

MATHÉMATIQUES



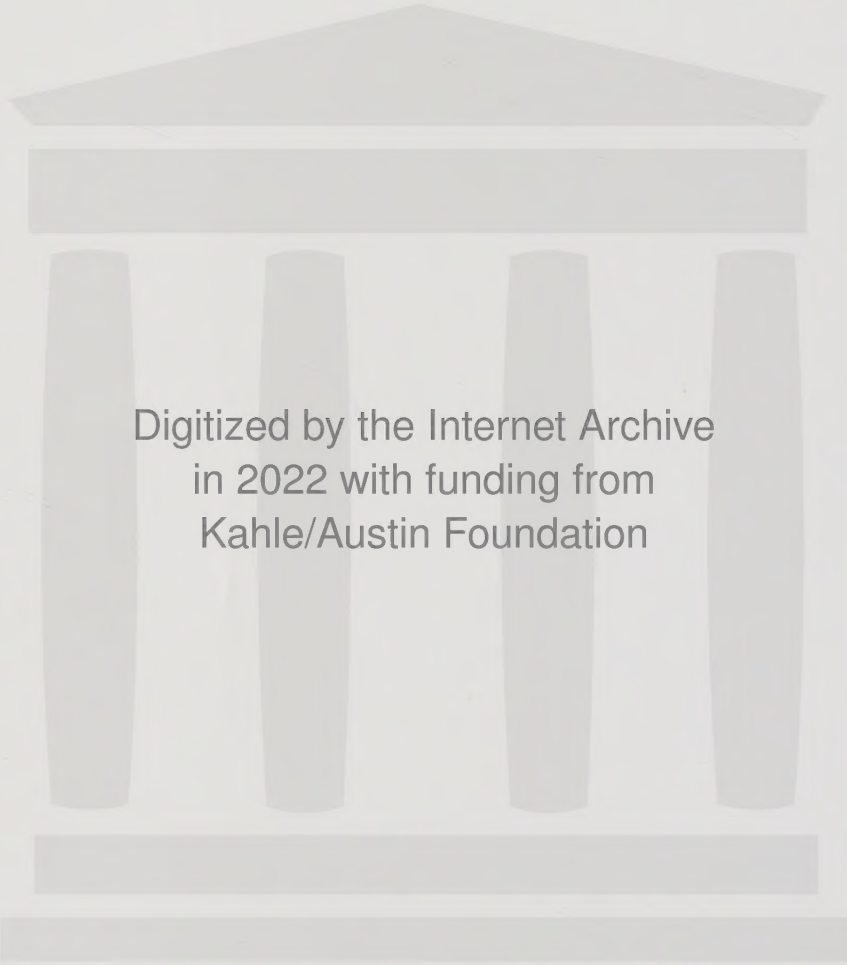
TERMINALES CE

Tome 2

Nombres
complexes
Probabilités
Géométrie



NATHAN



Digitized by the Internet Archive
in 2022 with funding from
Kahle/Austin Foundation

COLLECTION TRANSMATH

André ANTIBI
Raymond BARRA
Claude JOBERT
Joël MALAVAL
Jean-Jacques PENSEC

MATHÉMATIQUES

TC

Tome 2

PROGRAMME RENTRÉE 1992

NATHAN

AVANT-PROPOS

1. Ce livre est strictement conforme au nouveau programme paru en 1991 pour les classes de Terminales C et E.

2. Pourquoi une nouvelle édition ?

Pour être en conformité avec le nouveau programme et les nouvelles instructions, pour faire bénéficier cette nouvelle édition des remarques consécutives à l'utilisation de la précédente. Nous avons donc *repensé le cours, les travaux pratiques, les exercices*. En particulier, en **Géométrie**, de grandes simplifications ont été apportées dans les exposés qui restent cependant complets et rigoureux.

En particulier aussi, les **exercices** sont maintenant plus nombreux, plus variés. Ils sont rédigés de façon à être accessibles au plus grand nombre. À la demande de collègues, nous avons inclus une rubrique de **Q.C.M.** et une rubrique de **problèmes de synthèse**.

3. Nos intentions

Nous avons respecté les principes qui nous ont toujours guidés :

- *Traiter le programme, mais rien que le programme.*
- *Écrire un livre lisible par l'élève et utile pour lui.*

Nous avons utilisé un langage simple et clair, choisi pour donner sens aux termes mathématiques, pour développer de bonnes images mentales, tout en restant juste et précis.

Pour que le livre soit utile, nous n'avons pas craint de donner des explications détaillées, même élémentaires. Nous avons traité de nombreux **exercices résolus** soit sous forme d'**exemples introductifs** et d'**exemples d'application immédiate**; soit sous forme de **solution développée et commentée**, afin de dégager, d'une part, des méthodes générales de travail et, d'autre part, les méthodes générales employées par la résolution de certains types de problèmes (elles sont explicitement indiquées par le cadre MÉTHODE).

- *Relier les connaissances et les structurer.*
- *Montrer, chaque fois que possible, le « pourquoi » et le « comment ».* Montrer les champs d'application extérieurs aux mathématiques, en évitant néanmoins le piège du « faux concret ».

4. Les problèmes de logique

Conformément au programme, nous avons veillé constamment à développer les aptitudes au raisonnement logique tout au long du cours et des travaux pratiques. Dans l'emploi du vocabulaire de la logique, nous avons recherché les formulations les plus facilement compréhensibles.

5. Calculatrices programmables, micro-ordinateurs

Leur utilisation est celle prévue par le programme.

6. Organisation de l'ouvrage

La progression suivie est pratiquement celle du programme. Il nous semble que c'est celle qui laisse le plus de liberté d'adaptation à l'utilisateur. Nous avons veillé à ce que les notions et résultats importants soient utilisés tout au long de l'ouvrage.

7. Organisation des chapitres

La plupart des chapitres sont subdivisés en cinq parties décrites ci-dessous.

- *Pour prendre un bon départ* contient les connaissances antérieures et nécessaires pour aborder le chapitre, ainsi que les exercices-tests.
- *Les travaux pratiques d'approche* introduisent des notions nouvelles. Les explications utiles y sont données; il ne s'agit donc pas d'une série d'exercices classiques.
- *Le cours* est enrichi de commentaires, d'exercices résolus et commentés, de points de méthode, de notes historiques.
- *Les travaux pratiques d'application* sont, notamment, ceux proposés par le programme. Ils se présentent sous forme d'exercices, expliqués de telle sorte que l'élève puisse avancer très progressivement dans la situation proposée.
- *Les exercices* sont classés en quatre parties :
 - « Pour tester ses connaissances » ; en général, les Q.C.M. sont dans cette rubrique.
 - « Pour s'entraîner » : ce sont des exercices d'application rendus « faciles » par un questionnement fractionné; ces exercices, les plus nombreux, sont classés par thèmes. Nous avons créé dans cette partie une sous-rubrique intitulée : « Exercices du baccalauréat. »
 - « Pour chercher plus » : il s'agit là d'exercices moins faciles; les étapes intermédiaires ne sont pas toujours indiquées.
 - « Problèmes de synthèse » : nous avons créé dans cette partie une sous-rubrique intitulée « Problèmes du baccalauréat ».

À ce propos, de manière générale, nous avons gardé la rédaction d'origine des exercices et des problèmes du baccalauréat. Généralement aussi, nous avons proposé les exercices et les problèmes les plus récents (excepté pour les exercices d'Analyse, moins fréquents ces dernières années).

Les exercices les plus difficiles sont marqués d'un astérisque. Ces exercices ne doivent pas servir de référence pour la définition d'un niveau exigible. Certains **exercices sont corrigés** : une réponse succincte est fournie en fin de livre; ces exercices sont indiqués par leur numéro cerné d'un carré bleu.

D'avance, nous remercions les collègues qui voudraient bien nous faire part de leurs remarques.

Sommaire

Algèbre - Combinatoire - Probabilités

1	Systèmes linéaires	5
2	Les nombres complexes	18
3	Combinatoire	57
4	Probabilités	83

Géométrie

5	Angles de vecteurs. Déterminants. Points cocycliques	114
6	L'outil vectoriel	133
7	Produit scalaire. Produit vectoriel	159
8	Courbes paramétrées	199
9	Les coniques	213
10	Déplacements. Isométries	244
11	Similitudes	282
12	Notions sur les transformations de l'espace	304
	Lexique : rappels sur les transformations usuelles	316
	Corrigés des exercices	317
	Index	320

Systèmes linéaires

TRAVAUX PRATIQUES D'APPROCHE

Rappelons le résultat suivant, valable pour tout système de deux équations linéaires à deux inconnues :

le système $\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$ a une solution et une seule lorsque son déterminant $ab' - a'b$ est différent de zéro. Lorsque le déterminant $ab' - a'b = 0$, le système n'a pas de solution ou a une infinité de solutions.

