

# 2BACSPF & 2BACSVTF

Tome 1

07 Cours bien détaillés

07 Résumés bien précis

07 Séries d'exercices corrigées

03 Devoirs libres corrigés

06 Devoirs surveillés

Extraits du bac

Examen blanc corrigé

2025/2026

## Table des matières

<b>1 : Continuité</b>	
Cours 1.....	03
Résumé 1.....	16
Série 1.....	18
<b>2 : Dérivation</b>	
Cours 2.....	20
Résumé 2.....	27
Série 2.....	29
Devoir Libre 1.....	31
Devoir surveillé 1-A.....	32
Devoir surveillé 1-B.....	33
<b>3 : Etude de fonctions</b>	
Cours 3.....	34
Résumé 3.....	42
Série 3.....	43
<b>4 : Suites numériques</b>	
Cours 4.....	46
Résumé 4.....	52
Série 4.....	53
<b>5 : Primitives</b>	
Cours 5.....	55
Résumé 5.....	63
Série 5.....	64
Devoir Libre 2.....	65
Devoir surveillé 2-A.....	66
Devoir surveillé 2-B.....	67
<b>6 : Fonctions logarithmes</b>	
Cours 6.....	68
Résumé 6.....	72
Série 6.....	73
<b>7 : Les nombres complexes</b>	
Exemples.....	77
Résumé 7.....	78
Série 7.....	80
Devoir Libre 3.....	84
Devoir surveillé 3-A.....	85
Devoir surveillé 3-B.....	86
<b>Examens blancs corrigés : .....</b>	<b>87</b>

Corrections des séries et les devoirs libres :

[https://drive.google.com/file/d/1briEonJPH\\_eO\\_0t7oA8h3tY5zFEp0LVC/view?usp=sharing](https://drive.google.com/file/d/1briEonJPH_eO_0t7oA8h3tY5zFEp0LVC/view?usp=sharing)

# 01

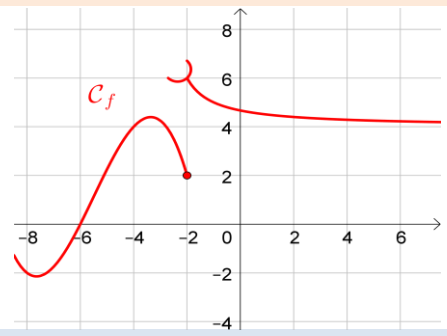
# Continuité



# 1) La continuité en un point - La continuité sur un intervalle

## Activité 1 :

Considérons la fonction  $f$  dont la représentation graphique ( $C_f$ ) est le suivant :



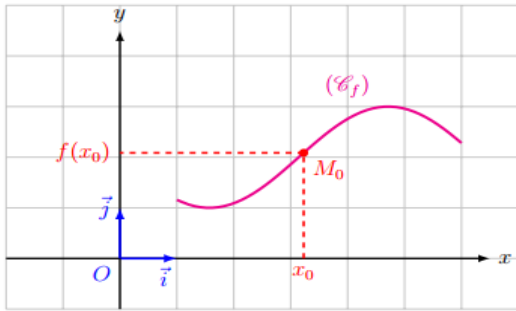
- 1) Déterminer graphiquement :  $f(-6)$  et  $\lim_{x \rightarrow -6} f(x)$ . Que peut-on déduire ?
- 2) Déterminer graphiquement :  $f(-2)$ ,  $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$ .
- 3) Que peut-on dire sur ( $C_f$ ) au point  $x_0 = -2$  ?

## Définition 1 :

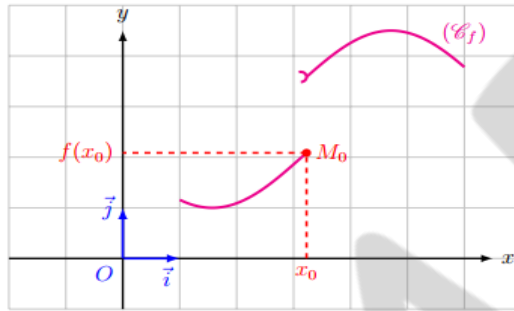
Soit  $f$  une fonction numérique définie sur un intervalle ouvert  $I$  et soit  $x_0$  un élément de  $I$ .

$f$  est **continue** en  $x_0$  si et seulement si  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

## Interprétation graphique



$f$  est continue en  $x_0$



$f$  est discontinue en  $x_0$



## Exemples 1

- 1) Montrons que la fonction  $f$  définie par : 
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}; x \neq 1 \\ f(1) = 2 \end{cases}$$
 est continue en 1.

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2 = f(1)$$

Par suite la fonction  $f$  est continue en 1.

- 2) Montrons que la fonction  $f$  définie par : 
$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sin(2x)}{x} \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$
 est discontinue en 0.

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 2 \times \left( \frac{\sin(2x)}{2x} \right) = 2 \times 1 = 2 \neq f(0)$$

Par suite la fonction  $f$  est discontinue en 0.

## Application 1

Etudier la continuité de  $f$  au point  $x_0$  dans les cas suivants :

- 1)  $x_0 = 1$  ; 
$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}; x \neq 1 \\ f(1) = 3 \end{cases}$$
 ;
- 2)  $x_0 = 2$  ; 
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 2}; x \neq 2 \\ f(2) = 12 \end{cases}$$

## Exercice 1

1) Etudier la continuité de  $f$  au point  $x_0$  dans les cas suivants :

- a)  $x_0 = -1$  ; 
$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{2x+3} - 1}{x^2 - 1}; x \neq -1 \\ f(-1) = 5 \end{cases}$$
 ;
- b)  $x_0 = 0$  ; 
$$\begin{cases} f(x) = \frac{x + \tan(2x)}{\sin(3x)}; x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

- 2) Déterminer la valeur de  $a$  pour que la fonction  $f$  définie par 
$$\begin{cases} f(x) = \frac{4x^2 - 3x - 27}{x - 3}; x \neq 3 \\ f(3) = a \end{cases}$$
 soit continue en 3.

## Définition 2 : La continuité à droite - la continuité à gauche en un point :

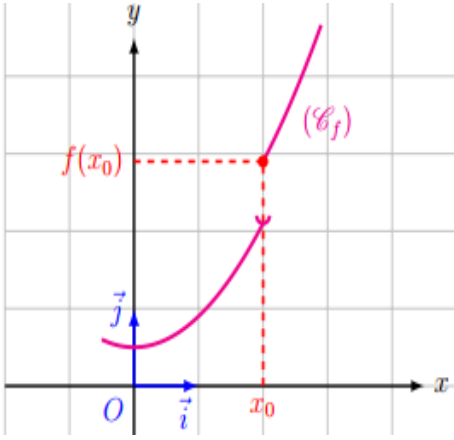
• Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle de type  $[x_0; x_0 + \alpha[$  avec  $\alpha > 0$ .

On dit que  $f$  est **continue à droite** en  $x_0$  si  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$ .

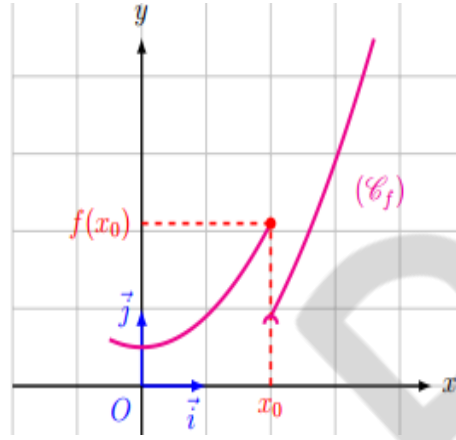
• Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle de type  $]x_0 - \alpha; x_0]$ , avec  $\alpha > 0$

On dit que  $f$  est **continue à gauche** en  $x_0$  si  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$

### Interprétation graphique



$f$  est continue à droite en  $x_0$



$f$  est continue à gauche en  $x_0$

### Exemples 2

Étudions la continuité de la fonction  $f$  définie par  $\begin{cases} f(x) = \frac{x-2}{x+1} & ; x > 0 \\ f(x) = 3-x^2 & ; x \leq 0 \end{cases}$  à gauche et à droite en  $0$ .

$$\text{On a : } f(0) = 3 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x-2}{x+1} = \frac{0-2}{0+1} = -2$$

Puisque  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \neq f(0)$ , alors la fonction  $f$  n'est pas continue à droite en  $0$ .

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 3 - x^2 = 3 - 0 = 3 = f(0)$$

Puisque :  $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = f(0)$ , alors la fonction  $f$  est continue à gauche en  $0$ .

### Propriété 1 :

La fonction  $f$  est continue en  $x_0$  si et seulement si  $f$  est continue à droite et à gauche en  $x_0$ .

En d'autres termes :  $f$  est continue en  $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$

### Application 2

On considère  $f$  la fonction définie par  $\begin{cases} f(x) = x-1 & ; x \geq 1 \\ f(x) = (x-1)^2 & ; x < 1 \end{cases}$

1) Étudier la continuité de  $f$  à droite et gauche en  $1$ .

2)  $f$  est-elle continue en  $1$  ?

### Exercice 2

1) Soit  $f$  la fonction définie par  $\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x+4}-2}{x} & ; x > 0 \\ f(x) = \frac{\cos(x) + \sin(x) - 1}{4x} & ; x < 0 \\ f(0) = \frac{1}{4} \end{cases}$

a) Étudier la continuité de  $f$  à droite et gauche en  $1$ .

b)  $f$  est-elle continue en  $1$  ?



2) Déterminer la valeur de  $a$  et  $b$  pour que  $g$  définie par 
$$\begin{cases} g(x) = \frac{x^2 + x - a}{x - 1} & \text{si } x < 1 \\ g(x) = x^2 + b & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$
 soit continue en 1.

3) Etudier la continuité de la fonction  $h$  définie par : 
$$\begin{cases} h(x) = \frac{\sqrt{1 + \sin(x)} - 1}{x} & \text{si } x < 0 \\ h(x) = \sqrt{1 + x} - \frac{1}{2} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$
 en 0.

### Définition 3 : Continuité sur un intervalle :

Soit  $a$  et  $b$  deux réels tels que  $a < b$ .

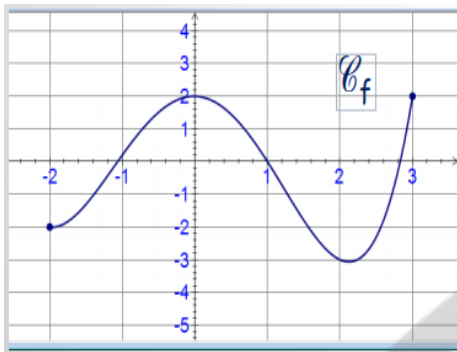
- On dit qu'une fonction  $f$  est continue sur l'intervalle ouvert  $]a; b[$ , si elle est continue en tout élément de cet intervalle.
- On dit qu'une fonction  $f$  est continue sur le segment  $[a; b]$ , si elle est continue sur l'intervalle  $]a; b[$  et continue à droite en  $a$  et à gauche en  $b$

### Remarque 1 :

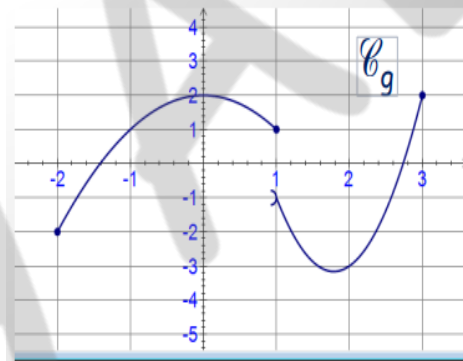
De façon analogue, on définit la continuité d'une fonction  $f$  sur les intervalles  $[a; b[$ ,  $]a; b]$ ,  $[a; +\infty[$  et  $]-\infty; a]$ .

### Exemple 3

La fonction  $f$  représentée ci-dessous est continue sur  $[-2; 3]$



La fonction  $g$  représentée ci-dessous n'est pas continue sur  $[-2; 3]$



### Propriété 2 :

- Les fonctions polynômes sont continues sur  $\mathbb{R}$ .
- Les fonctions rationnelles sont continues sur chaque intervalle inclus dans leur ensemble de définition.
- Les fonctions constantes sont continues sur  $\mathbb{R}$ .
- Les fonctions  $x \mapsto \sin(x)$ ,  $x \mapsto \cos(x)$  et  $x \mapsto |x|$  sont continues sur  $\mathbb{R}$ .
- La fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$ .
- La fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est continue sur  $]0; +\infty[$  et sur  $]-\infty; 0[$
- La fonction  $x \mapsto \tan(x)$  est continue sur chaque intervalle inclus dans son ensemble de définition.

### Exemple 4 :

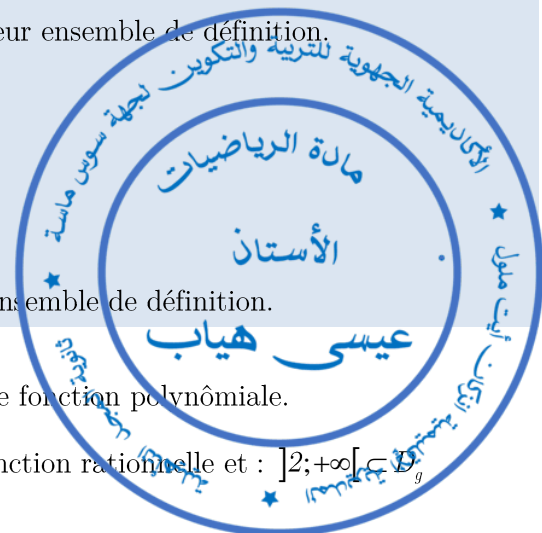
1) La fonction  $f: x \mapsto x^5 + x^3 + 4x^2 + 3$  est continue sur  $\mathbb{R}$  parce qu'elle est une fonction polynômiale.

2) La fonction  $g: x \mapsto \frac{4x^2 + 3}{x - 2}$  est continue sur  $]2; +\infty[$  parce que  $g$  est une fonction rationnelle et :  $]2; +\infty[ \subset D_g$

### Application 3 :

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par 
$$\begin{cases} f(x) = \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^2 - 1} & \text{si } x < -1 \\ f(x) = 5x^2 + x - 2 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

- Montrer que la fonction  $f$  est continue sur  $[-1; +\infty[$
- Montrer que la fonction  $f$  est continue sur  $]-\infty; -1[$
- Calculer  $f(-1)$  et montrer que  $f$  est continue à gauche en -1.
- En déduire que la fonction  $f$  est continue sur  $]-\infty; -1]$  et sur  $\mathbb{R}$



#### Définition 4 : Fonction partie entière.

La fonction qui à tout nombre réel  $x$  associé l'unique entier relatif  $p$  qui vérifie  $p \leq x < p+1$  est appelée **fonction partie entière**. L'image de  $x$  par cette fonction est notée  $E(x)$  ou  $[x]$ .

#### Exemples 5 :

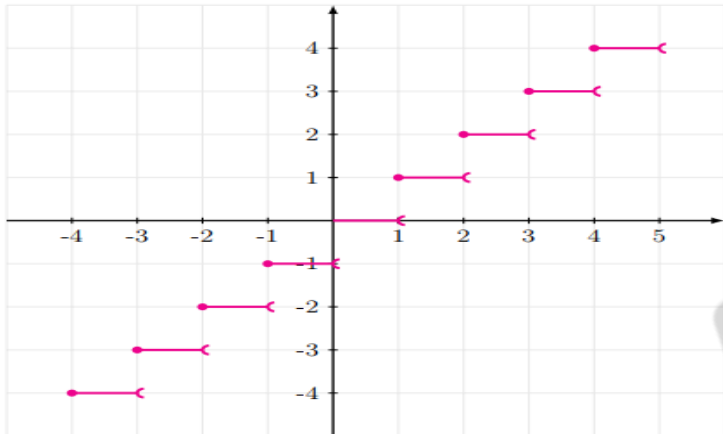
$$E(3,3)=3 ; E(0,5)=0 ; E(-7,99)=-8 ; E\left(\frac{9}{5}\right)=1 ; E(7)=7 ; E(\pi)=3 ; E(-0,23)=-1 ; E(\sqrt{2}+\sqrt{3})=3$$

#### Conséquences :

Pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  et pour tout  $p$  de  $\mathbb{Z}$ , on a :

- $E(x) = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$ .
- La fonction partie entière est continue à droite en  $p$  et discontinue à gauche en  $p$ .
- La fonction partie entière n'est pas continue en  $p$
- La fonction partie entière est continue sur l'intervalle  $[p; p+1[$ .

#### Courbe représentative de la fonction partie entière :



## 2) L'image d'un intervalle par une fonction continue

#### Définition 5 :

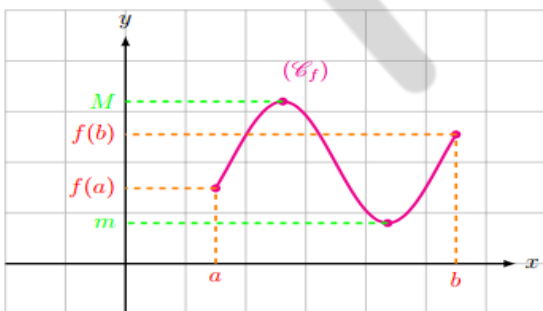
- L'image d'un intervalle  $I$  par une fonction  $f$  est l'ensemble des images de tous les nombres de  $I$  par  $f$  on la note par  $f(I)$ .
- $f(I) = \{f(x) / x \in I\}$

#### Propriété 3 : L'image d'un intervalle -L'image d'un segment

- L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.
- L'image d'un segment (intervalle fermé) par une fonction continue est un segment (intervalle fermé).

#### Remarque 2 :

Si  $f$  est une fonction continue sur un intervalle  $[a;b]$ , alors  $f([a;b]) = [m;M]$  où  $m$  est la valeur minimale de la fonction  $f$  sur l'un intervalle  $[a;b]$ , et  $M$  est la valeur maximale de la fonction  $f$  sur l'un intervalle  $[a;b]$



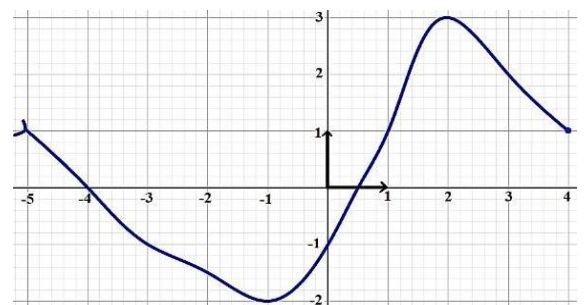
#### Exemple 6 :

Soit  $f$  une fonction numérique définie par la courbe ci-dessous :

à partir de la courbe de la fonction  $f$ , on déduit que :

$$f([-5;-1]) = [-2;1] ; f([-1;2]) = [-2;3] ;$$

$$f([2;4]) = [1;3] ; f([-5;4]) = [-2;3]$$



### Propriété 4 : Image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone :

Soit  $f$  une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle  $I$ .

L'intervalle $I$	$f(I)$	
	$f$ est strictement croissante	$f$ est strictement décroissante
$[a;b]$	$[f(a);f(b)]$	$[f(b);f(a)]$
$[a;b[$	$[f(a); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)[$	$] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x); f(a)]$
$]a;b]$	$] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x); f(b)]$	$[f(b); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)[$
$]a;b[$	$] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)[$	$] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)[$
$[a;+\infty[$	$[f(a); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[$	$] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); f(a)]$
$]a;+\infty[$	$] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[$	$] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)[$
$] -\infty; b]$	$] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); f(b)]$	$[f(b); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)[$
$] -\infty; b[$	$] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)[$	$] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)[$



### Exemple 7 :

Soit  $f$  une fonction continue et définie sur  $\mathbb{R}^*$  par le tableau de variations suivant :

$x$	$-\infty$	$-1$	$0$	$1$	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$-2$	$+\infty$	$2$	$+\infty$

• On a :  $f(]-\infty; -1]) = ] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); f(-1)]$  (Car la fonction  $f$  est strictement croissante sur l'intervalle  $]-\infty; -1]$ ).

C'est à dire  $f(]-\infty; -1]) = ]-\infty; -2]$

• Comme  $f$  est strictement décroissante sur l'intervalle  $]-1; 0[$ .

Alors  $f(]-1; 0[) = ] \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x); f(-1)[ = ]-\infty; -2[$

• Comme  $f$  est strictement décroissante sur l'intervalle  $]0; 1]$ .

Alors  $f(]0; 1]) = [f(1); \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)[ = [2; +\infty[$

• Comme  $f$  est strictement croissante sur l'intervalle  $]1; +\infty[$ .

Alors  $f(]1; +\infty[) = [f(1); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[ = [2; +\infty[$

### Application 4

Soit  $f$  la fonction numérique définie par :  $f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$

1) Déterminer  $D_f$  l'ensemble de définition de  $f$ .

2) Etudier la monotonie de  $f$  sur  $D_f$ .

3) Déterminer l'image des intervalles suivants  $I = ]-\infty; -2]$  ;  $J = ]-\infty; -1[$  ;  $K = ]-1; 3]$  ;  $L = [2; 4]$  ;  $M = ]-1; +\infty[$

### Exercice 3

Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x^3 - 3x + 1$ .

Déterminer l'image de chacun des intervalles suivants par la fonction  $f$  :  $I = ]-\infty; -1]$  ;  $J = ]0; 1[$  ;  $K = ]0; +\infty[$

### Remarque 3 :

Pour toute fonction numérique  $f$  définie sur un intervalle  $I$  on a  $f(I) \subset \mathbb{R}$

### 3) Opérations sur les fonctions continues

#### Propriété 5 :

Soient  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $u$  et  $v$  deux fonctions définies sur  $I$ .

1) Si  $u$  et  $v$  sont continues sur  $I$ .

Alors les fonctions  $u \pm v$ ,  $u \times v$ ,  $\alpha \times u$ ,  $|u|$  et  $u^n$  sont continues sur  $I$ . ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ )

2) Si  $u$  est continue sur  $I$  et  $(\forall x \in I) u(x) \neq 0$ , alors la fonction  $\frac{1}{u}$  est continue sur  $I$ .

3) Si  $u$  et  $v$  sont continues sur  $I$  et  $(\forall x \in I) v(x) \neq 0$ , alors la fonction  $\frac{u}{v}$  est continue sur  $I$ .

4) Si  $u$  est continue sur  $I$  et  $(\forall x \in I) u(x) \geq 0$ , alors la fonction  $x \mapsto \sqrt{u(x)}$  est continue sur  $I$ .

#### Exemple 8 :

1) La fonction  $f: x \mapsto 4x^2 + 3 + \sin(x)$  est continue sur  $\mathbb{R}$  en tant que somme de deux fonctions continue sur  $\mathbb{R}$  qui sont :  $x \mapsto 4x^2 + 3$  et  $x \mapsto \sin(x)$

2) La fonction  $f: x \mapsto (x^2 + 2x)\sqrt{x}$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$  en tant que produit de deux fonctions continue sur  $\mathbb{R}^+$  qui sont :  $x \mapsto x^2 + 2x$  et  $x \mapsto \sqrt{x}$

3) La fonction  $f: x \mapsto \frac{\cos(x)}{x^2 + 1}$  est continue sur  $\mathbb{R}$ . En effet :

✓ la fonction  $x \mapsto \cos(x)$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

✓ la fonction  $x \mapsto x^2 + 1$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$ .

4) La fonction  $f: x \mapsto \sqrt{x^2 + 2}$  est continue sur  $\mathbb{R}$ . En effet :

✓ la fonction  $x \mapsto x^2 + 2$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et  $\forall x \in \mathbb{R}: x^2 + 2 > 0$ .

#### Application 5 :

Montrer que  $f$  est continue sur  $I$  dans les cas suivants :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+3}}{x^2+1}; I = [-3; +\infty[ \quad ; \quad f(x) = \frac{4x+1}{x^2-1} \sin(x); I = ]1; +\infty[$$

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2+2x+1}; I = [0; 3] \quad ; \quad f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}; I = \mathbb{R}$$

#### Exercice 4

1) Montrer que la fonction  $f$  définie par  $\begin{cases} f(x) = \frac{3x^2 + 2x - 1}{x^2 - 1} & \text{si } x < -1 \\ f(x) = 5x^2 + x - 2 & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$  est continue sur  $\mathbb{R}$

2) Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $] -4; +\infty[$  par  $\begin{cases} f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+4} - 2} & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = 4 \end{cases}$

Etudier la continuité de la fonction  $f$  sur  $] -4; +\infty[$ .

#### Propriété 6 : Continuité du composé de deux fonctions

Soient  $u$  et  $v$  deux fonctions et  $I$  un intervalle donné.

1) Si  $u$  est continue en  $l$  et  $v$  est continue en  $u(l)$  alors la fonction  $f = v \circ u$  est continue en  $l$

2) Si  $u$  est continue sur l'intervalle  $I$  et si  $v$  est continue sur un intervalle  $J$  et  $u(I) \subset J$ .

Alors la fonction  $f = v \circ u$  est continue sur l'intervalle  $I$ .

#### Exemple 9 :

1)  $f: x \mapsto \cos(x^2 + 3x - 2)$  est continue sur  $\mathbb{R}$ . Car  $f = v \circ u$  et :

- La fonction  $u: x \mapsto x^2 + 3x - 2$  est continue sur  $\mathbb{R}$
- $u(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$
- La fonction  $v: x \mapsto \cos(x)$  est continue sur  $\mathbb{R}$



2)  $f: x \mapsto \sqrt{\frac{x}{1+\sin^2(x)}}$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$ . Car  $f = vou$  et :

- La fonction  $u: x \mapsto \frac{x}{1+\sin^2(x)}$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$
- $f(\mathbb{R}^+) \subset \mathbb{R}^+$
- La fonction  $v: x \mapsto \sqrt{x}$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$

### Application 6

Déterminer les fonctions  $u$  et  $v$  tel que  $f = vou$  puis montrer que  $f$  est continue sur  $I$  dans les cas suivants :

- 1)  $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$  ;  $I = ]-\infty; -2]$  ; 2)  $f(x) = \sqrt{\frac{3x+1}{x-1}}$  ;  $I = ]1; +\infty[$  ;  
 3)  $f(x) = \sin(2x^2 + 1)$  ;  $I = \mathbb{R}$  ; 4)  $f(x) = \cos(\sqrt{x^2 + x + 1})$  ;  $I = \mathbb{R}$

### Propriété 7 :

Si  $\lim(u(x)) = l$  et  $v$  est continue en  $l$  alors  $\lim(vou(x)) = v(l)$ .

### Application 7

Calculer la limite :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{\pi x + 3}{2x - 7}\right)$

## 4) Théorème des valeurs intermédiaires

### Théorème des valeurs intermédiaires (T.V.I)

Soit  $f$  une fonction définie sur l'intervalle  $[a; b]$ .

#### Version 1

$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ est continue sur } [a; b] \\ k \text{ est compris entre } f(a) \text{ et } f(b) \end{array} \right. \Rightarrow$  Il existe au moins un réel  $c$  de l'intervalle  $[a; b]$  tel que  $f(c) = k$ .

#### Version 2

$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ est continue sur } [a; b] \\ k \text{ est compris entre } f(a) \text{ et } f(b) \end{array} \right. \Rightarrow$  L'équation  $f(x) = k$  admet au moins une solution dans l'intervalle  $[a; b]$

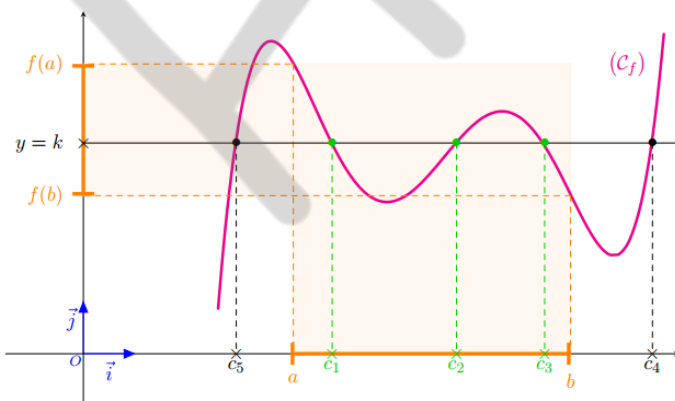
### Remarque 5 :

Si de plus  $f$  est strictement monotone sur  $[a; b]$ , alors cette solution est unique.

### Interprétation graphique :

Soit  $f$  une fonction définie sur l'intervalle  $[a; b]$  et  $k \in \mathbb{R}$

Si  $f$  est continue sur  $[a; b]$  et  $k$  est compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$



Alors la droite d'équation  $y = k$  et la courbe représentative de  $f$  sont nécessairement sécantes.

### Exemple 10 :

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = x^4 + x^2 + 4x$

Montrons que l'équation  $f(x) = 1$  admet au moins une solution dans l'intervalle  $[0; 1]$

La fonction  $f$  est bien continue sur  $\mathbb{R}$ , et en particulier sur  $[0; 1]$ , de plus  $f(0) < 1 < f(1)$  (car  $f(0) = 0$  et  $f(1) = 6$ )

Donc d'après le TVI l'équation  $f(x) = 1$  admet au moins une solution dans  $[0; 1]$ .



### Version 3 de T.V.I

Soit  $f$  une fonction définie sur l'intervalle  $[a;b]$

$\begin{cases} f \text{ est continue sur } [a;b] \\ f(a) \times f(b) < 0 \end{cases} \Rightarrow$  L'équation  $f(x)=0$  admet au moins une solution dans  $[a;b]$  (et dans  $]a;b[$ )

Si de plus  $f$  est strictement monotone sur  $[a;b]$ , alors cette solution est unique.

#### Exemple 11 :

Montrons que l'équation  $x^3 + x + 1 = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  tel que  $-1 < \alpha < 0$

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = x^3 + x + 1$ , on a :

- La fonction  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , en particulier sur  $[-1;0]$
- La fonction  $f$  est strictement croissante sur  $[-1;0]$ , en effet  $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$
- $f(0)f(-1) < 0$ , en effet :  $f(0) = 1 > 0$  et  $f(-1) = -1 < 0$

Donc d'après le T.V.I, l'équation  $x^3 + x + 1 = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  tel que  $-1 < \alpha < 0$ .

#### Application 8

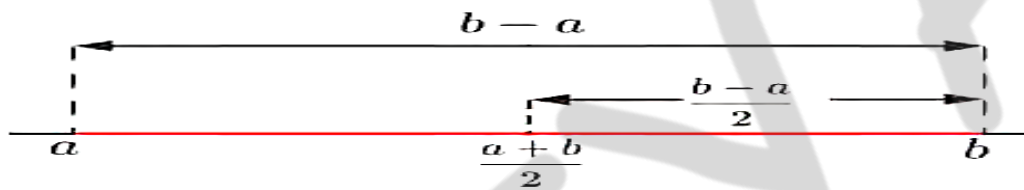
On considère la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 3$

- 1) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution sur l'intervalle  $[\frac{5}{2}; 3]$
- 2) Montrer que l'équation  $f(x) = 2$  admet une unique solution sur l'intervalle  $[1; 3]$

#### Méthode de dichotomie pour encadrer les solutions de l'équation $f(x) = 0$

**Rappel :** Centre et longueur d'un intervalle :

Soit  $I$  l'un des intervalles suivants :  $[a;b]$ ,  $[a;b[$ ,  $]a;b]$  et  $]a;b[$



- On appelle centre de l'intervalle  $I$  le nombre réel  $\frac{a+b}{2}$ .
- On appelle l'amplitude (ou la longueur) de l'intervalle  $I$  le nombre réel  $b-a$ .

#### Méthode de dichotomie :

Supposons que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution  $\alpha$  dans l'intervalle  $I$  ( $I = [a;b]$  ou  $[a;b[$  ou  $]a;b]$  ou  $]a;b[$ )

Pour déterminer un encadrement de  $\alpha$  avec une amplitude (précision) donnée, on suit les étapes suivantes :

On calcule le nombre  $c = \frac{a+b}{2}$  le centre de l'intervalle  $[a;b]$  et  $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$

- Si ( $f(a) < 0$  ;  $f(c) > 0$  ;  $f(b) > 0$ ) ou ( $f(a) > 0$  ;  $f(c) < 0$  ;  $f(b) < 0$ ) alors  $f(a) \times f(c) < 0$  donc  $\alpha \in ]a;c[$
- Si ( $f(a) < 0$  ;  $f(c) < 0$  ;  $f(b) > 0$ ) ou ( $f(a) > 0$  ;  $f(c) > 0$  ;  $f(b) < 0$ ) alors  $f(b) \times f(c) < 0$  donc  $\alpha \in ]c;b[$

On continue en testant le milieu du nouvel intervalle jusqu'à trouver l'amplitude (la précision) demandée.

#### Exemple 12 :

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x^3 - 6x^2 + 6$ .

- 1) Montrons que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  tel que  $-1 < \alpha < 0$  :

On a la fonction  $f$  est bien continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ , et en particulier sur  $[-1;0]$

Et on a  $f(0) = 6 > 0$  et  $f(-1) = -1 < 0$ , donc  $f(0) \times f(-1) < 0$

alors d'après TVI l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  tel que  $-1 < \alpha < 0$ .

- 2) Déterminons un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude  $0,25$  :

On a :  $-1 < \alpha < 0$ , cet encadrement est d'amplitude  $0 - (-1) = 1$ .

Le centre de l'intervalle  $[-1;0]$  est  $\frac{-1+0}{2} = -\frac{1}{2}$ , et on a :  $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - 6 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 6 = \frac{35}{8} > 0$



Comme  $f\left(-\frac{1}{2}\right) \times f(-1) < 0$  alors  $-1 < \alpha < -\frac{1}{2}$ , cet encadrement est d'amplitude  $\left(-\frac{1}{2}\right) - (-1) = 0,5$

Le centre de l'intervalle  $\left[-1; -\frac{1}{2}\right]$  est  $\frac{-\frac{1}{2} + (-1)}{2} = -\frac{3}{4}$ , et on a :  $f\left(-\frac{3}{4}\right) = \frac{141}{64} > 0$

Comme  $f(-1) \times f\left(-\frac{3}{4}\right) < 0$  alors  $-1 < \alpha < -\frac{3}{4}$ ,

Cet encadrement est d'amplitude  $\left(-\frac{3}{4}\right) - (-1) = \frac{1}{4} = 0,25$ , la précision voulue.

### Version 4 de T.V.I (cas général) : Théorème de la bijection

Si  $f$  est continue sur un intervalle  $I$ .

Alors pour tout réel  $k \in f(I)$  l'équation  $f(x) = k$  admet au moins une solution dans  $I$

Si de plus  $f$  est strictement monotone sur  $I$ , alors cette solution est unique.

#### Application 9

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = 2x^3 + 3x - 4$ .

- 1) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $\mathbb{R}$ .
- 2) Vérifier que :  $0 < \alpha < 1$ .
- 3) Déterminer un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude  $0,25$ .
- 4) Donner le signe de  $f$  sur  $\mathbb{R}$

### 5) Fonction réciproque d'une fonction continue et strictement monotone

#### Activité 2 :

Considérons la fonction  $f$  définie sur l'intervalle  $I = [1; 3]$  par :  $f(x) = x^2 - 2x$ .

