(3x-1)^2 - (x^2 - 7x + 10)}{(x-1)(3x-1 + \sqrt{x^2 - 7x + 10})} = \frac{8x^2 + x - 9}{(x-1)(3x-1 + \sqrt{x^2 - 7x + 10})}$$

$$= \frac{8(x-1)(x + \frac{9}{8})}{(x-1)(3x-1 + \sqrt{x^2 - 7x + 10})} = \frac{8x+9}{3x-1 + \sqrt{x^2 - 7x + 10}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \frac{17}{4}$$

c)

2010-2011

<i>L.S.El Riadh</i>	<u><i>Limites et continuité</i></u>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		<i>Solutions</i>

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} xg(x) = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} x \right) \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)}{\lim_{x \rightarrow +\infty} x} = 0$$

L.S.El Riadh	<u>Suites</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Exercices

Exercice 1:

On considère la suite U définie sur $\mathbb{N}$ par:

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ 3U_{n+1} = 2U_n - \frac{n}{3^n} \quad ; \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1/ calculer U_1 et U_2 .

2/ montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $U_n = \frac{n+1}{3^n}$

Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + \frac{1}{3^{n+1}}$.

3/ soit la suite W définie par $W_n = 9U_{n+1} - 3U_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) montrer que W est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$.

b) Exprimer $\sum_{k=0}^{n-1} W_k$ en fonction de n .

4/ on pose $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} U_k$; $n \in \mathbb{N}^*$.

a) montrer par récurrence que $S_n = \frac{9}{4} - \frac{2n+3}{4 \cdot 3^{n-1}}$; $n \in \mathbb{N}^*$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$; exprimer $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{3^{k-1}}$ en fonction de n .

Exercice 2:

On considère la suite U définie par : U_0 et $U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n^2 + \frac{1}{2}U_n$; $n \in \mathbb{N}$.

1) on suppose que $U_0 = \frac{3}{4}$.

a) montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $0 \leq U_n < 1$.

b) Montrer que la suite U est décroissante; en déduire qu'elle est convergente et calculer sa limite.

c) Prouver que $U_{n+1} \leq \frac{7}{8}U_n$; retrouver le limite de la suite U .

2) on suppose que $U_0 = \frac{4}{3}$.

a) montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $U_n > 1$ puis que la suite U est croissante.

L.S.El Riadh	<u>Suites</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Exercices

b) Montrer que la suite U diverge vers $+\infty$.

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $U_{n+1} \geq \frac{7}{6}U_n$; retrouver $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

Exercice 3:

Soit la suite U définie par:
$$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{U_n}{\sqrt{2-U_n^2}}; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $0 \leq U_n \leq 1$.

2) a) montrer que U est décroissante et en déduire qu'elle converge.

b) déterminer la limite de la suite U .

3) montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $U_{n+1} \leq \frac{2}{\sqrt{7}}U_n$; retrouver la limite de U .

4) soit S la suite définie $\mathbb{N}^*$ par $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} U_k$.

a) montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $U_n \leq \left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)^n \frac{1}{2}$.

b) montrer que S est majorée et qu'elle est convergente.

5) soit V la suite définie sur $\mathbb{N}$ par
$$\begin{cases} V_0 = \frac{1}{2} \\ V_{n+1} = \sqrt{U_n + V_n^2}; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

a) montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $V_n \geq \frac{1}{2}$.

b) montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $0 \leq V_{n+1} - V_n \leq U_n$; en déduire que V est majorée.

c) en déduire que V est convergente.

Exercice 4:

Soit la suite U définie sur $\mathbb{N}$ par
$$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{1+U_n^2}{1+U_n}; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1) a) montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $0 < U_n < 1$.

b) étudier la monotonie de la suite U ; en déduire qu'elle est convergente et calculer sa limite.

L.S.El Riadh	<u>Suites</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Exercices

- 2) a) montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $0 < 1 - U_{n+1} < \frac{2}{3}(1 - U_n)$.
- b) en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $0 < 1 - U_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$: retrouver la limite de la suite u .
- 3) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; on pose $S_n = \sum_{k=1}^n U_k$ et $V_n = \frac{S_n}{n}$.
- a) montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $0 < n - S_n \leq 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$.
- b) en déduire la limite de la suite V .

Exercice 5:

Soit U la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par:
$$\begin{cases} U_1 = 2 \\ U_{n+1} = 2 + \frac{n^2}{U_n} ; n \in \mathbb{N}^* \end{cases}$$

- 1) a) montrer que pour tout $n \geq 2$, on a: $n < U_n < n+1$. en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.
- b) montrer que la suite U est croissante.
- 2) soit V la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par: $V_n = \frac{1}{U_n - n} - 1$.
- a) montrer que $V_{n+1} = \frac{1}{V_n + \frac{1}{n}}$.
- b) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $1 - \frac{1}{n} \leq V_n \leq 1$.
- c) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n - n)$.
- 3) on pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $S_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k V_k$.
- a) montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $S_n - \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k(V_k - 1)$.
- b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $|S_n - \frac{n+1}{2n}| \leq \frac{1}{n}$.
- c) Montrer que la suite S converge vers $\frac{1}{2}$.

L.S.El Riadh	<u>Suites</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Exercices

Exercice 6:

On considère la suite U définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0=1$ et $U_{n+1}=\frac{2+(U_n)^2}{U_n}$,

$n \in \mathbb{N}$.

1/a/ montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $U_n > 0$.

b/ étudier la monotonie de la suite U .

c/ montrer que la suite U n'est pas majorée et en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

2/ on pose $V_n = \frac{U_n^2}{4}$.

a/ montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $V_{n+1} - V_n \geq 1$.

b/ montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $V_n \geq n$; en déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$.

c/ montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $V_{n+1} - V_n \leq 1 + \frac{1}{4n}$.

3/ soit la suite W définie sur $\mathbb{N}$ par : $W_n = V_{n+1} - V_n$.

Montrer que W est convergente et calculer sa limite.

L.S.El Rjadh	<u>Suites</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Solutions

Exercice 1:

$$1/ U_1 = \frac{5}{9} ; U_2 = \frac{8}{27}$$

$$2/ U_0 = 1 = \frac{0+1}{3^0} \Rightarrow \text{la propriété est vraie pour } n=0$$

$$\text{supposons que } U_n = \frac{n+1}{3^n} \text{ et montrons que } U_{n+1} = \frac{n+2}{3^{n+1}}$$

$$3U_{n+1} = 2\frac{n+1}{3^n} - \frac{n}{3^n} = \frac{n+2}{3^n} \Rightarrow U_{n+1} = \frac{n+2}{3^{n+1}}$$

$$\Rightarrow U_n = \frac{n+1}{3^n}; n \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= \frac{2}{3}U_n - \frac{n}{3^{n+1}} = \frac{2}{3}U_n - \frac{3^n U_n - 1}{3^{n+1}} = \frac{2}{3}U_n - \frac{1}{3}U_n + \frac{1}{3^{n+1}} \\ &= \frac{1}{3}U_n + \frac{1}{3^{n+1}} \end{aligned}$$

$$3/ a) W_n = 9\frac{n+2}{3^{n+1}} - 3\frac{n+1}{3^n} = \frac{3n+6}{3^n} - \frac{3n+3}{3^n} = \frac{3}{3^n}$$

$$\Rightarrow W \text{ est une suite géométrique de raison } \frac{1}{3}$$

$$b) \sum_{k=0}^{n-1} W_k = W_0 \frac{1 - (\frac{1}{3})^n}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{9}{2} (1 - \frac{1}{3^n})$$

$$4/ a) S_1 = U_0 = 1 = \frac{9}{4} - \frac{2+3}{4 \cdot 3^0} \Rightarrow \text{c'est vraie pour } n=0$$

$$\text{supposons que } S_n = \frac{9}{4} - \frac{2n+3}{4 \cdot 3^{n-1}}; \text{ montrons que } S_{n+1} = \frac{9}{4} - \frac{2n+5}{4 \cdot 3^n}$$

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= \sum_{k=0}^n U_k = S_n + U_n = \frac{9}{4} - \frac{2n+3}{4 \cdot 3^{n-1}} + \frac{n+1}{3^n} \\ &= \frac{9}{4} - \frac{6n+9}{4 \cdot 3^n} + \frac{4n+4}{4 \cdot 3^n} = \frac{9}{4} - \frac{2n+5}{4 \cdot 3^n} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow S_n = \frac{9}{4} - \frac{2n+3}{4 \cdot 3^{n-1}}; n \in \mathbb{N}^*$$

b)

<i>L.S.El Rjadh</i>	<u>Suites</u>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		<i>Solutions</i>

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n-1} \frac{k}{3^{k-1}} &= \frac{1}{3^0} + \frac{2}{3} + \dots + \frac{n-1}{3^{n-2}} \\
&= U_0 + U_1 + \dots + U_{n-2} \\
&= \sum_{k=0}^{n-2} U_k = \left(\sum_{k=0}^{n-1} U_k \right) - U_{n-1} \\
&= S_n - \frac{n}{3^{n-1}} = \frac{9}{4} - \frac{2n+3}{3^{n-1}} - \frac{n}{3^{n-1}} = \frac{9}{4} - \frac{6n+3}{4 \cdot 3^{n-1}}
\end{aligned}$$

Exercice 2:

1) a) on a: $0 < U_0 < 1 \Rightarrow$ la propriété est vraie pour $n=0$
supposons que $0 < U_n < 1$ et montrons que $0 < U_{n+1} < 1$.

$$\begin{aligned}
\text{ona: } 0 < U_n < 1 &\Rightarrow 0 < U_n^2 < 1 \Rightarrow 0 < U_n^2 + U_n < 2 \Rightarrow 0 < U_{n+1} < 1 \\
&\Rightarrow 0 < U_n < 1 ; n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

b)

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2} U_n (U_n - 1)$$

$$\text{ona: } 0 < U_n < 1 \Rightarrow \frac{1}{2} U_n (U_n - 1) < 0$$

$\Rightarrow U$ est décroissante.

U décroissante minorée par 0 $\Rightarrow U$ est convergente.

- $U_{n+1} = f(U_n)$ avec $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2x}$.
- U converge vers l .
- f continue sur $\mathbb{R}^*$ donc en l .

$$\Rightarrow f(l) = l \Rightarrow \frac{1}{2}l(l-1) = 0 \Rightarrow l = 0 \text{ ou } l = 1$$

U étant décroissante alors $l=0$.

$$\text{c) } U \text{ est décroissante} \Rightarrow 0 < U_n \leq U_0 = \frac{3}{4} ; n \in \mathbb{N}.$$

$$\text{ona: } 0 < U_n \leq \frac{3}{4} \Rightarrow U_n + 1 \leq \frac{7}{4} \Rightarrow \frac{1}{2} U_n (1 + U_n) \leq \frac{7}{8} U_n$$

$$\Rightarrow U_{n+1} \leq \frac{7}{8} U_n ; n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow l \leq \frac{7}{8} l \Rightarrow \frac{1}{8} l \leq 0 \Rightarrow l \leq 0 \text{ et } l \geq 0 \Rightarrow l = 0$$

2) a) on a $U_0 > 1 \Rightarrow$ la propriété est vraie pour $n=0$.
Supposons que $U_n > 1$ et montrons que $U_{n+1} > 1$.

<i>L.S.El Rjadh</i>	<u>Suites</u>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		<i>Solutions</i>

$$\text{on a : } U_n > 1 \Rightarrow U_n^2 > 1 \Rightarrow U_n^2 + U_n > 2 \Rightarrow U_{n+1} > 1 \\ \Rightarrow U_n > 1 ; n \in \mathbb{N}.$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2} U_n (U_n - 1)$$

$$\text{on a : } U_n > 0 \text{ et } U_n - 1 > 0 \Rightarrow U_{n+1} - U_n > 0 \\ \Rightarrow U \text{ est une suite croissante.}$$

$$\text{b) } U \text{ étant croissante } \Rightarrow U_n \geq U_0 = \frac{4}{3} ; n \in \mathbb{N}$$

$$\text{si } U \text{ converge vers } l \Rightarrow l = \frac{1}{2} l^2 + \frac{1}{2} l \Rightarrow l = 0 \text{ ou } l = 1 \text{ et } l \geq \frac{4}{3} \text{ ce qui est impossible}$$

$$\Rightarrow U \text{ est divergente et comme elle est croissante alors elle diverge vers } +\infty.$$

c)

$$\text{on a : } U_n \geq \frac{4}{3} \Rightarrow U_{n+1} \geq \frac{7}{3} \Rightarrow \frac{1}{2} U_n (U_n + 1) \geq \frac{7}{6} U_n$$

$$\Rightarrow U_{n+1} \geq \frac{7}{6} U_n ; n \in \mathbb{N}$$

$$\text{on a : } U_1 \geq \frac{7}{6} U_0$$

$$U_2 \geq \frac{7}{6} U_1 \quad \times$$

$$\cdot \quad \times$$

$$\cdot \quad \times$$

$$U_n \geq \frac{7}{6} U_{n-1}$$

$$\Rightarrow U_n \geq \left(\frac{7}{6}\right)^n U_0 = \frac{4}{3} \left(\frac{7}{6}\right)^n$$

$$\text{comme } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{4} \left(\frac{7}{6}\right)^n = +\infty \text{ alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$$

Exercice 3:

$$1) \text{ on a } 0 \leq U_0 \leq 1 \Rightarrow \text{la propriété est vraie pour } n=0.$$

$$\text{Supposons que } 0 \leq U_n \leq 1 \text{ et montrons que } 0 \leq U_{n+1} \leq 1.$$

$$\text{On a : } 0 \leq U_n \leq 1 \Rightarrow U_n^2 \leq 1 \Rightarrow U_n^2 - 1 \leq 0 \Rightarrow 2(U_n^2 - 1) \leq 0 \Rightarrow U_n^2 \leq 2 - U_n^2$$

$$\Rightarrow U_n \leq \sqrt{2 - U_n^2} \Rightarrow \frac{U_n}{\sqrt{2 - U_n^2}} \leq 1 \Rightarrow U_{n+1} \leq 1 \text{ et } U_{n+1} \geq 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq U_{n+1} \leq 1$$

<i>L.S.El Rjadh</i>	<u>Suites</u>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		<i>Solutions</i>

donc $0 \leq U_n \leq 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$1) a) \frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{1}{\sqrt{2-U_n^2}}$$

$$\text{on a : } U_n^2 \leq 1 \Rightarrow 1 - U_n^2 \geq 0 \Rightarrow 2 - 1 - U_n^2 \geq 0 \Rightarrow 2 - U_n^2 \geq 1$$

$$\Rightarrow \sqrt{2-U_n^2} \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2-U_n^2}} \leq 1 \Rightarrow \frac{U_{n+1}}{U_n} \leq 1$$

par suite U est une suite décroissante.

U décroissante et minorée par 0 alors U est convergente.

$$b) \text{ on a : } * U_{n+1} = f(U_n) \text{ avec } f(x) = \frac{x}{\sqrt{2-x^2}}.$$

* U converge vers l .

* f continue en l car f est continue sur $[0,1]$

$$\Rightarrow f(l) = l \Rightarrow l = \frac{l}{\sqrt{2-l^2}} \Rightarrow l(\sqrt{2-l^2} - 1) = 0 \Rightarrow l = 0 \text{ ou } l = 1 \text{ ou } l = -1$$

comme $l \in [0,1]$ et U est décroissante alors $l = 0$.

$$3) U \text{ est décroissante} \Rightarrow U_n \leq U_0 = \frac{1}{2}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow 0 \leq U_n \leq \frac{1}{2} \Rightarrow U_n^2 \leq \frac{1}{4} = 2 - \frac{7}{4} \Rightarrow 2 - U_n^2 \geq \frac{7}{4} \Rightarrow \sqrt{2-U_n^2} \geq \frac{\sqrt{7}}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2-U_n^2}} \leq \frac{2}{\sqrt{7}} \text{ et } U_n \geq 0 \Rightarrow \frac{U_{n+1}}{\sqrt{2-U_n^2}} \leq \frac{2}{\sqrt{7}} U_n$$

$$\Rightarrow U_{n+1} \leq \frac{2}{\sqrt{7}} U_n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

$$\blacksquare \text{ soit } l = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n ;$$

$$U_{n+1} \leq \frac{2}{\sqrt{7}} U_n \Rightarrow l \leq \frac{2}{\sqrt{7}} l \Rightarrow l(1 - \frac{2}{\sqrt{7}}) \leq 0 \Rightarrow l \leq 0$$

$$\text{comme : } U_n \geq 0 \Rightarrow l \geq 0$$

par suite $l = 0$

$$4) a) \text{ on a : } U_0 = \frac{1}{2} \leq \left(\frac{2}{\sqrt{7}}\right)^0 \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \text{la propriété est vraie pour } n=0.$$

L.S.El Rjadh	<u>Suites</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Solutions

sup posons que $U_n \leq (\frac{2}{\sqrt{7}})^n \frac{1}{2}$ et montrons que $U_{n+1} \leq (\frac{2}{\sqrt{7}})^{n+1} \frac{1}{2}$

$$\text{on a : } U_{n+1} \leq \frac{2}{\sqrt{7}} U_n \Rightarrow U_{n+1} \leq \frac{2}{\sqrt{7}} (\frac{2}{\sqrt{7}})^n \frac{1}{2} = (\frac{2}{\sqrt{7}})^{n+1} \frac{1}{2}$$

d'où la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b)

$$S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_{n-1} \leq (\frac{2}{\sqrt{7}})^0 \frac{1}{2} + \dots + (\frac{2}{\sqrt{7}})^{n-1} \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n (\frac{2}{\sqrt{7}})^k$$

$$\sum_{k=0}^n (\frac{2}{\sqrt{7}})^k = \frac{1 - (\frac{2}{\sqrt{7}})^{n+1}}{1 - \frac{2}{\sqrt{7}}} \leq \frac{1}{1 - \frac{2}{\sqrt{7}}}$$

$$\Rightarrow S_n \leq \frac{1}{2} \frac{1}{1 - \frac{2}{\sqrt{7}}} ; n \in \mathbb{N}^*$$

$$\Rightarrow S \text{ est majorée par } \frac{1}{2(1 - \frac{2}{\sqrt{7}})}.$$

On a : $S_{n+1} - S_n = U_n \geq 0 \Rightarrow S$ est une suite croissante.
 S croissante et majorée donc convergente.

5)a) on a $V_0 = \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow$ la propriété est vraie pour $n=0$

supposons que $V_n \geq \frac{1}{2}$ et montrons que $V_{n+1} \geq \frac{1}{2}$.

$$\text{on a : } V_n \geq \frac{1}{2} \Rightarrow V_n^2 \geq \frac{1}{4} \text{ et } U_n \geq 0 \Rightarrow U_n + V_n^2 \geq \frac{1}{4} \Rightarrow \sqrt{U_n + V_n^2} \geq \frac{1}{2}$$

par suite $V_n \geq \frac{1}{2} ; n \in \mathbb{N}$

b)

$$\text{on a : } U_n \geq 0 \Rightarrow U_n + V_n^2 \geq V_n^2 ; V_n \geq 0 \Rightarrow \sqrt{U_n + V_n^2} \geq V_n$$

$$\Rightarrow V_{n+1} - V_n \geq 0$$

$$\text{on a : } V_n \geq \frac{1}{2}, n \in \mathbb{N} \Rightarrow V_{n+1} - V_n \geq 1 \Rightarrow (V_{n+1} + V_n)(V_{n+1} - V_n) \geq V_{n+1} - V_n$$

$$\Rightarrow V_{n+1}^2 - V_n^2 \geq V_{n+1} - V_n \Rightarrow U_n \geq V_{n+1} - V_n$$

par suite $0 \leq V_{n+1} - V_n \leq U_n ; n \in \mathbb{N}$.

<i>L.S.El Rjadh</i>	<u>Suites</u>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		<i>Solutions</i>

$$\text{on a : } V_1 - V_0 \leq U_0$$

$$V_2 - V_1 \leq U_1 \quad +$$

$$\cdot \quad +$$

$$\cdot \quad +$$

$$V_n - V_{n-1} \leq U_{n-1}$$

$$\frac{V_n - V_0 \leq \sum_{k=0}^{n-1} U_k = S_n \leq \frac{1}{2(1 - \frac{2}{\sqrt{7}})}}$$

$$\Rightarrow V_n \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2(1 - \frac{2}{\sqrt{7}})} \quad ; \quad n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow V \text{ est majorée par } \frac{1}{2} + \frac{1}{2(1 - \frac{2}{\sqrt{7}})}$$

b) on a $V_{n+1} - V_n \geq 0 \Rightarrow V$ est croissante.

V croissante, majorée donc convergente.

Exercice 4:

1) a) on a $0 < U_0 < 1 \Rightarrow$ la propriété est vraie pour $n=0$.

Supposons que $0 < U_n < 1$ et montrons que $0 < U_{n+1} < 1$.

On a $0 < U_n < 1 \Rightarrow 1 + U_n > 0$ et $1 + U_n^2 > 0 \Rightarrow U_{n+1} > 0$.

$$U_{n+1} - 1 = \frac{U_n^2 - U_n}{1 + U_n} = \frac{U_n(U_n - 1)}{1 + U_n}$$

on a : $U_n - 1 < 0$; $U_n > 0$; $1 + U_n > 0 \Rightarrow U_{n+1} - 1 < 0$

donc $0 < U_{n+1} < 1$

par suite $0 < U_n < 1$; $n \in \mathbb{N}$

b)

$$U_{n+1} - U_n = \frac{1 - U_n}{1 + U_n}$$

on a : $0 < U_n < 1 \Rightarrow 1 - U_n > 0$ et $1 + U_n > 0 \Rightarrow U_{n+1} - U_n > 0$

$\Rightarrow U$ est une suite croissante.

U croissante, majorée par 1 alors U est convergente.

On a:

- $U_{n+1} = f(U_n)$ avec $f(x) = \frac{1 + x^2}{1 + x}$

- U converge vers l

- f continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ donc en l

<i>L.S.El Rjadh</i>	<u>Suites</u>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		<i>Solutions</i>

$$\Rightarrow f(l)=l \Rightarrow l = \frac{1+l^2}{1+l} \Rightarrow l = 1$$

$$2) a) 1-U_{n+1} = 1 - \frac{1+U_n^2}{1+U_n} = \frac{U_n}{1+U_n}(1-U_n) \quad ; n \in \mathbb{N}$$

$$\text{on a } U \text{ est croissante} \Rightarrow U_n \geq \frac{1}{2} \quad ; n \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{2} \leq 1+U_n \Rightarrow \frac{1}{1+U_n} \leq \frac{2}{3} \quad \text{et } 0 < U_n < 1 \Rightarrow \frac{U_n}{1+U_n} \leq \frac{2}{3}$$

$$\text{et } 1-U_n > 0 \Rightarrow \frac{U_n}{1+U_n}(1-U_n) \leq \frac{2}{3}(1-U_n)$$

$$\Rightarrow U_{n+1} \leq \frac{2}{3}(1-U_n) \quad ; n \in \mathbb{N}$$

$$b) \text{ on a: } 0 < 1-U_0 = \frac{1}{2} < \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^0 \Rightarrow \text{la propriété est vraie pour } n=0.$$

$$\text{Supposons que } 0 < 1-U_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n \text{ et montrons que } 0 < 1-U_{n+1} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

$$\text{on a: } 0 < 1-U_{n+1} \leq \frac{2}{3}(1-U_n) \leq \frac{2}{3} \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

$$\Rightarrow 0 < 1-U_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n \quad ; n \in \mathbb{N}$$

1) a)

$$\text{on a: } 0 < 1-U_1 \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^0$$

$$0 < 1-U_2 \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^1 +$$

+

+

$$0 < 1-U_n \leq \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\Rightarrow 0 < n - \sum_{k=1}^n U_k \leq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1}{2} \left[\frac{2}{3} \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} \right] = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

$$\Rightarrow 0 < n - S_n \leq 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$$

L.S.El Rjadh	<u>Suites</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Solutions

b)

$$0 < 1 - V_n \leq \frac{1}{n} \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - V_n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 1$$

Exercice 5:

1/ a) on a $U_2 = \frac{3}{2} \Rightarrow 2 < U_2 < 3 \Rightarrow$ la propriété est vraie pour $n=2$.

Supposons que $n < U_n < n+1$ et montrons que $n+1 < U_{n+1} < n+2$.

$$n < U_n < n+1 \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{U_n} < \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{n^2}{n+1} < \frac{n^2}{U_n} < n \Rightarrow \frac{n^2}{n+1} + 2 < U_{n+1} < n+2$$

$$\text{comme } n+1 < \frac{n^2}{n+1} + 2 \Rightarrow n+1 < U_{n+1} < n+2$$

$$\Rightarrow n < U_n < n+1 ; n \geq 2.$$

$$\text{On a } \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$$

c) on a $n < U_n < n+1$ et $n+1 < U_{n+1} < n+2 \Rightarrow U_{n+1} > U_n \Rightarrow U$ est une suite croissante.

1) a)

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= \frac{1}{U_{n+1} - n - 1} - 1 = \frac{1}{2 + \frac{n^2}{U_n} - n - 1} - 1 = \frac{nU_n - n^2}{n^2 - nU_n + U_n} \\ &= \frac{1}{\frac{n - n(U_n - n) + (U_n - n)}{n(U_n - n)}} = \frac{1}{\frac{1}{U_n - n} - 1 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{V_n + \frac{1}{n}} \end{aligned}$$

b) on a $V_1 = 0 \Rightarrow 0 \leq V_1 \leq 1 \Rightarrow$ la propriété est vraie pour $n=1$.

Supposons que $1 - \frac{1}{n} \leq V_n \leq 1$ et montrons que $1 - \frac{1}{n+1} \leq V_{n+1} \leq 1$

$$\text{on a : } 1 - \frac{1}{n} \leq V_n \leq 1 \Rightarrow 1 \leq V_n + \frac{1}{n} \leq \frac{n+1}{n} \Rightarrow \frac{n}{n+1} \leq \frac{1}{V_n + \frac{1}{n}} \leq 1$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{n+1} \leq V_{n+1} \leq 1$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{1}{n} \leq V_n \leq 1 ; n \in \mathbb{N}^*.$$

<i>L.S.El Rjadh</i>	<u>Suites</u>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		<i>Solutions</i>

c)

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 1$$

$$V_n = \frac{1}{U_n - n} - 1 \Rightarrow U_n - n = \frac{1}{V_n + 1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n - n = \frac{1}{2}$$

3) a)

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k(V_k - 1) &= \frac{1}{n^2} \left[\left(\sum_{k=1}^n kV_k \right) - \left(\sum_{k=1}^n k \right) \right] = S_n - \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k \\ &= S_n - \frac{1}{n^2} n \frac{1+n}{2} = S_n - \frac{1+n}{2n} \end{aligned}$$

$$b) \left| S_n - \frac{n+1}{2n} \right| = \frac{1}{n^2} \left| \sum_{k=1}^n k(V_k - 1) \right| \leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n |k(V_k - 1)|$$

$$\text{on a : } 1 - \frac{1}{k} \leq V_k \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{k} \leq V_k - 1 \leq 0 \Rightarrow -1 \leq k(V_k - 1) \leq 0 \Rightarrow |k(V_k - 1)| \leq 1$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n |k(V_k - 1)| \leq \sum_{k=1}^n 1 = n$$

$$\Rightarrow \left| S_n - \frac{n+1}{2n} \right| \leq \frac{1}{n^2} n = \frac{1}{n}$$

$$c) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(S_n - \frac{n+1}{2n} \right) = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$$

Exercice 6:

1/a/ soit P : « $U_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$ »

On a $U_0 = 1 > 0$ alors P est vraie pour le premier terme.

Supposons que P est vraie jusqu'à l'ordre n et montrons qu'elle est vraie à l'ordre $n+1$

$$\text{On a } U_{n+1} = \frac{2 + U_n^2}{U_n} = U_n + \frac{2}{U_n} \text{ et } U_n > 1 \text{ alors } U_{n+1} > 1$$

D'où P est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$b/ n \in \mathbb{N}; U_{n+1} - U_n = \frac{2}{U_n} > 0 \text{ d'où } U \text{ est croissante}$$

<i>L.S.El Rjadh</i>	<u>Suites</u>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		<i>Solutions</i>

c/ supposons que U est majorée, puisqu'elle est croissante alors elle converge vers l

Dans ce cas on a : U converge vers l , $U_{n+1}=f(U_n)$ ($f(x)=\frac{2+x^2}{x}$) et f continue en l

Alors $f(l)=l \Leftrightarrow l^2=2+l^2 \Leftrightarrow 0=2$ ce qui est impossible et par suite U n'est pas majorée.

U non majorée et croissante alors U est divergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$.

$$2/a/ n \in \mathbb{N}; V_{n+1}-V_n = \frac{(U_{n+1}-U_n)(U_{n+1}+U_n)}{4} = \frac{\frac{2}{U_n}(2U_n+\frac{2}{U_n})}{4} = \frac{4+\frac{4}{U_n^2}}{4} = 1+\frac{1}{U_n^2} >$$

1.

b/ soit $P : \ll V_n \geq n, n \in \mathbb{N} \gg$

On a $V_0 \geq 0$ d'où P est vraie pour le premier terme.

Supposons que P est vraie jusqu'à l'ordre n et montrons qu'elle est vraie à l'ordre $n+1$.

On a $V_{n+1}-V_n \geq 1$ d'où $V_{n+1} \geq V_n+1 \geq n+1$.

D'où P est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = +\infty$

$$c/ V_{n+1}-V_n = 1+\frac{1}{U_n^2}; n \in \mathbb{N}.$$

On a $V_n \geq n$ d'où $U_n^2 \geq 4n$ d'où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $\frac{1}{U_n^2} \leq \frac{1}{4n}$

et par suite $1+\frac{1}{U_n^2} \leq 1+\frac{1}{4n}; n \in \mathbb{N}^*$

En fin $V_{n+1}-V_n \leq 1+\frac{1}{4n}; n \in \mathbb{N}^*$.

3/ on a $1 \leq V_{n+1}-V_n \leq 1+\frac{1}{4n}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = 1$.

L.S.El Riadh	<i>Fonctions continues sur un</i>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths	<i>intervalle: Théorème de bijection</i>	Exercices

Exercice 1:

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^3 - x^2 + 3x + 1$

1/ Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on précisera

2/ Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution $\alpha \in \left]-\frac{1}{3}, 0\right[$

Exercice 2:

Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x) = 2\sqrt{x} - x$.

1/ Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 , à gauche en 1 et déterminer le domaine de dérivabilité de f .

2/ Etudier les variations de f et montrer que f réalise une bijection de $[0,1]$ sur un intervalle que l'on précisera.

3/ Déterminer l'expression de f^{-1}

4/ Etudier la dérivabilité de f^{-1} et déterminer sa fonction dérivée.

Exercice 3:

Soit la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{4x^2 + x + 2x + 1}$

1/ a) Etudier la continuité de f sur son domaine de définition

b) déterminer le domaine de dérivabilité de f puis calculer $f'(x)$.

2/ a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur un intervalle J que l'on déterminera .

b) Etudier la dérivabilité et la continuité de f^{-1} sur J .

3/ Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout x de J

4/ Montrer que l'équation $f(x)=2$ admet dans $\mathbb{R}^+$ une solution unique

$$\alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$$

Exercice 4:

Soit f la fonction définie sur $D = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ par $f(x) = \frac{1}{\cos x}$.

1/ a) Montrer que f est dérivable sur D .

b) Etudier les variations de f et montrer qu'elle réalise une bijection

de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle I que l'on précisera

2/ étudier la dérivabilité de f^{-1} en 1 .

3/ Montrer que f^{-1} est dérivable sur $I \setminus \{1\}$ et calculer $(f^{-1})'(x)$

L.S.El Riadh	Fonctions continues sur un	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths	intervalle: Théorème de bijection	Exercices

Exercice 5:

ζ_f est la représentation graphique d'une fonction f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1/ a) Déterminer le domaine de définition D_f de f

b) Déterminer les limites de f aux bornes de son domaines D_f .

2/ f est elle dérivable à gauche en 2? Justifier ta réponse.

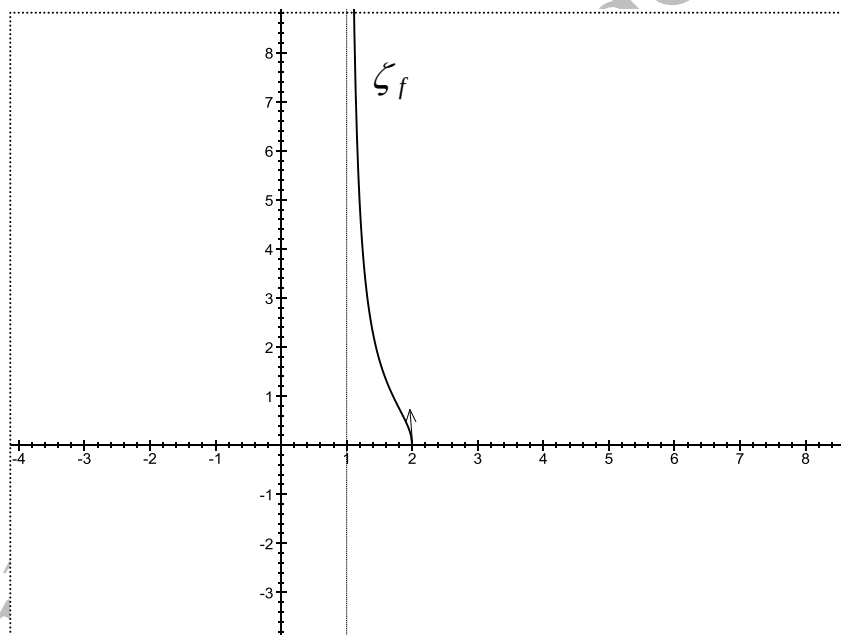
3/ dresser le tableau de variation de f .

4/

a) Montrer que f est une bijection de D_f sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) f^{-1} est elle dérivable à droite en 0? Justifier ta réponse.

c) Compléter la figure par la courbe ζ' de f^{-1} .



Exercice 6:

Soit f la fonction définie par : $f : x \mapsto \sqrt{x^2 + 2x} + x$.

1/ Déterminer le domaine de définition D_f de f .

2/ Montrer que f est dérivable sur $]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[$

3/ Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter graphiquement le résultat trouvé.

4/ Dresser le tableau de variation de f sur $[0, +\infty[$

5/ a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur l'intervalle J que l'on précisera.

L.S.El Riadh	Fonctions continues sur un	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths	intervalle: Théorème de bijection	Exercices

b) Exprimer $f^{-1}(x)$ pour tout x de J .

Exercice 7:

Soit $f :]-\pi, \pi[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)$$

1/ montrer que f est dérivable sur $]-\pi, \pi[$ et calculer sa fonction dérivée.

2/ étudier les variations de f .

3/ démontrer que f est une bijection de $]-\pi, \pi[$ sur $\mathbb{R}$. calculer $f^{-1}(1)$ et $(f^{-1})'(1)$.

4/ démontrer que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$ et expliciter $(f^{-1})'(x)$ pour tous $x \in \mathbb{R}$.

Retrouver $(f^{-1})'(1)$.

Exercice 8:

I- g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = -1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

1/ Déterminer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.

2/ Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

3/ Dresser le tableau de variation de g .

4/ Montrer que g est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on précisera

II- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x + 2 + \sqrt{x^2 + 1}$

1/ Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2/ Dresser le tableau de variation de f .

3/ Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I que l'on précisera

4/ Montrer que l'équation $f(x) = 4$ admet une unique solution dans $] -2, 0[$

5/ Déterminer $f^{-1}(3)$ et $(f^{-1})'(3)$

6/ Expliciter l'expression de $f^{-1}(x)$ pour x de I .

Exercice 9:

Soit f la fonction définie par : $f(x) = 2x + \sqrt{4x^2 - 1}$.

I/

1/ Déterminer Df .

2/ Montrer que f est dérivable sur $\left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$ puis calculer $f'(x)$

L.S.El Rjadh	<i>Fonctions continues sur un</i>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths	<i>intervalle: Théorème de bijection</i>	Exercices

3/ Etudier la dérivabilité de f à droite en $\frac{1}{2}$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

II/ Pour tout x de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on pose $h(x) = \frac{1}{2\cos x}$ et $g(x) = (f \circ h)(x)$.

1/ Montrer que h est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

2/ Déterminer $h' < \left]0, \frac{\pi}{2}\right[>$.

3/ a) Montrer que g est dérivable sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

b) prouver que $g'(x) = \frac{1 + \sin x}{\cos^2 x}$; pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

5/ Montrer que g réalise une bijection de $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ sur un intervalle que l'on précisera

<i>L.S.El Rjadh</i>	<u>Théorème de bijection</u>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		<i>Solutions</i>

Exercice 1:

1/ f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 3x^2 - 2x + 3 > 0$

f continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc réalise une bijection de $\mathbb{R}$

sur $f(\mathbb{R}) =]\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[=]-\infty, +\infty[$

2/ f est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$; $0 \in \mathbb{R}$ donc possède dans $\mathbb{R}$ un seul antécédent α par f

$\Rightarrow f(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ un unique solution α .

$$f(0) = 1 \text{ et } f(-\frac{1}{3}) = \frac{-4}{27} \Rightarrow f(0) f(-\frac{1}{3}) < 0 \Rightarrow \alpha \in]-\frac{1}{3}, 0[.$$

Exercice 2:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\sqrt{x} - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}(2 - \sqrt{x})}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = +\infty$$

Donc f n'est pas dérivable à droite en 0.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2\sqrt{x} - x - 1}{x - 1}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} -\frac{x - 2\sqrt{x} + 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} -\frac{(\sqrt{x} - 1)^2}{(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^-} -\frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1} = 0$$

Donc f est dérivable à gauche en 1.

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ donc sur $]0, 1[$, les fonction

$x \mapsto 2$ et $x \mapsto x$ sont dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $]0, 1[$.

On en conclut alors que f est dérivable sur $]0, 1[$.

$$2) \text{ Pour } x \text{ de }]0, 1[\quad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - 1 = \frac{1 - \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \geq 0.$$

f est continue et strictement croissante sur $[0, 1]$ donc elle réalise une bijection de $[0, 1]$ sur $f([0, 1]) = [0, 1]$.

x	0	1
$f'(x)$		+
f	0	1

3) pour tout $x \in [0, 1]$ et $y \in [0, 1]$; $y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(y) = x$.

Réolvons l'équation $f(y) = x$ d'inconnue y :

$$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow 2\sqrt{y} - y = x \Leftrightarrow 4y = (x + y)^2; \quad x + y \geq 0$$

$$\Leftrightarrow y^2 + 2xy + x^2 - 4y = 0 \quad ; \quad x + y \geq 0$$

$$\Leftrightarrow y^2 + 2y(x - 2) + x^2 = 0 \quad ; \quad x + y \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (y + (x - 2))^2 - (x - 2)^2 + x^2 = 0 \quad ; \quad x + y \geq 0$$

$$\Leftrightarrow (y + (x - 2))^2 = 4(1 - x) \quad ; \quad x + y \geq 0$$

$$\Leftrightarrow y = \pm 2\sqrt{1 - x} - (x - 2) \quad ; \quad x + y \geq 0$$

comme $f^{-1}(0) = 0$

alors, pour tout $x \in [0, 1]$: $f^{-1}(x) = 2 - x - 2\sqrt{1 - x}$

2010-2011

<i>L.S.El Rjadh</i>	<u>Théorème de bijection</u>	Mr Zribi
4^{ème} Maths		Solutions

4) dérivabilité de f^{-1} à gauche en 1:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} = 0 \Rightarrow \zeta_f \text{ admet au point d'abscisse 1 une demi tangente}$$

horizontale $\Rightarrow \zeta_{f^{-1}}$ admet au point d'abscisse 1 une demi tangente verticale
 $\Rightarrow f^{-1}$ n'est pas dérivable à gauche en 1.

Dérivabilité de f^{-1} à droite en 0:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = +\infty \Rightarrow \zeta_f \text{ admet au point d'abscisse 1 une demi tangente}$$

verticale $\Rightarrow \zeta_{f^{-1}}$ admet au point d'abscisse 1 une demi tangente horizontale
 $\Rightarrow f^{-1}$ est dérivable à droite en 0.

Dérivabilité de f^{-1} sur $]0,1[$:

f est dérivable et f' non nulle sur $]0,1[$ donc f^{-1} est dérivable sur $]0,1[$.

$$\text{Pour tout } x \in]0,1[; (f^{-1})'(x) = -1 + \frac{1}{\sqrt{1-x}}$$

Exercice 3:

1) a) $D_f = \{x \in \mathbb{R}; 4x^2 + x \geq 0\}$

Donc $D_f =]-\infty, -\frac{1}{4}[\cup]0, +\infty[$.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{4}$	0	$+\infty$
$4x^2 + x$	+	-	0	+

La fonction $x \mapsto 4x^2 + x$ est continue, positive sur D_f

$\Rightarrow x \mapsto \sqrt{4x^2 + x}$ est continue sur $D_f \Rightarrow f$ est continue sur D_f comme étant la somme de fonctions continues..

b) dérivabilité de f sur $]-\infty, -\frac{1}{4}[\cup]0, +\infty[$:

La fonction $x \mapsto 4x^2 + x$ est dérivable, strictement positive sur $]-\infty, -\frac{1}{4}[\cup]0, +\infty[$

$\Rightarrow x \mapsto \sqrt{4x^2 + x}$ est dérivable sur $]-\infty, -\frac{1}{4}[\cup]0, +\infty[$

et $x \mapsto 2x+1$ sur $]-\infty, -\frac{1}{4}[\cup]0, +\infty[$

$\Rightarrow f$ est dérivable sur $]-\infty, -\frac{1}{4}[\cup]0, +\infty[$.

Dérivabilité de f à gauche en $-\frac{1}{4}$:

<i>L.S.El Rjadh</i>	<u>Théorème de bijection</u>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		<i>Solutions</i>

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{1}{4}\right)^-} \frac{f(x) - f\left(-\frac{1}{4}\right)}{x + \frac{1}{4}} &= \lim_{x \rightarrow \left(-\frac{1}{4}\right)^-} \frac{\sqrt{4x^2 + x} + 2x + 1 - \frac{1}{2}}{x + \frac{1}{4}} = \lim_{x \rightarrow \left(-\frac{1}{4}\right)^-} \frac{\sqrt{4x^2 + x} + 2x + \frac{1}{2}}{x + \frac{1}{4}} \\
&= \lim_{x \rightarrow \left(-\frac{1}{4}\right)^-} \frac{\sqrt{4x\left(x + \frac{1}{4}\right)} + 2\left(x + \frac{1}{4}\right)}{x + \frac{1}{4}} = \lim_{x \rightarrow \left(-\frac{1}{4}\right)^-} \frac{\sqrt{4x\left(x + \frac{1}{4}\right)}}{x + \frac{1}{4}} + 2 \\
&= \lim_{x \rightarrow \left(-\frac{1}{4}\right)^-} \frac{4x\left(x + \frac{1}{4}\right)}{\left(x + \frac{1}{4}\right)\sqrt{4x\left(x + \frac{1}{4}\right)}} + 2 = \lim_{x \rightarrow \left(-\frac{1}{4}\right)^-} \frac{4x}{\sqrt{4x\left(x + \frac{1}{4}\right)}} + 2 = +\infty \\
&\Rightarrow f \text{ n'est pas dérivable à gauche en } -\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Dérivabilité de à droite en 0:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{4x^2 + x} + 2x + 1 - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x|\sqrt{4 + \frac{1}{x}} + 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{4 + \frac{1}{x}} + 2 = +\infty \\
&\Rightarrow f \text{ n'est pas dérivable à droite en } 0.
\end{aligned}$$

Conclusion : f est dérivable sur $\left]-\infty, -\frac{1}{4}\right[\cup]0, +\infty[$.

Pour x de $\left]-\infty, -\frac{1}{4}\right[\cup]0, +\infty[$ $f'(x) = \frac{8x+1}{2\sqrt{4x^2+x}} + 2$.

2) a) Pour x de $\mathbb{R}^+$ $f'(x) > 0$.

$\Rightarrow f$ est strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}^+$ donc f réalise une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur

$J = f[0, +\infty[=]1, +\infty[$.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
f	1	$+\infty$

b) f est continue sur $[0, +\infty[$ donc f^1 est continue sur $[1, +\infty[$.

Dérivabilité de f^1 sur $]1, +\infty[$:

f est dérivable et f' non nulle sur $]0, +\infty[\Rightarrow f^1$ est dérivable sur $]1, +\infty[$

Dérivabilité de f^1 à droite en 1:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(1)}{x - 1} &\quad \text{soit } f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow x = f(y); \quad f(0) = 1 \Leftrightarrow 0 = f^{-1}(1) \\
&= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{y - 0}{f(y) - f(0)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\frac{f(y) - f(0)}{y}} = 0 \\
&\Rightarrow f^1 \text{ est dérivable à droite en } 1.
\end{aligned}$$

<i>L.S.El Rjadh</i>	<u>Théorème de bijection</u>	Mr Zribi
4^{ème} Maths		Solutions

En conclusion f^{-1} est dérivable sur $[1, +\infty[$

Pour tout $x \in [1, +\infty[$; $(f^{-1})'(x) = \frac{2\sqrt{4x^2+x}}{8x+4\sqrt{4x^2+x}+1}$.

3/ pour tout $x \in [1, +\infty[$ et $y \in [0, +\infty[$; $y=f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(y)=x$.

Réolvons l'équation $f(y)=x$ d'inconnue y :

$$f(y) = x \Leftrightarrow \sqrt{4y^2+y} + 2y + 1 = x$$

$$\Leftrightarrow 4y^2 + y = (x - (2y + 1))^2 ; x \geq (2y + 1)$$

$$\Leftrightarrow 4y^2 + y = x^2 + 4y^2 + 1 + 4y - 4xy - 2x ; x \geq (2y + 1)$$

$$\Leftrightarrow y(-3 + 4x) = x^2 + 1 - 2x ; x \geq (2y + 1)$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{(x-1)^2}{4x-3} ; x \geq (2y + 1)$$

Donc pour tout x de $[1, +\infty[$ $f^{-1}(x) = \frac{(x-1)^2}{4x-3}$

4/ f est une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$ et $2 \in [1, +\infty[$ donc admet un unique antécédent par f dans $[0, +\infty[$

$\Rightarrow f(x)=2$ admet une unique solution α dans $[0, +\infty[$.

De plus $(f(0)-2) \cdot (f(\frac{1}{2})-2) < 0 \Rightarrow \alpha \in]0, \frac{1}{2}[$.

Exercice 4:

1/ a) la fonction $x \mapsto \cos x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{\cos x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\cos x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} = 0$$

$$\text{car } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\cos x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - \cos x}{x} = \frac{1}{2}$$

Donc f est dérivable à droite en 0

En conclusion f est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$

b) Pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$; $f'(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x} \geq 0$

2) f est continue et strictement croissante sur

$]0, \frac{\pi}{2}[$ et $f([0, \frac{\pi}{2}]) = [1, +\infty[$ donc f réalise une

bijection de $]0, \frac{\pi}{2}[$ sur $f([0, \frac{\pi}{2}]) = [1, +\infty[$.

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	0	+
f	1	$+\infty$

<i>L.S.El Rjadh</i>	<u>Théorème de bijection</u>	Mr Zribi
4^{ème} Maths		Solutions

3) $f'_d(0) = 0$ donc ζ_f admet au point d'abscisse 0 une demi tangente horizontale

$\Rightarrow \zeta_{f^{-1}}$ admet au point d'abscisse 1 une demi tangente verticale

$\Rightarrow f^{-1}$ n'est pas dérivable à droite 1.

4) f est dérivable et f' non nulle sur $]0, \frac{\pi}{2}[\Rightarrow f^{-1}$ est dérivable sur $]1, +\infty[$

pour tout $x \in]1, +\infty[$;

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(y)} = \frac{\cos^2 y}{\sin y}$$

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow x = f(y) = \frac{1}{\cos y}$$

$$= \frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}}$$

$$= \frac{1}{x \sqrt{x^2-1}}$$

$$\Leftrightarrow \cos y = \frac{1}{x} \Rightarrow \sin y = \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$$

Exercice 5:

1/ a) $D_f =]1, 2]$

b) $f(2)=0$; $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$

2/ ζ_f admet au point d'abscisse 2 une demi tangente verticale

$\Rightarrow f$ n'est pas dérivable à gauche en 2

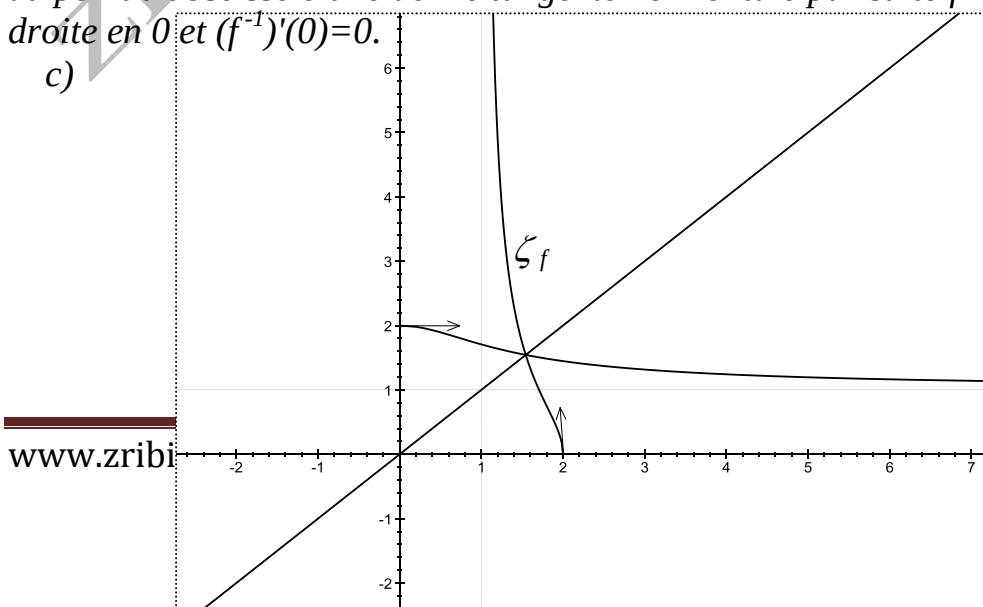
3/

x	1	2
f	$+\infty$	0

4/ a) f continue strictement décroissante sur $]1, 2]$ donc réalise une bijection de $]1, 2]$ sur $f[)1, 2] =]0, +\infty[$.

b) ζ_f admet au point d'abscisse 2 une demi tangente verticale donc $\zeta_{f^{-1}}$ admet au point d'abscisse 0 une demi tangente horizontale par suite f^{-1} est dérivable à droite en 0 et $(f^{-1})'(0) = 0$.

c)



<i>L.S.El Rjadh</i>	<u>Théorème de bijection</u>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		<i>Solutions</i>

$$\zeta_{f^{-1}}$$

Exercice 6:

1/ $D_f = \{x \in \mathbb{R}; x^2 + 2x \geq 0\} =]-\infty, -2] \cup [2, +\infty[$.

2/ $x \mapsto x^2 + 2x$ est dérivable, strictement positive sur $] -\infty, -2[\cup] 2, +\infty [$

$\Rightarrow x \mapsto \sqrt{x^2 + 2x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$

$\Rightarrow f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

3/

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + 2x} + x}{x} \\ &= 1 + \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{2}{x}}}{x} \\ &= 1 + \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{1 + \frac{2}{x}} = +\infty \end{aligned}$$

$\Rightarrow f$ n'est pas dérivable à droite en 0 et ζ_f admet que point d'abscisse 0 une demie tangente verticale dirigée vers le haut.

4/ pour tout $x \in]0, +\infty[; f'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x}} + 1 > 0$

x	0	$+\infty$
f'		+
f	0	$+\infty$

5/ a) f continue, strictement croissante sur $[0, +\infty[$ donc réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $f([0, +\infty[) = [0, +\infty[$.

b) pour tout $x \in [0, +\infty[$ et $y \in [0, +\infty[; f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow x = f(y)$.
résolvons l'équation $f(y) = x$ d'inconnue y :

$$\begin{aligned} f(y) = x &\Leftrightarrow \sqrt{y^2 + 2y} + y = x \\ &\Leftrightarrow y^2 + 2y = (x - y)^2 \quad ; \quad x - y \geq 0 \\ &\Leftrightarrow y(2 + 2x) = x^2 \quad ; \quad x - y \geq 0 \\ &\Leftrightarrow y = \frac{x^2}{2 + 2x} \end{aligned}$$

L.S.El Rjadh	<u>Théorème de bijection</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Solutions

pour tout $x \in [0, +\infty[; f^{-1}(x) = \frac{x^2}{2+2x}$.

Exercice 7:

1/ $f(x) = \text{gou}(x)$ avec $g(x) = \text{tg}x$ et $u(x) = \frac{x}{2}$.

u est dérivable sur $] -\pi, \pi[$ et $u'(x) = \frac{1}{2}$.

g est dérivable sur $u \in] -\pi, \pi[\Rightarrow] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $g'(x) = 1 + \text{tg}^2(x)$.

$\Rightarrow f = \text{gou}$ est dérivable sur $] -\pi, \pi[$ et $f'(x) = u'(x)g'(u(x))$.

Pour tout $x \in] -\pi, \pi[; f'(x) = \frac{1}{2} [1 + \text{tg}^2(\frac{x}{2})] > 0$

2/

$$\lim_{x \rightarrow -\pi^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) = +\infty$$

x	$-\pi$	π
f'	+	
f	$-\infty$	$+\infty$

3/ f continue strictement croissante sur $] -\pi, \pi[$ donc réalise une bijection de $] -\pi, \pi[$ sur $f[] -\pi, \pi[= \mathbb{R}$.

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} = f^{-1}(1)$$

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1))} = \frac{1}{f'(\frac{\pi}{2})} = 1$$

4/ f dérivable et f' non nulle sur $] -\pi, \pi[$ donc f^{-1} est dérivable sur $f[] -\pi, \pi[= \mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$;

$$\begin{aligned} (f^{-1})'(x) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} = \frac{1}{f'(y)} & f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow x = f(y) = \text{tg} \frac{y}{2} \\ &= \frac{1}{\frac{1}{2}(1 + \text{tg}^2(\frac{y}{2}))} \\ &= \frac{2}{1 + x^2} \end{aligned}$$

Exercice 8:

I/ 1/

<i>L.S.El Rjadh</i>	<u>Théorème de bijection</u>	Mr Zribi
4^{ème} Maths		Solutions

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -1 + \frac{x}{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = -1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -1 + \frac{x}{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = -1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{-\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = -2$$

2/ $x \mapsto x^2+1$ dérivable, strictement positive sur $\mathbb{R}$

$\Rightarrow x \mapsto \sqrt{x^2+1}$ dérivable sur $\mathbb{R}$ et non nulle

$\Rightarrow x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$ dérivable sur $\mathbb{R}$

$\Rightarrow f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme étant somme et produit de fonctions dérivables.

$$3/ x \in \mathbb{R}; g'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - x \cdot \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} > 0$$

x	$-\infty$	$+\infty$
g'	+	
g	-2	0

4/ g continue strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) =]-2, 0[$.

III/ 1/

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = 2 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 2$$

$$2/ x \in \mathbb{R}; f'(x) = -1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = g(x) < 0$$

x	$-\infty$	$+\infty$
f'	-	
f	$+\infty$	2

3/ f continue strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ donc réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) =]2, +\infty[$.

4/ f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]2, +\infty[$ et $0 \in]2, +\infty[$ donc possède par f un seul antécédent $\Rightarrow f(x)=4$ admet dans $\mathbb{R}$ une unique solution α .

$f(-2)-4 = \sqrt{5}$ et $f(0)-4 = -1 \Rightarrow (f(-2)-4)(f(0)-4) < 0$; d'après le théorème des valeurs intermédiaires $\alpha \in]-2, 0[$.

<i>L.S.El Rjadh</i>	<u>Théorème de bijection</u>	Mr Zribi
4^{ème} Maths		Solutions

$$5/ f(0)=3 \Leftrightarrow 0=f^{-1}(3)$$

$$(f^{-1})'(3)=\frac{1}{f'(f^{-1}(3))}=\frac{1}{f'(0)}=-1$$

$$6/ \text{ pour tout } y \in \mathbb{R}; x \in]2, +\infty[; f^{-1}(x)=y \Leftrightarrow x=f(y)$$

Réolvons l'équation $f(y)=x$ d'inconnue y :

$$f(y)=x \Leftrightarrow -y+2+\sqrt{y^2+1}=x$$

$$\Leftrightarrow y^2+1=(x-2+y)^2 \quad ; \quad x-2+y \geq 0$$

$$\Leftrightarrow 2y(x-2)=1-(x-2)^2 \quad ; x-2+y \geq 0$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1-(x-2)^2}{2(x-2)}$$

$$\text{Pour tout } x \in]2, +\infty[; f^{-1}(x)=\frac{1-(x-2)^2}{2(x-2)}$$

Exercice 9:

$$1/ D_f=\{x \in \mathbb{R}; 4x^2-1 \geq 0\} =]-\infty, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, +\infty[$$

$$2/ x \mapsto 4x^2-1 \text{ est dérivable, strictement positive sur }]\frac{1}{2}, +\infty[$$

$$\Rightarrow x \mapsto \sqrt{4x^2-1} \text{ est dérivable sur }]\frac{1}{2}, +\infty[$$

$$\text{et } f'(x)=2+\frac{4x}{\sqrt{4x^2-1}}$$

3/

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{f(x)-f(\frac{1}{2})}{x-\frac{1}{2}} &= 2 + \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{4x^2-1}{(x-\frac{1}{2})\sqrt{4x^2-1}} \\ &= 2 + \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{4(x+\frac{1}{2})}{\sqrt{4x^2-1}} = +\infty \end{aligned}$$

$$\text{III/ } 1/ x \mapsto \cos x \text{ dérivable et non nulle sur }]0, \frac{\pi}{2}[\Rightarrow h \text{ est dérivable sur }]0, \frac{\pi}{2}[.$$

$$2/ x \in [0, \frac{\pi}{2}[; h'(x)=\frac{1}{2} \frac{\sin x}{\cos^2 x} > 0$$

h continue, strictement

croissante sur $]0, \frac{\pi}{2}[$

$$\Rightarrow h \in]0, \frac{\pi}{2}[\Rightarrow]\frac{1}{2}, +\infty[$$

x	0	$\frac{\pi}{2}$
h'		+
h	$\frac{1}{2}$	$+\infty$

<i>L.S.El Rjadh</i>	<u>Théorème de bijection</u>	Mr Zribi
4^{ème} Maths		Solutions

3/ h dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et f dérivable sur $h<]0, \frac{\pi}{2}[> \Rightarrow g=f \circ h$ est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.

4/ $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$; $g'(x) = h'(x)f'(g(x))$

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= \frac{1}{2} \frac{\sin x}{\cos^2 x} \left(2 + \frac{4 \frac{1}{2 \cos x}}{\sqrt{4 \frac{1}{4 \cos^2 x} - 1}} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\sin x}{\cos^2 x} \left(2 + \frac{\frac{2}{\cos x}}{\sqrt{\frac{1 - \cos^2 x}{\cos^2 x}}} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\sin x}{\cos^2 x} \left(2 + \frac{\frac{2}{\cos x}}{\sqrt{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \frac{\sin x}{\cos^2 x} \left(2 + \frac{2}{\sin x} \right) \\
 &= \frac{1 + \sin x}{\cos^2 x}
 \end{aligned}$$

6/ g continue strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ donc réalise une bijection

de $[0, \frac{\pi}{2}[$ sur $g<[0, \frac{\pi}{2}[> = [g(0), \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} g(x)[$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} g(x) = +\infty \text{ en effet } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} h(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

**Exercice 1**

Une agence de voyages propose exclusivement trois destinations: la destination A, la destination G et la destination M. 50% des clients choisissent la destination A. 30% des clients choisissent la destination G.

20 % des clients choisissent la destination M.

Au retour de leur voyage, tous les clients de l'agence répondent à une enquête de satisfaction. Le dépouillement des réponses à ce questionnaire permet de dire que 90% des clients ayant choisi la destination M sont satisfaits, de même que 80% des clients ayant choisi la destination G. On prélève au hasard un questionnaire dans la pile des questionnaires recueillis. On note les événements : A : « le questionnaire est celui d'un client ayant choisi la destination A »;

G : « le questionnaire est celui d'un client ayant choisi la destination G »;

M : « le questionnaire est celui d'un client ayant choisi la destination M » ;

S : « le questionnaire est celui d'un client satisfait »;

$\bar{S}$: « le questionnaire est celui d'un client insatisfait ».

1. Traduire les données de l'énoncé sur un arbre de probabilité.

2. Traduire par une phrase les événements $G \cap S$ et $M \cap S$ puis calculer les probabilités $P(G \cap S)$ et $P(M \cap S)$.

L'enquête montre que 72% des clients de l'agence sont satisfaits. En utilisant la formule des probabilités totales,

3. calculer $P(A \cap S)$. En déduire $P_A(S)$, probabilité de l'événement S sachant que l'événement A est réalisé.

4. Le questionnaire prélevé est celui d'un client qui est satisfait. Le client a omis de préciser quelle destination il avait choisie. Déterminer la probabilité qu'il ait choisi la destination G

5. On prélève successivement au hasard trois questionnaires dans la pile d'enquêtes. On suppose que le nombre de questionnaires est suffisamment élevé pour considérer que les tirages successifs sont indépendants, Calculer la probabilité de l'événement : « les trois questionnaires sont ceux de clients insatisfaits »

(on donnera le résultat arrondi au millième).

Exercice 2

Dans un village de vacances, trois stages sont proposés aux adultes et aux enfants. Ils ont lieu dans la même plage horaire ; leurs thèmes sont : la magie, le théâtre et la photo numérique.

150 personnes dont 90 adultes se sont inscrites à l'un de ces stages. Parmi les 150 personnes inscrites, on relève que : la magie a été choisie par la moitié des enfants et 20% des adultes ;

27 adultes ont opté pour la photo numérique ainsi que 10% des enfants.

Recopier et compléter le tableau suivant

On appelle au hasard une personne qui s'est inscrite à un stage.

On pourra utiliser les notations suivantes

A l'événement « la personne appelée est un adulte » ;

M l'événement « la personne appelée a choisi la magie » ;

T l'événement « la personne appelée a choisi le théâtre » ;

N l'événement « la personne appelée a choisi la photo numérique ».

1. Quelle est la probabilité que la personne appelée soit un enfant ?

2. Quelle est la probabilité que la personne appelée ait choisi la photo sachant que c'est un adulte ?

3. Quelle est la probabilité que la personne appelée soit un adulte ayant choisi le théâtre ?

4. Montrer que la probabilité que la personne appelée ait choisi la magie est 0,32.

5. Le directeur du village désigne une personne ayant choisi la magie. Il dit qu'il y a deux chances sur trois pour que ce soit un enfant. A-t-il raison ? Justifier votre réponse.