1 Méthode de Gauss : étude d'un exemple. Codification des transformations

Vous avez déjà utilisé, en classe de Première, la méthode de Gauss pour résoudre un système d'équations linéaires à plus de deux inconnues. Rappelons que cette méthode consiste à transformer le système (S) en un système (S') facile à résoudre, et qui a même ensemble de solutions que (S). Cette dernière affirmation est démontrée dans la partie « Cours ». Rappelons aussi que la méthode de Gauss est algorithmique et donc qu'elle peut être programmée et utilisée sur ordinateur.

Nous allons la mettre en œuvre sur un exemple, en indiquant une **codification** usuelle des transformations successives effectuées.

$$\text{Résolvons le système (S) : } \begin{cases} x - 3y + 2z = 1 \\ 2x - y + 3z = 9 \\ 3x - 2y + 4z = 11. \end{cases} \quad \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

On note L_1, L_2, L_3 , les équations ou lignes du système (S).

1.1. Première étape

Le but est d'obtenir un système (S₁) de la forme suivante :

$$\begin{cases} x - 3y + 2z = 1 \\ \blacksquare y + \blacksquare z = \blacksquare \\ \blacksquare z = \blacksquare \end{cases}$$

où le symbole $\blacksquare$ désigne des constantes.

1. Pour cela, multiplions, par exemple, la première ligne par -2 ; nous obtenons :

$$-2x + 6y - 4z = -2,$$

et ajoutons-là « membre à membre » à L_2 . Nous obtenons :

$$0x + 5y - z = 7.$$

Du système (S) gardons la ligne L_1 , la ligne L_3 et remplaçons la ligne L_2 par $0x + 5y - z = 7$, c'est-à-dire $5y - z = 7$.

Nous obtenons le système (S') :

$$(S') \begin{cases} x - 3y + 2z = 1 \\ 5y - z = 7 \\ 3x - 2y + 4z = 11. \end{cases}$$

La transformation qui fait passer de (S) à (S') est notée :

$$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$$

ce qui se lit : L_2 est remplacée par $-2L_1 + L_2$.

On note encore L_1, L_2, L_3 les équations de (S'), bien que L_2 ait changé.

2. À partir de (S'), effectuons, par exemple, la transformation :

$$L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1.$$

Cela signifie que :

- on garde de (S') la ligne L_1 et la ligne L_2 ;
- on remplace dans (S'), la ligne L_3 par l'équation obtenue **après avoir multiplié L_1 par -3** (ce qui donne : $-3x + 9y - 6z = -3$), **et après avoir ajouté cette équation à L_3** (ce qui donne : $7y - 2z = 8$). Nous obtenons le système (S₁) :

$$(S_1) \begin{cases} x - 3y + 2z = 1 & L_1 \\ 5y - z = 7 & L_2 \\ 7y - 2z = 8. & L_3 \end{cases}$$

Remarque : en pratique, on passe souvent directement de (S) à (S₁), sans écrire (S').

1.2. Deuxième étape

Le but est d'obtenir, à partir du système (S₁), un système (S₂) de la forme suivante :

$$(S_2) \begin{cases} x - 3y + 2z = 1 \\ 5y - z = 7 \\ \blacksquare z = \blacksquare. \end{cases}$$

Dans le cas présent, pour passer de (S₁) à (S₂), nous effectuons, par exemple la transformation :

$$L_3 \leftarrow L_3 - \frac{7}{5} L_2.$$

Nous obtenons :

$$(S_2) \begin{cases} x - 3y + 2z = 1 \\ 5y - z = 7 \\ 3z = 9. \end{cases}$$

Résolvez le système (S₂) et vérifiez que sa solution est aussi solution de (S).

2 Résolution d'un système de 4 équations à 4 inconnues

Résolvez, selon la méthode de Gauss, le système (S) :

$$(S) \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 & L_1 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 1 & L_2 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 3 & L_3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 4. & L_4 \end{cases}$$

COURS

1 Equations linéaires à p inconnues. Systèmes linéaires

1.1. DÉFINITIONS D'UN p -UPLET DE NOMBRES RÉELS ET DE $\mathbb{R}^p$

p étant un naturel, $p \geq 2$, un **p -uplet** de nombres réels est une *liste ordonnée* de p nombres réels. Cela signifie que, parmi ces réels, il y a un premier que nous pourrions noter x_1 (x indice 1), un deuxième x_2 , etc. Un p -uplet, en général, est noté : $(x_1, x_2, \dots, x_p)$, ou : $(s_1, s_2, \dots, s_p)$, ou...

L'ensemble de tous les p -uplets de nombres réels est noté $\mathbb{R}^p$.

Un **couple** de réels est un 2-uplet, c'est-à-dire une liste ordonnée de deux réels. Par exemple $(2; 3)$. Notez l'importance de l'ordre : le couple $(2; 3)$ n'est pas égal au couple $(3; 2)$.

L'ensemble de tous ces couples est noté $\mathbb{R}^2$.

Un **triplet** de réels est un 3-uplet. L'ensemble de tous ces triplets est noté $\mathbb{R}^3$.

1.2. ÉQUATIONS LINÉAIRES

DÉFINITION 1

- Une équation linéaire à p inconnues est une équation de la forme :

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_p x_p = b,$$

où les nombres $a_1, a_2, \dots, a_p$ et b sont donnés.

- Une **solution** dans $\mathbb{R}^p$ est un p -uplet $(s_1, \dots, s_p)$ tel que, si l'on calcule $a_1 s_1 + \dots + a_p s_p$, on trouve b .

- **Résoudre** l'équation dans $\mathbb{R}^p$, c'est déterminer l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}^p$.

EXEMPLES

Exemple 1.

L'équation à deux inconnues : $2x + 3y = 4$ est linéaire.

Dans $\mathbb{R}^2$, ses solutions sont les couples $\left(x; \frac{4-2x}{3}\right)$.

Vous savez que l'ensemble de ses solutions est représentée, après choix d'un repère, par la droite d'équation : $2x + 3y - 4 = 0$.

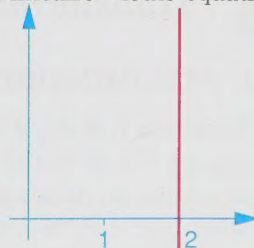
C'est pour cette raison, et par analogie, que l'on appelle « linéaire » toute équation dont les inconnues sont au premier degré.

Exemple 2.

L'équation à deux inconnues $x = 2$ est linéaire.

L'équation s'écrit : $x + 0y = 2$, et dans $\mathbb{R}^2$ ses solutions sont les couples $(2; y)$.

Leur ensemble est représenté par la droite d d'équation $x = 2$.



Exemple 3.

Les équations à trois inconnues : $2x - 5y + 3z = 4$, $3x - y + 5z - t = 8$, sont linéaires.

Remarque : en général, une équation linéaire a une infinité de solutions.

1.3. SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES

Dans la théorie, l'usage est de noter comme ci-dessous un système de n équations à p inconnues :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{np}x_p = b_n. \end{cases}$$

Les inconnues sont $x_1, x_2, \dots, x_p$.

Les coefficients des inconnues sont notés avec un double indice : a_{ij} . Le premier indice i sert à repérer la ligne, c'est-à-dire l'équation, le second indice j repère la colonne, c'est-à-dire l'inconnue devant laquelle est placée le coefficient a_{ij} .

Exemple : a_{32} est le coefficient de x_2 dans la troisième équation. On dit « a , trois, deux ».

Les équations, ou lignes, sont notées $L_1, L_2, \dots, L_n$.

DÉFINITION 2

- Dire qu'un p -uplet de réels $(s_1, \dots, s_p)$ est **solution** du système **(S)** signifie que ce p -uplet est solution dans $\mathbb{R}^p$ de **chaque** équation $L_1, L_2, \dots, L_n$.
- **Résoudre** un système c'est déterminer l'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions.

Remarque : lorsqu'un système n'a pas de solutions, on dit que son ensemble $\mathcal{S}$ de solutions est l'ensemble vide. On note alors : $\mathcal{S} = \emptyset$.

