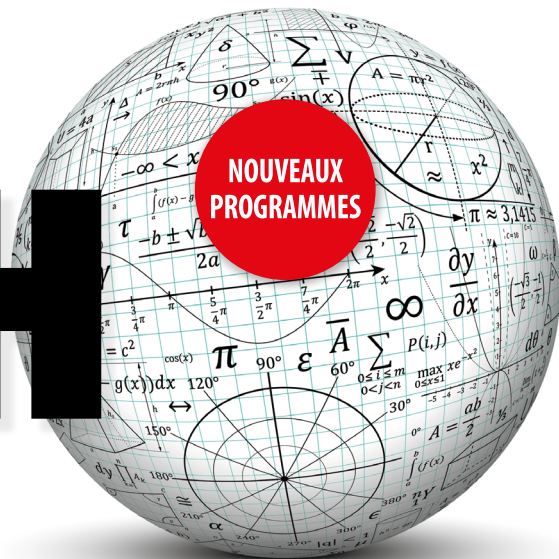


MATH MAX



Cours complet
Exercices et devoirs corrigés

Tle
spécialité

- **Le cours complet** avec des exemples et des conseils
- **Des centaines d'exercices et devoirs, tous corrigés** en détail
- Des cahiers de **logique** et d'**algorithmique**
- Des extras pour réviser ou **anticiper sur les années à venir**
- Une approche **testée et validée auprès des élèves**



MATH MAX



Cours complet
Exercices et devoirs corrigés

Tle
spécialité

MATH MAX



Cours complet
Exercices et devoirs corrigés

Tle
spécialité

Sébastien Krief-Détraz

Professeur agrégé de mathématiques
au lycée international Georges Duby d'Aix-en-Provence



Du même auteur, aux éditions Ellipses

Math Max – Terminale option Mathématiques expertes – Cours complet, exercices et devoirs corrigés – Nouveaux programmes, 408 p., 2022

Math Max – Première enseignement de spécialité – Cours complet, exercices et devoirs corrigés – Nouveaux programmes – 2^e édition, 396 p., 2021

Math Max – Seconde – Cours complet, exercices et devoirs corrigés – Nouveaux programmes – 2^e édition, 390 p., 2021

ISBN 9782340-074644

© Ellipses Édition Marketing S.A., 2022
8/10 rue la Quintinie 75015 Paris



Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5.2° et 3°a), d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

www.editions-ellipses.fr

À mes parents

Pour mes élèves

AVANT-PROPOS

Vous avez entre les mains un ouvrage entièrement consacré aux mathématiques. Un de plus, direz-vous. Oui et non.

Pour commencer, il contient tout le cours, conforme aux nouveaux programmes comme il se doit, détaillé, avec les démonstrations, les figures, les remarques, les commentaires, les conseils et les exemples d'usage, rectifiés et peaufinés au fil des cours auprès d'élèves de tous horizons.

Puis des exercices, des exercices et des exercices, de difficulté croissante et en lien avec la progression du cours, bien évidemment.

Et tous les corrigés, bien entendu. Et rédigés de plus, pas de simples solutions laconiques.

Ajoutez à cela les devoirs de recherche et de synthèse, vous obtenez déjà un beau traité.

Insérez des cahiers d'algorithmique et de logique, vous aurez un esprit bien construit.

Agrémentez maintenant de quelques exercices en anglais, peu difficiles, vous avez enrichi votre langage.

Complétez d'une rubrique *Extras* dans laquelle on trouve des révisions, des aides, des compléments allant plus loin ou des problèmes ouverts, et de nouvelles perspectives s'ouvrent à vous.

Pimentez le tout d'énoncés un peu alambiqués, tirés par les cheveux ou complètement décalés, aux références regroupées dans une bibliographie quelque peu insolite et vous avez là l'ensemble idéal pour apprendre, réviser ou étudier avec plaisir.

Bonne lecture.

SOMMAIRE

Cours & Exercices corrigés	7
I Suites numériques	9
II Loi binomiale	41
III Limites des fonctions numériques	63
IV Continuité des fonctions numériques	93
V Droites, plans et vecteurs de l'espace	115
VI Dérivation des fonctions numériques	135
VII Convexité & Dérivation	155
VIII Orthogonalité dans l'espace	187
IX Logarithme népérien	205
X Représentations paramétrique & Équations cartésiennes	235
XI Primitives & Équations différentielles	257
XII Combinatoire & Dénombrement	295
XIII Fonctions trigonométriques	329
XIV Calcul intégral	351
XV Variables aléatoires & Loi des grands nombres	397
Devoirs corrigés	419
1 Tablette numérique	421
2 Suites de Bac	423

3	Probabilités épistolaires	427
4	No limit	431
5	Fonction auxiliaire	435
6	To bee or not to bee	439
7	De la petite à la grande section	443
8	À la dérive	447
9	(I can't get no)	451
10	I believe I can fly	453
11	Ouï, vidi, compris	455
12	Équations fonctionnelles	457
13	Space Oddity	463
14	Grand concours	465
15	Le silence éternel de ces espaces infinis	469
16	Espèce de maths	473
17	Libérée, dérivée : l'intégrale	475
18	Cent mille milliards de mille sabords	481
19	Paire okay	483
20	Naguère sur l'étoile	487
21	Être ou ne pas être	489
22	Des intégrations	493
23	Planche à roulette	499
24	Aller à Jacta-Est	503
25	Devoir parental	507
	 Cahiers transversaux	 509
α	Algo à gogo	511
β	En toute logique	533
γ	Faute de preuves	545

Extras	553
A Vive la rentrée	555
B Auto-exos	557
C Self-Working	563
D Petite parenthèse	567
E Sine qua tion	569
F Trop grand écart	573
G Poursuites	577
H U lisse	591
I Einstein vaut mieux que deux tu l'auras	593
 Annexes	 595
 Table des matières	 607

COURS & EXERCICES CORRIGÉS

Chapitre I

SUITES NUMÉRIQUES

Sommaire

Introduction	9
1 Suites numériques	10
1.1 Définitions	10
1.2 Suites définies explicitement en fonction de n : $u_n = f(n)$	11
1.3 Suites définies par une relation de récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$	12
1.4 Suites arithmétiques	13
1.5 Suites géométriques	13
2 Raisonnement par récurrence	14
2.1 Principe de récurrence	14
2.2 Démonstrations par récurrence	14
3 Limite d'une suite : définition	15
4 Théorèmes & calculs de limites	17
4.1 Limites de référence	17
4.2 Opérations sur les limites	17
4.3 Théorèmes de comparaison	19
4.4 Cas des suites géométriques	20
4.5 Cas des suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$	21
Suites, calculatrice & algorithmes	22
Exercices	24
Corrigé des exercices	29

Introduction

Nous poursuivons dans ce chapitre l'étude commencée en classe de première des suites numériques. Après les rappels usuels, nous aborderons le principe fondamental de raisonnement par récurrence, basé sur la construction des nombres entiers naturels. Nous définirons ensuite la notion de limite d'une suite c'est-à-dire l'étude de son comportement pour les valeurs de n de plus en plus grandes, notion fondatrice de l'analyse mathématique.

Les suites numériques sont liées à la mathématique de la mesure (mesures prises à intervalles de temps réguliers) et à l'analyse. En effet, une suite numérique est l'équivalent *discret* d'une fonction numérique (de variable *continue*). La notion de suite est présente dès qu'apparaissent des procédés illimités de calcul. On en trouve, par exemple, chez Archimède pour des calculs d'aires et de volumes ou en Égypte vers 1700 avant Jésus-Christ. Plus tard, on s'intéresse aux suites afin d'approcher des valeurs numériques (racine carrée d'un nombre par la méthode de Héron d'Alexandrie). L'étude des suites ouvre la porte à celle des séries entières (somme des termes d'une suite) dont le but est d'approcher non plus des nombres mais des fonctions. Dans la seconde moitié du xx^e s., le développement des calculateurs et des ordinateurs donne un second souffle à l'étude des suites. On voit alors littéralement apparaître de magnifiques objets, tel l'ensemble de Mandelbrot. On retrouve aussi l'usage des suites dans les mathématiques financières.

Parallèlement à ces études de limites de suites, se développe un certain goût pour l'étude de la suite non tant pour sa convergence mais pour son terme général. C'est le cas par exemple d'un grand nombre de suites d'entiers comme la suite de Fibonacci ou, plus récemment, celle de Syracuse.

Étonnamment, les suites rebutent parfois certains élèves car elles leur semblent inhabituelles, étranges ou incomplètes mais il leur suffit alors de faire l'analogie suivante : si le violon est un instrument « continu », le piano est un instrument « discret ». Ils n'en sont pas moins tous deux harmonieux, parfois même enchanteurs.

1 Suites numériques

Ce paragraphe étant essentiellement constitué de rappels, la plupart des résultats ne seront pas démontrés.

1.1 Définitions

Définition 1 Une *suite numérique* est une *fonction* de l'ensemble *des entiers naturels dans* $\mathbb{R}$. On note souvent $(u_n)_{\mathbb{N}} : n \in \mathbb{N} \mapsto u_n \in \mathbb{R}$. Il arrive que la suite soit définie seulement à partir d'un certain entier n_0 ; on dira alors que la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ a pour premier terme ou terme initial u_{n_0} .

Une suite réelle n'est pas forcément « une suite logique ».

Notation : Lorsque une suite (u_n) vérifie une certaine propriété pour les entiers n plus grands qu'un certain n_0 , on dit qu'elle la vérifie à **partir d'un certain rang** et l'on note **à.p.c.r.** Par exemple, $2^n > 10$ à partir du rang 4.

Définition 2 Variations

On dit qu'une suite (u_n) est **croissante** (resp. **décroissante**, resp. **constante** ou **stationnaire**) à.p.c.r. s'il existe n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} \geq u_n$ (resp. $u_{n+1} \leq u_n$, resp. $u_{n+1} = u_n$).

Une suite est **monotone** à.p.c.r. si elle est croissante à.p.c.r. ou décroissante à.p.c.r. ou stationnaire à.p.c.r.

Si les inégalités sont strictes, on parlera de stricte croissance, stricte décroissance et stricte monotonie.

Remarque : Pour étudier la monotonie, on étudiera souvent le signe de $u_{n+1} - u_n$. On pourra aussi comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1 lorsque la suite est strictement positive.

Définition 3 Égalité

Deux suites $(u_n)_{n \geq n_1}$ et $(v_n)_{n \geq n_2}$ sont égales si $n_1 = n_2$ et si $\forall n \geq n_1, u_n = v_n$. Si $n_1 \neq n_2$ mais les termes sont tous égaux pour des n assez grands, les suites (u_n) et (v_n) sont égales à.p.c.r.

Définition 4 Suite majorée, minorée, bornée

Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ trois suites numériques.

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est **majorée** s'il existe un réel M tel que, pour tout n , $u_n \leq M$.
- $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite **minorée** s'il existe un réel m tel que, pour tout n , $v_n \geq m$.
- $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est dite **bornée** s'il existe deux réels m et M tels que, pour tout entier naturel n , $m \leq w_n \leq M$.

Exemples :

- La suite $u_n = \pi - \frac{1}{n+1}$ est majorée par π .
- La suite $v_n = n^2 + n + 1$ est minorée par 0.
- La suite $w_n = \frac{(-1)^n}{n^2+1}$ est bornée par -1 et 1 .

Remarque : Les bornes ne sont bien sûr pas uniques.

1.2 Suites définies explicitement en fonction de n : $u_n = f(n)$

Soit a un réel et soit f une fonction définie sur $[a; +\infty[$.
 $\forall n \geq a$, $f(n)$ existe et l'on peut définir la suite $(u_n)_{n \geq a} : n \mapsto u_n = f(n)$.

Propriété 1 Si f est monotone, alors $(u_n) = (f(n))$ est aussi monotone et de même monotonie que f .

Remarque : Attention, la réciproque est fausse (cf. $u_n = \cos(2\pi n)$).

1.3 Suites définies par récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$

Définition 5 Soit une fonction f définie sur un ensemble I tel que $f(I) \subset I$ c.-à-d. $\forall x \in I, f(x) \in I$, et soit $u_0 \in I$.

La suite $(u_n)_n$ définie par $\begin{cases} u_0 \in I \\ u_{n+1} = f(u_n), \quad \forall n \geq 0 \end{cases}$ existe.

On dit que $(u_n)_n$ est une **suite récurrente**.

Démonstration : Le problème potentiel est que u_n « tombe » sur une valeur interdite de f . Puisque $f(I) \subset I$, si $u_n \in I$ alors $u_{n+1} = f(u_n) \in I$ aussi et l'on peut calculer de proche en proche :

$$u_0 \in I \xrightarrow{f} f(u_0) = u_1 \in I \xrightarrow{f} f(u_1) = u_2 \in I \xrightarrow{f} f(u_2) = u_3 \in I \dots \quad \square$$

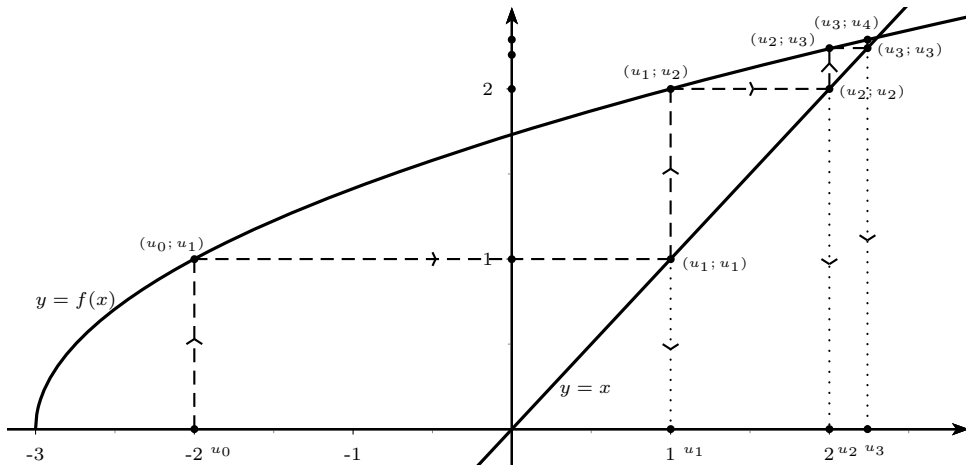
Exemple : Soit la relation de récurrence $u_{n+1} = 1 - \frac{1}{u_n}$. Puisque, pour $x \neq 0$, $1 - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow x = 1$, une telle suite n'est bien définie que si le premier terme appartient à $\mathbb{R} \setminus \{0; 1\}$.

Les termes d'une suite récurrente se calculent *en général* de proche en proche. Pour connaître le n -ième terme, il faut avoir calculé le $(n-1)$ -ième.

Exemple : Soit $f : x \in [-3; +\infty[\mapsto \sqrt{x+3}$. On a $f(x) \geq 0$ donc $f([-3; +\infty[) \subset [-3; +\infty[$. La suite suivante est donc bien définie : $u_0 = -2$ et $u_{n+1} = f(u_n) = \sqrt{u_n+3}$, $\forall n \geq 0$.

On a $u_0 = -2$, $u_1 = \sqrt{u_0+3} = \sqrt{-2+3} = 1$, $u_2 = \sqrt{1+3} = 2$, $u_3 = \sqrt{5}$, $u_4 = \sqrt{3+\sqrt{5}}$, ...

Représentation graphique : On reprend l'exemple précédent.



Propriété 2 Égalité des suites récurrentes Soit n_0 un entier naturel.

Si deux suites (u_n) et (v_n) , définies à partir du rang n_0 , ont le même terme initial $u_{n_0} = v_{n_0}$ et vérifient la même relation de récurrence, alors elles sont égales c.-à-d. $\forall n \geq n_0, u_n = v_n$.

1.4 Suites arithmétiques

Définition & Propriété 3 Une suite $(u_n)_\mathbb{N}$ est dite **arithmétique** si chacun de ses termes est obtenu à partir du précédent en **ajoutant une constante** c.-à-d. s'il existe un réel r tel que pour tout entier n , $u_{n+1} = u_n + r$.

Le réel r est alors appelé la **raison** de cette suite arithmétique.

On a, pour tout entier n , $u_n = u_0 + n r$ et plus généralement, pour tous entiers n et p , $u_p = u_n + (p - n) r$.

Pour montrer qu'une suite $(u_n)_\mathbb{N}$ est arithmétique, on montre généralement que la différence $u_{n+1} - u_n$ est constante.

Propriété 4 Variations des suites arithmétiques

Soit $(u_n)_\mathbb{N}$ une suite arithmétique de raison r .

$(u_n)_\mathbb{N}$ est **strictement croissante** (resp. **décroissante**) ssi $r > 0$ (resp. $r < 0$).

Remarque : Ainsi, une suite arithmétique de raison r est une suite définie par récurrence (de fonction de récurrence $f(x) = x + r$) qui est aussi définie explicitement en fonction de n .

Théorème 1 Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique

- Pour tout entier n , on a $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.
- Soit $(u_n)_\mathbb{N}$ une suite arithmétique. Pour tout entier n , on a :

$$\sum_{i=0}^{i=n} u_i = (n+1) \frac{u_0 + u_n}{2}.$$

1.5 Suites géométriques

Définition & Propriété 5 Une suite $(u_n)_\mathbb{N}$ est dite **géométrique** si chaque terme est obtenu à partir du précédent par **multiplication par une constante** c.-à-d. s'il existe un réel q tel que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = q u_n$.

Le réel q est alors appelé **raison** de cette suite géométrique.

On a, pour tout entier $n > 0$, $u_n = u_0 q^n$ et plus généralement, pour tous entiers n et p , $u_p = q^{p-n} u_n$.

Pour démontrer qu'une suite $(u_n)_\mathbb{N}$ est géométrique, on montre généralement que le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant.

Remarque : Ainsi, une suite géométrique de raison q est une suite définie par récurrence (de fonction de récurrence $f(x) = qx$) qui est aussi définie explicitement en fonction de n .

Théorème 2 Variations Soit q un réel.

- Si $q > 1$, la suite $(q^n)_{\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
- Si $0 < q < 1$, la suite $(q^n)_{\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.
- Si $q < 0$, la suite $(q^n)_{\mathbb{N}}$ n'est pas monotone.
- Si $q = 0$ ou 1 , la suite $(q^n)_{\mathbb{N}^*}$ est stationnaire.

Remarque : Attention au signe de u_0 lors de l'étude des variations de $(q^n u_0)$.

Théorème 3 Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique

Soit $(u_n)_{\mathbb{N}}$ une suite géométrique de raison $q \neq 1$.

Pour tout entier n , on a :

$$\sum_{i=0}^{i=n} u_i = u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Remarque : Cette formule peut se lire : $S = (1^{\text{er}} \text{ terme}) \times \frac{1 - q^{\text{nbre de termes}}}{1 - q}$.

2 Raisonnement par récurrence

2.1 Principe de récurrence

Axiome Soit $\mathcal{P}(n)$ une proposition dépendant de l'entier naturel n et soit $n_0 \in \mathbb{N}$. On suppose que l'on a les deux assertions suivantes :

- $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie (*initialisation*) ;
- Pour tout $n \geq n_0$, $\mathcal{P}(n)$ vraie implique $\mathcal{P}(n+1)$ vraie (*hérédité*).

Alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq n_0$ (*conclusion*).

Imaginons un escalier infini dont on a numéroté dans l'ordre chacune des marches. Si l'on peut accéder à une marche n_0 de l'escalier (*initialisation*) et si l'on peut monter d'une marche quelconque à la suivante (*hérédité*), alors on peut accéder à n'importe quelle marche au-dessus de n_0 (*conclusion*).

On peut aussi imaginer une succession infinie de dominos dressés. Il nous est bien évident que si l'on en fait basculer un (*initialisation*) et si les dominos sont espacés les uns à la suite des autres d'une distance adéquate (*hérédité*), alors tous les suivants basculeront, dans une amusante et colorée cataracte.

Ce type de démonstration aurait été pour la première fois utilisé explicitement par Blaise Pascal en 1665 mais il faudra attendre deux siècles pour une formalisation et une axiomatisation du raisonnement par récurrence par, indépendamment, l'allemand Dedekind et l'italien Péano en 1888.

2.2 Démonstrations par récurrence

Remarque importante : La phase d'initialisation est essentielle. En effet, si par exemple $\mathcal{P}(n)$ est la propriété « 10^n est multiple de 9 », on a $10^n = 9 \times k$ implique

$10^{n+1} = 10^n \times 10 = 9 \times (k \times 10)$ et l'on a bien $\mathcal{P}(n) \implies \mathcal{P}(n+1)$ mais la propriété est évidemment fausse pour tout n .

La propriété suivante se démontre par récurrence et sera bien utile par la suite.

Propriété 6

Pour tout réel positif x et tout entier naturel n , on a $(1+x)^n \geq 1+nx$.

Démonstration : Soit x un réel positif.

On appelle, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$ la propriété « $(1+x)^n \geq 1+nx$ ».

- Initialisation : Pour $n=0$, on a $(1+x)^0 = 1 = 1+0x$ et $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Hérédité : On suppose que pour un entier naturel n , $\mathcal{P}(n)$ est vraie. C'est l'hypothèse de récurrence.

On a $(1+x)^{n+1} = (1+x)(1+x)^n \underset{1+x>0}{\overset{\mathcal{P}(n)}{\geq}} (1+x)(1+nx) = 1+x+nx+nx^2 \geq 1+(n+1)x$ et $\mathcal{P}(n+1)$ vraie.

- Conclusion : la propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie et la propriété $\mathcal{P}(n)$ est héréditaire à partir du rang 0 donc, par récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier n . $\square$

3 Limite d'une suite : définition

Lorsque l'on étudie une suite, ce sont souvent les termes de rang élevé ou ceux de rang tendant vers l'infini qui nous intéressent et non pas les premiers termes. On étudie alors le comportement asymptotique de la suite, c'est-à-dire le comportement de la suite lorsque n tend vers l'infini.

Définition 6 Suites convergentes

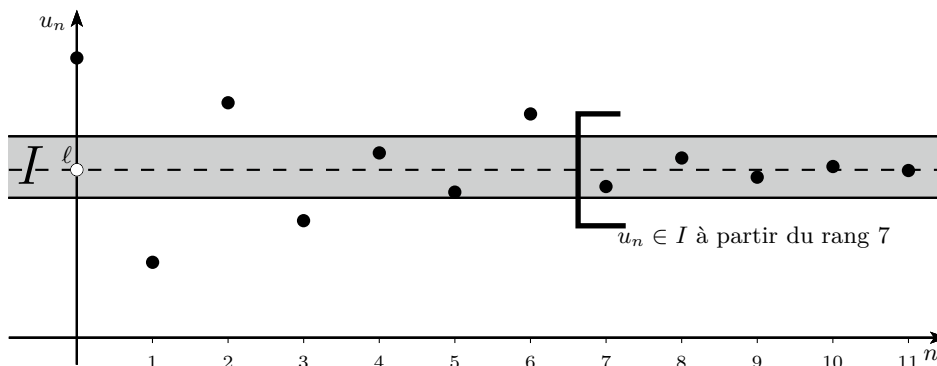
Soit ℓ un réel et soit $u = (u_n)_{n \geq n_0}$ une suite.

(u_n) converge vers ℓ (ou a pour limite ℓ) signifie que tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite (u_n) à.p.c.r. On dit alors que (u_n) est convergente.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \iff u_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$$

$$\iff \forall I \text{ intervalle ouvert contenant } \ell, \underbrace{\exists n_1 \geq n_0, \forall n \geq n_1, u_n \in I}_{\text{à.p.c.r.}}$$

Une suite qui ne converge pas vers un réel est dite **divergente**.



Remarques :

- La définition suppose de connaître le nombre ℓ avant de démontrer que c'est bien la limite de (u_n) .
- On peut réécrire cette définition en disant « tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite (u_n) sauf un nombre fini d'entre eux ».
- Converger vers ℓ signifie que l'on est aussi proche de ℓ que l'on veut à partir d'un certain rang.
- Les intervalles I doivent impérativement être ouverts. En effet, on pourrait prendre $I =]\ell - 1; \ell]$, ou même $\{\ell\}$, et ainsi être proche de ℓ mais pas dans I .
- La limite d'une suite ailleurs qu'en l'infini n'a pas de sens (on n'écrit d'ailleurs pas toujours $n \rightarrow +\infty$) : n ne peut tendre vers 13 par exemple puisque soit $n = 13$, soit n est « loin » de 13.
- Pour démontrer que (u_n) converge vers ℓ , on démontre souvent que $|u_n - \ell|$ peut être aussi petit que l'on veut et converge donc vers 0.
- La définition impose de tester tous les intervalles ouverts autour de ℓ mais il faut bien s'imaginer que ce sont les « petits » intervalles autour de ℓ qui sont intéressants et qui nécessitent de prendre les termes les plus « lointains » de la suite, au contraire de $\mathbb{R}$ par exemple, qui les contient tous.
- Attention à la coexistence des deux notations $\xrightarrow{n \rightarrow +\infty}$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty}$ qu'il ne faut surtout pas mélanger. La limite ne tend pas et la fonction n'est pas égale à sa limite. On est ici entre *infini potentiel* et *infini achevé* mais cela nous entraîne sur un sujet philosophique qui n'est pas l'objet de ce cours.

Exemples : ◦ La suite $(\frac{1}{n})_{\mathbb{N}^*}$ converge vers 0 : Soit I un intervalle ouvert contenant 0. Il existe alors $\varepsilon \in I$ positif. Pour tout $n > \frac{1}{\varepsilon}$, on a $0 < \frac{1}{n} < \varepsilon$ donc $\frac{1}{n} \in I$ à partir du rang $\text{Ent}(\frac{1}{\varepsilon}) + 1$ où l'on note **Ent**(x) la **partie entière** de x : le plus grand entier inférieur ou égal à x .

◦ La suite $(-1)^n$ diverge : Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Si $\ell = 1$, l'intervalle ouvert $]0; 2[$ ne contient pas une infinité de termes, ceux de rang impair. De même si $\ell = -1$ pour $] -2; 0[$ et les rangs pairs. Si $\ell \neq \pm 1$, on peut aisément trouver un intervalle ouvert contenant ℓ mais ne contenant ni 1 ni -1 , ne contenant donc aucun terme de la suite.

Propriété 7 *Unicité de la limite*

Si une suite est convergente, alors sa limite est unique.

Démonstration : Soit (u_n) une suite convergeant vers un réel ℓ et soit λ un réel différent de ℓ . Nous allons montrer que (u_n) ne peut converger vers λ .

Supposons $\lambda < \ell$. Posons $\mu = \frac{\ell + \lambda}{2}$ et $I =]\mu; +\infty[$. On a $\lambda < \mu < \ell$ donc $\ell \in I$ et $u_n \in I$ à partir d'un certain rang n_0 puisque (u_n) converge vers ℓ . Ainsi $u_n \notin]-\infty; \mu[$ à partir du rang n_0 alors que $\lambda \in]-\infty; \mu[$. (u_n) ne peut donc converger vers λ . (Si $\lambda > \ell$, il suffit de changer I en $]-\infty; \mu[$). $\square$

Définition 7 *Suite tendant vers l'infini*

Une suite admet $+\infty$ pour limite si tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$ contient tous ses termes à.p.c.r.

On définit de façon analogue une suite ayant $-\infty$ pour limite.

Remarque : Une suite tendant vers l'infini est divergente mais la réciproque est fausse : $(-1)^n, \cos(n), \dots$ (cf. devoir n° 2 page 423).

Exemple : La suite $u_n = 2n$ tend vers l'infini. En effet, $\forall A \in \mathbb{R}, u_n > A$ dès que $n \geq \text{Ent}(\frac{A}{2}) + 1$.

4 Théorèmes & calculs de limites

Montrer la convergence d'une suite au moyen de la définition est souvent difficile. Il faut d'abord conjecturer le nombre ℓ puis démontrer une certaine propriété pour tous les intervalles contenant ℓ .

Les résultats suivants vont nous permettre de démontrer des convergences de suites plus aisément.

4.1 Limites de référence

Théorème 4

- $\lim_{n \rightarrow \infty} n = \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} n^p = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = +\infty \quad (p \in \mathbb{N}^*).$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 0 \quad (p \in \mathbb{N}^*).$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \exp(n) = +\infty.$

Dém. : Soient $A \in \mathbb{R}^+$ et $n \in \mathbb{N}$. $\sqrt{\cdot}$ étant croissante, on a $n \geq A^2 \implies \sqrt{n} \geq A$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} = +\infty$.

La limite de l'exponentielle sera démontrée dans l'exercice 22 en page 26. $\square$

4.2 Opérations sur les limites

Le théorème suivant est admis. Ses résultats sont très intuitifs et correspondent aux opérations « naturelles » dans $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Il faut toutefois faire très attention aux **formes indéterminées** (F.I.) pour lesquelles on ne peut conclure directement.

Théorème 5 Soient $(u_n)_{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{\mathbb{N}}$ deux suites, ℓ et ℓ' deux réels.

Somme

$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n + v_n)$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I.

Produit

$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$	ℓ	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	0
$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n \times v_n)$	$\ell \times \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I.

En particulier, $(k \times u_n)$ converge vers $k \times \ell$, pour $k \in \mathbb{R}^*$ et $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Quotient On suppose que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n \neq 0$.

- Cas où $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est **positive** à.p.c.r.

$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$	ℓ	ℓ	0	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim_{n \rightarrow \infty} v_n$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	0	0 avec $v_n > 0$	0 avec $v_n < 0$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$
$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	F.I.	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$ selon signe de ℓ'	F.I.

- Dans le cas où $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est **négative** à.p.c.r., on construit un tableau analogue.

Remarque importante : Les formes indéterminées sont donc « $\infty - \infty$ », « $0 \times \infty$ », « $\frac{0}{0}$ » et « $\frac{\infty}{\infty}$ ». Ce sont des formes dont on ne peut prédire le résultat puisqu'il dépend des suites étudiées. En voici des exemples :

- $u_n = n^2 - n$, $v_n = 2n - 3n^2$ et $w_n = 4(n - 5) - (4n - 23 + \frac{1}{n})$: elles sont de la forme « $\infty - \infty$ » et n'ont pas même limite puisque

$$u_n = n^2 - n = n(n - 1) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} "+\infty(+\infty - 1)" = +\infty,$$

$$v_n = 2n - 3n^2 = n(2 - 3n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} "+\infty(2 - \infty)" = -\infty$$
 et $w_n = 3 - \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 3 - 0 = 3$.
- $x_n = \frac{1}{n} \times n^3$, $y_n = \frac{1}{n^4} \times n^2$ et $z_n = \frac{5}{n^3} \times (2n^3 + 1)$ sont de la forme « $0 \times \infty$ » et n'ont pas même limite :

$$x_n = \frac{1}{n} \times n^3 = n^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty, \quad y_n = \frac{1}{n^4} \times n^2 = \frac{1}{n^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$
 et $z_n = \frac{5n^3(2 + \frac{1}{n^3})}{n^3} = 5(2 + \frac{1}{n^3}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 5(2 + 0) = 10$.
- $s_n = \frac{1/n^3}{2/n^3}$ et $t_n = \frac{n^2}{n+1}$ sont de la forme « $\frac{0}{0}$ » ou « $\frac{\infty}{\infty}$ » et donnent des résultats divers :

$$s_n = \frac{1/n^3}{2/n^3} = \frac{1}{2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2}$$
 et $t_n = \frac{n^2}{n+1} = \frac{n^2}{n(1+1/n)} = \frac{n}{1+1/n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{+\infty}{1+0} = +\infty$.

En revanche, « $\frac{0}{\infty} = 0$ » et « $\frac{\infty}{0} = \infty$ », si les signes sont respectés, ne sont pas des formes indéterminées.

4.3 Théorèmes de comparaison

La proposition suivante est très intuitive et la démonstration utilise un type de raisonnement fondamental.

Propriété 8 Si $(u_n)_\mathbb{N}$ est une suite croissante convergeant vers un réel ℓ alors $(u_n)_\mathbb{N}$ est majorée par ℓ .

Démonstration : On raisonne par l'absurde (cf. *Faute de preuves* p. 545).

Supposons qu'il existe un entier n_0 tel que $u_{n_0} > \ell$.

- Pour tout entier $n \geq n_0$, $u_n \geq u_{n_0}$ puisque $(u_n)_\mathbb{N}$ est croissante.
- Puisque $(u_n)_\mathbb{N}$ converge vers ℓ , il existe un entier N tel que pour tout $n \geq N$, u_n appartient à $] \ell - 1 ; u_{n_0} [$, intervalle ouvert contenant ℓ .

Ainsi, $\forall n \geq N$, $u_n < u_{n_0}$.

- On en déduit que pour tout $n \geq \text{Max}(n_0; N)$, $u_n \geq u_{n_0}$ et $u_n < u_{n_0}$ ce qui est contradictoire. $\square$

Théorème 6 *Théorème des gendarmes*

Soient (u_n) , (v_n) et (w_n) trois suites.

Si $u_n \leq v_n \leq w_n$ à.p.c.r. et si (u_n) et (w_n) convergent toutes deux vers un réel ℓ , alors (v_n) converge aussi vers ℓ .

Démonstration : Soit I un intervalle ouvert contenant ℓ .

Puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = \ell$, il existe un entier r tel que $u_n \in I$ pour tout $n \geq r$ et il existe un entier s tel que $w_n \in I$ pour tout $n \geq s$. Par ailleurs, il existe un entier t tel que $u_n \leq v_n \leq w_n$ pour tout $n \geq t$.

Posons $p = \text{Max}(r; s; t)$. On a, pour tout $n \geq p$, $u_n \in I$ et $w_n \in I$ et $u_n \leq v_n \leq w_n$. I étant un intervalle, $v_n \in I$ à partir du rang p . $\square$

Théorème 7 *Limite infinie*

Soient (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n \leq v_n$ à.p.c.r.

- Si $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = +\infty$.
- Si $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = -\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = -\infty$.

Démonstration : Soit A un réel. Puisque $(u_n)_\mathbb{N}$ diverge vers $+\infty$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_n > A$ pour tout $n > n_0$. Par ailleurs, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $v_n \geq u_n$ pour tout $n > n_1$. Ainsi, pour tout $n > n_2 = \text{Max}(n_0; n_1)$, $v_n \geq u_n > A$. $\square$

Théorème 8 *Convergence monotone (Admis)*

- Toute suite croissante majorée converge.
- Toute suite décroissante minorée converge.

Remarque : La limite d'une telle suite n'est généralement pas la borne obtenue, qui n'est d'ailleurs pas unique.

Corollaire 1

- Toute suite croissante non majorée diverge vers $+\infty$.
- Toute suite décroissante non minorée diverge vers $-\infty$.

Démonstration : Soit $(u_n)_\mathbb{N}$ une suite croissante non majorée.

Pour tout réel M , il existe un entier p tel que $u_p > M$ puisque $(u_n)_\mathbb{N}$ est non majorée. Pour tout entier $n \geq p$, $u_n \geq u_p > M$ puisque $(u_n)_\mathbb{N}$ est croissante. Ainsi, $\forall M \in \mathbb{R}, \exists p \in \mathbb{N}$ tel que, $\forall n \geq p, u_n > M$ et $(u_n)_\mathbb{N}$ diverge vers $+\infty$. $\square$

4.4 Cas des suites géométriques

D'après le théorème 5, il suffit de connaître le comportement asymptotique de la suite (q^n) pour avoir celui de $(u_0 q^n)$.

Théorème 9 Soit q un réel.

- Si $q \leq -1$, la suite (q^n) n'a pas de limite ((q^n) diverge mais pas vers l'infini).
- Si $-1 < q < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$ ((q^n) converge).
- Si $q = 1$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 1$ ((q^n) converge).
- Si $q > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = +\infty$ ((q^n) diverge vers l'infini).

Démonstration : Soit q un réel.

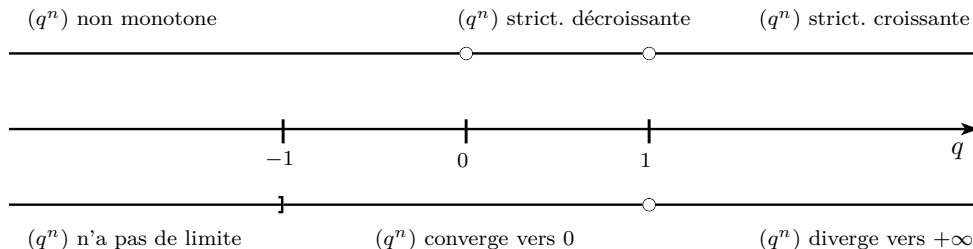
- Si $q > 1$, on peut poser $q = 1 + x$ avec $x > 0$. On a vu (prop. 6 p. 15) que, pour tout entier naturel n , $(1 + x)^n \geq 1 + nx$. Ainsi, $q^n \geq 1 + nx$. Or, $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + nx) = +\infty$ puisque $x > 0$ et le théorème 7 de comparaison, permet de conclure.
- Si $0 < q < 1$, on a $\frac{1}{q} > 1$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{q}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{q^n} = +\infty$ et ainsi $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1/q^n} = \frac{1}{+\infty} = 0$.
- Si $q = 0$, $q^n = 0 \rightarrow 0$.
- Si $-1 < q < 0$, $-|q|^n \leq q^n \leq |q|^n$. Puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} |q|^n = 0$, le th. des gendarmes permet de conclure.
- Si $q \leq -1$, les valeurs q^n appartiennent alternativement aux intervalles disjoints $]-\infty; -1]$ et $[1; +\infty[$. La suite (q^n) ne peut donc pas admettre de limite, même infinie. $\square$

Exemple : Soit $(u_n)_\mathbb{N}$ la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 0,9 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{10} \end{cases}$ On a $u_1 = 0,09$, $u_2 = 0,009$, $u_3 = 0,0009$, $u_4 = 0,00009$. $(u_n)_\mathbb{N}$ est géométrique de raison $q = \frac{1}{10}$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

Par ailleurs, si on note $S_n = \sum_{i=0}^{i=n} u_i$, on a $S_0 = 0,9$, $S_1 = 0,99$, $S_2 = 0,999$, $S_3 = 0,9999$, $S_n = 0,99\dots9$. Or $S_n = u_0 \frac{1 - 10^{-(n+1)}}{1 - 10^{-1}} = \frac{0,9}{0,9} (1 - 10^{-(n+1)})$ donc $S_n = 1 - 0,1^{n+1}$ tend vers 1 lorsque n tend vers l'infini puisque $q = 0,1 \in]-1; 1[$. On démontre ainsi que $0,9999\dots = 1$.

Voici maintenant une illustration des différents comportements des suites géométriques. On fera attention aux valeurs marginales de q (-1 , 0 et 1) et lorsque l'on multipliera par u_0 .

Comportements des suites (q^n)



4.5 Cas des suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$

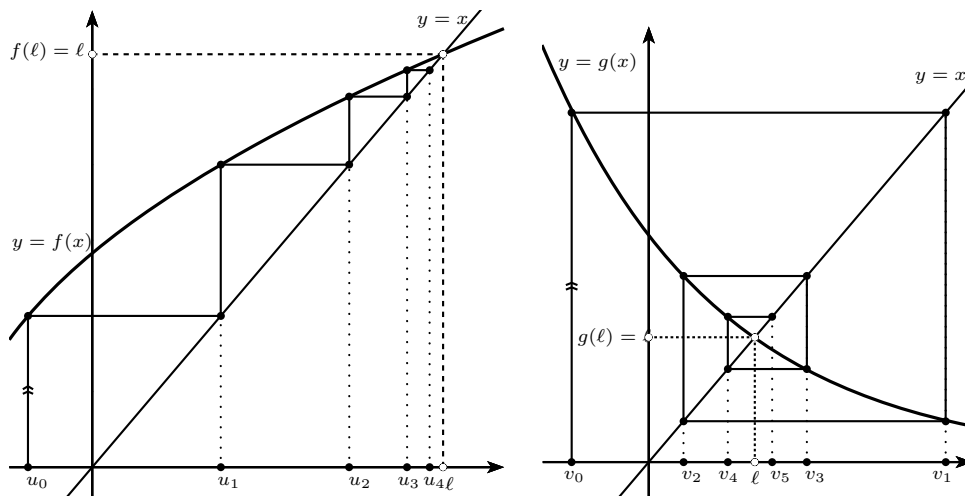
Propriété 9 Soit f une fonction continue (cf. chap. IV) sur un intervalle J tel que $f(J) \subset J$ et soit $u_0 \in J$, $u_{n+1} = f(u_n)$ une suite récurrente.

Si $(u_n)_\mathbb{N}$ converge vers un réel ℓ et si $\ell \in J$, alors $f(\ell) = \ell$.

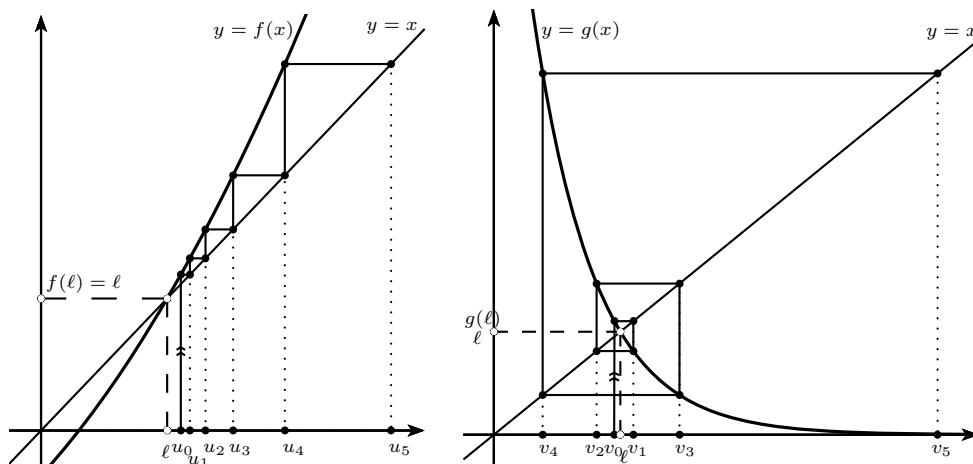
Un tel réel ℓ est appelé **point fixe** de la fonction f .

Remarque : La réciproque est fausse. Ce n'est pas parce que la fonction admet un point fixe que la suite converge. Les graphes suivants illustrent différents cas de figures.

Point fixe attractif



Point fixe répulsif



Conjecture : Quelle propriété de f semble déterminer le caractère attractif ou répulsif d'un point fixe ? Que pourrait être un point fixe *indifférent* ?

Vous aurez bien sûr remarqué que les tangentes aux points fixes attractifs ont des coefficients directeurs inférieurs à 1 en valeur absolue alors que celles aux points fixes répulsifs ont des coefficients directeurs supérieurs à 1 en valeur absolue.

Un point fixe indifférent aurait alors une tangente de coefficient directeur égale à ± 1 tandis qu'un point fixe ayant une tangente de coefficient directeur nul serait qualifié de *super-attractif*.

Suites, calculatrice & algorithmes

Avec une $\boxed{\text{T1}}$:

- * Activer le mode suite : $\boxed{\text{mode}}$ option Suite ou Sequ selon la langue.
Ne pas oublier de revenir à l'option "Fonc" si l'on veut tracer des fonctions.
- * Entrer la suite : $\boxed{f(x)}$.
 - $nMin$ correspond au premier indice,
 - $u(nMin)$ correspond au premier terme.
 - Entrer dans $u(n) =$ l'expression de la suite en fonction de n et/ou de $u(n-1)$.
Le n s'obtient avec $\boxed{X,T,\theta,n}$, les u et v avec $\boxed{2nde} \boxed{7}$ et $\boxed{8}$.
Ne pas oublier que les « Graph 1,2 et 3 » ne doivent pas être grisés.
- * Pour un tableau de valeurs, définir la plage :
 $\boxed{2nde} \boxed{\text{fenêtre}}$ (déf.table) : début au premier indice et un pas de 1.
Puis affichage avec $\boxed{2nde} \boxed{\text{graphe}}$ (table).
- * Pour une représentation graphique d'une suite définie par récurrence :
 $\boxed{2nde} \boxed{\text{zoom}}$ (format), menu Esc, CoordRec et régler la fenêtre.
 $\boxed{\text{graphe}}$ pour la courbe,
 $\boxed{\text{trace}}$ pour la suite que l'on affiche pas à pas avec $\boxed{\blacktriangleright}$.

Avec une Casio, on sélectionne le menu RECUR et le reste est plutôt limpide si l'on remarque que les suites s'appellent a_n , b_n et c_n .

Quant aux **algorithmes**, faites donc tourner celui-ci :

Variables	I est un entier
Initialisation	Affecter à I la valeur 23
Début	Tant que $I < 511$ Affecter $I + 1$ à I Tourner la page Fin Tant que Faire les exercices de la planche dédiée aux algorithmes.
Fin	

Exercices

SUITES NUMÉRIQUES

Exercice 1 Pour $n \in \mathbb{N}$, les suites suivantes sont-elles définies explicitement en fonction de n , du type $u_n = f(n)$, définies par récurrence, du type $u_{n+1} = f(u_n)$, par récurrence double, du type $u_{n+2} = f(u_n; u_{n+1})$, ou d'un autre type à déterminer? Donnez alors la fonction f correspondante. En calculer les premiers termes. Sont-elles arithmétiques, géométriques ou ni l'un, ni l'autre? En donner la raison et le premier terme le cas échéant.

$$a_n = 3n + 1$$

$$b_{n+1} = 7b_n, \quad b_3 = -21$$

$$c_{n+1} = 2c_n - 5, \quad c_0 = 1$$

$$d_{n+2} = 4d_n - d_{n+1}, \quad d_0 = 1, \quad d_1 = 1$$

$$e_{n+1} = e_n + n^2, \quad e_2 = 6$$

$$g_{2n} = -2, \quad g_{2n+1} = 2$$

$$h_n = 6h_{n+1} - 5, \quad h_2 = 1$$

$$j_n = 2n - j_n$$

$$k_{n+1} = 2k_n - nk_{n+2}, \quad k_0 = 0, \quad k_1 = 1$$

Exercice 2 La suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est définie par son premier terme u_0 et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n + 6n + 30$.

1. Démontrer que si u_k est un entier pair, alors u_{k+1} l'est aussi.
2. Démontrer que si u_k est un multiple de 3, alors u_{k+1} l'est aussi.
3. À quelle condition tous les termes de la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ sont-ils des entiers pairs? sont-ils des multiples de 3? des multiples de 6?

Exercice 3 Soit la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ définie par $u_n = 4^n - 1$. Calculer les premiers termes de la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ puis les diviser par 3. Émettre une conjecture puis la démontrer.

Exercice 4 Redémontrer par récurrence la formule $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Exercice 5 Soit $(u_n)_{\mathbb{N}}$: $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 3u_n - 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Montrer que $u_n = 3^n + 1$ pour tout entier.

Exercice 6 La suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 \in]0; 1[$ et pour tout entier n , $u_{n+1} = u_n(2 - u_n)$. En utilisant une fonction numérique pertinente, démontrer par récurrence que pour tout entier n , $0 < u_n < 1$.

Exercice 7 Démontrer par récurrence, pour tout entier naturel non nul n , la formule de dérivation $(x^n)' = nx^{n-1}$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8 Démontrer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la formule $\sum_{i=1}^{i=n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Exercice 9 Démontrer, pour $n \geq 2$, la formule $\prod_{i=2}^{i=n} \left(1 - \frac{1}{i^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$.

Exercice 10 Quels sont les entiers naturels n tels que $2^n > 2n$? Justifier.

Exercice 11 Justifier l'appellation *suite* des nombres premiers.

Exercice 12 On appelle $(T_n)_{\mathbb{N}^*}$ la suite des *nombres triangulaires*, représentée ainsi :



On a $T_1 = 1$, $T_2 = 3$ et $T_3 = 6$.

1. Donner T_4 , T_5 et T_6 .
2. Exprimer T_{n+1} en fonction de T_n .
3. Conjecturer l'expression de $2T_n$ puis celle de T_n en fonction de n .
4. Démontrer cette conjecture.

Exercice 13 Récurrence double, récurrence forte

1. On considère la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 3$, $u_1 = 5$
et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n$.

Montrer par *récurrence double* que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^{n+1} + 1$.

2. On considère la suite $(v_n)_{\mathbb{N}}$ définie par $v_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \sum_{k=0}^n v_k$.

Montrer par *récurrence forte* que, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = 2^{n-1}$.

Exercice 14 Soient les suites définies sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \frac{2n+1}{n+3}$, $v_n = -(n+1)^2$

et $w_n = \frac{(n+5)^2 \sqrt{n}}{n+1}$.

1. Conjecturer la limite éventuelle des suites $(u_n)_{\mathbb{N}}$, $(v_n)_{\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{\mathbb{N}}$ puis démontrer ces conjectures.
2.  Écrire un programme donnant le premier rang tel quel w_n soit strictement supérieur à un réel A donné.



Exercice 15 Show by examples that if (x_n) and (y_n) are two divergent sequences then the sequence $(x_n + y_n)$ is not necessarily divergent.
Do the same for the sequence $(x_n y_n)$.

Exercice 16 Étudier la convergence des suites $(u_n = 3n^2 + n - 5)_{\mathbb{N}}$,
 $(v_n = 3n^2 - 7n - 5)_{\mathbb{N}}$, $\left(w_n = \frac{3n+5}{7-2n}\right)_{\mathbb{N}}$, $\left(r_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}\right)_{\mathbb{N}^*}$,
 $\left(s_n = \frac{2n+1-3n^2}{n^2}\right)_{\mathbb{N}^*}$ et $\left(t_n = \left(\frac{2}{n} - 1\right)\left(5 - \frac{7}{2\sqrt{n}}\right)\right)_{\mathbb{N}^*}$.

Exercice 17

1. Proposer deux suites $(u_n)_\mathbb{N}$ et $(v_n)_\mathbb{N}$ vérifiant $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = -\infty$ et telles que :

$$\left. \begin{array}{l} \text{(a)} \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n + v_n) = 0. \\ \text{(b)} \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n + v_n) = \pi. \\ \text{(c)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = 0. \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \text{(d)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = -10. \\ \text{(e)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = -\infty. \\ \text{(f)} \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \times v_n = 0. \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \text{(g)} \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \times v_n = -3. \\ \text{(h)} \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \times v_n = -\infty. \end{array} \right.$$

2. Même exercice avec deux suites convergeant vers 0.

Exercice 18 Déterminer la limite éventuelle des suites (u_n) et (v_n) puis celle des suites $(u_n + v_n)$, $(u_n \times v_n)$ et $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ pour :

(a) $u_n = \frac{2n}{n + \sqrt{n}}$ et $v_n = \frac{3n + 5}{n + 2}$.

(b) $u_n = \frac{n^2 + 1}{2(n + 3)^2}$ et $v_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Exercice 19 Étudier la convergence des suites $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)_{\mathbb{N}^*}$, $\left(\frac{3 - 5 \cos(6n^2)}{n}\right)_{\mathbb{N}^*}$ et $(\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1})_{\mathbb{N}^*}$.

Exercice 20 Étudier la limite des suites $(n^2 + (-1)^n)_\mathbb{N}$, $(n!)_{\mathbb{N}^*}$ et $\left(1 - \frac{n!}{n}\right)_{\mathbb{N}^*}$.

Exercice 21 Étudier la limite des suites $(3(-2)^{n-5})_\mathbb{N}$, $\left(17 - \frac{4}{3^{n+1}}\right)_\mathbb{N}$, $(e^n)_\mathbb{N}$ et $(e^{-n})_\mathbb{N}$.

Exercice 22 Limites en l'infini de l'exponentielle

- Démontrer par récurrence que $\exp(n) \geq n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Retrouver alors la limite en $+\infty$ puis celle en $-\infty$ de $\exp(n)$.

Exercice 23 Soit $(u_n)_\mathbb{N}$ la suite définie par $u_0 = 1$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.

- Justifier que la suite $(u_n)_\mathbb{N}$ est bien définie.
- Montrer que $0 \leq u_n \leq 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
- Démontrer que la suite $(u_n)_\mathbb{N}$ est croissante.
Que dire de son comportement à l'infini ?

Exercice 24

1. VouF ? Justifier.

- Si une suite est croissante, alors elle tend vers $+\infty$.
- Si une suite tend vers $+\infty$, alors elle est croissante.

- Calculer les premiers termes de la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n + (-1)^n$.
 - La suite $(u_n)_\mathbb{N}$ est-elle majorée ? Est-elle croissante ? Justifier.
 - La condition « croissante et non majorée » suffit pour conclure que la limite d'une suite est $+\infty$. Est-elle nécessaire ?

3. Dans les deux cas suivants, préciser si la condition soulignée est nécessaire, suffisante, nécessaire et suffisante, ni nécessaire ni suffisante.

(a) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \ell \in \mathbb{R}$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - v_n) = 0$.

(b) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - v_n) = 0$.

Exercice 25 Limites et variations

Dans chaque cas, indiquer, construire ou tracer une suite :

1. qui converge vers zéro en décroissant ;
2. qui converge vers zéro en croissant ;
3. qui converge vers zéro, ayant une infinité de termes strictement positifs et une infinité strictement négatifs ;
4. qui diverge vers plus l'infini en croissant ;
5. qui diverge vers plus l'infini et qui n'est pas croissante, même à p.c.r.

Exercice 26 Calculer les premiers termes puis conjecturer le comportement asymptotique, c.-à-d. la limite éventuelle, des suites définies par

$$\begin{cases} u_{2n} = \frac{(-1)^n}{n+3} \\ u_{2n+1} = \frac{4}{n^2+5} \end{cases}, \quad \begin{cases} v_{2n} = n^3 - 7 \\ v_{2n+1} = 3 - n^2 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} w_{3n} = \frac{-1}{n+2} \\ w_{3n+1} = \frac{6}{n^2+3} \\ w_{3n+2} = \frac{3-n}{5+n} \end{cases}.$$

Exercice 27 La suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = -2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 1$.

1. À l'aide la calculatrice, calculer et représenter les quinze premiers termes de cette suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$. Quelle conjecture peut-on établir ?
2. On note α la limite supposée de la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ et l'on considère la suite $(v_n)_{\mathbb{N}}$ définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - \alpha$.
 - (a) Calculer les valeurs exactes des trois premiers termes de la suite $(v_n)_{\mathbb{N}}$.
 - (b) Conjecturer la nature de la suite $(v_n)_{\mathbb{N}}$ puis démontrer cette conjecture.
 - (c) Exprimer v_n puis u_n en fonction de n . En déduire la limite de la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$.

3. (S_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

Exprimer S_n en fonction de n puis en déduire sa limite.

Exercice 28 Déterminer la limite de la suite $u_0 = 1, u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$ étudiée dans l'exercice 23 p. 26.

§ À l'aide d'un programme Python, déterminer le rang à partir duquel u_n est proche de sa limite à 10^{-k} près.

Exercice 29 Calculer l'éventuelle limite finie des suites $u_0 = 1, u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 1, v_0 = \frac{3}{2}, v_{n+1} = (v_n - 1)^2 + 1$ et $w_0 = 4, w_{n+1} = \frac{9}{4w_n}$. Pensez-vous qu'elles vont effectivement converger ?

Exercice 30 Les suites $(u_n)_\mathbb{N}$ et $(v_n)_\mathbb{N}$ sont définies par : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{5}{n+1}$

et $(v_n)_\mathbb{N} : \begin{cases} v_0 = -1 \\ v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n + 1. \end{cases}$

1. Donner les quatre premiers termes des suites $(u_n)_\mathbb{N}$ et $(v_n)_\mathbb{N}$.
2. Montrer que la suite $(u_n)_\mathbb{N}$ est strictement décroissante.
3. (a) Montrer que la suite $z_n = v_n - 2, \forall n \in \mathbb{N}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.
(b) En déduire l'expression de $(z_n)_\mathbb{N}$ puis celle de $(v_n)_\mathbb{N}$ en fonction de n .
(c) Étudier les variations des suites $(z_n)_\mathbb{N}$ et $(v_n)_\mathbb{N}$.
(d) Donner une valeur approchée de la somme $S_{17} = z_0 + z_1 + \dots + z_{17}$ puis en déduire $v_0 + v_1 + \dots + v_{17}$.
(e) Étudier les limites des suites $(z_n)_\mathbb{N}$ et $(v_n)_\mathbb{N}$.

Exercice 31 On considère une suite $(u_n)_\mathbb{N}$ définie sur $\mathbb{N}$ dont aucun terme n'est nul. On définit alors la suite $(v_n)_\mathbb{N}$ par $v_n = -\frac{2}{u_n}$.

Pour chaque proposition, indiquer si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Si $(u_n)_\mathbb{N}$ est convergente alors $(v_n)_\mathbb{N}$ est convergente.
2. Si $(u_n)_\mathbb{N}$ est minorée par 2 alors $(v_n)_\mathbb{N}$ est minorée par -1 .
3. Si $(u_n)_\mathbb{N}$ est monotone alors $(v_n)_\mathbb{N}$ est monotone.
4. Si $(u_n)_\mathbb{N}$ est divergente alors $(v_n)_\mathbb{N}$ converge vers 0.

Exercice 32 On note u_n le nombre de foyers, exprimé en millions, possédant un téléviseur à écran plat l'année n . On pose $n = 0$ en 2005 et on suppose que l'on a $u_0 = 1$ et, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{10}u_n(20 - u_n)$.

1. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; 20]$ par $f(x) = \frac{x}{10}(20 - x)$.
(a) Étudier les variations de la fonction f sur $[0; 20]$.
(b) En déduire que pour tout x de $[0; 10]$, $f(x) \in [0; 10]$.
2. Prouver que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$.
3. Prouver que la suite $(u_n)_\mathbb{N}$ est convergente et déterminer sa limite.

Exercice 33 La suite $(u_n)_\mathbb{N}$ est définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2 + 1}}$.

1. Prouver que pour tout n , $u_n > 0$ et démontrer que la suite $(u_n)_\mathbb{N}$ est décroissante. Qu'en déduire ?
2. (a) Donner les valeurs exactes des cinq premiers termes de la suite.
(b) Que conjecturer concernant l'expression de u_n en fonction de n ? Le démontrer par récurrence.
3. Quelle est la limite de la suite $(u_n)_\mathbb{N}$?

Convergez vers la page 421 pour réaliser le devoir n° 421, sautez sur la page 423 pour le devoir n° 423 puis pointez vers la page 577 pour des exercices plus approfondis et glissez enfin sur la page 511 pour tout savoir ou presque sur les algorithmes.

SUITES NUMÉRIQUES

Exercice 1

- $a_n = 3n + 1 = A(n)$ pour $A(x) = 3x + 1$: définie explicitement en fonction de n .
 $a_0 = 1, a_1 = 4, a_2 = 7, a_3 = 10$.
 $a_{n+1} - a_n = 3(n+1) + 1 - (3n+1) = 3$: (a_n) est arithmétique de raison 3 et de premier terme $a_0 = 1$.
- $b_3 = -21, b_{n+1} = 7b_n = B(b_n)$ pour $B(x) = 7x$: définie par récurrence.
 $b_3 = -21 = 7b_2, b_2 = \frac{b_3}{7} = -3, b_1 = \frac{b_2}{7} = -\frac{3}{7}, b_0 = \frac{b_1}{7} = -\frac{3}{49}$.
 $\frac{b_{n+1}}{b_n} = 7$: (b_n) est géométrique de raison 7 et de premier terme $b_0 = -\frac{3}{49}$.
- $c_0 = 1, c_{n+1} = 2c_n - 5 = C(c_n)$ pour $C(x) = 2x - 5$: définie par récurrence.
 $c_0 = 1, c_1 = 2c_0 - 5 = -3, c_2 = 2c_1 - 5 = -11, c_3 = 2c_2 - 5 = -27$.
 $c_2 - c_1 \neq c_1 - c_0$ donc (c_n) n'est pas arithmétique. $\frac{c_2}{c_1} \neq \frac{c_1}{c_0}$ donc (c_n) n'est pas géométrique. En revanche, elle est *arithmético-géométrique* car C est affine.
- $d_0 = 1, d_1 = 1, d_{n+2} = 4d_n - d_{n+1} = D(d_n; d_{n+1})$ pour $D(x; y) = 4x - y$: définie par récurrence double.
 $d_0 = 1, d_1 = 1, d_2 = 4d_0 - d_1 = 3, d_3 = 4d_1 - d_2 = 1, d_4 = 4d_2 - d_3 = 11$.
 $d_2 - d_1 \neq d_1 - d_0$ donc (d_n) n'est pas arithmétique. $\frac{d_2}{d_1} \neq \frac{d_1}{d_0}$ donc (d_n) n'est pas géométrique.
- $e_2 = 6, e_{n+1} = e_n + n^2 = E(n; e_n)$ pour $E(x; y) = y + x^2$: ni explicitement en fonction de n , ni par récurrence.
 $e_2 = 6 = e_1 + 1^2, e_1 = e_2 - 1 = 5 = e_0 + 0^2, e_0 = e_1 - 0 = 5, e_3 = e_2 + 2^2 = 10, e_4 = e_3 + 3^2 = 19$.
 $e_2 - e_1 \neq e_1 - e_0$ donc (e_n) n'est pas arithmétique. $\frac{e_2}{e_1} \neq \frac{e_1}{e_0}$ donc (e_n) n'est pas géométrique.
- $g_{2n} = -2, g_{2n+1} = 2$: $g_n = -2(-1)^n$ est trivialement géométrique de raison -1 et de premier terme -2 . Elle ne peut s'écrire sous une forme $G(n)$ avec $G(x) = a^x$. En revanche, $G(x) = -2\cos(\pi x)$ fonctionne bien : $g_n = G(n)$.
- $h_2 = 1, h_n = 6h_{n+1} - 5$: $h_{n+1} = \frac{1}{6}h_n + \frac{5}{6} = H(h_n)$ pour $H(x) = \frac{1}{6}x + \frac{5}{6}$: définie par récurrence.
 $h_2 = 1, h_1 = 6h_2 - 5 = 6 \times 1 - 5 = 1, h_0 = 6h_1 - 5 = 6 \times 1 - 5 = 1$,
 $h_3 = \frac{1}{6}h_2 + \frac{5}{6} = \frac{1}{6} \times 1 + \frac{5}{6} = 1$: (h_n) semble constante et donc arithmétique de raison nulle.
- $j_n = 2n - j_n \iff 2j_n = 2n \iff j_n = n = J(n)$ pour $J(x) = x$: définie explicitement en fonction de n . $j_0 = 0, j_1 = 1 \dots (j_n)$ est arithmétique de raison 1.
- $k_0 = 0, k_1 = 1, k_{n+1} = 2k_n - (n+1)k_{n+2}$
 $\iff k_{n+2} = \frac{2}{n+1}k_n - \frac{1}{n+1}k_{n+1} = K(n; k_n; k_{n+1})$

pour $K(x; y; z) = \frac{2}{x+1} \cdot y - \frac{1}{x+1} \cdot z$: ni explicitement en fonction de n , ni par récurrence.

$$k_0 = 0, \quad k_1 = 1, \quad k_2 = k_{0+2} = \frac{2}{0+1}k_0 - \frac{1}{0+1}k_{0+1} = 2 \times 0 - 1 \times 1 = -1,$$

$$k_3 = k_{1+2} = \frac{2}{1+1}k_1 - \frac{1}{1+1}k_{1+1} = 1 \times 1 - \frac{1}{2}(-1) = \frac{3}{2},$$

$$k_4 = k_{2+2} = \frac{2}{2+1}k_2 - \frac{1}{2+1}k_{2+1} = \frac{2}{3}(-1) - \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} = -\frac{7}{6}.$$

(k_n) n'est ni arithmétique ($k_1 - k_0 \neq k_2 - k_1$), ni géométrique ($\frac{k_0}{k_1} \neq \frac{k_1}{k_2}$).

Exercice 2 La suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est définie par son premier terme u_0 et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n + 6n + 30$.

1. Si u_k est un entier pair, alors il existe un entier naturel p tel que $u_k = 2p$.
Ainsi, $u_{k+1} = u_k + 6k + 30 = 2p + 6k + 30 = 2(p + 3k + 15)$ et u_{k+1} est un entier pair.
2. Si u_k est un multiple de 3, alors il existe un entier naturel q tel que $u_k = 3q$.
Ainsi, $u_{k+1} = u_k + 6k + 30 = 3q + 6k + 30 = 3(q + 2k + 10)$ et u_{k+1} est un multiple de trois.
3. Dans les deux cas, nous avons démontré l'hérédité de la proposition. Selon le principe de récurrence, la phase d'initialisation est alors suffisante pour que la propriété soit vraie pour les entiers plus grands. Elle est par ailleurs nécessaire car il est demandé que les propriétés soient vraies dès le premier terme. Ainsi,
 - tous les termes de $(u_n)_{\mathbb{N}}$ sont des entiers pairs ssi u_0 est un entier pair,
 - tous les termes de $(u_n)_{\mathbb{N}}$ sont des multiples de 3 ssi u_0 est un multiple de 3,
 - tous les termes de $(u_n)_{\mathbb{N}}$ sont des multiples de 3 pairs ssi u_0 multiple de 6.

Exercice 3 On a $u_0 = 4^0 - 1 = 0$, $u_1 = 4^1 - 1 = 3$, $u_2 = 4^2 - 1 = 15$, $u_3 = 4^3 - 1 = 63$, $u_4 = 4^4 - 1 = 255$ et $\frac{u_0}{3} = 0$, $\frac{u_1}{3} = 1$, $\frac{u_2}{3} = 5$, $\frac{u_3}{3} = 21$, $\frac{u_4}{3} = 85$, ... On peut conjecturer que u_n est divisible par 3 pour tout entier n .

Soit la proposition $\mathcal{P}(n)$: « u_n est divisible par 3 ».

- $u_0 = 0$ est divisible par 3 et $\mathcal{P}(0)$ est vraie (initialisation).
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Ainsi, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = 3k$. On a $u_{n+1} = 4^{n+1} - 1 = 4 \times 4^n - 1 = 4 \times 4^n - 4 + 3 = 4 \times (4^n - 1) + 3 = 4 \times 3k + 3 = 3(4k + 1)$ et $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie (hérédité).
- Par récurrence, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 0$ (conclusion).

Exercice 4 Soit $\mathcal{P}(n) : 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

On a $\mathcal{P}(1) : 1 = \frac{1 \times 2}{2}$ et $\mathcal{P}(1)$ est vraie. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.

On a $(1 + 2 + \dots + n) + (n + 1) = \frac{n(n+1)}{2} + (n + 1) = \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} = \frac{(n+2)(n+1)}{2}$ et $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie. Ainsi, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier $n \geq 1$.

Exercice 5 $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = 3u_n - 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Soit $\mathcal{P}(n) : u_n = 3^n + 1$.

On a $u_0 = 3^0 + 1 = 1 + 1 = 2$ et $\mathcal{P}(0)$ est vraie. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.

On a $u_{n+1} = 3u_n - 2 = 3(3^n + 1) - 2 = 3 \times 3^n + 3 - 2 = 3^{n+1} + 1$

et $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie. Ainsi, $u_n = 3^n + 1$ pour tout n .

Exercice 6 $u_0 \in]0; 1[$, $u_{n+1} = u_n(2 - u_n)$. ? $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$?

Posons $f(x) = x(2 - x)$ sur $\mathbb{R}$. f est dérivable et $f'(x) = 2 - 2x = 2(1 - x)$ qui est strictement positive sur $]0; 1[$ donc f est strictement croissante et pour $x \in]0; 1[$,

$$f(x) \in]f(0); f(1)[=]0; 1[.$$

Posons $\mathcal{P}(n) : u_n \in]0; 1[$. $\mathcal{P}(0)$ est vraie et supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie.

On a $u_{n+1} = u_n(2 - u_n) = f(u_n) \in]0; 1[$ et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$.

Exercice 7 Soit la proposition $\mathcal{P}(n) : \langle (x^n)' = nx^{n-1} \rangle$.

• *Initialisation* : Puisque la fonction $x \mapsto x$ est affine, sa dérivée est égale à son coefficient directeur 1 et l'on a bien $(x^1)' = 1 = 1 \times x^{1-1}$. $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

• *Hérédité* : Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain $n \geq 1$.

A-t-on $(x^{n+1})' = (n+1)x^n$?

Posons $u = x$ et $v = x^n$. On a $u' = 1$ (rang 1) et $v' = nx^{n-1}$ (rang n). Puisque $x^{n+1} = x \cdot x^n = uv$, $(x^{n+1})' = u'v + uv' = 1 \times x^n + x \times nx^{n-1} = x^n + nx^n = (n+1)x^n$ et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

• *Conclusion* : $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 8 Soit la proposition $\mathcal{P}(n) : \langle \sum_{i=1}^{i=n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \rangle$.

• *Initialisation* : On a $1^2 = 1$ et $\frac{1(1+1)(2 \times 1 + 1)}{6} = \frac{6}{6} = 1$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

• *Hérédité* : Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain $n \geq 1$.

D'une part, on a, au rang $n+1$,

$$\frac{(n+1)(n+1+1)(2(n+1)+1)}{6} = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}.$$

D'autre part, $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 \stackrel{\mathcal{P}(n)}{=} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$
 $= \frac{(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)]}{6} = \frac{(n+1)[2n^2+7n+6]}{6}$ et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

• *Conclusion* : $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 9 Soit la proposition $\mathcal{P}(n) : \langle \prod_{i=2}^{i=n} \left(1 - \frac{1}{i^2}\right) = \frac{n+1}{2n} \rangle$.

• *Initialisation* : On a $1 - \frac{1}{2^2} = \frac{3}{4}$ et $\frac{2+1}{2 \times 2} = \frac{3}{4}$ donc $\mathcal{P}(2)$ est vraie.

• *Hérédité* : Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain $n \geq 2$.

On a, au rang $n+1$, $\frac{(n+1)+1}{2(n+1)} = \frac{n+2}{2(n+1)}$ et

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right) \left(1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right) &\stackrel{\mathcal{P}(n)}{=} \frac{n+1}{2n} \left(\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}\right) \\ &= \frac{n^2+2n+1-1}{2n(n+1)} = \frac{n(n+2)}{2n(n+1)} = \frac{n+2}{2(n+1)} \end{aligned}$$

et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

• *Conclusion* : $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq 2$.

Exercice 10 On a $2^0 = 1 > 2 \times 0$, $2^1 = 2 \times 1 \not> 2$, $2^2 = 4 \not> 2 \times 2$ et $2^3 = 8 > 2 \times 3$. Soit la proposition $\mathcal{P}(n) : \langle 2^n > 2n \rangle$.

• *Initialisation* : On a vu que $\mathcal{P}(3)$ est vraie.

• *Hérédité* : Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain $n \geq 3$.

On a $2^{n+1} = 2^n \times 2 \stackrel{\mathcal{P}(n)}{>} 2n \times 2 \geq 2n + 2 = 2(n+1)$ pour $n \geq 3$ et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

• *Conclusion* : $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geq 3$ ainsi que pour $n = 0$.

Remarque : Cette propriété est héréditaire à partir du rang 1 mais n'est initialisable qu'aux rangs 0 ou au moins 3.

Exercice 11 Posons $p_0 = 2, p_1 = 3, p_2 = 5, \dots, p_{n+1}$ est le plus petit entier premier strictement supérieur à p_n .

Montrons par un raisonnement par l'absurde qu'il y en a bien une infinité et qu'ainsi, $(p_n)_{\mathbb{N}}$ est bien une suite.

Supposons donc qu'il n'y a qu'un nombre fini d'entiers premiers $p_0, p_1, \dots, p_n$. Posons alors $\xi = p_0 \cdot p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n + 1$. On a alors $\xi > p_i$ pour tout $i = 0, \dots, n$ et donc ξ n'est pas premier car différent des p_i . Par ailleurs, p_0 ne divise pas ξ car p_0 divise le produit des p_i mais pas 1. De même, p_1 ne divise pas ξ , p_n ne divise pas ξ . ξ n'étant divisible par aucun nombre premier, il est lui-même premier. ζ

Exercice 12

- On construit de très jolis triangles constitués de T_n points et l'on observe que $T_4 = 10, T_5 = 15$ et $T_6 = 21$.
- On ajoute n points en écrivant la ligne n donc $T_{n+1} = T_n + n + 1$.
- On a $2T_1 = 2 = 1 \times 2, 2T_2 = 6 = 2 \times 3, 2T_3 = 12 = 3 \times 4, 2T_4 = 20 = 4 \times 5, 2T_5 = 30 = 5 \times 6$ et $2T_6 = 42 = 6 \times 7$.
D'où la conjecture $2T_n = n(n+1)$ i.e. $T_n = \frac{n(n+1)}{2}$.
- Une récurrence n'est pas vraiment nécessaire puisque, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$T_n = T_{n-1} + n = T_{n-2} + (n-1) + n = \dots = T_1 + 2 + 3 + \dots + n = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Exercice 13 Récurrence double, récurrence forte

1. Récurrence double

Soit la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $u_n = 2^{n+1} + 1$ ».

• *Initialisation double* : $2^{0+1} + 1 = 3 = u_0$ et $2^{1+1} + 1 = 5 = u_1$ donc $\mathcal{P}(0)$ et $\mathcal{P}(1)$ sont vraies.

• *Hérédité* : Supposons que $\mathcal{P}(n)$ et $\mathcal{P}(n+1)$ sont vraies pour un certain $n \geq 0$ et montrons que $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.

On a $u_{n+2} = 3u_{n+1} - 2u_n = 3(2^{(n+1)+1} + 1) - 2(2^{n+1} + 1)$

$u_{n+2} = 3 \cdot 2^{n+2} + 3 - 2^{n+2} - 2 = 2 \cdot 2^{n+2} + 1 = 2^{(n+2)+1} + 1$: $\mathcal{P}(n+2)$ est vraie.

• *Conclusion* : $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Récurrence forte

Soit la proposition $\mathcal{P}(n)$: « $v_n = 2^{n-1}$ ».

• *Initialisation* : On a $v_1 = \sum_{k=0}^0 v_k = v_0 = 1$ et $2^{1-1} = 1 = v_1$ donc

$\mathcal{P}(1)$ est vraie.

• *Hérédité* : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et supposons que $\mathcal{P}(k)$ est vraie pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a $v_{n+1} = \sum_{k=0}^n v_k = v_0 + \sum_{k=1}^n v_k = v_0 + \sum_{k=1}^n 2^{k-1} = v_0 + \sum_{k=0}^{n-1} 2^k = 1 + \frac{1-2^n}{1-2}$

$v_{n+1} = 1 + 2^n - 1 = 2^{(n+1)-1}$ et $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

• *Conclusion* : $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 14 Soient les suites définies sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \frac{2n+1}{n+3}$, $v_n = -(n+1)^2$ et $w_n = \frac{(n+5)^2\sqrt{n}}{n+1}$.

1. Pour conjecturer des limites, on peut utiliser la calculatrice ou un tableur et calculer les valeurs approchées des termes de grand rang. On peut aussi observer l'expression de ces suites : $u_n = \frac{2n+1}{n+3} \underset{+\infty}{\sim} \frac{2n}{n} = 2$, $v_n = -(n+1)^2 \underset{+\infty}{\sim} -n^2 \rightarrow -\infty$,

$$w_n = \frac{(n+5)^2\sqrt{n}}{n+1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n^2\sqrt{n}}{n} = n\sqrt{n} \rightarrow +\infty. \quad \text{Notation } \sim \text{ à ne pas utiliser car non définie !}$$

• On a $|u_n - 2| = \left| \frac{2n+1}{n+3} - 2 \right| = \left| \frac{2n+1-2(n+3)}{n+3} \right| = \left| \frac{-5}{n+3} \right| = \frac{5}{n+3} < \frac{5}{n}$.

Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, $|u_n - 2| < \varepsilon$ dès que $\frac{5}{n} < \varepsilon$ i.e. $n > \frac{5}{\varepsilon}$.

• Soit $A \in \mathbb{R}$. On a $v_n = -n^2 - 2n - 1 \leq n$ donc $v_n < A, \forall n < A$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = -\infty$.

• Soit $A \in \mathbb{R}$. On a $w_n = \frac{(n+5)^2\sqrt{n}}{n+1} \geq \frac{(n+1)^2\sqrt{n}}{n+1} = (n+1)\sqrt{n} \geq n$ donc $w_n > A, \forall n > A$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = +\infty$.

2. Le programme suivant donne le premier rang tel quel w_n est strictement supérieur à un réel A donné.

1 def WnPqA(A) :	5 n=n+1
2 n=0	6 w=(n+5)**2*sqrt(n)/(n+1)
3 w=0	7 return n
4 while w<=A :	

Exercice 15 For instance, if (x_n) is divergent so is $(1-x_n)$ but (x_n+1-x_n) is constant. Furthermore, if $x_n \neq 0 \forall n$, $(x_n \times \frac{1}{x_n})$ is constant too and $x_n = (-1)^n$ is a beautiful divergent example.

Exercice 16

- $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (3n^2 + n - 5) = 3(\lim_{n \rightarrow \infty} n)^2 + \lim_{n \rightarrow \infty} n + 5 = 3(+\infty)^2 + \infty + 5 = +\infty$.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (3n^2 - 7n - 5) = \lim_{n \rightarrow \infty} 3n^2 \left(1 - \frac{7}{3n} - \frac{5}{3n^2}\right) = 3(+\infty)(1 - 0 - 0) = +\infty$.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+5}{7-2n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n(1+\frac{5}{3n})}{-2n(1-\frac{7}{2n})} = \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{3}{2} \frac{1+\frac{5}{3n}}{1-\frac{7}{2n}} = -\frac{3}{2} \frac{1-0}{1-0} = -\frac{3}{2}$.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} = 0 - 0^2 = 0$.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1-3n^2}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-3n^2(1-\frac{2}{3n}-\frac{1}{3n^2})}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} -3(1-\frac{2}{3n}-\frac{1}{3n^2}) = -3(1-0-0) = -3$.
- $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\frac{2}{n} - 1)(5 - \frac{7}{2\sqrt{n}}) = (2 \times 0 - 1)(5 - \frac{7}{2}\sqrt{0}) = -5$.

Exercice 17

1. Soient $(u_n)_{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{\mathbb{N}}$ vérifiant $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = +\infty$, $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = -\infty$ et telles que :

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n + v_n) = 0$: $u_n = n + \frac{1}{n}$ et $v_n = -n + \frac{5}{n^2}$.
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n + v_n) = \pi$: $u_n = n + \frac{\pi}{2}$ et $v_n = -n + \frac{\pi}{2}$.
- (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$: $u_n = 7n$ et $v_n = -3n^2$.

- (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = -10$: $u_n = 10n$ et $v_n = -n$.
- (e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = -\infty$: $u_n = 3n^2$ et $v_n = -2n$.
- (f) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \times v_n = 0$: impossible car « $\infty \times \infty = \infty$ ».
- (g) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \times v_n = -3$: impossible car « $\infty \times \infty = \infty$ ».
- (h) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \times v_n = -\infty$: condition nécessairement remplie car « $\infty \times \infty = \infty$ ».
2. Deux suites $(u_n)_\mathbb{N}$ et $(v_n)_\mathbb{N}$ vérifiant $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$ et telles que :

- (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n + v_n) = 0$: condition nécessairement remplie car « $0 + 0 = 0$ ».
- (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n + v_n) = \pi$: impossible car « $0 + 0 = 0$ ».
- (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$: $u_n = \frac{3}{n^2}$ et $v_n = -\frac{5}{n}$.
- (d) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = -10$: $u_n = -\frac{30}{n^5}$ et $v_n = \frac{3}{n^5}$.
- (e) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = -\infty$: $u_n = \frac{4}{n^2}$ et $v_n = -\frac{9}{n^3}$.
- (f) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \times v_n = 0$: condition nécessairement remplie car « $0 \times 0 = 0$ ».
- (g) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \times v_n = -3$: impossible car « $0 \times 0 = 0$ ».
- (h) $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \times v_n = -\infty$: impossible car « $0 \times 0 = 0$ ».

Exercice 18 Limite de (u_n) , (v_n) , $(u_n + v_n)$, $(u_n \times v_n)$ et $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$:

- (a) • $u_n = \frac{2n}{n+\sqrt{n}} = \frac{2n}{n(1+\frac{1}{\sqrt{n}})} = \frac{2}{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2}{1+0} = 2$
- $v_n = \frac{3n+5}{n+2} = \frac{3n(1+\frac{5}{3n})}{n(1+\frac{2}{n})} = 3 \frac{1+\frac{5}{3n}}{1+\frac{2}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 3 \frac{1+0}{1+0} = 3.$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n + v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n + \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 2 + 3 = 5.$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n \times v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 2 \times 3 = 6.$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} u_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} v_n} = \frac{2}{3}.$
- (b) • $u_n = \frac{n^2+1}{2(n+3)^2} = \frac{n^2(1+\frac{1}{n^2})}{n^2(2+\frac{12}{n}+\frac{18}{n^2})} = \frac{1+\frac{1}{n^2}}{2+\frac{12}{n}+\frac{18}{n^2}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1+0}{2+0+0} = \frac{1}{2}.$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0^+.$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n + v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n + \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}.$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n \times v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n \times \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \frac{1}{2} \times 0 = 0.$
- $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = \frac{1/2}{0^+} = +\infty.$

Exercice 19 • On a $-\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}$. Puisque $\pm \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, le th. des gendarmes affirme que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$.

• Puisque $\cos x \in [-1; 1] \forall x \in \mathbb{R}$, on a $-\frac{2}{n} = \frac{3-5}{n} \leq \frac{3-5 \cos(6n^2)}{n} \leq \frac{3+5}{n} = \frac{8}{n}$ et comme $\frac{k}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3-5 \cos(6n^2)}{n} = 0$.

• On a $r_n = (\sqrt{2n+1} - \sqrt{2n-1}) \frac{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}} = \frac{(2n+1) - (2n-1)}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}} = \frac{2}{\sqrt{2n+1} + \sqrt{2n-1}}$ donc $0 \leq r_n \leq \frac{2}{\sqrt{2n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ et $r_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Exercice 20 • Pour tout entier n , $n^2 + (-1)^n \geq n^2 - 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 + (-1)^n) = +\infty$.

• Pour tout n , $n! = 1 \times 2 \times 3 \dots \times n \geq n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} n! = +\infty$.

• Pour tout n , $1 - \frac{n!}{n} = 1 - (n-1)! \leq 1 - (n-1) = 2 - n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{n!}{n}) = -\infty$.

Exercice 21 • $3(-2)^{n-5} = 3(-2)^{-5}(-2)^n$ donc $(3(-2)^{n-5})_{\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $-2 \in]-\infty; -1]$ (et de premier terme $-\frac{3}{2^5}$) : elle diverge et ne tend pas vers l'infini.

• $(17 - \frac{4}{3^{n+1}})_{\mathbb{N}} : (\frac{4}{3^{n+1}})_{\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{3} \in]-1; 1[$ (et de premier terme $\frac{4}{3}$) donc elle converge vers 0 et $17 - \frac{4}{3^{n+1}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 17 - 0 = 17$.

• $(e^n)_{\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $e \in]1; +\infty[$ et de premier terme $1 > 0$ donc elle diverge vers $+\infty$.

• $e^{-n} = \frac{1}{e^n} = (\frac{1}{e})^n$ donc $(e^{-n})_{\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{1}{e} \in]-1; 1[$ (et de premier terme 1) : elle converge vers 0.

Exercice 22 Limites en l'infini de l'exponentielle

1. Soit la proposition $\mathcal{P}(n) : \exp(n) \geq n + 1$.

• *Initialisation* : On a $\exp(0) = 1 \geq 0 + 1$ donc $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

• *Hérédité* : Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

On a $\exp(n+1) = e \cdot \exp(n) \geq e(n+1) = en + e \geq n+2$ car $e \geq 1$ donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

• *Conclusion* : $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Puisque, $e^n \geq n + 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$, le théorème de comparaison permet d'affirmer que $e^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$.

On a $\lim_{n \rightarrow \infty} e^n = \lim_{p \rightarrow +\infty} e^{-p} = \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^p} = \frac{1}{+\infty} = 0$.

Exercice 23 Soit $(u_n)_{\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.

1. Soit la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x+2}$ pour $x \geq -2$. On a alors $f(x) \geq 0 \geq -2$ et la suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ est bien définie.

2. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 2 \implies 2 \leq u_n + 2 \leq 4 \xrightarrow{\sqrt{\cdot}} \sqrt{2} \leq \sqrt{u_n + 2} \leq \sqrt{4}$ d'où $0 \leq u_{n+1} \leq 2$ et puisque $0 \leq u_0 \leq 2$, un raisonnement par récurrence permet d'affirmer que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 2$.

3. On a, pour tout n , $u_{n+1} - u_n = (\sqrt{u_n + 2} - u_n) \frac{\sqrt{u_n + 2} + u_n}{\sqrt{u_n + 2} + u_n} = \frac{u_n + 2 - u_n^2}{\sqrt{u_n + 2} + u_n}$.
Or $-X^2 + X + 2$ est de discriminant $1^2 + 4 \times 2 = 9 > 0$ et admet $\frac{-1 \pm 3}{-2}$ c.-à-d. -1 et 2 comme racines. Cette fonction polynôme étant positive entre ses racines, $u_n + 2 - u_n^2 \geq 0$ car $u_n \in [-1; 2]$. Ainsi, $u_{n+1} - u_n \geq 0$ et $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est croissante.

Il est vrai qu'une récurrence sur $u_n \leq u_{n+1}$ avec la croissance de f aurait été plus rapide.

$(u_n)_{\mathbb{N}}$ étant majorée (par 2), elle est convergente.

Exercice 24

1. (a) Si une suite est croissante, alors elle tend vers $+\infty$: Faux.
Contre-exemple : $u_n = -\frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.
- (b) Si une suite tend vers $+\infty$, alors elle est croissante : Faux.
Contre-exemple : $v_n = n + 2(-1)^n$ n'est pas monotone à p.c.r..
2. (a) $u_n = n + (-1)^n$: $u_0 = 0 + (-1)^0 = 1$, $u_1 = 1 + (-1)^1 = 0$,
 $u_2 = 2 + (-1)^2 = 3$, $u_3 = 3 + (-1)^3 = 2$, $u_4 = 4 + (-1)^4 = 5 \dots$
- (b) La suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ n'est pas majorée puisque $u_n \geq n - 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$.
Puisque $u_{2n+1} = 2n + 1 + (-1)^{2n+1} = 2n \leq 2n + 1 = 2n + (-1)^{2n} = u_{2n}$,
 $(u_n)_{\mathbb{N}}$ n'est pas croissante.
- (c) La condition « croissante et non majorée » suffit pour conclure que la limite d'une suite est $+\infty$. Elle n'est pas nécessaire puisque $(u_n)_{\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ mais n'est pas croissante.
3. (a) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n = \ell$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - v_n) = 0$. La condition est suffisante (th. du cours) mais n'est pas nécessaire : $u_n = v_n = n$.
- (b) Si $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} v_n$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_n - v_n) = 0$.
La condition n'est pas nécessaire : $u_n = v_n = \cos n$ (cf. devoir n° 2 p. 423).
Elle n'est pas suffisante non plus : $u_n = n^2$ et $v_n = n$.

Exercice 25 Limites et variations

1. La suite $\left(\frac{1}{n}\right)_{\mathbb{N}^*}$ converge vers zéro en décroissant.
2. La suite $\left(\frac{-1}{n^3}\right)_{\mathbb{N}^*}$ converge vers zéro en croissant.
3. La suite $\left(\frac{(-1)^{n+3}}{n^7+5}\right)_{\mathbb{N}}$ converge vers zéro en ayant une infinité de termes strictement positifs et une infinité strictement négatifs.
4. La suite $(n^2 + 2n + 1)_{\mathbb{N}}$ diverge vers plus l'infini en croissant.
5. La suite $(n + 3 \cos(\pi n))_{\mathbb{N}}$ diverge vers plus l'infini et n'est pas croissante, même à p.c.r.

Exercice 26

$$\begin{cases} u_{2n} = \frac{(-1)^n}{n+3} \\ u_{2n+1} = \frac{4}{n^2+5} \end{cases} \quad \text{On a, pour } n = 0, \quad u_0 = u_{2 \times 0} = \frac{(-1)^0}{0+3} = \frac{1}{3},$$

$$u_1 = u_{2 \times 0 + 1} = \frac{4}{0^2+5} = \frac{4}{5}, \quad \text{pour } n = 1, \quad u_2 = u_{2 \times 1} = \frac{(-1)^1}{1+3} = -\frac{1}{4},$$

$$u_3 = u_{2 \times 1 + 1} = \frac{4}{1^2+5} = \frac{2}{3}, \quad \text{et pour } n = 2, \quad u_4 = u_{2 \times 2} = \frac{(-1)^2}{2+3} = \frac{1}{5},$$

$$u_5 = u_{2 \times 2 + 1} = \frac{4}{2^2+5} = \frac{4}{9}.$$

Trivialement, u_{2n} et u_{2n+1} convergent vers 0 donc $(u_n)_{\mathbb{N}}$ devrait aussi converger vers 0, tous les termes étant de l'une ou l'autre des formes.

$$\begin{cases} v_{2n} = n^3 - 7 \\ v_{2n+1} = 3 - n^2 \end{cases} \quad \text{On a, pour } n = 0, \quad v_0 = v_{2 \times 0} = 0^3 - 7 = -7,$$

$$v_1 = v_{2 \times 0 + 1} = 3 - 0^2 = 3, \quad \text{pour } n = 1, \quad v_2 = v_{2 \times 1} = 1^3 - 7 = -6,$$

$$v_3 = v_{2 \times 1 + 1} = 3 - 1^2 = 2, \quad \text{et} \quad \text{pour } n = 2, \quad v_4 = v_{2 \times 2} = 2^3 - 7 = 1, \\ v_5 = v_{2 \times 2 + 1} = 3 - 2^2 = -1.$$

Trivialement, v_{2n} tend vers $+\infty$ et v_{2n+1} tend vers $-\infty$ donc $(v_n)_{\mathbb{N}}$ ne peut pas avoir de limite, finie ou infinie, puisque celle-ci doit être unique.

$$\begin{cases} w_{3n} = \frac{-1}{n+2} \\ w_{3n+1} = \frac{6}{n^2+3} \\ w_{3n+2} = \frac{3-n}{5+n} \end{cases} \quad \text{On a, pour } n = 0, \quad w_0 = w_{3 \times 0} = \frac{-1}{0+2} = -\frac{1}{2},$$

$$w_1 = w_{3 \times 0 + 1} = \frac{6}{0^2+3} = 2, \quad w_2 = w_{3 \times 0 + 2} = \frac{3-0}{5+0} = \frac{3}{5}, \quad \text{pour } n = 1, \\ w_3 = w_{3 \times 1} = \frac{-1}{1+2} = -\frac{1}{3}, \quad w_4 = w_{3 \times 1 + 1} = \frac{6}{1^2+3} = \frac{3}{2}, \\ w_5 = w_{3 \times 1 + 2} = \frac{3-1}{5+1} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \quad \text{et pour } n = 2, \quad w_6 = w_{3 \times 2} = \frac{-1}{2+2} = -\frac{1}{4}, \\ w_7 = w_{3 \times 2 + 1} = \frac{6}{2^2+3} = \frac{6}{7}, \quad w_8 = w_{3 \times 2 + 2} = \frac{3-2}{5+2} = \frac{1}{7}.$$

Trivialement, w_{3n} et w_{3n+1} convergent vers 0 mais $w_{3n+2} = \frac{3-n}{5+n} = \frac{-1+\frac{3}{n}}{1+\frac{5}{n}}$ converge vers -1 . $(w_n)_{\mathbb{N}}$ ne peut donc admettre de limite.

Exercice 27 La suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = -2$, $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 1$.

1. On conjecture (graphiquement ou dans un tableau de valeurs) que la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ converge vers -3 .

2. $v_n = u_n - (-3) = u_n + 3$.

(a) On a $v_0 = u_0 + 3 = 1$, $v_1 = u_1 + 3 = \frac{2}{3}u_0 - 1 + 3 = \frac{2}{3}$,
 $v_2 = u_2 + 3 = \frac{2}{3} \times \frac{-7}{3} + 2 = \frac{4}{9}$: $(v_n)_{\mathbb{N}}$ semble géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

(b) On a, pour tout n , $\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1}+3}{u_n+3} = \frac{\frac{2}{3}u_n-1+3}{u_n+3} = \frac{\frac{2}{3}(u_n+3)}{u_n+3} = \frac{2}{3}$ et $(v_n)_{\mathbb{N}}$ est géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

(c) Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = v_0 q^n = (\frac{2}{3})^n$ et $u_n = v_n - 3 = (\frac{2}{3})^n - 3$ qui tend vers -3 puisque $\frac{2}{3} \in]-1; 1[$.

$$3. S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k = \sum_{k=0}^{n-1} v_k - \sum_{k=0}^{n-1} 3 = \frac{1-(\frac{2}{3})^n}{1-\frac{2}{3}} - (n) \times 3 \\ = 3 \left[1 - (\frac{2}{3})^n - (n) \right] \\ = -3(n + (\frac{2}{3})^n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -3(+\infty + 0) = -\infty.$$

Exercice 28 On a vu dans l'exercice 23 page 35 que la suite $u_0 = 1$, $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$ est convergente. Sa limite est donc un point fixe de la fonction de récurrence $f(x) = \sqrt{x+2}$ pour $x \geq -2$.

Or $f(x) = x \iff \sqrt{x+2} = x (\geq 0) \iff x+2 = x^2$ de solutions $\frac{1 \pm \sqrt{1+4 \times 2}}{2} = 2$ et $-1 (< 0)$. Le point fixe de f est 2.

La fonction f étant continue, la limite de $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est ce point fixe et $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 2$.

Le programme suivant donne le premier rang à partir duquel u_n est proche de sa limite à 10^{-k} près.

1 def UnProcheL(k) :	5 n=n+1
2 n=0	6 u=sqrt(u+2)
3 u=0	7 return n
4 while 2-u>10**(-k) :	

Exercice 29 • $\frac{1}{3}x + 1 = x \iff x = \frac{3}{2}$. La fonction continue $f(x) = \frac{1}{3}x + 1$ admet $\frac{3}{2}$ comme unique point fixe qui est l'unique limite possible pour la suite. Puisque $f'(\frac{3}{2}) = \frac{1}{3} \in]-1; 1[$, ce point fixe est attractif et la suite converge certainement vers $\frac{3}{2}$.

• $(x-1)^2 + 1 = x \iff x^2 - 3x + 2 = 0 \iff x = \frac{3 \pm 1}{2} = 1 \text{ ou } 2$. La fonction continue $g(x) = (x-1)^2 + 1$ admet 1 et 2 comme points fixes qui sont les limites possibles de la suite $(v_{n+1} = g(v_n))$.

Puisque $g'(x) = 2(x-1)$, $g'(1) = 0 \in]-1; 1[$ et $g'(2) = 2 > 1$, le seul point fixe attractif est 1, seule limite éventuelle de $(v_n)_\mathbb{N}$.

• $\frac{9}{4x} = x \iff x^2 = \frac{9}{4} \iff x = \pm \frac{3}{2}$ points fixes de la fonction continue $h(x) = \frac{9}{4x}$ donc limites possibles de la suite $(w_{n+1} = h(w_n))$. $h'(x) = -\frac{9}{4x^2}$ donc $h'(\frac{3}{2}) = h'(-\frac{3}{2}) = -1$ et les points fixes sont dits *indifférents*. On ne peut alors conjecturer sur l'existence d'une limite.

Exercice 30 $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{5}{n+1}$ et $v_0 = -1$, $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n + 1$.

1. On a $u_0 = \frac{5}{0+1} = 5$, $u_1 = \frac{5}{1+1} = \frac{5}{2}$, $u_2 = \frac{5}{2+1} = \frac{5}{3}$ et $u_3 = \frac{5}{3+1} = \frac{5}{4}$,
et $v_0 = -1$, $v_1 = \frac{1}{2}v_0 + 1 = \frac{1}{2}$, $v_2 = \frac{1}{2}v_1 + 1 = \frac{5}{4}$ $v_3 = \frac{1}{2}v_2 + 1 = \frac{13}{8}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $u_{n+1} - u_n = \frac{5}{(n+1)+1} - \frac{5}{n+1} = 5 \frac{(n+1)-(n+2)}{(n+2)(n+1)} = \frac{-5}{(n+2)(n+1)}$
qui est strictement négatif puisque $n \geq 0$.

La suite $(u_n)_\mathbb{N}$ est donc strictement décroissante.

3. (a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = v_{n+1} - 2 = \frac{1}{2}v_n + 1 - 2 = \frac{1}{2}(v_n - 2) = \frac{1}{2}z_n$ et $(z_n)_\mathbb{N}$ est géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

(b) Puisque $z_0 = v_0 - 2 = -1 - 2 = -3$, $z_n = z_0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n = -\frac{3}{2^n}$ et
 $v_n = z_n + 2 = 2 - \frac{3}{2^n}$ pour tout n .

(c) Puisque $\frac{1}{2} \in]0; 1[$, la suite $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ est strictement décroissante et donc
 $(-3) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ strictement croissante. Ainsi, $(z_n)_\mathbb{N}$ et $(v_n)_\mathbb{N} = (z_n + 2)_\mathbb{N}$ sont strictement croissantes.

(d) Puisque $(z_n)_\mathbb{N}$ est géométrique,

$$S_{17} = z_0 + z_1 + \dots + z_{17} = z_0 \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{17+1}}{1 - \frac{1}{2}} = -3 \times \frac{2^{18} - 1}{2^{17}} \simeq -6.$$

(e) Puisque $\frac{1}{2} \in]-1; 1[$, $(z_n)_\mathbb{N}$ converge vers 0 et $(v_n)_\mathbb{N} = (z_n + 2)_\mathbb{N}$ converge vers $0 + 2 = 2$.

Exercice 31 $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \neq 0$ et $v_n = -\frac{2}{u_n}$.

1. Si $(u_n)_\mathbb{N}$ est convergente alors $(v_n)_\mathbb{N}$ est convergente : Faux. $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = -2n$.

2. Si $(u_n)_\mathbb{N}$ est minorée par 2 alors $(v_n)_\mathbb{N}$ est minorée par -1 : Vrai.

$$u_n \geq 2 \implies \frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{2} \implies -2 \cdot \frac{1}{u_n} \geq -2 \cdot \frac{1}{2}.$$

3. Si $(u_n)_\mathbb{N}$ est monotone alors $(v_n)_\mathbb{N}$ est monotone : Faux. 1, -1 , $-3 \dots$ donne -2 , 2 , $\frac{2}{3}$ non monotone.

4. Si $(u_n)_\mathbb{N}$ est divergente alors $(v_n)_\mathbb{N}$ converge vers 0 : Faux. $u_n = (-1)^n$ et $v_n = -2 \cdot (-1)^n$.

Exercice 32 On a $n = 0$ en 2005, $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{10}u_n(20 - u_n)$.

1. (a) Posons $u = \frac{x}{10}$ et $v = 20 - x$. On a $u' = \frac{1}{10}$ et $v' = -1$.
Puisque $f = \frac{x}{10}(20 - x) = uv$, $f' = u'v + uv'$ et $\forall x \in [0; 20]$,
 $f'(x) = \frac{1}{10}(20 - x) - \frac{x}{10} = 2 - \frac{x}{5}$ qui s'annule en 10.
Par ailleurs, $f(0) = f(20) = 0$ et $f(10) = 10$. D'où le tableau :

x	0	10	20	
$f'(x)$		+	0	-
f	0	10	0	

(b) Ainsi, pour tout x de $[0; 10]$, $f(x) \in [0; 10]$.

2. Soit $\mathcal{P}(n)$: « $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$ ».

On a $u_0 = 1 \in [0; 10]$ donc $u_1 = f(u_0) \in [0; 10]$ et $1 = u_0 \leq u_1 = \frac{19}{10}$.
Donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie i.e. $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$.

On a alors $u_{n+1} \in [0; 10]$, $u_{n+2} = f(u_{n+1}) \in [0; 10]$ et
 $u_{n+1} = f(u_n) \leq f(u_{n+1}) = u_{n+2}$ car f est croissante sur $[0; 10]$ et conserve
donc l'ordre. Ainsi, $\mathcal{P}(n+1)$: « $0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 10$ » est vraie et par
récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n .

3. La suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est donc croissante et majorée : elle converge. 0 et 10 sont les
deux solutions de l'équation du second degré $f(x) = x$ donc les deux limites
éventuelles de $(u_n)_{\mathbb{N}}$. Or, $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est croissante et ne peut donc converger vers 0
dans $[0; 10]$. $(u_n)_{\mathbb{N}}$ converge donc vers 10. On peut d'ailleurs remarquer que 10
est super attractif puisque $f'(10) = 0$.

Exercice 33 La suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2 + 1}}$.

1. On a $u_0 > 0$. Supposons $u_n > 0$. Alors $u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2 + 1}} > 0$ et, par
récurrence, $u_n > 0 \quad \forall n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_n / \sqrt{u_n^2 + 1}}{u_n} = \frac{1}{\sqrt{u_n^2 + 1}} \leq 1$ puisque pour tout a ,
 $a^2 + 1 \geq 1$ donc $\sqrt{a^2 + 1} \geq 1$. Ainsi, la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est décroissante. Étant
minorée, elle converge nécessairement.

2. (a) On a $u_0 = 1$, $u_1 = \frac{u_0}{\sqrt{u_0^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $u_2 = \frac{u_1}{\sqrt{u_1^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$,
 $u_3 = \frac{u_2}{\sqrt{u_2^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{4}}$, $u_4 = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

(b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

On a $u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2 + 1}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{\frac{1}{n+1} + 1}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \cdot \frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{1+(n+1)}} = \frac{1}{\sqrt{n+2}}$.

Puisque $u_0 = 1 = \frac{1}{\sqrt{1}}$, la propriété est initialisée et $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$
 $\forall n \in \mathbb{N}$.

3. Ainsi, $0 < u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ donc $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$.

Chapitre II

LOI BINOMIALE

Sommaire

Introduction	41
1 Succession d'épreuves indépendantes	42
2 Épreuve de Bernoulli, loi de Bernoulli	43
3 Schéma de Bernoulli, loi binomiale	43
3.1 Un exemple	43
3.2 Loi binomiale	44
3.3 Espérance et variance de la loi binomiale	45
3.4 Coefficients binomiaux	46
3.5 Avec la calculatrice	47
Exercices	48
Corrigé des exercices	55

Introduction

Bernoulli ! À la lecture du sommaire, on se devait de commencer ainsi. Bernoulli, oui, mais lequel ? Parmi les illustres mathématiciens de cette famille suisse de renom, c'est principalement de Jacques (1654-1705) dont il s'agit. Il travailla avec Leibniz sur les calculs infinitésimal, différentiel et intégral mais son œuvre majeure porte sur le calcul des probabilités. La partie que nous étudions ici est une simple formalisation du jeu de pile ou face, la pièce pouvant être faussée et l'opération répétée. Les applications en revanche sont très nombreuses : liens très forts avec d'autres lois de probabilité, avec le dénombrement, avec des branches de l'analyse mais aussi, applications aux sondages, aux comptages d'événements, aux jeux de hasard, aux rangements des objets...

Les exemples du cours se rapporteront à Δ : un dé tétraédrique bien équilibré sur les faces duquel sont sommairement dessinés un tigre du Bengale, un requin des Galapagos et deux aigles de Bonelli. Lors d'un lancer de Δ , on lit bien évidemment la face inférieure. La loi de probabilité est la suivante.

x_i	Tigre	Requin	Aigle
p_i	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$

Dans tout le chapitre, n et k désignent des entiers naturels tels que $k \leq n$ et p un réel de $[0; 1]$.

1 Succession d'épreuves indépendantes

Commençons par quelques rappels.

Soit $\Omega = \{x_1; \dots; x_n\}$ un ensemble fini. On dit que $P: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une loi de probabilité sur Ω lorsque, $\forall x_i \in \Omega, P(x_i) \in [0; 1]$ et $\sum_{i=1}^n P(x_i) = 1$.

On a alors, pour tout événement $A = \{x_{i_1}; \dots; x_{i_k}\} \subset \Omega$, $P(A) = \sum_{j=1}^k P(x_{i_j})$.

Pour tous événements A et $B \subset \Omega$, $P(A \cup B)P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
et si $P(A) \neq 0$, la probabilité conditionnelle de B sachant A est $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.
La formule des probabilités totales affirme qu'alors

$$P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = P(A).P_A(B) + P(\bar{A}).P_{\bar{A}}(B).$$

Deux événements d'une même expérience aléatoire sont dits indépendants si la réalisation de l'un n'influe pas sur la réalisation de l'autre, ce qui est typiquement le cas de lancers successifs d'un dé. Cette notion a été formalisée en classe de première :

A et $B \subset \Omega$ sont dits indépendants si $P(A \cap B) = P(A).P(B)$
ce qui signifie que $P_A(B) = P(B)$ lorsque $P(A) \neq 0$.

Définition 1 Dans une succession d'épreuves, lorsque l'issue d'une épreuve ne dépend pas des épreuves précédentes, on dit que ces épreuves sont indépendantes.

Plus précisément, si $E_1, \dots, E_n$ sont n épreuves successives indépendantes d'univers respectifs $\Omega_1, \dots, \Omega_n$, alors l'univers Ω de cette succession est le produit cartésien $\Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$ (cf. chapitre XII p. 295) et les issues de Ω sont les n -uplets $(x_1; \dots; x_n)$ où $x_i \in \Omega_i$.

Exemple : Si on lance une pièce de monnaie puis le dé tétraédrique Δ , l'univers correspondant à la succession de ces deux épreuves indépendantes est $\Omega = \{P; F\} \times \{\text{Tigre}; \text{Requin}; \text{Aigle}\}$ et les issues sont donc (P, T) , (P, R) , (P, A) , (F, T) , (F, R) et (F, A) .

Propriété 1 Lors d'une succession d'épreuves indépendantes, la probabilité d'une issue est égale au produit des probabilités de chacune de ses composantes :

$$p(x_1; x_2; \dots; x_n) = p(x_1) \times p(x_2) \times \dots \times p(x_n).$$

Démonstration :

$p(x_1; x_2; \dots; x_n) = p(\{x_1\} \cap \{x_2\} \cap \dots \cap \{x_n\}) = p(x_1) \times p(x_2) \times \dots \times p(x_n)$ car les $\{x_i\}$ sont indépendants. $\square$

Exemple : Si la pièce de monnaie est bien équilibrée, on a

$$p(P, T) = p(P) \times p(T) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8}.$$

La probabilité d'obtenir un tigre est alors :

$$\begin{aligned} p(T) &= p((P, T) \cup (F, T)) = p(P, T) + p(F, T) = p(P).p(T) + p(F).p(T) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

2 Épreuve de Bernoulli, loi de Bernoulli

Définition 2 Une *épreuve de Bernoulli* de paramètre p est une expérience aléatoire qui admet exactement **deux issues**, notées généralement S (succès) de probabilité p et $\bar{S}$ (échec) de probabilité $q = 1 - p$.

Exemple : On lance le dé Δ et l'on souhaite obtenir le tigre :

$$S = \text{Tigre}, p = \frac{1}{4}, \quad \bar{S} = \overline{\text{Tigre}}, q = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Propriété 2 Dans une épreuve de Bernoulli, notons Y la variable aléatoire qui prend la valeur 1 lorsque S est réalisé et 0 en cas d'échec. On dit que Y suit une **loi de Bernoulli** de paramètre p et l'on a :

k	0	1
$P(Y = k)$	q	p

Son espérance est alors $\mathbb{E}(Y) = p$ et sa variance $V(Y) = p(1 - p) = pq$.

Démonstration : $\mathbb{E}(Y) = 0 \times (1 - p) + 1 \times p = p$

$$\text{et } V(Y) = (1 - p) \times 0^2 + p \times 1^2 - \mathbb{E}(Y)^2 = p - p^2 = p(1 - p). \quad \square$$

Exemple : Si l'on souhaite obtenir le tigre en lançant le dé Δ ,

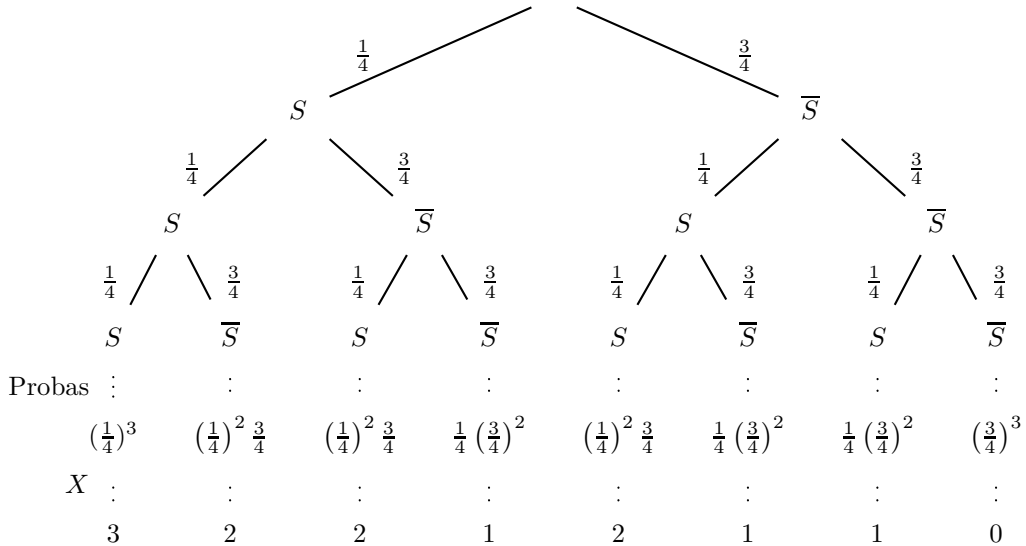
$$\mathbb{E} = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad V = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{16}.$$

3 Schéma de Bernoulli, loi binomiale

3.1 Un exemple

On lance maintenant trois fois de suite le dé Δ et l'on désigne par X le nombre de fois où l'on a obtenu le tigre *i.e.* le nombre de succès. Par la suite, « Δ_3 » désignera cette expérience qui est la répétition de trois épreuves aléatoires de Bernoulli identiques, réalisées manière indépendante.

Voici un arbre de probabilité associé à Δ_3 permettant de déterminer l'univers de X .



Ainsi, la loi du nombre de succès est donnée par :

k	0	1	2	3
$P(X = k)$	$(\frac{3}{4})^3$	$3 (\frac{3}{4})^2 \frac{1}{4}$	$3 \frac{3}{4} (\frac{1}{4})^2$	$(\frac{1}{4})^3$

3.2 Loi binomiale

Définition 3 On appelle **schéma de Bernoulli** d'ordre n et de paramètre p , l'expérience aléatoire qui est la répétition de n épreuves aléatoires de Bernoulli de paramètre p , identiques et indépendantes.

L'arbre pondéré qui lui est associé est appelé **arbre de Bernoulli** d'ordre n et de paramètre p .

Remarques : • Les trois mots « aléatoire, identique et indépendant » sont essentiels et il faut les citer lors de la rédaction des exercices. En effet, on se situe sinon hors du cadre de Bernoulli et l'on ne peut appliquer les résultats qui suivent.

• Peu importe le contexte, il n'y a en fait qu'une seule et unique arbre de Bernoulli d'ordre n . Les différences possibles ne se situent qu'au niveau des pondérations, *i.e.* du paramètre p .

• Avec les notations que nous introduirons dans un chapitre ultérieur (cf. chapitre XII p.295), l'univers d'un schéma de Bernoulli d'ordre n est formalisé par $\Omega_n = \{0; 1\}^n$, 0 représentant par exemple l'échec et 1, le succès.

Exemple : L'expérience Δ_3 est un schéma de Bernoulli d'ordre 3 et de paramètre $\frac{1}{4}$. Les observations faites et les résultats obtenus dans le cas de Δ_3 se généralisent à un schéma d'ordre n .

Définition 4 *Le nombre de chemins de l'arbre de Bernoulli d'ordre n conduisant à k succès pour n répétitions est noté $\binom{n}{k}$ et se lit « k parmi n ».*

*Ces nombres entiers $\binom{n}{k}$ sont appelés **coefficients binomiaux**.*

Exemple : Dans la situation de l'expérience Δ_3 , $\binom{3}{0}=1$, $\binom{3}{1}=3$, $\binom{3}{2}=3$ et $\binom{3}{3}=1$.

Remarques : $\binom{n}{0}=1$, $\binom{n}{n}=1$, $\binom{n}{1}=n$ et $\binom{n}{n-1}=n$.

On pose $\binom{0}{0}=1$, et, si l'on insiste, pour $k > n$, $\binom{n}{k}=0$ mais autant ne pas l'écrire.

Théorème 1 *On considère un schéma de Bernoulli d'ordre n et de paramètre p et l'on désigne par X la variable aléatoire comptant le nombre de succès à l'issue des n épreuves. On dit alors que X suit une **loi binomiale** de paramètres n et p et l'on note $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.*

La loi de probabilité de X est donnée par : $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Démonstration : Dans l'arbre de Bernoulli d'ordre n et de paramètre p , le nombre de chemins réalisant k succès est, par définition, $\binom{n}{k}$. Il suffit alors de remarquer qu'ils comportent chacun k succès S , branches de probabilité p , et $n-k$ échecs $\bar{S}$, branches de probabilité $1-p$. La règle du produit des probabilités inscrites sur les branches donne le résultat. $\square$

Remarque : Si $n = 1$, la variable aléatoire X vérifie

$P(X = 0) = \binom{1}{0} p^0 (1-p)^{1-0} = 1-p$ et $P(X = 1) = \binom{1}{1} p^1 (1-p)^{1-1} = p$. On retrouve bien la loi de Bernoulli de paramètre p .

Exemple : Dans la situation de l'expérience Δ_3 , $X \sim \mathcal{B}(3, \frac{1}{4})$.

3.3 Espérance et variance de la loi binomiale

De façon intuitive, si l'on gagne une récompense à chaque succès, on peut espérer gagner à chaque épreuve, en moyenne, p récompense. Donc, à l'issue des répétitions des n épreuves identiques et indépendantes, on peut espérer gagner np récompenses. Le théorème suivant valide cette conjecture.

Théorème 2 *Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$, alors $E(X) = np$, $V(X) = np(1-p)$ et $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$.*

Ceci sera démontré dans le chapitre XV p. 397 en même temps que la linéarité de l'espérance qui nous sera utile dans divers exercices : $E(aX + b) = aE(X) + b$.

Exemple : Dans l'expérience Δ_3 , $E(X) = \frac{3}{4}$, $V(X) = \frac{9}{16}$ et $\sigma(X) = \frac{3}{4}$.

3.4 Coefficients binomiaux

Nous travaillerons ces coefficients de manière plus approfondie dans le chapitre de combinatoire (cf. p. 295) et nous démontrerons le résultat suivant d'une manière différente.

Théorème 3

- **Symétrie** : pour $0 \leq k \leq n$, $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
- **Relation de Pascal** : pour $0 \leq k \leq n-1$, $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

Démonstration : • Par symétrie de l'arbre de Bernoulli d'ordre n , il y a autant de chemins réalisant k succès que de chemins réalisant k échecs. Or, un chemin réalisant k échecs réalise $n - k$ succès. Il y a donc autant de chemins réalisant k succès que de chemins réalisant $n - k$ succès : $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.

• Dans un arbre de Bernoulli d'ordre $n + 1$, il y a $\binom{n+1}{k+1}$ chemins réalisant $k + 1$ succès. Ces chemins sont de deux types distincts : ceux commençant par un succès (type s) et ceux commençant par un échec (type e).

– type s : l'arbre représentant les épreuves suivantes (de la deuxième à la dernière) est d'ordre n et il reste à choisir k succès : il y a donc $\binom{n}{k}$ chemins de type s .

– type e : l'arbre représentant les épreuves suivantes est d'ordre n et il reste à choisir $k + 1$ succès : il y a donc $\binom{n}{k+1}$ chemins de type e .

Ainsi, $\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$. □

Exemples : $\binom{4}{2} = \binom{3}{1} + \binom{3}{2} = 3 + 3 = 6$ $\binom{5}{3} = \binom{4}{2} + \binom{4}{3} = 6 + 4 = 10$

Triangle de Pascal (Blaise) : Il permet de calculer les coefficients binomiaux de proche en proche.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	...	i	$i+1$	...
0	1							...			...
1	1	1						...			...
2	1	2	1					...			...
3	1	3	3	1				...			...
4	1	4	6	4	1			...			...
5	1	5	10	10	5	1		...			...
6	1	6	15	20	15	6	1	...			...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
m	1	m		$\binom{m}{3}$	$\binom{m}{4}$			...	$\binom{m}{i}$	$\binom{m}{i+1}$	...
$m + 1$	1	$m+1$			$\binom{m}{3} + \binom{m}{4}$			...		$\binom{m}{i} + \binom{m}{i+1}$	...
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Par exemple, les 15 ont été obtenus en calculant $5 + 10$ et $10 + 5$, le 20 avec $10 + 10$...

Le coefficient binomial $\binom{n}{k}$, aussi noté C_n^k (pour *combinaisons*), peut être défini de multiples manières mais tout ceci sera vu plus tard dans l'année (cf. chap. XII p. 295) :

- $\binom{n}{k}$ est le nombre de sous-ensembles différents contenant k objets parmi un ensemble de n objets,
- $\binom{n}{k}$ est le nombre de chemins passant par exactement k succès dans l'arbre de Bernoulli d'ordre n ,
- $\binom{n}{k}$ est le $(k+1)^{\text{e}}$ terme de la $(n+1)^{\text{e}}$ ligne du triangle de Pascal puisque
$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1},$$
- $\binom{n}{k}$ est le coefficient du terme $a^{n-k}b^k$ dans le développement de $(a+b)^n$,
- il est donné par la formule
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

3.5 Avec la calculatrice

Avec une $\boxed{\text{TI}}$, $\binom{n}{k}$ s'obtient en tapant « n , $\boxed{\text{MATH}}$, choix *PRB* puis *Combi-
naison* (ou *nCr*), k ».

Pour la loi binomiale,

$P(X = k)$ s'obtient en tapant « $\boxed{2\text{nde}}$ $\boxed{\text{var}}$ (distrib.) puis *binomFdp* (n, p, k) » (ou *binompdf*).

$P(X \leq k)$ s'obtient avec « $\boxed{2\text{nde}}$ $\boxed{\text{var}}$ (distrib.) puis *binomFrép* (n, p, k) » (ou *binomcdf*).

Dans un tableur *Office*, $\binom{n}{k}$ est obtenu avec « =COMBIN(n ; k) »,
$$P(X = k) \quad \text{avec} \quad \text{« =LOI.BINOMIALE(k ; n ; p ; 0) »}$$

et $P(X \leq k)$ avec « =LOI.BINOMIALE(k ; n ; p ; 1) ».

Exemple : $\binom{9}{6} = 84$, $\binom{17}{11} = 12.376$, $\binom{53}{31} \simeq 4,6.10^{14}$, $\binom{586}{98} = ?$.

Exemple : On appelle Δ_n l'expérience de n lancers indépendants du dé Δ et X_n la variable aléatoire donnant le nombre de tiges du Bengale obtenus. On a :

$$\left. \begin{array}{l} P(X_5 = 3) \simeq 0,088 \\ P(X_8 = 2) \simeq 0,311 \\ P(X_9 \leq 5) \simeq 0,990 \end{array} \right| \begin{array}{l} P(X_{12} \geq 8) = 1 - P(X_{12} \leq 7) \simeq 0,003 \\ P(X_{89} = 63) \simeq 10^{-19} \\ P(X_{500} = 431) \simeq ? \end{array}$$

Nous voyons que la capacité des calculatrices est rapidement dépassée. En passant par une variable aléatoire continue, il est possible d'estimer les probabilités de la loi binomiale pour des n grands mais cela demande beaucoup plus de notions mathématiques.

Exercices

LOI BINOMIALE

Exercice 1 Black or White

Une boîte de chocolats contient quatre chocolats blanc et six chocolats noirs. On mange un chocolat au hasard choisi dans cette boîte, puis un deuxième, puis on s'arrête car il est bientôt l'heure de goûter.

1. Dresser un arbre modélisant cette situation.
2. Quelle est la probabilité que le second chocolat mangé soit blanc sachant que le premier était noir ?
3. Quelle est la probabilité de manger un chocolat de chaque sorte ?
4. Cette expérience est-elle une succession d'épreuves indépendantes ?

Exercice 2 Baccaléatoire

Un examen consiste à subir trois épreuves indépendantes. On a 80 % de chances de réussir à la première, 60 % à la seconde et 25 % à la troisième. On est déclaré reçu si l'on réussit au moins deux épreuves.

Quelle est la probabilité de réussir l'examen ?

Exercice 3 Probabilités du second degré

Dans une urne contenant cinq jetons numérotés de 1 à 5, on tire un premier jeton au hasard puis, sans le remettre, on en tire un second. On note b le numéro du premier jeton et c celui du second. X désigne alors la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de solutions réelles de l'équation $x^2 + bx + c = 0$.

Déterminer la loi de X .

Exercice 4 Calculatrice

Soit X une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres $n = 35$ et $p = 0,71$. Calculer, à 10^{-3} près, les probabilités suivantes.

- | | | |
|--------------------|--------------------|----------------------------|
| (a) $P(X = 25)$ | (e) $P(X > 21)$ | (i) $P(25 < X \leq 29)$ |
| (b) $P(X = 31)$ | (f) $P(X \geq 19)$ | (j) $P(21 \leq X < 31)$ |
| (c) $P(X \leq 30)$ | (g) $P(20 < X)$ | (k) $P(22 < X < 30)$ |
| (d) $P(X < 21)$ | (h) $P(18 \leq X)$ | (l) $P(19 \leq X \leq 29)$ |

Exercice 5 Imagination (im)probable

V est une variable aléatoire telle que $P(V = 7) = \binom{18}{7} \times 0,3^7 \times 0,7^{11}$.
Imaginer une situation correspondant à cette variable aléatoire.

Exercice 6 Pc Intosh

Un conseiller commercial en informatique reçoit huit clients par jour. On admet que la probabilité qu'un client passe commande est de 0,1 et que les décisions des clients sont indépendantes les unes des autres. On note C la variable aléatoire qui indique le nombre de commandes que le conseiller obtient par jour.

1. Justifier que C suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
2. Calculer $\mathbb{E}(C)$ puis interpréter ce résultat.
3. Quelle est la probabilité, à 10^{-4} près, qu'il obtienne deux commandes ? et celle qu'il obtienne au moins trois commandes ?

Exercice 7 Kataklop

Un parcours hippique de trois kilomètres comporte 11 obstacles similaires. À l'entraînement, ce parcours est réalisé à la vitesse de $15 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$. On estime que pour un cavalier, la probabilité qu'il franchisse sans faute un obstacle est de 0,625. Le passage sans faute ne ralentit pas le cavalier alors qu'un passage avec faute le pénalise d'une minute. On note X la variable aléatoire qui indique le nombre d'obstacles franchis sans faute.

1. Préciser la loi de probabilité de X , en préciser les paramètres et calculer son espérance.
2. Quel est le temps théorique d'un parcours sans faute, exprimé en minutes ?
3. On note D la variable aléatoire qui indique la durée en minutes du parcours du cavalier. Exprimer D en fonction de X , en déduire $\mathbb{E}(D)$ puis interpréter ce résultat.

Exercice 8 VouF hasardeux

Un VouF se présente sous la forme de cinq affirmations indépendantes. Chaque réponse juste rapporte deux points tandis qu'une réponse incorrecte pénalise d'un point. Un élève décide de répondre au hasard à toutes les questions. On note J la variable aléatoire qui indique le nombre de réponses justes.

1. Préciser la loi de probabilité de J , en préciser les paramètres et calculer son espérance.
2. On appelle N la variable aléatoire qui indique la note obtenue au VouF.
 - (a) Exprimer N en fonction de J puis en déduire $\mathbb{E}(N)$.
 - (b) Quelles sont les valeurs prises par N ?
 - (c) Que dire de la stratégie de réponse au hasard ?

Exercice 9 Le problème du chevalier de Méré

Le chevalier de Méré posa en 1654 la question suivante à Blaise Pascal : « Sacrebleu ! A-t-on plus de chance d'obtenir au moins un six en lançant un dé cubique quatre fois ou d'obtenir au moins un double-six en lançant deux dés vingt-quatre fois ? » Pascal n'est plus et vous devez vous débrouiller seul, pardi !

Exercice 10 Une grosse somme

Une épreuve consiste à lancer deux dés cubiques parfaits et on note S l'événement « la somme des numéros obtenus est supérieure ou égale à 10 ».

1. Quelle est la probabilité de S lors d'une épreuve ?

2. On répète dix fois de suite cette épreuve. Quelle est la probabilité d'obtenir trois fois la réalisation de S ?
3. On répète cette épreuve n fois dans les mêmes conditions.
 - (a) Prouver que la probabilité P_n d'obtenir au moins une fois la réalisation de S est $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$.
 - (b) Quel est le nombre minimum d'épreuves à réaliser pour que cette probabilité soit supérieure à 0,99 ?

Exercice 11 Le rouge et le noir

Une urne opaque contient cinq boules indiscernables au toucher : deux noires et trois rouges. On tire au hasard une boule de l'urne. Si la boule est rouge, on perd 1,20€ et si elle est noire, on gagne 1,80€.

Un joueur réalise cette épreuve quinze fois avec remise de la boule après chaque tirage. On note G la variable aléatoire qui indique le gain algébrique du joueur et R la variable aléatoire qui indique le nombre de boules rouges obtenues au terme des quinze tirages.

Quelle est la loi de R ? Calculer $\mathbb{E}(R)$. Exprimer G en fonction de R puis en déduire l'espérance de G .

Exercice 12 Pucce

Une entreprise fabrique des cartes à puce. Chaque puce peut présenter deux défauts a et b . Une étude a permis de montrer que 3 % des puces présentent le défaut a , 2 % le défaut b et 96 % ni l'un ni l'autre défaut.

1. Quelle est la probabilité qu'une puce présente les deux défauts à la fois et soit alors inutilisable ?
2. Les puces sont conditionnées par lot de 100 pour un nettoyage avant montage sur carte. D est la variable aléatoire qui, à chaque lot, associe le nombre de puces sans défaut. Quelle est la loi de D ? Quel est en moyenne le nombre de puces sans défaut dans un lot de 100 ?
3. Après le nettoyage, les puces sont regroupées par paquet de 800 pour alimenter l'atelier de montage. On appelle M la variable aléatoire qui indique le nombre de puces inutilisables dans un lot de 800. Calculer l'espérance de M puis déterminer le plus petit entier n tel que $P(M > n) \leq 0,05$. Interpréter ce dernier résultat.

Exercice 13 Pascal

1. Utiliser le triangle de Pascal afin de déterminer l'entier n tel que
 - (a) $\binom{n}{2} = 36$,
 - (b) $3\binom{n}{4} = 14\binom{n}{2}$.
2. Utiliser la formule de Pascal afin de déterminer les entiers n et p tels que

$$\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \binom{6}{3} + \binom{7}{3} = \binom{n}{p}.$$
 Comment lire ce résultat dans le triangle de Pascal ?

Exercice 14 Assis !

Une association caritative organise sa grande fête annuelle et vend 250 billets. Elle doit alors trouver une salle pour accueillir tous les convives à son banquet, salle qu'elle souhaite la plus adaptée possible. Elle considère que seulement 90 % des personnes ayant acheté un billet viendront et souhaite que moins de 2 % des personnes présentes n'aient

pas de place assise. On note X la variable aléatoire correspondant au nombre de personnes présentes au banquet.

1. Justifier que la loi de probabilité de X est une loi binomiale dont on précisera les paramètres.
2. On note k le nombre de places assises. Montrer que le problème revient à chercher le plus petit entier k tel que $P(X > k) \leq 0,02$.
3. Combien de places assises doit alors contenir la salle ?

Exercice 15 Six, c'est sûr !

1. Combien de fois faut-il lancer un dé cubique non pipé pour obtenir au moins un 6 avec une probabilité supérieure ou égale à 95 % ?
2. Comment faut-il au minimum piper le dé pour avoir une probabilité supérieure à 95 % d'obtenir au moins un six en six lancers ?

Exercice 16 Sur réservation

Une compagnie aérienne doit remplir un avion de 180 places. Puisqu'elle sait que le taux de défection habituel des personnes ayant acheté un billet est de 9 %, défections supposées indépendantes, cette compagnie décide de mettre en vente plus de 180 billets.

1. Déterminer le nombre de billets à vendre pour être certain, au seuil de 95 %, de ne pas avoir plus de passagers que de places.
2. Déterminer le nombre de billets à vendre pour qu'il y ait moins de 1 % de chance de vendre trop de billets.

Exercice 17 Volvian

Une chaîne d'embouteillage d'eau minérale assure une production dont on estime que les réglages peuvent conduire à la proportion de $p = 5\%$ de bouteilles défectueuses. On contrôle la production en prélevant un échantillon de 200 bouteilles et on y découvre 17 bouteilles défectueuses.

1. On suppose que la production de bouteilles défectueuses est de 5 %.
 B est la variable aléatoire indiquant le nombre de bouteilles défectueuses sur un échantillon aléatoire de 200 bouteilles.
 - (a) Calculer l'espérance de B .
 - (b) Déterminer à la calculatrice $P(B \leq 3)$, $P(B \leq 4)$, $P(B \leq 15)$, $P(B \leq 16)$ et $P(B \leq 17)$.
 - (c) En déduire un intervalle de fluctuation à 95 % de B , c.-à-d. un intervalle autour de $\mathbb{E}(B)$ de probabilité proche de 95 %.
2. (a) Peut-on affirmer au seuil de 5 %, c.-à-d. avec moins de 5 % de chance de se tromper, que la chaîne fonctionne correctement ?
 - (b) Calculer $P(B \leq 3) + P(B > 16)$. Que représente cette probabilité ?

Exercice 18 Toile lycéenne

Une enquête a établi qu'une proportion de $p = 52\%$ des élèves du lycée de La Fare-en-Dole utilisent quotidiennement l'internet pour les devoirs. Un professeur curieux interroge sur ce même sujet, 64 de ses élèves (échantillon assimilé à des tirages aléatoires et indépendants). Parmi eux, 42 utilisent l'internet quotidiennement pour leurs devoirs.

1. Déterminer, à l'aide de la loi binomiale, un intervalle de fluctuation à 95 %, c.-à-d. un intervalle central de probabilité proche de 95 %, de la fréquence de réalisation de l'événement considéré.
2. Comparer cet intervalle à celui obtenu en classe de seconde $\left[\mathbb{E} - \frac{1}{\sqrt{n}}; \mathbb{E} + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$.
3. Les classes de ce curieux professeur sont-elles en accord avec la proportion p dans le lycée ?

Exercice 19 Urne glacée

Une urne opaque contient deux boules, une vanille et une fraise, indiscernables au toucher. On répète n fois l'épreuve qui consiste à tirer une boule avec remise et noter sa couleur. On note p_n la probabilité de tirer des boules des deux couleurs lors des n tirages. À partir de combien de tirages a-t-on $p_n > 0,999$?

Exercice 20 Impasse

Le programme d'un examen oral est constitué de 20 sujets. On propose à chacun des candidats de tirer deux sujets au hasard parmi les vingt et de traiter alors celui de son choix. Combien de sujets au minimum un candidat doit-il connaître pour avoir plus de 75 % de chances de savoir traiter au moins l'un des sujets ?

Exercice 21 Chats porteurs

La leucose féline est une maladie touchant les chats ; elle est provoquée par un virus. Dans un grand centre vétérinaire, on estime à 40 % la proportion de chats porteurs de la maladie. On réalise un test de dépistage de la maladie parmi les chats présents dans ce centre vétérinaire. Ce test possède les caractéristiques suivantes.

- Lorsque le chat est porteur de la maladie, son test est positif dans 90 % des cas.
- Lorsque le chat n'est pas porteur de la maladie, son test est négatif dans 85 % des cas.

On choisit un chat au hasard dans le centre vétérinaire et on considère les événements suivants :

- M : « Le chat est porteur de la maladie » ;
- T : « Le test du chat est positif » ;
- $\overline{M}$ et $\overline{T}$ désignent les événements contraires des événements M et T respectivement.

1. (a) Traduire la situation par un arbre pondéré.
 (b) Calculer la probabilité que le chat soit porteur de la maladie et que son test soit positif.
 (c) Montrer que la probabilité que le test du chat soit positif est égale à 0,45.
 (d) On choisit un chat parmi ceux dont le test est positif. Calculer la probabilité qu'il soit porteur de la maladie.
2. On choisit dans le centre vétérinaire un échantillon de 20 chats au hasard. On admet que l'on peut assimiler ce choix à un tirage avec remise. On note X la variable aléatoire donnant le nombre de chats présentant un test positif dans l'échantillon choisi.
 (a) Déterminer, en justifiant, la loi suivie par la variable aléatoire X .

- (b) Calculer la probabilité qu'il y ait dans l'échantillon exactement 5 chats présentant un test positif.
 - (c) Calculer la probabilité qu'il y ait dans l'échantillon au plus 8 chats présentant un test positif.
 - (d) Déterminer l'espérance de la variable aléatoire X et interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
3. Dans cette question, on choisit un échantillon de n chats dans le centre, qu'on assimile encore à un tirage avec remise. On note p_n la probabilité qu'il y ait au moins un chat présentant un test positif dans cet échantillon.
- (a) Montrer que $p_n = 1 - 0,55^n$.
 - (b) Décrire le rôle du programme suivant écrit en langage Python, dans lequel la variable n est un entier naturel et la variable P un nombre réel.

```

1| def seuil():
2|     n = 0
3|     P = 0
4|     while P < 0,99 :
5|         n = n+1
6|         P = 1-0,55**n
7|     return n

```

- (c) Déterminer la valeur renvoyée par ce programme.

Exercice 22 On considère que 2 % des mathématiciens professionnels se dopent, pour la plupart au thé de l'Himalaya.

1. Un test anti-dopage très inconfortable (nécessitant par exemple l'usage de la calculatrice et la correction de plusieurs copies) répond aux spécificités suivantes : si un mathématicien ne se dope pas, le test est négatif dans 99,9 % des cas et s'il se dope, le test est positif dans 99 % des cas.

Déterminer la probabilité qu'un mathématicien pris au hasard soit contrôlé positif avec ce test.

2. Si un mathématicien professionnel est contrôlé positif avec le premier test, on lui en fait passer un second encore plus douloureux (incluant entre autres l'obligation d'écouter des radios musicales commerciales ciblées sur la jeunesse) ayant des spécificités identiques au premier. Si ce mathématicien est également positif, il est déclaré coupable et il doit alors lire la presse people hebdomadaire pendant deux années consécutives, cinq en cas de récidive, sinon, il est innocenté et, en guise de compensation, il est alors dispensé de remarques désobligeantes bien qu'avérées sur sa calligraphie pendant trois jours ouvrés.

On choisit un mathématicien subissant un contrôle anti-dopage et l'on considère les événements suivants :

- T : « le mathématicien est dopé au thé de l'Himalaya »
- P : « le premier test est positif »
- S : « le second test est positif »

- (a) Montrer que la probabilité que le mathématicien soit déclaré coupable est 0,01960298 en admettant que $p_{T \cap P}(S) = p_T(S)$ et $p_{\overline{T} \cap P}(S) = p_{\overline{T}}(S)$.
 - (b) Un personnage très officiel affirme qu'avec ce protocole, il est presque impossible qu'un mathématicien professionnel soit déclaré coupable à tort.
Que penser de cette affirmation ?
3. On tire au sort, au hasard (et aux pigeons) 50 mathématiciens professionnels, ceci étant assimilé à un tirage avec remise tellement la population de mathématiciens professionnels est nombreuse.
- (a) En moyenne, combien de ces mathématiciens seront déclarés coupables ?
 - (b) Quelle est la probabilité qu'il y ait entre 2 et 10 déclarés coupables ?
4. Chaque test anti-dopage coûte 500€ à réaliser. On considère C la variable aléatoire donnant le coût d'un contrôle, c.-à-d. pour un ou deux tests.
- (a) Quelle est la loi de C (valeurs et probabilités associées) ?
 - (b) La fédération internationale des activités mathématiques (F.I.A.M) prévoit de réaliser 10 000 contrôles l'année prochaine. Quelle somme globale « moyenne » devrait-elle prévoir pour tous ces contrôles dans son budget ?

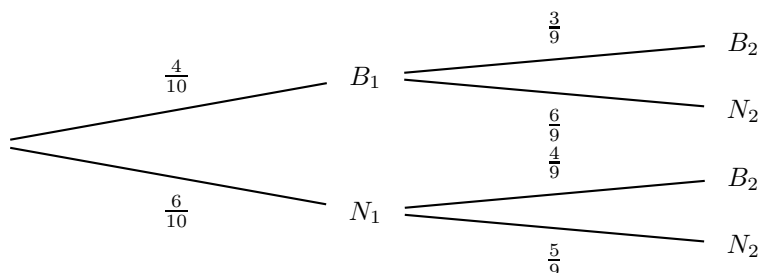
Il est grand temps de réaliser le devoir n° 3 de la page 427.

Corrigé des exercices

LOI BINOMIALE

Exercice 1 Black or White

1. Voici un arbre modélisant cette situation.



2. On a $P_{N_1}(B_2) = \frac{4}{9}$ car il y a 4 chocolats blancs parmi les neuf restants si l'on a commencé par un chocolat noir.
3. D'après la formule des probabilités totales, la probabilité de manger un chocolat de chaque sorte est $P(B_1 \cap N_2) + P(N_1 \cap B_2) = P_{B_1}(N_2) \cdot P(B_1) + P_{N_1}(B_2) \cdot P(N_1)$
 $P(B_1 \cap N_2) + P(N_1 \cap B_2) = \frac{6}{9} \cdot \frac{4}{10} + \frac{4}{9} \cdot \frac{6}{10} = \frac{8}{15}$.
4. Cette expérience n'est pas une succession d'épreuves indépendantes car la probabilité que le deuxième chocolat soit blanc (ou noir) dépend du premier chocolat mangé : $P_{B_1}(B_2) = \frac{3}{9} \neq \frac{4}{9} = P_{N_1}(B_2)$.

Exercice 2 Baccaléatoire

On appelle E_i l'événement « on a réussi l'épreuve i ». Ces événements sont indépendants donc la probabilité de réussir l'examen est

$$\begin{aligned} P(E) &= P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) + P(\overline{E_1} \cap E_2 \cap E_3) + P(E_1 \cap \overline{E_2} \cap E_3) + P(E_1 \cap E_2 \cap \overline{E_3}) \\ &= P(E_1) \cdot P(E_2) \cdot P(E_3) + P(\overline{E_1}) \cdot P(E_2) \cdot P(E_3) + P(E_1) \cdot P(\overline{E_2}) \cdot P(E_3) \\ &\quad + P(E_1) \cdot P(E_2) \cdot P(\overline{E_3}) \\ &= 0,8 \times 0,6 \times 0,25 + (1 - 0,8) \times 0,6 \times 0,25 + 0,8 \times (1 - 0,6) \times 0,25 \\ &\quad + 0,8 \times 0,6 \times (1 - 0,25) \\ &= \frac{59}{100}. \end{aligned}$$

On a donc 59 % de chances de réussir cet examen.

Exercice 3 Probabilités du second degré

Le discriminant du polynôme $x^2 + bx + c$ vaut $\Delta = b^2 - 4c$ et l'on sait bien que $X = 0 \iff \Delta < 0$, $X = 1 \iff \Delta = 0$ et $X = 2 \iff \Delta > 0$.
 Le tableau à double entrée suivant nous donne les différentes possibilités.

c \ b	1	2	3	4	5
1		$\Delta = 0$	$\Delta > 0$	$\Delta > 0$	$\Delta > 0$
2	$\Delta < 0$		$\Delta > 0$	$\Delta > 0$	$\Delta > 0$
3	$\Delta < 0$	$\Delta < 0$		$\Delta > 0$	$\Delta > 0$
4	$\Delta < 0$	$\Delta < 0$	$\Delta < 0$		$\Delta > 0$
5	$\Delta < 0$	$\Delta < 0$	$\Delta < 0$	$\Delta < 0$	

Puisque les jetons sont tirés au hasard, chaque case est équiprobable et l'on en déduit la loi de X suivante : $P(X = 0) = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$, $P(X = 1) = \frac{1}{20}$ et $P(X = 2) = \frac{9}{20}$.

Exercice 4 Calculatrice

À la calculatrice, $P(X = k) = \text{binomFdp}(35, 0.71, k)$

et $P(X \leq k) = \text{binomFRép}(35, 0.71, k)$.

- $P(X = 25) \simeq 0,148$
- $P(X = 31) \simeq 0,009$
- $P(X \leq 30) \simeq 0,987$
- $P(X < 21) = P(X \leq 20) \simeq 0,056$
- $P(X > 21) = 1 - P(X \leq 21) \simeq 0,892$
- $P(X \geq 19) = 1 - P(X < 19) = 1 - P(X \leq 18) \simeq 0,989$
- $P(20 < X) = P(X > 20) = 1 - P(X \leq 20) \simeq 0,944$
- $P(18 \leq X) = P(X \geq 18) = 1 - P(X < 18) = 1 - P(X \leq 17) \simeq 0,996$
- $P(25 < X \leq 29) = P(X \leq 29) - P(X \leq 25) \simeq 0,379$
- $P(21 \leq X < 31) = P(X \leq 30) - P(X \leq 20) \simeq 0,931$
- $P(22 < X < 30) = P(X \leq 29) - P(X \leq 22) \simeq 0,776$
- $P(19 \leq X \leq 29) = P(X \leq 29) - P(X \leq 18) \simeq 0,953$

Exercice 5 Imagination (im)probable

On sait que 30% des vaches sont rieuses. Quelle est la probabilité que dans un troupeau de 18 vaches, il y ait 7 vaches qui rient ?

$V \sim \mathcal{B}(18, 0,3)$ et $P(V = 7) = \binom{18}{7} \times 0,3^7 \times 0,7^{11}$ bien-sûr.

Exercice 6 Pc Intosh

1. Le nombre de clients potentiels étant supposé très grand, cette expérience peut être assimilée à une répétition aléatoire de 8 schémas de Bernoulli identiques et indépendants (même si certains clients distraits reviendront) et C suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 8$ et $p = 0,1$.

2. $E(C) = np = 0,8$ clients par jour passeront commande en moyenne et en théorie.

3. $P(C = 2) = \binom{8}{2} p^2 (1-p)^{8-2} \simeq 0,1488$

et $P(C \geq 3) = \sum_{i=3}^8 P(C = i) = \sum_{i=3}^8 \binom{8}{i} p^i (1-p)^{8-i} \simeq 0,0381$.

Exercice 7 Kataklop

1. Puisqu'apparemment ni le cavalier ni sa monture ne se souviennent de leurs erreurs, le parcours est assimilé à une répétition de 11 expériences aléatoires identiques et indépendantes. X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 11$ et $p = 0,625$, d'espérance $\mathbb{E}(X) = np = 6,875$ obstacles franchis sans faute.
2. Puisque $v = \frac{d}{t}$, le temps d'un parcours sans faute est de $t = \frac{d}{v} = \frac{3 \text{ km}}{15 \text{ km.h}^{-1}} = \frac{1}{5} \text{ h} = 12 \text{ min}$.
3. $D = t + 1(11 - X) = 23 - X$ et $\mathbb{E}(D) = 23 - \mathbb{E}(X) = 16,125 \text{ min}$: temps moyen théorique d'un parcours.

Exercice 8 VouF hasardeux

1. Puisque l'on a répétition indépendante de cinq expériences aléatoires de Bernoulli identiques ("juste" ou "faux"), J suit une loi binomiale de paramètres $n = 5$ et $p = \frac{1}{2}$, d'espérance $\mathbb{E}(J) = np = 2,5$.
2. (a) Puisque si l'on a J réponses justes, on a $5 - J$ réponses fausses, $N = 2 \times J - 1 \times (5 - J) = 3J - 5$ et $\mathbb{E}(N) = \mathbb{E}(3J - 5) = 3\mathbb{E}(J) - 5 = 2,5$.
(b) On a $\Omega(J) = \{0, 1, 2, \dots, 5\}$ donc $\Omega(N) = \{3 \times 0 - 5 = -5, -2, 1, 4, 7, 10\}$.
(c) En répondant au hasard, on peut ici espérer obtenir la moyenne, et chacun en pensera ce qu'il voudra.

Exercice 9 Le problème du chevalier de Méré

Si U compte le nombre de six obtenus lors de quatre lancers d'un dé cubique et D compte le nombre de double-six obtenus lors de vingt-quatre lancers de deux dés cubiques, on a $U \sim \mathcal{B}(4; \frac{1}{6})$ et $D \sim \mathcal{B}(24; \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36})$.

Ainsi, $P(U \geq 1) = 1 - P(U = 0) = 1 - \left(\frac{4}{0}\right) \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^4 \simeq 0,52$
et $P(D \geq 1) = 1 - P(D = 0) = 1 - \left(\frac{24}{0}\right) \left(\frac{1}{36}\right)^0 \left(\frac{35}{36}\right)^{24-0} \simeq 0,49 < P(U \geq 1)$.
On peut toutefois remarquer que ces variables sont toutes deux d'espérance $\frac{2}{3}$.

Exercice 10 Une grosse somme

1. On modélise cette expérience grâce au tableau suivant dans lequel chaque case est équiprobable :

+	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Ainsi, $P(S) = \frac{6 \text{ sommes } \geq 10}{36 \text{ cases}} = \frac{1}{6}$.

2. Si S_{10} compte le nombre de réalisations de S lors de la répétition indépendante de dix expériences aléatoires de Bernoulli précédentes, $S_{10} \sim \mathcal{B}(10; \frac{1}{6})$ et $P(S_{10} = 3) = \left(\frac{10}{3}\right) \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^{10-3} \simeq 0,155$.

3. (a) Similairement, on a

$$P_n = P(S_n \geq 1) = 1 - P(S_n = 0) = 1 - \binom{n}{0} \left(\frac{1}{6}\right)^0 \left(\frac{5}{6}\right)^{n-0} = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n.$$

- (b) On a $P_{25} \simeq 0,989$ et $P_{26} \simeq 0,991$ donc il faut réaliser au moins 26 lancers.

Exercice 11 Le rouge et le noir

Une rédaction adéquate mène à l'assertion : R suit une loi binomiale de paramètres $n = 15$ et $p = \frac{3}{5}$, d'espérance $E(R) = np = 9$ boules rouges.

Puisque si l'on a R boules rouges, on a $15 - R$ boules noires,

$$G = -1, 2 \times R + 1, 8 \times (15 - R) = 27 - 3R \text{ €},$$

d'espérance $E(G) = E(27 - 3R) = 27 - 3E(R) = 0 \text{ €}$.

C'est donc un jeu équitable et passionnant.

Exercice 12 Pupu

- On a $P(a \cap b) = P(a) + P(b) - P(a \cup b) = P(a) + P(b) - (1 - P(\overline{a \cap b}))$
 $= P(a) + P(b) + P(\overline{a \cap b}) - 1 = P(a \cap \overline{b}) = \frac{3+2+96-100}{100} = \frac{1}{100}.$
- Puisque l'on a répétition indépendante de cent expériences aléatoires de Bernoulli identiques, D suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,96$, d'espérance $E(D) = np = 96$, nombre moyen de puces sans défaut dans un lot de 100.

- De même, $M \sim \mathcal{B}(800; 0,01)$ et $E(M) = 800 \times 0,01 = 8$, nombre moyen de puces inutilisables par lot de 800. On a $P(M > n) = 1 - \sum_{i=0}^n \binom{800}{i} 0,01^i \cdot 0,99^{800-i}.$

À la calculatrice, on trouve $P(M > n) = 1 - P(M \leq n) \leq 0,05$ pour $n \geq 13$:
 $1 - \text{binomFRep}(800, 0,01, 12) \simeq 0,06$

et $1 - \text{binomFRep}(800, 0,01, 13) \simeq 0,03$.

Il y a donc moins de 5 % de risque que plus de 12 puces soient inutilisables dans un lot de 800 puces.

Exercice 13 Pascal

- Le triangle de Pascal nous donne $\binom{9}{2} = 36$ et $3\binom{10}{4} = 14\binom{10}{2}.$
- Puisque $\binom{3}{3} = \binom{4}{4}$, on a
 $\binom{3}{3} + \binom{4}{3} + \binom{5}{3} + \binom{6}{3} + \binom{7}{3} = [\binom{4}{4} + \binom{4}{3}] + \binom{5}{3} + \binom{6}{3} + \binom{7}{3}$
 $= [\binom{5}{4} + \binom{5}{3}] + \binom{6}{3} + \binom{7}{3} = [\binom{6}{4} + \binom{6}{3}] + \binom{7}{3} = \binom{7}{4} + \binom{7}{3} = \binom{8}{4}$
 que l'on obtient en sommant les cinq premiers termes de la quatrième colonne ou en lisant le cinquième terme de la neuvième ligne.

Exercice 14 Assis !

- Pour chaque billet vendu, il y a 90 % de chance que la personne assiste effectivement au grand événement et l'on peut supposer que les défections sont indépendantes puisqu'on a donné une estimation du taux de présence. X compte alors le nombre de succès (présence du convive) lors d'une répétition de 250 schémas de Bernoulli indépendants : $X \sim \mathcal{B}(250; 0,9).$
- Si l'on note k le nombre de places assises de la salle, certains convives n'auront pas de place assise lorsque $X > k$ et puisque l'on souhaite que moins de 2 % des

personnes présentes n'aient pas de place assise dans une salle de capacité optimale, on cherche le plus petit $k \in \mathbb{N}$ tel que $P(X > k) \leq 0,02$.

3. On a $P(X > k) \leq 0,02 \iff 1 - P(X \leq k) \leq 0,02 \iff P(X \leq k) \geq 0,98$.
La calculatrice donne $P(X \leq 233) = \text{binomFRép}(250, 0,9, 233) \simeq 0,969$ et $P(X \leq 234) \simeq 0,983$.

Les organisateurs peuvent donc chercher une salle de 234 places.

Exercice 15 Six, c'est sûr !

1. On lance n fois un dé cubique non pipé et l'on désigne par S_n la variable aléatoire comptant le nombre de 6 obtenus. Trivialement, $S_n \sim \mathcal{B}(n, \frac{1}{6})$ et l'on cherche $k \in \mathbb{N}$ tel que

$$\begin{aligned} P(S_n \geq 1) \geq 0,95 &\iff 1 - P(S_n = 0) \geq 0,95 \iff P(S_n = 0) \leq 0,05 \\ &\iff \left(\frac{5}{6}\right)^n \leq 0,05. \end{aligned}$$

La calculatrice donne $P(S_{16}) = \left(\frac{5}{6}\right)^{16} = \text{binomFdp}(16, 1/6, 0) \simeq 0,054$
et $P(S_{17}) \simeq 0,045$.

Il faut donc lancer 17 fois le dé pour avoir plus de 95 % de chances d'obtenir au moins un 6.

2. On lance six fois un dé cubique pipé, on note p la probabilité d'obtenir un six et l'on désigne par S_p la variable aléatoire comptant le nombre de 6 obtenus. Trivialement, $S_p \sim \mathcal{B}(6, p)$ et l'on cherche $p \in [0; 1]$ tel que

$$\begin{aligned} P(S_p \geq 1) \geq 0,95 &\iff 1 - P(S_p = 0) \geq 0,95 \iff P(S_p = 0) \leq 0,05 \\ &\iff (1 - p)^6 \leq 0,05. \end{aligned}$$

La calculatrice donne $P(S_{0,39}) = (1 - 0,39)^6 = \text{binomFdp}(6, 0.39, 0) \simeq 0,052$
et $P(S_{0,4}) \simeq 0,047$.

Il faut donc faire en sorte que la probabilité du 6 soit d'au minimum 40 % pour avoir plus de 95 % de chances d'obtenir au moins un 6 lors de six lancers d'un dé pipé.

Exercice 16 Sur réservation

1. Si n est le nombre de billets vendus, le nombre de passagers présents X_n suit une loi binomiale de paramètres n et $p = 1 - \frac{9}{100} = 0,91$: $X_n \sim \mathcal{B}(n; 0,91)$.

On cherche alors le plus grand $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\begin{aligned} P(X_n > 180) \leq 1 - 0,95 &\iff 1 - P(X_n \leq 180) \leq 1 - 0,95 \\ &\iff P(X_n \leq 180) \geq 0,95. \end{aligned}$$

On a $P(X_{191} \leq 180) = \text{binomFRép}(191, 0.91, 180) \simeq 0,962$
et $P(X_{192} \leq 180) \simeq 0,934$.

La compagnie vendra donc 191 billets pour ne pas avoir plus de passagers que de places au seuil de 95 %.

2. On cherche cette fois le plus grand $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(X_n \leq 180) \geq 0,99$.

On a $P(X_{189} \leq 180) = \text{binomFRép}(189, 0.91, 180) \simeq 0,990$
et $P(X_{190} \leq 180) \simeq 0,980$.

La compagnie vendra donc 189 billets pour ne pas avoir plus de passagers que de places au seuil de 99 %.

Exercice 17 Volvian

1. (a) Comme de bien entendu, $B \sim \mathcal{B}(200; 0,05)$ et $\mathbb{E}(B) = np = 10$ bouteilles défectueuses dans cet échantillon.
- (b) $P(B \leq 3) \simeq 0,009$, $P(B \leq 4) \simeq 0,026 > 0,025$, $P(B \leq 15) \simeq 0,956$, $P(B \leq 16) \simeq 0,976 > 0,975$ et $P(B \leq 17) \simeq 0,988$.
- (c) Ainsi, $I = [4; 16]$ est un intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de B .
2. (a) Puisque $17 \notin I$, on ne peut affirmer, au seuil de 5 %, que la chaîne fonctionne correctement.
- (b) On a $P(B \leq 3) + P(B > 16) = P(B \leq 3) + 1 - P(B \leq 16)$
 $\simeq 0,009 + 1 - 0,976 = 0,033$ qui est la probabilité de ne pas avoir un nombre dans cet intervalle de fluctuation à 95 % et donc de rejeter à tort l'hypothèse que la chaîne fonctionne correctement.

Exercice 18 Toile lycéenne

1. Si Q est le nombre de ces élèves utilisant quotidiennement l'internet pour leurs devoirs, $Q \sim \mathcal{B}(64; 0,52)$. On cherche le plus petit k tel que $P(Q \leq k) \geq 2,5\%$ et le plus petit k' tel que $P(Q \leq k') \leq 97,5\%$. On a $P(Q \leq 25) \simeq 0,0257$, $P(Q \leq 41) \simeq 0,981$, d'où l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la fréquence d'apparition $I = [\frac{25}{64}; \frac{41}{64}] \simeq [0,39; 0,64]$.
2. En seconde, vous auriez obtenu $I' = [0,52 \pm \frac{1}{\sqrt{64}}] \simeq [0,395; 0,645] \subset I$.
3. Puisque $\frac{42}{64} \notin I$, les classes de ce curieux professeur ne sont pas en accord avec la proportion p dans le lycée, au seuil de 95 %.

Exercice 19 Urne glacée

Si l'on désigne par V_n le nombre de boules vanilles tirées lors du tirage de n boules, on a $V_n \sim \mathcal{B}(n; 0,5)$.

Puisque l'on veut au moins une vanille et une fraise, on a

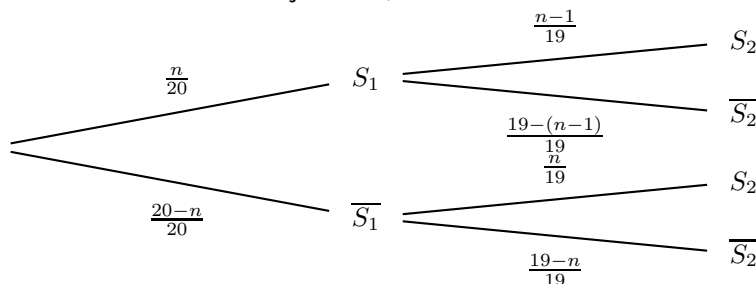
$$p_n = P(V_n \in [1; n-1]) = 1 - P(V_n = n) - P(V_n = 0)$$

$$= 1 - \binom{n}{n} \left(\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2}\right)^0 - \binom{n}{0} \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{2}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

La calculatrice donne $p_n > 0,999$ à partir de $n = 11$.

Exercice 20 Impasse

Si l'on désigne par n le nombre de sujets connus du candidat et par S_i l'événement « le candidat connaît le i -ième sujet tiré », on a le bel arbre suivant :



Ainsi, $P(S_1 \cup S_2) = P(S_1) + P(\overline{S_1} \cap S_2) = \frac{n}{20} + \frac{20-n}{20} \times \frac{n}{19} = \frac{19n+20n-n^2}{20 \times 19}$.

D'où $P(S_1 \cup S_2) \geq 0,75 \iff n^2 - 39n + 285 \leq 0 \iff n \in [10; 20]$.

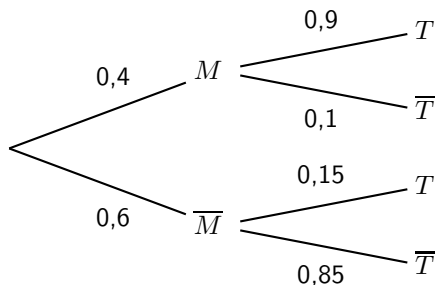
On aurait obtenu le même résultat avec

$$P(S_1 \cup S_2) = 1 - P(\overline{S_1} \cap \overline{S_2}) = 1 - \frac{20-n}{20} \times \frac{19-n}{19} \geq 0,75.$$

Le candidat doit donc connaître au moins 10 sujets s'il veut au moins 75 % de chance de ne pas être à sec.

Exercice 21 Chats porteurs

1. (a) On traduit la situation par un arbre pondéré.



(b) Calculons $P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = 0,4 \times 0,9 = 0,36$.

(c) De même $P(\overline{M} \cap T) = P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(T) = 0,6 \times 0,15 = 0,09$.

D'après la loi des probabilités totales,

$$P(T) = P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T) = 0,36 + 0,09 = 0,45.$$

(d) Calculons $P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0,36}{0,45} = \frac{36}{45} = \frac{9 \times 4}{9 \times 5} = \frac{4}{5} = \frac{8}{10} = 0,8$.

2. (a) On suppose que le nombre de chats est assez important pour que l'on puisse assimiler le choix des 20 chats à un tirage avec remise. La variable X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et de probabilité $p = 0,45$ trouvé à la question 1.(c).

(b) $P(X = 5) = \binom{20}{5} \times 0,45^5 \times (1 - 0,45)^{20-5} = 15\,504 \times 0,45^5 \times 0,55^{15} \simeq 0,037$.

(c) La calculatrice donne $P(X < 9) \approx 0,414$.

- (d) On sait que l'espérance $E(X) = n \times p = 20 \times 0,45 = 9$. Cela signifie que sur un grand nombre d'échantillons de 20 chats, il y aura en moyenne 9 chats positifs.

3. (a) On a encore une loi binomiale de paramètres n et de probabilité d'être positif de 0,45 et $P(X = 0) = \binom{n}{0} \times 0,45^0 \times 0,55^n = 0,55^n$ donc $p_n = 1 - P(X = 0) = 1 - 0,55^n$.

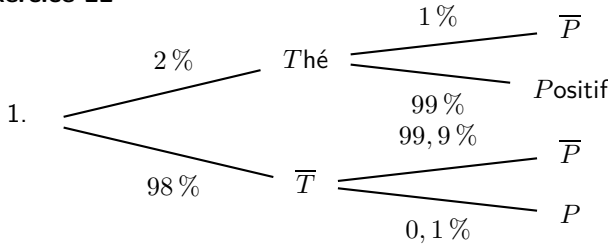
- (b) En partant de $n = 0$, le programme calcule p_n et augmente la taille de l'échantillon de 1 tant que $p_n < 0,99$.

(c) On cherche donc n tel que $1 - 0,55^n \geq 0,99 \iff 0,01 \geq 0,55^n$.

On a $0,55^7 \simeq 0,15$ et $0,55^8 \simeq 0,008$.

Le programme renvoie donc la valeur 8.

Exercice 22

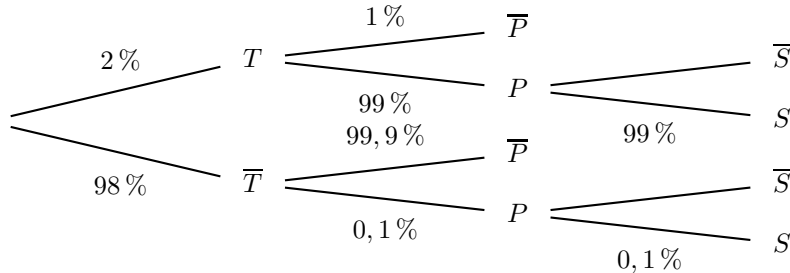


D'après la formule des probabilités totales, on a

$$p(P) = p(T \cap P) + p(\bar{T} \cap P) = p(T)p_T(P) + p(\bar{T})p_{\bar{T}}(P) = \frac{2}{100} \cdot \frac{99}{100} + \frac{98}{100} \cdot \frac{0,1}{100} = 0,02078$$

2. (a) Le second test a les mêmes spécificités que le premier donc

$$p_{T \cap P}(S) = p_T(S) = p_T(P) = \frac{99}{100} \quad \text{et} \quad p_{\bar{T} \cap P}(S) = p_{\bar{T}}(S) = p_{\bar{T}}(P) = \frac{0,1}{100}.$$



$$\begin{aligned} p(S) &= p(S \cap P \cap T) + p(S \cap P \cap \bar{T}) = p(T \cap P) \cdot p_{T \cap P}(S) + p(\bar{T} \cap P) \cdot p_{\bar{T} \cap P}(S) \\ &= p(T) \cdot p_T(P) \cdot p_T(S) + p(\bar{T}) \cdot p_{\bar{T}}(P) \cdot p_{\bar{T} \cap P}(S) \\ &= \frac{2}{100} \cdot \frac{99}{100} \cdot \frac{99}{100} + \frac{98}{100} \cdot \frac{0,1}{100} \cdot \frac{0,1}{100} = 0,01960298. \end{aligned}$$

- (b) On a $p(\bar{T} \cap S) = p(\bar{T}) \cdot p_{\bar{T}}(P) \cdot p_{\bar{T} \cap P}(S) = \frac{98 \times 0,1 \times 0,1}{100^3} \simeq 10^{-6}$.

L'officiel a donc plutôt raison car il n'y a qu'une chance sur un million qu'un mathématicien professionnel soit déclaré coupable à tort (et ce sera tant pis pour lui, on lui avait bien dit de faire un autre métier).

3. On désigne par N le nombre de désignés coupable. On a $N \sim \mathcal{B}(50; 0,02078)$ où $p = 0,02078$ a été trouvé à la question 1.

- (a) On a $\mathbb{E}(N) = np = 50 \times 0,02078 \simeq 1$ déclaré coupable en moyenne sur les 50 tirés aux pigeons.

- (b) On a $p(N \in [2; 10]) = \sum_{k=2}^{k=10} \binom{50}{k} p^k (1-p)^{50-k} \simeq 0,2787$.

avec la calculatrice : BinomFRép(10)-BinomFRép(1)

4. (a) On a $p(C = 1000) = p(P) = 0,02078$
et $p(C = 500) = p(\bar{P}) = 1 - 0,02078 = 0,97922$.

- (b) On a $10000 \cdot \mathbb{E}(C) = 10000 (500 \times p(C = 500) + 1000 \times p(C = 1000))$
 $= 5\,103\,900$.

La F.I.A.M. doit donc prévoir environ 5,1 millions d'euros.

Chapitre III

LIMITES DES FONCTIONS NUMÉRIQUES

Sommaire

Introduction	63
1 Limites en l'infini	65
1.1 Limite infinie en l'infini	65
1.2 Limite finie en l'infini	66
1.3 Asymptotes horizontales – Asymptotes obliques	67
1.4 Limites des suites du type $u_n = f(n)$	68
2 Limites en un réel	68
2.1 Limite infinie en un réel – Asymptotes verticales	69
2.2 Limite finie en un réel	70
2.3 Limite à gauche et limite à droite	70
2.4 Limites de référence	71
3 Opérations sur les limites	71
4 Limites et comparaison	74
5 Limites et composition	75
6 Limites et fonction exponentielle	76
Exercices	78
Corrigé des exercices	83

Introduction

Vous avez abordé en classe de première la notion de limite d'une fonction en un réel au cours du chapitre sur les nombres dérivés. Cette année, la limite d'une suite a été étudiée de manière plus approfondie. Nous allons poursuivre ces études. Les définitions seront ici plus précises sans toutefois être strictement rigoureuses et purement mathématiques : nous essaierons de conserver à la notion un caractère intuitif.

En mathématiques, rechercher la limite d'une quantité, c'est déterminer si celle-ci s'approche d'une valeur particulière lorsque la variable prend des valeurs extrêmes. Dans cet énoncé, deux notions sont à définir avec précision : l'idée de « s'approcher » et celle de « valeur extrême ». L'objet de ce chapitre est ainsi l'étude du comportement des fonctions numériques lorsque la variable est au voisinage de leurs valeurs « problématiques », les valeurs interdites le plus souvent, ou lorsque la variable est de plus en plus grande (positive ou négative).

Imaginez-vous près d'un précipice. Comme tout un chacun, vous êtes hypnotisés par l'attrait du vide et tenez absolument à observer ce qu'il y a au fond, s'il y en a un. Vous savez bien que pour ce faire, il vous faudrait vous situer juste au-dessus mais cela vous serait fatal. Alors, vous vous approchez, petit à petit, bravant le danger. Vous êtes pratiquement au bord mais vous pouvez encore avancer, un tout petit peu. Puis encore un peu plus. Que ne feriez-vous pour passer au-dessus, voler et voir l'immensité du gouffre béant ?

Étudier la limite d'une fonction en l'une de ses valeurs interdites, c'est un peu similaire : on s'approche infiniment près de la valeur « dangereuse », on observe le comportement des images et l'on entre en lévitation en passant à la limite, comme si l'on volait au-dessus de la valeur interdite.

Historiquement, les mathématiciens se sont d'abord intéressés aux limites de suites. Ensuite est intervenue la notion de limite de fonctions, initialement rattachée à la limite de suites. Pour chercher la limite d'une fonction quand la variable s'approche de a , on cherchait à déterminer la limite de la suite $(f(u_n))_{\mathbb{N}}$ pour toute suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ dont la limite était a . La complexité de cette approche et la multiplicité des cas ont conduit à définir la notion de limite de fonctions indépendamment de celle de limite de suites.

Les paradoxes du philosophe Zénon d'Élée (v^e s. avant J.-C.) révèlent une méditation profonde sur la notion de continu et contiennent en germe le concept de limite. Plus tard, Archimède (III^e s. avant J.-C.) présente des travaux où des quantités sont supposées être aussi proches que l'on veut d'une certaine valeur. Les mathématiciens médiévaux puis ceux de la Renaissance et de l'âge classique s'enhardissent mais les raisonnements perdent en logique et en précision. Nombreux cependant étaient les mathématiciens qui savaient traduire le langage des « infiniment petits » par des termes très proches de notre conception actuelle de la limite ; citons Blaise Pascal et Isaac Newton au XVII^e s. Pour parvenir à une définition précise, il fallut que la rigueur devienne indispensable, les problèmes qui se posaient aux analystes étant de plus en plus subtils et difficiles. C'est ainsi que, tout au long du XIX^e s., Gauss, Cauchy[†] et Bolzano, entre autres, participent à la recherche de cette précision jusqu'à ce que Karl Weierstrass puisse enfin donner la définition rigoureuse de la limite mathématique.

†. Exceptionnel mathématicien dont le nom est inscrit sur la non moins exceptionnelle tour Eiffel.

1 Limites en l'infini

Dans ce paragraphe, ρ et ℓ désignent deux nombres réels et n un entier naturel non nul.

1.1 Limite infinie en l'infini

Définition 1 Soit f une fonction définie sur l'intervalle $]\rho; +\infty[$.

On dit que « f admet $+\infty$ pour limite en $+\infty$ » ou que « $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ » lorsque les valeurs de $f(x)$ sont aussi grandes que l'on veut pour tous les x assez grands.

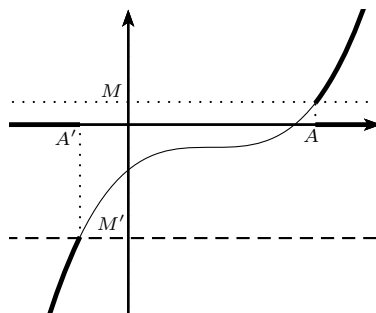
Autrement dit, $\forall M, \exists A \geq \rho$ tel que, $\forall x > A, f(x) > M$.

On note alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ou $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$.

On définit de façon analogue une limite en $+\infty$ valant $-\infty$ et ainsi que les limites infinies en $-\infty$ pour une fonction définie sur un intervalle $]-\infty; \rho[$.

Graphiquement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ signifie que la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f est située au-dessus de toute droite horizontale pour tous les x assez grands positifs.

De manière similaire, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ signifie que $\mathcal{C}_f$ est en dessous de toute droite horizontale pour tous les x assez grands négatifs.



Exemples :

- $f(x) = 3x - 5$. Soit $M \in \mathbb{R}$. On a $f(x) = M \iff x = \frac{M+5}{3}$ et f étant croissante, f est plus grande (resp. petite) que M pour tous les x plus grands (resp. petits) que $\frac{M+5}{3}$. Ainsi, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

- $g(x) = 5x^2$. Soit $M > 0$. On a

$$g(x) \geq M \iff x^2 \geq \frac{M}{5} \iff \sqrt{x^2} \geq \sqrt{\frac{M}{5}} \iff |x| \geq \sqrt{\frac{M}{5}}.$$

$$\text{Ainsi, } g(x) \geq M \text{ pour tout } x \in \left] -\infty; -\sqrt{\frac{M}{5}} \right] \cup \left[\sqrt{\frac{M}{5}}; +\infty \right].$$

$$\text{On a donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty.$$

- $h(x) = x + 2 \cos x$. Soit $M \in \mathbb{R}$. On a, pour tout réel x , $-2 \leq 2 \cos x \leq 2$ donc $h(x) \geq M$ si $x \geq M + 2$ et $h(x) \leq M$ si $x \leq M - 2$.

$$\text{D'où, } \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty.$$

Attention à la coexistence des deux notations $\xrightarrow{x \rightarrow a}$ et $\lim_{x \rightarrow a}$ qu'il ne faut surtout pas mélanger. La limite ne tend pas et la fonction n'est pas égale à sa limite. On est ici entre *infini potentiel* et *infini achevé* mais cela nous entraîne sur un sujet philosophique qui n'est pas l'objet de ce cours.

Le théorème très intuitif suivant est admis.

Théorème 1 *Limites de référence*

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$\text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{si } n \text{ est pair} \\ -\infty & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

Remarque : Ce n'est pas parce qu'une fonction est croissante qu'elle tend vers $+\infty$ en $+\infty$ et la décroissance d'une fonction n'implique pas une limite $-\infty$ en $+\infty$.

Réciproquement, une fonction tendant vers $+\infty$ en $+\infty$ n'est pas forcément croissante tout comme une fonction tendant vers $-\infty$ en $+\infty$ n'est pas forcément décroissante. Tracez donc la fonction précédente $h(x) = x + 2 \cos(x)$ à la calculatrice pour vous en convaincre.

1.2 Limite finie en l'infini

Définition 2 Soit f une fonction définie sur l'intervalle $]\rho; +\infty[$.

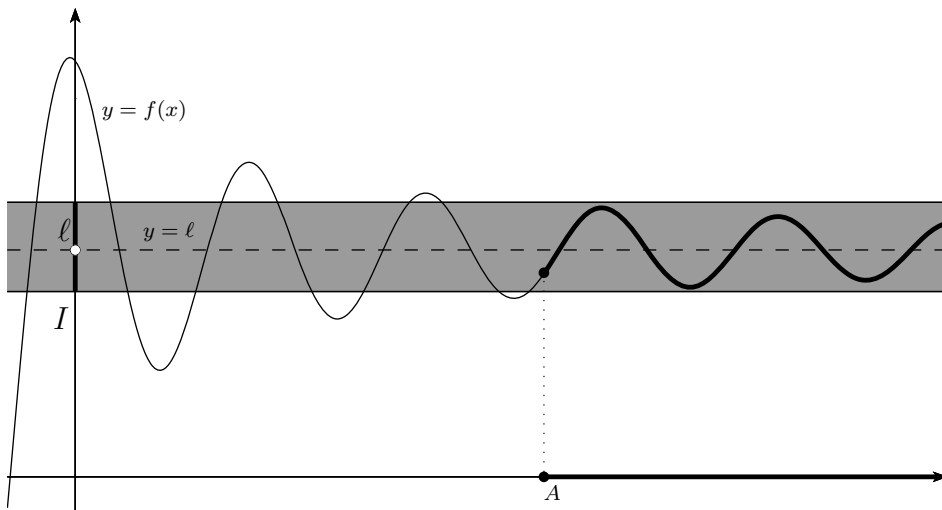
On dit que « f admet ℓ pour limite en $+\infty$ » ou que « $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers $+\infty$ » lorsque les valeurs de $f(x)$ sont aussi proches que l'on veut de ℓ pour tous les x assez grands. On note alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$ ou $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \ell$.

Plus précisément, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$

$$\iff \forall I \text{ intervalle ouvert contenant } \ell, \exists A \geq \rho \text{ tel que } x > A \implies f(x) \in I.$$

On définit de façon analogue la limite ℓ en $-\infty$ pour une fonction définie sur un intervalle $]-\infty; \rho[$.

Graphiquement, cela signifie que la courbe $\mathcal{C}_f$ est contenue dans toute bande située autour de la droite d'équation $y = \ell$ pour tous les x assez grands.



Exemple : Soit $f(x) = \frac{1}{7x} + 3$ pour $x > 0$ et soit $\varepsilon > 0$. Pour tout $x > \frac{1}{7\varepsilon}$, on a $0 < \frac{1}{7x} < \varepsilon$ et $3 < f(x) < 3 + \varepsilon$. Ainsi, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$.

Généralement, pour démontrer qu'une fonction f tend vers un réel ℓ , on montre que la fonction $(f - \ell)$ tend vers zéro, en utilisant les résultats suivants par exemple.

Théorème 2 Limites de référence

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

Plus généralement, si f a une limite infinie en l'infini alors son inverse $\frac{1}{f}$ a une

limite nulle en l'infini : $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty \implies \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{f(x)} = 0$

Démonstration : Elle est immédiate à partir de la définition. $\square$

Exemples : $\circ f(x) = \frac{1}{5x^2} + 6$: On a $f(x) - 6 = \frac{1}{5x^2} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$ car $5x^2 \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} +\infty$ donc $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 6$.

$\circ g(x) = 2 - \frac{1}{3x}$: De même, $g(x) - 2 = \frac{-1}{3x} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$ donc $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 2$.

Remarques : • La réciproque est fautive : par exemple, $\frac{\cos x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0$ mais son inverse n'est même pas définie au voisinage de l'infini.

• Il existe des fonctions n'ayant pas de limite en l'infini : les fonctions sinus et cosinus par exemple (cf. devoir n° 2 p. 423).

1.3 Asymptotes horizontales – Asymptotes obliques

Définition 3 Asymptote horizontale

Lorsqu'une fonction f admet une limite $\ell \in \mathbb{R}$ en $+\infty$ (respectivement $-\infty$), on dit que la droite d'équation $y = \ell$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de f en $+\infty$ (respectivement $-\infty$).

Exemples : Les graphes des fonctions $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\frac{1}{x^n}$ admettent la droite $y = 0$ pour asymptote horizontale en $+\infty$ et en $-\infty$.

Le graphe de la fonction $\frac{1}{5x^2} + 6$ admet la droite $y = 6$ pour asymptote horizontale en $\pm\infty$.

Définition 4 Asymptote oblique

On dit que la droite d'équation $y = mx + p$, avec $m \neq 0$, est asymptote oblique à la courbe représentative de la fonction f en $+\infty$ lorsque $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (mx + p)] = 0$.

On définit une asymptote oblique en $-\infty$ de façon analogue.

Exemple : Le graphe de la fonction $f(x) = 4x - 3 + \frac{1}{x}$ admet la droite d'équation $y = 4x - 3$ pour asymptote oblique en $\pm\infty$ car $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - (4x - 3) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Le fait que f admette une asymptote en l'infini signifie que la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ « s'approche » de plus en plus de la droite asymptotique lorsque x tend vers l'infini. Lorsque l'asymptote est oblique, on peut démontrer que f tend nécessairement vers l'infini en l'infini. En revanche, ce n'est pas parce qu'une fonction tend vers l'infini qu'elle admet une asymptote oblique.

Exemple : La fonction $x \mapsto x^2$ tend vers l'infini en l'infini mais n'admet pas d'asymptote oblique. En effet, nous pourrions bientôt montrer que, quels que soient les réels a et b , $x^2 - (ax + b) = x^2(1 - \frac{a}{x} - \frac{b}{x^2})$ tend vers l'infini et non vers zéro en l'infini. La courbe admet ici une branche parabolique de direction (Oy) .

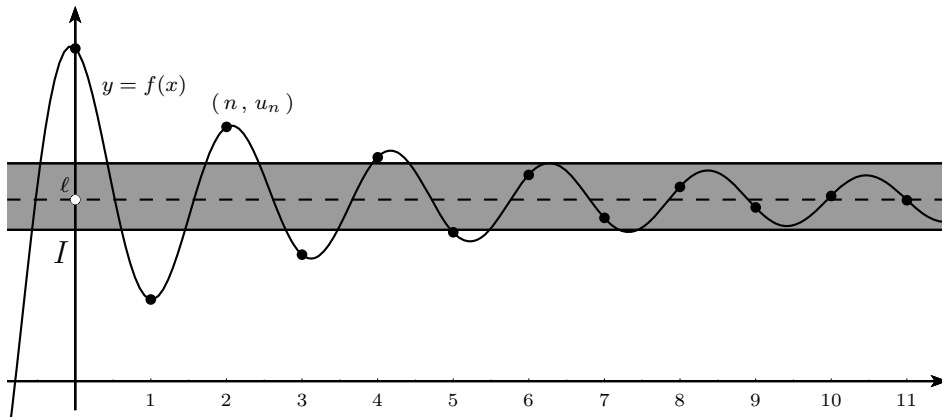
Il existe des asymptotes verticales (cf. déf. 6 p. 69) qui illustrent le même phénomène : la courbe se rapproche d'une droite.

1.4 Limites des suites du type $u_n = f(n)$

Théorème 3 Soit f une fonction définie sur $[n_0; +\infty[$, soit $(u_n)_{n \geq n_0}$ la suite définie par $u_n = f(n)$ et soit $\ell \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$.

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell \text{ alors } \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} f(n) = \ell.$$

En effet, la définition de la convergence et de la limite infinie des suites correspond à celles des limites en l'infini des fonctions numériques. En revanche, la réciproque est fausse (cf. $\cos(2\pi n)$).



2 Limites en un réel

Étudier la limite d'une fonction f en un réel a , c'est déterminer le comportement de $f(x)$ lorsque x est très proche de a . Par exemple, on ne peut calculer la valeur de $\frac{3x^2+5}{x-2}$ pour $x = 2$ mais on le peut pour des valeurs de x très proches de 2. Que se passe-t-il autour de la valeur 2? Les premiers exercices de la planche (cf. page 78) nous montrent divers comportements possibles que l'on formalise ici.

Dans ce paragraphe, ℓ est un nombre réel, n est un entier naturel non nul, f est une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}_f$ qui est un intervalle ou une réunion d'intervalles et a désigne un nombre réel appartenant à $\mathcal{D}_f$ ou au bord de $\mathcal{D}_f$.

Nous allons étudier le comportement des valeurs $f(x)$ lorsque x se rapproche de a .

2.1 Limite infinie en un réel – Asymptotes verticales

Définition 5 *Limite infinie en a*

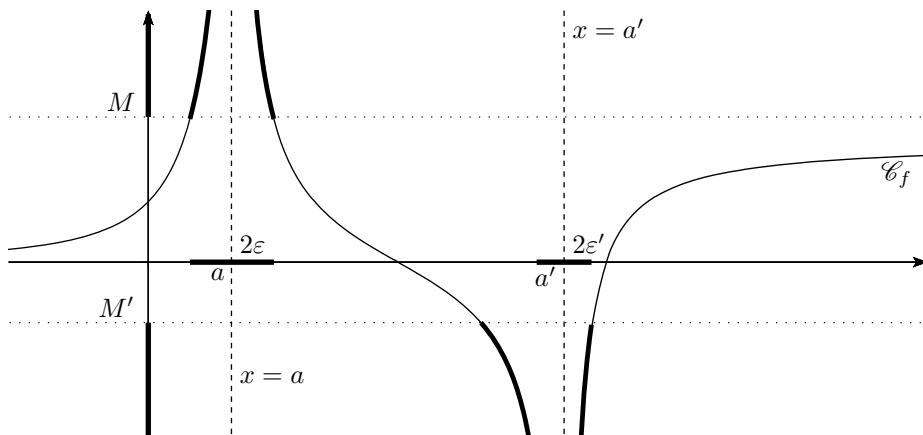
On dit que « f admet $+\infty$ pour limite en a » ou que « $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a » lorsque les valeurs de $f(x)$ sont aussi grandes que l'on veut pour tous les x de $\mathcal{D}_f \setminus \{a\}$ assez proches de a .

$$\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists \varepsilon > 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}_f \setminus \{a\} \quad |x - a| < \varepsilon \implies f(x) > M.$$

On note alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ou $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty$.

On définit de manière analogue une limite $-\infty$ en a .

Autrement dit, tout intervalle du type $]M; +\infty[$ contient toutes les valeurs de $f(x)$ pour tous les x de $\mathcal{D}_f$ suffisamment proches de a (et différents de a).



Exemple : Soit $f(x) = \frac{3}{\sqrt{x^2}} = \frac{3}{|x|}$ pour $x \neq 0$ et soit $M > 0$. $\forall x \in]-\frac{3}{M}; \frac{3}{M}[\setminus\{0\}$, on a $0 < |x| < \frac{3}{M}$ et donc $f(x) > M$. Ainsi, $f(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers 0.

Définition 6 *Asymptote verticale*

Si f admet une limite infinie en a alors on dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$.

Graphiquement, cela signifie que $\mathcal{C}_f$ se rapproche de plus en plus de l'asymptote verticale.

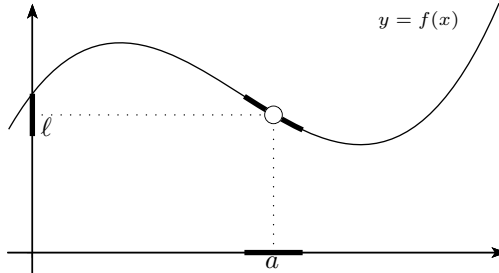
Sur l'exemple $\frac{3}{\sqrt{x^2}}$ précédent, la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à la courbe.

2.2 Limite finie en un réel

Définition 7 *Limite finie en a*

On dit que « f admet ℓ pour limite en a » ou que « $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a » lorsque les valeurs de $f(x)$ sont aussi proches que l'on veut de ℓ pour tous les x de $\mathcal{D}_f \setminus \{a\}$ assez proches de a .

$\forall I$ intervalle ouvert contenant ℓ , $\exists \varepsilon > 0$, $\forall x \in \mathcal{D}_f \setminus \{a\}$ $|x - a| < \varepsilon \implies f(x) \in I$.
On note alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ ou $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$.



C'est un cas souvent étudié dans la leçon sur le nombre dérivé : la limite des taux d'accroissements.

Exemple : Limite en $a = 1$ de $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x - 1} = \frac{(x-1)(x-3)}{x-1} = x - 3 \xrightarrow{x \rightarrow 1} 1 - 3 = -2$.

Remarque : Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ et si la fonction f est définie en a , ℓ n'est pas forcément égale à $f(a)$. Ceci n'est vrai que si la fonction est continue en a . Cela fera l'objet du chapitre IV.

2.3 Limite à gauche et limite à droite

Définition 8 *Limite à gauche et limite à droite*

On dit que f admet une limite à droite (resp. à gauche) en a si, lorsque l'on se restreint à des valeurs de x supérieures à a (resp. inférieures à a), f admet une limite en a (qui peut être réelle ou infinie).

On note alors cette limite à droite $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ ou $\lim_{x > a} f(x)$
(resp. à gauche $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ ou $\lim_{x < a} f(x)$).

Dans le cas où cette limite est infinie, on parle d'asymptote verticale à droite (resp. à gauche).

L'exemple typique de cette situation est la fonction $\frac{1}{x}$ en $a = 0$: $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à gauche et à droite à l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$.

2.4 Limites de référence

Théorème 4 *Limites infinies de référence*

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} = +\infty$ si n est **pair**.
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = -\infty$ si n est **impair**.

Démonstration : Soit $M > 0$ un réel. On cherche $\varepsilon > 0$ tel que si $x \in]-\varepsilon; \varepsilon[\setminus \{0\}$ alors $\frac{1}{x^2} > M$. La solution positive de l'équation $\frac{1}{\varepsilon^2} = M$ est $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{M}}$. On a alors, pour tout x non nul, $0 < x < \varepsilon \implies 0 < x^2 < \frac{1}{M} \implies \frac{1}{x^2} > M$. De même, si $-\varepsilon < x < 0$, $0 < x^2 < \frac{1}{M} \implies \frac{1}{x^2} > M$. On a donc bien $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

On démontre de manière analogue les autres résultats (avec la notion de racine n -ième : $\sqrt[n]{}$) $\square$

Théorème 5 *Limites finies de référence*

- Si f a une limite infinie en a alors son inverse $\frac{1}{f}$ a une limite nulle en a :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty \implies \lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{f(x)} = 0.$$
- Si $a > 0$, $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$.
- Si P est un polynôme, $\lim_{x \rightarrow a} P(x) = P(a)$ pour tout réel a .
- Si R est une fonction rationnelle et si a est dans son ensemble de définition,

$$\lim_{x \rightarrow a} R(x) = R(a).$$
- $\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$ et $\lim_{x \rightarrow a} \sin x = \sin a$ pour tout réel a .

Ce théorème est admis. Dans les quatre derniers cas, on dit que les fonctions sont *continues en a* : leur limite en a est égale à leur valeur en a (cf. chapitre IV).

3 Opérations sur les limites

En pratique, il est rare que pour calculer des limites, on en utilise la définition car la plupart des fonctions que l'on étudie sont construites à partir des fonctions de référence dont on connaît les limites classiques. Les résultats qui suivent permettent ainsi de déterminer le comportement asymptotique de fonctions plus complexes.

Dans ce paragraphe, ℓ et ℓ' sont deux nombres réels, a est un nombre réel ou l'infini : $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty; +\infty\}$ et les fonctions f et g sont définies au voisinage de a (mais peut-être pas en a).

On appelle *forme indéterminée*, et l'on note F.I., une opération dont on ne peut connaître directement la limite. Il faut souvent user de stratagèmes afin de « lever

l'indétermination » et de conclure (ou non). C'est un travail qui a été régulièrement effectué lors des calculs des nombres dérivés ou des limites des suites.

Les résultats suivants sont admis. Ils sont les analogues de ceux énoncés pour les suites.

Limite & Somme

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$	ℓ	ℓ ou $+\infty$	ℓ ou $-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x) =$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) =$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	FI

Limite & Produit

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) =$	ℓ	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	$\ell > 0$ ou $+\infty$	$\ell < 0$ ou $-\infty$	0
$\lim_{x \rightarrow a} g(x) =$	ℓ'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$ ou $+\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} (f \times g)(x) =$	$\ell \times \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	FI

Limite & Inverse

$\lim_{x \rightarrow a} g(x) =$	$\ell \neq 0$	$\ell = 0$ et $g > 0$	$\ell = 0$ et $g < 0$	$-\infty$ ou $+\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{g} \right)(x) =$	$\frac{1}{\ell}$	$+\infty$	$-\infty$	0

Limite & Quotient

Pour déterminer la limite d'un quotient, il faut généralement utiliser les deux derniers tableaux puisque $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$; les difficultés apparaissent lorsque les limites sont nulles ou infinies.

Vous avez déjà étudié des indéterminations du type « $\frac{0}{0}$ ». Voici différents comportements du type « $\frac{\infty}{\infty}$ » :

$$\frac{x^3}{x^2} = x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty, \quad \frac{x^4}{x^4} = 1 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1, \quad \frac{x^2}{x^5} = \frac{1}{x^3} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0.$$

Et voici différents comportements d'une limite « $\infty - \infty$ » : $x^2 - x^2 = 0 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0,$

$$x^3 - x = x(x^2 - 1) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty(+\infty - 1) = +\infty$$

$$\text{et } x^4 - x^7 = x^4(1 - x^3) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty(1 - \infty) = -\infty.$$

Ces différents exemples justifient le nom de « forme indéterminée ». On ne peut en effet connaître automatiquement de telles limites, qui parfois n'existent même pas.

On peut résumer ces résultats sur les opérations sur les limites en disant que les limites obéissent aux règles de calcul usuelles, y compris la règle des signes, avec l'infini qui « gagne » sur tous les nombres sauf éventuellement sur zéro lorsqu'on lui multiplie. Les formes indéterminées sont donc essentiellement des produits de zéros par l'infini et ses équivalents auxquels il faut ajouter la différence de deux infinis :

« $\frac{0}{0} = 0 \times \frac{1}{0} = 0 \times \infty = \frac{1}{\infty} \times \infty = \frac{\infty}{\infty}$ » et « $\infty - \infty$ » sont les formes indéterminées (**F.I.**).

À cela, nous ajouterons le cas délicat des limites à gauche ou à droite. Par exemple, il faut faire attention au « signe de 0 » pour déterminer la limite « $\frac{1}{0}$ » : elle peut être $-\infty$, $+\infty$ ou ne pas exister.

En revanche, « $\frac{0}{\infty} = 0$ » et « $\frac{\infty}{0} = \infty$ », si les signes sont respectés, ne sont pas des formes indéterminées.

Un dernier point : pour calculer une limite, il est souvent indispensable de la deviner, l'intuiter, la conjecturer afin d'utiliser les résultats adéquats et de démontrer le résultat escompté.

Exemple : Détermination des limites aux bornes de l'ensemble de définition.

Soit la fonction f définie par $f(x) = \frac{3x^2 - 5x - 1}{4 - 2x}$ sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{3x^2 - 5x - 1}{4 - 2x} = \frac{3 \times (2^+)^2 - 5 \times 2^+ - 1}{4 - 2 \times 2^+} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{3x^2 - 5x - 1}{4 - 2x} = \frac{3 \times (2^-)^2 - 5 \times 2^- - 1}{4 - 2 \times 2^-} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$f(x) = \frac{3x^2 - 5x - 1}{4 - 2x} = \frac{3x^2(1 - \frac{5x}{3x^2} - \frac{1}{3x^2})}{-2x(\frac{4}{-2x} + 1)} = -\frac{3}{2}x \frac{1 - \frac{5}{3x} - \frac{1}{3x^2}}{1 - \frac{2}{x}}$$

$$\text{et } f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} -\frac{3}{2} \times \pm\infty \times \frac{1 - 0 - 0}{1 - 0} = \mp\infty.$$

Cette dernière méthode se généralise aisément et l'on obtient le théorème suivant.

Théorème 6 Fonctions polynômes ou rationnelles et limites en l'infini

- La limite en l'infini d'une fonction polynôme est celle de son terme de plus haut degré.
- La limite en l'infini d'une fonction rationnelle est celle du quotient des termes de plus haut degré de son numérateur et de son dénominateur.

Ainsi, pour la fonction de l'exemple précédent, on a directement la limite de f en l'infini en calculant celle de $\frac{3x^2}{-2x} = -\frac{3}{2}x$.

Démonstration : Soit $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ un polynôme de degré n ($a_n \neq 0$). On a

$$P(x) = a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1} x^{n-1}}{a_n x^n} + \dots + \frac{a_1 x}{a_n x^n} + \frac{a_0}{a_n x^n} \right)$$

$$P(x) = a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \frac{a_{n-2}}{a_n x^2} + \dots + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n} \right)$$
 qui a la même limite que $a_n x^n$ puisque $1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \frac{a_{n-2}}{a_n x^2} + \dots + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n}$ tend vers $1 + 0 + 0 + \dots + 0 = 1$ lorsque x tend vers l'infini.
 Pour une fonction rationnelle, il suffit de faire la même factorisation sur le dénominateur □

Attention, ce théorème n'est vrai qu'en l'infini.

Par ailleurs, ce résultat n'est pas explicitement au programme de terminale et il est conseillé de ne l'utiliser que pour conjecturer et non pour démontrer.

4 Limites et comparaison

Les résultats suivants seront admis mais ils sont toutefois très intuitifs. Nous en avons démontré des similaires dans le chapitre sur les suites numériques.

Dans ce paragraphe, ℓ , ℓ' et a désignent des réels ou l'infini :
 $\ell, \ell', a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, f, g et h sont des fonctions définies au voisinage de a .

Théorème 7 Théorème de comparaison

Si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$, si $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell'$ et si $f(x) < g(x)$ pour tout x proche de a ,
 alors $\ell \leq \ell'$.

Autrement dit, le passage à la limite conserve l'ordre (au sens large et non au sens strict). Ce résultat reste vrai si $f(x) \leq g(x)$.

Théorème 8 Comparaison et infini

Si $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty$ et si $f(x) \leq g(x)$ pour tout x proche de a ,
 alors $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} +\infty$.

De même, si $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} -\infty$ et si $f(x) \leq g(x)$ pour tout x proche de a ,
 alors $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} -\infty$.

Exemple : Pour tout x réel, $x^2 + \cos x \geq x^2 - 1$ et puisque $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 - 1 = +\infty$,
 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^2 + \cos x = +\infty$.

Théorème 9 Théorème des gendarmes

Si $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$, $h(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$, et si $g(x) \leq f(x) \leq h(x) \quad \forall x$ proche de a ,
 alors $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$.

Démonstration : Soit I un intervalle ouvert contenant ℓ . Puisque $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$, il existe un intervalle ouvert G contenant a tel que $x \in G \implies g(x) \in I$. De même, puisque $h(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} \ell$, il existe un intervalle ouvert H contenant a tel que $x \in H \implies h(x) \in I$. Par ailleurs, il existe un intervalle ouvert F contenant a tel que pour tout $x \in F$,

$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$. Ainsi, pour tout $x \in F \cap G \cap H$, intervalle ouvert contenant a , $g(x) \in I$ et $h(x) \in I$ donc $f(x) \in I$ car I est un intervalle. $\square$

Exemple : Soit $f(x) = \frac{\sin x}{x^2}$ pour $x \neq 0$. On a, $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $-\frac{1}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{1}{x^2}$. Puisque $-\frac{1}{x^2}$ et $\frac{1}{x^2}$ tendent vers 0 lorsque x tend vers l'infini, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$.

Théorème 10 *Unicité de la limite*

Si f admet une limite en a , alors cette limite est unique.

Autrement dit, si f tend vers ℓ et vers ℓ' en a alors $\ell = \ell'$.

Dém. : Posons $g = h = f$. On a $g \xrightarrow{a} \ell$, $h \xrightarrow{a} \ell$, $f \xrightarrow{a} \ell'$ et $g \leq f \leq h$ donc $\ell \leq \ell' \leq \ell$. $\square$

5 Limites et composition

Nous définissons dès à présent une notion que nous travaillerons davantage dans un chapitre ultérieur (cf. p. 139).

Définition 9 *Composition de fonctions*

Soit f une fonction définie sur un ensemble E et à valeurs dans un ensemble F et soit g définie sur F .

La fonction composée de f suivie de g , notée $g \circ f$, est définie par

$$g \circ f : x \in E \mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

On a alors $x \in E \mapsto f(x) \in F \mapsto (g \circ f)(x) = g(f(x))$.

Exemple : Soient $f(x) = 3x^4 + 5x - 1$ et $g(x) = x^2$ définies sur $\mathbb{R}$.

On a $(g \circ f)(x) = g(3x^4 + 5x - 1) = (3x^4 + 5x - 1)^2$.

Remarque : Attention, $g \circ f$ et $f \circ g$ sont généralement deux fonctions différentes.

Effectivement, avec les deux fonctions précédentes, on a

$$(f \circ g)(x) = f(x^2) = 3(x^2)^4 + 5x^2 - 1 = 3x^8 + 5x^2 - 1 \neq g \circ f(x).$$

Théorème 11 *Composition des limites*

Soient a, ℓ et ℓ' dans $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ et soient f et g deux fonctions telles que la composition $g \circ f$ soit définie.

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$ et si $\lim_{X \rightarrow \ell} g(X) = \ell'$ alors $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = \ell'$.

En effet, il suffit de poser $X = f(x) \rightarrow \ell$ une fois que la définition de la composition est garantie.

Exemples : $\circ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x} + 5\right)^2 = \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + 5\right)^2 = (0 + 5)^2 = 25$.

$\circ \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^3 + 4x^2 + 7} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3 + 4x^2 + 7)} = \sqrt{+\infty} = +\infty$.

$\circ \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{(x-3)^2} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 3} (x-3)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$.

Puisqu'une suite est aussi une fonction, on peut aussi composer les limites entre suites et fonctions. Nous avons déjà un résultat pour les suites du type $u_n = f(n)$ (cf. th. 3 p. 68). En voici un autre :

Propriété 1 Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}$ telle que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.
Si, pour tout n , $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = a$ et $u_n \in \mathcal{D}$, alors $\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = b$.

Ici, a peut appartenir au bord de $\mathcal{D}$ et b peut être infini.

Exemple : $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos(\frac{1}{n})}{1 + \sin(\frac{1}{n})} = \frac{\cos(0)}{1 + \sin(0)} = \frac{1}{1+0} = 1$.

6 Limites et fonction exponentielle

Rappelons le résultat suivant, déjà démontré en classe de première.

Lemme 1 Pour tout réel x , $e^x \geq x + 1$.

Démonstration : Soit f la fonction dérivable définie par $f(x) = e^x - x - 1$.
On a $f'(x) = (e^x)' - x' = e^x - 1 = e^x - e^0$. Puisque l'exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $f'(x) < 0$ et f est décroissante sur $] -\infty ; 0 [$, $f'(x) > 0$ et f est croissante sur $] 0 ; +\infty [$.

f admet donc un minimum en 0 valant $f(0) = e^0 - 0 - 1 = 0$.

Ainsi, pour tout x réel, $e^x - x - 1 \geq 0$. □

Théorème 12 On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.

Démonstration : • Puisque $e^x \geq x + 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 = +\infty$, le théorème de comparaison permet d'affirmer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.

• Posons $X = -x$. On a, par composition des limites,

$$x \rightarrow -\infty \implies X \rightarrow +\infty \implies \frac{1}{e^x} = e^{-x} = e^X \rightarrow +\infty \implies e^x \rightarrow 0. \quad \square$$

Ainsi, la courbe de la fonction exponentielle admet une asymptote horizontale d'équation $y = 0$ en $-\infty$. Cette courbe n'admet pas d'asymptote verticale.

Le théorème suivant illustre le fait que la fonction exponentielle croît bien plus vite que toute fonction puissance en $+\infty$.

Théorème 13 Croissances comparées

Pour tout entier n , $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$.

Démonstration : Remarquons premièrement que ces limites ne sont pas indéterminées lorsque $n \leq 0$.

En effet, pour $n \leq 0$, $\frac{e^x}{x^n} = x^{-n} e^x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} (+\infty) \times (+\infty) = +\infty$ et

$$x^n e^x = \frac{e^x}{x^{-n}} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \frac{0}{-\infty} = 0.$$

- Commençons par étudier le cas $n = 1$.

• Soit f la fonction définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$.
On a $f'(x) = e^x - x > 0$ d'après le lemme 1, donc f est croissante sur $\mathbb{R}$. En particulier, pour $x > 0$, $f(x) > f(0) = 1 > 0$ d'où $e^x > \frac{x^2}{2}$ et donc $\frac{e^x}{x} > \frac{x^2}{2x} = \frac{x}{2}$.
Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

- Posons $X = -x$. On a, par composition des limites,

$$x \rightarrow -\infty \implies X \rightarrow +\infty \implies xe^x = -Xe^{-X} = -\frac{X}{e^X} = \frac{-1}{e^X/X} \rightarrow \frac{-1}{+\infty} = 0.$$

- Soit maintenant $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\text{On a } \frac{e^x}{x^n} = \frac{(\exp(\frac{x}{n}))^n}{x^n} = \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{\exp(\frac{x}{n})}{\frac{x}{n}} \right)^n = \left(\frac{1}{n} \cdot \frac{\exp(X)}{X} \right)^n \text{ pour } X = \frac{x}{n}.$$

$$\text{Puisque } n \text{ est fixé, } X \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \text{ donc } \frac{\exp(X)}{X} \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} +\infty$$

$$\text{et } \frac{e^x}{x^n} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} (+\infty) \right)^n = +\infty.$$

Pour terminer, on a, pour $X = -x \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty$,

$$\begin{aligned} x^n e^x &= (-1)^n (-x)^n \frac{1}{e^{-x}} = (-1)^n X^n \frac{1}{e^X} = (-1)^n \frac{1}{e^X/X^n} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty, X \rightarrow +\infty} \\ &(-1)^n \frac{1}{+\infty} = (-1)^n \times 0 = 0. \end{aligned} \quad \square$$

Voici une dernière et fort appréciable propriété.

Propriété 2 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$

Démonstration : En effet, $\frac{e^x - 1}{x} = \frac{\exp(x) - \exp(0)}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \exp'(0) = e^0 = 1. \quad \square$

Exercices

LIMITES DES FONCTIONS NUMÉRIQUES

Exercice 1 Soient les fonctions f , g et h définies par $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = \frac{x-3}{x-2}$ et $h(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x-1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition des fonctions f , g et h .

2. Compléter les tableaux suivants à l'aide de la calculatrice.

x	0,1	0,001	10^{-5}	-0,01	0,999	1	1,01	1,99	1,999	2,01	2,0001
$f(x)$											
$g(x)$											
$h(x)$											

x	2,999	3	3,01	1.000	10.000	10^{30}	-100	-10^5	-10^{20}
$f(x)$									
$g(x)$									
$h(x)$									

3. Que remarque-t-on ?

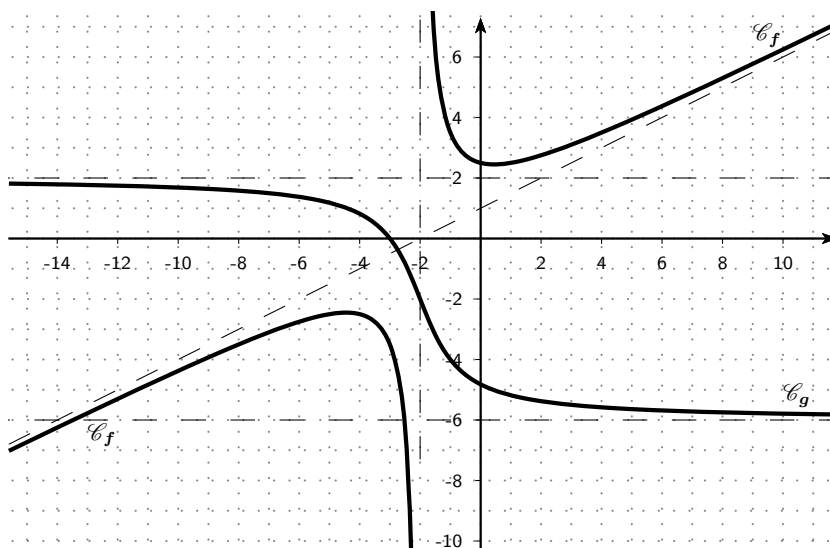
4. Tracer les courbes représentatives des fonctions f , g et h afin de conforter vos conjectures.

Exercice 2 En utilisant les définitions, démontrer que :

$$(a) \lim_{x \rightarrow -\infty} 5 - 3x = +\infty \quad (b) \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{1}{8-2x} = -\infty$$

Exercice 3 Soient f et g les deux fonctions dont les représentations graphiques $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont en page suivante.

- Conjecturer les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$, $\lim_{x \rightarrow -3} g(x)$, et $\lim_{x \rightarrow -2} g(x)$.
- Dans le même repère, esquisser le graphe $\mathcal{C}_h$ d'une fonction h définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ telle que $h(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow 3} h(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$, h est croissante sur $]3; +\infty[$ et la droite d'équation $y = -2$ est asymptote à $\mathcal{C}_h$.



Exercice 4 Lorsqu'elles existent, calculer les limites suivantes après avoir conjecturé leur valeur au moyen de la calculatrice, d'un tracé de graphe sommaire, d'une observation de l'expression algébrique de la fonction...

Ne pas oublier de différencier les limites à gauche et à droite si nécessaire.

Préciser les asymptotes horizontales et verticales le cas échéant.

- | | |
|--|--|
| (a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + 4$ | (n) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^5 - 7x^3 + 6}{8 - 5x^2}$ |
| (b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 7 - 3x$ | (o) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^3 - 5x - 4}{5 - 2x^3}$ |
| (c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^2 + 5x + 7$ | (p) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{3 - 2x}$ |
| (d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{9 - 2x}$ | (q) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ |
| (e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(17 - \frac{x+3}{9 - x^2} \right)$ | (r) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan x$ |
| (f) $\lim_{x \rightarrow 4} 7x - 5$ | (s) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x - \sin x)$ |
| (g) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x + 6}{x - 2}$ | (t) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cos x$ |
| (h) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 2x - 15}{x - 5}$ | (u) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x}$ |
| (i) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x+7}{x-3}$ | (v) $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x}$ |
| (j) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1+x}{2-x}$ | (w) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^2 \right)$ |
| (k) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 5x^2 - 4x + 1$ | (x) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x - \sqrt{x}}$ |
| (l) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 7x^3 + 2x^2 - 3x + 5$ | (y) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x - \sqrt{x}}$ |
| (m) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x - 5}{7x^2 + 3}$ | (z) $\lim_{x \rightarrow 1} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^n x^i$ (et le contraire) |

Exercice 5

1. Déterminer les limites en l'infini des fonctions suivantes.

$a(x) = xe^{-x}$	$g(x) = \frac{e^{2x}}{e^{-3x}}$	$k(x) = \frac{x^2 e^{2x}}{e^x - 1}$
$b(x) = 2 + e^{-x}$	$h(x) = \frac{2e^x}{1 + e^x}$	$l(x) = x^2 e^x$
$c(x) = e^{2x} + e^x - 5$	$i(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$	$m(x) = 3x^5 e^{-x}$
$d(x) = e^{-x^2 - 1}$	$j(x) = \frac{e^x - 1}{2e^x + 1}$	$n(x) = 5x^2 e^{-x} - 6x^4 e^{3x}$
$e(x) = e^{2x} - e^{-x}$		$o(x) = 4x^3 e^{-2x}$
$f(x) = e^{3x} - e^{2x}$		

2. Déterminer les limites éventuelles en
- 0^+
- et en
- $+\infty$
- des fonctions suivantes.

$p(x) = e^{\frac{1}{x}}$	$s(x) = \frac{1}{x} e^{-\frac{1}{x}}$	$u(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x}$
$q(x) = \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}}$	$t(x) = \frac{e^x - 1}{2x}$	$v(x) = \frac{e^{3x} - 1}{5x}$
$r(x) = x^2 e^{-2x}$		

Exercice 6 Soient les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout $n \geq 2$ par $u_n = \frac{e^{2n}}{n-1}$ et $v_n = n^2 e^{-n}$.

1. Montrer que la suite (u_n) diverge vers $+\infty$.
2. Vérifier que pour tout entier $n \geq 2$, $v_n = 4 \left(-\frac{n}{2} \times e^{-\frac{n}{2}}\right)^2$.
3. En déduire la limite de la suite (v_n) .

Exercice 7 Déterminer les limites des suites définies sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \frac{e^n - 1}{2e^n + 3}$ et $v_n = \frac{e^{-n} + 1}{e^{-n} + 3}$.

Exercice 8 f est une fonction définie sur $]0; +\infty[$ telle que :

- pour tout $x \geq 1$, $\frac{1}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$ et
 - pour tout $x \in]0; 1[$, $\frac{1}{x} \leq f(x) \leq \frac{1}{x^2}$.
1. Peut-on en déduire la limite de f en $+\infty$? Si oui, la donner.
 2. Peut-on en déduire la limite de f en 0 ? Si oui, la donner.

Exercice 9 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{\text{Ent}(x)}{x}$ où $\text{Ent}(x)$ désigne la partie entière de x .

1. Justifier que, pour tout réel x , $x - 1 \leq \text{Ent}(x) \leq x$.
2. En déduire les limites de f en $\pm\infty$.

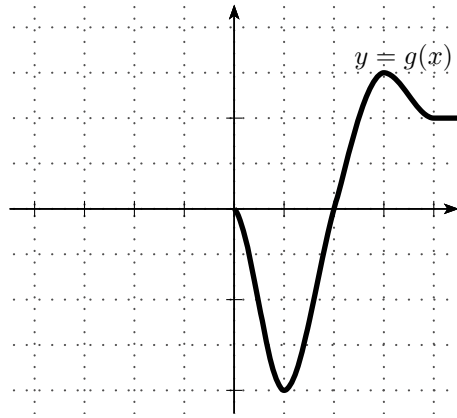
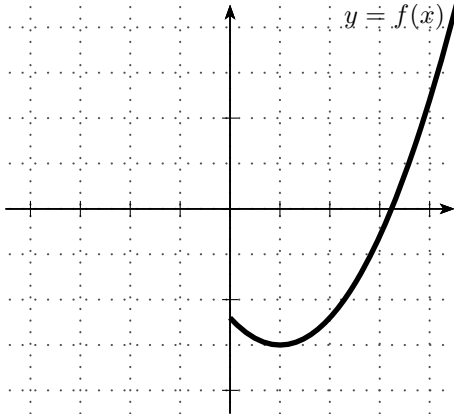
Exercice 10 Compléter la définition suivante.

Définition

Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}_f$ tel que si $x \in \mathcal{D}_f$ alors $-x \in \mathcal{D}_f$.

- On dit que f est **paire** lorsque, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(-x) = \dots$.
La représentation graphique de f dans un repère orthogonal est alors ...
- On dit que f est **impaire** lorsque, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(-x) = \dots$.
La représentation graphique de f dans tout repère est alors ...

Compléter alors les graphes suivants sachant que la fonction f est paire et la fonction g est impaire.



Exercice 11 Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{-2x^2 + 1}{x^2 + 3x}$.

1. Déterminer son ensemble de définition $\mathcal{D}_f$.
2. Étudier la parité de la fonction f (cf. exercice précédent).
3. Déterminer les racines de la fonction f .
4. Calculer la fonction dérivée f' de f .
5. Déterminer les réels a , b et c tels que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+3}$.
6. Déterminer les asymptotes à la représentation graphique $\mathcal{C}_f$ de f dans un repère.
7. Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de son asymptote horizontale.
8. Dresser le tableau de variation complet de la fonction f .
9. Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ ainsi que ses asymptotes à la calculatrice.

Exercice 12 Soit f la fonction $f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{1 - x}$ de courbe représentative $\mathcal{C}_f$ dans un repère du plan.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f .
2. Étudier la parité de la fonction f (cf. exercice 10).
3. Déterminer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}_f$. Qu'en déduire ?
4. Calculer la fonction dérivée f' puis dresser le tableau de variation complet de la fonction f .
5. Soit Δ la droite d'équation $y = -x - 2$.
 - (a) Montrer que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) = -x - 2 + \frac{4}{1-x}$.
 - (b) Étudier les positions relatives de $\mathcal{C}_f$ et de Δ .
 - (c) Déterminer les limites $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) + x + 2]$.
Interpréter graphiquement ces résultats.

On dit que la droite Δ est asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}_f$.

6. Déterminer l'équation de la tangente $\mathcal{T}_0$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
7. Tracer la tangente $\mathcal{T}_0$, la courbe $\mathcal{C}_f$ ainsi que ses asymptotes à la calculatrice.

Exercice 13 ***

Soit f la fonction définie par $f(x) = x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$ de courbe représentative $\mathcal{C}_f$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f .
 2. Démontrer que la fonction f est impaire (cf. page 80). Qu'en déduire pour $\mathcal{C}_f$?
- On note g la restriction de la fonction f à l'intervalle $]0; +\infty[$ et $\mathcal{C}_g$ sa courbe.
3. Déterminer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition. En déduire celles de f .
 4. Démontrer que la fonction g est croissante sur $]0; +\infty[$.
 5. Déterminer la limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - 1}{x}$. Qu'en déduire pour la courbe $\mathcal{C}_g$ au voisinage du point $A(0, 1)$?
 6. Construire les courbes $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_f$ dans le même repère.

Atteignez maintenant la page 431 et faites le devoir n° 4.

LIMITES DES FONCTIONS NUMÉRIQUES

Exercice 1

1. Les dénominateurs ne pouvant s'annuler, on a $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$, $\mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ et $\mathcal{D}_h = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

2.

x	0,1	0,001	10^{-5}	-0,01	0,999	1	1,01	1,99	1,999	2,01	2,0001
$f(x)$	10	1000	10^5	-100	1,001	1	0,9901	0,5025	0,5002	0,4975	0,4999
$g(x)$	1,526	1,5003	1,5	1,4975	1,999	2	2,0101	101	1001	-99	-9999
$h(x)$	-3,9	-3,999	-4	-4,01	-3,001	X	-2,99	-2,01	-2,001	-1,99	-2

x	2,999	3	3,01	1,000	10,000	10^{30}	-100	-10^5	-10^{20}
$f(x)$	0,3334	0,3333	0,3322	0,001	0,0001	10^{-30}	-0,01	-10^{-5}	-10^{-20}
$g(x)$	-0,001	0	0,0099	0,997	0,999	1	1,009	1,0001	1
$h(x)$	-1,001	-1	-0,99	996	9996	$9,9 \cdot 10^{30}$	-104	-100004	-10^{20}

3. et 4. On remarque sur les tableaux dressés à la calculatrice que pour des valeurs de x proches de $a \in \mathcal{D}$, les images se situent à proximité de l'image de a pour chacune des fonctions f , g et h . En revanche, à proximité des valeurs interdites, les images peuvent être de plus en plus grandes positives, négatives ou proches d'une valeur réelle dans le cas de la fonction h . Quant la variable est proche de l'infini, les fonctions se rapprochent de 0, de 1 ou de l'infini selon les cas. Tout ceci est bien conforté par l'observation des graphes donnés par la calculatrice.

Exercice 2

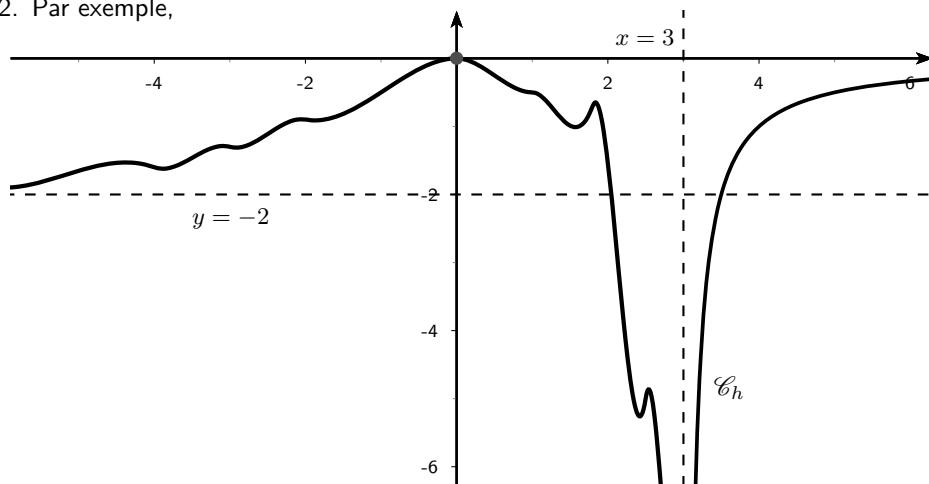
- (a) $\forall M \in \mathbb{R}, \quad x < \frac{5-M}{3} \implies 5-3x > M \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} 5-3x = +\infty.$
- (b) $\forall M < 0, \quad 4 < x < 4 - \frac{1}{2M} \implies \frac{1}{8-2x} < M \quad \text{donc} \quad \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{1}{8-2x} = -\infty.$

Exercice 3

1. Par lecture graphique, on a les conjectures suivantes.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= -\infty, & \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= +\infty, & \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) &= -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) &= +\infty, & \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) &= 2, & \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= -6, \\ \lim_{x \rightarrow -3} g(x) &= g(-3) = 0, & \text{et} & \lim_{x \rightarrow -2} g(x) &= g(-2) = -2. \end{aligned}$$

2. Par exemple,



Exercice 4 On utilise parfois le fait admis que la limite en l'infini d'un polynôme est celle de son terme de plus haut degré mais il est vraiment préférable de factoriser par ce dernier le jour de l'examen.