6. On choisit, parmi les personnes qui désirent suivre un stage, cinq personnes au hasard. On assimile ce choix à un tirage avec remise. Quelle est la probabilité qu'une seule personne ait choisi la magie .

Exercice 3

Une enquête est réalisée auprès des clients d'une compagnie aérienne.

Elle révèle que 40% des clients utilisent la compagnie pour des raisons professionnelles, que 35% des clients utilisent la compagnie pour des raisons touristiques et le reste pour diverses autres raisons.

Sur l'ensemble de la clientèle, 40% choisit de voyager en première classe et le reste en seconde classe.

En fait, 60% des clients pour raisons professionnelles voyagent en première classe, alors que seulement 20% des clients pour raison touristiques voyagent en première classe.

On choisit au hasard un client de cette compagnie. On suppose que chaque client a la même probabilité d'être choisi.

	Magie	Théâtre	Photo numérique	Total
Adultes				
Enfants				
Total				150

On note : A l'événement « le client interrogé voyage pour des raisons professionnelles »
 T l'événement « le client interrogé voyage pour des raisons touristiques »
 D l'événement « le client interrogé voyage pour des raisons autres que professionnelles ou touristiques »
 V l'événement « le client interrogé voyage en première classe ».

Si E et F sont deux événements, on note $p(E)$ la probabilité que E soit réalisé, et $p_F(E)$ la probabilité que E soit réalisé sachant que F est réalisé. D'autre part, on notera $\bar{E}$ l'événement contraire de E .

1. Déterminer : $p(A)$, $p(T)$, $p(V)$, $p_A(V)$ et $p_T(V)$.

2.a. Déterminer la probabilité que le client interrogé voyage en première classe et pour des raisons professionnelles.

b. Déterminer la probabilité que le client interrogé voyage en première classe et pour des raisons touristiques.

c. En déduire la probabilité que le client interrogé voyage en première classe et pour des raisons autres que professionnelles ou touristiques.

3. Déterminer la probabilité que le client interrogé voyage pour des raisons professionnelles sachant qu'il a choisi la première classe.

4. Soit un entier n supérieur ou égal à 2. On choisit n « clients de cette compagnie aérienne d'une façon indépendante. On note p_n la probabilité qu'au moins un de ces clients voyage en seconde classe.

a. Prouver que : $p_n = 1 - (0,4)^n$.

b. Déterminer le plus petit entier n pour lequel $p_n > 0,9999$.

Exercice 4

Un appareil de très haute technologie est installé dans un laboratoire industriel.

L'installateur assure une maintenance à l'issue de chaque semaine d'utilisation. Pour cette maintenance, soit il doit se déplacer (intervention directe sur l'appareil), soit une assistance téléphonique suffit.

A l'issue d'une semaine de fonctionnement, trois situations sont possibles :

Situation A : l'appareil a fonctionné normalement ; Situation B : l'appareil a eu des arrêts épisodiques ;

Situation C : l'appareil a eu des arrêts très fréquents.

Dans la situation A, l'installateur doit se déplacer 1 fois sur 2.

Dans la situation B, l'installateur doit se déplacer 7 fois sur 10.

L'installateur sait par expérience que, à l'issue de chaque semaine de fonctionnement, la probabilité d'être dans la situation A est 0,6 ; la probabilité d'être dans la situation B est 0,3 ; la probabilité qu'il doive se déplacer est 0,6.

Partie A : L'appareil a été utilisé pendant une semaine.

On considère les événements suivants : A : « On se trouve dans la situation A »

B : « On se trouve dans la situation B » C : « On se trouve dans la situation C »

S : « L'installateur se déplace »

T : « L'installateur effectue une assistance téléphonique »

On pourra construire un arbre pondéré que l'on complètera au fur et à mesure.

1. Calculer la probabilité de l'événement T.

2. Démontrer que, lorsqu'on se trouve dans la situation C, la probabilité que l'installateur se déplace est 0,9.

3. On sait que l'installateur s'est déplacé. Déterminer la probabilité que l'on ait été dans la situation B.

Partie B : L'installateur devra effectuer la maintenance trois semaines de suite.

On admet que les événements qui surviendront au cours de chacune de ces trois semaines sont indépendants.

1. Quelle est la probabilité que l'installateur ait à effectuer exactement deux déplacements sur les trois semaines ?

a) Donner la loi de probabilité associée au nombre de déplacements à effectuer sur les trois semaines.

b) Montrer que l'espérance mathématique de cette loi vaut 1,8.

c) Pour l'installateur, un déplacement revient à 300 dinars (l'assistance téléphonique ne lui coûte rien).

L'installateur décide de proposer à son client un forfait pour trois semaines de maintenance.

2. Déterminer le montant minimum de ce forfait afin que l'installateur puisse espérer rentrer dans ses frais.

Exercice 5

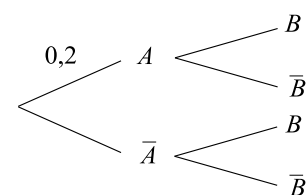
Une revue professionnelle est proposée en deux versions : une édition papier et une édition électronique consultable via internet. Il est possible de s'abonner à une seule des deux éditions ou de s'abonner à l'édition papier et à l'édition électronique. L'éditeur de la revue a chargé un centre d'appel de démarcher les personnes figurant sur une liste de lecteurs potentiels. On admet que lorsqu'un lecteur potentiel est contacté par un employé du centre d'appel, la probabilité qu'il s'abonne à l'édition papier est égale à 0,2 ; s'il s'abonne à l'édition papier, la probabilité qu'il s'abonne aussi à l'édition électronique est égale à 0,4 ; s'il ne s'abonne pas à l'édition papier, la probabilité qu'il s'abonne à l'édition électronique est égale à 0,1. Une personne figurant sur la liste de lecteurs potentiels est contactée par un employé du centre d'appel.

On note : A l'événement « la personne s'abonne à l'édition papier »,

B l'événement « la personne s'abonne à l'édition électronique »,

$\bar{A}$ l'événement contraire de A, $\bar{B}$ l'événement contraire de B.

1.a. Reproduire et compléter l'arbre suivant :



b. Donner la probabilité de $\bar{B}$ sachant A et la probabilité de $\bar{B}$ sachant $\bar{A}$.

2. Calculer la probabilité que la personne contactée s'abonne à l'édition papier et à l'édition électronique.

3. Justifier que la probabilité de l'évènement B est égale à 0,16.
4. Les évènements A et B sont-ils indépendants ?
5. On suppose que la personne contactée s'est abonnée à l'édition électronique.
Quelle est alors la probabilité qu'elle soit aussi abonnée à l'édition papier ?
6. Pour chacune des personnes contactées, le centre d'appel reçoit de l'éditeur de la revue
 - 2 dinars si la personne ne s'abonne à aucune des deux éditions ;
 - 10 dinars si la personne s'abonne uniquement à l'édition électronique ;
 - 15 dinars si la personne s'abonne uniquement à l'édition papier ; • 20 dinars si la personne s'abonne aux deux éditions.
- a. Reproduire et compléter, sans donner de justification, le tableau ci-dessous donnant la loi de probabilité de la Somme reçue par le centre d'appel pour une personne contactée.

Somme reçue en euros	2	10	15	200
Probabilité				

- b. Proposer, en expliquant votre démarche, une estimation de la somme que le centre d'appel recevra de l'éditeur s'il parvient à contacter 5000 lecteurs potentiels.

Exercice 6

Un site Internet offre la possibilité à des particuliers de vendre des objets aux enchères. Pour chaque objet, la durée des enchères dure une semaine. Si une annonce reçoit une enchère, alors la vente de l'objet est obligatoire à la fin des enchères et ce, même si le vendeur juge le prix de vente trop peu élevé. Sur ce site, une étude statistique a montré que $\frac{3}{5}$ des annonces reçoivent une première enchère le lendemain de leur parution ; dans ce cas, 75% des vendeurs sont satisfaits du prix de vente final ; $\frac{1}{3}$ des annonces reçoivent une première enchère au bout de trois jours et, dans ce cas, 57% des vendeurs sont satisfaits du prix de vente final de leur objet ; Les autres annonces ne reçoivent aucune enchère et le vendeur retire alors son objet de la vente.

On choisit au hasard une annonce mise en ligne sur le site. On note :

L : l'évènement « l'annonce reçoit une première enchère le lendemain de sa parution » ;

T : l'évènement « l'annonce reçoit une première enchère au bout de trois jours » ;

A : l'évènement « l'annonce ne reçoit aucune enchère » .

S : l'évènement « le vendeur est satisfait du prix de vente final de son objet » et $\bar{S}$ son évènement contraire.

1. Traduire la situation par un arbre de probabilité.
2. Calculer la probabilité que l'annonce ait reçu une première enchère le lendemain de sa parution et que le vendeur soit satisfait du prix de vente final.
3. Démontrer que la probabilité que le vendeur soit satisfait du prix de vente de son objet est 0,64.
4. Un objet est vendu à un prix qui satisfait son vendeur. Quelle est la probabilité que cet objet ait reçu une première enchère dès le lendemain de la parution de l'annonce
5. Marc a mis en vente le même jour trois jeux vidéo identiques sur ce site. On suppose que les déroulements de ces enchères sont indépendants les uns des autres. Calculer la probabilité qu'à la fin des enchères, Marc soit satisfait du prix de vente final d'au moins deux de ces jeux vidéo .

Exercice 7

Pour faire connaître l'ouverture d'un nouveau magasin vendant des salons, le directeur fait distribuer des bons publicitaires permettant de recevoir un cadeau gratuit sans obligation d'achat. Une enquête statistique préalable a montré que, parmi les personnes qui entrent dans le magasin 90 % entrent dans le magasin avec ce bon publicitaire. Parmi elles, 10 % achètent un salon. Parmi les personnes qui entrent sans bon publicitaire, 80 % achètent un salon. Une personne entre dans le magasin. On note : B l'évènement « la personne a un bon publicitaire ».

$\bar{B}$ l'évènement « la personne n'a pas de bon publicitaire ». S l'évènement « la personne achète un salon ».

$\bar{S}$ l'évènement contraire de S.

1. Dessiner un arbre pondéré représentant la situation.
2. À l'aide de B, $\bar{B}$, S, $\bar{S}$ traduire les évènements suivants et calculer leur probabilité à 10^{-2} près ; la personne n'achète pas de salon sachant qu'elle est venue avec un bon publicitaire ; la personne achète un salon ; la personne est venue avec un bon publicitaire sachant qu'elle a acheté un salon.
Le bon publicitaire et le cadeau associé coûtent 15 dinars au magasin. Un salon vendu rapporte 500 dinars au magasin s'il est vendu sans bon publicitaire.
3. Compléter le tableau suivant qui donne la loi de probabilité du bénéfice réalisé par le magasin selon la situation de la personne entrant.

Situation de la personne entrant	La personne a un bon publicitaire et achète un salon	La personne a un bon publicitaire et n'achète pas un salon	La personne n'a pas de bon publicitaire et achète un salon	La personne n'a pas de bon publicitaire et n'achète pas un salon
Bénéfice réalisé par le magasin en euros	485	- 15	500	0
Probabilité				

- Calculer le bénéfice moyen du magasin réalisé par personne entrant. Le directeur pense changer la valeur du cadeau offert. Soit x le prix de revient, en euros, du nouveau bon publicitaire. Calculer, dans ce cas, l'espérance E de la loi de probabilité du bénéfice du magasin en fonction de x .
- Le directeur souhaite réaliser 76 dinars de bénéfice moyen par personne entrant. Quel doit être le prix de revient x du nouveau bon publicitaire ?

Exercice 8

Lors d'une enquête réalisée par l'infirmière auprès d'élèves de classes de terminale, on apprend que 60% des élèves sont des filles. De plus 40% des filles et 30% des garçons fument.

- On choisit un élève au hasard. On note A l'événement : « L'élève choisi fume », et $p(A)$ la probabilité de cet événement. On note F l'événement : « L'élève choisi est une fille ». Quelle est la probabilité que :
 - Cet élève soit un garçon ?
 - Cet élève soit une fille qui fume ?
 - Cet élève soit un garçon qui fume ?
- Déduire des questions précédentes, en le justifiant, que $P(A) = 0,36$.
- L'enquête permet de savoir que :
 - ☐ Parmi les élèves fumeurs, la moitié ont des parents qui fument ;
 - ☐ Parmi les élèves non fumeurs, 65% ont des parents non fumeurs.
 On note B l'événement : « L'élève choisi a des parents fumeurs ». On notera $p_D(C)$ la probabilité de l'événement C sachant l'événement D . Dans cette question, on pourra s'aider d'un arbre pondéré.
 - Calculer les probabilités $P(A \cap B)$ et $P(\bar{A} \cap B)$. En déduire $p(B)$.
 - Calculer $p_B(A)$, probabilité qu'un élève fume sachant qu'il a des parents fumeurs.
Calculer $p_{\bar{B}}(A)$, probabilité qu'un élève fume sachant qu'il a des parents non fumeurs.
Quelle remarque amène la comparaison de ces deux résultats ?
- On rappelle que, pour chaque élève choisi, la probabilité qu'il soit fumeur est égale à 0,36. On choisit quatre élèves de terminale au hasard. On admettra que la population d'élèves de terminale est suffisamment grande pour que le choix d'élèves au hasard soit assimilé à un tirage avec remise.
A l'aide d'un arbre pondéré, calculer la probabilité qu'aucun de ces quatre élèves ne soit fumeur ?

Exercice 9

On considère les épreuves de courses du 100 m, 200 m ou 400 m lors des meetings internationaux d'athlétisme. On s'intéresse au nombre de faux départs survenant lors de ces épreuves. On rappelle qu'un faux départ est le démarrage d'un coureur avant le signal de départ donné par le starter, à la suite de quoi on doit donner un nouveau signal de départ. Les statistiques des années précédentes ont permis d'établir les données suivantes :

- ☐ la probabilité qu'il y ait un faux départ au premier signal est de 0,2
 - ☐ quand il y a eu un faux départ au premier signal, la probabilité qu'il y ait de nouveau un faux départ au deuxième signal est de 0,05
 - ☐ il n'y a jamais de faux départ au troisième signal. On admet que les départs sont indépendants les uns des autres.
- Représenter ces données par un arbre de probabilités.
On notera $F1$: l'événement : " il y a un faux départ au premier signal"
 $F2$: l'événement : " il y a un faux départ au deuxième signal"

2°) Montrer que la probabilité qu'il y ait exactement un faux départ est de 0,19

3°) Déterminer la loi de probabilités du nombre de faux départs donnés lors d'une épreuve quelconque.

Justifier l'affirmation suivante : " dans 20 % des épreuves, il y a au moins un faux départ"

4°) Lors d'un quart de finale au 200 m, on fait courir les athlètes en quatre séries indépendantes, soit quatre épreuves.

Calculer la probabilité qu'il y ait exactement trois séries sans faux départ au premier signal lors de ce quart de finale.

Exercice 10

Un club de remise en forme propose, outre l'accès aux salles de musculation, des cours collectifs pour lesquels un supplément est demandé lors de l'inscription. Une fiche identifie chaque membre et son type d'abonnement : avec ou sans cours collectif. Une étude sur les profils des membres de ce club a montré que

40 % des membres sont des hommes. 65 % des membres sont inscrits aux cours collectifs.

Parmi les femmes, membres de ce club, seulement 5 % ne sont pas inscrites aux cours collectifs.

On choisit une fiche au hasard et on considère les événements suivants

H : « la fiche est celle d'un homme », F : « la fiche est celle d'une femme »,

C : « la fiche est celle d'un membre inscrit à des cours collectifs ».

Rappel de notation : Si A et B sont deux événements donnés, $p(A)$ désigne la probabilité de A et $p_B(A)$ désigne la probabilité conditionnelle de A sachant B .

1) Donner les probabilités suivantes : $p(H)$, $p_F(\bar{C})$, $p_F(C)$ et les reporter sur un arbre pondéré modélisant la situation qui sera complété au cours de la résolution de l'exercice.

2) a) Déterminer $p(F \cap C)$. b) Montrer que $p(H \cap C) = 0,08$.

c) On tire la fiche d'un homme, quelle est la probabilité que celui-ci soit inscrit aux cours collectifs ?

d) Compléter l'arbre pondéré de la question 1.

3) On choisit au hasard une fiche d'un membre non inscrit aux cours collectifs.

Quelle est la probabilité que ce soit celle d'un homme ? (donner la valeur décimale arrondie au centième).

4) Pour vérifier la bonne tenue de son fichier, la personne chargée de la gestion de ce club prélève une fiche au hasard et la remet après consultation. Elle procède ainsi trois fois de suite.

Quelle est la probabilité qu'au moins une des fiches soit celle d'un membre non inscrit aux cours collectifs ?

Exercice 11

Les parties A et B sont indépendantes.

À la rentrée scolaire, on fait une enquête dans une classe de sixième comprenant 25 élèves.

Partie A :

On sait que, dans cette classe, 48% des élèves ont 11 ans, 15 ont 13 ans et les autres ont 12 ans. Ces élèves utilisent deux types de sacs de cours : le sac à dos ou le cartable classique. 15 élèves, dont les 23 ont 11 ans, ont acheté un cartable classique ; les autres, dont la moitié ont 12 ans, ont acheté un sac à dos.

1. Recopier le tableau suivant sur votre copie et le compléter à l'aide des données de l'énoncé :

2- On interroge au hasard un élève de cette classe et on note :

S l'évènement : « l'élève a un sac à dos ».

C l'évènement : « l'élève a un cartable ».

T l'évènement : « l'élève a treize ans ».

a. Montrer que $p(S) = 0,4$.

b. Calculer $p(C \cap T)$.

	Sac à dos	Cartable	Total
11 ans			
12 ans			
13 ans			
Total			25

3- On interroge successivement et de manière indépendante trois élèves de cette classe ;

Quelle est la probabilité qu'exactement deux d'entre eux aient un sac à dos ?

Partie B :

À leur inscription, ces élèves doivent souscrire une assurance scolaire ; deux types de contrats annuels sont proposés. D'après des études statistiques, le contrat A dont le coût est de 20 dinars est choisi avec une probabilité de 0,7 et le contrat B dont le coût est de 30 dinars est choisi avec une probabilité de 0,3.

De plus, le collège propose une adhésion facultative au foyer coopératif, d'un montant de 15 dinars.

Indépendamment du contrat d'assurance choisi, 40% des élèves prennent une carte d'adhérent du foyer.

On note : A l'évènement : « l'élève a choisi le contrat A » B l'évènement : « l'élève a choisi le contrat B »

F l'évènement : « l'élève est adhérent du foyer ».

1- Construire l'arbre des probabilités associé à la situation décrite ci-dessus.

2- Quelle est la probabilité qu'un élève ait pris le contrat B et soit adhérent du foyer ?

3- À chaque élève pris au hasard, on associe le coût X de son inscription (assurance scolaire plus adhésion éventuelle au foyer) ;

a. Quelles sont les valeurs possibles de ce coût ?

b. Établir la loi de probabilité de ce coût et présenter le résultat dans un tableau.

c. Calculer l'espérance mathématique de cette loi. Quelle interprétation peut-on en donner ?

Exercice n°12

Une étude statistique indique que 95 % des téléviseurs fabriqués par une entreprise sont en état de fonctionnement.

On fait subir à chaque appareil un test de contrôle. On constate que :

- quand un appareil est en état de fonctionnement, il est accepté dans 96 % des cas à l'issue du test ;

- quand un appareil n'est pas en état de fonctionnement, il est néanmoins accepté dans 8 % des cas à l'issue du test. On choisit au hasard un téléviseur fabriqué par l'entreprise. On définit les événements suivants :

F : « le téléviseur est en état de fonctionnement » ; T : « le téléviseur est accepté à l'issue du test » ;

$\bar{T}$: « le téléviseur est refusé à l'issue du test ». Ainsi : la probabilité de l'évènement F, notée $p(F)$ est 0,95 ;

la probabilité $p_F(T)$ qu'un téléviseur soit accepté à l'issue du test sachant qu'il est en état de fonctionnement est 0,96.

1. Calculer la probabilité que le téléviseur ne soit pas en état de fonctionnement.

2.a. Calculer la probabilité que le téléviseur soit refusé à l'issue du test et qu'il soit en état de fonctionnement

b. Calculer la probabilité qu'un téléviseur soit refusé à l'issue du test sachant qu'il est en état de fonctionnement.

c. Calculer la probabilité que le téléviseur soit refusé à l'issue du test et qu'il ne soit pas en état de fonctionnement.

3. En déduire la probabilité pour que le téléviseur soit refusé à l'issue du test.

4. Quelle est la probabilité pour qu'un téléviseur soit en état de fonctionnement sachant qu'il est refusé à l'issue du test ? (On donnera la valeur décimale arrondie au millième du résultat.)

Exercice 13

En 1998 un constructeur automobile français a vendu dans la catégorie "petites voitures" 283049 véhicules répartis de la façon suivante : 86214 du modèle A, 166 937 du modèle B, le reste du modèle C.

Le constructeur estime que la probabilité de choix d'un de ces modèles par un client ayant l'intention d'acheter une voiture de cette catégorie, est égale à la fréquence de vente de ce modèle dans la catégorie "petites voitures" de cette marque.

Les résultats seront arrondis à trois décimales.

- Déterminer la probabilité qu'un client acheteur choisisse le modèle B.
- Quelle est la probabilité qu'il ne choisisse pas le modèle B ?
- Trois clients achètent un véhicule dans la catégorie "petites voitures", leur choix se fait de façon indépendante. On appelle X la variable aléatoire donnant le nombre de clients parmi les trois qui achètent le modèle B.
 - Construire un arbre de probabilité et déterminer la loi de probabilité de X.
 - Calculer l'espérance mathématique de X.
- Représenter la fonction de répartition de X.
- Quelle est la probabilité pour qu'au plus deux clients sur les trois achètent un véhicule du modèle B ?

Correction

Exercice 1

1) Les données de l'énoncé nous permettent d'établir que : $p(A) = 0,5$

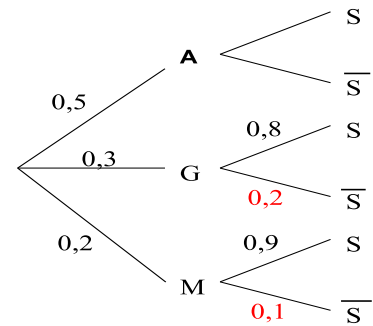
$p(B) = 0,3$, et $p(M) = 0,2$ (pourcentages de l'énoncé)

De surcroît, puisque « 90% des clients ayant choisi la destination M sont satisfaits », on aura $p_M(S) = 0,9$.

donc $p_M(\bar{S}) = 1 - p_M(S) = 1 - 0,9 = 0,1$.

De même $p_G(S) = 0,8$ donc $p_G(\bar{S}) = 1 - 0,8 = 0,2$

Les probabilités notées en rouge ont été calculées en appliquant la loi des nœuds : « la somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1. »



2) a) $G \cap S$ est l'événement « le questionnaire est celui d'un client satisfait ayant choisi la destination G ».

Sa probabilité est : $p(G \cap S) = p(G) \times p_G(S) = 0,3 \times 0,8 = 0,24$.

$M \cap S$ est l'événement « le questionnaire est celui d'un client satisfait ayant choisi la destination M ».

Sa probabilité est : $p(M \cap S) = p(M) \times p_M(S) = 0,2 \times 0,9 = 0,18$.

b) L'énoncé nous fournit : $p(S) = 0,72$. Les événements A, G et M forment une partition de l'univers,

Donc, d'après la formule des probabilités totales, on a : $p(S) = p(A \cap S) + p(G \cap S) + p(M \cap S)$

Or, $p(S) = 0,72$, $p(G \cap S) = 0,24$ et $p(M \cap S) = 0,18$.

Donc, $p(A \cap S) = p(S) - p(G \cap S) - p(M \cap S) = 0,72 - 0,24 - 0,18 = 0,3$.

c) On en déduit : $p_A(S) = \frac{p(A \cap S)}{p(A)} = \frac{0,3}{0,5} = 0,6$

3) La probabilité que le client ait choisi la destination G sachant

qu'il est satisfait est égale à : $p_S(G) = \frac{p(G \cap S)}{p(S)} = \frac{0,24}{0,72} = \frac{1}{3}$

4. Tirer un questionnaire est une épreuve de Bernoulli dont l'issue succès est S

« Le client est satisfait » de probabilité $p(S) = 0,72$.

Les tirages des trois questionnaires sont indépendants, il s'agit d'un schéma de Bernoulli. On peut traduire ce schéma de Bernoulli par l'arbre pondéré suivant :

D'où, la probabilité cherchée est : $p = p(\bar{S})^5 = (1 - p(S))^5 = (1 - 0,72)^5 = 0,28^5 = 0,00172$.

Exercice n°2

1) On complète le tableau en calculant successivement : Le nombre d'enfants = 150 - 90 = 60.

Le nombre d'enfants ayant choisi la magie : 50% des 60 enfants, soit 30 enfants

Le nombre d'adultes ayant choisi la magie : 20% des 90 adultes, soit 18 adultes

Le nombre d'enfants ayant choisi la photo : 10% des 60 enfants, soit 6 enfants

Les autres nombres sont obtenus par additions et soustractions

	Magie	Théâtre	Photo numérique	Total
Adultes	18	45	27	90
Enfants	30	24	6	60
Total	48	69	33	150

2) a) Si on note Ω l'ensemble des 150 personnes, par application de la formule du calcul des probabilités, en cas d'équiprobabilité, on établit que la probabilité que la personne appelée soit un enfant vaut :

$$p(\bar{A}) = 1 - p(A) = 1 - \frac{90}{150} = \frac{60}{150} = \frac{2}{5} = 0,4.$$

b) Sachant que « 27 adultes ont opté pour la photo numérique », sur un total de 90 adultes, la probabilité

que la personne appelée ait choisi la photo sachant que c'est un adulte vaut $p_A(N) = \frac{27}{90} = \frac{3}{10} = 0,3$

c) D'après le tableau, la probabilité que la personne appelée soit un adulte ayant choisi le théâtre vaut

$$p(A \cap T) = \frac{45}{150} = \frac{3}{10}$$

3) 1ère méthode : On lit « directement » dans le tableau que la probabilité que la personne appelée ait

choisi la magie vaut $p(M) = \frac{48}{150} = \frac{8}{25} = 0,32$

2ème méthode : Les événements A , $\bar{A}$ et M forment une partition de l'univers, Donc, d'après la formule

des probabilités totales, on a : $p(M) = p(A \cap M) + p(\bar{A} \cap M) = \frac{18}{150} + \frac{30}{150} = \frac{48}{150} = 0,32$

$$p(M) = p(A \cap M) + p(\bar{A} \cap M) = p(A) \times p_A(M) + p(\bar{A}) \times p_{\bar{A}}(M)$$

$$\text{ou encore } = \frac{90}{150} \times \frac{18}{90} + \frac{60}{150} \times \frac{30}{60} = \frac{18}{150} + \frac{30}{150} = \frac{48}{150} = 0,32$$

4) On calcule $p_M(\bar{A}) = \frac{p(A \cap M)}{p(M)} = \frac{30/150}{0,32} = 0,625$. Le directeur du village **a tort** en affirmant qu'il y a

deux chances sur trois pour que ce soit un enfant.

5. On répète successivement trois fois de manière indépendante une épreuve consistant à choisir une personne, et qui peut se solder par

un succès (il a choisi la magie), de probabilité $p = 0,32$, ou un

échec, de probabilité $q = 1 - p = 1 - 0,32 = 0,68$

On peut modéliser cette expérience par un arbre ou

on note M le succès et $\bar{M}$ l'échec. On obtient :

Pour déterminer la probabilité qu'il y ait, parmi ces trois personnes, exactement une personne ayant choisi la magie, il faut dénombrer le nombre de chemins de

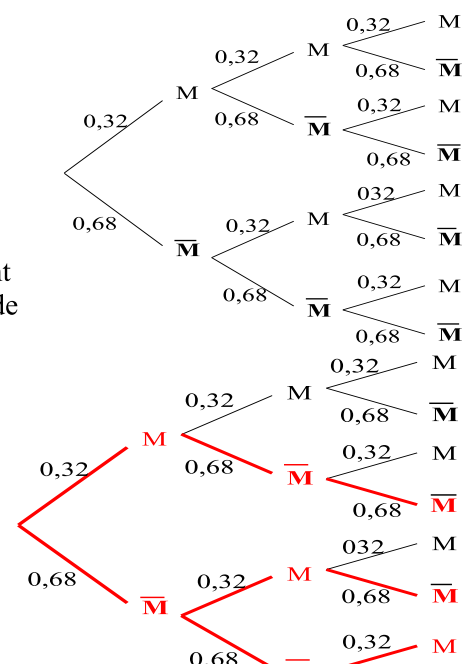
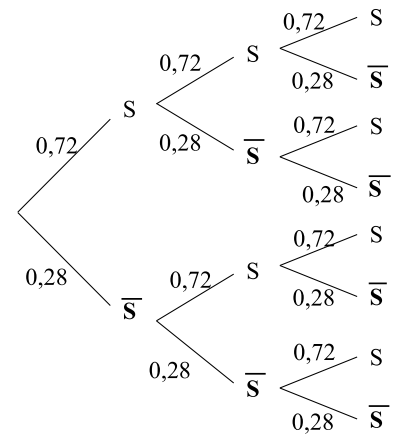
l'arbre répondant à cette possibilité, chacun de ces chemins ayant pour poids

$$0,32 \times (0,68)^2.$$

Il y a trois chemins répondant à cette possibilité : $(M; \bar{M}; \bar{M})$,

$(\bar{M}; M; \bar{M})$ et $(\bar{M}; \bar{M}; M)$ (chemins surlignés sur l'arbre) :

La probabilité que le directeur choisisse parmi ces trois personnes, exactement une personne ayant choisi la magie vaut



$$3 \times 0,32 \times (0,68)^2 \approx 0,44 \text{ arrondie au centième.}$$

Exercice 3

Un arbre pondéré pour résumer l'énoncé :

A l'événement « le client interrogé voyage pour des raisons professionnelles »

T l'événement « le client interrogé voyage pour des raisons touristiques »

D l'événement « le client interrogé voyage pour des raisons autres que professionnelles ou touristiques »

F l'événement « le client interrogé voyage en première classe ».

Si E et F sont deux événements, on note $p(E)$ la probabilité que E soit réalisé,

et $p_F(E)$ la probabilité que E soit réalisé sachant que F est réalisé. D'autre

part, on notera $\bar{E}$ l'événement contraire de E . $p(V) = 0,4$; $p(\bar{V}) = 0,6$

1. 40% des clients utilisent la compagnie pour des raisons professionnelles : $p(A) = 0,4$;

35 % des clients utilisent la compagnie pour des raisons touristiques $p(T) = 0,35$.

Sur l'ensemble de la clientèle, 40% choisit de voyager en première classe : $p(V) = 0,4$,

60 % des clients pour raison professionnelles voyagent en première classe : $p_A(V) = 0,6$;

20 % des clients pour raison touristiques voyagent en première classe : $p_T(V) = 0,2$

2.a. $p(A \cap V) = p_A(V) \times p(A) = 0,6 \times 0,4 = 0,24$.

b. $p(T \cap V) = p_T(V) \times p(T) = 0,35 \times 0,2 = 0,07$.

c. Les événements A, T, D et V forment une partition de l'univers, Donc, d'après la formule des probabilités totales, on a $p(V) = p(A \cap V) + p(T \cap V) + p(D \cap V)$. Or $D \cap V$ est l'événement : « que le client interrogé voyage en première classe et pour des raisons autres que professionnelles ou touristiques » d'où $p(D \cap V) = p(V) - p(A \cap V) - p(T \cap V) = 0,4 - 0,24 - 0,07 = 0,09$.

3. La probabilité que le client interrogé voyage pour des raisons professionnelles sachant qu'il a choisi

la première classe est : $p_V(A) = \frac{p(A \cap V)}{p(V)} = \frac{0,24}{0,4} = 0,6$.

4. a. Notons V_n l'événement : " au moins un de ces n clients voyage en seconde classe ", alors $\bar{V}_n$ représente l'événement : " aucun des n clients voyage en seconde classe "

On choisit n clients de cette compagnie aérienne d'une façon indépendante donc :

$$p(\bar{V}_n) = (p(\bar{V}))^n = (1 - 0,6)^n = (0,4)^n. \quad p_n = p(V_n) = 1 - p(\bar{V}_n) = 1 - (0,4)^n$$

b. $p_n > 0,9999 \Rightarrow 1 - (0,4)^n > 0,9999 \Rightarrow -(0,4)^n > -0,0001 \Rightarrow (0,4)^n < 0,0001$

$$\ln(0,4)^n < \ln(0,0001) = -\ln(100001) \Rightarrow n \ln(0,4) < -n \ln(100001) \Rightarrow n > \frac{-\ln(100001)}{\ln(0,4)} \approx 10,05$$

le plus petit entier n pour lequel $p_n > 0,9999$ est donc $n = 11$.

Exercice 4

Partie A : L'appareil a été utilisé pendant une semaine

1. Les événements S et T forment une partition de l'univers, puisque il n'y a que 2 issues possibles à la maintenance : soit l'installateur se déplace soit il effectue une assistance téléphonique.

S est l'événement « L'installateur se déplace », donc on a $p(S) = 0,6$.

Or $S \cap T = \emptyset$, puisque les événements S et T sont incompatibles.

Par conséquent $p(S) + p(T) = 1$ et on a : $p(T) = 1 - p(S) = 1 - 0,6 = 0,4$.

2. on cherche à calculer la probabilité conditionnelle « l'installateur se déplace

Sachant qu'il se trouve dans la situation C : $p_C(S) : p_C(S) = \frac{p(C \cap S)}{p(C)}$.

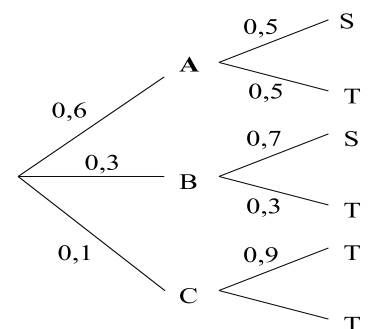
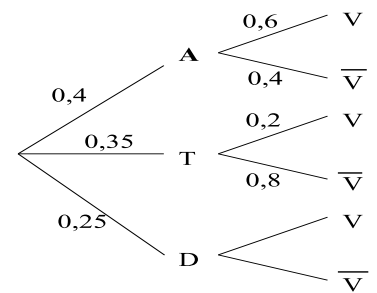
Calculons $p(C)$: on sait que les événements A, B et C forment une partition de l'univers puisque à l'issue de chaque semaine de fonctionnement, ce sont les trois seules issues possibles.

$p(A) + p(B) + p(C) = 1$ et par conséquent $p(C) = 1 - 0,6 - 0,3 = 0,1$.

Les événements A, B, C et S forment une partition de l'univers, donc d'après le théorème des probabilités totales On obtient $p(S) = p(A \cap S) + p(B \cap S) + p(C \cap S)$.

$p(C \cap S) = p(S) - p(A \cap S) - p(B \cap S)$. Or $p(A \cap S) = p_A(S) \times p(A) = 0,5 \times 0,6 = 0,3$ et

$p(B \cap S) = p_B(S) \times p(B) = 0,7 \times 0,3 = 0,21$ et enfin $p(C \cap S) = 0,6 - 0,3 - 0,21 = 0,09$.



On déduit alors que $p_C(S) = \frac{p(C \cap S)}{p(C)} = \frac{0,09}{0,1} = 0,9$.

3. On sait que l'installateur s'est déplacé. la probabilité que l'on ait été dans la situation B est $p_S(B)$.

En utilisant la formule de probabilité conditionnelle et on a : $p_S(B) = \frac{p(B \cap S)}{p(S)} = \frac{0,21}{0,6} = 0,35$.

Partie B

1. on est en présence d'un schéma de Bernoulli, constitué de trois épreuves de Bernoulli indépendantes, chaque épreuve ayant deux issues possibles.

L'installateur a effectué un déplacement $p = p(S) = 0,6$

L'installateur a effectué une maintenance téléphonique $1-p = 1 - p(S) = 1 - 0,6 = 0,4$.

On dénombre sur cet arbre 3 trajets conduisant à l'événement :

« l'installateur effectue exactement deux déplacements sur les trois semaines »

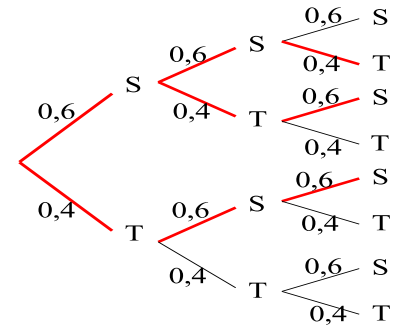
La probabilité cherchée est $p(d_2) = p(SST) + p(STS) + p(TSS)$

$$p(d_2) = 0,6 \times 0,6 \times 0,4 + 0,6 \times 0,4 \times 0,6 + 0,4 \times 0,6 \times 0,6 = 3 \times 0,4 \times (0,6)^2 = 0,432.$$

la probabilité que l'installateur ait à effectuer exactement deux déplacements sur les trois semaines est 0,432

2. La loi de probabilité associée au nombre de déplacements à effectuer sur les trois semaines est une loi binomiale

De paramètre $n=3$ et $p=0,6$.



Nombre de déplacement sur 3 semaines	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	$p_0 = C_3^0 p^0 (1-p)^3$ $p_0 = 0,4^3 = 0,064$	$p_1 = C_3^1 p^1 (1-p)^2$ $p_1 = 3 \times 0,4^2 \times 0,6$ $p_1 = 0,288$	$p_2 = C_3^2 p^2 (1-p)^1$ $p_2 = 3 \times 0,4 \times 0,6^2$ $p_2 = 0,432$	$p_3 = C_3^3 p^3 (1-p)^0$ $p_3 = 0,4^0 \times 0,6^3$ $p_3 = 0,6^3 = 0,216$

b. L'espérance mathématique $E(X)$ de cette loi vaut : $E(X) = 0 \times 0,064 + 1 \times 0,288 + 2 \times 0,432 + 3 \times 0,216 = 1,8$

c. l'installateur effectue en moyenne sur 3 semaines : 1,8 déplacements.

Le montant minimum du forfait doit donc être égal à $1,8 \times 300 = 540$ €.

L'installateur doit donc proposer un forfait de 540 dinars au minimum pour espérer rentrer dans ses frais.

Exercice 5

Partie I

1. A l'événement « la personne s'abonne à l'édition papier », donc $p(A) = 0,2$.

s'il s'abonne à l'édition papier, la probabilité qu'il s'abonne aussi à l'édition électronique est égale à 0,4 : c'est-à-dire $p_A(B) = 0,4$

s'il ne s'abonne pas à l'édition papier, la probabilité qu'il s'abonne à l'édition électronique est égale à 0,1 : c'est-à-dire $p_{\bar{A}}(B) = 0,1$

a on complète d'abord l'arbre avec les données fournies ci-dessus :

b. on sait que la somme de probabilités issue d'un nœud est égale à 1 donc

on a $p_A(\bar{B}) + p_A(B) = 1$ et $p_{\bar{A}}(\bar{B}) + p_{\bar{A}}(B) = 1$, d'où : $p_A(\bar{B}) = 0,6$ et $p_{\bar{A}}(\bar{B}) = 0,9$

2. on a : $p(A \cap B) = p(A)p_A(B) = 0,2 \times 0,4 = 0,08$

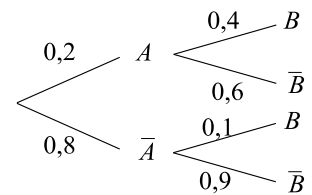
3. Les événements A, $\bar{A}$, et B forment une partition disjointes de l'univers, donc d'après le théorème des probabilités totales. On obtient

$$p(B) = p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B) = 0,08 + p(\bar{A})p_{\bar{A}}(B) = 0,08 + 0,8 \times 0,1 = 0,16.$$

4. on a $p_B(A) = \frac{p(B \cap A)}{p(B)} = \frac{0,08}{0,16} = 0,5$

5. $p(A \cap B) = 0,08$; $p(A) \times p(B) = 0,2 \times 0,16 = 0,032$, les événements A et B ne sont pas indépendants.

6. a. On a :



Pour une somme de 2 dinars	$p(\bar{A} \cap \bar{B}) = p(\bar{A})p_{\bar{A}}(\bar{B}) = 0,8 \times 0,9 = 0,72$
Pour une somme de 10 dinars	$p(\bar{A} \cap B) = p(\bar{A})p_{\bar{A}}(B) = 0,8 \times 0,1 = 0,08$
Pour une somme de 15 dinars	$p(A \cap \bar{B}) = p(A)p_A(\bar{B}) = 0,2 \times 0,6 = 0,12$
Pour une somme de 20 dinars	$p(A \cap B) = p(A)p_A(B) = 0,2 \times 0,4 = 0,08$

Somme reçue en euros s_i	2	10	15	200
Probabilité $p(S = s_i)$	0,72	0,08	0,12	0,08

b. L'espérance mathématique de cette loi de probabilité est $E(S) = 2 \times 0,72 + 10 \times 0,08 + 15 \times 0,12 + 20 \times 0,08 = 5,64$.

Le centre d'appel peut espérer recevoir en moyenne 5,64 dinars par appel. Pour 5 000 clients contactés, son espérance

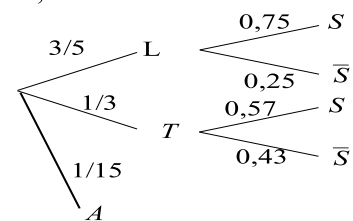
de gain est de : $5000 \times 5,64 = 28200$. La somme que le centre d'appel recevra de l'éditeur s'il parvient à contacter 5 000 lecteurs potentiels est estimée à 28 200 dinars.

Exercice 6

1. 3/5 des annonces reçoivent une première enchère le lendemain de leur parution ; dans ce cas, 75 % des vendeurs sont satisfaits du prix de vente final ; donc $p(L) = 3/5$ et $p_L(S) = 0,75$. et on a : $p_L(\bar{S}) = 1 - 0,75 = 0,25$
 1/3 des annonces reçoit une première enchère au bout de trois jours et, dans ce cas, 57 % des vendeurs sont satisfaits du prix de vente final de leur objet ; donc $p(T) = 1/3$ et $p_T(S) = 0,57$, donc
 $p_T(\bar{S}) = 1 - 0,57 = 0,43$.

Les autres annonces ne reçoivent aucune enchère et le vendeur retire alors son

objet de la vente. Donc $p(A) = 1 - p(L) - p(T) = 1 - \frac{3}{5} - \frac{1}{3} = \frac{1-9-5}{15} = \frac{1}{15}$.



2. La probabilité que l'annonce ait reçu une première enchère le lendemain de sa

Parution et que le vendeur soit satisfait du prix de vente final est égale à $p(L \cap S) = p(L)p_L(S) = 0,6 \times 0,75 = 0,45$.

3. la probabilité que le vendeur soit satisfait du prix de vente de son objet est égale à $p(S)$.

Or les événements L, T, A et S forment une partition disjointes de l'ensemble des annonces mise en ligne, donc, d'après la formule des probabilités totales, on a : $p(S) = p(L \cap S) + p(T \cap S) + p(A \cap S)$

$p(S) = p(L \cap S) + p(T) \times p_T(S) + p(A) \times p_A(S) = 0,45 + (1/3) \times 0,57 + 0 = 0,64$ ($p_A(S) = 0$ puisque l'annonce est retiré de la vente).

4. un objet est vendu à un prix qui satisfait son vendeur, la probabilité que cet objet ait reçu une première enchère dès le lendemain de la parution de l'annonce est égale à

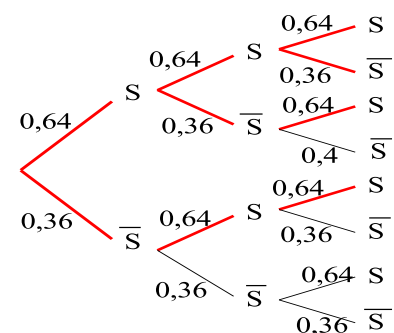
$$p_S(L) = \frac{p(S \cap L)}{p(S)} = \frac{0,45}{0,64} \approx 0,70$$

5. La loi de probabilité associée à cette expérience est une loi binomiale de paramètre 3 (car il y a 3 jeux de mise en vente) est 0,64 puisque la probabilité que le vendeur soit satisfait est 0,64).

Représentons la situation par un arbre

L'événement « Marc soit satisfait du prix de vente final d'au moins deux de ces jeux vidéo » correspond aux chemins : $SS\bar{S}$; $S\bar{S}S$; $\bar{S}SS$ et SSS , donc la probabilité p de cet événement est :

$$p = 3 \times (0,64)^2 \times 0,36 + (0,64)^3 \approx 0,70$$



Exercice 7

1. parmi les personnes qui entrent au magasin :

90 % entrent dans le magasin avec ce bon publicitaire, donc $p(B) = 0,9$ et $p(\bar{B}) = 1 - p(B) = 1 - 0,9 = 0,1$.

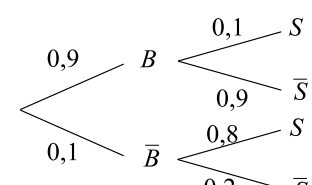
90 % entrent dans le magasin avec ce bon publicitaire et parmi elles, 10 % achètent un salon

Donc $p_B(S) = 0,1$ et $p_B(\bar{S}) = 1 - p_B(S) = 1 - 0,1 = 0,9$.

Parmi les personnes qui entrent sans bon publicitaire, 80 % achètent un salon,

donc $p_{\bar{B}}(S) = 0,8$ et $p_{\bar{B}}(\bar{S}) = 1 - p_{\bar{B}}(S) = 1 - 0,8 = 0,2$.

L'arbre pondéré représentant la situation est



2. a. la personne n'achète pas de salon sachant qu'elle est venue avec un bon publicitaire se traduit par : $p_B(\bar{S}) = 1 - p_B(S) = 1 - 0,1 = 0,9$
- b. la personne achète un salon se traduit par S . or S, B et $\bar{B}$ forment une partition de l'ensemble des personnes entrant dans le magasin ($S \cap B$ et $S \cap \bar{B}$ sont disjoints), donc d'après la formule des probabilités totales, on a $p(S) = p(S \cap B) + p(S \cap \bar{B}) = p(B)p_B(S) + p(\bar{B})p_{\bar{B}}(S) = 0,9 \times 0,1 + 0,1 \times 0,8 = 0,17$
- c. la personne est venue avec un bon publicitaire sachant qu'elle a acheté un salon se traduit par B sachant S et on a : $p_S(B) = \frac{p(S \cap B)}{p(S)} = \frac{0,09}{0,17} \approx 0,53$

II

Soit X la variable aléatoire associée au bénéfice réalisé par le magasin selon la situation de la personne entrant X peut prendre les valeurs :

bénéfice = achète ou n'achète pas de salon – bon publicitaire ou pas bon

Donc on a : $500 - 15 = 485$: la personne a un bon publicitaire et achète un salon .

$0 - 15 = -15$: la personne a un bon publicitaire et n'achète pas un salon.

$500 - 0 = 500$: la personne n'a pas un bon publicitaire et achète un salon

0 la personne n'a pas un bon publicitaire et n'achète pas un salon

Donc $X = \{-15; 0; 485; 500\}$

$$p(X = -15) = p(B \cap \bar{S}) = 0,9 \times 0,9 = 0,81$$

$$p(X = 0) = p(\bar{B} \cap \bar{S}) = 0,1 \times 0,2 = 0,02$$

$$p(X = 485) = p(B \cap S) = 0,9 \times 0,1 = 0,09$$

$$p(X = 500) = p(\bar{B} \cap S) = 0,1 \times 0,8 = 0,08.$$

La loi de probabilité du bénéfice réalisé par le magasin selon la situation de la personne entrant.

Situation de la personne entrant	La personne a un bon publicitaire et achète un salon	La personne a un bon publicitaire et n'achète pas un salon	La personne n'a pas de bon publicitaire et achète un salon	La personne n'a pas de bon publicitaire et n'achète pas un salon
Bénéfice réalisé par le magasin en euros	485	- 15	500	0
Probabilité	0,09	0,81	0,08	0,02

2. le bénéfice moyen du magasin réalisé par personne entrant est égal à l'espérance mathématique de la variable X
 $E(X) = -15 \times 0,09 + 0 \times 0,02 + 485 \times 0,09 + 500 \times 0,08 = 71,5$

Le bénéfice moyen du magasin réalisé par personne entrant est de 75 dinars .

Exercice 8

1.a) On recherche $p(\bar{F})$ où F et $\bar{F}$ sont des événements contraires or d'après l'énoncé :

$$\text{« 60 \% des élèves sont des filles » donc } p(F) = \frac{60}{100} = \frac{3}{5} . \text{ donc } p(\bar{F}) = 1 - p(F) = 1 - \frac{3}{5} = \frac{2}{5} .$$

$$\text{Donc } p(\bar{F}) = \frac{2}{5} . \text{ Donc la probabilité que cet élève soit un garçon est } \frac{2}{5} .$$

b) On recherche $p(F \cap A)$. Or d'après l'énoncé : « 40 \% des filles fument » donc $p_F(A) = \frac{40}{100} = \frac{2}{5} = 0,4$

$$\text{donc } p(F \cap A) = p_F(A) \times p(F) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{25} = 0,24 . \text{ Donc } p(F \cap A) = \frac{6}{25} = 0,24$$

Donc la probabilité que cet élève soit une fille qui fume est $\frac{6}{25}$.

c) On recherche $p(\bar{F} \cap A)$. Or d'après l'énoncé : « 30 \% des garçons fument » donc

$$p_{\bar{F}}(A) = \frac{30}{100} = \frac{3}{10} = 0,3 , \text{ donc } p(\bar{F} \cap A) = p_{\bar{F}}(A) \times p(\bar{F}) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{5} = \frac{3}{25} = 0,12 .$$

Donc $p(\bar{F} \cap A) = \frac{3}{25} = 0,12$. Donc la probabilité que cet élève soit un garçon qui fume est $\frac{3}{25}$.

2. F et $\bar{F}$ forment une partition de l'univers, d'après les probabilités totales, on a :

$$p(A) = p(F \cap A) + p(\bar{F} \cap A) . \quad p(A) = \frac{6}{25} + \frac{3}{25} = \frac{9}{25} = 0,36 . \text{ Donc } p(A) = \frac{9}{25} = 0,36 .$$

Donc la probabilité que l'élève choisi fume est $\frac{9}{25}$.

3.a) Arbre de probabilités traduisant l'énoncé :

b) D'après l'énoncé : « Parmi les élèves fumeurs, la moitié ont des parents qui fument » donc $p_A(B) = \frac{1}{2}$; donc

$$p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A) = \frac{1}{2} \times \frac{9}{25} = \frac{9}{50} = 0,18 = p_A(\bar{B}) \times p(A) = p(A \cap \bar{B}) .$$

donc $p(A \cap B) = \frac{9}{50} = 0,18$. Donc la probabilité que l'élève choisi et ses parents fument est $\frac{9}{50}$.

c) On recherche $p(\bar{A})$ où A et $\bar{A}$ sont des événements contraires. Or $p(A) = \frac{9}{25}$; donc $p(\bar{A}) = 1 - p(A)$.

$$p(\bar{A}) = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25} . \text{ Donc } p(\bar{A}) = \frac{16}{25} = 0,64 .$$

On recherche $p_{\bar{A}}(B)$. or d'après l'énoncé : « Parmi les élèves non fumeurs, 65 % ont des parents

non fumeurs » . donc $p_{\bar{A}}(\bar{B}) = \frac{65}{100} = \frac{13}{20}$. donc $p_{\bar{A}}(B) = 1 - p_{\bar{A}}(\bar{B}) = 1 - \frac{13}{20} = \frac{7}{20}$. Donc $p_{\bar{A}}(B) = 0,35$.

On a $p(\bar{A} \cap B) = p_{\bar{A}}(B) \times p(\bar{A}) = \frac{7}{20} \times \frac{16}{25} = \frac{28}{125} = 0,224$. La probabilité de choisir un élève qui ne fume pas ayant des parents fumeurs est $28/125$.

d) A et $\bar{A}$ forment une partition de l'univers, d'après les probabilités totales, on a :

$$p(B) = p(A \cap B) + p(\bar{A} \cap B) . \quad p(B) = \frac{9}{50} + \frac{28}{125} = \frac{45}{250} + \frac{56}{250} = \frac{101}{250} = \frac{101}{250} = 0,18 + 0,224 = 0,404 .$$

La probabilité de choisir un élève ayant des parents fumeurs est $101/125$.

$$p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{9}{50} \div \frac{101}{250} = \frac{9}{50} \times \frac{250}{101} = \frac{45}{101} \approx 0,446 . \quad p_{\bar{B}}(A) = \frac{p(A \cap \bar{B})}{p(B)} .$$

$$p(\bar{B}) = 1 - p(B) = 1 - \frac{101}{250} = \frac{149}{250} = 0,596 . \quad p_{\bar{B}}(A) = \frac{p(A \cap \bar{B})}{p(B)} = \frac{9}{50} \div \frac{149}{250} = \frac{9}{50} \times \frac{250}{149} = \frac{45}{149} \approx 0,302 .$$

Un élève qui a des parents fumeurs a donc plus de chance de se mettre à fumer qu'un élève qui a des parents non-fumeurs.

Exercice 9

- ☐ quand il y a eu un faux départ au premier signal, la probabilité qu'il y ait de nouveau un faux départ au deuxième signal est de 0,05
- ☐ il n'y a jamais de faux départ au troisième signal. On admet que les départs sont indépendants les uns des autres.

1°) On peut représenter ces données par un arbre de probabilités.

2°) pour qu'il y ait exactement un faux départ , il n'y a qu'un seul cas :

il faut avoir F_1 suivi de $\text{non}(F_2)/F_1$ avec une probabilité de $0,2 \times 0,95 = 0,19$

3°) Soit X le nombre de faux départs. Alors les valeurs prises par X sont 0 ou 1 ou 2.

La loi de probabilité de X est entièrement déterminée par la connaissance de

$P([X = 0])$, $P([X = 1])$ et $P([X = 2])$,

$P([X = 0]) = 0,8$

$P([X = 1]) = 0,19$

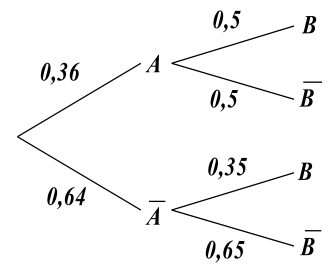
$P([X = 2]) = P(F_1) \times P(F_2/F_1) = 0,2 \times 0,05 = 0,01$

$P(\text{"il y au moins un faux départ"}) = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,8 = 0,2 = 20 \%$

4°) Lors d'un quart de finale au 200 m, on fait courir les athlètes en quatre séries indépendantes, soit quatre épreuves. On est en présence d'un schéma de Bernoulli : 4 épreuves répétées et indépendantes. Au cours de chaque épreuve, on appelle succès le fait de ne pas avoir de faux départ au premier signal ce qui se passe avec une probabilité $p = 0,8$

Alors le nombre de succès X suit la loi binomiale $B(4 ; 0,8)$

la probabilité qu'il y ait exactement trois séries sans faux départ au premier signal lors de ce quart de



finale es $p(X=3) = C_4^3 \times (0,8)^3 \times (1-0,8)^1 = 0,4096$

Exercice 10

1. 40 % des membres sont des hommes donc $p(H) = \frac{40}{100} = 0,4$ (donc $p(F) = 1 - p(H) = 1 - 0,4 = 0,6$

Parmi les femmes , membre de ce club, seulement 5 % ne sont pas inscrites aux cours collectifs

Donc : $p_F(\bar{C}) = \frac{5}{100} = 0,05$. et $p_F(C) = 1 - p_F(\bar{C}) = 1 - 0,05 = 0,95$.

L'arbre pondéré représentant la situation est :

2. a. $p(F \cap C) = p_F(C) \times p(F) = 0,6 \times 0,95 = 0,57$

b. $C = C \cap (F \cup H) = (C \cap F) \cup (C \cap H)$ Les événements $C \cap F$ et $C \cap H$

sont incompatibles et forment une partition incompatible de l'ensemble de personnes , donc , d'après la formule des probabilité totales , on a :

$p(C) = p(C \cap F) + p(C \cap H)$; or $p(C) = 0,65$, puisque 65 % des membres

sont inscrits aux cours collectifs

Donc $p(C \cap H) = p(C) - p(C \cap F) = 0,65 - 0,57 = 0,08$.

c. On tire la fiche d'un homme, la probabilité que celui-ci soit inscrit aux cours collectifs est égale à $p_H(C)$.

$p_H(C) = \frac{p(H \cap C)}{p(H)} = \frac{0,08}{0,4} = 0,2$

d. voir l'arbre ci-dessus

3. on choisit au hasard une fiche d'un membre non inscrit aux cours collectifs . la probabilité que ce soit celle

d'un homme est égale à $p_{\bar{C}}(H)$ et on a : $p_{\bar{C}}(H) = \frac{p(H \cap \bar{C})}{p(\bar{C})} = \frac{0,32}{0,35} = 0,91$

($p(\bar{C}) = 1 - p(C) = 1 - 0,65 = 0,35$ et $p(H \cap \bar{C}) = p_H(\bar{C}) \times p(H) = 0,8 \times 0,4 = 0,32$).

4. les cartes des clients sont indépendantes.

Le choix d'une carte est une expérience à deux issues : C de probabilité 0,65 et $\bar{C}$ de probabilité 0,35

On fait 3fois cette expérience donc on obtient un schéma de Bernoulli :

L'événement « au moins une des fiches est celle d'un membre

Non inscrit aux cours collectifs » est l'événement contraire de

« aucune des fiches n'est celle d'un membre non inscrit

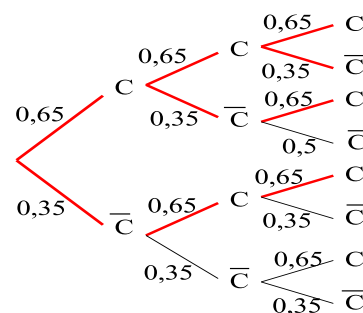
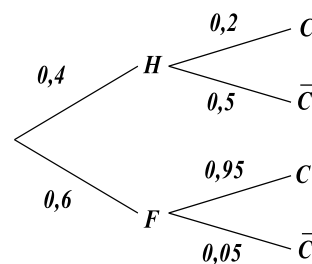
Aux cours collectif », c'est- à dire « toutes les fiches sont celles de membres inscrits au cours ».

L'événement « toutes les fiches sont celles de membres inscrits au cours »

correspond au chemin CCC donc la probabilité de cette événement est $0,65^3$.

Donc la probabilité de l'événement : « au moins une des fiches est celle d'un

membre non inscrit aux cours collectifs » est $1 - 0,65^3 \approx 0,73$



Exercice 11

avec les données et la notation de l'énoncé , on a :

95 % des téléviseurs fabriqués par une entreprise sont en état de fonctionnement signifie que $p(F) = 0,95$;

un appareil est en état de fonctionnement, il est accepté dans 96 % des cas à l'issue du test : $p_F(T) = 0,96$

et un appareil n'est pas en état de fonctionnement, il est néanmoins accepté dans 8 % des cas à l'issue du test : $p_{\bar{F}}(T) = 0,08$.

1. l'événement : « le téléviseur n'est pas en état de fonctionnement » est l'événement $\bar{F}$ contraire de l'événement F . On a donc $p(\bar{F}) = 1 - p(F) = 1 - 0,95 = 0,05$.

2. a. $p(F) = 0,95 \neq 0$, donc on a d'après la formule de probabilité conditionnelle : $p_F(\bar{T}) = \frac{p(\bar{T} \cap F)}{p(F)}$

Or $F = F \cap (T \cup \bar{T}) = (F \cap T) \cup (F \cap \bar{T})$. Les événements $F \cap T$ et $F \cap \bar{T}$ sont incompatibles et

forment une partition disjointe de l'univers .Donc $p(F) = p(F \cap T) + p(F \cap \bar{T})$, et

$p(F \cap \bar{T}) = p(F) - p(F \cap T)$. Mais $p(T \cap F) = p_F(T) \times p(F) = 0,96 \times 0,95 = 0,912$, donc

$$p(F \cap \bar{T}) = p(F) - p(F \cap T) = 0,95 - 0,912 = 0,038 ,$$

b. donc on a d'après la formule de probabilité conditionnelle : $p_F(\bar{T}) = \frac{p(\bar{T} \cap F)}{p(F)}$, donc on a :

$$p_F(\bar{T}) = \frac{p(\bar{T} \cap F)}{p(F)} = \frac{0,038}{0,95} = 0,04 .$$

c. d'après la formule de probabilité conditionnelle : $p(\bar{T} \cap \bar{F}) = p_{\bar{F}}(\bar{T}) \times p(\bar{F})$, mais d'après la loi des nœuds

$$\text{on a : } p_{\bar{F}}(\bar{T}) = 1 - p_F(T) = 1 - 0,08 = 0,92 . \text{ donc } p(\bar{T} \cap \bar{F}) = p_{\bar{F}}(\bar{T}) \times p(\bar{F}) = 0,92 \times 0,05 = 0,046 .$$

3. l'événement « le téléviseur est refusé à l'issue du test » est noté $\bar{T}$.

$\bar{T} = \bar{T} \cap (F \cup \bar{F}) = (F \cap \bar{T}) \cup (\bar{F} \cap \bar{T})$ puisque les événements $F \cap T$ et $F \cap \bar{T}$ sont incompatibles et forment une partition disjointe de l'univers, on a donc

$$p(\bar{T}) = p(F \cap \bar{T}) + p(\bar{F} \cap \bar{T}) = 0,038 + 0,046 = 0,084 .$$

4. la probabilité pour qu'un téléviseur soit en état de fonctionnement sachant qu'il est refusé à l'issue du test est

$$\text{notée } p_{\bar{T}}(F) , \text{ or d'après la formule du cours on a : } p_{\bar{T}}(F) = \frac{p(F \cap \bar{T})}{p(\bar{T})} = \frac{0,038}{0,084} = 0,452 .$$

Exercice 12

1. La fréquence de vente du modèle B est : $\frac{166937}{283048} \approx 0,590$ à 10^{-3} près

Soit B l'événement " le client choisit le modèle B"

La probabilité de B est la fréquence de vente du modèle donc **p(B) = 0,590**

2. L'événement " le client ne choisit pas le modèle B" est l'événement contraire de B.

$$p(\bar{B}) = 1 - p(B) \text{ donc } p(\bar{B}) = 0,410$$

3. a Trois clients achètent un véhicule dans la catégorie "petites voitures", leur choix se fait de façon indépendante. Pour chacun des acheteurs, on s'intéresse à la réalisation ou non de l'événement B. Il s'agit donc d'un schéma de Bernouilli. On peut traduire ce schéma par un arbre:

b. **X est la variable aléatoire** donnant le nombre de clients parmi les trois qui achètent le modèle B.