- 1) Montrer que la fonction  $f$  est continue et strictement monotone sur l'intervalle  $I$ .
- 2) Déterminer l'intervalle  $J$  l'image de l'intervalle  $I$  par la fonction  $f$ .
- 3) Soit  $x \in J$  et  $y \in I$ . Montrer que :  $f(y) = x \Leftrightarrow y = 1 + \sqrt{1+x}$  (Remarquer que  $y^2 - 2y = (y-1)^2 - 1$ )  
 $\rightarrow$  La fonction définie sur  $J$  par  $x \mapsto 1 + \sqrt{1+x}$  est appelée la fonction réciproque de  $f$ , on la note  $f^{-1}$   
Ainsi :  $(\forall x \in J) f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{1+x}$
- 4) Montrer que  $(\forall x \in I); (f^{-1} \circ f)(x) = x$  et  $(\forall x \in J) (f \circ f^{-1})(x) = x$

#### Propriété 8 :

$\begin{cases} f \text{ est continue sur } I \\ f \text{ est strictement monotone sur } I \end{cases} \Rightarrow f \text{ admet une fonction réciproque } f^{-1} \text{ définie sur } J = f(I)$

#### Application 10

Soit  $f$  une fonction définie sur l'intervalle  $I$ . Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur l'intervalle  $J$  à déterminer dans les cas suivants :

$$\begin{aligned} f(x) = x^2 - 2x + 5 \text{ et } I = [1; +\infty[ & ; & f(x) = 4x - x^2 \text{ et } I = ]-\infty; 2] \\ f(x) = \sqrt{x^2 - x} - x \text{ et } I = [0; +\infty[ & ; & f(x) = \frac{x}{x^2 + 2} \text{ et } I = [0; \sqrt{2}] \end{aligned}$$

#### Remarque 6 :

Pour déterminer l'expression de  $f^{-1}(x)$  pour tout  $x \in J$ , on résout l'équation  $f(y) = x$  d'inconnue  $y \in I$

Et on a  $f(y) = x \Leftrightarrow f^{-1}(x) = y$

#### Exemple 13 :

On considère la fonction  $f$  définie sur  $I = [0; +\infty[$  par :  $f(x) = \sqrt{x}$

- 1) Montrons que  $f$  admet une fonction réciproque  
 $f$  est continue et strictement croissante sur  $I$ , donc  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur  $J = f(I) = [0; +\infty[$
- 2) Déterminons l'expression de  $f^{-1}$



Soit  $x \in J$ , résolvons dans  $I$  l'équation  $f(y) = x$

On a :  $f(y) = x \Leftrightarrow \sqrt{y} = x$

$\Leftrightarrow y = x^2 \in I$ . D'où :  $(\forall x \in J), f^{-1}(x) = x^2$

**Exercice 5**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $I = ]-\infty; 3]$  par :  $f(x) = (\sqrt{3-x} + 1)^2$ .

- 1) Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur intervalle  $J$  à déterminer
- 2) Déterminer l'expression  $f^{-1}$  pour tout  $x \in J$

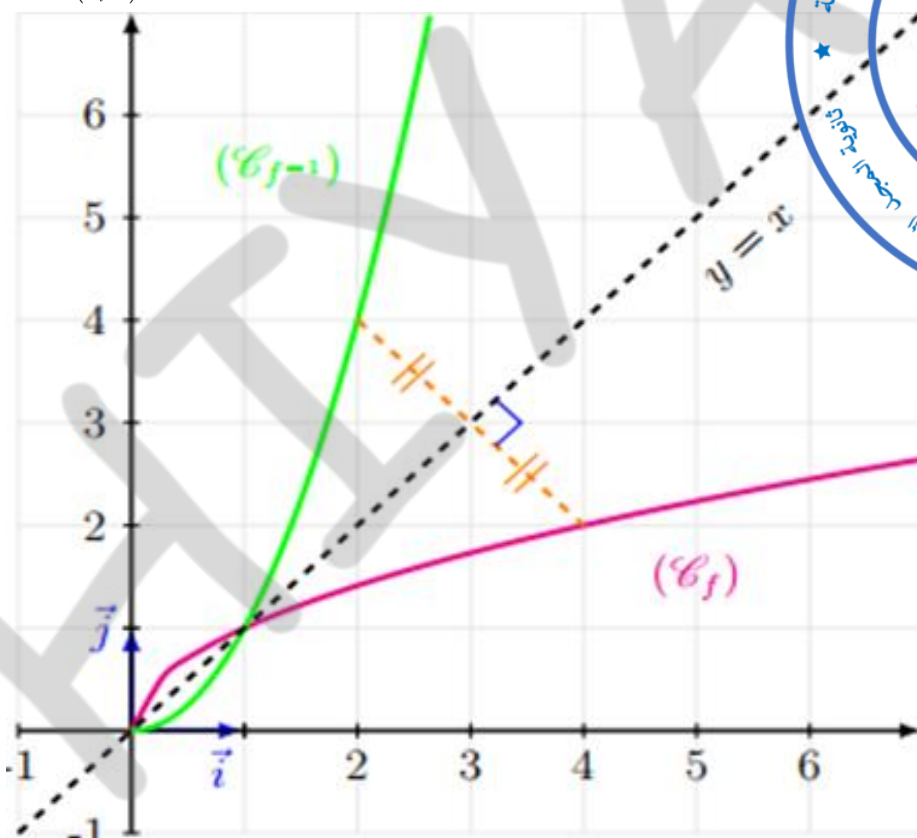
**Propriétés 9 : Les propriétés de la fonction réciproque**

Si  $f$  est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle  $I$ , et  $f^{-1}$  sa fonction réciproque, alors :

- $f^{-1}$  est continue sur l'intervalle  $J = f(I)$ .
- $f^{-1}$  est strictement monotone sur  $J = f(I)$ ,
- La monotonie de  $f^{-1}$  sur  $J = f(I)$  est la même monotonie de  $f$  sur  $I$
- La courbe  $(C_{f^{-1}})$  de la fonction  $f^{-1}$  est le symétrique de la courbe  $(C_f)$  de la fonction  $f$  par rapport à la droite  $y = x$ 
  - \*  $(\forall x \in I); (f^{-1} \circ f)(x) = x$  ;
  - \*  $(\forall x \in J); (f \circ f^{-1})(x) = x$
  - \*  $f^{-1}(J) = I$
- $f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$

**Exemple 14 :**

Traçons les courbes  $(C_f)$  et  $(C_{f^{-1}})$  de l'exemple précédent dans un repère orthonormé :



**Application 11**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $I = \left[ \frac{1}{4}; +\infty \right[$  par :  $f(x) = 2x^2 - x + 1$ .

- 1) Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur intervalle  $J$  à déterminer.
- 2) Dresser le tableau de variation de la fonction  $f^{-1}$
- 3) Tracer les courbes  $(C_f)$  et  $(C_{f^{-1}})$  dans un même repère orthonormé.

**Remarque 7 :**

Soit  $f$  une fonction numérique et  $D_f$  son ensemble de définition.  $I$  un intervalle de  $D_f$

La fonction  $g$  définie sur  $I$  par  $g(x) = f(x)$  est appelée la restriction de  $f$  sur  $I$

## 6) Fonction racine nième - Puissance rationnelle d'un nombre réel

### Activité 3 :

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^+$  par  $f(x) = x^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

- 1) Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur intervalle  $J$  à déterminer.
- 2) Déterminer l'expression de  $f^{-1}$

### Définition 6 : Fonction racine nième

Soit  $n$  un entier naturel non nul.

- La fonction réciproque de la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par :  $x \mapsto x^n$  est appelée fonction racine  $n^{\text{ième}}$  notée  $\sqrt[n]{x}$ .
- L'image d'un réel positif  $x$  par cette fonction est notée  $\sqrt[n]{x}$
- Le nombre  $\sqrt[n]{x}$  est appelé racine  $n^{\text{ième}}$  du nombre  $x$ .

### Remarques 8 :

Pour tout  $x \in \mathbb{R}^+$  on a :

- $\sqrt[1]{x} = x$  ;  $\sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$  ;  $\sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$
- $\sqrt[3]{x}$  est appelée la racine cubique de  $x$ .

### Propriétés 10 :

 Soit  $n$  un entier naturel non nul alors :

- Pour tous  $x; y \in \mathbb{R}^+$  on a :  $\sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow x = y^n$  ;  $\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y$  ;  $\sqrt[n]{x} \leq \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x \leq y$
- Pour tout  $x \in \mathbb{R}^+$  :  $\sqrt[n]{x^n} = (\sqrt[n]{x})^n = x$
- La fonction  $x \mapsto \sqrt[n]{x}$  est définie, continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}^+$ .
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$

### Exemple 15 :

$$\bullet \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3 \quad ; \quad \bullet \sqrt[5]{3} < \sqrt[5]{8} \text{ car } 3 < 8 \quad ; \quad \bullet x^5 = 32 \Leftrightarrow x = \sqrt[5]{32} = 2$$

### Application 12

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :

$$\bullet x^8 - 25 = 0 \quad ; \quad \bullet x^4 = 16 \quad ; \quad \bullet x^7 = 3 \quad ; \quad \bullet x^6 = -5 \quad ; \quad \bullet x^7 = -5 \quad ; \quad \bullet (3x - 4)^5 = 32$$

### Propriétés 11 :

Soient  $n$  et  $m$  deux éléments de  $\mathbb{N}^*$  et soient  $a$  et  $b$  deux éléments de  $\mathbb{R}^+$ . On a :

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \quad ; \quad \sqrt[n]{\frac{1}{b}} = \frac{1}{\sqrt[n]{b}} \quad (b \neq 0) \quad ; \quad \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad (b \neq 0) \quad ; \quad \sqrt[nm]{a^m} = (\sqrt[nm]{a})^m = \sqrt[n]{a} \quad ; \quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$$

### Exemple 16 :

- 1) Simplifier le nombre  $A = \sqrt{\sqrt{3}} + 2\sqrt[4]{81} - \sqrt[4]{243}$
- 2) Comparer les nombres suivants :  $a = \sqrt[5]{3}$  et  $b = \sqrt[7]{2}$

### Remarques 9 :

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $u$  une fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}$

- L'ensemble de définition de la fonction  $f : x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$  est  $D_f = \{x \in \mathbb{R} / u(x) \geq 0\}$
- Pour résoudre une équation ou inéquation contenant des racines nièmes on détermine premièrement  $D$  l'ensemble de définition (de l'équation ou de l'inéquation).

### Application 13

- 1) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation :  $\sqrt[3]{4-x} = 2$
- 2) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation :  $\sqrt[3]{3x-1} < 2$
- 3) Calculer la limite  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{4}}{x-2}$

### Exercice 6

- 1) Simplifier les nombres suivants :  $A = \frac{\sqrt[3]{\sqrt{729}} \times \sqrt{\sqrt{81}}}{\sqrt[3]{3^{17}}}$  ;  $B = \frac{\sqrt[3]{x^5}}{\sqrt{\sqrt{y^{-5}}}} \times \sqrt[12]{\frac{x^{-8}}{y^3}}$



- 2) Ordonner dans l'ordre croissant les nombres :  $\sqrt[3]{\sqrt{2}}$  ;  $\sqrt{\sqrt{5}}$  ;  $\sqrt[4]{7}$   
 3) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations :  $x^4 - 5x^2 - 24 = 0$  ;  $\sqrt[3]{1+x} + \sqrt[3]{1-x} = 2$  ;  $5x - 4\sqrt[3]{x} - 1 = 0$   
 4) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inéquations :  $\sqrt{2x+1} < 3 + \sqrt{x+2}$  ;  $\sqrt{x-1} - \sqrt[3]{x-1} > 6$  ;  $16x^4 < 25$

### Propriétés 12 :

Soit  $u$  une fonction définie sur un intervalle  $I$

- Si  $u$  est continue et positive sur l'intervalle  $I$ , alors la fonction  $\sqrt[n]{u}$  est continue sur l'intervalle  $I$ .
- Si  $\lim_{x \rightarrow l} u(x) = l$  ( $l \geq 0$ ), alors  $\lim_{x \rightarrow l} \sqrt[n]{u(x)} = \sqrt[n]{l}$ .
- Si  $\lim_{x \rightarrow l} u(x) = +\infty$ , alors  $\lim_{x \rightarrow l} \sqrt[n]{u(x)} = +\infty$ .

### Application 14

1) On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \sqrt[3]{3x^2 + 4}$ .

a) Etudier la continuité de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

2) Calculer les limites suivantes :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + x + 1} - 2x)$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^3 + x + 1} - x)$

### Définition 7 : Puissance rationnelle d'un nombre réel strictement positif

Soient  $x \in \mathbb{R}^+$  et  $r$  un nombre rationnel non nul. On appelle puissance rationnelle du nombre  $x$  d'exposant  $r$  le nombre noté  $x^r$ , définie par :  $x^r = \sqrt[n]{x^m}$  où  $r = \frac{m}{n}$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $m \in \mathbb{Z}^*$ .

### Exemple 17 :

$$\bullet 5^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{5^3} ; \bullet 7^{\frac{5}{2}} = \sqrt{7^5} ; \bullet \sqrt[3]{4} = 4^{\frac{1}{3}} ; \bullet 3^{\frac{8}{5}} = \sqrt[5]{3^8} = \sqrt[5]{\frac{1}{3^8}} = \frac{1}{\sqrt[5]{3^8}}$$

### Propriétés 13 :

Pour tout  $x$  et  $y$  de  $\mathbb{R}^+$  et pour tout  $r$  et  $r'$  de  $\mathbb{Q}^*$ , on a :

$$\bullet x^r x^{r'} = x^{r+r'} ; \bullet \frac{x^r}{x^{r'}} = x^{(r-r')} ; \bullet (x^r)^{r'} = x^{rr'} ; \bullet x^{-r} = \frac{1}{x^r} ; \bullet x^r y^r = (xy)^r ; \bullet \frac{x^r}{y^r} = \left(\frac{x}{y}\right)^r$$

### Application 15 :

Simplifier les nombres suivants :  $A = (27)^{\frac{2}{3}} + (16)^{\frac{3}{4}} - \frac{2}{\sqrt[3]{8^{-2}}} + \frac{\sqrt[5]{2}}{4^{\frac{2}{5}}}$  ;  $B = \frac{(81)^{\frac{2}{9}} \times (27)^{\frac{1}{4}} \times 9^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{14}{3}}}$



### 1) Continuité en un point :

$f$  est continue en  $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

### 2) Continuité à droite - Continuité à gauche :

$f$  est continue à droite en  $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$ .

continue à gauche en  $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$

$f$  est continue en  $x_0 \Leftrightarrow f$  est continue à droite et à gauche en  $x_0$ .

### 3) Continuité sur un intervalle :

• On dit qu'une fonction  $f$  est continue sur l'intervalle ouvert  $]a; b[$ , si elle est continue en tout élément de cet intervalle.

• On dit qu'une fonction  $f$  est continue sur le segment  $[a; b]$ , si elle est continue sur l'intervalle  $]a; b[$  et continue à droite en  $a$  et à gauche en  $b$

• Les fonctions polynômes sont continues sur  $\mathbb{R}$ .

• Les fonctions rationnelles sont continues sur chaque intervalle inclus dans leur ensemble de définition.

• Les fonctions constantes sont continues sur  $\mathbb{R}$ .

• Les fonctions  $x \mapsto \sin(x)$ ,  $x \mapsto \cos(x)$  et  $x \mapsto |x|$  sont continues sur  $\mathbb{R}$ .

• La fonction  $x \mapsto \sqrt{x}$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$ .

• La fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  est continue sur  $]0; +\infty[$  et sur  $]-\infty; 0[$

• La fonction  $x \mapsto \tan(x)$  est continue sur chaque intervalle inclus dans son ensemble de définition.

### 4) Opérations sur les fonctions continues :

1) Si  $u$  et  $v$  sont continues sur un intervalle  $I$ .

Alors les fonctions  $u \pm v$ ,  $u \times v$ ,  $\alpha \times u$ ,  $|u|$  et  $u^n$  sont continues sur  $I$ . ( $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ )

2) Si  $u$  est continue sur  $I$  et  $(\forall x \in I) u(x) \neq 0$ , alors la fonction  $\frac{1}{u}$  est continue sur  $I$ .

3) Si  $u$  et  $v$  sont continues sur  $I$  et  $(\forall x \in I) v(x) \neq 0$ , alors la fonction  $\frac{u}{v}$  est continue sur  $I$ .

4) Si  $u$  est continue sur  $I$  et  $(\forall x \in I) u(x) \geq 0$ , alors la fonction  $x \mapsto \sqrt{u(x)}$  est continue sur  $I$ .

5) Si  $u$  est continue sur l'intervalle  $I$  et si  $v$  est continue sur un intervalle  $J$  et  $u(I) \subset J$ .

Alors la fonction  $f = v \circ u$  est continue sur l'intervalle  $I$ .

•  $\begin{cases} \lim(u(x)) = l \\ v \text{ est continue en } l \end{cases} \Rightarrow \lim(v \circ u(x)) = v(l)$

### 5) L'image d'un intervalle :

• L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

• L'image d'un segment (intervalle fermé) par une fonction continue est un segment

• Si  $f$  est une fonction continue sur  $[a; b]$ , alors :

$f([a; b]) = [m; M]$  tel que :

$$m = \min_{x \in [a; b]} f(x) \text{ et } M = \max_{x \in [a; b]} f(x)$$

• Si  $f$  est une fonction continue sur  $I$ , alors :

L'intervalle $I$	$f(I)$	
	$f$ est strictement croissante	$f$ est strictement décroissante
$I = [a; b]$	$[f(a); f(b)]$	$[f(b); f(a)]$
$I = [a; b[$	$[f(a); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)[$	$]\lim_{x \rightarrow b^-} f(x); f(a)]$
$I = ]a; b]$	$]\lim_{x \rightarrow a^+} f(x); f(b)]$	$[f(b); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)[$
$I = ]a; b[$	$]\lim_{x \rightarrow a^+} f(x); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)[$	$]\lim_{x \rightarrow b^-} f(x); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)[$

### 6) Théorème des valeurs intermédiaires :

**Théorème :**

$\begin{cases} f \text{ est continue sur } [a; b] \\ k \text{ est compris entre } f(a) \text{ et } f(b) \end{cases} \Rightarrow$  L'équation  $f(x) = k$

admet au moins une solution dans l'intervalle  $[a; b]$

Si de plus  $f$  est strictement monotone sur  $[a; b]$ , alors cette solution est unique.

**Propriété :**

Soit  $f$  une fonction définie sur l'intervalle  $[a; b]$

$\begin{cases} f \text{ est continue sur } [a; b] \\ f(a) \times f(b) < 0 \end{cases} \Rightarrow$  L'équation  $f(x) = 0$  admet au

moins une solution dans  $[a; b]$  (et dans  $]a; b[$ )

Si de plus  $f$  est strictement monotone sur  $[a; b]$ , alors cette solution est unique.

**Propriété :**

Si  $f$  est continue sur un intervalle  $I$ .

Alors pour tout réel  $k \in f(I)$  l'équation  $f(x) = k$  admet au moins une solution dans  $I$ .

Si de plus  $f$  est strictement monotone sur  $I$ , alors cette solution est unique.

## 7) Fonction réciproque :

### Propriété 7 :

$$\begin{cases} f \text{ est continue sur } I \\ f \text{ est strictement monotone sur } I \end{cases} \Rightarrow f \text{ admet une fonction réciproque } f^{-1} \text{ définie sur } J = f(I)$$

### Remarque :

Pour déterminer l'expression de  $f^{-1}(x)$  pour tout  $x \in J$ , on résout l'équation  $f(y) = x$  d'inconnue  $y \in I$

Et on a  $f(y) = x \Leftrightarrow f^{-1}(x) = y$

### Les propriétés de la fonction réciproque :

Si  $f$  est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle  $I$ , et  $f^{-1}$  sa fonction réciproque, alors :

- $f^{-1}$  est continue sur l'intervalle  $J = f(I)$ .
- $f^{-1}$  est strictement monotone sur  $J = f(I)$ ,
- La monotonie de  $f^{-1}$  sur  $J = f(I)$  est la même monotonie de  $f$  sur  $I$
- La courbe  $(C_{f^{-1}})$  de la fonction  $f^{-1}$  est le symétrique de la courbe  $(C_f)$  de la fonction  $f$  par rapport à la droite  $y = x$
- $(\forall x \in I); (f^{-1} \circ f)(x) = x$
- $(\forall x \in J); (f \circ f^{-1})(x) = x$
- $f^{-1}(J) = I$
- $f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$

## 8) Fonction racine nième :

### Définition :

Soit  $n$  un entier naturel non nul.

- La fonction réciproque de la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par :  $x \mapsto x^n$  est appelée fonction racine  $n^{\text{ième}}$  notée  $\sqrt[n]{x}$ .
- L'image d'un réel positif  $x$  par cette fonction est notée  $\sqrt[n]{x}$
- Le nombre  $\sqrt[n]{x}$  est appelé racine  $n^{\text{ième}}$  du nombre  $x$ .

### Propriétés :

- $\sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow x = y^n$
- $\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y$
- $\sqrt[n]{x} \leq \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x \leq y$ .
- Pour tout  $x \in \mathbb{R}^+$  :  $\sqrt[n]{x^n} = (\sqrt[n]{x})^n = x$
- La fonction  $x \mapsto \sqrt[n]{x}$  est définie, continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}^+$ .
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$

### Propriétés :

$$\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab} \quad ; \quad \sqrt[n]{\frac{1}{b}} = \frac{1}{\sqrt[n]{b}}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \quad ; \quad \sqrt[nm]{a^m} = \sqrt[n]{a} \quad ; \quad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$$

## Propriétés :

Soit  $u$  une fonction définie sur un intervalle  $I$

- Si  $u$  est continue et positive sur l'intervalle  $I$ , alors la fonction  $\sqrt[n]{u}$  est continue sur l'intervalle  $I$ .
- Si  $\lim u(x) = l$  ( $l \geq 0$ ), alors  $\lim \sqrt[n]{u(x)} = \sqrt[n]{l}$ .
- Si  $\lim u(x) = +\infty$ , alors  $\lim \sqrt[n]{u(x)} = +\infty$ .

### Remarque :

Soit  $u$  une fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}$

- L'ensemble de définition de la fonction :

$$f : x \mapsto \sqrt[n]{u(x)} \text{ est } D_f = \{x \in \mathbb{R} / u(x) \geq 0\}$$

- Pour résoudre une équation ou inéquation contenant des racines nièmes on détermine premièrement son ensemble de définition.

## 9) Puissance rationnelle d'un nombre réel strictement positif :

### Définition :

Soient  $x \in \mathbb{R}^+$  et  $r$  un nombre rationnel non nul. On appelle puissance rationnelle du nombre  $x$  d'exposant  $r$  le nombre noté  $x^r$ , définie par :  $x^r = \sqrt[n]{x^m}$  où  $r = \frac{m}{n}$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $m \in \mathbb{Z}^*$ .

### Propriétés :

Pour tout  $x$  et  $y$  de  $\mathbb{R}^{*+}$  et pour tout  $r$  et  $r'$  de  $\mathbb{Q}^*$ .

On a :

$$x^r x^{r'} = x^{r+r'} \quad ; \quad \frac{x^r}{x^{r'}} = x^{(r-r')} \quad ; \quad (x^r)^{r'} = x^{rr'}$$

$$x^{-r} = \frac{1}{x^r} \quad ; \quad x^r y^r = (xy)^r \quad ; \quad \frac{x^r}{y^r} = \left(\frac{x}{y}\right)^r$$



**Exercice 1 : Continuité en un point**Soit  $f$  la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 + x - 2}{x - 2} & ; x \neq 2 \\ f(2) = 5 \end{cases}$$

Montrer que  $f$  est continue en 2**Exercice 2**Soit  $f$  la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - 1}{ax} & ; x \neq 0 \\ f(0) = 4 \end{cases}$$

Déterminer  $a$  sachant que  $f$  est continue en 0**Exercice 3**

$$\text{Soit } f \text{ la fonction définie par : } \begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x+2} - 2}{|x-2|} \\ f(2) = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Etudier la continuité de  $f$  à droite et à gauche en 2**Exercice 4**Soit  $f$  la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 3x & ; x \leq 1 \\ f(x) = \frac{3x^2 - 5}{2x - 1} & ; x > 1 \end{cases}$$

Etudier la continuité de  $f$  en 1**Exercice 5 :**Soit  $f$  la fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = -x^2 + 2 & ; x \leq 1 \\ f(x) = \frac{ax - 2}{2(x - 2)} & ; x > 1 \end{cases}$$

Déterminer  $a$  sachant que  $f$  est continue en 1**Exercice 6 :**Déterminer  $a$  sachant que  $f$  est continue en  $x_0$  dans

les cas suivants :

$$1) \begin{cases} f(x) = \frac{4x^2 - 3x - 27}{x - 3} & ; x_0 = 3 \\ f(3) = a \end{cases}$$

$$2) \begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{2}}{x - 1} & ; x_0 = 1 \\ f(1) = a \end{cases}$$

$$3) \begin{cases} f(x) = \frac{2\tan(x) + \sin(x)}{x} & ; x_0 = 0 \\ f(0) = a \end{cases}$$

$$4) \begin{cases} f(x) = \frac{\sin(x)}{\sqrt[3]{x+1} - 1} & ; x_0 = 0 \\ f(0) = a \end{cases}$$

**Exercice 7**Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + 2x - a & ; x < 2 \\ f(x) = \frac{2x^2 - a + b}{x} & ; x \geq 2 \end{cases}$$

Déterminer une relation entre  $a$  et  $b$  sachant que  $f$  est continue en 2**Exercice 8 : Continuité sur un intervalle**Etudier la continuité de la fonction  $f$  sur  $I$  dans les cas suivants :

1)  $f(x) = 2x - 1 + \sin(x)$  et  $I = \mathbb{R}$

2)  $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{x}$  et  $I = ]0; +\infty[$

3)  $f(x) = \frac{3x - 1}{x^2 + x + 1}$  et  $I = ]-2; +\infty[$

4)  $f(x) = x \cdot \sin(x)$  et  $I = ]0; \pi]$

5)  $f(x) = (x^2 + 1)(x^4 + x)$  et  $I = \mathbb{R}$

6)  $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$  et  $I = \mathbb{R}$

7)  $f(x) = \sqrt{1 - 9x^2}$  et  $I = \left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right]$

8)  $f(x) = \cos(3x^2 + 2x - 1)$  et  $I = \mathbb{R}$

9)  $f(x) = \sin(2x^3 + 1)$  et  $I = \mathbb{R}$

**Exercice 9 :**Etudier la continuité de la fonction  $f$  sur  $\mathbb{R}$  dans les cas suivants :

1) 
$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2 + 1} & ; x \leq 1 \\ f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}} & ; x > 1 \end{cases}$$

2) 
$$\begin{cases} f(x) = x - \sqrt{x-2} & ; x \geq 2 \\ f(x) = \frac{3}{3-x} & ; x < 2 \end{cases}$$

**Exercice 10 : Image d'un intervalle**Déterminer l'image de l'intervalle  $I$  par la fonction  $f$  dans les cas suivants :

1)  $f(x) = \frac{x+1}{x-2}$  et  $I = [-1; 1]$

2)  $f(x) = x + 1$  et  $I = [0; +\infty[$

3)  $f(x) = \frac{1}{x+2}$  et  $I = ]-\infty; -3]$

4)  $f(x) = x^2$  et  $I = [-1; 2]$

5) 
$$\begin{cases} f(x) = 2x - 4 & ; x \in ]0; 2[ \\ f(x) = -2x + 4 & ; x \in [2; 3[ \end{cases}$$
 et  $I = ]0; 3[$

Correction



**Exercice 11 : Théorème des valeurs intermédiaires**

Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet au moins une solution dans  $I$  dans les cas suivants :

- 1)  $f(x) = 7x^3 - x - 1$  et  $I = [0; 1]$
- 2)  $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 2$  et  $I = ]-1; 0[$
- 3)  $f(x) = \cos(x) - x$  et  $I = [0; \frac{\pi}{2}]$

**Exercice 12 :**

Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution dans  $I$  dans les cas suivants :

- 1)  $f(x) = 2x^3 + 5x - 4$  et  $I = [0; 1]$
- 2)  $f(x) = x + \tan(x) - 1$  et  $I = [0; \frac{\pi}{4}]$
- 3)  $f(x) = x^5 + x^3 + x + 2$  et  $I = [-1; 0]$
- 4)  $f(x) = x^3 + 2x - 4$  et  $I = ]1, \frac{3}{2}[$

**Exercice 13 :**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x^3 + x + 1$

- 1) Dresser le tableau de variations de  $f$
- 2) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $[-2; 2]$
- 3) En utilisant la dichotomie donner un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude 1

**Exercice 14 :**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$

- 1) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  tel que  $1 < \alpha < 2$
- 2) Donner un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude 0,25
- 3) Résoudre dans  $[1; 2]$  l'inéquation  $f(x) \geq 0$

**Exercice 15 :**

- 1) Montrer que l'équation  $x^3 - 6x^2 + 6 = 0$  admet au moins une solution  $\alpha \in ]1; 2[$  puis donner un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude 0,5

- 2) Montrer que l'équation  $\frac{2x}{\sqrt{x^2+1}} = \sqrt{3}$  admet au moins une solution dans  $[1, 2]$

**Exercice 16 :**

- 1) Etudier les variations de la fonction  $f(x) = x^3 + 3x - 8$
- 2) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $\mathbb{R}$
- 3) Vérifier que  $1 < \alpha < 2$  puis donner un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude 0,25
- 4) Dresser le tableau de signe de  $f(x)$  sur  $\mathbb{R}$

**Exercice 17 : Fonction réciproque**

Soit  $f$  une fonction définie sur l'intervalle  $I$ . Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur l'intervalle  $J$  à préciser puis déterminer  $f^{-1}(x)$  pour tout  $x \in J$  dans les cas suivants :

- 1)  $f(x) = \frac{3x+1}{x+2}$  et  $I = ]-\infty; -2[$

2)  $f(x) = x^2 - 4x + 2$  et  $I = [2; 4]$

3)  $f(x) = -2(x-1)^2 + 5$  et  $I = [1; +\infty[$

4)  $f(x) = \sqrt{x+1} + x$  et  $I = [1; +\infty[$

5)  $f(x) = \frac{2x}{x^2+1}$  et  $I = [-1; 1]$

6)  $f(x) = \sqrt[3]{x+1} - 3$  et  $I = [-1; +\infty[$

7)  $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$  et  $I = [0; 1]$

8)  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$  et  $I = \mathbb{R}$

**Exercice 18 : Fonction racine nième**

- 1) Comparer les nombres :

$$a = (\sqrt[4]{8})^2, b = \sqrt{\sqrt{81}} \text{ et } c = \sqrt[3]{\sqrt{2}}$$

$$2) \text{ Simplifier le nombre } A = \frac{2^{\frac{5}{3}} \times \sqrt[4]{2^{-8}} \times (\sqrt[5]{3^4})^{-\frac{1}{2}}}{3^{\frac{5}{2}} \times \left(2^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{5}{2}}}$$

- 3) Ordonner dans l'ordre croissant les nombres :

$$\sqrt[12]{100}; \sqrt{13}; \sqrt[8]{80}; \sqrt[4]{15}; \sqrt[3]{28}$$

- 4) Rendre rationnel le dénominateur des nombres suivants :

$$a) \frac{1}{\sqrt[3]{3}-1}; b) \frac{1}{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{3}}; c) \frac{\sqrt[3]{2}-1}{\sqrt[3]{2}+1}; d) \frac{1}{1+\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}}$$

**Exercice 19 :**

Calculer les limites suivantes :

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+8}-2}{x}$	2) $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$
3) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-1}{x}$	4) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x-1}-1}{\sqrt{2x}-2}$
5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3+x}-2x$	6) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x^3+1}-x$
7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[4]{3x^2-5x+7}$	8) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3+x+1}}{x}$
9) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt[3]{3x+2}-2}$	10) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{x+2}-\sqrt[3]{x+1}$
11) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{4x+4}-2}$	12) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-\sqrt{x+6}}{\sqrt{4x-3}-3}$
13) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}$	14) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[4]{x^4+x}-\sqrt[4]{x^4-x}$
15) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{x+1}+1}{\sqrt[3]{x+1}-1}$	16) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[4]{x+1}}{x}$

**Exercice 20 :**

Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations et les inéquations suivantes :

$$(E_1): (x-4)^3 + 1 = 0; (E_2): (x^2+1)^5 = 32; (E_5): x + \sqrt[3]{x} = 30$$

$$(E_3): \sqrt[3]{x+1} + \sqrt[3]{1-x} = \sqrt[3]{2}; (E_4): (\sqrt[3]{x})^2 - 7\sqrt[3]{x} + 6 = 0$$

$$(E_6): \sqrt[3]{x^2-9x} = -2; (E_7): x+2 > \sqrt[3]{x^2+8}; (E_8): \sqrt{x+3} \leq x$$



02

# Dérivation



# 1) Rappel

## 1) Dérivabilité en un point et interprétation graphique :

Limite	Dérivabilité	Interprétation géométrique
$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$	$f$ est dérivable en $a$ et $f'(a) = l$	$(C_f)$ admet une tangente d'équation : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ au point d'abscisse $a$
$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$	$f$ est dérivable à droite en $a$ et $f'_d(a) = l$	$(C_f)$ admet une demi-tangente d'équation $y = f'_d(a)(x - a) + f(a)$ ; $x \geq a$ au point d'abscisse $a$
$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$	$f$ est dérivable à gauche en $a$ et $f'_g(a) = l$	$(C_f)$ admet une demi-tangente d'équation $y = f'_g(a)(x - a) + f(a)$ ; $x \leq a$ au point d'abscisse $a$
$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm\infty$	$f$ n'est pas dérivable en $a$	$(C_f)$ admet une tangente verticale au point d'abscisse $a$
$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$	$f$ n'est pas dérivable à droite en $a$	$(C_f)$ admet une demi-tangente verticale dirigée vers le haut au point d'abscisse $a$
$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty$	$f$ n'est pas dérivable à droite en $a$	$(C_f)$ admet une demi-tangente verticale dirigée vers le bas au point d'abscisse $a$
$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$	$f$ n'est pas dérivable à gauche en $a$	$(C_f)$ admet une demi-tangente verticale dirigée vers le bas au point d'abscisse $a$
$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty$	$f$ n'est pas dérivable à gauche en $a$	$(C_f)$ admet une demi-tangente verticale dirigée vers le haut au point d'abscisse $a$
$f$ est dérivable en $a \Leftrightarrow f$ est à la fois dérivable à droite et à gauche en $a$ et $f'_d(a) = f'_g(a)$		

## 2) Les méthodes de calcul du nombre dérivé :

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  et  $a \in I$

Il existe 3 méthodes pour calculer  $f'(a)$

**Méthode 1 :** Si on a calculé  $f'(x)$  pour tout  $x \in I$ , on remplace  $x$  par  $a$  dans l'expression de  $f'(x)$

**Méthode 2 :**  $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

**Méthode 3 :**  $f'(a)$  est le coefficient directeur de la tangente  $(T)$  à la courbe  $(C_f)$  au point d'abscisse  $a$  :

Si  $A(x_A; y_A) \in (T)$  et  $B(x_B; y_B) \in (T)$ , alors  $f'(a) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

## 3) Approximation affine :

Soit  $f$  une fonction dérivable en  $a$ .

- La fonction  $g$  tel que  $g(x) = f'(a)(x - a) + f(a)$  s'appelle l'approximation affine de  $f$  au voisinage de  $a$ .
- Pour tout réel  $h$  voisin de  $a$  on a :  $f(h) \approx g(h)$

## 2) Dérivabilité et continuité

### Propriétés :

- Si  $f$  est une fonction dérivable en  $a$  alors  $f$  est continue en  $a$ .
- Si  $f$  est une fonction qui n'est pas continue en  $a$  alors elle n'est pas dérivable en  $a$ .
- Une fonction peut être continue en un point sans être dérivable en ce point.

### Exemple 1 :

Montrer que la fonction  $f$  tel que  $f(x) = |x|$  est continue en 0, mais n'est pas dérivable en 0.

### Exemple 2 :

Etudier la dérivabilité de la fonction  $f$  en  $a$  dans chacun des cas suivants :

- $f(x) = x^3$  et  $a = 2$ .
- $\begin{cases} f(x) = x - 4 & \text{si } x \geq 3 \\ f(x) = x^2 - 3 & \text{si } x < 3 \end{cases}$  et  $a = 3$ .
- $f(x) = |x - 1|$  et  $a = 1$ .



### Exemple 3 :

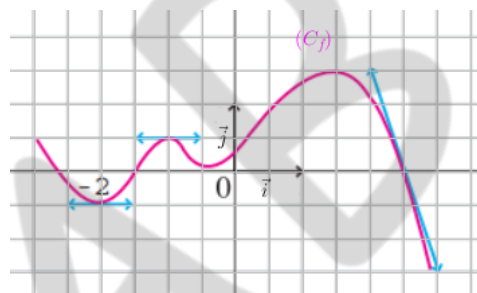
On considère la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = (1+x)^2$ .

- Montrer que  $f$  est dérivable en  $a = 0$ .
- Donner l'approximation affine de  $f$  au voisinage de zéro.
- En déduire une valeur approchée de nombre :  $(1.0001)^2$ . (Remarque que  $(1.0001)^2 = f(0.0001)$ )

### Exemple 4 :

Soit  $f$  la fonction représentée graphiquement ci-contre.