- (a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + 4 = "2 \times (+\infty) + 4" = +\infty$
- (b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 7 - 3x = -(-\infty) = +\infty$
- (c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^2 + 5x + 7 = "-3(-\infty)^2 + 5(-\infty) + 7" = "-\infty - \infty" = -\infty.$
- (d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6}{9 - 2x} = \frac{"6"}{-\infty} = 0^-$; $y = 0$ est asymptote horizontale en $+\infty$.
- (e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(17 - \frac{x+3}{9-x^2}\right) = 17 - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-x^2} = 17 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 17 + 0 = 17$;
 $y = 17$ est asymptote horizontale en $-\infty$.
- (f) $\lim_{x \rightarrow 4} 7x - 5 = 7 \times 4 - 5 = 23$
- (g) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x + 6}{x - 2} = \frac{1 - 1 + 6}{1 - 2} = -6$
- (h) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 2x - 15}{x - 5} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(x-5)(x+3)}{x-5} = \lim_{x \rightarrow 5} x + 3 = 5 + 3 = 8$
- (i) $\lim_{x \rightarrow 3^\pm} \frac{x+7}{x-3} = \frac{3^\pm + 7}{3^\pm - 3} = \frac{"10"}{0^\pm} = \pm\infty$; $x = 3$ est asymptote verticale à gauche et à droite.
- (j) $\lim_{x \rightarrow 2^\pm} \frac{1+x}{2-x} = \frac{1+2^\pm}{2-(2)^\pm} = \lim_{x \rightarrow 2^\pm} \frac{"3"}{0^\mp} = \mp\infty$; $x = 2$ est asymptote verticale à gauche et à droite.
- (k) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 5x^2 - 4x + 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(5 - \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2}\right) = "(+\infty)^2 \left(5 - \frac{4}{+\infty} + \frac{1}{+\infty}\right)"$
 $= "+\infty(5 - 0 + 0)" = +\infty$
- (l) $\lim_{x \rightarrow -\infty} 7x^3 + 2x^2 - 3x + 5 = 7 \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = "7 \times (-\infty)" = -\infty$ (ou factoriser)

- (m) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x-5}{7x^2+3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{7x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{7x} = \frac{4}{+\infty} = 0^+ ; y = 0$ est asymptote horizontale en $+\infty$. (ou factoriser)
- (n) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^5 - 7x^3 + 6}{8 - 5x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^5}{-5x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{3x^3}{5} = -\frac{3}{5} \times \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -(-\infty) = +\infty$ (ou factoriser)
- (o) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^3 - 5x - 4}{5 - 2x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^3}{-2x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -3 = -3 ; y = -3$ est asymptote horizontale en $+\infty$. (ou factoriser)
- (p) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{3-2x} = \sqrt{3-2(-\infty)} = \sqrt{+\infty} = +\infty$
- (q) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin x$ n'existe pas : $\sin x$ est périodique et ne peut donc être proche d'aucun nombre pour tous les x assez grands.
- (r) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^\pm} \tan x = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^\pm} \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{1}{0^\mp} = \mp\infty ; x = \frac{\pi}{2}$ est asymptote verticale à gauche et à droite.
- (s) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (3x - \sin x) \leq \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x + 1 = -\infty$ en utilisant un théorème de comparaison.
- (t) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cos x$ n'existe pas : $x \cos x = 0$ pour $x \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$, $x \cos x = x$ pour $x \equiv 0 [2\pi]$, $x \cos x = -x$ pour $x \equiv \pi [2\pi]$ et la limite est unique lorsqu'elle existe.
- (u) $0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} \leq \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ grâce aux gendarmes. $y = 0$ est asymptote horizontale.
- (v) $0 = \lim_{x \rightarrow 0} -x \leq \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} \leq \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$ (si $x > 0$, l'inverse sinon) en utilisant le théorème des gendarmes.
- (w) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^2) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x\sqrt{x}(1 - \frac{1}{2}\sqrt{x}) = (+\infty)(+\infty)(1 - (+\infty)) = -\infty$
- (x) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{x - \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x} - 1} = \frac{1}{+\infty} = 0^+ ; y = 0$ asymptote horizontale en $+\infty$.
- (y) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x - \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}(\sqrt{x} - 1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x} - 1} = \frac{1}{0 - 1} = -1$.
- (z) Pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \neq 1$, $\sum_{i=0}^n x^i = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$. Ainsi, pour $x > 1$, $1 - x < 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^n x^i = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1 - \infty}{1 - x} = +\infty$ d'où $\lim_{x \rightarrow 1^+} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^n x^i = +\infty$.
- Pour $-1 < x < 1$, $1 - x > 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^n x^i = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} = \frac{1 - 0}{1 - x} = \frac{1 - 0}{1 - x}$

$$\text{d'où } \lim_{x \rightarrow 1^-} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{i=0}^n x^i = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{1-x} = \frac{1}{0^+} = +\infty.$$

$$\text{Par ailleurs, } \sum_{i=0}^n x^i = 1 + x + x^2 + \dots + x^n \xrightarrow{x \rightarrow 1} 1 + 1 + \dots + 1 = n + 1$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow 1} \sum_{i=0}^n x^i = \lim_{n \rightarrow +\infty} n + 1 = +\infty.$$

Exercice 5

$$1. a(x) = xe^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \quad \text{et} \quad a(x) = xe^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -\infty.$$

$$b(x) = 2 + e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 2 \quad \text{et} \quad b(x) = 2 + e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty.$$

$$c(x) = e^{2x} + e^x - 5 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \quad \text{et} \quad c(x) = e^{2x} + e^x - 5 \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} -5.$$

$$d(x) = e^{-x^2-1} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} "e^{-(\pm\infty)^2}" = "e^{-\infty}" = 0.$$

$$e(x) = e^{2x} - e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} "e^{\pm\infty} - e^{\mp\infty}" = \begin{cases} +\infty - 0 \\ 0 - \infty \end{cases} = \pm\infty.$$

$$f(x) = e^{3x} - e^{2x} = e^{2x}(e^x - 1) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} \begin{cases} +\infty(+\infty) \\ 0(0-1) \end{cases} = \begin{cases} +\infty \\ 0 \end{cases}.$$

$$g(x) = \frac{e^{2x}}{e^{-3x}} = e^{5x} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} "e^{\pm\infty}" = \begin{cases} +\infty \\ 0 \end{cases}.$$

$$h(x) = \frac{2e^x}{1+e^x} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \frac{2 \times 0}{1+0} = 0$$

$$\text{et } h(x) = \frac{2e^x}{e^x(e^{-x}+1)} = \frac{2}{e^{-x}+1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{0+1} = 2.$$

$$i(x) = \frac{e^x}{e^x-1} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \frac{0}{0-1} = 0$$

$$\text{et } i(x) = \frac{e^x}{e^x(1-e^{-x})} = \frac{1}{1-e^{-x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1-0} = 1.$$

$$j(x) = \frac{e^x-1}{2e^x+1} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} \frac{0-1}{2 \times 0+1} = -1$$

$$\text{et } j(x) = \frac{e^x(1-e^{-x})}{e^x(2+e^{-x})} = \frac{1-e^{-x}}{2+e^{-x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1-0}{2+0} = \frac{1}{2}.$$

$$k(x) = \frac{x^2 e^{2x}}{e^x-1} = \frac{x e^x \cdot x e^x}{e^x-1} \xrightarrow{-\infty} \frac{0 \times 0}{0-1} = 0$$

$$\text{et } k(x) = \frac{x^2 e^{2x}}{e^x(1-e^{-x})} = \frac{x^2 e^x}{1-e^{-x}} \xrightarrow{+\infty} \frac{+\infty}{1-0} = +\infty.$$

$$l(x) = x^2 e^x = 4 \left(\frac{x}{2} e^{\frac{x}{2}}\right)^2 \stackrel{(X=x/2)}{=} 4(X e^X)^2 \xrightarrow{X \rightarrow +\infty} 4 \times 0^2 = 0$$

$$\text{et } l(x) = x^2 e^x \xrightarrow{+\infty} +\infty.$$

$$m(x) = 3x^5 e^{-x} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} "3(-\infty)^5(+\infty)" = -\infty$$

$$\text{et, pour } X = -x \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} -\infty,$$

$$m(x) = 3x^5 e^{-x} = -3X^5 e^X \xrightarrow{x \rightarrow +\infty, X \rightarrow -\infty} -3 \times 0 = 0 \quad \text{par}$$

croissance comparée.

$$n(x) = 5x^2e^{-x} - 6x^4e^{3x} = 5x^2e^{-x} - 6x^4e^x(e^x)^2$$

$$\xrightarrow{x \rightarrow -\infty} "5(+\infty) - 6 \times 0 \times 0^2 = +\infty$$

$$\text{et } n(x) = 5x^2e^{-x} - 6x^4e^{3x} = 5(-x)^2e^{-x} - 6x^4e^{3x}$$

$$\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} "5 \times 0 - 6(+\infty)(+\infty)^3" = -\infty.$$

$$o(x) = 4x^3e^{-2x} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} "4(-\infty)^3(+\infty)" = -\infty$$

$$\text{et } o(x) = 4x^3e^{-2x} = \frac{4}{-8}(-2x)^3e^{-2x} \stackrel{X=-2x}{=} -\frac{1}{2}X^3e^X$$

$$\xrightarrow{x \rightarrow +\infty, X \rightarrow -\infty} -\frac{1}{2} \times 0 = 0.$$

$$2. p(x) = e^{\frac{1}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} "e^{+\infty}" = +\infty \quad \text{et} \quad p(x) = e^{\frac{1}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} e^0 = 1.$$

$$q(x) = \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty \times (+\infty) = +\infty$$

$$\text{et } q(x) = \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \times e^0 = 0 \times 1 = 0.$$

$$r(x) = x^2e^{-2x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0^2e^{-0} = 0$$

$$\text{et } r(x) = \left(\frac{x}{e^x}\right)^2 = \left(\frac{1}{e^x/x}\right)^2 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{+\infty}\right)^2 = 0^2 = 0.$$

$$s(x) = \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}} = \frac{1}{\frac{e^{1/x}}{1/x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+, \frac{1}{x} \rightarrow +\infty} \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\text{et } s(x) = \frac{1}{x}e^{-\frac{1}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{+\infty}e^{-1/+\infty} = 0e^0 = 0.$$

$$t(x) = \frac{e^x - 1}{2x} = \frac{1}{2} \frac{e^x - 1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$$

$$\text{et } t(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{e^x}{x} - \frac{1}{x} \right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} (+\infty - 0) = +\infty.$$

$$u(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x} = e^{-x} \frac{e^x - 1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} e^0 \times 1 = 1$$

$$\text{et } u(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - 0}{+\infty} = 0.$$

$$v(x) = \frac{e^{3x} - 1}{5x} = \frac{3}{5} \frac{e^{3x} - 1}{3x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \frac{3}{5} \times 1 = \frac{3}{5}$$

$$\text{et } v(x) = \frac{3}{5} \left(\frac{e^{3x}}{3x} - \frac{1}{3x} \right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{5} (+\infty - 0) = +\infty.$$

Exercice 6 Pour tout $n \geq 2$ par $u_n = \frac{e^{2n}}{n-1}$ et $v_n = n^2 e^{-n}$.

1. $n-1 < 2n$ donc $u_n = \frac{e^{2n}}{n-1} > \frac{e^{2n}}{2n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ et le théorème de comparaison permet de conclure.

2. Pour $n \geq 2$, $4 \left(-\frac{n}{2} \times e^{-\frac{n}{2}} \right)^2 = 4 \times \frac{n^2}{2^2} e^{-\frac{n}{2} \times 2} = n^2 e^{-n} = v_n$.

3. En posant $\xi = -\frac{n}{2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$, on a $v_n = 4(\xi e^\xi)^2 \xrightarrow{\xi \rightarrow -\infty} 4 \times 0^2 = 0$.

Exercice 7

- On a $u_n = \frac{e^n - 1}{2e^n + 3} = \frac{e^n(1 - e^{-n})}{2e^n(1 + \frac{3}{2}e^{-n})} = \frac{1}{2} \frac{1 - e^{-n}}{1 + \frac{3}{2}e^{-n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \frac{1 - 0}{1 + 0} = \frac{1}{2}$.
- $v_n = \frac{e^{-n} + 1}{e^{-n} + 3} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{e^{-\infty} + 1}{e^{-\infty} + 3} = \frac{0 + 1}{0 + 3} = \frac{1}{3}$.

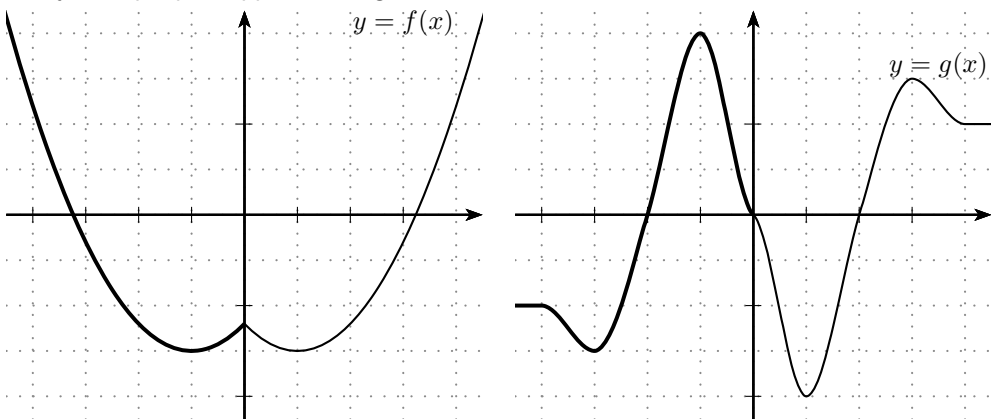
Exercice 8

1. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et, pour tout $x \geq 1$, $\frac{1}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$.
Le théorème des gendarmes permet d'affirmer que f admet alors la même limite et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
2. Seule la limite en 0^+ a un sens. On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et, pour tout $x \in]0; 1[$, $\frac{1}{x} \leq f(x)$. Un théorème de comparaison permet d'affirmer que f admet alors la même limite infinie et $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$.

Exercice 9

1. $\text{Ent}(x)$ étant le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x , on a $\text{Ent}(x) \leq x$ (inférieur). Par ailleurs, il y a nécessairement un entier dans tout intervalle $[x - 1; x]$ donc $x - 1 \leq \text{Ent}(x)$ (le plus grand).
2. Ainsi, pour $x > 0$, $\frac{x - 1}{x} \leq \frac{\text{Ent}(x)}{x} \leq \frac{x}{x} \iff 1 - \frac{1}{x} \leq f(x) \leq 1$.
Si $x < 0$, $1 - \frac{1}{x} \geq f(x) \geq 1$. Puisque $1 - \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 1 - 0 = 1$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$.

Exercice 10 La représentation graphique d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées dans un repère orthogonal, et celle d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.



Exercice 11 Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{-2x^2 + 1}{x^2 + 3x}$.

1. Le dénominateur $x^2 + 3x = x(x + 3)$ ne pouvant s'annuler, la fonction f est définie sur $\mathcal{D}_f =]-\infty; -3[\cup]-3; 0[\cup]0; +\infty[= \mathbb{R} \setminus \{-3; 0\}$.

2. L'ensemble de définition de f n'étant pas symétrique par rapport à 0, f ne peut être ni paire ni impaire. Sinon, $f(1) = -\frac{1}{4}$ et $f(-1) = \frac{1}{2} \neq \pm f(1)$.
3. On a $f(x) = 0 \iff \frac{-2x^2+1}{x^2+3x} = 0 \iff -2x^2+1=1 \iff x^2 = \frac{1}{2}$
 $\iff x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$.
4. Posons $\begin{cases} u = -2x^2+1 \\ v = x^2+3x \end{cases}$ On a $\begin{cases} u' = -4x \\ v' = 2x+3 \end{cases}$. f étant de la forme $\frac{u}{v}$,
 $f' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$ et, $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $f'(x) = \frac{-4x(x^2+3x) - (-2x^2+1)(2x+3)}{(x^2+3x)^2}$
 $f'(x) = \frac{-4x^3-12x^2+4x^3+6x^2-2x-3}{(x^2+3x)^2} = \frac{-6x^2-2x-3}{(x^2+3x)^2}$.
 Puisque $\Delta = 4 - 4 \times 6 \times 3 < 0$, la fonction dérivée f' est toujours négative.
5. On a $a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+3} = \frac{ax(x+3) + b(x+3) + cx}{x(x+3)} = \frac{ax^2 + (3a+b+c)x + 3b}{x(x+3)}$
 et $f(x) = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x+3} \iff a = -2; 3a+b+c=0; 3b=1$
 $\iff a = -2; b = \frac{1}{3}; c = 6 - \frac{1}{3} = \frac{17}{3}$.
 Ainsi, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) = -2 + \frac{1}{3x} + \frac{17}{3(x+3)}$.
6. On a $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{-2x^2+1}{x(x+3)} = \frac{-2 \times 0^\pm + 1}{0^\pm(0^\pm+3)} = \frac{"1"}{3 \times 0^\pm} = \pm\infty$
 donc la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à gauche et à droite à la courbe $\mathcal{C}_f$.
 On a $\lim_{x \rightarrow -3^\pm} f(x) = \lim_{x \rightarrow -3^\pm} \frac{-2x^2+1}{x(x+3)} = \frac{-2 \times 3^\pm + 1}{-3^\pm(-3^\pm+3)} = \frac{"-17"}{-3 \times 0^\pm} = \pm\infty$
 donc la droite d'équation $x = -3$ est asymptote verticale à gauche et à droite à la courbe $\mathcal{C}_f$.
 On a $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} -2 + \frac{1}{3x} + \frac{17}{3(x+3)}$
 $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = "-2 + \frac{1}{3 \times \pm\infty} + \frac{17}{3(\pm\infty+3)}" = -2 \pm 0 \pm 0 = -2$
 donc la droite d'équation $y = -2$ est asymptote horizontale en $+\infty$ et en $-\infty$ à la courbe $\mathcal{C}_f$.
7. Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a $f(x) - (-2) = \frac{1}{3x} + \frac{17}{3(x+3)} = \frac{6x+1}{x(x+3)}$ de tableau de signes suivant.

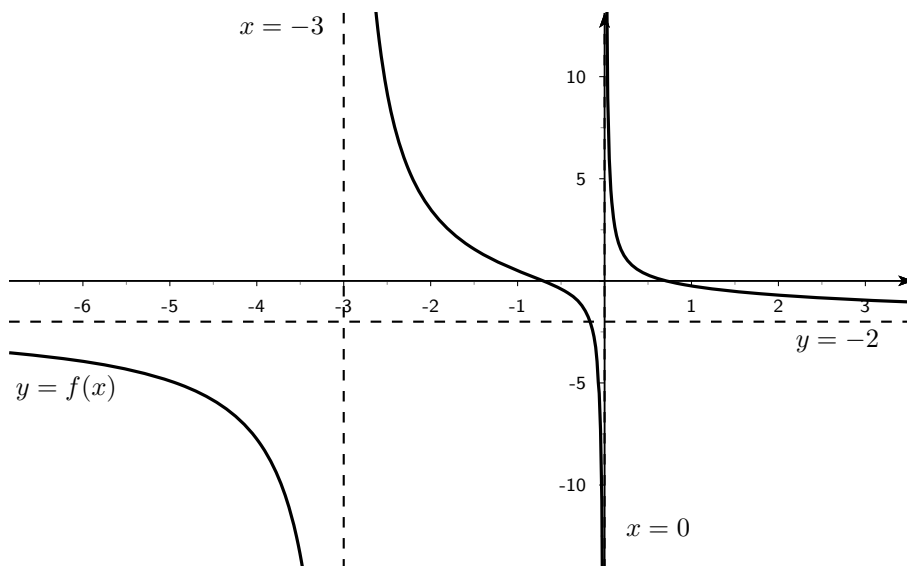
x	$-\infty$	-3	$-\frac{1}{6}$	0	$+\infty$
$6x+1$	—	—	0	+	+
x	—	—	—	0	+
$x+3$	—	0	+	+	+
$f(x)+2$	—	+	0	—	+

Ainsi, $\mathcal{C}_f$ est située au-dessus de l'asymptote $y = -2$ si $x \in]-3; -\frac{1}{6}[\cup]0; +\infty[$, en dessous sinon.

8. On obtient le tableau de variation complet de f suivant.

x	$-\infty$	-3	0	$+\infty$
$f'(x)$		—	—	—
f	-2 $\searrow$ $-\infty$	$+\infty$ $\searrow$ $-\infty$	$+\infty$ $\searrow$ -2	

9.



Exercice 12 Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2 + x + 2}{1 - x}$.

1. Le dénominateur ne doit s'annuler donc l'ensemble de définition est $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

2. Puisque $f(0) = 2$, f ne peut être impaire.

Comme $f(2) = -8$ et $f(-2) = \frac{4}{3} \neq -8$, f n'est pas paire.

3. Les bornes de l'ensemble de définition de f sont $-\infty$, 1^- , 1^+ et $+\infty$.

On a $\lim_{x \rightarrow 1^\pm} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^\pm} \frac{x^2 + x + 2}{1 - x} = \lim_{x \rightarrow 1^\pm} \frac{1^2 + 1 + 2}{1 - 1^\pm} = \frac{4}{0^\mp} = \mp\infty$ et $x = 1$ est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.

La limite en l'infini d'une fonction rationnelle étant celle du quotient de ses termes de plus haut degré,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2 + x + 2}{1 - x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^2}{-x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} -x = \mp\infty.$$

Sinon, factoriser les termes dominants.

4. $\forall x \neq 1$, $f'(x) = \frac{(2x+1)(1-x) - (x^2+x+2)(-1)}{(1-x)^2} = \frac{-x^2+2x+3}{(1-x)^2} = \frac{(x+1)(3-x)}{(1-x)^2}$ (-1 racine évidente) qui est du signe de $(x+1)(3-x)$. Par ailleurs, $f(-1) = 1$ et $f(3) = -7$ d'où le tableau suivant.

x	$-\infty$	-1	1	3	$+\infty$
$x + 1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$3 - x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	0
f	$+\infty$	1	$+\infty$	-7	$-\infty$

5. (a) On a $-x-2 + \frac{4}{1-x} = \frac{(1-x)(-x-2)+4}{1-x} = \frac{-x-2+x^2+2x+4}{1-x} = \frac{x^2+x+2}{1-x} = f(x)$ pour $x \neq 1$.

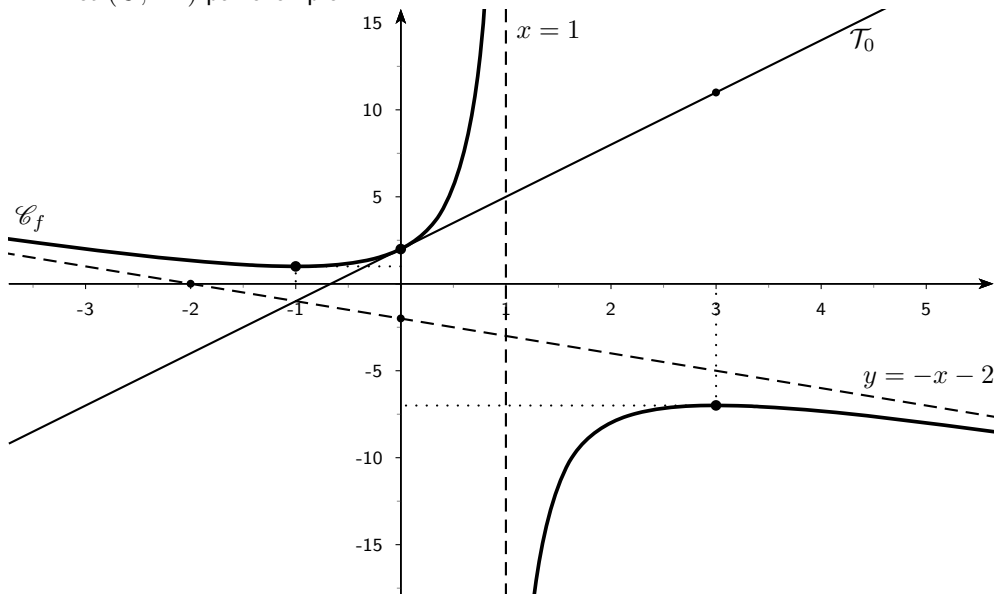
(b) On a $f(x) - (-x-2) = \frac{4}{1-x}$ qui est du signe de $1-x$. Ainsi, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de Δ lorsque $1-x > 0$ i.e. sur $] -\infty; 1[$ et au-dessous de Δ sur $] 1; +\infty[$.

(c) On a $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) + x + 2] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4}{1-x} = \frac{4}{1 \mp \infty} = 0$.

Ainsi, la courbe $\mathcal{C}_f$ se rapproche de la droite Δ à l'infini. On dit que Δ est asymptote oblique à $\mathcal{C}_f$.

6. $f(0) = 2$ et $f'(0) = 3$ donc la tangente $\mathcal{T}_0$ a pour équation $y = f'(0)(x-0) + f(0) = 3x+2$.

7. La droite Δ passe par les points $(0, -2)$ et $(-2, 0)$ et la droite $\mathcal{T}_0$ par $(0, 2)$ et $(3, 11)$ par exemple.



Exercice 13 Soit f la fonction par $f(x) = x\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$ de courbe $\mathcal{C}_f$.

1. Le dénominateur $\frac{1}{x^2}$ ne doit pas être nul donc $x \neq 0$. Le radicande $1 + \frac{1}{x^2}$ doit être positif ce qui est toujours réalisé. Ainsi, $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$.

2. Soit $x \neq 0$. On a $f(-x) = (-x) \sqrt{1 + \frac{1}{(-x)^2}} = -x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = -f(x)$ et f est impaire. Son graphe $\mathcal{C}_f$ est alors symétrique par rapport à l'origine du repère.

3. Les bornes de $]0; +\infty[$ sont 0^+ et $+\infty$. Par ailleurs, $x = \sqrt{x^2}$ si $x > 0$.

$$\text{On a } g(x) = x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \sqrt{x^2 + 1} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \sqrt{0^+ + 1} = 1$$

$$\text{et } g(x) = \sqrt{x^2 + 1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \sqrt{+\infty + 1} = \sqrt{+\infty} = +\infty.$$

$$\text{Par symétrie, } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

La fonction f ne peut donc être naturellement « prolongée » en 0 mais on peut poser $g(0) = 1$.

4. Posons $u = x$, $w = 1 + \frac{1}{x^2}$ et $v = \sqrt{w}$. On a $u' = 1$,

$$w' = \frac{-2x}{x^4} = \frac{-2}{x^3} \quad \text{et} \quad v' = \frac{w'}{2\sqrt{w}} = \frac{-2/x^3}{2\sqrt{1+1/x^2}} = \frac{-1}{x^3\sqrt{1+1/x^2}}.$$

Puisque g est de la forme uv , $g' = u'v + uv'$ et, $\forall x > 0$,

$$g'(x) = 1 \times \sqrt{1 + 1/x^2} + x \times \frac{-1}{x^3\sqrt{1+1/x^2}} = \frac{\sqrt{1+1/x^2} \times x^2\sqrt{1+1/x^2} - 1}{x^2\sqrt{1+1/x^2}} \\ = \frac{x^2 + x^2/x^2 - 1}{x^2\sqrt{1+1/x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+1/x^2}} > 0 \quad \text{et } g \text{ est croissante sur }]0; +\infty[.$$

Il aurait en fait été plus simple de dériver l'expression suivante $g(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ afin, bien sûr, d'obtenir le même résultat.

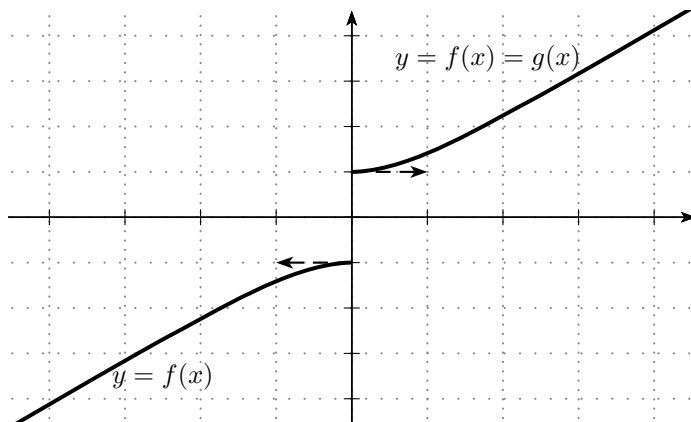
$$\begin{aligned} 5. \text{ On a } \frac{g(x) - 1}{x} &= \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} = \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - 1)(\sqrt{x^2 + 1} + 1)}{x(\sqrt{x^2 + 1} + 1)} \\ &= \frac{x^2 + 1 - 1}{x(\sqrt{x^2 + 1} + 1)} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1} + 1} \end{aligned}$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - 1}{x} = \frac{0}{\sqrt{0+1} + 1} = \frac{0}{2} = 0.$$

$$\text{En posant } g(0) = 1, \text{ on a } \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0.$$

Ainsi, la courbe $\mathcal{C}_g$ admet une *demi-tangente* horizontale en $A(0, 1)$.

- 6.



Chapitre IV

CONTINUITÉ DES FONCTIONS NUMÉRIQUES

Sommaire

1	Continuité d'une fonction numérique	93
1.1	Définition	94
1.2	Continuité des fonctions usuelles	95
1.3	Continuité et suites	96
2	Continuité et équations	96
2.1	Théorème des valeurs intermédiaires	96
2.2	Cas de la stricte monotonie	98
2.3	Applications diverses	98
2.3.1	Approcher une solution par dichotomie	98
2.3.2	Intervalle image	99
2.3.3	Zéro d'une fonction continue	99
2.3.4	Un « petit » théorème de point fixe	99
	Exercices	100
	Corrigé des exercices	105

Nous poursuivons dans ce chapitre l'étude des fonctions. Premièrement, nous utilisons la notion de limite pour formaliser l'idée de continuité d'une courbe. Ensuite, nous donnons, sans le démontrer, un théorème d'existence d'antécédents.

1 Continuité d'une fonction numérique

Le premier exemple de fonctions continues concerne des fonctions dont le graphe peut se tracer sans lever le crayon. Cette première approche donne une idée de la notion, la fonction ne fait pas de « saut », mais n'est pas suffisante pour la définir. En effet, certains graphes de fonctions continues ne peuvent pas se tracer de cette manière, telles des courbes ayant des propriétés fractales.

Aux XVIII^e s. et XIX^e s., Euler, Bolzano, Cauchy[§] ont successivement affiné la définition, en utilisant les notions d'infiniment petit ou de convergence de suites. La définition formelle que l'on donnera se généralise à un espace métrique mais il est intéressant de souligner que la continuité est en fait une notion *topologique* (l'étude de l'espace, indépendamment de la notion de distance).

Dans cette partie, f est une fonction définie sur un intervalle ouvert I et a est un réel appartenant à I .

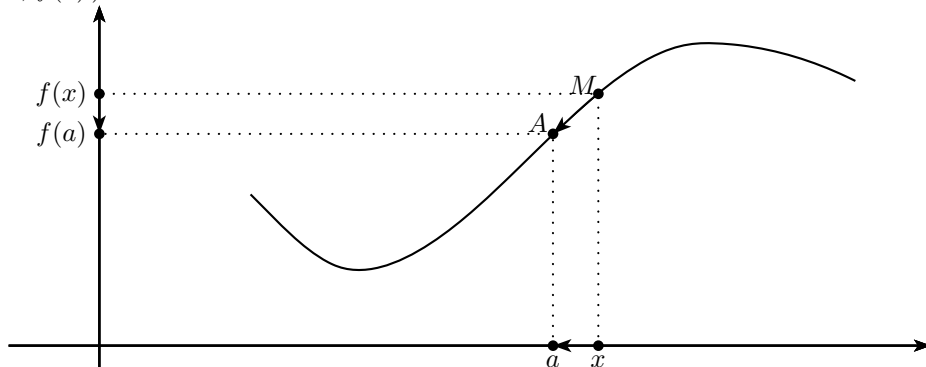
1.1 Définition

Définition 1

On dit que f est **continue en a** lorsque $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

On dit que f est **continue sur I** lorsque f est continue en tout réel appartenant à I .

Graphiquement, une fonction f est continue sur un intervalle lorsque sa représentation graphique est d'un seul tenant ; idéalement, elle est tracée sans lever le crayon. En effet, lorsque x tend vers a , le point $M(x, f(x))$ se rapproche alors du point $A(a, f(a))$.



Remarque : Si I est fermé en l'une de ses bornes, la continuité en cette borne est vérifiée par l'existence de la limite à gauche ou à droite selon le cas.

Exemples : Des fonctions non continues sur leur intervalle de définition.

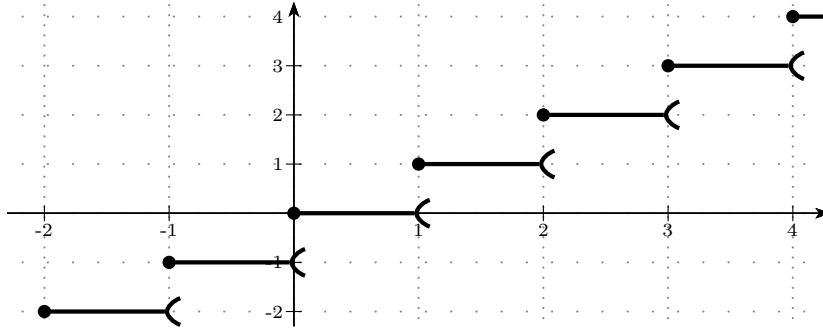
- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ f(x) = 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

On a $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} f(x) = \pm\infty \neq 0 = f(0)$ donc f n'est pas continue en 0.

- La *partie entière* d'un réel x est le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x . La fonction *partie entière* est parfois notée $\text{Ent}(x)$, $E(x)$, $[x]$ ou $\lfloor x \rfloor$. On a $\text{Ent}(2) = 2$ et si $1 \leq x < 2$, $\text{Ent}(x) = 1$ donc

§. Immense mathématicien dont le nom est inscrit sur la non moins immense tour Eiffel.

$\lim_{x \rightarrow 2^-} \text{Ent}(x) = 1 \neq \text{Ent}(2)$ et la fonction Ent n'est pas continue (à gauche) en 2, ni de même en tout entier relatif.



1.2 Continuité des fonctions usuelles

Théorème 1 Continuité des fonctions dérivables

Si f est dérivable en a alors f est continue en a .

Si f est dérivable sur I alors f est continue sur I .

Démonstration : Posons $\tau(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$. On a alors $f(x) = f(a) + (x - a)\tau(x)$. f étant dérivable en a , $\lim_{x \rightarrow a} \tau(x) = f'(a)$ et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} [f(a) + (x - a)\tau(x)] = f(a) + (a - a)f'(a) = f(a)$. $\square$

Remarque : La réciproque est **fausse**.

Les fonctions $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto |x|$ par exemple sont continues en 0 mais ne sont pas dérivables en 0 :

$$\frac{\sqrt{x} - \sqrt{0}}{x - 0} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} +\infty \notin \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \frac{|x|}{x} = \pm 1 \xrightarrow{x \rightarrow 0^\pm} \pm 1.$$

Nous avons défini la composition de fonctions dans le chapitre sur les limites (cf. p. 75) et nous la pratiquerons davantage dans celui sur la dérivation (cf. p. 139). Donnons d'ors et déjà un résultat essentiel.

Théorème 2 Continuité des fonctions composées

Soit u une fonction continue sur un intervalle I et à valeurs dans un intervalle J et soit v une fonction continue sur J .

La fonction composée $v \circ u : x \mapsto (v \circ u)(x) = v(u(x))$ est alors continue sur I .

Démonstration : Soit a et $x \in I$. Posons $X = u(x)$ et $A = u(a)$ et l'on a $X \xrightarrow{x \rightarrow a} A$ car u est continue en a .

Ainsi, $(v \circ u)(x) = v(u(x)) = v(X) \xrightarrow{x \rightarrow a, X \rightarrow A} v(A) = v(u(a)) = (v \circ u)(a)$ car v est continue en A : $v \circ u$ est bien continue en a . $\square$

Ces théorèmes ainsi que ceux sur les opérations sur les limites nous permettent d'affirmer que **les fonctions usuelles sont continues**.

- Les fonctions affines, carré, cube, racine carrée, inverse, valeur absolue, cosinus et sinus sont continues sur tout intervalle inclus dans leur ensemble de définition.
- Les fonctions construites par somme, produit, quotient ou composition de fonctions continues sont continues sur tout intervalle inclus dans leur ensemble de définition. En particulier, les fonctions polynômes sont continues sur $\mathbb{R}$.

1.3 Continuité et suites

Cette propriété n'est qu'un cas particulier de $x \rightarrow a$: celui où x prend les valeurs d'une suite.

Propriété 1 Soit f une fonction continue en $\ell \in I$.

Si $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est une suite convergente vers ℓ alors la suite des images $(f(u_n))_{\mathbb{N}}$ converge vers $f(\ell)$: Si $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell$ et f continue en ℓ , alors $f(u_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(\ell)$.

Exemple : La fonction $f(x) = \frac{x^2 - 5x + 4}{x + 3}$ est continue en 0 et la suite $u_n = \frac{7}{n}$ tend vers 0 donc la suite définie par $f(u_n) = \frac{\frac{49}{n^2} - \frac{35}{n} + 4}{\frac{7}{n} + 3}$ tend vers $f(0) = \frac{4}{3}$.

Nous pouvons désormais démontrer le théorème « point fixe et convergence des suites récurrentes » énoncé en page 21.

Théorème 3

Soit $(u_n)_{\mathbb{N}} : u_0 \in \mathbb{R}, u_{n+1} = f(u_n)$ une suite récurrente définie.

Si $(u_n)_{\mathbb{N}}$ admet une limite finie ℓ et si f est continue en ℓ alors $f(\ell) = \ell$.

Démonstration : f est continue en ℓ : $\lim_{x \rightarrow \ell} f(x) = f(\ell)$. $(u_n)_{\mathbb{N}}$ converge vers ℓ : $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \ell$. Le théorème de composition des limites (cf. chap. III) affirme que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n) = f(\ell)$ i.e. $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1} = f(\ell)$. Or les suites $(u_{n+1})_{\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{\mathbb{N}}$ admettent la même limite, ℓ . Par unicité de la limite de $(u_{n+1})_{\mathbb{N}}$, $f(\ell) = \ell$. $\square$

On dit que l'on *passse à la limite* dans la relation $u_{n+1} = f(u_n)$ et que ℓ est un *point fixe* de f .

2 Continuité et équations

2.1 Théorème des valeurs intermédiaires

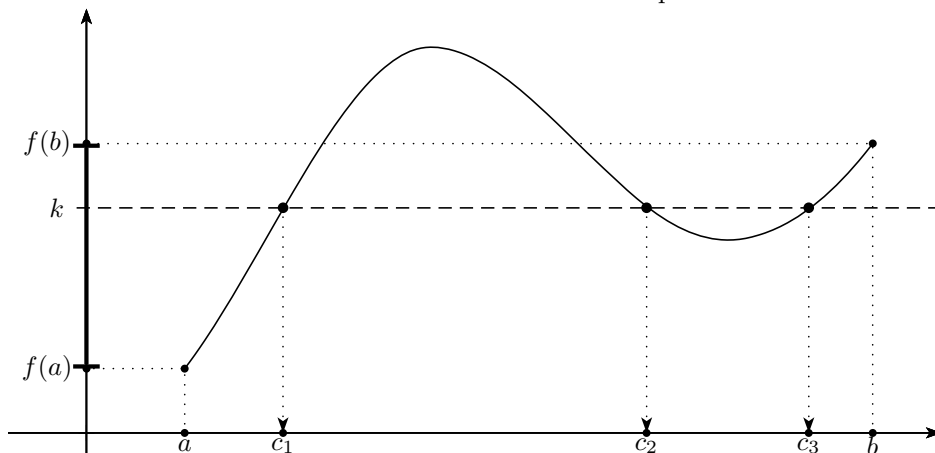
Théorème 4 Valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = k$.

Autrement dit, tout nombre compris entre $f(a)$ et $f(b)$ admet au moins un antécédent par f .

Ce théorème fondamental est admis. Voici une illustration qui tentera de convaincre.



Remarques :

- L'hypothèse de continuité de f est nécessaire. Sinon, la fonction pourrait « sauter » la valeur k .
- $f(a)$ peut être supérieur à $f(b)$. C'est pour cela que l'on a écrit « compris entre... » et non « intervalle ... ».
- En général, l'antécédent de k par f n'est pas unique.
- Ce théorème garantit l'existence de l'antécédent mais n'en donne qu'un encadrement et non la valeur.
- L'image d'un $x \in [a; b]$ n'est pas nécessairement comprise entre $f(a)$ et $f(b)$. L'ensemble de toutes les images $f(x)$ pour $x \in I$ est noté $f(I)$: l'image de I par la fonction f (cf. Intervalle image § 2.3.2).

Exemple : L'équation $\frac{x+6}{x^2+1} = 2$ admet-elle des solutions dans $[1; 4]$?

Notons f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x+6}{x^2+1}$.

f est une fonction rationnelle de dénominateur ne s'annulant jamais donc f est continue sur $\mathbb{R}$. On a $f(1) = \frac{7}{2} > 2$ et $f(4) = \frac{10}{17} < 2$ donc $2 \in [f(4); f(1)]$.

Le théorème des valeurs intermédiaires (T.V.I.) permet alors d'affirmer que l'équation $f(x) = 2$ admet au moins une solution dans l'intervalle $[1; 4]$.

Contre-exemple : On a $\text{Ent}(3, 21) = 3$ et $\text{Ent}(4, 67) = 4$ mais aucun réel n'a de partie entière égale à 3, 7 qui est pourtant compris entre 3 et 4.

Lors de l'utilisation du T.V.I., ne pas « oublier » de préciser que la fonction étudiée est bien continue. Sinon, ce serait un peu comme utiliser l'égalité de Pythagore sans préciser que le triangle est rectangle.

Ne pas oublier non plus de vérifier que k est bien une valeur intermédiaire. Sinon, on pourrait affirmer que la fonction racine admet des antécédents de nombres négatifs par exemple.

2.2 Cas de la stricte monotonie

Théorème 5 T.V.I. Strict.

Soit f une fonction **continue et strictement croissante** sur un intervalle $[a; b]$.

- L'image par f de l'intervalle $[a; b]$ est l'intervalle $[f(a); f(b)]$.
- **Tout nombre** appartenant à $[f(a); f(b)]$ admet un **unique antécédent** par f dans l'intervalle $[a; b]$: $\forall k \in [f(a); f(b)] \quad \exists ! c \in [a; b] \quad \text{tq} \quad f(c) = k$.

Il en est bien sûr de même si f est continue et strictement décroissante.

Démonstration : • Soit $x \in [a; b]$. Puisque f est croissante, $a \leq x \leq b$ implique $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$ et $f(x) \in [f(a); f(b)]$ donc $f([a; b]) \subset [f(a); f(b)]$. Le T.V.I. permet d'affirmer que tout $k \in [f(a); f(b)]$ admet un antécédent dans l'intervalle $[a; b]$ donc $[f(a); f(b)] \subset f([a; b])$. Ainsi, $f([a; b]) = [f(a); f(b)]$.

• L'existence d'un tel c est assurée par le T.V.I. Son unicité est garantie par l'hypothèse de stricte monotonie. En effet, si $c < c'$ alors $f(c) < f(c')$ donc l'une des images n'est pas égale à k . $\square$

Exemple : Montrons que l'équation $x^3 + 2x + 1 = 0$ admet une unique racine réelle. $f(x) = x^3 + 2x + 1$ est un polynôme donc f est continue. On a $f'(x) = 3x^2 + 2 > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Puisque $f(-1) = -2$ et $f(0) = 1$, $0 \in [f(-1); f(0)]$ et le T.V.I. Strict. permet d'affirmer que 0 admet un unique antécédent dans $[-1; 0]$. Puisque f est strictement croissante, cet antécédent est unique dans $\mathbb{R}$.

Par convention, les flèches obliques d'un tableau de variations indiquent que la fonction est continue et strictement monotone sur l'intervalle correspondant.

2.3 Applications diverses

2.3.1 Approcher une solution par dichotomie

Soit f une fonction continue et strictement croissante sur un intervalle $[a; b]$ et soit $k \in [f(a); f(b)]$. On sait que l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution c sur $[a; b]$. Le but du processus suivant est d'obtenir une valeur approchée de c aussi précise que l'on veut.

On a $a \leq c \leq b$. Posons $m = \frac{a+b}{2}$. Trois cas se présentent alors.

- $f(m) = k$ et la solution c est trouvée : c'est $c = m = \frac{a+b}{2}$.
- $f(m) < k = f(c)$ et $m < c \leq b$ car f est strictement croissante.
- $f(c) = k < f(m)$ et $a \leq c < m$ car f est strictement croissante.

On obtient ainsi un encadrement de c , $[m; b]$ ou $[a; m]$, d'amplitude de moitié de celui que l'on avait auparavant, $[a; b]$. Répéter suffisamment le processus avec la moyenne des encadrements successifs afin d'obtenir un encadrement de c de l'amplitude souhaitée.

Si f est décroissante, le principe est le même, seul le sens des inégalités change.

Cela s'appelle la méthode par dichotomie : division en deux éléments nettement

opposés (un des intervalles contient la solution, l'autre non). Ce procédé est simple mais beaucoup plus lent que l'élégante méthode de Newton (cf. *Poursuites* p. 577).

2.3.2 Intervalle image

Le théorème 5 est démontré pour un intervalle fermé mais il se généralise aux autres types d'intervalles : ouverts, semi-ouverts, bornés ou non. L'existence et l'unicité de l'antécédent est encore garantie et l'image de l'intervalle est un intervalle. Nous n'allons pas détailler tous les cas de figure mais énonçons par exemple :

Propriété 2

Si f est une fonction continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]a; b]$ alors $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ existe (finie ou infinie) et $f(]a; b]) = \left[f(b); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right[$.

2.3.3 Zéro d'une fonction continue

Propriété 3 *Si f est une fonction continue sur l'intervalle $[a; b]$ et si $f(a) \cdot f(b) \leq 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution dans $[a; b]$. Une telle solution est appelée « zéro » de la fonction f . Si, de plus, f est strictement monotone, alors cette solution est unique dans $[a; b]$.*

Dans le cas des fonctions polynomiales, les zéros de f sont appelés *racines* de f .

Démonstration : Il suffit de remarquer que si $f(a) \times f(b) \leq 0$ alors 0 est compris entre $f(a)$ et $f(b)$. $\square$

Corollaire Tout polynôme réel de degré impair admet au moins une racine réelle.

Démonstration : En effet, les limites en l'infini de tels polynômes sont infinies et de signes contraires. $\square$

2.3.4 Un « petit » théorème de point fixe

Propriété 4 *Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$.*

Si $f([a; b]) \subset [a; b]$ alors f admet un point fixe (non nécessairement unique).

Démonstration : Posons $g(x) = f(x) - x$. Les points fixes de f sont ainsi les zéros de g . g est continue sur $[a; b]$ puisque f et $x \mapsto x$ le sont. Puisque $f([a; b]) \subset [a; b]$, $f(a) \geq a$ et $f(b) \leq b$ donc $g(a) \geq 0$ et $g(b) \leq 0$. Ainsi, $g(a) \times g(b) \leq 0$ et la propriété 3 donne le résultat. $\square$

Exercices

CONTINUITÉ DES FONCTIONS NUMÉRIQUES

Exercice 1

1. Étudier la continuité sur $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes.

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+1} & \text{si } x \geq 3 \\ \frac{2}{3}x & \text{si } x < 3, \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } x \leq 1 \\ -x + 4 & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ -x^2 + 8x - 15 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$$\text{et } h(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x \leq 4 \\ x & \text{si } x > 4. \end{cases}$$

2. La fonction u définie sur $[0; +\infty[$ par $u(0) = \frac{1}{2}$ et $u(x) = \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x}$ si $x > 0$ est-elle continue ?

3. Existe-t-il des valeurs de a pour lesquelles la fonction v définie par

$$v(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \geq 1 \\ -x^2 + ax + a & \text{si } x < 1 \end{cases} \quad \text{est continue sur } \mathbb{R} ?$$

4. Que dire de la continuité de la fonction χ définie sur $\mathbb{R}$ par $\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$?

Exercice 2

1. Citer le théorème des valeurs intermédiaires puis sa version stricte.
2. Peut-on avoir l'existence de tout antécédent d'une valeur intermédiaire sans que la fonction soit continue ?
3. Peut-on ne pas avoir l'existence de tout antécédent d'une valeur intermédiaire même si la fonction est continue ?
4. Peut-on avoir l'existence et l'unicité de tout antécédent d'une valeur intermédiaire sans que la fonction soit strictement monotone sur un intervalle ?
5. Que dire des deux théorèmes et de leur réciproque ?

Exercice 3

1. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 7x^3 + 5x^2 + 4x + 3$.
Démontrer que f admet une unique racine réelle.
À l'aide de la calculatrice, en donner un encadrement d'amplitude 10^{-1} .
2. Même consigne pour $g(x) = x^3 - 2x^2 - 1$.
3. Même consigne pour $h(x) = -2x^3 - 3x^2 - 1$.

Exercice 4 Étudier les variations de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$. Combien f admet-elle de racines ? En donner des encadrements d'amplitude 0, 1.

Exercice 5 Étudier les variations de la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{5\}$ par $n(x) = \frac{2}{5-x}$. Combien de zéros admet-elle ?

Exercice 6 Soit f une fonction admettant le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$	-3	-1	0	3	$+\infty$
f		2		$+\infty$		0
	1		$-\infty$	2	-2	

Combien de solutions admet l'équation $f(x) = 0$? Les encadrer par des entiers.

Exercice 7 Soit f la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x}$.

1. Étudier la continuité, les limites en 1 et en $+\infty$ et les variations de f .
2. Montrer que f a un unique zéro et en donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} .

Exercice 8

1. Soit f la fonction définie sur $] -2; +\infty[$ par $f(x) = \frac{-x^3}{x+2}$.
Démontrer que l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution puis en donner un encadrement d'amplitude 10^{-2} .
2. Consigne similaire pour la fonction g donnée par $g(x) = \frac{3x-2}{x-1}$.

Exercice 9 

```

1| def f(x):
2|     f=3*x-7
3|     return f
4| def ant(a,b,k,n):
5|     while(b-a>10**(-n)):
6|         m=(a+b)/2
7|         if (f(m)<=k):
8|             a=m
9|         else:
10|             b=m
11|     print(m)
```

Lire le programme Python ci-contre.

Faire tourner cet algorithme pour quelques valeurs avec la fonction $f(x) = 3x - 7$ puis avec la fonction $f(x) = x^2 - 5$.

À quoi sert cet algorithme ?

Sous quelles conditions trouve-t-il ce que l'on cherche ?

Exercice 10 Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x + 1}$ de graphe $\mathcal{C}_f$.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f . La fonction f est-elle continue ?
2. Étudier la parité de la fonction f (cf. page 80).

3. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
4. (a) Déterminer les réels a , b et c tels que, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$,

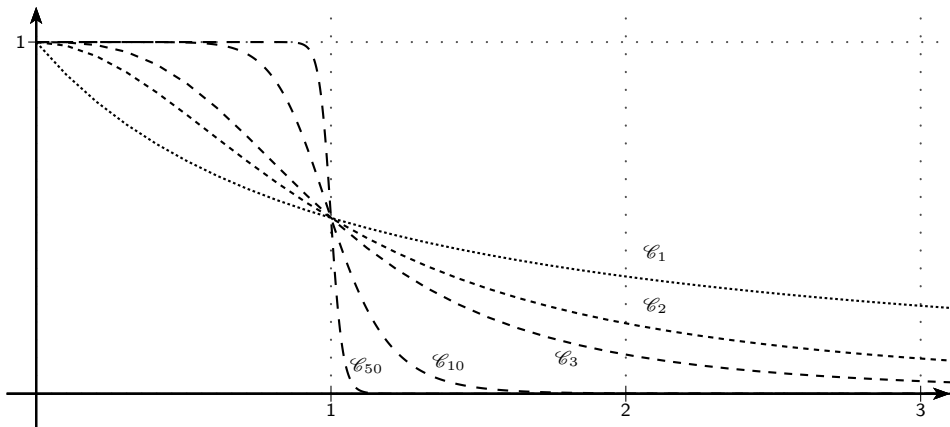
$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}.$$
 (b) En déduire les asymptotes à la courbe $\mathcal{C}_f$.
 (c) Déterminer la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à son asymptote oblique.
5. Calculer la fonction dérivée f' de f puis dresser son tableau de variations complet.
6. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ puis de l'équation $f(x) = 3$.
7. Donner l'équation de la tangente $\mathcal{T}_0$ à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
8. Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$, ses asymptotes ainsi que la tangente $\mathcal{T}_0$.

Exercice 11 Fonction limite d'une suite de fonctions

Pour tout entier $n \geq 1$, on considère la fonction f_n définie sur $[0; +\infty[$ par

$$f_n(x) = \frac{1}{1+x^n} \quad \text{de graphe } \mathcal{C}_n.$$

1. (a) Pour $n \geq 1$, dresser le tableau de variation complet de la fonction f_n .
 (b) Démontrer que les courbes $\mathcal{C}_n$ passent toutes par les deux mêmes points que l'on déterminera.
 (c) Soient deux entiers n et m non nuls tels que $n < m$. Comparer $f_n(x)$ et $f_m(x)$ selon les valeurs de x . En déduire les positions relatives de $\mathcal{C}_n$ et $\mathcal{C}_m$.
2. (a) On a représenté ci-dessous les courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$, $\mathcal{C}_{10}$ et $\mathcal{C}_{50}$.



Conjecturer, selon la valeur du réel $x \geq 0$, la limite de la suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}^*}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

- (b) Démontrer cette conjecture.

3. Pour tout réel $x \geq 0$, on note $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ et l'on définit ainsi une fonction f sur $[0; +\infty[$. Expliciter la fonction f . Est-elle continue sur $[0; +\infty[$?

Ainsi, la fonction limite d'une suite de fonctions continues n'est pas nécessairement une fonction continue.

Exercice 12

Pour tout entier $n \geq 1$, on considère la fonction g_n définie sur $\mathbb{R}^+$ par $g_n(x) = \frac{n}{x+1}$.

Comparer $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x) \right)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) \right)$.

Exercice 13 Que dire d'une fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue en 0 telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(2x)$?

Exercice 14

A. f est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x-1}{x+1} - e^{-x}$. On note $\mathcal{C}$ sa représentation graphique.

1. Démontrer que $\mathcal{C}$ admet une asymptote horizontale et en donner une équation.
2. Étudier les variations de f sur $[0; +\infty[$.
3. Déterminer une équation de la demi-tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
4. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}^+$, notée u . Donner un encadrement d'amplitude 10^{-1} de u .

B. n désigne un entier naturel non nul. f_n est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f_n(x) = \frac{x-n}{x+n} - e^{-x}$.

1. Dresser le tableau de variations de f_n .
2. (a) Calculer $f_n(n)$. Quel est son signe ?
(b) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $e^{n+1} > 2n + 1$.
(c) Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution, notée u_n , dans l'intervalle $[n; n+1]$.
3. Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{n}$.

Exercice 15 Le but de l'exercice est de démontrer que l'équation $(E) : e^x = \frac{1}{x}$ admet une unique solution et de construire une suite qui converge vers cette solution.

A. Existence et unicité de la solution.

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - e^{-x}$.

1. Démontrer que x est solution de l'équation (E) si, et seulement si, $f(x) = 0$.
2. (a) Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
(b) En déduire que l'équation (E) admet une unique solution sur $\mathbb{R}$, notée α .
(c) Démontrer que α appartient à l'intervalle $[\frac{1}{2}; 1]$.
(d) Étudier le signe de f sur l'intervalle $[0; \alpha]$.

B. Deuxième approche.

On note g la fonction définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par $g(x) = \frac{1+x}{1+e^x}$.

1. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à l'équation $g(x) = x$.
2. En déduire que α est l'unique nombre vérifiant $g(x) = x$.

3. Calculer $g'(x)$ et en déduire que la fonction g est croissante sur l'intervalle $[0; \alpha]$.
- C. Construction d'une suite de réels ayant pour limite α .
On considère la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$, $u_{n+1} = g(u_n)$.
1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$.
 2. En déduire que la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est convergente. On note ℓ sa limite.
 3. Justifier l'égalité $g(\ell) = \ell$. En déduire la valeur de ℓ .
 4. À l'aide de la calculatrice, déterminer une valeur approchée de u_4 arrondie à la sixième décimale.

Exercice 16 Prolongement par continuité

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^3 + x + 2}{x^3 + 1}$.

1. Déterminer son ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ puis justifier qu'elle est continue sur $\mathcal{D}_f$.
2. Tracer le graphe de f à la calculatrice. Que remarque-t-on ?
3. (a) Montrer que, pour tout réel $x \neq -1$, $f(x) = 1 + \frac{1}{x^2 - x + 1}$.
(b) Étudier la limite de f en -1 .
(c) En déduire que f peut être *prolongée* en une fonction $\tilde{f}$ que l'on déterminera, définie et continue sur $\mathbb{R}$.

Continuez jusqu'à la page 435 pour réaliser le devoir n° 5.

CONTINUITÉ DES FONCTIONS NUMÉRIQUES

Exercice 1 Les fonctions de cet exercice sont définies par morceaux par des compositions de fonctions usuelles. Les discontinuités éventuelles se situent donc au niveau des « jonctions ».

- On a $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2}{3}x = \frac{2}{3} \times 3 = 2 = f(3)$ et $\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \sqrt{x+1} = f(3) = \sqrt{3+1} = 2$ donc f est aussi continue en 3.

• On a $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} x^2 + 2 = g(1) = 1^2 + 2 = 3$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} -x + 4 = -1 + 4 = 3 = g(1)$ donc g est aussi continue en 1.

On a $\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} -x + 4 = g(3) = -3 + 4 = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^+} -x^2 + 8x - 15 = -3^2 + 8 \times 3 - 15 = 0 \neq g(3)$ donc g n'est pas continue en 3.

• On a $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 = 0 = h(0)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = h(0) = 0$ donc h est aussi continue en 0.

On a $\lim_{x \rightarrow 4^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \sqrt{x} = h(4) = 2$ et $\lim_{x \rightarrow 4^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} x = 4 \neq h(4)$ donc h n'est pas continue en 4.
- La fonction u est constituée de fonctions usuelles définies et continues sur $]0; +\infty[$.

On a $\frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} \frac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{(1+x)-1}{x(\sqrt{1+x}+1)} = \frac{1}{\sqrt{1+x}+1}$.

D'où, $\lim_{x \rightarrow 0^+} u(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{1}{2} = u(0)$ et la fonction u est continue en 0 donc sur $[0; +\infty[$.
- La fonction v est continue sur $\mathbb{R}$ ssi $\lim_{x \rightarrow 1^-} (-x^2 + ax + a) = v(1)$

$$\iff -1^2 + a + a = 1^2 + 1 \iff a = \frac{3}{2}.$$
- La fonction $\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ est dite *totalement discontinue*.

Le fait que $\frac{1}{2} \in [\chi(\sqrt{2}); \chi(7)]$ n'admette pas d'antécédent montre, par contraposition du T.V.I., que la fonction χ n'est pas continue, le reste n'est pas du niveau de terminale.

Exercice 2

- Si f est continue sur un intervalle $[a; b]$, alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un réel $c \in [a; b]$ tel que $f(c) = k$. Si de plus, f est strictement monotone, alors cet antécédent c est unique.

- Oui, on peut avoir l'existence de tout antécédent d'une valeur intermédiaire sans que la fonction soit continue. Par exemple, la fonction $f: [0; 2] \mapsto [0; 1]$ définie par $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0; 1[, \\ x-1 & \text{si } x \in [1; 2]. \end{cases}$
- Oui, on peut ne pas avoir l'existence de tout antécédent d'une valeur intermédiaire même si la fonction est continue. Par exemple, pour la fonction f définie sur $[0; 1] \cup [3; 4]$ définie par $f(x) = x$, la valeur intermédiaire $2 \in [f(0); f(3)]$ n'admet pas d'antécédent par f . En revanche, l'ensemble de définition n'est pas un intervalle.
- Oui, on peut avoir l'existence et l'unicité de tout antécédent d'une valeur intermédiaire sans que la fonction soit strictement monotone sur un intervalle. Par exemple, la fonction $f: [0; 2] \mapsto [0; 2]$ définie par $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0; 1[, \\ 3-x & \text{si } x \in [1; 2]. \end{cases}$ En revanche, la fonction n'est pas continue.
- Les conditions de ces deux théorèmes sont optimales et leur réciproque fausse.

Exercice 3

- La fonction f définie par $f(x) = 7x^3 + 5x^2 + 4x + 3$ est polynomiale donc elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. On a $f'(x) = 21x^2 + 10x + 4$ de discriminant $10^2 - 4 \times 4 \times 21 < 0$ donc $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$ et f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. On a $f(1) = 19 > 0$ et $f(-1) = -3 < 0$ donc $0 \in [-3; 19] = [f(-1); f(1)]$ est une valeur intermédiaire. Puisque f est continue et strictement croissante sur $[-1; 1]$, le théorème des valeurs intermédiaires strict. permet d'affirmer que 0 admet un unique antécédent $\alpha \in [-1; 1]$. Puisque f est strictement croissante, $f(x) > f(1) = 19 > 0$ pour tout $x > 1$ et $f(x) < f(1) = -3 < 0$ pour tout $x < -1$: f ne peut donc s'annuler sur $] -\infty; -1[\cup] 1; +\infty[$. Ainsi, α est l'unique racine de f sur $\mathbb{R}$. La calculatrice donne $\alpha \simeq -0,7$.
- Soit $g(x) = x^3 - 2x^2 - 1$. On a $g'(x) = 3x^2 - 4x = 3x(x - \frac{4}{3})$. Puisque $g(0) = -1$ et $g(\frac{4}{3}) = \frac{64-32 \times 3 - 27}{27} = -\frac{59}{27}$, on a le tableau de variations suivant (les limites en l'infini sont celles de x^3).

x	$-\infty$	0	$\frac{4}{3}$	$+\infty$
$3x$	—	0	+	+
$x - \frac{4}{3}$	—	—	0	+
$g'(x)$	+	0	—	+
g	$-\infty$	-1	$-\frac{59}{27}$	$+\infty$

D'après ce tableau, $g(x) \leq -1 < 0$ sur $] -\infty; \frac{4}{3}]$ donc g ne peut s'y annuler. Sur $] \frac{4}{3}; +\infty[$, la fonction g est strictement croissante et continue (car dérivable). Puisque $g(\frac{4}{3}) < 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, g change de signe et le T.V.I. Strict. permet d'affirmer que g admet une unique racine β dans $] \frac{4}{3}; +\infty[$ donc dans $\mathbb{R}$.

La calculatrice donne $\beta \in] 2, 2 ; 2, 3 [$.

3. Soit $h(x) = -2x^3 - 3x^2 - 1$. On a $h'(x) = -6x^2 - 6x = -6x(x+1)$.
Puisque $h(0) = -1$ et $h(-1) = -2$, on a le tableau de variations suivant (les limites en l'infini sont celles de $-2x^3$).

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$-6x$	+	⋮	+	0
$x+1$	-	0	+	⋮
$h'(x)$	-	0	+	0
h	$+\infty$	-2	-1	$-\infty$

D'après ce tableau, $h(x) \leq -1 < 0$ sur $[-1; +\infty[$ donc h ne peut s'y annuler. Sur $] -\infty; -1[$, la fonction h est strictement décroissante et continue (car dérivable).

Puisque $h(-1) < 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = +\infty$, la fonction h change de signe et le T.V.I. Strict. permet d'affirmer que h admet une unique racine γ dans $] -\infty; -1[$ donc dans $\mathbb{R}$. La calculatrice donne $\gamma \in] -1,7; -1,6[$.

Exercice 4 Soit $f(x) = x^3 + 3x^2 - 1$. On a $f'(x) = 3x^2 + 6x = 3x(x+2)$.
Puisque $f(0) = -1$ et $f(-2) = 3$, on a le tableau de variations suivant (les limites en l'infini sont celles de x^3).

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$3x$	-	⋮	-	0
$x+2$	-	0	+	⋮
$f'(x)$	+	0	-	0
f	$-\infty$	3	-1	$+\infty$

- Sur $] -\infty; -2[$, la fonction f est strictement croissante et continue (car dérivable). Puisque $f(-2) > 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, f change de signe et le T.V.I. Strict. permet d'affirmer que f admet une unique racine η dans $] -\infty; -2[$.
- De même, sur $] -2; 0[$, la fonction f est strictement décroissante et continue (car dérivable). Puisque $f(-2) > 0$ et $f(0) < 0$, f change de signe et le T.V.I. Strict. permet d'affirmer que f admet une unique racine τ dans $] -2; 0[$.
- Pour terminer, sur $] 0; +\infty[$, la fonction f est strictement croissante et continue (car dérivable). Puisque $f(0) < 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, f change de signe et le T.V.I. Strict. permet d'affirmer que f admet une unique racine ω dans $] 0; +\infty[$.
- La calculatrice donne $\eta \in] -2,9; -2,8[$, $\tau \in] -0,7; -0,6[$ et $\omega \in] 0,5; 0,6[$.

Exercice 5 Pour $x \neq 5$, on a $n'(x) = \frac{-2(5-x)'}{(5-x)^2} = \frac{10}{(5-x)^2} > 0$ donc la fonction n est strictement croissante sur $] -\infty; 5[$ et sur $] 5; +\infty[$. On a $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} n(x) = \frac{2}{5 \mp \infty} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 5^\pm} n(x) = \frac{2}{5-5^\pm} = \frac{2}{0^\mp} = \mp\infty$. D'où le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$	5	$+\infty$
f	0	$+\infty$	0

Elle est positive en 0 et négative en 7 par exemple mais elle n'admet pourtant aucune racine car elle n'atteint jamais sa limite en l'infini. En effet, l'équation $\frac{2}{5-x} = 0$ n'admet aucune solution.

Exercice 6 D'après le tableau de variation et les conventions de continuité et de stricte monotonie, le T.V.I. Strict. permet d'affirmer que f admet exactement deux zéros : un dans $] -3; -1[$, l'autre dans $] 0; 3[$.

Exercice 7 Soit f la fonction définie sur $] 1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x}$.

1. Constituée de fonctions usuelles, f est continue sur son ensemble de définition.

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} - \sqrt{x} = \frac{1}{1-1} - \sqrt{1} = \frac{1}{0^+} - \sqrt{1} = +\infty - 1 = +\infty$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-1} - \sqrt{x} = \frac{1}{+\infty-1} - \sqrt{+\infty} = \frac{1}{+\infty} - \sqrt{+\infty} = \frac{1}{+\infty} - \sqrt{+\infty} = 0 - \infty = -\infty.$$

Pour tout $x > 1$, on a $f'(x) = -\frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} < 0$. D'où le tableau suivant.

x	1	$+\infty$
$f'(x)$		$-$
f	$+\infty$	$-\infty$

2. La fonction f est continue et strictement décroissante. Puisque $f(] 1; +\infty[) = \mathbb{R}$, le T.V.I. Strict. permet d'affirmer que f admet un unique zéro ζ .

La calculatrice donne $\zeta \in] 1,75; 1,76[$.

Exercice 8

1. Soit f la fonction définie sur $] -2; +\infty[$ par $f(x) = \frac{-x^3}{x+2}$.

Constituée de fonctions usuelles, f est continue sur son ensemble de définition.

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{-x^3}{x+2} = \frac{-(-2)^3}{-2+2} = \frac{8}{0^+} = +\infty$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^3}{x+2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^3}{x(1+\frac{2}{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{1+\frac{2}{x}} = -\frac{+\infty}{1+0} = -\infty.$$

$$\text{Pour tout } x > -2, \text{ on a } f'(x) = \frac{-3x^2(x+2) - (-x^3) \times 1}{(x+2)^2} = \frac{-2x^3 - 6x^2}{(x+2)^2} = \frac{-2x^2(x+3)}{(x+2)^2}$$

qui est négative sur $] -2; +\infty[$.

x	-2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
f	$+\infty$	$-\infty$

La fonction f est continue et strictement décroissante. Puisque $f(]-2; +\infty[) = \mathbb{R}$, le T.V.I. Strict. permet d'affirmer que l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution ξ . La calculatrice donne $\xi \in]-1, 29; -1, 28[$.

2. Puisque $g(0) = 2$ et $g(2) = 4$, on pourrait penser que l'équation $g(x) = 3$ admette une solution dans l'intervalle $[0; 2]$ mais il s'avère que g n'y est pas continue puisqu'elle n'est pas définie en 1 et il y est donc impossible d'utiliser le T.V.I. Essayez donc de résoudre l'équation $\frac{3x-2}{x-1} = 3$ un peu pour voir.

Exercice 9 Pour une fonction f strictement croissante et continue sur $[a; b]$, cet algorithme donne une valeur approchée de l'unique antécédent dans l'intervalle $[a; b]$ par la fonction f du nombre k , supposé compris entre $f(a)$ et $f(b)$, en utilisant la méthode de dichotomie. Il s'arrête lorsque l'amplitude de l'intervalle d'encadrement de cet antécédent est inférieure à 10^{-n} et l'affiche. Si f est strictement décroissante, il faut inverser les lignes « $a=m$ » et « $b=m$ ».

Exercice 10 Soit la fonction définie par $f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x + 1}$ de représentation $\mathcal{C}_f$.

- La fonction f est rationnelle donc définie sauf aux racines de son dénominateur : $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$. Elle est continue (et dérivable) sur tout intervalle inclus dans $\mathcal{D}_f$.
- $\mathcal{D}_f$ n'est pas symétrique par rapport à 0 donc f ne peut être ni paire, ni impaire. Sinon, $f(2) = \frac{4}{3}$ et $f(-2) = -8 \neq f(2)$ par exemple.
- On a $f(x) = \frac{x^2 - x + 2}{x + 1} = \frac{x^2(1 - 1/x + 2/x^2)}{x(1 + 1/x)} = x \frac{1 - 1/x + 2/x^2}{1 + 1/x}$
et $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} \pm\infty \frac{1 - 0 + 0}{1 + 0} = \pm\infty$
et $\lim_{x \rightarrow -1^\pm} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^\pm} \frac{x^2 - x + 2}{x + 1} = \frac{(-1)^2 - (-1) + 2}{(-1)^\pm + 1} = \frac{4}{0^\pm} = \pm\infty$.

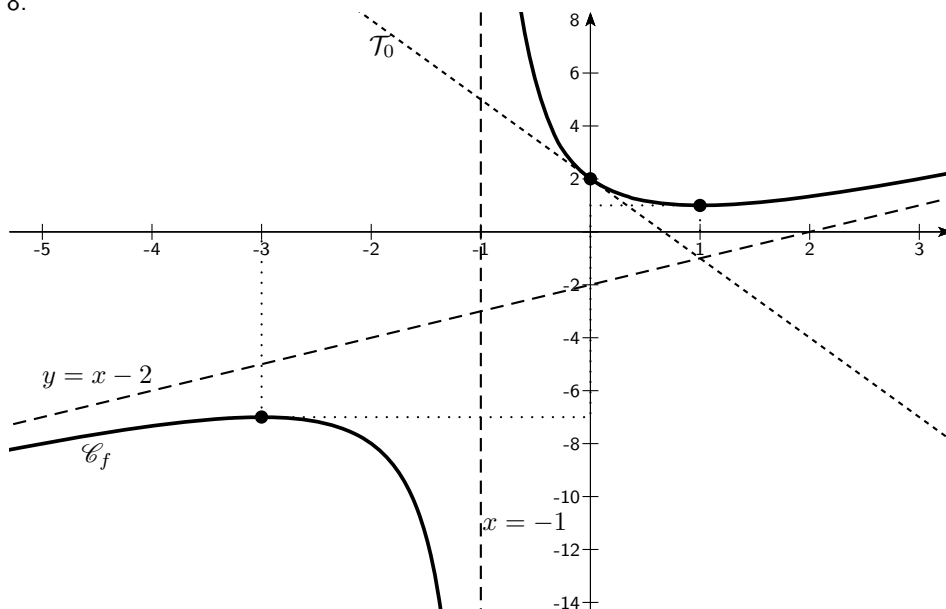
Le jour de l'examen, il vaut mieux écrire deux lignes plutôt que des $\pm$ et $\mp$.

- (a) Pour $x \neq -1$, $ax + b + \frac{c}{x+1} = \frac{(ax+b)(x+1)+c}{x+1} = \frac{ax^2+(a+b)x+(b+c)}{x+1}$ et, en identifiant les coefficients, $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$
 $\Leftrightarrow a = 1, \quad a + b = -1, \quad b + c = 2 \Leftrightarrow a = 1, \quad b = -2, \quad c = 4$.
Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) = x - 2 + \frac{4}{x+1}$.
- (b) • $\lim_{x \rightarrow -1^\pm} f(x) = \pm\infty$ donc la droite $x = -1$ est asymptote verticale à gauche et à droite à $\mathcal{C}_f$.
• On a $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (x - 2)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{4}{x+1} = \frac{4}{\pm\infty} = 0$ donc la droite Δ d'équation $y = x - 2$ est asymptote oblique en $+\infty$ et en $-\infty$ à la courbe $\mathcal{C}_f$.
- (c) On a $f(x) - (x - 2) = \frac{4}{x+1}$ du signe de $x + 1$ donc $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de Δ pour $x < -1$ et au-dessus de Δ pour $x > -1$.

5. Pour $x \neq -1$, $f'(x) = 1 - \frac{4}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 - 4}{(x+1)^2} = \frac{(x+1-2)(x+1+2)}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$.
On a $f(1) = 1$ et $f(-3) = -7$. D'où le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$
$x+3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0
f	$-\infty$	-7	$+\infty$	1	$+\infty$

6. • Sur $] -\infty; -1[$, $f(x) \leq -7 < 0$ et sur $] -1; +\infty[$, $f(x) \geq 1 > 0$ donc f ne s'annule jamais.
• On a vu que $f(x) < 3$ sur $] -\infty; -1[$.
Sur $] -1; 1]$, f est continue, strictement décroissante et puisque $3 \in f([-1; 1]) = [1; +\infty[$, le T.V.I. Strict. permet d'affirmer que 3 admet un unique antécédent dans $] -1; 1]$.
De même sur $] 1; +\infty[$ où f est strictement croissante.
Ainsi, l'équation $f(x) = 3$ admet exactement deux solutions.
7. Puisque $f(0) = 2$ et $f'(0) = -3$, la tangente $\mathcal{T}_0$ à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 admet pour équation $y = f'(0)(x - 0) + f(0) = -3x + 2$.
- 8.



Exercice 11 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}$ sur $\mathbb{R}^+$.

1. (a) Soit $n \geq 1$. Posons $u = 1 + x^n$, $u' = nx^{n-1}$. Puisque $f_n = \frac{1}{u}$, $f'_n = -\frac{u'}{u^2}$ et pour tout $x \geq 0$, $f'_n(x) = -\frac{nx^{n-1}}{(1+x^n)^2}$ qui est négatif sur $\mathbb{R}^+$. Par ailleurs, $f_n(0) = \frac{1}{1+0} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+x^n} = \frac{1}{1+\infty} = 0$. D'où le tableau suivant.

x	0	$+\infty$
$f'_n(x)$		—
f_n	1	0

- (b) On a vu que, pour tout $n \geq 1$, $f(0) = 1$. De plus, $f(1) = \frac{1}{1+1^n} = \frac{1}{2}$ donc les deux points de coordonnées $(0, 1)$ et $(1, \frac{1}{2})$ appartiennent à toutes les courbes $\mathcal{C}_n$.

- (c) Soient $1 \leq n < m$ deux entiers et soit x un réel positif.

La suite $(x^n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ étant géométrique de raison x , elle est décroissante (et tend vers 0) si $x \in]0; 1[$ et elle est croissante (et tend vers $+\infty$) si $x \geq 1$. D'où,

- si $0 < x < 1$, on a $x^n > x^m > 0 \iff 1 + x^n > 1 + x^m > 1$

$$\iff \frac{1}{1+x^n} < \frac{1}{1+x^m} \iff f_n(x) < f_m(x)$$

et $\mathcal{C}_n$ est située au-dessous de $\mathcal{C}_m$.

- si $x > 1$, on a $0 < x^n < x^m \iff 1 < 1 + x^n < 1 + x^m$

$$\iff \frac{1}{1+x^n} > \frac{1}{1+x^m} \iff f_n(x) > f_m(x)$$

et $\mathcal{C}_n$ est située au-dessus de $\mathcal{C}_m$.

2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Il semble que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0; 1[, \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 1, \\ 0 & \text{si } x \in]1; +\infty[. \end{cases}$

- (b) Si $x \in [0; 1[$, alors $x^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ et $f_n(x) = \frac{1}{1+x^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1} = 1$.

Si $x > 1$, alors $x^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ et $f_n(x) = \frac{1}{1+x^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1+\infty} = 0$.

3. On a $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0; 1[\\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{si } x \in]1; +\infty[\end{cases}$ qui n'est évidemment

pas continue en 1.

Ainsi, la fonction limite d'une suite de fonctions continues n'est pas nécessairement continue. Pour que cela soit le cas, il faudra introduire une notion supplémentaire, celle de *convergence uniforme*. Je vous sens impatient mais vous devrez attendre encore quelques années.

Exercice 12

Soit $n \geq 1$. On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{n}{x+1} = \frac{n}{+\infty+1} = 0$ donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow +\infty} g_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} 0 = 0.$$

Soit $x \in \mathbb{R}^+$. $\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{x+1} = \frac{+\infty}{x+1} = +\infty$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x) \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} +\infty = +\infty$.

Ainsi, on ne peut échanger les limites inconsciemment.

Exercice 13 Soit une fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue en 0 telle que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
 $f(x) = f(2x)$. On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(\frac{x}{2}) = f(x)$, $f(\frac{x}{2^2}) = f(\frac{x}{2}) = f(x)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = f(\frac{x}{2^n})$. Puisque f est continue en 0 et $\frac{x}{2^n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, $f(x) = f(\frac{x}{2^n}) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} f(0)$. La fonction f est donc constante, égale à $f(0)$.

Exercice 14

A. 1. On a $f(x) = \frac{x-1}{x+1} - e^{-x} = \frac{x(1-\frac{1}{x})}{x(1+\frac{1}{x})} - e^{-x} = \frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} - e^{-x}$

$$f(x) \xrightarrow[x \rightarrow +\infty]{} \frac{1-0}{1+0} - e^{-\infty} = 1$$

donc la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ en $+\infty$.

2. Pour $x \geq 0$, on a $f'(x) = \frac{(x-1)'(x+1) - (x-1)(x+1)'}{(x+1)^2} - (e^{-x})'$
 $f'(x) = \frac{x+1-(x-1)}{(x+1)^2} - (-x)'e^{-x} = \frac{2}{(x+1)^2} + e^{-x} > 0$ et f est strictement croissante.

3. On a $f(0) = -2$ et $f'(0) = 3$ donc $\mathcal{T}_0$ a pour équation
 $y = f'(0)(x-0) + f(0) = 3x - 2$.

4. On a $0 \in [-2; 1[= \left[f(0); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$. Puisque f est continue (car dérivable) et strictement croissante, le T.V.I. Strict. permet d'affirmer que 0 admet un unique antécédent u dans $[0; +\infty[$. Et comme $f(1) = -e^{-1} < 0$ et $f(2) = \frac{1}{3} - e^{-2} > 0$, on a $u \in [1; 2]$. La calculatrice donne $u \in [1, 5; 1, 6]$.

B. 1. Pour $x \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}$, on a $f'_n(x) = \frac{(x-n)'(x+n) - (x-n)(x+n)'}{(x+n)^2} - (e^{-x})'$
 $f'_n(x) = \frac{2n}{(x+n)^2} + e^{-x} > 0$ et f_n est strictement croissante.

2. (a) On a $f_n(n) = -e^{-n} < 0$.

(b) Posons $\mathcal{P}_n: e^{n+1} > 2n+1$.

◦ Initialisation : On a $e^{1+1} = e^2 > 3 = 2 \times 1 + 1$ donc $\mathcal{P}_1$ est vraie.

◦ Hérédité : Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie pour un certain $n \geq 1$. On a

$$e^{(n+1)+1} = e \times e^{n+1} > e(2n+1) > 2(2n+1) = 4n+2 > 2n+3 = 2(n+1)+1 : \mathcal{P}_{n+1} \text{ est vraie.}$$

◦ Conclusion : $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(c) Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(n+1) = \frac{n+1-n}{n+1+n} - e^{-(n+1)} = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{e^{n+1}}$

$$\text{et d'après } \mathcal{P}_n, \quad f_n(n+1) > \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+1} = 0.$$

La fonction f_n change donc de signe sur $I_n = [n; n+1]$. Étant strictement croissante et continue, le T.V.I. Strict. permet d'affirmer qu'elle s'annule une unique fois, en un nombre $u_n \in I_n$.

3. Puisque $u_n \geq n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \geq \lim_{n \rightarrow \infty} n = +\infty$ et puisque $n \leq u_n \leq n+1$, on a $1 \leq \frac{u_n}{n} \leq 1 + \frac{1}{n}$ donc $1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \frac{1}{n} = 1$ (gendarmes).

Exercice 15 $(E) : e^x = \frac{1}{x}$ pour $x \neq 0$.

- A. 1. On a $x \neq 0$ sol. de $(E) \iff e^x = \frac{1}{x} \iff e^{-x} = x \iff x - e^{-x} = 0 \iff f(x) = 0$ et $f(0) \neq 0$.
2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $f'(x) = 1 - (-e^{-x}) = 1 + e^{-x} > 0$ donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- (b) On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x - e^{-x} = -\infty - e^{+\infty} = -\infty - \infty = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - e^{-x} = +\infty - 0 = +\infty$.
Puisque f est continue, strictement croissante et change de signe sur $\mathbb{R}$, le T.V.I. Strict. permet d'affirmer que f s'annule en un unique réel noté α .
- (c) On a $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} - e^{-\frac{1}{2}} \simeq -0,1 < 0$ et $f(1) = 1 - e^{-1} \simeq 0,6 > 0$ donc f change signe entre $\frac{1}{2}$ et 1 donc $\alpha \in [\frac{1}{2}; 1]$.
- (d) La fonction f est alors négative sur l'intervalle $[0; \alpha]$.
- B. 1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $g(x) = x \iff \frac{1+x}{1+e^x} = x \iff 1+x = x(1+e^x) \iff 1+x-x = xe^x \iff \frac{1}{x} = e^x \iff f(x) = 0$.
2. Puisque f ne s'annule qu'en α , la fonction g n'a qu'un seul point fixe, α .
3. On a $g'(x) = \frac{(1+x)'(1+e^x) - (1+x)(1+e^x)'}{(1+e^x)^2} = \frac{1+e^x - (1+x)e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{1-xe^x}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x(e^{-x}-x)}{(1+e^x)^2} = -f(x) \frac{e^x}{(1+e^x)^2} > 0$ sur $[0; \alpha]$ donc g est croissante sur $[0; \alpha]$.
- C. 1. Posons $\mathcal{P}_n : 0 \leq u_n \leq u_{n+1} = g(u_n) \leq \alpha$.
 • Initialisation : On a $0 \leq u_0 = 0 \leq \frac{1}{2} = g(0) = u_1 \leq \alpha$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
 • Hérédité : Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N} : 0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$.
 Puisque g est croissante sur $[0; \alpha]$, on a $g(0) \leq g(u_n) \leq g(u_{n+1}) \leq g(\alpha) \iff \frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \alpha : \mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
 • Conclusion : $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Ainsi, $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par α . Le théorème de convergence monotone permet d'affirmer qu'elle converge vers un réel ℓ .
3. ℓ est la limite de la suite récurrente $(u_n)_{\mathbb{N}}$ de fonction de récurrence continue g donc ℓ est un point fixe de $g : g(\ell) = \ell = \alpha$ puisque la fonction g n'a qu'un seul point fixe.
4. La calculatrice donne $u_4 \simeq 0,567143$.

Exercice 16 Prolongement par continuité de $f(x) = \frac{x^3 + x + 2}{x^3 + 1}$.

1. Le dénominateur $x^3 + 1$ ne pouvant s'annuler qu'en $x = -1$, la fonction f est définie, et continue par composition de fonctions l'étant, sur l'ensemble $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\} =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$.

2. Sur la calculatrice, on remarque que le graphe de la fonction f ne comporte pas de singularité au point d'abscisse -1 . Si l'on zoome autour de ce point, la courbe semble malgré tout continue, alors que la fonction n'est pas définie.

3. (a) Puisque $x^3 + 1$ s'annule en -1 , ce polynôme se factorise par $(x - (-1))$ et l'on peut écrire $x^3 + 1 = (x + 1)(ax^2 + bx + c)$.

En observant les termes extrêmes, il vient $a = 1, c = 1$.

On a alors

$$(x+1)(x^2+bx+1) = x^3+bx^2+x+x^2+bx+1 = x^3+(b+1)x^2+(1+b)x+1$$

et, en identifiant les coefficients, on obtient $b+1=0$ donc $b=-1$.

Ainsi, $x^3 + 1 = (x + 1)(x^2 - x + 1)$.

Soit $x \neq -1$.

On a
$$f(x) = \frac{x^3+x+2}{x^3+1} = \frac{x^3+1}{x^3+1} + \frac{x+1}{x^3+1} = 1 + \frac{x+1}{(x+1)(x^2-x+1)} = 1 + \frac{1}{x^2-x+1}.$$

(b) Ainsi,
$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} 1 + \frac{1}{x^2-x+1} = 1 + \frac{1}{(-1)^2-(-1)+1} = \frac{4}{3}.$$

(c) Posons
$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \neq -1 \\ \frac{4}{3} & \text{si } x = -1. \end{cases}$$

Par construction, $\tilde{f}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et prolonge bien f à $\mathbb{R}$.

Chapitre V

DROITES, PLANS ET VECTEURS DE L'ESPACE

Sommaire

Introduction	115
1 Droites et plans de l'espace	116
1.1 Positions relatives de droites et de plans	116
1.2 Parallélisme dans l'espace	117
1.3 Orthogonalité dans l'espace	119
2 Vecteurs de l'espace	120
2.1 Définition et opérations	120
2.2 Vecteurs et droites	121
2.3 Vecteurs et plans	121
3 Repérages de l'espace	123
3.1 Repères cartésiens de l'espace	123
3.2 Coordonnées et calculs	124
Exercices	126
Corrigé des exercices	130

Introduction

Ceci constitue le premier des trois chapitres de géométrie de l'année. Après avoir rappelé les différentes positions et résultats concernant les droites et les plans de l'espace, nous allons étendre la notion de vecteur à l'espace puis nous définirons différentes façons de repérer l'espace. Bien évidemment, nous nous plaçons dans le cadre de la géométrie euclidienne et des fameux axiomes d'Euclide (~ 300 av. J.-C.). La plupart des résultats de géométrie classique seront admis et sont très intuitifs. Toutefois, leur démonstration est parfois plus délicate qu'il n'y paraît car il est souvent tentant d'utiliser des propriétés « visuelles » qui ne sont en fait pas encore démontrées.

Il est donc toujours utile de relire les *Éléments* d'Euclide *in extenso* :

<http://euclides.fr/bibliotheque/euclide/index.html> |;-)

Par ailleurs, cette géométrie n'est pas *ultime*. En effet, ce que l'on appelle le cinquième postulat – qui affirme que, dans un plan, par un point distinct d'une droite, il existe une et une seule droite parallèle à cette droite – a été de plus en plus questionné au fil des siècles. D'aucuns disant que c'est un théorème qui doit être démontré, d'autres remettant en cause l'existence même de ce résultat. Cela a mené à des géométries différentes, dites *non euclidiennes*, et à de nouvelles et prolifiques théories. Ceci vous paraît peut-être iconoclaste mais placez vous sur une sphère, disons la Terre. Puisqu'ils réalisent les distances minimales, les grands cercles sont alors les équivalents des droites. Et maintenant, que pensez-vous de ce fameux postulat ?

1 Droites et plans de l'espace

Ce paragraphe consiste en une série de définitions et de résultats que l'on admettra pour la plupart. Le théorème 1, dit *théorème du toit*, ainsi que le théorème 2 seront prouvés ultérieurement.

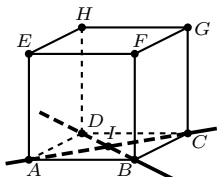
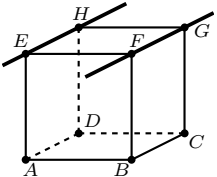
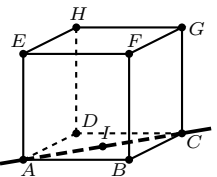
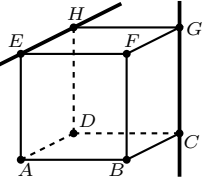
Commençons par quelques principes de base.

- Par deux points distincts de l'espace passe une unique droite.
- Par trois points non alignés passe un unique plan.
- Si un plan contient deux points distincts A et B , il contient la droite (AB) .
- Tous les théorèmes de géométrie plane s'appliquent dans chaque plan de l'espace.

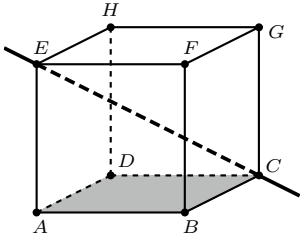
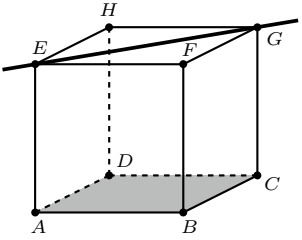
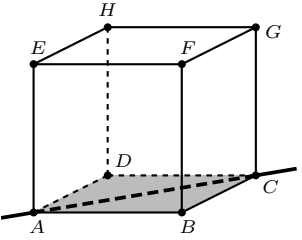
Les figures suivantes représentent un cube vu en perspective cavalière. Cette représentation facilite la vision dans l'espace mais les résultats énoncés restent bien entendu vrais hors du cube.

1.1 Positions relatives de droites et de plans

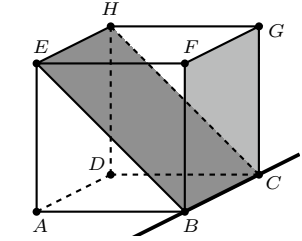
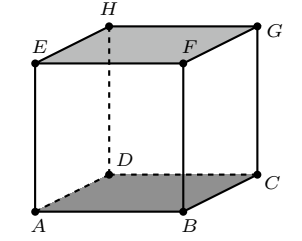
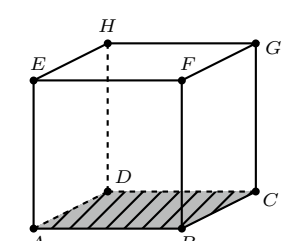
- Deux droites de l'espace sont soit coplanaires, soit non coplanaires.
Si elles sont coplanaires, alors elles sont soit parallèles, soit sécantes.

Droites coplanaires			Droites non coplanaires
Droites sécantes	Droites parallèles		
 Les droites (AC) et (DB) sont sécantes en I.	 (EH) et (FG) sont strictement parallèles.	 Les droites (AI) et (AC) sont confondues.	 Les droites (EH) et (CG) sont non coplanaires.

- Une droite et un plan de l'espace sont soit sécants soit parallèles.

Droite et plan sécants	Droite et plan parallèles	
 La droite (EC) et le plan (ABC) sont sécants en C.	 La droites (EG) et le plan (ABC) sont strictement parallèles.	 La droite (AC) est contenue dans le plan (ABC).

- Deux plans de l'espace sont soit sécants suivant une droite, soit parallèles.

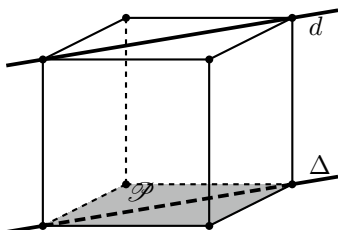
Plans sécants	Plans parallèles	
 Les plans (EBC) et (FBC) sont sécants suivant la droite (BC).	 Les plans (ABC) et (EFG) sont strictement parallèles.	 Les plans (ABC) et (ABD) sont confondus.

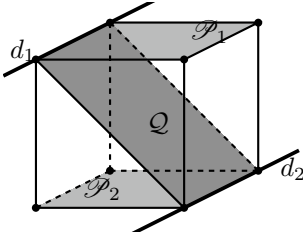
1.2 Parallélisme dans l'espace

Propriété 1 Δ , d , d_1 et d_2 désignent des droites et $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$, $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ des plans.

$$\left. \begin{array}{l} d // \Delta \\ \Delta \subset \mathcal{P} \end{array} \right\} \Rightarrow d // \mathcal{P}$$

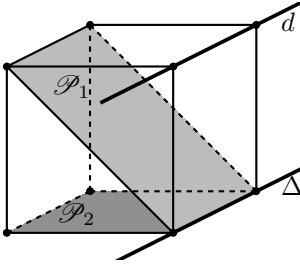
Une droite parallèle à une droite d'un plan est parallèle à ce plan.





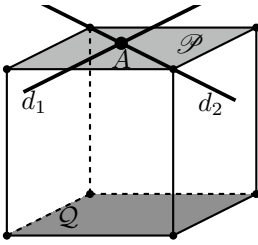
$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{P}_1 // \mathcal{P}_2 \\ \mathcal{Q} \cap \mathcal{P}_1 = d_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{Q} \cap \mathcal{P}_2 = d_2 \\ d_1 // d_2 \end{array} \right.$$

Lorsque deux plans sont parallèles, tout plan sécant à l'un est sécant à l'autre et les droites d'intersection sont parallèles.



$$\left. \begin{array}{l} d // \mathcal{P}_1 \\ d // \mathcal{P}_2 \\ \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \Delta \end{array} \right\} \Rightarrow d // \Delta$$

Une droite parallèle à deux plans sécants est parallèle à leur droite d'intersection.



$$\left. \begin{array}{l} d_1 \subset \mathcal{P}, \quad d_2 \subset \mathcal{P} \\ d_1 \cap d_2 = \{A\} \\ d_1 // \mathcal{Q}, \quad d_2 // \mathcal{Q} \end{array} \right\} \Rightarrow \mathcal{P} // \mathcal{Q}$$

Si un plan contient deux droites sécantes et parallèles à un autre plan, alors ces deux plans sont parallèles.

Le théorème suivant sera démontré en page 123.

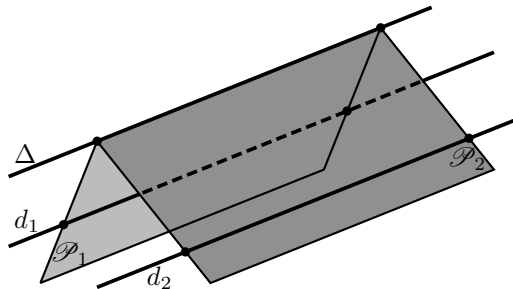
Théorème 1 *Théorème du toit*

d_1 et d_2 sont deux droites parallèles telles que d_1 est contenue dans un plan $\mathcal{P}_1$ et d_2 dans un plan $\mathcal{P}_2$.

Si $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants suivant la droite Δ , alors d_1 et d_2 sont parallèles à Δ .

$$\text{Si } \left\{ \begin{array}{l} d_1 // d_2 \\ d_1 \subset \mathcal{P}_1 \\ d_2 \subset \mathcal{P}_2 \\ \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \Delta \end{array} \right.$$

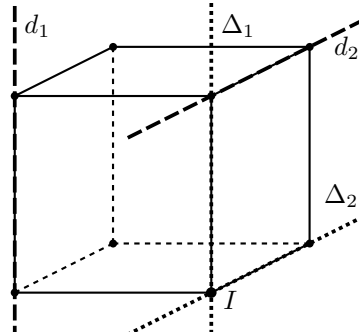
$$\text{alors } \left\{ \begin{array}{l} \Delta // d_1 \\ \Delta // d_2 \end{array} \right.$$



1.3 Orthogonalité dans l'espace

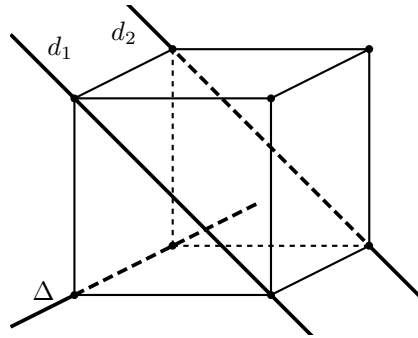
Définition 1 Dans l'espace, deux droites d_1 et d_2 sont dites **orthogonales** si les parallèles à d_1 et d_2 en un certain point I sont perpendiculaires.

On note alors $d_1 \perp d_2$.



Propriété 2 Si deux droites sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.

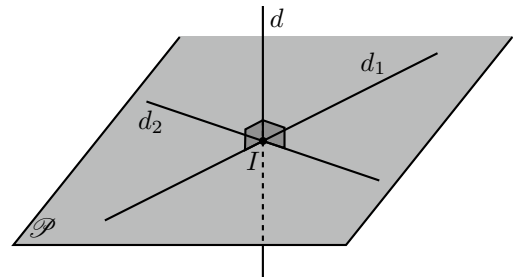
$$\left. \begin{array}{l} d_1 // d_2 \\ \Delta \perp d_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \Delta \perp d_2$$



Définition 2 Le point I est l'intersection d'une droite d et d'un plan $\mathcal{P}$.

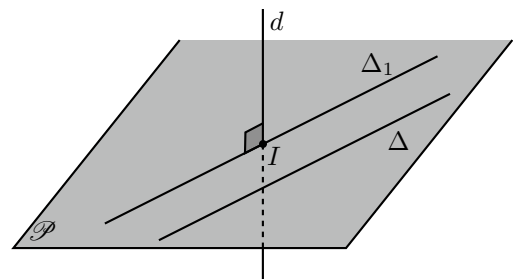
On dit que d et $\mathcal{P}$ sont **perpendiculaires** s'il existe deux droites distinctes d_1 et d_2 de $\mathcal{P}$ perpendiculaires à d .

On note alors $d \perp \mathcal{P}$.



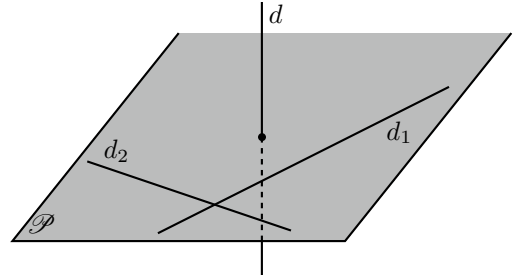
Propriété 3

Si une droite d est perpendiculaire à un plan $\mathcal{P}$, alors d est orthogonale à toute droite Δ contenue dans $\mathcal{P}$.

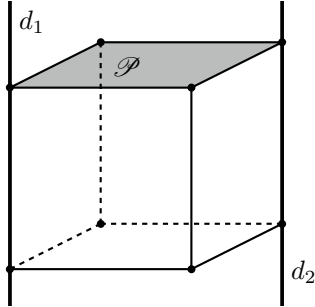


Théorème 2 Pour qu'une droite d et un plan $\mathcal{P}$ soient perpendiculaires, il faut et il suffit que d soit orthogonale à deux droites sécantes de $\mathcal{P}$.

Ceci sera démontré en page 192.

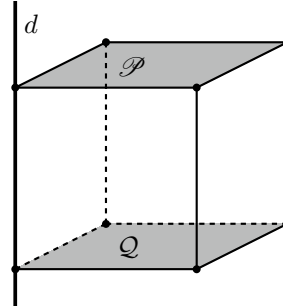


Conséquences



$$\left. \begin{array}{l} d_1 \perp \mathcal{P} \\ d_2 \perp \mathcal{P} \end{array} \right\} \Rightarrow d_1 // d_2$$

Deux droites perpendiculaires à un même plan sont parallèles entre elles.



$$\left. \begin{array}{l} d \perp \mathcal{P} \\ d \perp \mathcal{Q} \end{array} \right\} \Rightarrow \mathcal{P} // \mathcal{Q}$$

Deux plans perpendiculaires à une même droite sont parallèles entre eux.

Nous donnons enfin la définition suivante.

Définition 3

Deux plans sont perpendiculaires si l'un contient une droite perpendiculaire à l'autre.

On peut remarquer que si l'un contient une droite perpendiculaire à l'autre, alors l'autre en contient une perpendiculaire à l'un, celle qui est perpendiculaire à leur droite d'intersection. Vous pouvez désormais vous diriger vers la page 443 afin de découper des pavés.

2 Vecteurs de l'espace

2.1 Définition et opérations

La notion de vecteur vue en géométrie plane se généralise à l'espace sans aucune difficulté.

- À tout couple de points (A, B) de l'espace, à toute translation transformant le point A en le point B , on associe le vecteur $\overrightarrow{AB}$ de la manière suivante :
 - * Si A et B sont distincts, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour direction, la droite (AB) , pour sens, celui de A vers B et pour norme $\|\overrightarrow{AB}\|$, la distance AB .
 - * Si A et B sont confondus, le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est le vecteur nul $\vec{0}$.

- Deux vecteurs non nuls sont égaux s'ils ont même direction, même sens et même norme.
- $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \iff ABDC$ est un parallélogramme, éventuellement aplati.
- Pour tout point A et tout vecteur $\vec{u}$ de l'espace, il existe un unique point C tel que $\overrightarrow{AC} = \vec{u}$.
- Les opérations et règles de calcul, comme la relation de Chasles[†], sont identiques à celles dans le plan.

2.2 Vecteurs et droites

La notion de colinéarité est identique dans l'espace et dans le plan.

Définition 4

Deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont dit **colinéaires** si les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur de l'espace (il a donc aucune ou toute direction).

Les résultats suivants se démontrent de la même manière que dans le plan.

Propriété 4 Deux vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

ssi il existe un réel $\lambda \neq 0$ tel que $\vec{v} = \lambda \vec{u}$.

Ainsi, trois points distincts A , B et C sont alignés

ssi il existe un réel $\lambda \neq 0$ tel que $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}$.

Remarque : On peut démontrer que, plus généralement, deux vecteurs quelconques de l'espace $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe deux réels α et β non tous nuls tels que $\alpha \vec{u} + \beta \vec{v} = \vec{0}$.

Propriété 5 Soient A et B deux points distincts de l'espace.

La droite (AB) est l'ensemble des points M de l'espace tels que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ soient colinéaires c.-à-d. tels qu'il existe un réel λ pour lequel $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB}$.

On dit que $\overrightarrow{AB}$ est un **vecteur directeur** de cette droite.

2.3 Vecteurs et plans

Théorème 3 Soient A , B et C trois points non alignés de l'espace.

Le **plan** (ABC) est l'ensemble des points M définis par $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$, x et y étant deux réels quelconques.

$$\mathcal{P}_{(ABC)} = \left\{ M \in \mathcal{E} / \exists x, y \in \mathbb{R}, \overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC} \right\}$$

[†]. Michel Chasles (1793-1880), éminent mathématicien français dont le nom est inscrit sur la non moins éminente tour Eiffel.

Démonstration : • Dans le plan (ABC) , A , B et C n'étant pas alignés, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires donc $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère de ce plan. D'où, si $M \in (ABC)$, il existe un couple $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$, le couple des coordonnées de M dans ce repère.

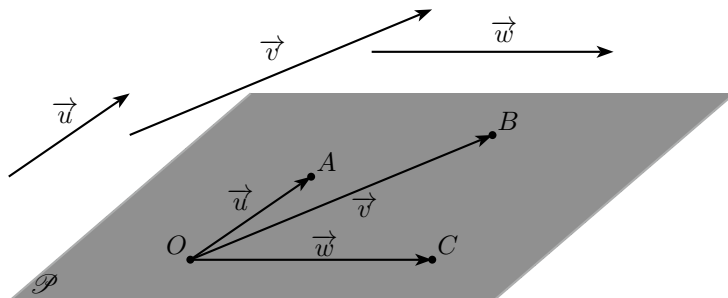
• Réciproquement, soit $M \in \mathcal{E}$ tel que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$. Puisque $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère du plan (ABC) , il existe un point $N \in (ABC)$ tel que $\overrightarrow{AN} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$. Ainsi, $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AN}$ donc les points M et N sont confondus et $M \in (ABC)$. $\square$

On dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ dirigent le plan ou sont des **vecteurs directeurs** du plan (ABC) . Le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est alors une **combinaison linéaire** de ces derniers.

Plus généralement, un plan est déterminé par la donnée de deux vecteurs directeurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et d'un point A . On le note alors $\mathcal{P}(A; \vec{u}, \vec{v})$.

Définition 5

On dit que trois vecteurs de l'espace $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **coplanaires** s'il existe quatre points O , A , B et C d'un **même plan** tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$.



Remarques : • Ceci signifie que trois vecteurs non nuls de l'espace sont coplanaires s'ils admettent des représentants situés dans un même plan.

• En particulier, si deux des vecteurs sont colinéaires, alors les trois sont nécessairement coplanaires.

• Pour $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires, les deux plans $\mathcal{P}(A; \vec{u}, \vec{v})$ et $\mathcal{P}(B; \vec{u}, \vec{v})$ sont parallèles.

Théorème 4 Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires. $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont **coplanaires** ssi il existe deux réels α et β tels que $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$. : $\vec{w}$ est combinaison linéaire de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$.

Démonstration : On utilise les notations de la définition 5 précédente. Puisque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, ils sont directeurs du plan (OAB) . Ainsi, $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires ssi $C \in (OAB)$. Le théorème 3 affirme que cela équivaut à l'existence de deux réels α et β tels que $\overrightarrow{OC} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB}$. $\square$

Remarque : On peut démontrer que, plus généralement, trois vecteurs quelconques de l'espace $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires s'il existe trois réels α , β et γ non tous nuls tels que $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}$.

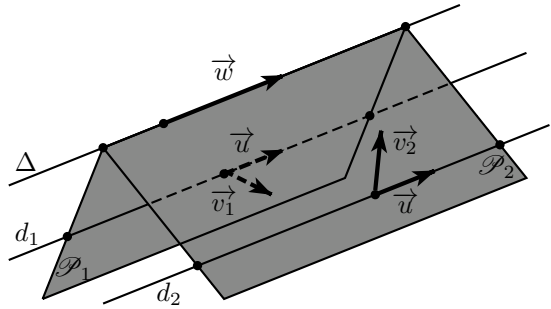
Démonstration : Nous pouvons désormais démontrer le théorème 1 du toit.

Soit $\vec{u}$ un vecteur directeur des droites parallèles d_1 et d_2 et soit $\vec{w}$ un vecteur directeur de Δ . Soient enfin $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ deux vecteurs tels que les couples $(\vec{u}, \vec{v}_i)$ dirigent les plans $\mathcal{P}_i$ (cf. illustration en page suivante).

Puisque $\Delta \in \mathcal{P}_1$, il existe un unique couple (x_1, y_1) tel que $\vec{w} = x_1\vec{u} + y_1\vec{v}_1$.

De même, $\Delta \in \mathcal{P}_2$ et il existe un unique couple (x_2, y_2) tel que $\vec{w} = x_2\vec{u} + y_2\vec{v}_2$. Ainsi, $x_1\vec{u} + y_1\vec{v}_1 = x_2\vec{u} + y_2\vec{v}_2$ i.e. $(x_1 - x_2)\vec{u} = y_2\vec{v}_2 - y_1\vec{v}_1$ ce qui signifie que, si $x_1 \neq x_2$, $\vec{u} = \frac{y_2}{x_1 - x_2}\vec{v}_2 + \frac{-y_1}{x_1 - x_2}\vec{v}_1$ et les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont coplanaires mais cela est impossible puisque les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants et ne peuvent être dirigés par des couples de vecteurs coplanaires. Ainsi, $x_1 - x_2 = 0$ et $y_2\vec{v}_2 - y_1\vec{v}_1 = \vec{0}$ d'où $y_2 = y_1 = 0$ car les vecteurs $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ ne sont pas colinéaires. On en déduit donc que $\vec{w} = x_1\vec{u}$ et $\Delta // d_1$. $\square$

$$\begin{array}{l} \text{Si} \quad \left\{ \begin{array}{l} d_1 // d_2 \\ d_1 \subset \mathcal{P}_1 \\ d_2 \subset \mathcal{P}_2 \\ \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \Delta \end{array} \right. \\ \text{alors} \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta // d_1 \\ \Delta // d_2 \end{array} \right. \end{array}$$

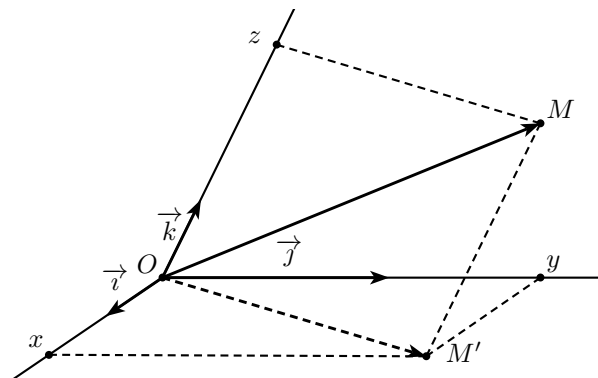


3 Repérages de l'espace

3.1 Repères cartésiens de l'espace

Définition 6 Se donner un repère de l'espace, c'est choisir un point comme origine (O) et trois vecteurs non coplanaires $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$. On note alors $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un tel repère de l'espace et l'on dit que l'ensemble $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de ces trois vecteurs forme une base de l'espace.

Théorème 5 Soit $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère de l'espace. Pour tout point M , il existe un unique triplet de coordonnées $(x; y; z)$ tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. x est appelé l'abscisse, y l'ordonnée et z la cote du point M dans ce repère.



Démonstration : Puisque les vecteurs de base ne sont pas coplanaires, le plan $\mathcal{P}_{(O; \vec{i}, \vec{j})}$ et la droite $\Delta(M, \vec{k})$ ne sont pas parallèles ; notons M' leur intersection. $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère de ce plan $\mathcal{P}$ donc il existe un unique couple de coordonnées $(x; y)$ tel que $\overrightarrow{OM'} = x\vec{i} + y\vec{j}$. De plus, $(M, \vec{k})$ est un repère de la droite Δ donc il existe un unique réel z tel que $\overrightarrow{M'M} = z\vec{k}$. D'après la relation de Chasles, on a $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'M} = (x\vec{i} + y\vec{j}) + z\vec{k}$ et cette écriture est unique d'après ce que l'on connaît déjà dans le plan et la non-coplanarité des vecteurs de base. $\square$

Définition 7 Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'espace muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et soit M le point tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OM}$. Les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ sont celles du point M et on a alors $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Remarque : Si dans le plan, je fais attention à noter différemment les coordonnées de points, $M(x, y)$, et les coordonnées (ou plutôt les composantes) de vecteurs, $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, je ne les différencie pas dans l'espace. Cela prend en effet beaucoup de place verticalement et les élèves de terminales sont déjà habitués aux deux objets.

Propriété 6 Ainsi, tout triplet de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ non coplanaires (i.e. toute base) de l'espace permet une décomposition des vecteurs $\vec{V}$ dans cette base :

$$\forall \vec{V} \quad \exists ! (x; y; z) \in \mathbb{R}^3 \quad \text{tq} \quad \vec{V} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}.$$

$(x; y; z)$ sont les coordonnées (ou composantes) de $\vec{V}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Comme dans le plan, on peut donc s'affranchir de la donnée d'une origine pour les coordonnées des vecteurs.

3.2 Coordonnées et calculs

Tous les résultats obtenus dans le plan se généralisent à l'espace par l'ajout d'une troisième coordonnée, la cote.

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace,

- si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées $(x; y; z)$ et $(x'; y'; z')$, alors
 - * pour tout réel λ , le vecteur $\lambda\vec{u}$ admet pour coordonnées $(\lambda x; \lambda y; \lambda z)$.
 - * le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ admet pour coordonnées $(x + x'; y + y'; z + z')$.

- si A et B ont pour coordonnées $(x_A; y_A; z_A)$ et $(x_B; y_B; z_B)$, alors
 - * le vecteur $\overrightarrow{AB}$ admet pour coordonnées $(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$.
 - * le milieu du segment $[AB]$ admet pour coordonnées $(\frac{x_A+x_B}{2}; \frac{y_A+y_B}{2}; \frac{z_A+z_B}{2})$.

Deux vecteurs sont colinéaires *ssi* leurs coordonnées sont proportionnelles dans n'importe quelle base de l'espace. Par ailleurs, il existe aussi dans l'espace l'équivalent du critère de colinéarité de deux vecteurs du plan (un *déterminant*) qui est alors un critère de coplanarité de trois vecteurs mais ceci est hors programme.

Nous préciserons ce qui suit dans un chapitre ultérieur :

Dans un repère orthonormé, un r.o.n., $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace et avec les mêmes notations, on a

$$||\vec{u}|| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \text{et} \quad ||\overrightarrow{AB}|| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

Exercices

DANS L'ESPACE

Exercice 1 Tracer deux cubes disjoints, l'un se nomme $ABCDEFGH$ et l'autre $JANOUEL$.

Exercice 2 De tête

1. $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont deux plans et d est une droite. Pour chacune des propositions suivantes, quelles conséquences peut-on tirer concernant la droite d et le plan $\mathcal{Q}$?
 - (a) Si $d // \mathcal{P}$ et $\mathcal{P} // \mathcal{Q}$, alors...
 - (b) Si $d \perp \mathcal{P}$ et $\mathcal{P} // \mathcal{Q}$, alors...
 - (c) Si $d \perp \mathcal{P}$ et $\mathcal{P} \perp \mathcal{Q}$, alors...
2. $ABCDEFGH$ est un cube, I , J les milieux des arêtes $[HG]$ et $[AB]$. E est-il un point du plan (ICJ) ?

Exercice 3 $GIZEH$ est une pyramide régulière dont la base $IZEH$ est un carré. Démontrer que les droites (GI) et (ZH) sont orthogonales.

Exercice 4 $ABCD$ est un tétraèdre régulier, I , J , K , L , M et N sont les milieux respectifs des arêtes $[AB]$, $[CD]$, $[AD]$, $[BC]$, $[BD]$ et $[AC]$.

1.
 - (a) Démontrer que le quadrilatère $IKJL$ est un losange.
 - (b) En déduire que les droites (IJ) et (KL) sont perpendiculaires.
On admettra de même que les droites (IJ) et (MN) d'une part, et (MN) et (LK) d'autre part, sont aussi des droites perpendiculaires.
2.
 - (a) Que dire des milieux des segments $[MN]$ et $[LK]$?
 - (b) Démontrer que la droite (IJ) est orthogonale aux droites (LN) et (NK) .
 - (c) En déduire que (IJ) est perpendiculaire à (AB) et (CD) .
3. Démontrer que le point G , milieu de $[IJ]$, est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$.

Exercice 5 $ABCDEFGH$ est un cube d'arête 1.

I est le point de l'arête $[AB]$ tel que $3AI = 2AB$ et J celui de l'arête $[HG]$ tel que $3HJ = 2HG$. K est le milieu du segment $[IJ]$. La perpendiculaire menée par F au plan (EIJ) coupe ce plan en P .

1.
 - (a) Démontrer que les triangles IEJ et IFJ sont isocèles.
 - (b) En déduire que la droite (IJ) est perpendiculaire au plan (KEF) .
2. Démontrer que la droite (IJ) est perpendiculaire au plan (PEF) .

3. (a) Dédire des questions précédentes que les points E, F, P et K sont coplanaires.
- (b) Démontrer que les points E, K et P sont alignés.

Exercice 6 $ABCDEFGH$ est un cube. Les points I et J sont les milieux respectifs des arêtes $[EF]$ et $[FG]$.

1. Compléter les égalités suivantes par un sommet du cube.

$$(a) \quad \overrightarrow{A...} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BF}. \quad (b) \quad \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{C...} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{HE}.$$

2. Quel est le vecteur d'origine A défini par :

$$(a) \quad \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FJ} ? \quad (b) \quad \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HJ} ?$$

3. Les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont-ils colinéaires ?

Exercice 7 $ABCDEFGH$ est un parallélépipède.

1. Démontrer les égalités suivantes.

$$(a) \quad \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{0}. \quad (b) \quad \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{GA}.$$

2. Compléter les égalités suivantes par un sommet du parallélépipède.

$$(a) \quad \overrightarrow{...H} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CE}. \quad (b) \quad \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{E...} + \overrightarrow{CG}.$$

Exercice 8 A, B et C sont trois points non alignés de l'espace. I est le milieu du segment $[BC]$, G est tel que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$, D est un point hors du plan (ABC) et K tel que $\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KD} = \overrightarrow{0}$.

1. Montrer que $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GI}$.
2. En déduire que les points G, A et I sont alignés et que G est le centre de gravité du triangle ABC .
3. Démontrer que $3\overrightarrow{KG} + \overrightarrow{KD} = \overrightarrow{0}$ puis en déduire que K, G et D sont alignés.
4. Déterminer le réel k tel que $\overrightarrow{DK} = k\overrightarrow{DG}$.

Exercice 9 $ABCD$ est un tétraèdre. Le point M est tel que $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$.

1. (a) Démontrer que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
- (b) En déduire que M est un point du plan (ABC) .
2. À quel plan appartient le point N tel que $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{DN} = \overrightarrow{0}$?

Exercice 10 $ABCDEFGH$ est un cube. Les points I et J sont les milieux respectifs des arêtes $[AB]$ et $[EH]$.

1. Démontrer que $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$ puis en déduire que $2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{HB}$.
2. Les vecteurs $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{HB}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont-ils coplanaires ?

Exercice 11 $ABCDEFGH$ est un cube. I et J sont les points tels que $3\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{DC}$ et $3\overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{CB}$.

1. Construire le point K , intersection du plan (EGJ) et de la droite (AB) .

2. Déterminer le réel λ tel que $\overrightarrow{AK} = \lambda \overrightarrow{AB}$. En déduire que la droite (HI) est parallèle au plan (EGJ) .

Dorénavant, l'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, qu'on se le dise.

Exercice 12

- Dans chacun des cas, préciser si les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont colinéaires.
 - $\vec{a}(2; 1; -3)$ et $\vec{b}(1; 2; 2)$.
 - $\vec{a}(14; -24; 5; 17; 5)$ et $\vec{b}(-4; 7; -5)$.
- Les points $A(1; -1; 2)$, $B(0; 5; 3)$ et $C(4; -19; -1)$ sont-ils alignés ?
- Soient $\vec{u}(-1; 3; 2)$, $\vec{v}(4; 0; 2)$, $\vec{w}(-7; 9; 4)$. Calculer $3\vec{u} - \vec{v} - \vec{w}$.
 $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont-ils coplanaires ?
- Soient $\vec{r}(0; -1; 1)$, $\vec{s}(-2; -1; -3)$, $\vec{t}(-1; -1; -1)$.
Le triplet $(\vec{r}, \vec{s}, \vec{t})$ forme-t-il une base de l'espace ?

Exercice 13 Soient $\vec{u}(2; 1; 0)$, $\vec{v}(3; 2; -1)$ et $\vec{w}(0; -1; 1)$ trois vecteurs de l'espace. Le triplet $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ forme-t-il une base de l'espace ?

Exercice 14 Soient $A(3; 0; 4)$, $B(2; 3; 1)$, $C(-1; 2; 3)$ et $D(0; -1; 6)$ dans un r.o.n. Justifier que ces points sont coplanaires. Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

Exercice 15 On donne les points $A(2; 3; -1)$, $B(2; 8; -1)$, $C(7; 3; -1)$ et $D(2; -1; 2)$ dans un r.o.n.

Montrer que les points B , C et D sont sur une même sphère de centre A .

Exercice 16 Déterminer l'équation cartésienne de la sphère de centre $I(1; -3; 5)$ et de rayon 2 dans un r.o.n.

Les points $A(3, -3, 5)$ et $B(-1, 3, 5)$ appartiennent-ils à cette sphère ?

Exercice 17 On donne les points $A(2; 1; 0)$ et $B(-1; 4; 2)$ dans un repère orthonormé.

- Déterminer le réel c tel que le point $C(1; 1; c)$ soit équidistant de A et B .
- Montrer qu'un point $M(x; y; z)$ appartient au plan médiateur du segment $[AB]$ ssi $3x - 3y - 2z + 8 = 0$.

Exercice 18 On donne les points $A(2; 1; 0)$, $B(0; 1; 1)$ et $C(0; 3; 2)$.

- Démontrer que les points A , B et C ne sont pas alignés.
- Vérifier que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ et $\vec{k}$ ne sont pas coplanaires.
- La droite passant par O et dirigée par $\vec{k}$ coupe le plan (ABC) en un point I . Quelles sont ses coordonnées ?

Exercice 19 $ABCDEFGH$ est un cube d'arête 1. Les points I et J sont les milieux respectifs des arêtes $[BC]$ et $[CD]$. M est un point quelconque du segment $[EC]$.

On choisit le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

- Quelles sont les coordonnées des points C , E , I et J ?
- Justifier l'existence d'un réel $t \in [0; 1]$ tel que les coordonnées de M soient $(1 - t; 1 - t; t)$.

3. (a) Montrer que les points E et C sont tous deux équidistants des points I et J .
(b) En déduire que le triangle MIJ est isocèle en M .
(c) Exprimer IM^2 en fonction de t .
4. Le but de cette question est de déterminer la position de M sur le segment $[CE]$ pour laquelle la mesure de l'angle $\widehat{IMJ}$ est maximale. On note α cette mesure en radians.
- (a) En admettant que $\alpha \in [0; \pi]$, démontrer que la mesure de α est maximale lorsque $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ est maximal.
- (b) En déduire que la mesure de l'angle $\widehat{IMJ}$ est maximale lorsque la longueur IM est minimale.
- (c) Étudier les variations de la fonction f définie sur $[0; 1]$ par $f(t) = 3t^2 - t + \frac{1}{4}$.
- (d) En déduire qu'il existe un unique point M_0 de $[EC]$ tel que la mesure α soit maximale.

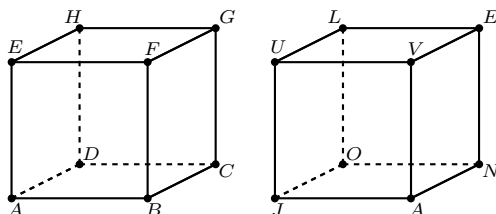
Déplacez-vous en page 439 afin de réaliser le devoir n° 6 puis allez découper des pavés en page 443.

Corrigé des exercices

DANS L'ESPACE

Exercice 1

Ce qui est très important, c'est de bien nommer les solides : tourner autour d'une face puis, sur la face opposée, tourner dans le même sens en partant du point opposé au premier point nommé.



Exercice 2 De tête

1. (a) Si $d \parallel \mathcal{P}$ et $\mathcal{P} \parallel \mathcal{Q}$, alors $d \parallel \mathcal{Q}$
- (b) Si $d \perp \mathcal{P}$ et $\mathcal{P} \parallel \mathcal{Q}$, alors $d \perp \mathcal{Q}$
- (c) Si $d \perp \mathcal{P}$ et $\mathcal{P} \perp \mathcal{Q}$, alors $d \parallel \mathcal{Q}$
2. Oui, $E \in (ICJ)$ car $(EI) \parallel (CJ)$.

Exercice 3 Soit K l'intersection des diagonales du carré $IZEH$. On a $(HZ) \perp (EI)$. Puisque GHZ est isocèle en G , $(GK) \perp (HZ)$. Les droites (EI) et (GK) étant sécantes, $(HZ) \perp (GIK)$ et donc $(HZ) \perp (GI)$.

Exercice 4 $ABCD$ est un tétraèdre régulier.

1. (a) Dans le triangle équilatéral ABD , (IK) est une droite des milieux donc $(IK) \parallel (BD)$ et $IK = \frac{1}{2}BD$. De même dans le triangle CBD , $(JL) \parallel (BD)$ et $JL = \frac{1}{2}BD$. Un raisonnement analogue montre que $(IL) \parallel (AC) \parallel (KJ)$ et $IL = KJ = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}BD$. Ainsi, $IKJL$ est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles deux à deux et dont les côtés ont même longueur : c'est un losange. On peut remarquer que la même longueur seule ne suffit pas car les points peuvent alors ne pas être coplanaires.
- (b) Les diagonales d'un losange sont perpendiculaires donc $(IJ) \perp (KL)$. De même, $(IJ) \perp (MN)$ et $(MN) \perp (LK)$.
2. (a) Puisque, de façon analogue, $MKNL$ est un losange, les segments $[MN]$ et $[LK]$ ont même milieu.
- (b) Puisque (IJ) est perpendiculaire à (KL) et (MN) qui sont sécantes en leur milieu, (IJ) est perpendiculaire au plan $(MNKL)$. (IJ) est donc orthogonale aux droites (LN) et (NK) .
- (c) $(NK) \parallel (AB)$ et $(LN) \parallel (CD)$ donc (IJ) est orthogonale à (AB) et (CD) .
3. Le point G est le milieu de $[IJ]$ donc aussi celui de $[MN]$ et $[LK]$. Puisque $(IJ) \perp (AB)$, le triangle GAI est rectangle en I et $GA^2 = IG^2 + IA^2$.

De même, les triangles GIB , GJC , GJD sont rectangles et comme $IG = JG$ et $IA = IB = JC = JD$, on obtient $GA = GB = GC = GD$.

G est donc le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$.

Exercice 5 $ABCDEFGH$ est un cube, $I \in [AB]$, $J \in [HG]$, $AI = HJ = \frac{2}{3}AB = \frac{2}{3}$, $K = \text{Mil}[IJ]$, $P \in (EIJ)$ et $(FP) \perp (EIJ)$.

1. (a) Les triangles EHJ et EAI sont rectangles respectivement en H et en A . Les côtés adjacents à l'angle droit ont même longueur ($EA = EH = 1$ et $AI = HJ = \frac{2}{3}$) donc les hypoténuses EI et EJ aussi et le triangle EIJ est isocèle en E . De même, avec les triangles rectangles FGJ et FIB , le triangle FIJ est isocèle en F .
- (b) EIJ est isocèle en E et K est le milieu de $[IJ]$ donc (EK) est une hauteur et une médiane de EIJ et $(EK) \perp (IJ)$. De même, dans le triangle isocèle FIJ , $(FK) \perp (IJ)$. La droite (IJ) est donc perpendiculaire à deux sécantes du plan (KEF) donc $(IJ) \perp (KEF)$.
2. On a $(FP) \perp (EIJ)$ donc $(FP) \perp (IJ)$ et $(IJ) \perp (KEF)$ donc $(IJ) \perp (EF)$. (EF) et (FP) sont sécantes (en F) donc $(IJ) \perp (PEF)$.
3. (a) La droite (IJ) est perpendiculaire aux plans (EPF) et (EKF) : ils sont donc parallèles. Ayant un point commun (E), ils sont confondus et les points E , F , P et K sont coplanaires.
- (b) On a P et $K \in (EIJ)$. Puisque $(FP) \perp (EIJ)$, on a $(FP) \perp (EK)$ et $(FP) \perp (EP)$. Comme les points E , F , P et K sont coplanaires, $(EK) \parallel (EP)$ et les points E , K et P sont alignés.

Exercice 6 $ABCDEFGH$ est un cube. Les points I et J sont les milieux respectifs des arêtes $[EF]$ et $[FG]$.

1. (a) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AH}$.
- (b) $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{HE} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{HE}$.
2. (a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FJ} = \overrightarrow{AJ}$.
- (b) $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HJ} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HJ} = \overrightarrow{AJ}$.
3. $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IF} + \overrightarrow{GH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{EF} + \frac{1}{2}\overrightarrow{FG} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{EG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$: $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{AC}$ colin.

Exercice 7 $ABCDEFGH$ est un parallélépipède.

1. (a) $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{HC} = \overrightarrow{CC} = \vec{0}$.
- (b) $\overrightarrow{GF} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{GA}$.
2. (a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CE} = \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DH}$.
- (b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AG}$.

Exercice 8 A , B et C sont trois points non alignés, $I = \text{Milieu}[BC]$ et G vérifie $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

1. On a $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{GI} + \overrightarrow{IC} = 2\overrightarrow{GI} + \vec{0} = 2\overrightarrow{GI}$.

2. Ainsi, $\overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = -\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{GI}$ et les points G , A et I sont alignés i.e. G appartient à la médiane de ABC issue de A . On peut démontrer de même que G est sur les autres médianes et G est donc bien le centre de gravité du triangle ABC .
3. On a
$$\begin{aligned} 3\overrightarrow{KG} + \overrightarrow{KD} &= \overrightarrow{KG} + \overrightarrow{KG} + \overrightarrow{KG} + \overrightarrow{KD} \\ &= \overrightarrow{KA} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{KD} \\ &= (\overrightarrow{KA} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KD}) - (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) = \vec{0} - \vec{0} = \vec{0}. \end{aligned}$$
 Les vecteurs $\overrightarrow{KG}$ et $\overrightarrow{KD}$ sont donc colinéaires et les points K , G et D alignés.
4. On a
$$\begin{aligned} 3\overrightarrow{KG} + \overrightarrow{KD} = \vec{0} &\iff 3\overrightarrow{KD} + 3\overrightarrow{DG} + \overrightarrow{KD} = \vec{0} \\ &\iff 4\overrightarrow{KD} = -3\overrightarrow{DG} \iff \overrightarrow{DK} = -\frac{3}{4}\overrightarrow{DG}. \end{aligned}$$

Exercice 9 $ABCD$ est un tétraèdre. Le point M est tel que $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \vec{0}$.

1. (a) On a
$$\begin{aligned} \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = \vec{0} &\iff \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{AC} = \vec{0} \\ &\iff 2\overrightarrow{MA} = -2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \iff \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}. \end{aligned}$$
 (b) Les vecteurs $\overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont donc coplanaires et $M \in (ABC)$.
2. Si $\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{BN} - \overrightarrow{DN} = \vec{0}$, les vecteurs $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{BN}$ et $\overrightarrow{DN}$ sont coplanaires et $N \in (ABD)$.

Exercice 10 $ABCDEFGH$ est un cube. Les points I et J sont les milieux respectifs des arêtes $[AB]$ et $[EH]$.

1. D'après la relation de Chasles,
$$\begin{aligned} \overrightarrow{IJ} &= \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EJ} = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EH} \\ \overrightarrow{IJ} &= \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}. \end{aligned}$$
 D'où
$$2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BH} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{HB}.$$
2. Dans le cube, les vecteurs $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{HB}$ ne sont pas colinéaires et puisque l'on a pu exprimer l'un en fonction des deux autres ($\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} - \frac{1}{2}\overrightarrow{HB}$), les trois vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{HB}$ sont donc coplanaires.

Exercice 11 $ABCDEFGH$ est un cube. I et J sont les points tels que $3\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{DC}$ et $3\overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{CB}$.

1. On a $(JK) \in (ABC)$ et $(GE) \in (GFC)$ donc (JK) et (GE) ne sont pas sécantes. Puisque $K \in (JGE)$, elles sont coplanaires donc parallèles. Le point K est donc l'intersection de la parallèle à (GE) (donc à (AC)) en J et de la droite (AB) .
2. Puisque les droites (JK) et (AC) sont parallèles et les droites (AK) et (CJ) sécantes en B , le théorème de Thalès permet d'affirmer que $\frac{AK}{AB} = \frac{CJ}{CB} = \frac{1}{3}$. On a alors $\overrightarrow{AK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. Ainsi,
$$\overrightarrow{HI} = \overrightarrow{HD} + \overrightarrow{DI} = \overrightarrow{HD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{EK} :$$
 les droites (HI) et (EK) sont parallèles. Puisque $(EK) \in (EGJ)$, (HI) est parallèle au plan (EGJ) .

Exercice 12

1. (a) $\vec{a}(2; 1; -3)$ et $\vec{b}(1; 2; 2)$ ne sont pas colinéaires car $x_{\vec{a}} = 2x_{\vec{b}}$ et $y_{\vec{a}} \neq 2y_{\vec{b}}$
- (b) $\vec{a}(14; -24, 5; 17, 5)$ et $\vec{b}(-4; 7; -5)$ sont colinéaires car
$$\frac{14}{-4} = \frac{-24,5}{7} = \frac{17,5}{-5} = -\frac{7}{2}.$$

- On a $\overrightarrow{AB}(-1, 6, 1)$ et $\overrightarrow{AC}(3, -18, -3)$ d'où $\overrightarrow{AC} = -3\overrightarrow{AB}$: ils sont colinéaires et A, B, C sont alignés.
- On a $(3\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} - \overrightarrow{w})$ de composantes $(3 \times (-1) - 4 - (-7) = 0, 0, 0)$ donc $3\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} - \overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$ et $\overrightarrow{v} = 3\overrightarrow{u} - \overrightarrow{w}$: les vecteurs $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ sont coplanaires.
- Puisque $\overrightarrow{r} + \overrightarrow{s} - 2\overrightarrow{t} = \overrightarrow{0}$, ces trois vecteurs sont coplanaires et le triplet $(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{s}, \overrightarrow{t})$ ne forme pas une base de l'espace.

Exercice 13 Soient $\overrightarrow{u}(2; 1; 0)$, $\overrightarrow{v}(3; 2; -1)$ et $\overrightarrow{w}(0; -1; 1)$. Supposons que l'on ait une combinaison linéaire nulle de ces trois vecteurs c.-à-d. qu'il existe a, b et c trois réels tels que $a\overrightarrow{u} + b\overrightarrow{v} + c\overrightarrow{w} = \overrightarrow{0}$.

$$\text{On a alors } \begin{cases} 2a + 3b + 0c = 0 \\ 1a + 2b - 1c = 0 \\ 0a - 1b + 1c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} c = b \\ a = -\frac{3}{2}b \\ -\frac{3}{2}b + 2b - 1b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -\frac{1}{2}b = 0 \\ c = b = 0 \\ a = -\frac{3}{2}b = 0. \end{cases}$$

Ainsi, ces trois vecteurs ne sont pas coplanaires et le triplet $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ forme une base de l'espace.

Exercice 14 On a $\overrightarrow{AB}(-1, 3, -3)$, $\overrightarrow{AC}(-4, 2, -1)$, $\overrightarrow{AD}(-3, -1, 2)$ et $\overrightarrow{BD}(-2, -4, 5)$. Puisque $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, $ABCD$ est un parallélogramme. Puisque $AB^2 = 1^2 + 3^2 + 3^2 \neq 3^2 + 1^2 + 2^2 = AD^2$, ce n'est pas un losange et puisque $AC^2 = 4^2 + 2^2 + 1^2 \neq 2^2 + 4^2 + 5^2 = BD^2$, ce n'est pas un rectangle.

Exercice 15 Puisque le repère est orthonormé, on a

$$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2 = 0^2 + 5^2 + 0^2 = 25.$$

$$\text{De même, } AC^2 = 5^2 + 0^2 + 0^2 = 25 \quad \text{et} \quad AD^2 = 0^2 + 4^2 + 3^2 = 25.$$

Les points B, C et D sont donc sur la sphère de centre A et de rayon 5.

Exercice 16 Un point $M(x; y; z)$ appartient à la sphère de $I(1; 3; 5)$ et de rayon 2 dans un r.o.n.ssi $IM = 2 \iff IM^2 = 4 \iff (x - x_I)^2 + (y - y_I)^2 + (z - z_I)^2 = 4$
 $\iff (x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z - 5)^2 = 4 \iff x^2 - 2x + y^2 + 6y + z^2 - 10z + 31 = 0.$

On a $x_A^2 - 2x_A + y_A^2 + 6y_A + z_A^2 - 10z_A + 31 = 9 - 6 + 9 - 18 + 25 - 50 + 31 = 0$ donc $A(3, -3, 5) \in \mathcal{S}$

et $x_B^2 - 2x_B + y_B^2 + 6y_B + z_B^2 - 10z_B + 31 = 1 + 2 + 9 + 18 + 25 - 50 + 31 \neq 0$ donc $B(-1, 3, 5) \notin \mathcal{S}$.

Exercice 17 On donne les points $A(2; 1; 0)$ et $B(-1; 4; 2)$ dans un repère orthonormé.

$$1. \text{ On a } CA^2 = (2 - 1)^2 + (1 - 1)^2 + (0 - c)^2 = c^2 + 1$$

$$\text{et } CB^2 = \dots = 2^2 + 3^2 + (c - 2)^2 = c^2 - 4c + 17.$$

$$\text{Ainsi, } CA = CB \iff c^2 + 1 = c^2 - 4c + 17 \iff 4c = 16 \iff c = 4 : C(1, 1, 4).$$

$$2. M(x; y; z) \text{ appartient au plan médiateur du segment } [AB] \iff MA = MB$$

$$\iff MA^2 = MB^2$$

$$\iff (x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 0)^2 = (x + 1)^2 + (y - 4)^2 + (z - 2)^2$$

$$\iff x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 + z^2 = x^2 + 2x + 1 + y^2 - 8y + 16 + z^2 - 4z + 4$$

$$\iff -6x + 6y + 4z - 16 = 0 \iff 3x - 3y - 2z + 8 = 0.$$

Exercice 18 On donne les points $A(2; 1; 0)$, $B(0; 1; 1)$ et $C(0; 3; 2)$.

- $\overrightarrow{AB}(-2, 0, 1)$ et $\overrightarrow{BC}(0, 2, 1)$ ont même cote mais des ordonnées différentes : ils ne sont donc pas colinéaires et les points A, B et C ne sont pas alignés.

2. On a $\vec{k}(0, 0, 1)$. On ne peut avoir $\vec{AB} = \lambda\vec{BC} + \mu\vec{k}$ car l'abscisse de $\vec{AB}$ n'est pas nulle. De même, en regardant les ordonnées, on ne peut écrire $\vec{BC}$ en fonction de $\vec{AB}$ et $\vec{k}$. Supposons que $\vec{k} = \lambda\vec{AB} + \mu\vec{BC}$. En regardant les abscisses, on doit avoir $0 = -2\lambda + 0\mu$ i.e. $\lambda = 0$ et en regardant les ordonnées, on doit avoir $\mu = 0$. Or $\vec{k} \neq \vec{0}$ donc on ne peut écrire $\vec{k}$ en fonction des deux autres vecteurs. Ainsi, les trois vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{BC}$ et $\vec{k}$ ne sont pas coplanaires. Plus généralement, on suppose qu'il existe trois réels a , b et c tels que $a\vec{AB} + b\vec{BC} + c\vec{k} = \vec{0}$. On a alors, composantes par composantes,
- $$\begin{cases} -2a + 0b + 0c = 0 \\ 0a + 2b + 0c = 0 \\ 1a + 1b + 1c = 0 \end{cases} \implies a = b = c = 0. \quad \text{La seule combinaison nulle}$$
- est donc la combinaison triviale et les trois vecteurs ne sont pas coplanaires.
3. Un point I de la droite passant par O et dirigée par $\vec{k}$ s'écrit $(0, 0, z)$. Ce point I appartient au plan (ABC) ssi $\vec{AI} = \lambda\vec{AB} + \mu\vec{BC}$.
- Réolvons donc le système
$$\begin{cases} 0 - 2 = -2\lambda + 0\mu \\ 0 - 1 = 0\lambda + 2\mu \\ z - 0 = \lambda + \mu \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = -\frac{1}{2} \\ z = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}.$$
- Le point recherché est donc $I(0, 0, \frac{1}{2})$.

Exercice 19 $ABCDEFGH$ cube d'arête 1 ; I, J milieux de $[BC], [CD]$; $M \in [EC]$; repère $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.

- On a $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$ donc $C(1, 1, 0)$, $E(0, 0, 1)$, $\vec{AI} = \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BC}$ donc $I(1, \frac{1}{2}, 0)$ et $\vec{AJ} = \vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{DC}$ donc $J(\frac{1}{2}, 1, 0)$.
- Puisque $M \in [EC]$, il existe $t \in [0; 1]$ tel que $\vec{CM} = t\vec{EC}$ donc $x_M - x_C = t(x_C - x_E)$ i.e. $x_M = (1 - t)x_C - tx_E = 1 - t$, $y_M = (1 - t)y_C - ty_E = 1 - t$ et $z_M = (1 - t)z_C - tz_E = t$ □
- (a) Le solide est un cube donc $CI = \frac{1}{2}CB = \frac{1}{2}CD = CJ$. Les triangles EBI et EDJ sont rectangles et leurs côtés adjacents aux angles droits ont même longueur : leur hypoténuse ont donc aussi même longueur et $EI = EJ$.
- (b) Puisque E et C sont chacun équidistants de I et de J , la droite (EC) appartient au plan médiateur du segment $[IJ]$ et $M \in (EC)$ est équidistant de I et de J : le triangle MIJ est isocèle en M .
- (c) Puisque $\vec{IM}(1 - t - 1, 1 - t - \frac{1}{2}, t)$ dans ce r.o.n., on a $IM^2 = (-t)^2 + (\frac{1}{2} - t)^2 + t^2 = 3t^2 - t + \frac{1}{4}$.
- (a) $\alpha \in [0; \pi]$ maximal $\iff \frac{\alpha}{2} \in [0; \frac{\pi}{2}]$ maximal $\iff \sin(\frac{\alpha}{2})$ maximal car la fonction sinus est strictement croissante sur $[0; \frac{\pi}{2}]$.
- (b) Le triangle MIJ étant isocèle en M , on a $\sin(\frac{\alpha}{2}) = \frac{IJ/2}{IM}$ maximal ssi $IM = \frac{IJ/2}{\sin(\alpha/2)}$ minimal, puisque IJ est fixe.
- (c) On a $f'(t) = 6t - 1$ qui s'annule en $t = \frac{1}{6}$: minimum de f , polynôme du second degré en " U ".
- (d) Il existe donc un unique point de $[EC]$ tel que IM^2 donc IM soit minimal et donc tel que $\sin(\frac{\alpha}{2})$ et α soit maximal. C'est le point de paramètre $t = \frac{1}{6}$: $M_0(\frac{5}{6}, \frac{5}{6}, \frac{1}{6})$.

Chapitre VI

DÉRIVATION DES FONCTIONS NUMÉRIQUES

Sommaire

1	Rappels	135
2	Nouvelles formules de dérivation	137
2.1	Dérivée de u^n	137
2.2	Dérivée de $\sqrt{u}$	138
2.3	Dérivée de e^u	138
3	Dérivée et composition	139
	Exercices	141
	Corrigé des exercices	145

Si la dérivabilité implique la continuité, la réciproque est fausse. Pourtant, la notion de dérivabilité est antérieure, du moins du point de vue formel, à celle de la continuité. En effet, dès le XVII^e s., Pascal étudie les *tangentes à une courbe* puis Newton et Leibniz introduisent les *infinitement petits* et créent le calcul différentiel. Au XVIII^e s., d'Alembert introduit la définition plus rigoureuse de limite du taux d'accroissement et enfin Lagrange[§] utilise le terme de *dérivée* et la notation f' .

1 Rappels

Les notions et résultats suivants ont été vus en classe de première. Nous ne les démontrons pas.

§. Illustre mathématicien dont le nom est inscrit sur la non moins illustre tour Eiffel.

Définition 1 Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit $a \in I$. On dit que f est dérivable en a lorsque la limite du taux d'accroissement de f en a existe et est finie.

Cette limite est alors appelée le nombre dérivé de f en a .

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \quad \text{lorsqu'elle est réelle.}$$

Lorsque f est dérivable en tout réel de I , on dit que f est dérivable sur I .

Propriété 1 Si la fonction f est dérivable en a alors sa courbe représentative dans un repère admet une tangente au point $(a, f(a))$ d'équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.

Remarque : Pour mémoriser l'expression de l'équation de la tangente, certains se souviendront du fameux *yfaaxafa*, où le prime vient en premier.

Théorème 1 Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I . f est croissante (resp. décroissante) ssi $\forall x \in I, f'(x) \geq 0$ (resp. $f'(x) \leq 0$).

Remarque : Attention, on perd l'équivalence dans le cas de la stricte monotonie (pensez donc à $x \mapsto x^3$).

Même si la dérivabilité implique la continuité, il ne faut confondre ces deux notions. Graphiquement, une fonction est continue en a si son graphe ne présente pas de saut en son point d'abscisse a . Une fonction est dérivable en a si son graphe admet une tangente non verticale en son point d'abscisse a .

Tout comme pour les limites, il est rare d'utiliser la définition de la dérivabilité pour calculer une fonction dérivée. Les résultats suivants nous permettent de les obtenir plus aisément.

Soient λ et $\mu \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, u et v deux fonctions dérivables.

Fonction	Dérivée	Commentaires
$\lambda x + \mu$	λ	
x^n	$n x^{n-1}$	
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$x \neq 0$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$x \neq 0$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$x > 0$
$\sin(x)$	$\cos(x)$	
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	
$\exp(x)$	$\exp(x)$	

Fonction	Dérivée	Commentaires
$u + v$	$u' + v'$	
$u.v$	$u'.v + u.v'$	
$\lambda.u$	$\lambda.u'$	
$\frac{1}{v}$	$-\frac{v'}{v^2}$	si $v(x) \neq 0$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'.v - u.v'}{v^2}$	si $v(x) \neq 0$
$x \mapsto u(\lambda x + \mu)$	$x \mapsto \lambda.u'(\lambda x + \mu)$	lorsque défini

Les paragraphes suivants compléteront ces tableaux.

2 Nouvelles formules de dérivation

2.1 Dérivée de u^n

Théorème 2 Soit n un entier **relatif** et soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I (ne s'annulant pas si n est négatif). La fonction $x \mapsto (u(x))^n$ est dérivable sur I et de fonction dérivée $x \mapsto n u'(x) (u(x))^{n-1}$.

$$(u^n)' = n u' u^{n-1}$$

Démonstration : Elle s'effectue par récurrence dans « les deux sens ». En effet, la formule est vraie pour $n \in \mathbb{Z}$ et pas uniquement naturel. Le principe est le même mais il faut vérifier l'hérédité et l'ascendance.

- On a $(u^0)' = 1' = 0 = 0 \times u' \times u^{0-1}$ et la formule est vraie au rang 0.

Supposons que $(u^n)' = n u' u^{n-1}$ pour un entier n donné.

- On a $u^{n+1} = u \times u^n$ donc $(u^{n+1})' = u' u^n + u(u^n)'$
 $(u^{n+1})' = u' u^n + u n u' u^{n-1} = u' u^n + n u' u^n = (n+1) u' u^n$
et la formule est vraie au rang $n+1$.
- On a $n u' u^{n-1} = (u^n)' = (u \times u^{n-1})' = u' u^{n-1} + u(u^{n-1})'$
donc $u(u^{n-1})' = n u' u^{n-1} - u' u^{n-1} = (n-1) u' u^{n-1}$ et, en divisant par u (non nulle), la formule est vraie au rang $n-1$: $(u^{n-1})' = (n-1) u' u^{n-2}$.
- La formule est donc vraie pour tout $n \geq 0$ et pour tout $n \leq 0$. $\square$

Exemples : • Soit $f(x) = (5x^2 - 3x + 2)^5$ définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Posons $u = 5x^2 - 3x + 2$. On a $u' = 10x - 3$. Puisque $f = u^5$, $f' = 5u' u^4$ et, pour tout réel x , $f'(x) = 5(10x - 3)(5x^2 - 3x + 2)^4$ (qui est du signe de $10x - 3$).

• Soit $g(x) = \frac{1}{(4x^2 - 2x + 1)^3}$ définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ ($\Delta = -12$).
 Posons $v = 4x^2 - 2x + 1$. On a $v' = 8x - 2$. Puisque $g = v^{-3}$,
 $g' = -3v'v^{-4}$ et, pour tout réel x , $g'(x) = -3 \frac{8x - 2}{(4x^2 - 2x + 1)^4}$ (qui est du
 signe de $2 - 8x$).

2.2 Dérivée de $\sqrt{u}$

Théorème 3

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I telle que $u(x) > 0$.

La fonction $x \mapsto \sqrt{u(x)}$ est dérivable sur I , de fonction dérivée $x \mapsto \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$.

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

Démonstration : Elle utilise le principe de la quantité conjuguée.

Soit a et $x \in I$ distincts. Posons $f = (\sqrt{\cdot}) \circ u$ (cf §3). On a

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \frac{\sqrt{u(x)} - \sqrt{u(a)}}{x - a} = \frac{\sqrt{u(x)} - \sqrt{u(a)}}{x - a} \times \frac{\sqrt{u(x)} + \sqrt{u(a)}}{\sqrt{u(x)} + \sqrt{u(a)}} \\ &= \frac{u(x) - u(a)}{x - a} \times \frac{1}{\sqrt{u(x)} + \sqrt{u(a)}} \xrightarrow{x \rightarrow a} u'(a) \times \frac{1}{\sqrt{u(a)} + \sqrt{u(a)}} = \frac{u'(a)}{2\sqrt{u(a)}} \quad \square \end{aligned}$$

Exemple : Soit $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$. $x^2 + x + 1$ étant strictement positif sur $\mathbb{R}$ ($\Delta = -3$), f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Posons $u = x^2 + x + 1$. On a $u' = 2x + 1$. Puisque $f = \sqrt{u}$, $f' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ et, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x + 1}}$ (qui est du signe de $2x + 1$).

2.3 Dérivée de e^u

Théorème 4

Soit u une fonction définie et dérivable sur un intervalle I .

La fonction $x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I , de fonction dérivée $x \mapsto u'(x).e^{u(x)}$.

$$(e^u)' = u'.e^u$$

Démonstration : Soit a et $x \in I$ distincts. Posons $f = \exp \circ u$ (cf §3).

Nous ne démontrerons ce théorème que dans le cas où $u(x) \neq u(a)$ au voisinage de a .

En remarquant que $u(x) = X \xrightarrow{x \rightarrow a} u(a) = A$ car u est continue, on a

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} &= \frac{\exp(u(x)) - \exp(u(a))}{x - a} = \frac{\exp(u(x)) - \exp(u(a))}{u(x) - u(a)} \cdot \frac{u(x) - u(a)}{x - a} \\ &= \frac{\exp(X) - \exp(A)}{X - A} \cdot \frac{u(x) - u(a)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a} \exp'(A).u'(a) = u'(a). \exp(u(a)). \quad \square \end{aligned}$$

Exemple : Soit $f(x) = e^{x^2 + x + 1}$. f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition. Posons $u = x^2 + x + 1$. On a $u' = 2x + 1$. Puisque $f = \exp(u)$, $f' = u'.\exp(u)$ et, $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (2x + 1)e^{x^2 + x + 1}$ (qui est du signe de $2x + 1$).

3 Dérivée et composition

Observons $(v(\lambda x + \mu))' = \lambda \cdot v'(\lambda x + \mu)$ et $(\lambda x + \mu)' = \lambda$,
 $(u^n)' = n u' u^{n-1}$ et $(x^n)' = n x^{n-1}$, $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ et $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$,
 et $(e^u)' = u' e^u$ et $(e^x)' = e^x$. Il semble que l'on multiplie à chaque fois
 par la dérivée de « l'intérieur ».

Ceci se généralise et l'on obtient le résultat de dérivation suivant dont les deux
 formules précédentes sont des cas particuliers.

Rappelons en premier lieu que la composée de deux fonctions donne le résultat de
 l'enchaînement des deux processus.

Définition 2 Soit u une fonction définie sur un ensemble E à valeur dans un
 ensemble F .

Si v est une fonction définie sur l'ensemble F , alors on peut définir la fonction com-
 posée $v \circ u$ qui à tout $x \in E$ associe $(v \circ u)(x) = v(u(x))$.

$$v \circ u : x \in E \mapsto u(x) \in F \mapsto (v \circ u)(x) = v(u(x)).$$

Attention, $v \circ u$ et $u \circ v$ sont généralement deux fonctions différentes.

Exemples : ◦ Les fonctions $u(x) = x^2 - 5$ et $v(x) = \cos(x)$ sont
 définies sur $\mathbb{R}$ et l'on a $(v \circ u)(x) = v(u(x)) = v(x^2 - 5) = \cos(x^2 - 5)$,
 $(u \circ v)(x) = u(v(x)) = u(\cos(x)) = \cos^2(x) - 5$.

◦ Si $f(x) = x^4$ sur $\mathbb{R}$ et $g(x) = \sqrt{x}$ sur $\mathbb{R}^+$. On a
 $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = (\sqrt{x})^4 = x^2$ sur $\mathbb{R}_+$, $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \sqrt{x^4} = x^2$ sur
 $\mathbb{R}$ et $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = (x^4)^4 = x^{16}$ sur $\mathbb{R}$.

◦ Soit $u_0 \in \mathbb{R}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ une suite récurrente bien
 définie. On a $u_1 = f(u_0)$, $u_2 = f(u_1) = f(f(u_0)) = (f \circ f)(u_0)$,
 $u_3 = f(u_2) = f((f \circ f)(u_0)) = (f \circ f \circ f)(u_0)$ et par récurrence,
 $u_n = (f \circ \dots \circ f)(u_0) = f^{\circ n}(u_0)$.

Nous savons déjà que la composée de deux fonctions continues est continue (cf.
 page 95). En voici la version dérivable, avec en prime une bien belle formule à
 connaître.

Théorème 5 Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I et à valeurs dans
 un intervalle J et soit v une fonction dérivable sur J .

La fonction composée $v \circ u : x \mapsto (v \circ u)(x)$ est alors dérivable sur I et de
 fonction dérivée $(v \circ u)' : x \mapsto u'(x) \times v'(u(x))$.

$$(v \circ u)' = u' \times (v' \circ u)$$

Démonstration : Soit a et $x \in I$ tels que $x \neq a$.

Nous ne démontrerons ce théorème que dans le cas où $u(x) \neq u(a)$ au voisinage de a .
 On pose $X = u(x)$ et $A = u(a)$ et l'on a $X \xrightarrow{x \rightarrow a} A$ car u est continue
 en a .

$$\text{Ainsi, } \frac{(v \circ u)(x) - (v \circ u)(a)}{x - a} = \frac{v(u(x)) - v(u(a))}{u(x) - u(a)} \cdot \frac{u(x) - u(a)}{x - a} = \frac{v(X) - v(A)}{X - A} \frac{u(x) - u(a)}{x - a}$$

$$\frac{(v \circ u)(x) - (v \circ u)(a)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a} v'(A) \cdot u'(a) = v'(u(x)) u'(a). \quad \square$$

Exemple : Soit $f(x) = \cos(x^2 - 5)$.

Par composition de fonction, f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Posons $u = x^2 - 5$. On a $u' = 2x$. Puisque $f = \cos \circ u$,
 $f' = u' \times (\cos)' \circ u = -u' \sin u$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = -2x \sin(x^2 - 5)$.

Exercices

DÉRIVATION DES FONCTIONS NUMÉRIQUES

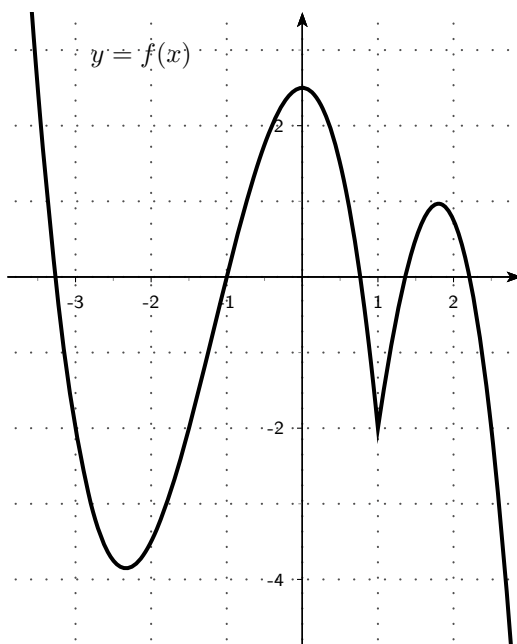
Exercice 1 Soit f une fonction dérivable en un réel a .

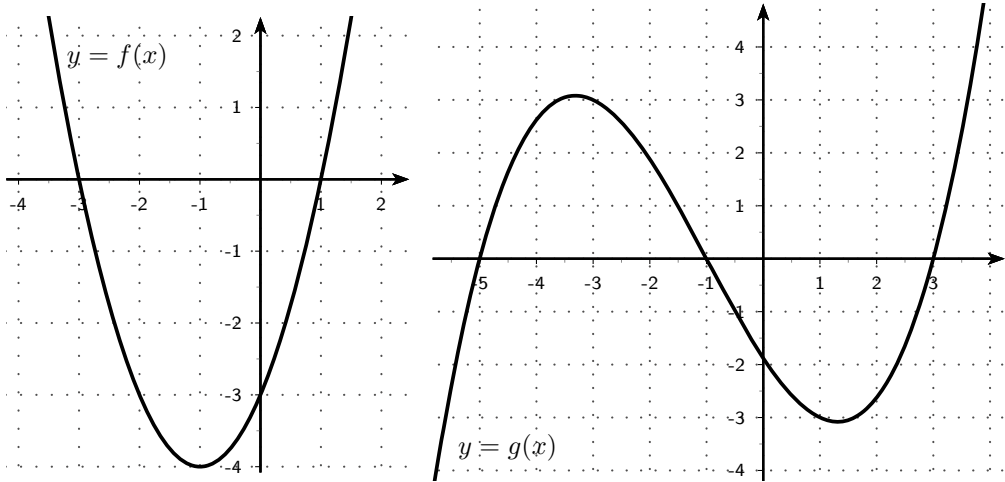
Déterminer $\lim_{x \rightarrow a} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a}$.

Exercice 2 Dans chacun des trois cas suivants, préciser si la proposition $P \implies Q$ est vraie, énoncer la proposition réciproque, puis préciser si la proposition réciproque est vraie. Justifier les réponses.

- La fonction f est définie sur l'intervalle $]a; b[$.
 P : La fonction f est continue et strictement monotone sur l'intervalle $]a; b[$.
 Q : Pour tout k , l'équation $f(x) = k$ admet une solution unique dans $]a; b[$.
- La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[a; b]$.
 P : Le réel x_0 de $[a; b]$ est tel que $f'(x_0) = 0$.
 Q : f admet un extremum local en x_0 .
- P : Les fonctions u et v sont dérivables en a .
 Q : La fonction uv est dérivable en a .

Exercice 3 Déterminer graphiquement le signe de $f(n)$ et $f'(n)$ pour $n \in \llbracket -3; 2 \rrbracket$.



Exercice 4

1. Déterminer graphiquement le signe de $f(k)$, $f'(k)$, $g(k)$ et $g'(k)$ pour $k \in \llbracket -6; 6 \rrbracket$ en prolongeant les courbes de manière « naturelle » au besoin.
2. Tracer des graphes des fonctions dérivées f' et g' compatibles avec les représentations graphiques de fonctions dérivables f et g ci-dessus.
3. Tracer des graphes de fonctions F et G telles que $F' = f$ et $G' = g$.
On dit que les fonctions F et G sont des *primitives* des fonctions f et g respectivement (cf. chap. XIV).

Exercice 5 Esquisser le graphe $\mathcal{C}_u$ d'une fonction u définie sur $[-10; 7]$ telle que u soit non continue en -10 , en -7 et en -3 , continue mais non dérivable en 2 et en 5 , continue et dérivable ailleurs (varier les possibilités).

Exercice 6 Une fonction dérivable de dérivée identiquement nulle est-elle nécessairement constante ?

Exercice 7 Donner l'ensemble de dérivabilité puis calculer les fonctions dérivées des fonctions suivantes.

$$f : x \mapsto \sqrt{3x-7}$$

$$g : x \mapsto \sqrt{2x^2-3x-2}$$

$$h : x \mapsto (5x^4-3x+2)^6$$

$$r : x \mapsto (-8x^3+7x^2-2)^5$$

$$s : x \mapsto \left(\frac{5}{2-6x}\right)^3$$

$$t : x \mapsto 7x \cos(8-3x)$$

Exercice 8 Écrire les fonctions suivantes sous forme de composées de fonctions de référence.

$$\alpha(x) = 7 - 4x^3$$

$$\beta(x) = \sqrt{5x-10}$$

$$\gamma(x) = e^{3x^2+5}$$

$$\delta(x) = \frac{1}{(4x+3)^2}$$

$$\varepsilon(x) = \cos\left(\frac{1}{5x-1}\right)$$

$$\zeta(x) = \sqrt{(1-7x)^3}$$

$$\eta(x) = 4(7x^2+5)^3+2$$

$$\theta(x) = \frac{x-3}{x+5}$$

Exercice 9 Dériver formellement les fonctions suivantes.

$$1. f \circ g \quad \left| \quad 2. f \circ h \circ g \quad \left| \quad 3. f \times g \circ h \quad \left| \quad 4. h \circ f \times g \circ f \quad \left| \quad 5. \frac{f \circ h}{h \circ g} \right. \right.$$

Exercice 10 On définit les fonctions suivantes : $a(x) = -2x + 5$, $b(x) = x^3$, $c(x) = \sqrt{x}$, $d(x) = \cos(x)$, $e(x) = \exp(x)$, $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = |x|$. Pour chacune des fonctions composées suivantes, déterminer l'ensemble de définition et l'expression en fonction de x puis l'ensemble de dérivabilité et les dériver.

$$\begin{array}{ccccc} 1. & a \circ b & \left| \quad 4. & e \circ d & \left| \quad 7. & g \circ c & \left| \quad 10. & a \circ f & \left| \quad 13. & a \circ b \circ d \right. \right. \\ 2. & b \circ a & \left| \quad 5. & g \circ a & \left| \quad 8. & c \circ g & \left| \quad 11. & a \circ a & \left| \quad 14. & f \circ e \circ b \right. \right. \\ 3. & c \circ a & \left| \quad 6. & g \circ b & \left| \quad 9. & f \circ a & \left| \quad 12. & f \circ f & \left| \quad 15. & a \times b \circ e \right. \right. \end{array}$$

Exercice 11 VouF ?

Rappeler la définition d'une fonction paire et celle d'une fonction impaire puis indiquer, pour chaque proposition où f et g sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$, si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

- (a) Si f est paire, alors $g \circ f$ est paire.
- (b) Si f est impaire, alors $g \circ f$ est impaire.
- (c) Si f est impaire, alors $f \circ f$ est paire.
- (d) Si g est paire, alors $g \circ f$ est paire.
- (e) Si f est impaire et g est paire, alors $g \circ f$ est paire.
- (f) Si f et g sont impaires, alors $g \circ f$ est impaire.

Exercice 12 VouF ?

Rappeler la définition d'une fonction croissante et celle d'une fonction décroissante puis indiquer, pour chaque proposition où f et g sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$, si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

- (a) Si f est décroissante et si g est décroissante, alors $f \circ g$ est décroissante.
- (b) Si f est décroissante et si g est croissante, alors $f \circ g$ est décroissante.
- (c) Si f est décroissante, alors $f \circ f$ est croissante.

Exercice 13 Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

- 1. Que dire de la fonction dérivée f' si f est paire ?
- 2. Que dire de la fonction dérivée f' si f est impaire ?

Exercice 14

Partie A : On considère la fonction f définie sur $[0; 4]$ par $f(x) = \sqrt{x(4-x)}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère.

- 1. Démontrer que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]0; 4[$ et donner l'expression de sa fonction dérivée f' sur cet intervalle.
- 2. Démontrer que f n'est dérivable ni en 0 ni en 4.
- 3. Étudier les variations de la fonction f .

4. Donner l'équation de la tangente $\mathcal{T}_f$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2.

5. Tracer $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{T}_f$.

Partie B : On considère la fonction g définie sur $]0; 4[$ par $g(x) = x\sqrt{x(4-x)}$.

On note $\mathcal{C}_g$ sa représentation graphique dans un repère.

1. Démontrer que la fonction g est dérivable sur l'intervalle $]0; 4[$ et donner l'expression de sa fonction dérivée g' sur cet intervalle.

2. La fonction g est-elle dérivable en 0 ? et en 4 ?

3. Étudier les variations de la fonction g .

4. Démontrer que l'équation $g(x) = 1$ admet une unique solution dans l'intervalle $[3; 4]$. En donner une valeur approchée au centième.

5. Donner l'équation de la tangente $\mathcal{T}_g$ à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse 2.

6. Tracer $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{T}_g$.

Partie C : On considère la fonction k définie sur $]0; 4]$ par $k(x) = \frac{\sqrt{x(4-x)}}{x}$.

On note $\mathcal{C}_k$ sa représentation graphique dans un repère.

1. Étudier la limite de la fonction k en 0.

2. Démontrer que la fonction k est dérivable sur l'intervalle $]0; 4[$ et donner l'expression de sa fonction dérivée k' sur cet intervalle.

3. La fonction k est-elle dérivable en 4 ?

4. Étudier les variations de la fonction k .

5. Donner l'équation de la tangente $\mathcal{T}_k$ à la courbe $\mathcal{C}_k$ au point d'abscisse 2.

Tracer ensuite $\mathcal{C}_k$ et $\mathcal{T}_k$.



Exercice 15

Among all triangles ABC , right-angled at A and such that $BC = 8$, is there one with the largest perimeter ?

Exercice 16 Équations différentielles

Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue, généralement notée y , est une fonction et qui se présente sous la forme d'une relation entre cette fonction et sa (ou ses) dérivée(s) (cf. chapitre XI p. 257).

Les fonctions précisées sont-elles solutions des équations différentielles suivantes ? Si non, les corriger.

$$(E_1): y' + 5y = 4, \quad f(x) = e^{-5x} + \frac{4}{5}.$$

$$(E_2): y' + 3y = -2e^x, \quad f(x) = -4e^{-3x} + \frac{1}{2}e^x.$$

$$(E_3): xy' + y = 0, \quad f(x) = \frac{7}{x}.$$

$$(E_4): y' + 2xy = 0, \quad f(x) = e^{x^2}.$$

$$(E_5): xy' - y = x^2 - 1, \quad f(x) = x^2 - 3x - 1.$$

$$(E_6): (x+1)y' - xy = -1, \quad f(x) = \frac{e^x + 1}{x+1}.$$

Dérivez jusqu'à la page 447 pour réaliser le devoir n° 8.

DÉRIVATION DES FONCTIONS NUMÉRIQUES

Exercice 1 Si f est dérivable en a , alors $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \in \mathbb{R}$ et

$$\begin{aligned} \frac{xf(a) - af(x)}{x - a} &= \frac{xf(a) - af(a) + af(a) - af(x)}{x - a} = \frac{(x - a)f(a)}{x - a} + \frac{a(f(a) - f(x))}{x - a} \\ &= f(a) - a \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \xrightarrow{x \rightarrow a} f(a) - af'(a). \end{aligned}$$

Exercice 2

1. • $P \implies Q$ est fausse. En effet, tout réel k n'est pas forcément « atteint ». Par exemple, $f(x) = x$ est continue et strictement monotone sur $]0; 1[$ et 2 n'admet pas d'antécédent.
• $Q \implies P$ est fausse. Par exemple, « on découpe et échange des morceaux » à la fonction $\tan x$.
2. • $P \implies Q$ est fausse. Par exemple, $f(x) = x^3$ sur $[-1; 1]$ et $x_0 = 0$.
• $Q \implies P$ est fausse. Par exemple, $f(x) = x$ sur $[0; 1]$ et $x_0 = 0$ ou 1. C'est vrai si x_0 est intérieur à l'intervalle et si l'on admet que l'extremum puisse être local.
3. • $P \implies Q$ est vraie. On connaît même la formule de dérivation.
• $Q \implies P$ est fausse. Par exemple, $u(x) = v(x) = |x|$ ne sont pas dérivables en 0 alors que $|x|^2 = x^2$ l'est.

Exercice 3 Graphiquement, on a $f(-3) > 0$, $f'(3) > 0$, $f(-2) < 0$, $f'(-2) > 0$, $f(-1) = 0$, $f'(1) > 0$, $f(0) > 0$, $f'(0) = 0$, $f(1) < 0$, $f'(1)$ n'existe pas, $f(2) > 0$ et $f'(2) < 0$.

Exercice 4

1. En observant l'ordonnée des points considérés, on obtient graphiquement
 $f(-6) > 0$, $f(-5) > 0$, $f(-4) > 0$, $f(-3) = 0$, $f(-2) < 0$,
 $f(-1) < 0$, $f(0) < 0$, $f(1) = 0$, $f(2) > 0$, $f(3) > 0$, $f(4) > 0$,
 $f(5) > 0$, $f(6) > 0$ et $g(-6) < 0$, $g(-5) = 0$, $g(-4) > 0$,
 $g(-3) > 0$, $g(-2) > 0$, $g(-1) = 0$, $g(0) < 0$, $g(1) < 0$, $g(2) < 0$,
 $g(3) = 0$, $g(4) > 0$, $g(5) > 0$, $g(6) > 0$.

En observant les coefficients directeurs des tangentes ou bien les variations des fonctions au voisinage des points considérés, on obtient graphiquement $f'(-6) < 0$, $f'(-5) < 0$, $f'(-4) < 0$, $f'(-3) < 0$, $f'(-2) < 0$, $f'(-1) = 0$, $f'(0) > 0$, $f'(1) > 0$, $f'(2) > 0$, $f'(3) > 0$, $f'(4) > 0$, $f'(5) > 0$, $f'(6) > 0$ et $g'(-6) > 0$, $g'(-5) > 0$, $g'(-4) > 0$, $g'(-3) < 0$,

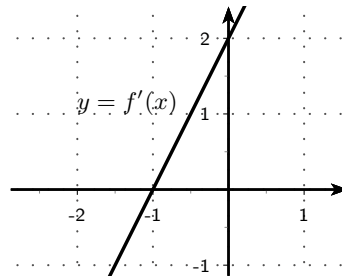
$$g'(-2) < 0, \quad g'(-1) < 0, \quad g'(0) < 0, \quad g'(1) < 0, \quad g'(2) > 0, \quad g'(3) > 0, \\ g'(4) > 0, \quad g'(5) > 0, \quad g'(6) > 0.$$

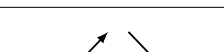
2. Les tableaux de variations des fonctions f et g nous donnent les tableaux de signe des dérivées f' et g' . Il suffit ensuite de tracer des courbes compatibles avec ces derniers.

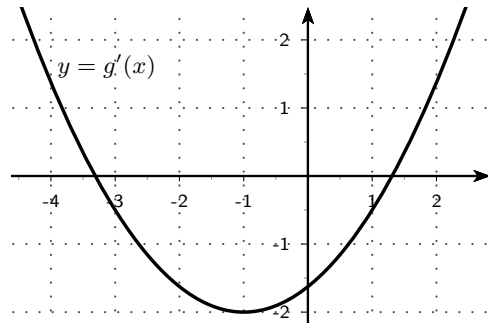
On peut affiner les graphes en supposant que f est un polynôme du second degré donc f' est affine et que g est un polynôme du troisième degré donc g' du second. De plus, on peut tracer la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 0 et déterminer graphiquement son coefficient directeur. On lit alors $f'(0) = 2$.

En traçant la tangente à $\mathcal{C}_g$ en -1 , on détermine graphiquement $g'(-1) = -2$.

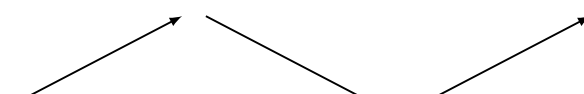
x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f			
$f'(x)$	$-$	0	$+$

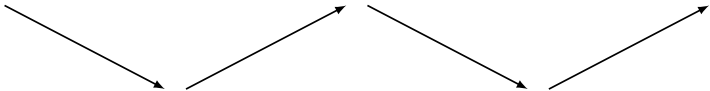


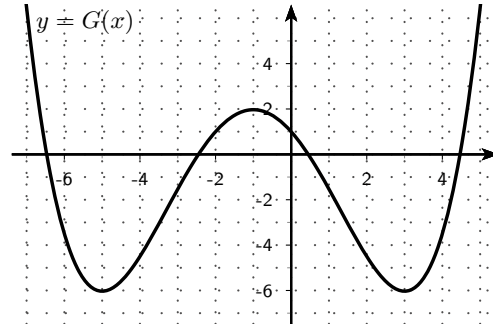
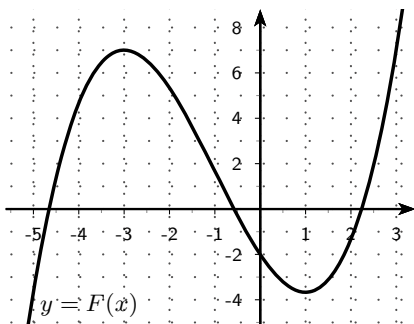
x	$-\infty$	-3.2	1.2	$+\infty$	
g					
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$



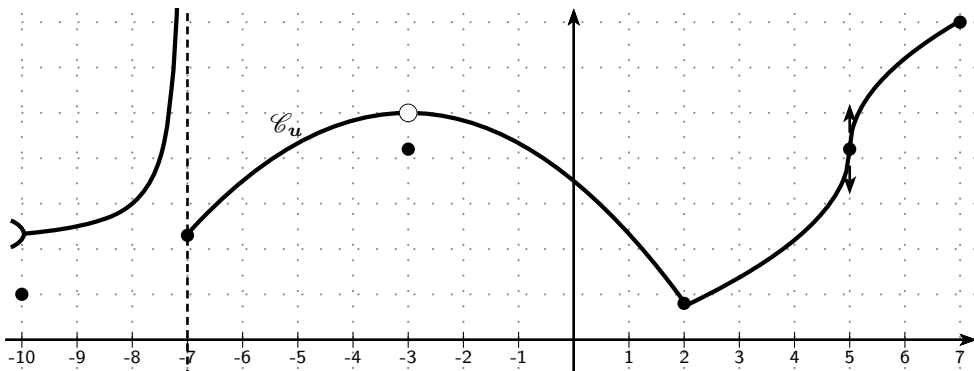
3. Les tableaux de signe des fonctions $f = F'$ et $g = G'$ nous donnent les tableaux de variations des fonctions F et G . Il suffit ensuite de tracer des courbes compatibles avec ces derniers. Avec un peu d'audace, on trace une cubique et une quadrique, graphe de fonctions polynômes du troisième et quatrième degré. En revanche, il nous est impossible de connaître les valeurs des extremums locaux.

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$	
$f(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
F					

x	$-\infty$	-5	-1	3	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$
G					



Exercice 5 Par exemple,



Exercice 6 Non, une fonction dérivable de dérivée identiquement nulle n'est nécessairement constante que si elle est définie sur un intervalle. Par exemple, la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = 1$ si $x > 0$ et $f(x) = -1$ si $x < 0$ est dérivable, de dérivée nulle, mais elle n'est pas constante.

Exercice 7 Les fonctions f et g sont dérivables lorsque leur radicande sont strictement positifs, les fonctions h et r sont des polynômes donc dérivables sur $\mathbb{R}$, la fonction s est rationnelle donc dérivable sur son ensemble de définition et t est dérivable sur $\mathbb{R}$ car composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$f(x) = \sqrt{3x-7}$. On a $3x-7 > 0 \iff x > \frac{7}{3}$ donc $\mathcal{D}'_f =]\frac{7}{3}; +\infty[$.
Posons $u = 3x-7$, $u' = 3$. On a $f = \sqrt{u}$ donc $f' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ et, pour $x \in \mathcal{D}'_f$, $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x-7}}$.

$g(x) = \sqrt{2x^2-3x-2}$. On a $2x^2-3x-2 > 0 \iff (x-2)(2x+1) > 0$
 $\iff x \in \mathcal{D}'_g =]-\infty; -\frac{1}{2}[\cup]2; +\infty[$. Posons $u = 2x^2-3x-2$, $u' = 4x-3$.

On a $g = \sqrt{u}$ donc $g' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ et, pour $x \in \mathcal{D}'_g$, $g'(x) = \frac{4x-3}{2\sqrt{2x^2-3x-2}}$.

$h(x) = (5x^4 - 3x + 2)^6$. Posons $u = 5x^4 - 3x + 2$, $u' = 20x^3 - 3$. Puisque $h = u^6$, $h' = 6u^5 u'$ et, pour $x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = 6(20x^3 - 3)(5x^4 - 3x + 2)^5$.

$r(x) = (-8x^3 + 7x^2 - 2)^5$. Posons $u = -8x^3 + 7x^2 - 2$, $u' = -24x^2 + 14x$ $u'(x) = 2x(7 - 12x)$. Puisque $r = u^5$, $r' = 5u^4 u'$ et, pour $x \in \mathbb{R}$, $r'(x) = 10x(7 - 12x)(-8x^3 + 7x^2 - 2)^4$.

$s(x) = \left(\frac{5}{2-6x}\right)^3$. On a $2 - 6x = 0 \iff x \in \mathcal{D}'_s = \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{3}\}$. Pour $v = 2 - 6x$, $v' = -6$, on a $u = \frac{1}{2-6x}$, $u' = \frac{-v'}{v^2} = \frac{6}{(2-6x)^2}$. Puisque $s = 5^3 u^3$, $s' = 125 \times 3u^2 u'$ et, pour $x \neq \frac{1}{3}$, $s'(x) = 125 \times 3 \frac{6}{(2-6x)^2} \left(\frac{1}{2-6x}\right)^2 = \frac{2250}{(2-6x)^4}$.
Sinon, $s = 5^3 v^{-3}$ donc $s' = 125(-3)v^{-3-1} \dots$

$t(x) = 7x \cos(8 - 3x)$. Pour $w = 8 - 3x$, $w' = -3$ et pour $v = \cos(8 - 3x)$, $v = \cos w$ donc $v' = -w' \sin w = 3 \sin(8 - 3x)$. Pour $u = 7x$, $u' = 7$, on a $t = uv$ donc $t' = u'v + uv'$ et, pour $x \in \mathbb{R}$, $t'(x) = 7 \cos(8 - 3x) + 21x \sin(8 - 3x)$.

Exercice 8

$$\begin{aligned} \alpha \quad (x) = 7 - 4x^3 : \quad x \in \mathbb{R} &\xrightarrow{\cdot^3} x^3 \in \mathbb{R} \xrightarrow{7-4\cdot} 7 - 4x^3 \\ \beta \quad (x) = \sqrt{5x-10} : \quad x \in \left[\frac{1}{2}; +\infty\right[&\xrightarrow{5\cdot-10} 5x-10 \in \mathbb{R}_+ \xrightarrow{\sqrt{\cdot}} \sqrt{5x-10} \\ \gamma \quad (x) = e^{3x^2+5} : \quad x \in \mathbb{R} &\xrightarrow{\cdot^2} x^2 \in \mathbb{R} \xrightarrow{3\cdot+5} 3x^2+5 \in \mathbb{R} \xrightarrow{e^{\cdot}} e^{3x^2+5} \\ \delta : \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{-\frac{3}{4}\} &\xrightarrow{4\cdot+3} 4x+3 \in \mathbb{R}^* \xrightarrow{\cdot^2} (4x+3)^2 \in \mathbb{R}^* \xrightarrow{1/\cdot} \frac{1}{(4x+3)^2} \\ \varepsilon : \quad x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{5}\} &\xrightarrow{5\cdot-1} 5x-1 \in \mathbb{R}^* \xrightarrow{1/\cdot} \frac{1}{5x-1} \in \mathbb{R} \xrightarrow{\cos(\cdot)} \cos\left(\frac{1}{5x-1}\right) \\ \zeta : \quad x \in]-\infty; \frac{1}{7}] &\xrightarrow{1-7\cdot} 1-7x \in \mathbb{R}_+ \xrightarrow{\cdot^3} (1-7x)^3 \in \mathbb{R}_+ \xrightarrow{\sqrt{\cdot}} \sqrt{(1-7x)^3} \\ \eta : \quad x \in \mathbb{R} &\xrightarrow{\cdot^2} x^2 \xrightarrow{7\cdot+5} 7x^2+5 \xrightarrow{\cdot^3} (7x^2+5)^3 \xrightarrow{4\cdot+2} 4(7x^2+5)^3+2 \\ \theta \quad (x) = \frac{x-3}{x+5} = \frac{x+5-8}{x+5} = 1 - \frac{8}{x+5} : \\ x \in \mathbb{R} \setminus \{-5\} &\xrightarrow{\cdot+5} x+5 \in \mathbb{R}^* \xrightarrow{1/\cdot} \frac{1}{x+5} \xrightarrow{1-8\cdot} 1 - \frac{8}{x+5} \end{aligned}$$

Exercice 9 Dérivées formelles

- $(f \circ g)' = g' \times f' \circ g$
- $(f \circ h \circ g)' = [f \circ (h \circ g)]' = (h \circ g)' \times f'(h \circ g) = g' \times h' \circ g \times f' \circ h \circ g$
- $(f \times g \circ h)' = f' \times g \circ h + f \times (g \circ h)' = f' \times g \circ h + f \times h' \times g' \circ h$
- $(h \circ f \times g \circ f)' = (h \circ f)' \times (g \circ f) + (h \circ f) \times (g \circ f)' = f' \times h' \circ f \times g \circ f + h \circ f \times f' \times g' \circ f$
- $\frac{f \circ h}{h \circ g} = \frac{(f \circ h)' \times h \circ g - f \circ h \times (h \circ g)'}{(h \circ g)^2} = \frac{h' \times f' \circ h \times h \circ g - f \circ h \times g' \times h' \circ g}{(h \circ g)^2}$

Exercice 10 Composition et dérivation

$a(x) = 5 - 2x$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $a'(x) = -2$.

$b(x) = x^3$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $b'(x) = 3x^2$.

$c(x) = \sqrt{x}$ est définie sur $\mathbb{R}_+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $c'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

$d(x) = \cos(x)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $d'(x) = -\sin(x)$.

$e(x) = \exp(x)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et $e'(x) = \exp(x)$.

$f(x) = \frac{1}{x}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$.

$g(x) = |x|$ est définie sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $g'(x) = 1$ pour $x > 0$,
 $g'(x) = -1$ pour $x < 0$.

Nous appliquons ici systématiquement la formule de la dérivation de la composée de fonctions mais on pourra vérifier les résultats en dérivant directement l'expression des fonctions composées.

- $a \circ b$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. $(a \circ b)(x) = a(x^3) = -2x^3 + 5$.
 $(a \circ b)'(x) = b'(x).a'(b(x)) = 3x^2(-2) = -6x^2$.
- $b \circ a$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. $(b \circ a)(x) = b(5 - 2x) = (5 - 2x)^3$.
 $(b \circ a)'(x) = a'(x).b'(a(x)) = -2b'(5 - 2x) = -2 \times 3(5 - 2x)^2 = -6(5 - 2x)^2$.
- $c \circ a$ est définie pour $a(x) \geq 0 \iff 5 - 2x \geq 0 \iff x \leq \frac{5}{2}$
et $(c \circ a)(x) = c(5 - 2x) = \sqrt{5 - 2x}$.
 $c \circ a$ est dérivable pour $x > \frac{5}{2}$
et $(c \circ a)'(x) = a'(x).c'(a(x)) = -2c'(5 - 2x) = -2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{5-2x}} = \frac{-1}{\sqrt{5-2x}}$.
- $e \circ d$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. $(e \circ d)(x) = e(\cos(x)) = \exp(\cos(x))$.
 $(e \circ d)'(x) = d'(x).e'(d(x)) = -\sin(x)e'(\cos(x)) = -\sin(x)\exp(\cos(x))$.
- $g \circ a$ est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable pour $a(x) \neq 0 \iff x \neq \frac{5}{2}$.
 $(g \circ a)(x) = g(5 - 2x) = |5 - 2x|$.
Pour $x < \frac{5}{2}$, $a(x) > 0$ et $(g \circ a)'(x) = a'(x).g'(a(x)) = (-2) \times 1 = -2$.
Pour $x > \frac{5}{2}$, $a(x) < 0$ et $(g \circ a)'(x) = a'(x).g'(a(x)) = (-2) \times (-1) = 2$.
- $g \circ b$ est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable pour $b(x) \neq 0 \iff x \neq 0$.
 $(g \circ b)(x) = g(x^3) = |x^3|$.
Pour $x < 0$, $b(x) < 0$ et $(g \circ b)'(x) = b'(x).g'(b(x)) = 3x^2 \times (-1) = -3x^2$.
Pour $x > 0$, $b(x) > 0$ et $(g \circ b)'(x) = b'(x).g'(b(x)) = 3x^2 \times 1 = 3x^2$.
- $g \circ c$ est définie sur $\mathbb{R}_+$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, $(g \circ c)(x) = g(\sqrt{x}) = |\sqrt{x}| = \sqrt{x}$.
 $(g \circ c)'(x) = c'(x).g'(c(x)) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times 1 = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
- $c \circ g$ est définie sur $\mathbb{R}$, dérivable sur $\mathbb{R}^*$, $(c \circ g)(x) = c(|x|) = \sqrt{|x|}$.
Pour $x < 0$, $(c \circ g)'(x) = g'(x).c'(g(x)) = -1 \cdot \frac{1}{2\sqrt{|x|}} = \frac{-1}{2\sqrt{-x}}$.
Pour $x > 0$, $(c \circ g)'(x) = g'(x).c'(g(x)) = 1 \cdot \frac{1}{2\sqrt{|x|}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
- $f \circ a$ est définie et dérivable pour $a(x) \neq 0 \iff x \neq \frac{5}{2}$.
 $(f \circ a)(x) = f(5 - 2x) = \frac{1}{5 - 2x}$.
 $(f \circ a)'(x) = a'(x).f'(a(x)) = (-2) \cdot \frac{-1}{(5 - 2x)^2} = \frac{2}{(5 - 2x)^2}$.
- $a \circ f$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$. $(a \circ f)(x) = a(\frac{1}{x}) = 5 - \frac{2}{x}$.
 $(a \circ f)'(x) = f'(x).a'(f(x)) = \frac{-1}{x^2} \cdot (-2) = \frac{2}{x^2}$.
- $a \circ a$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
 $(a \circ a)(x) = a(a(x)) = a(5 - 2x) = 5 - 2(5 - 2x) = 4x - 5$.
 $(a \circ a)'(x) = a'(x).a'(a(x)) = (-2) \cdot (-2) = 4$.

12. $f \circ f$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

$$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{1/x} = x.$$

$$(f \circ f)'(x) = f'(x) \cdot f'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{-1}{x^2} \cdot \frac{-1}{(1/x)^2} = \frac{x^2}{x^2} = 1.$$

13. $a \circ b \circ d$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$(a \circ b \circ d)(x) = a(b(d(x))) = a(b(\cos(x))) = a(\cos^3(x)) = 5 - 2\cos^3(x).$$

$$\begin{aligned} (a \circ b \circ d)'(x) &= (b \circ d)'(x) \cdot a'((b \circ d)(x)) = d'(x) \cdot b'(d(x)) \cdot (-2) \\ &= -\sin(x) \cdot b'(\cos(x)) \cdot (-2) = 2\sin(x) \cdot 3(\cos(x))^2 \\ &= 6\sin(x)\cos^2(x). \end{aligned}$$

14. $f \circ e \circ b$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$(f \circ e \circ b)(x) = f(e(b(x))) = f(e(x^3)) = f(\exp(x^3)) = \frac{1}{\exp(x^3)}.$$

$$\begin{aligned} (f \circ e \circ b)'(x) &= (e \circ b)'(x) \cdot f'((e \circ b)(x)) = b'(x) \cdot e'(b(x)) \cdot f'(e(x^3)) \\ &= 3x^2 \cdot e(x^3) \cdot \frac{-1}{(e(x^3))^2} = 3x^2 \cdot \exp(x^3) \cdot \frac{-1}{(\exp(x^3))^2} = \frac{-3x^2}{\exp(x^3)}. \end{aligned}$$

15. $a \times b \circ e$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} (a \times b \circ e)(x) &= a(x) \cdot b(e(x)) = (5 - 2x)b(\exp(x)) = (5 - 2x)(\exp(x))^3 \\ &= (5 - 2x)\exp(3x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a \times b \circ e)'(x) &= (a' \times b \circ e + a \times (b \circ e)')(x) = (a' \cdot b \circ e + a \cdot e' \cdot b' \circ e)(x) \\ &= a'(x) \cdot b(e(x)) + a(x) \cdot e'(x) \cdot b'(e(x)) \\ &= -2 \cdot b(\exp(x)) + (5 - 2x)\exp(x) \cdot b'(\exp(x)) \\ &= -2(\exp(x))^3 + (5 - 2x)\exp(x) \cdot 3(\exp(x))^2 \\ &= \exp(x)^3(-2 + 3(5 - 2x)) = (13 - 6x)\exp(3x). \end{aligned}$$

Exercice 11 Soit f une fonction définie sur un ensemble $\mathcal{D}_f$. On dit que :

- f est paire ssi $\forall x \in \mathcal{D}_f, -x \in \mathcal{D}_f$ et $f(-x) = f(x)$,
- f est impaire ssi $\forall x \in \mathcal{D}_f, -x \in \mathcal{D}_f$ et $f(-x) = -f(x)$.

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et soit $x \in \mathbb{R}$.

(a) Si f est paire, alors $g \circ f$ est paire : Vrai.

$$(g \circ f)(-x) = g(f(-x)) = g(f(x)) = (g \circ f)(x).$$

(b) Si f est impaire, alors $g \circ f$ est impaire : Faux. $f(x) = x$ impaire, $g(x) = x^2$ et $g \circ f(-x) = (-x)^2 = x^2 \neq -x^2 = -g \circ f(x)$.

(c) Si f est impaire, alors $f \circ f$ est paire : Faux, $f \circ f$ impaire.

$$(f \circ f)(-x) = f(f(-x)) = f(-f(x)) = -f(f(x)) = -(f \circ f)(x).$$

(d) Si g est paire, alors $g \circ f$ est paire : Faux. $f(x) = x + 1$, $g(x) = x^2$ paire,

$$(g \circ f)(1) = g(f(1)) = (1 + 1)^2 = 4 \neq 0 = (-1 + 1)^2 = (g \circ f)(-1).$$

(e) Si f est impaire et g est paire, alors $g \circ f$ est paire : Vrai.

$$(g \circ f)(-x) = g(f(-x)) = g(-f(x)) = g(+f(x)) = (g \circ f)(x).$$

(f) Si f et g sont impaires, alors $g \circ f$ est impaire : Vrai.

$$(g \circ f)(-x) = g(f(-x)) = g(-f(x)) = -g(f(x)) = -(g \circ f)(x).$$

Exercice 12 Soit f une fonction définie sur un intervalle I . On dit que :

- f est croissante sur I ssi $\forall a, b \in I, a \leq b \implies f(a) \leq f(b)$
ssi f conserve l'ordre sur I ,
- f est décroissante sur I ssi $\forall a, b \in I, a \leq b \implies f(a) \geq f(b)$
ssi f inverse l'ordre sur I .

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et soit $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) Si f est décroissante et si g est décroissante, alors $f \circ g$ est décroissante : Faux.

$$a \leq b \implies y_a = f(a) \geq f(b) = y_b \\ \implies (g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(y_a) \leq g(y_b) = g(f(b)) = (g \circ f)(b) : g \circ f \text{ est } \nearrow.$$

(b) Si f est décroissante et si g est croissante, alors $f \circ g$ est décroissante : Vrai.

$$a \leq b \implies y_a = f(a) \geq f(b) = y_b \\ \implies (g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(y_a) \geq g(y_b) = g(f(b)) = (g \circ f)(b).$$

(c) Si f est décroissante, alors $f \circ f$ est croissante : Vrai. Cf. (a) pour $g = f$.

Exercice 13 Soit $x \in \mathbb{R}$ et soit g la fonction définie par $g(x) = -x$.

On a $f(-x) = (f \circ g)(x)$

donc $[f(-x)]' = (f \circ g)'(x) = g'(x)(f' \circ g)(x) = -1 \cdot f'(g(x)) = -f'(-x)$.

1. Si f est paire, $f(-x) = f(x)$ d'où $[f(-x)]' = f'(x)$.

Ainsi, $-f'(-x) = f'(x)$ c.-à-d. $f'(-x) = -f'(x)$: f' est impaire.

2. Si f est impaire, $f(-x) = -f(x)$ d'où $[f(-x)]' = -f'(x)$.

Ainsi, $-f'(-x) = -f'(x)$ c.-à-d. $f'(-x) = f'(x)$: f' est paire.

Exercice 14

Partie A : $f(x) = \sqrt{x(4-x)}$ sur $]0; 4[$.

1. La fonction f est dérivable lorsque le radicande $x(4-x)$ est strictement positif c.-à-d. entre ses racines : sur $]0; 4[$. Posons $u = x(4-x)$, $u' = 4-2x$.

Puisque $f = \sqrt{u}$, $f' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ et, pour $x \in]0; 4[$,

$$f'(x) = \frac{4-2x}{2\sqrt{x(4-x)}} = \frac{2-x}{\sqrt{x(4-x)}}.$$

2. Pour $x \in]0; 4[$, on a

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\sqrt{x(4-x)}}{x} = \frac{\sqrt{x^2 \sqrt{4/x-1}}}{\sqrt{x^2}} = \sqrt{\frac{4}{x}-1} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \sqrt{+\infty} = +\infty \notin \mathbb{R}$$

donc f n'est pas dérivable en 0.

Pour $x \in]0; 4[$, on a

$$\frac{f(x)-f(4)}{x-4} = -\frac{\sqrt{x\sqrt{4-x}}}{4-x} = -\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{4-x}} \xrightarrow{x \rightarrow 4^-} -\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{0^+}} = -\infty \notin \mathbb{R}$$

donc f n'est pas dérivable en 4.

3. On a $f(0) = f(4) = 0$ et $f(2) = 2$ et d'après les résultats précédents,

x	0	2	4
$2-x$		+	0
$f'(x)$		+	0
f	0	2	0

4. La tangente $\mathcal{T}_f$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2 a pour équation

$$y = f'(2)(x-2) + f(2) = 0x + 2 \text{ passant par } (2, 2) \text{ et } (0, 2) \text{ par exemple.}$$

Partie B : $g(x) = x\sqrt{x(4-x)}$ sur $]0;4[$.

1. $x \mapsto f(x)$ et $x \mapsto x$ sont dérivables sur $]0;4[$ donc $g(x) = x \times f(x)$ l'est aussi et

$$g'(x) = x'f(x) + xf'(x) = \sqrt{x(4-x)} + x \frac{2-x}{\sqrt{x(4-x)}} = \frac{x(4-x) + x(2-x)}{\sqrt{x(4-x)}} = \frac{2x(3-x)}{\sqrt{x(4-x)}}$$

du signe de $3-x$ sur $]0;4[$.

2. Pour $x \in]0;4[$, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x(4-x)} = \sqrt{0} = 0 \in \mathbb{R}$
donc g est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$.

Pour $x \in]0;4[$, on a

$$\frac{g(x)-g(4)}{x-4} = -\frac{x\sqrt{x(4-x)}}{4-x} = -\frac{x\sqrt{x}}{\sqrt{4-x}} \xrightarrow{x \rightarrow 4^-} -\frac{4\sqrt{4}}{\sqrt{0^+}} = -\infty \notin \mathbb{R}$$

donc g n'est pas dérivable en 4.

3. On a $g(0) = g(4) = 0$ et $g(3) = 3\sqrt{3}$ et d'après les résultats précédents,

x	0	3	4
$3-x$		+	0
$g'(x)$		+	0
g	0	$3\sqrt{3}$	0

4. La fonction g est continue et strictement décroissante sur $[3;4]$. Puisque $1 \in g([3;4]) = [0;3\sqrt{3}]$, le T.V.I. Strict. permet d'affirmer que 1 admet un unique antécédent η dans $[3;4]$. La calculatrice donne $\eta = 3,98$ à 0,01 près, en cherchant la racine de $g(x) - 1$ entre 3 et 4.

5. Puisque $g(2) = 4$ et $g'(2) = 2$, la tangente $\mathcal{T}_g$ à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse 2 admet pour équation $y = g'(2)(x-2) + g(2) = 2x$ passant par les points $(2, 4)$ et $(0, 0)$ par exemple.

Partie C : $k(x) = \frac{\sqrt{x(4-x)}}{x}$ sur $]0;4[$.

1. On a $k(x) = \frac{\sqrt{x(4-x)}}{x} = \sqrt{\frac{4-x}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{4}{0^+}} = \sqrt{+\infty} = +\infty$.

2. $x \mapsto f(x)$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ sont dérivables sur $]0;4[$ donc $k(x) = \frac{f(x)}{x}$ l'est aussi et

$$k'(x) = \frac{xf'(x) - x'f(x)}{x^2} = \frac{x(2-x)/\sqrt{x(4-x)} - \sqrt{x(4-x)}}{x^2} = \frac{x(2-x) - x\sqrt{x(4-x)}}{x^2\sqrt{x(4-x)}} = \frac{-2x}{x^2\sqrt{x(4-x)}},$$

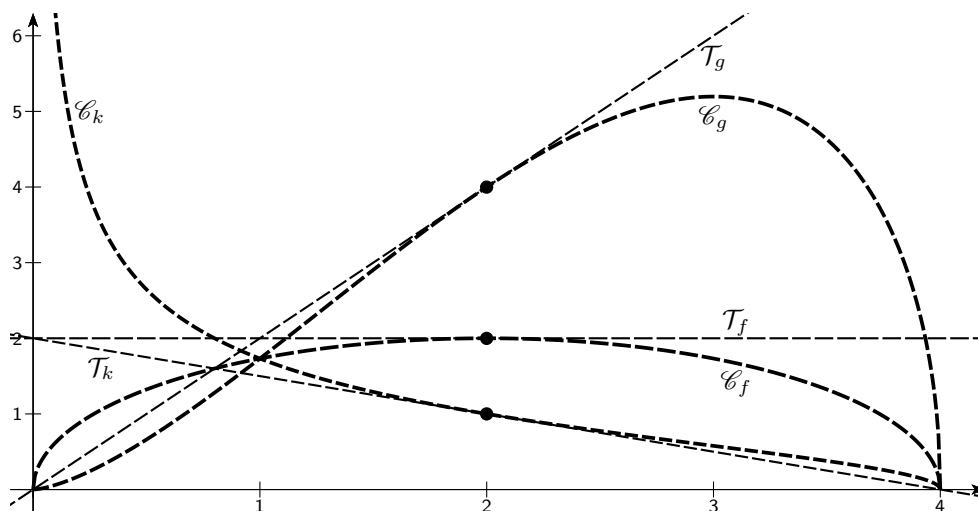
négatif sur $]0;4[$.

3. Pour $x \in]0;4[$, $\frac{k(x)-k(4)}{x-4} = \frac{\frac{\sqrt{x(4-x)}}{x} - \frac{\sqrt{4(4-4)}}{4}}{x-4} = -\frac{1}{\sqrt{x(4-x)}} \xrightarrow{x \rightarrow 4^-} -\frac{1}{0^+} = -\infty$
et k n'est pas dérivable en 4.

4. D'après les résultats précédents, on a le tableau suivant.

x	0		4
$k'(x)$		—	
k		$+\infty$	0

5. Puisque $k(2) = 1$ et $k'(2) = -\frac{1}{2}$, la tangente $\mathcal{T}_k$ à la courbe $\mathcal{C}_k$ au point d'abscisse 2 admet pour équation $y = k'(2)(x - 2) + k(2) = -\frac{1}{2}x + 2$ passant par les points $(2, 1)$ et $(0, 2)$ par exemple.



Exercise 15 Let $x \in [0; 8]$ be the length AC . A famous theorem states that $AB^2 = BC^2 - AC^2 = 64 - x^2$. So the perimeter of the triangle can be expressed as $\mathcal{P}(x) = BC + AC + AB = 8 + x + \sqrt{64 - x^2}$, of derivative $\mathcal{P}'(x) = 1 + \frac{(64 - x^2)'}{2\sqrt{64 - x^2}}$

$$\mathcal{P}'(x) = 1 - \frac{2x}{2\sqrt{64 - x^2}} = \frac{\sqrt{64 - x^2} - x}{\sqrt{64 - x^2}} \cdot \frac{\sqrt{64 - x^2} + x}{\sqrt{64 - x^2} + x} = \frac{64 - x^2 - x^2}{\sqrt{64 - x^2}(\sqrt{64 - x^2} + x)}$$

$$\mathcal{P}'(x) = \frac{2(32 - x^2)}{\sqrt{64 - x^2}(\sqrt{64 - x^2} + x)} \quad \text{which has the same sign as } 32 - x^2.$$

Hence, we have the following table.

x	0	$\sqrt{32}$	8
$x^2 - 32$	+	0	—
$\mathcal{P}'(x)$	+	0	—
$\mathcal{P}$			

and $\mathcal{P}$ admits a maximum value for $AC = \sqrt{32}$ and $AB = \sqrt{64 - 32} = \sqrt{32}$: this right-angled triangle is also isosceles.

Exercice 16 Équations différentielles

(E_1): $y' + 5y = 4$, $f(x) = e^{-5x} + \frac{4}{5}$. On a $f'(x) = -5e^{-5x} + 0$
 et $f'(x) + 5f(x) = -5e^{-5x} + 5(e^{-5x} + \frac{4}{5}) = -5e^{-5x} + 5e^{-5x} + 4 = 4$
 donc f est bien une solution de (E_1).

(E_2): $y' + 3y = -2e^x$, $f(x) = -4e^{-3x} + \frac{1}{2}e^x$.
 On a $f'(x) = -4(-3)e^{-3x} + \frac{1}{2}e^x = 12e^{-3x} + \frac{1}{2}e^x$ et
 $f'(x) + 3f(x) = 12e^{-3x} + \frac{1}{2}e^x + 3(-4e^{-3x} + \frac{1}{2}e^x) = 0e^{-3x} + \frac{4}{2}e^x \neq -2e^x$
 donc f n'est pas une solution de (E_2).
 En revanche, $-4e^{-3x} - \frac{1}{2}e^x$ en est une.

(E_3): $xy' + y = 0$, $f(x) = \frac{7}{x}$. On a $f'(x) = -\frac{7}{x^2}$
 et $xf'(x) + f(x) = -\frac{7x}{x^2} + \frac{7}{x} = \frac{-7+7}{x} = 0$
 donc f est bien une solution de (E_3).

(E_4): $y' + 2xy = 0$, $f(x) = e^{x^2}$. On a $f'(x) = (x^2)'e^{x^2} = 2xe^{x^2}$
 et $f'(x) + 2xf(x) = 2xe^{x^2} + 2xe^{x^2} = 4xe^{x^2} \neq 0$ donc f n'est pas une
 solution de (E_4).
 En revanche, e^{-x^2} en est une.

(E_5): $xy' - y = x^2 - 1$, $f(x) = x^2 - 3x - 1$. On a $f'(x) = 2x - 3$
 et $xf'(x) - f(x) = x(2x - 3) - (x^2 - 3x - 1) = x^2 + 1 \neq x^2 - 1$
 donc f n'est pas une solution de (E_5).
 En revanche, $x^2 - 3x + 1$ en est une.

(E_6): $(x+1)y' - xy = -1$, $f(x) = \frac{e^x+1}{x+1}$.
 On a $f'(x) = \frac{(e^x+1)'(x+1) - (x+1)'(e^x+1)}{(x+1)^2} = \frac{e^x(x+1) - (e^x+1)}{(x+1)^2} = \frac{xe^x-1}{(x+1)^2}$ et
 $(x+1)f'(x) - xf(x) = (x+1)\frac{xe^x-1}{(x+1)^2} - x\frac{e^x+1}{x+1} = \frac{xe^x-1-xe^x-x}{x+1} = -\frac{x+1}{x+1} = -1$
 donc f est bien une solution de (E_6).

Chapitre VII

CONVEXITÉ & DÉRIVATION

Sommaire

1	Dérivée seconde	155
1.1	Fonction dérivée seconde	155
1.2	Dérivées d'ordre supérieur	156
2	Convexité : approche graphique	156
2.1	Fonctions convexes et fonctions concaves	156
2.2	Point d'inflexion	159
3	Convexité et dérivation	160
3.1	Convexité et dérivées	160
3.2	Point d'inflexion et dérivée seconde	162
4	Étude de fonction	163
Exercices		164
	Corrigé des exercices	171

Nous poursuivons ici l'étude des fonctions numériques en les dérivant davantage et en observant les conséquences graphiques : dérivée première, dérivée seconde et concavité, convexité de la courbe représentative.

1 Dérivée seconde

1.1 Fonction dérivée seconde

Nous savons bien que, lorsqu'elle existe, la fonction dérivée d'une fonction est aussi une fonction. Il est donc bien tentant de vouloir aussi la dériver. Ne nous en privons donc pas.

Définition 1 Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et soit f' sa fonction dérivée première.
Si f' est une fonction dérivable sur I , sa dérivée, notée f'' , est appelée la dérivée seconde de f et l'on dit alors que f est une fonction deux fois dérivable sur I .

Remarques : • En tant que dérivée de f' , le signe de la fonction f'' nous permet d'obtenir les variations de la fonction f' . Elle nous permettra aussi d'obtenir des informations sur la fonction f .

• En sciences physiques, lorsque la variable est le temps, il est d'usage de noter la dérivation par un point au-dessus de la grandeur.

Exemples : ◦ Pour $f(x) = ax + b$, $f'(x) = a$ et $f''(x) = 0$.
 ◦ Pour $g(x) = 5e^{-3x}$, $g'(x) = -15e^{-3x}$ et $g''(x) = 45e^{-3x}$.
 ◦ Pour $h(x) = \cos(x)$, $h'(x) = -\sin(x)$ et $h''(x) = -\cos(x) = -h(x)$.
 ◦ Pour $x(t) = \frac{1}{2}a_0t^2 + v_0t + x_0$ (position d'un solide en mouvement uniformément varié), $\dot{x}(t) = a_0t + v_0$ (vitesse du solide en mouvement) et $\ddot{x}(t) = a_0$ (accélération subie par le solide).

1.2 Dérivées d'ordre supérieur

Évidemment, il arrive que la fonction dérivée seconde soit elle aussi dérivable : sa dérivée est alors la dérivée troisième de la fonction, fonction qui peut elle-même être dérivable, etc. On introduit alors la notation suivante car il nous serait bien difficile de compter les multiples *primes*.

Notation Soit $n \in \mathbb{N}$.

Si une fonction f est dérivable n fois, on notera $f^{(n)}$ sa fonction dérivée n -ième.

Exemples : ◦ Pour $f(x) = ax + b$ et $n \geq 2$, $f^{(n)}(x) = 0$.
 ◦ Pour $g(x) = 5e^{-3x}$, $g^{(n)}(x) = 5 \cdot (-3)^n \cdot e^{-3x}$.
 ◦ Pour $h(x) = \cos(x)$, $h^{(3)}(x) = \sin(x)$, $h^{(4)}(x) = \cos(x) = h(x)$
 et $h^{(37)}(x) = (h^{(36)})'(x) = \cos'(x) = -\sin(x)$.
 ◦ Pour $x(t) = \frac{1}{2}a_0t^2 + v_0t + x_0$, les dérivées d'ordre supérieur ou égal à 3 sont nulles.

Remarques : • On a redéfini $f = f^{(0)}$ et $f' = f^{(1)}$ mais ceci sera surtout utile dans les formules.

• Les fonctions usuelles sont plusieurs fois dérivables (sauf parfois en quelques points particuliers) et même k fois dérivables pour tout $k \in \mathbb{N}$. On dit qu'elles sont indéfiniment dérivables.

• Si les physiciens s'arrêtent souvent à la dérivée seconde pour étudier un phénomène, les mathématiciens ont besoin d'aller beaucoup plus loin pour connaître une fonction ; ils les calculent toutes, jusqu'à l'infini.

2 Convexité : approche graphique

2.1 Fonctions convexes et fonctions concaves

Vous savez depuis un certain temps déjà distinguer les fonctions croissantes des décroissantes, les positives des négatives et vous en connaissez l'interprétation graphique. Mais comment décrire la différence entre la courbe représentative des fonc-

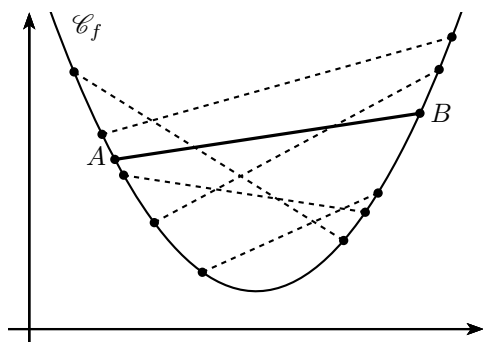
tions carré et racine carrée sur $\mathbb{R}_+$. En effet, elles sont toutes deux croissantes, positives et tendent vers $+\infty$ mais leur courbe sont d'allures différentes. On pourrait dire que l'une « monte » de plus en plus vite, qu'elle « accélère », tandis que l'autre « monte » de moins en moins vite, qu'elle « décélère ». Et si l'on regarde les paraboles, il en existe deux types : celles en $\cup$, « les bras en haut », « optimistes » et celles en $\cap$, « les bras en bas », « pessimistes ». Il y a aussi deux sortes de lentilles optiques, les « creuses », que l'on dit *convexes* et les « bombées », que l'on dit *concaves*. Les définitions suivantes généralisent ces notions.

Afin de ne pas compliquer outre mesure notre propos, nous ne nous attarderons pas ici sur les cas particuliers exotiques, pathologiques, curieux, étranges ou surprenants et tracerons des courbes bien lisses. Nous trouverons toutefois certains cas déroutants dans les exercices de la planche.

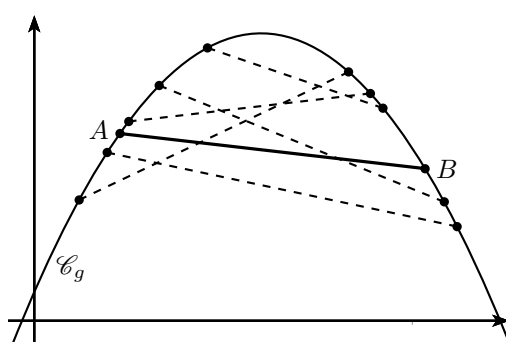
Définition 2 Graphique

Soit f une fonction définie sur un intervalle I et soit $\mathcal{C}_f$ sa représentation dans un repère usuel.

- On dit f est **convexe** si, pour tous points distincts A et B de $\mathcal{C}_f$, la portion de la courbe $\mathcal{C}_f$ située entre les points A et B est en dessous de la corde $[AB]$.
- On dit f est **concave** si, pour tous points distincts A et B de $\mathcal{C}_f$, la portion de la courbe $\mathcal{C}_f$ située entre les points A et B est au-dessus de la corde $[AB]$.



Une fonction f convexe



Une fonction g concave

On se souviendra que dans *concave*, il y a *cave*, telle une grotte que l'on esquisse.

Exemples : Par lecture graphique, on conjecture que la fonction carré est convexe sur $\mathbb{R}$, la fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$, $-3x^4$ est concave sur $\mathbb{R}$, la fonction racine carrée est concave sur $\mathbb{R}_+$ et une fonction affine est convexe et concave sur $\mathbb{R}$. On pourra contourner cette incongruité en introduisant les notions de stricte convexité et de stricte concavité.

Soyons un peu plus précis.

Soient a et b les abscisses respectives des points A et B et soit $c \in [a; b]$. Il existe alors $t \in [0; 1]$ tel que $c = (1 - t)a + tb$: en effet, si t passe de 0 à 1, c passe de a à b .

On appelle maintenant C le point de la courbe $\mathcal{C}_f$ d'abscisse c et M celui de la corde $[AB]$. Dire que la courbe est située en dessous (resp. au-dessus) de la corde se traduit alors par $y_C \leq y_M$ (resp. $y_C \geq y_M$).

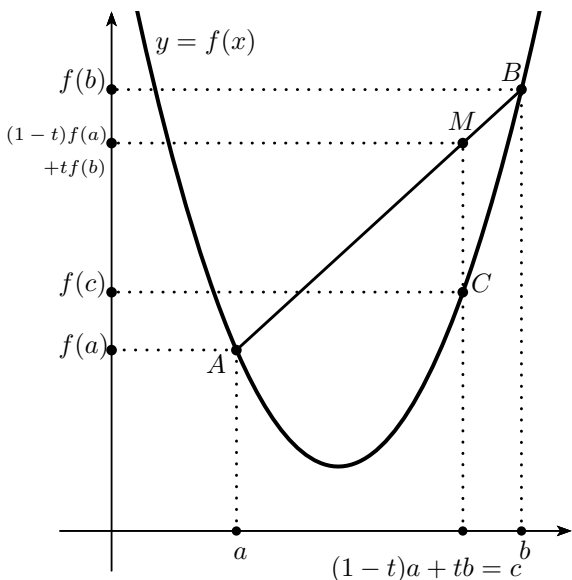
On sait que l'ordonnée de C est l'image de c par f : $y_C = f(c) = f((1-t)a + tb)$. Par ailleurs, si t passe de 0 à 1, y_M passe de $f(a)$ à $f(b)$ et l'on a donc

$$y_M = (1-t)f(a) + tf(b).$$

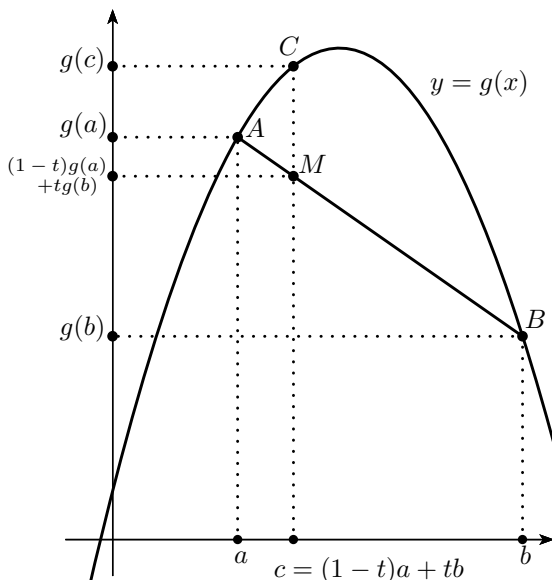
On en déduit alors les propositions suivantes, qui sont en fait les définitions algébriques de la convexité mais elles sont hors programme.

Propriété 1 Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

- f est convexe sur I ssi $\forall (a, b) \in I^2, \forall t \in [0; 1],$
 $f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b).$
- f est concave sur I ssi $\forall (a, b) \in I^2, \forall t \in [0; 1],$
 $f((1-t)a + tb) \geq (1-t)f(a) + tf(b).$



Une fonction f convexe



Une fonction g concave

On peut aisément se convaincre de la véracité du résultat suivant au moyen d'une représentation graphique.

Propriété 2 Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

- f est convexe sur I ssi $-f$ est concave sur I .

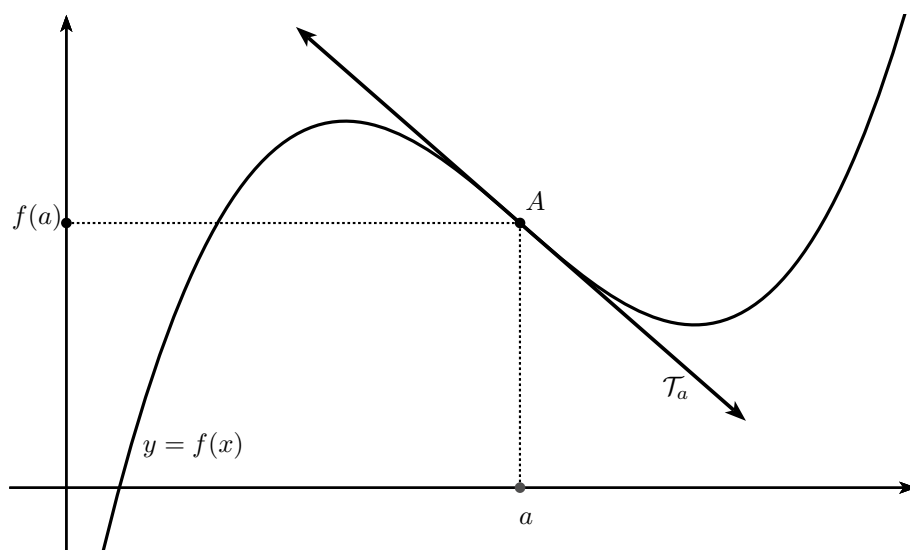
Bien évidemment, une fonction n'est généralement ni convexe, ni concave. Elle peut l'être en revanche sur des sous-intervalles de son ensemble de définition. Étudier la convexité d'une fonction, c'est donc, comme pour l'étude de ses variations, déterminer sur quel(s) intervalle(s) elle est convexe et sur le(s)quel(s) elle est concave. Les points où elle change de concavité sont des points particuliers que nous allons tenter de définir dans le paragraphe suivant.