Les valeurs prises par la variable X sont 0, 1, 2 ou 3.

$$* P(X = 0) = P(\bar{B}) * P(\bar{B}) * P(\bar{B}) = 0,410^3 = 0,069$$

* L'événement (X=1) est réalisé trois fois dans l'arbre avec les

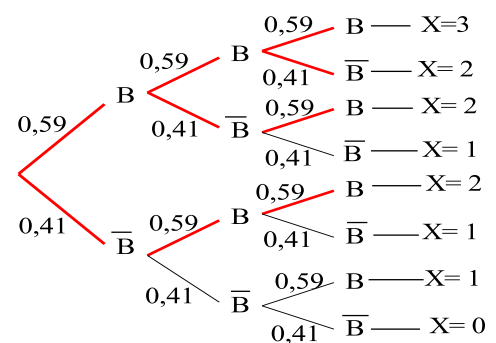
branches B $\bar{B}\bar{B}$; $\bar{B}\bar{B}B$ et $\bar{B}B\bar{B}$ donc

$$p(X = 1) = 3 * p(B) * p(\bar{B}) * p(\bar{B}) = 3 * 0,590 * 0,410^2 = 0,298$$

* L'événement (X=2) est réalisé trois fois dans l'arbre avec les branches B $\bar{B}B$; $\bar{B}BB$ et $BB\bar{B}$ donc:

$$p(X = 2) = 3 * p(B) * p(B) * p(\bar{B}) = 3 * 0,590^2 * 0,410 = 0,428$$

* L'événement (X=3) est réalisé une fois dans l'arbre et $p(X=3) = p(B)^3 = 0,590^3 = 0,205$



x_i	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	0,069	0,298	0,428	0,205

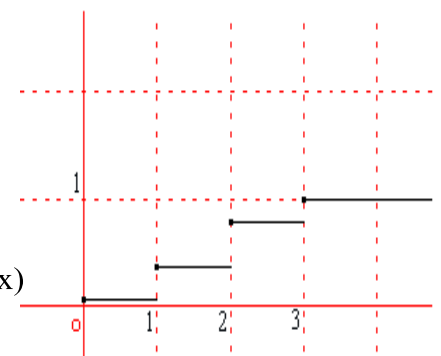
3b. Soit $E(X)$ l'espérance mathématique de X

$$E(X) = 0 \times 0,069 + 1 \times 0,298 + 2 \times 0,428 + 3 \times 0,205 = 1,769$$

4. Soit F la fonction de répartition de X F est définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = p(X \leq x)$

a) si $x < 0$, $F(x) = 0$

b) si $0 \leq x < 1$, $F(x) = p(X = 0)$:



$$F(x) = 0,069$$

$$c) \text{ si } 1 \leq x < 2, F(x) = p(X=0) + P(X=1) : F(x) = 0,367$$

$$d) \text{ si } 2 \leq x < 3, F(x) = p(X=0) + P(X=1) + P(X=2) : F(x) = 0,795$$

$$e) \text{ si } x \geq 3, : F(x) = 1$$

Soit E l'événement " au plus deux clients sur les trois achètent un véhicule du modèle B ?

$$p(E) = p(X \geq 2) = F(2) = 0,795.$$

La probabilité qu'au plus deux clients sur les trois achètent un véhicule du modèle B est 0,795.

Exercice 13

Partie A :

$$1. \text{ Il y a } 25 \times \frac{48}{100} = 12 \text{ élèves qui ont 11 ans, } 25 \times \frac{1}{5} = 5 \text{ élèves qui ont 13 ans et } 25 - 12 - 8 = 8 \text{ élèves qui}$$

$$\text{ont 12 ans. Il y a } 15 \times \frac{2}{3} = 10 \text{ élèves de 11 ans qui ont un cartable et } 12 - 10 = 2 \text{ élèves qui ont un sac à dos.}$$

$$\text{Il y a } 25 - 15 = 10 \text{ élèves qui ont un sac à dos, et } 10 \div 2 = 5 \text{ élèves de 12 ans qui ont un sac à dos}$$

Il reste donc 3 élèves de 12 ans qui ont un cartable.

On trouve sans peine qu'il y a $10 - 2 - 5 = 3$ élèves de 13 ans qui ont un sac à dos et $5 - 3 = 2$ élèves de 13 ans qui ont un cartable.

	Sac à dos	Cartable	Total
11 ans	2	10	12
12 ans	5	3	8
13 ans	3	2	5
Total	10	15	25

2.a. Le tableau nous indique qu'il y a 15 élèves sur 25 qui possèdent un sac à dos et comme il y a

$$\text{équiprobabilité on a } p(S) = \frac{10}{25} = 0,4$$

b. Le tableau nous indique qu'il y a 2 élèves de treize ans qui possèdent un cartable et comme il y a

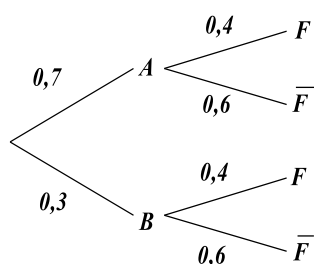
$$\text{équiprobabilité on a } p(C \cap T) = \frac{2}{25} = 0,08$$

3. Il y a répétition d'expériences aléatoires de façon indépendante, on a donc une loi binomiale

Il y a 3 chemins de même probabilité qui correspondent à 2 succès donc

$$P(X = 2 \text{ succès}) = 3 \times (0,4)^2 \times 0,6 = 0,288$$

Partie B :



F étant indépendant de A et de B, on a :

$$p_A(F) = p_B(F) = p(F) = 0,4$$

2. car B et F sont indépendants $p(A \cap F) = p(B) \times p(F) = 0,4 \times 0,3 = 0,12$. La probabilité qu'un élève ait pris le contrat B et soit adhérent du foyer est donc de 0,12

3. a. Il y a 4 événements élémentaires :

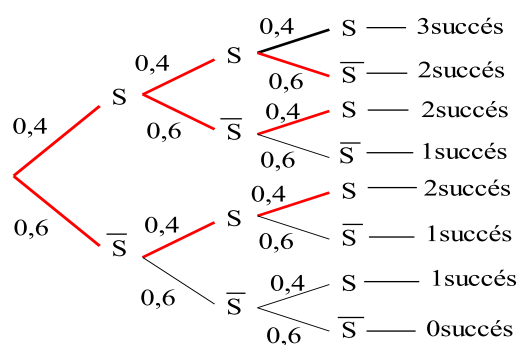
○ A et $\bar{F}$ qui correspond à un coût de 20 dinars
dinars = 35 dinars

○ B et $\bar{F}$ qui correspond à un coût de 30 dinars
dinars = 45 dinars

○ A et F qui correspond à un coût de 20 dinars +15

○ B et F qui correspond à un coût de 30 dinars +15

b. On a $X = \{20; 30; 35; 45\}$



- $p(X=20) = p(A \cap \bar{F}) = p(A) \times p_A(\bar{F}) = 0,7 \times 0,6 = 0,42$
- $p(X=35) = p(A \cap F) = p(A) \times p_A(F) = 0,7 \times 0,4 = 0,28$
- $p(X=30) = p(B \cap \bar{F}) = p(B) \times p_B(\bar{F}) = 0,3 \times 0,6 = 0,18$
- $p(X=45) = p(B \cap F) = p(B) \times p_B(F) = 0,3 \times 0,4 = 0,12$

On a donc :

X	20 dinars	30 dinars	35 dinars	45 dinars	Total
p_i	0,42	0,18	0,28	0,12	1

c) $E(X) = \sum_{i=1}^{i=4} p_i x_i$, donc $E(X) = 0,42 \times 20 + 0,18 \times 30 + 0,28 \times 35 + 0,12 \times 45 = 29$.

L'espérance est de 29 dinars, on peut donc dire que l'inscription d'un élève coûte en moyenne 29 dinars

L.S.El Riadh	<u>Similitudes</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Enoncés

Exercice 1 :

ABCD est un carré de centre O, tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$, on note I le milieu de [CD], K le symétrique de O par rapport à D et L le symétrique de O par rapport à (BC).

I/ 1/ montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que $f(B)=D$ et $f(L)=K$.

2/ donner la nature et les éléments caractéristiques de f .

3/ en déduire la nature du triangle AKL puis du triangle AIL.

4/ soit ζ le cercle de diamètre [AL].

a/ construire le cercle ζ' image de ζ par f

b/ une droite Δ passant par I coupe ζ en N et ζ' en N'. montrer que $f(N)=N'$.

II/ soit $g = S_{(BC)} \circ S_D$

1/ déterminer $g(K)$ puis montrer que g n'est pas une symétrie orthogonale.

2/ donner la forme réduite de g .

3/ soit $r = g \circ S_{(BD)}$

a/ montrer que $r(K)=L$

b/ montrer que r est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et construire son centre Ω .

III/ soit I le milieu de [AB] et I' le milieu de [AD] et on désigne par s la similitude directe qui envoie D en O et C en I.

1/ déterminer le rapport et l'angle de s .

2/ soit w le centre de s , déterminer une construction géométrique de w.

3/ a/ déterminer $s((BD))$ et $s((BC))$ puis déterminer $s(B)$ et $s(A)$.

b/ montrer que w est le barycentre des points pondérés (B,1) et (I',4).

Exercice 2:

on considère dans un plan orienté, deux carrés OABC et ODEF de sens direct comme l'indique la figure suivante :

1/ soit s la similitude directe de centre O qui transforme

A en B.

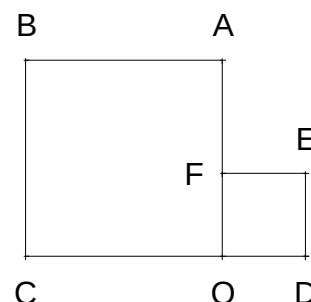
a/ préciser l'angle et le rapport de s .

b/ montrer que $s(D)=E$.

2/ soit I le point d'intersection des droites (AD) et (BE).

a/ montrer que I appartient au cercle circonscrit au triangle ABC.

b/ déduire que IAC est un triangle rectangle.



L.S.El Riadh	<u>Similitudes</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Enoncés

3/a/ soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$,

préciser $r(A)$ et $r(D)$.

b/ en déduire que (AD) perpendiculaire à (CF) .

c/ montrer que (CF) , (AD) et (BE) sont concourantes.

4/ soit σ la similitude indirecte qui transforme A en O et O en B .

a/ trouver le rapport de σ .

b/ soit Ω le centre de σ , montrer que Ω est le symétrique de B par rapport à A .

c/ trouver alors l'axe Δ de σ .

d/ montrer que $\sigma \circ s^{-1}$ est une symétrie orthogonale que l'on précisera.

Exercice 3:

on considère un carré $ABCD$ de centre O tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$; on

désigne par I le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[AD]$.

1/ on note s la similitude directe telle que $s(D)=O$ et $s(C)=I$

a/ déterminer l'angle et le rapport de s .

b/ trouver une construction géométrique du centre Ω de s .

2/ a/ préciser les images respectives de (BD) et (BC) par s .

b/ déterminer alors $s(B)$ et $s(A)$.

c/ montrer que Ω est le barycentre des points pondérés $(B,1)$ et $(J,4)$.

3/ soit r la rotation de centre O d'angle $\frac{\pi}{2}$, on pose $h=r \circ s$.

a/ préciser $h(B)$ puis caractériser h .

b/ soit Ω' le milieu de $[OB]$, justifier que $O\Omega\Omega'$ est rectangle isocèle

4/ soit σ la similitude indirecte telle que $\sigma(D)=O$ et $\sigma(C)=I$.

a/ vérifier que $\sigma = S_{(OI)} \circ s$; puis déterminer $\sigma(B)$

b/ donner la forme réduite de σ .

Exercice 4 :

dans le plan orienté on considère un triangle ABC rectangle et isocèle tel

que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$, on pose $D=S_A(C)$, $E=S_B(D)$ et H le projeté orthogonal de A sur (BC) .

Soit s la similitude direct tel que $s(A)=B$ et $s(B)=C$.

1/a/ déterminer l'angle et le rapport de s .

b/ montrer que $s(C) = D$.

2/ soit Ω le centre de s .

a/ montrer que Ω est définie par : $\frac{\Omega C}{\Omega A} = 2$ et $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega C}) = -\frac{\pi}{2}[2\pi]$

b/ construire alors Ω .

3/ le plan est rapporté au repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

L.S.El Riadh	<u>Similitudes</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Enoncés

- a/ déterminer l'expression complexe associé à la similitude s.
b/ déterminer alors l'affixe z_0 de Ω .
4/ soit σ la similitude indirecte définie par $\sigma(A)=B$ et $\sigma(B)=C$.
déterminer le centre w de σ et vérifier que $w=D$.
5/ on pose $\varphi = \sigma \circ s^{-1}$.
a/ montrer que φ est une symétrie orthogonale que l'on précisera.
b/ déterminer alors $\varphi(C)$.
6/ soit l'application $f: P \rightarrow P$
 $M(z) \rightarrow M'(z')$ tel que $z' = (-1+i)\bar{z} + 1$.
Montrer que $f = \sigma$.

Exercice 5:

- ABC est un triangle isocèle en A tel que $(\widehat{AC,AB}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$. Soient I, J et K les milieux respectives de [AC], [AB] et [BC].
On construit à l'extérieur du triangle ABC les triangles équilatéraux directes BCA' ; $BC'A$ et $AB'C$.
1/ a/ soit r la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$; déterminer $r(C)$ et $r(C')$
b/ en déduire qu'il existe un unique déplacement φ tels que $\varphi(C) = A$ et $\varphi(C') = A'$.
c/ déterminer l'angle du déplacement φ en déduire que φ est une rotation ; soit w sont centre ; placer w .
2/ soit $f = \varphi \circ t_{\overline{AC}}$.
a/ i/ préciser la nature de f .
ii/ déterminer $f(A)$ puis caractériser f .
b/ vérifier que $f = S_{(wA)} \circ S_{(AB)}$; en déduire la nature et les élément caractéristiques de f .
3/ a/ montrer que $BB' = CC'$.
b/ en déduire qu'il existe un unique antidéplacement ψ tel que $\psi(C) = B$ et $\psi(C') = B'$; caractériser ψ .
4/ soit s la similitude directe de centre J telle que $s(K) = A$.
a/ déterminer l'angle et le rapport de s .
b/ déterminer $s(I)$.
5/ soit s' la similitude directe telle que $s'(J) = K$ et $s'(C) = A$.
déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $s' \circ s$.
6/ soit σ la similitude indirecte de centre J telle que $\sigma(I) = C'$.
a/ démontrer que le rapport de σ est $\frac{3+\sqrt{3}}{3}$.
b/ démontrer que l'axe de σ est la médiatrice de [IK]

L.S.El Riadh	<u>Similitudes</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Enoncés

c/ déterminer $\sigma(K)$.

Exercice 6:

Dans le plan orienté $\mathcal{P}$, on donne deux points A et B et O le milieu de

$[AB]$. Soit Γ l'ensemble des points M de $\mathcal{P}$ tels que: $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

La médiatrice Δ de $[AB]$ coupe Γ en un point I; le cercle ζ de centre I et passant par A coupe la demi-droite $[OI)$ en D; la droite (BD) coupe Γ en K et la droite (AI) recoupe ζ en E.

Soit S la similitude directe de centre A telle que $S(O)=I$.

- 1/ a) déterminer le rapport k et une mesure θ de l'angle de S.
b) déterminer $S(B)$.
- 2/ a) montrer que le triangle ADK est rectangle et isocèle.
b) en déduire $S(K)$ puis déterminer l'image de (BD) par S.
- 3/ soit g la similitude indirecte de centre D telle que $g(A)=K$.
a) déterminer le rapport et l'axe de g.
b) caractériser l'application $go g$.
c) en déduire $g(K)$.
- 4/ soit $f = go S$.
a) préciser $f(A)$ et $f(K)$.
b) déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.

Exercice 7:

P est le plan rapporté à un repère orthonormé.

1/ résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation: $z^3 - (2+i)z^2 + (-3+4i)z + 10-5i = 0$ sachant qu'elle admet deux solutions conjuguées.

2/ A, B et C sont les points du plan d'affixes respectives $2-i$, $2+i$ et $-2+i$.

- a) montrer que ABC est un triangle rectangle en B.
- b) déterminer l'ensemble des centres des similitudes de rapport 2 et transformant A en B.

3/ S la similitude directe transformant A en B et B en C.

- a) déterminer le rapport de cette similitude, donner une mesure de son angle et construire son centre Ω .
- b) Construire l'image C' de c par S.

4/ soit Δ une droite du plan, on désigne par $S_{(AB)}$, $S_{(BC)}$ et S_{Δ} les symétries orthogonales d'axes respectifs (AB) , (BC) et Δ .

On pose $F = S_{(AB)} \circ S_{(BC)} \circ S_{\Delta}$.

- a) montrer que F est une symétrie orthogonale si et seulement si la droite Δ passé par le point B. préciser son axe.

L.S.El Riadh	<u>Similitudes</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Enoncés

- b) On suppose que la droite Δ ne passe pas par le point B. quelle est la nature de F. préciser ces éléments caractéristiques (on pourra utiliser le point H projeté orthogonal de B sur Δ) .

Exercice 8:

ABC est un triangle équilatéral direct inscrit dans un cercle ζ de centre O. soit I le point diamétralement opposé à C sur ζ .

1/ montrer que le triangle OAI est équilatéral direct.

2/ soit f la similitude directe telle que $f(I)=O$ et $f(C)=B$.

a) déterminer le rapport et l'angle de f .

b) montrer que le centre Ω de f est un point commun des cercles circonscrits aux triangles OAI et OBC.

Construire Ω .

c) montrer que $f((AI))=(OA)$ et $f((AC))=(BC)$.

d) en déduire que l'image A' de A par f est le milieu de $[BC]$.

3/ soit R la rotation de centre O et telle que $R(A)=C$ et h l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{1}{2}$.

Montrer que $f = hoR$.

4/ soit g la similitude indirecte telle que $g(I)=O$ et $g(C)=B$. on note J son centre.

a) déterminer le rapport de g .

b) montrer que $g(B)=A'$ et que $\overrightarrow{JC} = 4\overrightarrow{JA'}$.

c) montrer que l'axe Δ de g est la perpendiculaire à (BC) en J.

Exercice 9:

Dans le plan orienté P, on donne un triangle rectangle OAB tel que

$OA=2OB$ et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$. Soit I et J les milieux respectifs de $[OA]$ et $[OB]$.

1/ soit S la similitude directe transformant O en A et B en O.

a) déterminer le rapport et l'angle de S.

b) montrer que le centre Ω de S est le projeté orthogonal de O sur (AB) .

c) montrer que S transforme I en J ; en déduire que les droites (ΩI) et (ΩJ) sont perpendiculaires.

2/ la perpendiculaire à (OA) en A, coupe (ΩJ) en un point C.

a) montrer que $S((OA))=(AC)$.

b) déterminer alors $S(I)$.

c) montrer que le cercle de diamètre $[IC]$ passe par w.

L.S.El Riadh	<u>Similitudes</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Enoncés

3/ soit σ la similitude indirecte qui transforme O en A et B en O ; on désigne par w le centre de σ .

- déterminer l'image du point B par $\sigma \circ \sigma$.
- en déduire que $w \in (AB)$.

Exercice 10:

Dans le plan orienté P on considère un triangle équilatéral direct ABC .

On désigne par R_A , R_B et R_C les rotations d'angle $\frac{\pi}{3}$ et de centres respectifs A , B et C . on note $D=R_B(A)$ et $E=R_C(D)$.

1/ démontrer que $R_C \circ R_B \circ R_A$ est la symétrie centrale de centre B .

2/ soit S la similitude directe de rapport $\frac{1}{2}$, d'angle $\frac{-2\pi}{3}$ et transformant A en B .

- calculer le rapport $\frac{BD}{AE}$ ainsi qu'une mesure de $(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB})$.
- en déduire que $S(E)=D$.

2/ on note Ω le centre de S .

- montrer que les points Ω , A , B et C d'une part et Ω , D , B et E d'autre part sont cocycliques.
- construire le point Ω .

4/ a) démontrer que S transforme la droite (AC) en (BC) .

- déterminer l'image du cercle circonscrit au triangle ACE .

Exercice 11:

Dans le plan orienté P , on considère un triangle isocèle ABC tel que

$AB=AC$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$. Soit D le point du plan tel que le triangle

CDA soit rectangle isocèle et $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}) \equiv \frac{-\pi}{2} [2\pi]$.

1/ soit R_A la rotation de centre A et transformant B en C et R_C la rotation de centre C et d'angle $\frac{-\pi}{2}$. on pose $f = R_C \circ R_A$.

- déterminer $f(A)$ et $f(B)$.
- démontrer que f est une rotation dont on précisera l'angle et le centre noté O . placer O .
- quelle est la nature du quadrilatère $ABOC$.

2/ on note $g = f \circ S_{(BC)}$.

- quelle est la nature de l'application g .
- déterminer $g(A)$ et $g(B)$.

<i>L.S.El Riadh</i>	<u>Similitudes</u>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		<i>Enoncés</i>

3/ on note H le milieu de $[BC]$, $C'=g(C)$ et $H'=g(H)$.

- a) montrer que H' est le milieu de $[OD]$
- b) construire H' puis C' .
- c) donner la forme réduite de g .

zribimaths.jimdo.com

<i>L.S.El Rjadh</i>	<u>Similitudes</u>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		<i>Solutions</i>

2/ $(\overrightarrow{wD}, \overrightarrow{wO}) = -\frac{\pi}{2} (2\pi)$ donc w appartient au cercle de diamètre $[OD]$

$(\overrightarrow{wC}, \overrightarrow{wI_1}) = -\frac{\pi}{2} (2\pi)$ donc w appartient au cercle de diamètre $[CI_1]$

3/ $a/ s((BD)) = (AC)$; $s((BC)) = (AB)$ d'où $s(B) = A$

$s((AB)) = (AD)$; $s((AC)) = (I_1 I_2)$ d'où $s(A) = I_1$

$b/ s(B) = I_2$

or s est une similitude directe de rapport $\frac{1}{4}$ d'angle π et de centre w

donc $sos = h_{(w, -\frac{1}{4})} = h$

$h(B) = I_2 \Leftrightarrow \overrightarrow{wI_2} + \frac{1}{4}\overrightarrow{wB} = \vec{0} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{wI_2} + \overrightarrow{wB} = \vec{0} \Leftrightarrow w = \text{bary} \{(B, 1) ; (I_2, 4)\}$

Exercice 2 :

1/a) soit θ l'angle de s et k son rapport.

$$k = \frac{OA}{OB} = \sqrt{2} \quad ; \quad \theta \equiv (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) [2\pi]$$

$$\equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$$

b) ODE est un triangle isocèle rectangle donc $s(D) = E$.

$$2/ a) (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BE}) = \frac{\pi}{4} [2\pi] \Leftrightarrow (\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}) = \frac{\pi}{4} [2\pi] \Leftrightarrow (\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) [2\pi]$$

$\Leftrightarrow$ les points I, A, C et B sont sur le même cercle ζ .

b) ABC étant un triangle rectangle donc ζ admet pour diamètre $[AC]$.

$I \in \zeta \Leftrightarrow (IA)$ et (IC) sont perpendiculaires $\Leftrightarrow IAC$ est un triangle rectangle.

3) a) $r(A) = C$; $r(D) = F$.

b) $r(A) = C$ et $r(D) = F$ donc $(AD) \perp (CF)$.

c) $(CF) \perp (AD) \Leftrightarrow (CF) \perp (IA)$

or $(CI) \perp (IA) \Leftrightarrow (CF) \perp (CI) \Leftrightarrow C, I$ et F sont alignés

d'où $(CF), (AD)$ et (BE) sont concourantes en I .

4 / a) soit k' le rapport de σ ; $k' = \frac{OB}{OA} = \sqrt{2}$.

b) on a : $\sigma \circ \sigma(A) = B \Leftrightarrow h_{(\Omega, 2)}(A) = B \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega B} = 2\overrightarrow{\Omega A} \Leftrightarrow A$ est le milieu de $[\Omega B]$.

c) Δ est la bissectrice intérieure de $[\Omega A, \Omega O]$.

d) $\sigma \circ s^{-1}$ est une similitude indirecte de rapport 1 $\Leftrightarrow \sigma \circ s^{-1}$ est un antidéplacement

Comme $\sigma \circ s^{-1}(O) = B$ et $\sigma \circ s^{-1}(B) = \sigma(A) = O$ alors $(\sigma \circ s^{-1}) \circ (\sigma \circ s^{-1}) = \text{id}_p$.

Par suite $\sigma \circ s^{-1}$ est une symétrie axiale d'axe la médiatrice de $[OB]$.

En fin $\sigma \circ s^{-1} = S_{(AC)}$.

L.S.El Rjadh	<u>Similitudes</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Solutions

Exercice 3:

1) a) soit θ l'angle de s et k son rapport

$$\theta \equiv (\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{OI}) (2\pi) \quad k = \frac{OI}{DC} = \frac{1}{2}$$

$$\equiv (\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DJ}) (2\pi)$$

$$\equiv -\frac{\pi}{2} (2\pi)$$

b) soit Ω le centre de s : $(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{O\Omega}) = -\frac{\pi}{2} (2\pi)$

donc Ω appartient au cercle de diamètre $[OD]$

de même $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{O\Omega}) = -\frac{\pi}{2} (2\pi)$ donc Ω appartient au cercle de diamètre $[CI]$.

2/a) $s(D)=O$ donc $s((BD))$ est la droite passante par O et perpendiculaire à (BD) d'où $s((BD))=(AC)$.

$s(C)=I$ donc $s((BC))$ est la droite passante par I et perpendiculaire à (BC) d'où $s((BC))=(AB)$

b) $\{B\}=(BD) \cap (BC)$ d'où $s(B)=s(BC) \cap s(BD)$ donc $s(B)=A$.

on a : $\{A\}=(AB) \cap (AC)$

et $s(AB)$ est la droite passante par A et perpendiculaire à (AB) donc $s(AB)=(AD)$

alors $s(A)=J$

c) $s \circ s$ est une similitude de centre Ω , de rapport $\frac{1}{4}$ et d'angle $-\pi \Leftrightarrow s \circ s =$

$$h_{(\Omega, \frac{1}{4})} = H$$

$$s \circ s(B)=J \Leftrightarrow H(B)=J \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega J} = -\frac{1}{4} \overrightarrow{\Omega B} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{\Omega J} + \overrightarrow{\Omega B} = \vec{0} \Leftrightarrow \Omega = \text{bary}\{(B,1); (J,4)\}$$

3/ a) $h(B)=r \circ s(B)=r(A)=B$

h est la composée de deux similitudes directes donc h est une similitude directes d'angle 0 et de rapport $\frac{1}{2}$ d'où h est une homothétie de rapport $\frac{1}{2}$.

$$h(B)=B \Leftrightarrow h=h_{(B, \frac{1}{2})}.$$

b) on a $h=r \circ s$ donc $r=h \circ s^{-1}$

$$r(\Omega)=h \circ s^{-1}(\Omega)=h(\Omega)=\Omega' \text{ car } \Omega' \text{ est le milieu de } [\Omega B]$$

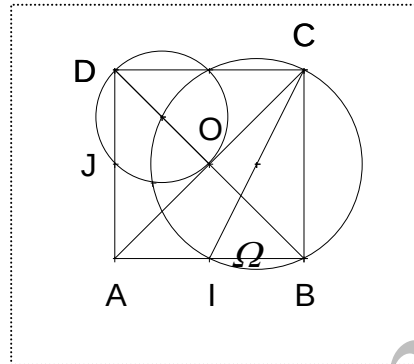
donc $O\Omega=O\Omega'$ et $(\overrightarrow{O\Omega}, \overrightarrow{O\Omega'}) = \frac{\pi}{2} (2\pi)$ d'où $O\Omega\Omega'$ est rectangle isocèle en O .

4/ a) $S_{(OI)} \circ s$ est une similitude indirecte comme étant la composée d'un antidéplacement et d'une similitude directe.

De plus $S_{(OI)} \circ s(D)=O$ et $S_{(OI)} \circ s(C)=I$

D'où $\sigma = S_{(OI)} \circ s$.

$$\sigma(B)=S_{(OI)} \circ s(B)=S_{(OI)}(A)=B$$



L.S.El Rjadh	<u>Similitudes</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Solutions

b) on a $\sigma(D)=O$ et $BO = \frac{1}{2}BD$; comme B, O et D sont alignés alors $\overrightarrow{BO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$
d'où l'axe de σ est (BD)
en fin $\sigma = h_{(B, \frac{1}{2})} \circ S_{(BD)}$

Exercice 4 :

1/ a) soit α l'angle de s et k son rapport.

$$\alpha \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC})[2\pi] \quad \frac{1}{k} = \frac{AB}{BC} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{d'où } k = \sqrt{2}$$

$$\equiv \frac{3\pi}{4}[2\pi]$$

b) on pose $s(C)=C'$

$$\text{on a : } (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BC'}) \equiv \frac{3\pi}{4}[2\pi]$$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC'}) \equiv \frac{3\pi}{4}[2\pi]$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} + (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC'}) \equiv \frac{3\pi}{4}[2\pi]$$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC'}) \equiv \frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{2}[2\pi] \Rightarrow (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC'}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$$

d'où C' appartient à [BD).

$$\text{On a : } (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CC'}) \equiv \frac{3\pi}{4}[2\pi] \Rightarrow (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CC'}) \equiv \frac{3\pi}{4}[2\pi] \Rightarrow$$

$$\frac{3\pi}{4} + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CC'}) \equiv \frac{3\pi}{4}[2\pi]$$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CC'}) \equiv 0[2\pi] \Rightarrow C' \text{ appartient à } [CA).$$

En fin $\{C'\} = [CA] \cap [BD] = \{D\}$ donc $s(C)=D$.

$$2/ a) \text{ on a : } \Omega C = \sqrt{2}\Omega B = \sqrt{2} \sqrt{2} \Omega A = 2\Omega A \Rightarrow \frac{\Omega C}{\Omega A} = 2$$

$$(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega C}) \equiv (\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega B}) + (\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega C})[2\pi]$$

$$\equiv \frac{6\pi}{4}[2\pi]$$

$$\equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

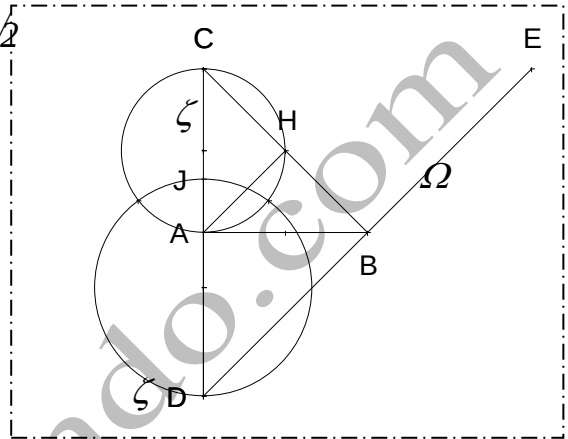
b) on a $\frac{\Omega C}{\Omega A} = 2$ on pose I le barycentre des points pondérés (C,1) et (A,-2) et J le barycentre des points pondérés (C,1) et (A,2) $\Rightarrow \overrightarrow{\Omega I} \overrightarrow{\Omega J} = 0 \Rightarrow \Omega$ appartient au cercle ζ de diamètre [IJ].

On a : $(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega C}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \Rightarrow \Omega$ appartient au demi-cercle $(\widehat{AHC})$ du cercle ζ' de diamètre [AC].

Donc $\{\Omega\} = \zeta \cap (\widehat{AHC})$.

3/ a) soit g l'expression complexe associée à s .

2010-2011



L.S.El Rjadh	<u>Similitudes</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Solutions

$g(z)=az+b$; a et b dans $\mathbb{C}$

$$g(z_A)=az_A+b=z_B \Rightarrow b=1.$$

$$g(z_B)=az_B+b=z_C \Rightarrow a+1=i \Rightarrow a=i-1$$

$$\text{d'où } g(z)=(i-1)z+1.$$

$$b) g(z_0)=(i-1)z_0+1=z_0 \Rightarrow (i-2)z_0=-1 \Rightarrow z_0=\frac{2+i}{5}.$$

$$4/ \text{ soit } k' \text{ le rapport de } \sigma \Rightarrow k'=\frac{BC}{AB}=\sqrt{2}.$$

$$\text{Donc } \sigma \circ \sigma = h_{(w,2)}$$

$$\sigma \circ \sigma(A)=C \Rightarrow h_{(w,2)}(A)=C \Rightarrow \overrightarrow{wC}=2\overrightarrow{wA} \Rightarrow w=D.$$

5/ φ est une similitude indirecte comme étant la composée d'une similitude indirecte et d'une similitude directe.

Le rapport de φ est 1 alors φ est un antidéplacement.

$$\varphi(B)=\sigma(A)=B \Rightarrow B \text{ est invariant par } \varphi \Rightarrow \varphi \text{ est une symétrie orthogonale}$$

$$\text{et } \varphi(C)=\sigma(B)=C \Rightarrow \varphi=S_{(BC)}$$

$$6/ f(z_A)=(i-1).0+1=z_B \text{ et } f(z_B)=(i-1).1+1=i=z_C$$

$$\Rightarrow f=\sigma$$

Exercice 5 :

$$1/a) r(C)=A' \text{ et } r(C')=A$$

$$\text{Alors } CC'=AA'.$$

b) on a $CC'=AA' \neq 0$ alors il existe un unique déplacement φ tel que $\varphi(C)=A$ et $\varphi(C')=A'$.

$$c) \text{ soit } \alpha \text{ l'angle de } \varphi ; \alpha \equiv (\overrightarrow{CC'}, \overrightarrow{AA'}) [2\pi]$$

$$\equiv (\overrightarrow{CC'}, \overrightarrow{A'A}) + (\overrightarrow{A'A}, \overrightarrow{AA'}) [2\pi]$$

$$\equiv \frac{\pi}{3} - \pi [2\pi]$$

$$\equiv -\frac{2\pi}{3} [2\pi]$$

donc φ est une rotation d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.

$wA=wC$ donc w appartient à la médiatrice de $[AC]$

$wA'=wC'$ donc w appartient à la médiatrice de $[A'C']$

alors w est l'intersection des deux médiatrices.

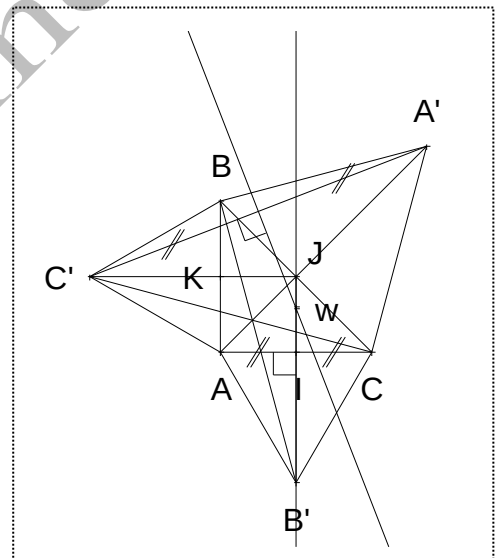
2/a) i/f est la composée d'une rotation d'angle $-\frac{2\pi}{3}$ et d'une translation donc

c' est une rotation d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.

ii/ $f(A)=\varphi(C)=A$; A étant invariant par f c'est donc son centre.

$$\text{Par suite } f=r_{(A), -\frac{2\pi}{3}}.$$

$$b) \text{ comme : } t_{AC}=S_{(IJ)} \circ S_{(AB)} \text{ et } \varphi=S_{(wA)} \circ S_{(IJ)} \text{ alors } f=S_{(wA)} \circ S_{(AB)} = r_{(A), -\frac{2\pi}{3}}.$$



L.S.El Rjadh	<u>Similitudes</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Solutions

3/ a) soit $r' = r_{(A, \frac{\pi}{3})}$.

$r'(B') = C$ et $r'(B) = C'$ donc $BB' = CC'$

b) comme $BB' = CC'$ alors il existe un unique antidéplacement tel que $\psi(C) = B$ et $\psi(C') = B'$.

on pose $\Delta = (AJ)$.

Δ est la médiatrice de $[BC]$ donc $S_{\Delta}(C) = B$.

on a : $AC' = AB' \Rightarrow A$ appartient à la médiatrice de $[C'B']$.

$JC' = JK + KC' = JI + IB' = JB' \Rightarrow C'$ est sur la médiatrice de $[B'C']$

Alors Δ est la médiatrice de $[C'B']$ donc $S_{\Delta}(C') = B'$.

Comme ψ est unique alors $\psi = S_{\Delta}$.

4/ a) soit β l'angle de s et k le rapport de s .

$$\beta \equiv (\overrightarrow{JK}, \overrightarrow{JA}) [2\pi]$$

$$\equiv \frac{\pi}{4} [2\pi].$$

$$\frac{1}{k} = \frac{JK}{JA} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ donc } k = \sqrt{2}$$

b) on a $JC = \sqrt{2} JI$ et $(\overrightarrow{JI}, \overrightarrow{JC}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$ donc $s(I) = C$.

5/ soit $g = s'os$; g est une similitude directe comme étant la composée de deux similitudes directes.

Soit β' l'angle de s' et k' son rapport.

$$\beta' \equiv (\overrightarrow{JC}, \overrightarrow{JK}) (2\pi) \quad k' = \frac{KA}{JC} = \frac{BK}{BJ} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\equiv (\overrightarrow{BJ}, \overrightarrow{BK}) (2\pi)$$

$$\equiv -\frac{\pi}{4} (2\pi)$$

g est donc d'angle nul et de rapport 1 alors g est une translation.

Comme $g(I) = s'os(I) = s'(C) = A$ alors $g = t_{\overrightarrow{IA}}$

6/ a) soit a le rapport de σ .

$$a = \frac{JC'}{JI} = \frac{JK + KC'}{JI} = 1 + \frac{KC'}{KA} = 1 + \tan(KC'A) = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3}.$$

b) soit D l'axe de σ ; $\sigma = h_{(J,a)} \circ S_D$ donc $S_D = h_{(J,a)}^{-1} \circ \sigma$.

$S_D(I) = h_{(J,a)}^{-1} \circ \sigma(I) = h_{(J,a)}^{-1}(C') = K$ en effet : $\frac{JK}{JC'} = \frac{JI}{JC'} = \frac{1}{a}$ donc $\overrightarrow{JK} = \frac{1}{a} \overrightarrow{JC'}$.

Comme $S_D(I) = K$ alors D est la médiatrice de $[IK]$.

$\sigma(K) = h_{(J,a)} \circ S_D(K) = h_{(J,a)}(I) = B'$ (en effet $\frac{JB'}{JI} = \frac{JC'}{JK} = a$)

L.S.El Rjadh	<u>Similitudes</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Solutions

$$DK = aDA \text{ donc } a = \frac{DK}{DA}$$

$$\text{On a : } \sin \frac{\pi}{4} = \frac{DK}{DA} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$D'où a = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

δ est la bissectrice de $[DA, DK]$ donc $\delta = \Delta$.

$$b) g = h_{(D, \frac{\sqrt{2}}{2})} \circ S_{\Delta} = S_{\Delta} \circ h_{(D, \frac{\sqrt{2}}{2})}$$

$$g \circ g = h_{(D, \frac{\sqrt{2}}{2})} \circ S_{\Delta} \circ S_{\Delta} \circ h_{(D, \frac{\sqrt{2}}{2})} = h_{(D, \frac{1}{2})}$$

$$\text{On a : } g = h_{(D, \frac{1}{2})} \circ g^{-1}$$

$$\text{Alors } g(K) = h_{(D, \frac{1}{2})} \circ g^{-1}(K) = g = h_{(D, \frac{1}{2})}(A) = K'$$

Donc $K' = g(K)$ et le milieu de $[AD]$.

$$4/ a) f(A) = g \circ S(A) = g(A) = K.$$

$$f(K) = g \circ S(K) = g(D) = D.$$

b) le produit d'une similitude directe et d'une similitude indirecte dont le produit des rapports est 1 est un antidéplacement.

Par suite f est un antidéplacement.

Si f est une symétrie axiale alors $f \circ f = \text{id}$ et comme $f \circ f(A) = D \neq A$ alors f n'est pas une symétrie axiale donc c'est un glissement.

$$\text{On pose } f = t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta'} = S_{\Delta'} \circ t_{\vec{u}}$$

$$F \circ f(A) = t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta'} \circ S_{\Delta'} \circ t_{\vec{u}}(A) = t_{2\vec{u}}(A) = D$$

$$D'où $2\vec{u} = \overrightarrow{AD}$ donc $\vec{u} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AD}$$$

Δ' est la droite joignant les milieux de $[AK]$ et $[KD]$.

Exercice 7:

$$\begin{cases} \bar{z}^3 - (2+i)\bar{z}^2 + (-3+4i)\bar{z} + 10 - 5i = 0 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{z}^3 - (2-i)\bar{z}^2 + (-3-4i)\bar{z} + 10 + 5i = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1)-(2) \text{ Donne: } \bar{z}^2((2-i)-(2+i)) + \bar{z}((-3+4i)-(-3-4i)) - 10i = 0$$

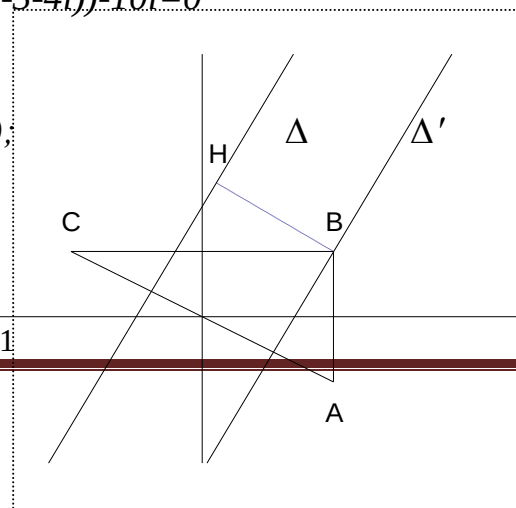
$$\text{Donc } -2i(\bar{z}^2 - 4\bar{z} + 5i) = 0$$

$$D'où $\bar{z} = 2-i$ ou $\bar{z} = 2+i$$$

Par suite $2-i$ et $2+i$ sont des solutions de (E),

par identification on détermine la troisième solution qui est $-2+i$.

$$2/ A(2-i), B(2+i) \text{ et } C(-2+i)$$



2010-2011

<i>L.S.El Rjadh</i>	<u>Similitudes</u>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		<i>Solutions</i>

$$\overrightarrow{BA} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} ; \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ D'où ABC est un triangle rectangle en B.

b) soit S la similitude de centre Ω de rapport 2 qui transforme A en B

$$\text{Alors } \frac{\Omega B}{\Omega A} = 2$$

Donc Ω appartient au cercle de diamètre [IJ] avec $I = \text{bary}\{(B,1), (A,2)\}$ et $J = \text{bary}\{(B,1), (A,-2)\}$.

$$3/ a) k = \frac{BC}{BA} = \frac{|z_c - z_B|}{|z_B - z_A|} = 2$$

$$\begin{aligned} \theta &\equiv (\widehat{AB, BC}) [2\pi] \\ &\equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{aligned}$$

Soit Ω son centre alors $(\widehat{\Omega A, \Omega B}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ donc Ω appartient au demi cercle de diamètre [AB]

De même Ω appartient au demi cercle de diamètre [BC]
D'où la construction.

b) on a $(\widehat{\Omega C, \Omega C'}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ donc (ΩC) est perpendiculaire à $(\Omega C')$

Par suite C' appartient à la demi-droite $[\Omega t)$ tel que $(\widehat{\Omega C, \Omega t}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

et $\Omega C' = 2\Omega C$ alors C appartient au cercle de centre Ω et de rayon $2\Omega C$.
D'où la construction de C' .

$$4/ F = S_{(AB)} \circ S_{(BC)} \circ S_{\Delta}$$

Si Δ passé par B, comme F est un antidéplacement et B est un point fixe alors F est une symétrie orthogonale d'axe passant par B.

Réciproquement: si F est une symétrie orthogonale alors il existe une droite Δ' tel que $F = S_{\Delta'}$

$$\text{Donc } S_{(AB)} \circ S_{(BC)} = S_{\Delta'} \circ S_{\Delta}$$

Mais $S_{(AB)} \circ S_{(BC)} = S_B$, symétrie centrale de centre B.

$$\text{Donc } S_{\Delta'} \circ S_{\Delta} = S_B$$

Par suite Δ passe par B.

<i>L.S.El Rjadh</i>	<u>Similitudes</u>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		<i>Solutions</i>

Exercice 8:

1/

$$(\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{IA}) \equiv (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) [2\pi]$$

$$\equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$$

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OI}) \equiv 2(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CI}) [2\pi]$$

$$\equiv 2 \frac{\pi}{6} [2\pi]$$

$$\equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$$

d'où OAI est un triangle équilatéral direct.

2/ a) soit k le rapport de f et θ son angle.

$$k = \frac{OB}{IC} = \frac{OC}{IC} = \frac{1}{2}$$

$$\theta \equiv (\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{OB}) [2\pi]$$

$$\equiv (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}) [2\pi]$$

$$\equiv -\frac{2\pi}{3} [2\pi]$$

$$b) (\overrightarrow{\Omega I}, \overrightarrow{\Omega O}) \equiv -\frac{2\pi}{3} [2\pi] \text{ et } (\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AO}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \text{ donc } (\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AO}) \equiv (\overrightarrow{\Omega I}, \overrightarrow{\Omega O}) [2\pi]$$

d'où A, I, O et Ω sont cocyclique et Ω et A sont de part et d'autre de la droite (AI).

$$(\overrightarrow{\Omega C}, \overrightarrow{\Omega B}) \equiv -\frac{2\pi}{3} [2\pi] \text{ et } (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}) \equiv -\frac{2\pi}{3} [2\pi] \text{ donc } (\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}) \equiv (\overrightarrow{\Omega C}, \overrightarrow{\Omega B}) [2\pi] \text{ d'o}$$

u Ω , C, B et O sont cocyclique et Ω et O sont dans la même partie du plan limité par (CB).

c) $f((AI))$ est la droite passant par $f(I)=O$ et faisant un angle de $-\frac{\pi}{3}$ avec (AI)

donc $f((AI))=(OA)$

L.S.El Rjadh	<u>Similitudes</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Solutions

$f((AC))$ est la droite passant par $f(C)=B$ et faisant un angle de $-\frac{\pi}{3}$ avec (AC)

donc $f(AC))=(BC)$.

d/ $\{A\}=(AC) \cap (AI)$ donc $\{f(A)\}=f((AC)) \cap f((AI))$ d'où $\{f(A)\}=(OA) \cap (BC)$

et (OA) est la médiatrice de $[BC]$

par suite $f(A)=A'$ avec A' est le milieu de $[BC]$.

$3/ f=h \circ R$ est une similitude directe de rapport $\frac{1}{2}$.

$\varphi = S \circ f^{-1}$ est une similitude directe de rapport 1 c'est donc un déplacement.

On a : $f(A)=h \circ R(A)=h(C)=A'$ et $f(C)=h \circ R(C)=h(B)=B$

Par suite: $\varphi(A')=S \circ f^{-1}(A')=S(A)=A'$ et $\varphi(B)=S \circ f^{-1}(B)=S(C)=B$

Ainsi φ est un déplacement qui fixe deux points distincts c'est donc l'identité du plan.

En fin $S \circ f^{-1} = Id_P$ d'où $S=f$.

4/ a) soit a le rapport de g ; $a = \frac{OB}{IC} = \frac{1}{2}$.

b) on pose $g(B)=B'$.

on a : $g(I)=O$, $g(C)=B$ et $g(B)=B'$

donc: - $BB' = \frac{1}{2}CB = BA'$ d'où $B' \in \zeta_{(B,BA')}$

$$\begin{aligned} - \quad (\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BB'}) &= -(\overrightarrow{CI}, \overrightarrow{CB}) [2\pi] \\ &= -\frac{\pi}{6} [2\pi] \end{aligned} \quad \text{d'où } B' \in [BC]$$

par suite $B'=A'$ ainsi $f(B')=A'$

b) on pose $g = h_{(J, \frac{1}{2})} \circ S_{\Delta} = S_{\Delta} \circ h_{(J, \frac{1}{2})}$.

$$gog = h_{(J, \frac{1}{2})} \circ h_{(J, \frac{1}{2})} = h_{(J, \frac{1}{4})}$$

comme $gog(C)=g(B)=A'$ alors $h_{(J, \frac{1}{4})}(C)=A'$ donc $\overrightarrow{JC} = 4\overrightarrow{JA'}$

c) on a $\overrightarrow{JC} = 4\overrightarrow{JA'}$ alors $J \in (CA')=(CB)$

$g(C)=B$ donc Δ est la bissectrice de $(\overrightarrow{JC}, \overrightarrow{JB}) \equiv \pi [2\pi]$

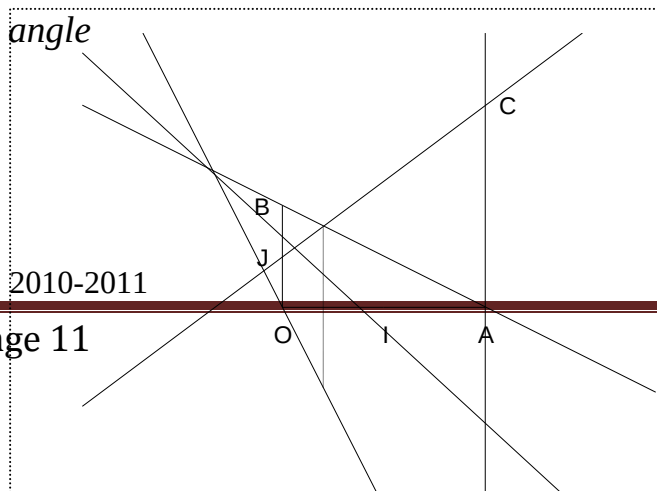
par suite Δ est la perpendiculaire en J à (CB) .

Exercice 9 :

1/ a) soit k le rapport de S et O son angle

$$\theta \equiv (\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{AO}) [2\pi]$$

$$\equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$



2010-2011

L.S.El Rjadh	<u>Similitudes</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Solutions

$$k = \frac{AO}{OB} = 2$$

b) Ω le centre de S

$$(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega O}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{\Omega O}, \overrightarrow{\Omega A}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$\text{donc } (\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega A}) \equiv \pi [2\pi]$$

Par suite $\Omega \in (AB)$

et (ΩA) perpendiculaire à (ΩO)

w

D'où Ω est le projeté

orthogonale de O sur (AB).

Ω

c) J est le milieu de [OB]

donc S(I) est le milieu

de $[S(O)S(B)] = [AO]$ Alors $S(I) = I$.

Ω'

$$\text{Donc } (\overrightarrow{\Omega J}, \overrightarrow{\Omega I}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

Δ

d'où (ΩJ) et (ΩI) sont perpendiculaires.

2/ a) $S(OA)$ est la droite passant par $S(O) = A$ et perpendiculaire à (OA)

donc $S((OA)) = (AC)$.

b) $I \in (OA)$ donc $S(I) \in (AC)$

$$(\overrightarrow{\Omega I}, \overrightarrow{\Omega S(I)}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \quad \text{donc} \quad S(I) \in (\Omega J)$$

donc $\{S(I)\} = (\Omega J) \cap ((AC)) = \{C\}$

d'où $S(I) = C$.

$$c) S(I) = C \text{ donc } (\overrightarrow{\Omega I}, \overrightarrow{\Omega C}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \quad \text{d'où le cercle de diamètre } [IC] \text{ passé}$$

par Ω

3/ a) $\sigma \circ \sigma(B) = \sigma(O) = A$.

$$b) \sigma = h_{(w,2)} \circ S_{\Delta} = S_{\Delta} \circ h_{(w,2)} \text{ donc } \sigma \circ \sigma = h_{(w,4)}$$

par suite $\sigma \circ \sigma(B) = h_{(w,4)}(B) = A$ d'où $w \in (AB)$.

c) $\phi = \sigma \circ S^{-1}$ est la composée d'une similitude indirecte et d'une similitude directe dont le produit des rapports est 1 c'est donc un antidéplacement.

Et comme $\phi(A) = \sigma \circ S^{-1}(A) = \sigma(O) = A$ et $\phi(O) = \sigma(B) = O$ alors $\phi = S_{(OA)}$

Donc $\sigma \circ S^{-1}(\Omega) = \sigma(\Omega) = S_{(OA)}(\Omega)$ d'où $\Omega' = S_{(OA)}(\Omega)$

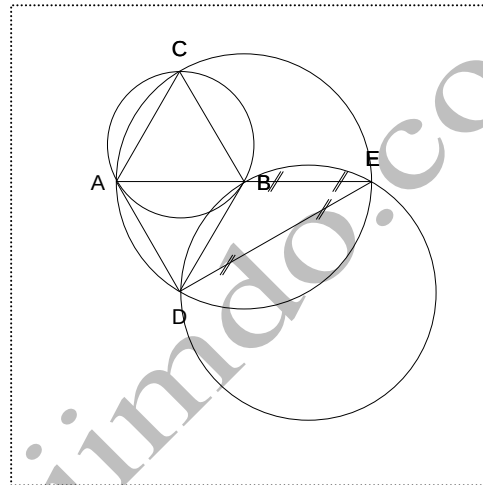
$$d) w \in (AB) = (\Omega B) \text{ donc } \sigma(w) = w \in (\sigma(\Omega)\sigma(B)) \text{ par suite } w \in (O\Omega')$$

et $w \in (AB)$ d'où la construction de w

Δ est la bissectrice de $[wB, wA]$

Exercice 10:

1/ $r = R_C \circ R_B \circ R_A$ est une rotation d'angle π c'est donc une symétrie centrale.



<i>L.S.El Rjadh</i>	<u>Similitudes</u>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		<i>Solutions</i>

b) le cercle Γ circonscrit au triangle ACE est le cercle de diamètre [AE] donc $S(\Gamma)$ est le cercle de diamètre [BD].

Exercice 11:

$$1/ a) \text{ on a: } \begin{cases} CA = CD \\ \widehat{(\vec{CA}, \vec{CD})} \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$

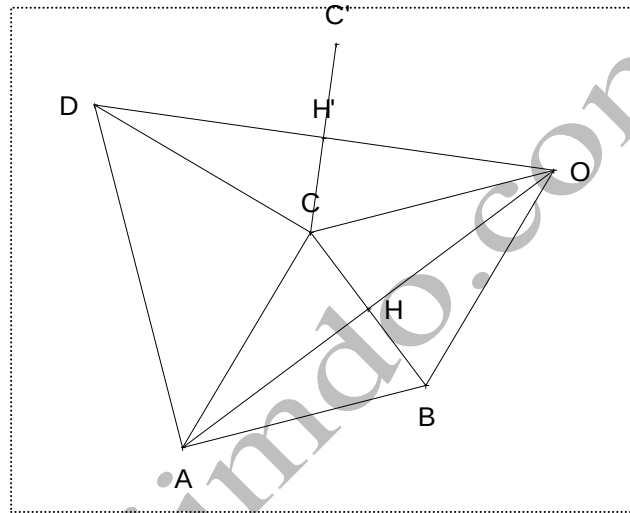
donc $R_C(A)=D$.

$$f(A)=R_C \circ R_A(A)=R_C(A)=D$$

$$f(B)=R_C \circ R_A(B)=R_C(C)=C.$$

b) soit α l'angle de R_A ;

$$\begin{aligned} \alpha &\equiv \widehat{(\vec{AB}, \vec{AC})} [2\pi] \\ &\equiv \frac{\pi}{4} [2\pi] \end{aligned}$$



f étant la composée de deux rotations;

$$\text{c'est une rotation d'angle } \frac{\pi}{4} + \frac{-\pi}{2} = \frac{-\pi}{4}$$

on a : $f(A)=D$ donc O appartient à la médiatrice de [AD] et $f(B)=C$ donc O appartient à la médiatrice de [BC].

D'où la construction de O.

c) les deux angles intérieurs de même côté [OC,OB] et [CO,CA] sont supplémentaires donc (OB)//(AC).

Les deux angles intérieurs du même côté [CO,CA] et [AB,AC] sont supplémentaires donc (AB)//(OC).

Donc ABOC est un parallélogramme et $AB=AC$ alors c'est un losange.

2/ a) la composée d'un déplacement et d'un antidéplacement est un antidéplacement donc g est un antidéplacement.

$$b) g(A)=f \circ S_{(BC)}(A)=f(O)=O$$

$$g(B)=f \circ S_{(BC)}(B)=f(B)=C.$$

$$3/a) g(O)=f \circ S_{(BC)}(O)=f(A)=D.$$

H est le milieu de [BC] donc H est le milieu de [AO] par suite $g(H)$ est le milieu de $[g(A)g(O)]$

Ainsi H' est le milieu de [OD].

b) on place H' le milieu de [OD] puis C' tel que H' est le milieu de $[CC']$.

c) on a $g(A)=O$ et $g(B)=C$

<i>L.S.El Rjadh</i>	<u>Similitudes</u>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		<i>Solutions</i>

comme la médiatrice de $[AO]$ n'est pas la médiatrice de $[BC]$ alors g n'est pas une symétrie orthogonale c'est donc un glissement.

On pose $g = S_{\Delta} \circ t_{\vec{u}}$.

On a : $g(B) = C$ donc le milieu H de $[BC]$ appartient à Δ .

$g(O) = D$ donc le milieu H' de $[OD]$ appartient à Δ .

Par suite $\Delta = (HH')$.

On a : $g(H) = t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta}(H) = t_{\vec{u}}(H) = H'$

Par suite $\vec{u} = \overrightarrow{HH'}$

L.S.El Riadh	<u>Etude de Fonctions</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Exercices

Exercice 1:

A/ On considère l'application f définie sur $]0,4[$ par $f(x) = \frac{2x-4}{\sqrt{4x-x^2}}$;

on désigne par ζ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1/a) étudier les variations de f .

b) montrer que f réalise une bijection de $]0,4[$ sur $\mathbb{R}$.

c) soit g la réciproque de f ; montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = 2 + \frac{2x}{\sqrt{x^2+4}}$

2/ montrer que l'équation $f(x)=x$ admet dans $]0,4[$ une solution unique $\alpha > 2$.

3/ a) déterminer une équation de la tangente δ à ζ au point d'abscisse 2.

b) étudier la position de ζ par rapport à δ .

c) tracer ζ , δ et ζ' : courbe représentative de g .

B/ on considère la suite U définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 > \alpha$ et $U_{n+1} = g(U_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

1/ démontrer que $U_n > \alpha$; $n \in \mathbb{N}$.

2/ déterminer graphiquement le signe de $g(x)-x$.

3/ en déduire que U est décroissante.

4/ montrer que U admet une limite l que l'on précisera.

C/ soit la fonction ϕ définie sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ par $\phi(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}$ et $\phi(x) = \frac{2}{g(2\operatorname{tg}(x))}$ si $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

1/ montrer que pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$; $\phi(x) = \frac{1}{1 + \sin x}$.

2/ montrer que ϕ réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur un intervalle J que l'on précisera .

3/ calculer $\phi^{-1}(2)$ et $\phi^{-1}(2 + \sqrt{2})$

4/ étudier la dérivabilité de ϕ^{-1} sur J et déterminer sa fonction dérivée.

Exercice 2:

A/ on considère la fonction f définie sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ par $f(x) = \sqrt{\frac{2\cos x}{1-\cos x}}$.

1/a/ étudier la dérivabilité de f à gauche en $\frac{\pi}{2}$.

b/ justifier que f est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et que $f'(x) = \frac{-\sin x}{(1-\cos x)^2 f(x)}$.

2/ a/ étudier les variations de f .

b/ en déduire que f admet une fonction réciproque g définie sur $\mathbb{R}_+$.

L.S.El Riadh	<u>Etude de Fonctions</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Exercices

c/ montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - \frac{\pi}{2}}{x} = 0$.

d/ montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que $g'(x) = \frac{-2x}{(x^2 + 2)\sqrt{x^2 + 1}}$.

3/ montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une solution unique α et que

$$\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{2}.$$

4/ tracer ζ_f et ζ_g dans le même repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

B/ on considère la fonction ϕ définie par : $\phi(x) = f(\frac{\pi}{2} - x)$.

1/ a/ montrer que ϕ est définie et continue que $[0, \frac{\pi}{2}[$.

b/ montrer que ϕ réalise une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}_+$.

2/ on désigne par ϕ la bijection réciproque de ϕ .

a/ calculer pour tout $x \geq 0$, $\phi(\frac{\pi}{2} - g(x))$.

b/ en déduire que pour tout $x \geq 0$, $\phi(x) = \frac{\pi}{2} - g(x)$.

3/ soit la suite U définie sur $\mathbb{N}^*$ par $U_n = \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n} \phi(\alpha + \frac{k}{n^2})$.

a/ montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\frac{n+1}{n} \phi(\alpha + \frac{1}{n}) \leq U_n \leq \frac{n+1}{n} \phi(\alpha + \frac{2}{n})$.

b/ en déduire que U converge vers $\frac{\pi}{2} - \alpha$.

Problème 3: (les parties A et B sont indépendantes).

A/ soit f la fonction définie sur $[0, \pi]$ par $f(x) = \frac{2}{3} \cos x + \frac{1}{3}$.

1/ dresser le tableau de variations de f .

2/ montrer que l'équation $f(x)=x$ admet dans $[0, \pi]$ une solution unique α .

vérifier que $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

3/ soit la suite U définie sur $\mathbb{N}$ par : $0 < U_0 < \alpha$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$; $U_{n+1} = f(U_n)$.

a) montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $0 \leq U_n \leq \frac{\pi}{2}$.

b) montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_{2n} < \alpha < U_{2n+1}$.

c) montrer que pour tout $x \in [0, \pi]$; $|f(x) - \alpha| \leq \frac{2}{3} |x - \alpha|$.

L.S.El Riadh	<u>Etude de Fonctions</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Exercices

d) en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $|U_n - \alpha| \leq (\frac{2}{3})^n |U_0 - \alpha|$.

Trouver alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

4/ on pose $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} (U_k - \alpha)$.

a) montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $S_n > 0$.

b) montrer que la suite S est croissante.

c) montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $|S_n| \leq 3|U_0 - \alpha|$. (on pourra utiliser 3/d/).

B/ soit la fonction $g :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} \operatorname{tg} x & \text{si } x \in]-\frac{\pi}{2}, 0] \\ \operatorname{tg} x - \frac{4}{3}x & \text{si } x \in [0, \frac{\pi}{2}[\end{cases}$$

1/ a) étudier la dérivabilité de g en 0.

b) dresser le tableau de variation de g .

c) tracer dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe ζ représentative de g .

2/ soit h la restriction de g à $] -\frac{\pi}{2}, 0[$.

a) montrer que h réalise une bijection de $] -\frac{\pi}{2}, 0[$ sur un intervalle I que l'on précisera.

b) tracer la courbe de h^{-1} .

c) montrer que pour tout $x \in I$; $h^{-1}(x) + h^{-1}(\frac{1}{x}) = -\frac{\pi}{2}$.