1.4. SYSTÈMES ÉQUIVALENTS

DÉFINITION 3

Dire que deux systèmes d'équations linéaires à p inconnues sont équivalents signifie qu'ils ont le même ensemble de solutions.

Il résulte directement de cette définition que pour trois systèmes $(S_1), (S_2), (S_3)$ à p inconnues, **si** (S_1) et (S_2) sont équivalents, **et si** (S_2) et (S_3) sont équivalents, **alors** (S_1) et (S_3) sont équivalents.

2

Transformations élémentaires

2.1. PRÉLIMINAIRES

1. Équations L et αL , α réel non nul

EXEMPLE

Considérons les deux équations :

$$\begin{aligned} 3x - 12y &= 24 & (1) \\ x - 4y &= 8. & (2) \end{aligned}$$

Il est clair que l'on obtient (2) en divisant par 3 chaque coefficient et le second membre de l'équation (1).

Lorsqu'on note L l'équation (1), l'usage est de noter $\frac{1}{3}L$ l'équation (2). Il est clair que L et $\frac{1}{3}L$ ont le même ensemble de solutions.

De manière générale, si L est l'équation : $a_1 x_1 + \dots + a_p x_p = b$, alors αL est l'équation :

$$\alpha a_1 x_1 + \dots + \alpha a_p x_p = \alpha b.$$

Les équations L et αL , $\alpha \neq 0$, ont même ensemble de solutions.

En effet, puisque $\alpha \neq 0$, pour tout p -uplet $(s_1, \dots, s_p)$ dire que : $a_1 s_1 + \dots + a_p s_p = b$ équivaut à dire que $\alpha a_1 s_1 + \dots + \alpha a_p s_p = \alpha b$.

Donc, dire que $(s_1, \dots, s_p)$ est solution de L équivaut à dire que $(s_1, \dots, s_p)$ est solution de αL .

2. Équations $L' + \alpha L$

EXEMPLE

Considérons les deux équations :

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 5 & L \\ x - 5y &= 8. & L' \end{aligned}$$

L'équation αL est l'équation :

$$2\alpha x + 3\alpha y = 5\alpha.$$

L'équation $L' + \alpha L$ est, par définition, l'équation obtenue en ajoutant membre à membre l'équation L' et l'équation αL ; c'est donc l'équation :

$$(1 + 2\alpha)x + (3\alpha - 5)y = 8 + 5\alpha. \quad L' + \alpha L$$

PROPRIÉTÉ

L et L' sont deux équations à p inconnues :

$$\begin{aligned} a_1 x_1 + \dots + a_p x_p &= c & L \\ b_1 x_1 + \dots + b_p x_p &= d. & L' \end{aligned}$$

Alors, les solutions communes à L et L' sont les solutions communes à L et $L' + \alpha L$.

Démontrons ce résultat.

Supposons que $(s_1, \dots, s_p)$ soit une solution de L et de L' . Alors :

$$\begin{aligned} a_1 s_1 + a_2 s_2 + \dots + a_p s_p &= c & (1) \\ b_1 s_1 + b_2 s_2 + \dots + b_p s_p &= d. & (2) \end{aligned}$$

Nous en déduisons que :

$$\alpha a_1 s_1 + \alpha a_2 s_2 + \dots + \alpha a_p s_p = c\alpha \quad (3)$$

et donc, par addition membre à membre des égalités (2) et (3), que :

$$(b_1 + \alpha a_1)s_1 + \dots + (b_p + \alpha a_p)s_p = d + c\alpha. \quad (4)$$

Les égalités (1) et (4) prouvent que $(s_1, \dots, s_p)$ est solution de L et de $L' + \alpha L$.

Réciproquement, supposons que $(s_1, \dots, s_p)$ soit solution de L et de $L' + \alpha L$. Alors, de cette hypothèse nous déduisons les égalités (1) et (4) écrites ci-dessus.

Par soustraction (4) - α (1), nous obtenons l'égalité (2).

Les égalités (1) et (2) montrent que $(s_1, \dots, s_p)$ est solution de L et de L' .

2.2. TRANSFORMATIONS ÉLÉMENTAIRES D'UN SYSTÈME (S)

(S) est un système de n équations linéaires à p inconnues, notées de haut en bas, $L_1, L_2, \dots, L_n$.

1. Transformation $L_i \longleftrightarrow L_j$

Lorsqu'on permute deux équations L_i et L_j , on obtient un système (T) équivalent à (S).

En effet, puisque (S) et (T) ont les mêmes équations, ils ont même ensemble de solutions (voir Définition 2).

Exemple : les systèmes $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ x - y = 8 \end{cases}$ et $\begin{cases} x - y = 8 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$ ont évidemment même ensemble de solutions.

2. Transformation $L_i \leftarrow \alpha L_i$, α réel non nul

Le système obtenu en remplaçant dans (S) l'équation L_i par αL_i ($\alpha \neq 0$) est équivalent au système (S).

En effet, nous avons vu au paragraphe 2.1., 1., que L_i et αL_i ont même ensemble de solutions.

Toutes les autres équations étant inchangées, les solutions communes à $L_1, L_2, \dots, L_i, \dots, L_n$, sont exactement les solutions communes à $L_1, L_2, \dots, \alpha L_i, \dots, L_n$, d'où le résultat (voir Définition 2).

3. Transformation $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$

Le système (T) obtenu en remplaçant dans (S) l'équation L_i par l'équation $L_i + \alpha L_j$ est équivalent au système (S).

En effet, nous avons vu au paragraphe 2.1., 2. que les solutions communes à L_j et L_i , sont exactement les solutions communes à L_j et $L_i + \alpha L_j$.

Toutes les autres équations étant inchangées, les solutions communes à $L_1, L_2, \dots, L_j, \dots, L_i, \dots, L_n$, sont exactement les solutions communes à :

$$L_1, L_2, \dots, L_j, \dots, L_i + \alpha L_j, \dots, L_n,$$

d'où le résultat.

3

Exercices résolus : résolution de systèmes par la méthode de Gauss

La méthode de Gauss consiste à transformer le système initial (S) en un système plus facile à résoudre, et surtout qui a même ensemble de solutions que le système (S). Pour cela, elle utilise les transformations élémentaires décrites au paragraphe 2.

EXERCICE RÉSOLU 1

Résolvez par la méthode de Gauss le système :

$$(S) \begin{cases} 2x - y + z = 3 \\ x + 3y - 4z = 2 \\ 3x - 2y + z = 1. \end{cases} \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{matrix}$$

SOLUTION COMMENTÉE ■■■

MÉTHODE ET COMMENTAIRES

Il peut être avantageux de placer L_2 en première ligne, cela facilitera les calculs à l'étape suivante.

Ceci se fait par $L_1 \longleftrightarrow L_2$, le système obtenu est équivalent à (S_1) .

$$(S_1) \begin{cases} x + 3y - 4z = 2 \\ 2x - y + z = 3 \\ 3x - 2y + z = 1 \end{cases}$$

On conserve L_1 de (S_1) et on l'utilise pour éliminer l'inconnue x dans l'équation L_2 . Ceci se fait par : $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$, le système (S_2) obtenu est équivalent à (S_1) .

$$(S_2) \begin{cases} x + 3y - 4z = 2 \\ -7y + 9z = -1 \\ 3x - 2y + z = 1 \end{cases}$$

De la même manière, on utilise L_1 pour éliminer x dans L_3 .

Ceci se fait par : $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$, le système (S_3) obtenu est équivalent à (S_2) .

$$(S_3) \begin{cases} x + 3y - 4z = 2 \\ -7y + 9z = -1 \\ -11y + 13z = -5 \end{cases}$$

On conserve L_2 de (S_3) et on l'utilise pour éliminer y de L_3 .

Ceci se fait par : $L_3 \leftarrow L_3 - \frac{11}{7}L_2$, le

système (S_4) obtenu est équivalent à (S_3) , donc à (S_2) , donc à (S_1) , donc à (S) .

$$(S_4) \begin{cases} x + 3y - 4z = 2 \\ -7y + 9z = -1 \\ -\frac{8}{7}z = -\frac{24}{7} \end{cases}$$

Le système (S_4) obtenu est *triangulaire*. Il se résout facilement en « remontant ». Nous obtenons : $z = 3$, puis : $-7y + 9 \times 3 = -1$, donc $y = 4$, puis $x + 3 \times 3 - 4 \times 4 = 2$, donc $x = 2$.

Le système (S) a une solution et une seule, le triplet : $(2, 4, 3)$.

