

EXERCICES RÉSOLUS

M T^{ERM} S Mathématiques

Des rappels de cours

Plus de 150 exercices

classés par thèmes,
avec indication :
- du niveau de difficulté
- du temps moyen
de résolution

Des corrigés détaillés

assortis de conseils

12 sujets du Bac

et leurs corrigés détaillés

**TOME 1 :
Analyse**

**ENSEIGNEMENT
OBLIGATOIRE**



HACHETTE
Éducation

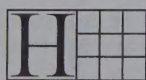


EXERCICES RÉSOLUS

M **T** **S**
ERM
Mathématiques

CLAUDINE RENARD
GENEVIÈVE ROCHE

TOME 1 :
Analyse

 **HACHETTE**
Éducation

CONCEPTION GRAPHIQUE

Couverture : Alain Vambacas

Intérieur : Jehanne Marie Husson

COMPOSITION ET MISE EN PAGE

NDL Communication

DESSINS TECHNIQUES

NDL Communication

© HACHETTE Livre 2002, 43, quai de Grenelle, 75905 PARIS cedex 15.

I.S.B.N. 2.01.168558.3

www.hachette-education.com

Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés pour tous pays.

Le Code de la propriété intellectuelle, n'autorisant, aux termes des articles L.122.4 et L.122.5, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective », et d'autre part, que « les analyses et courtes citations » dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite ».

Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit, sans autorisation de l'éditeur ou du Centre français de l'exploitation du droit de copie (20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris), constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal.

Préface


Ce volume d'exercices mathématiques traite les thèmes de la partie *Analyse* du **nouveau programme de Terminale S**, l'autre volume traite ceux des parties *Géométrie*, *Probabilités* et *Arithmétique*. En début d'ouvrage, un sommaire détaillé vous permet d'accéder rapidement au thème recherché.

Le livre est organisé en 6 chapitres. Dans chacun d'eux, vous trouverez un rappel du cours, des exercices de contrôle des connaissances et d'entraînement, des sujets de type bac ainsi que tous les corrigés.


Le rappel du cours donne, de manière exhaustive, toutes les notions du nouveau programme.



Des exercices de contrôle des connaissances permettent de vérifier rapidement la bonne acquisition du cours.




Des exercices d'entraînement groupés par thèmes et, à l'intérieur de chaque thème, par ordre de difficulté croissante, vous familiarisent avec les notions et méthodes exigibles en Terminale S.

La difficulté des exercices est signalée par des pictogrammes  placés en regard des énoncés de façon que chacun puisse évaluer son niveau.

Le barème retenu est le suivant :

 Exercice de base.

  Exercice nécessitant davantage de réflexion.

   Exercice d'approfondissement.

Une durée indicative de résolution du problème figure également avant chaque exercice. Ce temps a été estimé pour un bon élève et doit donc vous permettre de situer votre niveau d'entraînement.

Les deux sujets de type bac proposés à chaque chapitre couvrent tous les thèmes du programme. Vous pourrez les résoudre en temps limité, en vous plaçant ainsi dans les conditions de l'examen.

Ces sujets de type bac vous permettent de faire un bilan de vos connaissances.

■ Tous les **exercices** et **sujets de type bac** sont **corrigés intégralement**, dans un langage simple et rigoureux. Les différentes étapes de raisonnement et de calcul sont exposées avec précision et de nombreuses représentations graphiques visualisent les situations traitées.

Au fil des corrigés, **des copies d'écran** de la calculatrice TI-83 Plus viennent illustrer les explications.

Nous sommes persuadées que cet ouvrage vous apportera une aide précieuse dans votre travail durant cette année scolaire et vous préparera efficacement à l'épreuve de mathématiques au baccalauréat.

Il nous reste à vous souhaiter bon courage !

Les auteurs

Analyse

1 LIMITES

Rappels de cours	11
Exercices	16
Sujets de type bac	25
Corrigés	27

2 LANGAGE DE LA CONTINUITÉ
TABLEAUX DE VARIATIONS

Rappels de cours	61
Exercices	64
Sujets de type bac	72
Corrigés	74

3 DÉRIVATION

Rappels de cours	97
Exercices	102
Sujets de type bac	111
Corrigés	113

4 FONCTION EXPONENTIELLE
FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN
FONCTIONS EXPONENTIELLES DE BASE a

Rappels de cours	141
Exercices	147
Sujets de type bac	155
Corrigés	156

5 SUITES ET RÉCURRENCE

Rappels de cours	187
Exercices	190
Sujets de type bac	200
Corrigés	202

6 INTÉGRATION

Rappels de cours	243
Exercices	249
Sujets de type bac	257
Corrigés	258

Index des mots clés

Les pages indiquées en gras sont des pages de rappels de cours.

A

Adjacente (suite) **189**, 197

Aire et intégrale **243**, 251, 254

Asymptote **14**, 24

Asymptote horizontale **14**

Asymptote oblique **15**

Asymptote verticale **14**

B

Bornée (suite) **187**

C

Comparaison (théorèmes de) **12**

Constante (suite) **188**

Continuité **61**

Continuité sur un intervalle **62**

Continuité ponctuelle **61**

Convergence monotone (théorème de la) **189**

Convergente (suite) **188**

Croissante (suite) **188**

D

Décroissante (suite) **188**

Dérivable (fonction) **97**, **98**

Dérivation **97**

Dérivation sur un intervalle **98**

Dérivée (fonction) **98**, **99**, 106

Dérivée d'une fonction composée **101**, 108

Dérivée de la fonction exponentielle **142**

Dérivée de la fonction logarithme népérien **144**

Dérivé (nombre) **13**, **97**, 104, 105

Dérivée d'un produit de fonctions **99**

Dérivée d'un quotient de fonctions **99**

Dérivée (signe de la) **100**, 107

Dérivée d'une somme de fonctions **99**

Dérivées de fonctions usuelles **99**

Différentielle (équation) **143**, 153

E

Équation **68**, 70

Équation différentielle **143**, 153

Exponentielle (dérivée de la fonction) **142**

Exponentielle (fonction) **141**, 149

Exponentielle (limites de la fonction) **142**

Exponentielle de base α (fonction) **145**, 153

F

Fonction composée (dérivée d'une) **101**, 108

Fonction composée (limite d'une) **12**, 20

Fonction dérivable **97**, **98**

Fonction dérivée **98**, **99**, 106

Fonction exponentielle **141**, 149

Fonction exponentielle de base α **145**, 153

Fonction (intégrale d'une) **243**, 252, 253

Fonction (limite d'une) **11**, 18

Fonction logarithme décimal **145**, 152

Fonction logarithme népérien **143**, 150

Fonction partie entière **61**, 67

Fonction (primitive d'une) **246**, **247**, 251

Fonction racine n -ième **63**, 146

Fonction rationnelle (limite à l'infini d'une) **13**, 22

Fonction (sens de variation d'une) **100**, 107

Fonction (tableau de variations d'une) **63**, 68

Fonction tangente **100**

Fonctions usuelles (dérivées de) **99**

Fonctions usuelles (limites de) **13**

G

Genâdarmes (théorème des) **12, 189**

I

Intégrale d'une fonction **243, 252, 253**

Intégrale et suite **256**

Intégrale (valeur moyenne d'une) **244**

Intégration **243**

Intégration par parties **246, 255**

L

Limite d'une fonction **11, 18**

Limite à droite d'une fonction **13**

Limite à gauche d'une fonction **13**

Limite d'une fonction composée **12, 20**

Limite d'une fonction rationnelle ou d'un polynôme à l'infini **13, 22**

Limite et inégalité (fonction) **12**

Limite et nombre dérivé (fonction) **13**

Limite d'un produit de fonctions **11**

Limite d'un quotient de fonctions **11**

Limite d'une somme de fonctions **11**

Limite d'une suite **188, 195**

Limites de la fonction exponentielle **142**

Limites de la fonction logarithme népérien **144**

Limites de fonctions usuelles **13**

Logarithme décimal **145, 152**

Logarithme népérien **143, 150**

Logarithme népérien (dérivée de la fonction) **144**

Logarithme népérien (limites de la fonction) **144**

M

Majoration d'une suite **187, 194**

Maximum d'une fonction **109**

Minimum d'une fonction **109**

Minoration d'une suite **187, 194**

Mise en facteur du terme dominant **21**

Monotone (suite) **188**

Monotonie (théorèmes de) **100**

N

Nombre dérivé **13, 97, 104, 105**

P

Partie entière (fonction) **61, 67**

Parties (intégration par) **246, 255**

Polynôme (limite à l'infini d'un) **13, 22**

Primitive d'une fonction **246, 247, 251**

Produit de fonctions (dérivée d'un) **99**

Produit de fonctions (limite d'un) **11**

Q

Quotient de fonctions (dérivée d'un) **99**

Quotient de fonctions (limite d'un) **11**

R

Racine n -ième (fonction) **63, 146**

Raisonnement par récurrence **187, 192**

Récurrence **187, 192**

Récurrente (suite) **198**

Résolution d'équations **70**

S

Sens de variation d'une fonction **100, 107**

Sens de variation d'une suite **188, 194**

Signe de la dérivée d'une fonction **100**, 107

Somme de fonctions (dérivée d'une) **99**

Somme de fonctions (limite d'une) **11**

Suite **187**

Suite adjacente **189**, 197

Suite bornée **187**

Suite constante **188**

Suite convergente **188**

Suite croissante **188**

Suite décroissante **188**

Suite (limite d'une) **188**, 195

Suite majorée **187**, 194

Suite minorée **187**, 194

Suite monotone **188**

Suite récurrente **198**

T

Tableau de variations **63**, 68

Tangente **98**, **100**, 105

Taux de variation **23**

Terme dominant (mise en facteur du) **21**

Théorème de la convergence monotone **189**

Théorème des gendarmes **12**, **189**

Théorème des suites adjacentes **189**

Théorème des valeurs intermédiaires **62**

Théorèmes de comparaison **12**

Théorèmes de monotonie **100**

V

Valeur moyenne d'une intégrale **244**

Valeurs intermédiaires (théorème des) **62**

Variation d'une fonction (sens de) **100**, 107

Variation d'une suite (sens de) **188**, 194

Variation (taux de) **23**

Variations (tableau de) **63**, 68

Volume et intégrale **246**, 254

LIMITES

Rappels de cours

I- Règles opératoires

■ Opérations algébriques

l et l' désignent des réels, a désigne un réel, $+\infty$ ou $-\infty$.

• Limite d'une somme

On suppose $f+g$ définie au voisinage de a .

Si $f \rightarrow l$ pour limite en a	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
et si $g \rightarrow l'$ pour limite en a	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $f+g$ a pour limite en a	$l+l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$?

• Limite d'un produit

On suppose $f \times g$ définie au voisinage de a .

Si $f \rightarrow l$ pour limite en a	l	$l > 0$	$l < 0$	$l > 0$	$l < 0$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
et si $g \rightarrow l'$ pour limite en a	l'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
alors $f \times g$ a pour limite en a	$l \times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$?

• Limite d'un quotient

On suppose $\frac{f}{g}$ définie au voisinage de a .

Si $f \rightarrow l$ pour limite en a	l	l	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	0	$\pm\infty$
et si $g \rightarrow l'$ pour limite en a	$l' \neq 0$	$\pm\infty$	$l' > 0$	$l' < 0$	$l' > 0$	$l' < 0$	0	$\pm\infty$
alors $\frac{f}{g}$ a pour limite en a	$\frac{l}{l'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$?	?

Si $f \rightarrow l$ pour limite en a	$l > 0$ ou $+\infty$	$l > 0$ ou $+\infty$	$l < 0$ ou $-\infty$	$l < 0$ ou $-\infty$
et si $g \rightarrow 0$ pour limite en a	0	0	0	0
et si au voisinage de a	$g \geq 0$	$g \leq 0$	$g \geq 0$	$g \leq 0$
alors $\frac{f}{g}$ a pour limite en a	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

■ Limite et composition

Chacune des lettres a , b , c désigne un réel, $-\infty$ ou $+\infty$.

• Soit f une fonction définie au voisinage de a .

Si on peut écrire, pour tout x de \mathcal{D}_f suffisamment proche de a :

$$f(x) = g \circ k(x),$$

où les fonctions g et k vérifient :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} k(x) = b \\ \lim_{X \rightarrow b} g(X) = c, \end{cases}$$

alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c.$$

• Soit (u_n) une suite réelle.

Si on peut écrire, à partir d'un certain rang, $u_n = f(v_n)$, où la suite (v_n) et

la fonction f vérifient : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = a$ et $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$,

alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = b.$$

II- Limites et inégalités

Soient f , g , k des fonctions définies au voisinage de a (a désigne un réel, $-\infty$ ou $+\infty$), ℓ et λ des nombres réels.

	<i>Hypothèse 1</i> Inégalités vérifiées pour tout x de \mathcal{D}_f suffisamment proche de ■	<i>Hypothèse 2</i> Comportement lorsque x tend vers a	Conclusion
Théorèmes de comparaison	$f(x) \geq g(x)$	$\lim_a g = +\infty$	$\lim_a f = +\infty$
	$f(x) \leq g(x)$	$\lim_a g = -\infty$	$\lim_a f = -\infty$
	$ f(x) - \ell \leq g(x)$	$\lim_a g = 0$	$\lim_a f = \ell$
Théorème des gendarmes	$g(x) \leq f(x) \leq k(x)$	$\lim_a g = \lim_a k = \ell$	$\lim_a f = \ell$
Passage à la limite dans les inégalités	$f(x) \leq g(x)$	f et g admettent des limites réelles en a	$\lim_a f \leq \lim_a g$
	$f(x) \leq \lambda$	f admet une limite réelle en a	$\lim_a f \leq \lambda$

III- Limite et nombre dérivé

Soient f une fonction et a un réel.

Si on peut écrire, pour tout x de \mathcal{D}_f suffisamment proche de a :

$$f(x) = \frac{g(x) - g(a)}{x - a},$$

où g est une fonction dérivable en a , alors : $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g'(a)$.

IV- Limite à gauche, limite à droite

Soient f une fonction et a un réel ; λ désigne un réel, $-\infty$ ou $+\infty$.

■ On dit que f admet λ comme limite à gauche en a si, et seulement si, la restriction de f à $] -\infty ; a[$ admet λ comme limite en a .

On note alors :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = \lambda \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ <}} f(x) = \lambda \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lambda \quad \text{ou} \quad \lim_{a^-} f = \lambda.$$

■ On dit que f admet λ comme limite à droite en a si, et seulement si, la restriction de f à $]a ; +\infty[$ admet λ comme limite en a .

On note alors :

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \lambda \quad \text{ou} \quad \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ >}} f(x) = \lambda \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lambda \quad \text{ou} \quad \lim_{a^+} f = \lambda.$$

V- Limites des fonctions usuelles

■ Les fonctions $x \mapsto x^n$ (n entier relatif), $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto |x|$, \sin , \cos , les polynômes, les fonctions rationnelles, admettent une limite en tout réel a de leur ensemble de définition, qui est la valeur prise par la fonction en a .

■ La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ et les fonctions $x \mapsto x^n$ (n entier naturel non nul) ont pour limite $+\infty$ en $+\infty$.

■ Limites à l'infini d'un polynôme, d'une fonction rationnelle

• En $+\infty$ comme en $-\infty$, tout polynôme admet une limite, qui est celle de son monôme de plus haut degré.

• En $+\infty$ comme en $-\infty$, toute fonction rationnelle admet une limite, qui est celle du quotient des monômes de plus haut degré de son numérateur et de son dénominateur.

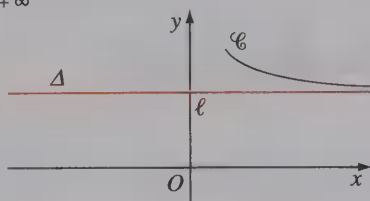
■ Les fonctions sinus et cos n'admettent de limite ni en $-\infty$ ni en $+\infty$.

VI- Asymptotes

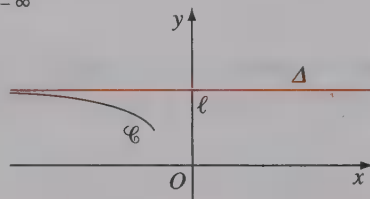
Soient f une fonction, \mathcal{C} sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère et a , b , ℓ des réels.

■ Asymptotes parallèles à la droite des abscisses

• La droite Δ d'équation $y = \ell$ est asymptote à \mathcal{C} au voisinage de $+\infty$ si, et seulement si : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = \ell$.



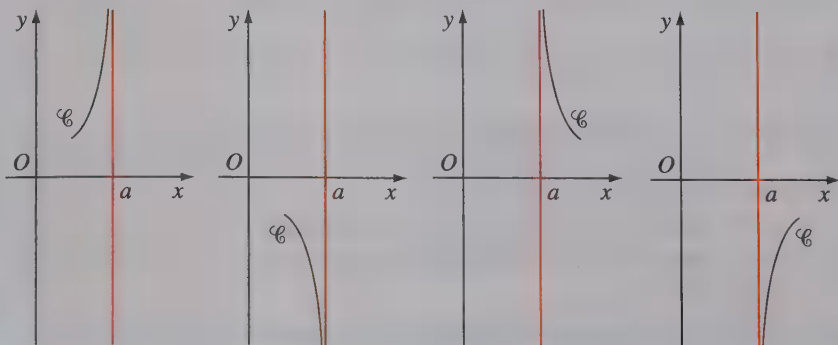
• La droite Δ d'équation $y = \ell$ est asymptote à \mathcal{C} au voisinage de $-\infty$ si, et seulement si : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f = \ell$.



■ Asymptotes parallèles à la droite des ordonnées

La droite d'équation $x = a$ est asymptote à \mathcal{C} si, et seulement si :

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow a^-} f = -\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} f = -\infty.$$

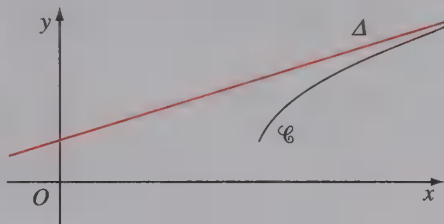


■ Asymptotes obliques

• La droite Δ d'équation $y = ax + b$ est asymptote à \mathcal{C} au voisinage de $+\infty$ si, et seulement si, on peut écrire, pour tout x suffisamment grand :

$$f(x) = ax + b + \varphi(x),$$

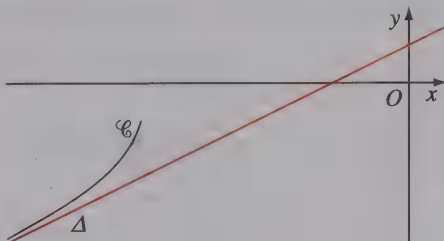
où la fonction φ vérifie $\lim_{+\infty} \varphi = 0$.



• La droite Δ d'équation $y = ax + b$ est asymptote à \mathcal{C} au voisinage de $-\infty$ si, et seulement si, on peut écrire, pour tout x d'un intervalle $]-\infty ; A]$:

$$f(x) = ax + b + \varphi(x),$$

où la fonction φ vérifie $\lim_{-\infty} \varphi = 0$.



EXERCICES

de contrôle des connaissances

1

(Corrigé p. 27)

Compléter :

$$1^\circ \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 =$$

$$2^\circ \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 =$$

$$3^\circ \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 =$$

$$4^\circ \lim_{x \rightarrow 0} x^5 =$$

$$5^\circ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} =$$

$$6^\circ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} =$$

$$7^\circ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} =$$

$$8^\circ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} =$$

$$9^\circ \lim_{x \rightarrow 9} \sqrt{x} =$$

$$10^\circ \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} =$$

$$11^\circ \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{-x} =$$

$$12^\circ \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} =$$

2

(Corrigé p. 27)

1° En utilisant « limite d'une somme », calculer les limites suivantes :

$$a. \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + x^5)$$

$$b. \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + x^3)$$

$$c. \lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 - \frac{1}{x^2} \right)$$

$$d. \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - x^3)$$

2° En utilisant « limite d'un produit », calculer les limites suivantes :

$$a. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \sqrt{x}$$

$$b. \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \sqrt{-x}$$

$$c. \lim_{x \rightarrow 0} x^2 (1 - \sqrt{x})$$

$$d. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \times (1 + \sqrt{x})$$

3

(Corrigé p. 28)

Sachant que la fonction f vérifie :

$$\text{pour tout réel } x, f(x) \geq 2,$$

déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction :

$$x \mapsto x^3 f(x).$$

4

(Corrigé p. 28)

Soit f la fonction définie sur $[0 ; 1[\cup]1 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1+x}{1-\sqrt{x}}.$$

Déterminer les limites de f à gauche et à droite en 1.

Qu'en déduit-on pour la courbe représentative \mathcal{C} de f ?

5

(Corrigé p. 28)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^* par :

$$f(x) = \frac{2x^2 - x - 1}{x}.$$

Démontrer que la courbe représentative \mathcal{C} de f admet en $-\infty$ et en $+\infty$ une asymptote oblique dont on donnera une équation.

6

(Corrigé p. 29)

Déterminer la limite en 0 de la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ (penser à un taux de variation).

On pourra revoir la notion de nombre dérivé dans le chapitre 3.

Notion de limite

7



10 min.

(Corrigé p. 30)

Soit f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , et \mathcal{C} sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère.

Dire que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ signifie que tout intervalle de la forme $[A; +\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand.

Parmi les phrases suivantes, quelles sont celles qui sont toujours vraies si f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$?

1° f n'est pas majorée ;

2° f n'est pas minorée ;

3° on peut trouver un réel a tel que, si $x \geq a$, alors $f(x) \geq 2\,003$;

4° dans un demi-plan d'inéquation $x \geq a$, la courbe \mathcal{C} est située au-dessus de la droite d'équation $y = 2\,003$;

5° il existe un intervalle $[a; +\infty[$ sur lequel f est croissante.

8



10 min.

(Corrigé p. 31)

On considère une fonction f de limite 3 en $+\infty$; soit \mathcal{C} sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère.

Dire que $f(x)$ tend vers 3 quand x tend vers $+\infty$ signifie que tout intervalle ouvert contenant 3 contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand.

Justifier chacune des phrases suivantes :

1° $2,5 < f(x) < 3,2$ pour x assez grand ;

2° $|f(x) - 3| < 0,01$ pour x assez grand ;

3° on peut trouver un réel a tel que : si $x \geq a$, alors $2,5 < f(x) < 3,2$;

4° dans un demi-plan d'inéquation $x \geq a$, la courbe \mathcal{C} est située entre les droites d'équations $y = 2,5$ et $y = 3,2$;

5° $f(x) \leq 3,001$ pour x assez grand ;

6° on peut trouver un intervalle de la forme $[a; +\infty[$ sur lequel f ne s'annule pas.

Calculatrice et conjecture

9

10
min

(Corrigé p. 31)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ par $f(x) = \frac{x^3 - x - 6}{x - 2}$.

1° Préciser les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow 2} (x - 2)$, $\lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - x - 6)$.

Ces résultats permettent-ils de donner la limite de f en 2 ?

2° Obtenir, à l'aide de la calculatrice, un tableau de valeurs de f qui permette de conjecturer la limite de f en 2.

3° Développer : $(x - 2)(x^2 + 2x + 3)$.

En déduire la limite de f en 2.

10

10
min

(Corrigé p. 32)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ par $f(x) = \frac{x^5 + 243}{x + 3}$.

1° Obtenir, à l'aide de la calculatrice, un tableau de valeurs de f qui permette de conjecturer la limite de f en -3 .

2° Déterminer la limite de f en -3 en reconnaissant en $f(x)$ un taux de variation.

11

15
min

(Corrigé p. 33)

Soit f la fonction définie sur $]-\pi; 0[\cup]0; \pi[$ par :

$$f(x) = \frac{1 - \cos 4x}{\sin^2 x}.$$

1° Préciser les limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos 4x)$, $\lim_{x \rightarrow 0} \sin^2 x$.

Ces résultats permettent-ils de donner la limite de f en 0 ?

2° Obtenir à l'aide de la calculatrice un tableau de valeurs de f qui permette de conjecturer la limite de f en 0.

3° Transformer l'écriture de $f(x)$ en utilisant les formules de duplication.
En déduire la limite de f en 0.

Limite d'une fonction composée

12 ★			15 <i>min.</i>
-------------	--	--	-------------------

(Corrigé p. 34)

Dans chacun des cas suivants, déterminer la limite éventuelle en a de la fonction f proposée.

$$1^\circ x \mapsto |x^3 - 2| \text{ et } a = -1.$$

$$2^\circ x \mapsto \sin \frac{1}{x} \text{ et } a = +\infty.$$

$$3^\circ x \mapsto \sqrt{\frac{6}{x+1}} \text{ et } a = -1.$$

$$4^\circ x \mapsto \sqrt{x^5 + 32} \text{ et } a = -\infty.$$

$$5^\circ x \mapsto \sqrt{1 - \sqrt{x}} \text{ et } a = 1.$$

$$6^\circ x \mapsto \cos^3(3x) \text{ et } a = \pi.$$

13 ★ ★			5 <i>min.</i>
---------------	--	--	------------------

(Corrigé p. 35)

En utilisant $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (voir l'exercice 6), déterminer :

$$1^\circ \text{ la limite quand } x \text{ tend vers } 0 \text{ de } \frac{\sin 2x}{x};$$

$$2^\circ \text{ la limite de la suite } u : n \mapsto n \sin \frac{1}{n}.$$

14 ★ ★ ★			10 <i>min.</i>
-----------------	--	--	-------------------

(Corrigé p. 36)

Soit la fonction f :

$$x \mapsto x \cos x.$$

1° Pour tout entier naturel n , calculer $f(u_n)$ et $f(v_n)$, où u et v sont les suites définies sur \mathbb{N} par :

$$u_n = 2n\pi \text{ et } v_n = (2n+1)\frac{\pi}{2}.$$

Préciser la limite de chacune des suites u , v , $f \circ u$, $f \circ v$.

2° La fonction f admet-elle une limite en $+\infty$?

Comparaison

15 ★ 5 min

(Corrigé p. 36)

1° La fonction $f: x \mapsto 2 + \sin x$ admet-elle une limite en $+\infty$?

2° Quelle est la limite en $+\infty$ de la fonction $g: x \mapsto x^2(2 + \sin x)$?

16 ★ 5 min

(Corrigé p. 37)

Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction $f: x \mapsto \sqrt{x} - \cos x$.

17 ★ 5 min

(Corrigé p. 38)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

1° Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2° Quelle est la limite de f en $-\infty$?

18 ★ ★ 10 min

(Corrigé p. 39)

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \frac{\cos 4x}{1 + x^2}$.

1° Pour tout réel x , encadrer $\cos 4x$, puis $f(x)$.

2° En déduire les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Donner une interprétation des résultats concernant la courbe représentative de f .

Mise en facteur du terme dominant

19 ★ 10 min

(Corrigé p. 39)

Après avoir vérifié la présence d'une indétermination, calculer la limite en a de la fonction f proposée en factorisant $f(x)$ par le terme donné entre parenthèses.

1° $x \mapsto x - 2\sqrt{x}$, $a = +\infty$ (x).

2° $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}$, $a = 0$ ($\frac{1}{x}$).

20 ★ ★ 10 min.

(Corrigé p. 41)

Déterminer la limite de la fonction f proposée en a .

$$1^\circ x \mapsto \sqrt{x^2 + 1} - 2x, \quad a = +\infty.$$

$$2^\circ x \mapsto 3x + \sqrt{4x^2 + 1}, \quad a = -\infty.$$

21 ★ ★ 10 min.

(Corrigé p. 42)

Déterminer la limite de la suite u proposée.

$$1^\circ n \mapsto \frac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n}.$$

$$2^\circ n \mapsto \frac{\sqrt{n} + 1}{n + 1}.$$

Limites à l'infini de polynômes et de fonctions rationnelles

22 ★ 10 min.

(Corrigé p. 43)

Déterminer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction f proposée.

$$1^\circ x \mapsto -x^4 + 100x^3 + 1.$$

$$2^\circ x \mapsto \frac{5x^5 - 3x^2}{1 - 5x^2}.$$

$$3^\circ x \mapsto \frac{2 - x}{1,5 - x^2}.$$

$$4^\circ x \mapsto \frac{(x^3 + 1)^5}{(x^5 - 1)^3}.$$

23 ★ ★ 10 min.

(Corrigé p. 45)

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{2x^2 + 3}.$$

Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

Qu'en déduit-on pour la courbe représentative \mathcal{C} de f .

Radicaux et quantités conjuguées

24 ★ 15 min

(Corrigé p. 46)

Soit f la fonction : $x \mapsto \sqrt{x^2 - 2x} - x + 1$.

1° Déterminer l'ensemble de définition de f , puis vérifier que, pour la recherche de la limite de f en $+\infty$, on se trouve en présence d'une indétermination.

2° Pour lever cette indétermination, on considère la fonction g :

$$x \mapsto \sqrt{x^2 - 2x} + x - 1.$$

a. Pour tout x de \mathcal{D}_f , calculer $f(x) \times g(x)$.

b. Quelle est la limite de g en $+\infty$?

c. Démontrer : pour tout x de $[2; +\infty[$, $g(x) > 0$.

d. En déduire la limite de f en $+\infty$.

25 ★ ★ 10 min

(Corrigé p. 47)

Déterminer la limite de la fonction f proposée en a .

1° $x \mapsto \frac{\sqrt{7+x}-3}{x-2}$, $a=2$.

2° $x \mapsto \frac{\sqrt{3x^2+1}-2}{x-1}$, $a=1$.

Reconnaître un taux de variation

26 ★ ★ 10 min

(Corrigé p. 49)

Déterminer la limite de la fonction f proposée en a .

1° $x \mapsto \frac{x^{2003}-1}{x-1}$, $a=1$.

2° $x \mapsto \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$, $a = \frac{\pi}{2}$.

3° $x \mapsto \frac{2 \sin x - 1}{6x - \pi}$, $a = \frac{\pi}{6}$.

4° $x \mapsto \frac{\sqrt{5+x}-2}{x+1}$, $a=-1$.

On pourra revoir la notion de nombre dérivé dans le chapitre 3.

Asymptotes

27 ★ 5 min

(Corrigé p. 50)

On considère la fonction f définie sur $] -\pi ; 0[\cup] 0 ; \pi[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\sin x}.$$

Démontrer que f admet des limites à gauche et à droite en 0.
Qu'en déduit-on pour la courbe représentative \mathcal{C} de f ?

28 ★ 10 min

(Corrigé p. 51)

Soient f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par :

$$f(x) = \frac{2x^2 + 7x + 5}{x + 2},$$

et \mathcal{C} sa courbe représentative.

1° Déterminer les limites de f à gauche et à droite en -2 .
Interpréter graphiquement le résultat.

2° Calculer, pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{2\}$: $f(x) - (2x + 3)$.

En déduire que la courbe \mathcal{C} admet en $-\infty$ et en $+\infty$ une droite asymptote d dont on précisera une équation.

Étudier la position de \mathcal{C} par rapport à d .

29 ★ ★ 10 min

(Corrigé p. 52)

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \frac{x^3 - x^2 + x + 1}{x^2 + 1}.$$

1° Déterminer les réels a , b et c tels que, pour tout réel x :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x^2 + 1}.$$

2° En déduire que la courbe représentative \mathcal{C} de f admet une droite asymptote en $-\infty$ et en $+\infty$.

30 ★ ★ ★ 30 min.

(Corrigé p. 53)

Soient f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1}.$$

et \mathcal{C} sa courbe représentative dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1° Déterminer les réels a, b, c tels que, pour tout réel x distinct de 1 :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x - 1}.$$

2° Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition, puis déterminer la dérivée f' de f .

Dresser le tableau de variations de f .

3° Quelles sont les droites asymptotes à \mathcal{C} ?

Préciser la position de \mathcal{C} par rapport à son asymptote oblique.

4° Démontrer que \mathcal{C} admet un centre de symétrie.

5° Tracer la courbe \mathcal{C} et ses éléments remarquables.

31 ★ ★ ★ 30 min.

(Corrigé p. 56)

Soient f la fonction :

$$x \mapsto \sqrt{x^2 + 2x},$$

et \mathcal{C} sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1° Déterminer l'ensemble de définition \mathcal{D}_f de f .

2° Démontrer que \mathcal{C} admet un axe de symétrie, que l'on notera d .

3° En utilisant un théorème de composition, justifier que f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

4° Déterminer la limite de f en $+\infty$; en déduire la limite de f en $-\infty$.

5° Déterminer la limite de $\frac{f(x)}{x}$ quand x tend vers 0 .

Interpréter graphiquement le résultat.

6° Démontrer que la droite Δ d'équation $y = x + 1$ est asymptote à \mathcal{C} en $+\infty$.

Préciser la position de \mathcal{C} par rapport à Δ dans le demi-plan d'inéquation $x \geq 0$.

Justifier que \mathcal{C} admet en $-\infty$ une asymptote Δ' , dont on donnera une équation.

7° Tracer la courbe \mathcal{C} et ses éléments remarquables.

CORRIGÉS

des exercices

1 En application directe du cours :

$$1^\circ \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty.$$

$$2^\circ \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty.$$

$$3^\circ \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty.$$

$$4^\circ \lim_{x \rightarrow 0} x^5 = 0^5 = 0.$$

$$5^\circ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

$$6^\circ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

$$7^\circ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^4} = +\infty.$$

$$8^\circ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

$$9^\circ \lim_{x \rightarrow 9} \sqrt{x} = \sqrt{9} = 3.$$

$$10^\circ \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty.$$

$$11^\circ \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{-x} = +\infty.$$

$$12^\circ \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = \sqrt{0} = 0.$$

a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^5 = +\infty$, donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + x^5) = +\infty$.

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$, donc : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + x^3) = -\infty$.

c. $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\infty$, donc : $\lim_{x \rightarrow 0} \left(x^2 - \frac{1}{x^2}\right) = -\infty$.

d. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3) = +\infty$, donc : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 - x^3) = +\infty$.

2° a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$, donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \sqrt{x} = +\infty$.

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{-x} = +\infty$, donc : $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 \sqrt{-x} = -\infty$.

c. $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \sqrt{x}) = 1 - \sqrt{0} = 1$, donc : $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 (1 - \sqrt{x}) = 0$.

d. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sqrt{x}) = 1 + \sqrt{0} = 1$, donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \times (1 + \sqrt{x}) = +\infty.$$

- 3 • Pour tout x de $[0; +\infty[$:

$$f(x) \geq 2 \text{ et } x^3 \geq 0,$$

donc : $x^3 f(x) \geq 2x^3$.

La fonction : $x \mapsto x^3 f(x)$ est donc minorée sur $[0; +\infty[$ par la fonction : $x \mapsto 2x^3$, de limite $+\infty$ en $+\infty$, ce qui prouve, d'après le théorème de comparaison :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 f(x) = +\infty.$$

- Pour tout x de $]-\infty; 0]$:

$$f(x) \geq 2 \text{ et } x^3 \leq 0,$$

donc : $x^3 f(x) \leq 2x^3$.

On en déduit que la fonction : $x \mapsto x^3 f(x)$ est majorée sur $]-\infty; 0]$ par la fonction : $x \mapsto 2x^3$, de limite $-\infty$ en $-\infty$, donc, d'après le théorème de comparaison :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 f(x) = -\infty.$$

Lorsqu'on multiplie chaque membre d'une inégalité par un même réel positif, on obtient une inégalité de même sens.

Lorsqu'on multiplie chaque membre d'une inégalité par un même réel négatif, on obtient une inégalité de sens contraire.

- 4 Pour tout x de $[0; 1[\cup]1; +\infty[$, $f(x) = \frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$.

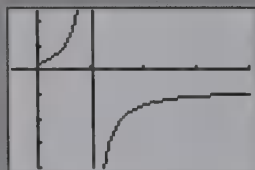
$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1+x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} (1-\sqrt{x}) = 1-\sqrt{1} = 0 \quad \text{et} \quad \begin{cases} 1-\sqrt{x} > 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 1-\sqrt{x} < 0 & \text{si } x > 1, \end{cases}$$

donc : $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$.

On en déduit que la droite d'équation $x = 1$ est asymptote à la courbe représentative \mathcal{C} de f .

```
Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=(1+X)/(1-√(X
))
\Y2=
\Y3=
\Y4=
\Y5=
\Y6=
```

```
WINDOW
Xmin=-.5
Xmax=4
Xscl=1
Ymin=-20
Ymax=12
Yscl=5
Xres=1
```



- 5 $f : x \mapsto \frac{2x^2 - x - 1}{x}$.

La fonction f a pour ensemble de définition \mathbb{R}^* et, pour tout réel x non nul :

$$f(x) = 2x - 1 - \frac{1}{x},$$

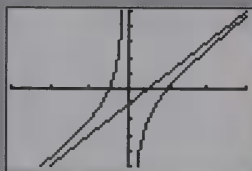
donc f est la somme :

- de la fonction affine : $x \mapsto 2x - 1$
- et de la fonction : $x \mapsto -\frac{1}{x}$, de limite 0 en $-\infty$ et en $+\infty$.

On en déduit que la droite d'équation $y = 2x - 1$ est asymptote à la courbe représentative \mathcal{C} de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

```
Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=(1+X)/(1-√(X
))
\Y2=(2X^2-X-1)/X
\Y3=2X-1
\Y4=
\Y5=
\Y6=
```

```
WINDOW
Xmin=-3
Xmax=3
Xscl=1
Ymin=-5
Ymax=5
Yscl=1
Xres=1
```



La fonction : $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ a pour ensemble de définition \mathbb{R}^* . En remarquant que la fonction sinus s'annule en 0, on peut écrire, pour tout x de \mathbb{R}^* :

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0},$$

ce qui montre que $\frac{\sin x}{x}$ est le taux de variation de la fonction sinus entre 0 et x . La fonction sinus est dérivable sur \mathbb{R} , et : $\sin' = \cos$,

donc :

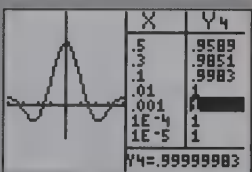
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = \sin'(0) = \cos 0 = 1,$$

autrement dit :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

```
Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=(1+X)/(1-√(X
))
\Y2=(2X^2-X-1)/X
\Y3=2X-1
\Y4=sin(X)/X
\Y5=
\Y6=
```

```
WINDOW
Xmin=-8
Xmax=8
Xscl=2
Ymin=-.5
Ymax=1.5
Yscl=1
Xres=1
```



• Pour afficher l'écran graphique à côté de l'écran table, appuyer sur **(MODE)**, puis sélectionner G-T dans la dernière ligne de l'écran.

• Appuyer sur **(2nd)** [TBLSET] pour afficher l'écran TABLE SETUP.

La sélection : Indpnt : Ask

Depend : Auto

permet de choisir les valeurs de la colonne X de la table.

La fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ étant paire, seules des valeurs positives de la variables ont été tapées dans la colonne X (ici : 0,5 ; 0,3 ; 0,1 ; 0,01 ; 0,001 ; 10^{-4} ; 10^{-5}).

7 1° Si f est une fonction de limite $+\infty$ en $+\infty$, alors f n'est pas majorée. En effet, aucun réel M n'est un majorant de f , car $[M + 1 ; +\infty[$ contenant toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand :

$$f(x) \geq M + 1 \text{ pour } x \text{ assez grand,}$$

donc : $f(x) > M$ pour x assez grand,

ce qui implique que l'on peut trouver un réel a tel que $f(a) > M$.

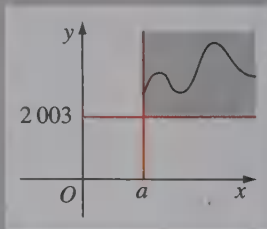
2° Si f est une fonction de limite $+\infty$ en $+\infty$, il est possible que f soit minorée, comme le prouve l'exemple de la fonction carré :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \text{ et, pour tout réel } x, x^2 \geq 0.$$

0 est un minorant de la fonction $x \mapsto x^2$ (c'est même son minimum).

3° Si f est une fonction de limite $+\infty$ en $+\infty$, alors on peut trouver un réel a tel que : si $x \geq a$, alors $f(x) \geq 2\,003$; en effet, l'intervalle $[2\,003 ; +\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand, c'est-à-dire pour x supérieur ou égal à un certain réel a .

4° L'affirmation « dans un demi-plan d'inéquation $x \geq a$, la courbe \mathcal{C} est située au-dessus de la droite d'équation $y = 2\,003$ » est une simple traduction géométrique de : si $x \geq a$, alors $f(x) \geq 2\,003$.



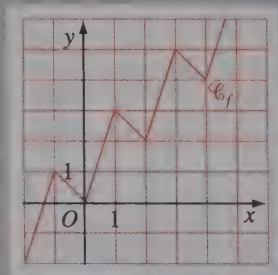
5° Si f est une fonction de limite $+\infty$ en $+\infty$, il est possible que f ne soit croissante sur aucun intervalle $[a ; +\infty[$, comme le prouve l'exemple de la fonction f définie sur \mathbb{R} de la façon suivante : pour tout entier relatif n ,

- $f(2n) = 2n$,
- $f(2n + 1) = 2n + 3$,
- f est affine sur l'intervalle $[n ; n + 1]$.

Alors, par construction :

pour tout réel x , $f(x) \geq x$, donc (théorème de comparaison) : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, et il est clair

graphiquement que f est strictement décroissante sur tout intervalle $[2n + 1 ; 2n + 2]$ où n est un entier relatif, et n'est donc croissante sur aucun intervalle $[a ; +\infty[$.



▣ Par hypothèse, f est une fonction de limite 3 en $+\infty$.

1° L'intervalle ouvert $]2,5 ; 3,2[$ contient 3, donc $]2,5 ; 3,2[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand, c'est-à-dire :

$$2,5 < f(x) < 3,2 \text{ pour } x \text{ assez grand.}$$

2° $]2,99 ; 3,01[$ est un intervalle ouvert qui contient 3, donc $]2,99 ; 3,01[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour x assez grand, c'est-à-dire :

$$2,99 < f(x) < 3,01 \text{ pour } x \text{ assez grand,}$$

autrement dit :

$$|f(x) - 3| < 0,01 \text{ pour } x \text{ assez grand.}$$

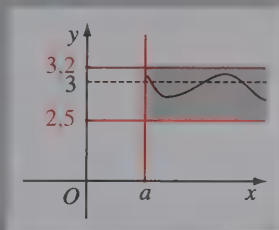
3° Dire : $2,5 < f(x) < 3,2$ pour x assez grand,

signifie que l'on peut trouver un réel a tel que :

$$\text{si } x \geq a, \text{ alors } 2,5 < f(x) < 3,2.$$

4° L'affirmation « dans un demi-plan d'inéquation $x \geq a$, la courbe \mathcal{C} est située entre les droites d'équations $y = 2,5$ et $y = 3,2$ » est une simple traduction géométrique de :

$$\text{si } x \geq a, \text{ alors } 2,5 < f(x) < 3,2.$$



5° L'intervalle ouvert $] -\infty ; 3,0001[$ contient 3,

donc : $f(x) < 3,0001$ pour x assez grand ;

il vient : $f(x) \leq 3,001$ pour x assez grand.

6° D'après 3°, on peut trouver un réel a tel que :

$$\text{si } x \geq a, \text{ alors } 2,5 < f(x) < 3,2,$$

donc : si $x \in [a ; +\infty[$, alors $f(x) > 0$;

on peut donc trouver un intervalle de la forme $[a ; +\infty[$ sur lequel f ne s'annule pas.

▣ Pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{2\}$, $f(x) = \frac{x^3 - x - 6}{x - 2}$.

$$1^\circ \lim_{x \rightarrow 2} (x - 2) = 2 - 2 = 0$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow 2} (x^3 - x - 6) = 2^3 - 2 - 6 = 0,$$

donc f est le quotient de deux fonctions de limite 0 en 2, et les théorèmes usuels ne permettent pas de conclure directement sur la limite de f en 2.

Forme indéterminée
« $\frac{0}{0}$ »

2° Pour tout réel x distinct de -3 :

$$f(x) = \frac{x^5 - (-3)^5}{x - (-3)},$$

donc $f(x)$ est le taux de variation de la fonction $x \mapsto x^5$ entre -3 et x .

On en déduit que, quand x tend vers -3 , $f(x)$ tend vers le nombre dérivé de la fonction $x \mapsto x^5$ en -3 , c'est-à-dire :

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = 5 \times (-3)^4 = 5 \times 81 = 405.$$

La dérivée de $x \mapsto x^5$ est $x \mapsto 5x^4$.

11 Pour tout x de $]-\pi; 0[\cup]0; \pi[$, $f(x) = \frac{1 - \cos 4x}{\sin^2 x}$.

1° $\lim_{x \rightarrow 0} 4x = 0$ et $\lim_{X \rightarrow 0} \cos X = \cos 0 = 1$,

donc, d'après le théorème de composition : $\lim_{x \rightarrow 0} \cos 4x = 1$,

d'où l'on déduit : $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos 4x) = 0$.

• $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = \sin 0 = 0$ et $\lim_{X \rightarrow 0} X^2 = 0$,

donc, d'après le théorème de composition : $\lim_{x \rightarrow 0} \sin^2 x = 0$.

La fonction f se présente comme le quotient de deux fonctions de limite 0 en 0, et les théorèmes usuels ne permettent pas de conclure directement sur la limite de f en 0.

Forme indéterminée
« $\frac{0}{0}$ »

2°

```
Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=(1-cos(4X))/
sin(X)^2
\Y2=
\Y3=
\Y4=
\Y5=
\Y6=
```

X	Y1
.5	6.1612
.1	7.9203
.01	7.9992
.001	8
1E-4	8
1E-5	8
1E-6	8

Y1=8.00000000027

f étant paire, seules les valeurs positives de la variable ont été tapées dans la colonne X de la table.

Les résultats obtenus à l'aide de la calculatrice invitent à conjecturer que f admet en 0 une limite proche de 8.

3° • Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} 1 - \cos 4x &= 1 - \cos(2 \times 2x) \\ &= 2 \sin^2 2x \\ &= 2(2 \sin x \cos x)^2 \\ &= 8 \sin^2 x \cos^2 x, \end{aligned}$$

Pour tout réel a :
 $\cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a$,
 $\sin 2a = 2 \sin a \cos a$.

donc, pour tout x de $]-\pi; 0[\cup]0; \pi[$:

$$f(x) = \frac{8 \sin^2 x \cos^2 x}{\sin^2 x} = 8 \cos^2 x .$$

• $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos 0 = 1$ et $\lim_{X \rightarrow 1} X^2 = 1$, donc d'après le théorème de composition : $\lim_{x \rightarrow 0} \cos^2 x = 1$, et finalement :

$$\lim_0 f = 8 .$$

12 1° $f: x \mapsto |x^3 - 2|$ et $a = -1$.

La fonction f est définie sur \mathbb{R} ; c'est la composée de la fonction : $x \mapsto x^3 - 2$ par la fonction valeur absolue : $X \mapsto |X|$,

et : $\lim_{x \rightarrow -1} (x^3 - 2) = (-1)^3 - 2 = -3$, $\lim_{X \rightarrow -3} |X| = |-3| = 3$,

donc :
$$\lim_{-1} f = 3 .$$

2° $f: x \mapsto \sin \frac{1}{x}$ et $a = +\infty$.

L'ensemble de définition de f est \mathbb{R}^*

et : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{X \rightarrow 0} \sin X = \sin 0 = 0$,

donc :
$$\lim_{+\infty} f = 0 .$$

3° $f: x \mapsto \sqrt{\frac{6}{x+1}}$ et $a = -1$.

$\mathcal{D}_f =]-1; +\infty[$ et $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{6}{x+1} = +\infty$, $\lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty$,

donc :
$$\lim_{-1} f = +\infty .$$

4° $f: x \mapsto \sqrt{x^5 + 32}$ et $a = -\infty$.

Pour tout réel x :

$$x \in \mathcal{D}_f \Leftrightarrow x^5 + 32 \geq 0 \Leftrightarrow x^5 \geq (-2)^5 ,$$

or, la fonction $x \mapsto x^5$ est croissante sur \mathbb{R} , donc :

$$x \in \mathcal{D}_f \Leftrightarrow x \geq -2$$

autrement dit :

$$\mathcal{D}_f = [-2; +\infty[.$$

f n'étant pas définie au voisinage de $-\infty$:

elle n'admet pas de limite en $-\infty$.

f est la composée de la fonction inverse : $x \mapsto \frac{1}{x}$ par la fonction sinus : $X \mapsto \sin X$.

5° $f: x \mapsto \sqrt{1-\sqrt{x}}$ et $a = 1$.

$$\begin{aligned} \text{Pour tout réel } x: \quad x \in \mathcal{D}_f &\Leftrightarrow x \geq 0 \text{ et } 1 - \sqrt{x} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x \geq 0 \text{ et } \sqrt{x} \leq 1 \\ &\Leftrightarrow 0 \leq x \leq 1, \end{aligned}$$

donc : $\mathcal{D}_f = [0; 1]$.

$$\text{De plus : } \lim_{x \rightarrow 1} (1 - \sqrt{x}) = 1 - \sqrt{1} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = \sqrt{0} = 0,$$

$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow 1} f = 0.$$

6° $f: x \mapsto \cos^3(3x)$ et $a = \pi$.

f est définie sur \mathbb{R} et :

$$\lim_{x \rightarrow \pi} 3x = 3\pi, \quad \lim_{X \rightarrow 3\pi} \cos X = \cos(3\pi) = -1, \quad \lim_{t \rightarrow -1} t^3 = (-1)^3 = -1,$$

$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow \pi} f = -1.$$

13 1° La fonction $x \mapsto \frac{\sin 2x}{x}$ a pour ensemble de définition \mathbb{R}^* et, pour tout réel x non nul :

$$\frac{\sin 2x}{x} = 2 \times \frac{\sin 2x}{2x};$$

$$\text{comme de plus : } \lim_{x \rightarrow 0} 2x = 0 \text{ et } \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\sin X}{X} = 1,$$

$$\text{on obtient (théorème de composition) : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{2x} = 1,$$

$$\text{puis : } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{x} = 2.$$

2° $u: n \mapsto n \sin \frac{1}{n}$.

La suite u est définie sur \mathbb{N}^* et, pour tout entier naturel n non nul :

$$u_n = \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}};$$

$$\text{de plus : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1,$$

donc, d'après le théorème de composition :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1.$$

Indétermination
« $\infty \times 0$ »

La suite u est la composée de la suite :

$$n \mapsto \frac{1}{n}$$

par la fonction :

$$x \mapsto \frac{\sin x}{x}.$$

14 $f: x \mapsto x \cos x$.

1° Pour tout entier naturel n : $u_n = 2n\pi$ et $v_n = (2n+1)\frac{\pi}{2}$,

donc les suites u et v ont toutes deux pour limite $+\infty$.

D'autre part, la fonction f est définie sur \mathbb{R} et,

pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} f(u_n) &= 2n\pi \times \cos(2n\pi) \\ &= 2n\pi \times 1 \\ &= 2n\pi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(v_n) &= (2n+1)\frac{\pi}{2} \times \cos\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) \\ &= (2n+1)\frac{\pi}{2} \times 0 \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos(2n\pi) &= \cos 0 = 1, \\ \cos\left((2n+1)\frac{\pi}{2}\right) &= \cos\left(n\pi + \frac{\pi}{2}\right) = 0. \end{aligned}$$

donc $f \circ u$ est la suite $n \mapsto 2n\pi$, de limite $+\infty$, et $f \circ v$ est la suite constante $n \mapsto 0$, de limite 0.

2° Les suites u et v ont toutes deux pour limite $+\infty$;

si la fonction f admettait une limite ℓ en $+\infty$, alors,

d'après le théorème de composition, les suites $f \circ u$ et

$f \circ v$ admettraient ℓ pour limite ; or, on a prouvé dans

la question 1° :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} f(v_n) = 0,$$

donc $f \circ u$ et $f \circ v$ n'ont pas la même limite, ce qui montre que l'hypothèse « f admet une limite en $+\infty$ » est à rejeter.

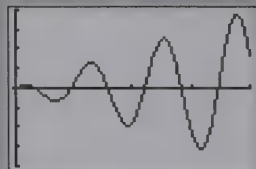
On a ainsi prouvé :

la fonction f n'admet pas de limite en $+\infty$.

ℓ pouvant être un réel, $+\infty$ ou $-\infty$.

```
Plot1 Plot2 Plot3
-2)
\Y2=(1-cos(4X))/
sin(X)^2
\Y3=(X^5+243)/(X
+3)
\Y4=Xcos(X)
\Y5=
```

```
WINDOW
Xmin=-.2
Xmax=20
Xscl=5
Ymin=-20
Ymax=20
Yscl=5
Xres=1
```



15 1° $f: x \mapsto 2 + \sin x$.

f est définie sur \mathbb{R} .

Si f admettait une limite en $+\infty$, alors la fonction $x \mapsto \sin x$, différence :

- de la fonction f qui admet une limite en $+\infty$,
 - et de la fonction constante $x \mapsto 2$, de limite 2 en $+\infty$,
- admettrait elle aussi une limite en $+\infty$.

Or, on sait que la fonction sinus n'admet pas de limite en $+\infty$, donc l'hypothèse « f admet une limite en $+\infty$ » est à rejeter, autrement dit :

f n'admet pas de limite en $+\infty$.

2° $g : x \mapsto x^2(2 + \sin x)$

La fonction g , définie sur \mathbb{R} , est le produit de la fonction carré : $x \mapsto x^2$, de limite $+\infty$ en $+\infty$, par la fonction $f : x \mapsto 2 + \sin x$, qui n'admet pas de limite en $+\infty$; les théorèmes usuels ne permettent donc pas de conclure directement sur la limite de f en $+\infty$.

Pour lever l'indétermination, remarquons que la fonction sinus est bornée sur \mathbb{R} par -1 et 1 :

pour tout réel x , $-1 \leq \sin x \leq 1$;

on en déduit, pour tout réel x :

$$1 \leq 2 + \sin x \leq 3,$$

donc, en multipliant chaque membre de l'inégalité par le réel positif x^2 :

$$x^2 \leq x^2(2 + \sin x) \leq 3x^2.$$

On a ainsi établi :

pour tout réel x , $g(x) \geq x^2$,

et, sachant : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$,

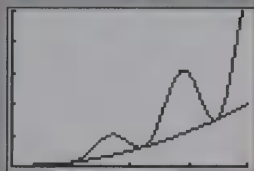
le théorème de comparaison permet de conclure :

$$\lim_{+\infty} g = +\infty.$$

Remarquer qu'en définitive, c'est le fait que la fonction sin soit minorée par -1 qui permet de conclure.

```
Plot1 Plot2 Plot3
\Y3=(X^5+243)/(X
+3)
\Y4=Xcos(X)
\Y5=X^2(2+sin(X))
\Y6=X^2
\Y7=
```

```
WINDOW
Xmin=-.1
Xmax=20
Xscl=5
Ymin=-.1
Ymax=1000
Yscl=200
Xres=1
```



16 $f : x \mapsto \sqrt{x} - \cos x$.

La fonction f , définie sur $[0 ; +\infty[$, est la différence de la fonction racine carrée : $x \mapsto \sqrt{x}$, de limite $+\infty$ en $+\infty$, et de la fonction cosinus, qui n'admet pas de limite en $+\infty$; les théorèmes usuels ne permettent donc pas de conclure directement sur la limite de f en $+\infty$.

Le fait que la fonction cosinus soit bornée sur \mathbb{R} va permettre de lever cette indétermination.

Pour tout réel x :

$$-1 \leq \cos x \leq 1,$$

donc :

$$-1 \leq -\cos x \leq 1,$$

donc, pour tout réel x positif :

$$\sqrt{x} - 1 \leq \sqrt{x} - \cos x \leq \sqrt{x} + 1,$$

ce qui implique :

$$\sqrt{x} - 1 \leq f(x).$$

De plus, on sait :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty,$$

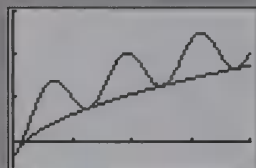
donc :
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x} - 1) = +\infty.$$

On a ainsi prouvé que f est minorée sur $]0; +\infty[$ par une fonction de limite $+\infty$, et le théorème de comparaison permet de conclure :

$$\lim_{+\infty} f = +\infty.$$

```
Plot1 Plot2 Plot3
\Y4=Xcos(X)
\Y5=X^2(2+sin(X))
\Y6=X^2
\Y7=J(X)-cos(X)
\Y8=J(X)-1
\Y9=
```

```
WINDOW
Xmin=-.1
Xmax=20
Xscl=5
Ymin=-1.2
Ymax=6
Yscl=2
Xres=1
```



Remarquer qu'en définitive, c'est le fait que la fonction \cos soit majorée par 1 qui permet de conclure.

10 Pour tout x de \mathbb{R}^* , $f(x) = \frac{\sin x}{x}$.

1° Pour tout réel x :

$$-1 \leq \sin x \leq 1,$$

donc, pour tout x de $]0; +\infty[$, en divisant chaque membre de l'encadrement par le réel strictement positif x :

$$-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}.$$

Il vient :

pour tout x de $]0; +\infty[$,
$$-\frac{1}{x} \leq f(x) \leq \frac{1}{x},$$

donc la fonction f est encadrée sur $]0; +\infty[$ par les fonctions $x \mapsto -\frac{1}{x}$, $x \mapsto \frac{1}{x}$, toutes deux de limite 0 en $+\infty$;

le théorème des gendarmes permet de conclure :

$$\lim_{+\infty} f = 0.$$

2° La fonction f est paire :

pour tout x de \mathbb{R}^* ,
$$f(-x) = \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{-\sin x}{-x} = \frac{\sin x}{x} = f(x),$$

On pouvait aussi écrire, pour tout x de \mathbb{R}^* :

$$|f(x)| = \left| \frac{\sin x}{x} \right| = \frac{|\sin x|}{|x|},$$

donc : $|f(x)| \leq \frac{1}{|x|}$;

donc, pour tout x de $]0; +\infty[$:

$$|f(x)| \leq \frac{1}{x}.$$

et, d'après la question 1° :

$$\lim_{+\infty} f = 0,$$

donc :

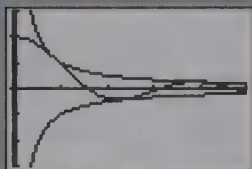
$$\lim_{-\infty} f = 0.$$

```

Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=sin(X)/X
\Y2=1/X
\Y3=1/X
\Y4=
\Y5=
\Y6=
\Y7=
    
```

```

WINDOW
Xmin=-.2
Xmax=10
Xscl=2
Ymin=-1.5
Ymax=1.5
Yscl=.5
Xres=1
    
```



On pouvait aussi écrire,
pour tout x de $]-\infty; 0[$:

$$|f(x)| \leq -\frac{1}{x}.$$

18 Pour tout réel x , $f(x) = \frac{\cos 4x}{1+x^2}$.

1° Pour tout réel x :

$$-1 \leq \cos 4x \leq 1 \text{ et } 1+x^2 > 0,$$

donc :

$$\frac{-1}{1+x^2} \leq \frac{\cos 4x}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+x^2}.$$

Il vient :

pour tout réel x , $\frac{-1}{1+x^2} \leq f(x) \leq \frac{1}{1+x^2}$.

2° Les fonctions $x \mapsto \frac{-1}{1+x^2}$ et $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ ayant

toutes deux pour limite 0 en $-\infty$ et en $+\infty$, le théorème des gendarmes permet de déduire de la question 1° :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0,$$

ce qui prouve que la droite des abscisses est asymptote à la courbe représentative de f au voisinage de $-\infty$ et au voisinage de $+\infty$.

19 1° $f: x \mapsto x - 2\sqrt{x}$.

f pour ensemble de définition $[0; +\infty[$.

• f se présente comme la différence des fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto 2\sqrt{x}$; ces deux fonctions ayant pour limite $+\infty$ en $+\infty$, les théorèmes usuels ne permettent pas de déterminer directement la limite de f en $+\infty$.

La fonction cos est
bornée sur \mathbb{R} par
-1 et 1.

$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ est
l'inverse d'une
fonction de limite
 $+\infty$, en $-\infty$
et en $+\infty$.

- Pour tout x de $]0; +\infty[$:

$$f(x) = x \times \left(1 - \frac{2\sqrt{x}}{x}\right) = x \left(1 - \frac{2}{\sqrt{x}}\right);$$

de plus, on sait :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0.$$

Pour tout réel x strictement positif :

$$\frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} \times \sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

On a ainsi écrit la restriction de f à $]0; +\infty[$ sous la forme du produit :

- de la fonction : $x \mapsto x$, de limite $+\infty$ en $+\infty$,
- et de la fonction : $x \mapsto 1 - \frac{2}{\sqrt{x}}$, de limite 1 en $+\infty$,

ce qui permet d'affirmer :

$$\lim_{+\infty} f = +\infty.$$

x l'emporte sur $\frac{1}{\sqrt{x}}$ en $+\infty$.

$$2^\circ f: x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}.$$

f a pour ensemble de définition $]0; +\infty[$.

- f se présente comme la différence des fonctions $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$; ces deux fonctions ayant pour limite $+\infty$ à droite en 0, les théorèmes usuels ne permettent pas de déterminer directement la limite de f en 0.

- Pour tout x de $]0; +\infty[$:

$$f(x) = \frac{1}{x} \times \left(\frac{x}{\sqrt{x}} - 1\right) = \frac{1}{x} \times (\sqrt{x} - 1),$$

et on sait :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0.$$

On a ainsi écrit f sous la forme du produit :

- de la fonction : $x \mapsto \frac{1}{x}$, qui admet $+\infty$ pour limite à droite en 0,
- et de la fonction : $x \mapsto \sqrt{x} - 1$, de limite -1 en 0;

f ayant pour ensemble de définition $]0; +\infty[$, on peut conclure :

$$\lim f = -\infty.$$

$\frac{1}{x}$ l'emporte sur $\frac{1}{\sqrt{x}}$ en 0.

20 1° $f: x \mapsto \sqrt{x^2 + 1} - 2x$.

f est définie sur \mathbb{R} .

• f se présentant comme la différence de deux fonctions de limite $+\infty$ en $+\infty$, les théorèmes usuels ne permettent pas de donner directement la limite de f en $+\infty$.

• Remarquons que, pour de grandes valeurs de x , $\sqrt{x^2 + 1}$ et x sont « proches » ; aussi, transformons l'écriture de $f(x)$ en mettant x en facteur.