3/ montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique β non nulle et que $\beta \in]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}[$.

4/ soit ψ la fonction définie sur $[\beta, \frac{\pi}{3}]$ par $\psi(x) = x - \frac{g(x)}{g'(x)}$.

a) démontrer que pour tout $x \in [\beta, \frac{\pi}{3}]$; $\psi(x) \leq x$.

Prouver que β est l'unique solution de l'équation $\psi(x) = x$.

b) dresser le tableau de variations de ψ . En déduire que si $x \in [\beta, \frac{\pi}{3}]$ alors

$$\psi(x) \in [\beta, \frac{\pi}{3}].$$

5/ soit V la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $V_0 = \frac{\pi}{3}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$; $V_{n+1} = \psi(V_n)$.

L.S.El Riadh	<u>Etude de Fonctions</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Exercices

a) montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $\beta \leq V_n \leq \frac{\pi}{3}$.

b) montrer que la suite V converge vers β .

Problème 4 : (les parties A et B sont indépendantes).

A/ soit la fonction f définie sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ par : $f(x) = \frac{1}{1 + \sin x}$ et φ la fonction définie

sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ par $\varphi(x) = \frac{1-x}{x} - \sin x$.

1/a) étudier les variations de φ .

b) en déduire que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

2/ montrer que f induit une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}]$ sur un intervalle J à préciser.

3/a) soit $x \in J$ exprimer $\sin(f^{-1}(x))$ et $\cos(f^{-1}(x))$ en fonction de x .

b) en déduire les réels $f^{-1}(\frac{2}{3})$ et $f^{-1}(2 - \sqrt{2})$

c) calculer $f^{-1}(\frac{1}{1 + \cos x})$.

B/ on considère la fonction g définie sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ par $g(x) = \frac{\sqrt{\sin 2x}}{\sin x}$.

1/ étudier la dérivabilité de g à gauche en $\frac{\pi}{2}$.

2/ montrer que g est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et calculer $g'(x)$ pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

3/ montrer que g réalise une bijection de $]0, \frac{\pi}{2}[$ sur $[0, +\infty[$.

4/ montrer que g^{-1} est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que pour tout $x \in [0, +\infty[$ ($g^{-1})'(x) = \frac{4x}{4 + x^4}$).

5/ représenter dans le même repère ζ_g et ζ_g^{-1}

6/ pour tout $x > 0$ on pose $h(x) = g^{-1}(\sqrt{2x}) + g^{-1}(\sqrt{\frac{2}{x}})$.

a) calculer $g^{-1}(\sqrt{2})$.

b) montrer que h est dérivable sur $]0, +\infty[$ et calculer $h'(x)$.

c) montrer que pour tout $x > 0$; $h(x) = \frac{\pi}{2}$.

Problème 5:

L.S.El Riadh	<u>Etude de Fonctions</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Exercices

Soit la fonction f définie sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ par $f(x) = \tan^3 x$.

1/a) étudier les variations de f .

b) démontrer que f réalise une bijection de $[0, \frac{\pi}{4}]$ sur un intervalle I à

préciser.

c) dresser le tableau de variation de f^{-1} .

d) tracer dans le même repère les courbes ζ_f et $\zeta_{f^{-1}}$.

2/ a) montrer que f^{-1} n'est pas dérivable à droite en 0, calculer $(f^{-1})'(1)$.

b) étudier la dérivabilité de f^{-1} sur I .

c) déterminer $(f^{-1})'(x)$ pour $x \in I \setminus \{0\}$.

3/ on pose $g(x) = f(x) - x$, pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

a) calculer $g'(x)$ et $g''(x)$.

b) étudier les variations de g' sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ et montrer que l'équation $g'(x) = 0$

admet

sur $]0, \frac{\pi}{4}[$ une solution unique x_0 .

c) en déduire le tableau de variations de g ; donner le signe de $g(x_0)$.

4/ a) montrer que l'équation $f(x) = x$ admet sur $]0, \frac{\pi}{4}[$ une solution unique α

et que $x_0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$.

b) montrer que pour tout $x \in]0, \alpha[$: $f(x) < x$.

c) en déduire que pour tout $x \in]0, \alpha[$: $f^{-1}(x) > x$.

5/ on considère la suite U définie par la donnée de $U_0 \in]0, \alpha[$ et $U_{n+1} = f^{-1}(U_n)$.

a) montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $0 < U_n < \alpha$.

b) montrer que U est croissante.

c) en déduire que U est convergente et calculer sa limite.

6/ soit h la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ par $f(x) = \frac{4}{\pi}x - \tan x$.

Calculer $h(0)$ et $h(\frac{\pi}{4})$, en déduire qu'il existe au moins une valeur $\delta \in]0, \frac{\pi}{4}[$ telle que $h'(\delta) = 0$.

Problème 6:

Soit f la fonction définie par : $f(\frac{\pi}{2}) = 0$ et $f(x) = \frac{1 - \sin x}{\cos x}$ si $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

L.S.El Riadh	<u>Etude de Fonctions</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Exercices

1/ a) montrer que f est continue à gauche en $\frac{\pi}{2}$.

b) montrer que f est dérivable à gauche en $\frac{\pi}{2}$ et que $f'_g(\frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{2}$.

2/ a) montrer que pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $f'(x) = \frac{-1}{1 + \sin x}$.

b) en déduire que f est une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur un intervalle J à préciser.

On note $g = f^{-1}$, calculer $g(0)$ et $g(1)$.

c) montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α et que $\frac{\pi}{6} < \alpha < \frac{\pi}{4}$.

d) tracer ζ_f et ζ_f^{-1} dans un même repère.

3/ a) montrer que $f^2(x) = \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}$, $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ puis exprimer $\sin x$ en fonction de $f^2(x)$.

b) montrer que g est dérivable sur J et que $g'(x) = \frac{-2}{1 + x^2}$; $x \in J$.

4/ soit h la fonction définie par : $h(1) = \frac{\pi}{2}$ et $h(x) = g(x) - g(\frac{1+x}{1-x})$.

a) montrer que h est continue sur $[0, 1]$.

b) montrer que h est dérivable sur $[0, 1[$ et calculer $h'(x)$; en déduire l'expression de $h(x)$.

5/ soit U la suite définie par $U_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n g(\alpha + \frac{1}{n+k})$; $n \in \mathbb{N}^*$.

a) montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; $\frac{n+1}{n} g(\alpha + \frac{1}{n}) \leq U_n \leq \frac{n+1}{n} g(\alpha + \frac{1}{2n})$.

b) en déduire que U_n est convergente et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \alpha$.

Problème 7:

Soit f la fonction définie par : $f(\frac{\pi}{2}) = 1$ et $f(x) = \frac{\tan x}{1 + \tan x}$ $x \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$.

1/a) montrer que f est continue sur $]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$.

b) montrer que f est dérivable à gauche en $\frac{\pi}{2}$ et que $f'_g(\frac{\pi}{2}) = 1$.

c) en déduire que f est dérivable sur $]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ et que $f'(x) = \frac{1}{(\sin x + \cos x)^2}$;

$x \in]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$.

L.S.El Riadh	<u>Etude de Fonctions</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Exercices

- d) dresser le tableau de variation de f sur $]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$.
- 2/ a) montrer que f est une bijection de $]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ sur $]-\infty, 1]$.
- b) soit $g = f^{-1}$; calculer $g(\frac{1}{2})$ et $g(0)$.
- c) tracer dans un même repère ζ_f et ζ_g .
- 3/ montrer que g est dérivable sur $]-\infty, 1]$ et que $g'(x) = \frac{1}{2x^2 - 2x + 1}$; $x \leq 1$.
- 4/ soit φ la fonction définie par : $\varphi(0) = -\frac{\pi}{4}$ et $\varphi(x) = g(\frac{2x-1}{2x})$ si $x \in]0, 1]$.
- a) montrer que φ est continue sur $[0, 1]$.
- b) montrer que φ est dérivable sur $]0, 1[$ et calculer $\varphi'(x)$.
- c) en déduire que $\varphi(x) - g(x) = -\frac{\pi}{4}$; $x \in [0, 1]$.
- d) montrer que φ est dérivable à droite en 0 et calculer $\varphi'(0)$.

Problème 8:

A/ soit f la fonction définie sur $[-1, 1[$ par $f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ et ζ sa courbe représentative dans un repère orthonormé

- 1/ a) montrer que f est dérivable sur $]-1, 1[$ et que $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2 f(x)}$.
- b) étudier la dérivabilité à droite de f en -1 et interpréter géométriquement le résultat obtenu
- c) dresser le tableau de variation de f
- 2/ a) donner une équation cartésienne de la tangente T à la courbe ζ au point A d'abscisse 0
- b) vérifier que pour tout $x \in [-1, 1[$ $f(x) - (x+1) = \frac{x^2 f(x)}{1 + \sqrt{1-x^2}}$; en déduire que la courbe ζ est au dessus de T
- c) construire ζ et T
- 3/ a) montrer que f réalise une bijection de $[-1, 1[$ sur $\mathbb{R}_+$; soit g la fonction réciproque de f
- b) donner l'expression de $g(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+$
- c) construire sa courbe ζ' dans le même repère que ζ

B/ soit h la fonction définie sur $]0, \pi]$ par $h(x) = f(\cos x)$

- 1/ a) montrer que h est continue sur $]0, \pi]$

L.S.El Riadh	<u>Etude de Fonctions</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Exercices

b) montrer que pour tout $x \in]0, \pi]$ on a $h(x) = \cotg(\frac{x}{2})$

c) étudier les variations de h , en déduire que h réalise une bijection de $]0, \pi]$ sur $\mathbb{R}_+$; on note φ sa fonction réciproque

2/ a) montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et que $\varphi'(x) = \frac{-2}{1+x^2}$

b) soit w la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $w(x) = \varphi(x) + \varphi(\frac{1}{x})$

calculer $w'(x)$ et $w(1)$ et en déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ $\varphi(x) + \varphi(\frac{1}{x}) = \pi$

3/ soit V la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $V_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=n}^{2n} \varphi(k)$

a) montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $\varphi(2n) \leq V_n \leq \varphi(n)$

b) en déduire que V est convergente et calculer sa limite.

Problème 9:

A/ soit la fonction f définie sur l'intervalle $I =]1, 2]$ par $f(x) = \frac{\sqrt{2x-x^2}}{x-1}$

1/a) f est-elle dérivable à gauche en 2 ?

b) étudier la dérivabilité de f sur I et calculer $f'(x)$.

c) dresser le tableau de variation de f .

2/ montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans I une solution unique α tel que $3/2 < \alpha < 2$.

3/ a) montrer que f est une bijection de I sur un intervalle J que l'on précisera.

b) soit g la réciproque de f ; montrer que pour tout $x \in J$: $g(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

4/ tracer dans le même repère les courbes ζ_f et ζ_g

B/ soit la suite U définie par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = g(U_n)$.

1/ montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $1 \leq U_n \leq 2$

2/ en admettant que pour tout a et b dans $[1, 2]$ on a $|g(a) - g(b)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} |a - b|$;

montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} |U_n - \alpha|$.

3/ en déduire que la suite U est convergente et trouver sa limite.

C/ soit la fonction h définie sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ par :

$$h(\frac{\pi}{4}) = 1 \text{ et } h(x) = \frac{1}{g(\tg(2x))} ; \text{ pour } x \in [0, \frac{\pi}{4}[$$

L.S.El Riadh	<u>Etude de Fonctions</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Exercices

1/ montrer que pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$; $h(x) = \frac{1}{1 + \cos 2x}$

2/ montrer que h est une bijection de $[0, \frac{\pi}{4}]$ sur un intervalle K que l'on précisera.

3/ calculer $h^{-1}(\frac{2}{3})$ et $h^{-1}(2 - \sqrt{2})$

4/ étudier la dérivabilité de h^{-1} sur l'intervalle K et déterminer sa fonction dérivée.

Problème 10:

A/ soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

1/ étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

2/ soit ζ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$; préciser les asymptotes de ζ .

3/a) montrer que ζ admet un point d'inflexion I que l'on précisera.

b) écrire une équation de la tangente T à ζ en I .

c) préciser la position relative de T et ζ .

4/a) tracer ζ et T dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

b) que représente I pour ζ ? justifier.

5/ a/ montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on déterminera.

b) calculer l'expression de $f^{-1}(x)$ pour $x \in J$.

c) tracer la courbe ζ' de f^{-1} dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

6/ a) montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution réelle unique α .

b) vérifier que $\alpha \in]1, 2[$.

B/ soit la suite U définie sur $\mathbb{N}$ par : U_0 réel donné ≥ 1 ; et $U_{n+1} = f(U_n)$

1/ montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $1 \leq U_n$.

2/ montrer que pour tout $x \in [1, +\infty[$; on a $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}$

3/ en déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} |U_n - \alpha|$.

4/ montrer que pour $n \in \mathbb{N}$; $|U_{n+1} - \alpha| \leq (\frac{1}{2\sqrt{2}})^n |U_0 - \alpha|$.

5/ en déduire que U converge et déterminer sa limite.

6/ on suppose que $U_0 \leq \alpha$.

<i>L.S.El Riadh</i>	<u><i>Etude de Fonctions</i></u>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		<i>Exercices</i>

- a) montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; on a $U_n \leq \alpha$.
- b) étudier le signe de $f(x)-x$, en déduire que U est monotone.
- c) conclure.

zribimaths.jimdo.com

L.S.El Riadh	<u>Etude de fonctions</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Solutions

Problème 1:

A/1/a/ f est dérivable sur $]0,4[$

$$Et f'(x) = \frac{2\sqrt{4x-x^2} - (2x-4) \frac{4-2x}{2\sqrt{4x-x^2}}}{4x-x^2} = \frac{8}{(4x-x^2)\sqrt{4x-x^2}}.$$

x	0	4
f'		+
f	$-\infty$	$+\infty$

b/ f est continue, strictement croissante sur $]0,4[$ donc f réalise une bijection de $]0,4[$ sur $f(]0,4[) = \mathbb{R}$.

c/ soit $g(x)=y \Leftrightarrow x=f(y)$, $x \in \mathbb{R}$ et $y \in]0,4[$.

$$\Leftrightarrow x = \frac{2y-4}{\sqrt{4y-y^2}}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{(2y-4)^2}{(4y-y^2)} \text{ et } (x \text{ et } y-2 \text{ de même signe})$$

$$\Leftrightarrow (4+x^2)y^2 - (16+4x^2)y + 16 = 0 \text{ et } (x \text{ et } y-2 \text{ de même signe})$$

$$\Leftrightarrow y = 2 + \frac{2x}{\sqrt{x^2+4x}}.$$

$$D'où g(x) = 2 + \frac{2x}{\sqrt{x^2+4x}}; x \in \mathbb{R}.$$

2/ on pose $h(x)=f(x)-1$; $x \in]0,4[$.

$$h'(x)=f'(x)-1.$$

On a $0 < 4x-x^2 = 4-(x-2)^2 \leq 4$ donc $(4x-x^2)\sqrt{4x-x^2} \leq 8$ et par suite $f'(x) \geq 1$

En fin $h'(x) \geq 0$.

h est continue, strictement croissante sur $]0,4[$ donc réalise une bijection de $]0,4[$ sur $h(]0,4[) = \mathbb{R}$.

Comme $0 \in \mathbb{R}$ alors il possède un seul antécédent par h dans $]0,4[$ soit α ; donc $h(x)=0$ admet dans $]0,4[$ une seule solution α et par suite $f(x)=x$ admet une unique solution α dans $]0,4[$.

3/ a/ $\delta: y=f'(2)(x-2)+f(2)$

$$d'où \delta: y=x-2.$$

$$b/x \in]0,4[;$$

on a $d(x)=f(x)-(x-2)$

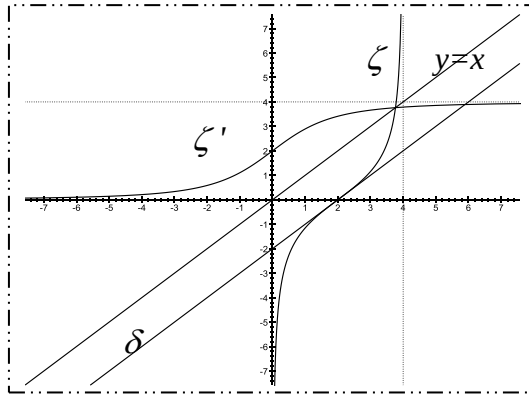
$$= \frac{2(x-2) - (x-2)\sqrt{4x-x^2}}{\sqrt{4x-x^2}} = \frac{(x-2)(2-\sqrt{4x-x^2})}{\sqrt{4x-x^2}} = \frac{(x-2)(x-2)^2}{\sqrt{4x-x^2}(2+\sqrt{4x-x^2})} \text{ donc le signe}$$

de $d(x)$ est celui de $x-2$.

x	0	2	4
Sig(d)	-	0	+
Position	ζ_f au dessus de δ	ζ_f en dessous de δ	

2010-2011

c/ représentation graphique :



B/ 1/ soit $P \ll U_n > \alpha, n \in \mathbb{N}$.

On a $U_0 > \alpha$ d'où P est vraie pour le premier terme.

Supposons que P est vraie à l'ordre n et montrons que P est vraie à l'ordre $n+1$.

On a $U_n > \alpha$ et g croissante car f l'aît donc $g(U_n) > g(\alpha)$ et par suite $U_{n+1} > \alpha$.

D'où P est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2/ d'après le graphique on a :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)-x$	+	0	-

3/ $n \in \mathbb{N}; U_n > \alpha$. Donc $g(U_n) - U_n < 0$ d'où $U_{n+1} < U_n$
par suite U est croissante.

4/ U est décroissante minorée par α donc convergente soit l sa limite.

On a $U_{n+1} = g(U_n)$, U converge vers l et g continue en l d'où $f(l)=l \Leftrightarrow l=\alpha$.

C/ $1/x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$;

$$\varphi(x) = \frac{2}{2 + \frac{2 \tan x}{\sqrt{4 \tan^2 x + 4}}} = \frac{2}{2 + 2 \frac{\sin x}{\cos x} \cos x} = \frac{1}{1 + \sin x}$$

$$\text{et } \frac{1}{1 + \sin \frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}$$

$$\text{D'où } \varphi(x) = \frac{1}{1 + \sin x}, x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

$$2/ x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] ; \varphi'(x) = \frac{-\cos x}{(1 + \sin x)^2}.$$

φ est continue, strictement croissante donc φ réalise

x	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
φ'	-	0
φ	$+\infty$	$\frac{1}{2}$

L.S.El Riyadh	<u>Etude de fonctions</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Solutions

une bijection de $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $\varphi <] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] > = [\frac{1}{2}, +\infty[$.

3/ on pose $\varphi^{-1}(2)=x \Leftrightarrow 2=\varphi(x) ; x \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$$\Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{2} ; x \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6}$$

en fin $\varphi^{-1}(2) = -\frac{\pi}{6}$

de même $\varphi^{-1}(2 + \sqrt{2}) = -\frac{\pi}{4}$.

4/ continuité sur $] \frac{1}{2}, +\infty[$: on a φ est continue sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et φ' non nulle

donc φ est dérivable sur $] \frac{1}{2}, +\infty[$.

Dérivabilité de φ à droite en $\frac{1}{2}$: $\varphi'_g(\frac{\pi}{2})=0$ donc ζ_φ admet au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$ une demi tangente horizontale par suite ζ_φ^{-1} admet au point d'abscisse $\frac{1}{2}$ une demi tangente verticale donc φ n'est pas dérivable à droite en $\frac{1}{2}$.

En fin φ est dérivable sur $] \frac{1}{2}, +\infty[$.

Et $(\varphi^{-1})'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}$ avec $y = \varphi^{-1}(x) \Leftrightarrow \varphi(y) = x \quad x \in] \frac{1}{2}, +\infty[$ et $y \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$$= \frac{1}{(-\cos y) \frac{1}{(1 + \sin y)^2}}$$

on a $x = \frac{1}{1 + \sin y}$ donc $\sin y = \frac{1-x}{x}$ d'où $\cos y = \pm \frac{\sqrt{2x-1}}{|x|}$ or $x \in] \frac{1}{2}, +\infty[$ et

$y \in] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

alors $\cos y = \frac{\sqrt{2x-1}}{x}$

en fin $(\varphi^{-1})'(x) = \frac{1}{-\frac{\sqrt{2x-1}}{x}} = \frac{-1}{x\sqrt{2x-1}}, x \in] \frac{1}{2}, +\infty[$

L.S.El Riadh	<u>Etude de fonctions</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Solutions

Problème 2:

$$\begin{aligned}
 \text{A/ 1/a/ } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{f(x) - f(\frac{\pi}{2})}{x - \frac{\pi}{2}} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\sqrt{2\cos x}}{(x - \frac{\pi}{2})\sqrt{1 - \cos x}} \quad \text{on pose } t = x - \frac{\pi}{2} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{2\cos(t + \frac{\pi}{2})}}{t\sqrt{1 + \cos(t + \frac{\pi}{2})}} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{-2\sin t}}{t\sqrt{1 - \sin t}} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{1}{\sqrt{-t}\sqrt{1 - \sin t}} \sqrt{2\frac{\sin t}{t}} \\
 &= +\infty \sqrt{2} = +\infty.
 \end{aligned}$$

D'où f n'est pas dérivable à gauche en $\frac{\pi}{2}$.

b/ la fonction : $x \rightarrow 2\cos x$ est dérivable sur $]0, \pi/2[$ et la fonction : $x \rightarrow 1 - \cos x$ dérivable et non nulle sur $]0, \pi/2[$

alors la fonction $x \rightarrow \frac{2\cos x}{1 - \cos x}$ est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et strictement positive alors f est dérivable sur

$$]0, \frac{\pi}{2}[; \text{ et } f'(x) = \frac{\frac{-2\sin x(1 - \cos x) - 2\sin x \cos x}{(1 - \cos x)^2}}{2\sqrt{\frac{2\cos x}{1 - \cos x}}} = \frac{-\sin x}{(1 - \cos x)^2 f(x)}.$$

2/a/

b/ f est continue, strictement décroissante sur $]0, \pi/2]$

alors f réalise une bijection de $]0, \pi/2]$ sur $\mathbb{R}_+$

x	0	$\frac{\pi}{2}$
f'		-
f	$+\infty$	0

$$\text{c/ } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - \frac{\pi}{2}}{x}$$

on pose $g(x) = y$ signifie $x = f(y)$; on a $f(\frac{\pi}{2}) = 0$ signifie $\frac{\pi}{2} = g(0)$

<i>L.S.El Rjadh</i>	<u>Etude de fonctions</u>	<i>Mr Zribi</i>
4^{ème} Maths		Solutions

$$= \lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{y - \frac{\pi}{2}}{f(y) - f(\frac{\pi}{2})} = \lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\frac{f(y) - f(\frac{\pi}{2})}{y - \frac{\pi}{2}}} = 0 \quad \text{d'où } g \text{ est dérivable à droite en } 0.$$

d/f est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et f' non nulle sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ alors g est dérivable sur $]0, +\infty[$;
et g dérivable à droite en 0 d'où g est dérivable sur $[0, +\infty[$.

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} ; x \in \mathbb{R}_+ . \text{ on pose } y = g(x) \text{ signifie } f(y) = x \quad ; y \in]0, \frac{\pi}{2}[$$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{(1 - \cos y)^2 f'(y)}{-\sin y}$$

$$\checkmark \quad x = \sqrt{\frac{2 \cos y}{1 - \cos y}} \Rightarrow \cos y = \frac{x^2}{2 + x^2} \Rightarrow 1 - \cos y = \frac{2}{2 + x^2}$$

$$\checkmark \quad \sin^2 y = 1 - \cos^2 y = 1 - \frac{x^4}{(2 + x^2)^2} = \frac{4 + 4x^2}{(2 + x^2)^2} \Rightarrow \sin y = \pm \frac{2\sqrt{1 + x^2}}{2 + x^2} \text{ et } y \in]0, \frac{\pi}{2}] \Rightarrow$$

$$\sin y = \frac{2\sqrt{1 + x^2}}{2 + x^2}$$

$$g'(x) = \frac{4x}{(2 + x^2)^2} \times \frac{-(2 + x^2)}{2\sqrt{1 + x^2}} = \frac{-2x}{(2 + x^2)\sqrt{1 + x^2}}$$

3/ on pose $h(x) = f(x) - x ; x \in]0, \frac{\pi}{2}] ; h'(x) = f'(x) < 0$.

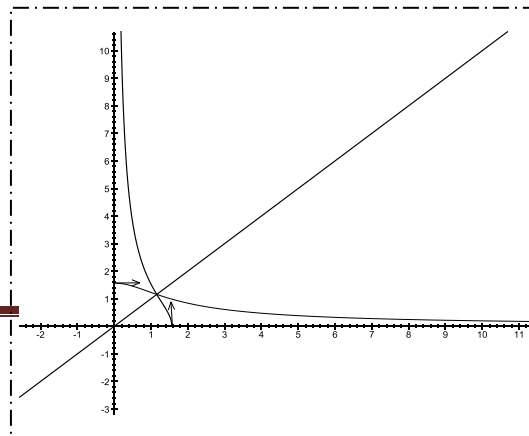
h continue strictement décroissante sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ alors h réalise une bijection de $]0, \frac{\pi}{2}]$

$$\text{sur } h[0, \frac{\pi}{2}] = [h(\frac{\pi}{2}), \lim_{x \rightarrow 0^+} h(x)] = [-\frac{\pi}{2}, +\infty[.$$

l'élément $0 \in [-\frac{\pi}{2}, +\infty[$ alors il possède un unique antécédent $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}]$ par h d'où $h(\alpha) = 0$

donc $f(\alpha) = \alpha$ admet une seule solution $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}]$ et comme $h(\frac{\pi}{3}) h(\frac{\pi}{2}) < 0$ alors $\alpha \in]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}[$

4/ représentation graphique :



L.S.El Riadh	<u>Etude de fonctions</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Solutions

B/ 1/a/ $\varphi(x) = f \circ \psi(x)$ avec $\psi(x) = \frac{\pi}{2} - x$. ψ est définie et continue sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ et f définie et continue sur $\psi < [0, \frac{\pi}{2}[\Rightarrow]0, \frac{\pi}{2}]$ d'où φ est définie et continue sur $[0, \frac{\pi}{2}[$.

b/ φ est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et $\varphi'(x) = -f'(\frac{\pi}{2} - x) > 0$.

φ continue strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ alors φ réalise une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}[$ sur

$\varphi < [0, \frac{\pi}{2}[\Rightarrow]\varphi(0), \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \varphi(x) [= [0, +\infty[$ car :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \quad \text{on pose } t = \frac{\pi}{2} - x$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = +\infty$$

$$2/a/ x \in \mathbb{R}_+ \quad \varphi\left(\frac{\pi}{2} - g(x)\right) = f\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + g(x)\right) = f(g(x)) = x.$$

$$b/ x \in \mathbb{R}_+ ; \varphi(\varphi(\frac{\pi}{2} - g(x))) = \varphi(x) \Rightarrow \varphi(x) = \frac{\pi}{2} - g(x).$$

$$3/a/ n \in \mathbb{N}^* ; n \leq k \leq 2n \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{k}{n^2} \leq \frac{2}{n} \Rightarrow \alpha + \frac{1}{n} \leq \alpha + \frac{k}{n^2} \leq \alpha + \frac{2}{n}$$

et $\phi'(x) = -g'(x) \geq 0$ alors ϕ croissante.

$$\phi\left(\alpha + \frac{1}{n}\right) \leq \phi\left(\alpha + \frac{k}{n^2}\right) \leq \phi\left(\alpha + \frac{2}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n} \phi\left(\alpha + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n} \phi\left(\alpha + \frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=n}^{2n} \phi\left(\alpha + \frac{2}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{n+1}{n} \phi\left(\alpha + \frac{1}{n}\right) \leq U_n \leq \frac{n+1}{n} \phi\left(\alpha + \frac{2}{n}\right)$$

$$b/ \text{ on a : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi\left(\alpha + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \phi\left(\alpha + \frac{2}{n}\right) = \phi(\alpha) = \frac{\pi}{2} - g(\alpha) = \frac{\pi}{2} - \alpha.$$

L.S.El Riadh	<u>Etude de fonctions</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Solutions

($f(\alpha) = \alpha$ signifie $\alpha = g(\alpha)$)

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} = 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \frac{\pi}{2} - \alpha$

Problème 3:

A/ 1/ $x \in [0, \pi]$; $f'(x) = -\frac{2}{3} \sin x \leq 0$.

2/ $x \in [0, \pi]$, on pose $g(x) = f(x) - x$; $g'(x) = f'(x) - 1 < 0$.

g est continue et strictement décroissante sur $[0, \pi]$

$g(0) = 1$ et $g(\pi) = -\frac{1}{3} - \pi$ alors $g(0) g(\pi) < 0$

d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe α unique

dans $]0, \pi[$ tel que $g(\alpha) = 0$, soit $f(\alpha) = \alpha$.

On a : $g(0) = 1 > 0$ et $g(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{3} - \frac{\pi}{2} < 0$ donc $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

x	0	π
f'		-
	1	
f		$\frac{1}{3}$

3/a/ soit $P \ll 0 \leq U_n \leq \frac{\pi}{2}$; $n \in \mathbb{N}$

on a $0 \leq U_0 \leq \frac{\pi}{2}$ car $0 < U_0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ d'où P est vraie pour $n=0$.

Supposons que P est vraie jusqu'à l'ordre n et prouvons qu'elle vraie a l'ordre $n+1$.

On a $0 \leq U_n \leq \frac{\pi}{2}$ et f est décroissante

donc $f(\frac{\pi}{2}) \leq f(U_n) \leq f(0)$ d'où $\frac{1}{3} \leq U_{n+1} \leq 1$ et par suite $0 \leq U_{n+1} \leq \frac{\pi}{2}$.

d'où P est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b/ soit $P \ll U_{2n} \leq \alpha \leq U_{2n+1}$; $n \in \mathbb{N}$

on a $U_0 < \alpha$ et f est décroissante

alors $f(\alpha) < f(U_0)$

donc $\alpha < U_1$

d'où $U_0 < \alpha < U_1$

P est donc vraie pour le premier indice.

Supposons que P est vraie à l'ordre n et montrons que P est vraie à l'ordre $n+1$.

On a $U_{2n} < \alpha < U_{2n+1}$ et f est décroissante

$\Leftrightarrow f(U_{2n+1}) < f(\alpha) < f(U_{2n})$

$\Leftrightarrow U_{2n+2} < \alpha < U_{2n+1}$

L.S.El Riadh	<u>Etude de fonctions</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Solutions

$$\Leftrightarrow f(U_{2n+1}) < f(\alpha) < f(U_{2n+2})$$

$$\Leftrightarrow U_{2n+2} < \alpha < U_{2n+3}$$

d'où P est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$c/ x \in [0, \pi] ; f'(x) = \frac{-2}{3} \sin x \Leftrightarrow |f'(x)| \leq \frac{2}{3}.$$

f continue sur $[0, \pi]$, dérivable sur $]0, \pi[$ et $|f'(x)| \leq \frac{2}{3}$ d'après le théorème des accroissements finies :

$$|f(x) - f(\alpha)| \leq \frac{2}{3} |x - \alpha| \quad ; x \text{ et } \alpha \text{ dans } [0, \pi].$$

$$D'où |f(x) - \alpha| \leq \frac{2}{3} |x - \alpha|, x \in [0, \pi].$$

$$d/ \text{ soit } P \ll |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n |U_0 - 1| ; n \in \mathbb{N} \gg$$

on a $|U_0 - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^0 |U_0 - 1|$ d'où P est vraie pour le premier indice.

Supposons que P est vraie à l'ordre n et montrons que P est vraie à l'ordre $n+1$.

$$\text{On a } U_n \in [0, \frac{\pi}{2}] ; d'après 3/c/ |f(U_n) - f(\alpha)| \leq \frac{2}{3} |U_n - \alpha| \Leftrightarrow |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3} |U_n - \alpha|$$

$$\text{Or } |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n |U_0 - 1|$$

$$\text{Donc } |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{2}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^n |U_0 - 1|$$

$$D'où |U_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} |U_0 - 1|.$$

En fin P est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$\text{On a } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0, \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} |U_n - \alpha| = 0 ; \text{ soit } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \alpha$$

4/a/ si k est pair alors $(-1)^{k+1} < 0$ et $U_k - \alpha < 0$ (d'après 3/b) d'où $(-1)^{k+1}(U_k - \alpha) > 0$
si k est impaire alors $(-1)^{k+1} > 0$ et $U_k - \alpha > 0$ (d'après 3/b) d'où $(-1)^{k+1}(U_k - \alpha) > 0$
en conclusion ; pour tout $n \in \mathbb{N} ; S_n > 0$.

$$b/ \text{ on a : } S_{n+1} - S_n = (-1)^n (U_{n+1} - \alpha) ; n \in \mathbb{N}.$$

Si n est pair alors $U_{n+1} - \alpha > 0$ (d'après 3/b) et $(-1)^n > 0$ d'où $S_{n+1} - S_n > 0$

Si n est impair alors $U_{n+1} - \alpha < 0$ et $(-1)^n < 0$ d'où $S_{n+1} - S_n > 0$

En fin S est strictement croissante

c/ $n \in \mathbb{N} ;$

$$|S_n| = \left| \sum_{k=0}^n (-1)^{k+1} (U_k - \alpha) \right| \leq \sum_{k=0}^n |(-1)^{k+1} (U_k - \alpha)| \leq \sum_{k=0}^n |U_k - \alpha| \leq \sum_{k=0}^n \left(\frac{2}{3}\right)^k |U_0 - \alpha| \text{ d'après 3/d}$$

L.S.El Rjadh	<u>Etude de fonctions</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Solutions

$$\leq |U_0 - \alpha| \sum_{k=0}^n \left(\frac{2}{3}\right)^k$$

$$\text{or } \sum_{k=0}^n \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} = 3 \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right)$$

$$\text{d'ou } |S_n| \leq |U_0 - \alpha| 3 \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) \text{ mais } 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \leq 1$$

en fin $|S_n| \leq 3|U_0 - \alpha|$; $n \in \mathbb{N}$.

$$\text{B/ } 1/a/ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) - g(0)}{x} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\tan x}{x} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\tan x}{x} - \frac{4}{3} = -\frac{1}{3}$$

Donc g n'est pas dérivable en 0.

$$b/ \text{ si } x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[; g'(x) = 1 + \tan^2 x > 0$$

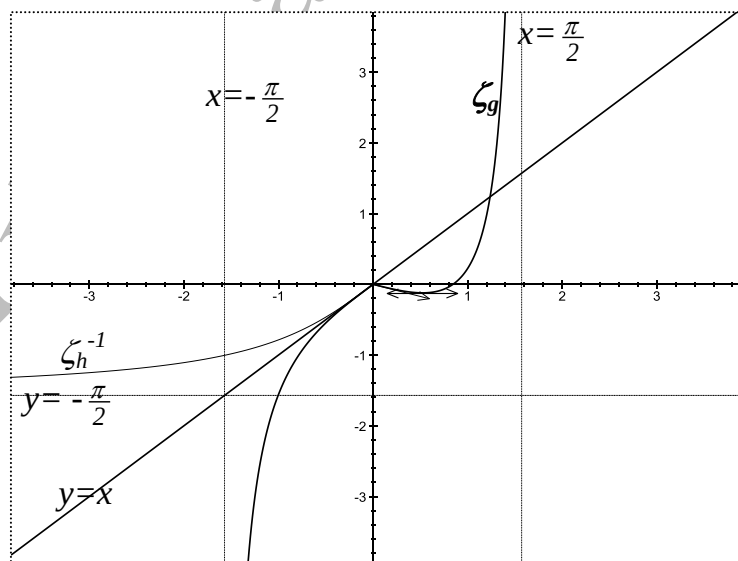
$$\text{si } x \in [0, \frac{\pi}{2}[; g'(x) = \tan^2 x - \frac{1}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} \tan x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \tan x - \frac{4}{3}x = +\infty$$

c/ la représentation graphique de g :

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$
g'	+	-	0	+
g	$-\infty$	0	$\frac{\sqrt{3}}{18}$	$+\infty$



L.S. El Riadh	<u>Etude de fonctions</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Solutions

2/a/ h est continue strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}, 0[$ donc réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, 0[$ sur $]-\infty, 0[$.

c/ on pose $h^{-1}(x)=y \Leftrightarrow x=h(y) ; x \in]-\infty, 0[$ et $y \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$

$$y \in]-\frac{\pi}{2}, 0[\Leftrightarrow -y - \frac{\pi}{2} \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$$

on a $\frac{1}{x} = \frac{1}{\operatorname{tg} y} = \cot g y = \operatorname{tg}(-y - \frac{\pi}{2})$ d'où $h^{-1}(\frac{1}{x}) = -y - \frac{\pi}{2}$

en fin $h^{-1}(x) + h^{-1}(\frac{1}{x}) = y - y - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} ; x \in]-\infty, 0[$.

3/ g est continue et strictement croissante donc réalise une bijection de $]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}[$

sur $g <]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}[\Rightarrow]\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{2\pi}{9}, \sqrt{3} - \frac{4\pi}{9}[= L$.

$0 \in L$ donc il existe un unique $\beta \in]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}[$ tel que $g(\beta)=0$.

4/a/ $x \in [\beta, \frac{\pi}{3}] ; \psi(x) - x = -\frac{g(x)}{g'(x)} \leq 0$ (d'après les variations de g).

d'où $\psi(x) \leq x ; x \in [\beta, \frac{\pi}{3}]$.

$\psi(x) = x \Leftrightarrow g(x) = 0$ d'où β est l'unique solution de $\psi(x) = x$

b/ $x \in [\beta, \frac{\pi}{3}] ; \psi'(x) = \frac{g(x)g''(x)}{(g'(x))^2}$

$$g''(x) = 2\operatorname{tg}(1 + \operatorname{tg}^2(x)) > 0$$

$$\psi(\frac{\pi}{3}) = \frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3} - \frac{4\pi}{9}}{3 - \frac{1}{3}} \leq \frac{\pi}{3}$$

d'après les variations de $\psi : \psi(x) \in [\beta, \frac{\pi}{3}]$.

5/ a/ soit $P \ll \beta \leq V_n \leq \frac{\pi}{3} ; n \in \mathbb{N} \gg$

on a $\beta \leq V_0 \leq \frac{\pi}{3}$ d'où P est vraie pour le premier indice.

x	β	$\frac{\pi}{3}$
ψ'	+	
ψ	β	$\psi(\frac{\pi}{3})$

<i>L.S.El Riadh</i>	<u>Etude de fonctions</u>	<i>Mr Zribi</i>
4^{ème} Maths		Solutions

Supposons que P est vraie à l'ordre n et montrons que P est vraie à l'ordre $n+1$

On a $\beta \leq V_n \leq \frac{\pi}{3}$ et ψ croissante

Donc $\psi(\beta) \leq V_{n+1} \leq \psi(\frac{\pi}{3}) \leq \frac{\pi}{3}$ (d'après 4/a/)

D'où P est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$b/ V_{n+1} - V_n = \psi(V_n) - V_n \leq 0$ (car $\beta \leq V_n \leq \frac{\pi}{3}$)

D'où v est décroissante.

V est décroissante minorée par β donc elle converge vers l .

On a V converge vers l ; $V_{n+1} = \psi(V_n)$ et ψ continue sur $[\beta, \frac{\pi}{3}]$

D'où $l = \psi(l) \Leftrightarrow l = \beta$.

Problème 4 :

A/ $1/ a/ x \in]0, \frac{\pi}{2}]$; $\varphi'(x) = \frac{-x - (1-x)}{x^2} - \cos x = -\frac{1}{x^2} - \cos x$.

$b/ x \in]0, \frac{\pi}{2}]$; $f(x) = x \Leftrightarrow \frac{1}{1 + \sin x} = x$

$\Leftrightarrow \frac{1-x}{x} = \sin x \Leftrightarrow \varphi(x) = 0$.

φ est continue ; strictement décroissante sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ de plus

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = +\infty$ et $\varphi(\frac{\pi}{2}) = \frac{2}{\pi} - 2 < 0$

d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe α unique dans $]0, \frac{\pi}{2}[$ tel que

$\varphi(\alpha) = 0$ soit $f(\alpha) = \alpha$.

$2/ x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $f'(x) = \frac{-\cos x}{(1 + \sin x)^2} \leq 0$.

f continue strictement décroissante donc réalise une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}]$

sur $f([0, \frac{\pi}{2}]) = [\frac{1}{2}, 1] = J$.

x	0	$\frac{\pi}{2}$
φ'		-
φ	$+\infty$	$\frac{2}{\pi} - 2$

<i>L.S.El Rjadh</i>	<u>Etude de fonctions</u>	<i>Mr Zribi</i>
4^{ème} Maths		Solutions

$$3/ a/ x \in [\frac{1}{2}, 1], f(f^{-1}(x)) = x \text{ or}$$

$$f(f^{-1}(x)) = \frac{1}{(1 + \sin f^{-1}(x))} \Leftrightarrow 1 + \sin(f^{-1}(x)) = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \sin(f^{-1}(x)) = \frac{1}{x} - 1$$

$$\text{pour tout } x \in [\frac{1}{2}, 1];$$

$$f^{-1}(x) \in [0, \frac{\pi}{2}] \Leftrightarrow \cos(f^{-1}(x)) = \sqrt{1 - \sin^2(f^{-1}(x))} = \sqrt{1 - (\frac{1}{x} - 1)^2} = \frac{\sqrt{2x-1}}{x}$$

$$b/ \sin(f^{-1}(\frac{2}{3})) = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} \text{ or } f^{-1}(\frac{2}{3}) \in [0, \frac{\pi}{2}] \text{ donc } f^{-1}(\frac{2}{3}) = \frac{\pi}{6}.$$

$$\begin{aligned} \cos(f^{-1}(2-\sqrt{2})) &= \\ \frac{\sqrt{2(2-\sqrt{2})}-1}{2-\sqrt{2}} &= \frac{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{2-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}}{2-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-1}{2-\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{2}-1)(2+\sqrt{2})}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

$$D'où f^{-1}(2-\sqrt{2}) = \frac{\pi}{4}$$

$$c/ 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{\pi}{2} - x \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Or } f(\frac{\pi}{2} - x) = \frac{1}{1 + \sin(\frac{\pi}{2} - x)} = \frac{1}{1 + \cos x}$$

$$D'où f^{-1}(\frac{1}{1 + \cos x}) = \frac{\pi}{2} - x.$$

$$\begin{aligned} \text{B/ 1/ } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{g(x) - g(\frac{\pi}{2})}{x - \frac{\pi}{2}} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{\frac{\sqrt{\sin 2x}}{\sin x}}{x - \frac{\pi}{2}} \quad \text{on pose } t = x - \frac{\pi}{2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{\sin(2t + \pi)}}{t \cos t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{-\sin t} \sqrt{\cos t}}{t \cos t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\sin(-t)}{t} \frac{1}{\sqrt{\sin(-t)}} \frac{1}{\sqrt{\cos t}} = -\infty \end{aligned}$$

$$D'où g \text{ n'est pas dérivable à gauche en } \frac{\pi}{2}.$$

L.S.El Riadh	<u>Etude de fonctions</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Solutions

2/ $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$; $x \rightarrow \sin 2x$ est dérivable et strictement positif donc $x \rightarrow \sqrt{\sin 2x}$ est dérivable

$x \rightarrow \sin x$ est dérivable et non nulle donc $x \rightarrow \frac{1}{\sin x}$ est dérivable.

En fin g est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ comme étant le produit de fonctions dérivables.

$$\text{Et } g'(x) = \frac{\cos 2x \sin x - \cos x \sin 2x}{\sqrt{\sin 2x} \sin^2 x} = \frac{\sin(-x)}{\sqrt{\sin 2x} \sin^2 x} \leq 0.$$

3/ g est continue et strictement décroissante sur $]0, \frac{\pi}{2}]$

donc réalise une bijection de $]0, \frac{\pi}{2}]$ sur $g[0, \frac{\pi}{2}] = [g(\frac{\pi}{2}), \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)] = [0, +\infty[$

$$\text{en effet : } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\sin 2x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{2 \cos x}}{\sqrt{\sin x}} = +\infty$$

4/ $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$; g est dérivable et $g'(x) \neq 0$ donc g^{-1} est dérivable sur $]0, +\infty[$.

Dérivabilité de g^{-1} à droite en 0 :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g^{-1}(x) - g^{-1}(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g^{-1}(x) - \frac{\pi}{2}}{x} \quad \text{on pose } y = g^{-1}(x) \Leftrightarrow g(y) = x ; \\ &= \lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{y - \frac{\pi}{2}}{g(y)} \\ &= \lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\frac{g(y) - g(\frac{\pi}{2})}{y - \frac{\pi}{2}}} = 0. \end{aligned}$$

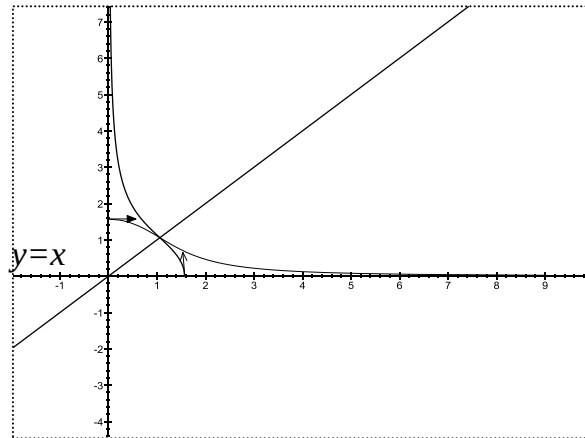
D'où g^{-1} est dérivable sur $]0, +\infty[$

$$\begin{aligned} (g^{-1})'(x) &= \frac{1}{g'(y)} \quad \text{avec } x = g(y) \\ &= -\sin y \sqrt{\sin 2y} \quad \text{avec } x^2 = \frac{\sin 2y}{\sin^2 y} = 2 \cot gy \\ &= -x \sin^2 y \quad \text{or} \quad \sin^2 y = \frac{1}{1 + \cot^2 y} = \frac{1}{1 + (\frac{x^2}{2})^2} \end{aligned}$$

L.S.El Riadh	<u>Etude de fonctions</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Solutions

$$d'où (g^{-1})'(x) = \frac{-x}{1 + (\frac{x^2}{2})^2} = -\frac{4x}{4 + x^4}.$$

5/ représentation graphique :



6/ on a $g(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$ donc $g^{-1}(\sqrt{2}) = \frac{\pi}{4}$.

b/ h est la composée de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$
et $h'(x) = 0$

c/ $h'(x) = 0 \Leftrightarrow h(x) = cte = h(1)$ or $h(1) = g^{-1}(\sqrt{2}) + g^{-1}(\sqrt{2}) = \frac{\pi}{2}$

D'où pour tout $x > 0$; $h(x) = \frac{\pi}{2}$.

Problème 5:

1/a/ $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$; $f'(x) = 3tg^2x (1 + tg^2x) \geq 0$

b/ f continue strictement croissante sur $]0, \frac{\pi}{4}[$

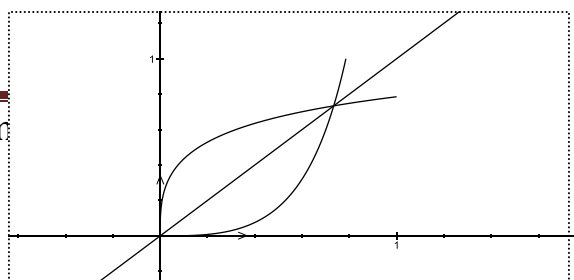
donc réalise une bijection de $]0, \frac{\pi}{4}[$ sur $[0, 1]$

c/ tableau de variations de f^{-1}

x	0	$\frac{\pi}{4}$
f'	0	+
f	0	1

x	0	1
f^{-1}		+
f^{-1}	0	$\frac{\pi}{4}$

d/ représentation graphique :



L.S.El Rjadh	<u>Etude de fonctions</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Solutions

ζ_f

ζ_f^{-1}

2/a/ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f^{-1}(x) - f^{-1}(0)}{x}$ on pose $y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(y) = x$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{y}{f(y) - f(0)} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{1}{\frac{f(y) - f(0)}{y}} = +\infty$$

donc f n'est pas dérivable à droite en 0.

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1))} = \frac{1}{f'(\frac{\pi}{4})} = \frac{1}{6}.$$

b/ pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{4}]$ f est dérivable et f' non nulle donc f^{-1} est dérivable sur $]0, 1]$.

Comme f^{-1} n'est pas dérivable à droite en 0 alors elle est dérivable sur $]0, 1]$.

c/ $x \in]0, 1]$; $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)}$ avec $x = f(y) \Leftrightarrow f^{-1}(x) = y$; $y \in]0, \frac{\pi}{4}]$

$$= \frac{1}{3 \tan^2 y (1 + \tan^2 y)}$$

on a : $x \in]0, 1]$, $y \in]0, \frac{\pi}{4}]$; $x = \tan^3 y \Leftrightarrow \tan y = \sqrt[3]{x}$

d'où $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}(1 + x^{\frac{2}{3}})}$, $x \in]0, 1]$.

3/ a/ $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$, $g'(x) = f'(x) - 1$ et $g''(x) = f''(x) = 3(1 + \tan^2 x)(2 \tan x + 4 \tan^3 x)$.

b/ g' est continue et strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{4}]$

et $g'(0)g'(\frac{\pi}{4}) < 0$; d'après le théorème des

valeurs intermédiaires :

x	0	$\frac{\pi}{4}$
g''	+	
g'	-1	5

L.S.El Riadh	<u>Etude de fonctions</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Solutions

il existe x_0 unique dans $]0, \frac{\pi}{4}[$ tel que $g'(x_0)=0$.

c/ le tableau de variation de g :

x	0	x_0	$\frac{\pi}{4}$
g'	-	0	+
g	0	$g(x_0)$	$1 - \frac{\pi}{4}$

D'après le tableau de variations de g , on a $g(x_0) < 0$.

4/a/ sur $[x_0, \frac{\pi}{4}]$, g continue, strictement croissante et $g(x_0)g(\frac{\pi}{4}) < 0$; d'après le théorème

des valeurs intermédiaires il existe α unique $\in]x_0, \frac{\pi}{4}[$ tel que $g(\alpha)=0$ soit $f(\alpha)=\alpha$.

b/ si $x \in]0, \alpha[$ alors $g(x) < 0$ (voir le tableau de variations de g) donc $f(x) < x$.

c/ pour tout $x \in]0, \alpha[$ on a $f(x) < x$ or f^{-1} est strictement croissante

donc $f^{-1}(f(x)) < f^{-1}(x)$, soit $x < f^{-1}(x)$

5/ a/ soit $P \ll 0 < U_n < \alpha, n \in \mathbb{N}$

on a $0 < U_0 < \alpha$ donc P est vraie pour $n=0$.

Supposons que P vraie à l'ordre n et montrons que P est vraie à l'ordre $n+1$.

On a $0 < U_n < \alpha$ et f^{-1} est croissante alors $f^{-1}(0) < f^{-1}(U_n) < f^{-1}(\alpha)$ donc $0 < U_{n+1} < \alpha$

D'où P est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b/ $n \in \mathbb{N}$; $U_{n+1} - U_n = f^{-1}(U_n) - U_n$ or $f^{-1}(x) > x$ pour tout $x \in]0, \alpha[$

D'où $U_{n+1} - U_n > 0$ et par suite U est strictement croissante.

c/ U croissante majorée par α donc elle est convergente on pose l sa limite

On a $U_{n+1} = f^{-1}(U_n)$ et f^{-1} continue sur $]0, \alpha[$ donc $f(l)=l$ soit $l=\alpha$.

6/ $h(0)=0, h(\frac{\pi}{4})=0$, h continue sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ comme somme de fonctions continues et h dérivable

sur $]0, \frac{\pi}{4}[$; d'après le théorème de Rolle il existe $\delta \in]0, \frac{\pi}{4}[$ tel que $h'(\delta)=0$.

<i>L.S.El Riadh</i>	<u><i>Etude de fonctions</i></u>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		<i>Solutions</i>

Problème 6:

$$1/ a/ \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{1 - \sin x}{\cos x} \quad \text{on pose } t = x - \frac{\pi}{2}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{1 - \sin(t + \frac{\pi}{2})}{\cos(t + \frac{\pi}{2})} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{1 - \cos t}{-\sin t} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{1 - \cos t}{-\frac{\sin t}{t}} = 0 = f(\frac{\pi}{2}) \quad \text{d'ou } f \text{ est}$$

continue à gauche en $\frac{\pi}{2}$.

$$b/ \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{f(x) - f(\frac{\pi}{2})}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{1 - \sin x}{(x - \frac{\pi}{2}) \cos x} \quad \text{on pose } t = x - \frac{\pi}{2}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{1 - \cos t}{-t \sin t} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{1 - \cos t}{-\frac{t^2}{\sin t}} = -\frac{1}{2}$$

d'ou f est dérivable à gauche en $\frac{\pi}{2}$ et $f'_g(\frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{2}$.

$$2/ a/ x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] ;$$

L.S. El Riadh	<u>Etude de fonctions</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Solutions

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{-\cos^2 x + \sin x(1 - \sin x)}{\cos^2 x} \\
 &= \frac{\sin x - 1}{\cos^2 x} = \frac{\sin x - 1}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)} \\
 &= \frac{-1}{1 + \sin x} < 0
 \end{aligned}$$

x	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
f'	-	
f	$+\infty$	0

b/ f est continue et strictement décroissante sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ alors f réalise une bijection

de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $f[)-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]> = [0, +\infty[$.

On a $f(\frac{\pi}{2})=0$ signifie $g(0)=\frac{\pi}{2}$; $f(0)=1$ signifie $0=g(1)$.

c/ soit $\varphi(x)=f(x)-x$; $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\varphi'(x)=f'(x)-1 < 0$.

φ est continue et strictement décroissante sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ alors φ réalise une bijection

de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $\varphi[)-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]> = [\varphi(\frac{\pi}{2}), \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \varphi(x)[= [-\frac{\pi}{2}, +\infty[$;

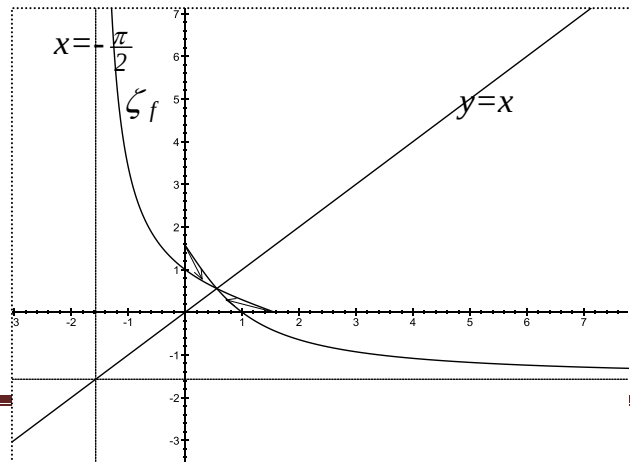
l'élément $0 \in [-\frac{\pi}{2}, +\infty[$ alors il possède un unique antécédent $\alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ par φ d'où

$\varphi(x)=0$ admet une unique solution $\varphi \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

et par suite $f(x)=x$ admet une unique solution $\varphi \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Comme $\varphi(\frac{\pi}{6}) \times \varphi(\frac{\pi}{4}) < 0$ alors $\alpha \in]-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}[$

d/ représentation graphique :



L.S.El Rjadh	<u>Etude de fonctions</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Solutions

$$y = -\frac{\pi}{2}$$

$$\zeta_{f^{-1}}$$

$$3/ a/ x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] ; f^2(x) = \frac{(1 - \sin x)^2}{\cos^2 x} = \frac{(1 - \sin x)^2}{(1 - \sin x)(1 + \sin x)} = \frac{1 - \sin x}{1 + \sin x},$$

$$d'où \sin x = \frac{1 - f^2(x)}{1 + f^2(x)}.$$

b/ f est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $f'(x)$ non nulle sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ alors g est dérivable sur

$$f[)-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]> = [0, +\infty[.$$

$$x \in [0, +\infty[; g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} \text{ on pose } g(x) = y \text{ signifie } x = f(y) , y \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{-1} = -(1 + \sin y) = -1 - \frac{1 - f^2(y)}{1 + f^2(y)} = -1 - \frac{1 - x^2}{1 + x^2} = \frac{-2}{1 + x^2}.$$

4/ a/ continuité de h sur $[0, 1[$:

✓ g est continue sur $[0, +\infty[$ et en particulier sur $[0, 1[$.

✓ On pose $k(x) = g \circ u(x)$ avec $u(x) = \frac{1+x}{1-x}$.

u est continue sur $[0, 1[$

et g est continue sur $u[0, 1[> = [1, +\infty[$ alors k est continue sur $[0, 1[$.

En fin h est continue sur $[0, 1[$ comme étant la somme de deux fonctions continues.

x	0	1
u	1	$+\infty$

Continuité de h à gauche en 1 :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) - \lim_{x \rightarrow 1^-} g\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \text{ (on pose } t = \frac{1+x}{1-x} \text{ alors } \lim_{x \rightarrow 1^-} g\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = -\frac{\pi}{2})$$

$$= 0 - (-\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} = h(1) \text{ d'où h est continue à gauche en 1.}$$

En conclusion h est continue sur $[0, 1]$.

b/ u est dérivable sur $[0, 1[$ et g est dérivable sur $u[0, 1[> = [1, +\infty[$ alors k est dérivable sur $[0, 1[$

L.S.El Riadh	<u>Etude de fonctions</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Solutions

Par suite h est dérivable sur $[0,1[$ comme étant la somme de deux fonctions dérivables sur $[0,1[$.

$$x \in [0,1[\quad h'(x) = g'(x) - u'(x) g'(u(x)) = \frac{-2}{1+x^2} - \frac{2}{(1-x)^2} \frac{-2}{1+(\frac{1+x}{1-x})^2} = \frac{-2}{1+x^2} + \frac{4}{2+2x^2} = 0.$$

d'où h est constante sur $[0,1[$ et $h(x) = h(0) = g(0) - g(1) = \frac{\pi}{2}$.

comme $h(1) = \frac{\pi}{2}$ alors $h(x) = \frac{\pi}{2}$; $x \in [0,1]$.

5/ a/ $n \in \mathbb{N}^*$; $0 \leq k \leq n \Rightarrow n \leq n+k \leq 2n \Rightarrow$

$$\frac{1}{2n} \leq \frac{1}{n+k} \leq \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow \alpha + \frac{1}{2n} \leq \alpha + \frac{1}{n+k} \leq \alpha + \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow g(\alpha + \frac{1}{n}) \leq g(\alpha + \frac{1}{n+k}) \leq g(\alpha + \frac{1}{2n}) \quad (g \text{ est décroissante})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n g(\alpha + \frac{1}{n}) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n g(\alpha + \frac{1}{k+n}) \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^n g(\alpha + \frac{1}{2n})$$

$$\Rightarrow \frac{n+1}{n} g(\alpha + \frac{1}{n}) \leq U_n \leq \frac{n+1}{n} g(\alpha + \frac{1}{2n})$$

$$b/ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} g(\alpha + \frac{1}{n}) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n} g(\alpha + \frac{1}{2n})$$

$$g(\alpha) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n \leq g(\alpha)$$

d'après le théorème des gendarmes $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = g(\alpha)$ mais $g(\alpha) = \alpha$

et par suite $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \alpha$.

Problème 7 :

1/a/

✓ Continuité à gauche en $\frac{\pi}{2}$: $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} 1 - \frac{1}{1 + \tan t} = 1 - 0 = 1 = f(\frac{\pi}{2})$ d'où f est

continue à droite en $\frac{\pi}{2}$

L.S. El Riadh	<u>Etude de fonctions</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Solutions

✓ Continuité sur $] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$: la fonction $x \rightarrow \operatorname{tg} x$ est continue sur $] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$; la fonction $x \rightarrow 1 + \operatorname{tg} x$ est continue et non nulle sur $] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$ d'où f est continue sur $] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$.

f est donc continue sur $] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$.

$$\begin{aligned} \text{b/ } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{f(x) - f(\frac{\pi}{2})}{x - \frac{\pi}{2}} &= \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{-1}{(1 + \operatorname{tg} x)(x - \frac{\pi}{2})} \quad \text{on pose } t = x - \frac{\pi}{2} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{-1}{t(1 - \cot t)} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{-1}{t - \frac{t}{\operatorname{tg} t}} = 1 \end{aligned}$$

d'où f est dérivable à gauche en $\frac{\pi}{2}$ et $f'_g(\frac{\pi}{2}) = 1$.

c/ la fonction $x \rightarrow \operatorname{tg} x$ est dérivable sur $] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$ et la fonction $x \rightarrow 1 + \operatorname{tg} x$ dérivable et non nulle sur $] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$ alors f est dérivable sur $] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$

comme f est dérivable à gauche en $\frac{\pi}{2}$ alors f est dérivable sur $] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$.

$$\text{et } f'(x) = \frac{(1 + \operatorname{tg}^2 x)(1 + \operatorname{tg} x) - \operatorname{tg} x(1 + \operatorname{tg}^2 x)}{(1 + \operatorname{tg} x)^2} = \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{(1 + \operatorname{tg} x)^2} = \frac{1}{(\sin x + \cos x)^2} > 0.$$

d/

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg} x} = -\infty$$

en effet si $x > -\frac{\pi}{4}$ alors $\operatorname{tg} x > -1$

2/a/ f est continue et strictement croissante sur $] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}[$

alors f réalise une bijection de

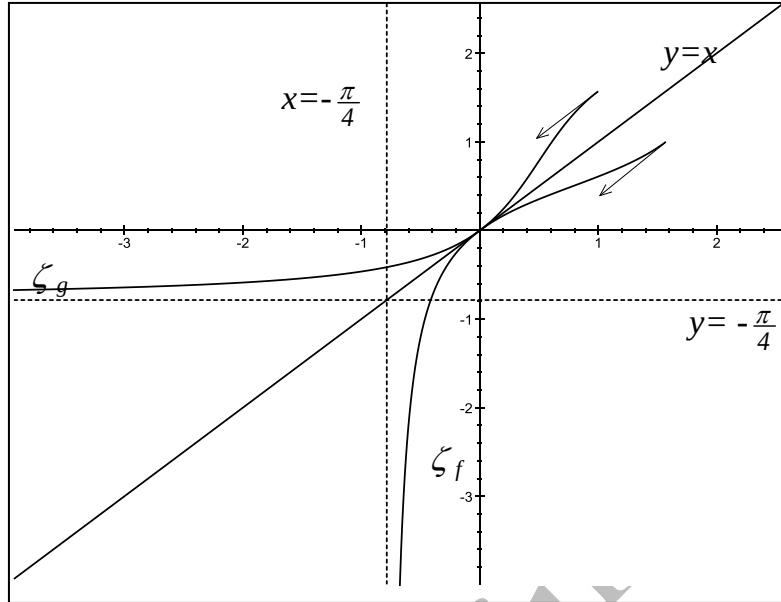
sur $f[] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}] > =] -\infty, 1]$

x	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
f'	+	
f	$-\infty$	1

L.S.El Riadh	<u>Etude de fonctions</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Solutions

b/ $g(\frac{1}{2}) = \frac{\pi}{4}$ car $f(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{2}$ et $g(0) = 0$ car $f(0) = 0$.

c/ représentation graphique :



3/ f est dérivable sur $]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ et $f'(x) \neq 0$ donc g est dérivable.