■■■■■■■■■■

 EXERCICE
RÉSOLU 2

Résolvez le système de trois équations à trois inconnues :

$$(S) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x - y + 3z = -1 \\ -4x + 5y - 7z = 4. \end{cases}$$

MÉTHODE ET COMMENTAIRES

On conserve L_1 que l'on utilise pour éliminer x des équations suivantes par $L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 + 4L_1$; on obtient alors S_1 équivalent à S .

$$S_1 \begin{cases} y + z = 1 \\ -3y + z = -3 \\ 9y - 3z = 8 \end{cases}$$

On conserve L_2 que l'on utilise pour éliminer y de la dernière équation par $L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2$; on obtient alors S_2 équivalent à S_1 .

$$S_2 \begin{cases} y + z = 1 \\ -3y + z = -3 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

Le système S_2 n'a pas de solution, en effet sa dernière équation notée $0 = -1$ est en fait l'équation :

$$0x + 0y + 0z = -1$$

et on ne peut trouver aucun triplet de réels qui la vérifie.

Ainsi S , qui est équivalent à S_2 , n'a pas de solution.

■■■■■■■■■■

**EXERCICE
RÉSOLU 3**Résolvez le système **(S)** :

$$(\mathbf{S}) \begin{cases} x + 2y + 3z = 11 \\ -2x + y + 2z = 15 \\ 3x + y + z = -4. \end{cases}$$

SOLUTION COMMENTÉE ■■■

En opérant comme dans l'Exercice 1, par $L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1$ et par la transformation $L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1$, nous obtenons le système **(S₁)** :

$$(\mathbf{S}_1) \begin{cases} x + 2y + 3z = 11 \\ 5y + 8z = 37 \\ -5y - 8z = -37. \end{cases}$$

Par la transformation : $L_3 \leftarrow L_3 + L_2$, nous obtenons le système **(S₂)** :

$$(\mathbf{S}_2) \begin{cases} x + 2y + 3z = 11 \\ 5y + 8z = 37 \\ 0 = 0. \end{cases}$$

La dernière équation, notée $0 = 0$, est en fait, l'équation : $0x + 0y + 0z = 0$, et tout triplet (x, y, z) est solution.

Ainsi, un triplet (x, y, z) est solution de **(S₃)**, donc de **(S)**, dès qu'il est solution des deux premières équations de **(S₃)**, c'est-à-dire que **(S)** est équivalent au système de deux équations à trois inconnues :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 11 \\ 5y + 8z = 37. \end{cases}$$

Nous obtenons alors : $y = \frac{37 - 8z}{5}$, puis en reportant dans la première

équation : $x = \frac{z - 19}{5}$.

Les solutions de (S) sont donc les triplets $\left(\frac{z - 19}{5}, \frac{37 - 8z}{5}, z\right)$, où z est un réel quelconque.

Par exemple, pour $z = 0$, nous obtenons une solution : $\left(-\frac{19}{5}, \frac{37}{5}, 0\right)$.

Remarque : nous aurions pu exprimer z en fonction de y , puis x en fonction de y .

Les solutions de **(S)** s'expriment alors sous la forme :

$$\left(\frac{-y - 23}{8}, y, \frac{37 - 5y}{8}\right), y \text{ décrivant } \mathbb{R}.$$

■■■■■■■■■■

TRAVAUX PRATIQUES D'APPLICATION

1 En Électricité : loi des nœuds, loi des mailles

Un réseau électrique est constitué de dipôles actifs et passifs dont les bornes sont reliées entre elles par des fils parfaitement conducteurs (on ne considère que des dipôles linéaires). Un **nœud** est un point commun à plusieurs conducteurs. Une branche est une portion de circuit comprise entre deux nœuds.

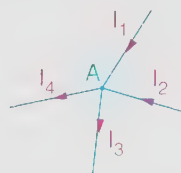
Lorsqu'on parcourt plusieurs branches du réseau en revenant au point de départ après n'être passé qu'une fois en chaque nœud, on dit que l'on a parcouru une **maille**.

Pour étudier un tel réseau, on fixe sur chaque branche un sens arbitraire pour les intensités de courant et sur chaque maille un sens arbitraire de parcours (indépendant des sens choisis pour les intensités).

Lois des nœuds

En aucun point du réseau, il ne peut y avoir accumulation des charges. Donc, si l'on compte positivement les intensités qui arrivent en un nœud et négativement celles qui s'en éloignent, *la somme algébrique des intensités est nulle*.

On obtient ainsi l'équation du nœud.



équation du nœud A :

$$I_1 + I_2 - I_3 - I_4 = 0.$$

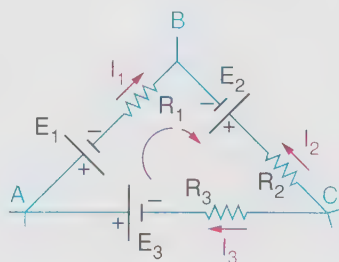
Lois des mailles

Dans chaque branche :

- les intensités sont comptées positivement si leur sens est le même que le sens de parcours sur la maille ;
- les forces électromotrices sont comptées positivement si le générateur abaisse le potentiel, négativement dans le cas contraire (c'est-à-dire que les forces électromotrices sont affectées du signe du premier pôle rencontré dans le sens de parcours de la maille).

Quand on fait le tour complet d'une maille, la somme algébrique des différences de potentiel entre les différents nœuds est nulle.

On obtient ainsi l'équation de maille.



équation de la maille ABCA :

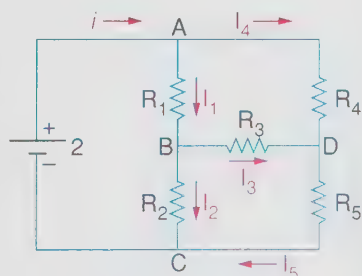
$$E_1 + R_1 I_1 - E_2 - R_2 I_2 + R_3 I_3 - E_3 = 0.$$

Considérons le réseau ci-contre.

a/ Écrivez les équations aux nœuds A, B, C, D et montrez que l'une quelconque d'entre elles est une conséquence des trois autres.

b/ Écrivez les équations des mailles ADBA (équation E) et BDCB (équation E').

Montrez que $E + E'$ est l'équation d'une maille.



On pose $R_1 = R_3 = R_5 = 100 \, \Omega$ et $R_2 = R_4 = 50 \, \Omega$.

c/ Déterminez l'intensité et le sens du courant circulant dans la branche BD lorsque $e = 150 \, \text{V}$.

2

Programmation linéaire en Économie

Une entreprise fabrique à la presse des clous en acier.

1. Supposons que la presse fonctionne 21 heures par jour et que cette entreprise possède un stock journalier de 100 kg de matière première. Supposons par ailleurs que la fabrication :

- d'un lot de 100 petits clous demande 600 grammes de matière première et 10 minutes de fabrication ;
- d'un lot de 100 gros clous demande 900 grammes de matière première et 10 minutes de fabrication.

Notons x le nombre de lots de 100 petits clous et y le nombre de lots de 100 gros clous.

a/ Expliquez pourquoi les contraintes se traduisent par le système :

$$\begin{cases} 6x + 9y \leq 1000 \\ x + y \leq 126 \\ x \in \mathbb{N}, y \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

b/ Représentez graphiquement l'ensemble des solutions de ce système. La partie du plan obtenue, s'appelle le *domaine des contraintes*.

Conseil : placez aussi précisément que possible les points d'intersection avec les axes et choisissez des unités convenables : 1 cm pour 10 sur chaque axe.

c/ Chaque solution $(x; y)$ de ce système s'appelle un *programme réalisable*. Quels sont les points du domaine des contraintes, dont les coordonnées correspondent à un programme réalisable ?

2. En outre sur la vente de chaque lot de 100 petits clous l'entreprise fait un bénéfice de 2,50 F et sur chaque lot de 100 gros clous un bénéfice de 3 F. Pour x lots de 100 petits clous et y lots de 100 gros clous, le bénéfice réalisé est donc, en francs :

$$2,5x + 3y.$$

La fonction F qui, à tout couple $(x; y)$ de naturels, associe le réel $2,5x + 3y$ est appelée la *fonction bénéfice* :

$$F(x; y) = 2,5x + 3y.$$

a/ Dessinez la droite qui correspond à un bénéfice de 100 F. Un tel bénéfice est-il envisageable ?