Exemples : Par lecture graphique, on conjecture que la fonction cube est concave sur $\mathbb{R}_-$, convexe sur $\mathbb{R}_+$, la fonction inverse est concave sur $\mathbb{R}_+^*$, convexe sur $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction sinus est convexe sur $[-\pi; 0]$, concave sur $[0; \pi]$.

2.2 Point d'inflexion

La définition suivante n'est pas la plus rigoureuse ni la plus satisfaisante possible mais elle nous sera suffisante cette année. En effet, il est souvent délicat de traduire mathématiquement un phénomène graphique qui peut comporter de très nombreux cas particuliers. Nous obtiendrons de plus en plus de rigueur sous des hypothèses de régularité (dérivabilité) de plus en plus fortes mais aucune définition optimale n'est abordable en terminale. Nous observons différents cas de figures possibles dans les exercices.

Définition 3 Soit f une fonction définie sur un intervalle, de courbe représentative $\mathcal{C}_f$ et soit $A(a, f(a))$ un point de $\mathcal{C}_f$. Si $\mathcal{C}_f$ admet une tangente en A et si cette tangente traverse la courbe $\mathcal{C}_f$, on dit que A est un **point d'inflexion** de $\mathcal{C}_f$.



La propriété suivante, que l'on admettra, pourrait aussi être une définition d'un point d'inflexion, un peu plus générale que celle que l'on a donnée mais pas totalement satisfaisante non plus.

Propriété 3 Soit f une fonction définie sur un intervalle I , de courbe représentative $\mathcal{C}_f$ et soit $a \in I$.

Si le point $A(a, f(a))$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$ alors la courbe change de convexité en a .

Autrement dit, si f admet un point d'inflexion en a , alors f est convexe sur un intervalle de la forme $[g; a]$ et concave sur un intervalle de la forme $[a; d]$, ou inversement.

Exemples :

- Sur la figure précédente, la fonction f est concave avant a , convexe après a .
- Par lecture graphique, on conjecture que la fonction cube admet un point d'inflexion en 0 et que la fonction sinus en admet en 0, π , -5π , $k\pi$.

En seconde, vous avez appris à chercher les racines d'une fonction afin d'en déterminer le signe. En première, vous avez appris à chercher les extremum locaux d'une fonction afin d'en déterminer les variations. En terminale, vous apprenez à chercher les points d'inflexion afin de déterminer la convexité d'une fonction.

3 Convexité et dérivation

3.1 Convexité et dérivées

Après avoir traité l'exercice 9 en page 166, vous serez convaincu des résultats suivants. Nous ne pouvons toutefois pas tous les démontrer en terminale.

Théorème 1 *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .*

- *f est convexe sur I ssi f' est croissante sur I .*
- *f est concave sur I ssi f' est décroissante sur I .*

Exemples : ◦ La fonction $(x^2)' = 2x$ est croissante sur $\mathbb{R}$ donc la fonction carré est convexe sur $\mathbb{R}$.

◦ La fonction $(x^3)' = 3x^2$ est décroissante sur $\mathbb{R}_-$, croissante sur $\mathbb{R}_+$ donc la fonction cube est concave sur $\mathbb{R}_-$, convexe sur $\mathbb{R}_+$.

◦ La fonction $(\exp(x))' = \exp(x)$ est croissante sur $\mathbb{R}$ donc la fonction exponentielle est convexe sur $\mathbb{R}$.

◦ La fonction $(-5x + 7)' = -5$ est croissante et décroissante sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $-5x + 7$ est convexe et concave sur $\mathbb{R}$.

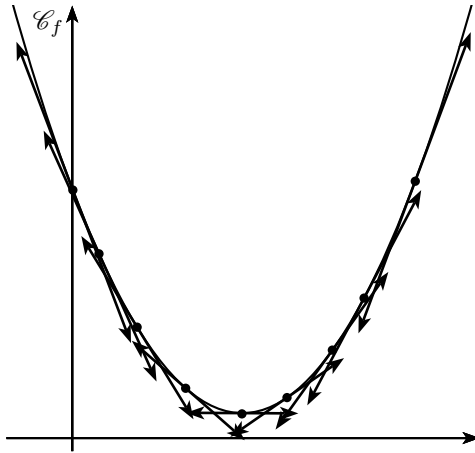
◦ La fonction $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc la fonction racine carrée est concave sur $\mathbb{R}_+^*$. Elle l'est aussi sur $\mathbb{R}_+$ mais il faut pour cela préciser qu'elle est continue.

◦ La fonction $(\sin(x))' = \cos(x)$ est croissante sur $[-\pi; 0]$, décroissante sur $[0; \pi]$ donc la fonction sinus est convexe sur $[-\pi; 0]$, concave sur $[0; \pi]$.

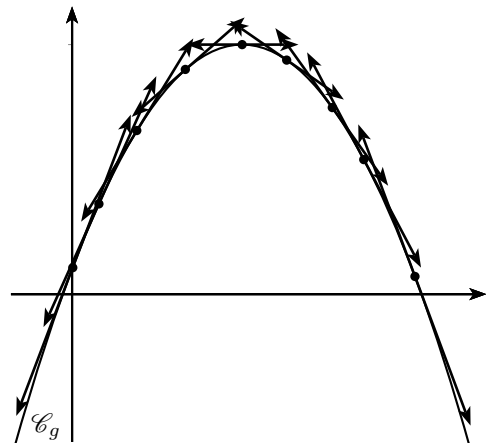
◦ La fonction $(\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$ est décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$, croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc la fonction inverse est concave sur $\mathbb{R}_-^*$, convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

Théorème 2 *Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I de graphe $\mathcal{C}_f$ dans un repère usuel.*

- *f est convexe sur I ssi $\mathcal{C}_f$ est située au-dessus de toutes ses tangentes sur I .*
- *f est concave sur I ssi $\mathcal{C}_f$ est située en dessous de toutes ses tangentes sur I .*



Fonction f convexe, courbe au-dessus de ses tangentes



Fonction g concave, courbe en dessous de ses tangentes

Démonstration : Nous démontrons le sens direct, la réciproque nous étant hors de portée.

Soit donc f une fonction convexe et dérivable sur un intervalle I (le cas concave est parfaitement analogue) et soit $a \in I$. La tangente $\mathcal{T}_a$ à $\mathcal{C}_f$ en a a pour équation $y = t(x) = f'(a)(x - a) + f(a)$. On a $t'(x) = f'(a)$.

Pour montrer que toute la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de la tangente $\mathcal{T}_a$, il suffit de prouver que $f(x) \geq t(x) \forall x \in I$. Autrement dit, la fonction d définie par $d(x) = f(x) - t(x)$ doit être positive sur I .

La fonction d est trivialement dérivable et l'on a, pour $x \in I$, $d'(x) = f'(x) - t'(x) = f'(x) - f'(a)$.

Puisque f est convexe, le théorème 2 précédent nous permet d'affirmer que f' est croissante. Ainsi, pour $x \leq a$, $f'(x) \leq f'(a)$ donc $d'(x) \leq 0$ et pour $x \geq a$, $f'(x) \geq f'(a)$ donc $d'(x) \geq 0$. D'où d est décroissante avant a , croissante après a . La fonction d atteint donc un minimum en a valant $d(a) = f(a) - t(a) = 0$.

La fonction d est donc bien positive sur I et la courbe $\mathcal{C}_f$ est bien située au-dessus de toutes ses tangentes. $\square$

Exemples : $\circ$ La fonction carré est convexe donc sa parabole représentative est située au-dessus de ses tangentes. Par exemple, on a toujours $x^2 \geq 6x - 9$ puisque la parabole est au-dessus de sa tangente en $a = 3$.

$\circ$ Une fonction affine est convexe et concave et ses tangentes sont bien au-dessus et en dessous de sa droite représentative.

$\circ$ Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x \geq x + 1$. En effet, la tangente en 0 à la courbe de la fonction exponentielle est en dessous de celle-ci car $\exp$ est convexe et elle a pour équation $y = \exp'(0)(x - 0) + \exp(0) = x + 1$. Pour rappel, c'est un résultat déjà vu en première.

Théorème 3 Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I .

- f est convexe sur I ssi f'' est positive sur I .
- f est concave sur I ssi f'' est négative sur I .

Démonstration : En effet, f'' est la dérivée de la fonction f' et l'on a

f' croissante (resp. décroissante) sur I ssi pour tout $x \in I$, $f''(x) \geq 0$ (resp. $f''(x) \leq 0$). $\square$

Exemples : ◦ La fonction $(x^2)'' = 2$ est positive sur $\mathbb{R}$ et la fonction carré est bien convexe sur $\mathbb{R}$.

◦ La fonction $(x^3)'' = 6x$ est négative sur $\mathbb{R}_-$, positive sur $\mathbb{R}_+$ et la fonction cube est bien concave sur $\mathbb{R}_-$, convexe sur $\mathbb{R}_+$.

◦ La fonction $(-5x + 7)'' = 0$ est négative et positive sur $\mathbb{R}$ et la fonction $-5x + 7$ est bien concave et convexe sur $\mathbb{R}$.

◦ La fonction $(\exp(x))'' = \exp(x)$ est positive sur $\mathbb{R}$ et la fonction exponentielle est bien convexe sur $\mathbb{R}$.

◦ La fonction $(\sqrt{x})'' = \frac{-1}{4x\sqrt{x}}$ est négative sur $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction racine carrée est bien concave sur $\mathbb{R}_+^*$.

◦ La fonction $(\sin(x))'' = -\sin(x)$ est positive sur $[-\pi; 0]$, négative sur $[0; \pi]$ et la fonction sinus est bien convexe sur $[-\pi; 0]$, concave sur $[0; \pi]$.

◦ La fonction $(\frac{1}{x})'' = \frac{2}{x^3}$ est négative sur $\mathbb{R}_-^*$, positive sur $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction inverse est bien concave sur $\mathbb{R}_-^*$, convexe sur $\mathbb{R}_+^*$.

Remarque : Nous avons vu que si une fonction est dérivable alors sa convexité dépend des variations de sa dérivée mais quid de la réciproque? Il est démontré que si une fonction est convexe (ou concave) sur un intervalle ouvert, alors elle est continue et admet des dérivées à gauche et à droite en tout point de cet intervalle. Nous ne démontrerons pas ce résultat mais il peut nous aider pour lire ou faire des tracés.

3.2 Point d'inflexion et dérivée seconde

On a vu qu'en un point d'inflexion, la fonction change de convexité. Le théorème 3 précédent nous permet d'obtenir le résultat suivant.

Théorème 4 Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I , de courbe représentative $\mathcal{C}_f$, et soit $a \in I$. Le point $A(a, f(a))$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_f$ ssi f'' s'annule et change de signe en a .

Exemples : ◦ La fonction $(x^3)'' = 6x$ s'annule et change de signe en 0 donc $O(0, 0)$ est un point d'inflexion de la courbe d'équation $y = x^3$.

◦ La fonction $(\sin(x))'' = -\sin(x)$ s'annule et change de signe en 0 donc $O(0, 0)$ est un point d'inflexion de la courbe d'équation $y = \sin(x)$.

Remarque : Il ne suffit pas que la dérivée seconde s'annule pour avoir un point d'inflexion (au moins graphiquement). Par exemple, la dérivée seconde $x \mapsto 12x^2$ de la fonction $x \mapsto x^4$ admet une racine en 0 mais la tangente à la courbe $y = 0$ ne la traverse pas en 0 puisque cette fonction est toujours positive.

Exemples : ◦ Étudions donc la convexité de la fonction f définie par

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + \frac{1}{2}x + 1.$$

f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on a $f'(x) = 3x^2 + 6x + \frac{1}{2}$, $f''(x) = 6x + 6$. Puisque f'' est négative sur $] -\infty; -1]$, f' est décroissante sur $] -\infty; -1]$ et f est concave sur $] -\infty; -1]$.

Puisque f'' est positive sur $[-1; +\infty[$, f' est croissante sur $[-1; +\infty[$ et f est convexe sur $[-1; +\infty[$.

On a $f(-1) = \frac{5}{2}$. Puisque f'' s'annule et change de signe en -1 , le point $I(-1, \frac{5}{2})$ est un point d'inflexion de la courbe d'équation $y = f(x)$.

◦ Étudions maintenant la convexité de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 5x^4 + 3x - 7$ qui est deux fois dérivable. On a $g'(x) = 20x^3 + 3$ et $g''(x) = 60x^2$ qui est toujours positive. La fonction g est donc convexe sur $\mathbb{R}$ (bien que sa dérivée seconde s'annule en 0, elle ne change pas de signe).

4 Étude de fonction

Une fois que l'on a étudié la continuité d'une fonction et calculé ses limites aux bornes de son ensemble de définition, on poursuit généralement son étude par le calcul de sa dérivée et l'on dresse son tableau de variation complet en précisant les limites. On précise aussi les asymptotes éventuelles ainsi que la position relative de la courbe représentative de la fonction par rapport à ces dernières. On étudie ensuite la dérivée seconde, la convexité et les éventuels points d'inflexion puis on trace enfin sa représentation graphique, ses asymptotes éventuelles ainsi que les tangentes pertinentes.

L'étude d'une fonction suit donc généralement le **plan** suivant :

Ensemble de définition

Continuité

Parité

Périodicité

Limites aux bornes

Asymptotes éventuelles

Dérivée et variations

Résolution éventuelle d'(in)équations

Équations de tangentes

Dérivée seconde, convexité et points d'inflexion

Graphe

Exercices

CONVEXITÉ & DÉRIVATION

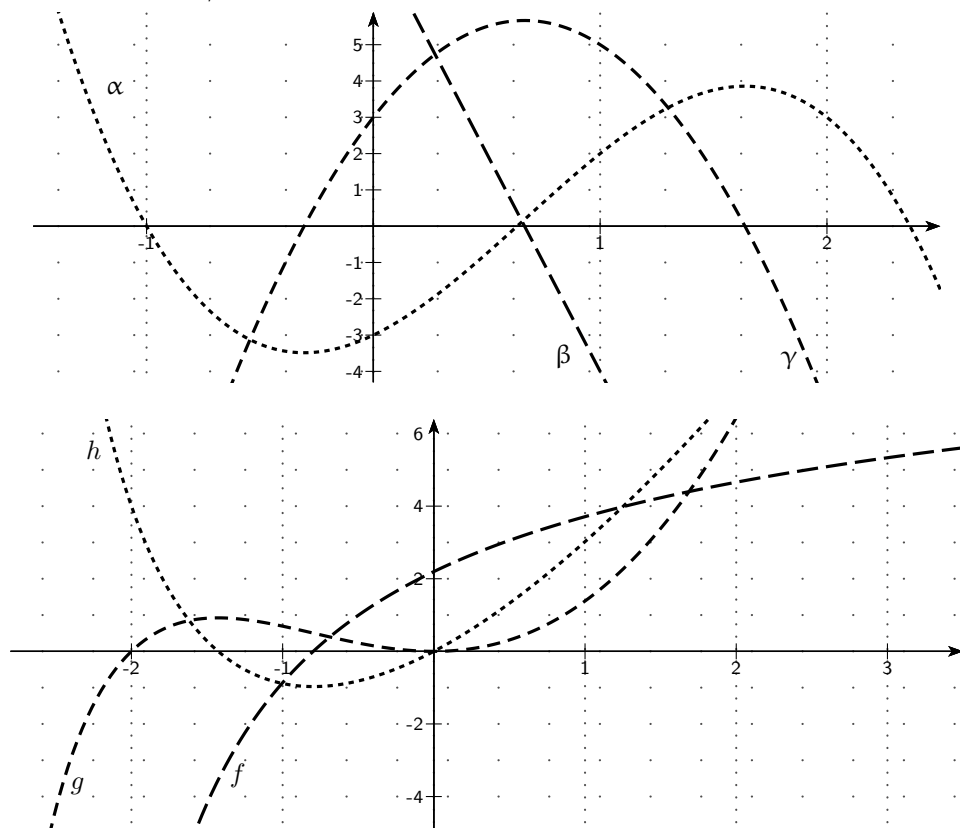
Exercice 1 Calculer la dérivée seconde des fonctions suivantes en précisant sur quel ensemble se placer.

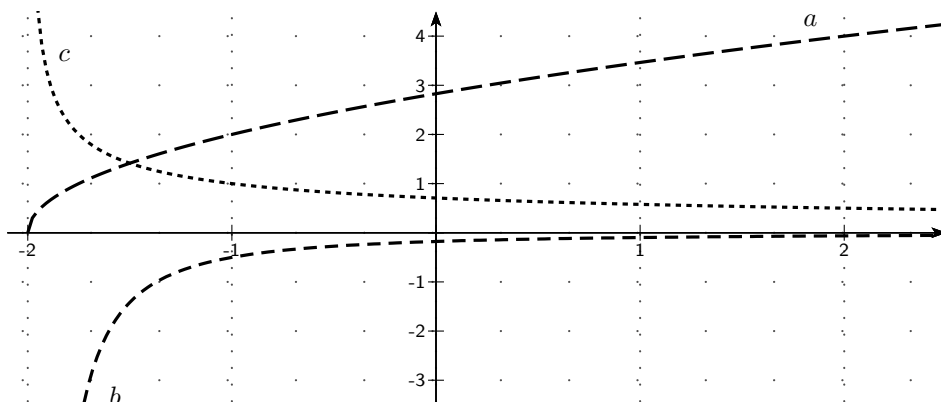
$$\begin{array}{l|l|l} a(x) = e^x & d(x) = \frac{4}{x} & g(x) = -5x^3 + e^{2x} \\ b(x) = 5x^2 - 4x + 3 & e(x) = e^{x^2} & h(x) = x \sin(x) \\ c(x) = 2 \cos(3x + 1) & f(x) = xe^x & \end{array}$$

Exercice 2 Déterminer la dérivée septième des fonctions suivantes : $a(x) = e^x$, $b(x) = 3e^{5x}$, $c(x) = 4 \sin(3x)$, $d(x) = 13x^6 - 7x^5 + 8x^4 - \pi x^3 + \frac{3}{8}x^2 - x + 5$.

Exercice 3 Soient f et g deux fonctions trois fois dérivables sur $\mathbb{R}$. Exprimer les fonctions $(f \circ g)'$, $(f \circ g)''$ et $(f \circ g)^{(3)}$ en fonction de f , g et leurs dérivées successives.

Exercice 4 Pour chacun des graphiques suivants, associer les trois représentations à celles d'une fonction, de sa dérivée et de sa dérivée seconde.





Exercice 5 Équations différentielles

Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction, généralement notée y , et qui se présente sous la forme d'une relation entre cette fonction et sa (ou ses) dérivée(s) (cf. chapitre XI).

Les fonctions précisées sont-elles solutions des équations différentielles suivantes ? Si non, les corriger.

$$(E_1): y'' - y' - 2y = 0, \quad f(x) = 3e^{2x} - 5e^{-x}.$$

$$(E_2): y'' = 5x, \quad f(x) = \frac{5}{6}x^2 + 2x - 7.$$

$$(E_3): y'' - 2y' + y = e^{3x}, \quad f(x) = (7 - 5x)e^x + \frac{1}{4}e^{3x}.$$

$$(E_4): y'' + 9y = x + 1, \quad f(x) = 2\cos(3x) - 5\sin(3x) + x + 1.$$

$$(E_5): x^2y'' - 3xy' + 4y = 0, \quad f(x) = 4x^2 - 3x^2\ln(x).$$

$$(E_6): x^3y^{(3)} - x^2y'' + xy' - 3y = 12x^2 - 10x - 3, \quad f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 1.$$

Exercice 6 Dérivée n -ième

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x$.

1. Calculer $f'(x)$, $f''(x)$ puis $f^{(3)}(x)$.
2. Pour $n \in \mathbb{N}$, conjecturer l'expression de la dérivée n -ième $f^{(n)}$ de f puis démontrer votre conjecture.

Exercice 7 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2e^{3x}$. On admet que f est indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on note, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}$ sa dérivée n -ième.

1. Déterminer $f^{(n)}(x)$ pour $n \in \llbracket 0; 3 \rrbracket$.
2. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x) = 3^{n-2}(9x^2 + 6nx + n(n-1))e^{3x}$.

Exercice 8 Soit f la fonction définie par $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$.

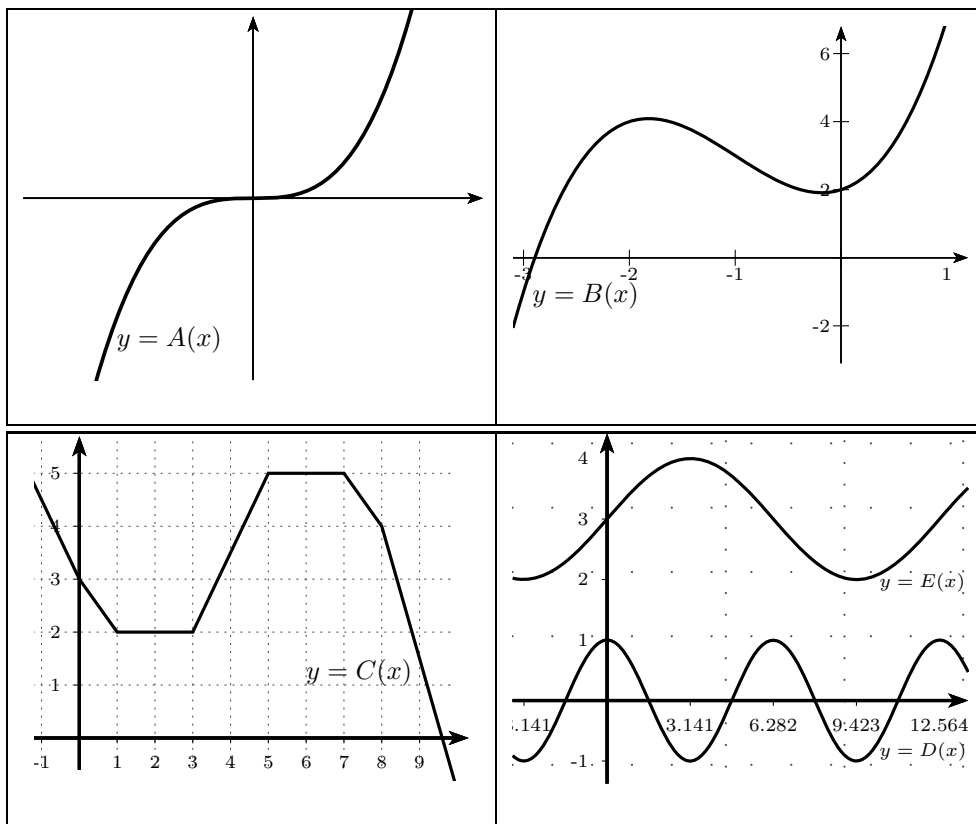
1. Déterminer l'ensemble de définition puis étudier la parité de f (cf. p. 80).
2. Tracer le graphe de la fonction f sur l'écran de la calculatrice.
3. Déterminer les limites aux bornes de son ensemble de définition.
On pose alors $f(0) = 0$ en prolongeant par continuité.
4. (a) Calculer la fonction dérivée f' de f sur $\mathbb{R}^*$.

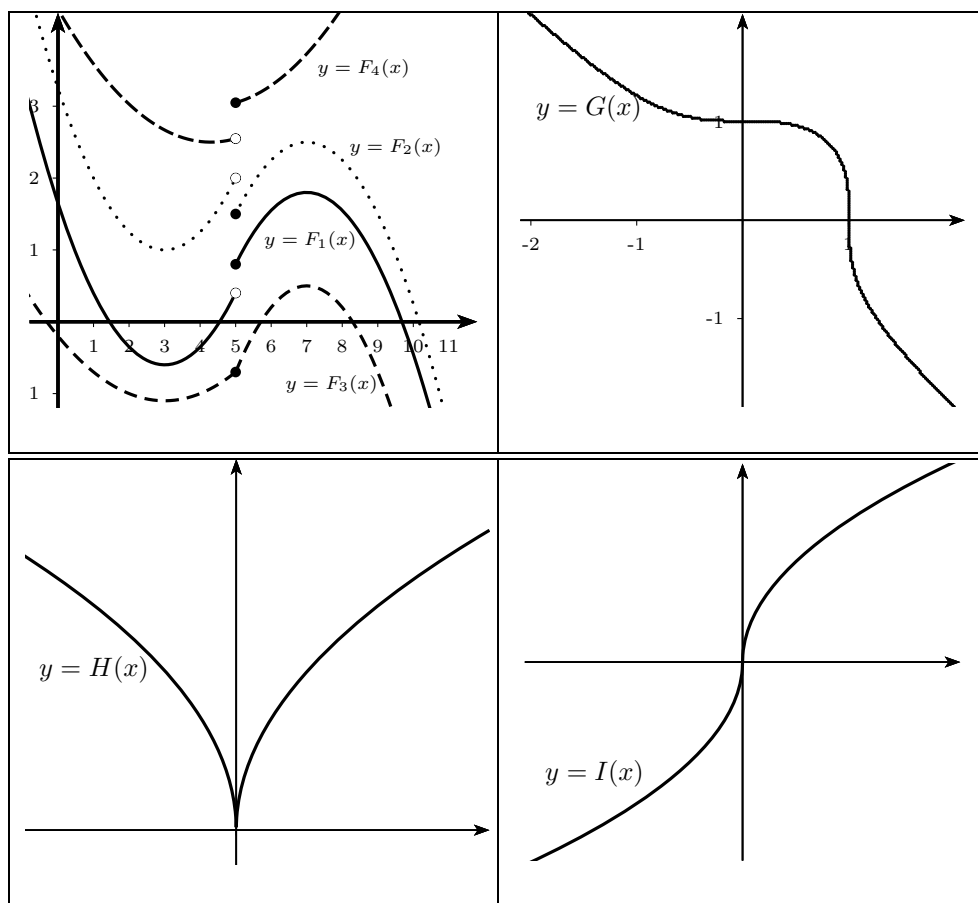
- (b) Déterminer la limite éventuelle de la fonction f' en 0.
- (c) Étudier la dérivabilité de f en 0 et la continuité de f' .
5. (a) Calculer la fonction dérivée seconde f'' de f sur $\mathbb{R}^*$ (i.e. la dérivée de f').
- (b) Déterminer la limite éventuelle de la fonction f'' en 0.
- (c) Étudier la dérivabilité de f' en 0 et la continuité de f'' .
6. Que penser de la suite $(u_n)_{\mathbb{N}} = (f^{(n)}(0))_{\mathbb{N}}$ où $f^{(n)}$ désigne la fonction dérivée n -ième ?

Exercice 9 Pour chacune des fonctions A à I tracées ci-dessous et par lecture graphique,

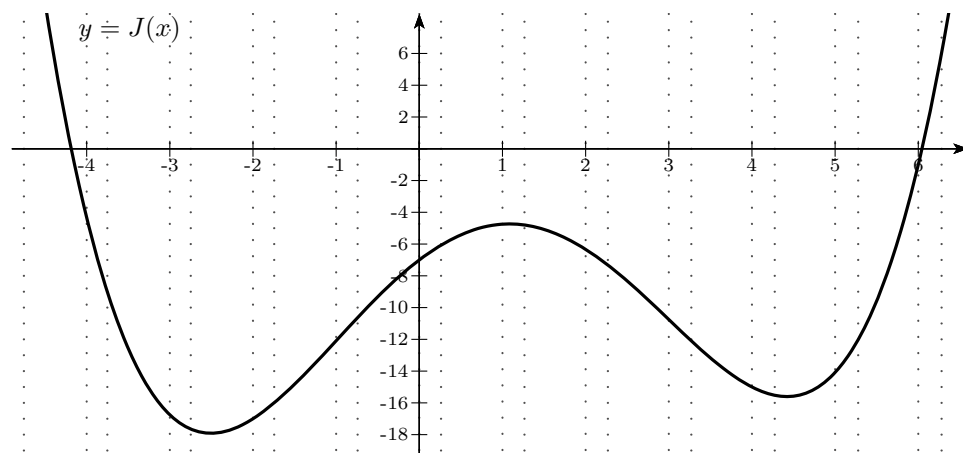
- déterminer la convexité,
- préciser les éventuels points d'inflexion,
- observer les positions relatives locales de la courbe et de ses tangentes,
- dresser le tableau de variations de la fonction dérivée lorsqu'elle existe,
- en déduire le tableau de signes de la fonction dérivée seconde si elle existe.

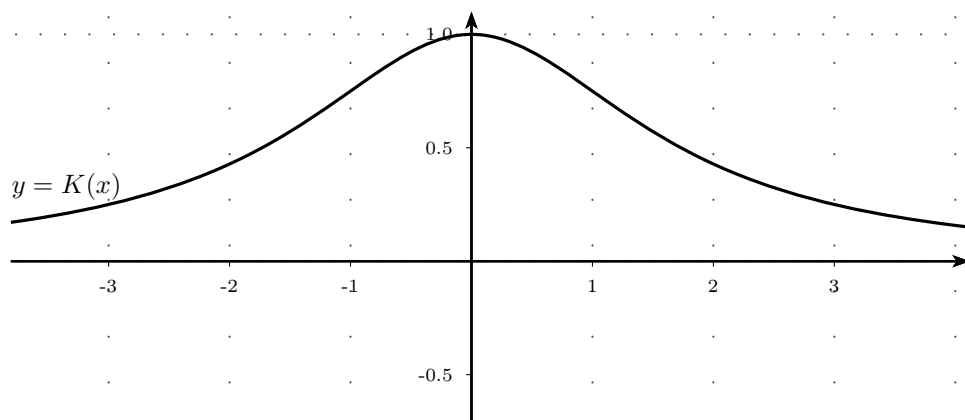
Que remarque-t-on ?



**Exercise 10**

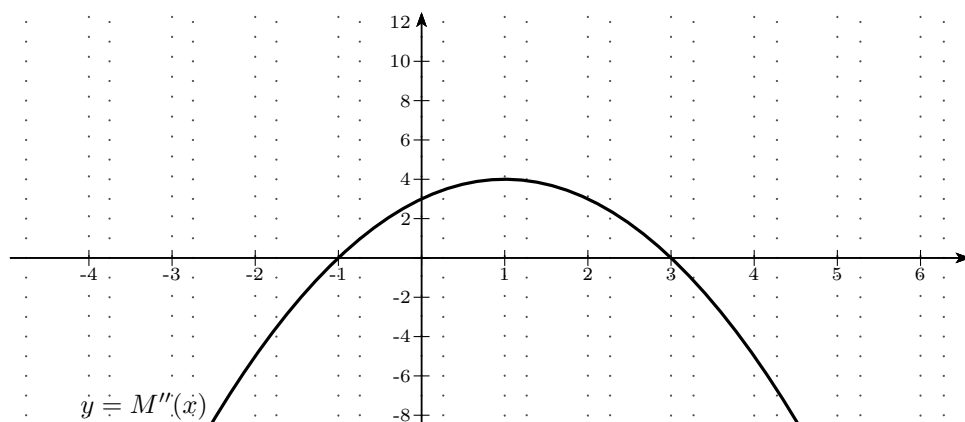
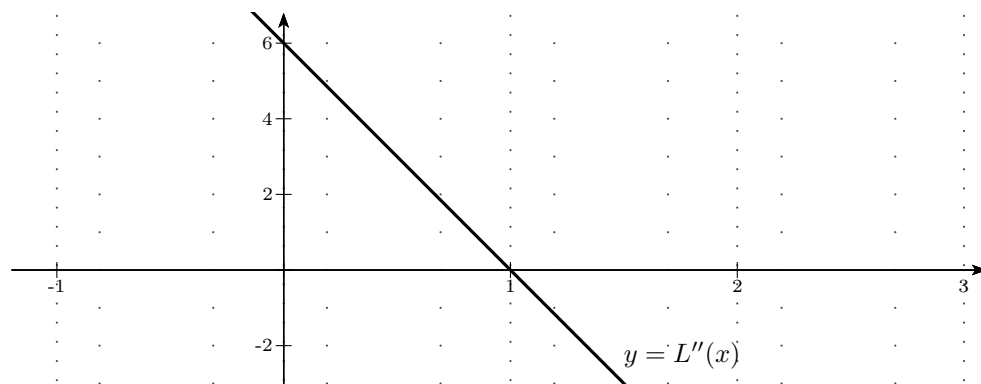
Pour les fonctions J et K représentées ci-dessous, tracer avec le plus de précision possible des courbes pouvant être celles de leur fonction dérivée J' et K' puis de celles de leur fonction dérivée seconde J'' et K'' .





Exercice 11 On a tracé ci-dessous les graphes des fonctions dérivées secondes L'' et M'' des fonctions L et M .

Tracer avec le plus de précisions possible des allures de courbes pouvant être celles de leurs fonctions dérivées L' et M' ainsi que des allures de celles de L et M .



Exercice 12 Soit f une fonction deux fois dérivable sur l'intervalle $[0;6]$ telle que $f(0) = 1$, $f(3) = 2$ et $f(6) = 8$. Dans chacun des cas suivants, tracer une représentation graphique possible de cette fonction.

1.

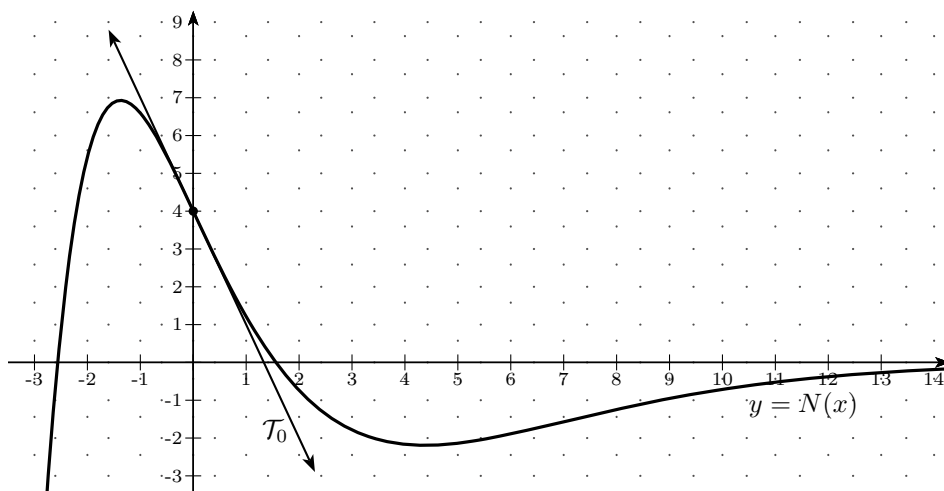
x	0	6
$f''(x)$	+	

2.

x	0	3	6
$f''(x)$	+	0	-

Exercice 13 VouF ?

On a tracé ci-dessous le graphe d'une fonction N définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on désigne par P une fonction dérivable telle que $P' = N$ (c'est donc une primitive de N).



Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse en justifiant la réponse.

- | | |
|-----------------------------------|--------------------------------------|
| 1. $N'(0) = -1$. | 6. $N''(x) < 0$ sur $[5; 12]$. |
| 2. $N'(4) = 0$. | 7. P est croissante sur $[3; 7]$. |
| 3. $N''(4) < 0$. | 8. P est concave sur $[0; 1]$. |
| 4. $N'(x) > 0$ sur $[6; 14]$. | 9. P est convexe sur $[2; 9]$. |
| 5. N est convexe sur $[0; 7]$. | |

Exercice 14 VouF ? Justifier.

- La somme de deux fonctions deux fois dérivables et convexes est convexe.
- Une fonction convexe sur l'intervalle $[1; 3]$ ne peut pas être concave sur l'intervalle $[2; 3]$.
- Une fonction convexe sur un intervalle I est monotone sur I .
- Une fonction monotone sur un intervalle I est convexe sur I ou concave sur I .

5. Une fonction croissante et concave sur $\mathbb{R}_+$ admet une limite finie en $+\infty$.
6. Une fonction concave sur $\mathbb{R}_-$ et convexe sur $\mathbb{R}_+$ est impaire.
7. Une fonction paire sur $\mathbb{R}$ est convexe sur $\mathbb{R}$ ou concave sur $\mathbb{R}$.
8. Soient f et g des fonctions deux fois dérivables et convexes sur $\mathbb{R}$.
Si f est croissante, alors $f \circ g$ est convexe.

Exercice 15 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - x^2 + x + 1$.

1. Tracer le graphe de la fonction f à la calculatrice et conjecturer la convexité de f ainsi que ses éventuels points d'inflexion.
2. Justifier que f est deux fois dérivable puis déterminer les fonctions f' et f'' .
3. Étudier les variations de f puis dresser son tableau de variations complet.
4. Étudier la convexité de la fonction f et préciser ses éventuels points d'inflexion.

Exercice 16 Même exercice pour la fonction g définie par $g(x) = 5x^2 e^x$.

Exercice 17 Même exercice pour la fonction h définie par $h(x) = (x - 1)e^{2x-1}$.

Exercice 18 Même exercice pour la fonction k définie par $k(x) = (x + 1)^3(x + 2)$.

Exercice 19 Après avoir observé leur graphe, étudier la convexité des fonctions $p(x) = x^6$ et $q(x) = x - x^4$.

Exercice 20 Soit f la fonction définie sur $] -1 ; +\infty [$ par $f(x) = \sqrt{1+x}$.

1. Étudier la convexité de la fonction f .
2. Démontrer que pour tout $x > -1$, $\sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$.

Exercice 21 Justifier que pour tout réel x positif, $\sqrt{x} \leq \frac{1}{4}x + 1$.

Exercice 22 Soit f la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^2 + 9}$ de courbe représentative $\mathcal{C}$ dans un repère.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f et justifier que f est deux fois dérivable.
2. Montrer que la fonction f est paire.
3. Dresser le tableau de variations complet de la fonction f .
4. Déterminer l'équation de la tangente Δ à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 3.
5. Calculer la fonction dérivée seconde de f puis en déduire les positions relatives de $\mathcal{C}$ et de Δ .
6. Qu'en déduire pour $f(x)$?

Exercice 23 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e \quad \text{où } a, b, c, d \text{ et } e \text{ sont des réels tels que } a \neq 0.$$

Déterminer, en fonction de a, b, c, d et e , le nombre de points d'inflexion qu'admet la courbe représentative de f dans un repère.

Dirigez-vous vers la page 451 pour réaliser le devoir n° 9.

CONVEXITÉ & DÉRIVATION

Exercice 1 Dérivée seconde

Ces fonctions étant composées de fonctions de référence définies et deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ ($\mathbb{R}^*$ pour la fonction d), elles le sont aussi.

- $a'(x) = (e^x)' = e^x$ et $a''(x) = (e^x)' = e^x$
- $b'(x) = (5x^2 - 4x + 3)' = 10x - 4$ et $b''(x) = (10x - 4)' = 10$.
- $c'(x) = (2 \cos(3x + 1))' = 2 \cdot (3x + 1)' \cos'(3x + 1) = 2 \times 3(-\sin(3x + 1))$
 $= -6 \sin(3x + 1)$ et
 $c''(x) = (-6 \sin(3x + 1))' = -6(3x + 1)' \sin'(3x + 1) = -18 \cos(3x + 1)$.
- $d'(x) = (\frac{4}{x})' = -\frac{4}{x^2}$ et $d''(x) = (-\frac{4}{x^2})' = -4 \cdot \frac{-2}{x^3} = \frac{8}{x^3}$.
- $e'(x) = (e^{x^2})' = (x^2)'e^{x^2} = 2xe^{x^2}$ et
 $e''(x) = (2xe^{x^2})' = (2x)'e^{x^2} + 2x(e^{x^2})' = 2e^{x^2} + 2x \times 2xe^{x^2} = 2e^{x^2}(1 + 2x^2)$.
- $f'(x) = (xe^x)' = x'e^x + x(e^x)' = e^x + xe^x = (1 + x)e^x$ et
 $f''(x) = (e^x + xe^x)' = e^x + (1 + x)e^x = (2 + x)e^x$.
- $g'(x) = (-5x^3 + e^{2x})' = -5 \cdot 3x^2 + (2x)'e^{2x} = -15x^2 + 2e^{2x}$ et
 $g''(x) = (-15x^2 + 2e^{2x})' = -15 \cdot 2x + 2 \cdot 2e^{2x} = -30x + 4e^{2x}$.
- $h'(x) = (x \sin(x))' = x' \sin(x) + x \sin'(x) = \sin(x) + x \cos(x)$ et
 $h''(x) = (\sin(x) + x \cos(x))' = \sin'(x) + x' \cos(x) + x \cos'(x)$
 $= \cos(x) + \cos(x) - x \sin(x) = 2 \cos(x) - x \sin(x)$.

Exercice 2 Dérivée septième

- $a(x) = e^x$. On a $a'(x) = (e^x)' = e^x$ donc $a^{(7)} = (e^x)^{(7)} = (e^x)^{(6)} = \dots = e^x$.
- $b(x) = 3e^{5x}$. On a $b'(x) = 3(5x)'e^{5x} = 3.5e^{5x}$, $b''(x) = 3.5 \times 5e^{5x} = 3.5^2e^{5x}, \dots$
 $b^{(7)}(x) = 3.5^7e^{5x}$.
- $c(x) = 4 \sin(3x)$. On a $c'(x) = 4(3x)' \sin'(3x) = 4.3 \cos(3x)$,
 $c''(x) = 4.3(3 \cos'(x)) = -4.3^2 \sin(3x)$,
 $c^{(3)}(x) = -4.3^2(3 \sin'(3x)) = -4.3^3 \cos(3x)$,
 $c^{(4)}(x) = -4.3^3(3 \cos'(3x)) = -4.3^4 \sin(3x) \dots$ et $c^{(7)}(x) = -4.3^7 \cos(3x)$.
- $d(x) = 13x^6 - 7x^5 + 8x^4 - \pi x^3 + \frac{3}{8}x^2 - x + 5$. La dérivée d'un polynôme de degré $n \geq 1$ est un polynôme de degré $n - 1$ donc $d^{(6)}$ est de degré 0 (constante) et $d^{(7)}$ est nulle.

Exercice 3 Soient f et g deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}(f \circ g)' &= g' \cdot (f' \circ g), \\ (f \circ g)'' &= (g')' \cdot (f' \circ g) + g' \cdot (f' \circ g)' = g'' \cdot (f' \circ g) + g' \cdot g' \cdot (f'' \circ g) \\ &= g'' \cdot (f' \circ g) + (g')^2 \cdot (f'' \circ g)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (f \circ g)^{(3)} &= (g'')' \cdot (f' \circ g) + g'' \cdot (f' \circ g)' + [(g')^2]' \cdot (f'' \circ g) + (g')^2 \cdot (f'' \circ g)' \\
 &= g^{(3)} \cdot (f' \circ g) + g'' \cdot g' \cdot (f'' \circ g) + 2g'(g')' \cdot (f'' \circ g) + (g')^2 \cdot g' \cdot (f^{(3)} \circ g) \\
 &= g^{(3)} \cdot (f' \circ g) + g'g'' \cdot (f'' \circ g) + 2g'g'' \cdot (f'' \circ g) + (g')^3 \cdot (f^{(3)} \circ g) \\
 &= g^{(3)} \cdot (f' \circ g) + 3g'g'' \cdot (f'' \circ g) + (g')^3 \cdot (f^{(3)} \circ g).
 \end{aligned}$$

Exercice 4 Par lecture graphique, dressons les tableaux de signes et de variations de chacune des fonctions afin de déterminer les compatibilités. Les valeurs sont souvent approchées.

x	$-\infty$	$+\infty$
γ	$+\infty$	$-\infty$

x	$-\infty$	1.7	$+\infty$
$\gamma(x)$	+	0	-

x	$-\infty$	1.7	$+\infty$
β	$-\infty$	5.8	$-\infty$

x	$-\infty$	-0.3	1.6	$+\infty$
$\beta(x)$	-	0	+	-

x	$-\infty$	-0.3	1.6	$+\infty$
α	$+\infty$	-3.5	3.9	$-\infty$

x	$-\infty$	-1	0.6	2.4	$+\infty$
$\alpha(x)$	+	0	-	0	-

Ainsi, on peut penser que $\gamma = \beta' = \alpha''$. Les graphes cubique, parabolique et affine appuient notre conjecture.

x	$-\infty$	$+\infty$
f	$-\infty$	$+\infty$

x	$-\infty$	-0.8	$+\infty$
$f(x)$	-	0	+

x	$-\infty$	-0.8	$+\infty$
h	$+\infty$	-1	$+\infty$

x	$-\infty$	-1.4	0	$+\infty$
$h(x)$	+	0	-	+

x	$-\infty$	-1.4	0	$+\infty$
g	$-\infty$	1	0	$+\infty$

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+	+

Ainsi, on peut penser que $f = h' = g''$.

x	-2	$+\infty$
b		

x	-2	$+\infty$
$b(x)$	$-$	

x	-2	$+\infty$
c	$+\infty$	0

x	-2	$+\infty$
$c(x)$	$+$	

x	-2	$+\infty$
a	0	$+\infty$

x	-2	$+\infty$
$a(x)$	0	$+$

Ainsi, on peut penser que $b = c' = a''$ (a est définie en 0 et pas c).

Exercice 5 Équations différentielles

$(E_1): y'' - y' - 2y = 0, \quad f(x) = 3e^{2x} - 5e^{-x}.$

On a $f'(x) = 6e^{2x} + 5e^{-x}, \quad f''(x) = 12e^{2x} - 5e^{-x}$ et
 $f''(x) - f'(x) - 2f(x) = 12e^{2x} - 5e^{-x} - (6e^{2x} + 5e^{-x}) - 2(3e^{2x} - 5e^{-x})$
 $= 0e^{2x} + 0e^{-x} = 0$ donc f est bien une solution de (E_1) .

$(E_2): y'' = 5x, \quad f(x) = \frac{5}{6}x^2 + 2x - 7.$ On a $f'(x) = \frac{5}{3}x + 2, \quad f''(x) = \frac{5}{3} \neq 5x$
donc f n'est pas une solution de (E_2) . En revanche, $\frac{5}{6}x^3 + 2x - 7$ en est une puisque
 $(\frac{5}{6}x^3 + 2x - 7)'' = (\frac{5}{2}x^2 + 2)' = 5x.$

$(E_3): y'' - 2y' + y = e^{3x}, \quad f(x) = (7 - 5x)e^x + \frac{1}{4}e^{3x}.$

On a $f'(x) = -5e^x + (7 - 5x)e^x + \frac{3}{4}e^{3x} = (2 - 5x)e^x + \frac{3}{4}e^{3x},$
 $f''(x) = -5e^x + (2 - 5x)e^x + \frac{9}{4}e^{3x} = (-3 - 5x)e^x + \frac{9}{4}e^{3x}$ et
 $f''(x) - 2f'(x) + f(x)$
 $= (-3 - 5x)e^x + \frac{9}{4}e^{3x} - 2[(2 - 5x)e^x + \frac{3}{4}e^{3x}] + (7 - 5x)e^x + \frac{1}{4}e^{3x}$
 $= (-3 - 4 + 7 - 5x + 10x - 5x)e^x + (\frac{9}{4} - \frac{6}{4} + \frac{1}{4})e^{3x}$
 $= 0e^x + \frac{4}{4}e^{3x} = e^{3x}$ donc f est bien une solution de (E_3) .

$(E_4): y'' + 9y = x + 1, \quad f(x) = 2\cos(3x) - 5\sin(3x) + x + 1.$

On a $f'(x) = -6\sin(3x) - 15\cos(3x) + 1,$
 $f''(x) = -18\cos(3x) + 45\sin(3x)$ et
 $f''(x) + 9f(x) = -18\cos(3x) + 45\sin(3x) + 9(2\cos(3x) - 5\sin(3x) + x + 1)$
 $= 9(x + 1) \neq x + 1$ donc f n'est pas une solution de (E_4) .
En revanche, $2\cos(3x) - 5\sin(3x) + \frac{1}{9}(x + 1)$ en est une.

$(E_5): x^2y'' - 3xy' + 4y = 0, \quad f(x) = 4x^2 - 3x^2\ln(x).$

On a $f'(x) = 8x - 6x\ln(x) - 3x^2\frac{1}{x} = 5x - 6x\ln(x),$
 $f''(x) = 5 - 6\ln(x) - 6x\frac{1}{x} = -1 - 6\ln(x)$ et
 $x^2f''(x) - 3xf'(x) + 4f(x) = x^2(-1 - 6\ln(x)) - 3x(5x - 6x\ln(x))$
 $+ 4(4x^2 - 3x^2\ln(x))$

$x^2 f''(x) - 3x f'(x) + 4f(x) = (-1 - 15 + 16)x^2 + (-6 + 18 - 12)x^2 \ln(x) = 0$
donc f est bien une solution de (E_5) .

(E_6) : $x^3 y^{(3)} - x^2 y'' + xy' - 3y = 4x^2 - 10x - 3$, $f(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 1$.

On a $f'(x) = 3x^2 - 8x + 5$, $f''(x) = 6x - 8$, $f^{(3)}(x) = 6$ et

$$\begin{aligned} x^3 f^{(3)}(x) - x^2 f''(x) + x f'(x) - 3f(x) &= 6x^3 - x^2(6x - 8) + x(3x^2 - 8x + 5) - 3(x^3 - 4x^2 + 5x - 1) \\ &= 12x^2 - 10x + 3 \neq 4x^2 - 10x - 3 \quad \text{donc } f \text{ n'est pas} \end{aligned}$$

une solution de (E_6) . En revanche, $x^3 - 4x^2 + 5x + 1$ en est une.

Exercice 6 Dérivée n -ième

1. La fonction f définie par $f(x) = xe^x$ est définie, continue et indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}$ par produit de fonctions l'étant.

On a $f'(x) = (xe^x)' = x'e^x + x(e^x)' = e^x + xe^x = (1+x)e^x$,

$f''(x) = (1+x)'e^x + (1+x)(e^x)' = e^x + (1+x)e^x = (2+x)e^x$ et

$f^{(3)}(x) = (2+x)'e^x + (2+x)(e^x)' = e^x + (2+x)e^x = (3+x)e^x$.

2. On peut conjecturer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}_n: f^{(n)}(x) = (n+x)e^x$.

• $f(x) = xe^x = (0+x)e^x$ et $\mathcal{P}_0$ est vraie.

• Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$.

On a $f^{(n+1)}(x) = (f^{(n)})'(x) = [(n+x)e^x]' = (n+x)'e^x + (n+x)(e^x)'$

$f^{(n+1)}(x) = e^x + (n+x)e^x = (n+1+x)e^x$ et $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

• Ainsi, pour tout entier naturel n , $f^{(n)}(x) = (n+x)e^x$.

Exercice 7 $f(x) = x^2 e^{3x}$

1. On a $f^{(0)}(x) = f(x) = x^2 e^{3x}$,

$f^{(1)}(x) = f'(x) = (x^2 e^{3x})' = (x^2)'e^{3x} + x^2(e^{3x})' = (3x^2 + 2x)e^{3x}$,

$f^{(2)}(x) = f''(x) = (f'(x))' = ((3x^2 + 2x)e^{3x})'$
 $= (3x^2 + 2x)'e^{3x} + (3x^2 + 2x)(e^{3x})'$
 $= (6x + 2)e^{3x} + 3(3x^2 + 2x)e^{3x} = (9x^2 + 12x + 2)e^{3x}$

et $f^{(3)}(x) = (f''(x))' = ((9x^2 + 12x + 2)e^{3x})'$
 $= (9x^2 + 12x + 2)'e^{3x} + (9x^2 + 12x + 2)(e^{3x})'$
 $= (18x + 12)e^{3x} + 3(9x^2 + 12x + 2)e^{3x} = (27x^2 + 54x + 18)e^{3x}$

2. Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, la propriété $\mathcal{P}_n: f^{(n)}(x) = 3^{n-2}(9x^2 + 6nx + n(n-1))e^{3x}$.

• Pour $n = 0$, $\mathcal{P}_0$ est vraie :

$$3^{0-2}(9x^2 + 6 \times 0 \times x + 0(0-1))e^{3x} = \frac{9x^2}{3^2}e^{3x} = x^2 e^{3x} = f(x) = f^{(0)}(x).$$

• Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= (f^{(n)}(x))' = (3^{n-2}(9x^2 + 6nx + n(n-1))e^{3x})' \\ &= 3^{n-2}(9x^2 + 6nx + n(n-1))'e^{3x} + 3^{n-2}(9x^2 + 6nx + n(n-1))(e^{3x})' \\ &= 3^{n-2}(18x + 6n)e^{3x} + 3^{n-1}(9x^2 + 6nx + n(n-1))e^{3x} \\ &= 3^{n-1}\left(\frac{18}{3}x + \frac{6}{3}n + 9x^2 + 6nx + n(n-1)\right)e^{3x} \\ &= 3^{n-1}(9x^2 + 6nx + 6x + n^2 - n + 2n)e^{3x} \\ &= 3^{n-1}(9x^2 + 6(n+1)x + (n+1)n)e^{3x} \quad \text{et } \mathcal{P}_{n+1} \text{ est vraie.} \end{aligned}$$

• $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n .

Exercice 8

1. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$ puisque le dénominateur ne peut s'annuler.

$$\forall x \in \mathcal{D}_f, \quad f(-x) = e^{-\frac{1}{(-x)^2}} = e^{-\frac{1}{x^2}} = f(x) \quad \text{donc } f \text{ est paire.}$$

2. Vous conviendrez que le graphe obtenu est proprement extraordinaire.

3. On a $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-\frac{1}{x^2}} = "e^{-\frac{1}{\infty^2}} = e^0 = 1$

et $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^\pm} e^{-\frac{1}{x^2}} = "e^{-\frac{1}{0^+}} = "e^{-\infty} = 0.$

On pose alors $f(0) = 0$ en prolongeant par continuité.

4. (a) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On a $f'(x) = \left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right)' e^{-\frac{1}{x^2}} = \left(-\frac{1}{x^2}\right)' e^{-\frac{1}{x^2}} = \frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}.$

(b) Posons $y = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^\pm} \pm\infty.$ On a $f'(x) = 2y^3 e^{-y^2} \xrightarrow{y \rightarrow \pm\infty} "e^{-\infty} = 0$
à l'aide du théorème de comparaison.

(c) On a $\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} - 0}{x} = y e^{-y^2} \xrightarrow{y \rightarrow \pm\infty} "e^{-\infty} = 0 = f'(0) \in \mathbb{R}.$
 f est donc dérivable en 0 et de dérivée f' continue.

5. (a) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. $f''(x) = \left(\frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}\right)' = \left(\frac{2}{x^3}\right)' e^{-\frac{1}{x^2}} + \frac{2}{x^3} \left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right)'$
 $f''(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \left(\frac{-6}{x^4} + \frac{2}{x^3} \frac{2}{x^3}\right) = 2e^{-\frac{1}{x^2}} \frac{2-3x^2}{x^6}.$

(b) On a $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} f''(x) = \lim_{x \rightarrow 0^\pm} 2e^{-\frac{1}{x^2}} \frac{2-3x^2}{x^6} \sim \lim_{y \rightarrow \pm\infty} \frac{4}{y^6} e^{-y^2} = "e^{-\infty} = 0$ à
l'aide du théorème de comparaison.

(c) $\frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \frac{\frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} - 0}{x} = y^4 e^{-y^2} \xrightarrow{y \rightarrow \pm\infty} "e^{-\infty} = 0 = f''(0) \in \mathbb{R}.$
 f' est donc dérivable en 0 et de dérivée f'' continue.

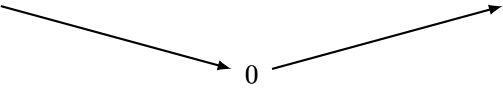
6. En utilisant des théorèmes de comparaison, on peut démontrer par récurrence que la suite $(f^{(n)}(0))_{\mathbb{N}}$ des dérivées successives de f en 0 est identiquement nulle.

Ainsi, la fonction f est une fonction non identiquement nulle dont toutes les dérivées successives sont nulles en 0.

Exercice 9 Lectures et conjectures graphiques

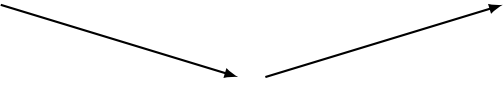
A : La fonction A est concave sur $\mathbb{R}_-$, convexe sur $\mathbb{R}_+$. La tangente à $\mathcal{C}_A$ la traverse au point d'abscisse 0 donc $O(0, 0)$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_A$. La courbe $\mathcal{C}_A$ est située en dessous de ses tangentes sur $\mathbb{R}_-$, au-dessus sur $\mathbb{R}_+$. On observe que les pentes des tangentes diminuent sur $\mathbb{R}_-$ et augmentent sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit que $(A')' = A''$ est négative sur $\mathbb{R}_-$, positive sur $\mathbb{R}_+$ et nulle en 0.

Pour information, $A(x) = x^3.$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
A'			
$A''(x)$	$-$	0	$+$
Con***ité de A	Concave		Convexe
Position $\mathcal{T}$ et $\mathcal{C}_A$	$\mathcal{C}_A$ en dessous de $\mathcal{T}$		$\mathcal{C}_A$ au-dessus de $\mathcal{T}$

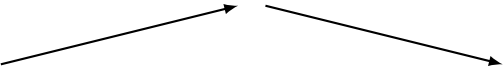
B : La fonction B est concave sur $]-\infty; -1]$, convexe sur $[-1; +\infty[$. La tangente à $\mathcal{C}_B$ la traverse au point d'abscisse -1 donc $I_B(-1, 3)$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_B$. La courbe $\mathcal{C}_B$ est située en dessous de ses tangentes sur $]-\infty; -1]$, au-dessus sur $[-1; +\infty[$. On observe que les pentes des tangentes diminuent sur $]-\infty; -1]$ et augmentent sur $[-1; +\infty[$. On en déduit que $(B')' = B''$ est négative sur $]-\infty; -1]$, positive sur $[-1; +\infty[$ et nulle en -1 .

Pour information, $B(x) = x^3 + 3x^3 + x + 2$.

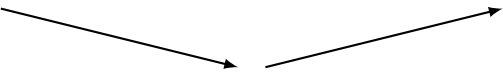
x	$-\infty$	-1	$+\infty$
B'			
$B''(x)$	$-$	0	$+$
Con***ité de B	Concave		Convexe
Position $\mathcal{T}$ et $\mathcal{C}_B$	$\mathcal{C}_B$ en dessous de $\mathcal{T}$		$\mathcal{C}_B$ au-dessus de $\mathcal{T}$

C : La fonction C est affine par morceaux, elle est donc convexe et concave sur tous les sous-intervalles où elle est affine. Plus globalement, elle est aussi convexe sur $]-\infty; 5]$ et concave sur $[3; +\infty[$. On se rend compte ici de la nécessité de définir une stricte convexité et une stricte concavité. Les tangentes traversent la courbe (puisqu'elles lui sont confondues) en tous les points sauf en ceux d'abscisse $0, 1, 3, 5, 7$ et 8 : quasiment tous les points sont donc des points d'inflexion. On observe que les pentes des tangentes, lorsqu'elles existent, augmentent avant 5 et diminuent après. La fonction C' n'est pas définie en tout point mais elle est constante par morceaux. La fonction dérivée seconde est donc nulle par morceaux.

D : La fonction D est convexe sur $[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}] [2\pi]$, concave sur $[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}] [2\pi]$. Les tangentes à $\mathcal{C}_D$ la traversent aux points d'abscisse $k\frac{\pi}{2}$ donc les points $I_k(k\frac{\pi}{2}, 0)$ sont des points d'inflexion de $\mathcal{C}_D$. La courbe $\mathcal{C}_D$ est située au-dessus de ses tangentes sur $[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}] [2\pi]$, en dessous sur $[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}] [2\pi]$. On observe que les pentes des tangentes augmentent sur $[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}] [2\pi]$ et diminuent sur $[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}] [2\pi]$. On en déduit que $(D')' = D''$ est positive sur $[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}] [2\pi]$, négative sur $[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}] [2\pi]$ et nulle en $k\frac{\pi}{2}$. Pour information, $D(x) = \cos(x)$.

x	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{2}$
D'			
$D''(x)$	+	0	-
Con***ité de D	Convexe		Concave
Position $\mathcal{T}$ et $\mathcal{C}_D$	$\mathcal{C}_D$ au-dessus de $\mathcal{T}$		$\mathcal{C}_D$ en dessous de $\mathcal{T}$

E : La fonction E est concave sur $[0; 2\pi]$ $[4\pi]$, convexe sur $[2\pi; 4\pi]$ $[4\pi]$. Les tangentes à $\mathcal{C}_E$ la traversent aux points d'abscisse $2k\pi$ donc les points $J_k(2k\pi, 3)$ sont des points d'inflexion de $\mathcal{C}_E$. La courbe $\mathcal{C}_E$ est située en dessous de ses tangentes sur $[0; 2\pi]$ $[4\pi]$, au-dessus sur $[2\pi; 4\pi]$ $[4\pi]$. On observe que les pentes des tangentes diminuent sur $[0; 2\pi]$ $[4\pi]$ et augmentent sur $[2\pi; 4\pi]$ $[4\pi]$. On en déduit que $(E')' = E''$ est négative sur $[0; 2\pi]$ $[4\pi]$, positive sur $[2\pi; 4\pi]$ $[4\pi]$ et nulle en $2k\pi$. Pour information, $E(x) = \sin(\frac{x}{2}) + 3$.

x	0	2π	4π
E'			
$E''(x)$	-	0	+
Con***ité de E	Concave		Convexe
Position $\mathcal{T}$ et $\mathcal{C}_E$	$\mathcal{C}_E$ en dessous de $\mathcal{T}$		$\mathcal{C}_E$ au-dessus de $\mathcal{T}$

F : La fonction F_1 est convexe sur $]-\infty; 5]$, concave sur $[5; +\infty[$. La fonction F_1 n'est pas continue en 5 donc $\mathcal{C}_{F_1}$ n'admet pas de tangente en 5 (et d'ailleurs les demi-tangentes ne traversent pas $\mathcal{C}_{F_1}$). La courbe $\mathcal{C}_{F_1}$ est située au-dessus de ses tangentes sur $]-\infty; 5]$, en dessous sur $[5; +\infty[$. On observe que les pentes des tangentes augmentent sur $]-\infty; 5[$ et diminuent sur $]5; +\infty[$. On en déduit que $(F_1')' = F_1''$ est positive sur $]-\infty; 5[$, négative sur $]5; +\infty[$.

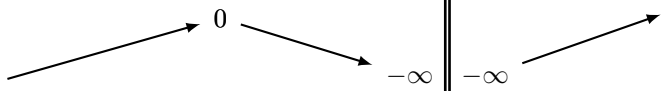
x	$-\infty$	5	$+\infty$
F_1'			
$F_1''(x)$	+		-
Con***ité de F_1	Convexe		Concave
Position $\mathcal{T}$ et $\mathcal{C}_{F_1}$	$\mathcal{C}_{F_1}$ au-dessus de $\mathcal{T}$		$\mathcal{C}_{F_1}$ en dessous de $\mathcal{T}$

Pour la fonction F_2 , on observe les mêmes phénomènes avec une convexité sur l'intervalle $] -\infty; 5[$ seulement, sans le point 5.

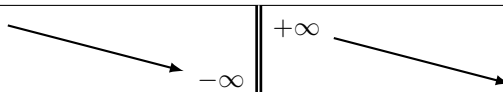
Pour la fonction F_3 , on observe les mêmes phénomènes. La courbe n'admet toujours pas de point d'inflexion malgré sa continuité puisqu'elle n'admet toujours pas de tangente en 5.

La fonction F_4 est convexe sur $] -\infty; 5[$ et convexe sur $[5; +\infty[$ mais pas sur $\mathbb{R}$ puisqu'elle n'est pas continue. La courbe n'admet donc pas de point d'inflexion.

G : La fonction G est convexe sur $] -\infty; 0[$ et sur $[1; +\infty[$, concave sur $[0; 1]$. Les tangentes à $\mathcal{C}_G$ la traverse aux points d'abscisse 0 et 1 donc $I_0(0, 1)$ et $I_1(1, 0)$ sont des points d'inflexion de $\mathcal{C}_G$. La courbe $\mathcal{C}_G$ est située au-dessus de ses tangentes sur $] -\infty; 0[$ et sur $[1; +\infty[$, en dessous sur $[0; 1]$. On observe que les pentes des tangentes augmentent sur $] -\infty; 0[$ et sur $] 1; +\infty[$, diminuent sur $[0; 1]$. On en déduit que $(G')' = G''$ est positive sur $] -\infty; 0[$ et sur $] 1; +\infty[$, négative sur $] 0; 1[$, nulle en 0. Pour information, $G(x) = \sqrt[3]{1 - x^3}$.

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
G'				
$G''(x)$	+	0	-	+
Con***ité de G	Convexe		Concave	Convexe
Position $\mathcal{T}$ et $\mathcal{C}_G$	$\mathcal{C}_G$ au-dessus de $\mathcal{T}$		$\mathcal{C}_G$ en dessous de $\mathcal{T}$	$\mathcal{C}_G$ au-dessus de $\mathcal{T}$

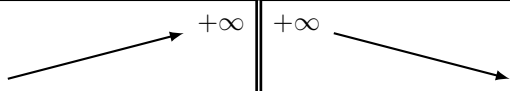
H : La fonction H est concave sur $\mathbb{R}_-$ et sur $\mathbb{R}_+$. La demi-tangente à $\mathcal{C}_H$ en 0 ne la traverse pas donc $O(0, 0)$ n'est pas un point d'inflexion de $\mathcal{C}_H$. On appelle un tel point, un *point de rebroussement*. La courbe $\mathcal{C}_H$ est située en dessous de ses tangentes sur $\mathbb{R}_-$ et sur $\mathbb{R}_+$. On observe que les pentes des tangentes diminuent sur $\mathbb{R}_-$ et sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit que $(H')' = H''$ est négative sur $] -\infty; 0[$ et sur $] 0; +\infty[$. Pour information, $H(x) = \sqrt{|x|}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
H'			
$H''(x)$	-		-
Con***ité de H	Concave		Concave
Position $\mathcal{T}$ et $\mathcal{C}_H$	$\mathcal{C}_H$ en dessous de $\mathcal{T}$		$\mathcal{C}_H$ en dessous de $\mathcal{T}$

I : La fonction I est convexe sur $\mathbb{R}_-$, concave sur $\mathbb{R}_+$. La tangente à $\mathcal{C}_I$ la traverse au point d'abscisse 0 donc $O(0, 0)$ est un point d'inflexion de $\mathcal{C}_I$. La courbe $\mathcal{C}_I$ est située au-dessus de ses tangentes sur $\mathbb{R}_-$, en dessous sur $\mathbb{R}_+$. On observe que les

pentés des tangentes augmentent sur $\mathbb{R}_-$ et diminuent sur $\mathbb{R}_+$. On en déduit que $(I')' = I''$ est négative sur $]-\infty; 0[$, positive sur $]0; +\infty[$.

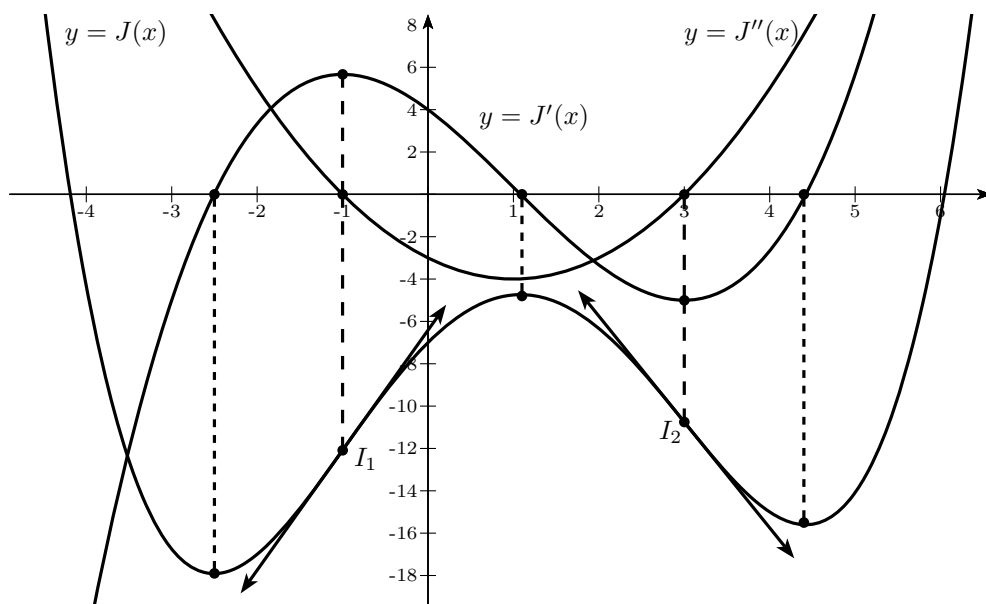
Pour information, $I(x) = \text{signe}(x) \cdot \sqrt{|x|}$.

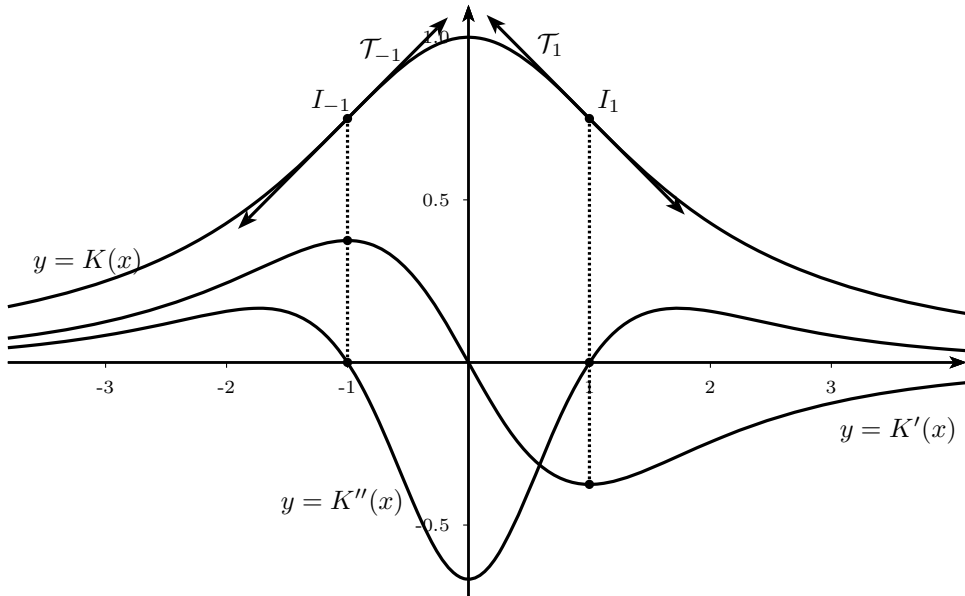
x	$-\infty$	0	$+\infty$
I'			
$I''(x)$	$-$ $+$		
Con**ité de I	Convexe Concave		
Position $\mathcal{T}$ et $\mathcal{C}_I$	$\mathcal{C}_I$ au-dessus de $\mathcal{T}$ $\mathcal{C}_I$ en dessous de $\mathcal{T}$		

On remarque que si la courbe admet des tangentes, elle est située au-dessus de ses tangentes quand elle est convexe, en dessous quand elle est concave. Si une fonction est dérivable, elle est convexe lorsque sa fonction dérivée est croissante, concave lorsque sa fonction dérivée est décroissante. Si une fonction est deux fois dérivable, elle est convexe lorsque sa fonction dérivée seconde est positive, concave lorsque sa fonction dérivée seconde est négative. De plus, pour une fonction deux fois dérivable, le graphe admet un point d'inflexion au point d'abscisse λ lorsque sa fonction dérivée seconde s'annule et change de signe en λ .

Exercice 10 En observant les variations, le signe et la convexité des fonctions et de leur dérivée première et en étant attentif aux points d'inflexion, on peut tracer les graphes convaincants suivants.

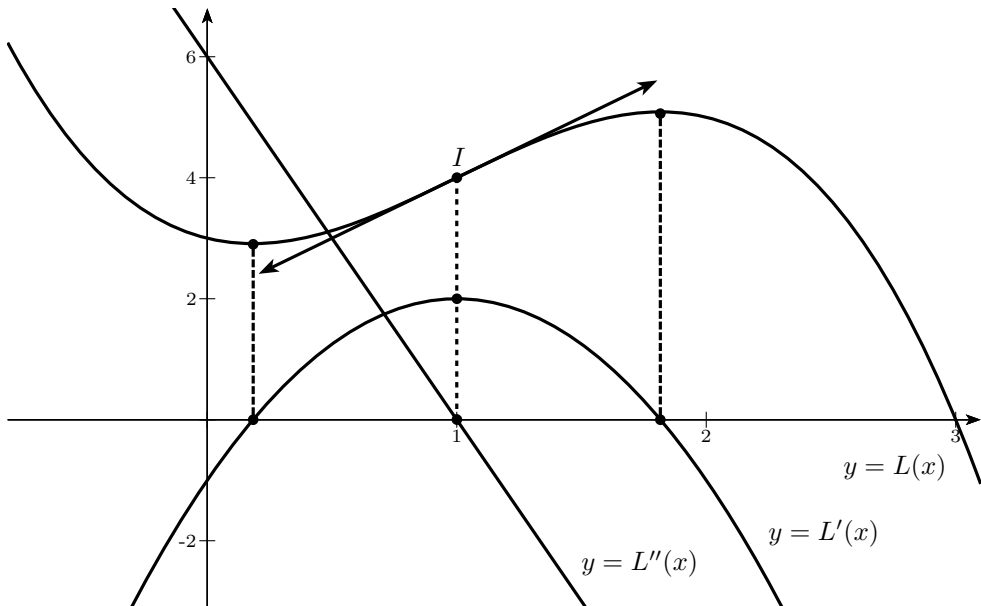
Pour information, $J(x) = \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 4x - 7$ et $K(x) = \frac{3}{x^2+3}$.

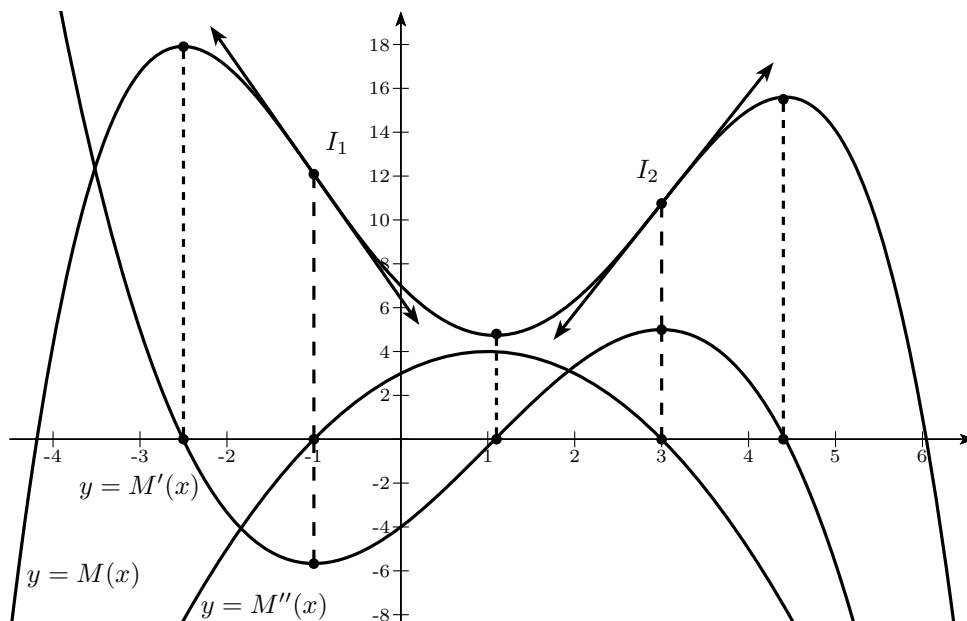




Exercice 11 En observant le signe des fonctions dérivées secondes, on obtient les variations des dérivées premières puis des graphes possible des fonctions elles-mêmes en étant attentif aux éventuels points d'inflexion. En revanche, on ne peut rien dire sur la « hauteur » des courbes donc des signes des dérivées premières ni des variations des fonctions. Les graphes compatibles peuvent donc avoir des allures très différentes.

Pour information, $K''(x) = 6x - 6$ et $M''(x) = -x^2 + 2x + 3$.





Exercice 12 Tableau de signe de f'' imposé

1. La courbe doit être convexe sur $[0; 6]$, sans point d'inflexion : une portion de parabole en $\cup$ peut tout à fait convenir. On remarque que f n'est pas nécessairement monotone, contrairement à f' .
2. La courbe doit être convexe sur $[0; 3]$, concave sur $[3; 6]$ et donc admettre un point d'inflexion en 3 ce qui est plus amusant à dessiner. On remarque que f n'est pas nécessairement monotone.

Exercice 13 Vous ?

N est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et P est telle que $P' = N$: c'est donc une primitive de N . Pour information, $N(x) = (4 - x - x^2)e^{-\frac{1}{2}x}$.

1. $N'(0) = -1$: Faux. La tangente $\mathcal{T}_0$ passe par les points $(0, 4)$ et $(2, -2)$. Son coefficient directeur vaut donc $N'(0) = \frac{-2-4}{2-0} = -3$.
2. $N'(4) = 0$: Faux. Le minimum local est atteint en 4,3 environ mais on pourrait éventuellement dire que la lecture graphique est difficile.
3. $N''(4) < 0$: Faux. N est convexe autour de 4 donc N' est croissante et $N'' > 0$.
4. $N'(x) > 0$ sur $[6; 14]$: Vrai. N est croissante sur cet intervalle.
5. N est convexe sur $[0; 7]$: Vrai (à condition que 7 ne soit pas après le point d'inflexion).
6. $N''(x) < 0$ sur $[5; 12]$: Faux. N ne semble concave qu'après 7.
7. P est croissante sur $[3; 7]$: Faux. $P' = N < 0$ sur $[3; 7]$ donc P y est décroissante.
8. P est concave sur $[0; 1]$: Vrai. $P' = N$ est décroissante sur cet intervalle.
9. P est convexe sur $[2; 9]$: Faux. $P' = N$ n'est pas croissante sur cet intervalle.

Exercice 14 VouF ?

1. La somme de deux fonctions deux fois dérivables et convexes est convexe : Vrai.
Si $f'' \geq 0$ et $g'' \geq 0$, alors $(f + g)'' \geq 0$.
2. Une fonction convexe sur l'intervalle $[1; 3[$ ne peut pas être concave sur l'intervalle $[2; 3]$: Faux. Une fonction affine est convexe et concave par exemple.
3. Une fonction convexe sur un intervalle I est monotone sur I : Faux.
La fonction carré est convexe sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas monotone sur $\mathbb{R}$.
4. Une fonction monotone sur un intervalle I est convexe sur I ou concave sur I : Faux. La fonction cube est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ mais n'est pas convexe ni concave sur $\mathbb{R}$.
5. Une fonction croissante et concave sur $\mathbb{R}_+$ admet une limite finie en $+\infty$: Faux.
La fonction racine carrée est strictement croissante et concave sur $\mathbb{R}_+$ et tend vers $+\infty$ en $+\infty$.
6. Une fonction concave sur $\mathbb{R}_-$ et convexe sur $\mathbb{R}_+$ est impaire : Faux. La fonction $x \mapsto x^3 + 1$ est concave sur $\mathbb{R}_-$, convexe sur $\mathbb{R}_+$ mais n'est pas impaire car l'image de 0 n'est pas nulle.
7. Une fonction paire sur $\mathbb{R}$ est convexe sur $\mathbb{R}$ ou concave sur $\mathbb{R}$: Faux.
La fonction $x \mapsto \sqrt{|x|}$ est paire mais elle n'est ni convexe, ni concave sur $\mathbb{R}$.
8. f et g deux fois dérivables et convexes sur $\mathbb{R}$. Si f est croissante, alors $f \circ g$ est convexe : Vrai. $f \circ g$ est alors deux fois dérivable et l'on a $(f \circ g)' = g' \times (f' \circ g)$ et $(f \circ g)'' = g'' \times (f' \circ g) + g' \times (f' \circ g)' = g'' \times (f' \circ g) + g' \times g' \times (f'' \circ g)$
 $(f \circ g)'' = g'' \times (f' \circ g) + (g')^2 \times (f'' \circ g)$.
Par hypothèse $f' \geq 0$, $f'' \geq 0$ et $g'' \geq 0$ donc $f' \circ g \geq 0$ et $f'' \circ g \geq 0$ d'où $(f \circ g)''$ est somme de fonctions positives : $(f \circ g)'' \geq 0$ et $f \circ g$ est convexe.

Exercice 15 $f(x) = x^3 - x^2 + x + 1$

1. Il semble graphiquement que la fonction f soit concave sur $] -\infty; \frac{1}{3}]$, convexe sur $[\frac{1}{3}; +\infty[$ et que le point d'abscisse $\frac{1}{3}$ soit un point d'inflexion.
2. f est un polynôme donc f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 - 2x + 1$ et $f''(x) = 6x - 2$.
3. Le discriminant de f' est strictement négatif ($\Delta = -8$) donc f' est strictement positive ($3 > 0$) sur $\mathbb{R}$ et f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, les limites en l'infini du polynôme sont celles de son monôme de plus haut degré (x^3) donc $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$.
4. $f''(x) = 6x - 2$ est une fonction affine croissante qui s'annule en changeant de signe en $\frac{1}{3}$ donc f est concave ($f'' \leq 0$) sur $] -\infty; \frac{1}{3}]$, convexe ($f'' \geq 0$) sur $[\frac{1}{3}; +\infty[$ et admet un point d'inflexion en $\frac{1}{3}$.

Exercice 16 $g(x) = 5x^2 e^x$

1. Il semble graphiquement que la fonction g soit convexe sur $] -\infty; -3,4]$, concave sur $[-3,4; -0,6]$, convexe sur $[-0,6; +\infty[$ et que les points d'abscisse $-3,4$ et $-0,6$ soient des points d'inflexion.

2. Par composition de fonctions usuelles, g est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = (5x^2)'e^x + 5x^2(e^x)' = (10x + 5x^2)e^x = 5x(x+2)e^x$ et $g''(x) = (10x + 5x^2)'e^x + (10x + 5x^2)(e^x)' = (10 + 10x + 10x + 5x^2)e^x$
 $g'(x) = 5(x^2 + 4x + 2)e^x$.
3. $g'(x) = 5x(x+2)e^x$ est du signe de $x(x+2)$. De plus,
 $g(0) = 0$, $g(-2) = \frac{20}{e^2}$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 5x^2e^x = (+\infty)(+\infty) = +\infty$
et l'exponentielle l'emportant sur tous les polynômes en l'infini,
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 5x^2e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.
D'où le tableau de variations complet suivant.

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
x	$-$	$\vdots$	$-$	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$	$\vdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0
g	$0 \nearrow \frac{20}{e^2} \searrow 0 \nearrow +\infty$			

4. $g''(x) = 5(x^2 + 4x + 2)e^x$ est du signe de $x^2 + 4x + 2$ qui s'annule en changeant de signe en ses racines $x_1 = -2 - \sqrt{2} \simeq -3,4$ et $x_2 = -2 + \sqrt{2} \simeq -0,6$ donc g est convexe ($g'' \geq 0$) sur $]-\infty; x_1]$ et sur $[x_2; +\infty[$, concave ($g'' \leq 0$) sur $[x_1; x_2]$ et admet des points d'inflexion en x_1 et en x_2 .

Exercice 17 $h(x) = (x-1)e^{2x-1}$

1. Il semble graphiquement que la fonction h soit concave sur $\mathbb{R}_-$, convexe sur $\mathbb{R}_+$ et que le point d'abscisse 0 soit un point d'inflexion.
2. Par composition de fonctions usuelles, h est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on a
 $h'(x) = (x-1)'e^{2x-1} + (x-1)(e^{2x-1})' = 1e^{2x-1} + (x-1) \cdot 2e^{2x-1} = (2x-1)e^{2x-1}$
 $h''(x) = (2x-1)'e^{2x-1} + (2x-1)(e^{2x-1})' = 2e^{2x-1} + (2x-1) \cdot 2e^{2x-1} = 4xe^{2x-1}$.
3. $h'(x) = (2x-1)e^{2x-1}$ est du signe de $2x-1$. De plus, $h(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2}-1)e^{\frac{2}{2}-1} = -\frac{1}{2}$,
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1)e^{2x-1} = (+\infty)(+\infty) = +\infty$ et l'exponentielle l'emportant sur tous les polynômes en l'infini,
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x-1)e^{2x-1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x-1} = e^{-\infty} = 0$.
D'où le tableau de variations complet suivant.

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$2x-1$	$-$	0	$+$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
h	$0 \nearrow -\frac{1}{2} \searrow +\infty$		

4. $h''(x) = 4xe^{2x-1}$ est du signe de $4x$ qui s'annule en changeant de signe en 0 donc h est concave ($h'' \leq 0$) sur $\mathbb{R}_-$, convexe ($h'' \geq 0$) sur $\mathbb{R}_+$ et admet un point d'inflexion en $(0, -\frac{1}{2})$.

Exercice 18 $k(x) = (x+1)^3(x+2)$

1. Il semble graphiquement que la fonction k soit convexe sur $]-\infty; -1,5]$, concave sur $[-1,5; -1]$, convexe sur $[-1; +\infty[$ et que les points d'abscisse $-1,5$ et -1 soient des points d'inflexion.

2. k est un polynôme de degré 4 donc k est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$k'(x) = [(x+1)^3]'(x+2) + (x+1)^3(x+2)' = 3(x+1)^2(x+2) + (x+1)^3 \\ = (x+1)^2(3x+6+x+1) = (x+1)^2(4x+7)$$

$$\text{et } k''(x) = [(x+1)^2]'(4x+7) + (x+1)^2(4x+7)' = 2(x+1)(4x+7) + 4(x+1)^2 \\ k''(x) = (x+1)(8x+14+4x+4) = (x+1)(12x+18) = 6(x+1)(2x+3).$$

3. $k'(x) = (x+1)^2(4x+7)$ est du signe de $4x+7$. De plus, $k(-\frac{7}{4}) = -\frac{27}{256}$ et les limites en l'infini d'un polynôme étant celles de son monôme de plus haut degré, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} k(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x^4 = +\infty$. D'où le tableau de variations complet suivant.

x	$-\infty$	$-\frac{7}{4}$	$+\infty$
$k'(x)$		$-$	$+$
k	$+\infty$	$-\frac{27}{256}$	$+\infty$

4. $k''(x) = 6(x+1)(2x+3)$ s'annule en changeant de signe en ses racines $-\frac{3}{2}$ et -1 donc k est convexe ($k'' \geq 0$) sur $]-\infty; -\frac{3}{2}]$ et sur $[-1; +\infty[$, concave ($k'' \leq 0$) sur $[-\frac{3}{2}; -1]$ et admet des points d'inflexion en $-\frac{3}{2}$ et en -1 .

Exercice 19 $p(x) = x^6 - 2x$ et $q(x) = x - x^4$

Graphiquement, le point d'abscisse 0 mérite toute notre attention.

◦ Le polynôme p est deux fois dérivable et l'on a $p'(x) = 6x^5 - 2$, $p''(x) = 30x^4$ qui s'annule en 0 mais ne change pas de signe. On a $p'' \geq 0$ donc p est convexe et p n'admet pas de point d'inflexion.

◦ Le polynôme q est deux fois dérivable et l'on a $q'(x) = 1 - 4x^3$, $q''(x) = -12x^2$ qui s'annule en 0 mais ne change pas de signe. On a $q'' \leq 0$ donc q est concave et q n'admet pas de point d'inflexion.

Exercice 20 $f(x) = \sqrt{1+x}$ sur $]-1; +\infty[$

1. f est définie et deux fois dérivable sur $]-1; +\infty[$ par composition et l'on a

$$f'(x) = \frac{(1+x)'}{2\sqrt{1+x}} = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}, \quad f''(x) = -\frac{[2\sqrt{1+x}]'}{[2\sqrt{1+x}]^2} = -\frac{1/2\sqrt{1+x}}{4(1+x)} = \frac{-1}{8(x+1)\sqrt{1+x}}.$$

f'' est donc négative sur $]-1; +\infty[$ et f est concave sur $]-1; +\infty[$.

2. On a $f(0) = \sqrt{1+0} = 1$ et $f'(0) = \frac{1}{2\sqrt{1+0}} = \frac{1}{2}$ donc la tangente à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f au point d'abscisse 0 a pour équation $\mathcal{T}_0: y = f'(0)(x-0) + f(0) = \frac{1}{2}x + 1$.

Puisque f est concave sur $] -1; +\infty[$, la courbe $\mathcal{C}_f$ est située en dessous de ses tangentes, en particulier de sa tangente en 0 et, pour tout $x \in] -1; +\infty[$,

$$f(x) = \sqrt{1+x} \leq \frac{1}{2}x + 1.$$

Exercice 21 Soit f la fonction définie et continue sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \sqrt{x}$. Elle est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et en utilisant la formule de dérivation de x^n généralisée (sinon, on peut dériver de manière usuelle), on obtient $f(x) = x^{\frac{1}{2}}$,

$$f'(x) = (x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\text{et } f''(x) = (\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{2}x^{-\frac{1}{2}-1} = -\frac{1}{4}x^{-(1+\frac{1}{2})} = \frac{-1}{4x^{1+\frac{1}{2}}} = \frac{-1}{4x\sqrt{x}}.$$

Ainsi, f'' est négative sur $\mathbb{R}_+^*$ donc f est concave sur $\mathbb{R}_+^*$. Étant continue sur $\mathbb{R}$, elle est concave sur $\mathbb{R}$. Sa courbe représentative est donc située en dessous de toutes ses tangentes, en particulier de $\mathcal{T}_4$, sa tangente au point d'abscisse 4 qui a pour équation $y = f'(4)(x-4) + f(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}}(x-4) + \sqrt{4} = \frac{1}{4}x + 1$.

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) = \sqrt{x} \leq \frac{1}{4}x + 1$.

Exercice 22 $f(x) = \sqrt{x^2+9}$

1. Le radicande x^2+9 est strictement positif sur $\mathbb{R}$ donc la fonction f est définie, continue et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition de fonctions l'étant.

2. $\forall x \in \mathbb{R} = \mathcal{D}_f$, $-x \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = \sqrt{(-x)^2+9} = \sqrt{x^2+9} = f(x)$: la fonction f est paire et sa courbe représentative $\mathcal{C}$ admet donc l'axe des ordonnées pour axe de symétrie.

3. On a $f(0) = \sqrt{0^2+9} = 3$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+9} = \sqrt{(+\infty)^2+9} = \sqrt{+\infty} = +\infty.$$

Posons $u = x^2+9$. On a $u' = 2x$. Puisque $f = \sqrt{u}$, $f' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ et

pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+9}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$ qui est positive sur $\mathbb{R}_+$.

On peut alors dresser le tableau de variations de f sur $\mathbb{R}_+$ puis, par symétrie, sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	$+\infty$	3	$+\infty$

4. On a $f(3) = \sqrt{3^2+9} = 3\sqrt{2}$ et $f'(3) = \frac{3}{\sqrt{3^2+9}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ d'où l'équation de la tangente en 3 $\Delta: y = f'(3)(x-3) + f(3) = \frac{\sqrt{2}}{2}x + 3\frac{\sqrt{2}}{2}$.

5. Posons $u = x$, $v = \sqrt{x^2+9}$. On a $u' = 1$, $v' = \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}$. Puisque

$f' = \frac{u}{v}$, $f'' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f''(x) = \frac{1\sqrt{x^2+9} - x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+9}}}{(\sqrt{x^2+9})^2} = \frac{\sqrt{x^2+9} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}}{x^2+9} = \frac{\frac{x^2+9-x^2}{\sqrt{x^2+9}}}{(x^2+9)} = \frac{9}{(x^2+9)\sqrt{x^2+9}}$$

qui est positive sur $\mathbb{R}$ donc f est convexe sur $\mathbb{R}$.

Sa courbe représentative $\mathcal{C}$ est donc située au-dessus de Δ , sa tangente en 3.

6. On en déduit que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2}x + 3\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 23 $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ où $a \neq 0$.

La fonction f est un polynôme de degré 4 donc f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. Sa courbe représentative admet donc un point d'inflexion lorsque sa dérivée seconde s'annule en changeant de signe.

On a $f'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$ et $f''(x) = 12ax^2 + 6bx + 2c$ qui est un polynôme du second degré de discriminant $\Delta = (6b)^2 - 4 \times 12a \times 2c = 12(3b^2 - 8ac)$. Ainsi, f'' est soit de signe constant (lorsque son discriminant Δ est strictement négatif), soit s'annule une unique fois sans changer de signe (lorsque $\Delta = 0$), soit s'annule deux fois en changeant de signe (lorsque $\Delta > 0$). La fonction f ne peut donc admettre un unique point d'inflexion. Elle n'en admet aucun lorsque $3b^2 - 8ac \leq 0$ ou elle en admet deux lorsque $3b^2 - 8ac > 0$.

Chapitre VIII

ORTHOGONALITÉ DANS L'ESPACE

Sommaire

Introduction	187
1 Produit scalaire dans l'espace	188
1.1 Extension du produit scalaire à l'espace	188
1.2 Extension des propriétés algébriques du produit scalaire	188
2 Bases et repères orthonormés	189
3 Orthogonalité dans l'espace	190
3.1 Droites orthogonales	190
3.2 Vecteur normal à un plan	191
3.3 Plans parallèles, plans perpendiculaires	192
4 Projections orthogonales	193
4.1 Projection orthogonale d'un point sur une droite	193
4.2 Projection orthogonale d'un point sur un plan	194
Exercices	196
Corrigé des exercices	199

Introduction

Le produit scalaire, construit au cours du XIX^es., vous a été présenté dans le plan en classe de première et se généralise tel quel à l'espace. Il définit de la même manière l'orthogonalité de deux vecteurs et permet alors de caractériser non plus une droite mais un plan de l'espace par *normalité*.

Dans tout le chapitre, l'espace est doté d'une unité de longueur, correspondant à la norme des vecteurs.

1 Produit scalaire dans l'espace

1.1 Extension du produit scalaire à l'espace

On rappelle que deux vecteurs de l'espace sont nécessairement coplanaires.

Définition 1 Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace et soient trois points de l'espace A , B et C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. On définit le produit scalaire de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, par $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, calculé dans un plan quelconque contenant les points A , B et C .

Dans tout plan contenant les points A , B et C , l'unité de longueur coïncide avec celle donnée dans l'espace. Ainsi, les différentes expressions du produit scalaire établies dans le plan sont encore valides dans l'espace et nous ne les démontrerons pas.

Propriété 1 $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos(\alpha)$ où α est une mesure de l'angle géométrique entre $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Remarques : • On retrouve bien la mesure du défaut de perpendicularité dans le cosinus de l'angle.

• On notera ainsi

$$\vec{u}^2 = \overrightarrow{AB}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 = AB^2 \quad (\cos(0) = 1).$$

• On a $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \iff \overrightarrow{AB} = \vec{0} \text{ ou } \overrightarrow{AC} = \vec{0} \text{ ou } \widehat{BAC} = 90^\circ$.

La propriété suivante utilise la projection orthogonale d'un point sur une droite dans un plan. La même notion sera définie dans l'espace en page 193.

Propriété 2 Avec les notations précédentes, si H est le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB) , on a

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} = \begin{cases} AB \times AH & \text{si } H \in [AB] \\ -AB \times AH & \text{si } H \notin [AB]. \end{cases}$$

Autrement dit, on ne change pas le produit scalaire en prenant les projetés orthogonaux de l'un des vecteurs sur une droite dirigée par l'autre.

Remarque : Pour chacune de ces propriétés, si l'un des vecteurs est nul, le produit scalaire est bien nul même si l'expression n'est pas parfaitement définie (pas d'angle α si $\vec{u} = \vec{0}$, pas de droite (AB) si $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$).

1.2 Extension des propriétés algébriques du produit scalaire

Définition 2 Deux vecteurs de l'espace $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont dits orthogonaux si leur produit scalaire est nul : $\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Remarques : • Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant coplanaires, cette définition correspond à celle dans le plan.

• Le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur de l'espace (il était déjà colinéaire à tous).

Propriété 3 Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ trois vecteurs de l'espace et soit λ un réel.

Symétrie : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}.$

Bilinéarité : $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$ et $\vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = \lambda \times (\vec{u} \cdot \vec{v}).$

Identités remarquables :

$$(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2.$$

$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2.$$

$$(\vec{u} - \vec{v})^2 = \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \|\vec{v}\|^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2.$$

Deux vecteurs sont toujours coplanaires et la symétrie et les identités remarquables ont été démontrées dans le plan, tout comme la deuxième partie de la bilinéarité. La première partie de la bilinéarité dans l'espace est bien plus délicate car les trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas nécessairement coplanaires. Nous l'admettons.

Propriété 4 Formules de polarisation

Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace. On a

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= \frac{1}{2} \left[\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 \right] \\ &= \frac{1}{4} \left[\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 \right] \end{aligned}$$

Démonstration : Il suffit de dérouler les calculs.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \right] &= \frac{1}{2} \left[\vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 - \vec{u}^2 - \vec{v}^2 \right] = \frac{2}{2} \vec{u} \cdot \vec{v}, \\ \frac{1}{2} \left[\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 \right] &= \frac{1}{2} \left[\vec{u}^2 + \vec{v}^2 - (\vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2) \right] = \frac{2}{2} \vec{u} \cdot \vec{v}, \\ \frac{1}{4} \left[\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 \right] &= \frac{1}{4} \left[\vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2 - (\vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2) \right] = \frac{4}{4} \vec{u} \cdot \vec{v}. \quad \square \end{aligned}$$

Remarques : • Dans la première formule, si l'on trace les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ bout à bout, on retrouve bien la mesure du défaut de perpendicularité (au moyen de l'expression de Pythagore) du produit scalaire.

• Pour trois points A, B, C de l'espace, la deuxième formule donne

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{1}{2} (AB^2 + AC^2 - BC^2).$$

2 Bases et repères orthonormés

Définition 3 Un triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ forme une base orthonormée (b.o.n.) de l'espace lorsque ses vecteurs sont orthogonaux deux à deux et de norme 1 c.-à-d. $\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$ et $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1.$

Si, de plus, O est un point de l'espace, le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est dit orthonormé (r.o.n.).

En effet, si les trois vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ sont orthogonaux deux à deux, ils ne peuvent être coplanaires et le triplet forme bien une base de l'espace.

Propriété 5 Dans une base *orthonormée*, soient $\vec{u}(x, y, z)$ et $\vec{v}(x', y', z')$ deux vecteurs. On a $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$.

Démonstration : On a $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ et $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$ donc

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \cdot (x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}) \\ &= x\vec{i} \cdot x'\vec{i} + x\vec{i} \cdot y'\vec{j} + x\vec{i} \cdot z'\vec{k} + y\vec{j} \cdot x'\vec{i} + y\vec{j} \cdot y'\vec{j} + y\vec{j} \cdot z'\vec{k} \\ &\quad + z\vec{k} \cdot x'\vec{i} + z\vec{k} \cdot y'\vec{j} + z\vec{k} \cdot z'\vec{k} \\ &= xx'\vec{i}^2 + 0 + 0 + 0 + yy'\vec{j}^2 + 0 + 0 + 0 + zz'\vec{k}^2 = xx' + yy' + zz'. \quad \square\end{aligned}$$

On retrouve bien une formule analogue à celle de l'expression analytique du produit scalaire dans le plan. La propriété suivante est alors évidente.

Propriété 6 Dans une base orthonormée,
 $\vec{u}(x, y, z) \perp \vec{v}(x', y', z') \iff xx' + yy' + zz' = 0$.

Nous retrouvons de même une formule bien connue dans le plan.

Propriété 7 Dans un repère orthonormé, soient un vecteur $\vec{u}(x, y, z)$ et deux points $A(x_A, y_A, z_A)$, $B(x_B, y_B, z_B)$. On a $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ et $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$.

Démonstration : On a $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = xx + yy + zz = x^2 + y^2 + z^2$ et $AB^2 = \|\vec{AB}\|^2 = \dots \quad \square$

3 Orthogonalité dans l'espace

3.1 Droites orthogonales

On rappelle que deux droites de l'espace sont orthogonales lorsqu'elles admettent des parallèles qui sont perpendiculaires.

Propriété 8 Soient A, B, C et D quatre points distincts de l'espace. Les droites (AB) et (CD) sont orthogonales si, et seulement si, les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont orthogonaux.

$$(AB) \perp (CD) \iff \vec{AB} \cdot \vec{CD} = 0.$$

Les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires si, et seulement si, les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont orthogonaux.

$$(AB) \perp (AC) \iff \vec{AB} \cdot \vec{AC} = 0.$$

Remarque : Autrement dit, deux droites sont orthogonales ssi leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.

3.2 Vecteur normal à un plan

Définition 4 Un vecteur non nul $\overrightarrow{AB}$ est dit **normal** à un plan $\mathcal{P}$ de l'espace si la droite (AB) est perpendiculaire à $\mathcal{P}$.

Remarques :

- Tout vecteur non nul colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ est aussi normal au plan $\mathcal{P}$.
- Tout plan de l'espace admet un vecteur normal (admis).
- Cette définition est analogue à celle d'un vecteur normal à une droite dans un plan.

D'après la définition 2 (p.119) du chapitre V, ceci peut s'écrire de la manière suivante.

Propriété 9 Un vecteur non nul $\vec{n}$ est normal à un plan $\mathcal{P}$ si, et seulement si, $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de $\mathcal{P}$.

Ceci permet d'obtenir le théorème suivant, qui donne une caractérisation d'un plan normal à un vecteur donné au moyen du produit scalaire.

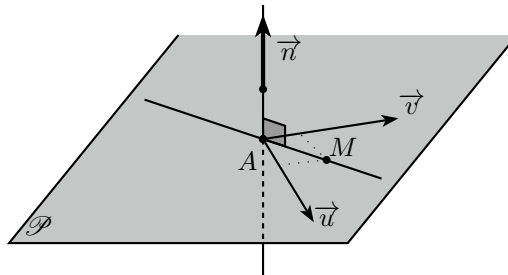
Dorénavant, un plan pourra être caractérisé au moyen d'un point et de deux vecteurs non colinéaires mais aussi d'un point et d'un vecteur normal.

Théorème 1 Soient A un point et $\vec{n}$ un vecteur non nul de l'espace. Le plan $\mathcal{P}$ passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$. Autrement dit, un vecteur non nul est normal à un plan ssi il est orthogonal à tout vecteur de ce plan.

Démonstration :

- Soit un point $M \in \mathcal{P}$ et soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de $\mathcal{P}$ orthogonaux à $\vec{n}$. Le couple $(\vec{u}; \vec{v})$ est alors une base de $\mathcal{P}$ et, puisque A et $M \in \mathcal{P}$, il existe deux réels λ et μ tels que $\overrightarrow{AM} = \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$. Ainsi, $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = (\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) \cdot \vec{n} = \lambda \vec{u} \cdot \vec{n} + \mu \vec{v} \cdot \vec{n} = 0$.

- Réciproquement, soit M un point de l'espace tel que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ et soit H le point d'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite $(M, \vec{n})$, qui existe car ils sont perpendiculaires. D'après le point précédent ($H \in \mathcal{P}$), $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n} = 0$ et l'on a $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = (\overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}) \cdot \vec{n} = \overrightarrow{AH} \cdot \vec{n} + \overrightarrow{HM} \cdot \vec{n} = 0 + \overrightarrow{HM} \cdot \vec{n}$ donc $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \iff \overrightarrow{HM} \cdot \vec{n} = 0$. Or $\overrightarrow{HM}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires donc $\overrightarrow{HM} = \vec{0}$ et $M = H \in \mathcal{P}$. $\square$



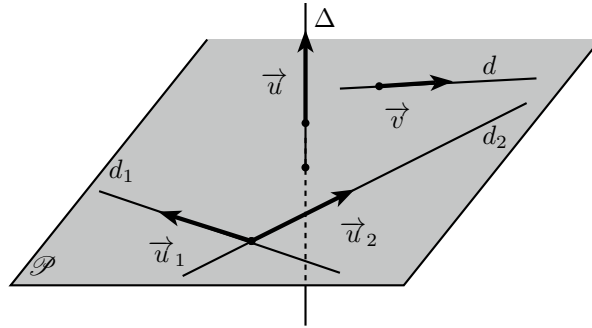
Un raisonnement analogue permet de démontrer le théorème 2 (p. 120) du même chapitre V.

Théorème 2 *Une droite est orthogonale à toute droite d'un plan si, et seulement si, elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.*

Autrement dit, une droite est perpendiculaire à un plan ssi elle est orthogonale à deux sécantes de ce plan.

Démonstration : Bien évidemment, un seul sens est à démontrer.

Soit Δ une droite orthogonale à deux droites sécantes d_1 et d_2 d'un plan $\mathcal{P}$, soit d une droite de $\mathcal{P}$ et l'on note $\vec{u}$, $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ et $\vec{v}$ des vecteurs directeurs respectifs. Les droites d_1 et d_2 étant sécantes, les vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ ne sont pas colinéaires et forment donc une base de $\mathcal{P}$. Ainsi, il existe deux réels λ et μ tels que $\vec{v} = \lambda \vec{u}_1 + \mu \vec{u}_2$. Par ailleurs, puisque Δ est orthogonale à d_1 et à d_2 , $\vec{u} \cdot \vec{u}_1 = \vec{u} \cdot \vec{u}_2 = 0$. D'où, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (\lambda \vec{u}_1 + \mu \vec{u}_2) = \lambda \vec{u} \cdot \vec{u}_1 + \mu \vec{u} \cdot \vec{u}_2 = 0$ et $\Delta \perp d$. $\square$



3.3 Plans parallèles, plans perpendiculaires

Nous rappelons la définition suivante.

Définition 5

Deux plans sont perpendiculaires si l'un contient une droite perpendiculaire à l'autre.

Nous admettons les propriétés suivantes, illustrées ci-dessous.

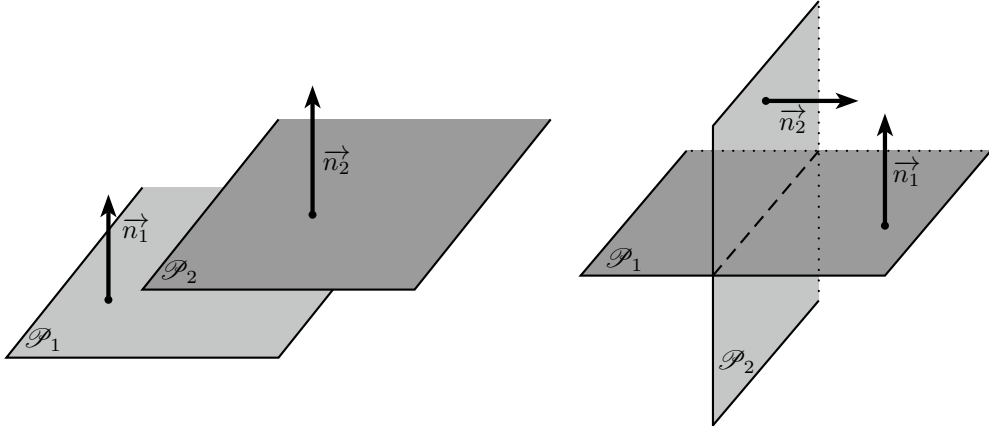
Propriété 10 *Deux plans sont parallèles si, et seulement si, un vecteur normal à l'un et un vecteur normal à l'autre sont colinéaires :*

$$\mathcal{P}_{\text{normal } \vec{n}_1} // \mathcal{P}_{\text{normal } \vec{n}_2} \iff \vec{n}_1 \text{ et } \vec{n}_2 \text{ colinéaires (non nuls).}$$

Propriété 11 *Deux plans sont perpendiculaires si, et seulement si, un vecteur normal à l'un et un vecteur normal à l'autre sont orthogonaux :*

$$\mathcal{P}_{\text{normal } \vec{n}_1} \perp \mathcal{P}_{\text{normal } \vec{n}_2} \iff \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0 \quad (\text{non nuls}).$$

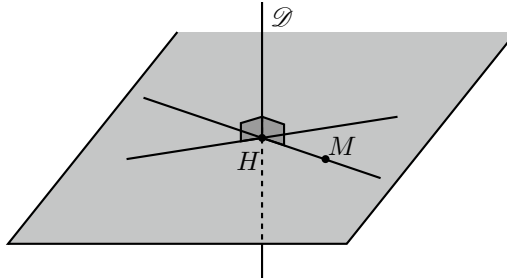
Remarque : Attention, si deux plans sont perpendiculaires, une droite de l'un n'est pas nécessairement perpendiculaire à l'autre (cf. leur droite d'intersection par exemple).



4 Projections orthogonales

4.1 Projection orthogonale d'un point sur une droite

Définition 6 Le projeté orthogonal H d'un point M sur une droite $\mathcal{D}$ est l'intersection de $\mathcal{D}$ avec le plan perpendiculaire à $\mathcal{D}$ en M .



Remarques : • Si $M \notin \mathcal{D}$, on a $(MH) \perp \mathcal{D}$.

• Si $\mathcal{D}$ est dirigée par le vecteur $\vec{u}$, H est le seul point de $\mathcal{D}$ vérifiant $\overrightarrow{MH} \cdot \vec{u} = 0$.
En effet, soient K et H deux tels points. On a
 $\overrightarrow{MH} \cdot \vec{u} = \overrightarrow{MK} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow (\overrightarrow{KM} + \overrightarrow{MH}) \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{KH} \cdot \vec{u} = 0 \Rightarrow \overrightarrow{KH} = \vec{0}$
car colinéaire à $\vec{u} \neq \vec{0}$.

Théorème 3 Le projeté orthogonal d'un point sur une droite est le point de $\mathcal{D}$ le plus proche de M .

On définit alors la distance entre M et $\mathcal{D}$ par $\text{dist}(M, \mathcal{D}) = MH$ où H est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$.

Démonstration : Soient $P \in \mathcal{D}$ et H le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$.

On a $\overrightarrow{MH} \perp \overrightarrow{HP}$ et $MP^2 = \|\overrightarrow{MP}\|^2 = \overrightarrow{MP}^2 = (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HP})^2$

$$MP^2 = \overrightarrow{MH}^2 + 2\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{HP} + \overrightarrow{HP}^2 = \overrightarrow{MH}^2 + 0 + \overrightarrow{HP}^2 \geq \overrightarrow{MH}^2 = MH^2. \quad \square$$

Pour culture, on donne la formule suivante.

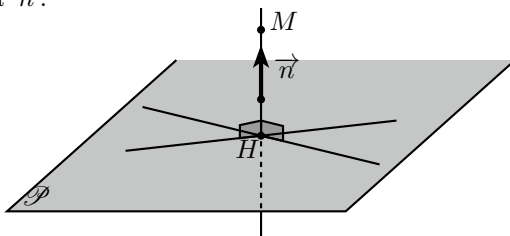
Propriété 12 *M est un point de l'espace, $\mathcal{D}$ une droite passant par le point A et de vecteur directeur $\vec{u}$.*

On a $\text{dist}(M; \mathcal{D}) = \left\| \overrightarrow{MA} - \frac{\overrightarrow{MA} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|^2} \vec{u} \right\|.$

4.2 Projection orthogonale d'un point sur un plan

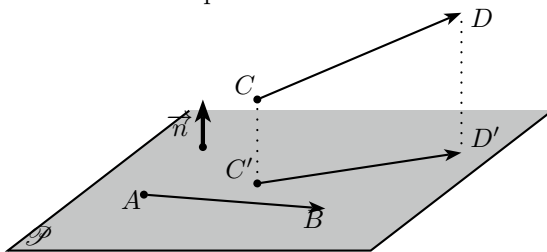
Définition 7 *Soient M un point de l'espace et $\mathcal{P}$ un plan de vecteur normal $\vec{n}$. Le **projeté orthogonal** de M sur le plan $\mathcal{P}$ est le point d'intersection de la droite $(M, \vec{n})$ et du plan $\mathcal{P}$.*

En effet, $(M, \vec{n})$ et $\mathcal{P}$ sont perpendiculaires donc sécants en un unique point. H est le seul point de $\mathcal{P}$ tel que $\overrightarrow{MH}$ et $\vec{n}$ soient colinéaires. En effet, si K est un tel autre point, $\overrightarrow{MH}, \vec{n}$ et $\overrightarrow{MK}$ sont colin. $\Rightarrow \overrightarrow{KM} + \overrightarrow{MH} = \overrightarrow{KH}$ et $\vec{n}$ sont colin. $\Rightarrow \overrightarrow{KH} = \vec{0}$ car $\overrightarrow{KH}$ est ortho. à $\vec{n}$.



Propriété 13 *Soient A, B, C et D quatre points de l'espace et soit $\mathcal{P}$ un plan contenant A et B. Si C' et D' sont les projetés orthogonaux de C et de D sur le plan $\mathcal{P}$, alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'}$.*

Autrement dit, on ne change pas le produit scalaire en prenant les projetés orthogonaux de l'un des vecteurs sur un plan contenant l'autre.



Démonstration : Si C' et D' sont les projetés orthogonaux de C et de D sur le plan $\mathcal{P}$, alors $\overrightarrow{CC'}$ et $\overrightarrow{D'D}$ sont normaux à $\mathcal{P}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{D'D} = 0$. Ainsi, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'D'} + \overrightarrow{D'D}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{D'D} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'}$. $\square$

Théorème 4 *Le projeté orthogonal d'un point sur un plan est le point du plan le plus proche de ce point. Autrement dit, si H est le projeté de M sur le plan $\mathcal{P}$, alors, pour tout point $P \in \mathcal{P}$, $MH \leq MP$.*

Démonstration : Soient $P \in \mathcal{P}$ et H le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$.

On a $\overrightarrow{MH} \perp \overrightarrow{HP}$ et $MP^2 = \|\overrightarrow{MP}\|^2 = \overrightarrow{MP}^2 = (\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HP})^2$

$$MP^2 = \overrightarrow{MH}^2 + 2\overrightarrow{MH} \cdot \overrightarrow{HP} + \overrightarrow{HP}^2 = \overrightarrow{MH}^2 + 0 + \overrightarrow{HP}^2 \geq \overrightarrow{MH}^2 = MH^2. \quad \square$$

Définition 8 *La distance d'un point M au plan $\mathcal{P}$ est la plus petite des longueurs entre un point du plan et le point M . C'est donc la distance entre M et son projeté orthogonal sur $\mathcal{P}$.*

Pour culture, on donne la formule suivante (il suffit de projeter A sur $(M, \vec{n})$).

Propriété 14 *Soient M un point de l'espace et $\mathcal{P}$ un plan passant par le point A et de vecteur normal $\vec{n}$.*

On a $dist(M; \mathcal{P}) = \frac{|\overrightarrow{MA} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}.$

Exercices

ORTHOGONALITÉ DANS L'ESPACE

Tout comme dans le plan, une des difficultés est d'utiliser la ou les expressions du produit scalaire bien adaptée(s) à la situation. Par ailleurs, plusieurs résolutions sont souvent possibles : choisissez la plus simple.

Exercice 1 L'espace est muni d'une base orthonormée.

- On donne les vecteurs $\vec{u}(1; \sqrt{3}; 0)$ et $\vec{v}(0; -\sqrt{3}; 1)$. Calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
Quelle est, à un degré près, la mesure de l'angle géométrique associé à $\vec{u}$ et $\vec{v}$?
- $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont tels que $\|\vec{a}\| = 5$, $\|\vec{b}\| = 3$ et $\vec{a} \cdot \vec{b} = -4$. Calculer :
(a) $2\vec{a} \cdot (\vec{b} - 3\vec{a})$, (b) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - 3\vec{b})$.

Exercice 2 Une pyramide régulière *GIZEH* d'arête a est de base *IZEH* de centre O . Donner, en fonction de a ,

- (a) $\vec{ZI} \cdot \vec{ZE}$, (b) $\vec{GI} \cdot \vec{GZ}$, (c) $\vec{GI} \cdot \vec{GE}$, (d) $\vec{IG} \cdot \vec{IE}$.

Exercice 3 *JUANGRIS* est un cube d'arête a , O est le centre de la face *GRIS* et K le milieu du segment $[AI]$. Calculer en fonction de a ,

- (a) $\vec{JG} \cdot \vec{IS}$, (b) $\vec{RG} \cdot \vec{NA}$, (c) $\vec{JO} \cdot \vec{AI}$, (d) $\vec{JO} \cdot \vec{IK}$.

Exercice 4 *ABCDEFGH* est un cube d'arête $a > 0$ et J est le milieu de $[FG]$. Déterminer les produits scalaires suivants en précisant l'expression et le plan utilisés.

- | | | |
|-------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| (a) $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ | (d) $\vec{AB} \cdot \vec{EH}$ | (g) $\vec{FJ} \cdot \vec{FA}$ |
| (b) $\vec{AB} \cdot \vec{EG}$ | (e) $\vec{AG} \cdot \vec{AB}$ | (h) $\vec{FJ} \cdot \vec{GD}$ |
| (c) $\vec{AB} \cdot \vec{AD}$ | (f) $\vec{AH} \cdot \vec{AB}$ | (i) $\vec{BJ} \cdot \vec{EH}$ |

Exercice 5 Soient P et Q deux points distincts de l'espace et K le milieu du segment $[PQ]$. Le plan médiateur du segment $[PQ]$ est le plan normal au vecteur $\vec{PQ}$ en K .

- Montrer que, pour tout point M de l'espace, $MP^2 = MQ^2 \iff \vec{KM} \cdot \vec{PQ} = 0$.
- Quel est l'ensemble des points équidistants de P et de Q ?

Exercice 6 *JANOUEL* est un cube d'arête 1.

Les points P et Q sont tels que $3\vec{JP} = \vec{JA}$ et $3\vec{AQ} = \vec{AN}$.

- Démontrer que les droites (OP) et (JQ) sont perpendiculaires.
- En déduire que la droite (OP) est perpendiculaire au plan (JUQ) .

Exercice 7 L'espace est muni d'une base orthonormée.

Pour quelles valeurs de α les vecteurs $\vec{u}(\frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{1}{3}; 2)$ et $\vec{v}(\alpha; 2\alpha; \frac{1}{2})$ sont-ils orthogonaux ? Et pour les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{w}(3\alpha; -\alpha; \alpha)$? Et pour $\vec{u}$ et $\vec{t}(\alpha\sqrt{3}; 3\alpha; 0)$?

Exercice 8 Soit $D(2, \sqrt{2}, \sqrt{2})$ un point de l'espace muni du repère orthonormé $(O; \vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC})$. Déterminer la mesure en radian des angles $\widehat{AOD}$, $\widehat{BOD}$ et $\widehat{COD}$.

Exercice 9 Déterminer l'ensemble des points P de la diagonale $[NE]$ du cube $NMFOSTER$ tels que l'angle $\widehat{MPO}$ soit droit.

Exercice 10 $LECORBUS$ est un cube d'arête 1. Le point I est le milieu de $[SO]$ et K est le centre de la face $RBUS$. On se propose de démontrer de deux manières que la droite (LK) est perpendiculaire au plan (RCI) .

1. Avec un repère. On choisit le repère orthonormé $(O; \vec{OL}, \vec{OC}, \vec{OS})$.
 - (a) Quelles sont les coordonnées des points L, R, I, K et C ?
 - (b) Calculer $\vec{LK} \cdot \vec{RC}$ et $\vec{LK} \cdot \vec{RI}$. Conclure.
2. Sans repère.
 - (a) En écrivant $\vec{LK} = \vec{LR} + \vec{RK}$ et $\vec{RC} = \vec{RU} + \vec{UC}$, calculer $\vec{LK} \cdot \vec{RC}$.
 - (b) En utilisant la relation de Chasles, calculer $\vec{LK} \cdot \vec{RI}$. Conclure.

Exercice 11 $FLWRIGHT$ est un cube d'arête 2.

1. Déterminer le projeté orthogonal du point I sur le plan (WRH) .
En déduire la distance de I à (WRH) .
2. Déterminer le projeté orthogonal du point G sur la droite (WR) .
En déduire la distance de G à (WR) .

Exercice 12 $TIKAL$ est une pyramide de sommet T . Y est le projeté orthogonal du point T sur le plan (KAI) et M est un point du segment $[TK]$. Démontrer que la parallèle d à (TY) en M coupe (KY) en un point X qui est le projeté orthogonal de M sur (KAI) .

Exercice 13 On donne $M(5, 2, 3)$, $N(1, 2, -1)$ et $P(-3, 2, 3)$ dans un repère orthonormé de l'espace. Déterminer la distance du point N à la droite (MP) .

Exercice 14 $BACH$ est un tétraèdre tel que BAC est équilatéral d'arête $a > 0$ et les autres faces sont des triangles rectangles en H .

1. Déterminer le produit scalaire $\vec{HB} \cdot \vec{HC}$.
2. Développer et réduire le produit scalaire $(\vec{HA} + \vec{AB}) \cdot (\vec{HA} + \vec{AC})$.
3. Exprimer la distance du point A au plan (BHC) en fonction de a .

Exercice 15 $OSCARNIM$ est un cube d'arête 1 et l'on munit l'espace du repère orthonormé $(O; \vec{OS}, \vec{OA}, \vec{OR})$.

1. Déterminer les coordonnées des points S, R, I et N .
2. En déduire les composantes des vecteurs $\vec{RS}$ et $\vec{RI}$.
3. On sait depuis les exercices du chapitre de géométrie précédent que l'intersection Y des médianes du triangle SRI vérifie $\vec{YS} + \vec{YR} + \vec{YI} = \vec{0}$.
Déterminer les coordonnées du point Y .
4. Déterminer le projeté orthogonal du point N sur le plan (SRI) .

5. En déduire la distance du point N au plan (SRI) .
6. Montrer que les points N , Y et A sont alignés puis préciser la position du point Y dans le cube.

Exercice 16 Soient les point $P(-2, -6, 5)$ et $Q(-4, 0, -3)$ dans l'espace muni d'un repère orthonormé d'origine O . On appelle R le projeté orthogonal de O sur la droite (PQ) et l'on pose $\overrightarrow{PR} = t\overrightarrow{PQ}$ où $t \in \mathbb{R}$.

1. Démontrer que $\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{PQ} = t\|\overrightarrow{PQ}\|^2$.
2. En déduire la valeur de t .
3. Calculer la distance du point O à la droite (PQ) .

Exercice 17 Intersection d'une sphère et d'un plan

Soient $r > 0$, I un point, $\mathcal{S}$ la sphère de centre I et de rayon r et $\mathcal{P}$ un plan.

1. Conjecturer les différentes intersections possibles entre $\mathcal{S}$ et $\mathcal{P}$.
2. On note d la distance entre I et $\mathcal{P}$.
 - (a) Quelle est l'intersection de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{P}$ si $d > r$?
 - (b) Quelle est l'intersection de $\mathcal{S}$ et $\mathcal{P}$ si $d = r$?
On dit dans ce cas que le plan est tangent à la sphère.
 - (c) Montrer que, si $d < r$, l'intersection entre la sphère $\mathcal{S}$ et le plan $\mathcal{P}$ est le cercle $\mathcal{C}$ de centre H , projeté orthogonal de I sur $\mathcal{P}$, et de rayon $\sqrt{r^2 - d^2}$.
3. Soient $A(2, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$ et $C(0, 0, 5)$ dans un r.o.n. $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace. Quel est le rayon de la sphère de centre O tangente au plan (BAC) ?

Exercice 18 Sphère circonscrite à un tétraèdre

$ABCD$ est un tétraèdre non aplati. L'objectif est de démontrer l'existence et l'unicité d'une sphère passant par les quatre sommets du tétraèdre. On utilisera le résultat obtenu à l'exercice 5 : le plan médiateur d'un segment, normal en son milieu, est l'ensemble des points équidistants des extrémités de ce segment.

1. Soit G le centre du cercle circonscrit au triangle BAC (l'intersection des médianes). On appelle d la droite perpendiculaire au plan (BAC) en G .
 - (a) Montrer que la droite d est incluse dans le plan médiateur du segment $[AB]$.
 - (b) En déduire que d est l'ensemble des points équidistants de A , B et C .
2. Soit $\mathcal{P}$ le plan médiateur du segment $[AD]$.
 - (a) Supposons que la droite d et le plan $\mathcal{P}$ sont parallèles. Démontrer qu'alors, la droite (AD) est parallèle au plan (BAC) .
 - (b) En déduire qu'il existe un unique point commun à la droite d et au plan $\mathcal{P}$.
 - (c) Conclure quant à l'existence et l'unicité de la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$.
3. Soient $B(2, 0, 0)$, $C(1, 3, 0)$ et $D(1, 0, 1)$ trois points de l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Démontrer que le point $E(1, \frac{4}{3}, 0)$ est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre $OBCD$ dont on déterminera le rayon.

Courrez donc à la page 453 réaliser le devoir n° 10.

ORTHOGONALITÉ DANS L'ESPACE

Exercice 1 L'espace est muni d'une base orthonormée.

1. La base étant orthonormée, on a $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times 0 - \sqrt{3}^2 + 0 = -3$. Par ailleurs, $\|\vec{u}\|^2 = \|\vec{v}\|^2 = 1^2 + \sqrt{3}^2 = 4$ donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v})$
 $\iff -3 = 4 \cos(\vec{u}, \vec{v}) \iff (\vec{u}, \vec{v}) = \cos^{-1}(-\frac{3}{4}) : (\vec{u}, \vec{v}) \simeq 139^\circ$.
2. (a) On a $2\vec{a} \cdot (\vec{b} - 3\vec{a}) = 2\vec{a} \cdot \vec{b} - 2 \times 3\vec{a}^2 = 2(-4) - 6 \times 5^2 = -158$.
 (b) $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} - 3\vec{b}) = \vec{a}^2 - 3\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} - 3\vec{b}^2 = 5^2 - 2(-4) - 3 \times 3^2 = 6$.

Exercice 2 Une pyramide régulière $GIZEH$ d'arête a est de base $IZEH$ de centre O .

- (a) $\vec{ZI} \cdot \vec{ZE} = 0$ puisque $(ZI) \perp (ZE)$.
- (b) $\vec{GI} \cdot \vec{GZ} = GI \cdot GZ \cdot \cos(\vec{GI}; \vec{GZ}) = a \cdot a \cdot \cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}a^2$ car GIZ est équilatéral.
- (c) $\vec{GI} \cdot \vec{GE} = 0$ car GIE et ZIE sont isométriques et ZIE est rectangle en Z .
- (d) $\vec{IG} \cdot \vec{IE} = \vec{IO} \cdot \vec{IE} = IO \cdot IE \cdot \cos(\vec{IO}; \vec{IE}) = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot 1 = a^2$ car O est le projeté $\perp$ de G sur (IE) .

Exercice 3 $JUANGRIS$ est un cube d'arête a , O est le centre de la face $GRIS$, K le milieu de $[AI]$.

- (a) $\vec{JG} \cdot \vec{IS} = \vec{JG} \cdot \vec{RG} = 0$ puisque $GRIS$ est un carré.
- (b) $\vec{RG} \cdot \vec{NA} = \vec{RG} \cdot \vec{GR} = -\vec{RG}^2 = -a^2$.
- (c) $\vec{JO} \cdot \vec{AI} = \vec{AI} \cdot \vec{AI} = a^2$ puisque J et O se projettent orthogonalement en A et I sur (AI) .
- (d) $\vec{JO} \cdot \vec{IK} = \vec{AI} \cdot (-\frac{1}{2}\vec{AI}) = -\frac{1}{2}a^2$ pour les mêmes raisons.

Exercice 4 $ABCDEFGH$ est un cube d'arête $a > 0$ et J est le milieu de $[FG]$.

- (a) $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AB} = a^2$ en projetant $\vec{AC}$ sur (AB) .
- (b) $\vec{AB} \cdot \vec{EG} = \vec{AB} \cdot \vec{AC} = a^2$.
- (c) $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = 0$ car $(AB) \perp (AD)$.
- (d) $\vec{AB} \cdot \vec{EH} = \vec{EF} \cdot \vec{EH} = 0$ car $(EF) \perp (EH)$.
- (e) $\vec{AG} \cdot \vec{AB} = \vec{AB} \cdot \vec{AB} = a^2$ en projetant $\vec{AG}$ sur (AB) .
- (f) $\vec{AH} \cdot \vec{AB} = 0$ car $(AB) \perp (AEH)$.
- (g) $\vec{FJ} \cdot \vec{FA} = 0$ car $(FJ) \perp (FAB)$.
- (h) $\vec{FJ} \cdot \vec{GD} = 0$ car $(FJ) \perp (GDH)$.

$$(i) \quad \overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{BJ} \cdot \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{FJ} \cdot \overrightarrow{FG} = \frac{a}{2} \cdot a = \frac{1}{2}a^2 \quad \text{en projetant } \overrightarrow{BJ} \text{ sur } (FG).$$

Exercice 5

Le plan médiateur du segment $[PQ]$ est le plan normal au vecteur $\overrightarrow{PQ}$ en leur milieu K .

- Voici une démonstration vectorielle : $MP^2 = MQ^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{MQ}^2 - \overrightarrow{MP}^2 = 0$
 $\Leftrightarrow (\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MP}) \cdot (\overrightarrow{MQ} - \overrightarrow{MP}) = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KQ} + \overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KP}) \cdot (\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{MQ}) = 0$
 $\Leftrightarrow (2\overrightarrow{MK} + \vec{0}) \cdot \overrightarrow{PQ} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{KM} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0.$
- Ainsi, M équidistant de P et Q ssi $\overrightarrow{KM}$ et $\overrightarrow{PQ}$ sont orthogonaux
ssi $(KM) \perp (PQ)$ ou $M = K$ ssi $M \in \mathcal{P}_{\text{Médiateur}}[PQ]$.

Exercice 6 *JANOUEVEL* est un cube d'arête 1. $\overrightarrow{JP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{JA}$ et $\overrightarrow{AQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AN}$.

$$\begin{aligned} 1. \text{ On a } \overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{JQ} &= (\overrightarrow{OJ} + \overrightarrow{JP}) \cdot (\overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AQ}) \\ &= \overrightarrow{OJ} \cdot \overrightarrow{JA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{JA} \cdot \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{OJ} \cdot \frac{1}{3}\overrightarrow{AN} + \frac{1}{3}\overrightarrow{JA} \cdot \frac{1}{3}\overrightarrow{AN} \\ &= 0 + \frac{1}{3} \cdot 1^2 - \frac{1}{3}\overrightarrow{JO} \cdot \overrightarrow{AN} + \frac{1}{9} \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

et les droites (OP) et (JQ) sont orthogonales.

Coplanaires, elles sont perpendiculaires.

- On a $(JU) \perp (JANO)$ donc $(JU) \perp (OP)$. Puisque (OP) est orthogonale à deux sécantes de (JUQ) , $(OP) \perp (JUQ)$.

Exercice 7 Dans une b.o.n., on a

$$\begin{aligned} \vec{u} \left(\frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{1}{3}; 2 \right) \perp \vec{v} \left(\alpha; 2\alpha; \frac{1}{2} \right) &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3}\alpha - \frac{1}{3} \cdot 2\alpha + 2 \cdot \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{3}{2-\sqrt{3}}, \\ \vec{u} \perp \vec{w} (3\alpha; -\alpha; \alpha) &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot 3\alpha + \frac{1}{3}\alpha + 2\alpha = 0 \Leftrightarrow (\sqrt{3} + \frac{1}{3} + 2)\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \quad \text{et} \\ \vec{u} \perp \vec{t} (\alpha\sqrt{3}; 3\alpha; 0) &\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3}\alpha - \frac{1}{3} \cdot 3\alpha + 2 \times 0 = 0 \Leftrightarrow (1-1)\alpha = 0 \quad \text{qui est vrai} \\ &\text{pour tout réel } \alpha. \end{aligned}$$

Exercice 8 Soit $D(2, \sqrt{2}, \sqrt{2})$ un point de l'espace muni du repère orthonormé $(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$.

On a $\overrightarrow{OA}(1, 0, 0)$, $\overrightarrow{OB}(0, 1, 0)$, $\overrightarrow{OC}(0, 0, 1)$, et $\overrightarrow{OD}(2, \sqrt{2}, \sqrt{2})$ donc, en utilisant l'expression du produit scalaire dans ce r.o.n., on a $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD} = 2$, $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD} = \sqrt{2}$ et $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD} = \sqrt{2}$. Puisque $\|\overrightarrow{OA}\| = \|\overrightarrow{OB}\| = \|\overrightarrow{OC}\| = 1$ et $\|\overrightarrow{OD}\| = \sqrt{2^2 + \sqrt{2}^2 + \sqrt{2}^2} = 2\sqrt{2}$, l'expression des produits scalaires non nuls en fonction des normes et des angles donne $\cos(\widehat{AOD}) = \frac{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD}}{\|\overrightarrow{OA}\| \|\overrightarrow{OD}\|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\cos(\widehat{BOD}) = \frac{\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OD}}{\|\overrightarrow{OB}\| \|\overrightarrow{OD}\|} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$, et $\cos(\widehat{COD}) = \frac{\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{OD}}{\|\overrightarrow{OC}\| \|\overrightarrow{OD}\|} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$. D'où, $\widehat{AOD} = 45^\circ$ et $\widehat{BOD} = \widehat{COD} = 60^\circ$.

Exercice 9 Points P de la diagonale $[NE]$ du cube *NMFOSTER* tels que l'angle $\widehat{MPO}$ soit droit.

En supposant que le cube est d'arête 1, le repère $(N; \overrightarrow{NM}, \overrightarrow{NO}, \overrightarrow{NS})$ est orthonormé et l'on a $E(1, 1, 1)$ donc si $P \in [NE]$, il est de la forme $P(p, p, p)$ pour $p \in [0; 1]$. On a alors, d'après l'expression du produit scalaire dans un r.o.n., $\overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{OP} = (p-1, p, p) \cdot (p, p-1, p) = p(p-1) + (p-1)p + p^2 = p(3p-2)$ et $\widehat{MPO}$ est droit ssi $p = 0$ ou $p = \frac{2}{3}$ ssi P est en N ou P est au deux-tiers de la diagonale en partant de N .

Exercice 10 *LECORBUS* est un cube d'arête 1.

I est le milieu de $[SO]$ et K le centre de la face $RBUS$.

1. (a) Dans le r.o.n. $(O; \overrightarrow{OL}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OS})$, on a $L(1, 0, 0)$, $R(1, 0, 1)$, $I(0, 0, \frac{1}{2})$, $K(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$ et $C(0, 1, 0)$ puisque, par exemple, $\overrightarrow{OR} = 1\overrightarrow{OL} + 0\overrightarrow{OC} + 1\overrightarrow{OS}$.

- (b) Alors, $\overrightarrow{LK}(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1)$, $\overrightarrow{RC}(-1, 1, -1)$ et $\overrightarrow{RI}(0, -1, \frac{1}{2})$.

D'où, $\overrightarrow{LK} \cdot \overrightarrow{RC} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 1 = 0$ et $\overrightarrow{LK} \cdot \overrightarrow{RI} = 0 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0$.

Ainsi, (LK) est orthogonale à deux sécantes du plan (RCI) et $(LK) \perp (RCI)$.

2. (a) On a $\overrightarrow{LK} \cdot \overrightarrow{RC} = (\overrightarrow{LR} + \overrightarrow{RK}) \cdot (\overrightarrow{RU} + \overrightarrow{UC})$
 $= \overrightarrow{LR} \cdot \overrightarrow{RU} + \overrightarrow{LR} \cdot \overrightarrow{UC} + \overrightarrow{RK} \cdot \overrightarrow{RU} + \overrightarrow{RK} \cdot \overrightarrow{UC}$
 $= 0 - \overrightarrow{LR} \cdot \overrightarrow{CU} + \frac{1}{2}\overrightarrow{RU} \cdot \overrightarrow{RU} + 0 = -1^2 + \frac{1}{2}(\sqrt{2})^2 = 0$.

- (b) De même, $\overrightarrow{LK} \cdot \overrightarrow{RI} = (\overrightarrow{LS} + \overrightarrow{SK}) \cdot (\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{SI})$
 $= \overrightarrow{LS} \cdot \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{LS} \cdot \overrightarrow{SI} + \overrightarrow{SK} \cdot \overrightarrow{RS} + \overrightarrow{SK} \cdot \overrightarrow{SI}$
 $= \overrightarrow{RS}^2 - \frac{1}{2}\overrightarrow{OS} \cdot \overrightarrow{OS} + \frac{1}{2}\overrightarrow{SR} \cdot \overrightarrow{RS} + 0 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0$.

Ainsi, (LK) est orthogonale à deux sécantes du plan (RCI) et $(LK) \perp (RCI)$.

Exercice 11 *FLWRIGHT* est un cube d'arête 2.

1. On a $(IT) \perp (TR)$ et $(IT) \perp (TH)$ donc $(IT) \perp (THR)$ et T est le projeté orthogonal de I sur le plan (WRH) d'où $\text{dist}(I; (WRH)) = IT = 2$.
2. On a $(WR) \perp (WH)$ et $(WR) \perp (WL)$ donc $(WR) \perp (WHL)$ et $(GW) \perp (WR)$: W est le projeté orthogonal de G sur la droite (WR) et $\text{dist}(G; (WR)) = GW = 2\sqrt{2}$.

Exercice 12 *TIKAL* est une pyramide. Les droites d et (TY) sont parallèles donc coplanaires : soit $\mathcal{P}$ le plan les contenant. On a $M \in d$ et $T \in (TY)$ donc $(MT) \in \mathcal{P}$ et $K \in \mathcal{P}$. Puisque Y est le projeté orthogonal de T sur (KAI) , $(TY) \perp (KY)$ et, dans le plan $\mathcal{P}$, $d // (TY)$ donc $d \perp (KY)$: elles sont sécantes, en un point $X \in (KAI)$.

Par définition du projeté orthogonal, $\overrightarrow{TY}$ est normal au plan (KAI) et puisque $\overrightarrow{MX}$ et $\overrightarrow{TY}$ sont colinéaires, $\overrightarrow{MX}$ est aussi normal à (KAI) donc $(MX) \perp (KAI)$. On a donc $X \in (KAI)$ et $(MX) \perp (KAI)$: X est bien le projeté orthogonal de M sur (KAI) .

Exercice 13 On donne $M(5, 2, 3)$, $N(1, 2, -1)$ et $P(-3, 2, 3)$ dans un r.o.n. donc $MN^2 = (x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2 + (z_N - z_M)^2 = (-4)^2 + 0^2 + (-4)^2 = 32$,

$$PN^2 = (x_N - x_P)^2 + (y_N - y_P)^2 + (z_N - z_P)^2 = 4^2 + 0^2 + (-4)^2 = 32 \quad \text{et}$$

$$PM^2 = (x_P - x_M)^2 + (y_P - y_M)^2 + (z_P - z_M)^2 = (-8)^2 + 0^2 + 0^2 = 64.$$

Le triangle MNP est donc rectangle en N et son aire est $\mathcal{A} = \frac{MN \times PN}{2} = \frac{\sqrt{32} \times \sqrt{32}}{2} = 16$.

Soit H le projeté orthogonal de N sur la droite (MP) . On a $\mathcal{A} = \frac{NH \cdot MP}{2}$ et la distance du point N à la droite (MP) est précisément la distance $NH = \frac{2\mathcal{A}}{MP} = \frac{2 \times 16}{\sqrt{64}} = 4$.

Exercice 14 *BACH* est un tétraèdre, BAC est équilatéral d'arête a , les autres faces sont rectangles en H .

1. Le triangle HBC est rectangle en H donc $\overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC} = 0$.

2. On a, en projetant B et C sur (AH) ,
 $(\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HA} \cdot \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$

$$\begin{aligned}
 (\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AC}) &= HA^2 - \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\
 &= HA^2 - \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{AH} + AB \cdot AC \cos(\widehat{BAC}) \\
 &= HA^2 - HA^2 - HA^2 + AB \cdot AC \cos(60^\circ) \\
 (\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AC}) &= \frac{1}{2}a^2 - HA^2.
 \end{aligned}$$

D'après la question précédente, on a $\frac{1}{2}a^2 - HA^2 = \overrightarrow{HB} \cdot \overrightarrow{HC} = 0$ et $HA^2 = \frac{1}{2}a^2$.

3. Puisque les triangles AHB et AHC sont rectangles en H , $(AH) \perp (HB)$ et $(AH) \perp (HC)$ donc $(AH) \perp (HBC)$ et H est le projeté orthogonal de A sur le plan HBC . La distance de A au plan HBC est donc $AH = \sqrt{\frac{1}{2}a^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.

Exercice 15 *OSCARNIM* est un cube d'arête 1 et l'on munit l'espace du repère orthonormé $(O; \overrightarrow{OS}, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OR})$.

1. Trivialement $S(1, 0, 0)$, $R(0, 0, 1)$, $I(1, 1, 1)$ et $N(1, 0, 1)$.
2. Ainsi, $\overrightarrow{RS}(1, 0, -1)$ et $\overrightarrow{RI}(1, 1, 0)$.
3. Posons $Y(x, y, z)$. On a $\overrightarrow{SY}(x-1, y, z)$, $\overrightarrow{RY}(x, y, z-1)$, $\overrightarrow{YI}(x-1, y-1, z-1)$ et $\overrightarrow{YS} + \overrightarrow{YR} + \overrightarrow{YI} = \vec{0}$

$$\iff \begin{cases} x-1+x+x-1=0 \\ y+y+y-1=0 \\ z+z-1+z-1=0 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x=2 \\ 3y=1 \\ 3z=2 \end{cases} \text{ et } Y\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right).$$
4. On a $\overrightarrow{YN}\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ d'où $\overrightarrow{YN} \cdot \overrightarrow{RS} = \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 0 + \frac{1}{3}(-1) = 0$
et $\overrightarrow{YN} \cdot \overrightarrow{RI} = \frac{1}{3} \times 1 - \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{3} \times 0 = 0$.
La droite (YN) est ainsi orthogonale à deux sécantes du plan (SRI) , (RS) et (RI) : elle est donc perpendiculaire au plan (SRI) et le projeté orthogonal de N sur le plan (SRI) est le point $Y \in (SRI)$.
5. La distance du point N au plan (SRI) est alors la distance
 $NY = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$
6. On a $\overrightarrow{NA}(-1, 1, -1)$ et $\overrightarrow{NY}\left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$ donc $\overrightarrow{NA} = 3\overrightarrow{NY}$: ils sont colinéaires donc les points N , Y et A sont alignés. Le point Y est ainsi au tiers de la grande diagonale $[NA]$ du cube, en partant de N .

Exercice 16 Soient $P(-2, -6, 5)$ et $Q(-4, 0, -3)$ dans un r.o.n. d'origine O , R le projeté orthogonal de O sur la droite (PQ) et $\overrightarrow{PR} = t\overrightarrow{PQ}$ où $t \in \mathbb{R}$.

1. R est le projeté orthogonal de O sur la droite (PQ) donc
 $\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PR} \cdot \overrightarrow{PQ} = t\overrightarrow{PQ} \cdot \overrightarrow{PQ} = t\|\overrightarrow{PQ}\|^2.$
2. On a $\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{PQ} = (2, 6, -5) \cdot (-2, 6, -8) = -4 + 36 + 40 = 72$ et
 $PQ^2 = (-2)^2 + 6^2 + (-8)^2 = 104$ d'où $t = \frac{\overrightarrow{PO} \cdot \overrightarrow{PQ}}{PQ^2} = \frac{72}{104} = \frac{9}{13}.$
3. Ainsi, $\overrightarrow{PR} = \frac{9}{13}\overrightarrow{PQ} \implies \begin{cases} x_R = x_P + \frac{9}{13}x_{PQ} = -2 + \frac{9}{13}(-2) = -\frac{44}{13} \\ y_R = y_P + \frac{9}{13}y_{PQ} = -6 + \frac{9}{13} \cdot 6 = -\frac{24}{13} \\ z_R = z_P + \frac{9}{13}z_{PQ} = 5 + \frac{9}{13}(-8) = -\frac{7}{13} \end{cases}$ et la distance
du point O à la droite (PQ) est $OR = \sqrt{\left(-\frac{44}{13}\right)^2 + \left(-\frac{24}{13}\right)^2 + \left(-\frac{7}{13}\right)^2} = \frac{\sqrt{2561}}{13}.$

Exercice 17 Intersection d'une sphère et d'un plan

Soient $r > 0$, I un point, $\mathcal{S}$ la sphère de centre I et de rayon r et $\mathcal{P}$ un plan.

- De manière analogue à l'intersection d'une droite et d'un cercle dans le plan, il semble que l'intersection d'une sphère et d'un plan soit la plupart du temps vide mais elle peut être un cercle ou même réduite à un seul point.
- On note d la distance entre I et $\mathcal{P}$. La sphère de centre I et de rayon r est l'ensemble de tous les points de l'espace à distance r du point I .
 - Si $d > r$, tous les points de $\mathcal{P}$ sont à distance de I strictement supérieure au rayon de la sphère donc $\mathcal{P} \cap \mathcal{S} = \emptyset$.
 - Si $d = r$, il n'existe qu'un seul point de $\mathcal{P}$ dans $\mathcal{S}$, celui qui réalise la distance de I à $\mathcal{P}$ (l'unicité est donnée par le théorème de Pythagore). L'intersection de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{S}$ est donc réduite à un point.
 - Pour $d < r$. Soit $M \in \mathcal{P} \cap \mathcal{S}$. $M \in \mathcal{P}$ donc $\overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{HM} = 0$: $(IH) \perp \mathcal{P}$ et MIH est rectangle en H . Ainsi, $IM^2 = HM^2 + HI^2$. Puisque $M \in \mathcal{S}$, $IM = r$ et $HM^2 = IM^2 - HI^2 = r^2 - d^2$ d'où $HM = \sqrt{r^2 - d^2}$: M est sur le cercle $\mathcal{C}$ de centre H de rayon $\sqrt{r^2 - d^2}$.
Réciproquement, si $M \in \mathcal{P}$ est sur le cercle $\mathcal{C}$ de centre H de rayon $\sqrt{r^2 - d^2}$, le théorème de Pythagore dans le triangle MIH donne $IM^2 = HM^2 + HI^2 = r^2 - d^2 + d^2 = r^2$ et M est bien sur la sphère de centre I et de rayon r .

- Soient $A(2, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$ et $C(0, 0, 5)$ dans un r.o.n. $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace. Le rayon de la sphère de centre O tangente au plan (BAC) est la distance du point O au plan (BAC) . On cherche donc $H(x, y, z) \in (BAC)$ tel que $(OH) \perp (AB)$ et $(OH) \perp (AC)$. On a $\begin{cases} \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \end{cases}$ donc

$$\begin{cases} (x, y, z) \cdot (-2, 3, 0) = 0 \\ (x, y, z) \cdot (-2, 0, 5) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -2x + 3y = 0 \\ -2x + 5z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{2}{3}x \\ z = \frac{2}{5}x \end{cases}$$
 et $H(x, \frac{2}{3}x, \frac{2}{5}x)$.

De plus, $H \in (BAC)$ donc il existe deux réels λ et μ tels que $\overrightarrow{AH} = \lambda \overrightarrow{AB} + \mu \overrightarrow{AC}$

$$\text{d'où } \begin{cases} x - 2 = \lambda(-2) + \mu(-2) \\ \frac{2}{3}x - 0 = \lambda \cdot 3 + \mu \cdot 0 \\ \frac{2}{5}x - 0 = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 5 \end{cases} \iff \begin{cases} \mu = \frac{2}{25}x \\ \lambda = \frac{2}{9}x \\ x - 2 = -\frac{4}{9}x - \frac{4}{25}x \end{cases}$$

$$\implies x = \frac{2}{1 + \frac{4}{9} + \frac{4}{25}} = \frac{2 \times 225}{361} = \frac{450}{361}.$$

Le rayon de la sphère tangente au plan (BAC) est donc

$$d = r = \sqrt{\left(\frac{450}{361}\right)^2 + \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{450}{361}\right)^2 + \left(\frac{2}{5} \cdot \frac{450}{361}\right)^2} = \frac{30}{19}.$$

Exercice 18 Sphère circonscrite à un tétraèdre non aplati $ABCD$.

- Soit G le centre du cercle circonscrit au triangle BAC (l'intersection des médianes). On appelle d la droite perpendiculaire au plan (BAC) en G .
 - Par construction, $d \perp (BAC)$ et $G \in (BAC)$ donc $d \perp (GA)$ et $d \perp (GB)$ d'où, pour tout $M \in d$, $MA^2 = \overrightarrow{MA}^2 = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2$

$$MA^2 = \overrightarrow{MG}^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA}^2 = \overrightarrow{MG}^2 + 2 \times 0 + \overrightarrow{GB}^2$$

$$MA^2 = \overrightarrow{MG}^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GA}^2 = (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 = \overrightarrow{MB}^2 = MB^2.$$

M est équidistant de A et de B donc M appartient au plan médiateur de $[AB]$: $d \subset \mathcal{P}_{\text{Méd}[AB]}$.

- (b) Par permutation des points A , B et C , on peut démontrer que d est incluse dans les plans médiateurs des segments $[AB]$, $[AC]$ et $[BC]$. Ces trois plans n'étant pas confondus (les milieux de ces trois segments sont distincts), leur intersection ne peut être qu'une droite ou un point. d est donc bien cette intersection et les points de d sont bien les points équidistants des trois sommets du triangle BAC .
2. (a) Si la droite d , dirigée par $\vec{u}$, et le plan $\mathcal{P}$, plan médiateur du segment $[AD]$, sont parallèles, alors $\overrightarrow{AD}$, normal à $\mathcal{P}$, est orthogonal à $\vec{u}$ donc $(AD) \perp d$. Puisque $d \perp (BAC)$, on a $(AD) // (BAC)$.
- (b) Puisque le tétraèdre n'est pas aplati, on ne peut avoir $(AD) \subset (BAC)$ donc d et $\mathcal{P}$ ne peuvent être parallèles. Ils sont donc sécants, en un unique point O .
- (c) Le point O est dans le plan $\mathcal{P}$, il est donc équidistant de A et de D . Puisque O est sur la droite d , il est équidistant de A , B et C . Ainsi, il existe un unique point équidistant des quatre sommets du tétraèdre $ABCD$ et donc une unique sphère circonscrite à ce tétraèdre, de centre ce point et de rayon, cette distance.
3. On a $OE^2 = (x_E - x_O)^2 + (y_E - y_O)^2 + (z_E - z_O)^2 = 1^2 + (\frac{4}{3})^2 + 0^2 = \frac{25}{9}$,
 $OB^2 = (x_E - x_B)^2 + (y_E - y_B)^2 + (z_E - z_B)^2 = (1 - 2)^2 + (\frac{4}{3})^2 + 0^2 = \frac{25}{9}$,
 $OC^2 = (x_E - x_C)^2 + (y_E - y_C)^2 + (z_E - z_C)^2 = (1 - 1)^2 + (\frac{4}{3} - 3)^2 + 0^2 = \frac{25}{9}$,
 $OD^2 = (x_E - x_D)^2 + (y_E - y_D)^2 + (z_E - z_D)^2 = (1 - 1)^2 + (\frac{4}{3})^2 + (-1)^2 = \frac{25}{9}$
donc $OE = OB = OC = OD$: le point E est équidistant des points O , B , C et D .
- De plus, ces quatre points ne sont pas coplanaires (O , B , C dans le plan $z = 0$ mais pas D) donc le tétraèdre $OBCE$ n'est pas aplati.
- E est donc le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre $OBCE$, sphère de rayon $\sqrt{\frac{25}{9}} = \frac{5}{3}$.

Chapitre IX

LOGARITHME NÉPÉRIEN

Sommaire

1	La fonction exponentielle : rappels	206
2	Le logarithme népérien	206
3	Propriétés algébriques du logarithme népérien	207
4	La fonction logarithme népérien	207
4.1	Étude de la fonction logarithme népérien	207
4.2	Croissance logarithmique	210
4.3	Dérivée de $\ln(u)$	211
5	Autour du logarithme	212
5.1	Fonction puissance	212
5.2	Logarithme décimal	212
	Exercices	214
	Corrigé des exercices	222

Le logarithme népérien est une nouvelle fonction, liée à l'exponentielle. Elle est utile entre autres parce qu'elle permet de représenter des nombres dont les ordres de grandeurs sont très différents. Elle possède aussi des propriétés algébriques remarquables. Enfin, sa dérivée est une fonction usuelle très importante.

Les logarithmes ont des applications dans de nombreux domaines (cf. § 5.2).

Le scientifique écossais John Napier (1550-1617) a inventé les logarithmes afin de transformer produits en sommes, racine carrée en division par 2, etc. Deux cents ans après leur invention, Laplace[†] dira que les logarithmes, en abrégant leur labeur, doublent la vie des astronomes. Les calculatrices n'ont que récemment remplacé les tables logarithmiques.

†. Prestigieux mathématicien dont le nom est inscrit sur la non moins prestigieuse tour Eiffel.

1 La fonction exponentielle : rappels

La fonction exponentielle est l'unique fonction définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ étant sa propre dérivée et valant 1 en 0. L'image d'un réel x par la fonction exponentielle est notée $\exp(x)$ ou e^x . La fonction exponentielle est strictement positive, strictement croissante et strictement convexe sur $\mathbb{R}$. Elle l'emporte sur tous les polynômes en l'infini. La fonction exponentielle transforme les sommes en produits, les différences en quotients, les produits en puissances.

$$\begin{aligned} \forall (x, y, n) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{Z}, \quad & \exp'(x) = \exp(x), \quad \exp(0) = 1, \quad \exp(x) > 0, \quad (e^u)' = u'e^u, \\ x < y \iff & \exp(x) < \exp(y), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty, \\ e^{x+y} = e^x \cdot e^y, \quad & e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}, \quad e^{nx} = (e^x)^n. \end{aligned}$$

2 Le logarithme népérien

Théorème 1

Soit a un réel strictement positif. Il existe un unique réel b tel que $e^b = a$.

Démonstration : On a $a \in]0; +\infty[= \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x; \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \right]$. Puisque la fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, le théorème des valeurs intermédiaires strict. permet d'affirmer que a admet un unique antécédent dans $\mathbb{R}$ par la fonction exponentielle. $\square$

Définition 1 Soit a un réel strictement positif. On appelle **logarithme népérien** de a , et l'on note $\ln(a)$, l'unique réel dont l'exponentielle vaut a .

On définit ainsi la fonction $\ln : x \in]0; +\infty[\mapsto \ln(x) \in \mathbb{R}$ tel que $e^{\ln(x)} = x$.

Remarque : Deux valeurs importantes : $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$ puisque $1 = e^0$ et $e = e^1$.

Le théorème suivant découle de la définition du logarithme népérien.

Théorème 2 Soient a et b deux réels tels que $a > 0$.

On a $\ln(e^b) = b$ et $\ln(a) = b \iff a = e^b$.

Démonstration : • Puisque $e^{\ln(x)} = x$, on a $e^{\ln(e^b)} = e^b$.

Comme $e^x = e^y \iff x = y$, on en déduit que $\ln(e^b) = b$.

• Si $b = \ln(a)$ alors $e^b = e^{\ln(a)} = a$.

Réciproquement, si $a = e^b$ alors $\ln(a) = \ln(e^b) = b$. $\square$

On dit que les fonctions exponentielle et logarithme népérien sont *réciproques* l'une de l'autre. Tout comme les fonctions carré et racine carrée le sont sur $[0; +\infty[$: pour $x \geq 0$, $(\sqrt{x})^2 = \sqrt{x^2} = x$ et $e^{\ln(x)} = \ln(e^x) = x$. Ceci aura des conséquences graphiques (cf. page 209).

3 Propriétés algébriques du logarithme népérien

Théorème 3 Pour tous réels a et b strictement positifs, $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

Autrement dit, le **logarithme népérien transforme les produits en sommes**.

Démonstration : $e^{\ln(a)+\ln(b)} = e^{\ln(a)} \times e^{\ln(b)} = a \times b$
donc $\ln(a) + \ln(b) = \ln(e^{\ln(a)+\ln(b)}) = \ln(a \times b)$. $\square$

Théorème 4

- Pour tous réels a et b strictement positifs,
 $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$ et $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$.
- Pour tous réels $a_1, a_2, \dots, a_n \in]0; +\infty[$,
 $\ln(a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n) = \ln(a_1) + \ln(a_2) + \dots + \ln(a_n)$.
- Pour tout réel a strictement positif et tout entier **relatif** n , $\ln(a^n) = n \ln(a)$.
- Pour tout réel a strictement positif, $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a)$.

Démonstration : Toutes découlent du théorème 3.

- $\ln(a) = \ln\left(\frac{a}{b} \times b\right) = \ln\left(\frac{a}{b}\right) + \ln(b)$. Et $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln(1) - \ln(b) = 0 - \ln(b)$.
- Une simple récurrence en utilisant des parenthèses $(a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n) \times a_{n+1}$ donne le résultat.
- Si $n > 0$, on utilise le point précédent avec $a_1 = \dots = a_n = a$.
En $n = 0$, $\ln(a^0) = \ln(1) = 0 = 0 \ln(a)$. Si $n < 0$, $-n > 0$
et $\ln(a^n) = \ln\left[\left(\frac{1}{a}\right)^{-n}\right] = -n \ln\left[\frac{1}{a}\right] = -n(-\ln(a)) = n \ln(a)$.
- On a $\ln(a) = \ln[(\sqrt{a})^2] = 2 \ln(\sqrt{a})$. $\square$

Exemple : $\ln(\sqrt{5} - \sqrt{2}) + \ln(3^5) + \ln(\sqrt{5} + \sqrt{2}) + \ln(\sqrt{3})$
 $= \ln[(\sqrt{5} - \sqrt{2})(\sqrt{5} + \sqrt{2})] + 5 \ln(3) + \frac{1}{2} \ln(3)$
 $= \ln(5 - 2) + 5 \ln(3) + \frac{1}{2} \ln(3) = \frac{13}{2} \ln(3)$.

Le logarithme népérien est en fait « la seule » fonction continue transformant les produits en sommes (cf. devoir *Équations fonctionnelles* p.457) :

Si f est une fonction continue sur $]0; +\infty[$ telle que, pour tous réels x et y ,
 $f(x \times y) = f(x) + f(y)$ alors il existe un réel k tel que, pour tout $x > 0$, $f(x) = k \ln(x)$.

4 La fonction logarithme népérien

4.1 Étude de la fonction logarithme népérien

Nous savons déjà que la fonction logarithme népérien est définie sur $]0; +\infty[$.

Propriété 1 La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0; +\infty[$: $\forall a \text{ et } b, \quad 0 < a < b \iff \ln(a) < \ln(b)$.

Démonstration : Pour $a, b \in]0; +\infty[$,

$$\ln(a) < \ln(b) \xrightarrow{\text{exp strict.}} e^{\ln(a)} < e^{\ln(b)} \iff a < b. \quad \square$$

Théorème 5 La fonction logarithme népérien est continue et dérivable sur $]0; +\infty[$ et de fonction dérivée la fonction inverse :

$$\forall x \in]0; +\infty[, \quad (\ln(x))' = \frac{1}{x}.$$

Remarque : Nous savions que $(x^n)' = nx^{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}^*$. Autrement dit, x^3 est la dérivée de $\frac{1}{4}x^4$, x^2 est la dérivée de $\frac{1}{3}x^3$, x est la dérivée de $\frac{1}{2}x^2$, $1 = x^0$ est la dérivée de x^1 , 0 est la dérivée de x^0 et $\frac{1}{x^3} = x^{-3}$ est la dérivée de $-\frac{1}{2}x^{-2}$, $\frac{1}{x^2} = x^{-2}$ est la dérivée de $-\frac{1}{x} = -x^{-1}$... Mais $\frac{1}{x} = x^{-1}$ n'avait pas de primitive connue. Désormais, nous en avons une : $\ln(x)$.

Il nous faut d'abord démontrer le lemme suivant.

Lemme 1 Pour tout réel $x > 0$, $\ln(x) \leq x - 1$.

Démonstration : Par l'absurde, supposons qu'il existe un $x > 0$ tel que $\ln(x) > x - 1$. Par stricte croissance de la fonction exponentielle, on aurait $e^{\ln(x)} = x > e^{x-1}$ et, en posant $y = x - 1$, on aurait $y + 1 > e^y$ ce qui contredirait un lemme démontré en classe de première dans le chapitre sur la fonction exponentielle et revu en exemple d'utilisation de la convexité en page 161. $\square$

Démonstration : • Montrons le théorème 5 en prouvant premièrement que la fonction $\ln$ est continue en 1.

◦ Pour $x > 1$, on a $\ln(1) = 0 < \ln(x) \leq x - 1$ d'après la croissance du logarithme et le lemme précédent. Puisque $\lim_{x \rightarrow 1^+} (x - 1) = 0$, le théorème des gendarmes affirme que $\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x) = 0 = \ln(1)$.

◦ Pour $0 < x < 1$, $\frac{1}{x} > 1$ et $0 < -\ln(x) = \ln(\frac{1}{x}) \leq \frac{1}{x} - 1$. Puisque $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x} - 1 = 0$, ce même théorème affirme que

$-\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} -\ln(x) = 0 = \ln(1)$. Ainsi, $\lim_{x \rightarrow 1} \ln(x) = \ln(1)$ et $\ln$ est continue en 1.

• Montrons ensuite que le logarithme népérien est continu en $a > 0$.

On a $\ln(a + h) = \ln(a(1 + \frac{h}{a})) = \ln(a) + \ln(1 + \frac{h}{a}) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \ln(a) + \ln(1 + \frac{0}{a}) = \ln(a)$ car $\ln$ est continue en 1. $\ln$ est donc continue en a .

• Soient a et x strictement positifs distincts. On note $u = \ln(a)$ et $v = \ln(x)$ ($a = e^u$ et $x = e^v$). Puisque $\ln$ est continue en a , si $x \rightarrow a$ alors $v \rightarrow u$. On a $\frac{\ln(x) - \ln(a)}{x - a} = \frac{v - u}{e^v - e^u} = \frac{1}{\frac{e^v - e^u}{v - u}}$ qui tend vers

$\frac{1}{(\exp)'(u)} = \frac{1}{e^u} = \frac{1}{e^{\ln(a)}} = \frac{1}{a}$ quand x tend vers a et donc quand v tend vers u . $\square$

On retrouve alors la stricte croissance du logarithme népérien.

En effet, $\forall x > 0, \quad \ln'(x) = \frac{1}{x} > 0$.

De plus, $\ln''(x) = (\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2} < 0$ sur $]0; +\infty[$ et l'on en déduit la propriété suivante.

Propriété 2

La fonction logarithme népérien est **strictement concave** sur $]0; +\infty[$.

On retrouve alors le lemme 1 précédent : la tangente en 1 à la courbe $\mathcal{C}_{\ln}$ est au-dessus de $\mathcal{C}_{\ln}$ par concavité et elle a pour équation $y = \ln'(1)(x-1) + \ln(1) = x-1$.

Théorème 6 On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$.

Démonstration : • Soit $A \in \mathbb{R}$. On a $\ln(x) > A \iff x > e^A$ par stricte croissance de $\ln$ (ou $\exp$). Ainsi, pour tout $x > M = e^A$, on a $\ln(x) > A$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$.

• Pour $X = \frac{1}{x}$, on a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(\frac{1}{X}) = \lim_{X \rightarrow +\infty} -\ln(X)$
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(X) = -(+\infty) = -\infty$. □

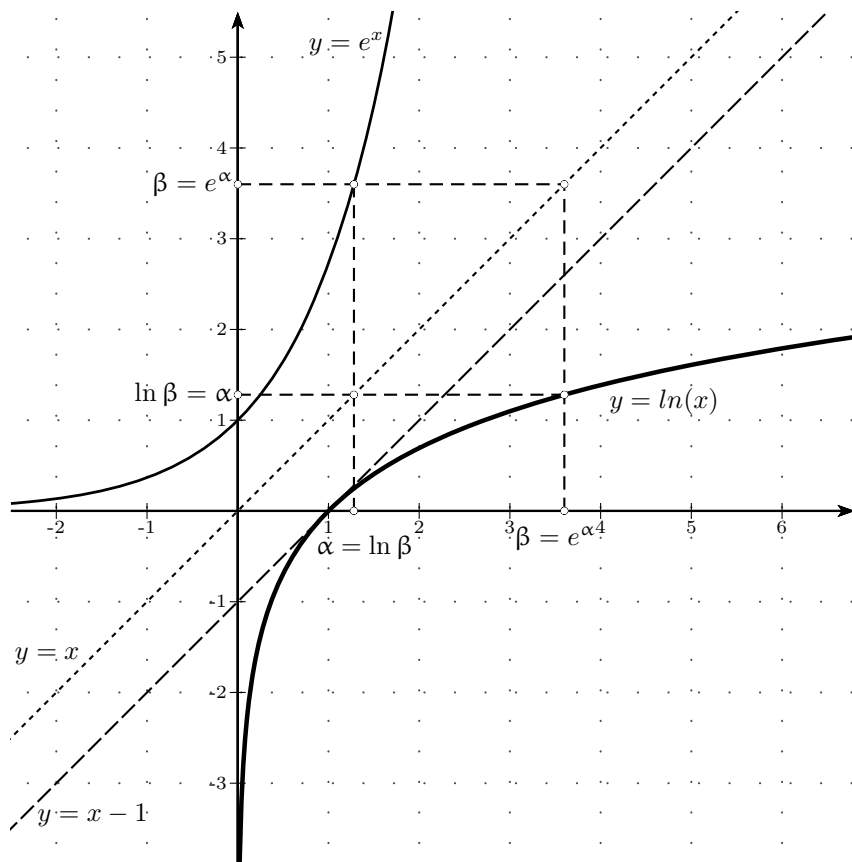
Nous pouvons désormais dresser le tableau de variations complet ainsi que le tableau de signe de la fonction logarithme népérien.

x	0	1	$+\infty$
$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$		• 1	
$\ln(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$
$\ln(x)$		–	+

Puisque $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$, la courbe représentative de la fonction logarithme népérien admet une asymptote verticale à droite d'équation $x = 0$. Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$, la courbe n'admet pas d'asymptote horizontale.

La tangente à la courbe représentative de la fonction logarithme népérien au point d'abscisse 1 admet pour équation $y = \ln'(1)(x-1) + \ln(1) = x-1$. D'après le lemme 1, la courbe est toujours en dessous de cette tangente.

Puisque les fonctions exponentielle et logarithme népérien sont réciproques l'une de l'autre, leur représentation graphique sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ dans un repère orthonormé. En effet, si $(x, e^x) \in \mathcal{C}_{\exp}$ alors $(e^x = x', x = \ln(x')) \in \mathcal{C}_{\ln}$. Voici ces représentations.



4.2 Croissance logarithmique

Le théorème suivant nous permet de « lever » plusieurs indéterminations.

Théorème 7

On a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0^+$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0^-$.

Plus généralement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0^+ \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln(x) = 0^-.$$

Remarque : Puisque $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, la limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty$ n'est pas une forme indéterminée.

Démonstration : • On a $\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{\ln(1+x) - \ln(1)}{(1+x) - 1} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \ln'(1) = 1$ puisque $\ln$ est dérivable en 1.

• Pour $x > 0$, posons $Y = \ln(x)$. On a $x = e^Y$ et $Y \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$

donc $\frac{\ln(x)}{x} = \frac{Y}{e^Y} = \frac{1}{e^Y/Y} \xrightarrow{Y \rightarrow +\infty} \frac{1}{+\infty} = 0$.

- On a, par ailleurs, $x \ln(x) = Y e^Y$, $Y \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty$ et $Y e^Y \xrightarrow{Y \rightarrow -\infty} 0$.
- Les limites pour des puissances de x plus grandes sont alors immédiates :
 $\frac{\ln(x)}{x^n} = \frac{1}{x^{n-1}} \times \frac{\ln(x)}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 \times 0$ et $x^n \ln(x) = x^{n-1} \times x \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0 \times 0$. $\square$

Ainsi, x l'emporte sur le logarithme népérien de x en l'infini et en 0^+ . La fonction logarithme népérien a une croissance en l'infini très lente, beaucoup plus lente que la fonction $x \mapsto x$ et donc que tout polynôme. Elle est en fait plus lente que toute fonction racine comme $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$...

Par exemple, $\ln(100) \simeq 4,6$ et $\ln(10^{20}) \simeq 46$. Les images des « grandes » valeurs sont « petites ».

4.3 Dérivée de $\ln(u)$

Théorème 8

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I telle que $u(x) > 0$ sur I .

La fonction $x \mapsto \ln(u(x))$ est alors définie et dérivable sur I et de fonction

$$\text{dérivée } x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)} : \quad (\ln(u))' = \frac{u'}{u}.$$

Démonstration : Il suffirait d'appliquer la formule de la dérivée de la composée de fonctions. Nous allons plutôt le démontrer directement dans le cas où $u(x) \neq u(a)$ au voisinage de a .

Tout d'abord, $f : x \mapsto \ln(u(x))$ est définie car $u(x) > 0$ sur I .

Soient a et $x \in I$ distincts.

On a $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{\ln(u(x))-\ln(u(a))}{u(x)-u(a)} \times \frac{u(x)-u(a)}{x-a} \xrightarrow{x \rightarrow a} \ln'[u(a)] \times u'(a) = \frac{1}{u(a)} \times u'(a)$
car u est dérivable donc continue et $u(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} u(a)$ tout en étant différent par hypothèse. $\square$

Exemple : La fonction définie par $f(x) = \ln(3x^2 + x + 5)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ ($\Delta < 0$) et de fonction dérivée $f'(x) = \frac{6x+1}{3x^2+x+5}$ (du signe de $6x+1$).

Remarques :

- Puisque $(\ln(u))'$ et u' ont même signe, les fonctions $\ln u$ et u ont les mêmes variations mais on le savait déjà puisque $\ln$ est croissante.

- Dans l'écriture $\ln(u)$, la quantité u sera parfois appelée *argument* du logarithme mais il ne faudra pas le confondre avec celui d'un nombre complexe (cf. chapitre éponyme en option Maths expertes).

5 Autour du logarithme

5.1 Fonction puissance

Définition 2 Soit x un réel *strictement positif* et α un réel.

La puissance α de x est $x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$.

- Attention, contrairement aux puissances entières, cette expression n'a aucun sens lorsque x n'est pas strictement positif.

- On remarque immédiatement que, grâce aux propriétés algébriques des fonctions $\exp$ et $\ln$, cette expression se comporte exactement de la même manière que les puissances entières et que c'en est bien une généralisation aux puissances réelles :

$$e^{n \ln(x)} = (e^{\ln(x)})^n = e^{\ln(x^n)} = x^n.$$

- La fonction racine carrée est donc la fonction puissance $\frac{1}{2}$:

$$\text{pour } x > 0, \quad \sqrt{x} = e^{\ln(\sqrt{x})} = e^{\frac{1}{2} \ln x} = x^{\frac{1}{2}}.$$

- Pour $q > 0$, la suite géométrique $(q^n)_\mathbb{N}$ peut enfin s'écrire sous la forme explicite $(f(n))_\mathbb{N}$ avec $f(x) = q^x = \exp(x \ln(q))$.

- On peut démontrer que, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction puissance α est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$.

Par exemple, $(x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2} x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = (\sqrt{x})'.$

5.2 Logarithme décimal

Définition 3 La fonction logarithme décimal, notée $\log$, est définie sur $]0; +\infty[$

par $\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}.$

On utilise aussi souvent la fonction associée, pour $x > 0$, $10^x = e^{x \ln(10)}.$

Puisque $\frac{1}{\ln(10)} > 0$, les fonctions $\ln$ et $\log$ ont les mêmes propriétés analytiques et algébriques.

On a $\log(10^x) = \frac{\ln(10^x)}{\ln(10)} = \frac{\ln(e^{x \ln(10)})}{\ln(10)} = \frac{x \ln(10)}{\ln(10)} = x.$ Les fonctions $\log(x)$ et 10^x sont réciproques.

Le $\log$ est plus adapté à notre système décimal : $\log(10) = 1$ alors que $\ln(10) \simeq 2,3$. Ainsi, $\log(10^n) = n$.

C'est pour cela que logarithme décimal est souvent utilisé en sciences physiques et naturelles. Les échelles d'intensité sonore (décibels), d'acidité (pH), d'intensité des séismes (Richter)... sont des échelles logarithmiques. Lorsque l'on augmente de 1, l'intensité décuple (généralement).

Elles sont construites selon le principe suivant : on mesure une quantité α et l'on retient le résultat $\log(\alpha)$. Si l'amplitude des valeurs possibles de α est grande, celle de leur logarithme l'est beaucoup moins. Par ailleurs, si l'échelle logarithmique augmente d'une unité, c'est que la quantité mesurée est 10 fois plus importante. En

effet, $\log(\alpha) + 1 = \log(\alpha) + \log(10) = \log(\alpha \times 10)$.

C'est le cas de l'échelle d'acidité pH. Pour l'intensité sonore, il faut ajouter 10 pour décupler et pour la magnitude apparente des étoiles, il faut retrancher 2,5. Tout ceci n'étant qu'une question de coefficients (cf. devoir n° 11 en page 455).

Exercices

LOGARITHME NÉPÉRIEN

Exercice 1 De l'exponentielle

1. Simplifier les écritures suivantes :

$$(a) \quad e^{-x} e^2 \quad (b) \quad (e^x)^3 e^{-2x} \quad (c) \quad \frac{e^{x-1}}{e^{x+2}} \quad (d) \quad \frac{e^{3u-2} e^{7-3u}}{e^{3-u} e^{u+2}}$$

2. Développer puis réduire :

$$(a) \quad (e^x + e^{-2x})^2$$

$$(b) \quad (e^{-2x} - e^x)(e^{-2x} + e^x)$$

$$(c) \quad (e^{3x} - e^{5x})^2$$

3. Démontrer :

$$(a) \quad \frac{e^x - 1}{e^x} = 1 - e^{-x}$$

$$(b) \quad \frac{1}{e^x + 1} = \frac{e^x - 1}{e^{2x} - 1}$$

$$(c) \quad \frac{1 - e^{2x}}{e^x} = e^{-x} - e^x$$

4. Résoudre les équations et inéquations suivantes.

$$(a) \quad e^{x^2} = e^{-x} \quad \left| \quad (c) \quad e^{2x^2+3} = e^{7x} \quad \left| \quad (e) \quad 3e^{2x} + e^x - 4 = 0 \right. \right.$$

$$(b) \quad e^{2x} < e^x \quad \left| \quad (d) \quad e^{x+1} = e^{\frac{2}{x}} \quad \left| \quad (f) \quad e^x \leq e^{x^2-12} \right. \right.$$

5. Dériver les fonctions suivantes sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

$$\left. \begin{array}{l} a(x) = e^{2x+1} \\ b(x) = e^{-x} + \sqrt{e^{2x}} \end{array} \right| \left. \begin{array}{l} c(x) = (x+1)e^{-x} \\ d(x) = x e^{\sqrt{x}} \end{array} \right| \begin{array}{l} f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1} \\ g(x) = e^{\frac{1-x}{1+x}} \end{array}$$

Exercice 2 Simplifier les écritures suivantes (a et $b \in]0; +\infty[$).

$$(a) \quad \frac{e^{\ln(8)}}{e^{3 \ln(2)}}$$

$$(b) \quad \ln(3) + \ln\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$(c) \quad \ln(\sqrt{2} + 1) + \ln(\sqrt{2} - 1)$$

$$(d) \quad \ln(4) - \ln(9) - 5 \ln(2) + 2 \ln(3) + \ln(8)$$

$$(e) \quad \frac{1}{2} \ln(16) - \frac{3}{2} \ln(4) + \ln(9) + \frac{1}{3} \ln(8) - \frac{1}{2} \ln(81)$$

$$(f) \quad \ln(e^{a-b}) - e^{\ln(a)} + \exp(\ln(b))$$

$$(g) \quad \exp(\ln(a) + \ln(b)) - \exp(\ln(a) - \ln(b))$$

- (h) $\ln\left(\frac{a}{b}\right) - \ln(a^2) + \ln(\sqrt{b}) + \frac{3}{2} \ln\left(\frac{a^2}{\sqrt{b}}\right)$
 (i) $\ln(a^2b) - \ln(b^2a) + \ln\left(\frac{a}{b^3}\right) + 2 \ln\left(\frac{b}{a}\right) - \frac{1}{2} \ln(a^4b^6)$
 (j) $\frac{3 \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \ln(a^3) - \ln(\sqrt{b})}{\ln\left(\frac{b}{a}\right) - 2 \ln(\sqrt{b}) - \ln\left(\frac{1}{\sqrt{a^7}}\right)}$

Exercice 3 Déterminer pour quels nombres x , les expressions suivantes ont un sens.

- | | |
|---------------------------|--|
| (a) $\frac{1}{\ln(x)}$ | (d) $\ln(e^{\frac{1}{x}}) + e^{-\ln(x)}$ |
| (b) $\frac{\ln(x+1)}{x}$ | (e) $\ln(x^2 + 2x)$ |
| (c) $\ln(x+1) - \ln(x-1)$ | (f) $e^{\ln(x^2-1)}$ |

Exercice 4 Résoudre les équations et inéquations suivantes.

- | | |
|---|--|
| (a) $\ln(3-2x) = 1$ | (h) $\frac{1}{2^k} < \frac{1}{2048}$ |
| (b) $\ln(x^2 - 8) = 0$ | (i) $0,95^n \leq 0,24$ |
| (c) $\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) = 2$ | (j) $\ln(x-2) \leq \ln(2x-1)$ |
| (d) $1,7^n = 4$ | (k) $\ln(x) \leq \ln(x^2 - 2x)$ |
| (e) $\ln(2x-1) \geq -1$ | (l) $3e^{2x} - 7e^x + 2 > 0$ |
| (f) $\ln(1+e^x) \leq 2$ | (m) $e^{2x} + e^x - 6 \geq 0$ |
| (g) $e^{x+1} > 6,7$ | (n) $\frac{1}{2} \ln(2x) = \ln(3-x) - \ln(\sqrt{x}+1)$ |

Exercice 5 VouF ? Justifier.

- (a) Pour tout réel $x > 0$, $\ln(x) < 100$.
 (b) Pour tout réel $x > 0$, $\ln(x) \leq x$.
 (c) Il existe un unique réel $x > 0$ tel que $\ln(x) = -100$.
 (d) Il existe un réel $x > 0$ tel que $\ln(x) \geq 10^{10}$.
 (e) Si $\ln(x^2) = 2$, alors $(\ln(x))^2 = 1$.
 (f) La réciproque de cette dernière.

Exercice 6

- $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est la suite géométrique de premier terme 4 et de raison $\frac{3}{2}$. À partir de quel rang les termes de cette suite sont-ils plus grands que 10^4 ?
- Le nombre de bactéries dans un certain bouillon de culture est multiplié chaque heure par 1,6. Au bout de combien de temps la population de bactéries est-elle multipliée par 16 ?
- On lance d'un dé cubique non pipé. Quel est le nombre minimum de lancers nécessaires pour que la probabilité d'obtenir au moins un six soit supérieure à 0,99 ?

Exercice 7 Déterminer les limites suivantes.

- | | |
|---|---|
| (a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln(x))$ | (c) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\ln(x)}$ |
| (b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln(x)}{x+1}$ | (d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x(1 - \ln(x))$ |

(e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x + \ln(x+1) - \ln(x))$	(i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + x \ln(1 + \frac{1}{x}))$
(f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \ln(x+1) - \ln(x))$	(j) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2}$
(g) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \ln(x)}{x}$	(k) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\sqrt{x})}{x}$
(h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \ln(x)}{x}$	(l) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$

Exercice 8 Dériver formellement les fonctions suivantes (*i.e.* en ne tenant pas compte des éventuels problèmes de définition).

$a(x) = \frac{x \ln(x)}{x+1}$	$d(x) = x \ln(x) - x$
$b(x) = \ln(2x+1) - \ln(x^2 - 3x)$	$f(x) = x \ln(\sqrt{x})$
$c(x) = \frac{1}{\ln(x)}$	$g(x) = x + x \ln(1 + \frac{1}{x})$

Exercice 9 Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x \ln(x)$. Démontrer que sa courbe représentative dans un repère orthonormé est située au-dessus de toutes ses tangentes.

Exercice 10 Dans chaque cas, représenter l'ensemble $\mathcal{E}$ des points $M(x, y)$ du plan repéré tels que :

(a) $\mathcal{E}_a: \ln(y) - 2 \ln(x) = 0.$	(b) $\mathcal{E}_b: \ln(x) + \ln(y) = 0.$
---	---

Exercice 11 Déterminer une fonction f telle que $f'(x) = \frac{3}{x-4}$ pour tout $x > 4$. Et pour $x < 4$?

Exercice 12

- g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = xe^x + 1$.
Montrer que, pour tout réel x , $g(x) > 0$.
- f est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = e^x + \ln(x)$.
 - Démontrer que, pour tout $x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$ puis dresser le tableau de variations de f .
 - En déduire que, pour tout réel m , l'équation $f(x) = m$ admet une unique solution.

Exercice 13 Dresser le tableau de variations complet de la fonction f définie par $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{x}\right) - \frac{1}{1+x}$.

Exercice 14 Dans un repère orthonormé, on note $\mathcal{C}$ et Γ les courbes d'équations respectives $y = e^x$ et $y = \ln(x)$. On rappelle que pour tout réel x strictement positif, $e^x > \ln(x)$. À tout nombre strictement positif x , on associe le point M de $\mathcal{C}$ et le point N de Γ de même abscisse x . Le but de l'exercice est de trouver la valeur de x pour laquelle la distance MN est minimale.

- On note φ la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $\varphi(x) = e^x - \ln(x)$.

- (a) Calculer $\varphi'(x)$ et démontrer que l'équation $\varphi'(x) = 0$ admet une unique solution notée α dans $]0; +\infty[$. Déterminer alors une valeur approchée de α à 10^{-2} près.
- (b) En déduire que la distance MN est minimale lorsque $x = \alpha$.
2. Justifier que $e^\alpha = \frac{1}{\alpha}$ puis en déduire que les tangentes à $\mathcal{C}$ et Γ aux points d'abscisses α sont parallèles.

Exercice 15 On note $\mathcal{C}$ et Γ les courbes d'équations respectives $y = e^x$ et $y = \ln(x)$ dans un repère. Existe-t-il deux réels α et β tels que la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse α et la tangente à Γ au point d'abscisse β soient confondues ? Si oui, en donner une valeur approchée au moyen de la calculatrice.

Exercice 16 Soit la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = ax + b + \frac{\ln(x)}{x}$ où a et b sont deux réels. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère. Le point $A(1, 0)$ est le point de $\mathcal{C}$ en lequel la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = 3x + 2$.

- (a) Démontrer que a et b sont solutions du système $\begin{cases} a + 1 = 3 \\ a + b = 0. \end{cases}$
- (b) En déduire l'expression de $f(x)$.
- On note g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = 2x^2 + 1 - \ln(x)$.
 - Démontrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$, $g(x) > 0$.
 - En déduire que f est strictement croissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Exercice 17 f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \ln(ax^2 + bx + c)$ où a , b et c sont trois réels. Son tableau de variations est le suivant :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	$+\infty$
$f'(x)$		$\vdots$	0	$\vdots$	
f		$\swarrow$ 0 $\searrow$		$\swarrow$ $\ln(\frac{5}{8})$ $\searrow$	

- En utilisant les données du tableau, déterminer a , b et c .
- (a) Exprimer $f'(x)$ puis vérifier que f est bien définie sur $\mathbb{R}$ et admet le tableau de variations précédent.
- (b) Quelle est la valeur exacte du minimum global de f ?

Exercice 18 $(v_n)_{\mathbb{N}}$ est la suite géométrique de premier terme $v_0 = 1,5$ et de raison $\frac{1}{2}$. On définit la suite $(w_n)_{\mathbb{N}}$ par $w_n = \ln(v_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Exprimer v_n en fonction de n puis montrer que la suite $(w_n)_{\mathbb{N}}$ est arithmétique.
- On pose $S_n = \sum_{i=0}^n w_i$. Exprimer S_n en fonction de n .
Étudier ensuite la limite de la suite (S_n) .

3. On pose $P_n = v_0 v_1 v_2 \dots v_n = \prod_{i=0}^n v_i$.

Démontrer que $P_n = e^{S_n}$ puis étudier la limite de (P_n) .

Exercice 19 Soit f la fonction définie sur $]-1; +\infty[$ par $f(x) = 1 + x \ln(x+2)$.

1. Dresser le tableau de variations complet de la fonction dérivée f' .
2. Démontrer que f' admet une unique racine $\alpha \in]-0,6; -0,5[$.
3. Dresser le tableau de variations de la fonction f .

Exercice 20 f est la fonction définie sur $] -1; +\infty[$ par $f(x) = x - \frac{\ln(x+1)}{x+1}$.
On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative et Δ la droite d'équation $y = x$ dans un repère.

A. Étude de certaines propriétés de $\mathcal{C}$.

1. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]-1; +\infty[$.
2. Pour tout $x \in]-1; +\infty[$, on pose $N(x) = (1+x)^2 + \ln(1+x) - 1$.
 - (a) Vérifier que l'on définit ainsi une fonction strictement croissante sur $] -1; +\infty[$.
 - (b) Calculer $N(0)$ et en déduire les variations de f .
3. Déterminer l'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite Δ .

B. Étude d'une suite convergente.

1. Démontrer que si $x \in [0; 4]$ alors $f(x) \in [0; 4]$.
2. On considère la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 4$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
 - (a) Tracer, à l'aide d'une calculatrice, la courbe $\mathcal{C}$ et la droite Δ ainsi que les premiers termes de $(u_n)_{\mathbb{N}}$ afin de conjecturer les variations et la limite éventuelle de la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$.
 - (b) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0; 4]$.
 - (c) Étudier les variations de la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$, démontrer qu'elle est convergente puis déterminer sa limite.

Exercice 21 f est la fonction définie sur $I =]0; +\infty[$ par $f(x) = x + \frac{\ln(x)}{x}$.

On note $\mathcal{C}$ sa représentation graphique et Δ la droite d'équation $y = x$ dans un repère orthonormé.

1. (a) Établir le signe de la fonction g définie sur I par $g(x) = x^2 + 1 - \ln(x)$.
(b) En déduire les variations de f et dresser son tableau de variations.
2. (a) Étudier la position relative de $\mathcal{C}$ et Δ .
(b) Quelle est la limite de $f(x) - x$ lorsque x tend vers $+\infty$?
 M et N étant deux points de $\mathcal{C}$ et Δ de même abscisse x , que peut-on dire alors de la distance MN lorsque x tend vers $+\infty$?
- (c) Quelles sont les coordonnées du point A de $\mathcal{C}$ en lequel la tangente à $\mathcal{C}$ est parallèle à Δ ?

Exercice 22 On définit la suite (u_n) pour $n \geq 2$ par $u_n = \ln(1 - \frac{1}{n})$ et l'on pose $S_n = \sum_{i=2}^{i=n} u_i$. Démontrer que pour tout entier $n \geq 2$, $S_n = -\ln(n)$ puis en déduire la limite de la suite (S_n) .

Exercice 23 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$ et $S_n = \sum_{k=1}^{k=n} u_k$.

Conjecturer l'expression de S_n en fonction de n , démontrer cette conjecture puis déterminer la limite de S_n .

Exercice 24 Série harmonique

Soit (h_n) la suite définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $h_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$.

1. (a) Construire un tableau de valeurs des premiers termes de la suite (h_n) à la calculatrice.
 (b) La suite (h_n) semble-t-elle converger ?
2. (a) Montrer que pour tout réel $x > 0$, $\ln(1+x) \leq x$.
 (b) En déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, $\ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$.
 (c) Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, $h_n \geq \ln(n+1)$.
3. Conclure.

Exercice 25 Datation archéologique au carbone 14

La désintégration radioactive d'un corps suit une loi de la forme $m = m_0 e^{-kt}$ où m_0 désigne la masse initiale, m la masse au bout d'une durée t (en année) et k un coefficient positif caractéristique du corps considéré.

1. On appelle *demi-vie* d'un corps radioactif la durée au bout de laquelle la moitié de sa masse s'est désintégrée. Démontrer que la demi-vie est indépendante de la masse initiale et l'exprimer en fonction de k .
2. Le carbone 14 (^{14}C) est un isotope radioactif du carbone 12 (^{12}C). Sa demi-vie est 5730 ans. Déterminer k .
3. Dans un organisme vivant, la proportion entre la masse de carbone 14 et la masse de carbone 12 reste constante, égale à 10^{-12} . Du moment de la mort de l'organisme, cette proportion diminue du fait de la radioactivité du carbone 14 qui se transforme en azote 14. En mesurant cette proportion à une date donnée, on peut estimer la durée écoulée depuis la mort.

On a retrouvé dans une grotte préhistorique les restes d'un foyer contenant des morceaux de charbon de bois dans lesquels la proportion entre la masse de carbone 14 et la masse de carbone 12 est de $2,5 \cdot 10^{-13}$. Quel est l'âge de cet échantillon ?



Exercice 26 A round underwater transmission cable consists of a core of copper wires surrounded by a nonconducting insulation.

If $x = \frac{r}{h}$ denotes the ratio of the radius of the core r to the thickness of the insulation h , it is known that the speed of the transmission signal is given by the equation $v = x^2 \ln\left(\frac{1}{x}\right)$.

If the radius of the core is 1 cm, what insulation h will allow the greatest transmission speed ?

Exercice 27 Pour λ un réel strictement positif, on définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f_λ par $f_\lambda(x) = x + \lambda e^{-x}$, de courbe représentative $\mathcal{C}_\lambda$ dans un repère orthonormé.

1. Justifier que, pour tout $\lambda \in]0; +\infty[$, la fonction f_λ admet un minimum.
2. On désigne par A_λ le point de $\mathcal{C}_\lambda$ correspondant au minimum de f_λ . Tracer des courbes $\mathcal{C}_\lambda$ et placer les points A_λ correspondants pour différentes valeurs de λ . Émettre alors une conjecture puis la démontrer.

Exercice 28 Plan de remboursement

Lorsque l'on fait un emprunt dont les mensualités sont constantes, un plan de remboursement indique, suivant le capital emprunté C , le taux d'intérêt mensuel t , le montant des remboursements M et le capital R_n restant dû au bout de n mensualités. On rappelle que le taux d'intérêt s'applique au capital restant dû et non au montant fixe de l'emprunt initial.

1. Montrer que le capital restant dû après $n + 1$ mensualités est défini par la relation

$$R_{n+1} = (1+t)R_n - M.$$

2. (a) De quel type est la suite (R_n) ?

- (b) Déterminer R_0 et démontrer par récurrence que, pour $n \geq 1$,

$$R_n = (1+t)^n C - \sum_{k=0}^{n-1} (1+t)^k M.$$

Indice : de façon générale, $\sum_{k=0}^p E_{k+1} = \sum_{k=1}^{p+1} E_k.$

- (c) En déduire l'expression $R_n = (1+t)^n (C - \frac{M}{t}) + \frac{M}{t}.$

3. On souhaite complètement rembourser l'emprunt au bout de N mensualités.

- (a) Montrer qu'alors $(1+t)^N = \frac{M}{M - Ct}.$

- (b) En déduire le nombre de mensualités N en fonction de M , t et C .

4. Agathe entend une réclame sur son poste radiophonique : « Empruntez 3 000 € à un taux de 0,5 % mensuel et ne remboursez que 50 € par mois. Vive le crédit ! »

- (a) Elle se demande alors au bout de combien de mois elle finirait de rembourser un tel emprunt.

Déterminer cette période. Cela semble-t-il raisonnable ? Quel est le coût d'un tel emprunt ?

- (b) Quel serait le montant de ses mensualités si elle choisissait plutôt un remboursement sur deux ans ? Quel serait alors le coût de l'emprunt ?

Indice : de façon générale, $\frac{m}{m-c} = \frac{1}{1-\frac{c}{m}}$

Exercice 29 Existe-t-il des entiers naturels non nuls distincts a et b tels que $a^b = b^a$?

Exercice 30 Dresser le tableau de variations complet de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x^x$.

Exercice 31 On définit la fonction $\ln_n$ par

$$\ln_1(x) = \ln(x) \quad \text{et} \quad \ln_{n+1}(x) = \ln_n(\ln(x)) \quad \text{pour } n \geq 1.$$

Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $\ln_n$.

Exercice 32 On définit la suite (u_n) par

$$u_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \quad \text{pour tous } n \in \mathbb{N}^* \text{ et } x \in \mathbb{R}.$$

1. Étudier la limite de la suite (u_n) pour $x = 0$.

2. On suppose désormais que x est non nul.

(a) Montrer qu'à partir d'un certain rang, $u_n = \exp\left(x \cdot \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}}\right)$.

(b) Démontrer que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$.

(c) Déterminer la limite de la suite (u_n) .

3. Compléter : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \dots$

4. Vérifier à la calculatrice que cette convergence est très lente.

Filez vers le devoir n° 11 en page 455 puis cheminez vers le n° 12 en page 457.

Corrigé des exercices

LOGARITHME NÉPÉRIEN

Exercice 1

1. (a) $e^{-x}e^2 = e^{2-x}$.
- (b) $(e^x)^3 e^{-2x} = e^{3x-2x} = e^x$.
- (c) $\frac{e^{x-1}}{e^{x+2}} = e^{(x-1)-(x+2)} = e^{-3}$.
- (d) $\frac{e^{3u-2}e^{7-3u}}{e^{3-u}e^{u+2}} = e^{(3u-2+7-3u)-(3-u+u+2)} = e^0 = 1$.
2. (a) $(e^x + e^{-2x})^2 = (e^x)^2 + 2e^x e^{-2x} + (e^{-2x})^2 = e^{2x} + 2e^{-x} + e^{-4x}$
- (b) $(e^{-2x} - e^x)(e^{-2x} + e^x) = (e^{-2x})^2 - (e^x)^2 = e^{-4x} - e^{2x}$
- (c) $(e^{3x} - e^{5x})^2 = (e^{3x})^2 - 2e^{3x}e^{5x} + (e^{5x})^2 = e^{6x} - 2e^{8x} + e^{10x}$
3. (a) $\frac{e^x-1}{e^x} = 1 - e^{-x} \iff e^x - 1 = (1 - e^{-x})e^x \iff e^x - 1 = e^x - e^{-x}e^x$
 $\iff -1 = -e^0$
- (b) $\frac{e^x-1}{e^{2x}-1} = \frac{e^x-1}{(e^x)^2-1^2} = \frac{e^x-1}{(e^x-1)(e^x+1)} = \frac{1}{e^x+1}$
- (c) $\frac{1-e^{2x}}{e^x} = \frac{e^x(e^{-x}-e^{2x-x})}{e^x} = e^{-x} - e^x$
4. (a) $e^{x^2} = e^{-x} \stackrel{x \neq 0}{\iff} e^{x^2}e^x = e^{-x}e^x \iff e^{x^2+x} = 1 = e^0$
 $\iff x^2 + x = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = -1$.
- (b) $e^{2x} < e^x \stackrel{e^x > 0}{\iff} \frac{e^{2x}}{e^x} < 1 \iff e^{2x-x} < e^0 \iff x < 0$.
- (c) $e^{2x^2+3} = e^{7x} \iff e^{2x^2+3-7x} = e^0 \iff 2x^2 - 7x + 3 = 0$
 $\iff x = 3 \text{ ou } x = \frac{1}{2}$.
- (d) $e^{x+1} = e^{\frac{2}{x}} \iff x+1 = \frac{2}{x} \stackrel{x \neq 0}{\iff} x^2+x-2=0 \iff x=1 \text{ ou } x=-2$.
- (e) $3e^{2x} + e^x - 4 = 0 \stackrel{y=e^x > 0}{\iff} 3y^2 + y - 4 = 0$
 $\iff y = 1 = e^0 \text{ ou } y = -\frac{4}{3} < 0 \implies x = 0$.
- (f) $e^x \leq e^{x^2-12} \iff e^{x^2-12-x} \geq e^0 \stackrel{\text{exp strict. } \nearrow}{\iff} x^2 - x - 12 \geq 0$
 $\iff x \in]-\infty; -3] \cup [4; +\infty[$.
5. Pour $x > 0$,
 $a'(x) = (e^{2x+1})' = (2x+1)'e^{2x+1} = 2e^{2x+1}$.
 $b'(x) = (e^{-x} + \sqrt{e^{2x}})' = e^{-x} - e^{-x} \text{ avec } \sqrt{e^{2x}} = \sqrt{(e^x)^2} = |e^x| = e^x$.
 $c'(x) = [(x+1)e^{-x}]' = (x+1)'e^{-x} + (x+1)(e^{-x})' = 1e^{-x} + (x+1)(-1)e^{-x}$
 $= -xe^{-x}$.
 $d'(x) = [xe^{\sqrt{x}}]' = x'e^{\sqrt{x}} + x[e^{\sqrt{x}}]' = e^{\sqrt{x}} + x[\sqrt{x}]'e^{\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x}} + x\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{\sqrt{x}}$
 $= e^{\sqrt{x}}(1 + \frac{\sqrt{x}}{2})$.

$$f'(x) = \left(\frac{e^x}{e^x - 1} \right)' = \frac{(e^x)'(e^x - 1) - e^x(e^x - 1)'}{(e^x - 1)^2} = \frac{e^x(e^x - 1) - e^x e^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{-e^x}{(e^x - 1)^2}.$$

$$g'(x) = \left(e^{\frac{1-x}{1+x}} \right)' = \left(\frac{1-x}{1+x} \right)' e^{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{-1(1+x) - 1(1-x)}{(1+x)^2} e^{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{-2}{(1+x)^2} e^{\frac{1-x}{1+x}}.$$

Exercice 2

- (a) $\frac{e^{\ln(8)}}{e^{3 \ln(2)}} = \frac{8}{2^3} = 1.$
- (b) $\ln(3) + \ln\left(\frac{1}{3}\right) = \ln(3) - \ln(3) = 0.$
- (c) $\ln(\sqrt{2} + 1) + \ln(\sqrt{2} - 1) = \ln[(\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)] = \ln(2 - 1) = \ln(1) = 0.$
- (d) $\ln(4) - \ln(9) - 5 \ln(2) + 2 \ln(3) + \ln(8)$
 $= 2 \ln(2) - 2 \ln(3) - 5 \ln(2) + 2 \ln(3) + 3 \ln(2) = 0.$
- (e) $\frac{1}{2} \ln(16) - \frac{3}{2} \ln(4) + \ln(9) + \frac{1}{3} \ln(8) - \frac{1}{2} \ln(81)$
 $= \frac{1}{2} \ln(2^4) - 3 \ln(\sqrt{4}) + \ln(3^2) + \frac{1}{3} \ln(2^3) - \ln(\sqrt{81})$
 $= \frac{1}{2} \ln(2) - 3 \ln(2) + 2 \ln(3) + \frac{1}{3} \ln(2) - \ln(3^2) = 0 \ln(2) + 0 \ln(3) = 0$
- (f) $\ln(e^{a-b}) - e^{\ln(a)} + \exp(\ln(b)) = (a - b) - a + b = 0$
- (g) $\exp(\ln(a) + \ln(b)) - \exp(\ln(a) - \ln(b)) = e^{\ln(a)} e^{\ln(b)} - \frac{e^{\ln(a)}}{e^{\ln(b)}} = ab - \frac{a}{b}$
- (h) $\ln\left(\frac{a}{b}\right) - \ln(a^2) + \ln(\sqrt{b}) + \frac{3}{2} \ln\left(\frac{a^2}{\sqrt{b}}\right)$
 $= \ln(b) - \ln(a) - 2 \ln(a) + \frac{1}{2} \ln(b) + \frac{3}{2} \cdot 2 \ln(a) - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \ln(b) = \frac{3}{4} \ln(b)$
- (i) $\ln(a^2 b) - \ln(b^2 a) + \ln\left(\frac{a}{b^3}\right) + 2 \ln\left(\frac{b}{a}\right) - \frac{1}{2} \ln(a^4 b^6)$
 $= 2 \ln(a) + \ln(b) - 2 \ln(b) - \ln(a) + \ln(a) - 3 \ln(b) + 2 \ln(b) - 2 \ln(a)$
 $- \frac{4}{2} \ln(a) - \frac{6}{2} \ln(b) = -2 \ln(a) - 5 \ln(b)$
- (j) $\frac{3 \ln\left(\frac{b}{a}\right) + \ln(a^3) - \ln(\sqrt{b})}{\ln\left(\frac{b}{a}\right) - 2 \ln(\sqrt{b}) - \ln\left(\frac{1}{\sqrt{a^7}}\right)} = \frac{3 \ln(b) - 3 \ln(a) + 3 \ln(a) - \frac{1}{2} \ln(b)}{\ln(b) - \ln(a) - 2 \cdot \frac{1}{2} \ln(b) + \frac{1}{2} \ln(a)} = \frac{\frac{5}{2} \ln(b)}{\frac{1}{2} \ln(a)} = \frac{\ln(b)}{\ln(a)}$

Exercice 3

- (a) $\frac{1}{\ln(x)}$ pour $x > 0$ et $\ln(x) \neq 0$ i.e. $x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[.$
- (b) $\frac{\ln(x+1)}{x}$ pour $x+1 > 0$ et $x \neq 0$ i.e. $x \in]-1; 0[\cup]0; +\infty[.$
- (c) $\ln(x+1) - \ln(x-1)$ pour $x+1 > 0$ et $x-1 > 0$ i.e. $x \in]1; +\infty[.$
- (d) $\ln(e^{\frac{1}{x}}) + e^{-\ln(x)}$ pour $x \neq 0$ et $x > 0$ i.e. $x \in]0; +\infty[.$
- (e) $\ln(x^2 + 2x)$ pour $x^2 + 2x > 0$ i.e. $x \in]-\infty; -2[\cup]0; +\infty[.$
- (f) $e^{\ln(x^2 - 1)}$ pour $x^2 - 1 > 0$ i.e. $x \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[.$

Exercice 4 On utilise les propriétés de stricte croissance des fonctions $\ln$ et $\exp$.

- (a) Pour $x < \frac{3}{2}$, $\ln(3 - 2x) = 1 = \ln(e) \iff 3 - 2x = e \iff x = \frac{1}{2}(3 - e).$
- (b) Pour $x^2 - 8 > 0$, $\ln(x^2 - 8) = 0 = \ln(1) \iff x^2 - 8 = 1 \iff x = \pm 3.$
- (c) Pour $x < 0$ ou $x > 1$, $\ln(1 - \frac{1}{x}) = 2 \iff 1 - \frac{1}{x} = e^2 \iff x = \frac{1}{1 - e^2}.$
- (d) $1, 7^n = 4 \iff \ln(1, 7^n) = \ln(4) \iff n = \frac{2 \ln(2)}{\ln(1, 7)} \quad (\notin \mathbb{Z}).$
- (e) Pour $x > \frac{1}{2}$, $\ln(2x - 1) \geq -1 = \ln\left(\frac{1}{e}\right) \iff 2x - 1 \geq e^{-1}$
 $\iff x \geq \frac{1}{2}(e^{-1} + 1) \quad \left(> \frac{1}{2}\right).$

- (f) $\ln(1+e^x) \leq 2 = \ln(e^2) \iff 1+e^x \leq e^2 \iff e^x \leq e^2-1 \iff x \leq \ln(e^2-1)$.
- (g) $e^{x+1} > 6,7 \iff x+1 > \ln(6,7) \iff x > \ln(6,7) - 1$.
- (h) $\frac{1}{2^k} < \frac{1}{2048} \iff \ln(\frac{1}{2^k}) < \ln(\frac{1}{2048}) \iff -k \ln(2) < -11 \ln(2) \stackrel{\ln(2)>0}{\iff} k > 11$.
- (i) $0,95^n \leq 0,24 \iff n \ln(0,95) \leq \ln(0,24) \stackrel{\ln(0,95)<0}{\iff} n \geq \frac{\ln(0,24)}{\ln(0,95)} \quad (\notin \mathbb{Z})$.
- (j) Pour $x > 2$, $\ln(x-2) \leq \ln(2x-1) \iff x-2 \leq 2x-1 \iff x \geq -1$.
Solutions : $]2; +\infty[$.
- (k) Pour $x > 2$, $\ln(x) \leq \ln(x^2-2x) \iff x \leq x^2-2x \iff x^2-3x \geq 0$
 $\iff x(x-3) \geq 0 \iff x \geq 3$.
- (l) $3e^{2x} - 7e^x + 2 > 0 \stackrel{y=e^x>0}{\iff} 3y^2 - 7y + 2 > 0 \iff (y-2)(3y-1) > 0$
 $\iff y = e^x \in]0; \frac{1}{3}[\cup]2; +\infty[\iff x \in]-\infty; \ln(\frac{1}{3})[\cup]\ln(2); +\infty[$.
- (m) $e^{2x} + e^x - 6 \geq 0 \stackrel{y=e^x>0}{\iff} y^2 + y - 6 \geq 0 \iff (y-2)(y+3) \geq 0$
 $\iff y = e^x \in]-\infty; -3[\cup]2; +\infty[\stackrel{e^x>0}{\iff} x \in]\ln(2); +\infty[$.
- (n) Pour $x \in]0; 3[$,
 $\frac{1}{2} \ln(2x) = \ln(3-x) - \ln(\sqrt{x}+1) \iff \ln\left(\frac{\sqrt{2x}(\sqrt{x}+1)}{3-x}\right) = 0 = \ln(1)$
 $\iff \frac{\sqrt{2x}(\sqrt{x}+1)}{3-x} = 1 \iff x\sqrt{2} + \sqrt{2}\sqrt{x} - 3 + x = 0$
 $\iff (\sqrt{2}+1)\sqrt{x}^2 + \sqrt{2}\sqrt{x} - 3 = 0$ qui est un polynôme en $y = \sqrt{x}$
de discriminant $\Delta = \sqrt{2}^2 + 12(\sqrt{2}+1) = 14 + 12\sqrt{2} > 0$ et de racines
 $y_1 = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{\Delta}}{2(\sqrt{2}+1)} < 0$ et $y_2 = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{\Delta}}{2(\sqrt{2}+1)} \simeq 0,86 \in]0; \sqrt{3}[$ donc
 $x = (y_2)^2 \simeq 0,74 \in]0; 3[$ est l'unique solution de cette équation.

Exercice 5 VousF ?

- (a) Pour tout réel $x > 0$, $\ln(x) < 100$: Faux. Puisque $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$, la fonction $\ln$ n'est pas majorée par 100, ni par tout autre réel d'ailleurs.
- (b) Pour tout réel $x > 0$, $\ln(x) \leq x$: Vrai. Puisque $\ln$ est concave, son graphe est en dessous de ses tangentes, en particulier de sa tangente en 1 d'équation $y = \ln'(1)(x-1) + \ln(1) = x-1$ qui est elle-même en dessous de la droite $y = x$. Sinon, on peut étudier $\ln(x) - x$.
- (c) Il existe un unique réel $x > 0$ tel que $\ln(x) = -100$: Vrai.
On a $\ln(x) = -100 = \ln(\exp(-100)) \stackrel{\ln \nearrow}{\iff} x = \exp(-100) = \frac{1}{e^{100}}$.
- (d) Il existe un réel $x > 0$ tel que $\ln(x) \geq 10^{10}$: Vrai.
On a $\ln(x) \geq 10^{10} \stackrel{\exp \nearrow}{\iff} \exp(\ln(x)) = x \geq \exp 10^{10}$.
- (e) Si $\ln(x^2) = 2$, alors $(\ln(x))^2 = 1$: Faux.
Si $x > 0$, on a bien $\ln(x^2) = 2 \implies 2\ln(x) = 2 \implies \ln(x) = 1$
 $\implies (\ln(x))^2 = 1^2 = 1$.
En revanche, pour $x = -e$, $\ln(x^2) = \ln((-e)^2) = \ln(e^2) = 2$ mais on ne peut calculer le logarithme de x .
- (f) Si $(\ln(x))^2 = 1$, alors $\ln(x^2) = 2$: Faux.
Pour $x = \frac{1}{e}$, $(\ln(x))^2 = \ln(\frac{1}{e})^2 = (-\ln(e))^2 = (-1)^2 = 1$
et $\ln(x^2) = \ln(\frac{1}{e^2}) = \ln(e^{-2}) = -2$.

Exercice 6

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 4 \left(\frac{3}{2}\right)^n$ et $u_n \geq 10^4 \iff \left(\frac{3}{2}\right)^n \geq \frac{10^4}{4}$

$$\xLeftrightarrow{\ln} n \ln\left(\frac{3}{2}\right) \geq \ln\left(\frac{10^4}{4}\right) \xLeftrightarrow{\frac{3}{2} > 1} n \geq \frac{\ln(10^4) - \ln(4)}{\ln\left(\frac{3}{2}\right)} = \frac{4 \ln(10) - \ln(4)}{\ln(3) - \ln(2)}$$

$$\iff n \geq \frac{4 \ln(5) + 4 \ln(2) - 2 \ln(2)}{\ln(3) - \ln(2)} = \frac{4 \ln(5) + 2 \ln(2)}{\ln(3) - \ln(2)} \simeq 19,3$$

et les termes de la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ sont plus grands que 10^4 pour $n \geq 20$.

2. Soit b_n le nombre de bactéries dans le bouillon après n heures.

On a $b_{n+1} = 1,6b_n$ donc $b_n = 1,6^n \cdot b_0$ et l'on cherche alors n tel que

$$1,6^n = 16 \iff n \ln(1,6) = \ln(16) \xLeftrightarrow{\ln} n = \frac{4 \ln(2)}{\ln(1,6)} \simeq 5,9.$$

La population de bactérie sera donc multipliée par 16 en un peu moins de six heures.

3. En passant au complémentaire, la probabilité d'obtenir au moins un 6 en n lancers est $P_n = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$ et $P_n \geq 0,99 \iff \left(\frac{5}{6}\right)^n \leq 0,01$

$$\xLeftrightarrow{\ln} n \ln\left(\frac{5}{6}\right) \leq \ln\left(\frac{1}{100}\right) \xLeftrightarrow{\frac{5}{6} < 1} n \geq \frac{-\ln(100)}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)} = \frac{\ln(100)}{\ln(6) - \ln(5)} \simeq 25,3.$$

Il faut donc au moins 26 lancers pour que la probabilité d'obtenir au moins un six soit supérieure à 0,99.

Exercice 7

(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - \frac{\ln(x)}{x}) = "+\infty(1-0)" = +\infty.$

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln(x)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln(x)}{x(1+\frac{1}{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{1+\frac{1}{x}} = \frac{+\infty}{1+0} = +\infty.$

(c) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\ln(x)} = \frac{1^+}{0^+} = +\infty.$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x(1 - \ln(x)) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - x \ln(x)) = 0 - 0 = 0.$

(e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x + \ln(x+1) - \ln(x)) = "0 + \ln(1+0) - \ln(0^+)" = "0 + 0 - (-\infty)" = +\infty.$

(f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \ln(x+1) - \ln(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \ln(\frac{x+1}{x})) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \ln(1 + \frac{1}{x}))$
 $= "+\infty + \ln(1+0)" = +\infty.$

(g) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \ln(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - \ln(x) \frac{1}{x}) = "1 - (-\infty)(+\infty)" = +\infty.$

(h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \ln(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right) = 1 - 0 = 1.$

(i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + x \ln(1 + \frac{1}{x})) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 + \ln(1 + \frac{1}{x})) = "+\infty(1 + \ln(1+0))" = +\infty.$

(j) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \times \frac{\ln(x)}{x} = \frac{1}{+\infty} \times 0 = 0.$

(k) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\sqrt{x})}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{2} \ln(x)}{x} = \frac{1}{2} \times 0 = 0.$

(l) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\sqrt{x}^2)}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = \lim_{X=\sqrt{x} \rightarrow +\infty} 2 \cdot \frac{\ln(X)}{X} = 2 \times 0 \dots$

Exercice 8

$$a'(x) = \left(\frac{x \ln(x)}{x+1}\right)' = \frac{(x \ln(x))'(x+1) - x \ln(x)(x+1)'}{(x+1)^2}$$

$$= \frac{(\ln(x) + x \frac{1}{x})(x+1) - x \ln(x)}{(x+1)^2} = \frac{\ln(x) + x + 1}{(x+1)^2}.$$

$$b'(x) = (\ln(2x+1))' - (\ln(x^2-3x))' = \frac{(2x+1)'}{2x+1} - \frac{(x^2-3x)'}{x^2-3x} = \frac{2}{2x+1} - \frac{2x-3}{x^2-3x}.$$

$$c'(x) = \left(\frac{1}{\ln(x)}\right)' = \frac{-\ln'(x)}{(\ln(x))^2} = \frac{-1}{x(\ln(x))^2}.$$

$$d'(x) = (x \ln(x) - x)' = x' \ln(x) + x(\ln(x))' - x' = \ln(x) + x \frac{1}{x} - 1 = \ln(x).$$

$$f'(x) = [x \ln(\sqrt{x})]' = 1 \times \ln(\sqrt{x}) + x \times \frac{(\sqrt{x})'}{\sqrt{x}} = \ln(\sqrt{x}) + x \frac{1}{2\sqrt{x}} \frac{1}{\sqrt{x}} = \ln(\sqrt{x}) + \frac{1}{2}.$$

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(x + x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)\right)' = 1 + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + x \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)'}{1 + \frac{1}{x}} \\ &= 1 + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{x}{x^2\left(1 + \frac{1}{x}\right)} = 1 + \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1}. \end{aligned}$$

Exercice 9 Par composition, la fonction f est deux fois dérivable sur $]0; +\infty[$ et l'on a, pour tout $x > 0$, $f'(x) = (x \ln(x))' = x' \ln(x) + x \ln'(x) = 1 \cdot \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$ et $f''(x) = (\ln(x) + 1)' = \frac{1}{x} > 0$. Donc f' est croissante et f est convexe. Sa courbe représentative est donc située au-dessus de toutes ses tangentes.

Exercice 10

- (a) Pour $x, y > 0$, $(x, y) \in \mathcal{E}_a \iff \ln(y) - 2\ln(x) = 0$
 $\iff \ln(y) = 2\ln(x) \iff \ln(y) = \ln(x^2) \iff y = x^2$: $\mathcal{E}_a$ est la partie de parabole d'équation $y = x^2$ située au-dessus de $x > 0$.
- (b) Pour $x, y > 0$, $(x, y) \in \mathcal{E}_b \iff \ln(x) + \ln(y) = 0 \iff \ln(xy) = \ln(1)$ et $x, y \in]0; +\infty[\iff xy = 1 \iff y = \frac{1}{x}$: $\mathcal{E}_b$ est la branche de droite de l'hyperbole $y = \frac{1}{x}$.

Exercice 11 • Pour $x > 4$, on a $f'(x) = \frac{3}{x-4} = 3 \frac{(x-4)'}{x-4}$ de la forme $3 \frac{u'}{u}$ pour $u = x-4 > 0$ donc $f = 3 \ln(u)$ admet f' pour dérivée. Ainsi, $f(x) = 3 \ln(x-4) + 17$ vérifie $f'(x) = \frac{3}{x-4}$. On dit alors que f est une primitive de $\frac{3}{x-4}$, le +17 étant ici pour vous rappeler le bel âge mais ne change rien à la dérivée.

• Pour $x < 4$, il suffit d'écrire $f'(x) = \frac{-3}{4-x} = 3 \cdot \frac{-1}{4-x} = 3 \frac{(4-x)'}{4-x}$ qui admet $f(x) = 3 \ln(4-x) + 47$ comme primitive.

Ainsi, les primitives de $\frac{3}{x-4}$ sont de la forme $3 \ln(4-x) + k$ sur $]-\infty; 4[$ et sur $]4; +\infty[$ mais les constantes k ne sont pas nécessairement égales à gauche et à droite.

Exercice 12

1. Pour tout réel x , on a $g'(x) = x'e^x + x(e^x)' = e^x(x+1)$ du signe de $x+1$ donc g est décroissante sur $]-\infty; -1]$ et croissante sur $[-1; +\infty[$. g admet donc un minimum global en -1 valant $g(-1) = -1e^{-1} + 1 \simeq 0,63 > 0$ et g est strictement positive sur $\mathbb{R}$.

2. (a) Pour $x \in]0; +\infty[$, on a $f'(x) = (e^x)' + (\ln x)' = e^x + \frac{1}{x} = \frac{xe^x + 1}{x}$
 $f'(x) = \frac{g(x)}{x} > 0$ donc f est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

- (b) On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^x + \ln(x)) = "e^0 - \infty" = -\infty$
et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x + \ln(x)) = "+\infty + \infty" = +\infty$

d'où $\left[\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right] = \mathbb{R}$.

Puisque f est continue, le T.V.I. Strict. permet d'affirmer que tout réel m admet un unique antécédent dans $]0; +\infty[$ par f .

Exercice 13 $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{x}\right) - \frac{1}{1+x}$.

f est définie, continue et dérivable pour $\frac{1+x}{x} > 0$ et $1+x \neq 0$ d'où

$$\mathcal{D} =]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[.$$

Posons $u = 1+x$, $v = x$, $w = \frac{u}{v} > 0$.