Et $g'(x) = \frac{1}{f'(y)}$; on pose $x = f(y) \Leftrightarrow \operatorname{tg} y = \frac{x}{1-x}$

$g'(x) = (\sin y + \cos y)^2 = 1 + \sin 2y$ or $\sin 2y = \frac{2 \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg}^2 y}$

D'où $g'(x) = 1 + \frac{2 \operatorname{tg} y}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{(1 + \operatorname{tg} y)^2}{1 + \operatorname{tg}^2 y} = \frac{(1 + \frac{x}{1-x})^2}{1 + (\frac{x}{1-x})^2} = \frac{1}{2x^2 - 2x + 1}$

4/ a/

✓ continuité de φ à droite en 0 : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} g(\frac{2x-1}{2x})$ on pose $t = \frac{2x-1}{2x}$
 $= \lim_{t \rightarrow -\infty} g(t) = -\frac{\pi}{4} = \varphi(0)$

d'où φ est continue à droite en 0.

✓ Continuité de φ sur $]0,1]$: $\varphi(x) = g \circ \psi(x)$ avec $\psi(x) = \frac{2x-1}{2x}$.

ψ est continue sur $]0,1]$ et g est continue sur $\psi[0,1] =]-\infty, \frac{1}{2}]$ d'où φ est continue sur $]0,1]$.

L.S.El Rjadh	<u>Etude de fonctions</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Solutions

b/ ψ est dérivable sur $]0,1[$ et g dérivable sur $\psi<]0,1[> =]-\infty, \frac{1}{2}[$ d'où φ est dérivable sur $]0,1[$

$$\varphi'(x) = \psi'(x) g'(\psi(x)) = \frac{2}{4x^2} \frac{1}{2\left(\frac{2x-1}{2x}\right)^2 - 2\frac{2x-1}{2x} + 1} = \frac{1}{2x^2 - 2x + 1}.$$

c/ on pose $h(x) = \varphi(x) - g(x)$; $x \in]0,1[$.

$h'(x) = \varphi'(x) - g'(x) = 0$ d'où h est constante.

$$h(x) = h(0) = \varphi(0) - g(0) = -\frac{\pi}{4}, x \in]0,1[$$

d/ $x \in [0,1]$; $\varphi(x) = g(x) - \frac{\pi}{4}$.

g est dérivable à droite en 0 donc φ est dérivable à droite en 0 et $\varphi'_d(0) = g'_d(0) = 1$.

Problème 8:

1/a/ la fonction : $x \mapsto \frac{1+x}{1-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et en particulier sur $] -1,1[$ et $\frac{1+x}{1-x} > 0$ sur $] -1,1[$

$$\text{alors } f \text{ est dérivable sur }] -1,1[; f'(x) = \frac{\frac{2}{(1-x)^2}}{2\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}} = \frac{1}{(1-x)^2 f(x)}.$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}(x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{1}{\sqrt{1-x}\sqrt{1+x}} = +\infty \end{aligned}$$

x	-1	1
f		+
f	0	$+\infty$

2010-2011

<i>L.S.El Rjadh</i>	<u>Etude de fonctions</u>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		<i>Solutions</i>

d'où f n'est pas dérivable à droite en -1 et ζ_f admet au point d'abscisse -1 une demi-tangente verticale dirigée vers le haut..

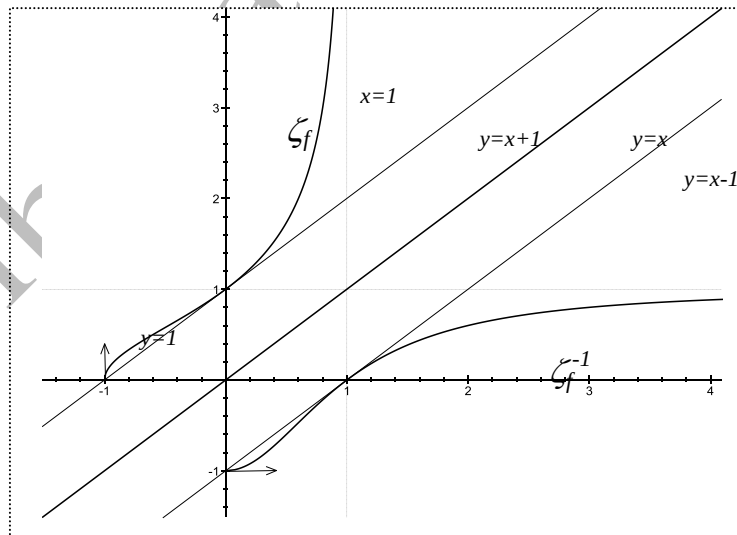
c/ tableau de variations de f .

2/a/ $T : y = f'(0)(x-0) + f(0) = x+1$.

$$\begin{aligned}
 b) \quad x \in [-1,1[; \quad f(x) - (x+1) &= \frac{\sqrt{x+1} - (x+1)\sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}} \\
 &= \frac{\sqrt{1+x}(1-\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{1-x}} \\
 &= \frac{\sqrt{1+x} \quad x^2}{\sqrt{1-x}(1+\sqrt{1-x^2})} \\
 &= \frac{x^2 \quad f(x)}{1+\sqrt{1-x^2}}
 \end{aligned}$$

$f(x) - (x+1) \geq 0$, $x \in [-1,1[$ alors ζ est au dessus de T .

c/ représentation graphique de f :



3/a/ f est continue et strictement croissante sur $[-1,1[$ alors f réalise une bijection de $[-1,1[$ sur $f[-1,1[= \mathbb{R}_+$

L.S.El Riadh	<u>Etude de fonctions</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Solutions

b/ $g(x)=y$ signifie $x=f(y)$; $x \in [0, +\infty[$ et $y \in [-1, 1[$.

$$x = \sqrt{\frac{1+y}{1-y}} \Rightarrow x^2 = \frac{1+y}{1-y} \Rightarrow y(1+x^2) = x^2 - 1 \Rightarrow y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

$$d'ou \ g(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} ; x \in [0, +\infty[.$$

B/ $1/a/ \ h(x) = f \circ u(x)$ avec $u(x) = \cos x$.

u continue sur $]0, \pi]$ et f continue sur $u[0, \pi] = [u(\pi), \lim_{x \rightarrow 0^+} u(x)] = [-1, 1[$ d'ou f est

continue sur $]0, \pi]$.

b/ $x \in]0, \pi]$;

$$h(x) = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}}$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cos^2 \frac{x}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}}}$$

$$= \sqrt{\cot^2 g^2 \frac{x}{2}} = \left| \cot g \frac{x}{2} \right| = \cot g \frac{x}{2}$$

$$c/ \ x \in]0, \pi] ; h'(x) = -\frac{1}{2} (1 + \cot^2 g^2 \frac{x}{2}) < 0$$

h est continue et strictement décroissante sur $]0, \pi]$

alors

h réalise une bijection de $]0, \pi]$ sur $h[0, \pi] = \mathbb{R}_+$.

2/ h est dérivable sur $]0, \pi]$ et h' non nulle sur $]0, \pi]$

d'ou φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

$$\varphi'(x) = \frac{1}{h'(\varphi(x))} ; x \in [0, +\infty[. \text{ On pose } \varphi(x) = y \text{ signifie } x = h(y) ; y \in]0, \pi].$$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{h'(y)} = \frac{1}{-\frac{1}{2} (1 + \cot^2 g^2 \frac{y}{2})} ; x = \operatorname{tg} \frac{y}{2}$$

$$d'ou \ \varphi'(x) = \frac{-2}{1 + x^2}$$

$$b/ \ x \in \mathbb{R}_+^* ; w(x) = \varphi(x) + \varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \varphi(x) + \varphi(k(x)) \text{ avec } k(x) = \frac{1}{x}.$$

$$w'(x) = \varphi'(x) + k'(x) \varphi'(k(x)) = \frac{-2}{1 + x^2} + \left(\frac{-1}{x^2}\right) \frac{-2}{1 + \frac{1}{x^2}} = \frac{-2}{1 + x^2} + \frac{2}{1 + x^2} = 0.$$

x	1	2
f'	-	
f	$+\infty$	0

L.S.El Riadh	<u>Etude de fonctions</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Solutions

Don w est constante sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$w(x) = w(1) = 2\varphi(1) = \pi; x \in \mathbb{R}_+^*.$$

3/ a/ on a $n \leq k \leq 2n$; $n \in \mathbb{N}$ et φ strictement décroissante ($\varphi' < 0$)

$$\Rightarrow \varphi(2n) \leq \varphi(k) \leq \varphi(n)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=n}^{2n} \varphi(2n) \leq \sum_{k=n}^{2n} \varphi(k) \leq \sum_{k=n}^{2n} \varphi(n)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n+1} \sum_{k=n}^{2n} \varphi(2n) \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=n}^{2n} \varphi(k) \leq \frac{1}{n+1} \sum_{k=n}^{2n} \varphi(n)$$

$$\Rightarrow \varphi(2n) \leq V_n \leq \varphi(n).$$

$$b/ \text{ on a } \varphi(x) + \varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \pi \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) + \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi\left(\frac{1}{x}\right) = \pi \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = \pi - \varphi(0) = 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0.$$

Problème 9:

$$A/ \text{ 1/ a/ pour } x \in]1,2] \text{ on a : } \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \frac{\sqrt{x}\sqrt{2-x}}{-(x-1)(2-x)} = \frac{-\sqrt{x}}{(x-1)\sqrt{2-x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-\sqrt{x}}{(x-1)\sqrt{2-x}} = -\infty$$

d'où f n'est pas dérivable à gauche en 2.

b/

• la fonction : $x \rightarrow 2x - x^2$ est dérivable et strictement positive sur $]1,2[$ alors la fonction : $x \rightarrow \sqrt{2x - x^2}$ est dérivable sur $]1,2[$.

• la fonction : $x \rightarrow x - 1$ est dérivable et non nulle sur $]1,2[$.

D'où f est dérivable sur $]1,2[$.

L.S.El Riadh	<u>Etude de fonctions</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Solutions

$$f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2 \sqrt{2x-x^2}} ; x \in]1,2[.$$

c/ le tableau de variations de f

2/ on pose $\varphi(x) = f(x) - x ; x \in I$.

- φ est la somme de deux fonctions continues sur I donc continue sur I.
- $\varphi'(x) = f'(x) - 1 < 0$ alors φ est strictement décroissante sur I.
- $\lim_{x \rightarrow 1^+} \varphi(x) = +\infty$ et $\varphi(2) < 0$

x	1	2
f'	-	
f	$+\infty \xrightarrow{\quad} 0$	

d'après le théorème des valeurs intermédiaires : $\varphi(x) = 0$ donc $f(x) = x$ admet une solution unique α dans I.

On a $\varphi(\frac{3}{2})\varphi(2) < 0$ alors $\alpha \in]\frac{3}{2}, 2[$.

3/ a/ on a : f continue, strictement décroissante et $f(I) = [0, +\infty[$ alors f réalise une bijection de I sur $J = [0, +\infty[$.

b/ soit $g(x) = y ; x = f(y)$ avec : $x \in [0, +\infty[$ et $y \in]1,2]$.

$$x = \frac{\sqrt{2y-y^2}}{y-1} \Rightarrow x^2(y-1)^2 = 2y-y^2 \Rightarrow (x^2+1)y^2 - (2+2x^2)y + x^2 = 0$$

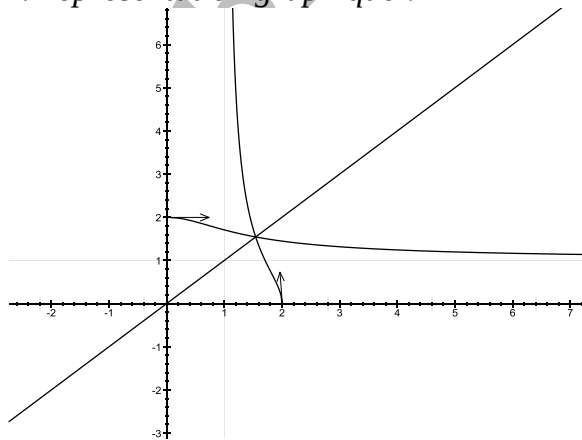
$$\Delta = (2+2x^2)^2 - 4x^2(x^2+1) = 4(x^2+1)$$

$$\Rightarrow y = \frac{(2+2x^2) - 2\sqrt{x^2+1}}{2(x^2+1)} = 1 - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \notin]1,2]$$

$$\text{ou } y = \frac{(2+2x^2) + 2\sqrt{x^2+1}}{2(x^2+1)} = 1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \in]1,2]$$

$$\text{d'ou } g(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} ; x \in J.$$

4/ représentation graphique :



L.S.El Rjadh	<u>Etude de fonctions</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Solutions

B/ 1/ soit $P = \ll 1 \leq U_n \leq 2 ; n \in \mathbb{N} \gg$.

On a $1 \leq U_0 = 1 \leq 2$ alors P est vraie pour $n=0$.

Supposant que P est vraie jusqu'à l'ordre n et montrons que P est vraie en $n+1$.

On a $1 \leq U_n \leq 2$; g étant strictement décroissante car f l'aît

$$D'ou \quad 1 \leq g(2) = 1 + \frac{1}{\sqrt{5}} \leq g(U_n) \leq g(1) = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \leq 2.$$

D'ou $1 \leq U_{n+1} \leq 2$ d'ou P est vraie a l'ordre $n+1$.

2/ on a : α et $U_n \in [1, 2]$ alors $|g(U_n) - g(\alpha)| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} |U_n - \alpha|$; et $f(\alpha) = \alpha$ alors $g(\alpha) = \alpha$

$$D'ou \quad |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} |U_n - \alpha|.$$

$$3/ \text{ on a : } |U_1 - \alpha| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} |U_0 - \alpha|$$

$$|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} |U_{n-1} - \alpha|$$

$$d'ou \quad |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n |U_0 - \alpha|$$

$$\text{comme } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = 0 \quad \text{alors} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \alpha$$

$$\mathbf{C/ 1/} \text{ on a : } h(x) = \frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 2x}}} = \frac{1}{1 + \cos 2x} ; \quad x \in [0, \frac{\pi}{4}[\quad \text{et} \quad \frac{1}{1 + \cos 2\frac{\pi}{4}} = 1.$$

$$\text{Alors } h(x) = \frac{1}{1 + \cos 2x} ; \quad x \in [0, \frac{\pi}{4}].$$

2/ la fonction : $x \rightarrow 1 + \cos 2x$ dérivable, non nulle sur $[0, \frac{\pi}{4}]$

alors h est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{4}]$

$$\text{et } h'(x) = \frac{2 \sin 2x}{(1 + \cos 2x)^2} \geq 0, \quad x \in [0, \frac{\pi}{4}].$$

on a h continue, strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ et $f]0, \frac{\pi}{4}[=]\frac{1}{2}, 1]$

L.S. El Riadh	<u>Etude de fonctions</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Solutions

alors h réalise une bijection de $[0, \frac{\pi}{4}]$ sur $K = [\frac{1}{2}, 1]$.

3/ on pose $h^{-1}(\frac{2}{3}) = x$ signifie $\frac{2}{3} = h(x)$; $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{1 + \cos 2x} \Rightarrow \cos 2x = \frac{1}{2} \text{ et } x \in [0, \frac{\pi}{4}] \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} \text{ d'ou } h^{-1}(\frac{2}{3}) = \frac{\pi}{6}.$$

On pose $h^{-1}(2 - \sqrt{2}) = x$; $2 - \sqrt{2} = h(x)$; $x \in [0, \frac{\pi}{4}]$.

$$2 - \sqrt{2} = \frac{1}{1 + \cos 2x} \Rightarrow \cos 2x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } x \in [0, \frac{\pi}{4}] \Rightarrow x = \frac{\pi}{8} \text{ d'ou } h^{-1}(2 - \sqrt{2}) = \frac{\pi}{8}.$$

4/

- dérivabilité de h^{-1} sur $] \frac{1}{2}, 1[$: on a h dérivable et h' non nulle sur $]0, \frac{\pi}{4}[$ alors h^{-1} dérivable sur $] \frac{1}{2}, 1[$.

- Dérivabilité de h^{-1} à droite en $\frac{1}{2}$:

On a $h'_d(0) = 0$ alors ζ_h admet au point d'abscisse 0 une demi tangente horizontale d'ou ζ_h^{-1} admet au point d'abscisse $\frac{1}{2}$ une demi tangente verticale et par suite h^{-1} n'est pas dérivable à droite en $\frac{1}{2}$.

- Dérivabilité de h^{-1} à gauche en 1 :

On pose $h^{-1}(x) = y$ sig $x = h(y)$; on a $h(\frac{\pi}{4}) = 1$ sig $\frac{\pi}{4} = h^{-1}(1)$.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{h^{-1}(x) - h^{-1}(1)}{x - 1} = \lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \frac{y - \frac{\pi}{4}}{h(y) - h(\frac{\pi}{4})} = \lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{4}^-} \frac{1}{\frac{h(y) - h(\frac{\pi}{4})}{y - \frac{\pi}{4}}} = \frac{1}{2}$$

d'ou h^{-1} est dérivable à gauche en 1.

Par suite h^{-1} est dérivable sur $] \frac{1}{2}, 1[$.

$$(h^{-1})'(x) = \frac{1}{h'(h^{-1}(x))} ; x \in] \frac{1}{2}, 1[. \text{ On pose } h^{-1}(x) = y \text{ signifie } x = h(y) ; y \in]0, \frac{\pi}{4}[$$

$$(h^{-1})'(x) = \frac{1}{h'(y)} = \frac{1}{2 \sin 2y (1 + \cos 2y)^2}$$

L.S.El Riadh	<u>Etude de fonctions</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Solutions

$$\text{on a } x = \frac{1}{1 + \cos 2y} \Rightarrow x^2 = \left(\frac{1}{1 + \cos 2y} \right)^2$$

$$\text{on a } 1 + \cos 2y = \frac{1}{x} \Rightarrow \cos^2 2y = \frac{(1-x)^2}{x^2}$$

$$\Rightarrow \sin^2 2y = 1 - \cos^2 2y = \frac{2x-1}{x^2} \text{ et } y \in]0, \frac{\pi}{4}] \Rightarrow \sin 2y = \frac{\sqrt{2x-1}}{x}$$

$$\text{d'ou } (h^{-1})'(x) = \frac{1}{2 \frac{\sqrt{2x-1}}{x^2}} = \frac{1}{2x\sqrt{2x-1}} ; x \in]\frac{1}{2}, 1]$$

Problème 10 :

A/1/pour $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2+1} - x \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1}$$

$$= \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$= 1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$= 1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 0$$

2/on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ alors ζ admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote horizontale d'équation : $y=2$.

On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ alors ζ admet au voisinage de $-\infty$ une asymptote horizontale

d'équation : $y=0$.

3/ a/ pour tout $x \in \mathbb{R}$:

x	$-\infty$	$+\infty$
f'	+	
f	0	2

L.S.El Rjadh	<u>Etude de fonctions</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Solutions

$$f''(x) = \frac{-[2x\sqrt{x^2+1} + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}(x^2+1)]}{(x^2+1)^3}$$

$$= \frac{-3x\sqrt{x^2+1}}{(x^2+1)^3}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	+	0	-

f'' s'annule et change de signe en 0 alors $I(0,1)$ est un point d'inflexion de ζ .

b/ $T: y=f'(0)(x-0)+f(0)$; $f'(0)=1$ et $f(0)=1$.

$T: y=x+1$.

c/ pour tout $x \in \mathbb{R}$:

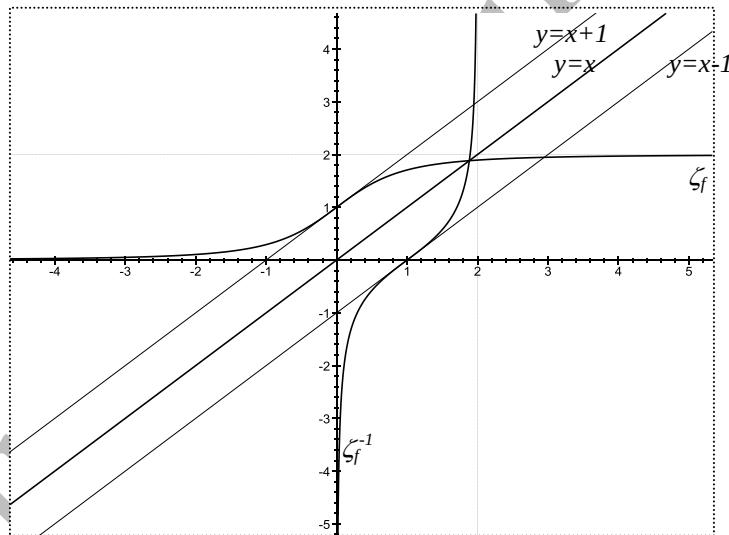
$$f(x) - y = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - x$$

$$= \frac{x(1 - \sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{-x^3}{\sqrt{x^2+1}(1 + \sqrt{x^2+1})}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe f(x)-y	+	0	-
Position	ζ au		ζ en

4/a/ représentation graphique :



b/ on a : $x \in \mathbb{R}$ alors $-x \in \mathbb{R}$. et $f(-x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = 2 - f(x)$;

d'où I est un centre de symétrie de ζ .

5/ a/ f est continue strictement croissante sur $\mathbb{R}$, alors f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $J = f(\mathbb{R}) =]0,2[$.

b/ on pose $f^{-1}(x)=y$ signifie $x=f(y)$; $x \in J$ et $y \in \mathbb{R}$.

<i>L.S.El Rjadh</i>	<u>Etude de fonctions</u>	<i>Mr Zribi</i>
4^{ème} Maths		Solutions

$$x = 1 + \frac{y}{\sqrt{y^2 + 1}} \Leftrightarrow x - 1 = \frac{y}{\sqrt{y^2 + 1}}$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)^2 = \frac{y^2}{y^2 + 1} \quad \text{et} \quad (x - 1)y \geq 0$$

$$\Leftrightarrow y^2(2x - x^2) = (x - 1)^2 \quad \text{et} \quad (x - 1)y \geq 0$$

$$\Leftrightarrow y^2 = \frac{(x - 1)^2}{2x - x^2} \quad \text{et} \quad (x - 1)y \geq 0$$

$$\Leftrightarrow y^2 = \left(\frac{x - 1}{\sqrt{2x - x^2}} \right)^2 \quad \text{et} \quad (x - 1)y \geq 0$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{x - 1}{\sqrt{2x - x^2}}$$

$$D'ou f^{-1}(x) = \frac{x - 1}{\sqrt{2x - x^2}} ; x \in J.$$

6/a/ soit $\varphi(x) = f(x) - x ; x \in \mathbb{R}$. φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$\varphi'(x) = f'(x) - 1 = \frac{1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}} - 1 < 0 ; x \in \mathbb{R}.$$

φ est continue, strictement décroissante sur $\mathbb{R}$, d'où réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\varphi(\mathbb{R}) =]\varphi(+\infty), \varphi(-\infty)[= \mathbb{R}$.

$0 \in \mathbb{R}$ donc possède un unique antécédent α par φ d'où $\varphi(\alpha) = 0$ et donc $f(\alpha) = \alpha$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$.

$$b) \text{ on a : } \varphi(1) \varphi(2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{2}{\sqrt{5}} - 1 \right) < 0 \quad d'où \quad 1 < \alpha < 2.$$

B/ 1/ soit $P = \langle 1 \leq U_n ; n \in \mathbb{N} \rangle$.

On a : $1 \leq U_0$; alors P est vraie pour le premier indice.

Supposons que P est vraie jusqu'à n et montrons que P est vraie à l'ordre $n+1$.

$$\text{On a } 1 \leq U_n \text{ et } f \text{ croissante} \Rightarrow f(1) \leq f(U_n) \Rightarrow 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} \leq U_{n+1} \Rightarrow 1 \leq U_{n+1}.$$

D'où P est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$$2/ \text{ on a } x \geq 1 \Rightarrow x^2 + 1 \geq 2 \Rightarrow (x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1} \geq 2\sqrt{2} \Rightarrow f'(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} ;$$

$$d'où \quad 0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

$$3/ f \text{ est dérivable sur } [1, +\infty[\text{ et } |f'(x)| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} ; x \in [1, +\infty[;$$

pour tout $n \in \mathbb{N} : U_n \in [1, +\infty[\text{ et } \alpha \in [1, +\infty[.$

<i>L.S.El Rjadh</i>	<u>Etude de fonctions</u>	<i>Mr Zribi</i>
4^{ème} Maths		Solutions

Alors d'après le théorème des accroissements finie : $|f(U_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} |U_n - \alpha|$

d'où $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} |U_n - \alpha| ; n \in \mathbb{N}$.

4/ soit $P \ll |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n |U_0 - \alpha| ; n \in \mathbb{N} \gg$

On a $|U_1 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^1 |U_0 - \alpha| ; d'où P est vraie pour le premier indice.$

Supposons que P est vraie jusqu'à l'ordre n et montrons P pour l'ordre $n+1$.

$$|U_{n+1} - \alpha| = |f(U_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} |U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n = \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^{n+1}.$$

D'où P est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5/ on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^n = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \alpha$.

6/ a/ on a : $U_0 \leq \alpha$;

supposons que $U_n \leq \alpha$ alors $f(U_n) \leq f(\alpha)$ d'où $U_{n+1} \leq \alpha$; par suite $U_n \leq \alpha ; n \in \mathbb{N}$.

b/ on a $\varphi(x) = f(x) - x$; si $x \leq \alpha$ alors $\varphi(x) \geq 0$ et si $x \geq \alpha$ alors $\varphi(x) \leq 0$.

on a $U_n \leq \alpha ; n \in \mathbb{N}$ donc $f(U_n) - U_n \geq 0$ et par suite U est croissante.

c/ U croissante majorée par α alors U converge vers l ; f continue en l d'où $f(l) = l$ alors $l = \alpha$.

L.S.El Riadh	<u>Isométrie</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Exercices

Exercice 1 :

Dans le plan orienté, ABI est un triangle équilatéral tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}) \equiv \frac{\pi}{3} (2\pi)$ et w la symétrie de B par rapport à (AI) .

A/ soit r la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ qui envoie A en I .

1/ montrer que w est le centre de r .

2/ soit $C=r(B)$; montrer que I est le milieu de $[AC]$.

3/ a tout point M de $[AB]$ distinct de A et B , on associe le point M' de $[IC]$ tel que $AM=IM'$; montrer que wMM' est équilatéral.

B/ on désigne par O le milieu de $[AI]$, K le milieu de $[BC]$ et H le milieu de $[wC]$.

1/ montrer qu'il existe un unique antidéplacement ϕ tel que $\phi(A)=I$ et $\phi(B)=C$.

2/ construire $I'=\phi(I)$. (justifier)

3/ montrer que ϕ n'a pas de points fixes.

4/ soit $S_{\Delta O \vec{u}}$ la forme réduite de ϕ .

a/ vérifier que Δ est la médiatrice de $[BH]$.

b/ déterminer $t_{\vec{u}}(H)$; donner la forme réduite de ϕ .

5/ soit $g=\phi \circ S_{(BI)}$. Donner la nature de g puis caractériser g .

Exercice 2 :

on considère dans le plan orienté un rectangle $ABCD$ de centre O tel que

$AB=2AD$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$; on désigne par I le milieu de $[AB]$ et J le milieu de $[CD]$.

1/ montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que $f(A)=C$ et $f(I)=J$; quel est son angle ? Caractériser f puis en déduire que $f(B)=D$.

2/ déterminer la droite δ telle que $f = S_{(I)} \circ S_{\delta}$.

3/ soit $r=r_{(I, \pi/2)}$.

a) déterminer $r(B)$, $r(C)$, $r(J)$.

b) soit M un point de $[CJ]$, la perpendiculaire à (IM) issue de I coupe la perpendiculaire à (BM) issue de J en M' ; quel est l'ensemble des points M' lorsque M décrit $[CJ]$.

4/ on pose $g=r \circ f$.

a) montrer que g est une rotation dont on précisera l'angle.

b) déterminer $g(A)$.

c) déduire la construction du centre de g .

5/ a) montrer qu'il existe un unique antidéplacement h tel que $h(A)=C$ et $h(I)=J$.

b) montrer que h est une symétrie glissante.

c) montrer que $h(B)=D$.

6/ a) déterminer $h \circ S_{(AB)}(A)$ et $h \circ S_{(AB)}(B)$; en déduire que $h \circ S_{(AB)} = f$.

b) déterminer les éléments caractéristiques de h .

L.S.El Riadh	<u>Isométrie</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Exercices

Exercice 3:

dans un plan orienté on considère un carré ABCD de centre I tel que

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$, soit J le milieu de [AD], K le milieu [CD] et E le point du plan tel que DBE est équilatéral direct.

1/ a) on pose $\psi = t_{\overrightarrow{BC}} \circ S_{(AC)}$, déterminer $\psi(A)$ et $\psi(D)$.

b) déduire que ψ est une symétrie glissante et la caractériser.

2/a) montrer qu'il existe un unique déplacement r tel que $r(B)=A$ et $r(A)=D$.

b) caractériser r .

3/ soit l'application $g = r_{(B, \pi/6)} \circ r_{(E, \pi/3)}$, déterminer la nature et les éléments caractéristiques de g .

4/ soit $f = r_{(I, \pi/2)}$, on pose $t = g \circ f^{-1}$.

a) déterminer $t(A)$.

b) caractériser t .

5/ soit M un point du plan on pose $M_1 = f(M)$ et $M_2 = g(M)$.

a) quelle est la nature du quadrilatère ABM₂M₁.

b) montrer qu'il existe un unique antidéplacement ϕ tel que $\phi(A)=M_1$ et $\phi(D)=M_2$.

c) comparer ϕ et $t_{A M_1} \circ S_{(AI)}$.

d) en déduire la nature et les éléments caractéristique de ϕ dans chacun des cas suivants :

➤ $M \in (BD)$

➤ M appartient à la parallèle à (AC) passant par D.

6/ soit Δ une droite variable passante par A et distinct de (AC) ; on désigne par B' et D' les projetés orthogonaux de B et D sur Δ .

a) soit Δ' la perpendiculaire à Δ passant par D, déterminer les images par f de Δ et Δ' ,

b) en déduire l'image de D' par f .

c) montrer que le cercle de diamètre [D'B'] passe par un point fixe lorsque Δ varie.

Exercice 4:

soit OAB un triangle isocèle en O tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{6} [2\pi]$ et ζ le cercle de centre O et passant par A. on désigne par C le symétrique de A par rapport à (OB) ; B' et A' les symétriques respectives de B et C par rapport à O et D le point d'intersection de (AB) et (A'B').

1/a) montrer que $AB = A'B'$.

L.S.El Riadh	<u>Isométrie</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Exercices

- b) en déduire qu'il existe un unique déplacement ϕ tel que $\phi(A)=A'$ et $\phi(B)=B'$.
- c) caractériser ϕ .
- 2/ soit $f=S_{(BB')} \circ S_{(AA')}$.
- a) déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f .
- b) placer le point $C'=f(A')$ et montrer que $C' \in \zeta$.
- Les droites (OB) et $(A'C')$ se coupent en I .
- c) soit $O'=S_{(AA')}(O)$; quelle est la nature du quadrilatère $OO'A'C'$?
soit J son centre.
- d) en déduire que $O' \in \zeta$.
- 3/ a) montrer que $A'O=A'C'$.
- b) en déduire qu'il existe un unique antidéplacement ψ tel que $\psi(C')=A'$ et $\psi(A')=O$.
- c) déterminer $\psi(I)$.
- d) caractériser ψ

Exercice 5 :

$ABCD$ est un carré de centre O , tel que $(\widehat{AB,AD}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$, on note I le milieu de $[CD]$, K le symétrique de O par rapport à D et L le symétrique de O par rapport à (BC) .

I/ 1/ montrer qu'il existe un unique déplacement f tel que $f(B)=D$ et $f(L)=K$.

2/ donner la nature et les éléments caractéristiques de f .

3/ en déduire la nature du triangle AKL puis du triangle AIL .

4/ soit ζ le cercle de diamètre $[AL]$.

a) construire le cercle ζ' image de ζ par f

b) une droite Δ passant par I coupe ζ en N et ζ' en N' .

montrer que $f(N)=N'$.

II/ soit $g=S_{(BC)} \circ S_D$

1/ déterminer $g(K)$ puis montrer que g n'est pas une symétrie orthogonale.

2/ donner la forme réduite de g .

3/ soit $r=g \circ S_{(BD)}$

a) montrer que $r(K)=L$

b) montrer que r est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et construire son centre Ω .

Exercice 6:

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC de sens direct et construit à l'extérieur de ce triangle les carrés $ABDE$ et $ACFG$ de centres respectifs I et J et le parallélogramme $AGKE$ de centre I' .

Soient J' le milieu de $[BC]$ et H le projeté orthogonal de A sur (BC) .

1/a) montrer qu'il existe un déplacement unique f que l'on caractérisera tel que $f(C)=A$ et $f(A)=G$.

L.S.El Riadh	<u>Isométrie</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Exercices

- b) déterminer $f(B)$ puis montrer que $FB=CK$ et donner une mesure de $(\overrightarrow{FB}, \overrightarrow{CK})$.
- 2/ soit $g = S_I \circ f$.
- déterminer la nature et les éléments caractéristiques de g .
 - montrer que $DC=BK$.
- 3/ montrer que (AK) , (DC) et (FB) sont concourantes.
- 4/ a) montrer qu'il existe un unique antidéplacement f' que l'on caractérisera tel que $f'(A)=B$ et $f'(E)=D$.
- b) déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $g' = t_{AD} \circ f'$ (donner la forme réduite de g')

Exercice 7:

ABC est un triangle isocèle en A tel que $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$. Soient I , J et K les milieux respectives de $[AC]$, $[AB]$ et $[BC]$.

On construit à l'extérieur du triangle ABC les triangles équilatéraux directs BCA' , $BC'A$ et $AB'C$.

- 1/ a/ soit r la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$; déterminer $r(C)$ et $r(C')$
- b/ en déduire qu'il existe un unique déplacement ϕ tels que $\phi(C)=A$ et $\phi(C')=A'$.
- c/ déterminer l'angle du déplacement ϕ en déduire que ϕ est une rotation ; soit w son centre ; placer w .
- 2/ soit $f = \phi \circ t_{AC}$.
- i/ préciser la nature de f .
 - ii/ déterminer $f(A)$ puis caractériser f .
- b/ vérifier que $f = S_{(WA)} \circ S_{(AB)}$; en déduire la nature et les éléments caractéristiques de f .
- 3/ a/ montrer que $BB'=CC'$.
- b/ en déduire qu'il existe un unique antidéplacement ψ tel que $\psi(C)=B$ et $\psi(C')=B'$; caractériser ψ .
- 4/ soit s la similitude directe de centre J telle que $s(K)=A$.
- a/ déterminer l'angle et le rapport de s .
 - b/ déterminer $s(I)$.

Exercice 8:

Dans le plan orienté P , on considère un triangle isocèle ABC tel que $AB=AC$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$. Soit D le point du plan tel que le triangle CDA soit rectangle isocèle et $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD}) = \frac{-\pi}{2} [2\pi]$.

<i>L.S.El Riadh</i>	<u>Isométrie</u>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		Exercices

1/ soit R_A la rotation de centre A et transformant B en C et R_C la rotation de centre C et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. on pose $f = R_C \circ R_A$.

- déterminer $f(A)$ et $f(B)$.
- démontrer que f est une rotation dont on précisera l'angle et le centre noté O. placer O.
- quelle est la nature du quadrilatère ABOC.

2/ on note $g = f \circ S_{(BC)}$.

- quelle est la nature de l'application g .
- déterminer $g(A)$ et $g(B)$.

3/ on note H le milieu de $[BC]$, $C' = g(C)$ et $H' = g(H)$.

- montrer que H' est le milieu de $[OD]$
- construire H' puis C'.
- donner la forme réduite de g .

L.S.El Rjadh	<u>Isométrie</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Solutions

Exercice 1 : A/

1/ on a : $wA=wI$ et $(\overrightarrow{wA}, \overrightarrow{wI}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$

alors w est le centre de r .

2/ on a : $r : A \rightarrow I$ alors $AB=IC$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{IC}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$

$$B \rightarrow C$$

D'une part : $AB=IC$ et $AB=AI$ alors $IC=AI$.

Et d'autre part : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{IC}) \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}) + (\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AC}) [2\pi]$

alors $(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AC}) \equiv 0 [2\pi]$ d'où A, I et C sont alignés

D'où I est le milieu de $[AC]$.

3/ soit $r(M)=E$;

on a $M \in [AB] \setminus \{A, B\}$ alors $E \in [IC] \setminus \{I, C\}$ et $AM=IE$ alors $E=M'$.

d'où $r(M)=M'$ alors wMM' est un triangle équilatéral.

B/ 1/ on a $AB=IC$ alors il existe un unique antidéplacement ϕ tel que $\phi(A)=I$ et $\phi(B)=C$.

2/ on a : $\phi : B \rightarrow C$ alors $IB=I'C$ et $(\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{I'I}) \equiv -(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}) [2\pi]$

$$I \rightarrow I'$$

$$A \rightarrow I$$

✓ $IB=I'C$ alors I' appartient au cercle ζ de centre C et de rayon $IB=IC$.

✓ $(\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{I'I}) \equiv -\frac{\pi}{3} [2\pi]$ alors $I' \in [Ix]$ tel que $(\overrightarrow{IC}, \overrightarrow{Ix}) \equiv -\frac{\pi}{3} [2\pi]$

d'où I' est l'intersection de ζ et $[Ix]$.

3/ si ϕ possède un point fixe alors $\phi = S_\delta$

On a : - $\phi(A)=I$ donc δ est la médiatrice de $[AI]$ alors $\delta=(OB)$

- $\phi(B)=C$ donc δ est la médiatrice de $[BC]$ alors $\delta=(wK)$

Mais (OB) et (wK) ne sont pas confondues alors ϕ n'a pas de points fixes.

4/ a/ on a : $\phi : A \rightarrow I$ alors le milieu O de $[AI]$ appartient à Δ

$B \rightarrow C$ alors le milieu K de $[BC]$ appartient à Δ .

D'où $\Delta = (OK)$.

On a : - $KH=OB=KB$ donc K appartient à la médiatrice de $[BH]$

- $OH=KB=OB$ donc O appartient à la médiatrice de $[HB]$

D'où Δ est la médiatrice de $[HB]$.

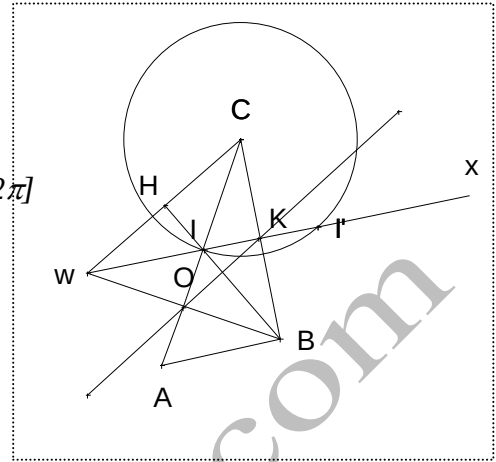
b/ on a : - $\phi(B)=C$

$$- \phi(B) = t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta}(B) = t_{\vec{u}}(H)$$

donc $t_{\vec{u}}(H)=C$ alors $\vec{u} = \overrightarrow{HC}$

par suite $\phi = t_{\overrightarrow{HC}} \circ S_{(OK)}$

5/ g est la composée deux antidéplacements alors g est un déplacement.



L.S.El Rjadh	<u>Isométrie</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Solutions

$$g = t_{\overrightarrow{HC}} \circ S_{(OK)} \circ S_{(BI)}$$

les droites (OK) et (BI) sont perpendiculaires alors $S_{(OK)} \circ S_{(BI)}$ est une rotation d'angle π

donc g est une rotation d'angle π (le produit d'une translation par une rotation est une rotation)

$$g(K) = \varphi \circ S_{(BI)}(K) = \varphi(O) = K \text{ donc } K \text{ est le centre de } g. \quad g = r_{(K, \pi)} = S_K.$$

Exercice 2:

1/ on a $AI = CJ$ alors il existe un unique déplacement f tel que $f(A) = C$ et $f(I) = J$.

$$\text{soit } \alpha \text{ son angle ; } \alpha \equiv (\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{CJ}) [2\pi] \\ = \pi [2\pi]$$

donc f est une symétrie centrale, son centre est le milieu O de $[AC]$.

$$f(B) = S_O(B) = D.$$

2/ δ est la médiatrice de $[IJ]$.

3/a/ $r(B) = J$; $r(C) = D$; $r(J) = A$.

b/ soit $r(M) = E$

on a : - $M \in (BM)$ donc E appartient à la perpendiculaire à (BM) passant par $r(B) = J$

- $M \in (IM)$ donc E appartient à la perpendiculaire à (MI) passant par $r(I) = A$

Alors $E = M'$

Si M décrit $[JC]$ alors $M' = r(M)$ décrit

$$r([JC]) = [DA].$$

4/ a/ la composée de deux rotation est une rotation donc g est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

$$b/ g(A) = r \circ f(A) = r(C) = D.$$

c/ soit w le centre de r

- $wA = wD$ donc w appartient à la médiatrice de $[AD] = \delta$

- $(\overrightarrow{wA}, \overrightarrow{wD}) = -\frac{\pi}{2} [2\pi]$ donc w appartient au demi-cercle de diamètre $[AD]$

d'où une construction de w .

5/a/ on a $AI = CJ$ alors il existe un unique antidéplacement h tel que $h(A) = C$ et $h(I) = J$.

b/ les médiatrices de $[AC]$ et $[IJ]$ ne sont pas confondu ((AC) et (IJ) non parallèle) donc h n'est pas une réflexion donc h est une symétrie glissante.

c/ soit $h(B) = B'$

I est le milieu de $[AB]$ donc $h(I) = J$ est le milieu de $h([AB]) = [CB']$

et par suite $B' = D$.

$$6/ ho_{S_{(AB)}}(A) = h(A) = C$$

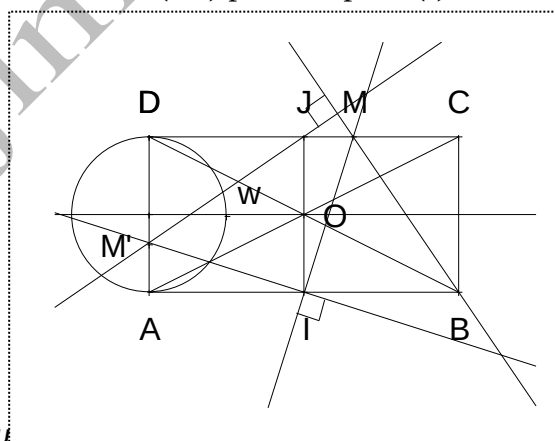
$$ho_{S_{(AB)}}(B) = h(B) = D$$

la composée de deux antidéplacement est un déplacement.

$ho_{S_{(AB)}}$ est le déplacement qui envoie A sur C et B sur D

$$\text{donc } ho_{S_{(AB)}} = f.$$

$$b/ ho_{S_{(AB)}} = f \Leftrightarrow h = fo_{S_{(AB)}}$$



L.S.El Riyadh	<u>Isométrie</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Solutions

$$= S_{(IJ)} \circ S_{\delta} \circ S_{(AB)}$$

$$= S_{(IJ)} \circ t_{\overline{BC}}$$

Exercice 3 : 1/a/ $\psi(A)=D$; $\psi(D)=C$.

b/ ψ est la composée d'un déplacement et d'un antidéplacement donc ψ est un antidéplacement.

$med[AD] \neq med[CD]$ (en effet $(AD) \perp (CD)$) ;
d'où ψ est une symétrie glissante

$$\Leftrightarrow \psi = t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta}$$

$$\psi \circ \psi(A)=C \Leftrightarrow \vec{u} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AI}.$$

La droite Δ est la droite passante par les milieux de $[AD]$ et $[DC]$ donc $\Delta=(JK)$.

D'où $\psi = t_{\overline{AI}} \circ S_{(JK)}$

2/a) $BA=AD \neq 0$ donc il existe un unique déplacement r vérifiant $r(B)=A$ et $r(A)=D$.

b) $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BD}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$ donc r est une rotation

d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et de centre $\{w\}=med[AB] \cap med[AD]=\{I\}$.

en fin $r=r_{(I, -\frac{\pi}{2})}$

3/ g est la composée de deux rotations et $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{2}$ donc g est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$.

4/a) $t(A)=g \circ f^{-1}(A)=g(D)=B$

b) t est la composée de deux rotations d'angles respectives $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$ donc t est une translation

puisque $t(A)=B$ alors $t = t_{\overline{AB}}$

5/ a) $g \circ f^{-1}(M_1)=g(M)=M_2 \Leftrightarrow t_{\overline{AB}}(M_1)=M_2$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{M_1 M_2}$$

$\Leftrightarrow ABM_2M_1$ est un parallélogramme

b) on a $AD=AB=M_1M_2 \neq 0$ donc il existe un unique antidéplacement φ tel que $\varphi(A)=M_1$ et $\varphi(D)=M_2$.

c) $t_{\overline{AM_1}} \circ S_{(AI)}(A)=M_1$; $t_{\overline{AM_1}} \circ S_{(AI)}(D)=M_2$

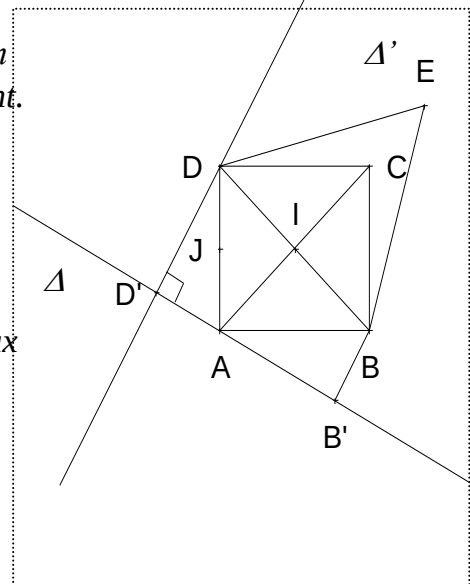
φ et $t_{\overline{AM_1}} \circ S_{(AI)}$ sont deux antidéplacements qui coïncident sur deux points distincts donc

$$\varphi = t_{\overline{AM_1}} \circ S_{(AI)}.$$

d)

➤ si $M \in (BD)$ alors $M_1 \in r((BD))=(AC)$ donc $\varphi = t_{\overline{AM_1}} \circ S_{(AI)}$ est une symétrie glissante.

➤ Si M appartient à la parallèle à (AC) passant par D .



L.S.El Rjadh	<u>Isométrie</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Solutions

M_1 appartient à la parallèle à (BD) passant par A donc $\overrightarrow{AM_1} \perp \overrightarrow{AI}$

D'où $t_{\overrightarrow{AM_1}} \circ S_{(AI)} = S_{\delta} \circ S_{(AI)} \circ S_{(AI)}$ avec $\delta // (AC)$ et δ passe par le milieu de $[AM_1]$

D'où $\varphi = S_{\delta}$.

6/ a) $f(\Delta)$ est la droite passant par B et perpendiculaire à Δ donc $f(\Delta) = (BB')$.

$f(\Delta')$ est la droite passant par A et perpendiculaire à Δ' donc $f(\Delta') = \Delta$

b) $\{D'\} = \Delta \cap \Delta'$ donc $\{f(D')\} = f(\Delta) \cap f(\Delta') = (BB') \cap \Delta = \{B'\}$

soit $f(D') = B'$.

c) $f(D') = B' \Leftrightarrow (\widehat{ID', IB'}) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \Leftrightarrow$ le cercle de diamètre $[D'B']$ passe par I.

Exercice 4 :

1/ $AB = BC$ car $S_{(OB)}([AB]) = [BC]$

$BC = A'B'$ car $S_O([BC]) = [A'B']$

Donc $AB = A'B'$

b/ $AB = A'B' \neq 0$ donc il existe un unique déplacement φ tel que $\varphi(A) = A'$ et $\varphi(B) = B'$
 α l'angle de φ ;

$$\alpha \equiv (\widehat{AB, A'B'}) [2\pi]$$

$$\equiv (\widehat{AB, A'B'}) [2\pi]$$

$$\equiv \pi - [(\widehat{BO, BA}) + (\widehat{BA', BO})] [2\pi]$$

$$\equiv \pi - 2 \frac{\pi - \frac{\pi}{6}}{2} [2\pi]$$

$$\equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$$

d'où φ est une rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$

soit r la rotation de centre D et d'angle $\frac{\pi}{6}$

$r(B) = B'$ en effet : DBB' est isocèle en $(\widehat{DB, DB'}) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$

$r(A) = A'$ en effet : $DA = DB - BA = DB' - B'A' = DA'$ et $(\widehat{DA, DA'}) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$

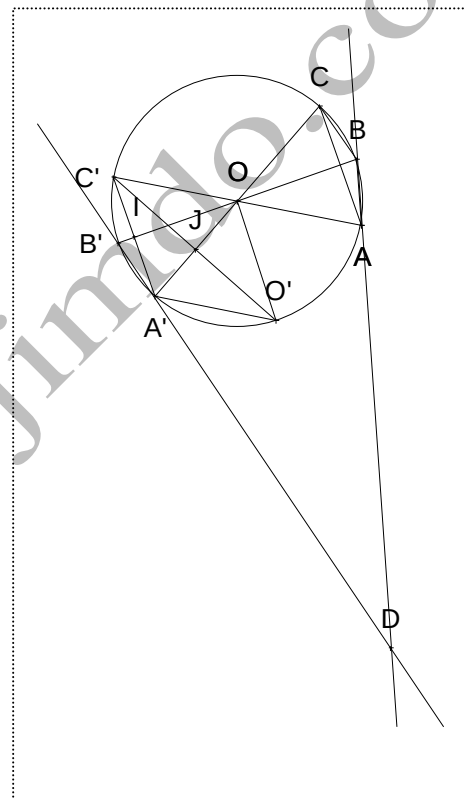
r et φ coïncident en deux points distincts donc $r = \varphi$

2/a/ $AA'D = B'BA = \frac{5\pi}{12}$ d'après la réciproque de Thalès $(AA') // (BB')$

donc f est une translation ; $f = t_{\vec{u}}$

$f(A) = S_{(BB')}(A) = C$ donc $\vec{u} = \overrightarrow{AC}$

b) $f(A') = C' \Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$



L.S.El Rjadh	<u>Isométrie</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Solutions

$\Leftrightarrow ACC'A'$ est un parallélogramme

donc O est le milieu de $[AC']$ et par suite $OA=OC'$ donc $C' \in \zeta$

$$c) f(O') = S_{(BB')}(O) = O \Leftrightarrow \overrightarrow{O'O} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'C'}$$

$\Leftrightarrow O'OC'A'$ est un parallélogramme

De plus $OO' = A'C' = AC = OA = OC'$ donc $O'OC'A'$ est un losange

$$d) OO' = OA \text{ donc } O' \in \zeta$$

$$3/a) A'O = OC = AC = A'C'$$

$$b) A'O = A'C' \neq 0$$

donc il existe un unique antidéplacement ψ tel que $\psi(C') = A'$ et $\psi(A') = O$

$$c) I \text{ est le milieu de } [A'C'] \Rightarrow \psi(I) \text{ est le milieu de } [\psi(A')\psi(C')]$$

$$\Rightarrow \psi(I) = J$$

$$d) \psi = S_{\Delta O} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}} \circ S_{\Delta}$$

Δ passe par les milieux de $[A'C']$ et $[A'O]$ donc $\Delta = (IJ)$

$$\psi(I) = t_{\vec{v}}(I) = J \text{ donc } \vec{v} = \overrightarrow{IJ}$$

Exercice 5 :

1) $BL = DK \neq 0 \Leftrightarrow$ il existe un unique déplacement f tel que $f(B) = D$ et $f(L) = K$.

$$2) (\overrightarrow{BL}, \overrightarrow{BK}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \text{ donc } f \text{ est une rotation}$$

d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre w tel que :

$$wA = wB \text{ et } (\overrightarrow{wB}, \overrightarrow{wD}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \text{ alors } w = A$$

$$d'où \quad f = r_{(A, \frac{\pi}{2})}$$

3) $f(L) = K$ donc ALK est un triangle rectangle en A .

on a : $CL = KD$ et $(CL) \parallel (KD) \Leftrightarrow LCKD$ est un parallélogramme $\Leftrightarrow I = L * K = C * D$

or ALK est un triangle rectangle isocèle en A donc AIL est un triangle rectangle isocèle en I .

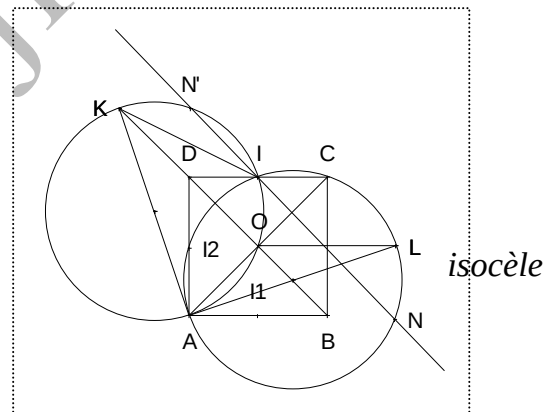
$$4) \text{ on a : } (\overrightarrow{AL}, \overrightarrow{AN}) \equiv (\overrightarrow{IL}, \overrightarrow{IN}) [2\pi]$$

$$\equiv (\overrightarrow{IK}, \overrightarrow{IN'}) [2\pi]$$

$$\equiv (\overrightarrow{AK}, \overrightarrow{AN'}) [2\pi]$$

$$\text{donc } (\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AN'}) \equiv (\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AL}) + (\overrightarrow{AL}, \overrightarrow{AK}) + (\overrightarrow{AK}, \overrightarrow{AN'}) [2\pi]$$

$$\equiv (\overrightarrow{AL}, \overrightarrow{AK}) [2\pi]$$



L.S.El Rjadh	<u>Isométrie</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Solutions

$$\equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

soit $f(N)=N_1$; comme $N \in \zeta$ alors $N_1 \in \zeta'$ et $(\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AN_1}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

donc $N_1=N'$.

II/ 1) $g(K)=S_{(BC)}(O)=L$.

Si g est une symétrie axiale alors $g=S_{(AI)}$

$\Rightarrow g(I)=I \Rightarrow S_{(BC)} \circ S_D(I)=I \Rightarrow C=I * S_D(I) \Rightarrow C=D$ ce qui est impossible alors g n'est pas une symétrie axiale.

2) $g=S_{(BC)} \circ S_D = S_{(BC)} \circ S_{(AD)} \circ S_{(BC)} = t_{2\overline{AB}} \circ S_{(CD)}$.

3) a) $r(K)=g \circ S_{(BD)}(K)=g(K)=L$.

b) r est un déplacement comme étant la composée de deux antidéplacement.

$r = t_{2\overline{AB}} \circ S_{(CD)} \circ S_{(BD)} = t_{2\overline{AB}} \circ r_{(D, \frac{\pi}{2})}$ d'où r est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$

soit Ω le centre de r alors $\Omega K, \Omega' L$ et $(\overrightarrow{\Omega K}, \overrightarrow{\Omega L}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ d'où $\Omega = S_I(A)$.

Exercice 6:

1/a/on a $AC=AG \neq 0$ donc il existe un seul

déplacement f tel que $f(C)=A$ et $f(A)=G$.

$((\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{GA}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi])$ donc f est une rotation

$$\frac{-\pi}{2}$$

et de centre $\{J\} = \text{med}[AC] \cap \text{med}[AG]$.

Soit $f = r_{(J, \frac{-\pi}{2})}$

b/ $f(B)=B' \Leftrightarrow ((\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{GB'}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi])$ et $AB=GB'$

or $AB=GK$ et $((\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{GK}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi])$

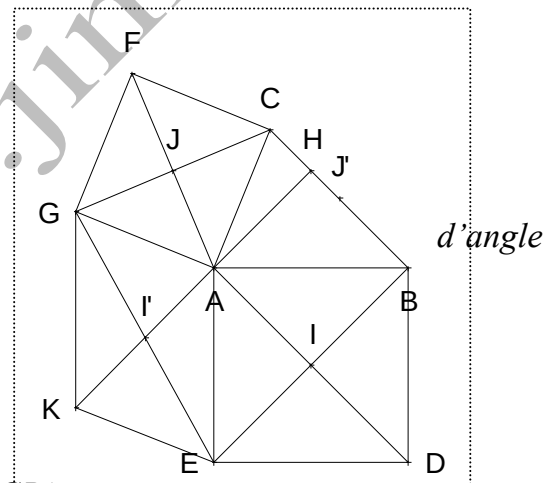
Donc $f(B)=K$.

$f(B)=K \Leftrightarrow FB=CK$ et $((\overrightarrow{FB}, \overrightarrow{CK}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi])$

2/ $g=S_I \circ f$

a/ g est la composée de deux rotations d'angles respectifs π et $\frac{-\pi}{2}$ donc g est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$

on pose Ω son centre ; $g(B)=S_I(K)=A$ donc $\Omega B=\Omega A$ et $((\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega A}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi])$ soit $\Omega=I$



L.S.El Rjadh	<u>Isométrie</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Solutions

en fin $g = r_{(I, \frac{\pi}{2})}$.

$$b) g(D)=B \text{ et } g(C)=K \Leftrightarrow DC=BK \text{ et } (\widehat{DC, BK}) = \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

3/ dans le triangle KBC on a $(BF) \perp (CK)$ donc (BF) est l'hauteur issue de B
 $(CD) \perp (BK)$ donc (CD) est l'hauteur issue de C

$(AK) \perp (BC)$ donc (AK) est l'hauteur issue de A

or les trois hauteurs d'un triangle sont concourantes d'ou (AK) , (DC) et (FB) sont concourantes

$$4/ a) f'(A)=B \text{ et } f'(E)=D$$

$AE=BD \neq 0$ donc il existe un seul antidéplacement f' vérifiant les hypothèses
 $med[AB]=med[ED]$ donc $f'=S_{\Delta}$ avec $\Delta = med[AB]$

$$b) g' = t_{\overrightarrow{AD}} \circ f' = t_{\overrightarrow{AD}} \circ S_{\Delta} \text{ or } \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} \text{ donc } g' = t_{\overrightarrow{AE}} \circ t_{\overrightarrow{AB}} \circ S_{\Delta}$$

$$= t_{\overrightarrow{AE}} \circ S_{(BD)} \circ S_{\Delta} \circ S_{\Delta}$$

$$= t_{\overrightarrow{AE}} \circ S_{(BD)}$$

soit g' est une symétrie glissante d'axe (BD) et de vecteur $\overrightarrow{AE}$

Exercice 7: 1/a) $r(C)=A'$ et $r(C')=A$

Alors $CC'=AA'$.

b) on a $CC'=AA' \neq 0$ alors il existe un unique déplacement ϕ tel que $\phi(C)=A$ et $\phi(C')=A'$.

c) soit α l'angle de ϕ ; $\alpha = (\widehat{CC', AA'}) [2\pi]$

$$\equiv (\widehat{CC', A'A}) + (\widehat{A'A, AA'}) [2\pi]$$

$$\equiv \frac{\pi}{3} - \pi [2\pi]$$

$$\equiv -\frac{2\pi}{3} [2\pi]$$

donc ϕ est une rotation d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.

$wA=wC$ donc w appartient à la médiatrice de $[AC]$

$wA'=wC'$ donc w appartient à la médiatrice de $[A'C']$

alors w est l'intersection des deux médiatrices.

2/a) i/f est la composée d'une rotation d'angle $-\frac{2\pi}{3}$ et d'une translation donc c est

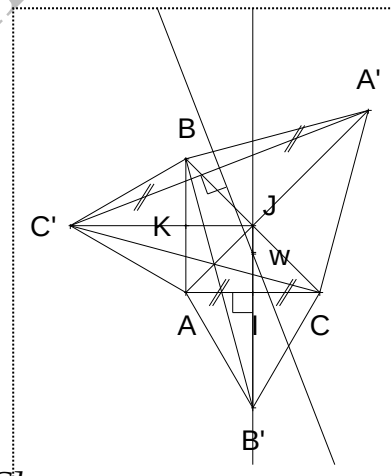
une rotation d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.

li/ $f(A)=\phi(C)=A$; A étant invariant par f c'est donc son centre.

Par suite $f = r_{(A, -\frac{2\pi}{3})}$.

b) comme : $t_{\overrightarrow{AC}} = S_{(IJ)} \circ S_{(AB)}$ et $\phi = S_{(wA)} \circ S_{(IJ)}$

alors $f = S_{(wA)} \circ S_{(AB)} = r_{(A, -\frac{2\pi}{3})}$.



L.S.El Rjadh	<u>Isométrie</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Solutions

3/ a) soit $r' = r_{(A, \frac{\pi}{3})}$.

$r'(B') = C$ et $r'(B) = C'$ donc $BB' = CC'$

b) comme $BB' = CC'$ alors il existe un unique antidéplacement tel que $\psi(C) = B$ et $\psi(C') = B'$.

on pose $\Delta = (AJ)$.

Δ est la médiatrice de $[BC]$ donc $S_{\Delta}(C) = B$.

on a : $AC' = AB' \Rightarrow A$ appartient à la médiatrice de $[C'B']$.

$JC' = JK + KC' = JI + IB' = JB' \Rightarrow C'$ est sur la médiatrice de $[B'C']$

Alors Δ est la médiatrice de $[C'B']$ donc $S_{\Delta}(C') = B'$.

Comme ψ est unique alors $\psi = S_{\Delta}$.

4/ a) soit β l'angle de s et k le rapport de s .

$$\beta \equiv (\overrightarrow{JK}, \overrightarrow{JA}) [2\pi]$$

$$\equiv \frac{\pi}{4} [2\pi] .$$

$$\frac{1}{k} = \frac{JK}{JA} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ donc } k = \sqrt{2}$$

b) on a $JC = \sqrt{2} JI$ et $(\overrightarrow{JI}, \overrightarrow{JC}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$ donc $s(I) = C$.

5/ soit $g = s'os$; g est une similitude directe comme étant la composée de deux similitudes directes.

Soit β' l'angle de s' et k' son rapport.

$$\beta' \equiv (\overrightarrow{JC}, \overrightarrow{JK}) (2\pi) \quad k' = \frac{KA}{JC} = \frac{BK}{BJ} = \cos \frac{\pi}{4} = \sqrt{2}$$

$$\equiv (\overrightarrow{BJ}, \overrightarrow{BK}) (2\pi)$$

$$\equiv -\frac{\pi}{4} (2\pi)$$

g est donc d'angle nul et de rapport 1 alors g est une translation.