Dessinez la droite qui correspond à un bénéfice de 600 F. Un tel bénéfice est-il envisageable ?

b/ L'entreprise souhaite **maximiser** le bénéfice. Trouvez graphiquement le programme correspondant au bénéfice maximal.

Indication : x et y sont des naturels.

c/ Quelles sont, pour la réalisation de ce programme, les valeurs de x et y correspondantes, le bénéfice correspondant, ainsi que le poids de matière première utilisé et le temps de fonctionnement de la presse ?

3

Carrés magiques

Un carré magique est un tableau de nombres disposés en forme de carrés, de façon que la somme des nombres situés sur chaque ligne horizontale ou sur chaque ligne verticale ou sur chaque diagonale, soit toujours la même.

Voici un carré à 16 cases

Sur chaque ligne, sur chaque colonne et sur chaque diagonale, la somme des quatre nombres écrits est 34.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Nous vous proposons ci-dessous de déterminer tous les carrés magiques de 9 cases construits avec les naturels de 1 à 9, chacun d'eux étant utilisé une fois et une seule.

Supposons que l'on ait trouvé un tel carré magique.

a/ Pourquoi la somme sur chaque ligne, chaque colonne, chaque diagonale doit-elle être égale à 15 ?

Indication : la somme des naturels de 1 à 9 est 45.

b/ Quels sont les 7 autres carrés magiques déduits par rotation et par symétrie ?

c/ Pourquoi la case centrale (intersection des diagonales) contient-elle nécessairement le naturel 5 ?

d/ Déterminez tous les carrés magiques demandés.

EXERCICES ET PROBLÈMES

Pour s'entraîner

Pour les exercices 1 à 15, appliquez la méthode d'élimination de Gauss pour résoudre les systèmes proposés.

$$1. \begin{cases} x+10y-3z=5 \\ 2x-y+2z=2 \\ -x+y+z=-3. \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} 3a+4b+c=7 \\ a+2b-c=13 \\ 2a-b+2c=5. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x+2y+z+t=8 \\ 2x+2y+4z-8t=10 \\ y-z+5t=3 \\ -x-y-2z+4t=-5. \end{cases}$$

$$4. \begin{cases} 2x+y-z=-2 \\ x-3y-2z=-5 \\ 3x+2y+z=9. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 2a-b+3c=5 \\ a+2b-c=-1 \\ -a-7b+6c=2. \end{cases}$$

$$6. \begin{cases} x+2y-z=1 \\ 2x+y+2z=2 \\ x-4y+7z=3. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} x-2y+z+t=-2 \\ 2x-y-z-t=-1 \\ x+y+z-2t=-8. \end{cases}$$

$$8. \begin{cases} 3x+4y+z+2t=3 \\ 6x+8y+2z+5t=7 \\ 9x+12y+3z+10t=13. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} x-3y+4z-2w=5 \\ 2y+5z+w=2 \\ y-3z=4. \end{cases}$$

$$10. \begin{cases} 2x-y+3z=1 \\ -4x+2y+z=3 \\ -2x+y+4z=4 \\ 10x-5y-6z=-10. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} 2x+6y-z+u=-3 \\ x-y+z-u=2 \\ -x-3y+3z+2u=9. \end{cases}$$

$$12. \begin{cases} x-y+z+2u-v=6 \\ x+y-z+v=-2 \\ x+z-3u-2v=-3 \\ y+2z-u+v=5. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} 2x+2y-z+t=4 \\ 4x+3y-z+2t=6 \\ 8x+5y-3z+4t=12 \\ 3x+3y-2z+2t=6. \end{cases}$$

$$14. \begin{cases} 2x-y-6z+3t=-1 \\ 7x-4y+2z-15t=-32 \\ x-2y+4z+9t=5 \\ x-y+2z-6t=-8. \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} 2x-5y+3z+t=5 \\ 3x-7y+3z-t=-1 \\ 5x-9y+6z+2t=7 \\ 4x-6y+3z+t=8. \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} 6x+6y+5z+18t+20u=14 \\ 10x+9y+7z+24t+30u=18 \\ 12x+12y+13z+27t+35u=32 \\ 8x+6y+6z+15t+20u=16 \\ 4x+5y+4z+15t+15u=11. \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} 2x+7y+3z+t=5 \\ x+3y+5z-2t=3 \\ x+5y-9z+8t=1 \\ 5x+18y+4z+5t=12. \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} 2x+5y-8z=8 \\ 4x+3y-9z=9 \\ 2x+3y-5z=7 \\ x+8y-7z=12. \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} 6x+3y+2z+3t+4u=5 \\ 4x+2y+z+2t+3u=4 \\ 4x+2y+3z+2t+u=0 \\ 2x+y+7z+3t+2u=1. \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} x+2y+3z+4t+5u+6v=1 \\ 2x+3y+4z+5t+6u+v=2 \\ 3x+4y+5z+6t+u+2v=3 \\ 4x+5y+6z+t+2u+3v=4 \\ 5x+6y+z+2t+3u+4v=5 \\ 6x+y+2z+3t+4u+5v=6. \end{cases}$$

EXERCICES DU BACCALAURÉAT

21. Résolvez le système de six équations à six inconnues :

$$\begin{cases} x+2y+3z+4t+5u+6v=1 \\ 2x+3y+4z+5t+6u+v=2 \\ 3x+4y+5z+6t+u+2v=3 \\ 4x+5y+6z+t+2u+3v=4 \\ 5x+6y+z+2t+3u+4v=5 \\ 6x+y+2z+3t+4u+5v=6. \end{cases}$$

22. Résolvez dans $\mathbb{R}^4$ le système :

$$\begin{cases} x+y+z+t=0 \\ 3x+2y+z=5 \\ -x+y-z+t=-6 \\ 8x+4y+2z+t=12. \end{cases}$$

Application : déterminer les coefficients réels a, b, c, d de la fonction :

$$f : X \longmapsto aX^3 + bX^2 + cX + d$$

sachant que $f(1) = 0$, $f(-1) = -6$, $f(2) = 12$ et $f(1) = 5$.

1. Résolvez le système linéaire à quatre inconnues réelles a, b, c, d :

$$\begin{cases} a + b + c + d = -\frac{13}{2} \\ 4a + 3b + 2c + d = 0 \\ 8a + 4b + 2c + d = -2 \\ 32a + 12b + 4c + d = 0. \end{cases}$$

2. Application :

on considère la fonction f définie par :

$$f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e.$$

Déterminez les réels a, b, c, d, e sachant que la courbe représentative C de f possède, dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ où elle est dessinée, les propriétés suivantes :

C passe par les points : $O(0, 0)$; $A\left(1, -\frac{13}{2}\right)$;

$B(2, -4)$;

C admet en chacun des points A et B une tangente de vecteur directeur $\vec{i}$.

1. Résolvez le système :

$$\begin{cases} x + y + z + t = -4 \\ -x + y - z + t = 4 \\ 8x + 4y + 2z + t = 1 \\ 3x + 2y + z = 0. \end{cases}$$

2. Déterminez les coefficients a, b, c et d de la fonction :

$$f : X \longmapsto aX^3 + bX^2 + cX + d$$

sachant que $f(1) = -4$, $f(-1) = 4$, $f(2) = 1$ et f admet un minimum pour 1.

pour chercher plus

Déterminez les valeurs du réel k telles que le système suivant ait une seule solution, puis aucune solution, enfin plusieurs solutions.

$$\begin{cases} kx + y + z = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ x + y + kz = 1. \end{cases}$$

Résolvez, en discutant suivant les valeurs du réel λ , le système suivant :

$$\begin{cases} 2x + 3y + z + 2t = 3 \\ 4x + 6y + 3z + 4t = 5 \\ 6x + 9y + 5z + 6t = 7 \\ 8x + 12y + 7z + \lambda t = 9. \end{cases}$$

27. Résolvez, en discutant suivant les valeurs des réels a, b, c et d , les systèmes suivants :

$$a/ \begin{cases} x + 2y - 3z = a \\ 2x - y + 4z = b \\ 4x + 3y - 2z = c \\ 3x + y + z = d. \end{cases}$$

$$b/ \begin{cases} x + 2y + 2z = a \\ 3x + y = b \\ x + y + z = c. \end{cases}$$

28. « Sensibilité » des solutions à la variation des coefficients

On considère le système suivant :

$$\begin{cases} 8x + 7y = 15(1 + e) \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} 9x + 8y = 17 \end{cases} \quad (2)$$

où e est un paramètre que l'on peut interpréter comme une erreur relative sur le coefficient 15 de l'équation (1).