- Déterminer :  $f\left(\frac{5}{2}\right)$  et  $f'\left(\frac{5}{2}\right)$ .
- En déduire une équation cartésienne de la tangente à la courbe de  $f$  au point d'abscisse  $\frac{5}{2}$ .



### Exemple 5 :

On considère la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \sqrt{1+x}$ .

Donner l'équation de la tangente à la courbe représentative de  $f$  au point d'abscisse  $a = 3$ .

## 3) Dérivabilité sur un intervalle – fonction dérivée

### 1) Dérivabilité sur un intervalle :

Soit  $f$  une fonction numérique.

- On dit que  $f$  est dérivable sur un intervalle  $]a, b[$  lorsque  $f$  est dérivable en tout réel de  $]a, b[$ .
- On dit que  $f$  est dérivable sur  $[a, b[$  lorsque  $f$  est dérivable sur  $]a, b[$  et  $f$  est dérivable à droite en  $a$ .
- On dit que  $f$  est dérivable sur  $]a, b]$  lorsque  $f$  est dérivable sur  $]a, b[$  et  $f$  est dérivable à gauche en  $b$ .
- On dit que  $f$  est dérivable sur  $[a, b]$  lorsque  $f$  est dérivable sur  $]a, b[$ , dérivable à droite en  $a$  et à gauche en  $b$ . ( $a$  et  $b$  peuvent être finis ou infinis).

### 2) Fonction dérivée :

- Si  $f$  est dérivable sur un intervalle  $I$ , alors la fonction qui à chaque réel  $x$  de  $I$  associe  $f'(x)$  est appelée la fonction dérivée de  $f$  on la note par  $f'$ .
- Si  $f$  est dérivable sur un intervalle  $I$ , alors elle est dérivable sur chaque intervalle inclus dans  $I$ .
- Si  $f$  est dérivable sur un intervalle  $I$  alors  $f$  est continue sur  $I$ .

### 3) Fonction dérivée des fonctions usuelles :

$a, b$  et  $c$  des nombres réels et  $n \in \mathbb{N}^*$ .

$f(x)$	$D_f$	$D_{f'}$	$f'(x)$	Ecriture mathématique
$c$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$0$	$(c)' = 0$
$ax + b$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$a$	$(ax + b)' = a$
$x^n$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$nx^{n-1}$	$(x^n)' = nx^{n-1}$
$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

$\frac{1}{x^n}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}}$
$\sqrt{x}$	$[0; +\infty[$	$]0; +\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\cos(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$-\sin(x)$	$(\cos(x))' = -\sin(x)$
$\sin(x)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	$(\sin(x))' = \cos(x)$
$\tan(x)$	$\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}$	Tout intervalle de type : $\left] -\frac{\pi}{2} + k\pi ; \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$ tel que $k \in \mathbb{Z}$	$1 + \tan^2(x)$	$(\tan(x))' = 1 + \tan^2(x)$
$\cos(ax+b)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$-a \times \sin(ax+b)$	$(\cos(ax+b))' = -a \times \sin(ax+b)$
$\sin(ax+b)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$a \times \cos(ax+b)$	$(\sin(ax+b))' = a \times \cos(ax+b)$

#### 4) Opérations sur les fonctions dérivées :

- $u$  et  $v$  deux fonctions dérivables sur un intervalle  $I$ , et soit  $\alpha$  un réel fixé et  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Fonction	Fonction dérivée	Conditions	Ecriture mathématique :
$u+v$	$u'+v'$		$(u(x)+v(x))' = u'(x)+v'(x)$
$u \times v$	$u' \times v + u \times v'$		$(u(x) \times v(x))' = u'(x) \times v(x) + u(x) \times v'(x)$
$\alpha \times u$	$\alpha \times u'$		$(\alpha \times u(x))' = \alpha \times u'(x)$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$	$(\forall x \in I) \quad u(x) \neq 0$	$\left(\frac{1}{u(x)}\right)' = -\frac{u'(x)}{u^2(x)}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$	$(\forall x \in I) \quad v(x) \neq 0$	$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{u'(x) \times v(x) - u(x) \times v'(x)}{v^2(x)}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$(\forall x \in I) \quad u(x) > 0$	$(\sqrt{u(x)})' = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$
$u^n$	$n \times u' \times u^{n-1}$		$(u^n(x))' = n \times u'(x) \times u^{n-1}(x)$

- Toute fonction polynôme est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .
- Toute fonction rationnelle (quotient de polynômes) est dérivable sur chaque intervalle de son ensemble de définition.
- Si  $f$  est une fonction dérivable sur l'intervalle  $I$ , alors on écrit :  $(\forall x \in I) \quad f'(x) = (f(x))'$ .

#### 5) Dérivées successives – écriture différentielle :

- Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ .

\* La dérivé  $f'$  de  $f$  est appelée la dérivée première de  $f$ .

\* Si la fonction  $f'$  est dérivable sur  $I$ , sa fonction dérivée est appelée dérivée seconde de  $f$  et notée  $f^{(2)}$  ou  $f''$ .

\* Par itération, si la fonction  $f^{(n-1)}$  (avec  $n \geq 3$ ) est dérivable sur  $I$ , sa fonction est appelée dérivée  $n^{\text{ème}}$  de  $f$  et notée  $f^{(n)}$ .

\* La dérivée  $n^{\text{ème}}$  de  $f$  est aussi appelée dérivée d'ordre  $n$  de  $f$ .

- Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ .

Si  $y = f(x)$ , alors on écrit  $f'(x) = \frac{dy}{dx}$  ou  $dy = f'(x)dx$ . Cette écriture est appelée : écriture différentielle.

### Exemple 6 :

Dans chacun des cas suivants étudier la dérivabilité de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $I$  et définir sa fonction dérivée :

1)  $f(x) = \sqrt{x+x^5}$  et  $I = ]0; +\infty[$  . ; 2)  $f(x) = (5x+2)\cos(x)$  et  $I = \mathbb{R}$  .

3)  $f(x) = \frac{3}{x}$  et  $I = ]-\infty; 0[$  . ; 4)  $f(x) = (2x-3)^8$  et  $I = \mathbb{R}$  .

5)  $f(x) = x^{-7}$  et  $I = [4; +\infty[$  . ; 6)  $f(x) = \sqrt{x \cdot \sin(x)}$  et  $I = ]0; \frac{\pi}{2}[$  .

### Exemple 7 :

$a, b, c$  et  $d$  des nombres réels tels que  $c \neq 0$  et  $ad - bc \neq 0$  . Montrer que  $\left( \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{d}{c} \right\} \right) \left( \frac{ax+b}{cx+d} \right)' = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx+d)^2}$  .

### Exemple 8 :

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par : 
$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 4 & \text{si } x \leq 2 \\ f(x) = 8 - \frac{16}{x} & \text{si } x > 2 \end{cases}$$

1) Montrer que  $f$  est dérivable sur les intervalles  $]-\infty; 2[$  et  $]2; +\infty[$  puis calculer  $f'(x)$  pour  $x < 2$  et pour  $x > 2$  .

2) Etudier la dérivabilité de  $f$  en  $a = 2$  .

3) La fonction  $f$  est-elle dérivable sur  $\mathbb{R}$  ?

### Exemple 9 :

En utilisant le nombre dérivé calculer les limites suivantes :  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^{20} - 2^{20}}{x - 2}$  et  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan(x) - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$

## 4) Applications de la fonction dérivée

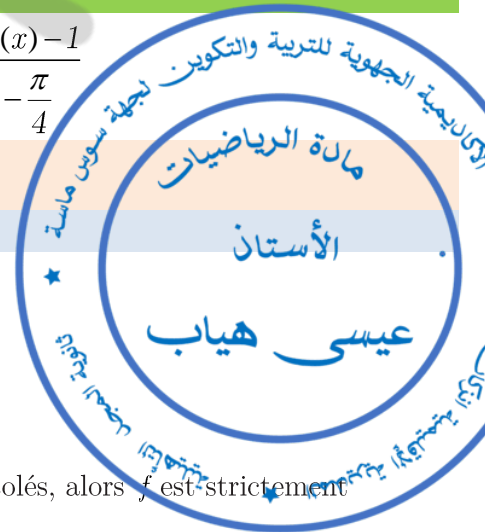
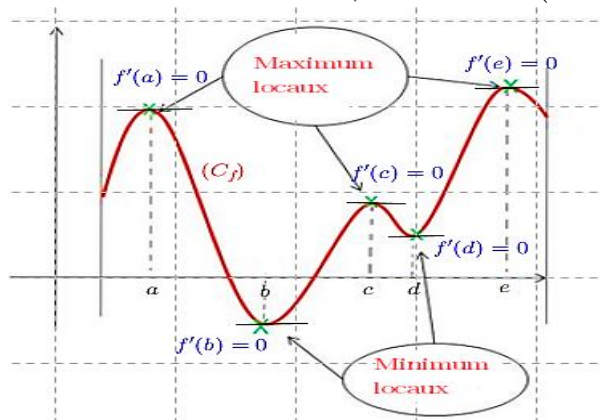
### 1) Dérivée et sens de variations :

- Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  .
  - \*  $f$  est croissante sur  $I$  si et seulement si  $f'(x) \geq 0$  pour tout  $x$  de  $I$  .
  - \*  $f$  est décroissante sur  $I$  si et seulement si  $f'(x) \leq 0$  pour tout  $x$  de  $I$  .
  - \*  $f$  est constante sur  $I$  si et seulement si  $f'(x) = 0$  pour tout  $x$  de  $I$  .
- Si  $f$  est positive sur  $I$  et ne s'y annule qu'en un nombre fini ou infini de points isolés, alors  $f$  est strictement croissante sur  $I$  .
- Si  $f'$  est négative sur  $I$  et ne s'y annule qu'en un nombre fini ou infini de points isolés, alors  $f$  est strictement décroissante sur  $I$  .

### 2) Dérivée et extremums :

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle ouvert  $I$  et  $a \in I$

- Si  $f$  admet un extremum (minimum ou maximum) local en  $a$  , alors  $f'(a) = 0$
- Si  $f$  admet un extremum local en  $a$  , alors la tangente à  $(C_f)$  au point  $A(a, f(a))$  est horizontale.



- Si  $f'(a) = 0$  et  $f'$  change de signe au voisinage de  $a$ , alors  $f(a)$  est un extremum local de  $f$ .
- $f(a)$  est la valeur maximale de  $f$  sur un intervalle  $I \Leftrightarrow (\forall x \in I) \quad f(x) \leq f(a)$
- $f(a)$  est la valeur minimale de  $f$  sur un intervalle  $I \Leftrightarrow (\forall x \in I) \quad f(x) \geq f(a)$

#### Exemple 10 :

On considère la fonction  $f$  définie sur par  $f(x) = x^3$ .

- 1) Montrer qu'il existe un réel  $a$  tel que  $f'(a) = 0$ .
- 2) La fonction  $f$  admet-il un extremum en  $a$  ?

#### Exemple 11 :

On considère la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = x^2 - 2x + 5$ .

- 1) Calculer  $f'(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et dresser le tableau de variations de  $f$ .
- 2) En déduire que  $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x) \geq 4$ .

## 5) Dérivée d'une fonction composée

### Propriétés :

Soit  $u$  une fonction définie sur un intervalle ouvert  $I$  et  $v$  une fonction définie sur un intervalle ouvert  $J$  avec  $u(I) \subset J$  Soit  $a$  un réel de  $I$ .

- Si  $u$  est dérivable en  $a$  et  $v$  est dérivable en  $u(a)$ , alors la fonction  $v \circ u$  est dérivable en  $a$  et de plus

$$(v \circ u)'(a) = v'(u(a)) \times u'(a)$$

- Si  $u$  est dérivable sur  $I$  et  $v$  est dérivable sur l'intervalle  $u(I)$ , alors  $v \circ u$  est dérivable sur  $I$  et pour tout  $x \in I$  :

$$(v \circ u)'(x) = v'(u(x)) \times u'(x)$$

#### Exemple 12 :

Soit  $u$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  et  $n$  un entier naturel non nul.

- 1) En écrivant la fonction  $u^n$  comme composée de deux fonctions, démontrer que :  $(u^n)' = n \times u' \times u^{n-1}$ .
- 2) On suppose que  $u$  est strictement positive sur  $I$

En écrivant la fonction  $\sqrt{u}$  comme composée de deux fonctions, démontrer que :  $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ .

#### Exemple 13 :

Soit  $u$  et  $v$  les fonctions définies par :  $u(x) = \tan(x)$  et  $v(x) = x^2$

Montrer que la fonction  $v \circ u$  est dérivable en  $a = \frac{\pi}{4}$

#### Exemple 14 :

Dans chacun des cas ci-dessous, déterminer les fonctions  $u$  et  $v$  tel que  $f = v \circ u$  puis calculer  $f'(x)$  pour tout  $x \in I$ .

$$1) f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) \text{ et } I = \mathbb{R}.$$

$$2) f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \text{ et } I = ]1; +\infty[.$$

## 6) Dérivée de la fonction réciproque

### Propriété : Dérivée de la fonction réciproque en un point :

Soit  $f$  une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle  $I$  et  $a \in I$

Si  $f$  est dérivable en  $a$  et  $f'(a) \neq 0$ , alors la fonction  $f^{-1}$  est dérivable en  $f(a)$  et on a :  $(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$

#### Exemple 15 :

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$  par  $f(x) = \sin(x)$

- 1) Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  que l'on déterminera.

2) Calculer  $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$  et  $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$  puis montrer que  $f^{-1}$  est dérivable en  $\frac{\sqrt{3}}{2}$

3) Calculer  $(f^{-1})'\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ .

### Propriété : Dérivée de la fonction réciproque sur un intervalle :

Soit  $f$  une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle  $I$ .

Si  $f$  est dérivable sur  $I$  telle que la fonction  $f'$  ne s'annule pas sur  $I$ , alors la fonction  $f^{-1}$  est dérivable sur  $J = f(I)$

et on a :  $(\forall x \in J) \quad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

### Exemple 16 :

Soit la fonction  $f$  définie sur  $[-2; +\infty[$  par  $f(x) = x^2 + 4x + 5$

1) Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur  $[1; +\infty[$ .

2) Déterminer l'intervalle  $J'$  sur lequel  $f^{-1}$  est dérivable et calculer  $(f^{-1})'(x)$ .

### Propriété : Dérivée de la fonction racine $n^{\text{ème}}$ :

Soit  $n$  un entier naturel supérieur ou égal à 2.

➤ La fonction  $x \mapsto \sqrt[n]{x}$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et on a :  $(\forall x \in ]0; +\infty[) \quad (\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$

➤ Si  $u$  est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle  $I$ , alors la fonction  $x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$  est

dérivable sur  $I$  et on a :  $(\forall x \in I) \quad (\sqrt[n]{u(x)})' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{(u(x))^{n-1}}}$

### Exemple 17 :

Dans chacun des cas ci-dessous, montrer que la fonction  $f$  est dérivable sur  $I$  et calculer  $f'(x)$  pour tout  $x \in I$ .

1)  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  et  $I = ]0; +\infty[$ .

2)  $f(x) = \sqrt[5]{(x^2 - 9)^2}$  et  $I = ]3; +\infty[$ .

### Propriété : Dérivée de la fonction $x \mapsto x^r$ :

Soit  $r$  un nombre rationnel non nul.

➤ La fonction  $x \mapsto x^r$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et on a :  $(\forall x \in ]0; +\infty[) \quad (x^r)' = r \cdot x^{r-1}$

➤ Si  $u$  est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle  $I$ , alors la fonction  $x \mapsto (u(x))^r$  est

dérivable sur  $I$  et on a :  $(\forall x \in I) \quad ((u(x))^r)' = r \times (u(x))^{r-1} \times u'(x)$



## Résumé 2 : Dérivation

### Dérivabilité en un point et interprétation graphique :

Limite	Dérivabilité	Interprétation géométrique
$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$	$f$ est dérivable en $a$ et $f'(a) = l$	$(C_f)$ admet une tangente d'équation : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ au point d'abscisse $a$
$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$	$f$ est dérivable à droite en $a$ et $f'_d(a) = l$	$(C_f)$ admet une demi-tangente d'équation $y = f'_d(a)(x - a) + f(a)$ ; $x \geq a$ au point d'abscisse $a$
$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$	$f$ est dérivable à gauche en $a$ et $f'_g(a) = l$	$(C_f)$ admet une demi-tangente d'équation $y = f'_g(a)(x - a) + f(a)$ ; $x \leq a$ au point d'abscisse $a$
$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \pm\infty$	$f$ n'est pas dérivable en $a$	$(C_f)$ admet une tangente verticale au point d'abscisse $a$
$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$	$f$ n'est pas dérivable à droite en $a$	$(C_f)$ admet une demi-tangente verticale dirigée vers le haut au point d'abscisse $a$
$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty$	$f$ n'est pas dérivable à droite en $a$	$(C_f)$ admet une demi-tangente verticale dirigée vers le bas au point d'abscisse $a$
$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$	$f$ n'est pas dérivable à gauche en $a$	$(C_f)$ admet une demi-tangente verticale dirigée vers le bas au point d'abscisse $a$
$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty$	$f$ n'est pas dérivable à gauche en $a$	$(C_f)$ admet une demi-tangente verticale dirigée vers le haut au point d'abscisse $a$
$f$ est dérivable en $a \Leftrightarrow f$ est à la fois dérivable à droite et à gauche en $a$ et $f'_d(a) = f'_g(a)$		

### Fonction dérivée des fonctions usuelles - Opérations sur les fonctions dérivées :

$(c)' = 0$ $(ax)' = a$ $(ax + b)' = a$ $(x)' = 1$	$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$ $(\sqrt[n]{u})' = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$ $(x^r)' = r \cdot x^{r-1}$ $(u^r)' = r \times u^{r-1} \times u'$	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$(u + v)' = u' + v'$ $(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$ $(\alpha \times u)' = \alpha \times u'$	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$
$(\cos(x))' = -\sin(x)$		$(\sin(x))' = \cos(x)$		$(\tan(x))' = 1 + \tan^2(x)$	

- Toute fonction polynôme est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .
- Toute fonction rationnelle est dérivable sur chaque intervalle de son ensemble de définition.

### Les méthodes de calcul du nombre dérivé :

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$  et  $a \in I$

Il existe 3 méthodes pour calculer  $f'(a)$

**Méthode 1 :** Si on a calculé  $f'(x)$  pour tout  $x \in I$ , on remplace  $x$  par  $a$  dans l'expression de  $f'(x)$

**Méthode 2 :**  $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

**Méthode 3 :**  $f'(a)$  est le coefficient directeur de la tangente  $(T)$  à la courbe  $(C_f)$  au point d'abscisse  $a$  :

Si  $A(x_A; y_A) \in (T)$  et  $B(x_B; y_B) \in (T)$ , alors  $f'(a) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$

## Dérivabilité et continuité :

- Si  $f$  est dérivable en  $a$  alors  $f$  est continue en  $a$
- Si  $f$  est dérivable sur un intervalle  $I$  alors  $f$  est continue sur  $I$ .

## Dérivée et sens de variation :

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ .

- $f$  est croissante sur  $I \Leftrightarrow (\forall x \in I) f'(x) \geq 0$
- $f$  est décroissante sur  $I \Leftrightarrow (\forall x \in I) f'(x) \leq 0$   $f$  est constante sur  $I \Leftrightarrow (\forall x \in I) f'(x) = 0$

## Dérivée et extremums :

$f$  une fonction dérivable sur un intervalle ouvert  $I$  et  $a \in I$

- $f$  admet un maximum local en  $a$  si, et seulement s'il existe un intervalle ouvert  $J$  contenant  $a$  et inclus dans  $I$  tel que :  $(\forall x \in J) f(x) \leq f(a)$ .
- $f$  admet un minimum local en  $a$  si, et seulement s'il existe un intervalle ouvert  $J$  contenant  $a$  et inclus dans  $I$  tel que :  $(\forall x \in J) f(x) \geq f(a)$ .
- Si  $f$  admet un extremum (minimum ou maximum) local en  $a$ , alors  $f'(a) = 0$ .
- Si  $f'(a) = 0$  et si  $f'$  change de signe en  $a$ , alors la fonction  $f$  admet un extremum local en  $a$ .

## Approximation affine :

Soit  $f$  une fonction dérivable en  $a$ .

- La fonction  $g$  tel que  $g(x) = f'(a)(x-a) + f(a)$  s'appelle l'approximation affine de  $f$  au voisinage de  $a$ .
- Pour tout réel  $h$  voisin de  $a$  on a :  $f(h) \approx g(h)$

## Dérivée d'une fonction composée :

- $\begin{cases} u \text{ est dérivable en } a \\ v \text{ est dérivable en } u(a) \end{cases} \Rightarrow vou \text{ est dérivable en } a$   
 $(vou)'(a) = v'(u(a)) \times u'(a)$
- $\begin{cases} u \text{ est dérivable sur } I \\ v \text{ est dérivable sur } u(I) \end{cases} \Rightarrow vou \text{ est dérivable sur } I$   
Pour tout  $x \in I$  :  $(vou)'(x) = v'(u(x)) \times u'(x)$

## Dérivée de la fonction réciproque :

Soit  $f$  une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle  $I$  et  $a \in I$ .

- $\begin{cases} f \text{ est dérivable en } a \\ f'(a) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow f^{-1} \text{ est dérivable en } f(a)$
- $(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$
- $\begin{cases} f \text{ est dérivable sur } I \\ (\forall x \in I) f'(x) \neq 0 \end{cases} \Rightarrow f^{-1} \text{ est dérivable sur } J = f(I)$
- $(\forall x \in J) (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$



**Exercice 1 :**

Etudier la dérivabilité de la fonction  $f$  en  $a$  et interpréter les résultats obtenus dans les cas suivants :

1)  $f(x) = 5x + 2$  et  $a = 1$ .

2)  $f(x) = \sqrt{3x-2}$  et  $a = 2$ .

3) 
$$\begin{cases} f(x) = 1 - \cos(x) & \text{si } x \geq 0 \\ f(x) = \sin(x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$$
 et  $a = 0$ .

4)  $f(x) = x^3$  et  $a = -1$ .

**Exercice 2 :**

1) On considère la fonction  $f$  tel que :  $f(x) = (1+x)^3$ .  
Donner l'approximation affine de  $f$  au voisinage de zéro et en déduire une valeur approchée de nombre  $b = (1.0044)^3$

2) Montrer que pour tout réel  $h$  voisin de zéro on a :

$$\frac{1}{1+h} \approx 1-h \quad \text{et} \quad \sqrt{1+h} \approx 1 + \frac{h}{2}$$

**Exercice 3 :**

Préciser l'ensemble sur lequel la fonction  $f$  est dérivable et calculer  $f'(x)$  lorsqu'il existe dans chacun des cas suivants :

1)  $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x + 3$     2)  $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x-2}$

3)  $f(x) = \sqrt{x+5}$     4)  $f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$

5)  $f(x) = x^2\sqrt{x-1}$     6)  $f(x) = 2 + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{x^3}$

**Exercice 4 :**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$\begin{cases} f(x) = 4\sqrt{x+1} & \text{si } x \geq 3 \\ f(x) = x^2 - 5x + c & \text{si } x < 3 \end{cases}$$

1) Déterminer le réel  $c$  pour que  $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = f(3)$

2) Pour la valeur de  $c$  trouvée, montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et déterminer sa fonction dérivée.

**Exercice 5 :**

En utilisant la définition du nombre dérivé, calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x-2)^{2024} - 1}{x-3} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x\sqrt{x+7} - 6}{x-2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\frac{1}{x+2} - 1}{x+1}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{2\cos(x) - 1}{\tan(x) - \sqrt{3}}$$

**Exercice 6 :**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x + 1$$

1) Dresser le tableau de variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

2) En déduire que  $f$  possède deux extremums locaux dont on précisera la nature et l'intervalle.

**Exercice 7 :**

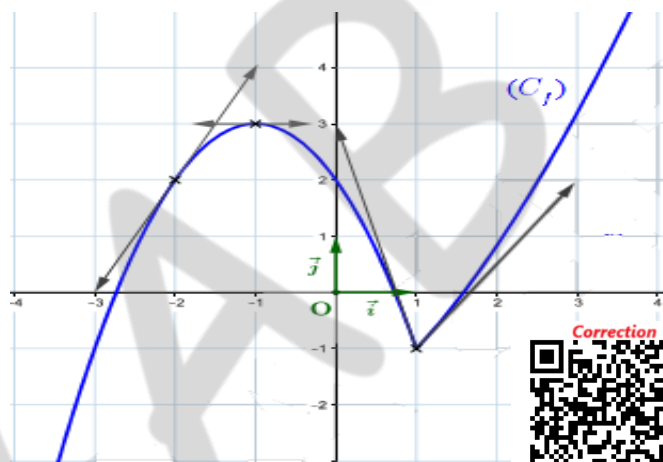
Dresser le tableau de variations de la fonction  $f$  dans les cas suivants :

1)  $f(x) = x - \frac{1}{x}$     2)  $f(x) = 3x^4 - 2x^2 + 1$

3)  $f(x) = \frac{4}{x^2 - 2x}$     4)  $f(x) = \frac{x^2 + 4x + 1}{x + 1}$

**Exercice 8**

Dans la figure ci-après  $(C_f)$  est la courbe représentative d'une fonction  $f$  dans le repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .



- Déterminer  $f(-2)$ ,  $f'(-2)$  et  $f'(-1)$
- Déterminer graphiquement  $f'_d(1)$  et  $f'_g(1)$
- En déduire que  $f$  n'est pas dérivable en 1.
- Dresser le tableau de variations de  $f$  sur  $[-3; 3]$  (on donne  $f(3) = \frac{25}{8}$ )

5) En déduire le tableau de signe de  $f'$  sur  $[-3; 3]$

**Exercice 9 :**

$b$  et  $c$  deux nombres réels strictement positifs.

On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$f(x) = x^3 + b^3 + c^3 - 3xbc$$

- Vérifier que :  $f(\sqrt{bc}) = (\sqrt{b^3} - \sqrt{c^3})^2$
- Vérifier que :  $(\forall x \in ]0; +\infty[) f(x) = 3(x + \sqrt{bc})(x - \sqrt{bc})$
- Etudier le signe de  $f'$  et dresser le tableau de variations de  $f$
- En déduire que  $f$  admet une valeur minimale positive sur  $\mathbb{R}_+^*$
- Déduire que :  $(\forall a, b, c \in ]0; +\infty[) a^3 + b^3 + c^3 \geq 3abc$ .

**Exercice 10 :**

Un éditeur doit produire un livre avec les contraintes suivantes :  
Sur chaque page le texte imprimé doit être contenu dans un rectangle de  $300 \text{ cm}^2$ , les marges doivent mesurer  $1,5 \text{ cm}$  sur les bords horizontaux et de  $2 \text{ cm}$  sur les bords verticaux.  
Quelles doivent être les dimensions d'une page pour que la consommation de papier soit minimale ?

**Exercice 11**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  par :

$$f(x) = \frac{x+2}{x-1}.$$

- Déterminer l'expression  $f'(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ .
- En déduire la dérivée de  $g$ ,  $h$ ,  $k$  et  $l$  définies par :

$$g(x) = \frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt{x-1}}; \quad h(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x-1}}$$

$$k(x) = \frac{x^2+2}{x^2-1}; \quad l(x) = \frac{\sin(x)+2}{\sin(x)-1}$$

**Exercice 12**

On donne la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = x^3 + x + 1.$$

- Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur  $\mathbb{R}$ .
- Montrer que  $f^{-1}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .
- Calculer  $f(1)$  et  $f(-2)$ . En déduire  $(f^{-1})'(3)$  et  $(f^{-1})'(-9)$ .

**Exercice 13**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\left]0; \frac{\pi}{2}\right[$  par  $f(x) = \tan(x)$

- Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$ .
- Déterminer l'ensemble de définition de  $f^{-1}$  ainsi que son ensemble de dérivabilité.
- Montrer que pour tout  $x$  de  $\mathbb{R} : (f^{-1})'(x) = \frac{1}{x^2+1}$ .

**Exercice 14**

Montrer que la fonction  $f$  tel que  $f(x) = \sqrt{|x|}$  est continue en 0, mais n'est pas dérivable en 0.

**Exercice 15**

Dans chacun des cas suivants donner l'expression de la fonction dérivée de  $f$  sur  $I$

1) $f(x) = \left(\frac{3x-2}{x^2+1}\right)^3$ et $I = \mathbb{R}$ .	2) $f(x) = \sqrt{\frac{3x-2}{x^2+1}}$ et $I = \left] \frac{2}{3}; +\infty \right[$ .
3) $f(x) = \sqrt{1+\cos(x)}$ et $I = \left] \frac{\pi}{2}; \pi \right[$ .	4) $f(x) = \tan(2x)$ et $I = \left] 0; \frac{\pi}{4} \right[$ .
5) $f(x) = \cos(\sqrt{x^2+3})$ et $I = \mathbb{R}$ .	6) $f(x) = (x^3+x)^4 \times \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ et $I = ]0; +\infty[$ .

**Exercice 16**

On considère la fonction  $f$  définie par :

$$f(x) = x + 5 + \frac{4}{x-1}$$

- a) Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \{1\}$  et calculer  $f'(x)$  pour  $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- b) Déterminer les points de  $(C_f)$  où la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

2) Soit  $h$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x < 0 \\ x^3 - 2x + 1 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ \sqrt{x^2 - 4} + x + 3 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

Etudier la dérivabilité de  $h$  en 0 et interpréter graphiquement les résultats obtenus.

3) a) Etudier la dérivabilité de  $h$  en 2 et interpréter graphiquement les résultats.

b) Montrer que la fonction  $h$  est dérivable sur  $]2; +\infty[$  et calculer  $h'(x)$  pour  $x \in ]2; +\infty[$

c) Ecrire une équation de la tangente à la courbe  $(C_h)$  au point d'abscisse  $2\sqrt{2}$

**Exercice 17**

Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = x^3 + x^2 + 6$

- Etudier les variations de  $g$ .
- On suppose que l'équation  $g(x) = 0$  possède une solution unique  $\alpha$  dans  $\mathbb{R}$  et que  $-3 < \alpha < -2$ .

Etudier la signe de  $g$  sur  $]-\infty; \alpha[$  et sur  $]\alpha; +\infty[$  3) Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^*$  par :  $f(x) = x - 1 + \frac{x^2 - 3x + 2}{x^3}$ .

a) Montrer que  $f'(x) = \frac{(x-1)}{x^4} g(x)$

b) En déduire les variations de  $f$

c) Ecrire une équation de la tangente à  $(C_f)$  au point d'abscisse 2.

**Exercice 18**

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \sqrt{4-2x}$ .

- Etudier les variations de la fonction  $f$ .
- Déterminer une équation de la tangente  $T$  à la courbe  $(C_f)$  au point d'abscisse 0.
- Existe-t-il une tangente à  $(C_f)$  de coefficient directeur  $-\frac{1}{4}$  ?
- Existe-t-il une tangente à  $(C_f)$  qui passe par le point  $A(2;3)$  ?



Correction



Exercice 1 (5pts)

- 1) Comparer les nombres  $\sqrt[4]{3}$  et  $\sqrt[5]{2}$  .....1pt
- 2) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations :  $(E_1): \sqrt[3]{x^2+1}=2$  et  $(E_2): (\sqrt[3]{x})^2 - 3\sqrt[3]{x} + 2 = 0$  .....2pt
- 3) Calculer la limite suivante :  $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$  .....1pt
- 4) Simplifier le nombre :  $\frac{\sqrt[3]{4} \times \sqrt{8} \times \sqrt[5]{\sqrt{2}}}{\sqrt[3]{6}}$  .....1pt

Exercice 2 (6pts)

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = -x^3 - 4x + 2$

- 1) Dresser le tableau de variations de  $f$  .....1pt
- 2) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $\mathbb{R}$  .....1pt
- 3) Vérifier que  $\alpha \in ]0; 1[$  puis déterminer un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude  $0,25$  .....1pt
- 4) Vérifier que  $\alpha^2 + 4 = \frac{2}{\alpha}$  .....1pt
- 5) On considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = -\frac{1}{4}x^4 - 2x^2 + 2x + 3$   
 Dresser le tableau de variations de  $g$  .....2pt

Exercice 3 (9pts)

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x^2+1} & \text{si } x < 1 \\ \sqrt{x^2-x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

- 1) Calculer les limites :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  .....0.5pt
- 2) Etudier la continuité de  $f$  à gauche en 1.....1pt
- 3) Montrer que  $f$  est dérivable à gauche en 1 et interpréter géométriquement le résultat obtenu.....1pt
- 4) a) Montrer que  $\begin{cases} (\forall x \in ]-\infty; 1[) & f'(x) = \frac{4x}{(x^2+1)^2} \\ (\forall x \in ]1; +\infty[) & f'(x) = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}} \end{cases}$  .....1.5pt
- b) Etudier le signe de  $f'(x)$  (étudier les cas  $x > 1$  ;  $0 \leq x < 1$  et  $x < 0$ ) puis dresser le tableau de variations de  $f$ . .....1.5pt
- c) Déterminer l'équation de la tangente  $(T)$  à  $(C_f)$  au point d'abscisse  $-1$  .....1pt
- 5) Soit  $g$  la fonction définie sur  $]-\infty; 0[$  par :  $g(x) = f(x)$ 
  - a) Montrer que  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  à déterminer. ....1pt
  - b) Calculer  $(g^{-1})'(0)$  (remarquer que  $0 = f(-1) = g(-1)$ ).....0.5pt
  - c) Dresser le tableau de variations de  $g^{-1}$  .....0.5pt
  - d) Déterminer  $g^{-1}(x)$  pour tout  $x \in J$  .....0.5pt

Exercice 1 (5pts)

- 1) Simplifier le nombre :  $\frac{\sqrt[3]{2} \times \sqrt{6} \times \sqrt[5]{\sqrt{8}}}{\sqrt[3]{4}}$  .....1pt
- 2) Comparer les nombres  $\sqrt[4]{5}$  et  $\sqrt[3]{2}$  .....1pt
- 3) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations :  $(E_1): \sqrt[3]{2+x^2} = 3$  et  $(E_2): (\sqrt[3]{x})^2 - 5\sqrt[3]{x} + 4 = 0$  .....2pt
- 4) Calculer la limite suivante :  $\lim_{x \rightarrow 27} \frac{x-27}{\sqrt[3]{x}-3}$  .....1pt

Exercice 2 (6pts)

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x^3 + 4x + 2$

- 1) Dresser le tableau de variations de  $f$  .....1pt
- 2) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $\mathbb{R}$  .....1pt
- 3) Vérifier que  $\alpha \in ]-1; 0[$  puis déterminer un encadrement de  $\alpha$  d'amplitude  $0,25$  .....1pt
- 4) Vérifier que  $\alpha^2 + 4 = -\frac{2}{\alpha}$  .....1pt
- 5) On considère la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = \frac{1}{4}x^4 + 2x^2 + 2x + 3$   
 Dresser le tableau de variations de  $g$  .....2pt

Exercice 3 (9pts)

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par : 
$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 - x} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

- 1) Calculer les limites :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$  .....0.5pt
- 2) Etudier la continuité de  $f$  à droite en  $0$ .....1pt
- 3) Montrer que  $f$  n'est pas dérivable à droite en  $0$  et interpréter géométriquement le résultat obtenu...1pt
- 4) a) Montrer que 
$$\begin{cases} (\forall x \in ]-\infty; 0[) & f'(x) = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}} \\ (\forall x \in ]0; +\infty[) & f'(x) = \frac{4x}{(x^2+1)^2} \end{cases}$$
 .....1.5pt
- b) Etudier le signe de  $f'(x)$  (étudier les cas  $x < 0$  et  $x > 0$ ) et dresser le tableau de variations de  $f$ ...1.5pt
- c) Déterminer l'équation de la tangente  $(T)$  à  $(C_f)$  au point d'abscisse  $1$  .....1pt
- 5) Soit  $g$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par :  $g(x) = f(x)$ 
  - a) Montrer que  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  à déterminer. ....1pt
  - b) Calculer  $(g^{-1})'(0)$  (remarquer que  $0 = f(1) = g(1)$ ).....0.5pt
  - c) Déterminer  $g^{-1}(x)$  pour tout  $x \in J$  .....1pt

03

# Etude de fonctions



Dans tout ce chapitre  $f$  est une fonction numérique,  $D_f$  son ensemble de définition et  $(C_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthogonal  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

## 1) Branches infinies d'une courbe

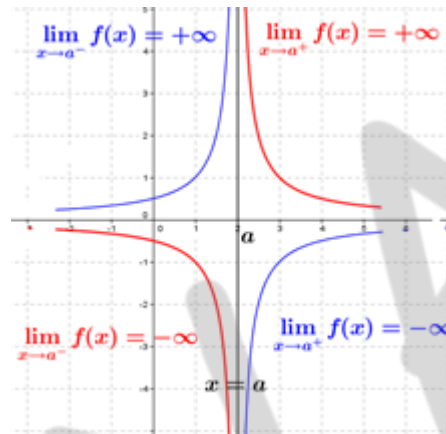
### Définition 1 : Branches infinies

- On dit que  $(C_f)$  admet une branche infinie dès que l'une des coordonnées d'un point de  $(C_f)$  tend vers l'infini. (C'est à dire  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = a$ ,  $\lim_{x \rightarrow a^\pm} f(x) = \pm\infty$ , ou  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ )
- Généralement, les branches infinies décrivent le comportement de  $f$  aux bornes de  $D_f$ , c'est pour cette raison qu'on s'intéresse au calcul des limites aux bornes de  $D_f$ .
- Les branches infinies sont constituées de droites asymptotes et de branches paraboliques.