Pour tout x de $]0; +\infty[$,

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - 2x = \sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} - 2x = \sqrt{x^2} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 2x,$$

or : $\sqrt{x^2} = |x|$ et x est positif, donc : $\sqrt{x^2} = x$,

ce qui implique : $f(x) = x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 2x$,

et finalement : $f(x) = x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 2 \right)$.

Sur $]0; +\infty[$, f est donc le produit :

• de la fonction : $x \mapsto x$, de limite $+\infty$ en $+\infty$,

• et de la fonction $x \mapsto \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 2$, de limite -1 en $+\infty$.

Il vient :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f = -\infty.$$

2° $f: x \mapsto 3x + \sqrt{4x^2 + 1}$.

f est définie sur \mathbb{R} .

• f se présente comme la somme des deux fonctions :

• $x \mapsto 3x$, de limite $-\infty$ en $-\infty$,

• $x \mapsto \sqrt{4x^2 + 1}$, de limite $+\infty$ en $-\infty$;

les théorèmes usuels ne permettent donc pas de donner directement la limite de f en $-\infty$.

• Remarquons que, pour des valeurs de x négatives et « loin de 0 », $\sqrt{4x^2 + 1}$ et $-2x$ sont « proches » ; aussi, transformons l'écriture de $f(x)$ en factorisant $\sqrt{4x^2 + 1}$ par $-2x$.

Pour tout x de $] -\infty ; 0[$,

$$f(x) = 3x + \sqrt{4x^2 + 1} = 3x + \sqrt{4x^2 \left(1 + \frac{1}{4x^2}\right)} = 3x + \sqrt{4x^2} \sqrt{1 + \frac{1}{4x^2}},$$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (4x^2 + 1) = +\infty$,
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty$,
 donc, d'après le théorème de composition :
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{4x^2 + 1} = +\infty$.

or : $\sqrt{4x^2} = |2x|$ et x est négatif, donc : $\sqrt{4x^2} = -2x$,

ce qui implique : $f(x) = 3x - 2x\sqrt{1 + \frac{1}{4x^2}}$,

et finalement : $f(x) = x\left(3 - 2\sqrt{1 + \frac{1}{4x^2}}\right)$.

Sur $] -\infty ; 0[$, f est donc le produit :

- de la fonction $x \mapsto x$, de limite $-\infty$ en $-\infty$,

- et de la fonction $x \mapsto 3 - 2\sqrt{1 + \frac{1}{4x^2}}$, de limite 1 en $-\infty$.

Il vient :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{4x^2}\right) = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x} = \sqrt{1} = 1,$$

donc, d'après le théorème de composition :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{4x^2}} = 1.$$

21 $1^\circ u : n \mapsto \frac{2^n - 3^n}{2^n + 3^n}$.

La suite u est définie sur \mathbb{N} et, pour tout entier naturel n :

$$u_n = \frac{3^n \left(\frac{2^n}{3^n} - 1\right)}{3^n \left(\frac{2^n}{3^n} + 1\right)} = \frac{\left(\frac{2}{3}\right)^n - 1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n + 1};$$

de plus, $0 < \frac{2}{3} < 1$, donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$.

On peut donc conclure : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -1$.

$2^\circ u : n \mapsto \frac{\sqrt{n} + 1}{n + 1}$.

La suite u est définie sur \mathbb{N} et, pour tout entier naturel n non nul :

$$u_n = \frac{\sqrt{n} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{n \left(1 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \times \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}}{1 + \frac{1}{n}},$$

de plus, on sait : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$,

donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

21 1° $f: x \mapsto -x^4 + 100x^3 + 1$.

f est un polynôme, donc f admet en $+\infty$, comme en $-\infty$, une limite, qui est celle de son monôme de plus haut degré :

$$\lim_{-\infty} f = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^4) = -\infty$$

et

$$\lim_{+\infty} f = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^4) = -\infty.$$

Pour obtenir ces résultats sans utiliser le théorème « limite à l'infini d'un polynôme », il suffit d'écrire :

pour tout x de \mathbb{R}^* , $f(x) = -x^4 \left(1 - \frac{100}{x} - \frac{1}{x^4} \right)$
 (on a ainsi factorisé $f(x)$ par le terme dominant $-x^4$); il n'y a plus d'indétermination, et les théorèmes usuels permettent de conclure.

2° $f: x \mapsto \frac{5x^5 - 3x^2}{1 - 5x^2}$.

f est une fonction rationnelle, donc f admet en $+\infty$, comme en $-\infty$, une limite, qui est celle du quotient des monômes de plus haut degré de son numérateur et de son dénominateur :

$$\lim_{-\infty} f = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^5}{-5x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3) = +\infty,$$

$$\lim_{+\infty} f = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^5}{-5x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3) = -\infty.$$

Ces résultats peuvent bien sûr s'établir en écrivant que, pour tout x non nul de \mathbb{D}_f :

$$f(x) = \frac{5x^5 \left(1 - \frac{3x^2}{5x^5} \right)}{-5x^2 \left(-\frac{1}{5x^2} + 1 \right)} = -x^3 \times \frac{\left(1 - \frac{3}{5x^3} \right)}{\left(1 - \frac{1}{5x^2} \right)},$$

(on a factorisé numérateur et dénominateur par leur terme dominant).

$$3^{\circ} f: x \mapsto \frac{2-x}{1,5-x^2}.$$

f est une fonction rationnelle ; le monôme de plus haut degré de son numérateur est $x \mapsto -x$, le monôme de plus haut degré de son dénominateur est $x \mapsto -x^2$, donc :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{-x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{-x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

En factorisant numérateur et dénominateur par leur terme dominant, on obtient que, pour tout x non nul de \mathbb{D}_f :

$$f(x) = \frac{-x \left(-\frac{2}{x} + 1 \right)}{-x^2 \left(-\frac{1,5}{x^2} + 1 \right)} = \frac{1}{x} \times \frac{\left(1 - \frac{2}{x} \right)}{\left(1 - \frac{1,5}{x^2} \right)}.$$

$$4^{\circ} f: x \mapsto \frac{(x^3 + 1)^5}{(x^5 - 1)^3}.$$

f est une fonction rationnelle ; c' est le quotient :

- du polynôme : $x \mapsto (x^3 + 1)^5$, dont le monôme de plus haut degré est : $x \mapsto x^{3 \times 5}$, c'est-à-dire : $x \mapsto x^{15}$,
- et du polynôme : $x \mapsto (x^5 - 1)^3$, dont le monôme de plus haut degré est : $x \mapsto x^{5 \times 3}$, c'est-à-dire : $x \mapsto x^{15}$.

Il vient :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^{15}}{x^{15}} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{15}}{x^{15}} = 1.$$

Pour tout x non nul de \mathbb{D}_f :

$$f(x) = \frac{\left(x^3 \left(1 + \frac{1}{x^3} \right) \right)^5}{\left(x^5 \left(1 - \frac{1}{x^5} \right) \right)^3} = \frac{x^{15} \left(1 + \frac{1}{x^3} \right)^5}{x^{15} \left(1 - \frac{1}{x^5} \right)^3} = \frac{\left(1 + \frac{1}{x^3} \right)^5}{\left(1 - \frac{1}{x^5} \right)^3}.$$

23 Pour tout réel x , $f(x) = \frac{x^2 - 1}{2x^2 + 3}$.

f est une fonction rationnelle, donc, en $-\infty$ comme en $+\infty$, f admet une limite qui est celle du quotient des termes de plus haut degré de son numérateur et de son dénominateur ;

il vient :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2x^2} = \frac{1}{2},$$

de même :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{1}{2},$$

ce qui prouve que la droite d'équation $y = \frac{1}{2}$

est asymptote à la courbe représentative \mathcal{C} de f au voisinage de $-\infty$ et au voisinage de $+\infty$.

Il faut savoir que le théorème « limite à l'infini d'une fonction rationnelle » s'appuie sur une transformation d'écriture, ici :
pour tout réel x non nul,

$$f(x) = \frac{x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}{2x^2 \left(1 + \frac{3}{2x^2}\right)} = \frac{1}{2} \times \frac{\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)}{\left(1 + \frac{3}{2x^2}\right)}.$$

On pourra se reporter à l'exercice précédent pour davantage de détails.

On peut noter que f est une fonction paire :

$$\text{de : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2},$$

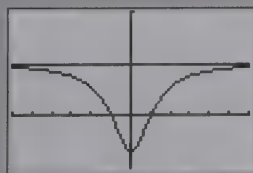
$$\text{on déduit : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{1}{2}.$$

```

Plot1 Plot2 Plot3
\Y2=(X^3-X^2+X+1)
/(X^2+1)
\Y3=X-1
\Y4=(X^2-1)/(2X^2+3)
\Y5=1/2
\Y6=
    
```

```

WINDOW
Xmin=-6
Xmax=6
Xscl=1
Ymin=-.5
Ymax=1
Yscl=1
Xres=1
    
```



$$f: x \mapsto \sqrt{x^2 - 2x} - x + 1.$$

1° • Pour tout réel x :

$$x \in \mathcal{D}_f \Leftrightarrow x^2 - 2x \geq 0 \Leftrightarrow x(x-2) \geq 0,$$

$$\text{donc : } \mathcal{D}_f =]-\infty; 0] \cup [2; +\infty[.$$

• Pour tout x de $[2; +\infty[$:

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 2x} - (x - 1),$$

et :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 2x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1) = +\infty.$$

Les théorèmes usuels ne permettent donc pas de conclure directement (indétermination du type « $\infty - \infty$ »).

$$2^\circ g: x \mapsto \sqrt{x^2 - 2x} + x - 1.$$

$$\text{a. } \mathcal{D}_f = \mathcal{D}_g.$$

Pour tout x de $] -\infty; 0] \cup [2; +\infty[$:

$$\begin{aligned} f(x) \times g(x) &= (\sqrt{x^2 - 2x} - (x - 1)) \\ &\quad \times (\sqrt{x^2 - 2x} + (x - 1)) \\ &= (\sqrt{x^2 - 2x})^2 - (x - 1)^2 \\ &= x^2 - 2x - (x^2 - 2x + 1), \end{aligned}$$

$$\text{donc : } f(x) \times g(x) = -1.$$

$$\text{b. Pour tout } x \text{ de } [2; +\infty[, \quad g(x) = \sqrt{x^2 - 2x} + (x - 1),$$

$$\text{et : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 2x} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1) = +\infty.$$

$$\text{donc : } \lim_{+\infty} g = +\infty.$$

c. Pour tout x de $[2; +\infty[$:

$$g(x) = \sqrt{x^2 - 2x} + (x - 1),$$

$$\text{et : } \sqrt{x^2 - 2x} \geq 0, \quad x - 1 > 0,$$

$$\text{donc : } g(x) > 0.$$

d. Pour tout x de $[2; +\infty[$:

$$f(x) \times g(x) = -1 \text{ et } g(x) \neq 0,$$

$$\text{donc : } f(x) = -\frac{1}{g(x)};$$

comme de plus :

$$\lim_{+\infty} g = +\infty,$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$
 et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$,
 donc, d'après le théorème
 de composition :
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 2x} = +\infty$.

$\sqrt{x^2 - 2x} - (x - 1)$
 et $\sqrt{x^2 - 2x} + (x - 1)$,
 c'est-à-dire $f(x)$ et $g(x)$,
 sont des « expressions
 conjuguées ».

Remarquer que l'on a ainsi prouvé
 que la droite d'équation : $y = x - 1$
 est asymptote en $+\infty$ à la courbe
 représentative de la fonction :
 $x \mapsto \sqrt{x^2 - 2x}$.

on peut conclure :

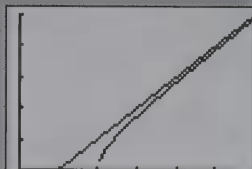
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 2x} - x + 1) = 0.$$

```
Plot1 Plot2 Plot3
Y1=sin(X)/X
Y2=-1/X
Y3=1/X
Y4=√(X^2-2X)
Y5=X-1
Y6=
Y7=
```

```
WINDOW
Xmin=0
Xmax=6
Xscl=1
Ymin=0
Ymax=5
Yscl=1
Xres=1
```



On démontrerait de manière analogue que, pour la recherche de la limite de g en $-\infty$, on est en présence d'une indétermination ; pour la lever, il suffit de remarquer :

• pour tout x de $]-\infty; 0]$, $g(x) = -\frac{1}{f(x)}$

• $\lim_{-\infty} f = +\infty$,

ce qui met en évidence : $\lim_{-\infty} g = 0$,

c'est-à-dire : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - 2x} + x - 1) = 0$.

11 1° $f: x \mapsto \frac{\sqrt{7+x}-3}{x-2}$.

$$\mathcal{D}_f = [-7; 2[\cup]2; +\infty[.$$

• $\lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{7+x}-3) = \sqrt{7+2}-3 = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 2} (x-2) = 0$,

donc on se trouve en présence d'une indétermination.

• Pour lever cette indétermination, multiplions le numérateur et le dénominateur de $f(x)$ par l'expression conjuguée de $\sqrt{7+x}-3$.

Pour tout x de $[-7; 2[\cup]2; +\infty[$:

$$\sqrt{7+x}+3 \neq 0,$$

et :

$$f(x) = \frac{\sqrt{7+x}-3}{x-2} \times \frac{\sqrt{7+x}+3}{\sqrt{7+x}+3}$$

Pour tout réel x supérieur ou égal à -7 :
 $\sqrt{7+x}+3 > 0$.

$$f(x) = \frac{(7+x) - 9}{(x-2)(\sqrt{7+x} + 3)}$$

$$= \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{7+x} + 3)},$$

donc : $f(x) = \frac{1}{\sqrt{7+x} - 3}$.

De plus :

$$\lim_{x \rightarrow 2} (\sqrt{7+x} + 3) = \sqrt{7+2} + 3 = 6,$$

donc, finalement :

$$\lim_2 f = \frac{1}{6}.$$

Une autre méthode consiste à reconnaître en $f(x)$ le taux de variation entre 2 et x de la fonction :

$$x \mapsto \sqrt{7+x}.$$

$$2^\circ f: x \mapsto \frac{\sqrt{3x^2+1} - 2}{x-1}.$$

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}.$$

• $\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{3x^2+1} - 2) = \sqrt{3 \times 1^2 + 1} - 2 = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 1} (x-1) = 0$,

donc on se trouve en présence d'une indétermination.

• Pour lever cette indétermination, multiplions le numérateur et le dénominateur de $f(x)$ par l'expression conjuguée de $\sqrt{3x^2+1} - 2$.

Pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, $\sqrt{3x^2+1} + 2 \neq 0$

et :

$$f(x) = \frac{\sqrt{3x^2+1} - 2}{x-1} \times \frac{\sqrt{3x^2+1} + 2}{\sqrt{3x^2+1} + 2}$$

$$= \frac{(3x^2+1) - 4}{(x-1)(\sqrt{3x^2+1} + 2)}$$

$$= \frac{3(x-1)(x+1)}{(x-1)(\sqrt{3x^2+1} + 2)},$$

donc : $f(x) = \frac{3(x+1)}{\sqrt{3x^2+1} + 2}$.

De plus :

$$\lim_{x \rightarrow 1} (\sqrt{3x^2+1} + 2) = \sqrt{3 \times 1^2 + 1} + 2 = 4 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1} 3(x+1) = 6,$$

donc : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{6}{4}$,

c'est-à-dire : $\lim_1 f = \frac{3}{2}$.

Pour tout réel x : $\sqrt{3x^2+1} + 2 > 0$.

26 1° $f: x \mapsto \frac{x^{2\,003} - 1}{x - 1}$.

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$ et, pour tout réel x distinct de 1 :

$$f(x) = \frac{x^{2\,003} - 1^{2\,003}}{x - 1},$$

autrement dit, $f(x)$ est le taux de variation de la fonction $g: x \mapsto x^{2\,003}$ entre 1 et x .

g est dérivable sur \mathbb{R} , et, pour tout réel x : $g'(x) = 2\,003 x^{2\,002}$; en particulier : $g'(1) = 2\,003$, ce qui implique :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{2\,003} - 1^{2\,003}}{x - 1} = 2\,003,$$

c'est-à-dire : $\lim_1 f = 2\,003$.

2° $f: x \mapsto \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$.

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$.

Pour tout réel x distinct de $\frac{\pi}{2}$:

$$f(x) = \frac{\cos x - \cos \frac{\pi}{2}}{x - \frac{\pi}{2}},$$

de plus : $\cos' \frac{\pi}{2} = -\sin \frac{\pi}{2} = -1$,

donc : $\lim_{\frac{\pi}{2}} f = -1$.

3° $f: x \mapsto \frac{2 \sin x - 1}{6x - \pi}$.

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{6} \right\}$.

Pour tout réel x distinct de $\frac{\pi}{6}$:

$$f(x) = \frac{2 \left(\sin x - \frac{1}{2} \right)}{6 \left(x - \frac{\pi}{6} \right)} = \frac{1}{3} \times \frac{\sin x - \sin \frac{\pi}{6}}{x - \frac{\pi}{6}},$$

$f(x)$ est le taux de variation de la fonction \cos entre $\frac{\pi}{2}$ et x .

$\frac{\sin x - \sin \frac{\pi}{6}}{x - \frac{\pi}{6}}$ est le taux de variation de la fonction \sin entre $\frac{\pi}{6}$ et x ; il tend vers $\sin' \frac{\pi}{6}$ quand x tend vers $\frac{\pi}{6}$.

de plus :

$$\sin \frac{\pi}{6} = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

donc :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} f(x) = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2},$$

c'est-à-dire :

$$\lim_{\frac{\pi}{6}} f = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

4° $f: x \mapsto \frac{\sqrt{5+x}-2}{x+1}$.

• Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{D}_f &\Leftrightarrow 5+x \geq 0 \text{ et } x+1 \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x \geq -5 \text{ et } x \neq -1, \end{aligned}$$

donc :

$$\mathcal{D}_f = [-5; -1[\cup]-1; +\infty[.$$

• Pour tout x de \mathcal{D}_f :

$$f(x) = \frac{\sqrt{5+x} - \sqrt{5+(-1)}}{x - (-1)}.$$

$$\sqrt{5+(-1)} = \sqrt{4} = 2.$$

donc $f(x)$ est le taux de variation de la fonction $g: x \mapsto \sqrt{5+x}$ entre -1 et x .

• g est dérivable sur $] -5; +\infty[$, et, pour tout x de $] -5; +\infty[$:

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{5+x}};$$

en particulier :

$$g'(-1) = \frac{1}{2\sqrt{5-1}} = \frac{1}{4}.$$

Finalement :

$$\lim_{-1} f = \frac{1}{4}.$$

27 Pour tout x de $] -\pi; 0[\cup]0; \pi[$, $f(x) = \frac{1}{\sin x}$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = \sin 0 = 0 \text{ et } \begin{cases} \sin x < 0 & \text{si } -\pi < x < 0 \\ \sin x > 0 & \text{si } 0 < x < \pi, \end{cases}$$

donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty.$$

Il en résulte que la droite d'équation $x = 0$, c'est-à-dire la droite des ordonnées, est asymptote à la courbe représentative \mathcal{C} de f .

```

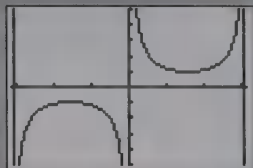
Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=sin(X)/X
\Y2=-1/X
\Y3=1/X
\Y4=f(X^2-2X)
\Y5=X-1
\Y6=1/sin(X)
\Y7=

```

```

WINDOW
Xmin=-3.141592...
Xmax=3.1415926...
Xscl=1
Ymin=-5
Ymax=5
Yscl=1
Xres=1

```



28 Pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$, $f(x) = \frac{2x^2 + 7x + 5}{x + 2}$.

$$1^\circ \lim_{x \rightarrow -2} (2x^2 + 7x + 5) = 2 \times (-2)^2 + 7 \times (-2) + 5 = -1,$$

$$\text{de plus : } \lim_{x \rightarrow -2} (x + 2) = 0 \text{ et } \begin{cases} x + 2 < 0 & \text{si } x < -2 \\ x + 2 > 0 & \text{si } x > -2, \end{cases}$$

$$\text{donc : } \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty.$$

On en déduit que la droite d'équation $x = -2$ est asymptote à la courbe représentative \mathcal{C} de f .

2° Pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$:

$$\begin{aligned} f(x) - (2x + 3) &= \frac{2x^2 + 7x + 5}{x + 2} - (2x + 3) \\ &= \frac{2x^2 + 7x + 5 - (2x + 3)(x + 2)}{x + 2} \\ &= \frac{2x^2 + 7x + 5 - 2x^2 - 7x - 6}{x + 2} \\ &= \frac{-1}{x + 2}. \end{aligned}$$

• On en déduit :

$$\text{pour tout } x \text{ de } \mathbb{R} \setminus \{-2\}, f(x) = 2x + 3 - \frac{1}{x + 2}.$$

f est donc la somme de la fonction affine $x \mapsto 2x + 3$ et de la fonction $x \mapsto \frac{-1}{x + 2}$, qui admet pour limite 0 en $-\infty$ et en $+\infty$, ce qui prouve que la droite d d'équation $y = 2x + 3$ est asymptote à la courbe représentative \mathcal{C} de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

• De plus, pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$, le signe de $f(x) - (2x + 3)$ est celui de $-\frac{1}{x + 2}$, donc :

\mathcal{C} est située au-dessus de d dans le demi-plan d'inéquation $x < -2$,

\mathcal{C} est située en dessous de d dans le demi-plan d'inéquation $x > -2$.

```

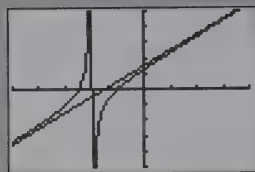
Plot1 Plot2 Plot3
\Y4=√(X^2-2X)
\Y5=X-1
\Y6=1/sin(X)
\Y7=(2X^2+7X+5)/(
X+2)
\Y8=2X+3
\Y9=

```

```

WINDOW
Xmin=-5
Xmax=4
Xscl=1
Ymin=-10
Ymax=10
Yscl=2
Xres=1

```



■ Pour tout réel x , $f(x) = \frac{x^3 - x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$.

1° Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} ax + b + \frac{c}{x^2 + 1} &= \frac{(ax + b)(x^2 + 1) + c}{x^2 + 1} \\ &= \frac{ax^3 + bx^2 + ax + (b + c)}{x^2 + 1}, \end{aligned}$$

de plus,
$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ a = 1 \\ b + c = 1 \end{cases}$$

si, et seulement si :
$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -1, \\ c = 2 \end{cases}$$

donc : pour tout réel x , $x - 1 + \frac{2}{x^2 + 1} = \frac{x^3 - x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$,

autrement dit : pour tout réel x , $f(x) = x - 1 + \frac{2}{x^2 + 1}$.

2° D'après la question 1°, f est la somme :

- de la fonction affine : $x \mapsto x - 1$,
- et de la fonction : $x \mapsto \frac{2}{x^2 + 1}$, de limite 0 en $-\infty$ et en $+\infty$,

donc la droite d'équation $y = x - 1$ est asymptote à la courbe représentative \mathcal{C} de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

```

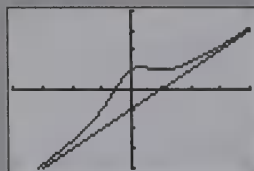
Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=(1-cos(4X))/
sin(X)^2
\Y2=(X^3-X^2+X+1)
/(X^2+1)
\Y3=X-1
\Y4=
\Y5=

```

```

WINDOW
Xmin=-4
Xmax=4
Xscl=1
Ymin=-4
Ymax=4
Yscl=1
Xres=1

```



30 Pour tout x de $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, $f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x - 1}$.

1° Soit x un réel distinct de 1 ; on a :

$$ax + b + \frac{c}{x-1} = \frac{(ax+b)(x-1) + c}{x-1} = \frac{ax^2 + (b-a)x + (c-b)}{x-1},$$

et :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - a = 1 \\ c - b = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2, \\ c = 1 \end{cases}$$

donc :

$$x + 2 + \frac{1}{x-1} = \frac{x^2 + x - 1}{x-1}.$$

On en déduit : pour tout réel x distinct de 1, $f(x) = x + 2 + \frac{1}{x-1}$.

2° • Limites à l'infini

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+2) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x-1} = 0, \quad \text{donc : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

$$\text{De même : } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+2) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x-1} = 0, \quad \text{donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

• Limites à gauche et à droite en 1

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (x+2) = 1+2 = 3, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{1}{x-1} = -\infty$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty,$$

donc :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty.$$

• Dérivée, tableau de variations

En tant que fonction rationnelle, f est dérivable sur son ensemble de définition ; pour tout réel x distinct de 1 :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 - \frac{1}{(x-1)^2} \\ &= \frac{(x-1)^2 - 1}{(x-1)^2} \\ &= \frac{(x-1+1)(x-1-1)}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}. \end{aligned}$$

donc $f'(x)$ est du signe de $x(x-2)$.

Ces résultats pouvaient aussi s'établir simplement à partir de l'expression de $f(x)$ donnée dans l'énoncé.

Noter que le calcul de $f'(x)$ était ici plus simple à partir de l'expression de $f(x)$ obtenue dans la question 1°.

Dressons le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	0	1	2	$+\infty$		
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+	
$f(x)$	$-\infty$	↗ 1 ↘		$+\infty$	↘ 5 ↗		$+\infty$

3° • D'après la question précédente, f admet des limites infinies à gauche et à droite de 1, donc **la droite verticale d'équation : $x = 1$ est asymptote à la courbe représentative \mathcal{C} de f .**

• D'après la question 1° :

$$\text{pour tout réel } x \text{ distinct de } 1, f(x) = x + 2 + \frac{1}{x-1};$$

donc f est la somme de la fonction affine $x \mapsto x + 2$ et de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x-1}$, qui admet pour limite 0 en $-\infty$ et en $+\infty$, ce qui prouve que

la droite d d'équation : $y = x + 2$ est asymptote à la courbe \mathcal{C} en $-\infty$ et en $+\infty$.

De plus, pour tout réel x distinct de 1 :

$$f(x) - (x + 2) = \frac{1}{x-1},$$

$$\text{donc : } \begin{cases} f(x) - (x + 2) < 0 & \text{si } x < 1, \\ f(x) - (x + 2) > 0 & \text{si } x > 1, \end{cases}$$

ce qui prouve :

- \mathcal{C} est située en-dessous de d dans le demi-plan d'inéquation $x < 1$,
- \mathcal{C} est située au-dessus de d dans le demi-plan d'inéquation $x > 1$.

4° D'après le tableau de variations de f , si \mathcal{C} admet un centre de symétrie, ce ne peut être que le milieu $I(1; 3)$ du segment $[AB]$, avec :

$$A(0; 1) \text{ et } B(2; 5).$$

Déterminons une équation de \mathcal{C} dans le repère $(I; \vec{i}, \vec{j})$.

Soient M un point du plan, (x, y) ses coordonnées dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et (X, Y) ses coordonnées dans le repère $(I; \vec{i}, \vec{j})$.

$\vec{OM} = \vec{OI} + \vec{IM}$, donc :

$$x\vec{i} + y\vec{j} = \vec{i} + 3\vec{j} + X\vec{i} + Y\vec{j} = (X+1)\vec{i} + (Y+3)\vec{j};$$

On aurait également pu considérer le point d'intersection des asymptotes.

on en déduit les formules de changement de repère :

$$\begin{cases} x = X + 1 \\ y = Y + 3. \end{cases}$$

Une équation de \mathcal{C} dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est :

$$y = x + 2 + \frac{1}{x-1},$$

donc une équation de \mathcal{C} dans le repère $(I; \vec{i}, \vec{j})$ est :

$$Y + 3 = (X + 1) + 2 + \frac{1}{X},$$

ou encore : $Y = X + \frac{1}{X}.$

La fonction $F : X \mapsto X + \frac{1}{X}$ étant impaire, on peut conclure que I est centre de symétrie de \mathcal{C} .

Une autre méthode consiste à démontrer que \mathcal{D}_I est symétrique par rapport à x_1 et :

pour tout réel h tel que $(x_1 + h) \in \mathcal{D}_f$,

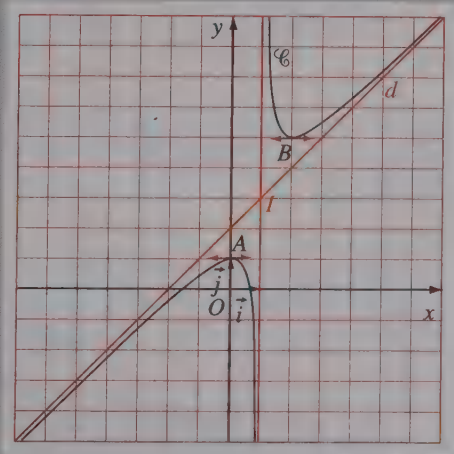
$$f(x_1 + h) + f(x_1 - h) = 2y_1,$$

c'est-à-dire :

pour tout réel h non nul, $f(1+h) + f(1-h) = 6.$

En résumé, démontrer que le point $I(1; 3)$ est un centre de symétrie de \mathcal{C} , c'est démontrer que la fonction : $x \mapsto f(x+1) - 3$ est impaire.

5°



$$f: x \mapsto \sqrt{x^2 + 2x}.$$

1° \mathcal{D}_f est l'ensemble des réels x qui vérifient :

$$x^2 + 2x \geq 0,$$

c'est-à-dire :

$$x(x+2) \geq 0,$$

donc :

$$\mathcal{D}_f =]-\infty; -2] \cup [0; +\infty[.$$

2° Les intervalles $]-\infty; -2]$ et $[0; +\infty[$ sont symétriques par rapport à -1 ; donc, si la courbe \mathcal{C} admet un axe de symétrie, ce ne peut être que la droite d d'équation : $x = -1$.

Notons I le point de coordonnées $(-1; 0)$.

Soient M un point du plan, (x, y) ses coordonnées dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et (X, Y) ses coordonnées dans le repère $(I; \vec{i}, \vec{j})$.

$\vec{OM} = \vec{OI} + \vec{IM}$, donc :

$$x\vec{i} + y\vec{j} = -\vec{i} + X\vec{i} + Y\vec{j} = (X-1)\vec{i} + Y\vec{j};$$

on en déduit les formules de changement de repère :

$$\begin{cases} x = X - 1 \\ y = Y. \end{cases}$$

$$\text{Il vient : } M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathcal{D}_f \\ y = f(x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X-1 \in \mathcal{D}_f \\ Y = f(X-1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X \in]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[\\ Y = \sqrt{(X-1)^2 + 2(X-1)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X \in]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[\\ Y = \sqrt{X^2 - 1}. \end{cases}$$

Or, $]-\infty; -1] \cup [1; +\infty[$ est symétrique par rapport à 0 et la fonction $X \mapsto \sqrt{X^2 - 1}$ est paire, donc \mathcal{C} est symétrique par rapport à la droite des ordonnées du repère $(I; \vec{i}, \vec{j})$, c'est-à-dire, en revenant au repère initial :

la droite d d'équation $x = -1$ est un axe de symétrie de \mathcal{C} .

-1 est la moyenne de -2 et 0 .

En résumé, démontrer que la droite d'équation $x = -1$ est un axe de symétrie de \mathcal{C} , c'est démontrer que la fonction $x \mapsto f(x+1)$ est paire.

Une autre méthode consiste à démontrer que \mathcal{D}_f est symétrique par rapport à x_1 et : pour tout réel h tel que $(x_1 + h) \in \mathcal{D}_f$,
 $f(x_1 - h) = f(x_1 + h)$,
 c'est-à-dire : pour tout réel h tel que $|h| \geq 1$,
 $f(-1 - h) = f(-1 + h)$.

3° f est la composée de la fonction : $x \mapsto x^2 + 2x$ par la fonction racine carrée.

De plus :

- comme somme des fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto 2x$, toutes deux strictement croissantes sur $[0 ; +\infty[$, $x \mapsto x^2 + 2x$ est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$;
- $x \mapsto x^2 + 2x$ est à valeurs positives sur $[0 ; +\infty[$;
- $X \mapsto \sqrt{X}$ est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

On en déduit :

f est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$.

$$4^\circ \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty,$$

donc, d'après le théorème de composition des limites :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

• De plus, la courbe \mathcal{C} admettant la droite d'équation $x = -1$ pour axe de symétrie, il vient :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

5° • Remarquons tout d'abord :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0;$$

on ne peut donc pas obtenir directement la limite de $\frac{f(x)}{x}$ quand x tend vers 0 (indétermination de la forme « $\frac{0}{0}$ »).

Pour tout x de $]0 ; +\infty[$:

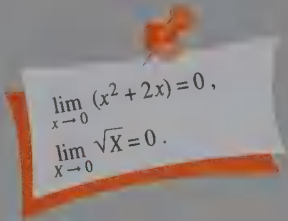
$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x} = \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{2}{x}\right)}}{x} = \frac{\sqrt{x^2}}{x} \sqrt{1 + \frac{2}{x}} = \frac{|x|}{x} \times \sqrt{1 + \frac{2}{x}},$$

donc, puisque x est positif :

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{x}{x} \times \sqrt{1 + \frac{2}{x}} = \sqrt{1 + \frac{2}{x}};$$

de plus : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{x} = +\infty$, donc : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(1 + \frac{2}{x}\right) = +\infty$;

en outre : $\lim_{X \rightarrow +\infty} \sqrt{X} = +\infty$.



On en déduit (théorème de composition) : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{1 + \frac{2}{x}} = +\infty$,

c'est-à-dire, en tenant compte du fait que la fonction $x \mapsto \frac{f(x)}{x}$ a pour ensemble de définition $]-\infty; -2] \cup]0; +\infty[$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = +\infty.$$

• Sachant de plus : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$,

le résultat précédent peut s'écrire :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = +\infty;$$

cela implique que la courbe \mathcal{C} admet à l'origine O une tangente verticale.

6° • Étudions la limite de :

$$f(x) - (x + 1)$$

quand x tend vers $+\infty$.

Pour tout x de $[0; +\infty[$:

$$\begin{aligned} f(x) - (x + 1) &= \sqrt{x^2 + 2x} - (x + 1) \\ &= \frac{[\sqrt{x^2 + 2x} - (x + 1)] \times [\sqrt{x^2 + 2x} + (x + 1)]}{\sqrt{x^2 + 2x} + (x + 1)} \\ &= \frac{x^2 + 2x - (x + 1)^2}{\sqrt{x^2 + 2x} + (x + 1)} \\ &= \frac{-1}{\sqrt{x^2 + 2x} + x + 1}, \end{aligned}$$

de plus, $\sqrt{x^2 + 2x}$ et $x + 1$ tendent vers $+\infty$ en $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{\sqrt{x^2 + 2x} + x + 1} = 0,$$

donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 1)] = 0,$$

ce qui prouve que la droite Δ d'équation $y = x + 1$ est asymptote à \mathcal{C} en $+\infty$.

• D'après ce qui précède :

$$\text{pour tout } x \text{ de } [0; +\infty[, f(x) - (x + 1) = \frac{-1}{\sqrt{x^2 + 2x} + x + 1},$$

f n'est pas dérivable en 0.

f(x) et x+1 tendant vers +∞ quand x tend vers +∞; on est en présence d'une indétermination de la forme : « ∞ - ∞ ».

$$\sqrt{x^2 + 2x} + (x + 1) \neq 0.$$

donc :

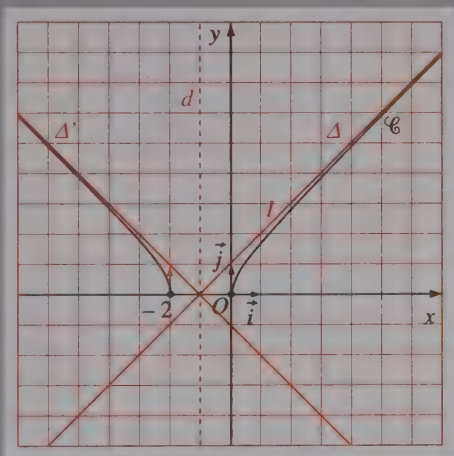
pour tout x de $[0 ; +\infty[$, $f(x) - (x + 1) < 0$;

par conséquent, dans le demi-plan d'inéquation $x \geq 0$, \mathcal{C} est située en-dessous de Δ .

• \mathcal{C} est symétrique par rapport à la droite d , donc \mathcal{C} admet pour asymptote en $-\infty$ la symétrique de Δ par rapport à d , autrement dit :

la droite Δ' d'équation $y = -x - 1$ est asymptote à \mathcal{C} en $-\infty$.

7°



LANGAGE DE LA CONTINUITÉ

TABLEAUX DE VARIATIONS

Rappels de cours

I- Continuité ponctuelle

■ Définition

Une fonction f est continue en un réel a si, et seulement si :

$$\lim_{a} f = f(a) .$$

■ Propriété

Les fonctions construites à partir des fonctions $x \mapsto x^n$ (n entier relatif), $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto |x|$, \sin , \cos , les polynômes, les fonctions rationnelles sont continues en tout réel de leur ensemble de définition.

■ La fonction partie entière

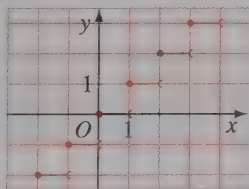
Pour tout nombre réel x , la partie entière de x est l'unique entier relatif, noté $E(x)$, qui vérifie :

$$E(x) \leq x < E(x) + 1 .$$

La fonction $E : x \mapsto E(x)$, définie sur \mathbb{R} , est appelée fonction partie entière ; elle est discontinue en tout entier relatif n et :

$$\lim_{x \rightarrow n^-} E(x) = n - 1 ,$$

$$\lim_{x \rightarrow n^+} E(x) = E(n) = n .$$



On dira par exemple que la fonction partie entière est continue sur l'intervalle $]2 ; 3[$, car elle est continue en tout réel de l'intervalle ouvert $]2 ; 3[$ et :

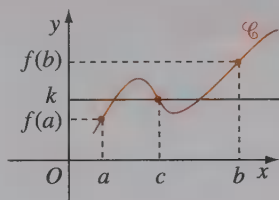
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} E(x) = E(2) .$$

II- Continuité sur un intervalle

■ Théorème des valeurs intermédiaires

• Soient f une fonction continue sur un intervalle I , et a et b des réels de I .

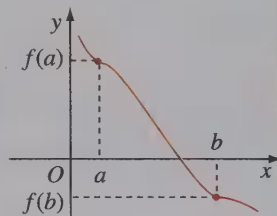
Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$.



On peut joindre les points A d'abscisse a et B d'abscisse b de la courbe représentative \mathcal{C} de f en parcourant \mathcal{C} sans lever le crayon.

Si k est un réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$, on traverse nécessairement la droite d'équation $y = k$ au moins une fois.

• En particulier, une fonction continue sur un intervalle ne peut pas changer de signe sans s'annuler, autrement dit, si f est continue sur $]a ; b[$ et si $f(a) \times f(b) < 0$, alors f s'annule en un réel de $]a ; b[$.



■ Corollaire

• Si f est une fonction continue et strictement monotone sur $]a ; b[$, alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution unique dans $]a ; b[$.

• En particulier, si f est continue et strictement monotone sur $]a ; b[$ et si $f(a) \times f(b) < 0$, alors f s'annule en un seul réel de $]a ; b[$.

■ Remarque

On peut étendre le corollaire à d'autres cas d'intervalles que $]a ; b[$.

Par exemple, si f est une fonction continue et strictement croissante sur $]a ; b[$ (b étant un réel ou $+\infty$) et si $\lim_{b^-} f = \lambda$ (λ étant un réel ou $+\infty$), alors, pour tout réel k de $]f(a) ; \lambda[$, l'équation $f(x) = k$ admet une solution unique dans $]a ; b[$.

■ Fonctions racines n -ièmes

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

- La fonction $x \mapsto x^n$ est continue, strictement croissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$, s'annule en 0 et :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty.$$

Donc, pour tout k de $]0; +\infty[$, l'équation d'inconnue x :

$$x^n = k$$

admet une seule solution dans $]0; +\infty[$; cette solution est notée $\sqrt[n]{k}$.

- $\sqrt[n]{0} = 0$, $\sqrt[n]{1} = 1$ et, pour tous réels x et y strictement positifs :

$$\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \sqrt[n]{y}, \quad \sqrt[n]{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x}}, \quad \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}.$$

- La relation :

$$\text{pour tout } x \text{ de }]0; +\infty[, \quad (\sqrt[n]{x})^n = x$$

conduit à poser :

$$\text{pour tout } x \text{ de }]0; +\infty[, \quad \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}},$$

ce qui est en accord avec les règles de calcul sur les puissances.

- La fonction racine n -ième $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ a pour ensemble de définition $]0; +\infty[$; elle est continue, strictement croissante sur $]0; +\infty[$ et :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$$

- $x \mapsto \sqrt{x}$ est la fonction racine carrée, notée plus simplement $x \mapsto \sqrt{x}$;
 $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ est la fonction racine cubique.

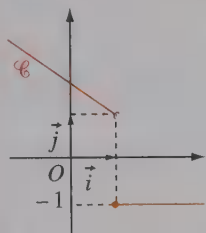
■ Tableaux de variations

On conviendra, dans les tableaux de variations, que les flèches obliques traduisent la continuité et la stricte monotonie de la fonction sur l'intervalle considéré.

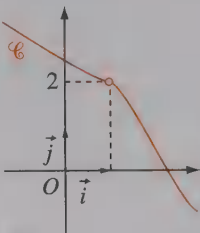
1

(Corrigé p. 74)

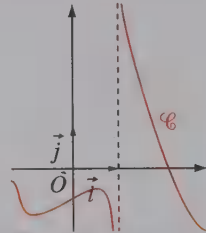
\mathcal{C} est la courbe représentative d'une fonction f dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.



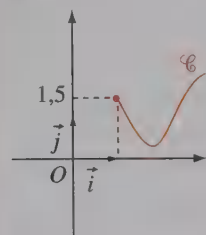
1



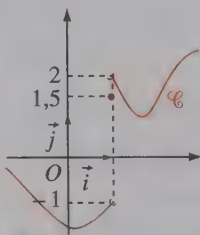
2



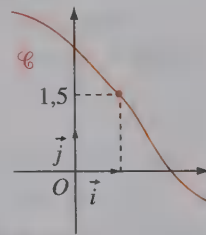
3



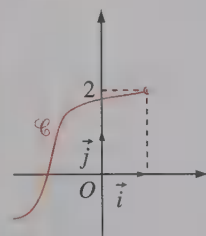
4



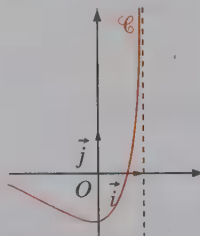
5



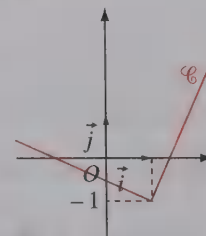
6



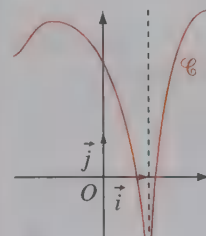
7



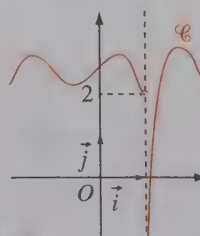
8



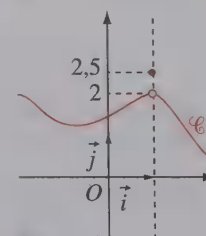
9



10



11



12

Dans chacun des cas précédents, préciser si f :

- est définie en 1,
- est continue en 1,
- admet une limite en 1,
- admet une limite à gauche en 1,
- admet une limite à droite en 1.

2

(Corrigé p. 75)

f est une fonction de $[-1 ; +\infty[$ dans \mathbb{R} , dont le tableau de variations est le suivant :

x	-1	0	2	5	$+\infty$
$f(x)$	1	-1	3	-2	3

1° Quels sont les plus grands intervalles sur lesquels f est strictement monotone ?

2° Quel est le minimum de f ?

3° Résoudre l'équation $f(x) = 3$.

4° Combien l'équation $f(x) = 0$ admet-elle de solutions ?

3

(Corrigé p. 75)

Préciser la valeur de $E(\pi)$, $E(-3,4)$.

Quelles sont les limites à gauche et à droite en 1 de la fonction partie entière ?

4

(Corrigé p. 75)

1° Simplifier :

a. $\sqrt[3]{27}$; b. $\sqrt[4]{9}$; c. $(2\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}$.

2° Écrire sous forme d'une puissance :

a. $\sqrt[3]{\sqrt{2}}$; b. $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt[3]{5}}$; c. $\frac{\sqrt[3]{10}}{\sqrt[6]{4}}$.

5

(Corrigé p. 76)

1° Justifier que la fonction $f : x \mapsto x^3 + 3x + 1$ est strictement croissante sur \mathbb{R} , et préciser les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2° Démontrer que l'équation $\mathcal{E} : x^3 + 3x + 1 = 0$ admet une seule solution dans \mathbb{R} .

Encadrer cette solution par deux entiers consécutifs.

6

(Corrigé p. 77)

1° Étudier le sens de variation de la fonction $f : x \mapsto x^3 - 3x + 1$ sur $[-1 ; 1]$.

2° Démontrer que l'équation $\mathcal{E} : x^3 - 3x + 1 = 0$ admet dans $[0 ; 1]$ une seule solution, notée α .

3° Donner, à l'aide de la calculatrice, une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

7

(Corrigé p. 77)

1° Justifier que, pour tout réel k supérieur ou égal à 0, l'équation \mathcal{E}_k :

$$2x^3 + \sqrt[3]{x} = k$$

admet une seule solution dans $[0 ; +\infty[$.

2° Résoudre dans \mathbb{R}_+ l'équation $\mathcal{E}_3 : 2x^3 + \sqrt[3]{x} = 3$.

8

(Corrigé p. 78)

Soit f la fonction : $x \mapsto \cos^3 x - \sin 3x$.

1° Calculer $f(0)$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $f(\pi)$.

2° En déduire que f s'annule au moins trois fois entre 0 et π .

Fonction partie entière

9 ★ 5 min

(Corrigé p. 79)

Démontrer que, pour tout réel x :

$$x - 1 < E(x) \leq x.$$

Quelle est la limite de la fonction partie entière en $+\infty$?

10 ★ ★ 10 min

(Corrigé p. 79)

Démontrer :

$$\lim_{x \rightarrow 0} E(x^2) = 0.$$

La fonction $x \mapsto E(x^2)$ admet-elle une limite en 1 ?

11 ★ ★ 10 min

(Corrigé p. 80)

Soit f la fonction :

$$x \mapsto x - E(x).$$

1° Démontrer que, pour tout réel x :

$$E(x + 1) = E(x) + 1.$$

En déduire que la fonction f est périodique.

2° Tracer la partie de la courbe représentative \mathcal{C} de f dans la bande de plan d'inéquations :

$$-2 \leq x < 3.$$

12 ★ ★ 10 min

(Corrigé p. 80)

Résoudre graphiquement l'équation \mathcal{E} :

$$x^2 - 2 = E(x).$$

Tableaux de variations

13 ★ 5 min.

(Corrigé p. 81)

Dresser le tableau de signes de la fonction f , sachant qu'elle s'annule en -5 et en 6 , et que son tableau de variations est le suivant :

x	$-\infty$	-3	0	4	$+\infty$
$f(x)$	1	-2	-1	-3	$+\infty$

\swarrow \nearrow \searrow \nearrow

14 ★ ★ 15 min.

(Corrigé p. 81)

Dresser le tableau de variations et le tableau de signes sur $[0 ; \pi]$ de la fonction f proposée.

1° $x \mapsto 2 \sin x - \sqrt{2}$.

2° $x \mapsto 1 - 2 \cos x$.

Nombre de solutions d'une équation

15 ★ ★ 15 min.

(Corrigé p. 83)

Soit f le polynôme : $x \mapsto 4x^3 - 3x^2 - 6x + 2$.

1° Calculer $f(-2)$, $f(0)$, $f(1)$ et $f(2)$.

Qu'en déduire concernant les racines de f ?

2° Donner une valeur approchée à 10^{-2} près par défaut de la plus grande racine de f .

16 ★ ★ 15 min.

(Corrigé p. 84)

Soit f le polynôme : $x \mapsto 2x^3 - 3x^2 - 12x - 10$.

1° Dresser le tableau de variations de f .

2° a. Démontrer que f admet dans \mathbb{R} une seule racine ; on note α ce réel.

b. À l'aide de la calculatrice, donner une approximation de α à 10^{-2} près.

Soit f la fonction : $x \mapsto ||x - 1| - 1| - 1|$.

1° Tracer successivement les courbes représentatives des fonctions :

$$x \mapsto |x - 1| - 1, \quad x \mapsto ||x - 1| - 1|, \quad x \mapsto ||x - 1| - 1| - 1 \text{ et } f.$$

2° Donner dans un tableau, en fonction du réel k , le nombre $N(k)$ de solutions dans \mathbb{R} de l'équation $f(x) = k$.

Dans chacun des cas suivants est donné le tableau de variations d'une fonction f .

Déterminer, suivant la valeur du réel k , le nombre $N(k)$ de solutions de l'équation $\mathcal{E}_k : f(x) = k$.

Résumer les résultats dans un tableau.

1°

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	3	2

2°

x	-2	1	3
$f(x)$	1	0	$+\infty$

3°

x	1	2	5
$f(x)$	0	3	0

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} telle que :

$$f(0) = 1 \text{ et } f(4) = 3.$$

On note \mathcal{E} l'équation : $f(x) = 2$.

1° Dans chacun des cas suivants, que peut-on dire du nombre de solutions de \mathcal{E} dans $[0 ; 4]$?

- f est continue et strictement croissante ;
- f est strictement croissante ;
- f est continue.

2° Démontrer que, si f est continue et croissante, alors \mathcal{E} admet dans $[0 ; 4]$ une seule solution ou une infinité de solutions.

Pour tout entier naturel n non nul, on considère l'équation \mathcal{E}_n :

$$x^n + x - 1 = 0,$$

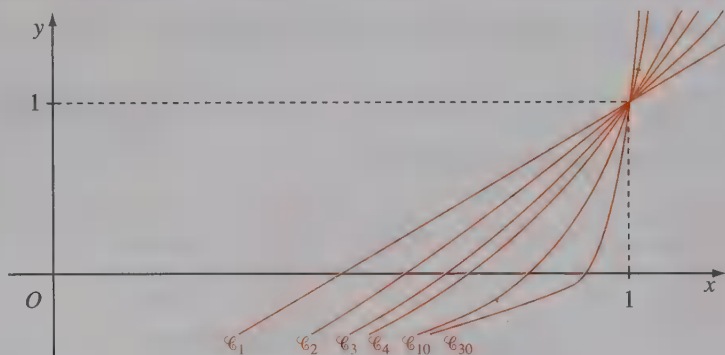
et on note f_n le polynôme :

$$x \mapsto x^n + x - 1,$$

ainsi que \mathcal{C}_n la courbe représentative de f_n .

1° Démontrer que \mathcal{E}_n admet dans $[0; 1]$ une seule solution ; soit u_n ce réel.

2° À l'aide d'un grapheur, on a obtenu le graphique suivant :



Quelle conjecture est-on amené à formuler sur la monotonie de la suite (u_n) ? sur sa limite ?

Résolutions d'équations

Soit \mathcal{E} l'équation :

$$\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = 1.$$

1° Soit f la fonction : $x \mapsto \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$.

- Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.
- Étudier le sens de variation de f .
- En déduire que \mathcal{E} admet une seule solution. Soit α ce réel.

2° Démontrer que \mathcal{E} est équivalente à l'équation :

$$x - 1 = \sqrt{x}.$$

Déterminer graphiquement un encadrement de la solution α de \mathcal{E} par deux entiers consécutifs.

3° Démontrer que la solution α de \mathcal{E} vérifie :

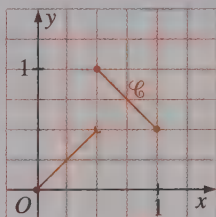
$$\alpha^2 - 3\alpha + 1 = 0.$$

En déduire la valeur exacte de α .

22 ★ ★ 15 min

(Corrigé p. 91)

On considère la fonction f de $[0 ; 1]$ dans \mathbb{R} dont la courbe représentative \mathcal{C} est donnée ci-contre.



1° La fonction f est-elle monotone sur $[0 ; 1]$?
Est-elle continue sur $[0 ; 1]$?

2° Justifier que, pour tout réel k de $[0 ; 1]$,
l'équation $f(x) = k$ admet une seule solution.
Vérifier que cette solution est $f(k)$.

23 ★ ★ 10 min

(Corrigé p. 91)

On considère l'équation \mathcal{E} :

$$2\sqrt[3]{x} = x + 1.$$

1° Trouver une solution entière de \mathcal{E} .

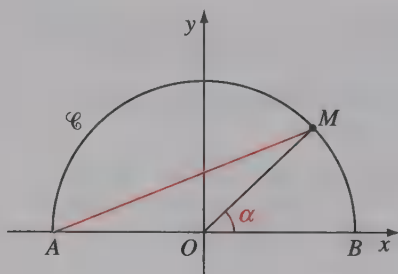
2° Démontrer l'équivalence, pour tout x de \mathbb{R}_+ :

$$2\sqrt[3]{x} = x + 1 \Leftrightarrow (x - 1)(x^2 + 4x - 1) = 0.$$

En déduire les solutions de \mathcal{E} dans \mathbb{R}_+ .

On considère le demi-cercle \mathcal{C} de diamètre $[AB]$, de centre O et de rayon 1 représenté ci-dessous.

On veut placer, avec une bonne précision, un point M sur ce demi-cercle de façon que la droite (AM) partage le demi-disque limité par $[AB]$ et \mathcal{C} en deux surfaces de même aire.



On note α la mesure en radians de l'angle \widehat{BOM} , α étant comprise entre 0 et π .

1° a. Quelle est l'aire du demi-disque limité par $[AB]$ et \mathcal{C} ?

Calculer l'aire $\mathcal{A}_1(\alpha)$ du triangle AOM et l'aire $\mathcal{A}_2(\alpha)$ du secteur circulaire \widehat{BOM} .

b. En déduire que l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$ de la partie du demi-disque située sous la droite (AM) est égale à :

$$\frac{1}{2}(\alpha + \sin \alpha).$$

2° Soit f la fonction :

$$x \mapsto x + \sin x.$$

a. Dresser le tableau de variations de f sur $[0; \pi]$.

b. Démontrer qu'il existe un réel α_0 et un seul de $[0; \pi]$ tel que :

$$f(\alpha_0) = \frac{\pi}{2}.$$

À l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée de α_0 et de $\sin \alpha_0$ à 10^{-2} près.

3° Conclure.

On considère l'équation \mathcal{E} :

$$x^3 + 3x - 2 = 0.$$

1° Justifier que \mathcal{E} admet une seule solution dans \mathbb{R} ; cette solution sera notée α .

Vérifier que le réel α est strictement compris entre 0 et 1, puis donner, à l'aide de la calculatrice, une approximation de α à 10^{-3} près.

2° Le but de cette deuxième question est de calculer une valeur exacte de α par la méthode de Cardan.

a. Soient u et v des nombres réels.

Démontrer :

$$(u+v)^3 + 3(u+v) - 2 = u^3 + v^3 + 3(uv+1)(u+v) - 2.$$

En déduire que, si u et v vérifient le système Σ :

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = 2 \\ uv = -1, \end{cases}$$

alors $u+v$ est solution de l'équation \mathcal{E} .

b. Démontrer, pour tous réels u et v non nuls, l'équivalence suivante :

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = 2 \\ uv = -1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u^3)^2 - 2u^3 - 1 = 0 \\ v = -\frac{1}{u}. \end{cases}$$

c. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation \mathcal{E}' :

$$X^2 - 2X - 1 = 0.$$

d. En déduire des réels u et v qui satisfont à Σ , puis la valeur de α .

CORRIGÉS

des exercices

1

Fonction n°	1	2	3	4	5	6
<i>f</i> est définie en 1	oui $f(1) = -1$	non	non	oui $f(1) = 1,5$	oui $f(1) = 1,5$	oui $f(1) = 1,5$
<i>f</i> est continue en 1	non	non	non	oui	non	oui
<i>f</i> admet une limite en 1	non	oui $\lim_1 f = 2$	non	oui $\lim_1 f = 1,5$	non	oui $\lim_1 f = 1,5$
<i>f</i> admet une limite à gauche en 1	oui $\lim_{1^-} f = 1$	oui $\lim_{1^-} f = 2$	oui $\lim_{1^-} f = -\infty$	non	oui $\lim_{1^-} f = -1$	oui $\lim_{1^-} f = 1,5$
<i>f</i> admet une limite à droite en 1	oui $\lim_{1^+} f = -1$	oui $\lim_{1^+} f = 2$	oui $\lim_{1^+} f = +\infty$	oui $\lim_{1^+} f = 1,5$	oui $\lim_{1^+} f = 2$	oui $\lim_{1^+} f = 1,5$

Fonction n°	7	8	9	10	11	12
<i>f</i> est définie en 1	non	non	oui $f(1) = -1$	non	non	oui $f(1) = 2,5$
<i>f</i> est continue en 1	non	non	oui	non	non	non
<i>f</i> admet une limite en 1	oui $\lim_1 f = 2$	oui $\lim_1 f = +\infty$	oui $\lim_1 f = -1$	oui $\lim_1 f = -\infty$	non	non
<i>f</i> admet une limite à gauche en 1	oui $\lim_{1^-} f = 2$	oui $\lim_{1^-} f = +\infty$	oui $\lim_{1^-} f = -1$	oui $\lim_{1^-} f = -\infty$	oui $\lim_{1^-} f = 2$	oui $\lim_{1^-} f = 2$
<i>f</i> admet une limite à droite en 1	non	non	oui $\lim_{1^+} f = -1$	oui $\lim_{1^+} f = -\infty$	oui $\lim_{1^+} f = -\infty$	oui $\lim_{1^+} f = 2$

x	-1	0	2	5	$+\infty$
$f(x)$	1	-1	3	-2	3

Par convention, dans un tableau de variations, les flèches obliques traduisent la stricte monotonie et la continuité sur l'intervalle considéré.

Par simple lecture du tableau de variations de f , on obtient :

1° les plus grands intervalles sur lesquels f est strictement monotone sont :

$[-1; 0]$, $[0; 2]$, $[2; 5]$ et $[5; +\infty[$;

2° le minimum de f est -2 (il est atteint en 5) ;

3° 2 est la seule solution de l'équation $f(x) = 3$;

4° l'équation $f(x) = 0$ admet quatre solutions (une dans chacun des intervalles $]-1; 0[$, $]0; 2[$, $]2; 5[$ et $]5; +\infty[$).

f est strictement croissante sur $[5; +\infty[$, de limite 3 en $+\infty$, donc :

pour tout x de $[5; +\infty[$,
 $f(x) < 3$,

ce qui prouve que l'équation $f(x) = 3$ n'admet aucune solution dans $[5; +\infty[$.

Par exemple, f est continue et strictement décroissante sur $[-1; 0]$,

et $f(-1) \times f(0) < 0$,
donc, sur $]-1; 0[$, f s'annule en un réel et un seul.

3 • $3 \leq \pi < 4$, donc $E(\pi) = 3$;

$-4 \leq -3,4 < -3$, donc $E(-3,4) = -4$.

• Pour tout x de $[0; 1[$, $E(x) = 0$, donc : $\lim_{x \rightarrow 1^-} E(x) = 0$.

Pour tout x de $[1; 2[$, $E(x) = 1$, donc : $\lim_{x \rightarrow 1^+} E(x) = 1$.

1. a. $\sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$.

$$\sqrt[3]{27} = 3 \Leftrightarrow 3^3 = 27.$$

b. $\sqrt[4]{9} = \sqrt[4]{(\sqrt{3})^4} = \sqrt{3}$.

c. $(2\sqrt{2})^{\frac{1}{3}} = ((\sqrt{2})^3)^{\frac{1}{3}} = \sqrt{2}$.

2. a. $\sqrt[3]{\sqrt{2}} = (2^{1/2})^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{2} \times \frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{6}}$.

b. $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt[3]{5}} = \frac{5^{1/2}}{5^{1/3}} = 5^{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} = 5^{\frac{1}{6}}$.

c. $\frac{\sqrt[3]{10}}{\sqrt[6]{4}} = \frac{10^{1/3}}{(4^{1/2})^{1/3}} = \frac{10^{1/3}}{2^{1/3}} = \left(\frac{10}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = 5^{\frac{1}{3}}$.

$(\sqrt{3})^4 = 9$.

$(\sqrt{2})^3 = \sqrt{2} \times (\sqrt{2})^2 = 2\sqrt{2}$.

Pour justifier l'égalité $\sqrt[3]{\sqrt{2}} = 2^{\frac{1}{6}}$, il suffit de remarquer que ces deux nombres sont positifs et ont la même puissance sixième.

Tous ces calculs ont été menés en étudiant les règles opératoires usuelles sur les puissances d'exposant entier.

5 $1^\circ f : x \mapsto x^3 + 3x + 1$.

• f est la somme de la fonction cube $x \mapsto x^3$ et de la fonction affine $x \mapsto 3x + 1$, toutes deux strictement croissantes sur \mathbb{R} , donc :

f est strictement croissante sur \mathbb{R} .

• f est un polynôme, donc admet en $-\infty$ comme en $+\infty$ une limite qui est celle de son monôme de plus haut degré :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty.$$

2° $\mathcal{E} : x^3 + 3x + 1 = 0$.

• f est continue (c'est un polynôme), strictement croissante sur \mathbb{R} , et :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

donc f prend une fois et une seule toute valeur réelle. En particulier, f s'annule en un seul réel, c'est-à-dire :

l'équation $\mathcal{E} : x^3 + 3x + 1 = 0$ admet une seule solution dans \mathbb{R} ;

notons α cette solution.

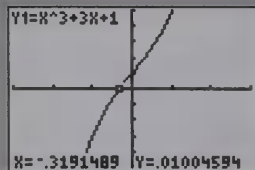
• $f(-1) = (-1)^3 + 3 \times (-1) + 1 = -3$ et $f(0) = 1$, donc $f(-1)$ et $f(0)$ sont de signes contraires, ce qui prouve :

$$-1 < \alpha < 0.$$

On retrouve ce résultat en remarquant que f est dérivable sur \mathbb{R} (c'est un polynôme) et que, pour tout réel x :

$$f'(x) = 3x^2 + 3,$$

donc :

$$f'(x) > 0.$$


6 1° $f: x \mapsto x^3 - 3x + 1$.