1. Résolvez ce système dans le cas où $e = 0$ puis dans le cas où $e = 0$ puis dans le cas où $e = 0,01$.

2. On considère maintenant le système (S') :

$$(S') \begin{cases} 8(1 + f)x + 7y = 15 \end{cases} \quad (1')$$

$$\begin{cases} 9x + 8y = 17 \end{cases} \quad (2')$$

où f est un paramètre que l'on peut interpréter comme une erreur relative sur le coefficient 8 de l'équation (1').

a/ Pour quelle valeur de f les droites d'équations (1') et (2') sont-elles parallèles?

b/ Résolvez le système dans le cas où $f = -0,1$.

3. Sur un papier millimétré, en prenant 5 cm comme unité, représentez les droites D_1 et D_2 d'équations respectives (1') et (2) et interprétez géométriquement les résultats précédents.

29. S est le système de trois équations à 3 inconnues :

$$(S) \begin{cases} x + 2y + 4z = -1 \\ x - my + m^2z = m + 1 \\ 2x + my + 2mz = 2 \end{cases}$$

où m est un réel donné.

Discutez et résolvez ce système en fonction des valeurs de m .

30. Problème des « bœufs de Newton »

75 bœufs ont brouté en 12 jours l'herbe d'un pré de 60 ares.

81 bœufs ont brouté en 15 jours l'herbe d'un pré de 72 ares.

Combien de bœufs, un pré de 96 ares pourrait-il nourrir pendant 18 jours?

Naturellement on supposera constante :

— la quantité d'herbe broutée journalièrement par chaque animal;

— la quantité initiale d'herbe par are;

— la quantité d'herbe qui pousse journalièrement par are.

Pour prendre un bon départ	18
T.P. d'approche	20
Cours	21
T.P. d'application	39
Exercices et problèmes	50

POUR PRENDRE UN BON DÉPART

Des notions de **géométrie** sont rappelées dans le chapitre 5 de ce livre : angles de vecteurs et leurs mesures dans le plan orienté, repères orthonormaux directs, cosinus, sinus...

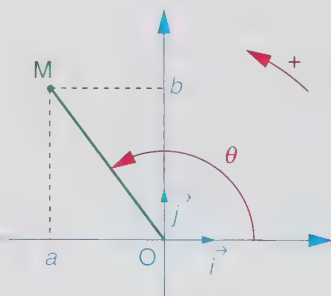
Par ailleurs, vous trouverez un **formulaire de trigonométrie** à la page 309 du **tome 1**.

1 Déterminer $\theta = (\vec{i}, \overrightarrow{OM})$ à partir des coordonnées de M

Nous nous bornons ici, à rappeler le *lien* entre les coordonnées $(a; b)$ d'un point M dans un repère orthonormal direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$. Notons θ une mesure en radians de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$. Alors :

$$a = OM \cos \theta$$

$$b = OM \sin \theta$$



Exercices-tests

1. Combien y a-t-il de points M tels que :

$$OM = 3 \text{ et } \cos(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}?$$

2. Dans chaque cas, ayant posé $(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) = \theta$, placez LE point M, tel que :

$$a/ OM = 5, \quad \cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \sin \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$b/ OM = 2, \quad \cos \theta = 0, \quad \sin \theta = -1.$$

3. Dans chaque cas, on donne les coordonnées $(a; b)$ du point M. Trouvez $\cos \theta$, $\sin \theta$ et θ , où $\theta = (\vec{i}, \overrightarrow{OM})$.

$$a/ a = -\sqrt{3}, \quad b = 1. \quad b/ a = \sqrt{2}, \quad b = -\sqrt{2}.$$

$$c/ a = 4, \quad b = 5. \quad d/ a = -\frac{1}{2}, \quad b = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2 Note historique

Certains problèmes n'ont pu être résolus que par la création de nouveaux nombres.

Par exemple, si ℓ désigne la longueur AD, alors $\ell^2 = 1 + 1 = 2$.

Or, à l'époque pythagoricienne (–550 av. J.-C.), les seuls

nombres utilisés sont les fractions $\frac{a}{b}$ avec a et b entiers ; les

pythagoriciens ont probablement constaté ce qu'Aristote

(–350 av. J.-C.) a démontré : il n'y a pas de fractions dont le

carré soit 2. Ainsi, si l'on veut exprimer la longueur ℓ au moyen d'un nombre, il est nécessaire de créer un nouveau nombre : « le nombre dont le carré est 2 », c'est-à-dire $\sqrt{2}$.

Par exemple encore, il n'existe pas de nombre réel x tel que $x^2 = -1$. Pour que l'équation $x^2 = -1$ ait une solution, il est nécessaire de concevoir un nouveau nombre : « le nombre dont le carré est -1 ». Ce nombre est noté i . En l'adjoignant aux réels, les calculs conduisent alors naturellement à utiliser les produits ib , puis les sommes $a + ib$, avec a et b réels. L'ensemble de tous les nombres ainsi obtenus, réels compris, est maintenant appelé « **ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes** ».

Mais dans la réalité, les choses ne furent pas aussi simples. Au contraire, les évolutions furent lentes, les avancées craintives et hésitantes, les bases mal assurées. Ainsi, par exemple, Lazare Carnot (1753-1823) refuse d'utiliser les nombres *négatifs*, pourtant conçus depuis l'Antiquité, parce qu'ils conduisent selon lui à des paradoxes ($-3 < 2$ et pourtant $3^2 > 2^2$).

Ce n'est que vers la fin du xix^{e} siècle et au début du xx^{e} que l'on donne un statut théorique rigoureux aux ensembles de nombres de plus en plus agrandis : $\mathbb{N}$, ensemble des entiers naturels, $\mathbb{Z}$, celui des entiers relatifs, $\mathbb{Q}$, ensemble des rationnels

$\frac{a}{b}$ avec a et b entiers, $\mathbb{R}$, ensemble des réels, et enfin $\mathbb{C}$, ensemble des nombres complexes.

Quant aux nombres complexes, ils naissent au xvi^{e} siècle, lorsque des algébristes italiens de l'école de Cardan eurent l'idée d'introduire des « nombres imaginaires » pour résoudre des équations du troisième degré. Bombelli écrit en 1572 : « j'ai trouvé une sorte de racine cubique très différente des autres », qu'il appelle « più di ménò », et qui est très voisine du nombre i dont le carré est -1 .

Mais ces nombres « imaginaires » dont les carrés peuvent être négatifs permettent d'obtenir des résultats et, pour cette raison, sont de plus en plus utilisés avec confiance.

Au xviii^{e} siècle, D'Alembert montre que tous les imaginaires inventés sont de la forme : $a + b\sqrt{-1}$, et Euler en 1777 adopte le symbole i pour désigner $\sqrt{-1}$, et écrit $i^2 = -1$.

À la fin du xviii^{e} siècle, les nombres $a + ib$ sont d'un usage courant.



TRAVAUX PRATIQUES D'APPROCHE

1 Premiers calculs sur les nombres complexes

1.1. Le nombre i

Les scientifiques se sont aperçus que la création d'un nombre i dont le carré est -1 , $i^2 = -1$, facilitait les calculs et permettait des progrès dans les découvertes de l'algèbre (voir la note historique).

S'il vous est difficile d'accepter l'idée qu'un carré puisse être négatif, considérez que, comme tous les objets mathématiques, les *nombres sont des outils* inventés par les mathématiciens pour mieux résoudre leurs problèmes. Le carré d'un nombre réel ne peut pas être négatif, mais rien n'empêche d'inventer un nombre *non réel* dont le carré est négatif. (L'interdit ne pourrait venir que de contradictions nées de l'utilisation, mais ici il n'y en a point.)

a/ À partir de $i^2 = -1$, calculez i^3 , i^4 , i^5 .

b/ Montrez que la suite (i^n) des puissances de i est une suite périodique.

1.2. Les nombres $a + ib$ avec a et b réels

a et b étant des réels, ib est le produit de i par b , et $a + ib$ la somme de a et de ib . On calcule avec les nombres $a + ib$ comme s'il s'agissait de nombres réels, en remplaçant, lorsque cela se présente, i^2 par -1 .