Comme $g(I) = s'os(I) = s'(C) = A$ alors $g = t_{\overrightarrow{IA}}$

6/ a) soit a le rapport de σ .

$$a = \frac{JC'}{JI} = \frac{JK + KC'}{JI} = 1 + \frac{KC'}{KA} = 1 + \operatorname{tg}(\widehat{KC'A}) = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{3 + \sqrt{3}}{3} .$$

b) soit D l'axe de σ ; $\sigma = h_{(J,a)} \circ S_D$ donc $S_D = h_{(J,a)}^{-1} \circ \sigma$.

$$S_D(I) = h_{(J,a)}^{-1} \circ \sigma(I) = h_{(J,a)}^{-1}(C') = K \text{ en effet : } \frac{JK}{JC'} = \frac{JI}{JC} = \frac{1}{a}$$

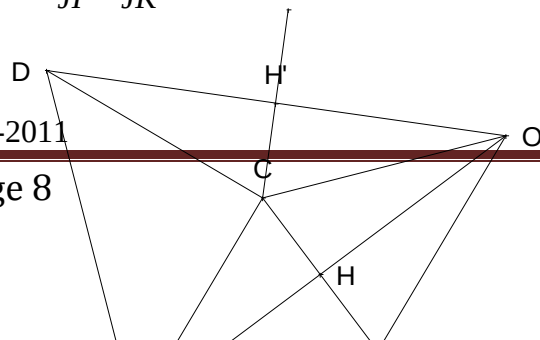
$$\text{donc } \overrightarrow{JK} = \frac{1}{a} \overrightarrow{JC'} .$$

Comme $S_D(I) = K$ alors D est la médiatrice de $[IK]$.

$$\sigma(K) = h_{(J,a)} \circ S_D(K) = h_{(J,a)}(I) = B' \quad (\text{en effet } \frac{JB'}{JI} = \frac{JC'}{JK} = a)$$

Exercice 8:

2010-2011



L.S.El Rjadh	<u>Isométrie</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Solutions

$$1/ a) \text{ on a: } \begin{cases} CA = CD \\ \widehat{(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CD})} \equiv \frac{-\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$

donc $R_C(A)=D$.

$$f(A)=R_C \circ R_A(A)=R_C(A)=D$$

$$f(B)=R_C \circ R_A(B)=R_C(C)=C.$$

b) soit α l'angle de R_A ;

$$\alpha \equiv \widehat{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} [2\pi]$$

$$\equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$$

f étant la composée de deux rotations;

$$\text{c'est une rotation d'angle } \frac{\pi}{4} + \frac{-\pi}{2} = \frac{-\pi}{4}$$

on a : $f(A)=D$ donc O appartient à la médiatrice de $[AD]$ et $f(B)=C$ donc O appartient à la médiatrice de $[BC]$.

D'où la construction de O .

c) les deux angles intérieurs de même coté $[OC, OB]$ et $[CO, CA]$ sont supplémentaires donc $(OB) \parallel (AC)$.

Les deux angles intérieurs du même coté $[CO, CA]$ et $[AB, AC]$ sont supplémentaires donc $(AB) \parallel (OC)$.

Donc $ABOC$ est un parallélogramme et $AB=AC$ alors c'est un losange.

2/ a) la composée d'un déplacement et d'un antidéplacement est un antidéplacement donc g est un antidéplacement.

$$b) g(A)=f \circ S_{(BC)}(A)=f(O)=O$$

$$g(B)=f \circ S_{(BC)}(B)=f(B)=C.$$

$$3/a) g(O)=f \circ S_{(BC)}(O)=f(A)=D.$$

H est le milieu de $[BC]$ donc H est le milieu de $[AO]$ par suite $g(H)$ est le milieu de $[g(A)g(O)]$

Ainsi H' est le milieu de $[OD]$.

b) on place H' le milieu de $[OD]$ puis C' tel que H' est le milieu de $[CC']$.

c) on a $g(A)=O$ et $g(B)=C$

comme la médiatrice de $[AO]$ n'est pas la médiatrice de $[BC]$ alors g n'est pas une symétrie orthogonale c'est donc un glissement.

On pose $g = S_{\Delta} \circ t_{\vec{u}}$.

On a : $g(B)=C$ donc le milieu H de $[BC]$ appartient à Δ .

$g(O)=D$ donc le milieu H' de $[OD]$ appartient à Δ .

Par suite $\Delta = (HH')$.

$$\text{On a : } g(H) = t_{\vec{u}} \circ S_{\Delta}(H) = t_{\vec{u}}(H) = H'$$

Par suite $\vec{u} = \overrightarrow{HH'}$

L.S.Elriadh	<u>Logarithmes</u>	Mr Zribi
4^{ème} Maths		Enoncés

Exercice 1: le plan est rapporté à un repère orthonormé.

on considère la fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = x \log\left(\frac{x+2}{x}\right)$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$.

1/a/ étudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.

b/ calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2/a/ pour $x > 0$, calculer $f'(x)$ et vérifier que $f''(x) = \frac{-4}{x(x+2)^2}$.

b/ étudier les variations de f et calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x)$.

c/ dresser le tableau de variations de f .

3/ tracer ζ_f en indiquant les tangentes au point O et au point A d'abscisse 2.

4/a/ montrer que l'équation $f(x) = x$, $x > 0$ admet une unique solution α et que $\alpha \in]1, 2[$.

b/ montrer que pour tout $x \in [1, 2]$; $f(x) \in [1, 2]$

c/ montrer que pour tout $x \in [1, 2]$; $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

5/ soit u la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = f(U_n)$.

a/ montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $1 \leq U_n \leq 2$.

b/ montrer que $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha|$

c/ montrer que $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}$; en déduire que U est convergente et calculer sa limite.

Exercice 2 : 1/ A/ on considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{\log x}{x}$ et ζ_f sa courbe dans un repère orthonormé (unité 4cm).

1/ étudier les variations de f et préciser sa limite en 0 et en $+\infty$.

2/ déterminer l'équation de la tangente T à ζ_f au point A d'abscisse 1.

3/ tracer ζ_f et T .

L.S.Elriadh	<u>Logarithmes</u>	Mr Zribi
4^{ème} Maths		Enoncés

4/ a tout entier naturel n on associe l'équation $(E_n) : f(x) = \frac{1}{n}$.

a/ montrer que (E_1) et (E_2) n'ont pas de solutions.

b/ montrer que pour tout $n \geq 3$; l'équation (E_n) admet deux solutions α_n et β_n avec $\alpha_n < \beta_n$.

B/ 1/a/ soit g la fonction définie par : $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \log(1+x)$; étudier les variations de g .

b/ en déduire le signe de g ; montrer que pour tout $x \geq 0$; $x - \frac{1}{2}x^2 \leq \log(1+x)$

c/ montrer qu'on a également pour tout $x \geq 0$; $x \geq \log(1+x)$.

2/a/ en utilisant les questions précédentes ; montrer que pour tout $x \geq 0$; $\frac{\log(1+x)}{1+x} \leq x$.

en déduire que pour tout $n \geq 4$; $f(1 + \frac{1}{n}) \leq \frac{1}{n}$.

b/ montrer que pour tout $x \in [0, \frac{1}{2}]$; $\frac{\log(1+x)}{1+x} \geq \frac{1}{2}x$.

En déduire que pour tout $n \geq 4$; $f(1 + \frac{2}{n}) \geq \frac{1}{n}$.

c/ montrer que pour tout $n \geq 4$; $1 + \frac{1}{n} \leq \alpha_n \leq 1 + \frac{2}{n}$ et en déduire la limite de $(\alpha_n)_n$.

Exercice 3 : A/ soit f_m la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f_m(x) = \frac{x^2-1}{4} - \frac{m}{2} \log x$ ou m est un paramètre réel, on désigne par ζ_m la courbe de f_m dans un repère orthonormé (unité 5cm).

1/ calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_m(x)$ puis suivant les valeurs de n $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_m(x)$.

2/ dresser suivant les valeurs de m , les différents tableaux de variations de f_m .

3/ a/ montrer que par un point $M_0(x_0, y_0)$ tel que $x_0 > 0$ et $x_0 \neq 1$, passe une et une seule courbe ζ_m .

b/ montrer qu'il existe un point unique A appartenant à toutes les courbes ζ_m .

4/ construire $\zeta_0, \zeta_4, \zeta_{-1}$.

L.S.Elriadh	<u>Logarithmes</u>	Mr Zribi
4^{ème} Maths		Enoncés

B/ on prend $m=4$, pour toute $x > 0$ on pose $F(x) = 2x \log x - \frac{x^3 + 21x - 22}{12}$.

1/a/ vérifier que F est la primitive de f_4 qui s'annule en 1

b/ calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x)$.

2/ a/ montrer que l'équation $f_4(x)=0$ admet deux solutions dont l'une $x_0 \in]3,4[$.

b/ montrer que $x_0 = \sqrt{1+8\log x_0}$

3/ soit la fonction φ définie sur $[3, +\infty[$ par $\varphi(x) = \sqrt{1+8\log x}$

a/ montrer que pour tout $x \geq 3$; $\varphi(x) \geq 3$.

b/ montrer que pour tout $x \geq 3$; on a $0 \leq \varphi'(x) \leq \frac{4}{9}$.

4/ soit la suite U définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0=3$ et $U_{n+1}=\varphi(U_n)$

a/ montrer que $U_n \geq 3$; pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b/ montrer que $|U_{n+1}-x_0| \leq \frac{4}{9} |U_n-x_0|$; pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c/ en déduire que U est convergente vers x_0 .

Exercice 4: 1) soit g la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $g(t)=t \cdot \log(1+t)$.

Etudier les variations de g ; en déduire que pour tout $t \geq 0$; $0 \leq \log(1+t) \leq t$.

2) soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x)=(x+1)\log(x+1)-x\log x$ si $x \neq 0$ et $f(0)=0$.

a) montrer que f est continue en 0.

b) f est-elle dérivable en 0 ?.

3)a) vérifier que pour tout $x > 0$ on a : $f(x)-\log(1+x)=x\log(1+\frac{1}{x})$.

c) montrer que $-1+f(x) \leq \log(1+x) \leq f(x)$; $x > 0$

4/ a) vérifier que $f'(x)=\log(1+\frac{1}{x})$; $x > 0$.

b) montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur lui même.

L.S.Elriadh	<u>Logarithmes</u>	Mr Zribi
4^{ème} Maths		Enoncés

5/ a) montrer que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f^{-1}(x)}{x} = 0$.

b) prouver que f^{-1} est dérivable sur $[0, +\infty[$.

c/ calculer $f(1)$ puis $(f^{-1})'(\log 4)$

6/ a) dresser le tableau de variations de $w : x \rightarrow f(x) - x$

b) montrer que l'équation $w(x) = 0$ admet deux solutions 0 et a , vérifier que $1,75 < a < 2$.

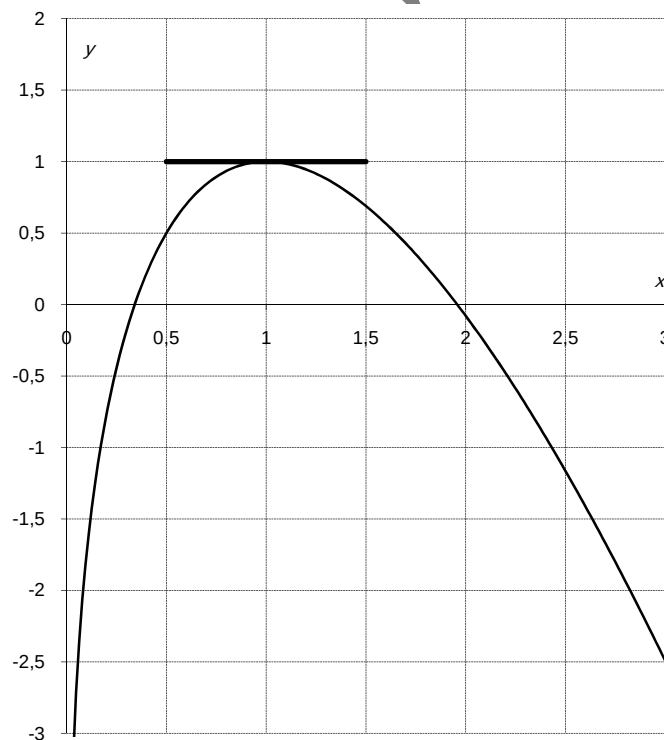
c) étudier la position relative de ζ_f et de la droite $\Delta : y = x$.

d) tracer Δ , ζ_f et ζ_{f-1} .

Exercice 5:

Partie A

Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = ax + (bx + c) \ln x$ avec a, b et c des réels. La courbe (C) de f est donnée ci-dessous.



L.S.Elriadh	<u>Logarithmes</u>	Mr Zribi
4^{ème} Maths		Enoncés

En utilisant ce graphique et en sachant que $f(2) = 2 - 3 \ln 2$, justifier que l'on a $a = c = 1$ et $b = -2$.

Partie B

On considère alors la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = x + (1 - 2x) \ln x$.

1. a. Déterminer la limite de g en 0.
- b. Déterminer la limite de g en $+\infty$.
2. a. Déterminer la fonction dérivée de g .
- b. Etudier, pour x dans $]0; +\infty[$, le signe de $-2 \ln x$ et celui de $\frac{1-x}{x}$. En déduire le signe de $g'(x)$ et les variations de g .
3. Dresser le tableau complet des variations de g .
4. Soit la droite Δ d'équation $y = x$.
- a. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $(1 - 2x) \ln x = 0$ et donner une interprétation graphique des solutions.
- b. Etudier la position de la courbe représentative de g par rapport à Δ .

Exercice 6:

Le plan P est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique 3 cm).

1. On considère la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

Montrer que f est continue en 0.

2. a. Etudier le sens de variation de la fonction g définie sur $[0, +\infty[$ par

$$g(x) = \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right).$$

Calculer $g(0)$ et en déduire que sur $\mathbb{R}^+ : \ln(1+x) \leq \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right)$.

- b. Par une étude analogue, montrer que si $x \geq 0$, alors $\ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}$.

L.S.Elriadh	<u>Logarithmes</u>	Mr Zribi
4^{ème} Maths		Enoncés

c. Établir que pour tout x strictement positif on a $-\frac{1}{2} \leq \frac{\ln(1+x)-x}{x^2} \leq -\frac{1}{2} + \frac{x}{3}$.

En déduire que f est dérivable en zéro et que $f'(0) = -\frac{1}{2}$

3. a. Soit h la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $h(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(1+x)$.

Étudier son sens de variation et en déduire le signe de h sur $[0, +\infty[$.

b. Montrer que sur $[0, +\infty[$, $f'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$.

c. Dresser le tableau de variation de f en précisant la limite de f en $+\infty$.

d. On désigne par C la représentation graphique de f . Construire la tangente T à C au point d'abscisse 0. Montrer que C admet une asymptote. Tracer la courbe C .

Exercice 7:

Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]-1; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x}{x+1} - 2\ln(x+1)$.

1. Calculer $f'(x)$, étudier son signe et en déduire le tableau de variation de la fonction f .

2. Calculer $f(0)$. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions dont l'une, que l'on désigne par α , appartient à $[-0,72; -0,71]$.

3. Donner le signe de $f(x)$, pour x appartenant à $]-1; +\infty[$.

Partie B

Soit g la fonction définie sur l'ensemble $D =]-1; 0[\cup]0; +\infty[$ par : $g(x) = \frac{\ln(x+1)}{x^2}$.

1. Étude de g aux bornes de son ensemble de définition.

a. Calculer les limites de $g(x)$ quand x tend vers 0 par valeurs inférieures et quand x tend vers 0 par valeurs supérieures.

b. Calculer $\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

2. Sens de variation de g

L.S.Elriadh	<u>Logarithmes</u>	Mr Zribi
4^{ème} Maths		Enoncés

a. Calculer $g'(x)$ et déduire, à l'aide de la partie A, son signe.

b. Montrer que $g(\alpha) = \frac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$. En déduire une valeur approchée de $g(\alpha)$ en prenant $\alpha \approx -0,715$.

3. Tableau et représentation graphique de g .

a. Dresser le tableau de variation de la fonction g .

b. Représenter graphiquement la fonction g dans le plan rapporté à un repère orthonormal (unité graphique 2 cm).

Exercice 8:

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = x \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \text{ si } x > 0 \text{ et } f(0) = 0.$$

On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 5 cm).

Partie A:

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par : $g(x) = \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) - \frac{2}{x^2 + 1}$.

1. Calculer la dérivée g' de g . Montrer que pour tout x de $]0 ; +\infty[$, $g'(x) = \frac{2(x^2 - 1)}{x(x^2 + 1)^2}$.

2. Etudier le signe de $g'(x)$ selon les valeurs de x . Déterminer la limite de g en $+\infty$. Déterminer la limite de g en 0.

3. Dresser le tableau des variations de g .

4. En déduire qu'il existe un unique nombre réel $\alpha > 0$ tel que $g(\alpha) = 0$. Vérifier que $0,5 < \alpha < 0,6$. Déduire des questions précédentes le signe de $g(x)$ sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

On ne demande pas de construire la courbe représentative de la fonction g .

Partie B:

L.S.Elriadh	<u>Logarithmes</u>	Mr Zribi
4^{ème} Maths		Enoncés

1. a. Calculer la limite quand x tend vers $+\infty$ de $x f(x)$ (on pourra poser $X = \frac{1}{x^2}$).
- b. En déduire que $f(x)$ tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$. Montrer que pour tout x de $]0 ; +\infty [$, on a $f'(x) = g(x)$. Dresser le tableau de variations de f sur $]0 ; +\infty [$.

2. Etude de f en 0

- a. Montrer que $x \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)$ tend vers 0 quand x tend vers 0 par valeurs supérieures. Que peut-on en conclure ?
- b. Etudier la dérivabilité de f en 0.
- c. Préciser la tangente à la courbe de f au point 0.
3. Donner l'équation de la tangente au point d'abscisse 1.
4. Donner l'allure de (C).

L.S.Elriadh	<u>Logarithme</u>	Mr Zribi
4^{ème} Maths		Solutions

Exercice 1 :

$$1/ a/ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \log(x+2) - x \log x) = 0 = f(0)$$

D'où f est continue à droite en 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \log \frac{x+2}{x} = +\infty.$$

D'où f n'est pas dérivable à droite en 0.

$$b/ \lim_{x \rightarrow +\infty} x \log \frac{x+2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \log \left(1 + \frac{2}{x}\right) \quad \text{on pose } t = \frac{2}{x}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} 2 \frac{\log(1+t)}{t} = 2$$

$$2/a/ x > 0 ; f'(x) = \log \frac{x+2}{x} + x \frac{-\frac{2}{x^2}}{\frac{x+2}{x}} = \log \frac{x+2}{x} - \frac{2}{x+2}$$

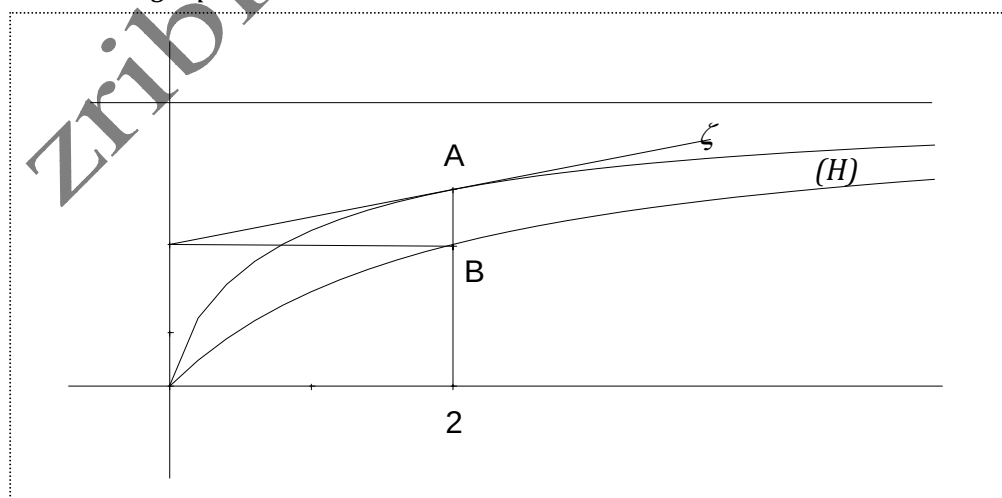
$$f'(x) = -\frac{2}{x(x+2)} - 2 \frac{-1}{(x+2)^2} = \frac{-4}{x(x+2)^2}.$$

$$b/ \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \log 1 = 0$$

D'après les variations de f' on a $f'(x) > 0$

c/ le tableau de variations de f

3/ représentation graphique :



2010-2011

L.S.Elriadh	<u>Logarithme</u>	Mr Zribi
4^{ème} Maths		Solutions

4/ a/ soit $\varphi(x) = f(x) - x$; $x > 0$.

$\varphi'(x) = f'(x) - 1$ et $\varphi''(x) = f''(x) < 0$.

φ' continue et strictement décroissante

sur $]0, +\infty[$ donc réalise une bijection de

$]0, +\infty[$ sur $] -1, +\infty[$; $0 \in] -1, +\infty[$

Alors $\varphi'(x) = 0$ admet dans $]0, +\infty[$ une unique solution x_0 .

x	0	$+\infty$
f''		-
φ'	$+\infty$	-1

si $x \in]0, x_0]$ on a $\varphi(x) > 0$ donc $\varphi(x) \neq 0$

si $x \in [x_0, +\infty[$:

φ continue et strictement décroissante donc φ réalise

une bijection de $[x_0, +\infty[$ sur $] -\infty, \varphi(x_0)]$; $0 \in] -\infty, \varphi(x_0)]$

donc $\varphi(x) = 0$ admet dans $[x_0, +\infty[$ une unique solutions α .

$\varphi(1) = f(1) - 1 = \log 3 - 1 > 0$

$\varphi(2) = f(2) - 2 = 2\log 2 - 2 < 0$

$\varphi(1)\varphi(2) < 0$ alors $\alpha \in]1, 2[$.

b/ $1 \leq x \leq 2$ et f croissante alors $f(1) \leq f(x) \leq f(2)$ comme $f(1) = \log 3 \geq 1$ et $f(2) = 2\log 2 \leq 2$

Alors $1 \leq f(x) \leq 2$.

c/ $x \in [1, 2]$; $f'(x) \geq 0$

$x \geq 1$ et f' décroissante alors $f'(x) \leq f'(1) = \log 3 - \frac{2}{3} \leq \frac{1}{2}$.

D'où $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$; $x \in [1, 2]$.

5/ a/ P « $1 \leq U_n \leq 2$; $n \in \mathbb{N}$ »

On a $1 \leq U_0 \leq 2$ d'où P est vraie pour le premier terme.

Supposons que P est vraie à l'ordre n

On a $1 \leq U_n \leq 2$ alors $1 \leq f(U_n) \leq 2$ (d'après 4/b/)

Donc $1 \leq U_{n+1} \leq 2$ alors P est vraie pour l'indice n+1.

D'où $1 \leq U_n \leq 2$; $n \in \mathbb{N}$.

b/ f définie, continue, dérivable sur $[1, 2]$ et pour tout $x \in [1, 2]$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

On a α et U_n , $n \in \mathbb{N}$ dans $[1, 2]$; d'après le théorème des accroissements finis :

$|f(U_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha|$ donc $|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha|$; $n \in \mathbb{N}$.

c/ on a $|U_1 - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_0 - \alpha|$

x	0	x_0	$+\infty$
φ'	+		-
φ	0	$\varphi(x_0)$	$-\infty$

L.S.Elriadh	<u>Logarithme</u>	Mr Zribi
4^{ème} Maths		Solutions

$$|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_{n-1} - \alpha|$$

On multipliant terme à terme on obtient : $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} |U_0 - \alpha|$

on a $-1 \leq U_0 - \alpha \leq 0 \Rightarrow |U_0 - \alpha| \leq 1$

donc : $|U_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}$; $n \in \mathbb{N}$.

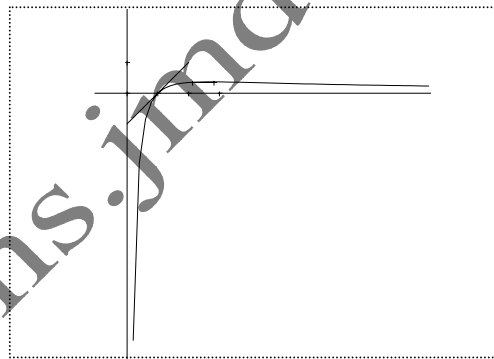
$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \alpha$ Ainsi U est convergente et sa limite est α .

Exercice 2 : A/

$$1/x > 0, f'(x) = \frac{\frac{1}{x} - \log x}{x^2} = \frac{1 - \log x}{x^2}$$

$$2/ T : y = f'(1)(x-1) + f(1) \\ = x-1$$

3/ représentation graphique



4/a/ on a : pour tout $x > 0$; $f(x) \leq e^{-1} < 1$ donc (E_1) n'admet pas de solutions
pour tout $x > 0$; $f(x) \leq e^{-1} < \frac{1}{2}$ donc (E_2) n'a pas de solutions.

b/ $n \geq 3$

On pose $\varphi(x) = f(x) - \frac{1}{n}$; $x > 0$

$$\varphi'(x) = f'(x)$$

$$\text{on a } n \geq 3 \Rightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{1}{3} \Rightarrow e^{-1} - \frac{1}{n} \geq e^{-1} - \frac{1}{3} > 0$$

* si $x \in]0, e]$ φ continue strictement croissante
donc réalise une bijection de $]0, e]$ sur $] -\infty, e^{-1} - \frac{1}{n}]$

$0 \in] -\infty, e^{-1} - \frac{1}{n}]$ alors $\varphi(x) = 0$ admet dans $]0, e]$ une unique solution α_n .

* si $x \in]e, +\infty[$ φ est continue et strictement décroissante donc réalise une bijection de $]e, +\infty[$ sur $] -\frac{1}{n}, e^{-1} - \frac{1}{n} [$

x	0	e	$+\infty$
φ'	+	0	-
φ		$e^{-1} - \frac{1}{n}$	$-\frac{1}{n}$
	$-\infty$		

L.S.Elriadh	<u>Logarithme</u>	Mr Zribi
4^{ème} Maths		Solutions

$0 \in]-\frac{1}{n}, e^{-1} - \frac{1}{n} [$ alors $\varphi(x)=0$ admet dans $]e, +\infty[$ une unique solution β_n .

par suite $f(x) = \frac{1}{n}$ admet dans $]0, +\infty[$ deux solution α_n et β_n avec $\alpha_n \leq \beta_n$.

B/ $1/a/x > -1$; $g'(x) = x-1 + \frac{1}{1+x} = \frac{x^2}{1+x}$

$\lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{1}{2}x - 1 + \frac{\log(x+1)}{x} \right) = +\infty$

x	-1	0	$+\infty$
g'		+	+
g	$-\infty$	0	$+\infty$

b/

x	-1	0	$+\infty$
Sig(g)	-	0	+

pour tout $x \geq 0$; $g(x) \geq 0$ donc $x - \frac{1}{2}x^2 \leq \log(x+1)$

c/ on pose $h(x) = \log(x+1) - x$; $x \geq 0$

$h'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 = \frac{-x}{x+1}$

$h(0) = 0$

pour tout $x \geq 0$; $h(x) \leq 0$

par suite $x \geq \log(1+x)$; $x \geq 0$.

x	0	$+\infty$
h'	0	-
h	0	$-\infty$

2/a/ on a pour tout $x \geq 0$; $\log(1+x) \leq x \leq x+x^2 = x(1+x)$ donc $\frac{\log(1+x)}{x+1} \leq x$.

donc pour $x = \frac{1}{n}$; $\frac{\log(1+\frac{1}{n})}{1+\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}$

Par suite $f(1+\frac{1}{n}) \leq \frac{1}{n}$.

b/ $x \in [0, \frac{1}{2}]$; soit $u(x) = (x - \frac{1}{2}x^2) - (\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2) = -x^2 + \frac{1}{2}x$

$u'(x) = -2x + \frac{1}{2}$

$u(x) \geq 0$; $x \in [0, \frac{1}{2}]$

par suite $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2 \leq x - \frac{1}{2}x^2 \leq \log(1+x)$; $x \in [0, \frac{1}{2}]$

d'ou $\frac{1}{2}x \leq \frac{\log(1+x)}{x+1}$; $x \in [0, \frac{1}{2}]$

x	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
u'	+	0	-
u	0	$\rightarrow$	$\rightarrow 0$

L.S.Elriadh	<u>Logarithme</u>	Mr Zribi
4^{ème} Maths		Solutions

pour $x = \frac{2}{n}$ ($n \geq 4 \Rightarrow \frac{2}{n} \in [0, \frac{1}{2}]$) on a $\frac{1}{n} \leq \frac{\log(1+\frac{2}{n})}{\frac{2}{n}+1} = f(1+\frac{2}{n})$

c) $n \in \mathbb{N}$; $f(1+\frac{1}{n}) \leq f(\alpha_n) \leq f(1+\frac{2}{n})$ et f croissante $]0, e[$ donc $1+\frac{1}{n} \leq \alpha_n \leq 1+\frac{2}{n}$

comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1+\frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1+\frac{2}{n} = 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 1$

Exercice 3 : A/

$$1/ \lim_{x \rightarrow +\infty} f_m(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[\frac{x^2-1}{4x} - \frac{m}{2} \frac{\log x}{x} \right] = +\infty$$

$$\text{si } m=0; \lim_{x \rightarrow 0^+} f_m(x) = -\frac{1}{4}$$

$$\text{si } m>0; \lim_{x \rightarrow 0^+} f_m(x) = +\infty$$

$$\text{si } m<0; \lim_{x \rightarrow 0^+} f_m(x) = -\infty$$

$$2/ x>0; f'_m(x) = \frac{1}{2}x - \frac{m}{2} \frac{1}{x} = \frac{x^2-m}{2x}$$

$$\text{si } m=0 \quad f'_0(x) = \frac{1}{2x}$$

x	0	$+\infty$
f'_0	+	
f_0	$-\frac{1}{4}$	$+\infty$

x	0	$\sqrt{m}$	$+\infty$
f'_m	-	0	+
f_m	$+\infty$	$f(\sqrt{m})$	$+\infty$

Si $m < 0$

x	0	$+\infty$
f'_m		+
f_m	$-\infty$	$+\infty$

$$3/a/M_0(x_0, y_0) \in \zeta_m \Leftrightarrow y_0 = \frac{x_0^2-1}{4} - \frac{m}{2} \log x_0$$

$$\Leftrightarrow m = \frac{\frac{x_0^2-1}{4} - 2y_0}{\log x_0}; x_0 \neq 1$$

d'ou il existe une seule courbe ζ_m qui passe par $M_0(x_0, y_0)$

$$b) m \in \mathbb{R}; A(x, y) \in \zeta_m \Leftrightarrow y = \frac{x^2-1}{4} - \frac{m}{2} \log x$$

2010-2011

L.S.Elriadh	<u>Logarithme</u>	Mr Zribi
4^{ème} Maths		Solutions

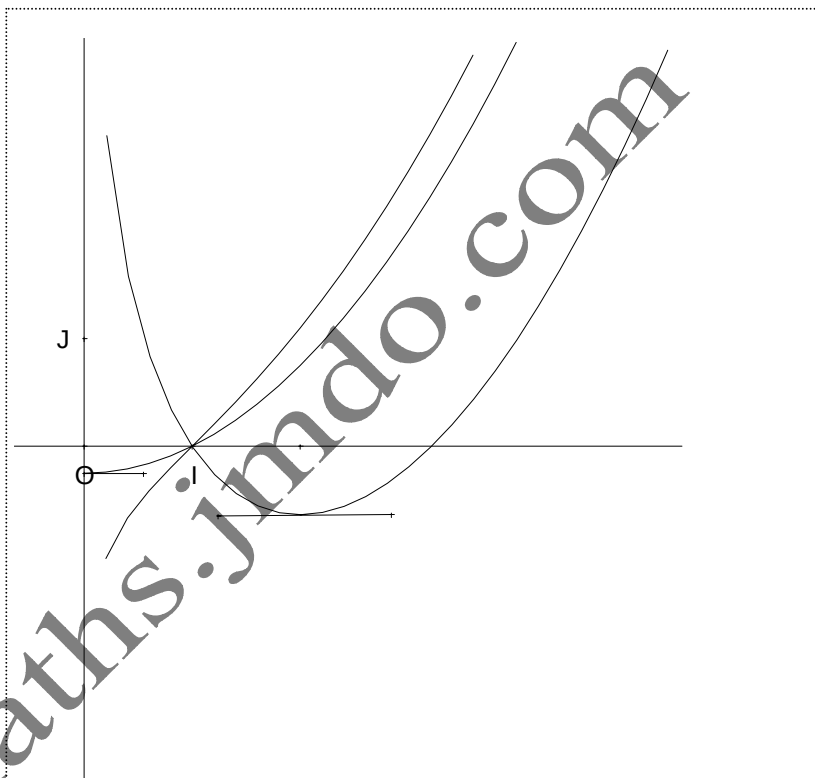
$$\Leftrightarrow \frac{m}{2} \log x + y - \frac{x^2-1}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\log x}{2} = 0 \text{ et } y - \frac{x^2-1}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow x=1 \text{ et } y=0$$

d'où ζ_m passent par l'unique point A(1,0).

4/ représentation graphique :



B/ 1/a) $x > 0$; $f_4(x) = \frac{x^2-1}{4} - 2\log x$

$$F(x) = 2x \log x - \frac{x^3 + 21x - 22}{12}$$

$F'(x) = f_4(x)$ et $F(1) = 0$ donc F est une primitive de f_4 qui s'annule en 1.

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \frac{11}{6}$

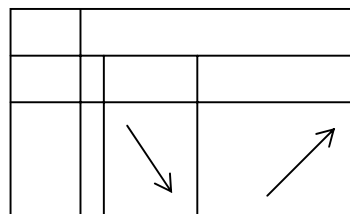
2/a) sur $]0, 2[$ f_4 continue strictement décroissante

et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_4(x) = +\infty$; $f_4(2) = \frac{3}{4} - 2\log 2 < 0$

d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe x_1 unique tel que $f_4(x_1) = 0$

sur $]2, +\infty[$: f_4 continue, strictement croissante

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_4(x) = +\infty$ et $f_4(2) < 0$; d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe x_0 unique tel que $f_4(x_0) = 0$



L.S.Elriadh	<u>Logarithme</u>	Mr Zribi
4^{ème} Maths		Solutions

$f_4(3).f_4(4) < 0$ donc $x_0 \in]3,4[$.

$$b) \frac{x^2-1}{4} - 2\log x = 0 \Leftrightarrow x^2-1=8\log x$$

$$\Leftrightarrow x^2=1+8\log x$$

$$\Leftrightarrow x_0=\sqrt{1+8\log x_0} \text{ car } x_0 > 0$$

$$3/ a/ x \geq 3 \Leftrightarrow \log x \geq \log 3 \geq 1$$

$$\Leftrightarrow 1+8\log x \geq 9$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{1+8\log x} \geq 3$$

$$b) \varphi'(x) = \frac{\frac{8}{x}}{2\sqrt{1+8\log x}}$$

$$x \geq 3 \Leftrightarrow \frac{8}{x} \leq \frac{8}{3}$$

$$2\sqrt{1+8\log x} \geq 6 \Leftrightarrow 0 < \frac{1}{2\sqrt{1+8\log x}} \leq \frac{1}{6}$$

$$d'ou 0 \leq \varphi'(x) \leq \frac{4}{9}$$

4/ a) $U_0=3 \geq 3$ donc vraie pour $n=0$

supposons que $U_n \geq 3$, pour un rang $n \in \mathbb{N}$ et montrons que $U_{n+1} \geq 3$

on a $U_n \geq 3$ et φ croissante donc $\varphi(U_n) \geq \varphi(3) \geq 3$

d'ou pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \geq 3$.

b) φ continue sur $[3, +\infty[$, dérivable sur $]3, +\infty[$ et $|\varphi'(x)| \leq \frac{4}{9}$; d'après le théorème des

accroissements finis : $|\varphi(U_n) - \varphi(x_0)| \leq \frac{4}{9} |U_n - x_0|$ soit $|U_{n+1} - x_0| \leq \frac{4}{9} |U_n - x_0|$

$$c) |U_1 - x_0| \leq \frac{4}{9} |U_0 - x_0|$$

$$|U_n - x_0| \leq \frac{4}{9} |U_{n-1} - x_0|$$

$$|U_n - x_0| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^n |3 - x_0|$$

$$\text{or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^n = 0 \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = x_0$$

Exercice 4 : $A/1/ t \geq 0$; $g'(t) = \frac{t}{1+t} \geq 0$.

D'après les variations de g on a : $g(t) \geq 0$; $t \geq 0$

Donc $0 \leq \log(1+t) \leq t$; $t \geq 0$.

t	0	$+\infty$
g'	0	+
g	0	$\nearrow$

L.S.Elriadh	<u>Logarithme</u>	Mr Zribi
4^{ème} Maths		Solutions

2) a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 = f(0)$ d'ou f est continue à droite en 0.

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} [(x+1) \frac{\log(x+1)}{x} - \log x] = +\infty$ d'ou f n'est pas dérivable à droite en 0.

3/ a) $x > 0$; $f(x) - \log(1+x) = x \log(x+1) - x \log x = x \log(1 + \frac{1}{x})$

b) $x > 0$; on a : $f(x) - \log x = x \log(1 + \frac{1}{x}) \geq 0$ d'ou $f(x) \geq \log(1+x)$.

on a : $\log(1+t) \leq t$; $t \geq 0$

pour $t = \frac{1}{x}$, $x > 0$: $\log(1 + \frac{1}{x}) \leq \frac{1}{x} \Rightarrow x \log(1 + \frac{1}{x}) \leq 1 \Rightarrow f(x) - \log(1+x) \leq 1 \Rightarrow -1 + f(x) \leq \log(1+x)$

en conclusion : $-1 + f(x) \leq \log(1+x) \leq f(x)$, pour tout $x > 0$

4/a) $x > 0$; $f'(x) = (\log(x+1) + 1) - (\log x + 1) = \log(x+1) - \log x = \log(1 + \frac{1}{x}) > 0$ car $1 + \frac{1}{x} > 1$.

b) f continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$ donc réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur $f[0, +\infty[= [0, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)] = [0, +\infty[$

en effet : on a $f(x) \geq \log(1+x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log(1+x) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

5/a) on pose $y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow f(y) = x$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f^{-1}(x)}{x} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y}{f(y)} = \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f(y) - f(0)}{y - 0}} = 0$ donc f^{-1} dérivable à droite en 0.

Pour tout $x > 0$; f est dérivable et $f'(x) \neq 0$ donc f^{-1} dérivable sur $]0, +\infty[$.

b) $f(1) = 2 \log 2 = \log 4$; $(f^{-1})'(\log 4) = \frac{1}{f'(f^{-1}(\log 4))} = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{\log 2}$.

6/a) $w'(x) = f'(x) - 1 = \log(1 + \frac{1}{x}) - 1$

$w'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \log(1 + \frac{1}{x}) \geq 1 \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{x} \geq e$

$\Leftrightarrow x \leq \frac{1}{e-1}$

on a : $-1 + f(x) \leq \log(1+x) \Rightarrow f(x) - x \leq 1 + \log(1+x) - x$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \log(1+x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(\frac{1}{x} + \frac{\log(1+x)}{x} - 1) = -\infty$

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} w(x) = -\infty$

x	0	$\frac{1}{e-1}$	$+\infty$
w'		+	-
w	0	$w(\frac{1}{e-1})$	$-\infty$

b) on a $w(0) = 0$ et sur $[\frac{1}{e-1}, +\infty[$: w continue et strictement croissante ; $w(\frac{1}{e-1}) > 0$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} w(x) = -\infty$; d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel $a \in]\frac{1}{e-1}, +\infty[$ tel que $w(a) = 0$

$\frac{1}{e-1}, +\infty[$ tel que $w(a) = 0$

on a : $w(1,75) w(2) < 0$ donc $a \in]1,75 ; 2[$

L.S.Elriadh	<u>Logarithme</u>	Mr Zribi
4^{ème} Maths		Solutions

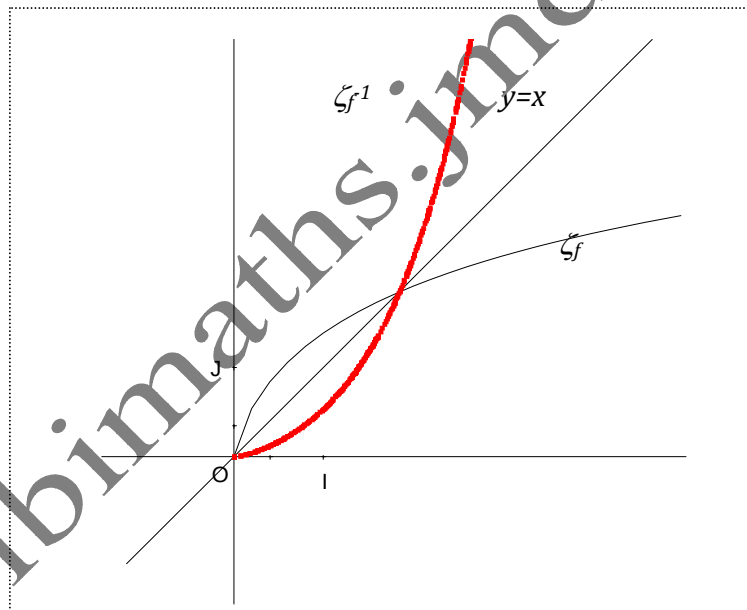
c)

c)représentation graphique :

Etude des branches infinies :

$$\text{On a : } \log(1+x) \leq f(x) \leq 1+\log(1+x) \Rightarrow \frac{\log(1+x)}{x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{1}{x} + \frac{\log(1+x)}{x}$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(1+x)}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + \frac{\log(1+x)}{x} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ d'où ζ_f admet une branche infinie de direction (xx') au voisinage de $+\infty$.



Exercice 5:

Partie A

$f(2) = 2 - 3 \ln 2 \Rightarrow 2a + (2b + c) \ln 2 = 2 - 3 \ln 2$; par ailleurs la dérivée s'annule en 1 et $f(1) = 1$:

$$f'(x) = a + b \ln x + \frac{bx+c}{x} \Rightarrow a + 0 + \frac{b+c}{1} = 0 \Leftrightarrow a + b + c = 0 ; f(1) = a + 0 = a = 1.$$

On a donc $2 + (2b + c) \ln 2 = 2 - 3 \ln 2 \Leftrightarrow 2b + c = -3$; avec $1 + b + c = 0$ on tire $c = 1$ et $b = -2$.

Partie B

1. a. En 0, $\ln x$ tend vers $-\infty$, donc g tend vers $-\infty$.

2010-2011

L.S.Elriadh	<u>Logarithme</u>	Mr Zribi
4^{ème} Maths		Solutions

b. Mettons x en facteur : $g(x) = x \left[1 + \left(\frac{1}{x} - 2 \right) \ln x \right] \rightarrow +\infty [1 + (0 - 2) + \infty] = -\infty$.

2. a. $g'(x) = 1 - 2 \ln x + \frac{1-2x}{x} = \frac{x-2x \ln x + 1-2x}{x} = \frac{1-x-2x \ln x}{x}$.

b. $-2 \ln x$ change de signe en 1, de même que $\frac{1-x}{x}$ puisque x est positif. La dérivée est constituée de deux morceaux qui changent de signe au même endroit : avant 1 elle est positive, après 1 elle est négative.

3.

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	0 -	
$g(x)$	$-\infty$	1	$-\infty$

4. a. $(1-2x) \ln x = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 1-2x=0 \\ \ln x=0 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ ou } x=1$: la courbe coupe la droite Δ en ces deux points.

b. $g(x) - x = (1-2x) \ln x$ est positif sur $\left[\frac{1}{2}; 1 \right]$: C au-dessus de Δ ; sinon C est en dessous de Δ .

Exercice 6 :

1. $\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(x+1)}{x} \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$; f est continue en 0 ssi $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$, or le cours donne justement la

limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

2. a. $g'(x) = \frac{1}{1+x} - (1-x+x^2) = \frac{1-1-x+x+x^2-x^2-x^3}{1+x} = \frac{-x^3}{1+x} \leq 0$. Donc g est décroissante et

comme $g(0)=0$, on a également $g(x) \leq 0$, soit $\ln(1+x) \leq \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right)$.

b. On prend $k(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \Rightarrow k'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{1-1-x+x+x^2}{1+x} = \frac{x^2}{1+x} \geq 0$ et $k(0)=0$ donc

$k(x) \geq 0$, soit $\ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}$.

c. $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \geq \ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2} \Leftrightarrow -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \geq \ln(1+x) - x \geq -\frac{x^2}{2} \Leftrightarrow -\frac{1}{2} + \frac{x}{3} \geq \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \leq -\frac{1}{2}$.

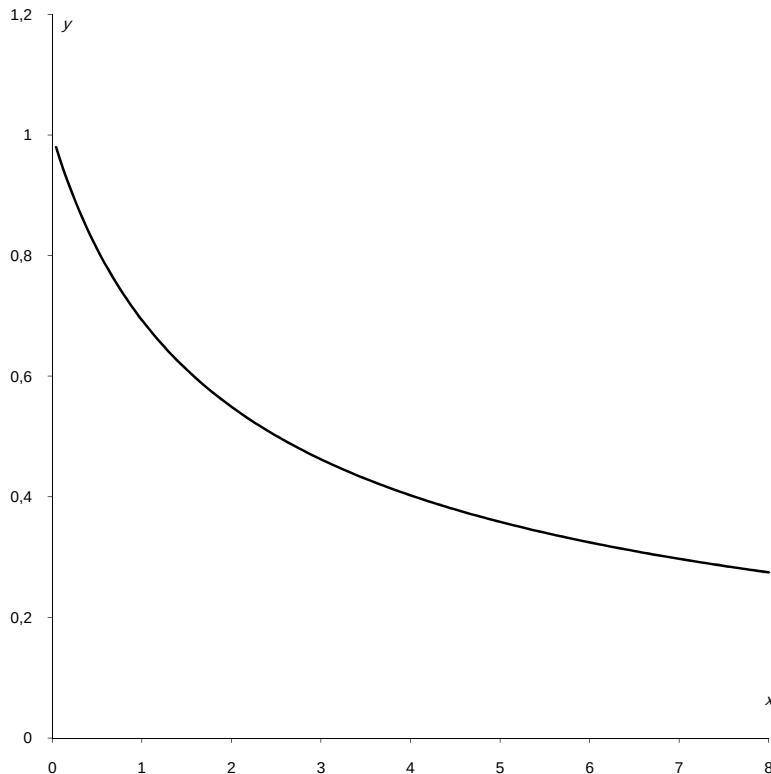
L.S.Elriadh	<u>Logarithme</u>	Mr Zribi
4^{ème} Maths		Solutions

f dérivable en zéro : on calcule $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1+x)}{x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$; or le résultat précédent montre que cette limite est précisément $-\frac{1}{2}$ qui est donc $f'(0)$.

3. a. $h(x) = \frac{x}{x+1} - \ln(1+x)$, $h'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} = \frac{1-x-1}{(x+1)^2} = \frac{-x}{(x+1)^2} \leq 0$; on a $h(0) = 0$ et h décroissante donc $h(x) \leq 0$.

b. $f'(x) = \frac{\frac{1}{1+x} x - \ln(1+x)}{x^2} = \frac{h(x)}{x^2} \leq 0$.

c. $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(1+x)}{x} \sim \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.



Exercice 7 :

Partie A

$$f(x) = \frac{x}{x+1} - 2\ln(x+1), \quad D_f =]-1 ; +\infty [.$$

1. f est dérivable comme somme de fonctions dérivables : en effet, $u : x \mapsto \frac{x}{x+1}$ est dérivable sur D_f et $v : x \mapsto x+1 = y \mapsto -2\ln y$ est dérivable sur D_f .

L.S.Elriadh	<u>Logarithme</u>	Mr Zribi
4^{ème} Maths		Solutions

$$f'(x) = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} - 2 \frac{1}{x+1} = \frac{1-2(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{-2x-1}{(x+1)^2}.$$

$$2. f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -2x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -\frac{1}{2}.$$

x	-1	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$-$
$f(x)$		$-\infty$	$-\infty$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \frac{x-2(x+1)\ln(x+1)}{x+1} = -\infty \quad \text{car} \quad \lim_{X \rightarrow 0} X \ln X = 0^-.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} - 2\ln(x+1) = -\infty \quad \text{car} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} -2\ln(x+1) = -\infty.$$

$$f(-1/2) = \frac{-1/2}{1/2} - 2\ln \frac{1}{2} = -1 + 2\ln 2 \approx 0,39, f(0) = 0.$$

3. f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $] -1, -1/2[$ et $f(x)$ change de signe sur cet intervalle ; il existe donc un nombre α de $] -1, -1/2[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

$$f(-0,71) \approx 0,027 \text{ et } f(-0,72) \approx -0,025 \text{ donc } -0,72 < \alpha < -0,71$$

Signe de $f(x)$:

x	-1		α	0	$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	$-$

Partie B

$$g(x) = \frac{\ln(x+1)}{x^2}, D =]-1; 0[\cup]0; +\infty[.$$

$$1. a. \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} g(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{\ln(x+1)}{x} \times \frac{1}{x} = -\infty \quad \text{car} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1 \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty.$$

$$\text{De même } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\ln(x+1)}{x} \times \frac{1}{x} = +\infty.$$

$$b. \lim_{x \rightarrow -1} g(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{(x+1)} \times \frac{x+1}{x^2} = 0 \quad \text{car} \quad \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x^2} = 0.$$

$$2. a. g'(x) = \frac{\frac{1}{x+1} \times x^2 - \ln(x+1) \times 2x}{x^4} = \frac{\frac{x}{x+1} - 2\ln(x+1)}{x^3} = \frac{f(x)}{x^3}.$$

x	-1		α	0	$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	$-$
x^3		$-$		$-$	$+$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	$-$

$$b. g(\alpha) = \frac{\ln(\alpha+1)}{\alpha^2}; \text{ or on sait que } f(\alpha) = 0 \text{ donc } \frac{\alpha}{\alpha+1} - 2\ln(\alpha+1) = 0 \Leftrightarrow \ln(\alpha+1) = \frac{\alpha}{2(\alpha+1)}.$$

2010-2011

L.S.Elriadh	<u>Logarithme</u>	Mr Zribi
4^{ème} Maths		Solutions

On déduit que $g(\alpha) = \frac{\ln(\alpha+1)}{\alpha^2} = \frac{\alpha}{2(\alpha+1)} \times \frac{1}{\alpha^2} = \frac{1}{2\alpha(\alpha+1)} \approx -2,455$.

x	-1	α	0	$+\infty$
$g'(x)$		+	0	-
$g(x)$		$-\infty$	$+\infty$	0



Exercice 8 :

1. a. g est dérivable comme somme de fonctions dérivables. En effet, $\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$ est dérivable comme composée de fonctions dérivables, de même que $-\frac{2}{x^2+1}$.

$$g'(x) = \frac{-\frac{2x}{x^4}}{1+\frac{1}{x^2}} + \frac{2 \times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-\frac{2}{x^3}}{\frac{x^2+1}{x^2}} + \frac{4x}{(x^2+1)^2} = -\frac{2}{x(x^2+1)} + \frac{4x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2(x^2+1)+4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}.$$

b. Le signe de $g'(x)$ est celui de $x^2-1=(x-1)(x+1)$. Comme g' est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, on a :

si $0 < x < 1$, $g'(x)$ est négatif ;

si $x > 1$, $g'(x)$ est positif.

L.S.Elriadh	<u>Logarithme</u>	Mr Zribi
4^{ème} Maths		Solutions

2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^2 + 1}$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) = \ln 1 = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x^2 + 1} = 0$

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x^2 + 1}$; $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \ln X = +\infty$ avec

$X = 1 + \frac{1}{x^2}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{x^2 + 1} = 2$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$.

4. a.

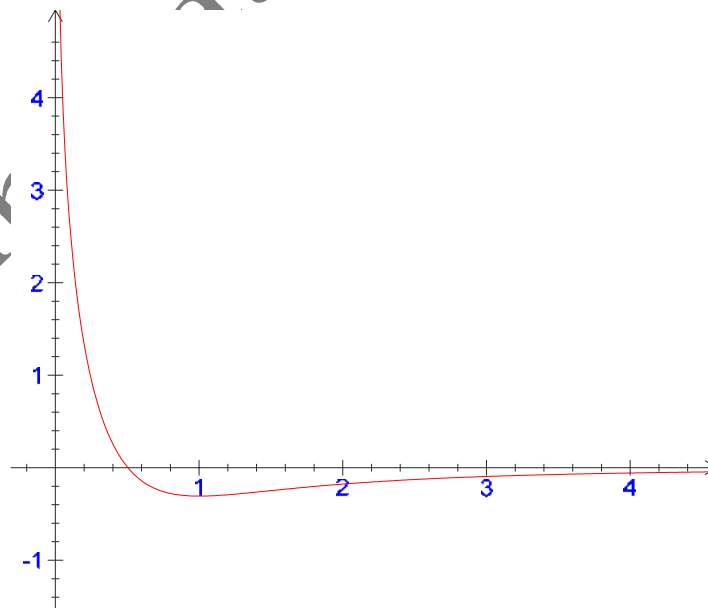
x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	-0,3	0

$g(1) = \ln \left(1 + \frac{1}{1^2} \right) - \frac{2}{1^2 + 1} = \ln 2 - 1 \approx -0,3$.

4. b. La fonction est continue et dérivable sur $]0 ; 1]$, de plus elle est strictement décroissante sur cet intervalle en changeant de signe, donc il existe une valeur $\alpha > 0$ telle que $g(\alpha) = 0$.

On a $g(0,5) \approx 0,009438$ et $g(0,6) \approx -0,141452$ donc $g(0,5) > 0 = g(\alpha) > g(0,6)$ et comme g est décroissante, $0,5 < \alpha < 0,6$.

5. Pour $0 < x < \alpha$, alors $g(x)$ est positif ; pour $x > \alpha$ alors $g(x)$ est négatif.



L.S.Elriadh	<u>Logarithme</u>	Mr Zribi
4^{ème} Maths		Solutions

1. a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$ (cours).

b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} xf(x) = 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

2. $f(x) = x \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right)$, $f'(x) = 1 \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) + x \cdot \frac{-\frac{2x}{x^4}}{1 + \frac{1}{x^2}} = \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) + x \cdot \frac{-\frac{2}{x^3}}{\frac{x^2+1}{x^2}} = \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) - \frac{2}{x^2+1} = g(x)$.

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$		$f(\alpha)$	0

3. a. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln \left(\frac{x^2+1}{x^2} \right) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} (x \ln(x^2+1) - x \ln x^2)$,
 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln(x^2+1) = 0$ car $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln(x^2+1) = \ln 1 = 0$.

$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} -x \ln x^2 = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} -\frac{2 \ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} -2 \ln x \cdot x = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{2 \ln \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln X}{X} = 0^-$ avec $X = \frac{1}{x}$.

Conclusion : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) = 0$.

b. f dérivable en 0 si et seulement si la limite de son taux d'accroissement est finie.

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \ln \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) = +\infty$

La fonction n'est donc pas dérivable en 0.

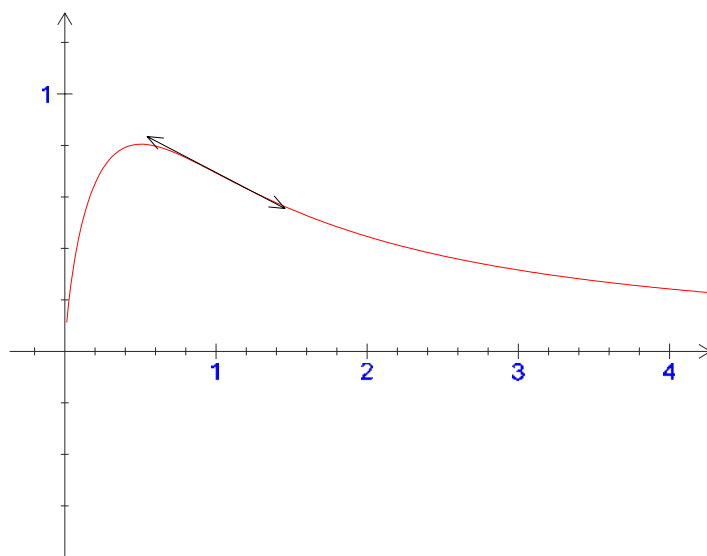
c. La tangente en 0 à f est verticale. Son équation est $x = 0$.

4. La tangente au point d'abscisse 1 a pour équation $y = f'(1)(x-1) + f(1)$: $f(1) = 1 \ln \left(1 + \frac{1}{1^2} \right) = \ln 2$,

$f'(1) = g(1) = \ln 2 - 1$ d'où $y = (\ln 2 - 1)(x - 1) + \ln 2 \Leftrightarrow y = (\ln 2 - 1)x + 1$.

5.

<i>L.S.Elriadh</i>	<u>Logarithme</u>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		<i>Solutions</i>



zribimaths.jimdo.com

<i>L.S.El Rjadh</i>	<u>Exponentielles</u>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		Enoncés

Exercice 1 :

on se propose de déterminer une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$f(0)=\log 2 \text{ et (pour tout } x \in \mathbb{R}, f'(x)-2f(x)=-\frac{2}{1+e^{-2x}})(E).$$

1/a/ soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{2x}g(x)$

calculer $g(0)$; déterminer $f'(x)$ en fonction de $g(x)$ et $g'(x)$.

b/ déduire que f vérifie (E) si et seulement si $g'(x)=\frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$; $x \in \mathbb{R}$

2/a/ donner une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \rightarrow \frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

b/ déduire l'expression de g puis celle de f .

Exercice 2 :

soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=e^{2x}\log(1+e^{-2x})$.

1/ on pose $h(x)=\log(1+e^{-2x})-\frac{1}{e^{2x}+1}$.

a/ calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$

b/ dresser le tableau de variation de h et en déduire le signe de h pour $x \in \mathbb{R}$.

2/ a/ vérifier que $f'(x)=2e^{2x}h(x)$.

b/ calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

c/ calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ (on montrera d'abord que $f(x)=-2xe^{2x}+e^{2x}\log(1+e^{2x})$).

d/ dresser le tableau de variations de f

3/a/ vérifier que pour tout $x \leq 0$; $f(x)-x > 0$

b/ montrer que pour tout $x \geq 0$; $f'(x)=1+2f(x)-\frac{3e^{2x}+1}{1+e^{2x}}$.

en utilisant le tableau de variations de f montrer que pour tout $x \geq 0$; $f'(x) < 1$.

c/ en déduire que l'équation $f(x)=x$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique $\alpha \in]0,92 ; 0,93[$.

<i>L.S.El Rïadh</i>	<u>Exponentielles</u>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		Enoncés

d/ en déduire la position relative de ζ_f et de la droite Δ d'équation : $y=x$.

4/ tracer la courbe ζ_f de f , préciser la tangente au point d'abscisse 0.

Exercice 3 :

soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

1/ étudier les variations de f et tracer sa courbe ζ dans un repère orthonormé.

2/a/ montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b/ soit $g=f^{-1}$, construire ζ_g .

c/ montrer que pour tout $x \in]-1,1[$; $g(x) = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

3/ soit h la fonction définie par $h(x) = x + \frac{x^3}{3(1-x^2)} + \frac{1}{2} \log\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$.

a/ calculer $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x)g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1} (1-x)h(x)$

b/étudier les variations de h , en déduire que pour tout $x \in]0,1[$; $\frac{1}{2} \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) < x + \frac{x^3}{3(1-x^2)}$

4/ soit $k(x) = g(x) - x - \frac{x^3}{3}$

a/ résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $1+x^2 < \frac{1}{1-x^2}$.

b/ dresser le tableau de variations de k ; en déduire que pour tout $x \in]0,1[$ on a :

$$x + \frac{x^3}{3} < \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

Exercice 4 :

on considère la suite U définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $U_n = n! \cdot n^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{e}{n}\right)^n$.

1/ en posant $t = \frac{1}{2n+1}$, montrer que l'on a : $\log \frac{U_n}{U_{n+1}} = -1 + \frac{1}{2t} \log\left(\frac{1+t}{1-t}\right)$

2/a/ vérifier que $3(2n+1)^2 < 12(n+1)(n+2)$.

<i>L.S.El Riadh</i>	<u>Exponentielles</u>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		Enoncés

b/ déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{1}{12(n+1)(n+2)} < \log \frac{U_n}{U_{n+1}} < \frac{1}{12n(n+1)}$

3/ on pose $x_n = \log(U_n) - \frac{1}{12n}$ et $y_n = \log(U_n) - \frac{1}{12(n+1)}$

a/ établir que pour tout $n > 0$; $x_n < x_{n+1} < y_{n+1} < y_n$.

b/ montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - y_n) = 0$

c/ déduire que les suite (x_n) et (y_n) convergent vers la même limite

Exercice 5 :

soit $n \in \mathbb{N}^*$; on considère la fonction f_n définie par :

$$f_n(x) = x e^{-\frac{1}{nx}} \text{ si } x > 0 \text{ et } f_n(0) = 0.$$

1/a/ montrer que f_n est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

b/ calculer $f'_n(x)$, en déduire que f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

2/a/ calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$

b/ étudier les variations de la fonction $g : u \mapsto e^{-u} - 1 + u$ sur $\mathbb{R}_+$

et de la fonction $h : t \mapsto e^{-t} - 1 + t - \frac{t^2}{2}$, $t \geq 0$.

c/ en déduire que pour tout $x > 0$; $0 \leq f_n(x) - (x - \frac{1}{n}) \leq \frac{1}{2n^2x}$.

d/ montrer alors que la droite $D_n : y = x - \frac{1}{n}$ est asymptote à la courbe ζ_n de f_n .

Préciser la position relative de ζ_n et D_n .

3/a/ donner le tableau de variations de f_n .

b/ tracer la courbe ζ_1 et son asymptote en précisant la tangente en 0.

c/ montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\zeta_n = h_{(0, \frac{1}{n})}(\zeta_1)$

b/ construire ζ_2 sur le même graphique que ζ_1 .

4/ montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, $f_n(x) \leq x$.

2010-2011

L.S.El Riadh	<u>Exponentielles</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Enoncés

5/a/ montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $x e^{-\frac{1}{nx}} = 1$ a une seule solution α_n dans $]0, +\infty[$.

b/ démontrer que α_n est solution de l'équation $x \log x = \frac{1}{n}$

6/a/ étudier les variations de $h : x \rightarrow x \log x$ sur $[1, +\infty[$.

b/ prouver que $\alpha_1 \in]1,76, 1,77[$

c/ montrer que α_n est décroissante en n déduire qu'elle converge vers $\alpha \geq 1$. démontrer que $h(\alpha) = 0$ en déduire α .