La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} (c'est un polynôme), et, pour tout réel x :

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x - 1)(x + 1),$$

donc :

$$\begin{cases} f'(1) = f'(-1) = 0, \\ f'(x) < 0 \text{ si } -1 < x < 1, \end{cases}$$

ce qui prouve que f est strictement décroissante sur $[-1; 1]$.

2° $\mathcal{E} : x^3 - 3x + 1 = 0$.

Notons que l'équation \mathcal{E} est équivalente à l'équation $f(x) = 0$.

f est continue sur $[0; 1]$, strictement décroissante sur cet intervalle (car strictement décroissante sur $[-1; 1]$ d'après la question 1° ; de plus :

$$f(0) = 1 \text{ et } f(1) = 1 - 3 + 1 = -1,$$

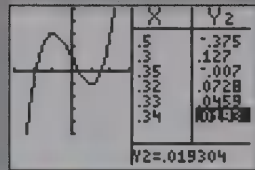
donc $f(0)$ et $f(1)$ sont de signes contraires.

On en déduit que, dans $[0; 1]$, f s'annule en un seul réel, c'est-à-dire que l'équation $\mathcal{E} : x^3 - 3x + 1 = 0$ admet dans $[0; 1]$ une seule solution.

3°

```
Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=X^3+3X+1
\Y2=X^3-3X+1
\Y3=
\Y4=
\Y5=
\Y6=
\Y7=
```

```
WINDOW
Xmin=-3
Xmax=3
Xscl=1
Ymin=-5
Ymax=5
Yscl=1
Xres=1
```



À l'aide de la calculatrice, on obtient facilement :

$$f(0,34) > 0 \text{ et } f(0,35) < 0$$

ce qui prouve que l'unique solution α de \mathcal{E} dans $[0; 1]$ vérifie :

$$0,34 < \alpha < 0,35.$$

On en déduit :

0,34 est une valeur approchée à 10^{-2} près (par défaut) de α .

La courbe représentative de f obtenue à l'écran de la calculatrice met en évidence que \mathcal{E} admet deux autres solutions β et γ , qui vérifient :
 $-2 < \beta < -1$ et $1 < \gamma < 2$;
 f étant un polynôme de degré 3, les racines de f sont α , β et γ .

7 1° $\mathcal{E}_k : 2x^3 + \sqrt[3]{x} = k$.

Notons f la fonction : $x \mapsto 2x^3 + \sqrt[3]{x}$.

f est la somme des fonctions $x \mapsto 2x^3$ et $x \mapsto \sqrt[3]{x}$, toutes deux continues et strictement croissantes sur \mathbb{R}_+ , donc f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

$x \mapsto \sqrt[3]{x}$ a pour ensemble de définition $[0; +\infty[$.

De plus, $f(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, donc, pour tout réel k de $[0 ; +\infty[$, l'équation $f(x) = k$ admet une seule solution dans $[0 ; +\infty[$, c'est-à-dire :

pour tout réel k supérieur ou égal à 0, l'équation \mathcal{E}_k admet une seule solution dans $[0 ; +\infty[$.

2° $\mathcal{E}_3 : 2x^3 + \sqrt[3]{x} = 3$.

- $f(1) = 2 \times 1^3 + \sqrt[3]{1} = 2 + 1 = 3$, donc 1 est solution de \mathcal{E}_3 ;
- de plus, on sait d'après la question 1° que \mathcal{E}_3 admet une seule solution dans \mathbb{R}_+ .

On peut donc conclure que **1 est la seule solution dans \mathbb{R}_+ de l'équation $\mathcal{E}_3 : 2x^3 + \sqrt[3]{x} = 3$.**

f $f : x \mapsto \cos^3 x - \sin 3x$.

1° • $f(0) = (\cos 0)^3 - \sin 0 = 1^3 - 0 = 1$;

• $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left(\cos \frac{\pi}{4}\right)^3 - \sin \frac{3\pi}{4} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{4}$;

• $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(\cos \frac{\pi}{2}\right)^3 - \sin \frac{3\pi}{2} = 0^3 + 1 = 1$;

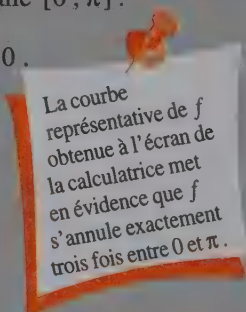
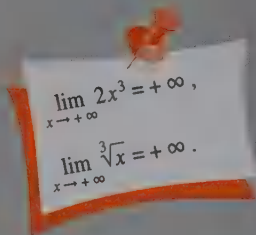
• $f(\pi) = (\cos \pi)^3 - \sin 3\pi = (-1)^3 - 0 = -1$.

2° • f est continue sur \mathbb{R} , et en particulier sur l'intervalle $[0 ; \pi]$.

• De plus : $f(0) > 0$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$, $f(\pi) < 0$.

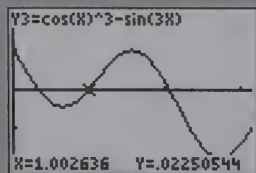
On en déduit que f est continue et change de signe sur chacun des intervalles $\left[0 ; \frac{\pi}{4}\right]$, $\left[\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{2}\right]$ et $\left[\frac{\pi}{2} ; \pi\right]$, ce qui prouve que f s'annule au moins une fois entre 0 et $\frac{\pi}{4}$, entre $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{2}$, entre $\frac{\pi}{2}$ et π . Il en résulte que

f s'annule au moins trois fois entre 0 et π .



```
Plot1 Plot2 Plot3
Y1=X^3+3X+1
Y2=X^3-3X+1
Y3=cos(X)^3-sin
(3X)
Y4=
Y5=
Y6=
```

```
WINDOW
Xmin=0
Xmax=3.1415926...
Xscl=1
Ymin=-2
Ymax=2
Yscl=1
Xres=1
```



9 • D'après la définition de la fonction partie entière, pour tout réel x :

$$E(x) \leq x < E(x) + 1,$$

donc : $E(x) \leq x$ et $x - 1 < E(x)$,

c'est-à-dire :

$$x - 1 < E(x) \leq x.$$

• On a établi : pour tout réel x , $x - 1 < E(x)$,

et on sait $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1) = +\infty$,

donc, d'après le théorème de comparaison :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} E(x) = +\infty.$$

Pour tout réel x :
 $E(x) \leq x$,
 donc :
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} E(x) = -\infty$.

10 • Pour tout x de $]-1; 1[$:

$$0 \leq x^2 < 1,$$

donc : $E(x^2) = 0$,

ce qui implique :

$$\lim_{x \rightarrow 0} E(x^2) = 0.$$

$x \mapsto E(x^2)$ coïncide avec la fonction constante $x \mapsto 0$ sur $]-1; 1[$.

• Pour tout x de $]-1; 1[$:

$$E(x^2) = 0,$$

donc : $\lim_{x \rightarrow 1^-} E(x^2) = 0$.

Pour tout x de $[1; \sqrt{2}[$:

$$1 \leq x^2 < 2,$$

donc : $E(x^2) = 1$,

d'où l'on déduit : $\lim_{x \rightarrow 1^+} E(x^2) = 1$.

$x \mapsto E(x^2)$ coïncide avec la fonction constante $x \mapsto 1$ sur $[1; \sqrt{2}[$.

La fonction $x \mapsto E(x^2)$ admet donc des limites à gauche et à droite en 1 différentes, ce qui implique :

$x \mapsto E(x^2)$ n'admet pas de limite en 1.

```

Plot1 Plot2 Plot3
:Y1=X^3+3X+1
:Y2=X^3-3X+1
:Y3=cos(X)^3-sin
(3X)
:Y4=int(X^2)
:Y5=
:Y6=
    
```



Pour rendre plus lisible le graphique, appuyer sur (MODE), puis sélectionner Dot.

11 $f: x \mapsto x - E(x)$.

1° • Pour tout réel x :

$$E(x) \leq x < E(x) + 1,$$

donc : $E(x) + 1 \leq x + 1 < (E(x) + 1) + 1$;

$E(x) + 1$ étant un entier relatif, ce dernier encadrement permet de conclure :

pour tout réel x , $E(x + 1) = E(x) + 1$.

• f est définie sur \mathbb{R} et, pour tout réel x :

$$f(x + 1) = (x + 1) - E(x + 1) = x + 1 - (E(x) + 1) = x - E(x) = f(x),$$

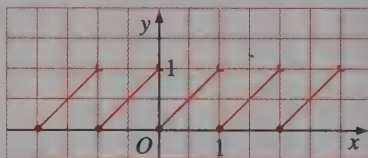
donc **f est périodique de période 1.**

2° Courbe représentative \mathcal{C} de f dans la bande de plan d'inéquations $-2 \leq x < 3$.

Soit n un entier relatif ; pour tout x de $[n; n + 1[$:

$$E(x) = n,$$

donc : $f(x) = x - n$.

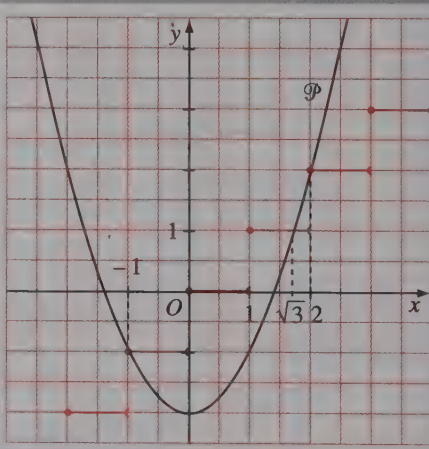


12 $\mathcal{C}: x^2 - 2 = E(x)$.

Les solutions de \mathcal{C} dans \mathbb{R} sont les abscisses des points d'intersection de la parabole \mathcal{P} d'équation $y = x^2 - 2$ et de la courbe représentative de la fonction partie entière.

Graphiquement, on lit que \mathcal{C} admet dans \mathbb{R} exactement trois solutions, qui sont -1 , 2 et l'abscisse du point de \mathcal{P} qui a :

- une abscisse positive,
- pour ordonnée 1.



Pour tout réel x :

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 - 2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = \sqrt{3},$$

ce qui permet de conclure :

les solutions de \mathcal{C} dans \mathbb{R} sont $-1, \sqrt{3}$ et 2 .

Il est facile de vérifier par le calcul que $-1, \sqrt{3}$ et 2 sont bien solutions de \mathcal{C} :
 $(-1)^2 - 2 = -1$ et $E(-1) = -1$,
 $(\sqrt{3})^2 - 2 = 1$ et $E(\sqrt{3}) = 1$,
 $2^2 - 2 = 2$ et $E(2) = 2$.

13 La fonction f s'annule en -5 et en 6 , et a pour tableau de variations :

x	$-\infty$	-3	0	4	$+\infty$				
$f(x)$	1	\searrow	-2	\nearrow	-1	\searrow	-3	\nearrow	$+\infty$

On en déduit que le tableau de signes de f est le suivant :

x	$-\infty$	-5	6	$+\infty$	
$f(x)$	+	0	-	0	+

En effet, en détaillant le raisonnement :

- f est strictement décroissante sur $]-\infty ; -3]$ et s'annule en -5 , donc, pour tout réel x :

$$\begin{cases} f(x) > 0 & \text{si } x < -5, \\ f(-5) = 0, \\ f(x) < 0 & \text{si } -5 < x \leq -3. \end{cases}$$

- f admet pour maximum -1 sur $[-3 ; 4]$, donc :

pour tout x de $[-3 ; 4]$, $f(x) < 0$;

- f est strictement croissante sur $[4 ; +\infty[$ et s'annule en 6 , donc, pour tout réel x :

$$\begin{cases} f(x) < 0 & \text{si } 4 \leq x < 6, \\ f(6) = 0, \\ f(x) > 0 & \text{si } x > 6. \end{cases}$$

14 $1^\circ f : x \mapsto 2 \sin x - \sqrt{2}$.

- Du tableau de variations de la fonction sinus sur $[0 ; \pi]$:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π		
$\sin x$	0	\nearrow	1	\searrow	0

on déduit que le tableau de variations de f sur $[0 ; \pi]$ est le suivant :

f est la composée de sin par la fonction affine strictement croissante $t \mapsto 2t - \sqrt{2}$, donc sin et f ont le même sens de variation.

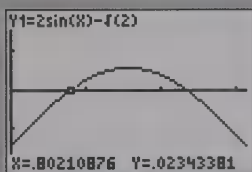
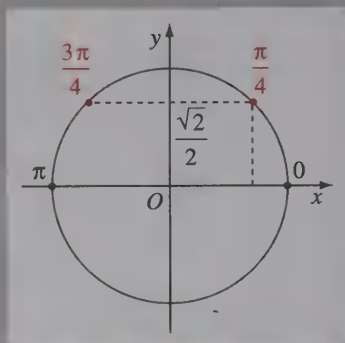
x	0	$\frac{\pi}{2}$	π		
$f(x)$	$-\sqrt{2}$	\nearrow	$2 - \sqrt{2}$	\searrow	$-\sqrt{2}$

• Pour tout réel x :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad f(x) > 0 \Leftrightarrow \sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Par simple lecture du cercle trigonométrique, on obtient le tableau de signes de f sur $[0; \pi]$ suivant :

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	
$f(x)$	-	0	+	0	-



Penser à vérifier la cohérence des tableaux de variations et de signes.

2° $f: x \mapsto 1 - 2 \cos x$.

• Du tableau de variations de la fonction cosinus sur $[0; \pi]$:

x	0	π
$\cos x$	1	-1

f est la composée de \cos par la fonction affine strictement décroissante $t \mapsto 1 - 2t$, donc \cos et f ont des sens de variation contraires.

on déduit que le tableau de variations de f sur $[0; \pi]$ est le suivant :

x	0	π
$f(x)$	-1	3

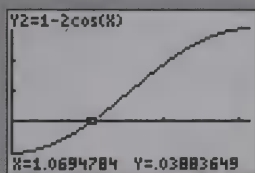
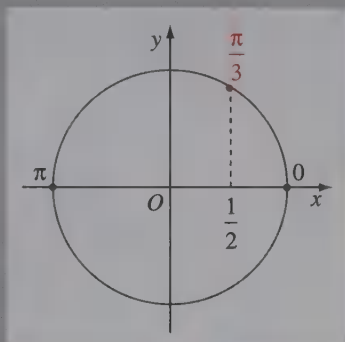
• Pour tout réel x :

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = \frac{1}{2}$$

$$f(x) > 0 \Leftrightarrow \cos x < \frac{1}{2}.$$

Par simple lecture du cercle trigonométrique, on obtient le tableau de signes de f sur $[0; \pi]$ suivant :

x	0	$\frac{\pi}{3}$	π
$f(x)$	-	0	+



Penser à vérifier la cohérence des tableaux de variations et de signes.

15 $f: x \mapsto 4x^3 - 3x^2 - 6x + 2$.

$$\begin{aligned} 1^\circ \bullet f(-2) &= 4 \times (-2)^3 - 3 \times (-2)^2 - 6 \times (-2) + 2 \\ &= -32 - 12 + 12 + 2 \\ &= -30; \end{aligned}$$

$$f(0) = 2;$$

$$f(1) = 4 - 3 - 6 + 2 = -3;$$

$$\begin{aligned} f(2) &= 4 \times 2^3 - 3 \times 2^2 - 6 \times 2 + 2 \\ &= 32 - 12 - 12 + 2 \\ &= 10. \end{aligned}$$

• La fonction f étant un polynôme, elle est continue sur \mathbb{R} ; de plus :

$$f(-2) \times f(0) < 0, \quad f(0) \times f(1) < 0, \quad f(1) \times f(2) < 0,$$

donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, f s'annule au moins une fois entre -2 et 0 , entre 0 et 1 et entre 1 et 2 , ce qui prouve que f admet au moins trois racines dans \mathbb{R} , une dans chacun des intervalles $] -2; 0[$, $] 0; 1[$, $] 1; 2[$.

D'autre part, le degré du polynôme f est 3 , donc f ne peut admettre plus de trois racines.

En conclusion, f admet exactement trois racines a, b, c dans \mathbb{R} , qui vérifient : $-2 < a < 0 < b < 1 < c < 2$.

Tout polynôme de degré n (n entier naturel) admet au plus n racines dans \mathbb{R} .

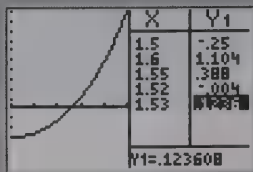
2°

```

Plot1 Plot2 Plot3
Y1=4X^3-3X^2-6X+
2
Y2=
Y3=
Y4=
Y5=
Y6=
    
```

```

WINDOW
Xmin=1
Xmax=2
Xscl=.2
Ymin=-3
Ymax=10
Yscl=1
Xres=1
    
```



La plus grande racine de f est celle, notée c , qui est comprise entre 1 et 2. À l'aide de la calculatrice, on obtient :

$$f(1,52) < 0 \quad \text{et} \quad f(1,53) > 0,$$

ce qui prouve que c vérifie : $1,52 < c < 1,53$.

On en déduit que **1,52 est une valeur approchée à 10^{-2} près par défaut de la plus grande racine de f .**

Ex $f: x \mapsto 2x^3 - 3x^2 - 12x - 10$.

1° f est dérivable sur \mathbb{R} et, pour tout réel x :

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x^2 - x - 2) = 6(x + 1)(x - 2);$$

Il vient :

$$\begin{cases} f'(x) > 0 & \text{si } x < -1, \\ f'(-1) & = 0, \\ f'(x) < 0 & \text{si } -1 < x < 2, \\ f'(2) & = 0, \\ f'(x) > 0 & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

D'autre part, f admet en $-\infty$ comme en $+\infty$ une limite qui est celle de son monôme de plus haut degré :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty.$$

Enfin : $f(-1) = -3$, $f(2) = -30$.

Dressons le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow -3$	$\searrow -30$	$\nearrow +\infty$	

2° a. D'après le tableau de variations de f , il existe un réel et un seul en lequel f s'annule (ce réel étant strictement supérieur à 2).

En effet, en détaillant le raisonnement :

- le maximum de f sur $] -\infty ; 2]$ est -3 , donc f ne s'annule pas sur cet intervalle ;

- f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[2 ; +\infty[$, et :

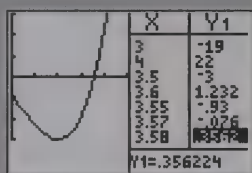
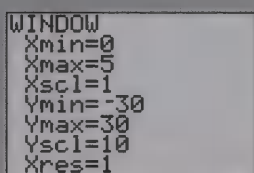
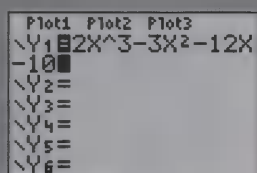
$$f(2) = -30 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

donc, pour tout k de $[-30 ; +\infty[$, l'équation : $f(x) = k$ (d'inconnue x), admet dans $[2 ; +\infty[$ une seule solution ; en particulier, comme $0 \in [-30 ; +\infty[$, l'équation $f(x) = 0$ admet dans $[2 ; +\infty[$ une seule solution.

On a ainsi prouvé :

f admet dans \mathbb{R} une seule racine.

b.



La courbe met en évidence : $3 < \alpha < 4$;

puis, par tâtonnements successifs, on obtient : $f(3,57) < 0$ et $f(3,58) > 0$, ce qui prouve : $3,57 < \alpha < 3,58$.

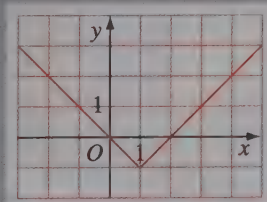
On en déduit :

3,57 est une approximation de α à 10^{-2} près (par défaut).

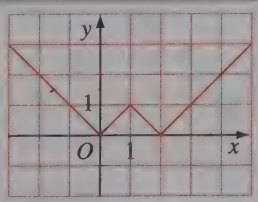
17 $f: x \mapsto ||x-1|-1|-1|$.

1° Courbe représentative de :

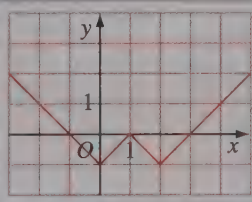
- $x \mapsto |x-1|-1$:



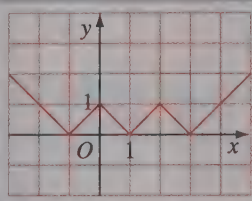
- $x \mapsto ||x-1|-1|$:



- $x \mapsto ||x-1|-1|-1$:



enfin, courbe représentative de f :



2° Pour tout réel k , le nombre de solutions dans \mathbb{R} de l'équation $f(x) = k$ est le nombre de points d'intersection de la courbe représentative de f et de la droite horizontale d'équation $y = k$.

Par lecture graphique, on obtient que le nombre $N(k)$ de solutions dans \mathbb{R} de l'équation $f(x) = k$ est donné dans le tableau suivant :

k	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$N(k)$	0	3	4	2

18 $\mathcal{E}_k : f(x) = k$.

1°

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	3	2

- Si $k \leq 2$, alors \mathcal{E}_k admet dans \mathbb{R} une seule solution (qui est strictement négative) ;
- si $2 < k < 3$, alors \mathcal{E}_k admet dans \mathbb{R} deux solutions (de signes contraires) ;
- si $k = 3$, alors \mathcal{E}_k admet dans \mathbb{R} une seule solution (qui est 0) ;
- si $k > 3$, alors \mathcal{E}_k n'admet dans \mathbb{R} aucune solution.

*f est strictement décroissante sur $[0; +\infty[$ et :
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$,
 donc, pour tout x de $[0; +\infty[$:
 $f(x) > 2$,
 et l'équation $f(x) = 2$ n'admet pas de solution dans $[0; +\infty[$.*

Le tableau ci-dessous résume l'étude précédente en donnant le nombre $N(k)$ des solutions dans \mathbb{R} de l'équation \mathcal{E}_k suivant la valeur du réel k .

k	$-\infty$	2	3	$+\infty$
$N(k)$	1	1	2	0

On obtient de façon analogue :

2°

x	-2	1	3
$f(x)$	1	0	$+\infty$

k	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$N(k)$	0	1	2	1

*L'équation $f(x) = 1$ admet deux solutions :
 • l'une est -2 ;
 • l'autre est strictement supérieure à 1.*

3°

x	1	2	5
$f(x)$	0	3	0

k	$-\infty$	0	3	$+\infty$
$N(k)$	0	1	1	0

f n'est pas définie en 1, est strictement croissante sur $]1; 2[$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 0$ donc, pour tout x de $]1; 2[$: $f(x) > 0$, et l'équation $f(x) = 0$ n'admet aucune solution dans $]1; 2[$.

19 \mathcal{E} : $f(x) = 2$; $f(0) = 1$ et $f(4) = 3$.

1° a. f est continue et strictement croissante sur $[0; 4]$.

f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[0; 4]$, donc, pour tout réel k compris entre $f(0)$ et $f(4)$, c'est-à-dire entre 1 et 3, l'équation $f(x) = k$ admet dans $[0; 4]$ une seule solution.

En particulier, l'équation \mathcal{E} : $f(x) = 2$ admet dans $[0; 4]$ une seule solution.

b. f est strictement croissante sur $[0; 4]$.

• f étant strictement monotone sur $[0; 4]$, elle ne peut pas prendre la même valeur en deux réels distincts de cet intervalle, donc l'équation \mathcal{E} ne peut avoir plus d'une solution dans $[0; 4]$.

• Il est possible que \mathcal{E} admette une seule solution dans $[0; 4]$; d'après la question 1° a., c'est par exemple le cas lorsque f est de plus continue sur $[0; 4]$.

• Il est aussi possible que \mathcal{E} n'admette aucune solution dans $[0; 4]$ (f n'est alors pas continue sur $[0; 4]$), comme le montre l'exemple ci-contre.

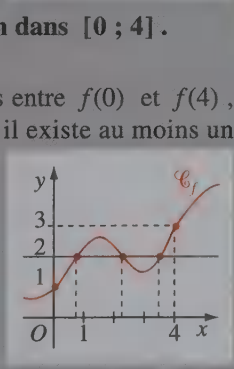
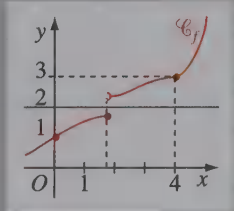
Finalement, l'équation \mathcal{E} admet au plus une solution dans $[0; 4]$.

c. f est continue sur $[0; 4]$.

f est continue sur l'intervalle $[0; 4]$, et 2 est compris entre $f(0)$ et $f(4)$, donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe au moins un réel c compris entre 0 et 4 tel que $f(c) = 2$, autrement dit :

l'équation \mathcal{E} : $f(x) = 2$ admet au moins une solution dans $[0; 4]$.

On peut noter que \mathcal{E} peut admettre plus d'une solution dans $[0; 4]$, comme le montre l'exemple ci-contre.



2° f est continue et croissante sur $[0 ; 4]$.

• D'après la question 1° c., f étant continue sur $[0 ; 4]$, l'équation \mathcal{E} admet au moins une solution dans $[0 ; 4]$.

• Supposons que \mathcal{E} admette deux solutions a et b telles que :

$$0 \leq a < b \leq 4.$$

f étant croissante sur $[0 ; 4]$, elle l'est également sur $[a ; b]$, donc :

$$\text{pour tout } x \text{ de } [a ; b], f(a) \leq f(x) \leq f(b),$$

or, $f(a) = 2$ et $f(b) = 2$ (car a et b sont solutions de \mathcal{E}), donc :

$$\text{pour tout } x \text{ de } [a ; b], 2 \leq f(x) \leq 2,$$

c'est-à-dire :

$$\text{pour tout } x \text{ de } [a ; b], f(x) = 2,$$

ce qui prouve que tout réel de $[a ; b]$ est solution de \mathcal{E} .

Finalement, si f est continue et croissante sur $[0 ; 4]$, alors :

**l'équation \mathcal{E} admet dans $[0 ; 4]$ une seule solution
ou une infinité de solutions.**

D $\mathcal{E}_n : x^n + x - 1 = 0.$

1° $f_n : x \mapsto x^n + x - 1.$

• Pour tout entier naturel n non nul, la fonction f_n est un polynôme ; elle est donc continue sur \mathbb{R} .

f_n est la somme de la fonction $x \mapsto x^n$ et de la fonction affine $x \mapsto x - 1$, toutes deux strictement croissantes sur \mathbb{R} , donc f_n est strictement croissante sur \mathbb{R} .

De plus :

$$f_n(0) = -1$$

et :

$$f_n(1) = 1.$$

• La fonction f_n est donc continue, strictement croissante sur l'intervalle $[0 ; 1]$, et $f(0) \times f(1) < 0$, ce qui prouve que f_n s'annule dans $[0 ; 1]$ en un seul réel, autrement dit :

l'équation \mathcal{E}_n :

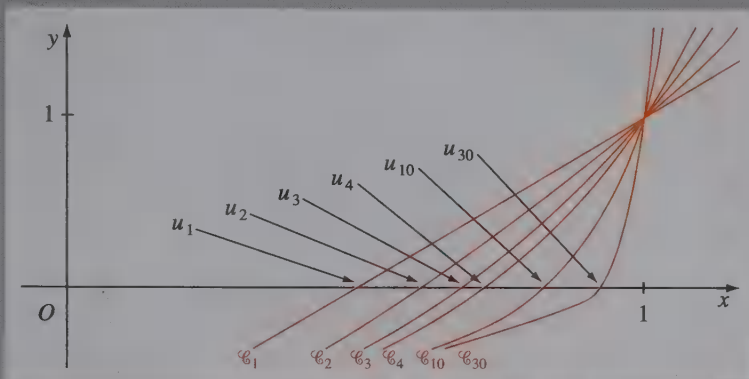
$$x^n + x - 1 = 0$$

admet dans $[0 ; 1]$ une seule solution.

2° Pour tout entier naturel n non nul, u_n est la seule solution dans $[0 ; 1]$ de l'équation :

$$f_n(x) = 0 ;$$

u_n est donc l'abscisse du point d'intersection, d'abscisse comprise entre 0 et 1, de la courbe \mathcal{C}_n et de la droite des abscisses.



Le graphique invite à conjecturer que la suite (u_n) est croissante et de limite 1.

21 $\mathcal{E} : \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = 1$.

1° La fonction $f : x \mapsto \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ a pour ensemble de définition $]0 ; +\infty[$.

a. • $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = \sqrt{0} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$, donc : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$.

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$, donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

b. f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et, pour tout x de cet intervalle :

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{-1}{(\sqrt{x})^2} = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2x\sqrt{x}},$$

donc $f'(x) > 0$,

ce qui prouve que f est **strictement croissante** sur $]0 ; +\infty[$.

c. La fonction f est continue, strictement croissante sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$, et :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

donc f prend une fois et une seule toute valeur réelle.

En particulier, il existe un unique réel α tel que $f(\alpha) = 1$, autrement dit : **l'équation \mathcal{E} admet une seule solution.**

On pouvait aussi établir la stricte croissance de f sur $]0 ; +\infty[$ en observant que f est la somme des deux fonctions $x \mapsto \sqrt{x}$, et $x \mapsto -\frac{1}{\sqrt{x}}$, toutes deux strictement croissantes sur $]0 ; +\infty[$.

Bien sûr : $\alpha > 0$ (f n'est définie que sur $]0 ; +\infty[$).

2° • Pour tout x de $]0; +\infty[$:

$$\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x} \times \left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) = \sqrt{x} \times 1 \Leftrightarrow x - 1 = \sqrt{x},$$

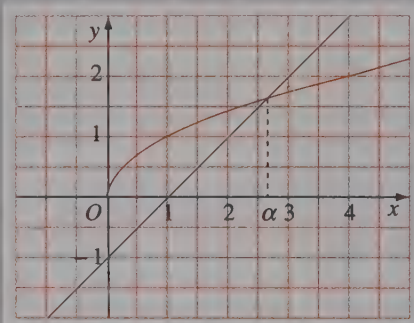
donc \mathcal{E} est équivalente à l'équation : $x - 1 = \sqrt{x}$.

• La solution α de \mathcal{E} est l'abscisse du point d'intersection de :

– la droite d'équation : $y = x - 1$,

– la demi-parabole d'équation : $y = \sqrt{x}$.

Graphiquement, on lit : $2 < \alpha < 3$.



3° • α est solution de l'équation :

$$x - 1 = \sqrt{x},$$

c'est-à-dire :

$$\alpha - 1 = \sqrt{\alpha},$$

donc :

$$(\alpha - 1)^2 = (\sqrt{\alpha})^2,$$

ce qui implique :

$$\alpha^2 - 2\alpha + 1 = \alpha,$$

autrement dit : la solution α de \mathcal{E} vérifie $\alpha^2 - 3\alpha + 1 = 0$.

• α est solution de l'équation du second degré \mathcal{E}' :

$$x^2 - 3x + 1 = 0.$$

Soit Δ le discriminant de \mathcal{E}' : $\Delta = 9 - 4 = 5$;

$\Delta > 0$, donc \mathcal{E}' admet dans \mathbb{R} deux solutions x_1 et x_2 :

$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{5}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{3 + \sqrt{5}}{2},$$

et l'on obtient à l'aide de la calculatrice :

$$x_1 \approx 0,38 \text{ et } x_2 \approx 2,62.$$

D'après la question 2°, on sait : $2 < \alpha < 3$, donc : $\alpha = x_2$, ce qui permet de conclure :

$$\alpha = \frac{3 + \sqrt{5}}{2}.$$

22 $1^\circ \bullet f(0) = 0, f\left(\frac{1}{2}\right) = 1, \text{ et } f(1) = \frac{1}{2}.$

On a : $0 < \frac{1}{2}$ et $f(0) < f\left(\frac{1}{2}\right),$

donc f n'est pas décroissante ;

de même $\frac{1}{2} < 1$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) > f(1),$

donc f n'est pas croissante.

On a ainsi démontré que f n'est pas monotone sur $[0 ; 1].$

$\bullet \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) = \frac{1}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x) = f\left(\frac{1}{2}\right) = 1,$

donc : $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} f(x),$

donc, f n'est pas continue en $\frac{1}{2},$

ce qui prouve que f n'est pas continue sur $[0 ; 1].$

$2^\circ \bullet$ Pour tout réel k compris entre 0 et 1, la droite horizontale d'équation $y = k$ coupe la courbe représentative \mathcal{C} de f en un seul point, autrement dit :

pour tout réel k de $[0 ; 1],$

l'équation $f(x) = k$ admet une seule solution.

\bullet Soit k un réel de $[0 ; 1]$ et a la solution de l'équation $f(x) = k.$

Le point de coordonnées $(a ; f(a)),$ c'est-à-dire $(a ; k),$ appartient à \mathcal{C} ; or, \mathcal{C} est symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x,$ donc le point de coordonnées $(k ; a)$ appartient à $\mathcal{C},$ autrement dit : $a = f(k).$

On a ainsi prouvé que la solution de l'équation est $f(k).$

23 $\mathcal{E} : 2\sqrt[3]{x} = x + 1.$

$1^\circ \sqrt[3]{1} = 1,$ donc : $2\sqrt[3]{1} = 1 + 1,$ ce qui prouve que **1 est solution de $\mathcal{E}.$**

$2^\circ \bullet$ Pour tout x de $\mathbb{R}^+ :$

$$\begin{aligned} 2\sqrt[3]{x} = x + 1 &\Leftrightarrow (2\sqrt[3]{x})^3 = (x + 1)^3 \\ &\Leftrightarrow 8x = x^3 + 3x^2 + 3x + 1 \\ &\Leftrightarrow x^3 + 3x^2 - 5x + 1 = 0, \end{aligned}$$

Il est clair que f est :
 \bullet strictement croissante sur $\left[0 ; \frac{1}{2}\right],$
 \bullet strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{2} ; 1\right].$

$\frac{1}{2}$ est un « point de discontinuité » de $f.$

La fonction qui, à tout k de $[0 ; 1],$ associe la solution de l'équation $f(x) = k,$ est la fonction f elle-même.

Pour tous réels a et $b :$
 $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$

et, pour tout réel x :

$$(x-1)(x^2+4x-1) = 0 \Leftrightarrow x^3 + (4-1)x^2 + (-1-4)x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^3 + 3x^2 - 5x + 1 = 0,$$

ce qui implique que, pour tout x de \mathbb{R}_+ :

$$2\sqrt[3]{x} = x + 1 \Leftrightarrow (x-1)(x^2+4x-1) = 0.$$

• Pour tout x de \mathbb{R}_+ : $\mathcal{E} \Leftrightarrow x = 1$ ou $x^2 + 4x - 1 = 0$.

Soit \mathcal{E}' l'équation du second degré : $x^2 + 4x - 1 = 0$.

Son discriminant Δ vérifie : $\Delta = 16 + 4 = 20$;

Δ est strictement positif, donc \mathcal{E}' admet dans \mathbb{R} deux solutions x_1 et x_2 :

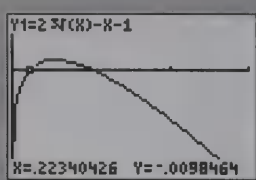
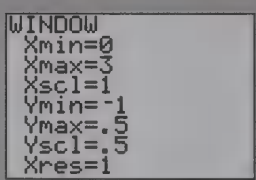
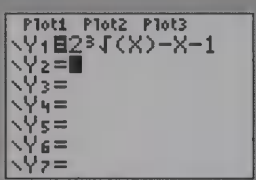
$$x_1 = \frac{-4 - \sqrt{20}}{2} = \frac{-4 - 2\sqrt{5}}{2} = -2 - \sqrt{5},$$

$$x_2 = \frac{-4 + \sqrt{20}}{2} = \frac{-4 + 2\sqrt{5}}{2} = -2 + \sqrt{5}.$$

$x_1 \approx -4,24, x_2 \approx 0,24.$

$x_1 < 0$ et $x_2 > 0$, donc, finalement :

les solutions de \mathcal{E} dans \mathbb{R}_+ sont les réels 1 et $-2 + \sqrt{5}$.



24 1° a. • Le demi-disque limité par $[AB]$, et

\mathcal{C} a pour rayon 1, donc son aire est égale à $\frac{\pi}{2}$.

• Le triangle AOM est isocèle de sommet principal O , donc :

$$\mathcal{A}_1(\alpha) = \frac{1}{2} \times OA^2 \times \sin(\widehat{AOM}),$$

de plus : $OA = 1$ et $\sin(\widehat{AOM}) = \sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$,

donc :

$$\mathcal{A}_1(\alpha) = \frac{\sin \alpha}{2}.$$

L'aire d'un disque de rayon R est πR^2 .

• \widehat{BOM} est un secteur d'angle α d'un disque de rayon 1, donc son aire $\mathcal{A}_2(\alpha)$ vérifie :

$$\mathcal{A}_2(\alpha) = \frac{\alpha}{2} \times 1^2 = \frac{\alpha}{2}.$$

L'aire d'un secteur d'angle α d'un disque de rayon R est $\frac{\alpha}{2} R^2$.

b. $\mathcal{A}(\alpha)$ est la somme de l'aire $\mathcal{A}_1(\alpha)$ du triangle AOM et de l'aire $\mathcal{A}_2(\alpha)$ du secteur circulaire \widehat{BOM} ; il vient :

$$\mathcal{A}(\alpha) = \frac{\sin \alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}, \text{ c'est-à-dire : } \mathcal{A}(\alpha) = \frac{1}{2}(\alpha + \sin \alpha).$$

2° $f: x \mapsto x + \sin x$.

a. La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} et, pour tout réel x :

$$f'(x) = 1 + \cos x, \text{ donc : } \begin{cases} f'(x) > 0 & \text{si } 0 \leq x < \pi, \\ f'(x) = 0 & \text{si } x = \pi, \end{cases}$$

ce qui implique que f est strictement croissante sur l'intervalle $[0; \pi]$.

De plus $f(0) = 0 + \sin 0 = 0$ et $f(\pi) = \pi + \sin \pi = \pi + 0 = \pi$, donc le tableau de variations de f sur $[0; \pi]$ est le suivant :

x	0	π
$f(x)$	0	π

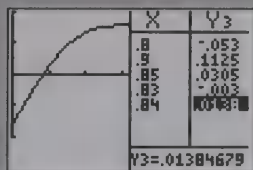
b. f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[0; \pi]$, et :

$$f(0) \leq \frac{\pi}{2} \leq f(\pi),$$

donc **il existe un réel α_0 et un seul de $[0; \pi]$ tel que : $f(\alpha_0) = \frac{\pi}{2}$.**

```
Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=2^3f(X)-X-1
\Y2=cos(X)^2+cos
(X)
\Y3=X+sin(X)-pi/2
■
\Y4=
\Y5=
```

```
WINDOW
Xmin=0
Xmax=3.1415926...
Xscl=1
Ymin=-2
Ymax=2
Yscl=1
Xres=1■
```



• La table à l'affichage de la calculatrice met en évidence :

$$0,83 < \alpha_0 < 0,84,$$

donc **0,83 est une valeur approchée** (par défaut) de α_0 à 10^{-2} près.

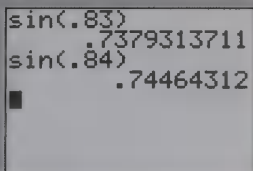
• De plus, la fonction sinus étant croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$:

$$\sin(0,83) < \sin \alpha_0 < \sin(0,84),$$

donc, d'après les valeurs approchées de $\sin(0,83)$ et $\sin(0,84)$ fournies par la calculatrice :

$$0,735 < \sin \alpha_0 < 0,745,$$

ce qui prouve que **0,74 est une valeur approchée de $\sin \alpha_0$ à 10^{-2} près.**



3° • Pour tout α de $[0; \pi]$, $\mathcal{A}(\alpha) = \frac{1}{2} f(\alpha)$.

• L'aire du demi-disque limité par $[AB]$ et \mathcal{C} étant égale à $\frac{\pi}{2}$, la droite (AM) partage le demi-disque en deux surfaces de même aire si, et seulement si :

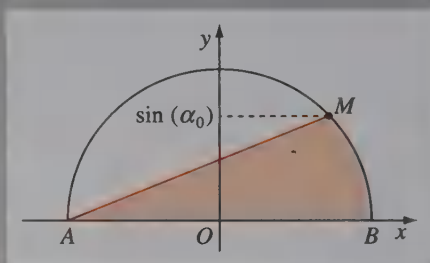
$$\mathcal{A}(\alpha) = \frac{\pi}{4}; \text{ or : } \mathcal{A}(\alpha) = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{2} f(\alpha) = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow f(\alpha) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \alpha = \alpha_0,$$

donc le point M cherché vérifie $\widehat{BOM} = \alpha_0$.

Il est maintenant possible d'effectuer une construction approchée du point M ; il suffit en effet d'utiliser :

M a pour ordonnée $\sin \alpha_0$,

$0 < \alpha_0 < \frac{\pi}{2}$ et $\sin \alpha_0 \approx 0,74$.



25 $\mathcal{E} : x^3 + 3x - 2 = 0$.

1° Soit f la fonction :

$$x \mapsto x^3 + 3x - 2.$$

• En tant que polynôme, f est continue sur \mathbb{R} et admet pour limite en $-\infty$ comme en $+\infty$ celle de son monôme de plus haut degré :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty.$$

D'autre part, f est la somme des fonctions $x \mapsto x^3$ et $x \mapsto 3x - 2$, toutes deux strictement croissantes sur \mathbb{R} , donc f est strictement croissante sur \mathbb{R} .

• f est continue, strictement croissante sur \mathbb{R} et :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$$

donc f s'annule une fois et une seule, c'est-à-dire :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

↗

l'équation \mathcal{E} admet dans \mathbb{R} une seule solution.

• De plus :

$$f(0) = -2 \quad \text{et} \quad f(1) = 1 + 3 - 2 = 2,$$

donc $f(0)$ et $f(1)$ sont de signes contraires, ce qui prouve que la solution α de \mathcal{E} vérifie :

$$0 < \alpha < 1.$$

À l'aide de la calculatrice, à 10^{-3} près : $\alpha \approx 0,596$.

Plot1	Plot2	Plot3
Y1	X^3+3X-2	
Y2		
Y3		
Y4		
Y5		
Y6		
Y7		

WINDOW
Xmin=0
Xmax=1
Xscl=.1
Ymin=-1
Ymax=1
Yscl=.1
Xres=1

X	Y1
.5	-.375
.6	.016
.65	-.184
.69	-.025
.695	-.004
.696	-.3E-4
.697	.0037
Y1=.00377617	

2° Méthode de Cardan

a. Soient u et v des nombres réels.

$$\begin{aligned} \bullet (u+v)^3 + 3(u+v) - 2 &= u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 + 3(u+v) - 2 \\ &= u^3 + v^3 + 3uv(u+v) + 3(u+v) - 2, \end{aligned}$$

donc :

$$(u+v)^3 + 3(u+v) - 2 = u^3 + v^3 + 3(uv+1)(u+v) - 2.$$

• Si u et v vérifient le système Σ :

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = 2 \\ uv = -1, \end{cases}$$

alors, d'après l'égalité précédente : $(u+v)^3 + 3(u+v) - 2 = 2 + 0 - 2 = 0$,
autrement dit : $u+v$ est solution de l'équation \mathcal{E} .

b. Pour tous réels u et v non nuls :

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = 2 \\ uv = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3 - \frac{1}{u^3} = 2 \\ v = -\frac{1}{u} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (u^3)^2 - 1 = 2u^3 \\ v = -\frac{1}{u} \end{cases}$$

$$\left(\frac{-1}{u}\right)^3 = \frac{(-1)^3}{u^3} = \frac{-1}{u^3}.$$

donc :
$$\begin{cases} u^3 + v^3 = 2 \\ uv = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u^3)^2 - 2u^3 - 1 = 0 \\ v = -\frac{1}{u} \end{cases}$$

c. \mathcal{E}' : $X^2 - 2X - 1 = 0$.

\mathcal{E}' est une équation du second degré ; soit Δ son discriminant :

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times 1 \times (-1) = 4 + 4 = 8.$$

$\Delta > 0$, donc \mathcal{E}' admet dans \mathbb{R} deux solutions X_1 et X_2 :

$$X_1 = \frac{2 + \sqrt{8}}{2} = \frac{2 + 2\sqrt{2}}{2} = 1 + \sqrt{2}$$

et
$$X_2 = \frac{2 - \sqrt{8}}{2} = \frac{2 - 2\sqrt{2}}{2} = 1 - \sqrt{2}.$$

d. En posant : $u = \sqrt[3]{1 + \sqrt{2}}$, u^3 est solution de \mathcal{E}' ;
en posant de plus :

$$v = -\frac{1}{\sqrt[3]{1 + \sqrt{2}}},$$

l'équivalence établie dans la question 2° b. prouve que les réels u et v satisfont à Σ ;

on en déduit, d'après la question 2° c., que $\sqrt[3]{1 + \sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{1 + \sqrt{2}}}$ est solution de l'équation \mathcal{E} , c'est-à-dire, α étant la seule solution de \mathcal{E} :

$$\alpha = \sqrt[3]{1 + \sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt[3]{1 + \sqrt{2}}}.$$

$$\frac{1}{1 + \sqrt{2}} = \frac{1 - \sqrt{2}}{(1 + \sqrt{2})(1 - \sqrt{2})} = \frac{1 - \sqrt{2}}{1 - 2} = \sqrt{2} - 1,$$

$$\text{donc : } \sqrt[3]{1 + \sqrt{2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{1 + \sqrt{2}}} = \sqrt[3]{\sqrt{2} - 1},$$

$$\text{et finalement : } \alpha = \sqrt[3]{1 + \sqrt{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{2} - 1}.$$

$$\sqrt[3]{\sqrt{(1 + \sqrt{2})} + \sqrt{(1 - \sqrt{2})}} + \sqrt[3]{\sqrt{(1 - \sqrt{2})} - \sqrt{(1 + \sqrt{2})}} = 0.596071638$$

DÉRIVATION

Rappels de cours

Dans tout ce chapitre, f désigne une fonction, et on note \mathcal{D}_f son ensemble de définition.

I- Nombre dérivé

Soit a un réel appartenant à \mathcal{D}_f .

Pour tout réel h non nul tel que $a + h$ appartienne à \mathcal{D}_f , $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ est le taux de variation de f entre a et $a + h$.

■ Définition

Dire que f est dérivable en a signifie que $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ admet une limite finie ℓ quand h tend vers 0.

Le nombre ℓ est alors appelé **nombre dérivé de f en a** , et noté $f'(a)$.

■ Remarques

• f est dérivable en a si, et seulement si, $\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ admet une limite finie quand x tend vers a ; alors :

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a).$$

• f est dérivable en a si, et seulement si, l'on peut écrire, pour tout réel h tel que $a + h$ appartienne à \mathcal{D}_f :

$$f(a+h) = a_0 + a_1 h + h \varphi(h),$$

où φ est une fonction de limite nulle en 0; alors :

$$f'(a) = a_1.$$

• L'écriture différentielle $dy = f'(x) dx$ exprime symboliquement l'égalité :

$$\Delta y = f'(x) \Delta x + \varepsilon(\Delta x)$$

où ε tend vers 0 avec Δx .

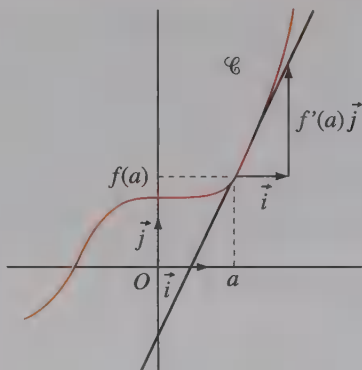
• Si f est dérivable en a , alors f est continue en a .

$$\boxed{x \xrightarrow{f} y}$$

II- Interprétation graphique : tangente

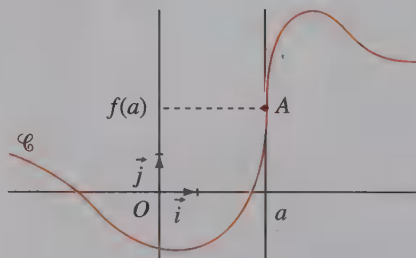
• Si f est dérivable en a , alors la courbe représentative \mathcal{C} de f admet, au point A d'abscisse a , une tangente non verticale de coefficient directeur $f'(a)$ et d'équation $y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

La fonction $x \mapsto f'(a)(x - a) + f(a)$ est l'approximation affine associée à f en a .



• Si $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = +\infty$ ou $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = -\infty$,

alors f n'est pas dérivable en a ; si, de plus, f est continue en a , alors la courbe représentative \mathcal{C} de f admet, au point A d'abscisse a , une tangente verticale d'équation $x = a$.



III- Dérivation sur un intervalle – Fonction dérivée

• On dit que f est dérivable sur un intervalle I ouvert lorsque f est dérivable en tout réel de I , et la fonction dérivée de f sur I est la fonction f' qui, à tout réel x de I , associe le nombre dérivé $f'(x)$ de f en x .

- Si f est dérivable sur I , alors f est continue sur I .

Dérivées des fonctions usuelles

λ désigne un nombre réel et n un entier naturel.

$f(x)$	$f'(x)$	\mathcal{D}_f	$\mathcal{D}_{f'}$
λ	0	\mathbb{R}	
x	1	\mathbb{R}	
x^n ($n \geq 2$)	nx^{n-1}	\mathbb{R}	
$\frac{1}{x^n}$ ($n \geq 1$)	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$] -\infty ; 0[\cup] 0 ; +\infty[$	
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$] 0 ; +\infty[$	$] 0 ; +\infty[$
e^x	e^x	\mathbb{R}	
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$] 0 ; +\infty[$	
$\sin x$	$\cos x$	\mathbb{R}	
$\cos x$	$-\sin x$	\mathbb{R}	
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	\mathbb{R} privé de $\left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$	

Dérivées et opérations

u et v sont des fonctions dérivables sur un intervalle I ; λ est un réel.

Formule	Conditions
$(u + v)' = u' + v'$	
$(\lambda u)' = \lambda u'$	
$(uv)' = u'v + uv'$	
$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$	u ne s'annule pas sur I
$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$	v ne s'annule pas sur I

IV- Lien entre le signe de la dérivée et le sens de variation d'une fonction

Théorèmes de monotonie

On suppose la fonction f dérivable sur un intervalle I .

- Si f' est positive sur I , alors f est croissante sur I .
- Si f' est négative sur I , alors f est décroissante sur I .
- Si f' est nulle sur I , alors f est constante sur I .

Théorèmes de stricte monotonie

On suppose la fonction f dérivable sur un intervalle I .

- Si f' est positive sur I et ne s'annule qu'en un nombre fini de réels de I , alors f est strictement croissante sur I .
- Si f' est négative sur I et ne s'annule qu'en un nombre fini de réels de I , alors f est strictement décroissante sur I .

La fonction tangente

La fonction tangente, notée \tan , est définie par : $\tan = \frac{\sin}{\cos}$.

- Son ensemble de définition \mathcal{D}_{\tan} est \mathbb{R} privé des réels $\frac{\pi}{2} + k\pi$, k décrivant \mathbb{Z} ; \tan est définie en particulier sur l'intervalle $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$.
- \tan est impaire et périodique de période π .
- \tan est dérivable en tout réel x de son ensemble de définition et :

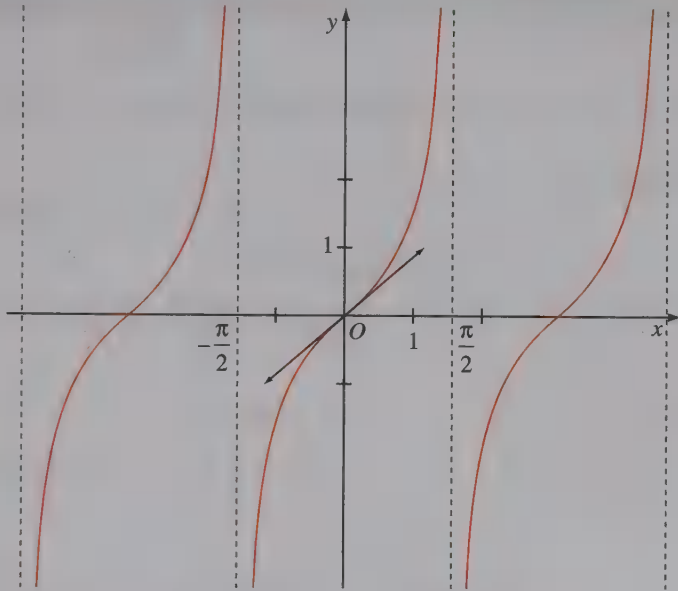
$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x,$$

donc : $\tan'(x) > 0$,

ce qui prouve que \tan est strictement croissante sur tout intervalle inclus dans \mathcal{D}_{\tan} .

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
$\tan x$	$-\infty$	0	$+\infty$

$\tan 0 = 0$ et $\tan'(0) = 1$;
la tangente à la courbe représentative
de \tan en O a pour pente 1



V- Dérivée d'une fonction composée

Si, pour tout x d'un intervalle I : $f(x) = v(u(x))$,
et si :

- la fonction u est dérivable sur I ,
 - la fonction v est dérivable sur un intervalle J ,
 - pour tout x de I , $u(x)$ appartient à J ,
- alors la composée f de u par v est dérivable sur I et :

pour tout x de I , $f'(x) = u'(x) \times v'(u(x))$.

$$\begin{array}{l}
 x \xrightarrow{u} y \xrightarrow{v} z \\
 dy = u'(x) dx, \\
 dz = v'(y) dy, \\
 dz = v'(y) u'(x) dx
 \end{array}$$

f	f'	Conditions
u^n ($n \geq 2$)	$nu'u^{n-1}$	
\sqrt{u}	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	pour tout x de I , $u(x) > 0$
e^u	$u'e^u$	
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$	pour tout x de I , $u(x) > 0$

EXERCICES

de contrôle des connaissances

On suppose le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1

(Corrigé p. 113)

Déterminer la dérivée f' de la fonction f proposée.

$$1^\circ x \mapsto \frac{1}{x^2} - 3\sqrt{x}.$$

$$2^\circ x \mapsto \frac{\sin x}{\sqrt{x}}.$$

$$3^\circ x \mapsto \frac{2x-1}{x^2+1}.$$

$$4^\circ x \mapsto x^2 \cos x.$$

$$5^\circ x \mapsto \frac{\tan x}{x}.$$

$$6^\circ x \mapsto \frac{1}{x\sqrt{x}}.$$

2

(Corrigé p. 114)

Déterminer sans calcul le nombre dérivé en 0 de la fonction f :

$$x \mapsto 2 - 3x + x \sin x \cos x.$$

3

(Corrigé p. 114)

Déterminer une équation de la tangente à l'hyperbole \mathcal{H} d'équation :

$$y = \frac{4}{x-1}$$

en son point d'abscisse 3.

4

(Corrigé p. 115)

Donner les plus grands intervalles de stricte monotonie de la fonction f , sachant qu'elle est dérivable sur \mathbb{R} et que le tableau de signes de sa dérivée f' est :

1°

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$	
$f'(x)$	+	0	-	0	+

2°

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$

5

(Corrigé p. 116)

Démontrer que la fonction f :

$$x \mapsto \sqrt{\sin x}$$

est dérivable sur $]0; \pi[$ et calculer $f'(x)$ pour tout x de cet intervalle.

6

(Corrigé p. 116)

1° Résoudre dans $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ l'équation (E) :

$$\tan x = 1.$$

2° Quelles sont les solutions dans \mathbb{R} de l'équation (E) ?

7

(Corrigé p. 116)

Déterminer le sens de variation de la fonction f définie sur $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ par :

$$f(x) = \sin x - \tan x.$$

Nombre dérivé

8	★			5 min
---	---	--	--	-------

(Corrigé p. 117)

Soient f la fonction cube $x \mapsto x^3$, et a un nombre réel.

En revenant à la définition du nombre dérivé, démontrer que f est dérivable en a et préciser $f'(a)$.

9	★	★		10 min
---	---	---	--	--------

(Corrigé p. 118)

Soit f la fonction racine carrée $x \mapsto \sqrt{x}$.

En revenant à la définition du nombre dérivé, démontrer que :

1° f est dérivable en tout réel a strictement positif ;

2° f n'est pas dérivable en 0 .

10	★	★		10 min
----	---	---	--	--------

(Corrigé p. 119)

Déterminer sans calcul :

1° le nombre dérivé en 0 de la fonction f :

$$x \mapsto 1 - 2x + 3x \tan x ;$$

2° le nombre dérivé en -1 de la fonction g :

$$x \mapsto 2x + (x + 1)^2 \sqrt{x^4 + 3}.$$

11	★	★		5 min
----	---	---	--	-------

(Corrigé p. 119)

Déterminer la limite de $\frac{\tan x - 1}{4x - \pi}$ quand x tend vers $\frac{\pi}{4}$.

Nombre dérivé et tangente à une courbe

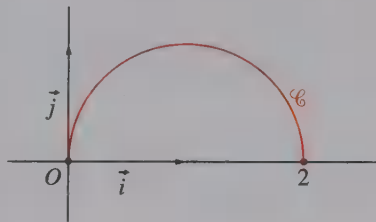
12



15
min.

(Corrigé p. 120)

f est la fonction définie sur $[0 ; 2]$, dont la courbe représentative \mathcal{C} est le demi-cercle de la figure ci-dessous.



1° Comment voit-on graphiquement que f n'est pas dérivable en 0 ?

2° Justifier qu'un point M du plan, de coordonnées (x, y) , appartient à \mathcal{C}

si, et seulement si :

$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 1 \\ y \geq 0. \end{cases}$$

Donner l'expression de $f(x)$, pour tout x de $[0 ; 2]$.

3° Retrouver le résultat de la question 1° par un calcul.

13



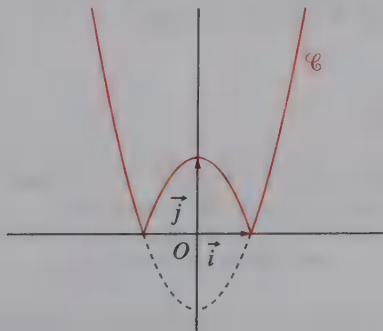
15
min.

(Corrigé p. 121)

Soit f la fonction $x \mapsto |x^2 - 1|$; sa courbe représentative \mathcal{C} est donnée ci-dessous.

f est-elle dérivable en 1 ?

Justifier la réponse graphiquement, puis par un calcul.



14 ★ ★ 10 min

(Corrigé p. 122)

Soit \mathcal{C} la courbe d'équation :

$$xy + 4x + 3y + 7 = 0.$$

Démontrer que le point $A(-2 ; 1)$ appartient à \mathcal{C} et que la courbe \mathcal{C} admet en ce point une tangente dont on donnera une équation.

15 ★ ★ ★ 25 min

(Corrigé p. 123)

Soient a, b, c des nombres réels, avec $a > 0$, et \mathcal{P} la parabole d'équation :

$$y = ax^2 + bx + c.$$

1° Soient x_0 un nombre réel et M_0 le point de \mathcal{P} d'abscisse x_0 . Déterminer une équation de la tangente T à \mathcal{P} en M_0 .

2° Démontrer que \mathcal{P} est située au-dessus de chacune de ses tangentes.

3° Déterminer l'ensemble des points M , de coordonnées (x, y) , tel qu'il existe une tangente à \mathcal{P} passant par M .

Fonction dérivée

16 ★ 5 min

(Corrigé p. 125)

Un mobile se déplace sur l'axe (Ox) ; à l'instant initial $t = 0$, le mobile est à l'origine O .

On note $x(t)$ l'abscisse du mobile à l'instant t .

Sachant qu'à tout instant t : $x'(t) = 2t$,

1° justifier que le mobile est animé d'un mouvement uniformément varié ;

2° déterminer l'abscisse du mobile à l'instant $t = 3$.

17 ★ 5 min

(Corrigé p. 125)

Un mobile se déplace sur l'axe (Ox) . En notant $x(t)$ son abscisse à l'instant t , la loi horaire du mouvement est donnée par :

$$x(t) = 3 \cos \left(2t + \frac{\pi}{4} \right).$$

Démontrer que l'accélération est proportionnelle à l'abscisse.

18 ★ ★ 10 min

(Corrigé p. 126)

Soit f la fonction :

$$x \mapsto \sqrt{x} \sin x .$$

1° Quel est l'ensemble de définition de f ?Justifier que f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour tout x de cet intervalle.2° Démontrer que f est dérivable en 0 , et préciser $f'(0)$.3° Définir f' .

19 ★ ★ 10 min

(Corrigé p. 126)

Soient n un entier naturel non nul et x un réel distinct de 1 .

1° Justifier l'égalité :

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} .$$

2° En déduire une formule donnant :

$$1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} .$$

Signe de la dérivée et sens de variation

20 ★ 15 min

(Corrigé p. 127)

Déterminer la dérivée f' puis le sens de variation de la fonction f proposée.

1° $x \mapsto -3x + \cos 2x .$

2° $x \mapsto \frac{2x - 3}{x + 1} .$

3° $x \mapsto \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} .$

4° $x \mapsto \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} .$

Dérivée d'une fonction composée

21 ★ 20 min.

(Corrigé p. 130)

Vérifier que la fonction f proposée est dérivable sur son ensemble de définition \mathcal{D}_f .

Déterminer $f'(x)$ pour tout x de \mathcal{D}_f .

1° $x \mapsto (x^3 + 2x + 1)^{2003}$. 2° $x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$.

3° $x \mapsto \sqrt{x^2 - 4x + 5}$. 4° $x \mapsto \sin(x^3)$.

5° $x \mapsto \sin^3 x$. 6° $x \mapsto \tan^2 x$.

22 ★ ★ 10 min.

(Corrigé p. 131)

1° Déterminer la dérivée f' de la fonction $f: x \mapsto \frac{1+x^3}{2-x}$.

2° En déduire la dérivée g' de la fonction $g: x \mapsto \frac{1-x^3}{2+x}$.

Obtention d'inégalités

23 ★ ★ 10 min.

(Corrigé p. 132)

Soit T la tangente à la courbe représentative \mathcal{C} de la fonction tangente en son point d'abscisse 0.

1° Déterminer une équation de T .

2° Soit f la fonction : $x \mapsto \tan x - x$.

Déterminer le sens de variation puis le signe de f sur l'intervalle $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$.

3° En déduire la position de \mathcal{C} par rapport à T dans la bande de plan d'inéquations $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$.