EXEMPLES

$$(1 + 2i) + (2 + 3i) = 3 + 5i$$

$$(1 + 2i)(2 + 3i) = 2 + 3i + 4i + 6i^2 = 2 + 7i - 6 = -4 + 7i.$$

Écrivez sous la forme $a + ib$, avec a et b réels, les nombres suivants; constatez que les résultats de ces calculs sont encore des nombres de la forme $a + ib$ avec a et b réels :

a/ $(1 - 5i) - (2 + 3i)$; $(1 + 3i)(2 - 4i)$;
 $(2 - 3i)(2 + 3i)$; $(1 - i)(2 - 3i)(1 + 4i)$.

b/ Écrivez le quotient : $\frac{1 - 3i}{1 + 2i}$ sous la forme $a + ib$.

Indication : multipliez numérateur et dénominateur par $1 - 2i$.

1.3. Équation $z^2 = r$ avec r réel négatif

Résolvons l'équation $z^2 = -9$. Évidemment, aucun nombre *réel* n'est solution. Mais nous allons voir que cette équation a deux nombres complexes solutions.

a/ En écrivant $-9 = 9i^2$, et l'équation sous la forme $z^2 - 9i^2 = 0$, montrez qu'elle a deux solutions de la forme $a + ib$.

b/ Résolvez de même les deux équations : $z^2 = -6$, $z^2 = -8$.

1.4. Équation $z^2 + z + 1 = 0$

a/ Vérifiez qu'aucun nombre réel n'est solution.

b/ Vérifiez que $z^2 + z + 1 = \left(z + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4}i^2$.

c/ Déduisez-en que l'équation $z^2 + z + 1 = 0$ a deux solutions complexes de la forme $a + ib$ avec a et b réels.

COURS

A. PREMIÈRE PARTIE : L'ENSEMBLE DES NOMBRES COMPLEXES

1 *Présentation des nombres complexes.
Représentation géométrique*

1.1. PRÉSENTATION

Tous les nombres que nous avons utilisés jusqu'ici sont appelés nombres réels. Leur ensemble est noté $\mathbb{R}$, il est représenté en général par une droite.

Pour des raisons déjà signalées, page 19 et page 20, les mathématiciens ont créé de nouveaux nombres, appelés maintenant **nombres complexes**. Donnons l'essentiel de leurs démarches :

- Ils ont introduit le nombre i dont le carré est -1 , $i^2 = -1$, puis naturellement les nombres ib produits de i par les réels b , puis les nombres $a + ib$, somme des réels a et des nombres ib .
- Ils ont additionné, soustrait, multiplié, divisé ces nombres $a + ib$ comme s'il s'agissait de nombres réels en remplaçant i^2 par -1 lorsque le cas se présente.

EXEMPLES

$$(3 + 4i) + (2 + 5i) = 3 + 4i + 2 + 5i = 5 + 9i$$

$$(3 + 4i) \times (2 + 5i) = 6 + 15i + 8i - 20i^2 = 26 + 23i$$

$$(a + ib) \times (a - ib) = a^2 - i^2 b^2 = a^2 + b^2 = a^2 + b^2 + 0i$$

$$\frac{1}{3 + 4i} = \frac{3 - 4i}{(3 + 4i)(3 - 4i)} = \frac{3 - 4i}{25} = \frac{3}{25} - \frac{4}{25}i.$$

- Ils constatent, comme vous pouvez le voir sur ces exemples, que les résultats des calculs sont des nombres qui s'écrivent aussi sous la forme $a + ib$.
- Ce n'est que bien plus tard, lorsqu'ils eurent la preuve de l'efficacité de l'utilisation de ces nouveaux nombres, que les mathématiciens ont justifié rigoureusement leurs démarches.

Ces justifications dépassent le cadre de cet ouvrage.

Nous admettrons et retiendrons surtout que :

- L'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes contient en particulier les réels et le nombre i .
- $i^2 = -1$.
- On additionne et on multiplie des nombres complexes comme des réels : pour ces opérations, les règles de calcul dans $\mathbb{C}$ sont exactement celles en vigueur dans $\mathbb{R}$.
- Tout nombre complexe s'écrit alors $a + ib$ avec a et b réels.

1.2. DÉFINITIONS, RÉSULTATS, REPRÉSENTATIONS GÉOMÉTRIQUES

a/ Partie réelle, partie imaginaire

L'usage est de noter z un nombre complexe quelconque.

On dit que $z = a + ib$, avec a et b réels, est la **forme algébrique de z** ,

que a est la partie réelle de z , et on note : $a = \text{Re}(z)$

que b est la partie imaginaire de z , et on note : $b = \text{Im}(z)$.

ATTENTION.

- $a + ib$ n'est une forme algébrique que si a et b sont réels.

Par exemple, l'écriture $3 + i(5 - 2i)$ n'est pas une forme algébrique. Dans ce cas, la forme algébrique est : $5 + 5i$.

- La partie imaginaire d'un complexe est un réel ! Si $z = 3 - 2i$, $\text{Re}(z) = 3$, $\text{Im}(z) = -2$.

b/ Égalité de nombres complexes

Nous avons dit que z peut s'écrire $a + ib$ avec a et b RÉELS.

Nous admettons l'unicité de cette écriture, c'est-à-dire que :

$$a + ib = a' + ib' \iff a = a' \text{ et } b = b'.$$

EXEMPLES

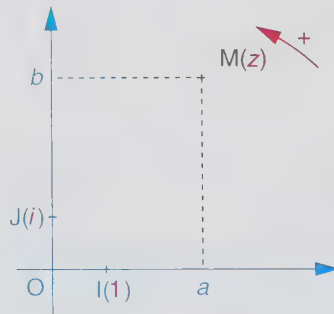
- Si $x + iy = 0$, alors, $x = 0$ et $y = 0$.
- Si $x + iy = -3i$, alors, $x = 0$ et $y = -3$.
- Si $x + iy = 2 + i$, alors, $x = 2$ et $y = 1$.

1.3. REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE

Choisissons dans le plan orienté un repère orthonormal direct.

a/ Affixe et image

Au complexe $z = a + ib$, nous pouvons associer le point M de coordonnées $(a; b)$, et cette association est biunivoque : « un pour un ».



On dit que z est **l'affixe** de M .

EXEMPLE

$$i = 0 + i \times 1$$

i est l'affixe de J ;

b/ Réels et imaginaires purs

- Tout réel a s'écrit : $a + i \times 0$.

Dire que le complexe z est réel équivaut à dire que $\text{Im } z = 0$.

- Dire que le complexe z est imaginaire pur signifie que $\text{Re } z = 0$.

M est **l'image** de z dans le plan complexe. On note $M(z)$.

abscisse de $M = \text{Re } z$
ordonnée de $M = \text{Im } z$.

- L'image de tout réel est sur l'axe des abscisses, appelé alors **axe réel**.

- L'image de tout imaginaire pur est sur l'axe des ordonnées, appelé alors **axe des imaginaires purs**.

2

Calculs dans $\mathbb{C}$

2.1. RÈGLES FONDAMENTALES

Nous admettrons et retiendrons ici que pour l'addition et la multiplication, les règles de calcul dans $\mathbb{C}$ sont les mêmes que les règles de calcul dans $\mathbb{R}$.

Ainsi, pour tous complexes z, z', z'' :

- | | |
|---------------------------------------|---------------------------|
| • $z + z' = z' + z$; | • $z'z = zz'$; |
| • $z + 0 = z$; | • $z \times 1 = z$; |
| • $z + (z' + z'') = (z + z') + z''$; | • $z(z'z'') = (zz')z''$. |
| • $z(z' + z'') = zz' + zz''$. | |

• **Tout complexe z a un opposé et un seul**, c'est-à-dire que pour tout complexe z il existe un complexe z' et un seul tel que $z + z' = 0$.

• **Tout complexe z non nul a un inverse et un seul**, c'est-à-dire que pour tout complexe z , il existe un complexe z' et un seul tel que : $zz' = 1$.

COMMENTAIRE

Lorsqu'un ensemble est muni de deux lois $+$ et $\times$ qui possèdent les propriétés énoncées ci-dessus, on dit que cet ensemble est un **corps commutatif**. $\mathbb{C}$ est donc un corps commutatif, de même que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{Q}$.

• $zz' = 0$ équivaut à $z = 0$ ou $z' = 0$.

2.2. ADDITION

Lorsque $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$, avec a, b, a', b' , tous réels :

$$\begin{aligned} z + z' &= (a + ib) + (a' + ib') \\ &= a + ib + a' + ib' \\ &= a + a' + i(b + b'). \end{aligned}$$

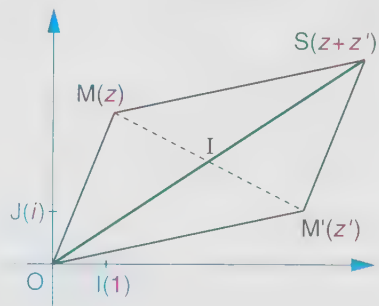
EXEMPLE

alors : $z = 3 + 4i, z' = 2 - i$
 $z + z' = 5 + 3i$.