On a $u' = 1$, $v' = 1$, $w' = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{1x - 1(1+x)}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$.

Sinon, $\frac{1+x}{x} = \frac{1}{x} + 1 \dots$

Puisque $f = \ln(w) - \frac{1}{u}$, $f' = \frac{w'}{w} - \frac{-u'}{u^2}$ et, pour tout $x \in \mathcal{D}$,

$f'(x) = \frac{-1/x^2}{(1+x)/x} + \frac{1}{(1+x)^2} = -\frac{1}{x(1+x)} + \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{x - (1+x)}{x(1+x)^2} = -\frac{1}{x(1+x)^2}$ qui est du signe de $-x$.

On a $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{x}\right) - \frac{1}{1+x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \ln\left(\frac{1+0^+}{0^+}\right) - \frac{1}{1+0^+} = \ln\left(\frac{1}{0^+}\right) - 1$
 $= \ln(+\infty) - 1 = +\infty$,

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{x}\right) - \frac{1}{1+x} = \ln\left(\frac{1}{x} + 1\right) - \frac{1}{1+x} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} \ln\left(\frac{1}{\pm\infty} + 1\right) - \frac{1}{\pm\infty}$$

$$= \ln(0 + 1) - 0 = 0,$$

et, pour $x < -1$, $f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{x}\right) - \frac{1}{1+x} = \ln\left(\frac{-(1+x)}{-x}\right) - \frac{1}{1+x}$

$$f(x) = \ln(-(1+x)) - \ln(-x) - \frac{1}{1+x} = -\frac{1}{1+x}[-(1+x)\ln(-(1+x)) + 1] - \ln(-x).$$

En posant $X = -(1+x) \xrightarrow{x \rightarrow -1^-} -((-1)^- + 1) = -0^- = 0^+$,

on a $-(1+x)\ln(-(1+x)) + 1 = X\ln(X) + 1 \xrightarrow{X \rightarrow 0^+} 0 + 1 = 1$

et $-\frac{1}{1+x} = \frac{1}{X} \xrightarrow{X \rightarrow 0^+} +\infty$ d'où

$$f(x) = -\frac{1}{1+x}[-(1+x)\ln(-(1+x)) + 1] - \ln(-x)$$

$$\xrightarrow{x \rightarrow -1^-} "(+\infty) \times [1] - \ln(-(-1))" = +\infty.$$

D'où le tableau de variations complet suivant.

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$	+			-
f	$0 \nearrow +\infty$		$+\infty \searrow 0$	

Exercice 14

1. (a) Soit $x > 0$. $\varphi'(x) = (e^x - \ln(x))' = e^x - \frac{1}{x}$ qui a pour dérivée $\varphi''(x) = e^x + \frac{1}{x^2} > 0$ donc φ' est strictement croissante. Puisque $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi'(x) = e^0 - (+\infty) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi'(x) = e^{+\infty} - 0 = +\infty$, φ' change de signe. Étant continue, le T.V.I. Strict. permet d'affirmer que φ' s'annule une unique fois en un certain $\alpha \in]0; +\infty[$.

La calculatrice donne $\alpha \simeq 0,57$.

- (b) Puisque φ est positive, $MN = \varphi(x)$ qui est décroissante sur $]0; \alpha]$ et croissante sur $[\alpha; +\infty[$. MN est donc minimale en $x = \alpha$.

2. On a $\varphi'(\alpha) = 0 \iff e^\alpha - \frac{1}{\alpha} = 0 \iff e^\alpha = \frac{1}{\alpha} \iff \exp'(\alpha) = \ln'(\alpha)$: les coefficients directeurs des tangentes à $\mathcal{C}$ et Γ sont égaux et ces tangentes sont parallèles au point d'abscisse α .

Exercice 15 La tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse α admet l'équation suivante :

$$T_e : y = \exp'(\alpha)(x - \alpha) + \exp(\alpha) = e^\alpha x + e^\alpha(1 - \alpha)$$

et celle à Γ au point d'abscisse β est $T_\ell : y = \ln'(\beta)(x - \beta) + \ln(\beta) = \frac{1}{\beta}x - 1 + \ln(\beta)$.

Elles sont confondues ssi elles ont même coefficient directeur et même ordonnée à l'origine :

$$\begin{cases} e^\alpha = \frac{1}{\beta} \\ e^\alpha(1 - \alpha) = \ln(\beta) - 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \beta = e^{-\alpha} \\ e^\alpha(1 - \alpha) = \ln(e^{-\alpha}) - 1 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} e^\alpha(1 - \alpha) = -\alpha - 1 \\ \beta = e^{-\alpha} \end{cases} \iff \begin{cases} e^\alpha = \frac{\alpha+1}{\alpha-1} \\ \beta = e^{-\alpha} \end{cases} \quad \text{On observe graphiquement}$$

qu'il existe deux solutions à la première équation, $\alpha \simeq \pm 1,55$, et donc deux valeurs correspondantes $\beta \simeq \exp(\mp 1,55)$. Pour justifier rigoureusement de l'existence de ces deux solutions, on pourrait étudier la fonction $\exp(x) - \frac{x+1}{x-1}$ et appliquer deux T.V.I. Strict.

Exercice 16

1. (a) Pour $x > 0$, on a $f'(x) = a + \frac{x \ln'(x) - x' \ln(x)}{x^2} = a + \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$. Ainsi, $A(1, 0) \in \mathcal{C}$ ssi $a + b + \frac{\ln(1)}{1} = 0$ et $f'(1) = 3 \iff a + \frac{1 - \ln(1)}{1^2} = 3$
d'où le système $\begin{cases} a + 1 = 3 \\ a + b = 0. \end{cases}$

(b) On a alors $a = 2$ et $b = -2$ d'où, pour $x > 0$, $f(x) = 2x - 2 + \frac{\ln(x)}{x}$.

2. (a) Pour $x > 0$, on a $g'(x) = 4x - \frac{1}{x} = \frac{4x^2 - 1}{x}$ qui s'annule et change de signe en $\frac{1}{2}$ donc g admet un minimum global en $\frac{1}{2}$ qui vaut $g(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2} + 1 - \ln(\frac{1}{2}) = \frac{3}{2} + \ln(2) > 0$.
Sinon, $\ln(x) \leq x - 1$ et $x - 1 < 2x^2 + 1$ car $2x^2 - x + 2 > 0$ donc $\ln(x) < 2x^2 + 1$.

(b) Pour $x > 0$, $g(x) > 0 \iff 2x^2 + 1 - \ln(x) > 0$
 $\iff 2 + \frac{1 - \ln(x)}{x^2} > 0 \iff f'(x) > 0$ et f est strictement croissante.

Exercice 17

1. D'après le tableau de variations, on a $\begin{cases} \ln(\frac{a}{4} - \frac{b}{2} + c) = 0 \\ \frac{2a \times 0 + b}{a \times 0^2 + b \times 0 + c} = 0 \\ \ln(\frac{a}{16} + \frac{b}{4} + c) = \ln(\frac{5}{8}) \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} \frac{a}{4} - \frac{b}{2} + c = 1 \\ b = 0 \\ \frac{a}{16} + \frac{b}{4} + c = \frac{5}{8} \end{cases} \iff \begin{cases} b = 0 \\ c = 1 - \frac{a}{4} \\ \frac{a}{16} + 1 - \frac{a}{4} = \frac{5}{8} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} b = 0 \\ a - 4a = 10 - 16 \\ c = 1 - \frac{a}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2 \\ b = 0 \\ c = \frac{1}{2} \end{cases}$$

et $\begin{cases} f(x) = \ln(2x^2 + \frac{1}{2}) \\ \mathcal{D}_f = \mathbb{R}. \end{cases}$

2. (a) On a $f'(x) = \frac{(2x^2 + \frac{1}{2})'}{2x^2 + \frac{1}{2}} = \frac{4x}{2x^2 + \frac{1}{2}} = \frac{8x}{4x^2 + 1}$, $f'(0) = 0$,
 $f'(x) > 0 \iff x > 0$, $f(-\frac{1}{2}) = \ln(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}) = \ln(1) = 0$
et $f(\frac{1}{4}) = \ln(2\frac{1}{16} + \frac{1}{2}) = \ln(\frac{5}{8})$.

(b) Le minimum global de f est atteint en 0 et vaut $f(0) = \ln(\frac{1}{2}) = -\ln(2)$.

Exercice 18

1. $v_n = v_0 q^n = \frac{1,5}{2^n}$ donc $w_n = \ln(v_n) = \ln(1,5) - n \ln(2) = w_0 + nr$ pour $w_0 = \ln(1,5)$ et $r = -\ln(2)$.

2. On a $S_n = \sum_{i=0}^n w_i = \sum_{i=0}^n w_0 + r \sum_{i=0}^n i = (n+1) \ln(1,5) - \ln(2) \frac{n(n+1)}{2}$
 $S_n = (n+1) \left(\ln(1,5) - n \frac{\ln(2)}{2} \right)$ et $S_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty(-\infty) = -\infty$.
3. On a $e^{S_n} = e^{\sum_{i=0}^n w_i} = \prod_{i=0}^n e^{w_i} = \prod_{i=0}^n e^{\ln(v_i)} = \prod_{i=0}^n v_i = P_n$
 donc $P_n = e^{S_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} "e^{-\infty}" = 0$.

Exercice 19 $f(x) = 1 + x \ln(x+2)$ pour $x \in [-1; +\infty[$.

1. f est dérivable sur $[-1; +\infty[$ par composition ($x+2 > 0$) et, pour $x \geq -1$,
 $f'(x) = 1' + x' \ln(x+2) + x(\ln(x+2))' = 0 + \ln(x+2) + x \frac{(x+2)'}{x+2} = \ln(x+2) + \frac{x}{x+2}$.
 f' est dérivable et l'on a, pour tout $x \geq -1$, $f''(x) = \frac{(x+2)'}{x+2} + \frac{x'(x+2) - x(x+2)'}{(x+2)^2}$
 $f''(x) = \frac{1}{x+2} + \frac{x+2-x}{(x+2)^2} = \frac{x+2}{(x+2)^2} + \frac{2}{(x+2)^2} = \frac{x+4}{(x+2)^2} > 0$ donc f' est $\nearrow \nearrow$.
 De plus, $f'(-1) = \ln(-1+2) + \frac{-1}{-1+2} = \ln(1) - 1 = -1$ et
 $f'(x) = \ln(x+2) + \frac{x+2-2}{x+2} = \ln(x+2) + 1 - \frac{2}{x+2}$
 $\xrightarrow{x \rightarrow +\infty} " \ln(+\infty) + 1 - \frac{2}{+\infty} " = "+\infty + 1 - 0" = +\infty$.

D'où le tableau de variations complet suivant.

x	-1	$+\infty$
$f''(x)$		+
f'	-1	$\nearrow +\infty$

2. On a $f'(-0,6) < 0 < f'(-0,5)$ donc $0 \in]f'(-0,6); f'(-0,5)[$. Puisque f' est continue et strictement monotone sur $] -0,6; -0,5[$, le T.V.I. Strict permet d'affirmer que 0 admet un unique antécédent α dans $] -0,6; -0,5[$. Et comme f' est strictement monotone sur $[-1; +\infty[$, α est l'unique racine de f' sur $[-1; +\infty[$.
3. On a $f(-1) = 1 - 1 \ln(-1+2) = 1$
 et $f(x) = 1 + x \ln(x+2) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} "1 + \infty \ln(+\infty)" = +\infty$.

D'où le tableau suivant.

x	-1	α	$+\infty$
f'	-1	$\nearrow +\infty$	
$f'(x)$		-	0 +
f	1	$\searrow f(\alpha)$	$\nearrow +\infty$

Exercice 20

- A. 1. Pour $x > -1$, $f'(x) = \left(x - \frac{\ln(x+1)}{x+1} \right)' = 1 - \frac{(\ln(x+1))'(x+1) - (x+1)' \ln(x+1)}{(x+1)^2}$
 $f'(x) = 1 - \frac{\frac{(x+1)'}{x+1}(x+1) - \ln(x+1)}{(x+1)^2} = 1 - \frac{1 - \ln(x+1)}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 + \ln(x+1) - 1}{(x+1)^2}$.

2. (a) Pour $x > -1$, on a $N'(x) = [(1+x)^2]' + [\ln(1+x)-1]' = 2(1+x) + \frac{1}{1+x} > 0$ car $1+x > 0$ donc N est strictement croissante. Sinon, N est strictement croissante car somme de fonctions l'étant.
- (b) On a, pour $x > -1$, $f'(x) = \frac{N(x)}{(x+1)^2}$ donc f' est du signe de N . Puisque $N(0) = 1 + \ln(1) - 1 = 0$, N est négative et f décroissante pour $-1 < x < 0$, N est positive et f croissante pour $x > 0$.
3. Pour $x > -1$, $f(x) = x \iff x - \frac{\ln(x+1)}{x+1} = x \iff \frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0$
 $\iff \ln(x+1) = 0 \iff x+1 = 1 \iff x = 0$. On a $f(0) = 0$ et le point d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite Δ a pour coordonnées $(0, 0)$.
- B. 1. Puisque f est croissante,
 $0 \leq x \leq 4 \implies f(0) = 0 \leq f(x) \leq f(4) = 4 - \frac{\ln(5)}{5} < 4$.
2. (a) Sur la calculatrice, la suite $(u_n)_\mathbb{N}$ semble décroissante et converger vers 0.
- (b) Puisque $u_0 = 4 \in [0; 4]$, on a, d'après les propriétés de f ,
 $u_n \in [0; 4] \implies u_{n+1} = f(u_n) \in [0; 4]$ et, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0; 4]$.
- (c) Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = -\frac{\ln(u_n+1)}{u_n+1} < 0$ car $u_n+1 > 1$ donc $(u_n)_\mathbb{N}$ est décroissante. Étant minorée (par 0), le théorème de convergence monotone permet d'affirmer qu'elle converge. 0 étant l'unique point fixe de f , c'est la limite de $(u_n)_\mathbb{N}$.

Exercice 21

1. (a) Pour $x > 0$, on a $g'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2-1}{x}$ positif pour $x > \frac{\sqrt{2}}{2}$, négatif pour $0 < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ donc g admet un minimum global $g(\frac{\sqrt{2}}{2}) > 0$.
Sinon, $\ln(x) \leq x-1$ et $x-1 < x^2+1$ car $x^2-x+2 > 0$ donc $\ln(x) < x^2+1$.
- (b) Pour $x > 0$, on a $f'(x) = 1 + \frac{(\ln x)'x - x' \ln x}{x^2} = \frac{x^2 + \frac{x}{x} - \ln(x)}{x^2}$
 $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2} > 0$ du signe de $g(x)$: f est strictement croissante sur I .
De plus, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = "0^+ + \ln(0^+) \times \frac{1}{0^+}" = "0 - \infty(+\infty) = -\infty$
et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty + 0 = +\infty$.
2. (a) Pour $x > 0$, on a $f(x) - x = x + \frac{\ln(x)}{x} - x = \frac{\ln(x)}{x}$ du signe de $\ln(x)$.
La courbe $\mathcal{C}$ est donc située au-dessous de la droite Δ pour $0 < x < 1$ et au-dessus de Δ pour $x > 1$.
- (b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ donc $MN = |f(x) - x| \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.
- (c) La tangente à $\mathcal{C}$ est parallèle à Δ lorsque son coefficient directeur vaut 1 :
 $f'(x) = 1 \iff g(x) = x^2 \iff 1 - \ln(x) = 0 \iff x = e$.
On a alors $f(e) = e + \frac{1}{e}$ et $A(e, e + e^{-1})$.

Exercice 22 On a, pour $i \geq 2$, $u_i = \ln(1 - \frac{1}{i}) = \ln(\frac{i-1}{i}) = \ln(i-1) - \ln(i)$ donc
 $S_n = u_2 + u_3 + \dots + u_n = [\ln(1) - \ln(2)] + [\ln(2) - \ln(3)] + \dots + [\ln(n-1) - \ln(n)]$
 $= \ln(1) - \ln(n) = -\ln(n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$.

Ce type de sommation par éliminations successives s'appelle un *télescope*. Il faudrait faire une récurrence pour être vraiment rigoureux (cf. exercice suivant).

Exercice 23 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$ et $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.

On a $u_1 = \ln\left(\frac{1}{1+1}\right) = -\ln(2)$, $u_2 = \ln\left(\frac{2}{2+1}\right) = \ln(2) - \ln(3)$ et
 $u_3 = \ln\left(\frac{3}{3+1}\right) = \ln(3) - \ln(4)$ donc $S_1 = u_1 = \ln(1) - \ln(2)$,

$$S_2 = u_1 + u_2 = -\ln(2) + \ln(2) - \ln(3) = -\ln(3)$$

et $S_3 = (u_1 + u_2) + u_3 = -\ln(3) + \ln(3) - \ln(4) = -\ln(4)$.

On peut ainsi conjecturer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = -\ln(n+1)$.

Puisque $S_{n+1} = S_n + u_{n+1} = -\ln(n+1) + \ln\left(\frac{n+1}{n+2}\right)$

$S_{n+1} = -\ln(n+1) + \ln(n+1) - \ln(n+2) = -\ln(n+2)$, une récurrence immédiate donne le résultat. On a ainsi $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} -\ln(n+1) = -\infty$.

Exercice 24 Série harmonique : $h_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. En remarquant que (h_n) peut aussi se définir par récurrence : $h_{n+1} = h_n + \frac{1}{n+1}$, $h_1 = 1$, on construit un tableau de valeurs à la calculatrice qui suggère que cette suite a une croissance très lente et qu'il est difficile de conjecturer une éventuelle limite.

2. (a) Soit $x > 0$. Puisque la fonction $\ln$ est strictement concave sur $]0; +\infty[$, son graphe est entièrement situé en dessous de sa tangente en 1 qui a pour équation $y = \ln'(1)(x-1) + \ln(1) = x-1$. Ainsi, pour tout $a > 0$, $\ln(a) \leq a-1$. En posant $a = 1+x > 0$, $x = a-1$ et $\ln(1+x) \leq x$.

(b) On a alors, pour $n \geq 1$, $x = \frac{1}{n} > 0$
et $\ln(n+1) - \ln(n) = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$.

(c) Ainsi, $\frac{1}{1} \geq \ln(2) - \ln(1)$, $\frac{1}{2} \geq \ln(3) - \ln(2)$, $\frac{1}{3} \geq \ln(4) - \ln(3)$,...
 $\frac{1}{n} \geq \ln(n+1) - \ln(n)$ donc, en sommant ces inégalités (il faudrait faire une récurrence pour être plus rigoureux),

$$h_n = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \geq \ln(2) - \ln(1) + \ln(3) - \ln(2) + \ln(4) - \ln(3) + \dots + \ln(n+1) - \ln(n)$$

$$\text{et } h_n \geq -\ln(1) + \ln(n+1) = \ln(n+1).$$

3. Puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n+1) = +\infty$, le théorème de comparaison permet d'affirmer que $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = +\infty$.

Exercice 25

1. On a $m(t+T) = \frac{1}{2}m(t) \iff m_0 e^{-k(t+T)} = \frac{1}{2}m_0 e^{-kt}$
 $\iff e^{-kt} e^{-kT} = \frac{1}{2}e^{-kt} \iff e^{-kT} = \frac{1}{2} \iff -kT = \ln \frac{1}{2} \iff T = \frac{\ln(2)}{k}$
qui est bien indépendant de la masse initiale.

2. On a $k = \frac{\ln(2)}{5730} \simeq 1,21 \cdot 10^{-4} \text{ ans}^{-1}$.

3. Appellons m_{12} , m_{14} , m'_{12} et m'_{14} les masses respectives de carbone 12 et 14 au moment de la mort de l'organisme et à l'instant présent. On a $\frac{m_{14}}{m_{12}} = 10^{-12}$,

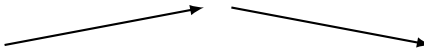
$$\frac{m'_{14}}{m'_{12}} = 2,5 \cdot 10^{-13}, \quad m'_{12} = m_{12} \quad \text{et} \quad m'_{14} = m_{14} e^{-kt}.$$

$$\text{Ainsi, } \frac{m_{14} e^{-kt}}{m_{12}} = 2,5 \cdot 10^{-13} \iff e^{-kt} = 2,5 \cdot 10^{-13} \cdot 10^{12} = \frac{1}{4}$$

$$\text{et } t = \frac{\ln(4)}{k} = 2T = 11\,460 \text{ ans.}$$

Exercice 26 If $r = 1$, then $x = \frac{1}{h}$ and $v = x^2 \ln\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\ln(h)}{h^2}$ of derivative $v' = \frac{\frac{1}{h} \cdot h^2 - 2h \ln(h)}{h^4} = \frac{1 - 2 \ln(h)}{h^3} = \frac{\ln(e) - \ln(h^2)}{h^3}$ which is of the sign of $e - h^2$.

Hence we have the following table of variations.

x	0	$\sqrt{e}$	$+\infty$
$e - h^2$	+	0	-
v'	+	0	-
v			

In order to obtain the maximum transmission speed, the insulation should be $\sqrt{e}$ cm thick.

Exercice 27 $f_\lambda(x) = x + \lambda e^{-x}$ pour $x \in \mathbb{R}$ et $\lambda > 0$.

- La fonction f_λ est trivialement définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on a $f'_\lambda(x) = 1 - \lambda e^{-x} = \frac{e^x - \lambda}{e^x}$. D'où $f'_\lambda(x) > 0 \iff e^x > \lambda > 0 \iff x > \ln(\lambda)$. La fonction f_λ est donc décroissante sur $]-\infty; \ln(\lambda)[$, croissante sur $[\ln(\lambda); +\infty[$. Ainsi, f_λ admet un minimum global en $\ln(\lambda)$ valant $f_\lambda(\ln(\lambda)) = \ln(\lambda) + \lambda e^{-\ln(\lambda)} = \ln(\lambda) + \lambda \cdot \frac{1}{\lambda} = \ln(\lambda) + 1$.

- Après avoir tracé différentes courbes $\mathcal{C}_\lambda$ et placé les points A_λ correspondants, il semble que les points A_λ soient alignés. En effet, pour tout $\lambda > 0$, $A_\lambda(\ln(\lambda), \ln(\lambda) + 1)$ est de la forme $(x, x + 1)$. Les points A_λ sont donc tous situés sur la droite d'équation $y = x + 1$.

Exercice 28

- Le taux s'applique mensuellement sur le capital restant dû au mois précédent. Ainsi, à la $(n+1)^{\text{e}}$ mensualité, les intérêts d'emprunt s'élèvent à $tR_n \text{ €}$. À cela, on doit ajouter le montant restant dû au mois précédent diminué du montant du remboursement mensuel soit $R_n - M$. Ainsi, le reste dû après $(n+1)$ mensualités est de $R_{n+1} = tR_n + (R_n - M) = (1+t)R_n - M$.
- (R_n) est arithmético-géométrique : on multiplie le terme précédent par $(1+t)$ puis on retranche M .
 - R_0 est le capital total emprunté, aucun versement n'étant encore effectué, donc $R_0 = C$.
Pour $n \geq 1$, on appelle $\mathcal{P}_n$ la propriété « $R_n = (1+t)^n C - \sum_{k=0}^{n-1} (1+t)^k M$ ».
 - $R_1 = (1+t)R_0 - M = (1+t)^1 C - (1+t)^0 M = (1+t)^1 C - \sum_{k=0}^{1-1} (1+t)^k M$ et $\mathcal{P}_1$ est vraie.
 - Soit $n \geq 1$ et supposons que $\mathcal{P}_n$ soit vraie.

$$\begin{aligned}
 R_{n+1} &= (1+t)R_n - M = (1+t) \left[(1+t)^n C - \sum_{k=0}^{n-1} (1+t)^k M \right] - M \\
 &= (1+t)^{n+1} C - \sum_{k=0}^{n-1} (1+t)^{k+1} M - M \\
 &= (1+t)^{n+1} C - \sum_{k=1}^{n+1-1} (1+t)^k M - (1+t)^0 M \\
 &= (1+t)^{(n+1)} C - \sum_{k=0}^{(n+1)-1} (1+t)^k M
 \end{aligned}$$

et $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

○ Ainsi, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{P}_n$ est vraie

i.e. $R_n = (1+t)^n C - \sum_{k=0}^{n-1} (1+t)^k M.$

(c) Puisque la suite $(1+t)^n$ est géométrique,

$$\sum_{k=0}^{n-1} (1+t)^k = (1+t)^0 \frac{(1+t)^{(n-1)+1} - 1}{(1+t) - 1} = \frac{(1+t)^n - 1}{t}$$

et $R_n = (1+t)^n C - \frac{(1+t)^n - 1}{t} M = (1+t)^n (C - \frac{M}{t}) + \frac{M}{t}.$

3. (a) Au bout de N mensualités, $R_N = 0$ donc on a
 $(1+t)^N (C - \frac{M}{t}) + \frac{M}{t} = 0 \iff (1+t)^N = \frac{-\frac{M}{t}}{C - \frac{M}{t}} = \frac{M}{M - Ct} > 0.$

(b) Ainsi, $N \ln(1+t) = \ln((1+t)^N) = \ln\left(\frac{M}{M - Ct}\right)$
 $\iff N = \frac{\ln(M) - \ln(M - Ct)}{\ln(1+t)}.$

4. (a) Pour $C = 3000$, $t = \frac{0,5}{100} = 0,005$ et $M = 50$, on obtient
 $N = \frac{\ln(M) - \ln(M - Ct)}{\ln(1+t)} = \frac{\ln(50) - \ln(50 - 3000 \times 0,005)}{\ln(1+0,005)} \simeq 71,51.$

Il faut donc 72 mensualités c.-à-d. 6 ans afin de rembourser un tel crédit ce qui est une période relativement longue pour un emprunt de ce type.

Coût total : $72 \times 50 - 3000 = 600 \text{ €}.$

(b) On a $(1+t)^N = \frac{M}{M - Ct} = \frac{1}{1 - \frac{Ct}{M}} \iff 1 - \frac{Ct}{M} = \frac{1}{(1+t)^N}$
 $\iff \frac{Ct}{M} = 1 - (1+t)^{-N} \iff M = \frac{Ct}{1 - (1+t)^{-N}}$

et $M = \frac{3000 \times 0,005}{1 - (1+0,005)^{-24}} \simeq 132,96.$

Pour rembourser un tel crédit en deux ans, il faudrait des mensualités de 132,96 €.

Coût total : $132,96 \times 24 - 3000 = 191,04 \text{ €}.$

Exercice 29 $a^b = b^a$ pour $a, b \in \mathbb{N}^*.$

$$a^b = b^a \iff \exp(b \ln(a)) = \exp(a \ln(b)) \iff b \ln(a) = a \ln(b) \iff \frac{\ln(a)}{a} = \frac{\ln(b)}{b}.$$

Étudions la fonction f définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ donnée par $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}.$

On a $f'(x) = \frac{x \ln'(x) - x' \ln(x)}{x^2} = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}$ qui est du signe de $1 - \ln(x)$ donc f est strictement croissante sur $]0; e]$, strictement décroissante sur $[e; +\infty[.$

Supposons $a < b$. Le T.V.I. Strict. nous permet alors d'affirmer que si $f(a) = f(b)$, alors $a \in]0; e]$ et $b \in [e; +\infty[.$ Or, les seuls entiers de $]0; e[$ sont 1 et 2, candidats pour a . Puisque $1^n = 1 \neq b^m$ pour $b \geq e$, on doit avoir $a = 2$ et il nous faut résoudre l'équation $2^b = b^2$ qui admet une unique solution dans $[e; +\infty[$ d'après l'étude

de f . On remarque que $b = 4$ vérifie $2^4 = 16 = 4^2$ et les seuls entiers naturels non nuls tels que $a^b = b^a$ sont 2 et 4.

Exercice 30 $f(x) = x^x$ pour $x > 0$.

On a $f(x) = \exp(x \ln(x))$, définie, continue et dérivable sur $]0; +\infty[$ par composition et, pour $x > 0$, $f'(x) = [x \ln(x)]' \exp(x \ln(x)) = (x' \ln(x) + x \ln'(x)) \exp(x \ln(x))$

$$f'(x) = (\ln(x) + 1) \exp(x \ln(x)) = (\ln(x) + 1)f(x) \quad \text{du signe de } \ln(x) + 1.$$

On a $\ln(x) + 1 > 0 \iff \ln(x) > -1 = \ln(\frac{1}{e}) \iff x > \frac{1}{e}$.

De plus, $x \ln(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 0$ donc $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \exp(0) = 1$,

$$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} " \exp(+\infty) " = +\infty \quad \text{et} \quad f\left(\frac{1}{e}\right) = \exp\left(\frac{1}{e} \ln\left(\frac{1}{e}\right)\right) = \exp\left(-\frac{1}{e}\right).$$

D'où le tableau de variations complet suivant.

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$\ln(x) + 1$		-	+
$f'(x)$		-	+
f	1	$e^{-\frac{1}{e}}$	$+\infty$

Exercice 31 $\ln_1(x) = \ln(x)$ et $\ln_{n+1}(x) = \ln_n(\ln(x))$ pour $n \geq 1$.

On peut écrire $\ln_n(x) = \ln^{\circ n}(x)$. La fonction $\ln_1 = \ln$ est définie pour $x > 0$.

La fonction $\ln_2 = \ln \circ \ln$ est définie pour $x > 0$ et $\ln(x) > 0$ c.-à-d. pour $x > 1 = e^0$.

La fonction $\ln_3 = \ln_2 \circ \ln$ est définie pour $x > 0$ et $\ln(x) > 1$ c.-à-d. pour $x > e = \exp(\exp(0))$.

La fonction $\ln_4 = \ln_3 \circ \ln$ est définie pour $x > 0$ et $\ln(x) > e$ c.-à-d. pour $x > e^e = \exp^{\circ 3}(0)$.

Supposons par récurrence que $\ln_n$ est définie pour $x > \exp^{\circ n}(0)$. On a alors $\ln_{n+1} = \ln_n \circ \ln$ définie pour $x > 0$ et $\ln(x) > \exp^{\circ n}(0)$

c.-à-d. $x > \exp(\exp^{\circ n}(0)) = \exp^{\circ(n+1)}(0)$.

La fonction $\ln_n$ est donc définie sur $] \exp^{\circ n}(0); +\infty[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 32 $u_n(x) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$.

1. Pour $x = 0$, on a $u_n(0) = \left(1 + \frac{0}{n}\right)^n = 1^n = 1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 = e^0$.

2. (a) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On a, dès que $\frac{x}{n} > -1$ donc dès que $n > |x|$,

$$u_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right) = \exp\left(\frac{x}{n} \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right)$$

$$u_n = \exp\left(x \cdot \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}}\right).$$

(b) Pour $h \neq 0$, on a $\frac{\ln(1+h)}{h} = \frac{\ln(1+h) - \ln(1)}{1+h-1} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \ln'(1) = \frac{1}{1} = 1$.

(c) Pour x fixé, $h = \frac{x}{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et par continuité de $\exp$ et de la multiplication

$$\text{par } x, \quad u_n = \exp\left(x \cdot \frac{\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}}\right) = \exp\left(x \frac{\ln(1+h)}{h}\right) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{h \rightarrow 0} \exp(x \times 1) = e^x.$$

3. Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$.

4. On peut vérifier à la calculatrice que $e^2 - \left(1 + \frac{2}{20}\right)^{20} \simeq 0,66$

et $e^2 - \left(1 + \frac{2}{50}\right)^{50} \simeq 0,28$: cette convergence est donc bien lente.

Chapitre X

REPRÉSENTATIONS PARAMÉTRIQUES & ÉQUATIONS CARTÉSIENNES

Sommaire

1	Représentations paramétriques	235
1.1	Paramétrage d'une droite	236
1.2	Paramétrage d'un plan	236
2	Équations cartésiennes d'un plan	237
3	Intersections de droites et de plans	238
3.1	Intersection de deux droites	238
3.2	Intersection d'une droite et d'un plan	239
3.3	Intersection de deux plans	239
	Exercices	241
	Corrigé des exercices	246

Voici déjà le dernier chapitre de géométrie de l'année. Nous allons ici décrire en terme d'équations les différents objets de l'espace que sont les plans et les droites.

1 Représentations paramétriques

L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ quelconque.

1.1 Paramétrage d'une droite

Théorème 1 La droite Δ passant par le point $A(x_0; y_0; z_0)$ et dirigée par le vecteur non nul $\vec{u}(a; b; c)$ est l'ensemble des points $M(x; y; z)$ de l'espace tels qu'il existe un réel t pour lequel

$$\begin{cases} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \\ z &= z_0 + ct. \end{cases}$$

Ce système s'appelle une **représentation paramétrique** de Δ dans le repère et t en est le paramètre.

Réciproquement, un tel système est nécessairement une représentation paramétrique d'une droite.

Démonstration : On a $M(x; y; z) \in \Delta = (A, \vec{u}) \iff \overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ colinéaires
 $\iff \exists t \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{AM} = t\vec{u} \iff x - x_0 = ta, y - y_0 = tb \text{ et } z - z_0 = tc. \quad \square$

Exemple :

Soit Δ la droite de représentation paramétrique, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x &= 3t + 1 \\ y &= 4 - 2t \\ z &= t - 2. \end{cases}$$

Son point de paramètre $t = 0$ est $A(1, 4, -2)$.

Un vecteur directeur est $\vec{u}(3, -2, 1)$.

Les points $P(10; -2; 1)$ et $Q(-5; 8; -3)$ appartiennent-ils à Δ ?

On a $3t + 1 = 10 \iff t = 3$ et $4 - 2 \times 3 = -2 = y_P$, $3 - 2 = 1 = z_P$ donc $P_{t=3} \in \Delta$.

On a $3t + 1 = -5 \iff t = -2$, $4 - 2(-2) = 8 = y_Q$ mais $-2 - 2 \neq -3 = z_Q$ donc $Q \notin \Delta$.

Remarques : • Dans un même repère, une droite admet une infinité de représentations paramétriques puisqu'elle contient une infinité de points et admet une infinité de vecteurs directeurs.

• Dans une représentation paramétrique donnée, chaque paramètre t définit un unique point de la droite et chaque point de la droite correspond à un unique paramètre t .

En revanche, dès que l'on change de représentation paramétrique (le point d'origine ou le vecteur directeur), les points changent de paramètres.

• Une droite est entièrement déterminée par la donnée d'une de ses représentations paramétriques.

On peut interpréter la représentation paramétrique d'une droite $\mathcal{D}$ donnée par l'égalité $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$ par le déplacement d'un point M le long de la droite $\mathcal{D}$ à la vitesse $\vec{u}$, ce point M étant au point A au temps $t = 0$.

1.2 Paramétrage d'un plan

La caractérisation d'un plan au moyen d'un point et de deux vecteurs non colinéaires permet une paramétrisation analogue à la précédente. Ce paragraphe n'est pas explicitement au programme mais c'est un prolongement si naturel du paragraphe précédent.

Théorème 2 Soient un point $A(x_0; y_0; z_0) \in \mathcal{E}$ et $\vec{u}(a; b; c)$, $\vec{v}(\alpha; \beta; \gamma)$ deux vecteurs non colinéaires caractérisant un plan $\mathcal{P}$.

Un point $M(x; y; z)$ appartient au plan $\mathcal{P}$ si, et seulement si,

$$\text{il existe } t, s \in \mathbb{R} \text{ tels que } \begin{cases} x &= x_0 + at + \alpha s \\ y &= y_0 + bt + \beta s \\ z &= z_0 + ct + \gamma s. \end{cases}$$

Ce système s'appelle une représentation paramétrique de $\mathcal{P}$ dans le repère et t, s en sont les paramètres.

Réciproquement, un tel système est nécessairement une représentation paramétrique d'un plan.

Ceci traduit exactement le fait

$$M \in \mathcal{P}(A, \vec{u}, \vec{v}) \iff \exists t, s \in \mathbb{R} \quad \overrightarrow{AM} = t\vec{u} + s\vec{v}.$$

2 Équations cartésiennes d'un plan

Dorénavant, l'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Théorème 3 Soit $\vec{n}(a, b, c)$ un vecteur non nul dans un repère orthonormé.

- Si le vecteur $\vec{n}$ est normal à un plan $\mathcal{P}$, alors il existe un réel d tel que $\mathcal{P}$ admette pour équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$.
- Réciproquement, l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace tels que $ax + by + cz + d = 0$ pour un certain d est un plan normal au vecteur $\vec{n}$.

Démonstration : • Soit un point $A(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{P}$. D'après le théorème 1 en page 191, on sait que le plan $\mathcal{P}$, normal à $\vec{n}$ en A , est l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.

L'expression du produit scalaire dans le repère orthonormé donne alors

$$(x - x_0)a + (y - y_0)b + (z - z_0)c = 0 \iff ax + by + cz + \underbrace{(-ax_0 - by_0 - cz_0)}_d = 0.$$

• Notons $\mathcal{Q}$ l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace tels que

$$ax + by + cz + d = 0. \quad \text{On a } \vec{n} \neq \vec{0}. \quad \text{Supposons donc que } a \neq 0.$$

On a $a(-\frac{d}{a}) + 0b + 0c + d = 0$ et le point $A(-\frac{d}{a}, 0, 0)$ appartient à $\mathcal{Q}$.

Par ailleurs, $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = (x + \frac{d}{a})a + by + cz = ax + by + cz + d$.

Ainsi, $M \in \mathcal{Q} = \{(x, y, z) \mid ax + by + cz + d = 0\} \iff \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$

$$\iff M \in \mathcal{P}_{\text{normal à } \vec{n} \text{ en } A}.$$

Si $a = 0$, on fait un raisonnement similaire avec une autre composante non nulle. $\square$

Remarque : Attention, un plan n'admet pas une équation cartésienne unique : pour en obtenir une autre, il suffit d'en multiplier une par un quelconque réel non nul *i.e.* de prendre un autre vecteur normal (nécessairement colinéaire). En revanche, un plan est entièrement déterminé par la donnée d'une de ses équations cartésiennes.

Exemples : On se place dans un repère orthonormé.

◦ Le plan d'équation $z = 0$ est le plan normal au vecteur $\vec{k}(0, 0, 1)$ passant par l'origine.

Le plan d'équation $x = 0$ est le plan normal au vecteur $\vec{i}(1, 0, 0)$ passant par l'origine.

Le plan d'équation $y = 0$ est le plan normal au vecteur $\vec{j}(0, 1, 0)$ passant par l'origine.

◦ Le plan normal au vecteur $\vec{n}(3, -2, 1)$ et passant par le point $A(2, 1, -3)$ admet pour équation cartésienne $3x - 2y + z - 1 = 0$.

3 Intersections de droites et de plans

3.1 Intersection de deux droites

Traisons un exemple. On cherche les coordonnées du point d'intersection éventuel des droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ de représentations paramétriques respectives, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\mathcal{D}_1: \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 2 + t \\ z = -2t \end{cases} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_2: \begin{cases} x = 17 + 2t \\ y = -2 - 2t \\ z = -4 + t. \end{cases}$$

On sait que $\mathcal{D}_1 = (A(5, 2, 0); \vec{u}(1, 1, -2))$

et $\mathcal{D}_2 = (B(17, -2, -4); \vec{v}(2, -2, 1))$ et l'on cherche un point $I(x, y, z)$ pour lequel il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{AI} = t\vec{u}$ et il existe $t' \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{BI} = t'\vec{v}$

mais il est hautement improbable que le paramètre t soit le même pour les deux droites. En effet, le point I existe indépendamment de la paramétrisation et si l'on change un point d'origine (A par exemple), le paramètre change mais pas le point, de la même manière que quand deux personnes se dirigent en ligne droite vers une même porte en partant de points différents et à des vitesses différentes, il est très rare qu'elles se retrouvent coincées dans l'entrebâillement.

Ainsi, il est très important de nommer différemment les deux paramètres. Ceci étant dit, il nous reste à trouver les réels t et t' tels que

$$\begin{aligned} \begin{cases} (x_I) = 5 + t & = 17 + 2t' \\ (y_I) = 2 + t & = -2 - 2t' \\ (z_I) = -2t & = -4 + t' \end{cases} \iff \begin{cases} t & = 12 + 2t' \\ 2 + 12 + 2t' & = -2 - 2t' \\ -2(12 + 2t') & = -4 + t' \end{cases} \\ \iff \begin{cases} 4t' & = -16 \\ -4t' - t' & = -4 + 24 \\ t & = 12 + 2t' \end{cases} \iff \begin{cases} t' & = -4 \\ t' & = \frac{20}{5} \\ t & = 12 + 2(-4) = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{et l'on a } \begin{cases} x_I = 5 + 4 & = 17 + 2(-4) & = 9 \\ y_I = 2 + 4 & = -2 - 2(-4) & = 6 \\ z_I = -2 \times 4 & = -4 - 4 & = -8. \end{cases}$$

Le point d'intersection de $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ est donc $I(9, 6, -8)$.

On remarque que l'on a obtenu un système de trois équations à deux inconnues (t et t'). Un tel système n'admet pas toujours de solution unique. En effet, deux droites de l'espace peuvent être sécantes mais aussi parfois confondues (tout t est solution) et généralement disjointes (aucune solution).

3.2 Intersection d'une droite et d'un plan

Traisons un exemple. Dans un repère orthonormé, le plan $\mathcal{P}$ est donné par l'équation cartésienne $5x + y - z + 3 = 0$ et la droite $\mathcal{D}$ par la représentation paramétrique, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 - 6t \\ z = 3 - t \end{cases}$$

Ainsi, $\mathcal{P} = (A(0, 0, 3); \vec{n}(5, 1, -1))$

et $\mathcal{D} = (B(0, 1, 3); \vec{v}(1, -6, -1))$.

On cherche un point $I(x, y, z) \in \mathcal{P} \cap \mathcal{D}$. Il nous faut donc trouver un réel t tel que

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 - 6t \\ z = 3 - t \\ 5x + y - z + 3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = t \\ y = 1 - 6t \\ z = 3 - t \\ 5t + (1 - 6t) - (3 - t) + 3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = t \\ y = 1 - 6t \\ z = 3 - t \\ 0t + 1 = 0 \end{cases}$$

qui n'admet aucune solution. Le plan $\mathcal{P}$ et la droite $\mathcal{D}$ sont donc disjoints c.-à-d. strictement parallèles.

En prenant le plan $\mathcal{Q}: 5x + y - z + 2 = 0$, on aurait obtenu $0t = 0$ comme dernière équation. Tout réel t vérifiant cette équation, la droite $\mathcal{D}$ est incluse dans le plan $\mathcal{Q}$.

En prenant le plan $\mathcal{R}: 6x + y - z + 1 = 0$, la dernière équation devient $6t + (1 - 6t) - (3 - t) + 1 = 0 \iff t = 1$: le plan $\mathcal{R}$ et la droite $\mathcal{D}$ sont sécants au point $I_{t=1}(1, -5, 2)$.

On aurait pu remarquer de prime abord que $\vec{n}(5, 1, -1) \cdot \vec{v}(1, -6, -1) = 0$ donc $\mathcal{P} // \mathcal{D}$ et $\mathcal{Q} // \mathcal{D}$ mais on ne sait s'ils sont disjoints.

3.3 Intersection de deux plans

Dans un repère orthonormé, tout plan admet un vecteur normal et donc tout plan admet une équation cartésienne. Il en résulte qu'une droite, en tant qu'intersection de deux plans sécants, admet un système d'équations cartésiennes $\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}$ où les triplets (a, b, c) et (a', b', c') ne sont pas proportionnels ($\vec{n}$ et $\vec{n}'$ non colinéaires). En posant ensuite $z = t$ (ou $x = t$ ou $y = t$ si des coefficients sont nuls), on peut alors retrouver une représentation paramétrique de cette droite.

Exemple : On se place dans un repère orthonormé.

Le plan $\mathcal{P}$, normal au vecteur $\vec{n}(3, -2, 1)$ et passant par le point $A(2, 1, -3)$, admet pour équation cartésienne $3x - 2y + z - 1 = 0$.

Le plan $\mathcal{P}'$, normal au vecteur $\vec{n}'(1, 4, -2)$ et passant par le point $B(3, 2, 7)$, admet pour équation cartésienne $x + 4y - 2z + 3 = 0$.

Puisque $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ ne sont pas colinéaires, les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants et la droite d'intersection $\mathcal{D}$ admet pour système d'équations cartésiennes $\begin{cases} 3x - 2y + z - 1 = 0 \\ x + 4y - 2z + 3 = 0 \end{cases}$.

On peut ensuite retrouver une représentation paramétrique de $\mathcal{D}$ en posant par exemple $y = t$. On a alors

$$\begin{cases} y = t \\ z = -3x + 2t + 1 \\ x + 4t - 2(-3x + 2t + 1) + 3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = t \\ z = -3x + 2t + 1 \\ 7x = -1 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \mathcal{D}: \begin{cases} x = -\frac{1}{7} \\ y = t \\ z = -3\frac{-1}{7} + 2t + 1 = 2t + \frac{10}{7}. \end{cases}$$

On remarque que sur cette droite, on a $x = \text{constante}$ donc en posant $x = t$, on aurait abouti à une impossibilité (ce qui n'est pas évident de prime abord). En revanche, on aurait pu poser $z = t$ et obtenir une autre représentation paramétrique de $\mathcal{D}$.

Remarque : Un plan est donné par une équation cartésienne qui peut généralement s'écrire sous la forme $z = \alpha x + \beta y + \gamma$ (sinon, $x = \dots$ ou $y = \dots$) et l'on a deux *degrés de liberté* : la donnée d'un x et d'un y impose la valeur de z . Un plan est bien de dimension 2.

Si l'on a maintenant deux équations cartésiennes, on peut généralement écrire $z = mx + p$ et $y = m'x + p'$ en écrivant $z = \dots$ dans l'une des équations puis en substituant dans l'autre. On n'a alors plus qu'un seul *degré de liberté* : la donnée d'un x impose alors la valeur de y et de z . L'intersection de deux plans est généralement bien une droite, de dimension 1.

Exercices

REPRÉSENTATIONS PARAMÉTRIQUES & ÉQUATIONS CARTÉSIENNES

Les exercices et questions signalées par une étoile (*) utilisent la notion de représentations paramétriques d'un plan et ne sont pas explicitement au programme. Rien ne vous empêche de les traiter toutefois.

Exercice 1 Donner une représentation paramétrique de la droite d lorsque :

- (a) $d = (A, \vec{u})$ avec $A(-1; 2; 0)$ et $\vec{u}(0; -1; 1)$.
- (b) $d = (AB)$ avec $A(2; 1; -1)$ et $B(2; -1; 1)$.

Exercice 2

La droite Δ a pour représentation paramétrique, pour $t \in \mathbb{R}$,
$$\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = -2 + 2t \\ z = -1 - t. \end{cases}$$

1. (a) Déterminer les coordonnées du point I de Δ de paramètre 0.
- (b) Déterminer les composantes d'un vecteur $\vec{u}$ directeur de Δ .
- (c) Justifier qu'il existe un point de Δ d'abscisse -5 .
2. (a) La droite Δ passe-t-elle par le point $A(-10; \frac{16}{3}; -\frac{14}{3})$?
- (b) Justifier que le vecteur $\vec{v}(6, -4, 2)$ dirige Δ puis en donner une autre représentation paramétrique.

Exercice 3

La droite d passe par le point $A(2; 0; 5)$ et elle est dirigée par le vecteur $\vec{u}(2; 5; -1)$.
La droite d' passe par le point $B(2; 2; -1)$ et elle est dirigée par le vecteur $\vec{v}(1; 2; 1)$.
Calculer les coordonnées du point d'intersection de d et d' .

Exercice 4 Soient les droites, pour $t \in \mathbb{R}$, $\mathcal{D}: \begin{cases} x = 5 - t \\ y = 2 + t \\ z = 1 - 3t \end{cases}$ et

$\mathcal{D}': \begin{cases} x = t \\ y = 2 - 2t \\ z = 1 + t. \end{cases}$ Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ sont-elles parallèles ? Sont-elles coplanaires ?

Exercice 5 Déterminer la position relatives des droites Δ et Δ' définies, pour $t \in \mathbb{R}$, par $\Delta: \begin{cases} x = 6t - 4 \\ y = 9 - 8t \\ z = 6t - 3 \end{cases}$ et $\Delta': \begin{cases} x = 5 - 9t \\ y = 12t - 3 \\ z = 6 - 9t. \end{cases}$

Exercice 6 Soient $A(1, -2, 1)$, $\vec{u}(4, 5, -1)$ et $\vec{v}(2, -3, 1)$ dans un r.o.n. Déterminer une équation cartésienne du plan dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ passant par A .

Exercice 7 Soient $Z(-1, 0, 2)$, $E(5, -4, 1)$ et $N(2, 2, 1)$ dans un r.o.n. Après vérification du non-alignement de ces trois points, déterminer une équation cartésienne du plan (ZEN) .

Exercice 8 L'espace est muni d'un repère orthonormé. Déterminer la position relative des plans suivants puis déterminer une représentation paramétrique de leur droite d'intersection le cas échéant. Sinon, sont-ils confondus ?

1. $\mathcal{P}$ est normal à $\vec{p}(1, 2, 3)$ en $P(3, 2, 1)$ et $\mathcal{Q}$ est normal à $\vec{q}(2, 1, 3)$ en $Q(4, 1, 2)$.
2. $\mathcal{R}$ est normal à $\vec{r}(3, 4, -2)$ en $R(1, 3, 2)$ et $\mathcal{S}$ est normal à $\vec{s}(6, 8, -4)$ en $S(2, 3, 1)$.

Exercice 9 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on donne les points $L(1; 0; 2)$, $M(3; -1; 1)$ et $N(1; 2; -3)$ et la droite d de représentation paramétrique, pour $t \in \mathbb{R}$,

$$d : \begin{cases} x = 7t + 1 \\ y = 10t - 4 \\ z = 4t + 1. \end{cases}$$

1. Vérifier que les points L , M et N définissent un plan $\mathcal{P}$.
2. Démontrer que la droite d est perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$.
3. Quelles sont les coordonnées du point H , commun à la droite d et au plan $\mathcal{P}$?

Exercice 10 Pour $m \in \mathbb{R}$, $\mathcal{P}_m$ est le plan d'équation $x + (1 - m)y + 2mz - 1 = 0$ dans un repère orthonormé.

1. On note Δ la droite d'intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$. En donner une représentation paramétrique.
2. Démontrer que la droite Δ est contenue dans chacun des plans $\mathcal{P}_m$.
3. On suppose m et $m' \neq \frac{1}{5}$. Montrer que deux plans $\mathcal{P}_m$ et $\mathcal{P}_{m'}$ sont perpendiculaires ssi $m' = \frac{m-2}{5m-1}$.
4. Que dire pour $m = \frac{1}{5}$?

Exercice 11

Partie A : On donne les points $A(-1; 0; 2)$, $B(3; 2; -4)$, $C(1; -4; 2)$ et $D(5; -2; 4)$. I et K sont les milieux des segments $[AB]$ et $[CD]$. J est tel que $\vec{BJ} = \frac{1}{4}\vec{BC}$.

1. (a) Déterminer les coordonnées des points I , J et K .
(b) Démontrer que ces trois points ne sont pas alignés.
2. On donne $\vec{u}(1; -2; 2)$ et $\vec{v}(3; -1; -3)$.
Démontrer que les plans (IJK) et $\mathcal{P}(I, \vec{u}, \vec{v})$ sont confondus.
3. (a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AD) .
(b) Démontrer que le plan $\mathcal{P}$ et la droite (AD) sont sécants au point $L(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{5}{2})$.
(c) Vérifier que $\vec{AL} = \frac{1}{4}\vec{AD}$.

Partie B : Généralisation.

$ABCD$ est un tétraèdre. I et K sont les milieux respectifs des arêtes $[AB]$ et $[CD]$. Les points J et L sont tels que $\vec{BJ} = \frac{1}{4}\vec{BC}$ et $\vec{AL} = \frac{1}{4}\vec{AD}$.

En choisissant un repère adapté, démontrer que les droites (IK) et (LJ) sont sécantes et que les points I , J , K et L sont coplanaires.

*

Exercice 12

Le plan $\mathcal{P}$ a pour représentation paramétrique (t et $s \in \mathbb{R}$) $\begin{cases} x = -2 + t + s \\ y = -t + 2s \\ z = 1 + 3t - s. \end{cases}$

1. Préciser la position relative du plan $\mathcal{P}$ et du plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
2. Déterminer une représentation paramétrique du plan $\mathcal{Q}$ passant par $A(1; 3; 0)$ et parallèle à $\mathcal{P}$.
3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ , intersection du plan $\mathcal{Q}$ et du plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
4. Préciser la position relative des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}' : \begin{cases} x = -2 + 2t \\ y = t + 3s \\ z = 1 + 2t - 4s \end{cases} \quad (t \text{ et } s \in \mathbb{R})$.

Exercice 13 On note d la droite passant par les points $A(1; -2; -1)$ et $B(3; -5; -2)$.

1. Démontrer que, pour $t \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - 3t \\ z = -1 - t. \end{cases}$ est une rep. param. de d .
2. d' est la droite de représentation paramétrique, pour $t' \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} x = 2 - t' \\ y = 1 + 2t' \\ z = t'. \end{cases}$
Démontrer que d et d' ne sont pas coplanaires.
3. On considère le plan $\mathcal{P}$ passant par le point $C(0; -3; 0)$ et dirigé par les vecteurs $\vec{u}(1; -4; 0)$ et $\vec{v}(0; -5; 1)$.
(a) Démontrer que le plan $\mathcal{P}$ contient la droite d .
(b) Démontrer que le plan $\mathcal{P}$ et la droite d' se coupent en un point D dont on déterminera les coordonnées.

*

Exercice 14 L'espace est muni d'un repère orthonormé.

1. Le plan $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne $3x + 2y - 5 = 0$ et l'on donne les points $U(1; 2; 1)$ et $V(\frac{5}{2}; 3; 1)$. La droite (UV) est-elle perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$?
2. Le plan $\mathcal{Q}$ a pour représentation param., pour $t, s \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} x = 1 + t - 2s \\ y = \frac{2}{3} - t + s \\ z = 2t - s. \end{cases}$
(a) Définir le plan $\mathcal{Q}$ par un point et deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
(b) Définir le plan $\mathcal{Q}$ par une équation cartésienne.
3. On donne les points $R(-1; 2; 3)$ et $S(1; 2; 1)$.
Le plan $\mathcal{B}$ a pour équation cartésienne $x + y - z - 1 = 0$.
Calculer les coordonnées du point K , intersection de la droite (RS) et du plan $\mathcal{B}$.

*

Exercice 15 $FLWRIGHT$ est un cube d'arête 1, $\vec{FA} = 2\vec{FL}$, $\vec{FB} = 4\vec{FR}$ et $\vec{WC} = 2\vec{WH}$. L'espace est muni du repère orthonormé $(F; \vec{FL}, \vec{FR}, \vec{FI})$.

1. (a) Quelle est la nature du triangle BAC ?
(b) Vérifier que le plan (BAC) a pour équation cartésienne $4x + 2y + z - 8 = 0$.
2. Soit K le projeté orthogonal de I sur le plan (BAC) .
(a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (IK) .
(b) En déduire les coordonnées du point K .
(c) Démontrer que K est un point de la droite (AC) .

Exercice 16 QCM.

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Indiquer laquelle en justifiant.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les points $U(1; 2; -4)$, $V(-3; 4; 1)$ et le plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x + 3y - z + 4 = 0$.

- La droite d a pour équation paramétrique, pour $t \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} x = -8 + 2t \\ y = 7 - t \\ z = 6 + t. \end{cases}$
 - $\mathcal{P}$ et d sont sécants.
 - $\mathcal{P}$ et d sont disjoints.
 - $d \subset \mathcal{P}$.
- $\mathcal{Q}$ est le plan d'équation $x + 4y - 3z + 4 = 0$. Les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont :

(a) parallèles distincts.	(c) sécants selon une droite dirigée par $-\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.	(d) Aucune des réponses précédentes n'est exacte.
---------------------------	---	---
- Le plan médiateur du segment $[UV]$ a pour équation :
 - $-4x + 2y + 5z - \frac{5}{2} = 0$.
 - $-4x + 2y + 5z + \frac{5}{2} = 0$.
 - Aucune de celles-ci.

Exercice 17

- Soient $A(1, 1, 1)$, $B(3, 2, 1)$ et $\vec{v}(-1, 0, 1)$ dans un repère orthonormé.
 - Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal H du point A sur le plan normal à $\vec{v}$ en B .
 - Déterminer les coordonnées de I , projeté orthogonal de A sur la droite dirigée par $\vec{v}$ passant par B .
 - Calculer les distances AI , AH , BI et BH .
 - Quelle est la nature du quadrilatère $BIAH$?
- Mêmes questions pour $A(2, 3, 4)$, $B(2, -1, 4)$ et $\vec{v}(4, 5, -1)$ dans un r.o.n.

Exercice 18 QCM

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Indiquer laquelle en justifiant.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

- Soient le plan $\mathcal{P}: 3x + 2y + 9z - 5 = 0$ et la droite $\mathcal{D}: \begin{cases} x = 4t + 3 \\ y = 2 - t \\ z = 9 - t. \end{cases} (t \in \mathbb{R})$
 - L'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite $\mathcal{D}$ est réduite au point $(3, 2, 9)$.
 - Le plan $\mathcal{P}$ et la droite $\mathcal{D}$ sont perpendiculaires.
 - Le plan $\mathcal{P}$ et la droite $\mathcal{D}$ sont parallèles.
 - L'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite $\mathcal{D}$ est réduite au point $(-353, 91, 98)$.
- On considère le point $A(-2, 1, 0)$ et la droite $d: \begin{cases} x = t + 2 \\ y = 2 \\ z = 5t - 6. \end{cases} (t \in \mathbb{R})$
 M étant un point variable de la droite d , la plus petite longueur AM :
 - est égale à $\sqrt{53}$.
 - est égale à $\sqrt{27}$.
 - est atteinte lorsque M a pour coordonnées $(-2, 1, 0)$.
 - est atteinte lorsque M a pour coordonnées $(2, 2, -6)$.

3. On considère les plans $\mathcal{Q}: x + 2y - 3z + 1 = 0$ et $\mathcal{R}: 2x - y + 2 = 0$.
- Les plans $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ sont parallèles.
 - L'intersection des plans $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ est une droite passant par les points $I(5, 12, 10)$ et $J(3, 1, 2)$.
 - L'intersection des plans $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ est une droite passant par le point $K(2, 6, 5)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{u}(1, 2, 2)$.
 - L'intersection des plans $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ est une droite passant par le point $H(-1, 0, 0)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{v}(3, 6, 5)$.

Exercice 19 $ABCDEFGH$ est un cube d'arête 1, I est l'intersection de la droite (EC) et du plan (AFH) . L'espace est muni du repère orthonormé $(D; \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$.

- Déterminer une représentation paramétrique de la droite (EC) .
 - Déterminer une équation cartésienne du plan (AFH) .
- En déduire les coordonnées de I et démontrer que la droite (EI) est perpendiculaire au plan (AFH) .
- Démontrer que la droite (IH) est perpendiculaire à la droite (AF) .
 - Que représente I pour le triangle AFH ?
- Un tétraèdre est dit de type 1 si toutes ses faces ont la même aire.
 - Un tétraèdre est dit de type 2 si toutes ses arêtes opposées sont orthogonales deux à deux.
 - Un tétraèdre est dit de type 3 s'il est à la fois du type 1 et du type 2.

Quel est le type du tétraèdre $EAFH$?

Exercice 20 Intersection d'une sphère et d'une droite

L'espace est muni d'un repère orthonormé. On désigne par $\mathcal{S}$ la sphère de centre $I(2, -3, 1)$ et de rayon 5.

- À partir de la définition d'une sphère, déterminer une équation $\mathcal{S}$.
- On pose $A(1, 1, 2)$ et $\vec{u}(-1, 3, 2)$.
 - Déterminer une représentation paramétrique de la droite $\mathcal{D}_A = (A, \vec{u})$.
 - Calculer alors les coordonnées des éventuels points d'intersection de la droite $\mathcal{D}_A$ et de la sphère $\mathcal{S}$.
 - Que penser de la distance de I à la droite $\mathcal{D}_A$? Calculer ensuite cette distance afin de démontrer cette conjecture.
- Questions analogues pour la droite $\mathcal{D}_B = (B(5, -3, 5), \vec{v}(4, 0, -3))$.
- Questions analogues pour la droite $\mathcal{D}_C = (C(1, 10, -2), \vec{w}(1, 2, 1))$.

Projetez-vous donc sur les pages 463, 465 et 469 et réalisez les devoirs n^{os} 13, 14 et 15.

Corrigé des exercices

REPRÉSENTATIONS PARAMÉTRIQUES & ÉQUATIONS CARTÉSIENNES

Exercice 1

(a) $M \in d(A; \vec{u}) \iff \overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ colinéaires

$$\iff \text{pour } t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x = x_A + tx_{\vec{u}} \\ y = y_A + ty_{\vec{u}} \\ z = z_A + tz_{\vec{u}} \end{cases} \iff \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = t \end{cases}$$

(b) On a $\overrightarrow{AB}(0, -2, 2)$ et $M \in (AB) \iff M \in (A; \frac{1}{2}\overrightarrow{AB})$

$$\iff \text{pour } t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x = x_A + t\frac{1}{2}x_{\overrightarrow{AB}} \\ y = y_A + t\frac{1}{2}y_{\overrightarrow{AB}} \\ z = z_A + t\frac{1}{2}z_{\overrightarrow{AB}} \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 - t \\ z = t - 1 \end{cases}$$

Exercice 2 $\Delta : \text{pour } t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = -2 + 2t \\ z = -1 - t \end{cases}$

1. (a) $x_I = 1 - 3 \times 0 = 1$, $y_I = -2 + 2 \times 0 = -2$ et $z_I = -1 - 0 = -1$ donc $I_{t=0}(1, -2, -1)$.

(b) D'après le théorème du cours, le vecteur $\vec{u}(-3, 2, -1)$ est directeur de Δ .

(c) Il existe un point de Δ d'abscisse -5 car l'équation $-5 = 1 - 3t$ admet une solution. C'est le point de paramètre $t = 2$.

2. (a) On a $-10 = 1 - 3t \iff t = \frac{11}{3}$. On a bien $-2 + 2 \times \frac{11}{3} = \frac{16}{3}$ et $-1 - \frac{11}{3} = -\frac{14}{3}$ donc A est le point de Δ de paramètre $t = \frac{11}{3}$.

(b) On a $\vec{v}(6, -4, 2) = 2 \cdot \vec{u}(-3, 2, -1)$ donc ils sont colinéaires et $\vec{v}$ dirige $\Delta = (A, \vec{v})$.

D'où la représentation paramétrique de Δ , $s \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} x = -10 + 6s \\ y = 16/3 - 4s \\ z = -14/3 + 2s \end{cases}$.

Exercice 3

La droite $d(A; \vec{u})$ admet pour rep. param., pour $t \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} x = x_A + tx_{\vec{u}} = 2 + 2t \\ y = y_A + ty_{\vec{u}} = 5t \\ z = z_A + tz_{\vec{u}} = 5 - t \end{cases}$

La droite $d'(B; \vec{v})$ admet pour rep. param., pour $s \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} x = x_B + sx_{\vec{v}} = 2 + s \\ y = y_B + sy_{\vec{v}} = 2 + 2s \\ z = z_B + sz_{\vec{v}} = s - 1 \end{cases}$

À l'intersection, on a donc $(x =) 2 + 2t = 2 + s \Rightarrow s = 2t$ et $(y =) 5t = 2 + 2 \times 2t$ donc $t = 2$ et $s = 2t = 4$. Le point de d de paramètre $t = 2$ a pour coordonnées $(2 + 2 \times 2, 5 \times 2, 5 - 2)$ i.e. $(6, 10, 3)$ et celui de d' de paramètre $s = 4$, $(2 + 4, 2 + 2 \times 4, 4 - 1)$ i.e. $(6, 10, 3)$.

L'intersection de d et de d' est donc le point $(6, 10, 3)$.

Exercice 4 Pour $t \in \mathbb{R}$, $\mathcal{D}: \begin{cases} x = 5-t \\ y = 2+t \\ z = 1-3t \end{cases}$ et $\mathcal{D}': \begin{cases} x = t \\ y = 2-2t \\ z = 1+t \end{cases}$

D'après leur représentation, la droite $\mathcal{D}$ est dirigée par le vecteur $\vec{u}(-1, 1, -3)$ et la droite $\mathcal{D}'$ par le vecteur $\vec{v}(1, -2, 1)$. Puisque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires ($\frac{-1}{1} \neq \frac{1}{-2}$), les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas parallèles.

Sont-elles sécantes? On cherche t et $t' \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\begin{cases} x = 5-t = t' \\ y = 2+t = 2-2t' \\ z = 1-3t = 1+t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = 5-t \\ 2+t = 2-2(5-t) \\ 1-3t = 1+5-t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t' = 5-t \\ t = -10+2t \\ -5 = 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = 5-t \\ t = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

qui n'admet pas de solution. Les droites $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont donc pas sécantes.

Ni sécantes, ni parallèles, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$ ne sont pas coplanaires.

Exercice 5 Pour $t \in \mathbb{R}$, $\Delta: \begin{cases} x = 6t-4 \\ y = 9-8t \\ z = 6t-3 \end{cases}$ et $\Delta': \begin{cases} x = 5-9t \\ y = 12t-3 \\ z = 6-9t \end{cases}$

D'après leur représentation, la droite Δ est dirigée par le vecteur $\vec{u}(6, -8, 6)$ et la droite Δ' par le vecteur $\vec{v}(-9, 12, -9)$. Puisque $3\vec{u} = -2\vec{v}$, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et les droites Δ et Δ' sont parallèles.

Sont-elles confondues? Le point $I(-4, 9, -3)$ est le point de Δ paramètre $t = 0$ et celui de Δ' de paramètre $t = 1$. Les deux droites Δ et Δ' ayant un point commun, elles sont confondues.

Sans cette analyse, on peut aussi identifier les deux représentations en prenant soin de différencier les deux paramètres, t et t' . On tombe alors sur un système donnant $0 = 0$ et $t' = f(t)$ qui admet tous t et t' comme solutions ce qui signifie que tous les points d'une des droites est aussi sur l'autre : les deux droites sont bien confondues.

Exercice 6 $A(1, -2, 1)$, $\vec{u}(4, 5, -1)$ et $\vec{v}(2, -3, 1)$ dans un r.o.n.

On cherche un vecteur $\vec{n}(a, b, c)$ orthogonal aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On doit donc avoir

$$\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{v} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a + 5b - c = 0 \\ 2a - 3b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (L1) + (L2): 6a + 2b = 0 \\ (L2): c = 3b - 2a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (L1): b = -3a \\ (L2): c = 3(-3a) - 2a = -11a \end{cases} \quad \text{et, pour } a = 1 \text{ par exemple, le vecteur}$$

$\vec{n}(1, -3, -11)$ répond aux attentes. Le plan $\mathcal{P}$ dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ passant par A est donc normal à $\vec{n}$ et admet une équation cartésienne de la forme $\mathcal{P}: x - 3y - 11z + d = 0$.

Puisque $A \in \mathcal{P}$, $x_A - 3y_A - 11z_A + d = 0 \Leftrightarrow d = -1 + 3(-2) + 11 \times 1 = 4$. D'où l'équation $\mathcal{P}: x - 3y - 11z + 4 = 0$.

Exercice 7 $Z(-1, 0, 2)$, $E(5, -4, 1)$ et $N(2, 2, 1)$ dans un r.o.n.

Les vecteurs $\vec{ZE}(6, -4, -1)$ et $\vec{ZN}(3, 2, -1)$ ne sont trivialement pas colinéaires donc les points Z , E et N ne sont pas alignés. On cherche un vecteur $\vec{n}(a, b, c)$

orthogonal aux vecteurs $\vec{ZE}$ et $\vec{ZN}$. On doit donc avoir $\begin{cases} \vec{n} \cdot \vec{ZE} = 0 \\ \vec{n} \cdot \vec{ZN} = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 6a - 4b - c = 0 \\ 3a + 2b - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (L1) - (L2): 3a - 6b = 0 \\ (L2): c = 3a + 2b \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (L1): a = 2b \\ (L2): c = 3 \times 2b + 2b = 8b \end{cases}$ et, pour $b = 1$ par exemple, le vecteur $\vec{n}(2, 1, 8)$ répond aux attentes. Le plan (ZEN) est donc normal à $\vec{n}$ et admet une équation cartésienne de la forme $(ZEN): 2x + y + 8z + d = 0$. Puisque $Z \in (ZEN)$, $2x_Z + y_Z + 8z_Z + d = 0 \Leftrightarrow d = -2(-1) - 0 - 8 \times 2 = -14$.

D'où l'équation (ZEN): $2x + y + 8z - 14 = 0$.

On pourrait aussi chercher une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$ et trouver les coefficients qui vérifient le système des trois équations obtenues en remplaçant x , y et z par les coordonnées de Z , E et N successivement. Nous avons alors quatre inconnues donc un degré de liberté qui correspond au choix du vecteur normal (ils sont tous colinéaires, de la forme $(2b, b, 8b)$).

Exercice 8 Positions relatives de plans dans un r.o.n.

1. Les vecteurs $\vec{p}(1, 2, 3)$ et $\vec{q}(2, 1, 3)$ n'étant pas colinéaires, les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ ne sont pas parallèles. Ils sont donc sécants le long d'une droite $\mathcal{D}$.

$$\mathcal{P}: x + 2y + 3z + d = 0 \text{ et } P(3, 2, 1) \in \mathcal{P} \implies 3 + 2 \times 2 + 3 + d = 0$$

$$\iff d = -10 \text{ d'où } \mathcal{P}: x + 2y + 3z - 10 = 0.$$

$$\mathcal{Q}: 2x + y + 3z + d' = 0 \text{ et } Q(4, 1, 2) \in \mathcal{Q} \implies 2 \times 4 + 1 + 3 \times 2 + d' = 0$$

$$\iff d' = -15 \text{ d'où } \mathcal{Q}: 2x + y + 3z - 15 = 0.$$

La droite d'intersection $\mathcal{D}$ admet alors le système d'équations cartésiennes :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z - 10 = 0 \\ 2x + y + 3z - 15 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 10 - 2y - 3z \\ 2(10 - 2y - 3z) + y + 3z - 15 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} -3y - 3z + 5 = 0 \\ x = 10 - 2y - 3z \end{cases} \iff \begin{cases} y = \frac{1}{3}(5 - 3z) = \frac{5}{3} - z \\ x = 10 - 2(\frac{5}{3} - z) - 3z = \frac{20}{3} - z \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = \frac{20}{3} - t \\ y = \frac{5}{3} - t \\ z = t, \end{cases} \text{ pour } t \in \mathbb{R}, \text{ qui est une représentation paramétrique de } \mathcal{D}.$$

On peut aussi chercher $\vec{u}$ orthogonal à $\vec{p}$ et à $\vec{q}$ (qui dirige donc $\mathcal{D}$) et trouver un point particulier de $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$ en fixant $x = 0$ par exemple.

2. On a $\vec{s}(6, 8, -4) = 2 \cdot \vec{r}(3, 4, -2)$ donc les vecteurs $\vec{r}$ et $\vec{s}$ sont colinéaires et les plans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ parallèles.

On a $\vec{RS}(1, 0, -1) \cdot \vec{r}(3, 4, -2) = 3 + 2 = 5 \neq 0$ donc $\vec{RS}$ n'est pas orthogonal à $\vec{r}$ et le point S ne peut appartenir au plan $\mathcal{R}$: $\mathcal{S}$ et $\mathcal{R}$ sont strictement parallèles.

Sinon, on a $\mathcal{R}: 3x + 4y - 2z + d = 0$ et $R(1, 3, 2) \in \mathcal{R}$

$$\implies 3 \times 1 + 4 \times 3 - 2 \times 2 + d = 0 \iff d = -11 \text{ d'où } \mathcal{R}: 3x + 4y - 2z - 11 = 0.$$

Puisque $3x_S + 4y_S - 2z_S - 11 = 3 \times 2 + 4 \times 3 - 2 - 11 = 5 \neq 0$, $S \notin \mathcal{R}$ et les plans $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont strictement parallèles.

Exercice 9 $L(1; 0; 2)$, $M(3; -1; 1)$, $N(1; 2; -3)$ et d , pour $t \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} x = 7t + 1 \\ y = 10t - 4 \\ z = 4t + 1. \end{cases}$

1. On a $\vec{LN}(0, 2, -5)$ et $\vec{LM}(2, -1, -1)$ ne sont pas colinéaires puisque $\frac{x'}{x} \neq \frac{y'}{y}$. Les points L , M et N ne sont donc pas alignés et définissent ainsi un plan $\mathcal{P}$.

2. D'après sa représentation paramétrique, la droite d est dirigée par le vecteur $\vec{u}(7, 10, 4)$. Puisque dans le r.o.n., $\vec{u} \cdot \vec{LN} = 7 \times 2 - 10 - 4 = 0$ et $\vec{u} \cdot \vec{LM} = 0 + 2 \times 10 - 4 = 0$, la droite d est orthogonale à deux sécantes de $\mathcal{P}$ et l'on a $d \perp \mathcal{P}$.

3. Puisque $d \perp \mathcal{P}$, $\vec{u}(7, 10, 4)$ est normal à $\mathcal{P}$ et l'on a l'équation cartésienne $7x + 10y + 4z + \delta = 0$. En remplaçant les coordonnées de L par exemple, on obtient $\delta = -15$.

À l'intersection, on a alors

$$7(7t+1)+10(10t-4)+4(4t+1)-15=0 \implies t = \frac{44}{165} = \frac{4}{15} \text{ et } x = 7\frac{4}{15}+1 = \frac{43}{15},$$

$$y = 10\frac{4}{15}-4 = -\frac{4}{3}, \quad z = 4\frac{4}{15}+1 = \frac{31}{15} : \quad H\left(\frac{43}{15}, -\frac{4}{3}, \frac{31}{15}\right) = \mathcal{P} \cap d.$$

Exercice 10 Pour $m \in \mathbb{R}$, $\mathcal{P}_m$ est le plan $x + (1-m)y + 2mz - 1 = 0$ dans un r.o.n.

1. On a $\mathcal{P}_{m=1} : x + 2z - 1 = 0$ et $\mathcal{P}_{m=2} : x - y + 4z - 1 = 0$. Ainsi, à l'intersection, on a $x = 1 - 2z$ et $y = x + 4z - 1 = 1 - 2z + 4z - 1 = 2z$ d'où, en posant $z = t$, la représentation param. de $\Delta = \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$, pour $t \in \mathbb{R}$,
- $$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2t \\ z = t. \end{cases}$$

On peut aussi déterminer deux points de Δ , en imposant $x = 1$ puis $x = 2$ par exemple, puis obtenir une représentation paramétrique à partir de ces deux points. Une autre manière serait de déterminer un vecteur normal aux vecteurs normaux à $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, vecteur qui est directeur de Δ , puis déterminer un point de cette droite en imposant $x = 1$ par exemple.

2. Soit $M(1 - 2t, 2t, t)$ un point de Δ . On a, pour tout $m \in \mathbb{R}$,
- $$x + (1-m)y + 2mz - 1 = (1 - 2t) + (1-m).2t + 2mt - 1 = 0$$
- et $M \in \mathcal{P}_m : \Delta \subset \mathcal{P}_m$.

On peut aussi choisir deux points de Δ pour deux t différents et vérifier qu'ils appartiennent à $\mathcal{P}_m$.

3. Pour m et $m' \neq \frac{1}{5}$, $\mathcal{P}_m \perp \mathcal{P}_{m'}$ ssi leurs vecteurs normaux $\vec{n}(1, 1-m, 2m)$ et $\vec{n}'(1, 1-m', 2m')$ sont orthogonaux ssi $1 + (1-m)(1-m') + 2m.2m' = 0$
- $$\iff 2 - m + m'(-1 + m + 4m) = 0 \iff m' = \frac{m-2}{5m-1}.$$
4. Si $m = \frac{1}{5}$, on obtient $m'(5m-1) = m-2 \iff 0m' = -\frac{9}{5}$ qui n'admet pas de solution. Il n'existe donc pas de plan $\mathcal{P}_{m'}$ de cette famille qui soit perpendiculaire à $\mathcal{P}_{1/5}$.

Exercice 11

Partie A :

1. (a) On a $x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = 1, \dots$ donc $I(1, 1, -1)$ et $K(3, -3, 3)$.
On a $x_J - x_B = \frac{1}{4}(x_C - x_B)$ donc $x_J = \frac{1}{4}x_C + \frac{3}{4}x_B = \frac{5}{2}, \dots$
et $J(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{5}{2})$.
- (b) Ainsi, $\vec{IK}(2, -4, 4)$ et $\vec{IJ}(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$ ne sont pas colinéaires car $\frac{x_{IK}}{x_{IJ}} \neq \frac{y_{IK}}{y_{IJ}}$ et les points I, J et K ne sont pas alignés.
2. On a $\vec{IK} = 2\vec{u}$ et $\vec{IJ} = \frac{1}{2}\vec{v}$ donc ces quatre vecteurs sont coplanaires et les plans $\mathcal{P}(I, \vec{u}, \vec{v})$ et $(IJK) = \mathcal{P}(I, \vec{IK}, \vec{IJ})$ confondus.
3. (a) On a $\vec{AD}(6, -2, 2)$ et puisque $(AD) = (A; \frac{1}{2}\vec{AD})$, en voici une représentation paramétrique, pour $t \in \mathbb{R}$,
- $$\begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = -t \\ z = t + 2. \end{cases}$$
- (b) On a $\vec{JL}(-2, -1, 5)$ donc $\vec{JL} = \vec{u} - \vec{v}$ et $L \in \mathcal{P}(J; \vec{u}, \vec{v}) = (IJK)$.
On a $x_L = \frac{1}{2} = 3t - 1$ pour $t = \frac{1}{2}$. On a alors $-t = -\frac{1}{2} = y_L$ et $t + 2 = \frac{5}{2} = z_L$ donc $L \in (AD)$.

De plus, $\overrightarrow{AD}(6, -2, 2)$, $\overrightarrow{u}(1, -2, 2)$ et $\overrightarrow{v}(3, -1, -3)$ sont coplanaires ssi il existe α et β tels que $\overrightarrow{AD} = \alpha\overrightarrow{u} + \beta\overrightarrow{v} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha + 3\beta = 6 \\ -2\alpha - \beta = -2 \\ 2\alpha - 3\beta = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 6 - 3\beta \\ -2(6 - 3\beta) - \beta = -2 \\ 2\alpha - 3\beta = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 2 \\ \alpha = 6 - 3\beta = 0 \\ 2\alpha - 3\beta = 2 \end{cases}$ et la dernière équation n'est pas vérifiée. La droite (AD) est donc sécante au plan $\mathcal{P}$ au point $L(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{5}{2})$.

(c) On a bien $\overrightarrow{AL}(\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD}(6, -2, 2)$.

Partie B : Dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ de l'espace, on a $A(0, 0, 0)$, $B(1, 0, 0)$, $C(0, 1, 0)$, $D(0, 0, 1)$, $I(\frac{1}{2}, 0, 0)$, $K(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $L(0, 0, \frac{1}{4})$.

Puisque $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$, on a $J(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}, 0)$.

Ainsi, $\overrightarrow{IJ}(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0)$ et $\overrightarrow{IK}(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ne sont pas colinéaires ($z_{\overrightarrow{IK}} \neq 0$) et les points I, J et K ne sont pas alignés. Par ailleurs, $\overrightarrow{JL}(-\frac{3}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{IK} - 2\overrightarrow{IJ}$ donc $L \in \mathcal{P}(J; \overrightarrow{IK}, \overrightarrow{IJ}) = (IJK)$ et les vecteurs $\overrightarrow{JL}$ et $\overrightarrow{IK}$ ne sont pas colinéaires : les droites (IK) et (LJ) sont donc sécantes et les points I, J, K, L sont coplanaires.

Exercice 12 Le plan $\mathcal{P}$ admet pour rep. param. (t et $s \in \mathbb{R}$) $\begin{cases} x = -2 + t + s \\ y = -t + 2s \\ z = 1 + 3t - s. \end{cases}$

1. Le point de $\mathcal{P}$ de paramètres $t = 0$, $s = 1$ a pour cote $z = 0$ et appartient donc au plan $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Le point de $\mathcal{P}$ de paramètres $t = 1$, $s = 0$ a pour cote $z = 4 \neq 0$ et n'appartient donc pas au plan $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Le plan $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et le plan $\mathcal{P}$ sont donc sécants.

2. Il suffit de changer le point de base et de garder les mêmes vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}_1(1, -1, 3)$ et $\overrightarrow{v}_1(1, 2, -1)$. On a alors la représentation paramétrique du

plan $\mathcal{Q}$: $\begin{cases} x = 1 + t + s \\ y = 3 - t + 2s \\ z = 3t - s, \end{cases} \quad t \text{ et } s \in \mathbb{R}.$

3. Le plan $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est caractérisé par l'équation $z = 0$. On doit donc avoir, en regardant la cote de $\mathcal{Q}$, $s = 3t$ que l'on peut remplacer dans les deux autres équations de la représentation de $\mathcal{Q}$. Une représentation paramétrique de la droite d'intersection de $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et de $\mathcal{Q}$ est donc $\begin{cases} x = 1 + t + 3t = 4t + 1 \\ y = 3 - t + 2 \times 3t = 5t + 3 \\ z = 0. \end{cases}$

4. Le point de coordonnées $(-2, 0, 1)$ appartient aux deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$: ils ne sont donc pas strictement parallèles. Le plan $\mathcal{P}'$ est dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{u}_2(2, 1, 2)$ et $\overrightarrow{v}_2(0, 3, -4)$. Un simple calcul montre que $\overrightarrow{u}_2 = \overrightarrow{u}_1 + \overrightarrow{v}_1$ et $\overrightarrow{v}_2 = \overrightarrow{u}_1 - \overrightarrow{v}_1$. Ces quatre vecteurs sont donc coplanaires et les deux plans sont parallèles. Ainsi, les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont confondus.

Exercice 13 On note d la droite passant par les points $A(1; -2; -1)$ et $B(3; -5; -2)$.

1. On a $M \in d \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}(x-1, y+2, z+1)$ et $\overrightarrow{AB}(2, -3, -1)$ sont colin.

$$\Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x-1 = 2t \\ y+2 = -3t \\ z+1 = -t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1+2t \\ y = -2-3t \\ z = -1-t. \end{cases}$$

2. Les vecteurs directeurs $\overrightarrow{AB}(2, -3, -1)$ et $(-1, 2, 1)$ n'étant pas colinéaires ($\frac{2}{-1} \neq \frac{-3}{2}$), les droites d et d' ne sont pas parallèles.

Sont-elles sécantes ? On a $(z =) -1 - t = t'$ et $(y =) -2 - 3t = 1 + 2t' = 1 + 2(-1 - t)$ donc $t = -1$, $t' = -1 - (-1) = 0$ mais $1 + 2t = -1 \neq 2 = 2 - t'$.

d et d' ne sont donc pas sécantes.

Les droites d et d' n'étant ni parallèles, ni sécantes, elles ne sont pas coplanaires.

3. (a) On a $\overrightarrow{CA}(-1, -1, -1) = -\vec{u} - \vec{v}$ et $\overrightarrow{AB} = 2\vec{u} - \vec{v}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{AB}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires et les plans (ABC) et $\mathcal{P}(C; \vec{u}, \vec{v})$ sont parallèles. Ayant C en commun, ils sont confondus.

- (b) On a $d' : \text{pour } t' \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = 2 - t' \\ y = 1 + 2t' \\ z = t' \end{cases}$

et $\mathcal{P}(C; \vec{u}, \vec{v}) : \text{pour } t, s \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = t \\ y = -3 - 4t - 5s \\ z = s \end{cases}$

À l'intersection, on a donc $(z =) s = t'$, $(x =) t = 2 - t' = 2 - s$ et $(y =) 1 + 2s = -3 - 4(2 - s) - 5s$ donc $s = -4 = t'$ et $t = 2 - s = 6$. Puisque l'on a $x = 6 = 2 - (-4)$, $y = -3 - 4 \times 6 - 5(-4) = 1 + 2(-4) = -7$ et $z = -4$, le point d'intersection est $D(6, -7, -4)$.

Exercice 14 L'espace est muni d'un repère orthonormé.

1. $\mathcal{P}$ admet $\vec{n}(3, 2, 0)$ pour vecteur normal. Puisque $\overrightarrow{UV}(\frac{3}{2}, 1, 0) = \frac{1}{2}\vec{n}$ est colinéaire à $\vec{n}$, $(UV) \perp \mathcal{P}$.

2. (a) Pour $A(1, 2, 0)$, $\vec{u}(1, -1, 2)$, $\vec{v}(-2, 1, -1)$, on a $\mathcal{Q} = (A; \vec{u}, \vec{v})$.

- (b) D'après la représentation paramétrique de $\mathcal{Q}$, on a $s = 2t - z$

donc $y = 2 - t + 2t - z$ i.e. $t = y + z - 2$ et

$$x = 1 + t - 2s = 1 + (y + z - 2) - 2(2(y + z - 2) - z) \Leftrightarrow x + 3y + z - 7 = 0.$$

Le vecteur $(1, 3, 1)$ est bien orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$ et les coordonnées de A vérifient bien cette équation.

3. On a $\frac{1}{2}\overrightarrow{RS}(1, 0, -1)$ d'où la représ. param. de (RS) , pour $t \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 \\ z = 1 - t \end{cases}$.

Un tel point est dans $\mathcal{B}$ si $x + y - z - 1 = 0 \Leftrightarrow 1 + t + 2 - (1 - t) - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow 2t = -1 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad x = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \quad y = 2, \quad z = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} :$$

$$K\left(\frac{1}{2}, 2, \frac{3}{2}\right) = (RS) \cap \mathcal{B}.$$

Exercice 15 Cube $FLWRIGHT$, $\overrightarrow{FA} = 2\overrightarrow{FL}$, $\overrightarrow{FB} = 4\overrightarrow{FR}$, $\overrightarrow{WC} = 2\overrightarrow{WH}$, $(F; \overrightarrow{FL}, \overrightarrow{FR}, \overrightarrow{FI})$ est un r.o.n. Il est conseillé de réaliser une figure.

1. (a) On a $A(2, 0, 0)$, $B(0, 4, 0)$ et $C(1, 1, 2)$ donc $\overrightarrow{CA}(1, -1, -2)$ et $\overrightarrow{CB}(-1, 3, -2)$. Ainsi, $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = -1 - 3 + 4 = 0$ et $(CA) \perp (CB)$. Puisque $\overrightarrow{CA}^2 = 1 + 1 + 2^2 = 6$ et $\overrightarrow{CB}^2 = 1 + 3^2 + 2^2 \neq 6$, le triangle BAC est rectangle, non isocèle, en C .

- (b) On a $4 \times 2 + 0 + 0 - 8 = 0$, $0 + 2 \times 4 + 0 - 8 = 0$, $4 + 2 + 2 - 8 = 0$ donc les coordonnées des points A , B et C vérifient cette équation et $(BAC) : 4x + 2y + z - 8 = 0$.

2. (a) Puisque $(IK) \perp (BAC)$, $\vec{n}(4, 2, 1)$, normal à (BAC) , dirige (IK) .
Et comme $I(0, 0, 1) \in (IK)$, on a la représentation paramétrique suivante,
pour $t \in \mathbb{R}$, $(IK) : \begin{cases} x = 4t \\ y = 2t \\ z = 1 + t. \end{cases}$
- (b) Puisque $K = (IK) \cap (BAC)$, on doit avoir $4(4t) + 2(2t) + (1+t) - 8 = 0$
 $\Leftrightarrow 21t - 7 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$ et $x = \frac{4}{3}$, $y = \frac{2}{3}$, $z = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} : K(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3})$.
- (c) On a $\overrightarrow{AK}(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{4}{3}) = -\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}$ donc $(AK) \parallel (CA)$ et $K \in (AC)$.

Exercice 16 QCM.

On donne $U(1; 2; -4)$, $V(-3; 4; 1)$ et le plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x + 3y - z + 4 = 0$.

1. Soit $M(2t - 8, 7 - t, 6 + t) \in d$. On a $2(2t - 8) + 3(7 - t) - (6 + t) + 4 = 0t + 3$
qui ne peut être nul donc $d \cap \mathcal{P} = \emptyset$: Réponse (b).
Remarque : si l'on avait eu $2x + 3y - z + 1 = 0$, l'équation obtenue aurait été
 $0t + 0 = 0$ et tout t aurait été solution, c.-à-d. $d \subset \mathcal{P}$.
Sinon, $\vec{n}(2, 3, -1) \perp \mathcal{P}$ et $\vec{u}(2, -1, 1)$ dirige d . Puisque $\vec{n} \cdot \vec{u} = \dots = 0$,
 $\mathcal{P} \parallel d$. Or, les coordonnées de $A_{t=0}(-8, 7, 6) \in d$ ne vérifient pas l'équation
cartésienne de $\mathcal{P}$ donc d et $\mathcal{P}$ sont disjoints.
2. $\vec{n}(2, 3, -1)$ est normal à $\mathcal{P}$ et $\vec{n'}(1, 4, -3)$ est normal à $\mathcal{Q}$. Puisque $\frac{x}{x'} \neq \frac{y}{y'}$,
 $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ ne sont pas colinéaires donc $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ ne sont pas parallèles : ni (a), ni (b).
Posons $\vec{d} = (-\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})(-1, 1, 1)$. On a $\vec{d} \cdot \vec{n} = -2 + 3 - 1 = 0$ et
 $\vec{d} \cdot \vec{n'} = -1 + 4 - 3 = 0$ donc $\vec{d}$ dirige $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ i.e. $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$ est une droite dirigée
par $\vec{d}$: Réponse (c).

On peut aussi effectuer " $\mathcal{P} - 2\mathcal{Q}$ " et obtenir $y = z - \frac{4}{5}$ puis $x = -z + \frac{4}{5}$
dans " $\mathcal{P}$ " et avoir la représentation paramétrique de l'intersection $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$, pour

$$t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x = -t + \frac{4}{5} \\ y = t - \frac{4}{5} \\ z = t, \end{cases} \quad \text{dirigée par } \vec{d}.$$

3. On a $\overrightarrow{UV}(-4, 2, 5) \perp \mathcal{P}_{\text{Médiateur}[UV]}$ d'où l'équation cartésienne
 $-4x + 2y + 5z + \delta = 0$. $I(-1, 3, -\frac{3}{2}) = \text{Milieu}[UV] \in \mathcal{P}_{\text{Médiateur}[UV]}$
donc $-4(-1) + 2 \times 3 - \frac{3}{2} \cdot 5 + \delta = 0$ d'où $\delta = -\frac{5}{2}$: Réponse (a).
D'après l'exercice 5 p. 200, on peut aussi exprimer la relation $MU^2 = MV^2$ au
moyen des coordonnées.

Exercice 17

1. $A(1, 1, 1)$, $B(3, 2, 1)$, $\vec{v}(-1, 0, 1)$ dans un r.o.n.
- (a) Le projeté orthogonal $H(x, y, z)$ du point A sur le plan normal à $\vec{v}$ en B
est tel que $\overrightarrow{BH}(x - 3, y - 2, z - 1)$ est orthogonal à $\vec{v}$ ($\overrightarrow{BH} \cdot \vec{v} = 0$)
et $\overrightarrow{AH}(x - 1, y - 1, z - 1)$ est colinéaire à $\vec{v}$ ($\overrightarrow{AH} = t\vec{v}$).
On doit donc avoir $-1(x - 3) + 0(y - 2) + 1(z - 1) = 0$ et $\begin{cases} x - 1 = -t \\ y - 1 = 0t \\ z - 1 = t \end{cases}$
d'où $x - 3 = (x - 1) - 2 = (-t) - 2$
et $-(-t - 2) + 0 + (t) = 0 \Leftrightarrow 2t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = -1$.
Ainsi, $x = -t + 1 = 2$, $y = 0 + 1 = 1$, $z = t + 1 = 0$ et $H(2, 1, 0)$.

- (b) Le projeté orthogonal $I(x, y, z)$ du point A sur la droite dirigée par $\vec{v}$ passant par B est tel que $\vec{AI}(x-1, y-1, z-1)$ est orthogonal à $\vec{v}$ ($\vec{AI} \cdot \vec{v} = 0$) et $\vec{BI}(x-3, y-2, z-1)$ est colinéaire à $\vec{v}$ ($\vec{BI} = t\vec{v}$).

$$\text{On doit donc avoir } -(x-1) + 0(y-1) + (z-1) = 0 \quad \text{et} \quad \begin{cases} x-3 = -t \\ y-2 = 0t \\ z-1 = t \end{cases}$$

$$\text{d'où } x-1 = (x-3) + 2 = (-t) + 2$$

$$\text{et } -(-t+2) + 0 + (t) = 0 \iff 2t-2=0 \iff t=1.$$

$$\text{Ainsi, } x = -t+3 = 2, \quad y = 0+2 = 2, \quad z = t+1 = 2 \quad \text{et} \quad I(2, 2, 2).$$

- (c) On a $AI^2 = (x_I - 1)^2 + (y_I - 1)^2 + (z_I - 1)^2 = (2-1)^2 + 1^2 + 1^2 = 3$,
 $BH^2 = (x_H - 3)^2 + (y_H - 2)^2 + (z_H - 1)^2 = \dots = 3 = AI^2$
 et $AH^2 = \dots = 2 = \dots = BI^2$.

- (d) D'après la question précédente $AI = BH$ et $AH = BI$, les quatre points B, I, A et H forment donc un parallélogramme mais on ne sait comment il s'appelle. Puisque $\vec{AH}(1, 0, -1)$, $\vec{BH}(-1, -1, -1)$, $\vec{AI}(1, 1, 1)$ et $\vec{BI}(-1, 0, 1)$, on a $\vec{AH} = \vec{IB}$ et le quadrilatère $BIAH$ est un parallélogramme.

De plus, $(AI) \perp (BI)$ par construction de I donc $BIAH$ est un rectangle.

2. $A(2, 3, 4)$, $B(2, -1, 4)$, $\vec{v}(4, 5, -1)$ dans un r.o.n.

- (a) Le projeté orthogonal $H(x, y, z)$ du point A sur le plan normal à $\vec{v}$ en B est tel que $\vec{BH}(x-2, y+1, z-4)$ est orthogonal à $\vec{v}$ et $\vec{AH}(x-2, y-3, z-4)$ est colinéaire à $\vec{v}$.

$$\text{On doit donc avoir } 4(x-2) + 5(y+1) - (z-4) = 0 \quad \text{et} \quad \begin{cases} x-2 = 4t \\ y-3 = 5t \\ z-4 = -t \end{cases}$$

$$\text{d'où } y+1 = (y-3) + 4 = 5t + 4$$

$$\text{et } 4(4t) + 5(5t+4) - (-t) = 0 \iff t = -\frac{20}{42} = -\frac{10}{21}.$$

$$\text{Ainsi, } x = 4t + 2 = \frac{2}{21}, \quad y = 5t + 3 = \frac{13}{21}, \quad z = 4 - t = \frac{94}{21} \quad \text{et} \quad H\left(\frac{2}{21}, \frac{13}{21}, \frac{94}{21}\right).$$

- (b) Le projeté orthogonal $I(x, y, z)$ du point A sur la droite dirigée par $\vec{v}$ passant par B est tel que $\vec{AI}(x-2, y-3, z-4)$ est orthogonal à $\vec{v}$ et $\vec{BI}(x-2, y+1, z-4)$ est colinéaire à $\vec{v}$.

$$\text{On doit donc avoir } 4(x-2) + 5(y-3) - (z-4) = 0 \quad \text{et} \quad \begin{cases} x-2 = 4t \\ y+1 = 5t \\ z-4 = -t \end{cases}$$

$$\text{d'où } y-3 = (y+1) - 4 = 5t - 4$$

$$\text{et } 4(4t) + 5(5t-4) - (-t) = 0 \iff t = \frac{20}{42} = \frac{10}{21}.$$

$$\text{Ainsi, } x = 4t + 2 = \frac{82}{21}, \quad y = 5t - 1 = \frac{29}{21}, \quad z = 4 - t = \frac{74}{21} \quad \text{et} \quad I\left(\frac{82}{21}, \frac{29}{21}, \frac{74}{21}\right).$$

- (c) On a $AI^2 = (x_I - 2)^2 + (y_I - 3)^2 + (z_I - 4)^2 = \frac{40^2 + 34^2 + 10^2}{21^2} = \frac{2856}{21^2}$,
 $BH^2 = (x_H - 2)^2 + (y_H + 1)^2 + (z_H - 4)^2 = \dots = AI^2$
 et $AH^2 = \dots = BI^2$.

- (d) D'après la question précédente $AI = BH$ et $AH = BI$, les quatre points B, I, A et H forment donc un parallélogramme mais on ne sait comment il s'appelle.

Puisque $\overrightarrow{AH} \left(-\frac{40}{21}, -\frac{50}{21}, \frac{10}{21} \right)$, $\overrightarrow{BH} \left(-\frac{40}{21}, \frac{34}{21}, \frac{10}{21} \right)$, $\overrightarrow{AI} \left(\frac{40}{21}, \frac{34}{21}, -\frac{10}{21} \right)$ et $\overrightarrow{BI} \left(\frac{40}{21}, \frac{50}{21}, -\frac{10}{21} \right)$, on a $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{IB}$ et le quadrilatère $BIAH$ est un parallélogramme.

De plus, $(AI) \perp (BI)$ par construction de I donc $BIAH$ est un rectangle.

Exercice 18 QCM dans un r.o.n.

- (d) : Le plan $\mathcal{P} : 3x + 2y + 9z - 5 = 0$ est normal à $\vec{n} (3, 2, 9)$
et la droite $\mathcal{D} : \begin{cases} x = 4t + 3 \\ y = 2 - t \\ z = 9 - t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ est dirigée par le vecteur $\vec{u} (4, -1, -1)$.
Puisque $\vec{u} \cdot \vec{n} = 3 \times 4 - 2 - 9 = 1 \neq 0$, $\vec{u}$ et $\vec{n}$ non orthogonaux i.e. $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ ne sont pas parallèles.
Puisque $\vec{u}$ et $\vec{n}$ ne sont pas colinéaires, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ ne sont pas perpendiculaires.
 $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ sont donc sécants. On a $3 \times (-353) + 2 \times 91 + 9 \times 98 - 5 = 0$ donc $(-353, 91, 98) \in \mathcal{P}$.
Par ailleurs, $\begin{cases} -353 = 4t + 3 \\ 91 = 2 - t \\ 98 = 9 - t \end{cases}$ pour $t = -89$ donc $(-353, 91, 98) \in \mathcal{D}$.
- (b) : $A(-2, 1, 0)$ et $M \in d : \begin{cases} x = t + 2 \\ y = 2 \\ z = 5t - 6 \end{cases} (t \in \mathbb{R})$
donc $\overrightarrow{AM} (t + 2 - (-2), 2 - 1, 5t - 6 - 0)$
et $AM^2 = (t + 4)^2 + 1^2 + (5t - 6)^2 = 26t^2 - 52t + 53$ qui atteint un minimum en $t = \alpha = -\frac{b}{2a} = \frac{52}{2 \times 26} = 1$ valant $AM = \sqrt{(1 + 4)^2 + 1^2 + (5 - 6)^2} = \sqrt{27}$.
- (d) : $\mathcal{D} : x + 2y - 3z + 1 = 0$, de vecteur normal $\vec{q} (1, 2, -3)$ et $\mathcal{R} : 2x - y + 2 = 0$, de vecteur normal $\vec{r} (2, -1, 0)$. Puisque $\vec{q}$ et $\vec{r}$ ne sont pas colinéaires, $\mathcal{D}$ et $\mathcal{R}$ ne sont pas parallèles.
Puisque $2x_J - y_J + 2 = 6 - 1 + 2 \neq 0$, $J \notin \mathcal{R}$.
Puisque $\vec{u} \cdot \vec{q} = 1 \times 1 + 2 \times 2 - 3 \times 2 \neq 0$, $\vec{u}$ et $\vec{q}$ ne sont pas orthogonaux.
En revanche, on a bien $\vec{v} \cdot \vec{q} = \vec{v} \cdot \vec{r} = 0$, $x_H + 2y_H - 3z_H + 1 = 0$ et $2x_H - y_H + 2 = 0$.

Exercice 19 $ABCDEFGH$ est un cube d'arête 1, $I = (EC) \cap (AFH)$, $(D; \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$ est un r.o.n. Il est conseillé de réaliser une figure.

- (a) On a $E(1, 0, 1)$ et $C(0, 1, 0)$ d'où $\overrightarrow{CE} (1, -1, 1)$ et $(EC) = (C, \overrightarrow{CE})$ admet la représentation paramétrique, pour $t \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} x = t \\ y = 1 - t \\ z = t \end{cases}$
(b) En projetant orthogonalement le point C sur le plan (ABF) , on a $\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{EB} \cdot \overrightarrow{AF} = 0$. De même, $\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{AH} = 0$. Ainsi, $\overrightarrow{CE}$ est normal au plan (AFH) et l'on a l'équation cartésienne $x - y + z + \lambda = 0$. Puisque $A(1, 0, 0) \in (AFH)$, $1 - 0 + 0 + \lambda = 0$ et $(ABF) : x - y + z - 1 = 0$.
- À l'intersection, on a $t - (1 - t) + t - 1 = 0$ d'où $t = \frac{2}{3} = x = z$ et $y = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$: $(EC) \cap (AFH) = I \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3} \right)$.

3. (a) On a $H(0, 0, 1)$, $A(1, 0, 0)$, $F(1, 1, 1)$ donc $\overrightarrow{IH}(\frac{-2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ et $\overrightarrow{AF}(0, 1, 1)$ d'où $\overrightarrow{IH} \cdot \overrightarrow{AF} = 0 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0$: les vecteurs $\overrightarrow{IH}$ et $\overrightarrow{AF}$ sont orthogonaux. Les droites (IH) et (AF) étant coplanaires, elles sont perpendiculaires.
- (b) On peut démontrer de même que $(IA) \perp (HF)$ et I est l'orthocentre du triangle HAF . Puisque HAF est équilatéral, I en est aussi le centre de gravité et le centre des cercles inscrit et circonscrit.
4. • Le tétraèdre $EAFH$ est de façon évidente de type 2 : par exemple, $(EA) \perp (HF)$ car $(EA) \perp (EFH)$.
- Les trois faces isométriques contenant le point E sont des triangles rectangles d'aire $\frac{1 \times 1}{2} = \frac{1}{2}$.
- D'après le théorème de Pythagore, un triangle équilatéral de côté a a pour hauteur $\sqrt{a^2 - (\frac{a}{2})^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$ et donc une aire de $\frac{1}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} a \cdot a$. Dans le triangle AFH , $a = \sqrt{2}$ et AFH a une aire de $\frac{\sqrt{3}}{4}(\sqrt{2})^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \neq \frac{1}{2}$.
- Le tétraèdre $EAFH$ n'est donc pas de type 1, ni de type 3.

Exercice 20 Intersection d'une sphère et d'une droite dans un r.o.n.

On désigne par $\mathcal{S}$ la sphère de centre $I(2, -3, 1)$ et de rayon 5.

1. Une sphère étant l'ensemble des points à distance donnée d'un point donné, on a $M(x, y, z) \in \mathcal{S}(I, 5) \iff IM = 5 \iff IM^2 = 25$
 $\iff (x-2)^2 + (y+3)^2 + (z-1)^2 = 25 \iff x^2 - 4x + y^2 + 6y + z^2 - 2z - 11 = 0$.
2. (a) On pose $A(1, 1, 2)$ et $\vec{u}(-1, 3, 2)$.
 On a $\mathcal{D}_A = (A, \vec{u}) : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + 3t \\ z = 2 + 2t \end{cases}$.
- (b) Ainsi, $M \in \mathcal{S} \cap \mathcal{D}_A \implies (1-t-2)^2 + (1+3t+3)^2 + (2+2t-1)^2 = 25$
 $\iff (t+1)^2 + (3t+4)^2 + (2t+1)^2 = 25 \iff 14t^2 + 30t - 7 = 0$ de discriminant $1292 > 0$ et donc de racines $t_{1,2} = \frac{-30 \pm \sqrt{1292}}{2 \times 14} = \frac{-15 \pm \sqrt{323}}{14}$.
 La sphère et la droite se croisent donc aux deux points de coordonnées $M_{1,2}(1-t_{1,2}, 1+3t_{1,2}, 2+2t_{1,2})$.
- (c) Puisque l'intersection de la sphère et de la droite est constituée de deux points, on peut penser que la distance du centre à la droite est strictement inférieure au rayon de la sphère.
 On cherche les coordonnées du point $A'(x, y, z)$ de la droite $\mathcal{D}_A$ tel que $\overrightarrow{IA'} \perp \vec{u} \iff \overrightarrow{IA'}(1-t-2, 1+3t+3, 2+2t-1) \cdot \vec{u}(-1, 3, 2) = 0$
 $\iff -(-1-t) + 3(3t+4) + 2(2t+1) = 0 \iff t = -\frac{15}{14}$ qui correspond bien au milieu du segment $[M_1M_2]$.
 On a alors $IA'^2 = (-1 + \frac{15}{14})^2 + (-3\frac{15}{14} + 4)^2 + (-2\frac{15}{14} + 1)^2 = \frac{27}{14} < 25$.
3. (a) On a $\mathcal{D}_B = (B(5, -3, 5), \vec{v}(4, 0, -3)) : \begin{cases} x = 5 + 4t \\ y = -3 \\ z = 5 - 3t \end{cases}$.
- (b) Ainsi, $M \in \mathcal{S} \cap \mathcal{D}_B \implies (5+4t-2)^2 + (-3+3)^2 + (5-3t-1)^2 = 25$
 $\iff (4t+3)^2 + (4-3t)^2 = 25 \iff 25t^2 = 0 \iff t_0 = 0$.
 La sphère et la droite se croisent donc au point de coordonnées $(5, -3, 5)$.

- (c) Puisque l'intersection de la sphère et de la droite est constituée d'un unique point, on peut penser que la distance du centre à la droite est exactement égale au rayon de la sphère.

On cherche les coordonnées du point $B'(x, y, z)$ de la droite $\mathcal{D}_B$ tel que

$$\overrightarrow{IB'} \perp \vec{v} \iff \overrightarrow{IB'}(5 + 4t - 2, -3 + 3, 5 - 3t - 1) \cdot \vec{v}(4, 0, -3) = 0$$

$$\iff 4(3 + 4t) + 0 \times 0 - 3(4 - 3t) = 0 \iff t = 0$$

$$\text{et l'on a bien } IB'^2 = (3 + 4 \times 0)^2 + 0^2 + (4 - 3 \times 0)^2 = 25.$$

4. (a) On a $\mathcal{D}_C = (C(1, 10, -2), \vec{w}(1, 2, 1)) : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 10 + 2t \\ z = -2 + t \end{cases}$.

$$(b) \text{ Ainsi, } M \in \mathcal{S} \cap \mathcal{D}_C \implies (1 + t - 2)^2 + (10 + 2t + 3)^2 + (-2 + t - 1)^2 = 25$$

$$\iff (t - 1)^2 + (2t + 13)^2 + (t - 3)^2 = 25 \iff 6t^2 - 44t + 154 = 0$$

de discriminant $-1760 < 0$.

La sphère et la droite ne se croisent pas.

- (c) Puisque l'intersection de la sphère et de la droite est vide, on peut penser que la distance du centre à la droite est strictement supérieure au rayon de la sphère.

On cherche les coordonnées du point $C'(x, y, z)$ de la droite $\mathcal{D}_C$ tel que

$$\overrightarrow{IC'} \perp \vec{w} \iff \overrightarrow{IC'}(1 + t - 2, 10 + 2t + 3, -2 + t - 1) \cdot \vec{w}(1, 2, 1) = 0$$

$$\iff (t - 1) + 2(2t + 13) + (t - 3) = 0 \iff t = -\frac{22}{6} = -\frac{11}{3}$$

$$\text{et l'on a bien } IC'^2 = \left(-\frac{11}{3} - 1\right)^2 + \left(-2 \cdot \frac{11}{3} + 13\right)^2 + \left(-\frac{11}{3} - 3\right)^2 = \frac{295}{3} > 25.$$

Chapitre XI

PRIMITIVES & ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Sommaire

1	Primitives d'une fonction continue	258
1.1	Définitions et premières propriétés	258
1.2	Calculs de primitives	260
2	Résolution d'équations différentielles	262
2.1	Équation différentielle $y' = ay$	262
2.2	Équation différentielle $y' = ay + b$	264
2.3	Équation différentielle $y' = ay + f$	264
2.4	Autres équations différentielles	265
	Exercices	267
	Corrigé des exercices	278

Nous introduisons ici une opération naturelle mathématiquement : l'opération inverse de la dérivation. Il s'avère que c'est aussi une opération très utile aux physiciens, climatologues et autres économistes, qui observent souvent des variations (f') et veulent obtenir des conclusions générales (f). Des problèmes fondamentaux comme la position d'un train si l'on connaît sa vitesse ou son accélération, ou comme le prix d'équilibre entre l'offre et la demande d'un marché, s'expriment en termes de fonctions et de dérivées : les inconnues sont alors des fonctions qui satisfont des équations dites différentielles.

Le calcul différentiel est développé par Newton et Leibniz à la fin du XVII^e s. et Euler résoudra les premières équations différentielles au milieu du XVIII^e s. Depuis, de nombreuses techniques ont permis de résoudre des équations de plus en plus complexes mais la plupart d'entre elles restent encore mystérieuses de nos jours.

1 Primitives d'une fonction continue

1.1 Définitions et premières propriétés

Définition 1 Une équation différentielle est une équation dont l'inconnue est une fonction, généralement notée y , de variable généralement notée x ou t , et où interviennent des dérivées de cette fonction.

Résoudre une équation différentielle, c'est déterminer toutes les fonctions solutions de cette équation.

Exemples : Les équations $y' = 2$, $y' = y$, $3y'' - 2y' + y = 4$ et $y'(t) - 2ty(t) = 3t^2 - \cos(t)$ sont des équations différentielles. Il est clair que la fonction $y(t) = 2t + 3$ est une solution de la première et la fonction $f(x) = 4 \exp(x)$ est une solution de la seconde. Sont-ce les seules? Les autres équations admettent-elles des solutions? On se rend rapidement compte que la résolution d'une équation différentielle n'est pas toujours chose aisée.

Définition 2 Soit f une fonction continue sur un intervalle I .

Une **primitive de f sur I** est une solution de l'équation différentielle $y' = f$.

Une primitive de f sur I est donc une fonction, généralement notée F , dérivable sur I et telle que $F' = f$.

Exemples :

- Puisque $(x)' = 1$, la fonction x est une primitive de la fonction constante 1 sur $\mathbb{R}$, tout comme la fonction $x - 7$.
- Puisque $(x^3)' = 3x^2$, la fonction $\frac{1}{3}x^3$ est une primitive de la fonction carré x^2 sur $\mathbb{R}$.
- La fonction exponentielle est sa propre primitive sur $\mathbb{R}$.
- Puisque $(x \ln(x))' = 1 \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$, on a $\ln(x) = (x \ln(x))' - 1$ et la fonction $x \ln(x) - x$ est une primitive de la fonction $\ln(x)$ sur $]0; +\infty[$.

Le théorème suivant garantit que si l'on connaît une primitive de f sur I , on les connaît toutes : elles diffèrent simplement d'une constante additive.

Théorème 1 Soit f une fonction continue sur un intervalle I .

Si f admet une fonction F pour primitive sur I , alors f admet une infinité de primitives sur I et toute primitive G de f sur I est de la forme $G(x) = F(x) + k$ où $k \in \mathbb{R}$ est une constante.

Démonstration : • Sur I , on a $F' = f$. Si $G = F + k$ alors $G' = F' + 0 = f$ et G est bien une primitive de f sur I et ce, pour toute constante réelle k .

• La réciproque nécessite un lemme que nous admettrons car sa démonstration dépasse largement nos compétences. Toutefois, nous le commentons dans la remarque qui suit.

Lemme 1 (Admis) Soit f une fonction continue et dérivable sur un intervalle I .
Si $f'(x) = 0$ pour tout $x \in I$, alors f est une fonction constante.

D'où, si G est une primitive de f sur I , on a $(G - F)' = G' - F' = f - f = 0$ sur I . Le lemme 1 permet alors d'affirmer que $G - F$ est constante sur I c.-à-d. $G = F + k$ sur I , où $k \in \mathbb{R}$. $\square$

Exemples : D'après les exemples précédents, les primitives sur $\mathbb{R}$ de la fonction constante 1 sont de la forme $x + k$, celles de la fonction x^2 sont de la forme $\frac{1}{3}x^3 + k$ et celles de $\exp(x)$ sont de la forme $\exp(x) + k$.

Remarque : Le lemme 1 nécessite impérativement de se placer sur un intervalle. En effet, la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ est bien continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ mais elle n'est certainement pas constante.

Le théorème suivant sera démontré dans le chapitre sur l'intégration (cf. chap. XIV p. 351) mais il nous est d'ors et déjà très utile. Il garantit l'existence de primitives sous condition de continuité mais ne donne malheureusement pas de moyen explicite pour en trouver.

Théorème 2

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I .

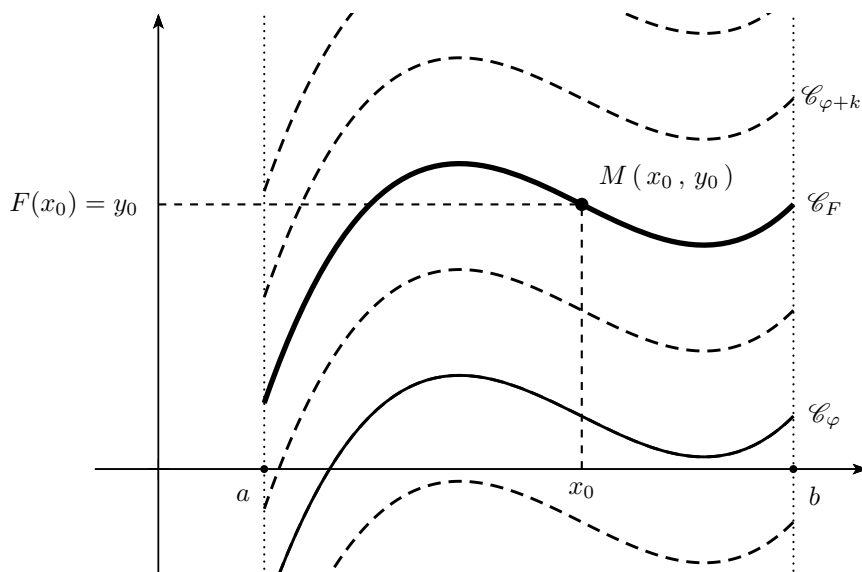
Nous savons qu'il existe une infinité de primitives d'une fonction continue sur un intervalle. Le résultat suivant donne, sous conditions, l'unicité d'une certaine primitive.

Propriété 1 Primitive avec condition initiale

Si une fonction f admet des primitives sur I , alors pour tout $x_0 \in I$ et tout $y_0 \in \mathbb{R}$, il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.

Démonstration : En effet, si φ est une primitive de f sur I alors tout autre primitive est de la forme $\varphi + k$. La condition initiale $F(x_0) = y_0$ s'écrit $\varphi(x_0) + k = y_0$ donc il existe une unique valeur $k = y_0 - \varphi(x_0)$. $\square$

Si φ (de graphe $\mathcal{C}_\varphi$) est une primitive de f sur I alors toutes les primitives de f sur I sont de la forme $\varphi + k$ (de graphe $\mathcal{C}_{\varphi+k}$) et admettent donc pour représentations graphiques les translatées de vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 0 \\ k \end{pmatrix}$ de $\mathcal{C}_\varphi$. Parmi toutes les courbes $\mathcal{C}_{\varphi+k}$, une seule ($\mathcal{C}_F$) passe par le point $M(x_0, y_0)$.



1.2 Calculs de primitives

Lorsque l'on passe de f à f' , on dit que l'on dérive la fonction f . Pour l'opération inverse, lorsque l'on passe de f à F , on peut dire que l'on primitive f mais ce n'est pas très joli ni usité, que l'on calcule une primitive de f mais c'est un peu long à dire, ou que l'on intègre f mais ceci ne sera justifié qu'au chapitre d'intégration. En tout cas, cette opération n'est ni facile à faire, ni facile à dire.

Propriété 2 Si F et G sont des primitives des fonctions f et g respectivement sur un même intervalle I et si $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $F + G$ et λF sont des **primitives** sur I des fonctions $f + g$ et λf respectivement.

Démonstration : Cela découle des propriétés algébriques de la dérivation :

$$(F + G)' = F' + G' = f + g \quad \text{et} \quad (\lambda F)' = \lambda F' = \lambda f. \quad \square$$

Exemples : La fonction $x^2 + 1$ admet pour primitives $\frac{1}{3}x^3 + x + k$ sur $\mathbb{R}$ et les fonctions $7x + k$ sont les primitives de la fonction constante 7 sur $\mathbb{R}$.

Remarque : Contrairement à la dérivation, il n'existe pas de formule permettant de déterminer une primitive du produit ou du quotient de deux fonctions continues.

On obtient les tableaux suivants par lecture inverse des tableaux de dérivation où n désigne un entier naturel, λ et μ deux réels, u et v deux fonctions dérivables à dérivées continues sur un intervalle I .

On n'oubliera pas d'ajouter une constante pour obtenir toutes les primitives des fonctions étudiées.

Fonction	Une primitive	Intervalle, Commentaire
λ	$\lambda x + \mu$	$\mathbb{R}$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}^{(*)}$, $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{Z} \setminus \{-1\}$, $\pm \frac{1}{2} \dots$
$\frac{1}{x}$	$\ln x : \ln(x) \text{ ou } \ln(-x)$	sur $]0; +\infty[$ ou sur $] -\infty; 0[$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{1}{n-1} \frac{1}{x^{n-1}}$	$] -\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$, $n \geq 2$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0; +\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\ln(x)$	$x \ln(x) - x$	$]0; +\infty[$

$u'u^n$	$\frac{1}{n+1} u^{n+1}$	$n \in \mathbb{N}$
$\frac{u'}{u}$	$\ln u : \ln(u) \text{ ou } \ln(-u)$	si $u(x) > 0$ ou si $u(x) < 0$ sur I
$\frac{u'}{u^n}$	$-\frac{1}{n-1} \frac{1}{u^{n-1}}$	si $u(x) \neq 0$ sur I et $n \geq 2$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	si $u(x) > 0$ sur I
$u'e^u$	e^u	
$u' \cos(u)$	$\sin(u)$	
$u' \sin(u)$	$-\cos(u)$	
$x \mapsto u(\lambda x + \mu)$	$x \mapsto \frac{1}{\lambda} U(\lambda x + \mu)$	si $\lambda \neq 0$, $\lambda x + \mu \in I$ et U primitive de u sur I
$u' \cdot (v' \circ u)$	$v \circ u$	lorsque définies

Exemples : $\circ$ Une primitive de $7x^5 - x^3 + 5x^2 - 3x + 2$ sur $\mathbb{R}$ est
 $\frac{7}{6}x^6 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x - 11$.

- Sur $\mathbb{R}$, la fonction $\frac{2x+1}{x^2+x+3}$ admet pour primitives $\ln(x^2+x+3)+k$.
- La fonction $3\cos x \sin^5 x$ admet comme primitives sur $\mathbb{R}$ $\frac{1}{2}\sin^6 x + k$.
- La fonction $\frac{3}{2}e^{x^2+1}$ est une primitive de $3xe^{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$.

Remarques : Commencez par vous divertir en dérivant sur $\mathbb{R}$ la fonction e^{-x^2} puis cherchez-en une primitive.

Il s'avère que cette fonction n'admet pas de primitive pouvant s'exprimer au moyen de fonctions usuelles. C'est une conséquence d'un théorème d'algèbre difficile (th. de Liouville). Pourtant, cette fonction est d'une importance capitale, en probabilités par exemple où il est nécessaire de calculer son intégrale (cf. chapitre éponyme) : les résultats numériques ne pourront alors qu'être approchés.

Dans ce chapitre sur l'intégration, nous verrons que le calcul de primitives est étroitement lié au calcul d'aires. Ce résultat, très surprenant, est connu sous le nom de théorème fondamental de l'analyse.

2 Résolution d'équations différentielles

Dans tout ce paragraphe, a est un réel non nul.

2.1 Équation différentielle $y' = ay$

Définition 3 L'équation $(E_0): y' = ay$ est appelée équation différentielle linéaire homogène (ou sans second membre) du premier ordre à coefficients constants.

Une telle équation s'écrit aussi sous la forme $y' - ay = 0$, d'où l'appellation « sans second membre ».

Propriété 3 Les solutions de l'équation différentielle $(E_0): y' = ay$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = Ce^{ax}$ où C est un réel.

Démonstration : • Soit $C \in \mathbb{R}$ et y la fonction définie par $y(x) = Ce^{ax}$.

Par composition, la fonction y est dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on a

$$y'(x) = C(ax)'e^{ax} = Ca e^{ax} = aCe^{ax} = ay(x)$$

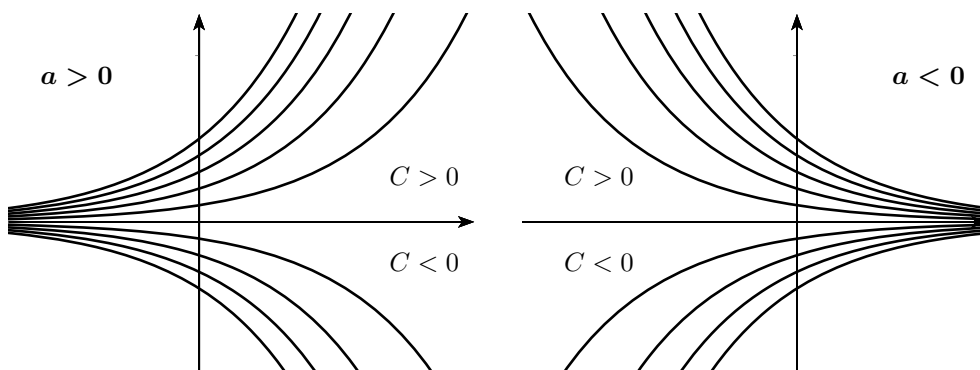
donc y est solution de l'équation $(E_0): y' = ay$.

• Réciproquement, si y est une solution de $(E_0): y' = ay$, on pose $\varphi(x) = y(x)e^{-ax}$, fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ par composition.

On a alors $\varphi'(x) = y'(x)e^{-ax} + y(x)(-a)e^{-ax} = ay(x)e^{-ax} - ay(x)e^{-ax} = 0$.

D'après le lemme 1 en page 259, la fonction φ est constante. Il existe donc un réel C tel que $\varphi(x) = C$ pour tout réel x . Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y(x)e^{-ax} = C$ et $y(x) = Ce^{ax}$. $\square$

Allure des solutions $y(x) = Ce^{ax}$ de l'équation $(E_0): y' = ay$.



Exemple : L'équation différentielle linéaire homogène du premier ordre à coefficients constants $y' = -3y$ admet pour solutions les fonctions de la forme $y = Ce^{-3x}$ où C est un réel.

Il existe donc une infinité de solutions à une telle équation $(E_0): y' = ay$. En revanche, il n'en existe qu'une vérifiant une condition initiale donnée. C'est le fameux problème de Cauchy[§].

Propriété 4 *Problème de Cauchy*

Pour tout $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, il existe une unique solution y de $(E_0): y' = ay$ telle que $y(x_0) = y_0$.

Démonstration : En effet, une telle condition initiale impose la valeur de C :

$$y_0 = y(x_0) = Ce^{ax_0} \Leftrightarrow C = y_0 e^{-ax_0}. \quad \square$$

Exemple : Le problème de Cauchy $\begin{cases} y' = -3y \\ y(2) = -5 \end{cases}$ admet donc une unique solution.

On a vu que y est alors de la forme $y = Ce^{-3x}$ et la condition $y(2) = -5$ donne $Ce^{-3 \times 2} = -5$ d'où $C = -5e^6$ et la solution à ce problème est $y(x) = -5e^{6-3x}$ de graphe, l'une des courbes “en bas, à droite” des graphiques précédents.

Propriété 5 Si y_1 et y_2 sont des solutions de l'équation $(E_0): y' = ay$ et λ est un réel, alors la somme $y_1 + y_2$ et le produit λy_1 sont aussi solutions de (E_0) .

Démonstration : Posons $y = y_1 + y_2$ et $z = \lambda y_1$ où y_1 et y_2 sont solutions de $(E_0): y' = ay$. Par linéarité de la dérivation, on a

$y' = (y_1 + y_2)' = y_1' + y_2' = ay_1 + ay_2 = a(y_1 + y_2) = ay$: y est solution de (E_0) , et $z' = (\lambda y_1)' = \lambda y_1' = \lambda ay_1 = a\lambda y_1 = az$: z est solution de (E_0) . $\square$

Exemple : Trivialement, la fonction $y = 7e^{-3x} - 9e^{-3x} = -2e^{-3x}$ est solution de l'équation $y' = -3y$.

§. Fantastique mathématicien dont le nom est inscrit sur la non moins fantastique tour Eiffel.

2.2 Équation différentielle $y' = ay + b$

Définition 4 L'équation $(E): y' = ay + b$ est appelée équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants avec second membre.

Une telle équation s'écrit aussi sous la forme $y' - ay = b$, d'où l'appellation « avec second membre ».

Propriété 6 Les solutions de l'équation différentielle $(E): y' = ay + b$ sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}$ où C est un réel.

Démonstration : • Commençons par chercher une solution particulière constante $y_P = \lambda$. On a alors $y'_P = 0 \iff ay_P + b = 0 \iff a\lambda + b = 0 \iff \lambda = -\frac{b}{a}$: la fonction constante particulière $y_P = -\frac{b}{a}$ est la seule solution constante de (E) .

• Par ailleurs, on a vu que l'équation homogène $(E_0): y' = ay$ associée à (E) admet pour solutions, les fonctions de la forme $y_H = Ce^{ax}$ où $C \in \mathbb{R}$.

• Ainsi, toute fonction de la forme $y = y_H + y_P$ vérifie
 $y' = (y_H + y_P)' = y'_H + y'_P = (ay_H) + (ay_P + b) = a(y_H + y_P) + b = ay + b$
 donc $y = y_H + y_P$ est solution de (E) .

• Réciproquement, si z est solution de (E) , alors

$(z - y_P)' = z' - y'_P = (az + b) - (ay_P + b) = a(z - y_P)$ et $z - y_P = y_H$ est une solution de (E_0) : la fonction z s'écrit donc comme $z = (z - y_P) + y_P = y_H + y_P$, somme d'une solution de (E_0) et de la solution particulière y_P . $\square$

Remarque : Les solutions de (E) s'obtiennent donc en ajoutant une solution particulière de (E) , $y_P = -\frac{b}{a}$, aux solutions y_H de l'équation homogène associée (E_0) . C'est un cas particulier de ce que l'on appelle le *principe de superposition*.

Exemple : L'équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants avec second membre $y' = -3y + 4$ admet une solution particulière $y_P = -\frac{4}{-3} = \frac{4}{3}$ ($-3 \cdot \frac{4}{3} + 4 = 0 = y'_P$) et l'on a vu que les solutions homogènes sont de la forme $y_H = Ce^{-3x}$ où $C \in \mathbb{R}$. Les solutions de l'équation $y' = -3y + 4$ sont donc les fonctions de la forme $y = y_H + y_P = Ce^{-3x} + \frac{4}{3}$ où $C \in \mathbb{R}$.
 Puisque $Ce^{-3 \times 2} + \frac{4}{3} = -5 \iff C = -\frac{19}{3}e^6$, une seule satisfait la condition initiale $y(2) = -5$, c'est la fonction $y = -\frac{19}{3}e^{6-3x} + \frac{4}{3}$.

2.3 Équation différentielle $y' = ay + f$

On considère une fonction f définie et continue sur un intervalle I .

Définition 5 L'équation $(E): y' = ay + f$ est aussi appelée équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants avec second membre.

Dans l'équation $y' - ay = f$, ce sont les coefficients de y et de y' qui doivent être constants et non le second membre.

Propriété 7

Si y_P est une solution particulière de l'équation différentielle $(E): y' = ay + f$, alors y est une solution de (E) si, et seulement si, $y_H = y - y_P$ est une solution de l'équation homogène associée $(E_0): y' = ay$.

Autrement dit, toute solution de (E) s'écrit sous la forme $y = y_H + y_P$.

Démonstration : Soit y_P une solution particulière de l'équation $(E): y' = ay + f$.

- Soit y une solution de (E) et posons $y_H = y - y_P$.

On a alors $y'_H = (y - y_P)' = y' - y'_P = (ay + f) - (ay_P + f) = a(y - y_P) = ay_H$: la fonction y_H est bien une solution de l'équation homogène associée $(E_0): y' = ay$.

- Réciproquement, supposons que $y_H = y - y_P$ est une solution de l'équation homogène associée $(E_0): y' = ay$. On a alors $y = y_H + y_P$ et

$y' = (y_H + y_P)' = y'_H + y'_P = ay_H + (ay_P + f)$ d'où $y' = a(y_H + y_P) + f = ay + f$: y est une solution de l'équation $(E): y' = ay + f$. $\square$

Le résultat précédent donne un plan de résolution de ces équations différentielles : on cherche une solution particulière y_P de (E) , on résout l'équation homogène (E_0) associée, y_H , et l'on ajoute ces solutions $y = y_P + y_H$ afin d'obtenir toutes les solutions de (E) . En revanche, contrairement à l'équation $y' = ay + b$, il n'existe généralement pas de solution particulière constante et il faut user de stratagèmes et d'intuition pour déterminer une solution particulière y_P .

Exemple : Soit $(E): y' + 3y = 6x + 5$ une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants avec second membre.

- On a vu que les solutions de l'équation homogène associée $(E_0): y' + 3y = 0$ sont de la forme $y_H = Ce^{-3x}$ où $C \in \mathbb{R}$.

- Puisque le second membre $f(x) = 6x + 5$ est une fonction affine, il est raisonnable de chercher une solution particulière de même nature. Posons $y_P = \lambda x + \mu$.

On a $y'_P = \lambda$ et l'équation (E) s'écrit alors

$$\begin{aligned} y'_P + 3y_P = f &\iff \lambda + 3(\lambda x + \mu) = 6x + 5 \iff 3\lambda x + (3\mu + \lambda) = 6x + 5 \\ &\iff \begin{cases} 3\lambda = 6 \\ 3\mu + \lambda = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 2 \\ \mu = 1 \end{cases} \text{ et } y_P = 2x + 1 \text{ est une sol. part. de } (E). \end{aligned}$$

- Ainsi, les solutions de (E) sont de la forme $y = y_H + y_P = Ce^{-3x} + 2x + 1$.

- Puisque $Ce^{-3 \times 2} + 2 \times 2 + 1 = -5 \iff C = -10e^6$, une seule satisfait la condition initiale $y(2) = -5$, c'est la fonction $y = -10e^{6-3x} + 2x + 1$.

2.4 Autres équations différentielles

Nous n'avons pas l'intention de faire ici une étude exhaustive de la résolution des équations différentielles, la plupart n'ayant d'ailleurs pas de solutions connues, au grand dam des physiciens, économistes, climatologues... Sachez que les équations différentielles ne sont pas toutes linéaires, ni du premier ordre, ni à coefficients constants, ni homogènes, ni à second membre constant. Voici quelques exemples dont on donnera les solutions : ils ne sont pas au programme mais peuvent faire l'objet d'exercices.

$(E_1): y' = y^2$: non linéaire. Si $y(x) \neq 0$, on a $\frac{y'}{y^2} = 1$ et en intégrant des deux côtés, on obtient $-\frac{1}{y} = x + k$ d'où $y = -\frac{1}{x+k}$. On vérifie alors que

- $y' = -(-\frac{1}{(x+k)^2}) = \frac{1}{(x+k)^2} = (-\frac{1}{x+k})^2 = y^2$ et $y = -\frac{1}{x+k}$ est bien une solution de (E_1) . La fonction $y \equiv 0$ en est une aussi.
- (E_2) : $y' - 2xy = 0$: à coefficients non constants. Si $y(x) \neq 0$, on a $\frac{y'}{y} = 2x$ et en intégrant des deux côtés, on obtient $\ln(|y|) = x^2 + k$ d'où $|y| = e^{x^2+k}$. On pose $y = Ce^{x^2}$ et l'on a $y' = (x^2)'Ce^{x^2} = 2xCe^{x^2} = 2xy$:
 $y = Ce^{x^2}$ est bien une solution de (E_2) .
- (E_3) : $y'' - \omega^2 y = 0$: du second ordre. Ceci s'écrit $y'' = \omega^2 y$ et l'on pense alors à l'exponentielle : une fonction qui nous permet de seulement multiplier par le nombre ω lorsqu'on la dérive, et donc par ω^2 en dérivant deux fois. On vérifie alors que la fonction $y = Ce^{\omega x}$ est bien une solution de (E_3) :
 $y' = \omega Ce^{\omega x}$ et $y'' = \omega^2 Ce^{\omega x} = \omega^2 y$.
- (E_4) : $y'' + \omega^2 y = 0$: du second ordre. Ceci s'écrit $y'' = -\omega^2 y$ et l'on pense alors aux fonctions trigonométriques, qui reviennent sur leur opposé lorsqu'on les dérive deux fois. On pose donc $y = A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)$,
 $y' = -\omega A \sin(\omega x) + \omega B \cos(\omega x)$ et
 $y'' = -\omega^2 A \cos(\omega x) - \omega^2 B \sin(\omega x) = -\omega^2 [A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)] = -\omega^2 y$:
 y est bien une solution de (E_4) .
- (E_5) : $y'' + ay' = f$: du second ordre avec second membre non constant. Posons $z = y'$. L'équation s'écrit alors $z' + az = f$ dont on connaît la méthode de résolution. On obtient alors les solutions $z = y'$, sous réserve d'avoir trouvé une solution particulière z_P . Il suffit ensuite de trouver une primitive de z pour avoir y mais cela n'est pas toujours facile.
- (E_6) : $y' = (1-y)y$: non linéaire. Si $y(x) \neq 0$, l'équation peut s'écrire
 $\frac{-y'}{y^2} = -\frac{1-y}{y} = 1 - \frac{1}{y}$. Posons $z = \frac{1}{y}$. L'équation s'écrit alors
 $z' = 1 - z \iff z' + z = 1$ dont on connaît les solutions $z = \frac{1}{y}$. Il suffit ensuite de les inverser : $y = \frac{1}{z}$ solution de (E_6) .
 La fonction $y \equiv 0$ en est une aussi.
- (E_7) : $y'' - y' - 6y = 0$: équation différentielle linéaire homogène du second ordre à coefficients constants. On se précipite sur l'équation caractéristique associée :
 $r^2 - r - 6 = 0$, qui admet deux racines $r = -2$ et $r = 3$.
 Posons alors $y = Ae^{-2x} + Be^{3x}$.
 On a $y' = -2Ae^{-2x} + 3Be^{3x}$ et $y'' = 4Ae^{-2x} + 9Be^{3x}$ d'où
 $y'' - y' - 6y = (4Ae^{-2x} + 9Be^{3x}) - (-2Ae^{-2x} + 3Be^{3x}) - 6(Ae^{-2x} + Be^{3x}) = 0$:
 y est solution de (E_7) .
- (E_8) : $y'' - 4y' + 4y = 0$: On se précipite sur l'équation caractéristique associée : $r^2 - 4r + 4 = 0$, qui admet une racine double $r = 2$. Posons alors $y = (Ax + B)e^{2x}$.
 On a $y' = (A + 2(Ax + B))e^{2x} = (2Ax + A + 2B)e^{2x}$
 et $y'' = (2A + 2(2Ax + A + 2B))e^{2x} = 4(Ax + A + B)e^{2x}$
 d'où $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}(4(Ax + A + B) - 4(2Ax + A + 2B) + 4(Ax + B)) = 0$:
 y est solution de (E_8) .

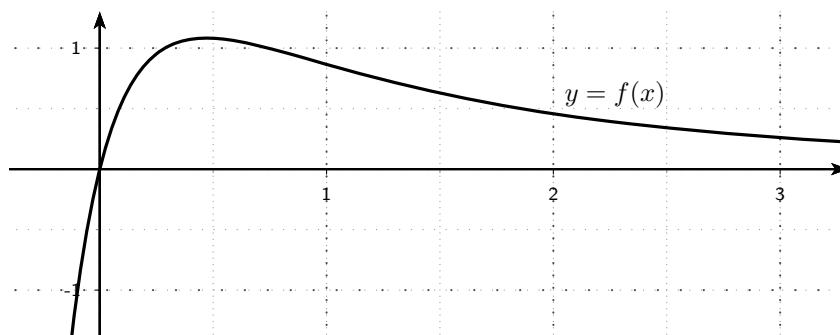
Quant aux équations dont on ne connaît pas de solution explicite, il peut être utile de savoir les approcher par la méthode d'Euler par exemple (cf. ex. 25 p. 274).

Exercices

PRIMITIVES & ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

On pourra commencer par se reporter à l'exercice 4 en page 142.

Exercice 1 VouF ?



On donne ci-dessus la courbe représentative d'une fonction f continue et dérivable sur $\mathbb{R}$. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ? Justifier la réponse.

- (a) Toute primitive de f sur $\mathbb{R}$ s'annule en 0.
- (b) Il existe une primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.
- (c) Toute primitive de f sur $\mathbb{R}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
- (d) Toute primitive de f sur $\mathbb{R}$ est négative sur $[\frac{1}{2}; +\infty[$.
- (e) Toute primitive de f sur $\mathbb{R}$ est concave sur $[\frac{1}{2}; +\infty[$.

Exercice 2 VouF ?

Les implications suivantes sont elles vraies ? Et leur réciproque ? Justifier.

f est une fonction continue sur l'intervalle $I = [-5; 5]$ et F est la primitive de f sur I telle que $F(1) = 2$.

- (a) Si F est croissante sur I , alors $f(0) \geq 0$.
- (b) Si G est une primitive de f sur I telle que $G(1) = 3$, alors, pour tout $x \in I$, $G(x) = F(x) + 1$.

Exercice 3

Déterminer la fonction dont la fonction proposée est une primitive sur l'intervalle I .

$$A(x) = x \ln(x) - x, \quad I =]0; +\infty[.$$

$$B(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x}, \quad I =]0; +\infty[.$$

$$C(x) = \cos(2x), \quad I = [0; \pi].$$

$$D(x) = -2 \sin^2(x), \quad I = [0; \pi].$$

$$E(x) = -xe^{1-x}, \quad I = \mathbb{R}.$$

$$F(x) = (x-1) \ln(x), \quad I =]0; +\infty[.$$

Exercice 4 Déterminer, dans chaque cas, une primitive sur I de la fonction proposée.

$$a(x) = 8x^3 - 6x^2 + 1, \quad I = \mathbb{R}.$$

$$b(x) = 9x^2 - 4x + 5, \quad I = \mathbb{R}.$$

$$c(x) = \frac{2}{x^3}, \quad I =]0; +\infty[.$$

$$d(x) = \frac{1}{2x}, \quad I =]0; +\infty[.$$

$$e(x) = -\frac{1}{x^3} + \frac{4}{x^2} - \frac{1}{x}, \quad I =]0; +\infty[.$$

$$f(x) = (5x + 2)^3, \quad I = \mathbb{R}.$$

$$g(x) = 2(3x - 1)^5, \quad I = \mathbb{R}.$$

$$h(x) = e^{-x+1}, \quad I = \mathbb{R}.$$

$$i(x) = 2e^{3x-2}, \quad I = \mathbb{R}.$$

$$j(x) = \frac{2}{x-4}, \quad I =]-\infty; 4[.$$

$$k(x) = \frac{8}{(x-2)^3}, \quad I =]2; +\infty[.$$

$$l(x) = x(1-x^2)^5, \quad I = \mathbb{R}.$$

$$m(x) = e^x(1-e^x), \quad I = \mathbb{R}.$$

$$n(x) = \sin(x) \cos^2(x), \quad I = \mathbb{R}.$$

$$o(x) = \cos(x)(\sin^5(x)+1), \quad I = [0; \pi].$$

$$p(x) = \frac{3}{\sqrt{2x-4}}, \quad I =]2; +\infty[.$$

$$q(x) = \frac{5x}{\sqrt{x^2-9}}, \quad I =]3; +\infty[.$$

$$r(x) = \frac{1}{x(\ln(x))^2}, \quad I =]1; +\infty[.$$

$$s(x) = \frac{-2e^x}{\sqrt{e^x+1}}, \quad I = \mathbb{R}.$$

$$t(x) = (x+1)e^{x^2+2x-3}, \quad I = \mathbb{R}.$$

$$u(x) = \frac{x-2}{x^2-4x+5}, \quad I = \mathbb{R}.$$

$$v(x) = \frac{x-2}{-x^2+4x-5}, \quad I = \mathbb{R}.$$

$$w(x) = \sin(x) + x \cos(x), \quad I = \mathbb{R}.$$

$$y(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}, \quad I =]0; +\infty[.$$

$$z(x) = 4x^2 e^{2x}$$

Exercice 5 Déterminer, dans chaque cas, la primitive de la fonction proposée sur l'intervalle I vérifiant la condition imposée.

$$a(x) = x^4 - 4x^3 - x, \quad I = \mathbb{R}, \quad A(2) = -1.$$

$$b(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{3}, \quad I = \mathbb{R}, \quad B(-1) = 0.$$

$$c(x) = e^x - x, \quad I = \mathbb{R}, \quad C(0) = -1.$$

$$d(x) = 1 - e^{-x}, \quad I = [0; 4], \quad D(2) = -1.$$

$$e(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}, \quad I =]-\infty; 0[, \quad E(-2) = 2.$$

$$f(x) = e^{2x} - 2e^x, \quad I = \mathbb{R}, \quad F(\ln(2)) = 0.$$

$$g(x) = 3 \sin(2x), \quad I = \mathbb{R}, \quad G(0) = 4.$$

$$h(x) = \frac{-3}{2x-5}, \quad I =]-\infty; \frac{5}{2}[, \quad H(0) = e^2.$$

Exercice 6

1. Soit f la fonction définie sur $] -1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x^2 + 5x + 6}{x+1}$.

(a) Déterminer les coefficients réels a , b et c tels que, pour tout $x \in] -1; +\infty[$,

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}.$$

(b) En déduire une primitive de f sur $] -1; +\infty[$.

2. Procéder de même pour la fonction g définie sur $]3; +\infty[$ par

$$g(x) = \frac{6x^2 - 26x + 29}{6 - 2x}.$$

Exercice 7 On considère la fonction f définie sur $I = [0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1}$.

- Justifier que f admet une unique primitive F sur I qui s'annule en 0.
- On désigne par g la fonction définie sur I par $g(x) = F(x) - \frac{1}{2}x$. Étudier les variations de g sur I .
- Justifier que $g(x) \geq 0$ pour tout $x \in I$ puis en déduire la limite de F en $+\infty$.
- Soit H une primitive quelconque de f sur I . Déterminer la limite de H en $+\infty$.

Exercice 8 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x)e^{2x}$. Déterminer les réels a et b tels que, pour tout réel x , $f(x) = af'(x) + bf''(x)$ puis en déduire toutes les primitives de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 9 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

On suppose que F est la primitive de f sur $\mathbb{R}$ s'annulant en 0.

- Représenter la fonction f dans un repère.
- (a) Déterminer une expression de F sur $] -\infty; 0[$.
(b) Déterminer une expression de F sur $] 0; +\infty[$.
(c) En déduire une expression de F sur $\mathbb{R}$.
- Étudier la limite en 0 de $\frac{F(x)}{x}$ et en déduire la valeur de $F'(0)$.
- Conclure.

Exercice 10 La fusée

Une fusée décolle verticalement du sol à l'instant $t = 0$. Lors des deux premières minutes de vol, sa vitesse (en m.s^{-1}) à l'instant t (en s) est donnée par la formule

$$v(t) = 0,06t^2 + 0,8t \quad \text{et l'on note } d(t) \text{ la distance (en m) qu'elle a parcourue.}$$

- Sachant que d est une primitive de la fonction v , déterminer l'expression de $d(t)$.
- À quelle distance de la Terre se trouve la fusée après deux minutes de vol ?

Exercice 11 La pomme

On lâche une pomme du haut d'un arbre de 10 mètres. Lors de sa chute, la vitesse $v(t)$ (exprimée en m.s^{-1}) de la pomme en fonction du temps (exprimé en s) est solution de l'équation différentielle $y' = 9,8$ et la distance $d(t)$ (exprimée en m) parcourue par la pomme est solution de l'équation différentielle $y' = v$.

Quelle est la vitesse de la pomme lorsqu'elle s'écrase au sol ?

Exercice 12 Vérifier dans chaque cas que la fonction est une solution particulière de l'équation différentielle.

$$a(x) = e^{\frac{1-4x}{3}} \quad \text{et} \quad (E_a): 6y' + 8y = 0.$$

$$b(x) = e^{3x+1} - 2 \quad \text{et} \quad (E_b): y' = 3y + 6.$$

$$c(x) = 2x + 2 \quad \text{et} \quad (E_c): y' = -2y + 4x + 6.$$

$$d(x) = (x+1)e^{-2x} \quad \text{et} \quad (E_d): y' = -2y + e^{-2x}.$$

$$e(x) = 3e^{x^2} + e^x \quad \text{et} \quad (E_e): y' - 2xy = -(2x-1)e^x.$$

$$f(x) = 4e^x - 7e^{3x} + 5 \quad \text{et} \quad (E_f): y'' - 4y' + 3y = 15.$$

$$g(x) = t^2 - 5t \quad \text{et} \quad (E_g): ty' - y = t^2.$$

$$h(x) = e^{t^2} \quad \text{et} \quad (E_h): y'' - 4t^2y = 2e^{t^2}.$$

Exercice 13

- (a) Déterminer deux équations différentielles distinctes vérifiées par la fonction $x \mapsto 3x^2 - 2x + 1$.
- (b) Déterminer deux équations différentielles distinctes vérifiées par la fonction $x \mapsto -4e^{5x}$.

Exercice 14 Résoudre sur $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes.

$$(E_1): y' = 5y$$

$$(E_2): 2y' = y$$

$$(E_3): 4y' + 3y = 0$$

$$(E_4): y' = -y + 2$$

$$(E_5): 2y' + y = 4, \quad y(0) = 7.$$

$$(E_6): 3y' - 6y = 1, \quad y(-4) = 3.$$

Exercice 15

Associer à chaque équation différentielle, une des solutions particulières proposées.

$$(E_1): 4y' = -4y$$

$$(E_2): 4y' = y$$

$$(E_3): y' - 4y = 0$$

$$(E_4): 4y' + y = 0$$

$$a(x) = e^{4-x}$$

$$b(x) = -e^{4x}$$

$$c(x) = e^{4-\frac{1}{4}x}$$

$$d(x) = 4e^{\frac{1}{4}x}$$

Exercice 16

VouF ? Justifier

- La solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = -\frac{3}{2}y$ telle que $y(-2) = e^2$ est une fonction strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
- La solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $-6y' + 3y = 0$ telle que $y(2) = e$ est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
- La solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $4y' + 3y = 0$ telle que $y(2) = -\sqrt{e}$ a pour limite 0 en $+\infty$.

Exercice 17 Q.C.M.

Indiquer la (ou les) bonne(s) réponse(s) en justifiant.

- Soit f la solution de l'équation différentielle $(E_1): y' = 2y - 5$ telle que $f(0) = 0$.
 - f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
 - $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.
 - $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$.
 - Le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 0 est 5.
- On considère l'équation différentielle $(E_2): y - 2y' = 0$.
 - La fonction $x \mapsto e^{2x}$ est une solution de l'équation (E_2) .
 - La fonction $x \mapsto e^{-\frac{1}{2}x}$ est la solution de (E_2) qui vaut 1 en 0.
 - La fonction $x \mapsto e^{\frac{1}{2}x}$ est la solution de (E_2) qui vaut 1 en 0.
 - La fonction $x \mapsto 2e^x + e^{\frac{1}{2}x}$ est une solution de l'équation $y - 2y' = -2e^x$.
- On considère les équations différentielles $(E_3): y' + y = 2\sin(x)$ et $(E_0): y' + y = 0$.
 - La fonction $x \mapsto \cos(x) - \sin(x)$ est une solution de (E_3) .
 - La fonction $x \mapsto -\cos(x) + \sin(x)$ est une solution de (E_3) .
 - Les fonctions $x \mapsto Ce^{-x}$, où C est une constante réelle, sont solutions de (E_0) .
 - La fonction $x \mapsto e^{-x} - \cos(x) + \sin(x)$ est la solution de (E_3) qui s'annule en 0.

Exercice 18

- On considère l'équation différentielle $(E_1): y' - \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}x$.
 - Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x - 2$ est une solution particulière de (E_1) .
 - En déduire toutes les solutions de l'équation (E_1) sur $\mathbb{R}$.
 - Déterminer l'unique solution h de (E_1) vérifiant la condition initiale $h(2) = 0$.
- Procéder de même pour l'équation différentielle $(E_2): y' = 2y + 2x$.
- Soit la fonction $f(x) = xe^x$ sur $\mathbb{R}$.
Déterminer toutes les solutions de l'équation $(E_3): y' - y - e^x = 0$.
- Déterminer toutes les solutions de l'équation $(E_4): y' + 2y - e^{3x} = 0$.
- Déterminer toutes les solutions de l'équation $(E_5): y' + 4y = xe^{-x}$.
- Déterminer toutes les solutions de l'équation $(E_6): y' + y = 2\cos(x)$.
- Déterminer toutes les solutions de l'équation $(E_7): y' - y = \cos(x) - 3\sin(x)$.

Exercice 19 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - e^{3x}$.

- (a) Calculer $f'(x)$ puis $f(x) - x^3 + x^2$.

- (b) En déduire que la fonction f est solution d'une équation différentielle (E) que l'on précisera.
- 2. (a) Déterminer toutes les solutions de (E) .
- (b) Donner la seule solution de (E) qui s'annule en 0.

Exercice 20 Thé brûlant

On place une tasse de thé bouillant dans une pièce où la température est constante et égale à 20°C . Selon la loi de refroidissement de Newton, la vitesse de refroidissement de la tasse est proportionnelle à la différence entre la température de la pièce et celle de la tasse. On note $T(t)$ la température (en $^\circ\text{C}$) de la tasse à l'instant t (en minutes).

1. (a) Quelle est la condition initiale de cette situation ?
- (b) Quel lien a-t-on entre T et sa dérivée ?
2. Résoudre l'équation différentielle $y' = k(20 - y)$ puis en déduire l'expression de T en fonction de k .
3. Au bout de 14 minutes, la température du thé est égale à 40°C .
- (a) Déterminer la valeur du coefficient k .
- (b) Au bout de combien de temps la température du thé est-elle inférieure à 25°C ?

Exercice 21 Soit f la solution de l'équation différentielle $(E): 2y' - 5y = 4$ telle que $f''(1) = \frac{25}{2}$.

1. Démontrer que si y est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$, alors $y'' = \frac{25}{4}y + 5$.
2. En déduire les valeurs de $f(1)$ et $f'(1)$.
3. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1.
4. Déterminer l'expression de la fonction f .

Exercice 22 L'objectif de cet exercice est de déterminer les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifiant les deux conditions suivantes :

$$f(0) = -2 \quad \text{et, pour tout } x \text{ réel, } f(-x)f'(x) = 1.$$

1. On suppose qu'il existe une telle fonction f et l'on considère la fonction g définie par $g(x) = f(-x)f(x)$.
- (a) Démontrer que la fonction g ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.
- (b) Calculer la dérivée de g et en déduire l'expression de $g(x)$.
- (c) En déduire que la fonction f est solution d'une certaine équation différentielle que l'on précisera.
2. Démontrer qu'il existe une unique fonction f solution du problème et donner l'expression de $f(x)$.

Exercice 23 Une équation logistique

Une équipe de biologistes cherche à étudier l'évolution d'une population de rongeurs.

1. Modèle de Malthus

L'équipe étudie d'abord en laboratoire l'évolution d'une population comptant initialement 50 individus. La taille de la population t années après le début de l'expérience est notée $f(t)$ (en centaines d'individus). Dans ces conditions, l'accroissement de la population est proportionnel à la taille de cette population, avec un rapport de proportionnalité égal à $\frac{1}{4}$.

- Déterminer une équation différentielle (E_1) dont f est solution.
- Déterminer l'expression de $f(t)$.
- Déterminer les variations de f puis sa limite en $+\infty$ et interpréter les résultats obtenus.
- Au bout de combien d'années la population dépassera-t-elle 300 rongeurs?

2. Modèle de Verhulst

Dans le milieu naturel où ils évoluent, un prédateur limite la croissance de la population de rongeurs. On note $g(t)$ le nombre de rongeurs vivants (en centaines d'individus) t années après le début de l'expérience, la population initiale étant de 2 000 rongeurs. Pour modéliser l'évolution de cette population, les scientifiques utilisent un modèle dans lequel g est solution de l'équation différentielle, appelée *équation logistique*, $(E): y' = \frac{1}{4}y - \frac{1}{12}y^2$.

- On suppose que $g(t) > 0$ pour tout $t \geq 0$ et l'on définit la fonction $h = \frac{1}{g}$ sur $\mathbb{R}_+$. Démontrer que g est solution de (E) si, et seulement si, h est solution de $(E'): y' = -\frac{1}{4}y + \frac{1}{12}$.
- Donner toutes les solutions de (E') et en déduire l'expression de h puis celle de g .
- Déterminer les variations de g puis sa limite en $+\infty$ et interpréter les résultats obtenus.
- Exprimer g'' en fonction g puis en déduire que la courbe de g n'admet pas de point d'inflexion.

Exercice 24 À motocyclette

Une motocyclette de masse 200 kg se déplace sur une autoroute rectiligne et horizontale. On désigne par $x(t)$ la distance parcourue par la motocyclette (en m) en fonction du temps t (en s) depuis le péage. Sa vitesse $v(t)$, à l'instant t , vérifie l'équation $x' = v$. D'après les lois de Newton, la fonction x vérifie l'équation différentielle $200x'' + 25x' = 800$ où les coefficients dépendent de la masse (200) et de la puissance développée par la motocyclette (800) ainsi que des forces de frottements, proportionnelles à sa vitesse (25).

- Déterminer une équation différentielle dont v est solution et en donner toutes les solutions.
 - En supposant que la vitesse initiale de la motocyclette est nulle, déterminer l'expression de $v(t)$.
 - Étudier les variations et la limite de v en $+\infty$ et interpréter ces résultats.

2. Démontrer alors que la fonction x est donnée par $x(t) = 2t - 16 + 16e^{-0,125t}$ puis vérifier qu'elle est croissante.
3. Quelle est la distance parcourue par la motocyclette au bout de 30 secondes ?

Exercice 25 Méthode d'Euler

A. Description de la méthode

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I contenant un réel a .

Compléter les phrases suivantes :

On a $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \dots$. Ainsi, pour tout h proche de 0, on a l'approximation affine $f(a+h) \simeq f(a) + \dots$.

L'idée géniale d'Euler est d'utiliser cette approximation de proche en proche sur des solutions d'équations différentielles. En effet, on part d'un point a . Si f est solution d'une équation différentielle du premier ordre, la donnée de $f(a)$ permet d'obtenir $f'(a)$ et grâce à l'approximation affine ci-dessus, on peut en déduire une approximation de $f(a+h)$. On réitère alors ce processus à partir de $a+h$ et l'on peut approcher $f(a+2h)$, et ainsi de suite. On aura une approximation de la fonction f à partir d'une simple valeur de départ $f(a)$. La suite des approximations nous permettent de tracer une fonction affine par morceaux entre chaque $a+nh$ qui devrait être d'autant plus proche de la courbe de la solution f que h est proche de 0.

B. Soit f la solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E_1): y' = \frac{1}{10}y$ telle que $f(0) = 1$.

1. Déterminer l'équation de la tangente au graphe de f au point d'abscisse 0.
2. En déduire une valeur approchée $\varphi(1)$ de $f(1)$ puis une approximation de $f'(1)$.
3. On désigne par $\varphi(n)$ la valeur approchée de $f(n)$ obtenue par approximation affine successive pour $h = 1$.
 - (a) Calculer $\varphi(2)$ et $\varphi(3)$.
 - (b) Déterminer une relation entre $\varphi(n+1)$ et $\varphi(n)$.
 - (c) Résoudre l'équation (E_1) puis déterminer l'expression de f .
 - (d) Comparer $f(i)$ et $\varphi(i)$ pour $i \in \llbracket 0; 3 \rrbracket$.

C. Mêmes questions pour la solution g sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$(E_2): y' = y + 1$ telle que $g(0) = 1$.

D. Soit k la solution sur $I = \mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E_3): y' + y^2 = 4$ telle que $k(0) = 0$.

1. Déterminer l'équation de la tangente au graphe de k au point d'abscisse 0.
2. En déduire une valeur approchée $\psi(0,1)$ de $k(0,1)$ puis une approximation de $k'(0,1)$.
3. On désigne par $\psi(nh)$ la valeur approchée de $k(nh)$ obtenue par approximation affine successive pour $h = 0,1$ et $n \in \mathbb{Z}$. Calculer $\psi(0,2)$ et $\psi(0,3)$.
4.  Utiliser un tableur ou un programme Python pour dresser une tableau de valeurs approchées de k sur l'intervalle $[0; 2]$.

Exercice 26 Parachutisme

Un parachutiste chute à une vitesse de 66 m.s^{-1} avant d'ouvrir son parachute. On désigne par $v(t)$ sa vitesse de chute t secondes après avoir ouvert celui-ci. Les frottements de l'air croissent rapidement avec la vitesse et l'on a, pour $t \geq 0$, $v' + \frac{g}{36}v^2 = g$ où $g \simeq 9,81$ est la constante gravitationnelle.

- On définit la fonction f sur $\mathbb{R}_+$ par $f(t) = \frac{1}{v(t)-6}$.
 - Exprimer v puis v^2 en fonction de f .
 - Exprimer v' en fonction de f et de f' .
 - En déduire que f est solution de l'équation différentielle $(E): y' = \frac{g}{3}y + \frac{g}{36}$.
- Déterminer l'ensemble des solutions de (E) .
 - Calculer $f(0)$ et en déduire l'expression de la fonction f .
 - Donner l'expression de la fonction v .
- Étudier la limite de v en $+\infty$ et interpréter ce résultat.

Exercice 27

- A. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on définit l'équation différentielle $(E_n): y' + y = \frac{x^n}{n!}e^{-x}$. g et h sont deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que, pour tout réel x , $g(x) = h(x)e^{-x}$.
- Démontrer que g est solution de (E_n) si, et seulement si, pour tout réel x , $h'(x) = \frac{x^n}{n!}$.
 - En déduire l'ensemble des solutions de (E_n) .
 - Déterminer la solution k_n de (E_n) vérifiant la condition initiale $k_n(0) = 0$.
- B. Soient les fonctions f_0 et f_1 définies sur $\mathbb{R}$ par $f_0(x) = e^{-x}$ et $f_1(x) = xe^{-x}$.
- Vérifier que f_1 est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' + y = f_0$.
 - Pour tout $n \geq 1$, f_n désigne la solution de l'équation différentielle $y' + y = f_{n-1}$ vérifiant $f_n(0) = 0$. Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}e^{-x}$.

Exercice 28 Équation différentielle à coefficients non constants

On souhaite résoudre sur $I =]0; +\infty[$ l'équation différentielle $(E): xy' - y = x^2e^{2x}$.

- Montrer que si f est solution sur I de (E) , alors la fonction g définie sur I par $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ est solution de l'équation différentielle $(E_1): y' = e^{2x}$.
- Déterminer les solutions de (E_1) .
- En déduire toutes les solutions de (E) puis déterminer celle qui s'annule en $\frac{1}{2}$.

Exercice 29 Équations différentielles du second ordre.

- Soit $(E_0): y'' + ay' + by = 0$ une équation différentielle linéaire homogène du second ordre. On appelle $(E_c): r^2 + ar + b = 0$ son équation caractéristique.
 - Montrer que si (E_c) admet deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 , alors toute fonction de la forme $Ae^{r_1x} + Be^{r_2x}$, où A et B sont deux réels, est solution de (E_0) . On admettra que toutes les solutions de (E_0) sont alors de cette forme.

- (b) Montrer que si (E_c) admet une racine réelle double r_0 , alors toute fonction de la forme $(Ax + B)e^{r_0x}$, où A et B sont deux réels, est solution de (E_0) .
On admettra que toutes les solutions de (E_0) sont alors de cette forme.
2. Soit l'équation différentielle $(E): y'' - y' - 6y = -6x^2 + 4x - 3$.
- Résoudre l'équation homogène associée (E_0) .
 - Déterminer une solution particulière φ de (E) sous la forme d'une fonction polynomiale.
 - Justifier que y est solution de (E) ssi $y - \varphi$ est solution de l'équation homogène associée (E_0) .
 - Déterminer toutes les solutions de (E) puis la solution f de (E) telle que $f(0) = 1$ et $f'(0) = 4$.
3. Soit l'équation différentielle $(E'): y'' - 2y' + y = e^{3x}$.
- Résoudre l'équation homogène associée (E'_0) .
 - Déterminer une solution particulière ψ de (E') sous la forme d'un multiple d'une exponentielle.
 - Justifier que y est solution de (E') ssi $y - \psi$ est solution de l'équation homogène associée (E'_0) .
 - Déterminer toutes les solutions de (E') puis la solution g de (E') telle que $g(0) = 1$ et $g'(0) = 2$.

Exercice 30 Problèmes de recollement

Ces problèmes arrivent lorsque les coefficients non constants s'annulent. Il faut alors étudier les solutions sur des sous-intervalles où cela n'arrive pas puis tenter de recoller les morceaux. La résolution de la première équation met en évidence les problèmes et donne une méthode presque générale de résolution. Les suivantes admettent certains résultats mais insistent sur les problèmes de recollement.

$$(E_1) : ty' - 2y = 0.$$

- Montrer que si y est strictement positive sur $I_+ =]0; +\infty[$,
 $\ln(y) = 2 \ln(t) + k$.
- En déduire les solutions strictement positives de (E_1) sur I_+ .
- Quelles sont les solutions strictement négatives de (E_1) sur I_+ ?
On admet que les solutions sur I_+ sont toutes de cette forme.
- Quelles sont les solutions de (E_1) sur $I_- =]-\infty; 0[$?
- Déterminer alors les solutions de (E_1) sur $\mathbb{R}$.

$$(E_2) : ty' - y = t^2.$$

- Vérifier que $y(t) = \lambda t + t^2$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$, est une solution de (E_2) sur $I_+ =]0; +\infty[$.
Après observation de la méthode de résolution de l'équation précédente, on admet que les solutions sur I_+ sont toutes de cette forme.
- Quelles sont les solutions de (E_2) sur $I_- =]-\infty; 0[$?

(c) Déterminer les solutions de (E_2) sur $\mathbb{R}$.

$(E_3) : t^2 y' - y = 0$.

(a) Vérifier que $y(t) = \lambda e^{1/t}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$, est une solution de (E_3) sur $I_+ =]0; +\infty[$.

Après observation de la méthode de résolution de la première équation, on admet que les solutions sur I_+ sont toutes de cette forme.

(b) Quelles sont les solutions de (E_3) sur $I_- =]-\infty; 0[$?

(c) Déterminer les solutions de (E_3) sur $\mathbb{R}$.

$(E_4) : xy' + y - 1 = 0$.

(a) Vérifier que $y(t) = 1 + \frac{\lambda}{x}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$, est une solution de (E_4) sur $I_+ =]0; +\infty[$.

Après observation de la méthode de résolution de la première équation, on admet que les solutions sur I_+ sont toutes de cette forme.

(b) Quelles sont les solutions de (E_4) sur $I_- =]-\infty; 0[$?

(c) Déterminer les solutions de (E_4) sur $\mathbb{R}$.

$(E_5) : xy' - y = x^2 e^{2x}$.

On a vu à l'exercice 28 que les solutions sur $]0; +\infty[$ sont de la forme

$$y = x\left(\frac{1}{2}e^{2x} + \lambda\right) \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E_5) .

Aller en pages 473 et 475 pour les devoirs n^{os} 16 et 17.

PRIMITIVES & ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

Exercice 1 VouF ?

- (a) Toute primitive de f sur $\mathbb{R}$ s'annule en 0 : Faux. Si F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ s'annulant en 0, alors $G = F + 1$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ valant 1 en 0.
- (b) Il existe une primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0 : Vrai. Si F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$, alors $G(x) = F(x) - F(0)$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ valant $G(0) = F(0) - F(0) = 0$ en 0.
- (c) Toute primitive de f sur $\mathbb{R}$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$: Vrai. Si F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$, alors $F'(x) = f(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+$ donc F est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
- (d) Toute primitive de f sur $\mathbb{R}$ est négative sur $[\frac{1}{2}; +\infty[$: Faux. Si F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$ telle $F(\frac{1}{2}) < 0$, alors $G(x) = F(x) - 2F(\frac{1}{2})$ vérifie $G(\frac{1}{2}) = -F(\frac{1}{2}) > 0$.
- (e) f est dérivable et $F'' = f' \leq 0$ sur $[\frac{1}{2}; +\infty[$ car f y est décroissante, donc F est concave sur $[\frac{1}{2}; +\infty[$.

Exercice 2 VouF ?

f est une fonction continue sur l'intervalle $I = [-5; 5]$ et F est la primitive de f sur I telle que $F(1) = 2$.

- (a) · Si F est croissante sur I , alors $f(0) \geq 0$: Vrai. On a alors $F'(x) \geq 0$ sur I donc en 0.
· Si $f(0) \geq 0$, alors F est croissante sur I : Faux. $f(x) = 2x$ et $F(x) = x^2 + 1$ est un contre-exemple.
- (b) · Si G est une primitive de f sur I telle que $G(1) = 3$, alors, pour tout $x \in I$, $G(x) = F(x) + 1$: Vrai. On a alors $G(x) = F(x) + k$ pour tout $x \in I$ donc $k = G(1) - F(1) = 3 - 2 = 1$.
· Si, pour tout $x \in I$, $G(x) = F(x) + 1$, alors G est une primitive de f sur I telle que $G(1) = 3$: Vrai. On a alors $G'(x) = (F(x) + 1)' = F'(x) = f(x)$ et $G(1) = F(1) + 1 = 2 + 1 = 3$.

Exercice 3

Pour $x > 0$, $A'(x) = (x \ln(x) - x)' = 1 \ln(x) + x \frac{1}{x} - 1 = \ln(x)$.

Pour $x > 0$, $B'(x) = (\frac{2}{3}x\sqrt{x})' = \frac{2}{3}\sqrt{x} + \frac{2}{3}x \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2}{3}\sqrt{x} + \frac{1}{3}\sqrt{x} = \sqrt{x}$.

Pour $x \in [0; \pi]$, $C'(x) = (\cos 2x)' = -2 \sin(2x)$.

Pour $x \in [0; \pi]$, $D'(x) = (-2 \sin^2 x)' = -2 \times 2 \sin x \times \cos x = -2 \sin(2x)$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $E'(x) = (-xe^{1-x})' = e^{1-x}(-1 - x \times (-1)) = (x-1)e^{1-x}$.

Pour $x > 0$, $F'(x) = [(x-1)\ln(x)]' = 1 \ln x + (x-1)\frac{1}{x} = \ln(x) + \frac{x-1}{x}$.

Exercice 4

$a(x) = 8x^3 - 6x^2 + 1$ admet pour primitive sur $\mathbb{R}$

$$A(x) = \frac{8}{4}x^4 - \frac{6}{3}x^3 + x + \pi = 2x^4 - 2x^3 + x + \pi.$$

$b(x) = 9x^2 - 4x + 5$ admet pour primitive sur $\mathbb{R}$

$$B(x) = \frac{9}{3}x^3 - \frac{4}{2}x^2 + 5x - e = 3x^3 - 2x^2 + 5x - e.$$

$c(x) = \frac{2}{x^3}$ admet pour primitive sur $]0; +\infty[$ $C(x) = 2\frac{-1}{2}\frac{1}{x^2} = -\frac{1}{x^2}$.

$d(x) = \frac{1}{2x}$ admet pour primitive sur $]0; +\infty[$ $D(x) = \frac{1}{2}\ln(x) = \ln(\sqrt{x})$.

$e(x) = -\frac{1}{x^3} + \frac{4}{x^2} - \frac{1}{x}$ admet pour primitive sur $]0; +\infty[$

$$E(x) = -\frac{-1}{2}\frac{1}{x^2} + 4\frac{-1}{x} - \ln(x) = \frac{1}{2x^2} - \frac{4}{x} - \ln(x).$$

$f(x) = (5x+2)^3$ admet pour primitive sur $\mathbb{R}$ $F(x) = \frac{1}{4}\frac{1}{5}(5x+2)^4 = \frac{1}{20}(5x+2)^4$.

$g(x) = 2(3x-1)^5$ admet pour primitive sur $\mathbb{R}$ $G(x) = 2\frac{1}{6}\frac{1}{3}(3x-1)^6 = \frac{1}{9}(3x-1)^6$.

$h(x) = e^{-x+1}$ admet pour primitive sur $\mathbb{R}$ $H(x) = -e^{-x+1}$.

$i(x) = 2e^{3x-2}$ admet pour primitive sur $\mathbb{R}$ $I(x) = 2\frac{1}{3}e^{3x-2} = \frac{2}{3}e^{3x-2}$.

$j(x) = \frac{2}{x-4}$ admet pour primitive sur $] -\infty; 4[$ ($x-4 < 0$)

$$J(x) = 2\ln|x-4| = \ln((x-4)^2).$$

$k(x) = \frac{8}{(x-2)^3}$ admet pour primitive sur $]2; +\infty[$ $K(x) = 8\frac{-1}{2}\frac{1}{(x-2)^2} = -\frac{4}{(x-2)^2}$.

$l(x) = x(1-x^2)^5 = \frac{(1-x^2)'}{-2}(1-x^2)^5$ a pour primitive sur $\mathbb{R}$

$$L(x) = \frac{-1}{2}\frac{1}{6}(1-x^2)^6 = -\frac{1}{12}(1-x^2)^6.$$

$m(x) = e^x(1-e^x) = e^x - e^{2x}$ admet pour primitive sur $\mathbb{R}$

$$M(x) = e^x - \frac{1}{2}e^{2x} = e^x(1 - \frac{1}{2}e^x).$$

Ou $m(x) = -(1-e^x)'(1-e^x)$ et $\widetilde{M}(x) = -\frac{1}{2}(1-e^x)^2$ est une autre primitive de m sur $\mathbb{R}$.

$n(x) = \sin(x)\cos^2(x) = -\cos'(x)\cos^2(x)$ admet pour primitive sur $\mathbb{R}$

$$N(x) = -\frac{1}{3}\cos^3(x).$$

$o(x) = \cos(x)(\sin^5(x)+1) = \sin'(x)\sin^5 x + \cos x$ a pour primitive sur $[0; \pi]$

$$O(x) = \frac{1}{6}\sin^6 x + \sin x.$$

$p(x) = \frac{3}{\sqrt{2x-4}} = 3\frac{(2x-4)'}{2\sqrt{2x-4}}$ admet pour primitive sur $]2; +\infty[$ $P(x) = 3\sqrt{2x-4}$.

$q(x) = \frac{5x}{\sqrt{x^2-9}} = 5\frac{(x^2-9)'}{2\sqrt{x^2-9}}$ admet pour primitive sur $]3; +\infty[$ $Q(x) = 5\sqrt{x^2-9}$.

$r(x) = \frac{1}{x(\ln(x))^2} = -\frac{-1/x}{(\ln x)^2}$ admet pour primitive sur $]1; +\infty[$ $R(x) = -\frac{1}{\ln x}$.

$s(x) = \frac{-2e^x}{\sqrt{e^x+1}} = -2 \times 2\frac{(e^x+1)'}{2\sqrt{e^x+1}}$ admet pour primitive sur $\mathbb{R}$ $S(x) = -4\sqrt{e^x+1}$.

$t(x) = (x+1)e^{x^2+2x-3} = \frac{1}{2}(x^2+2x-3)'e^{x^2+2x-3}$ admet pour primitive sur $\mathbb{R}$

$$T(x) = \frac{1}{2}e^{x^2+2x-3}.$$

$u(x) = \frac{x-2}{x^2-4x+5} = \frac{1}{2}\frac{(x^2-4x+5)'}{x^2-4x+5}$ admet pour primitive sur $\mathbb{R}$ ($x^2-4x+5 > 0$)

$$U(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2-4x+5).$$

$$v(x) = \frac{x-2}{-x^2+4x-5} = -\frac{1}{2} \frac{(x^2-4x+5)'}{x^2-4x+5} \quad \text{admet pour primitive sur } \mathbb{R} \quad (-x^2+4x-5 < 0)$$

$$V(x) = -\frac{1}{2} \ln(x^2 - 4x + 5).$$

$$w(x) = \sin(x) + x \cos(x) = x' \sin(x) + x \sin'(x) \quad \text{admet pour primitive sur } \mathbb{R}$$

$$W(x) = x \sin(x).$$

$$y(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2} = \frac{x \frac{1}{x} - x' \ln(x)}{x^2} \quad \text{admet pour primitive sur }]0; +\infty[\quad Y(x) = \frac{\ln(x)}{x}.$$

$$z(x) = 4x^2 e^{2x} : \text{ d'après la forme de } z, \text{ on cherche une primitive sous la forme}$$

$$Z(x) = (ax^2 + bx + c)e^{2x}. \quad \text{On a alors}$$

$$Z'(x) = (2ax + b)e^{2x} + 2(ax^2 + bx + c)e^{2x} = (2ax^2 + (2a + 2b)x + b + 2c)e^{2x}.$$

En identifiant les coefficients, on obtient $2a = 4$ donc $a = 2$, $2a + 2b = 0$ donc $b = -2$, $b + 2c = 0$ donc $c = 1$ et $Z(x) = (2x^2 - 2x + 1)e^{2x}$ est une primitive de z sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5

$$A(2) = -1 \quad \text{et} \quad A(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \lambda \quad \text{d'où} \quad \lambda = -1 - \frac{1}{5}2^5 + 2^4 + \frac{1}{2}2^2 = \frac{53}{5} :$$

$$A(x) = \frac{1}{5}x^5 - x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{53}{5}.$$

$$B(x) = \frac{1}{3}(\frac{1}{3}x^3 - \frac{2}{2}x^2 + x) + \lambda \quad \text{et} \quad \lambda = 0 - \frac{1}{9}(-1)^3 + \frac{1}{3}1^2 - \frac{1}{3}(-1) = \frac{7}{9} :$$

$$B(x) = \frac{1}{9}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{7}{9}.$$

$$C(0) = -1 \quad \text{et} \quad C(x) = e^x - \frac{1}{2}x + \lambda \quad \text{d'où} \quad \lambda = -1 - e^0 + \frac{1}{2} \cdot 0 = -2 :$$

$$C(x) = e^x - \frac{1}{2}x - 2.$$

$$D(2) = -1 \quad \text{et} \quad D(x) = x + e^{-x} + \lambda \quad \text{d'où} \quad \lambda = -1 - 2 - e^{-2} = -e^{-2} - 3 :$$

$$D(x) = x + e^{-x} - e^{-2} - 3.$$

$$E(-2) = 2 \quad \text{et} \quad E(x) = -\frac{1}{x} + \frac{1}{2} \frac{2}{x^2} + \lambda \quad \text{d'où} \quad \lambda = 2 + \frac{1}{-2} - \frac{1}{4} = \frac{5}{4} :$$

$$E(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + \frac{5}{4}.$$

$$F(\ln(2)) = 0 \quad \text{et} \quad F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 2e^x + \lambda \quad \text{d'où} \quad \lambda = 0 - \frac{1}{2}e^{2\ln 2} + 2e^{\ln 2} = 2 :$$

$$F(x) = \frac{1}{2}e^{2x} - 2e^x + 2.$$

$$G(0) = 4 \quad \text{et} \quad G(x) = -\frac{3}{2}\cos(2x) + \lambda \quad \text{d'où} \quad \lambda = 4 - (-\frac{3}{2}\cos(2 \times 0)) = \frac{11}{2} :$$

$$G(x) = \frac{11}{2} - \frac{3}{2}\cos(2x).$$

$$H(0) = e^2 \quad \text{et} \quad H(x) = -\frac{3}{2}\ln(5 - 2x) + \lambda \quad \text{d'où} \quad \lambda = e^2 + \frac{3}{2}\ln(5) :$$

$$H(x) = -\frac{3}{2}\ln(5 - 2x) + e^2 + \frac{3}{2}\ln(5).$$

Exercice 6

$$1. \quad f(x) = \frac{x^2+5x+6}{x+1} \quad \text{sur }]-1; +\infty[.$$

(a) On a, pour tout $x > -1$, $ax + b + \frac{c}{x+1} = \frac{(ax+b)(x+1)+c}{x+1} = \frac{ax^2+(a+b)x+b+c}{x+1}$
 et, en identifiant les coefficients des numérateurs, on a doit avoir $a = 1$,
 $a + b = 5$ donc $b = 4$, $b + c = 6$ donc $c = 2$. Ainsi, pour tout $x > -1$,
 $f(x) = x + 4 + \frac{2}{x+1}.$

(b) On en déduit une primitive de f sur $] -1; +\infty[: F(x) = \frac{1}{2}x^2 + 4x + 2\ln(x+1).$

$$2. \quad g(x) = \frac{6x^2-26x+29}{6-2x} \quad \text{sur }]3; +\infty[.$$

On a, pour tout $x > 3$, $ax + b + \frac{c}{6-2x} = \frac{(ax+b)(6-2x)+c}{6-2x} = \frac{-2ax^2+(6a-2b)x+6b+c}{6-2x}$
 et, en identifiant les coefficients des numérateurs, on a doit avoir $-2a = 6$ donc
 $a = -3$, $6a - 2b = -26$ donc $b = 4$, $6b + c = 29$ donc $c = 5$.

Ainsi, pour tout $x > 3$, $g(x) = -3x + 4 + \frac{5}{6-2x} = -3x + 4 - \frac{5}{2} \frac{2}{2x-6}$.
 D'où une primitive de g sur $]3; +\infty[$, $G(x) = -\frac{3}{2}x^2 + 4x - \frac{5}{2} \ln(2x-6)$.

Exercice 7 $f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}$ sur $I = [0; +\infty[$.

1. La fonction f est continue par composition donc admet des primitives sur I dont une unique primitive F telle que $F(0) = 0$.
2. Pour $x \in I$, $g(x) = F(x) - \frac{1}{2}x$ est dérivable par composition et

$$g'(x) = F'(x) - \frac{1}{2} = f(x) - \frac{1}{2} = \frac{e^x}{e^x+1} - \frac{1}{2} = \frac{2e^x - (e^x+1)}{e^x+1} = \frac{e^x-1}{e^x+1}$$
 du signe de $e^x - 1$.
 On a $e^x > 1 \iff x > 0$ et g' est positive sur $\mathbb{R}_+$: g est croissante sur $\mathbb{R}_+$.
3. La fonction g admet donc un minimum sur $\mathbb{R}_+$ en 0 valant $g(0) = F(0) - \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$ donc, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $g(x) \geq 0$. Ainsi, $F(x) \geq \frac{1}{2}x$ et, par comparaison,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}x = +\infty.$$
4. Si H est une primitive de f sur I , il existe un réel k tel que $H = F + k$ donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} H(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) + k = "+\infty + k" = +\infty.$$

Exercice 8 Soit $x \in \mathbb{R}$ et $f(x) = \sin(x)e^{2x}$. f est deux fois dérivable par produit et composition et l'on a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sin'(x)e^{2x} + \sin(x)(2x)'e^{2x} = (\cos(x) + 2\sin(x))e^{2x} \quad \text{et} \\ f''(x) &= (\cos(x) + 2\sin(x))'e^{2x} + (\cos(x) + 2\sin(x)) \cdot 2e^{2x} \\ &= (-\sin(x) + 2\cos(x) + 2\cos(x) + 4\sin(x))e^{2x} \\ &= (4\cos(x) + 3\sin(x))e^{2x}. \end{aligned}$$

Ainsi, $af'(x) + bf''(x) = a(\cos(x) + 2\sin(x))e^{2x} + b(4\cos(x) + 3\sin(x))e^{2x}$
 $= ((a+4b)\cos(x) + (2a+3b)\sin(x))e^{2x}.$

Alors, $f = af' + bf'' \iff a+4b=0$ et $2a+3b=1$. $2(L1) - (L2)$ donne $5b = -1$ donc $b = -\frac{1}{5}$ et $(L1)$ devient $a - \frac{4}{5} = 0$ donc $a = \frac{4}{5}$. On obtient donc l'équation différentielle $f = \frac{4}{5}f' - \frac{1}{5}f''$.

On sait que $\frac{4}{5}f' - \frac{1}{5}f''$ est trivialement une primitive de $\frac{4}{5}f' - \frac{1}{5}f''$ sur $\mathbb{R}$.
 Si F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$, alors F est aussi une primitive de $\frac{4}{5}f' - \frac{1}{5}f''$ et il existe donc un réel c tel que $F = \frac{4}{5}f - \frac{1}{5}f' + c$. Toute primitive de f sur $\mathbb{R}$ est donc de la forme $\frac{4}{5}\sin(x)e^{2x} - \frac{1}{5}(\cos(x) + 2\sin(x))e^{2x} + c = \frac{1}{5}(2\sin(x) - \cos(x))e^{2x} + c$.

Exercice 9 $f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$ et F est la primitive de f sur $\mathbb{R}$ s'annulant en 0.

1. Le graphe de f est constitué de l'origine du repère et de la droite d'équation $y = 1$ privée du point $(0, 1)$.
2. (a) Pour $x < 0$, $f(x) = 1$ donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $F(x) = x + \lambda$ sur $] -\infty; 0[$.
 (b) De même, pour $x > 0$, $f(x) = 1$ donc il existe $\mu \in \mathbb{R}$ tel que $F(x) = x + \mu$ sur $]0; +\infty[$.
 (c) Puisque F est continue en 0 (elle est dérivable), $\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = F(0) = 0$.
 Or, $\lim_{x \rightarrow 0^-} F(x) = \lambda$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \mu$.
 On en déduit que $\lambda = \mu = 0$ et $F(x) = x$ sur $\mathbb{R}$.

3. On a $\frac{F(x)}{x} = 1$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$ et $F'(0) = 1$.
4. Ce dernier résultat contredit manifestement l'hypothèse $F'(0) = f(0) = 0$.
La fonction f n'admet donc pas de primitive sur $\mathbb{R}$ s'annulant en 0. Elle n'admet donc pas du tout de primitive sur $\mathbb{R}$ car si G en était une, alors $G - G(0)$ en serait une qui s'annulerait en 0.

Exercice 10 La fusée

1. On a $d'(t) = v(t) = 0,06t^2 + 0,8t$ donc $d(t) = 0,06 \times \frac{1}{3}t^3 + 0,8 \times \frac{1}{2}t^2 + k$ et puisque la distance parcourue à l'instant $t = 0$ est nulle, $d(0) = 0$ et $k = 0$. D'où l'expression $d(t) = 0,02t^3 + 0,4t^2$.
2. Après deux minutes de vol, la fusée se trouve à $d(120) = 40\,320 \text{ m} \simeq 40 \text{ km}$ de la Terre.

Exercice 11 La pomme

La fonction v est solution de $y' = 9,8$ donc $v'(t) = 9,8$ et $v(t) = 9,8t + k$.
Puisque la vitesse initiale de la pomme est nulle (on lâche et non lance), on a $v(0) = 0$ d'où $k = 0$.

La fonction d est solution de $y' = v$ donc $d'(t) = 9,8t$ et $d(t) = 9,8 \times \frac{1}{2}t^2 + c$.
Puisque pour $t = 0$, la distance parcourue est nulle, on a $d(0) = 0 = c$ et $d(t) = 4,9t^2$.

La pomme s'écrase au sol après un temps t positif vérifiant

$$d(t) = 10 \iff t^2 = \frac{10}{4,9} \iff t = \sqrt{\frac{10}{4,9}} \simeq 1,4 \text{ s. Elle a alors acquis une vitesse de } v\left(\sqrt{\frac{10}{4,9}}\right) = 9,8\sqrt{\frac{10}{4,9}} = 2\sqrt{\frac{4,9^2 \times 10}{4,9}} = 2\sqrt{49} = 14 \text{ m.s}^{-1}.$$

On a $d' = v$ et $d'' = v' = a$, l'accélération subie par la pomme.

Exercice 12

- $a(x) = e^{\frac{1-4x}{3}}$, $a'(x) = -\frac{4}{3}e^{\frac{1-4x}{3}}$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
 $6a'(x) + 8a(x) = -6 \times \frac{4}{3}e^{\frac{1-4x}{3}} + 8e^{\frac{1-4x}{3}} = 0$ et la fonction a est bien solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E_a): 6y' + 8y = 0$.
- $b(x) = e^{3x+1} - 2$, $b'(x) = 3e^{3x+1}$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
 $3b(x) + 6 = 3(e^{3x+1} - 2) + 6 = 3e^{3x+1} - 6 + 6 = 3e^{3x+1} = b'(x)$ et la fonction b est bien solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E_b): y' = 3y + 6$.
- $c(x) = 2x + 2$, $c'(x) = 2$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
 $-2c(x) + 4x + 6 = -2(2x + 2) + 4x + 6 = 2 = c'(x)$ et la fonction c est bien solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E_c): y' = -2y + 4x + 6$.
- $d(x) = (x+1)e^{-2x}$, $d'(x) = (x+1)'e^{-2x} + (x+1)(e^{-2x})' = e^{-2x} - 2(x+1)e^{-2x}$
 $d'(x) = (-2x-1)e^{-2x}$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
 $-2d(x) + e^{-2x} = -2(x+1)e^{-2x} + e^{-2x} = (-2x-1)e^{-2x} = d'(x)$ et la fonction d est bien solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E_d): y' = -2y + e^{-2x}$.
- $e(x) = 3e^{x^2} + e^x$, $e'(x) = 6xe^{x^2} + e^x$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
 $e'(x) - 2xe(x) = 6xe^{x^2} + e^x - 2x(3e^{x^2} + e^x) = e^x - 2xe^x = -(2x-1)e^x$ et la fonction e est bien solution sur $\mathbb{R}$ de $(E_e): y' - 2xy = -(2x-1)e^x$.

$$\bullet f(x) = 4e^x - 7e^{3x} + 5, \quad f'(x) = 4e^x - 21e^{3x}, \quad f''(x) = 4e^x - 63e^{3x}.$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f''(x) - 4f'(x) + 3f(x) = (4e^x - 63e^{3x}) - 4(4e^x - 21e^{3x}) + 3(4e^x - 7e^{3x} + 5) = \dots = 15$$

et la fonction f est bien solution sur $\mathbb{R}$ de $(E_f): y'' - 4y' + 3y = 15$.

$$\bullet g(t) = t^2 - 5t, \quad g'(t) = 2t - 5.$$

Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $tg'(t) - g(t) = t(2t - 5) - (t^2 - 5t) = t^2$ et la fonction g est bien solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E_g): ty' - y = t^2$.

$$\bullet h(t) = e^{t^2}, \quad h'(t) = 2te^{t^2}, \quad h''(t) = 2e^{t^2} + 2t \cdot 2te^{t^2} = (4t^2 + 2)e^{t^2}.$$

Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h''(t) - 4t^2h(t) = (4t^2 + 2)e^{t^2} - 4t^2e^{t^2} = 2e^{t^2}$ et la fonction h est bien solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E_h): y'' - 4t^2y = 2e^{t^2}$.

Exercice 13

- (a) Si $f(x) = 3x^2 - 2x + 1$, alors $f'(x) = 6x - 2$ et $f''(x) = 6$
d'où $f'(x) + 3f(x) = 6x - 2 + 9x^2 - 6x + 3 = 9x^2 - 1$
et $x^2f''(x) - f'(x) - 2f(x) = 6x^2 - (6x - 2) - 2(3x^2 - 2x + 1) = -2x$:
 f est donc solution sur $\mathbb{R}$ des équations diff. $y' + 3y = (3x - 1)(3x + 1)$ et
 $x^2y'' - y' - 2y = -2x$.
- (b) Si $g(x) = -4e^{5x}$, $g'(x) = -20e^{5x}$ et $g''(x) = -100e^{5x}$ d'où
 $g'(x) = 5g(x)$ et $g''(x) - 4g'(x) - 5g(x) = 0$: g est donc solution sur
 $\mathbb{R}$ des équ. diff. $y' = 5y$ et $y'' - 4y' - 5y = 0$.

Exercice 14

- $(E_1): y' = 5y$ admet pour solutions, les fonctions $y = Ce^{5x}$ où $C \in \mathbb{R}$.
- $(E_2): 2y' = y \iff y' = \frac{1}{2}y$ admet pour solutions, les fonctions $y = Ce^{\frac{1}{2}x}$ où $C \in \mathbb{R}$.
- $(E_3): 4y' + 3y = 0 \iff y' = -\frac{3}{4}$ admet pour solutions, les fonctions $y = Ce^{-\frac{3}{4}x}$ où $C \in \mathbb{R}$.
- $(E_4): y' = -y + 2$: $y_P = 2$ ($y'_P = 0 = -2 + 2$) est une solution particulière et les solutions de l'équation homogène associée $y' = -y$ sont de la forme $y_H = Ce^{-x}$ d'où les solutions de l'équation différentielle (E_4) , $y = y_H + y_P = Ce^{-x} + 2$ où $C \in \mathbb{R}$.
- $(E_5): 2y' + y = 4 \iff y' = -\frac{1}{2}y + 2$ admet pour solutions
 $y = Ce^{-\frac{1}{2}x} - \frac{2}{-\frac{1}{2}} = Ce^{-\frac{1}{2}x} + 4$ où $C \in \mathbb{R}$.
Si $y(0) = 7$, $C + 4 = 7 \iff C = 3$: la solution recherchée est donc
 $y = 3e^{-\frac{1}{2}x} + 4$.
- $(E_6): 3y' - 6y = 1 \iff y' = 2y + \frac{1}{3}$ admet pour solutions,
 $y = Ce^{2x} - \frac{1}{2} = Ce^{2x} - \frac{1}{6}$ où $C \in \mathbb{R}$.
Si $y(-4) = 3$, $Ce^{-8} - \frac{1}{6} = 3 \iff C = (3 + \frac{1}{6})e^8$: la solution recherchée est donc
 $y = \frac{19}{6}e^{8+2x} - \frac{1}{6}$.

Exercice 15

- $(E_1): 4y' = -4y$ admet $a(x) = e^{4-x} = e^4e^{-x}$ pour solution particulière.
- $(E_2): 4y' = y \iff y' = \frac{1}{4}y$ admet $d(x) = 4e^{\frac{1}{4}x}$ pour solution particulière.

$(E_3): y' - 4y = 0 \iff y' = 4y$ admet $b(x) = -e^{4x}$ pour solution particulière.

$(E_4): 4y' + y = 0 \iff y' = -\frac{1}{4}y$ admet $c(x) = e^{4-\frac{1}{4}x} = e^4 e^{-\frac{1}{4}x}$ pour solution particulière.

Exercice 16 Vous ?

1. Vrai. Toute solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = -\frac{3}{2}y$ est de la forme $y = \lambda e^{-\frac{3}{2}x}$ et $y(-2) = e^2 \iff \lambda e^{-\frac{3}{2}(-2)} = e^2 \iff \lambda = e^2 e^{-3} = \frac{1}{e}$.

La solution $y = e^{-\frac{3}{2}x-1}$ est bien une fonction strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

2. Vrai. Toute solution sur $\mathbb{R}$ de $-6y' + 3y = 0 \iff y' = \frac{1}{2}y$ est de la forme $y = \lambda e^{\frac{1}{2}x}$ et $y(2) = e \iff \lambda e^{\frac{1}{2} \cdot 2} = e \iff \lambda = e e^{-1} = 1$.

La solution $y = e^{\frac{1}{2}x}$ est bien une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

3. Vrai. Toute solution sur $\mathbb{R}$ de $4y' + 3y = 0 \iff y' = -\frac{3}{4}y$ est de la forme $y = \lambda e^{-\frac{3}{4}x}$ et $y(2) = -\sqrt{e} \iff \lambda e^{-\frac{3}{4} \cdot 2} = -e^{\frac{1}{2}} \iff \lambda = -e^{\frac{1}{2}} e^{\frac{3}{2}} = -e^2$.

La solution $y = -e^{2-\frac{3}{4}x}$ a pour limite 0 en $+\infty$ et ceci est indépendant de la valeur de la constante λ .

Exercice 17 Q.C.M.

1. (a) et (b) : $(E_1): y' = 2y - 5$ admet les solutions de la forme $y = C e^{2x} + \frac{5}{2}$ et $y(0) = 0$ donne $C = -\frac{5}{2}$.

La fonction f est ainsi définie par $f(x) = \frac{5}{2}(1 - e^{2x})$ qui est décroissante sur $\mathbb{R}$.

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{5}{2}(1 - \infty) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{5}{2}(1 - 0) = \frac{5}{2} \neq 0$ et $f'(0) = 2f(0) - 5 = -5 \neq 5$. D'ailleurs, f est décroissante donc $f'(x) \leq 0 \dots$

2. (c) et (d) : Les solutions de $(E_2): y - 2y' = 0 \iff y' = \frac{1}{2}y$ sont de la forme $y = C e^{\frac{1}{2}x}$ où $C \in \mathbb{R}$ donc $x \mapsto e^{2x}$ et $x \mapsto e^{-\frac{1}{2}x}$ ne sont pas solutions de (E_2) . La fonction $x \mapsto e^{\frac{1}{2}x}$ est solution de (E_2) et vaut 1 en 0. Si $y_P = 2e^x$, $y'_P = 2e^x$ et $y_P - 2y'_P = 2e^x - 4e^x = -2e^x$: y_P est une solution particulière de l'équation $y - 2y' = -2e^x$ donc $y = y_P + y_H = 2e^x + e^{\frac{1}{2}x}$ aussi.

3. (b), (c) et (d) : Si $f(x) = \cos(x) - \sin(x)$, $f'(x) = -\sin(x) - \cos(x)$ et $f'(x) + f(x) = -2\sin(x)$ et non $2\sin(x)$: f n'est pas solution de (E_3) . En revanche, si $g = -f$, $g' + g = -(f' + f) = 2\sin(x)$: g est bien solution de (E_3) . Les solutions de $(E_0): y' + y = 0 \iff y' = -y$ sont bien de la forme $y = C e^{-x}$ où $C \in \mathbb{R}$ et la fonction $h(x) = e^{-x} - \cos(x) + \sin(x) = e^{-x} + g(x)$ est bien la solution de (E_3) s'annulant en 0 ($e^0 - \cos(0) + \sin(0) = 1 - 1 = 0$).

Exercice 18

1. (a) $g(x) = -x - 2$, $g'(x) = -1$ et $g'(x) - \frac{1}{2}g(x) = -1 + \frac{1}{2}x + \frac{2}{2} = \frac{1}{2}x$: g est bien une solution particulière de $(E_1): y' - \frac{1}{2}y = \frac{1}{2}x$.

(b) Soit $(E_1^0): y' - \frac{1}{2}y = 0 \iff y' = \frac{1}{2}y$ l'équation homogène associée. Elle admet pour solutions les fonctions de la forme $y_H = \lambda e^{\frac{1}{2}x}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E_1) sont donc de la forme $y = y_H + g = \lambda e^{\frac{1}{2}x} - x - 2$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

(c) On cherche alors $\lambda \in \mathbb{R}$: $h(2) = 0 \iff \lambda e^{\frac{1}{2} \cdot 2} - 2 - 2 = 0 \iff \lambda = \frac{4}{e}$ et la solution recherchée est $h(x) = 4e^{\frac{1}{2}x-1} - x - 2$.

2. Soit $(E_2^0): y' = 2y$ l'équation homogène associée. Elle admet pour solutions les fonctions de la forme $y_H = \lambda e^{2x}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E_2) sont donc $y = y_H + g = \lambda e^{2x} - x - \frac{1}{2}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.
Cherchons une solution particulière g de l'équation $(E_2): y' = 2y + 2x$ sous la forme $g(x) = mx + p$. On a $g'(x) = m$
et $g' = 2g + 2x \iff m = 2(mx + p) + 2x \iff 2mx + 2p - m = -2x$
 $\iff m = -1, p = -\frac{1}{2}$ et la fonction $g(x) = -x - \frac{1}{2}$ convient.
On cherche alors $\lambda \in \mathbb{R}$: $h(2) = 0 \iff \lambda e^{2 \times 2} - 2 - \frac{1}{2} = 0 \iff \lambda = \frac{5}{2e^4}$
et la solution recherchée est $h(x) = \frac{5}{2}e^{2x-4} - x - \frac{1}{2}$.
3. Soit $(E_3^0): y' - y = 0 \iff y' = y$ l'équation homogène associée. Elle admet pour solutions les fonctions de la forme $y_H = \lambda e^x$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.
On a $f(x) = xe^x, f'(x) = x'e^x + x(e^x)' = (1+x)e^x$
et $f'(x) - f(x) - e^x = (1+x)e^x - xe^x - e^x = 0$: f est une solution particulière de l'équation $(E_3): y' - y - e^x = 0$.
Les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E_3) sont donc $y = y_H + f = \lambda e^x - xe^x = (x + \lambda)e^x$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.
4. Soit $(E_4^0): y' + 2y = 0 \iff y' = -2y$ l'équation homogène associée. Elle admet pour solutions les fonctions de la forme $y_H = \lambda e^{-2x}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.
Cherchons une solution particulière y_P de $(E_4): y' + 2y - e^{3x} = 0$ sous la forme $y_P(x) = Ce^{3x}$. On a $y'_P(x) = 3Ce^{3x}$
et $y'_P + 2y_P - e^{3x} = 0 \iff 3Ce^{3x} + 2Ce^{3x} - e^{3x} = 0 \iff 5C - 1 = 0$ et la fonction $y_P = \frac{1}{5}e^{3x}$ convient.
Les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E_4) sont donc $y = y_H + y_P = \lambda e^{-2x} + \frac{1}{5}e^{3x}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.
5. Soit $(E_5^0): y' + 4y = 0 \iff y' = -4y$ l'équation homogène associée. Elle admet pour solutions les fonctions de la forme $y_H = \lambda e^{-4x}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.
Cherchons une solution particulière y_P de $(E_5): y' + 4y = xe^{-x}$ sous la forme $y_P(x) = (ax + b)e^{-x}$.
On a $y'_P(x) = (ax + b)'e^{-x} + (ax + b)(e^{-x})' = (-ax + a - b)e^{-x}$ et
 $y'_P + 4y_P = xe^{-x} \iff (-ax + a - b)e^{-x} + 4(ax + b)e^{-x} = xe^{-x}$
 $\iff (-ax + a - b + 4ax + 4b - x)e^{-x} = 0$
 $\iff (3a - 1)x + (a + 3b) = 0 \iff a = \frac{1}{3}, b = -\frac{1}{9}$
et la fonction $y_P = \frac{1}{3}(x - \frac{1}{3})e^{-x}$ convient. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E_5) sont donc $y = y_H + y_P = \lambda e^{-4x} + \frac{1}{3}(x - \frac{1}{3})e^{-x}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.
6. Soit $(E_6^0): y' + y = 0 \iff y' = -y$ l'équation homogène associée. Elle admet pour solutions les fonctions de la forme $y_H = \lambda e^{-x}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.
Cherchons une solution particulière y_P de $(E_6): y' + y = 2\cos(x)$ sous la forme $y_P(x) = a\cos(x) + b\sin(x)$. On a $y'_P(x) = -a\sin(x) + b\cos(x)$ et
 $y'_P + y_P = 2\cos(x) \iff -a\sin(x) + b\cos(x) + a\cos(x) + b\sin(x) = 2\cos(x)$
 $\iff (b + a - 2)\cos(x) + (b - a)\sin(x) = 0 \iff b + a - 2 = 0, b - a = 0 \iff a = b = 1$
et la fonction $y_P = \cos(x) + \sin(x)$ convient. Les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E_6) sont donc $y = y_H + y_P = \lambda e^{-x} + \cos(x) + \sin(x)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.
7. Soit $(E_7^0): y' - y = 0 \iff y' = y$ l'équation homogène associée. Elle admet pour solutions les fonctions de la forme $y_H = \lambda e^x$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Cherchons une solution particulière y_P de $(E_7): y' - y = \cos(x) - 3 \sin(x)$ sous la forme $y_P(x) = a \cos(x) + b \sin(x)$. On a $y'_P(x) = -a \sin(x) + b \cos(x)$ et $y'_P - y_P = \cos(x) - 3 \sin(x)$

$$\Leftrightarrow -a \sin(x) + b \cos(x) - a \cos(x) - b \sin(x) = \cos(x) - 3 \sin(x)$$

$$\Leftrightarrow (b - a - 1) \cos(x) + (-b - a + 3) \sin(x) = 0 \Leftrightarrow b - a - 1 = 0, -b - a + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow a = 1, b = 2 \quad \text{et la fonction} \quad y_P = \cos(x) + 2 \sin(x) \quad \text{convient.}$$

Les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E_7) sont donc $y = y_H + y_P = \lambda e^x + \cos(x) + 2 \sin(x)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Exercice 19 $f(x) = x^3 - e^{3x}$.

- (a) On a $f'(x) = 3x^2 - 3e^{3x}$ et $f(x) - x^3 + x^2 = x^3 - e^{3x} - x^3 + x^2 = x^2 - e^{3x}$.
 (b) D'où, $3(f(x) - x^3 + x^2) = 3x^2 - 3e^{3x} = f'(x)$
 donc $f'(x) - 3f(x) = 3x^2 - 3x^3$ et la fonction f est solution de l'équation différentielle $(E): y' - 3y = 3x^2 - 3x^3$.
- (a) Soit $(E_0): y' - 3y = 0 \Leftrightarrow y' = 3y$ l'équation homogène associée. Elle admet pour solutions les fonctions de la forme $y_H = \lambda e^{3x}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.
 Les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E) sont donc
 $y = y_H + f = \lambda e^{3x} + x^3 - e^{3x} = x^3 + \mu e^{3x}$ où $\mu \in \mathbb{R}$.
 (b) On a $y(0) = 0 \Leftrightarrow 0^3 + \mu e^0 = 0 \Leftrightarrow \mu = 0$ et la seule solution de (E) qui s'annule en 0 est $\varphi(x) = x^3$.

Exercice 20 Thé brûlant

- (a) L'eau est bouillante au début de l'expérience et l'on a $T(0) = 100$.
 (b) Puisque la vitesse de refroidissement est proportionnelle à la différence entre la température de la pièce et celle de la tasse, il existe un rapport de proportionnalité $k \in \mathbb{R}$ tel que $T'(t) = k(20 - T(t))$.
- $y' = k(20 - y) \Leftrightarrow y' = 20k - ky$ d'équation homogène associée $y' = -ky$ et donc de solutions homogènes $y_H = \lambda e^{-kt}$. La fonction $y_P = 20$ est une solution particulière évidente ($k20 - 20k = 0$) et l'équation différentielle $y' = k(20 - y)$ admet pour solutions, les fonctions $y = y_H + y_P = \lambda e^{-kt} + 20$, $\lambda \in \mathbb{R}$. La condition initiale donne
 $T(0) = 100 \Leftrightarrow \lambda e^{-0k} + 20 = 100 \Leftrightarrow \lambda = 80$ et $T(t) = 80e^{-kt} + 20$.
- (a) On a $T(14) = 40 \Leftrightarrow 80e^{-14k} + 20 = 40 \Leftrightarrow e^{-14k} = \frac{20}{80} \Leftrightarrow -14k = \ln(\frac{1}{4})$
 $\Leftrightarrow k = \frac{\ln(4)}{14} = \frac{1}{7} \ln(2)$.
 (b) On a $T(t) \leq 25 \Leftrightarrow 80e^{-\frac{1}{7} \ln(2) t} + 20 \leq 25 \Leftrightarrow e^{-\frac{1}{7} \ln(2) t} \leq \frac{5}{80}$
 $\Leftrightarrow -\frac{1}{7} \ln(2) t \leq \ln(\frac{1}{16}) = -\ln(16) \Leftrightarrow t \geq 7 \frac{\ln(2^4)}{\ln(2)} = 7 \times 4 = 28$.
 La température du thé sera inférieure à 25°C au bout de 28 minutes.

Exercice 21 f est la solution de $(E): 2y' - 5y = 4$ telle que $f''(1) = \frac{25}{2}$.

- Soit y une solution de (E) . On a $2y' - 5y = 4 \Leftrightarrow y' = \frac{1}{2}(5y + 4) = \frac{5}{2}y + 2$ donc y' est dérivable et $y'' = (y')' = (\frac{5}{2}y + 2)' = \frac{5}{2}y' + 0 = \frac{5}{2}(\frac{5}{2}y + 2) = \frac{25}{4}y + 5$.
- Puisque f est solution de (E) , on a $f''(1) = \frac{25}{4}f(1) + 5$ et
 $f(1) = \frac{4}{25}(f''(1) - 5) = \frac{4}{25}(\frac{25}{2} - 5) = \frac{6}{5}$.
 Ainsi, $f'(1) = \frac{5}{2}f(1) + 2 = \frac{5}{2} \cdot \frac{6}{5} + 2 = 5$.

3. L'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 admet pour équation $\mathcal{T}_1: y = f'(1)(x - 1) + f(1) = 5x - \frac{19}{5}$.
4. $(E): y' = \frac{5}{2}y + 2$ admet pour solutions les fonctions de la forme
 $y = \lambda e^{\frac{5}{2}x} - \frac{2}{5/2} = \lambda e^{\frac{5}{2}x} - \frac{4}{5}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. Puisque $f(1) = \frac{6}{5}$, on a
 $\lambda e^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{5} = \frac{6}{5} \iff \lambda = 2e^{-\frac{5}{2}}$ et f s'écrit $f(x) = 2e^{\frac{5}{2}(x-1)} - \frac{4}{5}$.

Exercice 22 $f(0) = -2$ et, pour tout x réel, $f(-x)f'(x) = 1$.

1. (a) Soit une telle fonction f et l'on pose $g(x) = f(-x)f(x)$.
 On a $g(x_0) = 0 \iff f(-x_0)f(x_0) = 0 \iff f(x_0) = 0$ ou $f(-x_0) = 0$.
 Or, pour tout réel x , $f(-x)f'(x) = 1$ donc $f(-x) \neq 0$ et $f(x) \neq 0$ pour tout réel x . La fonction g ne peut donc s'annuler.
- (b) g est dérivable par composition et produit et l'on a
 $g'(x) = [f(-x)]'f(x) + f(-x)f'(x) = -f'(-x)f(x) + f(-x)f'(x)$
 $= -1 + 1 = 0$.
 Ainsi, g est constante sur $\mathbb{R}$ et $g(x) = g(0) = f(-0)f(0) = (-2)^2 = 4$.
- (c) D'où, pour tout réel x , $f(-x)f(x) = 4$ et $f(-x) = \frac{4}{f(x)}$. Puisque
 $f(-x)f'(x) = 1$, on a $f'(x) = \frac{1}{f(-x)} = \frac{1}{4/f(x)} = \frac{1}{4}f(x)$ et la fonction
 f est solution de l'équation $(E): y' = \frac{1}{4}y$.
2. L'équation (E) admet une unique solution sur $\mathbb{R}$ telle que $f(0) = -2$, solution de la forme $Ce^{\frac{1}{4}x}$. Ainsi, f s'écrit $f(x) = -2e^{\frac{1}{4}x}$ et l'on a bien
 $f(-x)f'(x) = -2e^{-\frac{1}{4}x} \times (-2)\frac{1}{4}e^{\frac{1}{4}x} = 1$.

Exercice 23 Rongeurs

1. Modèle de Malthus
- (a) D'après l'énoncé, il s'avère que f est solution sur $\mathbb{R}_+$ de $(E_1): y' = \frac{1}{4}y$.
- (b) Ainsi, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $f(t) = Ce^{\frac{1}{4}t}$ sur $\mathbb{R}_+$. Par ailleurs, on sait que $f(0) = \frac{1}{2}$ car la population initiale de rongeurs est de 50 individus. On a alors $Ce^0 = \frac{1}{2}$ et $f(t) = \frac{1}{2}e^{\frac{1}{4}t}$ sur $\mathbb{R}_+$.
- (c) Trivialement, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ ($\frac{1}{2} > 0$ et $\frac{1}{4} > 0$) et $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = +\infty$. D'après ce modèle, la population de rongeurs croît vers l'infini de manière exponentielle.
- (d) On a $f(t) \geq 3 \iff \frac{1}{2}e^{\frac{1}{4}t} \geq 3 \iff e^{\frac{1}{4}t} \geq 6 \iff \frac{1}{4}t \geq \ln(6) \iff t \geq 4 \ln(6) \simeq 7,2$.
 La population de rongeurs devrait dépasser 300 au cours de la huitième année.

2. Modèle de Verhulst

- (a) $g > 0$ donc $h = \frac{1}{g}$ est définie et $g = \frac{1}{h}$.
 g est solution de (E) ssi $g' = \frac{1}{4}g - \frac{1}{12}g^2 \iff (\frac{1}{h})' = \frac{1}{4}\frac{1}{h} - \frac{1}{12}\frac{1}{h^2}$
 $\iff -\frac{h'}{h^2} = \frac{1}{4h} - \frac{1}{12h^2} \xrightarrow{\times(-h^2)} h' = -\frac{1}{4}h + \frac{1}{12}$
 $\iff h$ est solution de $(E'): y' = -\frac{1}{4}y + \frac{1}{12}$.
- (b) (E') est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants et à second membre constant dont on connaît la forme des solutions : $y = Ce^{-\frac{1}{4}t} - \frac{1/12}{-1/4} = Ce^{-\frac{1}{4}t} + \frac{1}{3}$.

Puisque la population initiale est de 2000 rongeurs, on a $g(0) = 20$ et $h(0) = \frac{1}{20}$ d'où $Ce^0 + \frac{1}{3} = \frac{1}{20} \iff C = -\frac{17}{60}$.
Ainsi, $h(t) = -\frac{17}{60}e^{-\frac{1}{4}t} + \frac{1}{3}$ et $g(t) = \frac{1}{-\frac{17}{60}e^{-\frac{1}{4}t} + \frac{1}{3}} = \frac{60}{20-17e^{-\frac{1}{4}t}}$.

- (c) $e^{-\frac{1}{4}t}$ est strictement décroissante donc $20 - 17e^{-\frac{1}{4}t}$ est strictement croissante et positive donc $\frac{60}{20-17e^{-\frac{1}{4}t}}$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

Par ailleurs, on a $\lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{60}{20-17e^{-\frac{1}{4}t}} = \frac{60}{20-17e^{-\infty}} = \frac{60}{20-0} = 3$.

Selon ce modèle, la population devrait s'approcher de 300 individus au fil du temps. Cette limite s'appelle la capacité d'accueil.

Dans l'équation (E), le facteur $-\frac{1}{12}y^2$ est dû à la limitation de la population par le prédateur.

- (d) On a $g' = \frac{1}{4}g - \frac{1}{12}g^2$ donc g' est dérivable et
 $g'' = (\frac{1}{4}g - \frac{1}{12}g^2)' = \frac{1}{4}g' - \frac{1}{12} \cdot 2g'g = \frac{1}{2}g'(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}g) = \frac{1}{2}(\frac{1}{4}g - \frac{1}{12}g^2)(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}g)$
 $= \frac{1}{8}g(1 - \frac{1}{3}g)(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}g)$
 qui ne peut s'annuler car $g > 3$ sur $\mathbb{R}_+$ (g strict. décroissante et tend vers 3).

Exercice 24 À motocyclette

1. (a) Puisque $x' = v$ et $200x'' + 25x' = 800$, v est dérivable, de dérivée x'' et l'on a $200v' + 25v = 800 \iff v' = -\frac{1}{8}v + 4$ dont les solutions sont de la forme $v(t) = Ce^{-\frac{1}{8}t} + 32$.

- (b) Si $v(0) = 0$, alors $Ce^0 + 32 = 0 \iff C = -32$ et
 $v(t) = 32 - 32e^{-\frac{1}{8}t}$.

- (c) $v'(t) = -32(-\frac{1}{8})e^{-\frac{1}{8}t} = 4e^{-\frac{1}{8}t} > 0$ donc v est strictement croissante.
 $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 32 - 32e^{-\frac{1}{8}t} = 32 - 32 \times 0 = 32 \text{ m.s}^{-1} \simeq 115 \text{ km.h}^{-1}$.

La motocyclette devrait atteindre une vitesse d'environ 115 km.h⁻¹.

2. Si $x'(t) = v(t) = 32 - 32e^{-\frac{1}{8}t}$, alors x est une primitive de v et il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $t \geq 0$, $x(t) = 32t - 32 \times (-8)e^{-\frac{1}{8}t} + \lambda = 32t + 256e^{-\frac{1}{8}t} + \lambda$.
 Puisque $x(0) = 0$, on a $\lambda = -256$ et $x(t) = 32t - 256 + 256e^{-\frac{1}{8}t}$.
 Puisque $x'(t) = v(t) = 32 - 32e^{-\frac{1}{8}t} > 0$, la fonction x est bien strict. croissante.

3. Au bout de 30 secondes, la motocyclette aura parcouru

$$x(30) = 32 \times 30 - 256 + 256e^{-\frac{30}{8}} \simeq 710 \text{ m.}$$

Exercice 25 Méthode d'Euler

- A. Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I contenant un réel a .

On a $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \in \mathbb{R}$.

Ainsi, pour tout h proche de 0, on a l'approximation affine $f(a+h) \simeq f(a) + hf'(a)$.

- B. Soit f la solution sur $\mathbb{R}$ de $(E_1): y' = \frac{1}{10}y$ telle que $f(0) = 1$.

1. Puisque $f' = \frac{1}{10}f$, on a $f'(0) = \frac{1}{10}f(0) = \frac{1}{10}$.

2. Ainsi, pour $h = 1$, $f(1) = f(0+1) \simeq f(0) + 1 \times f'(0) = 1 + \frac{1}{10} = 1,1 = \varphi(1)$.
 On a alors $f'(1) = \frac{1}{10}f(1) \simeq \frac{1}{10}\varphi(1) = 0,11$.

3. (a) On en déduit que

$$f(2) = f(1+1) \simeq f(1) + 1 \times f'(1) \simeq \varphi(1) + 0,11 = 1,1 + 0,11 = 1,21 = \varphi(2).$$

D'où $f'(2) = \frac{1}{10}f(2) \simeq \frac{1}{10}\varphi(2) = 0,121$.

De même, $f(3) = f(2+1) \simeq f(2) + 1 \times f'(2) \simeq \varphi(2) + 0,121$

$f(3) \simeq 1,21 + 0,121 = 0,331 = \varphi(3)$.

(b) $\varphi(n+1) \simeq f(n+1) \simeq f(n) + 1 \times f'(n) = f(n) + \frac{1}{10}f(n) = \frac{11}{10}f(n) \simeq \frac{11}{10}\varphi(n)$.

(c) Les solutions de l'équation différentielle $(E_1): y' = \frac{1}{10}y$ sont de la forme $y = Ce^{\frac{1}{10}x}$. Puisque $f(0) = 1$, $Ce^0 = 1$ et $f(x) = e^{\frac{1}{10}x}$ sur $\mathbb{R}$.

(d) On a $f(0) = 1 = \varphi(0)$, $f(1) = e^{\frac{1}{10}} \simeq 1,105$ et $\varphi(1) = 1,1$, $f(2) = e^{\frac{2}{10}} \simeq 1,221$ et $\varphi(2) = 1,21$, $f(3) = e^{\frac{3}{10}} \simeq 1,349$ et $\varphi(3) = 1,331$ ce qui est quand même une bonne approximation.

C. Soit g la solution sur $\mathbb{R}$ de $(E_2): y' = y + 1$ telle que $g(0) = 1$.

1. Puisque $g' = g + 1$, on a $g'(0) = g(0) + 1 = 2$.

2. Ainsi, pour $h = 1$, $g(1) = g(0+1) \simeq g(0) + 1 \times g'(0) = 1 + 2 = 3 = \phi(1)$.

On a alors $g'(1) = g(1) + 1 \simeq \phi(1) + 1 = 3 + 1 = 4$.

3. (a) Ainsi, $g(2) = g(1+1) \simeq g(1) + 1 \times g'(1) \simeq \phi(1) + 4 = 3 + 4 = 7 = \phi(2)$.

D'où $g'(2) = g(2) + 1 \simeq \phi(2) + 1 = 7 + 1 = 8$.