Le but de l'exercice est d'obtenir l'encadrement polynomial suivant de la fonction cosinus :

$$\text{pour tout } x \text{ de } \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

On notera f la fonction : $x \mapsto 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cos x$.

1° Déterminer les dérivées successives f' , f'' (dérivée de f'), $f^{(3)}$ (dérivée de f'') et $f^{(4)}$ (dérivée de $f^{(3)}$) de f .

Quelle remarque peut-on faire sur les valeurs prises en 0 par f et ses dérivées d'ordre 1 à 4 ?

2° Compléter un tableau du type :

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
signe de $f^{(4)}(x)$			
sens de variation de $f^{(3)}$			
sens de variation de f			
signe de $f(x)$			

3° Dédire de la question précédente le résultat souhaité.

Déterminer un encadrement de $\cos(0,1)$ de longueur 5×10^{-6} .

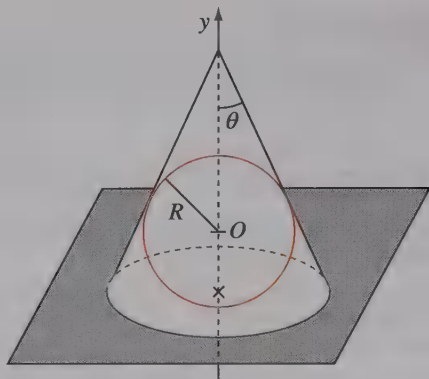
Minimum, maximum

Une sphère de rayon R et un cône d'axe vertical, tangent à la sphère, sont posés sur un plan horizontal.

On note θ le demi-angle au sommet du cône ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$).

On démontre (et on admettra) que le volume V du cône vérifie :

$$V = \frac{\pi R^3 (1 + \sin \theta)^2}{3 \sin \theta (1 - \sin \theta)}.$$



Le but de l'exercice est de déterminer la hauteur du cône de volume minimal.

1° Démontrer que le volume V et la hauteur h du cône vérifient la relation :

$$V = \frac{\pi h^3}{3} \tan^2 \theta.$$

2° Étudier le sens de variation de la fonction f définie sur $]0 ; 1[$ par :

$$f(x) = \frac{(1+x)^2}{x(1-x)}.$$

3° Cône de volume minimal

a. Dédire de la question 2° qu'il existe un cône de volume minimal ; on notera θ_0 son demi-angle au sommet.

Préciser la valeur V_0 du volume minimal.

b. Calculer la hauteur h_0 du cône de volume minimal.

26 ★ ★ ★ 30 min

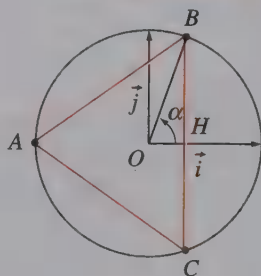
(Corrigé p. 137)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Un triangle ABC isocèle, de sommet principal le point A de coordonnées $(-1; 0)$, est inscrit dans le cercle de centre O et de rayon 1.

Le point B est situé au-dessus de (Ox) , et on note H le pied de la hauteur issue de A .

Soit α la mesure en radians de l'angle (\vec{i}, \vec{OB}) comprise entre 0 et π .



1° Quelles sont les coordonnées de B ?

Exprimer les distances BH et AH en fonction de α .

En déduire, en fonction de α , l'aire du triangle ABC .

2° On considère la fonction f définie sur $[0; \pi]$ par :

$$f(x) = \sin x (1 + \cos x).$$

a. Déterminer la dérivée de f et démontrer que, pour tout x de $[0; \pi]$:

$$f'(x) = 2 \cos^2 x + \cos x - 1.$$

En déduire :

$$\text{pour tout } x \text{ de } [0; \pi], f'(x) = (2 \cos x - 1)(\cos x + 1).$$

b. Étudier le signe de f' , puis dresser le tableau de variations de f .

3° Démontrer qu'il existe une valeur de α , que l'on déterminera, pour laquelle l'aire du triangle ABC est maximale.

Préciser ce maximum.

Quelle est alors la nature du triangle ABC ?

27 ★ ★ ★ 30 min

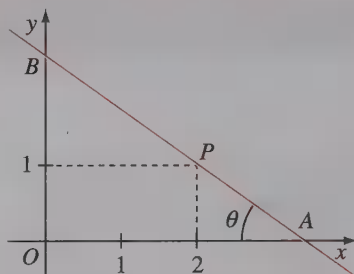
(Corrigé p. 139)

Soit P le point coordonnées $(2; 1)$.

Une droite passant par P coupe (Ox) en A et (Oy) en B , l'ordonnée du point B étant supérieure à 1.

On note θ la mesure en radians de l'angle \widehat{OAB} telle que :

$$0 < \theta < \frac{\pi}{2}.$$



1° Calculer, en fonction de $\tan \theta$, l'abscisse de A , l'ordonnée de B , puis l'aire du triangle OAB .

2° Soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \left(2 + \frac{1}{x}\right)(1 + 2x).$$

Étudier le sens de variation de f .

En déduire que f admet un minimum, dont on précisera la valeur.

3° Déduire des questions précédentes l'aire minimale du triangle OAB .

Tracer la droite (AB) correspondante.

CORRIGÉS

des exercices

1° $f: x \mapsto \frac{1}{x^2} - 3\sqrt{x}$.

$\mathcal{D}_f =]0; +\infty[$. Comme somme des fonctions $x \mapsto \frac{1}{x^2}$, $x \mapsto -3\sqrt{x}$, toutes deux dérivables sur $]0; +\infty[$, f est dérivable sur $]0; +\infty[$, et, pour tout x de cet intervalle :

$$f'(x) = -\frac{2}{x^3} - 3 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = -\frac{2}{x^3} - \frac{3}{2\sqrt{x}}.$$

2° $f: x \mapsto \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$.

$\mathcal{D}_f =]0; +\infty[$.

f est le quotient :

- de la fonction sinus, dérivable sur $]0; +\infty[$ (car dérivable sur \mathbb{R}),
 - par la fonction racine carrée, dérivable et ne s'annulant pas sur $]0; +\infty[$,
- donc f est dérivable sur $]0; +\infty[$, et, pour tout x de cet intervalle :

$$f'(x) = \frac{(\cos x) \times \sqrt{x} - (\sin x) \times \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2} = \frac{2x \cos x - \sin x}{2x\sqrt{x}}.$$

3° $f: x \mapsto \frac{2x-1}{x^2+1}$.

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. Comme fonction rationnelle, f est dérivable sur son ensemble de définition et, pour tout réel x :

$$f'(x) = \frac{2 \times (x^2+1) - (2x-1) \times 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2+2x+2}{(x^2+1)^2} = \frac{-2(x^2-x-1)}{(x^2+1)^2}.$$

4° $f: x \mapsto x^2 \cos x$.

Comme produit des fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \cos x$, toutes deux dérivables sur \mathbb{R} , f est dérivable sur \mathbb{R} et, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x \times \cos x + x^2 \times (-\sin x) \\ &= 2x \cos x - x^2 \sin x. \end{aligned}$$

Si u et v sont dérivables sur un intervalle I , alors $u+v$ est dérivable sur I et $(u+v)' = u' + v'$.

Si u et v sont dérivables sur un intervalle I et si v ne s'annule pas sur I , alors $\frac{u}{v}$ est dérivable sur I et $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$.

Si u et v sont dérivables sur un intervalle I , alors uv est dérivable sur I et $(uv)' = u'v + uv'$.

$$5^\circ f: x \mapsto \frac{\tan x}{x}.$$

L'ensemble de définition de f est l'ensemble de définition de la fonction tangente privé de 0.

Comme quotient de deux fonctions dérivables sur leur ensemble de définition, f est dérivable sur son ensemble de définition et, pour tout x de cet ensemble :

$$f'(x) = \frac{(1 + \tan^2 x) \times x - (\tan x) \times 1}{x^2} = \frac{x + x \tan^2 x - \tan x}{x^2}.$$

$$6^\circ f: x \mapsto \frac{1}{x\sqrt{x}}.$$

f est dérivable sur son ensemble de définition $]0; +\infty[$ et, pour tout réel x strictement positif :

$$f'(x) = -\frac{1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}}}{(x\sqrt{x})^2},$$

$$f'(x) = -\frac{2\sqrt{x} \times \sqrt{x} + x}{x^3 \times 2\sqrt{x}} = -\frac{2x + x}{2x^3 \sqrt{x}} = \frac{-3}{2x^2 \sqrt{x}}.$$

Si u est dérivable et ne s'annule pas sur un intervalle I ,

alors $\frac{1}{u}$ est dérivable sur I

$$\text{et } \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}.$$

$$2^\circ f: x \mapsto 2 - 3x + x \sin x \cos x.$$

Soit φ la fonction : $h \mapsto \sin h \cos h$; alors, pour tout réel h :

$$f(h) = 2 - 3h + h\varphi(h)$$

$$\text{et : } \lim_{h \rightarrow 0} \varphi(h) = 0,$$

donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = -3$.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sin h = \sin 0 = 0,$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \cos h = \cos 0 = 1.$$

$$3^\circ \mathcal{H}: y = \frac{4}{x-1}.$$

L'hyperbole \mathcal{H} est la courbe représentative de la fonction $f: x \mapsto \frac{4}{x-1}$.

f est dérivable sur son ensemble de définition $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et, pour tout réel x distinct de 1 :

$$f'(x) = \frac{-4}{(x-1)^2}.$$

La courbe \mathcal{H} admet donc une tangente en tout point d'abscisse x_0 distincte de 1, dont une équation est :

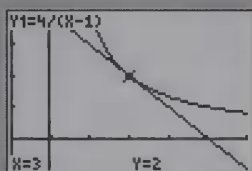
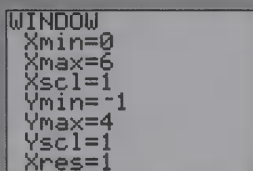
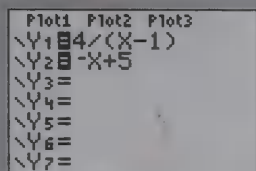
$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

En particulier, $f(3)$ et $f'(3)$ valant respectivement 2 et -1 , une équation de la tangente à \mathcal{H} en son point d'abscisse 3 est :

$$y = -(x - 3) + 2,$$

ou encore :

$$y = -x + 5.$$



1°

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+

- $\left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout } x \text{ de }]-\infty ; 0[, f'(x) > 0, \\ f'(0) = 0, \end{array} \right.$

donc :

f est strictement croissante sur $]-\infty ; 0]$.

- $\left\{ \begin{array}{l} f'(0) = 0, \\ \text{pour tout } x \text{ de }]0 ; 1[, f'(x) < 0, \\ f'(1) = 0, \end{array} \right.$

donc :

f est strictement décroissante sur $[0 ; 1]$.

- $\left\{ \begin{array}{l} f'(1) = 0, \\ \text{pour tout } x \text{ de }]1 ; +\infty[, f'(x) > 0, \end{array} \right.$

donc :

f est strictement croissante sur $[1 ; +\infty[$.

2°

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+

f' est positive sur \mathbb{R} et ne s'annule qu'en 0, donc f est strictement croissante sur \mathbb{R} .

f' est positive sur $]-\infty ; 0]$ et ne s'annule sur cet intervalle qu'en 0.

f' est négative sur $[0 ; 1]$ et ne s'annule qu'en deux réels de cet intervalle (0 et 1).

f' est positive sur $[1 ; +\infty[$ et ne s'annule sur cet intervalle qu'en 1.

5 $f: x \mapsto \sqrt{\sin x}$.

• $f = \sqrt{\sin}$,

• la fonction sinus est dérivable sur $]0; \pi[$ (car dérivable sur \mathbb{R}), et pour tout x de cet intervalle : $\sin x > 0$,

donc f est dérivable sur $]0; \pi[$, et pour

tout x de $]0; \pi[$: $f'(x) = \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$.

6 1° (E) : $\tan x = 1$.

La fonction tangente est strictement croissante

sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, et $\tan \frac{\pi}{4} = 1$,

donc $\frac{\pi}{4}$ est la seule solution de (E) dans

$]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

2° L'ensemble de définition de la fonction

tangente est la réunion des intervalles $]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[$, k décrivant \mathbb{Z} .

De plus, la fonction tangente est périodique de période π et, d'après la

question 1°, $\frac{\pi}{4}$ est la seule solution de (E) dans $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

Il en résulte que les solutions de (E) dans \mathbb{R} sont les réels $\frac{\pi}{4} + k\pi$, k décrivant \mathbb{Z} .

7 Pour tout x de $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, $f(x) = \sin x - \tan x$.

f est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ et, pour tout x de cet intervalle :

$$f'(x) = \cos x - \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\cos^3 x - 1}{\cos^2 x},$$

donc le signe de $f'(x)$ est celui de $\cos^3 x - 1$.

Pour tout réel x : $\cos x \leq 1$,

donc : $\cos^3 x \leq 1$,

donc, pour tout x de $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$: $f'(x) \leq 0$.

Si u est à valeurs strictement positives sur un intervalle I , alors \sqrt{u} est dérivable sur I et : $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

• Si $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{4}$, alors : $\tan x < \tan \frac{\pi}{4}$;
• si $\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$, alors : $\tan \frac{\pi}{4} < \tan x$.

La fonction cube : $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur \mathbb{R} .

De plus, pour tout x de $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$:

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos^3 x = 1 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 0,$$

donc f' est négative sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ et ne s'annule qu'en 0 , ce

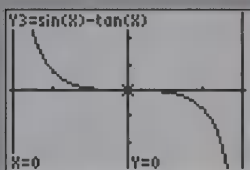
qui prouve que f est strictement décroissante sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

```

Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=4/(X-1)
\Y2=-X+5
\Y3=sin(X)-tan(X)
)
\Y4=
\Y5=
\Y6=
    
```

```

WINDOW
Xmin=-1.570796...
Xmax=1.5707963...
Xscl=1
Ymin=-3
Ymax=3
Yscl=1
Xres=1
    
```



II $f: x \mapsto x^3$.

Soit a un nombre réel ; h étant un réel non nul, déterminons le taux de variation de f entre a et $a+h$:

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{(a+h)^3 - a^3}{h} \\ &= \frac{a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3 - a^3}{h} \\ &= \frac{3a^2h + 3ah^2 + h^3}{h} \\ &= 3a^2 + 3ah + h^2. \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = 3a^2,$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} (3ah + h^2) = 0.$$

ce qui prouve que la fonction f est dérivable en a et : $f'(a) = 3a^2$.

On a ainsi démontré que la dérivée de la fonction cube est la fonction : $x \mapsto 3x^2$.

1 $f: x \mapsto \sqrt{x}$.

L'ensemble de définition de la fonction racine carrée est $[0; +\infty[$.

1° Soit a un réel strictement positif ; pour tout réel h non nul tel que $a+h$ soit positif :

$$\begin{aligned} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} &= \frac{\sqrt{a+h} - \sqrt{a}}{h} \\ &= \frac{(\sqrt{a+h} - \sqrt{a}) \times (\sqrt{a+h} + \sqrt{a})}{h \times (\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} \\ &= \frac{a+h-a}{h \times (\sqrt{a+h} + \sqrt{a})} \\ &= \frac{h}{h \times (\sqrt{a+h} + \sqrt{a})}, \end{aligned}$$

$\sqrt{a+h} + \sqrt{a}$ est appelée « expression conjuguée » de $\sqrt{a+h} - \sqrt{a}$.

donc :
$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{1}{\sqrt{a+h} + \sqrt{a}}.$$

De plus :
$$\lim_{h \rightarrow 0} (\sqrt{a+h} + \sqrt{a}) = \sqrt{a} + \sqrt{a} = 2\sqrt{a},$$

et :
$$\sqrt{a} \neq 0,$$

donc :
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{1}{2\sqrt{a}},$$

ce qui prouve que la fonction f est dérivable en tout réel a strictement positif et :

$$f'(a) = \frac{1}{2\sqrt{a}}.$$

2° Pour tout réel h strictement positif :

$$\frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{\sqrt{h}}{\sqrt{h} \times \sqrt{h}} = \frac{1}{\sqrt{h}},$$

donc :
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = +\infty,$$

ce qui prouve :
 f n'est pas dérivable en 0.

La fonction racine carrée étant de plus continue en 0, on en déduit que sa courbe représentative admet à l'origine O (son point d'abscisse 0) une tangente verticale.

10 1° $f: x \mapsto 1 - 2x + 3x \tan x$.

f a pour ensemble de définition celui de la fonction tangente ; en particulier,

f est définie sur l'intervalle $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$.

f est la somme de la fonction affine :

$$x \mapsto 1 - 2x$$

et de la fonction :

$$x \mapsto 3x \tan x ;$$

de plus :

• pour tout x de $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$, $3x \tan x = x \times (3 \tan x)$,

• $\lim_{x \rightarrow 0} 3 \tan x = 3 \tan 0 = 0$,

ce qui prouve que f est dérivable en 0 et $f'(0) = -2$.

2° $g: x \mapsto 2x + (x+1)^2 \sqrt{x^4 + 3}$.

g est définie sur \mathbb{R} et, pour tout réel h :

$$\begin{aligned} g(-1+h) &= 2(-1+h) + h^2 \sqrt{(-1+h)^4 + 3} \\ &= -2 + 2h + h^2 \sqrt{(-1+h)^4 + 3} \end{aligned}$$

donc : $g(-1+h) = -2 + 2h + h\varphi(h)$,

où φ est la fonction :

$$h \mapsto h\sqrt{(-1+h)^4 + 3}.$$

$\varphi(h)$ tendant vers 0 quand h tend vers 0, on peut conclure :

g est dérivable en -1 et $g'(-1) = 2$.

11 Pour tout x de $\left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$ distinct de $\frac{\pi}{4}$:

$$\frac{\tan x - 1}{4x - \pi} = \frac{1}{4} \times \frac{\tan x - \tan \frac{\pi}{4}}{x - \frac{\pi}{4}},$$

et : $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - \tan \frac{\pi}{4}}{x - \frac{\pi}{4}} = \tan' \left(\frac{\pi}{4} \right) = 1 + \tan^2 \left(\frac{\pi}{4} \right) = 1 + 1^2 = 2$,

donc : $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{4x - \pi} = \frac{1}{4} \times 2 = \frac{1}{2}$.

On peut écrire :
 $f(x) = 1 - 2x + x\varphi(x)$,
où $\varphi(x)$ tend vers 0
quand x tend vers 0.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{(-1+h)^4 + 3} = \sqrt{1+3} = 2.$$

12 1° Le point de \mathcal{C} d'abscisse 0 est l'origine O , et la tangente à \mathcal{C} en ce point est la droite des ordonnées.

Si f était dérivable en 0, elle admettrait un nombre dérivé en 0, qui serait la pente de la tangente à \mathcal{C} en O ; cette tangente serait une droite non verticale, et ne pourrait être la droite des ordonnées.

On en déduit que f n'est pas dérivable en 0.

2° • Soit M un point du plan de coordonnées (x, y) ; \mathcal{C} est la partie du cercle Γ de centre le point I de coordonnées $(1; 0)$, de rayon 1, située dans le demi-plan formé des points d'ordonnée positive, et :

$$M \in \Gamma \Leftrightarrow IM^2 = 1 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1,$$

donc M appartient à \mathcal{C} si, et seulement si :

$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 1 \\ y \geq 0. \end{cases}$$

• De plus :

$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 1 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 1 - (x-1)^2 \\ y \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = x(2-x) \\ y \geq 0, \end{cases}$$

ce qui prouve : $M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow x(2-x) \geq 0$ et $y = \sqrt{x(2-x)}$,

donc :

$$\text{pour tout } x \text{ de } [0; 2], f(x) = \sqrt{x(2-x)}.$$

3° Pour tout x de $[0; 2]$, $f(x) = \sqrt{x(2-x)} = \sqrt{x} \sqrt{2-x}$,

donc, pour tout réel h de $]0; 2]$:

$$\begin{aligned} \frac{f(h) - f(0)}{h} &= \frac{\sqrt{h} \sqrt{2-h}}{h} \\ &= \frac{\sqrt{h} \sqrt{2-h}}{\sqrt{h} \times \sqrt{h}} \\ &= \frac{\sqrt{2-h}}{\sqrt{h}}, \end{aligned}$$

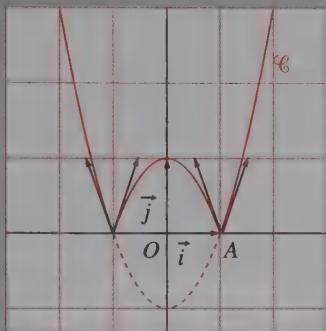
or : $\lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{2-h} = \sqrt{2}$ et $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{h}} = +\infty$,

donc : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = +\infty$,

ce qui prouve :

f n'est pas dérivable en 0.

$f: x \mapsto |x^2 - 1|$.



Notons A le point de \mathcal{C} d'abscisse 1.

• \mathcal{C} admet en A deux demi-tangentes de pente -2 à gauche et 2 à droite. Si f était dérivable en 1 , \mathcal{C} admettrait une tangente (non verticale) en A . On peut alors conclure que **f n'est pas dérivable en 1** .

• Démontrons par le calcul que f n'est pas dérivable en 1 .

Pour tout x de $[1; +\infty[$:

$$x^2 - 1 \geq 0,$$

donc :

$$f(x) = x^2 - 1.$$

Or, la fonction $g: x \mapsto x^2 - 1$ est dérivable sur \mathbb{R} , de dérivée $x \mapsto 2x$; en particulier :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{g(x) - g(1)}{x - 1} = 2 \times 1 = 2.$$

Les fonctions f et g coïncidant sur l'intervalle $[1; +\infty[$, on obtient :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = 2.$$

De façon analogue, pour tout x de $[-1; 1]$:

$$x^2 - 1 \leq 0,$$

donc :

$$f(x) = -(x^2 - 1) = 1 - x^2;$$

f coïncide sur $[-1; 1]$ avec la fonction $x \mapsto 1 - x^2$, qui a pour nombre dérivé -2 en 1 , donc :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -2.$$

On dit que f admet 2 pour nombre dérivé à droite en 1 , et on écrit : $f'_d(1) = 2$.

On dit que f admet -2 pour nombre dérivé à gauche en 1 , et on écrit : $f'_g(1) = -2$.

Si f était dérivable en 1 , alors $\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$ admettrait une limite (finie) quand x tend vers 1 , et en particulier l'égalité suivante serait satisfaite :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1},$$

ce qui n'est pas, donc :

f n'est pas dérivable en 1 .

La fonction f étant paire, il en résulte que f n'est pas dérivable en -1 et :
 $f'_g(-1) = -2, f'_d(-1) = 2.$

14 $\mathcal{C} : xy + 4x + 3y + 7 = 0.$

• $(-2) \times 1 + 4 \times (-2) + 3 \times 1 + 7 = -2 - 8 + 3 + 7 = 0,$

donc le point $A(-2; 1)$ appartient à \mathcal{C} .

• Soient x et y des nombres réels, et M le point du plan de coordonnées $(x; y)$;

$$M \in \mathcal{C} \Leftrightarrow xy + 4x + 3y + 7 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+3)y = -4x-7,$$

Aucun point d'abscisse -3 n'appartient à \mathcal{C} .

donc \mathcal{C} est la courbe représentative de la fonction $f : x \mapsto \frac{-4x-7}{x+3}$.

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$; la fonction rationnelle f est dérivable en tout réel de son ensemble de définition, en particulier en -2 , ce qui prouve :

la courbe \mathcal{C} admet une tangente au point $A(-2; 1)$.

• Pour tout réel x distinct de -3 :

$$f'(x) = \frac{-4(x+3) - (-4x-7) \times 1}{(x+3)^2}$$

$$= \frac{-5}{(x+3)^2},$$

donc : $f'(-2) = \frac{-5}{(-2+3)^2} = -5.$

On en déduit qu'une équation de la tangente T à la courbe \mathcal{C} au point $A(-2; 1)$ est :

$$y = -5(x + 2) + 1,$$

ou encore :

$$y = -5x - 9.$$

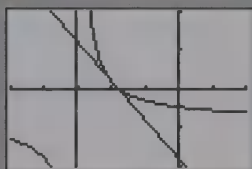
$A(-2; 1)$ appartenant à la courbe représentative de f :
 $f(-2) = 1.$

```

Plot1 Plot2 Plot3
\Y1(-4X-7)/(X+3
)
\Y2-5X-9
\Y3=■
\Y4=
\Y5=
\Y6=
    
```

```

WINDOW
Xmin=-5
Xmax=2
Xscl=1
Ymin=-10
Ymax=10
Yscl=5
Xres=1
    
```



15 $\mathcal{P} : y = ax^2 + bx + c, a > 0.$

1° Soient x_0 un nombre réel et M_0 le point de \mathcal{P} d'abscisse x_0 .

Notons f le polynôme du second degré : $x \mapsto ax^2 + bx + c$ dont \mathcal{P} est la courbe représentative.

f est dérivable sur \mathbb{R} et, pour tout réel x :

$$f'(x) = 2ax + b.$$

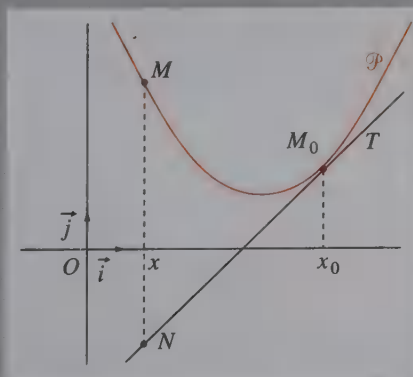
Une équation de la tangente T à \mathcal{P} en M_0 est :

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0),$$

c'est-à-dire : $y = (2ax_0 + b)(x - x_0) + ax_0^2 + bx_0 + c,$

ou encore : $y = (2ax_0 + b)x - ax_0^2 + c.$

$$2^\circ \begin{cases} \mathcal{P} : y = ax^2 + bx + c \\ T : y = (2ax_0 + b)x - ax_0^2 + c. \end{cases}$$



Soient x un nombre réel, M le point de \mathcal{P} d'abscisse x et N celui de T de même abscisse.

$$\begin{aligned} y_M - y_N &= ax^2 + bx + c - ((2ax_0 + b)x - ax_0^2 + c) \\ &= a(x^2 - 2x_0x + x_0^2) \\ &= a(x - x_0)^2, \end{aligned}$$

donc, le réel a étant positif :

$$y_M - y_N \geq 0,$$

ce qui prouve que \mathcal{P} est située au dessus de T .

Ceci étant établi pour toute valeur de x_0 , donc pour toute tangente à \mathcal{P} , on peut conclure :

\mathcal{P} est située au-dessus de chacune de ses tangentes.

3° Soit M un point de coordonnées (x, y) ; il existe une tangente à \mathcal{P} passant par M si, et seulement si, il existe un réel x_0 tel que M appartienne à la tangente à \mathcal{P} en son point d'abscisse x_0 , c'est-à-dire, d'après la question 1°, si, et seulement si, l'équation (E) d'inconnue x_0 :

$$y = (2ax_0 + b)x - ax_0^2 + c$$

admet au moins une solution dans \mathbb{R} .

Pour tout réel x_0 :

$$(E) \Leftrightarrow ax_0^2 - 2ax_0x - bx - c + y = 0.$$

L'équation (E) d'inconnue x_0 est donc du second degré ; soit Δ son discriminant :

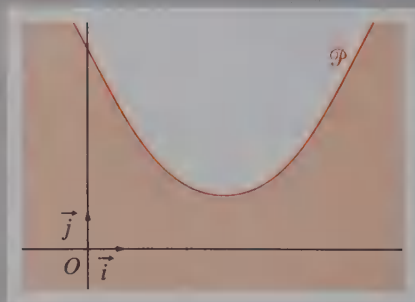
$$\Delta = (-2ax)^2 - 4a(-bx - c + y) = 4a(ax^2 + bx + c - y);$$

(E) admet au moins une solution dans \mathbb{R} si, et seulement si, son discriminant Δ est positif ou nul, or :

$$\Delta \geq 0 \Leftrightarrow ax^2 + bx + c - y \geq 0 \Leftrightarrow y \leq ax^2 + bx + c,$$

ce qui prouve :

l'ensemble des points M tels qu'il existe une tangente à \mathcal{P} passant par M est la partie du plan située en dessous (au sens large) de la parabole \mathcal{P} .



16 1° L'accélération du mobile est la dérivée de sa vitesse, et, à tout instant t :

$$x'(t) = 2t,$$

donc : $x''(t) = 2$.

L'accélération étant constante, on dit que

le mobile est animé

d'un mouvement uniformément varié.

2° À tout instant t : $x(t) = 2t$,

donc il existe un réel C tel que, à tout instant t :

$$x(t) = t^2 + C;$$

de plus, à l'instant initial $t = 0$, le mobile est à

l'origine O , donc : $x(0) = 0$,

d'où l'on déduit : $C = 0$.

Par conséquent : à tout instant t , $x'(t) = t^2$,

et en particulier : $x'(3) = 9$,

autrement dit :

à l'instant $t = 3$, le mobile a pour abscisse 9.

x'' désigne la
dérivée de x' :
 $x'' = (x')'$.

En physique, on
note souvent :
 \dot{x} à la place de x' ,
 \ddot{x} à la place de x'' .

Si x s'exprime en mètre et le temps en
seconde, alors la vitesse s'exprime en
m/s et l'accélération en m/s².

17 À tout instant t , l'abscisse $x(t)$ du mobile vérifie :

$$x(t) = 3 \cos \left(2t + \frac{\pi}{4} \right),$$

on en déduit sa vitesse $x'(t)$:

$$x'(t) = -2 \times 3 \sin \left(2t + \frac{\pi}{4} \right) = -6 \sin \left(2t + \frac{\pi}{4} \right),$$

puis son accélération $x''(t)$:

$$x''(t) = 2 \times (-6) \cos \left(2t + \frac{\pi}{4} \right) = -12 \cos \left(2t + \frac{\pi}{4} \right).$$

Il en résulte, qu'à tout instant t :

$$x''(t) = -4x(t)$$

ce qui prouve :

l'accélération est proportionnelle à l'abscisse.

18 $f: x \mapsto \sqrt{x} \sin x$.

1° La fonction racine carrée a pour ensemble de définition $]0; +\infty[$, et est dérivable sur $]0; +\infty[$; d'autre part, la fonction sinus est définie et dérivable sur \mathbb{R} .

Comme produit des fonctions $x \mapsto \sqrt{x}$ et $x \mapsto \sin x$, f a pour ensemble de définition $]0; +\infty[$ et est dérivable sur $]0; +\infty[$.

Pour tout réel x strictement positif :

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \sin x + \sqrt{x} \times \cos x = \frac{\sin x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} \cos x.$$

2° Pour tout réel h strictement positif :

$$\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{\sqrt{h} \sin h}{h} = \sqrt{h} \times \frac{\sin h}{h},$$

et on sait : $\lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{h} = 0$, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin h}{h} = 1$,

donc : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = 0$,

ce qui prouve que f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

3° D'après les deux questions précédentes, f est dérivable sur son ensemble de définition $]0; +\infty[$ et :

$$\begin{cases} f'(0) = 0, \\ f'(x) = \frac{\sin x}{2\sqrt{x}} + \sqrt{x} \cos x \text{ si } x > 0. \end{cases}$$

19 1° $1 + x + x^2 + \dots + x^n$ est la somme des $n + 1$ premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison x ; x étant distinct de 1 :

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

2° Notons f la fonction :

$$t \mapsto 1 + t + t^2 + \dots + t^n;$$

f étant un polynôme, elle est dérivable sur \mathbb{R} et, pour tout réel t :

$$f'(t) = 1 + 2t + 3t^2 + \dots + nt^{n-1}.$$

De même, notons g la fonction :

$$t \mapsto \frac{1 - t^{n+1}}{1 - t}.$$

Voir l'exercice 6 du chapitre 1.

g a pour ensemble de définition $\mathbb{R} \setminus \{1\}$; en tant que fonction rationnelle, g est dérivable sur son ensemble de définition et, pour tout réel t distinct de 1 :

$$g'(t) = \frac{-(n+1)t^n \times (1-t) - (1-t^{n+1}) \times (-1)}{(1-t)^2}$$

$$= \frac{1 - (n+1)t^n + nt^{n+1}}{(1-t)^2}.$$

D'après la question 1° :

pour tout réel t distinct de 1 : $f(t) = g(t)$,

donc, pour tout réel t distinct de 1 : $f'(t) = g'(t)$,

d'où l'on déduit, le réel x étant distinct de 1 :

$$1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} = \frac{1 - (n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}.$$

Si $x=1$, alors :
 $1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} = 1 + 2 + \dots + n$,
 et $1 + 2 + \dots + n$ est la somme des n premiers entiers naturels non nuls, qui sont bien sûr en progression arithmétique de raison 1, donc :
 $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

20 1° $f : x \mapsto -3x + \cos 2x$.

f est dérivable sur \mathbb{R} et, pour tout réel x :

$$f'(x) = -3 - 2 \sin 2x ;$$

de plus : $-1 \leq \sin 2x \leq 1$,

donc : $-2 \leq -2 \sin 2x \leq 2$,

donc : $-5 \leq -3 - 2 \sin 2x \leq -1$,

c'est-à-dire : $-5 \leq f'(x) \leq -1$.

On en déduit :

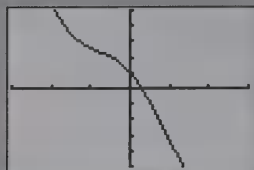
pour tout réel x , $f'(x) < 0$,

ce qui prouve :

f est strictement décroissante sur \mathbb{R} .

```
Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=-3X+cos(2X)
\Y2=
\Y3=
\Y4=
\Y5=
\Y6=
\Y7=
```

```
WINDOW
Xmin=-3
Xmax=3
Xscl=1
Ymin=-5
Ymax=5
Yscl=1
Xres=1
```



$$2^\circ f: x \mapsto \frac{2x-3}{x+1}$$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$; f étant une fonction rationnelle, elle est dérivable sur son ensemble de définition et, pour tout réel x distinct de -1 :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2 \times (x+1) - (2x-3) \times 1}{(x+1)^2} \\ &= \frac{5}{(x+1)^2}, \end{aligned}$$

donc :

$$f'(x) > 0,$$

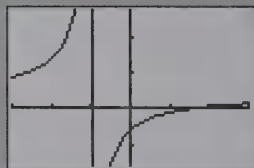
ce qui implique :

f est strictement croissante
sur $]-\infty; -1[$ et sur $]-1; +\infty[$.

Attention !
 f n'est pas croissante sur
la réunion de ces deux
intervalles

```
Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=-3X+cos(2X)
\Y2=(2X-3)/(X+1)
\Y3=
\Y4=
\Y5=
\Y6=
```

```
WINDOW
Xmin=-3
Xmax=3
Xscl=1
Ymin=-8
Ymax=14
Yscl=5
Xres=1
```



$$3^\circ f: x \mapsto \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$; f est dérivable sur son ensemble de définition et, pour tout réel x non nul :

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x^3} = \frac{2-x}{x^3}$$

Dressons le tableau
de signes de f' :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$-x+2$	+	+	0	-	
x^3	-	0	+	+	
$f'(x)$	-		+	0	-

On en déduit que f est :

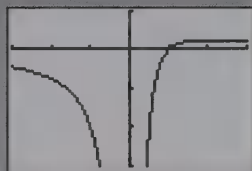
- strictement décroissante sur chacun des intervalles :

$$]-\infty ; 0[\text{ et }]2 ; +\infty[,$$

- strictement croissante sur l'intervalle $]0 ; 2]$.

```
Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=-3X+cos(2X)
\Y2=(2X-3)/(X+1)
\Y3=1/X-1/X^2
\Y4=
\Y5=
\Y6=
```

```
WINDOW
Xmin=-3
Xmax=3
Xscl=1
Ymin=-3
Ymax=1
Yscl=1
Xres=1
```



$$4^\circ f: x \mapsto \frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

$\mathcal{D}_f =]0 ; +\infty[$; f est dérivable sur son ensemble de définition et, pour tout réel x strictement positif :

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{x^2} - \frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2} \\ &= -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{2x\sqrt{x}}, \end{aligned}$$

Pour tout réel positif :
 $x = \sqrt{x} \times \sqrt{x}$.

$$\text{donc : } f'(x) = -\frac{2}{2x^2} + \frac{\sqrt{x}}{2x^2},$$

$$\text{donc : } f'(x) = \frac{\sqrt{x} - 2}{2x^2},$$

et $f'(x)$ est du signe de $\sqrt{x} - 2$.

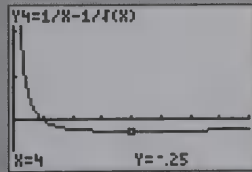
$$\text{Il vient : } \begin{cases} f'(x) < 0 & \text{si } 0 < x < 4, \\ f'(4) = 0, \\ f'(x) > 0 & \text{si } x > 4. \end{cases}$$

ce qui prouve :

f est strictement décroissante sur $]0 ; 4]$
et strictement croissante sur $[4 ; +\infty[$.

```
Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=-3X+cos(2X)
\Y2=(2X-3)/(X+1)
\Y3=1/X-1/X^2
\Y4=1/X-1/√(X)
\Y5=
\Y6=
```

```
WINDOW
Xmin=0
Xmax=8
Xscl=1
Ymin=-1
Ymax=2.5
Yscl=1
Xres=1
```



21 1° $f: x \mapsto (x^3 + 2x + 1)^{2003}$.

f est un polynôme, donc f est définie et dérivable sur \mathbb{R} et, pour tout réel x :

$$f'(x) = 2003(3x^2 + 2)(x^3 + 2x + 1)^{2002}.$$

Si n est un entier naturel non nul et si u est dérivable sur un intervalle I , alors u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$.

2° $f: x \mapsto \sqrt{x^2 + 1}$.

f est la composée :

- de la fonction $x \mapsto x^2 + 1$, dérivable et à valeurs strictement positives sur \mathbb{R} ,

- par la fonction racine carrée $t \mapsto \sqrt{t}$, dérivable sur $]0; +\infty[$,

donc f est dérivable sur \mathbb{R} et, pour tout réel x :

$$f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}.$$

Si u est dérivable et à valeurs strictement positives sur un intervalle I , alors \sqrt{u} est dérivable sur I et $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

3° $f: x \mapsto \sqrt{x^2 - 4x + 5}$.

Le polynôme $x \mapsto x^2 - 4x + 5$ est dérivable sur \mathbb{R} .

De plus, pour tout réel x :

$$x^2 - 4x + 5 = (x - 2)^2 + 1,$$

donc : $x^2 - 4x + 5 > 0$.

La fonction racine carrée étant dérivable sur $]0; +\infty[$, on en déduit que f est dérivable sur \mathbb{R} .

Enfin, pour tout réel x :

$$f'(x) = \frac{2x - 4}{2\sqrt{x^2 - 4x + 5}} = \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}}.$$

f est la composée :
• de $x \mapsto x^2 - 4x + 5$,
• par $t \mapsto \sqrt{t}$.

4° $f: x \mapsto \sin(x^3)$.

f est la composée de la fonction cube $x \mapsto x^3$ par la fonction sinus, toutes deux dérivables sur \mathbb{R} , donc f est dérivable sur \mathbb{R} et, pour tout réel x :

$$f'(x) = 3x^2 \cos(x^3).$$

5° $f: x \mapsto \sin^3 x$.

f est la composée de la fonction sinus par la fonction cube $x \mapsto x^3$, toutes deux dérivables sur \mathbb{R} , donc f est dérivable sur \mathbb{R} et, pour tout réel x :

$$f'(x) = 3 \cos x \sin^2 x.$$

$$6^\circ f: x \mapsto \tan^2 x.$$

La fonction tangente étant dérivable sur son ensemble de définition \mathcal{D} , f est dérivable sur \mathcal{D} et, pour tout x de \mathcal{D} :

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 \times \tan'(x) \times \tan x \\ &= 2(1 + \tan^2 x) \tan x. \end{aligned}$$

\mathcal{D} est la réunion des intervalles :
 $\left] -\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$,
 k décrivant \mathbb{Z} .

On a également, pour tout x de \mathcal{D} :

$$f'(x) = 2 \times \frac{1}{\cos^2 x} \times \tan x = \frac{2 \tan x}{\cos^2 x} = \frac{2 \sin x}{\cos^3 x}.$$

$$22 \quad 1^\circ f: x \mapsto \frac{1+x^3}{2-x}.$$

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}.$$

f étant une fonction rationnelle, elle est dérivable sur son ensemble de définition ; pour tout réel x distinct de 2 :

$$f'(x) = \frac{3x^2 \times (2-x) - (1+x^3) \times (-1)}{(2-x)^2} = \frac{-2x^3 + 6x^2 + 1}{(2-x)^2}.$$

Une fonction rationnelle est le quotient de deux polynômes.

$$2^\circ g: x \mapsto \frac{1-x^3}{2+x}.$$

$\mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$; pour tout x de \mathcal{D}_g , $-x$ appartient à \mathcal{D}_f et $g(x) = f(-x)$, donc, d'après la question 1°, g est dérivable sur \mathcal{D}_g et, pour tout réel x distinct de -2 :

$$g'(x) = -f'(-x) = -\frac{-2(-x)^3 + 6(-x)^2 + 1}{(2-(-x))^2} = -\frac{2x^3 + 6x^2 + 1}{(2+x)^2}.$$

g est la composée de $x \mapsto -x$ par f .

Bien sûr, on pourrait calculer directement $g'(x)$.

23 1° La fonction tangente est dérivable sur son ensemble de définition, en particulier sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$, qui contient 0.

On en déduit que la courbe représentative \mathcal{C} de la fonction tangente admet en son point d'abscisse 0 une tangente T dont une équation est :

$$y = \tan'(0)(x - 0) + \tan 0,$$

or :

$$\tan 0 = 0 \text{ et } \tan'(0) = 1 + \tan^2 0 = 1,$$

donc T admet pour équation $y = x$.

2° $f : x \mapsto \tan x - x$.

f est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ et, pour tout x de cet intervalle :

$$f'(x) = \tan'(x) - 1 = 1 + \tan^2 x - 1 = \tan^2 x,$$

$$\text{donc : } \begin{cases} f'(0) = 0, \\ f'(x) > 0 \text{ si } x \neq 0, \end{cases}$$

ce qui implique que f est strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$.

Comme de plus :

$$f(0) = 0,$$

on en déduit :

$$\begin{cases} f(x) < 0 \text{ si } -\frac{\pi}{2} < x < 0, \\ f(0) = 0, \\ f(x) > 0 \text{ si } 0 < x < \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

$$3^\circ \begin{cases} \mathcal{C} : y = \tan x \\ T : y = x. \end{cases}$$

D'après les questions 1° et 2° :

- \mathcal{C} est située en dessous de T dans la bande de plan d'inéquations $-\frac{\pi}{2} < x \leq 0$,
- \mathcal{C} est située au-dessus de T dans la bande de plan d'inéquations $0 \leq x < \frac{\pi}{2}$,
- l'origine O est le seul point commun à \mathcal{C} et T .

Le point d'abscisse 0 de \mathcal{C} est l'origine O .

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
$f(x)$			

On aurait pu remarquer que f est impaire, et n'étudier son signe que sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right[$.

```

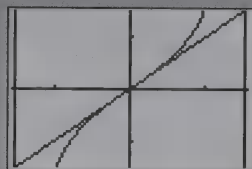
Plot1 Plot2 Plot3
Y1=tan(X)
Y2=X
Y3=
Y4=
Y5=
Y6=
Y7=

```

```

WINDOW
Xmin=-1.570796...
Xmax=1.5707963...
Xscl=1
Ymin=-1.5
Ymax=1.5
Yscl=1
Xres=1

```



24 $f: x \mapsto 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \cos x$.

1° La fonction f admet des dérivées à tout ordre sur \mathbb{R} et, pour tout réel x :

$$f'(x) = -x + \frac{x^3}{6} + \sin x,$$

$$f''(x) = -1 + \frac{x^2}{2} + \cos x,$$

$$f^{(3)}(x) = x - \sin x,$$

$$f^{(4)}(x) = 1 - \cos x.$$

On peut remarquer :

$$f(0) = f'(0) = f''(0) = f^{(3)}(0) = f^{(4)}(0) = 0.$$

2°

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
signe de $f^{(4)}(x)$	+	0	+
sens de variation de $f^{(3)}$	↗ 0 ↗		
signe de $f^{(3)}(x)$	-	0	+
sens de variation de f''	↘ 0 ↗		
signe de $f''(x)$	+	0	+
sens de variation de f'	↗ 0 ↗		
signe de $f'(x)$	-	0	+
sens de variation de f	↘ 0 ↗		
signe de $f(x)$	+	0	+

3° • De la dernière ligne du tableau précédent, on déduit que, pour tout x de

$$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]:$$

$$f(x) \geq 0$$

c'est-à-dire :

$$\cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

De même, la ligne « signe de $f''(x)$ » montre que, pour tout x de $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$:

$$f''(x) \geq 0,$$

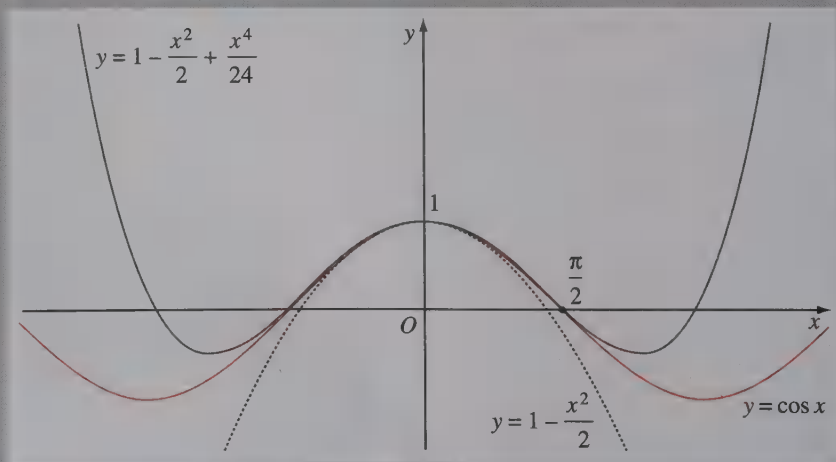
c'est-à-dire :

$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x.$$

On peut donc conclure :

$$\text{pour tout } x \text{ de } \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

Il aurait suffi d'établir ces inégalités sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$;
 en effet, la parité de chacune des fonctions
 $x \mapsto 1 - \frac{x^2}{2}$, $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$
 permettait alors d'affirmer que ces inégalités étaient
 aussi vérifiées sur $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$.



• L'encadrement précédent permet d'écrire :

$$1 - \frac{0,1^2}{2} \leq \cos(0,1) \leq 1 - \frac{0,1^2}{2} + \frac{0,1^4}{24};$$

de plus : $1 - \frac{0,1^2}{2} = 1 - 0,005 = 0,995,$

$$\frac{0,1^4}{24} \leq \frac{0,1^4}{20} \text{ et } \frac{0,1^4}{20} = 5 \times 10^{-6},$$

donc : $0,995 < \cos(0,1) < 0,995\ 005.$

cos(.1)
 .9950041653

25 1° Le volume V du cône est donné par la formule :

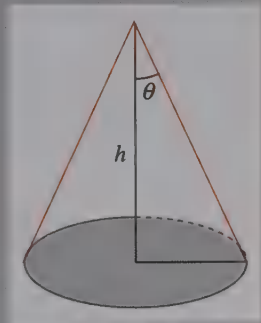
$$V = \frac{1}{3} h \times B,$$

où B est l'aire de la base.

La base étant un disque de rayon $h \tan \theta$, il vient :

$$V = \frac{1}{3} h \times \pi (h \tan \theta)^2,$$

c'est-à-dire : $V = \frac{\pi h^3}{3} \tan^2 \theta.$



2° Pour tout x de $]0; 1[$, $f(x) = \frac{(1+x)^2}{x(1-x)}$.

f est dérivable sur $]0; 1[$ et, pour tout x de cet intervalle :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2(1+x) \times x(1-x) - (1+x)^2 \times (1-2x)}{x^2(1-x)^2} \\ &= \frac{(1+x)(2x - 2x^2 - 1 - x + 2x + 2x^2)}{x^2(1-x)^2} \\ &= \frac{(1+x)(3x-1)}{x^2(1-x)^2}, \end{aligned}$$

donc le signe de $f'(x)$ est celui de $3x-1$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} f'(x) < 0 & \text{si } 0 < x < \frac{1}{3}, \\ f'(x) = 0 & \text{si } x = \frac{1}{3}, \\ f'(x) > 0 & \text{si } x > \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Il en résulte que f est strictement décroissante sur $]0; \frac{1}{3}]$ et strictement croissante sur $[\frac{1}{3}; 1[$.

x	0	$\frac{1}{3}$	1
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	↘ 8 ↗		

De plus :

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{\left(1 + \frac{1}{3}\right)^2}{\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3}\right)} = \frac{16}{9} \times \frac{9}{2} = 8,$$

donc le minimum de f est 8, et il est atteint en $\frac{1}{3}$.

3° Cône de volume minimal

a. • Le volume V du cône vérifie :

$$V = \frac{1}{3} \pi R^3 f(\sin \theta),$$

et, lorsque θ décrit $]0; \frac{\pi}{2}[$, $\sin \theta$ décrit $]0; 1[$.

• D'après la question 2°, il existe un cône de volume minimal : celui dont le demi-angle au sommet θ_0 vérifie : $\sin \theta_0 = \frac{1}{3}$.

Le volume minimal V_0 est alors $\frac{1}{3} \pi R^3 \times 8$,

c'est-à-dire :

$$V_0 = \frac{8}{3} \pi R^3.$$

Noter que le volume de ce cône est le double de celui de la sphère.

b. • D'après les questions 1° et 3° a., la hauteur h_0 du cône de volume minimal satisfait à la relation :

$$V_0 = \frac{\pi h_0^3}{3} \tan^2 \theta_0,$$

c'est-à-dire : $\frac{8}{3} \pi R^3 = \frac{\pi h_0^3}{3} \tan^2 \theta_0,$

donc : $h_0^3 = \frac{8R^3}{\tan^2 \theta_0}.$

$$\bullet \tan^2 \theta_0 = \frac{\sin^2 \theta_0}{\cos^2 \theta_0} = \frac{\sin^2 \theta_0}{1 - \sin^2 \theta_0} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^2}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{1}{9} \times \frac{9}{8} = \frac{1}{8},$$

donc :

$$\begin{aligned}h_0^3 &= 8 \times 8R^3 \\ &= 2^3 \times 2^3 \times R^3 \\ &= (4R)^3,\end{aligned}$$

ce qui permet de conclure :

$$h_0 = 4R.$$

26 1° • B est le point du cercle trigonométrique tel que $(\vec{i}, \overrightarrow{OB}) = \alpha$,

donc : $x_B = \cos \alpha$ et $y_B = \sin \alpha$.

• $BH = |y_B| = \sin \alpha$,

$$\begin{aligned}AH &= |x_H - x_A| = x_H - x_A = x_B - x_A \\ &= \cos \alpha + 1.\end{aligned}$$

• ABC étant un triangle de base $[BC]$ et de hauteur correspondante $[AH]$, son aire $\mathcal{A}(ABC)$ vérifie :

$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{AH \times BC}{2},$$

donc :

$$\mathcal{A}(ABC) = \sin \alpha (1 + \cos \alpha).$$

2° Pour tout x de $[0; \pi]$:

$$f(x) = \sin x (1 + \cos x).$$

a. f est dérivable sur $[0; \pi]$ et, pour tout x de cet intervalle :

$$\begin{aligned}f'(x) &= \cos x (1 + \cos x) + \sin x \times (-\sin x) \\ &= \cos x (1 + \cos x) - \sin^2 x \\ &= \cos x + \cos^2 x - (1 - \cos^2 x),\end{aligned}$$

donc :

$$f'(x) = 2 \cos^2 x + \cos x - 1;$$

de plus :

$$\begin{aligned}(2 \cos x - 1)(\cos x + 1) &= 2 \cos^2 x - \cos x + 2 \cos x - 1 \\ &= 2 \cos^2 x + \cos x - 1,\end{aligned}$$

donc, finalement :

$$\text{pour tout } x \text{ de } [0; \pi], f'(x) = (2 \cos x - 1)(\cos x + 1).$$

b. $\cos \pi = -1$, donc $f'(\pi) = 0$.

• D'autre part, pour tout x de $[0; \pi[$, $\cos x$ est strictement supérieur à -1 , donc $\cos x + 1$ est strictement positif et le signe de $f'(x)$ est celui de $2 \cos x - 1$.

*B est au-dessus de (Ox) ,
donc : $y_B \geq 0$.*

*ABC étant isocèle en A, sa
hauteur issue de A est aussi la
médiatrice de $[BC]$;
 $OB = OC$, donc O est un
point de la hauteur (AH) .*

$\sin' = \cos$ et $\cos' = -\sin$.

*Pour tout réel x :
 $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.*

• La fonction $x \mapsto 2 \cos x - 1$ est strictement décroissante sur $[0 ; \pi]$ et s'annule en $\frac{\pi}{3}$, donc :

$$\begin{cases} 2 \cos x - 1 > 0 & \text{si } 0 \leq x < \frac{\pi}{3}, \\ 2 \cos x - 1 = 0 & \text{si } x = \frac{\pi}{3}, \\ 2 \cos x - 1 < 0 & \text{si } \frac{\pi}{3} < x \leq \pi. \end{cases}$$

Les fonctions \cos et $x \mapsto 2 \cos x - 1$ ont le même sens de variation.

Enfin :

$$f(0) = \sin 0 \times (1 + \cos 0) = 0,$$

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin \frac{\pi}{3} \left(1 + \cos \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

$$f(\pi) = \sin \pi (1 + \cos \pi) = 0 \times (1 - 1) = 0,$$

et on obtient le tableau suivant :

x	0	$\frac{\pi}{3}$	π
$f'(x)$		+	0
$f(x)$	0	$\frac{3\sqrt{3}}{4}$	0

3° • L'aire $\mathcal{A}(ABC)$ du triangle ABC vérifie :

$$\mathcal{A}(ABC) = f(\alpha),$$

donc, d'après la question 2° :

elle est maximale lorsque $\alpha = \frac{\pi}{3}$, et l'aire maximale est égale à $\frac{3\sqrt{3}}{4}$.

• D'autre part, l'angle inscrit \widehat{BAC} et l'angle au centre \widehat{BOC} interceptent le même arc de cercle \widehat{BC} , donc :

$$\widehat{BAC} = \frac{1}{2} \widehat{BOC}.$$

L'angle inscrit vaut la moitié de l'angle au centre correspondant.

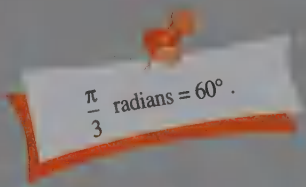
de plus, le triangle OBC est isocèle de sommet principal O et H est le milieu de $[BC]$, donc :

$$\widehat{BOC} = 2\widehat{HOB} = 2\alpha;$$

il vient : $\widehat{CAB} = \alpha$.

Un des angles du triangle isocèle ABC d'aire maximale est donc de $\frac{\pi}{3}$ radians, ce qui prouve :

le triangle ABC d'aire maximale est équilatéral.


$$\frac{\pi}{3} \text{ radians} = 60^\circ.$$

27 1° Le triangle AOB est rectangle en O , donc :

$$\tan \widehat{OAB} = \frac{OB}{OA},$$

c'est-à-dire : $\tan \theta = \frac{y_B}{x_A}$.

De même, en appelant H le point de (Ox) d'abscisse 2, le triangle AHP est rectangle en H , donc :

$$\tan \widehat{HAP} = \frac{HP}{HA},$$

c'est-à-dire : $\tan \theta = \frac{y_P}{x_A - x_H} = \frac{1}{x_A - 2}$.

On en déduit :

$$\bullet x_A - 2 = \frac{1}{\tan \theta}, \text{ d'où : } x_A = 2 + \frac{1}{\tan \theta};$$

$$\bullet y_B = x_A \times \tan \theta = \left(2 + \frac{1}{\tan \theta}\right) \tan \theta, \text{ autrement dit : } y_B = 1 + 2 \tan \theta.$$

L'aire $\mathcal{A}(OAB)$ du triangle OAB , rectangle en O , vérifie :

$$\mathcal{A}(OAB) = \frac{OA \times OB}{2} = \frac{x_A \times y_B}{2},$$

c'est-à-dire : $\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2} \left(2 + \frac{1}{\tan \theta}\right) (1 + 2 \tan \theta)$.

2° Pour tout x de $]0; +\infty[$, $f(x) = \left(2 + \frac{1}{x}\right) (1 + 2x)$.

f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et, pour tout x de cet intervalle :

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} (1 + 2x) + \left(2 + \frac{1}{x}\right) \times 2 = \frac{-1 - 2x + 4x^2 + 2x}{x^2} = \frac{4x^2 - 1}{x^2},$$

donc :

$$f'(x) = \frac{(2x - 1)(2x + 1)}{x^2},$$

ce qui prouve que $f'(x)$ est du signe de $2x - 1$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} f'(x) < 0 & \text{si } 0 < x < \frac{1}{2}, \\ f'(x) = 0 & \text{si } x = \frac{1}{2}, \\ f'(x) > 0 & \text{si } x > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Il en résulte que f est strictement décroissante sur $]0 ; \frac{1}{2}[$ et strictement croissante sur $]\frac{1}{2} ; +\infty[$.

On en déduit que f admet un minimum, atteint en $\frac{1}{2}$;

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(2 + \frac{1}{2}\right) \times \left(1 + 2 \times \frac{1}{2}\right) = (2 + 2) \times 2 = 8, \text{ donc :}$$

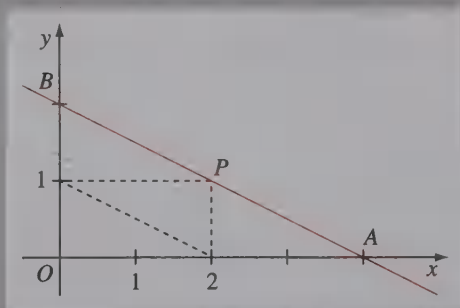
le minimum de f sur $]0 ; +\infty[$ est 8.

3° L'aire $\mathcal{A}(OAB)$ du triangle OAB vérifie : $\mathcal{A}(OAB) = \frac{1}{2} f(\tan \theta)$.

De plus, lorsque θ décrit $]0 ; \frac{\pi}{2}[$, $\tan \theta$ décrit $]0 ; +\infty[$.

L'aire du triangle OAB est donc minimale lorsque $\tan \theta = \frac{1}{2}$, et a pour valeur la moitié du minimum de f ; il vient :

- l'aire minimale du triangle OAB est égale à 4 ;
- la droite (AB) correspondante est la parallèle passant par le point P à la droite passant par les points de coordonnées $(0 ; 1)$ et $(2 ; 0)$.



FONCTION EXPONENTIELLE FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN, FONCTIONS EXPONENTIELLES DE BASE a

Rappel de cours

I- La fonction exponentielle

■ Définition

La fonction exponentielle est l'unique fonction f , dérivable sur \mathbb{R} , telle que :

$$f' = f \text{ et } f(0) = 1.$$

■ Notation

La fonction exponentielle, notée \exp , vérifie :

$$\text{pour tous réels } x \text{ et } y, \exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y),$$

et il existe un et un seul réel, noté e , tel que :

$$\exp(e) = 1 \quad (e \approx 2,718),$$

ce qui justifie la notation :

$$\text{pour tout réel } x, \exp(x) = e^x.$$

■ Signe

$$\text{Pour tout réel } x, e^x > 0.$$

■ Sens de variation

$x \mapsto e^x$ est strictement croissante sur \mathbb{R} , donc, pour tous réels x et y :

$$x < y \Leftrightarrow e^x < e^y$$

$$x = y \Leftrightarrow e^x = e^y.$$

■ Propriétés algébriques

Pour tous réels x , y et tout entier n :

$$e^{x+y} = e^x e^y$$

$$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$$

$$e^{\frac{x}{2}} = \sqrt{e^x}$$

$$e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$$

$$(e^x)^n = e^{nx}$$

■ Limites

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \qquad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \qquad \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$$

■ Dérivée

- \exp est dérivable (donc continue) sur \mathbb{R} , et, pour tout réel x :

$$\exp'(x) = \exp(x) = e^x$$

- L'approximation affine au voisinage de 0 de la fonction exponentielle est :

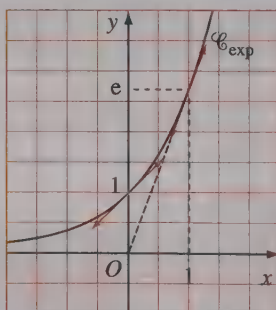
$$h \mapsto 1 + h.$$

- Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I , alors e^u est dérivable sur I et, pour tout x de I :

$$(e^u)'(x) = u'(x) e^{u(x)}$$

■ Tableau de variations et courbe

x	$-\infty$	$+\infty$
$\exp'(x)$	+	
e^x	0	$+\infty$



- La tangente au point d'abscisse 0 a pour équation : $y = x + 1$;
- celle au point d'abscisse 1 a pour équation : $y = ex$ (elle passe par O).

■ Équation $e^x = y$

Pour tout réel y strictement positif, l'équation : $e^x = y$, d'inconnue x , admet une seule solution dans \mathbb{R} .

■ Équation différentielle $f' = kf$

Soit k un nombre réel.

Les fonctions f dérivables sur \mathbb{R} qui vérifient : $f' = kf$ sont les fonctions : $x \mapsto A e^{kx}$, A décrivant \mathbb{R} .

II- La fonction logarithme népérien

■ Définition

La fonction logarithme népérien, notée \ln , est la bijection réciproque de la fonction \exp :

pour tout x de $]0; +\infty[$ et tout y de \mathbb{R} , $\ln x = y \Leftrightarrow e^y = x$.

■ Premières propriétés

- La fonction \ln a pour ensemble de définition $]0; +\infty[$; elle vérifie : pour tous réels x et y strictement positifs, $\ln(xy) = \ln x + \ln y$.
- Pour tout réel x , $\ln(e^x) = x$.
- Pour tout réel x strictement positif, $e^{\ln x} = x$.
- \ln s'annule en 1 : $\ln 1 = 0$.