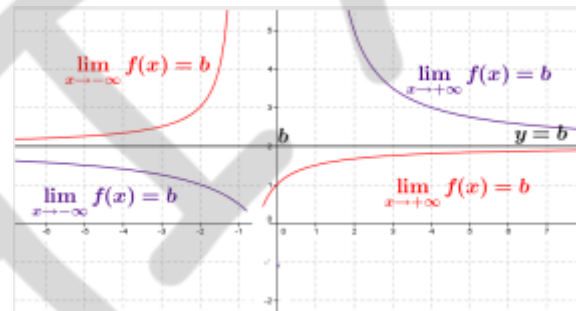
### 1-1 Asymptote horizontale - Asymptote verticale

#### Définitions 2 :

- Lorsque  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm\infty$  ou  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm\infty$  on dit que  $(C_f)$  admet une asymptote verticale d'équation  $x = a$



- Lorsque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$  (Resp.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$ ), on dit que  $(C_f)$  admet une asymptote horizontale d'équation  $y = b$  au voisinage de  $+\infty$  (Resp.  $-\infty$ ).



#### Exemple 1 :

1) Soit  $f$  une fonction définie par  $f(x) = \frac{2x}{x-1}$  ;

On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$  donc  $(C_f)$  admet une asymptote horizontale d'équation  $y = 2$  au voisinage de  $+\infty$ .

2) Soit  $g$  une fonction définie par  $g(x) = \frac{-2}{x-1}$  ;

On a  $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = -\infty$  alors  $(C_g)$  admet une asymptote verticale d'équation  $x = 1$ .

#### Application 1 :

1) Soit  $h$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $h(x) = 3 + \frac{x+1}{x^2+3}$

Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} h(x)$  puis interpréter les résultats graphiquement.

2) Soit  $g$  une fonction définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$  par  $g(x) = \frac{x+5}{(x+2)^2}$

Calculer  $\lim_{x \rightarrow -2} g(x)$  puis interpréter le résultat graphiquement.

3) Soit  $f$  une fonction numérique définie par le tableau de variations suivant :

$x$	$-\infty$	$0$	$2$	$+\infty$
$f(x)$	$1$	$+\infty$	$-\infty$	$1$

a) Déterminer  $D_f$  l'ensemble de définition de la fonction  $f$ .

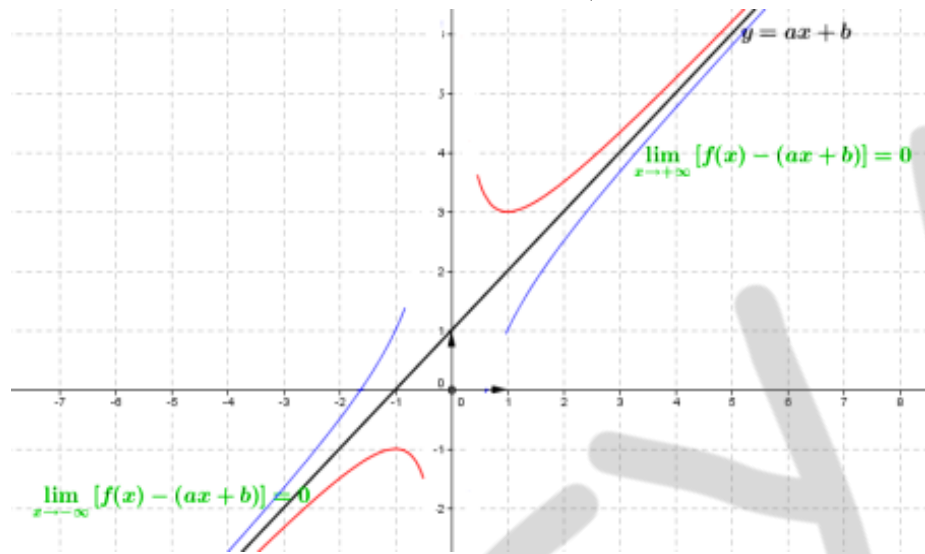
b) Déterminer les limites de  $f$  aux bornes de  $D_f$  puis interpréter les résultats graphiquement.

## 1-2 Asymptote oblique

### Définition 3 :

Soit  $f$  une fonction avec  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty$  (Resp.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \pm\infty$ ).

Lorsque  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$  (Resp.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$ ), on dit que  $(C_f)$  admet une asymptote oblique d'équation  $y = ax + b$  au voisinage de  $+\infty$  (Resp. au voisinage de  $-\infty$ ).



### Exemple 2 :

Soit  $f$  une fonction définie par  $f(x) = 2x - 3 + \frac{3}{x^2}$ .

Montrons que la droite d'équation  $y = 2x - 3$  est une asymptote oblique à  $(C_f)$  au voisinage de  $-\infty$ .

$$\text{On a } \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (2x - 3)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \left( 2x - 3 + \frac{3}{x^2} \right) - (2x - 3) \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x^2} = 0$$

Donc la droite d'équation  $y = 2x - 3$  est une asymptote oblique à la courbe  $(C_f)$  au voisinage de  $-\infty$ .

### Propriété 1 :

Soit  $f$  une fonction avec  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \pm\infty$  (Resp.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \pm\infty$ ).

Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = b$  (Resp.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax) = b$ ), alors  $(C_f)$  admet une asymptote oblique d'équation  $y = ax + b$  au voisinage de  $+\infty$  (Resp. au voisinage de  $-\infty$ ).

### Remarque 1 :

Cette propriété est utilisée lorsqu'on ne donne pas l'équation de l'asymptote oblique dans l'exercice.

### Application 2

Soit  $f$  une fonction définie par :  $f(x) = \frac{2x^2 + 3x - 1}{x + 2}$

1) Montrer que  $(C_f)$  admet une asymptote oblique  $(D)$  au voisinage de  $+\infty$ , en déterminant son équation.

2) Etudier les positions relatives de  $(D)$  et  $(C_f)$ .

## Remarque 2 :

Les positions relatives de  $(C_f)$  et la droite  $(D): y = ax + b$  se déduit par l'étude de signe de  $f(x) - (ax + b)$  :

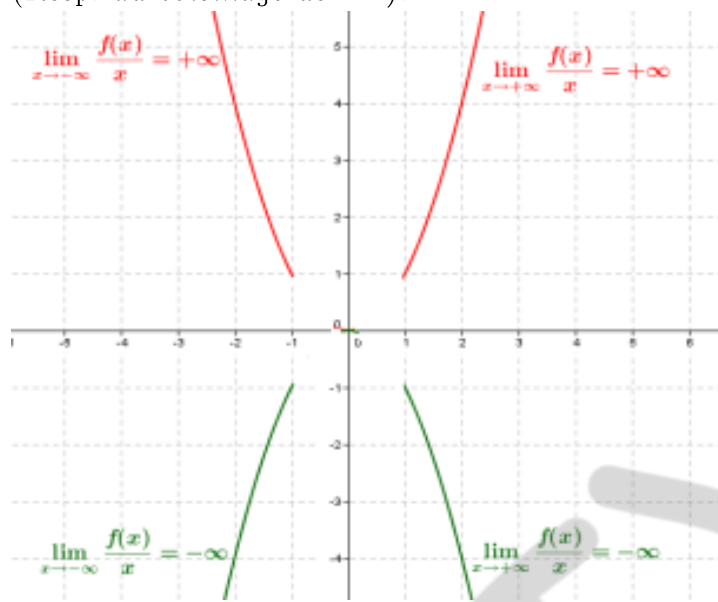
- Si  $f(x) - (ax + b) > 0$  pour tout  $x \in I$ , alors  $(C_f)$  est au-dessus de  $(D)$  sur  $I$ .
- Si  $f(x) - (ax + b) < 0$  pour tout  $x \in I$ , alors  $(C_f)$  est au-dessous de  $(D)$  sur  $I$ .
- Si  $f(x) - (ax + b) = 0$ , alors  $(C_f)$  et  $(D)$  sont confondues aux points d'abscisses  $x$ .

## 1-3 Branches paraboliques

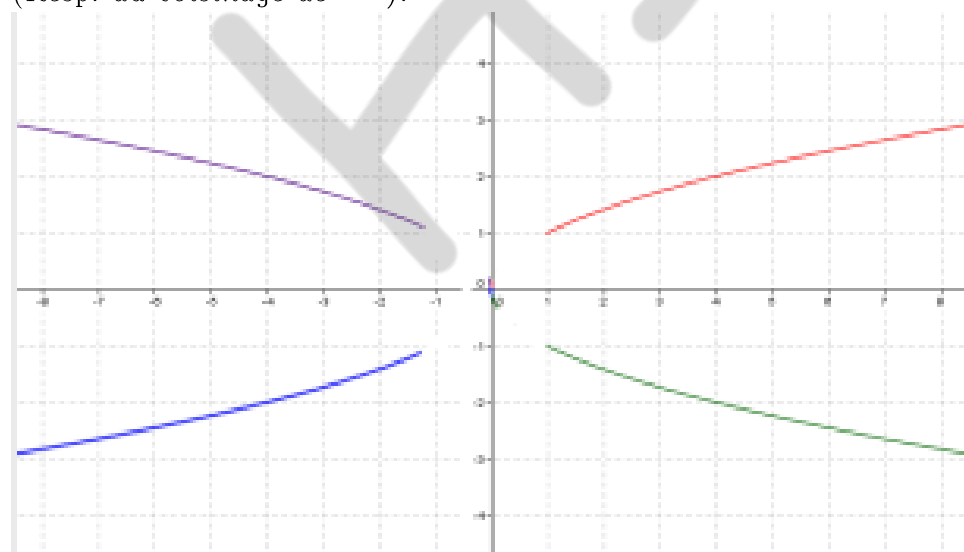
### Définition 4 :

Soit  $f$  une fonction telle que :  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ .

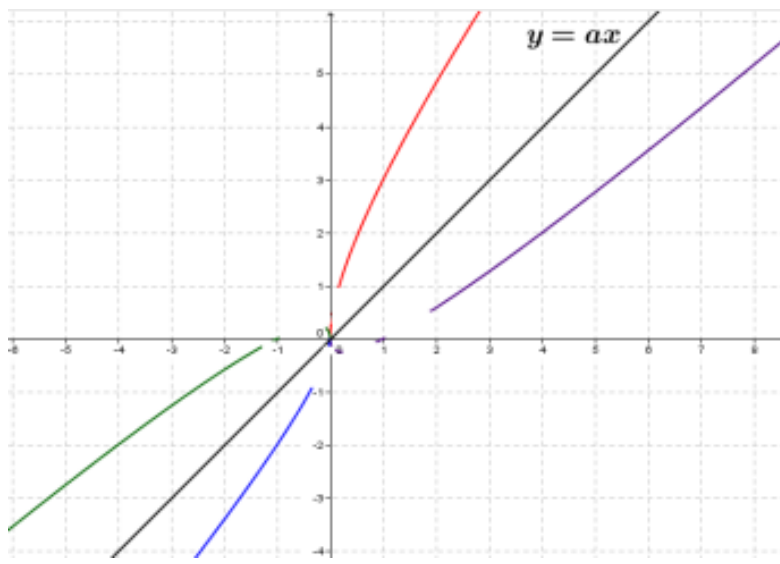
Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$  (Resp.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$ ) alors  $(C_f)$  admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées (ou bien on dit que l'axe des ordonnées est une direction asymptotique à  $(C_f)$ ) au voisinage de  $+\infty$  (Resp. au voisinage de  $-\infty$ ).



Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$  (Resp.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ ) alors  $(C_f)$  admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses (ou bien on dit que l'axe des abscisses est une direction asymptotique à  $(C_f)$ ) au voisinage de  $+\infty$  (Resp. au voisinage de  $-\infty$ ).



Si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = \pm\infty$  (Resp.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax) = \pm\infty$ ) alors  $(C_f)$  admet une branche parabolique de direction la droite d'équation  $y = ax$  (ou bien on dit que la droite d'équation  $y = ax$  est une direction asymptotique à  $(C_f)$ ) au voisinage de  $+\infty$  (Resp. au voisinage de  $-\infty$ ).



### Application 3

Etudier les branches paraboliques de  $(C_f)$  au voisinage de  $+\infty$  dans les cas suivants :

1)  $f(x) = 2x^3 - x$

2)  $f(x) = 2x + 3\sqrt{x}$

3)  $f(x) = \sqrt{3x+2}$

### Remarques 3 :

• Quand on demande d'interpréter graphiquement les limites aux bornes du domaine de définition d'une fonction, ça veut dire donner les branches infinies (Asymptotes et branches paraboliques) éventuelles de  $(C_f)$  en précisant les équations des asymptotes et des directions asymptotiques et leurs voisinages.

•  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$  n'est pas suffisante pour affirmer qu'on a une branche parabolique mais il faut s'assurer d'abord qu'on a :  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$ .

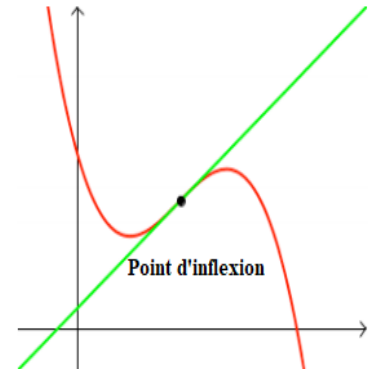
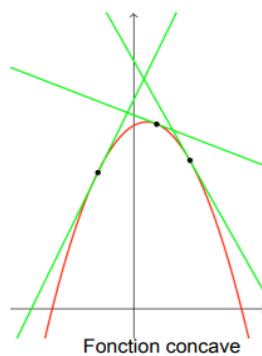
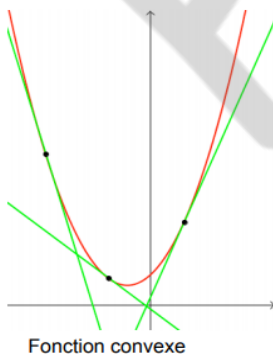
Par exemple : La fonction  $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ , on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x)}{x^2} = 0$ , mais la fonction  $f$  n'admet pas de branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de  $+\infty$  car elle le coupe indéfiniment aux points d'abscisses  $x_0 = k\pi$  avec  $k \in \mathbb{Z}^*$ .

## 2) Concavité d'une courbe

### Définition 5 :

Soit  $f$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ .

- On dit que  $(C_f)$  est convexe sur  $I$ , si  $(C_f)$  est entièrement située au-dessus de chacune de ses tangentes.
- On dit que  $(C_f)$  est concave sur  $I$ , si  $(C_f)$  est entièrement située au-dessous de chacune de ses tangentes.
- On appelle point d'inflexion de  $(C_f)$ , tout point où elle change de concavité.



### Propriété 2 :

Soit  $f$  une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle  $I$  et  $a \in I$ .

- $(C_f)$  est convexe sur  $I \Leftrightarrow (\forall x \in I) f''(x) \geq 0$
- $(C_f)$  est concave sur  $I \Leftrightarrow (\forall x \in I) f''(x) \leq 0$
- $f''(a) = 0$  et  $f''$  change de signe au voisinage de  $a \Rightarrow$  le point  $A(a, f(a))$  est un point d'inflexion de  $(C_f)$

### Exemple 3

Etudions la concavité de  $(C_f)$  où  $f$  est la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^3 - 3x^2 + x + 4$

On a  $(\forall x \in \mathbb{R}); f'(x) = 3x^2 - 6x + 1$  donc  $(\forall x \in \mathbb{R}); f''(x) = 6x - 6 = 6(x - 1)$

On a  $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 6(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$x$	$-\infty$	$1$	$+\infty$
$x-1$	-	0	+
$f''(x)$	-	0	+
$(C_f)$	concave		convexe

$f''(1) = 0$  et  $f''$  change de signe au voisinage de 1 donc le point  $A(1; f(1) = 3)$  est un point d'inflexion de  $(C_f)$ .

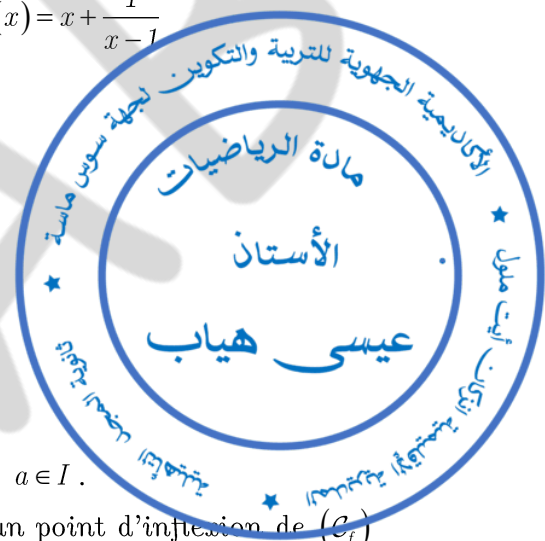
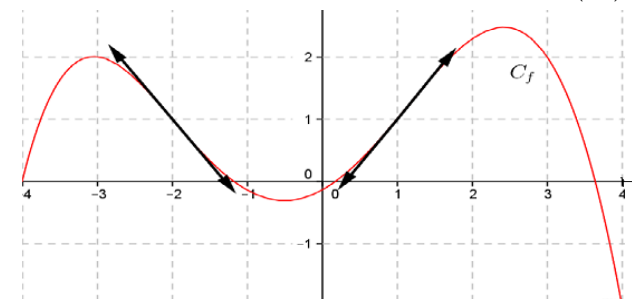
### Application 4 :

Etudier la concavité de  $(C_f)$  en précisant les points d'inflexion s'ils existent dans les cas suivants :

1)  $f(x) = \frac{1}{12}x^4 - 2x^3 + 3x + 5$

2)  $f(x) = x + \frac{1}{x-1}$

**Application 5 :** Etudier la concavité de  $(C_f)$  sur l'intervalle  $[-4; 4]$



### Propriétés 3 :

Soit  $f$  une fonction définie et deux fois dérivable sur un intervalle  $I$  et  $a \in I$ .

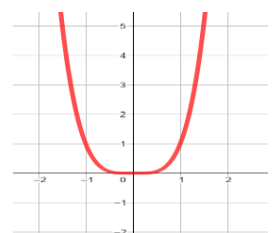
- $f'$  change de monotonie au voisinage de  $a \Rightarrow$  le point  $A(a; f(a))$  est un point d'inflexion de  $(C_f)$
- $f'(a) = 0$  et  $f'$  ne change pas de signe au voisinage de  $a \Rightarrow$  le point  $A(a; f(a))$  est un point d'inflexion de  $(C_f)$

### Remarques 4 :

- $f''(a) = 0$  ne suffit pas pour affirmer que le point d'abscisse  $a$  est un point d'inflexion de  $(C_f)$  mais il faut vérifier de plus si  $f''$  change de signe au voisinage de  $a$ .

Par exemple : La fonction définie par  $f(x) = x^4$ ,

On a  $f''(0) = 0$  mais la courbe  $(C_f)$  n'admet pas de point d'inflexion en  $a = 0$  comme l'indique le graphe ci-contre.



- Une fonction peut admettre plusieurs points d'inflexion.

Par exemple : La fonction  $f$  définie par  $f(x) = x^4 - 2x^3$

On a  $\forall x \in \mathbb{R} : f'(x) = 4x^3 - 6x^2 = 2x^2(2x - 3)$  donc on obtient le tableau de variations ci-dessous (facile à trouver) :

$x$	$-\infty$	$0$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+
$f(x)$	$+\infty$	$0$	$-\frac{27}{16}$	$+\infty$

On a  $\forall x \in \mathbb{R} : f''(x) = (4x^3 - 6x^2)' = 12x^2 - 12x = 12x(x - 1)$  donc on obtient le tableau de signe de  $f''$  suivant (facile à trouver) :

$x$	$-\infty$	$0$	$1$	$+\infty$		
$f''(x)$		+	0	-	0	+

On constate donc que  $(C_f)$  admet deux points d'inflexion en  $a = 0$  et en  $a = 1$  et non pas un seul.

### 3) Eléments de symétrie d'une courbe

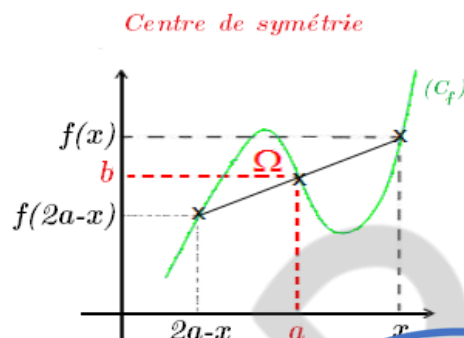
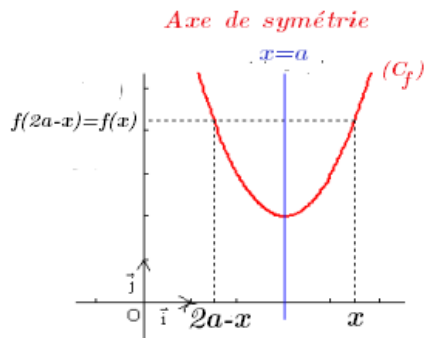
#### Propriété 4 :

- Le point  $\Omega(a;b)$  est un centre de symétrie de  $(C_f)$ , si et seulement si, pour tout  $x \in D_f$ , on a :

$$2a-x \in D_f \text{ et } f(2a-x) = 2b - f(x)$$

- La droite  $(\Delta)$  d'équation  $x=a$  est un axe de symétrie de  $(C_f)$ , si et seulement si, pour tout  $x \in D_f$ , on a :

$$2a-x \in D_f \text{ et } f(2a-x) = f(x)$$



#### Exemple 4 :

Soit  $f$  la fonction numérique définie par  $f(x) = \frac{x}{x+1}$

Montrons que le point  $\Omega(-1;1)$  est un centre de symétrie de  $(C_f)$  :

\* On a  $a=-1$ ,  $b=1$  et  $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ ,

\* Soit  $x \in D_f$ , montrons que  $-2-x \in D_f$

On a  $x \neq -1 \Leftrightarrow -x \neq 1 \Leftrightarrow -2-x \neq -2+1 \Leftrightarrow -2-x \neq -1$ . Donc  $-2-x \in D_f$

\* Soit  $x \in D_f$ , montrons que  $f(2a-x) = 2b - f(x)$

$$\text{On a } f(2a-x) = f(-2-x) = \frac{(-2-x)}{(-2-x)+1} = \frac{2+x}{x+1}$$

$$\text{Et } 2b - f(x) = 2 \times 1 - f(x) = 2 - \frac{x}{x+1} = \frac{2(x+1) - x}{x+1} = \frac{x+2}{x+1}$$

D'où  $f(2a-x) = 2b - f(x)$  C.Q.F.D

#### Exemple 5

Soit  $f$  la fonction numérique définie par  $f(x) = 3x^2 - 2x + 5$

Montrons que la droite d'équation  $x = \frac{1}{3}$  est un axe de symétrie de  $(C_f)$  :

\* On a  $a = \frac{1}{3}$  et  $D_f = \mathbb{R}$

\* Donc pour tout  $x \in D_f$  on a  $(2a-x) = \frac{2}{3} - x \in D_f$

\* Pour tout  $x \in D_f$  on a  $f(2a-x) = f\left(\frac{2}{3} - x\right) = 3\left(\frac{2}{3} - x\right)^2 - 2\left(\frac{2}{3} - x\right) + 5 = \dots = 3x^2 - 2x + 5 = f(x)$

D'où  $f(2a-x) = f(x)$  C.Q.F.D

#### Application 6

Soit  $f$  la fonction numérique définie par  $f(x) = x + 2 + \frac{4}{x+3}$

Montrer que le point  $A(-3;-1)$  est un centre de symétrie de  $(C_f)$ .

#### Application 7

Soit  $f$  la fonction numérique définie par  $f(x) = \frac{-3}{x^2 - 4x + 7}$

Montrer que la droite d'équation  $x=2$  est un axe de symétrie de  $(C_f)$ .



### Cas particuliers :

- Si  $f$  est une fonction impaire alors la courbe  $(C_f)$  admet comme centre de symétrie le point de coordonnées  $(0;0)$  (C'est à dire l'origine du repère).
- Une hyperbole, qui est la courbe d'une fonction homographique  $x \mapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ , (avec  $c \neq 0$  et  $ad-bc \neq 0$ ) admet comme centre de symétrie le point  $\Omega\left(\frac{-d}{c}; \frac{a}{c}\right)$ .
- Si  $f$  est une fonction paire alors la courbe  $(C_f)$  admet comme axe de symétrie l'axe d'équation  $x=0$  (C'est à dire l'axe des ordonnées).
- Une parabole, qui est la courbe d'une fonction polynômiale de degré 2 :  $x \mapsto ax^2 + bx + c$  avec  $a \neq 0$ , admet comme axe de symétrie la droite d'équation  $x = -\frac{b}{2a}$ .

### Remarques 5

- Un centre de symétrie n'est pas forcément un point de la courbe  $(C_f)$  (Par exemples : les hyperboles)
- Les éléments de symétries permettent de réduire l'ensemble sur lequel on étudie une fonction et donc de réduire le coût du travail.

## 4) Construction d'une courbe

### Démarche de la construction d'une courbe

#### ➤ Placer le repère orthogonal ou orthonormé :

- Placer les deux axes du repère, en respectant l'unité de mesure,
- Placer l'élément de symétrie (axiale ou centrale), s'il y a une symétrie,
- Noter le domaine de définition.

#### ➤ Comportement local :

- Placer les points remarquables (extrémums, intersection avec les axes  $(ox)$  et  $(oy)$ ),
- Placer les points d'inflexion, s'il existe,
- Placer les tangentes et les demi-tangentes.

#### ➤ Comportement asymptotique :

- Placer les asymptotes de la courbe, en respectant les positions relatives,
- Esquisser les branches paraboliques.

#### ➤ Finaliser la construction de la courbe :

- Relier, à main levée, tous les éléments présentés ci-dessus, en respectant le tableau de variations de la fonction.

### Exemples 6



### Application 8 :

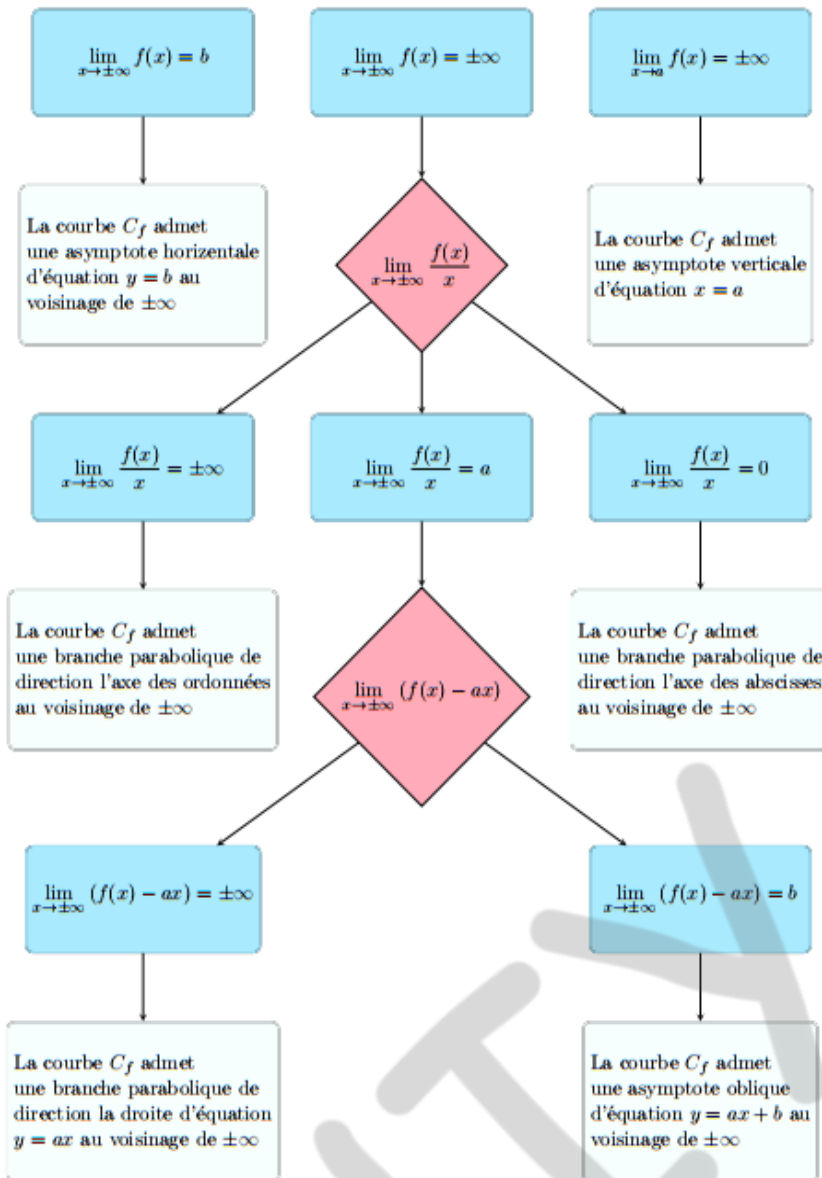
Exercice 1 de la série 03

### Remarque 6 : compléments de cours

- 1) Résolution graphique des équations et des inéquations.
- 2) Intersection de la courbe avec les axes du repère.
- 3) Tangentes et demi-tangentes (interprétation graphique de la dérivabilité en un point)

# Résumé 3 : Etude de fonctions

## Branches infinies de $(C_f)$



$(C_f)$  admet une asymptote oblique d'équation  $y = ax + b$  au voisinage de  $\pm\infty$  si  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$

## Concavité de $(C_f)$

La concavité de  $(C_f)$  se déduit par **l'étude de signe de  $f''(x)$**  :

- $(C_f)$  est **convexe** sur  $I \Leftrightarrow (\forall x \in I) f''(x) \geq 0$
- $(C_f)$  est **concave** sur  $I \Leftrightarrow (\forall x \in I) f''(x) \leq 0$
- Si  $f''(a) = 0$  et  $f''$  change de signe au voisinage de  $a$  alors le point  $A(a; f(a))$  est un **point d'inflexion** de  $(C_f)$ .

## Positions relatives de $(C_f)$ et $y = ax + b$

Les positions relatives de  $(C_f)$  et la droite  $(D) : y = ax + b$  se déduit par **l'étude de signe de  $f(x) - (ax + b)$**  :

- Si  $(\forall x \in I) f(x) - (ax + b) > 0$  alors  $(C_f)$  est **au-dessus** de  $(D)$  sur  $I$ .
- Si  $(\forall x \in I) f(x) - (ax + b) < 0$  alors  $(C_f)$  est **au-dessous** de  $(D)$  sur  $I$ .
- Si  $f(x) - (ax + b) = 0$ , alors  $(C_f)$  et  $(D)$  sont **confondues** aux points d'abscisses  $x$ .

## Construction de $(C_{f^{-1}})$ :

$(C_{f^{-1}})$  sur  $J = f(I)$  est le symétrique de  $(C_f)$  sur  $I$  par rapport à la droite  $y = x$

## Éléments de symétrie de $(C_f)$

$\Omega(a; b)$  est un centre de symétrie de  $(C_f) \Leftrightarrow \forall x \in D_f : 2a - x \in D_f$  et  $f(2a - x) = 2b - f(x)$

$x = a$  est un axe de symétrie de  $(C_f) \Leftrightarrow \forall x \in D_f : 2a - x \in D_f$  et  $f(2a - x) = f(x)$

## Méthode de construction de $(C_f)$ :

- Construire **les asymptotes** et **les branches paraboliques** ;
- Construire **les tangentes** et **les demi-tangentes** ;
- Construire **les points remarquables de  $(C_f)$**  s'ils existent : (Points d'inflexion, points d'intersection avec les axes du repère, les extremums et le centre de symétrie)
- Construire  $(C_f)$  à **partir du tableau de variations de  $f$**

N.B : N'oublier pas de respecter **l'unité de mesure du repère, les positions relatives, la concavité** et **tenant compte le centre ou l'axe de symétrie** (s'il existe).

**Exercice 1 : Branches infinies - Positions relatives - Construction de la courbe**

Soit  $f$  la fonction numérique définie par  $f(x) = x - 1 + \sqrt{x-1}$

- 1) Vérifier que  $D_f = [1; +\infty[$  puis calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
- 2) Etudier les branches infinies de  $(C_f)$  au voisinage de  $+\infty$
- 3) Etudier la dérivabilité de  $f$  à droite en 1, puis interpréter le résultat graphiquement.
- 4) a) Montrer que  $(\forall x \in ]1; +\infty[) f'(x) = \frac{2\sqrt{x-1}+1}{2\sqrt{x-1}}$   
 b) En déduire les variations de  $f$
- 5)- a) Montrer que  $(\forall x \in [1; +\infty[) f(x) - x = \frac{x-2}{\sqrt{x-1}+1}$   
 b) En déduire les positions relatives de  $(C_f)$  et la droite  $(D)$  d'équation  $y = x$
- 6)- Tracer  $(C_f)$  dans un repère orthonormé.
- 7)- a) Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  à déterminer.  
 b) Tracer  $(C_{f^{-1}})$  avec une autre couleur et dans le même repère précédent.

**Exercice 2 : Concavité**

Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $[1, +\infty[$  par :  $f(x) = x\sqrt{x-1}$ .

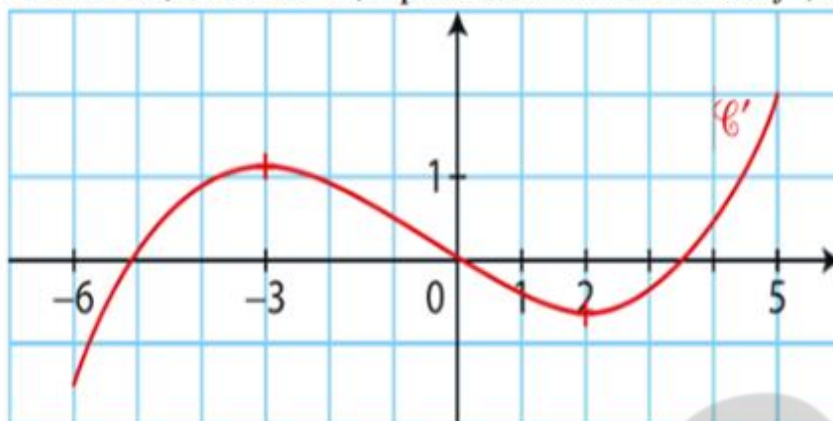
- 1)- Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
- 2)- Étudier la continuité de  $f$  sur  $[1, +\infty[$ .
- 3)- Déterminer la branche infinie de  $(C_f)$  au voisinage de  $+\infty$ .
- 4)- Étudier la dérivabilité de  $f$  à droite en 1, puis interpréter le résultat graphiquement.
- 5)- a)- Montrer que :  $\forall x \in ]1, +\infty[, f'(x) = \frac{3x-2}{2\sqrt{x-1}}$   
 b)- En déduire les variations de  $f$ .
- 6)- a)- Montrer que :  $\forall x \in ]1, +\infty[, f''(x) = \frac{3x-2}{2\sqrt{(x-1)^3}}$   
 b)- Etudier la concavité de  $(C_f)$
- 7)- Étudier la position relative de  $(C_f)$  et la première bissectrice du repère.
- 8)- Tracer  $(C_f)$  dans un repère orthonormé.
- 9)- a)- Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  à déterminer.  
 b)- Montrer que  $f^{-1}$  est dérivable en 10, puis déterminer  $(f^{-1})'(10)$  (remarquer que  $10 = f(5)$ )
- 10)- Tracer avec une autre couleur et dans le même repère précédent  $(C_{f^{-1}})$ .