Exercice 6 :

I/ soit g l'application de $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$ définie par : $g(x) = x + 1 - \log x$.

1/ étudier les variations de g , en déduire que pour tout $x > 0$; $g(x) > 0$.

2/ soit h la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $h(x) = (1 + \frac{1}{x}) \log x$.

a/ étudier les variations de h .

b/ tracer la courbe de h dans un repère orthonormé.

II/ soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = e^{h(x)}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

1/ étudier la dérivabilité et la continuité de f sur $[0, +\infty[$.

2/ a/ déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.

b/ démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+ \setminus \{1\}$; $\frac{f(x) - x}{\log x} = \frac{e^{\frac{1}{x} \log x} - 1}{\frac{1}{x} \log x}$.

c/ en déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x) - x}{\log x}$.

d/ la fonction : $x \rightarrow f(x) - x$ admet-elle une limite en $+\infty$.

3/a/ étudier les variations de f .

b/ montrer que f réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur lui-même.

4/ a/ indiquer la tangente en O ; et donner l'équation de la tangente à ζ_f en A d'abscisse 1.

<i>L.S.El Rjadh</i>	<u>Exponentielles</u>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		Enoncés

b/ tracer ζ_f .

5/ a/ montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$; $n > 1$ admet une unique x_n solution et que $x_n \in]0, 1[$.

b/ étudier la monotonie de la suite (x_n) .

c/ en déduire que la suite (x_n) est convergente et calculer sa limite.

zribimaths.jimdo.com

L.S.El Rjadh	<u>Exponentielles</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Solutions

Exercice 1 :

1/a) $g(0)=f(0)=\log 2$.

$x \in \mathbb{R} ; f'(x)=2e^{2x}g(x)+e^{2x}g'(x)=e^{2x}(2g(x)+g'(x)).$

b) f vérifie (E) $\Leftrightarrow f'(x)-2f(x)=\frac{2}{1+e^{-2x}}$

$$\Leftrightarrow e^{2x}(2g(x)-g'(x))=-2e^{2x}g(x)=\frac{-2}{1+e^{-2x}}$$

$$\Leftrightarrow e^{2x}g'(x)=\frac{-2}{1+e^{-2x}}$$

$$\Leftrightarrow g'(x)=\frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$$

2/a) $u(x)=\frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$, u continue sur $\mathbb{R}$ et $u(x)=\frac{v'(x)}{v(x)}$ avec $v(x)=1+e^{-2x}$

d'où une primitive de u est $U(x)=\log|1+e^{-2x}|$

comme $1+e^{-2x} > 0 ; x \in \mathbb{R}$ alors $U(x)=\log(1+e^{-2x})$.

b) $g'(x)=\frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}} \Leftrightarrow g(x)=\log(1+e^{-2x})+c$

or $g(0)=\log 2$ donc $c=0$.

D'où $g(x)=\log(1+e^{-2x})$ et $f(x)=e^{2x}g(x)=e^{2x}\log(1+e^{-2x})$.

Exercice 2 :

1/ a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)=0$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)=+\infty$.

b) $x \in \mathbb{R} ; h'(x)=\frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}+\frac{2e^{2x}}{(1+e^{2x})^2}=\frac{-2}{(1+e^{2x})^2}<0$

pour tout $x \in \mathbb{R} ; h(x) > 0$.

2/a) $x \in \mathbb{R} ; f'(x)=2e^{2x}\log(1+e^{-2x})+e^{2x}\frac{-2e^{-2x}}{1+e^{-2x}}$

$$=2e^{2x}\log(1+e^{-2x})-\frac{2}{1+e^{-2x}}$$

$$=2e^{2x}(\log(1+e^{-2x})-\frac{1}{1+e^{2x}})$$

$$=2e^{2x}h(x).$$

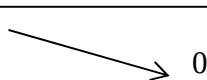
b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)=\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x}\log(1+e^{-2x})=\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(1+e^{-2x})}{e^{-2x}}$

on pose $t=e^{-2x}$, si $x \rightarrow +\infty \Rightarrow t \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)=\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\log(1+t)}{t}=1$$

c) $f(x)=e^{2x}\log(1+e^{-2x})=e^{2x}\log(e^{-2x}(1+e^{2x}))=-2xe^{2x}+e^{2x}\log(1+e^{2x})$

d'où $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)=0$ car $\lim_{t \rightarrow -\infty} te^t=0$.

x	$-\infty$	$+\infty$
h		
		

<i>L.S.El Rjadh</i>	<u>Exponentielles</u>	<i>Mr Zribi</i>
4^{ème} Maths		Solutions

d)

x	$-\infty$	$+\infty$
f'	+	
f	0	1

3/ a) on a : pour tout $x \in \mathbb{R}$; $f(x) > 0$

donc $f(x) > 0$ pour tout $x \leq 0$ et $-x \geq 0$ alors $f(x)-x > 0$; $x \leq 0$.

b/ $x \geq 0$

$$f'(x) = 2e^{2x} \log(1+e^{-2x}) - \frac{2}{1+e^{-2x}} = 2f(x) - \frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}} = 2f(x) - \frac{3e^{2x}+1-e^{2x}-1}{1+e^{2x}} = 2f(x) + 1 - \frac{3e^{2x}+1}{1+e^{2x}}.$$

D'après le tableau de variations de f on a :

$$f(x) < 1 \text{ d'où } 1+2f(x) < 3$$

$$\text{or } \frac{3e^{2x}+1}{1+e^{2x}} = 2 + \frac{e^{2x}-1}{1+e^{2x}} \text{ donc } \frac{3e^{2x}+1}{1+e^{2x}} \geq 2 \text{ d'où } -\frac{3e^{2x}+1}{1+e^{2x}} \leq -2$$

$$\text{alors } 1+2f(x) - \frac{3e^{2x}+1}{1+e^{2x}} < 1$$

par suite $f'(x) < 1$

c) soit $\varphi(x) = f(x) - x$; $x \geq 0$

$$\varphi'(x) = f'(x) - 1 < 0$$

φ continue et strictement décroissante sur $[0, +\infty[$; $\varphi(0) = \log 2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = -\infty$

d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe α unique dans $]0, +\infty[$ tel que $\varphi(\alpha) = 0$

donc $f(\alpha) = \alpha$; comme $\varphi(0,92) \cdot \varphi(0,93) < 0$ donc $\alpha \in]0,92 ; 0,93[$

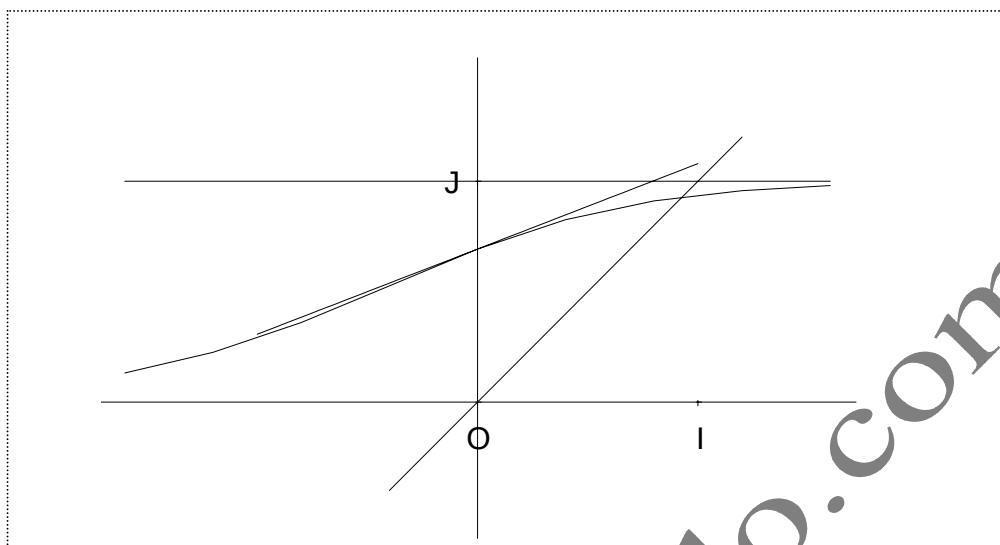
d)

x	$-\infty$	α	$+\infty$
Signe de φ	+	0	-
Position de ζ Et Δ	ζ au dessus de Δ		ζ en dessous de Δ

$$4) T_0 : y = f'(0)x + \log 2$$

$$= (2\log 2 - 1)x + \log 2$$

<i>L.S.El Riadh</i>	<u>Exponentielles</u>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		<i>Solutions</i>



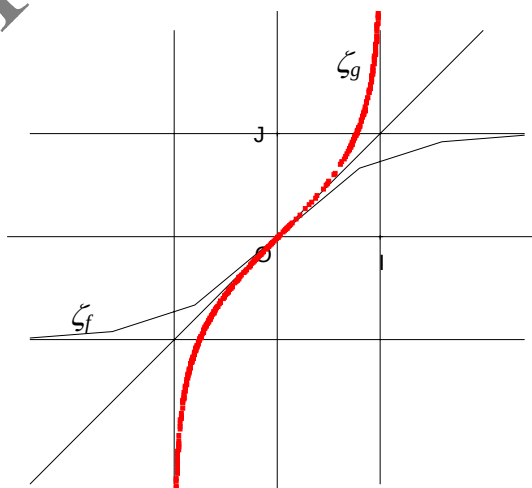
Exercice 3 :

$$1/f'(x) = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = \frac{4}{(e^x + e^{-x})^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}(e^{2x}-1)}{e^{-x}(e^{2x}+1)} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x(1-e^{-2x})}{e^x(1+e^{-2x})} = 1$$

représentation graphique :



2/a) f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $] -1,1[$.
c) $x \in] -1,1[$ et $y \in \mathbb{R}$;

$$y = g(x) \Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow x = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} \Leftrightarrow x(e^y + e^{-y}) = e^y - e^{-y} \Leftrightarrow (x-1)e^y = -(x+1)e^{-y}$$

2010-2011

L.S.El Riadh	<u>Exponentielles</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Solutions

$$\Leftrightarrow \frac{x+1}{1-x} = e^{2y} \quad \Leftrightarrow \quad y = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$\text{d'où } g(x) = \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

$$3/ \lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{2}(1-x) \log \frac{1+x}{1-x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{2} [(1-x) \log(1+x) - (1-x) \log(1-x)] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x(1-x) + \frac{x^3}{3(1-x)} + (1-x)g(x) = \frac{1}{6}$$

$$\begin{aligned} b) \quad x \in]-1, 1[; \quad h'(x) &= 1 + \frac{1}{3} \frac{3x^2(1-x^2) + 2x \cdot x^3}{(1-x^2)^2} + \frac{1}{2} \frac{(1+x)^2}{1-x} \\ &= \frac{2x^4}{3(1-x^2)^2} \end{aligned}$$

pour tout $x \in]0, 1[$ on a $h(x) > 0$

$$\Leftrightarrow x + \frac{x^3}{3(1-x^2)} + \frac{1}{2} \log \frac{1-x}{1+x} > 0$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{x^3}{3(1-x^2)} > -\frac{1}{2} \log \frac{1-x}{1+x} = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}.$$

$$4/ a) \quad 1+x^2 < \frac{1}{1-x^2} \quad \Leftrightarrow \quad 1+x^2 - \frac{1}{1-x^2} < 0 \quad ; x \neq \{-1, 1\} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-x^4}{1-x^2} < 0 \quad ; x \neq \{-1, 1\}$$

$$\Leftrightarrow 1-x^2 > 0, \quad x \neq \{-1, 1\} \quad \Leftrightarrow \quad x \in]-1, 1[\\ S_{\mathbb{R}} =]-1, 1[.$$

$$b) \quad x \in]-1, 1[; \quad k'(x) = g'(x) - 1 - x^2$$

$$\begin{aligned} &= \frac{-2}{(1+x)^2} - 1 - x^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{1-x}{1+x} - 1 - x^2 \\ &= \frac{1}{1-x^2} - (1+x^2) > 0 \end{aligned}$$

$$\text{pour tout } x \in]-1, 1[: k(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad g(x) - x - \frac{x^3}{3} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x + \frac{x^3}{3} < g(x) = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}$$

Exercice 4 :

$$1/ \quad \frac{U_n}{U_{n+1}} = \frac{n! n^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{e}{n}\right)^n}{(n+1)! (n+1)^{-\frac{1}{2}} \left(\frac{e}{n+1}\right)^{n+1}}$$

$$\frac{U_n}{U_{n+1}} = \frac{1}{n+1} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \frac{n+1}{e} = \frac{1}{e} \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}}$$

$$\text{donc } \log \frac{U_n}{U_{n+1}} = -1 + \left(n + \frac{1}{2}\right) \log\left(\frac{n+1}{n}\right)$$

x	-1	0	1
h'		+	
h		0	

x	-1	0	1
k'		+	
k		0	

L.S.El Rjadh	<u>Exponentielles</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Solutions

On a : $\frac{1+t}{1-t} = \frac{n+1}{n}$ et $\frac{1}{2t} = n + \frac{1}{2}$ d'où $\log \frac{U_n}{U_{n+1}} = -1 + \frac{1}{2t} \log \left(\frac{1+t}{1-t} \right)$

2/a) $3(4n^2+4n+1)-12(n^2+3n+2)=-24n-21 < 0$ d'où $3(2n+1)^2 < 12n(n+2)$

$$b) x \in]0,1[\text{ on a } x + \frac{x^3}{3} < \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} < x + \frac{x^3}{3(1-x^2)} \Leftrightarrow 1 + \frac{x^2}{3} < \frac{1}{2x} \log \frac{1+x}{1-x} < 1 + \frac{x^2}{3(1-x^2)}$$

$$\text{pour } x=t \text{ on aura : } 1 + \frac{1}{3(2n+1)^2} < \frac{1}{2t} \log \frac{1+t}{1-t} < 1 + \frac{\left(\frac{1}{2n+1}\right)^2}{3\left(1-\left(\frac{1}{2n+1}\right)^2\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{3(2n+1)^2} < -1 + \frac{1}{2t} \log \frac{1+t}{1-t} < \frac{1}{3(2n+1)^2-3}$$

$$\text{soit } \frac{1}{12(n+1)(n+2)} < \log \frac{U_n}{U_{n+1}} < \frac{1}{12n(n+1)}$$

$$3/ x_n - x_{n+1} = \log U_n - \log U_{n+1} - \frac{1}{12n} + \frac{1}{12(n+1)} = \log \frac{U_n}{U_{n+1}} - \frac{1}{12n(n+1)} < 0 \text{ d'où } x_n < x_{n+1}$$

$$x_{n+1} - y_{n+1} = \frac{1}{12(n+2)} - \frac{1}{12(n+1)}$$

$$y_{n+1} - y_n = -\log \frac{U_n}{U_{n+1}} + \frac{1}{12(n+1)(n+1)} < 0 \text{ d'où } y_{n+1} < y_n$$

d'où $x_n < x_{n+1} < y_{n+1} < y_n$.

$$b) \lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - y_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{12(n+1)} - \frac{1}{12n} = 0$$

c) x_n croissante majorée par y_1

y_n décroissante minorée par x_1

donc x_n et y_n deux suites convergentes ; Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n - y_n) = 0$ alors les suites x_n et y_n ont

la même limite .

Exercice 5 :

1/ sur $]0, +\infty[$, f_n est continue dérivable comme composées de fonctions continues et dérivables sur $]0, +\infty[$.

Continuité à droite en 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{-\frac{1}{nx}} = 0 = f_n(0) \text{ d'où } f_n \text{ est continue à droite en 0.}$$

Dérivabilité à droite en 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-\frac{1}{nx}} = 0 \text{ donc } f_n \text{ est dérivable à droite en 0.}$$

En conclusion : f_n est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+$.

$$b) f'_n(x) = e^{-\frac{1}{nx}} + x \frac{1}{nx^2} e^{-\frac{1}{nx}} = e^{-\frac{1}{nx}} \left(1 + \frac{1}{nx} \right) > 0 ; \text{ pour tout } x > 0$$

par suite f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$.

$$2/a) \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-\frac{1}{nx}} \text{ on pose } t = \frac{1}{nx}$$

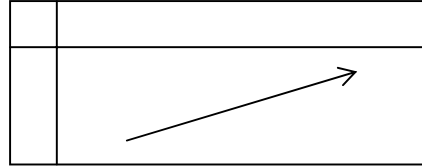
<i>L.S.El Riadh</i>	<u>Exponentielles</u>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		<i>Solutions</i>

$$= \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{-1}{n} \frac{e^t}{t} = +\infty$$

$$b) u \in \mathbb{R}_+ ; g'(u) = 1 - e^{-u}$$

$$\text{on a } -u \leq 0 \Leftrightarrow e^{-u} \leq 1 \Leftrightarrow 1 - e^{-u} \geq 0$$

$$\text{d'où } g'(u) \geq 0$$



$$t \in \mathbb{R}_+ ; h'(t) = -e^{-t} + 1 - t = -g(t) \leq 0$$

$$b) t \in \mathbb{R}_+ ; h(t) \leq 0 \text{ et } g(t) \geq 0$$

$$\text{donc } 0 \leq e^{-t} - 1 + t \leq \frac{t^2}{2}$$

$$\text{pour } t = \frac{1}{nx} :$$

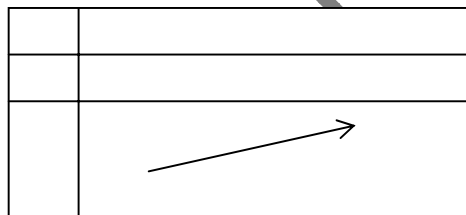
$$0 \leq e^{-\frac{1}{nx}} - 1 + \frac{1}{nx} \leq \frac{1}{2n^2x^2} \quad \text{donc } 0 \leq xe^{-\frac{1}{nx}} - (x - \frac{1}{n}) \leq \frac{1}{2n^2x}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) - (x - \frac{1}{n}) = 0 \quad \text{car} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n^2x} = 0$$

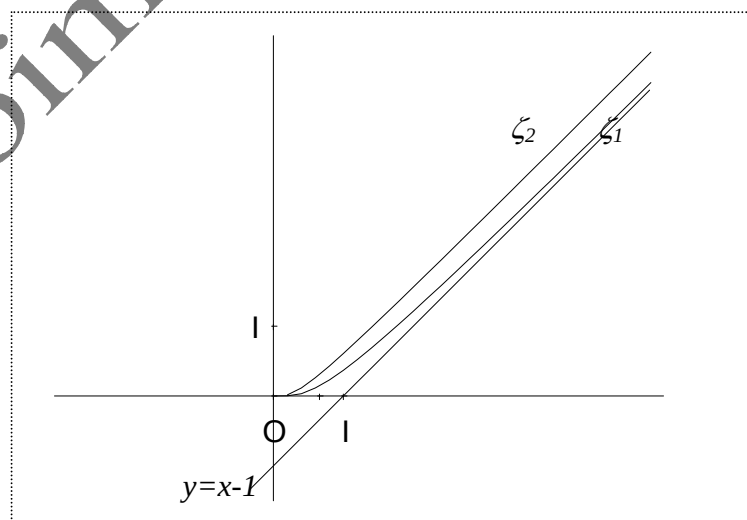
$$\text{d'où } y = x - \frac{1}{n} \text{ est une asymptote à } \zeta_n \text{ au voisinage de } +\infty$$

$$f_n(x) - (x - \frac{1}{n}) \geq 0 \text{ donc } \zeta_n \text{ au dessus de } D_n$$

3/a)



b) représentation graphique :



2010-2011

L.S.El Rjadh	<u>Exponentielles</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Solutions

c) Soit $M(x,y)$ et $M'(x',y')$

$$h_{(0, \frac{1}{n})}(M)=M' \Leftrightarrow \overrightarrow{OM'} = \frac{1}{n} \overrightarrow{OM} \Leftrightarrow x' = \frac{1}{n}x \text{ et } y' = \frac{1}{n}y$$

déterminons $h(\zeta_1)$:

$$M(x,y) \in \zeta_1 \Leftrightarrow y = x e^{-\frac{1}{x}} \Leftrightarrow ny' = nx' e^{-\frac{1}{nx'}} \Leftrightarrow y' = x' e^{-\frac{1}{nx'}} \Leftrightarrow M'(x',y') \in \zeta_n$$

D'où $h(\zeta_1) = \zeta_n$.

$$4/ x \in [0,1] ; -\frac{1}{nx} \leq 0 \Leftrightarrow e^{-\frac{1}{nx}} \leq 1 \Leftrightarrow x e^{-\frac{1}{nx}} \leq x \Leftrightarrow f_n(x) \leq x$$

5/ a) f_n continue et strictement croissante sur $[0, +\infty[$ donc réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $f_n(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$; $1 \in]0, +\infty[$ donc il existe un unique α_n dans $]0, +\infty[$ tel que $f_n(\alpha_n) = 1$

b) α_n est solution de $x e^{-\frac{1}{nx}} = 1$

$$x e^{-\frac{1}{nx}} = 1 \Leftrightarrow e^{-\frac{1}{nx}} = \frac{1}{x}, x > 0$$

$$\Leftrightarrow x \log x = -\frac{1}{n}$$

d'où α_n est solution de $x \log x = -\frac{1}{n}$

$$6/ x \geq 1 ; h'(x) = 1 + \log x \geq 0$$

b) α_1 est solution de $x \log x = 1$

$$\Leftrightarrow \alpha_1 \text{ est solution de } h(x) = 1$$

mais h continue strictement croissante et $h(1,76) < 1$, $h(1,77) > 1$ donc $\alpha_1 \in]1,76 ; 1,77[$.

$$c) h(\alpha_n) = \frac{1}{n} \text{ et } h\left(\frac{1}{n+1}\right) \text{ d'où } h(\alpha_n) \geq h(\alpha_{n+1}) \text{ et } h \text{ croissante alors } \alpha_n \geq \alpha_{n+1}$$

par suite $(\alpha_n)_n$ est décroissante et minorée par 0 d'où convergente.

On pose α la limite de α_n .

$$\text{On a } h(\alpha_n) = \frac{1}{n} \geq 0 = h(1) \text{ et } h \text{ croissante donc } \alpha_n \geq 1$$

$$\alpha_n \text{ converge et } h \text{ continue sur } [1, +\infty[\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} h(\alpha_n) = h(\alpha)$$

$$\text{or } \lim_{n \rightarrow +\infty} h(\alpha_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ donc } h(\alpha) = 0$$

et par suite $\alpha \log \alpha = 0$ avec $\alpha \geq 1$

en fin $\alpha = 1$

x	1	$+\infty$
h	0 $\nearrow$	$+\infty$

L.S.El Rjadh	<u>Exponentielles</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Solutions

Exercice 6 :

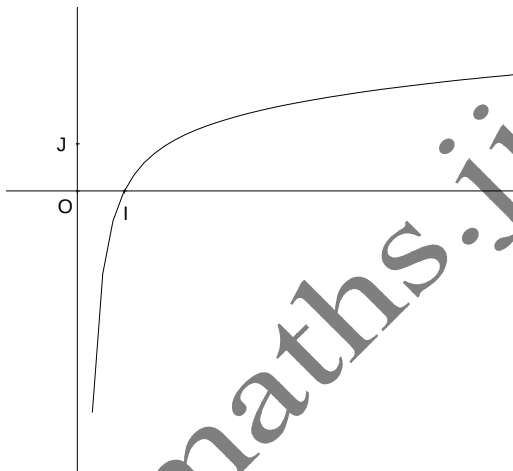
$$1/ x > 0 ; g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

D'après les variations de g on a :
 $g(x) > 0$ pour tout $x > 0$.

2/ a) $x > 0 ;$

$$h'(x) = -\frac{1}{x^2} \log x + (1 + \frac{1}{x}) \frac{1}{x} = \frac{-\log x}{x^2} + \frac{x+1}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

b) représentation graphique de h :



$$\text{II/ } 1/ \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{h(x)} = 0 \quad (\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = -\infty)$$

$= f(0)$ donc f est continue à droite en 0.

f est continue sur $]0, +\infty[$ comme étant la composée de deux fonctions continues
d'où f est continue sur $[0, +\infty[$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^{(1+\frac{1}{x})\log x}}{e^{\log x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{1}{x}\log x} = 1 \text{ alors } f \text{ est dérivable à droite en } 0.$$

f est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme étant la composée de deux fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$
d'où f est dérivable sur $[0, +\infty[$

$$2/a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{\log x}{x}} = 1$$

$$b) x > 0 ; \frac{f(x)-x}{\log x} = \frac{e^{\log x} e^{\frac{1}{x}\log x} - x}{\log x} = \frac{x(e^{\frac{1}{x}\log x} - 1)}{\log x} = \frac{e^{\frac{1}{x}\log x} - 1}{\frac{1}{x} \log x}$$

L.S.El Rjadh	<u>Exponentielles</u>	Mr Zribi
4 ^{ème} Maths		Solutions

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)-x}{\log x} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{e^t-1}{t} = 1$ on pose $t = \frac{\log x}{x}$.

d) si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)-x = l$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)-x}{\log x} = 0$ ce qui est impossible

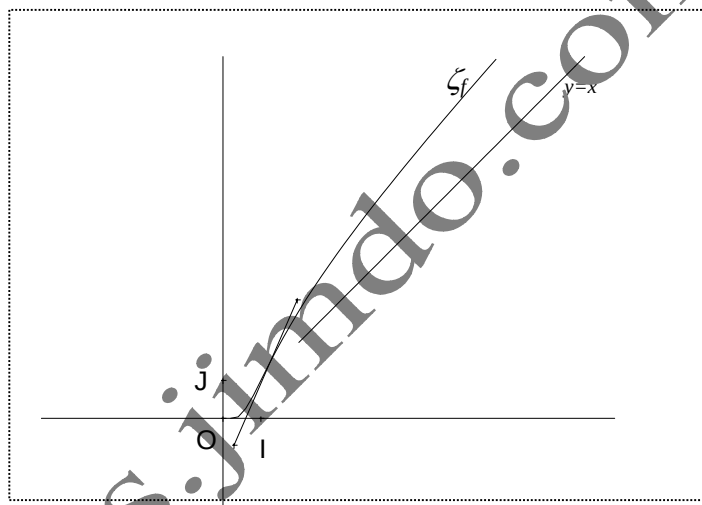
donc $f(x)-x$ n'admet pas de limite en $+\infty$.

3/a) $x > 0$; $f'(x) = h'(x) e^{h(x)} > 0$

b) f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $f(\mathbb{R}_+) = \mathbb{R}_+$.

4/a) $T : y = f'(1)(x-1) + f(1) = 2x-1$.

b) représentation graphique de f :



5/a) on pose $\varphi(x) = f(x) - \frac{1}{n}$;

$\varphi'(x) = f'(x) > 0$ donc φ strictement croissante et continue sur $\mathbb{R}_+$ alors φ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\varphi(\mathbb{R}_+) = [-\frac{1}{n}, +\infty[$; $0 \in [-\frac{1}{n}, +\infty[$ donc l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution x_n dans $\mathbb{R}_+$.

$\varphi(0) = -\frac{1}{n} < 0$; $\varphi(1) = 1 - \frac{1}{n} > 0$ ($n > 1$) donc $\varphi(0) \varphi(1) < 0$ et par suite $x_n \in]0, 1[$.

b) $n > 1$; on a $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$ et f^{-1} strictement croissante car f l'ait alors $f^{-1}(\frac{1}{n}) > f^{-1}(\frac{1}{n+1})$

donc $x_n > x_{n+1}$ ou $(x_n)_n$ est une suite décroissante.

c) $n > 1$; $\frac{1}{n} > 0$ et f^{-1} croissante donc $x_n > f^{-1}(0) = 0$.

La suite $(x_n)_n$ est décroissante minorée donc convergente.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} f^{-1}(\frac{1}{n}) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f^{-1}(x) = f^{-1}(0) = 0$ on pose $x = \frac{1}{n}$ (f^{-1} est continue en 0 car f l'ait)

<i>L.S.El Rjadh</i>	<u>Exponentielles</u>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		Enoncés

Exercice 1:

Partie I

1. Soit g la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = e^x - x - 1$.

a) Montrer que, pour tout $x > 0$, on a $g'(x) > 0$. En déduire le sens de variation de g sur $[0 ; +\infty[$.

b) Calculez $g(0)$. En déduire que, pour tout $x > 0$, on a $g(x) > 0$.

2. Soit h la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par $h(x) = (2 - x)e^x - 1$.

a) Étudier la fonction h et dresser son tableau de variation.

b) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une solution et une seule α et que l'on a $\alpha > 1$.

c) Vérifier la double inégalité $1,84 < \alpha < 1,85$.

d) Préciser, suivant les valeurs du nombre réel $x \geq 0$, le signe de $h(x)$.

Partie II

1. a) Justifier que f est définie en tout point de $[0 ; +\infty[$.

b) Montrer que, pour tout $x \geq 0$, on peut écrire $f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{1 - xe^{-x}}$.

En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

Interpréter géométriquement, relativement à C , le résultat obtenu.

c) Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $f'(x) = \frac{h(x)}{(e^x - x)^2}$.

d) Étudier la fonction f et dresser son tableau de variation.

2. a) Montrer que, pour tout $x \geq 0$, $f(x) - x = \frac{(1-x)g(x)}{e^x - x}$.

b) En déduire, suivant les valeurs du nombre réel $x \geq 0$, la position de la courbe C par rapport à la droite D d'équation $y = x$.

3. a) Préciser la tangente au point de C d'abscisse 0.

b) Tracer C , en faisant figurer sur le dessin la droite D d'équation $y = 1$ et tous les éléments obtenus au cours de l'étude.

<i>L.S.El Riadh</i>	<u>Exponentielles</u>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		Enoncés

Exercice 2 :

Sur la feuille ci-jointe figurent la courbe représentative (C) dans le repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ ainsi que son asymptote (D) et sa tangente (T) au point d'abscisse 0.

On sait que le point J (0 ; 1) est le centre de symétrie de la courbe (C), que l'asymptote (D) passe par les points K (– 1 ; 0) et J, que la tangente (T) a pour équation $y = (1 - e)x + 1$.

Partie A

1. Déterminer une équation de (D).

2. On suppose qu'il existe deux réels m et p et une fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout réel x ,

$$f(x) = mx + p + \varphi(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = 0.$$

a) Déterminer m et p .

b) Montrer que, pour tout réel x , on a $f(x) + f(-x) = 2$.

c) En déduire que la fonction φ est impaire puis que la fonction f' , dérivée de f , est paire.

3. On suppose maintenant que, pour tout réel x ,

$$\varphi(x) = (ax + b)e^{-x^2} \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont des réels.}$$

Montrer, en utilisant les données et les résultats précédents, que $a = -e$ et $b = 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 1 + x - xe^{-x^2+1}$ et on suppose que la courbe (C) représente la fonction f dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. a) Montrer que, pour tout réel x , la dérivée f' de f vérifie :

$$f'(x) = 1 + (2x^2 - 1)e^{-x^2+1}.$$

Calculer $f'(0)$.

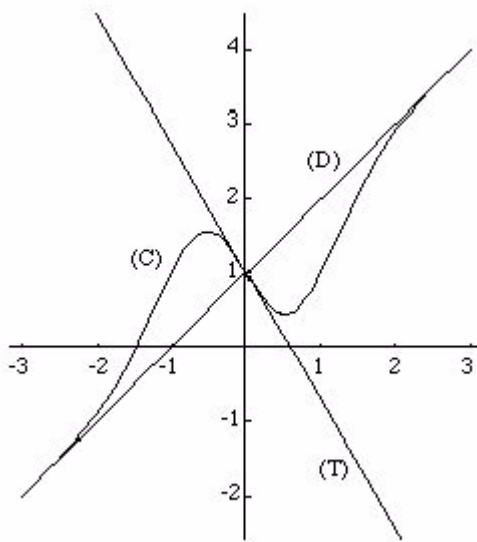
b) Vérifier que (T) est bien la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

Étudier la position relative de la courbe (C) et de sa tangente (T).

2. Le graphique suggère l'existence d'un minimum relatif de f sur $[0; 1]$.

<i>L.S.El Rjadh</i>	<u>Exponentielles</u>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		Enoncés

- a) Montrer que $f''(x)$ est du signe de $6x - 4x^3$.
- b) Montrer que l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique α sur $[0 ; 1]$.
- c) Montrer que $0,51 < \alpha < 0,52$.
- d) Exprimer $f(\alpha)$ sous la forme d'un quotient de deux polynômes en α .



Exercice 3 :

Partie A

f définie sur $]0 ; +\infty[$ par $f(x) = x + \frac{2 \ln x}{x}$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 1 cm).

1. Étude de la fonction auxiliaire g définie sur $]0 ; +\infty[$ par

$$g(x) = x^2 + 2 - 2 \ln x.$$

a) Étudier le sens de variation de g et calculer $g(1)$.

b) En déduire le signe de $g(x)$ pour tout x de $]0 ; +\infty[$.

<i>L.S.El Riadh</i>	<u>Exponentielles</u>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		Enoncés

2. a) Calculer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

b) Étudier les variations de f et dresser son tableau de variations.

c) Montrer que la droite Δ d'équation $y = x$ est asymptote à (C) et étudier la position de (C) par rapport à Δ .

d) Déterminer les coordonnées du point A de (C) sachant que (C) admet en A une tangente T parallèle à Δ .

e) Tracer (C), Δ et T dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

3. Calculer, en cm^2 , l'aire du domaine plan limité par Δ , la courbe (C) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

4. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique x_0 . Prouver que $\frac{1}{2} \leq x_0 \leq 1$.

Partie B

On désigne par h la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$.

1. Montrer que x_0 est l'unique solution de l'équation $h(x) = x$.

2. On note I l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

Montrer que, pour tout x appartenant à I , $h(x)$ appartient aussi à I .

3. a) Calculer la dérivée h' de h et la dérivée seconde h'' de h .

b) Étudier les variations de h' sur I .

c) En déduire que, pour tout x de I , on a $|h'(x)| \leq e^{-\frac{1}{2}}$.

4. On considère la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = h(u_n)$ pour tout entier naturel n de $\mathbb{N}$.

a) Montrer par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}$: $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$.

b) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$|u_{n+1} - x_0| \leq e^{-\frac{1}{2}} |u_n - x_0|.$$

<i>L.S.El Riadh</i>	<u>Exponentielles</u>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		Enoncés

c) En déduire que, pour tout n de $\mathbb{N}$: $|u_n - x_0| \leq \frac{1}{2}e^{\frac{-n}{2}}$.

5. a) Déterminer le plus petit entier naturel n_0 tel que, pour tout entier n supérieur ou égal à n_0 , on ait : $\frac{1}{2}e^{\frac{-n}{2}} < 10^{-2}$.

b) Montrer que : $|u_{n_0} - x_0| < 10^{-2}$.

Que représente u_{n_0} relativement à x_0 ? Calculer u_{n_0} à 10^{-2} près par défaut.

Exercice 4 :

Partie A

Soit la fonction φ définie dans $\mathbf{R}$ par $\varphi(x) = e^x + x + 1$.

1. Étudier le sens de variation de φ et ses limites en $+\infty$ et $-\infty$.
2. Montrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ a une solution et une seule α et que l'on a : $-1,28 < \alpha < -1,27$.
3. En déduire le signe de $\varphi(x)$ sur $\mathbf{R}$.

Partie B

Soit la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par : $f(x) = \frac{xe^x}{e^x + 1}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ du plan (unité graphique : 4 cm).

1. Montrer que $f'(x) = \frac{e^x \varphi(x)}{(e^x + 1)^2}$. En déduire le sens de variation de f .
2. Montrer que $f(\alpha) = \alpha + 1$ et en déduire un encadrement de $f(\alpha)$.
3. Soit T la tangente à (C) au point d'abscisse 0. Donner une équation de T et étudier la position de (C) par rapport à T.
4. Chercher les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
Démontrer que la droite D d'équation $y = x$ est asymptote à (C) et étudier la position de (C) par rapport à D.
5. Faire le tableau de variation de f .
6. Tracer sur un même dessin (C), T et D. La figure demandée fera apparaître les points de (C) dont les abscisses appartiennent à $[-2 ; 4]$.

Partie C

On considère la fonction g , définie sur $[0 ; 1]$ par : $g(x) = \ln(1 + e^x)$. On note (L) la courbe représentative de g dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$, I le point défini par $\vec{OI} = \vec{i}$, A le point d'abscisse 0 de (L) et B son point d'abscisse 1.

1. Étudier brièvement les variations de g .
2. Donner une équation de la tangente en A à (L).

<i>L.S.El Rjadh</i>	<u>Exponentielles</u>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		Enoncés

3. On note P l'intersection de cette tangente avec le segment [IB]. Calculer les aires des trapèzes OIPA et OIBA.

4. On admet que la courbe (L) est située entre les segments [AP] et [AB]. Montrer alors que :

$$\ln 2 + \frac{1}{4} \leq \int_0^1 g(x) dx \leq \ln \sqrt{2(1+e)}.$$

5. Au moyen d'une intégration par parties, justifier que :

$$\int_0^1 f(x) dx = \ln(1+e) - \int_0^1 g(x) dx.$$

6. En déduire un encadrement de $\int_0^1 f(x) dx$.

Exercice 5 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}$.

On note Γ sa représentation graphique dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$; unité graphique 2 cm.

Partie A

1. a) Montrer que, pour tout réel x , $f(-x) + f(x) = 2$.

En déduire que Γ possède un centre de symétrie, qu'on désignera par A et dont on précisera les coordonnées.

b) Déterminer la limite de f en $-\infty$.

Déterminer la limite de f en $+\infty$.

En déduire que Γ possède deux asymptotes dont on précisera les équations.

c) Calculer $f'(x)$ et en déduire le sens de variation de la fonction f .

2. a) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe Γ au point d'abscisse 0.

b) On considère la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = f(x) - (x+1)$.

Montrer que, pour tout réel x , $\varphi'(x) = -\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2$.

En déduire le sens de variation de la fonction φ puis son signe (on précisera $\varphi(0)$).

c) Déduire de ce qui précède la position de la courbe Γ par rapport à la droite T.

<i>L.S.El Rjadh</i>	<u>Exponentielles</u>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		Enoncés

3. Tracer dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ la droite T ainsi que la courbe Γ et ses asymptotes.

Partie B

1. a) Montrer que $f(x) = x$ si et seulement si $\varphi(x) = -1$.

b) En déduire, en utilisant les résultats de **A. 2.**, que la droite D d'équation $y = x$ coupe la courbe Γ en un seul point dont l'abscisse α est comprise entre 2 et 3.

2. a) Montrer que, pour tout réel x , $f(x) = \frac{4e^x}{e^x + 1} - 1$.

En déduire une primitive F de f sur $\mathbf{R}$.

b) Exprimer, en fonction de α , l'aire du domaine limité par la courbe Γ , la droite D et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \alpha$.

Partie C

Dans cette partie, on désigne par I l'intervalle $[2; 3]$.

1. a) Montrer que, pour tout réel x , $f'(x) = 4 \left(\frac{1}{e^x + 1} - \frac{1}{(e^x + 1)^2} \right)$.

b) En déduire que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle I,

$$|f'(x)| \leq \frac{1}{2}.$$

c) En déduire que, pour tout réel x appartenant à l'intervalle I,

$$|f(x) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2} |x - \alpha|.$$

2. On définit la suite (u_n) d'éléments de l'intervalle I par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour } n \in \mathbf{N} \end{cases}$$

a) Montrer que, pour tout entier naturel n , $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} |3 - \alpha|$.

b) Déterminer un entier naturel p tel que u_p soit une valeur approchée de α à 10^{-3} près.

Donner la valeur approchée de u_p proposée par la calculatrice.

<i>L.S.El Rjadh</i>	<u>Exponentielles</u>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		Solutions

Exercice 1 :

Partie I

1. g est définie pour tout $x \in [0 ; +\infty[$ par $g(x) = e^x - x - 1$.

a) Pour tout $x \geq 0$, $g'(x) = e^x - 1$ et

$$g'(x) > 0 \text{ équivaut à } e^x > 1$$

$$e^x > e^0$$

$$x > 0.$$

car la fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$$g'(x) > 0 \text{ pour tout } x > 0 \text{ et } g'(0) = 0.$$

Il s'ensuit que la fonction g est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

b) Nous avons $g(0) = e^0 - 1$

$$g(0) = 0.$$

g étant strictement croissante sur $[0, +\infty[$, nous pouvons affirmer que pour tout $x > 0$

$$g(x) > g(0)$$

$$g(x) > 0.$$

$$g(x) > 0 \text{ pour tout } x > 0.$$

2. h est définie pour tout $x \geq 0$ par $h(x) = (2 - x)e^x - 1$.

a) Pour tout $x \geq 0$, $h'(x) = -e^x + (2 - x)e^x$

$$h'(x) = (1 - x)e^x.$$

Le signe de $h'(x)$ dépend uniquement du signe de $(1 - x)$ car $e^x > 0$ pour tout réel x .

Par conséquent,

$$h'(x) > 0 \text{ pour tout } x \in [0 ; 1[$$

$$h'(1) = 0$$

<i>L.S.El Rjadh</i>	<u>Exponentielles</u>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		Solutions

$h'(x) < 0$ pour tout $x \in]1; +\infty[$.

h est strictement croissante sur $[0; 1]$ et strictement décroissante sur $[1; +\infty[$.

De plus, $h(0) = 1$, $h(1) = e - 1$,

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = -\infty$ puisque $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \end{cases}$

Tableau des variations de h

x	0	1	$+\infty$
Signe de $h'(x)$	+	0	-
Variations de h	1	$e - 1$	$-\infty$

b) h est strictement croissante sur $[0; 1]$ et $h(0) = 1$, donc, pour tout $x \in [0; 1]$, $h(x) \geq 1$ et l'équation $h(x) = 0$ n'admet aucune solution sur $[0; 1]$.

h est continue (car h est dérivable) et strictement décroissante sur $[1; +\infty[$:

h réalise une bijection de $[1; +\infty[$ sur $]-\infty; e - 1]$ et $0 \in]-\infty; e - 1]$.

L'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]1; +\infty[$.

c) $h(1,84) = 0,007$ et $h(1,85) = -0,046$ à 10^{-3} près.

Donc $1,84 < \alpha < 1,85$.

d) Nous avons montré à la question précédente que pour tout $x \in [0; 1]$, on a $h(x) \geq 1$.

h est donc positive sur $[0; 1]$.

Sur l'intervalle $[1; +\infty[$, h est strictement décroissante et $h(\alpha) = 0$.

Il s'ensuit que

pour tout $x \in [1; \alpha[$, $h(x) > 0$,
pour tout $x \in]\alpha; +\infty[$, $h(x) < 0$.

Partie II

2010-2011

<i>L.S.El Rjadh</i>	<u><i>Exponentielles</i></u>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		<i>Solutions</i>

1. f est définie pour tout $x \geq 0$ par $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$.

a) f est définie sur $[0 ; +\infty[$ si et seulement si, pour tout $x \geq 0$, on a $e^x - x \neq 0$.

Or, pour tout $x \geq 0$, $e^x - x = g(x) + 1$, et nous avons montré à la question 1.1. que

$g(x) > 0$ pour tout $x \in [0 ; +\infty[$.

Il s'ensuit que, pour tout $x \in [0 ; +\infty[$, $e^x - x > 1$.

f est définie sur $[0; +\infty[$.

b) Pour tout $x \geq 0$, $f(x) = \frac{e^{-x}(e^x - 1)}{e^{-x}(e^x - x)}$. $f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{1 - xe^{-x}}$

De plus, $\lim_{x \rightarrow \infty} (-xe^{-x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(-\frac{x}{e^x}\right)$

et $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{e^x}\right) = 0$ (croissances comparées)

donc $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - xe^{-x}) = 1$.

Puisque $\lim_{x \rightarrow \infty} (e^{-x}) = 0$, nous avons $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - e^{-x}) = 1$

Par conséquent, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$.

La droite Δ d'équation $y = 1$ est asymptote à C au voisinage de $+\infty$.

c) Pour tout $x \geq 0$, $f'(x) = \frac{e^x(e^x - x) - (e^x - 1)^2}{(e^x - x)^2}$

$$f'(x) = \frac{e^{2x} - xe^x - e^{2x} - 1 + 2e^x}{(e^x - x)^2}$$

<i>L.S.El Rjadh</i>	<u><i>Exponentielles</i></u>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		<i>Solutions</i>

$$f'(x) = \frac{(2-x)e^x - 1}{(e^x - x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{h(x)}{(e^x - x)^2}$$

d) Le signe de $f'(x)$ dépend uniquement du signe de $h(x)$ car $(e^x - x)^2 > 0$ pour tout réel $x \geq 0$.

En utilisant le résultat de la question I.2. d), nous pouvons affirmer que :

$f'(x) > 0$ pour tout $x \in [0 ; \alpha]$

$f'(\alpha) = 0$

$f'(x) < 0$ pour tout $x \in [\alpha ; +\infty[$.

f est strictement croissante sur $[0; \alpha]$
et strictement décroissante sur $[\alpha; +\infty[$.

Remarque : on peut exprimer $f(\alpha)$ sous la forme d'une fraction rationnelle.

En effet, nous savons que α est l'unique solution sur $[0 ; +\infty[$ de l'équation $h(x) = 0$ et :

$h(\alpha) = 0$ équivaut à $(2 - \alpha)e^\alpha - 1 = 0$

$$e^\alpha = \frac{1}{2 - \alpha}$$

Par suite, $f(\alpha) = \frac{e^\alpha - 1}{e^\alpha - \alpha}$

$$f(\alpha) = \frac{\frac{1}{2-\alpha} - 1}{\frac{1}{2-\alpha} - \alpha}$$

$$f(\alpha) = \frac{\frac{1-2+\alpha}{2-\alpha}}{\frac{1-2\alpha+\alpha^2}{2-\alpha}}$$

$$f(\alpha) = \frac{\alpha-1}{(\alpha-1)^2}$$

$$f(\alpha) = \frac{1}{\alpha-1}$$

Tableau de variation de f

<i>L.S.El Rjadh</i>	<u>Exponentielles</u>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		Solutions

x	0	α	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	+	0	-
Variations de f	0	$\frac{1}{\alpha-1}$	1

2. a) Pour tout $x \geq 0$,

$$f(x) - x = \frac{e^x - 1}{e^x - x} - x$$

$$f(x) - x = \frac{e^x - 1 - xe^x + x^2}{e^x - x}$$

$$f(x) - x = \frac{(e^x - x - 1) - x(e^x - x - 1)}{e^x - x}$$

$$f(x) - x = \frac{(e^x - x - 1)(1 - x)}{e^x - x}$$

$$f(x) - x = \frac{(1-x)g(x)}{e^x - x}$$

b) Soit D la droite d'équation $y = x$.

Puisque, pour tout $x \geq 0$, on a $g(x) > 0$ (voir résultat de la question I. 1.) et $e^x - x > 0$ (voir question II.1.), nous pouvons en déduire que le signe de $f(x) - x$ dépend uniquement du signe de $(1-x)$.

Par conséquent,

$f(x) \geq x$ pour tout $x \in [0 ; 1]$ et $f(x) \leq x$ pour tout $x \in [1 ; +\infty[$.

C est au - dessus de D sur $[0;1]$ et au - dessous de D sur $[1;+\infty[$.

3. a) Une équation de la tangente à C au point d'abscisse 0 est $y = f'(0)x + f(0)$.

Or $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$.

Il s'ensuit que

<i>L.S.El Rjadh</i>	<u>Exponentielles</u>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		Solutions

D est la tangente à C au point d'abscisse 0.

b) Voir représentation graphique.

Exercice 2

Partie A

1. Soit m et p deux réels tels que $y = mx + p$ représente une équation de (D).

Nous savons que (D) passe par J(0 ; 1) et par K(-1 ; 0), donc m et p

vérifient le système d'équations $\begin{cases} p = 1 \\ -m + p = 0. \end{cases}$

Par conséquent, nous avons $m = 1$ et $p = 1$.

Une équation de (D) est $y = x + 1$.

2. On suppose qu'il existe deux réels m et p et une fonction φ définie sur $\mathbf{R}$ telle que, pour tout réel x ,

$$f(x) = mx + p + \varphi(x)$$

avec $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = 0$.

a) Nous savons que (D) est asymptote à (C) au voisinage de l'infini, donc

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (x + 1)) = 0.$$

Nous pouvons aussi écrire que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) - (x + 1) = \varphi(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = 0$.

Par conséquent, pour tout réel x ,

$$f(x) = x + 1 + \varphi(x) \quad \text{avec} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = 0.$$

b) Nous savons que (C) admet le point J (0 ; 1) pour centre de symétrie. Cette propriété se traduit algébriquement par :

pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(2 \times 0 - x) + f(x) = 2 \times 1$.

$$f(-x) + f(x) = 2 \quad \text{pour tout réel } x.$$

<i>L.S.El Rjadh</i>	<u>Exponentielles</u>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		Solutions

c) Puisque l'on a, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = x + 1 + \varphi(x)$

et $f(-x) + f(x) = 2$, nous pouvons en déduire que :

pour tout $x \in \mathbf{R}$, $-x + 1 + \varphi(-x) + x + 1 + \varphi(x) = 2$

$$\varphi(-x) + \varphi(x) = 0$$

$$\varphi(-x) = -\varphi(x).$$

φ est impaire sur $\mathbf{R}$.

Nous avons démontré que, pour tout réel x , $f(-x) + f(x) = 2$.

La fonction dérivée de $x \mapsto f(-x) + f(x)$ est $x \mapsto -f'(-x) + f'(x)$.

La fonction $x \mapsto 2$ admet la fonction nulle pour dérivée.

Il s'ensuit que, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $-f'(-x) + f'(x) = 0$,

soit $f'(-x) = f'(x)$.

f' est paire sur $\mathbf{R}$.

3. On suppose que, pour tout réel x , $\varphi(x) = (ax + b) e^{-x^2}$.

Nous avons montré à la question précédente que φ est impaire, donc on a :

Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\varphi(-x) + \varphi(x) = 0$

$$(-ax + b) e^{-(-x)^2} + (ax + b) e^{-x^2} = 0$$

$$2b e^{-x^2} = 0.$$

Il s'ensuit que $b = 0$ car e^{-x} n'est jamais nul.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = x + 1 + ax e^{-x^2}$ et

$$f'(x) = 1 + a e^{-x^2} - 2ax^2 e^{-x^2}.$$

Une équation de (T), tangente à (C) au point d'abscisse 0 est $y = (1 - e)x + 1$.

<i>L.S.El Rjadh</i>	<u>Exponentielles</u>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		Solutions

Son coefficient directeur est $f'(0) = 1 - e$
et $f'(0) = 1 + ae^0 - 2 \times 0$, soit $f'(0) = 1 + a$.

Par conséquent, $1 + a = 1 - e$ et $a = -e$.

Nous pouvons en déduire que, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\varphi(x) = -ex e^{-x^2} \text{ ou } \varphi(x) = -x e^{-x^2+1} \text{ et } f(x) = x + 1 - x e^{-x^2+1}.$$

Partie B

f est définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = x + 1 - x e^{-x^2+1}$.

Remarquons qu'on retrouve là le résultat établi à la dernière question de la partie précédente.

1. a) Pour tout $x \in \mathbf{R}$, nous avons :

$$f'(x) = 1 - e^{-x^2+1} + 2x^2 e^{-x^2+1}$$

$$f'(x) = 1 + (2x^2 - 1)e^{-x^2+1}$$

Il s'ensuit que $f'(0) = 1 - e^{0+1}$, soit $f'(0) = 1 - e$.

b) $f(0) = 1$ et une équation de la tangente à (C) au point d'abscisse 0 est $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$
ou $y = (1 - e)x + 1$.

(T) est la tangente à (C) au point d'abscisse 0.

Pour tout réel x , $f(x) - (1 - e)x - 1 = 1 + x - x e^{-x^2+1} - x + ex - 1$

$$f(x) - (1 - e)x - 1 = -ex e^{-x^2} + ex$$

$$f(x) - (1 - e)x - 1 = ex(1 - e^{-x^2}).$$

$ex > 0$ lorsque $x > 0$ et

$$1 - e^{-x^2} > 0 \text{ équivaut à } e^{-x^2} < 1$$

<i>L.S.El Rjadh</i>	<u>Exponentielles</u>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		Solutions

$-x^2 < 0$, ce qui est toujours vérifié.

Par conséquent, $f(x) - (1 - e)x - 1$ a le même signe que x , donc :

(C) est en dessous de (T) sur $] -\infty ; 0]$ et au -dessus de (T) sur $[0 ; +\infty[$.

2. a) Nous avons, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) = 1 + (2x^2 - 1) e^{-x^2+1}$

Par conséquent, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$f''(x) = 4x e^{-x^2+1} - 2x(2x^2 - 1) e^{-x^2+1}$$

$$f''(x) = (-4x^3 + 6x) e^{-x^2+1}$$

et $e^{-x^2+1} > 0$ pour tout réel x .

$f''(x)$ est du signe de $(6x - 4x^3)$.

b) Nous avons, pour tout $x \in [0 ; 1]$, $6x - 4x^3 = 2x(3 - 2x^2)$.

$2x \geq 0$ pour tout $x \in [0 ; 1]$ et $3 - 2x^2 > 0$ équivaut à $x^2 < \frac{3}{2}$.

Cette dernière inégalité est toujours vérifiée puisque $x \in [0 ; 1]$.

$f''(0) = 0$ et $f''(x) > 0$ si $x \in]0 ; 1]$ alors f' est strictement croissante sur $[0 ; 1]$.

Nous avons $f'(0) = 1 - e$ donc $f'(0) < 0$ et $f'(1) = 2$.

f' étant dérivable et strictement croissante sur $[0 ; 1]$, elle réalise une bijection de $[0 ; 1]$ sur $[1 - e ; 2]$

et $0 \in [1 - e ; 2]$.

L'équation $f'(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0 ; 1]$.

c) $f'(0,51) = -0,0055$ et $f'(0,52) = 0,0475$ à 10^{-4} près,
donc $f(0,51) < f(\alpha) < f(0,52)$

<i>L.S.El Rjadh</i>	<u>Exponentielles</u>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		Solutions

$$0,51 < \alpha < 0,52$$

d) Puisque $f'(\alpha) = 0$ alors $1 + (2\alpha^2 - 1)e^{-\alpha^2+1} = 0$ et

$$e^{-\alpha^2+1} = \frac{1}{1-2\alpha^2}$$

Ainsi, $f(\alpha) = 1 + \alpha - \alpha e^{-\alpha^2+1}$

$$f(\alpha) = 1 + \alpha - \frac{\alpha}{1-2\alpha^2}$$

$$f(\alpha) = \frac{(1+\alpha)(1-2\alpha^2) - \alpha}{1-2\alpha^2}$$

$$f(\alpha) = \frac{1-2\alpha^2 + \alpha - 2\alpha^3 - \alpha}{1-2\alpha^2}$$

$$f(\alpha) = \frac{2\alpha^3 + 2\alpha^2 - 1}{2\alpha^2 - 1}$$

Exercice 3 :

Partie A

Soit $f :]0 ; +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$

$$x \mapsto f(x) = x + \frac{2\ln x}{2}$$

1. Soit $g :]0 ; +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$

$$x \mapsto g(x) = x^2 + 2 - 2\ln x.$$

a) g est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ comme somme de deux fonctions dérivables sur $]0 ; +\infty[$,

$$x \mapsto x^2 + 2 \text{ et } x \mapsto 2 \ln x.$$

Pour tout $x > 0$, $g'(x) = 2x - \frac{2}{x}$

$$g'(x) = \frac{2x^2 - 2}{x}$$

<i>L.S.El Rjadh</i>	<u>Exponentielles</u>	<i>Mr Zribi</i>
4^{ème} Maths		Solutions

$$g'(x) = \frac{2(x-1)(x+1)}{x}.$$

Sur $]0; +\infty[$, $\frac{x+1}{x} > 0$ donc $g'(x)$ est du signe de $x-1$.

Tableau des variations de g

x	0	1	$+\infty$	
Signe de $g'(x)$		-	0	+
Variation de g			↘	↗

b) g est strictement décroissante sur $]0; 1]$ et strictement croissante sur $[1; +\infty[$ avec $g(1) = 3$ donc :

Pour tout $x > 0$, $g(x) > 0$.

2. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

Pour tout $x > 0$, $f(x) = x + \frac{2}{x} \ln x$.

Or $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{2}{x} = +\infty$ et $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$ donc $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty$

b) $x \mapsto x$, $x \mapsto \frac{2}{x}$, $x \mapsto \ln x$ sont dérivables sur $]0; +\infty[$ donc f est dérivable sur $]0; +\infty[$.

Pour tout $x > 0$, $f'(x) = 1 - \frac{2}{x^2} \ln x + \frac{2}{x} \times \frac{1}{x}$

$$f'(x) = 1 - \frac{2}{x^2} \ln x + \frac{2}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{x^2 + 2 - 2 \ln x}{x^2}$$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$.

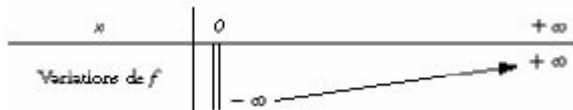
Il s'ensuit que, pour tout $x > 0$, $f'(x) > 0$.

f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

2010-2011

<i>L.S.El Rjadh</i>	<u><i>Exponentielles</i></u>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		<i>Solutions</i>

Tableau des variations de f



c) Pour tout $x > 0$, $f(x) - x = \frac{2 \ln x}{x}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x}{x} = 0.$$

La droite d'équation $y = x$ est asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$

(ce qui n'est pas le cas en zéro puisque nous avons déjà la droite d'équation $x = 0$ pour asymptote).

Le signe de $f(x) - x$ est celui de $\ln x$ sur $]0 ; +\infty[$, d'où :

$f(x) - x > 0$ pour $x > 1$

$f(x) - x < 0$ pour $0 < x < 1$.

(C) est au - dessus de (Δ) sur $]1 ; +\infty[$ et (C) est au - dessous de (Δ) sur $]0 ; 1[$.

d) Pour que (T) soit parallèle à (Δ), il faut et il suffit que le coefficient directeur de (T) soit égal à 1.

Nous devons donc résoudre, en appelant x_0 l'abscisse de A,

$$\begin{cases} f'(x_0) = 1 \\ x_0 > 0 \\ \frac{x_0^2 + 2 - 2 \ln x_0}{x_0^2} = 1 \\ x_0 > 0 \end{cases}$$

<i>L.S.El Rjadh</i>	<u>Exponentielles</u>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		Solutions

Ce qui équivaut à $\begin{cases} x_0^2 + 2 - 2 \ln x_0 = x_0^2 \\ x_0 > 0 \end{cases} \quad (*)$

(*) équivaut à $\begin{cases} \ln x_0 = 1 \\ x_0 > 0 \end{cases}$

L'abscisse de A est $x_0 = e$, son ordonnée est $f(e) = e + \frac{2}{e}$.

Le point A a pour coordonnées $\left(e; e + \frac{2}{e}\right)$.

e) **Courbes représentatives** (voir figure ci-dessous.)

3. Sur $[1; e]$, nous savons que (C) est au-dessus de (Δ).

D'où : $A = \int_1^e (f(x) - x) dx \text{ cm}^2$

$$\int_1^e (f(x) - x) dx = \int_1^e \frac{2}{x} \ln x dx$$

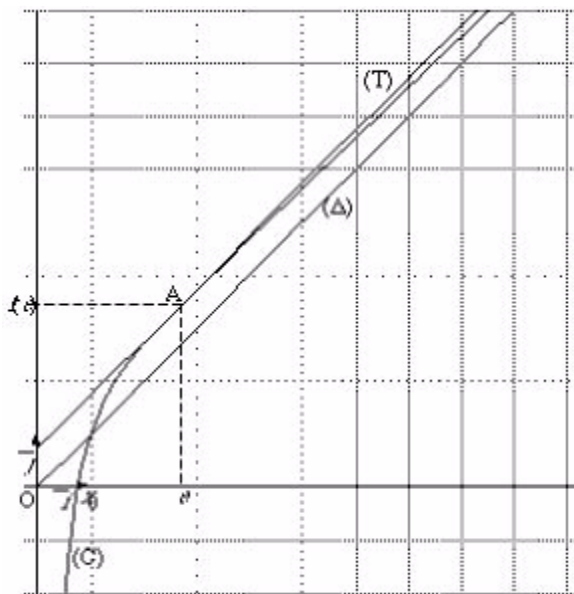
$x \mapsto \frac{2}{x} \ln x$ se présente sous la forme $2u' u$.

Une primitive de $x \mapsto \frac{2}{x} \ln x$ est $x \mapsto (\ln x)^2$.

$$\int_1^e (f(x) - x) dx = \left[(\ln x)^2 \right]_1^e \quad \int_1^e (f(x) - x) dx = (\ln e)^2 - (\ln 1)^2$$

$$\int_1^e (f(x) - x) dx = 1 \text{ d'où } \boxed{A = 1 \text{ cm}^2}.$$

<i>L.S.El Rjadh</i>	<u>Exponentielles</u>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		Solutions



4. f est continue et strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$. Sa restriction à l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ est aussi continue et strictement croissante.

De plus : $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + 4\ln\frac{1}{2} = \frac{1}{2} - 4\ln 2$ soit $f\left(\frac{1}{2}\right) < 0$.

$f(1) = 1$ soit $f(1) > 0$. Donc f réalise une bijection de $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$ sur $\left[\frac{1}{2} - 4\ln 2; 1\right]$ et $0 \in \left[\frac{1}{2} - 4\ln 2; 1\right]$.

Il s'ensuit que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique x_0 appartenant à l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

Partie B

Soit $h :]0 ; +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto h(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

1. Pour tout $x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$, $h(x) = x$ équivaut à :

<i>L.S.El Rjadh</i>	<u><i>Exponentielles</i></u>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		<i>Solutions</i>

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = x$$

$$-\frac{x^2}{2} = \ln x$$

$$-x^2 = 2 \ln x$$

$$-x = 2 \frac{\ln x}{x}$$

$$0 = x + 2 \frac{\ln x}{x}$$

$$0 = f(x).$$

x_0 est l'unique solution de l'équation $h(x) = x$ sur $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

2. Soit $I = \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

Pour tout $x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$, $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$

$$\frac{1}{4} \leq x^2 \leq 1$$

$$-\frac{1}{2} \leq -\frac{x^2}{2} \leq -\frac{1}{8}$$

$$e^{-\frac{1}{2}} \leq e^{-\frac{x^2}{2}} \leq e^{-\frac{1}{8}}$$

(car $x \mapsto e^x$ strictement croissante sur $\mathbf{R}$).

Or $e^{-\frac{1}{2}} \approx 0,6$ donc $e^{-\frac{1}{2}} \geq \frac{1}{2}$

$e^{-\frac{1}{8}} \approx 0,88$ donc $e^{-\frac{1}{8}} \leq 1$.