■ Signe

x	0	1	$+\infty$
$\ln x$	-	0	+

■ Propriétés algébriques

Pour tous x et y de $]0; +\infty[$ et tout entier n :

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y$$

$$\ln \frac{1}{x} = -\ln x$$

$$\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$$

$$\ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln x$$

$$\ln x^n = n \ln x$$

■ Limites

$$\lim_{+\infty} \ln = +\infty$$

$$\lim_{0} \ln = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$$

■ Dérivée, sens de variation

• \ln est dérivable (donc continue) sur $]0; +\infty[$ et, pour tout réel x strictement positif :

$$\ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

• L'approximation affine au voisinage de 0 de la fonction $h \mapsto \ln(1+h)$ est $h \mapsto h$.

• \ln est strictement croissante sur $]0; +\infty[$, donc, pour tous x et y de $]0; +\infty[$:

$$x < y \Leftrightarrow \ln x < \ln y,$$

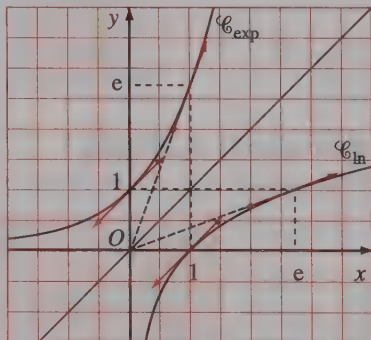
$$x = y \Leftrightarrow \ln x = \ln y.$$

• Si une fonction u est positive et ne s'annule pas sur un intervalle I , alors $\ln u$ est dérivable sur I et, pour tout x de I :

$$(\ln u)'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

■ Tableau de variations et courbe

x	0	$+\infty$
$\ln'(x)$		+
$\ln x$	$-\infty$	$+\infty$



Dans un repère orthonormal, les courbes représentatives de \exp et de \ln sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

■ Fonction logarithme décimal

On appelle fonction logarithme décimal la fonction, notée \log , et définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln 10}$$

III- Fonctions $x \mapsto a^x$

Pour tout réel a strictement positif et tout réel b , on pose :

$$a^b = e^{b \ln a}$$

Cette notation est cohérente avec les règles de calcul sur les puissances.

■ Définition

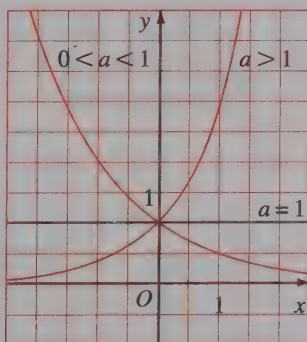
Pour tout réel a strictement positif, $x \mapsto a^x$, appelée « fonction exponentielle de base a », est la fonction $x \mapsto e^{x \ln a}$, donc :

- elle est définie et à valeurs strictement positives sur \mathbb{R} ;
- elle est dérivable sur \mathbb{R} , de fonction dérivée : $x \mapsto (\ln a) a^x$.

■ Tableaux de variations, courbes représentatives

$a > 1$	
x	$-\infty$ $+\infty$
a^x	0 $+\infty$

$0 < a < 1$	
x	$-\infty$ $+\infty$
a^x	$+\infty$ 0



IV- Croissance comparée des fonctions exponentielles, puissances entières et logarithme

Pour tout entier naturel n :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$$

(à l'infini, l'exponentielle de x l'emporte sur toute puissance de x) ;

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$$

(en $+\infty$, les puissances de x l'emportent sur le logarithme de x).

V- Fonctions racines n -ièmes

Pour tout entier naturel n non nul, la restriction de $x \mapsto x^n$ à \mathbb{R}_+ définit une bijection de \mathbb{R}_+ sur \mathbb{R}_+ ; sa bijection réciproque est notée $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ et vérifie :

$$\sqrt[n]{0} = 0 \quad \text{et, pour tout } x \text{ de }]0; +\infty[, \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

EXERCICES

de contrôle des connaissances

On suppose le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1

(Corrigé p. 156)

Soit x un nombre réel.

Écrire chacun des nombres proposés sous la forme e^y .

$$(e^{-x})^3; \quad \frac{1}{e^{2x}}; \quad e^x \times e; \quad \frac{e^{3x}}{e^{-x}}; \quad \sqrt{e^{-2x}}.$$

2

(Corrigé p. 156)

Déterminer les fonctions f , dérivables sur \mathbb{R} , telles que : $f' = -2f$.

Vérifier que, parmi elles, une seule prend la valeur 2 en 1.

3

(Corrigé p. 156)

Déterminer l'ensemble de définition \mathcal{D}_f de la fonction f proposée.

1° $x \mapsto \ln(x+1) - \ln x$.

2° $x \mapsto \ln \frac{x+1}{x}$.

3° $x \mapsto \ln(x^4)$.

4° $x \mapsto \frac{1}{\ln x}$.

4

(Corrigé p. 157)

n étant un entier relatif, simplifier $\log(10^n)$.

À l'aide de la calculatrice, donner une valeur approchée à 10^{-3} près de :

$$\log(2 \times 10^{100}).$$

5

(Corrigé p. 157)

Déterminer la dérivée de la fonction f proposée.

1° $x \mapsto \ln^2 x$.

2° $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$.

3° $x \mapsto \ln(1+x^2)$.

6

(Corrigé p. 158)

Tracer la courbe représentative \mathcal{C}_f de la fonction f proposée.

1° $x \mapsto \ln(ex)$.

2° $x \mapsto \frac{1}{2} \ln(x^2)$.

3° $x \mapsto e^{|\ln x|}$.

7

(Corrigé p. 159)

Soit f la fonction :

$$x \mapsto \frac{\ln x}{x-1}$$

1° Déterminer l'ensemble de définition \mathcal{D}_f de f .

Quelle est la limite de f en 1 ?

2° Démontrer que f est de signe constant.

Fonction exponentielle

8



5 min.

(Corrigé p. 160)

Résoudre dans \mathbb{R} l'équation (E) :

$$e^{2x} + e^x - 2 = 0.$$

9



5 min.

(Corrigé p. 160)

Démontrer que la fonction $f : x \mapsto \frac{1 - e^x}{1 + e^x}$ est impaire.

10



10 min.

(Corrigé p. 161)

Déterminer la limite éventuelle de la fonction f proposée en a .

$$1^\circ x \mapsto \sqrt{e^{3x} - 1}, \quad a = 0.$$

$$2^\circ x \mapsto \frac{e^x + 3}{e^x + 2}, \quad a = +\infty.$$

$$3^\circ x \mapsto e^x \sin x, \quad a = -\infty.$$

$$4^\circ x \mapsto e^x - x, \quad a = +\infty.$$

11



10 min.

(Corrigé p. 163)

1° Justifier le résultat du cours : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1.$

2° En déduire la limite :

a. de $\frac{e^{-3x} - 1}{x}$ quand x tend vers 0 ;

b. de $x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$ quand x tend vers $+\infty$.

12



10 min.

(Corrigé p. 164)

Déterminer la dérivée de la fonction f proposée.

$$1^\circ x \mapsto (e^x)^2 + \frac{1}{e^x}.$$

$$2^\circ x \mapsto x^3 e^{-x}.$$

$$3^\circ x \mapsto e^{-x^2 + x}.$$

13 ★ ★ ★ 15 min

(Corrigé p. 165)

Le but de l'exercice est d'obtenir l'encadrement polynomial suivant de la fonction exponentielle :

$$\text{pour tout réel } x \text{ négatif, } 1 + x \leq e^x \leq 1 + x + \frac{x^2}{2}.$$

On notera f la fonction :

$$x \mapsto 1 + x + \frac{x^2}{2} - e^x.$$

1° Déterminer f' et f'' (dérivée de f').

Quelle remarque peut-on faire sur les valeurs prises en 0 par f , f' et f'' ?

2° Compléter le tableau suivant :

x	$-\infty$	0
signe de $f''(x)$		
sens de variation de f'		
signe de $f'(x)$		
sens de variation de f		
signe de $f(x)$		

En déduire le résultat souhaité.

3° Quel encadrement de $e^{-0.01}$ obtient-on ?

Fonction logarithme népérien

14 ★ 15 min

(Corrigé p. 166)

Résoudre dans \mathbb{R} chacune des équations proposées.

1° (\mathcal{E}_1) : $\ln(3+x) = \ln 3 + \ln x$.

2° (\mathcal{E}_2) : $\ln(3x) = 3 \ln x$.

3° (\mathcal{E}_3) : $\ln x + \ln(x-2) = \ln(x+10)$.

4° (\mathcal{E}_4) : $\ln(x^2 - 2x) = \ln(x+10)$.

15 ★ 10 min

(Corrigé p. 168)

Résoudre dans \mathbb{R} l'inéquation (\mathcal{I}) :

$$\ln^2 x - \ln x - 6 < 0.$$

16 ★ 10 min

(Corrigé p. 168)

Déterminer la limite éventuelle de la fonction f proposée en a .

1° $x \mapsto \ln(9 - x^2)$, $a = 3$.

2° $x \mapsto \ln(1 - \ln x)$, $a = e$.

3° $x \mapsto x - \ln x$, $a = +\infty$.

4° $x \mapsto \frac{x^2}{\ln x}$, $a = 0$.

17 ★ 10 min

(Corrigé p. 170)

Déterminer la dérivée de la fonction f proposée.

1° $x \mapsto x \ln x$.

2° $x \mapsto \ln(e^x - 1)$.

3° $x \mapsto \ln|x|$.

18 ★ ★ 10 min

(Corrigé p. 171)

1° Justifier le résultat du cours :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1.$$

2° En déduire la limite de $x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$ quand x tend vers $+\infty$.19 ★ ★ 10 min

(Corrigé p. 171)

D'après le cours : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

En déduire :

1° la limite de $\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ quand x tend vers $+\infty$;2° la limite de $x \ln x$ quand x tend vers 0.

20 ★ 10 min

(Corrigé p. 172)

On pose, pour tout n de \mathbb{N}^* :

$$S_n = \ln \frac{2}{1} + \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{4}{3} + \dots + \ln \frac{n+1}{n} .$$

Calculer S_1 , S_2 , S_3 . Que vaut S_{2003} ?

21 ★ ★ 10 min

(Corrigé p. 173)

Soit f la fonction :
$$x \mapsto \frac{\ln(1-x)}{\ln x} .$$

1° Déterminer l'ensemble de définition et le signe de f .

2° Déterminer les limites de f aux bornes de \mathcal{D}_f .

3° Démontrer que f est strictement croissante.

22 ★ ★ 10 min

(Corrigé p. 174)

Soient f la fonction définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = \ln(1 + e^x) ,$$

et \mathcal{C} sa courbe représentative.

1° Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2° Étudier le sens de variation de f ; préciser le signe de f .

3° Démontrer que, pour tout réel x :

$$f(x) = x + f(-x) .$$

En déduire que la courbe \mathcal{C} admet, en $+\infty$, une asymptote, notée Δ .

Préciser la position de \mathcal{C} par rapport à la droite Δ .

4° Tracer Δ et \mathcal{C} .

Fonction logarithme décimal

23 ★ ★ 10 min

(Corrigé p. 175)

1° Soit x un entier naturel non nul, et n le nombre de chiffres de l'écriture décimale de x . Justifier l'encadrement :

$$n - 1 \leq \log x < n .$$

2° En déduire le nombre de chiffres de l'écriture décimale de 2^{2003} .

Fonction exponentielle de base a

24 ★

10 min.

(Corrigé p. 176)

Résoudre dans \mathbb{R} l'équation (\mathcal{E}) proposée.

1° $3^{2x} = 2^{3x}$.

2° $3^{2x} - 3^{x+1} + 2 = 0$.

25 ★

15 min.

(Corrigé p. 177)

Dresser le tableau de variations et tracer l'allure de la courbe représentative \mathcal{C} de la fonction f proposée.

1° $x \mapsto 2,3^x$.

2° $x \mapsto \frac{1}{2^x}$.

3° $x \mapsto \frac{1}{3} e^{x \ln 3}$.

Équations différentielles

26 ★ ★

10 min.

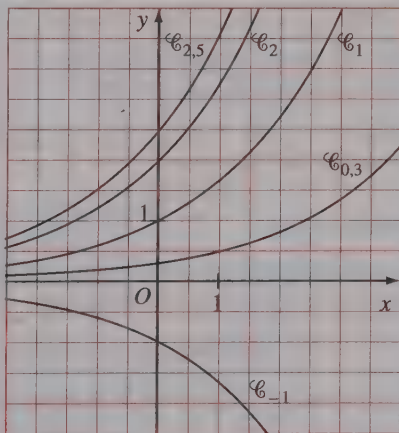
(Corrigé p. 178)

Les solutions de l'équation différentielle $(\mathcal{E}) : y' = \frac{1}{2}y$.

sont les fonctions $f_m : x \mapsto m e^{\frac{x}{2}}$, où m décrit \mathbb{R} .

On note \mathcal{C}_m la courbe représentative de f_m .

Le graphique suivant donne quelques-unes de ces courbes.



- 1° Existe-t-il une droite horizontale qui soit une des courbes \mathcal{C}_m ?
 2° Soit un point $M_0(x_0, y_0)$; combien de courbes \mathcal{C}_m passent par M_0 ?
 3° On trace la droite Δ d'équation $y = 2$.
 Quelle propriété ont les tangentes aux courbes \mathcal{C}_m en des points de Δ ?

27 ★ ★ 15 min

(Corrigé p. 179)

Un condensateur de capacité C farads est chargé sous une tension initiale de 20 volts. Il se décharge ensuite dans un résistor de résistance R ohms. En notant $u(t)$ la mesure de la tension en volts au bout de t secondes aux bornes du condensateur, u est alors une fonction définie sur $[0 ; +\infty[$, qui est solution, sur $[0 ; +\infty[$, de l'équation différentielle (\mathcal{E}) :

$$y' + \frac{1}{RC}y = 0.$$

1° Résoudre l'équation différentielle (\mathcal{E}).

En déduire la fonction u .

2° Dans cette question, $R = 1\,000$ et $C = 10^{-4}$.

Pendant combien de temps (au centième de seconde près) la tension aux bornes du condensateur reste-t-elle supérieure ou égale à 5 volts ?

28 ★ ★ ★ 15 min

(Corrigé p. 180)

Un corps est placé dans une enceinte dont on maintient la température constante, égale à 20°C .

À l'instant initial $t = 0$, sa température est égale à 70°C , et après 5 minutes, elle n'est plus que de 60°C .

La température du corps (exprimée en degrés Celsius) est une fonction T du temps t (exprimé en minutes), définie sur $[0 ; +\infty[$; la loi du refroidissement de Newton énonce que T' est proportionnelle à $T - 20$.

1° Justifier que la fonction $f : t \mapsto T(t) - 20$ est solution sur $[0 ; +\infty[$ d'une équation différentielle de la forme :

$$y' = ky,$$

puis déterminer la fonction T .

2° Au degré près, à quelle température sera le corps après une demi-heure ?

À la minute près, au bout de combien de temps aura-t-il une température de 40°C ?

29 ★ ★ ★ 30 min.

(Corrigé p. 182)

m étant un nombre réel, on note f_m la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f_m(x) = \frac{x^2 - 1}{2} - m \ln x,$$

et \mathcal{C}_m sa courbe représentative.

1° a. Déterminer la limite de f_m en $+\infty$.

b. Suivant les valeurs de m , déterminer la limite de f_m en 0.

2° Déterminer la fonction dérivée de f_m .

Donner, suivant les valeurs de m , les différents tableaux de variations possibles.

3° a. Soit $M_0(x_0, y_0)$ un point du plan, avec $x_0 > 0$ et $x_0 \neq 1$.

Démontrer qu'il passe une seule courbe \mathcal{C}_m par M_0 .

b. Démontrer qu'il existe un seul point A appartenant à toutes les courbes \mathcal{C}_m .

4° Tracer \mathcal{C}_0 , \mathcal{C}_4 et \mathcal{C}_{-1} sur un même graphique.

30 ★ ★ ★ 30 min.

(Corrigé p. 184)

Le but de l'exercice est de résoudre l'équation différentielle (1) :

$$y' - 2y = xe^x,$$

c'est-à-dire de déterminer toutes les fonctions y , dérivables sur \mathbb{R} , qui vérifient :

$$\text{pour tout réel } x, y'(x) - 2y(x) = xe^x.$$

1° Résoudre l'équation différentielle (2) : $y' - 2y = 0$, où y désigne une fonction dérivable sur \mathbb{R} .

2° a. Démontrer qu'il existe une solution u de (1) qui s'écrit :

$$x \mapsto (ax + b)e^x,$$

a et b étant des réels à déterminer.

b. Soit v une fonction dérivable sur \mathbb{R} .

Démontrer que v est solution de l'équation (1) si, et seulement si, $v - u$ est solution de (2).

c. En déduire l'ensemble des solutions de (1).

3° Déterminer la solution de l'équation (1) qui s'annule en 0.

Soit x un nombre réel.

- $(e^{-x})^3 = e^{-x \times 3} = e^{-3x}$.
- $\frac{e^{3x}}{e^{-x}} = e^{3x+x} = e^{4x}$.
- $\frac{1}{e^{2x}} = e^{-2x}$.
- $\sqrt{e^{-2x}} = e^{\frac{-2x}{2}} = e^{-x}$.
- $e^x \times e = e^x \times e^1 = e^{x+1}$.

D'après le cours, les fonctions f , dérivables sur \mathbb{R} , telles que :

$$f' = -2f$$

sont les fonctions $x \mapsto Ae^{-2x}$, A décrivant \mathbb{R} .

La fonction $x \mapsto Ae^{-2x}$ prend la valeur 2 en 1 si, et seulement si :

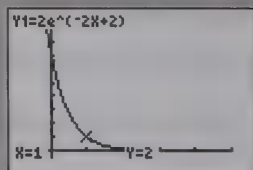
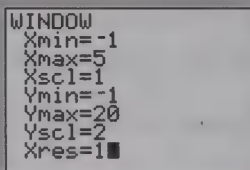
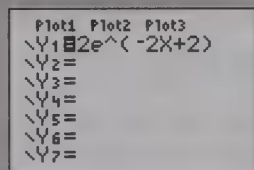
$$Ae^{-2} = 2,$$

$$A = 2e^2,$$

c'est-à-dire :

donc, parmi les fonctions précédentes, la seule qui prenne la valeur 2 en 1 est $x \mapsto 2e^2 \times e^{-2x}$, c'est-à-dire :

$$x \mapsto 2e^{-2x+2}.$$



1° $f: x \mapsto \ln(x+1) - \ln x$.

Pour tout réel x :

$$x \in \mathcal{D}_f \Leftrightarrow (x+1 > 0 \text{ et } x > 0) \Leftrightarrow (x > -1 \text{ et } x > 0) \Leftrightarrow x > 0,$$

donc :

$$\mathcal{D}_f =]0; +\infty[.$$

2° $f: x \mapsto \ln \frac{x+1}{x}$.

Pour tout réel x :

$$x \in \mathcal{D}_f \Leftrightarrow (x \neq 0 \text{ et } \frac{x+1}{x} > 0) \Leftrightarrow (x(x+1) > 0) \Leftrightarrow (x < -1 \text{ ou } x > 0)$$

donc :

$$\mathcal{D}_f =]-\infty; -1[\cup]0; +\infty[.$$

Remarquer que les fonctions $x \mapsto \ln(x+1) - \ln x$ et $x \mapsto \ln \frac{x+1}{x}$ coïncident sur $]0; +\infty[$:

pour tout x de $]0; +\infty[$, $\ln \frac{x+1}{x} = \ln(x+1) - \ln x$.

Cependant, elles ne sont pas égales (elles n'ont pas le même ensemble de définition).

3° $f: x \mapsto \ln(x^4)$.

Pour tout réel x :

$$x \in \mathcal{D}_f \Leftrightarrow x^4 > 0 \Leftrightarrow x \neq 0,$$

donc : $\mathcal{D}_f =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[= \mathbb{R}^*$.

4° $f: x \mapsto \frac{1}{\ln x}$.

Pour tout réel x :

$$x \in \mathcal{D}_f \Leftrightarrow (x > 0 \text{ et } \ln x \neq 0) \Leftrightarrow (x > 0 \text{ et } x \neq 1),$$

donc : $\mathcal{D}_f =]0; 1[\cup]1; +\infty[$.

4 • Par définition de la fonction \log , pour tout entier relatif n :

$$\log(10^n) = \frac{\ln(10^n)}{\ln 10} = \frac{n \ln(10)}{\ln 10} = n.$$

$$\begin{aligned} \bullet \log(2 \times 10^{100}) &= \log 2 + \log(10^{100}) \\ &= 100 + \log 2. \end{aligned}$$

À l'aide de la calculatrice, à 10^{-3} près :

$$\log(2 \times 10^{100}) \approx 100,301.$$

La calculatrice affiche un message d'erreur (dépassement de capacité) si l'on exécute un calcul direct de $\log(2 \times 10^{100})$.

5 1° $f: x \mapsto \ln^2 x$.

$\mathcal{D}_f =]0; +\infty[$; f est dérivable sur son ensemble de définition et, pour tout réel x strictement positif :

$$f'(x) = 2 \times \ln'(x) \times \ln(x) = 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x$$

donc :
$$f'(x) = \frac{2 \ln x}{x}.$$

Pour tout x de $]0; +\infty[$: $\ln^2 x = (\ln x)^2$.

$$2^\circ f: x \mapsto \frac{\ln x}{x}.$$

$\mathcal{D}_f =]0; +\infty[$; f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et, pour tout x de cet intervalle :

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - (\ln x) \times 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}.$$

$$3^\circ f: x \mapsto \ln(1 + x^2).$$

La fonction : $x \mapsto 1 + x^2$ est dérivable sur \mathbb{R} et, pour tout réel x :

$$1 + x^2 > 0,$$

donc f est dérivable sur \mathbb{R} et, pour tout réel x :

$$f'(x) = \frac{2x}{1 + x^2}.$$

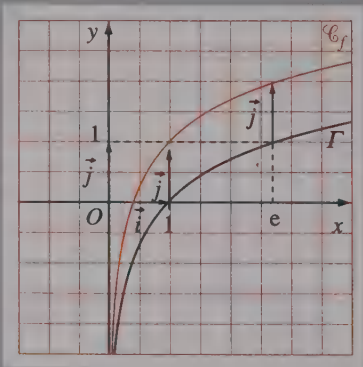
$f = \ln u$,
où u est la fonction :
 $x \mapsto 1 + x^2$.

6 $1^\circ f: x \mapsto \ln(ex).$

$\mathcal{D}_f =]0; +\infty[$ et, pour tout x de \mathcal{D}_f :

$$f(x) = \ln(ex) = \ln e + \ln x = \ln x + 1,$$

ce qui met en évidence que \mathcal{C}_f est l'image de la courbe représentative Γ de \ln par la translation de vecteur \vec{j} .



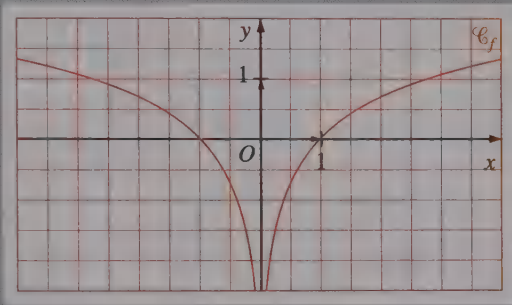
$$2^\circ f: x \mapsto \frac{1}{2} \ln(x^2).$$

$\mathcal{D}_f =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[= \mathbb{R}^*$,
 f est paire et pour tout réel x strictement positif :

$$f(x) = \frac{1}{2} \times 2 \ln x = \ln x,$$

Attention !
l'égalité : $\ln(x^2) = 2 \ln x$
n'est satisfaite que si $x > 0$;
pour tout réel x non nul :
 $\ln(x^2) = 2 \ln |x|$.

donc \mathcal{C}_f est la réunion de la courbe représentative Γ de \ln et de la courbe symétrique de Γ par rapport à l'axe des ordonnées.



3° $f: x \mapsto e^{|\ln x|}$.

$\mathcal{D}_f =]0; +\infty[$; de plus, pour tout x de $]0; +\infty[$:

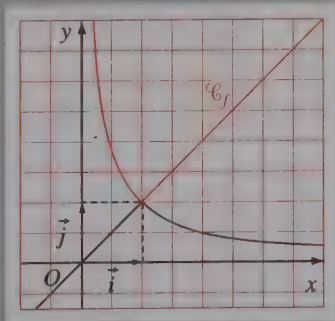
$$\begin{cases} \ln x \leq 0 & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ \ln x \geq 0 & \text{si } x \geq 1, \end{cases}$$

donc :

$$\begin{cases} f(x) = e^{-\ln x} = \frac{1}{e^{\ln x}} = \frac{1}{x} & \text{si } 0 < x \leq 1, \\ f(x) = e^{\ln x} = x & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

On en déduit que \mathcal{C}_f est la réunion :

- de la partie d'hyperbole définie par : $\begin{cases} 0 < x \leq 1 \\ y = \frac{1}{x} \end{cases}$,
- et de la demi-droite définie par : $\begin{cases} x \geq 1 \\ y = x \end{cases}$.



7 $f: x \mapsto \frac{\ln x}{x-1}$.

1° • Pour tout réel x : $x \in \mathcal{D}_f \Leftrightarrow x > 0$ et $x \neq 1$,

donc : $\mathcal{D}_f =]0; 1[\cup]1; +\infty[$.

• D'après le cours : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$,

ce qui peut aussi s'écrire : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$,

donc f admet pour limite 1 en 1.

2° • Si $0 < x < 1$, alors $\ln x < 0$ et $x-1 < 0$,

donc : $\frac{\ln x}{x-1} > 0$;

• si $x > 1$, alors $\ln x > 0$ et $x-1 > 0$, donc : $\frac{\ln x}{x-1} > 0$.

On en déduit que, pour tout x de $]0; 1[\cup]1; +\infty[$, $f(x) > 0$, ce qui prouve que f est à valeurs strictement positives sur son ensemble de définition.

8 (E) : $e^{2x} + e^x - 2 = 0$.

Pour tout réel x :

$$e^{2x} = (e^x)^2;$$

de plus, 1 et -2 étant les racines du polynôme $X \mapsto X^2 + X - 2$, on peut écrire, pour tout réel X :

$$X^2 + X - 2 = (X-1)(X+2).$$

Il vient que, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} e^{2x} + e^x - 2 = 0 &\Leftrightarrow (e^x - 1)(e^x + 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \text{ ou } e^x + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow e^x = 1 \text{ ou } e^x = -2 \\ &\Leftrightarrow e^x = 1 \\ &\Leftrightarrow x = 0. \end{aligned}$$

Finalement :

0 est la seule solution de (E) dans \mathbb{R} .

9 $f: x \mapsto \frac{1-e^x}{1+e^x}$.

La fonction f est définie sur \mathbb{R} .

Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} f(-x) &= \frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{e^{-x}(e^x-1)}{e^{-x}(e^x+1)} = \frac{e^x-1}{e^x+1} \\ &= -\frac{1-e^x}{1+e^x}, \end{aligned}$$

En posant : $1+h=x$,
on a :
• $h=x-1$,
• x tend vers 1 quand h tend vers 0.

Équation : $X^2 + X - 2 = 0$.
Discriminant : $\Delta = 9$.
Solutions :
 $X_1 = \frac{-1+3}{2} = 1$,
 $X_2 = \frac{-1-3}{2} = -2$.

Pour tout réel x : $e^x > 0$,
donc l'équation : $e^x = -2$
n'admet aucune solution
dans \mathbb{R} .

Pour tout réel x :
 $e^x > 0$.

$$\frac{1}{e^{-x}} = e^x.$$

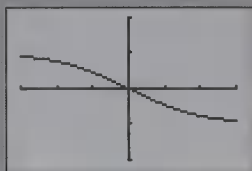
donc : $f(-x) = -f(x)$,
ce qui prouve que f est impaire.

```

Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=(1-e^(X))/(-1
+e^(X))
\Y2=
\Y3=
\Y4=
\Y5=
\Y6=
  
```

```

WINDOW
Xmin=-3
Xmax=3
Xscl=1
Ymin=-2
Ymax=2
Yscl=1
Xres=1
  
```



10 1° $f: x \mapsto \sqrt{e^{3x}-1}$, $a = 0$.

\mathcal{D}_f est l'ensemble des réels x tels que :

$$e^{3x} - 1 \geq 0,$$

or :

$$e^{3x} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^{3x} \geq 1 \Leftrightarrow 3x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0,$$

donc :

$$\mathcal{D}_f = [0; +\infty[.$$

f est la composée de $x \mapsto e^{3x} - 1$ par $X \mapsto \sqrt{X}$;
de plus : $\lim_{x \rightarrow 0} (e^{3x} - 1) = e^0 - 1 = 0$, $\lim_{X \rightarrow 0} \sqrt{X} = 0$,
donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

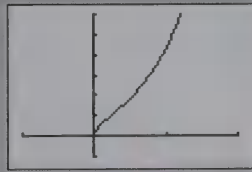
f est définie au voisinage de 0 (la recherche d'une éventuelle limite de f en 0 a bien un sens).

```

Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=J(e^(3X)-1)
\Y2=
\Y3=
\Y4=
\Y5=
\Y6=
\Y7=
  
```

```

WINDOW
Xmin=-1
Xmax=2
Xscl=1
Ymin=-1
Ymax=6
Yscl=1
Xres=1
  
```



2° $f: x \mapsto \frac{e^x + 3}{e^x + 2}$, $a = +\infty$.

• La fonction exponentielle est définie sur \mathbb{R} et ne prend que des valeurs strictement positives, donc f est définie sur \mathbb{R} .

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, donc f se présente comme le quotient de deux fonctions de limite $+\infty$ en $+\infty$, et les théorèmes généraux ne permettent pas de conclure directement. On est ainsi amené à transformer l'écriture de $f(x)$.

Pour tout réel x :

$$f(x) = \frac{e^x \left(1 + \frac{3}{e^x}\right)}{e^x \left(1 + \frac{2}{e^x}\right)} = \frac{1 + \frac{3}{e^x}}{1 + \frac{2}{e^x}};$$

Pour tout réel x : $e^x + 2 \neq 0$.

de plus : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$, ce qui implique :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{3}{e^x}\right) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{e^x}\right) = 1.$$

On en déduit :

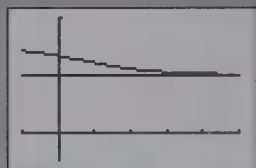
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1.$$

```

Plot1 Plot2 Plot3
\Y1=J(e^(3X)-1)
\Y2=(e^(X)+3)/(e
^(X)+2)
\Y3=1
\Y4=
\Y5=
\Y6=
    
```

```

WINDOW
Xmin=-1
Xmax=5
Xscl=1
Ymin=-.5
Ymax=2
Yscl=1
Xres=1
    
```



3° $f: x \mapsto e^x \sin x$, $a = -\infty$.

f est définie sur \mathbb{R} .

Pour tout réel x :

$$-1 \leq \sin x \leq 1 \quad \text{et} \quad e^x > 0,$$

donc : $-e^x \leq e^x \sin x \leq e^x$.

c'est-à-dire :

$$-e^x \leq f(x) \leq e^x.$$

comme de plus : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$,

le théorème des gendarmes permet de conclure :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0.$$

On pouvait aussi écrire, pour tout réel x :

$$|f(x)| = |e^x \sin x| = e^x |\sin x| = e^x |\sin x| \quad \text{et} \quad |\sin x| \leq 1,$$

donc :

$$|f(x)| \leq e^x.$$

4° $f: x \mapsto e^x - x$, $a = +\infty$.

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

f se présente sous la forme de la différence de deux fonctions de limite $+\infty$ en $+\infty$, et les théorèmes généraux ne permettent pas de conclure directement.

Pour tout x de $]0; +\infty[$:

$$f(x) = x \left(\frac{e^x}{x} - 1 \right),$$

et, d'après le cours : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$,

donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^x}{x} - 1 \right) = +\infty$,

ce qui implique : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{e^x}{x} - 1 \right) = +\infty$,

c'est-à-dire : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

« e^x l'emporte sur x
en $+\infty$ ».

On peut aussi factoriser $f(x)$ par e^x , ce qui conduit à :

pour tout x de $]0; +\infty[$, $f(x) = e^x \left(1 - \frac{x}{e^x} \right)$;

quand x tend vers $+\infty$, $\frac{e^x}{x}$ tend vers $+\infty$, donc son inverse

$\frac{x}{e^x}$ tend vers 0.

11 1° Pour tout réel h non nul :

$$\frac{e^h - 1}{h} = \frac{e^h - e^0}{h},$$

et : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - e^0}{h} = \exp'(0) = e^0 = 1$,

donc : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$.

$\frac{e^h - 1}{h}$ est le taux de
variation de la fonction \exp
entre 0 et h .

2° a. Pour tout réel x non nul :

$$\frac{e^{-3x} - 1}{x} = -3 \times \frac{e^{-3x} - 1}{-3x},$$

et : $\lim_{x \rightarrow 0} (-3x) = 0$, $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$,

donc, d'après le théorème de composition des limites :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-3x} - 1}{-3x} = 1,$$

Pour la recherche de la limite de
 $\frac{e^{-3x} - 1}{x}$ quand x tend vers 0,
on est en présence d'une
indétermination de la forme :

« $\frac{0}{0}$ ».

et finalement :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-3x} - 1}{x} = -3.$$

b. Pour tout réel x strictement positif :

$$x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) = \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}};$$

de plus :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1,$$

donc (théorème de composition) :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = 1,$$

ce qui permet de conclure : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) = 1.$

12 1° $f: x \mapsto (e^x)^2 + \frac{1}{e^x}.$

f est définie et dérivable sur \mathbb{R} et, pour tout réel x :

$$f(x) = e^{2x} + e^{-x},$$

donc :

$$f'(x) = 2e^{2x} - e^{-x}.$$

2° $f: x \mapsto x^3 e^{-x}.$

f est définie et dérivable sur \mathbb{R} et, pour tout réel x :

$$f'(x) = 3x^2 \times e^{-x} + x^3 \times (-e^{-x}),$$

donc :

$$f'(x) = x^2 (3 - x) e^{-x}.$$

3° $f: x \mapsto e^{-x^2+x}.$

f est définie et dérivable sur \mathbb{R} et, pour tout réel x :

$$f'(x) = (-2x + 1) e^{-x^2+x}.$$

Pour la recherche de la limite de $x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right)$ quand x tend vers $+\infty$, on est en présence d'une indétermination de la forme : « $\infty \times 0$ ».

Cette nouvelle écriture de $f(x)$ rend les calculs beaucoup plus simples.

$f = e^u$,
où u est la fonction :
 $x \mapsto -x^2 + x.$

$$f: x \mapsto 1 + x + \frac{x^2}{2} - e^x.$$

1° f est indéfiniment dérivable sur \mathbb{R} et, pour tout réel x :

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{2} \times 2x - e^x = 1 + x - e^x,$$

$$f''(x) = 1 - e^x.$$

On peut remarquer :



$$f(0) = f'(0) = f''(0) = 0.$$

2° Pour tout réel x strictement négatif :

$$e^x < 1,$$

donc : $f''(x) > 0,$

ce qui permet de compléter ligne par ligne le tableau suivant :

x	$-\infty$	0
signe de $f''(x)$	$+$	0
sens de variation de f'		0
signe de $f'(x)$	$-$	0
sens de variation de f		0
signe de $f(x)$	$+$	0

La dernière ligne du tableau donne :

$$\text{pour tout } x \text{ de }]-\infty; 0], f(x) \geq 0,$$

c'est-à-dire :

$$\text{pour tout } x \text{ de }]-\infty; 0], e^x \leq 1 + x + \frac{x^2}{2}.$$

De même, de la ligne « signe de $f'(x)$ », on déduit :

$$\text{pour tout } x \text{ de }]-\infty; 0], f'(x) \leq 0,$$

c'est-à-dire :

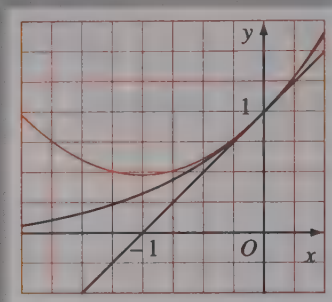
$$\text{pour tout } x \text{ de }]-\infty; 0], 1 + x \leq e^x.$$

On a donc prouvé :

$$\text{pour tout } x \text{ de }]-\infty; 0], 1 + x \leq e^x \leq 1 + x + \frac{x^2}{2}.$$

Dire que f est indéfiniment dérivable sur \mathbb{R} signifie que f , sa dérivée f' , la dérivée f'' de f' , ... sont dérivables sur \mathbb{R} .

$x \mapsto e^x$ est strictement croissante et : $e^0 = 1$.

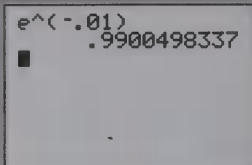


3° Il en résulte l'encadrement de $e^{-0,01}$ suivant :

$$1 - 0,01 \leq e^{-0,01} \leq 1 - 0,01 + 0,000\ 05,$$

soit :

$$0,99 \leq e^{-0,01} \leq 0,990\ 05.$$



1° (\mathcal{E}_1) : $\ln(3+x) = \ln 3 + \ln x$.

• Soit x un nombre réel ; l'équation (\mathcal{E}_1) est définie si, et seulement si :

$$3+x > 0 \text{ et } x > 0,$$

c'est-à-dire : $x > 0$.

• Pour tout x de $]0; +\infty[$:

$$\begin{aligned} \ln(3+x) = \ln 3 + \ln x &\Leftrightarrow \ln(3+x) = \ln(3x) \\ &\Leftrightarrow 3+x = 3x \\ &\Leftrightarrow 2x = 3 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{3}{2}, \end{aligned}$$

donc $\frac{3}{2}$ est la seule solution de (\mathcal{E}_1) dans \mathbb{R} .

2° (\mathcal{E}_2) : $\ln(3x) = 3 \ln x$.

• Soit x un nombre réel ; l'équation (\mathcal{E}_2) est définie si, et seulement si : $3x > 0$ et $x > 0$, c'est-à-dire :

$$x > 0.$$

• Pour tout x de $]0; +\infty[$:

$$\begin{aligned} \ln(3x) = 3 \ln x &\Leftrightarrow \ln(3x) = \ln x^3 \\ &\Leftrightarrow 3x = x^3 \\ &\Leftrightarrow x(x^2 - 3) = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -\sqrt{3} \text{ ou } x = \sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt{3}, \end{aligned}$$

On ne peut attribuer de valeur de vérité (vrai ou faux) à la proposition : « $\ln(3+x) = \ln 3 + \ln x$ » que si $x > 0$.

donc :

$\sqrt{3}$ est la seule solution de (\mathcal{E}_2) dans \mathbb{R} .

3° (\mathcal{E}_3) : $\ln x + \ln(x-2) = \ln(x+10)$.

• Soit x un nombre réel ;

l'équation (\mathcal{E}_3) est définie si, et seulement si :

$$x > 0, \quad x-2 > 0 \text{ et } x+10 > 0,$$

c'est-à-dire : $x > 2$.

• Pour tout x de $]2; +\infty[$:

$$\begin{aligned} \ln x + \ln(x-2) = \ln(x+10) &\Leftrightarrow \ln[x(x-2)] = \ln(x+10) \\ &\Leftrightarrow x(x-2) = x+10 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 3x - 10 = 0. \end{aligned}$$

L'équation du second degré : $x^2 - 3x - 10 = 0$ admet pour discriminant 49, donc ses solutions dans \mathbb{R} sont les réels x_1 et x_2 tels que :

$$x_1 = \frac{3 - \sqrt{49}}{2} = \frac{3-7}{2} = -2, \quad x_2 = \frac{3 + \sqrt{49}}{2} = \frac{3+7}{2} = 5.$$

Il vient, pour tout x de $]2; +\infty[$:

$$\ln x + \ln(x-2) = \ln(x+10) \Leftrightarrow x = -2 \text{ ou } x = 5,$$

c'est-à-dire, -2 n'appartenant pas à $]2; +\infty[$:

$$\ln x + \ln(x-2) = \ln(x+10) \Leftrightarrow x = 5,$$

ce qui permet de conclure :

5 est la seule solution de (\mathcal{E}_3) dans \mathbb{R} .

4° (\mathcal{E}_4) : $\ln(x^2 - 2x) = \ln(x+10)$.

• Soit x un nombre réel ;

l'équation (\mathcal{E}_4) est définie si, et seulement si :

$$x^2 - 2x > 0 \text{ et } x+10 > 0,$$

c'est-à-dire : $x(x-2) > 0$ et $x > -10$,

soit : $x \in]-\infty; 0[\cup]2; +\infty[$ et $x > -10$,

et finalement :

$$x \in]-10; 0[\cup]2; +\infty[.$$

• Pour tout x de $]-10; 0[\cup]2; +\infty[$:

$$\begin{aligned} \ln(x^2 - 2x) = \ln(x+10) &\Leftrightarrow x^2 - 2x = x+10 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 3x - 10 = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -2 \text{ ou } x = 5, \end{aligned}$$

donc :

les solutions de (\mathcal{E}_4) dans \mathbb{R} sont -2 et 5 .

$0 \notin]0; +\infty[$,
 $-\sqrt{3} \notin]0; +\infty[$.

Bien que la résolution de (\mathcal{E}_3) comme de (\mathcal{E}_4) conduise à celle de $x^2 - 3x - 10 = 0$, il faut bien prendre garde que (\mathcal{E}_3) et (\mathcal{E}_4) n'ont pas le même ensemble de solutions (elles ne sont pas équivalentes), ce qui provient du fait que les fonctions :
 $x \mapsto \ln x + \ln(x-2)$ et $x \mapsto \ln[x(x-2)]$
 n'ont pas le même ensemble de définition.

5 $(\mathcal{T}) : \ln^2 x - \ln x - 6 < 0$.

L'inéquation (\mathcal{T}) n'est définie que si le réel x est strictement positif ; d'autre part, pour tout réel x strictement positif :

$$\ln^2 x - \ln x - 6 = (\ln x)^2 - \ln x - 6 ;$$

de plus, pour tout réel X :

$$X^2 - X - 6 = (X + 2)(X - 3),$$

donc :

$$X^2 - X - 6 < 0 \Leftrightarrow -2 < X < 3.$$

On en déduit, pour tout réel x strictement positif :

$$\ln^2 x - \ln x - 6 < 0 \Leftrightarrow -2 < \ln x < 3,$$

donc, la fonction exponentielle étant strictement croissante :

$$\ln^2 x - \ln x - 6 < 0 \Leftrightarrow e^{-2} < x < e^3,$$

ce qui prouve que l'ensemble des solutions de (\mathcal{T}) dans \mathbb{R} est :

$$\left] \frac{1}{e^2} ; e^3 \right[.$$

16 1° $f : x \mapsto \ln(9 - x^2)$, $a = 3$.

• \mathcal{D}_f est l'ensemble des réels x tels que :

$$9 - x^2 > 0,$$

c'est-à-dire :

$$x^2 < 9,$$

donc :

$$\mathcal{D}_f =]-3 ; 3[.$$

Équation : $X^2 - X - 6 = 0$.
 Discriminant : $\Delta = 25$.
 Solutions :

$$X_1 = \frac{1-5}{2} = -2,$$

$$X_2 = \frac{1+5}{2} = 3.$$

$$e^{-2} = \frac{1}{e^2}.$$

f est définie au voisinage de 3 (la recherche de l'éventuelle limite de f en 3 a donc bien un sens).

• f est la composée de $x \mapsto 9 - x^2$ par \ln , et :

$$\lim_{x \rightarrow 3} (9 - x^2) = 0, \quad \lim_{X \rightarrow 0} \ln X = -\infty,$$

donc, d'après le théorème sur la limite d'une fonction composée :

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = -\infty.$$

2° $f: x \mapsto \ln(1 - \ln x)$, $a = e$.

• Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{D}_f &\Leftrightarrow x > 0 \text{ et } 1 - \ln x > 0 \\ &\Leftrightarrow x > 0 \text{ et } \ln x < 1 \\ &\Leftrightarrow x > 0 \text{ et } x < e \\ &\Leftrightarrow 0 < x < e, \end{aligned}$$

f est définie au voisinage de e.

donc : $\mathcal{D}_f =]0 ; e[$.

• f est la composée de $x \mapsto 1 - \ln x$ par \ln , et :

$$\lim_{x \rightarrow e} (1 - \ln x) = 1 - \ln e = 0, \quad \lim_{X \rightarrow 0} \ln X = -\infty,$$

donc (théorème de composition des limites) :

$$\lim_{x \rightarrow e} f(x) = -\infty.$$

3° $f: x \mapsto x - \ln x$, $a = +\infty$.

$\mathcal{D}_f =]0 ; +\infty[$.

f se présente comme la différence de deux fonctions de limite $+\infty$ en $+\infty$, et les théorèmes algébriques sur les limites ne permettent pas de répondre directement.

Pour lever l'indétermination, factorisons $f(x)$ par x (on sait que « x l'emporte sur $\ln x$ en $+\infty$ »).

$$\text{Pour tout } x \text{ de }]0 ; +\infty[: \quad f(x) = x \left(1 - \frac{\ln x}{x} \right),$$

$$\text{et d'après le cours :} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0,$$

$$\text{donc :} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{\ln x}{x} \right) = 1,$$

$$\text{d'où :} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{\ln x}{x} \right) = +\infty,$$

et finalement :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

$$4^\circ f: x \mapsto \frac{x^2}{\ln x}, \quad a = 0.$$

$$\mathcal{D}_f =]0; 1[\cup]1; +\infty[\text{ et } :$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty,$$

donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

17 $1^\circ f: x \mapsto x \ln x.$

f a pour ensemble de définition $]0; +\infty[$; elle est dérivable sur cet intervalle et, pour tout réel x strictement positif :

$$f'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x},$$

c'est-à-dire :

$$f'(x) = \ln x + 1.$$

$2^\circ f: x \mapsto \ln(e^x - 1).$

L'ensemble de définition de f est l'ensemble des réels x tels que :

$$e^x - 1 > 0,$$

or : $e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0,$

donc :

$$\mathcal{D}_f =]0; +\infty[.$$

f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et, pour tout x de cet intervalle :

$$f'(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}.$$

$3^\circ f: x \mapsto \ln |x|.$

$\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$ et :

$$\begin{cases} f(x) = \ln(-x) & \text{si } x < 0, \\ f(x) = \ln x & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

donc f est dérivable en tout réel x non nul et :

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{-1}{-x} = \frac{1}{x} & \text{si } x < 0, \\ f'(x) = \frac{1}{x} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Finalement, f est dérivable sur \mathbb{R}^* et, pour tout réel x non nul :

$$f'(x) = \frac{1}{x}.$$

$f = \ln u.$
où la fonction $u :$
 $x \mapsto e^x - 1$
est dérivable et à valeurs
strictement positives sur
 $]0; +\infty[.$

1E 1° Pour tout h de $]-1; 0[\cup]0; +\infty[$:

$$\frac{\ln(1+h)}{h} = \frac{\ln(1+h) - \ln 1}{h},$$

$$\text{et : } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h) - \ln 1}{h} = \ln'(1) = \frac{1}{1} = 1,$$

$$\text{donc : } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1.$$

2° Pour tout réel x strictement positif :

$$x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}};$$

$$\text{de plus : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1,$$

donc, d'après le théorème de composition :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = 1,$$

$$\text{et finalement : } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = 1.$$

1E 1° Limite de $\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ quand x tend vers $+\infty$.

Pour tout x de $]0; +\infty[$:

$$\frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 2 \times \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}};$$

$$\text{de plus : } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty, \quad \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0,$$

donc, d'après le théorème de composition :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 0,$$

ce qui implique :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0.$$

$\frac{\ln(1+h)}{h}$ est le taux de variation de la fonction \ln entre 1 et $1+h$.

Quand x tend vers $+\infty$, $\ln x$ et \sqrt{x} tendent vers $+\infty$, d'où une indétermination de la forme : « $\frac{\infty}{\infty}$ ».

Pour tout x de $]0; +\infty[$:
 $\ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln x.$

2° Limite de $x \ln x$ quand x tend vers 0.

La fonction $x \mapsto x \ln x$ a pour ensemble de définition $]0 ; +\infty[$, et pour tout x de cet intervalle :

$$x \ln x = -x \ln \frac{1}{x} = -\frac{\ln \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}};$$

de plus : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$,

donc (théorème de composition) : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = 0$,

ce qui permet de conclure : $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$.

20 Pour tout n de \mathbb{N}^* , $S_n = \ln \frac{2}{1} + \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{4}{3} + \dots + \ln \frac{n+1}{n}$.

• $S_1 = \ln \frac{2}{1} = \ln 2$;

$$S_2 = \ln 2 + \ln \frac{3}{2} = \ln 2 + \ln 3 - \ln 2 = \ln 3$$
 ;

$$S_3 = S_2 + \frac{4}{3} = \ln 3 + \ln \frac{4}{3} = \ln 3 + \ln 4 - \ln 3 = \ln 4$$
 .

• $S_{2\,003} = \ln 2 + \ln \frac{3}{2} + \ln \frac{4}{3} + \dots + \ln \frac{2\,003}{2\,002} + \ln \frac{2\,004}{2\,003}$

$$= \ln 2 + (\ln 3 - \ln 2) + (\ln 4 - \ln 3) + \dots$$

$$+ (\ln 2\,003 - \ln 2\,002) + (\ln 2\,004 - \ln 2\,003)$$
 .

et, par simplifications enchaînées (télescopage additif), on obtient :

$$S_{2\,003} = \ln 2\,004$$
 .

Pour la recherche de la limite de $x \ln x$ quand x tend vers 0, on est en présence d'une indétermination de la forme : « $0 \times \infty$ ».

On pourrait démontrer par récurrence : pour tout n de \mathbb{N}^* , $S_n = \ln(n+1)$.

21 $f: x \mapsto \frac{\ln(1-x)}{\ln x}$.

1° • Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} x \in \mathcal{D}_f &\Leftrightarrow 1-x > 0 \text{ et } x > 0 \text{ et } \ln x \neq 0 \\ &\Leftrightarrow x < 1 \text{ et } x > 0 \text{ et } x \neq 1 \\ &\Leftrightarrow 0 < x < 1, \end{aligned}$$

donc : $\mathcal{D}_f =]0; 1[$.

• Pour tout x de $]0; 1[$:

$$0 < x < 1 \text{ et } 0 < 1-x < 1,$$

donc : $\ln x < 0$ et $\ln(1-x) < 0$.

On en déduit : **pour tout x de $]0; 1[$, $f(x) > 0$.**

2° • $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(1-x) = \ln 1 = 0$,

donc : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

$\lim_{x \rightarrow 1} \ln x = \ln 1 = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 1} \ln(1-x) = -\infty$,

de plus :

$\mathcal{D}_f =]0; 1[$ et pour tout x de $]0; 1[$,
 $f(x) > 0$,

donc : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = +\infty$.

On aurait pu écrire :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln x = 0^- \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(1-x) = -\infty \end{cases}$$

donc :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln(1-x)}{\ln x} = +\infty.$$

3° f est dérivable sur son ensemble de définition, et pour tout x de $]0; 1[$:

$$f'(x) = \frac{\frac{-1}{1-x} \times \ln x - \ln(1-x) \times \frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \frac{-1}{\ln^2 x} \times \left(\frac{\ln x}{1-x} + \frac{\ln(1-x)}{x} \right);$$

de plus : $\begin{cases} 1-x > 0 \text{ et } \ln x < 0, \\ x > 0 \text{ et } \ln(1-x) < 0, \end{cases}$

donc : $\frac{\ln x}{1-x} < 0$ et $\frac{\ln(1-x)}{x} < 0$,

ce qui implique : $\frac{\ln x}{1-x} + \frac{\ln(1-x)}{x} < 0$,

et finalement :

$$f'(x) > 0.$$

On en déduit :

f est strictement croissante.

Pour tout réel x
de $]0; 1[$:

$$\frac{-1}{\ln^2 x} < 0.$$

22 $f: x \mapsto \ln(1 + e^x)$.

1° • Limite de f en $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty, \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + e^x) = +\infty ;$$

de plus : $\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln X = +\infty$, donc (théorème de composition des limites) :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^x) = +\infty,$$

c'est-à-dire :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

• Limite de f en $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0, \text{ donc : } \lim_{x \rightarrow -\infty} (1 + e^x) = 1 ;$$

de plus : $\lim_{X \rightarrow 1} \ln X = \ln 1 = 0$, donc (théorème de composition) :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(1 + e^x) = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 ;$$

la droite des abscisses est donc asymptote à la courbe \mathcal{C} en $-\infty$.

2° • f est dérivable sur \mathbb{R} et, pour tout réel x :

$$f'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}.$$

donc :

$$f'(x) > 0,$$

ce qui prouve :

f est strictement croissante.

Pour tout réel x :
 $e^x > 0$.

On pouvait obtenir ce résultat en remarquant que f est la composée de la fonction : $x \mapsto 1 + e^x$ par la fonction \ln , toutes deux strictement croissantes sur leur ensemble de définition.

• f est strictement croissante sur \mathbb{R} et de limite nulle en $-\infty$, donc :

pour tout réel x ,

$$f(x) > 0.$$

On pouvait aussi remarquer :

- pour tout réel x , $1 + e^x > 1$,
 - pour tout réel X strictement supérieur à 1, $\ln X > 0$,
- ce qui conduit à : pour tout réel x , $\ln(1 + e^x) > 0$.

3° • Pour tout réel x :

$$f(x) = \ln(e^x(e^{-x} + 1)) = \ln(e^x) + \ln(e^{-x} + 1) = x + \ln(1 + e^{-x}),$$

donc :

$$f(x) = x + f(-x).$$

De plus : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(-x) = 0$,

ce qui implique que la droite Δ d'équation : $y = x$ est asymptote à la courbe \mathcal{C} en $+\infty$.

• Pour tout réel x :

$$f(x) - x = f(-x),$$

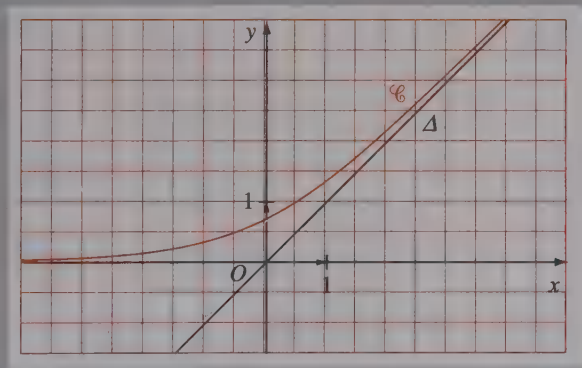
et la fonction f est à valeurs strictement positives, donc :

$$f(x) - x > 0.$$

On en déduit :

la courbe \mathcal{C} est située au-dessus de son asymptote Δ .

4°



23 1° Si x est un entier naturel non nul et n le nombre de chiffres de l'écriture décimale de x , alors :

$$10^{n-1} \leq x < 10^n,$$

donc, la fonction \log étant strictement croissante sur $]0; +\infty[$:

$$\log(10^{n-1}) \leq \log x < \log(10^n),$$

d'où :

$$(n-1) \log 10 \leq \log x < n \log 10,$$

et finalement :

$$n-1 \leq \log x < n.$$

$$\begin{aligned} n=1 &\Rightarrow 1 \leq x < 10 \\ n=2 &\Rightarrow 10 \leq x < 100 \\ n=3 &\Rightarrow 100 \leq x < 1\,000 \end{aligned}$$

$$\log 10 = 1.$$

2° $\log(2^{2003}) = 2003 \times \log 2$,
 et, d'après la calculatrice :

$$2003 \times \log 2 \approx 602,96,$$

donc :

$$602 \leq \log(2^{2003}) < 603;$$

la question 1° permet de déduire de cet encadrement :

l'écriture décimale de 2^{2003} comporte 603 chiffres.

La calculatrice affiche un message d'erreur (dépassement de capacité) si l'on exécute un calcul direct de : $\log(2^{2003})$.

20031log(2)
 602.9630813

24 1° (E) : $3^{2x} = 2^{3x}$.

Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} 3^{2x} = 2^{3x} &\Leftrightarrow e^{2x \ln 3} = e^{3x \ln 2} \\ &\Leftrightarrow 2x \ln 3 = 3x \ln 2 \\ &\Leftrightarrow (2 \ln 3 - 3 \ln 2) x = 0 \\ &\Leftrightarrow (\ln 9 - \ln 8) x = 0 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

$\ln 9 - \ln 8 \neq 0$

donc :

0 est la seule solution de (E) dans \mathbb{R} .

2° (E) : $3^{2x} - 3^{x+1} + 2 = 0$.

Pour tout réel x :

$$3^{2x} - 3^{x+1} + 2 = (3^x)^2 - 3 \times 3^x + 2,$$

de plus :

pour tout réel X ,

$$X^2 - 3X + 2 = (X - 1)(X - 2),$$

donc :

$$\begin{aligned} 3^{2x} - 3^{x+1} + 2 = 0 &\Leftrightarrow (3^x - 1)(3^x - 2) = 0 \\ &\Leftrightarrow 3^x - 1 = 0 \text{ ou } 3^x - 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 3^x = 1 \text{ ou } 3^x = 2 \\ &\Leftrightarrow e^{x \ln 3} = 1 \text{ ou } e^{x \ln 3} = 2 \\ &\Leftrightarrow x \ln 3 = 0 \text{ ou } x \ln 3 = \ln 2 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \frac{\ln 2}{\ln 3}, \end{aligned}$$

Équation : $X^2 - 3X + 2 = 0$.
 Discriminant : $\Delta = 1$.
 Solutions :

$$X_1 = \frac{3-1}{2} = 1, \quad X_2 = \frac{3+1}{2} = 2.$$

ce qui permet de conclure :

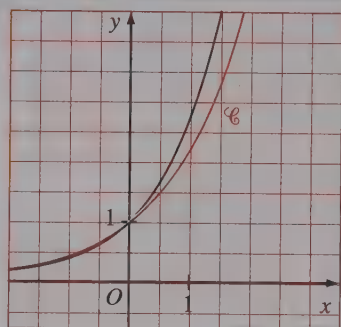
0 et $\frac{\ln 2}{\ln 3}$ sont les seules solutions de (E) dans \mathbb{R} .

25 $1^\circ f: x \mapsto 2,3^x$.

f est la fonction exponentielle de base 2,3. Elle est définie sur \mathbb{R} , et comme $2,3 > 1$, le tableau de variations de f est le suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	0	$+\infty$

L'allure de \mathcal{C} est « proche » de celle de la courbe représentative de $x \mapsto e^x$, tracée en noir.



$2^\circ f: x \mapsto \frac{1}{2^x}$.

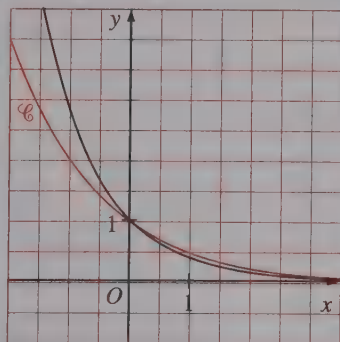
Pour tout réel x :

$$\frac{1}{2^x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x,$$

donc f est la fonction exponentielle de base $\frac{1}{2}$, et $\frac{1}{2}$ étant strictement inférieur à 1, le tableau de variations de f est le suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	0

L'allure de \mathcal{C} est « proche » de celle de la courbe représentative de $x \mapsto e^{-x}$, tracée en noir.



f est la fonction :
 $x \mapsto e^{x \ln(2,3)}$;
 elle est dérivable sur \mathbb{R} ,
 et pour tout réel x :
 $f'(x) = \ln(2,3) \times e^{x \ln(2,3)}$
 $= \ln(2,3) \times 2,3^x$.

Pour tout réel x :
 $\frac{1}{2^x} = 2^{-x} = e^{-x \ln 2} = e^{x \ln \frac{1}{2}}$.

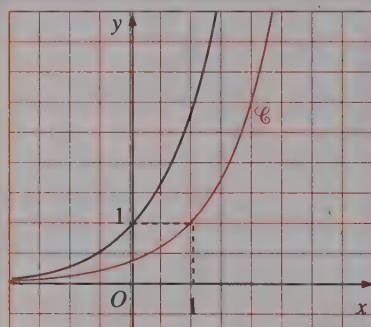
$$3^\circ f: x \mapsto \frac{1}{3} e^{x \ln 3}.$$

f est définie sur \mathbb{R} , et pour tout réel x :

$$f(x) = \frac{1}{3} \times 3^x = 3^{x-1},$$

donc \mathcal{C} est l'image de la courbe représentative de la fonction $x \mapsto 3^x$ par la translation de vecteur \vec{i} ; de plus, $x \mapsto 3^x$ a le même tableau de variations que la fonction $x \mapsto e^x$ (car $3 > 1$), donc le tableau de variations de f est le suivant :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f(x)$	0	$+\infty$



La courbe représentative de $x \mapsto 3^x$ est tracée en noir.

26 $\mathcal{C} : y' = \frac{1}{2} y.$

1° La fonction nulle est la seule fonction constante qui soit solution de \mathcal{C} ; elle correspond à $m = 0$.

Par conséquent, parmi les courbes \mathcal{C}_m , seule \mathcal{C}_0 est une droite horizontale (c'est l'axe des abscisses).

2° Soit un point $M_0(x_0, y_0)$.

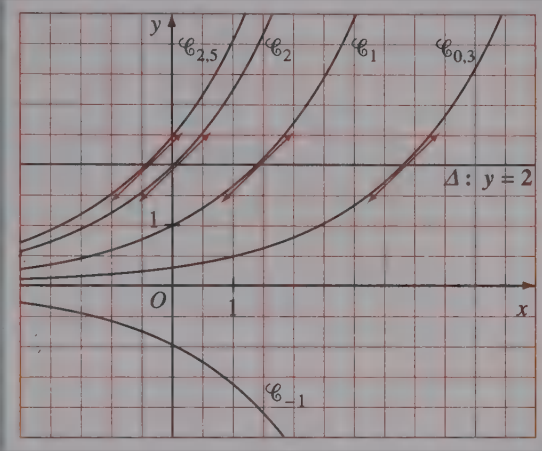
La courbe \mathcal{C}_m passe par M_0 si, et seulement si, $f_m(x_0) = y_0$,

or :

$$f_m(x_0) = y_0 \Leftrightarrow m e^{\frac{x_0}{2}} = y_0 \Leftrightarrow m = y_0 e^{-\frac{x_0}{2}},$$

donc, par le point M_0 passe une courbe \mathcal{C}_m et une seule, celle correspondant à $m = y_0 e^{-\frac{x_0}{2}}$.