### Exercice 3 : Lecture graphique

Soit  $f$  une fonction deux fois dérivable sur l'intervalle  $[-6; 5]$

On donne dans le repère ci-dessous, la courbe  $\mathcal{C}'$ , représentative de la fonction  $f'$ , dérivée de  $f$ .



- 1)- Dresser le tableau de variations de  $f$  sur l'intervalle  $[-6; 5]$ .
- 2)- Étudier la concavité de  $f$  sur l'intervalle  $[-6; 5]$  et préciser les abscisses des points d'inflexion de la courbe  $\mathcal{C}$  représentative de la fonction  $f$ .

### Exercice 4 : Problème 1

Soit  $f$  la fonction numérique définie par :  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-1}}$ .

- 1)- Vérifier que :  $D_f = [0, 1[ \cup ]1, +\infty[$ , puis calculer les limites de  $f$  aux bornes de  $D_f$ .
- 2)- Déterminer les deux branches infinies de  $(\mathcal{C}_f)$ .
- 3)- Étudier la dérivabilité de  $f$  à droite en 0, puis interpréter le résultat graphiquement.

4)- a)- Montrer que :  $\forall x \in D_f - \{0\}, f'(x) = \frac{\sqrt{x}-2}{2(\sqrt{x}-1)^2}$

b)- Dresser le tableau de variations de  $f$ .

5)- Montrer que  $(\mathcal{C}_f)$  coupe la première bissectrice du repère en deux points différents à déterminer.

6)- Tracer  $(\mathcal{C}_f)$  dans un repère orthonormé (on admet que le point d'abscisse 9 est un point d'inflexion).

7)- On admet que  $g$  la restriction de  $f$  sur l'intervalle  $[0, 1[$  admet une fonction réciproque notée  $g^{-1}$ .

Tracer avec une autre couleur et dans le même repère précédent  $(\mathcal{C}_{g^{-1}})$ .



## Exercice 5 : Problème 2

### Partie A :

Soit  $u$  la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $u(x) = 7x^3 + 6x + 1$ .

- 1)- Déterminer  $u'(x)$ , pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ .
- 2)- Dresser le tableau de variations de  $u$  (*Les limites ne sont pas demandées*).
- 3)- En déduire que :  $\forall x \in [0, +\infty[$ ,  $u(x) > 0$ .

### Partie B :

Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $[0, +\infty[$  par :  $f(x) = (x^3 + 2x + 1)\sqrt{x} - 3$ .

- 1)- Montrer que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ , puis déterminer la branche infinie de  $f$  au voisinage de  $+\infty$ .
- 2)- Montrer que  $f$  est continue sur  $[0, +\infty[$ .
- 3)- Étudier la dérivabilité de  $f$  à droite en  $0$ , puis interpréter le résultat graphiquement.
- 4)- a)- Montrer que :  $\forall x \in ]0, +\infty[$ ,  $f'(x) = \frac{u(x)}{2\sqrt{x}}$ .  
b)- En utilisant la question A.3), déduire que  $f$  est strictement croissante sur  $[0, +\infty[$ .
- 5)- Montrer que  $(\mathcal{C}_f)$  coupe l'axe des abscisses en un seul point d'abscisse  $\alpha$ , puis vérifier que :  $0,8 < \alpha < 0,9$ .
- 6)- Déterminer l'équation de la tangente  $(T)$  à la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  représentant la fonction  $f$  au point d'abscisse  $1$ .
- 7)- Tracer  $(T)$  et  $(\mathcal{C}_f)$  dans un repère orthonormé (**on admet que  $(\mathcal{C}_f)$  possède un point d'inflexion d'abscisse  $\beta \approx 0,1$** ) « unité :  $2\text{cm}$  ».
- 8)- a)- Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  à déterminer.  
b)- Tracer dans le même repère précédent et avec une autre couleur la courbe  $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$ .

## Exercice 6 : Problème 3

### Partie A :

Soit  $g$  la fonction numérique sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = x^3 - x^2 + 3x + 1$ .

- 1)- Calculer les limites de  $g$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .
- 2)- Étudier les variations de  $g$  sur  $\mathbb{R}$ .
- 3)- Montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une seule solution  $\alpha$  sur  $\mathbb{R}$ , et que :  $-1 < \alpha < 0$ .
- 4)- Déterminer le signe de  $g(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .

### Partie B :

Soit  $f$  la fonction numérique définie par :  $f(x) = x - \frac{2}{x^2 + 1}$ .

- 1)- Déterminer  $D_f$ , puis calculer les limites de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$ .
- 2)- Étudier la continuité de  $f$  sur  $D_f$ .
- 3)- Montrer que :  $\forall x \in D_f$ ,  $f'(x) = \frac{(x+1)g(x)}{(x^2+1)^2}$ .
- 4)- Étudier les variations de  $f$ , puis dresser son tableau de variations.
- 5)- Vérifier que la première bissectrice du repère est l'asymptote oblique de  $(\mathcal{C}_f)$  au voisinage de  $-\infty$  et de  $+\infty$ .
- 6)- Étudier la position relative de  $(\mathcal{C}_f)$  et la première bissectrice du repère.
- 7)- Soit  $h$  la restriction de  $f$  sur un l'intervalle  $I = [0, +\infty[$ .  
a)- Montrer que  $h$  admet une fonction réciproque  $h^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  à déterminer.  
b)- Dresser le tableau de variations de  $h^{-1}$ .



04

# Suites numériques



## 1) Rappel

- Une suite numérique est une fonction définie sur  $\mathbb{N}$  ou une partie de  $\mathbb{N}$ .
- Une suite numérique  $(u_n)_{n \in I}$  peut être définie :
  - Formule explicite : À partir d'une fonction  $f$  de la variable  $n$  :  $u_n = f(n)$ .
  - Formule récurrente : À partir d'une relation de récurrence :  $(u_n)_{n \in I}$  est alors définie par son premier terme et une relation permettant de calculer un terme à partir d'un ou plusieurs termes précédents.

- La suite  $(u_n)_{n \in I}$  est majorée par  $M \Leftrightarrow (\forall n \in I) \quad u_n \leq M$
- La suite  $(u_n)_{n \in I}$  est minorée par  $m \Leftrightarrow (\forall n \in I) \quad u_n \geq m$
- La suite  $(u_n)_{n \in I}$  est bornée lorsqu'elle est majorée et minorée.

- $(u_n)_{n \in I}$  est une suite croissante  $\Leftrightarrow (\forall n \in I) \quad u_{n+1} - u_n \geq 0$ .
- $(u_n)_{n \in I}$  est une suite décroissante  $\Leftrightarrow (\forall n \in I) \quad u_{n+1} - u_n \leq 0$ .
- $(u_n)_{n \in I}$  est une suite constante  $\Leftrightarrow (\forall n \in I) \quad u_{n+1} = u_n$ .

	Arithmétique	Géométrique
Comment montrer qu'une suite numérique $(v_n)_{n \in I}$ est une suite :	$v_{n+1} - v_n = r$	$v_{n+1} = qv_n$
Comment déterminer $v_n$ en fonction de $n$ si $(v_n)_{n \in I}$ est une suite :	$v_n = v_p + (n - p)r$ ( $p = 0$ ou $p = 1$ ou.....)	$v_n = v_p \times q^{n-p}$ ( $p = 0$ ou $p = 1$ ou.....)
Comment calculer la somme des termes consécutifs de la suite $(v_n)_{n \in I}$ si $(v_n)_{n \in I}$ est une suite :	$v_p + v_{p+1} + \dots + v_n = \frac{(n-p+1)}{2} \times (v_p + v_n)$	$v_p + v_{p+1} + \dots + v_n = v_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$
Si $a, b$ et $c$ dans cet ordre sont des termes consécutifs d'une suite	alors $b = \frac{a+c}{2}$	alors $b^2 = a \times c$

### Principe de récurrence :

Soit  $P(n)$  une fonction propositionnelle sur  $\mathbb{N}$  et  $n_0 \in \mathbb{N}$ .

Pour montrer que la proposition  $(\forall n \geq n_0) P(n)$  est vraie, on suit les étapes suivantes :

- Initialisation : On vérifie que  $P(n_0)$  est vraie.
- Hérédité : Soit  $n \geq n_0$ , on suppose que  $P(n)$  est vraie et on montre que  $P(n+1)$  est vraie.

### Exemple 1 :

Soit  $(u_n)$  la suite numérique définie par :  $u_0 = -1$  et  $u_{n+1} = \frac{9}{6 - u_n}$ .

- 1) Calculer  $u_1$  et  $u_2$
- 2) Montrer par récurrence que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n < 3$
- 3) Etudier la monotonie de la suite  $(u_n)$



4) On considère la suite  $(v_n)$  définie par :  $v_n = \frac{1}{u_n - 3}$

a) Calculer  $v_0$  et  $v_1$

Montrer que  $(v_n)$  est une suite arithmétique. Préciser la raison et le premier terme.

b) Exprimer  $v_n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$ .

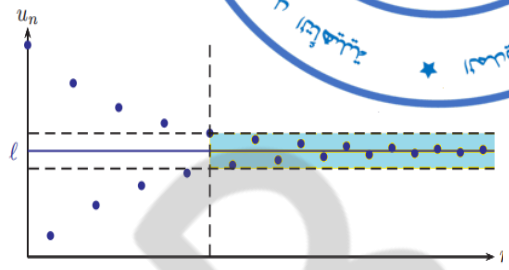
5) Calculer en fonction de  $n$  la somme :  $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$ .

## 2) Limites de suites de références :

### 1) Limite finie d'une suite :

• On dit que la limite de la suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est le nombre réel  $l$  si tout intervalle ouvert centré en  $l$  contient tous les termes de la suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  à partir d'un certain rang.

• On écrit  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$  ou  $\lim u_n = l$ .



### 2) Limite infinie d'une suite :

• On dit que la limite de la suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est  $+\infty$  si tout intervalle de type  $]A; +\infty[$ , où  $A > 0$ , contient tous les termes de la suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  à partir d'un certain rang.

On écrit  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$  ou  $\lim u_n = +\infty$ .

• On dit que la limite de la suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est  $-\infty$  si tout intervalle de type  $]-\infty; -A[$ , où  $A > 0$ , contient tous les termes de la suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  à partir d'un certain rang.

On écrit  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$  ou  $\lim u_n = -\infty$ .

### 3) Limite de suites de références :

Soit  $p$  un entier naturel non nul, et  $\alpha$  un nombre réel. On a :

•  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^p = +\infty$  ;  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[p]{n} = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha}{n^p} = 0$  ;  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha}{\sqrt[p]{n}} = 0$ .

En particulier :

•  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$  ;  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^2 = +\infty$  ;  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 = +\infty$ .

•  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$  ;  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{n} = +\infty$ .

•  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$  ;  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$  ;  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$  ;  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0$ .

### 4) Suite convergente – suite divergente

Soit  $(u_n)_{n \geq n_0}$  une suite numérique.

• On dit que la suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est convergente s'il admet une limite finie.

• On dit que la suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est divergente s'il n'a pas de limite ou s'il admet une limite infinie.

- La limite d'une suite numérique, lorsqu'elle existe, est unique.
- Soit  $l \in \mathbb{R}$ , on a :  
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - l) = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$  et  
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} |u_n - l| = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ .
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (-u_n) = -\infty$ .
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (-u_n) = +\infty$ .
- Si  $u_n = f(n)$  tel que  $f$  est une fonction numérique définie sur un intervalle de type  $]A; +\infty[$  et si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$  (tel que  $l \in \mathbb{R}$ , ou  $l = +\infty$  ou  $l = -\infty$ ) alors :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ .
- l'étude de la limite d'une suite numérique  $(u_n)_{n \geq n_0}$  se fait seulement quand  $n$  tend vers  $+\infty$  donc on peut écrire  $\lim u_n$  au lieu de  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

### Exemple 2 :

Soit  $(u_n)_{n \geq 1}$  la suite numérique définie par  $u_n = \frac{(-1)^n + 5n^4}{n^4}$ . Montrer que :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 5$ .

### 5) Remarque : Opérations sur les limites des suites- Limite et ordre :

1) On admet que les opérations sur les limites des fonctions en  $+\infty$  restent aussi valables pour les limites des suites.

2) Soit  $(u_n)_{n \geq n_0}$  et  $(v_n)_{n \geq p}$  deux suites numériques convergentes.

- Si à partir d'un certain rang on a :  $u_n > v_n$ , alors :  $\lim u_n \geq \lim v_n$ .
- En particulier : si à partir d'un certain rang on a :  $u_n > 0$ , alors :  $\lim u_n \geq 0$ .

**Exemple 3 :**

Calculer les limites suivantes :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} - \frac{5}{\sqrt[3]{n}} + 1$  ;  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4n^2 - 8n + 3$  ;  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 - 5n + 1}{-n^2 + 6n + 7}$  ;  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^2 - 5n + 3} - n$ .

**Exemple 4 (Exam. Nat. 2016 S.R)**

Soit  $(u_n)$  la suite numérique définie par  $u_0 = 2$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $u_{n+1} = \frac{1}{16}u_n + \frac{15}{16}$ .

1) a) Montrer par récurrence que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n > 1$ .

b) Vérifier que  $u_{n+1} - u_n = -\frac{15}{16}(u_n - 1)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  puis montrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante.

c) En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente.

2) Soit  $(v_n)$  la suite définie par  $v_n = u_n - 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

a) Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{16}$  puis exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ .

b) Montrer que  $u_n = 1 + \left(\frac{1}{16}\right)^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  puis déterminer la limite de la suite  $(u_n)$ .

### 3) Théorème de la convergence monotone

**Théorème :**

- Toute suite croissante et majorée est convergente.
- Toute suite décroissante et minorée est convergente.

**Exemple 5 :**

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = \frac{5}{4}$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{3}{2}$ .

1) Montrer par récurrence que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n < 2$ .

2) Montrer que la suite  $(u_n)$  est croissante.

3) En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente.

### 4) Critères de convergence

**Propriétés :**

$\alpha$  est un nombre réel strictement positif.

1) Soient  $(u_n)_{n \geq n_0}$  et  $(v_n)_{n \geq p}$  deux suites numériques tels qu'à partir d'un certain rang on a :  $v_n \geq \alpha u_n$ .

• Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ , alors :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ .

• Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ , alors :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ .

2) Soient  $(v_n)_{n \geq p}$  et  $(w_n)_{n \geq q}$  deux suites numériques convergentes et  $(u_n)_{n \geq n_0}$  une suite tels qu'à partir d'un certain rang on a :  $v_n \leq u_n \leq w_n$ .

• Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l$ , alors :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ .

3) Soient  $(v_n)_{n \geq p}$  une suite numérique et  $(u_n)_{n \geq n_0}$  une suite telles qu'à partir d'un certain rang on a :

$$|u_n - l| \leq \alpha v_n.$$

• Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ , alors :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ .

### Exemple 6 :

On considère la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_n = \sin\left(\frac{\pi}{3}n\right) + n^3 + 1$ .

1) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n \geq n^3$ .

2) En déduire la limite de la suite  $(u_n)$ .

### Exemple 7 :

On considère la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  définie par :  $u_n = \frac{\cos(n^2)}{\sqrt[5]{n}} - 4$ .

1) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \frac{-1}{\sqrt[5]{n}} - 4 \leq u_n \leq \frac{1}{\sqrt[5]{n}} - 4$ .

2) En déduire la limite de la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$ .

### Exemple 8 :

On considère la suite  $(u_n)$  définie par :  $u_n = 1 + \frac{(-1)^n \pi}{n+2}$ .

1) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad |u_n - 1| < \frac{\pi}{n}$ .

2) En déduire la limite de la suite  $(u_n)$ .

## 5) Limites des suites : $(a^n)_n$ et $(n^\alpha)_n$ :

### 1) Limite de la suite $(a^n)_n$ :

Soit  $a$  un nombre réel non nul.

• Si  $a > 1$ , alors :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = +\infty$ .

• Si  $-1 < a < 1$ , alors :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 0$ .

• Si  $a = 1$ , alors :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 1$ .

• Si  $a \leq -1$ , alors la suite  $(a^n)_n$  n'admet pas de limite.

### 2) Limite de la suite $(n^\alpha)_n$ :

Soit  $\alpha$  un nombre rationnel non nul.

• Si  $\alpha > 0$ , alors :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = +\infty$ .

• Si  $\alpha < 0$ , alors :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = 0$ .

### Exemple 9 :

Dans chacun des cas suivants déterminer la limite de la suite  $(u_n)$  :

$$u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n ; \quad u_n = \left(\frac{8}{3}\right)^n ; \quad u_n = \left(-\frac{5}{2}\right)^n ; \quad u_n = n^{\frac{1}{2}} ; \quad u_n = n^{-\frac{5}{2}} .$$

### Exemple 10 :

Dans chacun des cas suivants déterminer la limite de la suite  $(u_n)$  :

$$u_n = \frac{2}{7^n} ; \quad u_n = \frac{3^n + 2^n}{4^n} ; \quad u_n = \frac{5^n + 2^n}{5^n - 2^n} ; \quad u_n = n^{\frac{1}{3}} - n^{\frac{2}{3}}$$

### Exemple 11 :

Soit  $l$  un nombre réel et  $(u_n)$  une suite numérique vérifiant :  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |u_{n+1} - l| \leq k|u_n - l|$  où  $k \in ]0; 1[$ .

1) Montrer par deux méthodes que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad |u_n - l| \leq k^n |u_0 - l|$

2) En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente et déterminer sa limite.



## 6) Limites de suites de la forme $v_n = f(u_n)$ ou $u_{n+1} = f(u_n)$

### 1) Limite de la suite $(v_n)_{n \geq n_0}$ tel que $v_n = f(u_n)$ :

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et  $(u_n)_{n \geq n_0}$  une suite numérique tel que :

$u_n \in I$  pour tout  $n \geq n_0$  .

$(v_n)_{n \geq n_0}$  la suite définie par :  $n \geq n_0$  ;  $v_n = f(u_n)$  .

Si :

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ .
- $f$  est continue en  $l$  .

Alors la suite  $(v_n)_{n \geq n_0}$  est convergente et sa limite est :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = f(l)$  .

#### Exemple 12 :

Déterminer la limite de la suite  $(v_n)$  définie par :  $v_n = \tan\left(\frac{\pi + (-0.8)^n}{6 + (-0.8)^n}\right)$  .

### 2) Limite de la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ tel que $u_{n+1} = f(u_n)$ :

#### Théorème :

Soient  $I$  un intervalle fermé de  $\mathbb{R}$ , et  $f$  est une fonction définie sur  $I$  .

Notons  $(u_n)_{n_0}$  la suite définie par la relation  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

Si : 1)  $u_{n_0} \in I$  ; 2)  $f$  est continue sur  $I$  ; 3)  $f(I) \subset I$  ; 4) la suite  $(u_n)_{n_0}$  est convergente

Alors la limite de la suite  $(u_n)_{n_0}$  est une solution de l'équation  $f(x) = x$  dans  $I$

#### Remarques :

- Si les termes de la suite  $(u_n)_{n_0}$  sont contenus dans un intervalle ouvert de la forme  $]a; b[$ ,  $]-\infty; a[$  ou  $]a; +\infty[$ , alors on choisit comme intervalle  $I$  respectivement  $[a; b]$ ,  $]-\infty; a]$ , ou  $[a; \infty[$ .
- Dans le cas où l'équation  $f(x) = x$  admet plusieurs solutions sur l'intervalle  $I$  :
  - Si la suite  $(u_n)_{n_0}$  est croissante, alors  $l > u_{n_0}$ .
  - Si la suite  $(u_n)_{n_0}$  est décroissante, alors  $l < u_{n_0}$ .
- Graphiquement, les solutions de l'équation  $f(x) = x$  sur l'intervalle  $I$ , sont les abscisses des points d'intersection de la courbe  $(C_f)$  avec la droite d'équation  $y = x$  (appelée la première bissectrice), appartenant à l'intervalle  $I$ .

#### Exemple 13 :

Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $I = [-1; 2]$  par :  $f(x) = \frac{4x+2}{x+3}$  .

On considère la suite numérique  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

- 1) Etudier les variations de la fonction  $f$  sur  $I$  .
- 2) Montrer que  $f(I) \subset I$  .
- 3) Montrer par récurrence que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) -1 \leq u_n \leq 2$  .
- 4) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n+1)(u_n-2)}{u_n+3}$  .
- 5) Etudier la monotonie de la suite  $(u_n)$  .
- 6) En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente et déterminer sa limite.



# Résumé 4 : Suites numériques

## Monotonie d'une suite numérique :

- Une suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est croissante si et seulement si  
 $(\forall n \geq n_0) \quad u_{n+1} - u_n \geq 0$ .
- Une suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est décroissante si et seulement si  
 $(\forall n \geq n_0) \quad u_{n+1} - u_n \leq 0$ .
- Une suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est constante si et seulement si  
 $(\forall n \geq n_0) \quad u_{n+1} = u_n$ .

## Suite majorée-suite minorée-suite bornée :

- Une suite  $(u_n)_{n \geq p}$  est majorée s'il existe un réel  $M$  tel que  
 $(\forall n \geq p) \quad u_n \leq M$ .
- Une suite  $(u_n)_{n \geq p}$  est minorée s'il existe un réel  $m$  tel que  
 $(\forall n \geq p) \quad u_n \geq m$ .
- La suite  $(u_n)_{n \geq p}$  est dite bornée lorsqu'elle est majorée et minorée.

## Suite arithmétique :

- Une suite  $(u_n)_{n \geq p}$  est dite arithmétique s'il existe un nombre réel  $r$  tel que :  $(\forall n \geq p) \quad u_{n+1} = u_n + r$ .

Le nombre  $r$  est appelé raison de la suite arithmétique

$(u_n)_{n \geq p}$   
 $(u_n)_{n \geq 0}$  est une suite arithmétique de raison  $r$

Quels que soit les entiers naturels  $p$  et  $q$  on a

$$u_q = u_p + (q - p)r$$

En particulier  $u_n = u_0 + nr$  ;  $u_n = u_1 + (n - 1)r$ .

- Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique

$$u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = (n - p + 1) \times \frac{u_p + u_n}{2}$$

## Suite géométrique :

- Une suite  $(u_n)_{n \geq p}$  est dite géométrique s'il existe un nombre réel  $q$  tel que :  $(\forall n \geq p) \quad u_{n+1} = qu_n$ .

Le nombre  $q$  est appelé raison de la suite géométrique  $(u_n)_{n \geq p}$

$(u_n)_{n \geq 0}$  est une suite géométrique de raison  $q$

Quels que soit les entiers naturels  $n$  et  $p$  on a  $u_n = u_p \times q^{n-p}$ .

En particulier  $u_n = u_0 \times q^n$  ;  $u_n = u_1 \times q^{n-1}$ .

- Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique de raison  $q \neq 1$

$$u_p + u_{p+1} + \dots + u_n = u_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$$

## Limite de la suite $(a^n)_n$ :

Soit  $a$  un nombre réel non nul.

- Si  $a > 1$ , alors :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = +\infty$ .
- Si  $-1 < a < 1$ , alors :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 0$ .
- Si  $a = 1$ , alors :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a^n = 1$ .
- Si  $a \leq -1$ , alors  $(a^n)_n$  n'admet pas de limite.

## Limite de la suite $(n^\alpha)_n$ :

Soit  $\alpha$  un nombre rationnel non nul.

- Si  $\alpha > 0$ , alors :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = +\infty$ .
- Si  $\alpha < 0$ , alors :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha = 0$ .

## Suite convergente – suite divergente :

Soit  $(u_n)_{n \geq n_0}$  une suite numérique.

- On dit que la suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est convergente s'il admet une limite finie.
- On dit que la suite  $(u_n)_{n \geq n_0}$  est divergente s'il n'a pas de limite ou s'il admet une limite infinie.

## Critères de convergence :

1) Soient  $(u_n)_{n \geq n_0}$  et  $(v_n)_{n \geq p}$  deux suites tels qu'à partir d'un certain rang on a :  $v_n \geq u_n$ .

• Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ , alors :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$ .

• Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ , alors :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ .

2) Soient  $(v_n)_{n \geq p}$  et  $(w_n)_{n \geq q}$  deux suites convergentes et

$(u_n)_{n \geq n_0}$  une suite tels qu'à partir d'un certain rang on a :

$$v_n \leq u_n \leq w_n$$

• Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = l$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = l$ , alors :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ .

3) Soient  $(v_n)_{n \geq p}$  une suite numérique et  $(u_n)_{n \geq n_0}$  une suite telles qu'à partir d'un certain rang on a :  $|u_n - l| \leq v_n$ .

• Si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$ , alors :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ .

## Théorème de la convergence monotone :

- Toute suite croissante et majorée est convergente.
- Toute suite décroissante et minorée est convergente.

## Limite de la suite $(v_n)_{n \geq n_0}$ tel que $v_n = f(u_n)$ :

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et  $(u_n)_{n \geq n_0}$  une suite numérique tel que :

$u_n \in I$  pour tout  $n \geq n_0$ .

$(v_n)_{n \geq n_0}$  la suite définie par :  $n \geq n_0$  ;  $v_n = f(u_n)$ .

Si :

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$ .
- $f$  est continue en  $l$ .

Alors la suite  $(v_n)_{n \geq n_0}$  est convergente et sa limite est :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = f(l)$$

## Limite de la suite $(u_n)_{n \geq n_0}$ tel que $u_{n+1} = f(u_n)$ :

Soient  $I$  un intervalle fermé de  $\mathbb{R}$ , et  $f$  est une fonction définie sur  $I$  avec.

Notons  $(u_n)_{n_0}$  la suite définie par la relation  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

Si :

1)  $u_{n_0} \in I$  ; 2)  $f$  est continue sur  $I$  ; 3)  $f(I) \subset I$  ; 4) la suite  $(u_n)_{n_0}$  est convergente.

Alors la limite de la suite  $(u_n)_{n_0}$  est une solution de l'équation  $f(x) = x$  dans  $I$

**Exercice 1 :**

Soit  $(u_n)$  la suite numérique définie par :

$$u_0 = -1 \text{ et } u_{n+1} = \frac{9}{6 - u_n}.$$

- 1) Calculer  $u_1$  et  $u_2$
- 2) Montrer par récurrence que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n < 3$
- 3) Etudier la monotonie de la suite  $(u_n)$

4) On considère la suite  $(v_n)$  définie par :  $v_n = \frac{1}{u_n - 3}$

- a) Calculer  $v_0$  et  $v_1$
- b) Montrer que  $(v_n)$  est une suite arithmétique.
- c) Exprimer  $v_n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$ .

5) a) Calculer en fonction de  $n$  la somme :

$$S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n.$$

b) En déduire la limite :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ .

**Exercice 2 :**

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 1$  et pour

$$\text{tout } n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 2}.$$

- 1) Montrer par récurrence que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 1 \leq u_n < 2$ .
- 2) Montrer que :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n + 1)(u_n - 2)}{u_n + 2}.$$

- 3) Etudier la monotonie de la suite  $(u_n)$ .
- 4) En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente.

**Exercice 3 :**

On considère la suite  $(u_n)$  définie par  $u_0 = \frac{1}{5}$  et pour

$$\text{tout } n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = u_n^2 + \frac{3}{4}u_n.$$

- 1) Montrer par récurrence que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 \leq u_n < \frac{1}{4}$ .
- 2) Etudier la monotonie de la suite  $(u_n)$ .
- 3) En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente.

**Exercice 4 :**

On considère la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  définie par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}} \dots$$

- 1) Montrer par récurrence que :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad u_n \geq \sqrt{n}$ .
- 2) En déduire la limite de la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$ .

**Exercice 5 :**

Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  sachant que :

$$u_n = \left(\frac{7}{4}\right)^0 + \left(\frac{7}{4}\right)^1 + \left(\frac{7}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{7}{4}\right)^n.$$

**Exercice 6 :**

Soit  $(u_n)$  la suite définie par :  $u_0 = 2$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + 1}{u_n + 2}.$$

- 1) Montrer par récurrence que  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n \geq 1$
- 2) Montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} - 1 \leq \frac{1}{3}(u_n - 1)$
- 3) Montrer par récurrence que  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n - 1 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$ .
- 4) Montrer alors que la suite  $(u_n)$  est convergente et calculer sa limite.

**Exercice 7 :**

Soit  $(u_n)$  la suite définie par :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : \begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = 5u_n + 3 \end{cases}$ .

On considère la suite  $(v_n)$  définie par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : v_n = u_n + \frac{3}{4}.$$

- 1) Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique.
- 2) Exprimer  $v_n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$ .
- 3) En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

**Exercice 8 :**

Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $I = [1; 2]$  par :

$$f(x) = \frac{5x - 1}{x + 3}.$$

- 1) Montrer que  $f$  est strictement croissante sur  $I$ .
- 2) Montrer que  $f(I) \subset I$ .
- 3) Montrer que :  $(\forall x \in I) \quad f(x) \leq x$ .
- 4) Montrer par récurrence que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 1 \leq u_n \leq 2$ .
- 5) En déduire que la suite  $(u_n)$  est décroissante.
- 6) En déduire que  $(u_n)$  est convergente et déterminer sa limite.
- 7) On pose pour tout  $n \in \mathbb{N} : v_n = \frac{1}{u_n - 1}$ .

a) Montrer que  $(v_n)$  est une suite arithmétique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Exprimer  $v_n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$ .

c) Retrouver la valeur de la limite de  $(u_n)$ .

**Exercice 9 :**

On considère la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  définie par :

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n}}.$$

- 1) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad \frac{n}{\sqrt{n^2 + n}} \leq u_n \leq \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}}$ .
- 2) Déterminer la limite de la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$ .



**Exercice 10 :**

Soit  $f$  la fonction numérique définie sur  $I = [0; 8]$  par :

$$f(x) = \frac{3}{4}x + 2.$$

On considère la suite numérique  $(u_n)$  définie par  $u_0 = 0$  et  $u_{n+1} = f(u_n)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

- 1) Montrer que  $f(I) \subset I$ .
- 2) Montrer par récurrence que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 0 \leq u_n \leq 8$ .
- 3) Montrer que la suite  $(u_n)$  est croissante.
- 4) En déduire que  $(u_n)$  est convergente et déterminer sa limite.
- 5) On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $v_n = u_n - 8$ .

a) Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

b) Exprimer  $v_n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$ .

c) Retrouver la valeur de la limite de  $(u_n)$ .

**Exercice 11 :**

On considère la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$  définie par  $u_1 = 5$  et

$$u_{n+1} = \frac{5u_n - 4}{1 + u_n}.$$

1) Montrer par récurrence que :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad u_n > 2$ .

2) Soit  $(v_n)_{n \geq 1}$  la suite numérique définie par :

$$v_n = \frac{3}{u_n - 2} \text{ pour tout entier naturel non nul.}$$

a) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad v_{n+1} = \frac{1 + u_n}{u_n - 2}$  et montrer

que  $(v_n)_{n \geq 1}$  est une suite arithmétique de raison 1.

b) Exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$  et déduire que

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) \quad u_n = 2 + \frac{3}{n}.$$

c) Déterminer la limite de la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$

**Exercice 12 :**

Soit  $(u_n)$  la suite numérique définie par  $u_0 = 13$  et

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 7.$$

1) a) Montrer par récurrence que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n < 14$ .

2) Soit  $(v_n)$  la suite définie par  $v_n = 14 - u_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

a) Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{2}$  puis exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ .

b) Déduire que  $u_n = 14 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  puis déterminer la limite de la suite  $(u_n)$

4) Déterminer le plus petite entier naturel  $n$  tel que  $u_n > 13.99$ .

**Exercice 13 :**

Soit  $(u_n)$  la suite numérique définie par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{(1 + \sqrt{u_n})^2} \end{cases}.$$

1) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) : u_n > 0$ .

2) a) Vérifier que  $(\forall n \in \mathbb{N}) : \frac{1}{(1 + \sqrt{u_n})^2} < 1$ .

b) En déduire que la suite  $(u_n)$  est décroissante puis qu'elle est convergente.

3) On considère la suite  $(v_n)$  définie par  $(\forall n \in \mathbb{N}) : v_n = \frac{1}{\sqrt{u_n}}$

a) Montrer que  $(v_n)$  est une suite arithmétique.

b) Exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$ , puis montrer que :

$$u_n = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

c) En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

**Exercice 14 :**

Soit  $(u_n)$  la suite numérique définie par  $u_0 = 4$  et pour

$$\text{tout } n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \frac{4u_n - 3}{u_n}.$$

I 1) Calculer  $u_1$  et  $u_2$

2) Montrer par récurrence que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n > 3$ .

3) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n - 1)(u_n - 3)}{u_n}$ .

4) Montrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

II 1) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} - 3 \leq \frac{1}{3}(u_n - 3)$ .

2) Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n - 3 \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$ .

3) Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

III On pose pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $v_n = \frac{u_n - 3}{u_n - 1}$ .

1) Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

2) Exprimer  $v_n$  puis  $u_n$  en fonction de  $n$ .

3) Retrouver la valeur de la limite de  $(u_n)$ .

**IV**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $I = [3; +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{4x - 3}{x}$

1) Etudier les variations de la fonction  $f$  sur  $I$ .

2) Vérifier que  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_{n+1} = f(u_n)$ .

3) Montrer par récurrence que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad u_n > 3$ .

4) Vérifier que :  $f(I) \subset I$ .

5) Retrouver la valeur de la limite de  $(u_n)$ .

# 05

# Primitives



## 1) Définition d'une fonction primitive :

### Activité 1 :

Soient  $f$  et  $F$  les fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = 15x^3 + 2x + 1$  et  $F(x) = 5x^3 + x^2 + x - 3$ .

1) Montrer que  $F$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $F'(x) = f(x)$ .

2) Donner deux autres fonctions  $G$  et  $H$  dérivables sur  $\mathbb{R}$  et tels que  $(\forall x \in \mathbb{R}) G'(x) = H'(x) = f(x)$ .

### Définition :

Soient  $f$  et  $F$  deux fonctions définies sur un même intervalle  $I$ .

On dit que  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $I$ , si  $F$  est dérivable sur  $I$  et pour tout  $x \in I$ ,  $F'(x) = f(x)$ .

### Théorème 1 (admis) :

Toute fonction continue sur un intervalle  $I$  admet une primitive définie sur  $I$ .

### Exemple 1 :

Dans chacun des cas suivants vérifier que  $F$  est une primitive de  $f$  sur l'intervalle  $I$ .

1)  $f(x) = x^4 - 12x^2 + 3$ ,  $F(x) = \frac{1}{5}x^5 - 4x^3 + 3x + 2$  et  $I = \mathbb{R}$ .

2)  $f(x) = 2\sqrt[3]{x^2} - \frac{4}{\sqrt{x}}$ ,  $F(x) = 6\sqrt[3]{x} - 8\sqrt{x}$  et  $I = ]0; +\infty[$ .

3)  $f(x) = \tan^2(x) - \cos(x) + \sin(x) - \frac{8}{x^2}$ ,  $F(x) = \tan(x) - \cos(x) - \sin(x) + \frac{8}{x} - x$  et  $I = \left] -\frac{\pi}{2}; 0 \right[$ .

### Solution :

1) • On a :  $F$  est une fonction polynôme donc elle est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

• Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on a :

$$F'(x) = \left( \frac{1}{5}x^5 - 4x^3 + 3x + 2 \right)' = \frac{1}{5}(x^5)' - 4(x^3)' + 3(x)' + (2)' = \frac{1}{5}(5x^4) - 4(3x^2) + 3 \times (1) + (0) = x^4 - 12x^2 + 3 = f(x). \text{ Donc } F \text{ est}$$

une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

2) • On a :  $F$  est dérivable sur  $I = ]0; +\infty[$  car les fonctions  $x \mapsto \sqrt[3]{x}$  et  $x \mapsto \sqrt{x}$  sont dérivables sur  $I$ .