De même, $g(3) = g(2+1) \simeq g(2) + 1 \times g'(2) \simeq \phi(2) + 8 = 7 + 8 = 15 = \phi(3)$.

(b) On a donc $\phi(n+1) \simeq g(n+1) \simeq g(n) + 1 \times g'(n) = g(n) + g(n) + 1$
 $\phi(n+1) = 2g(n) + 1 \simeq 2\phi(n) + 1$.

(c) Les solutions de l'équation différentielle $(E_2): y' = y + 1$ sont de la forme $y = Ce^x - 1$. Puisque $g(0) = 1$, $Ce^0 - 1 = 1 \iff C = 2$ et $g(x) = 2e^x - 1$ sur $\mathbb{R}$.

(d) On a $g(0) = 1 = \phi(0)$, $g(1) = 2e - 1 \simeq 4,4$ et $\phi(1) = 3$, $g(2) = 2e^2 - 1 \simeq 13,8$ et $\phi(2) = 7$, $g(3) = 2e^3 - 1 \simeq 39$ et $\phi(3) = 15$ ce qui n'est pas très proche mais il faut dire que cette fonction exponentielle est ici sacrément croissante et $h = 1$ n'est pas très petit.

D. Soit k la solution sur $I = \mathbb{R}$ de l'équation différentielle $(E_3): y' + y^2 = 4$ telle que $k(0) = 0$.

1. $k' = 4 - k^2$ donc $k'(0) = 4 - k(0) = 4$ et $\mathcal{T}_0: y = 4(x-0) + 0 = 4x$.

2. Ainsi, $k(0,1) \simeq k(0) + 0,1k'(0) = 0,4 = \psi(0,1)$

et $k'(0,1) = 4 - k^2(0,1) \simeq 4 - \psi^2(0,1) = 4 - 0,4^2 = 3,84$.

3. De même, $k(0,2) \simeq k(0,1) + 0,1k'(0,1) \simeq \psi(0,1) + 0,1 \times 3,84 \simeq 0,4 + 0,384$
 $k(0,2) \simeq 0,784 = \psi(0,2)$.

D'où $k'(0,2) = 4 - k^2(0,2) \simeq 4 - \psi^2(0,2) = 4 - 0,784^2 \simeq 3,39$

et $k(0,3) \simeq k(0,2) + 0,1k'(0,2) \simeq \psi(0,2) + 0,1 \times 3,39 \simeq 0,784 + 0,339$
 $k(0,3) \simeq 1,123 = \psi(0,3)$

4. On a $\psi(0,1(n+1)) \simeq \psi(0,1n) + 0,1k'(0,1n) = \psi(0,1n) + 0,1(4 - k^2(0,1n))$
 $\psi(0,1(n+1)) \simeq \psi(0,1n) + 0,1(4 - \psi^2(0,1n)) = -0,1\psi^2(0,1n) + \psi(0,1n) + 0,4$
 et un tableau de valeurs de la suite récurrente $k_0 = 0$, $k_{n+1} = -0,1k_n^2 + k_n + 0,4$ donne une approximation de la solution.

Exercice 26 Parachutisme

1. (a) Si $f = \frac{1}{v-6}$, alors $f \neq 0$ et $v - 6 = \frac{1}{f}$ donc $v = 6 + \frac{1}{f}$
d'où $v^2 = (6 + \frac{1}{f})^2 = 36 + \frac{12}{f} + \frac{1}{f^2}$.
- (b) Ainsi, $v' = (6 + \frac{1}{f})' = -\frac{f'}{f^2}$.
- (c) D'où $v' + \frac{g}{36}v^2 = g \iff -\frac{f'}{f^2} + \frac{g}{36}(36 + \frac{12}{f} + \frac{1}{f^2}) = g$
 $\xrightarrow{\times f^2} -f' + gf^2 + \frac{g}{3}f + \frac{g}{36} = gf^2 \iff f' = \frac{g}{3}f + \frac{g}{36}$ et f est solution
de l'équation différentielle $(E): y' = \frac{g}{3}y + \frac{g}{36}$.
2. (a) Les solutions de $(E): y' = \frac{g}{3}y + \frac{g}{36}$ sont de la forme
 $y = Ce^{\frac{g}{3}t} - \frac{g/36}{g/3} = Ce^{\frac{g}{3}t} - \frac{1}{12}$.
- (b) D'après l'énoncé, on a $v(0) = 66$ donc $f(0) = \frac{1}{v(0)-6} = \frac{1}{60}$ ce qui
mène à $Ce^0 - \frac{1}{12} = \frac{1}{60}$ et $C = \frac{1}{10}$: $f(t) = \frac{1}{10}e^{\frac{g}{3}t} - \frac{1}{12}$.
- (c) On a alors l'expression $v(t) = 6 + \frac{1}{f(t)} = 6 + \frac{1}{\frac{1}{10}e^{\frac{g}{3}t} - \frac{1}{12}} = 6 + \frac{60}{6e^{\frac{g}{3}t} - 5}$.
3. Lorsque $t \rightarrow +\infty$, $6e^{\frac{g}{3}t} - 5 \rightarrow +\infty$ donc
 $v(t) \rightarrow 6 + 0 = 6 \text{ m.s}^{-1} = 21,6 \text{ km.h}^{-1}$, vitesse limite que le parachutiste
devrait approcher.

Exercice 27

- A. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $(E_n): y' + y = \frac{x^n}{n!}e^{-x}$. g et h sont telles que $g(x) = h(x)e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.
1. On a g solution de $(E_n) \iff g' + g = \frac{x^n}{n!}e^{-x} \iff (he^{-x})' + he^{-x} = \frac{x^n}{n!}e^{-x}$
 $\iff h'e^{-x} - he^{-x} + he^{-x} = \frac{x^n}{n!}e^{-x} \iff h' = \frac{x^n}{n!}$.
 2. On a alors $h(x) = \frac{1}{n!} \frac{1}{n+1} x^{n+1} + k = \frac{1}{(n+1)!} x^{n+1} + k$
et $g(x) = he^{-x} = (\frac{1}{(n+1)!} x^{n+1} + k)e^{-x}$.
 3. La condition $k_n(0) = 0$ donne $(\frac{1}{(n+1)!} 0^{n+1} + k)e^{-0} = 0 \iff k = 0$:
 $k_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} x^{n+1} e^{-x}$.
- B. $f_0(x) = e^{-x}$ et $f_1(x) = xe^{-x}$ sur $\mathbb{R}$.
1. On a $f_1'(x) = (xe^{-x})' = x'e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$ et
 $f_1'(x) + f_1(x) = (1-x)e^{-x} + xe^{-x} = e^{-x} = f_0(x)$: f_1 est solution de $y' + y = f_0$.
 2. Pour tout $n \geq 1$, f_n désigne la solution de $y' + y = f_{n-1}$ vérifiant $f_n(0) = 0$.
Soit la proposition $\mathcal{P}_n$: « $f_n(x) = \frac{x^n}{n!}e^{-x}$ ».
- $f_1(x) = xe^{-x} = \frac{x^1}{1!}e^{-x}$ et $f_1(0) = 0$: $\mathcal{P}_1$ est vraie.
 - Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. On a $\frac{0^{n+1}}{(n+1)!}e^{-0} = 0$ et
 $(\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{-x})' + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(n+1)x^{n+1-1}}{(n+1)!}e^{-x} - \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{x^n}{n!}e^{-x} = f_n(x)$.
- Ainsi, la fonction $\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$ est la solution de (E_{n+1}) s'annulant en 0, c'est donc
 f_{n+1} : $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
- Par principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geq 1$.

Exercice 28 Équation différentielle à coefficients non constants

(E): $xy' - y = x^2 e^{2x}$ sur $I =]0; +\infty[$.

1. Soit $x > 0$ et $g(x) = \frac{f(x)}{x}$. On a $f(x) = xg(x)$ et f solution de (E)
 $\iff xf' - f = x^2 e^{2x} \iff x(xg)' - xg = x^2 e^{2x} \iff x(g + xg') - xg = x^2 e^{2x}$
 $\iff x^2 g' = x^2 e^{2x} \iff g' = e^{2x} \iff g$ est solution de $(E_1): y' = e^{2x}$.
2. Les solutions de $(E_1): y' = e^{2x}$ sont les primitives de e^{2x} donc de la forme
 $y_1 = \frac{1}{2}e^{2x} + k$.
3. D'où, les solutions de (E) sont de la forme $y = xy_1 = x(\frac{1}{2}e^{2x} + k)$ et
 $f(\frac{1}{2}) = 0 \iff \frac{1}{2}(\frac{1}{2}e^{\frac{2}{2}} + k) = 0 \iff k = -\frac{e}{2}$: la solution recherchée est
 $f(x) = x(\frac{1}{2}e^{2x} - \frac{e}{2})$.

Exercice 29 Équations différentielles du second ordre.

1. Soient $(E_0): y'' + ay' + by = 0$ et $(E_c): r^2 + ar + b = 0$ son équation caractéristique.

- (a) Soient r_1 et r_2 les deux racines réelles distinctes de (E_c) , A et B deux réels et l'on pose $f(x) = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x}$. On a $f'(x) = Ar_1 e^{r_1 x} + Br_2 e^{r_2 x}$ et
 $f''(x) = Ar_1^2 e^{r_1 x} + Br_2^2 e^{r_2 x}$ d'où
 $f''(x) + af'(x) + bf(x) = (Ar_1^2 e^{r_1 x} + Br_2^2 e^{r_2 x}) + a(Ar_1 e^{r_1 x} + Br_2 e^{r_2 x})$
 $+ b(Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x})$
 $= Ae^{r_1 x}(r_1^2 + ar_1 + b) + Be^{r_2 x}(r_2^2 + ar_2 + b)$
 $= Ae^{r_1 x} \times 0 + Be^{r_2 x} \times 0 = 0$.

f est bien une solution de (E_0) .

On admet que toutes les solutions de (E_0) sont de cette forme.

- (b) Soient r_0 la racine double de (E_c) , A et B deux réels.

On pose $f(x) = (Ax + B)e^{r_0 x}$

et l'on a $f'(x) = Ae^{r_0 x} + r_0(Ax + B)e^{r_0 x} = (Ar_0 x + Br_0 + A)e^{r_0 x}$

et $f''(x) = Ar_0 e^{r_0 x} + r_0(Ar_0 x + Br_0 + A)e^{r_0 x} = (Ar_0^2 x + Br_0^2 + 2Ar_0)e^{r_0 x}$

d'où $f''(x) + af'(x) + bf(x) = (Ar_0^2 x + Br_0^2 + 2Ar_0)e^{r_0 x}$

$+ a(Ar_0 x + Br_0 + A)e^{r_0 x} + b(Ax + B)e^{r_0 x}$

$= Axe^{r_0 x}(r_0^2 + ar_0 + b) + Be^{r_0 x}(r_0^2 + ar_0 + b) + Ae^{r_0 x}(2r_0 + a)$

$= Axe^{r_0 x} \times 0 + Be^{r_0 x} \times 0 + 0 = 0$

car r_0 est la racine double de (E_c) donc $r_0^2 + ar_0 + b = 0$ et $r_0 = -\frac{a}{2}$
c.-à-d. $2r_0 + a = 0$. f est bien une solution de (E_0) .

On admet que toutes les solutions de (E_0) sont alors de cette forme.

2. (E): $y'' - y' - 6y = -6x^2 + 4x - 3$.
 - (a) L'équation homogène associée est $(E_0): y'' - y' - 6y = 0$ d'équation caractéristique $(E_c): r^2 - r - 6$ qui admet -2 et 3 pour racines réelles distinctes. D'après la question 1., les solutions de (E_0) sont donc de la forme $y_H = Ae^{-2x} + Be^{3x}$.
 - (b) On cherche une solution particulière de (E) sous la forme $\varphi(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$.
On a $\varphi'(x) = 2\alpha x + \beta$ et $\varphi''(x) = 2\alpha$. D'où φ est solution de (E) si, et seulement si,
 $\varphi'' - \varphi' - 6\varphi = -6x^2 + 4x - 3$
 $\iff 2\alpha - (2\alpha x + \beta) - 6(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) = -6x^2 + 4x - 3$

$$\iff (-6\alpha)x^2 + (-2\alpha - 6\beta)x + (2\alpha - \beta - 6\gamma) = -6x^2 + 4x - 3$$

et, en identifiant les coefficients, $\alpha = 1$, $\beta = \frac{1}{-6}(4 + 2) = -1$,
 $\gamma = \frac{1}{-6}(-3 - 2 - 1) = 1$.

Ainsi, la fonction $\varphi(x) = x^2 - x + 1$ est une solution particulière de (E).

(c) y est solution de (E) $\iff y'' - y' - 6y = -6x^2 + 4x - 3$

$$\iff y'' - y' - 6y = \varphi'' - \varphi' - 6\varphi$$

$$\iff (y - \varphi)'' - (y - \varphi)' - 6(y - \varphi) = 0 \iff y - \varphi \text{ est solution de } (E_0).$$

(d) Les solutions y de (E) sont donc de la forme $y = (y - \varphi) + \varphi = y_H + \varphi$ où $y_H = Ae^{-2x} + Be^{3x}$ est solution de (E_0) : $y = Ae^{-2x} + Be^{3x} + x^2 - x + 1$ où $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. Les conditions $f(0) = 1$, $f'(0) = 4$ donnent $A + B + 1 = 1$, $-2A + 3B - 1 = 4$ donc $A = -1$, $B = 1$ et la solution recherchée est $f(x) = e^{3x} - e^{-2x} + x^2 - x + 1$.

3. $(E') : y'' - 2y' + y = e^{3x}$.

(a) L'équation homogène associée est $(E'_0) : y'' - 2y' + y = 0$ d'équation caractéristique $(E'_c) : r^2 - 2r + 1$ qui admet 1 pour racine double. D'après la question 1., les solutions de (E'_0) sont donc de la forme $y_H = (Ax + B)e^x$.

(b) On cherche une solution particulière de (E') sous la forme $\psi(x) = \lambda e^{3x}$. On a $\psi'(x) = 3\lambda e^{3x}$ et $\psi''(x) = 9\lambda e^{3x}$. D'où ψ est solution de (E) si, et seulement si,

$$\iff 9\lambda e^{3x} - 2 \times 3\lambda e^{3x} + \lambda e^{3x} = e^{3x} \iff 4\lambda e^{3x} = e^{3x} \iff \lambda = \frac{1}{4}.$$

Ainsi, la fonction $\psi(x) = \frac{1}{4}e^{3x}$ est une solution particulière de (E') .

(c) y est solution de (E') $\iff y'' - 2y' + y = e^{3x} \iff y'' - 2y' + y = \psi'' - 2\psi' + \psi$
 $\iff (y - \psi)'' - 2(y - \psi)' + (y - \psi) = 0 \iff y - \psi \text{ est solution de } (E'_0).$

(d) Les solutions y de (E') sont donc de la forme $y = (y - \psi) + \psi = y_H + \psi$ où $y_H = (Ax + B)e^x$ est solution de (E'_0) : $y = (Ax + B)e^x + \frac{1}{4}e^{3x}$ où $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. Les conditions $g(0) = 1$, $g'(0) = 2$ donnent $B + \frac{1}{4} = 1$, $A + B + \frac{3}{4} = 2$ donc $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{3}{4}$ et la solution recherchée est $g(x) = (\frac{1}{2}x + \frac{3}{4})e^x + \frac{1}{4}e^{3x}$.

Exercice 30 Problèmes de recollement

$(E_1) : ty' - 2y = 0$.

(a) Pour $t > 0$ et $y > 0$, on a $ty' - 2y = 0 \iff ty' = 2y \iff \frac{y'}{y} = \frac{2}{t}$
 $\iff (\ln(y))' = 2(\ln(t))' \iff \ln(y) = 2\ln(t) + k$.

(b) Ainsi, $\exp(\ln(y)) = \exp(2\ln(t) + k) = \exp(\ln(t^2)) \exp(k)$
 $\iff y = t^2 e^k = \lambda t^2$ pour $\lambda > 0$.

(c) De même, pour $t > 0$ et $y < 0$, on obtient $\frac{-y'}{-y} = \frac{2}{t}$
 $\iff \ln(-y) = \ln(t^2) + k \iff y = -\lambda t^2 \iff y = \lambda' t^2$ pour $\lambda' < 0$.

Les solutions de (E_1) sur I_+ ne s'annulant pas sont donc de la forme

$$y(t) = \lambda t^2 \quad \text{pour } \lambda \in \mathbb{R}.$$

On admet que les solutions sur I_+ sont toutes de cette forme.

(d) De même, les solutions de (E_1) sur I_- ne s'annulant pas sont de la forme $y(t) = \mu t^2$ pour $\mu \in \mathbb{R}$.

On admet que les solutions sur I_- sont toutes de cette forme.

(e) Sur $\mathbb{R}$, le problème de la continuité et de la dérivabilité en 0 se pose.

En effet, la fonction définie par $y(t) = \begin{cases} \lambda t^2 & \text{si } t > 0 \\ \alpha & \text{si } t = 0 \\ \mu t^2 & \text{si } t < 0 \end{cases}$ doit être continue et dérivable en 0.

Puisque $\lim_{t \rightarrow 0^-} y(t) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \mu t^2 = 0$ et $\lim_{t \rightarrow 0^+} y(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \lambda t^2 = 0$,
 y est continue en 0 si $\alpha = 0$.

Puisque $\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{y(t)-y(0)}{t-0} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\mu t^2}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \mu t = 0$

et $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{y(t)-y(0)}{t-0} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\lambda t^2}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \lambda t = 0$, y est dérivable en 0 (et $y'(0) = 0$).

Les solutions de (E_1) sur $\mathbb{R}$ sont donc de la forme $y(t) = \begin{cases} \lambda t^2 & \text{si } t \geq 0 \\ \mu t^2 & \text{si } t < 0 \end{cases}$
pour $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

L'équation différentielle (E_1) admet donc « deux infinités » de solutions : les branches de demi-paraboles gauches et droites recollées en $O(0, 0)$.

$(E_2) : ty' - y = t^2$.

(a) On a $y(t) = \lambda t + t^2$, $y'(t) = \lambda + 2t$
et $ty'(t) - y(t) = t(\lambda + 2t) - (\lambda t + t^2) = t^2$ donc $y(t) = \lambda t + t^2$ pour
 $\lambda \in \mathbb{R}$ est bien solution de (E_2) sur $I_+ =]0; +\infty[$.

On admet que les solutions sur I_+ sont toutes de cette forme.

(b) De même, les solutions de (E_2) sur $I_- =]-\infty; 0[$ sont de la forme
 $y(t) = \mu t + t^2$ pour $\mu \in \mathbb{R}$.

(c) Sur $\mathbb{R}$, il faut que la fonction définie par $y(t) = \begin{cases} \lambda t + t^2 & \text{si } t > 0 \\ \alpha & \text{si } t = 0 \\ \mu t + t^2 & \text{si } t < 0 \end{cases}$ soit
continue et dérivable.

Puisque $\lim_{t \rightarrow 0^-} y(t) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \mu t + t^2 = 0$ et $\lim_{t \rightarrow 0^+} y(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \lambda t + t^2 = 0$,
 y est continue en 0 si $\alpha = 0$.

Puisque $\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{y(t)-y(0)}{t-0} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{\mu t + t^2}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \mu + t = \mu$

et $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{y(t)-y(0)}{t-0} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\lambda t + t^2}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \lambda + t = \lambda$, il faut que $\lambda = \mu$
pour que y soit dérivable en 0 (et alors $y'(0) = \lambda$).

Les solutions de (E_2) sur $\mathbb{R}$ sont donc de la forme $y(t) = \lambda t + t^2$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

$(E_3) : t^2 y' - y = 0$.

(a) $y(t) = \lambda e^{-\frac{1}{t}}$, $y'(t) = -\frac{\lambda}{t^2} e^{-\frac{1}{t}}$, $t^2 y'(t) - y(t) = t^2 \left(-\frac{\lambda}{t^2} e^{-\frac{1}{t}}\right) - \lambda e^{-\frac{1}{t}} = 0$
donc $y(t) = \lambda e^{-\frac{1}{t}}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$ est bien solution de (E_3) sur
 $I_+ =]0; +\infty[$. On admet que les solutions sur I_+ sont toutes de cette forme.

(b) De même, les solutions de (E_3) sur $I_- =]-\infty; 0[$ sont de la forme
 $y(t) = \mu e^{-\frac{1}{t}}$ pour $\mu \in \mathbb{R}$.

(c) Sur $\mathbb{R}$, il faut que la fonction définie par $y(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\frac{1}{t}} & \text{si } t > 0 \\ \alpha & \text{si } t = 0 \\ \mu e^{-\frac{1}{t}} & \text{si } t < 0 \end{cases}$ soit
continue et dérivable.

Puisque $\lim_{t \rightarrow 0^-} y(t) = \lim_{t \rightarrow 0^-} \mu e^{-\frac{1}{t}} = "\mu e^{-\frac{1}{0^-}}" = "\mu e^{+\infty}" = "\mu(+\infty)" \in \mathbb{R}$ seulement pour $\mu = 0$

et $\lim_{t \rightarrow 0^+} y(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \lambda e^{-\frac{1}{t}} = "\lambda e^{-\frac{1}{0^+}}" = "\lambda e^{-\infty}" = 0$, y est continue en 0 si $\mu = \alpha = 0$.

Puisque $\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{y(t)-y(0)}{t-0} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{0}{t} = 0$

et $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{y(t)-y(0)}{t-0} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\lambda e^{-\frac{1}{t}}}{t} \stackrel{T=\frac{1}{t}}{=} \lim_{T \rightarrow +\infty} -\lambda T e^{-T} = 0$ par croissances comparées, y est dérivable en 0 (et $y'(0) = 0$).

Les solutions de (E_3) sur $\mathbb{R}$ sont donc de la forme $y(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\frac{1}{t}} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

$(E_4) : xy' + y - 1 = 0$.

(a) On a $y(x) = 1 + \frac{\lambda}{x}$, $y'(x) = -\frac{\lambda}{x^2}$ et $xy'(x) - y(x) - 1 = x \frac{-\lambda}{x^2} + (1 + \frac{\lambda}{x}) - 1 = 0$ donc $y(x) = 1 + \frac{\lambda}{x}$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$ est bien solution de (E_4) sur $I_+ =]0; +\infty[$.

On admet que les solutions sur I_+ sont toutes de cette forme.

(b) De même, les solutions de (E_4) sur $I_- =]-\infty; 0[$ sont de la forme

$y(x) = 1 + \frac{\mu}{x}$ pour $\mu \in \mathbb{R}$.

(c) Sur $\mathbb{R}$, il faut que la fonction définie par $y(x) = \begin{cases} 1 + \frac{\lambda}{x} & \text{si } x > 0 \\ \alpha & \text{si } x = 0 \\ 1 + \frac{\mu}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$ soit continue et dérivable.

Puisque $\lim_{x \rightarrow 0^-} y(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 1 + \frac{\mu}{x} = "1 + \frac{\mu}{0^-}" = "\mu(-\infty)" \in \mathbb{R}$ seulement pour $\mu = 0$

et $\lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 + \frac{\lambda}{x} = "1 + \frac{\lambda}{0^+}" = "\lambda(+\infty)" \in \mathbb{R}$ seulement pour $\lambda = 0$.

y est donc continue en 0 si $\mu = \lambda = 0$: y est alors identiquement nulle et donc trivialement dérivable.

L'unique solution de (E_4) sur $\mathbb{R}$ est donc la fonction nulle $y(x) = 0$.

$(E_5) : xy' - y = x^2 e^{2x}$ admet, de la même manière, des solutions continues et dérivables de la forme

$$y(x) = \begin{cases} x(\frac{1}{2}e^{2x} + \lambda) & \text{si } x > 0 \\ \alpha & \text{si } x = 0 \\ x(\frac{1}{2}e^{2x} + \mu) & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Puisque $\lim_{x \rightarrow 0^-} y(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = 0$, on doit avoir $\alpha = 0$.

Puisque $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{y(x)-y(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{2}e^{2x} + \mu = \frac{1}{2} + \mu$

et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{y(x)-y(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2}e^{2x} + \lambda = \frac{1}{2} + \lambda$, on doit avoir $\lambda = \mu$.

Les solutions de (E_5) sur $\mathbb{R}$ sont donc de la forme $y(x) = x(\frac{1}{2}e^{2x} + \lambda)$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

Chapitre XII

COMBINATOIRE & DÉNOMBREMENT

Sommaire

Introduction	295
1 Cardinal d'ensembles	296
1.1 Cardinal d'un ensemble	296
1.2 Réunion disjointe d'ensembles	297
1.3 Produit cartésien d'ensembles	298
2 Arrangements et permutations	300
2.1 Arrangements d'un ensemble	300
2.2 Permutations d'un ensemble	301
3 Combinaisons d'un ensemble	302
3.1 Parties d'un ensemble	302
3.2 Nombre de combinaisons	303
4 Synthèse	306
Exercices	308
Corrigé des exercices	315

Introduction

La combinatoire est le domaine des mathématiques qui étudie les configurations de collections finies d'objets, les combinaisons d'ensembles finis et les dénombrements, c.-à-d. le décompte des configurations. La combinatoire est présente dans toute l'Antiquité en particulier en Inde et en Chine et l'on pourrait dire qu'elle a commencé alors que la civilisation elle-même prenait forme. Les mathématiciens arabes puis européens s'y sont ensuite intéressés. Elle se développe de façon significative à partir du XVII^es. en même temps que le calcul des probabilités avec Blaise Pascal et Pierre de Fermat. Ayant alors pour objet la résolution des problèmes de dénombrement provenant de l'étude des jeux de hasard, elle se lie plus tard à la théorie des nombres, la

théorie des ensembles et la théorie des graphes. C'est une discipline aux fondements des mathématiques.

De plus, vous savez bien qu'il existe trois sortes d'individus : ceux qui savent compter, et les autres.

1 Cardinal d'ensembles

1.1 Cardinal d'un ensemble

Définition 1

Un **ensemble** est une collection d'objets distincts que l'on appelle **éléments**.

On peut définir un ensemble par une phrase (« l'ensemble des élèves de cette classe », « l'ensemble des réels positifs »...), par une liste ($\{a; b; \dots; z\}$), par une équation ($\mathcal{C}_f = \{(x, y) \mid x \in \mathcal{D}_f \text{ et } y = f(x)\}$), par un intervalle ($I = [4; +\infty[$)... Le plus petit ensemble est l'ensemble vide, noté $\emptyset$.

Définition 2 Soit E un ensemble fini.

Le **cardinal** de E , noté $\text{Card}(E)$ ou $\#(E)$ ou $|E|$, est le nombre d'éléments de l'ensemble E .

Exemple : On donne $E = \{a; b; c; d\}$ et $F = \{c; d; e\}$.

On a $\text{Card}(E) = 4$, $\text{Card}(F) = 3$, $\text{Card}(E \cup F) = \text{Card}(\{a; b; c; d; e\}) = 5$ et $\text{Card}(E \cap F) = \text{Card}(\{c; d\}) = 2$.

Remarques : • Lorsqu'un ensemble est défini par une liste, celle-ci doit être constituée d'éléments distincts : $\{1; 2; 2; 3\} = \{1; 2; 3\}$ et $\text{Card}(\{1; 2; 2; 3\}) = 3$.

• Nous n'avons pas défini ce qu'est un ensemble fini et d'ailleurs, tous ne le sont pas. Par exemple, $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $]3; 7]$ ou $\mathbb{Q}$, sont infinis. Pour autant, ils n'ont pas tous le même cardinal, certains sont plus « grands » que d'autres mais ces considérations nous emmènent trop loin pour l'instant. Vous aurez un aperçu de ceci dans l'extra *Poursuites* en page 577.

• Cas particulier du vide : on a $\text{Card}(\emptyset) = 0$ et l'on ne les confond pas. L'ensemble $E_2 = \{a; b\}$ contient des lettres et $F_2 = \{pomme_1; pomme_2\}$ contient des pommes. Ils sont de même cardinal 2 mais ils sont différents. Si on leur retire un élément à chacun, on obtient encore deux ensembles différents de même cardinal 1, par exemple $E_1 = \{a\}$ contient une lettre et $F_1 = \{pomme_2\}$, une pomme. En revanche, si on leur retire encore un élément, on obtient alors un même ensemble de cardinal nul, c'est l'ensemble vide, qui ne contient ni lettre, ni pomme, ni quoi que ce soit. Cet ensemble vide est donc universel, en ce sens qu'il fait partie de tous les ensembles.

Patate Le lycée de La Fare-en-Dole organise sa grande course en sac annuelle et pour la finale, trois élèves de chaque niveau s'affrontent. L'ensemble des participants $\{s_1; s_2; s_3; p_1; p_2; p_3; t_1; t_2; t_3\}$ est de cardinal 9.

1.2 Réunion disjointe d'ensembles

On rappelle que deux ensembles E et F sont disjoints si leur intersection est vide, c.-à-d. $E \cap F = \emptyset$. Si $A \subset E$, on notera $\complement_E A = E \setminus A$, ou $\overline{A}$ s'il n'y a pas d'ambiguïté, le complémentaire de A dans E .

Par exemple, $]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[= \complement_{\mathbb{R}}\{0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\} = \mathbb{R}^*$ mais pas $\overline{\{0\}}$.

Pour de plus amples informations et des représentations, on se reportera à l'extra *En toute logique* en page 533.

Le principe fondamental suivant affirme essentiellement que le tout est la somme de ses parties.

Théorème 1 *Principe additif*

Soit n un entier naturel non nul et soient $A_1, A_2, \dots, A_n$ des ensembles finis deux à deux disjoints. On a

$$\text{Card}(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) = \text{Card}(A_1) + \text{Card}(A_2) + \dots + \text{Card}(A_n) = \sum_{i=1}^n \text{Card}(A_i).$$

Démonstration : Il est clair que l'on ne peut compter plusieurs fois un même élément de la réunion car ces ensembles sont tous disjoints et chaque élément n'appartient donc qu'à un seul. $\square$

Cas particuliers

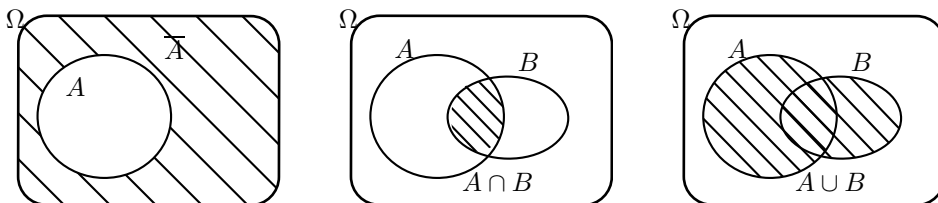
- Si A et B sont finis et $A \cap B = \emptyset$, alors $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$.
- Si E est un ensemble fini et $A \subset E$, alors $\text{Card}(A) + \text{Card}(\overline{A}) = \text{Card}(E)$.

Corollaire Soient A et B deux ensembles finis.

On a $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$.

Démonstration : On a toujours $B = (B \cap A) \cup (B \cap \overline{A})$ disjoints donc $\text{Card}(B \cap \overline{A}) = \text{Card}(B) - \text{Card}(B \cap A)$. Puisque $A \cup B = A \cup (B \cap \overline{A})$, deux ensembles trivialement disjoints, on a $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A \cup (B \cap \overline{A}))$

$$\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B \cap \overline{A}) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(B \cap A). \quad \square$$



Exemple : Soient $A = \{1; 2; 3\}$, $B = \{4; 5\}$, $C = \{6; 7\}$ trois ensembles disjoints deux à deux et l'on pose $D = A \cup B \cup C = \{1; 2; \dots; 7\}$.

On a bien $\text{Card}(D) = 7 = 3 + 2 + 2 = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) + \text{Card}(C)$,

$$\text{Card}(\complement_D A) = \text{Card}(D \setminus A) = \text{Card}(\{4; 5; 6; 7\}) = 4 = 7 - 3 = \text{Card}(D) - \text{Card}(A)$$

$$\text{Card}(\{1; 2; 3\} \cup \{3; 4; 5\}) = \text{Card}(\{1; 2; 3; 4; 5\}) = 5 = 3 + 3 - 1$$

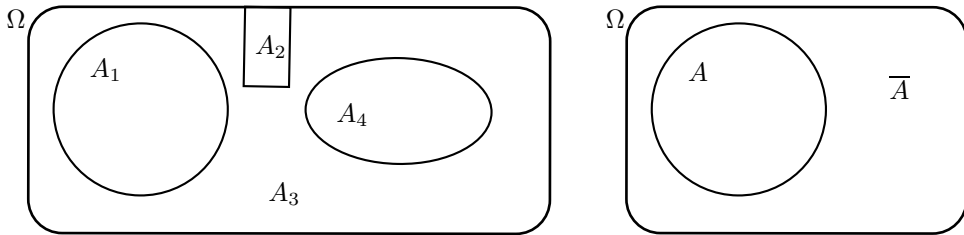
$$= \text{Card}(\{1; 2; 3\}) + \text{Card}(\{3; 4; 5\}) - \text{Card}(\{1; 2; 3\} \cap \{3; 4; 5\} = \{3\}).$$

Il est judicieux de rappeler ici comment les mathématiciens, notoirement joueurs et facétieux, désignent les découpages façon puzzles.

Définition 3 Soit E un ensemble non vide. Pour $n \geq 2$, on dit que les sous-ensembles $A_1, A_2, \dots, A_n$ de E forment une **partition** de E si les trois conditions suivantes sont vérifiées :

- Chacun de ces sous-ensembles est non vide : $\forall i \in \{1; \dots; n\}, \quad A_i \neq \emptyset$.
- Ces sous-ensembles sont deux à deux disjoints :
 $\forall i, j \in \{1; \dots; n\}, \quad i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$.
- Leur réunion est égale à E : $\bigcup_{i=1}^n A_i = E$.

En particulier, pour tout sous-ensemble A non vide et différent de E , $\{A, \overline{A}\}$ est une partition de E .



C'est dans ce cadre-là – les ensembles sont des sous-ensembles non vides – que l'on applique généralement le principe additif.

Patate Si l'on prend les participants niveau par niveau, on réalise une partition de l'ensemble des participants, $\{s_1; s_2; s_3\} \cup \{p_1; p_2; p_3\} \cup \{t_1; t_2; t_3\}$, et l'on a bien $3 + 3 + 3 = 9$.

Le principe suivant, énoncé par le mathématicien allemand Dirichlet en 1834, semble évident mais il fallait remarquer sa nécessité.

Principe des tiroirs On souhaite ranger nos paires de chaussettes dans nos tiroirs. Si l'on dispose de plus de paires que de tiroirs, alors il y aura au moins un tiroir contenant plusieurs paires de chaussettes.

1.3 Produit cartésien d'ensembles

Définition 4 Soient E et F deux ensembles non vides.

Le **produit cartésien** de E et F est l'ensemble noté $E \times F$ (lu « E croix F ») constitué des couples (e, f) où $e \in E$ et $f \in F$: $E \times F = \{(e, f) \mid e \in E, f \in F\}$.

Exemple : Si $E = \{1; 2\}$ et $F = \{3; 4\}$,
alors $E \times F = \{(1, 3); (1, 4); (2, 3); (2, 4)\}$
et $E \times E = \{(1, 1); (1, 2); (2, 1); (2, 2)\}$.

Il peut être utile de dresser un tableau à double entrée pour ne pas en oublier.

En revanche, $(3, 1) \notin E \times F$. Il appartient à $F \times E$.

Remarques : • On définit $E \times \emptyset = \emptyset \times F = \emptyset$ et l'on note $E \times E = E^2$.

• Le couple des coordonnées cartésiennes d'un point du plan repéré est donc un élément de $\mathbb{R}^2$.

• En général, $E \times F \neq F \times E$. Cela n'est possible que si $E = F$ ou si l'un d'entre eux est vide.

Théorème 2 *Principe multiplicatif*

Si E et F sont deux ensembles finis, on a $\text{Card}(E \times F) = \text{Card}(E) \times \text{Card}(F)$.

Démonstration : Il suffit de compter les cases d'un tableau comportant $\text{Card}(E)$ lignes et $\text{Card}(F)$ colonnes. $\square$

On peut remarquer que l'on a alors $\text{Card}(F \times E) = \text{Card}(E \times F)$.

Exemple : On reprend l'exemple précédent où $E = \{1; 2\}$ et $F = \{3; 4\}$ et l'on a bien $\text{Card}(E \times F) = 4 = 2 \times 2 = \text{Card}(E) \times \text{Card}(F)$ et $\text{Card}(E^2) = 4 = 2^2 = \text{Card}(E)^2$.

Ces notions se généralisent à plus de deux ensembles.

Définition 5 Soient n un entier naturel non nul et $E_1, E_2, \dots, E_n$ des ensembles. Le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$ est l'ensemble de toutes les listes ordonnées $(x_1; x_2; \dots; x_n)$, appelées ***n-uplets*** ou *n-listes*, telles que $x_i \in E_i$:

$$E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n = \{(x_1; x_2; \dots; x_n) \mid \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, x_i \in E_i\}.$$

Pour le produit de n ensembles identiques E , on note $E \times \dots \times E = E^n$.

On remarquera la notation $\llbracket 1; n \rrbracket = \mathbb{N} \cap [1; n] = \{1; 2; \dots; n\}$, l'ensemble des entiers compris entre 1 et n . Par commodité, on posera $E^0 = \emptyset$.

Exemple : Les coordonnées cartésiennes d'un point dans l'espace repéré forment un 3-uplet (triplet) de $\mathbb{R}^3$.

Théorème 3 Soient n un entier naturel non nul et $E_1, E_2, \dots, E_n$ des ensembles finis. On a $\text{Card}(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n) = \text{Card}(E_1) \times \text{Card}(E_2) \times \dots \times \text{Card}(E_n)$ et si E est fini, $\text{Card}(E^n) = [\text{Card}(E)]^n$.

Démonstration : Effectuons donc une si tentante démonstration par récurrence.

On a bien évidemment l'initialisation $\text{Card}(E_1) = \text{Card}(E_1)$ et supposons que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\text{Card}(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n) = \text{Card}(E_1) \times \dots \times \text{Card}(E_n)$ pour tous ensembles finis $E_1, \dots, E_n$.

Soit E_{n+1} un ensemble fini de cardinal $p \in \mathbb{N}$.

• Si $p = 0$, E_{n+1} est vide de cardinal nul, tout comme le produit cartésien $E_1 \times \dots \times E_n \times \emptyset$, et la propriété est vraie au rang $n + 1$.

• Sinon, on pose $E_{n+1} = \{x_1; x_2; \dots; x_p\}$, tous distincts, et pour $k \in \llbracket 1; p \rrbracket$, on appelle X_k l'ensemble des $(n + 1)$ -uplets de $E_1 \times \dots \times E_{n+1}$ ayant x_k pour dernière composante. Par exemple, $(e_1; e_2; \dots; e_n; x_1) \in X_1$, $(e'_1; e'_2; \dots; e'_n; x_p) \in X_p$.

Les ensembles X_k forment une partition de $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_{n+1}$ puisqu'ils sont deux à deux disjoints ($x_i \neq x_j$) et de réunion, le produit cartésien dans son ensemble :

$$E_1 \times E_2 \times \dots \times E_{n+1} = \bigcup_{k=1}^p X_k.$$

Par principe additif, on a

$$\text{Card}(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_{n+1}) = \text{Card}\left(\bigcup_{k=1}^p X_k\right) = \text{Card}(X_1) + \dots + \text{Card}(X_p).$$

Par ailleurs, $\text{Card}(X_k) = \text{Card}(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n \times \{x_k\}) = \text{Card}(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n)$ puisqu'il suffit d'adjoindre la dernière composante fixée. Ainsi,

$$\begin{aligned} \text{Card}(E_1 \times \dots \times E_{n+1}) &= \text{Card}(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n) + \dots + \text{Card}(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n) \\ &= \text{Card}(E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n) \times p \\ &= \text{Card}(E_1) \text{Card}(E_2) \dots \text{Card}(E_n) \text{Card}(E_{n+1}) \text{ par hypothèse de récurrence. } \square \end{aligned}$$

Exemple : Combien de mots de trois lettres existe-t-il théoriquement ?

Puisque l'alphabet β compte 26 lettres, il y a théoriquement $26^3 = 17\,576$ triplets de β^3 c.-à-d. de mots de trois lettres, mais tous n'ont pas un sens.

2 Arrangements et permutations

2.1 Arrangements d'un ensemble

Définition 6 Soit n un entier naturel non nul.

On appelle **factorielle** de n le nombre $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$.

Exemple : $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$ et $\frac{7!}{5!} = \frac{1 \times 2 \times \dots \times 7}{1 \times 2 \times \dots \times 5} = 6 \times 7 = 42$.

Remarques : • Par convention, on pose $0! = 1$.

- On peut remarquer que l'on a toujours $(n+1)! = (n+1)n!$.
- Pour les grandes valeurs de n , on utilisera avec soulagement la calculatrice : n ,

MATH, choix *PRB*, 4.

Définition 7 Soit E un ensemble et k un entier naturel. Un **arrangement** de k éléments de E (k -arrangement) est un k -uplet d'éléments de E deux à deux distincts.

Exemple : Si $E = \{1; 2; 3; 4\}$ alors $(1, 2, 4)$, $(1, 4, 2)$ et $(4, 2, 1)$ sont des 3-arrangements de E .

Remarques :

- Si E est fini, non vide, de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$, on a nécessairement $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$.
- Un k -arrangement de E est donc un élément de E^k , mais ce dernier contient beaucoup plus d'éléments : ceux ayant plusieurs composantes communes. Dans l'exemple précédent, $(4, 1, 4) \in E^3$ n'est pas un 3-arrangement de E .
- Un k -arrangement de E peut-être interprété comme un tirage de k éléments de E avec ordre et sans remise.

Théorème 4 Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

Le nombre de k -arrangements de E est égal à

$$\mathcal{A}_n^k = n \times (n-1) \times \dots \times (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Démonstration : Pour construire un k -uplet d'éléments distincts de E , on a n choix pour le premier élément, $n - 1$ choix pour le second, ..., $n - k + 1$ choix pour le k^{e} . Par ailleurs, $\frac{n!}{(n-k)!} = \frac{1 \times 2 \times \dots \times (n-k) \times (n-k+1) \times \dots \times n}{1 \times 2 \times \dots \times (n-k)} = n \times (n-1) \times \dots \times (n-k+1)$. $\square$

Exemple : $\mathcal{A}_n^1 = \frac{n!}{(n-1)!} = n$ choix possibles d'un seul élément.

Remarque : Qu'en est-il des cas « extrêmes » ?

- Il n'y a qu'une seule façon de ne pas choisir d'éléments, celle de ne pas en prendre. Posons donc $\mathcal{A}_n^0 = 1 = \frac{n!}{(n-0)!}$.

- Si $E = \emptyset$, alors il n'y a qu'un seul arrangement possible de E : lui-même. Posons donc, pour $n = k = 0$, $\mathcal{A}_0^0 = \frac{0!}{0!} = \frac{1}{1} = 1$.

Exemple : Si $E = \{1; 2; 3; 4\}$, le nombre de 2-arrangements de E est

$$\mathcal{A}_4^2 = \frac{4!}{(4-2)!} = 12.$$

Ce sont $(1, 2)$, $(1, 3)$, $(1, 4)$, $(2, 1)$, $(2, 3)$, $(2, 4)$, $(3, 1)$, $(3, 2)$, $(3, 4)$, $(4, 1)$, $(4, 2)$ et $(4, 3)$.

Pour les grandes valeurs de n , on utilisera avec soulagement la calculatrice : n , **MATH**, PRB , 2 , k .

Patate L'éventuel podium (s_2, t_1, p_2) de la course en sac, en tenant compte de l'ordre et donc de la médaille, est un 3-arrangement de $\{s_1; s_2; s_3; p_1; p_2; p_3; t_1; t_2; t_3\}$. Il y a donc $\mathcal{A}_9^3 = 504$ podiums différents.

2.2 Permutations d'un ensemble

Définition 8 Soit E un ensemble fini non vide de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$.

Une **permutation** de E est un n -uplet d'éléments de E deux à deux distincts.

C'est donc un n -arrangement de E .

Lister les permutations de E , c'est écrire les éléments de E dans tous les ordres possibles, sans répétition.

Théorème 5 Le nombre de permutations d'un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}$ est $n!$.

Démonstration : Le théorème précédent avec $k = n$ donne le résultat (même pour $n = 0$...). $\square$

Exemple : Si $E = \{1; 2; 3\}$, les permutations de E sont $(1, 2, 3)$, $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 3)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$ et $(3, 2, 1)$ et il y en a bien $3! = 6$.

Patate Le classement final éventuel $(p_2; t_2; s_3; s_1; t_3; p_3; t_1; p_1; s_2)$ de la course en sac est une permutation de $\{s_1; s_2; s_3; p_1; p_2; p_3; t_1; t_2; t_3\}$.

3 Combinaisons d'un ensemble

3.1 Parties d'un ensemble

Définition 9 Soit E un ensemble.

On dit qu'un ensemble A est une **partie** de E (ou un sous-ensemble de E ou inclus dans E) si tout élément de A est un élément de E . On note alors $A \subset E$.

L'ensemble de toutes les parties de E , de tous les sous-ensembles de E , est noté $\mathcal{P}(E)$.

On a $\mathcal{P}(E) = \{A \mid A \subset E\}$ et si $A \subset E$, alors $A \in \mathcal{P}(E)$.

Exemples : • $\mathbb{N} \subset \mathbb{Q}$ donc $\mathbb{N} \in \mathcal{P}(\mathbb{Q})$.

• Si $E = \{a, b, c\}$, alors la paire $\{a, b\}$ et le singleton $\{c\}$ sont deux parties de E .

[Patate] L'ensemble des coureurs arrivés sans tomber est une partie de l'ensemble des coureurs.

Remarques : • $\mathcal{P}(E)$ est donc un ensemble d'ensembles.

• L'ensemble vide est une partie de tout ensemble : $\forall E, \quad \emptyset \subset E \quad \text{et} \quad \emptyset \in \mathcal{P}(E)$.
On a $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$.

• Il ne faut pas confondre une partie avec un k -uplet. Par exemple pour l'ensemble $E = \{a, b, c\}$, $\{a, b\} = \{b, a\} \in \mathcal{P}(E)$ est une partie à deux éléments tandis que (a, b) et $(b, a) \in E^2$ en sont deux couples distincts. De même, $a \in E$ et $\{a\} \in \mathcal{P}(E)$. Aussi, $\{a; a\} = \{a\} \in \mathcal{P}(E)$ et $(a, a) \in E^2$.

Théorème 6 Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$.

Le nombre de parties de E est égal à $\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$.

Démonstration : Pour constituer une partie de E , il suffit de décider pour chaque élément de E s'il appartient ou non à cette partie. Il y a donc deux possibilités pour chaque élément de E : 0 (il n'appartient pas à la partie) ou 1 (il y appartient). Puisqu'il y a n éléments dans E , il y a au total 2^n parties possibles, autant que de n -uplets de $\{0; 1\}$. $\square$

Exemple : Si $E = \{a, b, c\}$, $\mathcal{P}(E) = \{\emptyset; \{a\}; \{b\}; \{c\}; \{a, b\}; \{a, c\}; \{b, c\}; \{a, b, c\}\}$ de cardinal $2^3 = 8$.

La partie $\{a\}$ peut être associée au 3-uplet $(1, 0, 0)$ de $\{0; 1\}^3$ et la partie $\{b, c\}$ à $(0, 1, 1)$ par exemple.

Le vide est associé à $(0, 0, 0)$ et $(1, 1, 1)$ est associé à E .

Remarque : On peut ainsi identifier $\mathcal{P}(E)$ et $\{0; 1\}^n$: toute partie de E est associée à un n -uplet constitué de 0 et de 1, et réciproquement.

Exemple : On appelle mot de longueur n sur l'alphabet $A = \{a; b\}$, tout n -uplet d'éléments de A , c.-à-d. tout élément de A^n . Par exemple, $(a; b; b; a)$ est un mot de longueur 4.

D'après le théorème 3, il y a $\text{Card}(A^n) = \text{Card}(A)^n = 2^n$ mots de longueur n sur l'alphabet A , c.-à-d. autant que de parties de $\{1; 2; \dots; n\}$. Ceci n'est pas vraiment étonnant si l'on remarque que l'on peut changer a et b en 0 et 1.

[Patate] La course en sac du lycée se termine. Il y a $2^9 = 512$ listes différentes de participants n'étant pas tombés au cours de l'épreuve : celles contenant s_1 ou non, celles contenant s_2 ou non...

3.2 Nombre de combinaisons

Définition 10 Soit E un ensemble fini de cardinal $n \in \mathbb{N}$ et soit $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$.

Une **combinaison** de k éléments E est une partie de E de cardinal k .

Le nombre de combinaisons de k éléments parmi n est noté $\binom{n}{k}$, lu « k parmi n ».

Exemple : Si $E = \{a, b, c\}$, les parties $\{a, b\}$, $\{a, c\}$ et $\{b, c\}$ sont les seules combinaisons de deux éléments de E (i.e. les parties de E de cardinal 2 i.e. les sous-ensembles à deux éléments de E) et $\binom{3}{2} = 3$.

[Patate] Lors de la course en sac du lycée, un podium, $\{t_1; t_2; t_3\}$, constitué uniquement des élèves de terminale, peu importe leur médaille, est une combinaison de $\{s_1; s_2; s_3; p_1; p_2; p_3; t_1; t_2; t_3\}$.

Remarques : • Les combinaisons ne font pas apparaître l'ordre des éléments ni les répétitions : $\{a; b\} = \{b; a\}$ et $\{a; a\} = \{a\}$.

• Les nombres $\binom{n}{k}$ sont appelés **coefficients binomiaux** et vous les retrouverez dans de nombreux domaines des mathématiques. Nous les avons déjà croisés dans le chapitre II sur la loi binomiale en page 41 : dans un arbre de Bernoulli d'ordre n , les chemins menant à k succès sont au nombre de $\binom{n}{k}$. Nous pourrions ici démontrer d'une manière différente des résultats obtenus précédemment. D'ailleurs, l'univers d'un schéma de Bernoulli d'ordre n peut être formalisé par l'ensemble $\Omega_n = \{0; 1\}^n$: $(1, 0, 1)$ correspond à la séquence $S\overline{S}S$ dans la répétition de trois expériences de Bernoulli.

Exemple : On considère les mots de longueur 3 sur l'alphabet $E = \{a; b\}$. Construire un tel mot contenant exactement deux a revient à déterminer la position des a dans le mot. Il y a trois possibilités i.e. $\binom{3}{2}$.

Théorème 7 Soient n et k deux entiers naturels tels que $k \leq n$.

On a
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Après simplification du quotient, on a aussi, pour $1 \leq k \leq n$,

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!}.$$

Démonstration : Pour $n = k = 0$, $\binom{0}{0} = 1$ car $E = \emptyset$ et sa seule partie est $\emptyset$.

On a bien $\frac{0!}{0!(0-0)!} = \frac{1}{1 \times 1} = 1$.

Pour $n \geq 1$, $\binom{n}{0} = 1$ car il n'y a qu'une seule partie à zéro élément : $\emptyset$.

On a bien $\frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{1 \times n!} = 1$.

Pour $1 \leq k \leq n$, à une combinaison $F = \{x_1; \dots; x_k\}$ de k éléments nécessairement distincts de E , on associe $k!$ permutations de F et on obtient les k -uplets d'éléments distincts de F , les k -arrangements de F . En faisant de même pour toutes les autres combinaisons de k éléments de E , on obtient tous les k -uplets d'éléments distincts de E , les k -arrangements de E . D'après le théorème 4, ces derniers sont au nombre de $\mathcal{A}_n^k = n(n-1)\dots(n-k+1)$ et notre construction de tous les k -arrangements montre qu'il y en a $k! \times \binom{n}{k}$ ($k!$ permutations par combinaison).

Ainsi, $n(n-1)\dots(n-k+1) = k! \times \binom{n}{k}$

$$\text{et } \binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1) \cdot (n-k)(n-k-1)\dots 1}{k!(n-k)(n-k-1)\dots 1} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \quad \square$$

$$\text{Exemples : } \circ \binom{14}{12} = \frac{14!}{12!(14-12)!} = \frac{14 \times 13}{2} = 91.$$

$$\circ \binom{27}{3} = \frac{27!}{3!(27-3)!} = \frac{27 \times 26 \times 25}{3 \times 2} = 2925.$$

[Patate] La course en sac du lycée va commencer et les trois élèves de chaque niveau sont parés. Combien y a-t-il de podium possibles si l'on ne tient pas compte de leur position et donc de leur médaille? On cherche le nombre de combinaisons de trois élèves parmi neuf : $\binom{9}{3} = \frac{7 \times 8 \times 9}{2 \times 3} = 84$ triplettes de podium possibles.

Propriété 1 Soient n et k deux entiers naturels tels que $k \leq n$.

$$\text{On a } \binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{1} = n \text{ si } n \geq 1, \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \text{ si } n \geq 2, \quad \binom{n}{n} = 1$$

$$\text{et } \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}.$$

Démonstration : Il suffit d'utiliser la propriété précédente :

$$\binom{n}{0} = \frac{n!}{0!(n-0)!} = \frac{n!}{1 \times n!} = 1 \text{ (cf. dém. précédente), } \binom{n}{1} = \frac{n!}{1!(n-1)!} = \frac{n \times (n-1)!}{1 \times (n-1)!} = n,$$

$$\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1) \times (n-2)!}{2 \times (n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2}, \quad \binom{n}{n} = \frac{n!}{n!(n-n)!} = \frac{n!}{0! \times n!} = 1$$

$$\text{et } \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}.$$

Il est aussi intéressant d'effectuer ces dénombrements directement.

Dans un ensemble de cardinal n , il existe une unique partie à 0 élément, l'ensemble vide, une unique partie à n éléments, l'ensemble lui-même, et n parties à 1 élément, celles de la forme $\{x\}$, les singletons.

Pour construire toutes les parties à 2 éléments, les paires, commençons par numéroter ces derniers : $x_1, \dots, x_n$. Il y a alors $n-1$ parties à deux éléments contenant x_1 , correspondant au nombre de choix possibles pour le deuxième élément. Les parties à deux éléments contenant x_2 que l'on doit alors ajouter sont au nombre de $n-2$, correspondant au nombre de choix restants possibles car il ne faut pas comptabiliser deux fois celle contenant x_1 . Les parties à deux éléments contenant x_3 mais pas x_2 ni x_1 , déjà comptabilisées, sont au nombre de $n-3$... Il reste enfin la partie à deux éléments contenant x_{n-1} mais pas les précédents : $\{x_{n-1}; x_n\}$.

Il y a donc au total $(n-1) + (n-2) + \dots + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$ parties à deux éléments.

Quant à la dernière égalité, elle signifie qu'il y a autant de parties à k éléments que de parties à $n-k$ éléments. En effet, en choisir k revient à ne pas en choisir $n-k$. C'est ce que l'on appelle la symétrie des coefficients binomiaux. $\square$

Exemple : Les 35 élèves d'une classe de terminale sont tous candidats à l'élection des délégués, au désespoir de leur professeur principal chargé de l'organiser. À combien de couples de délégués différents fait-il face ? $\binom{35}{2} = \frac{35 \times 34}{2} = 595$ couples possibles.

Théorème 8 Relation de Pascal

Pour tous entiers naturels k et n tels que $1 \leq k \leq n-1$,

$$\text{on a } \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}.$$

Démonstration : On considère un élément e d'un ensemble E de cardinal n . Il existe $\binom{n}{k}$ combinaisons de k éléments de E . Ces dernières sont $\binom{n-1}{k-1}$ à contenir e et $\binom{n-1}{k}$ à ne pas contenir e .

On peut aussi démontrer cette relation de Pascal par le calcul suivant.

$$\begin{aligned} \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} \\ &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} \times \frac{k}{k} + \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} \times \frac{n-k}{n-k} = \frac{(n-1)!(k+n-k)}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}. \quad \square \end{aligned}$$

On peut ainsi calculer les coefficients binomiaux de proche en proche. Par exemple, $\binom{6}{3} = \binom{5}{2} + \binom{5}{3} = \binom{5}{2} + \binom{5}{5-2} = 2\binom{5}{2} = 2 \times \frac{5 \times (5-1)}{2} = 20$. Construisons alors le fameux triangle de Pascal même si pour les grandes valeurs, nous utiliserons la calculatrice avec soulagement : n , $\boxed{\text{MATH}}$, choix *PRB* puis *Combinaison* (ou *nCr*), k .

Triangle de Pascal (Blaise) :

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	...	i	$i+1$	$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}$
0	1							...			1
1	1	1						...			2
2	1	2	1					...			4
3	1	3	3	1				...			8
4	1	4	6	4	1			...			16
5	1	5	10	10	5	1		...			32
6	1	6	15	20	15	6	1	...			64
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
m	1	m		$\binom{m}{3}$	$\binom{m}{4}$			...	$\binom{m}{i}$	$\binom{m}{i+1}$	2^m
$m+1$	1	$m+1$			$\binom{m}{3} + \binom{m}{4}$			...		$\binom{m}{i} + \binom{m}{i+1}$	2^{m+1}
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

Par exemple, les 15 ont été obtenus en calculant $5 + 10$ et $10 + 5$, le 20 avec $10 + 10$...

$\binom{n}{k}$ est le $(k+1)^{\text{e}}$ terme de la $(n+1)^{\text{e}}$ ligne du triangle de Pascal puisque

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k} \quad \text{en n'oubliant pas la ligne } n=0 \text{ et la colonne } k=0.$$

Propriété 2 Soit $n \in \mathbb{N}$. On a $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$.

Démonstration : Soit E un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}$. Nous allons effectuer une partition de $\mathcal{P}(E)$.

Pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, on désigne par E_k l'ensemble des parties de E de cardinal k .

On a $E_k \subset \mathcal{P}(E)$ et, par définition, $\text{Card}(E_k) = \binom{n}{k}$.

Ces ensembles sont deux à deux disjoints ($E_i \cap E_j = \emptyset$ pour $i \neq j$) et leur réunion est $\mathcal{P}(E)$.

Le théorème du principe additif en page 297 nous permet alors d'affirmer que

$$2^n = \text{Card}(\mathcal{P}(E)) = \text{Card}(E_0 \cup E_1 \cup \dots \cup E_n) = \sum_{k=0}^n \text{Card}(E_k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}. \quad \square$$

Exemple : Si $E = \{a; b; c\}$, $\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^3 = 8$ et l'on a bien $\binom{3}{0} = 1$ partie à zéro élément, $\binom{3}{1} = 3$ parties à un élément, $\binom{3}{2} = 3$ parties à deux éléments et $\binom{3}{3} = 1$ partie à trois éléments.

Signalons la formule suivante, très utile mais au programme de l'option experte seulement.

Propriété 3 Binôme de Newton

Soient a et b deux réels. On a $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$.

$$\text{Exemples : } \circ (a+b)^2 = \sum_{k=0}^2 \binom{2}{k} a^{2-k} b^k = \binom{2}{0} a^2 b^0 + \binom{2}{1} a^1 b^1 + \binom{2}{2} a^0 b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

$$\circ (a+b)^3 = \sum_{k=0}^3 \binom{3}{k} a^{3-k} b^k = \binom{3}{0} a^3 b^0 + \binom{3}{1} a^2 b^1 + \binom{3}{2} a^1 b^2 + \binom{3}{3} a^0 b^3 \\ = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3.$$

$$\circ (a+b)^5 = \sum_{k=0}^5 \binom{5}{k} a^{5-k} b^k = \binom{5}{0} a^5 b^0 + \binom{5}{1} a^4 b^1 + \binom{5}{2} a^3 b^2 + \binom{5}{3} a^2 b^3 + \binom{5}{4} a^1 b^4 + \binom{5}{5} a^0 b^5 \\ = a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

$$\circ \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = (1+1)^n = 2^n.$$

4 Synthèse

Ce qui est écrit ici l'est de manière informelle, aucune précision n'est faite sur les entiers, les notations sont implicites... C'est un bref résumé du cours qui ne se suffit pas à lui-même mais il a le mérite d'exister.

Soit $E = \{1; 2; \dots; n\}$ de cardinal n .

- Si $A \cap B = \emptyset$, alors $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$.
- $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) - \text{Card}(A \cap B)$.
- $\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B)$.

- $(; ; \dots ;)$ désigne une liste, un « uplet », un élément de E^k
et $\{ ; ; \dots ; \}$ désigne un ensemble, un élément de $\mathcal{P}(E)$.
- Un k -uplet est un élément de E^k .
Il y a $\text{Card}(E^k) = \text{Card}(E)^k$ k -uplets différents.
Ex. : le couple $(3, 1) \in E^2$, le triplet $(2, 1, 2) \in E^3$, le 4-uplet $(2; 3; 4; 2) \in E^4$
mais $\{1; 3\} \notin E^2$.
Tirage avec ordre et avec remise.
- Un k -arrangement de E est un k -uplet d'éléments distincts.
Il y a $\mathcal{A}_n^k = \frac{n!}{k!} = n(n-1)\dots(n-k+1)$ k -arrangements différents de E .
Ex. : $(3, 2)$ est un 2-arrangement, $(2, 1, 2) \in E^3$ n'est pas un 3-arrangement.
Tirage avec ordre et sans remise.
- Une permutation est un n -arrangement, un n -uplet d'éléments distincts de E .
Il y a $n!$ permutations de E .
Ex. : $(2, 3, 1)$ est une permutation de $\{1; 2; 3\}$ mais $(1, 1, 3)$ n'en est pas une.
- Une partie de E est un élément de $\mathcal{P}(E)$, un sous-ensemble de E .
Il y a $\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$ parties différentes de E .
Ex. : $\{1\}$ est une partie de E mais 1 ne l'est pas, c'est un élément de E : $\{1\} \in \mathcal{P}(E)$ et $1 \in E$.
- Une combinaison de k éléments de E est une partie, un sous-ensemble, de E contenant k éléments.
Il y a $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ combinaisons différentes de k éléments.
Ex. : $\{1; 3; 4\} \in \mathcal{P}(E)$ est une 3-combinaison de E mais pas $(1, 3, 4) \in E^3$.
Tirage sans ordre et sans remise.

$$\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}, \quad \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}, \quad \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n.$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n \text{ si } n \geq 1, \quad \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \text{ si } n \geq 2.$$
 $\binom{n}{k}$ est aussi le nombre de mots de longueur n comportant k fois la même lettre sur un alphabet à deux lettres, le nombre de chemins comportant k succès dans un arbre de Bernoulli d'ordre n (cf. chapitre II en page 41), le coefficient du terme $a^{n-k}b^k$ dans le développement de l'identité $(a+b)^n$ (cf. option experte).

Exercices

COMBINATOIRE & DÉNOMBREMENT

Exercice 1 Soient A et B deux ensembles disjoints.

1. Calculer $\text{Card}(A \cup B)$ et $\text{Card}(A \times B)$ lorsque $\text{Card}(A) = 11$ et $\text{Card}(B) = 8$.
2. Calculer $\text{Card}(B)$ et $\text{Card}(A \times B)$ lorsque $\text{Card}(A) = 20$ et $\text{Card}(A \cup B) = 32$.
3. Calculer $\text{Card}(B)$ et $\text{Card}(A \cup B)$ lorsque $\text{Card}(A) = 9$ et $\text{Card}(A \times B) = 108$.
4. Calculer $\text{Card}(A)$ et $\text{Card}(B)$ lorsque $\text{Card}(A \cup B) = 23$, $\text{Card}(A \times B) = 132$ et $\text{Card}(A) > \text{Card}(B)$.

Exercice 2 Tous au club !

Le club Math Max du lycée de La-Fare-en-Dole compte 84 membres passionnés de ces deux grands domaines des mathématiques que sont l'analyse et la géométrie. 60 sont férus du premier et 42 sont épris du second. Combien sont entichés des deux ?

Exercice 3 Plan-plan

Le plan $\mathbb{R}^2$ est muni d'un repère orthonormé.

1. (a) I est l'ensemble des points de coordonnées entières (x, y) telles que $-2 \leq x \leq 7$ et $3 \leq y \leq 6$.
Écrire l'ensemble I sous la forme d'un produit cartésien puis le représenter.
- (b) Faire de même avec le domaine J de coordonnées entières telles que $-\frac{3}{2} \leq x < 5$ et $y \geq \pi$.
- (c) Faire de même avec le domaine K de coordonnées réelles telles que $x^2 \leq 9$ et $y^2 > 4$.
2. On donne $A = [3; 9]$, $B = [-2; 4]$, $C =]1; 5[$, $D =]-3; 6]$, $E = [3; +\infty[$ et $F =]-\infty; 8[$.
 - (a) Donner des exemples de couples $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $(x, y) \in A \times B$, $(x, y) \in B \times A$, $(x, y) \in D^2$, $(x, y) \notin E^2$, $(x, y) \in E \times F$, $(x, y) \notin F \times E$, $(x, y) \in (B \cap C) \times (D \cap E)$, $(x, y) \notin (C \cup E) \times (A \cap F)$, $(x, y) \notin D \times \mathbb{R}$.
 - (b) Représenter dans le plan les ensembles $A \times B$, $C \times D$, $D \times C$, $A \times E$, $F \times C$, $E \times F$, B^2 , F^2 , $(\mathbb{C}_{\mathbb{R}}A) \times C$, $D \times (\mathbb{C}_{\mathbb{R}}B)$, $(\mathbb{C}_{\mathbb{R}}E) \times F$, $(\mathbb{C}_{\mathbb{R}}B)^2$, $(\mathbb{C}_{\mathbb{R}}D) \times (\mathbb{C}_{\mathbb{R}}A)$, $\mathbb{R} \times \{3\}$, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$, $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$.
3. Que dire du domaine L des points de coordonnées réelles telles que $2x + 1 \leq y \leq 2x + 3$?
4. Soit le domaine du plan $\mathcal{D} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.
Décrire et représenter le domaine $\mathcal{D}$. Est-il le produit cartésien de deux ensembles ?

5. D'après vous, à quoi ressemblent les parties de $\mathbb{R}^2$ qui peuvent s'écrire comme produit cartésien de deux intervalles de $\mathbb{R}$?

Exercice 4 Miam-miam

Un restaurateur propose deux entrées, trois plats et quatre desserts au choix et ce, en quatre formules : entrée-plat-dessert, entrée-plat, plat-dessert et entrée-dessert (si, si). Combien de menus différents peut-il servir ?

Exercice 5 J'aime lire

- Combien faut-il de caractères en tout pour écrire tous les numéros des pages d'un livre en comportant 234 ?
- On a utilisé 612 caractères pour numérotter les pages d'un livre. Combien en comporte-t-il ?

Exercice 6 Les chiffres et les nombres

- Combien de nombres à cinq chiffres peut-on former avec les chiffres 4, 2 et 1 ?
- On souhaite construire au moins 1000 nombres différents à n chiffres en utilisant uniquement les chiffres 2, 3, 5 et 7.
 - Cette contrainte est-elle respectée lorsque $n = 2$? Lorsque $n = 3$?
 - Déterminer la valeur minimale de n pour respecter cette contrainte.

Exercice 7 Factorielle

- Simplifier les écritures : $a = (m+1) \times m!$, $b = \frac{(p+2)!}{(p+1)(p+2)}$, $c = \frac{(k+5)!}{(k+7)!}$,
 $d = (n+3)! - 3(n+2)!$, $e = \frac{n!}{(n+1)!} - \frac{(n-1)!}{n!}$
- Écrire à l'aide de factorielles : $f = \frac{1}{3 \times 2}$, $g = \frac{1}{13 \times 14}$, $h = 5 \times 7 \times 6 \times 4$, $i = 5 \times 7$.
- VouF ? Si $n! = p!$ alors $n = p$.

Exercice 8 Écrire un programme Python renvoyant la valeur de $n!$ pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 9 Au bureau

Les trois membres les plus éminents d'une association vont être élus au bureau : un président, un secrétaire et un trésorier qui ne peuvent cumuler les mandats. Combien de bureaux différents peuvent être élus ?

Exercice 10 (Dé)confinée

Même si elle ne peut toujours pas quitter son département, Agathe peut enfin retrouver une vie sociale. Elle souhaite revoir sa sœur Colette et ses amies Lou, Jade et Rosalie qui habitent différents villages alentour. Disposant d'un temps limité, elle ne pourra en visiter que trois. Combien de trajets différents peut-elle effectuer ?

Exercice 11 Jeu de rôle

Six rôles sont à pourvoir pour la pièce que le théâtre municipal de La Fare-en-Dole est en train de monter.

La troupe comportant douze acteurs, combien de distributions possibles peut-on avoir sur scène ?

Exercice 12 Alpha pas bête

Avec les 26 lettres dont 6 voyelles de l'alphabet latin, combien peut-on former de mots de cinq lettres :

- comportant des lettres différentes ?
- commençant par une voyelle et finissant par une consonne ?
- contenant exactement une voyelle ?

Exercice 13 Instanagram

Combien d'anagrammes distinctes, ayant un sens ou non (« rose », « oser » et « sero » par exemple), peut-on former avec les lettres des mots « trois », « facteurs », « factorielle » et « zozotez » ?

Exercice 14 Baobabs

On s'intéresse aux anagrammes du mot *baobabs*, qu'elles aient une signification ou non.

- Combien y a-t-il de telles anagrammes ?
- Combien commencent par la lettre *b* ?

Exercice 15

- Soient A et B deux ensembles finis, non vides, disjoints, de cardinal n et p .
 - Combien de permutations de $A \cup B$ existe-t-il ?
 - Combien de permutations de $A \cup B$ existe-t-il si l'on souhaite que les éléments de A restent groupés, tout comme les éléments de B .
- Questions similaires pour trois ensembles A , B et C deux à deux disjoints de cardinaux respectifs n , p et q .

Exercice 16 VouF ?

Soient $E = \{a; b; c; \dots; z\}$, $A = \{a; b; \dots; f\}$, $G = \{g; h; \dots; t\}$, $R = \{r; s; \dots; z\}$.

- | | | |
|----------------------------------|-------------------------------------|---|
| 1. $a \in A$ | 8. $G \subset \mathcal{P}(E)$ | 15. $\{(s, e, b)\} \in \mathcal{P}(E^3)$ |
| 2. $\{s\} \in R$ | 9. $A \cap R \subset E$ | 16. $\mathbb{C}_E A = G \cup R$ |
| 3. $t \in \mathcal{P}(G)$ | 10. $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$ | 17. $G \cap R \in G$ |
| 4. $\{a; b\} \in E^2$ | 11. $E \subset E$ | 18. $(b, o, b) \in A^3$ |
| 5. $\{m; n\} \in \mathcal{P}(G)$ | 12. $(r, s) \in \mathcal{P}(R^2)$ | 19. $\{f; o; u\} \in A \times G \times R$ |
| 6. $(r, s, t) \in G \cap R$ | 13. $\{a; b\} \in \mathcal{P}(A^2)$ | 20. $(t, t) \in G \times R$ |
| 7. $A \in E$ | 14. $(q, q) \in \mathcal{P}(G^2)$ | |

Exercice 17

Soient les ensembles $A = \{1; 2; 4\}$, $B = \{3; 4\}$, $C = \{0; 1; 4\}$ et $D = \{0; 3\}$.

- Combien y a-t-il de parties de A ? Les lister.
- Déterminer les ensembles suivants.

(a) $A \times B$		(c) $(A \times B) \cap (C \times D)$
(b) $C \times D$		(d) $(A \cap C) \times (B \cap D)$
- Que conjecturer ?

Exercice 18 VouF ?

E est un ensemble de cardinal n et k est un entier naturel tel que $k \leq n$.

- (a) Le nombre de parties de E est égal au nombre de n -uplets de l'ensemble $\{a; b\}$.
- (b) Le nombre de permutations de E égale le nombre de parties de E .
- (c) Le nombre de partie de E égale le nombre d'éléments de E^n .

Exercice 19 Fin de partie

Démontrer par récurrence la formule donnant le cardinal de $\mathcal{P}(E)$ en fonction du cardinal fini de E .

Exercice 20

E étant une liste, que fait l'algorithme suivant ? Écrire ensuite une `PartieTrois`.

```

1| def PartieDeux(E) :
2|     PartieDeux=[]
3|     ListeTemp=[]
4|     for i in range(len(E)) :
5|         for j in range(i+1,len(E)) :
6|             ListeTemp.append(E[i])
7|             ListeTemp.append(E[j])
8|             PartieDeux.append(ListeTemp)
9|             ListeTemp=[]
10|     print(PartieDeux)

```

Exercice 21 VouF ?

Soit l'ensemble $E = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

- | | |
|---|--|
| <ul style="list-style-type: none"> (a) $(2, 5, 1)$ est un triplet de E. (b) $(3, 4)$ est une partie de E^2. (c) $\{3; 4; 1\} = \{1; 3; 4\}$ (d) $\{2; 4; 5; 2\} = \{2; 4; 5\}$ (e) $(3, 3, 5) = (3, 5)$ (f) $(1, 2, 5) = (2, 1, 5)$ (g) $\{(1, 1, 3)\} = \{(1, 3, 1)\}$ (h) $\{2; 3; 4; 1; 5\}$ est une permutation de E. (i) $(1; 3; 5; 3)$ est un 4-arrangement de E. | <ul style="list-style-type: none"> (j) $(1, 4)$ est une 2-combinaison de E. (k) Il y a 32 arrangements de 2 éléments de E. (l) Il y a 3125 permutations de E. (m) Il y a 25 parties différentes de E. (n) Il y a 9 combinaisons de trois éléments de E. (o) Pour $k \geq 2$, le nombre de k-uplets de E est inférieur au nombre de parties à k éléments de E. |
|---|--|

Exercice 22 Les uns aux autres

- | | |
|---|---------------------------|
| 1. Nombre de tirages successifs sans remise de n objets parmi n . | (a) $\frac{n!}{k!(n-k)!}$ |
| 2. Nombre de tirages successifs avec remise de k objets parmi n . | (b) $\frac{n!}{(n-k)!}$ |
| 3. Nombre de tirages successifs sans remise de k objets parmi n . | (c) n^k |
| 4. Nombre de tirages de k objets différents parmi n . | (d) $n!$ |

Exercice 23 Recherche cardinale

E est un ensemble de cardinal n . Calculer la valeur de n dans chacun des cas suivants.

- E possède 32 parties. Construire alors un tel ensemble E .
- Il y a exactement 4556 listes de deux éléments distincts de E .
- E contient exactement 325 parties à deux éléments.

Exercice 24 Le choix dans la démarche

- Écrire $\binom{2021}{2020}$ de trois manières différentes. Laquelle choisirez-vous de calculer ?
- Calculer, sans calculatrice, $\left(\binom{10}{9} - \binom{10}{0}\right) \times \left(\binom{10}{1} + \binom{10}{10}\right)$.
- Montrer que, pour $1 \leq p \leq n$, $n \binom{n-1}{p-1} = p \binom{n}{p}$.
- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \binom{2n}{n}$. Montrer que la suite $(u_n)_{\mathbb{N}^*}$ est strictement croissante.

Exercice 25 Joyeux anniversaire

D'après vous, quelle est la probabilité que dans un groupe de 23 personnes, au moins deux personnes aient exactement le même jour anniversaire ? Et dans un groupe de 32 personnes ? Calculez ces probabilités. Surpris ?

Exercice 26 Pokermon

Au poker, on appelle « main » tout ensemble de cinq cartes.

Pour un jeu de 52 cartes, combien y a-t-il de mains possibles ?

Combien y en a-t-il contenant la dame de cœur ?

Exercice 27 Porte à porte

Le proviseur du lycée Henri Matisse de La-Fare-en-Dole doit constituer un groupe de cinq élèves pour aller présenter son établissement dans les collèges environnants.

- Six élèves sont initialement volontaires. Combien de groupes différents le proviseur peut-il constituer ?
- Après un second discours exaltant, dix candidats sont finalement volontaires, quatre sont en seconde et six en terminale. Le groupe doit être composé de deux élèves de seconde et trois de terminale. Combien de groupes différents le proviseur peut-il constituer ?

Exercice 28 Combinaisons spéciales

Le lycée Henri Matisse de La-Fare-en-Dole propose dix spécialités aux élèves de première générale.

- Combien y a-t-il de combinaisons de trois spécialités ?
- Colette a bien évidemment choisi la spécialité mathématiques mais elle hésite encore pour les deux autres entre anglais, histoire des arts, physique-chimie, littérature et sciences naturelles. Combien a-t-elle de possibilités ?

Exercice 29  Écrire deux fonctions Python, une renvoyant la valeur de $\mathcal{A}_n^k$ et une autre renvoyant la valeur $\binom{n}{k}$ pour $(n, k) \in \mathbb{N}^2$.

Exercice 30 Penthouse

Le siège du ministère de la défense américain a la forme d'un pentagone régulier. On considère ses cinq sommets.

1. Combien de vecteurs ayant pour extrémités ces points peut-on tracer en comptant le vecteur nul ?
2. Combien de droites passant par deux de ces points peut-on tracer ?

Exercice 31 Les cartes en main

Au poker, on utilise un jeu de 52 cartes : treize valeurs (1 à 10 puis valet, dame, roi) en quatre familles (Pique, Cœur, Carreau et Trèfle).

Une main est un ensemble de cinq cartes.

1. Combien de mains différentes peut-on recevoir ?
2. Une couleur est une main de la même famille.
 - (a) Combien y a-t-il de mains de ce type en Cœur ?
 - (b) Combien y a-t-il de mains de ce type en tout ?
3. Un carré est une main composée de quatre cartes de la même valeur, la cinquième étant quelconque.
 - (a) En considérant la cinquième carte, combien y a-t-il de carrés de 10 ?
 - (b) Combien y a-t-il de carrés en tout ?

Exercice 32 Résoudre les équations

$$\binom{n}{5} = 17\binom{n}{4} \text{ pour } n \geq 5 \quad \text{et} \quad \binom{2n}{1} + \binom{2n}{2} + \binom{2n}{3} = 387n \text{ pour } n \geq 2.$$

Exercice 33 Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots$$

Exercice 34 Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $(7 + \sqrt{5})^n + (7 - \sqrt{5})^n$ est entier.**Exercice 35** Urne numéraire

Une urne contient cent jetons numérotés de 1 à 100 et l'on tire simultanément deux jetons.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Combien y a-t-il de tirages comportant deux numéros pairs ?
3. Y a-t-il plus de tirages dont la somme des numéros est paire ou impaire ?

Exercice 36 FFFacile

Le sélectionneur de l'équipe de France de football doit choisir les onze joueurs qui débiteront un match et il a 23 joueurs à sa disposition.

1. Il commence par ne pas prendre en compte le poste de chaque joueur.
Combien d'équipes peut-il former ?
2. Suites aux multiples protestations et menaces, il décide d'y regarder d'un peu plus près. Parmi les 23 joueurs, on trouve trois gardiens, huit défenseurs, cinq milieux de terrains et sept attaquants.
Sachant que l'équipe sera composée d'un gardien, de quatre défenseurs, de trois milieux de terrains et de trois attaquants, combien d'équipes peut-il former ?

Exercice 37 Dans quel état j'erre ?

Agathe désire ranger sur sa plus belle étagère ses ouvrages préférés : cinq romans, trois bandes dessinées et deux manuels de mathématiques. De combien de façons différentes peut-elle ranger ses livres :

- (a) si elle ne veut pas de placement précis ?
- (b) si elle veut qu'ils soient groupés par genre ?
- (c) si elle veut que seuls les manuels soient groupés ?
- (d) si elle ne veut pas que deux bandes dessinées soient côte à côte ?

Exercice 38 Patate

Au lycée Henri Matisse de La-Fare-en-Dole, un tournoi de course en sac est organisé afin de déterminer les participants à la grande finale annuelle. On dispose de n terrains et cela convient parfaitement pour les $2n$ équipes en lice. On souhaite dénombrer de deux manières différentes l'ensemble de tous les premiers matchs possibles.

1. Justifier qu'un premier match est un ensemble de n paires non ordonnées où toutes les équipes apparaissent.
2. Première méthode : Commencer par fixer n équipes.
3. Deuxième méthode : Choisir la première paire d'équipes, puis la suivante et ainsi de suite.
4. Vérifier les résultats pour $n = 2$.

Exercice 39 Répétition générale

Soient $E = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ un ensemble non vide de cardinal n et k un entier naturel. On souhaite déterminer le nombre de combinaisons de k éléments de E avec éventuelles répétitions.

1. Associer à une telle combinaison, un certain n -uplet $(k_1; k_2; \dots; k_n)$ de $\{0; 1; \dots; k\}$ tel que la somme des k_i vaut k .
2. On considère le mot $000 \dots 0$ avec $n + k - 1$ chiffres 0. On souhaite remplacer k de ces 0 par des 1. De combien de manières différentes peut-on procéder ?
3. Comment faire correspondre à ce nouveau mot un n -uplet $(k_1; k_2; \dots; k_n)$ comme défini précédemment ?
4. En déduire que le nombre de combinaisons à k éléments de E avec répétitions est $\binom{n+k-1}{k}$.
5. On dispose de fleurs jaunes, roses, rouges et bleues et l'on souhaite faire un bouquet de dix fleurs. Combien de bouquets différents peut-on constituer ?
6. (a) Combien de triplets ordonnés (x, y, z) d'entiers naturels non nuls tels que $x + y + z = 50$ existe-t-il ? Penser à un mot de taille 50.
(b) Et si les entiers peuvent être nuls ?
(c)  Écrire un programme permettant de les compter et les lister.

Comptez jusqu'à 481 et réalisez le devoir n° 481 puis avancez jusqu'à 483 pour le devoir n° 483.

Corrigé des exercices

COMBINATOIRE & DÉNOMBREMENT

Exercice 1 Soient A et B deux ensembles disjoints.

1. $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) = 11 + 8 = 19$
et $\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B) = 11 \times 8 = 88.$
2. $\text{Card}(B) = \text{Card}(A \cup B) - \text{Card}(A) = 32 - 20 = 12$
et $\text{Card}(A \times B) = \text{Card}(A) \times \text{Card}(B) = 20 \times 12 = 240.$
3. $\text{Card}(B) = \frac{\text{Card}(A \cup B)}{\text{Card}(A)} = \frac{108}{9} = 12$
et $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) = 9 + 12 = 21.$
4. $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) = 23$ donc $\text{Card}(B) = 23 - \text{Card}(A)$
et $\text{Card}(A \times B) = 132 \implies \text{Card}(A)(23 - \text{Card}(A)) = 132$
 $\implies 132 - 23 \text{Card}(A) + \text{Card}(A)^2 = 0 \implies \text{Card}(A) = \frac{23 \pm 1}{2} = 11 \text{ ou } 12.$
Puisque $\text{Card}(A) > \text{Card}(B)$, $\text{Card}(A) = 12$ et $\text{Card}(B) = 23 - 12 = 11.$

Exercice 2 Tous au club !

On appelle A l'ensemble des membres férus d'analyse, G l'ensemble des membres épris de géométrie et C , l'ensemble des membres du club.

Puisqu'ils sont tous passionnés, on a $C = A \cup G$.

Ainsi, il y a $\text{Card}(A \cap G) = \text{Card}(A) + \text{Card}(G) - \text{Card}(C) = 60 + 42 - 84 = 18$ membres entichés des deux domaines.

Exercice 3 Plan-plan

1. (a) $I = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid -2 \leq x \leq 7 \text{ et } 3 \leq y \leq 6\} = \llbracket -2; 7 \rrbracket \times \llbracket 3; 6 \rrbracket$: c'est un réseau de 40 points du plan de coordonnées entières.
- (b) $J = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 \mid -\frac{3}{2} \leq x < 5 \text{ et } y \geq \pi\} = \llbracket -1; 4 \rrbracket \times \llbracket 4; +\infty \rrbracket$: c'est le réseau de points du plan de coordonnées entières situés entre les droites d'équation $x = -1$ et $x = 4$ et au-dessus de la droite d'équation $y = 4$.
- (c) $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -3 \leq x \leq 3 \text{ et } y < -2 \text{ ou } y > 2\}$
 $= [-3; 3] \times (]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[)$: les deux bandes rectangulaires entre $x = -3$ et $x = 3$, en dessous de $y = -2$ ou au-dessus de $y = 2$.
2. On donne $A = [3; 9]$, $B = [-2; 4]$, $C =]1; 5[$, $D =]-3; 6]$, $E = [3; +\infty[$ et $F =]-\infty; 8[$.
 - (a) $(\pi, 0) \in A \times B$, $(-2, 9) \in B \times A$, $(1, 2) \in D^2$, $(4, 1) \notin E^2$,
 $(5, 5) \in E \times F$, $(9, 9) \notin F \times E$, $(3, 2) \in (B \cap C) \times (D \cap E)$,
 $(4, 2) \notin (C \cup E) \times (A \cap F)$, $(7, 5) \notin D \times \mathbb{R}$.
 - (b) $A \times B$: un carré fermé de $c=6$ de côté, $C \times D$: un rectangle ouvert $h=4$,
 $v=9$, $D \times C$: un rectangle ouvert $h=9$, $v=4$, $A \times E$: une bande
verticale $h=6$, au-dessus de $y = 3$, $F \times C$: une bande horizontale $v=4$,

à gauche de $x = 8$, $E \times F$: un quart de plan en bas à droite de $(3, 8)$, B^2 : un carré fermé de $c=6$ de côté, F^2 : un quart de plan en bas à gauche de $(8, 8)$, $(\mathbb{C}_R A) \times C$: deux bandes horizontales $v=4$, une à gauche de $x = 3$ et une à droite de $x = 9$, $D \times (\mathbb{C}_R B)$: deux bandes verticales $v=9$, une au-dessous de $y = -2$ et une au-dessus de $y = 4$, $(\mathbb{C}_R E) \times F$: un quart de plan en bas à gauche de $(3, 8)$, $(\mathbb{C}_R B)^2$: quatre quarts de plan en bas à gauche de $(-2, -2)$, en bas à droite de $(4, -2)$, en haut à droite de $(4, 4)$, en haut à gauche de $(-2, 4)$, $(\mathbb{C}_R D) \times (\mathbb{C}_R A)$: quatre quarts de plan en bas à gauche de $(-2, 3)$, en bas à droite de $(6, 3)$, en haut à droite de $(6, 9)$, en haut à gauche de $(-3, 9)$, $\mathbb{R} \times \{3\}$: la droite d'équation $y = 3$, $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$: le réseau de tous les points de coordonnées entières, $\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*$: le plan privé des deux axes, $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$: les droites verticales d'équation $x = n \in \mathbb{N}$.

3. $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x + 1 \leq y \leq 2x + 3\}$ est la bande oblique des points situés entre les droites $y = 2x + 1$ et $y = 2x + 3$. Ce n'est pas un produit cartésien car $(0, 2) \in L$, $(1, 4) \in L$ mais $(0, 4) \notin L$. Précisons : si $L = M \times N$, on a $0, 1 \in M$ et $2, 4 \in N$ donc $(0, 4)$ devrait aussi appartenir à L .
4. $\mathcal{D} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ est le disque fermé de centre O et de rayon 1. Ce n'est pas le produit cartésien de deux ensembles car $(1, 0) \in \mathcal{D}$, $(0, 1) \in \mathcal{D}$ mais $(1, 1) \notin \mathcal{D}$. Précisons : si $\mathcal{D} = P \times Q$, on a 0 et $1 \in P$ et Q donc $(1, 1)$ devrait aussi appartenir à $\mathcal{D}$.
5. Les parties de $\mathbb{R}^2$ qui peuvent s'écrire comme produit cartésien de deux intervalles de $\mathbb{R}$ semblent être les rectangles, les bandes, les demi-plans, les quarts de plan, ouverts ou fermés et dont les bords sont parallèles aux axes.

Exercice 4 Miam-miam

On a $2 \times 3 \times 4 = 24$ formules e-p-d possibles, $2 \times 3 = 6$ formules e-p possibles, $3 \times 4 = 12$ formules p-d possibles et $2 \times 4 = 8$ formules e-d possibles. Le restaurateur peut donc servir $24 + 6 + 12 + 8 = 50$ menus différents.

Pour être plus rigoureux, on appelle E , P , D et M les ensembles des entrées, plats, desserts et menus.

On a la réunion disjointe $M = (E \times P \times D) \cup (E \times P) \cup (P \times D) \cup (E \times D)$.

Les principes additif et multiplicatif donnent :

$$\begin{aligned}
 \text{Card}(M) &= \text{Card}((E \times P \times D) \cup (E \times P) \cup (P \times D) \cup (E \times D)) \\
 &= \text{Card}(E \times P \times D) + \text{Card}(E \times P) + \text{Card}(P \times D) + \text{Card}(E \times D) \\
 &= \text{Card}(E) \times \text{Card}(P) \times \text{Card}(D) + \text{Card}(E) \times \text{Card}(P) + \text{Card}(P) \times \text{Card}(D) \\
 &\quad + \text{Card}(E) \times \text{Card}(D) \\
 &= 2 \times 3 \times 4 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + 2 \times 4 = 50.
 \end{aligned}$$

Exercice 5 J'aime lire

1. Il y a 9 nombres entre 1 et 9, 90 nombres entre 10 et 99, 135 nombres entre 100 et 234. Il faut donc $9 \times 1 + 90 \times 2 + 135 \times 3 = 594$ caractères pour écrire tous les nombres entre 1 et 234.

2. Il faut $9 \times 1 + 90 \times 2 = 189$ caractères pour écrire tous les nombres de $\llbracket 1; 99 \rrbracket$ et donc $612 - 189 = 423$ pour écrire ceux entre 100 et p . Ainsi, $p - 99 = \frac{423}{3} = 141$ et ce livre comporte $p = 141 + 99 = 240$ pages.

Exercice 6 Les chiffres et les nombres

- Un tel nombre à cinq chiffres est un 5-uplet de $\{1; 2; 4\}^5$. On peut donc former $\text{Card}(\{1; 2; 4\}^5) = 3^5 = 243$ nombres différents à cinq chiffres avec 4, 2 et 1.
- (a) Un tel nombre à deux chiffres est un couple de $\{2; 3; 5; 7\}^2$. Il en existe $4^2 = 16$ différents, bien moins que 1000. Lorsque $n = 3$, il existe $4^3 = 64$ nombres différents, bien moins que 1000.
(b) On cherche donc la valeur minimale de n telle que $\text{Card}(\{2; 3; 5; 7\}^n) = 4^n \geq 1000$.
On a $4^4 = 256$ et $4^5 = 1024$. Il faut donc au moins 5 chiffres pour pouvoir construire plus de 1000 nombres en utilisant uniquement les chiffres 2, 3, 5 et 7.

Exercice 7 Factorielle

- $$a = (m+1) \times m! = (m+1)m(m-1) \dots 2.1 = (m+1)!$$

$$b = \frac{(p+2)!}{(p+1)(p+2)} = \frac{(p+2)(p+1)p!}{(p+1)(p+2)} = p!$$

$$c = \frac{(k+5)!}{(k+7)!} = \frac{(k+5)!}{(k+7)(k+6)(k+5)!} = \frac{1}{(k+7)(k+6)}$$

$$d = (n+3)! - 3(n+2)! = (n+3)(n+2)! - 3(n+2)! = (n+3-3)(n+2)! = n.(n+2)!$$

$$e = \frac{n!}{(n+1)!} - \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{n-(n+1)}{n(n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)}$$
- $$f = \frac{1}{3 \times 2} = \frac{1}{3 \times 2 \times 1} = \frac{1}{3!}$$

$$h = 5 \times 7 \times 6 \times 4 = \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7}{1 \times 2 \times 3} = \frac{7!}{3!}$$

$$i = 5 \times 7 = \frac{1 \times 2 \dots 6 \times 7}{6 \times 1 \times \dots \times 4} = \frac{7!}{(1 \times 2 \times 3) \times 4!} = \frac{7!}{3! 4!}$$
- Si $n! = p!$ alors $n = p$: Faux, $0! = 1 = 1!$ (vrai dans $\mathbb{N}^*$).

Exercice 8 Le programme suivant permet de calculer la valeur de $n!$.

```

1| def Factorielle(n) :
2|     F=1
3|     for k in range(1,n+1) :
4|         F=F*k
5|     return(F)

```

Exercice 9 Au bureau

Soit $M = \{m_1; m_2; m_3\}$ l'ensemble des membres éminents qui vont être nommés. Leur associer un poste – président, trésorier, secrétaire – équivaut à les ordonner et donc choisir un triplet d'éléments distincts de M^3 . Par exemple, le triplet (m_2, m_3, m_1) donne m_2 président, m_3 trésorier et m_1 secrétaire. En revanche, ils ne peuvent cumuler les postes donc (m_1, m_3, m_1) n'est pas un bureau possible. On cherche donc le nombre de n -arrangements de M c.-à-d. le nombre de permutations de M . Ainsi, il y a $\text{Card}(M)! = 3! = 6$ bureaux possibles.

Exercice 10 (Dé)confinée

Soit $A = \{C; L; J; R\}$ l'ensemble des personnes que souhaite revoir Agathe. Choisir un trajet, c'est choisir un triplet d'éléments distincts de A^3 . En effet, (C, R, J) ne correspond pas au même trajet que (J, C, R) . En revanche, elle n'ira pas voir deux fois la même personne donc (C, L, C) n'est pas un trajet possible. On cherche donc le nombre de 3-arrangements de A et il y a $\mathcal{A}_4^3 = \frac{4!}{(4-3)!} = 24$ trajets possibles.

Exercice 11 Jeu de rôle

Implicitement, aucun acteur ne peut avoir plusieurs rôles donc une distribution correspond à un 6-uplet d'éléments distincts de $T = \{a_1; a_2; \dots; a_{12}\}$, l'ensemble des acteurs, la première composante ayant le premier rôle, la deuxième ayant le second... On cherche donc le nombre de 6-arrangements de T . Ainsi, il y a $\mathcal{A}_{12}^6 = \frac{12!}{6!} = 665\,280$ distributions possibles.

Exercice 12 Alpha pas bête

Soit $A = \{a; b; \dots; z\}$. On forme des mots de cinq lettres :

- comportant des lettres différentes. On cherche le nombre de 5-uplets d'éléments distincts de A^5 . Il y en a $\mathcal{A}_{26}^5 = \frac{26!}{(26-5)!} \simeq 7\,893\,600$ tout de même.
- commençant par une voyelle et finissant par une consonne. On a 6 choix pour la première lettre, 20 pour la dernière et 26^3 pour les autres.
Il y a donc $6 \times 26^3 \times 20 = 2\,109\,120$ possibilités.
- contenant exactement une voyelle. Il y a 6×20^4 mots commençant par une voyelle et n'ayant ensuite que des consonnes et 5 possibilités pour placer la voyelle dans le mot donc $5 \times 6 \times 20^4 = 4\,800\,000$ mots ne comportant qu'une seule voyelle.

Exercice 13 Instanagram

Une anagramme du mot « trois », ayant un sens ou non, est une permutation de $\{i; o; r; s; t\}$: il y en a $\text{Card}(\{i; o; r; s; t\})! = 5! = 120$.

De même, il y a $\text{Card}(\{a; c; e; f; r; s; t; u\})! = 8! = 40\,320$ anagrammes du mot « facteurs ».

Pour le mot « factorielle », distinguons premièrement les lettres communes et cherchons le nombre de permutations de $\{a; c; e_1; e_2; f; i; l_1; l_2; o; r; t\}$: il y en a $11!$. Puisqu'à l'écriture on ne les distingue plus (fl_1e_2 et fl_2e_1 donnent la même syllabe), il faut diviser ce nombre par 2×2 , les deux couples de lettres identiques. On obtient donc $\frac{11!}{2 \times 2} = 9\,979\,200$ anagrammes du mot « factorielle ».

Procédons de la même manière pour le mot « zozotez ». Il y a $7!$ permutations de $\{z_1; o_1; z_2; o_2; t; e; z_3\}$ ayant $3!$ permutations de $\{z_1; z_2; z_3\}$ et $2!$ permutations de $\{o_1; o_2\}$. Il y a donc $\frac{7!}{3! \cdot 2!} = 420$ anagrammes du mot « zozotez ».

Exercice 14 Baobabs

On s'intéresse aux anagrammes du mot *baobabs*, qu'elles aient une signification ou non.

- Commençons par distinguer les lettres communes b_1, b_2, b_3 et a_1, a_2 . Le mot $b_1a_1ob_2a_2b_3s$ comporte alors sept lettres et il y a donc $7!$ permutations de ces lettres. Identifions maintenant les lettres communes : il faut diviser ce nombre par $3!$, nombre de permutations des b_i , et par $2!$, nombre de permutations des a_j .
Il y a donc $\frac{7!}{2! \cdot 3!} = 420$ anagrammes du mot *baobabs*.

2. Il y a trois b parmi les sept lettres donc $\frac{3}{7}$ des anagrammes commencent par b : il y en a $\frac{3}{7} \times 420 = 180$. On peut retrouver ce résultat en fixant la première lettre, b , et en comptant le nombre d'anagrammes du reste, $aobabs$, de manière similaire à la question précédente (deux b et deux a) : $\frac{6!}{2!2!} = 180$.

Exercice 15 Soient A et B deux ensembles finis, non vides, disjoints, de cardinaux respectifs n et p .

1. (a) Puisque A et B sont disjoints, $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) = n + p$ par principe additif et il y a donc $(n + p)!$ permutations de $A \cup B$.
- (b) Si l'on ne souhaite pas mélanger les éléments de A et de B , il faut joindre deux permutations, une de l'un puis une de l'autre. Il y a $n!$ permutations de A et $p!$ permutations de B et donc $n!p!$ permutations commençant par tous les éléments de A . Puisque l'on peut commencer par A ou par B , il y a $2n!p!$ permutations de $A \cup B$ qui ne mélangent pas les éléments de A et de B .
2. (a) Puisque A , B et C sont disjoints deux à deux,
 $\text{Card}(A \cup B \cup C) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B) + \text{Card}(C) = n + p + q$ par principe additif et il y a donc $(n + p + q)!$ permutations de $A \cup B \cup C$.
- (b) De manière similaire, il y a $n!$ permutations de A , $p!$ permutations de B , $q!$ permutations de C et $3!$ permutations des trois ensembles A , B et C . Il y a donc $6n!p!q!$ permutations de $A \cup B \cup C$ qui ne mélangent pas les éléments de A , B et C .

Exercice 16 VouF?

$E = \{a; b; c; \dots; z\}$, $A = \{a; b; \dots; f\}$, $G = \{g; h; \dots; t\}$ et $R = \{r; s; \dots; z\}$.

1. $a \in A$: Vrai.
2. $\{s\} \in R$: Faux, $s \in R$ mais $\{s\} \in \mathcal{P}(R)$.
3. $t \in \mathcal{P}(G)$: Faux, $t \in G$ ou $\{t\} \in \mathcal{P}(G)$.
4. $\{a; b\} \in E^2$: Faux, $\{a; b\} \subset E$ ou $\{a; b\} \in \mathcal{P}(E)$.
5. $\{m; n\} \in \mathcal{P}(G)$: Vrai.
6. $(r, s, t) \in G \cap R$: Faux, $(r, s, t) \in (G \cap R)^3$ ou $\{r; s; t\} \subset G \cap R$.
7. $A \in E$: Faux, $A \in \mathcal{P}(E)$ ou $A \subset E$.
8. $G \subset \mathcal{P}(E)$: Faux, $G \in \mathcal{P}(E)$ ou $G \subset E$ ou $\{G\} \subset \mathcal{P}(E)$.
9. $A \cap R \subset E$: Vrai, $\emptyset \subset E$.
10. $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$: Vrai.
11. $E \subset E$: Vrai, et $E \in \mathcal{P}(E)$.
12. $(r, s) \in \mathcal{P}(R^2)$: Faux, $(r, s) \in R^2$.
13. $\{a; b\} \in \mathcal{P}(A^2)$: Faux, $\{a; b\} \in \mathcal{P}(A)$.
14. $(q, q) \in \mathcal{P}(G^2)$: Faux, $(q, q) \in G^2$.
15. $\{(s, e, b)\} \in \mathcal{P}(E^3)$: Vrai, $(s, e, b) \in E^3$.
16. $\mathcal{C}_E A = G \cup R$: Vrai car $A \cap (G \cup R) = \emptyset$ et $A \cup G \cup R = E$.

17. $G \cap R \in G$: Faux, $G \cap R \subset G$ ou $G \cap R \in \mathcal{P}(G)$.
 18. $(b, o, b) \in A^3$: Faux, $o \notin A$.
 19. $\{f; o; u\} \in A \times G \times R$: Faux, $\{f; o; u\} \subset A \cup G \cup R$ même si $(f, o, u) \in A \times G \times R$.
 20. $(t, t) \in G \times R$: Vrai car $t \in G$ et $t \in R$.

Exercice 17

Soient les ensembles $A = \{1; 2; 4\}$, $B = \{3; 4\}$, $C = \{0; 1; 4\}$ et $D = \{0; 3\}$.

1. On a $\text{Card}(A) = 3$ donc $\text{Card}(\mathcal{P}(A)) = 2^3 = 8$
 et $\mathcal{P}(A) = \{\emptyset; \{1\}; \{2\}; \{4\}; \{1; 2\}; \{1; 4\}; \{2; 4\}; \{1; 2; 4\}\}$.
2. (a) $A \times B = \{(1, 3); (1, 4); (2, 3); (2, 4); (4, 3); (4, 4)\}$
 (b) $C \times D = \{(0, 0); (0, 3); (1, 0); (1, 3); (4, 0); (4, 3)\}$
 (c) $(A \times B) \cap (C \times D)$
 $= \{(1, 3); (1, 4); (2, 3); (2, 4); (4, 3); (4, 4)\}$
 $\cap \{(0, 0); (0, 3); (1, 0); (1, 3); (4, 0); (4, 3)\}$
 $= \{(1, 3); (4, 3)\}$
 (d) $(A \cap C) \times (B \cap D) = (\{1; 2; 4\} \cap \{0; 1; 4\}) \times (\{3; 4\} \cap \{0; 3\}) = \{1; 4\} \times \{3\}$
 $= \{(1, 3); (4, 3)\}$.
3. On peut conjecturer que l'intersection de deux produits cartésiens d'ensembles est le produit cartésien des intersections des ensembles.

Exercice 18 VouF ?

E est un ensemble de cardinal n et k est un entier naturel tel que $k \leq n$.

- (a) Le nombre de parties de E est égal au nombre de n -uplets de l'ensemble $\{a; b\}$:
 Vrai, $\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n = \text{Card}(\{a; b\})^n = \text{Card}(\{a; b\}^n)$.
- (b) Le nombre de permutations de E égale le nombre de parties de E :
 Faux, $\mathcal{A}_n^n = n! \neq 2^n = \text{Card}(\mathcal{P}(E))$, sauf si $n = 0$ i.e. $E = \emptyset$.
- (c) Le nombre de partie de E égale le nombre d'éléments de E^n :
 Faux, $\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n \neq n^n = \text{Card}(E^n)$, sauf si $n = 2$.

Exercice 19 Fin de partie

Soit $\mathcal{P}_n$: « Pour tout ensemble fini E de cardinal $n \in \mathbb{N}$, $\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n$ ».

• L'ensemble vide est le seul de cardinal nul et $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ de cardinal $1 = 2^0$: $\mathcal{P}_0$ est vraie.

• Supposons $\mathcal{P}_n$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}$ et soit E un ensemble de cardinal $n+1 \geq 1$. Il existe donc un élément $a \in E$. Si l'on nomme A l'ensemble des parties de E contenant a , on peut écrire $\mathcal{P}(E) = A \cup \overline{A}$, réunion trivialement disjointe.

Il est clair que $\overline{A}$, l'ensemble des parties de E ne contenant pas a , correspond à $\mathcal{P}(E \setminus \{a\})$. Puisque $\text{Card}(E \setminus \{a\}) = \text{Card}(E) - \text{Card}(\{a\}) = n+1 - 1 = n$, l'hypothèse de récurrence permet d'affirmer que $\text{Card}(\overline{A}) = \text{Card}(\mathcal{P}(E \setminus \{a\})) = 2^n$.

Par ailleurs, toute partie de E contenant a correspond exactement à une partie de $E \setminus \{a\}$ que l'on unit à $\{a\}$. Ainsi, $\text{Card}(A) = \text{Card}(\mathcal{P}(E \setminus \{a\})) = 2^n$.

On en déduit que $\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = \text{Card}(A) + \text{Card}(\overline{A}) = 2^n + 2^n = 2 \times 2^n = 2^{n+1}$ et $\mathcal{P}_n$ est héréditaire.

• La propriété $\mathcal{P}_n$ est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 20 $\textcircled{S}$ L'algorithme `PartieDeux` liste toutes les parties à deux éléments de la liste E . Pour lister toutes les parties à trois éléments, il suffit de rajouter les deux lignes « `for k in range(j+1, len(E)) :` » et « `ListeTemp.append(E[k])` ».

Exercice 21 VouF ?

Soit l'ensemble $E = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

- (a) $(2, 5, 1)$ est un triplet de E . Faux : un triplet de E^3 mais E est parfois toléré par abus de langage.
- (b) $(3, 4)$ est une partie de E^2 . Faux : c'est un élément de E^2 .
- (c) $\{3; 4; 1\} = \{1; 3; 4\}$: Vrai.
- (d) $\{2; 4; 5; 2\} = \{2; 4; 5\}$: Vrai.
- (e) $(3, 3, 5) = (3, 5)$: Faux, l'un est un élément de E^3 et l'autre de E^2 .
- (f) $(1, 2, 5) = (2, 1, 5)$: Faux, l'ordre d'un triplet importe.
- (g) $\{(1, 1, 3)\} = \{(1, 3, 1)\}$: Faux, les deux parties ne contiennent pas le même élément.
- (h) $\{2; 3; 4; 1; 5\}$ est une permutation de E : Faux, une permutation est un 5-uplet, pas une partie.
- (i) $(1; 3; 5; 3)$ est un 4-arrangement de E : Faux, un arrangement a des composantes distinctes deux à deux.
- (j) $(1, 4)$ est une 2-combinaison de E : Faux, une combinaison est une partie, pas un uplet.
- (k) Il y a 32 arrangements de 2 éléments de E : Faux, $\mathcal{A}_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = 20$.
- (l) Il y a 3125 permutations de E : Faux, $5! = 120$.
- (m) Il y a 25 parties différentes de E : Faux, il y en a $2^5 = 32$ et non 5^2 .
- (n) Il y a 9 combinaisons de trois éléments de E : Faux, $\binom{5}{3} = 10$.
- (o) Le nombre de k -uplets de E est inférieur au nombre de parties à k éléments de E : Faux, toute partie à k éléments peut être associée à un k -uplet par l'application $\{e_1; \dots; e_k\} \in \mathcal{P}(E) \mapsto (e_1; \dots; e_k) \in E^k$ mais le k -uplet $(e_1; \dots; e_1)$ n'est ainsi associé qu'à la partie $\{e_1\}$. Le nombre de k -uplets de E est donc supérieur ou égal au nombre de parties à k éléments de E : $\text{Card}(E^k) = n^k \geq \binom{n}{k}$, car $2 \leq k \leq n$.

Exercice 22 Les uns aux autres

- 1. (d) Nombre de tirages successifs sans remise de n objets parmi n : $n!$
- 2. (c) Nombre de tirages successifs avec remise de k objets parmi n : n^k
- 3. (b) Nombre de tirages successifs sans remise de k objets parmi n : $\mathcal{A}_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$
- 4. (a) Nombre de tirages de k objets différents parmi n : $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Exercice 23 Recherche cardinale

E est un ensemble de cardinal n . Calculer la valeur de n dans chacun des cas suivants.

- (a) On a $\text{Card}(\mathcal{P}(E)) = 2^n = 32$ donc $n = 5$ et $E = \{a; b; c; d; e\}$ par exemple.

- (b) On a $\mathcal{A}_n^2 = \frac{n!}{(n-2)!} = n(n-1) = 4556$ donc $n^2 - n - 4556 = 0$ et $n = 68$.
Par exemple, $E = \llbracket 1; 4 \rrbracket \times \llbracket 1; 17 \rrbracket$.
- (c) On a $\binom{n}{2} = \frac{n!}{2!(n-2)!} = \frac{n(n-1)}{2} = 325$ donc $n^2 - n - 650 = 0$ et $n = 26$.
Par exemple, $E = \llbracket 1; 13 \rrbracket \times \{0; 1\}$.

Exercice 24 Le choix dans la démarche

- On a $\binom{2021}{2020} = \frac{2021!}{2020!(2021-2020)!} = \binom{2020}{2019} + \binom{2020}{2020} = \binom{2021}{1} = 2021$.
- On a $((\binom{10}{9} - \binom{10}{0}))((\binom{10}{1} + \binom{10}{10})) = ((\binom{10}{1} - \binom{10}{0}))((\binom{10}{1} + \binom{10}{0}))$
 $((\binom{10}{9} - \binom{10}{0}))((\binom{10}{1} + \binom{10}{10})) = \binom{10}{1}^2 - \binom{10}{0}^2 = 10^2 - 1^2 = 99$.
- Pour $1 \leq p \leq n$, on a $n \binom{n-1}{p-1} - p \binom{n}{p} = n \frac{(n-1)!}{(p-1)!((n-1)-(p-1))!} - p \frac{n!}{p!(n-p)!}$
 $n \binom{n-1}{p-1} - p \binom{n}{p} = \frac{n!}{(p-1)!(n-p)!} - \frac{p}{p} \frac{n!}{(p-1)!(n-p)!} = 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La suite (u_n) est strictement positive et l'on a
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\binom{2(n+1)}{n+1}}{\binom{2n}{n}} = \frac{\frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!}}{\frac{(2n)!}{n!n!}} = \frac{(2n+2)!(n!)^2}{(2n)!((n+1)!)^2} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} > 1$$

car $2n+2 > 2n+1 > n+1$. La suite $(u_n)_{\mathbb{N}^*}$ est donc strictement croissante.

Exercice 25 Joyeux anniversaire

On liste les jours anniversaires par ordre alphabétique des n membres du groupe.
En faisant abstraction des 29 février (les résultats sont très similaires), on a 365^n listes possibles. Cherchons donc le nombre de listes comportant des jours tous différents : ce sont des arrangements de n jours parmi les 365 possibles et il y en a donc $\mathcal{A}_{365}^n$.
On suppose que les jours anniversaires sont uniformément répartis et donc équiprobables. La probabilité que les n jours soient tous différents est donc $\frac{\mathcal{A}_{365}^n}{365^n}$ et la probabilité qu'au moins deux personnes aient le même jour anniversaire est donc $p(n) = 1 - \frac{\mathcal{A}_{365}^n}{365^n}$.
On a alors $p(23) \simeq 0,51$ et $p(32) \simeq 0,75$. Surprenant, non ?

Exercice 26 Pokémon

Une « main » correspond à un ensemble de cinq cartes différentes donc à une partie à 5 éléments de l'ensemble C des 52 cartes. Il y a donc $\binom{52}{5} = 2\,598\,960$ « mains » différentes.

Si l'on impose la dame de cœur, il reste en choisir 4 parmi les 51 restantes et il y a alors $\binom{51}{4} = 249\,900$ possibilités.

Exercice 27 Porte à porte

- Le proviseur doit choisir cinq élèves parmi les six volontaires.
Il y a donc $\binom{6}{5} = 6$ groupes possibles.
- Il doit choisir deux élèves parmi les quatre volontaires de seconde et trois parmi les six de terminale. Il y a donc $\binom{4}{2} \times \binom{6}{3} = 6 \times 20 = 120$ groupes possibles.

Exercice 28 Combinaisons spéciales

- Les élèves doivent choisir trois spécialités parmi les dix et donc
 $\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!7!} = \frac{8 \times 9 \times 10}{2 \times 3} = 4 \times 3 \times 10 = 120$ combinaisons de spécialités possibles.
- Il ne lui reste plus qu'à choisir deux spécialités parmi les cinq pour lesquelles elle hésite. Colette a donc le choix parmi $\binom{5}{2} = \frac{5(5-1)}{2} = 10$ combinaisons de spécialités.

Exercice 29

Ces fonctions Python renvoient la valeur de $\mathcal{A}_n^k$ et celle de $\binom{n}{k}$ pour $(n, k) \in \mathbb{N}^2$.

<pre> 1 def arrangement(n,p): 2 if p>n: 3 a=False 4 else : 5 a=1 6 for i in range (1, p+1): 7 a=a*(n-i+1) 8 return a </pre>	<pre> 9 def combi(n,p) : 10 if p>n: 11 c=False 12 else : 13 c=1 14 for i in range (1, p+1): 15 c=c*(n-i+1)/(p-i+1) 16 return c </pre>
--	--

Exercice 30 Penthouse

- Il y a $\mathcal{A}_5^2 = \frac{5!}{(5-2)!} = 20$ couples de points distincts donc 21 vecteurs différents en comptant le vecteur nul (on rappelle que $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$).
- On a $\binom{5}{2} = 10$ parties à deux éléments (distincts) de l'ensemble des cinq points donc 10 droites différentes.

Exercice 31 Les cartes en main

- Une main est une combinaison de 5 cartes parmi les 52 possibles :
il y a $\binom{52}{5} = 2\,598\,960$ mains possibles.
- Une couleur à Cœur est une combinaison de 5 cartes parmi les 13 Cœurs possibles : il y a $\binom{13}{5} = 1\,287$ mains de couleur Cœur possibles.
 - Puisqu'il y a quatre familles ayant la même répartition, il y a $4 \cdot \binom{13}{5} = 5\,148$ mains de couleurs possibles.
- Si quatre des cartes sont des 10, il reste 48 cartes possibles pour compléter la main et il y a donc 48 carrés de 10 différents.
 - Puisqu'il y a treize valeurs différentes, chacune ayant 48 possibilités de carrés, il y a $13 \times 48 = 624$ carrés différents.

Exercice 32 • Soit $n \geq 5$. On a

$$\begin{aligned}
 \binom{n}{5} &= 17 \binom{n}{4} \\
 \iff \frac{n!}{5!(n-5)!} &= 17 \frac{n!}{4!(n-4)!} \\
 \iff \frac{n!}{5!(n-5)!} \cdot \frac{4!(n-4)!}{n!} &= 17 \\
 \iff \frac{n-4}{5} &= 17 \iff n = 5 \times 17 + 4 = 89.
 \end{aligned}$$

• Soit $n \geq 2$. On a $\binom{2n}{1} + \binom{2n}{2} + \binom{2n}{3} = 387n$

$$\begin{aligned}
 \iff \frac{(2n)!}{1!(2n-1)!} + \frac{(2n)!}{2!(2n-2)!} + \frac{(2n)!}{3!(2n-3)!} &= 387n \\
 \iff 2n + \frac{2n(2n-1)}{2} + \frac{2n(2n-1)(2n-2)}{6} &= 387n \\
 \iff n(2 + 2n - 1 + \frac{(2n-1)(2n-2)}{3} - 387) &= 0 \\
 \iff \frac{1}{3}(6n + 4n^2 - 4n - 2n + 2 - 3 \times 386) &= 0 \\
 \iff 4n^2 - 1156 &= 0 \\
 \iff n^2 = 289 = 17^2 \iff n &= 17.
 \end{aligned}$$

Exercice 33 Si $n = 1$, $\binom{1}{0} = 1 = \binom{1}{1}$.

Soit maintenant $n \geq 2$. En utilisant la relation de Pascal et par télescopage, on a :

$$\begin{aligned} \binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots - \binom{n}{1} - \binom{n}{3} - \binom{n}{5} - \dots \\ = \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots \pm \binom{n}{n-1} \mp \binom{n}{n} \\ = \binom{n}{0} - \left[\binom{n-1}{0} + \binom{n-1}{1} \right] + \left[\binom{n-1}{1} + \binom{n-1}{2} \right] - \dots \pm \left[\binom{n-1}{n-2} + \binom{n-1}{n-1} \right] \mp \binom{n}{n} \\ = \binom{n}{0} - \left[\binom{n-1}{0} \right] \pm \left[\binom{n-1}{n-1} \right] \mp \binom{n}{n} = 1 - 1 \pm 1 \mp 1 = 0. \end{aligned}$$

En utilisant la formule du binôme de Newton, on obtient :

$$\begin{aligned} \binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots \pm \binom{n}{n-1} \mp \binom{n}{n} \\ = \binom{n}{0}(-1)^0 1^n + \binom{n}{1}(-1)^1 1^{n-1} + \binom{n}{2}(-1)^2 1^{n-2} + \dots + \binom{n}{n-1}(-1)^{n-1} 1^1 + \binom{n}{n}(-1)^n 1^0 \\ = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} = (1 + (-1))^n = 0^n = 0. \end{aligned}$$

Exercice 34 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a

$$\begin{aligned} (7 + \sqrt{5})^n + (7 - \sqrt{5})^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 7^{n-k} \sqrt{5}^k + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 7^{n-k} (-\sqrt{5})^k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 7^{n-k} (\sqrt{5}^k + (-1)^k \sqrt{5}^k) \\ &= \sum_{k=0, \text{ pair}}^n \binom{n}{k} 7^{n-k} (\sqrt{5}^k + \sqrt{5}^k) + \sum_{k=0, \text{ impair}}^n \binom{n}{k} 7^{n-k} (\sqrt{5}^k - \sqrt{5}^k) \\ &= \sum_{k=0, \text{ pair}}^n \binom{n}{k} 7^{n-k} \times 2 \times 5^{k/2} \quad \text{qui est bien un entier.} \end{aligned}$$

Exercice 35 Urne numéraire

Une urne contient cent jetons numérotés de 1 à 100 et l'on tire simultanément deux jetons.

1. On cherche le nombre de parties à deux éléments de $\llbracket 1; 100 \rrbracket$.
Il y a $\binom{100}{2} = \frac{100(100-1)}{2} = 4950$ tirages possibles.
2. Puisque tout numéro pair de $\llbracket 1; 100 \rrbracket$ correspond à un numéro de $\llbracket 1; 50 \rrbracket$, il y a $\binom{50}{2} = \frac{50(50-1)}{2} = 1225$ tirages possibles de deux numéros pairs.
3. Pour obtenir une somme paire, il faut que les deux jetons aient la même parité. Il y a donc $50 \times 49 = 2450$ tirages donnant une somme paire. En revanche, pour obtenir une somme impaire, les deux jetons doivent avoir une parité contraire et il y a donc $50 \times 50 = 2500$ possibilités, plus que pour la somme paire.
On peut aussi obtenir le nombre de sommes impaires en calculant la différence $4950 - 2450$, le nombre total de sommes diminué du nombre de sommes paires.

Exercice 36 FFFacile

Onze joueurs débutent le match parmi 23 joueurs à disposition.

1. Si le sélectionneur ne tient pas compte du poste de chaque joueur, il peut former une équipe avec n'importe quel tirage de onze joueurs différents.
Il a donc $\binom{23}{11} = 1\,352\,078$ équipes potentielles.
2. Il doit choisir un gardien parmi les trois donc $\binom{3}{1}$ possibilités, quatre défenseurs parmi les huit donc $\binom{8}{4}$ possibilités, trois milieux parmi les cinq donc $\binom{5}{3}$ possibilités et trois attaquants parmi les sept donc $\binom{7}{3}$ possibilités. Ainsi, le sélectionneur n'a que $\binom{3}{1} \binom{8}{4} \binom{5}{3} \binom{7}{3} = 73\,500$ équipes possibles.

Exercice 37 Dans quelle étagère ?

Agathe range cinq romans, trois bandes dessinées et deux manuels de mathématiques sur sa plus belle étagère.

- Si elle ne veut pas de rangement précis, Agathe a $10! = 3\,628\,800$ façons de placer ses dix ouvrages.
- Si elle veut qu'ils soient groupés par genre, il y a $3!$ façons d'aligner les trois genres, $5!$ de ranger les romans entre eux, $3!$ de ranger les BD entre elles et $2!$ de ranger les manuels. Elle a donc $3! \cdot 5! \cdot 3! \cdot 2! = 8\,640$ façons de ranger son étagère.
- Si elle veut que seuls les manuels soient groupés, elle a $2!$ façons de les ranger côte à côte et $(5 + 3 + 1)!$ façons de ranger les romans, les BD et le groupe des manuels. Elle a donc $2! \cdot 9! = 725\,760$ façons de ranger son étagère.
- Agathe ne veut pas que deux bandes dessinées soient côte à côte. Regardons premièrement le placement par type d'ouvrage. La première BD peut être en première position. La seconde BD peut alors être en 3^e et la dernière BD en 5^e, 6^e, ..., 10^e (6 possibilités). Ou alors la seconde BD peut être en 4^e et la dernière en 6^e, ..., 10^e (5 possibilités). On continue jusqu'à ce que la seconde soit en 8^e position et la troisième en 10^e (1 possibilité). Il y a donc $6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 21$ possibilités pour que la première BD soit en 1^{re} position. De manière similaire, il y a $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ possibilités pour que la première BD soit en 2^e position, $4 + 3 + 2 + 1 = 10$ pour qu'elle soit en 3^e, $3 + 2 + 1 = 6$ en 4^e, $2 + 1 = 3$ en 5^e et 1 en 6^e. Il y a donc $21 + 15 + 10 + 6 + 3 + 1 = 56$ placements possibles des BD. Puisqu'il y a $3!$ permutations des trois BD et $(5 + 2)! = 7!$ permutations des autres ouvrages, Agathe a $56 \times 3! \times 7! = 1\,693\,440$ façons de ranger son étagère.

Remarques : • On a obtenu $56 = \binom{8}{3}$ façons de ranger 3 BD parmi 10 ouvrages sans qu'elles soient côte à côte. Plus généralement, on a $\binom{n-k+1}{k}$ façons de ranger k objets parmi n sans qu'ils soient côte à côte. Cela peut s'expliquer en remarquant qu'un tel objet placé impose aussi la place qui le suit.

• On observe dans notre façon de dénombrer que l'on a obtenu $\binom{7}{2} + \binom{6}{2} + \dots + \binom{2}{2} = \binom{8}{3}$ ce qui peut se justifier en disant que dans le choix des trois éléments, il y a les choix où le premier choisi est le premier de l'ensemble et il en reste deux à choisir parmi les sept suivants, les choix où le premier choisi est le deuxième de l'ensemble et il en reste deux à choisir parmi les six suivants... et les choix où le premier choisi est le sixième de l'ensemble et il en reste deux à choisir parmi les deux suivants.

Exercice 38 Patate

On dispose de n terrains pour $2n$ équipes en lice et l'on dénombre l'ensemble de tous les premiers matchs possibles.

- Pour $n = 2$, $\{e_1e_4; e_2e_3\}$ est un exemple de premiers matchs, que l'on ne différencie pas de $\{e_3e_2; e_4e_1\}$.
- On commence par fixer n équipes : il y a $\binom{2n}{n}$ choix des n équipes. Pour la première de ces équipes, il reste $2n - n = n$ équipes possibles à affronter. Pour la deuxième, il y a $n - 1$ équipes adverses possibles. Pour la dernière, il ne reste plus qu'une équipe.

Il y a donc $n(n-1) \dots 1 \binom{2n}{n} = n! \binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!}$ couples de premiers matchs possibles. Puisque l'on ne distingue pas l'ordre dans ces matchs, on a compté deux couples par match ((e_1, e_3) et (e_3, e_1) sont identiques et l'on a donc $\frac{(2n)!}{n!} \times \frac{1}{2 \times 2 \dots \times 2} = \frac{(2n)!}{2^n n!}$ premiers matchs possibles.

3. On choisit la première paire d'équipes : il y a $\binom{2n}{2}$ possibilités.

Pour la deuxième paire, il y a $\binom{2n-2}{2}$ possibilités.

Pour la k^{e} paire, il y a $\binom{2n-2(k-1)}{2}$ possibilités.

Pour la n^{e} et dernière paire, il y a $\binom{2n-2n+2}{2} = 1$ possibilité.

Au total, il y a $\binom{2n}{2} \binom{2n-2}{2} \dots \binom{2n-2(k-1)}{2} \dots \binom{2n-2n+2}{2}$
 $= \frac{(2n)!}{2!(2n-2)!} \frac{(2n-2)!}{2!(2n-4)!} \frac{(2n-4)!}{2!(2n-6)!} \dots \frac{4!}{2!2!} \frac{2!}{2!0!} = \frac{(2n)!}{2^n n!}$ listes de paires.

Puisque l'on ne se préoccupe pas du terrain où les matchs se jouent, il faut diviser ceci par $n!$, le nombre de permutations de ces listes ($\{e_1 e_4; e_2 e_3\}$ et $\{e_2 e_3; e_1 e_4\}$ sont identiques). On a donc $\frac{(2n)!}{2^n n!}$ premiers matchs possibles.

4. Pour $n = 2$, on a $\frac{(2 \times 2)!}{2^2 2!} = 3$ premiers matchs possibles qui sont $\{e_1 e_2; e_3 e_4\}$, $\{e_1 e_3; e_2 e_4\}$ et $\{e_1 e_4; e_2 e_3\}$.

Exercice 39 Répétition générale

Soient $E = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$ un ensemble de cardinal $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$.

On s'intéresse aux combinaisons de k éléments de E avec éventuelles répétitions.

1. Par exemple, on associe à la combinaison $\{x_1; x_1; x_1; x_2; x_4; x_4\}$ de 6 éléments de $E = \{x_1; x_2; x_3; x_4\}$ avec répétitions, le 4-uplet $(3; 1; 0; 2)$ de $\{0; 1; \dots; 6\}$ tel que $3+1+0+2 = 6$. L'entier k_i est le nombre de fois où apparaît x_i dans la combinaison donnée et puisque l'on a choisi k éléments, il y a k occurrences au total.
2. On a $\binom{n+k-1}{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$ possibilités de changer k zéros par des 1 dans un mot à $n+k-1$ zéros.

3. Si le premier chiffre du mot est 0, la première composante du 4-uplet sera 0, si le deuxième chiffre est 0, la deuxième composante sera 0. S'il ensuite il y a un ou plusieurs 1, on les compte et la troisième composante sera ce nombre. Ensuite, il y a un 0 d'espace et la composante qui suit sera 0 s'il y a un autre chiffre 0, le nombre de chiffres 1 quand il y en a. Si l'on termine par un 0, ce sera la dernière composante.

Dans l'exemple ci-dessus, $n = 4$, $k = 6$, $n+k-1 = 9$. Le mot 011001111 est associé au 4-uplet $(0; 2; 0; 4)$ tel que $2+4 = 6$, 100011111 est associé à $(1; 0; 0; 5)$ et 101011101 à $(1; 1; 3; 1)$. Le 4-uplet $(3; 0; 1; 2)$ est associé au mot 111001011, $(0; 4; 1; 1)$ est associé à 011110101 et $(2; 3; 1; 0)$ à 110111010.

4. Ainsi, à tout mot de $n+k-1$ chiffres contenant k chiffres 1 correspond un n -uplet de $\{0; \dots; k\}$ dont la somme des composantes vaut k . Il y en a donc autant et le nombre de combinaisons à k éléments de E avec répétitions est $\binom{n+k-1}{k}$.
5. On suppose que l'on dispose de suffisamment de fleurs jaunes, roses, rouges et bleues pour faire un bouquet de dix fleurs dans toutes les combinaisons possibles. On cherche alors le nombre de combinaisons avec répétitions de $k = 10$ fleurs parmi l'ensemble $F = \{j; r; u; b\}$ de cardinal $n = 4$. Il y a donc $\binom{4+10-1}{10} = 286$ bouquets de 10 fleurs possibles.

6. (a) On construit un mot de taille 50 constitué uniquement de 0 et l'on va placer deux 1, chacun entre deux 0, dans des interstices différents. Il y a 49 interstices et donc $\binom{49}{2} = 1176$ possibilités. Ces deux 1 déterminent trois groupes non vides de nombres 0, séparés par des 1. À chaque groupe de 0, on associe un entier, sa longueur, et la somme de ces entiers vaut précisément 50. Réciproquement, à chaque triplet d'entiers non nuls, on peut associer un unique mot. Il y a donc 1176 triplets d'entiers naturels non nuls de somme égale à 50.
- (b) Si les entiers peuvent être nuls, il y a alors 51 emplacements en ajoutant les bords et on autorise les répétitions : si deux 1 se suivent, on a un groupe vide de 0 de longueur nulle. On cherche donc le nombre de combinaisons de $k = 2$ chiffres 1 parmi 51 emplacements avec répétitions : il y en a $\binom{51+2-1}{2} = 1326$.
- (c) Le programme suivant permet de compter et lister les triplets de somme n .

```
1| def TripletdeSomme(n) :
2|     N=0
3|     for x in range(1,n+1) : # ou range(n+1) si on autorise
4|         for y in range(1,n+1) : # ou range(n+1) si on
5|             for z in range(1,n+1) : # ou range(n+1) si on
6|                 if x+y+z==n :
7|                     N=N+1
8|                     print([x,y,z])
9|     print(N)
```


Chapitre XIII

FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

Sommaire

Introduction	329
1 Cosinus et sinus d'un nombre réel	330
1.1 Définitions et propriétés	330
1.2 Lignes trigonométriques	332
2 Étude des fonctions trigonométriques	333
2.1 Parité et périodicité	333
2.2 Dérivées et variations	334
2.3 Représentations graphiques	335
3 Compléments	335
3.1 Dérivation	335
3.2 Tangente	336
Exercices	337
Corrigé des exercices	342

Introduction

Très tôt dans l'histoire de l'humanité s'est inscrit le désir de mesurer des phénomènes apparemment réguliers, comme le retour des saisons ou le déplacement des planètes. L'histoire des fonctions trigonométriques semble avoir débuté il y a environ 4 000 ans. Il est certain que les Babyloniens déterminaient des approximations de mesures d'angles ou de longueurs de côtés de triangles rectangles : lorsqu'ils observaient le ciel, ils ne pouvaient pas mesurer les distances mais seulement les angles entre les astres. Ils ont donc créé un outil permettant de passer des uns aux autres. Les premières formules de trigonométrie apparaissent en Grèce antique. Des développements significatifs furent réalisés en Inde à partir du VI^es. Les travaux indiens furent traduits et améliorés par les mathématiciens islamiques à partir du X^es. Le traité d'un élève

de Copernic (1551) est probablement le premier ouvrage dans lequel les fonctions trigonométriques sont définies directement en termes de triangles rectangles et non de cercles. Au XVIII^es., la trigonométrie s'intègre presque naturellement à l'étude des nombres complexes, objets d'étude en option maths expertes.

Les applications de la trigonométrie sont très nombreuses : astronomie, navigation, optique, électronique, statistiques, économie, sciences naturelles et physiques, météorologie, géodésie...

Ce chapitre regroupe pour l'essentiel des notions et des résultats déjà connus. Nous nous contentons ici de les regrouper, expliciter, commenter et parfois, démontrer.

Commençons, toutefois, par une anecdote. Il était une fois deux mathématiciens réalisant leur rêve d'enfants en effectuant un safari dans la savane africaine. Sous la tente, l'un deux dormait paisiblement lorsqu'il fut éveillé au petit jour par des grognements inquiétants venant des broussailles alentour. Sortant une tête de la tente, il aperçoit son camarade courir autour de celle-ci car, horreur, l'infortuné est poursuivi par un lion. Voyant son acolyte pétrifié de peur, le coureur le rassure immédiatement en lui annonçant tout de go : « Ne t'inquiète pas mon ami, j'ai deux tours d'avance ! ».

1 Cosinus et sinus d'un nombre réel

1.1 Définitions et propriétés

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

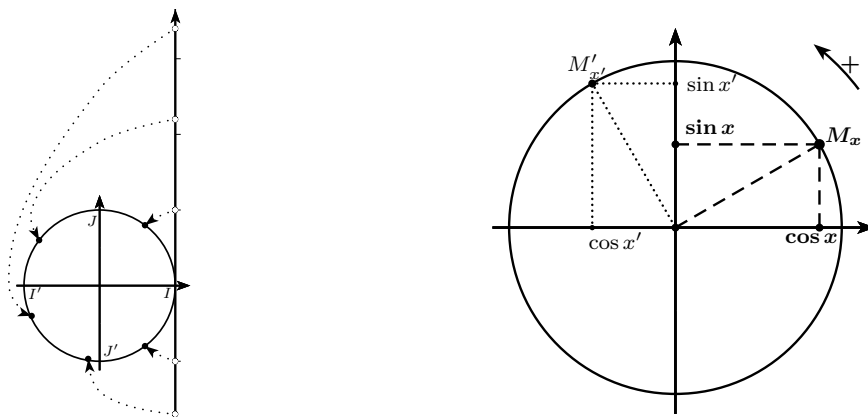
On note $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique de centre O , de rayon 1 et de périmètre 2π .

Définition & Propriété 1

- À tout réel x , on peut associer un unique point M du cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ par « l'enroulement » de la droite réelle autour du cercle $\mathcal{C}$.
- On dit que x est une mesure en radian de l'angle orienté $(\vec{i}; \overrightarrow{OM})$.
- Si x et x' sont deux réels associés au même point M de $\mathcal{C}$, alors ils diffèrent d'un multiple de 2π c.-à-d. qu'il existe un entier relatif k tel que $x - x' = k \times 2\pi$. On note alors $\mathbf{x} \equiv \mathbf{x} [2\pi]$ (« modulo 2π »).
- Parmi tous les réels associés à un même point de $\mathcal{C}$, un seul appartient à l'intervalle $]-\pi; \pi]$. On l'appelle **mesure principale**.

Définition 1 Soit x un réel associé à un point M du cercle trigonométrique $\mathcal{C}$.

- **cos(x)** est l'abscisse du point M ,
 - **sin(x)** est l'ordonnée du point M .
- Ainsi, le point M a pour coordonnées $(\cos(x), \sin(x))$.

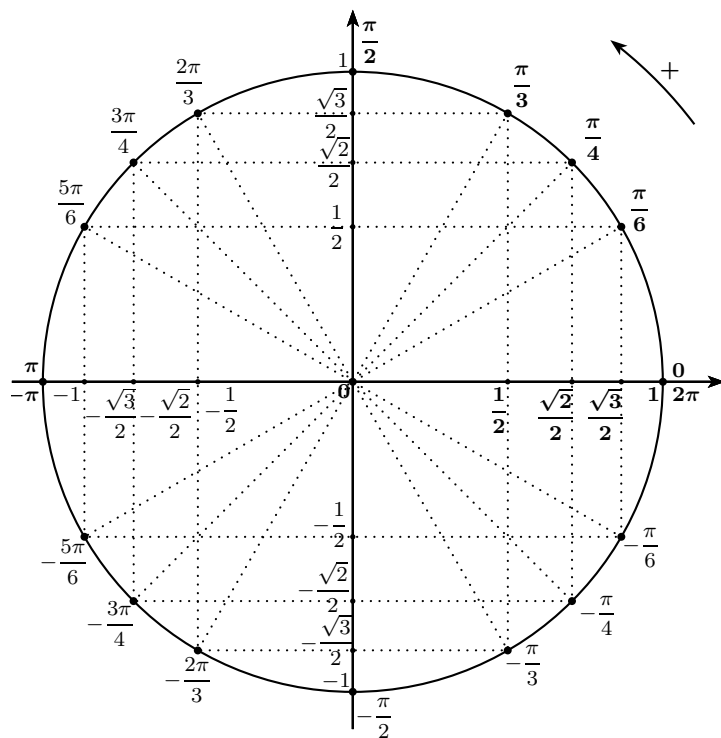


Propriété 2 Soit a un réel. On a :

$$\cos x = \cos a \iff \begin{cases} x \equiv +a \quad [2\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv -a \quad [2\pi] \end{cases}$$

$$\sin x = \sin a \iff \begin{cases} x \equiv +a \quad [2\pi] \\ \text{ou} \\ x \equiv \pi - a \quad [2\pi] \end{cases}$$

Valeurs principales remarquables :



Exemples : $\circ \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \iff \cos x = \cos \frac{\pi}{6} \iff x \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi] \text{ ou } x \equiv -\frac{\pi}{6} [2\pi]$.
 $\circ \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \iff \sin x = \sin(-\frac{\pi}{4})$
 $\iff x \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi] \text{ ou } x \equiv \pi - (-\frac{\pi}{4}) [2\pi] \equiv -\frac{3\pi}{4} [2\pi]$.
 $\circ \cos x > -\frac{1}{2} \iff \cos x > \cos \frac{2\pi}{3} = \cos(-\frac{2\pi}{3}) \iff x \in]-\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}[[2\pi]$.
 $\circ \sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \iff \sin x \leq \sin \frac{\pi}{3} = \sin \frac{2\pi}{3} \iff x \in]-\pi; \frac{\pi}{3}] \cup [\frac{2\pi}{3}; \pi] [2\pi]$.

1.2 Lignes trigonométriques

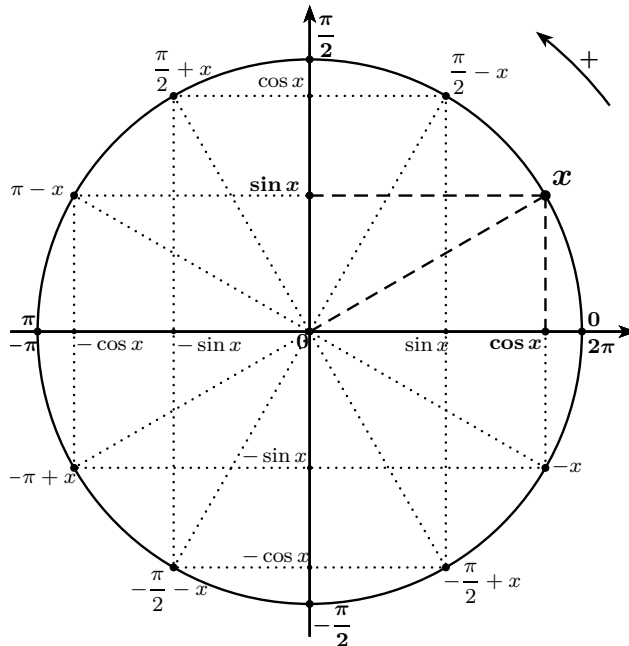
Propriété 3 On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{array}{lll} \cos x \in [-1; 1], & \sin x \in [-1; 1], & \cos^2 x + \sin^2 x = 1, \\ \cos(x + k \times 2\pi) = \cos x & \text{et} & \sin(x + k \times 2\pi) = \sin x. \end{array}$$

Propriété 4 Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$\cos(-x) = \cos(x)$	$\sin(-x) = -\sin(x)$
$\cos(\pi - x) = -\cos(x)$	$\sin(\pi - x) = \sin(x)$
$\cos(\pi + x) = -\cos(x)$	$\sin(\pi + x) = -\sin(x)$
$\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin(x)$	$\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$
$\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin(x)$	$\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos(x)$
$\cos(-\frac{\pi}{2} - x) = -\sin(x)$	$\sin(-\frac{\pi}{2} - x) = -\cos(x)$
$\cos(-\frac{\pi}{2} + x) = \sin(x)$	$\sin(-\frac{\pi}{2} + x) = -\cos(x)$

Il n'est pas nécessaire de connaître les formules précédentes par cœur mais il faut savoir les retrouver rapidement. Il est alors très utile de tracer un cercle trigonométrique et de travailler dessus.



Exemples : Nous retrouvons les lignes trigonométriques classiques :

- $\cos(-\frac{\pi}{3}) = \cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$
- $\sin(\frac{7\pi}{6}) = \sin(\pi + \frac{\pi}{6}) = -\sin(\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$
- $\cos(\frac{2\pi}{3}) = \cos(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}) = -\sin(\frac{\pi}{6}) = -\frac{1}{2}$

Propriété 5 *Pour tous réels a et b , on a :*

Addition

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\cos(a - b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\sin(a - b) = \sin a \cos b - \sin b \cos a$$

Duplication

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2 \cos^2 a - 1 = 1 - 2 \sin^2 a$$

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

Linéarisation

$$\cos^2 a = \frac{1 + \cos 2a}{2}$$

$$\sin^2 a = \frac{1 - \cos 2a}{2}$$

Toutes les formules précédentes seront démontrées et pourront se retrouver aisément grâce à la notation exponentielle d'un nombre complexe dans le cadre de l'option mathématiques expertes.

Exemples :

- $\cos(\frac{7\pi}{12}) = \cos(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{3}) \cos(\frac{\pi}{4}) - \sin(\frac{\pi}{3}) \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{4}(1 - \sqrt{3})$.
- $\sin(\frac{\pi}{12}) = \sin(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{3}) \cos(\frac{\pi}{4}) - \cos(\frac{\pi}{3}) \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{4}(\sqrt{3} - 1)$.

2 Étude des fonctions trigonométriques

Définition & Propriété 6

Les fonctions sinus et cosinus qui, à un nombre réel x , associent respectivement les nombres réels $\sin(x)$ et $\cos(x)$ sont définies et continues sur $\mathbb{R}$.

On admet ce résultat dont la démonstration suit exactement le plan de celle de la dérivabilité que nous ferons un peu plus loin.

2.1 Parité et périodicité

Propriété 7 *Les fonctions sinus et cosinus sont 2π -périodiques :*

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}, \quad \cos(x + k \times 2\pi) = \cos(x) \quad \text{et} \quad \sin(x + k \times 2\pi) = \sin(x).$$

La fonction cosinus est paire : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cos(-x) = \cos(x).$

La fonction sinus est impaire : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(-x) = -\sin(x).$

Ceci a bien évidemment des conséquences graphiques :

- Les courbes représentatives $\mathcal{C}_{\sin}$ et $\mathcal{C}_{\cos}$ des fonctions sinus et cosinus sont invariantes par la translation de vecteur $\vec{u} \left(\begin{smallmatrix} 2\pi \\ 0 \end{smallmatrix} \right)$.

- La courbe représentative $\mathcal{C}_{\sin}$ de la fonction sinus est symétrique par rapport à l'origine du repère.
- La courbe représentative $\mathcal{C}_{\cos}$ de la fonction cosinus est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées dans un repère orthogonal.
- Par ailleurs, la courbe représentative $\mathcal{C}_{\sin}$ de la fonction sinus est la translatée de vecteur $\overrightarrow{v} \left(\frac{\pi}{2} \right)$ de la courbe représentative $\mathcal{C}_{\cos}$ de la fonction cosinus puisque $\sin(x) = \cos(x - \frac{\pi}{2})$.

On en déduit aussi qu'étant périodiques non nulles, les fonctions sinus et cosinus n'admettent pas de limite en $\pm\infty$ (ceci a déjà été démontré dans le devoir du chapitre sur les suites en page 423).

2.2 Dérivées et variations

Théorème 1 Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et

$$\sin'(x) = \cos(x), \quad \cos'(x) = -\sin(x).$$

Démonstration : Nous ne donnons qu'un plan détaillé de la démonstration.

- Par des considérations géométriques, on a, si $x \in]0; \frac{\pi}{2}[$, $\sin x \leq x \leq \frac{\sin x}{\cos x}$, ce dernier quotient « se lisant » sur la droite tangente au cercle en I (cf. §3.2). En effet, la longueur de l'arc (x) est plus grande que sa « hauteur » ($\sin(x)$) et plus petite que la longueur sur la tangente mais ceci est plus délicat.

Ainsi, $\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$.

- On montre que l'on a aussi $\cos x \leq \frac{\sin x}{x} \leq 1$ lorsque $x \in]-\frac{\pi}{2}; 0[$.

- Puisque $\cos$ est continue en 0, $\sin$ est dérivable en 0 et

$$\sin'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = \cos(0).$$

- Puisque $\cos^2 x - 1 = -\sin^2 x$, pour $x \neq 0$, $\frac{\cos x - 1}{x} = \frac{\sin x}{x} \times \frac{-\sin x}{\cos x + 1}$ et

$$\cos'(0) = \sin'(0) \times \frac{-\sin(0)}{\cos(0)+1} = 0.$$

- Avec la propriété 5, on a

$$\frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} = \frac{\sin a \cos h + \sin h \cos a - \sin a}{h} = \sin a \times \frac{\cos h - 1}{h} + \cos a \times \frac{\sin h}{h}$$

$$\text{donc } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(a+h) - \sin a}{h} = \sin a \cos'(0) + \cos a \times \sin'(0) = \cos a = \sin'(a).$$

- Avec la propriété 4, on a

$$\frac{\cos x - \cos a}{x - a} = \frac{\sin(x + \frac{\pi}{2}) - \sin(a + \frac{\pi}{2})}{(x + \frac{\pi}{2}) - (a + \frac{\pi}{2})} \xrightarrow{x \rightarrow a} \sin'(a + \frac{\pi}{2}) = \cos(a + \frac{\pi}{2}) = -\sin a. \quad \square$$

On en déduit les variations des fonctions sinus et cosinus sur $[-\pi; \pi]$.

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	$-$	0	$+$	0	$-$
$\sin$	$0 \rightarrow -1$	$-1 \rightarrow 0$	$0 \rightarrow 1$	$1 \rightarrow 0$	0

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$-\sin x$		$+$	0	$-$	
$\cos$	-1	0	1	0	-1

Ainsi, les fonctions sinus et cosinus sont deux fois dérivables ($\cos'' = -\cos$ et $\sin'' = -\sin$) et admettent une infinité de points d'inflexion : en $0[\pi]$ pour $\sin$, en $\frac{\pi}{2}[\pi]$ pour $\cos$.

2.3 Représentations graphiques

La tangente à la courbe représentative $\mathcal{C}_{\sin}$ de la fonction sinus a pour équation :

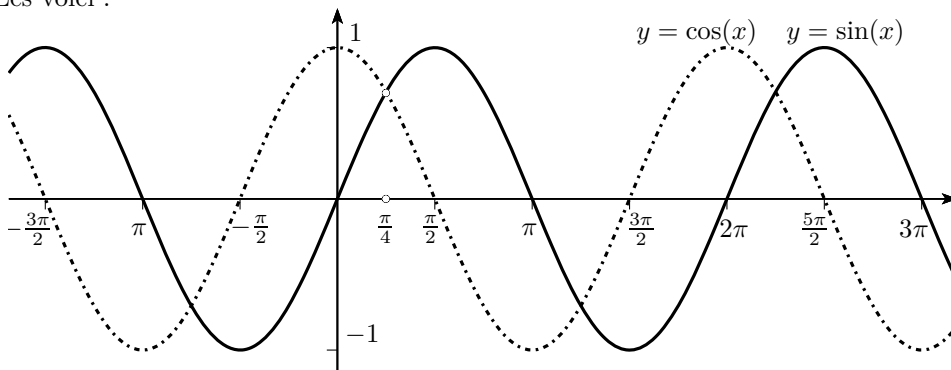
$$y = \sin'(a)(x - a) + \sin(a) = x \cos(a) - a \cos(a) + \sin(a).$$

La tangente à la courbe représentative $\mathcal{C}_{\cos}$ de la fonction cosinus a pour équation :

$$y = \cos'(a)(x - a) + \cos(a) = -x \sin(a) + a \sin(a) + \cos(a).$$

Les représentations graphiques des fonctions sinus et cosinus sont appelées *sinusoïdes*.

Les voici :



3 Compléments

3.1 Dérivation

La propriété suivante découle de la formule de dérivation des fonctions composées.

Propriété 8 Pour tous réels a et b , on a

$$[\sin(ax + b)]' = a \cos(ax + b) \quad \text{et} \quad [\cos(ax + b)]' = -a \sin(ax + b).$$

Pour toute fonction u dérivable sur un intervalle I , on a $[\sin(u)]' = u' \cos(u)$ et $[\cos(u)]' = -u' \sin(u)$.

Exemples : $\circ [\cos(4 - 5x)]' = (-5)(-\sin(4 - 5x)) = 5 \sin(4 - 5x)$.

$$\circ [\sin(\ln(x^2 + 1))] = [\ln(x^2 + 1)]' \cos(\ln(x^2 + 1)) = \frac{2x}{x^2 + 1} \cos(\ln(x^2 + 1)).$$

Levons donc maintenant deux indéterminations.

Théorème 2 On a $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0$

Démonstration : On a $\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \sin'(0) = \cos(0) = 1$

et de même, $\frac{\cos x - 1}{x} = \frac{\cos x - \cos 0}{x - 0} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \cos'(0) = -\sin(0) = 0. \quad \square$

Exemples : $\circ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \times \sqrt{x} = 1 \times 0 = 0.$

$$\circ \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cos(x^2 - 4) - 1}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\cos(x^2 - 4) - 1}{x^2 - 4} (x + 2)$$

$$\stackrel{u = x^2 - 4}{=} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\cos u - 1}{u} (+\sqrt{u + 4} + 2) = 0 \times 6 = 0.$$

3.2 Tangente

Voici la généralisation de la tangente d'un angle dans un triangle rectangle.

Définition 2 Pour $x \neq \frac{\pi}{2} [\pi]$, on pose $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

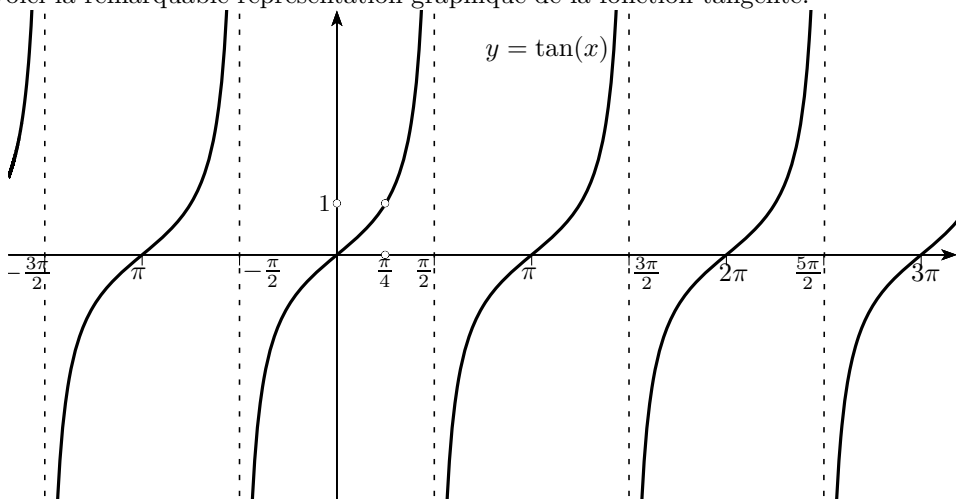
C'est une fonction continue et dérivable sur son ensemble de définition, impaire et périodique de période π .

Ceci correspond à l'abscisse du point d'intersection de la droite (OM) et de la droite graduée tangente que l'on a enroulée (cf. page 330).

Propriété 9 Pour $x \neq \frac{\pi}{2} [\pi]$, $\tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

Démonstration : $\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{\sin' \cos - \sin \cos'}{\cos^2} = \frac{\cos \cos - \sin(-\sin)}{\cos^2} = \frac{1}{\cos^2} = 1 + \frac{\sin^2}{\cos^2}. \quad \square$

Voici la remarquable représentation graphique de la fonction tangente.



Exercices

FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

Exercice 1 Résoudre les équations et inéquations suivantes dans l'intervalle stipulé.

(a) $x \in [0; 2\pi], \quad \cos x = \frac{1}{2}.$

(b) $x \in [-\pi; \pi], \quad \sin x = \frac{1}{2}.$

(c) $x \in [0; 4\pi], \quad \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$

(d) $x \in [0; 2\pi], \quad \cos x \leq -\frac{1}{2}$

(e) $x \in [-\pi; \pi], \quad \sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

(f) $x \in [0; 2\pi], \quad \cos x > \frac{\sqrt{3}}{2}$

Exercice 2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes.

(a) $\cos(3x) = \frac{1}{2}$

(c) $\cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

(e) $4 \sin^2 x - 3 \leq 0$

(b) $\sin x = \cos x$

(d) $\sqrt{2} \sin(5x) + 1 > 0$

(f) $2 \cos^2 x - 3 \cos x \leq 2$

Exercice 3

Déterminer l'ensemble des couples de réels $(x, y) \in [-\pi; \pi]^2$ tels que

$$\begin{cases} 2 \cos(x) + 3 \sin(y) = \sqrt{2} - \frac{3}{2} \\ 4 \cos(x) + \sin(y) = 2\sqrt{2} - \frac{1}{2} \end{cases}$$

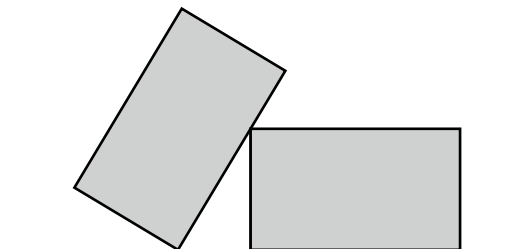
Exercice 4 On lance deux dés tétraédriques bien équilibrés dont les faces sont numérotées 1, 2, 3 et 6. On considère la variable aléatoire $T = \cos(\frac{\pi}{A}) + \sin(\frac{\pi}{B})$ où A correspond au numéro de la face obtenue par le premier dé et B celui du second.

1. Déterminer la probabilité que T soit un entier.
2. Déterminer la probabilité que T soit un entier sachant que A est pair.
3. Déterminer la probabilité que T soit un rationnel.

Exercice 5 Deux briques

Deux briques de dimensions identiques $1 \times \sqrt{3}$ sont disposées sur le sol de la manière ci-contre.

Déterminer la hauteur maximale que l'on peut atteindre et pour quelle position elle est atteinte.



Exercice 6 Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes.

$a(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$

$b(x) = \sqrt{\sin(x)}$

Exercice 7 Étudier la parité des fonctions suivantes.

$$c(x) = x \cos(x) \sin(x)$$

$$d(x) = x + \cos(x)$$

$$e(x) = x^2 - \sin(x)$$

$$f(x) = \frac{x^3}{2 + \cos(x)}$$

Exercice 8 Étudier la périodicité des fonctions suivantes.

$$g(x) = \cos(\pi x)$$

$$h(x) = \sin(5x + 2)$$

$$i(x) = \cos^2(2x)$$

$$j(x) = 3 \cos(x) \sin\left(\frac{x}{3}\right)$$

Exercice 9 Déterminer formellement les fonctions dérivées des fonctions suivantes.

$$k(x) = \cos(x) \sin(x)$$

$$l(x) = \frac{2 + \sin(3x)}{2 + \cos(3x)}$$

$$m(x) = \frac{\cos^2 x}{\sin x}$$

$$n(x) = \sqrt{\cos x}$$

$$o(x) = e^{\sin x} \sin x$$

$$p(x) = \cos(-2x + 4) \sin(-2x + 4)$$



Exercice 10

Show that $\frac{dy}{dx} = \sin 2x$ where $y = 3 \sin^2 x + \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$.

Exercice 11 Associer les fonctions et les graphes suivants.

$$q(x) = \cos(2x),$$

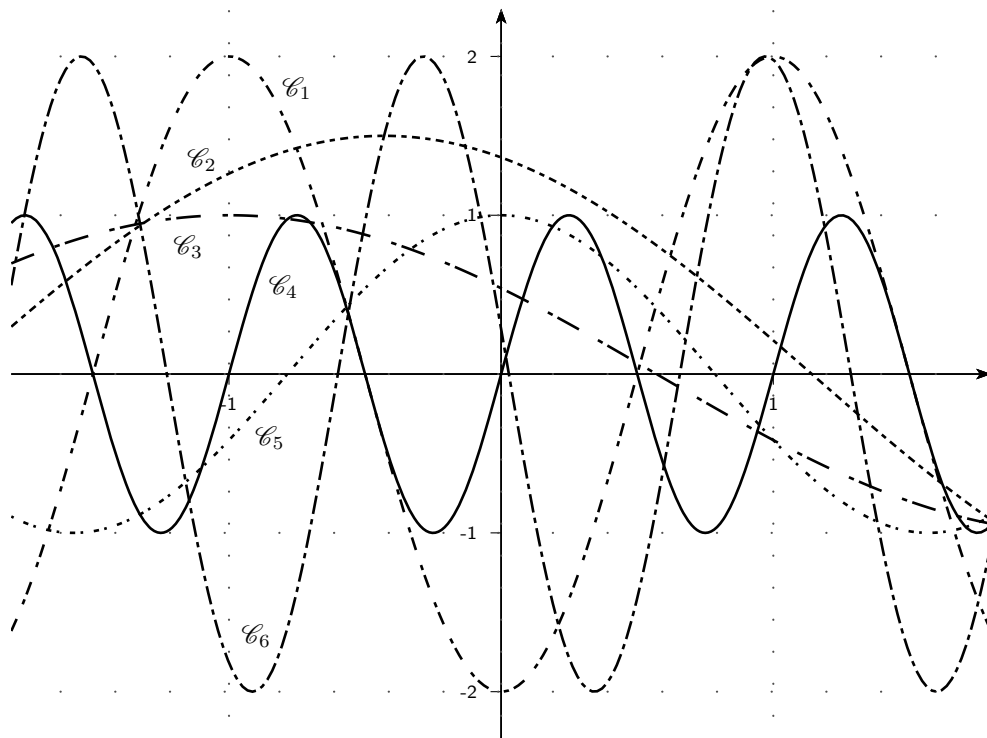
$$r(x) = \frac{3}{2} \sin(x + 2),$$

$$s(x) = \cos(x + 1),$$

$$t(x) = -2 \cos(\pi x),$$

$$u(x) = 2 \sin(5x + 3),$$

$$v(x) = \sin(2\pi x).$$



Exercice 12 Déterminer les limites suivantes.

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin(3x)}$	(d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cos x}{x^2 + 1}$	(g) $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$
(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin(4x)}{3x}$	(e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin \frac{1}{x}}{2x - 1}$	(h) $\lim_{n \rightarrow \infty} n(2 + \cos n)$
(c) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x - 2)}{\sin(4 - x^2)}$	(f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x - 1}$	(i) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos n}{n^2}$
		(j) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n + 1) \sin n}{1 - 3n^2}$

Exercice 13 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x \cos(x)$. Déterminer l'expression de la dérivée 6^e $f^{(6)}(x)$ de la fonction f .

Exercice 14 Les marées

La hauteur de l'eau (en mètres) à l'entrée d'un certain port est donnée pour un certain moment de l'année par la fonction h définie par $h(t) = 9 - 2 \cos\left(\frac{t}{2}\right)$ où t est la durée (en heures) après la dernière marée basse.

1. Quelle est la hauteur de l'eau à marée basse ?
2. Quelle est la hauteur de l'eau à marée haute ?
3. Quelle est la durée qui sépare une marée basse d'une marée haute ?

Exercice 15 Soit $(u_n)_{\mathbb{N}}$ une suite donnée par la relation $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1 - u_n}{2}}$.

1. (a) Démontrer que $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est définie si, et seulement si, $u_0 \in [-1; 1]$.
(b) Déterminer u_0 de manière à ce que $(u_n)_{\mathbb{N}}$ soit stationnaire.
2. Dans la suite de l'exercice, on pose $u_0 = \sin(\alpha_0)$ avec $\alpha_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.
(a) Justifier ce choix. Que devient $(u_n)_{\mathbb{N}}$ si $\alpha_0 = \frac{\pi}{6}$?
(b) Exprimer $\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$ en fonction du sinus et du cosinus de $\frac{\alpha}{2}$.
(c) Démontrer que pour tout $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $\sqrt{\frac{1 - \sin \alpha}{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$.
(d) Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique nombre $\alpha_n \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $u_n = \sin(\alpha_n)$. Montrer que $\alpha_{n+1} = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha_n}{2}$.
3. On considère la suite (β_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\beta_n = \alpha_n - \frac{\pi}{6}$.
(a) Démontrer que cette suite est géométrique.
(b) En déduire α_n puis u_n en fonction de n et α_0 .
(c) La suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ admet-elle une limite ? Quelle est-elle ?

Exercice 16 On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-\cos(x)}$.

1. (a) Justifier que f est paire (cf. page 80) et 2π -périodique.
(b) Dresser son tableau de variations sur $[0; \pi]$ puis vérifier les résultats en traçant son graphe sur la calculatrice.

2. On se propose de rechercher les toutes les tangentes à $\mathcal{C}$ passant par l'origine O du repère en des points d'abscisse appartenant à l'intervalle $[0; \pi]$.
 a est un réel de $[0; \pi]$ et A est le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse a .
 Écrire une équation de la tangente en A à $\mathcal{C}$ et prouver que cette tangente passe par O si, et seulement si, $a \sin(a) = 1$.
3. On définit la fonction Ψ sur $]0; \pi]$ par $\Psi(x) = \sin(x) - \frac{1}{x}$.
 - (a) Étudier les variations de la fonction Ψ .
 - (b) En déduire l'existence pour la fonction Ψ d'un maximum global M en un point x_0 que l'on ne cherchera pas à calculer.
 - (c) Calculer $\Psi'(\frac{\pi}{2})$ et $\Psi(\frac{\pi}{2})$. Comparer alors x_0 et $\frac{\pi}{2}$ et donner le signe de M .
 - (d) Démontrer que Ψ s'annule en deux nombres p et q de $]0; \pi]$ et donner en justifiant une valeur décimale approchée par défaut à 10^{-1} près de p et q .
4. En utilisant les résultats précédents, conclure quant au nombre de tangentes à $\mathcal{C}$ passant par O .

Exercice 17 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2 + \cos(x))e^{1-x}$ de représentation $\mathcal{C}$.

1. Démontrer que, pour tout réel x , $f(x) > 0$.
2. (a) Démontrer que, pour tout réel x , $\sqrt{2} \cos(x - \frac{\pi}{4}) = \cos(x) + \sin(x)$.
 (b) En déduire que, pour tout réel x , $2 + \cos(x) + \sin(x) > 0$
 (c) Démontrer que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
3. Quelles sont les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$?
4. Démontrer que, dans l'intervalle $[0; \pi]$, l'équation $f(x) = 3$ admet une solution unique α et en donner un encadrement d'amplitude 10^{-1} .
5. Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

Exercice 18 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3 \sin(2x) - 2 \cos(2x)$.

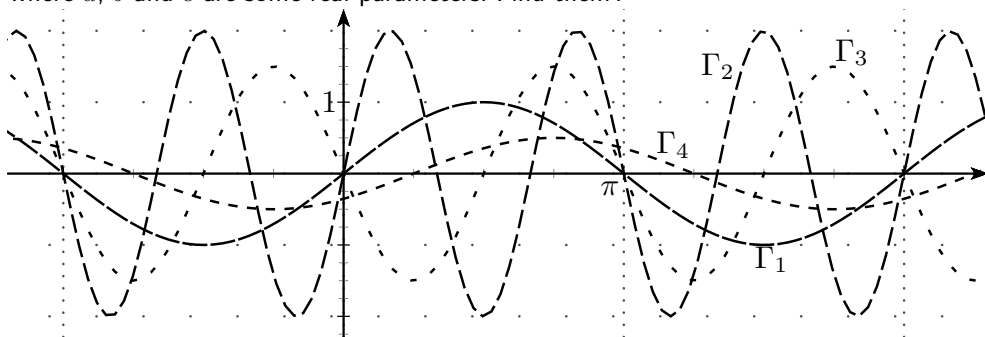
Justifier qu'il existe deux réels a et b tel que f soit solution de l'équation différentielle $(E): y'' + ay' + by = 0$.

Exercice 19 Soit $a \in]0; 1[$.

Comparer les fonctions $f_a(x) = \sin(ax)$ et $g_a(x) = a \sin(x)$ pour $x \in [0; \pi]$.



Exercice 20 Each of the graph below has an equation of the form $y = a \sin(bx + c)$ where a , b and c are some real parameters. Find them!



Exercice 21 Pour chacune des fonctions f et g définies par $f(x) = -4 \sin(3x)$ et $g(x) = 5 \cos(2x + 6)$,

- déterminer l'ensemble de définition,
- déterminer la parité éventuelle,
- déterminer la périodicité éventuelle,
- déterminer les racines,
- déterminer la fonction dérivée.

Exercice 22 Le pendule

Un pendule simple est constitué d'un objet de masse m suspendu à un fil inextensible de longueur ℓ qu'on lâche dans un plan vertical avec un (petit) angle θ_0 en radian par rapport à la verticale. On désigne par $\theta(t)$ l'angle formé par cet axe et le fil après t secondes.

Le principe fondamental de la dynamique permet d'écrire l'équation différentielle $\theta'' + \frac{g}{\ell} \theta = 0$ où $g \simeq 9,81$ est la constante gravitationnelle.

- Vérifier que les fonctions de la forme $A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$ sont solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$.

On admettra que toutes les solutions de cette équation sont de cette forme.

- On donne $\ell = 0,2 \text{ m}$ et $\theta_0 = \frac{\pi}{36}$. Déterminer l'expression de la fonction θ sachant que la vitesse initiale est supposée nulle.
 - Représenter $\theta(t)$ à la calculatrice et interpréter ce graphe.

Exercice 23 Le chemin le plus court

Soit $(O; I; J)$ un repère orthonormé du plan, $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique, M un point de $\mathcal{C}$ sur l'arc $\widehat{IJ}$ et H le pied de la hauteur issue de M du triangle MOI . Pour aller de H à M , deux chemins sont possibles, les autres étant proscrits par la convention de Genève portant sur l'interdiction des chemins indésirables. Le chemin droit qui consiste à parcourir le segment $[HO]$ puis le segment $[OM]$ et le chemin courbe où l'on parcourt le segment $[HI]$ puis l'arc $\widehat{IM}$. Déterminer quel est le chemin le plus court en fonction de la position du point M .

Tournez jusqu'aux pages 487 et 489 afin de réaliser les devoirs n°s 20 et 21.

FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES

Je n'ai pas toujours tapé les “(x)” après cos et sin lorsqu'il n'y avait pas d'ambiguïté (pas de “(3x)” par exemple) : ne faites surtout pas de même, c'est mal !

Exercice 1 En traçant les droites parallèles aux axes pertinentes, on résout ces équations et inéquations.

- (a) Si $x \in [0; 2\pi]$, $\cos x = \frac{1}{2} \iff x = \frac{\pi}{3} \text{ ou } \frac{5\pi}{3}$.
- (b) Si $x \in [-\pi; \pi]$, $\sin x = \frac{1}{2} \iff x = \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{5\pi}{6}$.
- (c) Si $x \in [0; 4\pi]$, $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \iff x = \frac{\pi}{6} \text{ ou } \frac{11\pi}{6} \text{ ou } \frac{13\pi}{6} \text{ ou } \frac{23\pi}{6}$.
- (d) Dans $[0; 2\pi[$, $\cos x \leq -\frac{1}{2} \iff x \in \left[\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right]$.
- (e) Dans $]-\pi; \pi]$, $\sin x \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \iff x \in]-\pi; \frac{\pi}{4}] \cup \left[\frac{3\pi}{4}; \pi\right]$.
- (f) Dans $x \in [0; 2\pi]$, $\cos x > \frac{\sqrt{3}}{2} \iff x \in \left[0; \frac{\pi}{6}\right[\cup \left[\frac{11\pi}{6}; 2\pi\right]$.

Exercice 2 Équations – Inéquations

- (a) $\cos(3x) = \frac{1}{2} \iff 3x \equiv \pm \frac{\pi}{3} [2\pi] \iff x \equiv \pm \frac{\pi}{9} \left[\frac{2\pi}{3}\right]$
- (b) $\sin(x) = \cos(x) \in 1^{\text{re}} \text{ bissectrice donc } x \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi] \text{ ou } x \equiv -\frac{3\pi}{4} [2\pi]$
 $\iff x \equiv \frac{\pi}{4} [\pi]$
- (c) $\cos x \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \iff x \in]-\pi; -\frac{\pi}{6}] \cup \left[\frac{\pi}{6}; \pi\right] [2\pi] \iff x \in \left[\frac{\pi}{6}; \frac{11\pi}{6}\right] [2\pi]$
- (d) $\sqrt{2} \sin(5x) + 1 > 0 \iff \sin(5x) > -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$
 $\iff 5x \in \left]-\frac{\pi}{4}; \frac{5\pi}{4}\right[[2\pi] \iff x \in \left]-\frac{\pi}{20}; \frac{\pi}{4}\right[\left[\frac{2\pi}{5}\right]$
- (e) $4 \sin^2 x - 3 \leq 0 \iff \sin^2 x \leq \frac{3}{4} \iff -\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $\iff x \in \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right] [2\pi]$
- (f) $2 \cos^2 x - 3 \cos x \leq 2 \iff 2(\cos x)^2 - 3(\cos x) - 2 \leq 0$
 $\iff (\cos x - 2)(2 \cos x + 1) \leq 0$
 $\iff \cos x \in \left[-\frac{1}{2}; 2\right] \iff \cos x \geq -\frac{1}{2} \iff x \in \left[-\frac{2\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\right] [2\pi]$

Exercice 3 Posons $X = \cos(x)$ et $Y = \sin(y)$. Le système devient alors

$$\begin{aligned} \begin{cases} 2X + 3Y = \sqrt{2} - \frac{3}{2} \\ 4X + Y = 2\sqrt{2} - \frac{1}{2} \end{cases} & \stackrel{(L2) - 2(L1)}{\iff} \begin{cases} Y - 6Y = (2\sqrt{2} - \frac{1}{2}) - 2(\sqrt{2} - \frac{3}{2}) \\ 2X = \sqrt{2} - \frac{3}{2} - 3Y \end{cases} \\ & \iff \begin{cases} -5Y = \frac{5}{2} \\ X = \frac{1}{2}(\sqrt{2} - \frac{3}{2} - 3Y) \end{cases} \iff \begin{cases} \sin(y) = Y = -\frac{1}{2} \\ \cos(x) = X = \frac{1}{2}(\sqrt{2} - \frac{3}{2} + \frac{3}{2}) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \\ & \iff \begin{cases} x \equiv \pm \frac{\pi}{4} [2\pi] \\ y \equiv -\frac{5\pi}{6} [2\pi] \text{ ou } y \equiv -\frac{\pi}{6} [2\pi] \end{cases} \iff (x, y) \in \left\{-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right\} \times \left\{-\frac{5\pi}{6}, -\frac{\pi}{6}\right\} \end{aligned}$$

Exercice 4 $T = \cos(\frac{\pi}{A}) + \sin(\frac{\pi}{B})$ pour deux dés tétraédriques.

On construit le tableau des issues de cette expérience aléatoire.

Par exemple, si l'on a obtenu un 2 et un 6, alors $T = \cos(\frac{\pi}{2}) + \sin(\frac{\pi}{6}) = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

$B \backslash A$	1	2	3	6
1	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
2	0	1	$\frac{3}{2}$	$1 + \frac{\sqrt{3}}{2}$
3	$\frac{\sqrt{3}}{2} - 1$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}+1}{2}$	$\sqrt{3}$
6	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

Les dés étant bien équilibrés, les seize cases sont équiprobables et l'on en déduit les réponses suivantes.

1. La probabilité que T soit un entier est $P(T \in \mathbb{N}) = \frac{\# \text{ cases } T \in \mathbb{N}}{\# \text{ total cases}} = \frac{5}{16}$.

2. La probabilité que T soit entier sachant que A est pair est

$$P_{(A \text{ pair})}(T \in \mathbb{N}) = \frac{P((T \in \mathbb{N}) \cap (A \text{ pair}))}{P(A \text{ pair})} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}.$$

3. La probabilité que T soit rationnel est $P(T \in \mathbb{Q}) = \frac{9}{16}$, un nombre entier étant un nombre rationnel.

Exercice 5 Deux briques

La hauteur maximale est atteinte lorsque le coin supérieur de la brique oblique est à la verticale du coin sur lequel celle-ci est posée. Cette hauteur est alors la longueur de la

diagonale de la brique : $h_{\max} = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2$.

Les dimensions de la brique étant $1 \times \sqrt{3}$, la diagonale forme des angles de $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{6}$ avec les côtés adjacents, correspondants aux lignes trigonométriques $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\frac{1}{2}$. La diagonale est alors verticale lorsque le côté qui repose sur le côté de longueur 1 de l'autre brique forme un angle de $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ avec le sol. Le coin inférieur doit donc reposer au sol à une distance de $\frac{1}{\tan(\frac{\pi}{3})} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ de l'autre brique.

Exercice 6 Ensembles de définition

$$a(x) = \frac{1}{\cos^2(x)} : \mathcal{D}_a = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi\}.$$

$$b(x) = \sqrt{\sin(x)} : \mathcal{D}_b = [0; \pi] \cup [2\pi; 3\pi] \cup \dots$$

Exercice 7 Parité

Soit $x \in \mathbb{R}$ ($\neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ si nécessaire).

$$c(-x) = -x \cos(-x) \sin(-x) = -x \cos(x)(-\sin x) = x \cos(x) \sin(x) = c(x) : \\ c \text{ est paire.}$$

$$d(x) = x + \cos(x). \quad d(-\pi) = -\pi + \cos(-\pi) = -\pi - 1 \\ \text{et} \quad d(\pi) = \pi + \cos(\pi) = \pi - 1. \quad d(-\pi) \neq \pm d(\pi) : d \text{ est ni paire ni impaire.}$$

$$e(x) = x^2 - \sin(x). \quad e(-\frac{\pi}{2}) = (-\frac{\pi}{2})^2 - \sin(-\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^2}{4} + 1 \\ \text{et} \quad e(\frac{\pi}{2}) = (\frac{\pi}{2})^2 - \sin(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi^2}{4} - 1. \quad e(-\frac{\pi}{2}) \neq \pm e(\frac{\pi}{2}) : e \text{ est ni paire ni impaire.}$$

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{2 + \cos(-x)} = -\frac{x^3}{2 + \cos(x)} = -f(x) : f \text{ est impaire.}$$

Exercice 8 PériodicitéSoit $x \in \mathbb{R}$.

$$g(x+2) = \cos(\pi(x+2)) = \cos(\pi x + 2\pi) = \cos(\pi x) = g(x) : g \text{ est } 2\text{-périodique.}$$

$$h(x + \frac{2}{5}\pi) = \sin(5(x + \frac{2}{5}\pi) + 2) = \sin(5x + 2 + 2\pi) = \sin(5x + 2) = h(x) :$$

 h est $\frac{2}{5}\pi$ -périodique.

$$i(x + \frac{\pi}{2}) = \cos^2(2(x + \frac{\pi}{2})) = (\cos(2x + \pi))^2 = (-\cos(2x))^2 = \cos^2(2x) = i(x) :$$

 i est $\frac{\pi}{2}$ -périodique.

$$\begin{aligned} j(x+3\pi) &= 3 \cos(x+3\pi) \sin(\frac{x+3\pi}{3}) = 3 \cos(x+\pi) \sin(\frac{x}{3}+\pi) = 3(-\cos x)(-\sin x) \\ &= 3 \cos(x) \sin(x) = j(x) : j \text{ est } 3\pi\text{-périodique.} \end{aligned}$$

Exercice 9 Dérivées

$$k'(x) = (\cos \sin)' = \cos' \sin + \cos \sin' = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos(2x).$$

$$l'(x) = \frac{3 \cos(3x)(2+\cos(3x)) - (2+\sin(3x))(-3 \sin(3x))}{(2+\cos(3x))^2} = \frac{3(2 \cos(3x) + 2 \sin(3x) + 1)}{(2+\cos(3x))^2}.$$

$$\begin{aligned} m'(x) &= \left(\frac{\cos^2 x}{\sin x} \right)' = \frac{(\cos^2)' \sin - \cos^2 \sin'}{\sin^2 x} = \frac{2 \cos \cos' \sin - \cos^2 \cos}{\sin^2} = \frac{-\cos \cdot (2 \sin^2 + \cos^2)}{\sin^2} \\ &= -\cos x \frac{1+\sin^2 x}{\sin^2 x}. \end{aligned}$$

$$n'(x) = (\sqrt{\cos x})' = \frac{\cos'}{2\sqrt{\cos}} = \frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}}.$$

$$o'(x) = (e^{\sin})' \sin + \sin' e^{\sin} = \sin' e^{\sin} \sin + \sin' e^{\sin} = (1 + \sin x) \cos x e^{\sin x}.$$

$$\begin{aligned} p'(x) &= (\cos(-2x+4) \sin(-2x+4))' \\ &= (\cos(-2x+4))' \sin(-2x+4) + \cos(-2x+4) (\sin(-2x+4))' \\ &= -2 \cos'(-2x+4) \sin(-2x+4) + \cos(-2x+4) \times (-2) \sin'(-2x+4) \\ &= 2 \sin(-2x+4) \sin(-2x+4) - 2 \cos(-2x+4) \cos(-2x+4) \\ &= -2(\cos^2(-2x+4) - \sin^2(-2x+4)) \\ &= -2 \cos(2(-2x+4)) = -2 \cos(8-4x). \end{aligned}$$

Exercice 10

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= (3 \sin^2 x + \cos(2x + \frac{\pi}{3}) + \cos(2x - \frac{\pi}{3}))' \\ &= 3 \times 2 \sin x \sin' x + (2x + \frac{\pi}{3})' \cos' (2x + \frac{\pi}{3}) + (2x - \frac{\pi}{3})' \cos' (2x - \frac{\pi}{3}) \\ &= 3 \times 2 \sin x \cos x - 2 \sin(2x + \frac{\pi}{3}) - 2 \sin(2x - \frac{\pi}{3}) \\ &= 3 \sin(2x) - 2(\sin(2x) \cos(\frac{\pi}{3}) + \cos(2x) \sin(\frac{\pi}{3}) + \sin(2x) \cos(\frac{\pi}{3}) - \cos(2x) \sin(\frac{\pi}{3})) \\ &= 3 \sin(2x) - 2 \times 2 \sin(2x) \times \frac{1}{2} = \sin(2x). \end{aligned}$$

Exercice 11

$$q(x) = \cos(2x) : \mathcal{C}_5, \text{ période } \pi$$

$$r(x) = \frac{3}{2} \sin(x+2) : \mathcal{C}_2, \text{ amplitude } \frac{3}{2}$$

$$s(x) = \cos(x+1) : \mathcal{C}_3, \cos \text{ "décalée" à gauche}$$

$$t(x) = -2 \cos(\pi x) : \mathcal{C}_1, \text{ amplitude et période } 2$$

$$u(x) = 2 \sin(5x+3) : \mathcal{C}_6, \text{ amplitude } 2, \text{ période } \frac{2}{5}\pi$$

$$v(x) = \sin(2\pi x) : \mathcal{C}_5, \text{ période } 1$$

Exercice 12 Limites

- (a) $\frac{\sin x}{\sin(3x)} = \frac{\sin x}{x} \frac{3x}{\sin(3x)} \frac{1}{3} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 1 \times \frac{1}{1} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$
- (b) $\frac{\sin x - \sin(4x)}{3x} = \frac{1}{3} \frac{\sin x}{x} - \frac{4}{3} \frac{\sin(4x)}{4x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} \frac{1}{3} \times 1 - \frac{4}{3} \times 1 = -1.$
- (c) $\frac{\sin(x-2)}{\sin(4-x^2)} = \frac{\sin(x-2)}{x-2} \frac{x-2}{(2-x)(2+x)} \frac{4-x^2}{\sin(4-x^2)} \xrightarrow{x \rightarrow 2} 1 \times \frac{-1}{2+2} \times \frac{1}{1} = -\frac{1}{4}$
 car $x-2 = -(2-x)$ et $\lim_{x \rightarrow 2} 4-x^2 = 0.$
- (d) On a $\frac{-x}{x^2+1} \leq \frac{x \cos x}{x^2+1} \leq \frac{x}{x^2+1}$ et l'on a vu que $\pm \frac{x}{x^2+1} \underset{+\infty}{\sim} \pm \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0 :$
 le théorème des gendarmes permet d'affirmer qu'il en est de même pour $\frac{x \cos x}{x^2+1}.$
- (e) $\frac{x-1}{2x-1} \leq \frac{x+\sin \frac{1}{x}}{2x-1} \leq \frac{x+1}{2x-1}$ et l'on a vu que $\frac{x \pm 1}{2x-1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} :$
 le théorème des gendarmes permet d'affirmer qu'il en est de même pour $\frac{x+\sin \frac{1}{x}}{2x-1}.$
- (f) $\frac{x-1}{x-1} = 1 \leq \frac{x+\sin x}{x-1} \leq \frac{x+1}{x-1} \underset{+\infty}{\sim} \frac{x}{x} = 1$ qui tend donc vers 1 en $+\infty.$
- (g) $\cos\left(\frac{(4n)\pi}{2}\right) = 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ et $\cos\left(\frac{(4n+1)\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ donc $\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$ n'a pas de limite.
- (h) $n(2-1) = n \leq n(2+\cos n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$ d'après les gendarmes.
- (i) On a $-\frac{1}{n^2} \leq \frac{\cos n}{n^2} \leq \frac{1}{n^2}$ donc, d'après les gendarmes,
 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\cos n}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \pm \frac{1}{n^2} = 0.$
- (j) $\frac{-(n+1)}{1-3n^2} \geq \frac{(n+1)\sin n}{1-3n^2} \geq \frac{(n+1)}{1-3n^2} \underset{+\infty}{\sim} \frac{n}{-3n} = -\frac{1}{3n}$
 donc $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)\sin n}{1-3n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \pm \frac{1}{3n} = 0.$

Exercice 13 Pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x \cos(x)$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= x' \cos x + x \cos' x = \cos x - x \sin x, \\ f''(x) &= \cos' x - x' \sin x - x \sin' x = -\sin x - \sin x - x \cos x = -2 \sin x - f(x), \\ f^{(3)}(x) &= -2 \sin' x - f'(x) = -2 \cos x - \cos x + x \sin x = -3 \cos x + x \sin x, \\ f^{(4)}(x) &= -3 \cos' x + x' \sin x + x \sin' x = 3 \sin x + \sin x + x \cos x = 4 \sin x + f(x), \\ f^{(5)}(x) &= 4 \sin' x + f'(x) = 4 \cos x + \cos x - x \sin x = 5 \cos x - x \sin x, \\ \text{et } f^{(6)}(x) &= 5 \cos' x - x' \sin x - x \sin' x = -5 \sin x - \sin x - x \cos x = -6 \cos x - f(x). \end{aligned}$$

Exercice 14 Les marées

- La marée basse correspond au minimum de h qui est atteint en $t = 0$ h et la hauteur de l'eau est alors $h(0) = 9 - 2 \cos(0) = 7$ m.
- La marée haute correspond au maximum de la fonction h qui est atteint lorsque le cosinus vaut -1 et la hauteur d'eau est alors de $9 + 2 \times 1 = 11$ m.
- $\cos\left(\frac{t}{2}\right)$ vaut -1 lorsque $\frac{t}{2} \equiv \pi [2\pi] \iff t \equiv 2\pi [4\pi]$. Puisque $2\pi \simeq 6,28$, il s'écoule environ 6 h 17 min entre la marée basse et la marée haute.

Exercice 15 $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1-u_n}{2}}.$

- (a) Soit la fonction de récurrence $f(x) = \sqrt{\frac{1-x}{2}}$ définie pour $\frac{1-x}{2} \geq 0 :$
 $\mathcal{D}_f =]-\infty; 1]$. Pour que la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ soit bien définie, il faut que l'image

de u_n existe i.e. que l'on garantisse que $u_n \leq 1$.

Soit $x \leq 1$. On a $0 \leq f(x) \leq 1 \iff 0 \leq \sqrt{\frac{1-x}{2}} \leq 1 \iff 0 \leq \frac{1-x}{2} \leq 1^2$
 $\iff 1 \geq x \geq -1$ et la suite est bien définie lorsque son premier terme appartient à $[-1; 1]$.

- (b) Soit $x \in [-1; 1]$. f étant positive, les seules solutions de l'équation $f(x) = x$ doivent l'être aussi et l'on a $f(x) = x \iff \sqrt{\frac{1-x}{2}} = x \iff \frac{1-x}{2} = x^2$
 $\iff 2x^2 + x - 1 = 0 \iff (x+1)(2x-1) = 0 \iff x = \frac{1}{2}$.
 Ainsi, $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est stationnaire ssi $u_0 = \frac{1}{2}$.

2. (a) On a $[-1; 1] = [\sin(-\frac{\pi}{2}); \sin(\frac{\pi}{2})]$ où la fonction sinus est strictement croissante. Puisque la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est bien définie pour tout $u_0 \in [-1; 1]$, on peut poser $u_0 = \sin(\alpha_0)$ pour tout $\alpha_0 \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.
 Si $\alpha_0 = \frac{\pi}{6}$, $u_0 = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$ et $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est stationnaire.

(b) On a $[\sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2})]^2 = [\sin \frac{\pi}{4} \cos \frac{\alpha}{2} - \cos \frac{\pi}{4} \sin \frac{\alpha}{2}]^2$
 $= (\frac{\sqrt{2}}{2})^2 (\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2})^2 = \frac{1}{2} (\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2})^2$.

(c) Ainsi, $[\sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2})]^2 = \frac{1}{2} (\cos \frac{\alpha}{2} - \sin \frac{\alpha}{2})^2$
 $= \frac{1}{2} (\cos^2 \frac{\alpha}{2} - 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} + \sin^2 \frac{\alpha}{2}) = \frac{1}{2} (1 - \sin(2\frac{\alpha}{2})) = \frac{1 - \sin \alpha}{2}$
 et $\sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}) = \sqrt{\frac{1 - \sin \alpha}{2}}$ pour tout $\alpha \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

- (d) On a vu que $[-1; 1] = [\sin(-\frac{\pi}{2}); \sin(\frac{\pi}{2})]$ où la fonction sinus est continue et strictement croissante. Le T.V.I. Strict. permet d'affirmer que tout réel $u_n \in [-1; 1]$ admet un unique antécédent $\alpha_n \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ par la fonction sinus : $u_n = \sin(\alpha_n)$.

On a $\sin \alpha_{n+1} = u_{n+1} = \sqrt{\frac{1-u_n}{2}} = \sqrt{\frac{1-\sin \alpha_n}{2}} = \sin(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha_n}{2})$ et par unicité de α_k , $\alpha_{n+1} = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha_n}{2} \in [-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$.

3. (a) On a $\frac{\beta_{n+1}}{\beta_n} = \frac{\alpha_{n+1} - \frac{\pi}{6}}{\alpha_n - \frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha_n}{2} - \frac{\pi}{6}}{\alpha_n - \frac{\pi}{6}} = \frac{-\frac{\alpha_n}{2} + \frac{\pi}{12}}{\alpha_n - \frac{\pi}{6}} = \frac{-\frac{1}{2}(\alpha_n - \frac{\pi}{6})}{\alpha_n - \frac{\pi}{6}} = -\frac{1}{2}$ et la suite (β_n) est géométrique de raison $-\frac{1}{2}$ et de premier terme $\beta_0 = \alpha_0 - \frac{\pi}{6}$.

(b) Ainsi, $\alpha_n = \beta_n + \frac{\pi}{6} = (\alpha_0 - \frac{\pi}{6}) (-\frac{1}{2})^n + \frac{\pi}{6}$ et $u_n = \sin(\alpha_n)$.

(c) Puisque $-\frac{1}{2} \in [-1; 1]$, $\beta_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, $\alpha_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 + \frac{\pi}{6}$
 et $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

Exercice 16 $f(x) = e^{-\cos(x)}$.

1. (a) Pour $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = e^{-\cos(-x)} = e^{-\cos(x)} = f(x)$
 et $f(x+2\pi) = e^{-\cos(x+2\pi)} = e^{-\cos(x)} = f(x)$.
 (b) Soit $x \in [0; \pi]$. On a $f'(x) = (-\cos x)' e^{-\cos(x)} = \sin(x) \cdot e^{-\cos(x)}$ du signe de $\sin x$. De plus, $f(0) = e^{-\cos(0)} = e^{-1}$ et $f(\pi) = e^{-\cos(\pi)} = e$.
 D'où le tableau suivant.

x	0	π
$\sin x$		+
$f'(x)$		+
f	$\frac{1}{e}$	e

2. La tangente en A à $\mathcal{C}$ admet pour équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

$$y = \sin(a).e^{-\cos(-a)}(x - a) + e^{-\cos(-a)}$$

$$= \sin(a).e^{-\cos(-a)}.x - a \sin(a).e^{-\cos(-a)} + e^{-\cos(-a)}$$

qui passe par O si $-a \sin(a).e^{-\cos(-a)} + e^{-\cos(-a)} = 0$

$$\iff (1 - a \sin a)e^{-\cos(-a)} = 0 \iff a \sin(a) = 1.$$

3. (a) Pour $x \in]0; \pi]$, on a $\Psi'(x) = \sin'x - \frac{-1}{x^2} = \cos x + \frac{1}{x^2}$ et $\Psi''(x) = \cos'x - \frac{2}{x^3} = -\sin x - \frac{2}{x^3} < 0$ donc Ψ' est strictement décroissante sur $x \in]0; \pi]$.

- (b) Puisque $\Psi'(\pi) = \frac{1}{\pi^2} - 1 < 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \Psi'(x) = \cos 0 + \frac{1}{0^2} = +\infty$, la fonction Ψ' change de signe et le T.V.I. Strict. permet d'affirmer qu'elle admet une unique racine x_0 sur $]0; \pi]$. On obtient alors le tableau suivant.

x	0	x_0	π
$\Psi'(x)$		+	0
Ψ			M

Ψ admet donc un maximum global M en x_0 .

- (c) On a $\Psi'(\frac{\pi}{2}) = \cos \frac{\pi}{2} + \frac{1}{(\frac{\pi}{2})^2} = \frac{4}{\pi^2} > 0$ donc $x_0 < \frac{\pi}{2}$
et $\Psi(\frac{\pi}{2}) = \sin(\frac{\pi}{2}) - \frac{1}{\pi/2} = 1 - \frac{2}{\pi}$ donc $M = \Psi(x_0) > \Psi(\frac{\pi}{2}) > 0$.

- (d) On a $\Psi(\pi) = \sin(\pi) - \frac{1}{\pi} = -1 - \frac{1}{\pi} < 0$
et $\Psi(x) = \sin(x) - \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} \sin 0 - \frac{1}{0^+} = -\infty$.

Puisque $M > 0$, Ψ change de signe sur $]0; x_0[$ et sur $]x_0; \pi]$, intervalle de continuité et de stricte monotonie. Le T.V.I. Strict. permet d'affirmer que Ψ s'annule exactement deux fois sur $]0; \pi]$.

La calculatrice donne les deux racines $p \simeq 1,1$ et $q \simeq 2,8$.

4. D'après la question 2., la tangente à $\mathcal{C}$ en $a \in]0; \pi]$ passe par O si, et seulement si, $a \sin a = 1 \iff \sin a = \frac{1}{a} \iff \Psi(a) = 0 \iff a = p$ ou $a = q$.

Exercice 17 $f(x) = (2 + \cos(x))e^{1-x}$

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $\cos(x) \geq -1$ donc $2 + \cos(x) \geq 1 > 0$
et $f(x) = (2 + \cos(x))e^{1-x} > 0 \times 0 = 0$.

2. (a) Pour $x \in \mathbb{R}$, $\sqrt{2} \cos(x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} (\cos x \sin \frac{\pi}{4} + \sin x \cos \frac{\pi}{4})$
 $\sqrt{2} \cos(x - \frac{\pi}{4}) = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} (\cos x + \sin x) = \cos(x) + \sin(x)$.

- (b) Ainsi, $2 + \cos(x) + \sin(x) = 2 + \sqrt{2} \cos(x - \frac{\pi}{4}) \geq 2 + \sqrt{2}(-1) > 0$.

(c) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $f'(x) = ((2 + \cos x)e^{1-x})'$
 $f'(x) = (2 + \cos x)'e^{1-x} + (2 + \cos x)(e^{1-x})'$
 $= (-\sin x)e^{1-x} + (2 + \cos x)(1-x)'e^{1-x} = e^{1-x}(-\sin x - 2 - \cos x) < 0$
 et f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

3. $f(x) = (2 + \cos(x))e^{1-x} \geq (2 - 1)e^{1-x} \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} "e^{1-(-\infty)}" = "e^{+\infty}" = +\infty$
 et, par comparaison, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} +\infty$.
 Par ailleurs, $0 \leq f(x) \leq (2 + 1)e^{1-x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} "e^{-\infty}" = 0$ donc, d'après les
 gendarmes, $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

4. On a $f(0) = (2 + \cos(0))e^1 = 3e \geq 3$ et $f(\pi) = (2 + \cos(\pi))e^{1-\pi} = \frac{1}{e^{\pi-1}} < 3$.
 Sur $[0; \pi]$, la fonction f est strictement monotone et continue. Puisque
 $3 \in [f(\pi); f(0)]$, le T.V.I. Strict. permet d'affirmer que 3 admet un unique an-
 técédent ζ par f dans $[0; \pi]$. La calculatrice donne $\zeta \in [0, 8; 0, 9]$.

5. La tangente à $\mathcal{C}$ en 0 a pour équation

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0) = e^{1-0}(-\sin 0 - 2 - \cos 0)x + 3e = 3e(1 - x).$$

Exercice 18 $f(x) = 3 \sin(2x) - 2 \cos(2x)$,

$$f'(x) = 3(2x)' \sin'(2x) - 2(2x)' \cos'(2x) = 6 \cos(2x) + 4 \sin(2x)$$

$$\text{et } f''(x) = -12 \sin(2x) + 8 \cos(2x).$$

On cherche donc a et b tels que $-12 + 4a + 3b = 0$ et $8 + 6a - 2b = 0$.

Posons $a = 0$ et $b = 4$, et pour $x \in \mathbb{R}$,

$f''(x) + 4f(x) = -12 \sin(2x) + 8 \cos(2x) + 4(3 \sin(2x) - 2 \cos(2x)) = 0$ et f est
 solution de l'équation différentielle $(E): y'' + 4y = 0$.

Exercice 19 Une simple animation Geogebra permet de conjecturer que, pour tous
 $a \in]0; 1[$ et $x \in [0; \pi]$, $f_a(x) = \sin(ax) \geq a \sin(x) = g_a(x)$.

Étudions donc la fonction $d(x) = \sin(ax) - a \sin(x)$ sur $[0; \pi]$.

On a $d'(x) = (ax)' \sin'(ax) - a \sin'(x) = a \cos(ax) - a \cos(x) = a(\cos(ax) - \cos(x))$.

Puisque $a \in]0; 1[$ et $x \in [0; \pi]$, $0 \leq ax \leq x \leq \pi$ et puisque la fonction cosinus est
 décroissante sur $[0; \pi]$, $\cos(ax) \leq \cos(x)$. Ainsi, $d'(x) \leq 0$ et d est décrois-
 sante : pour $x \in [0; \pi]$ et $a \in]0; 1[$, $d(x) \leq d(0) = \sin 0 - a \sin 0 = 0$ $\square$

Exercice 20 Observing the peaks and the phases, we find the following equations :

$$\Gamma_1 : y = \sin(x),$$

$$\Gamma_2 : y = 2 \sin(3x),$$

$$\Gamma_3 : y = -\frac{3}{2} \sin(2x) = \frac{3}{2} \sin(2x + \pi) = \frac{3}{2} \sin(-2x),$$

$$\Gamma_4 : y = \frac{1}{2} \sin(x - \frac{\pi}{4}).$$

Exercice 21 $f(x) = -4 \sin(3x)$ et $g(x) = 5 \cos(2x + 6)$.

(a) Tout comme $\sin$ et $\cos$, f et g sont définies sur $\mathbb{R}$ par composition.

(b) On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -4 \sin(-3x) = 4 \sin(3x) = -4f(x)$ donc
 f est impaire.

$$\text{On a } g(\pi - 3) = 5 \cos(2(\pi - 3) + 6) = 5 \cos(2\pi) = 5$$

$$\text{et } g(3 - \pi) = 5 \cos(2(3 - \pi) + 6) = 5 \cos(12 - 2\pi) = 5 \cos(12).$$

Puisque $g(\pi - 3) \neq \pm g(3 - \pi)$, g n'est ni paire, ni impaire.

(c) On cherche T_f tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f(x + T_f) = f(x) \iff -4 \sin(3(x + T_f)) = -4 \sin(3x)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow 3x + 3T_f &= 3x + k \times 2\pi \iff T_f = k \times \frac{2\pi}{3} \quad \text{et l'on a bien} \\ f(x + \frac{2\pi}{3}) &= -4 \sin(3(x + \frac{2\pi}{3})) = -4 \sin(3x + 2\pi) = -4 \sin(3x) = f(x). \\ f \text{ est périodique de période } T_f &= \frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

On cherche T_g tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} g(x + T_g) &= g(x) \iff 5 \cos(2(x + T_g) + 6) = 5 \cos(2x + 6) \\ \Rightarrow 2x + 2T_g + 6 &= 2x + 6 + k \times 2\pi \iff T_g = k \times \frac{2\pi}{2} = k\pi \quad \text{et l'on a bien} \\ g(x + \pi) &= 5 \cos(2(x + \pi) + 6) = 5 \cos(2x + 2\pi + 6) = 5 \cos(2x + 6) = g(x). \\ g \text{ est périodique de période } T_g &= \pi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(d)} \quad f(x) = 0 &\iff -4 \sin(3x) = 0 \iff 3x \equiv 0 [\pi] \iff x \equiv 0 [\frac{\pi}{3}] \\ &\iff x \in \{0; \frac{\pi}{3}; \frac{2\pi}{3}\} \text{ dans } [0; \frac{2\pi}{3}]. \\ g(x) = 0 &\iff 5 \cos(2x + 6) = 0 \iff 2x + 6 \equiv \frac{\pi}{2} [\pi] \iff 2x \equiv \frac{\pi}{2} - 6 [\pi] \\ &\iff x \equiv \frac{\pi}{4} - 3 [\frac{\pi}{2}] \iff x \in \{\frac{5\pi}{4} - 3; \frac{7\pi}{4} - 3\} \text{ dans } [0; \pi]. \\ \text{(e)} \quad \text{On a } f'(x) &= [-4 \sin(3x)]' = -4 \times 3 \times \sin'(3x) = -12 \cos(3x) \\ \text{et } g'(x) &= [5 \cos(2x + 6)]' = 5 \times 2 \cos'(2x + 6) = -10 \cos(2x + 6). \end{aligned}$$

Exercice 22 Le pendule

- Si $y = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$, alors $y' = -A\omega \sin(\omega t) + B\omega \cos(\omega t)$ et $y'' = -A\omega^2 \cos(\omega t) - B\omega^2 \sin(\omega t)$ donc $y'' + \omega^2 y = -A\omega^2 \cos(\omega t) - B\omega^2 \sin(\omega t) + \omega^2 (A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)) = 0$: y est bien solution de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$.
- (a) Puisque $\frac{g}{\ell} \geq 0$, on peut poser $\omega^2 = \frac{g}{\ell}$ et $\omega = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \simeq \sqrt{\frac{9,81}{0,2}} \simeq 7$.
Comme $\theta'' + \omega^2 \theta = 0$, θ est de la forme $\theta(t) = A \cos(7t) + B \sin(7t)$.
On a alors $\theta'(t) = -7A \sin(7t) + 7B \cos(7t)$ et les conditions initiales donnent le système
$$\begin{cases} \theta(0) = \theta_0 = \frac{\pi}{36} \\ \theta'(0) = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} A \cos(0) + B \sin(0) = \frac{\pi}{36} \\ -7A \sin(0) + 7B \cos(0) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A = \frac{\pi}{36} \\ 7B = 0 \end{cases}$$
d'où $\theta(t) = \frac{\pi}{36} \cos(7t)$.
- (b) On observe une courbe périodique : le pendule va osciller indéfiniment autour de la verticale avec une amplitude de $\frac{\pi}{18}$ radian.

Exercice 23 Le chemin le plus court

Il est clair que si M est en I , il est préférable de prendre le chemin courbe tandis que si M est en J , il vaut mieux prendre le chemin droit.

Soit x la mesure principale en radian de l'angle orienté $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OM})$.

On a $x \in [0; \frac{\pi}{2}]$. Puisque $M \in \mathcal{C}$, cercle trigonométrique, on a $OM = 1$, $OH = \cos(x)$, $HI = OI - OH = 1 - \cos(x)$ et l'arc $\widehat{IM}$ a pour longueur x précisément par définition de la mesure en radian.

Ainsi, le chemin droit a une longueur de $d(x) = HO + OM = \cos(x) + 1$ et le chemin courbe a une longueur de $c(x) = HI + IM = 1 - \cos(x) + x$.

Étudions donc le signe de la différence $f(x) = d(x) - c(x) = x - 2\cos(x)$.

f est dérivable sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ et l'on a $f'(x) = 1 + 2\sin(x) > 0$ sur $]0; \frac{\pi}{2}[$ donc f est

strictement croissante sur $]0; \frac{\pi}{2}[$ et donc sur $[0; \frac{\pi}{2}]$.

On a $f(0) = 0 - 2 \cos(0) = -2 < 0$ et $f(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} - 2 \cos(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} > 0$ donc $0 \in [f(0); f(\frac{\pi}{2})]$.

Puisque f est continue et strictement monotone, le T.V.I. Strict. permet d'affirmer que 0 admet un unique antécédent $\sigma \in [0; \frac{\pi}{2}]$ par f .

La calculatrice donne $\sigma \simeq 1,02988$ ($\neq \frac{\pi}{3} \simeq 1,047$).

Par croissance de f , on a, pour $x < \sigma$, $f(x) < 0$ et donc $d(x) < c(x)$ et pour $x > \sigma$, $f(x) > 0$ et donc $d(x) > c(x)$.

Si S est le point du cercle correspondant à l'angle σ , le chemin droit est le plus court pour tous les points de l'arc $\widehat{MJ}$ et le chemin courbe est le plus court pour tous les points de l'arc $\widehat{IS}$.

Chapitre XIV

CALCUL INTÉGRAL

Sommaire

Introduction	351
Activité	352
1 Notion d'intégrale	354
1.1 Intégrale d'une fonction continue et positive	355
1.2 Dérivabilité de l'intégrale	356
1.3 Propriété fondamentale de l'intégrale	357
2 Intégrale d'une fonction continue	357
2.1 Théorème d'existence de primitives	357
2.2 Généralisation de l'intégrale aux fonctions continues	358
2.3 Propriétés linéaires de l'intégration	359
2.4 Relation de Chasles	360
2.5 Intégrale et aire	361
2.6 Intégrale et relation d'ordre	363
3 Intégration par parties	363
4 Valeur moyenne d'une fonction continue	364
4.1 Valeur moyenne	364
4.2 Inégalité de la moyenne	365
Pour aller plus loin	366
Exercices	368
Corrigé des exercices	377

Introduction

Le calcul intégral, ou l'intégration, est de prime abord associé à la notion d'aire et traduit le concept de surface située « sous une courbe ». Il s'avère que c'est un outil majeur de l'analyse et qu'il est fortement lié à la recherche de primitives.

C'est le philosophe allemand Gottfried Leibniz (1646-1716) qui opère le fondement de la théorie de l'intégration au cours du XVII^es. Le théorème fondamental de

l'analyse, certainement établi par Isaac Newton, affirme que les deux opérations de base de l'analyse, la dérivation et le calcul d'aires, sont réciproques l'une de l'autre. Ceci signifie que si une fonction continue est d'abord intégrée et ensuite dérivée, alors la fonction initiale est retrouvée. Une conséquence importante de ce théorème est que l'on peut calculer une intégrale en utilisant une primitive de la fonction à intégrer. Autrement dit, on calcule une aire en déterminant une fonction dont on connaît la dérivée.

La formalisation de cette théorie a revêtu diverses formes et a tardivement abouti en raison de la complexité des problèmes soulevés. Que sont les fonctions ? Que sont les réels ? Ces questions ne furent pleinement élucidées que grâce au développement de l'analyse au XIX^e s. Puis, quelles fonctions peuvent s'intégrer ? Ceci mènera à de nombreux types d'intégrations, en particulier l'intégrale de Riemann à la fin du XIX^e s. Il est à signaler que l'intégration est encore un sujet d'étude pour la recherche contemporaine.

Ne serait-ce que pour le calcul d'aires, l'utilité de l'intégration n'est pas à justifier et ses liens avec la dérivation en font un outil essentiel de l'analyse mais on retrouve aussi le calcul intégral dans des domaines très divers, jouant un rôle parfois fondamental comme pour les probabilités. Après tout, $\sum$ et $\int$ peuvent bien se lire de la même manière : « somme ».

Activité

Soit $\mathcal{P}$ la section de parabole représentative de la fonction carré $f(x) = x^2$ sur l'intervalle $[0; 1]$ dans un repère orthonormé. L'objectif de l'activité est de préciser l'aire $\mathcal{A}$ du domaine $\mathcal{D}$ situé sous la parabole $\mathcal{P}$, l'unité d'aire étant le carré de côté 1. Pour ce faire, nous allons encadrer $\mathcal{A}$ de plus en plus finement.

Si vous êtes sages, vous aurez un corrigé de cette activité avec celui des exercices.

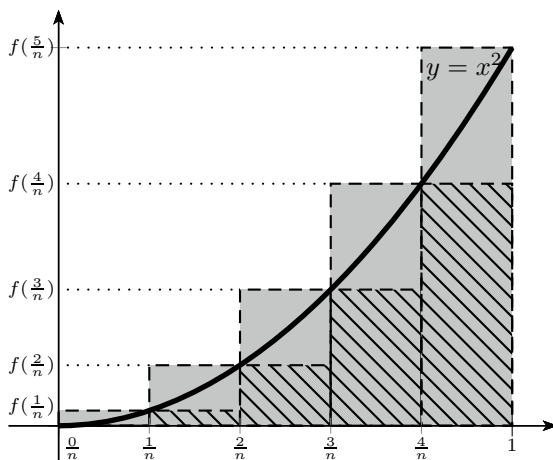
Principe de l'encadrement

Pour tout entier non nul n , on partage l'intervalle $[0; 1]$ en n sous-intervalles de même amplitude $\frac{1}{n}$.

Sur chaque intervalle $[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}]$, k allant de 0 à $n-1$, on construit les rectangles inférieurs (hachurés) et les rectangles supérieurs (grisés) de hauteurs respectives $(\frac{k}{n})^2$ et $(\frac{k+1}{n})^2$. La figure suivante illustre ce procédé pour $n = 5$.

Soit $(u_n)_{\mathbb{N}^*}$ la somme des aires des rectangles inférieurs et $(v_n)_{\mathbb{N}^*}$ la somme des aires des rectangles supérieurs.

- Vérifier que $u_n = \frac{1}{n} \left[f\left(\frac{0}{n}\right) + f\left(\frac{1}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{k}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n-1}{n}\right) \right]$.
- Exprimer v_n de manière analogue.
- Justifier l'inégalité $u_n \leq \mathcal{A} \leq v_n$, pour tout entier $n \geq 1$.
- Étudier la limite de la suite $(v_n - u_n)_{\mathbb{N}^*}$.



Algorithme de calcul

- (a) Compléter l'algorithme suivant afin d'obtenir les valeurs de u_n et v_n ainsi que l'amplitude de l'encadrement de $\mathcal{A}$ en fonction de n .

Lire n

$u \leftarrow 0$

$v \leftarrow 0$

Pour k allant de ... à ...

$u \leftarrow \dots$

$v \leftarrow \dots$

Texte "La somme des aires des rectangles inférieurs vaut "

Afficher u

Texte "La somme des aires des rectangles supérieurs vaut "

Afficher v

$d \leftarrow \dots$

Texte "L'amplitude de l'encadrement obtenu est "

Afficher d

- (b) Implémenter cet algorithme afin de conjecturer la limite éventuelle de chacune des suites $(u_n)_{\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{\mathbb{N}^*}$.

Somme limite des aires des rectangles

On rappelle la formule suivante :

$$\text{pour tout entier } n \geq 1, \quad \sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

- (a) Tester cette formule pour $n = 1, 2, 3$ et 4 .

- (b) Montrer que, pour tout entier $n \geq 2$, $v_n = \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3}$ puis en déduire que $u_n = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$.

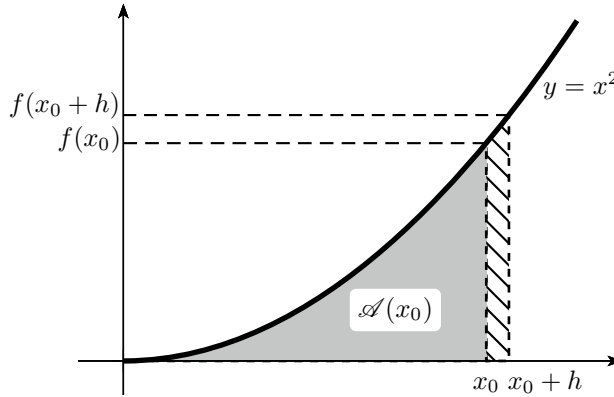
- (c) Déterminer la limite de la suite $(v_n)_{\mathbb{N}^*}$.

- (d) Exprimer u_n en fonction de v_n et de n puis déterminer la limite de u_n .

- (e) Conclure.

La fonction « aire »

Pour tout x_0 positif, on pose $\mathcal{A}(x_0)$ l'aire du domaine délimité par la parabole d'équation $y = x^2$, l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = x_0$.



L'objectif est d'étudier la dérivabilité de la fonction $\mathcal{A}$ puis de déterminer une expression de $\mathcal{A}(x_0)$

(a) Soit $h > 0$.

Prouver que $h \times f(x_0) \leq \mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0) \leq h \times f(x_0 + h)$.

(b) En déduire que $x_0^2 \leq \frac{\mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0)}{h} \leq (x_0 + h)^2$.

(c) De même, montrer que pour $h < 0$ tel que $x_0 + h > 0$,

$$(x_0 + h)^2 \leq \frac{\mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0)}{h} \leq x_0^2.$$

(d) Justifier que la fonction $\mathcal{A}$ est dérivable en x_0 et indiquer $\mathcal{A}'(x_0)$.

(e) Quel lien est établi entre les fonctions $\mathcal{A}$ et f ? Donner l'expression d'une primitive g de f .

(f) On pose, pour $x > 0$, $d(x) = \mathcal{A}(x) - \frac{1}{3}x^3$.

i. Justifier que d est dérivable et calculer sa dérivée.

ii. En utilisant le lemme 1 p. 259, montrer que d est la fonction identiquement nulle et en déduire l'expression de la fonction $\mathcal{A}$.

1 Notion d'intégrale

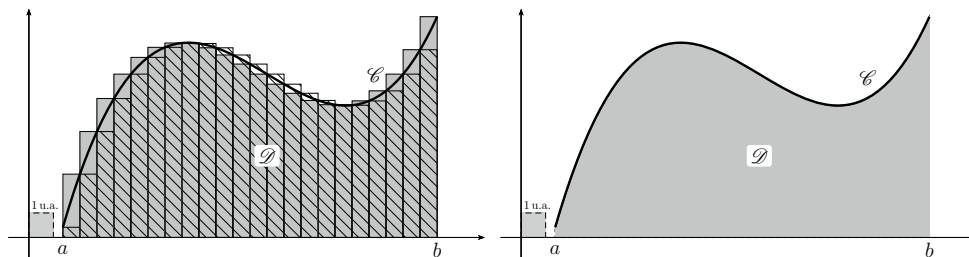
Dans tout le chapitre, le plan est muni d'un repère orthogonal $(O; I, J)$. L'unité d'aire (u.a.) est alors le rectangle de base, celui de côtés $[OI]$ et $[OJ]$. Si, par exemple, $\|\vec{OI}\| = 2 \text{ cm}$ et $\|\vec{OJ}\| = 3 \text{ cm}$ alors $1 \text{ u.a.} = 6 \text{ cm}^2$.

Nous considérons admis le fait que les aires sont conservées par symétries et translations et qu'elles peuvent « s'additionner ».

a et b désignent, pour l'instant, deux nombres réels tels que $a \leq b$.

1.1 Intégrale d'une fonction continue et positive

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle fermé $[a; b]$. On note $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans le repère $(O; I, J)$. On note $\mathcal{D}$ le domaine situé « sous la courbe $\mathcal{C}$ », c.-à-d. délimité par la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équation $x = a$, $x = b$ et $y = 0$. On admettra que le domaine $\mathcal{D}$ a une aire $\mathcal{A}$ que l'on peut approcher aussi précisément que l'on veut par des sommes d'aires de rectangles selon le processus illustré ci-après, les rectangles étant de largeur de plus en plus petite.



Définition 1 Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$. On appelle **intégrale de f sur $[a; b]$** le nombre qui exprime l'aire, en u.a., du domaine $\mathcal{D}$ délimité par la courbe $\mathcal{C}$ de f et les droites d'équations $x = a$, $x = b$ et $y = 0$. On note $\text{Aire}(\mathcal{D}) = \int_a^b f(t) dt$.

Remarques : • On appelle f l'*intégrande* et $\int_a^b f(t) dt$ se lit « somme de a à b de $f(t) dt$ » ou « intégrale de a à b de $f(t) dt$ ».

Dans la première appellation, on retrouve l'approche par des rectangles. Ils sont de côtés $f(t)$ et dt et il faut imaginer que dt tend vers 0 et que l'on fait donc une somme infinie de leur aire $f(t) \times dt$. Néanmoins, il ne faut pas considérer ce dernier comme un produit effectif, cette notation est en fait plus historique que pratique. Une telle somme d'aires de rectangles s'appelle *somme de Riemann*. Pour $x_i \in [a; b]$, on a admis que les sommes de Riemann convergent vers l'intégrale :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i) \Delta x_i = \int_a^b f(t) dt.$$

Il y a d'autres méthodes comme celles des trapèzes ou des milieux.

• On écrit indifféremment $\int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(u) du = \dots$

La variable t est dite « muette ».

Exemples : ◦ On a vu dans l'activité d'introduction que $\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$ u.a.

◦ Un simple calcul d'aire de rectangle permet d'affirmer que

$$\int_{-3}^6 \frac{2}{3} dt = (6 - (-3)) \times \frac{2}{3} = 6 \text{ u.a.}$$

◦ Un simple calcul d'aire de triangle permet d'affirmer que

$$\int_0^3 2u du = \frac{(3-0)(3 \times 2 - 0 \times 2)}{2} = 9 \text{ u.a.}$$

1.2 Dérivabilité de l'intégrale

Le théorème suivant est connu sous le nom de *théorème fondamental de l'analyse*. Il établit le fait qu'une fonction continue est la dérivée de son intégrale.

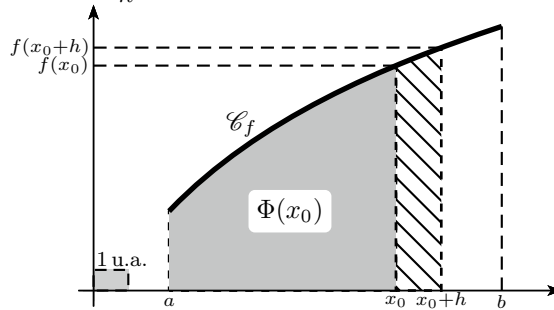
Théorème 1 Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$.
 La fonction $\Phi : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est continue et dérivable sur $[a; b]$ et $\Phi' = f$.
 La fonction Φ est donc la primitive de f sur $[a; b]$ qui s'annule en a .

Démonstration : On se place dans le cas où f est croissante sur l'intervalle $I = [a; b]$. Soient $x_0 \in I$ et $h \neq 0$ tel que $x_0 + h \in I$.

• Si $h > 0$, on a $f(x_0) \leq f(x_0 + h)$ puisque f est croissante. $\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)$ représente l'aire située en dessous de $\mathcal{C}_f$ sur l'intervalle $[x_0; x_0 + h]$, hachurée ci-dessous. On peut alors encadrer cette aire par celle des deux rectangles de largeur h et de longueur $f(x_0)$ et $f(x_0 + h)$.

Ainsi, $h \times f(x_0) \leq \Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0) \leq h \times f(x_0 + h)$

donc $f(x_0) \leq \frac{\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)}{h} \leq f(x_0 + h)$.



• Si $h < 0$, le raisonnement est identique. On a $f(x_0 + h) \leq f(x_0)$ et la largeur des deux rectangles vaut $-h$.

Ainsi, $-h \times f(x_0 + h) \leq \Phi(x_0) - \Phi(x_0 + h) \leq -h \times f(x_0)$ donc, en étant attentif aux signes, $f(x_0 + h) \leq \frac{\Phi(x_0) - \Phi(x_0 + h)}{-h} = \frac{\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)}{h} \leq f(x_0)$.

• Puisque f est continue en x_0 , $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$ et le théorème des gendarmes permet alors d'affirmer que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)}{h} = f(x_0) \in \mathbb{R}$. Ainsi, pour tout $x_0 \in [a; b]$, Φ est dérivable en x_0 et de nombre dérivé $\Phi'(x_0) = f(x_0)$.

• On a toujours $\Phi(a) = \int_a^a f(t) dt = 0$ car le domaine considéré est alors d'aire nulle.

Ainsi, Φ est bien la primitive de f qui s'annule en a . □

Remarque : Si la fonction est décroissante, le raisonnement est identique. De même, si elle est croissante à gauche et décroissante à droite. La difficulté apparaît lorsque la fonction, continue et positive, n'est pas monotone à gauche ou à droite de x_0 (cf. $|x \sin(\frac{1}{x})|$ en 0). Le résultat reste bien sûr vrai mais la démonstration est un peu plus technique et utilise le lemme 1 admis à la page 259.