3° $\Delta: y = 2$.



Soit $M(x, y)$ un point d'une des courbes \mathcal{C}_m .

La pente de la tangente à \mathcal{C}_m en M est $f'_m(x)$, et :

$$f'_m(x) = \frac{1}{2} f_m(x) = \frac{1}{2} y.$$

D'autre part, les points de Δ ont tous pour ordonnée 2.

Les tangentes aux courbes \mathcal{C}_m en des points de Δ ont donc pour pente 1 :

elles sont toutes parallèles.

27 1° • L'équation différentielle \mathcal{E} peut s'écrire :

$$y' = -\frac{1}{RC} y,$$

donc, d'après le cours, **les solutions de \mathcal{E} sont les fonctions :**

$$t \mapsto A e^{\frac{-t}{RC}}, \quad A \text{ décrivant } \mathbb{R}.$$

• On en déduit qu'il existe un réel A tel que, pour tout t de $[0; +\infty[$:

$$u(t) = A e^{\frac{-t}{RC}}.$$

D'autre part, la tension initiale étant de 20 volts : $u(0) = 20$,

c'est-à-dire :

$$A e^{\frac{-0}{RC}} = 20,$$

donc :

$$A = 20.$$

Finalement, u est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$u(t) = 20 e^{\frac{-t}{RC}}.$$

2° $R = 1\,000$ et $C = 10^{-4}$.

• Pour les valeurs numériques de R et de C imposées :

$$\frac{1}{RC} = \frac{1}{10^3 \times 10^{-4}} = \frac{1}{10^{-1}} = 10,$$

donc :

$$\text{pour tout } t \text{ de } [0; +\infty[, u(t) = 20e^{-10t}.$$

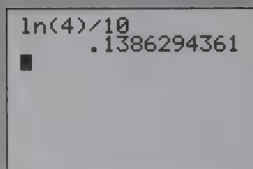
• On en déduit, pour tout t de $[0; +\infty[$:

$$u(t) \geq 5 \Leftrightarrow 20e^{-10t} \geq 5$$

$$\Leftrightarrow e^{-10t} \geq \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow -10t \geq -\ln 4$$

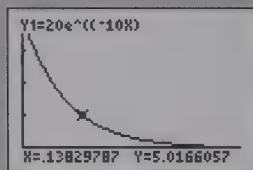
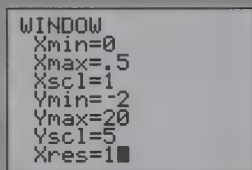
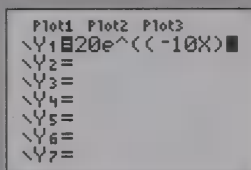
$$\Leftrightarrow t \leq \frac{\ln 4}{10}.$$



D'après la calculatrice, à 10^{-2} près : $\frac{\ln 4}{10} \approx 0,14$,

donc :

**la tension aux bornes du condensateur
reste supérieure ou égale à 5 volts pendant environ 0,14 secondes.**



28 1° • T' étant proportionnelle à $T - 20$, il existe un réel k tel que :

$$T' = k(T - 20),$$

c'est-à-dire :

$$\text{pour tout } t \text{ de } [0; +\infty[, T'(t) = k(T(t) - 20).$$

De plus, la fonction $f: t \mapsto T(t) - 20$ a pour dérivée T' , donc :

$$\text{pour tout } t \text{ de } [0; +\infty[, f'(t) = kf(t),$$

ce qui prouve que f est solution sur $[0; +\infty[$ d'une équation différentielle de la forme : $y' = ky$.

• Les fonctions définies sur \mathbb{R} qui sont solutions de l'équation différentielle : $y' = ky$ sont les fonctions : $t \mapsto Ae^{kt}$, où A décrit \mathbb{R} , donc il existe un réel A tel que :

$$\text{pour tout } t \text{ de } [0; +\infty[, f(t) = Ae^{kt},$$

c'est-à-dire :

$$\text{pour tout } t \text{ de } [0; +\infty[, T(t) = Ae^{kt} + 20.$$

D'après l'énoncé : $\begin{cases} T(0) = 70 \\ T(5) = 60, \end{cases}$

donc les réels k et A vérifient : $\begin{cases} Ae^{k \times 0} + 20 = 70 \\ Ae^{k \times 5} + 20 = 60, \end{cases}$

ce qui équivaut à : $A = 50$ et $50e^{5k} = 40$;

de plus :

$$50e^{5k} = 40 \Leftrightarrow e^{5k} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow 5k = \ln \frac{4}{5} \Leftrightarrow k = \frac{1}{5} \ln \frac{4}{5},$$

ce qui permet de conclure que T est la fonction définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$$T(t) = 20 + 50 e^{\frac{t}{5} \ln \frac{4}{5}}.$$

$$e^{\frac{t}{5} \ln \frac{4}{5}} = \left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{t}{5}} = (0,8)^{\frac{t}{5}} = (1,25)^{-\frac{t}{5}}.$$

2° • $T(30) = 20 + 50 e^{\frac{30}{5} \ln \frac{4}{5}} = 20 + 50 e^{6 \ln \frac{4}{5}} = 20 + 50 \left(\frac{4}{5}\right)^6,$

et, à l'aide de la calculatrice :

$$20 + 50 \left(\frac{4}{5}\right)^6 \approx 33,11.$$

$$20+50(4/5)^6$$

$$33.1072$$

donc, **après une demi-heure, la température du corps sera de 33 °C** (au degré près).

• Pour tout t de $[0 ; +\infty[$:

$$T(t) = 40 \Leftrightarrow 20 + 50 e^{\frac{t}{5} \ln \frac{4}{5}} = 40$$

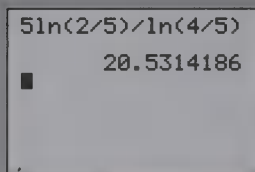
$$\Leftrightarrow 50 e^{\frac{t}{5} \ln \frac{4}{5}} = 20$$

$$\Leftrightarrow e^{\frac{t}{5} \ln \frac{4}{5}} = \frac{2}{5}$$

$$\Leftrightarrow \frac{t}{5} \ln \frac{4}{5} = \ln \frac{2}{5}$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{5 \ln \frac{2}{5}}{\ln \frac{4}{5}},$$

et, à l'aide de la calculatrice : $\frac{5 \ln \frac{2}{5}}{\ln \frac{4}{5}} \approx 20,53$.



donc :

le corps aura une température de 40 °C au bout de 21 minutes
(à la minute près).

29 Pour tout x de $]0 ; +\infty[$,

$$f_m(x) = \frac{x^2 - 1}{2} - m \ln x.$$

1° a. Limite de f_m en $+\infty$.

Les théorèmes algébriques sur les limites ne permettant pas de conclure directement, transformons l'écriture de $f_m(x)$.

Pour tout x de $]0 ; +\infty[$,

$$f_m(x) = \frac{x^2}{2} - m \ln x - \frac{1}{2} = \frac{x^2}{2} \left(1 - 2m \frac{\ln x}{x^2} \right) - \frac{1}{2};$$

de plus :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2} = +\infty$,

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$, donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - 2m \frac{\ln x}{x^2} \right) = 1$,

ce qui implique :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

b. Limite de f_m en 0.

On a : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{2} = -\frac{1}{2}$

et $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$,

donc :

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_m(x) = -\infty \text{ si } m < 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_m(x) = -\frac{1}{2} \text{ si } m = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_m(x) = +\infty \text{ si } m > 0.$$

2° f_m est dérivable sur $]0; +\infty[$, et pour tout x de cet intervalle :

$$f'_m(x) = x - \frac{m}{x} = \frac{x^2 - m}{x},$$

ce qui conduit à distinguer trois cas.

• $m < 0$

Pour tout x de $]0; +\infty[$:

$$f'_m(x) > 0.$$

x	0	$+\infty$
$f'_m(x)$	+	
$f_m(x)$	$-\infty$	$+\infty$

• $m = 0$

Pour tout x de $]0; +\infty[$:

$$f_0(x) = \frac{x^2 - 1}{2} \text{ et } f'_0(x) = x.$$

x	0	$+\infty$
$f'_0(x)$	+	
$f_0(x)$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$

f_0 est la restriction à $]0; +\infty[$ du polynôme du second degré $x \mapsto \frac{x^2 - 1}{2}$.
Le point de coordonnées $(0; -\frac{1}{2})$ n'appartient pas à \mathcal{C}_0 ; notons que \mathcal{C}_0
se rapproche de ce point tangentiellement à la droite d'équation $y = -\frac{1}{2}$.

• $m > 0$

Pour tout x de $]0; +\infty[$:

$$f'_m(x) = \frac{(x - \sqrt{m})(x + \sqrt{m})}{x},$$

donc $f'_m(x)$ est du signe de :

$$x - \sqrt{m}.$$

x	0	\sqrt{m}	$+\infty$
$f'_m(x)$	-	0	+
$f_m(x)$	$+\infty$	$f_m(\sqrt{m})$	$+\infty$

3° a. $x_0 > 0$, donc f_m est définie en x_0 , et dire que la courbe \mathcal{C}_m passe par le point $M_0(x_0, y_0)$ signifie :

$$f_m(x_0) = y_0,$$

soit :

$$\frac{x_0^2 - 1}{2} - m \ln x_0 = y_0,$$

c'est-à-dire : $(\ln x_0) \times m = \frac{x_0^2 - 1}{2} - y_0$;

de plus : $x_0 \neq 1$,

donc : $\ln x_0 \neq 0$,

ce qui implique que l'équation d'inconnue m :

$$(\ln x_0) \times m = \frac{x_0^2 - 1}{2} - y_0$$

admet une seule solution (qui est : $\frac{x_0^2 - 1 - 2y_0}{2 \ln x_0}$) .

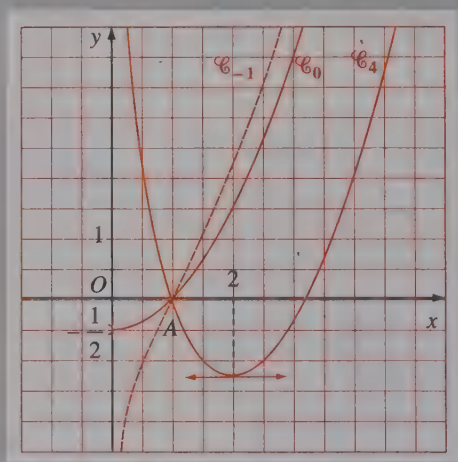
On en déduit qu'il passe une seule courbe \mathcal{C}_m par le point $M_0(x_0, y_0)$.

b. Pour tout réel m : $f_m(1) = 0$, donc toutes les courbes \mathcal{C}_m passent par le point $A(1 ; 0)$.

De plus, d'après la question précédente, il existe une seule courbe \mathcal{C}_m passant par un point donné, d'abscisse strictement positive et différente de 1.

On peut en conclure que le point $A(1 ; 0)$ est le seul point appartenant à toutes les courbes \mathcal{C}_m .

4°



P (1) : $y' - 2y = xe^x$.

1° L'équation différentielle (2) : $y' - 2y = 0$

peut s'écrire : $y' = 2y$,

donc les solutions de (2) sont les fonctions :

$$x \mapsto A e^{2x} , A \text{ décrivant } \mathbb{R} .$$

2° a. La fonction $u : x \mapsto (ax + b) e^x$ est dérivable sur \mathbb{R} et, pour tout réel x :

$$u'(x) = a e^x + (ax + b) e^x = (ax + a + b) e^x,$$

donc :

$$u'(x) - 2u(x) = (ax + a + b) e^x - 2(ax + b) e^x = (-ax + a - b) e^x.$$

On en déduit que u est solution de (1) si, et seulement si, pour tout réel x :

$$(-ax + a - b) e^x = x e^x,$$

c'est-à-dire, e^x étant non nul :

$$-ax + a - b = x,$$

soit :

$$(-a - 1)x + a - b = 0.$$

Or, le polynôme $x \mapsto (-a - 1)x + a - b$ est nul si, et seulement si :

$$\begin{cases} -a - 1 = 0 \\ a - b = 0, \end{cases}$$

c'est-à-dire :

$$a = -1 \text{ et } b = -1,$$

donc la fonction u cherchée est :

$$x \mapsto -(x + 1) e^x.$$

b. En notant w la fonction $x \mapsto x e^x$, on peut écrire $u' - 2u = w$;

de plus, v est solution de (1) si, et seulement si $v' - 2v = w$,

donc :

$$\begin{aligned} v' - 2v = w &\Leftrightarrow v' - 2v = u' - 2u \\ &\Leftrightarrow v' - u' - 2v + 2u = 0 \\ &\Leftrightarrow (v - u)' - 2(v - u) = 0 \end{aligned}$$

ce qui prouve :

v est solution de (1) si, et seulement si, $v - u$ est solution de (2).

c. D'après ce qui précède, v est solution de (1) si, et seulement si, v est la somme de u et d'une solution de (2), donc les solutions de (1) sont les fonctions :

$$x \mapsto -(x + 1) e^x + A e^{2x}, \quad A \text{ décrivant } \mathbb{R}.$$

3° Soit f une solution de (1) ; il existe donc un réel A tel que, pour tout réel x :

$$f(x) = -(x + 1) e^x + A e^{2x},$$

et :

$$f(0) = -(0 + 1) e^0 + A e^{2 \times 0} = -1 + A,$$

donc :

$$f(0) = 0 \Leftrightarrow -1 + A = 0 \Leftrightarrow A = 1.$$

Il en résulte que la seule solution de (1) qui s'annule en 0 est la fonction :

$$x \mapsto -(x + 1) e^x + e^{2x}.$$

SUITES ET RÉCURRENCE

Rappels de cours

I- Définition

Une suite est une fonction de \mathbb{N} dans \mathbb{R} .

II- Raisonement par récurrence

Le principe de récurrence peut s'énoncer ainsi :

**Soit $\mathcal{P}(n)$ une propriété de l'entier naturel n ;
si $\mathcal{P}(0)$ est vraie et que, pour tout entier naturel p ,
 $\mathcal{P}(p)$ implique $\mathcal{P}(p + 1)$,
alors $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout entier naturel n .**

Démontrer par récurrence :

« pour tout n de \mathbb{N} , $\mathcal{P}(n)$ est vraie »

se fait en deux étapes :

- on prouve que la propriété $\mathcal{P}(0)$ est vraie (*initialisation*),
- on démontre que, pour tout entier naturel p , si la propriété $\mathcal{P}(p)$ est vraie, alors la propriété $\mathcal{P}(p + 1)$ est vraie (*hérédité*).

III- Suite majorée, suite minorée, suite bornée

Soit (u_n) une suite définie sur \mathbb{N} .

- (u_n) est majorée si, et seulement si, il existe un réel M tel que :
pour tout entier naturel n , $u_n \leq M$.
- (u_n) est minorée si, et seulement si, il existe un réel m tel que :
pour tout entier naturel n , $u_n \geq m$.
- (u_n) est bornée si, et seulement si, elle est à la fois majorée et minorée.

IV- Sens de variation

Soit (u_n) une suite définie sur \mathbb{N} .

- (u_n) est croissante si, et seulement si :
pour tout entier naturel n , $u_{n+1} \geq u_n$.
- (u_n) est décroissante si, et seulement si :
pour tout entier naturel n , $u_{n+1} \leq u_n$.
- (u_n) est strictement croissante si, et seulement si :
pour tout entier naturel n , $u_{n+1} > u_n$.
- (u_n) est strictement décroissante si, et seulement si :
pour tout entier naturel n , $u_{n+1} < u_n$.
- (u_n) est constante si, et seulement si :
pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n$.
- (u_n) est monotone si, et seulement si, (u_n) est croissante ou (u_n) est décroissante.

V- Limite

■ Suite convergente

- Une suite est convergente si, et seulement si, elle admet une limite réelle.
- Une suite est divergente si, et seulement si, elle n'est pas convergente (c'est-à-dire si sa limite est $+\infty$ ou $-\infty$, ou si elle n'admet pas de limite).

■ Suites et inégalités

- Si une suite (u_n) convergente est minorée par un réel m , alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \geq m.$$

- Si une suite (u_n) convergente est majorée par un réel M , alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq M.$$

- Si (u_n) et (v_n) sont des suites convergentes telles que :
pour tout entier naturel n , $u_n \leq v_n$,

alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n.$$

• Théorème des gendarmes

Si (u_n) , (v_n) et (w_n) sont des suites telles que :

$$\text{pour tout entier naturel } n, v_n \leq u_n \leq w_n,$$

et si (v_n) et (w_n) convergent vers un même réel ℓ , alors (u_n) est convergente et admet pour limite ℓ .

■ Image d'une suite par une fonction

a et b désignent chacun un réel, $+\infty$ ou $-\infty$.

Si f est une fonction définie sur un intervalle I et si (u_n) est une suite d'éléments de I telles que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a, \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = b,$$

alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = b.$$

■ Théorème de la convergence monotone

- Toute suite croissante et majorée est convergente.
- Toute suite décroissante et minorée est convergente.

VI- Suites adjacentes

■ Définition

Des suites (u_n) et (v_n) sont dites adjacentes si, et seulement si, l'une est croissante, l'autre décroissante et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0.$$

■ Théorème des suites adjacentes

- Si des suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes, alors elles sont convergentes et admettent la même limite.
- De plus, si (u_n) est croissante, (v_n) décroissante, alors, en notant ℓ leur limite commune :

$$\text{pour tout entier naturel } n, u_0 \leq u_n \leq \ell \leq v_n \leq v_0,$$

et ℓ est l'unique réel tel que :

$$\text{pour tout entier naturel } n, u_n \leq \ell \leq v_n.$$

EXERCICES

de contrôle des connaissances

1

(Corrigé p. 202)

On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par :

$$u_0 = 2 \text{ et, pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = 2u_n - 3.$$

Démontrer par récurrence :

$$\text{pour tout entier naturel } n, u_n = 3 - 2^n.$$

2

(Corrigé p. 202)

Étudier le sens de variation et la limite éventuelle de la suite u définie par :

$$u_n = f(n)$$

dans le cas où f est la fonction :

$$1^\circ x \mapsto \frac{-1}{2x+4};$$

$$2^\circ x \mapsto \ln(x^2 + 1);$$

$$3^\circ x \mapsto -2 + \frac{3}{x+1};$$

$$4^\circ x \mapsto e^{\frac{1}{x+1}}.$$

3

(Corrigé p. 203)

Déterminer la limite quand n tend vers $+\infty$ de :

$$1^\circ -n^3 + 2n^2;$$

$$2^\circ 2 + (-0,3)^n;$$

$$3^\circ 1 + \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2};$$

$$4^\circ \frac{3}{n} + \frac{n}{3};$$

$$5^\circ \frac{1}{n\sqrt{n}};$$

$$6^\circ \frac{1}{\ln n};$$

$$7^\circ \frac{e^n}{n^3};$$

$$8^\circ \frac{\ln n}{n^2};$$

$$9^\circ \frac{3^n}{2^n};$$

Déterminer un majorant et un minorant de la suite (u_n) proposée.

$$1^\circ u_n = \frac{-1}{n+1};$$

$$2^\circ u_n = \left(\frac{-1}{2}\right)^n;$$

$$3^\circ u_n = \sin n;$$

$$4^\circ u_n = \frac{1}{1 + \ln n}.$$

Soit u la suite définie sur \mathbb{N} par :

$$u_0 = 1 \text{ et, pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 1.$$

1° Placer les points de l'axe (Ox) d'abscisses u_0, u_1, u_2, u_3 (sans calculer u_1, u_2, u_3) ; veiller à mettre en évidence la construction de ces points en utilisant les droites d et Δ d'équations respectives :

$$y = \frac{1}{2}x - 1 \text{ et } y = x.$$

2° Formuler une conjecture sur le sens de variation, la limite de la suite u .

Raisonnement par récurrence

6 ★ 10 min

(Corrigé p. 207)

On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par :

$$u_0 = 1 \text{ et, pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2 + 1}}.$$

Exprimer son terme général u_n en fonction de n (on pourra s'aider du calcul des premiers termes).

7 ★ 10 min

(Corrigé p. 208)

Démontrer que, pour tout entier naturel n : $\sum_{k=0}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

8 ★ ★ 15 min

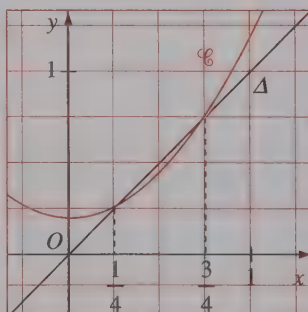
(Corrigé p. 209)

Démontrer que, pour tout entier n supérieur ou égal à 4 : $2^n \geq n^2$.

Exploration numérique et graphique

9 ★ 10 min

(Corrigé p. 210)



Sur le graphique sont représentées :

- la courbe représentative \mathcal{C} de la fonction $f: x \mapsto x^2 + \frac{3}{16}$,
- la droite Δ d'équation : $y = x$.

Il est facile de vérifier que \mathcal{C} et Δ ont deux points d'intersection, d'abscisses $\frac{1}{4}$ et $\frac{3}{4}$.

1° Que peut-on dire de la suite $u: n \mapsto f(n)$?

2° On considère maintenant une suite v qui vérifie la relation de récurrence :

$$v_{n+1} = f(v_n).$$

a. À l'aide du seul graphique, formuler une conjecture (monotonie, limite) concernant la suite v lorsque :

- $v_0 = 1$;
- $v_0 = 0,7$;
- $v_0 = 0,1$.

b. Peut-on choisir v_0 de manière que v soit constante ?

10 ★ 5 min

(Corrigé p. 211)

Programmer la suite u définie par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}.$$

À partir de quel indice l'affichage se stabilise-t-il ?

Quelle conjecture est-on amené à formuler ?

11 ★ ★ ★ 10 min

(Corrigé p. 211)

On considère la suite (F_n) définie sur \mathbb{N} par :

$$F_0 = 1, \quad F_1 = 1$$

et pour tout entier naturel n :

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Programmer le calcul de $\frac{F_{n+1}}{F_n}$, l'entier n variant de 2 à 25.

Quelle conjecture est-on amené à formuler concernant la suite $n \mapsto \frac{F_{n+1}}{F_n}$?

Majoration, minoration, sens de variation

12 ★ 10 min

(Corrigé p. 213)

Démontrer que la suite (u_n) définie sur \mathbb{N}^* par :

$$u_n = \frac{\ln n}{n}$$

est décroissante à partir du rang 3.

13 ★ 10 min

(Corrigé p. 213)

Démontrer que la suite $u : n \mapsto \frac{5^n}{n!}$ est décroissante à partir d'un rang que l'on précisera.

14 ★ ★ 10 min

(Corrigé p. 214)

Soit u une suite définie sur \mathbb{N} qui vérifie :

$$\text{pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = e^{-u_n}.$$

Démontrer que, quel que soit le premier terme u_0 , la suite u est bornée par 0 et 1 à partir du rang 2.

15 ★ ★ 15 min

(Corrigé p. 215)

On considère la suite u définie sur \mathbb{N} par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^n} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{4^k}.$$

1° Quel est le sens de variation de la suite u ?

2° Démontrer :

$$\text{pour tout entier naturel } n, u_n = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

Quelle est la limite de la suite u ?

3° On pose : $M = 1,333\ 333\ 333$.

M est-il un majorant de u ?

Limite

16 ★ ★ 20 min

(Corrigé p. 216)

Déterminer la limite de la suite (u_n) proposée.

$$1^\circ u_n = \frac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n}.$$

$$2^\circ u_n = \frac{3n^2 + 2n + 1}{5n - 3}.$$

$$3^\circ u_n = \frac{1 + 2 + \dots + n}{(n+1)^2}.$$

$$4^\circ u_n = (-1)^n + \ln n.$$

$$5^\circ u_n = \cos \frac{\pi}{3^n}.$$

$$6^\circ u_n = \cos \frac{(6n+1)\pi}{3}.$$

$$7^\circ u_n = \frac{1}{n} \cos \frac{n\pi}{17}.$$

$$8^\circ u_n = \frac{n^2}{2n^2 + \cos n}.$$

17 ★ ★ 10 min

(Corrigé p. 220)

Quelle est la limite de la suite (u_n) définie sur \mathbb{N}^* par :

$$u_1 = 0,57, u_2 = 0,5757, \dots, u_n = \underbrace{0,57\dots57}_{2n \text{ chiffres}} ?$$

18 ★ ★ 15 min

(Corrigé p. 221)

On considère la suite $u : n \mapsto \sqrt{n^2 + n} - n$.

1° Donner l'approximation décimale obtenue par un tableur ou à l'affichage d'une calculatrice de u_1, u_2, u_3, u_4 , puis de u_{10^n} pour les entiers n variant de 1 à 13.

2° Démontrer :

$$\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1}.$$

En déduire la limite de la suite u .

3° Expliquer pourquoi les résultats des deux questions précédentes apparaissent contradictoires.

On considère la suite (u_n) définie sur \mathbb{N} par $u_0 = 1$ et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{14}{3}.$$

1° À l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que la suite (u_n) est croissante.

2° a. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation : $x = \frac{1}{3}x + \frac{14}{3}$.

b. Si la suite (u_n) converge, quelle est sa limite ?

3° On pose : pour tout n de \mathbb{N} , $v_n = u_n - 7$.

Démontrer que la suite (v_n) est géométrique.

En déduire l'expression de v_n , puis celle de u_n , en fonction de n .

La suite (u_n) est-elle convergente ?

Vrai ou faux ?

1° Toute suite décroissante est majorée.

2° Toute suite décroissante et minorée par 0 a pour limite 0.

3° Toute suite croissante et majorée est bornée.

4° Toute suite qui admet pour limite $+\infty$ n'est pas majorée.

5° Toute suite convergente est bornée.

6° Si u et v sont des suites convergentes qui vérifient :
pour tout n de \mathbb{N} , $u_n < v_n$,

alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n < \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n.$$

Encadrement, comparaison

1° Démontrer qu'à partir d'un rang à déterminer : $2^n \leq (n-1)!$.

2° Quelle est la limite de $\frac{2^n}{n!}$ quand n tend vers $+\infty$?

22 ★ ★ 15 min

(Corrigé p. 227)

Soient u_0 un réel et (u_n) la suite définie sur \mathbb{N} par son premier terme u_0 et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2 + u_n^2}.$$

1° Démontrer : pour tout n de \mathbb{N} , $|u_{n+1}| \leq \frac{|u_n|}{2}$.

2° En déduire : pour tout n de \mathbb{N} , $|u_n| \leq \frac{|u_0|}{2^n}$.

Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

Suites adjacentes

23 ★ ★ 15 min

(Corrigé p. 228)

Soient (u_n) et (v_n) les suites définies sur \mathbb{N}^* par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!},$$

$$v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}.$$

1° Démontrer que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

2° En déduire un entier naturel p tel que u_p soit une valeur approchée à 10^{-3} près par défaut de la limite commune ℓ des deux suites ; donner l'écriture fractionnaire réduite de u_p ainsi que l'approximation de u_p obtenue à l'affichage de la calculatrice.

24 ★ ★ 15 min

(Corrigé p. 229)

On définit les suites u et v par : $u_0 = 1$, $v_0 = 2$,

et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}$, $v_{n+1} = \frac{u_n + 4v_n}{5}$.

1° On pose : $w = v - u$.

Démontrer que la suite w est géométrique.

Préciser la limite de w et exprimer w_n en fonction de n .

2° Exprimer $u_{n+1} - u_n$ et $v_{n+1} - v_n$ en fonction de w_n .

En déduire le sens de variation des suites u et v .

3° Justifier que u et v sont convergentes et ont la même limite, qui sera notée ℓ .

4° On pose : $t = 3u + 10v$.

Démontrer que la suite t est constante.

En déduire la valeur de ℓ .

Exemples de suites récurrentes

25



20 min.

(Corrigé p. 231)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 2$ et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{2u_n + 1} .$$

1° a. Justifier : pour tout n de \mathbb{N} , u_n est strictement positif.

b. Si la suite (u_n) converge, quelle est sa limite ?

2° Le plan étant rapporté à un repère orthonormé, tracer :

- la courbe représentative \mathcal{C} de la fonction $f: x \mapsto \frac{x+2}{2x+1}$,

- la droite Δ d'équation $y = x$.

(On se limitera au cadrage : $0 \leq x \leq 2,2$ et $0 \leq y \leq 1,5$.)

Visualiser graphiquement u_1 , u_2 , u_3 et u_4 .

Que peut-on conjecturer au sujet de la convergence de la suite ?

3° Pour démontrer la conjecture, on considère la suite (v_n) définie par :

$$\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N} , v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1} .$$

a. Démontrer que (v_n) est une suite géométrique ; quelle est sa limite ?

Exprimer v_n en fonction de n .

b. Exprimer u_n en fonction de v_n ; en déduire la limite de (u_n) .

Enfin, exprimer u_n en fonction de n .

On considère la suite u définie sur \mathbb{N} par $u_0 = 1,5$ et :

$$\text{pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 3.$$

1° Démontrer que la suite u est croissante.

2° a. On suppose dans cette question que la suite u converge vers un réel ℓ .
Donner alors une équation du second degré vérifiée par ℓ .

b. En déduire que la suite u est divergente.

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et la relation de récurrence :

$$u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}.$$

1° Démontrer par récurrence :

$$\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, 2 \leq u_{n+1} \leq u_n.$$

2° a. Justifier que la suite (u_n) est convergente et que sa limite, notée ℓ ,
est supérieure ou égale à 2.

b. Démontrer que ℓ vérifie :

$$\ell = \sqrt{2 + \ell};$$

en déduire la valeur de ℓ .

28


25 min

(Corrigé p. 235)

On considère la suite u définie sur \mathbb{N}^* par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

1° Démontrer : pour tout x de $] -1 ; +\infty[$, $\ln(x+1) \leq x$.

On pourra étudier le sens de variation de la fonction $f : x \mapsto \ln(x+1) - x$.

2° En déduire :

$$\text{pour tout } k \text{ de } \mathbb{N}^*, \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k},$$

puis :

$$\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*, \ln(n+1) \leq u_n.$$

Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

3° Écrire un programme qui détermine le plus petit entier naturel n tel que :

$$u_n \geq 10.$$

29


45 min

(Corrigé p. 237)

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies sur \mathbb{N} par $u_0 = 3$ et les relations :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}, \quad v_n = \frac{7}{u_n}.$$

1° Calculer $v_0, u_1, v_1, u_2, v_2, u_3$ et v_3 .

Donner l'approximation de u_3 et v_3 lue à l'affichage de la calculatrice.

2° Justifier, par récurrence :

$$\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, u_n > 0 \text{ et } v_n > 0.$$

3° Démontrer :

$$\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{1}{4u_{n+1}} (u_n - v_n)^2.$$

En déduire :

$$\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, u_n - v_n \geq 0.$$

4° Prouver que la suite (u_n) est décroissante et que la suite (v_n) est croissante.

5° a. Démontrer :

$$\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*, u_n \geq \frac{21}{8}.$$

b. Démontrer :

$$\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*, u_{n+1} - v_{n+1} \leq \frac{1}{10} (u_n - v_n)^2.$$

En déduire, à l'aide d'un raisonnement par récurrence :

$$\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, u_n - v_n \leq \frac{1}{10^{2^n - 1}}.$$

6° En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

Quelle est leur limite commune ?

7° Justifier que u_3 est une approximation de $\sqrt{7}$ à 10^{-7} près.

Déterminer le plus petit entier naturel n tel que u_n soit une approximation de $\sqrt{7}$ à 10^{-100} près.

CORRIGÉS

des exercices

1 $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 2u_n - 3$.

Démontrons par récurrence :

$$\text{pour tout entier naturel } n, u_n = 3 - 2^n.$$

Pour tout n de \mathbb{N} , notons $\mathcal{P}(n)$ la proposition : « $u_n = 3 - 2^n$ ».

• Initialisation

$u_0 = 2$ et $3 - 2^0 = 3 - 1 = 2$, donc : $u_0 = 3 - 2^0$; il vient :

$\mathcal{P}(0)$ est vraie.

• Hérité

Soit p un entier naturel quelconque ;

supposons $\mathcal{P}(p)$ vraie, c'est-à-dire : $u_p = 3 - 2^p$,

et démontrons que $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie, c'est-à-dire : $u_{p+1} = 3 - 2^{p+1}$.

Par définition de la suite (u_n) : $u_{p+1} = 2u_p - 3$,

donc, d'après l'hypothèse de récurrence : $u_{p+1} = 2(3 - 2^p) - 3$,

d'où :

$$u_{p+1} = 6 - 2 \times 2^p - 3 = 3 - 2^{p+1}.$$

On a démontré :

$\mathcal{P}(0)$ est vraie,

pour tout p de \mathbb{N} , si $\mathcal{P}(p)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie.

Le principe de récurrence permet de conclure que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n de \mathbb{N} , autrement dit :

pour tout entier naturel n ,

$$u_n = 3 - 2^n.$$

Ce résultat met en évidence que la suite (u_n) diverge vers $-\infty$.

2 $u_n = f(n)$.

$$1^\circ f : x \mapsto \frac{-1}{2x+4}.$$

La fonction f est strictement croissante sur $]-2; +\infty[$, et : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$;

de plus : $\mathbb{N} \subset]-2; +\infty[$, donc la suite $u : n \mapsto \frac{-1}{2n+4}$ est définie sur

\mathbb{N} , **strictement croissante**, et : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

$$2^\circ f : x \mapsto \ln(x^2 + 1).$$

• f est la composée de la fonction : $x \mapsto x^2 + 1$, strictement croissante et à valeurs strictement positives sur $[0; +\infty[$, par la fonction \ln , strictement

croissante sur $]0; +\infty[$, donc f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 1) = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln X = +\infty$, donc, d'après le théorème de composition des limites : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln (x^2 + 1) = +\infty$,

c'est-à-dire : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

\mathbb{N} étant inclus dans $[0; +\infty[$, on en déduit que la suite $u : n \mapsto \ln (n^2 + 1)$ est définie sur \mathbb{N} , **strictement croissante** et : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

$$3^\circ f : x \mapsto -2 + \frac{3}{x+1}$$

La fonction $x \mapsto \frac{3}{x+1}$ étant strictement décroissante sur $] -1; +\infty[$ et admettant pour limite 0 en $+\infty$, f est strictement décroissante sur $] -1; +\infty[$ et : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$;

de plus, \mathbb{N} est inclus dans $] -1; +\infty[$, donc la suite $u : n \mapsto -2 + \frac{3}{n+1}$ est définie sur \mathbb{N} , **strictement décroissante** et : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -2$.

$$4^\circ f : x \mapsto e^{\frac{1}{x+1}}$$

La fonction f est la composée :

• de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x+1}$, strictement décroissante sur $] -1; +\infty[$, de limite 0 en $+\infty$,

• par la fonction \exp , strictement croissante sur \mathbb{R} , de limite 1 en 0, donc f est strictement décroissante sur $] -1; +\infty[$, de limite 1 en $+\infty$.

\mathbb{N} étant inclus dans $] -1; +\infty[$, il en résulte que la suite $u : n \mapsto e^{\frac{1}{n+1}}$ est définie sur \mathbb{N} , **strictement décroissante** et admet 1 pour limite.

$$1^\circ n \mapsto -n^3 + 2n^2$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (-n^3 + 2n^2) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (-n^3) = -\infty$$

On applique la règle opératoire : à l'infini, la limite d'un polynôme est celle de son terme de plus haut degré.

2° $n \mapsto 2 + (-0,3)^n$.

$n \mapsto (-0,3)^n$ est une suite géométrique de raison $-0,3$, et : $|-0,3| < 1$, donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-0,3)^n = 0$, et on peut conclure :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (2 + (-0,3)^n) = 2.$$

3° $n \mapsto 1 + \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2}$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n} - \frac{2}{n^2}\right) = 1.$$

4° $n \mapsto \frac{3}{n} + \frac{n}{3}$.

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{n} = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{3} = +\infty$, donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{n} + \frac{n}{3}\right) = +\infty.$$

5° $n \mapsto \frac{1}{n\sqrt{n}}$.

On sait : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$, donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n\sqrt{n} = +\infty$, ce qui implique :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} = 0.$$

6° $n \mapsto \frac{1}{\ln n}$.

On sait : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln n = +\infty$, donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln n} = 0$.

7° $n \mapsto \frac{e^n}{n^3}$.

L'exponentielle l'emporte en $+\infty$ sur toute fonction puissance, donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^n}{n^3} = +\infty.$$

8° $n \mapsto \frac{\ln n}{n^2}$.

Toute fonction puissance l'emporte en $+\infty$ sur le logarithme népérien, donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln n}{n^2} = 0.$$

$$9^\circ n \mapsto \frac{3^n}{2^n}.$$

Pour tout n de \mathbb{N} , $\frac{3^n}{2^n} = \left(\frac{3}{2}\right)^n$, et $\frac{3}{2} > 1$,

donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n}{2^n} = +\infty.$$

$n \mapsto \frac{3^n}{2^n}$ est une suite géométrique de raison $\frac{3}{2}$.

4 $1^\circ u_n = \frac{-1}{n+1}$.

Pour tout entier naturel n :

$$0 < \frac{1}{n+1} \leq 1,$$

donc : $-1 \leq \frac{-1}{n+1} < 0,$

c'est-à-dire : $-1 \leq u_n < 0.$

On en déduit :

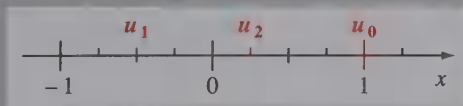
**-1 est un minorant de la suite (u_n) ,
0 en est un majorant.**

Tout réel inférieur ou égal à -1 est un minorant de cette suite, et tout réel positif en est un majorant.

$$2^\circ u_n = \left(\frac{-1}{2}\right)^n.$$

Pour tout n de \mathbb{N} : $|u_n| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq 1,$

donc la suite (u_n) est bornée par -1 et 1.



Plus précisément : $u_0 = 1$, $u_1 = -\frac{1}{2}$ et, si $n \geq 2$, alors : $|u_n| \leq \frac{1}{4}$,

donc :

- **1 est un majorant de (u_n)** (c'est le maximum),
- **$-\frac{1}{2}$ est un minorant de (u_n)** (c'est le minimum).

$$3^\circ u_n = \sin n.$$

On sait que, pour tout réel x :

$$-1 \leq \sin x \leq 1,$$

donc : pour tout entier naturel n , $-1 \leq u_n \leq 1,$

ce qui permet d'affirmer que la suite (u_n) est bornée par -1 et 1 .

Aucun terme de la suite n'est égal à 1 ou -1 . En effet, les réels en lesquels la fonction sinus prend pour valeur 1 ou -1 sont les nombres $\frac{\pi}{2} + k\pi$, où k est un entier relatif ; le nombre π étant irrationnel, aucun nombre de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$ (k entier) n'est un entier.

$$4^\circ u_n = \frac{1}{1 + \ln n}.$$

La suite (u_n) est définie sur \mathbb{N}^* , et pour tout entier naturel n non nul :

$$\ln n \geq 0,$$

c'est-à-dire : $1 + \ln n \geq 1$,

$$\text{d'où : } 0 < \frac{1}{1 + \ln n} \leq 1,$$

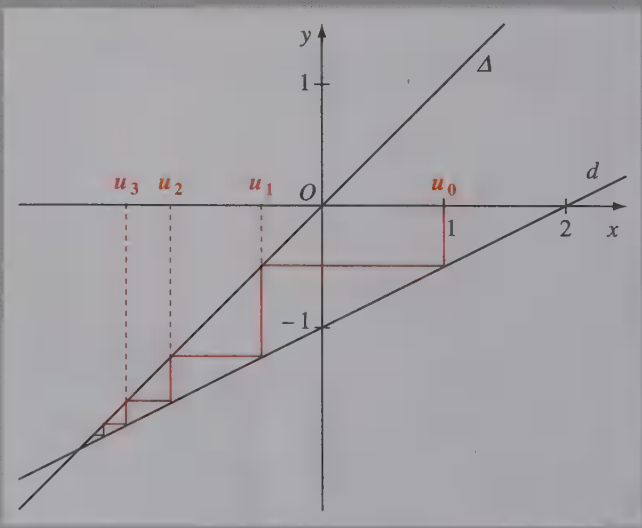
autrement dit : $0 < u_n \leq 1$.

La suite (u_n) est donc bornée par 0 et 1 .

$\ln x \geq 0$ si $x \geq 1$.

5 $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 1$.

1°



2° Il semble que la suite u soit décroissante et qu'elle converge vers -2 , abscisse du point d'intersection des droites d et Δ .

Si la suite u est décroissante et admet pour limite -2 , alors :

- elle est majorée par son premier terme 1,
- elle est minorée par -2 .

▮ $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2 + 1}}$.

On obtient après calcul : $u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $u_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $u_3 = \frac{1}{\sqrt{4}}$,

ce qui invite à démontrer par récurrence :

pour tout entier naturel n , $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$.

Pour tout n de \mathbb{N} , notons $\mathcal{P}(n)$ la proposition : « $u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ ».

• Initialisation

$u_0 = 1$ et $\frac{1}{\sqrt{0+1}} = \frac{1}{1} = 1$, donc : $u_0 = \frac{1}{\sqrt{0+1}}$;

il vient : $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

• Hérédité

Soit p un entier naturel quelconque ; supposons $\mathcal{P}(p)$ vraie, c'est-à-dire :

$$u_p = \frac{1}{\sqrt{p+1}},$$

et démontrons que $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie.

Par définition de la suite (u_n) : $u_{p+1} = \frac{u_p}{\sqrt{u_p^2 + 1}}$,

donc, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$u_{p+1} = \frac{1}{\sqrt{p+1}} \times \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{p+1} + 1}},$$

d'où :

$$u_{p+1} = \frac{1}{\sqrt{\frac{p+1}{p+1} + p+1}},$$

autrement dit :
$$u_{p+1} = \frac{1}{\sqrt{(p+1)+1}},$$

c'est-à-dire : $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie.

On a démontré :

- $\mathcal{P}(0)$ est vraie,
- pour tout p de \mathbb{N} , si $\mathcal{P}(p)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie.

Le principe de récurrence permet de conclure que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n de \mathbb{N} , ce qui signifie :

$$\text{pour tout entier naturel } n, u_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}}.$$

7 Démontrons par récurrence :

$$\text{pour tout entier naturel } n, \sum_{k=0}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Pour tout n de \mathbb{N} , notons $\mathcal{P}(n)$ la proposition : « $\sum_{k=0}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ ».

• **Initialisation**

$$\sum_{k=0}^0 k^3 = 0^3 = 0 \text{ et } \frac{0^2(0+1)^2}{4} = 0, \text{ donc } \sum_{k=0}^0 k^3 = \frac{0^2(0+1)^2}{4};$$

d'où : $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

• **Hérédité**

Soit p un entier naturel quelconque ; supposons $\mathcal{P}(p)$ vraie, c'est-à-dire :

$$\sum_{k=0}^p k^3 = \frac{p^2(p+1)^2}{4},$$

et démontrons que $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie, c'est-à-dire :

$$\sum_{k=0}^{p+1} k^3 = \frac{(p+1)^2(p+2)^2}{4}.$$

On a :

$$\sum_{k=0}^{p+1} k^3 = 1^3 + 2^3 + \dots + p^3 + (p+1)^3 = \sum_{k=0}^p k^3 + (p+1)^3,$$

donc, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$\sum_{k=0}^{p+1} k^3 = \frac{p^2(p+1)^2}{4} + (p+1)^3,$$

$$\text{d'où : } \sum_{k=0}^{p+1} k^3 = \frac{(p+1)^2 \times [p^2 + 4(p+1)]}{4} = \frac{(p+1)^2(p^2 + 4p + 4)}{4},$$

autrement dit :
$$\sum_{k=0}^{p+1} k^3 = \frac{(p+1)^2(p+2)^2}{4},$$

c'est-à-dire : $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie.

En définitive, on a démontré :

- $\mathcal{P}(0)$ est vraie,
- pour tout p de \mathbb{N} , si $\mathcal{P}(p)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie.

Le principe de récurrence permet de conclure que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n de \mathbb{N} , ce qui signifie :

$$\text{pour tout entier naturel } n, \sum_{k=0}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

8 Démontrons par récurrence :

pour tout entier n supérieur ou égal à 4, $2^n \geq n^2$.

• Initialisation

$2^4 = 16$ et $4^2 = 16$, donc : $2^4 \geq 4^2$;

la propriété : « $2^n \geq n^2$ » est donc vérifiée si $n = 4$.

• Hérité

Soit p un entier supérieur ou égal à 4.

Supposons : $2^p \geq p^2$, et démontrons : $2^{p+1} \geq (p+1)^2$.

On a : $2^{p+1} = 2 \times 2^p$, donc, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$2^{p+1} \geq 2p^2;$$

pour démontrer : $2^{p+1} \geq (p+1)^2$, il suffit donc de prouver :

$$2p^2 \geq (p+1)^2.$$

D'une part :

$$2p^2 \geq (p+1)^2 \Leftrightarrow 2p^2 \geq p^2 + 2p + 1 \Leftrightarrow p^2 - 2p - 1 \geq 0;$$

d'autre part, la fonction polynôme $f : x \mapsto x^2 - 2x + 1$ est croissante sur

$[1; +\infty[$ et : $f(4) = 16 - 8 + 1 = 9$, ce qui implique que f est positive sur

$[4; +\infty[$; p étant supérieur ou égal à 4, on peut affirmer : $f(p) \geq 0$,

c'est-à-dire : $2p^2 \geq (p+1)^2$.

En résumé, on a démontré :

- $2^4 \geq 4^2$,
- pour tout entier p supérieur ou égal à 4,
si $2^p \geq p^2$ alors $2^{p+1} \geq (p+1)^2$;

le principe de récurrence permet d'affirmer :

pour tout entier n supérieur ou égal à 4, $2^n \geq n^2$.

9 $f: x \mapsto x^2 + \frac{3}{16}$.

1° $u: n \mapsto f(n)$.

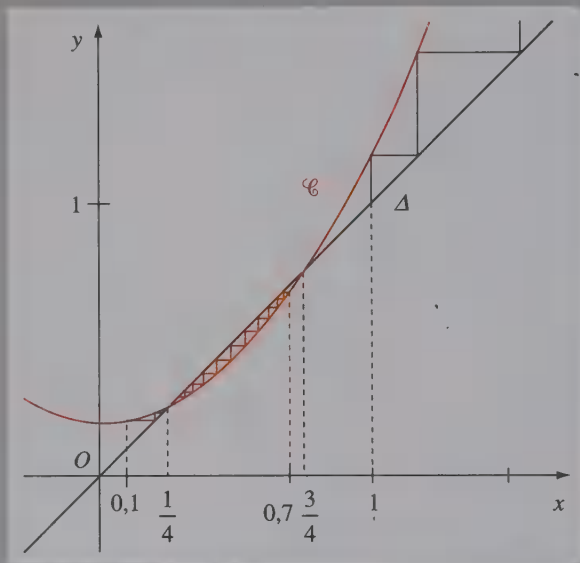
• f est strictement croissante sur $[0; +\infty[$ et $\mathbb{N} \subset [0; +\infty[$, donc u est définie sur \mathbb{N} et **strictement croissante**.

• Pour tout n de \mathbb{N} , $u_n = n^2 + \frac{3}{16}$, donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty.$$

2° $v_{n+1} = f(v_n)$.

a.



Le graphique met en évidence que :

- si $v_0 = 1$, alors v est croissante, de limite $+\infty$;
- si $v_0 = 0,7$, alors v est décroissante, de limite $\frac{1}{4}$;
- si $v_0 = 0,1$, alors v est croissante, de limite $\frac{1}{4}$.

b. $f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$ et $f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4}$, donc :

en choisissant $v_0 = \frac{1}{4}$ ou $v_0 = \frac{3}{4}$, la suite v est constante.

10 $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{u_n}$.

L'affichage d'une TI-83 Plus, comme celui d'une Casio Graph 65 se stabilise à partir de l'indice 23 sur la valeur :

1,618 033 989 .

Il semble donc que la suite u converge vers un réel dont une « bonne approximation » est 1,618 033 989 .

```

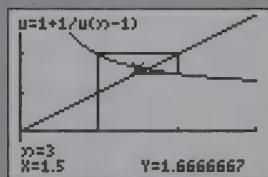
Plot1 Plot2 Plot3
nMin=0
v(u(n))=1+1/u(n-1)

u(nMin)E(1)
v(n)=
v(nMin)=
v(n)=

```

n	u(n)
18	1.618
19	1.618
20	1.618
21	1.618
22	1.618
23	1.618
24	1.618

u(n)=1.618033989



On peut démontrer que la suite u converge vers la solution positive de l'équation $x = 1 + \frac{1}{x}$, qui n'est autre que le nombre d'or, souvent noté $\phi \left(\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)$.

11 $F_0 = 1$, $F_1 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

L'algorithme ci-dessous permet de calculer de proche en proche les termes des suites (F_n) et $n \mapsto \frac{F_{n+1}}{F_n}$, n variant de 2 à 25 :

```

1 → U
1 → V
pour k variant de 2 à 25
faire
  V → A
  U + V → V
afficher V
A → U
V/U → W
afficher W
fin de la boucle pour

```

Suivons pas à pas l'exécution des instructions à un passage dans la boucle, pour la valeur p du compteur de boucle :

instructions	U	V	W	A
	F_{p-1}	F_p	F_p/F_{p-1}	
$V \rightarrow A$	F_{p-1}	F_p	F_p/F_{p-1}	F_p
$U + V \rightarrow V$	F_{p-1}	F_{p+1}	F_p/F_{p-1}	F_p
$A \rightarrow U$	F_p	F_{p+1}	F_p/F_{p-1}	F_p
$V/U \rightarrow W$	F_p	F_{p+1}	F_{p+1}/F_p	F_p

Avant que l'instruction :
 $U + V \rightarrow V$
 n'écrase la valeur F_p de V, qu'il est
 nécessaire de connaître pour la suite du
 calcul, cette valeur est affectée à la variable
 auxiliaire A par l'instruction :
 $V \rightarrow A$.

En exécutant sur une TI-83 Plus le programme correspondant à cet algorithme, on observe que les approximations des termes de la suite $n \mapsto \frac{F_{n+1}}{F_n}$ obtenues à l'affichage oscillent autour de la valeur 1,618 033 989, sur laquelle ils finissent par se stabiliser.

On est amené à conjecturer que :

la suite $n \mapsto \frac{F_{n+1}}{F_n}$ n'est pas monotone,

et qu'elle converge vers un nombre réel dont une « bonne approximation » est 1,618 033 989.

```
:1 → U
:1 → V
:For (K, 2, 25)
:V → A
:U + V → V
:Disp V
:Pause
:A → U
:V/U → W
:Disp W
:Pause
:End
```

```
PRGMFIBO
...
1.618033989
1.666666667
```

```
46368
1.618033988
75025
1.618033989
121393
1.618033989
Done
```

On peut démontrer que, lorsque n tend vers $+\infty$, le quotient $\frac{F_{n+1}}{F_n}$ de deux termes consécutifs de la suite de Fibonacci (F_n) converge vers $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, appelé « nombre d'or ».

12 $u_n = \frac{\ln n}{n}$.

La suite (u_n) est définie sur \mathbb{N}^* par : $u_n = f(n)$, où f est la fonction :

$$x \mapsto \frac{\ln x}{x}.$$

f est dérivable sur $]0; +\infty[$ et, pour tout x de cet intervalle :

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \times x - (\ln x) \times 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2},$$

donc $f'(x)$ est du signe de $1 - \ln x$, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} f'(x) > 0 & \text{si } 0 < x < e, \\ f'(e) = 0, \\ f'(x) < 0 & \text{si } e < x. \end{cases}$$

On en déduit que f est strictement croissante sur $]0; e]$ et strictement décroissante sur $[e; +\infty[$.

3 étant supérieur à e , on peut conclure :

la suite (u_n) est strictement décroissante à partir du rang 3.

13 $u : n \mapsto \frac{5^n}{n!}$.

La suite u est définie sur \mathbb{N} , et à termes strictement positifs, donc, pour tout entier naturel n , on a l'équivalence :

$$u_{n+1} \leq u_n \Leftrightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1;$$

de plus :
$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{5^n} = \frac{5 \times 5^n \times n!}{(n+1) \times n! \times 5^n} = \frac{5}{n+1},$$

donc : $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{5}{n+1} \leq 1 \Leftrightarrow n+1 \geq 5 \Leftrightarrow n \geq 4$.

On en déduit que la suite u est décroissante à partir du rang 4.

Bien sûr, il était également possible d'étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$:

pour tout n de \mathbb{N} ,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{5^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{5^n}{n!} = \frac{5^n}{n!} \left(\frac{5}{n+1} - 1 \right) = \frac{5^n}{n!} \times \frac{4-n}{n+1},$$

ce qui met en évidence que $u_{n+1} - u_n$ est du signe de $4 - n$.

14 Pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = e^{-u_n}$.

Démontrons par récurrence :

pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, $0 < u_n < 1$.

• Quel que soit le premier terme u_0 de la suite u , la fonction $x \mapsto e^x$ étant à valeurs strictement positives :

$$e^{-u_0} > 0,$$

donc, par définition de u : $u_1 > 0$;

la fonction $x \mapsto e^x$ étant de plus strictement croissante, de l'inégalité : $-u_1 < 0$, on déduit :

$$0 < e^{-u_1} < e^0,$$

c'est-à-dire : $0 < u_2 < 1$.

La proposition « $0 < u_n < 1$ » est donc vraie lorsque $n = 2$.

• Soit p un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Si : $0 < u_p < 1$ alors : $-u_p < 0$ et, en utilisant les mêmes propriétés de la fonction $x \mapsto e^x$ que précédemment, on obtient :

$$0 < e^{-u_p} < 1,$$

c'est-à-dire : $0 < u_{p+1} < 1$.

On a ainsi prouvé que la propriété « $0 < u_n < 1$ » est héréditaire.

D'après le principe de récurrence, on peut affirmer :

pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, $0 < u_n < 1$,

ce qui implique :

la suite u est bornée par 0 et 1 à partir du rang 2.

$$15 \quad u_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^n} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{4^k}.$$

1° Pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{4^{n+1}} = u_n + \frac{1}{4^{n+1}} \text{ et } \frac{1}{4^{n+1}} > 0,$$

donc :
$$u_{n+1} > u_n,$$

ce qui prouve :

la suite u est strictement croissante.

2° Pour tout entier naturel n :

$$u_n = 1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^n,$$

donc u_n est la somme des $n+1$ premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{1}{4}$, et l'on obtient :

$$u_n = \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3} \times \left(1 - \frac{1}{4^{n+1}}\right)$$

$$u_n = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n.$$

De plus : $-1 < \frac{1}{4} < 1$, donc la suite géométrique : $n \mapsto -\frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$

converge vers 0, ce qui prouve :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{4}{3}.$$

3° $M = 1,333\ 333\ 333$.

Le développement décimal illimité de $\frac{4}{3}$ est 1,333...(une infinité de chiffres 3 après la virgule), donc :

$$M < \frac{4}{3};$$

de plus, la suite u est strictement croissante de limite $\frac{4}{3}$, donc, à partir d'un

certain rang : $M < u_n < \frac{4}{3}$, ce qui prouve :

M n'est pas un majorant de u .

Après avoir écrit : $M = \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{10^9}$, on peut d'ailleurs facilement

déterminer à partir de quel rang l'inégalité $M < u_n$ est satisfaite :

$$M < u_n \Leftrightarrow \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{10^9} < \frac{4}{3} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{4^n} \Leftrightarrow 4^n > 10^9,$$

donc, la fonction \ln étant strictement croissante sur $]0; +\infty[$:

$$M < u_n \Leftrightarrow n \ln 4 > 9 \ln 10,$$

et, $\ln 4$ étant strictement positif :

$$M < u_n \Leftrightarrow n > \frac{9 \ln 10}{\ln 4};$$

à l'aide de la calculatrice : $\frac{9 \ln 10}{\ln 4} \approx 14,95$, ce qui permet de conclure :

$$M < u_n \Leftrightarrow n \geq 15.$$

1° $u_n = \frac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n}.$

Pour tout entier naturel n :

$$u_n = \frac{3^n \times \left(1 - \frac{2^n}{3^n}\right)}{3^n \times \left(1 + \frac{2^n}{3^n}\right)} = \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n}.$$

L'encadrement : $-1 < \frac{2}{3} < 1$ prouve que la suite géométrique $n \mapsto \left(\frac{2}{3}\right)^n$ converge vers 0 ; on en déduit successivement que :

- les suites $n \mapsto 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$ et $n \mapsto 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n$ convergent vers 1,

- la suite $n \mapsto \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n}$ converge vers 1,

ce qui permet de conclure :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1.$$

$$2^\circ u_n = \frac{3n^2 + 2n + 1}{5n - 3}.$$

La suite (u_n) est définie sur \mathbb{N} et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3n^2}{5n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3}{5} n,$$

donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$

$$3^\circ u_n = \frac{1 + 2 + \dots + n}{(n + 1)^2}.$$

Pour tout entier naturel n non nul, $1 + 2 + \dots + n$ étant la somme de n termes consécutifs d'une suite arithmétique :

$$1 + 2 + \dots + n = n \times \frac{1 + n}{2} = \frac{n(n + 1)}{2},$$

↑ nombres de termes ↑ moyenne des termes extrêmes

et on peut écrire :
$$u_n = \frac{n(n + 1)}{2(n + 1)^2} = \frac{n}{2(n + 1)}.$$

Il vient :
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}.$$

$$4^\circ u_n = (-1)^n + \ln n.$$

La suite (u_n) est définie sur \mathbb{N}^* et, pour tout entier naturel n :

$$(-1)^n \geq -1,$$

donc, si n est non nul :

$$(-1)^n + \ln n \geq -1 + \ln n.$$

On a ainsi établi :

à partir du rang 1, $u_n \geq -1 + \ln n$;

de plus : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln n = +\infty$, donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1 + \ln n) = +\infty$,

ce qui implique (théorème de comparaison) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

On a utilisé la règle opératoire : à l'infini, la limite d'une fonction rationnelle est celle du quotient de ses termes de plus haut degré.

Pour tout n de \mathbb{N} :

- $(-1)^n = -1$ si n est impair,
- $(-1)^n = 1$ si n est pair,

donc : $-1 \leq (-1)^n \leq 1.$

(u_n) est la somme :

- de la suite bornée : $n \mapsto (-1)^n$,
- et de la suite : $n \mapsto \ln n$, qui diverge vers $+\infty$.

$$5^\circ \quad u_n = \cos \frac{\pi}{3^n}.$$

La suite (u_n) est définie sur \mathbb{N} .

• De l'inégalité : $3 > 1$, on déduit : $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty$, ce qui implique :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{3^n} = 0;$$

• de plus : $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos 0 = 1$,

donc (théorème de composition) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \cos \frac{\pi}{3^n} = 1;$$

c'est-à-dire :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1.$$

$$6^\circ \quad u_n = \cos \frac{(6n+1)\pi}{3}.$$

Pour tout entier naturel n : $u_n = \cos\left(\frac{\pi}{3} + 2n\pi\right)$,

par conséquent, la fonction cosinus étant périodique de période 2π :

$$u_n = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}.$$

La suite (u_n) est donc la suite constante $n \mapsto \frac{1}{2}$; on en déduit qu'elle est convergente et :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}.$$

$$7^\circ \quad u_n = \frac{1}{n} \cos \frac{n\pi}{17}.$$

La suite (u_n) est définie sur \mathbb{N}^* .

Pour tout entier naturel n : $-1 \leq \cos \frac{n\pi}{17} \leq 1$,

donc, si n est non nul :

$$-\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n} \cos \frac{n\pi}{17} \leq \frac{1}{n}.$$

On a ainsi établi, qu'à partir du rang 1 :

$$-\frac{1}{n} \leq u_n \leq \frac{1}{n},$$

de plus, les deux suites $n \mapsto -\frac{1}{n}$, $n \mapsto \frac{1}{n}$ convergent vers 0 ;

d'après le théorème des gendarmes, on peut conclure :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

(u_n) est le produit :

• de la suite bornée : $n \mapsto \cos \frac{n\pi}{17}$,

• et de la suite : $n \mapsto \frac{1}{n}$, qui converge vers 0.

$$8^\circ u_n = \frac{n^2}{2n^2 + \cos n}.$$

Pour tout entier naturel n :

$$2n^2 - 1 \leq 2n^2 + \cos n \leq 2n^2 + 1,$$

si de plus n est non nul, alors :

$$0 < 2n^2 - 1,$$

et, des réels de même signe étant rangés dans l'ordre contraire de leurs inverses :

$$\frac{1}{2n^2 + 1} \leq \frac{1}{2n^2 + \cos n} \leq \frac{1}{2n^2 - 1}.$$

ce qui implique :

$$\frac{n^2}{2n^2 + 1} \leq \frac{n^2}{2n^2 + \cos n} \leq \frac{n^2}{2n^2 - 1}.$$

On a ainsi prouvé :

$$\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*, \frac{n^2}{2n^2 + 1} \leq u_n \leq \frac{n^2}{2n^2 - 1};$$

de plus :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{2n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{2n^2} = \frac{1}{2},$$

de même :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{2n^2 - 1} = \frac{1}{2}.$$

D'après le théorème des gendarmes, on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}.$$

À l'infini, la limite d'une fonction rationnelle est celle du quotient de ses termes de plus haut degré.

$$u_n = \underbrace{0,57\dots57}_{2n \text{ chiffres}}.$$

Par définition de la suite (u_n) :

$$u_1 = \frac{57}{100}, \quad u_2 = \frac{57}{100} + \frac{57}{10\,000} = \frac{57}{100} \left(1 + \frac{1}{100}\right),$$

et, pour tout n de \mathbb{N}^* :

$$u_n = \frac{57}{100} \left(1 + \frac{1}{100} + \dots + \frac{1}{100^{n-1}}\right),$$

$1 + \frac{1}{100} + \dots + \frac{1}{100^{n-1}}$ étant la somme des n premiers termes de la suite géométrique de premier terme 1 et de raison $\frac{1}{100}$, on obtient :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{57}{100} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{100}\right)^n}{1 - \frac{1}{100}} \\ &= \frac{57}{100} \times \frac{100}{99} \times \left(1 - \frac{1}{100^n}\right), \end{aligned}$$

c'est-à-dire :

$$u_n = \frac{57}{99} \left(1 - \frac{1}{100^n}\right).$$

De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{100^n} = 0$, donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{57}{99}.$$

Toute suite géométrique dont la raison q vérifie :
 $|q| < 1$
converge vers 0.