• Pour tout  $x \in I$  on a :  $F'(x) = (6\sqrt[3]{x} - 8\sqrt{x})' = 6(\sqrt[3]{x})' - 8(\sqrt{x})' = 6 \times \left( \frac{1}{3}\sqrt[3]{x^2} \right) - 8 \times \left( \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) = 2\sqrt[3]{x^2} - \frac{4}{\sqrt{x}} = f(x)$ .

Donc  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $I$ .

3) • On a :  $F$  est dérivable sur  $I = \left] -\frac{\pi}{2}; 0 \right[$  car les fonctions  $x \mapsto \tan(x)$ ,  $x \mapsto \cos(x)$  et  $x \mapsto \sin(x)$  sont dérivables sur  $I$ .

• Pour tout  $x \in I$  on a :  $F'(x) = \left( \tan(x) - \cos(x) - \sin(x) + 8 \times \frac{1}{x} - x \right)' = (1 + \tan^2(x)) - (-\sin(x)) - (\cos(x)) + 8 \times \left( -\frac{1}{x^2} \right) - 1$   
 $= \tan^2(x) - \cos(x) + \sin(x) - \frac{8}{x^2} = f(x)$ . Donc  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $I$ .

### Application 1 :

Dans chacun des cas suivants vérifier que  $F$  est une primitive de  $f$  sur l'intervalle  $I$ .

1)  $f(x) = 2x + \frac{1}{x^2}$ ,  $F(x) = x^2 - \frac{1}{x}$  et  $I = ]0; +\infty[$ .

2)  $f(x) = (24x^2 + 12)(2x^3 + 3x - 1)^3$ ,  $F(x) = (2x^3 + 3x - 1)^4$  et  $I = \mathbb{R}$ .

3)  $f(x) = \frac{-6x}{(x^2 - 1)^4}$ ,  $F(x) = \frac{1}{(x^2 - 1)^3}$  et  $I = ]1; +\infty[$ .

4)  $f(x) = \frac{x}{2} \sqrt[4]{(x^2 + 1)^3}$ ,  $F(x) = \sqrt[4]{x^2 + 1}$  et  $I = \mathbb{R}$ .

5)  $f(x) = -\frac{1}{x^2} \cos\left(\frac{1}{x}\right)$ ,  $F(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$  et  $I = ]-\infty; 0[$ .

6)  $f(x) = \frac{-x^2 - 26x + 7}{(x^2 - x - 6)^2}$ ,  $F(x) = \frac{x^2 + 7}{x^2 - x - 6}$  et  $I = ]-\infty; -2[$ .

7)  $f(x) = 2\sqrt{3x^5} + (2x + 3) \frac{15x^4}{2\sqrt{3x^5}}$ ,  $F(x) = (2x + 3)\sqrt{3x^5}$  et  $I = ]0; +\infty[$ .



### Application 2 :

- 1) Justifier que la fonction  $f : x \mapsto x^2 - 3x + 2$  admet une primitive  $F$  sur  $\mathbb{R}$ .
- 2) Donner le sens de variation de  $F$  sur  $\mathbb{R}$ .

### Application 3 :

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de  $f$  telle que  $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x^2 + x + 1)^2}$ .
- 2) Déterminer  $a$  et  $b$  pour que  $f$  admette une primitive  $F$  telle que  $F(x) = \frac{ax + b}{x^2 + x + 1}$ .

## 2) Primitives d'une fonction continue :

### Activité 2 :

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0; \pi]$  par :  $f(x) = \sin(2x)$ .

- 1) Montrer que l'expression générale d'une primitive  $F$  de  $f$  est  $F(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x) + c$  où  $c$  est une constante réelle.
- 2) a) Déterminer une primitive  $F$  de  $f$  tel que  $F(0) = -1$ .  
b) Existe-il une autre primitive  $G$  de  $f$  tel que  $G(0) = -1$  ?

### Théorème 2 :

Soit  $f$  une fonction qui admet une primitive  $F$  sur un intervalle  $I$ .

- Toute fonction  $G$  définie sur  $I$  par  $G(x) = F(x) + c$  où  $c$  est un réel, est une primitive de  $f$  sur  $I$ .
- Les primitives de  $f$  sur  $I$  sont de la forme :  $x \mapsto F(x) + c$  où  $c$  est une constante réelle.

### Théorème 3 :

Pour tout  $x_0 \in I$  et  $y_0 \in \mathbb{R}$ , il existe une **unique** primitive  $F$  de  $f$  sur  $I$  vérifiant :  $F(x_0) = y_0$ .

### Exemple 2 :

Soient  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$  et  $F$  une primitive de  $f$  sur  $I$ .

- 1) Montrer que la fonction  $G$  définie sur  $I$  par  $G(x) = F(x) + c$  où  $c$  est un réel, est aussi une primitive de  $f$  sur  $I$ .
- 2) Montrer que si  $H$  est une primitive de  $f$  sur  $I$  alors la fonction  $H - G$  est constante sur  $I$ .

### Solution :

- 1) Soit  $c$  un réel

Puisque  $F$  est dérivable sur  $I$ , alors la fonction  $G$  tel que  $x \mapsto F(x) + c$  est dérivable sur  $I$ .

Pour tout  $x \in I$  on a :  $G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) + 0 = F'(x)$

Or :  $F'(x) = f(x)$  car  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $I$ , alors  $(\forall x \in I) G'(x) = f(x)$ .

- 2) Soit  $H$  une primitive de  $f$  sur  $I$

Donc  $H$  est dérivable sur  $I$ ,  $(\forall x \in I) H'(x) = f(x)$  et la fonction  $H - G : x \mapsto H(x) - G(x)$  est dérivable sur  $I$ .

Pour tout  $x \in I$  on a :  $(H - G)'(x) = (H(x) - G(x))' = f(x) - f(x) = 0$

Donc la fonction  $H - G$  est constante sur  $I$ .

### Autre méthode :

On a  $H$  est une primitive de  $f$  sur  $I$ , donc il existe un réel  $c'$  tel que pour tout  $x \in I$ ,  $H(x) = F(x) + c'$ .

Donc pour tout  $x \in I$ ,  $(H - G)(x) = (H(x) - G(x))' = (F(x) + c) - (F(x) + c') = c - c'$ .

D'où la fonction  $H - G$  est constante sur  $I$ .

### Exemple 3 :

Soient  $f$  et  $F$  les fonctions définies sur  $]0; +\infty[$  par :  $f(x) = \sqrt{x} - x$  et  $F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^2$ .

- 1) Montrer que  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .
- 2) Déterminer la primitive  $G$  de  $f$  sur  $]0; +\infty[$  telle que  $G(1) = 2$ .

### Solution :

- 1) • On a :  $F$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  car les fonctions  $x \mapsto x$ ,  $x \mapsto \sqrt{x}$  et  $x \mapsto x^2$  sont dérivables sur  $I$ .

• Pour tout  $x \in ]0; +\infty[$  on a :  $F'(x) = \left(\frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^2\right)' = \frac{2}{3}(x\sqrt{x})' - \frac{1}{2}(x^2)'$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{3} \left( (x) \times \sqrt{x} + x \times (\sqrt{x}) \right) - \frac{1}{2} (2x) = \frac{2}{3} \left( 1 \times \sqrt{x} + x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) - x \\
&= \frac{2}{3} \left( \sqrt{x} + \frac{\sqrt{x}}{2} \right) - x = \frac{2}{3} \times \frac{3\sqrt{x}}{2} - x = \sqrt{x} - x = f(x).
\end{aligned}$$

Donc  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $I$ .

2) Soit  $G$  une primitive de  $f$  sur  $I$ .

• Donc il existe un réel  $c$  tel que  $G(x) = F(x) + c$  c'est-à-dire  $G(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^2 + c$ .

• On a :  $G(1) = 2 \Leftrightarrow \frac{2}{3}1\sqrt{1} - \frac{1}{2}1^2 + c = 2 \Leftrightarrow c = 2 - \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \Leftrightarrow c = \frac{11}{6}$ .

D'où la primitive  $G$  de  $f$  sur  $]0; +\infty[$  telle que  $G(1) = 2$  est définie par :  $G(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{11}{6}$ .

#### Application 4 :

Soit  $f$  la fonction définie par  $f(x) = \sin(x)$ .

1) Donner la forme générale d'une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

2) Déterminer la fonction primitive  $F$  de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  telle que  $F(0) = 2$ .

3) Déterminer la fonction primitive  $G$  de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  telle que  $G\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ .

### 3) Fonctions primitives de somme de fonctions : $g$

#### Activité 3 :

Soient  $f$  et  $g$  sont deux fonctions dérivables sur un intervalle  $I$ .

1) Montrer que les fonctions  $f$  et  $g$  admettent des primitives sur  $I$ .

2) Soient  $F$  et  $G$  deux primitives respectives de  $f$  et  $g$  sur  $I$ .

a) Montrer que la fonction  $F + G$  définie sur  $I$  par :  $(F + G)(x) = F(x) + G(x)$  est une primitive de la fonction  $f + g$  sur  $I$ .

b) Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ , montrer que la fonction  $\alpha F$  définie sur  $I$  par :  $(\alpha F)(x) = \alpha F(x)$  est une primitive de  $\alpha f$  sur  $I$ .

#### Théorème 4 :

Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux réels.

Si  $F$  et  $G$  sont deux primitives respectives de  $f$  et  $g$  sur un intervalle  $I$ , alors :

•  $F + G$  est une primitive de la fonction  $f + g$  sur  $I$ .

•  $\alpha F + \beta G$  est une primitive de la fonction  $\alpha f + \beta g$  sur  $I$ .

#### Exemple 4 :

Soient  $f$  et  $g$  les fonctions définies par :  $f(x) = \cos(x)$  et  $g(x) = \frac{1}{x^2}$ .

1) Déterminer une primitive  $F$  de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

2) Déterminer une primitive  $G$  de  $g$  sur  $]0; +\infty[$ .

3) En déduire une primitive de la fonction  $2f + 3g$  sur  $]0; +\infty[$ .

#### Solution :

1) On sait que la fonction  $F$  tel que  $F(x) = \sin(x)$ , est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $F'(x) = f(x)$ .

Donc  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

2) On sait que la fonction  $G$  tel que  $G(x) = -\frac{1}{x}$ , est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ ,  $G'(x) = g(x)$ .

Donc  $G$  est une primitive de  $g$  sur  $]0; +\infty[$ .

3) On a la fonction  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ , en particulier  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $]0; +\infty[$ .

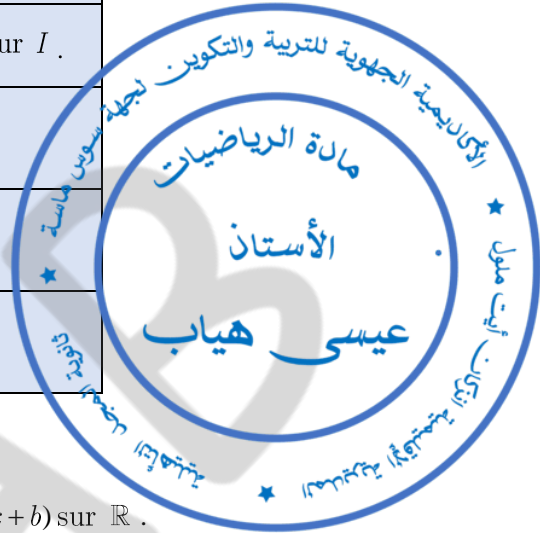
Or la fonction  $G$  est une primitive de  $g$  sur  $]0; +\infty[$ .

Donc la fonction  $2F + 3G$  une primitive de la fonction  $2f + 3g$  sur  $]0; +\infty[$ .





$f$	$F$	Conditions
$u' + v'$	$u + v$	• $u$ et $v$ sont dérivables sur $I$
$\alpha \times u'$	$\alpha u$	• $u$ est dérivable sur $I$
$u' \times v + u \times v'$	$u \times v$	• $u$ et $v$ sont dérivables sur $I$
$\frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$	$\frac{u}{v}$	• $u$ et $v$ sont dérivables sur $I$ • $(\forall x \in I) v(x) \neq 0$
$\frac{u'}{u^2}$	$\frac{1}{u}$	• $u$ est dérivable sur $I$ • $(\forall x \in I) u(x) \neq 0$
$u' \times u^r$	$\frac{1}{r+1} u^{r+1}$	• $u^r$ est définie et dérivable sur $I$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	• $u$ est dérivable sur $I$ • $(\forall x \in I) u(x) > 0$
$\frac{u'}{\sqrt[n]{u^{n-1}}}$	$2\sqrt[n]{u}$	• $u$ est dérivable sur $I$ • $(\forall x \in I) u(x) > 0$
$\frac{u'}{u}$	$\ln( u )$	• $u$ est dérivable sur $I$ • $(\forall x \in I) u(x) \neq 0$



**Exemple 5 :**

Soient  $a$  et  $b$  des nombres réels tel que  $a \neq 0$ .

- 1) Vérifier que la fonction  $F : x \mapsto \frac{1}{a} \sin(ax+b)$  est une primitive de  $f : x \mapsto \cos(ax+b)$  sur  $\mathbb{R}$ .
- 2) Vérifier que la fonction  $G : x \mapsto -\frac{1}{a} \cos(ax+b)$  est une primitive de  $g : x \mapsto \sin(ax+b)$  sur  $\mathbb{R}$ .
- 3) En déduire une primitive sur  $\mathbb{R}$  de chacune des fonctions  $h$  et  $k$  définies par :  $h(x) = \cos(2x)$  et  $k(x) = \sin(3x)$ .

**Solution :**

1) • On a :  $F$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  car les fonctions  $x \mapsto ax+b$  et  $x \mapsto \sin(x)$  sont dérivables sur  $\mathbb{R}$ .

• Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on a :

$$F'(x) = \left( \frac{1}{a} \sin(ax+b) \right)' = \frac{1}{a} (\sin(ax+b))' = \frac{1}{a} ((ax+b)' \times \sin'(ax+b)) = \frac{1}{a} (a \times \cos(ax+b)) = \cos(ax+b) = f(x). \text{ Donc } F \text{ est une primitive de } f \text{ sur } I.$$

2) • On a :  $G$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  car les fonctions  $x \mapsto ax+b$  et  $x \mapsto \cos(x)$  sont dérivables sur  $\mathbb{R}$ .

• Pour tout  $x \in \mathbb{R}$  on a :

$$G'(x) = \left( \frac{1}{a} \cos(ax+b) \right)' = \frac{1}{a} (\cos(ax+b))' = \frac{1}{a} ((ax+b)' \times \cos'(ax+b)) = \frac{1}{a} (a \times (-\sin(ax+b))) = -\sin(ax+b) = g(x). \text{ Donc } G \text{ est une primitive de } g \text{ sur } I.$$

3) D'après les questions précédentes on déduit que :

• La fonction  $H : x \mapsto \frac{1}{2} \sin(2x)$  est une primitive de  $h : x \mapsto \cos(2x)$  sur  $\mathbb{R}$ .

• La fonction  $K : x \mapsto -\frac{1}{3} \cos(3x)$  est une primitive de  $k : x \mapsto \sin(3x)$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Exemple 6 :**

1) Vérifier que la fonction  $f$  définies par :  $f(x) = \tan^2(4x)$  admet une primitive sur  $\left] -\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{8} \right[$ .

2) Déterminer une primitive de  $f$  sur  $\left] -\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{8} \right[$ .

3) En déduire la primitive  $G$  de  $f$  sur  $\left] -\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{8} \right[$  telle que  $G\left(\frac{\pi}{16}\right) = -\frac{\pi}{4}$ .

### Solution :

1) On sait que la fonction  $u : x \mapsto \tan^2(x)$  est continue sur  $J = \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$  et la fonction  $v : x \mapsto 4x$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , en particulier sur  $I = \left] -\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{8} \right[$ .

Or  $v(I) \subset J$  (facile à vérifier), alors la fonction  $f = u \circ v$  est continue sur  $I = \left] -\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{8} \right[$ .

2) On sait que pour tout  $x \in \left] -\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{8} \right[ : (\tan(4x))' = (4x)' \times (\tan'(4x)) = 4 \times (1 + \tan^2(4x)) = 4 + \tan^2(4x) = 4 + f(x)$

Donc la primitive de  $f$  sur  $\left] -\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{8} \right[$  est la primitive de  $x \mapsto (\tan(4x))' - 4$  sur  $\left] -\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{8} \right[$ .

Ou encore la primitive de  $x \mapsto (\tan(4x) - 4x)'$  sur  $\left] -\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{8} \right[$ .

D'où une primitive de  $f$  sur  $\left] -\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{8} \right[$  est la fonction  $F$  définie par :

$$F(x) = \tan(4x) - 4x.$$

La fonction  $h$  est une primitive de la fonction  $h'$ .

3) Soit  $G$  une primitive de  $f$  sur  $\left] -\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{8} \right[$ .

• Donc il existe un réel  $c$  tel que  $G(x) = F(x) + c$  c'est-à-dire  $G(x) = \tan(4x) - 4x + c$ .

• On a :  $G\left(\frac{\pi}{16}\right) = -\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow \tan\left(4 \cdot \frac{\pi}{16}\right) - 4 \cdot \frac{\pi}{16} + c = -\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow c = -1$ .

D'où la primitive  $G$  de  $f$  sur  $\left] -\frac{\pi}{8}; \frac{\pi}{8} \right[$  telle que  $G\left(\frac{\pi}{16}\right) = -\frac{\pi}{4}$  est définie par :  $G(x) = \tan(4x) - 4x - 1$ .

### Exemple 7 :

Déterminer une primitive sur  $]0; +\infty[$  de chacune des fonctions  $f, g, h$  et  $k$  définies par :

$$f(x) = -\frac{1}{\sqrt{x}}, \quad g(x) = \sqrt[3]{x}, \quad h(x) = \sqrt[5]{x^2} \quad \text{et} \quad k(x) = \frac{1}{x^7}.$$

### Solution :

Soit  $x \in ]0; +\infty[$ .

• On a :  $f(x) = -\frac{1}{\sqrt{x}} = -2 \left( \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) = -2(\sqrt{x})'$ .

D'où une primitive de  $f$  sur  $]0; +\infty[$  est la fonction  $F$  définie par :  $F(x) = -2\sqrt{x}$ .

• On a :  $g(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ .

Donc une primitive de  $g$  sur  $]0; +\infty[$  est la fonction  $G$  définie par :  $G(x) = \frac{1}{\frac{1}{3} + 1} x^{\frac{1}{3} + 1} = \frac{3}{4} \sqrt[3]{x^4}$ .

• On a :  $h(x) = \sqrt[5]{x^2} = x^{\frac{2}{5}}$ .

Donc une primitive de  $h$  sur  $]0; +\infty[$  est la fonction  $H$  définie par :  $H(x) = \frac{1}{\frac{2}{5} + 1} x^{\frac{2}{5} + 1} = \frac{5}{7} \sqrt[5]{x^7}$ .

• On a :  $k(x) = \frac{1}{x^7}$ .

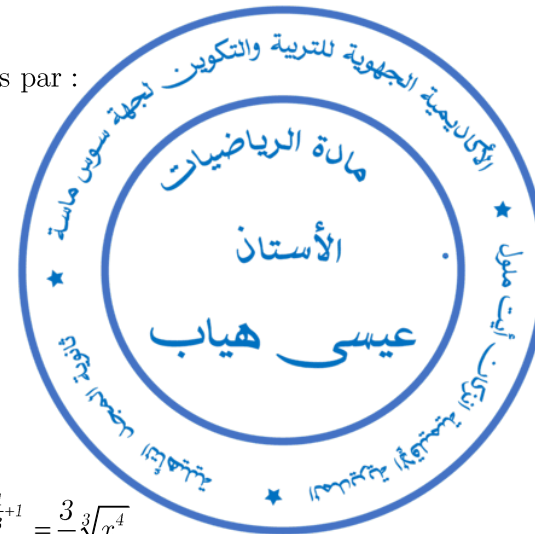
Donc une primitive de  $k$  sur  $]0; +\infty[$  est la fonction  $K$  définie par :  $K(x) = \frac{1}{-7 + 1} x^{-7 + 1} = -\frac{1}{6x^6}$ .

### Exemple 8 :

Déterminer les primitives  $F$  sur  $I$  de la fonction  $f$  dans chacun des cas suivants :

1)  $f(x) = 6x^5 + 2x - 5$  et  $I = \mathbb{R}$

2)  $f(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}}$  et  $I = ]0; +\infty[$



$$3) f(x) = \frac{4}{x^3} \text{ et } I = ]-\infty; 0[$$

$$4) f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x+3)^2} \text{ et } I = \mathbb{R}$$

$$5) f(x) = \frac{1}{(5x-2)^3} \text{ et } I = \left] \frac{2}{5}; +\infty \right[$$

$$6) f(x) = (2x+1)^6 \text{ et } I = \mathbb{R}$$

$$7) f(x) = \frac{2(x+1)}{\sqrt{x^2+2x+4}} \text{ et } I = \mathbb{R}.$$

$$8) f(x) = \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \text{ et } I = [1; 4]$$

### Solution :

1) • Soit  $x \in I$ , on a :  $f(x) = 6x^5 + 2x - 5 = (x^6 + x^2 - 5x)'$  .

• D'où une primitive de  $f$  sur  $I$  est la fonction  $F$  définie par :  $F(x) = x^6 + x^2 - 5x$  .

2) • Soit  $x \in I$ , on a :  $f(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{x}} = (x + \sqrt{x})'$  .

• D'où une primitive de  $f$  sur  $I$  est la fonction  $F$  définie par :  $F(x) = x + \sqrt{x}$  .

3) • Soit  $x \in I$ , on a :  $f(x) = \frac{4}{x^3} = 4 \times \frac{1}{x^3} = 4 \times \left( \frac{1}{-3+1} x^{-3+1} \right)' = 4 \times \left( -\frac{1}{2x^2} \right)'$  .

• D'où une primitive de  $f$  sur  $I$  est la fonction  $F$  définie par :  $F(x) = 4 \times \left( -\frac{1}{2x^2} \right) = -\frac{2}{x^2}$  .

4) • Soit  $x \in I$ , on a :  $f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x+3)^2} = \frac{(x^2+x+3)'}{(x^2+x+3)^2} = \left( -\frac{1}{x^2+x+3} \right)'$  .

• D'où une primitive de  $f$  sur  $I$  est la fonction  $F$  définie par :  $F(x) = \left( -\frac{1}{x^2+x+3} \right)$  .

5) • Soit  $x \in I$ , on a :

$$f(x) = \frac{1}{(5x-2)^3} = \frac{1}{5} \times \frac{(5x-2)'}{(5x-2)^3} = \frac{1}{5} \times (5x-2)' (5x-2)^{-3} = \frac{1}{5} \times \left( \frac{1}{-3+1} (5x-2)^{-3+1} \right)' = \left( -\frac{1}{10} \times \frac{1}{(5x-2)^2} \right)'$$
 .

• D'où une primitive de  $f$  sur  $I$  est la fonction  $F$  définie par :  $F(x) = -\frac{1}{10(5x-2)^2}$  .

6) • Soit  $x \in I$ , on a :  $f(x) = 6x^5 + 2x - 5 = (x^6 + x^2 - 5x)'$  .

• D'où une primitive de  $f$  sur  $I$  est la fonction  $F$  définie par :  $F(x) = x^6 + x^2 - 5x$  .

7) • Soit  $x \in I$ , on a :  $f(x) = (2x+1)^6 = \frac{1}{2} (2x+1)' (2x+1)^6 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{6+1} (2x+1)^{6+1} \right)' = \left( \frac{1}{14} (2x+1)^7 \right)'$  .

• D'où une primitive de  $f$  sur  $I$  est la fonction  $F$  définie par :  $F(x) = \frac{1}{14} (2x+1)^7$  .

8) • Soit  $x \in I$ , on a :  $f(x) = \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x}} \times \cos(\sqrt{x}) = 2 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \cos(\sqrt{x}) = 2 \times (\sqrt{x})' \times \cos(\sqrt{x}) = 2(\sin(\sqrt{x}))'$  .

• D'où une primitive de  $f$  sur  $I$  est la fonction  $F$  définie par :  $F(x) = 2\sin(\sqrt{x})$  .

### Application 7 :

Déterminer les primitives sur  $I$  de la fonction  $f$  dans chacun des cas suivants :

$$1) f(x) = \frac{1}{x^2} + \sin(x) \text{ et } I = ]-\infty; 0[$$

$$2) f(x) = \cos(2x) - \sin(2x) + x^8 \text{ et } I = \mathbb{R}$$

$$3) f(x) = \frac{6x-1}{(3x^2-x)^2} \text{ et } I = ]1; +\infty[$$

$$4) f(x) = (2x-1)(x^2-x+7) \text{ et } I = \mathbb{R}$$

$$5) f(x) = \frac{\sin(x)}{\sqrt{2+\cos(x)}} \text{ et } I = \mathbb{R}$$

$$6) f(x) = \frac{\tan^2(x)}{\cos^2(x)} \text{ et } I = \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$$

$$7) f(x) = \frac{x^2}{(x^3-8)^4} \text{ et } I = ]2; +\infty[$$

$$8) f(x) = 2\sqrt{x} + \frac{x+1}{2\sqrt{x}} \text{ et } I = ]0; +\infty[$$

## Résumé 5 : Primitives

Soient  $f$  et  $F$  deux fonctions définies sur un même intervalle  $I$ .

- On dit que  $F$  est une primitive de  $f$  sur  $I$ , si :  $F$  est dérivable sur  $I$  et pour tout  $x \in I$ ,  $F'(x) = f(x)$ .
- Toute fonction continue sur un intervalle  $I$  admet une primitive définie sur  $I$ .

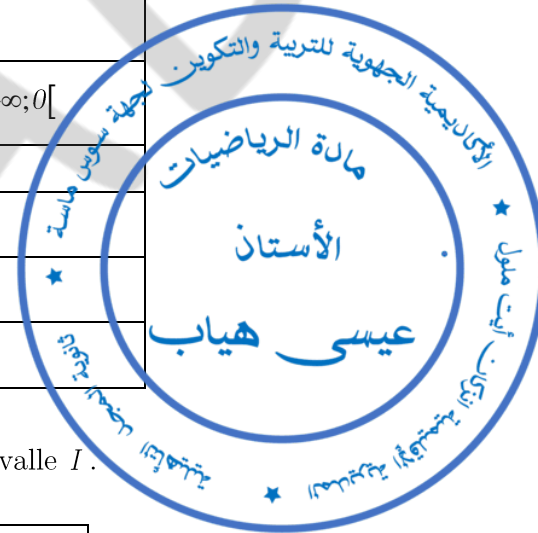
Soit  $f$  une fonction qui admet une primitive  $F$  sur un intervalle  $I$ .

- Les primitives de  $f$  sur  $I$  sont de la forme :  $x \mapsto F(x) + c$  où  $c$  est une constante réelle.

### Primitives des fonctions usuelles

Dans le tableau ci-dessous  $F$  désigne une primitive de la fonction  $f$  sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ .

$f(x)$	$F(x)$	$I$
$0$	$c$	$\mathbb{R}$
$a$	$ax$	$\mathbb{R}$
$x^r$ $r \in \mathbb{Q}^* \setminus \{-1\}$	$\frac{1}{r+1} x^{r+1}$	$]0; +\infty[$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$	$]0; +\infty[$ ou $]-\infty; 0[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$]0; +\infty[$
$\frac{1}{x}$	$\ln( x )$	$]0; +\infty[$ ou $]-\infty; 0[$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$1 + \tan^2(x)$	$\tan(x)$	$\mathbb{R}$
$e^x$	$e^x$	$\mathbb{R}$



### Opérations sur les fonction primitives

Dans le tableau ci-dessous  $F$  désigne une primitive de la fonction  $f$  sur un intervalle  $I$ .

Si  $u$  et  $v$  sont deux fonctions définies sur  $I$  alors

$f$	$F$	Conditions
$u' + v'$	$u + v$	• $u$ et $v$ sont dérivables sur $I$
$\alpha \times u'$	$\alpha u$	• $u$ est dérivable sur $I$
$u' \times v + u \times v'$	$u \times v$	• $u$ et $v$ sont dérivables sur $I$
$\frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$	$\frac{u}{v}$	• $u$ et $v$ sont dérivables sur $I$ • $(\forall x \in I) v(x) \neq 0$
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}$	• $u$ est dérivable sur $I$ • $(\forall x \in I) u(x) \neq 0$
$u' \times u^r$ $r \in \mathbb{Q}^* \setminus \{-1\}$	$\frac{1}{r+1} u^{r+1}$	• $u^r$ est définie et dérivable sur $I$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	• $u$ est dérivable sur $I$ • $(\forall x \in I) u(x) > 0$
$\frac{u'}{\sqrt[n]{u^{n-1}}}$ $n \in \mathbb{N}^*$	$n\sqrt[n]{u}$	• $u$ est dérivable sur $I$ • $(\forall x \in I) u(x) > 0$
$\frac{u'}{u}$	$\ln( u )$	• $u$ est dérivable sur $I$ • $(\forall x \in I) u(x) \neq 0$
$u' e^u$	$e^u$	• $u$ est dérivable sur $I$

Exercice 1 :

On considère les fonctions  $f$ ,  $F$  et  $G$  définies par :  $f(x) = -\frac{1}{x^2}$ ,  $F(x) = \frac{1}{x} + 1$  et  $G(x) = \frac{1}{x} - 1$ .

- 1) Vérifier que  $f$  est continue sur  $]-\infty; 0[$  et sur  $]0; +\infty[$
- 2) Montrer que  $F$  est la primitive de  $f$  sur  $]-\infty; 0[$  s'annulant en un réel  $a$  que l'on précisera.
- 3) Montrer que  $G$  est la primitive de  $f$  sur  $]0; +\infty[$  s'annulant en un réel  $b$  que l'on précisera.

Exercice 2 :

Déterminer la primitive  $F$  de  $f$  tel que  $F(x_0) = y_0$  dans chacun des cas suivants :

- |  |   |
|--|---|
| 1) $f(x) = 3x^2(x^3 + 4)^2$ ; $\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 1 \end{cases}$                                 | 2) $f(x) = (2x+1)(x^2+x+1)^2$ ; $\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 2 \end{cases}$        |
| 3) $f(x) = \frac{2}{(3x+1)^3}$ ; $\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = \frac{2}{3} \end{cases}$                    | 4) $f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$ ; $\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \end{cases}$ |
| 5) $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right)$ ; $\begin{cases} x_0 = \frac{\pi}{2} \\ y_0 = 0 \end{cases}$ | 6) $f(x) = \frac{x}{(x^2-2)^2}$ ; $\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 1 \end{cases}$      |
| 7) $f(x) = \sqrt[3]{3x+2}$ ; $\begin{cases} x_0 = 2 \\ y_0 = -1 \end{cases}$                                 | 8) $f(x) = \frac{2}{x^2} + x$ ; $\begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = -1 \end{cases}$       |

Exercice 3 :

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]2; +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{2x^3 - 11x^2 + 20x - 10}{(x-2)^2}$ .

- 1) Déterminer les réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tel que :  $f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-2)^2}$ .
- 2) En déduire une primitive de  $f$  sur  $]2; +\infty[$ .

Exercice 4 :

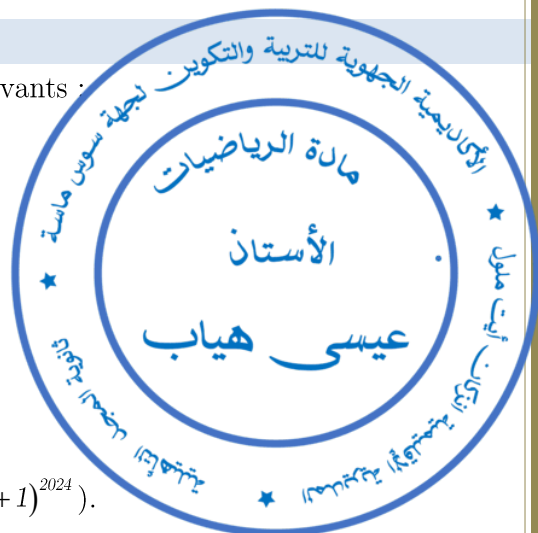
Déterminer les primitives  $F$  sur  $I$  de la fonction  $f$  dans chacun des cas suivants :

- 1)  $f(x) = \sqrt{x+1}$  et  $I = ]0; +\infty[$ .
- 2)  $f(x) = x\sqrt{x^2+1}$  et  $I = \mathbb{R}$ .
- 3)  $f(x) = (x-3)\sqrt{x^2-6x}$  et  $I = [6; +\infty[$ .
- 4)  $f(x) = (x^2+1)^7 \left(x + \frac{1}{2}\right)$  et  $I = \mathbb{R}$ .
- 5)  $f(x) = \frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{3+x}{2x}}$  et  $I = ]0; +\infty[$ .
- 6)  $f(x) = x(x+1)^{2024}$  et  $I = \mathbb{R}$  (on pourra vérifier que :  $f(x) = (x+1)^{2025} - (x+1)^{2024}$ ).
- 7)  $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x-1}}$  et  $I = ]1; +\infty[$  (on pourra écrire  $f(x)$  sous la forme :  $f(x) = a\sqrt{x-1} + \frac{b}{\sqrt{x-1}}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ).

Exercice 5 :

Soit  $f$  la fonction définie par :  $f(x) = \frac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$ .

- 1) Déterminer les réels  $a$  et  $b$  tels que pour tout  $x \in D_f$  :  $f(x) = a + \frac{b}{(x+1)^2}$ .
- 2) En déduire la primitive  $F$  de  $f$  sur  $]-1; +\infty[$  tel que  $F(1) = \frac{5}{2}$ .



Exercice 1 (Etude de fonctions)

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  par :  $f(x) = x(\sqrt{x} - 2)^2$

- 1) Etudier la continuité de  $f$  sur  $[0; +\infty[$
- 2) Etudier la dérivabilité de  $f$  à droite en 0 puis interpréter le résultat graphiquement.
- 3) a) Montrer que  $(\forall x \in ]0; +\infty[) \quad f'(x) = 2(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 2)$ 
  - b) Dresser le tableau de variations de  $f$
  - c) Dresser le tableau de signe de  $f$
  - d) Montrer que l'équation  $f(x) = x - 2$  admet une unique solution  $\alpha$  dans l'intervalle  $]1; 4[$
- 4) Soit  $g$  la restriction de  $f$  sur l'intervalle  $[4; +\infty[$ 
  - a) Montrer que  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  à déterminer.
  - b) Dresser le tableau de variations de  $g^{-1}$
  - c) Calculer  $g(16)$  et déduire  $(g^{-1})'(64)$
- 5) a) Montrer que  $(\forall x \in J) : g^{-1}(x) = \left(1 + \sqrt{1 + \sqrt{x}}\right)^2$ 
  - b) Déterminer par deux méthodes l'expression de  $(g^{-1})'(x)$  pour tout  $x \in J$
- 6) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$  puis interpréter le résultat obtenu graphiquement.
- 7) Etudier la concavité de  $(C_f)$  et montrer que  $(C_f)$  admet un unique point d'inflexion  $I$  à déterminer.
- 8) Déterminer les points d'intersection de  $(C_f)$  avec les axes du repère.
- 9) Tracer  $(C_f)$  et la droite  $(\Delta) : y = x$  dans le même repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  on donne  $f(9) = 9$
- 10) Tracer  $(C_{g^{-1}})$  dans le même repère précédent.
- 11) Résoudre graphiquement :  $f(x) = x$  ;  $f(x) \leq x$  et  $g^{-1}(x) = 4$



Exercice 2 (Suites numériques)

Exercice 22 de la série 4

Exercice 3 (Primitives)

Déterminer une primitive de la fonction  $f$  dans les cas suivants :

1) $f(x) = 8x^3 - 5x^2 - 3x + 2$	2) $f(x) = \sqrt[3]{x+7}$	3) $f(x) = 5 \times \frac{1}{x}$	4) $f(x) = \frac{1}{x} \times \ln(x)$
5) $f(x) = \cos(x) \sin^3(x)$	6) $f(x) = -\tan^2(x)$	7) $f(x) = \frac{1}{3-4x}$	8) $f(x) = \frac{1}{x \times \ln(x)}$
9) $f(x) = \sqrt[3]{x} - \sqrt{x}$	10) $f(x) = x\sqrt{x^2+4}$	11) $f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+4}$	12) $f(x) = \tan(x)$
13) $f(x) = \frac{3}{x^3} - \frac{2}{x^2}$	14) $f(x) = \frac{2x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$	15) $f(x) = \frac{3x^2+2x}{(x^3+x^2+5)^2}$	16) $f(x) = \frac{1}{x^2-1}$

Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. Faites des phrases claires et précises.