1.3 Propriété fondamentale de l'intégrale

Intuitivement, le théorème suivant dit que si l'on connaît tous les petits changements instantanés ($f = F'$) d'une certaine quantité (F), alors on peut calculer le changement général de cette quantité en additionnant ($\int$) tous ces petits changements.

Théorème 2 Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b]$.

Si F est une primitive de f sur $[a; b]$, alors $\int_a^b f(t) dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Démonstration : Le théorème 1 p. 356 garantit l'existence d'une primitive de f sur $I = [a; b]$ définie par $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$.

Puisque F est aussi une primitive de f , on sait que $F(x) = \Phi(x) + k$ donc

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= (\Phi(b) + k) - (\Phi(a) + k) = \Phi(b) + k - \Phi(a) - k \\ &= \int_a^b f(t) dt - \int_a^a f(t) dt + 0 = \int_a^b f(t) dt - 0. \end{aligned} \quad \square$$

Exemples : $\circ \int_2^5 1 dt = [t]_2^5 = 5 - 2 = 3$.

$$\circ \int_{-1}^6 t^2 dt = \left[\frac{1}{3} t^3 \right]_{-1}^6 = \frac{1}{3} 6^3 - \frac{1}{3} (-1)^3 = 72 + \frac{1}{3}.$$

En sciences physiques : Si $\ell(t)$ est la distance parcourue par un solide en fonction du temps et $v(t)$ sa vitesse instantanée à l'instant t , alors $\ell' = v$.

La vitesse est le taux d'accroissement *infinitésimal* de la distance parcourue et $\ell(x) - \ell(0) = \int_0^x v(t) dt$ puisque sur un temps dt , le solide parcourt une distance $v(t) \times dt$ à l'instant t .

2 Intégrale d'une fonction continue

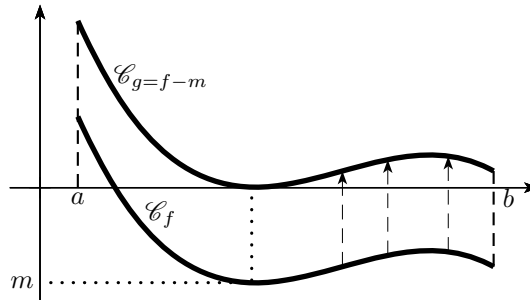
2.1 Théorème d'existence de primitives

Démontrons donc le théorème annoncé dans le chapitre sur les primitives.

Théorème 3

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I .

Démonstration : On se place dans le cas où I est l'intervalle fermé $[a; b]$. On peut alors utiliser le résultat admis suivant : toute fonction continue sur un intervalle fermé atteint son minimum. Il suffit alors « d'augmenter » la fonction de son minimum pour la rendre positive puis d'utiliser l'intégrale.



Soit m le minimum de f sur $I = [a; b]$ donc $f(x) - m \geq 0$ sur I .

On pose $g(x) = f(x) - m$ (i.e. $f(x) = g(x) + m$). La fonction g est alors continue et positive. Le théorème 1 p.356 permet donc d'affirmer que g admet une primitive G sur I . On pose alors $F(x) = G(x) + mx$ sur I et l'on a $F'(x) = G'(x) + (mx)' = (f(x) - m) + m = f(x)$.

F est bien une primitive de f sur I . $\square$

Remarques : • Ainsi, l'existence de primitives n'est plus conditionnée par la positivité de la fonction.

• Nous avons admis qu'une fonction continue sur un intervalle fermé atteint son minimum. Elle atteint aussi son maximum. Ces résultats sont hors de notre portée et découlent de propriétés intrinsèques de $\mathbb{R}$.

• Ce théorème n'a été démontré que dans le cas où l'intervalle est fermé. En effet, s'il est ouvert en a par exemple, il se peut très bien que la limite à droite de f soit $-\infty$ et f n'admet plus de minimum. Mais il s'avère qu'une fonction aire Φ peut encore être définie sur des sous-intervalles en remarquant que tout intervalle $[a'; b']$ où $a < a' < b' < b$ est fermé et inclus dans I .

2.2 Généralisation de l'intégrale aux fonctions continues

On a défini la notion d'intégrale pour des fonctions continues positives par l'aire du domaine situé sous la courbe et l'on a montré que c'était aussi la différence entre deux valeurs d'une primitive. Ces dernières existant pour toutes les fonctions continues, non nécessairement positives, il est bien tentant de définir l'intégrale pour toutes les fonctions continues au moyen des primitives.

Définition 2 Soit f une fonction continue sur un intervalle I , soit F une primitive de f sur I et soient a et b deux nombres quelconques de I . On définit l'intégrale

de la fonction f entre a et b par
$$\int_a^b f(t) dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Remarques :

- Dorénavant, a et b sont deux réels rangés dans un **ordre quelconque**.
- Le théorème 3 p. 357 garantit l'existence de primitives et donc de cette intégrale pour les fonctions continues et le théorème 2 p. 357 donne la cohérence avec la définition 1 p. 355 de l'intégrale pour les fonctions positives.

• Aussi, les notations $\int f$ et $\int f(t) dt$ désigneront une primitive quelconque de f .

• Ce résultat dit que si l'on connaît une primitive, alors on peut calculer une intégrale. Nous verrons plus loin que l'on peut parfois calculer les intégrales sans connaître de primitive ce qui permet alors de déterminer ces dernières.

Exemples :

- $\int_1^0 (7x^5 - x^3 + 5x^2 - 3x + 2) dx = \left[\frac{7}{6}x^6 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + 2x - 11 \right]_1^0 = -\frac{37}{12}.$
- $\int_{-4}^2 \frac{2t+1}{t^2+t+3} dt = \left[\ln(t^2+t+3) \right]_{-4}^2 = \ln(2^2+2+3) - \ln(4^2-4+3) = \ln\left(\frac{3}{5}\right).$
- $\int_{-\pi}^{\pi} 3 \cos \theta \sin^5 \theta d\theta = \left[\frac{1}{2} \sin^6 \theta \right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{1}{2} [\sin^6(\pi) - \sin^6(-\pi)] = 0.$
- $\int_7^{-3} 3te^{t^2+1} dt = \left[\frac{3}{2}e^{t^2+1} \right]_7^{-3} = \frac{3}{2}(e^{10} - e^{50}).$

2.3 Propriétés linéaires de l'intégration

Les résultats suivants sont évidents mais en pratique très utiles.

Propriété 1 Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a; b]$ et soit $c \in [a; b]$.

$$\bullet \int_c^c f(t) dt = 0 \qquad \bullet \int_b^a f(t) dt = - \int_a^b f(t) dt$$

Démonstration :

• Le premier point a en fait déjà été utilisé ($\Phi(a) = 0$) pour une fonction positive.

Ici, si F est une primitive de f sur I , on a $\int_c^c f(t) dt = F(c) - F(c) = 0.$

$$\bullet \int_b^a f(t) dt = [F(t)]_b^a = F(a) - F(b) = -(F(b) - F(a)) = - \int_a^b f(t) dt. \quad \square$$

Théorème 4 Linéarité de l'intégration

Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et $\lambda \in \mathbb{R}$.

Pour tous $a, b \in I$, on a

$$\begin{aligned} \bullet \int_a^b (f+g)(t) dt &= \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt \\ \bullet \int_a^b \lambda f(t) dt &= \lambda \int_a^b f(t) dt \end{aligned}$$

Démonstration : Soient F et G deux primitives de f et de g sur I .

La proposition 2 p. 260 affirme que $F+G$ et λF sont des primitives de $f+g$ et de λf sur I .

Ainsi, $\int_a^b (f+g)(t) dt = [(F+G)(t)]_a^b = F(b) + G(b) - F(a) - G(a)$

$$\int_a^b (f+g)(t) dt = [F(t)]_a^b + [G(t)]_a^b = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt$$

et $\int_a^b \lambda f(t) dt = [(\lambda F)(t)]_a^b = \lambda F(b) - \lambda F(a) = \lambda [F(t)]_a^b = \lambda \int_a^b f(t) dt.$ $\square$

Exemples : $\circ \int_a^b -f(t) dt = - \int_a^b f(t) dt.$

$$\circ \int_0^1 3e^{2t} - 5t^3 dt = 3 \int_0^1 e^{2t} dt - 5 \int_0^1 t^3 dt = 3 \left[\frac{1}{2} e^{2t} \right]_0^1 - 5 \left[\frac{1}{4} t^4 \right]_0^1 = \frac{3}{2} e^2 - \frac{5}{4} - \frac{3}{2} = \frac{3}{2} e^2 - \frac{5}{4}$$

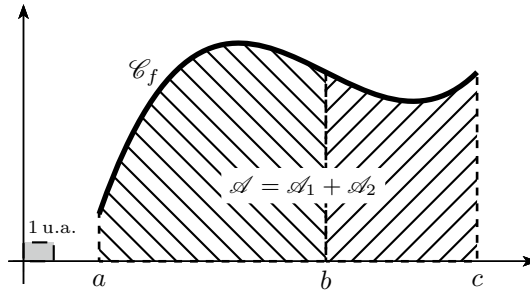
2.4 Relation de Chasles[†]

Théorème 5 Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Pour tous nombres a, b et c de I , on a

$$\int_a^b f(t) dt + \int_b^c f(t) dt = \int_a^c f(t) dt$$

Démonstration : Soit F une primitive de f sur I . On a

$$\begin{aligned} \int_a^b f(t) dt + \int_b^c f(t) dt &= [F(t)]_a^b + [F(t)]_b^c = F(b) - F(a) + F(c) - F(b) \\ &= F(c) - F(a) = [F(t)]_a^c = \int_a^c f(t) dt. \end{aligned} \quad \square$$



Remarque : Lorsque f est positive et $a < b < c$, la relation de Chasles traduit l'additivité des aires.

L'aire du domaine précédent est la somme des aires des deux domaines hachurés.

Exemple : Soit f la fonction définie par morceaux sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} f(x) = 3x - 1 & \text{si } x < 2 \\ f(x) = 7 - x & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

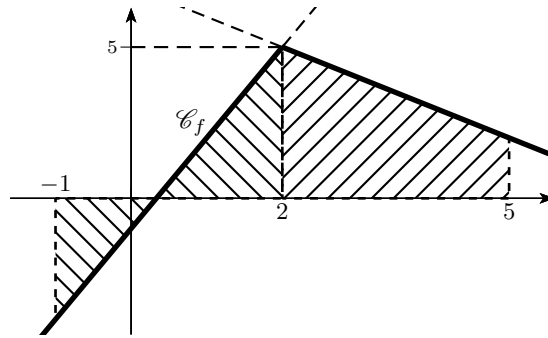
La fonction f est continue puisqu'elle est affine par morceaux se recollant bien :

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = 3 \times 2 - 1 = f(2) = 7 - 2 = \lim_{x \rightarrow 2^+} f(x).$$

On a alors $\int_{-1}^5 f(t) dt = \int_{-1}^2 f(t) dt + \int_2^5 f(t) dt$

$$\int_{-1}^5 f(t) dt = \int_{-1}^2 (3t - 1) dt + \int_2^5 (7 - t) dt = \left[\frac{3}{2} t^2 - t \right]_{-1}^2 + \left[7t - \frac{1}{2} t^2 \right]_2^5 = \dots = 12.$$

[†]. Éminent mathématicien dont le nom est inscrit sur la non moins éminente tour Eiffel.



2.5 Intégrale et aire

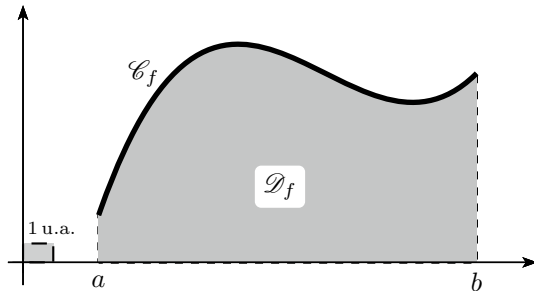
Il ne faut pas confondre *aire* et *intégrale*, ne serait-ce que parce que l'aire est nécessairement positive. Néanmoins, nous avons vu que ces deux notions sont fortement liées.

Dans cette section, a et b sont deux réels tels que $a \leq b$, f et g sont deux fonctions continues sur $[a; b]$ de graphes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$. Les aires sont exprimées en unités d'aires (u.a.).

- Si f est positive sur $[a; b]$, alors

$$\int_a^b f(t) dt = \text{Aire}(\mathcal{D}_f)$$

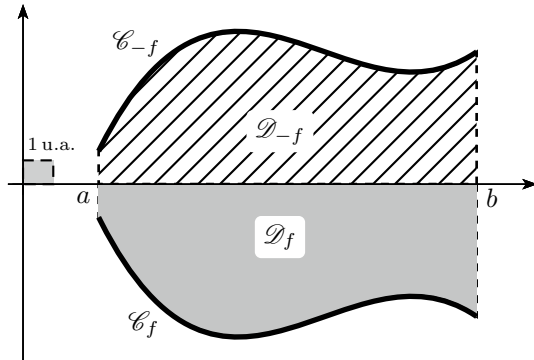
où $\mathcal{D}_f$ est le domaine situé « sous la courbe » : entre $\mathcal{C}_f$ et les droites d'équations $y = 0$, $x = a$ et $x = b$.



- Si f est négative sur $[a; b]$, alors

$$\int_a^b f(t) dt = -\text{Aire}(\mathcal{D}_f)$$

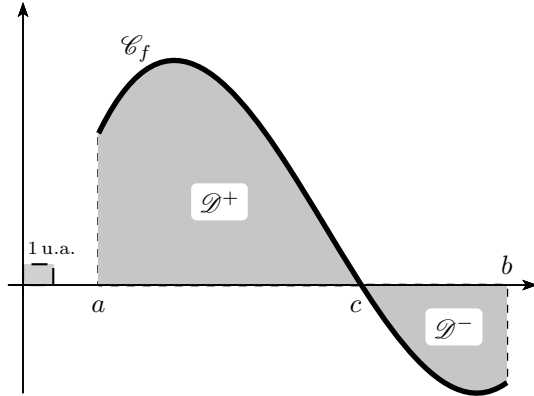
où $\mathcal{D}_f$ est le domaine situé « au-dessus de la courbe » : entre $\mathcal{C}_f$ et les droites d'équations $y = 0$, $x = a$ et $x = b$. En effet, $-f$ est alors positive et les domaines $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_{-f}$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses et donc de même aire.



• Si f n'est pas de signe constant sur $[a; b]$, alors

$$\int_a^b f(t) dt = \text{Aire}(\mathcal{D}_f^+) - \text{Aire}(\mathcal{D}_f^-)$$

où $\mathcal{D}_f^+$ est le domaine situé « sous la courbe » lorsque f est positive et $\mathcal{D}_f^-$ est le domaine situé « au-dessus de la courbe » lorsque f est négative. En effet, la relation de Chasles permet de calculer par morceaux les intégrales.



Sur l'illustration ci-dessus,

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt = \text{Aire}(\mathcal{D}^+) + (-\text{Aire}(\mathcal{D}^-)).$$

L'intégrale peut donc être vue comme l'aire algébrique entre la courbe et l'axe des abscisses.

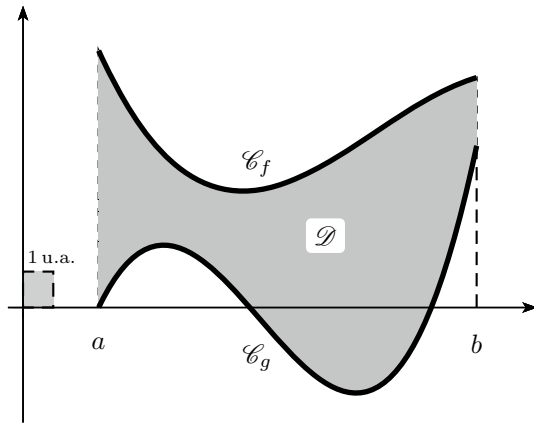
• Si $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur l'intervalle $[a; b]$ et si $\mathcal{D}$ est le domaine délimité par ces deux courbes sur $[a; b]$, alors

$$\text{Aire}(\mathcal{D}) = \int_a^b (f - g)(t) dt.$$

En effet, pour f et g positives,

$$\begin{aligned} \text{Aire}(\mathcal{D}) &= \text{Aire}(\mathcal{D}_f) - \text{Aire}(\mathcal{D}_g) \\ &= \int_a^b f(t) dt - \int_a^b g(t) dt. \end{aligned}$$

Le graphique ci-contre illustre le cas général.



Exemple : L'aire du domaine situé entre la parabole d'équation $y = x^2$ et la cubique d'équation $y = x^3$ entre 0 et 1 vaut $\int_0^1 (x^2 - x^3) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 \right]_0^1 = \frac{1}{12}$.

Remarque : En observant le graphe, on peut remarquer que, pour une fonction f continue sur $\mathbb{R}$,

- si f est paire, alors $\int_{-a}^0 f(t) dt = \int_0^a f(t) dt$;
- si f est impaire, alors $\int_{-a}^0 f(t) dt = -\int_0^a f(t) dt$.

Ces résultats seront complétés dans l'exercice 7 en page 369.

2.6 Intégrale et relation d'ordre

Théorème 6 Soient f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \leq b$.

- Si $f(x) \geq 0$ sur I , alors $\int_a^b f(t) dt \geq 0$.
- Si $f(x) \leq g(x)$ sur I , alors $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$.

Démonstration : • Pour f positive, $\int_a^b f(t) dt$ est l'aire, en u.a., située sous la courbe de f donc positive.

• Si $f \leq g$ sur I , alors $g - f \geq 0$ et, d'après le point précédent et la linéarité de l'intégrale, $\int_a^b g(t) dt - \int_a^b f(t) dt = \int_a^b (g - f)(t) dt \geq 0$. $\square$

Remarques : • La première implication dit que l'intégrale est *positive*.

• La deuxième implication signifie que l'intégration est un *opérateur croissant* et permet d'*intégrer les inégalités*. Ce n'est pas le cas de la dérivation par exemple.

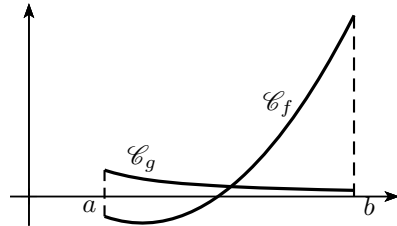
• L'hypothèse $a < b$ est nécessaire puisque $\int_b^a f(t) dt = - \int_a^b f(t) dt$

• Les deux réciproques sont fausses.

Sur l'illustration ci-contre, par exemple, on a

$$\int_a^b f(t) dt \geq 0 \text{ et } f \not\geq 0;$$

$$\int_a^b g(t) dt \leq \int_a^b f(t) dt \text{ et } g \not\leq f.$$



Exemple : Si f est une fonction définie et continue sur $[4; 8]$ admettant -1 pour minimum et 5 pour maximum, alors

$$\int_4^8 -1 dt = -1(8 - 4) = -4 \leq \int_4^8 f(t) dt \leq \int_4^8 5 dt = 5(8 - 4) = 20.$$

3 Intégration par parties

Le résultat suivant permet d'intégrer certaines fonctions écrites sous la forme d'un produit et dont la primitive n'est pas évidente, ce qui est fréquemment le cas.

Propriété 2 *Intégration par parties*

Soient u et v deux fonctions continues, dérivables et de dérivées continues sur un intervalle I et soient $a, b \in I$. On a

$$\int_a^b u'(t)v(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u(t)v'(t) dt$$

Ceci peut s'écrire $\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'$ en respectant les conventions.

Démonstration : Il faut premièrement remarquer que l'on peut intégrer toutes ces fonctions car u , v , u' et v' sont continues. Il suffit alors de partir de la formule de dérivation d'un produit $(uv)' = u'v + uv'$ c.-à-d. $u'v = (uv)' - uv'$ et d'intégrer celle-ci sur l'intervalle $[a; b]$:

$$\begin{aligned} \int_a^b u'(t)v(t) dt &= \int_a^b [(uv)'(t) - (uv')(t)] dt = \int_a^b (uv)'(t) dt - \int_a^b (uv')(t) dt \\ &= [(uv)(t)]_a^b - \int_a^b (uv')(t) dt. \end{aligned} \quad \square$$

Cette formule est très utile lorsque l'on veut intégrer un produit dont on connaît une primitive de l'un des termes, la dérivée de l'autre étant « facile ». Ceci permet donc de déterminer des primitives : en intégrant par parties entre 0 et x , on obtient la primitive s'annulant en 0. Bien entendu, la pratique de l'intégration par parties demande une certaine intuition, le choix de u' et de v étant à discrétion.

Exemples :

$$\begin{aligned} \circ \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx &= [x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \times \sin x dx = [x \sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} - [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - 1 \\ \text{en posant } u' &= \cos(x) \text{ et } v = x : u = -\sin(x) \text{ et } v' = 1. \\ \circ \int_a^b 3te^t dt &= [3t \times e^t]_a^b - \int_a^b 3 \times e^t dt = [3te^t]_a^b - [3e^t]_a^b = 3be^b - 3ae^a - 3e^b + 3e^a \\ \text{en posant } u' &= e^t \text{ et } v = 3t : u = e^t \text{ et } v' = 3. \\ \circ \int_1^5 x \ln(x) dx &= \left[\frac{1}{2}x^2 \ln(x) \right]_1^5 - \int_1^5 \frac{1}{2}x^2 \frac{1}{x} dx = \frac{1}{2}5^2 \ln(5) - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_1^5 = \dots \\ \text{en posant } u' &= x \text{ et } v = \ln(x) : u = \frac{1}{2}x^2 \text{ et } v' = \frac{1}{x}. \\ \circ \int_a^b \ln(x) dx &= [x \ln(x)]_a^b - \int_a^b x \frac{1}{x} dx = [x \ln(x)]_a^b - \int_a^b 1 dx = [x \ln(x) - x]_a^b \\ \text{et l'on retrouve une primitive déjà rencontrée. On a posé } u' &= 1 \text{ et } v = \ln(x) : \\ u = x \text{ et } v' &= \frac{1}{x}. \end{aligned}$$

4 Valeur moyenne d'une fonction continue

Dans cette section, les deux réels a et b sont tels que $a < b$.

4.1 Valeur moyenne

Définition 3 Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$, $a < b$. La **valeur moyenne** de la fonction f sur $[a; b]$ est le nombre μ défini par

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt.$$

Cette définition est à rapprocher de celles de la valeur moyenne d'une série statistique $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$ et de l'espérance d'une loi de probabilité *discrète*

$$\mathbb{E} = \sum_{i=1}^N x_i p_i. \quad \text{Ici, nous sommes dans le cas } \textit{continu}.$$

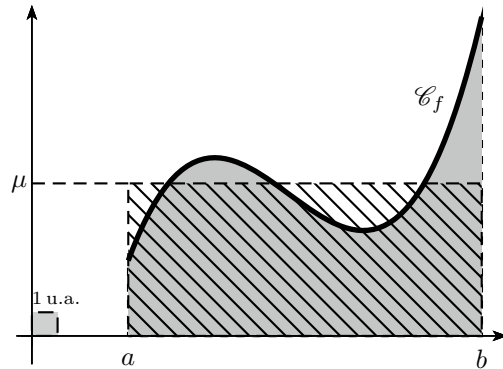
Interprétation graphique :

La valeur moyenne μ est telle que

$$\int_a^b f(t) dt = (b-a)\mu.$$

Ainsi, lorsque f est positive, la valeur moyenne peut être interprétée comme la hauteur du rectangle construit sur $[a; b]$ ayant la même aire que le domaine situé sous la courbe.

μ est la « hauteur moyenne » des points de $\mathcal{C}_f$.



Exemples : ◦ La valeur moyenne de la fonction x^2 sur $[0; 1]$ est

$$\frac{1}{1-0} \int_0^1 t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{3}.$$

◦ La valeur moyenne du sinus sur $[0; \pi]$ est

$$\frac{1}{\pi-0} \int_0^\pi \sin(t) dt = \frac{1}{\pi} [-\cos(t)]_0^\pi = \frac{\cos(0) - \cos(\pi)}{\pi} = \frac{2}{\pi}.$$

En sciences physiques : Si $f(t)$ est la vitesse d'un solide en fonction du temps, alors μ représente la vitesse moyenne de ce solide sur l'intervalle de temps concerné.

4.2 Inégalité de la moyenne

Allons maintenant un peu plus loin et étudions les relations entre l'ordre et la valeur moyenne.

Théorème 7 Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soient $a, b \in I$ tels que $a < b$. Si m est un minorant et M un majorant de f sur $[a; b]$,

i.e. si $\forall t \in [a; b] \quad m \leq f(t) \leq M$, alors $m(b-a) \leq \int_a^b f(t) dt \leq M(b-a)$.

Démonstration : Les fonctions $t \mapsto m$ et $t \mapsto M$ sont constantes et d'intégrales

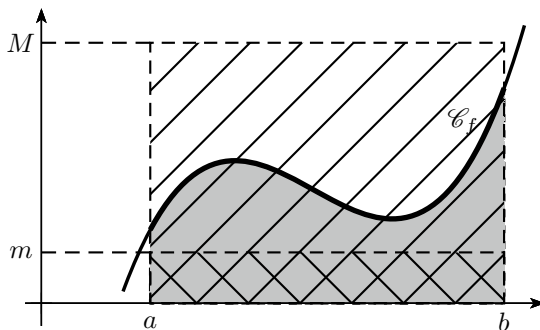
$$\int_a^b m dt = [mt]_a^b = m(b-a) \quad \text{et} \quad \int_a^b M dt = [Mt]_a^b = M(b-a). \quad \text{Puisque}$$

$m \leq f(t) \leq M$ sur $[a; b]$, le théorème 6 p. 363 de croissance de l'intégrale permet

$$\text{d'affirmer que} \quad \int_a^b m dt \leq \int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b M dt. \quad \text{On a intégré les inégalités.} \quad \square$$

Interprétation graphique :

Si f est bornée sur $[a; b]$ par deux constantes m et M positives, alors l'inégalité de la moyenne signifie que l'aire sous la courbe $\mathcal{C}_f$ sur $[a; b]$ est comprise entre les aires des rectangles construits sur $[a; b]$ et de hauteurs respectives m et M .



On obtient aussi un encadrement de la valeur moyenne par simple division de l'inégalité par $b - a$:

Propriété 3 Inégalité de la moyenne Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$, $a < b$.

$$\text{Si } \forall t \in [a; b] \quad m \leq f(t) \leq M, \quad \text{alors} \quad m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \leq M.$$

Autrement dit, si f est bornée par m et M sur $[a; b]$, alors il en est de même de sa valeur moyenne.

Pour aller plus loin

Le théorème 1 p. 356 affirme qu'une fonction continue est la dérivée de son intégrale mais qu'en est-il de l'intégrale d'une dérivée ? Sachez que cela ne redonne pas toujours la fonction de départ. Ceci est typiquement le cas lorsque la dérivée n'est pas continue et des phénomènes divers peuvent alors survenir. Rassurez-vous, les fonctions que l'on étudie en terminale ne sont généralement pas concernées par ceci mais nous verrons toutefois certaines « étrangetés » aperçues lors de l'étude des fonctions trigonométriques.

Nous avons défini l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ pour une fonction continue sur l'intervalle fermé $[a; b]$.

Mais que se passe-t-il lorsque f n'est continue que sur l'intervalle ouvert ? et si l'une des bornes est infinie ?

Observons trois exemples : les intégrales des fonctions $\frac{1}{\sqrt{t}}$, $\frac{1}{t}$ et $\frac{1}{t^2}$.

Posons, pour $x > 0$,

$$\bullet \quad u(x) = \int_1^x \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \left[2\sqrt{t} \right]_1^x = 2\sqrt{x} - 2,$$

$$\bullet \quad v(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt = [\ln(t)]_1^x = \ln x,$$

$$\bullet \quad w(x) = \int_1^x \frac{1}{t^2} dt = \left[-\frac{1}{t} \right]_1^x = 1 - \frac{1}{x}.$$

Faisons maintenant tendre x vers 0^+ :

$$u(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -2, \quad v(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty \quad \text{et} \quad w(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty.$$

On pose donc $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = 2$ et l'on dit que la fonction $\frac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable en 0^+ , contrairement à $\frac{1}{t}$ et $\frac{1}{t^2}$.

Faisons maintenant tendre x vers $+\infty$:

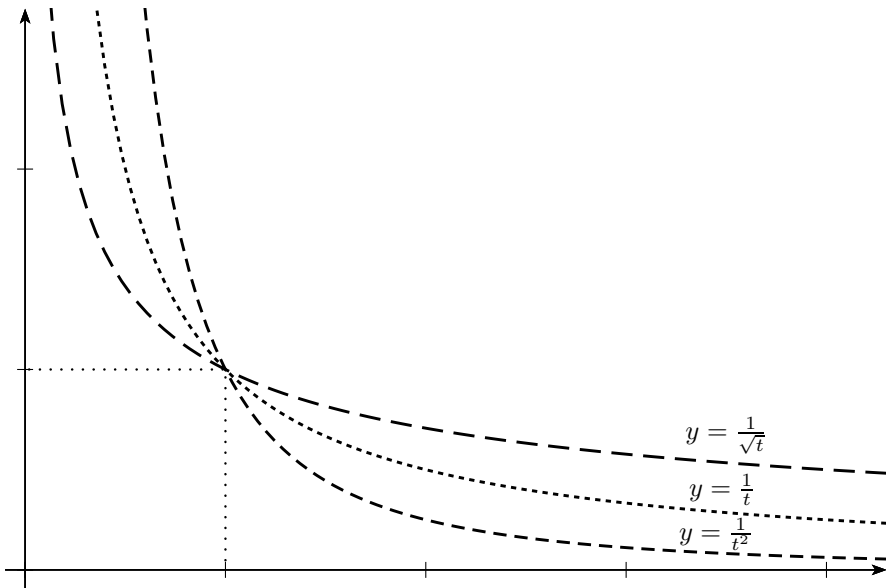
$$u(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty, \quad v(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty \quad \text{et} \quad w(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1.$$

On pose donc $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt = 1$ et l'on dit que $\frac{1}{t^2}$ est intégrable en $+\infty$, contrairement à $\frac{1}{t}$ et $\frac{1}{\sqrt{t}}$.

Graphiquement, cela signifie que certains domaines situés sous les courbes ne sont pas bornés mais d'aires finies : celui sur $[0; 1]$ pour $\mathcal{C}_{1/\sqrt{t}}$, celui sur $[1; +\infty[$ pour $\mathcal{C}_{1/t^2}$.

D'autres domaines situés sous les courbes ne sont pas bornés et d'aires infinies : ceux sur $[0; 1]$ pour $\mathcal{C}_{1/t}$ et $\mathcal{C}_{1/t^2}$, ceux sur $[1; +\infty[$ pour $\mathcal{C}_{1/t}$ et $\mathcal{C}_{1/\sqrt{t}}$.

Coloriez-les donc !



Plus généralement, on définira l'intégrale d'une fonction continue f sur un intervalle $[a; b[$ pour b réel ou infini par la limite des intégrales sur des sous-intervalles

lorsqu'elle est finie : $\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow b} \int_a^x f(t) dt.$

Exercices

CALCUL INTÉGRAL

Exercice 1 Déterminer la valeur en u.a. des intégrales suivantes.

$$A = \int_{-\pi^2}^{e^4} \sin\left(\frac{7\pi}{9}\right) dt \quad B = \int_2^6 (t+1) dt \quad C = \int_{-3}^2 (|t|+4) dt \quad D = \int_{-5}^7 |x-3| dx$$

Exercice 2 Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1-\sqrt{3}; 1+\sqrt{3}]$ par $f(x) = \sqrt{3-(x-1)^2}$. Vérifier que son graphe est un demi-cercle dans un repère

orthonormé puis en déduire la valeur de $\mathcal{A} = \int_{1-\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}} f(t) dt$.

Exercice 3 Soit f la fonction définie sur $[-3; 5]$ par $f(x) = |x-1| - 2$.

Représenter f dans un repère orthonormé puis en déduire la valeur de $I = \int_{-3}^5 f(t) dt$.

Exercice 4 Vous ?

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ? Les corriger sinon.

1. Si f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \int_0^x \sqrt{t} dt$, alors sa dérivée est donnée par $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.
2. Si g est la fonction définie pour $t \geq 2$ par $g(t) = e^{t^2-1}$, alors la fonction G définie pour $t \geq 2$ par $G(t) = \int_2^t e^{x^2-1} dx$ est la primitive de g qui s'annule en 2.

Exercice 5 Calculer les intégrales suivantes à l'aide de primitives.

$$\left. \begin{array}{l} A = \int_0^4 (t-3) dt. \\ B = \int_4^{-1} (t^2-4t) dt. \\ C = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) dt. \\ D = \int_1^9 \frac{1}{\sqrt{t}} dt. \end{array} \right| \left. \begin{array}{l} E = \int_{-2}^2 \frac{1}{\sqrt{2t+5}} dt. \\ F = \int_{-1}^1 e^{3x+4} dx. \\ G = \int_0^1 (xe^{x^2-1}) dx. \\ H = \int_{-1}^4 (2x-3)^2 dx. \end{array} \right| \begin{array}{l} I = \int_0^1 t(t^2+1)^3 dt. \\ J = \int_0^2 \frac{3t}{(t^2+1)^2} dt. \\ K = \int_1^2 \frac{1}{3x+2} dx. \\ L = \int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{3t}{\sqrt{t^2+3}} dt. \end{array}$$

Exercice 6 Étudier, sans déterminer leur expression, les variations des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \int_{-5}^x (t^2+2t-5) dt$ et $g(x) = \int_{2x}^{x^2} (4t+8) dt$.

Exercice 7 Intégration et parité

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ et soit φ définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \int_{-x}^x f(t) dt$.

- On note F la primitive de f sur $\mathbb{R}$ s'annulant en 0.
 - Exprimer $\varphi(x)$ en fonction de $F(\pm x)$.
 - Exprimer $\varphi'(x)$ en fonction de $f(\pm x)$.
- On suppose que f est impaire. Démontrer que φ est identiquement nulle.
 - On suppose que f est paire. Exprimer φ en fonction de F .
 - Quels résultats vient-on de démontrer ?

Exercice 8

- Déterminer les réels a et b tels que, $\forall x \neq 1$, $\frac{2x-1}{x-1} = a + \frac{b}{x-1}$ puis en déduire la valeur de $\int_2^4 \frac{2x-1}{x-1} dx$.
- Déterminer les réels a , b et c tels que, $\forall x \neq -2$, $\frac{x^2-5}{x+2} = ax+b+\frac{c}{x+2}$ puis en déduire la valeur de $\int_6^{-1} \frac{x^2-5}{x+2} dx$.
- Déterminer les réels a , b et c tels que, $\forall x \neq 1$, $\frac{x^2}{(x-1)^2} = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2}$ puis en déduire $\int_2^5 \frac{x^2}{(x-1)^2} dx$.

Exercice 9 Déterminer les intégrales suivantes.

- $I = \int_1^e \ln(t) dt + \int_1^e (t + \ln(\frac{1}{t})) dt$
- $J = \int_1^e \ln(1+t^2) dt + \int_0^1 \ln(1+t^2) dt - \int_0^e \ln(1+t^2) dt$

Exercice 10 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1-x)e^x$.

Montrer que f est solution sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = 0$ puis en déduire la valeur de $\int_0^1 f(t) dt$.

Exercice 11

- Déterminer l'aire du domaine compris entre les droites d'équation $x = 0, 5$, $x = 2$, $y = x$, $y = 0$ et l'hyperbole d'équation $y = \frac{1}{x}$.
- Déterminer l'aire des trois domaines du carré unité délimités par les courbes d'équation $y = \sqrt{x}$ et $y = x^5$.

Exercice 12 Soit $\mathcal{C}$ la courbe d'équation $y = 2xe^{-x^2}$ et soit $\lambda > 0$.

Exprimer, en fonction de λ , l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ du domaine délimité par $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = \lambda$.

Calculer ensuite $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(\lambda)$ et interpréter le résultat.

Exercice 13 Soit f une fonction définie est continue sur l'intervalle $I = [a; b]$.

1. Justifier que, pour tout $x \in I$, $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$.
2. En déduire que, pour tout $x \in I$, $\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$.

Exercice 14

1. Montrer les doubles inégalités suivantes :

$$\sqrt{2} \leq \int_1^2 \sqrt{1+t^2} dt \leq \sqrt{5} \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{\ln(2)}}{2} \leq \int_{-\sqrt{\ln(2)}}^0 e^{-t^2} dt \leq \sqrt{\ln(2)}.$$

2. Comparer, sans les calculer, les nombres $I = \int_1^2 (xe^x) dx$ et $J = \int_1^2 (x^2 e^x) dx$.
3. Comparer, sans les calculer, les nombres $I = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt$ et $J = \int_0^1 \frac{t}{1+t^2} dt$.

Exercice 15 On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \int_0^1 (1+t^n)e^t dt$ et $v_n = \int_1^n \frac{x}{x+1} dx$.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq u_{n+1} \leq u_n$. La suite (u_n) converge-t-elle ?
2. Montrer que la suite (v_n) est croissante puis étudier sa limite.

Exercice 16 Les fonctions u , u' , v et v' sont continues sur $\mathbb{R}$. Proposer une autre écriture que celle donnée.

- (a) $\int_1^4 u'(x)v(x) dx$
- (b) $\int_1^4 u(t)v'(t) dt$
- (c) $[u(s)v(s)]_{-2}^5 - \int_{-2}^5 u(s)v'(s) ds$
- (d) $u(7)v(7) - u(-1)v(-1) - \int_{-1}^7 u(x)v'(x) dx$

Exercice 17 Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par partie.

$A = \int_0^1 -xe^x dx$	$F = \int_{-2}^1 -s(8s+2)^5 ds$
$B = \int_{-1}^1 (x+3)e^{-x} dx$	$G = \int_{-1}^3 3t^3 e^{t^2} dt$
$C = \int_0^1 te^{4+5t} dt$	$H = \int_{-1}^1 3x^3(x^2-1)^2 dx$
$D = \int_{-1}^1 2x^3 e^{x^2-1} dx$	$I = \int_1^4 \sqrt{x} dx$
$E = \int_0^1 \frac{y}{(5y+3)^3} dy$	

Exercice 18

Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une double intégration par partie.

$$\left. \begin{aligned} J &= \int_0^1 x^2 e^x \, dx \\ K &= \int_{-1}^0 x^5 e^{x^2-1} \, dx \end{aligned} \right| \begin{aligned} L &= \int_0^1 x^8 (2x^3 + 1)^4 \, dx \\ M &= \int_{-1}^0 \frac{36t^5}{(2 - 3t^2)^4} \, dt \end{aligned}$$

Exercice 19

1. Calculer la valeur moyenne de la fonction proposée sur l'intervalle I .

$$f(x) = 5 \sin(2x), \quad I = [0; \pi].$$

$$g(x) = \cos(x)e^{\sin(x)}, \quad I = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

2. Encadrer la valeur moyenne de la fonction proposée sur l'intervalle I .

$$h(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad I = [0; 1].$$

$$k(x) = e^{x^2}, \quad I = [1; \sqrt{2}].$$

Exercice 20 La fonction de demande d'un produit est modélisée sur $[0; 20]$ par la fonction f définie par $f(x) = 1000(x+5)e^{-0,2x}$ où $f(x)$ représente le nombre d'objets demandés lorsque le prix unitaire de ceux-ci égale à x euros.

1. Étudier les variations de f et interpréter ces résultats.
2. Calculer la valeur moyenne de f sur $[5; 15]$ et interpréter ce résultat.

Exercice 21 Une maladie épizootique s'est développée dans un cheptel de bovins. Une zoologiste a modélisé le nombre de bêtes atteintes t jours après l'apparition de cette maladie par $N(t) = 30t^2 - t^3$ pour $t \in [0; 30]$.

1. Calculer le nombre moyen de bovins malades durant les dix premiers jours.
2. Calculer le nombre moyens de bovins malades durant les dix jours où il y a eu le plus de bêtes malades.

Exercice 22 Montrer que la suite définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n \sin(2x) \, dx$ est décroissante. En déduire la convergence de la suite I_n puis étudier sa limite.

Exercice 23 $\mathcal{P}$ est la branche de parabole d'équation $y = \frac{1}{4}x^2$, avec $x \geq 0$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note u_n l'aire du domaine délimité par $\mathcal{P}$ et les droites d'équation $x = n+1$ et $y = \frac{1}{4}n^2$. Démontrer que la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est arithmétique.

Exercice 24 Juché sur sa rutilante bicyclette, Lancelot Grobra dévale à toute berzingue une route descendante rectiligne et vachement longue. On note $v(t)$ sa vitesse à l'instant t , où t est exprimé en s et $v(t)$ en m.s^{-1} . On suppose que v est dérivable sur $[0; +\infty[$. Un modèle simple permet de considérer que la fonction v doit vérifier les conditions $v(0) = 0$ et $10v'(t) + v(t) = 30$.

1. Prouver que la fonction définie par $v(t) = 30(1 - e^{-\frac{t}{10}})$ vérifie ces conditions puis étudier la fonction v .

2. On considère que la vitesse de Lancelot est stabilisée lorsque son accélération $v'(t)$ est inférieure à $0,1 \text{ m.s}^{-2}$. Déterminer, à la seconde près, la valeur de t à partir de laquelle la vitesse du cycliste est stabilisée.

3. (a) Pour $t \geq 0$, justifier que la distance parcourue à partir de l'instant initial est

$$\ell(t) = \int_0^t v(u) du.$$

- (b) Quelle est, au mètre près, la distance parcourue par Lancelot en 35 secondes ?

Exercice 25 En probabilité, on définit la *loi exponentielle de paramètre* $\lambda > 0$ de la façon suivante : X est une variable aléatoire suivant une telle loi si, pour tous réels a et

$$b \text{ tels que } 0 < a \leq b, \quad P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda x} dx.$$

1. (a) Exprimer $P(a \leq X \leq b)$ en fonction de a , b et λ .
 (b) Montrer que $P(0 \leq X \leq b) = 1 - e^{-\lambda b}$ et $P(a \leq X) = e^{-\lambda a}$.
 (c) Démontrer que, pour tout $T \geq 0$, $P_{X \geq T}(X \geq T + a) = P(X \geq a)$ puis interpréter cette propriété.
2. La durée de vie (en mois) d'une montre connectée est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,05$.
 (a) Quelle est la probabilité que cette montre ait une durée de vie comprise entre 6 mois et 2 ans ?
 (b) Tu l'utilises depuis un an déjà. Quelle est la probabilité qu'elle fonctionne encore dans un an ?

Exercice 26 La suite (u_n) est définie pour $n \geq 1$ par $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

1. Démontrer que (u_n) est décroissante et minorée. Qu'en déduire ?
2. (a) Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, $u_{n+1} + u_n = \frac{1}{n+1}$.
 (b) En déduire la limite de la suite (u_n) .

Exercice 27 Pour $x \in [0; +\infty[$, on pose $f(x) = \frac{\ln(x+3)}{x+3}$ et pour $n \in \mathbb{N}$, on

pose $u_n = \int_n^{n+1} f(x) dx$.

1. Étudier la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
2. (a) Justifier que, pour tout $x \in [n; n+1]$, $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$.
 (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n+1) \leq u_n \leq f(n)$.
 (c) Justifier que la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ converge et préciser sa limite.
3. (a) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^n f(x) dx$.
 Exprimer I_n en fonction de n (au moyen d'une IPP).
 (b) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} u_k$. Calculer S_n .
 La suite (S_n) converge-t-elle ?

Exercice 28 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = x^n e^{-x}$ de graphe $\mathcal{C}_n$ sur $[0; 1]$

et $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$.

1. Calculer I_1 .
2. Tracer $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_{10}, \mathcal{C}_{20}$ et $\mathcal{C}_{30}$ à la calculatrice.
Formuler alors une conjecture concernant le sens de variation de la suite (I_n) en décrivant votre démarche.
3. Démontrer cette conjecture puis en déduire que la suite (I_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 29 Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = 1 - \frac{4e^t}{e^{2t} + 1}$ de courbe représentative $\mathcal{C}_f$.

On note A et B les points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses ($x_B < 0$).

1. (a) Tracer f à la calculatrice, émettre une conjecture sur la symétrie de la courbe puis la démontrer.
(b) On note a l'abscisse du point A et l'on pose $c = e^a$.
Prouver que c est une solution de l'équation $X^2 - 4X + 1 = 0$ et en déduire la valeur exacte de a .
(c) Dresser le tableau du signe de $f(t)$.
2. On se propose d'étudier quelques propriétés de la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.
(a) Déterminer les variations de la fonction F sur $\mathbb{R}$.
(b) Interpréter géométriquement le nombre $F(a)$ puis en déduire les inégalités $-a \leq F(a) \leq 0$.
(c) On cherche la limite éventuelle de F en $+\infty$.
Prouver que, pour tout t , $f(t) \geq 1 - 4e^{-t}$.
En déduire que pour tout x positif, $F(x) \geq x - 4$ et conclure.
(d) *Dans cette question, toute trace de recherche ou d'initiative, même incomplète, sera prise en compte.*
Déterminer la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.

Exercice 30 Série harmonique

On définit la suite (H_n) pour $n \geq 1$ par $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ (cf. exo 24 p.219).

1. Justifier que pour tout $k \geq 1$, $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}$.
2. En déduire que, pour $n \geq 1$, $\int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq H_n \leq \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx + \frac{n}{n+1}$.
3. Encadrer explicitement H_n et en déduire la limite de (H_n) .

Exercice 31 Intégrales doubles

1. (a) Dans cette question, y est un réel fixé. Démontrer que $\int_{-1}^2 2xy \, dx = 3y$.
- (b) Calculer $\int_0^1 3y \, dy$. On note ce résultat $\int_{y=0}^{y=1} \int_{x=-1}^{x=2} 2xy \, dx \, dy$.
- (c) De la même manière, calculer $\int_{x=-1}^{x=2} \int_{y=0}^{y=1} 2xy \, dy \, dx$. On obtient ainsi ce qui s'appelle une *intégrale double* sur le rectangle $\mathcal{D} = [-1; 2] \times [0; 1]$ que l'on note $\iint_{\mathcal{D}} 2xy \, dx \, dy$.
2. Calculer $\iint_{\mathcal{D}'} 2xy \, dx \, dy$ où $\mathcal{D}' = [0; 1] \times [-2; 3]$.

Ces intégrales doubles, introduites par Euler en 1768, permettent entre autres de calculer des volumes.

Exercice 32 Pour tout entier $n \geq 2$, on considère $I_n = \int_1^2 \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} \, dx$.

1. Calculer I_2 .
2. (a) Démontrer que pour tout $n \geq 2$, $I_{n+1} = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} + (1-n)I_n$.
- (b) Calculer I_3 .
3. (a) Montrer que, pour tout $x \in [1; 2]$, $0 < \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} \leq \frac{e}{x^n}$.
- (b) En déduire un encadrement de I_n puis étudier la limite éventuelle de (I_n) .

Exercice 33 Irrationalité du nombre e

Pour tout $n \geq 1$, on note $I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} \, dx$.

1. Calculer I_1 .
2. (a) Démontrer que pour tout $x \in [0; 1]$, $x^n \leq x^n e^{1-x} \leq ex^n$.
- (b) En déduire que $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$.
3. Démontrer que, pour tout $n \geq 1$, $I_{n+1} = (n+1)I_n - 1$.
4. (a) On pose $k_n = n!e - I_n$. Exprimer k_{n+1} en fonction de k_n et de n .
- (b) Calculer k_1 et démontrer que $k_n \in \mathbb{N}$ pour tout $n \geq 1$.
- (c) Démontrer que, pour tout $n \geq 2$, $k_n + I_n$ n'est pas un entier naturel.
5. (a) Pour $p, q \in \mathbb{N}^*$, démontrer que si $n \geq q$, le nombre $\frac{n!p}{q}$ est entier naturel.
- (b) En déduire que le nombre e est irrationnel.

Exercice 34Partie A :

On désigne par f la fonction définie sur $[1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$.

1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

2. Démontrer que pour tout réel x de l'intervalle $[1 ; +\infty[$, $f'(x) = \frac{1}{x(x+1)^2}$.
Dresser le tableau de variation de la fonction f .

3. En déduire le signe de la fonction f sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$.

Partie B : Soit (u_n) la suite définie pour tout entier strictement positif par

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

1. (S) Donner la valeur exacte affichée par la fonction Python suivante lorsque l'utilisateur entre la valeur $n = 3$.

```
1| import math
2| def L(n) :
3|     u=0
4|     for i in range(1,n) :
5|         u=u+1/i
6|     return(u)
```

2. Recopier et compléter cette fonction Python afin qu'elle affiche la valeur de u_n lorsque l'utilisateur entre la valeur de n .
3. Voici les résultats fournis par la fonction modifiés, arrondis à 10^{-3} .

n	4	5	6	7	8	9	10	100	1 000	1 500	2 000
u_n	0,697	0,674	0,658	0,647	0,638	0,632	0,626	0,582	0,578	0,578	0,577

À l'aide de ce tableau, formuler des conjectures sur le sens de variation de la suite (u_n) et son éventuelle convergence.

Partie C : Cette partie peut être traitée indépendamment de la partie B. Elle permet de démontrer les conjectures formulées à propos de la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$.

1. Démontrer que pour tout entier strictement positif n , $u_{n+1} - u_n = f(n)$ où f est la fonction définie dans la partie A. En déduire le sens de variation de (u_n) .
2. (a) Soit k un entier strictement positif.
Justifier l'inégalité $\int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x} \right) dx \geq 0$.
En déduire que $\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}$
puis démontrer l'inégalité $\ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$ (1).
(b) Écrire l'inégalité (1) en remplaçant successivement k par $1, 2, \dots, n$ et démontrer que pour tout entier strictement positif n , $\ln(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$.
(c) En déduire que pour tout entier strictement positif n , $u_n \geq 0$.
3. Prouver que la suite (u_n) est convergente. On ne demande pas de calculer sa limite.

Exercice 35 Algorithme de Brouncker

Le mathématicien anglais du XVII^e s. William Brouncker a proposé un algorithme de calcul de valeurs approchées de $\ln(2)$. Le voici.

Soit (S_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

1. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$.

(a) Calculer I_1 .

(b) En utilisant $t^{n-1}(1+t) - t^{n-1}$, déterminer une relation entre I_n et I_{n-1} .

(c) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \ln(2) - S_n$.

2. (a) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq |I_n| \leq \frac{1}{n+1}$.

(b) Qu'en déduire pour la suite (I_n) puis pour la suite (S_n) ?

3. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_{2n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(2k+1)(2k+2)}$.

(b) Compléter la fonction Python suivante de manière pertinente.

```
1| def Brouncker(n) :
2|     S = ...
3|     for k in range(...):
4|         S = S + ...
5|     return(...)
```

(c) Tester l'efficacité de cette fonction pour $n = 1000$.

Errez vers les pages 493 et 499 pour réaliser les devoirs n^{os} 22 et 23.

CALCUL INTÉGRAL

Activité de la page 352

A. Principe de l'encadrement

- (a) Les rectangles inférieurs ont tous pour largeur $\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n} = \frac{1}{n}$ et ont pour hauteur $f\left(\frac{k}{n}\right)$, pour k allant de 0 à $n-1$.
Ainsi, $u_n = \frac{1}{n} \left[f\left(\frac{0}{n}\right) + f\left(\frac{1}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{k}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n-1}{n}\right) \right]$.
- (b) De même pour les rectangles supérieurs, k allant de 1 à n cette fois.
Ainsi, $v_n = \frac{1}{n} \left[f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{k}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right) \right]$.
- (c) Sur chaque intervalle $\left[\frac{k}{n}; \frac{k+1}{n}\right]$, on a $\frac{k}{n} \leq x \leq \frac{k+1}{n}$ et la fonction carré est croissante donc $f\left(\frac{k}{n}\right) \leq x^2 \leq f\left(\frac{k+1}{n}\right)$. En additionnant les aires des rectangles et des domaines partiels sous la courbe, on obtient $u_n \leq \mathcal{A} \leq v_n$, pour tout entier $n \geq 1$.
- (d) Pour $n \geq 1$, on a

$$v_n - u_n = \frac{1}{n} \left[f\left(\frac{1}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right) \right] - \frac{1}{n} \left[f\left(\frac{0}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n-1}{n}\right) \right]$$

$$= \frac{1}{n} \left[f\left(\frac{n}{n}\right) - f\left(\frac{0}{n}\right) \right] = \frac{1}{n} (1 - 0) = \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

B. Algorithme de calcul

- (a) En syntaxe Algobox, il faut écrire les lignes suivantes : 11 De 0 à $n-1$
 $13 \quad u + \frac{1}{n} \text{pow}(k/n, 2) \qquad 14 \quad v + \frac{1}{n} \text{pow}((k+1)/n, 2) \qquad 20 \quad v - u$
- (b) Après implémentation, on conjecture que les suites $(u_n)_{\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{\mathbb{N}^*}$ convergent toutes deux vers $\frac{1}{3}$.

C. Somme limite des aires des rectangles

- (a) On a $\frac{1(1+1)(2 \times 1 + 1)}{6} = \frac{6}{6} = 1^2$, $\frac{2(2+1)(2 \times 2 + 1)}{6} = \frac{6 \times 5}{6} = 5 = 1^2 + 2^2$,
 $\frac{3(3+1)(2 \times 3 + 1)}{6} = \frac{3 \times 4 \times 7}{6} = 14 = 1^2 + 2^2 + 3^2$
 et $\frac{4(4+1)(2 \times 4 + 1)}{6} = \frac{4 \times 5 \times 9}{6} = 30 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2$.
- (b) On a, pour tout $n \geq 2$,

$$v_n = \frac{1}{n} \left[f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right) \right] = \frac{1}{n} \left[\left(\frac{1}{n}\right)^2 + \left(\frac{2}{n}\right)^2 + \dots + \left(\frac{n}{n}\right)^2 \right]$$

$$= \frac{1}{n} \left(\frac{1^2}{n^2} + \frac{2^2}{n^2} + \dots + \frac{n^2}{n^2} \right) = \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3}$$

$$= \frac{1}{n^3} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}.$$
- (c) Ainsi, $v_n = \frac{n(1+\frac{1}{n}) \cdot n(2+\frac{1}{n})}{6n^2} = \frac{(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n})}{6} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{(1+0)(2+0)}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
- (d) Puisque, pour $n \geq 1$, $v_n - u_n = \frac{1}{n}$, on a $u_n = v_n - \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$.
- (e) $(u_n)_{\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{\mathbb{N}^*}$ ont donc même limite $\frac{1}{3}$. Puisque $u_n \leq \mathcal{A} \leq v_n$ à.p.c.r., le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\mathcal{A} = \frac{1}{3}$.

D. La fonction « aire »

- (a) Pour $h > 0$, $h \times f(x_0)$ est l'aire du rectangle inférieur entre x_0 et $x_0 + h$, $h \times f(x_0 + h)$ est celle du rectangle supérieur entre les mêmes points et $\mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0)$ est celle du domaine hachuré. On a donc bien l'encadrement $h \times f(x_0) \leq \mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0) \leq h \times f(x_0 + h)$.
- (b) En divisant par $h > 0$, on obtient $x_0^2 \leq \frac{\mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0)}{h} \leq (x_0 + h)^2$.
- (c) Si maintenant $h < 0$ tel que $x_0 + h > 0$, on a $x_0 + h < x_0$, $\mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0) < 0$ est l'opposé de l'aire du domaine hachuré et des argument similaires mènent à $(x_0 + h)^2 \leq \frac{\mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0)}{h} \leq x_0^2$.
- (d) Puisque la fonction carré est continue en x_0 , $\lim_{h \rightarrow 0^\pm} (x_0 + h)^2 = x_0^2$ et, d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{h \rightarrow 0^\pm} \frac{\mathcal{A}(x_0 + h) - \mathcal{A}(x_0)}{h} = x_0^2 = \mathcal{A}'(x_0)$.
- (e) On a donc $\mathcal{A}' = f$: la fonction *aire* est dérivable et de dérivée la fonction délimitant le domaine.
Posons $g(x) = \frac{1}{3}x^3$. On a bien $g'(x) = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 = x^2 = f(x)$.
- (f) i. $d(x) = \mathcal{A}(x) - \frac{1}{3}x^3$ est dérivable car $\mathcal{A}$ et g le sont et de dérivée identiquement nulle puisque $\mathcal{A}$ et g ont même dérivée : f .
- ii. D'après le lemme 1 p. 259, la fonction d est constante, égale à sa valeur en 0 par exemple. Or $\mathcal{A}(0) = g(0) = 0$ donc $d(x) = d(0) = 0$ (sinon, la valeur en 1 : $\frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$). Ainsi, $\mathcal{A}(x) = \frac{1}{3}x^3$ sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 1 $A = \int_{-\pi^2}^{e^4} \sin\left(\frac{7\pi}{9}\right) dt = \sin\left(\frac{7\pi}{9}\right) (e^4 + \pi^2).$

$$B = \int_2^6 (t+1) dt = (6-2) \frac{(2+1)+(6+1)}{2} = 20.$$

$$C = \int_{-3}^2 (|t|+4) dt = 3 \frac{(-3+4)+4}{2} + 2 \frac{4+(2+4)}{2} = \frac{53}{2}.$$

$$D = \int_{-5}^7 |x-3| dx = \frac{1}{2}(3+5)|-5-3| + \frac{1}{2}(7-3)|7-3| = 40.$$

Exercice 2 Le graphe de f semble être un demi-cercle de centre $I(1, 0)$.

Soit $M(x, f(x)) \in \mathcal{C}_f$. M appartient au demi-plan supérieur car $f \geq 0$ et

$$IM^2 = (x-1)^2 + (f(x)-0)^2 = (x-1)^2 + 3 - (x-1)^2 = 3 : M \in \frac{1}{2}\mathcal{C}(I; \sqrt{3}).$$

De plus, tout point de ce demi-cercle est un tel M car son abscisse appartient nécessairement à $[1 - \sqrt{3}; 1 + \sqrt{3}]$.

$$\text{Ainsi, } \mathcal{A} = \int_{1-\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}} f(t) dt = \mathcal{A}ire\left(\frac{1}{2}\mathcal{Disque}(I; \sqrt{3})\right) = \frac{1}{2}\pi(\sqrt{3})^2 = \frac{3\pi}{2} \text{ u.a.}$$

Exercice 3 On a $f(x) = |x-1| - 2 = \begin{cases} x-1-2 & \text{si } x-1 \geq 0 \\ -(x-1)-2 & \text{si } x-1 < 0 \end{cases}$

$$f(x) = \begin{cases} x-3 & \text{si } x \geq 1 \\ -x-1 & \text{si } x < 1. \end{cases} \quad \text{Ainsi,}$$

$$\begin{aligned} I &= \int_{-3}^5 f(t) dt = \int_{-3}^{-1} (-t-1) dt + \int_{-1}^1 (-t-1) dt + \int_1^3 (t-3) dt + \int_3^5 (t-3) dt \\ &= \mathcal{A}(\mathcal{T}_1) - \mathcal{A}(\mathcal{T}_2) - \mathcal{A}(\mathcal{T}_3) + \mathcal{A}(\mathcal{T}_4) = 0 \quad \text{car les quatre triangles sont isométriques.} \end{aligned}$$

Exercice 4 VouF ?

1. Si f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \int_0^x \sqrt{t} dt$, alors sa dérivée est donnée par $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$: Faux. En effet, f est alors une primitive de l'intégrande $\sqrt{t}$ et $f'(x) = \sqrt{x}$.
2. Si g est la fonction définie pour $t \geq 2$ par $g(t) = e^{t^2-1}$, alors la fonction G définie pour $t \geq 2$ par $G(t) = \int_2^t e^{x^2-1} dx$ est la primitive de g qui s'annule en 2 : Vrai ($G' = g$ et $G(2) = 0$).

Exercice 5

$$A = \int_0^4 (t-3) dt = \left[\frac{1}{2}t^2 - 3t + \pi \right]_0^4 = \left(\frac{1}{2}4^2 - 3 \times 4 + \pi \right) - \left(\frac{1}{2}0^2 - 3 \times 0 + \pi \right) = -4.$$

$$B = \int_4^{-1} (t^2 - 4t) dt = \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{4}{2}t^2 \right]_4^{-1} = \left(\frac{1}{3}(-1)^3 - 2 \times 1^2 \right) - \left(\frac{1}{3}4^3 - 2 \times 4^2 \right) = \frac{25}{3}.$$

$$C = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) dt = [\sin t]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

$$D = \int_1^9 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = 2 \int_1^9 \frac{1}{2\sqrt{t}} dt = [2\sqrt{t}]_1^9 = 2\sqrt{9} - 2\sqrt{1} = 4.$$

$$E = \int_{-2}^2 \frac{1}{\sqrt{2t+5}} dt = \int_{-2}^2 \frac{2}{2\sqrt{2t+5}} dt = [\sqrt{2t+5}]_{-2}^2 = \sqrt{4+5} - \sqrt{-4+5} = 2.$$

$$F = \int_{-1}^1 e^{3x+4} dx = \frac{1}{3} \int_{-1}^1 3e^{3x+4} dx = \frac{1}{3} [e^{3x+4}]_{-1}^1 = \frac{1}{3} (e^{3+4} - e^{-3+4}) = \frac{1}{3} (e^7 - e).$$

$$G = \int_0^1 (xe^{x^2-1}) dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (2xe^{x^2-1}) dx = \frac{1}{2} [e^{x^2-1}]_0^1 = \frac{1}{2} (e^{1-1} - e^{0-1}) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e}.$$

$$H = \int_{-1}^4 (2x-3)^2 dx = \frac{1}{3} \frac{1}{2} \int_{-1}^4 3 \times 2 \times (2x-3)^2 dx = \frac{1}{6} [(2x-3)^3]_{-1}^4 \\ = \frac{1}{6} [(2 \times 4 - 3)^3 - (-2 - 3)^3] = \frac{125}{3}.$$

$$I = \int_0^1 t(t^2+1)^3 dt = \frac{1}{4} \frac{1}{2} \int_0^1 4 \times 2t(t^2+1)^3 dt = \frac{1}{8} [(t^2+1)^4]_0^1 \\ = \frac{1}{8} [(1^2+1)^4 - (0^2+1)^4] = \frac{15}{8}.$$

$$J = \int_0^2 \frac{3t}{(t^2+1)^2} dt = -\frac{3}{2} \int_0^2 \frac{-2t}{(t^2+1)^2} dt = -\frac{3}{2} \left[\frac{1}{t^2+1} \right]_0^2 = -\frac{3}{2} \left(\frac{1}{2^2+1} - \frac{1}{0^2+1} \right) = \frac{6}{5}.$$

$$K = \int_1^2 \frac{1}{3x+2} dx = \frac{1}{3} \int_1^2 \frac{3}{3x+2} dx = \frac{1}{3} [\ln(3x+2)]_1^2 \\ = \frac{1}{3} [\ln(3 \times 2 + 2) - \ln(3 \times 1 + 2)] = \frac{1}{3} \ln\left(\frac{8}{5}\right).$$

$$L = \int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{3t}{\sqrt{t^2+3}} dt = 3 \int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{2t}{2\sqrt{t^2+3}} dt = 3 [\sqrt{t^2+3}]_{-1}^{\sqrt{3}} \\ = 3(\sqrt{3+3} - \sqrt{1^2+3}) = 3\sqrt{6} - 6.$$

Exercice 6 Pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \int_{-5}^x (t^2 + 2t - 5) dt = \int_{-5}^x h(t) dt = H(x) - H(-5)$
 donc $f'(x) = H'(x) = h(x) = x^2 + 2x - 5$ de racines $-1 \pm \sqrt{6}$ d'où le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$	-5	$-1-\sqrt{6}$	$-1+\sqrt{6}$	$+\infty$	
$f'(x)$		$\vdots$ +	$\vdots$ 0	$\vdots$ -	$\vdots$ 0	$\vdots$ +
f		$\vdots$ 0	$\nearrow$	$\searrow$	$\nearrow$	

Pour $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = \int_{2x}^{x^2} (4t + 8) dt = \int_{2x}^{x^2} k(t) dt = K(x^2) - K(2x)$
 donc $g'(x) = [K(x^2) - K(2x)]' = 2xK'(x^2) - 2K'(2x) = 2xk(x^2) - 2k(2x)$
 $g'(x) = 2x(4x^2 + 8) - 2(4 \times 2x + 8) = 8x^3 - 16 = 8(x^3 - 2)$: g est donc strictement
 décroissante sur $]-\infty; \sqrt[3]{2}[$ et strictement croissante sur $]\sqrt[3]{2}; +\infty[$.

Exercice 7 Intégration et parité

1. (a) F est la primitive de f sur $\mathbb{R}$ s'annulant en 0 donc, $\forall x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \int_0^x f(t) dt$.

$$\text{On a alors } \varphi(x) = \int_{-x}^x f(t) dt = \int_{-x}^0 f(t) dt + \int_0^x f(t) dt$$

$$\varphi(x) = - \int_0^{-x} -xf(t) dt + \int_0^x f(t) dt = F(x) - F(-x).$$

(b) Ainsi, $\varphi'(x) = (F(x) - F(-x))' = F'(x) - (-F'(-x)) = f(x) + f(-x)$.

2. (a) Si f est impaire, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$ donc

$$\varphi'(x) = f(x) + f(-x) = f(x) - f(x) = 0$$

et φ est constante, égale à $\varphi(0) = \int_0^0 f(t) dt = 0$.

(b) Si f est paire, alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = f(x)$ donc

$$\varphi'(x) = f(x) + f(-x) = f(x) + f(x) = 2f(x) = 2F'(x) \text{ et } \varphi = 2F + k.$$

Puisque $\varphi(0) = F(0) = 0$, la constante k est nulle et $\varphi = 2F$.

(c) · Si f est impaire, $\varphi(x) = F(x) - F(-x) = 0$ donc $F(-x) = F(x)$: F est paire. La primitive s'annulant en 0 d'une fonction impaire sur $\mathbb{R}$ est paire.

· Si f est paire, $\varphi(x) = F(x) - F(-x) = 2F(x)$ donc $F(-x) = -F(x)$: F est impaire. La primitive s'annulant en 0 d'une fonction paire sur $\mathbb{R}$ est impaire.

Exercice 8

1. $\forall x \neq 1$, $E = a + \frac{b}{x-1} = \frac{a(x-1)+b}{x-1} = \frac{ax+(b-a)}{x-1}$ et

$$E = \frac{2x-1}{x-1} \xleftrightarrow{\text{Ident. coeff.}} a = 2, \quad b - a = -1 \iff a = 2, \quad b = 1$$

et $\frac{2x-1}{x-1} = 2 + \frac{1}{x-1}$. Ainsi,

$$\int_2^4 \frac{2x-1}{x-1} dx = \int_2^4 \left(2 + \frac{1}{x-1} \right) dx = [2x + \ln(x-1)]_2^4 = 8 + \ln(3) - 4 - \ln(1)$$

$$= 4 + \ln 3.$$

$$2. \forall x \neq -2, \quad E = ax + b + \frac{c}{x+2} = \frac{(ax+b)(x+2)+c}{x+2} = \frac{ax^2+(2a+b)x+(2b+c)}{x+2} \quad \text{et}$$

$$E = \frac{x^2-5}{x+2} \xLeftrightarrow{\text{Ident. coeff.}} a = 1, \quad 2a + b = 0, \quad 2b + c = -5$$

$$\xLeftrightarrow{\quad} a = 1, \quad b = -2, \quad c = -1.$$

$$\text{Ainsi,} \quad \frac{x^2-5}{x+2} = x - 2 + \frac{1}{x+2}$$

$$\text{et} \quad \int_6^{-1} \frac{x^2-5}{x+2} dx = \int_6^{-1} x - 2 - \frac{1}{x+2} dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - 2x - \ln(x+2) \right]_6^{-1} \\ = \dots = 3 \ln(2) - \frac{7}{2}.$$

$$3. \forall x \neq 1, \quad E = a + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{(x-1)^2} = \frac{a(x-1)^2+b(x-1)+c}{(x-1)^2} = \frac{ax^2+(b-2a)x+(c-b+a)}{(x-1)^2} \quad \text{et}$$

$$E = \frac{x^2}{(x-1)^2} \xLeftrightarrow{\text{Ident. coeff.}} a = 1, \quad b - 2a = 0, \quad c - b + a = 0$$

$$\xLeftrightarrow{\quad} a = 1, \quad b = 2, \quad c = 1 : \quad \frac{x^2}{(x-1)^2} = 1 + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2}.$$

$$\text{Ainsi,} \quad \int_2^5 \frac{x^2}{(x-1)^2} dx = \int_2^5 1 + \frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} dx \\ = \left[x + 2 \ln(x-1) - \frac{1}{x-1} \right]_2^5 = \dots = \frac{15}{4} + 4 \ln(2).$$

Exercice 9

$$(a) \quad I = \int_1^e \ln(t) dt + \int_1^e (t + \ln(\frac{1}{t})) dt = \int_1^e [\ln(t) + t - \ln(t)] dt = \int_1^e t dt \\ = \left[\frac{1}{2}t^2 \right]_1^e = \frac{1}{2}(e-1)(e+1).$$

$$(b) \quad J = \int_1^e \ln(1+t^2) dt + \int_0^1 \dots dt - \int_0^e \dots dt = \int_0^1 \dots dt + \int_1^e \dots dt + \int_e^0 \dots dt \\ = \int_0^0 \ln(1+t^2) dt = 0.$$

Exercice 10 On a $f(x) = (1-x)e^x$, $f'(x) = -e^x + (1-x)e^x = -xe^x = f(x) - e^x$,
et $f''(x) = -e^x - xe^x = (-x-1)e^x = f'(x) - e^x = f(x) - 2e^x$.

D'où $f''(x) - 2f'(x) + f(x) = f(x) - 2e^x - 2(f(x) - e^x) + f(x) = 0$ et
 $f(x) = 2f'(x) - f''(x)$.

$$\text{Ainsi,} \quad \int_0^1 f(t) dt = \int_0^1 (2f'(x) - f''(x)) dx = [2f(x) - f'(x)]_0^1 = [2f(x) - f(x) + e^x]_0^1 \\ = [(2-x)e^x]_0^1 = e - 2.$$

Remarque : une intégration par parties aurait tout aussi bien donné le résultat.

Exercice 11

$$1. \quad \mathcal{A} = \int_{\frac{1}{2}}^1 x dx + \int_1^2 \frac{1}{x} dx = \left[\frac{1}{2}x^2 \right]_{\frac{1}{2}}^1 + [\ln(x)]_1^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \ln(2) - \ln(1) = \frac{3}{8} + \ln(2).$$

$$2. \text{ On a } \quad \mathcal{A}_1 = \int_0^1 x^5 dx = \left[\frac{1}{6}x^6 \right]_0^1 = \frac{1}{6},$$

$$\mathcal{A}_2 = \int_0^1 (\sqrt{x} - x^5) dx = \left[\frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{1}{6}x^6 \right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\text{et } \mathcal{A}_3 = \int_0^1 (1 - \sqrt{x}) dx = \left[x - \frac{2}{3}x\sqrt{x} \right]_0^1 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \quad (\text{aussi} = 1 - \frac{1}{6} - \frac{1}{2}).$$

Exercice 12 Pour $\lambda > 0$, on a

$$\mathcal{A}(\lambda) = \int_0^\lambda 2xe^{-x^2} dx = - \int_0^\lambda -2xe^{-x^2} dx = - \left[e^{-x^2} \right]_0^\lambda = 1 - e^{-\lambda^2}.$$

$\mathcal{A}(\lambda) \xrightarrow{\lambda \rightarrow +\infty} "1 - e^{-\infty}" = 1 - 0 = 1$: le domaine « infini » situé sous la courbe $\mathcal{C}$ pour $x \geq 0$ est d'aire finie.

Exercice 13

1. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a toujours $-|y| \leq y \leq |y|$ puisque $y = -|y|$ ou $y = |y|$ donc, pour $y = f(x)$, on a $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ pour tout $x \in I$.
2. Par composition, les fonctions $-|f(x)|$ et $|f(x)|$ sont continues et puisque $a \leq b$, on peut intégrer l'inégalité précédente :

$$\int_a^b -|f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Par linéarité, on a alors
$$- \int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

donc
$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

Exercice 14

1. • On a $1 \leq 2$ et, pour $t \in [1; 2]$, $\sqrt{1+1^2} = \sqrt{2} \leq \sqrt{1+t^2} \leq \sqrt{1+2^2} = \sqrt{5}$ car $\sqrt{1+t^2}$ croissante.

Ainsi,
$$\int_1^2 \sqrt{2} dt = \sqrt{2} \leq \int_1^2 \sqrt{1+t^2} dt \leq \int_1^2 \sqrt{5} dt = \sqrt{5}.$$

- On a $-\sqrt{\ln(2)} \leq 0$ et, pour $t \in [-\sqrt{\ln(2)}; 0]$,

$$e^{-(-\sqrt{\ln(2)})^2} = \frac{1}{2} \leq e^{-x^2} \leq e^{-0^2} = 1 \quad \text{car } e^{-x^2} \text{ est croissante sur } \mathbb{R}^-.$$

Ainsi,
$$\int_{-\sqrt{\ln(2)}}^0 \frac{1}{2} dt = \frac{\sqrt{\ln(2)}}{2} \leq \int_{-\sqrt{\ln(2)}}^0 e^{-x^2} dt \leq \int_{-\sqrt{\ln(2)}}^0 1 dt = \sqrt{\ln(2)}.$$

2. Puisque $1 \leq 2$ et, pour $x \in [1; 2]$, $xe^x \leq x^2e^x$, on a

$$I = \int_1^2 (xe^x) dx \leq \int_1^2 (x^2e^x) dx = J.$$

3. Puisque $0 \leq 1$ et, pour $t \in [0; 1]$, $\frac{1}{1+t^2} \geq \frac{t}{1+t^2}$, on a

$$I = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt \geq \int_0^1 \frac{t}{1+t^2} dt = J.$$

Exercice 15 $u_n = \int_0^1 (1+t^n)e^t dt$ et $v_n = \int_1^n \frac{x}{x+1} dx$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $0 \leq 1$ et, pour $t \in [0; 1]$, $(1+t^n)e^t \geq 0$ donc

$$u_n = \int_0^1 (1+t^n)e^t dt \geq 0.$$

De plus,
$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 (1+t^{n+1})e^t dt - \int_0^1 (1+t^n)e^t dt = \int_0^1 (t^{n+1} - t^n)e^t dt$$

$$u_{n+1} - u_n = \int_0^1 (t-1)t^n e^t dt \leq 0 \quad \text{car } t-1 \leq 0 \text{ et } t^n e^t \geq 0.$$

La suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ étant décroissante et minorée, elle converge dans $\mathbb{R}$.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $v_{n+1} - v_n = \int_1^{n+1} \frac{x}{x+1} dx - \int_1^n \frac{x}{x+1} dx$
 $v_{n+1} - v_n = \int_n^{n+1} \frac{x}{x+1} dx \geq 0$ car $n \leq n+1$ et $\frac{x}{x+1} \geq 0$ sur $[n; n+1]$:
 $(v_n)_\mathbb{N}$ est donc croissante.
 Étant supérieure à $\int_1^n \frac{1}{x+1} dx = [\ln(x+1)]_1^n = \ln\left(\frac{x+1}{2}\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$,
 $(v_n)_\mathbb{N}$ diverge vers $+\infty$.

Exercice 16 On utilise ici l'intégration par parties : $\int_a^b u'v = [uv]_a^b - \int_a^b uv'.$

- (a) $\int_1^4 u'(x)v(x) dx = [u(x)v(x)]_1^4 - \int_1^4 u(x)v'(x) dx$
 $= u(4)v(4) - u(1)v(1) - \int_1^4 u(x)v'(x) dx.$
- (b) $\int_1^4 u(t)v'(t) dt = [u(t)v(t)]_1^4 - \int_1^4 u'(t)v(t) dt$
 $= u(4)v(4) - u(1)v(1) - \int_1^4 u'(t)v(t) dt.$
- (c) $[u(s)v(s)]_{-2}^5 - \int_{-2}^5 u(s)v'(s) ds = \int_{-2}^5 u'(s)v(s) ds.$
- (d) $u(7)v(7) - u(-1)v(-1) - \int_{-1}^7 u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_{-1}^7 - \int_{-1}^7 u(x)v'(x) dx$
 $= \int_{-1}^7 u'(x)v(x) dx.$

Exercice 17 I.P.P.

- $A = \int_0^1 -xe^x dx$: Posons $u = -x$, $v' = e^x$. On a $u' = -1$, $v = e^x$
 et $A = \int_0^1 -xe^x dx = \int_0^1 uv' dx = [uv]_0^1 - \int_0^1 u'v dx = [-xe^x]_0^1 - \int_0^1 -e^x dx$
 $A = [-xe^x + e^x]_0^1 = -1e^1 + e^1 + 0 - e^0 = -1.$
- $B = \int_{-1}^1 (x+3)e^{-x} dx$: Posons $u = x+3$, $v' = e^{-x}$. On a $u' = 1$,
 $v = -e^{-x}$ et $B = \int_{-1}^1 (x+3)e^{-x} dx = \int_{-1}^1 uv' dx = [uv]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 u'v dx$
 $B = [-(x+3)e^{-x}]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 -e^{-x} dx = [-(x+3)e^{-x} - e^{-x}]_{-1}^1$
 $= [(-x-4)e^{-x}]_{-1}^1 = (-1-4)e^{-1} - (1-4)e^1 = 3e - \frac{5}{e}.$
- $C = \int_0^1 te^{4+5t} dt$: Posons $u = t$, $v' = e^{4+5t}$. On a $u' = 1$, $v = \frac{1}{5}e^{4+5t}$
 et $C = \int_0^1 te^{4+5t} dt = \int_0^1 uv' dt = [uv]_0^1 - \int_0^1 u'v dt$

$$C = \left[\frac{1}{5} t e^{4+5t} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{5} e^{4+5t} dt = \left[\frac{1}{5} t e^{4+5t} - \frac{1}{25} e^{4+5t} \right]_0^1 = \left[\left(\frac{1}{5} t - \frac{1}{25} \right) e^{4+5t} \right]_0^1$$

$$= \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{25} \right) e^{4+5} - \left(-\frac{1}{25} \right) e^4 = \frac{1}{25} (4e^9 + e^4).$$

$$D = \int_{-1}^1 2x^3 e^{x^2-1} dx : \quad \text{Posons } u = x^2, \quad v' = 2x e^{x^2-1}. \quad \text{On a } u' = 2x,$$

$$v = e^{x^2-1} \quad \text{et} \quad D = \int_{-1}^1 2x^3 e^{x^2-1} dx = \int_{-1}^1 uv' dx = [uv]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 u'v dx$$

$$D = \left[x^2 e^{x^2-1} \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 2x e^{x^2-1} dx = \left[x^2 e^{x^2-1} - e^{x^2-1} \right]_{-1}^1 = \left[(x^2 - 1) e^{x^2-1} \right]_{-1}^1$$

$$= (1^2 - 1) e^{1^2-1} - (-1^2 - 1) e^{1^2-1} = 0 \quad (u'v \text{ est impaire...}).$$

$$E = \int_0^1 \frac{y}{(5y+3)^3} dy : \quad \text{Posons } u = y, \quad v' = \frac{1}{(5y+3)^3}. \quad \text{On a } u' = 1,$$

$$v = -\frac{1}{10(5y+3)^2} \quad \text{et} \quad E = \int_0^1 \frac{y}{(5y+3)^3} dy = \int_0^1 uv' dy = [uv]_0^1 - \int_0^1 u'v dy$$

$$E = \left[-\frac{y}{10(5y+3)^2} \right]_0^1 - \int_0^1 -\frac{1}{10(5y+3)^2} dy = \left[-\frac{y}{10(5y+3)^2} - \frac{1}{50(5y+3)} \right]_0^1$$

$$= -\frac{1}{10(5+3)^2} - \frac{1}{50(5+3)} + 0 + \frac{1}{50 \times 3} = \frac{1}{384}.$$

$$F = \int_{-2}^1 -s(8s+2)^5 ds : \quad \text{Posons } u = -s, \quad v' = (8s+2)^5. \quad \text{On a } u' = -1,$$

$$v = \frac{1}{8 \times 6} (8s+2)^6 \quad \text{et} \quad F = \int_{-2}^1 -s(8s+2)^5 ds = \int_{-2}^1 uv' ds$$

$$F = [uv]_{-2}^1 - \int_{-2}^1 u'v ds = \left[-\frac{s}{48} (8s+2)^6 \right]_{-2}^1 - \int_{-2}^1 -\frac{1}{48} (8s+2)^6 ds$$

$$= \left[-\frac{s}{48} (8s+2)^6 + \frac{1}{48 \times 7 \times 8} (8s+2)^7 \right]_{-2}^1 = \left[\left(\frac{8s+2}{2688} - \frac{s}{48} \right) (8s+2)^6 \right]_{-2}^1$$

$$\simeq 292\,000.$$

$$G = \int_{-1}^3 3t^3 e^{t^2} dt : \quad \text{Posons } u = \frac{3}{2} t^2, \quad v' = 2t e^{t^2}. \quad \text{On a } u' = 3t, \quad v = e^{t^2}$$

$$\text{et} \quad G = \int_{-1}^3 3t^3 e^{t^2} dt = \int_{-1}^3 uv' dt = [uv]_{-1}^3 - \int_{-1}^3 u'v dt$$

$$G = \left[\frac{3}{2} t^2 e^{t^2} \right]_{-1}^3 - \int_{-1}^3 3t e^{t^2} dt = \left[\frac{3}{2} t^2 e^{t^2} - \frac{3}{2} e^{t^2} \right]_{-1}^3 = \left[\frac{3}{2} (t^2 - 1) e^{t^2} \right]_{-1}^3$$

$$= \frac{3}{2} (3^2 - 1) e^{3^2} - \frac{3}{2} ((-1)^2 - 1) e^{(-1)^2} = 12e^9.$$

$$H = \int_{-1}^1 3x^3 (x^2-1)^2 dx : \quad \text{Posons } u = \frac{1}{2} x^2, \quad v' = 6x (x^2-1)^2. \quad \text{On a } u' = x,$$

$$v = (x^2-1)^3 \quad \text{et} \quad H = \int_{-1}^1 3x^3 (x^2-1)^2 dx = \int_{-1}^1 uv' dx = [uv]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 u'v dx$$

$$H = \left[\frac{1}{2} x^2 (x^2-1)^3 \right]_{-1}^1 - \int_{-1}^1 x (x^2-1)^3 dx = \left[\frac{1}{2} x^2 (x^2-1)^3 - \frac{1}{8} (x^2-1)^4 \right]_{-1}^1$$

$$= \left[\frac{1}{2} (x^2-1)^3 (x^2 - \frac{1}{4} (x^2-1)) \right]_{-1}^1 = 0. \quad (uv' \text{ est impaire...}).$$

$$I = \int_1^4 \sqrt{x} dx : \quad \text{Posons } u = \sqrt{x}, \quad v' = 1. \quad \text{On a } u' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad v = x.$$

$$\begin{aligned}
 I &= \int_1^4 \sqrt{x} \, dx = \int_1^4 uv' \, dx = [uv]_1^4 - \int_1^4 u'v \, dx = [x\sqrt{x}]_1^4 - \int_1^4 \frac{x}{2\sqrt{x}} \, dx \\
 I &= [x\sqrt{x}]_1^4 - \frac{1}{2} \int_1^4 \sqrt{x} \, dx = [x\sqrt{x}]_1^4 - \frac{1}{2}I \quad \text{donc} \quad \frac{3}{2}I = [x\sqrt{x}]_1^4 \\
 \text{et} \quad I &= \frac{2}{3} [x\sqrt{x}]_1^4 = \frac{2}{3}(4\sqrt{4} - 1\sqrt{1}) = \frac{14}{3}.
 \end{aligned}$$

Exercice 18 Double I.P.P.

$$J = \int_0^1 x^2 e^x \, dx : \quad \text{Posons} \quad u = x^2, \quad v' = e^x. \quad \text{On a} \quad u' = 2x, \quad v = e^x \quad \text{et}$$

$$J = \int_0^1 x^2 e^x \, dx = \int_0^1 uv' \, dx = [uv]_0^1 - \int_0^1 u'v \, dx = [x^2 e^x]_0^1 - \int_0^1 2x e^x \, dx.$$

$$\text{Posons alors} \quad w = 2x, \quad z' = e^x. \quad \text{On a} \quad w' = 2, \quad z = e^x \quad \text{et}$$

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 2x e^x \, dx &= \int_0^1 wz' \, dx = [wz]_0^1 - \int_0^1 w'z \, dx = [2x e^x]_0^1 - \int_0^1 2e^x \, dx \\
 &= [2x e^x - 2e^x]_0^1
 \end{aligned}$$

$$\text{d'où} \quad J = [x^2 e^x]_0^1 - [2x e^x - 2e^x]_0^1 = [(x^2 - 2x + 2)e^x]_0^1 = e - 2.$$

$$K = \int_{-1}^0 x^5 e^{x^2-1} \, dx : \quad \text{Posons} \quad u = \frac{1}{2}x^4, \quad v' = 2x e^{x^2-1}. \quad \text{On a} \quad u' = 2x^3,$$

$$v = e^{x^2-1} \quad \text{et} \quad K = \int_{-1}^0 x^5 e^{x^2-1} \, dx = \int_{-1}^0 uv' \, dx = [uv]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 u'v \, dx$$

$$K = \left[\frac{1}{2}x^4 e^{x^2-1} \right]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 2x^3 e^{x^2-1} \, dx.$$

$$\text{Posons alors} \quad w = x^2, \quad z' = 2x e^{x^2-1}. \quad \text{On a} \quad w' = 2x, \quad z = e^{x^2-1} \quad \text{et}$$

$$\int_{-1}^0 2x^3 e^{x^2-1} \, dx = \int_{-1}^0 wz' \, dx = [wz]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 w'z \, dx$$

$$= [x^2 e^{x^2-1}]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 2x e^{x^2-1} \, dx = [x^2 e^{x^2-1} - e^{x^2-1}]_{-1}^0 \quad \text{d'où}$$

$$K = \left[\frac{1}{2}x^4 e^{x^2-1} \right]_{-1}^0 - [x^2 e^{x^2-1} - e^{x^2-1}]_{-1}^0 = \left[\left(\frac{1}{2}x^4 - x^2 + 1 \right) e^{x^2-1} \right]_{-1}^0 = \frac{1}{e} - \frac{1}{2}.$$

$$L = \int_0^1 x^8 (2x^3 + 1)^4 \, dx : \quad \text{Posons} \quad u = \frac{1}{30}x^6, \quad v' = 5 \cdot 2 \cdot 3x^2 (2x^3 + 1)^4. \quad \text{On a}$$

$$u' = \frac{1}{5}x^5, \quad v = (2x^3 + 1)^5 \quad \text{et} \quad L = \int_0^1 x^8 (2x^3 + 1)^4 \, dx = \int_0^1 uv' \, dx$$

$$L = [uv]_0^1 - \int_0^1 u'v \, dx = \left[\frac{1}{30}x^6 (2x^3 + 1)^5 \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{5}x^5 (2x^3 + 1)^5 \, dx.$$

$$\text{Posons alors} \quad w = \frac{1}{5 \times 36}x^3, \quad z' = 6 \cdot 2 \cdot 3x^2 (2x^3 + 1)^5. \quad \text{On a} \quad w' = \frac{1}{60}x^2,$$

$$z = (2x^3 + 1)^6 \quad \text{et}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{5}x^5 (2x^3 + 1)^5 \, dx = \int_0^1 wz' \, dx = [wz]_0^1 - \int_0^1 w'z \, dx$$

$$= \left[\frac{1}{180}x^3 (2x^3 + 1)^6 \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{60}x^2 (2x^3 + 1)^6 \, dx$$

$$= \left[\frac{1}{180}x^3 (2x^3 + 1)^6 - \frac{1}{60 \cdot 7 \cdot 2 \cdot 3} (2x^3 + 1)^7 \right]_0^1 \quad \text{d'où}$$

$$L = \left[\frac{1}{30}x^6 (2x^3 + 1)^5 \right]_0^1 - \left[\frac{1}{180}x^3 (2x^3 + 1)^6 - \frac{1}{2520} (2x^3 + 1)^7 \right]_0^1$$

$$= \left[\frac{1}{30} (2x^3 + 1)^5 \left(x^6 - \frac{1}{6}x^3 (2x^3 + 1) + \frac{1}{84} (2x^3 + 1)^2 \right) \right]_0^1$$

$$L = \frac{1}{30} 3^5 \left(1 - \frac{3}{6} + \frac{1}{84} 3^2\right) - \frac{1}{30} \cdot \frac{1}{84} = \frac{1549}{315}.$$

$$M = \int_{-1}^0 \frac{36t^5}{(2-3t^2)^4} dt : \quad \text{Posons } u = 2t^4, \quad v' = \frac{18t}{(2-3t^2)^4}. \quad \text{On a } u' = 8t^3, \quad v = \frac{1}{(2-3t^2)^3}$$

$$\text{et} \quad M = \int_{-1}^0 \frac{36t^5}{(2-3t^2)^4} dt = \int_{-1}^0 uv' dt = [uv]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 u'v dt$$

$$M = \left[2t^4 \frac{1}{(2-3t^2)^3} \right]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 8t^3 \cdot \frac{1}{(2-3t^2)^3} dt.$$

$$\text{Posons alors } w = \frac{2}{3}t^2, \quad z' = \frac{12t}{(2-3t^2)^3}. \quad \text{On a } w' = \frac{4}{3}t, \quad z = \frac{1}{(2-3t^2)^2} \quad \text{et}$$

$$\int_{-1}^0 \frac{2}{3}t^2 \cdot \frac{12t}{(2-3t^2)^3} dt = \int_{-1}^0 wz' dx = [wz]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 w'z dt$$

$$= \left[\frac{2}{3}t^2 \cdot \frac{1}{(2-3t^2)^2} \right]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 \frac{4}{3}t \cdot \frac{1}{(2-3t^2)^2} dt$$

$$= \left[\frac{2}{3}t^2 \cdot \frac{1}{(2-3t^2)^2} \right]_{-1}^0 - \frac{2}{9} \int_{-1}^0 \frac{6t}{(2-3t^2)^2} dt = \left[\frac{2t^2}{3(2-3t^2)^2} - \frac{2}{9} \frac{1}{2-3t^2} \right]_{-1}^0 \quad \text{d'où}$$

$$M = \left[\frac{2t^4}{(2-3t^2)^3} \right]_{-1}^0 - \left[\frac{2t^2}{3(2-3t^2)^2} - \frac{2}{9} \frac{1}{2-3t^2} \right]_{-1}^0$$

$$= \left[\frac{2t^4}{(2-3t^2)^3} - \frac{2t^2}{3(2-3t^2)^2} + \frac{2}{9(2-3t^2)} \right]_{-1}^0 = \frac{2}{9 \times 2} - \frac{2}{(-1)^3} + \frac{2}{3} - \frac{2}{-9} = 3.$$

Exercice 19 Valeur moyenne

$$1. \text{ On a } \frac{1}{\pi-0} \int_0^\pi f(x) dx = \frac{5}{\pi} \int_0^\pi \sin(2x) dx = \frac{5}{\pi} \left[-\frac{1}{2} \cos(2x) \right]_0^\pi = 0.$$

$$\text{On a } \frac{1}{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} g(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) e^{\sin(x)} dx = \frac{1}{\pi} \left[e^{\sin(x)} \right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{\pi} (e^1 - e^{-1}) = \frac{1}{\pi} \left(e - \frac{1}{e} \right).$$

$$2. \text{ Sur } [0; 1], \quad \frac{1}{2} \leq \frac{1}{1+x^2} \leq 1 \quad (\text{car croissante})$$

$$\text{et } \frac{1}{2} = \frac{1}{1-0} \int_0^1 \frac{1}{2} dx \leq \frac{1}{1-0} \int_0^1 h(x) dx \leq \frac{1}{1-0} \int_0^1 1 dx = 1.$$

$$\text{Sur } [1; \sqrt{2}], \quad e \leq e^{x^2} \leq e^2 \quad (\nearrow)$$

$$\text{et } e = \frac{1}{\sqrt{2}-1} \int_1^{\sqrt{2}} e dx \leq \frac{1}{\sqrt{2}-1} \int_1^{\sqrt{2}} e^{x^2} dx \leq \frac{1}{\sqrt{2}-1} \int_1^{\sqrt{2}} e^2 dx = e^2.$$

Exercice 20 Fonction de demande

$$1. f(x) = 1000(x+5)e^{-0,2x} \quad \text{est dérivable et l'on a}$$

$$f'(x) = 1000e^{-0,2x} + 1000(x+5)(-0,2)e^{-0,2x} = 1000(1-0,2x-1)e^{-0,2x}$$

$$f'(x) = -200xe^{-0,2x} \quad \text{qui est négative sur } I = [0; 20] \text{ donc } f \text{ est décroissante}$$

sur I ($f(0) = 5000$ et $f(20) \simeq 458$).

Ceci signifie que la demande du produit diminue lorsque son prix augmente.

$$2. \text{ On a, par I.P.P.,}$$

$$V_{\text{moy.}[5;15]}(f) = \frac{1}{15-5} \int_5^{15} f(x) dx = \frac{1}{10} \int_5^{15} 1000(x+5)e^{-0,2x} dx$$

$$V = 100 \int_5^{15} (x+5) \left(\frac{1}{-0,2} e^{-0,2x} \right)' dx$$

$$\begin{aligned}
 V &= 100 \left[(x+5)(-5)e^{-0,2x} \right]_5^{15} - 100 \int_5^{15} -5e^{-0,2x} dx \\
 &= 500 \left[-(x+5)e^{-0,2x} + \frac{1}{-0,2}e^{-0,2x} \right]_5^{15} = -500 \left[(x+5+5)e^{-0,2x} \right]_5^{15} \\
 V &= 500(15e^{-0,2 \times 5} - 25e^{-0,2 \times 15}) \simeq 2137.
 \end{aligned}$$

Ainsi, le nombre moyen d'objets demandés lorsque son prix varie entre 5 et 15 euros est d'environ 2 137.

Exercice 21 Épidémiologie

$$\begin{aligned}
 1. V_{\text{moy},[0;10]}(N) &= \frac{1}{10-0} \int_0^{10} N(t) dt = \frac{1}{10} \int_0^{10} 30t^2 - t^3 dt = \frac{1}{10} \left[10t^3 - \frac{1}{4}t^4 \right]_0^{10} \\
 &= 10^3 - \frac{1}{40}10^4 = 750.
 \end{aligned}$$

Le nombre moyen de bovins malades durant les dix premiers jours est de 750 bêtes.

2. Un tableau de valeurs à la calculatrice de la fonction N montre qu'il y a eu le plus de bêtes malades entre le jour 15 et le jour 24.

$$\begin{aligned}
 \text{On a } V_{\text{moy},[14;24]}(N) &= \frac{1}{24-14} \int_{14}^{24} N(t) dt = \frac{1}{10} \int_{14}^{24} 30t^2 - t^3 dt \\
 V_{\text{moy},[14;24]}(N) &= \left[t^3 - \frac{1}{40}t^4 \right]_{14}^{24} = 3746.
 \end{aligned}$$

Le nombre moyens de bovins malades durant les dix jours où il y a eu le plus de bêtes malades est de 3 746 animaux.

Exercice 22 On a, pour $x \in [0; \frac{\pi}{4}]$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$x^{n+1} \sin(2x) - x^n \sin(2x) = (x-1)x^n \sin(2x) \leq 0 \quad \text{donc}$$

$$\begin{aligned}
 I_{n+1} - I_n &= \int_0^1 x^{n+1} \sin(2x) dx - \int_0^1 x^n \sin(2x) dx \\
 &= \int_0^1 (x^{n+1} \sin(2x) - x^n \sin(2x)) dx \leq 0 \quad \text{et } (I_n) \text{ est décroissante.}
 \end{aligned}$$

Puisque $x^n \sin(2x) \geq 0$, $I_n \geq 0$ et, décroissante minorée, (I_n) converge.

On a $0 \leq x^n \sin(2x) \leq x^n$ donc

$$0 \leq I_n \leq \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1} \left(\frac{\pi}{4} \right)^{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \times 0 = 0$$

car $-1 < \frac{\pi}{4} < 1$. Ainsi, $I_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Exercice 23 u_n est la différence entre l'aire du domaine situé sous la parabole et celle du rectangle « inférieur » donc

$$\begin{aligned}
 u_n &= \int_n^{n+1} \frac{1}{4}x^2 dx - \int_n^{n+1} \frac{1}{4}n^2 dx = \frac{1}{4} \left(\left[\frac{1}{3}x^3 \right]_n^{n+1} - n^2(n+1-n) \right) \\
 &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3}(n+1)^3 - \frac{1}{3}n^3 - n^2 \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3}n^3 + n^2 + n + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}n^3 - n^2 \right) = \frac{1}{4}n + \frac{1}{12}
 \end{aligned}$$

et $u_{n+1} - u_n = \dots = \frac{1}{4}$: $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est bien arithmétique.

Exercice 24 Lancelot Grobra

$$1. \text{ On a } v(0) = 30(1 - e^0) = 30 \times 0 = 0$$

$$\text{et, pour } t \geq 0, \quad v'(t) = -30 \times \frac{-1}{10} e^{-\frac{t}{10}} = 3e^{-\frac{t}{10}} \geq 0$$

$$\text{donc } 10v'(t) + v(t) = 30e^{-\frac{t}{10}} + 30 - 30e^{-\frac{t}{10}} = 30.$$

De plus, $\lim_{t \rightarrow +\infty} v(t) = "30(1 - e^{-\infty})" = 30$. D'où le tableau suivant.

t	0	$+\infty$
$v'(t)$	+	
v	0	30

$$2. v'(t) \leq 0,1 \iff 3e^{-\frac{t}{10}} \leq 0,1 \iff -\frac{t}{10} \leq \ln\left(\frac{0,1}{3}\right) = -\ln(30) \\ \iff t \geq 10 \ln(30) \simeq 34,01 \implies t = 34 \text{ s.}$$

3. (a) La vitesse instantanée étant la limite des vitesses moyennes sur des intervalles de plus en plus courts, c'est donc la limite du taux d'accroissement de la distance *i.e.* la dérivée de la distance. Tout ceci étant continu (Lancelot aura beau essayer toutes sortes de choses, il ne pourra créer de discontinuité temporelle ni spatiale), la distance est bien l'intégrale de sa dérivée, celle vérifiant $\ell(0) = 0$.

$$(b) \text{ On a } \ell(35) = \int_0^{35} v(u) du = \int_0^{35} 30(1 - e^{-\frac{u}{10}}) du \\ = [30(u + 10e^{-\frac{u}{10}})]_0^{35} = \dots \simeq 759 \text{ m.}$$

Exercice 25 Loi exponentielle

$$1. (a) \text{ On a } P(a \leq X \leq B) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda x} dx = [-e^{-\lambda x}]_a^b = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}.$$

$$(b) \text{ On a } P(0 \leq X \leq B) = \lim_{a \rightarrow 0} P(a \leq X \leq B) = \lim_{a \rightarrow 0} e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b} \\ P(0 \leq X \leq B) = e^0 - e^{-\lambda b} = 1 - e^{-\lambda b} \\ \text{et } P(a \leq X) = \lim_{b \rightarrow +\infty} P(a \leq X \leq B) = \lim_{b \rightarrow +\infty} e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b} \\ P(a \leq X) = "e^{-\lambda b} - e^{-\infty}" = e^{-\lambda a} - 0 = e^{-\lambda a}.$$

- (c) Soit $T \geq 0$. On a

$$P_{X \geq T}(X \geq T + a) = \frac{P((X \geq T + a) \cap (X \geq T))}{P(X \geq T)} = \frac{P(X \geq T + a)}{P(X \geq T)} = \frac{e^{-\lambda(T+a)}}{e^{-\lambda T}} \\ = \frac{e^{-\lambda T} e^{-\lambda a}}{e^{-\lambda T}} = e^{-\lambda a} = P(X \geq a).$$

On dit que X suit une loi *sans vieillissement* : peu importe le temps T déjà passé, la probabilité de passer encore a moments est constante.

2. (a) La probabilité que la montre ait une durée de vie comprise entre 6 mois et 2 ans est $P(6 \leq M \leq 24) = e^{-0,05 \times 6} - e^{-0,05 \times 24} \simeq 0,44 = 44 \%$.

- (b) La probabilité qu'elle fonctionne encore dans un an après un an d'utilisation est $P_{M \geq 12}(M \geq 12 + 12) = P(M \geq 12) = e^{-0,05 \times 12} \simeq 0,55 = 55 \%$.

Exercice 26

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \quad \text{pour } n \geq 1.$$

1. Pour tout $x \in [0; 1]$, $0 \leq x^{n+1} \leq x^n \leq 1$ et $1 \leq 1+x$ donc $0 \leq \frac{1}{1+x}$.

Ainsi, $0 \leq \frac{x^{n+1}}{1+x} \leq \frac{x^n}{1+x}$ et en intégrant ces inégalités,

$$0 \leq \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx \leq \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx \quad \text{d'où, } 0 \leq u_{n+1} \leq u_n : \text{ la suite } (u_n) \text{ est}$$

donc décroissante et minorée par 0. Le théorème de convergence monotone permet alors d'affirmer que la suite (u_n) converge vers une limite ℓ positive ou nulle.

2. (a) Soit $n \geq 1$. On a $u_{n+1} + u_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx + \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{x^{n+1} + x^n}{1+x} dx$

$$u_{n+1} + u_n = \int_0^1 \frac{x^n(x+1)}{1+x} dx = \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

(b) D'où, $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1} + u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1} + \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \ell + \ell = 2\ell$ et
 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_{n+1} + u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$ donc, par unicité de la limite, $2\ell = 0$
 et $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$.

Exercice 27 Pour $x \geq 0$, $f(x) = \frac{\ln(x+3)}{x+3}$ et pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \int_n^{n+1} f(x) dx$.

1. Pour $x \geq 0$, on a

$$f'(x) = \frac{\frac{(x+3)'}{x+3}(x+3) - (x+3)' \ln(x+3)}{(x+3)^2} = \frac{1 - \ln(x+3)}{(x+3)^2} < 0 \quad \text{car}$$

$$\ln(x+3) \geq \ln(3) > 1. \quad \text{De plus, } f(0) = \frac{\ln(3)}{3}$$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln(X)}{X} = 0$ avec $X = x+3$. D'où le tableau suivant.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	—	
f	$\frac{\ln(3)}{3}$	0

2. (a) Décroissante sur $[n; n+1]$, f inverse l'ordre et $f(n+1) \leq f(x) \leq f(n)$.

(b) Ainsi, $\int_n^{n+1} f(n+1) dx \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq \int_n^{n+1} f(n) dx$ en intégrant les inégalités ($n \leq n+1$).

Or, $\int_n^{n+1} f(n+1) dx = f(n+1)(n+1-n) = f(n+1)$, $\int_n^{n+1} f(x) dx = u_n$

et $\int_n^{n+1} f(n) dx = f(n)$. D'où, $f(n+1) \leq u_n \leq f(n)$.

(c) $u_{n+1} \leq f(n+1) \leq u_n$ donc $(u_n)_{\mathbb{N}}$ est $\searrow$. $f(x) \geq 0$ donc $u_n \geq 0$.
 D'après le théorème de convergence monotone, $(u_n)_{\mathbb{N}}$ converge.

Puisque $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, il en est de même de $f(n)$ et $f(n+1)$. Le théorème des gendarmes permet alors d'affirmer que $(u_n)_{\mathbb{N}}$ tend vers 0.

3. (a) En intégrant par parties ($u' = \frac{1}{x+3}$ et $v = \ln(x+3)$), on a

$$\begin{aligned} I_n &= \int_0^n f(x) dx = \int_0^n \frac{1}{x+3} \ln(x+3) dx \\ &= [\ln(x+3) \ln(x+3)]_0^n - \int_0^n \ln(x+3) \frac{1}{x+3} dx \\ &= \ln^2(n+3) - \ln^2(0+3) - I_n \end{aligned}$$

d'où $2I_n = (\ln(n+3) - \ln 3)(\ln(n+3) + \ln 3)$

et $I_n = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{n+3}{3}\right) \ln(3(n+3))$.

Sinon, $\frac{1}{x+3} \ln(x+3) = u' u$ de primitive $\frac{1}{2} u^2 \dots$

$$\begin{aligned} \text{(b) On a } S_n &= \sum_{k=0}^{n-1} u_k = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx + \dots + \int_{n-1}^n f(x) dx \\ &= \int_0^n f(x) dx = I_n. \end{aligned}$$

$$\text{Donc } S_n = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{n+3}{3}\right) \ln(3(n+3)) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \ln(+\infty) \ln(+\infty) = +\infty : \\ (S_n) \text{ diverge vers } +\infty.$$

Exercice 28 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $f_n(x) = x^n e^{-x}$ de graphe $\mathcal{C}_n$ sur $[0; 1]$

$$\text{et } I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx.$$

1. En intégrant par parties ($u = x$, $v' = e^{-x}$), on a

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 x e^{-x} dx = [x(-e^{-x})]_0^1 - \int_0^1 1(-e^{-x}) dx \\ &= -e^{-1} - [e^{-x}]_0^1 = -\frac{1}{e} - \frac{1}{e} + 1 = 1 - \frac{2}{e}. \end{aligned}$$

2. Les fonctions f_n semblent bornées par 0 et $f_n(1) = \frac{1}{e}$, leur graphe semblent se rapprocher de l'axe des abscisses : on conjecture que, pour tout $x \in [0; 1]$,
 $0 \leq f_{n+1}(x) \leq f_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Ainsi, l'aire sous la courbe $\mathcal{C}_n$ semble diminuer et I_n paraît décroissante et tendant vers 0.

3. On a $x^{n+1}e^{-x} - x^n e^{-x} = x^n e^{-x}(x-1) \leq 0$ sur $[0; 1]$ donc

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x^{n+1} e^{-x} dx - \int_0^1 x^n e^{-x} dx = \int_0^1 x^n e^{-x}(x-1) dx \leq 0$$

et (I_n) est bien décroissante.

Puisque $x^n e^{-x} \geq 0$ sur $[0; 1]$, $I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx \geq 0$: décroissante et minorée, (I_n) converge.

Sur $[0; 1]$, $x^n e^{-x} \leq x^n$ donc

$$0 \leq I_n \leq \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{et} \quad I_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Exercice 29 $f(t) = 1 - \frac{4e^t}{e^{2t} + 1}$. A et B les points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec l'axe des abscisses ($x_B < 0$).

1. (a) $\mathcal{C}_f$ semble symétrique par rapport à l'axe des ordonnées *i.e.* f semble paire. Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\text{On a } f(-t) = 1 - \frac{4e^{-t}}{e^{-2t} + 1} = 1 - \frac{4e^{-t}e^{2t}}{e^{2t}(e^{-2t} + 1)} = 1 - \frac{4e^t}{e^{2t} + 1} = f(t)$$

et f est bien paire.

(b) $f(a) = 0$ donc $1 - \frac{4e^a}{e^{2a} + 1} = 0 \iff 4e^a = e^{2a} + 1 \iff (e^a)^2 - 4e^a + 1 = 0$
 $\iff c^2 - 4c + 1 = 0$ et c est bien solution de $X^2 - 4X + 1 = 0$
 qui, par ailleurs, admet $x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{12}}{2} = 2 \pm \sqrt{3}$ pour solutions. Puisque
 $a = x_A > 0$, $c = e^a > 1$ et $c = 2 + \sqrt{3}$.

(c) f s'annule en $a = \ln(c) = \ln(2 + \sqrt{3})$ et, par parité, en $x_B = -\ln(2 + \sqrt{3})$.
 Puisque f est continue, ne s'annule qu'en a et x_B , $f(0) = 1 - \frac{4}{2} = -1 < 0$,
 et $f(5) > 0$, on a tableau suivant :

x	$-\infty$	$-\ln(2 + \sqrt{3})$	$\ln(2 + \sqrt{3})$	$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$

2. (a) Puisque $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, on a $F'(x) = f(x)$ et, d'après 1c, F est croissante sur $] -\infty; -\ln(2 + \sqrt{3}) [$ et sur $] \ln(2 + \sqrt{3}); +\infty [$, décroissante sur $] -\ln(2 + \sqrt{3}); \ln(2 + \sqrt{3}) [$.

(b) $F(a)$ est l'opposé de l'aire du domaine situé « au-dessus de la courbe », entre les droites $x = 0$, $x = a$, $y = 0$ et la courbe $\mathcal{C}_f$ (qui est située sous l'axe des abscisses car f y est négative).

En étudiant f sur $[0; a]$, on montre aisément que f est bornée par -1 et 0 . Cette aire est donc inférieure à celle du rectangle de côtés a et 1 : $-a \leq F(a) \leq 0$.

(c) Pour tout t , $f(t) \geq 1 - 4e^{-t} \iff -4\frac{e^t}{e^{2t}+1} \geq -4e^{-t}$

$$\iff \frac{e^t}{e^{-t}} \leq e^{2t} + 1 \iff e^{2t} + 0 \leq e^{2t} + 1 \quad \square$$

Ainsi, pour tout $x \geq 0$, $F(x) = \int_0^x f(t) dt \geq \int_0^x 1 - 4e^{-t} dt$

$$F(x) \geq [t + 4e^{-t}]_0^x = x + 4e^{-x} - 4 \geq x - 4.$$

D'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) \geq \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 4 = +\infty$.

(d) • Un argument d'aire est certainement le plus simple : pour x négatif,

$F(x) = \int_0^x f(t) dt$ est l'opposé (car $0 \geq x$) de l'aire algébrique entre la courbe et l'axe des abscisses entre 0 et x . Aire algébrique qui, elle, est égale à cette même aire algébrique entre 0 et $-x$ car f est paire donc son graphe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Ainsi, $F(x) = -F(-x)$.

• Sinon, on peut écrire, puisque f est paire et en posant $u = -t$:

$$\begin{aligned} F(-x) &= \int_0^{-x} f(t) dt = \int_0^x f(-u) d(-u) = \int_0^x f(u) (-du) \\ &= - \int_0^x f(u) du = -F(x). \end{aligned}$$

On a utilisé ici une intégration par changement de variable (hors-programme) : si f est continue et φ est dérivable et de dérivée continue :

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x) dx = \int_a^b f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

• F est donc impaire et $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(-x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -F(x) = -\infty$.

Exercice 30 Série harmonique

1. Pour tout $k \geq 1$ et tout $x \in [k; k+1]$, $\frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}$ et puisque $k \leq k+1$, on peut intégrer ces inégalités :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{k+1} dx = \frac{1}{k+1}(k+1-k) = \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dx = \frac{1}{k}(k+1-k) = \frac{1}{k}.$$

2. On a alors, pour $n \geq 1$, $\int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = H_n$

$$H_n - \frac{1}{1} + \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^n \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx = \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx$$

$$\text{d'où } H_n \leq \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx + 1 - \frac{1}{n+1} = \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx + \frac{n}{n+1}.$$

$$3. \text{ Puisque } \int_1^{n+1} \frac{1}{x} dx = [\ln(x)]_1^{n+1} = \ln(n+1),$$

$$\text{on a } \ln(n+1) \leq H_n \leq \ln(n+1) + \frac{n}{n+1}.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n+1) = +\infty$, le théorème de comparaison permet d'affirmer que $\lim_{n \rightarrow \infty} H_n = +\infty$.

Exercice 31 Intégrales doubles

$$1. (a) \text{ Soit } y \in \mathbb{R}. \text{ On a } \int_{-1}^2 2xy dx = y \int_{-1}^2 2x dx = y [x^2]_{-1}^2 = y(2^2 - 1) = 3y.$$

$$(b) \text{ Et } \int_0^1 3y dy = 3 \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_0^1 = \frac{3}{2} \quad \text{donc} \quad \int_{y=0}^{y=1} \int_{x=-1}^{x=2} 2xy dx dy = \frac{3}{2}.$$

$$\begin{aligned} (c) \quad \int_{x=-1}^{x=2} \int_{y=0}^{y=1} 2xy dy dx &= \int_{x=-1}^{x=2} \left(\int_{y=0}^{y=1} 2xy dy \right) dx \\ &= \int_{x=-1}^{x=2} \left(x \int_{y=0}^{y=1} 2y dy \right) dx = \int_{x=-1}^{x=2} x [y^2]_{y=0}^{y=1} dx \\ &= [y^2]_{y=0}^{y=1} \times \int_{x=-1}^{x=2} x dx = [y^2]_{y=0}^{y=1} \times \left[\frac{1}{2} x^2 \right]_{x=-1}^{x=2} = (1-0) \times \frac{1}{2} (4-1) = \frac{3}{2} \\ \text{et } \iint_{\mathcal{D}} 2xy dx dy &= \int_{x=-1}^{x=2} \int_{y=0}^{y=1} 2xy dy dx = \int_{y=0}^{y=1} \int_{x=-1}^{x=2} 2xy dx dy = \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

$$2. \text{ De même, } \int_0^1 2xy dx = y \int_0^1 2x dx = y [x^2]_0^1 = y$$

$$\text{et } \int_{-2}^3 y dy = \left[\frac{1}{2} y^2 \right]_{-2}^3 = \frac{5}{2} \quad \text{donc} \quad \iint_{\mathcal{D}'} 2xy dx dy = \frac{5}{2}.$$

Exercice 32

$$I_n = \int_1^2 \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} dx \quad \text{pour } n \geq 2$$

$$1. \text{ On a } I_2 = \int_1^2 \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx = \left[-e^{\frac{1}{x}} \right]_1^2 = e - e^{\frac{1}{2}} = e - \sqrt{e}.$$

2. (a) Soit $n \geq 2$. On a, par intégration par parties,

$$\begin{aligned} I_{n+1} &= \int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}} e^{\frac{1}{x}} dx = \int_1^2 \frac{-1}{x^{n+1}} \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx = \int_1^2 \frac{-1}{x^{n+1}} \left(e^{\frac{1}{x}} \right)' dx \\ &= \left[\frac{-1}{x^{n+1}} e^{\frac{1}{x}} \right]_1^2 - \int_1^2 \frac{n-1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} dx = \left[\frac{1}{x^{n-1}} e^{\frac{1}{x}} \right]_2^1 - (n-1) \int_1^2 \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} dx \\ &= e^1 - \frac{1}{2^{n-1}} e^{\frac{1}{2}} - (n-1) I_n = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{n-1}} + (1-n) I_n. \end{aligned}$$

$$(b) \text{ Ainsi, } I_3 = I_{2+1} = e - \frac{\sqrt{e}}{2^{2-1}} + (1-2) I_2 = e - \frac{\sqrt{e}}{2} - (e - \sqrt{e}) = \frac{\sqrt{e}}{2}.$$

$$3. (a) \text{ Pour tout } x \in [1; 2], \quad \frac{1}{2} \leq \frac{1}{x} \leq 1 \quad \text{donc} \quad e^{\frac{1}{2}} \leq e^{\frac{1}{x}} \leq e^1 \quad \text{et puisque} \\ 0 < \frac{1}{x^n}, \quad 0 < \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} \leq \frac{e}{x^n}.$$

(b) Puisque $1 \leq 2$, on peut intégrer les inégalités précédentes et l'on a

$$\int_1^2 0 \, dx < \int_1^2 \frac{1}{x^n} e^{\frac{1}{x}} \, dx \leq \int_1^2 \frac{e}{x^n} \, dx$$

$$\text{d'où } 0 < I_n \leq e \left[\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} \right]_1^2 = \frac{e}{n-1} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right).$$

Puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e}{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{e}{n-1} \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}} \right) = 0(1-0) = 0$ et le théorème des gendarmes permet d'affirmer que (I_n) converge vers 0.

Exercice 33 Irrationalité du nombre e

1. Par intégration par parties, on a

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 x^1 e^{1-x} \, dx = [-x e^{1-x}]_0^1 - \int_0^1 -e^{1-x} \, dx = [-x e^{1-x} - e^{1-x}]_0^1 \\ &= [(x+1)e^{1-x}]_1^0 = e - 2. \end{aligned}$$

2. (a) La fonction $x \mapsto e^{1-x}$ est décroissante donc, pour tout $x \in [0; 1]$, on a $e^{1-1} = 1 \leq e^{1-x} \leq e^{1-0} = e$ et puisque $0 \leq x^n$, on a $x^n \leq x^n e^{1-x} \leq e x^n$.

(b) Ainsi, en intégrant ces inégalités entre 0 et 1,

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^n \, dx &= \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1} \right]_0^1 \leq \int_0^1 x^n e^{1-x} \, dx \leq \int_0^1 e x^n \, dx = \left[\frac{e}{n+1} x^{n+1} \right]_0^1 \\ \text{et } \frac{1}{n+1} &\leq I_n \leq \frac{e}{n+1}. \end{aligned}$$

3. Par I.P.P., $I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^{1-x} \, dx = [-x^{n+1} e^{1-x}]_0^1 - \int_0^1 -(n+1)x^n e^{1-x} \, dx$

$$I_{n+1} = 0 - 1e^{1-1} + (n+1) \int_0^1 x^n e^{1-x} \, dx = (n+1)I_n - 1.$$

4. (a) On a $k_{n+1} = (n+1)!e - I_{n+1} = (n+1).n!e - ((n+1)I_n - 1)$
 $k_{n+1} = (n+1)(n!e - I_n) + 1 = (n+1)k_n + 1.$

(b) On a $k_1 = 1!e - I_1 = e - (e - 2) = 2$ et supposons par récurrence que $k_n \in \mathbb{N}$. On a alors trivialement $k_{n+1} = (n+1)k_n + 1 \in \mathbb{N}$ et $k_n \in \mathbb{N}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(c) Si $n \geq 2$, alors $0 < \frac{1}{n+1}$ et $\frac{e}{n+1} \leq \frac{e}{3} < 1$ donc, d'après la question 2b, $0 < I_n < 1$ et puisque $k_n \in \mathbb{N}$, $k_n + I_n \notin \mathbb{N}$.

5. (a) Soient $p, q \in \mathbb{N}^*$ et $n \geq q$. On a $n! = 1 \times \dots \times (q-1) \times q \times (q+1) \times \dots \times n$ donc la fraction $\frac{n!p}{q}$ est simplifiable par q : $\frac{n!p}{q}$ est entier naturel.

(b) Supposons par l'absurde que le nombre e est rationnel. Il existe donc $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que $e = \frac{p}{q}$. Ainsi, $k_n + I_n = n!e - I_n + I_n = \frac{n!p}{q} \in \mathbb{N}$ ce qui contredit le résultat de la question 4c.

Exercice 34

Partie A :

$$1. \cdot \frac{x}{x+1} = \frac{x+1-1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x+1} = 0$, on a donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} = 1$ et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{x}{x+1} \right) = 0.$$

• On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = 0$, donc finalement par somme de limites, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

2. Comme sur $[1 ; +\infty[$, $x+1 > 0$ et $\frac{x}{x+1} > 0$, la fonction f est la somme de deux fonctions dérivables sur $[1 ; +\infty[$ et sur cet intervalle,

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x+1} \right)' + (\ln u)' = -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{u'(x)}{u(x)} \quad \text{avec} \quad u(x) = \frac{x}{x+1}.$$

$$\text{Or} \quad u'(x) = \frac{1 \times (x+1) - x \times 1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}.$$

$$\text{Donc} \quad f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{\frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{x}{x+1}} = -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{x+1}{x(x+1)^2} = \frac{-x+x+1}{x(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{1}{x(x+1)^2}.$$

Comme $x \geq 1$, la dérivée est clairement positive donc la fonction est croissante sur $[1 ; +\infty[$ de $f(1) = \frac{1}{2} + \ln \frac{1}{2} \approx -0,193$ à $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

D'où le tableau suivant.

x	1	$+\infty$
$f'(x)$		+
f	$f(1)$	$\longrightarrow 0$

3. Le tableau montre que $f(x) < 0$ sur $[1 ; +\infty[$.

Partie B :

- La fonction donne successivement pour u les valeurs : $0+1=1$; $1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$; $\frac{3}{2}+\frac{1}{3}=\frac{11}{6}$. Il affiche alors cette dernière valeur.
- Il suffit de modifier la sortie en "return(u-math.log(n))" ou d'écrire "u=u-math.log(n)" avant la sortie.
- On peut conjecturer que pour n allant de 4 à 2000 la suite est décroissante et converge vers une valeur proche de 0,577.

Partie C :

- $$u_{n+1} - u_n = \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) \right] - \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n \right]$$

$$= \frac{1}{n+1} + \ln n - \ln(n+1) = \frac{1}{n+1} + \ln \left(\frac{n}{n+1} \right) = f(n).$$

On a vu que pour $x \geq 1$, $f(x) < 0$, donc $u_{n+1} - u_n = f(n) < 0$ montre que $u_{n+1} < u_n$, ce qui signifie que la suite (u_n) est décroissante.
- (a) Puisqu'on intègre de $k > 0$ à $k+1$, on a

$$0 < k \leq x \leq k+1 \iff 0 < \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}.$$

On a donc en particulier $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{k} \iff \frac{1}{k} - \frac{1}{x} \geq 0$. L'intégrale sur $[k ; k+1]$ de la fonction continue et positive est donc un nombre positif.

$$\cdot \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x} \right) dx \geq 0 \iff \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dx \geq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \quad (\text{par linéarité de l'intégrale}).$$

$$\text{Or } \int_k^{k+1} \frac{1}{k} dx = \frac{1}{k} \times (k+1 - k) = \frac{1}{k}.$$

$$\text{L'inégalité précédente s'écrit donc } \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}.$$

$$\cdot \text{ On a } \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx = [\ln x]_k^{k+1} = \ln(k+1) - \ln k.$$

$$\text{L'inégalité précédente s'écrit donc } \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}. \quad (1)$$

(b) On obtient la suite d'inégalités suivante :

$$\ln(1+1) - \ln 1 \leq \frac{1}{1}$$

$$\ln(2+1) - \ln 2 \leq \frac{1}{2}$$

.....

$$\ln(n) - \ln(n-1) \leq \frac{1}{n-1}$$

$$\ln(n+1) - \ln n \leq \frac{1}{n}$$

D'où, par somme membre à membre et effet de « dominos »,

$$\ln(n+1) - \ln 1 \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

$$\text{ou encore } \ln(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

(c) La fonction $\ln$ étant croissante, on a $\ln n < \ln(n+1)$

et comme $\ln(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$, on en déduit que

$$\ln n < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \iff 0 < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n, \quad \text{soit finalement } u_n > 0.$$

3. On a vu que la suite est décroissante et qu'elle est minorée par 0 : elle converge donc vers une limite supérieure ou égale à zéro.

Exercice 35 Algorithme de Brouncker

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

$$\text{et } I_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt.$$

$$\begin{aligned} 1. \quad (a) \quad I_1 &= (-1)^1 \int_0^1 \frac{t^1}{1+t} dt = - \int_0^1 \frac{1+t}{1+t} - \frac{1}{1+t} dt = \int_0^1 \frac{(1+t)'}{1+t} - 1 dt \\ &= [\ln(1+t) - t]_0^1 = \ln(2) - 1. \end{aligned}$$

$$(b) \text{ On a } t^{n-1}(1+t) - t^{n-1} = t^n \quad \text{donc} \quad I_n = (-1)^n \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt$$

$$\begin{aligned} I_n &= (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{n-1}(1+t) - t^{n-1}}{1+t} dt \\ &= (-1)^n \int_0^1 t^{n-1} dt - (-1)^n \int_0^1 \frac{t^{n-1}}{1+t} dt \\ &= (-1)^n \left[\frac{1}{n} t^n \right]_0^1 + (-1)^{n-1} \int_0^1 \frac{t^{n-1}}{1+t} dt = \frac{(-1)^n}{n} + I_{n-1} \end{aligned}$$

(c) Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété $\mathcal{P}_n$: « $I_n = \ln(2) - S_n$ ».

• $S_1 = \sum_{k=1}^1 \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \frac{(-1)^0}{1} = 1$ et $I_1 = \ln(2) - 1 = \ln(2) - S_1$: $\mathcal{P}_1$ vraie.

• Supposons que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour un certain $n \geq 1$.

On a $I_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + I_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + \ln(2) - S_n$

$I_{n+1} = \ln(2) - (1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n}) + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} = \ln(2) - S_{n+1}$: $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

• Ainsi, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geq 1$.

2. (a) Pour tout $t \in [0; 1]$, $1+t \geq 1$ et $t^n \geq 0$ donc $0 \leq \frac{t^n}{1+t} \leq \frac{t^n}{1} = t^n$ et en intégrant sur $[0; 1]$, $0 \leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \leq \int_0^1 t^n dt = [\frac{1}{n+1} t^{n+1}]_0^1 = \frac{1}{n+1}$.

D'où, $0 \leq |I_n| = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t} dt \leq \frac{1}{n+1}$.

(b) Puisque $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$, le théorème des gendarmes permet d'affirmer que $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = 0$ et donc $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (\ln(2) - I_n) = \ln(2)$.

3. (a) Soit, pour $n \in \mathbb{N}^*$, la propriété $\mathcal{Q}_n$: « $S_{2n} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(2k+1)(2k+2)}$ ».

• $S_2 = \sum_{k=1}^2 \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ et $\sum_{k=0}^{1-1} \frac{1}{(2k+1)(2k+2)} = \frac{1}{(2 \times 0 + 1)(2 \times 0 + 2)} = \frac{1}{2}$: $\mathcal{Q}_1$ est vraie.

• Supposons que $\mathcal{Q}_n$ est vraie pour un certain $n \geq 1$.

On a $S_{2(n+1)} = S_{2n+2} = S_{2n} + \frac{(-1)^{2n+1-1}}{2n+1} + \frac{(-1)^{2n+2-1}}{2n+2}$

$S_{2(n+1)} = S_{2n} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(2k+1)(2k+2)} + \frac{(2n+2)-(2n+1)}{(2n+1)(2n+2)}$

$S_{2(n+1)} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(2k+1)(2k+2)}$ et $\mathcal{Q}_{n+1}$ est vraie.

• Ainsi, $\mathcal{Q}_n$ est vraie pour tout $n \geq 1$.

(b) La fonction Python suivante permet de calculer S_{2n} de manière efficace grâce à la propriété précédente.

```
1| def Brouncker(n) :
2|     S= 0
3|     for k in range(n) :n
4|         S=S+ 1/((2*k+1)*(2*k+2))
5|     return(S)
```

(c) Pour $n = 1000$, on obtient $\ln(2) - S_{2000} \simeq 2,5 \cdot 10^{-4} = \frac{1}{4000}$.

Chapitre XV

VARIABLES ALÉATOIRES & LOI DES GRANDS NOMBRES

Sommaire

Introduction	397
1 Transformations de variables aléatoires	398
1.1 Rappels	398
1.2 Transformation affine	399
1.3 Somme de variables aléatoires	400
1.4 Cas de la loi binomiale	402
1.5 Cas général	404
2 Inégalités de concentration	405
2.1 Inégalité de Markov	405
2.2 Inégalité de Bienaymé-Tchebychev	405
3 Loi des grands nombres	406
4 Échantillonnage, prise de décision	407
Exercices	409
Corrigé des exercices	413

Introduction

Le hasard suit-il des lois ? Et si oui, lesquelles ? Peut-on le confirmer ou le contrôler ? Des phénomènes aléatoires à l'échelle de l'unité présentent souvent des régularités plus ou moins étonnantes aux échelles supérieures. Pensez au mouvement erratique d'une molécule de gaz comparé à l'uniformité du volume qui la contient, au sexe d'un bébé à la naissance comparé au sex-ratio mondial... De quelle manière l'événement ponctuel modifie et est modifié par la globalité ? Autant de questions auxquelles nous allons donner des éléments de réponse. Nous énoncerons en chemin une fameuse loi des grands nombres, si souvent invoquée à mauvais escient malheureusement.

Les exemples du cours se baseront sur la situation suivante.

Dédé Adélaïde possède un très beau dé bien équilibré. Le dé d'Amédée, lui, s'est dégradé et s'est déséquilibré, un peu comme lui. Les faces numérotées de 2 à 6 ont des probabilités d'apparition de $\frac{1}{9}$ tandis que la face numéro 1 a une probabilité d'apparition de $\frac{4}{9}$. Avec leur délicat doigté, ils lancent leur dé avec délice. Du coin de l'oeil, Dédé les dévisage et fait les décomptes, tant d'orchidées sont en jeu.

1 Transformations de variables aléatoires

1.1 Rappels

Définition & Propriété 1 Une variable aléatoire sur un univers Ω est une fonction définie sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On a donc $X: \omega \in \Omega \mapsto X(\omega) \in \mathbb{R}$.

Soit $\Omega = \{\omega_1; \dots; \omega_N\}$ un univers fini et l'on désigne l'ensemble des valeurs prises par la variable X par $\Omega_X = \{x_1; \dots; x_n\} \subset \mathbb{R}$.

On a alors $n \leq N$ et $(X = x_i) = \{\omega_k \in \Omega / X(\omega_k) = x_i\} \subset \Omega$.

Si $\mathbb{P}$ est une loi de probabilité sur Ω , alors la loi de X est donnée par

$$\mathbb{P}(X = x_i) = \mathbb{P}(\{\omega_k / X(\omega_k) = x_i\}).$$

On définit alors l'espérance, la variance et l'écart-type de la variable aléatoire X par :

$$\begin{aligned} \bullet \mathbb{E}(X) &= \sum_{k=1}^N X(\omega_k) \cdot \mathbb{P}(\omega_k) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \mathbb{P}(X = x_i) \\ \bullet V(X) &= \mathbb{E}([X - \mathbb{E}(X)]^2) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X = x_i) \cdot [x_i - \mathbb{E}(X)]^2 \\ &= \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 = \sum_{i=1}^n [\mathbb{P}(X = x_i) \cdot x_i^2] - [\mathbb{E}(X)]^2 \\ \bullet \sigma(X) &= \sqrt{V(X)} \end{aligned}$$

Démonstration : • On a $(X = x_i) = \{\omega_k \in \Omega / X(\omega_k) = x_i\}$ donc

$$\mathbb{P}(X = x_i) = \mathbb{P}(\{\omega_k \in \Omega / X(\omega_k) = x_i\}) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{X(\omega_k)=x_i} \{\omega_k\}\right) = \sum_{X(\omega_k)=x_i} \mathbb{P}(\{\omega_k\})$$

qu'il suffit alors de réinjecter dans la somme pour obtenir les deux expressions.

$$\begin{aligned} \bullet V(X) &= \mathbb{E}((X - \mathbb{E}(X))^2) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X = x_i) \cdot (x_i - \mathbb{E}(X))^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X = x_i) \cdot (x_i^2 - 2x_i \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)^2) \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X = x_i) \cdot x_i^2 - 2\mathbb{E}(X) \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X = x_i) \cdot x_i + \mathbb{E}(X)^2 \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X = x_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X = x_i) \cdot x_i^2 - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(X)^2 \times 1 \\ &= \sum_{i=1}^n [\mathbb{P}(X = x_i) \cdot x_i^2] - \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2. \quad \square \end{aligned}$$

Remarque : On s'intéresse souvent aux intervalles standardisés de la forme $[\mathbb{E}(X) - k\sigma(X); \mathbb{E}(X) + k\sigma(X)]$ où $k \in \llbracket 1; 3 \rrbracket$ et à leur probabilité.

Dédé Soit X la variable aléatoire valant 1 si le dé d'Adélaïde est pair, 0 sinon, et soit Y la variable aléatoire valant 1 si le dé d'Amédée est pair, 0 sinon.

- $\Omega_X = \{0; 1\}$,
 $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}$,
 $\mathbb{E}(X) = 0 \cdot \mathbb{P}(X = 0) + 1 \cdot \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}$,
 $V(X) = 0^2 \cdot \mathbb{P}(X = 0) + 1^2 \cdot \mathbb{P}(X = 1) - (\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4}$,
 $\sigma(X) = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$,
 $[\mathbb{E}(X) - \sigma(X); \mathbb{E}(X) + \sigma(X)] = [0; 1]$.
- $\Omega_Y = \{0; 1\}$,
 $\mathbb{P}(Y = 0) = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2}{3}$, $\mathbb{P}(Y = 1) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$,
 $\mathbb{E}(Y) = 0 \cdot \mathbb{P}(Y = 0) + 1 \cdot \mathbb{P}(Y = 1) = \frac{1}{3}$,
 $V(Y) = 0^2 \cdot \mathbb{P}(Y = 0) + 1^2 \cdot \mathbb{P}(Y = 1) - (\frac{1}{3})^2 = \frac{2}{9}$,
 $\sigma(Y) = \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$,
 $[\mathbb{E}(Y) - \sigma(Y); \mathbb{E}(Y) + \sigma(Y)] = \left[\frac{1-\sqrt{2}}{3}; \frac{1+\sqrt{2}}{3} \right]$.

Dorénavant, nous considérons un univers fini Ω de cardinal N et une loi de probabilité $\mathbb{P}$ sur Ω .

1.2 Transformation affine

Définition & Propriété 2 Soient a et b deux réels ($a \neq 0$) et X une variable aléatoire sur un univers Ω prenant les valeurs $x_1, \dots, x_n$.

Si $Y = aX + b$ est la variable aléatoire sur Ω prenant les valeurs $y_i = ax_i + b$ $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on a :

- $Y(\omega_k) = aX(\omega_k) + b$
- $\mathbb{P}(Y = y_i) = \mathbb{P}(X = x_i)$ où $y_i = ax_i + b$
- $\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$
- $V(Y) = V(aX + b) = V(aX) = a^2V(X)$
- $\sigma(Y) = \sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$.

Démonstration : Puisque $a \neq 0$, on a $Y = y_i = ax_i + b \iff X = x_i$.

$$\begin{aligned}
 \bullet \mathbb{E}(aX + b) &= \mathbb{E}(Y) = \sum_{i=1}^n y_i \cdot \mathbb{P}(Y = y_i) \\
 &= \sum_{i=1}^n (ax_i + b) \cdot \mathbb{P}(aX + b = ax_i + b) \\
 &= \sum_{i=1}^n (ax_i + b) \cdot \mathbb{P}(X = x_i) \\
 &= a \sum_{i=1}^n x_i \cdot \mathbb{P}(X = x_i) + b \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X = x_i) = a\mathbb{E}(X) + b \times 1.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bullet V(aX + b) &= V(Y) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(Y = y_i) \cdot (y_i - \mathbb{E}(Y))^2 \\
&= \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X = x_i) \cdot (ax_i + b - a\mathbb{E}(X) - b)^2 \\
&= \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X = x_i) \cdot a^2(x_i - \mathbb{E}(X))^2 = a^2 \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X = x_i) \cdot (x_i - \mathbb{E}(X))^2 \\
&= a^2 V(X). \quad \square
\end{aligned}$$

Dédé Soit T la variable aléatoire définie par $T = 3X - 1$.

On a $\Omega_T = \{-1; 2\}$, $\mathbb{P}(T = -1) = \mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(T = 2) = \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}$,
 $\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}(3X - 1) = 3\mathbb{E}(X) - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$, $V(T) = V(3X - 1) = 3^2 V(X) = \frac{9}{4}$,
 $\sigma(T) = \sigma(3X - 1) = 3\sigma(X) = \frac{3}{2}$, $[\mathbb{E}(T) - \sigma(T); \mathbb{E}(T) + \sigma(T)] = [-1; 2]$.

1.3 Somme de variables aléatoires

Définition & Propriété 3 Soient X et Y deux variables aléatoires sur un univers Ω prenant respectivement les valeurs $x_1, \dots, x_n$ et $y_1, \dots, y_m$.

La somme des variables aléatoires X et Y est la variable aléatoire $Z = X + Y$ prenant comme valeurs toutes les sommes possibles $x_i + y_j$ pour $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ et $j \in \llbracket 1; m \rrbracket$: $Z(\omega_k) = X(\omega_k) + Y(\omega_k)$.

On a $\mathbb{P}(Z = z_k) = \sum_{i, j / x_i + y_j = z_k} \mathbb{P}((X = x_i) \cap (Y = y_j))$

Démonstration : On a $Z = z_k \iff \exists (i, j) \in \llbracket 1; n \rrbracket \times \llbracket 1; m \rrbracket, x_i + y_j = z_k$. $\square$

Propriété 4 Soit Z la somme de deux variables aléatoires X et Y sur Ω .

On a $\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$.

Remarques : • Cette propriété permet donc de calculer l'espérance de $X + Y$ sans connaître sa loi.

• On peut définir de la même manière, la somme de trois, quatre ou $p \in \mathbb{N}^*$ variables aléatoires ainsi que leur différence ou même leur produit et l'on a par exemple

$$\mathbb{E}(X_1 + 3X_2 - X_3) = \mathbb{E}(X_1) + 3\mathbb{E}(X_2) - \mathbb{E}(X_3).$$

On dit que l'espérance est linéaire et nous avons déjà utilisé de ce résultat dans le chapitre sur la loi binomiale.

Démonstration : On a $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(Z) = \sum_{k=1}^N Z(\omega_k) \cdot \mathbb{P}(\omega_k)$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X + Y) &= \sum_{k=1}^N (X + Y)(\omega_k) \cdot \mathbb{P}(\omega_k) = \sum_{k=1}^N (X(\omega_k) + Y(\omega_k)) \cdot \mathbb{P}(\omega_k) \\
&= \sum_{k=1}^N X(\omega_k) \cdot \mathbb{P}(\omega_k) + \sum_{k=1}^N Y(\omega_k) \cdot \mathbb{P}(\omega_k) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y). \quad \square
\end{aligned}$$

Dédé Soit Z la variable aléatoire donnant la somme des deux dés lancés par Adélaïde et Amédée. On a $Z = X + Y$ et $\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$.

Définition 1 Soient X et Y deux variables aléatoires sur Ω à valeurs dans Ω_X et Ω_Y respectivement.

On dit que X et Y sont indépendantes si, pour tout $x \in \Omega_X$ et tout $y \in \Omega_Y$,

$$\mathbb{P}((X = x) \cap (Y = y)) = \mathbb{P}(X = x) \times \mathbb{P}(Y = y).$$

Remarque : De manière similaire, on dit que X , Y et Z sont mutuellement indépendantes si $\mathbb{P}((X = x) \cap (Y = y) \cap (Z = z)) = \mathbb{P}(X = x) \times \mathbb{P}(Y = y) \times \mathbb{P}(Z = z)$. En revanche, il se peut que X , Y et Z soient deux à deux indépendantes sans que les trois soient mutuellement indépendantes. Par exemple, lors du lancer de deux dés, on définit X_i par $X_i = 1$ si le lancer du dé n° i est pair, 0 sinon et Y par $Y = 1$ si la somme des résultats des deux dés est paire, 0 sinon. On a alors X_1 , X_2 et Y deux à deux indépendantes mais pas mutuellement indépendantes. En effet, connaître la parité de l'un des dés ne permet pas de connaître celle de la somme ou celle de l'autre, et réciproquement, mais si l'on connaît les parités des deux dés ou celle d'un dé et de la somme, alors on connaît la parité manquante.

Propriété 5 Si X et Y sont deux variables aléatoires *indépendantes* sur Ω , alors

- $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X) \cdot \mathbb{E}(Y)$
- $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$

Remarques : • Ces égalités peuvent très bien être fausses lorsque les variables ne sont pas indépendantes. En particulier, $\mathbb{E}(X^2) \neq \mathbb{E}(X)^2$ sauf lorsque $V(X) = 0$ c.-à-d. X est constante.

- Si $X_1, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, on a

$$\mathbb{E}(X_1 \times \dots \times X_n) = \mathbb{E}(X_1) \times \dots \times \mathbb{E}(X_n)$$

$$\text{et } V(X_1 + \dots + X_n) = V(X_1) + \dots + V(X_n).$$

Démonstration : Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes.

Posons $D = X \times Y$ et $Z = X + Y$.

- On désigne par Ω_X , Ω_Y et Ω_D l'ensemble des valeurs prises par X , Y et D respectivement.

Pour tout $d \in \Omega_D$, on note $\mathcal{P}_d = \{(x, y) \in \Omega_X \times \Omega_Y \mid x \times y = d\}$ l'ensemble des couples de produit d .

Si $d \neq d'$, alors $\mathcal{P}_d \cap \mathcal{P}_{d'} = \emptyset$. En effet, si un produit égale d , il ne peut évaluer d' .

De plus, $\bigcup_{d \in \Omega_D} \mathcal{P}_d = \Omega_X \times \Omega_Y$. En effet, tout produit de couple de $\Omega_X \times \Omega_Y$ est un élément de Ω_D et tout élément de Ω_D est issu d'un produit d'un couple de $\Omega_X \times \Omega_Y$.

Puisqu'aucun $\mathcal{P}_d$ n'est vide, la famille d'ensembles $(\mathcal{P}_d)_{d \in \Omega_D}$ forme une partition de $\Omega_X \times \Omega_Y$.

Ainsi, $\mathbb{P}(D = d) = \mathbb{P}(X \times Y = d) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{(x;y) \in \mathcal{P}_d} (X = x) \cap (Y = y)\right)$
 $\mathbb{P}(D = d) = \sum_{(x;y) \in \mathcal{P}_d} \mathbb{P}((X = x) \cap (Y = y))$ car les ensembles $\mathcal{P}_d$ sont tous

disjoints,

et $\mathbb{P}(D = d) = \sum_{(x;y) \in \mathcal{P}_d} \mathbb{P}(X = x) \times \mathbb{P}(Y = y)$ car les variables X et Y sont indépendantes. D'où,

$$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(D) = \sum_{d \in \Omega_D} d.P(D = d) = \sum_{d \in \Omega_D} \sum_{(x;y) \in \mathcal{P}_d} xy.P(X = x) \times P(Y = y).$$

$$\text{Or, } \mathbb{E}(X).\mathbb{E}(Y) = \sum_{x \in \Omega_X} x.P(X = x) \times \sum_{y \in \Omega_Y} y.P(Y = y)$$

$$\text{et } \mathbb{E}(X).\mathbb{E}(Y) = \sum_{x \in \Omega_X} \sum_{y \in \Omega_Y} xy.P(X = x) \times P(Y = y) \quad \text{en développant.}$$

$$\text{Ainsi, } \mathbb{E}(X).\mathbb{E}(Y) = \sum_{(x,y) \in \Omega_X \times \Omega_Y} xy.P(X = x) \times P(Y = y)$$

$$\mathbb{E}(X).\mathbb{E}(Y) = \sum_{d \in \Omega_D} \sum_{(x;y) \in \mathcal{P}_d} xy.P(X = x) \times P(Y = y) \quad \text{en regroupant selon la partition } (\mathcal{P}_d)_{d \in \Omega_D}.$$

On a donc bien $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X).\mathbb{E}(Y)$.

• D'après la définition 1 en page 398, $V(U) = \mathbb{E}(U^2) - \mathbb{E}(U)^2$ donc, pour X et Y indépendantes,

$$\begin{aligned} V(X + Y) &= V(Z) = \mathbb{E}(Z^2) - \mathbb{E}(Z)^2 = \mathbb{E}((X + Y)^2) - [\mathbb{E}(X + Y)]^2 \\ &= \mathbb{E}(X^2 + 2XY + Y^2) - [\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)]^2 \\ &= \mathbb{E}(X^2) + 2\mathbb{E}(XY) + \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(X)^2 - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) - \mathbb{E}(Y)^2 \\ &= [\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2] + [\mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2] + 2[\mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)] \\ &= V(X) + V(Y) + 2 \times 0 = V(X) + V(Y). \end{aligned} \quad \square$$

[Dédé] Soit D la variable aléatoire donnant le produit des deux dés lancés : $D = XY$. Puisque les résultats des dés ne dépendent pas les uns des autres, les variables X et Y sont indépendantes.

• On a $V(Z) = V(X + Y) = V(X) + V(Y) = \frac{1}{4} + \frac{2}{9} = \frac{17}{36}$, $\sigma(Z) = \frac{\sqrt{17}}{6}$
 et $[\mathbb{E}(Z) - \sigma(Z); \mathbb{E}(Z) + \sigma(Z)] = \left[\frac{5 - \sqrt{17}}{6}; \frac{\sqrt{5+17}}{6} \right]$.

• Par ailleurs, $\mathbb{E}(D) = \mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ mais on n'obtient pas sa variance directement.

1.4 Cas de la loi binomiale

Propriété 6 On considère un schéma de Bernoulli constitué d'une répétition de n épreuves de Bernoulli de paramètre p , identiques et indépendantes.

Pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, on note X_i la variable aléatoire associée à la i^e épreuve de Bernoulli qui vaut 1 en cas de succès et 0 sinon.

• On a $\mathbb{P}(X_i = 1) = p$.

• Pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, la variable X_i suit la loi de Bernoulli de paramètre p .

• La variable aléatoire $S_n = \sum_{i=1}^n X_i = X_1 + \dots + X_n$ comptabilisant le nombre de succès lors de cette répétition suit la loi binomiale de paramètres n et p .

Ceci a déjà été démontré dans le chapitre sur la loi binomiale (cf. p. 41). Toutefois, nous pouvons désormais prouver le résultat suivant.

Propriété 7 Soit S_n une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p . On a :

$$S_n \in \llbracket 0; n \rrbracket, \quad \mathbb{E}(S_n) = np, \quad V(S_n) = np(1-p) \quad \text{et} \quad \sigma(S_n) = \sqrt{np(1-p)}.$$

Démonstration :

Puisque, pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $X_i \in \{0; 1\}$, on a $S_n = \sum_{i=1}^n X_i \in \llbracket 1; n \rrbracket$.

On a $\mathbb{E}(X_i) = p$ et $V(X_i) = p(1-p)$

$$\text{donc} \quad \mathbb{E}(S_n) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(X_i) = \sum_{i=1}^n p = np.$$

Les X_i sont mutuellement indépendants donc

$$V(S_n) = V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n V(X_i) = np(1-p). \quad \square$$

Dédé · Adélaïde lance $n = 100$ fois son dé et l'on note S_1 la somme des variables $X_1, \dots, X_{100}$.

On a $S_1 \sim \mathcal{B}(100; \frac{1}{2})$, $\mathbb{E}(S_1) = 100 \times \frac{1}{2} = 50$, $V(S_1) = 100 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 25$, $\sigma(S_1) = \sqrt{25} = 5$ et $[\mathbb{E}(S_1) - \sigma(S_1); \mathbb{E}(S_1) + \sigma(S_1)] = [45; 55]$.

· De même, Amédée lance $n = 100$ fois le sien et l'on note S_2 la somme des variables $Y_1, \dots, Y_{100}$. On a $S_2 \sim \mathcal{B}(100; \frac{1}{3})$, $\mathbb{E}(S_2) = \frac{100}{3}$, $V(S_2) = 100 \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{200}{9}$, $\sigma(S_2) = \sqrt{\frac{200}{9}} = \frac{10\sqrt{2}}{3}$ et $[\mathbb{E}(S_2) - \sigma(S_2); \mathbb{E}(S_2) + \sigma(S_2)] = \left[\frac{100-10\sqrt{2}}{3}; \frac{100+10\sqrt{2}}{3}\right]$.

Définition 2 Deux variables aléatoires sont dites *identiquement distribuées* lorsqu'elles suivent la même loi.

Nous admettrons la propriété suivante qui règle définitivement le lien entre Bernoulli et binomiale.

Propriété 8 Toute variable aléatoire suivant une loi binomiale peut s'écrire comme somme de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes et identiquement distribuées.

Définition & Propriété 9 Soit S_n une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p . On appelle *moyenne (ou fréquence) empirique* la variable aléatoire M_n définie par $M_n = \frac{S_n}{n}$.

On a $M_n \in [0; 1]$, $\mathbb{E}(M_n) = p$ et $V(M_n) = \frac{p(1-p)}{n}$.

Démonstration : On a $M_n = \frac{1}{n}S_n \in \left[\frac{0}{n}; \frac{n}{n}\right] = [0; 1]$

donc $\mathbb{E}(M_n) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{n}S_n\right) = \frac{1}{n}\mathbb{E}(S_n) = \frac{1}{n}.np = p$

$$\text{et} \quad V(M_n) = V\left(\frac{1}{n}S_n\right) = \frac{1}{n^2}V(S_n) = \frac{1}{n^2}.np(1-p) = \frac{p(1-p)}{n}. \quad \square$$

Dédé M_i désigne la moyenne empirique de S_i .

- On a $\mathbb{E}(M_1) = \frac{1}{2}$, $V(M_1) = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{100} = 0,0025$, $\sigma(M_1) = \sqrt{0,0025} = 0,05$
et $[\mathbb{E}(M_1) - \sigma(M_1); \mathbb{E}(M_1) + \sigma(M_1)] = [0,45; 0,55]$.
- On a $\mathbb{E}(M_2) = \frac{1}{3}$, $V(M_2) = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}}{100} \simeq 0,0222$, $\sigma(M_2) \simeq \sqrt{0,0222} \simeq 0,149$
et $[\mathbb{E}(M_2) - \sigma(M_2); \mathbb{E}(M_2) + \sigma(M_2)] \simeq [0,18; 0,48]$.

1.5 Cas général

Définition & Propriété 10 On considère n expériences aléatoires identiques et indépendantes et l'on note $X_1, \dots, X_n$ les variables aléatoires indépendamment distribuées qui leur sont associées, de même espérance $\mathbb{E}(X)$, variance $V(X)$ et écart-type $\sigma(X)$. Si $S_n = X_1 + \dots + X_n$ est la somme de ces n variables, alors la variable aléatoire $M_n = \frac{S_n}{n}$ est appelée moyenne empirique des variables $X_1, \dots, X_n$.

On a $\mathbb{E}(S_n) = n\mathbb{E}(X)$, $V(S_n) = nV(X)$, $\sigma(S_n) = \sqrt{n}\sigma(X)$
et $\mathbb{E}(M_n) = \mathbb{E}(X)$, $V(M_n) = \frac{V(X)}{n}$, $\sigma(M_n) = \frac{\sigma(X)}{\sqrt{n}}$.

Remarques : • Des variables indépendamment distribuées peuvent ne pas être indépendantes et il faut donc bien vérifier les deux conditions.

• Cette propriété donne bien un résultat attendu : l'espérance de la somme est la somme des espérances et l'espérance de la moyenne empirique est la moyenne des espérances.

• La moyenne empirique a donc même espérance que la variable mais elle en est beaucoup plus proche, son écart-type est en effet divisé par $\sqrt{n}$.

Démonstration : On se reportera aux deux démonstrations dans le cas de la binomiale en laissant $\mathbb{E}(X)$ et $V(X)$ indéterminés. $\square$

Dédé Adélaïde et Dédé lancent $n = 100$ fois leur dé et calculent la somme Z_i et le produit D_i des variables X_i et Y_i . Les Z_i sont indépendamment distribuées, tout comme les D_i .

• S_Z est la variable aléatoire somme des Z_i : $S_Z = Z_1 + \dots + Z_{100}$.

On a $\mathbb{E}(S_Z) = 100.\mathbb{E}(Z) = \frac{500}{6} \simeq 83$, $V(S_Z) = 100.V(Z) = \frac{1700}{36} = \frac{425}{9}$,
 $\sigma(S_Z) = \frac{5}{3}\sqrt{17} \simeq 7$

et $[\mathbb{E}(S_Z) - \sigma(S_Z); \mathbb{E}(S_Z) + \sigma(S_Z)] = \left[\frac{500-10\sqrt{17}}{6}; \frac{500+10\sqrt{17}}{6} \right] \simeq [76; 90]$.

• M_Z est la variable aléatoire moyenne empirique des Z_i : $M_Z = \frac{Z_1 + \dots + Z_{100}}{100} = \frac{S_Z}{100}$.

On a $\mathbb{E}(M_Z) = \mathbb{E}(Z) = \frac{5}{6}$, $V(M_Z) = \frac{V(Z)}{100} = \frac{17}{3600}$, $\sigma(M_Z) = \frac{\sqrt{17}}{60}$

et $[\mathbb{E}(M_Z) - \sigma(M_Z); \mathbb{E}(M_Z) + \sigma(M_Z)] = \left[\frac{50-\sqrt{17}}{60}; \frac{50+\sqrt{17}}{60} \right] \simeq [0,76; 0,90]$.

• S_D est la variable aléatoire somme des D_i : $S_D = D_1 + \dots + D_{100}$.

On a $\mathbb{E}(S_D) = 100.\mathbb{E}(D) = \frac{100}{6} = \frac{50}{3}$ et $V(S_D) = 100.V(D)$ que l'on ne connaît pas.

• M_D est la variable aléatoire moyenne empirique des D_i : $M_D = \frac{D_1 + \dots + D_{100}}{100} = \frac{S_D}{100}$.

On a $\mathbb{E}(M_D) = \mathbb{E}(D) = \frac{1}{6}$ et $V(M_D) = \frac{V(D)}{100}$ que l'on ne connaît pas.

2 Inégalités de concentration

Les inégalités de concentration fournissent des bornes sur la probabilité qu'une variable aléatoire s'écarte de son espérance. Elles permettent entre autres de prendre des décisions suite aux résultats d'une expérience.

2.1 Inégalité de Markov

Andreï Markov (1856-1922) est un mathématicien russe. Disciple de Tchebychev, il crée les fameuses chaînes de Markov que vous avez peut-être étudiées en option Maths Expertes. Markov est considéré comme le père des processus stochastiques, c.-à-d. lorsque les variables aléatoires dépendent du temps.

Théorème 1 *Inégalité de Markov*

Soit X une variable aléatoire à valeurs positives ou nulles, d'espérance $\mathbb{E}(X)$ et soit λ un réel strictement positif. On a $\mathbb{P}(X \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{\lambda}$.

Remarques : • L'inégalité de Markov (I.M.) montre que la probabilité que $X \geq 0$ prenne des valeurs plus grandes que λ est d'autant plus petite que λ est grand. Bien évidemment, l'I.M. n'est utile que si $\lambda > \mathbb{E}(X)$ car sinon, $\frac{\mathbb{E}(X)}{\lambda} \geq 1$.

• Lorsque la variable aléatoire n'est pas positive ou nulle, on peut toujours étudier la variable aléatoire $|X|$...

• On est donc capable de trouver un majorant de certaines probabilités mais celui-ci est rarement optimal.

Démonstration : Soit X une variable aléatoire positive prenant les valeurs $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}_+$ et soit $\lambda > 0$.

$$\text{On a } \mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \mathbb{P}(X = x_i) = \sum_{x_i < \lambda} x_i \cdot \mathbb{P}(X = x_i) + \sum_{x_i \geq \lambda} x_i \cdot \mathbb{P}(X = x_i)$$

$$\mathbb{E}(X) \geq 0 + \sum_{x_i \geq \lambda} x_i \cdot \mathbb{P}(X = x_i) \quad \text{puisque tous sont positifs.}$$

$$\text{Ainsi, } \mathbb{E}(X) \geq \sum_{x_i \geq \lambda} \lambda \cdot \mathbb{P}(X = x_i) = \lambda \sum_{x_i \geq \lambda} \mathbb{P}(X = x_i) = \lambda \cdot \mathbb{P}(X \geq \lambda)$$

$$\text{et comme } \lambda > 0, \quad \mathbb{P}(X \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}(X)}{\lambda}.$$

□

$$\boxed{\text{Dédé}} \quad \text{On a } \mathbb{P}(S_Z \geq \frac{n}{2}) \leq \frac{\mathbb{E}(S_Z)}{n/2} = \frac{n\mathbb{E}(Z)}{n/2} = \frac{5/6}{2} = \frac{5}{12}.$$

2.2 Inégalité de Bienaymé - Tchebychev

Le mathématicien français Irénée-Jules Bienaymé (1796-1878) fut le premier à énoncer cette inégalité et le mathématicien russe Pafnouti Tchebychev (1821-1894) fut le premier à la démontrer.

Théorème 2 *Inégalité de Bienaymé - Tchebychev*

Soit X une variable aléatoire, d'espérance $\mathbb{E}(X)$ et de variance $V(X)$, et soit δ un réel strictement positif. On a $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{\delta^2}$.

Démonstration : Soit $\delta > 0$. On a $|X - \mathbb{E}(X)| \geq \delta \iff [X - \mathbb{E}(X)]^2 \geq \delta^2$.

La variable aléatoire $[X - \mathbb{E}(X)]^2$ est positive ou nulle et l'inégalité de Markov appliquée à $[X - \mathbb{E}(X)]^2$ et δ^2 donne

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \delta) = \mathbb{P}([X - \mathbb{E}(X)]^2 \geq \delta^2) \leq \frac{\mathbb{E}([X - \mathbb{E}(X)]^2)}{\delta^2} = \frac{V(X)}{\delta^2}. \quad \square$$

Remarques : • L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev (I.B.-T.) montre que la probabilité que les valeurs prises par X s'écartent d'au moins δ de $\mathbb{E}(X)$ est d'autant plus petite que δ est grand.

• L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev peut s'écrire

$$\mathbb{P}(\mathbb{E}(X) - \delta < X < \mathbb{E}(X) + \delta) = 1 - \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \delta) \geq 1 - \frac{V(X)}{\delta^2}.$$

On dit que $[\mathbb{E}(X) - \delta; \mathbb{E}(X) + \delta]$ est un intervalle de fluctuation de X . C'est un intervalle dans lequel X varie avec une probabilité minorée. En pratique, on ne différenciera pas l'intervalle ouvert du fermé même si ce n'est pas parfaitement rigoureux.

• Il est intéressant d'appliquer l'I.B.-T. pour des δ multiples de l'écart-type puisque $\sigma(X)^2 = V(X)$: $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq 2\sigma(X)) \leq \frac{\sigma(X)^2}{(2\sigma(X))^2} = \frac{1}{4}$

$$\text{et } \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq 3\sigma(X)) \leq \frac{\sigma(X)^2}{(3\sigma(X))^2} = \frac{1}{9}.$$

Pour les lois usuelles, on peut souvent trouver des majorants proches de 5 % et 1 % mais on ne peut tout demander à l'I.B.-T. En effet, celle-ci est loin d'être optimale mais elle est universelle et ne dépend pas de la loi de X .

[Dédé] On a $\mathbb{P}(S_Z \notin [69; 97]) = \mathbb{P}(|S_Z - 83| \geq 14)$

$$\mathbb{P}(S_Z \notin [69; 97]) = \mathbb{P}(|S_Z - \mathbb{E}(S_Z)| \geq 14) \leq \frac{V(S_Z)}{14^2} = \frac{425}{9 \times 14^2} = 0,24.$$

3 Loi des grands nombres

L'I.B.-T. appliquée à un échantillon donne une fameuse loi des grands nombres.

Théorème 3 *Loi des grands nombres*

Soit X une variable aléatoire d'espérance $\mathbb{E}(X)$ et de variance $V(X)$.

On pose M_n la variable aléatoire moyenne empirique d'un échantillon de taille n de X : $M_n = \frac{X_1 + \dots + X_n}{n}$ où les X_i sont indépendantes et de même loi que X .

Pour tout réel δ strictement positif, on a $\mathbb{P}(|M_n - \mathbb{E}(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{n\delta^2}$.

Ainsi, pour tout réel δ strictement positif, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|M_n - \mathbb{E}(X)| \geq \delta) = 0$.

On dit que M_n converge en probabilité vers $\mathbb{E}(X)$ lorsque n tend vers l'infini.

Démonstration : On a vu que $\mathbb{E}(M_n) = \mathbb{E}(X)$ et $V(M_n) = \frac{V(X)}{n}$.

L'I.B.-T. appliquée à M_n donne $\mathbb{P}(|M_n - \mathbb{E}(X)| \geq \delta) = \mathbb{P}(|M_n - \mathbb{E}(M_n)| \geq \delta)$

$$\mathbb{P}(|M_n - \mathbb{E}(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(M_n)}{\delta^2} = \frac{V(X)/n}{\delta^2} = \frac{V(X)}{\delta^2} \times \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{V(X)}{\delta^2} \times 0 = 0. \quad \square$$

Remarques : • Cette loi des grands nombres signifie que plus la taille de l'échantillon est grande, plus la moyenne empirique est proche de l'espérance, espérance qui peut donc bien être interprétée comme une moyenne théorique.

• Ce résultat est en fait la loi faible des grands nombres. Il existe une loi forte des grands nombres qui dit que M_n converge presque sûrement vers $\mathbb{E}(X)$ mais cela dépasse allègrement notre cadre de compétences.

$$\boxed{\text{Dédé}} \quad \text{On a} \quad \mathbb{P}(M_Z \notin]\frac{2}{3}; \frac{4}{3}[) = \mathbb{P}(|M_Z - \frac{5}{6}| \geq \frac{1}{6}) = \mathbb{P}(|M_Z - \mathbb{E}(Z)| \geq \frac{1}{6})$$

$$\mathbb{P}(M_Z \notin]\frac{2}{3}; \frac{4}{3}[) \leq \frac{V(Z)}{100 \times (\frac{1}{6})^2} = \frac{17/36}{100/36} = \frac{17}{100}.$$

Propriété 11 Cas de la binomiale

Soient S_n une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres n et p ($\mathbb{E}(S_n) = np$, $V(S_n) = np(1-p)$), $M_n = \frac{S_n}{n}$ la moyenne empirique associée ($\mathbb{E}(M_n) = p$, $V(M_n) = \frac{p(1-p)}{n}$) et δ un réel strictement positif.

$$\text{On a} \quad \mathbb{P}(|S_n - np| \geq \delta) \leq \frac{np(1-p)}{\delta^2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(|M_n - p| \geq \delta) \leq \frac{p(1-p)}{n\delta^2}.$$

Démonstration : Cas particulier de la loi faible des grands nombres lorsque

$$\mathbb{E}(X) = p \quad \text{et} \quad V(X) = p(1-p). \quad \square$$

$$\boxed{\text{Dédé}} \quad \text{On a} \quad \mathbb{P}(M_1 \notin]\frac{2}{5}; \frac{3}{5}[) = \mathbb{P}(|M_1 - \frac{1}{2}| \geq \frac{1}{5}) \leq \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{100 \times (\frac{1}{5})^2} = \frac{1}{16}$$

$$\text{et} \quad \mathbb{P}(M_2 \notin]\frac{1}{6}; \frac{1}{2}[) = \mathbb{P}(|M_2 - \frac{1}{3}| \geq \frac{1}{6}) \leq \frac{\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}}{100 \times (\frac{1}{6})^2} = \frac{8}{100} = \frac{2}{25}.$$

Remarques : • On regardera souvent les événements contraires :

$$\mathbb{P}(np - \delta < S_n < np + \delta) = \mathbb{P}(|S_n - np| < \delta) \geq 1 - \frac{np(1-p)}{\delta^2}$$

$$\text{et} \quad \mathbb{P}(p - \delta < M_n < p + \delta) = \mathbb{P}(|M_n - p| < \delta) \geq 1 - \frac{p(1-p)}{n\delta^2}, \quad \text{ceci n'étant sensé que pour } \delta \text{ petit.}$$

• C'est généralement l'inégalité $\mathbb{P}(|M_n - p| \geq \delta) \leq \frac{p(1-p)}{n\delta^2}$ que l'on étudie. On remarque que plus n est grand, plus le majorant est petit mais plus δ est petit, plus le majorant est grand : tout est donc question d'équilibre. Si l'on veut une grande proximité entre la moyenne empirique et son espérance (un δ petit), il faudra prendre un échantillon de très grande taille (un n très grand). Ceci est à prendre en compte pour une prise de décision lors d'un échantillonnage (cf. § suivant).

• Vous avez vu de manière informelle en seconde que souvent,

$$\mathbb{P}(|M_n - \mathbb{E}(X)| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}) \geq 0,95.$$

Quant à l'I.B.-T., elle donne, pour un pile ou face équilibré ($p = \frac{1}{2}$),

$$\mathbb{P}(|M_n - p| \leq \frac{1}{\sqrt{n}}) = 1 - \mathbb{P}(|M_n - p| \geq \frac{1}{\sqrt{n}}) \geq 1 - \frac{p(1-p)}{n(\frac{1}{\sqrt{n}})^2} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \quad \text{ce qui est beaucoup moins précis mais on l'a dit, l'I.B.-T. ne dépend pas de la loi de } X, \text{ elle est universelle et ne peut donner de résultats optimaux pour toutes les lois, pardi!}$$

4 Échantillonnage, prise de décision

Vous vous baladez nonchalamment sur une plage caraïbéenne, sifflant la ballade de la mer salée, et découvrez soudain un vestige du temps de la flibuste : là, à vos pieds, étincelle une pièce en cuivre et ancestrale, marquée du sceau de Rambo II, obscur monarque taciturne. Après avoir bien vérifié que ses côtés étaient distincts et vous être réjoui de cette époustouflante découverte, vous la lancez cent fois et comptez le nombre de faces du souverain obtenues. Si vous avez cent faces, vous vous dites certainement que cette belle pièce est vraiment déséquilibrée, tout comme l'individu qui y est représenté. De même, si vous en obtenez 90 ou 80. Mais à partir de combien de faces obtenues vous dites-vous que cette pièce est tout aussi bien équilibrée que vous et que seul le hasard fait que vous n'en avez pas obtenu exactement cinquante ?

À partir de 70 faces ? de 60 ? 55 ? Et si vous la lancez 1 000 fois, quelles bornes vous donnez-vous ? Nous allons ici donner un cadre permettant une telle prise de décision.

- On réalise une même expérience n fois de manière indépendante et identique et l'on observe une certaine fréquence d'apparition f , une réalisation de M_n . On sait que l'on a $\mathbb{P}(|M_n - \mathbb{E}(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{n\delta^2}$.

- On se donne un seuil de confiance $c\%$, un seuil au-dessus duquel on peut penser que ce n'est pas le seul fruit du hasard qui fait que les valeurs observées sont loin de l'espérance.

- Si l'on souhaite avoir une précision δ préalablement définie, il faut jouer sur la taille n de l'échantillon : $\frac{V(X)}{n\delta^2} \leq \frac{c}{100} \iff n \geq \frac{100V(X)}{c\delta^2}$.

Par contre, si le nombre de lancers est donné, limité par la fatigue physique induite ou la durée du jour, il reste à trouver $\delta > 0$ tel que $\frac{V(X)}{n\delta^2} = \frac{c}{100} \iff \delta = 10\sqrt{\frac{V(X)}{nc}}$.

- Ainsi, lors de la réalisation de l'expérience, si la fréquence observée f est proche de $\mathbb{E}(X)$ à δ près, on peut penser, avec au moins $(100-c)\%$ de chances d'avoir raison, que le modèle est valide, que seul le hasard fait que l'on obtient pas exactement $\mathbb{E}(X)$.

- En revanche, si la fréquence observée f est loin de $\mathbb{E}(X)$ à δ près, on peut penser avec au plus $c\%$ de chances de se tromper, que le modèle n'est pas valide, que les valeurs observées ne sont pas conformes à notre théorie.

- Bien sûr, on peut augmenter le nombre de réalisations n afin de se fixer un seuil c inférieur ou d'obtenir un écart à l'espérance δ plus petit.

Règle de prise de décision

L'intervalle $I = [\mathbb{E}(X) - \delta; \mathbb{E}(X) + \delta]$ est appelé intervalle de fluctuation au seuil de $c\%$.

- Si la fréquence observée f appartient à l'intervalle I , l'hypothèse « X suit une loi d'espérance $\mathbb{E}(X)$ » est acceptée, au seuil de $c\%$.
- Si la fréquence observée f n'appartient pas à l'intervalle I , l'hypothèse « X suit une loi d'espérance $\mathbb{E}(X)$ » est rejetée, au seuil de $c\%$.

En pratique, on ne différenciera pas l'intervalle ouvert du fermé même si ce n'est pas vraiment rigoureux.

Exemple : Reprenons l'exemple tropical et introductif. On suppose que notre pièce est bien équilibrée : $p = \frac{1}{2}$, $\mathbb{E}(X) = p = \frac{1}{2}$, $V(X) = p(1-p) = \frac{1}{4}$.

On la lance $n = 100$ fois et l'on se donne un seuil de confiance de 25% .

On a alors $\delta = 10\sqrt{\frac{1/4}{100 \times 25}} = \frac{1}{10}$ et $\mathbb{P}(|M_n - \frac{1}{2}| \geq \frac{1}{10}) \leq \frac{25}{100}$.

Si l'on observe une fréquence de 56% ou de 43% de piles, alors $|f - \frac{1}{2}| < \frac{1}{10}$ et l'on peut penser que la pièce est bien équilibrée, avec moins 75% de chances d'avoir raison.

En revanche, si l'on observe 62% ou 39% de piles, alors $|f - \frac{1}{2}| \geq \frac{1}{10}$ et l'on peut penser que la pièce est déséquilibrée, avec au plus 25% de chances de se tromper.

Si l'on veut un seuil de confiance de 10% , il faudra lancer la pièce $n = \frac{100 \times \frac{1}{4}}{10(\frac{1}{10})^2} = 250$ fois pour conserver un écart à l'espérance raisonnable de $\delta = \frac{1}{10}$.

Exercices

VARIABLES ALÉATOIRES & LOI DES GRANDS NOMBRES

Exercice 1 Soient X une variable aléatoire d'espérance $\mathbb{E}(X) = -2$, de variance $V(X) = \frac{1}{2}$, prenant les valeurs $-5, -4, 1$ et 2 , Y une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[[0; 3]]$ et Z une variable aléatoire suivant la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,1$, toutes trois mutuellement indépendantes.

1. Quelles sont les valeurs prises par les variables aléatoires suivantes ?

$$A = \frac{X}{2} \quad \Bigg| \quad B = X + Y \quad \Bigg| \quad C = Z + 2Y - 3X + 4$$

2. Calculer, si possible, l'espérance et la variance des variables aléatoires suivantes.

$$\begin{array}{l} D = 4X \\ E = -3Z + 7 \end{array} \quad \Bigg| \quad \begin{array}{l} F = XY \\ G = X + Z \end{array} \quad \Bigg| \quad \begin{array}{l} H = 5Y - 2X + 1 \\ I = XYZ \end{array}$$

Exercice 2

On lance deux fois un dé cubique équilibré et l'on note X_i la valeur de la face supérieure obtenue au i^{e} lancer.

1. Calculer l'espérance et la variance de X_1 et en déduire celles de X_2 .
2. On note $S = X_1 + X_2$. Quelles sont les valeurs possibles de S ? Calculer, si possible, son espérance et sa variance.
3. On note $M = \frac{S}{2}$. Quelles sont les valeurs possibles de M ? Calculer, si possible, son espérance et sa variance.

Exercice 3

Passé ou file

On lance quatre pièces de monnaie bien équilibrées et l'on s'intéresse à la variable aléatoire S égale au nombre de piles obtenues.

1. Quelle est la loi de S ?
2. Quelle est la valeur de S correspondant à l'événement élémentaire $(F; F; F; F)$?
3. Quelles valeurs de S correspondent à $\{|S - 2| \geq 2\}$? Quels sont les événements élémentaires constituant cet événement ?

Exercice 4

On considère une variable aléatoire X d'espérance 12 et de variance 40.

1. Déterminer la valeur de $t > 0$ telle que $\frac{V(X)}{t^2} = 0,4$.
2. En déduire que $\mathbb{P}(|X - 12| \geq 10) \leq 0,4$.
3. En déduire un intervalle de fluctuation de X au seuil de 40 %.

Exercice 5 Réveil-matin

Chaque matin, tu pars de chez toi en retard de dix minutes en moyenne. Ce matin, tes parents ont hurlé que ce n'était plus possible, que tu étais en retard de plus d'une demi-heure un jour sur deux et que si cela continuait, tu verrais ce que tu verras. Prouve-leur que cette affirmation est sans doute très exagérée.

Exercice 6 À l'usine

Le nombre de pièces fabriquées en une journée dans une usine à machin-trucs suit une variable aléatoire d'espérance 50 et de variance 25. Donner deux majorations de la probabilité que la production dépasse 75 pièces sur une journée.

Exercice 7 Bonne note

Au lycée Henri Matisse de La Fare-en-Dole, la moyenne en mathématiques d'un élève de terminale spécialité pris au hasard est une variable très aléatoire suivant approximativement une loi d'espérance 11,5 et d'écart-type 2. Le proviseur affirme qu'au moins deux tiers des élèves de terminale spécialité ont une moyenne en maths située entre 8 et 15. A-t-il raison ? Justifier.

Exercice 8 En marche aléatoire

On considère une marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ définie de la façon suivante : on part de 0 et, à chaque étape, indépendamment de la précédente, on a une probabilité $\frac{1}{2}$ de faire un pas en arrière et une probabilité $\frac{1}{2}$ de faire un pas en avant. On note A_i la variable aléatoire égale à l'avancée à l'étape i .

1. Quelle est la loi de A_i ? En déterminer l'espérance et la variance.
2. On note Z_n la variable donnant la position à l'étape $n \in \mathbb{N}$.
Donner une expression de Z_n .
3. Déterminer l'espérance et la variance de Z_n .
4. Montrer que pour tout $t > 0$, $\mathbb{P}(|Z_n| \geq t) \leq \frac{n}{t^2}$.
5. En déduire, pour tout $x > 0$, une majoration de $\mathbb{P}(|\frac{Z_n}{n}| \geq x)$.
6. Calculer, pour $d \in \mathbb{N}^*$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|Z_n| \geq \frac{n}{d})$ et interpréter ce résultat.

Exercice 9 Test cubique

On souhaite tester un dé cubique afin de savoir s'il est bien ~~sage~~ équilibré et l'on s'intéresse particulièrement à l'apparition du numéro 6. Pour cela, on désigne par p la probabilité d'apparition du n° 6, on lance le dé n fois et l'on note M la fréquence empirique et S le nombre fois où le n° 6 est apparu lors de ces n lancers.

1. Exprimer M en fonction de S et en déduire $\mathbb{E}(M)$ et $V(M)$.
2. On considère que le dé n'est pas truqué. Déterminer un nombre n_0 de lancers permettant d'affirmer, avec un risque inférieur à 5 %, que la fréquence empirique d'apparition du n° 6 diffère de $\frac{1}{6}$ d'au plus 0,01.
3. On lance le dé n_0 fois et l'on observe une fréquence de 18 % de n° 6. Qu'en conclure ?

Exercice 10 Cubisme

On lance un dé équilibré, on désigne par ω le numéro obtenu et par X et Y les variables aléatoires définies par $\begin{cases} X(\omega) = 1 & \text{si } \omega = 6 \\ X(\omega) = 0 & \text{sinon,} \end{cases}$ et $\begin{cases} Y(\omega) = 1 & \text{si } \omega = 5 \\ Y(\omega) = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

1. Justifier que X et Y suivent la même loi et la préciser.
2. $X + Y$ suit-elle une loi similaire ? Si oui, quel est son paramètre ?
3. Vérifier que $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$.
4. A-t-on $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$?
5. Qu'en déduire pour X et Y ? Interpréter ceci dans le contexte de l'expérience.

Exercice 11 Chez le docteur

Un patient arrive dans la salle d'attente d'un médecin juste au moment où l'un des deux patients qui attendaient est pris en charge. D'expérience, il sait que la durée d'une consultation, en minutes, est une variable aléatoire d'espérance 10 et d'écart-type 2.

1. Combien de temps ce patient peut-il espérer attendre avant d'être pris en charge ?
2. Les patients en attente ne se connaissant pas, quel est l'écart-type du temps d'attente du patient ?
3. Montrer que la probabilité que le patient attende entre 15 et 25 minutes est supérieure à 68 %.

Exercice 12 Quatre-cent-vingt-et-un

Une association organise un jeu d'argent pour récolter des fonds. Chaque participant doit verser 9€ avant de lancer trois dés équilibrés. Si le résultat est 421, il gagne 99€.

1. Montrer que la probabilité d'obtenir 421 est $\frac{1}{36}$.
2. On note G_i le gain algébrique du i^{e} participant. Donner la loi de chaque G_i et en calculer l'espérance et la variance.

3. On pose $M_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n G_i$.

Déterminer, pour tout $t > 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|M_n - \mathbb{E}(M_n)| \geq t)$.

4. On note X_n la variable aléatoire égale au gain algébrique de l'association après la participation de n joueurs.

Exprimer X_n à l'aide des G_i puis calculer son espérance et sa variance.

5. On suppose que cent personnes participeront. Minorer la probabilité que le gain algébrique de l'association soit strictement compris entre 425 et 825 euros.

Exercice 13 Le combat des chefs

Albert et René sont les deux candidats à l'élection au suffrage universel au poste de maire de la plus prodigieuse cité de l'univers : Villeneuve-la-Vieille. Un institut de sondage interroge au hasard $n = 1000$ personnes inscrites sur les listes électorales que l'on suppose sincères et l'on peut assimiler cette situation à un tirage avec remise. On note p la proportion inconnue d'électeurs décidés à voter pour René et l'on considère M_n la proportion de personnes interrogées lors du sondage qui se déclarent en faveur de René.

1. Lors du sondage, 540 individus se sont déclarés en faveur de René.
Donner une estimation de la proportion inconnue p .
2. (a) Montrer que, pour tout $q \in [0; 1]$, $q(1 - q) \in [0; \frac{1}{4}]$.
(b) En déduire que, pour tout $t > 0$, $\mathbb{P}(p \in]M_n - t; M_n + t]) \geq 1 - \frac{1}{4nt^2}$.

3. Résoudre l'inéquation $1 - \frac{1}{4000t^2} \geq 0,95$ et en déduire que l'intervalle $I =]M_n - 0,071; M_n + 0,071[$ est de probabilité supérieure à 0,95. Cet intervalle est appelé intervalle de confiance de p au seuil de 95 %.
4. René peut-il crier victoire avant l'heure ?
5. L'institut souhaite donner une fourchette d'estimation de p avec une précision de $\pm 0,01$ et une probabilité d'erreur inférieure à 5 %.
Combien de personnes doit-il interroger ?

Exercice 14 Mentir c'est mal

Un sondeur cherche à obtenir, auprès d'adolescents scolarisés de 17 à 18 ans, des réponses sincères à une question à laquelle on répond par oui ou par non, sur un sujet sensible, comme l'obtention de la moyenne au dernier devoir surveillé de mathématiques. Pour éviter les fausses réponses, il demande à chaque jeune sondé de tirer au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes, de bien la regarder afin de la mémoriser pendant au moins 10 secondes et de la remettre dans le paquet afin qu'il soit le seul à connaître la carte tirée. C'est à ce moment que le jeune doit être concentré : si la carte est un cœur, alors il doit répondre sincèrement à la question posée, sinon, il doit mentir.

On suppose, au risque de se tromper, que les jeunes sondés jouent parfaitement leur rôle. On note p la proportion de jeunes scolarisés de 17 à 18 ans qui devraient répondre « oui » et q la proportion de ces jeunes répondant « oui » à ce sondage.

1. Prouver, éventuellement à l'aide d'un arbre pondéré, que $q = -0,5p + 0,75$.
2. (a) Sur un échantillon aléatoire de 2 500 jeunes, il y a eu 1 375 « oui ».
En utilisant l'inégalité $\mathbb{P}(q \in]M_n - t; M_n + t[) \geq 1 - \frac{1}{4nt^2}$ obtenue à l'exercice précédent, déterminer un intervalle de confiance de q au niveau 95 %.
- (b) En déduire un intervalle de confiance de p au niveau 95 %.
3. Que se passerait-il si le critère était « rouge » et non plus « cœur » ?

Exercice 15 La course à zéro

On dispose de trois cartes numérotées de 1 à 3. La course à zéro se joue à deux et consiste à tirer une carte au hasard, la remettre, mélanger le paquet et le donner à son adversaire. Chacun part avec un capital de 6 points puis retire autant de points que l'indique la carte. S'il n'y a pas assez de points, le joueur passe son tour. Le premier qui arrive à zéro exactement a gagné l'estime de tous. On note J_n la variable aléatoire qui donne le nombre de points du joueur après n coups et C_n la valeur de la n^{e} carte tirée.

1. Déterminer la loi de probabilité de C_1 et de C_2 .
2. Déterminer la loi de probabilité de J_2 et montrer que $\mathbb{E}(J_2) = 6 - \mathbb{E}(C_1 + C_2)$.
3. Sans déterminer sa loi, justifier que $\mathbb{E}(J_3) \neq 6 - \mathbb{E}(C_1 + C_2 + C_3)$.
4. Déterminer $\mathbb{E}(J_3)$ puis $\mathbb{E}(J_4)$.
5. Est-ce que $\mathbb{E}(J_6) = 0$ ou plus généralement, peut-on avoir $\mathbb{E}(J_n) = 0$?

Hasardez-vous sur la page 503 pour réaliser le devoir n° 24.

VARIABLES ALÉATOIRES & LOI DES GRANDS NOMBRES

Exercice 1

1. $A = \frac{X}{2}$ prend les valeurs $-\frac{5}{2}$, -2 , $\frac{1}{2}$ et 1 .

$B = X + Y$ prend les valeurs $-5 + 0 = -5$, $-5 + 1 = -4$, $\dots$, $-5 + 3 = -2$,
 $-4 + 0 = -4$, $\dots$, $-4 + 3 = -1$, $1 + 0 = 1$, $\dots$, $1 + 3 = 4$ et $2 + 0 = 2$, $\dots$,
 $2 + 3 = 5$ c.-à-d. $\llbracket -5; -1 \rrbracket \cup \llbracket 1; 5 \rrbracket$.

$C = Z + 2Y - 3X + 4$: Z prend toutes les valeurs de $E_1 = \llbracket 0; 10 \rrbracket$, $-2X$ celles de $E_2 = \{-4; -2; 8; 10\}$ et $3Y$ celles de $E_3 = \{0; 3; 6; 9\}$ donc C prend toutes les valeurs possibles des sommes d'un élément de E_1 , d'un élément de E_2 , d'un de E_3 et de 4 (ce qui est très fastidieux à déterminer).

2. On a $\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{4} \times 0 + \frac{1}{4} \times 1 + \frac{1}{4} \times 2 + \frac{1}{4} \times 3 = \frac{3}{2}$ ($= \frac{3-0}{2}$),
 $V(Y) = \frac{1}{4} \times 0^2 + \frac{1}{4} \times 1^2 + \frac{1}{4} \times 2^2 + \frac{1}{4} \times 3^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}$

et $\mathbb{E}(Z) = np = 1$, $V(Z) = np(1-p) = 0,9$.

$D = 4X$: $\mathbb{E}(D) = \mathbb{E}(4X) = 4\mathbb{E}(X) = 4(-2) = -8$,
 $V(D) = V(4X) = 4^2 V(X) = 16 \times \frac{1}{2} = 8$.

$E = -3Z + 7$: $\mathbb{E}(E) = \mathbb{E}(-3Z + 7) = -3\mathbb{E}(Z) + 7 = -3 \times 1 = -3$,
 $V(E) = V(-3Z + 7) = V(-3Z) = (-3)^2 V(Z) = 9 \times 0,9 = 8,1$.

$F = XY$. Puisque X et Y sont indépendantes,

$$\mathbb{E}(F) = \mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = (-2) \times \frac{3}{2} = -3.$$

En revanche, on ne peut connaître $V(F) = V(XY)$ directement.

$G = X + Z$: $\mathbb{E}(G) = \mathbb{E}(X + Z) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Z) = -2 + 1 = -1$.

Puisque X et Z sont indépendantes,

$$V(G) = V(X + Z) = V(X) + V(Z) = \frac{1}{2} + 0,9 = 1,4.$$

$H = 5Y - 2X + 1$. $\mathbb{E}(H) = \mathbb{E}(5Y - 2X + 1) = \mathbb{E}(5Y) + \mathbb{E}(-2X + 1)$

$$\mathbb{E}(H) = 5\mathbb{E}(Y) - 2\mathbb{E}(X) + 1 = 5 \times \frac{3}{2} - 2(-2) + 1 = \frac{25}{2}.$$

Puisque X et Y sont indépendantes, $5Y$ et $-2X + 1$ le sont aussi et

$$V(H) = V(5Y - 2X + 1) = V(5Y) + V(-2X + 1) = 5^2 V(Y) + (-2)^2 V(X)$$

$$V(H) = 25 \times \frac{5}{4} + 4 \times \frac{1}{2} = \frac{79}{2}.$$

$I = XYZ$. Puisque X , Y et Z sont mutuellement indépendantes,

$$\mathbb{E}(I) = \mathbb{E}(XYZ) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)\mathbb{E}(Z) = (-2) \times \frac{3}{2} \times 1 = -3.$$

En revanche, on ne peut connaître $V(I) = V(XYZ)$ directement.

Exercice 2

1. X_i suit la loi uniforme sur $\llbracket 1; 6 \rrbracket$ donc

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_1) &= \mathbb{E}(X_2) = \frac{1}{6} \times 1 + \dots + \frac{1}{6} \times 6 = \frac{1}{6} \times \frac{6(6+1)}{2} = \frac{7}{2} \\ \text{et } V(X_1) &= V(X_2) = \frac{1}{6} \times 1^2 + \dots + \frac{1}{6} \times 6^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}. \end{aligned}$$

2. $S = X_1 + X_2$ prend toutes les valeurs de $\llbracket 2; 12 \rrbracket$ et l'on a

$$\mathbb{E}(S) = \mathbb{E}(X_1) + \mathbb{E}(X_2) = 2 \times \frac{7}{2} = 7.$$

Puisque les lancers (et donc les X_i) sont indépendants, on a

$$V(S) = V(X_1 + X_2) = V(X_1) + V(X_2) = 2 \times \frac{35}{12} = \frac{35}{6}.$$

3. M prend toutes les valeurs de $\{1; \frac{3}{2}; 2; \frac{5}{2}; 3; \frac{7}{2}; 4; \frac{9}{2}; 5; \frac{11}{2}; 6\}$ et l'on a

$$\mathbb{E}(M) = \mathbb{E}\left(\frac{S}{2}\right) = \frac{1}{2}\mathbb{E}(S) = \frac{7}{2} \quad \text{et} \quad V(M) = V\left(\frac{1}{2}S\right) = \frac{1}{2^2}V(S) = \frac{35}{24}.$$

Exercice 3 Passe ou file

1. Cette expérience s'assimile à une répétition de $n = 4$ expériences aléatoires identiques et indépendantes de probabilité de succès (obtenir une pile) égale à $p = \frac{1}{2}$. La variable S comptant le nombre de succès suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = \frac{1}{2}$.
2. L'événement élémentaire $(F; F; F; F)$ est le seul correspondant à $S = 0$.
3. On a $|S - 2| < 2 \iff -2 < S - 2 < 2 \iff 0 < S < 4 \iff S \in \llbracket 1; 3 \rrbracket$
donc $|S - 2| \geq 2 \iff S \in \{0; 4\}$ ce qui correspond aux issues $(F; F; F; F)$
et $(P; P; P; P)$.

Exercice 4 On considère une variable aléatoire X d'espérance 12 et de variance 40.

1. Soit $t > 0$. On a $\frac{V(X)}{t^2} = 0,4 \iff t^2 = \frac{40}{0,4} = 100 \iff t = 10$.
2. L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev donne alors
 $\mathbb{P}(|X - 12| \geq 10) = \mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq 10) \leq \frac{V(X)}{10^2} = 0,4$.
3. On a donc $\mathbb{P}(X - 12 \in [-10; 10]) = \mathbb{P}(X \in [2; 22]) \leq 0,4$: l'intervalle $[2; 22]$ est donc un intervalle de fluctuation de X au seuil de 40 %.

Exercice 5 Réveil-matin

Ton retard R est une variable aléatoire positive donc, d'après l'inégalité de Markov, $\mathbb{P}(R \geq 30) \leq \frac{\mathbb{E}(R)}{30} = \frac{1}{3}$ ce qui est bien inférieur à $\frac{1}{2}$, na!

Exercice 6 À l'usine

Soit M le nombre de machin-trucs fabriqués sur une journée.

On a $M \geq 0$, $\mathbb{E}(M) = 50$ et $V(M) = 25$.

D'après l'inégalité de Markov, on a $\mathbb{P}(M \geq 75) \leq \frac{\mathbb{E}(M)}{75} = \frac{2}{3}$.

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a $\mathbb{P}(|M - \mathbb{E}(M)| \geq 25) \leq \frac{V(M)}{25^2} = \frac{1}{25}$
et, en négligeant les termes théoriques négatifs,

$$\mathbb{P}(M \geq 75) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(M \leq 50 - 25 \text{ ou } M \geq 50 + 25) \leq \frac{1}{2} \times \frac{1}{25} = \frac{1}{50}.$$

On remarque que l'I.B.-T. fournit une bien meilleure majoration que l'I.M. On la privilégiera donc.

Exercice 7 Bonne note

$$\mathbb{P}(8 \leq N \leq 15) = \mathbb{P}(-3,5 \leq N - 11,5 \leq 3,5) = \mathbb{P}(|N - \mathbb{E}(N)| \leq 3,5)$$

$\mathbb{P}(8 \leq N \leq 15) = 1 - \mathbb{P}(|N - \mathbb{E}(N)| \geq 3,5) \geq 1 - \frac{V(N)}{3,5^2} = 1 - \frac{2^2}{3,5^2} \simeq 0,67 \simeq \frac{2}{3}$
et le proviseur a toujours raison.

Exercice 8 En marche aléatoire

- On a $A_0 = 0$ et, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$,
 $A_i \in \Omega = \{-1; 1\}$, $\mathbb{P}(A_i = 1) = \mathbb{P}(A_i = -1) = \frac{1}{2}$.
Ainsi, $\mathbb{E}(A_i) = 1 \times \frac{1}{2} - 1 \times \frac{1}{2} = 0$ et $V(A_i) = 1^2 \times \frac{1}{2} + (-1)^2 \times \frac{1}{2} = 1$.
- La position à l'étape $n \in \mathbb{N}$ est donnée par la variable $Z_n = \sum_{i=0}^n A_i = \sum_{i=1}^n A_i$.
- Ainsi, $\mathbb{E}(Z_n) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}(A_i) = \sum_{i=1}^n 0 = 0$ et les variables A_i étant mutuellement indépendantes, $V(Z_n) = V\left(\sum_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n V(A_i) = \sum_{i=1}^n 1 = n$.
- $|Z_n|$ est à valeurs positives donc l'inégalité de Markov donne, pour tout $t > 0$,
 $\mathbb{P}(|Z_n| \geq t) \leq \frac{V(Z_n)}{t^2} = \frac{n}{t^2}$.
- Ainsi, pour tout $x > 0$, $\mathbb{P}\left(\left|\frac{Z_n}{n}\right| \geq x\right) = \mathbb{P}(|Z_n| \geq nx) \leq \frac{n}{(nx)^2} = \frac{1}{nx^2}$.
- Soit $d \in \mathbb{N}^*$. On a $0 \leq \mathbb{P}(|Z_n| \geq \frac{n}{d}) \leq \frac{n}{(n/d)^2} = \frac{d^2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$. Le théorème des gendarmes permet alors d'affirmer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|Z_n| \geq \frac{n}{d}) = 0$. Ceci peut s'interpréter par la probabilité que Z_n dépasse toute fraction de n tend vers 0.

Exercice 9 Test cubique

- S suit trivialement une loi binomiale de paramètres n et p donc $\mathbb{E}(S) = np$ et $V(S) = np(1-p)$.
 M étant la fréquence empirique de S , $M = \frac{S}{n}$, $\mathbb{E}(M) = \frac{1}{n}\mathbb{E}(S) = p$ et $V(M) = \frac{1}{n^2}V(S) = \frac{p(1-p)}{n}$.
- On suppose que $p = \frac{1}{6}$ et l'on cherche n_0 tel que $\mathbb{P}\left(\left|M - \frac{1}{6}\right| \geq 0,01\right) \leq \frac{5}{100}$.
L'inégalité de Bienaymé-Tchebychev affirme que
 $\mathbb{P}(|M - \mathbb{E}(M)| \geq 0,01) \leq \frac{V(M)}{0,01^2} = \frac{p(1-p)}{n \times 0,01^2} = \frac{5 \cdot 100^2}{36n}$.
Or, $\frac{5 \cdot 100^2}{36n} \leq \frac{5}{100} \iff n \geq \frac{100^3}{36}$.
Pour $n_0 = 27\,778$ lancers, la fréquence empirique d'apparition du n°6 diffère de $\frac{1}{6}$ d'au plus 0,01, avec un risque inférieur à 5 %.
- On a $\frac{18}{100} - \frac{1}{6} \simeq 0,0133 > 0,01$ donc on peut penser que le dé est déséquilibré au seuil de 5 % (avec un risque de 5 % de se tromper).

Exercice 10 Cubisme

- Les deux variables X et Y correspondent à des schémas de Bernoulli et suivent donc une même loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{6}$, le succès étant obtenir le numéro 6 pour l'une et le numéro 5 pour l'autre, de même probabilité.
- On nomme $Z = X + Y$ et l'on a
$$\begin{cases} Z(\omega) = 1 & \text{si } \omega = 5 \text{ ou } 6 \\ Z(\omega) = 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad Z \text{ suit donc}$$
 une loi de Bernoulli de paramètre $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
- On a $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = p = \frac{1}{6}$, $\mathbb{E}(Z) = \frac{1}{3}$ et $\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$.
- On a $V(X) = V(Y) = p(1-p) = \frac{5}{36}$ et $V(Z) = \frac{1}{3}(1 - \frac{1}{3}) = \frac{2}{9}$ donc $V(X + Y) = \frac{2}{9} \neq \frac{5}{18} = V(X) + V(Y)$.

5. Les variables X et Y ne sont donc pas indépendantes. En effet, si l'on a obtenu un 6, alors on ne peut pas avoir obtenu un 5...

Exercice 11 Chez le docteur

- Il peut espérer attendre 10 min. avant que le patient qui le précède ne soit pris en charge puis 10 min. pour que ce dernier finisse sa consultation. Il peut donc espérer attendre 20 min. au total. On peut modéliser cette situation par T_i le temps de consultation du patient i , pour $i \in \{1; 2\}$ et T le temps d'attente du patient étudié. On a $T = T_1 + T_2$ donc $E(T) = E(T_1) + E(T_2) = 10 + 10 = 20$ min.
- Puisque les patients ne se connaissent pas, les variables T_i sont indépendantes et $V(T) = V(T_1 + T_2) = V(T_1) + V(T_2) = 2^2 + 2^2 = 8$ minutes² donc $\sigma(T) = \sqrt{V(T)} = 2\sqrt{2}$ minutes.
- D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, $P(T \in [15; 25]) = P(|T - 20| \leq 5)$
 $P(T \in [15; 25]) = P(|T - E(T)| \leq 5) = 1 - P(|T - E(T)| \geq 5)$
 $\geq 1 - \frac{V(T)}{5^2} = 1 - \frac{8}{25} = \frac{68}{100}.$

Exercice 12 Quatre-cent-vingt-et-un

- Chaque numéro 4, 2 et 1 a une probabilité d'apparition de $\frac{1}{6}$ par dé et il y a 3! permutations de ces numéros possibles donc la probabilité d'obtenir 421 est de $3! \times (\frac{1}{6})^3 = \frac{1}{36}.$
- On a $P(G_i = 99 - 9 = 90) = P(\text{"421"}) = \frac{1}{36}$
 et $P(G_i = 0 - 9 = -9) = 1 - P(G_i = 90) = \frac{35}{36}$
 donc $E(G_i) = 90 \times \frac{1}{36} - 9 \times \frac{35}{36} = -\frac{225}{36} = -6,25 \text{ €}$
 et $V(G_i) = 90^2 \times \frac{1}{36} + 9^2 \times \frac{35}{36} - 6,25^2 \simeq 265 \text{ €}^2.$
- On a $M_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n G_i$ donc $E(M_n) = \frac{1}{n} E\left(\sum_{i=1}^n G_i\right) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(G_i) = -\frac{225}{36n}$
 et puisque les gains des différents joueurs sont mutuellement indépendants,

$$V(M_n) = \frac{1}{n^2} V\left(\sum_{i=1}^n G_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(G_i) \simeq \frac{1}{n^2} \times n \times 265 = \frac{265}{n}.$$
 Ainsi, d'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, pour $t > 0$,
 $0 \leq P(|M_n - E(M_n)| \geq t) \leq \frac{V(M_n)}{t^2} \simeq \frac{265}{t^2} \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$
 et $\lim_{n \rightarrow \infty} P(|M_n - E(M_n)| \geq t) = 0.$
- On a $X_n = \sum_{i=1}^n (-G_i) = -\sum_{i=1}^n G_i$ donc $E(X_n) = -\sum_{i=1}^n E(G_i) = 6,25n$
 et puisqu'ils sont indépendants,

$$V(X_n) = (-1)^2 V\left(\sum_{i=1}^n G_i\right) = \sum_{i=1}^n V(G_i) \simeq 265n.$$
- D'après l'I.B.-T., $P(X_{100} \in]425; 825]) = P(|X_{100} - 6,25 \times 100| < 200)$
 $P(X_{100} \in]425; 825]) = P(|X_{100} - E(X_{100})| < 200)$
 $= 1 - P(|X_{100} - E(X_{100})| \geq 200) \geq 1 - \frac{V(X_{100})}{200^2} \simeq 1 - \frac{265 \times 100}{200^2} \simeq 0,34.$
 Il y a donc au moins un tiers de chances que l'association récolte entre 425 et 825 euros.

Exercice 13 Le combat des chefs

1. Puisque 540 sondés sur 1 000 se sont déclarés en faveur de René,

$$f = \frac{540}{1000} = 0,54 = \frac{27}{50} = 54\% \quad \text{est une réalisation de } M_n.$$

D'après la loi des grands nombres, cette réalisation est proche de son espérance p car les sondés sont sincères : p est proche de 0,54.

2. (a) La fonction $g: q \mapsto q(1-q) = q - q^2$ est dérivable et a pour fonction dérivée $g'(q) = 1 - 2q$ qui est affine décroissante et qui s'annule en $\frac{1}{2}$ en passant de positive à négative. La fonction g admet donc un maximum en $\frac{1}{2}$ valant $g(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}$. Puisque $g(0) = g(1) = 0$, pour tout $q \in [0; 1]$, $q(1-q) \in [0; \frac{1}{4}]$.

- (b) On peut considérer que M_n est la moyenne empirique de la somme des voix en faveur de René qui suivent une loi binomiale de paramètres $n = 1000$ et p . On a donc $E(M_n) = p$ et $V(M_n) = \frac{p(1-p)}{n}$.

Ainsi, pour $t > 0$, $P(p \in]M_n - t; M_n + t]) = P(|M_n - p| < t)$

$$P(p \in]M_n - t; M_n + t]) = 1 - P(|M_n - E(M_n)| \geq t)$$

$$\geq 1 - \frac{V(M_n)}{t^2} = 1 - \frac{p(1-p)/n}{t^2} = 1 - p(1-p)\frac{1}{nt^2} \geq 1 - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{nt^2} = 1 - \frac{1}{4nt^2}.$$

3. On a $1 - \frac{1}{4000t^2} \geq 0,95 \iff 0,05 \geq \frac{1}{4000t^2} \iff t^2 \geq \frac{1}{4000 \times 0,05} = \frac{1}{200}$
 $\iff t \geq \frac{1}{10\sqrt{2}} \simeq 0,0707$.

Ainsi, $P(p \in]M_n - 0,071; M_n + 0,071]) \geq P(p \in]M_n \pm \frac{1}{10\sqrt{2}}]) \geq 0,95$.

4. Ayant observé une réalisation de M_n valant $f = 0,54$, il y a 95 % de chances que l'on ait $p \in]0,54 - 0,071; 0,54 + 0,071[=]0,469; 0,611[$ ce qui ne garantit pas la victoire à René.

5. On pose $t = 0,01$ et l'on cherche alors n tel que

$$1 - \frac{1}{4n0,01^2} \geq 0,95 \iff 0,05 \geq \frac{1}{4n0,01^2} \iff n \geq \frac{1}{4 \times 0,05 \times 0,01^2} = 50\,000.$$

Pour que $P(p \in]M_n - 0,01; M_n + 0,01]) \geq 0,95$, il faut donc que l'institut de sondage interroge 50 000 personnes. Autant procéder à une élection ou alors utiliser des méthodes plus précises comme celle des quotas où les sondés ne sont plus choisis au hasard mais représentatifs de la population.

Exercice 14 Mentir c'est mal

1. Ceux qui répondent « oui » sont les p ne mentant pas car ils ont eu un cœur (ils sont $\frac{1}{4}$ à ne pas mentir) et les $1-p$ mentant car ils n'ont pas de cœur (ils sont $\frac{3}{4}$ à mentir). Ainsi, $q = \frac{1}{4}p + \frac{3}{4}(1-p) = -0,5p + 0,75$.

2. (a) On a observé une réalisation de M_n égale à $f = \frac{1375}{2500}$.

$$\text{On a } 1 - \frac{1}{4 \times 2500t_0^2} = 0,95 \iff t_0 \simeq 0,045$$

$$\text{donc } P(q \in]M_n - t_0; M_n + t_0]) \geq 1 - \frac{1}{4nt_0^2} = 0,95.$$

L'intervalle $I_q = [f \pm t_0] = [\frac{1375}{2500} \pm 0,045] \simeq [0,51; 0,59]$ est un intervalle de confiance de q au niveau 95 %.

- (b) Puisque $p = 2(0,75 - q)$, un intervalle de confiance de p au niveau 95 % est $I_p = [2(0,75 - 0,59); 2(0,75 - 0,51)] = [0,32; 0,48]$.

3. On aurait $q = \frac{1}{2}p + \frac{1}{2}(1-p) = \frac{1}{2}$ qui ne dépend plus de p et l'on ne pourrait donc plus retrouver I_p .

Exercice 15 La course à zéro

1. On a $\mathbb{P}(C_i = j) = \frac{1}{3}$ pour tous $(i, j) \in \{1; 2\} \times \{1; 2; 3\}$
et donc $\mathbb{E}(C_j) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} + \frac{3}{3} = 2$.
2. On a $J_1 = 6 - C_1$ donc $\mathbb{P}(J_1 = 6 - j) = \frac{1}{3}$ pour tout $j \in \{1; 2; 3\}$. Au deuxième coup, il reste nécessairement assez de points à enlever donc $J_2 = 6 - C_1 - C_2$ et un tableau à double entrée montre que $\mathbb{P}(J_2 = 0) = \mathbb{P}(J_2 = 4) = \frac{1}{9}$,
 $\mathbb{P}(J_2 = 1) = \mathbb{P}(J_2 = 3) = \frac{2}{9}$, $\mathbb{P}(J_2 = 2) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$.
3. On a $\mathbb{E}(C_1 + C_2 + C_3) = 3 \times \mathbb{E}(C_j) = 3 \times 2 = 6$ donc $6 - \mathbb{E}(C_1 + C_2 + C_3) = 0$.
La variable J_3 étant positive et non identiquement nulle ($J_3 = 6 - 1 - 1 - 1$ est de probabilité non nulle par exemple), elle ne peut être d'espérance nulle.
Ainsi, $\mathbb{E}(J_3) \neq 6 - \mathbb{E}(C_1 + C_2 + C_3)$.
4. En s'aidant d'un arbre pondéré entre J_2 et J_3 , on obtient

$$\mathbb{P}(J_3 = 3) = \mathbb{P}(J_2 = 4)\mathbb{P}_{J_2=4}(C_3 = 1) = \frac{1}{9} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27},$$

$$\mathbb{P}(J_3 = 2) = \mathbb{P}(J_2 = 4)\mathbb{P}_{J_2=4}(C_3 = 2) + \mathbb{P}(J_2 = 3)\mathbb{P}_{J_2=3}(C_3 = 1)$$

$$+ \mathbb{P}(J_2 = 2)\mathbb{P}_{J_2=2}(C_3 = 3)$$

$$= \left(\frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{3}{9}\right)\frac{1}{3} = \frac{6}{27},$$

$$\mathbb{P}(J_3 = 1) = \mathbb{P}(J_2 = 4)\mathbb{P}_{J_2=4}(C_3 = 3) + \mathbb{P}(J_2 = 3)\mathbb{P}_{J_2=3}(C_3 = 2)$$

$$+ \mathbb{P}(J_2 = 2)\mathbb{P}_{J_2=2}(C_3 = 1) + \mathbb{P}(J_2 = 1)\mathbb{P}_{J_2=1}(C_3 = 3 \text{ ou } 2)$$

$$= \left(\frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{3}{9} + \frac{2}{9} + \frac{2}{9}\right)\frac{1}{3} = \frac{10}{27} \text{ et}$$

$$\mathbb{P}(J_3 = 0) = \mathbb{P}(J_2 = 3)\mathbb{P}_{J_2=3}(C_3 = 3) + \mathbb{P}(J_2 = 2)\mathbb{P}_{J_2=2}(C_3 = 2)$$

$$+ \mathbb{P}(J_2 = 1)\mathbb{P}_{J_2=1}(C_3 = 1) + \mathbb{P}(J_2 = 0)$$

$$= \left(\frac{2}{9} + \frac{3}{9} + \frac{2}{9}\right)\frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{10}{27}$$
donc $\mathbb{E}(J_3) = \frac{1}{27}(3 \times 1 + 2 \times 6 + 1 \times 10 + 0 \times 10) = \frac{25}{27}$.
De même, en s'aidant d'un arbre pondéré entre J_3 et J_4 , on obtient

$$\mathbb{P}(J_4 = 2) = \mathbb{P}(J_3 = 3)\mathbb{P}_{J_3=3}(C_4 = 1) + \mathbb{P}(J_3 = 2)\mathbb{P}_{J_3=2}(C_4 = 3)$$

$$= \left(\frac{1}{27} + \frac{6}{27}\right)\frac{1}{3} = \frac{7}{81},$$

$$\mathbb{P}(J_4 = 1) = \mathbb{P}(J_3 = 3)\mathbb{P}_{J_3=3}(C_4 = 2) + \mathbb{P}(J_3 = 2)\mathbb{P}_{J_3=2}(C_4 = 1)$$

$$+ \mathbb{P}(J_3 = 1)\mathbb{P}_{J_3=1}(C_4 = 2 \text{ ou } 3)$$

$$= \left(\frac{1}{27} + \frac{6}{27} + 2 \times \frac{10}{27}\right)\frac{1}{3} = \frac{27}{81} \text{ et}$$

$$\mathbb{P}(J_4 = 0) = \mathbb{P}(J_3 = 3)\mathbb{P}_{J_3=3}(C_4 = 3) + \mathbb{P}(J_3 = 2)\mathbb{P}_{J_3=2}(C_4 = 2)$$

$$+ \mathbb{P}(J_3 = 1)\mathbb{P}_{J_3=1}(C_4 = 1) + \mathbb{P}(J_3 = 0)$$

$$= \left(\frac{1}{27} + \frac{6}{27} + \frac{10}{27}\right)\frac{1}{3} + \frac{10}{27} = \frac{47}{81}$$
donc $\mathbb{E}(J_4) = \frac{1}{81}(2 \times 7 + 1 \times 27 + 0 \times 47) = \frac{41}{81}$.
5. On peut démontrer par récurrence que J_n ne sera jamais identiquement nulle.
En effet, J_n est positive et, par hypothèse de récurrence,

$$\mathbb{P}(J_{n+1} = 2) \geq \mathbb{P}(J_n = 2)\mathbb{P}_{J_n=2}(C_{n+1} = 3) = \frac{1}{3}\mathbb{P}(J_n = 2) > 0.$$
Ainsi, l'espérance de J_n ne sera jamais nulle.

DEVOIRS CORRIGÉS

Devoir n° 1

TABLETTE NUMÉRIQUE

Ce devoir est associé au chapitre I, *Suites numériques*.

Exercice

Vous ne l'avez peut-être pas remarqué chez votre professeur mais une tablette de chocolat a la forme parfaite d'un damier rectangulaire comportant un certain nombre de carreaux que l'on déguste voluptueusement les uns après les autres après avoir méticuleusement décomposé la tablette en entier. Bien entendu, plus elle contient de carreaux, meilleur c'est, et tout comme l'âge de ce même professeur, le nombre de carreaux de cette tablette est indéterminé.

Quelle est donc la façon la plus rapide de découper tous les carreaux de la tablette ?

Bonus

Comme cadeau de rentrée, plutôt qu'une trousse azur, saumon ou citron, se faire offrir *Le Goût des Mathématiques*, ouvrage collectif de 128 toutes petites pages chez (Petit) Mercure de France. Tous y trouveront leur compte : vos parents puisque la somme dépensée est modique et vous puisque, même si l'on ne peut y mettre de crayons de couleur, c'est très divertissant.

Corrigé du devoir n° 1

TABLETTE NUMÉRIQUE

Si la tablette comporte 1, 2 ou 3 carreaux, elle ne peut être qu'en « ligne » et il n'y a qu'une possibilité de découpage total, en séparant les carreaux un à un, et il faut 0, 1 ou 2 découpe(s) respectivement.

Si la tablette comporte 4 carreaux, elle est soit en ligne avec 3 découpes, que ce soit un à un ou milieu puis côtés, soit en carré 2×2 avec 3 découpes également.

Si la tablette contient 6 carreaux : en ligne, on a besoin de 5 découpes (un à un ou autres) et en rectangle, on en a besoin de 5 aussi (1 grande puis 2×2 petites ou 2 moyennes et 3 restantes).

Bref, il semble que si la tablette comporte n carreaux, il faut toujours $n - 1$ découpes afin d'en arriver au bout. Démontrons-le par récurrence.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $\mathcal{P}_n$: « Une tablette à n carreaux se découpe toujours et uniquement en $n - 1$ étapes. »

Le cas $n = 1$ a été traité ci-dessus et supposons $\mathcal{P}_k$ vraie pour tout $k \in \{1; \dots; n\}$ pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$.

Soit une tablette de $n + 1$ carreaux et effectuons une première découpe. On obtient alors deux sous-tablettes contenant p et q carreaux avec $p, q \in \{1; \dots; n\}$ et $p + q = n + 1$ puisque l'on n'a pas encore savouré de chocolat. Elles se découpent donc en exactement $p - 1$ et $q - 1$ étapes respectivement et la grande tablette se découpe alors en $1 + (p - 1) + (q - 1) = p + q - 1 = n + 1 - 1 = n$ étapes.

Bon appétit !

SUITES DE BAC

Ce devoir est associé au chapitre I, *Suites numériques*.

Exercice 1 t est la suite définie par $t_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$t_{n+1} = t_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)}.$$

1. Écrire t_1 , t_2 et t_3 sous la forme d'une fraction irréductible.
2. Émettre une conjecture sur l'expression de t_n en fonction de n .
3. Démontrer par récurrence cette conjecture.
4. Déterminer la limite de la suite $(t_n)_{\mathbb{N}}$.
5. Donner une expression en fonction de n de la suite $p_n = \prod_{i=1}^{i=n} t_i$ puis déterminer sa limite.
6. Ces limites ne vous surprennent-elles point ?

Exercice 2 On se propose de démontrer que les suites $(u_n)_{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{\mathbb{N}}$ définies sur l'ensemble $\mathbb{N}$ par $u_n = \cos(n)$ et $v_n = \sin(n)$ n'ont pas de limite.

1. Remarquer premièrement que les suites $(u_n)_{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{\mathbb{N}}$ ne peuvent admettre une limite infinie.
2. Dans cette question, on suppose que la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ .
 - (a) Démontrer que pour tout entier n , $u_{2n} = 2u_n^2 - 1$.
En déduire que $\ell = 2\ell^2 - 1$ puis donner les valeurs possibles du réel ℓ .
 - (b) Démontrer que pour tout entier $n \geq 1$, $u_{n+1} + u_{n-1} = 2u_n \cos 1$.
En déduire que $\ell = \ell \cos 1$. Qu'en déduit-on pour ℓ ?
3. Utiliser les résultats précédents pour démontrer que la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite.

On admet que l'on peut démontrer de manière identique que la suite (u_{2n}) n'admet pas non plus de limite.

4. Après avoir remarqué que pour tout entier n , $u_n^2 + v_n^2 = 1$, démontrer que $(u_n^2)_{\mathbb{N}}$ puis $(v_n)_{\mathbb{N}}$ n'admettent pas de limite.

Remarque : En général, ce n'est pas parce qu'une suite (w_n) n'admet pas de limite que la suite (w_{2n}) n'en admet pas non plus. Il suffit de regarder le cas de $(-1)^n$ pour s'en convaincre.

SUITES DE BAC

Exercice 1 $t_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_{n+1} = t_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$.

$$1. \quad t_1 = t_0 + \frac{1}{(0+1)(0+2)} = \frac{1}{2}, \quad t_2 = t_1 + \frac{1}{(1+1)(1+2)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}, \quad \text{et} \\ t_3 = t_2 + \frac{1}{(2+1)(2+2)} = \frac{2}{3} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4}.$$

2. Il semble que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = \frac{n}{n+1}$: $\mathcal{P}(n)$.

3. • Initialisation : On a $t_0 = \frac{0}{1}$ et $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

• Hérédité : Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vrai pour un certain $n \in \mathbb{N}$: $t_n = \frac{n}{n+1}$.

$$\text{On a } t_{n+1} = t_n + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \stackrel{\mathcal{P}(n)}{=} \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} \\ = \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2} \quad \text{et } \mathcal{P}(n+1) \text{ est vraie.}$$

• Conclusion : $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t_n = \frac{n}{n+1} = \frac{n+1-1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1 - \frac{1}{+\infty} = 1$.

$$5. \text{ On a } p_n = \prod_{i=1}^{i=n} t_i = \prod_{i=1}^{i=n} \frac{i}{i+1} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \dots \times \frac{n-1}{n} \times \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1} \\ \text{et } p_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\frac{1}{+\infty}} 0.$$

6. Nous avons donc ici une suite tendant vers 1 dont les termes sont toutefois assez « petits » pour que leur produit tende vers 0 !

Exercice 2 Les suites $(u_n)_{\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{\mathbb{N}}$ définies sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \cos n$ et $v_n = \sin n$ n'ont pas de limite :

1. Les suites $u_n = \cos n$ et $v_n = \sin n$ sont à valeurs dans l'intervalle $[-1; 1]$. Elles ne peuvent donc pas appartenir à l'intervalle $]7; +\infty[$ ni à $] -\infty; -3[$ à.p.c.r. par exemple et ne peuvent donc diverger ni vers $+\infty$ ni vers $-\infty$.

2. Dans cette question, on suppose que la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ .

(a) Puisque, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\cos(2\alpha) = 2\cos^2 \alpha - 1$, $\cos(2n) = 2\cos^2 n - 1$ et $u_{2n} = 2u_n^2 - 1$.

Comme u_n converge vers ℓ , u_{2n} converge vers ℓ et l'égalité précédente devient après « passage à la limite » : $\ell = 2\ell^2 - 1$.

Donc ℓ est solution de l'équation $2\ell^2 - \ell - 1 = 0$, de discriminant $1 + 4 \times 2 = 9$ et donc de racines $\ell_1 = \frac{1+\sqrt{9}}{2 \times 2} = 1$ et $\ell_2 = \frac{1-3}{4} = -\frac{1}{2}$, les deux valeurs possibles pour la limite ℓ .

(b) Puisque, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\cos(\alpha + 1) = \cos \alpha \cos 1 - \sin \alpha \sin 1$ et $\cos(\alpha - 1) = \cos \alpha \cos 1 + \sin \alpha \sin 1$, on a $u_{n+1} + u_{n-1} = \cos(n+1) + \cos(n-1)$

$$\begin{aligned}u_{n+1} + u_{n-1} &= \cos n \cos 1 - \sin n \sin 1 + \cos n \cos 1 + \sin n \sin 1 \\&= 2 \cos n \cos 1 = 2u_n \cos 1.\end{aligned}$$

Comme les suites u_n , u_{n+1} et u_{n-1} tendent vers ℓ , on obtient après « passage à la limite » : $\ell + \ell = 2\ell \cos 1$ et $\ell = \ell \cos 1$.

Puisque $\cos 1 \neq 1$, le réel ℓ doit être nul.

3. ℓ ne pouvant être à la fois nul et égal à 1 ou $-\frac{1}{2}$, ce réel n'existe pas et la suite $(u_n)_{\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite.
4. Pour tout entier n , $\cos^2 n + \sin^2 n = 1$ donc $u_n^2 + v_n^2 = 1$. Ainsi, la suite $(v_n)_{\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite, finie ou infinie, car sinon, la suite $u_n^2 = 1 - v_n^2$ en admettrait une et donc $u_{2n} = 2u_n^2 - 1$ aussi.

Attention, $\sqrt{v_n^2} = |v_n| \neq v_n$.

Devoir n° 3

PROBABILITÉS ÉPISTOLAIRES

Ce devoir est associé au chapitre II, *Loi binomiale*.

Laclos, Merteuil et Valmont disposent d'un dé cubique bien déséquilibré.

La probabilité d'obtention de chacune de ses faces est donnée dans le tableau suivant :

x_i	1	2	3	4	5	6
p_i	0,17	0,19	0,15	0,18	0,14	0,17

Comme escompté, Merteuil raffole des pairs et Valmont a un penchant pour les impairs. Ils n'ont alors de cesse de lancer le dé, ardemment.