Le réel $\frac{57}{99}$ admet pour développement décimal illimité $0,5757\dots$, que l'on note souvent $0,\overline{57}$, le crochet indiquant la répétition infinie de la séquence 57 :

$$\frac{57}{99} = 0,\overline{57}.$$

18 $u : n \mapsto \sqrt{n^2 + n} - n.$

1° Voici les résultats obtenus avec deux calculatrices et le tableur Excel :

	Casio Graph 65	TI-83 Plus	Excel
n	u_n	u_n	u_n
1	0,414 213 562 4	0,414 213 562 373	0,414 213 562
2	0,449 489 742 8	0,449 489 742 783	0,449 489 743
3	0,464 101 615 1	0,464 101 615 138	0,464 101 615
4	0,472 135 955	0,472 135 955	0,472 135 955
n	u_{10^n}	u_{10^n}	u_{10^n}
1	0,488 088 481 7	0,488 088 481 702	0,488 088 482
2	0,498 756 211 2	0,498 756 211 21	0,498 756 211
3	0,499 875 062 5	0,499 875 062 5	0,499 875 062
4	0,499 987 5	0,499 987 501	0,499 987 501
5	0,499 998 75	0,499 998 75	0,499 998 75
6	0,499 999 87	0,499 999 9	0,499 999 875
7	0,5	0,5	0,499 999 987
8	0,5	0,5	0,5
9	0,5	0,5	0,5
10	0,5	0,5	0,5
11	0,499	0,5	0,5
12	0,49	0	0,5
13	0	0	0,5
14	0	0	0,5
15	0	0	0

2° • Pour tout n de \mathbb{N}^* :

$$u_n = \sqrt{n^2 \left(1 + \frac{1}{n}\right)} - n = n \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1\right)$$

donc :

$$u_n = \frac{n \times \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1\right) \times \left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1\right)}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} = n \times \frac{\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}}\right)^2 - 1^2}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} = \frac{n \times \frac{1}{n}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1},$$

c'est-à-dire :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + 1}}$$

• $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x} = \sqrt{1} = 1$,

donc (théorème de composition) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} = 1,$$

ce qui implique :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n} + 1}} = \frac{1}{2},$$

c'est-à-dire :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}.$$

3° Pour de « grandes valeurs » de n , les calculatrices et les tableurs négligent n devant n^2 (c'est-à-dire que le procédé de stockage des nombres ne leur permet pas de distinguer n^2 et $n^2 + n$), ce qui explique qu'ils affichent 0 comme approximation de u_n lorsque n dépasse une certaine valeur, qui dépend de la calculatrice ou du tableur utilisé.

En revanche, les résultats obtenus pour des valeurs « raisonnables » de n (correspondant ici à une plage s'étendant approximativement de 10 à 10^{10}), permettent de prévoir la limite de u .

12 $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{14}{3}$.

1° Démontrons par récurrence :

pour tout entier naturel n , $u_n < u_{n+1}$.

• $u_0 = 1$ et $u_1 = \frac{1}{3}u_0 + \frac{14}{3} = \frac{1}{3} + \frac{14}{3} = 5$, donc :

$$u_0 < u_1.$$

• Si, pour un entier naturel p quelconque :

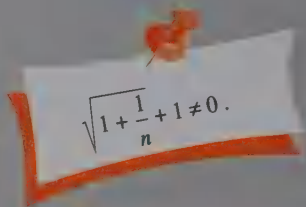
$$u_p < u_{p+1},$$

alors :

$$\frac{1}{3}u_p < \frac{1}{3}u_{p+1},$$

ce qui implique :

$$\frac{1}{3}u_p + \frac{14}{3} < \frac{1}{3}u_{p+1} + \frac{14}{3},$$



c'est-à-dire : $u_{p+1} < u_{p+2}$.

La propriété : « $u_n < u_{n+1}$ » est donc vraie lorsque $n = 0$, et, pour tout p de \mathbb{N} , si elle est vraie pour p , alors elle est vraie pour $p + 1$; le principe de récurrence permet d'en déduire qu'elle est vraie pour tout n de \mathbb{N} , autrement dit :

pour tout entier naturel n , $u_n < u_{n+1}$,

ce qui signifie que **la suite (u_n) est strictement croissante.**

2° a. Pour tout réel x :

$$x = \frac{1}{3}x + \frac{14}{3} \Leftrightarrow \frac{2}{3}x = \frac{14}{3} \Leftrightarrow x = 7,$$

donc **7 est la seule solution dans \mathbb{R} de l'équation : $x = \frac{1}{3}x + \frac{14}{3}$.**

b. Par définition de la suite (u_n) :

$$\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{14}{3}.$$

Si la suite (u_n) converge, en notant ℓ le réel qui est sa limite, on obtient par passage à la limite :

$$\ell = \frac{1}{3}\ell + \frac{14}{3},$$

donc, d'après la question précédente : $\ell = 7$.

On a ainsi établi que, **si la suite (u_n) converge, alors sa limite est 7.**

3° $v_n = u_n - 7$.

• Pour tout entier naturel n ,

par définition de la suite (v_n) :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 7,$$

donc, par définition de la suite (u_n) :

$$v_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{14}{3} - 7,$$

et en utilisant que 7 est solution de l'équation $x = \frac{1}{3}x + \frac{14}{3}$:

$$v_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{14}{3} - \left(\frac{1}{3} \times 7 + \frac{14}{3}\right),$$

donc :

$$v_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n - 7),$$

et finalement, par définition de la suite (v_n) :

$$v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n,$$

ce qui prouve que la suite (v_n) est géométrique, de raison $\frac{1}{3}$.

• On en déduit, pour tout n de \mathbb{N} :

$$v_n = v_0 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = (u_0 - 7) \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = -6 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = -\frac{2}{3^{n-1}};$$

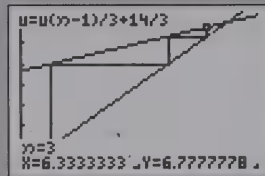
$$u_n = v_n + 7 = 7 - \frac{2}{3^{n-1}}.$$

Enfin, il est clair que la suite (v_n) a pour limite 0 (c'est une suite géométrique de raison strictement comprise entre -1 et 1), et que la suite (u_n) est convergente, de limite 7.

```
Normal Sci Eng
Float 0123456789
Radian Degree
Func Par Pol Seq
Connected Dot
Sequential Simul
Real a+bi re^θi
Full Horiz G-T
```

```
Plot1 Plot2 Plot3
nMin=0
u(n)=u(n-1)/3+1
4/3
u(nMin)=1
v(n)=
v(nMin)=
w(n)=
```

```
WINDOW
↑PlotStep=1
Xmin=0
Xmax=8
Xscl=1
Ymin=0
Ymax=7.5
Yscl=1
```



20 Vrai ou faux ?

1° Toute suite décroissante est majorée : **vrai**.

En effet, toute suite décroissante est majorée par son premier terme.

2° Toute suite décroissante et minorée par 0 a pour limite 0 : **faux**.

Toute suite décroissante et minorée est bien convergente ; si de plus elle est minorée par 0, alors le réel ℓ qui est sa limite vérifie : $\ell \geq 0$, mais rien n'assure que ℓ soit égal à 0, comme le prouve l'exemple de la suite :

$$n \mapsto 1 + \frac{1}{n+1},$$

qui est décroissante, minorée par 0, et qui admet pour limite 1.

3° Toute suite croissante et majorée est bornée : **vrai**,

car toute suite croissante est minorée par son premier terme.

4° Toute suite qui admet pour limite $+\infty$ n'est pas majorée : **vrai**.

En effet, quel que soit le réel M , tous les termes de la suite dépassent M à partir d'un certain rang, donc aucun réel ne peut être un majorant de la suite.

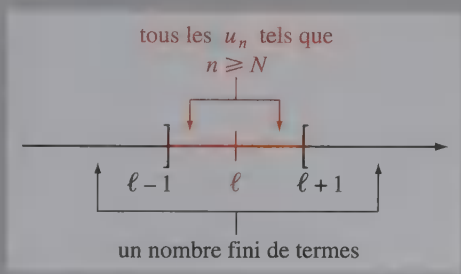
5° Toute suite convergente est bornée : **vrai**.

En effet, considérons une suite u convergente, que l'on peut, sans nuire à la généralité, supposer être définie sur \mathbb{N} . Soit alors ℓ le réel qui est sa limite.

On sait qu'à partir d'un rang N , tous les termes de la suite appartiennent à l'intervalle $] \ell - 1 ; \ell + 1 [$, donc, à partir du rang N , la suite est bornée par $\ell - 1$ et $\ell + 1$, et seuls les N premiers termes u_0, u_1, \dots, u_{N-1} peuvent éventuellement se trouver hors de l'intervalle $] \ell - 1 ; \ell + 1 [$.

En définitive, on peut affirmer que la suite u est :

- minorée par le plus petit des $N + 1$ nombres $u_0, u_1, \dots, u_{N-1}, \ell - 1$,
 - majorée par le plus grand des $N + 1$ nombres $u_0, u_1, \dots, u_{N-1}, \ell + 1$,
- ce qui prouve que la suite est bornée.



6° Si u et v sont des suites convergentes qui vérifient :

$$\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, u_n < v_n,$$

alors :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n < \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n.$$

Cette affirmation est **fausse**, comme le montre l'exemple des suites :

$$u : n \mapsto -\frac{1}{n+1}, \quad v : n \mapsto \frac{1}{n+1},$$

qui vérifient clairement :

$$\text{pour tout entier naturel } n, u_n < v_n,$$

et admettent toutes les deux 0 pour limite.

21 1° Par essais successifs pour $n = 0, n = 1, \dots$, on obtient que le plus petit entier naturel n pour lequel l'inégalité : « $2^n \leq (n-1)!$ » est vérifiée, est 6 , et on observe qu'elle semble continuer à l'être pour les entiers suivants.

On est amené à démontrer par récurrence :

$$\text{pour tout entier naturel } n \text{ supérieur ou égal à } 6, 2^n \leq (n-1)!$$

- $2^6 = 64$ et $5! = 120$, donc : $2^6 \leq 5!$.

• Soit p un entier supérieur ou égal à 6.

Supposons : $2^p \leq (p-1)!$;

on peut alors écrire : $2 \times 2^p \leq 2 \times (p-1)!$.

D'une part : $2 \times 2^p = 2^{p+1}$;

d'autre part, p étant supérieur ou égal à 6 :

$$2 \times (p-1)! \leq p \times (p-1)! ,$$

c'est-à-dire : $2 \times (p-1)! \leq p!$,

et finalement : $2^{p+1} \leq ((p+1)-1)!$.

On a ainsi démontré que la propriété : « $2^n \leq (n-1)!$ » est vraie lorsque $n=6$, et que, pour tout entier naturel p supérieur ou égal à 6, « $2^p \leq (p-1)!$ » implique « $2^{p+1} \leq ((p+1)-1)!$ » .

Le principe de récurrence permet de conclure :

pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 6, $2^n \leq (n-1)!$.

$$2^\circ \quad n \mapsto \frac{2^n}{n!} .$$

D'après la question précédente, pour tout entier n supérieur ou égal à 6 :

$$\frac{2^n}{n!} \leq \frac{(n-1)!}{n!} ,$$

$$\text{de plus :} \quad 0 \leq \frac{2^n}{n!} \quad \text{et} \quad \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{(n-1)!}{n \times (n-1)!} = \frac{1}{n} ,$$

$$\text{donc :} \quad 0 \leq \frac{2^n}{n!} \leq \frac{1}{n} .$$

La suite $n \mapsto \frac{1}{n}$ convergeant vers 0, le théorème des gendarmes permet de conclure :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{n!} = 0 .$$

On peut traduire ce résultat en disant :
la suite : $n \mapsto n!$ l'emporte sur la suite : $n \mapsto 2^n$.
Plus généralement, on peut démontrer que la suite :
 $n \mapsto n!$ l'emporte sur toute suite géométrique.

$$22 \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{2 + u_n^2}.$$

1° Pour tout entier naturel n :

$$|u_{n+1}| = \left| \frac{u_n}{2 + u_n^2} \right| = \frac{|u_n|}{2 + u_n^2},$$

de plus : $2 + u_n^2 \geq 2$,

donc : $|u_{n+1}| \leq \frac{|u_n|}{2}$.

2° • Démontrons par récurrence :

$$\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, |u_n| \leq \frac{|u_0|}{2^n}.$$

Initialisation

$$\frac{|u_0|}{2^0} = |u_0|, \text{ donc : } |u_0| \leq \frac{|u_0|}{2^0}.$$

la proposition « $|u_n| \leq \frac{|u_0|}{2^n}$ » est vraie si $n = 0$.

Hérédité

Soit p un entier naturel quelconque ; supposons : $|u_p| \leq \frac{|u_0|}{2^p}$;

d'après la question 1° : $|u_{p+1}| \leq \frac{|u_p|}{2}$,

donc, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$|u_{p+1}| \leq \frac{1}{2} \times \frac{|u_0|}{2^p},$$

ce qui implique : $|u_{p+1}| \leq \frac{|u_0|}{2^{p+1}}$.

En conclusion, le principe de récurrence permet d'affirmer :

$$\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, |u_n| \leq \frac{|u_0|}{2^n}.$$

• Pour tout n de \mathbb{N} , $\frac{|u_0|}{2^n} = |u_0| \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$,

et la suite géométrique $n \mapsto |u_0| \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$,

converge vers 0 ; la suite $n \mapsto |u_n|$ est donc majorée par une suite de limite nulle, ce qui permet de conclure que la suite (u_n) converge vers 0 :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

Toute suite géométrique dont la raison q vérifie :
 $|q| < 1$
 converge vers 0.

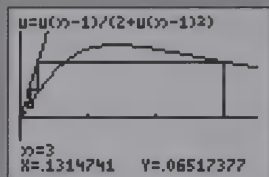
En choisissant : $u_0 = 3$, on obtient :

```

Plot1 Plot2 Plot3
nMin=0
u(n)=u(n-1)/(2+
u(n-1)^2)
u(nMin)=3
v(n)=
v(nMin)=
w(n)=
    
```

```

WINDOW
↑PlotStart=1
PlotStep=1
Xmin=0
Xmax=3.5
Xscl=1
Ymin=-.25
↓Ymax=.5
    
```



23 Sur \mathbb{N}^* : $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$, $v_n = u_n + \frac{1}{n \times n!}$.

1° • Pour tout n de \mathbb{N}^* ,

par définition de (u_n) : $u_{n+1} = u_n + \frac{1}{(n+1)!}$,

donc :

$$u_{n+1} > u_n,$$

ce qui implique que la suite (u_n) est strictement croissante.

• Pour tout n de \mathbb{N}^* :

$$v_n - u_n = \frac{1}{n \times n!},$$

ce qui met en évidence que la suite $(v_n - u_n)$ converge vers 0.

• Enfin, pour tout n de \mathbb{N}^* :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \left(u_{n+1} + \frac{1}{(n+1) \times (n+1)!} \right) - \left(u_n + \frac{1}{n \times n!} \right) \\ &= u_{n+1} - u_n + \frac{1}{(n+1) \times (n+1)!} - \frac{1}{n \times n!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1) \times (n+1)!} - \frac{1}{n \times n!} \\ &= \frac{1}{(n+1) \times n!} + \frac{1}{(n+1)^2 \times n!} - \frac{1}{n \times n!} \end{aligned}$$

donc :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{n(n+1) + n - (n+1)^2}{n \times (n+1)^2 \times n!} = \frac{n^2 + n + n - n^2 - 2n - 1}{n \times (n+1)^2 \times n!},$$

d'où :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{-1}{n \times (n+1) \times (n+1)!},$$

ce qui prouve que la suite (v_n) est strictement décroissante.

En résumé, (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante et $(v_n - u_n)$ converge vers 0, ce qui permet de conclure :

les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

2° • (u_n) est croissante, (v_n) est décroissante et ces deux suites ont la même limite ℓ , donc, pour tout entier naturel n non nul :

$$u_n \leq \ell \leq v_n,$$

c'est-à-dire :

$$u_n \leq \ell \leq u_n + \frac{1}{n \times n!}.$$

Donc, pour que u_n soit une valeur approchée à 10^{-3} près par défaut de ℓ , il suffit que n vérifie :

$$\frac{1}{n \times n!} \leq 10^{-3},$$

c'est-à-dire :

$$n \times n! \geq 1\,000.$$

La suite $n \mapsto n \times n!$ est clairement croissante ; de plus :

$$5 \times 5! = 5 \times 120 = 600, \quad 6 \times 6! = 6 \times 720 = 4\,320,$$

ce qui prouve que :

u_6 est une valeur approchée à 10^{-3} près par défaut de ℓ .

$$\bullet u_6 = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} = \frac{2 \times 720 + 360 + 120 + 30 + 6 + 1}{720},$$

soit :

$$u_6 = \frac{1\,957}{720}.$$

À l'aide de la calculatrice : $u_6 \approx 2,718\,055\,556$.

On peut démontrer :
 $\ell = e$.

24 $u_0 = 1, v_0 = 2, u_{n+1} = \frac{u_n + 2v_n}{3}, v_{n+1} = \frac{u_n + 4v_n}{5}.$

1° $w = v - u.$

Pour tout entier naturel n :

$$w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{u_n + 4v_n}{5} - \frac{u_n + 2v_n}{3} = \frac{3u_n + 12v_n - 5u_n - 10v_n}{15},$$

donc :

$$w_{n+1} = \frac{-2u_n + 2v_n}{15} = \frac{2}{15}(v_n - u_n),$$

et finalement :

$$w_{n+1} = \frac{2}{15} w_n,$$

ce qui prouve que w est une suite géométrique de raison $\frac{2}{15}$.

On en déduit que, $\frac{2}{15}$ étant strictement compris entre -1 et 1 :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0 ;$$

de plus, pour tout entier naturel n :

$$w_n = w_0 \times \left(\frac{2}{15}\right)^n = (v_0 - u_0) \times \left(\frac{2}{15}\right)^n = (2 - 1) \times \left(\frac{2}{15}\right)^n = \left(\frac{2}{15}\right)^n .$$

2° Pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + 2v_n - u_n}{3} = \frac{u_n + 2v_n - 3u_n}{3} = \frac{2}{3}(v_n - u_n) = \frac{2}{3}w_n , \quad \square$$

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 4v_n - v_n}{5} = \frac{u_n + 4v_n - 5v_n}{5} = -\frac{1}{5}(v_n - u_n) = -\frac{1}{5}w_n .$$

• D'après la question 1°, la suite w est à termes strictement positifs, donc, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} - u_n > 0 \text{ et } v_{n+1} - v_n < 0 ,$$

ce qui prouve :

**la suite u est strictement croissante
et la suite v est strictement décroissante.**

3° D'après les deux questions précédentes, la suite u est croissante, la suite v est décroissante et la suite $v - u$ a pour limite 0.

On en déduit que u et v sont adjacentes, ce qui implique :

les suite u et v sont convergentes et ont la même limite ℓ .

4° $t = 3u + 10v .$

• Pour tout entier naturel n non nul :

$$t_{n+1} = 3u_{n+1} + 10v_{n+1} = 3 \times \frac{u_n + 2v_n}{3} + 10 \times \frac{u_n + 4v_n}{5} = 3u_n + 10v_n ,$$

donc :
$$t_{n+1} = t_n ,$$

ce qui prouve que **la suite t est constante.**

• On en déduit en particulier :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = t_0 = 3u_0 + 10v_0 = 3 + 20 = 23 ;$$

d'autre part, les suites u et v convergeant vers ℓ :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = 3\ell + 10\ell = 13\ell ,$$

donc ℓ vérifie :
$$13\ell = 23 ,$$

c'est-à-dire :
$$\ell = \frac{23}{13} .$$

25 $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{2u_n + 1}$.

1° a. Une récurrence élémentaire prouve :

pour tout n de \mathbb{N} , $u_n > 0$.

En effet : $u_0 = 2$, donc : $u_0 > 0$,

et, pour tout entier naturel p , il est clair que, si $u_p > 0$, alors $\frac{u_p + 2}{2u_p + 1} > 0$,

c'est-à-dire : $u_{p+1} > 0$.

b. Supposons que la suite (u_n) converge ; soit alors ℓ le réel qui est sa limite.

• La suite (u_n) étant à termes positifs : $\ell \geq 0$.

• De plus :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + 2) = \ell + 2, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} (2u_n + 1) = 2\ell + 1 \text{ et } 2\ell + 1 \neq 0,$$

donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n + 2}{2u_n + 1} = \frac{\ell + 2}{2\ell + 1},$$

et bien sûr :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell.$$

Par passage à la limite dans la relation définissant (u_n) , on obtient :

$$\ell = \frac{\ell + 2}{2\ell + 1}.$$

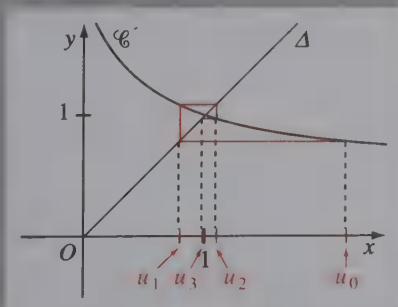
Enfin : $\ell = \frac{\ell + 2}{2\ell + 1} \Leftrightarrow 2\ell^2 + \ell = \ell + 2 \Leftrightarrow \ell^2 = 1,$

ce qui implique, sachant que le réel ℓ est positif : $\ell = 1$.

On a ainsi démontré :

si la suite (u_n) converge, alors sa limite est 1.

2°



Le graphique invite à conjecturer que la suite (u_n) est convergente.

3° Pour tout n de \mathbb{N} , $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

a. Notons tout d'abord que, la suite (u_n) étant à termes positifs, la suite (v_n) est définie sur \mathbb{N} .

• Pour tout n de \mathbb{N} :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1} \quad (\text{par définition de la suite } (v_n))$$

donc :

$$v_{n+1} = \frac{\frac{u_n + 2}{2u_n + 1} - 1}{\frac{u_n + 2}{2u_n + 1} + 1} \quad (\text{par définition de la suite } (u_n))$$

d'où :

$$v_{n+1} = \frac{u_n + 2 - (2u_n + 1)}{u_n + 2 + (2u_n + 1)} = \frac{-u_n + 1}{3u_n + 3} = -\frac{1}{3} \frac{u_n - 1}{u_n + 1},$$

et finalement :

$$v_{n+1} = -\frac{1}{3} v_n,$$

ce qui prouve que (v_n) est une suite géométrique de raison $-\frac{1}{3}$.

• On en déduit, la raison de (v_n) étant strictement comprise entre -1 et 1 :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0.$$

et, pour tout n de \mathbb{N} :

$$v_n = v_0 \times \left(\frac{-1}{3}\right)^n = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 1} \times \left(\frac{-1}{3}\right)^n = \frac{1}{3} \times \left(\frac{-1}{3}\right)^n.$$

b. • Pour tout n de \mathbb{N} :

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1},$$

et : $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1} \Leftrightarrow (u_n + 1)v_n = u_n - 1 \Leftrightarrow (1 - v_n)u_n = 1 + v_n,$

de plus : $|v_n| < 1$, d'où : $1 - v_n \neq 0$,

donc :

$$u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n}.$$

• De plus, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$, donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.

• Enfin, pour tout n de \mathbb{N} :

$$u_n = \frac{1 + \frac{1}{3} \times \left(\frac{-1}{3}\right)^n}{1 - \frac{1}{3} \times \left(\frac{-1}{3}\right)^n} = \frac{1 + \frac{(-1)^n}{3^{n+1}}}{1 - \frac{(-1)^n}{3^{n+1}}} = \frac{3^{n+1} + (-1)^n}{3^{n+1} - (-1)^n}.$$

26 $u_0 = 1,5$ et $u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 3$.

1° Pour tout n de \mathbb{N} :

$$u_{n+1} - u_n = u_n^2 - 2u_n + 3 = (u_n^2 - 2u_n + 1) + 2 = (u_n - 1)^2 + 2,$$

donc :
$$u_{n+1} - u_n > 0,$$

ce qui prouve :

la suite u est strictement croissante.

2° a. Si la suite u converge vers un réel ℓ , alors :

- la suite $n \mapsto u_{n+1}$ admet pour limite ℓ ,
- la suite $n \mapsto u_n^2 - u_n + 3$ admet pour limite $\ell^2 - \ell + 3$ (propriétés algébriques des suites convergentes) ;

or, par définition de la suite (u_n) ,

les deux suites $n \mapsto u_{n+1}$ et $n \mapsto u_n^2 - u_n + 3$ sont égales, donc :

$$\ell = \ell^2 - \ell + 3,$$

c'est-à-dire :
$$\ell^2 - 2\ell + 3 = 0.$$

b. Pour tout réel ℓ :

$$\ell^2 - 2\ell + 3 = (\ell - 1)^2 + 2,$$

donc :
$$\ell^2 - 2\ell + 3 \neq 0.$$

Aucun réel ne satisfaisant à la relation : $\ell^2 - 2\ell + 3 = 0$, aucun réel ne peut être la limite de la suite u , c'est-à-dire :

la suite u est divergente.

• On peut remarquer que les résultats ont été établis indépendamment de la valeur du premier terme de la suite u .

• La suite u est croissante ; si elle était majorée, elle convergerait. Or, on a démontré qu'elle divergeait. La suite u est donc croissante et non majorée, ce qui implique qu'elle admet pour limite $+\infty$.

```

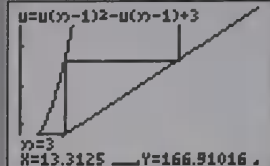
Plot1 Plot2 Plot3
nMin=0
\ u(n) u(n-1)^2-u(
n-1)+3
u(nMin) (1.5)
. u(n)=
v(nMin)=
\ w(n)=

```

```

WINDOW
↑PlotStep=1
Xmin=0
Xmax=20
Xscl=5
Ymin=0
Ymax=20
Yscl=5

```



27 $u_0 = 5$ et $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$.

1° Démontrons par récurrence :

pour tout n de \mathbb{N} , $2 \leq u_{n+1} \leq u_n$.

• $u_0 = 5$ et $u_1 = \sqrt{2 + u_0} = \sqrt{2 + 5} = \sqrt{7}$,

donc : $2 \leq u_1 \leq u_0$;

la propriété : « $2 \leq u_{n+1} \leq u_n$ » est donc vraie lorsque $n = 0$:

• Soit p un entier naturel quelconque ;

si $2 \leq u_{p+1} \leq u_p$, alors :

$$4 \leq 2 + u_{p+1} \leq 2 + u_p,$$

ce qui implique, la fonction racine carrée étant croissante sur \mathbb{R}_+ :

$$\sqrt{4} \leq \sqrt{2 + u_{p+1}} \leq \sqrt{2 + u_p},$$

autrement dit, par définition de la suite (u_n) :

$$2 \leq u_{p+2} \leq u_{p+1}.$$

On a ainsi prouvé que la propriété est héréditaire.

D'après le principe de récurrence, on peut affirmer :

$$\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, 2 \leq u_{n+1} \leq u_n.$$

2° a. D'après la question précédente :

• pour tout n de \mathbb{N} , $u_{n+1} \leq u_n$, donc la suite (u_n) est décroissante ;

• pour tout n de \mathbb{N} , $u_n \geq 2$, donc la suite (u_n) est minorée par 2.

Étant décroissante et minorée,

la suite (u_n) est convergente ;

de plus, étant minorée par 2, la suite (u_n) admet pour limite un réel ℓ qui vérifie :

$$\ell \geq 2.$$

b. • $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$, donc, d'une part :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell,$$

d'autre part :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (2 + u_n) = 2 + \ell,$$

$2^2 = 4, (\sqrt{7})^2 = 7, 5^2 = 25,$
 donc : $2^2 < (\sqrt{7})^2 < 5^2,$
 donc : $2 < \sqrt{7} < 5.$

et, la fonction racine carrée étant continue en $2 + \ell$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{2 + u_n} = \sqrt{2 + \ell}.$$

De plus, par définition de la suite (u_n) , les suites $n \mapsto u_{n+1}$ et $n \mapsto \sqrt{2 + u_n}$ sont égales, ce qui permet d'affirmer :

$$\ell = \sqrt{2 + \ell}.$$

• Sachant que ℓ est supérieur ou égal à 2 :

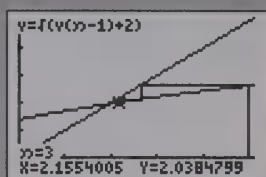
$$\ell = \sqrt{2 + \ell} \Leftrightarrow \ell^2 = 2 + \ell \Leftrightarrow \ell^2 - \ell - 2 = 0 \Leftrightarrow (\ell + 1)(\ell - 2) = 0,$$

donc : $\ell = 2$.

La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0; +\infty[$ et $2 + \ell \geq 4$, donc $x \mapsto \sqrt{x}$ est continue en $2 + \ell$.

```
Plot1 Plot2 Plot3
nMin=0
u(n)=u(n-1)^2-u(
n-1)+3
u(nMin)=(1.5)
v(n)=sqrt(v(n-1)+2)
)
v(nMin)=5
```

```
WINDOW
PlotStep=1
Xmin=0
Xmax=5.1
Xscl=1
Ymin=-.5
Ymax=5.1
Yscl=1
```



28 $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$

1° $f: x \mapsto \ln(x+1) - x.$

• $\mathcal{D}_f =]-1; +\infty[$, f est dérivable sur $]-1; +\infty[$, et pour tout x de cet intervalle :

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - 1 = \frac{1 - (x+1)}{x+1} = \frac{-x}{x+1},$$

donc :

$$\begin{cases} f'(x) > 0 & \text{si } -1 < x < 0, \\ f'(0) = 0, \\ f'(x) < 0 & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

ce qui implique que f est strictement croissante sur $]-1; 0]$ et strictement décroissante sur $[0; +\infty[$.

• Le maximum de f sur $]-1; +\infty[$ est donc $f(0)$, c'est-à-dire 0 ; on en déduit :

$$\text{pour tout } x \text{ de }]-1; +\infty[, \ln(x+1) - x \leq 0,$$

ce qui permet de conclure :

$$\text{pour tout } x \text{ de }]-1; +\infty[, \ln(x+1) \leq x.$$

2° • Soit k un entier naturel non nul ;

on a : $\ln(k+1) - \ln k = \ln \frac{k+1}{k} = \ln \left(1 + \frac{1}{k}\right)$,

or : $\frac{1}{k} > 0$, et *a fortiori* : $\frac{1}{k} \in]-1; +\infty[$,

donc, d'après la question 1° : $\ln \left(1 + \frac{1}{k}\right) \leq \frac{1}{k}$.

On en déduit :

$$\text{pour tout } k \text{ de } \mathbb{N}^*, \ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}.$$

• Soit n un entier naturel non nul ;

en sommant membre à membre les n inégalités obtenues en faisant varier l'entier k de 1 à n , on obtient :

$$(\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + (\ln 4 - \ln 3) +$$

$$\dots + \ln(n+1) - \ln n \leq \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n},$$

c'est-à-dire, après simplification (télescopage additif) :

$$\ln(n+1) \leq u_n.$$

On a ainsi établi :

$$\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*, \ln(n+1) \leq u_n.$$

• On a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n+1) = +\infty;$$

la suite (u_n) est donc minorée par une suite de limite $+\infty$; on en déduit (théorème de comparaison) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

3° La suite (u_n) diverge vers $+\infty$, elle n'est donc pas majorée, et on peut trouver un entier naturel n tel que :

$$u_n \geq 10.$$

Remarquons que, (u_n) étant croissante, dès qu'un terme est supérieur ou égal à 10, il en est de même pour les suivants.

Pour déterminer le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geq 10$, il suffit de programmer l'algorithme suivant.

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n+1) &= +\infty \\ \text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x &= +\infty, \\ \text{donc : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(n+1) &= +\infty. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^* : \\ u_{n+1} - u_n &= \frac{1}{n+1}, \\ \text{donc : } u_{n+1} - u_n &> 0. \end{aligned}$$

```

0 → u
0 → k
tant que u < 10 faire
  k + 1 → k
  u + 1/k → u
fin de boucle tant que
afficher k

```

En exécutant le programme ci-contre sur une calculatrice TI-83 Plus, on obtient à l'affichage (après s'être armé de patience !):

```

PRGMHARMO
12367
10.00004301
Done

```

```

:0 → U
:0 → K
:While U < 10
:K + 1 → K
:U + 1/K → U
:End
:Disp K
:Disp U

```

On en déduit :

12 367 est le plus petit entier naturel n tel que $u_n \geq 10$.

29 $u_0 = 3$, $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$, $v_n = \frac{7}{u_n}$.

1° On obtient successivement :

• $v_0 = \frac{7}{u_0} = \frac{7}{3}$;

• $u_1 = \frac{u_0 + v_0}{2} = \frac{3 + \frac{7}{3}}{2} = \frac{8}{3}$ et $v_1 = \frac{7}{u_1} = \frac{7 \times 3}{8} = \frac{21}{8}$;

• $u_2 = \frac{u_1 + v_1}{2} = \frac{\frac{8}{3} + \frac{21}{8}}{2} = \frac{127}{48}$ et $v_2 = \frac{7}{u_2} = \frac{7 \times 48}{127} = \frac{336}{127}$;

• enfin : $u_3 = \frac{u_2 + v_2}{2} = \frac{\frac{127}{48} + \frac{336}{127}}{2} = \frac{32\,257}{12\,192}$,

$v_3 = \frac{7}{u_3} = \frac{7 \times 12\,192}{32\,257} = \frac{85\,344}{32\,257}$.

À l'aide de la calculatrice

$$u_3 \approx 2,645\ 751\ 312,$$

$$v_3 \approx 2,645\ 751\ 31.$$

32257/12192
2.645751312
85344/32257
2.64575131

2° Démontrons par récurrence :

pour tout n de \mathbb{N} , $u_n > 0$ et $v_n > 0$.

• $u_0 = 3$ et $v_0 = \frac{7}{3} = \frac{7}{3}$, donc : $u_0 > 0$ et $v_0 > 0$.

• Soit p un entier naturel quelconque ;

si $u_p > 0$ et $v_p > 0$, alors :

$$\frac{u_p + v_p}{2} > 0,$$

c'est-à-dire, par définition de la suite (u_n) :

$$u_{p+1} > 0,$$

ce qui implique :

$$\frac{7}{u_{p+1}} > 0,$$

c'est-à-dire, par définition de la suite (v_n) :

$$v_{p+1} > 0.$$

La propriété « $u_n > 0$ et $v_n > 0$ » est donc vraie lorsque $n = 0$, et, pour tout entier naturel p , si elle est vraie pour p , alors elle est vraie pour $p + 1$.

Le principe de récurrence permet de conclure qu'elle est vraie pour tout entier naturel n , autrement dit :

pour tout n de \mathbb{N} , $u_n > 0$ et $v_n > 0$.

3° • Pour tout n de \mathbb{N} :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - v_{n+1} &= u_{n+1} - \frac{7}{u_{n+1}} \\ &= \frac{1}{u_{n+1}} (u_{n+1}^2 - 7) \\ &= \frac{1}{u_{n+1}} \left(\left(\frac{u_n + v_n}{2} \right)^2 - u_n v_n \right) \\ &= \frac{1}{4u_{n+1}} ((u_n + v_n)^2 - 4u_n v_n) \\ &= \frac{1}{4u_{n+1}} (u_n^2 + v_n^2 - 2u_n v_n) \end{aligned}$$

Le produit $u_n v_n$ est constant, égal à 7.

et finalement :
$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{1}{4u_{n+1}} (u_n - v_n)^2.$$

• Pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} > 0 \text{ et } (u_n - v_n)^2 \geq 0,$$

donc : $u_{n+1} - v_{n+1} \geq 0$;

on peut donc affirmer :

$$\text{\`a partir du rang } 1, u_n - v_n \geq 0.$$

De plus : $u_0 - v_0 = 3 - \frac{7}{3} = \frac{2}{3}$, donc : $u_0 - v_0 \geq 0$.

On a ainsi prouvé :
pour tout n de \mathbb{N} , $u_n - v_n \geq 0$.

D'après la question 1 , la suite (u_n) est à termes strictement positifs.

4  • Pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{u_n + v_n - 2u_n}{2} = \frac{v_n - u_n}{2},$$

donc, d'après la question 3  :

$$u_{n+1} - u_n \leq 0,$$

ce qui prouve que la suite (u_n) est décroissante.

• Pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{7}{u_{n+1}} - \frac{7}{u_n} = \frac{7(u_n - u_{n+1})}{u_n u_{n+1}},$$

donc :

$$v_{n+1} - v_n \geq 0.$$

La suite (v_n) est donc croissante.

$u_n > 0$, $u_{n+1} > 0$,
et, la suite (u_n)  tant
décroissante :
 $u_n - u_{n+1} \geq 0$.

5  a. D'après la question 3 , pour tout entier naturel n :

$$u_n - v_n \geq 0,$$

autrement dit :

$$u_n \geq v_n;$$

de plus, la suite (v_n) est croissante, donc,
  partir du rang 1 :

$$v_n \geq v_1;$$

on en déduit :

$$\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*, u_n \geq \frac{21}{8}.$$

Dire :
pour tout n de \mathbb{N}^* , $u_n \geq \frac{21}{8}$
revient à dire :
pour tout n de \mathbb{N} , $u_{n+1} \geq \frac{21}{8}$.

b. • Pour tout n de \mathbb{N} :

$$u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{1}{4u_{n+1}} (u_n - v_n)^2,$$

et, d'après la question précédente :

$$4u_{n+1} \geq 4 \times \frac{21}{8} \geq 10,$$

donc :

pour tout n de \mathbb{N} , $u_{n+1} - v_{n+1} \leq \frac{1}{10} (u_n - v_n)^2$.

• Pour tout n de \mathbb{N} , notons $\mathcal{P}(n)$ la proposition : « $u_n - v_n \leq \frac{1}{10^{2^n-1}}$ ».

Initialisation

$$u_0 - v_0 = 3 - \frac{7}{3} = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad \frac{1}{10^{2^0-1}} = \frac{1}{10^0} = 1, \quad \text{donc : } u_0 - v_0 \leq \frac{1}{10^{2^0-1}};$$

il vient : $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité

Soit p un entier naturel quelconque ;

supposons $\mathcal{P}(p)$ vraie, c'est-à-dire : $u_p - v_p \leq \frac{1}{10^{2^p-1}}$,

et démontrons que $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie.

On sait :
$$u_{p+1} - v_{p+1} \leq \frac{1}{10} (u_p - v_p)^2,$$

donc, d'après l'hypothèse de récurrence :

$$u_{p+1} - v_{p+1} \leq \frac{1}{10} \left(\frac{1}{10^{2^p-1}} \right)^2,$$

or :

$$\frac{1}{10} \left(\frac{1}{10^{2^p-1}} \right)^2 = \frac{1}{10 \times 10^{2 \times (2^p-1)}} = \frac{1}{10^{2^{p+1}-2+1}} = \frac{1}{10^{2^{p+1}-1}},$$

donc :

$$u_{p+1} - v_{p+1} \leq \frac{1}{10^{2^{p+1}-1}},$$

autrement dit : $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie.

On a démontré :

- $\mathcal{P}(0)$ est vraie,
- pour tout p de \mathbb{N} , si $\mathcal{P}(p)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(p+1)$ est vraie.

Le principe de récurrence permet de conclure que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout n de \mathbb{N} , ce qui signifie :

pour tout entier naturel n , $u_n - v_n \leq \frac{1}{10^{2^n-1}}$.

6° • Pour tout n de \mathbb{N} :

$$0 \leq u_n - v_n \leq \frac{1}{10^{2^n - 1}},$$

et :
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{10^{2^n - 1}} = 0,$$

donc, d'après le théorème des gendarmes :
$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0;$$

de plus, (u_n) est décroissante, (v_n) est croissante, donc :

les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

• Pour tout n de \mathbb{N} :

$$u_n v_n = 7,$$

donc la limite commune ℓ des deux suites (u_n) et (v_n) vérifie :

$$\ell^2 = 7,$$

de plus :

$$\ell \geq 0,$$

donc :

$$\ell = \sqrt{7}.$$

Les suites (u_n) et (v_n) convergent donc vers $\sqrt{7}$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (2^n - 1) = +\infty, \quad \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{10^p} = 0.$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell, \\ \text{donc :} \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n v_n = \ell \times \ell = \ell^2. \end{aligned}$$

Pour tout n de \mathbb{N} : $u_n > 0$,
donc : $\ell \geq 0$.

7° Les résultats précédents permettent d'affirmer, pour tout n de \mathbb{N} :

$$v_n \leq \sqrt{7} \leq u_n \text{ et } 0 \leq u_n - v_n \leq 10^{1-2^n},$$

donc u_n est une approximation de $\sqrt{7}$ à 10^{1-2^n} près.

On en déduit :

• u_3 est une approximation de $\sqrt{7}$ à 10^{-7} près ;

• pour que u_n soit une approximation de $\sqrt{7}$ à 10^{-100} près, il suffit que n vérifie : $10^{1-2^n} \leq 10^{-100}$, or :

$$10^{1-2^n} \leq 10^{-100} \Leftrightarrow 1 - 2^n \leq -100$$

$$\Leftrightarrow 2^n \geq 101$$

$$\Leftrightarrow n \geq 7,$$

donc :

u_7 est une approximation de $\sqrt{7}$ à 10^{-100} près.

$$1 - 2^3 = -7$$

La suite $n \mapsto 2^n$ est croissante et :
 $2^6 = 64, 2^7 = 128.$

La rapidité de convergence est spectaculaire !
On se trouve en présence d'une convergence dite quadratique ; remarquer qu'à chaque itération, le nombre de décimales gagnées augmente.

INTÉGRATION

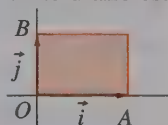
Rappels de cours

I- Aires et intégrales

Le plan est rapporté à un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

En notant A et B les points tels que : $\overrightarrow{OA} = \vec{i}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{j}$, l'unité d'aire est celle du rectangle de côtés $[OA]$ et $[OB]$.

Soient f une fonction continue sur un intervalle I , et a , b des réels de I tels que $a \leq b$.



Appelons \mathcal{S} la surface limitée par (Ox) , \mathcal{C}_f et les droites d'équations $x = a$, $x = b$.

■ Si f est positive sur I , alors l'aire de la surface \mathcal{S} est :

$$\int_a^b f(x) dx \text{ unités d'aire.}$$

\mathcal{S} est l'ensemble des points dont les coordonnées (x, y) vérifient :

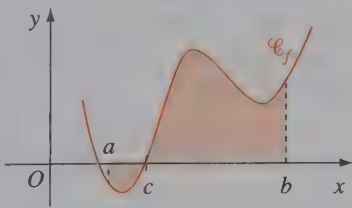
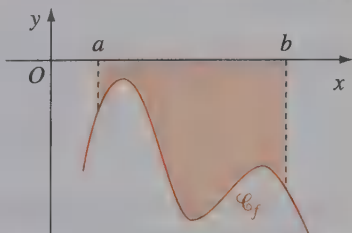
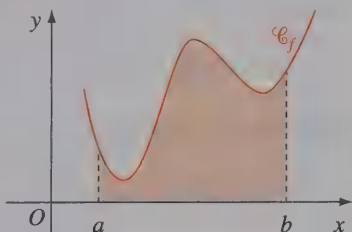
$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

■ Si f est négative sur I , alors l'aire de \mathcal{S} est :

$$-\int_a^b f(x) dx \text{ unités d'aire.}$$

■ Dans l'exemple ci-contre, f change de signe, et l'aire de la surface \mathcal{S} est, en unités d'aire :

$$-\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

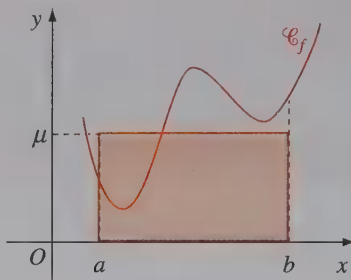


■ Valeur moyenne

Si $a < b$, alors la valeur moyenne de f sur $[a; b]$ est le réel μ défini par :

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Dans le cas où f est positive sur $[a; b]$, la surface \mathcal{S} a la même aire qu'un rectangle dont les dimensions sont $b-a$ et la valeur moyenne de f sur $[a; b]$.



■ Remarque

Toutes ces définitions restent valables dans le cas où f est une fonction en escalier.

II- Propriétés de l'intégrale

■ Propriétés algébriques

Soient f et g des fonctions continues sur un intervalle I , et a, b des réels de I .

• $\int_a^a f(x) dx = 0$ et $\int_b^a f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$.

• Relation de Chasles :

pour tout c de I , $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$.

• Linéarité :

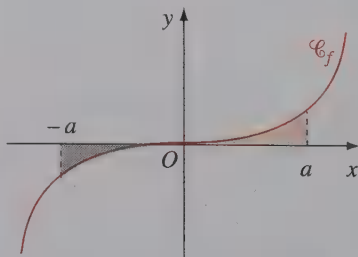
Pour tout réel k , $\int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$;

$$\int_a^b (f(x) + g(x)) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx.$$

■ Intégrales de fonctions paires, impaires, périodiques

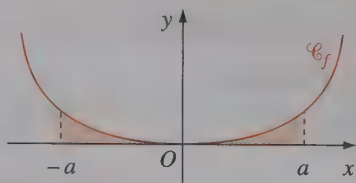
• Si f est une fonction impaire et continue sur un intervalle I de centre O , alors, pour tout a de I :

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0.$$



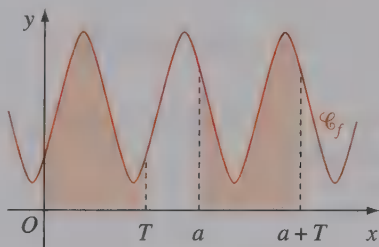
- Si f est une fonction paire et continue sur un intervalle I de centre O , alors, pour tout a de I :

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx.$$



- Si f est une fonction continue sur \mathbb{R} et de période T , alors, pour tout réel a :

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x) dx.$$



■ Intégrales et inégalités

Soient f et g des fonctions continues sur un intervalle I , et a, b des réels de I tels que : $a \leq b$.

- **Positivité** : si $f \geq 0$ sur $[a; b]$, alors : $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

- **Ordre** : si $f \leq g$ sur $[a; b]$, alors : $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx.$$

■ Inégalité de la moyenne

Si m et M sont des réels tels que :

$$m \leq f \leq M \text{ sur } [a; b],$$

alors :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

III- Intégrales et primitives

■ Définition

Si f est une fonction définie sur un intervalle I , on appelle primitive de f sur I toute fonction F de I dans \mathbb{R} , dérivable sur I , et qui vérifie :

$$\text{pour tout } x \text{ de } I, F'(x) = f(x).$$

■ Théorème

Si f est une fonction continue sur un intervalle I , et si a est un réel de I , alors la fonction F de I dans \mathbb{R} telle que :

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

est l'unique primitive de f sur I qui s'annule en a .

■ Propriété

Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I ; si F est l'une d'entre elles, alors les primitives de F sur I sont les fonctions $x \mapsto F(x) + k$, où k décrit \mathbb{R} .

■ Calcul de $\int_a^b f(t) dt$ à l'aide d'une primitive

Si f est une fonction continue sur I , F une primitive quelconque de f sur I et a, b des réels de I , alors l'intégrale de a à b de f est le réel $F(b) - F(a)$; on écrit :

$$\int_a^b f(t) dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a).$$

IV- Intégration par parties

Si u et v sont des fonctions dérivables sur un intervalle I , telles que u' et v' soient continues sur I , alors, pour tous réels a et b de I :

$$\int_a^b u(t) v'(t) dt = [u(t) v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t) v(t) dt.$$

V- Volumes et intégrales

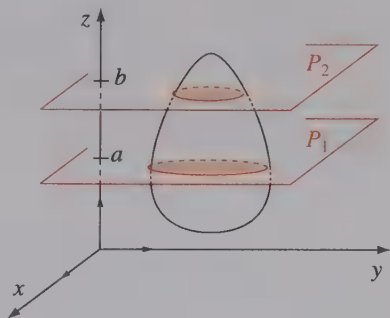
L'espace est rapporté à un repère orthonormé.

Si l'unité de longueur est ℓ , alors l'unité d'aire est celle d'un carré de côté ℓ , et l'unité de volume celle d'un cube de côté ℓ .

Soient a, b des réels tels que $a \leq b$, P_1 et P_2 les plans d'équations respectives $z = a$ et $z = b$.

Si $S(\lambda)$ désigne l'aire de la section d'un solide \mathcal{S} par le plan d'équation $z = \lambda$, et si la fonction $z \mapsto S(z)$ est continue sur $[a; b]$, alors le volume V de la partie du solide située entre P_1 et P_2 vérifie :

$$V = \int_a^b S(z) \, dz \text{ unités de volume.}$$



VI- Formulaire

Dans les deux tableaux suivants, n désigne un entier, et la fonction F de I dans \mathbb{R} est une primitive sur I de la fonction f .

$f(x)$	$F(x)$	I
x^n ($n \geq 1$)	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	\mathbb{R}
x^n ($n \leq -2$)	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$]-\infty; 0[$, $]0; +\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0; +\infty[$
$\sin x$	$-\cos x$	\mathbb{R}
$\cos x$	$\sin x$	\mathbb{R}
$\frac{1}{x}$	$\ln x$	$]0; +\infty[$
e^x	e^x	\mathbb{R}

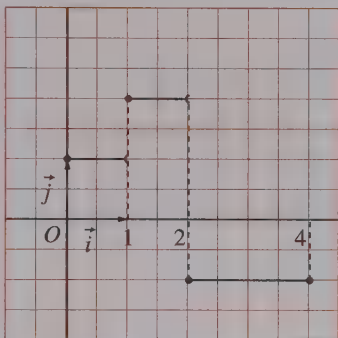
Dans ce deuxième tableau, u et v sont des fonctions dérivables sur un intervalle I .

f	F	Conditions
$u' u^n \ (n \geq 1)$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	
$u' u^n \ (n \leq -2)$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	u ne s'annule pas sur I
$\frac{u'}{u}$	$\ln u$	u est à valeurs strictement positives sur I
$u' e^u$	e^u	

EXERCICES

de contrôle des connaissances

(Corrigé p. 258)



Soit f la fonction en escalier représentée ci-dessus.

1° Déterminer :

$$\int_0^4 f(t) dt, \quad \int_4^0 f(t) dt, \quad \int_0^4 (2f(t) + 1) dt.$$

2° Quelle est la valeur moyenne de f sur $[0 ; 4]$?

(Corrigé p. 259)

1° Déterminer :

a. une primitive sur \mathbb{R} de chacune des fonctions suivantes :

$$x \mapsto 2x^3 + 1, \quad x \mapsto \cos 3x, \quad x \mapsto e^{-3x};$$

b. une primitive sur $]0 ; +\infty[$ de chacune des fonctions suivantes :

$$x \mapsto \frac{1}{x^3}, \quad x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}, \quad x \mapsto \frac{x+3}{x}.$$

2° Calculer :

a. $\int_{-1}^1 e^{-3x} dx,$

b. $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx.$

3

(Corrigé p. 260)

Vrai ou faux ?

$$1^\circ \int_2^4 \ln t \, dt = \int_1^4 \ln t \, dt - \int_1^2 \ln t \, dt .$$

$$2^\circ \int_{-2}^2 \frac{x^3 - 2x}{x^4 + x^2 + 1} \, dx = 0 .$$

$$3^\circ \text{ La fonction } F : x \mapsto \int_1^x t^3 \, dt \text{ admet pour dérivée : } x \mapsto \int_1^x 3t^2 \, dt .$$

$$4^\circ \text{ Une primitive sur } \mathbb{R} \text{ de la fonction } x \mapsto \sin^2 x \text{ est } x \mapsto \frac{1}{3} \sin^3 x .$$

$$5^\circ \int_{-2}^0 \frac{1}{x-1} \, dx = [\ln(x-1)]_{-2}^0 .$$

4

(Corrigé p. 261)

Un mobile se déplace sur l'axe (Ox) ; on note $v(t)$ la vitesse du mobile à l'instant t .

1° Exprimer la vitesse moyenne v_m du mobile entre les instants t_1 et t_2 ($t_1 < t_2$) en fonction de l'intégrale $\int_{t_1}^{t_2} v(t) \, dt$.

2° Calculer la vitesse moyenne du mobile entre les instants 0 et 10, sachant qu'à tout instant t :

$$v(t) = 2t + 1 .$$

5

(Corrigé p. 262)

Déterminer le signe de chacune des intégrales proposées.

$$1^\circ \int_{-2}^1 e^{t^2} \, dt .$$

$$2^\circ \int_{\pi}^{2\pi} \sin^5 t \, dt .$$

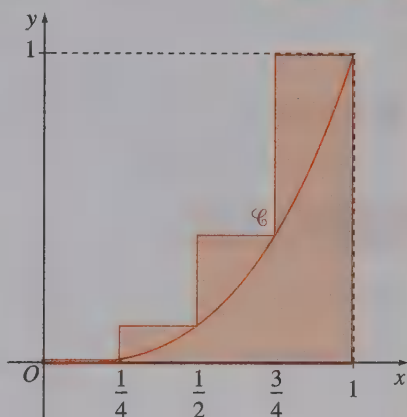
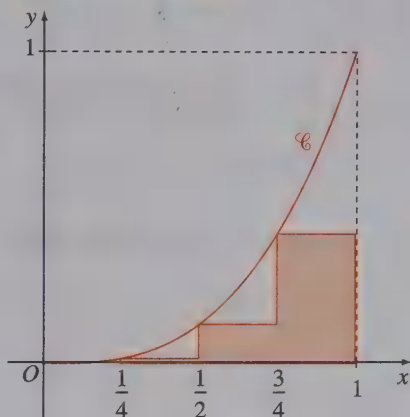
$$3^\circ \int_2^1 e^t \ln t \, dt .$$

Aires et Intégrales

6

10
min

(Corrigé p. 263)



\mathcal{C} est la courbe représentative de la fonction $x \mapsto x^3$, dans le plan rapporté à un repère orthonormé.

On note \mathcal{A} la mesure de l'aire de la surface limitée par \mathcal{C} , (Ox) , (Oy) et la droite d'équation $x = 1$.

1° Quel encadrement de \mathcal{A} les graphiques mettent-ils en évidence ?

2° Soit n un entier naturel non nul.

Écrire l'encadrement de \mathcal{A} que l'on obtient en effectuant un partage de $[0; 1]$ en n intervalles de même longueur.

Primitives

7

30
min

(Corrigé p. 263)

Déterminer une primitive F sur l'intervalle I de la fonction f proposée.

1° $x \mapsto \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right)$, $I = \mathbb{R}$.

2° $x \mapsto \sin^2 x \cos x$, $I = \mathbb{R}$.

$$3^\circ x \mapsto \frac{4x^3 + 8x}{(x^4 + 4x^2 + 2)^3}, I = \mathbb{R}.$$

$$4^\circ x \mapsto (x^2 + 1)(x^3 - 1), I = \mathbb{R}.$$

$$5^\circ x \mapsto x(x^2 + 1)^{2003}, I = \mathbb{R}.$$

$$6^\circ x \mapsto x^5 \cos x + 5x^4 \sin x, I = \mathbb{R}.$$

$$7^\circ x \mapsto \frac{x^2}{(x^3 + 27)^5}, I =]-3; +\infty[.$$

$$8^\circ x \mapsto \frac{2x - 1}{\sqrt{x^2 - x + 1}}, I = \mathbb{R}.$$

$$9^\circ x \mapsto \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}, I =]0; +\infty[.$$

$$10^\circ x \mapsto \frac{4x - 7}{2x^2 - 7x + 5}, I = \left] 1; \frac{5}{2} \right[.$$

$$11^\circ x \mapsto \tan x, I = \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[.$$

$$12^\circ x \mapsto \frac{\ln x}{x}, I =]0; +\infty[.$$

8 ★ 5 min.

(Corrigé p. 267)

Déterminer la primitive G sur $]0; +\infty[$ de la fonction $f: x \mapsto \frac{-5}{x^3}$ qui vérifie : $G(2) = 1$.

9 ★ ★ 10 min.

(Corrigé p. 267)

Démontrer que la fonction $F: x \mapsto \frac{2}{3} x \sqrt{x}$ est une primitive de $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $]0; +\infty[$.

Calculs simples d'intégrales

10 ★ 10 min.

(Corrigé p. 268)

Calculer les intégrales A , B , C et D proposées.

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \, dx.$$

$$B = \int_1^0 \frac{4x^3 + 8x}{(x^4 + 4x^2 + 2)^3} \, dx.$$

$$C = \int_1^2 \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \, dx.$$

$$D = \int_1^e \frac{\ln x}{x} \, dx.$$

11 ★ ★ 10 min.

(Corrigé p. 269)

Calculer les intégrales A , B et C proposées.

$$A = \int_0^2 (1 - |1 - t|)^3 dt.$$

$$B = \int_{-100}^{100} (t^3 + 4t^7) dt.$$

$$C = \sum_{k=1}^5 \int_k^{k+1} \sqrt{t} dt.$$

12 ★ ★ 10 min.

(Corrigé p. 271)

1° Vérifier que la fonction : $x \mapsto \cos 3x \sin x$ est impaire et périodique de période π .

2° Justifier les calculs suivants :

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} \cos 3x \sin x dx = \int_0^{\pi} \cos 3x \sin x dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x \sin x dx = 0.$$

Intégrales de quelques fonctions trigonométriques

13 ★ ★ ★ 20 min.

(Corrigé p. 271)

1° Soit x un nombre réel.

En utilisant la relation :

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1,$$

prouver :

$$\cos^5 x = \cos x - 2 \cos x \sin^2 x + \cos x \sin^4 x.$$

En déduire la valeur de l'intégrale : $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x dx$.2° Calculer les intégrales A et B suivantes :

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^3 2x dx, \quad B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^5 x dx.$$

Calculs d'aire

14 ★ 10 min

(Corrigé p. 273)

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, \mathcal{D} est l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que :
$$\begin{cases} 0 \leq x \leq \pi \\ 0 \leq y \leq \sin x. \end{cases}$$

L'unité graphique est 2 cm.

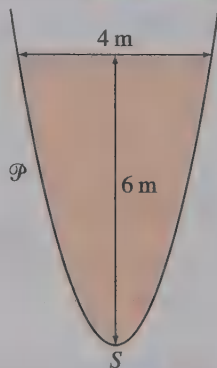
1° Représenter \mathcal{D} .

2° Calculer l'aire de \mathcal{D} en unités d'aire, puis en cm^2 .

15 ★ ★ 10 min

(Corrigé p. 274)

Calculer l'aire \mathcal{A} de la surface en couleur représentée ci-contre, sachant que la courbe \mathcal{P} est une parabole de sommet S .



Calcul du volume d'un solide de révolution

16 ★ ★ 10 min

(Corrigé p. 275)

Soit \mathcal{C} la courbe représentative de la fonction $x \mapsto e^x$, dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$. L'unité de longueur est 3 cm.

Par rotation autour de l'axe $(O; \vec{i})$, le domaine plan limité par \mathcal{C} , la droite $(O; \vec{i})$ et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 1$ engendre un solide de révolution, noté \mathcal{S} .

Calculer le volume de \mathcal{S} ; en donner une approximation au mm^3 près.

Intégration des parties

17 ★ 15 min

(Corrigé p. 275)

Calculer les intégrales A , B et C proposées à l'aide d'une intégration par parties.

$$A = \int_0^{\pi} x \sin x \, dx. \quad B = \int_1^e \ln t \, dt. \quad C = \int_{-1}^0 (2x+1) e^{-x} \, dx.$$

18 ★ ★ 15 min

(Corrigé p. 277)

À l'aide de deux intégrations par parties, calculer les intégrales A et B définies par :

$$A = \int_0^1 x^2 e^x \, dx \quad \text{et} \quad B = \int_0^{\pi} e^x \sin x \, dx.$$

Obtenir des renseignements sur une intégrale sans la calculer

19 ★ ★ 10 min

(Corrigé p. 278)

Démontrer :

$$\text{pour tout } x \text{ de }]0; +\infty[, \int_x^{x^2} \ln^3 t \, dt \geq 0.$$

20 ★ ★ 15 min

(Corrigé p. 279)

Soit F la fonction :
$$x \mapsto \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}} \, dt.$$

1° Démontrer que F est définie sur \mathbb{R} .

2° a. Démontrer que, pour tout réel t positif, on a :

$$\frac{1}{\sqrt{1+4t^2}} \geq \frac{1}{1+2t}.$$

b. En déduire que F admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$.

21 ★ ★ ★ 20 min

(Corrigé p. 280)

Soit F la fonction : $x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt$.

1° Démontrer que F est croissante sur \mathbb{R} .

2° a. Comparer les fonctions $t \mapsto e^{-t^2}$ et $t \mapsto e^{-t}$ sur $[1; +\infty[$.

En déduire :

$$\text{pour tout } x \text{ de } [1; +\infty[, F(x) \leq F(1) + \int_1^x e^{-t} dt.$$

b. Démontrer que F est majorée sur $[1; +\infty[$.

3° Que peut-on dire du comportement de F en $+\infty$?

Intégrales et suites

22 ★ ★ 10 min

(Corrigé p. 282)

Pour tout entier naturel n non nul, on pose : $u_n \doteq \int_n^{n+1} e^{\frac{t}{n}} dt$.

Calculer u_n , puis déterminer la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.

(On rappelle le résultat : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$.)

23 ★ ★ 15 min

(Corrigé p. 282)

Pour tout entier naturel n , on pose : $I_n = \int_0^1 t^n e^t dt$.

1° À l'aide d'une intégration par parties, démontrer :

$$\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*, I_n = e - nI_{n-1}.$$

2° Calculer I_0 , puis I_1, I_2, I_3 .

3° Démontrer que la suite (I_n) est décroissante.

4° Soit n un entier naturel. Calculer $\int_0^1 t^n dt$, puis démontrer :

$$0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}.$$

Quelle est la limite de la suite (I_n) ?

24 ★ ★ ★ 20 min.

(Corrigé p. 284)

On pose : $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos^2 x \, dx$, $B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^2 x \, dx$.