Exercice 1 (8pts)

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{x}{2}(x - \sqrt{x^2 + 4})$

- 1) a) Vérifier que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$  .....0.5pt  
 b) En déduire la branche infinie de  $(C_f)$  au voisinage de  $-\infty$  .....0.5pt
- 2) a) Vérifier que pour tout  $x \in ]0; +\infty[$   $f(x) = \frac{-2}{1 + \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}}$  .....0.5pt  
 b) En déduire la branche infinie de  $(C_f)$  au voisinage de  $+\infty$  .....0.5pt
- 3) a) Montrer que  $f'(x) = \frac{-(x - \sqrt{x^2 + 4})^2}{2\sqrt{x^2 + 4}}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  .....1pt  
 b) Dresser le tableau de variations de  $f$  .....0.5pt
- 4) Donner l'équation de la tangente  $(T)$  à  $(C_f)$  au point d'abscisse  $0$  .....0.5pt
- 5) Tracer  $(C_f)$  et la droite  $(T)$  dans le même repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  .....2pt
- 6) a) Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  à déterminer.....0.5pt  
 b) Calculer  $(f^{-1})'(0)$  (remarquer que  $0 = f(0)$ ) .....0.5pt
- 7) Tracer  $(C_{f^{-1}})$  dans le même repère précédent. ....1pt

Exercice 2 (9pts)

Soit  $(u_n)$  la suite numérique définie par  $u_0 = 2$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{4}{5}$ .

- 1) Vérifier que  $u_{n+1} - 1 = \frac{1}{5}(u_n - 1)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  .....0.5pt
- 2) a) Montrer par récurrence que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n > 1$  .....1.5pt  
 b) Montrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante.....1.5pt  
 c) En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente.....1pt
- 3) Soit  $(v_n)$  la suite définie par  $v_n = u_n - 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .  
 a) Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{5}$  puis exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$  .....2pt  
 b) Montrer que  $u_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n + 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  puis déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  .....1.5pt
- 4) On pose  $w_n = \frac{5n + (-1)^n \sin(n)}{n}$ . Vérifier que  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) |w_n - 5| \leq \frac{1}{n}$  et déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$  .....1pt

Exercice 3 (3pts)

Déterminer, dans chaque cas, une primitive  $F$  de  $f$  sur l'intervalle  $I$ .

- 1)  $f(x) = x^2 - 4x + 3$  ;  $I = \mathbb{R}$  .....1pt
- 2)  $f(x) = \sqrt[3]{5x+2}$  ;  $I = \left]-\frac{2}{5}; +\infty\right[$  .....1pt
- 3)  $f(x) = \frac{2}{\sqrt{3x+2}}$  ;  $I = \left]-\frac{2}{3}; +\infty\right[$  .....1pt

**Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. Faites des phrases claires et précises.**

### Exercice 1 (8pts)

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \frac{x}{2}(\sqrt{x^2 + 4} + x)$

- 1) a) Vérifier que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$  .....0.5pt  
 b) En déduire la branche infinie de  $(C_f)$  au voisinage de  $+\infty$  .....0.5pt
- 2) a) Vérifier que pour tout  $x \in ]-\infty; 0[$   $f(x) = \frac{-2}{\sqrt{1 + \frac{4}{x^2}} + 1}$  .....0.5pt  
 b) En déduire la branche infinie de  $(C_f)$  au voisinage de  $-\infty$  .....0.5pt
- 3) a) Montrer que  $f'(x) = \frac{(\sqrt{x^2 + 4} + x)^2}{2\sqrt{x^2 + 4}}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  .....1pt  
 b) Dresser le tableau de variations de  $f$  .....0.5pt
- 4) Donner l'équation de la tangente  $(T)$  à  $(C_f)$  au point d'abscisse  $0$  .....0.5pt
- 5) Tracer  $(C_f)$  et la droite  $(T)$  dans le même repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  .....2pt
- 6) a) Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  à déterminer.....0.5pt  
 b) Calculer  $(f^{-1})'(0)$  (remarquer que  $0 = f(0)$ ) .....0.5pt
- 7) Tracer  $(C_{f^{-1}})$  dans le même repère précédent. ....1pt

### Exercice 2 (9pts)

Soit  $(u_n)$  la suite numérique définie par  $u_0 = 11$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $u_{n+1} = \frac{10}{11}u_n + \frac{12}{11}$ .

- 1) Vérifier que  $u_{n+1} - 12 = \frac{10}{11}(u_n - 12)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  .....0.5pt
- 2) a) Montrer par récurrence que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) u_n < 12$  .....1.5pt  
 b) Montrer que la suite  $(u_n)$  est croissante.....1.5pt  
 c) En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente.....1pt
- 3) Soit  $(v_n)$  la suite définie par  $v_n = u_n - 12$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .  
 a) Montrer que  $(v_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{10}{11}$  puis exprimer  $v_n$  en fonction de  $n$  .....2pt  
 b) Montrer que  $u_n = 12 - \left(\frac{10}{11}\right)^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  puis déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  .....1.5pt
- 4) On pose  $w_n = \frac{(-1)^n \cos(n) + 4n}{n}$ . Vérifier que  $(\forall n \in \mathbb{N}^*) |w_n - 4| \leq \frac{1}{n}$  et déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$  .....1pt

### Exercice 3 (3pts)

Déterminer, dans chaque cas, une primitive  $F$  de  $f$  sur l'intervalle  $I$ .

- 1)  $f(x) = x^2 + 4x - 3$  ;  $I = \mathbb{R}$  .....1pt
- 2)  $f(x) = \sin(5x + 2)$  ;  $I = \left]-\frac{2}{5}; +\infty\right[$  .....1pt
- 3)  $f(x) = \frac{2}{(3x + 2)^3}$  ;  $I = \left]-\frac{2}{3}; +\infty\right[$  .....1pt

06

# Fonctions logarithmes



# 1) Fonction logarithme népérienne

## 1-1-Définition-Dérivée-Monotonie-tableau de signe

### Définition 1 :

La fonction **logarithme népérien** est la primitive de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  qui s'annule en 1, on la note **ln**.

**Ensemble de définition de la fonction  $x \rightarrow \ln(x)$  est :**  $D_{\ln} = ]0; +\infty[$

### Dérivée et monotonie :

- $(\forall x \in ]0; +\infty[) (\ln(x))' = \frac{1}{x}$
- $x \mapsto \ln(x)$  est dérivable et strictement croissante sur  $]0; +\infty[$
- $\ln(1) = 0$
- Tableau de variations et tableau de signe de la fonction **ln** :

$x$	0	1	$+\infty$
$\ln(x)$			
$\ln(x)$			

$$(\forall x \in ]0; +\infty[) \begin{cases} x > 1 \Leftrightarrow \ln(x) > 0 \\ 0 < x < 1 \Leftrightarrow \ln(x) < 0 \\ x = 1 \Leftrightarrow \ln(x) = 0 \end{cases}$$

- L'équation  $\ln(x) = 1$  admet une unique solution dans  $]0; +\infty[$ , on la note **e**.  
Donc  $\ln(e) = 1$  (a l'aide d'une calculatrice  $e \approx 2,71$  et on a  $e \notin \mathbb{Q}$ )
- Pour tout  $r \in \mathbb{Q}$  on a :  $\ln(e^r) = r$

### Remarque 1 : Résolution des équations et inéquations contenant **ln** :

- Soit  $u$  une fonction définie sur  $\mathbb{R}$ , on pose  $f(x) = \ln(u(x))$ . On a :  $D_f = \{x \in \mathbb{R} / u(x) > 0\}$
- $(\forall X, Y \in ]0; +\infty[) \ln(X) = \ln(Y) \Leftrightarrow X = Y$  et  $(\forall X, Y \in ]0; +\infty[) \ln(X) > \ln(Y) \Leftrightarrow X > Y$

### Exemple 1 :

1)  $\ln(e^3) = \dots$  ;  $\ln(\sqrt{e}) = \dots$  ;  $5 = \ln(\dots)$  ;  $\ln(e^{-8}) = \dots$

2) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation suivante :  $\ln(x) = 7$

### Exemple 2 :

1) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les équations suivantes :  $\ln(x) = 2$  ;  $\ln^2(x) - 3\ln(x) + 2 = 0$  ;  $\ln(x^2 - x) = \ln(x + 1)$

2) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  les inéquations suivantes :  $\ln(x + 5) < \ln(3x + 6)$  ;  $\ln^2(x) - 3\ln(x) + 2 \leq 0$  ;  $\frac{2 - \ln(x)}{\ln(x)} \leq 3$  ;

$\ln(x) + \ln(x - 1) > \ln(6)$

## 1-2-Les propriétés algébriques de la fonction **ln**

### Propriétés 1 :

Soit  $a$  et  $b$  deux réels strictement positifs et  $r$  un nombre rationnel.

- $\ln(ab) = \dots$  ;  $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = \dots$  ;  $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \dots$
- $\ln(a^r) = \dots$  ;  $\ln(\sqrt{a}) = \dots$  ;  $\ln(a^2) = \dots$

### Exemple 3 :

Simplifier les expressions suivantes :  $\ln(2 \times 5)$  ;  $\ln(\sqrt{3})$  ;  $\ln(4e)$  ;  $\ln(x^2 y^3)$  ;  $\ln\left(\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{5}}\right)$

### Exemple 4 :

1) Calculer en fonction de  $\ln(2)$  et  $\ln(3)$  les nombres suivants :

$A = \ln(6) + \ln(8) + \ln(72)$  ;  $B = \ln\left(\frac{1}{2}\right) - \ln\left(\frac{3}{2}\right) + \ln(\sqrt{6}) - \ln(3\sqrt{2})$  ;  $C = \ln(\sqrt{2 + \sqrt{2}}) + \ln(\sqrt{2 - \sqrt{2}})$

2) On considère les nombres suivants :  $E = \ln\left(\frac{1}{2}\right) + \ln\left(\frac{2}{e}\right)$  et  $F = \ln\left((7 + 4\sqrt{3})^{15}\right) + \ln\left((7 - 4\sqrt{3})^{15}\right)$

Montrer que  $E = -1$  et  $F = 0$

**Remarque 2 :**

$(\forall a, b \in ]-\infty; 0[)(\forall r \in \mathbb{Q}) : \bullet \ln(ab) = \ln(|a|) + \ln(|b|) ; \bullet \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(|a|) - \ln(|b|) ; \bullet \ln(a^r) = r \times \ln(|a|)$

**1-3-Limites de références - La courbe de la fonction ln**

**Propriétés 2 :**

Soit  $n$  un entier naturel non nul :

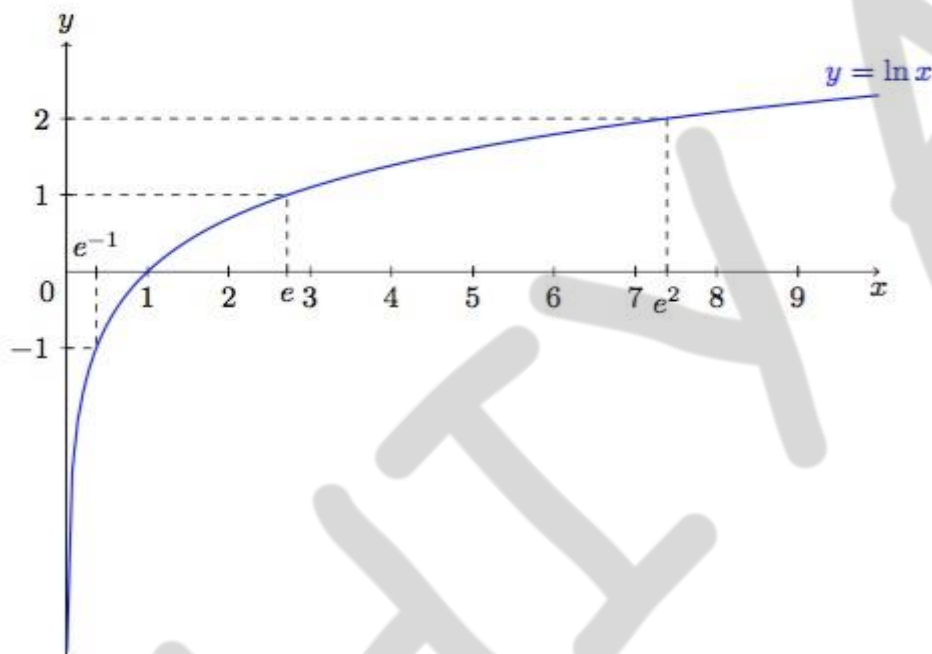
<ul style="list-style-type: none"> <li><math>\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty</math></li> <li><math>\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln(x) = 0^-</math></li> <li><math>\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0^-</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty</math></li> <li><math>\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0^+</math></li> <li><math>\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0^+</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1</math></li> <li><math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1</math></li> </ul>
--	--	--

**Exemple 5 :**

Calculer les limites suivantes :

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(x)} + x ; \lim_{x \rightarrow 0^+} \sin(x) \times \ln(x) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x - 2 - \frac{\ln(x)}{x^5} ; \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)}{\ln(1+x)} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) - 3x ; \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+\sqrt[3]{x})}{x}$   
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+\sqrt{x})}{x} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{3x-2}{4x+1}\right) ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(\sqrt{x^2+3}-x) ; \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) \times \ln(x-2) ; \lim_{x \rightarrow 2^+} (x-2) \times \ln(x^3-8) ; \lim_{x \rightarrow e} \frac{\ln(x)-1}{x-e}$

**Remarque 3 : La courbe de la fonction ln**



**1-4-Dérivé de la fonction  $x \mapsto \ln(u(x))$  -Primitive de  $\frac{u'}{u}$**

**Propriétés 3 :**

Soit  $u$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$ ,

- $\left\{ \begin{array}{l} u \text{ est continue sur } I \\ (\forall x \in I) u(x) > 0 \end{array} \right. \Rightarrow$  La fonction  $x \mapsto \ln(u(x))$  est continue sur  $I$
- $\left\{ \begin{array}{l} u \text{ est dérivable sur } I \\ (\forall x \in I) u(x) > 0 \end{array} \right. \Rightarrow$  La fonction  $x \mapsto \ln(u(x))$  est dérivable sur  $I$
- Si la fonction  $x \mapsto \ln(u(x))$  est dérivable sur  $I$  alors  $(\forall x \in I) (\ln(u(x)))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$

**Exemple 6 :**

Calculer  $f'(x)$  dans les cas suivants :  $f(x) = \ln(x^2 - 2x) ; f(x) = \ln(\sqrt{1-4x}) ; f(x) = \sqrt{1-\ln^2(5x+1)} ; f(x) = \ln\left(\frac{2x+1}{x-3}\right)$

**Exemple 7 :**

Montrer que la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \frac{3\ln(x)+2}{\ln(x)-1}$  est dérivable sur  $I = ]0; e[$  puis calculer  $f'(x)$  pour tout  $x \in I$

### Propriétés 4 :

Les primitives de la fonction  $f : x \mapsto \frac{1}{x}$  sur un intervalle  $I$  inclus de  $\mathbb{R}^*$  sont les fonctions  $F$  définies sur  $I$  par :

$$(\forall x \in I) F(x) = \ln(|x|) + c \quad / c \in \mathbb{R}$$

### Propriétés 5 :

Soit  $u$  une fonction continue et ne s'annule pas sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  (i.e  $(\forall x \in I) u(x) \neq 0$ )

Les primitives de la fonction  $f : x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$  sur  $I$  sont les fonctions  $F$  définies sur  $I$  par :

$$(\forall x \in I) F(x) = \ln(|u(x)|) + c \quad / c \in \mathbb{R}$$

### Exemple 8 :

Déterminer les primitives de la fonction  $f$  dans les cas suivants :

$$f(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+4} \quad ; \quad f(x) = \frac{1}{3-4x} \quad ; \quad f(x) = 5 \times \frac{1}{x} \quad ; \quad f(x) = \frac{1}{x} \times \ln(x) \quad ; \quad f(x) = \frac{1}{x \times \ln(x)} \quad ; \quad f(x) = \tan(x)$$

## 2) Logarithme de base a -Logarithme décimal

### Définition 2 :

Soit  $a$  un réel strictement positif et différent de 1.

La fonction **logarithme de base a** est la fonction numérique, notée par  $\log_a$  définie sur  $]0, +\infty[$  par :  $\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$

### Remarque 4 :

La fonction Logarithme de base  $e$  est la fonction logarithme népérien car :  $(\forall x > 0) \log_e(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(e)} = \ln(x)$

### Propriétés 6 :

Soit  $a \in ]0; 1[ \cup ]1; +\infty[$  et  $r \in \mathbb{Q}$

- $\log_a(a) = \quad$  ; •  $\log_a(1) = \quad$  ; •  $\log_a(a^r) = \quad$  ; •  $(\forall x \in ]0; +\infty[) \log_e(x) = \quad$  ; •  $(\forall x \in ]0; +\infty[) (\log_a(x))' = \quad$
- Si  $a \in ]0; 1[$ , alors la fonction  $\log_a$  est strictement décroissante sur  $]0; +\infty[$
- Si  $a \in ]1; +\infty[$ , alors la fonction  $\log_a$  est strictement croissante sur  $]0; +\infty[$

### Propriétés 7 :

Pour tout réels strictement positifs  $x$  et  $y$ , et pour tout  $r \in \mathbb{Q}$  on a :

<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\log_a(xy) = \quad</math></li> <li>• <math>\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)</math></li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)</math></li> <li>• <math>\log_a(x^r) = r \log_a(x)</math></li> </ul>
--	--

### Exemple 9 :

1) On considère les nombres suivants :  $A = \log_4(2) + \log_2(16) + \log_8(4)$ . Montrer que  $A = \frac{31}{6}$

2) Simplifier le nombre  $B = \log_3\left(\frac{15}{4}\right) + \log_2\left(\frac{1}{27}\right) + \log_2\left(\frac{4}{5}\right)$

### Définition 3 : logarithme de base 10

Soit  $a$  un réel strictement positif et différent de 1.

La fonction logarithme de base 10 est appelée **logarithme décimal**. On la note  $\log$  ;  $(\forall x \in ]0; +\infty[) \log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$

### Remarque 5 :

- $(\forall x \in ]0; +\infty[) \quad (\log(x))' = \frac{1}{x \ln(10)}$  ; • La fonction  $\log$  est strictement croissante sur  $]0; +\infty[$
- $\log(10) = 1$  ; •  $(\forall r \in \mathbb{Q}) \log(10^r) = r$

### Exemple 10 :

Calculer les nombres suivants :  $\log(1000)$  ;  $\log(0.01)$  ;  $\log(100) + \log(10^3) + \log(\frac{1}{100})$

### Exemple 11 :

Déterminer le plus petit entier naturel  $n$  dans les cas suivants :  $(\frac{1}{2})^n < 10^{-5}$  ;  $(1,1)^n \geq 100$  ;  $\frac{1}{4^n} < 0,03$

## Résumé 6 : Fonctions logarithmes

### Logarithme népérien :

La fonction **logarithme népérien** est la primitive de la fonction  $x \mapsto \frac{1}{x}$  sur l'intervalle  $]0; +\infty[$  qui s'annule en 1, on la note **ln**.

#### Propriétés :

- La fonction  $\ln$  est continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$ .
- $(\forall x \in ]0; +\infty[) \begin{cases} x > 1 \Leftrightarrow \ln(x) > 0 \\ 0 < x < 1 \Leftrightarrow \ln(x) < 0 \\ x = 1 \Leftrightarrow \ln(x) = 0 \end{cases}$
- $(\forall X, Y \in ]0; +\infty[) \ln(X) = \ln(Y) \Leftrightarrow X = Y$
- $(\forall X, Y \in ]0; +\infty[) \ln(X) > \ln(Y) \Leftrightarrow X > Y$
- Soient  $x$  et  $y$  deux réels strictement positifs et  $r \in \mathbb{Q}$ , on a :

$$\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) \qquad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$$

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x) \qquad \ln(x^r) = r \ln(x)$$

#### Limites de référence :

Soit  $n$  un entier naturel non nul :

• $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$	• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$
• $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln(x) = 0^-$	• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0^+$
• $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln(x) = 0^-$	• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0^+$

- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$

#### Propriétés :

La fonction  $x \mapsto \ln(x)$  est dérivable sur  $]0; +\infty[$  et on

$$a : (\forall x \in ]0; +\infty[) \quad (\ln(x))' = \frac{1}{x}.$$

- $\begin{cases} u \text{ est dérivable sur } I \\ (\forall x \in I) u(x) > 0 \end{cases} \Rightarrow$  La fonction  $x \mapsto \ln(u(x))$  est dérivable sur  $I$

- Si la fonction  $x \mapsto \ln(u(x))$  est dérivable sur  $I$  alors  $(\forall x \in I) \quad (\ln(u(x)))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$
- Soit  $u$  une fonction continue et ne s'annule pas sur un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  (i.e  $(\forall x \in I) u(x) \neq 0$ )

Les primitives de la fonction  $f : x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$  sur  $I$  sont les

fonctions  $F$  définies sur  $I$  par :

$$(\forall x \in I) \quad F(x) = \ln(|u(x)|) + c \quad / c \in \mathbb{R}$$

### Fonction exponentielle de base $a$ :

Soit  $a$  un réel strictement positif et différent de 1.

La fonction **logarithme de base  $a$**  est la fonction numérique, notée par  $\log_a$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

#### Propriétés :

Pour tout réels strictement positifs  $x$  et  $y$ , et pour tout  $r \in \mathbb{Q}$  on a :

- $\log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$
- $\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$
- $\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a(x)$
- $\log_a(x^r) = r \log_a(x)$

### Logarithme de base 10

- Soit  $a$  un réel strictement positif et différent de 1.

La fonction logarithme de base 10 est appelée **logarithme décimal**. On la note  $\log$  ;  $(\forall x \in ]0; +\infty[)$

$$\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$$

- $\log(10) = 1$  ; •  $(\forall r \in \mathbb{Q}) \log(10^r) = r$

## Série 6 : Fonctions logarithmes

### Exercice 01 :

1)- Résoudre, dans  $\mathbb{R}$ , les équations suivantes :

$$(E_1): \ln(x-1) = \ln(3-x) \quad (E_2): \ln(x^2 + 2x + 2) = \ln(4) \quad (E_3): \ln^2(x) + \ln(x) - 2 = 0$$

2)- Résoudre, dans  $\mathbb{R}^2$ , les systèmes suivants :

$$(S_1): \begin{cases} \ln(x) - 8\ln(y) = -1 \\ 2\ln(x) - 5\ln(y) = 9 \end{cases} \quad (S_2): \begin{cases} \ln(x) - 3\ln(y) = 5 \\ xy = e \end{cases}$$

### Exercice 02 :

1)- Résoudre, dans  $\mathbb{R}$ , les inéquations suivantes :

$$(I_1): \ln(2x-1) \leq 1 \quad (I_2): \ln(x^2 - x + 1) > 0 \quad (I_3): \ln^2(x) + \ln(x) - 2 \leq 0$$

2)- Déterminer la petite valeur de l'entier naturel  $n$  dans chacun des cas suivants :

$$(a) \quad 3 \times 2^n - 5 \geq 6 \quad (b) \quad \left(\frac{2}{5}\right)^n < 0,001 \quad (c) \quad 2024 - \left(\frac{1}{3}\right)^n > 2023,99$$

3)- Montrer que :  $\log_2 7 \cdot \log_3 7 + \log_3 7 \cdot \log_5 7 + \log_5 7 \cdot \log_2 7 = \frac{\log_2 7 \cdot \log_3 7 \cdot \log_5 7}{\log_{30} 7}$

4)- Soient  $a$  un réel supérieur strictement à 1 et  $n$  un entier non nul.

Montrer que :  $\forall x \in ]0, +\infty[$ ,  $\log_{a^n}(x) = \frac{1}{n} \log_a(x)$

### Exercice 03 :

On considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $]0, +\infty[$  par :  $f(x) = \frac{1 + \ln^2(x)}{x}$

1)- Calculer  $f(1)$  et la limite de  $f$  à droite en 0.

2)- Vérifier que :  $\forall x \in ]0, +\infty[$ ,  $\frac{\ln^2(x)}{x} = 4 \left( \frac{\ln \sqrt{x}}{\sqrt{x}} \right)^2$ , puis calculer la limite de  $f$  en plus l'infini.

3)- Déterminer les deux branches infinies de  $(\mathcal{C}_f)$ .

4)- Montrer que :  $\forall x \in ]0, +\infty[$ ,  $f'(x) = -\left(\frac{1 - \ln x}{x}\right)^2$ .

5)- Dresser le tableau de variation de  $f$

6)- Montrer que la fonction  $F : x \mapsto \frac{1}{3}(\ln^2(x) + 3)\ln x$  est une primitive de  $f$  sur  $]0, +\infty[$ .

### Exercice 04 :

On considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $]0, +\infty[$  par :  $f(x) = \ln(x + \sqrt{x})$ , et soit  $(\mathcal{C}_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (unité : 2cm).

1)- Calculer les limites  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ , puis déduire une branche infinie de  $(\mathcal{C}_f)$

2)- Déterminer la branche infinie de  $(\mathcal{C}_f)$  au voisinage de  $+\infty$

3)- Étudier les variations de  $f$  sur  $]0, +\infty[$ , puis dresser son tableau de variations.

4)- Construire la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

5)- Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  à déterminer.

6)- Construire la courbe  $(\mathcal{C}_{f^{-1}})$  dans le même repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

### Exercice 05 :



On considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $]0, +\infty[$  par :  $f(x) = x \ln(x+1)$

**Partie I :**

- 1)- Déterminer  $f'(x)$ , pour tout  $x$  de  $]0, +\infty[$ , puis déduire que  $f$  est croissante sur  $]0, +\infty[$
- 2)- Étudier la continuité de  $f$  sur  $]0, +\infty[$ , puis déterminer  $f([0, e-1])$
- 3)- Montrer que :  $f(x) \leq x$ , pour tout  $x$  de  $[0, e-1]$

**Partie II :**

Soit  $(u_n)$  la suite numérique définie par :  $u_0 = 1$  et  $u_{n+1} = u_n \ln(u_n + 1)$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$

- 1)- Montrer, par récurrence, que :  $0 \leq u_n \leq e-1$ , pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$
- 2)- Montrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.
- 3)- Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$

**Exercice 06 :**

On considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $]0, +\infty[$  par :  $f(x) = x - \ln(x)$ , et soit  $(\mathcal{C}_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (unité : 1cm).

- 1)- Calculer  $f(1)$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .
- 2)- Déterminer les deux branches infinies de  $(\mathcal{C}_f)$ .
- 3)- Étudier la continuité de  $f$  sur  $]0, +\infty[$ .
- 4)- Montrer que :  $\forall x \in ]0, +\infty[, f'(x) = \frac{x-1}{x}$ .
- 5)- Dresser le tableau de variation de  $f$ , puis en déduire le signe de la fonction  $f$ .
- 6)- Étudier la position relative de  $(\mathcal{C}_f)$  et la première bissectrice du repère.
- 7)- Construire la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .
- 8)- Montrer que la fonction  $F : x \mapsto \frac{1}{2}x^2 + x(1 - \ln(x)) - 3$  est une primitive de  $f$  sur  $]0, +\infty[$ .
- 9)- Soit  $(u_n)$  la suite numérique définie par :  $u_0 = \sqrt{3}$  et  $u_{n+1} = u_n - \ln(u_n)$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$ 
  - a)- Montrer, par récurrence, que  $1 \leq u_n \leq 2$  pour tout  $n$  de  $\mathbb{N}$
  - b)- Montrer que la suite  $(u_n)$  est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.
  - c)- Déterminer la limite de la suite  $(u_n)$



**Exercice 07 :**

**Partie I :**

On considère la fonction numérique  $g$  définie sur  $]0, +\infty[$  par :  $g(x) = x^3 - 1 + 2 \ln(x)$

- 1)- Calculer  $g(1)$
- 2)- Déterminer  $g'(x)$ , pour tout  $x$  de  $]0, +\infty[$ , puis déduire le sens de variation de  $g$  sur  $]0, +\infty[$
- 3)- En déduire le signe de  $g(x)$  selon les valeurs de  $x$

**Partie II :**

On considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $]0, +\infty[$  par :  $f(x) = x - \frac{\ln(x)}{x^2}$ , et soit  $(\mathcal{C}_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (unité : 3cm).

- 1)- Calculer les limites  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ , puis déduire une branche infinie de  $(\mathcal{C}_f)$
- 2)- Montrer que la première bissectrice du repère est une asymptote oblique de  $(\mathcal{C}_f)$  au voisinage de  $+\infty$
- 3)- Étudier la position relative de  $(\mathcal{C}_f)$  et la première bissectrice du repère.

4)- a)- Montrer que :  $\forall x \in ]0, +\infty[$ ,  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$

b)- Dresser le tableau de variations de  $f$ .

5)- a)- Montrer que :  $\forall x \in ]0, +\infty[$ ,  $f''(x) = \frac{5-6\ln(x)}{x^4}$

b)- En déduire que  $(\mathcal{C}_f)$  admet un point d'inflexion  $A$  dont on déterminera ses coordonnées.

6)- Construire la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

### Exercice 08 :

On considère la fonction numérique  $f$  définie par :  $f(x) = x^2 - \ln(2x-1) - 1$ , et soit  $(\mathcal{C}_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (unité : 2cm).

1)- Déterminer  $D_f$ , puis calculer les limites de  $f$  aux bornes de  $D_f$ .

2)- Déterminer les branches infinies de  $(\mathcal{C}_f)$

3)- a) -Montrer que :  $\forall x \in D_f$ ,  $f'(x) = \frac{2(x-1)(2x+1)}{2x-1}$ .

b)- Dresser le tableau de variations de  $f$ .

c)- En déduire que :  $\forall x \in \left] \frac{1}{2}, +\infty \right[$ ,  $\ln(2x-1) \leq x^2 - 1$

4)- Construire la courbe  $(\mathcal{C}_f)$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

5)- Soit  $g$  la restriction de  $f$  sur l'intervalle  $[1, +\infty[$ .

a)- Montrer que  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$  définie sur un intervalle  $J$  à déterminer.

b)- Construire  $(\mathcal{C}_{g^{-1}})$  la courbe représentative de  $g^{-1}$  dans le même repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

6)- On considère la fonction numérique  $h$  définie par :  $h(x) = x^2 - \ln(2|x|-1) - 1$ .

a)- Montrer que la fonction  $h$  est paire.

b)- Construire  $(\mathcal{C}_h)$  la courbe représentative de  $h$  dans le même repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .



Correction



07

# Les nombres complexes



**Exemple 1 : Conjugué, module, argument, forme trigonométrique et exponentielle**

1) Recopier et compléter le tableau suivant :

$z$	$\bar{z}$	$ z $	$arg(z)$	Forme trigon.	notation expon.
$z_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$					
$z_2 = -1 - i$					
$z_3 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$					
$z_4 = (1+i)^{2026}$					
$z_5 = (1+i)e^{i\frac{3\pi}{5}}$					
$z_6 = -7e^{i\frac{\pi}{6}}$					

2) a) Ecrire  $z_3$  sous la forme algébrique.b) En déduire la valeur de  $\cos(\frac{\pi}{12})$  et de  $\sin(\frac{\pi}{12})$ **Exemple 2 : Affixe d'un vecteur-Points alignés**On considère les points  $A, B$  et  $C$  d'affixes respectifs  $a = -3i$  ;  $b = 1 - i$  ;  $c = 2 + i$ Montrer que les points  $A, B$  et  $C$  sont alignés.**Exemple 3 : Distance entre deux points-mesure d'un angle orienté-orthogonalité-parallélisme**On considère les points  $A(2+3i)$  ;  $B(-1)$  ;  $C(1+7i)$  et  $D(2+6i)$ . Montrer que  $(AB) \perp (CD)$ **Exemple 4 :**On considère les points :  $A(1+4i)$  ;  $B(i)$  ;  $C(1+i)$  et  $D(-2-8i)$ . Montrer que  $(AB) \parallel (CD)$ **Exemple 5 : Triangles remarquables**On considère les points  $A, B$  et  $C$  d'affixes respectifs  $a = 9 + i$  ;  $b = 9 - i$  ;  $c = 11 - i$ Montrer que  $ABC$  est un triangle rectangle et isocèle en  $B$ .**Exemple 6 :**On considère les points  $A, B$  et  $C$  d'affixes respectifs  $a = 3 + 3i$  ;  $b = 5 - 2i$  ;  $c = 7 + 11i$ Déterminer l'affixe du point  $G$  le centre de gravité du triangle  $ABC$ .**Exemple 7 : Quadrilatères remarquables**On considère les points  $A(1+2i)$  ;  $B(-1+5i)$  ;  $C(2+i)$  et  $D(4-2i)$ 1) Montrer que  $ABCD$  est un parallélogramme.2) Déterminer l'affixe du point  $H$  le centre de  $ABCD$ **Exemple 8 :**On considère les points  $A, B, C$  et  $D$  d'affixes respectifs  $a = \sqrt{3}$  ;  $b = 2 + i\sqrt{3}$  ;  $c = 2 - \sqrt{3} + 2i$  et  $d = (2 - \sqrt{3})i$ Montrer que le quadrilatère  $ABCD$  est un carré.**Exemple 9 :**On considère les points  $A, B, C$  et  $D$  d'affixes respectifs  $a = 1 + i\sqrt{3}$  ;  $b = -1 - i\sqrt{3}$  ;  $c = 2(-1 + i\sqrt{3})$  et $d = -1 + i\sqrt{3}$ Montrer que les points  $A, B, C$  et  $D$  sont cocycliques.**Exemple 10 : Résolution des équations de 2ième degré**Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations suivantes

$(E_1): z^2 + 2z + 5 = 0$  ;  $(E_2): 5z^2 - 7z + 3 = 0$

$(E_3): 3z^2 + 4z + 2 = 0$  ;  $(E_4): z^2 - 6z + 34 = 0$

$(E_5): z^2 + 2\sqrt{3}z + 12 = 0$  ;  $(E_6): z^2 + 2\sqrt{5}z + 7 = 0$

$(E_7): z^2 - (1 + \sqrt{2})z + \sqrt{2} = 0$  ;  $(E_8): 4z^2 - 4z + 1 = 0$

**Exemple 11 : Transformations**Soit  $A$  le point d'affixe  $a = 3 + 5i$  et  $\vec{u}$  le vecteur d'affixe  $b = 4 - 2i$ Soit  $t_{\vec{u}}$  la translation de vecteur  $\vec{u}$ 1) Donner l'écriture complexe de la translation  $t_{\vec{u}}$ 2) Déterminer l'affixe du point  $B$  l'image de  $A$  par  $t_{\vec{u}}$ **Exemple 12 :**Soit  $h$  l'homothétie de centre  $\Omega(-2 + i)$  et de rapport  $k = -\frac{1}{2}$ 1) Donner l'écriture complexe de l'homothétie  $h$ 2) Déterminer l'affixe du point  $B$  l'image du point  $N(-\frac{3}{2} - 2i)$  par l'homothétie  $h$ **Exemple 13 :**On considère les points  $A, B$  et  $C$  d'affixes respectifs  $a = 4 + 4i$  ;  $b = 3 + 5i$  ;  $c = 3 + 4i$ Soit  $M'(z)$  l'image du point  $M(z)$  par la rotation  $r$  de centre  $C$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ .1) Montrer que  $z' = iz + 7 + i$ 2) Vérifier que  $B$  est l'image de  $A$  par la rotation  $r$ .3) En déduire la nature du triangle  $ABC$ .**Exemple 14 : Linéarisation**1) Linéariser  $\cos^3(x)$ ,  $\sin^3(x)$  et  $\sin(2x) \times \cos^3(5x)$ 

2) A l'aide des formules d'Euler montrer que :

$$\cos(a) \times \sin(b) = \frac{1}{2} [\sin(a+b) - \sin(a-b)]$$

3) a) En utilisant les formules d'Euler, montrer que :

$$e^{i\theta} + e^{i\theta} = 2\cos\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta+\theta'}{2}\right)}$$

$$\text{Et } e^{i\theta} - e^{i\theta'} = 2i \times \sin\left(\frac{\theta-\theta'}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta+\theta'}{2}\right)}$$

b) En déduire la forme exponentielle des nombres suivants :

$$z_9 = e^{i\frac{5\pi}{3}} + e^{i\frac{\pi}{6}} \text{ et } z_{10} = 1 - e^{i\frac{\pi}{3}}$$

**Exemple 15 : Ensembles des points**Déterminer l'ensemble des points  $M(z)$  du plan complexe dansles cas suivants :  $|z - 3 + 2i| = 5$  ;  $\frac{z-2i}{z-3} \in \mathbb{R}$  ;  $\frac{z-4+2i}{z+3i} \in i\mathbb{R}$ 

$$|z + 2 - 7i| = |z - 4 + i|$$
 ;  $\frac{1-iz}{1+z} \in i\mathbb{R}$  ;  $\frac{z-1}{iz} \in i\mathbb{R}$

$$|\bar{z} - 3 + 2i| = 5$$
 ;  $\frac{\bar{z}-2i}{z-3} \in \mathbb{R}$  ;  $\frac{\bar{z}-4+2i}{z+3i} \in i\mathbb{R}$

# Résumé 7 : Les nombres complexes

## Ensemble des nombres complexes

Il existe un ensemble, noté  $\mathbb{C}$ , appelé ensemble des nombres complexes tel que :

- $\mathbb{C}$  contient  $\mathbb{R}$ , c'est-à-dire :  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$ ,
- Il existe un élément de  $\mathbb{C}$ , noté  $i$ , vérifiant :  $i^2 = -1$ ,
- $\mathbb{C}$  est muni d'une addition et d'une multiplication pour lesquelles les règles de calcul sont les mêmes que dans  $\mathbb{R}$ .