Laclos, le maître du jeu, dispose d'une sacoche remplie de lettres et, à chaque tour, en octroie une au gagnant.

En supposant qu'il distribue les lettres appropriées à chacun des protagonistes, quelle est la probabilité que Merteuil puisse écrire le mot " Liaison " avant que Valmont ne puisse écrire " Danger " ?

Corrigé du devoir n° 3

PROBABILITÉS ÉPISTOLAIRES

Une première remarque à faire est que, comme le mot “Liaison” compte sept lettres et “Danger” six, la partie est nécessairement terminée au douzième lancer. En effet, $6 + 5 = 11$ est le dernier lancer où il est possible qu’aucun des joueur n’ait encore écrit son mot en entier.

Ensuite, il ne faut pas faire l’erreur d’affirmer que la probabilité que Merteuil écrive son mot avant Valmont est la probabilité qu’elle gagne exactement 7 fois en 7 lancers plus celle qu’elle gagne exactement 7 fois en 8 lancers plus celle qu’elle gagne exactement 7 fois en 9 lancers... plus celle qu’elle gagne exactement 7 fois en 12 lancers. En effet, l’événement « Merteuil gagne exactement 7 fois en 7 lancers » est inclus dans l’événement « Merteuil gagne exactement 7 fois en 8 lancers » lui-même inclus dans l’événement « Merteuil gagne exactement 7 fois en 9 lancers » lui-même inclus dans... et certains cas de figure sont alors comptabilisés plusieurs fois.

On peut plutôt affirmer que la partie s’arrête lorsque Merteuil gagne une septième fois. On impose donc son dernier lancer gagnant et on regarde les différentes possibilités pour les lancers précédents. La probabilité qu’elle écrive son mot avant Valmont est donc celle qu’elle gagne le dernier lancer multipliée par la somme des probabilités qu’elle gagne six fois parmi six lancers, qu’elle gagne exactement six fois parmi sept lancers, qu’elle gagne exactement six fois parmi huit lancers... et qu’elle gagne exactement six fois parmi onze lancers.

Une variante est de dire que la probabilité que Merteuil gagne en un certain nombre de lancers est donnée par une sorte de binomiale dont le coefficient usuel est diminué du nombre de possibilités de gagner avant le dernier lancer.

On peut aussi imposer que la partie se déroule quoi qu’il arrive en douze lancers. Merteuil aura alors écrit son mot avant Valmont si elle a gagné au moins sept fois parmi ces douze lancers. En effet, Valmont n’en aura alors pas gagné plus de 5. C’est la solution la plus courte mais dans le jeu, c’est la plus longue.

Formalisons tout ceci afin de déterminer la probabilité demandée.

Lors d’un lancer de dé, on appelle succès (S) l’événement « la face supérieure porte un numéro pair ».

On a $p = P(S) = p_2 + p_4 + p_6 = 0,54$ et $q = P(\overline{S}) = 1 - p = 0,46$.

On appelle M_n la variable aléatoire comptant le nombre de succès lors de n lancers du dé. Bien que lancés ardemment, ces n lancers aléatoires sont identiques et indépendants d’où $M_n \sim \mathcal{B}(n, p)$.

Ainsi, ce qu'il ne faut pas faire est :

$$\begin{aligned} P(M_7 = 7) + P(M_8 = 7) + P(M_9 = 7) + \dots + P(M_{12} = 7) \\ = \binom{7}{7} p^7 q^0 + \binom{8}{7} p^7 q^1 + \binom{9}{7} p^7 q^2 + \dots + \binom{12}{7} p^7 q^5 \simeq 0,737. \end{aligned}$$

La première méthode correcte énoncée est :

$$\begin{aligned} P(S) \times [P(M_6 = 6) + P(M_7 = 6) + P(M_8 = 6) + \dots + P(M_{11} = 6)] \\ = p [\binom{6}{6} p^6 q^0 + \binom{7}{6} p^6 q^1 + \binom{8}{6} p^6 q^2 + \dots + \binom{11}{6} p^6 q^5] \simeq 0,499. \end{aligned}$$

La variante correcte énoncée est :

$$\begin{aligned} P(M'_7 = 7) + P(M'_8 = 7) + P(M'_9 = 7) + \dots + P(M'_{12} = 7) \\ = [\binom{7}{7} p^7 q^0 + [\binom{8}{7} - \binom{7}{7}] p^7 q^1 + [\binom{9}{7} - \binom{8}{7}] p^7 q^2 + \dots + [\binom{12}{7} - \binom{1}{7}] p^7 q^5] \\ \simeq 0,499. \end{aligned}$$

qui est bien la méthode précédente car $\binom{n}{k} - \binom{n-1}{k} = \binom{n-1}{k-1}$ et $p^7 = p \cdot p^6$.

La dernière méthode correcte énoncée est :

$$\begin{aligned} P(M_{12} \geq 7) &= 1 - P(M_{12} \leq 6) \\ &= (1 - P(M_{12} = 0) - P(M_{12} = 1) - \dots - P(M_{12} = 6)) \\ &= (1 - \binom{12}{0} p^0 q^{12} - \binom{12}{1} p^1 q^{11} - \dots - \binom{12}{6} p^6 q^6) \\ &\simeq 0,499. \end{aligned}$$

Comme attendu, Merteuil n'a pas beaucoup moins de chances d'écrire le mot "Liaison" que Valmont d'écrire le mot "Danger" et c'est bien Laclos qui est le maître du jeu.

Ce devoir est associé au chapitre III, *Limites des fonctions numériques*.

Exercice 1 Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{2x^2 - 5}{x^2 - 4x}$.

1. Déterminer son ensemble de définition $\mathcal{D}_f$.
2. Étudier la parité (cf. page 80) de la fonction f .
3. Calculer la fonction dérivée f' de f .
4. Déterminer les trois réels a , b et c tels que pour tout $x \in \mathcal{D}_f$,
$$f(x) = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x-4}.$$
5. Déterminer les asymptotes à la représentation graphique $\mathcal{C}_f$ de la fonction f dans un repère.
6. Étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de son asymptote horizontale.
7. Dresser le tableau de variation complet de la fonction f .
8. Tracer la courbe $\mathcal{C}_f$ ainsi que ses asymptotes dans un repère adapté.

Exercice 2

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ de la façon suivante :

- si $x \in [0; 2]$, $f(x) = x^2(2 - x)$;
- pour tout réel x , $f(x + 2) = f(x)$.

La fonction f admet-elle une limite en $+\infty$?

Bonus

Le 13 novembre 2014 décédait Alexandre Grothendieck, unanimement reconnu comme un des plus grands génies des mathématiques, après une disparition de 25 ans de la sphère publique et privée.

Apposer une souris et la faire cliquer sur le lien suivant, vous aurez un article approfondi sur son parcours, hébergé par le site toujours intéressant *Images des mathématiques* :

<http://images.math.cnrs.fr/Alexandre-Grothendieck.html>

Ses écrits de réflexions et de témoignages d'un passé de mathématicien, *Récoltes et Semailles*, ont enfin été publiés chez Gallimard en 2022.

Corrigé du devoir n° 4

NO LIMIT

Exercice 1 Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{2x^2 - 5}{x^2 - 4x}$.

1. Le dénominateur $x^2 - 4x = x(x - 4)$ ne pouvant s'annuler, la fonction f est définie sur $\mathcal{D}_f =]-\infty; 0[\cup]0; 4[\cup]4; +\infty[= \mathbb{R} \setminus \{0; 4\}$.

2. L'ensemble de définition de f n'étant pas symétrique par rapport à 0, f ne peut être ni paire ni impaire.

Sinon, $f(1) = 1$ et $f(-1) = \frac{-3}{5} \neq \pm f(1)$.

3. Posons $\begin{cases} u = 2x^2 - 5 \\ v = x^2 - 4x \end{cases}$ On a $\begin{cases} u' = 4x \\ v' = 2x - 4 \end{cases}$ Puisque f est de la forme $\frac{u}{v}$,

$$f' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad \text{et, } \forall x \in \mathcal{D}_f, \quad f'(x) = \frac{4x(x^2 - 4x) - (2x^2 - 5)(2x - 4)}{(x^2 - 4x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{4x^3 - 16x^2 - 4x^3 + 8x^2 + 10x - 20}{(x^2 - 4x)^2} = \frac{-8x^2 + 10x - 20}{(x^2 - 4x)^2}.$$

Puisque $\Delta = 100 - 4 \times 8 \times 20 < 0$, la fonction dérivée f' est toujours négative (du signe de -8).

4. On a $a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x-4} = \frac{ax(x-4) + b(x-4) + cx}{x(x-4)} = \frac{ax^2 + (-4a + b + c)x - 4b}{x(x-4)}$ et, en identi-

$$\text{fiant les coefficients, } f(x) = a + \frac{b}{x} + \frac{c}{x-4}$$

$$\iff a = 2; -4a + b + c = 0; -4b = -5 \iff a = 2; b = \frac{5}{4}; c = 8 - \frac{5}{4} = \frac{27}{4}.$$

$$\text{Ainsi, pour tout } x \in \mathcal{D}_f, \quad f(x) = 2 + \frac{5}{4x} + \frac{27}{4(x-4)}.$$

5. On a $\lim_{x \rightarrow 0^\pm} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{2x^2 - 5}{x(x-4)} = \frac{"2 \times 0^\pm - 5"}{0^\pm(0^\pm - 4)} = \frac{"-5"}{-4 \times 0^\pm} = \pm\infty$
(écrire deux lignes) donc la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à gauche et à droite à la courbe $\mathcal{C}_f$.

On a $\lim_{x \rightarrow 4^\pm} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^\pm} \frac{2x^2 - 5}{x(x-4)} = \frac{"2 \times 4^2 - 5"}{4^\pm(4^\pm - 4)} = \frac{"27"}{4 \times 0^\pm} = \pm\infty$
(écrire deux lignes) donc la droite d'équation $x = 4$ est asymptote verticale à gauche et à droite à la courbe $\mathcal{C}_f$.

On a $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} 2 + \frac{5}{4x} + \frac{27}{4(x-4)} = "2 + \frac{5}{4 \times \pm\infty} + \frac{27}{4(\pm\infty - 4)}"$
et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 2 \pm 0 \pm 0 = 2$ donc la droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale en $+\infty$ et en $-\infty$ à la courbe $\mathcal{C}_f$.

6. Pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, on a $f(x) - 2 = \frac{5}{4x} + \frac{27}{4(x-4)} = \frac{32x - 20}{4x(x-4)} = \frac{8x - 5}{x(x-4)}$
de tableau de signes suivant.

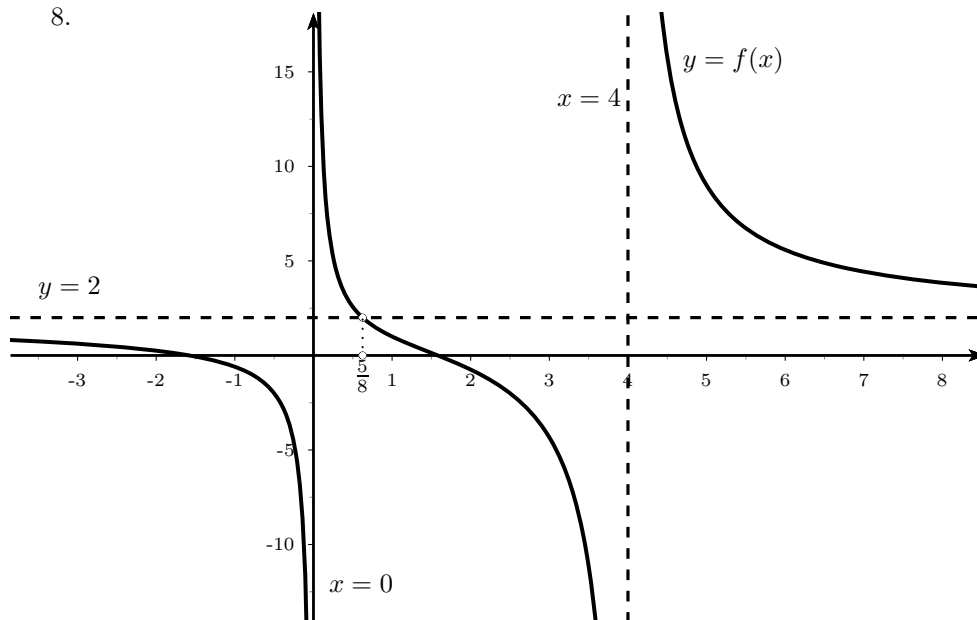
x	$-\infty$	0		$\frac{5}{8}$	4		$+\infty$
$8x - 5$	-	-	-	0	+	+	
x	-	0	+		+	+	
$x - 4$	-	-	-	-	0	+	
$f(x) - 2$	-	+	0	-		+	

Ainsi, $\mathcal{C}_f$ est située au-dessus de l'asymptote $y = 2$ si $x \in]0; \frac{5}{8} [\cup] 4; +\infty [$, en dessous sinon.

7. On obtient le tableau de variation complet de f suivant :

x	$-\infty$	0		4	$+\infty$
$f'(x)$	-	-		-	-
f	2	$+\infty$		$+\infty$	2

8.



Exercice 2 On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 = f(0) = f(0+2) = f(4) = f(2n) = u_n$ et $1 = f(1) = f(1+2) = f(5) = f(2n+1) = v_n$. On sait que si $f(x)$ admet une limite en $+\infty$, alors $f(2x)$ et $f(2x+1)$ admettent la même limite, tout comme $f(2n)$ et $f(2n+1)$. Or $0 \neq 1$. f ne peut donc admettre de limite en $+\infty$.

Rappel : Une fonction vérifiant $f(x+2) = f(x)$ sur $\mathbb{R}$ est dite *périodique*, de *période* 2.

Ce devoir est associé au chapitre IV, *Continuité des fonctions numériques*.

Une étude de fonction au moyen d'une fonction auxiliaire.

Partie A : g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 3x - 3$.

1. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$.
2. Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.
3. Dédire des questions précédentes le signe de $g(x)$.

Partie B : f est la fonction définie par $f(x) = \frac{2x^3 + 3}{x^2 - 1}$. On note $\mathcal{C}_f$ sa représentation graphique dans un repère.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f .
2. Étudier la parité (cf. page 80) de la fonction f .
3. Démontrer que, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f'(x) = \frac{2xg(x)}{(x^2 - 1)^2}$.
4. Étudier les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}_f$. Qu'en déduire graphiquement ?
5. Dresser le tableau de variations complet de f .
6. (a) Déterminer les réels a , b , et c tels que, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$,

$$f(x) = ax + \frac{b}{x - 1} + \frac{c}{x + 1}.$$
 (b) Déterminer les limites $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - 2x)$.
 Qu'en déduire graphiquement ?
 (c) Étudier les positions relatives de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de la droite d'équation $y = 2x$.
7. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$. En donner un encadrement à 10^{-1} près.
8. Déterminer l'équation de la tangente $\mathcal{T}_\alpha$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse α .
9. Tracer la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de la fonction f ainsi que ses asymptotes et la tangente $\mathcal{T}_\alpha$.

Corrigé du devoir n° 5

FONCTION AUXILIAIRE

A. 1. On a $g(x) = x^3 - 3x - 3 = x^3(1 - \frac{3}{x^2} - \frac{3}{x^3}) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} " \pm\infty(1 - 0 - 0) " = \pm\infty$.

De plus, $g'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$. Puisque $g(1) = 1 - 3 - 3 = -5$ et $g(-1) = -1 + 3 - 3 = -1$, on a le tableau de variations suivant.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$x-1$	$-$	$\vdots$	$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$	$\vdots$	$+$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
g	$-\infty$	-1	-5	$+\infty$	

- Ainsi, pour tout $x \leq 1$, $g(x) \leq -1$ et g ne peut s'annuler.
- Par ailleurs, $0 \in]-5; +\infty[= g(]1; +\infty[)$. g étant continue et strictement monotone sur $]1; +\infty[$, le T.V.I. Strict permet d'affirmer que 0 admet un unique antécédent, α , dans $]1; +\infty[$.
- α est donc l'unique zéro de g dans $\mathbb{R}$.

- Un tableau de valeur de la calculatrice donne $\alpha \simeq 2,1$ à 10^{-1} près.
- D'après le tableau de variations de g , on a le tableau suivant.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

B. 1. Le dénominateur $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ ne devant pas s'annuler, la fonction $f(x) = \frac{2x^3+3}{x^2-1}$ est définie sur $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\} =]-\infty; -1[\cup]-1; 1[\cup]1; +\infty[$.

2. On a $f(2) = \frac{19}{3}$ et $f(-2) = -\frac{13}{3} \neq \pm f(2)$ donc f n'est ni paire ni impaire.

3. f est une fonction rationnelle. Elle est donc dérivable sur $\mathcal{D}_f$. Posons $u = 2x^3 + 3$ et $v = x^2 - 1$. On a $u' = 6x^2$ et $v' = 2x$. Puisque $f = \frac{u}{v}$, $f' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ et, $\forall x \in \mathcal{D}_f$, $f'(x) = \frac{6x^2(x^2 - 1) - 2x(2x^3 + 3)}{(x^2 - 1)^2}$

$$f'(x) = \frac{6x^4 - 6x^2 - 4x^4 - 6x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2x(x^3 - 3x - 3)}{(x^2 - 1)^2} = \frac{2xg(x)}{(x^2 - 1)^2}.$$

4. On a, pour $x \in \mathcal{D}_f$, $f(x) = \frac{2x^3+3}{x^2-1} = \frac{2x^3(1+\frac{3}{2x^3})}{x^2(1-\frac{1}{x^2})} = 2x \frac{1+\frac{3}{2x^3}}{1-\frac{1}{x^2}}$

et $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} "2(\pm\infty)\frac{1+0}{1-0}" = \pm\infty$.

Par continuité, $\lim_{x \rightarrow 1} (2x^3 + 3) = 2 + 3 = 5$, $\lim_{x \rightarrow -1} (2x^3 + 3) = 2(-1)^3 + 3 = 1$,

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 - 1) = (1^-)^2 - 1 = 1^- - 1 = 0^-,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2 - 1) = (1^+)^2 - 1 = 1^+ - 1 = 0^+,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} (x^2 - 1) = (-1^-)^2 - 1 = 1^+ - 1 = 0^+$$

et $\lim_{x \rightarrow -1^+} (x^2 - 1) = (-1^+)^2 - 1 = 1^- - 1 = 0^-$,

ces deux dernières étant un peu délicates.

Ainsi, par quotient, $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = " \frac{5}{0^+} " = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = " \frac{5}{0^-} " = -\infty$,

$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = " \frac{1}{0^+} " = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = " \frac{1}{0^-} " = -\infty$.

La courbe $\mathcal{C}_f$ n'admet donc pas d'asymptote horizontale mais admet deux asymptotes verticales à gauche et à droite d'équations $x = -1$ et $x = 1$.

5. On sait que f' est du signe de $2xg(x)$ puisque $(x^2 - 1)^2 > 0$. Comme $f(0) = -3$, on a le tableau suivant.

x	$-\infty$	-1	0	1	α	$+\infty$
$2x$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$g(x)$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$+$
f	$-\infty$	$+\infty$	-3	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

6. (a) Soit $x \in \mathcal{D}_f$. On a $ax + \frac{b}{x-1} + \frac{c}{x+1} = \frac{ax(x^2-1) + b(x+1) + c(x-1)}{(x-1)(x+1)}$

$$= \frac{ax^3 + (-a+b+c)x + b-c}{x^2-1} = f(x)$$

$$\iff a = 2, \quad -a+b+c = 0, \quad b-c = 3$$

$$\iff a = 2, \quad b = 2-c, \quad 2-c-c = 3$$

$$\iff a = 2, \quad c = \frac{2-3}{2} = -\frac{1}{2}, \quad b = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}.$$

$$\text{Ainsi, pour tout } x \in \mathcal{D}_f, \quad f(x) = 2x + \frac{5}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)}.$$

- (b) On a $f(x) - 2x = \frac{5}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)}$ donc

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - 2x) = " \frac{5}{2(\pm\infty)} - \frac{1}{2(\pm\infty)} " = 0 + 0 = 0.$$

Ainsi, la droite Δ d'équation $y = 2x$ est asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

- (c) $f(x) - 2x = \frac{5}{2(x-1)} - \frac{1}{2(x+1)} = \frac{5(x+1)-(x-1)}{2(x-1)(x+1)} = \frac{4x+6}{2(x-1)(x+1)} = \frac{2x+3}{(x-1)(x+1)}$
d'où le tableau suivant.

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	-1	1	$+\infty$
$2x + 3$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x + 1$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$x - 1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f(x) - 2x$	$-$	0	$+$	$-$	$+$
$\mathcal{C}_f$ au-dessus/dessous de Δ	au-dessous	au-dessus	au-dessous	au-dessus	

Ainsi, la courbe $\mathcal{C}_f$ est située au-dessus de la droite Δ pour $x \in]-\frac{3}{2}; -1[\cup]1; +\infty[$ et en dessous pour $x \in]-\infty; -\frac{3}{2}[\cup]-1; 1[$.

7. Pour $-1 < x < 1$, $f(x) \leq -3$ et pour $x > 1$, $f(x) \geq f(\alpha) > 2\alpha > 0$ donc f ne peut pas s'annuler.

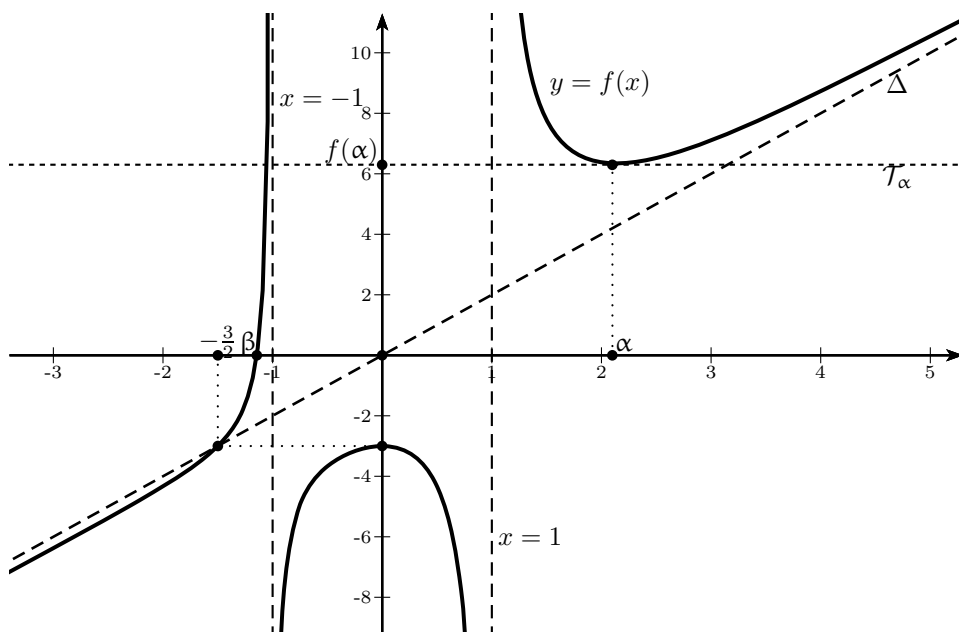
$0 \in \mathbb{R} = f(]-\infty; -1[)$ et f est continue et strictement croissante sur $]-\infty; -1[$ donc 0 y admet un unique antécédent β d'après le T.V.I. Strict. f ne s'annule donc qu'une unique fois sur $\mathbb{R}$.

Un tableau de valeur à la calculatrice donne $f(\beta) = 0$ pour un $\beta \in]-1, 2; -1, 1[$.

8. La tangente $\mathcal{T}_\alpha$ à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse α a pour équation

$$y = f'(\alpha)(x - \alpha) + f(\alpha) = 0 + f(\alpha) \simeq 6,3.$$

9. La droite Δ passe par les points $(0, 0)$ et $(-\frac{3}{2}, -3)$ par exemple.



Devoir n° 6

TO BEE OR NOT TO BEE

Ce devoir est associé au chapitre V, *Droites, plans et vecteurs de l'espace*.

Exercice

Athos, la mouche, Porthos, la fourmi et Aramis, l'araignée, sont trois jeunes et courageuses amies. Elles n'ont peur que d'une seule chose : le dard d'Agnan, le frelon.

Confortablement installées en même sommet d'un parallélépipède rectangle vide de côtés 4 cm, 5 cm et 6 cm, elles l'aperçoivent soudain à l'horizon. Une pour toutes, toutes pour une, elles décident de se réfugier au sommet opposé, réputé pour son imprenable position.

En revanche, elles n'ont pas les mêmes atouts : si Athos peut se mouvoir dans l'air cristallin de cette belle matinée, Aramis est contrainte de se déplacer sur les faces glacées du solide, ce qui n'est rien comparé à Porthos qui elle, en est astreinte aux arêtes acérées.

Au terme d'une chevaleresque et éprouvante épopée, quelle distance chacune aura-t-elle parcourue, en supposant toutefois qu'elle n'emprunte pas de chemin de traverse ?



Bonus Let's play Jeopardy :

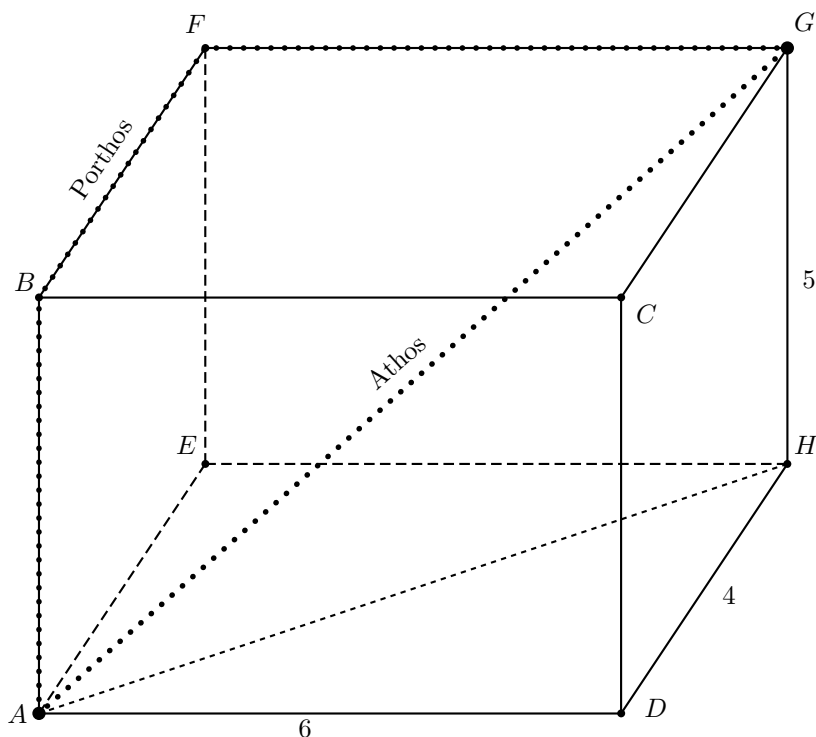
Hint : It's a book, not a song.

Flatland

TO BEE OR NOT TO BEE

Exercice

Nos trois jeunes et courageuses amies sont ainsi confortablement installées sur le sommet A du pavé droit et vide représenté ci-dessous lorsqu'elles aperçoivent Agnan et son terrible dard. Elles se précipitent alors vers l'imprenable sommet G .

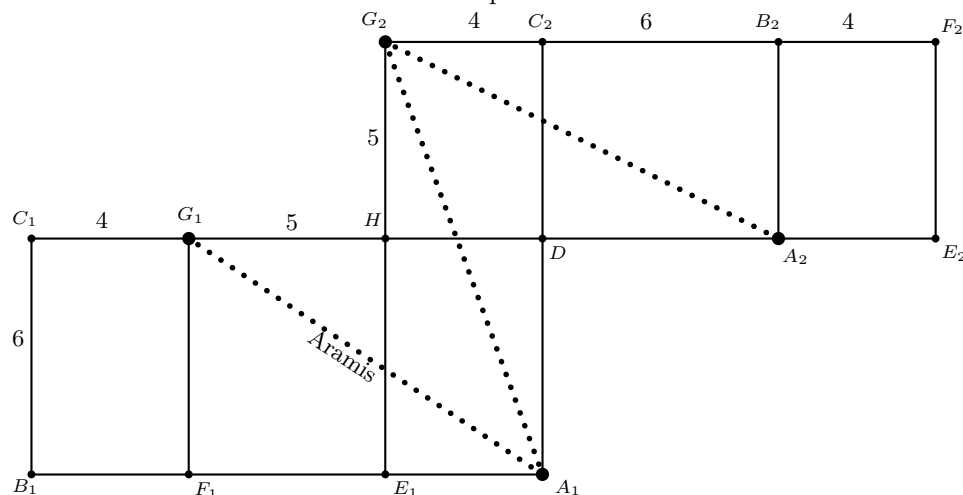


• Puisque le chemin le plus court est la ligne droite, Athos vole directement et parcourt le segment $[AG]$. Le fameux théorème de Pythagore appliqué dans le triangle AGH , rectangle en H , nous permet d'affirmer qu'en appliquant le non moins célèbre théorème de Pythagore dans le triangle ADH , rectangle en D , nous avons $AG^2 = AH^2 + HG^2 = (AD^2 + DH^2) + HG^2 = 6^2 + 4^2 + 5^2 = 77$ d'où la distance parcourue par Athos : $d_{Athos} = \sqrt{77}$ cm.

• Porthos, atreinte aux acérées arêtes doit, elle, nécessairement parcourir au moins une arête de longueur 4 cm, une de longueur 5 cm et une de longueur 6 cm et elle suit avec concentration le chemin $[AB]$, $[BF]$ puis $[FH]$, de longueur

$$d_{Porthos} = AB + BF + FG = 5 + 4 + 6 = 15 \text{ cm.}$$

• Aramis se rend bien compte que sa tâche est plus ardue et construit le patron suivant afin de déterminer son chemin le plus court.



Elle applique trois fois le renommé théorème de Pythagore et obtient :

$$\begin{aligned} \cdot A_1G_1^2 &= A_1D^2 + DG_1^2 = 6^2 + (4+5)^2 = 117. \\ \cdot A_1G_2^2 &= A_1C_2^2 + C_2G_2^2 = (6+5)^2 + 4^2 = 137. \\ \cdot A_2G_2^2 &= A_2B_2^2 + B_2G_2^2 = 5^2 + (6+4)^2 = 125. \end{aligned}$$

Aramis décide donc pertinemment de passer au plus court par les faces glacées $AEHD$ et $EFGH$ le long d'un chemin de longueur $d_{Aramis} = \sqrt{117}$ cm.

Puisque $d_{Athos} < d_{Aramis} < d_{Porthos}$, c'est bien évidemment la mouche qui parcourra le chemin le plus court. En revanche, Porthos n'arrivera peut-être pas bonne dernière au sommet G : Aramis s'est en effet blessée et traîne laborieusement la patte. Par contre, si les trois amies se hâtent, il se pourrait bien qu'Agnan, trop confiant, s'en retourne avec son dard puisqu'il ne peut atteindre le point G .

Bonus

Flatland

Quel est le titre du livre publié en 1884 par Edwin Abbott Abbott dans lequel les personnages sont des figures géométriques – triangles isocèles, carrés, polygones, cercles... – qui, dans leur monde plat, en deux dimensions, sont très hiérarchisés et ont des coutumes et des croyances bien ancrées et où l'on crie à l'hérésie lorsqu'un modeste carré doté d'une conscience découvre la troisième dimension lors de l'apparition soudaine et invraisemblable d'une sphère, et qui, on l'aura compris, est tout à la fois critique de la rigidité de la société victorienne et texte fondateur de la science-fiction et aborde la question troublante de la possibilité d'une quatrième dimension spatiale et qui, bien que n'ayant pas de rapport avec un texte de Jacques Brel, vous est néanmoins conseillé avec insistance par le rédacteur, d'autant plus qu'il ne coûte pas même trois euros ?

DE LA PETITE À LA GRANDE SECTION

Ce devoir est associé au chapitre V, *Droites, plans et vecteurs de l'espace*.

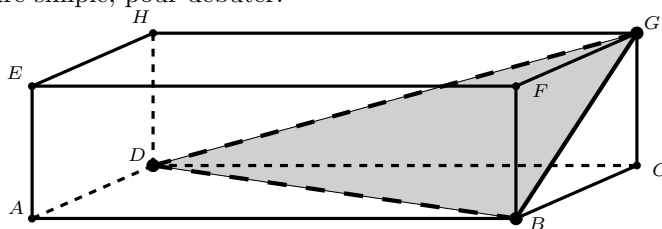
Apprenons donc à tracer des sections planes dans un banal parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$.

1. Faites une figure puis tracez à la règle la section du parallélépipède $ABCDEFGH$ par le plan (GDB) .
2. I est un point quelconque de l'arête $[AB]$. Vous souhaitez tracer à la règle la section du parallélépipède $ABCDEFGH$ par le plan (GDI) et ne pouvez donc tracer de parallèles (tant pis pour la parallèle à (GD) en I par exemple). Lisez les questions les unes après les autres, des indices y sont en effet distillés.
 - (a) Refaites une figure et essayez donc un peu.
 - (b) Une (ID) ? Tracez donc la demi-droite $[CB)$ et nommez P le point apparu.
 - (c) Toujours pas ? Tracez donc le segment $[GP]$ et dénommez M le point pertinent.
 - (d) Non ? Reliez donc le tout, sapristi !
 - (e) Bon, il vous faut maintenant justifier tout ceci.
3. I est un point quelconque de l'arête $[AB]$ et J un point quelconque de l'arête $[AD]$. Refaites une figure, tracez à la règle la section du parallélépipède $ABCDEFGH$ par le plan (GIJ) puis justifiez votre construction. Outre les points susnommés, vous devrez en prénommer de nouveaux Q et N .
4. I est un point quelconque de l'arête $[AB]$, J un point quelconque de l'arête $[AD]$ et K un point quelconque de l'arête $[FG]$. Refaites une figure, tracez à la règle la section du parallélépipède $ABCDEFGH$ par le plan (IJK) puis justifiez votre construction. Vous devrez surnommer de nouveaux points R et L .
5. I est un point quelconque de l'arête $[AB]$, J un point quelconque de l'arête $[DH]$ et K un point quelconque de l'arête $[FG]$. Tracez à la règle la section du parallélépipède $ABCDEFGH$ par le plan (IJK) puis justifiez votre construction. Savez-vous que le projeté orthogonal de K sur $[BC]$ se nomme T ? Tracez donc la demi-droite $[TD)$ (vous avez droit au compas pour placer T).
6. Reprenez la question précédente avec un parallélépipède quelconque.
7. I est un point quelconque de la face $ABCD$, J un point quelconque de la face $ADHE$ et K un point quelconque de la face $BCGF$. Refaites une figure, tracez à la règle la section du parallélépipède rectangle $ABCDEFGH$ par le plan (IJK) puis justifiez votre construction (ici, vous avez le droit de tracer quelques parallèles).

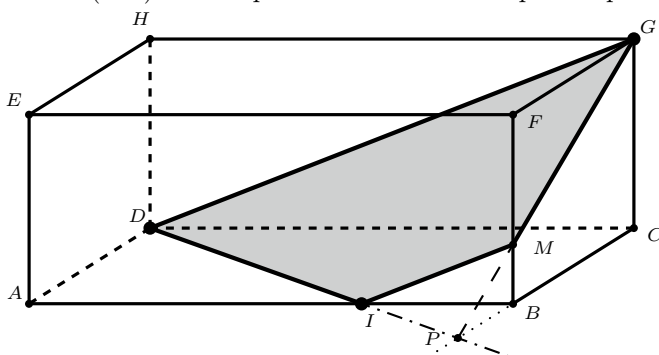
Corrigé du devoir n° 7

DE LA PETITE À LA GRANDE SECTION

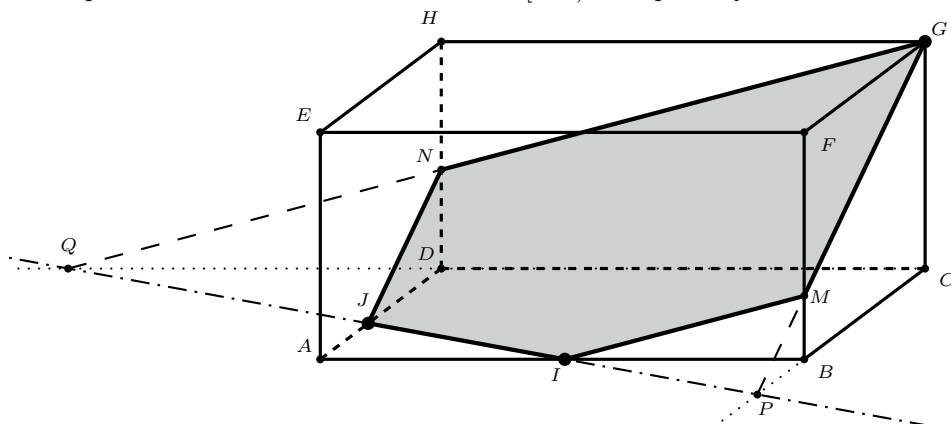
1. Voici une figure simple, pour débiter.



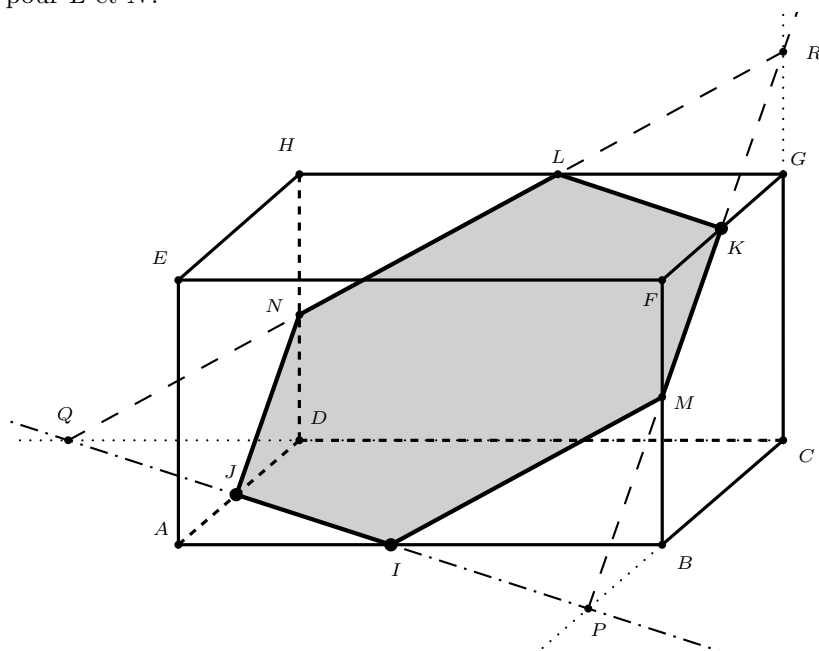
2. (ID) et (BC) sont coplanaires et non parallèles donc sécantes en P .
 $P \in (BC)$ donc (GP) et (BF) coplanaires non parallèles donc sécantes en M .
 $P \in (ID) \subset (GID)$ donc $(PG) \subset (GID)$ d'où $M \in (GID)$ et $M \in (BF)$:
la section du cube par la plan (GID) est donc le quadrilatère $IMGD$. Il est
vrai que la parallèle à (GD) en I est plus aisée mais vous ne pouvez pas la tracer.



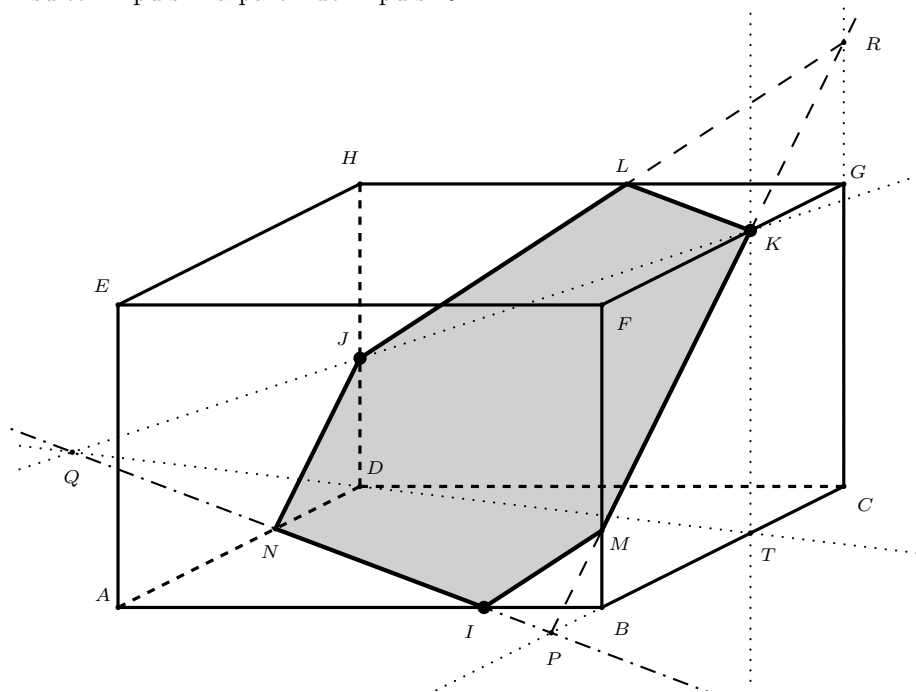
3. On procède de même avec la demi-droite $[CD)$ et le point Q .



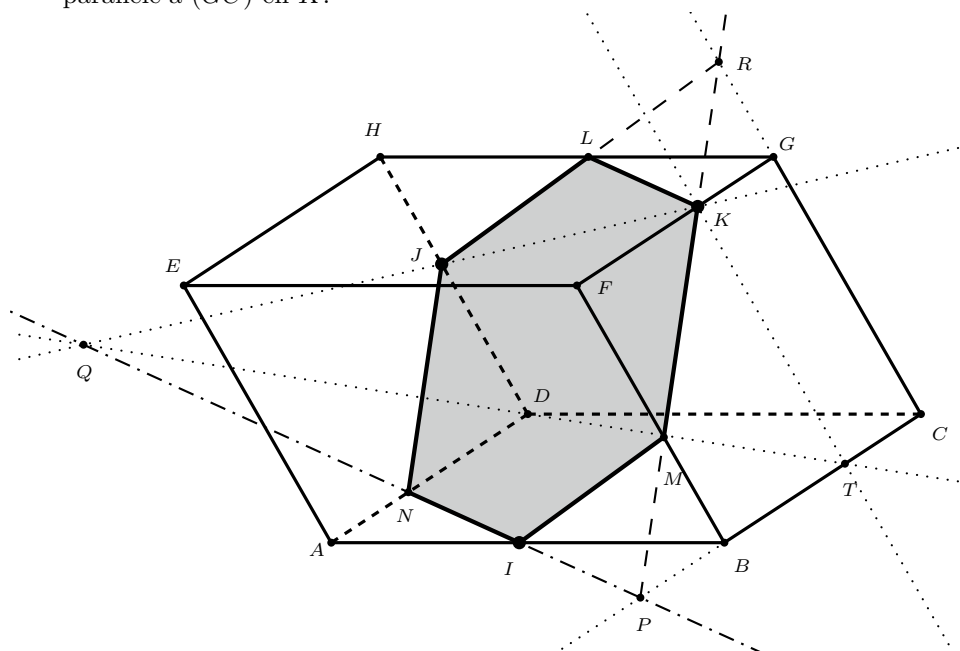
4. Il suffit de tracer (KP) et non plus $[GP]$ afin d'obtenir M et R puis de tracer $[QR]$ pour L et N .



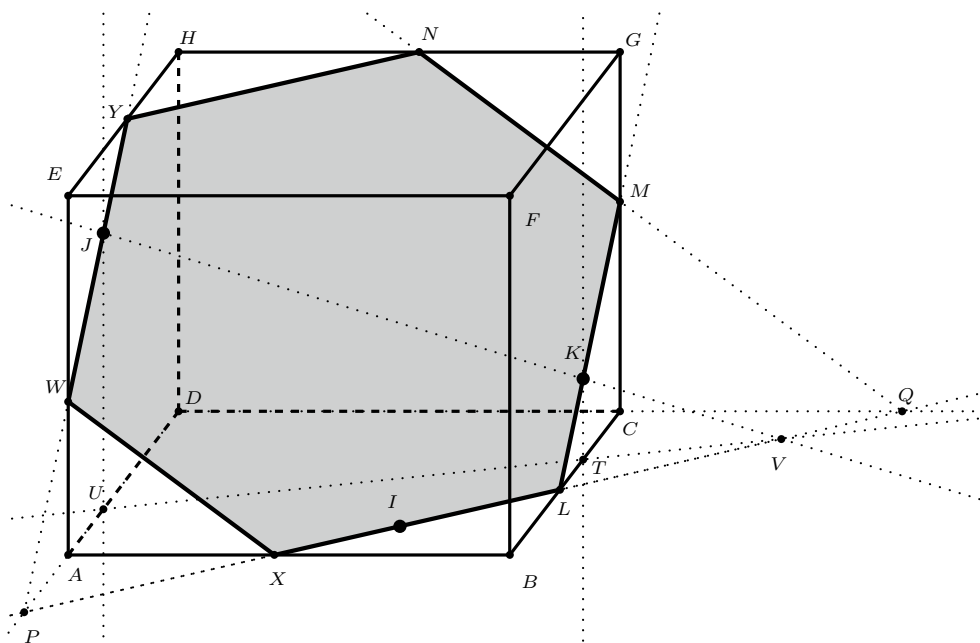
5. Plus difficile : $(KT) // (JD)$ donc (KJ) et (TD) sont sécantes en $Q \in (KJ) \subset (IJK)$ qui permet d'obtenir le point N . On obtient ensuite M puis L à partir de P puis R .



6. On procède de même en prenant non plus un projeté orthogonal mais la parallèle à (GC) en K .



7. On procède de même en projetant aussi J sur $[AD]$.



$V = (UT) \cap (JK)$ donne L, X, P, Q ; (LK) donne M , (QM) donne N ;
 (PJ) donne W et Y .

Devoir n° 8

À LA DÉRIVE

Ce devoir est associé au chapitre VI, *Dérivation des fonctions numériques*.

Exercice 1 Déterminer la dérivée sur $\mathbb{R}$ de la fonction donnée par :

$$f(x) = \left[(5x - 2)\sqrt{x^2 + 4} \right]^3.$$

Exercice 2 Étudier (même en 0...) la fonction g définie par :

$$g(x) = \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^2}.$$

Bonus

Puisqu'il est plus que temps d'émettre vos souhaits, je vous conseille de rajouter une ligne au texto que vous allez envoyer au Père Noël : *Théorème vivant* de Cédric Villani. Vous pouvez aussi le trouver en bibliothèque, faire un 50-50 en le partageant avec votre voisine, l'emprunter à un ami, faire un appel sur les réseaux sociaux ou user de tout autre moyen caritatif et légal mais vous devez impérativement lire ce chef-d'œuvre au moins une fois dans votre vie.

À LA DÉRIVE

Exercice 1 La fonction $f(x) = \left[(5x-2)\sqrt{x^2+4}\right]^3$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ car $x^2+4 \geq 4 > 0$.

• Posons $u = x^2+4$. On a $u' = 2x$ et $(\sqrt{x^2+4})' = (\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$.

• Posons $u = 5x-2$ et $v = \sqrt{x^2+4}$. On a $u' = 5$ et $v' = \frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$.

Ainsi, $\left[(5x-2)\sqrt{x^2+4}\right]' = (uv)' = u'v + uv' = 5\sqrt{x^2+4} + (5x-2)\frac{x}{\sqrt{x^2+4}}$
 $= \frac{5(x^2+4)+5x^2-2x}{\sqrt{x^2+4}} = \frac{10x^2-2x+20}{\sqrt{x^2+4}}$.

• Posons $u = (5x-2)\sqrt{x^2+4}$. On a $f'(x) = (u^3)' = 3u^2 u'$
 $f'(x) = 3\frac{10x^2-2x+20}{\sqrt{x^2+4}} \left[(5x-2)\sqrt{x^2+4}\right]^2 = 3(5x-2)^2\sqrt{x^2+4}(10x^2-2x+20) \quad (> 0)$.

Remarque : On a posé plusieurs u différents. Cela importe peu car on ne s'en sert qu'à un seul endroit à chaque fois, on ne le retrouve plus par la suite (un peu comme une « boîte » dans un algorithme) mais il faut toutefois être très précautionneux.

Exercice 2 $g(x) = \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^2}$

• Par composition de fonctions usuelles l'étant, la fonction g est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$.

• Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $g(-x) = \frac{e^{-\frac{1}{(-x)^2}}}{(-x)^2} = \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^2} = g(x)$ donc g est paire.

Sa courbe représentative $\mathcal{C}_g$ est donc symétrique par rapport à l'axe des ordonnées dans tout repère orthogonal.

• Dérivée sur $\mathbb{R}^*$:

Posons $u = -\frac{1}{x^2}$. On a $u' = \frac{2}{x^3}$ et $(e^u)' = u'e^u = \frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}$.

Puisque $g = -ue^u$, $g' = -(u'e^u + u(e^u)') = -u'e^u - uu'e^u = -u'e^u(1+u)$

et pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$g'(x) = -\frac{2}{x^3}e^{-\frac{1}{x^2}}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right) = -\frac{2}{x^3}\frac{x^2-1}{x^2}e^{-\frac{1}{x^2}} = \frac{2(1-x^2)}{x^5}e^{-\frac{1}{x^2}} = \frac{2(1-x)(1+x)}{x^5}e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

• Limites en l'infini :

On a $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} -\frac{1}{x^2} = \frac{-1}{+\infty} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} e^{-\frac{1}{x^2}} = e^0 = 1$

et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^2} = \frac{-1}{+\infty} = 0$.

La courbe $\mathcal{C}_g$ admet donc la droite $y = 0$ pour asymptote horizontale en $\pm\infty$.

• Limites en 0 :

On a $u = -\frac{1}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow 0^\pm} \frac{-1}{0^+} = -\infty$ donc, par croissance comparée,

$$\lim_{x \rightarrow 0^\pm} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^\pm} \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{u \rightarrow -\infty} -ue^u = -0 = 0.$$

La courbe $\mathcal{C}_g$ n'admet donc pas d'asymptote verticale.

En revanche, on peut prolonger par continuité la fonction g en 0 en posant

$$\tilde{g}(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Par commodité et abus de langage, on notera encore g la fonction $\tilde{g}$.

• Dérivabilité en 0 :

Puisque g est désormais continue en 0, la question de sa dérivabilité se pose.

Soit $x \neq 0$. Si $|x| < 1$, alors $|x^4| < |x^3|$ et, par croissance comparée,

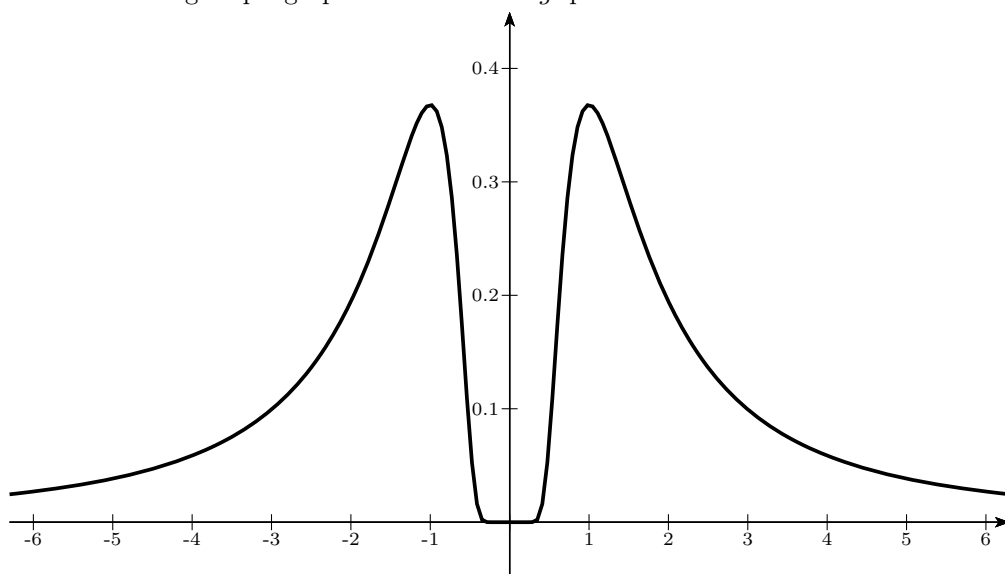
$$\left| \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} \right| = \left| \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}/x^2}{x} \right| = \left| \frac{1}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} \right| < \left| \frac{1}{x^4} e^{-\frac{1}{x^2}} \right| = |u^2 e^u| \xrightarrow{x \rightarrow 0, u \rightarrow -\infty} 0 \in \mathbb{R}$$

donc g est dérivable en 0 et l'on a $g'(0) = 0$.

• On a $g(1) = g(-1) = \frac{e^{-\frac{1}{1^2}}}{1^2} = e^{-1} = \frac{1}{e}$. D'où le tableau de variation complet.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$1-x$	+	+		+	0
$1+x$	-	0	+	+	+
x^5	-	-		+	+
$g'(x)$	+	0	-	0	+
g	$0 \nearrow \frac{1}{e} \searrow 0 \nearrow \frac{1}{e} \searrow 0$				

• Voici le magnifique graph de la fonction g qui « s'écrase infiniment » en 0.



Devoir n° 9

(I CAN'T GET NO)

Ce devoir est associé au chapitre VII, *Convexité & Dérivation*.

Exercice *Satisfaction*

On appelle fonction *satisfaction* toute fonction dérivable prenant ses valeurs entre 0 et 100. Lorsque la fonction *satisfaction* atteint la valeur 100, on dit qu'il y a *saturation*. On définit la fonction *envie* comme la fonction dérivée de la fonction *satisfaction*.

Un professeur de mathématiques modélise sa *satisfaction* des résultats de ses élèves par la fonction p définie par l'expression

$$p(x) = \frac{90}{1 + e^{13-x}}$$

où x est la moyenne des notes des élèves de sa classe de terminale spécialité.

1. Justifier que cette fonction p est bien une fonction *satisfaction*.
2. Par lecture graphique sur l'intervalle $[0 ; 20]$, conjecturer le sens de variation et la convexité de la fonction p ainsi que le sens de variation de sa fonction *envie*. En donner une interprétation concrète.
3. Par lecture graphique, quand ce professeur semble-t-il à demi satisfait des résultats de ses élèves ?
4. D'après son modèle, ce professeur peut-il être pleinement satisfait des résultats de ses élèves ? Justifier.
5. Déterminer l'expression de la fonction dérivée seconde p'' de la fonction p .
6. En déduire la convexité de la fonction p .
7. À partir de quelle moyenne de classe peut-on estimer que son envie de faire progresser les résultats de ses élèves décroît ?

Bonus

Réécoutez donc l'album *Aftermath*, le chef-d'œuvre des Rolling Stones sorti en 1966.

Corrigé du devoir n° 9

(I CAN'T GET NO)

Exercice *Satisfaction*

Nous allons étudier la fonction *satisfaction* $p(x) = \frac{90}{1 + e^{13-x}}$ de ce professeur sur $\mathbb{R}$ tout en sachant que seules les valeurs de x de l'intervalle $[0; 20]$ sont pertinentes puisque ce sont des moyennes de notes.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, p(x) = \frac{90}{1 + e^{13-x}} \geq 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = \frac{90}{1 + e^{-\infty}} = 90 \leq 100$. Par ailleurs, le dénominateur $1 + e^{13-x}$ ne peut s'annuler donc p est indéfiniment dérivable par composition de fonction l'étant. Ainsi, p est une fonction *satisfaction*.
2. Sur la calculatrice, il semble la fonction p soit croissante sur $[0; 20]$. De plus, il semble que sur $[0; 13]$, la fonction *satisfaction* p soit convexe et donc que la fonction *envie* p' soit croissante et que sur $[13; 20]$, p soit concave et p' décroissante. Ceci signifierait que plus la moyenne de classe augmente, plus ce professeur est satisfait des résultats de ses élèves, ce qui paraît logique, qu'en s'approchant de 13 de moyenne, il a de plus en plus envie de faire progresser ses élèves mais qu'au-delà de 13, son envie de les faire progresser diminue.
3. Par lecture graphique, on a $p(13, 2) \simeq 50$. Ce professeur est donc à demi satisfait des résultats de ses élèves lorsque la moyenne des notes de sa classe est de 13, 2.
4. $\forall x \in \mathbb{R}, p'(x) = \frac{-90(1 + e^{13-x})'}{(1 + e^{13-x})^2} = \frac{90e^{13-x}}{(1 + e^{13-x})^2} > 0$ donc p est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Puisque $p(20) = \frac{90}{1 + e^{-7}} < 90 < 100$, la fonction p ne peut atteindre la *saturation* et ce professeur ne sera jamais pleinement satisfait des résultats de ses élèves, même si la moyenne des notes est maximale.
5. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} [(1 + e^{13-x})^2]' &= 2(1 + e^{13-x})'(1 + e^{13-x})^{2-1} = -2e^{13-x}(1 + e^{13-x}) \quad \text{et} \\ p''(x) &= (p'(x))' = 90 \frac{(e^{13-x})'(1 + e^{13-x})^2 - e^{13-x}[(1 + e^{13-x})^2]'}{(1 + e^{13-x})^4} \\ &= 90e^{13-x} \frac{-(1 + e^{13-x})^2 + 2e^{13-x}(1 + e^{13-x})}{(1 + e^{13-x})^4} \\ &= 90e^{13-x} \frac{-(1 + e^{13-x}) + 2e^{13-x}}{(1 + e^{13-x})^3} = \frac{90e^{13-x}}{(1 + e^{13-x})^3} (e^{13-x} - 1). \end{aligned}$$
6. $p''(x)$ est donc du signe de $e^{13-x} - 1$ qui est décroissante et s'annule en $x = 13$. D'où $p''(x) > 0$ sur $] -\infty; 13[$ et p y est convexe, $p''(x) < 0$ sur $] 13; +\infty[$ et p y est concave.
7. La fonction p' est donc décroissante sur $] 13; +\infty[$ et son envie de faire progresser les résultats de ses élèves décroît à partir d'une moyenne de 13.

Devoir n° 10

I BELIEVE I CAN FLY

Ce devoir est associé au chapitre VIII, *Orthogonalité dans l'espace*.

Amelia et Antoine, deux remarquables pilotes, auront peut-être la chance de s'apercevoir aujourd'hui au cours de leur vol. Quel plaisir qu'une rencontre dans les cieux !

Dans un repère orthonormé de l'espace d'unité le kilomètre, on a modélisé la trajectoire temporairement rectiligne des deux avions.

Leur vecteur vitesse respectifs sont $\vec{v}_1(565, 565, 0)$ et $\vec{v}_2(800, -400, 0)$, les valeurs étant exprimées en km.h^{-1} .

À tout instant t , exprimé en heures, la position M_1 du premier avion, celui d'Amelia, est donnée par la relation $\overrightarrow{A_1M_1} = t\vec{v}_1$ où $A_1(0, 0, 1)$

et la position M_2 du deuxième avion, celui d'Antoine, est donnée par la relation $\overrightarrow{A_2M_2} = t\vec{v}_2$ où $A_2(1, 4, 3)$.

Ce matin-là, la visibilité n'excède malheureusement pas trois kilomètres.

Nos fabuleux pilotes pourront-ils s'apercevoir ? Et si oui, pendant combien de temps ?

Bonus

Je me dois de vous conseiller *L'Anomalie* d'Hervé Le Tellier, prix Goncours 2020. Président de l'Oulipo, d'une formation mathématique, il signe ici un roman de romans jubilatoire inspiré par une science-fiction postmoderne, tendance cyberpunk. Le Tellier lui-même décrit son roman comme un « scoubidou » et pose, *in fine*, plusieurs questions sur la réalité du monde et la fiction. À lire et à relire.

Corrigé du devoir n° 10

I BELIEVE I CAN FLY

$$\text{On a } \overrightarrow{A_1 M_1} = t \overrightarrow{v_1} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} x_{M_1} = t \cdot x_{\overrightarrow{v_1}} + x_{A_1} = 565t \\ y_{M_1} = t \cdot y_{\overrightarrow{v_1}} + y_{A_1} = 565t \\ z_{M_1} = t \cdot z_{\overrightarrow{v_1}} + z_{A_1} = 1. \end{cases}$$

$$\text{De même, } \overrightarrow{A_2 M_2} = t \overrightarrow{v_2} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} x_{M_2} = t \cdot x_{\overrightarrow{v_2}} + x_{A_2} = 800t + 1 \\ y_{M_2} = t \cdot y_{\overrightarrow{v_2}} + y_{A_2} = -400t + 4 \\ z_{M_2} = t \cdot z_{\overrightarrow{v_2}} + z_{A_2} = 3. \end{cases}$$

$$\text{Ainsi, } M_1 M_2^2 = (x_{M_2} - x_{M_1})^2 + (y_{M_2} - y_{M_1})^2 + (z_{M_2} - z_{M_1})^2$$

$$M_1 M_2^2 = (235t + 1)^2 + (-965t + 4)^2 + 2^2 = 986\,450t^2 - 7\,250t + 21.$$

Réolvons donc l'inéquation $M_1 M_2^2 \leq 3^2$ c.-à-d. $986\,450t^2 - 7\,250t + 12 \leq 0$.

On trouve alors, en heures, $\frac{725 - \sqrt{52129}}{197290} \leq t \leq \frac{725 + \sqrt{52129}}{197290}$ que l'on convertit en secondes et l'on obtient entre 9s et 17s environ.

Amelia et Antoine pourront donc s'apercevoir 8 brèves mais intenses secondes durant leur vol.

Amelia Earhart (1897-1939) fut la première femme à avoir traversé l'Atlantique en solitaire et Antoine de Saint-Exupéry (1900-1944) fut un grand prince des airs.

Devoir n° 11

OUI, VIDI, COMPRIS

Ce devoir est associé au chapitre IX, *Logarithme népérien*.

Exercice 1 La fonction logarithme décimal en physique

Partie A : En acoustique : intensité d'un son.

Le niveau d'intensité I d'un son (en décibel, dB) est reliée à sa puissance surfacique de réception P (en watt par m^2) de façon que l'on ait, pour deux sons quelconques 1 et 2,

$$I_2 - I_1 = 10 \log \left(\frac{P_2}{P_1} \right).$$

1. À quelle variation de niveau d'intensité correspond un doublement de la puissance surfacique ?
2. Que signifie une augmentation de 10 dB en termes de puissance sonore ?

Partie B : En astronomie : magnitude apparente d'une étoile.

Les astronomes de l'Antiquité avaient classé les étoiles visibles à l'œil nu selon leur brillance. Aujourd'hui, on appelle *éclat* d'une étoile la puissance lumineuse par unité de surface que l'on reçoit sur Terre (en W.m^{-2}).

Pour faire le lien entre ces deux notions, on appelle *magnitude apparente* d'une étoile d'éclat E le nombre $m = -2,5 \log \left(\frac{E}{E_0} \right)$ où E_0 est l'éclat de Véga, choisie comme étoile de référence.

1. Quelle est la magnitude apparente de Véga ?
2. Démontrer que pour deux étoiles, celle qui a l'éclat le plus grand a la magnitude la plus petite.
3. Que signifie pour une étoile d'avoir une magnitude apparente négative ?
4. L'étoile la plus brillante après le Soleil est Sirius dont l'éclat est 3,9 fois celui de Véga. Quelle est la magnitude apparente de Sirius ?
5. Le Soleil a une magnitude apparente de $-26,7$. Calculer le rapport de son éclat à celui de Véga.

Exercice 2 La fonction logarithme hellénique

Selon Pâris, quel était le plus beau des nombres ?

Exercice 3 La fonction logarithme dans la finance

Eudes et Hélène de Yxes dînent au restaurant. Qui paiera l'addition ?

Exercice 4 La fonction logarithme dans le monde animal

Quel animal de pleine lune n'effraie point les mathématiciens ?

Corrigé du devoir n° 11

OUI, VIDI, COMPRIS

Exercice 1 La fonction logarithme décimal en physique

A. 1. Si $P_2 = 2P_1$, on a $I_2 - I_1 = 10 \log \left(\frac{2 \times P_1}{P_1} \right) \iff I_2 - I_1 = 10 \log(2) \simeq 3$.

Le niveau d'intensité augmente donc d'environ 3 dB.

2. Si $I_2 = I_1 + 10$, on a $10 \log \left(\frac{P_2}{P_1} \right) = 10 \iff \log \left(\frac{P_2}{P_1} \right) = 1 = \log(10)$
 $\iff \frac{P_2}{P_1} = 10 \iff P_2 = 10P_1$ et la puissance est décuplée.

B. 1. On a $m_{Vega} = -2,5 \log \left(\frac{E_0}{E_0} \right) = -2,5 \log(1) = 0$.

2. On a $E > E' \iff \frac{E}{E_0} > \frac{E'}{E_0} \iff \log \frac{E}{E_0} > \log \frac{E'}{E_0}$
 $\iff -2,5 \log \frac{E}{E_0} < -2,5 \log \frac{E'}{E_0} \iff m < m'$.

3. Une étoile de magnitude apparente négative en a une plus petite que Vega : son éclat est donc plus important que celui de Vega.

4. On a $m_{Sirius} = -2,5 \log \left(\frac{E_{Sirius}}{E_0} \right) = -2,5 \log(3,9) \simeq -1,48$.

5. On a $-2,5 \log \frac{E_{Soleil}}{E_0} = -26,7 \iff E_{Soleil} = E_0 10^{\frac{-26,7}{-2,5}} \simeq 48.10^9 E_0$.

Exercice 2 La fonction logarithme hellénique

Selon Pâris, le plus beau des nombres était bien évidemment **ln(3)** (et non 75).

Exercice 3 La fonction logarithme dans la finance

Si e^x et $\ln(x)$ dînent au restaurant, c'est bien évidemment Eudes de Yxes qui paiera l'addition puisque l'on sait bien que « logarithme ne paie rien ».

Exercice 4 La fonction logarithme dans le monde animal

Les mathématiciens ne sont point effrayés par le loup-garithme.

ÉQUATIONS FONCTIONNELLES

Ce devoir est associé au chapitre IX, *Logarithme népérien*.

Le but est d'introduire par l'exemple la notion d'équation fonctionnelle – une équation dont l'inconnue est une *fonction* – puis d'utiliser une équation fonctionnelle afin de déterminer les propriétés de ses solutions et enfin de caractériser l'ensemble des solutions d'une équation fonctionnelle (présentant un peu de régularité). On étudiera ici trois équations fonctionnelles classiques.

1. $f(x + y) = f(x) + f(y)$ pour $x, y \in \mathbb{R}$

Le but de cette section est de trouver des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \text{pour tous } x, y \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

1. À quelles fonctions cela vous fait-il penser ?
2. Quelques solutions « particulières »
 - (a) Montrer que les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de la forme $f(x) = ax$, où $a \in \mathbb{R}$, sont des solutions à l'équation fonctionnelle (1).
 - (b) Montrer que si f est une fonction constante qui est une solution de l'équation fonctionnelle (1), alors $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Montrer que si f vérifie l'équation fonctionnelle (1), alors $f(0) = 0$.
4. On suppose qu'une fonction f vérifie l'équation fonctionnelle (1) et l'on suppose de plus que f est continue en 0.
Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
Indication : On pourra utiliser l'équation (1) afin de réécrire le terme $f(x_0 + h)$.
5. On suppose qu'une fonction f vérifie l'équation fonctionnelle (1) et l'on suppose de plus que f est dérivable en 0.
Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et donner la fonction dérivée f' .
6. Montrer que si f vérifie l'équation fonctionnelle (1) et si f est dérivable en 0, alors on a $f(x) = f'(0) \times x$.

2. $f(x + y) = f(x) \times f(y)$ pour $x, y \in \mathbb{R}$

Le but de cette section est de trouver des fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ et qui vérifient

$$f(x + y) = f(x) \times f(y) \quad \text{pour tous } x, y \in \mathbb{R}. \quad (2)$$

1. À quelle fonction cela vous fait-il penser ?
2. Quelques solutions « particulières »
 - (a) Montrer que les fonctions de la forme $f(x) = e^{ax}$, où $a \in \mathbb{R}$, sont des solutions à l'équation fonctionnelle (2).
 - (b) Montrer que si f est une fonction constante qui est une solution de l'équation fonctionnelle (2) alors, soit $f(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, soit f est la fonction nulle.
3. On suppose que f est une solution de l'équation fonctionnelle (2) qui n'est pas la fonction nulle.
 - (a) Montrer que $f(0) = 1$.
 - (b) Montrer que $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Indication absurde.
 - (c) Montrer que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Indication : Remarquer que $x = \frac{x}{2} + \frac{x}{2}$.
 - (d) En déduire que $f(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
4. On suppose qu'une fonction f vérifie l'équation fonctionnelle (2) et l'on suppose de plus que f est continue en 0.
Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
5. On suppose qu'une fonction f vérifie l'équation fonctionnelle (2) et l'on suppose de plus que f est dérivable en 0. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et exprimer $f'(x)$ en fonction de $f(x)$ et de $f'(0)$.
6. On suppose à présent que f vérifie l'équation fonctionnelle (2) et que f n'est pas la fonction nulle. On suppose de plus que f est dérivable en 0. Notre but est de montrer que $f(x) = e^{ax}$, où $a \in \mathbb{R}$. Deux raisonnements sont traités.
Première approche :
 - (a) Après avoir justifié que $g(x) = \ln[f(x)]$ est bien définie sur $\mathbb{R}$, montrer que $g'(x) = f'(0)$.
 - (b) En déduire l'expression de $g(x)$.
 - (c) Conclure.
 Deuxième approche :
 - (a) Montrer que $g(x) = \ln[f(x)]$ vérifie l'équation fonctionnelle (1).
 - (b) Déduire de l'étude de l'équation fonctionnelle (1) une expression de g .
 - (c) Conclure.

3. $f(x \times y) = f(x) + f(y)$ pour $x, y \in \mathbb{R}_+^*$

On cherche les fonctions f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ qui vérifient :

- l'équation fonctionnelle : $f(x \times y) = f(x) + f(y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ (3)
- f est dérivable en 1.

1. À quelle fonction cela vous fait-il penser ?

2. Quelques solutions « particulières »

(a) Montrer que les fonctions de la forme $f(x) = a \ln(x)$, où $a \in \mathbb{R}$, satisfont les deux conditions précédentes.

(b) Montrer que si f est constante, alors f est la fonction nulle.

3. Montrer que si f vérifie (3), alors $f(1) = 0$.

4. On pose $g(x) = f(e^x)$.

(a) Montrer que g est bien définie sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que g est dérivable en 0.

Indication : On pourra écrire $\frac{g(h)-g(0)}{h} = \frac{f(e^h)-f(1)}{e^h-1} \times \frac{e^h-1}{h}$ et calculer chacune des limites séparément.

Remarque : Il est instructif de voir dans l'indication précédente la preuve de l'identité $[f(e^x)]' = f'(e^x) \times (e^x)'$... au moins en $x = 0$.

5. Donner une équation fonctionnelle satisfaite par g et conclure.

ÉQUATIONS FONCTIONNELLES

1. $f(x + y) = f(x) + f(y)$ pour $x, y \in \mathbb{R}$

- Pour ma part, une image d'une somme qui vaut une somme d'images, cela me fait brièvement penser aux fonctions linéaires.
- (a) Si $f(x) = ax$ alors, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x + y) = a(x + y) = ax + ay = f(x) + f(y) \quad \text{et } f \text{ vérifie (1).}$$
- (b) Si $f(x) = c$ et vérifie (1), alors $c = f(x + y) = f(x) + f(y) = c + c = 2c$
donc $c = 0$.
- Si f vérifie (1), alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(x + 0) = f(x) + f(0)$ donc
 $f(0) = f(x) - f(x) = 0$.
- Si f vérifie (1) et f est continue en 0, alors pour tous $x_0, h \in \mathbb{R}$,

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} f(x_0) + f(0) = f(x_0) : f \text{ est continue en } x_0.$$
- Si f vérifie (1) et f est dérivable en 0, alors pour tous $x_0 \in \mathbb{R}, h \in \mathbb{R}^*$,

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{x_0 + h - x_0} = \frac{f(x_0) + f(h) - f(x_0)}{h} = \frac{f(h) - f(0)}{h - 0} \xrightarrow{h \rightarrow 0} f'(0) \in \mathbb{R} \quad \text{donc } f \text{ est}$$
dérivable en x_0 , de nombre dérivé $f'(x_0) = f'(0)$.
- Si f vérifie (1) et f est dérivable en 0, alors f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et de dérivée constante $f'(x) = f'(0)$ donc, en intégrant cette égalité, $f(x) = f'(0)x + c$.
Puisque f doit s'annuler en 0, $c = 0$ et $f(x) = f'(0).x$ sur $\mathbb{R}$.

2. $f(x + y) = f(x) \times f(y)$ pour $x, y \in \mathbb{R}$

- Pour ma part, une image d'une somme qui vaut un produit d'images, cela me fait furieusement penser à la fonction exponentielle.
- (a) Si $f(x) = e^{ax}$, alors pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x + y) = e^{a(x+y)} = e^{ax+ay} = e^{ax}.e^{ay} = f(x) \times f(y) \quad \text{et } f \text{ vérifie (2).}$$
- (b) Si $f(x) = c$ vérifie (2), alors pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,
 $c = f(xy) = f(x).f(y) = c^2$ donc $c^2 - c = c(c - 1) = 0 : c = 1$ ou $c = 0$.
- Soit f non identiquement nulle et vérifiant (2).
 - Il existe alors $u \in \mathbb{R}$ tel que $f(u) \neq 0$ et $f(u) = f(u + 0) = f(u) \times f(0)$
donc $f(0) = \frac{f(u)}{f(u)} = 1$.
 - Supposons qu'il existe $v \in \mathbb{R}$ tel que $f(v) = 0$. On a alors
 $1 = f(0) = f(v + (-v)) = f(v).f(-v) = 0$ ce qui est absurde pour le moins.
 - Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $f(x) = f(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}) = f(\frac{x}{2}).f(\frac{x}{2}) = [f(\frac{x}{2})]^2 \geq 0$.

- (d) Puisque f est positive et ne s'annule pas, $f(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$.
4. Soit f vérifiant (2) et continue en 0 et soient x_0 et $h \in \mathbb{R}$. On a

$$f(x_0 + h) = f(x_0) \times f(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} f(x_0) \times f(0) = f(x_0) : f \text{ est continue en } x_0.$$
5. Soit f vérifiant (2) et dérivable en 0 et soient x_0 et $h \in \mathbb{R}$. On a

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{x_0+h-x_0} = \frac{f(x_0) \cdot f(h) - f(x_0)}{h} = f(x_0) \frac{f(h)-1}{h} = f(x_0) \frac{f(h)-f(0)}{h-0}$$
 qui tend vers $f(x_0) \cdot f'(0) \in \mathbb{R}$ lorsque h tend vers 0 : f est dérivable en x_0 et de nombre dérivé $f'(x_0) = f'(0) \times f(x_0)$.
6. Soit f non identiquement nulle, vérifiant (2) et dérivable en 0.

Première approche :

- (a) On a vu que f est alors strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc $g = \ln \circ f$ est bien définie, dérivable et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{f'(0)f(x)}{f(x)} = f'(0)$.
- (b) Ainsi, $g(x) = f'(0)x + c$ où $c = g(0) = \ln(f(0)) = \ln(1) = 0$ donc $g(x) = f'(0)x$.
- (c) Alors, $f(x) = e^{g(x)} = e^{f'(0)x}$ est bien de la forme e^{ax} où $a = f'(0) \in \mathbb{R}$.

Deuxième approche :

- (a) Soient x et $y \in \mathbb{R}$. On a

$$g(x+y) = \ln[f(x+y)] = \ln[f(x) \cdot f(y)] = \ln[f(x)] + \ln[f(y)] = g(x) + g(y)$$
 et g vérifie (1).
- (b) Puisque f est dérivable en 0, f et donc g sont dérivables sur $\mathbb{R}$. D'après l'étude de l'équation fonctionnelle (1), on a $g(x) = g'(0)x$ sur $\mathbb{R}$.
- (c) Alors, $f(x) = e^{g(x)} = e^{g'(0)x}$ est bien de la forme e^{ax} où $a \in \mathbb{R}$.

3. $f(x \times y) = f(x) + f(y)$ pour $x, y \in \mathbb{R}_+^*$

1. Pour ma part, une image d'un produit qui vaut une somme d'images, cela me fait diablement penser au logarithme népérien.
2. (a) Si $f(x) = a \ln(x)$ où $a \in \mathbb{R}$, alors pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$f(x \times y) = a \ln(x \times y) = a(\ln x + \ln y) = a \ln x + a \ln y = f(x) + f(y).$$
 De plus, $\ln$ est dérivable en 1 donc f aussi. f vérifie donc (3).
- (b) Si $f(x) = c$ pour tout $x > 0$, alors $c = f(12) = f(4 \times 3) = f(4) + f(3) = 2c$ donc $c = 0$.
3. Si f vérifie (3), alors $f(1) = f(1 \times 1) = f(1) + f(1) = 2f(1)$ donc $f(1) = 0$.
4. (a) Puisque f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ et $e^x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(e^x) = g(x)$ est bien définie sur $\mathbb{R}$.
- (b) Soit $h \in \mathbb{R}$. On a

$$\frac{g(h)-g(0)}{h} = \frac{f(e^h)-f(e^0)}{h} = \frac{f(e^h)-f(1)}{e^h-1} \times \frac{e^h-1}{h} = \frac{f(H)-f(1)}{H-1} \times \frac{e^h-e^0}{h}$$
 qui tend vers $f'(1) \times \exp'(0) \in \mathbb{R}$ car $H = e^h \xrightarrow{h \rightarrow 0} 1$ et f est dérivable en 1. Ainsi, g est dérivable en 0 et $g'(0) = f'(1)$.

5. Soient x et $y \in \mathbb{R}$. On a

$g(x+y) = f(e^{x+y}) = f(e^x \cdot e^y) = f(e^x) + f(e^y) = g(x) + g(y) :$ g vérifie donc (1) et est dérivable en 0. On a alors $g(x) = g'(0) \cdot x = f'(1) \cdot x$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $u > 0$, $f(u) = f(e^{\ln u}) = g(\ln u) = f'(1) \ln u :$ f est donc de la forme $a \ln(x)$ où $a \in \mathbb{R}$.

Devoir n° 13

SPACE ODDITY

Ce devoir est associé au chapitre X, *Représentations paramétrique & Équations cartésiennes*.

$ABJODEHG$ et $BCKJEFIH$ sont deux cubes d'arête 1 donc le repère $(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OG})$ est orthonormé.

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. L'identifier en justifiant.

- Le triangle BIG est :
 - rectangle.
 - équilatéral.
 - isocèle non équilatéral.
- Le triangle OIB est :
 - quelconque.
 - isocèle.
 - rectangle.
- Le quadrilatère $DHKB$ est un :
 - rectangle.
 - trapèze.
 - losange.
- Le point M tel que $2\overrightarrow{MO} - \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$ est le point :
 - K .
 - I .
 - J .
- Une représentation paramétrique de la droite (KE) est, pour $t \in \mathbb{R}$,
 - $\begin{cases} x = t \\ y = 2+t \\ z = t \end{cases}$
 - $\begin{cases} x = 3+4t \\ y = t \\ z = 4t \end{cases}$
 - $\begin{cases} x = 1-t \\ y = 1+t \\ z = 1-t \end{cases}$
- Une équation cartésienne du plan (BHC) est
 - $x + y - 1 = 0$.
 - $y + z - 1 = 0$.
 - $x + z - 1 = 0$.
- Le volume du tétraèdre $CHAD$ est :
 - $\frac{1}{2}$.
 - $\frac{1}{6}$.
 - $\frac{1}{3}$.
- La distance de C au plan (ADH) est :
 - 2.
 - $\frac{1}{2}$.
 - $\sqrt{2}$.
- Les droites $(d_1) : \begin{cases} x = 2-3t \\ y = 1+t \\ z = 2t-3 \end{cases}$ et $(d_2) : \begin{cases} x = 7+2u \\ y = 2+2u \\ z = -6-u \end{cases}$ pour $t, u \in \mathbb{R}$, sont :
 - non coplanaires.
 - parallèles.
 - sécantes.
- Soit Δ la droite : $\begin{cases} x = r+2 \\ y = -2r \\ z = 3r-1 \end{cases}$ pour $r \in \mathbb{R}$ et soit $\mathcal{P}$ le plan passant par $M(3;0;0)$ et dirigé par $\vec{u}(1;-1;1)$ et $\vec{v}(0;1;-2)$. On a :
 - $\mathcal{P} \subset \Delta$.
 - Δ et $\mathcal{P}$ sécants.
 - $\Delta // \mathcal{P}$.

SPACE ODDITY

Les deux cubes ont la face $BJHE$ en commun.

1. c. $GI = 2$ et $GB = BI \neq 2$ car ce sont deux diagonales du cube.
Le triangle BIG est donc isocèle.
2. c. $(OB) \perp (EB)$ et $(OB) \perp (BK)$ donc $(OB) \perp (EBK) \ni I$.
Le triangle OIB est donc rectangle.
3. c. On a $DH = HK = KB = BD$ (diagonales des faces).
Puisque $(BD) \parallel (JG) \parallel (KH)$, les points D, H, B et K sont coplanaires.
Le quadrilatère $DHKB$ est donc un losange.
4. c. $2\vec{MO} - \vec{MA} + \vec{MC} = \vec{0} \iff 2\vec{MO} - \vec{MO} - \vec{OA} + \vec{MO} + \vec{OC} = \vec{0}$
 $\iff \vec{OM} = \frac{1}{2}\vec{AC} = \vec{OJ}$.
5. c. $K(0; 2; 0)$ et $E(1; 1; 1)$ donc $\vec{EK}(-1; 1; -1)$
et pour $t \in \mathbb{R}$, $(KE) : \begin{cases} x = x_E + x_{\vec{EK}}t = 1 - t \\ y = y_E + y_{\vec{EK}}t = 1 + t \\ z = z_E + z_{\vec{EK}}t = 1 - t. \end{cases}$
6. c. On a $B(1, 1, 0), H(1, 2, 0), C(1, 2, 0), J(0, 1, 0)$ et $E(1, 1, 1)$ donc
 $\vec{BH}(-1, 0, 1), \vec{BC}(0, 1, 0)$ et $\vec{JE}(1, 0, 1)$. D'où, $\vec{JE} \cdot \vec{BH} = -1 + 0 + 1 = 0$
et $\vec{JE} \cdot \vec{BC} = 0 + 0 + 0 = 0$. Le vecteur $\vec{JE}(1, 0, 1)$ est normal au plan (BHC)
qui admet donc une équation cartésienne de la forme $1x + 0y + 1z + d = 0$. Avec
 $B \in (BHC)$, on obtient $1 + 0 \times 1 + 1 \times 0 + d = 0$ et $\mathcal{P}: x + z - 1 = 0$.
7. c. Le volume de $CHAD$ est $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \cdot \text{Base} \cdot \text{Hauteur} = \frac{1}{3} \mathcal{A}(\text{DAC}) \times HE$
 $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot AC \cdot DA \cdot HE = \frac{1}{3}$.
8. c. (CJ) perpendiculaire à (AJ) et à (HJ) donc au plan (ADH) et
 $\text{distance}(C; (ADH)) = CJ = \sqrt{2}$.
9. c. La résolution du système $\begin{cases} x = 2 - 3t = 7 + 2u \\ y = 1 + t = 2 + 2u \\ z = 2t - 3 = -6 - u \end{cases}$ mène à
 $2u = -5 - 3t = -1 + t$ donc $u = t = -1$, qui est compatible avec la
troisième équation. Ainsi, (d_1) et (d_2) sont sécantes en $(5; 0; -5)$.
10. c. On peut remarquer que le vecteur $\vec{w}(1, -2, 3)$ dirige la droite Δ . Puisque
 $\vec{w} = \vec{u} - \vec{v}$, le vecteur $\vec{w}$ est directeur de $\mathcal{P}$ donc la droite Δ et le plan
 $\mathcal{P}$ sont parallèles. En revanche, cela ne suffit pas pour démontrer qu'ils sont
disjoints ni que la droite est incluse dans le plan (l'inverse n'est jamais vrai).
Pour ce faire, on procède comme suit. Le plan $\mathcal{P}$ a pour représentation pa-
ram., pour $s, t \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} x = 3 + s \\ y = t - s \\ z = s - 2t \end{cases}$ et $\begin{cases} x = r + 2 = 3 + s \\ y = -2r = t - s \\ z = 3r - 1 = s - 2t \end{cases} \implies$
 $\begin{cases} r = s + 1 \\ t = s - 2r = -s - 2 \\ 3(s + 1) - 1 = s - 2(-s - 2). \end{cases}$ La dernière équation n'admettant pas de so-
lution ($2 \neq 4$), la droite Δ et le plan $\mathcal{P}$ sont disjoints donc strictement parallèles.

GRAND CONCOURS

Ce devoir est associé au chapitre X, *Représentations paramétrique & Équations cartésiennes*.

L'espace est muni d'un beau repère orthonormé.

Exercice 1 On donne les équations cartésiennes de trois plans :

$$\mathcal{A}: 4x + 3y + z + 2 = 0,$$

$$\mathcal{B}: x + 2y + z - 5 = 0,$$

$$\mathcal{C}: 3x + 5y + 2z - 9 = 0.$$

Démontrer que ces trois plans sont concourants en un unique point dont on déterminera les coordonnées.

Exercice 2 On donne les équations cartésiennes de deux plans :

$$\mathcal{P}: x - 4y + z - 3 = 0,$$

$$\mathcal{Q}: 2x + y - z + 6 = 0.$$

Déterminer une équation cartésienne d'un plan $\mathcal{R}$ tel que les trois plans $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ soient concourants.

Calculer alors les coordonnées de leur point de concours.

Bonus Voyagez donc avec *Le Mont Analogue*, brillant roman inachevé d'aventures alpines, non euclidiennes et symboliquement authentiques de René Daumal.

GRAND CONCOURS

L'espace est muni d'un beau repère orthonormé.

Exercice 1 Soit $I(x, y, z) \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{C}$.

On a alors
$$\begin{cases} 4x + 3y + z + 2 = 0 \\ x + 2y + z - 5 = 0 \\ 3x + 5y + 2z - 9 = 0 \end{cases} \quad \text{et la combinaison } (L1) - (L2) - (L3) \text{ donne}$$

$$(4x + 3y + z + 2) - (x + 2y + z - 5) - (3x + 5y + 2z - 9) = 0 - 0 - 0$$

$$\iff -4y - 2z + 16 = 0 \iff z = 8 - 2y.$$

En substituant dans le système $\begin{cases} (L1) \\ (L2) \end{cases}$, on obtient

$$\begin{cases} 4x + 3y + (8 - 2y) + 2 = 0 \\ x + 2y + (8 - 2y) - 5 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 4x + y + 10 = 0 \\ x + 3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -3 \\ y = -10 - 4x = 2 \end{cases}$$

et donc $z = 8 - 2y = 4$.

On a ainsi démontré que si $I \in \mathcal{A} \cap \mathcal{B} \cap \mathcal{C}$, alors $I(-3, 2, 4)$.

Vérifions que ce point appartient bien aux trois plans :

$$\begin{cases} 4x_I + 3y_I + z_I + 2 = 4(-3) + 3 \times 2 + 4 + 2 = 0 \\ x_I + 2y_I + z_I - 5 = -3 + 2 \times 2 + 4 - 5 = 0 \\ 3x_I + 5y_I + 2z_I - 9 = 3(-3) + 5 \times 2 + 2 \times 4 - 9 = 0. \end{cases}$$

Ainsi, les trois plans $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont concourants au point $I(-3, 2, 4)$.

Exercice 2 D'après les équations cartésiennes, le vecteur $\vec{p}(1, -4, 1)$ est normal à $\mathcal{P}$ et le vecteur $\vec{q}(2, 1, -1)$ est normal à $\mathcal{Q}$. Puisque $\vec{p}$ et $\vec{q}$ ne sont trivialement pas colinéaires, les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont sécants. On cherche alors un vecteur $\vec{r}(a, b, c)$ orthogonal à $\vec{p}$ et à $\vec{q}$: ce vecteur $\vec{r}$ dirige la droite d'intersection de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ et sera normal au plan $\mathcal{R}$ recherché.

On a
$$\begin{cases} \vec{r} \cdot \vec{p} = 0 \\ \vec{r} \cdot \vec{q} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a - 4b + c = 0 \\ 2a + b - c = 0 \end{cases} \quad \text{et la combinaison } (L1) + (L2) \text{ donne}$$

$3a - 3b = 0 \implies a = b$ d'où $\begin{cases} a - 4a + c = 0 \\ 2a + a - c = 0 \end{cases} \implies c = 3a$ et $\vec{r}$ est de la forme $(a, a, 3a)$, par exemple $\vec{r}(1, 1, 3)$ et l'on vérifie que $\vec{r} \cdot \vec{p} = 1 - 4 + 3 = 0$ et $\vec{r} \cdot \vec{q} = 2 + 1 - 3 = 0$.

Tout plan de la forme $x + y - 3z + d = 0$ est normal à $\vec{r}$ et donc perpendiculaire à $\mathcal{P}$ et à $\mathcal{Q}$.

Posons donc $\mathcal{R}: x + y - 3z - 1 = 0$. Les trois plans sont alors nécessairement concourants.

Soit $I(x, y, z)$ leur point d'intersection.

On a
$$\begin{cases} x - 4y + z - 3 = 0 \\ 2x + y - z + 6 = 0 \\ x + y - 3z - 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 4y - z + 3 \\ 2(4y - z + 3) + y - z + 6 = 0 \\ (4y - z + 3) + y - 3z - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 4y - z + 3 \\ 3z = 9y + 12 \\ (4y - z + 3) + y - (9y + 12) - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow & \begin{cases} x = 4y - z + 3 \\ z = 3y + 4 \\ 4y - (3y + 4) + 3 + y - 9y - 12 - 1 = 0 \end{cases} \\ \Leftrightarrow & \begin{cases} -7y - 14 = 0 \\ z = 3y + 4 \\ x = 4y - z + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2 \\ z = 3(-2) + 4 = -2 \\ x = 4(-2) - (-2) + 3 = -3. \end{cases} \end{aligned}$$

Vérifions nos résultats :
$$\begin{cases} (-3) - 4(-2) + (-2) - 3 = 8 - 8 = 0 \\ 2(-3) + (-2) - (-2) + 6 = 6 - 6 + 2 - 2 = 0 \\ (-3) + (-2) - 3(-2) - 1 = 6 - 1 - 2 - 3 = 0. \end{cases}$$

Le point de concours des trois plans $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{R}$ est le point $I(-3, -2, -2)$.

LE SILENCE ÉTERNEL DE CES ESPACES INFINIS

Ce devoir est associé au chapitre X, *Représentations paramétrique & Équations cartésiennes*.

Cet exercice est un QCM. Pour chaque question, une seule réponse est correcte. Reporter sur la copie le numéro de la question immédiatement suivi de la réponse choisie puis justifier pleinement cette dernière.

Ce devoir utilise la notion de représentation paramétrique d'un plan, ce qui est malgré tout intéressant.

On se place confortablement dans l'espace muni d'un repère ortho-normé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et l'on donne les points $A(1, 2, 1)$, $B(-1, 1, 0)$, $C(0, 1, 1)$, $D(1, 1, 2)$, $E(2, 0, 1)$ et $F(3, 1, -2)$.

1. (a) Le plan (BAC) admet comme représentation paramétrique, pour $t, s \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x = 2t - s \\ y = 1 + t + s \\ z = 1 - t. \end{cases}$$
 (b) Le plan (BAC) admet comme représentation paramétrique, pour $t, s \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x = 2t + s \\ y = 1 + t + s \\ z = 1 + t. \end{cases}$$
 (c) Le plan (BAC) n'admet pas de représentation paramétrique.
2. (a) La droite (AB) est perpendiculaire au plan (EDF) .
 (b) La droite (AB) est parallèle au plan (EDF) .
 (c) La droite (AB) n'est pas normale.
3. Le plan $\mathcal{Q}$ admet la représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 + s + 2t \\ z = 1 + s - t \end{cases}$ pour $t, s \in \mathbb{R}$.
 (a) Le plan $\mathcal{Q}$ admet $2x + 3y + z - 6 = 0$ pour équation cartésienne.
 (b) On ne joue pas aux cartes avec ce plan.
 (c) Le plan $\mathcal{Q}$ admet $3x + y - z - 8 = 0$ pour équation cartésienne.
4. Soient, pour $t, r, s \in \mathbb{R}$, la droite $\Delta : \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 - 3t \\ z = 7 + 2t \end{cases}$ et le plan $\mathcal{P} : \begin{cases} x = 1 + s - r \\ y = 3 - s \\ z = 2 + r. \end{cases}$
 (a) La droite Δ et le plan $\mathcal{P}$ sont strictement parallèles.
 (b) La droite Δ et le plan $\mathcal{P}$ sont sécants en un point dont on déterminera les coordonnées.
 (c) La droite Δ est incluse dans le plan $\mathcal{P}$.

5. Le titre complet de ce devoir est :

- (a) *Le silence éternel de ces espaces infinis [à] mes frais.*
- (b) *Le silence éternel de ces espaces infinis mais frais.*
- (c) *Le silence éternel de ces espaces infinis m'effraie.*

LE SILENCE ÉTERNEL DE CES ESPACES INFINIS

1. b. On a $\overrightarrow{BA}(2, 1, 1)$ et $\overrightarrow{CA}(1, 1, 0)$ donc $M \in \mathcal{P}_{(BAC)} \Leftrightarrow$ il existe $t, s \in \mathbb{R}$,
 $\overrightarrow{CM} = t\overrightarrow{BA} + s\overrightarrow{CA}$ d'où la rep. param., pour $t, s \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} x = 2t + s \\ y = 1 + t + s \\ z = 1 + t. \end{cases}$
2. a. On a $\overrightarrow{DE}(1, -1, -1)$ et $\overrightarrow{FE}(-1, -1, 3)$ non colinéaires. Puisque
 $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{DE} = 2 - 1 - 1 = 0$ et $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{FE} = -2 - 1 + 3 = 0$, la droite (AB) est
orthogonales à deux sécantes du plan $\mathcal{P}_{(EDF)}$ et donc perpendiculaire à ce plan.
3. c. $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 + s + 2t \\ z = 1 + s - t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = 2 - x \\ s = y - 3 - 2(2 - x) \\ z = 1 + (y - 3 - 4 + 2x) - (2 - x) \end{cases} \Rightarrow 3x + y - z - 8 = 0.$
4. b. $\begin{cases} 2 + 3t = 1 + s - r \\ 1 - 3t = 3 - s \\ 7 + 2t = 2 + r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s = 2 + 3t \\ r = 5 + 2t \\ 2 + 3t = 1 + (2 + 3t) - (5 + 2t) \end{cases} \Rightarrow 2t = -4$
 $\Rightarrow t = -2$ d'où $\begin{cases} s = 2 + 3(-2) = -4 \\ r = 5 + 2(-2) = 1 \end{cases}$ et les coordonnées de $\Delta \cap \mathcal{P}$ sont
 $\begin{cases} x = 2 + 3(-2) = 1 + (-4) - 1 = -4 \\ y = 1 - 3(-2) = 3 - (-4) = 7 \\ z = 7 + 2(-2) = 2 + 1 = 3. \end{cases}$

Il n'est pas nécessaire de vérifier que les autres possibilités sont fausses car la solution trouvée est unique (et il est précisé qu'une seule réponse est correcte).

5. c. Une pensée de Blaise Pascal : *Le silence éternel de ces espaces infinis m'effraie.*

Ce devoir est associé au chapitre XI, *Primitives & Équations différentielles*.

Exercice

Pour étudier la population d'une espèce en voie d'extinction comme les éléphants d'Afrique, les tigres blancs ou les cent mille professeurs de mathématiques encore vivants et en activité, on peut utiliser le modèle de Gompertz, mathématicien britannique du XIX^es.

Sur la population d'enseignants étudiée ici, le nombre d'individus vivants et actifs $m(t)$ (en centaines de milliers) à l'instant t (en années) est solution sur $\mathbb{R}^+$ de l'équation différentielle $(E): y' = -\frac{1}{10}y(4 - \ln(y))$.

- On suppose que m est strictement positive sur $\mathbb{R}^+$.
Démontrer que la fonction m est solution de (E) si, et seulement si, la fonction $\ln(m)$ est solution d'une équation différentielle (E') que l'on déterminera.
- Résoudre l'équation (E') et en déduire que, pour tout $t \geq 0$,
$$m(t) = \exp\left(4 - 4e^{\frac{t}{10}}\right).$$
- Étudier les variations de la fonction m .
- Quelle sera l'évolution de cette population d'enseignants de mathématiques ?
- Déterminer au moyen de la calculatrice dans combien de temps le seul demi-professeur de mathématiques encore actif et presque vivant sera le vôtre ?

Bonus

Pour vous détendre, je vous conseille de lire avec plaisir et amusement *Les Mathématiques en bande dessinée - L'Analyse* de Grady Klein et Yoram Bauman (éd. Eyrolles). Vous y retrouverez les thèmes que nous avons abordés, souvent de manière similaire, mais bien mieux illustrés.

ESPÈCE DE MATHS

Exercice

- On suppose que m est strictement positive sur $\mathbb{R}^+$ et l'on pose $\ell = \ln(m)$.
On a $m = e^\ell$, $\ell' = \frac{m'}{m}$ et
 m est solution de $(E) \iff m' = -\frac{1}{10}m(4 - \ln(m)) \iff \frac{m'}{m} = -\frac{1}{10}(4 - \ln(m))$
 $\iff \ell' = -\frac{1}{10}(4 - \ell) = \frac{1}{10}\ell - \frac{2}{5}$
 $\iff \ell = \ln(m)$ est solution de l'équation $(E') : z' = \frac{1}{10}z - \frac{2}{5}$.
- Les solutions de l'équation $(E') : z' = \frac{1}{10}z - \frac{2}{5}$ sont de la forme
 $z = \lambda e^{\frac{1}{10}t} - \frac{-2/5}{1/10} = \lambda e^{\frac{1}{10}t} + 4$ donc les solutions de l'équation
 $(E) : y' = -\frac{1}{10}y(4 - \ln(y))$ sont de la forme $y = e^z = \exp\left(\lambda e^{\frac{1}{10}t} + 4\right)$.
Puisque les professeurs de mathématiques sont au nombre de cent mille au début de l'étude, m est la solution de (E) sur $\mathbb{R}_+$ telle que $m(0) = 1$ donc $\exp(\lambda e^0 + 4) = 1$ et $\lambda = -4$.
On a donc $m(t) = \exp\left(4 - 4e^{\frac{t}{10}}\right)$.
- Sur $\mathbb{R}_+$, $t \mapsto \frac{t}{10}$ est strictement croissante donc $t \mapsto e^{\frac{t}{10}}$ l'est aussi. Ainsi, $t \mapsto 4 - 4e^{\frac{t}{10}}$ est strictement décroissante tout comme $t \mapsto \exp\left(4 - 4e^{\frac{t}{10}}\right) : m$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$.
Sinon, on peut dériver : $\left(e^{\frac{t}{10}}\right)' = \frac{1}{10}e^{\frac{t}{10}}$ donc $\left(4 - 4e^{\frac{t}{10}}\right)' = -4\frac{1}{10}e^{\frac{t}{10}}$
et $\left(\exp(4 - 4e^{\frac{t}{10}})\right)' = -\frac{2}{5}e^{\frac{t}{10}} \exp\left(4 - 4e^{\frac{t}{10}}\right) < 0$.
- On a $\lim_{t \rightarrow +\infty} m(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \exp\left(4 - 4e^{\frac{t}{10}}\right) = \text{"exp}(4 - 4e^{+\infty})"$
 $= \text{"exp}(4 - \infty)" = e^{-\infty} = 0$: la population des professeurs de mathématiques tend donc à disparaître inexorablement.
- Un tableau de valeurs à la calculatrice de la fonction $100\,000\,m(t)$ donne environ 2,3 professeurs pour $t = 13$ et 0,5 professeur pour $t = 14$.
Dans quatorze ans, le seul demi-professeur de mathématiques encore actif et presque vivant sera le vôtre.

Bonus

Les Mathématiques en bande dessinée - L'Analyse de Grady Klein et Yoram Bauman est une lecture plaisante et très instructive, n'est-ce pas ?

LIBÉRÉE, DÉRIVÉE : L'INTÉGRALE

Ce devoir est associé au chapitre XI, *Primitives & Équations différentielles*.

Agathe, Colette, Gaston, Joséphine, Rosalie et Simon jouent sur les rives d'un torrent. L'eau est cristalline mais le courant peut être quelque peu turbulent. Les uns s'amuse à libérer des oies sauvages ressemblant à s'y méprendre à des canards en plastique dérivant au fil de l'eau, tandis que les autres les récupèrent, tant bien que mal.

Sur les différents plan d'eau, les oies seront matérialisées par de remarquables pentagones réguliers et le courant par de ravissantes petites flèches formant un immense champ de vecteurs. Sur le plan d'eau n° 5, on y a aussi tracé des axes mais ceux-ci sont virtuels, cela va sans dire. En revanche, on sait que l'inclinaison du courant y est égale au double de l'abscisse du point.

1. Pour chacun des plans d'eau n°s 1 à 5 représentés en pages suivantes,

- (a) où doit se placer Rosalie pour récupérer l'oie d'Agathe ?
- (b) où doit se placer Joséphine pour récupérer l'oie de Colette ?
- (c) où doit se placer Gaston pour envoyer son oie vers Simon ?

Les trajectoires que l'on a tracées sont appelées des courbes intégrales.

2. On munit les plans d'un repère orthonormé orienté de manière usuelle c.-à-d. « horizontalement » pour les abscisses x et « verticalement » pour les ordonnées y .

- (a) Observer les pentes des vecteurs par tranches « verticales ». Que remarque-t-on ?

- (b) Associer à chaque plan l'équation différentielle qui lui correspond.

$$\begin{array}{l|l} (E_a): & y' = 2x \\ (E_b): & y' = y \\ (E_c): & y' = \frac{1}{2} \end{array} \quad \left| \quad \begin{array}{l} (E_d): & y' = 3x^2 - 2x - \frac{1}{2} \\ (E_e): & y' = \begin{cases} x(y+1) & \text{si } x \geq 0 \\ x(y-1) & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array} \right.$$

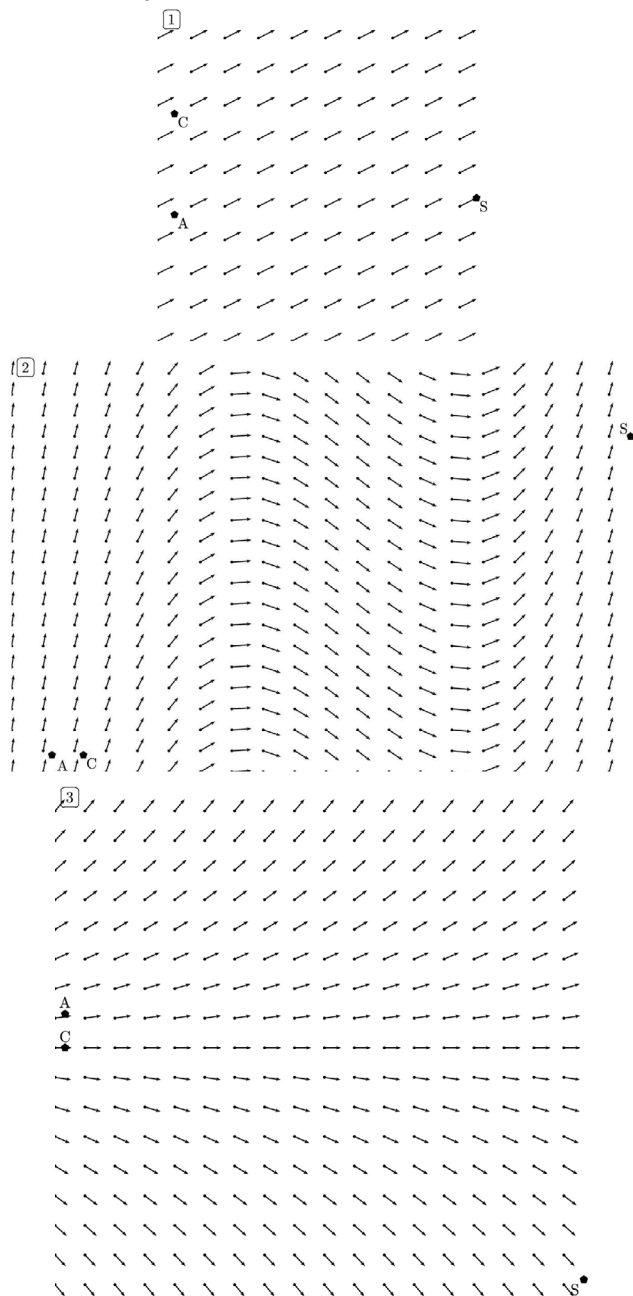
- (c) Résoudre les quatre premières équations différentielles.

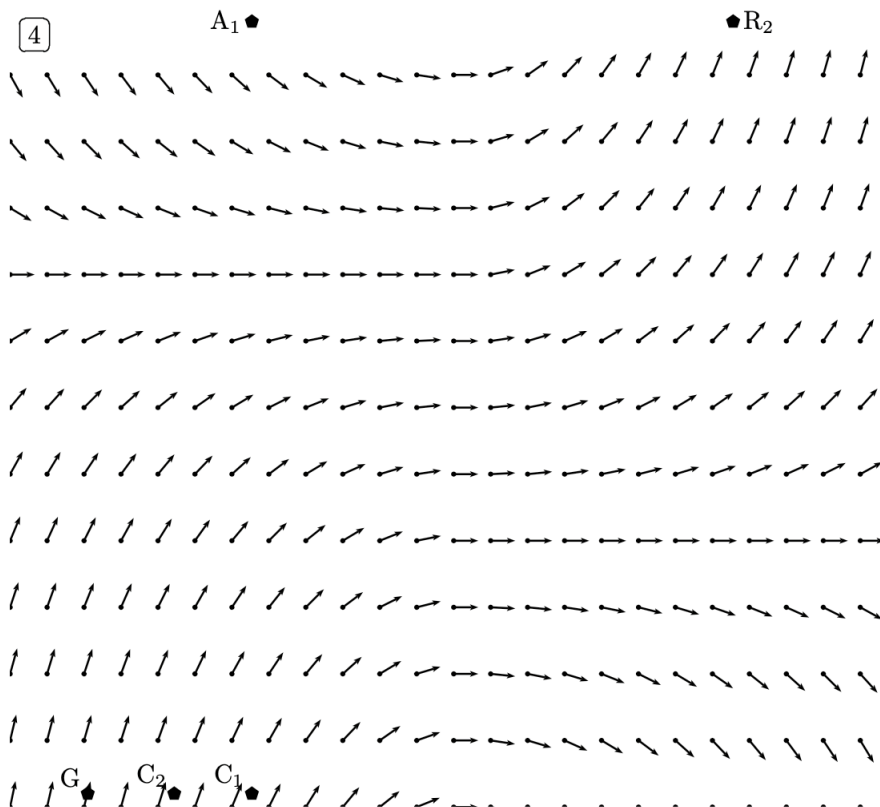
- (d) À quelle condition les fonctions de la forme $y = \begin{cases} \lambda e^{x^2/2} - 1 & \text{si } x \geq 0 \\ \mu e^{x^2/2} + 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ pour $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ sont solutions de la dernière équation différentielle (E_e) proposée ?

- (e) Confronter les solutions obtenues aux courbes intégrales tracées précédemment.

Nous voyons maintenant pourquoi les inconnues des équations différentielles se nomment traditionnellement y et non f .

Les courbes intégrales sont les trajectoires tangentes à un champ de vecteurs donné. Ceci s'adapte magnifiquement aux courants de surface mais aussi aux vents, aux champs magnétiques, aux champs gravitationnels et à moult notions passionnantes qui sont encore l'objet de nombreuses recherches.





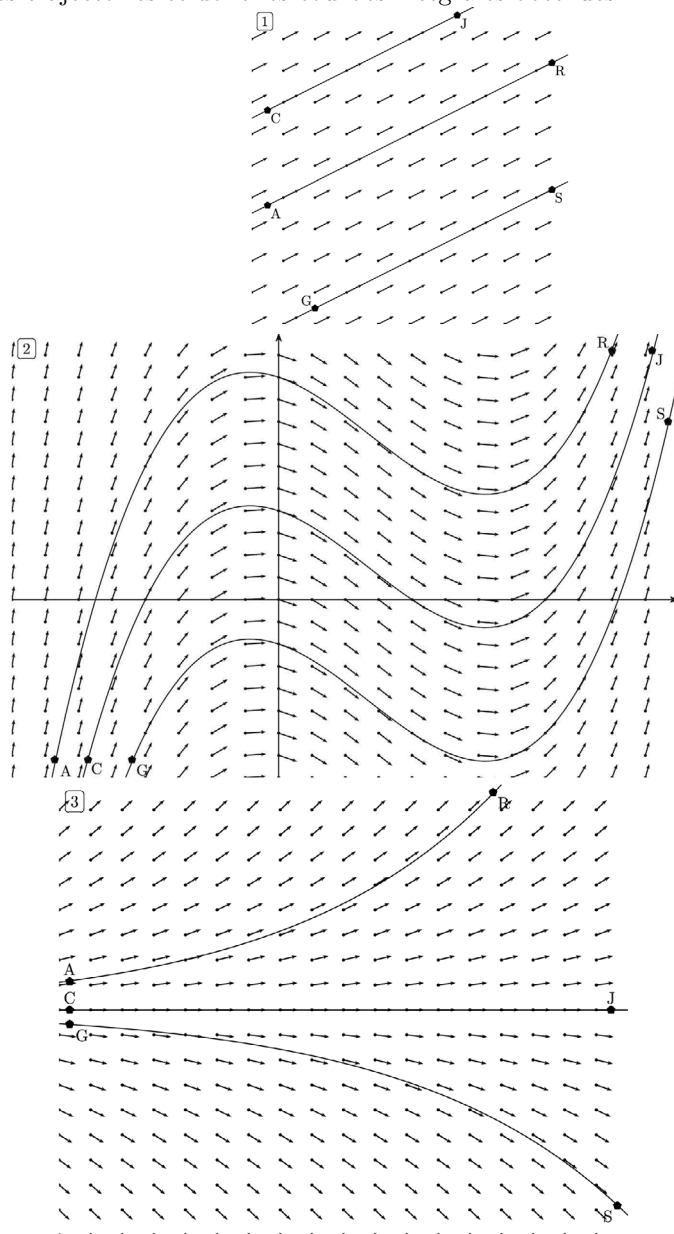
A C

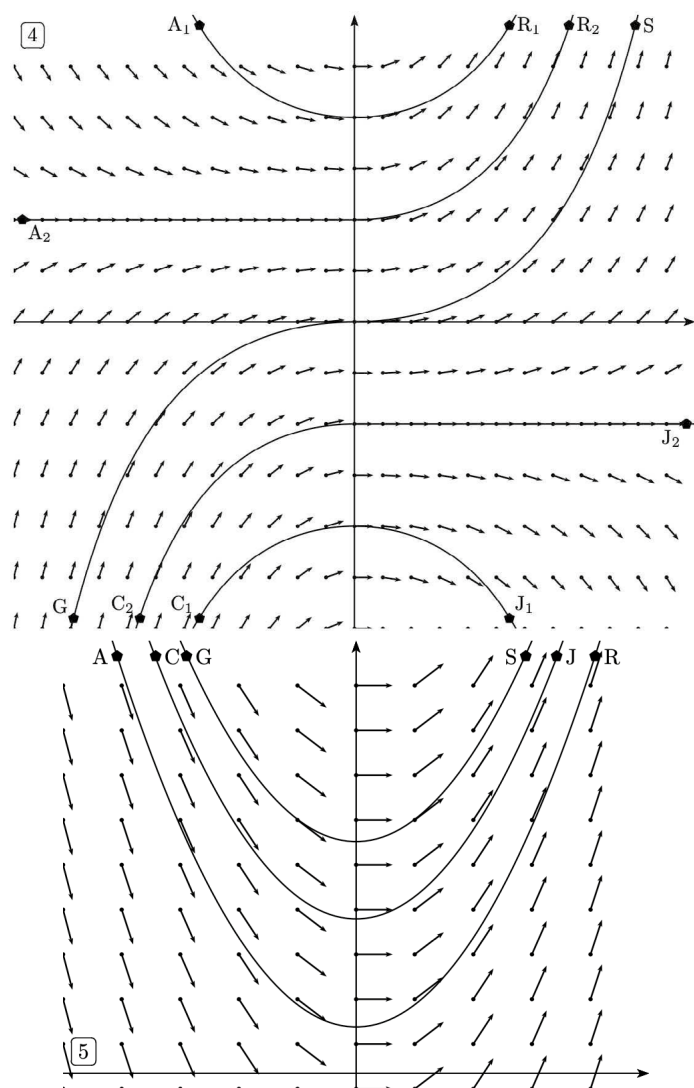
S

5

LIBÉRÉE, DÉRIVÉE : L'INTÉGRALE

1. Voici les trajectoires et donc les courbes intégrales obtenues.





2. (a) On observe les pentes des vecteurs par tranches « verticales », c.-à-d. par tranches de la forme $x = \text{constante}$, et l'on remarque que certaines pentes sont constantes, d'autres dépendent uniquement des abscisses et d'autres dépendent des abscisses mais aussi des ordonnées.
- (b) Sur le plan d'eau n° 1, les vecteurs du champ sont tous égaux, sur les plans d'eau n° 2 et 5, les vecteurs sont égaux sur chacune des tranches $x = \text{constante}$ tandis que sur les plans n° 3 et 4, leur inclinaison dépend aussi de l'ordonnée, de y .
- Le plan n° 1 correspond donc à une équation différentielle du type $y' = \text{constante}$, les plans n° 2 et 5 correspondent à des équations du type $y' = f(x)$ et les plans n° 3 et 4 correspondent à des équations différentielles du type $y' = G(x; y)$.

On peut donc associer les plans et les équations de la manière suivante.

(E_a) : $y' = 2x$ correspond au plan d'eau n° 5.

(E_b) : $y' = y$ correspond au plan d'eau n° 2.

(E_c) : $y' = \frac{1}{2}$ correspond au plan d'eau n° 1.

(E_d) : $y' = 3x^2 - 2x - \frac{1}{2}$ correspond au plan d'eau n° 3.

(E_e) : $y' = \begin{cases} x(y+1) & \text{si } x \geq 0 \\ x(y-1) & \text{si } x < 0 \end{cases}$ correspond au plan d'eau n° 5.

(c) (E_a) : $y' = 2x$ donc $y = x^2 + \alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

(E_b) : $y' = y$ donc $y = \beta e^x$, $\beta \in \mathbb{R}$.

(E_c) : $y' = \frac{1}{2}$ donc $y = \frac{1}{2}x + \gamma$, $\gamma \in \mathbb{R}$.

(E_d) : $y' = 3x^2 - 2x - \frac{1}{2}$ donc $y = x^3 - x - \frac{1}{2}x + \delta$, $\delta \in \mathbb{R}$.

(d) Soit $y = \begin{cases} \lambda e^{x^2/2} - 1 & \text{si } x \geq 0 \\ \mu e^{x^2/2} + 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ y est continue et dérivable sur $\mathbb{R}^*$ par composition.

On a $\lim_{x \rightarrow 0^-} y(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \mu e^{x^2/2} + 1 = \mu + 1$

et $\lim_{x \rightarrow 0^+} y(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \lambda e^{x^2/2} - 1 = \lambda - 1 = y(0)$

donc y est continue ssi $\mu + 1 = \lambda - 1 \iff \mu = \lambda - 2$.

Par ailleurs, $Cxe^{x^2/2} \xrightarrow{x \rightarrow 0^\pm} 0$ donc $y' = \begin{cases} \lambda x e^{x^2/2} & \text{si } x \geq 0 \\ \mu x e^{x^2/2} & \text{si } x < 0 \end{cases}$ est continue en 0.

De plus, on a bien

$y' = \begin{cases} x[(\lambda e^{x^2/2} - 1) + 1] & \text{si } x \geq 0 \\ x[(\mu e^{x^2/2} + 1) - 1] & \text{si } x < 0 \end{cases} = \begin{cases} x(y+1) & \text{si } x \geq 0 \\ x(y-1) & \text{si } x < 0 \end{cases}$

$y = \begin{cases} \lambda e^{x^2/2} - 1 & \text{si } x \geq 0 \\ \mu e^{x^2/2} + 1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$ est donc solution de (E_e) si, et seulement si, $\mu = \lambda - 2$.

(e) En représentant les solutions obtenues, on retrouve bien les trajectoires des oies précédemment tracées.

Devoir n° 18

CENT MILLE MILLIARDS DE MILLE SABORDS

Ce devoir est associé au chapitre XII, *Combinatoire & Dénombrement*.

Exercice 1 Cent mille milliards de poèmes

Raymond Queneau a intitulé l'un de ses ouvrages *Cent mille milliards de poèmes*. Celui-ci est composé d'un certain nombre de pages comprenant chacune dix vers. Pour composer un poème, il suggère de choisir le premier vers parmi ceux de la première page, le second parmi ceux de la deuxième page, et ainsi de suite. Combien de pages comporte son ouvrage ?

Exercice 2 Mille sabords

Un capitaine organise une croisière en sept étapes différentes. Trois étapes doivent avoir lieu parmi six ports folkloriques, les autres étapes doivent s'effectuer parmi dix rades pittoresques. Combien le capitaine a-t-il de façons de concevoir sa croisière, mille sabords ?

Bonus

Cette fois-ci, je vous conseille fortement d'écouter les émissions d'Étienne Klein, les samedis après-midi sur France Culture :

<https://www.radiofrance.fr/franceculture/podcasts/la-conversation-scientifique>
Science en question est un moment de débats et d'échanges autour de la science mais aussi de la philosophie, la culture et les arts, l'histoire, la géographie, la nature... et tout ceci est curieux, amusant, passionnant... Bref, intelligent. En effet, bien que physicien, Étienne Klein est quelqu'un de très bien : il pratique l'alpinisme.

CENT MILLE MILLIARDS DE MILLE SABORDS

Exercice 1 Cent mille milliards de poèmes

Pour composer un poème, on a 10 choix pour le premier vers, 10 pour le second, et ainsi de suite.

On a donc $10 \times 10 \times \dots \times 10 = 10^p$ poèmes différents pour p pages.

Puisque cent mille milliards égale 100.000.000.000.000 c.-à-d. 10^{14} , l'ouvrage de Raymond Queneau comporte 14 pages.

Exercice 2 Mille sabords

Le capitaine a $\binom{6}{3}$ choix possibles d'étapes en port, $\binom{10}{4}$ choix possibles pour les quatre étapes en rade restantes et $7!$ permutations de l'ordre de ces étapes. Il a donc $\binom{6}{3} \cdot \binom{10}{4} \cdot 7! = \frac{6!}{3!(6-3)!} \cdot \frac{10!}{4!(10-4)!} \cdot 7! = 21\,168\,000$ façons de concevoir sa croisière.

Ce devoir est associé au chapitre XII, *Combinatoire & Dénombrement*.

Exercice 1

Un dresseur possède cinq perroquets : trois verts, un jaune, un blanc, et cinq perruches : deux vertes, deux jaunes et une blanche. Lors d'un spectacle, les oiseaux font leur entrée appelés un à un par le dresseur puis vont s'installer alignés sur un grand perchoir.

1. Combien d'entrées possibles dénombre-t-on ?
2. Déterminer le nombre d'entrées possibles :
 - (a) alternant perroquets et perruches ;
 - (b) dans lesquelles les oiseaux sont regroupés par couleurs.
3. Coco et Jojo forment une paire inséparable de perroquets : ils veulent toujours être voisins sur le perchoir.
Déterminer le nombre d'entrées respectant leur souhait le plus cher.

Exercice 2

Le professeur de français d'Agathe va demander à ses élèves de réciter par cœur, tels des perroquets, deux poésies choisies au hasard dans un recueil de 80 textes.

1. Quel est le nombre de tirages possibles ?
2. (a) Agathe a appris dix de ces poésies. Combien de tirages comportent au moins l'une des deux ?
(b) Combien aurait-elle dû en préparer pour que plus de neuf sur dix contiennent au moins l'un des textes appris ?

Exercice 3

Colette dispose de n perroquets femelles et de n mâles où n est un entier naturel non nul pair. Elle souhaite les répartir dans deux volières géantes en deux groupes de même effectif n .

1. (a) Combien existe-t-il de répartitions possibles au total ?
(b) Combien existe-t-il de répartitions possibles si Colette décide de sélectionner autant de femelles que de mâles ?
2. Pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, combien Colette peut-elle former de groupes différents comprenant exactement k femelles ?
3. Montrer que
$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Bonus

Puisqu'il est temps d'émettre vos souhaits, je vous conseille de rajouter une ligne au texto que vous allez envoyer au Père Noël : *Le Théorème du perroquet* de Denis Guedj. Vous pouvez aussi le trouver en bibliothèque, faire un 50-50 en le partageant avec votre voisine, l'emprunter à un ami, faire un appel sur les réseaux sociaux ou user de tout autre moyen caritatif et légal mais vous ne pourrez qu'apprécier ce roman policier qui retrace avec talent, humour et suspense, l'avènement des plus grandes avancées dans l'histoire des mathématiques.

Corrigé du devoir n° 19

PAIRE OKAY

Exercice 1

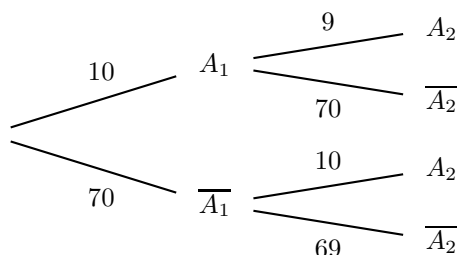
Un dresseur possède cinq perroquets : trois verts, un jaune, un blanc, et cinq per-
ruches : deux vertes, deux jaunes et une blanche.

1. Le dresseur appelle ses 10 oiseaux un par un. Il y a donc $10! = 3\,628\,800$ entrées possibles.
2. (a) Il alterne perroquets et perruches. Il peut donc commencer par l'un ou par l'autre et pour chacun des groupes de volatiles, il y a $5!$ ordres possibles.
Il y a donc $2 \times 5! \times 5! = 28\,800$ entrées alternant perroquets et perruches.
(b) Les oiseaux sont regroupés par couleurs. Il y a trois couleurs donc $3!$ façons d'aligner les couleurs. Pour les cinq oiseaux verts, on a $5!$ façons de les aligner, pour les trois jaunes, il y a $3!$ façons et pour les blanc, $2!$ façons.
Il y a donc $3! 5! 3! 2! = 8\,640$ entrées regroupées par couleurs.
3. Coco et Jojo forment une paire inséparable de perroquets. Il y a $\binom{9}{1} = 9$ façons de positionner la paire de perroquets sur la ligne de 10 places (9 places pour une paire : 1-2, 2-3, ..., 9-10) et $2!$ manières d'ordonner cette paire (CJ ou JC). De plus, il y a $(10 - 2)!$ manières d'aligner les autres volatiles.
Il y a donc $9 \times 2! \times 8! = 725\,760$ entrées où Coco et Jojo sont voisins.

Exercice 2

Le professeur de français d'Agathe va demander à ses élèves de réciter par cœur, tels des perroquets, deux poésies choisies au hasard dans un recueil de 80 textes.

1. Il faut choisir deux textes parmi 80 : il y a donc $\binom{80}{2} = \frac{80(80-1)}{2} = 3\,160$ tirages possibles.
2. (a) Agathe a appris dix de ces poésies. On désigne par A_i le fait qu'elle ait appris le i^{e} texte tiré.
On a alors l'arbre suivant dans lequel les entiers désignent le nombre de textes possibles restants.



Puisqu'elle ne fera pas de différence entre les ordres de sortie des textes, il faut diviser le nombre de possibilités par $2!$ et l'on obtient $\frac{10 \times 9 + 10 \times 70 + 70 \times 10}{2} = 745$ tirages contenant au moins un texte qu'Agathe a appris, c.-à-d. $\frac{745}{3160} \simeq 24\%$.

Plus facilement, on aurait pu calculer le nombre de tirages composés uniquement des textes qu'Agathe ne connaît pas, $\binom{70}{2} = 2415$, et en déduire le nombre de ceux où elle en a appris au moins un : $3160 - 2415 = 745$.

- (b) Si $n \in \llbracket 0; 80 \rrbracket$ est le nombre de poésies apprises par Agathe, un arbre similaire nous mène à l'inéquation

$$\frac{1}{2}(n(n-1) + n(80-n) + (80-n)n) \geq \frac{9}{10} \times 3160$$

$$\iff -n^2 + 159n - 5688 \geq 0.$$

En étudiant le polynôme associé, on trouve $n \in [54, 3; 104, 6]$.

Agathe doit donc apprendre par cœur au moins 55 poésies pour avoir au moins neuf chances sur dix d'être interrogée sur l'une d'entre elles.

En passant au complémentaire, on obtient $\binom{80-n}{2} \leq \frac{1}{10} \cdot 3160$ qui mène à l'inéquation précédente.

Exercice 3

Colette dispose de n perroquets femelles et de n mâles où n est un entier naturel non nul pair. Elle souhaite les répartir dans deux volières géantes en deux groupes de même effectif n .

- (a) Colette peut donc choisir n individus parmi $n + n = 2n$ individus : elle a $\binom{2n}{n}$ choix de répartitions possibles au total.
- (b) Si elle choisit autant de femelles que de mâles, elle doit choisir $\frac{n}{2}$ femelles parmi n et, pour chacun de ces choix, elle doit choisir $\frac{n}{2}$ mâles parmi n . Colette a donc $\binom{n}{n/2} \times \binom{n}{n/2} = \left(\binom{n}{n/2}\right)^2$ choix de répartitions possibles comprenant autant de mâles que de femelles.
- Soit $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$. Si Colette doit choisir k femelles, elle a $\binom{n}{k}$ choix possibles et, pour chacun de ces choix, il lui reste $n - k$ mâles à choisir parmi n . Colette a donc $\binom{n}{k} \times \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}^2$ choix de répartitions possibles comprenant k femelles.
- Puisque l'ensemble de toutes les répartitions possibles est la réunion disjointe des répartitions comprenant k femelles pour $k \in \llbracket 0; n \rrbracket$, leur cardinal sont égaux et l'on a
$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2.$$

NAGUÈRE SUR L'ÉTOILE

Ce devoir est associé au chapitre XIII, *Fonctions trigonométriques*.

Il y a bien longtemps, dans une galaxie lointaine, très lointaine, aux confins de la constellation du *Grand Disque*, autour de l'étoile PI.3.14, tournait, dans le sens trigonométrique (vue de dessus), une planète qui elle-même tournicotait sur son axe de révolution dans le sens indirect (vue de côté). Cette planète était tout à fait quelconque, pour une planète habitée s'entend bien : un gigantesque « patatoïde » plus ou moins tempéré. Toutefois, sur son versant gauche, une peuplade que nous pouvons qualifier d'évoluée – plus que les Terriens en tout cas – y subsistait tant bien que mal, vénérant Radian I^{er} leur sénile souverain. Mais ceci est une toute autre histoire.

Isolée de l'autre côté, Rey s'évertue à construire le vaisseau qui lui permettra de quitter ce système et de retrouver Luke, son mentor, sinon son idole, tout en esquivant les attaques de Kylo Ren, son ennemi, sinon son flirt, avec l'aide de Chewbacca, son ami, sinon sa peluche. En solo, elle fait ses plans.

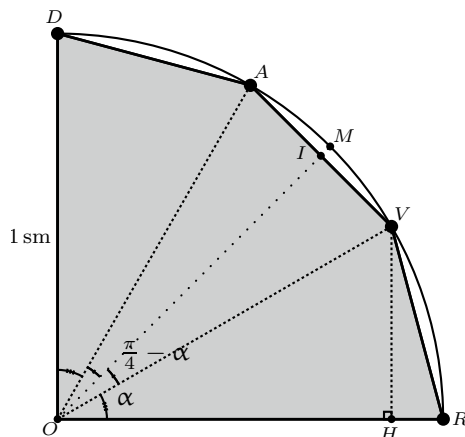
Le vaisseau, en dursolidium pur, est d'architecture fine, élégante et simplissime : sur un quart de cercle de centre O et de rayon 1 starmètre (sm), elle place quatre points. R et D sont aux extrémités du grand arc, A et V sont tels que $\widehat{ROV} \equiv \widehat{AOD} [2\pi]$. Elle note $\alpha \in [0; \frac{\pi}{4}]$ une mesure de cet angle.

Afin d'avoir la meilleure portance, Rey doit obtenir le vaisseau (délimité par le polygone ainsi construit) de plus grande surface possible et tu vas devoir l'aider. Que la Force soit avec toi !

1. Réalise une figure GeoGebra afin de conjecturer la valeur optimale de l'angle α .
2. Montre que l'aire du triangle OVA vaut $\cos(\frac{\pi}{4} - \alpha) \sin(\frac{\pi}{4} - \alpha) \text{ sm}^2$.
3. Montre que l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ du polygone $VADOR$ peut s'écrire $\mathcal{A}(\alpha) = \frac{1}{2} + \sin(\alpha) - \sin^2(\alpha) \text{ sm}^2$.
4. En étudiant un polynôme approprié, détermine la valeur optimale de $\sin(\alpha)$ puis celle de l'angle α correspondant.
5. Conclus.

NAGUÈRE SUR L'ÉTOILE

1. Pour $\alpha = 30^\circ$, le vaisseau ci-dessous fière allure n'a-t-il pas ?



2. Soient M le point du cercle tel que $\widehat{ROM} \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$ et I l'intersection des segments $[OM]$ et $[VA]$. Puisque $\alpha \equiv \widehat{ROV} \equiv \widehat{AOD} [2\pi]$, le vaisseau VADOR est symétrique par rapport à l'axe (OM) et I est le pied de la hauteur du triangle OVA issue de O .

$$\text{Ainsi, } \mathcal{A}ire_{OAI} = \mathcal{A}ire_{OVI} = \frac{VI \times OI}{2} = \frac{\sin(\frac{\pi}{4} - \alpha) \times \cos(\frac{\pi}{4} - \alpha)}{2}.$$

$$\text{D'où, } \mathcal{A}ire_{OVA} = 2 \cdot \mathcal{A}ire_{OVI} = \sin(\frac{\pi}{4} - \alpha) \times \cos(\frac{\pi}{4} - \alpha) \text{ sm}^2.$$

3. Si H est le pied de la hauteur du triangle VOR issue de V , on a

$$\mathcal{A}ire_{ADO} = \mathcal{A}ire_{VOR} = \frac{VH \times OR}{2} = \frac{\sin(\alpha) \times 1}{2} = \frac{1}{2} \sin(\alpha).$$

Puisque, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $2 \sin \theta \cos \theta = \sin(2\theta)$, $\sin(\frac{\pi}{2} - \theta) = \cos \theta$ et $\cos(2\theta) = 1 - 2 \sin^2(\theta)$, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{A}ire_{OVA} &= \frac{2}{2} \sin(\frac{\pi}{4} - \alpha) \times \cos(\frac{\pi}{4} - \alpha) = \frac{1}{2} \sin(2\frac{\pi}{4} - 2\alpha) = \frac{1}{2} \sin(\frac{\pi}{2} - 2\alpha) \\ &= \frac{1}{2} \cos(2\alpha) = \frac{1 - 2 \sin^2(\alpha)}{2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi, } \mathcal{A}(\alpha) &= \mathcal{A}ire_{VADOR} = 2 \cdot \mathcal{A}ire_{VOR} + \mathcal{A}ire_{OVA} \\ &= 2 \cdot \frac{1}{2} \sin(\alpha) + \frac{1 - 2 \sin^2(\alpha)}{2} = \frac{1}{2} + \sin(\alpha) - \sin^2(\alpha). \end{aligned}$$

4. Le polynôme $P(s) = -s^2 + s + \frac{1}{2}$ est de type $\cap$ car $-1 < 0$ donc P atteint son maximum en $\frac{-b}{2a} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$, et $P(\frac{1}{2}) = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$.
Ainsi, $\mathcal{A}ire_{VADOR}(\alpha) = P(\sin \alpha)$ est maximale pour $\sin(\alpha) = \frac{1}{2}$ donc pour $\alpha = \frac{\pi}{6}$, seule solution dans l'intervalle $[0; \frac{\pi}{4}]$.

5. Afin d'avoir le vaisseau le plus élégant, le plus volant, le plus portant, le plus grand, le construire avec un angle α de $\frac{\pi}{6}$ i.e. 30° , Rey devra.
Alors, une superficie de $\frac{3}{4} = 0,75 \text{ sm}^2$, il aura et très joli, il sera.

ÊTRE OU NE PAS ÊTRE

Ce devoir est associé au chapitre XIII, *Fonctions trigonométriques*.

Défini ou non défini, dérivable ou non dérivable, telles sont les questions.

On définit les fonctions suivantes :

$$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}, \quad g(x) = x \sin \frac{1}{x}, \quad h(x) = \sin \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad i(x) = \cos \frac{1}{x}.$$

1. (a) Déterminer leur ensemble de définition et de continuité.
(b) Étudier leur parité.
2. (a) Tracer leur graphe sur la calculatrice pour $x \in [-5; 5]$ puis pour $x \in [-0, 1; 0, 1]$.
(b) Qu'observe-t-on lorsque x est proche de zéro pour chacune de ces fonctions ?
(c) Conjecturer les limites de ces fonctions aux bornes de leur ensemble de définition.
3. (a) Montrer que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} h(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} i(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$.
(b) Montrer que les fonctions h et i n'admettent pas de limite en 0.
(c) Montrer que $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$.

On peut alors prolonger les fonctions f et g en zéro : on pose $f(0) = 0$ et $g(0) = 0$. On dit que l'on réalise ainsi un *prolongement par continuité* en zéro des fonctions f et g .

4. (a) Montrer que $h'(x) = -\frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x}$ puis en déduire les fonctions dérivées f' et g' sur $\mathbb{R}^*$.
(b) Étudier les limites éventuelles en 0 des fonctions f' et g' .
(c) Pensez-vous que les fonctions f et g soient dérivables en 0 ?
5. Calculer les taux d'accroissement en 0 des fonctions f et g puis étudier leur limite en 0.
6. Conclure.

ÊTRE OU NE PAS ÊTRE

$$f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}, \quad g(x) = x \sin \frac{1}{x}, \quad h(x) = \sin \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad i(x) = \cos \frac{1}{x}.$$

1. (a) Par composition de fonctions l'étant, les fonctions f , g , h et i sont définies et continues sur $\mathbb{R}^*$.

- (b) Pour $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$\begin{aligned} h(-x) &= \sin \frac{1}{-x} = -\sin \frac{1}{x} = -h(x) \quad \text{donc } h \text{ est impaire,} \\ f(-x) &= (-x)^2 \sin \frac{1}{-x} = -x^2 \sin \frac{1}{x} = -f(x) \quad \text{donc } f \text{ est impaire,} \\ g(-x) &= (-x) \sin \frac{1}{-x} = x \sin \frac{1}{x} = g(x) \quad \text{donc } g \text{ est paire} \\ \text{et } i(-x) &= \cos \frac{1}{-x} = \cos \frac{1}{x} = i(x) \quad \text{et donc } i \text{ est paire.} \end{aligned}$$

2. (a) Les graphes sont tracés en fin de corrigé.

- (b) Lorsque x est proche de zéro, on observe, pour chacune de ces fonctions, une infinité d'oscillations, de phases de plus en plus courtes, entre les courbes d'équations $y = \pm x^2$, $y = \pm x$ ou $y = \pm 1$. En effet, chacune de ces fonctions est « encadrée par une de ces courbes » et, lorsque x tend vers 0, $\frac{1}{x}$ tend vers l'infini dont on en prend alors le sinus, qui n'a pas de limite en l'infini et oscille indéfiniment.

- (c) On conjecture que f et g tendent vers 0 en 0 alors que h et i n'ont pas de limites en 0. À l'infini, on conjecture que $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} h(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} i(x) = 1$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$.

3. (a) On a $h(x) = \sin \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} \sin \frac{1}{\pm\infty} = \sin 0 = 0$,

$$i(x) = \cos \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} \cos \frac{1}{\pm\infty} = \cos 0 = 1.$$

$$\text{Puisque } \frac{\sin X}{X} \xrightarrow{X \rightarrow 0} 1, \quad \text{et } X = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 0,$$

$$g(x) = x \sin \frac{1}{x} = \frac{\sin \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 1.$$

$$\text{On a } f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x} = xg(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} \pm\infty \times 1 = \pm\infty.$$

- (b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons $u_n = \frac{1}{2\pi n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ et $v_n = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\pi n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

$$\text{On a } h(u_n) = \sin\left(\frac{1}{1/2\pi n}\right) = \sin(2\pi n) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\text{et } h(v_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n\right) = 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

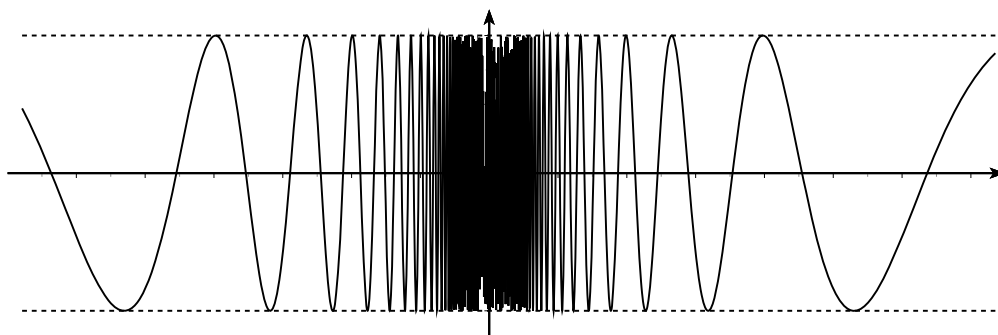
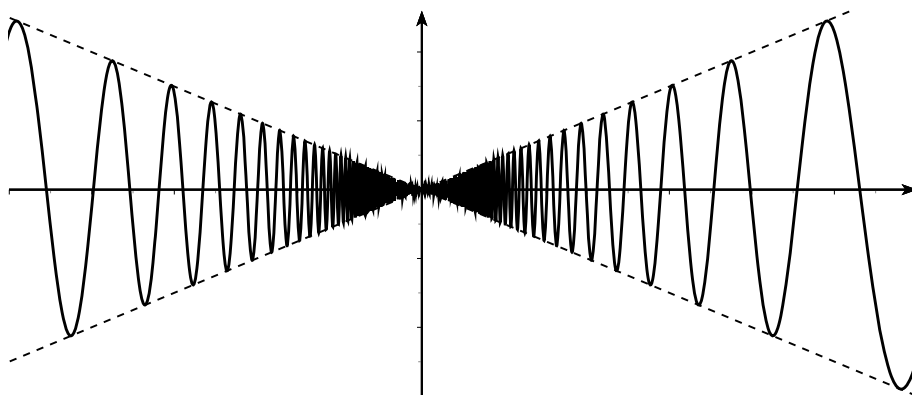
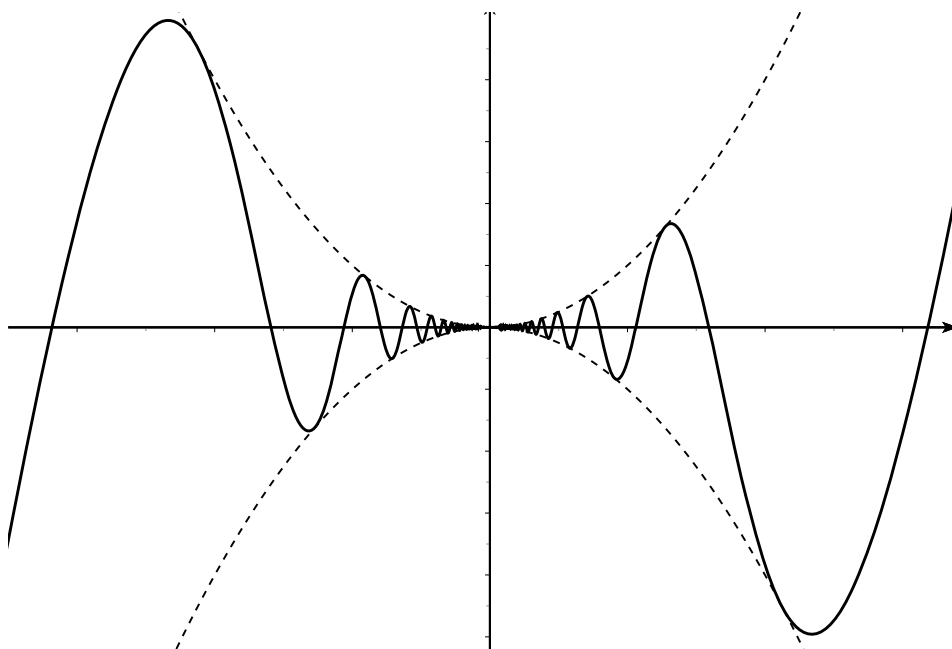
donc h ne peut admettre de limite en 0.

De même, $i(u_n) = 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ et $i(v_n) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$: i ne peut avoir de limite en 0.

- (c) Puisque $-x^2 \leq f(x) \leq x^2$ et $-x \leq g(x) \leq x$, les gendarmes donnent $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$.

On « prolonge par continuité » en zéro en posant $f(0) = 0$ et $g(0) = 0$.

4. (a) Soit $x \in \mathbb{R}^*$. On a $h'(x) = (\frac{1}{x})' \sin'(\frac{1}{x}) = -\frac{1}{x^2} \cos \frac{1}{x}$
 donc $g'(x) = x'h + xh' = \sin \frac{1}{x} - \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$
 et $f'(x) = (x^2)'h + x^2h' = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$.
- (b) On a $g'(u_n) = \sin(2\pi n) - (2\pi n) \cos(2\pi n) = -2\pi n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty$
 et $g(v_n) = \sin(\frac{\pi}{2} + 2\pi n) - (\frac{\pi}{2} + 2\pi n) \cos(\frac{\pi}{2} + 2\pi n) = 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ donc
 g' n'a pas de limite en 0.
 On a $f'(x) = 2g(x) - i(x)$ qui n'a pas de limite en 0 car
 sinon, $i = 2g - f'$ en aurait une. (*)
- (c) Graphiquement, g arrive « en coin » vers 0 alors que f s'écrase : on peut
 penser que g n'est pas dérivable en 0 alors que f y semble de dérivée nulle.
5. Soit $x \neq 0$. On a $\frac{g(x)-g(0)}{x-0} = \frac{x \sin \frac{1}{x} - 0}{x} = \sin \frac{1}{x} = h(x)$ qui n'a pas de limite
 en 0 et $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{x^2 \sin \frac{1}{x} - 0}{x} = x \sin \frac{1}{x} = g(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \in \mathbb{R}$.
6. Ainsi, g n'est pas dérivable en 0 alors que f l'est et $f'(0) = 0$.
 D'après (*), f' n'est pas continue en 0.



DES INTÉGRATIONS

Ce devoir est associé au chapitre XIV, *Calcul intégral*.

Exercice 1 Comparaison d'aires

1. On considère la fonction g définie par $g(x) = \ln(x) - \frac{2}{x}$.
Voici son tableau de variation.

x	0	2.3	x_0	2.4	$+\infty$
g	$-\infty$		0		$+\infty$

Démontrer toutes les propriétés de la fonction g regroupées dans ce tableau.

2. f est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{5 \ln(x)}{x}$.
- (a) Prouver que $f(x_0) = \frac{10}{x_0^2}$ où x_0 est le nombre vu en 1.
- (b) a est un réel strictement supérieur à 1.

Exprimer $\int_1^a f(t) dt$ en fonction de a .

3. Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on nomme $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g . On appelle I le point de coordonnées $(1, 0)$, P_0 le point d'intersection de $\mathcal{C}_g$ et de l'axe des abscisses, M_0 le point de $\mathcal{C}_f$ ayant même abscisse que P_0 et H_0 le projeté orthogonal de M_0 sur l'axe des ordonnées. On désigne par $\mathcal{D}_1$ le domaine situé entre la courbe $\mathcal{C}_f$, l'axe des abscisses, le point I et le segment $[P_0 M_0]$ et par $\mathcal{D}_2$ le rectangle construit à partir des trois sommets O, I et H_0 .
- (a) Réaliser une figure (GeoGebra serait idéal).
- (b) Démontrer que $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ ont la même aire puis donner un encadrement d'amplitude $2 \cdot 10^{-1}$ de celle-ci.

Exercice 2 Calcul d'aire

Pour a et b deux réels tels que $0 < a < b$, on donne les droites $d_a: y = ax$ et $d_b: y = bx$. On définit sur $]0; +\infty[$ les fonctions h_1 et h_2 par $h_1(x) = \frac{1}{x}$ et $h_2(x) = \frac{2}{x}$ de graphes respectifs $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$. Exprimer en fonction de a et de b , l'aire, en unité d'aire, du domaine délimité par $d_a, d_b, \mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$.
On pourra s'aider d'une figure GeoGebra et distinguer les cas $a < \frac{b}{2}$ et $\frac{b}{2} \leq a$.

Bonus Au cours des prochaines vacances, vous allez certainement avoir besoin de vous détendre. Alors je vous conseille la lecture de la trilogie d'Hortense de Jacques Roubaud, en commençant par *La belle Hortense*. Bien que mathématicien, Jacques Roubaud est un individu très amusant. Membre de l'Oulipo et donc adepte de l'écriture avec contraintes, il nous donne à lire un roman plein de trouvailles, intelligemment écrit et très divertissant.

DES INTÉGRATIONS

Exercice 1

- Tout comme le logarithme népérien, la fonction g est définie sur $]0; +\infty[$.
 - Pour $x > 0$, $g(x) = \ln(x) - \frac{2}{x}$ est dérivable et de fonction dérivée $g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{-2}{x^2} = \frac{x+2}{x^2} > 0$ puisque $x > 0$: la fonction g est bien strictement croissante sur $]0; +\infty[$.
 - $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln(x) - \frac{2}{x} \right) = " \ln(0^+) - \frac{2}{0^+} " = "-\infty - (+\infty)" = -\infty$
et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln(x) - \frac{2}{x} \right) = " \ln(+\infty) - \frac{2}{+\infty} " = "+\infty - 0" = +\infty$.
 - La fonction g est continue puisque dérivable et strictement croissante sur $]0; +\infty[$. D'après les limites précédentes, elle change de signe. Le T.V.I. Strict. permet donc d'affirmer qu'elle s'annule une unique fois (c.-à-d. 0 admet un unique antécédent) sur l'intervalle $]0; +\infty[$. De plus, la calculatrice donne $g(2,3) < 0 < g(2,4)$ donc l'unique antécédent x_0 de 0 appartient bien à l'intervalle $]2,3; 2,4[$.

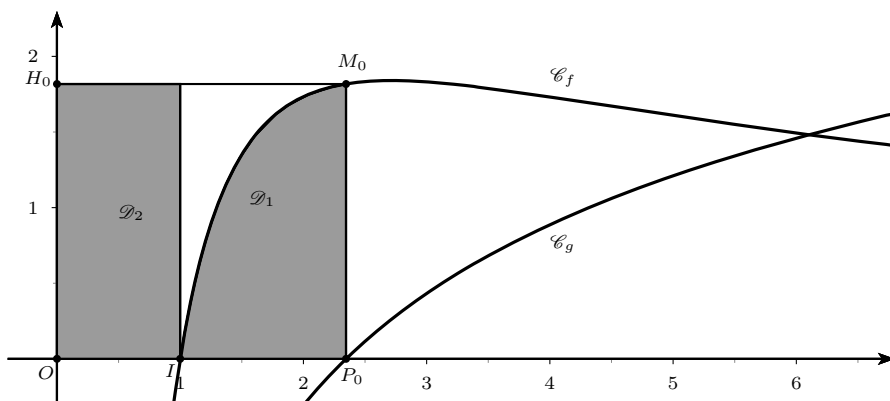
- Pour $x > 0$, on a $\ln(x) = g(x) + \frac{2}{x}$ donc $f(x) = \frac{5(g(x) + \frac{2}{x})}{x}$ d'où

$$f(x_0) = \frac{5(g(x_0) + \frac{2}{x_0})}{x_0} = \frac{10}{x_0^2}.$$

- Pour $t > 0$, posons $u = \ln(t)$, $u' = \frac{1}{t}$. On a alors $f = 5u'u$ donc une primitive de f est $F = \frac{5}{2}u^2$. Ainsi, pour $a > 1$,

$$\int_1^a f(t) dt = [F(t)]_1^a = \left[\frac{5}{2} \ln^2(t) \right]_1^a = \frac{5}{2} \ln^2(a) - \frac{5}{2} \ln^2(1) = \frac{5}{2} \ln^2(a).$$

-



- (b) D'après les données de l'énoncé, on a $P_0(x_0, 0)$ donc $M_0(x_0, f(x_0))$ et $H_0(0, f(x_0))$. f étant positive sur $[0; x_0]$,

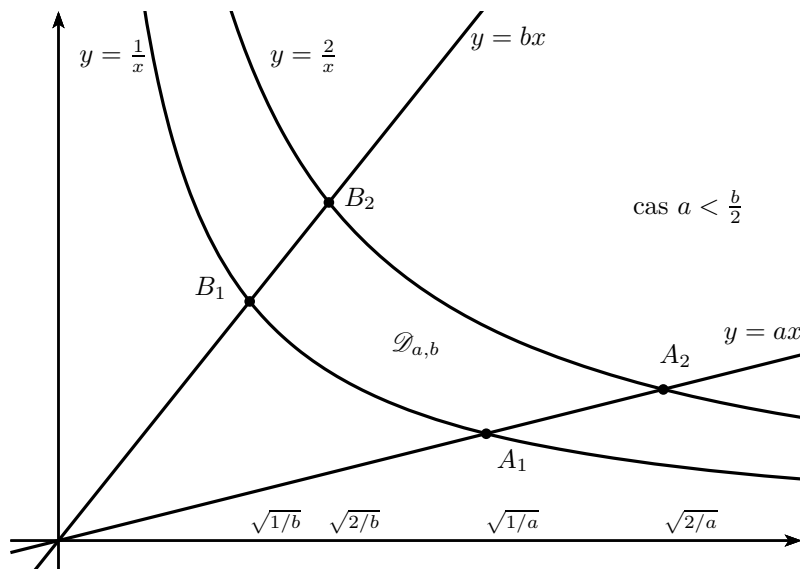
$$\text{Aire}(\mathcal{D}_1) = \int_1^{x_0} f(t) dt = \frac{5}{2} \ln^2(x_0).$$

Or $g(x_0) = 0$ donc $\ln(x_0) = \frac{2}{x_0}$ et

$$\text{Aire}(\mathcal{D}_1) = \frac{5}{2} \ln^2(x_0) = \frac{5}{2} \frac{4}{x_0^2} = \frac{10}{x_0^2} = f(x_0) = 1 \times y_{H_0} = \text{Aire}(\mathcal{D}_2).$$

Puisque $x_0 \in]2, 3; 2, 4[$, $\frac{10}{2,4^2} < f(x_0) < \frac{10}{2,3^2}$ et $\text{Aire}(\mathcal{D}_i) \in]1, 7; 1, 9[$.

Exercice 2 On nomme $\mathcal{D}_{a,b}$ le domaine délimité par d_a , d_b , $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ et soient les points $A_1 = \mathcal{H}_1 \cap d_a$, $A_2 = \mathcal{H}_2 \cap d_a$, $B_1 = \mathcal{H}_1 \cap d_b$ et $B_2 = \mathcal{H}_2 \cap d_b$. On a $\frac{1}{x_{A_1}} = ax_{A_1}$ donc $x_{A_1} = \sqrt{\frac{1}{a}}$. De même, $x_{A_2} = \sqrt{\frac{2}{a}}$, $x_{B_1} = \sqrt{\frac{1}{b}}$ et $x_{B_2} = \sqrt{\frac{2}{b}}$.



On remarque que lorsque $0 < a < \frac{b}{2} < b$, $\sqrt{\frac{1}{b}} < \sqrt{\frac{2}{b}} < \sqrt{\frac{1}{a}} < \sqrt{\frac{2}{a}}$ et, en observant la position des différentes courbes et donc l'ordre des différentes fonctions, on obtient l'aire de $\mathcal{D}_{a,b}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_{x_{B_1}}^{x_{B_2}} bx - \frac{1}{x} dx + \int_{x_{B_2}}^{x_{A_1}} \frac{2}{x} - \frac{1}{x} dx + \int_{x_{A_1}}^{x_{A_2}} \frac{2}{x} - ax dx \\ &= \left[\frac{1}{2}bx^2 - \ln(x) \right]_{\sqrt{1/b}}^{\sqrt{2/b}} + \left[2\ln(x) - \ln(x) \right]_{\sqrt{2/b}}^{\sqrt{1/a}} + \left[2\ln(x) - \frac{1}{2}ax^2 \right]_{\sqrt{1/a}}^{\sqrt{2/a}} \\ &= \frac{1}{2}b\frac{2}{b} - \ln(\sqrt{2/b}) - \frac{1}{2}b\frac{1}{b} + \ln(\sqrt{1/b}) + \ln(\sqrt{1/a}) - \ln(\sqrt{2/b}) + 2\ln(\sqrt{2/a}) - \frac{1}{2}a\frac{2}{a} \\ &\quad - 2\ln(\sqrt{1/a}) + \frac{1}{2}a\frac{1}{a} \\ &= 1 - \frac{1}{2}\ln(2/b) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln(1/b) + \frac{1}{2}\ln(1/a) - \frac{1}{2}\ln(2/b) + \ln(2/a) - 1 - \ln(1/a) + \frac{1}{2} \\ &= -\ln(2/a) - \frac{1}{2}\ln(1/a) + \ln(2/a) + \frac{1}{2}\ln(1/b) = -\ln(2) + \ln(b) + \frac{1}{2}\ln(a) + \ln(2) \\ &\quad - \ln(a) - \frac{1}{2}\ln(b) \\ \mathcal{A} &= \frac{1}{2}\ln(b) - \frac{1}{2}\ln(a) = \ln\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right). \end{aligned}$$

De manière similaire, lorsque $0 < \frac{b}{2} \leq a < b$, $\sqrt{\frac{1}{b}} < \sqrt{\frac{1}{a}} \leq \sqrt{\frac{2}{b}} < \sqrt{\frac{2}{a}}$ et

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_{x_{B_1}}^{x_{A_1}} bx - \frac{1}{x} dx + \int_{x_{A_1}}^{x_{B_2}} bx - ax dx + \int_{x_{B_2}}^{x_{A_2}} \frac{2}{x} - ax dx \\ &= \left[\frac{1}{2}bx^2 - \ln(x) \right]_{\sqrt{1/b}}^{\sqrt{1/a}} + \left[\frac{1}{2}(b-a)x^2 \right]_{\sqrt{1/a}}^{\sqrt{2/b}} + \left[2\ln(x) - \frac{1}{2}ax^2 \right]_{\sqrt{2/b}}^{\sqrt{2/a}} \\ &= \frac{1}{2}b\frac{1}{a} - \ln(\sqrt{1/a}) - \frac{1}{2}b\frac{1}{b} + \ln(\sqrt{1/b}) + \frac{1}{2}(b-a)\frac{2}{b} - \frac{1}{2}(b-a)\frac{1}{a} + 2\ln(\sqrt{2/a}) \\ &\quad - \frac{1}{2}a\frac{2}{b} - 2\ln(\sqrt{2/b}) + \frac{1}{2}a\frac{2}{b} \\ &= \frac{b}{2a} - \frac{1}{2}\ln(1/a) - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln(1/b) + 1 - \frac{a}{b} - \frac{b}{2a} + \frac{1}{2} + \ln(2/a) - 1 - \ln(2/b) + \frac{a}{b} \\ &= \frac{1}{2}\ln(a) - \frac{1}{2}\ln(b) + \ln(2) - \ln(a) - \ln(2) + \ln(b) = \frac{1}{2}\ln(b) - \frac{1}{2}\ln(a) = \ln\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right). \end{aligned}$$

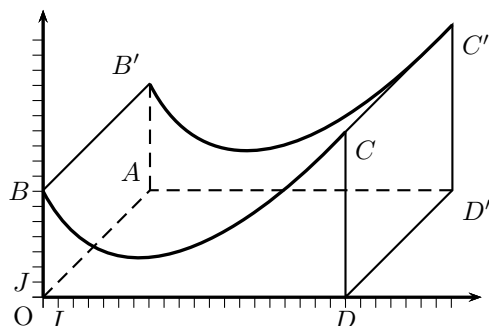
Ainsi, pour tous $0 < a < b$, $\mathcal{A} = \ln\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\right)$.

Bonus

Surprenant, amusant, délicieux, fin, jubilatoire... À relire !

PLANCHE À ROULETTES

Ce devoir est associé au chapitre XIV, *Calcul intégral*.



Une municipalité a décidé d'installer un module de skateboard dans un parc de la commune. Le dessin ci-contre en fournit une perspective cavalière. Les quadrilatères $OAD'D$, $DD'C'C$, et $OAB'B$ sont des rectangles. Le plan de face (OBD) est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) . L'unité est le mètre. La largeur du module est de 10 mètres, autrement dit, $DD' = 10$, sa longueur OD est de 20 mètres.

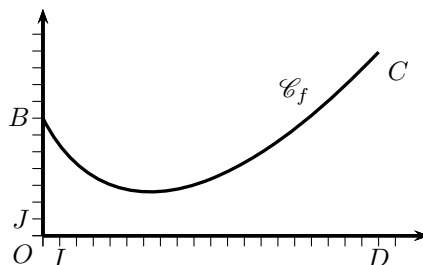
Le but du problème est de déterminer l'aire des différentes surfaces à peindre.

Le profil du module de skateboard a été modélisé à partir d'une photo par la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 20]$ par $f(x) = (x+1)\ln(x+1) - 3x + 7$.

On note f' la fonction dérivée de la fonction f et $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère (O, I, J) .

Partie A :

1. Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0; 20]$, on a $f'(x) = \ln(x+1) - 2$.
2. En déduire les variations de f sur l'intervalle $[0; 20]$ et dresser son tableau de variation.
3. Calculer le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.



La valeur absolue de ce coefficient est appelée l'inclinaison du module de skateboard au point B .

4. On admet que la fonction g définie sur l'intervalle $[0; 20]$ par $g(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2 \ln(x+1) - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x$ a pour dérivée la fonction g' définie sur l'intervalle $[0; 20]$ par $g'(x) = (x+1)\ln(x+1)$.

Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0; 20]$.

Partie B :

Les trois questions de cette partie sont indépendantes

1. Les propositions suivantes sont-elles exactes ? Justifier les réponses.

$\mathcal{P}_1$: La différence de hauteur entre le point le plus haut et le point le plus bas de la piste est au moins égale à 8 mètres.

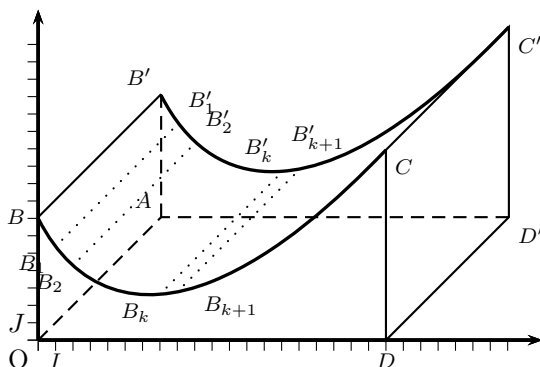
$\mathcal{P}_2$: L'inclinaison de la piste est presque deux fois plus grande en B qu'en C .

2. On souhaite recouvrir les quatre faces latérales de ce module d'une couche de peinture rouge. La peinture utilisée permet de couvrir une surface de 5 m^2 par litre. Déterminer, à 1 litre près, le nombre minimum de litres de peinture nécessaires.

3. On souhaite peindre en noir la piste roulante, autrement dit la surface supérieure du module.

Afin de déterminer une valeur approchée de l'aire de la partie à peindre, on considère dans le repère (O, I, J) du plan de face, les points $B_k(k; f(k))$ pour k variant de 0 à 20.

Ainsi, $B_0 = B$.



On décide d'approcher l'arc de la courbe $\mathcal{C}_f$ allant de B_k à B_{k+1} par le segment $[B_k B_{k+1}]$.

Ainsi l'aire de la surface à peindre sera approchée par la somme des aires des rectangles du type $B_k B_{k+1} B'_{k+1} B'_k$ (voir figure).

- (a) Montrer que pour tout entier k variant de 0 à 19,

$$B_k B_{k+1} = \sqrt{1 + [f(k+1) - f(k)]^2}.$$

- (b) Compléter l'algorithme suivant pour qu'il affiche une estimation de l'aire de la partie roulante.

Variables	S : réel K : entier
Fonction	f : définie par $f(x) = (x+1) \ln(x+1) - 3x + 7$
Traitement	S prend pour valeur 0 Pour K variant de ... à ... S prend pour valeur Fin Pour
Sortie	Afficher ...

PLANCHE À ROULETTES

Partie A :

1. $f = u \ln(u) + v$ avec $u(x) = x + 1$ et $v(x) = -2x + 7$. f est dérivable comme somme et composée de fonctions dérivables, $f' = u' \ln(u) + u \times \frac{u'}{u} + v'$ avec $u'(x) = 1$ et $v'(x) = -3$ d'où

$$f'(x) = 1 \times \ln(x + 1) + (x + 1) \frac{1}{x + 1} - 3 = \ln(x + 1) + 1 - 3$$

$$\text{donc } f'(x) = \ln(x + 1) - 2.$$

2. $f'(x) = 0 \iff \ln(x + 1) = 2 \iff x + 1 = e^2 \iff x = e^2 - 1$.

$$f'(x) > 0 \iff \ln(x + 1) > 2 \iff x + 1 > e^2 \text{ (croissance de la fonction exp)}$$

$$\text{d'où } x > e^2 - 1.$$

On en déduit le tableau de variation de f suivant.

x	0	$e^2 - 1$	20
$f'(x)$	—	0	+
f	7	$f(e^2 - 1) \simeq 2.6$	$f(20) \simeq 10.93$

3. $f'(0) = 1 \ln(1) - 2 = -2$: la valeur absolue de ce coefficient est l'inclinaison du module en B .

4. On admet que $g(x) = \frac{1}{2}(x + 1)^2 \ln(x + 1) - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x$ a pour dérivée $g'(x) = (x + 1) \ln(x + 1)$.

La fonction g est donc une primitive de $x \mapsto (x + 1) \ln(x + 1)$.

Une primitive de $x \mapsto -3x + 7$ est $x \mapsto -\frac{3x^2}{2} + 7x$.

Une primitive de f est donc définie par

$$F(x) = g(x) - \frac{3x^2}{2} + 7x = \frac{1}{2}(x + 1)^2 \ln(x + 1) - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3x^2}{2} + 7x$$

$$= \frac{1}{2}(x + 1)^2 \ln(x + 1) - \frac{7x^2}{4} + \frac{13}{2}x.$$

Partie B :

1. $\mathcal{P}_1$: La différence entre le point le plus haut et le point le plus bas de la piste est $f(20) - f(e^2 - 1) \simeq 10,93 - 2,6 \simeq 8,3 > 8$ donc $\mathcal{P}_1$ est **vraie**.

$\mathcal{P}_2$: L'inclinaison en B est 2. L'inclinaison en 20 est $f'(20) = \ln(21) - 2 \simeq 1,04$,
donc $\mathcal{P}_2$ est **vraie**.

2. f est continue, donc la face avant, en unités d'aire, vaut

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_1 &= \int_0^{20} f(x) \, dx = F(20) - F(0) = \frac{21^2 \ln 21}{2} - 700 + 130 - 0 \\ &= \frac{441 \ln 21}{2} - 570 \simeq 101,3 \text{ m}^2.\end{aligned}$$

L'aire latérale gauche vaut $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}(OAB'B) = 10f(0) = 70 \text{ m}^2$.

L'aire latérale droite vaut $\mathcal{A}_3 = \mathcal{A}(DD'C'C) = 10f(20) \simeq 109,3 \text{ m}^2$.

L'aire à peindre en rouge est donc $\mathcal{A} = 2\mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 + \mathcal{A}_3 \simeq 381,9 \text{ m}^2$.

Le nombre de litres de peinture à prévoir est $\frac{381,9}{5} \simeq 77 \text{ L}$.

3. (a) $B_k B_{k+1} = \sqrt{1^2 + (f(k+1) - f(k))^2} = \sqrt{1 + (f(k+1) - f(k))^2}.$

- (b) La partie de l'algorithme à compléter est :

S prend la valeur 0.

Pour K allant de 0 à 19

S prend la valeur $S + 10\sqrt{1 + (f(K+1) - f(K))^2}$

Afficher S

ALLER À JACTA-EST

Ce devoir est associé au chapitre XV, *Variables aléatoires & Loi des grands nombres*.

Ma chère grand-tante, mon cher grand-oncle,

Je vous écris cette petite lettre pour vous remercier du cadeau que vous avez commandé au Père Noël pour moi. Quand je dis que je vous écris, en fait, c'est plutôt Papa qui le fait sous ma dictée parce que malgré tous ses efforts, je ne sais pas encore écrire, surtout les cédilles et les accords des participants avec des avoirs placés avant. Faut dire qu'il est pas très clair Papa mais il paraît que c'est parce qu'il est professeur de mathématiques, d'après Maman. En revanche, je sais compter presque toujours jusqu'à dix même si c'est difficile sur la fin, après deux, et ça, Papa il en est plus fier que moi. Ben ça, le cadeau, c'est très chouette, je vais peut-être enfin avoir une baleine bleue quand Papa aura fini la piscine géante. J'ai peur que ça mette un peu du temps mais, si je suis gentille comme tous les jours, j'aurai sûrement un tricycle à deux roues. Papa m'a dit qu'on ne s'est jamais rencontrés, même quand je m'en souviens plus car c'était il y a longtemps, mais il m'a montré des photos de lui petit où vous étiez alors je vous ai fait des bisous. C'était marrant le coup des photos, il était petit mais quand même plus grand que moi, parce que moi, j'ai deux ans comme je dis toujours mais il paraît que ça va pas durer et qu'un jour j'en aurais trois, comme Papa sur les photos avec vous. J'espère que je saurai encore souffler les bougies aussi bien que cette année. Bref, moi je leur dis bien que je voudrais aller à l'est de Jacta pour vous rencontrer mais les parents, c'est toujours pareil, ils ont des devoirs, des travaux et plein de choses à faire et puis quand ils en ont marre, ils partent de la maison tôt le matin. Moi je sais bien

qu'ils vont se reposer ailleurs. Quoique, en ce moment, je sais pas si Papiry vous a dit, Maman se repose tout le temps à la maison mais c'est pas marrant parce qu'elle ne peut même pas jouer au ballon ni me faire des petits plats et pour une fois je suis d'accord avec Papa, il ne fait pas très bien à manger. Alors, moi je dis qu'il est temps qu'on m'écoute un peu et que je veux prendre le Train des Grosses Vacances et qu'on vienne vous voir et Papa et Maman m'ont répondu qu'ils feraient tout leur possible et qu'ils pensaient la même chose et que eux aussi ils voulaient bien qu'on les écoute un peu.

Alors je vous dis à très bientôt, vous remercie beaucoup et vous souhaite une très bonne année et une santé de fer.

Mille Bisous,

Nicolas

PS : Papa et Maman vous embrassent très fort et vous envoient tous leurs vœux aussi mais ils pourraient faire une lettre tout seuls non mais quand-même, surtout si Maman corrige les fautes d'orthographe !

Exercice Sachant que Papa se trompe une fois sur cent, quelle est la probabilité minimale que Maman corrige entre quinze et trente-cinq fautes dans cette lettre de deux-mille-cinq-cents caractères ?

ALLER À JACTA-EST

Une faute d'orthographe peut être considérée comme une erreur sur un caractère et l'on imagine que les fautes sont indépendantes les unes des autres même si ce n'est certainement pas exactement le cas.

Puisque Papa se trompe une fois sur cent, le nombre de fautes d'orthographe dans ce texte de deux-mille-cinq-cents caractères est une variable aléatoire F suivant une loi binomiale de paramètres $n = 2500$ et $p = \frac{1}{100}$.

On a donc $\mathbb{E}(F) = np = 25$

et $V(F) = np(1-p) = \frac{99}{4}$.

Ainsi, $F \in [15; 35]$

$$\iff 15 \leq F \leq 35$$

$$\iff 15 - 25 = -10 \leq F - 25 \leq 10 = 35 - 25$$

$$\iff |F - \mathbb{E}(F)| \leq 10$$

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a, aux bornes près,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(F \in [15; 35]) &= \mathbb{P}(|F - \mathbb{E}(F)| \leq 10) \\ &= 1 - \mathbb{P}(|F - \mathbb{E}(F)| > 10) > 1 - \frac{V(F)}{10^2} \\ &= 1 - \frac{99}{4 \times 10^2} \simeq 0,75. \end{aligned}$$

Il y a donc au moins trois chances sur quatre que Maman corrige entre dix et quarante fautes d'orthographe dans le texte écrit par Papa sous la dictée du petit Nicolas.

DEVOIR PARENTAL

Échangeons les rôles pour une fois : ce devoir doit être fait par les parents, aidés de leur enfant.

Cet exercice est un Q.C.M. Pour chaque question, une seule réponse est juste et aucune justification n'est demandée.

1. Du point de vue des mathématiques, l'enjeu de cette année scolaire est
 - S. nul et non avvenu.
 - A. majeur et vacciné.
 - V. multiple, riche et enthousiasmant.
2. Le travail demandé est
 - A. une simple répétition hebdomadaire de la formule apprise en septembre.
 - U. inutile et ennuyeux.
 - I. nécessaire, formateur et passionnant.
3. Il y aura un devoir
 - N. par an.
 - C. par hasard.
 - V. par thème, ou quasiment.
4. Les énoncés fantasques
 - S. n'ont aucun rapport avec les mathématiques.
 - U. n'existent pas, ou alors, je n'ai pas compris.
 - E. changent de l'ordinaire et apprennent à se focaliser sur l'essentiel.
5. Le rédacteur de cet ouvrage tape bien
 - S. sur les nerfs.
 - N. sur ses élèves.
 - L. sur ordinateur.
6. Les documents distribués seront
 - C. peu nombreux, confus, dans le désordre.
 - R. en couleur, écrits à la main et enluminés à l'or fin.
 - E. nombreux, trop peut-être, et seront notre outil de travail. Les élèves devront apprendre à travailler avec, quitte à en recopier une partie ou faire des fiches afin de se les approprier et de les mémoriser.

7. Le manuel numérique
- R. est une pièce indispensable et doit être en permanence à portée de main.
 - A. est joli, coloré, et bien mieux que ce qui est fourni en classe.
 - S. une aide utile et riche, en complément de ce qui est fait en classe.
8. Le matériel est
- U. imposé : un classeur petit format, des feuilles de teintes diverses à gros carreaux, un cahier de brouillon, un stylo vert clair, deux crayons HB gras, un compas de précision, un double décimètre, quelques feuilles de papier Canson, un stylo plume, pas d'effaceur, un taille crayon sans réserve. Équerre interdite.
 - P. inutile : tout se passe dans la tête.
 - M. conseillé : un classeur grand format, des feuilles doubles et simples à petits carreaux, une calculatrice (cf. question 9) et une perforatrice (si, si).
9. La calculatrice exigée est
- P. un simple convertisseur francs nouveaux - euros.
 - P'. la même que celle demandée en eps.
 - A. scientifique, de type lycée, mode examen.
10. Parti comme cela, au fil de l'année, votre enfant
- U. aura perdu beaucoup de temps.
 - O. aura déjà un an de plus.
 - T. apprendra des concepts fascinants, tout en se faisant plaisir.
11. Parti comme cela, au fil de l'année, le professeur de mathématiques de votre enfant
- L. aura perdu beaucoup de temps.
 - R. aura encore un an de plus.
 - H. enseignera des concepts fascinants, tout en se faisant plaisir.
12. Le rédacteur de cet ouvrage s'estime satisfait lorsque ses lecteurs
- E. ne l'ont pas molesté.
 - T. ne l'ont pas vilipendé sur les réseaux sociaux.
 - S. ont pris du plaisir et se sentent plus intelligents après leur lecture.
13. Pour réussir, le plus important c'est
- :-(le travail.
 - :-| le travail.
 - :-) le travail.

CAHIERS TRANSVERSAUX

ALGO À GOGO

Sommaire

1	Installer Python	512
2	Les variables	512
3	Instructions conditionnelles	513
4	Boucle bornée	514
5	Boucle non bornée	515
6	Fonction	516
7	Liste	517
8	Foire de l'algo	519
9	Solutions	522

Ce cahier est essentiel pour toute votre scolarité.

Le mot algorithme vient du nom d'un mathématicien perse du IX^e s., Al-Khwarizmi. On trouve trace de méthodes algorithmiques dès le début des mathématiques et ce, dans toutes les cultures. L'algorithme d'Archimède donne une approximation du nombre π . Ératosthène, lui, a défini une procédure pour retrouver les nombres premiers en procédant par l'élimination des multiples successifs. Euclide trouve rapidement le *pgcd* de deux entiers. Dans son *Discours de la méthode*, René Descartes propose en 1637 de diviser chacune des difficultés qu'il examine, en autant de parcelles qu'il se peut et qui sont requises afin de mieux les résoudre. Au XIX^e s., Ada Lovelace, fille de Lord Byron, est considérée comme la pionnière de la science informatique. Elle a réalisé le premier véritable programme informatique lors de son travail sur un ancêtre de l'ordinateur. En effet, on trouve dans ses notes le premier programme destiné à être exécuté par une machine. Elle a également entrevu et décrit certaines possibilités offertes par les calculateurs universels, allant bien au-delà du calcul numérique qu'imaginaient ses contemporains. Le langage informatique Ada a été nommé en son honneur.

Un algorithme est un enchaînement fini d'étapes ou d'instructions à effectuer dans un certain ordre et dont la réalisation permet la résolution en un temps fini d'un problème donné. Les structures que nous étudierons ici seront plutôt simples mais pourront tout de même user de tests (Sialors) et autres boucles (Pour et Tantque) et mettront en œuvre des fonctions, peut-être même des listes. Nos algorithmes seront ici écrits en langage *naturel* ou en langage Python, qui lui est très proche. Ceux-ci ont l'avantage de rester lisibles car, outre les problèmes de syntaxe, les mauvaises constructions sont sources de nombreuses erreurs et autres bugs et l'on sait qu'en informatique, on a rapidement la rage envers la machine.

1 Installer Python

Il faut au préalable installer une distribution Python. Rassurez-vous, c'est très facile, il suffit de visiter le site <http://www.python.org/> et de la télécharger. Des applications EduPython sur PC, Idle sur Mac ou Pydroid 3 sur tablette par exemple fonctionnent bien.

Le principe est toujours le même : on dispose d'une console Python, une fenêtre dans laquelle on peut effectuer des calculs, appliquer des fonctions et observer les résultats de sortie des programmes, ainsi que d'un éditeur de programmes, une fenêtre où l'on saisit les programmes.

Par exemple, dans la console :

```
>>> from math import *
      # permet d'utiliser les commandes mathématiques
>>> from random import *
      # permet d'utiliser les commandes de probabilité
>>> 2**3    # ** signifie puissance
8
>>> sqrt(3)
1.732050808
>>> 13%8    # reste de la division euclidienne
5
>>> b=3
>>> h=4
>>> Aire_Triangle=b*h/2
>>> print(Aire_Triangle)
6
```

Dorénavant, nous considérons que les modules `math` et `random` sont importés dès que nécessaire.

Dans l'éditeur, nous pouvons écrire un programme comme le suivant puis lancer son exécution dans la console.

```
1| Nom=input("Quel est ton prénom?")
2| Accueil="Bonjour "+Nom+". Bienvenue sur Python!"
3| print(Accueil)
```

L'éditeur permet de sauvegarder ses programmes dans un fichier « .py » ce qui est essentiel car la console oublie tout une fois qu'elle est fermée.

2 Les variables

Dans un programme, une variable est repérée par son nom et possède une valeur qui peut changer au fur et à mesure de l'exécution. On peut schématiser une variable par une boîte portant une étiquette, son nom, et ayant un contenu, sa valeur. C'est une différence fondamentale par rapport à ce qui est d'usage en mathématiques où l'on peut effectuer des calculs sans jamais connaître la valeur de la variable et si celle-ci est connue, elle ne peut changer.

On distingue plusieurs types de variables : les entiers (`int`), les décimaux (`float`), les chaînes de caractères (`str` pour string), les booléens (`bool`) : vrai et faux (ils ont aussi une valeur numérique : 1 et 0).

Une instruction d'affectation permet de donner une valeur à une variable, de remplir la boîte. En langage naturel, on écrit $X \leftarrow 2$ et en Python, « `X=2` ».

La demande d'une saisie de valeur s'écrit `X=float(input())` en Python. On remarque que l'on précise en même temps le type de la variable saisie. Pour l'afficher, `print(X)` fonctionne bien.

En mathématiques, le symbole $=$ peut signifier une égalité ($3+5=8$), peut servir à définir un objet ($A=\pi R^2$) ou écrire une équation ($2x+3=5-x$) qui n'est pas toujours vérifiée et que l'on peut parfois résoudre. En Langage Python, $=$ ne sert qu'à définir une variable. Pour tester une égalité, on utilisera `==`.

Exercice 1 Écrire un programme en langage Python appliquant l'algorithme suivant : saisir un nombre, l'élever au carré, en prendre le triple, retrancher 5 puis afficher le résultat.

3 Instructions conditionnelles

Une condition est un énoncé qui peut être vrai ou faux. Dans un programme, on peut tester si cette condition est vraie ou fausse et effectuer un traitement différent selon les cas.

Voici l'architecture d'un test :

Si condition Alors
 Traitement 1
Sinon
 Traitement 2
Fin Si

En Python, la fin de l'indentation (le décalage) marque la fin du traitement :

```
1| if condition :
2|     Traitement 1
3| else :
4|     Traitement 2
```

On peut ne pas effectuer de traitement dans le cas où la condition est fausse et l'on omet alors le « sinon/else ».

On peut aussi imbriquer plusieurs tests conditionnels et la commande « elif » combine un else suivi d'un if : cela permet de ne pas avoir un niveau d'indentation supplémentaire. Nous verrons cela en exercice.

Exercice 2 Agathe souhaite s'inscrire au club de mathématique de sa ville et on lui propose deux formules :

Formule α : une cotisation annuelle de 8 francs et chaque séance coûte 1,50 franc ;

Formule β : la séance coûte 1,70 franc.

Voici le programme incomplet qu'elle a écrit. Le compléter puis le saisir et l'exécuter.

À partir de combien de séances le programme α semble-t-il plus avantageux ?

```
1| n=int(input("Entrer n : "))
2| a=8+1,5*n
3| .....
4| if ..... :
```

```

5|   print("Le tarif .... est plus avantageux.")
6|   .....
7|   print("Le tarif beta est plus avantageux.")

```

Exercice 3 Saisir et exécuter le programme suivant. Que fait-il ?

```

1| x=int(input("Combien vois-tu de lignes? ||||| "))
2| if x==10 :
3|     print("Bravo!")
4| elif x<=9 :
5|     print("Tu devrais consulter un ophtalmologue.")
6| else :
7|     print("Arrête de loucher!")

```

Exercice 4 Écrire un programme demandant à une personne si elle est majeure et le cas échéant, si elle a obtenu le permis de conduire. La féliciter si cela est le cas, l'encourager sinon.

4 Boucle bornée

Une boucle permet de répéter plusieurs fois de suite un même traitement. Lorsque le nombre n de répétition est connu à l'avance, on dit que la boucle est bornée et l'on utilise un compteur i qui s'incrémente à chaque itération : à chaque fois que le traitement est effectué, le compteur i augmente de 1. Lorsque i atteint la valeur n , on effectue une dernière fois le traitement puis on sort de la boucle.

Voici l'architecture d'une boucle bornée :

Pour i allant de 1 à n
 Traitement
 Fin Pour

En Python, on utilise la commande `range` où la borne de droite est exclue et cela donne :

```

1| for i in range(1,n+1) :
2|     Traitement

```

Exercice 5 Ce programme affiche les puissances de 1 à n du nombre x . Le compléter.

```

1| x=...(input("De quel nombre souhaitez-tu connaître les
   puissances? "))
2| n=...(input("Quelle puissance maximale souhaitez-tu obtenir? "))
3| p=1
4| for i in range(0,...) :
5|     p=x*p
6|     print(...)

```

Que cela change-t-il si l'on omet l'indentation de la dernière ligne ?

Exercice 6 Soit la fonction $f: x \mapsto 3x^2 - 5$.

- Écrire un programme donnant les images par f de tous les entiers compris entre 0 et l'entier N .
- Le modifier afin qu'il donne les images de tous les multiples de $\frac{1}{2}$ compris entre 0 et l'entier N .

Exercice 7 Au cours de chaque semaine, tu doubles ton nombre de suiveurs sur ton compte Amstramgram mais tu en perds 7 le dimanche. Tu avais 9 suiveurs à l'aube du premier jour.

- Écris un programme donnant le nombre de suiveurs après n semaines et exécute-le.
- Que se passe-t-il si tu en avais seulement 6 au premier jour ? Et si tu en avais 7 ?

5 Boucle non bornée

Dans un boucle, le nombre de répétitions, d'itération n'est pas nécessairement connu à l'avance, il peut dépendre d'une condition et le traitement est alors répété tant que la condition est vérifiée puis on sort de la boucle. On parle de boucle non bornée (*a priori*) mais attention à ce que cette condition soit bien fausse après un certain nombre de répétitions, sinon le programme tournera *en boucle* sans jamais s'arrêter...

Voici l'architecture d'une boucle non bornée :

Tant que Condition
 Traitement
 Fin Tant que

En Python, on utilise la commande `while` et cela donne :

```
1| while Condition :
2|     Traitement
```

Exercice 8 Écrire un programme affichant tous les entiers naturels compris entre 0 et un décimal positif D .

Exercice 9 Colette est un peu lassée de lancer son dé alors elle a écrit le programme suivant. À quoi peut-il donc bien servir ?

```
1| from random import *    # pour utiliser des fonctions de
   | probabilités
2| f=randint(1,6)          # entier choisi au hasard
3| l=1
4| while f != 6 :          # différent de
5|     f=randint(1,6)
6|     l=l+1
7| print("Nombre de lancers : ", l)
```

Exercice 10 Ta capacité de concentration diminue de 16 % pour chaque heure passée quotidiennement devant un écran. Écris un programme donnant le nombre d'heures quotidiennes passées devant un écran à partir duquel ta capacité de concentration diminue de moitié.

Exercice 11 Il est bien connu que si l'on place un grain de riz sur la première case d'un échiquier, deux grains sur la deuxième case, quatre sur la troisième, huit sur la quatrième et ainsi de suite, on dépasse rapidement le nombre total de grains de riz disponibles. Complète le programme qu'a écrit Agathe afin qu'il détermine le nombre de cases que l'on peut complètement remplir avec un nombre R de grains de riz à disposition.

```

1| R=int(input("Nombre de grains de riz disponibles : "))
2| S=1
3| n=0
4| while S<=R :
5|     n=.....
6|     S=S+.....
7| print("Nombre de cases remplies : ", .... )

```

Exercice 12 On reprend la fonction $f: x \mapsto 3x^2 - 5$ de l'exercice 6.

- Créer un programme donnant le premier entier naturel d'image strictement supérieure à un décimal M .
- Le modifier afin d'obtenir le premier multiple de $\frac{1}{2}$ vérifiant cette même condition.

6 Fonction

Une fonction d'un ou plusieurs arguments réalise un traitement et renvoie un résultat. Elle peut être appelée plusieurs fois par le programme principal et permet de mieux structurer celui-ci.

Voici l'architecture d'une fonction :

Fonction `mafonction(a,b)`
 Traitement
 Résultat `c`

En Python, on utilise la commande `def` et cela donne :

```

1| def mafonction(a,b) :
2|     Traitement
3|     return c

```

Exercice 13 Écrire une fonction `airect` donnant l'aire d'un rectangle en fonction de la longueur de ses côtés.

Exercice 14

- Que calcule la fonction `so` suivante ?

```

1| def so(N) :
2|     S=0
3|     for i in range(1,N+1) :
4|         S=S+i
5|     return S

```

- Écrire une fonction `pr` calculant le produit de tous les entiers de 1 à N .

Exercice 15 Cette fonction `nbfois` détermine le nombre d'apparition d'un caractère dans un texte, une chaîne de caractères. Le compléter. Que signifient les lignes 2 et 5 ?

```

1| def nbfois(caractere,chaîne) :    # doivent être mis entre " et "
2|     l=len(chaîne)
3|     n=0
4|     for i in range(0,l) :        # ou range(l)
5|         if chaîne[i]== caractere :
6|             n=.....
7|             .....

```

Exercice 16 Écrire

- (a) une fonction `opposé` donnant l'opposé d'un nombre,
- (b) une fonction `valabs` donnant la valeur absolue d'un nombre,
- (c) une fonction `max2` donnant le plus grand de deux nombres,
- (d) une fonctions `max5` donnant le maximum de cinq nombres en utilisant la précédente,
- (e) une fonction `puissmin` donnant le plus petit entier tel qu'un nombre donné élevé cette puissance soit supérieur ou égal à un autre nombre donné.

Quant l'architecture commence à être complexe, il ne faut pas hésiter à créer plusieurs fonctions et faire appel aux unes dans les autres. On peut très bien utiliser une fonction qui est écrite après dans l'éditeur mais il faut faire attention à ne pas les définir en boucle. Par exemple, si `mafonction1` fait appel à `mafonction2` et si `mafonction2` à `mafonction1`, vous risquez bien de tourner en rond. En revanche, dans une architecture correctement construite, une fonction peut très bien s'appeler elle-même sans problème. C'est ce qui s'appelle un algorithme récursif.

Exercice 17 Soit la fonction $f: x \mapsto 3x^2 - 2x - 4$. Écrire un programme donnant le maximum entre la valeur absolue d'un nombre et l'image par f de ce nombre en précisant duquel il s'agit.

Exercice 18 Tel Euclide, créez une fonction donnant le plus grand commun diviseur de deux entiers naturels. Vous pourriez utiliser une version récursive.

7 Liste

Cette partie n'est pas au programme de seconde mais simplement à partir de la classe de première. Elle peut néanmoins être utile à tous.

Lorsque l'on a besoin de garder et d'utiliser plusieurs variables au cours d'un programme, on utilise des listes pour les stocker. Une liste est une collection d'objets de différents types (nombres, chaînes de caractères, booléens, listes...). On peut ensuite la manipuler, faire appel à l'un de ses termes, l'utiliser dans une boucle, etc. Un exemple typique d'utilisation est la collecte des premiers termes d'une suite. Voici quelques commandes utiles en langage Python.

Un exemple de liste	<code>L=[2,"mai",7,True]</code>
Une liste vide	<code>L=[]</code>
Premier objet de la liste (rang 0)	<code>L[0]</code>
$(k+1)^e$ objet de la liste (rang k)	<code>L[k]</code>
Dernier objet de la liste	<code>L[-1]</code>
Longueur de la liste	<code>len(L)</code>
Ajouter un objet en fin de liste	<code>L.append(objet)</code>
Insérer un objet au rang k	<code>L.insert(k,objet)</code>
Supprimer l'objet de rang k	<code>del L[k]</code>
Supprimer l'objet element	<code>L.remove(element)</code>
Compte le nombre d'objets element dans la liste	<code>L.count(element)</code>
Trouve l'index de l'objet element dans la liste	<code>L.index(element)</code>
Concaténer (rassembler) deux listes	<code>L1+L2</code>
Inverser l'ordre des valeurs	<code>L.reverse()</code>
Afficher les objets par ordre croissant (si possible)	<code>sorted(L)</code>
Réarranger la liste par ordre croissant (si possible)	<code>L.sort()</code>

Exercice 19 On considère la fonction suivante.

```

1| def cetterfonction(valeur,liste) :
2|     nombre=0
3|     for v in liste :
4|         if v>=valeur :
5|             nombre=nombre+1
6|     return nombre

```

Pour `L=[1,2,4,2,1]`, `cetterfonction(2,L)` donne 3, `cetterfonction(3,L)` donne 1 et `cetterfonction(6,L)` donne 0. Que fait cette fonction ?

Exercice 20

- A. La ligne `L=[i**2 for i in range(6)]` donne la liste `[0, 1, 4, 9, 16, 25]`.
Que fait cette instruction ?
- B. Créer une liste des cubes des entiers naturels inférieurs ou égaux à douze.
- C. Saisir les instructions suivantes. Que font-elles ?
 - (a) `L=[9-k for k in range(7)]`
 - (b) `M=[6]*5`
 - (c) `N=[randint(1,6) for i in range(8)]`
 - (d) `M[2]=1`
 - (e) `P=M+N`
`P.sort()`
 - (f) `X=[0.5*i for i in range(-5,5)]`
`Y=[3*x**2-5 for x in X]`

Exercice 21 Écrire une fonction calculant la somme des objets d'une liste de nombres.

Exercice 22 Écrire une fonction donnant la liste des diviseurs d'un entier naturel.

Exercice 23 Écrire un programme échangeant la place de deux objets d'une liste.

Exercice 24 Les notes de Colette en mathématiques augmentent de 2 % à chaque devoir jusqu'à ce qu'elle obtienne la note maximale. Écrire une fonction créant la liste de ses notes jusqu'à 20 en fonction de la note non nulle qu'elle a obtenue au premier devoir rendu.

8 Foire de l'algo

Les algorithmes seront rédigés ici en langage naturel mais je vous encourage à les saisir en Python afin de vérifier que vous maîtrisez bien ce que vous avez appris précédemment. Ils sont d'un niveau varié et peuvent parfois utiliser des résultats et notions mathématiques que vous ne connaissez pas encore mais vous pourrez tout de même comprendre leur architecture.

1. (a) Que contient la variable Z après exécution de l'algorithme (A) pour $Z = 0$, $Z = 1$ puis $Z = 3$?

Algo (A)
 $Z \leftarrow 2 - Z^2$

- (b) Quel est le rôle de cet algorithme ?

2. (a) Que contient la variable T après exécution de l'algorithme (B) pour $S = 0$, $S = 1$ puis $S = -2$?

Algo (B)
 $R \leftarrow 2$
 $T \leftarrow -\pi$
 $R \leftarrow 2S + 3$
 $R \leftarrow 4R - 1$
 $T \leftarrow 3R^2 - 4$

- (b) Quel est le rôle de cet algorithme ?
(c) Le simplifier.

3. (a) Que contient la variable U après exécution de l'algorithme (C) pour $N = 3$?

Algo (C)
 $U \leftarrow 7$
Pour I allant de 1 à N
 $U \leftarrow \frac{3}{4} \times U$
Fin Pour
Afficher U

- (b) Quel est le rôle de cet algorithme ?

4. (a) Quelles valeurs affiche l'algorithme (D) pour $P = 5$ et $V = -3$?

Algo (D)
Pour K allant de 2 à P
 Affecter $V \leftarrow 4 + V$
 Afficher V
Fin Pour

- (b) Quel est le rôle de cet algorithme ?

5. (a) Exécuter les algorithmes (E) pour $N = 3$, (F) pour $A = 4$ puis $A = 10$ et (G) pour $N = 4$.

- (b) Quel est le rôle de chacun de ces algorithmes ?

Algo (E) $U \leftarrow 4$ $I \leftarrow 0$ Tant que $I < N$ $I \leftarrow I + 1$ $U \leftarrow \frac{2}{5}U + 2$ Fin Tant que Afficher U	Algo (F) $X \leftarrow 0$ $F \leftarrow 2$ Tant que $F < A$ $X \leftarrow X + \frac{1}{2}$ $F \leftarrow X^2 + 2$ Fin Tant que Afficher X	Algo (G) $P \leftarrow \pi$ Pour I allant de 0 à N $D \leftarrow Ent(P)$ $P \leftarrow 10(P - D)$ Afficher D Fin Pour
--	---	--

6. (a) À quoi correspond la modification « Pour K allant de 1 à P » dans le (D)?
- (b) À quoi correspond la modification « $I \leftarrow 1$ » dans l'algorithme (E)?
7. Évariste est gallois et son cousin est Germain. Le premier raffole des boucles *Tant que* tandis que le second affectionne les boucles *Pour*.
- (a) Aide Germain à transformer la boucle *Tant que* du (E) en boucle *Pour*.
- (b) Peut-il transformer la boucle *Tant que* de l'algorithme (F) en boucle *Pour*?
- (c) Tel Évariste, transforme les boucles *Pour* des (C) et (D) en boucles *Tant que*.

8. (a) Observer et analyser l'algorithme (H).
- (b) Le compléter afin qu'il réponde au problème donné dans R.

Algo (H)
 Saisir $A \neq 0, B$ et C
 $D \leftarrow \dots$
 Si $D \dots$, Alors
 $U \leftarrow \frac{-B - \sqrt{D}}{2A}$
 $V \leftarrow \dots$
 Afficher
 Sinon

 Fin Si

9. (a) Observer, analyser, compléter, modifier, exécuter pour différentes valeurs les algorithmes (I), (J), (K), (L) et (M).
- (b) Quel est le rôle de chacun de ces algorithmes?

Algo (I)
 $K \leftarrow 0$
 $B \leftarrow 2$
 Saisir N
 Pour K allant de 1 à N
 $B \leftarrow A + 1$
 $A \leftarrow B - 1$
 Fin Pour
 Afficher $A - B$

Algo (J)
 $B \leftarrow 3$
 Saisir N
 Tant que $K < N$
 $K \leftarrow K + 1$
 $A \leftarrow 3B$
 $C \leftarrow A - 2$
 $A \leftarrow \frac{C+2}{3}$
 Fin Tant que
 Afficher $A - B$

Algo (K)

```

F ← 1
U ← 0
Pour K allant de 1 à N
  Afficher F
  V ← F
  F ← U + F
  U ← V
Fin Pour

```

Algo (L)

```

U ← 4
V ← 1
I ← 0
Saisir M
Tant que I < M
  W ← V
  V ← (U+V)/2
  U ← W2
  Afficher U
Fin Tant que

```

Algo (M)

```

X ← 0
Saisir A
F ← 1 - X3
Tant que F < A
  X ← X + 1 à X
  F ← 1 - X3
Fin Tant que
Afficher X

```

10. (a) Observer, analyser, compléter, exécuter, au moyen de tableaux et pour différentes valeurs, l'algorithme (N) pour les fonctions $f(x) = 2x + 1$, $f(x) = x^2 - 1$, $f(x) = \sin(x)$ puis $f(x) = 1 - x^2$.
- (b) Quel est le rôle de cet algorithme ?
- (c) Le test « Si $f(A) \times f(B) > 0$ » est-il nécessaire ?

Algo (N)

f est une fonctionante et ...

Saisir A, B et E

$I \leftarrow A$

Si $f(A) \times f(B) > 0$, Alors

Afficher "Non mais ça ne va pas ?"

Sinon

Tant que $|f(I)| > E$

$I \leftarrow \frac{A+B}{2}$

Si $f(I) > 0$, Alors

$\dots \leftarrow I$

Sinon

$\dots \leftarrow I$

Fin Si

Fin Tant que

Afficher I

Fin Si

11. Rédiger puis exécuter pour différentes valeurs des algorithmes répondant aux problèmes suivants :
- Afficher l'image d'un réel x_0 à saisir par la fonction $f(x) = 3x^2 - 5 \cos(x) + 7$.
 - Afficher les coordonnées du milieu d'un segment dont on saisit les coordonnées des extrémités.
 - Afficher tous les termes jusqu'au rang p de la suite $u_n = n^2 - 3n + 4$, $n \in \mathbb{N}$.
 - Afficher le $(n+1)$ -ième terme de la suite $v_0 = 5$, $v_{n+1} = 2v_n - 3$.
 - Afficher le terme numéro n de la suite $w_0 = 4$, $w_1 = 5$, $w_{n+2} = 3w_{n+1} - 2w_n$.
 - Calculer le produit scalaire de deux vecteurs dont on saisit les coordonnées dans un repère orthonormé, l'afficher puis déterminer leur éventuelle orthogonalité.
 - Faire choisir un nombre entier entre 0 et 100 à la machine (*Aléat*) puis saisir des entiers jusqu'à ce qu'il soit trouvé. La machine doit préciser si la saisie est supérieure ou inférieure à la solution et féliciter chaleureusement le joueur lorsqu'il réussit enfin.
12. Implémenter le cas réel de l'algorithme du discriminant (H) dans votre calculatrice, cela pourra vous servir...
13. (S) Implémenter ses algorithmes préférés en langage Python et les exécuter pour différentes valeurs.

9 Solutions

Exercice 1 Dans la console, cela donne :

```
>>> x=float(input("Saisir un nombre : "))
>>> x=x**2    # On utilise la même variable
>>> x=3*x
        # Cela prend moins de « place » mais on perd l'information de
        départ
>>> x=x-5
>>> print(x)
```

Exercice 2 Avec ce programme, Agathe s'aperçoit qu'à partir de 40 séances, le tarif α est plus avantageux.

```
1| n=int(input("Entrer n : "))
2| a=8+1,5*n
3| b=1,7*n
4| if a<=b :
5|     print("Le tarif alpha est plus avantageux.")
6| else :
7|     print("Le tarif beta est plus avantageux.")
```

Exercice 3 Ce programme teste sommairement la vue du joueur. S'il voit 10 lignes, on le félicite, s'il en voit moins c'est qu'il devrait certainement porter des lunettes et s'il en voit plus, c'est qu'il louche.

Exercice 4

```
1| n=int(input("Quel âge as-tu? "))
2| if n>=18 :
3|     p=str(input("Tu es donc majeur(e). As-tu le permis de conduire?
    "))
4|     if p=="oui" :    # chaîne de caractères
5|         print("Bravo!")
6|     else :
7|         print("Rien n'est perdu.")
8| else :
9|     print("Tu es mineur(e) et tu ne peux pas encore avoir le permis
    de conduire.")
```

Exercice 5 Le programme suivant affiche les puissances de 1 à n du nombre x .

```
1| x=float(input("De quel nombre souhaitez-tu connaître les
    puissances? "))
```

```

2| n=int(input("Quelle puissance maximale souhaites-tu obtenir? "))
3| p=1
4| for i in range(0,n) :
    # i va prendre n valeurs différentes, de 0 à n-1
5|     p=x*p
6|     print(p)

```

Si l'on omet l'indentation de la dernière ligne, seule la dernière puissance est affichée.

Exercice 6 Soit la fonction $f: x \mapsto 3x^2 - 5$.

- (a) Voici un programme donnant les images par f de tous les entiers compris entre 0 et l'entier N .

```

1| N=int(input("Antécédent max : "))
2| for i in range(0,N+1) :
3|     y=3*i**2-5
4|     print(y)

```

- (b) En voici un donnant les images de tous les multiples de $\frac{1}{2}$ compris entre 0 et N .

```

1| N=int(input("Antécédent max : "))
2| for i in range(0,N) :
3|     y1=3*i**2-5
4|     y2=3*(i+0.5)**2-5
5|     print(y1)
6|     print(y2)
7| print(3*N**2-5)    # Pour calculer et afficher l'image de N

```

Exercice 7 Compte Amstramgram

- (a) 1| n=int(input("Depuis combien de semaines as-tu ton compte Amstramgram?"))

2| S=9

3| for i in range(n) :
 # On a omis la borne gauche, c'est alors 0 par défaut

4| S=2*S-7

5| print("Tu as désormais ",S," suiveurs.")

- (b) Si tu avais 6 suiveurs au premier jour, on s'aperçoit que tu n'en as plus dès la troisième semaine.

Et si tu en avais 7 à l'aube du premier jour, cela restera ainsi jusqu'à la fin des temps.

Exercice 8 Celui-ci affiche tous les entiers naturels entre 0 et un décimal positif D.

```

1| D=float(input("Quel nombre positif, je te prie?"))
2| k=0

```

```

3| while k<=D :
4|     print(k)
5|     k=k+1

```

Exercice 9 Le programme de Colette simule des lancers d'un dé cubique jusqu'à l'obtention d'un six et affiche le nombre de lancers qui ont été nécessaires.

Exercice 10 Grâce au programme suivant, tu sais que ta capacité de concentration aura diminuée de moitié si tu passes plus de 4 heures par jour devant un écran.

```

1| c=1    # Capacité initiale
2| h=0
3| while c>0.5 :
4|     c=0.84*c    # diminution de 16% : multiplication par  $1 - \frac{16}{100}$ 
5|     h=h+1
6| print("Nombre d'heures quotidiennes devant un écran: ", h)

```

Exercice 11 Grains de riz

```

1| R=int(input("Nombre de grains de riz disponibles : "))
2| S=1
3| n=0
4| while S<=R :
5|     n= n+1
6|     S=S+2**n
7| print("Nombre de cases remplies : ", n)

```

Exercice 12 $f: x \mapsto 3x^2 - 5$

(a)

```

1| M=float(input("Borne à dépasser : "))
2| f=-5
3| n=0
4| while f<=M :
5|     n=n+1
6|     f=3*n**2-5
7| print("L'image de ",n," par f est strictement plus grande que ",M)

```

(b) Afin d'obtenir le premier multiple de $\frac{1}{2}$, il suffit de remplacer la ligne 5 par $n=n+0.5$.

Exercice 13 La fonction airect suivante donne l'aire d'un rectangle en fonction de la longueur de ses côtés.

```

1| def airect(l,L) :

```

```

2|     a=l*L
3|     return a

```

Exercice 14

- (a) La fonction `so` calcule la somme des entiers entre 0 et N .
 (b) La fonction `pr` suivante calcule le produit des entiers entre 1 et N .

```

1| def pr(N) :
2|     P=1
3|     for i in range(1,N+1) :
4|         P=P*i
5|     return P

```

Exercice 15 La fonction `nbfois` détermine le nombre d'apparition d'un caractère dans une chaîne de caractères.

```

1| def nbfois(caract,chain) :    # doivent être mis entre " et "
2|     l=len(chain)             # nombre de caractères dans la chaîne
3|     n=0
4|     for i in range(0,l) :     # ou range(1)
5|         if chain[i]== caract :
6|             # si le caractère de rang i est caract
7|             # Rq : le premier caractère d'une chaîne est de rang 0 et le
8|             # dernier, de rang len-1
9|             n=n+1
10|    return n

```

Exercice 16

- (a)

```
1| def opposé(x) :
2|     return -x
```
- (b)

```
1| def valabs(x) :
2|     if x<0 :
3|         return -x
4|     else :
5|         return x
```
- (c)

```
1| def max2(a,b) :
2|     if a<b :
3|         return b
4|     else :
```

- ```
5| return a
```
- (d) 

```
1| def max5(a,b,c,d,e) :
2| M=max2(a,max2(b,
3| max2(c,max2(d,e))))
4| return M
```
- (e) 

```
1| def puissmin(a,A) :
2| n=0
3| while a**n<A :
4| n=n+1
5| return(n)
```

**Exercice 17** On va utiliser les fonctions `max2` et `valabs` de l'exercice précédent.

```

1| def monmaxf(x) :

```



```

2| f=3*x**2-2*x-4
3| m=max2(f,valabs(x))
4| if m==f :
5| return print("Le maximum est l'image ",m)
6| else :
7| return print("Le maximum est l'antécédent ", m)

```

### Exercice 18 Algorithme d'Euclide

```

1| def EuclideClassique(a,b) :
 # algorithme classique du pgcd de a et b
2| while a%b != 0 :
3| # le % donne le reste de la division euclidienne, != teste si
 différent
4| a, b = b, a%b
5| # on change les valeurs de a et b en même temps, cela évite de
 sauver l'ancien a pour l'utiliser dans le nouveau b
6| return b
1| def EuclideRécursif(a,b) : # algorithme récursif du pgcd de a et b
2| if (b==0) :
3| return(a)
4| else :
5| r=a%b
6| return EuclideRécursif(b,r)

```

**Exercice 19** Cette fonction donne le nombre d'objets numériques ou booléens (True valant 1 et False valant 0) de la liste ayant une valeur supérieure ou égale à la valeur en argument.

### Exercice 20

- A. `L=[i**2 for i in range(6)]` crée la liste des carrés des six premiers entiers (de 0 à 5).
- B. `L=[i**3 for i in range(13)]` crée la liste des cubes des entiers jusqu'à douze.
- C. (a) `L=[9-k for k in range(7)]` donne la liste `[9,8,7,6,5,4,3]`.  
 (b) `M=[6]*5` donne la liste `[6,6,6,6,6]`.  
 (c) `N=[randint(1,6) for i in range(8)]` donne une liste aléatoire de huit entiers entre 1 et 6.  
 (d) `M[2]=1` remplace l'objet de rang 2 (le troisième) par un 1 dans la liste M.  
 (e) `P=M+N` puis `P.sort()` crée la liste concaténée de M suivie de N puis la réorganise par ordre croissant.  
 La liste P est ici `[1, 1, 1, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 6, 6, 6, 6]`.

- (f) `X=[0.5*i for i in range(-5,5)]` crée la liste des multiples de  $\frac{1}{2}$  dans  $[-\frac{5}{2}; \frac{5}{2}]$ .  
`Y=[3*x**2-5 for x in X]` crée la liste des images de ces mêmes multiples par  $f(x) = 3x^2 - 5$ .

**Exercice 21** La fonction suivante calcule la somme des objets d'une liste de nombres. Remarquons que la fonction intégrée `sum()` aurait donné le même résultat.

```
1| def sommeliste(L) :
2| s=0
3| for v in L :
4| s=s+v
5| return s
```

**Exercice 22** Cette fonction affiche la liste des diviseurs d'un entier naturel.

```
1| def listediv(n) :
2| div=[]
3| for i in range(1,n+1) :
4| if n
5| div.append(i)
6| print(div)
```

**Exercice 23** Le programme suivant échange la place de deux objets d'une liste.

```
1| def echange(i,j,L) :
2| if i>len(L) or j>len(L) :
3| # afin de ne pas dépasser les dimensions de la liste
4| print("Liste trop courte")
5| else :
6| L[i],L[j]=L[j],L[i] # échange simultané, c'est pratique
7| return L
```

**Exercice 24** Les notes de Colette en mathématiques sont données par ce programme.

```
1| def notesaugementées(n) :
2| L=[]
3| d=n
4| while d<20 :
5| L.append(d)
6| d=1.02*d
7| L.append(20)
8| return L
```

## Foire de l'algo

1. On obtient 2, 1 puis -7. L'algorithme (A) affiche l'image de  $Z$  par la fonction  $f(x) = 2 - x^2$ .

2. On obtient 359, 1079 puis 71. L'algorithme (B) affiche l'image de  $S$  par la fonction  $192x^2 + 528x + 359$ . Il est bien plus simple de reprendre alors l'algorithme (A) avec cette fonction  $f$ .

3. L'algorithme (C) affiche  $u_N$  pour  $u_n = 7 \times (\frac{3}{4})^n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ .

|                  |                                                        |                                 |
|------------------|--------------------------------------------------------|---------------------------------|
| $U \leftarrow 7$ | $U \leftarrow \frac{3}{4} \times 7$                    | $U \leftarrow 7(\frac{3}{4})^3$ |
| $N \leftarrow 3$ | $I \leftarrow 2$                                       | Fin Pour                        |
| Début Pour       | $U \leftarrow \frac{3}{4} \times \frac{3}{4} \times 7$ | " $\frac{189}{64}$ "            |
| $I \leftarrow 1$ | $I \leftarrow 3$                                       |                                 |

4. L'algorithme (D) affiche  $v_2, v_3, \dots, v_P$  pour  $v_1 = -3, v_{n+1} = v_n + 4, \forall n \geq 1$ .

|                          |                          |                           |
|--------------------------|--------------------------|---------------------------|
| $P \leftarrow 5$         | $K \leftarrow 3$         | $K \leftarrow 5$          |
| $V \leftarrow -3$        | $V \leftarrow 4 + 1 = 5$ | $V \leftarrow 4 + 9 = 13$ |
| Début Pour               | "5"                      | "13"                      |
| $K \leftarrow 2$         | $K \leftarrow 4$         | FinPour                   |
| $V \leftarrow 4 - 3 = 1$ | $V \leftarrow 4 + 5 = 9$ |                           |
| "1"                      | "9"                      |                           |

5. • L'algorithme (E) affiche  $u_N$  pour  $u_0 = 4, u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 2, \forall n \geq 0$ .

|                                                        |                                                                       |
|--------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|
| $U \leftarrow 4$                                       | $I \leftarrow 1 + 1 = 2$                                              |
| $I \leftarrow 0$                                       | $U \leftarrow \frac{2}{5} \times \frac{18}{5} + 2 = \frac{86}{25}$    |
| $N \leftarrow 3$                                       | $2 < 3$                                                               |
| Début Tantque                                          | $I \leftarrow 2 + 1 = 3$                                              |
| $0 < 3$                                                | $U \leftarrow \frac{2}{5} \times \frac{86}{25} + 2 = \frac{422}{125}$ |
| $I \leftarrow 0 + 1 = 1$                               | $3 \geq 3$                                                            |
| $U \leftarrow \frac{2}{5} \times 4 + 2 = \frac{18}{5}$ | FinTantque                                                            |
| $1 < 3$                                                | " $\frac{422}{125}$ "                                                 |

• L'algorithme (F) affiche le premier multiple positif de  $\frac{1}{2}$  tel que  $f(X) = X^2 + 2 \geq A$ .

|                                                  |                                                   |                            |
|--------------------------------------------------|---------------------------------------------------|----------------------------|
| $X \leftarrow 0$                                 | $\frac{9}{4} < 4$                                 | FinTantque (pour $A = 4$ ) |
| $F \leftarrow 2$                                 | $X \leftarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$      | " $\frac{3}{2}$ "          |
| $A \leftarrow 4$                                 | $F \leftarrow 1^2 + 2 = 3$                        |                            |
| Début Tantque                                    | $3 < 4$                                           | Pour $A = 10$ , on conti-  |
| $2 < 4$                                          | $X \leftarrow 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$      | nue jusqu'à $X = 3$ .      |
| $X \leftarrow 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$     | $F \leftarrow (\frac{3}{2})^2 + 2 = \frac{17}{4}$ |                            |
| $F \leftarrow (\frac{1}{2})^2 + 2 = \frac{9}{4}$ | $\frac{17}{4} \geq 4$                             |                            |

• L'algorithme (G) affiche les  $N + 1$  premières décimales de  $\pi$  (pour peu qu'on les connaisse auparavant).

|                                   |                                          |
|-----------------------------------|------------------------------------------|
| $P \leftarrow \pi = 3,14159\dots$ | $D \leftarrow Ent(\pi) = 3$              |
| $N \leftarrow 4$                  | $P \leftarrow 10(\pi - 3) = 1,4159\dots$ |
| Début Pour                        | "3"                                      |
| $I \leftarrow 0$                  | $I \leftarrow 1$                         |

|                                                   |                                               |
|---------------------------------------------------|-----------------------------------------------|
| $D \leftarrow \text{Ent}(1, 4159\dots) = 1$       | $D \leftarrow \text{Ent}(1, 59\dots) = 1$     |
| $P \leftarrow 10(1, 4159\dots - 1) = 4, 159\dots$ | $P \leftarrow 10(1, 59\dots - 1) = 5, 9\dots$ |
| "1"                                               | "1"                                           |
| $I \leftarrow 2$                                  | $I \leftarrow 4$                              |
| $D \leftarrow \text{Ent}(4, 159\dots) = 4$        | $D \leftarrow \text{Ent}(5, 9\dots) = 5$      |
| $P \leftarrow 10(4, 159\dots - 4) = 1, 59\dots$   | $P \leftarrow 10(5, 9\dots - 5) = 9, \dots$   |
| "4"                                               | "5"                                           |
| $I \leftarrow 3$                                  | FinPour                                       |

6. (a) Si  $K$  va de 1 à  $P$  alors, (D) affiche  $v_1, v_2, \dots, v_P$  pour  $v_0 = -3, v_{n+1} = v_n + 4$ .
- (b) Si on affecte 1 à  $I$ , alors (E) affiche  $u_N$  pour  $u_1 = 4, u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 2, \forall n \geq 1$ .
7. (a) La boucle *Tantque* de (E) devient « Pour  $I$  allant de 1 à  $N, U \leftarrow \frac{2}{5}U + 2$ , Fin Pour », sans initialisation de  $I$ .
- (b) Dans l'algorithme (F), on ne peut transformer la boucle *Tant que* en boucle *Pour* car on ne sait pas à l'avance à partir de quel multiple de  $\frac{1}{2}$  la fonction  $f$  « dépasse » la borne  $A$  que l'on saisit.
- (c) (C) :  $I \in \mathbb{N}$ , Init. :  $I \leftarrow 0$ , Boucle : Tant que  $I < N, I \leftarrow I + 1, U \leftarrow \frac{3}{4}U$ , Fin Tantque.
- (D) :  $K \geq 1$ , Init. :  $K \leftarrow 1$ , Boucle : Tant que  $K < P, K \leftarrow K + 1, V \leftarrow 4 + V$ , Fin Tantque.
8. L'algorithme (H) est celui du discriminant d'un trinôme du second degré dans  $\mathbb{R}$ ,  $f(x) = ax^2 + bx + c$ .

**Algo (H)**  
 Saisir  $A \neq 0, B$  et  $C$   
 $D \leftarrow B^2 - 4AC$  à  $D$   
 Si  $D > 0$ , Alors  
 $U \leftarrow \frac{-B - \sqrt{D}}{2A}$  et  $V \leftarrow \frac{-B + \sqrt{D}}{2A}$   
 Afficher "Deux racines réelles :"  $U$  "et"  $V$  "."  
 Sinon  
 Si  $D = 0$ , Alors  
 $U \leftarrow \frac{-B}{2A}$   
 Afficher "Une racine réelle double :"  $U$  "."  
 Sinon  
 Afficher "Pas de racine réelle."  
 Fin Si  
 Fin Si

9. (I) :  $A$  n'est pas initialisé alors que  $B$  l'est sans que ce soit nécessaire. On peut donc « Affecter 2 à  $A$  » plutôt qu'à  $B$ . Par ailleurs,  $N$  ne doit pas être nul et l'initialisation de  $K$  est inutile tout comme cet algorithme qui affichera toujours  $3 - 2 = 1$ .
- (J) :  $C$  n'est pas déclaré et  $K$  n'est pas initialisé à 0. Cet algorithme affichera toujours 0 ce qui est extrêmement inutile.
- (K) : Il faut « Saisir  $N (\geq 1)$  » et la variable s'appelle  $K$  et non  $I$ . Cet algorithme affiche alors les termes  $f_1, f_2, \dots, f_N$  de l'historique suite de Fibonacci :  $f_0 = 0, f_1 = 1, f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ .

(L) : Il manque l'incrémentation «  $I \leftarrow I + 1$  » dans la boucle. Cet algorithme affiche les valeurs successives de la suite  $u_0 = 1, u_1 = 4, u_{n+2} = \frac{u_{n+1} + u_n}{2}$ .

(M) donne le premier entier naturel pour lequel la fonction  $f(x) = 1 - x^3$  dépasse  $A$ . Le problème est que  $f$  est décroissante et ceci n'est donc pas pertinent du tout : cela donne généralement 0 ou pire, l'algorithme tourne à l'infini si  $A > 1$ . Il faut donc mieux imposer  $A$  négatif et faire un test « Tant que  $F > A$  » pour voir quand elle passe en dessous.

10. L'algorithme (N) affiche une valeur approchée d'une racine de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[A; B]$  par la *méthode de dichotomie*. Le réel strictement positif  $E$  donne la précision de l'approximation.

La fonction  $f$  doit être continue et monotone (théorème des valeurs intermédiaires!). Pour  $f$  croissante, on affecte  $I$  à  $B$  lorsque  $f(I)$  est positif et  $I$  à  $A$  lorsque  $f(I)$  est négatif. On inverse  $B$  et  $A$  lorsque  $f$  est décroissante.

Si  $f(A) \times f(B) < 0$ ,  $f$  change de signe entre  $A$  et  $B$  et s'annule donc : ce test est nécessaire.

Il est à noter que  $f$  n'admet pas nécessairement une unique racine et l'algorithme ne donne pas le même résultat selon les valeurs de  $A$  et de  $B$  saisies.