1° Calculer $A + B$.

2° Calculer $A - B$ à l'aide d'une intégration par parties.

3° Dédire des questions 1° et 2° les valeurs de A et B .

25 ★ ★ ★ 30 min.

(Corrigé p. 285)

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par :

$$f(x) = e^{-x} \sin x.$$

On note \mathcal{C} sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère ortho-normé.

1° a. Calculer les dérivées successives de f jusqu'à l'ordre 4 ; trouver une relation entre f et sa dérivée d'ordre 4, notée $f^{(4)}$.

b. En déduire une primitive F de f sur \mathbb{R} .

2° Pour tout n de \mathbb{N} , on pose :

$$I_n = \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} f(x) \, dx,$$

a. Calculer I_0 ; interpréter I_0 comme l'aire d'un domaine plan.

b. Démontrer que, pour tout n de \mathbb{N} :

$$I_n = \frac{e^{-2n\pi}}{2} (e^{-\pi} + 1).$$

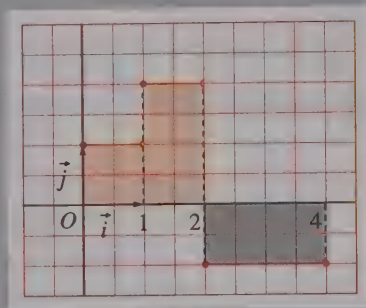
c. Prouver que la suite (I_n) est géométrique, et préciser sa raison.

En déduire la limite de (I_n) .

CORRIGÉS

des exercices

1



1° • Par définition de l'intégrale :

$$\int_0^4 f(t) dt = 1 \times 1 + 1 \times 2 - 2 \times 1 = 1.$$

L'aire de la surface colorée est comptée positivement, celle de la surface grisée est comptée négativement.

$$\bullet \int_4^0 f(t) dt = - \int_0^4 f(t) dt = -1.$$

• Par linéarité de l'intégrale :

$$\begin{aligned} \int_0^4 (2f(t) + 1) dt &= 2 \int_0^4 f(t) dt + \int_0^4 1 dt \\ &= 2 \times 1 + 4 = 6. \end{aligned}$$

$$\int_0^4 1 dt = [t]_0^4 = 4.$$

2° On a :

$$\frac{1}{4-0} \int_0^4 f(t) dt = \frac{1}{4},$$

donc :

la valeur moyenne de f
sur $[0; 4]$ est égale à $\frac{1}{4}$.

f et la fonction constante : $t \mapsto \frac{1}{4}$
ont la même intégrale sur $[0; 4]$.

2 1° a. Par lecture inverse des formules de dérivation, on obtient :

• $x \mapsto \frac{x^4}{2} + x$ est une primitive sur \mathbb{R}

de $x \mapsto 2x^3 + 1$;

• $x \mapsto \frac{1}{3} \sin 3x$ est une primitive sur \mathbb{R}

de $x \mapsto \cos 3x$;

• $x \mapsto -\frac{1}{3} e^{-3x}$ est une primitive sur \mathbb{R}

de $x \mapsto e^{-3x}$.

b. De même :

• la fonction de $]0 ; +\infty[$ dans $\mathbb{R} : x \mapsto -\frac{1}{2x^2}$ est une primitive sur

$]0 ; +\infty[$ de $x \mapsto \frac{1}{x^3}$;

• la fonction de $]0 ; +\infty[$ dans $\mathbb{R} : x \mapsto 2\sqrt{x}$ est une primitive sur

$]0 ; +\infty[$ de $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$;

• enfin, après avoir écrit :

$$\text{pour tout } x \text{ de }]0 ; +\infty[, \frac{x+3}{x} = 1 + 3 \times \frac{1}{x} ,$$

on obtient que $x \mapsto x + 3 \ln x$ est une primitive sur $]0 ; +\infty[$ de $x \mapsto \frac{x+3}{x}$.

2° a. $\int_{-1}^1 e^{-3x} dx = \left[-\frac{1}{3} e^{-3x} \right]_{-1}^1 = -\frac{1}{3} (e^{-3} - e^3) = \frac{1}{3} (e^3 - \frac{1}{e^3}) ;$

b. $\int_1^4 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = [2\sqrt{x}]_1^4$
 $= 2\sqrt{4} - 2\sqrt{1}$
 $= 4 - 2$
 $= 2 .$

Les formules de dérivation étant plus familières que celles d'intégration, penser à dériver la primitive obtenue pour contrôler la réponse.

1 et 4 appartiennent tous deux à l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

```
Normal Sci Eng
Float 0123456789
Radian Degree
Func Par Pol Seq
Connected Dot
Sequential Simul
Real a+bt re^@t
Full Horiz G-T
```

```
NUM CPX PRB
3↑³
4:³√(
5: *√
6:fMin(
7:fMax(
8:nDeriv(
9:fnInt(
```

```
fnInt(e^(-3X),X,
-1,1)
6.678583285
(e^(3)-e^(-3))/3
6.678583285
```

```
fnInt(1/√(X),X,1
,4)
2
```

3 $1^\circ \int_2^4 \ln t \, dt = \int_1^4 \ln t \, dt - \int_1^2 \ln t \, dt.$

Vrai ; en effet, la fonction \ln est continue sur $]0 ; +\infty[$, et les réels 1, 2 et 4 sont strictement positifs, donc, d'après la relation de Chasles :

$$\int_1^4 \ln t \, dt = \int_1^2 \ln t \, dt + \int_2^4 \ln t \, dt,$$

c'est-à-dire :
$$\int_2^4 \ln t \, dt = \int_1^4 \ln t \, dt - \int_1^2 \ln t \, dt.$$

On peut aussi écrire :

$$\int_2^4 \ln t \, dt = \int_2^1 \ln t \, dt + \int_1^4 \ln t \, dt = -\int_1^2 \ln t \, dt + \int_1^4 \ln t \, dt = \int_1^4 \ln t \, dt - \int_1^2 \ln t \, dt.$$

2 $^\circ \int_{-2}^2 \frac{x^3 - 2x}{x^4 + x^2 + 1} \, dx = 0.$

Vrai, car la fonction $x \mapsto \frac{x^3 - 2x}{x^4 + x^2 + 1}$ est continue sur \mathbb{R} et impaire, et les bornes de l'intégrale sont des réels opposés.

3 $^\circ$ La fonction $F : x \mapsto \int_1^x t^3 \, dt$ admet pour dérivée : $x \mapsto \int_1^x 3t^2 \, dt.$

Faux :

- d'une part, F est une primitive sur \mathbb{R} de la fonction cube (celle qui s'annule en 1), ce qui implique que F' est la fonction cube : $x \mapsto x^3$;

- d'autre part, pour tout réel x : $\int_1^x 3t^2 \, dt = [t^3]_1^x = x^3 - 1.$

4 $^\circ$ Une primitive sur \mathbb{R} de $x \mapsto \sin^2 x$ est $x \mapsto \frac{1}{3} \sin^3 x.$

Faux : la dérivée de $x \mapsto \frac{1}{3} \sin^3 x$ est $x \mapsto \cos x \sin^2 x$.

En écrivant : pour tout réel x , $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x$,
on obtient qu'une primitive de $x \mapsto \sin^2 x$ est $x \mapsto \frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin 2x$.

$$5^\circ \int_{-2}^0 \frac{1}{x-1} dx = [\ln(x-1)]_{-2}^0.$$

Faux :

• noter tout d'abord que l'écriture $[\ln(x-1)]_{-2}^0$ n'a pas de sens, car la fonction \ln n'est définie que sur $]0; +\infty[$;

• en revanche, la fonction $x \mapsto \frac{1}{x-1}$ étant continue sur $] -\infty; 1[$, l'intégrale $\int_{-2}^0 \frac{1}{x-1} dx$ existe bien, et on a :

$$\int_{-2}^0 \frac{1}{x-1} dx = [\ln(1-x)]_{-2}^0 = \ln 1 - \ln 3 = -\ln 3.$$

Si u est une fonction dérivable et à valeurs strictement négatives sur un intervalle I , alors une primitive sur I de $\frac{u'}{u}$ est $\ln(-u)$.

```
fnInt(1/(X-1),X,  
-2,0)  
-1.098612289  
ln(3)  
1.098612289  
■
```

4 1° En notant $x(t)$ l'abscisse du mobile à l'instant t , la distance $x(t_2) - x(t_1)$ parcourue entre les instants t_1 et t_2 vérifie :

$$x(t_2) - x(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt,$$

et la vitesse moyenne v_m entre ces mêmes instants est définie par :

$$v_m = \frac{x(t_2) - x(t_1)}{t_2 - t_1},$$

donc :

$$v_m = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} v(t) dt.$$

$$2^\circ v(t) = 2t + 1.$$

En notant v_m la vitesse moyenne du mobile entre les instants 0 et 10 :

$$v_m = \frac{1}{10} \int_0^{10} (2t + 1) dt = \frac{1}{10} [t^2 + t]_0^{10} = \frac{100 + 10}{10} = 11.$$

$$5 \quad 1^\circ \int_{-2}^1 e^{t^2} dt.$$

La fonction $t \mapsto e^{t^2}$ est continue et positive sur \mathbb{R} , et : $-2 \leq 1$, donc, d'après la propriété de

positivité de l'intégrale : $\int_{-2}^1 e^{t^2} dt \geq 0$.

```
fnInt(e^(X^2), X, -
2, 1)
17.91527951
```

$$2^\circ \int_{\pi}^{2\pi} \sin^5 t dt.$$

La fonction \sin est continue et négative sur $[\pi; 2\pi]$; il en est donc de même pour la fonction : $t \mapsto \sin^5 t$. Les bornes de l'intégrale étant rangées

dans l'ordre croissant, on obtient : $\int_{\pi}^{2\pi} \sin^5 t dt \leq 0$.

```
fnInt(sin(X)^5, X
, pi, 2pi)
-1.066666667
```

$$3^\circ \int_2^1 e^t \ln t dt.$$

La fonction $t \mapsto e^t \ln t$ est continue et positive sur $[1; 2]$, donc, les bornes de l'intégrale étant rangées dans l'ordre

décroissant : $\int_2^1 e^t \ln t dt \leq 0$.

```
fnInt(e^(X)ln(X)
, X, 2, 1)
-2.062586862
```

Pour tout réel t :
 $e^t > 0$;
 pour tout t de $[1; +\infty[$:
 $\ln t \geq 0$.

On peut démontrer que, si a et b sont des réels tels que : $a < b$, et si f est une fonction continue, positive et non identiquement nulle sur $[a; b]$, alors :

$$\int_a^b f(t) dt > 0.$$

Pour chacune des intégrales étudiées, on pourrait donc remplacer l'inégalité large obtenue par l'inégalité stricte correspondante.

6° 1° Les graphiques mettent en évidence l'encadrement de \mathcal{A} suivant :

$$\frac{1}{4} \times \left[\left(\frac{1}{4}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{3}{4}\right)^3 \right] \leq \mathcal{A} \leq \frac{1}{4} \times \left[\left(\frac{1}{4}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{3}{4}\right)^3 + 1^3 \right],$$

c'est-à-dire : $\frac{1}{4} \times \frac{1 + 2^3 + 3^3}{4^3} \leq \mathcal{A} \leq \frac{1}{4} \times \frac{1 + 2^3 + 3^3 + 4^3}{4^3},$

ou encore, après calculs : $\frac{9}{64} \leq \mathcal{A} \leq \frac{25}{64}.$

2° En effectuant un partage de $[0 ; 1]$ en n intervalles de même longueur, on obtient :

$$\frac{1}{n} \times \left[\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \left(\frac{2}{n}\right)^3 + \dots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^3 \right] \leq \mathcal{A} \leq \frac{1}{n} \times \left[\left(\frac{1}{n}\right)^3 + \left(\frac{2}{n}\right)^3 + \dots + \left(\frac{n}{n}\right)^3 \right],$$

c'est-à-dire :

$$\frac{1}{n^4} \times (1^3 + 2^3 + \dots + (n-1)^3) \leq \mathcal{A} \leq \frac{1}{n^4} \times (1^3 + 2^3 + \dots + n^3).$$

En utilisant le résultat de l'exercice 7 du chapitre 5, on peut écrire :

$$\frac{(n-1)^2}{4n^2} \leq \mathcal{A} \leq \frac{(n+1)^2}{4n^2};$$

les deux suites $n \mapsto \frac{(n-1)^2}{4n^2}$ et $n \mapsto \frac{(n+1)^2}{4n^2}$ ayant pour limite $\frac{1}{4}$ en $+\infty$, on en

$$\mathcal{A} = \frac{1}{4}.$$

déduit :

ce qui est en accord avec les calculs suivants : $\int_0^1 x^3 dx = \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{4}.$

7° 1° $f : x \mapsto \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right).$

La fonction sinus est une primitive sur \mathbb{R} de la fonction cosinus ; il en résulte qu'une primitive de f sur \mathbb{R} est la fonction F :

$$x \mapsto \frac{1}{5} \sin\left(5x - \frac{\pi}{4}\right).$$

Vérification :

$$\text{pour tout réel } x, F'(x) = \frac{1}{5} \times 5 \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) = f(x).$$

2° $f: x \mapsto \sin^2 x \cos x$.On peut écrire : $f = \sin^2 \times \sin'$,donc une primitive de f sur \mathbb{R} est la fonction $F: x \mapsto \frac{1}{3} \sin^3 x$.

Vérification :

$$\text{pour tout réel } x, F'(x) = \frac{1}{3} \times 3 \times \cos x \times \sin^2 x = f(x).$$

$$3^\circ f: x \mapsto \frac{4x^3 + 8x}{(x^4 + 4x^2 + 2)^3}.$$

Posons : $u(x) = x^4 + 4x^2 + 2$, alors : $u'(x) = 4x^3 + 8x$,

donc : $f = \frac{u'}{u^3} = u' u^{-3}$.

Le polynôme $u: x \mapsto x^4 + 4x^2 + 2$ ne s'annulepas sur \mathbb{R} , donc $\frac{u^{-2}}{-2}$ est une primitive de $u' u^{-3}$ sur \mathbb{R} . On en déduit :une primitive de f sur \mathbb{R} est la fonction F :

$$x \mapsto \frac{-1}{2(x^4 + 4x^2 + 2)^2}.$$

Vérification :

$$\text{pour tout réel } x, F'(x) = -\frac{1}{2} \times (-2) \times (4x^3 + 8x) \times (x^4 + 4x^2 + 2)^{-3} = f(x).$$

$$4^\circ f: x \mapsto (x^2 + 1)(x^3 - 1).$$

Une écriture développée du polynôme f est :

$$x \mapsto x^5 + x^3 - x^2 - 1.$$

On en déduit qu'une primitive F de f sur \mathbb{R} est le polynôme :

$$x \mapsto \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x.$$

$$5^\circ f: x \mapsto x(x^2 + 1)^{2003}.$$

On peut écrire : $f = \frac{1}{2}u'u^{2003}$, où u est le polynôme : $x \mapsto x^2 + 1$, et

$\frac{u^{2004}}{2004}$ est une primitive de $u'u^{2003}$, donc une primitive de f sur \mathbb{R} est

$$\text{la fonction } F: x \mapsto \frac{1}{4008}(x^2 + 1)^{2004}.$$

$$6^\circ f: x \mapsto x^5 \cos x + 5x^4 \sin x.$$

On peut écrire : $f = uv' + u'v$,

u étant la fonction $x \mapsto x^5$ et v la fonction sinus ; or une primitive de $u'v + uv'$ sur \mathbb{R} est uv , donc :

$$\text{une primitive } F \text{ de } f \text{ sur } \mathbb{R} \text{ est : } x \mapsto x^5 \sin x.$$

$$7^\circ f: x \mapsto \frac{x^2}{(x^3 + 27)^5}.$$

f a pour ensemble de définition $\mathbb{R} \setminus \{-3\}$ et : $f = \frac{1}{3} \frac{u'}{u^5} = \frac{1}{3} u'u^{-5}$, où u est le polynôme : $x \mapsto x^3 + 27$.

Or, $u'u^{-5}$ est la dérivée de $\frac{u^{-4}}{-4}$, c'est-à-dire de $\frac{-1}{4u^4}$, donc une primitive

de f sur $]-3; +\infty[$ est la fonction F de $]-3; +\infty[$ dans \mathbb{R} définie

$$\text{par : } F(x) = \frac{-1}{12(x^3 + 27)^4}.$$

$$8^\circ f: x \mapsto \frac{2x - 1}{\sqrt{x^2 - x + 1}}.$$

On peut écrire : $f = \frac{u'}{\sqrt{u}}$, où u est le polynôme : $x \mapsto x^2 - x + 1$, à valeurs

strictement positives sur \mathbb{R} , et $2\sqrt{u}$ est une primitive de $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ sur \mathbb{R} , donc

une primitive F de f sur \mathbb{R} est : $x \mapsto 2\sqrt{x^2 - x + 1}$.

$$9^\circ f: x \mapsto \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}.$$

Pour tout réel x non nul : $f(x) = -u'(x) e^{u(x)}$,

où u est la fonction : $x \mapsto \frac{1}{x}$, donc **une primitive de f sur $]0; +\infty[$ est**

la fonction F de $]0; +\infty[$ dans \mathbb{R} définie par : $F(x) = -e^{\frac{1}{x}}$.

$$10^\circ f: x \mapsto \frac{4x-7}{2x^2-7x+5}.$$

Pour tout réel x , $2x^2 - 7x + 5 = 2(x-1)\left(x - \frac{5}{2}\right)$

1 est solution évidente
de : $2x^2 - 7x + 5 = 0$.

et on a : $f = \frac{u'}{u}$, où u est le polynôme : $x \mapsto 2x^2 - 7x + 5$, à valeurs

strictement négatives sur $]1; \frac{5}{2}[$.

Une primitive F de f sur $]1; \frac{5}{2}[$ est

donc la fonction de $]1; \frac{5}{2}[$ dans \mathbb{R}

telle que :

$$F(x) = \ln(-2x^2 + 7x - 5).$$

$f = \frac{(-u)'}{-u}$,
et $-u$ est à valeurs strictement
positives sur $]1; \frac{5}{2}[$.

$$11^\circ f: x \mapsto \tan x.$$

$f = -\frac{\cos'}{\cos}$, et la fonction cosinus est à valeurs strictement positives sur

$]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$; on en déduit qu'**une primitive F de f sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ est la**

fonction de $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$ dans \mathbb{R} définie par : $F(x) = -\ln(\cos x)$.

$$12^\circ f: x \mapsto \frac{\ln x}{x}.$$

On peut écrire :

$$\text{pour tout } x \text{ de }]0; +\infty[, f(x) = \frac{1}{x} \times \ln x = \ln'(x) \times \ln x,$$

donc **la fonction $F: x \mapsto \frac{1}{2} \ln^2 x$ est une primitive de f sur $]0; +\infty[$.**

$$\# f: x \mapsto \frac{-5}{x^3}.$$

Pour tout réel x non nul :

$$f(x) = -5x^{-3},$$

donc une primitive de f sur $]0; +\infty[$ est la fonction F , de $]0; +\infty[$ dans \mathbb{R} , définie par :

$$F(x) = -5 \times \frac{x^{-3+1}}{-3+1} = -5 \times \frac{x^{-2}}{-2} = \frac{5}{2x^2}.$$

Parmi toutes les primitives de f sur $]0; +\infty[$, celle qui prend la valeur 1 en 2 est la fonction $x \mapsto F(x) + k$, où le réel k vérifie : $F(2) + k = 1$, c'est-à-dire : $k = \frac{3}{8}$.

On en déduit que la primitive G de f sur $]0; +\infty[$ telle que : $G(2) = 1$ est la fonction, de $]0; +\infty[$ dans \mathbb{R} , définie par :

$$G(x) = \frac{5}{2x^2} + \frac{3}{8}.$$

$$\# F: x \mapsto \frac{2}{3} x \sqrt{x}.$$

F a pour ensemble de définition $[0; +\infty[$.

• Comme produit des fonctions $x \mapsto \frac{2}{3} x$,

dérivable sur \mathbb{R} , et $x \mapsto \sqrt{x}$, dérivable sur $]0; +\infty[$, F est dérivable sur $]0; +\infty[$, et pour tout x de cet intervalle :

$$F'(x) = \frac{2}{3} \times \left(1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) = \frac{2}{3} \times \left(\sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} \right) = \sqrt{x}.$$

• De plus, pour tout réel h strictement positif :

$$\frac{F(h) - F(0)}{h} = \frac{2}{3} \times \frac{h\sqrt{h}}{h} = \frac{2}{3} \times \sqrt{h},$$

donc :
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(h) - F(0)}{h} = 0,$$

ce qui prouve que F est dérivable en 0 et $F'(0) = 0$.

Finalement, F est dérivable sur $[0; +\infty[$, et pour tout réel x positif :

$$F'(x) = \sqrt{x},$$

autrement dit :

F est une primitive de $x \mapsto \sqrt{x}$ sur $[0; +\infty[$.

$$x \times \frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{\sqrt{x} \times \sqrt{x}}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}.$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sqrt{h} = 0.$$

$$F'(0) = 0 = \sqrt{0}.$$

• Pour trouver cette primitive, on peut écrire :

$$\text{pour tout } x \text{ de }]0; +\infty[, \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}},$$

et étendre à $n = \frac{1}{2}$ la formule donnant une primitive de $x \mapsto x^n$:

$$\text{pour tout } x \text{ de }]0; +\infty[, \frac{1}{\frac{1}{2}+1} x^{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3} x^{\frac{1}{2}} \times x = \frac{2}{3} x\sqrt{x}.$$

• Pour tout x de $]0; +\infty[$, $\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ et $\frac{1}{\frac{1}{3}+1} x^{\frac{1}{3}+1} = \frac{3}{4} x\sqrt[3]{x}$.

on démontrerait de même que $x \mapsto \frac{3}{4} x\sqrt[3]{x}$ est une primitive sur $]0; +\infty[$ de la fonction racine cubique.

10

L'exercice 7 détaille une façon d'obtenir la primitive utilisée pour calculer chacune des intégrales.

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x \, dx = \left[\frac{1}{3} \sin^3 x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}.$$

$$B = \int_1^0 \frac{4x^3 + 8x}{(x^4 + 4x^2 + 2)^3} \, dx = \left[\frac{-1}{2(x^4 + 4x^2 + 2)^2} \right]_1^0 = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{49} \right) = -\frac{45}{392}.$$

$$C = \int_1^2 \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \, dx = \left[-e^{\frac{1}{x}} \right]_1^2 = -e^{\frac{1}{2}} + e = e - \sqrt{e}.$$

$$D = \int_1^e \frac{\ln x}{x} \, dx = \left[\frac{1}{2} \ln^2 x \right]_1^e = \frac{1}{2} (\ln^2 e - \ln^2 1) = \frac{1}{2}.$$

La calculatrice est un outil précieux pour vérifier ces résultats.

```
fnInt(sin(X)^2*cos
(X),X,0,pi/2)
.3333333333
```

```
fnInt((4X^3+8X)/
(X^4+4X^2+2)^3,X,
1,0)
-.1147959184
45/392
.1147959184
```

```
fnInt(e^(1/X)/X^2
,X,1,2)
1.069560558
e^(1)-e^(1/2)
1.069560558
```

```
fnInt(ln(X)/X,X,
1,e^(1))
.5
```

11 • $A = \int_0^2 (1 - |1 - t|)^3 dt$.

Remarquons d'abord que la fonction $t \mapsto (1 - |1 - t|)^3$ est continue sur \mathbb{R} , et que l'on a, pour tout réel t :

$$\begin{cases} |t - 1| = 1 - t & \text{si } t \leq 1 \\ |t - 1| = t - 1 & \text{si } t \geq 1. \end{cases}$$

On est ainsi conduit à écrire, en utilisant la relation de Chasles :

$$A = \int_0^1 (1 - |1 - t|)^3 dt + \int_1^2 (1 - |1 - t|)^3 dt,$$

donc : $A = \int_0^1 (1 - (1 - t))^3 dt + \int_1^2 (1 - (t - 1))^3 dt = \int_0^1 t^3 dt + \int_1^2 (2 - t)^3 dt,$

d'où : $A = \left[\frac{t^4}{4} \right]_0^1 + \left[\frac{-(2 - t)^4}{4} \right]_1^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4},$

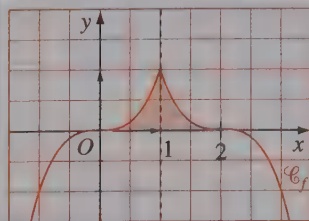
et finalement : $A = \frac{1}{2}.$

```
fnInt((1-abs(1-X
))^3,X,0,2)
.5
```

Notons f la fonction : $t \mapsto (1 - |1 - t|)^3$; la droite d'équation $x = 1$ étant axe de symétrie

de \mathcal{C}_f : $\int_0^1 f(t) dt = \int_1^2 f(t) dt,$

c'est-à-dire : $\int_0^1 t^3 dt = \int_1^2 (2 - t)^3 dt.$



$$\bullet B = \int_{-100}^{100} (t^3 + 4t^7) dt.$$

La fonction $t \mapsto t^3 + 4t^7$ est continue sur \mathbb{R} (B existe), impaire, et les bornes de l'intégrale sont opposées, donc :

$$B = 0.$$

$$\bullet C = \sum_{k=1}^5 \int_k^{k+1} \sqrt{t} dt.$$

La fonction racine carrée est continue sur $[0; +\infty[$, donc C existe bien, et on peut écrire :

$$C = \int_1^2 \sqrt{t} dt + \int_2^3 \sqrt{t} dt + \int_3^4 \sqrt{t} dt + \int_4^5 \sqrt{t} dt + \int_5^6 \sqrt{t} dt,$$

donc, d'après la relation de Chasles :

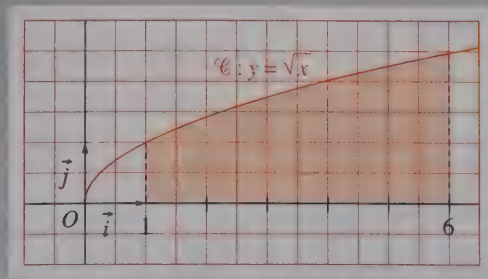
$$C = \int_1^6 \sqrt{t} dt.$$

De plus, une primitive de $t \mapsto \sqrt{t}$ sur $[0; +\infty[$ est la fonction $t \mapsto \frac{2}{3} t\sqrt{t}$ (voir l'exercice 9), donc :

$$C = \left[\frac{2}{3} t\sqrt{t} \right]_1^6,$$

$$\text{et finalement : } C = \frac{2}{3} (6\sqrt{6} - 1).$$

```
fnInt(√(X),X,1,6
)
9.131292304
(6√(6)-1)*2/3
9.131292304
■
```



C est l'aire de la surface colorée.

12 1° Notons f la fonction : $x \mapsto \cos 3x \sin x$.

Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} \bullet f(-x) &= \cos(-3x) \sin(-x) \\ &= \cos 3x \times (-\sin x) \\ &= -\cos 3x \sin x \\ &= -f(x), \end{aligned}$$

donc la fonction f est impaire ;

$$\begin{aligned} \bullet f(x + \pi) &= \cos(3x + 3\pi) \sin(x + \pi) \\ &= \cos(3x + \pi) \sin(x + \pi) \\ &= (-\cos 3x) \times (-\sin x) \\ &= f(x), \end{aligned}$$

donc la fonction f est périodique de période π .

La fonction \cos est paire,
la fonction \sin est impaire.

Les fonctions \cos et \sin sont
 2π -périodiques, de plus, pour
tout réel t :

$$\begin{aligned} \cos(t + \pi) &= -\cos t, \\ \sin(t + \pi) &= -\sin t. \end{aligned}$$

$$2^\circ \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} \cos 3x \sin x \, dx = \int_0^{\pi} \cos 3x \sin x \, dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x \sin x \, dx = 0.$$

Égalités ① et ② : la fonction $x \mapsto \cos 3x \sin x$ est continue sur \mathbb{R} et π -périodique ; de plus, les segments $\left[\frac{\pi}{3}; \frac{4\pi}{3}\right]$, $[0; \pi]$ et $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ ont tous trois pour longueur π .

Égalité ③ : la fonction $x \mapsto \cos 3x \sin x$ est impaire et $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ est symétrique par rapport à 0.

```
fnInt(cos(3X)sin
(X), X, pi/3, pi*4/3)
0
```

13 1° Pour tout réel x :

$$\begin{aligned} \cos^5 x &= \cos x \times (\cos^2 x)^2 \\ &= \cos x (1 - \sin^2 x)^2 \\ &= \cos x (1 - 2 \sin^2 x + \sin^4 x), \end{aligned}$$

donc :

$$\cos^5 x = \cos x - 2 \cos x \sin^2 x + \cos x \sin^4 x.$$

\cos^5 est paire, de période 2π , prend la valeur 1 en 0 et π et 0 en $\frac{\pi}{2}$; il en est de même pour la fonction : $x \mapsto \cos x - 2 \cos x \sin^2 x + \cos x \sin^4 x$.
Cela ne constitue, bien sûr, pas une preuve de l'égalité de ces deux fonctions, mais ce type de contrôle permet d'éviter des erreurs grossières.

On en déduit qu'une primitive sur \mathbb{R} de la fonction \cos^5 est :

$$x \mapsto \sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{1}{5} \sin^5 x,$$

donc :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \, dx = \left[\sin x - \frac{2}{3} \sin^3 x + \frac{1}{5} \sin^5 x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{8}{15}.$$

```
fnInt(cos(x)^5, x
, 0, pi/2)
8/15 .5333333333
.5333333333
```

$$2^\circ \bullet A = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^3 2x \, dx,$$

Commençons par transformer l'expression de la fonction sous le symbole d'intégration, en écrivant, pour tout réel x :

$$\sin^3 2x = \sin 2x \times \sin^2 2x = \sin 2x (1 - \cos^2 2x)$$

c'est-à-dire : $\sin^3 2x = \sin 2x - \sin 2x \cos^2 2x$;

$$\text{il vient : } \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^3 2x \, dx = \left[-\frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{6} \cos^3 2x \right]_0^{\frac{\pi}{6}} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{48} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6},$$

d'où : $A = \frac{5}{48}$.

$$\bullet B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^5 x \, dx.$$

D'après la question 1°, pour tout réel x :

$$\begin{aligned} \sin^2 x \cos^5 x &= \sin^2 x (\cos x - 2 \cos x \sin^2 x + \cos x \sin^4 x) \\ &= \cos x \sin^2 x - 2 \cos x \sin^4 x + \cos x \sin^6 x, \end{aligned}$$

d'où l'on déduit :

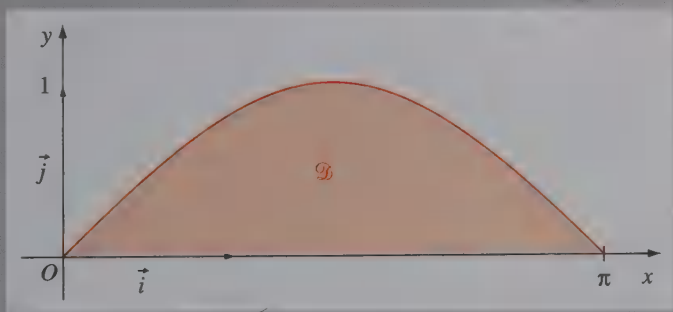
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos^5 x \, dx = \left[\frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{2}{5} \sin^5 x + \frac{1}{7} \sin^7 x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3} - \frac{2}{5} + \frac{1}{7},$$

et finalement : $B = \frac{8}{105}.$

```
fnInt(sin(2X)^3,
X,0,pi/6)
.1041666667
5/48
.1041666667
```

```
fnInt(sin(X)^2*cos
(X)^5,X,0,pi/2)
8/105
.0761904762
```

14 1° $\mathcal{D} : \begin{cases} 0 \leq x \leq \pi \\ 0 \leq y \leq \sin x. \end{cases}$



2° Soit \mathcal{A} l'aire de \mathcal{D} en unités d'aire.

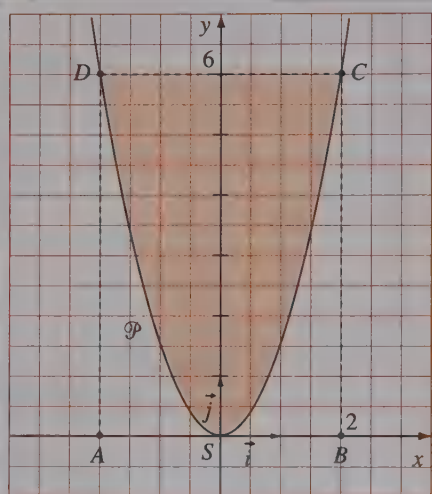
La fonction sinus est continue et positive sur l'intervalle $[0 ; \pi]$, donc :

$$\mathcal{A} = \int_0^{\pi} \sin x \, dx = [-\cos x]_0^{\pi} = 2.$$

```
fnInt(sin(X),X,0
,pi)
2
```

L'unité d'aire étant 4 cm^2 , l'aire de \mathcal{D} est 8 cm^2 .

Vérifier qu'il n'y a pas incompatibilité entre l'aire calculée et une évaluation grossière de cette aire sur la représentation graphique.



L'équation générale d'une parabole d'axe vertical est :
 $y = ax^2 + bx + c$;
 \mathcal{P} passe par S , donc :
 $c = 0$;
 \mathcal{P} est symétrique par rapport à (Sy) , donc :
 $b = 0$.

Dans le repère orthonormé $(S; \vec{i}, \vec{j})$, la parabole \mathcal{P} admet pour équation :

$$y = ax^2.$$

\mathcal{P} passant par le point de coordonnées $(2; 6)$, le réel a vérifie :

$$6 = a \times 2^2,$$

c'est-à-dire :

$$a = \frac{3}{2}.$$

L'aire \mathcal{A} à calculer est égale à celle du rectangle $ABCD$, diminuée de l'aire de la surface limitée par \mathcal{P} , l'axe (Sx) et les droites d'équations $x = -2$ et $x = 2$, donc :

$$\mathcal{A} = \left(4 \times 6 - \int_{-2}^2 \frac{3}{2} x^2 dx \right) \text{m}^2.$$

On a :

$$\int_{-2}^2 \frac{3}{2} x^2 dx = \frac{3}{2} \int_{-2}^2 x^2 dx = 2 \times \frac{3}{2} \int_0^2 x^2 dx = 3 \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^2 = 3 \times \frac{8}{3} = 8.$$

donc :

$$4 \times 6 - \int_{-2}^2 \frac{3}{2} x^2 dx = 24 - 8 = 16,$$

et finalement :

$$\mathcal{A} = 16 \text{ m}^2.$$

16 $\mathcal{C} : y = e^x$.

Pour tout réel λ de $[-1; 1]$, l'intersection de \mathcal{S} et du plan d'équation $x = \lambda$ est un disque de rayon e^λ unités de longueur, et d'aire $\pi(e^\lambda)^2$ unités d'aire ; de plus, la fonction $x \mapsto \pi(e^x)^2$ est continue sur $[-1; 1]$.

Le volume de \mathcal{S} est donc $\int_{-1}^1 \pi(e^x)^2 dx$ unités de volume, et :

$$\bullet \int_{-1}^1 \pi(e^x)^2 dx = \int_{-1}^1 \pi e^{2x} dx = \pi \left[\frac{1}{2} e^{2x} \right]_{-1}^1 = \frac{\pi}{2} \left(e^2 - \frac{1}{e^2} \right),$$

• l'unité de longueur étant égale à 3 cm, l'unité de volume vaut 27 cm³.

On en déduit que le volume de \mathcal{S} est égal à $\frac{27\pi}{2} \left(e^2 - \frac{1}{e^2} \right)$ cm³.

$$\frac{27\pi}{2} \left(e^2 - \frac{1}{e^2} \right) \approx 307,641,$$

$$\frac{27\pi(e^2 - e^{-2})}{2} \approx 307.6411863$$

donc :

au mm³ près, le volume de \mathcal{S} est égal à 307,641 cm³.

17 • $A = \int_0^\pi x \sin x dx = \int_0^\pi u(x) v'(x) dx,$

avec, pour tout x de $[0; \pi]$:

$$u(x) = x, \text{ donc : } u'(x) = 1,$$

$$v'(x) = \sin x, \text{ et par exemple : } v(x) = -\cos x.$$

Les fonctions u , v , u' , v' étant continues sur $[0; \pi]$, on obtient en intégrant par parties :

$$A = [u(x) \cdot v(x)]_0^\pi - \int_0^\pi u'(x) v(x) dx,$$

c'est-à-dire : $A = [-x \cos x]_0^\pi - \int_0^\pi (-\cos x) dx,$

donc :

$$A = \pi + [\sin x]_0^\pi = \pi + \sin \pi - \sin 0,$$

d'où :

$$A = \pi.$$

$\cos \pi = -1,$
 $\cos 0 = 1.$

$\sin \pi = \sin 0 = 0.$

Cette intégration par parties a permis de remplacer le calcul de $\int_0^{\pi} x \sin x \, dx$ par celui de $\int_0^{\pi} \cos x \, dx$, que l'on sait effectuer car on connaît les primitives de la fonction \cos .

Noter que poser :

$$u(x) = \sin x, \quad v'(x) = x$$

conduirait à l'intégrale « plus compliquée » : $\int_0^{\pi} x^2 \cos x \, dx$.

$$\bullet B = \int_1^e \ln t \, dt.$$

En écrivant : $B = \int_1^e 1 \times \ln t \, dt$, on est conduit à poser, pour tout t de $[1; e]$:

$$u(t) = \ln t, \quad \text{donc : } u'(t) = \frac{1}{t},$$

$$v'(t) = 1, \quad \text{on peut alors choisir : } v(t) = t.$$

Les conditions d'application d'une intégration par parties étant satisfaites (u et v dérivables, à dérivées continues sur $[1; e]$), on obtient :

$$B = [t \ln t]_1^e - \int_1^e t \times \frac{1}{t} \, dt = e \ln e - \ln 1 - \int_1^e 1 \, dt = e - [t]_1^e = e - (e - 1),$$

soit :
$$B = 1.$$

$$\bullet C = \int_{-1}^0 (2x + 1) e^{-x} \, dx.$$

En posant :

$$u(x) = 2x + 1, \quad u'(x) = 2,$$

$$v'(x) = e^{-x}, \quad v(x) = -e^{-x},$$

les fonctions u , v , u' , v' sont continues sur $[-1; 0]$, et l'on obtient en intégrant par parties :

$$C = [-(2x + 1) e^{-x}]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 (-2e^{-x}) \, dx = -1 - e - [2e^{-x}]_{-1}^0,$$

donc :
$$C = e - 3.$$

Noter que poser : $u(x) = e^{-x}$, $v'(x) = 2x + 1$

conduirait à l'intégrale « plus compliquée » : $\int_{-1}^0 x^2 e^{-x} dx$.

```
fnInt(Xsin(X),X,
0,pi)
3.141592654
```

```
fnInt(ln(X),X,1,
e^(1))
1
```

```
fnInt((2X+1)e^(-
X),X,-1,0)
-.2817181715
e^(1)-3
-.2817181715
```

18 • $A = \int_0^1 x^2 e^x dx$

Pour tout x de $[0; 1]$,

on pose : $u(x) = x^2$ et $v'(x) = e^x$,

on a alors : $u'(x) = 2x$,

et on peut choisir : $v(x) = e^x$.

$A = \int_0^1 u(x) v'(x) dx$, où les fonctions u , v sont dérivables et u' , v' sont continues sur $[0; 1]$, donc, en intégrant par parties :

$$A = [x^2 e^x]_0^1 - \int_0^1 2x e^x dx = e - 2 \int_0^1 x e^x dx.$$

Calculons maintenant l'intégrale $\int_0^1 x e^x dx$ en posant :

$$f(x) = x, f'(x) = 1,$$

$$g'(x) = e^x, g(x) = e^x,$$

$\int_0^1 x e^x dx = \int_0^1 f(x) g'(x) dx$, et les fonctions f , g sont dérivables et f' , g' sont continues sur $[0; 1]$, donc :

$$\begin{aligned} \int_0^1 x e^x dx &= [x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - [e^x]_0^1 \\ &= e - e + 1 = 1. \end{aligned}$$

Finalement : $A = e - 2$.

```
fnInt(X^2e^(X),X,
0,1)
.7182818285
e^(1)-2
.7182818285
```

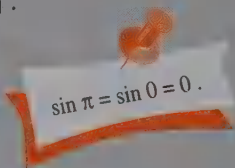
$$\bullet B = \int_0^{\pi} e^x \sin x \, dx .$$

En posant : $u(x) = \sin x$, $u'(x) = \cos x$,
 $v'(x) = e^x$, $v(x) = e^x$.

les fonctions u , v , u' , v' sont continues sur $[0; \pi]$.

Une intégration par parties donne alors :

$$B = [e^x \sin x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} e^x \cos x \, dx = - \int_0^{\pi} e^x \cos x \, dx .$$



Posons maintenant :

$$u(x) = \cos x, \quad u'(x) = -\sin x, \quad v'(x) = e^x, \quad v(x) = e^x .$$

Les fonctions u , v , u' , v' sont continues sur $[0; \pi]$ et une nouvelle intégration par parties conduit à :

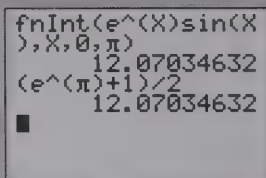
$$\int_0^{\pi} e^x \cos x \, dx = [e^x \cos x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (-e^x \sin x) \, dx = -e^{\pi} - 1 + \int_0^{\pi} e^x \sin x \, dx .$$

En revenant à la définition de B , on peut écrire :

$$B = e^{\pi} + 1 - B ,$$

d'où :

$$B = \frac{1}{2} (e^{\pi} + 1) .$$



19 Soit x un réel strictement positif.

La fonction \ln étant continue sur \mathbb{R}^* , la fonction \ln^3 est continue sur tout segment d'extrémités x et x^2 ; cela prouve que l'écriture $\int_x^{x^2} \ln^3 t \, dt$ a bien un sens.

D'autre part, l'ordre dans lequel sont rangés les réels positifs x et x^2 dépend de la position de x par rapport à 1; nous sommes amenés à distinguer les deux cas : $x \leq 1$, $x \geq 1$.

• Si $0 < x \leq 1$, alors $x^2 \leq x$, et :

$$\text{pour tout } t \text{ de } [x^2; x], \ln^3 t \leq 0 \\ \text{(car } \ln \leq 0 \text{ sur }]0; 1] \text{ et } 0 < x^2 \leq x \leq 1),$$

donc :

$$\int_{x^2}^x \ln^3 t \, dt \leq 0 ,$$

d'où :

$$\int_x^{x^2} \ln^3 t \, dt \geq 0 .$$

• Si $x \geq 1$, alors $x \leq x^2$, et :

$$\text{pour tout } t \text{ de } [x; x^2], \ln^3 t \geq 0 \\ (\text{car } \ln \geq 0 \text{ sur } [1; +\infty[\text{ et } 1 \leq x \leq x^2),$$

donc :

$$\int_x^{x^2} \ln^3 t \, dt \geq 0.$$

Finalement, on a démontré :

$$\text{pour tout } x \text{ de }]0; +\infty[, \int_x^{x^2} \ln^3 t \, dt \geq 0.$$

20 $F : x \mapsto \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}} \, dt.$

1° La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}}$ est définie et continue sur \mathbb{R} , donc F est définie sur \mathbb{R} .

2° a. Pour tout réel t positif, on a :

$$0 < 1 + 4t^2 \leq (1 + 2t)^2,$$

donc : $0 < \sqrt{1 + 4t^2} \leq 1 + 2t,$

d'où : $\frac{1}{\sqrt{1 + 4t^2}} \geq \frac{1}{1 + 2t}.$

$$(1 + 2t)^2 = 1 + 4t^2 + 4t.$$

Des réels strictement positifs sont rangés dans l'ordre contraire de leurs inverses.

b. D'après la propriété de positivité de l'intégrale, on en déduit, pour tout réel x positif :

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}} \, dt \geq \int_0^x \frac{1}{1+2t} \, dt,$$

or : $\int_0^x \frac{1}{1+2t} \, dt = \left[\frac{1}{2} \ln(1+2t) \right]_0^x = \frac{1}{2} \ln(1+2x),$

donc : $F(x) \geq \frac{1}{2} \ln(1+2x).$

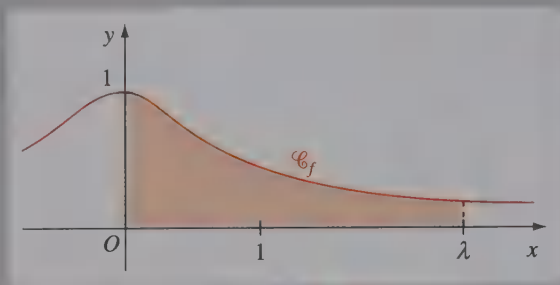
De plus : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1+2x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln X = +\infty,$

donc, d'après le théorème de composition des limites :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+2x) = +\infty.$$

On a ainsi établi que F est minorée sur $[0 ; +\infty[$ par une fonction de limite $+\infty$ en $+\infty$, ce qui implique :

F admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$.



$$f: t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+4t^2}},$$

pour tout réel λ positif, $F(\lambda)$ est l'aire de la surface limitée par \mathcal{C}_f , (Ox) , (Oy) et la droite d'équation : $x = \lambda$.

$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} F(\lambda) = +\infty$, donc l'aire de la surface limitée par \mathcal{C}_f , (Ox) , (Oy) est infinie.

21 $F: x \mapsto \int_0^x e^{-t^2} dt.$

1° La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue sur \mathbb{R} , donc F est la primitive sur \mathbb{R} de $t \mapsto e^{-t^2}$ qui s'annule en 0 ; on en déduit que F est dérivable sur \mathbb{R} et, pour tout réel x :

$$F'(x) = e^{-x^2},$$

donc :

$$F'(x) > 0,$$

ce qui prouve que F est strictement croissante sur \mathbb{R} .

2° a. • Pour tout t de $[1 ; +\infty[$:

$$t \leq t^2,$$

donc :

$$-t^2 \leq -t,$$

ce qui implique, la fonction exponentielle étant croissante sur \mathbb{R} :

$$e^{-t^2} \leq e^{-t}.$$

• D'après la relation de Chasles, pour tout réel x :

$$F(x) = \int_0^1 e^{-t^2} dt + \int_1^x e^{-t^2} dt = F(1) + \int_1^x e^{-t^2} dt ;$$

de plus : pour tout t de $[1; +\infty[$, $e^{-t^2} \leq e^{-t}$,
 donc, pour tout x de $[1; +\infty[$, les bornes de l'intégrale étant rangées dans
 l'ordre croissant :

$$\int_1^x e^{-t^2} dt \leq \int_1^x e^{-t} dt.$$

On en déduit :

$$\text{pour tout } x \text{ de } [1; +\infty[, F(x) \leq F(1) + \int_1^x e^{-t} dt.$$

b. Pour tout réel x :

$$\int_1^x e^{-t} dt = [-e^{-t}]_1^x = -e^{-x} + e^{-1} = \frac{1}{e} - e^{-x} \text{ et } e^{-x} > 0,$$

donc :

$$\int_1^x e^{-t} dt < \frac{1}{e}.$$

La question 2° a. conduit alors à écrire :

pour tout x de $[1; +\infty[$, $F(x) < F(1) + \frac{1}{e}$.

ce qui prouve :

F est majorée sur $[1; +\infty[$.

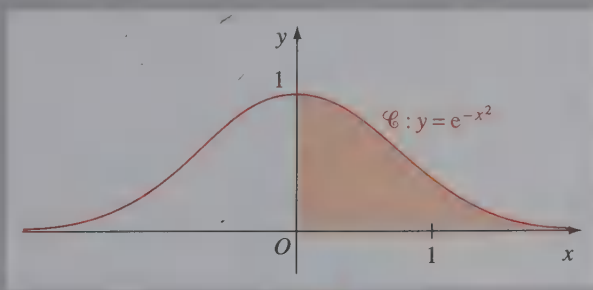
F étant de plus croissante sur \mathbb{R} , elle est majorée sur \mathbb{R} .

3° Par analogie avec le théorème :

toute suite croissante et majorée converge,

le fait que F soit croissante et majorée sur $[1; +\infty[$ invite à conclure :

F admet une limite réelle en $+\infty$.



La limite de F en $+\infty$, que l'on note : $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$,
 est l'aire de la surface non bornée, représentée en couleur.
 On peut démontrer : $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

$$22 \quad u_n = \int_n^{n+1} e^{\frac{t}{n}} dt.$$

• Pour tout entier naturel n non nul :

$$u_n = \left[n e^{\frac{t}{n}} \right]_n^{n+1} = n \left(e^{\frac{n+1}{n}} - e^1 \right) = n \left(e^{1+\frac{1}{n}} - e \right) = n \left(e \times e^{\frac{1}{n}} - e \right),$$

donc :

$$u_n = n e \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 \right).$$

• On en déduit :

$$\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}^*, u_n = e \times \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}},$$

$$\text{de plus : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ et } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1, \text{ donc : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}} - 1}{\frac{1}{n}} = 1,$$

ce qui permet de conclure :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = e.$$

$$23 \quad I_n = \int_0^1 t^n e^t dt.$$

Pour tout n de \mathbb{N} , $t \mapsto t^n$ est continue sur \mathbb{R} , donc sur $[0; 1]$, ce qui prouve que la suite (I_n) est bien définie sur \mathbb{N} .

1° Soit n un entier naturel non nul.

En posant, pour tout t de $[0; 1]$:

$$\begin{aligned} u(t) &= t^n, & v'(t) &= e^t, \\ u'(t) &= n t^{n-1}, & v(t) &= e^t, \end{aligned}$$

les conditions d'application d'une intégration par parties sont satisfaites (u et v sont dérivables et à dérivées continues sur $[0; 1]$), et l'on obtient :

$$\int_0^1 t^n e^t dt = [t^n e^t]_0^1 - \int_0^1 n t^{n-1} e^t dt = e - n \int_0^1 t^{n-1} e^t dt,$$

c'est-à-dire :

$$I_n = e - n I_{n-1}.$$

2° • On a : $I_0 = \int_0^1 e^t dt = [e^t]_0^1 = e - 1.$

• À l'aide de la relation de récurrence établie à la question 1°, on obtient successivement :

$$I_1 = e - 1 \times I_0 = e - (e - 1) = 1,$$

$$I_2 = e - 2 \times I_1 = e - 2,$$

$$I_3 = e - 3 \times I_2 = e - 3(e - 2) = 6 - 2e.$$

```
fnInt(e^(X),X,0,
1)
1.718281828
e^(1)
2.718281828
■
```

```
fnInt(Xe^(X),X,0
,1)
fnInt(X^2e^(X),X,
0,1)
.7182818285
■
```

```
fnInt(X^3e^(X),X
,0,1)
.5634363431
6-2e^(1)
.5634363431
■
```

3° Pour tout entier naturel n :

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 t^{n+1} e^t dt - \int_0^1 t^n e^t dt = \int_0^1 (t^{n+1} e^t - t^n e^t) dt,$$

donc :

$$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 (t-1) t^n e^t dt;$$

de plus, pour tout t de $[0; 1]$:

$$t-1 \leq 0, \quad t^n \geq 0 \quad \text{et} \quad e^t > 0,$$

donc :

$$(t-1) t^n e^t \leq 0,$$

ce qui implique, les bornes de l'intégrale étant rangées dans l'ordre croissant :

$$\int_0^1 (t-1) t^n e^t dt \leq 0,$$

c'est-à-dire :

$$I_{n+1} - I_n \leq 0.$$

On a ainsi démontré que **la suite (I_n) est décroissante.**

4° Soit n un entier naturel.

• On a :

$$\int_0^1 t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 = \frac{1}{n+1}.$$

• Pour tout t de $[0; 1]$:

$$0 \leq t^n \quad \text{et} \quad 1 \leq e^t \leq e,$$

donc :

$$0 \leq t^n e^t \leq e \times t^n,$$

ce qui implique, les bornes de l'intégrale étant rangées dans l'ordre croissant :

$$0 \leq \int_0^1 t^n e^t dt \leq \int_0^1 e \times t^n dt,$$

autrement dit :

$$0 \leq \int_0^1 t^n e^t dt \leq \frac{e}{n+1}$$

Finalement, on a établi :

$$\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, \quad 0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1},$$

et on sait : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, donc, d'après le théorème des gendarmes :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$

$$24 \quad A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos^2 x \, dx, \quad B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^2 x \, dx.$$

Notons que les fonctions $x \mapsto x \cos^2 x$ et $x \mapsto x \sin^2 x$ sont continues sur \mathbb{R} , donc sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$: les intégrales A et B existent bien.

1° Par linéarité de l'intégrale :

$$A + B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x \cos^2 x + x \sin^2 x) \, dx,$$

$$\text{donc :} \quad A + B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x (\cos^2 x + \sin^2 x) \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \, dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}},$$

$$\text{et finalement :} \quad A + B = \frac{\pi^2}{8}.$$

$$2^\circ \text{ De même :} \quad A - B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x \cos^2 x - x \sin^2 x) \, dx,$$

$$\text{donc :} \quad A - B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x (\cos^2 x - \sin^2 x) \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 2x \, dx.$$

En posant, pour tout x de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$:

$$u(x) = x, \quad v'(x) = \cos 2x,$$

$$u'(x) = 1, \quad v(x) = \frac{1}{2} \sin 2x,$$

les conditions d'application d'une intégration par parties sont satisfaites (u et v sont dérivables et à dérivées continues sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$), et l'on obtient :

$$A - B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(x) v'(x) \, dx = [u(x) v(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u'(x) v(x) \, dx,$$

$$\text{soit :} \quad A - B = \left[\frac{1}{2} x \sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \sin 2x \, dx = \left[\frac{1}{4} \cos 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}},$$

$$\text{donc :} \quad A - B = -\frac{1}{2}.$$

3° Des égalités :

$$\begin{cases} A + B = \frac{\pi^2}{8} \\ A - B = -\frac{1}{2}, \end{cases}$$

on déduit :

$$A = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{4}$$

et

$$B = \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{4}.$$

```
fnInt(Xcos(X)^2,X
,0,pi/2)
.3668502751
pi^2/16-1/4
.3668502751
```

```
fnInt(Xsin(X)^2,X
,0,pi/2)
.8668502751
pi^2/16+1/4
.8668502751
```

25 $f(x) = e^{-x} \sin x$.

1° a. • On obtient successivement, pour tout réel x :

- $f'(x) = -e^{-x} \sin x + e^{-x} \cos x$
 $= e^{-x} (-\sin x + \cos x)$;
- $f''(x) = -e^{-x} (-\sin x + \cos x) + e^{-x} (-\cos x - \sin x)$
 $= e^{-x} (\sin x - \cos x - \cos x - \sin x)$
 $= -2e^{-x} \cos x$;
- $f'''(x) = 2e^{-x} \cos x - 2e^{-x} (-\sin x)$
 $= 2e^{-x} (\cos x + \sin x)$;
- $f^{(4)}(x) = -2e^{-x} (\cos x + \sin x) + 2e^{-x} (-\sin x + \cos x)$
 $= 2e^{-x} (-\cos x - \sin x - \sin x + \cos x)$
 $= -4e^{-x} \sin x$.

f est indéfiniment dérivable sur \mathbb{R} , c'est-à-dire admet des dérivées à tout ordre, définies sur \mathbb{R} .

b. On en déduit :

$$\text{pour tout réel } x, f^{(4)}(x) = -4f(x),$$

autrement dit : $(f''')' = -4f$,

ce qui équivaut à : $\left(-\frac{1}{4}f'''\right)' = f$.

Cette dernière égalité prouve que $-\frac{1}{4}f'''$ est une primitive de f sur \mathbb{R} , ce qui permet de conclure :

la fonction $F : x \mapsto -\frac{1}{2}e^{-x}(\cos x + \sin x)$

est une primitive de f sur \mathbb{R} .

2° $I_n = \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} f(x) dx$.

a. • Par définition de la suite (I_n) : $I_0 = \int_0^\pi f(x) dx$,

d'autre part, F est une primitive de f sur \mathbb{R} , donc :

$$I_0 = [F(x)]_0^\pi = F(\pi) - F(0) = -\frac{1}{2} e^{-\pi} (\cos \pi + \sin \pi) + \frac{1}{2} (\cos 0 + \sin 0),$$

or : $\cos \pi = -1$, $\cos 0 = 1$

et $\sin \pi = \sin 0 = 0$,

d'où :
$$I_0 = \frac{1}{2} e^{-\pi} + \frac{1}{2},$$

et finalement :
$$I_0 = \frac{1}{2} (e^{-\pi} + 1).$$

```
fnInt(e^(-x)sin(x),x,0,pi)
.5216069591
(e^(-pi)+1)/2
.5216069591
```

• $I_0 = \int_0^\pi f(x) dx = \int_0^\pi e^{-x} \sin x dx$ et :

– la fonction f est continue sur \mathbb{R} , donc sur $[0; \pi]$;

– de plus :

pour tout réel x , $e^{-x} > 0$,

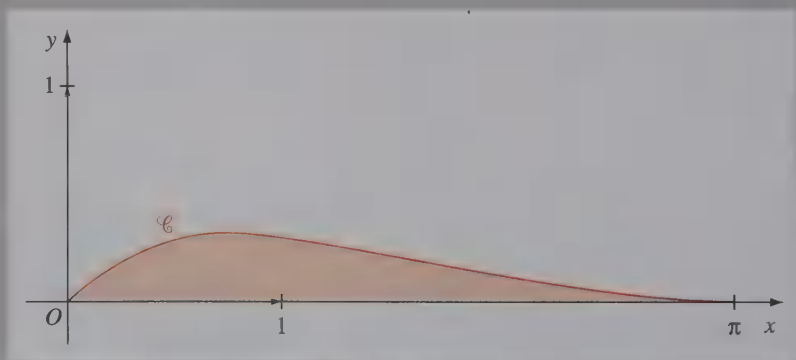
pour tout x de $[0; \pi]$, $\sin x \geq 0$,

donc : pour tout x de $[0; \pi]$, $e^{-x} \sin x \geq 0$,

autrement dit, f est positive sur $[0; \pi]$.

On en déduit :

I_0 est l'aire (en unités d'aire) du domaine plan limité par \mathcal{C} , la droite des abscisses et les droites verticales d'équations $x = 0$ et $x = \pi$.



b. Pour tout n de \mathbb{N} :

$$I_n = \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} f(x) dx = F((2n+1)\pi) - F(2n\pi),$$

et :

$$\begin{aligned} \bullet F((2n+1)\pi) &= -\frac{1}{2} e^{-(2n+1)\pi} (\cos((2n+1)\pi) + \sin((2n+1)\pi)) \\ &= -\frac{1}{2} e^{-2n\pi - \pi} (\cos(\pi + 2n\pi) + \sin(\pi + 2n\pi)), \end{aligned}$$

d'où, les fonctions \cos et \sin étant 2π -périodiques :

$$\begin{aligned} F((2n+1)\pi) &= -\frac{1}{2} e^{-2n\pi} \times e^{-\pi} (\cos \pi + \sin \pi) \\ &= \frac{1}{2} e^{-2n\pi} \times e^{-\pi}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet F(2n\pi) &= -\frac{1}{2} e^{-2n\pi} (\cos(2n\pi) + \sin(2n\pi)) \\ &= -\frac{1}{2} e^{-2n\pi} (\cos 0 + \sin 0) \\ &= -\frac{1}{2} e^{-2n\pi}, \end{aligned}$$

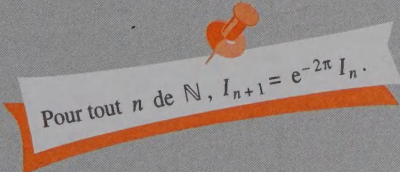
donc :
$$I_n = \frac{1}{2} e^{-2n\pi} \times e^{-\pi} + \frac{1}{2} e^{-2n\pi},$$

et finalement :
$$I_n = \frac{e^{-2n\pi}}{2} (e^{-\pi} + 1).$$

c. • D'après la question précédente, on peut écrire :

$$\text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, I_n = (e^{-2\pi})^n \times \frac{e^{-\pi} + 1}{2} = (e^{-2\pi})^n I_0.$$

ce qui prouve que (I_n) est une suite géométrique de raison $e^{-2\pi}$.



Pour tout n de \mathbb{N} , $I_{n+1} = e^{-2\pi} I_n$.

• $-2\pi < 0$, donc : $0 < e^{-2\pi} < 1$; sa raison étant strictement comprise entre -1 et 1 , la suite géométrique (I_n) converge vers 0 , c'est-à-dire :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$

Imprimé en France par Hérissé à Évreux - n° 94117
Dépôt légal : 30233-02/03 - Collection 21 - Édition n° 02
16/8558/5

La collection **EXERCICES RÉSOLUS**, conforme aux nouveaux programmes du lycée, s'adresse à tous ceux qui désirent progresser, voire exceller, grâce à un entraînement intensif à coups d'exercices aussi variés par leurs sujets que par leurs niveaux de difficulté.

Chaque titre vous propose :

- d'indispensables **rappels de cours** ;
- des **batteries d'exercices** minutés et de difficulté clairement signalée, conçues pour vous permettre d'acquérir aisance et rapidité ;
- leurs **corrigés entièrement rédigés**, assortis de nombreux conseils et explications complémentaires ;
- **12 sujets du Bac et leurs corrigés détaillés**, pour terminer vos révisions en vous plaçant dans les conditions de l'épreuve du bac.

DANS LA MÊME COLLECTION

Mathématiques 2nde

Chimie 1^{re} S

Physique-Chimie 2nde

Mathématiques Term S (2 tomes)

Mathématiques 1^{re} S (2 tomes)

Mathématiques Term ES

Mathématiques 1^{re} ES

Physique Term S

Physique 1^{re} S

Chimie Term S

■ Nous vous proposons, par ailleurs, dans la collection **FAIRE LE POINT**, des ouvrages qui permettent d'acquérir les savoir-faire essentiels du programme.

■ Vous y trouverez des modèles illustrant les principaux mécanismes de résolution des problèmes, ainsi que de nombreuses applications pour votre évaluation.



KO-552-331

MATHÉMATIQUES T1

592

PRIX ÉDITEUR

10,95 EUR



9 782011 685582

71,83 F

13/10/03 LYCEE - BAC

www.hachette-education.com



HACHETTE
Éducation