## Forme algébrique d'un nombre complexe

Tout nombre complexe  $z$  s'écrit d'une façon unique sous la forme  $x + iy$ , avec  $x$  et  $y$  sont deux réels.

- Le réel  $x$  est appelé la **partie réelle** de  $z$ , et noté  $\operatorname{Re}(z) = x$
- Le réel  $y$  est appelé la **partie imaginaire** de  $z$ , et noté  $\operatorname{Im}(z) = y$

Si  $\operatorname{Im}(z) = 0$ , alors  $z = x$  est réel.

Si  $\operatorname{Re}(z) = 0$ , alors  $z = iy$  et, dans ce cas, on dit que  $z$  est **imaginaire pur**.

L'ensemble des nombres imaginaires purs est noté  $i\mathbb{R}$ .

## Conjugué d'un nombre complexe

Soit  $z$  un nombre complexe de forme algébrique  $x + iy$ .

On appelle **conjugué** de  $z$  le nombre complexe noté  $\bar{z}$  tel que  $\bar{z} = x - iy$ .

## Module d'un nombre complexe

Soit  $z$  un nombre complexe.

On appelle **module** de  $z$  le réel positif noté  $|z| = \sqrt{z\bar{z}}$

Si  $x + iy$  est la forme algébrique de  $z$ , alors :  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

## Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Tout nombre complexe non nul  $z$  peut s'écrire sous une **forme trigonométrique** :  $z = r(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ , avec  $r$  un réel positif et  $\alpha$  un réel.

- Le réel positif  $r$  est le module de  $z$
- Le réel  $\alpha$  est appelé un **argument** de  $z$ , et noté  $\arg(z)$ . On écrit :  $\arg(z) \equiv \alpha [2\pi]$

**Autres écritures :** Écriture exponentielle :  $z = re^{i\alpha}$       Écriture polaire :  $z = [r, \alpha]$

### Remarque importante :

$$\cos \alpha - i \sin \alpha = \cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha) \qquad -\cos \alpha + i \sin \alpha = \cos(\pi - \alpha) + i \sin(\pi - \alpha)$$

$$-\cos \alpha - i \sin \alpha = \cos(\pi + \alpha) + i \sin(\pi + \alpha) \qquad \sin \alpha + i \cos \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

## Propriétés

Conjugué	Module	Argument	Opérations et forme trigo.
$z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$	$ z  =  -z  =  \bar{z} $	$\arg(-z) \equiv \pi + \arg(z) [2\pi]$	$[r, \theta] \times [r', \theta'] = [r \times r', \theta + \theta']$
$z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z)$	$ z \times z'  =  z  \times  z' $	$\arg(\bar{z}) \equiv -\arg(z) [2\pi]$	$\left[\frac{r}{s}, \theta\right] = \left[\frac{r}{s}, \theta - \alpha\right]$
$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$	$ z^n  =  z ^n$	$\arg(z \times z') \equiv \arg(z) + \arg(z') [2\pi]$	$[s, \alpha] = \left[\frac{r}{s}, \theta - \alpha\right]$
$\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'$	$\left \frac{z}{z'}\right  = \frac{ z }{ z' }$	$\arg(z^n) \equiv n \cdot \arg(z) [2\pi]$	$[r, \theta]^n = [r^n, p \times \theta]$
$\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$	$ z + z'  \leq  z  +  z' $	$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg(z) - \arg(z') [2\pi]$	$\overline{[r, \theta]} = [r, -\theta]$
$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$		$\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg(z) [2\pi]$	$\frac{1}{[r, \theta]} = \left[\frac{1}{r}, -\theta\right]$
$z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = z$			
$z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \bar{z} = -z$			

**Formule de Moivre :**  $(\cos x + i \sin x)^n = \cos(nx) + i \sin(nx)$  ( $n$  est un entier naturel)

**Formules d'Euler :**  $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$  et  $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$



## Affixe, distance et mesure d'angle

Soient  $A, B, C$  et  $D$  quatres points du plan complexe.

$\text{aff}(\overrightarrow{AB}) = z_B - z_A$   $C$  est le milieu du segment  $[AB]$  si et seulement si  $z_C = \frac{z_A + z_B}{2}$

$$AB = |z_B - z_A| \quad \left( \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} \right) \equiv \arg \left( \frac{z_D - z_C}{z_B - z_A} \right) [2\pi]$$

## Équation du second degré

On considère l'équation  $az^2 + bz + c = 0$ , avec  $a, b$  et  $c$  trois réels et  $a$  non nul.

Soit  $\Delta$  le discriminant de cette équation

- Si  $\Delta > 0$ , alors l'équation admet deux solutions réelles distinctes :  $z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$  et  $z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$
- Si  $\Delta = 0$ , alors l'équation admet une seule solution réelle :  $z_0 = \frac{-b}{2a}$
- Si  $\Delta < 0$ , alors l'équation admet deux solutions complexes conjugués :  $z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$  et  $z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$

## Écritures (ou représentations) complexes des transformations usuelles

Soit  $F$  une transformation plane qui à tout point  $M(z)$  associe le point  $M'(z')$ .

Donner l'écriture complexe de  $F$  consiste à exprimer  $z'$  en fonction de  $z$

Transformation plane et ses éléments caractéristiques	Définition géométrique	Écriture complexe
$T$ est la <b>translation</b> de vecteur $\vec{w}$ d'affixe $w$	$T(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{w}$	$z' = z + w$
$h$ est l' <b>homothétie</b> de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport $k$	$h(M) = M' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega M'} = k \overrightarrow{\Omega M}$	$z' = k(z - \omega) + \omega$
$R$ est la <b>rotation</b> de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle $\alpha$	$R(M) = M' \Leftrightarrow \begin{cases} \overrightarrow{\Omega M'} = \overrightarrow{\Omega M} \\ \left( \overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'} \right) \equiv \alpha [2\pi] \end{cases}$	$z' = e^{i\alpha}(z - \omega) + \omega$

Réciproquement, toute transformation plane d'écriture complexe  $z' = az + b$ , avec  $a$  non nul, est :

- une translation de vecteur  $\vec{w}$  d'affixe  $b$ , si  $a = 1$  ;
- une homothétie de rapport  $a$ , si  $a$  est un réel non nul différent de 1 ;
- une rotation d'angle  $\arg(a)$ , si  $a$  est un nombre complexe non réel de module 1.

Dans les deux derniers cas,  $\omega$  l'affixe du centre  $\Omega$  vérifie l'égalité :  $\omega = a\omega + b$

## L'outil complexe pour traduire des notions géométriques

<b>Ensemble des points</b>	♥ Médiatrice		
	♥ Cercle		
	♥ Alignement		
<b>Trois points</b>	♥ Milieu d'un segment		
	♥ Triangle	● Isocèle	● Rectangle
		● Rectangle et isocèle	● Équilatéral
	♥ Droites parallèles		
	♥ Droites perpendiculaires		
<b>Quatre points</b>	♥ Quadrilatère	● Parallélogramme	● Losange
		● Rectangle	● Carré

# Série 7 : Les nombres complexes

Dans toute la suite, le plan est rapporté au repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$

### Exercice 1 :

- 1)- Déterminer deux réels  $a$  et  $b$  tels que :  $3i - a = (2 - ib)(i - b)$   
 2)- Soient  $p$  et  $q$  deux nombres réels tel que  $p$  est différent de 1 et de -1  
 Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation :  $z = p\bar{z} + q$

### Exercice 2 :

Écrire sous forme trigonométrique chacun des nombres suivants :

$$z_1 = (1-i)^2 \quad z_2 = -\cos \frac{\pi}{9} + i \sin \frac{\pi}{9} \quad z_3 = -2\left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}\right) \quad z_4 = \sin \frac{\pi}{5} + i \cos \frac{\pi}{5}$$

$$z_5 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i} \quad z_6 = (\sqrt{3}-i)^7 \quad z_7 = (1+i)^{2009}$$

Correction



### Exercice 3 :

Résoudre dans  $\mathbb{C}$  les équations suivantes :

$$(E_1): 2z^2 - 6z + 5 = 0 \quad (E_2): z^2 - 5z + 9 = 0$$

$$(E_3): z^2 - 2z + 17 = 0 \quad (E_4): z + \frac{7}{z} = 3$$

$$(E_5): z^4 + 4z^2 - 21 = 0 \quad (E_6): z^2 - 2(1 + \sqrt{2})z + 2\sqrt{2}(1 + \sqrt{2}) = 0$$

### Exercice 4 :

On considère, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation suivante :  $(E): z^3 + 2z^2 - 16 = 0$

- 1)- Montrer que 2 est solution de  $(E)$ , puis que  $(E)$  peut s'écrire sous la forme  $(z-2)(az^2 + bz + c) = 0$ , où  $a, b$  et  $c$  sont trois réels que l'on déterminera.  
 2)- En déduire les solutions de l'équation  $(E)$  sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.

### Exercice 5 :

Soit  $z$  un nombre complexe différent de  $-3i$

On pose :  $Z = \frac{3z+i}{z+3i}$

- 1)- Montrer que l'ensemble des points  $M(z)$  tels que  $|Z|=3$  est la médiatrice du segment  $[AB]$ , avec  $A$  et  $B$  sont deux points d'affixes respectives  $-\frac{1}{3}i$  et  $-3i$   
 2)- Montrer que :  $|Z|=1 \Leftrightarrow |z|=1$   
 3)- En déduire l'ensemble des points  $M(z)$  tels que :  $|Z|=1$

### Exercice 6 :

Soit  $P(z) = z^3 + 6z^2 + 13z + 10$

- 1)- Calculer  $P(-2)$   
 2)- En déduire une factorisation de  $P(z)$   
 3)- Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation :  $P(z) = 0$

### Exercice 7 :

On considère les points  $A, B$  et  $C$  d'affixes respectives  $a=2, b=1+i$  et  $c=1-i$

- 1)- a)- Écrire  $c$  sous forme trigonométrique  
 b)- Montrer que  $c^{2020}$  est un nombre réel  
 2)- Vérifier que :  $\frac{b-a}{c-a} = -i$ , puis déduire la nature du triangle  $ABC$   
 3)- Montrer que  $ABOC$  est un carré  
 4)- Déterminer l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que  $|iz+1-i|=2$



**Exercice 8 :**1)- Résoudre dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes l'équation :  $7z^2 - 5z + 1 = 0$ 2)- Résoudre dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes l'équation :  $7z^2 - 5iz - 1 = 0$ **Exercice 9 :**On considère les points  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$  d'affixes respectives  $a = -8 + 5i$ ,  $b = -8 - 5i$ ,  $c = i$  et  $d = 11i$ 1)- Soit  $T$  la translation qui transforme  $A$  en  $B$ a)- Donner la représentation complexe de  $T$ b)- Vérifier que le point  $C$  est l'image de  $D$  par la translation  $T$ 2)- Montrer que :  $\frac{a-c}{d-b} = \frac{i}{2}$ 3)- En déduire que le quadrilatère  $ABCD$  est un losange et que  $BD = 2AC$ 4)- Déterminer l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que  $|z-i| = |z|$ **Exercice 10 :**On considère les points  $A$  et  $B$  d'affixes respectives  $a = 1+i$  et  $b = 2-3i$ Déterminer l'affixe des points  $M$  tels que  $ABM$  soit un triangle équilatéral.**Exercice 11 :**1)- Résoudre dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes l'équation :  $z^2 - 4z + 13 = 0$ 2)- On considère les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  d'affixes respectives  $a = i$ ,  $b = 2+3i$  et  $c = \bar{b}$ Soient  $z$  l'affixe d'un point  $M$  du plan et  $z'$  l'affixe du point  $M'$ , image de  $M$  par la rotation  $R$ de centre  $B$  et d'angle  $\frac{\pi}{4}$ a)- Exprimer  $z'$  en fonction de  $z$ b)- Déterminer  $d$  l'affixe du point  $D$  est l'image du point  $A$  par la rotation  $R$ c)- En déduire la nature du triangle  $ABD$ d)- Montrer que les points  $B$ ,  $C$  et  $D$  sont alignés**Exercice 12 :**

On considère, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation suivante :

$$(E): z^4 + (1-\sqrt{3})z^3 + (2-\sqrt{3})z^2 + (1-\sqrt{3})z + 1 = 0$$

1)- Le nombre 0 est-il solution de l'équation (E) ?

2)- Résoudre, dans l'ensemble des nombres complexes, les équations suivantes :

$$(E_1): z^2 + z + 1 = 0$$

$$(E_2): z^2 - z\sqrt{3} + 1 = 0$$

$$(E_3): z^2 + (1-\sqrt{3})z - \sqrt{3} = 0$$

3)- Montrer que l'équation (E) est équivalente à l'équation suivante

$$(E'): \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 + (1-\sqrt{3})\left(z + \frac{1}{z}\right) - \sqrt{3} = 0$$

4)- En déduire les solutions de l'équation (E) sous forme algébrique

**Exercice 13 :**Déterminer la nature de la transformation plane et ses éléments caractéristiques qui à tout point  $M$  d'affixe  $z$  associé le point  $M'$  d'affixe  $z'$  dans chacun des cas suivants :

1)  $z' = z + 2 - i$

2)  $z' = 2z - 1 + 3i$

3)  $z' = iz - 2$

4)  $z' = 4(z - 5 + i)$

5)  $z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)z$

6)  $z' = -iz + 7 - 10i$

**Exercice 14 :**1)- Résoudre dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes l'équation :  $z^2 - 2z + 2 = 0$ 2)- On pose  $a = 1-i$  et  $b = 2 + \sqrt{3} + i$ a)- Écrire  $a$  sous forme trigonométriqueb)- Vérifier que :  $\frac{b}{a} = (1 + \sqrt{3})e^{i\frac{\pi}{3}}$ , puis écrire  $b$  sous forme trigonométriquec)- Déduire que  $b^6$  est un nombre imaginaire pur3)- On considère les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  d'affixes respectives  $a$ ,  $b$  et  $c = -1 + i\sqrt{3}$ 

Soient  $z$  l'affixe d'un point  $M$  du plan et  $z'$  l'affixe du point  $M'$ , image de  $M$  par la rotation  $R$  de centre  $A$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$

- a)- Exprimer  $z'$  en fonction de  $z$
  - b)- Vérifier que le point  $C$  est l'image du point  $B$  par la rotation  $R$
  - c)- En déduire la nature du triangle  $ABC$
- 4)- Soit  $(E)$  l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que  $|z-2-\sqrt{3}-i| = |z+1-i\sqrt{3}|$
- a)- Déterminer l'ensemble  $(E)$
  - b)- En déduire que le milieu du segment  $[BC]$  appartient à l'ensemble  $(E)$

**Exercice 15 :**

- 1)- Résoudre dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  des nombres complexes l'équation :  $z^3 - 8 = 0$
- 2)- On considère les points  $A, B, C$  et  $D$  d'affixes respectives  $a = 2, b = -1 + i\sqrt{3}, c = -1 - i\sqrt{3}$  et  $d = -4 + 2i\sqrt{3}$

- a)- Vérifier que :  $\frac{a-d}{a-b} = 2$ , puis déduire que  $B$  est le milieu du segment  $[AD]$
- b)- Écrire  $\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$  sous forme trigonométrique
- c)- Vérifier que :  $\frac{b-a}{c-a} = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ , puis déduire la nature du triangle  $ABC$

- 3)- Soit  $H$  le point d'affixe  $h = 2 - 2i\sqrt{3}$ .  
Montrer que  $ABCH$  est un losange.

- 4)- Soit  $(E)$  l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que  $|z+1+i\sqrt{3}| = |\bar{z}+4+2i\sqrt{3}|$
- a)- Déterminer l'ensemble  $(E)$
  - b)- En déduire que le point  $B$  appartient à l'ensemble  $(E)$
- 5)- Déterminer l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que  $|2z-4+4i\sqrt{3}| = |1-5i|$



**Exercice 16 :**

On considère les points  $A$  et  $B$  d'affixes respectives  $a = 4$  et  $b = 3 - i$   
Soient  $z$  l'affixe d'un point  $M$  du plan et  $z'$  l'affixe du point  $M'$ , image de  $M$  par la rotation  $R$  de centre  $A$  et d'angle  $-\frac{\pi}{2}$

- 1)- a)- Montrer que :  $z' = -iz + 4 + 4i$   
b)- Vérifier que l'affixe du point  $C$  image du point  $B$  par la rotation  $R$  est  $c = 3 + i$   
c)- En déduire la nature du triangle  $ABC$
- 2)- Soient  $t$  la translation de vecteur  $\overrightarrow{AB}$  et  $D$  l'image du point  $C$  par la translation  $t$
- a)- Déterminer  $d$  l'affixe du point  $D$
  - b)- En déduire la nature du quadrilatère  $ABDC$
- 3)- Déterminer l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que  $|\bar{z}-3-i| = |3+i|$

**Exercice 17 :**

On considère les points  $A, B, C$  et  $D$  d'affixes respectives  $a = -\sqrt{2}, b = 1 + i, c = 1 - i$  et  $d = 2 + \sqrt{2}$

- 1)- a)- Écrire  $b$  sous forme trigonométrique  
b)- Déterminer la plus petite valeur de l'entier naturel non nul  $n$  pour que  $b^n$  soit un nombre réel  
c)- Déterminer la plus petite valeur de l'entier naturel non nul  $n$  pour que  $b^n$  soit un nombre imaginaire pur

- 2)- Vérifier que :  $\frac{b-a}{c-a} = \frac{\sqrt{2}}{2}b$ , puis déduire que :  $AB = AC$  et  $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$

- 3)- a)- Montrer que le quadrilatère  $ABDC$  est un losange

b)- En déduire que  $\frac{\pi}{8}$  est une mesure de l'angle orienté  $\widehat{(\vec{AD}, \vec{AB})}$

4)- Soient  $G$  le point d'affixe  $g = i\sqrt{2}$  et  $h$  l'homothétie de centre  $D$  et de rapport  $\sqrt{2}$

a)- Déterminer la représentation complexe de  $h$

b)- Vérifier que :  $h(B) = G$

c)- En déduire que les points  $B$ ,  $D$  et  $G$  sont alignés

5)- On pose :  $p = 1 + \sqrt{2} + i$

a)- Vérifier que :  $|p| = \sqrt{4 + 2\sqrt{2}}$

b)- En utilisant la question 3)b), montrer que :  $\arg(p) \equiv \frac{\pi}{8} [2\pi]$

c)- Écrire  $p$  sous forme trigonométrique

d)- En déduire que :  $\tan \frac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$



Correction



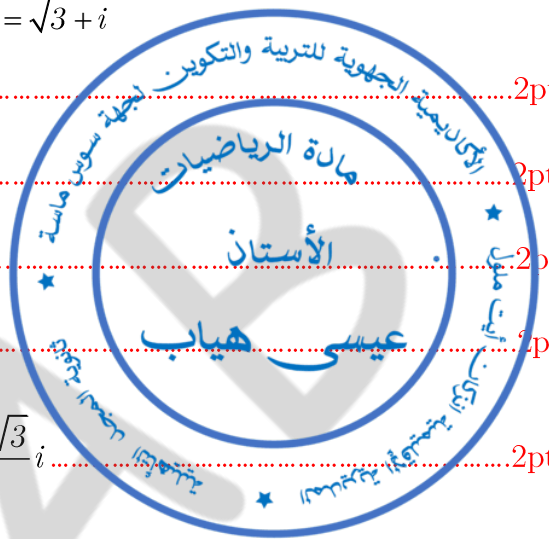


- ✓ Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. Faites des phrases claires et précises.
- ✓ Chaque tentative de tricher vaut un zéro.

**Exercice 1**

Soit  $z_1$  et  $z_2$  les nombres complexes définis par :  $z_1 = 1 + i$  et  $z_2 = \sqrt{3} + i$

- 1) Montrer que  $|z_1| = \sqrt{2}$  et  $|z_2| = 2$  .....2pt
- 2) a) Montrer que  $\arg(z_1) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$  et  $\arg(z_2) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$  .....2pt  
 b) En déduire la forme trigonométrique de  $z_1$  et de  $z_2$  .....2pt
- c) Déterminer la forme trigonométrique de  $\frac{z_1}{z_2}$  .....1pt
- 3) Montrer que la forme algébrique de  $\frac{z_1}{z_2}$  est  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1 + \sqrt{3}}{4} + \frac{1 - \sqrt{3}}{4}i$  .....2pt
- 4) En déduire la valeur de  $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$  et de  $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$  .....1pt
- 5) Montrer que  $\left(\frac{z_1}{\sqrt{2}}\right)^{2028} + \left(\frac{z_2}{2}\right)^{2028} = 0$  .....1pt



**Exercice 2**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ .

On considère les points  $A(1+6i)$  ;  $B(-4+3i)$  ;  $C(1)$  ;  $D(6+3i)$

- 1) a) Montrer que  $ABCD$  est un parallélogramme. ....1pt  
 b) Montrer que  $(AC) \perp (DB)$  .....1pt  
 c) En déduire que  $ABCD$  est un losange. ....1pt
- 2) Déterminer l'affixe du point  $I$  le centre de  $ABCD$  .....1pt

**Exercice 3**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ .

On considère les points  $A(1+6i)$  ;  $B(-4+3i)$  ;  $C(-9)$  ;  $D(4+i)$  ;  $E(-6-5i)$

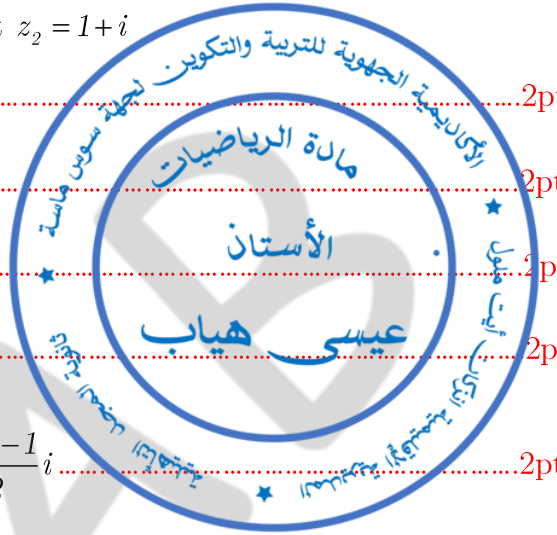
- 1) Montrer que les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont alignés. ....1pt
- 2) Montrer que  $(AB) \parallel (DE)$  .....1pt
- 3) Montrer que le triangle  $ABD$  est rectangle et isocèle en  $A$ . ....1pt
- 4) Soit  $\theta$  un nombre réel. Montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$  .....1pt

- ✓ Le soin et la rédaction seront pris en compte dans la notation. Faites des phrases claires et précises.
- ✓ Chaque tentative de tricher vaut un zéro.

**Exercice 1**

Soit  $z_1$  et  $z_2$  les nombres complexes définis par :  $z_1 = 1 + i\sqrt{3}$  et  $z_2 = 1 + i$

- 1) Montrer que  $|z_1| = 2$  et  $|z_2| = \sqrt{2}$  .....2pt
- 2) a) Montrer que  $\arg(z_1) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$  et  $\arg(z_2) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$  .....2pt
  - b) En déduire la forme trigonométrique de  $z_1$  et de  $z_2$  .....2pt
  - c) Déterminer la forme trigonométrique de  $\frac{z_1}{z_2}$  .....2pt
- 3) Montrer que la forme algébrique de  $\frac{z_1}{z_2}$  est  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} + \frac{\sqrt{3}-1}{2}i$  .....2pt
- 4) En déduire la valeur de  $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$  et de  $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$  .....1pt
- 5) Montrer que  $\left(\frac{z_1}{2}\right)^{2028} + \left(\frac{z_2}{\sqrt{2}}\right)^{2028} = 0$  .....1pt



**Exercice 2**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ .

On considère les points  $A(-1+6i)$  ;  $B(-6+3i)$  ;  $C(-11)$  ;  $D(2+i)$  ;  $E(-8-5i)$

- 1) Montrer que les points  $A$ ,  $B$  et  $C$  sont alignés. ....1pt
- 2) Montrer que  $(AB) \parallel (DE)$  .....1pt
- 3) Montrer que le triangle  $ABD$  est rectangle et isocèle en  $A$ . ....1pt
- 4) Soit  $\theta$  un nombre réel. Montrer que  $(\forall n \in \mathbb{N}) (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$  .....1pt

**Exercice 3**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ .

On considère les points  $A(-1+6i)$  ;  $B(-6+3i)$  ;  $C(-1)$  ;  $D(4+3i)$

- 1) a) Montrer que  $ABCD$  est un parallélogramme. ....1pt
  - b) Montrer que  $(AC) \perp (DB)$  .....1pt
  - c) En déduire que  $ABCD$  est un losange. ....1pt
- 2) Déterminer l'affixe du point  $I$  le centre de  $ABCD$  .....1pt

Lycée : <b>Almajd</b>		Prof : <b>Aissa HIYAB</b>	
Matière	Mathématique	Durée	3 heures
Filière	Science expérimentale : PC et SVT	Coefficient	7

**INSTRUCTION GENERALES**

- ✓ L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée.
- ✓ Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient.
- ✓ L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter.
- ✓ Ecrire lisiblement et vérifier que le sujet est complet : il comporte 3 pages numérotées de 1 à 4, celle-ci est comprise.
- ✓ Assurez-vous que vous avez traité tous les exercices avant de quitter la salle d'examen.

**COMPOSANTS DU SUJET**

L'épreuve est composée de quatre exercices et un problème indépendant entre eux et répartie suivant les domaines comme suite :

Exercice 1	Suites Numériques	2pts
Exercice 2	Suites Numériques	4pts
Exercice 3	Nombres complexes	3pts
Exercice 4	Nombres complexes	3pts
Problème	Etude d'une fonction numérique	8pts

- ✓  $\ln$  Désigne la fonction logarithme népérien
- ✓  $\bar{a}$  le conjuguée du nombre complexe  $a$ .

**Exercice1**

Soit  $(u_n)_{n \geq 1}$  la suite numérique définie par :  $\begin{cases} u_1 = 0 \\ (\forall n \in \mathbb{N}^*); u_{n+1} = \frac{4}{4-u_n} \end{cases}$

0.5pt 1/ Montrer par récurrence que :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*); u_n < 2$ .

0.25pt 2/ a/ Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*); u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 2)^2}{4 - u_n}$ .

0.25pt b/ En déduire la monotonie de la suite  $(u_n)_{n \geq 1}$

0.5pt 3/ a/ Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*); \frac{1}{u_{n+1} - 2} = \frac{1}{u_n - 2} - \frac{1}{2}$ .

0.5pt b/ En déduire  $u_n$  en fonction de  $n$  puis calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

**Exercice2**

On considère la suite numérique  $(u_n)$  définie par :  $\begin{cases} u_0 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} = \frac{2u_n + 3}{u_n + 2} \end{cases}$

0.5pt 1/ Montrer par récurrence que :  $(\forall n \in \mathbb{N}); 0 < u_n < \sqrt{3}$ .

0.25pt 2/ a/ Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}); u_{n+1} - u_n = \frac{3 - u_n^2}{u_n + 2}$ .

0.5pt b/ En déduire que la suite  $(u_n)$  est convergente

0.75pt 3/ a/ Montrer que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) 0 < \sqrt{3} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(\sqrt{3} - u_n)$ .

0.75pt b/ En déduire que :  $(\forall n \in \mathbb{N}) 0 < \sqrt{3} - u_n \leq \frac{1}{2^n}(\sqrt{3} - 1)$ .

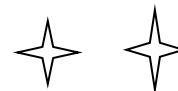
0.25pt c/ Calculer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

4/ Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $w_n = \frac{u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}}{n}$

0.5pt a/ Montrer par récurrence que :  $(\forall n \in \mathbb{N}^*); w_n < u_n$

0.5pt b/ En déduire que  $(\forall n \in \mathbb{N}^*); w_n < \sqrt{3}$



**Exercice3**

- 0.5pt 1/ Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation suivante :  $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$
- 2/ Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ , on considère les points  $A, B$  et  $C$  d'affixes respectives  $a = \sqrt{3} + 1 + (\sqrt{3} - 1)i$ ,  $b = \sqrt{3} - 1 + (\sqrt{3} + 1)i$  et  $c = \sqrt{3} - i$
- 0.75pt a/ Ecrire  $c$  sous forme trigonométrique puis montrer que  $c^6 = -64$
- 1pt b/ Montrer que  $(1+i)c = a$  et  $i\bar{a} = b$  puis déduire la forme trigonométrique de  $a$  et de  $b$
- 0.5pt c/ Calculer  $\arg\left(\frac{b}{a}\right)$ , puis déduire la nature du triangle  $OAB$
- d/ Soit  $D$  le point d'affixe  $d = 1 + (\sqrt{3} - 4)i$
- 0.25pt Déterminer l'ensemble des points  $M(z)$  du plan vérifiant :  $|z - 1 + i(4 - \sqrt{3})| = 2$ .

**Exercice4**

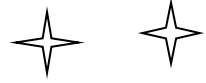
Les questions 1/2/3/ sont indépendantes.

- 1.25pt 1/ On pose  $a = 1 - i\sqrt{3}$ ,  $b = 1 + i\sqrt{3}$  et  $c = 2$
- Montrer que  $a^{2028} + b^{2028} = -c^{2029}$
- 2/ Soit  $\theta \in ]0; \pi[$ , on pose  $z_1 = \sin(\theta)(1 - i)$
- 0.5pt Montrer que  $|z_1| = \sqrt{2}\sin(\theta)$  et  $\arg(z_1) \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi]$
- 3/ Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ , on pose  $z_2 = b - (\cos(\alpha) + i\sin(\alpha))\bar{b}$  tel que  $b = -1 + i$
- 0.75pt a/ Montrer que  $z_2 = 2\sqrt{2} \times \sin\left(\frac{3\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) \times i \times e^{i\frac{\alpha}{2}}$  (on rappelle que :
- 0.5pt  $\sin(x) = 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\sin\left(\frac{x}{2}\right)$  et  $\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 + \cos(x)}{2}$  et  $\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1 - \cos(x)}{2}$  )
- b/ En déduire  $|z_2|$  et  $\arg(z_2)$

**Problème :****Partie A**

Soit  $g$  la fonction définie sur  $]0; +\infty[$  par  $g(x) = 2\ln(x) - 1 + \frac{1}{x}$

- 0.5pt 1/ Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$
- 0.5pt 2/ Montrer que  $g'(x) = \frac{2x-1}{x^2}$  pour tout  $x \in ]0; +\infty[$ .
- 0.5pt 3/ Dresser le tableau de variations de  $g$
- 0.75pt 4/ a/ Calculer  $g(1)$  puis montrer que l'équation  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  dans  $]0; \frac{1}{2}[$
- 0.5pt b/ Dresser le tableau de signe de  $g$  sur  $]0; +\infty[$



## Partie B

On considère la fonction numérique  $f$  définie sur  $[0; +\infty[$  par 
$$\begin{cases} f(x) = x^2 (\ln(x) - 1) + x & ; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

- 0.5pt 1/ a/ Montrer que  $f$  est continue à droite en 0
- 0.75pt b/ Etudier la dérivabilité de  $f$  à droite en 0 puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.
- 0.75pt 2/ Montrer que  $f(\alpha) = \frac{\alpha}{2}(1-\alpha)$  et  $0 < f(\alpha) < \frac{1}{4}$
- 1pt 3/ a/ Montrer que  $f'(x) = xg(x)$  pour tout  $x \in [0; +\infty[$  puis dresser le tableau de variations de  $f$ .
- 0.25pt b/ En déduire que  $f(x) \geq 0$  pour tout  $x \in ]0; +\infty[$
- 4/ Soit  $(C_f)$  la courbe représentative de la fonction  $f$  dans un repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$
- 0.5pt a/ Etudier la branche infinie de  $(C_f)$  au voisinage de  $+\infty$
- 0.5pt b/ Etudier la position relative de  $(C_f)$  et la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = x$
- 1pt c/ Tracer  $(C_f)$  dans le repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

Correction



*Tronc commun sciences et tronc  
commun technologique*

- 10 Cours bien détaillés
- 10 Résumés bien précis
- 10 Séries d'exercices corrigées
- 03 Devoirs libres corrigés
- 03 Devoirs surveillés

Exercices et stratégies d'olympiades

2025/2026

Préparé par Aïssa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant

*Tronc commun sciences et tronc  
commun technologique*

- 05 Cours bien détaillés
- 05 Résumés bien précis
- 05 Séries d'exercices corrigées
- 03 Devoirs libres corrigés
- 03 Devoirs surveillés

Exercices et stratégies d'olympiades

2025/2026

Préparé par Aïssa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant

*Première année Bac sciences  
expérimentales*

- 06 Cours bien détaillés
- 06 Résumés bien précis
- 06 Séries d'exercices corrigées
- 03 Devoirs libres corrigés
- 06 Devoirs surveillés

2025/2026

Préparé par Aïssa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant

*Première année Bac sciences  
expérimentales*

- 06 Cours bien détaillés
- 06 Résumés bien précis
- 06 Séries d'exercices corrigées
- 03 Devoirs libres corrigés
- 06 Devoirs surveillés

2025/2026

Préparé par Aïssa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant

*Première année Bac sciences  
économiques et la gestion*

- 10 Cours bien détaillés
- 10 Résumés bien précis
- 10 Séries d'exercices
- 6 Devoirs libres corrigés
- 6 Devoirs surveillés

2025/2026

Préparé par Aïssa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant

*Première année Bac Sciences  
Mathématiques*

- 08 Cours bien détaillés
- 08 Résumés bien précis
- 08 Séries d'exercices
- 04 Devoirs libres corrigés
- 08 Devoirs surveillés

2025/2026

Préparé par Aïssa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant

*Première année Bac Sciences  
Mathématiques*

- 06 Cours bien détaillés
- 06 Résumés bien précis
- 06 Séries d'exercices
- 04 Devoirs libres corrigés
- 08 Devoirs surveillés

2025/2026

Préparé par Aïssa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant

*2BACSPT & 2BACSVTF*

- 06 Cours bien détaillés
- 06 Résumés bien précis
- 06 Séries d'exercices corrigées
- 03 Devoirs libres corrigés
- 06 Devoirs surveillés
- Extrait du bar
- Examen blanc corrigé

2025/2026

Préparé par Aïssa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant

*2BACSPT & 2BACSVTF*

- 05 Cours bien détaillés
- 05 Résumés bien précis
- 05 Séries d'exercices corrigées
- 03 Devoirs libres corrigés
- 06 Devoirs surveillés
- Extrait du bac
- 04 Examens blancs corrigés

2025/2026

Préparé par Aïssa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant

*2BSM A&B*

- Résumés des cours
- 8 Séries d'exercices et problèmes
- 8 Devoirs libres corrigés
- Extrait du bac
- Examen blanc corrigé
- Activités pour les concours

2025/2026

Préparé par Aïssa HIYAB professeur d'enseignement secondaire qualifiant