Vous avez peut-être besoin des explications de votre professeur alors, n'hésitez pas.

11. Voici des algorithmes répondant aux problèmes posés.

**Algo (a)**

Saisir  $X$   
 $X \leftarrow 3X^2 - 5 \cos(X) + 7$   
 Afficher  $X$

**Algo (b)**

Saisir  $xA, yA, xB$  et  $yB$   
 $xA \leftarrow \frac{xA + xB}{2}$   
 $yA \leftarrow \frac{yA + yB}{2}$   
 Afficher  $xA$  et  $yA$

**Algo (c)**

Saisir  $P$   
 Pour  $I$  allant de 0 à  $P$   
 $U \leftarrow I^2 - 3I + 4$   
 Afficher  $U$   
 Fin Pour

**Algo (d)**

$V \leftarrow 5$   
 Saisir  $N$  ( $\geq 1$ )  
 Pour  $K$  allant de 1 à  $N$   
 $V \leftarrow 2V - 3$   
 Fin Pour  
 Afficher  $V$

**Algo (e)**

$W \leftarrow 5$   
 $U \leftarrow 4$   
 Saisir  $N$  ( $\geq 2$ )  
 Pour  $K$  allant de 1 à  $N - 1$   
 $V \leftarrow W$   
 $W \leftarrow 3U - 2W$   
 $U \leftarrow V$   
 Fin Pour  
 Afficher  $W$

**Algo (f)**

Saisir  $Xu, Yu, Xv$  et  $Yv$   
 $S \leftarrow Xu \times Xv + Yu \times Yv$   
 Afficher "Leur produit scalaire est"  $S$   
 Si  $S = 0$ , Alors  
 Afficher "et ils sont orthogonaux"  
 Fin Si

**Algo** (g)

```

N ← Aléat(0; 100)
I ← 0
Tant que I < 101
 I ← I + 1
 Saisir E
 Si E = N, Alors
 Afficher "Bravo !"
 Sinon
 Si E > N, Alors
 Si E ≥ 101, Alors
 Afficher "Tu n'as rien compris !"
 Sinon
 Afficher "Trop grand !"
 Fin Si
 Sinon
 Afficher "Trop petit !"
 Fin Si
 Fin Si
Fin Tant que
Si I ≥ 101, Alors
 Afficher "Tu n'es vraiment pas très doué !"
Fin Si

```

12. Voici le programme du « discriminant réel » sur une T.I.

| Commentaires                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | T.I.                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <i>Écriture du programme</i>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | PROGRAM :DEGRE2                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
| <b>Initialisation</b><br><i>Commencer par effacer l'écran</i>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | : ClrHome                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
| <b>Entrées</b><br><i>Demander la valeur de a</i><br><i>Demander la valeur de b</i><br><i>Demander la valeur de c</i>                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | : Prompt A<br>: Prompt B<br>: Prompt C                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
| <b>Traitement</b><br><i>Calculer <math>\Delta</math> et Affecter la valeur à D</i><br><i>Afficher D</i><br><i>Si <math>\Delta</math> est strictement négatif</i><br><i>Alors</i><br><i>Afficher "Pas de solution réelle"</i><br><br><i>Fin de si</i><br><i>Si <math>\Delta</math> est nul</i><br><i>Alors</i><br><i>Afficher "1 solution double"</i><br><br><i>Calculer la solution et affecter la valeur à X</i><br><i>Afficher la valeur de X</i><br><i>Fin de si</i><br><i>Si <math>\Delta</math> est strictement positif</i><br><i>Alors</i><br><i>Afficher "2 solutions réelles"</i><br><br><i>Calculer la première solution et affecter la valeur à X</i><br><i>Afficher la valeur de X</i><br><i>Calculer la deuxième solution et affecter la valeur à X</i><br><i>Afficher la valeur de X</i><br><i>Fin de si</i> | : $B^2 - 4 \times A \times C \rightarrow D$<br>: Disp D<br>: If D < 0<br>: Then<br>: Disp "Pas de solution<br>réelle"<br>: End<br>: If D = 0<br>: Then<br>: Disp "1 solution<br>double"<br>: $-B / (2A) \rightarrow X$<br>: Disp X<br>: End<br>: If D > 0<br>: Then<br>: Disp "2 solutions<br>réelles"<br>: $(-B - \sqrt{D}) / (2A) \rightarrow X$<br>: Disp X<br>: $(-B + \sqrt{D}) / (2A) \rightarrow X$<br>: Disp X<br>: End |

13. Après tout ceci, vous avez certainement réussi à faire tourner vos préférés.



## Sommaire

|          |                           |            |
|----------|---------------------------|------------|
| <b>1</b> | <b>Diagrammes de Venn</b> | <b>533</b> |
| <b>2</b> | <b>Ensembles</b>          | <b>536</b> |
| <b>3</b> | <b>Logique</b>            | <b>538</b> |
| 3.1      | Propositions              | 538        |
| 3.2      | Implication               | 539        |
| 3.3      | Équivalence               | 540        |
| 3.4      | Exercices                 | 540        |
| <b>4</b> | <b>Solutions</b>          | <b>542</b> |

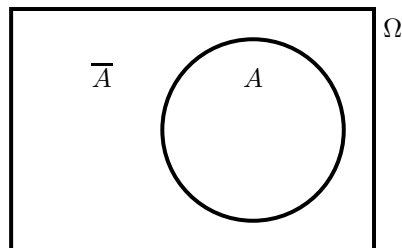
Ce cahier est fondamental pour votre scolarité et votre vie.

## 1 Diagrammes de Venn

Les diagrammes de Venn, ou diagrammes *en patates*, sont des représentations graphiques des relations entre plusieurs ensembles. Chaque ensemble est représenté par une forme géométrique simple comme un cercle, une ellipse ou un rectangle.

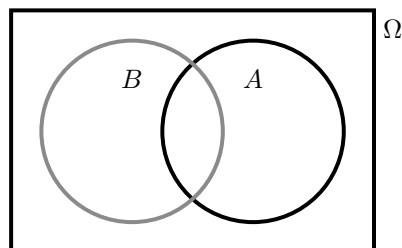
### Un ensemble dans l'univers

Dans ce premier exemple, nous voyons l'univers  $\Omega$  (l'intérieur du rectangle) et  $A$ , un *sous-ensemble* de  $\Omega$  (l'intérieur du cercle). Le *complémentaire* de  $A$ , noté  $\bar{A}$ , est la partie du rectangle qui n'est pas dans le cercle.



### Deux ensembles dans l'univers

Dans ce second exemple, nous voyons l'univers  $\Omega$  et deux sous-ensembles de  $\Omega$ ,  $A$  et  $B$ . L'*intersection*  $A \cap B$  des deux ensembles est leur partie commune, ce qui est dans les deux cercles en même temps. L'*union*  $A \cup B$  des deux ensembles est ce qui se situe dans au moins un des deux cercles, intersection incluse donc.

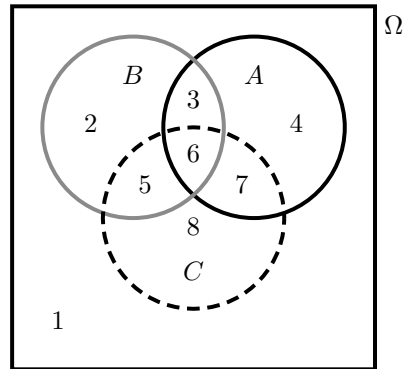




### Trois ensembles dans l'univers

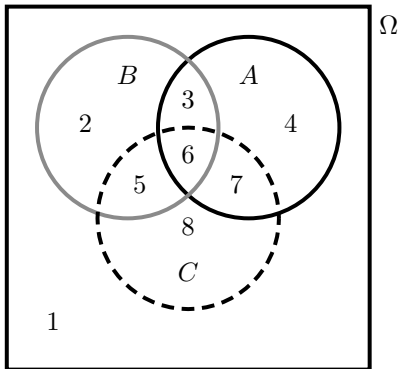
Dans ce troisième exemple, nous voyons l'univers  $\Omega$  et trois sous-ensembles de  $\Omega$ ,  $A$ ,  $B$  et  $C$ . Toutes les intersections et unions de deux ou trois de ces ensembles ainsi que leur complémentaire, y sont représentées.

Par exemple, la région 3 est  $(A \cap B) \cap \overline{C}$ , tandis que  $(\overline{A} \cup \overline{B}) \cap C$  est constitué des régions 5, 6 et 8.



#### Exercice 1

Décrire les différentes régions au moyen d'unions et d'intersections des ensembles  $A$ ,  $B$ ,  $C$  ainsi que leur complémentaire, et réciproquement.



- |             |                                                 |
|-------------|-------------------------------------------------|
| (a) 1.      | (n) $\overline{A \cap C}$ .                     |
| (b) 2.      | (o) $\overline{A \cup C}$ .                     |
| (c) 3.      | (p) $\overline{B \cup C}$ .                     |
| (d) 4.      | (q) $\overline{B \cap C}$ .                     |
| (e) 5.      | (r) $(B \cap C) \cup A$ .                       |
| (f) 6.      | (s) $B \cap (C \cup A)$ .                       |
| (g) 7.      | (t) $(B \cup A) \cap (C \cup A)$ .              |
| (h) 8.      | (u) $(B \cup C) \cap A$ .                       |
| (i) 3 et 6. | (v) $B \cup (C \cap A)$ .                       |
| (j) 8 et 3. | (w) $(B \cap A) \cup (C \cap A)$ .              |
| (k) 5 et 7. | (x) $(\overline{A} \cup \overline{B}) \cap C$ . |
| (l) 6 et 8. | (y) $\overline{B \cup C} \cap \overline{A}$ .   |
| (m) 1 et 7. | (z) $\overline{\overline{A \cap C} \cup B}$ .   |

Vous aurez donc remarqué que l'on a toujours  $\overline{\overline{A}} = A$ ,  $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ ,  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ ,  $(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C)$  et  $(A \cap B) \cup (A \cap C) = A \cap (B \cup C)$ .

#### Exercice 2

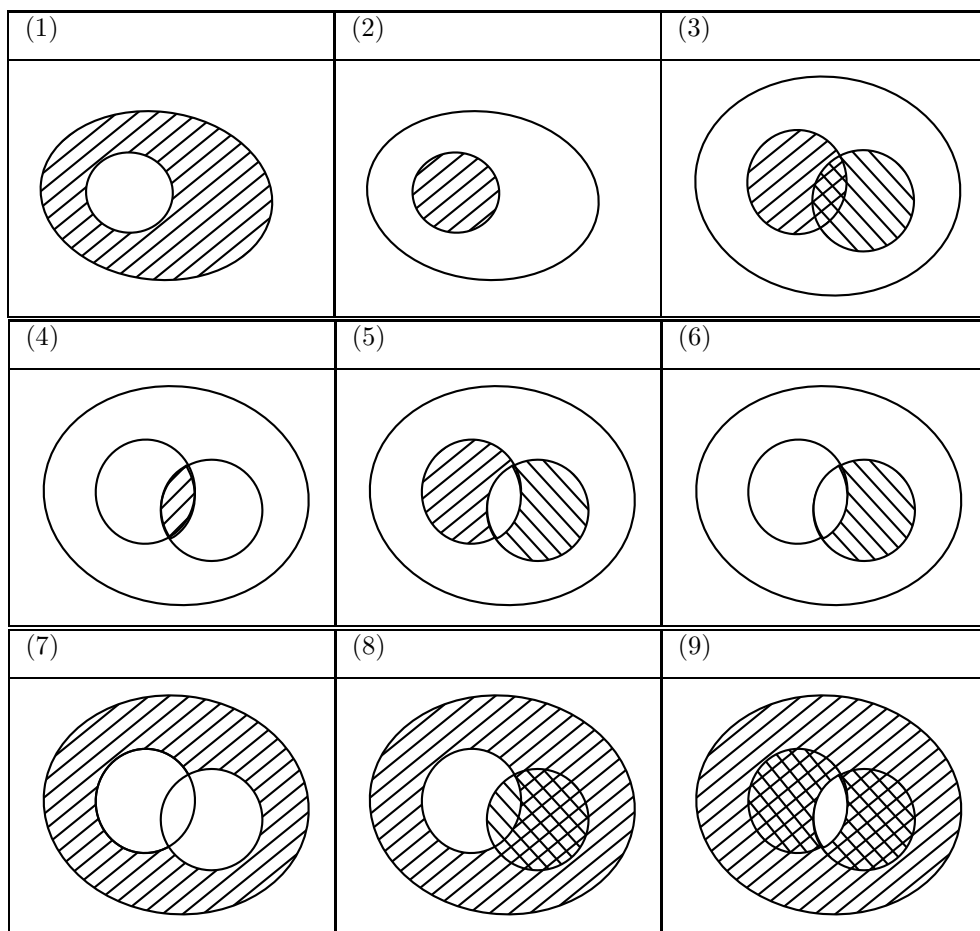
Faire correspondre à chacun de ces ensembles, son diagramme de Venn parmi ceux des pages suivantes. Les décrire ensuite en termes d'unions et d'intersections.

- |                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                                                                           |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>A. Fonctions affines et fonctions trigonométriques telles que <math>f(0) = 0</math>.</p> <p>B. Triangles isocèles non équilatéraux.</p> <p>C. Parmi les réels, les entiers naturels et les nombres irrationnels.</p> <p>D. Les entiers naturels qui ne sont ni</p> | <p>multiples de 2 ni de 3.</p> <p>E. Parallélogrammes dont les diagonales n'ont pas même longueur et ne sont pas perpendiculaires.</p> <p>F. Parallélogrammes dont les diagonales ont même longueur et sont perpendi-</p> |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

- culaires ou ni l'un, ni l'autre.
- G. Entiers multiples de 7 ou de 2 mais pas de 14.
- H. Parallélogrammes dont les diagonales ont même longueur ou sont perpendiculaires ou ni l'un, ni l'autre mais pas les deux.
- I. Les réels n'étant pas décimaux.
- J. Les fonctions telles que  $f(0) \neq 0$  qui ne sont ni affines, ni trigonométriques.
- K. Les nombres réels étant décimaux.
- L. Parallélogrammes ayant leurs diagonales de même longueur ou perpen-

diculaires.

- M. Les réels irrationnels ou décimaux.
- N. Les réels ni irrationnels, ni naturels.
- O. Parallélogrammes de diagonales de même longueur et perpendiculaires.
- P. Les fonctions telles que  $f(0) = 0$  qui ne sont ni affines, ni trigonométriques.
- Q. Les fonctions affines, trigonométriques ou les fonctions telles que  $f(0) \neq 0$ .
- R. Les entiers multiples de 7 qui ne sont pas pairs.



|      |      |      |
|------|------|------|
| (10) | (11) | (12) |
|      |      |      |
| (13) | (14) | (15) |
|      |      |      |
| (16) | (17) | (18) |
|      |      |      |

## 2 Ensembles

### Vocabulaire

#### Notations ensemblistes

$\{\dots\}$  : un ensemble.

: ou | ou / : “tel que” (tq.).

$\setminus$  : “privé de”,  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ .

#### Ensembles de nombres

$\mathbb{N}$  : les entiers naturels.

$\mathbb{Z}$  : les entiers relatifs

$\mathbb{D}$  : les nombre décimaux.

$\mathbb{Q}$  : les nombres rationnels.

$\mathbb{R}$  : les nombres réels.

$\mathbb{R}^*$  : les réels non nuls.

$\mathbb{R}^+$  ou  $\mathbb{R}_+$  : les réels positifs.

$\mathbb{R}^-$  ou  $\mathbb{R}_-$  : les réels négatifs.

$\mathbb{R}_+^*$  : les réels strictement positifs.

**Ensemble, sous-ensembles, éléments** $\cap$  : l'intersection de deux ensembles. $\cup$  : l'union de deux ensembles. $\in$  : "appartient à" ou "est un élément de". $\subset$  : "est un sous-ensemble de".**Opérateurs logiques** $\neg$  : la négation d'une proposition, "non". $\wedge$  : la conjonction de deux propositions, "et". $\vee$  : la disjonction de deux propositions, "ou". $\forall$  : "pour tout". $\exists$  : "il existe". $\exists!$  : "il existe un unique". $\nexists$  : "il n'existe pas".

Un ensemble  $E$  est défini si, et seulement si,  
l'assertion  $(x \in E) \wedge \neg(x \in E)$  est fausse.

**Exercice 3** Faire correspondre chaque liste de nombres (à droite) avec l'ensemble qui la contient (à gauche).

|                                                                                                                      |                                                         |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|
| $\{2k+1 : k \in \mathbb{Z}\} \dots A$                                                                                | $a \dots 6, 21, 336, 4272$                              |
| $\left\{n : n \in \mathbb{Z} \wedge \frac{12}{n} \in \mathbb{Z}\right\} \dots B$                                     | $b \dots 3+5i, \sqrt{2}-i, 17, -1+\pi i$                |
| $\{n^2 : n \in \mathbb{N} \cap [0; 5]\} \dots C$                                                                     | $c \dots -5, -2\pi, -\frac{4}{7}, -0.0001$              |
| $\{3k : k \in \mathbb{N}\} \dots D$                                                                                  | $d \dots 0, 1, 9, 16$                                   |
| $\{x \in \mathbb{R} : 3x \in \mathbb{Z}\} \dots E$                                                                   | $e \dots -5, -\sqrt{19}, 17.25, 5$                      |
| $\{a+bi : a \in \mathbb{R} \wedge b \in \mathbb{R}\} \dots F$                                                        | $f \dots 0, 9, 81, 196$                                 |
| $\{7k+1 : k \in \mathbb{Z}\} \dots G$                                                                                | $g \dots \frac{12}{7}, -\frac{2}{3}, 42, \frac{-28}{2}$ |
| $\{n \in \mathbb{N} : \exists m \in \mathbb{Z}, m^2 = n\} \dots H$                                                   | $h \dots 3, 6, -12, 1$                                  |
| $\{x \in \mathbb{R} : x^2 = x\} \dots I$                                                                             | $i \dots 17, 2, 5, 43, 199$                             |
| $\{x \in \mathbb{R} : \exists p, q \in \mathbb{Z}, q \neq 0 \wedge xq = p\} \dots J$                                 | $j \dots 5, \sqrt{2}, -13, \sqrt{13}$                   |
| $\{r \in \mathbb{R} : \exists k \in \mathbb{Z}, r^2 = k\} \dots K$                                                   | $k \dots (2; 2); (1; 5); (3; 1); (1; 1)$                |
| $\{n \in \mathbb{Z} :  n  \leq 5\} \dots L$                                                                          | $l \dots -4, -2, 0, 3$                                  |
| $\{x \in \mathbb{R} :  x  \leq 5\} \dots M$                                                                          | $m \dots \frac{7}{3}, -17, -\frac{52}{3}, 0$            |
| $\{x \in \mathbb{R} : \forall y \in \mathbb{N}, x \leq y\} \dots N$                                                  | $n \dots 0, 1$                                          |
| $\{(x; y) : x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N} \wedge x+y=7\} \dots O$                                         | $o \dots -7, -3, 5, 17$                                 |
| $\{x \in \mathbb{R} : x \leq -3 \vee x \geq 5\} \dots P$                                                             | $p \dots (3; 6); (12; 24); (5; 10); (131; 262)$         |
| $\{n \in \mathbb{Z} : \forall m \in \mathbb{Z}, n > m\} \dots Q$                                                     | $q \dots (2; 5); (1; 6); (4; 3); (3; 4)$                |
| $\left\{n \in \mathbb{N} : \nexists m \in \mathbb{N} \setminus \{1; n\}, \frac{n}{m} \in \mathbb{N}\right\} \dots R$ | $r \dots \sqrt{2}, -\pi, 2.256, -4.99$                  |
| $\{(x; y) : x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N} \wedge xy \leq 6\} \dots S$                                     | $s \dots -20, 1, 50, 778$                               |
| $\{(x; y) : x \in \mathbb{N} \wedge y \in \mathbb{N} \wedge y = 2x\} \dots T$                                        | $t \dots \emptyset$                                     |

## Paradoxe de Russell<sup>†</sup>

*L'ensemble des ensembles n'appartenant pas à eux-mêmes appartient-il à lui-même ?*

Si l'on répond oui, alors, comme par définition les membres de cet ensemble n'appartiennent pas à eux-mêmes, il n'appartient pas à lui-même : contradiction. Mais si l'on répond non, alors il a la propriété requise pour appartenir à lui-même : contradiction de nouveau. On a donc une contradiction dans les deux cas, ce qui rend l'existence d'un tel ensemble paradoxale.

Plus formellement, si l'on pose  $y = \{x \mid x \notin x\}$ , on a immédiatement que  $y \in y \iff y \notin y$  donc chacune des deux possibilités,  $y \in y$  et  $y \notin y$ , mène à une contradiction.

Et de façon plus imagée : *Un barbier se propose de raser tous les hommes qui ne se rasent pas eux-mêmes, et seulement ceux-là. Le barbier doit-il se raser lui-même ?*

## 3 Logique

### 3.1 Propositions

**Définition 1** Une proposition est une affirmation qui peut être vraie ou fausse, mais qui ne peut être les deux en même temps ou ni l'un ni l'autre.

*Exemples :* Considérons les trois propositions suivantes :

- $\mathcal{P}_1$  : «  $x + 2 = 2 + x$  ».
- $\mathcal{P}_2$  : «  $2 \times 3 = 7$  ».
- $\mathcal{P}_3$  : «  $x^2 = 9$  ».

\* La proposition  $\mathcal{P}_1$  est toujours vraie.

\* La proposition  $\mathcal{P}_2$  est toujours fausse.

\* La proposition  $\mathcal{P}_3$  peut être vraie ou fausse suivant les valeurs de  $x$  : si  $x = 3$ , elle est vraie, si  $x = -3$ , elle est vraie et elle est fausse dans tous les autres cas.

**Exercice 4** Les trois propositions suivantes sont-elles toujours vraies ?

- $\mathcal{P}_4$  : «  $x - 2$  est strictement plus grand que  $x$  ».
- $\mathcal{P}_5$  : «  $2x$  est plus grand ou égal à  $x$  ».
- $\mathcal{P}_6$  : « le carré d'un nombre pair est pair ».

**Exercice 5** Énoncer une affirmation qui n'est pas une proposition.

**Définition 2** La négation d'une proposition, notée « non  $\mathcal{P}$  » ou «  $\neg \mathcal{P}$  », est une proposition qui est fausse lorsque  $\mathcal{P}$  est vraie et qui est vraie lorsque  $\mathcal{P}$  est fausse.

Remarque : La proposition  $\neg(\neg \mathcal{P})$  est précisément  $\mathcal{P}$ .

**Exercice 6** Établir la négation des propositions  $\mathcal{P}_1$  à  $\mathcal{P}_6$ . Sont-elles toujours vraies ?

---

†. Publié en 1903 par Bertrand Russell (1872–1970), troisième comte du nom. Mathématicien, logicien, épistémologue, écrivain (Nobel 1950), homme politique (membre du Parlement britannique) et moraliste gallois, Russell est considéré comme l'un des plus importants philosophes du XX<sup>e</sup>s.

**Exercice 7** Établir la négation des propositions suivantes. Lesquelles sont vraies ?

- $\mathcal{P}_7 : \forall a \in \mathbb{R}, a^2 > 0$ .
- $\mathcal{P}_8 : \exists b \in \mathbb{R}^+ \text{ tq. } b - 3 < 0$ .
- $\mathcal{P}_9 : \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \text{ tq. } x \leq y$ .
- $\mathcal{P}_{10} : \exists \alpha \in \mathbb{R}^+ \text{ tq. } \forall \beta \in \mathbb{R}, \beta^2 - \alpha < 0$ .

Toutefois, il existe des propositions *indécidables*, dont on ne peut affirmer si elles sont vraies ou fausses. C'est un fameux résultat du mathématicien Kurt Gödel (1906-1978) et je ne peux que vous conseiller de lire *La Déesse des petites victoires*, brillant roman de Yannick Granec autour de ce personnage.

## 3.2 Implication

**Définition 3** Pour affirmer que « si  $\mathcal{P}$  (est vraie), alors  $\mathcal{Q}$  (est vraie) », les mathématiciens disent que «  $\mathcal{P}$  implique  $\mathcal{Q}$  » et écrivent  $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ .  $\mathcal{P}$  est la condition suffisante (l'hypothèse) et  $\mathcal{Q}$  est la condition nécessaire (la conclusion).

Exemples : • Si  $\underbrace{x = 3}_{\mathcal{P}}$ , alors  $\underbrace{x^2 = 9}_{\mathcal{Q}}$ .  
 • Si  $\underbrace{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}}_{\mathcal{P}}$ , alors  $\underbrace{ABDC \text{ est un parallélogramme}}_{\mathcal{Q}}$ .

Remarque : Attention, l'implication n'est pas une relation de causalité. Par exemple, l'assertion « les oiseaux volent donc la neige est blanche » est fausse mais l'implication « si les oiseaux volent alors la neige est blanche » est vraie. N'allons pas plus loin, nous risquerions d'être déconcertés.

### Définition 4

L'implication  $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$  est appelée l'implication réciproque de  $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ .  
 L'implication  $\text{non } \mathcal{Q} \Rightarrow \text{non } \mathcal{P}$  est appelée la contraposée de  $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ .

**Exercice 8** VouF ?

| $\mathcal{P}$      | $\mathcal{Q}$      | $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ | $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$ | $\neg \mathcal{Q} \Rightarrow \neg \mathcal{P}$ | $\neg \mathcal{P} \Rightarrow \neg \mathcal{Q}$ |
|--------------------|--------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|-------------------------------------------------|-------------------------------------------------|
| $n$ est premier    | $n = 3$            |                                       |                                       |                                                 |                                                 |
| $x \in \mathbb{D}$ | $x \in \mathbb{Q}$ |                                       |                                       |                                                 |                                                 |
| $ab = 9$           | $a = 3$ et $b = 3$ |                                       |                                       |                                                 |                                                 |
| $x \geq 2$         | $x \geq 3$         |                                       |                                       |                                                 |                                                 |
| $x > 0$            | $x \geq 0$         |                                       |                                       |                                                 |                                                 |
| $x < 0$            | $x^3 < 0$          |                                       |                                       |                                                 |                                                 |

### Propriété 1

Si l'implication  $(\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q})$  est vraie,  
 alors sa contraposée  $(\text{non } \mathcal{Q} \Rightarrow \text{non } \mathcal{P})$  est vraie.

**Exercice 9** Quelle est la contraposée de l'implication  $(\text{non } \mathcal{Q} \Rightarrow \text{non } \mathcal{P})$  ?

### 3.3 Équivalence

#### Définition 5

Deux propositions  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  sont dites équivalentes si  $\mathcal{P} \implies \mathcal{Q}$  et  $\mathcal{Q} \implies \mathcal{P}$ .  
Si  $\mathcal{P} \iff \mathcal{Q}$ , alors  $\mathcal{P}$  est vraie si, et seulement si,  $\mathcal{Q}$  est vraie.

Exemples :  $\underbrace{x = 3}_{\mathcal{P}} \iff \underbrace{2x = 6}_{\mathcal{Q}}$ .

• Soit  $\mathcal{C}$  un cercle de diamètre  $[AB]$ .

$\underbrace{M \text{ est un point de } \mathcal{C} \text{ différent de } A \text{ et } B}_{\mathcal{P}} \text{ si, et seulement si, } \underbrace{\widehat{AMB} = 90^\circ}_{\mathcal{Q}}.$

**Exercice 10** Donner un exemple d'implication qui n'est pas une équivalence.

### 3.4 Exercices

**Exercice 11** Très facile

A. La phrase suivante est supposée vraie :

« Si la télé est allumée, alors il y a nécessairement quelqu'un qui la regarde. »

Choisir la réponse correcte pour chaque question.

1. La télé est allumée. Quelqu'un la regarde-t-il ?

A. Oui.

B. Non.

C. On ne peut savoir.

2. Personne ne regarde la télé. Est-elle allumée ?

A. Oui.

B. Non.

C. On ne peut savoir.

3. La télé est éteinte. Quelqu'un la regarde-t-il ?

A. Oui.

B. Non.

C. On ne peut savoir.

4. Quelqu'un regarde la télé. Est-elle allumée ?

A. Oui.

B. Non.

C. On ne peut savoir.

B. Même consigne pour la phrase : « L'équation  $(E)$  n'a pas de solution négative. »

1. Est-ce que  $-2$  est une solution de  $(E)$  ?

A. Oui.

B. Non.

C. On ne peut savoir.

2.  $a$  est une solution de  $(E)$ . Est-ce que  $a$  est négatif ?

A. Oui.

B. Non.

C. On ne peut savoir.

3.  $3$  est-il une solution de  $(E)$  ?

A. Oui.

B. Non.

C. On ne peut savoir.

4.  $b$  n'est pas une solution de  $(E)$ . Est-ce que  $b$  est négatif ?

A. Oui.

B. Non.

C. On ne peut savoir.

**Exercice 12** Facile

Compléter par « donc » ou « car ».

1. J'ai eu un accident ... j'ai grillé un feu rouge.

2. Il est malade ... il ne viendra pas.

3. J'ai eu un cadeau ... c'est mon anniversaire.

4. Je ne suis pas européen ... je ne suis pas allemand.
5. Jean est triste ... c'est la fin des vacances.
6. Il pleut ... la fête est annulée.
7.  $(AB)$  et  $(CD)$  sont parallèles ...  $ABCD$  est un parallélogramme.
8.  $ABCD$  possède deux angles droits ... c'est un rectangle.
9. Le triangle  $ABC$  est équilatéral ... il est isocèle.
10.  $y^2 = 25$  ...  $y = 5$ .
11.  $x \in [-1; 4]$  ...  $x \in [-2; 5]$ .
12.  $u^2 \geq 49$  ...  $u \geq 7$ .
13.  $\sqrt{x} \leq 6$  ...  $x \leq 36$ .

**Exercice 13** Pas si facile

Préciser si les implications et équivalences suivantes sont vraies ou fausses.

| $A$                    | $B$                          | $A \Rightarrow B$ | $B \Rightarrow A$ | $A \Leftrightarrow B$ |
|------------------------|------------------------------|-------------------|-------------------|-----------------------|
| Je vis en France       | Je vis en Europe             |                   |                   |                       |
| Je suis un adolescent  | J'ai 16 ans                  |                   |                   |                       |
| $CDEF$ parallélogramme | $CDEF$ carré                 |                   |                   |                       |
| $MNP$ rectangle en $M$ | $MP^2 + MN^2 = NP^2$         |                   |                   |                       |
| $x \in \mathbb{N}$     | $x \in \mathbb{Z}$           |                   |                   |                       |
| $a + b = 5$            | $a = 2$ et $b = 3$           |                   |                   |                       |
| $4x - (x - 5) = 11$    | $x = 2$                      |                   |                   |                       |
| $(ax + b)(cx + d) = 0$ | $ax + b = 0$ et $cx + d = 0$ |                   |                   |                       |
| $(ax + b)(cx + d) = 0$ | $ax + b = 0$ ou $cx + d = 0$ |                   |                   |                       |

**Exercice 14** Peu difficile

Pour chacune des affirmations suivantes, déterminer si elle est vraie ou fausse.

- Pour prouver qu'elle est fausse, il suffit de trouver un contre-exemple.
  - Pour prouver qu'elle est vraie, il est nécessaire de trouver une démonstration.
1. Si  $x^2 \geq 4$  alors  $x \geq 2$ .
  2. Pour tous réels  $x$  et  $y$ ,  $(x + y)^3 = x^3 + y^3$ .
  3. Pour tout réel  $x$ , le réel  $-10x$  est négatif.
  4. Il existe une équation n'ayant aucune solution réelle.
  5. Il existe une équation ayant cinq solutions réelles distinctes.
  6. Si  $a$  et  $b$  sont deux entiers naturels, alors  $\frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4}$  est un entier naturel.

**Exercice 15** Assez difficile

Soient  $a$  et  $b$  deux entiers naturels tels que  $a > b$ .

Démontrer que, si  $(a^2 - b^2)$  est premier, alors  $a$  et  $b$  sont consécutifs.

La réciproque est-elle vraie ?

**Bonus** Très plaisant

Faites-vous donc offrir puis lisez le petit *Éloge des mathématiques* d'Alain Badiou qui nous explique avec ravissement pourquoi l'on se passionne logiquement pour cette discipline.



## 4 Solutions

### Exercice 1

Ces solutions ne sont pas toujours uniques et vous pouvez en avoir trouvé d'autres.

- |                                                                                            |                                                   |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------|
| (a) 1 : $\overline{A \cup B \cup C}$ .                                                     | (n) $\overline{A \cap C}$ : 1, 2, 3, 4, 5 et 8.   |
| (b) 2 : $B \cap \overline{A \cup C}$ .                                                     | (o) $\overline{A \cup C}$ : 1, 2, 3, 4, 5 et 8.   |
| (c) 3 : $A \cap B \cap \overline{C}$ .                                                     | (p) $\overline{B \cup C}$ : 1 et 4.               |
| (d) 4 : $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$ .                                          | (q) $\overline{B \cap C}$ : 1 et 4.               |
| (e) 5 : $B \cap C \cap \overline{A}$ .                                                     | (r) $(B \cap C) \cup A$ : 3, 4, 5, 6 et 7.        |
| (f) 6 : $A \cap B \cap C$ .                                                                | (s) $B \cap (C \cup A)$ : 3, 5, 6.                |
| (g) 7 : $A \cap C \cap \overline{B}$ .                                                     | (t) $(B \cup A) \cap (C \cup A)$ : 3, 4, 5, 6, 7. |
| (h) 8 : $C \cap \overline{A \cup B}$ .                                                     | (u) $(B \cup C) \cap A$ : 3, 6, 7.                |
| (i) 3 et 6 : $A \cap B$ .                                                                  | (v) $B \cup (C \cap A)$ : 2, 3, 5, 6, 7.          |
| (j) 8 et 3 : $(C \cap \overline{B} \cap \overline{A}) \cup (A \cap B \cap \overline{C})$ . | (w) $(B \cap A) \cup (C \cap A)$ : 3, 6, 7.       |
| (k) 5 et 7 :<br>$[(C \cap A) \cup (C \cap B)] \cap (\overline{A \cap B})$ .                | (x) $(\overline{A \cup B}) \cap C$ : 5, 6 et 8.   |
| (l) 6 et 8 : $(C \cap \overline{A \cup B}) \cup (A \cap B \cap C)$ .                       | (y) $\overline{B \cup C} \cap \overline{A}$ : 1.  |
| (m) 1 et 7 : $(\overline{A \cup B \cup C}) \cup (A \cap C \cap \overline{B})$ .            | (z) $\overline{A \cap C} \cup B$ : 7.             |

Ainsi, on a toujours,  $\overline{\overline{A}} = A$ ,  $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ ,  $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ ,  
 $(A \cup B) \cap (A \cup C) = A \cup (B \cap C)$  et  $(A \cap B) \cup (A \cap C) = A \cap (B \cup C)$ .

**Exercice 2** Ce qui suit est écrit de manière informelle.

- (1) : (I).  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{D}$ .
- (2) : (K).  $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}$ .
- (3) : (L).  $Diag.\acute{E}gal. \cup Diag.Perp. \subset Parall\acute{e}logrammes$ .
- (4) : (O).  $Diag.\acute{E}gal. \cap Diag.Perp. \subset Parall\acute{e}logrammes$ .
- (5) : (G).  $\{Multiples(7) \cup Multiples(2)\} \setminus Multiples(14) \subset \mathbb{Z}$ .
- (6) : (R).  $Multiples(7) \setminus Multiples(14) \subset \mathbb{Z}$ .
- (7) : (D).  $\mathbb{N} \setminus \{Multiples(2) \cup Multiples(3)\}$ .
- (8) : (E).  $\overline{Rectangles} \cup Losanges \subset Parall\acute{e}logrammes$ .
- (9) : (H).  $\overline{Carr\acute{e}s} \subset Parall\acute{e}logrammes$ .
- (10) : (F).  $\overline{Rectangle} \cup \overline{Losanges} \cup Carr\acute{e}s \subset Parall\acute{e}logrammes$ .
- (11) : (C).  $\mathbb{N} \cup Irrationnels \subset \mathbb{R}$  ou (M).  $\mathbb{D} \cup Irrationnels \subset \mathbb{R}$ .
- (12) : (N).  $\overline{\mathbb{N}} \cap \overline{Irrationnels} \subset \mathbb{R}$ .
- (13) : (M).  $\mathbb{D} \cup Irrationnels \subset \mathbb{R}$  ou (C).  $\mathbb{N} \cup Irrationnels \subset \mathbb{R}$ .
- (14) : (B).  $Isoc\acute{e}les \setminus \acute{E}quilat\acute{e}raux \subset Triangles$ .
- (15) : (A).  $(Trigos \cup Affines) \cap (0 \mapsto 0)$ .

(16) : (P).  $\overline{Trigos \cup Affines} \cap (0 \mapsto 0)$

(17) : (J).  $\overline{Trigos \cup Affines} \cap \overline{0 \mapsto 0}$

(18) : (Q).  $Trigos \cup Affines \cup \overline{0 \mapsto 0}$ .

### Exercice 3

|       |       |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| A - o | D - a | G - s | J - g | M - r | P - e | S - k |
| B - h | E - m | H - f | K - j | N - c | Q - t | T - p |
| C - d | F - b | I - n | L - l | O - q | R - i |       |

### Exercice 4

- $\mathcal{P}_4$  «  $x - 2$  est strictement plus grand que  $x$  » : toujours faux puisque  $x - 2 \leq x$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .
- $\mathcal{P}_5$  «  $2x$  est plus grand ou égal à  $x$  » : vrai pour  $x \geq 0$ , faux pour  $x < 0$ .
- $\mathcal{P}_6$  « le carré d'un nombre pair est pair » : toujours vrai car  $(2n)^2 = 4n^2$  pair.

**Exercice 5** La phrase « Il fait beau et chaud. » n'est pas une proposition mathématique car elle peut être à la fois vraie et fausse selon les préférences de chacun.  
En revanche, c'est une contrepèterie amusante et facile.

**Exercice 6** •  $\neg \mathcal{P}_1$  : «  $x + 2 \neq 2 + x$  » : toujours faux puisque  $\mathcal{P}_1$  est toujours vrai.

- $\neg \mathcal{P}_2$  : «  $2 \times 3 \neq 7$  » : toujours vraie puisque  $\mathcal{P}_2$  est toujours fausse.
- $\neg \mathcal{P}_3$  : «  $x^2 \neq 9$  » : vraie pour  $x \neq \pm 3$ , fausse si  $x = \pm 3$ .
- $\neg \mathcal{P}_4$  «  $x - 2 < x$  » : toujours vraie car  $\mathcal{P}_4$  toujours fausse.
- $\neg \mathcal{P}_5$  «  $2x$  est strictement plus petit que  $x$  » : vrai pour  $x < 0$ , faux pour  $x \geq 0$ .
- $\neg \mathcal{P}_6$  « le carré d'un pair n'est pas pair » : toujours faux car  $\mathcal{P}_6$  toujours vraie.

**Exercice 7** •  $\neg \mathcal{P}_7$  :  $\exists a \in \mathbb{R}, a^2 \leq 0$  est vraie :  $a = 0$  et  $a^2 = 0 \leq 0$  donc  $\mathcal{P}_7$  est fausse.

- $\mathcal{P}_8$  :  $\exists b \in \mathbb{R}^+ \text{ tq. } b - 3 < 0$  est vraie :  $b = 1 \in \mathbb{R}^+$  et  $b - 3 = -2 < 0$   
donc  $\neg \mathcal{P}_8$  :  $\forall b \in \mathbb{R}^+, b - 3 \geq 0$  est fausse.
- $\mathcal{P}_9$  :  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} \text{ tq. } x < y$  est vraie :  $y = x + 1 > x$   
donc  $\neg \mathcal{P}_9$  :  $\exists x \in \mathbb{R} \text{ tq. } \forall y \in \mathbb{R}, x \geq y$  est fausse.
- $\neg \mathcal{P}_{10}$  :  $\forall \alpha \in \mathbb{R}^+, \exists \beta \in \mathbb{R} \text{ tq. } \beta^2 - \alpha \geq 0$  est vraie :  $\beta = \sqrt{\alpha}$  et  $\beta^2 - \alpha = 0 \geq 0$   
donc  $\mathcal{P}_{10}$  est fausse.

### Exercice 8

| $\mathcal{P}$      | $\mathcal{Q}$      | $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ | $\mathcal{Q} \Rightarrow \mathcal{P}$ | $\neg \mathcal{Q} \Rightarrow \neg \mathcal{P}$ | $\neg \mathcal{P} \Rightarrow \neg \mathcal{Q}$ |
|--------------------|--------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|-------------------------------------------------|-------------------------------------------------|
| $n$ est premier    | $n = 3$            | F                                     | V                                     | F                                               | V                                               |
| $x \in \mathbb{D}$ | $x \in \mathbb{Q}$ | V                                     | F                                     | V                                               | F                                               |
| $ab = 9$           | $a = 3$ et $b = 3$ | F                                     | V                                     | F                                               | V                                               |
| $x \geq 2$         | $x \geq 3$         | F                                     | V                                     | F                                               | V                                               |
| $x > 0$            | $x \geq 0$         | V                                     | F                                     | V                                               | F                                               |
| $x < 0$            | $x^3 < 0$          | V                                     | V                                     | V                                               | V                                               |

**Exercice 9** La contraposée de  $\neg \mathcal{Q} \Rightarrow \neg \mathcal{P}$  est  $\neg \neg \mathcal{P} \Rightarrow \neg \neg \mathcal{Q}$  i.e.  $\mathcal{P} \Rightarrow \mathcal{Q}$ .

**Exercice 10** Dans l'exercice 8, seul le dernier item concerne une implication qui est aussi une équivalence.

**Exercice 11** Très facile

- A. 1 - Oui.                      2 - Non.                      3 - On ne peut savoir.                      4 - On ne peut savoir.  
 B. 1 - Non.                      2 - Non.                      3 - On ne peut savoir.                      4 - On ne peut savoir.

**Exercice 12** Facile

- |         |         |         |        |         |          |          |
|---------|---------|---------|--------|---------|----------|----------|
| 1. car  | 3. car  | 5. car  | 7. car | 9. donc | 11. donc | 13. donc |
| 2. donc | 4. donc | 6. donc | 8. car | 10. car | 12. car  |          |

**Exercice 13** Pas si facile

| $A$                    | $B$                          | $A \Rightarrow B$ | $B \Rightarrow A$ | $A \Leftrightarrow B$ |
|------------------------|------------------------------|-------------------|-------------------|-----------------------|
| Je vis en France       | Je vis en Europe             | Vrai              | Faux              | Faux                  |
| Je suis un adolescent  | J'ai 16 ans                  | Faux              | Vrai              | Faux                  |
| $CDEF$ parallélogramme | $CDEF$ carré                 | Faux              | Vrai              | Faux                  |
| $MNP$ rectangle en $M$ | $MP^2 + MN^2 = NP^2$         | Vrai              | Vrai              | Vrai                  |
| $x \in \mathbb{N}$     | $x \in \mathbb{Z}$           | Vrai              | Faux              | Faux                  |
| $a + b = 5$            | $a = 2$ et $b = 3$           | Faux              | Vrai              | Faux                  |
| $4x - (x - 5) = 11$    | $x = 2$                      | Vrai              | Vrai              | Vrai                  |
| $(ax + b)(cx + d) = 0$ | $ax + b = 0$ et $cx + d = 0$ | Faux              | Vrai              | Faux                  |
| $(ax + b)(cx + d) = 0$ | $ax + b = 0$ ou $cx + d = 0$ | Vrai              | Vrai              | Vrai                  |

**Exercice 14** Peu difficile

- Si  $x^2 \geq 4$  alors  $x \geq 2$  Faux.  $x = -3$  par exemple.
- Pour tous réels  $x$  et  $y$ ,  $(x + y)^3 = x^3 + y^3$  : Faux.  $x = y = 1$  par exemple.
- Pour tout réel  $x$ , le réel  $-10x$  est négatif : Faux.  $x = -1$  par exemple.
- Il existe une équation n'ayant aucune solution réelle : Vrai,  $x^2 + 1 = 0$  par exemple.
- Il existe une équation ayant cinq solutions réelles distinctes : Vrai.  
 $x(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2) = 0$  par exemple.
- Si  $a$  et  $b$  sont deux entiers naturels, alors  $\frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4}$  est un entier naturel :  
 Vrai car  $\frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4} = \frac{[(a+b) + (a-b)][(a+b) - (a-b)]}{4} = \frac{(2a)(2b)}{4} = ab \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 15** Assez difficile

Soient  $a$  et  $b$  deux entiers naturels tels que  $a > b$ .

Si  $(a^2 - b^2) = (a + b)(a - b)$  est premier alors il a exactement deux diviseurs et donc l'un des deux termes est égal à 1, le plus petit des deux nécessairement. Ainsi,  $a - b = 1$  :  $a$  et  $b$  sont consécutifs.

Réciproquement, si  $a$  et  $b$  sont consécutifs,  $a^2 - b^2$  n'est pas toujours premier. Par exemple,  $5^2 - 4^2 = 9$  est dans la table de 3.

# FAUTE DE PREUVES

## Sommaire

|           |     |
|-----------|-----|
| Exercices | 545 |
| Solutions | 551 |

Cet extra est capital pour l'argumentation.

Associer chacun des types de « preuve » suivants avec son explication en pages suivantes puis préciser leur validité.

## Types de preuve

- |                                                             |                                                         |
|-------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|
| <input type="checkbox"/> Preuve visuelle                    | <input type="checkbox"/> Preuve directe                 |
| <input type="checkbox"/> Preuve par identité multiplicative | <input type="checkbox"/> Preuve par Darth Vader         |
| <input type="checkbox"/> Preuve par restriction             | <input type="checkbox"/> Preuve par le chocolat         |
| <input type="checkbox"/> Preuve par présupposition          | <input type="checkbox"/> Preuve par désaccord           |
| <input type="checkbox"/> Preuve par croyance                | <input type="checkbox"/> Preuve par distraction         |
| <input type="checkbox"/> Preuve par construction            | <input type="checkbox"/> Preuve par disjonction des cas |
| <input type="checkbox"/> Preuve capitale                    | <input type="checkbox"/> Preuve de l'ingénieur          |
| <input type="checkbox"/> Preuve complexe                    | <input type="checkbox"/> Preuve par analyse-synthèse    |
| <input type="checkbox"/> Preuve faible                      | <input type="checkbox"/> Preuve par diagramme           |
| <input type="checkbox"/> Preuve par large consensus         | <input type="checkbox"/> Preuve par récurrence          |
| <input type="checkbox"/> Preuve d'août                      | <input type="checkbox"/> Preuve par six fois sept       |
| <input type="checkbox"/> Preuve par défaut                  | <input type="checkbox"/> Preuve par la peur             |
| <input type="checkbox"/> Preuve forte                       | <input type="checkbox"/> Preuve par répétition          |
| <input type="checkbox"/> Preuve par transposition           | <input type="checkbox"/> Preuve par l'absurde           |
| <input type="checkbox"/> Preuve enfantine                   | <input type="checkbox"/> Preuve stupide                 |
| <input type="checkbox"/> Preuve par délégation              |                                                         |

| 1 | Type de preuve | Valide | Non valide |
|---|----------------|--------|------------|
|---|----------------|--------|------------|

Il suffit de multiplier chaque expression par zéro afin d'obtenir l'égalité voulue.  
Par exemple, prouvons que  $1 = 2$  :

$$1 = 2 \iff 1 \times 0 = 2 \times 0 \iff 0 = 0.$$

Puisque la dernière égalité est vraie, la première l'est aussi.

|   |                |  |        |            |
|---|----------------|--|--------|------------|
| 2 | Type de preuve |  | Valide | Non valide |
|---|----------------|--|--------|------------|

Puisqu'août est une période si agréable, personne ne sera en désaccord avec ce qui est publié à ce moment-là, ce qui en atteste la véracité. Bien sûr, l'inverse est vraie : janvier est triste et aucune logique ne prouvera vos affirmations.

|   |                |  |        |            |
|---|----------------|--|--------|------------|
| 3 | Type de preuve |  | Valide | Non valide |
|---|----------------|--|--------|------------|

UN ARGUMENTAIRE ÉCRIT EN LETTRES CAPITALES EST CORRECT. AINSI, ÉCRIVEZ LA PROPOSITION QUE VOUS ESSAYEZ DE PROUVER EN LETTRES MAJUSCULES : ELLE SERA ALORS JUSTE!!! VOUS POUVEZ AUSSI ABUSER DES POINTS D'EXCLAMATION, EN PARTICULIER POUR LES PREUVES DIFFICILES.

|   |                |  |        |            |
|---|----------------|--|--------|------------|
| 4 | Type de preuve |  | Valide | Non valide |
|---|----------------|--|--------|------------|

En écrivant ce qui semble être une démonstration complète puis en étalant du chocolat fondu sur les parties les plus délicates, le lecteur supposera avec délectation que la preuve est correcte afin de ne pas paraître idiot.

|   |                |  |        |            |
|---|----------------|--|--------|------------|
| 5 | Type de preuve |  | Valide | Non valide |
|---|----------------|--|--------|------------|

Dans ce type de démonstration, on arrive à la conclusion en divisant le problème en un nombre fini de cas et en les démontrant chacun séparément. Le nombre de cas peut parfois être démesuré. Par exemple, la première démonstration du théorème des quatre couleurs comportait 1 936 cas. Cette démonstration est controversée car la majorité d'entre eux furent vérifiés par ordinateur, pas à la main. Aujourd'hui, la démonstration comporte encore plus de 600 cas.

|   |                |  |        |            |
|---|----------------|--|--------|------------|
| 6 | Type de preuve |  | Valide | Non valide |
|---|----------------|--|--------|------------|

Souvenez-vous, une affirmation est fausse si sa preuve a été vérifiée et elle est vraie si elle n'a pas été contredite. Ainsi, la meilleure stratégie est de réduire le plus possible le nombre de personnes capables de comprendre votre démonstration. N'hésitez pas à y mettre des éléments très compliqués comme des dimensions multiples ou même infinies, des nombres hypercomplexes, des formes indéterminées, des graphes, des références à des livres épuisés, des films disparus, des chants inconnus, de la physique quantique, de la musique modale... Faites des citations en latin, grec, sanskrit et inventez des langues.

Encore une fois, le but est que personne n'y comprenne rien et ne puisse donc vous contredire.

|   |                |  |        |            |
|---|----------------|--|--------|------------|
| 7 | Type de preuve |  | Valide | Non valide |
|---|----------------|--|--------|------------|

S'il y a un nombre conséquent de personnes qui pensent qu'un résultat est juste, alors il l'est certainement. Pour une preuve plus emphatique, on peut user de phrases comme "De nombreux scientifiques s'accordent sur..." aux moments opportuns.

|   |                |  |        |            |
|---|----------------|--|--------|------------|
| 8 | Type de preuve |  | Valide | Non valide |
|---|----------------|--|--------|------------|

Commencez par démontrer un premier cas, l'initialisation, puis montrez l'hérédité de votre propriété : si un cas quelconque est vrai, alors le suivant l'est aussi. Alors, tous sont vrais à partir du cas initial, même si, séparément, chacun n'a pas été démontré. Soit  $P(n)$  une proposition mathématique impliquant l'entier naturel  $n$  telle que :

- (i)  $P(0)$  est vraie, i.e.  $P(n)$  est vraie pour  $n = 0$  ;
- (ii)  $P(n + 1)$  est vraie si  $P(n)$  est vraie, i.e.  $P(n)$  vraie implique  $P(n + 1)$  vraie.

Alors  $P(n)$  est vraie pour tout entier naturel  $n$ .

|   |                |  |        |            |
|---|----------------|--|--------|------------|
| 9 | Type de preuve |  | Valide | Non valide |
|---|----------------|--|--------|------------|

J'ai raison, na !

|    |                |  |        |            |
|----|----------------|--|--------|------------|
| 10 | Type de preuve |  | Valide | Non valide |
|----|----------------|--|--------|------------|

La proposition est vraie par manque de contre-exemple. De toutes façons, vous savez que vous avez raison et peu vous importe ce que peuvent penser les autres.

|    |                |  |        |            |
|----|----------------|--|--------|------------|
| 11 | Type de preuve |  | Valide | Non valide |
|----|----------------|--|--------|------------|

Bien que non formelle, une démonstration visuelle d'un théorème. Ce type de preuve est souvent utilisé pour démontrer le théorème de Pythagore.

|    |                |  |        |            |
|----|----------------|--|--------|------------|
| 12 | Type de preuve |  | Valide | Non valide |
|----|----------------|--|--------|------------|

J'ai raison parce que je suis ton père.

|    |                |  |        |            |
|----|----------------|--|--------|------------|
| 13 | Type de preuve |  | Valide | Non valide |
|----|----------------|--|--------|------------|

Facilitez-vous la vie en laissant la démonstration au lecteur. Après tout, si vous savez la faire, il le peut certainement lui aussi. Encouragez-le :

- “Le lecteur pourra facilement effectuer ces menus calculs.”
- “Les 253 autres cas sont similaires.”
- “La preuve est laissée en exercice pour le lecteur”.
- “La preuve est laissée en exercice pour le correcteur” (succès garanti en examen).

|    |                |  |        |            |
|----|----------------|--|--------|------------|
| 14 | Type de preuve |  | Valide | Non valide |
|----|----------------|--|--------|------------|

Aussi appelée preuve par l'exemple, il suffit d'exhiber un exemple concret ayant toutes les propriétés voulues pour démontrer l'existence de tels objets. Par exemple, Joseph Liouville a prouvé l'existence des nombres transcendants en en construisant un explicitement.

|    |                |  |        |            |
|----|----------------|--|--------|------------|
| 15 | Type de preuve |  | Valide | Non valide |
|----|----------------|--|--------|------------|

S'il y a consensus sur un sujet que vous n'acceptez pas, alors vous avez certainement raison puisque les autres sont stupides. Pensez aux climato-sceptiques, aux créationnistes, à Donald... pour une application de ce type de preuve.

|    |                |  |        |            |
|----|----------------|--|--------|------------|
| 16 | Type de preuve |  | Valide | Non valide |
|----|----------------|--|--------|------------|

« Je crois en cette affirmation donc elle est vraie, cqfd. »

|    |                |  |        |            |
|----|----------------|--|--------|------------|
| 17 | Type de preuve |  | Valide | Non valide |
|----|----------------|--|--------|------------|

Réduire le problème à des diagrammes contenant de nombreuses flèches, simples et doubles. Ceci est lié à la preuve par complexité.

|    |                |  |        |            |
|----|----------------|--|--------|------------|
| 18 | Type de preuve |  | Valide | Non valide |
|----|----------------|--|--------|------------|

Dans ce type de preuve, aussi appelé par *contradiction*, on montre que si une certaine proposition est vraie, alors une contradiction (flagrante) apparaît, donc cette proposition est fausse. On louvoie donc dans le *faux*, en toute connaissance de cause, afin de prouver le *vrai*. C'est un type de preuve absolument sublime.

Voici un exemple montrant l'irrationalité de  $\sqrt{2}$  :

Supposons que  $\sqrt{2}$  est rationnel *i.e.*  $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$  où  $a$  et  $b$  sont des entiers non nuls premiers entre eux (la fraction est réduite). Ainsi,  $b\sqrt{2} = a$ . Élevant au carré,  $2b^2 = a^2$ . Puisque 2 divise le membre de gauche, il divise celui de droite et  $a^2$  est pair, ce qui implique que  $a$  doit aussi être pair. On a alors  $a = 2c$ , où  $c$  est un entier. La première équation s'écrit alors  $2b^2 = (2c)^2 = 4c^2$ . Divisant par 2,  $b^2 = 2c^2$ . Ainsi, par le même argument que précédemment, 2 doit diviser  $b^2$ , et  $b$  doit être pair. Mais, si  $a$  et  $b$  sont tous deux pairs, ils ne peuvent être premiers entre eux ce qui contredit l'hypothèse de départ. Force est donc d'affirmer que  $\sqrt{2}$  est un nombre irrationnel.

|    |                |  |        |            |
|----|----------------|--|--------|------------|
| 19 | Type de preuve |  | Valide | Non valide |
|----|----------------|--|--------|------------|

Soit  $P(n)$  une proposition.

1° Prouvez que  $P(0)$  est vraie.

2° Prouvez que  $P(1)$  est vraie.

3° Prouvez que  $P(2)$  est vraie.

Alors,  $P(n)$  est vraie pour tout  $n$ .

|    |                |  |        |            |
|----|----------------|--|--------|------------|
| 20 | Type de preuve |  | Valide | Non valide |
|----|----------------|--|--------|------------|

On prouve la proposition “si  $p$  alors  $q$ ” en démontrant sa contraposée “si *non*  $q$  alors *non*  $p$ ”.

|    |                |  |        |            |
|----|----------------|--|--------|------------|
| 21 | Type de preuve |  | Valide | Non valide |
|----|----------------|--|--------|------------|

Si Khaleesi affirme quelque chose, alors c'est vrai. Pas de *si*, *mais* ni *or*. Fin de la discussion. Cela peut aussi marcher avec Voldemort, Kim Jong-un ou votre professeur de mathématiques bien-aimé.

|           |                |  |        |            |
|-----------|----------------|--|--------|------------|
| <b>22</b> | Type de preuve |  | Valide | Non valide |
|-----------|----------------|--|--------|------------|

Vous êtes fatigués, c'est l'heure de la sieste, vous vous sentez las, las, las. Tout affaibli, vous ne pouvez qu'accepter la preuve que l'on vous apporte.

|           |                |  |        |            |
|-----------|----------------|--|--------|------------|
| <b>23</b> | Type de preuve |  | Valide | Non valide |
|-----------|----------------|--|--------|------------|

Dans ce type de preuve, on arrive à la conclusion en combinant de façon logique les axiomes, définitions et les résultats précédents. Par exemple, on peut ainsi établir que la somme de deux entiers pairs est toujours paire :

Soient  $x$  et  $y$  deux entiers pairs. il peuvent donc s'écrire  $x = 2a$  et  $y = 2b$  où  $a$  et  $b$  sont entiers. Alors, leur somme vaut  $x + y = 2a + 2b = 2(a + b)$ .

Il est alors clair que  $x + y$  est divisible par 2 et il est donc pair.

Cette preuve n'utilise que la définition des nombres pairs ainsi que la distributivité.

|           |                |  |        |            |
|-----------|----------------|--|--------|------------|
| <b>24</b> | Type de preuve |  | Valide | Non valide |
|-----------|----------------|--|--------|------------|

Puisque quarante-deux est bien la réponse universelle, tout argument impliquant le produit de six par sept est véridique.

|           |                |  |        |            |
|-----------|----------------|--|--------|------------|
| <b>25</b> | Type de preuve |  | Valide | Non valide |
|-----------|----------------|--|--------|------------|

N'hésitez pas à distraire l'attention des auditeurs lors de votre exposé. Un complice peut tirer la sonnette d'alarme, annoncer la fin du monde, attirer l'attention sur le mur du fond... pendant que vous effacez le tableau et déclarez la démonstration finie.

Vous pouvez aussi tirer avantage d'une distraction plus longue que prévue en démontrant par là-même le résultat suivant. Par exemple :

1. "Regardez derrière vous !"
2. ... ce qui prouve l'existence d'une réponse à  $2 + 2$ .
3. "Là, un singe à trois têtes !"
4. ... ce qui donne 5 comme seul résultat possible à  $2 + 2$ .
5. Ainsi,  $2 + 2 = 5$ , cqfd.

|           |                |  |        |            |
|-----------|----------------|--|--------|------------|
| <b>26</b> | Type de preuve |  | Valide | Non valide |
|-----------|----------------|--|--------|------------|

Si l'on dit qu'une affirmation est vraie un grand nombre de fois, alors elle est vraie. Si l'on dit qu'une affirmation est vraie un grand nombre de fois, alors elle est vraie. Si l'on dit qu'une affirmation est vraie un grand nombre de fois, alors...

Le nombre de fois qu'il faut le dire exactement pour que cela soit vérifié fait l'objet d'intenses débats académiques. Généralement, on s'arrête lorsque l'audience est littéralement morte d'ennui.

Par exemple : Soient  $A$  et  $B$ . On a  $A = B \iff B = A \iff A = B$   
 $\iff B = A \iff A = B \iff B = A \iff A = B \iff B = A$   
 $\iff A = B \iff B = A \iff A = B \iff B = A$  donc  $A = B$ .



|           |                |  |        |            |
|-----------|----------------|--|--------|------------|
| <b>27</b> | Type de preuve |  | Valide | Non valide |
|-----------|----------------|--|--------|------------|

Dans un raccourci de la preuve par récurrence, on fait l'hypothèse que le résultat est vrai. Ainsi, le résultat est vrai.

|           |                |  |        |            |
|-----------|----------------|--|--------|------------|
| <b>28</b> | Type de preuve |  | Valide | Non valide |
|-----------|----------------|--|--------|------------|

Si vous prouvez votre affirmation pour un cas et vous restreignez à celui-ci seulement, vous évitez alors tous les autres. Vous pouvez alors espérer que personne ne remarquera votre omission.

Par exemple, montrez le théorème des quatre couleurs en se contentant des cartes à une seule région. Une seule couleur est alors nécessaire et  $1 \leq 4$ .

Si jamais on vous parle d'une certaine incomplétude de votre preuve, rabattez-vous sur une méthode précédente.

|           |                |  |        |            |
|-----------|----------------|--|--------|------------|
| <b>29</b> | Type de preuve |  | Valide | Non valide |
|-----------|----------------|--|--------|------------|

Ce que je dis est vrai car je suis plus fort que toi.

|           |                |  |        |            |
|-----------|----------------|--|--------|------------|
| <b>30</b> | Type de preuve |  | Valide | Non valide |
|-----------|----------------|--|--------|------------|

Un tel raisonnement se déroule en deux étapes :

- on raisonne sur une hypothétique solution au problème et l'on accumule des déductions de propriétés qu'elle doit vérifier, du seul fait qu'elle est solution ;
- on examine tous les objets vérifiant les conditions nécessaires précédemment accumulées (ce sont les seuls candidats pouvant être des solutions) et l'on détermine, parmi eux, lesquels sont réellement des solutions.

Il arrive souvent que la première phase, l'analyse, produise des conditions nécessaires si restrictives qu'il ne reste plus qu'un "candidat" qui les vérifie. Dans ce cas, cette première phase prouve l'unicité de la solution, et la seconde phase, la synthèse, permet de montrer soit l'existence d'une solution (si ce candidat répond au problème), soit qu'il n'y a aucune solution (sinon).

La recherche des minima et maxima d'une fonction se fait souvent ainsi : on détermine d'abord la liste des points qui auraient le droit d'être des extrema en utilisant des conditions nécessaires d'optimalité (dérivée, extrema liés...). Ensuite, on regarde lesquels parmi eux le sont vraiment en comparant leurs valeurs.

La limite d'une suite récurrente se détermine parfois par analyse synthèse : on montre qu'elle converge, car croissante et majorée par exemple, on cherche ensuite les points fixes de la fonction de récurrence qui est continue puis on détermine ceux qui peuvent être la limite de la suite : il n'y en a souvent plus qu'un possible et c'est donc lui.

|           |                |  |        |            |
|-----------|----------------|--|--------|------------|
| <b>31</b> | Type de preuve |  | Valide | Non valide |
|-----------|----------------|--|--------|------------|

Je n'y comprends rien, c'est donc vrai.

## Solutions

Preuve visuelle : 11   **Valide**  
Preuve par identité multiplicative : 1  
Preuve par restriction : 28  
Preuve par présupposition : 27  
Preuve par croyance : 16  
Preuve par construction : 14   **Valide**  
Preuve capitale : 3  
Preuve complexe : 6  
Preuve faible : 22  
Preuve par large consensus : 7  
Preuve d'août : 2  
Preuve par défaut : 10  
Preuve forte : 29  
Preuve par transposition : 20   **Valide**  
Preuve enfantine : 9  
Preuve par délégation : 13  
Preuve directe : 23   **Valide**  
Preuve par Darth Vader : 12  
Preuve par le chocolat : 4  
Preuve par désaccord : 15  
Preuve par distraction : 25  
Preuve par disjonction des cas : 5   **Valide**  
Preuve de l'ingénieur : 19  
Preuve par analyse-synthèse : 30   **Valide**  
Preuve par diagramme : 17  
Preuve par récurrence : 8   **Valide**  
Preuve par six fois sept : 24  
Preuve par la peur : 21  
Preuve par répétition : 26  
Preuve par l'absurde : 18   **Valide**  
Preuve stupide : 31

Si vous avez validé à tort plus de deux « preuves », vous commencez malheureusement à maîtriser *l'art d'avoir toujours raison*.



**EXTRAS**



# VIVE LA RENTRÉE

Cet extra est parfait pour se mettre en jambes au début de l'année.

## VouF ?

Sauf précision contraire, les fonctions sont définies et dérivables sur les ensembles  $\mathcal{D}$ , les équations et inéquations doivent être vérifiées sur tout leur ensemble de définition,

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier les réponses.

- (a)  $x^2 - 2x + 5$  n'admet pas de racines réelles.
- (b)  $3x^2 + x - 4$  admet 1 et  $-4$  pour racines.
- (c)  $\sqrt{2}x^2 - 4x + \sqrt{3}$  n'admet pas de forme factorisée.
- (d)  $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{x^2} = x$ .
- (e)  $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x - 3| - 2 \geq 0$ .
- (f)  $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \leq x^2$ .
- (g) La droite d'équation cartésienne  $2x + 6y - 5 = 0$  admet  $\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$  pour vecteur directeur.
- (h)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$ .
- (i)  $\lim_{x \rightarrow 3^+} 2x + 5 = 11$ .
- (j)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2} = 0$ .
- (k)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = -1$ .
- (l)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{5 - x} = 0^-$ .
- (m) Si  $f$  est dérivable en 4  
alors  $f$  est croissante en 4.
- (n) Si  $f'$  est négative sur le domaine  $\mathcal{D}$  alors  $f$  est décroissante sur  $\mathcal{D}$ .
- (o) Si  $f'$  est positive sur l'intervalle  $\mathcal{D}$  alors  $f$  est croissante sur  $\mathcal{D}$ .
- (p) Si  $f$  admet un extremum local en  $a \in \mathcal{D}$ , alors  $f'(a) = 0$ .
- (q) Si  $a \in \mathcal{D}$  est tel que  $f'(a) = 0$ , alors  $f$  admet un extremum local en  $a$ .
- (r) Si  $f$  est croissante alors  $f$  est positive.

- (s) Si  $f(x) = 2(x-2)(3x^2+5)$  alors  $f'(x) = 12x^2 - 12x + 10$ .
- (t) Si  $f(x) = \frac{2x-3}{5x-1}$  alors  $f'(x) = \frac{13}{5x-1}$ .
- (u)  $\forall t \in \mathbb{R}, \quad \cos(\pi - t) = \sin(-\frac{\pi}{2} + t)$ .
- (v)  $\cos t > \frac{1}{2}$  pour  $t < \frac{\pi}{3}$ .
- (w)  $\sin t < -\frac{\sqrt{2}}{2}$  si  $t \in [-\frac{2\pi}{3}; -\frac{\pi}{3}]$ .
- (x) Si  $u_0 = 3, u_1 = -6, u_2 = 12$  alors  $u_3 = -24$ .
- (y) Si  $(u_n)$  est géométrique et  $u_1 = 3$  alors  $u_2 = 9$ .
- (z) Si  $(u_n)$  est arithmétique,  $u_3 = 5$  et  $u_6 = 20$  alors  $u_1 = -5$ .

## Solutions

- |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| (a) V | (g) V | (m) F | (s) F | (y) F |
| (b) F | (h) F | (n) F | (t) F | (z) V |
| (c) F | (i) V | (o) V | (u) F |       |
| (d) F | (j) V | (p) F | (v) F |       |
| (e) F | (k) V | (q) F | (w) V |       |
| (f) F | (l) V | (r) F | (x) F |       |

## Sommaire

|   |                              |     |
|---|------------------------------|-----|
| 1 | R.T.T. . . . .               | 557 |
| 2 | Last Fraction Hero . . . . . | 558 |
| 3 | Le Factorisathon . . . . .   | 558 |
| 4 | VouF ? . . . . .             | 558 |
| 5 | R.T.T. : le retour . . . . . | 559 |
| 6 | Solutions . . . . .          | 560 |

Cet extra est incomparable pour réviser en autonomie les notions de cette année et des précédentes.

## 1 R.T.T.

*Pour passer du bon temps, rien de tel que les R.T.T.*

Résoudre de TêTe les équations et inéquations suivantes dans  $\mathbb{R}$ .

« Micro-brouillon » autorisé pour les plus difficiles. Ne pas oublier de tester les réponses.

- |                              |                                       |
|------------------------------|---------------------------------------|
| (a) $x + 4 = 6$              | (o) $3u^2 + 4 = 1$                    |
| (b) $5t + 7 = 1$             | (p) $x^2 - 9 < 0$                     |
| (c) $2 - 3q \geq 4$          | (q) $z^2 - 4z + 4 = 0$                |
| (d) $y - 5 \geq 2y - 3$      | (r) $3y^2 - 2y - 1 = 0$               |
| (e) $z - 1 < z + 1$          | (s) $u^2 - 6u + 9 > 0$                |
| (f) $u + v + 3 > 5u + v - 1$ | (t) $x^2 - 2x + 1 \leq 0$             |
| (g) $u^2 + v^2 - 2uv \geq 0$ | (u) $\sqrt{3-x} \geq 5$               |
| (h) $3 - 2x \leq -2x - 5$    | (v) $\frac{1}{z} \geq \frac{1}{2}$    |
| (i) $6 - 3x \leq 0$          | (w) $\frac{1}{x} < 3$                 |
| (j) $x^2 - 1 = 0$            | (x) $\frac{1}{t^2 + 3} = \frac{1}{5}$ |
| (k) $x^2 = 16$               | (y) $(x-1)(x+4)(x-3) > 0$             |
| (l) $z^2 + 3 = 0$            | (z) $3 - \frac{2}{p} \leq 1$          |
| (m) $w^2 + 9 \leq 0$         |                                       |
| (n) $x^2 \geq 25$            |                                       |



## 2 Last Fraction Hero

Calculer, simplifier, réduire... le plus rapidement possible, le plus souvent possible « de tête » et de toutes façons, sans calculatrice et sans se préoccuper des éventuels problèmes de définition des quotients.

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>(a) <math>\frac{1}{3} + \frac{5}{4}</math></p> <p>(b) <math>\frac{5}{7} - \frac{3}{2}</math></p> <p>(c) <math>\frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} - \frac{5}{2}</math></p> <p>(d) <math>\frac{\frac{4}{3} - \frac{5}{2}}{\frac{7}{4} - 3}</math></p> <p>(e) <math>\frac{\frac{3}{2} - \frac{4}{7}}{1 + 2}</math></p> <p>(f) <math>\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}</math></p> | <p>(g) <math>\frac{3x}{x-2} + \frac{1-4x}{3x}</math></p> <p>(h) <math>\frac{7a}{7a+1} + \frac{3a}{2-3a}</math></p> <p>(i) <math>\frac{\frac{3}{x} - \frac{5}{1-2x}}{x - \frac{2x}{x+1}}</math></p> <p>(j) <math>\frac{\frac{2}{y+4} - \frac{3}{3-2y}}{-\frac{y}{y+4} + \frac{1}{y}}</math></p> <p>(k) <math>1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}</math></p> | <p>(l) <math>2 + \frac{2}{2 + \frac{2}{2 + \frac{2}{2 + \frac{2}{2}}}}</math></p> <p>(m) <math>x + \frac{1}{x + \frac{1}{x + \frac{1}{x}}}</math></p> <p>(n) <math>\frac{\frac{x-1}{x+2} - \frac{x+2}{x-1}}{\frac{x-2}{x+1} - \frac{x+1}{x-2}}</math></p> <p>(o) <math>\frac{\frac{5x^2-10x-15}{2x-1}}{\frac{3+2x-x^2}{4-8x}}</math></p> |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

## 3 Le Factorisathon

Rappeler les trois identités remarquables ainsi que les identités «  $ka \pm \dots$  ».  
Factoriser ensuite le plus possible les expressions suivantes.

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p>(a) <math>(1+x)(x+4) + 6(x+4)</math></p> <p>(b) <math>x^2 - 9</math></p> <p>(c) <math>4t^2 - \frac{16}{9}</math></p> <p>(d) <math>2(q+1)^2 + (1-q)(1+q)</math></p> <p>(e) <math>(2t+3)^2 - (1+t)(2t+3)</math></p> <p>(f) <math>(2A+3)^2 - 25</math></p> <p>(g) <math>\varphi^3 - 4\varphi + 3\varphi^2</math></p> <p>(h) <math>1 - 4x^2</math></p> | <p>(i) <math>4(5+t)(1-6t) + 7(t+5) + 3(t+5)^2</math></p> <p>(j) <math>3(2z-3)^2 - 3(5-z)^2</math></p> <p>(k) <math>3(2x-1)^2 + 6(-1+2x)(7-4x)</math></p> <p>(l) <math>(5+u)(3u-1) + 6(3u-1)(5-2u)</math></p> <p>(m) <math>3x^2 - 10</math></p> <p>(n) <math>-\frac{1}{4}(n-2)3n + (2-n)^2(1+4n)</math></p> <p>(o) <math>25y^2 - 9 + (-2y+5)(5y-2) - 5 + 2y</math></p> |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

## 4 VouF ?

Sauf précision contraire, les fonctions sont définies et dérivables sur les ensembles  $\mathcal{D}$ , les équations et inéquations doivent être vérifiées sur tout leur ensemble de définition.

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier les réponses.

- (a)  $x^2 - 2x + 5$  n'admet pas de racines réelles.
- (b)  $3x^2 + x - 4$  admet 1 et  $-4$  pour racines.
- (c)  $\sqrt{2}x^2 - 4x + \sqrt{3}$  n'admet pas de forme factorisée.

- (d)  $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sqrt{x^2} = x.$
- (e)  $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |x - 3| - 2 \geq 0.$
- (f)  $\forall x \in \mathbb{R}, \quad x \leq x^2.$
- (g)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty.$
- (h)  $\lim_{x \rightarrow 3^+} 2x + 5 = 11.$
- (i)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 2} = 0.$
- (j)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = -1.$
- (k)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{5 - x} = 0^-.$
- (l) La droite d'équation cartésienne  $2x + 6y - 5 = 0$  admet  $\vec{u} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$  pour vecteur directeur.
- (m) Si  $f$  est dérivable en 4  
alors  $f$  est croissante en 4.
- (n) Si  $f'$  est négative sur le domaine  $\mathcal{D}$  alors  $f$  est décroissante sur  $\mathcal{D}$ .
- (o) Si  $f'$  est positive sur l'intervalle  $\mathcal{D}$  alors  $f$  est croissante sur  $\mathcal{D}$ .
- (p) Si  $f$  admet un extremum local en  $a \in \mathcal{D}$ , alors  $f'(a) = 0$ .
- (q) Si  $a \in \mathcal{D}$  est tel que  $f'(a) = 0$ , alors  $f$  admet un extremum local en  $a$ .
- (r) Si  $f$  est croissante alors  $f$  est positive.
- (s) Si  $f(x) = 2(x - 2)(3x^2 + 5)$   
alors  $f'(x) = 12x^2 - 12x + 10$ .
- (t) Si  $f(x) = \frac{2x-3}{5x-1}$   
alors  $f'(x) = \frac{13}{5x-1}$ .
- (u)  $\forall t \in \mathbb{R}, \quad \cos(\pi - t) = \sin(-\frac{\pi}{2} + t).$
- (v)  $\cos t > \frac{1}{2}$  pour  $t < \frac{\pi}{3}$ .
- (w)  $\sin t < -\frac{\sqrt{2}}{2}$  si  $t \in [-\frac{2\pi}{3}; -\frac{\pi}{3}]$ .
- (x) Si  $u_0 = 3, u_1 = -6, u_2 = 12$  alors  $u_3 = -24$ .
- (y) Si  $(u_n)$  est géométrique et  $u_1 = 3$  alors  $u_2 = 9$ .
- (z) Si  $(u_n)$  est arithmétique,  $u_3 = 5$  et  $u_6 = 20$  alors  $u_1 = -5$ .

## 5 R.T.T. : le retour

Résoudre de Tête les équations et inéquations suivantes dans  $\mathbb{R}$ .

|                                                                                                                                 |                                                                                                                        |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $(\alpha) \quad 3x + 5 = -1$<br>$(\beta) \quad 7 - 2c = 4$<br>$(\gamma) \quad 4 + 2y \geq -5$<br>$(\delta) \quad 5 - 6z \leq 4$ | $(\epsilon) \quad 2t + 1 > 5t - 2$<br>$(\zeta) \quad -7u - 4 < -9 - 2u$<br>$(\eta) \quad \frac{3}{x} \geq \frac{2}{5}$ |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

|                                  |                            |
|----------------------------------|----------------------------|
| (θ) $-\frac{2}{y} < \frac{3}{7}$ | (ρ) $5(a-3)(a+2) < 0$      |
| (ι) $v^2 = 7$                    | (σ) $(11-2x)(4+3x) \leq 0$ |
| (κ) $5y^2 - 1 = 0$               | (τ) $\sqrt{b+5} \leq 3$    |
| (λ) $3 - 4z^2 = 1$               | (υ) $\sqrt{3-q} < 5$       |
| (μ) $t^2 + 4 = 0$                | (φ) $\sqrt{7-2p} > 2$      |
| (ν) $x^2 - 3x + 2 = 0$           | (χ) $ 5-w  < 2$            |
| (ξ) $5 - 2p^2 + 3p = 0$          | (ψ) $ \ell^7  > -4$        |
| (ο) $r^2 > 1$                    | (ω) $ x+4  > 3$            |
| (π) $x^2 - 6 \leq 0$             |                            |

## 6 Solutions

### R.T.T.

|                                   |                                                      |
|-----------------------------------|------------------------------------------------------|
| (a) $x = 2$                       | (n) $x \in ]-\infty; -5] \cup [5; +\infty[$          |
| (b) $t = -\frac{6}{5}$            | (o) $\emptyset$                                      |
| (c) $q \leq -\frac{2}{3}$         | (p) $x \in ]-3; 3[$                                  |
| (d) $y \leq -2$                   | (q) $z = 2$                                          |
| (e) $z \in \mathbb{R}$            | (r) $y = 1$ ou $y = -\frac{1}{3}$                    |
| (f) $u < 1$ et $v \in \mathbb{R}$ | (s) $u \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$               |
| (g) $u$ et $v \in \mathbb{R}$     | (t) $x = 1$                                          |
| (h) $\emptyset$                   | (u) $x \leq -22$                                     |
| (i) $x \geq 2$                    | (v) $z \in ]0; 2]$                                   |
| (j) $x = \pm 1$                   | (w) $x \in ]-\infty; 0[ \cup ]\frac{1}{3}; +\infty[$ |
| (k) $x = \pm 4$                   | (x) $t = \pm\sqrt{2}$                                |
| (l) $\emptyset$                   | (y) $x \in ]-4; 1[ \cup ]3; +\infty[$                |
| (m) $\emptyset$                   | (z) $p \in ]0; 1]$                                   |

### Last Fraction Hero

|                      |                                           |                                                 |
|----------------------|-------------------------------------------|-------------------------------------------------|
| (a) $\frac{19}{12}$  | (f) $\frac{-1}{x(x-1)}$                   | (k) $\frac{13}{8}$                              |
| (b) $-\frac{11}{14}$ | (g) $\frac{5x^2+9x-2}{3x(x-2)}$           | (l) $\frac{41}{15}$                             |
| (c) $-\frac{17}{60}$ | (h) $\frac{17a}{(2-3a)(7a+1)}$            | (m) $\frac{x^4+3x^2+1}{x(x^2+2)}$               |
| (d) $\frac{14}{15}$  | (i) $\frac{(3-11x)(x+1)}{x^2(x-1)(1-2x)}$ | (n) $\frac{(x-2)(x+1)(6x+3)}{(x+2)(x-1)(6x-3)}$ |
| (e) $\frac{13}{42}$  | (j) $\frac{y(7y+6)}{(3-2y)(y^2-y-4)}$     | (o) $20$                                        |

## Le Factorisation

- |                                        |                                                  |
|----------------------------------------|--------------------------------------------------|
| (a) $(x+4)(x+7)$                       | (i) $(t+5)(26-21t)$                              |
| (b) $(x-3)(x+3)$                       | (j) $3(3z-8)(z+2)$                               |
| (c) $(2t-\frac{4}{3})(2t+\frac{4}{3})$ | (k) $3(2x-1)(13-6x)$                             |
| (d) $(q+1)(q+3)$                       | (l) $(3u-1)(35-11u)$                             |
| (e) $(2t+3)(t+2)$                      | (m) $(x\sqrt{3}-\sqrt{10})(x\sqrt{3}+\sqrt{10})$ |
| (f) $(2A-2)(2A+8)$                     | (n) $(2-n)(2+\frac{31}{4}n-4n^2)$                |
| (g) $\varphi(\varphi-1)(\varphi+4)$    | (o) $(5y-3)(3y+8)$                               |
| (h) $(1-2x)(1+2x)$                     |                                                  |

## VouF ?

- |       |       |       |       |       |
|-------|-------|-------|-------|-------|
| (a) V | (g) V | (m) F | (s) F | (y) F |
| (b) F | (h) V | (n) F | (t) F | (z) V |
| (c) F | (i) V | (o) V | (u) F |       |
| (d) F | (j) V | (p) F | (v) F |       |
| (e) F | (k) V | (q) F | (w) V |       |
| (f) F | (l) F | (r) F | (x) F |       |

## R.T.T. : le retour

- |                                             |                                                             |
|---------------------------------------------|-------------------------------------------------------------|
| ( $\alpha$ ) $x = -2$                       | ( $\nu$ ) $x = 1$ ou $x = 2$                                |
| ( $\beta$ ) $c = \frac{3}{2}$               | ( $\xi$ ) $p = -1$ ou $p = -\frac{5}{2}$                    |
| ( $\gamma$ ) $y \geq -\frac{9}{2}$          | ( $\omicron$ ) $r < -1$ ou $r > 1$                          |
| ( $\delta$ ) $z \geq \frac{1}{6}$           | ( $\pi$ ) $x \in [-\sqrt{6}; \sqrt{6}]$                     |
| ( $\varepsilon$ ) $t < 1$                   | ( $\rho$ ) $a \in ]-2; 3[$                                  |
| ( $\zeta$ ) $u > 1$                         | ( $\sigma$ ) $x \leq -\frac{4}{3}$ ou $x \geq \frac{11}{2}$ |
| ( $\eta$ ) $0 < x \leq \frac{15}{2}$        | ( $\tau$ ) $b \in [-5; 4]$                                  |
| ( $\theta$ ) $y < -\frac{14}{3}$ ou $y > 0$ | ( $\upsilon$ ) $q \in ]-22; 3]$                             |
| ( $\iota$ ) $v = \pm\sqrt{7}$               | ( $\varphi$ ) $p < \frac{3}{2}$                             |
| ( $\kappa$ ) $y = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}$    | ( $\chi$ ) $w \in ]3; 7[$                                   |
| ( $\lambda$ ) $z = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$   | ( $\psi$ ) $\ell \in \mathbb{R}$                            |
| ( $\mu$ ) $\emptyset$                       | ( $\omega$ ) $x < -7$ ou $x > -1$                           |



## SELF-WORKING

## Sommaire

|   |                     |     |
|---|---------------------|-----|
| 1 | Exercises . . . . . | 563 |
| 2 | Solutions . . . . . | 565 |

This extra is perfect to practice your skills all by yourself.



## 1 Exercises

## Exercise 1

- Write each quadratic expression in completed square form.  
 (a)  $2x^2 + 4x - 2$ ,                      (b)  $-x^2 + 5x + 1$ ,                      (c)  $6 - 2x + x^2$ .
- For each quadratic function above, write down the coordinates of the maximum/minimum point of its graph and find its roots.

**Exercise 2** Let  $f$  be the function  $-x^3 + 7x^2 - 10x$ . Factorize  $f(x)$  completely then sketch the graph of  $f$ .

**Exercise 3** Here is a fraction :  $\frac{1}{3 - \sqrt{2}}$ .

How can we move the square root of 2 to the top?

**Exercise 4** Find the equation of the tangents to  $y = x^2 + x$  that pass through  $(1, 1)$ .

**Exercise 5** A sheet of metal of 12 inches by 10 inches is to be used to make an open box. Squares of equal sides  $x$  are cut of each corner then the sides are folded to make the box. Find the value of  $x$  that makes the volume maximum.

**Exercise 6** In an electronic circuit with constant voltage  $E$  (in Volts), a resistance (of constant impedance  $r$  in Ohms) and a load (of impedance  $R$  in Ohms) are connected in series. The electric current  $i$  is then given by the formula  $i = \frac{E}{r + R}$  and the power  $P$  delivered to the load  $R$  is given by  $P = Ri^2$ .  $R$  and  $r$  being positive, determine the value of  $R$  such that the power  $P$  delivered to  $R$  is maximum.

**Exercise 7** Your parents have decided to help you save money by directly investing in your future for 6 months. Your job is to convince them of the option that will be best for you. Using arithmetic/geometric sequences, determine how much money you will have at the end of the 6 months (Jan 1 - Jun 30) for each of the following scenarios.

- (a) You are given a savings passbook. Each week, you are to deposit \$10.
- (b) You decide to deposit \$0.01 on Jan 1 and each day thereafter, deposit an amount that is double the previous day's amount.
- (c) You are given a savings passbook. Each day you are to deposit \$1.

**Exercise 8** In a square  $ABCD$  with sides of length 1, we consider the paths from  $A$  to the opposite corner  $C$  made of line segments, called steps, so that the steps of the path are all parallel either to  $(AB)$  or  $(AD)$ , not necessarily of equal lengths. We must specify that no "way back" is allowed.

1. Draw such a path. What is its length?
2. Draw such paths with 5 steps, 10 steps, 20 steps... and find the total length of the path in each case.
3. What would be the length of such a path if it had 1000 steps? And if it had 1 million steps? Is there anything surprising about this result?

**Exercise 9** This is a frequency table of the durations, to the nearest minute, of phone calls made from an office one day.

|                |   |   |   |    |   |   |    |    |    |
|----------------|---|---|---|----|---|---|----|----|----|
| Duration (min) | 2 | 3 | 4 | 5  | 8 | 9 | 10 | 15 | 20 |
| Frequency      | 1 | 5 | 4 | 10 | 6 | 3 | 4  | 1  | 1  |

Find the mean, median, lower quartile and upper quartile, interquartile range for this data set.

**Exercise 10** The prices of flats in a district range from a minimum of £48K to a maximum of £152K.

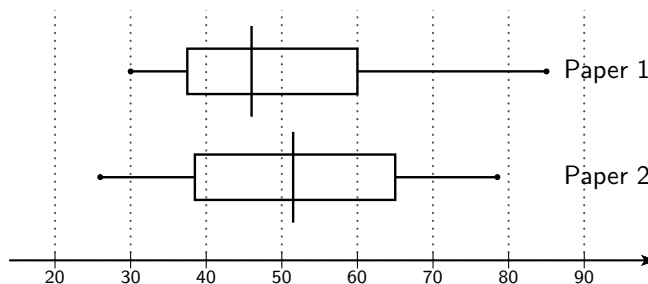
The values of  $Q_1$ ,  $Me$  and  $Q_3$  are respectively £82K, £92K and £106K.

An outlier is defined as any value below  $Q_1 - 1.59(Q_3 - Q_1)$  or any value above  $Q_3 + 1.59(Q_3 - Q_1)$ .

Determine whether the minimum and maximum prices are outliers.

Then, draw a box plot for the data.

**Exercise 11** The two box plots below show the distributions of marks in two exams. Write a couple of sentences comparing the two sets of marks.



**Exercise 12** A game is played with a single ordinary dice. The scoring system is as follows.

- Roll a six the first time : score 3 ; otherwise, roll again.
- Roll a six the second time : score 2 ; otherwise, roll again.

- Roll a six the third time : score 1 ; otherwise, score 0.

Make a table showing the probability distribution of the score  $S$ .

**Exercise 13** A company that makes games has the idea of using a dice in the shape of a cuboctahedron. This has two kinds of face : squares and triangles. The company made a prototype dice and rolled it 500 times. It lands with square uppermost 300 times and triangle uppermost 200 times.

1. Write down the estimates of the probabilities of "square" and "triangle".

In the planed game, two of the dice are rolled.

If both land triangle uppermost, the player scores 3.

If both land square uppermost, the player scores 2.

Otherwise, the player scores 1.

2. Let  $S$  be the score. Using a tree diagram or a table, determine the probability distribution of the score  $S$ .

**Exercise 14** \* \* \*

Start with two numbers, say 7 and 4. This is the beginning of a sequence of numbers. The rule is that the next number in the sequence is the mean value of the last two numbers. So, the next number is half of the sum of 7 and 4, that is  $\frac{11}{2}$ . Then, we have... Continue the sequence until you know what will happen if you proceed indefinitely. Now, choose two different starting numbers and repeat the process, say 4 and 1, then 8 and 2, then 10 and 3. And if you exchange the order of the starting numbers? And if you choose the same numbers? Can you find a relationship between the two starting numbers and the limiting value?

## 2 Solutions

### Solution 1

(a)  $2x^2 + 4x - 2 = 2(x+1)^2 - 4 = 2(x+1-\sqrt{2})(x+1+\sqrt{2})$ , Min :  $S(-1, -4)$ .

(b)  $-x^2 + 5x + 1 = -(x - \frac{5}{2})^2 + \frac{29}{4} = -(x - \frac{5+\sqrt{29}}{2})(x - \frac{5-\sqrt{29}}{2})$ , Max :  $S(\frac{5}{2}, \frac{29}{4})$ .

(c)  $6 - 2x + x^2 = (x-1)^2 + 5$ , Min :  $S(1, 5)$ .

**Solution 2**  $-x^3 + 7x^2 - 10x = -x(x-2)(x-5)$  : three roots 0, 2 and 5.

**Solution 3**  $\frac{1}{3-\sqrt{2}} = \frac{1}{3-\sqrt{2}} \times \frac{3+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}} = \frac{3+\sqrt{2}}{7}$ .

**Solution 4** The equations of the tangents to  $y = x^2 + x$  are of the form  $y = (2a+1)x - a^2$ . It passes through  $(1, 1)$  for  $a = 0$  and  $a = 2$ .

**Solution 5**  $V = 4(x^3 - 11x^2 + 30x)$  is maximum for the value  $\frac{11-\sqrt{31}}{3} \in ]0; 5[$ .

**Solution 6**  $P' = \frac{E^2(r-R)}{(r+R)^3}$  and  $P$  is maximum for  $R = r$ .

### Solution 7

(a)  $u_{26} = 26 \times 10 = \$260$ . arithmetic progression of common difference \$10.



(b)  $v_1 + v_2 + \dots + v_{181} = 0.01 \times \frac{2^{181}-1}{2-1} \simeq \$3.10^{52}$  (!) geometric progression of common ratio 2.

(c)  $w_{181} = 181 \times 1 = \$181$ . arithmetic progression of common difference \$1.

**Solution 8** Any such path will have length 2! It is surprising because it can be as close as we wish to a "curve" of smaller length such as the diagonal  $[AC]$  (of length  $\sqrt{2}$ ). Actually, the length of a curve is linked to the derivative of the function defining the curve and the "derivative" for our paths is null, constant or does not even exist...

**Solution 9** We have  $\bar{x} \simeq 6.66' \simeq 6'40''$ ,  $Q_1 = 4'$  (9<sup>th</sup>),  $Me = 5'$  (18<sup>th</sup>),  $Q_3 = 9'$  (27<sup>th</sup>) and  $IQ = 5'$ .

**Solution 10**  $Q_1 - 1.59(Q_3 - Q_1) = 82 - 1.59(106 - 82) \simeq £44K$  and  $Q_3 + 1.59(Q_3 - Q_1) \simeq £144K$  so the maximum and minimum values are not outliers.

**Solution 11** More than half of the class passed the paper 2 whereas less than half passed paper 1. Furthermore, even if the marks of the paper 1 are much more scattered than in paper 2, the "center half", i.e. the interval  $[Q_1; Q_3]$ , of the marks of paper 1 is more packed than in paper 2.

**Solution 12**

|             |                                                     |                                                     |                                  |               |
|-------------|-----------------------------------------------------|-----------------------------------------------------|----------------------------------|---------------|
| $S$         | 0                                                   | 1                                                   | 2                                | 3             |
| Probability | $\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{5}{6}$ | $\frac{5}{6} \times \frac{5}{6} \times \frac{1}{6}$ | $\frac{5}{6} \times \frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ |

**Solution 13**

1.  $P(\text{"square"}) = \frac{300}{500} = \frac{3}{5}$  and  $P(\text{"triangle"}) = \frac{200}{500} = \frac{2}{5}$

|             |                 |                |                |
|-------------|-----------------|----------------|----------------|
| $S$         | 1               | 2              | 3              |
| Probability | $\frac{12}{25}$ | $\frac{9}{25}$ | $\frac{4}{25}$ |

**Solution 14** ◦  $7, 4, \frac{11}{2}, \frac{19}{4}, \frac{41}{8}, \frac{79}{16}, \frac{161}{32}, \frac{319}{64}, \dots, \frac{5 \times 2^k + 1}{2^k}, \frac{5 \times 2^{k+1} - 1}{2^{k+1}}, \dots$  seems to tend to 5.

◦  $4, 1, \frac{5}{2}, \frac{7}{4}, \frac{17}{8}, \frac{31}{16}, \frac{65}{32}, \frac{127}{64}, \dots, \frac{2 \times 2^k + 1}{2^k}, \frac{2 \times 2^{k+1} - 1}{2^{k+1}}, \dots$  seems to tend to 2.

◦  $8, 2, \frac{10}{2}, \frac{14}{4}, \frac{34}{8}, \frac{62}{16}, \frac{130}{32}, \frac{254}{64}, \frac{514}{128}, \dots, \frac{4 \times 2^k + 2}{2^k}, \frac{4 \times 2^{k+1} - 2}{2^{k+1}}, \dots$  seems to have 4 as limiting value.

◦  $10, 3, \frac{13}{2}, \frac{19}{4}, \frac{45}{8}, \frac{83}{16}, \frac{173}{32}, \frac{339}{64}, \dots, \frac{\frac{16}{3} \times 2^k + \frac{7}{3}}{2^k}, \frac{\frac{16}{3} \times 2^{k+1} - \frac{7}{3}}{2^{k+1}}, \dots$  seems to have  $\frac{16}{3}$  as limiting value.

◦  $1, 4, \frac{5}{2}, \frac{13}{4}, \frac{23}{8}, \frac{49}{16}, \frac{95}{32}, \frac{193}{64}, \dots, \frac{3 \times 2^k + 1}{2^k}, \frac{3 \times 2^{k+1} - 1}{2^{k+1}}, \dots$  seems to have limiting value 3.

◦  $6, 6, 6, 6, 6, 6, \dots$  seems to tend to 6.

A sequence starting with  $a, b$  seems to have  $b + \frac{a-b}{3} = \frac{a+2b}{3}$  as limiting value.

## Extra D

# PETITE PARENTHÈSE

Cet extra est idéal pour réviser le calcul littéral et les priorités opératoires.

On prendra garde à ne pas utiliser la calculatrice, à vérifier les calculs et à tout faire juste.

On pose  $A(x) = x + 4$ ,  $B(x) = 3x - 2$ ,  $C(x) = 7 - x$  et  $D(x) = 1 - 2x$ .

1. Développer et réduire les expressions suivantes (attention,  $E^3(u) = [E(u)]^3$ ).

- (a)  $-4B(x) =$
- (b)  $C(x) - 3D(x) =$
- (c)  $-3A(x) - 5C(x) =$
- (d)  $A(x)B(x) =$
- (e)  $C(x)D(x) =$
- (f)  $A^2(x)D(x) =$
- (g)  $B(x)C(x) - A(x)D(x) =$
- (h)  $5B^2(x) - 4C^2(x) =$
- (i)  $-5D^3(x) =$
- (j)  $B^4(x) =$
- (k)  $-2B(x)A^2(x) - 3C^2(x)D(x) =$
- (l)  $\frac{A(x)}{B(x)C(x)} - \frac{B(x)}{C(x)D(x)} =$

2. Calculer de tête les nombres suivants.

- |                       |                           |
|-----------------------|---------------------------|
| (m) $A(-6) =$         | (p) $C^2(-1) =$           |
| (n) $B(-4) =$         | (q) $D^2(-\frac{3}{2}) =$ |
| (o) $C(-3) - D(-4) =$ | (r) $-3D(-1)C(-4)A(-5) =$ |

3. Exprimer en fonction de  $x$  les expressions suivantes.

- (s)  $A(x^2) =$
- (t)  $D(x + 1) =$
- (u)  $B(3 - 2x) =$
- (v)  $-4A(x - 3) =$
- (w)  $-3B(5 - 3x^2) =$
- (x)  $-2D^2(4 - 2x^2) =$
- (y)  $C(4 - x^2)D(2x + 4) =$
- (z)  $\frac{B(2x+1)-C(3x-1)}{A(x-1)D(3-4x)} =$

**Solutions :**  $A(x) = x + 4$ ,  $B(x) = 3x - 2$ ,  $C(x) = 7 - x$  et  $D(x) = 1 - 2x$ .

1. (a)  $-4B(x) = 8 - 12x$   
 (b)  $C(x) - 3D(x) = 5x + 4$   
 (c)  $-3A(x) - 5C(x) = 2x - 47$   
 (d)  $A(x)B(x) = 3x^2 + 10x - 8$   
 (e)  $C(x)D(x) = 2x^2 - 15x + 7$   
 (f)  $A^2(x)D(x) = -2x^3 - 15x^2 - 24x + 16$   
 (g)  $B(x)C(x) - A(x)D(x) = -x^2 + 30x - 18$   
 (h)  $5B^2(x) - 4C^2(x) = 41x^2 - 4x - 176$   
 (i)  $-5D^3(x) = 40x^3 - 60x^2 + 30x - 5$   
 (j)  $B^4(x) = 81x^4 - 216x^3 + 216x^2 - 96x + 16$   
 (k)  $-2B(x)A^2(x) - 3C^2(x)D(x) = -131x^2 + 272x - 83$   
 (l)  $\frac{A(x)}{B(x)C(x)} - \frac{B(x)}{C(x)D(x)} = \frac{-11x^2 + 5x}{6x^3 - 49x^2 + 51x - 14}$
2. (m)  $A(-6) = -2$   
 (n)  $B(-4) = -14$   
 (o)  $C(-3) - D(-4) = 1$   
 (p)  $C^2(-1) = 64$   
 (q)  $D^2(-\frac{3}{2}) = 16$   
 (r)  $-3D(-1)C(-4)A(-5) = 99$
3. (s)  $A(x^2) = x^2 + 4$   
 (t)  $D(x + 1) = -2x - 1$   
 (u)  $B(3 - 2x) = 7 - 6x$   
 (v)  $-4A(x - 3) = -4x - 4$   
 (w)  $-3B(5 - 3x^2) = 27x^2 - 39$   
 (x)  $-2D^2(4 - 2x^2) = -32x^4 + 104x^2 - 98$   
 (y)  $C(4 - x^2)D(2x + 4) = -4x^3 - 7x^2 - 12x - 21$   
 (z)  $\frac{B(2x+1)-C(3x-1)}{A(x-1)D(3-4x)} = \frac{9x-7}{8x^2+17x-21}$

# SINE QUA TION

## Sommaire

|   |                     |     |
|---|---------------------|-----|
| 1 | Exercices . . . . . | 569 |
| 2 | Solutions . . . . . | 570 |

Cet extra est très utile pour perfectionner sa maîtrise des résolutions d'équations et inéquations.

## 1 Exercices

1. Pour chacune des équations suivantes, exprimer formellement chacune des variables en fonction des autres.

|                                            |                                            |                             |
|--------------------------------------------|--------------------------------------------|-----------------------------|
| (a) $x + y - 5 = 0$                        | (f) $4fg - 3f + 2g = 0$                    | (i) $3xy - 2yz = 5 - 7xyz$  |
| (b) $u - v + 2 = 0$                        | (g) $u + 1 = \frac{d}{t}$                  | (j) $k^2 = j + 2$           |
| (c) $3a - 2b = 7$                          | (h) $\frac{3}{4}at - 7\frac{t}{x} + 2 = 0$ | (k) $r^2 - 2r + 1 = 7s + 3$ |
| (d) $\alpha - 3\beta + 5\gamma + 6 = 0$    |                                            | (l) $m^2 - 4m = n^2 - 4$    |
| (e) $\frac{1}{2}AB - \frac{1}{3}A - 5 = 0$ |                                            |                             |

2. Même type d'exercice pour les inéquations suivantes.

|                          |                           |
|--------------------------|---------------------------|
| (m) $x + y > 3$          | (p) $3 - 2f + 4g \leq 1$  |
| (n) $a - b + 4 < 0$      | (q) $\frac{u}{v} \leq -2$ |
| (o) $5p - 3q - 2 \geq 4$ | (r) $ab - a > 1$          |

3. Résoudre les équations ou systèmes d'équations suivants, en utilisant différentes méthodes : substitution, combinaison linéaire, un peu des deux.

|                                                                          |                                                                                       |
|--------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------|
| (s) $\begin{cases} \alpha - 2 = 4 \\ 2\beta + 3\alpha = 0 \end{cases}$   | (x) $\begin{cases} m - 2n + 3 = 0 \\ 4n = 2m + 6 \end{cases}$                         |
| (t) $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases}$                   | (y) $\begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x - y + z = 4 \\ 3x + 2z = 1 \end{cases}$        |
| (u) $\begin{cases} 3a + 2b - 4 = 0 \\ 2a - 3b = 1 \end{cases}$           | (z) $\begin{cases} a + 2b + c = 4 \\ 2a - 3b + 5c = 0 \\ 3a - b + 2c = 1 \end{cases}$ |
| (v) $\begin{cases} 2u - 4v = 3u - 7v + 1 \\ 5u + 2v - 4 = 1 \end{cases}$ |                                                                                       |
| (w) $\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 6y = 7 + 4x \end{cases}$               |                                                                                       |

## 2 Solutions

1. (a)  $x = 5 - y$  et  $y = 5 - x$
- (b)  $u = v - 2$  et  $v = u + 2$
- (c)  $a = \frac{2b+7}{3}$  et  $b = \frac{3a-7}{2}$
- (d)  $\alpha = 3\beta - 5\gamma - 6$ ,  $\beta = \frac{1}{3}(\alpha + 5\gamma + 6)$  et  $\gamma = \frac{1}{5}(3\beta - \alpha - 6)$
- (e)  $A = \frac{5}{\frac{1}{2}B - \frac{1}{3}}$  et  $B = \frac{\frac{1}{3}A + 5}{\frac{1}{2}A}$
- (f)  $f = \frac{2g}{3-4g}$  et  $g = \frac{3f}{4f+2}$
- (g)  $u = \frac{d}{t} - 1$ ,  $d = t(u + 1)$  et  $t = \frac{d}{u+1}$
- (h)  $a = \frac{7\frac{t}{x} - 2}{\frac{3}{4}t}$ ,  $t = \frac{2}{\frac{7}{x} - \frac{3}{4}a}$  et  $x = \frac{7t}{\frac{3}{4}at + 2}$
- (i)  $x = \frac{2yz + 5}{3y + 7yz}$ ,  $y = \frac{5}{3x - 2z + 7xz}$  et  $z = \frac{5 - 3xy}{7xy - 2y}$
- (j)  $j = k^2 - 2$  et  $k = \pm\sqrt{j+2}$
- (k)  $s = \frac{1}{7}((r-1)^2 - 3)$  et  $r = 1 \pm \sqrt{7s+3}$
- (l)  $m = 2 \pm n$  et  $n = \pm(m-2)$
2. (m)  $x > 3 - y$  et  $y > 3 - x$
- (n)  $a < b - 4$  et  $b > a + 4$
- (o)  $p \geq \frac{1}{5}(3q + 6)$  et  $q \leq \frac{1}{3}(5p - 6)$
- (p)  $f \geq 2g + 1$  et  $g \leq \frac{1}{2}f - \frac{1}{2}$
- (q)  $\begin{cases} u \leq -2v \text{ et } v > 0 \\ u \geq -2v \text{ et } v < 0 \end{cases}$  et  $\begin{cases} v \leq -\frac{u}{2} \text{ et } v > 0 \\ v \geq -\frac{u}{2} \text{ et } v < 0 \end{cases}$
- (r)  $\begin{cases} a > \frac{1}{b-1} \text{ et } b > 1 \\ a < \frac{1}{b-1} \text{ et } b < 1 \end{cases}$  et  $\begin{cases} b > \frac{1}{a} + 1 \text{ et } a > 0 \\ b < \frac{1}{a} + 1 \text{ et } a < 0 \end{cases}$
3. Résolution des équations ou systèmes d'équations par substitution, combinaison linéaire ou autre.
  - (s)  $\begin{cases} \alpha - 2 = 4 \\ 2\beta + 3\alpha = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 4 + 2 = 6 \\ 2\beta = -3\alpha \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = 6 \\ \beta = -\frac{3}{2} \times 6 = -9 \end{cases}$
  - (t)  $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 + y \\ (1 + y) + y = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} 2y = 3 - 1 \\ x = 1 + y \end{cases}$   
 $\iff \begin{cases} y = \frac{2}{2} = 1 \\ x = 1 + 1 = 2 \end{cases}$
  - (u)  $\begin{cases} 3a + 2b - 4 = 0 \\ 2a - 3b = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2(3a + 2b - 4) - 3(2a - 3b) = 2 \times 0 - 3 \times 1 \\ 2a - 3b = 1 \end{cases}$   
 $\iff \begin{cases} 6a + 4b - 8 - 6a + 9b = -3 \\ 2a = 1 + 3b \end{cases} \iff \begin{cases} 13b = -3 + 8 \\ a = \frac{1}{2}(1 + 3b) \end{cases}$   
 $\iff \begin{cases} b = \frac{5}{13} \\ a = \frac{1}{2}(1 + 3\frac{5}{13}) = \frac{14}{13} \end{cases}$

$$\begin{aligned}
 \text{(v)} \quad & \begin{cases} 2u - 4v = 3u - 7v + 1 \\ 5u + 2v - 4 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 3u - 2u = 7v - 4v - 1 \\ 5(3v - 1) + 2v - 4 = 1 \end{cases} \\
 & \iff \begin{cases} u = 3v - 1 \\ 17v = 1 + 4 + 5 \end{cases} \iff \begin{cases} v = \frac{10}{17} \\ u = 3\frac{10}{17} - 1 = \frac{13}{17} \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(w)} \quad & \begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 6y = 7 + 4x \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ -4x + 6y = 7 \end{cases} \\
 & \iff \begin{cases} 2(2x - 3y) + (-4x + 6y) = 5 + 7 \\ -4x + 6y = 7 \end{cases} \\
 & \iff \begin{cases} 4x - 6y - 4x + 6y = 12 \\ -4x + 6y = 7 \end{cases} \iff x, y \in \emptyset
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(x)} \quad & \begin{cases} m - 2n + 3 = 0 \\ 4n = 2m + 6 \end{cases} \iff \begin{cases} m - 2n + 3 = 0 \\ 2m - 4n + 6 = 0 \end{cases} \\
 & \iff \begin{cases} 2(m - 2n + 3) - (2m - 4n + 6) = 2 \times 0 - 0 \\ m = 2n - 3 \end{cases} \\
 & \iff \begin{cases} 2m - 4n + 6 - 2m + 4n - 6 = 0 \\ m = 2n - 3 \end{cases} \\
 & \iff \begin{cases} 0m + 0n = 0 \\ m = 2n - 3 \end{cases} \iff n \in \mathbb{R} \text{ et } m = 2n - 3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(y)} \quad & \begin{cases} x + y - z = 2 \\ 2x - y + z = 4 \\ 3x + 2z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} z = x + y - 2 \\ 2x - y + (x + y - 2) = 4 \\ 3x + 2(x + y - 2) = 1 \end{cases} \\
 & \iff \begin{cases} z = x + y - 2 \\ 3x = 4 + 2 \\ 2y = 1 - 5x + 4 \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{6}{3} = 2 \\ y = \frac{1}{2}(5 - 5 \times 2) = -\frac{5}{2} \\ z = 2 - \frac{5}{2} - 2 = -\frac{5}{2} \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(z)} \quad & \begin{cases} a + 2b + c = 4 \\ 2a - 3b + 5c = 0 \\ 3a - b + 2c = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} c = 4 - a - 2b \\ 2a - 3b + 5(4 - a - 2b) = 0 \\ 3a - b + 2(4 - a - 2b) = 1 \end{cases} \\
 & \iff \begin{cases} c = 4 - a - 2b \\ -3a - 13b = -20 \\ a - 5b = 1 - 8 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 5b - 7 \\ c = 4 - (5b - 7) - 2b \\ 3(5b - 7) + 13b = 20 \end{cases} \\
 & \iff \begin{cases} 28b = 20 + 21 \\ a = 5b - 7 \\ c = 4 + 7 - 7b \end{cases} \iff \begin{cases} b = \frac{41}{28} \\ a = 5 \times \frac{41}{28} - 7 = \frac{9}{28} \\ c = 11 - 7 \times \frac{41}{28} = \frac{3}{4} \end{cases}
 \end{aligned}$$



## TROP GRAND ÉCART

Cet extra est sensationnel pour redécouvrir la valeur absolue.

## Exercices

**Exercice 1** On cherche à déterminer l'ensemble  $\mathcal{I}$  des fonctions  $f$  vérifiant les propriétés suivantes :

- $f$  est définie sur  $[0; 1]$ ,
- $f$  est à valeurs dans  $[0; 1]$  :  $\forall x \in [0; 1], f(x) \in [0; 1]$ ,
- Pour tout  $a, b \in [0; 1]$ , on a l'inégalité (I) :  $|f(a) - f(b)| \geq |a - b|$ .

1. (a) Justifier que, pour tout  $\mu$  et  $\nu \in [0; 1]$ ,  $|\mu - \nu| \leq 1$ .  
 (b) En déduire que, pour  $f \in \mathcal{I}$ , on a  
 soit (i) :  $f(0) = 0$  et  $f(1) = 1$ , soit (ii) :  $f(0) = 1$  et  $f(1) = 0$ .
2. (a) Déterminer les deux fonctions affines  $u$  et  $v$  vérifiant l'une (i), l'autre (ii).  
 (b) Vérifier que  $u$  et  $v$  appartiennent à  $\mathcal{I}$ .
3. Soit  $f \in \mathcal{I}$  vérifiant (i).  
 (a) Montrer que, pour tout  $x \in [0; 1]$ ,  $f(x) \geq u(x)$ .  
 (b) Montrer que, pour tout  $x \in [0; 1]$ ,  $f(x) \leq v(x)$ .  
 (c) Qu'en déduire pour  $f$  ?
4. Soit  $f \in \mathcal{I}$  vérifiant (ii).  
 De façon analogue, montrer que pour tout  $x \in [0; 1]$ ,  $f(x) = v(x)$ .
5. Conclure sur  $\mathcal{I}$  puis tenter d'expliquer le titre de ce devoir.

**Exercice 2** Soient les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} \quad \text{et} \quad g(x) = |x|.$$

1. Tracer leur représentation graphique  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$  dans un repère adapté sur GeoGebra. À première vue,  $\mathcal{C}_f$  va-t-elle passer au-dessous de  $\mathcal{C}_g$  ?
2. Démontrer que pour réel  $x$  non nul, on a  $f(x) = |x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$ .
3. Montrer que pour tout réel  $x$ , on a  $f(x) - g(x) > 0$ .
4. En déduire les positions relatives de  $\mathcal{C}_f$  et  $\mathcal{C}_g$ .



## Solutions

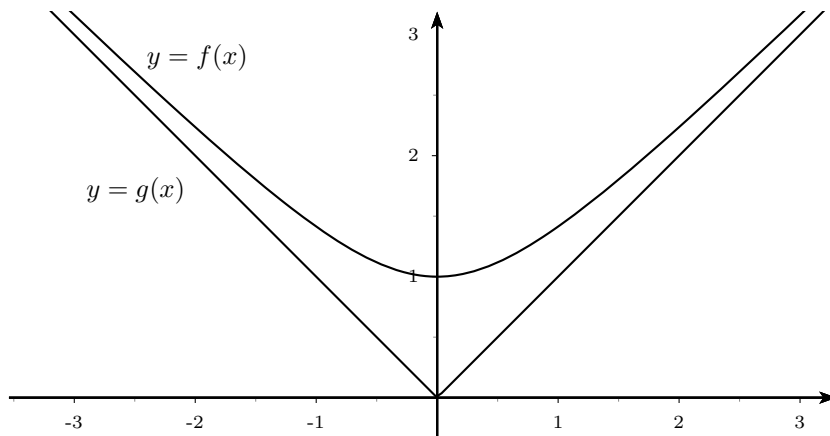
### Exercice 1

1. (a) Puisque  $0 \leq \mu \leq 1$  et  $-1 \leq -\nu \leq -0$ , on a  $0 - 1 \leq \mu - \nu \leq 1 - 0$   
*i.e.*  $|\mu - \nu| \leq 1$ .  
 (b) Ainsi, comme  $f(0)$  et  $f(1) \in [0; 1]$ ,  $|f(1) - f(0)| \leq 1$ .  
 Par ailleurs,  $f \in \mathcal{I}$  donc  $|f(1) - f(0)| \geq |1 - 0| = 1$ .  
 On a donc  $|f(1) - f(0)| = 1$  qui ne peuvent alors être que les valeurs  
 « extrêmes » 0 et 1.  
 En effet, on a soit  $f(1) - f(0) = 1$  et  $1 + 0 \leq 1 + f(0) = f(1) \leq 1$ ,  
 soit  $f(0) - f(1) = 1$  et  $1 + 0 \leq 1 + f(1) = f(0) \leq 1$ .
2. (a) On cherche des fonctions sous la forme " $mx + p$ ".  
 (i) Puisque l'on doit avoir  $m + p = 1$  et  $p = 0$ , la seule fonction  
 affine vérifiant (i) est  $u(x) = x$ .  
 (ii) Et puisque l'on doit avoir  $m + p = 0$  et  $p = 1$ , la seule fonction  
 affine vérifiant (ii) est  $v(x) = 1 - x$ .  
 (b) Soient  $a, b \in [0; 1]$ .  
 On a  $0 \leq u(a) = a \leq 1$  et  $|u(a) - u(b)| = |a - b| \geq |a - b|$ .  
 De même,  $1 - 0 \geq v(a) = 1 - a \geq 1 - 1$   
 et  $|v(a) - v(b)| = |1 - a - 1 + b| = |b - a| \geq |a - b|$ .
3. Soit  $f \in \mathcal{I}$  vérifiant (i) et soit  $x \in [0; 1]$ .  
 (a) On a  $u(x) = x = |x| = |x - 0| \leq |f(x) - f(0)| = |f(x) - 0| = |f(x)| = f(x)$ .  
 (b) On a  $1 - u(x) = 1 - x = |1 - x| \leq |f(1) - f(x)| = |1 - f(x)| = 1 - f(x)$   
 d'où  $f(x) \leq u(x)$ .  
 (c) Ainsi,  $f(x) = u(x)$  sur  $[0; 1]$ .
4. Soit  $f \in \mathcal{I}$  vérifiant (ii) et soit  $x \in [0; 1]$ .  
 On a  $v(x) = 1 - x = |x - 1| \leq |f(x) - f(1)| = |f(x) - 0| = |f(x)| = f(x)$   
 et  $1 - v(x) = x = |0 - x| \leq |f(0) - f(x)| = |1 - f(x)| = 1 - f(x)$   
 d'où  $f(x) \leq v(x)$ .  
 Ainsi,  $f(x) = v(x)$  sur  $[0; 1]$ .
5. L'ensemble  $\mathcal{I}$  est donc uniquement constitué des deux fonctions  $x \mapsto x$  et  
 $x \mapsto 1 - x$  qui vérifient en fait une relation plus précise sur  $[0; 1]$  :  
 $|f(a) - f(b)| = |a - b|$ .  
 Ainsi, une fonction de  $[0; 1]$  sur  $[0; 1]$  ne peut pas « toujours » dépasser la pente 1  
 en valeur absolue. En effet, (I) peut s'écrire, pour  $a \neq b$ ,  $\left| \frac{f(a) - f(b)}{a - b} \right| \geq 1$  qui  
 correspond à la « pente » de  $f$  entre  $a$  et  $b$ .

**Exercice 2**

$f$  et  $g$  sont définies sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$  et  $g(x) = |x|$ .

1.



Il ne semble pas que la courbe  $\mathcal{C}_f$  passe au-dessous de la courbe  $\mathcal{C}_g$ .

2. On a,  $\forall x \neq 0$ ,

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} = \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \sqrt{x^2} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = |x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}.$$

3. Ainsi,  $\forall x \neq 0$ , on a  $f(x) - g(x) = |x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - |x| = |x| \left( \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 1 \right)$   
du signe de  $\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - \sqrt{1}$ . Or,  $1 + \frac{1}{x^2} > 1$  donc, la fonction racine étant  
croissante,  $\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} > \sqrt{1}$  et  $f(x) - g(x) > 0$ .

Si  $x = 0$ ,  $f(0) = \sqrt{1} > 0 = g(0)$ .

4. La courbe  $\mathcal{C}_f$  est donc située au-dessus de la courbe  $\mathcal{C}_g$  sur  $\mathbb{R}$ .



## POURSUITES

Cet extra est remarquable pour parfaire votre expertise des suites numériques.

## Exercices

**Exercice 1** On aimerait tant voir Syracuse...

On part d'un nombre entier plus grand que zéro. S'il est pair, on le divise par 2, s'il est impair, on le multiplie par 3 et l'on ajoute 1. En répétant l'opération, on obtient une suite d'entiers positifs dont chacun ne dépend que de son prédécesseur.

On peut écrire  $u_{n+1} = \begin{cases} \end{cases}$

Par exemple, à partir de 14, on construit la suite de Syracuse du nombre 14 : ...

Après que le nombre 1 ait été atteint, la suite des valeurs (1,4,2,1,4,2...) se répète indéfiniment en un cycle de longueur 3, appelé cycle trivial. On dit que la suite est cyclique ou périodique à.p.c.r.

Si l'on était parti d'un autre entier, on aurait obtenu une suite différente. *A priori*, il serait possible que la suite de Syracuse de certaines valeurs de départ n'atteigne jamais la valeur 1, soit qu'elle aboutisse à un cycle différent du cycle trivial, soit qu'elle n'aboutisse à aucun cycle. Or, on n'a jamais trouvé d'exemple de suite obtenue suivant les règles données qui n'aboutisse à 1. La conjecture de Syracuse est qu'une suite de Syracuse de n'importe quel entier strictement positif atteint nécessairement 1 et donc le cycle trivial. En dépit de la simplicité de son énoncé, cette conjecture continue de défier les mathématiciens depuis 1928. Ce problème, devenu célèbre quand il a été présenté à l'Université de Syracuse dans l'état de New York, mobilisa tant les mathématiciens durant les années 1960 qu'une plaisanterie courut selon laquelle ce problème faisait partie d'un complot soviétique visant à ralentir la recherche américaine. Selon certains, les mathématiques ne seraient pas encore prêtes pour de tels problèmes.

**Exercice 2** Suite récurrente d'ordre 2

On considère la suite réelle  $(u_n)_{\mathbb{N}}$  définie sur  $\mathbb{N}$  par

$$u_0 = -1, \quad u_1 = \frac{1}{2}, \quad u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n.$$

1. Calculer  $u_2$  et en déduire que  $(u_n)_{\mathbb{N}}$  n'est ni arithmétique ni géométrique.
2. On définit la suite  $(v_n)_{\mathbb{N}}$  en posant  $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
  - (a) Calculer  $v_0$  et exprimer  $v_{n+1}$  en fonction de  $v_n$ .
  - (b) En déduire que  $(v_n)_{\mathbb{N}}$  est géométrique et exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ .
3. On définit la suite  $(w_n)_{\mathbb{N}}$  en posant  $w_n = \frac{u_n}{v_n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .
  - (a) Calculer  $w_0$ .

- (b) En utilisant  $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}u_n$ , exprimer  $w_{n+1}$  en fonction de  $u_n$  et de  $v_n$ .
- (c) En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $w_{n+1} = w_n + 2$  puis exprimer  $w_n$  en fonction de l'entier  $n$ .
4. Montrer que pour tout entier  $n$ ,  $u_n = \frac{2n-1}{2^n}$ .
5. On pose  $S_n = \sum_0^n u_i$ . Montrer par récurrence que  $S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

### Exercice 3 Suites adjacentes

Deux suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  sont dites adjacentes si

$$(a_n) \text{ est croissante, } (b_n) \text{ est décroissante, } \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0.$$

- Démontrer que, pour tout  $n$ ,  $a_n \leq b_n$ .  
En déduire que, pour tous entiers  $p$  et  $q$ ,  $a_p \leq b_q$ .
- En déduire que les suites  $(a_n)$  et  $(b_n)$  convergent et qu'elles ont même limite  $\ell$ .
- Justifier que, pour tout  $n$ ,  $a_n \leq \ell \leq b_n$ .
- On donne, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$  et  $v_n = u_n + \frac{1}{n! \times n}$ .

Montrer que  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont adjacentes puis déterminer à la calculatrice une valeur approchée de leur limite commune à  $10^{-5}$  près. Qui vous rappelle-t-elle ?

### Exercice 4 Somme (in)finie : deux belles séries Mathflix.

Soient  $u_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2}$  et  $v_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{k}}$  pour  $n \geq 1$ .

- Expliciter les quatre premiers termes de  $(u_n)_{\mathbb{N}}$  et de  $(v_n)_{\mathbb{N}}$  et en donner une valeur approchée au centième.
- Justifier que  $(u_n)_{\mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{\mathbb{N}}$  sont strictement croissantes.
- (a) Prouver que pour  $k \geq 2$ ,  $\frac{1}{k^2} < \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$  (\*)  
(b) En sommant les inégalités (\*) obtenues pour  $k$  variant de 2 à  $n$ , établir que  $u_n < 2 - \frac{1}{n}$ .  
(c) La suite  $(u_n)_{\mathbb{N}}$  peut-elle diverger vers  $+\infty$  ?  
(d) On admet que la suite  $(u_n)_{\mathbb{N}}$  converge vers le réel  $\frac{\pi^2}{6}$ . En donner une valeur approchée au millième.  
(e) À l'aide de la calculatrice, déterminer à partir de quel entier  $n$  on a  $u_n > 1,6$  puis  $u_n > 1,63$ .
- (a) Prouver que pour  $k \geq 1$ ,  $\frac{1}{\sqrt{k}} > 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$  (\*\*)  
(b) En sommant les inégalités (\*\*) obtenues pour  $k$  variant de 1 à  $n$ , établir que  $v_n > 2(\sqrt{n+1} - 1)$ .  
(c) Soit  $A$  un réel positif donné. Quels sont les termes  $v_n$  supérieurs à  $A$  ?  
Qu'en déduire ?

**Exercice 5** Suite de Fibonacci

On rappelle que le nombre d'or  $\varphi$  est la racine positive du polynôme  $x^2 - x - 1$ .

i. Calculer  $\varphi$  et  $\varphi'$ , l'autre racine.

ii. Montrer que  $\varphi' = -\frac{1}{\varphi}$ . En déduire que  $\frac{\varphi'}{\varphi} \in ]-1; 1[$ .

*Un couple de lapins, nés le 1<sup>er</sup> janvier, donne naissance à un autre couple de lapins chaque mois, dès qu'il a atteint l'âge de deux mois. Les nouveaux couples suivent la même loi de reproduction. Combien y aura-t-il de couples de lapins le 1<sup>er</sup> janvier de l'année suivante en supposant qu'aucun couple n'ait disparu entre temps ?*

On note  $\mathcal{F}_n$  le nombre de couples de lapins au début du  $n$ -ième mois.

1. Calculer les premiers termes de la suite  $(\mathcal{F}_n)_{\mathbb{N}}$ .

2. Justifier que, pour tout  $n$ ,  $\mathcal{F}_{n+2} = \mathcal{F}_{n+1} + \mathcal{F}_n$ .

Cette suite est appelée « suite de Fibonacci » du nom d'un mathématicien italien du XIII<sup>e</sup> siècle.

3. Résoudre le problème posé.

4. Il est démontré que, pour tout  $n$ ,  $\mathcal{F}_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \varphi'^n)$ .

(a) En déduire une approximation de  $\mathcal{F}_n$  lorsque  $n$  est grand.

(b) Montrer que, pour tout  $n$ ,  $\frac{\mathcal{F}_{n+1}}{\mathcal{F}_n} = \varphi \frac{1 - (\varphi'/\varphi)^{n+1}}{1 - (\varphi'/\varphi)^n}$ .

(c) En déduire la limite de  $\frac{\mathcal{F}_{n+1}}{\mathcal{F}_n}$ .

La suite de Fibonacci est très utile dans la résolution et la compréhension de nombreux problèmes. Elle possède de multiples propriétés algébriques, arithmétiques... et fait encore l'objet de maintes études.

**Exercice 6** Méthode de Héron

Soit  $a > 0$  et l'on considère la suite  $(u_n)_{\mathbb{N}}$  définie par  $u_0 > 0$ ,  $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{a}{u_n})$ .

1. Montrer par récurrence que la suite  $(u_n)_{\mathbb{N}}$  est bien définie et positive.

2. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{2u_n}$ .

3. En déduire que pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_n - \sqrt{a} \geq 0$ .

4. Montrer que la suite  $(u_n)_{\mathbb{N}^*}$  est décroissante.

5. En déduire que la suite  $(u_n)_{\mathbb{N}}$  converge vers un réel  $\ell$ .

6. Justifier que l'on a  $\ell = \frac{1}{2}(\ell + \frac{a}{\ell})$ .

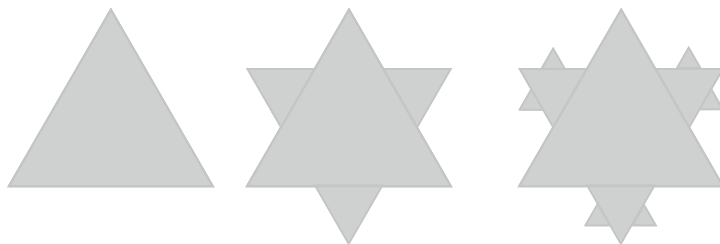
7. Déterminer la valeur de  $\ell$ .

**Exercice 7** Flocon de Koch

À partir d'un triangle équilatéral, on construit un objet géométrique complexe.

- On découpe chaque côté en trois segments de même longueur.
- On construit vers l'extérieur un triangle équilatéral de côté le segment « central » puis on efface ce dernier.
- On reproduit ensuite le processus pour chacun des plus petits segments obtenus.

En répétant ce processus à l'infini, on obtient un objet géométrique appelé **flocon de Koch**.



1. (a) Si le triangle de départ a des côtés de longueur  $\frac{1}{3}$ , quel est son périmètre ?  
 (b) Quel est le périmètre de la figure à l'étape 1 ?... à l'étape 2 ?... à l'étape  $n$  ?  
 (c) Quel est le périmètre du Flocon de Koch ?
2. (a) Quelle est l'aire du triangle équilatéral ?  
 (b) Quelle est l'aire de la figure à l'étape 1 ? Quelle est l'aire à l'étape 2 ?... et à l'étape  $n$  ?  
 (c) Que penser de l'aire du Flocon de Koch ?

Ainsi, le flocon de Koch est un objet géométrique de périmètre infini et d'aire finie. Il a été inventé en 1906 par le mathématicien suédois Helge von Koch. C'est un objet que l'on dit « fractal » c'est-à-dire qu'il est « autosimilaire », le tout est semblable à n'importe laquelle de ses parties.

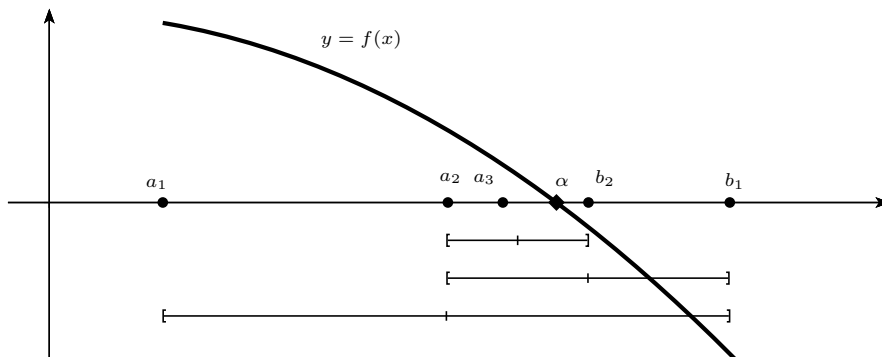
### Exercice 8 Méthode de Newton

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^3 + x^2 - 2x - 3$  représentée par la cubique  $\mathcal{C}$ .

Le but de cet exercice est d'obtenir une approximation de sa racine  $\alpha$  au moyen de différentes méthodes.

#### Partie A : Dichotomie

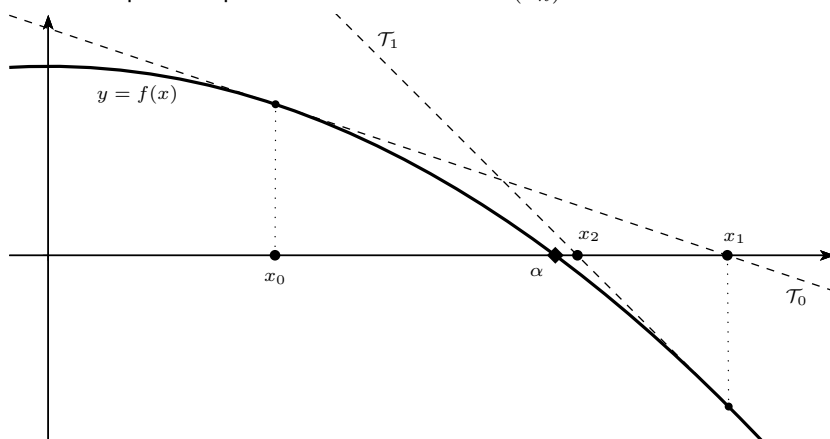
1. À l'aide de la calculatrice, justifier que  $\alpha \in I_0 = [1; 2]$ .
2. Calculer l'image du milieu de  $I_0$  et en déduire un nouvel encadrement  $I_1$  de  $\alpha$ .
3. Reproduire ce processus quelques fois.
4. Quel est l'amplitude de l'intervalle  $I_n$  obtenu à la  $n$ -ième étape ?



**Partie B : Méthode de Newton**

L'idée est d'utiliser la tangente à la courbe  $\mathcal{C}$ . En effet, on remarque graphiquement que la racine de la fonction affine associée est bien plus proche de  $\alpha$  que l'abscisse du point de tangence (cf. graphe suivant).

1. Calculer la fonction dérivée  $f'$  de  $f$ .
2. Déterminer l'équation de la tangente à  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse  $x_0 = 2$  puis calculer la racine  $x_1$  de la fonction affine associée.
3. Reproduire ce processus quelques fois.
4. Donner l'expression par récurrence de la suite  $(x_n)$  ainsi construite.

**Partie C : Remarques**

Ces deux méthodes se généralisent bien sûr à d'autres fonctions numériques. Si la méthode de dichotomie est certainement connue et formulée depuis des temps ancestraux, la seconde a été inventée en 1669 par Isaac Newton. Les suites associées à ces deux méthodes convergent généralement vers la racine mais il est prouvé que la méthode de Newton converge beaucoup plus vite. Il faut cependant émettre certaines restrictions :

- La fonction considérée doit être continue pour la dichotomie et même dérivable pour Newton et l'on doit en connaître l'expression ainsi que celle de la dérivée.
- Les valeurs de départ doivent être « proches » de la racine et cette dernière doit être isolée.
- Si la fonction a plusieurs racines, certains problèmes peuvent rapidement arriver.
- Pour la méthode de Newton, la suite obtenue peut s'arrêter si l'on sort de l'ensemble de définition (cf.  $\sqrt{x} - 1$  par exemple) ou si l'on tombe sur un zéro de la dérivée, il n'y a alors pas de nouvelle racine.

Malgré tout cela, la méthode de Newton reste encore actuellement un outil très puissant pour trouver des valeurs approchées des zéros de fonctions. De plus, elle se généralise aux fonctions de nombres complexes (cf. chapitre éponyme de terminale) et même aux fonctions de plusieurs variables.

**Exercice 9**  $\pi = 2?$ 

Étape 1 : On prend un segment  $\mathcal{S}$  de longueur 2 et l'on construit, « au-dessus », un demi-cercle de diamètre ce segment. Ce demi-cercle a donc pour longueur  $\pi$ .



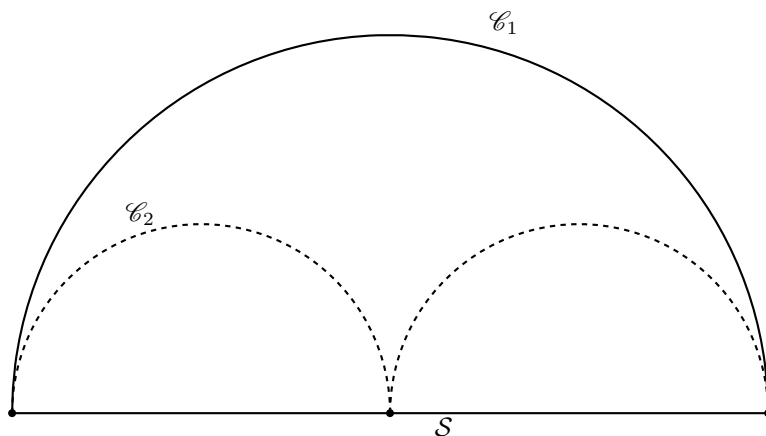
Étape 2 : On partage ensuite le segment en son milieu et l'on construit deux demi-cercles de diamètre chacun des segments.

Étape 3 : On reproduit le processus à partir des deux « demi-segments » afin d'obtenir quatre demi-cercles.

Vous pouvez compléter la figure suivante.

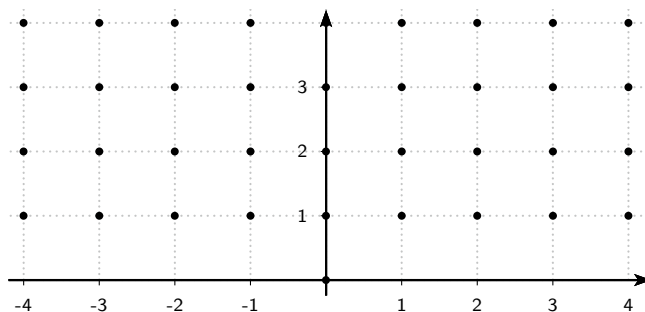
On appelle  $u_n$  la longueur des petits segments et  $v_n$  la longueur de chaque demi-cercle à l'étape  $n$ .

1. Exprimer  $u_{n+1}$  en fonction de  $u_n$  et  $v_{n+1}$  en fonction de  $v_n$ .
2. En déduire les expressions de  $u_n$  et de  $v_n$  en fonction de  $n$  puis exprimer  $\frac{u_n}{v_n}$ .
3. On appelle  $\mathcal{C}_n$  la courbe formée par la succession des demi-cercles construits à l'étape  $n$ .
  - (a) Tracer les courbes  $\mathcal{C}_3$  et  $\mathcal{C}_4$ .
  - (b) Que dire de la courbe  $\mathcal{C}_n$  lorsque  $n$  tend vers l'infini ?
  - (c) Déterminer la longueur  $\ell_n$  de  $\mathcal{C}_n$  puis sa limite à l'infini.
  - (d) Ceci ne vous semble-t-il pas paradoxal ?



**Exercice 10** Dénombrabilité de  $\mathbb{Q}$  — Non dénombrabilité de  $\mathbb{R}$

- A. 1. Justifier qu'à tout nombre rationnel, on peut associer un point du réseau ci-dessous et réciproquement.



2. Construire un chemin passant par tous les points de ce réseau.
3. En déduire qu'il existe une suite numérique contenant tous les nombres rationnels.

On dit que  $\mathbb{Q}$  est *dénombrable*.

- B. Supposons maintenant qu'il existe une suite  $(a_n)_{\mathbb{N}^*}$  contenant tous les nombres réels de l'intervalle  $]0; 1[$ . Nous pouvons écrire chacun d'entre-eux sous leur forme décimale en notant  $a_{ij}$  la  $j$ -ième décimale du réel  $a_i$  :

$$\begin{array}{rcll} a_1 & = & 0, & a_{11} \ a_{12} \ a_{13} \ a_{14} \ \cdots \ a_{1p} \ \cdots \\ a_2 & = & 0, & a_{21} \ a_{22} \ a_{23} \ a_{24} \ \cdots \ a_{2p} \ \cdots \\ a_3 & = & 0, & a_{31} \ a_{32} \ a_{33} \ a_{34} \ \cdots \ a_{3p} \ \cdots \\ \vdots & & & \vdots \\ a_n & = & 0, & a_{n1} \ a_{n2} \ a_{n3} \ a_{n4} \ \cdots \ a_{np} \ \cdots \\ \cdots & = & 0, & \cdots \end{array}$$

À partir de la suite « diagonale », nous allons construire un nombre  $b$  qui ne fait pas partie de cette suite.

On pose  $b = 0, b_1 b_2 b_3 \dots b_p \dots$  où  $b_i$  est un entier entre 0 et 8 tel que

Il est nécessaire de ne pas prendre de 9 sinon le développement décimal n'est pas unique (cf. § 4.4 du cours en page 20).

On a  $b \neq a_1$  car  $b_1 \neq a_{11}$ ,  $b \neq a_2$  car  $b_2 \neq a_{22}$ ,  $b \neq a_3$  car  $b_3 \neq a_{33}$ , ...  
 $b \neq a_n$  car  $b_n \neq a_{nn}$ , ...

Ainsi,  $b$  est différent de chacun des termes de la suite  $(a_n)$  et  $b \in ]0; 1[$  ce qui contredit l'hypothèse d'exhaustivité de la suite  $(a_n)$ . On a ainsi fait un « raisonnement par l'absurde ».

Il n'existe donc pas de suite contenant tous les nombres réels compris entre 0 et 1 donc, a fortiori, il n'existe pas de suite de tous les réels. On dit que  $\mathbb{R}$  est *non dénombrable*.

On a démontré qu'il y avait « autant » de nombres dans  $\mathbb{Q}$  que dans  $\mathbb{N}$ . En revanche,  $\mathbb{R}$  en contient « infiniment plus ». On dit que  $\mathbb{R}$  a la « puissance du continu ». G. Cantor a été le premier à mettre en évidence ce résultat à la fin du XIX<sup>e</sup>s. et cela a suscité de nombreuses controverses, tant mathématiques que philosophiques.

Nous pouvons ensuite nous poser la question de l'existence d'un ensemble contenant « plus » d'éléments que  $\mathbb{N}$  mais « moins » que  $\mathbb{R}$  ? Il a été démontré en logique que cela était *indécidable*.

## Corrigés

**Exercice 1** On a donc  $u_{n+1} = \begin{cases} \frac{1}{2} u_n & \text{si } u_n \text{ est pair} \\ 3u_n + 1 & \text{si } u_n \text{ est impair} \end{cases}$   
 et cela donne par exemple 14, 7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, 4, 2, 1, ...

**Exercice 2**  $u_0 = -1$ ,  $u_1 = \frac{1}{2}$ ,  $u_{n+2} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n$ .

1. On a  $u_2 = u_1 - \frac{1}{4}u_0 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ . Ainsi,  $u_2 - u_1 = -\frac{1}{4} \neq -\frac{1}{2} = u_1 - u_0$   
 et  $\frac{u_2}{u_1} = \frac{3}{2} \neq -\frac{1}{2} = \frac{u_1}{u_0}$ .  $(u_n)_{\mathbb{N}}$  n'est donc ni arithmétique ni géométrique.

2. (a)  $v_0 = u_1 - \frac{1}{2}u_0 = 1$  et  
 $v_{n+1} = u_{n+2} - \frac{1}{2}u_{n+1} = u_{n+1} - \frac{1}{4}u_n - \frac{1}{2}u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_{n+1} - \frac{1}{2}u_n) = \frac{1}{2}v_n$ .

- (b)  $(v_n)_{\mathbb{N}}$  est donc géométrique de raison  $\frac{1}{2}$  et de premier terme  $v_0 = 1$  :  $v_n = \frac{1}{2^n}$ .
3. (a)  $w_0 = \frac{u_0}{v_0} = -1$ .
- (b) Puisque  $u_{n+1} = v_n + \frac{1}{2}u_n$ ,  $w_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{v_{n+1}} = \frac{v_n + \frac{1}{2}u_n}{\frac{1}{2}v_n} = 2 + \frac{u_n}{v_n} = 2 + w_n$ .
- (c)  $(w_n)_{\mathbb{N}}$  est donc arithmétique de premier terme  $-1$  et de raison  $2$  :  $w_n = 2n - 1$ .
4. Pour tout entier  $n$ ,  $u_n = v_n \times w_n = \frac{2n-1}{2^n}$ .
5. On pose  $S_n = \sum_0^n u_n$ . On a  $S_0 = u_0 = -1 = 2 - \frac{2 \times 0 + 3}{2^0}$ .
- Supposons que  $S_n = 2 - \frac{2n+3}{2^n}$ . On a
- $$\begin{aligned} S_{n+1} &= \sum_0^{n+1} u_n = S_n + u_{n+1} = 2 - \frac{2n+3}{2^n} + \frac{2(n+1)-1}{2^{n+1}} = 2 + \frac{2n+2-1-2(2n+3)}{2^{n+1}} \\ &= 2 + \frac{-2n-5}{2^{n+1}} = 2 - \frac{2(n+1)+3}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$
- Par récurrence, la propriété est vraie pour tout  $n$ .

### Exercice 3 Suites adjacentes

$(a_n)$  est croissante,  $(b_n)$  est décroissante,  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = 0$ .

- Supposons qu'il existe  $p$  tel que  $a_p > b_p$ . La monotonie des suites permet alors d'affirmer que,  $\forall n \geq p$ ,  $a_n \geq a_p$  d'où  $a_n - b_n \geq a_p - b_n$  et  $b_p \geq b_n$  d'où  $a_p - b_n \geq a_p - b_p > 0$ . Ainsi,  $a_n - b_n \geq a_p - b_p > 0$  et  $(a_n - b_n)$  ne pourrait tendre vers 0.  $\nexists$  On a donc,  $\forall n$ ,  $a_n \leq b_n$ .
- Soient  $p$  et  $q$  deux entiers et supposons  $p \leq q$ . On a bien  $a_p \leq a_q \leq b_q \leq b_p$ .
- La suite  $(a_n)$  est donc croissante et majorée (par tous les termes de la suite  $(b_n)$ ). Le théorème de convergence monotone permet d'affirmer que la suite  $(a_n)$  converge vers un réel  $\ell$ . De même, la suite  $(b_n)$  converge vers un réel  $\ell'$ . Ainsi, la suite  $(a_n - b_n)$  converge vers le réel  $\ell - \ell'$  et, par unicité de la limite,  $\ell = \ell'$ .
- Puisque  $(a_n)$  est croissante,  $a_n \leq \ell$  et puisque  $(b_n)$  est décroissante,  $\ell \leq b_n$ .

4. On a, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_{n+1} - u_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} > 0$  donc  $(u_n)$  est croissante ;

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \left( u_{n+1} + \frac{1}{(n+1)! \times (n+1)} \right) - \left( u_n + \frac{1}{n! \times n} \right) \\ &= u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1)! \times (n+1)} - \frac{1}{n! \times n} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{n(n+1)}{n(n+1)} + \frac{1}{(n+1)! \times (n+1)} \cdot \frac{n}{n} - \frac{1}{n! \times n} \cdot \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2} = \frac{n(n+1)+n-(n+1)^2}{(n+1)! n(n+1)} \\ &= \frac{-1}{(n+1)! n(n+1)} < 0 \quad \text{donc } (v_n) \text{ est décroissante.} \end{aligned}$$

De plus,  $v_n - u_n = u_n + \frac{1}{n! \times n} - u_n = \frac{1}{n! \times n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ .

Les suites  $(u_n)$  et  $(v_n)$  sont donc adjacentes.

La calculatrice nous donne 2,71828 comme valeur approchée de leur limite commune. En effet, Euler a démontré en 1748 la convergence de cette série :  $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = e$ .

### Exercice 4 Somme (in)finie.

Soit  $u_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2}$  et  $v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}}$  pour  $n \geq 1$ .

1. On a  $u_1 = \frac{1}{1^2} = 1$ ,  $u_2 = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} = 1,25$ ,  $u_3 = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} \simeq 1,36$ ,

$$u_4 = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} \simeq 1,42$$

et  $v_1 = \frac{1}{\sqrt{1}} = 1$ ,  $v_2 = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 1,71$ ,  $v_3 = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} \simeq 2,28$ ,

$$v_4 = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} \simeq 2,78.$$

2. Pour  $n \geq 1$ ,  $u_{n+1} - u_n = \sum_{k=1}^{k=n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(n+1)^2} - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(n+1)^2} > 0$

et  $v_{n+1} - v_n = \sum_{k=1}^{k=n+1} \frac{1}{\sqrt{k}} - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{n+1}} > 0.$

$(u_n)_{\mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{\mathbb{N}}$  sont donc strictement croissantes.

3. (a) On a, pour  $k \geq 2$ ,  $k-1 > 0$  et en multipliant par  $k^2(k-1)$ ,

$$\begin{aligned} \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} &\iff \frac{k^2(k-1)}{k^2} < \frac{k^2(k-1)}{k-1} - \frac{k^2(k-1)}{k} \\ &\iff k-1 < k^2 - k(k-1) \iff -1 < 0 : \text{vrai.} \end{aligned}$$

(b) On alors

$$\frac{1}{2^2} < \frac{1}{2-1} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{3^2} < \frac{1}{3-1} - \frac{1}{3}$$

$$\dots < \dots$$

$$\frac{1}{(n-1)^2} < \frac{1}{(n-1)-1} - \frac{1}{n-1}$$

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$$

$$\sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k^2} < \frac{1}{2-1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \dots - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{n}$$

et donc, pour tout  $n \geq 2$ ,  $u_n = 1 + \sum_{k=2}^{k=n} \frac{1}{k^2} < 1 + 1 - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n}$ .

(c) Puisque  $u_n < 1$ , la suite  $(u_n)_{\mathbb{N}}$  ne peut diverger vers  $+\infty$ .

(d) et (e) On admet que  $(u_n)_{\mathbb{N}}$  converge vers  $\frac{\pi^2}{6} \simeq 1,645$ . On a  $u_{21} \simeq 1,59$ ,  $u_{22} \simeq 1,6004$  et  $u_{205} > 1,64$ .

4. (a) Pour  $k \geq 1$ , on a

$$\frac{1}{\sqrt{k}} > 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) \iff \frac{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}{\sqrt{k}} > 2(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})$$

$$\iff \frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k}} + 1 > 2(k+1-k) \iff \frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{k}} > 2-1=1$$

$$\iff \sqrt{k+1} > \sqrt{k} : \text{vrai.}$$

(b) On alors

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\sqrt{1}} &> 2(\sqrt{1+1} - \sqrt{1}) \\
 \frac{1}{\sqrt{2}} &> 2(\sqrt{2+1} - \sqrt{2}) \\
 &\dots > \dots \\
 \frac{1}{\sqrt{n-1}} &> 2(\sqrt{n-1+1} - \sqrt{n-1}) \\
 \frac{1}{\sqrt{n}} &> 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \\
 \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{\sqrt{k}} &> 2(\sqrt{1+1} - \sqrt{1}) + 2(\sqrt{2+1} - \sqrt{2}) + \dots + 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) \\
 v_n &> 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{1}).
 \end{aligned}$$

(c) Soit  $A > 0$ . On a

$$2(\sqrt{n+1} - 1) > A \iff \sqrt{n+1} > \frac{A}{2} + 1 \iff n > \left(\frac{A}{2} + 1\right)^2 - 1.$$

Ainsi,  $v_n > A$  pour tout  $n \geq \text{Ent} \left[ \left(\frac{A}{2} + 1\right)^2 \right]$  et  $(v_n)_{\mathbb{N}}$  diverge vers  $+\infty$ .

### Exercice 5 Suite de Fibonacci

- i. Le nombre d'or  $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  est la racine positive du polynôme  $x^2 - x - 1$ .  
 $\varphi' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$  en est l'autre.
- ii. On a  $-\frac{1}{\varphi} = -\frac{2}{1+\sqrt{5}} = -\frac{2(1-\sqrt{5})}{(1+\sqrt{5})(1-\sqrt{5})} = -\frac{2(1-\sqrt{5})}{1-5} = -\frac{2(1-\sqrt{5})}{-4} = \varphi'$ .  
Ainsi,  $\frac{\varphi'}{\varphi} = -\frac{1}{\varphi^2} = -\varphi'^2 \in ]-1; 1[$  puisque  $\varphi' \in ]-1; 1[$ .
1. On a  $\mathcal{F}_1 = 1, \mathcal{F}_2 = 1, \mathcal{F}_3 = 1+1 = 2, \mathcal{F}_4 = 2+1 = 3, \mathcal{F}_5 = 3+2 = 5, \mathcal{F}_6 = 5+3 = 8 \dots$
2. Chaque début de mois ( $\mathcal{F}_{n+2}$ ), il y a les couples précédents (ceux de  $\mathcal{F}_{n+1}$ ) plus un couple par couple âgé d'au moins deux mois (tous ceux de  $\mathcal{F}_n$ ).  
Ainsi pour tout  $n$ ,  $\mathcal{F}_{n+2} = \mathcal{F}_{n+1} + \mathcal{F}_n$ .
3. On a alors  $\mathcal{F}_7 = \mathcal{F}_6 + \mathcal{F}_5 = 13, \mathcal{F}_8 = 13 + 8 = 21, \mathcal{F}_9 = 21 + 13 = 34, \mathcal{F}_{10} = 34 + 21 = 55, \mathcal{F}_{11} = 55 + 34 = 89, \mathcal{F}_{12} = 89 + 55 = 144$  et  $\mathcal{F}_{13} = 144 + 89 = 233$ .  
Le premier janvier prochain, il devrait y avoir 233 couples de lapins.
4. Il est démontré que, pour tout  $n$ ,  $\mathcal{F}_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \varphi'^n)$ .
  - (a) Puisque  $\varphi' \in ]-1; 1[$ ,  $(\varphi'^n)$  converge vers 0 et donc  $\mathcal{F}_n$  est équivalent à  $\frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$  lorsque  $n$  est grand.
  - (b) Soit  $n \in \mathbb{N}$ . On a
$$\frac{\mathcal{F}_{n+1}}{\mathcal{F}_n} = \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^{n+1} - \varphi'^{n+1})}{\frac{1}{\sqrt{5}}(\varphi^n - \varphi'^n)} = \frac{\varphi^{n+1}(1 - \varphi'^{n+1}/\varphi^{n+1})}{\varphi^n(1 - \varphi'^n/\varphi^n)} = \varphi \frac{1 - (\varphi'/\varphi)^{n+1}}{1 - (\varphi'/\varphi)^n}.$$
  - (c) Puisque  $\frac{\varphi'}{\varphi} \in ]-1; 1[$ , la suite géométrique  $(\varphi'/\varphi)^n$  converge vers 0 et donc  $\frac{\mathcal{F}_{n+1}}{\mathcal{F}_n}$  vers  $\varphi \cdot \frac{1-0}{1-0} = \varphi$ .

**Exercice 6** Méthode de Héron

Soit  $a > 0$  et  $(u_n)_{\mathbb{N}}$  définie par  $u_0 > 0$ ,  $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{a}{u_n})$ .

- $u_0$  est défini et positif.
  - Supposons que  $u_n$  soit défini et positif. On a alors  $\frac{a}{u_n} > 0$  donc  $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{a}{u_n})$  défini et positif.
  - La suite  $(u_n)_{\mathbb{N}}$  est donc bien définie et positive.
- On a  $u_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{u_n + \frac{a}{u_n}}{2} - \sqrt{a} = \frac{(u_n + \frac{a}{u_n})u_n}{2u_n} - \sqrt{a} \frac{2u_n}{2u_n} = \frac{u_n^2 + a - 2u_n\sqrt{a}}{2u_n}$   
 $u_{n+1} - \sqrt{a} = \frac{u_n^2 - 2u_n\sqrt{a} + \sqrt{a}^2}{2u_n} = \frac{(u_n - \sqrt{a})^2}{2u_n}$ .
- Ainsi, par quotient de positifs,  $u_{n+1} - \sqrt{a} \geq 0$  pour  $n \in \mathbb{N}$  c.-à-d.  $u_n - \sqrt{a} \geq 0$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ .
- Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(u_n + \frac{a}{u_n}) - u_n = \frac{1}{2u_n}(u_n^2 + a - 2u_n^2) = \frac{1}{2u_n}(a - u_n^2)$   
 $u_{n+1} - u_n = \frac{(\sqrt{a} + u_n)(\sqrt{a} - u_n)}{2u_n} \leq 0$  car  $0 < \sqrt{a} \leq u_n$ .  
 La suite  $(u_n)_{\mathbb{N}^*}$  est donc décroissante.
- Décroissante et minorée par  $u_0 > 0$  ou  $\sqrt{a} > 0$ , le théorème de convergence monotone permet d'affirmer que la suite  $(u_n)_{\mathbb{N}}$  converge vers un réel  $\ell \geq 0$ .
- La fonction de récurrence  $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x})$  est continue sur  $\mathbb{R}^*$  donc  $u_{n+1} = f(u_n)$  tend vers  $\ell$  et vers  $f(\ell)$ . L'unicité de la limite donne  $\ell = \frac{1}{2}(\ell + \frac{a}{\ell})$ , point fixe de  $f$ .
- On a  $\ell = \frac{1}{2}(\ell + \frac{a}{\ell}) \implies 2\ell = \ell + \frac{a}{\ell} \implies \ell^2 = a \implies \ell = \sqrt{a}$  car  $\ell \geq 0$ .  
 Cette méthode d'approche d'une racine carrée était utilisée par Héron d'Alexandrie au début de notre ère mais il semble qu'elle était déjà connue des Babyloniens quinze siècles auparavant.

**Exercice 7** Flocon de Koch

- Si le triangle de départ a des côtés de longueur  $\frac{1}{3}$ , son périmètre est de  $\mathcal{P}_0 = 3 \times \frac{1}{3} = 1$ .
  - Le périmètre de la figure à l'étape 1 est  $\mathcal{P}_1 = \frac{1}{3}\mathcal{P}_0 \times 4 = \frac{4}{3}\mathcal{P}_0 = \frac{4}{3}$ ,  
 ... à l'étape 2 :  $\mathcal{P}_2 = \frac{4}{3}\mathcal{P}_1 = (\frac{4}{3})^2$ , ... à l'étape 3 :  $\mathcal{P}_3 = \frac{4}{3}\mathcal{P}_2 = (\frac{4}{3})^3$ ,  
 ... à l'étape  $n$  :  $\mathcal{P}_n = \frac{4}{3}\mathcal{P}_{n-1} = (\frac{4}{3})^n \mathcal{P}_0 = (\frac{4}{3})^n$ .
  - $\frac{4}{3} > 1$  donc  $(\frac{4}{3})^n$  diverge vers l'infini et le périmètre du Flocon est infini.
- D'après le théorème de Pythagore, la hauteur d'un triangle équilatéral de côté  $c$  mesure  $h = \sqrt{c^2 - (\frac{c}{2})^2} = \sqrt{c^2(1 - \frac{1}{4})} = c\frac{\sqrt{3}}{2}$  et donc son aire est  $\mathcal{A} = \frac{B \cdot h}{2} = \frac{c \times c \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} c^2$ .
  - L'aire de la figure à l'étape 0 est  $\mathcal{A}_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} 1^2 = \frac{\sqrt{3}}{4}$ .  
 L'aire de la figure à l'étape 1 est  $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_0 + 3 \times \frac{\sqrt{3}}{4} (\frac{1}{3})^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} (1 + \frac{1}{3})$ .  
 À l'étape 2,  $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_1 + 4 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{4} (\frac{1}{3^2})^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} (1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{3^3})$ .  
 À l'étape 3,  $\mathcal{A}_3 = \mathcal{A}_2 + 4 \times 4 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{4} (\frac{1}{3^3})^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} (1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{3^3} + \frac{4^2}{3^5})$ .  
 À l'étape 4,  $\mathcal{A}_4 = \mathcal{A}_3 + 4^3 \times 3 \times \frac{\sqrt{3}}{4} (\frac{1}{3^4})^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} (1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{3^3} + \frac{4^2}{3^5} + \frac{4^3}{3^7})$ .  
 À l'étape  $n$ ,  $\mathcal{A}_n = \frac{\sqrt{3}}{4} (1 + \frac{1}{3} + \frac{4}{3^3} + \frac{4^2}{3^5} + \frac{4^3}{3^7} + \dots + \frac{4^{n-1}}{3^{2n-1}})$ .

(c) Puisque  $\frac{4^{n-1}}{3^{2n-1}} < \frac{4^{n-1}}{3^{2n-1}} \times \frac{4}{3} = \frac{4^n}{9^n}$ ,  
 $\mathcal{A}_n < \frac{\sqrt{3}}{4} \left( 1 + \frac{4}{9} + \frac{4^2}{9^2} + \frac{4^3}{9^3} + \dots + \left(\frac{4}{9}\right)^n \right) = \frac{\sqrt{3}}{4} \frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{9\sqrt{3}}{20} \left( 1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1} \right)$   
 et  $\mathcal{A}_n < \frac{9\sqrt{3}}{20}$ . Le flocon de Koch a donc une aire finie.

Ainsi, le flocon de Koch est un objet géométrique de périmètre infini et d'aire finie.

### Exercice 8 Méthode de Newton

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^3 + x^2 - 2x - 3$  représentée par la cubique  $\mathcal{C}$  et de racine  $\alpha$ .

#### Partie A : Dichotomie

1. La calculatrice ne montre qu'une seule racine  $\alpha \in I_0 = [1; 2]$ .
2. On a  $f(1) = -3 < 0$ ,  $f\left(\frac{1+2}{2}\right) = -0,375 < 0$  et  $f(2) = 5 > 0$ .  
On a donc  $\alpha \in I_1 = \left[\frac{3}{2}; 2\right]$ .
3.  $f\left(\frac{\frac{3}{2}+2}{2}\right) \simeq 1,92 > 0$  donc  $\alpha \in I_2 = \left[\frac{7}{4}; 2\right]$ ,  $f\left(\frac{\frac{7}{4}+2}{2}\right) \simeq 0,68 > 0$  donc  $\alpha \in I_3 = [1,5; 1,675]$ , ...
4.  $I_0$  est d'amplitude  $2 - 1 = 1 = \frac{1}{2^0}$ ,  $I_1$  est d'amplitude  $2 - 1,5 = 0,5 = \frac{1}{2^1}$ ,  
 $I_2$  est d'amplitude  $1,75 - 1,5 = 0,25 = \frac{1}{2^2}$ ... à l'étape  $n$ ,  $I_n$  est d'amplitude  $\frac{1}{2^n}$ .

#### Partie B : Méthode de Newton

1. On a  $f'(x) = 3x^2 + 2x - 2$ .
2. On a  $f'(2) = 3 \times 2^2 + 2 \times 2 - 2 = 14$  et  $f(2) = 5$  donc la tangente  $\mathcal{T}_0$  à  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse  $x_0 = 2$  a pour équation  $y = f'(2)(x - 2) + f(2) = 14x - 23$ , de racine  $x_1 = \frac{23}{14} \simeq 1,64$ .
3. On a  $f'(1,64) \simeq 9,35$  et  $f(1,64) \simeq 0,82$  donc la tangente  $\mathcal{T}_1$  à  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse  $x_1 = 1,64$  a pour équation  $y = f'(1,64)(x - 1,64) + f(1,64)$  i.e.  $y = 9,35x - 14,51$ , de racine  $x_2 = \frac{14,51}{9,35} \simeq 1,55$ .  
On a  $f'(1,55) \simeq 8,31$  et  $f(1,55) \simeq 0,03$  donc la tangente  $\mathcal{T}_2$  à  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse  $x_2 = 1,55$  a pour équation  $y = f'(1,55)(x - 1,55) + f(1,55)$  i.e.  $y = 8,31x - 12,85$ , de racine  $x_3 = \frac{12,85}{8,31} \simeq 1,546$ .  
On observe que l'on est beaucoup plus rapidement proche de  $\alpha$  avec cette méthode.
4.  $x_{n+1}$  est la racine de la fonction qui à  $x$ , associe le nombre  $f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n) = f'(x_n)x - f'(x_n)x_n + f(x_n)$  donc, pour tout entier  $n$ ,  $x_{n+1} = \frac{f'(x_n)x_n - f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$  en supposant  $f'(x_n) \neq 0$ .

### Exercice 9 $\pi = 2?$

Le demi-cercle à l'étape 1 a pour longueur  $L = \frac{1}{2} \times 2\pi r = \frac{1}{2} \times 2\pi \times \frac{2}{2} = \pi$ .

1. On a  $u_{n+1} = \frac{1}{2} u_n$  et  $v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$ . Par ailleurs,  $u_1 = 2$  et  $v_1 = L = \pi$ .
2. Ces suites sont donc géométriques de raison  $\frac{1}{2}$  et,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,  
 $u_n = u_1 q^{n-1} = 2 \times \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-2}}$  et  $v_n = v_1 q^{n-1} = \frac{\pi}{2^{n-1}}$   
 d'où  $\frac{u_n}{v_n} = \frac{u_1}{v_1} = \frac{2}{\pi}$ .

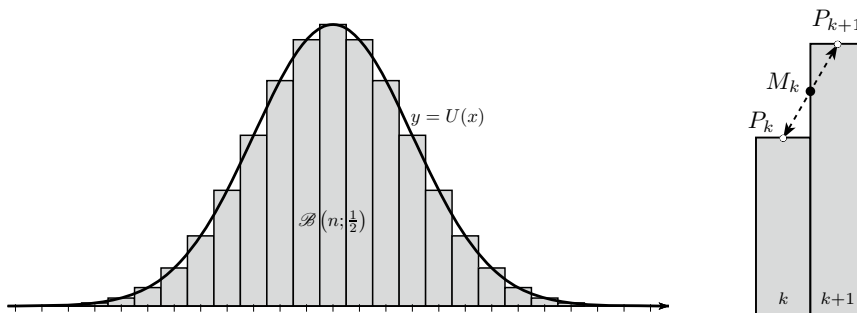






Cet extra est pertinent (mais pas évident) pour passer d'une loi binomiale discrète à une loi normale continue.

Nous allons tenter de lisser par une fonction  $U$  la répartition de la loi binomiale de paramètres  $p = \frac{1}{2}$  et  $n$  supposé « grand ». Nous cherchons ainsi une fonction  $U$  dérivable – pour le lissage – passant par les points moyens entre les « marches » et de pentes, celles entre ces « marches ». Les schémas suivants précisent un peu les idées :



Cherchons donc une fonction  $U$  passant par les points  $M_k$  et de tangente en  $M_k$ , la droite  $(P_k P_{k+1})$ , pour  $k$  allant de 0 à  $n$ .

## 1. Approximation discrète

(a) Déterminer les coordonnées des points  $P_k$ ,  $P_{k+1}$  et  $M_k$  en fonction de  $n$  et  $k$ .

(b) On rappelle que  $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ . Montrer qu'au point  $M_k$ ,

i. la fonction  $U$  prend la valeur  $\left(\frac{1}{2}\right)^n \times \binom{n}{k} \frac{n+1}{2(k+1)}$ ,

ii. la dérivée  $U'$  prend la valeur  $\left(\frac{1}{2}\right)^n \times \binom{n}{k} \frac{-2k+n-1}{k+1}$ .

(c) Exprimer le rapport  $\frac{U'}{U}$  au point  $M_k$  en fonction de  $n$  et  $k$ .

(d) Justifier l'approximation  $\frac{U'}{U} \approx -4\frac{k}{n} + 2$  pour des  $n$  « grands ».

## 2. Passage au continu

(a) Si  $m$  désigne l'espérance de cette binomiale, la valeur centrale, la moyenne, on pose  $x = 2m\frac{k}{n}$  i.e.  $\frac{k}{n} = \frac{x}{2m}$ .

En remarquant que  $\frac{k}{n}$  prend ses valeurs dans l'intervalle  $[0; 1]$ , déterminer un encadrement des valeurs prises par  $x$ .

(b) Justifier l'approximation  $\frac{U'}{U} \approx -\frac{2}{m}(x - m)$  pour des  $n$  « grands ».

(c) En intégrant chacun des membres, déterminer une solution de l'équation différentielle  $\frac{U'}{U} = -\frac{2}{m}(x - m)$ .

- (d) Les solutions d'une telle équation sont de la forme  $U(x) = c.e^{-\frac{(x-m)^2}{m}}$ .
- Comment déterminer la valeur de la constante  $c$  ?
  - Remarquer que  $2npq = m$  puis observer la belle loi normale obtenue.

## Corrigé

- (a) Puisque  $p = q = \frac{1}{2}$ , on a  $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k} = \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n$  et  $P_k(k, \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n)$ ,  $P_{k+1}\left(k+1, \binom{n}{k+1} \left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$ . Ainsi,  $x_{M_k} = k + \frac{1}{2}$  et  $y_{M_k} = \frac{y_{P_k} + y_{P_{k+1}}}{2} = \frac{\binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \binom{n}{k+1} \left(\frac{1}{2}\right)^n}{2} = \frac{\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}}{2^{n+1}}$ .

(b) Ainsi, au point  $M_k$ ,

  - la fonction  $U$  prend la valeur  $U(x_{M_k}) = y_{M_k} = \frac{\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}}{2^{n+1}}$   

$$= \frac{1}{2^{n+1}} \left( \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!} \right) = \frac{1}{2^{n+1}} \left( \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{n-k}{k+1} \right)$$
  

$$= \frac{1}{2^{n+1}} \binom{n}{k} \left( 1 + \frac{n-k}{k+1} \right) = \frac{1}{2^{n+1}} \binom{n}{k} \frac{k+1+n-k}{k+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \binom{n}{k} \frac{n+1}{2(k+1)}.$$
  - la dérivée  $U'$  prend la valeur  $U'(x_{M_k}) = \frac{y_{P_{k+1}} - y_{P_k}}{x_{P_{k+1}} - x_{P_k}} = \frac{\binom{n}{k+1} \left(\frac{1}{2}\right)^n - \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^n}{k+1-k}$   

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n \left( \frac{n!}{(k+1)!(n-(k+1))!} - \frac{n!}{k!(n-k)!} \right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left( \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{n-k}{k+1} - \frac{n!}{k!(n-k)!} \right)$$
  

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \binom{n}{k} \left( \frac{n-k}{k+1} - 1 \right) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \binom{n}{k} \frac{-2k+n-1}{k+1}.$$

(c) Alors,  $\frac{U'}{U} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n \times \binom{n}{k} \frac{-2k+n-1}{k+1}}{\left(\frac{1}{2}\right)^n \times \binom{n}{k} \frac{n+1}{2(k+1)}} = \frac{-2k+n-1}{k+1} \frac{2(k+1)}{n+1} = 2 \cdot \frac{-2k+n-1}{n+1}.$

(d) Et, pour  $n$  « grand »,  $\frac{U'}{U} = 2 \cdot \frac{-2k}{n+1} + 2 \cdot \frac{n+1}{n+1} + 2 \cdot \frac{-2}{n+1} \approx 2 \cdot \frac{-2k}{n} + 2 + 2 \times 0 = -4 \frac{k}{n} + 2.$

2. (a) Si  $\frac{k}{n} \in [0; 1]$ , on a  $m = np = \frac{k}{2}$  donc  $x = 2m \frac{k}{n} \in [0; n]$  :  $x$  parcourt bien toutes les valeurs de la binomiale. On considérera ensuite  $x$  comme continue et non plus discrète.

(b) De plus,  $\frac{U'}{U} \approx -4 \frac{k}{n} + 2 = -4 \frac{x}{2m} - \frac{2}{m}(-m) = -\frac{2}{m}(x - m).$

(c) Pour  $U > 0$ , on a  $\frac{U'}{U} = [\ln(U)]'$ . De plus,  $-\frac{2}{m}(x - m) = \left[-\frac{1}{m}(x - m)^2\right]'$ . Posons donc  $\ln(U) = -\frac{1}{m}(x - m)^2$ . On alors  $U = e^{-\frac{1}{m}(x - m)^2} > 0$  qui vérifie bien  $\frac{U'}{U} = \frac{\left[-\frac{1}{m}(x - m)^2\right]' e^{-\frac{1}{m}(x - m)^2}}{e^{-\frac{1}{m}(x - m)^2}} = -\frac{2}{m}(x - m).$

(d) Les solutions de cette équation sont  $U(x) = c.e^{-\frac{(x-m)^2}{m}}$  : en effet, la constante se conserve lors de la dérivation de  $U$  et se simplifie alors dans le quotient  $\frac{U'}{U}$ .

  - Puisque  $U$  est sensée approcher une loi de probabilité, l'aire totale sous la courbe de  $U$  doit valoir 1, ce qui impose alors  $c = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$ .
  - Puisque  $m = np = 2np\frac{1}{2} = 2npq = 2\sigma^2$ , on peut écrire  $U(x) = c.e^{-\frac{(x-m)^2}{m}} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$ . Ceci est la densité d'une variable aléatoire suivant ce qui s'appelle une loi normale ou gaussienne, de même espérance  $m$  et de même variance  $npq$  que notre binomiale.

## Extra I

# EINSTEIN VAUT MIEUX QUE DEUX TU L'AURAS

Cet extra est récréatif.

## Énigme

Il y a cinq maisons de cinq couleurs différentes, alignées le long d'une route. Dans chacune de ces maisons vit une personne de nationalité différente. Chacune de ces personnes boit une boisson différente, pratique un sport différent et possède un animal domestique différent.

1. Le Qatari séjourne dans la maison grenat.
2. L'Uruguayen dresse des manchots.
3. Le Wallon s'abreuve de thé.
4. La maison violette est directement à gauche de la maison beige.
5. Le kayakiste élève des rhinocéros.
6. On apprécie le café dans la maison violette.
7. Le propriétaire de la maison indigo joue au jokari.
8. La personne qui occupe la maison du centre sirote du lait.
9. Le Fidjien habite dans la première maison.
10. Le nageur loge à côté de celui qui possède des yacks.
11. Le hockeyeur ingurgite du soda.
12. Celui qui prend soin de ses zèbres est voisin de celui qui pratique le jokari.
13. L'Ouzbek vole en deltaplane.
14. Le Fidjien réside juste à côté de la maison azur.
15. Celui qui pratique la natation a un voisin qui ne boit que de l'eau.

Question : Qui a un poisson ?

Cette énigme est attribuée à Albert Einstein selon qui, seulement 2 % des individus seraient capable de résoudre cette énigme sans papier ni crayon, de tête. Et vous ?

## Aide

Moi, j'ai listé les initiales, dressé un tableau et mis les maisons sur la première ligne, de gauche à droite. J'ai rempli plutôt facilement quelques cases puis j'ai fait les associations imposées et les ai testées dans mon tableau. Ainsi, j'ai trouvé... avec un papier et un stylo.

## Solution

La première maison est indigo. Son propriétaire est le Fidjien, qui boit de l'eau, joue au jokari et a des yacks.

La seconde maison est azur. Son propriétaire est le Wallon, qui boit du thé, pratique la natation et a des zèbres.

La troisième maison est grenat. Son propriétaire est le Qatari, qui boit du lait, fait du kayak et a des rhinocéros.

La quatrième maison est violette. Son propriétaire est l'Ouzbek, qui boit du café, vole en deltaplane et a un poisson.

La dernière maison est beige. Son propriétaire est l'Uruguayen, qui boit du soda, pratique le hockey et a des manchots.

C'est donc l'Ouzbek qui possède un poisson.

# ANNEXES



# IF

Cet extra est instructif.

- Si tu lis une première fois l'énoncé afin de comprendre la structure du problème,
- Si tu rédiges correctement et montres comment les résultats sont obtenus et ne te contentes pas de la réponse ; sache que le correcteur la connaît déjà et qu'il juge seulement ton travail,
- Si tu prends le temps de te relire avant de sortir comme si ce n'était pas ta copie et corriges ainsi maintes fautes de français et de mathématiques,
- Si tu fais des phrases de conclusions, sans faute d'orthographe, un tableau ne concluant rien tout seul par exemple,
- Si tu évites les tirets, qui sont des signes – et préfères les étoiles, d'autant que c'est plus joli,
- Si tu n'abrèges pas les barres de fractions car le signe – s'applique alors sur tout le numérateur le cas échéant,
- Si tu prends soin de ta calligraphie :  $p$ ,  $P$ ,  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{P}$ ,  $\rho$ ... désignant des objets différents,
- Si tu réponds à toutes les questions, dans l'ordre, surtout si tu sais y répondre,
- Si tu utilises des résultats précédents mais ne te sers point d'une question suivante,
- Si tu remarques qu'il n'est pas anodin qu'une consigne commence par « en déduire » et qu'il ne faut alors pas faire autrement,
- Si tu vérifies et contre-vérifies tes résultats avec l'énoncé, les résultats obtenus précédemment, les résultats attendus, les résultats théoriques... tout ce que tu peux excepté la copie d'un tiers,
- Si tu ne confonds pas  $=$  et  $\Longleftrightarrow$  : deux nombres, vecteurs, expressions algébriques, fonctions... peuvent être égaux mais des équations, des propositions... sont équivalentes,
- Si tu n'effectues pas trois calculs en un passage de ligne car tu fais souvent faux comme, par exemple, la factorisation par  $a$  et l'identité remarquable en même temps pour la forme canonique,
- Si tu sais calculer avec les fractions de manière infaillible,



- Si tu simplifies systématiquement les fractions et, en particulier, ne laisses pas un dénominateur négatif : cela t'évite le ridicule et les erreurs,
- Si tu ne confonds pas « racines d'un polynôme » et « solutions d'une équation algébrique »,
- Si tu ne t'encombres pas l'esprit et utilises des formules le moins possible : celle de la forme canonique est souvent mal appliquée, celles de  $\Delta$  et  $x_{1,2}$  en première sont bien suffisantes et tu auras bientôt de nombreuses formules de dérivation autrement plus importantes et plus difficiles à retrouver,
- Si tu résous une équation en trouvant la valeur de l'inconnue, généralement  $x$ , et non une valeur d'un  $X$ , d'un  $t$  ou de  $\frac{2}{x+3}$  ; lors d'un changement de variable, change d'abord  $x$  en  $X$  puis trouve des solutions  $X_1$  et  $X_2$  et repasse ensuite vers  $x_1$  et  $x_2$  par exemple,
- Si tu n'oublies pas de tester tes solutions,
- Si tu es méticuleux et ne confonds pas  $1 - x$  et  $x - 1$  par exemple au lieu de passer en force ; de même,  $b \neq -b$  donc si  $b = -56$ ,  $-b = 56$  ;  $c = -3$  et  $c^2 = 9$  mais  $a^2 = 4 \Rightarrow a = \pm 2$ ,
- Si tu fais attention aux couples : le sommet d'une parabole est un point du plan et possède ainsi deux coordonnées :  $\frac{-b}{2a}$  et son image, l'extremum,
- Si tu sais dresser un tableau de signes et ne remplis pas des cases sous les nombres mais bien entre les nombres ; la première ligne correspond aux «  $x$  » et les suivantes aux «  $y$  », alors ne mélange pas tout ; les doubles barres sont réservées aux valeurs interdites et surtout pas aux racines,
- Si tu n'hésites pas, dans un tableau de variations, à faire une haute ligne de variations pour pouvoir distinguer le sens des flèches,
- Si tu regardes au final à quoi ressemble ton ouvrage et que tu n'y comprends pas grand-chose, pense que cela sera pire pour le correcteur,
- Si tu écris des choses vraies car il est infiniment mieux d'écrire peu et juste que des pages entières mais fausses,
- Si surtout, les mathématiques te passionnent,

Tu seras bon, mon élève.

# NOTATIONS & ABRÉVIATIONS

Cette partie n'a pas un but exhaustif mais simplement indicatif pour ceux qui auraient un doute, d'autant que l'on use dans cet ouvrage de certaines abréviations non conventionnelles, par commodité généralement. Après leur description, il y aura souvent la référence de la page de leur première utilisation.

Commençons par lister quelques notations et abréviations classiques et usuelles dans le petit monde des mathématiques.

- $\forall$  : « pour tout », le quantificateur universel (cf. page 537).
- $\exists$  : « il existe (au moins un) », le quantificateur existentiel (cf. page 537).
- $!$  : « un unique » lorsque précédé de  $\exists$ . Exemple :  $\exists!x \in \mathbb{R}^- \cap \mathbb{R}^+$  (cf. p.537).
- $!$  : « factorielle » lorsque suivi d'un nombre entier.  
Par exemple,  $4! = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$  (cf. page 26 ou 300).
- $\setminus$  : « privé de ». Exemple,  $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  (cf. page 537).
- $\pm$  et  $\mp$  : « plus ou moins » et « moins ou plus ». Signifie « soit +, soit - » (et surtout pas « environ », attention).
- $\sim$  : « équivalent ». Entre fonctions (ou suites), en l'infini ou ailleurs, à ne surtout pas utiliser (cf. page 33).
- $\subset$  : « inclus dans ». Se dit d'un sous-ensemble (cf. page 537).
- c.q.f.d. et  $\square$  : « ce qu'il fallait démontrer ».
- *Ent* : « partie entière ». Est parfois notée  $[x]$  (cf. page 94).
- *i.e.* : « id est », c'est-à-dire mais en latin.
- $\circ$  : « rond », la composition de fonctions (cf. page 75).
- $\mathbb{R}^-$  et  $\mathbb{R}^+$  :  $]-\infty; 0]$  et  $[0; +\infty[$ , les réels positifs / négatifs ou nuls.
- $\mathbb{R}^* = ]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$  : les réels non nuls.
- *ssi* et  $\iff$  : « si, et seulement si » et « équivaut ». À la fois  $\Leftarrow$  et  $\Rightarrow$  (cf. page 540).
- $\llbracket 1; n \rrbracket$  : l'ensemble des entiers compris entre 1 et  $n$  c.-à-d.  $\mathbb{N} \cap [1; n]$  (cf. p.299).

Voici ensuite des notations et abréviations moins classiques mais bien pratiques.

- $\nearrow$ ,  $\searrow$  : croissante, décroissante, à propos d'une fonction.
- $\nearrow\nearrow$  ou  $\nearrow^{\text{nt}}$ ,  $\searrow\searrow$  ou  $\searrow^{\text{nt}}$  : strictement (dé)croissante, pour une fonction.
- $\nmid$  : « contradiction ». Étape finale d'une démonstration par l'absurde. (cf. page 545).
- à.p.c.r. : « à partir d'un certain rang ». Se dit d'une suite dont les tous termes vérifient une certaine propriété, sauf un nombre fini d'entre eux (cf. page 10).
- coeff. dir. : « coefficient directeur » d'une droite ou d'une fonction affine.
- colin. : « colinéaires ». Se dit de deux vecteurs.
- CV et DV : « converge(nte) » et « diverge(nte) ».  
Se dit d'une suite ayant / n'ayant pas une limite finie. (cf. page 15).
- E : « espérance » d'une variable aléatoire (cf. page 398).
- F.I. : « forme indéterminée ». Se dit d'une limite dont on ne peut déterminer directement la valeur éventuelle (cf. pages 17 et 72).
- P : « probabilité » d'un événement.
- r.o.n. : « repère orthonormé » (cf. page 189).
- R.T.T. : « Résoudre de Tête ». Type d'exercice peu prisé des élèves.
- th. : « théorème ».
- th. des gendarmes : « théorème d'encadrement et limites » (cf. page 19).
- tq. : « tel que ».
- T.V.I. : « théorème des valeurs intermédiaires » (cf. page 97).
- T.V.I. Strict. : « théorème des valeurs intermédiaires dans le cas où la fonction est strictement monotone » (cf. page 98).
- VouF : « Vrai ou faux ». Type d'exercice très prisé des élèves.

# BIBLIOGRAPHIE & RÉFÉRENCES

Commençons par des manuels de terminale spécialité. Les suivants sont ceux que je parcours régulièrement :

- [BZ] *T<sup>le</sup> Spé.*, coll. *Barbazo*, É. Barbazo (dir.), éd. Hachette, 2020.
- [HB] *Hyperbole T<sup>le</sup> Spé.*, J. Malaval (dir.), éd. Nathan, 2020.
- [LS1] *Le Livre scolaire T<sup>le</sup> Spé.*, manuel collaboratif, éd. Livre scolaire, 2020.

Puis, quelques ouvrages pour réviser ou aller un peu plus loin :

- [CR] M. Colonval, A. Roumadni, *Les Mathématiques au quotidien*, éd. Ellipses, 2010.
- [Th] François Thiriaux, *Mathématiques T<sup>le</sup> S pour réussir en prépa*, éd. Ellipses, 2015.
- [LS1] *Le Livre scolaire 1<sup>re</sup> Spé.*, manuel collaboratif, éd. Livre scolaire, 2019.
- [K2] Sébastien Krief-Détraz, *Math Max 2<sup>de</sup>*, éd. Ellipses, 2020.
- [K1] Sébastien Krief-Détraz, *Math Max 1<sup>re</sup> Spé.*, éd. Ellipses, 2020.
- [KX] Sébastien Krief-Détraz, *Math Max T<sup>le</sup> Exp.*, éd. Ellipses, 2022.

Poursuivons par des références sur la toile, très utiles lorsqu'utilisées à bon escient :

- [WK] *Wikipedia* : toujours utile, même si très vite technique.
- [KA] *Khan Academy* : <https://fr.khanacademy.org>. Tous les cours, en vidéo.
- [MN] *Les Mathématiques.net* : <http://www.les-mathematiques.net>. Pour le supérieur plutôt mais cela permet déjà de voir plus loin. Le forum est réactif.
- [IM] *Images des mathématiques* : <http://images.math.cnrs.fr>. Des actualités, des articles, des énigmes, des images... de mathématiques.
- [AP] *APMEP : Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public* : <http://www.apmep.fr>. Vous pouvez y trouver toutes les annales corrigées du baccalauréat depuis le siècle dernier mais aussi des jeux mathématiques.

- [JC] *J'ai compris* : jaicompris.com. Des vidéos pour tout comprendre... aux mathématiques.
- [MP] *Math en poche* : <http://mathenpoche.sesamath.net>. Pour réviser en ligne (plutôt les « petites » classes toutefois).

Ensuite, des ouvrages et références autour des mathématiques et des sciences dont je conseille fortement la lecture. Ils sont parfois cités dans cet ouvrage, à vous de retrouver en quel endroit (les solutions suivent).

- [AG] Alexandre Grothendieck, *Récoltes et Semailles*, éd. Gallimard, 2022.
- [AH] Alain Badiou avec Gilles Haéri, *Éloge des mathématiques*, éd. Flammarion, 2015.
- [AS] Arthur Schopenhauer, *L'Art d'avoir toujours raison*, écrit vers 1830.
- [BK] Yoram Bauman et Grady Klein, *Les Mathématiques en bande dessinée - L'Analyse*, éd. Eyrolles, 2019.
- [CV] Cédric Villani, *Théorème vivant*, éd. Grasset, 2012.
- [Dé] François-Henri Désérable, *Évariste*, éd. Gallimard, 2015.
- [DG] Denis Guedj, *Le Théorème du perroquet*, éd. du Seuil, 1998.
- [EA] Edwin Abbot Abbot, *Flatland*, 1884.
- [EK] Étienne Klein, *Science en question*, émission radiodiffusée sur France Culture.
- [Eu] Euclide, *Éléments*, ~ 300 av. J.-C.
- [GM] *Le Goût des Mathématiques*, ouvrage collectif, éd. Mercure de France, 2013.
- [HL] Hervé Le Tellier, *L'Anomalie*, éd. Gallimard, 1920.
- [JD] Jacqueline Détraz, *Sofia Kovalesvskaja, l'aventure d'une mathématicienne*, éd. Belin, 1993.
- [MS] *La Marche des Sciences*, émission radiodiffusée sur France Culture.
- [RH] *Un Homme d'exception*, réal. Ron Howard, prod. Universal, 2001. Film retraçant la vie de John Forbes Nash (1928-2015), remarquable mathématicien (prix Abel 2015, prix Nobel d'économie 1994).
- [RQ] Raymond Queneau, *Cent mille milliards de poèmes*, 1961.
- [YG] Yannick Grannec, *La Déesse des petites victoires*, éd. Anne Carrière, 2012.

Enfin, voilà les références des allusions qui ont guidé, inspiré ou simplement connoté certains énoncés que l'on pourrait parfois qualifier de décalés. À vous de les retrouver dans le corps du texte (les solutions suivent).

- [AA] *Arts & Architecture*, de nombreux ouvrages aux éd. Taschen par exemple.
- [AD] Alexandre Dumas, *Les Trois Mousquetaires*, éd. Baudry, 1844.
- [AE] *Amelia Earhart* (biographie), de Jennifer Lesieur, éd. Grasset, 2010.
- [BP] Blaise Pascal, *Pensées (Le silence éternel de ces espaces infinis m'effraie)*, 1670.
- [Da] René Daumal, *Le Mont Analogue*, éd. Gallimard, 1952.

- [DB] David Bowie, *Space Oddity*, label Mercury, 1969.
- [GE] Gustave Eiffel, *La Tour*, Paris, 1889.
- [GS] R. Goscinny et J.-J. Sempé, *Le Petit Nicolas*, journal Pilote, 1956-1965.
- [GT] *Game of Thrones*, série nord-américaine (HBO) inspirée de l'œuvre de George R. R. Martin, 2011-2018.
- [GU] R. Goscinny et A. Uderzo, *Astérix : La Serpe d'or* et tous les autres albums, éd. Dargaud, 1959-1977.
- [Ho] Homère, *Odyssée*, fin du VIII<sup>e</sup> s. av. J.-C.
- [HM] Henri Matisse, Rideau pour l'*Étrange farandole*, 1938.
- [HP] Hugo Pratt, *Corto Maltese*, tous les albums, éd. Casterman, 1975-1992.
- [HS] Henri Salvador, *Syracuse*, label Phillips, 1963.
- [Ja] *J'aime lire*, revue mensuelle, éd. Bayard.
- [JR] Jacques Roubaud, *La Trilogie d'Hortense*, éd. Ramsay, 1985-1990.
- [Ky] R. Kelly, *I Believe I Can Fly*, label Jive, 1995.
- [La] P.C. de Laclos, *Les liaisons dangereuses*, 1782.
- [LA] Lance Armstrong et al., *Mon programme de forme et d'entraînement*, éd. L'Archipel, 2003 mais il faut ensuite lire [JM] Juliet Macur, *Cycles de mensonges - Grandeur et décadence de Lance Armstrong*, éd. Michel Lafon, 2014 par exemple.
- [LH] *Last Action Hero*, réal. John McTiernan, prod. Columbia, 1993.
- [LN] Hélène de Troie, mythologie grecque.
- [MJ] Michael Jackson, *Best of*, label Epic, 2008.
- [MM] *Mad Max*, réal. George Miller, prod. Kennedy Miller, 1979-2015.
- [OM] *Onze Mondial*, revue mensuelle depuis 1976.
- [PP] Antoine de Saint-Exupéry, *Le Petit Prince*, éd. Reynal & Hitchcock, 1943.
- [R2] *Rambo II*, réal. G.P. Cosmatos, avec Sylvester Stallone, prod. Anabasis N.V., 1985. Voir plutôt le premier opus, à la rigueur.
- [Ra] RATM, *Rage against the machine*, label EPIC, 1992.
- [RG] Hergé, *Tintin*, tous les albums, éd. Casterman, 1929-1986.
- [RK] Rudyard Kipling, *Tu seras un homme, mon fils*, 1910.
- [RS] The Rolling Stones, *(I Can't Get No) Satisfaction*, label Decca, 1965.
- [St] Stendhal, *Le Rouge et le Noir*, éd. Levasseur, 1830.
- [SW] *Star Wars*, réal. George Lucas, prod. Lucasfilm, 1977-2019.
- [TF] *Les Tontons flingueurs*, réal. Georges Lautner, prod. Gaumont, 1963.
- [VR] *La vache qui rit*, fromageries Bel.
- [WD] *La Reine des neiges*, réal. C. Buck et J. Lee, prod. Walt Disney, 2013.
- [WS] William Shakespeare, *Hamlet*, 1603.

## Solutions

- |                     |                     |                     |
|---------------------|---------------------|---------------------|
| [AA] pp. 126 et 196 | [GM] page 421       | [MM] couverture     |
| [AD] page 439       | [GS] page 503       | [OM] page 313       |
| [AE] page 454       | [GT] page 548       | [PP] page 454       |
| [AG] page 431       | [GU] pp. 417 et 549 | [R2] page 407       |
| [AH] page 541       | [HL] page 453       | [Ra] page 511       |
| [AS] page 551       | [HM] p. 51 par ex.  | [RG] page 481       |
| [BK] page 473       | [Ho] page 591       | [RK] page 597       |
| [BP] page 469       | [HP] page 407       | [RQ] page 481       |
| [CV] page 447       | [HS] page 577       | [RS] page 451       |
| [Da] page 465       | [Ja] page 309       | [St] page 50        |
| [DB] page 463       | [JR] page 494       | [SW] pp. 487 et 547 |
| [Dé] page 520       | [Ky] page 453       | [TF] page 298       |
| [DG] page 484       | [La] page 427       | [VR] page 56        |
| [EA] page 439       | [LA] page 371       | [WD] page 475       |
| [EK] page 481       | [LH] page 558       | [WS] pp. 439 et 489 |
| [Eu] page 115       | [LN] page 455       | [YG] page 539       |
| [GE] pp. 94, 121... | [MJ] page 48        |                     |

# REMERCIEMENTS

Contrairement à ce que l'on pourrait parfois penser à la lecture de cet ouvrage, je suis bien un professeur de mathématiques. Je n'ai donc aucun scrupule à effectuer des remerciements sous forme de liste et dans un ordre quasi aléatoire. L'important est qu'ils soient sincères, non ?

Ainsi,

- à mes élèves, pour leurs questions, pertinentes ou non, leur insistance pour avoir des devoirs ou non, leur souhait d'avoir des corrections d'exercices tapées (comme si leur professeur avait une écriture illisible), leur curiosité et leur soif d'apprendre et de découvrir et pour le sourire dans leurs yeux lorsqu'ils ont compris ce que l'on étudie,
- à ma compagne qui m'a encouragé, m'a supporté et a prodigué de précieux conseils,
- à mes filles, qui ne me voient généralement que derrière un écran et qui, dès le plus jeune âge, ont appris à envoyer un courriel afin de communiquer avec moi,
- à ma mère, ma première lectrice, au sens mathématique littéral,
- à mes collègues, de mathématiques ou d'autres disciplines, qui m'ont donné de nombreuses idées, à leur insu parfois,
- au corps d'inspection pour les remarques judicieuses,
- à mes stagiaires qui me poussent à une réflexion approfondie sur mes pratiques,
- aux nombreux auteurs d'ouvrages et contributeurs de sites personnels ou académiques comme les IREM, qui m'ont inspiré et dont je n'ai plus la référence, qu'ils veuillent bien me pardonner,
- à Donald Knuth (1938- ), à l'origine du  $\text{\LaTeX}$ , sans qui rien de ceci n'aurait pu être écrit (sous TeXShop),
- aux éditions Ellipses, et en particulier Corinne Baud qui a immédiatement accepté et soutenu ce projet,
- et finalement, à mes lecteurs, qui voudront bien excuser les coquilles et erreurs subsistantes et qui pourront envoyer leurs remarques aux éditions Ellipses ou même m'écrire : [mathmax@yahoo.com](mailto:mathmax@yahoo.com),

je dis merci !





# TABLE DES MATIÈRES

|                                                                           |           |
|---------------------------------------------------------------------------|-----------|
| Avant-propos . . . . .                                                    | 1         |
| Sommaire . . . . .                                                        | 3         |
| <b>Cours &amp; Exercices corrigés</b>                                     | <b>7</b>  |
| <b>I Suites numériques</b>                                                | <b>9</b>  |
| Introduction . . . . .                                                    | 9         |
| 1 Suites numériques . . . . .                                             | 10        |
| 1.1 Définitions . . . . .                                                 | 10        |
| 1.2 Suites définies explicitement en fonction de $n$ : $u_n = f(n)$ . . . | 11        |
| 1.3 Suites définies par une relation de récurrence : $u_{n+1} = f(u_n)$ . | 12        |
| 1.4 Suites arithmétiques . . . . .                                        | 13        |
| 1.5 Suites géométriques . . . . .                                         | 13        |
| 2 Raisonnement par récurrence . . . . .                                   | 14        |
| 2.1 Principe de récurrence . . . . .                                      | 14        |
| 2.2 Démonstrations par récurrence . . . . .                               | 14        |
| 3 Limite d'une suite : définition . . . . .                               | 15        |
| 4 Théorèmes & calculs de limites . . . . .                                | 17        |
| 4.1 Limites de référence . . . . .                                        | 17        |
| 4.2 Opérations sur les limites . . . . .                                  | 17        |
| 4.3 Théorèmes de comparaison . . . . .                                    | 19        |
| 4.4 Cas des suites géométriques . . . . .                                 | 20        |
| 4.5 Cas des suites récurrentes $u_{n+1} = f(u_n)$ . . . . .               | 21        |
| Suites, calculatrice & algorithmes . . . . .                              | 22        |
| Exercices . . . . .                                                       | 24        |
| Corrigé des exercices . . . . .                                           | 29        |
| <b>II Loi binomiale</b>                                                   | <b>41</b> |
| Introduction . . . . .                                                    | 41        |
| 1 Succession d'épreuves indépendantes . . . . .                           | 42        |
| 2 Épreuve de Bernoulli, loi de Bernoulli . . . . .                        | 43        |
| 3 Schéma de Bernoulli, loi binomiale . . . . .                            | 43        |
| 3.1 Un exemple . . . . .                                                  | 43        |
| 3.2 Loi binomiale . . . . .                                               | 44        |

|            |                                                             |            |
|------------|-------------------------------------------------------------|------------|
| 3.3        | Espérance et variance de la loi binomiale . . . . .         | 45         |
| 3.4        | Coefficients binomiaux . . . . .                            | 46         |
| 3.5        | Avec la calculatrice . . . . .                              | 47         |
| Exercices  | . . . . .                                                   | 48         |
|            | Corrigé des exercices . . . . .                             | 55         |
| <b>III</b> | <b>Limites des fonctions numériques</b>                     | <b>63</b>  |
|            | Introduction . . . . .                                      | 63         |
| 1          | Limites en l'infini . . . . .                               | 65         |
| 1.1        | Limite infinie en l'infini . . . . .                        | 65         |
| 1.2        | Limite finie en l'infini . . . . .                          | 66         |
| 1.3        | Asymptotes horizontales – Asymptotes obliques . . . . .     | 67         |
| 1.4        | Limites des suites du type $u_n = f(n)$ . . . . .           | 68         |
| 2          | Limites en un réel . . . . .                                | 68         |
| 2.1        | Limite infinie en un réel – Asymptotes verticales . . . . . | 69         |
| 2.2        | Limite finie en un réel . . . . .                           | 70         |
| 2.3        | Limite à gauche et limite à droite . . . . .                | 70         |
| 2.4        | Limites de référence . . . . .                              | 71         |
| 3          | Opérations sur les limites . . . . .                        | 71         |
| 4          | Limites et comparaison . . . . .                            | 74         |
| 5          | Limites et composition . . . . .                            | 75         |
| 6          | Limites et fonction exponentielle . . . . .                 | 76         |
| Exercices  | . . . . .                                                   | 78         |
|            | Corrigé des exercices . . . . .                             | 83         |
| <b>IV</b>  | <b>Continuité des fonctions numériques</b>                  | <b>93</b>  |
| 1          | Continuité d'une fonction numérique . . . . .               | 93         |
| 1.1        | Définition . . . . .                                        | 94         |
| 1.2        | Continuité des fonctions usuelles . . . . .                 | 95         |
| 1.3        | Continuité et suites . . . . .                              | 96         |
| 2          | Continuité et équations . . . . .                           | 96         |
| 2.1        | Théorème des valeurs intermédiaires . . . . .               | 96         |
| 2.2        | Cas de la stricte monotonie . . . . .                       | 98         |
| 2.3        | Applications diverses . . . . .                             | 98         |
| 2.3.1      | Approcher une solution par dichotomie . . . . .             | 98         |
| 2.3.2      | Intervalle image . . . . .                                  | 99         |
| 2.3.3      | Zéro d'une fonction continue . . . . .                      | 99         |
| 2.3.4      | Un « petit » théorème de point fixe . . . . .               | 99         |
| Exercices  | . . . . .                                                   | 100        |
|            | Corrigé des exercices . . . . .                             | 105        |
| <b>V</b>   | <b>Droites, plans et vecteurs de l'espace</b>               | <b>115</b> |
|            | Introduction . . . . .                                      | 115        |
| 1          | Droites et plans de l'espace . . . . .                      | 116        |
| 1.1        | Positions relatives de droites et de plans . . . . .        | 116        |
| 1.2        | Parallélisme dans l'espace . . . . .                        | 117        |
| 1.3        | Orthogonalité dans l'espace . . . . .                       | 119        |
| 2          | Vecteurs de l'espace . . . . .                              | 120        |
| 2.1        | Définition et opérations . . . . .                          | 120        |
| 2.2        | Vecteurs et droites . . . . .                               | 121        |

|             |                                                                    |            |
|-------------|--------------------------------------------------------------------|------------|
| 2.3         | Vecteurs et plans . . . . .                                        | 121        |
| 3           | Repérages de l'espace . . . . .                                    | 123        |
| 3.1         | Repères cartésiens de l'espace . . . . .                           | 123        |
| 3.2         | Coordonnées et calculs . . . . .                                   | 124        |
| Exercices   | . . . . .                                                          | 126        |
|             | Corrigé des exercices . . . . .                                    | 130        |
| <b>VI</b>   | <b>Dérivation des fonctions numériques</b>                         | <b>135</b> |
| 1           | Rappels . . . . .                                                  | 135        |
| 2           | Nouvelles formules de dérivation . . . . .                         | 137        |
| 2.1         | Dérivée de $u^n$ . . . . .                                         | 137        |
| 2.2         | Dérivée de $\sqrt{u}$ . . . . .                                    | 138        |
| 2.3         | Dérivée de $e^u$ . . . . .                                         | 138        |
| 3           | Dérivée et composition . . . . .                                   | 139        |
| Exercices   | . . . . .                                                          | 141        |
|             | Corrigé des exercices . . . . .                                    | 145        |
| <b>VII</b>  | <b>Convexité &amp; Dérivation</b>                                  | <b>155</b> |
| 1           | Dérivée seconde . . . . .                                          | 155        |
| 1.1         | Fonction dérivée seconde . . . . .                                 | 155        |
| 1.2         | Dérivées d'ordre supérieur . . . . .                               | 156        |
| 2           | Convexité : approche graphique . . . . .                           | 156        |
| 2.1         | Fonctions convexes et fonctions concaves . . . . .                 | 156        |
| 2.2         | Point d'inflexion . . . . .                                        | 159        |
| 3           | Convexité et dérivation . . . . .                                  | 160        |
| 3.1         | Convexité et dérivées . . . . .                                    | 160        |
| 3.2         | Point d'inflexion et dérivée seconde . . . . .                     | 162        |
| 4           | Étude de fonction . . . . .                                        | 163        |
| Exercices   | . . . . .                                                          | 164        |
|             | Corrigé des exercices . . . . .                                    | 171        |
| <b>VIII</b> | <b>Orthogonalité dans l'espace</b>                                 | <b>187</b> |
|             | Introduction . . . . .                                             | 187        |
| 1           | Produit scalaire dans l'espace . . . . .                           | 188        |
| 1.1         | Extension du produit scalaire à l'espace . . . . .                 | 188        |
| 1.2         | Extension des propriétés algébriques du produit scalaire . . . . . | 188        |
| 2           | Bases et repères orthonormés . . . . .                             | 189        |
| 3           | Orthogonalité dans l'espace . . . . .                              | 190        |
| 3.1         | Droites orthogonales . . . . .                                     | 190        |
| 3.2         | Vecteur normal à un plan . . . . .                                 | 191        |
| 3.3         | Plans parallèles, plans perpendiculaires . . . . .                 | 192        |
| 4           | Projections orthogonales . . . . .                                 | 193        |
| 4.1         | Projection orthogonale d'un point sur une droite . . . . .         | 193        |
| 4.2         | Projection orthogonale d'un point sur un plan . . . . .            | 194        |
| Exercices   | . . . . .                                                          | 196        |
|             | Corrigé des exercices . . . . .                                    | 199        |

|            |                                                                  |            |
|------------|------------------------------------------------------------------|------------|
| <b>IX</b>  | <b>Logarithme népérien</b>                                       | <b>205</b> |
| 1          | La fonction exponentielle : rappels . . . . .                    | 206        |
| 2          | Le logarithme népérien . . . . .                                 | 206        |
| 3          | Propriétés algébriques du logarithme népérien . . . . .          | 207        |
| 4          | La fonction logarithme népérien . . . . .                        | 207        |
| 4.1        | Étude de la fonction logarithme népérien . . . . .               | 207        |
| 4.2        | Croissance logarithmique . . . . .                               | 210        |
| 4.3        | Dérivée de $\ln(u)$ . . . . .                                    | 211        |
| 5          | Autour du logarithme . . . . .                                   | 212        |
| 5.1        | Fonction puissance . . . . .                                     | 212        |
| 5.2        | Logarithme décimal . . . . .                                     | 212        |
|            | Exercices . . . . .                                              | 214        |
|            | Corrigé des exercices . . . . .                                  | 222        |
| <b>X</b>   | <b>Représentations paramétrique &amp; Équations cartésiennes</b> | <b>235</b> |
| 1          | Représentations paramétriques . . . . .                          | 235        |
| 1.1        | Paramétrage d'une droite . . . . .                               | 236        |
| 1.2        | Paramétrage d'un plan . . . . .                                  | 236        |
| 2          | Équations cartésiennes d'un plan . . . . .                       | 237        |
| 3          | Intersections de droites et de plans . . . . .                   | 238        |
| 3.1        | Intersection de deux droites . . . . .                           | 238        |
| 3.2        | Intersection d'une droite et d'un plan . . . . .                 | 239        |
| 3.3        | Intersection de deux plans . . . . .                             | 239        |
|            | Exercices . . . . .                                              | 241        |
|            | Corrigé des exercices . . . . .                                  | 246        |
| <b>XI</b>  | <b>Primitives &amp; Équations différentielles</b>                | <b>257</b> |
| 1          | Primitives d'une fonction continue . . . . .                     | 258        |
| 1.1        | Définitions et premières propriétés . . . . .                    | 258        |
| 1.2        | Calculs de primitives . . . . .                                  | 260        |
| 2          | Résolution d'équations différentielles . . . . .                 | 262        |
| 2.1        | Équation différentielle $y' = ay$ . . . . .                      | 262        |
| 2.2        | Équation différentielle $y' = ay + b$ . . . . .                  | 264        |
| 2.3        | Équation différentielle $y' = ay + f$ . . . . .                  | 264        |
| 2.4        | Autres équations différentielles . . . . .                       | 265        |
|            | Exercices . . . . .                                              | 267        |
|            | Corrigé des exercices . . . . .                                  | 278        |
| <b>XII</b> | <b>Combinatoire &amp; Dénombrement</b>                           | <b>295</b> |
|            | Introduction . . . . .                                           | 295        |
| 1          | Cardinal d'ensembles . . . . .                                   | 296        |
| 1.1        | Cardinal d'un ensemble . . . . .                                 | 296        |
| 1.2        | Réunion disjointe d'ensembles . . . . .                          | 297        |
| 1.3        | Produit cartésien d'ensembles . . . . .                          | 298        |
| 2          | Arrangements et permutations . . . . .                           | 300        |
| 2.1        | Arrangements d'un ensemble . . . . .                             | 300        |
| 2.2        | Permutations d'un ensemble . . . . .                             | 301        |
| 3          | Combinaisons d'un ensemble . . . . .                             | 302        |
| 3.1        | Parties d'un ensemble . . . . .                                  | 302        |
| 3.2        | Nombre de combinaisons . . . . .                                 | 303        |

|             |                                                                     |            |
|-------------|---------------------------------------------------------------------|------------|
| 4           | Synthèse . . . . .                                                  | 306        |
|             | Exercices . . . . .                                                 | 308        |
|             | Corrigé des exercices . . . . .                                     | 315        |
| <b>XIII</b> | <b>Fonctions trigonométriques</b>                                   | <b>329</b> |
|             | Introduction . . . . .                                              | 329        |
| 1           | Cosinus et sinus d'un nombre réel . . . . .                         | 330        |
|             | 1.1 Définitions et propriétés . . . . .                             | 330        |
|             | 1.2 Lignes trigonométriques . . . . .                               | 332        |
| 2           | Étude des fonctions trigonométriques . . . . .                      | 333        |
|             | 2.1 Parité et périodicité . . . . .                                 | 333        |
|             | 2.2 Dérivées et variations . . . . .                                | 334        |
|             | 2.3 Représentations graphiques . . . . .                            | 335        |
| 3           | Compléments . . . . .                                               | 335        |
|             | 3.1 Dérivation . . . . .                                            | 335        |
|             | 3.2 Tangente . . . . .                                              | 336        |
|             | Exercices . . . . .                                                 | 337        |
|             | Corrigé des exercices . . . . .                                     | 342        |
| <b>XIV</b>  | <b>Calcul intégral</b>                                              | <b>351</b> |
|             | Introduction . . . . .                                              | 351        |
|             | Activité . . . . .                                                  | 352        |
| 1           | Notion d'intégrale . . . . .                                        | 354        |
|             | 1.1 Intégrale d'une fonction continue et positive . . . . .         | 355        |
|             | 1.2 Dérivabilité de l'intégrale . . . . .                           | 356        |
|             | 1.3 Propriété fondamentale de l'intégrale . . . . .                 | 357        |
| 2           | Intégrale d'une fonction continue . . . . .                         | 357        |
|             | 2.1 Théorème d'existence de primitives . . . . .                    | 357        |
|             | 2.2 Généralisation de l'intégrale aux fonctions continues . . . . . | 358        |
|             | 2.3 Propriétés linéaires de l'intégration . . . . .                 | 359        |
|             | 2.4 Relation de Chasles . . . . .                                   | 360        |
|             | 2.5 Intégrale et aire . . . . .                                     | 361        |
|             | 2.6 Intégrale et relation d'ordre . . . . .                         | 363        |
| 3           | Intégration par parties . . . . .                                   | 363        |
| 4           | Valeur moyenne d'une fonction continue . . . . .                    | 364        |
|             | 4.1 Valeur moyenne . . . . .                                        | 364        |
|             | 4.2 Inégalité de la moyenne . . . . .                               | 365        |
|             | Pour aller plus loin . . . . .                                      | 366        |
|             | Exercices . . . . .                                                 | 368        |
|             | Corrigé des exercices . . . . .                                     | 377        |
| <b>XV</b>   | <b>Variables aléatoires &amp; Loi des grands nombres</b>            | <b>397</b> |
|             | Introduction . . . . .                                              | 397        |
| 1           | Transformations de variables aléatoires . . . . .                   | 398        |
|             | 1.1 Rappels . . . . .                                               | 398        |
|             | 1.2 Transformation affine . . . . .                                 | 399        |
|             | 1.3 Somme de variables aléatoires . . . . .                         | 400        |
|             | 1.4 Cas de la loi binomiale . . . . .                               | 402        |
|             | 1.5 Cas général . . . . .                                           | 404        |
| 2           | Inégalités de concentration . . . . .                               | 405        |

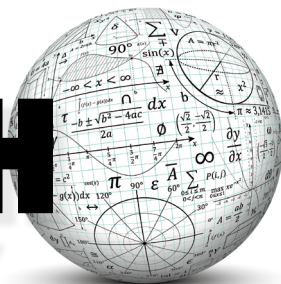
|                         |                                              |            |
|-------------------------|----------------------------------------------|------------|
| 2.1                     | Inégalité de Markov . . . . .                | 405        |
| 2.2                     | Inégalité de Bienaymé- Tchebychev . . . . .  | 405        |
| 3                       | Loi des grands nombres . . . . .             | 406        |
| 4                       | Échantillonnage, prise de décision . . . . . | 407        |
|                         | Exercices . . . . .                          | 409        |
|                         | Corrigé des exercices . . . . .              | 413        |
| <b>Devoirs corrigés</b> |                                              | <b>419</b> |
| 1                       | <b>Tablette numérique</b>                    | <b>421</b> |
|                         | Corrigé . . . . .                            | 422        |
| 2                       | <b>Suites de Bac</b>                         | <b>423</b> |
|                         | Corrigé . . . . .                            | 424        |
| 3                       | <b>Probabilités épistolaires</b>             | <b>427</b> |
|                         | Corrigé . . . . .                            | 428        |
| 4                       | <b>No limit</b>                              | <b>431</b> |
|                         | Corrigé . . . . .                            | 432        |
| 5                       | <b>Fonction auxiliaire</b>                   | <b>435</b> |
|                         | Corrigé . . . . .                            | 436        |
| 6                       | <b>To bee or not to bee</b>                  | <b>439</b> |
|                         | Corrigé . . . . .                            | 440        |
| 7                       | <b>De la petite à la grande section</b>      | <b>443</b> |
|                         | Corrigé . . . . .                            | 444        |
| 8                       | <b>À la dérive</b>                           | <b>447</b> |
|                         | Corrigé . . . . .                            | 448        |
| 9                       | <b>(I can't get no)</b>                      | <b>451</b> |
|                         | Corrigé . . . . .                            | 452        |
| 10                      | <b>I believe I can fly</b>                   | <b>453</b> |
|                         | Corrigé . . . . .                            | 454        |
| 11                      | <b>Ouï, vidi, compris</b>                    | <b>455</b> |
|                         | Corrigé . . . . .                            | 456        |
| 12                      | <b>Équations fonctionnelles</b>              | <b>457</b> |
|                         | Corrigé . . . . .                            | 460        |
| 13                      | <b>Space Oddity</b>                          | <b>463</b> |
|                         | Corrigé . . . . .                            | 464        |
| 14                      | <b>Grand concours</b>                        | <b>465</b> |
|                         | Corrigé . . . . .                            | 466        |

|           |                                                  |            |
|-----------|--------------------------------------------------|------------|
| <b>15</b> | <b>Le silence éternel de ces espaces infinis</b> | <b>469</b> |
|           | Corrigé . . . . .                                | 471        |
| <b>16</b> | <b>Espèce de maths</b>                           | <b>473</b> |
|           | Corrigé . . . . .                                | 474        |
| <b>17</b> | <b>Libérée, délivée : l'intégrale</b>            | <b>475</b> |
|           | Corrigé . . . . .                                | 478        |
| <b>18</b> | <b>Cent mille milliards de mille sabords</b>     | <b>481</b> |
|           | Corrigé . . . . .                                | 482        |
| <b>19</b> | <b>Paire okay</b>                                | <b>483</b> |
|           | Corrigé . . . . .                                | 485        |
| <b>20</b> | <b>Naguère sur l'étoile</b>                      | <b>487</b> |
|           | Corrigé . . . . .                                | 488        |
| <b>21</b> | <b>Être ou ne pas être</b>                       | <b>489</b> |
|           | Corrigé . . . . .                                | 490        |
| <b>22</b> | <b>Des intégrations</b>                          | <b>493</b> |
|           | Corrigé . . . . .                                | 495        |
| <b>23</b> | <b>Planche à roulettes</b>                       | <b>499</b> |
|           | Corrigé . . . . .                                | 501        |
| <b>24</b> | <b>Aller à Jacta-Est</b>                         | <b>503</b> |
|           | Corrigé . . . . .                                | 505        |
| <b>25</b> | <b>Devoir parental</b>                           | <b>507</b> |
|           | <b>Cahiers transversaux</b>                      | <b>509</b> |
| $\alpha$  | <b>Algo à gogo</b>                               | <b>511</b> |
| 1         | Installer Python . . . . .                       | 512        |
| 2         | Les variables . . . . .                          | 512        |
| 3         | Instructions conditionnelles . . . . .           | 513        |
| 4         | Boucle bornée . . . . .                          | 514        |
| 5         | Boucle non bornée . . . . .                      | 515        |
| 6         | Fonction . . . . .                               | 516        |
| 7         | Liste . . . . .                                  | 517        |
| 8         | Foire de l'algo . . . . .                        | 519        |
| 9         | Solutions . . . . .                              | 522        |
| $\beta$   | <b>En toute logique</b>                          | <b>533</b> |
| 1         | Diagrammes de Venn . . . . .                     | 533        |
| 2         | Ensembles . . . . .                              | 536        |
| 3         | Logique . . . . .                                | 538        |
|           | 3.1 Propositions . . . . .                       | 538        |



|          |                                                |            |
|----------|------------------------------------------------|------------|
| 3.2      | Implication . . . . .                          | 539        |
| 3.3      | Équivalence . . . . .                          | 540        |
| 3.4      | Exercices . . . . .                            | 540        |
| 4        | Solutions . . . . .                            | 542        |
| $\gamma$ | <b>Faute de preuves</b>                        | <b>545</b> |
|          | Exercices . . . . .                            | 545        |
|          | Solutions . . . . .                            | 551        |
|          | <b>Extras</b>                                  | <b>553</b> |
| <b>A</b> | <b>Vive la rentrée</b>                         | <b>555</b> |
| <b>B</b> | <b>Auto-exos</b>                               | <b>557</b> |
| 1        | R.T.T. . . . .                                 | 557        |
| 2        | Last Fraction Hero . . . . .                   | 558        |
| 3        | Le Factorisathon . . . . .                     | 558        |
| 4        | VouF ? . . . . .                               | 558        |
| 5        | R.T.T. : le retour . . . . .                   | 559        |
| 6        | Solutions . . . . .                            | 560        |
| <b>C</b> | <b>Self-Working</b>                            | <b>563</b> |
| 1        | Exercices . . . . .                            | 563        |
| 2        | Solutions . . . . .                            | 565        |
| <b>D</b> | <b>Petite parenthèse</b>                       | <b>567</b> |
| <b>E</b> | <b>Sine qua tion</b>                           | <b>569</b> |
| 1        | Exercices . . . . .                            | 569        |
| 2        | Solutions . . . . .                            | 570        |
| <b>F</b> | <b>Trop grand écart</b>                        | <b>573</b> |
| <b>G</b> | <b>Poursuites</b>                              | <b>577</b> |
| <b>H</b> | <b>U lisse</b>                                 | <b>591</b> |
| <b>I</b> | <b>Einstein vaut mieux que deux tu l'auras</b> | <b>593</b> |
|          | <b>Annexes</b>                                 | <b>595</b> |
|          | If . . . . .                                   | 597        |
|          | Notations & Abréviations . . . . .             | 599        |
|          | Bibliographie & Références . . . . .           | 601        |
|          | Remerciements . . . . .                        | 605        |

# MATH MAX



NOUVEAUX  
PROGRAMMES

**MATH MAX**, parce que les mathématiques sont très sérieuses... mais pas uniquement.

Cette seconde édition, conforme aux nouveaux programmes, contient :

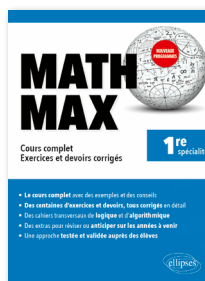
- un cours complet avec des exemples, des remarques et des conseils,
- des centaines d'exercices et devoirs, tous corrigés en détail, de difficulté croissante, couvrant tout le programme et même plus,
- des cahiers transversaux de logique et d'algorithmique,
- des activités d'approche, de révision et de synthèse,
- des extras pour anticiper sur les années à venir,
- des exercices en anglais pour enrichir la langue,
- des corrections rédigées comme l'exigent les enseignants,
- une approche testée et validée auprès des élèves.

Tout ce qui est nécessaire pour asseoir ses bases, réussir son année et bien préparer la suivante.

Mais **MATH MAX**, c'est aussi des données historiques, des conseils de lectures, des touches culturelles, des exercices décalés, des énoncés fantasques, des contextes farfelus, des jeux de mots (presque) amusants.

Voici bien de quoi égayer votre réflexion.

*Et aussi dans la même série*



www.editions-ellipses.fr



9 782340 074644