D'où : $\frac{1}{2} \leq e^{-\frac{1}{2}} \leq h(x) \leq e^{-\frac{1}{8}} \leq 1$.

Pour tout $x \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$, $h(x) \in \left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

<i>L.S.El Rjadh</i>	<u>Exponentielles</u>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		Solutions

3. a) h est dérivable sur $\mathbf{R}$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathbf{R}$,

donc sa restriction à $]0 ; +\infty[$ est dérivable sur cet intervalle.

Pour tout $x > 0$,

$$h'(x) = -xe^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$h''(x) = \left(-e^{-\frac{x^2}{2}}\right) + (-x)\left(-xe^{-\frac{x^2}{2}}\right)$$

$$h''(x) = -e^{-\frac{x^2}{2}} + x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$h''(x) = (x^2 - 1)e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$h''(x) = (x-1)(x+1)e^{-\frac{x^2}{2}} \text{ avec } (x+1)e^{-\frac{x^2}{2}} > 0 \text{ sur } I.$$

b) $h''(x)$ est du signe de $x-1$ sur $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

Tableau des variations de h'

x	$\frac{1}{2}$	1
Signe de $h''(x)$		-
Variations de h'		

c) h' est strictement décroissante sur I et $h'(x) \in \left[h'(1); h'\left(\frac{1}{2}\right)\right]$

Pour tout $x \in I$, $-e^{-\frac{1}{2}} \leq h'(x) \leq -\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{8}}$

$$|h'(x)| \leq e^{-\frac{1}{2}}$$

4. Soit la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = h(u_n)$.

<i>L.S.El Rjadh</i>	<u>Exponentielles</u>	<i>Mr Zribi</i>
4^{ème} Maths		Solutions

a) $u_0 = 1$ et $\frac{1}{2} \leq u_0 \leq 1$.

Supposons $\frac{1}{2} \leq u_k \leq 1$ et démontrons alors que $\frac{1}{2} \leq u_{k+1} \leq 1$ pour $k \geq 0$.

Or h' est négative sur I donc h décroissante sur I .

Donc : $\frac{1}{2} \leq u_k \leq 1$.

$$h(1) \leq h(u_k) \leq h\left(\frac{1}{2}\right) \text{ avec } h(1) = e^{-\frac{1}{2}} \text{ et } h\left(\frac{1}{2}\right) = e^{-\frac{1}{8}}$$

$$e^{-\frac{1}{2}} \leq u_{k+1} \leq e^{-\frac{1}{8}}$$

$$e^{-\frac{1}{2}} \approx 0,6 \text{ donc } \frac{1}{2} \leq e^{-\frac{1}{2}} ; e^{-\frac{1}{8}} \approx 0,88 \text{ donc } e^{-\frac{1}{8}} \leq 1.$$

Il s'ensuit que : $\frac{1}{2} \leq u_{k+1} \leq 1$.

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $\frac{1}{2} \leq u_n \leq 1$.
--

Vous pouvez aussi utiliser le fait que, pour tout $x \in I$, $h(x) \in I$.

Or $u_k \in I$ implique $h(u_k) = u_{k+1} \in I$.

b) Pour tout $x \in I$, h est dérivable avec $|h'(x)| \leq e^{-\frac{1}{2}}$

Il s'ensuit que : pour tous a et b éléments de I ,

$$|h(b) - h(a)| \leq e^{-\frac{1}{2}} |b - a| (*)$$

Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \in I$ donc prenons $u_n = b$.

De plus, $x_0 \in I$, prenons alors $a = x_0$.

(*) s'écrit alors :

$$\text{pour tout } n \in \mathbf{N}, |h(u_n) - h(x_0)| \leq e^{-\frac{1}{2}} |u_n - x_0|$$

<i>L.S.El Rjadh</i>	<u>Exponentielles</u>	<i>Mr Zribi</i>
4^{ème} Maths		Solutions

$$|u_{n+1} - x_0| \leq e^{-\frac{1}{2}} |u_n - x_0|$$

c) Pour tout $n \in \mathbf{N}$, $|u_{n+1} - x_0| < e^{-\frac{1}{2}} |u_n - x_0|$.

Nous avons : pour tout $n \in \mathbf{N}$, $u_n \neq x_0$.

$$|u_1 - x_0| \leq e^{-\frac{1}{2}} |u_0 - x_0|$$

$$|u_2 - x_0| \leq e^{-\frac{1}{2}} |u_1 - x_0|$$

Multiplions membre à membre

..... ces n inégalités dans $\mathbf{R}^*$.

$$|u_{n-1} - x_0| \leq e^{-\frac{1}{2}} |u_{n-2} - x_0|$$

$$|u_n - x_0| \leq e^{-\frac{1}{2}} |u_{n-1} - x_0|$$

Après simplification, cela donne :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbf{N}, \quad |u_n - x_0| \leq \left(e^{-\frac{1}{2}}\right)^n |u_0 - x_0|$$

$$|u_n - x_0| < e^{-\frac{n}{2}} |1 - x_0|.$$

$$\text{Or } \frac{1}{2} \leq x_0 < 1$$

$$0 \leq 1 - x_0 \leq \frac{1}{2}.$$

$$\text{D'où : } \boxed{\text{pour tout } n \in \mathbf{N}, |u_n - x_0| \leq \frac{1}{2} e^{-\frac{n}{2}}}.$$

<i>L.S.El Rjadh</i>	<u>Exponentielles</u>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		Solutions

5. a) $\frac{1}{2}e^{-\frac{n}{2}} < 10^{-2}$ équivaut à :

$$\frac{1}{2e^{\frac{n}{2}}} < \frac{1}{100} ; 2e^{\frac{n}{2}} > 100 ; e^{\frac{n}{2}} > 500 ; \frac{n}{2} > \ln 500$$

$$n > 2 \ln 500 \text{ or } 2 \ln 500 \approx 7,8.$$

Le plus petit entier naturel n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $\frac{1}{2}e^{-\frac{n}{2}} < 10^{-2}$ est $n_0 = 8$.

b) D'après 4. b), nous avons :

$$\text{pour tout } n \in \mathbf{N}, |u_n - x_0| \leq \frac{1}{2}e^{-\frac{n}{2}}$$

Donc : $|u_{n_0} - x_0| \leq \frac{1}{2}e^{-\frac{n_0}{2}}$ avec $\frac{1}{2}e^{-\frac{n_0}{2}} < 10^{-2}$ d'après la question précédente.

$$|u_8 - x_0| < 10^{-2}$$

u_8 est une approximation de x_0 à 10^{-2} près.

$$u_8 = 0,75.$$

exercice 4 :

Partie A

φ est définie, pour tout $x \in \mathbf{R}$, par $\varphi(x) = e^x + x + 1$.

1. φ est dérivable sur $\mathbf{R}$ comme somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbf{R}$ ($x \mapsto e^x$ et $x \mapsto x + 1$) et,

$$\text{pour tout } x \in \mathbf{R}, \varphi'(x) = e^x + 1.$$

Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $e^x > 0$, donc, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\varphi'(x) > 0$.

φ est strictement croissante sur $\mathbf{R}$.

<i>L.S.El Rjadh</i>	<u><i>Exponentielles</i></u>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		<i>Solutions</i>

De plus, $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1) = -\infty \end{cases}$

donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = -\infty$

et $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) = +\infty \end{cases}$

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = +\infty$.

2. φ est continue (puisque dérivable) et strictement croissante sur $\mathbf{R}$. φ réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$.

Par conséquent, 0 admet un unique antécédent α par φ .

De plus, $\varphi(-1,28) = -0,002$ à 10^{-3} près

et $\varphi(-1,27) = 0,011$ à 10^{-3} près soit $\varphi(-1,28) < 0 < \varphi(-1,27)$

donc $-1,28 < \alpha < -1,27$.

L'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution α telle que

$$-1,28 < \alpha < -1,27.$$

3. φ étant strictement croissante sur $\mathbf{R}$, et sachant que $\varphi(\alpha) = 0$, nous en déduisons que :

Pour tout $x \in]-\infty; \alpha[$, $\varphi(x) < 0$. $\varphi(\alpha) = 0$. Pour tout $x \in]\alpha; +\infty[$, $\varphi(x) > 0$.

Partie B

f est définie, pour tout $x \in \mathbf{R}$, par $f(x) = \frac{xe^x}{e^x + 1}$.

<i>L.S.El Rjadh</i>	<u>Exponentielles</u>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		Solutions

1. Pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$f'(x) = \frac{(e^x + xe^x)(e^x + 1) - e^x \times xe^x}{(e^x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^x(1+x)(e^x + 1) - e^x \times xe^x}{(e^x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^x[(1+x)(e^x + 1) - xe^x]}{(e^x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^x[e^x + 1 + xe^x + x - xe^x]}{(e^x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x + 1 + x)}{(e^x + 1)^2}$$

soit, pour tout réel x , $f'(x) = \frac{e^x \varphi(x)}{(e^x + 1)^2}$.

Le signe de $f'(x)$ est le signe de $\varphi(x)$ car, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\frac{e^x}{(e^x + 1)^2} > 0$.

Nous en déduisons, en utilisant le résultat de la question **A.3.** que :

Pour tout $x \in]-\infty; \alpha[$, $f'(x) < 0$. $f'(\alpha) = 0$. Pour tout $x \in]\alpha; +\infty[$, $f'(x) > 0$.
--

f est strictement décroissante sur $]-\infty; \alpha]$ et strictement croissante sur $[\alpha; +\infty[$.

2. Nous savons que α est l'unique solution réelle de l'équation $\varphi(x) = 0$, c'est-à-dire que nous avons :

$$\varphi(\alpha) = 0$$

$$e^\alpha + \alpha + 1 = 0$$

$$e^\alpha = -\alpha - 1.$$

<i>L.S.El Rjadh</i>	<u>Exponentielles</u>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		Solutions

D'autre part, $f(\alpha) = \frac{\alpha e^\alpha}{e^\alpha + 1}$

donc $f(\alpha) = \frac{\alpha(-\alpha-1)}{-\alpha-1+1}$

$$f(\alpha) = \frac{\alpha(-\alpha-1)}{-\alpha}$$

$$f(\alpha) = \alpha + 1.$$

Puisque $-1,28 < \alpha < -1,27$, nous obtenons $-0,28 < \alpha + 1 < -0,27$.

$$-0,28 < f(\alpha) < -0,27.$$

Un encadrement de $f(\alpha)$ est $-0,28 < f(\alpha) < -0,27$.

3. Une équation de la tangente T à (C) au point d'abscisse 0 est

$$y = f'(0)x + f(0)$$

avec $f(0) = 0$

et $f'(0) = \frac{e^0(e^0+1)}{(e^0+1)^2}$

$$f'(0) = \frac{2}{4} \quad f'(0) = \frac{1}{2}.$$

Par suite, une équation de T est $y = \frac{1}{2}x$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x) - \frac{1}{2}x = \frac{xe^x}{e^x + 1} - \frac{1}{2}x$$

$$f(x) - \frac{1}{2}x = \frac{2xe^x - x(e^x + 1)}{2(e^x + 1)}$$

$$f(x) - \frac{1}{2}x = \frac{x(2e^x - e^x - 1)}{2(e^x + 1)}$$

<i>L.S.El Rjadh</i>	<u>Exponentielles</u>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		Solutions

$$f(x) - \frac{1}{2}x = \frac{x(e^x - 1)}{2(e^x + 1)}.$$

Le signe de $f(x) - \frac{1}{2}x$ est le signe de $x(e^x - 1)$ car, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $e^x + 1 > 0$.

Or, pour tout $x \geq 0$,

$e^x \geq e^0$ (la fonction exp étant strictement croissante sur $\mathbf{R}$)

$$e^x \geq 1$$

$$e^x - 1 \geq 0.$$

Ainsi, pour tout $x \geq 0$, $x(e^x - 1) \geq 0$.

De plus, pour tout $x \leq 0$,

$$e^x \leq e^0$$

$$e^x \leq 1$$

$$e^x - 1 \leq 0.$$

Par conséquent, pour tout $x \leq 0$, $x(e^x - 1) \geq 0$.

Pour tout réel x , $f(x) - \frac{1}{2}x \geq 0$.

(C) est au-dessus de T sur $\mathbf{R}$.

4. Nous avons $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x + 1} = 1$$

et $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$ (croissances comparées).

Par conséquent, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.

L'axe des abscisses est asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$.

<i>L.S.El Rjadh</i>	<u><i>Exponentielles</i></u>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		<i>Solutions</i>

Pour tout $x \in \mathbf{R}$,
$$f(x) = \frac{xe^x}{e^x \left(1 + \frac{1}{e^x}\right)}$$

$$f(x) = \frac{x}{1 + \frac{1}{e^x}}$$

Or
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

donc
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{e^x}} = 1$$

et
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty.$$

Par conséquent,
$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.}$$

Pour tout $x \in \mathbf{R}$,
$$f(x) - x = \frac{xe^x}{e^x + 1} - x$$

$$f(x) - x = \frac{xe^x - xe^x - x}{e^x + 1}$$

$$f(x) - x = -\frac{x}{e^x + 1}$$

et, pour tout $x \neq 0$,
$$f(x) - x = -\frac{x}{x \left(\frac{e^x}{x} + \frac{1}{x} \right)}$$

$$f(x) - x = -\frac{1}{\frac{e^x}{x} + \frac{1}{x}}.$$

Or
$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty & (\text{croissances comparées}) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{cases}$$

<i>L.S.El Rjadh</i>	<u>Exponentielles</u>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		Solutions

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x} + \frac{1}{x} \right) = +\infty.$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x} + \frac{1}{x}} = 0.$

Il s'ensuit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = 0.$

La droite D d'équation $y = x$ est asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$.

De plus, nous avons montré que, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$f(x) - x = -\frac{x}{e^x + 1}.$$

$f(x) - x$ est du signe de $-x$ puisque, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $e^x + 1 > 0$.

Nous en déduisons que :

Pour tout $x < 0$, $f(x) - x > 0$;
 Pour tout $x > 0$, $f(x) - x < 0$.
 $f(x) - x = 0$ lorsque $x = 0$.

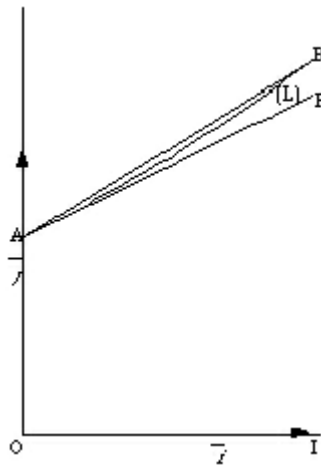
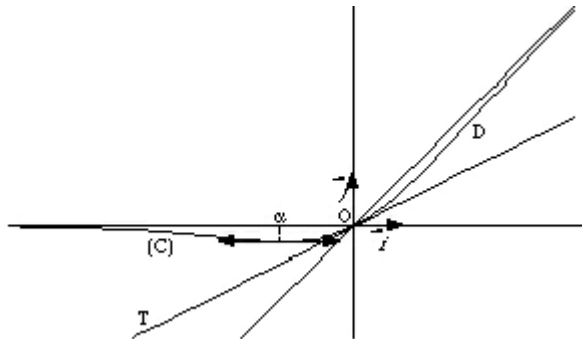
(C) est au-dessus de D sur $] -\infty ; 0[$ et au-dessous de D sur $]0 ; +\infty[$ et D coupe (C) en O.

5. Tableau des variations de f

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	-	0	+
Variations de f			

6. Représentation graphique

<i>L.S.El Rjadh</i>	<u><i>Exponentielles</i></u>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		<i>Solutions</i>



Partie C

g est définie pour tout $x \in [0 ; 1]$ par $g(x) = \ln (1 + e^x)$.

1. Pour tout $x \in [0 ; 1]$, $g'(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$ et, pour tout $x \in [0 ; 1]$, $\frac{e^x}{e^x + 1} > 0$.

Ainsi, pour tout $x \in [0 ; 1]$, $g'(x) > 0$.

g est strictement croissante sur $[0 ; 1]$.

2. Nous avons

$$g(0) = \ln (1 + e^0)$$

<i>L.S.El Rjadh</i>	<u>Exponentielles</u>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		Solutions

$$g(0) = \ln 2$$

et
$$g'(0) = \frac{e^0}{e^0 + 1}$$

$$g'(0) = \frac{1}{2}.$$

Une équation de la tangente en A à (L) est : $y = \frac{1}{2}x + \ln 2$.

3. B est le point de (L) d'abscisse 1 et I, le point de l'axe (O ; $\vec{i}$) d'abscisse 1.

La droite (IB) admet donc pour équation $x = 1$.

Le point P d'intersection de (IB) avec la tangente en A à (L) admet pour abscisse 1 et pour ordonnée $\frac{1}{2} + \ln 2$.

L'aire du trapèze OIPA, exprimée en unités d'aire, est :

$$A_{OIPA} = \frac{(IP + OA) \times OI}{2}$$

$$A_{OIPA} = \frac{\left(\frac{1}{2} + \ln 2 + \ln 2\right) \times 1}{2}$$

$$A_{OIPA} = \frac{1}{4} + \ln 2.$$

Celle du trapèze OIBA (exprimée en unités d'aire) est :

$$A_{OIBA} = \frac{(IB + OA) \times OI}{2}$$

$$A_{OIBA} = \frac{(\ln(1 + e^1) + \ln 2) \times 1}{2}$$

$$A_{OIBA} = \frac{1}{2}[\ln(1 + e) + \ln 2]$$

$$A_{OIBA} = \frac{1}{2}[\ln 2(1 + e)]$$

<i>L.S.El Rjadh</i>	<u>Exponentielles</u>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		Solutions

$$A_{OIBA} = \ln \sqrt{2(1+e)}$$

4. g est strictement croissante sur $[0 ; 1]$ et $g(0) > 0$.

Par conséquent, g est positive sur $[0 ; 1]$, et l'aire du domaine délimité par l'axe des ordonnées (c'est-à-dire la droite (OA)), la droite d'équation $x = 1$ (droite (IP) ou (IB)), et l'axe des abscisses (droite (OI)), exprimée

en unités d'aire, est : $\int_0^1 g(x) dx$.

On admet que (L) est située entre [AP] et [AB].

Par conséquent, $A_{OIPA} \leq \int_0^1 g(x) dx \leq A_{OIBA}$

$$\frac{1}{4} + \ln 2 \leq \int_0^1 g(x) dx \leq \ln \sqrt{2(1+e)}$$

5. Calculons $I = \int_0^1 f(x) dx$, c'est-à-dire $I = \int_0^1 \frac{xe^x}{e^x + 1} dx$ à l'aide d'une intégration par parties, en posant :

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} \end{cases}$$

Dans ce cas, $\begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = \ln(1 + e^x) \end{cases}$.

Les fonctions u , v , u' et v' sont continues sur $[0 ; 1]$, donc

$$I = [u(x)v(x)]_0^1 - \int_0^1 u'(x)v(x) dx$$

$$I = [x \ln(1 + e^x)]_0^1 - \int_0^1 \ln(1 + e^x) dx$$

$$I = \ln(1 + e^1) - 0 - \int_0^1 g(x) dx$$

$$\int_0^1 f(x) dx = \ln(1 + e) - \int_0^1 g(x) dx.$$

<i>L.S.El Rjadh</i>	<u>Exponentielles</u>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		Solutions

6. Nous avons :

$$\ln 2 + \frac{1}{4} \leq \int_0^1 g(x) dx \leq \ln \sqrt{2(1+e)}$$

donc $-\ln \sqrt{2(1+e)} \leq -\int_0^1 g(x) dx \leq -\ln 2 - \frac{1}{4}$

$$\ln(1+e) - \ln \sqrt{2(1+e)} \leq \ln(1+e) - \int_0^1 g(x) dx \leq \ln(1+e) - \ln 2 - \frac{1}{4}$$

$$\ln \frac{1+e}{\sqrt{2(1+e)}} \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \ln \frac{1+e}{2} - \frac{1}{4}$$

$$\ln \sqrt{\frac{1+e}{2}} \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \ln \frac{1+e}{2} - \frac{1}{4}$$

$$\boxed{\frac{1}{2} \ln \frac{1+e}{2} \leq \int_0^1 f(x) dx \leq \ln \frac{1+e}{2} - \frac{1}{4}.}$$

Exercice 5 :

Partie A

f est définie pour tout $x \in \mathbf{R}$ par $f(x) = \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}$.

1. a) Pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$f(-x) + f(x) = \frac{3e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} + \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}$$

$$f(-x) + f(x) = \frac{\frac{3}{e^x} - 1}{\frac{1}{e^x} + 1} + \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}$$

$$f(-x) + f(x) = \frac{\frac{3 - e^x}{e^x}}{\frac{1 + e^x}{e^x}} + \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}$$

$$f(-x) + f(x) = \frac{3 - e^x}{1 + e^x} + \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}$$

$$f(-x) + f(x) = \frac{2(e^x + 1)}{e^x + 1}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x, f(-x) + f(x) = 2.}$$

<i>L.S.El Rjadh</i>	<u><i>Exponentielles</i></u>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		<i>Solutions</i>

Rappelons qu'un point I de coordonnées $(a ; b)$ est centre de symétrie pour la courbe représentative d'une fonction f d'ensemble de définition D_f si et seulement si, pour tout $x \in D_f$, $2a - x \in D_f$ et $f(2a - x) + f(x) = 2b$.

Le point A de coordonnées $(0 ; 1)$ est centre de symétrie pour Γ .

b) Nous avons $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3e^x - 1) = -1$

et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x + 1) = 1$.

Par conséquent, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1$.

La droite d'équation $y = -1$ est asymptote à Γ au voisinage de $-\infty$.

Étudions la limite de f en $+\infty$.

Première méthode

Nous avons montré précédemment que la droite d'équation $y = -1$ est asymptote à Γ au voisinage de $-\infty$.

Le point A de coordonnées $(0 ; 1)$ est centre de symétrie pour Γ , et la droite symétrique de la droite d'équation

$y = -1$ par rapport à A admet pour équation $y = 3$.

La droite d'équation $y = 3$ est donc asymptote à Γ au voisinage de $+\infty$, c'est-à-dire que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3.$$

Deuxième méthode

Nous avons $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3e^x - 1}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3X - 1}{X + 1}$

en posant $X = e^x$, sachant que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

$$\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{3X - 1}{X + 1} = 3.$$

Donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$.

La droite d'équation $y = 3$ est asymptote à Γ au voisinage de $+\infty$.

c) Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) = \frac{3e^x(e^x + 1) - e^x(3e^x - 1)}{(e^x + 1)^2}$

<i>L.S.El Rjadh</i>	<u>Exponentielles</u>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		Solutions

$$f'(x) = \frac{3e^{2x} + 3e^x - 3e^{2x} + e^x}{(e^x + 1)^2}$$

$$\text{Pour tout réel } x, \quad f'(x) = \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2}.$$

Or, pour tout réel x , $4e^x > 0$ et $(e^x + 1)^2 > 0$, donc pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f'(x) > 0$.

f est strictement croissante sur $\mathbf{R}$.

2. a) Une équation de la tangente T à Γ au point d'abscisse 0 est

$$y = f'(0)x + f(0)$$

avec
$$f'(0) = \frac{4e^0}{(e^0 + 1)^2}$$

$$f'(0) = \frac{4}{2^2}$$

$$f'(0) = 1$$

et $f(0) = 1.$

Une équation de la tangente T au point A est $y = x + 1$.

b) φ est la fonction définie, pour tout $x \in \mathbf{R}$, par

$$\varphi(x) = f(x) - (x + 1)$$

$$\varphi(x) = \frac{3e^x - 1}{e^x + 1} - x - 1$$

Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\varphi'(x) = f'(x) - 1$

$$\varphi'(x) = \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2} - 1$$

$$\varphi'(x) = \frac{4e^x - (e^x + 1)^2}{(e^x + 1)^2}$$

$$\varphi'(x) = \frac{4e^x - (e^x)^2 - 2e^x - 1}{(e^x + 1)^2}$$

$$\varphi'(x) = -\frac{(e^x)^2 - 2e^x + 1}{(e^x + 1)^2}$$

$$\text{Pour tout réel } x, \quad \varphi'(x) = -\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2.$$

Pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2 \geq 0$, donc pour tout $x \in \mathbf{R}$, $\varphi'(x) \leq 0$ avec $\varphi'(0) = 0$, et, pour tout $x \neq 0$, $\varphi'(x)$

< 0 .

φ est strictement décroissante sur $\mathbf{R}$.

De plus, $\varphi(0) = f(0) - 1$

$$\varphi(0) = 0.$$

Il s'ensuit que :

2010-2011

<i>L.S.El Rjadh</i>	<u>Exponentielles</u>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		Solutions

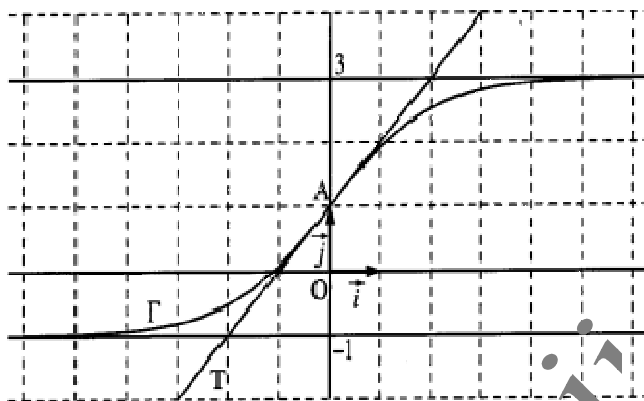
pour tout $x \in]-\infty; 0[$, $\varphi(x) > 0$;
pour tout $x \in]0; +\infty[$, $\varphi(x) < 0$.

c) Du résultat précédent, nous déduisons que :

pour tout $x \in]-\infty; 0[$, $f(x) > x+1$;
pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f(x) < x+1$.

Γ est au-dessus de T sur $] -\infty ; 0]$ et au-dessous de T sur $[0 ; +\infty [$.

3. Représentation graphique



Partie B

a) $f(x) = x$ équivaut à

$$\begin{aligned} f(x) - x &= 0 \\ f(x) - x - 1 &= -1 \\ \varphi(x) &= -1. \end{aligned}$$

b) φ est continue et strictement décroissante sur $\mathbf{R}$, comme nous avons pu le montrer dans la question A.2.

De plus,

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1) = -\infty \end{cases}$$

donc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = +\infty$$

et

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = -\infty.$$

<i>L.S.El Rjadh</i>	<u>Exponentielles</u>	<i>Mr Zribi</i>
4^{ème} Maths		Solutions

φ réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$, et l'équation $\varphi(x) = -1$ admet une unique solution α .

Puisque $\varphi(2) = -0,4$ à $0,1$ près

et que $\varphi(3) = -1,1$ à $0,1$ près, avec $\varphi(3) < -1 < \varphi(2)$,

nous en déduisons que **D d'équation $y = x$ coupe Γ en un unique point dont l'abscisse α vérifie $2 < \alpha < 3$.**

2. a) Pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\frac{4e^x}{e^x + 1} - 1 = \frac{4e^x - (e^x + 1)}{e^x + 1}$$

$$\frac{4e^x}{e^x + 1} - 1 = \frac{4e^x - e^x - 1}{e^x + 1}$$

$$\frac{4e^x}{e^x + 1} - 1 = \frac{3e^x - 1}{e^x + 1}$$

$$\frac{4e^x}{e^x + 1} - 1 = f(x).$$

Pour tout réel x , $f(x) = \frac{4e^x}{e^x + 1} - 1.$

Nous avons, pour tout $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = 4 \frac{u'(x)}{u(x)} - 1$ où $u(x) = e^x + 1$ avec u positive sur $\mathbf{R}$.

Il s'ensuit qu'une primitive F de f sur $\mathbf{R}$ est définie par :

$$F(x) = 4 \ln(e^x + 1) - x.$$

b) Nous avons montré que φ est strictement décroissante sur $\mathbf{R}$.

Ainsi, pour tout $x \in [0 ; \alpha]$, nous avons

$$\varphi(0) \geq \varphi(x) \geq \varphi(\alpha)$$

avec $\varphi(0) = 0$ et $\varphi(\alpha) = -1$.

Par suite, pour tout $x \in [0 ; \alpha]$,

$$0 \geq \varphi(x) \geq -1$$

ou $-1 \leq \varphi(x) \leq 0$

<i>L.S.El Rjadh</i>	<u>Exponentielles</u>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		Solutions

$$-1 \leq f(x) - (x+1) \leq 0$$

$$x \leq f(x) \leq x+1.$$

Il s'ensuit que Γ est au-dessus de D sur l'intervalle $[0 ; \alpha]$.

L'aire A du domaine délimité par Γ , D et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \alpha$, exprimée en unités d'aire, est donnée par :

$$A = \int_0^\alpha [f(x) - x] dx$$

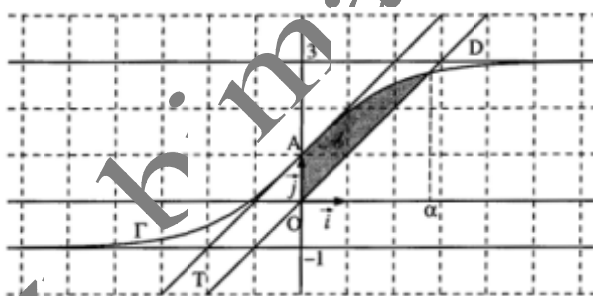
$$A = \left[F(x) - \frac{1}{2} x^2 \right]_0^\alpha$$

$$A = \left[4 \ln(e^x + 1) - x - \frac{1}{2} x^2 \right]_0^\alpha$$

c'est-à-dire $A = 4 \ln(e^\alpha + 1) - \alpha - \frac{1}{2} \alpha^2 - 4 \ln(e^0 + 1)$

$$A = 4 \ln(e^\alpha + 1) - \alpha - \frac{1}{2} \alpha^2 - 4 \ln 2$$

$$A = 4 \ln \left(\frac{e^\alpha + 1}{2} \right) - \alpha - \frac{1}{2} \alpha^2.$$



Partie C

1. Soit I l'intervalle $[2 ; 3]$.

a) Nous avons montré à la question **A.1.** que

pour tout $x \in \mathbf{R}$,
$$f'(x) = \frac{4e^x}{(e^x + 1)^2}.$$

<i>L.S.El Rjadh</i>	<u>Exponentielles</u>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		Solutions

Or, pour tout $x \in \mathbf{R}$,

$$4\left(\frac{1}{e^x+1} - \frac{1}{(e^x+1)^2}\right) = 4\frac{e^x+1-1}{(e^x+1)^2}$$

$$4\left(\frac{1}{e^x+1} - \frac{1}{(e^x+1)^2}\right) = \frac{4e^x}{(e^x+1)^2}.$$

Par conséquent,

Pour tout réel x , $f'(x) = 4\left(\frac{1}{e^x+1} - \frac{1}{(e^x+1)^2}\right)$.

b) Nous avons déjà montré que, pour tout réel x , $f'(x) \geq 0$.

De plus, pour tout réel x , $\frac{1}{e^x+1} - \frac{1}{(e^x+1)^2} \leq \frac{1}{e^x+1}$ puisque, pour tout réel x , $\frac{1}{(e^x+1)^2} > 0$.

Or, pour tout $x \in [2; 3]$,

$$e^2 \leq e^x \leq e^3 \quad (\text{la fonction exp est strictement croissante sur } \mathbf{R})$$

$$0 < e^2 + 1 \leq e^x + 1 \leq e^3 + 1$$

$$\frac{1}{e^3+1} \leq \frac{1}{e^x+1} \leq \frac{1}{e^2+1}.$$

Par conséquent, nous avons pour tout $x \in [2; 3]$,

$$0 < f'(x) \leq \frac{4}{e^2+1}.$$

Comme $\frac{4}{e^2+1} = 0,48$ à 10^{-2} près, c'est-à-dire que $\frac{4}{e^2+1} \leq \frac{1}{2}$,

il s'ensuit que, pour tout $x \in [2; 3]$,

$$0 < f'(x) \leq \frac{1}{2}.$$

Pour tout $x \in [2; 3]$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

c) f est dérivable sur I avec, pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{2}$.

D'après l'inégalité des accroissements finis, nous avons :

<i>L.S.El Rjadh</i>	<u><i>Exponentielles</i></u>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		<i>Solutions</i>

pour tous réels x et x' de I , $|f(x) - f(x')| \leq \frac{1}{2} |x - x'|$.

En appliquant ce résultat au cas particulier où $x' = \alpha$ ($\alpha \in I$ d'après la question **B.1.**, nous en déduisons que

$$\text{pour tout réel } x \text{ de } I, |f(x) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2} |x - \alpha|.$$

2. Soit (u_n) la suite d'éléments de I définie par

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = f(u_n) \text{ pour } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

a) Raisonnons par récurrence sur n .

$$|u_0 - \alpha| = |3 - \alpha| \text{ et } \frac{1}{2^0} = 1,$$

$$\text{donc } |u_0 - \alpha| = \frac{1}{2^0} |3 - \alpha| \text{ soit } |u_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2^0} |3 - \alpha|.$$

Supposons que, pour un entier n fixé, $|u_n - \alpha| \leq \frac{1}{2^n} |3 - \alpha|$, et démontrons que

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}} |3 - \alpha|.$$

$$\text{Nous avons } |u_{n+1} - \alpha| = |f(u_n) - f(\alpha)|$$

$$\text{car } u_{n+1} = f(u_n)$$

$$\text{et } f(\alpha) = \alpha.$$

Or, d'après le résultat de la question précédente, nous avons

$$|f(u_n) - f(\alpha)| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$$

$$\text{donc } |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha|$$

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n} |3 - \alpha|$$

<i>L.S.El Rjadh</i>	<u>Exponentielles</u>	<i>Mr Zribi</i>
<i>4^{ème} Maths</i>		Solutions

$$|u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2^{n+1}} |3 - \alpha|.$$

Pour tout entier naturel n , $ u_n - \alpha \leq \frac{1}{2^n} 3 - \alpha .$
--

b) $\alpha \in [2 ; 3]$, donc $|3 - \alpha| \leq 1$. Nous avons donc, pour tout $n \in \mathbf{N}$,

$$\frac{1}{2^n} |3 - \alpha| \leq \frac{1}{2^n}$$

Pour que u_n soit une valeur approchée de α à 10^{-3} près, il suffit que $\frac{1}{2^n} \leq 10^{-3}$.

Or $\frac{1}{2^n} \leq 10^{-3}$ équivaut à

$$2^n \geq 10^3$$

$$\ln(2^n) \geq \ln(10^3) \text{ (la fonction } \ln \text{ est strictement croissante sur }]0 ; +\infty[)$$

$$n \ln 2 \geq 3 \ln 10$$

$$n \geq \frac{3 \ln 10}{\ln 2}.$$

Puisque $\frac{3 \ln 10}{\ln 2} = 9,96$ à 0,01 près, nous devons avoir $n \geq 10$.

u_{10} est une valeur approchée de α à 10^{-3} près et $u_{10} = 2,762$ à 10^{-3} près.
--

Exercices coniques corrigés

Le plan euclidien $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal $(O\vec{i}, \vec{j})$

- 1-) a-) **Déterminer une équation cartésienne de la parabole de foyer $F\left(\frac{1}{2}, 2\right)$ et de directrice $D: x = 3$.**

On appelle (P) cette parabole.

$$M(x, y) \in (P) \Leftrightarrow MF^2 = d(M, D)^2 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} - x\right)^2 + (2 - y)^2 = \frac{(x - 3)^2}{1^2 + 0^2}$$

$$M(x, y) \in (P) \Leftrightarrow \frac{1}{4} - x + x^2 + 4 - 4y + y^2 = x^2 - 6x + 9$$

Une équation cartésienne de (P) est donc: $\boxed{4y^2 + 20x - 16y - 19 = 0}$.

- 1-) b-) **Déterminer une équation cartésienne de la conique d'excentricité 5, de foyer $F(3, 2)$ et de directrice associée d'équation $y = 1$.**

L'excentricité est supérieure à 1 donc il s'agit d'une hyperbole (H).

$$M(x, y) \in (H) \Leftrightarrow MF^2 = 25 \times d(M, D)^2 \Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - 2)^2 = \frac{(y - 1)^2}{0^2 + 1^2}$$

$$M(x, y) \in (H) \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4 = y^2 - 2y + 1$$

Une équation cartésienne de (H) est donc: $\boxed{x^2 - 6x - 2y + 12 = 0}$.

- 1-) c-) **Déterminer une équation cartésienne de l'ellipse tangente à $(O, \vec{i})$ de sommets principaux $A(5, 1)$ et $A'(1, 1)$.**

Géométriquement, le point de contact de l'ellipse (E) avec $(O, \vec{i})$ est $B(3, 0)$ et le centre de l'ellipse est $\Omega(3, 1)$.

Par suite, $a = \frac{AA'}{2} = 2$ et $b = \Omega B = 1$.

Dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$, (E) a pour équation $\frac{X^2}{4} + Y^2 = 1$.

Quand on revient dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, $\begin{cases} X = x - 3 \\ Y = y - 1 \end{cases}$ ce qui donne $(x - 3)^2 + 4(y - 1)^2 = 4$.

Une équation cartésienne de (E) est donc: $\boxed{x^2 + 4y^2 - 6x - 8y + 9 = 0}$.

1-) d-) **Déterminer une équation cartésienne de la parabole (P) de foyer F(1, 2) et de directrice D dans les cas suivants:**

α-) D = (AB) avec A(0, 1) et B(3, 0)

β-) D: $2x - 3y + 5 = 0$

γ-) D passe par O et est orthogonale à D': $2x - y + 3 = 0$

Rappel: Si D a pour équation cartésienne $ax + by + c = 0$

$$\text{alors } d(A, D) = \frac{|ax_A + by_B + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\alpha-) D = (A, \overrightarrow{AB}) \text{ donc } M(x, y) \in D \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & 3 \\ y-1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x + 3y - 3 = 0.$$

$$M \in (P) \Leftrightarrow \frac{(x + 3y - 3)^2}{10} = (x - 1)^2 + (y - 2)^2$$

$$M \in (P) \Leftrightarrow x^2 + 9y^2 + 9 + 6xy - 6x - 18y = 10x^2 - 20x + 10 + 10y^2 - 40y + 40$$

$$M \in (P) \Leftrightarrow 9x^2 - 6xy + y^2 - 14x - 22y + 41 = 0$$

$$\beta-) M \in (P) \Leftrightarrow \frac{(2x - 3y + 5)^2}{13} = (x - 1)^2 + (y - 2)^2$$

$$M \in (P) \Leftrightarrow 4x^2 + 9y^2 + 25 - 12xy + 20x - 30y = 13x^2 - 26x + 13 + 13y^2 - 52y + 52$$

$$M \in (P) \Leftrightarrow 9x^2 + 12xy + 4y^2 - 46x - 22y + 40 = 0$$

γ-) $\vec{u}(1, 2)$ est un vecteur directeur de D' donc un vecteur normal à D.

Par suite, D a une équation cartésienne de la forme $1x + 2y + k = 0$.

Comme $O(0, 0) \in D$, D a pour équation cartésienne $x + 2y = 0$.

$$M \in (P) \Leftrightarrow \frac{(x + 2y)^2}{5} = (x - 1)^2 + (y - 2)^2$$

$$M \in (P) \Leftrightarrow x^2 + 4xy + 4y^2 = 5x^2 - 10x + 5 + 5y^2 - 20y + 20$$

$$M \in (P) \Leftrightarrow 4x^2 - 4xy + y^2 - 10x - 20y + 25 = 0$$

2-) a-) **Construire la courbe d'équation $y^2 - 6y + 2x + 10 = 0$ en précisant foyer(s), directrice(s) et excentricité.**

Donner une équation cartésienne de la tangente à la courbe aux points d'abscisse -1.

$$y^2 - 6y + 2x + 10 = 0 \Leftrightarrow -2x = y^2 - 6y + 10 \Leftrightarrow -2x = (y - 3)^2 + 1 \Leftrightarrow -2\left(x + \frac{1}{2}\right) = (y - 3)^2$$

Dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\Omega\left(-\frac{1}{2}, 3\right)$ on reconnaît la parabole (P) d'équation $Y^2 = -2X$.

(excentricité: $e = 1$) de foyer $F(-1, 0)$ et de directrice d'équation $Y = 1$.

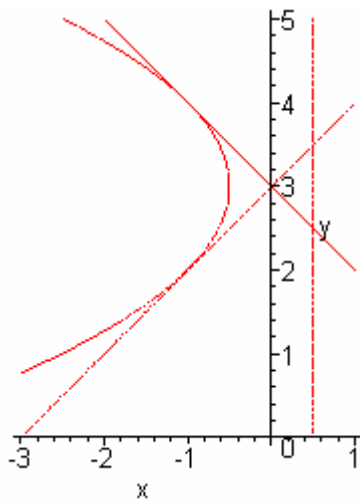
Dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ cette parabole a pour foyer $F\left(-\frac{3}{2}, 3\right)$ et pour directrice la droite $x = \frac{1}{2}$.

Le sommet de cette parabole est le point $S\left(\frac{1}{2}, 3\right)$.

Si $x = -1$ alors $y^2 - 6y + 8 = 0$ ce qui donne $y = 2$ ou $y = 4$.

→ La tangente à (P) en $A(-1, 2)$ a pour équation cartésienne $y \times 2 - 3(y + 2) + 1(x - 1) + 10 = 0$
soit $x - y + 3 = 0$.

→ La tangente à (P) en $B(-1, 4)$ a pour équation cartésienne $y \times 4 - 3(y + 4) + 1(x - 1) + 10 = 0$
soit $x + y - 3 = 0$.



2-) b-) **Construire la courbe d'équation $3x^2 + 4y^2 + x - 39 = 0$ en précisant foyer(s), directrice(s) et excentricité.**

Donner une équation cartésienne de la tangente à la courbe aux points d'abscisse 3.

$$3x^2 + 4y^2 + x - 39 = 0 \Leftrightarrow 3\left(x^2 + 2 \times \frac{1}{6} \times x + \frac{1}{36}\right) + 4y^2 - \frac{1}{12} - 39 = 0$$

$$3x^2 + 4y^2 + x - 39 = 0 \Leftrightarrow 3\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 + 4y^2 = \frac{469}{12} \Leftrightarrow \frac{\left(x + \frac{1}{6}\right)^2}{\frac{469}{36}} + \frac{y^2}{\frac{469}{48}} = 1$$

Dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\Omega\left(-\frac{1}{6}, 0\right)$ on reconnaît l'ellipse (E) d'équation $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$.

avec $a^2 = \frac{469}{36}$ et $b^2 = \frac{469}{48}$. Comme $a^2 > b^2$ son axe focal est $(\Omega, \vec{i})$.

Par ailleurs, $c^2 = \frac{469}{12} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{469}{12^2}$ donc $c = \frac{\sqrt{469}}{12}$.

Cette ellipse a pour excentricité $e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$.

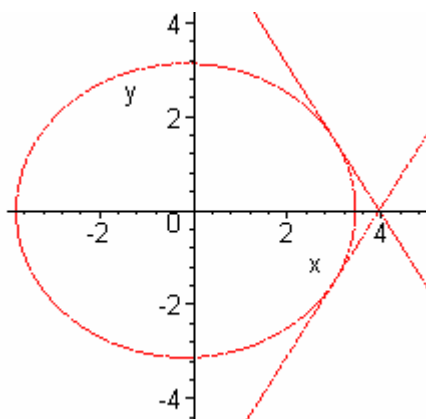
Dans $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$, $F\left(\frac{\sqrt{469}}{12}, 0\right)$, $D: X = \frac{a^2}{c} = \frac{\sqrt{469}}{3}$ et $D': X = -\frac{\sqrt{469}}{3}$

Dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$, $F\left(\frac{\sqrt{469}-2}{12}, 0\right)$, $D: x = \frac{2\sqrt{469}-1}{3}$ et $D': x = \frac{-2\sqrt{469}-1}{3}$

Si $x = 3$ alors $27 + 4y^2 + 3 - 39 = 0$ ce qui donne $y^2 = \frac{9}{4}$ d'où $y = \frac{3}{2}$ ou $y = -\frac{3}{2}$.

→ La tangente à (E) en $A\left(3, \frac{3}{2}\right)$ a pour équation cartésienne $3x \times 3 + 4y \times \frac{3}{2} + \frac{1}{2}(x+3) - 39 = 0$
soit $19x + 12y - 75 = 0$.

→ La tangente à (E) en $B\left(3, -\frac{3}{2}\right)$ a pour équation cartésienne $3x \times 3 + 4y \times \left(-\frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2}(x+3) - 39 = 0$
soit $19x - 12y - 75 = 0$.



2-) c-) **Construire la courbe d'équation $-3x^2 + y^2 - 8x - 4 = 0$ en précisant foyer(s), directrice(s) et excentricité.**

Donner une équation cartésienne de la tangente à la courbe aux points d'abscisse 0.

$$-3x^2 + y^2 - 8x - 4 = 0 \Leftrightarrow -3\left(x^2 + 2 \times \frac{4}{3} + \frac{16}{9}\right) + y^2 = 4 - \frac{16}{3}$$

$$-3x^2 + y^2 - 8x - 4 = 0 \Leftrightarrow -3\left(x + \frac{4}{3}\right)^2 + y^2 = -\frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{\left(x + \frac{4}{3}\right)^2}{\frac{4}{9}} - \frac{y^2}{\frac{4}{3}} = 1$$

Dans le repère $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\Omega\left(-\frac{4}{3}, 0\right)$ on reconnaît l'hyperbole (H) d'équation $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$.

avec $a^2 = \frac{4}{9}$ et $b^2 = \frac{4}{3}$ d'axe focal $(\Omega, \vec{i})$.

Par ailleurs, $c^2 = \frac{4}{9} + \frac{12}{9} = \frac{16}{9}$ donc $c = \frac{4}{3}$.

Cette hyperbole a pour excentricité $e = \frac{c}{a} = 2$.

Dans $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$, $F\left(\frac{4}{3}, 0\right)$ donc $F = O$, $F'\left(-\frac{4}{3}, 0\right)$, $D: X = \frac{a^2}{c} = \frac{1}{3}$ et $D': X = -\frac{1}{3}$

et les asymptotes ont pour équations cartésiennes $X\sqrt{3} \pm Y = 0$.

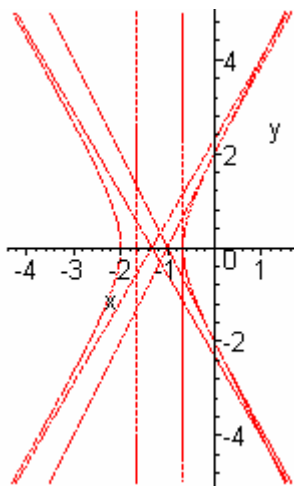
Dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$, $F = O$, $F'\left(-\frac{8}{3}, 0\right)$, $D: x = -\frac{2}{3}$ et $D': x = -\frac{5}{3}$

et les asymptotes ont pour équations cartésiennes $3x \pm y + 4 = 0$.

Si $x = 0$ alors $y^2 = 4$ ce qui donne $y = -2$ ou $y = 2$.

→ La tangente à (H) en $A(0, -2)$ a pour équation cartésienne $-3x \times 0 + y \times (-2) - 4(x + 0) - 4 = 0$ soit $2x + y + 2 = 0$.

→ La tangente à (H) en $B(0, 2)$ a pour équation cartésienne $-3x \times 0 + y \times 2 - 4(x + 0) - 4 = 0$ soit $2x - y + 2 = 0$.



3-) a-) **Reconnaître la courbe d'équation: $y^2 + 3y - 5x + 3 = 0$**

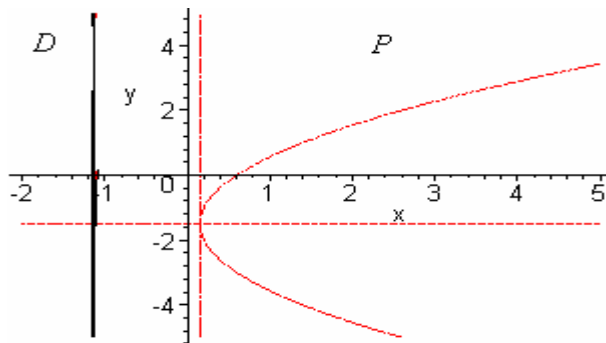
$$y^2 + 3y - 5x + 3 = 0 \Leftrightarrow \left(y^2 + 2 \times \frac{3}{2}y + \frac{9}{4}\right) = 5x - 3 + \frac{9}{4} \Leftrightarrow \left(y + \frac{3}{2}\right)^2 = 2 \times \frac{5}{2} \left(x - \frac{3}{20}\right)$$

ce qui s'écrit: $Y^2 = 2pX$ avec $\begin{cases} X = x - \frac{3}{20} \\ Y = y + \frac{3}{2} \end{cases}$ et $p = \frac{5}{2}$

Il s'agit de la parabole de sommet Ω , d'axe focal $(\Omega, \vec{i})$ et de paramètre p avec $\Omega\left(\frac{3}{20}, -\frac{3}{2}\right)$.

Dans $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$, $F\left(\frac{5}{4}, 0\right)$ et $D: X = -\frac{5}{4}$.

Dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$, $F\left(\frac{7}{5}, -\frac{3}{2}\right)$ et $D: x = -\frac{11}{10}$.



3-) b-) **Reconnaître la courbe d'équation: $x^2 - 8x + 3y = 0$**

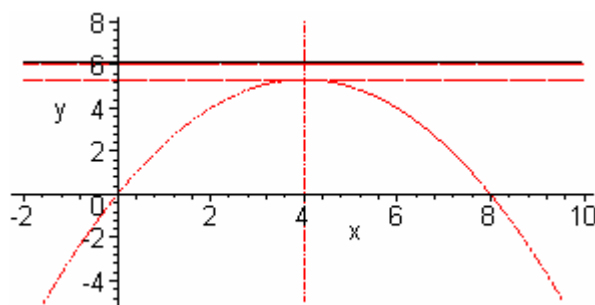
$$x^2 - 8x + 3y = 0 \Leftrightarrow (x - 4)^2 = -3\left(y - \frac{16}{3}\right)$$

ce qui s'écrit: $X^2 = -2pY$ avec $\begin{cases} X = x - 4 \\ Y = y + \frac{16}{3} \end{cases}$ et $p = \frac{3}{2}$

Il s'agit de la parabole de sommet Ω , d'axe focal $(\Omega, -\vec{j})$ et de paramètre p avec $\Omega\left(4, -\frac{16}{3}\right)$.

Dans $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$, $F\left(0, -\frac{3}{4}\right)$ et $D: Y = \frac{3}{4}$.

Dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$, $F\left(4, \frac{55}{12}\right)$ et $D: y = \frac{73}{12}$.



3-) c-) **Reconnaître la courbe d'équation: $y^2 - 4y + 4 = 0$**

$$y^2 - 4y + 4 = 0 \Leftrightarrow (y - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow y = 2$$

Il s'agit d'une droite (conique dégénérée)

3-) d-) **Reconnaître la courbe d'équation: $3x^2 + 4y^2 - 8y = 0$**

$$3x^2 + 4y^2 - 8y = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 4(y - 1)^2 = 4 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2} + (y - 1)^2 = 1$$

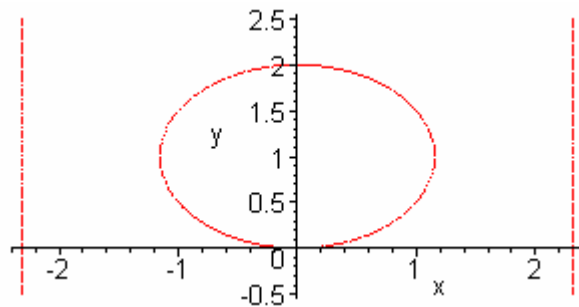
ce qui s'écrit $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$ avec $\begin{cases} X = x \\ Y = y - 1 \end{cases}$ $a = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ et $b = 1$

Comme $a > b$, il s'agit d'une ellipse de centre $\Omega(0, 1)$ et d'axe focal $(\Omega, \vec{i})$.

Elle a pour sommets $A_1\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 1\right)$, $A_2\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}, 1\right)$, $B_1(0, 0) = O$ et $B_2(0, 2)$.

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ d'où } F\left(\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right) \text{ et } F'\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}, 1\right) \text{ et } e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}.$$

Enfin, $\frac{a^2}{c} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ d'où $D_1: x = -\frac{4\sqrt{3}}{3}$ et $D_2: x = \frac{4\sqrt{3}}{3}$



3-) e-) **Reconnaître la courbe d'équation: $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 + 1 = 0$**

Cette équation est impossible car $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x - 3)^2 + (y - 1)^2 + 1 \geq 1$.
Donc c'est l'équation de l'ensemble vide (conique dégénérée).

3-) f-) **Reconnaître la courbe d'équation: $(x - 3)^2 - (y - 1)^2 + 1 = 0$**

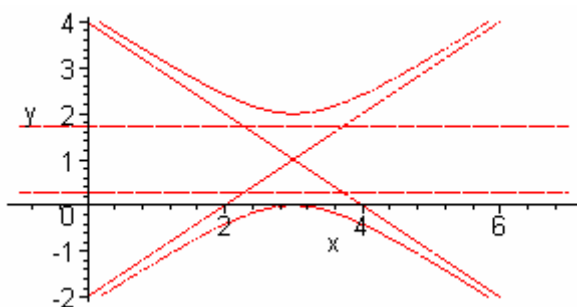
$$(x - 3)^2 - (y - 1)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = -1 \text{ avec } \begin{cases} X = x - 3 \\ Y = y - 1 \end{cases} \text{ et } a = 1.$$

Il s'agit donc d'une hyperbole équilatère d'axe focal $(\Omega, \vec{j})$ avec $\Omega(3, 1)$.

Les asymptotes ont pour équation $y = x - 2$ et $y = -x + 4$.

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2} \text{ donc } F(3, 1 + \sqrt{2}) \text{ et } F'(3, 1 - \sqrt{2}).$$

$$\frac{a^2}{c} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ d'où } D_1: y = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } D_2: y = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$



3-) g-) **Reconnaître la courbe d'équation: $x^2 - y^2 + 4x - 2y + 3 = 0$**

$x^2 - y^2 + 4x - 2y + 3 = 0 \Leftrightarrow (x+2)^2 - (y+1)^2 = -3 + 4 - 1 \Leftrightarrow x+y+3=0$ **ou** $x-y+1=0$
Il s'agit de la réunion de deux droites (*conique dégénérée*)

3-) h-) **Reconnaître la courbe d'équation: $(x-1)^2 + (y-4)^2 = 2(x+4)^2$**

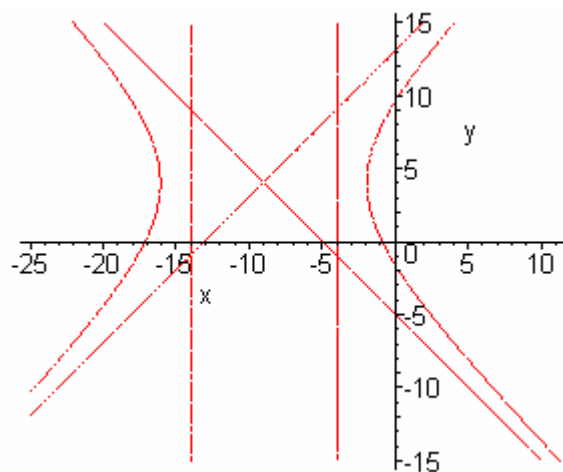
$$\begin{aligned} (x-1)^2 + (y-4)^2 &= 2(x+4)^2 \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - 2x^2 - 16x - 32 + (y-4)^2 = 0 \\ (x-1)^2 + (y-4)^2 &= 2(x+4)^2 \Leftrightarrow -x^2 - 18x - 81 + (y-4)^2 = -81 - 1 + 32 \\ (x-1)^2 + (y-4)^2 &= 2(x+4)^2 \Leftrightarrow -(x+9)^2 + (y-4)^2 = -50 \\ (x-1)^2 + (y-4)^2 &= 2(x+4)^2 \Leftrightarrow \frac{(x+9)^2}{50} - \frac{(y-4)^2}{50} = 1 \end{aligned}$$

Dans $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\Omega(-9, 4)$ on reconnaît l'hyperbole équilatère $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{a^2} = 1$ d'axe focal $(\Omega, \vec{i})$
avec $a^2 = b^2 = 50$ d'où $c^2 = 100$ et $c = 10$.

Cette hyperbole a pour excentricité $e = \frac{c}{a} = \sqrt{2}$

Dans $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$, $F(10, 0)$, $F'(-10, 0)$, $D: X = 5$, $D' = -5$
et les asymptotes ont pour équation $X \pm Y = 0$.

Dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$, $F(1, 0)$, $F'(-19, 0)$, $D: x = -4$, $D': x = -14$
et les asymptotes ont pour équation $x + y + 5 = 0$ et $x - y + 13 = 0$.



3-) i-) **Reconnaître la courbe d'équation: $x^2 - y^2 + 3x + 2y + \lambda = 0$**

$$x^2 - y^2 + 3x + 2y + \lambda = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 - (y - 1)^2 = \frac{5 - 4\lambda}{4}$$

→ Si $\lambda = \frac{5}{4}$, on obtient $x + y + \frac{1}{2} = 0$ ou $x - y + \frac{5}{2} = 0$ (réunion de deux droites).

→ Si $\lambda < \frac{5}{4}$, on pose $\frac{5 - 4\lambda}{4} = K^2$ d'où $\frac{X^2}{K^2} - \frac{Y^2}{K^2} = 1$ avec $\begin{cases} X = x + \frac{3}{2} \\ Y = y - 1 \end{cases}$

ce qui donne une hyperbole équilatère de centre Ω et d'axe focal $(\Omega, \vec{i})$ avec $\Omega\left(-\frac{3}{2}, 1\right)$.

→ Si $\lambda > \frac{5}{4}$, on pose $-\frac{5 - 4\lambda}{4} = K^2$ d'où $\frac{X^2}{K^2} - \frac{Y^2}{K^2} = -1$ avec $\begin{cases} X = x + \frac{3}{2} \\ Y = y - 1 \end{cases}$

ce qui donne une hyperbole équilatère de centre Ω et d'axe focal $(\Omega, \vec{j})$ avec $\Omega\left(-\frac{3}{2}, 1\right)$

3-) j-) **Reconnaître la courbe d'équation: $|z + 1 - i| = 2\Re(z)$**

Si on pose $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$|z + 1 - i| = 2\Re(z) \Leftrightarrow \sqrt{(x+1)^2 + (y-1)^2} = 2x$$

$$|z + 1 - i| = 2\Re(z) \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 + 2x + 1 + (y-1)^2 = 4x^2 \end{cases} \quad (1)$$

$$(1) \Leftrightarrow -3\left(x^2 - 2 \times \frac{1}{3}x + \frac{1}{9}\right) + (y-1)^2 = -1 - \frac{1}{3}$$

$$(1) \Leftrightarrow -3\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + (y-1)^2 = -\frac{4}{3}$$

$$(1) \Leftrightarrow \frac{\left(x - \frac{1}{3}\right)^2}{\frac{4}{9}} - \frac{(y-1)^2}{\frac{4}{3}} = 1$$

Dans $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\Omega\left(\frac{1}{3}, 1\right)$ on reconnaît l'hyperbole $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$ d'axe focal $(\Omega, \vec{i})$
avec $a^2 = \frac{4}{9}$ et $b^2 = \frac{4}{3}$ d'où $c^2 = \frac{16}{9}$ et $c = \frac{4}{3}$.

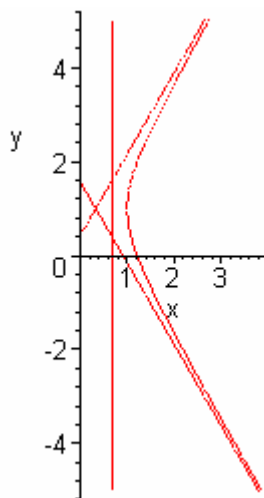
Cette hyperbole a pour excentricité $e = \frac{c}{a} = 2$

Dans $(\Omega, \vec{i}, \vec{j})$, $F\left(\frac{4}{3}, 0\right)$, $F'\left(-\frac{4}{3}, 0\right)$, D: $X = \frac{1}{3}$, D': $X = -\frac{1}{3}$
et les asymptotes ont pour équation $X\sqrt{3} \pm Y = 0$.

Dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$, $F\left(\frac{5}{3}, 1\right)$, $F'(-1, 1)$, D: $x = \frac{2}{3}$, D': $x = 0$

et les asymptotes ont pour équation $3x + \sqrt{3}y - 1 - \sqrt{3} = 0$ et $3x - \sqrt{3}y - 1 + \sqrt{3} = 0$.

La courbe cherchée est la partie de cette hyperbole contenue dans le demi-plan $x \geq 0$.



4-) **Reconnaître la nature des courbes données par les équations suivantes:**

a-) $(x - 2y + 5)^2 = 5[(x - 1)^2 + (y + 3)^2]$

b-) $(x - 2y + 5)^2 = 5[x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5]$

c-) $(x - 2y + 5)^2 = (x - 1)^2 + (y + 4)^2$

d-) $(x - 2y + 5)^2 = 10[(x - 1)^2 + (y + 2)^2]$

a-) La relation proposée s'écrit: $\left(\frac{|x - 2y + 5|}{\sqrt{5}}\right)^2 = (x - 1)^2 + (y + 3)^2$

soit $d(M, D)^2 = MF^2$ avec $D: x - 2y + 5 = 0$ et $F(1, -3)$.

C'est donc l'équation de la parabole de foyer F et de directrice D.

b-) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5 = x^2 - 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 = (x - 2)^2 + (y + 1)^2$.

La relation proposée s'écrit: $\left(\frac{|x - 2y + 5|}{\sqrt{5}}\right)^2 = (x - 2)^2 + (y + 1)^2$

soit $d(M, D)^2 = MF^2$ avec $D: x - 2y + 5 = 0$ et $F(2, -1)$.

C'est donc l'équation de la parabole de foyer F et de directrice D.

c-) La relation proposée s'écrit: $(\sqrt{5})^2 \times \left(\frac{|x - 2y + 5|}{\sqrt{5}}\right)^2 = (x - 1)^2 + (y + 4)^2$

soit $(\sqrt{5})^2 \times d(MD)^2 = MF^2$ avec $D: x - 2y + 5 = 0$ et $F(1, -4)$.

Comme $\sqrt{5} > 1$, il s'agit de l'hyperbole de foyer F, de directrice D et d'excentricité $e = \sqrt{5}$.

d-) La relation proposée s'écrit: $(\sqrt{5})^2 \times \left(\frac{|x - 2y + 5|}{\sqrt{5}}\right)^2 = (\sqrt{10})^2 \times [(x - 1)^2 + (y + 2)^2]$

soit $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \times d(MD)^2 = MF^2$ avec $D: x - 2y + 5 = 0$ et $F(1, -2)$.

Comme $0 < \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$, il s'agit de l'ellipse de foyer F, de directrice D et d'excentricité $e = \frac{1}{\sqrt{2}}$.