L'opposé de $z = a + ib$ est $-a - ib$:

$$(a + ib) + (-a - ib) = 0.$$

Représentation géométrique



Si M est l'image de z , M' l'image de z' , alors le point S tel que :
 $\vec{OS} = \vec{OM} + \vec{OM'}$ est l'image de $z + z'$.

2.3. MULTIPLICATION. QUOTIENT

a/ Lorsque $z = a + ib$, et $z' = a' + ib'$, avec a, b, a', b' , tous réels :

$$\begin{aligned} zz' &= (a + ib)(a' + ib') \\ &= aa' + iab' + iba' + i^2 bb'; \end{aligned}$$

or $i^2 = -1$, d'où :

$$zz' = aa' - bb' + i(ab' + ba').$$

EXEMPLE

$z = 3 + 4i, z' = 2 - i$, alors : $zz' = (3 + 4i)(2 - i)$
 $= 3 \times 2 + 3i + 8i - 4i^2$
 $= 10 + 5i$.

Remarque : $(a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2$, et $a^2 + b^2$ est réel.

b/ **Forme algébrique d'un quotient** $\frac{a + ib}{a' + ib'}$ avec $a' + ib' \neq 0$.

MÉTHODE

Pour trouver la forme algébrique de $\frac{a + ib}{a' + ib'}$, avec a, b, a', b' réels et $a' + ib' \neq 0$, on multiplie numérateur et dénominateur par $a' - ib'$.

EXEMPLE

$z = 1 + 2i$ et $z' = 3 + 4i$. La forme algébrique du quotient $z'' = \frac{1 + 2i}{3 + 4i}$ s'obtient en

écrivant que $z'' = \frac{(1 + 2i)(3 - 4i)}{(3 + 4i)(3 - 4i)}$. Or, $(3 + 4i)(3 - 4i) = 3^2 + 4^2 = 25$, d'où :

$$z'' = \frac{1}{25} (1 + 2i)(3 - 4i) = \frac{1}{25} (11 + 2i) = \frac{11}{25} + \left(\frac{2}{25}\right)i.$$

2.4. LES NOMBRES COMPLEXES « N'ONT PAS DE SIGNES »

On ne peut pas établir un ordre entre les complexes qui prolongerait l'ordre établi entre les réels et qui obéirait aux mêmes lois. En effet, si cela était, on aurait soit $i \geq 0$, soit $i \leq 0$, et dans les deux cas : $i^2 \geq 0$; or $i^2 = -1$, et $-1 < 0$, d'où une contradiction.

Donc, écrire par exemple, $3 + 4i \geq 2 + i$, n'a aucun sens !

3

Nombres complexes conjugués

3.1. DÉFINITION

Nous avons vu que lorsque a et b sont réels, le produit $(a + ib)(a - ib)$ est réel et égal à $a^2 + b^2$. Ce résultat permet de trouver facilement la forme algébrique d'un inverse et d'un quotient. $a - ib$ est appelé le conjugué de $a + ib$.

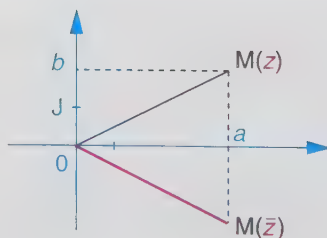
DÉFINITION

Le conjugué du nombre $a + ib$, avec a et b réels, est le nombre $a - ib$.
Le conjugué du complexe z est noté $\bar{z}$.

Les images de z et de $\bar{z}$ sont symétriques par rapport à l'axe réel.

EXEMPLES

- $z = 3 - 2i$, alors : $\bar{z} = 3 + 2i$.
- $z = -4 - 3i$, alors : $\bar{z} = -4 + 3i$.
- $\bar{i} = -i$.



3.2. PROPRIÉTÉS

- Si $z = a + ib$, a et b réels, alors : $z\bar{z} = a^2 + b^2$.

• Il résulte de la définition que le conjugué de $\bar{z}$ est $a + ib$, c'est-à-dire z . On dit que **z et $\bar{z}$ sont deux complexes conjugués.** $\boxed{\overline{\bar{z}} = z.}$

• $z + \bar{z} = a + ib + a - ib = 2a$, donc : $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z)$.

• $z - \bar{z} = a + ib - a + ib = 2ib$, donc : $z - \bar{z} = i (2 \operatorname{Im}(z))$.

• Or, dire que z est réel équivaut à dire que $\operatorname{Im} z = 0$, donc à dire que $z - \bar{z} = 0$, $z = \bar{z}$.
D'où :

$$\boxed{z \text{ est réel équivaut à } z = \bar{z}.}$$

3.3. CONJUGAISON ET OPÉRATIONS

• **Le conjugué d'une somme est la somme des conjugués :** $\boxed{\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}}.$

En effet : $z + z' = (a + a') + i(b + b')$, d'où :

$$\overline{z + z'} = (a + a') - i(b + b') = (a - ib) + (a' - ib') = \bar{z} + \bar{z'}.$$

Le résultat s'étend sans difficultés à une somme de n termes.

• **Le conjugué d'un produit est le produit des conjugués :** $\boxed{\overline{zz'} = \bar{z} \times \bar{z'}}.$

En particulier : $\boxed{(\overline{z^n}) = (\bar{z})^n.}$

EXEMPLE

Si $Z = 3z$, alors $\bar{Z} = \overline{3z} = \bar{3} \times \bar{z} = 3\bar{z}$.

• **Le conjugué d'un quotient est le quotient des conjugués :** $\boxed{\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}.}$

Ces deux résultats seront justifiés facilement plus loin, paragraphe 7; mais ils peuvent se démontrer aussi aisément par utilisation des formes algébriques.

EXEMPLES D'APPLICATION

1. Si $Z = 3z^2 - 2z + 7$, alors : $\bar{Z} = 3\bar{z}^2 - 2\bar{z} + 7$.

2. Si $Z = \frac{4-5i}{3+i}$, alors : $\bar{Z} = \frac{4+5i}{3-i}$.

3. Si $Z = \frac{2z^2 - i}{5z + 1}$, alors : $\bar{Z} = \frac{2\bar{z}^2 - \bar{i}}{5\bar{z} + 1} = \frac{2\bar{z}^2 + i}{5\bar{z} + 1}$, car $\bar{i} = -i$.

4 Module d'un nombre complexe

4.1. DÉFINITION

Le module du complexe $a + ib$, avec a et b réels, est le nombre RÉEL positif :

$$\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Le module d'un complexe z est noté $|z|$.

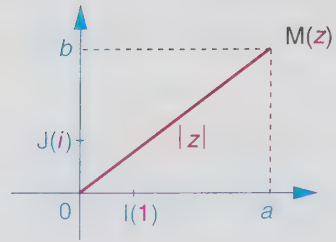
Géométriquement, $|z|$ est la distance entre O et l'image $M(z)$ de z .

En effet : $OM^2 = a^2 + b^2$,

$$|z| = OM.$$

EXEMPLES

- $z = -3 + 4i$. Or, $(-3)^2 + (4)^2 = 25$, donc $|z| = 5$.
- $z = 9i$, $|z| = 9$.



4.2. PROPRIÉTÉS

- Nous avons vu, paragraphe 3.2., que lorsque $z = a + ib$, avec a et b réels, alors : $z\bar{z} = a^2 + b^2$. D'où :

$$|z|^2 = z\bar{z}.$$

- Puisque $|z| = OM(z)$, dire que $|z| = 0$ équivaut à dire que $z = 0$.
- Il résulte directement de la définition du module que :

$$|z| = |-z| = |\bar{z}|.$$

Remarque : le module d'un réel est égal à sa valeur absolue. En effet, comme complexe le réel a s'écrit : $a + 0 \times i$, donc son module est $\sqrt{a^2}$. Or $\sqrt{a^2}$ est la valeur absolue du réel a . Cette remarque justifie la notation employée pour le module.

4.3. MODULE ET OPÉRATIONS

- Le module d'un produit est égal au produit des modules : $|zz'| = |z| |z'|$.

En particulier, lorsque tous les facteurs sont égaux à z , nous obtenons :

$$|z^n| = |z|^n \quad n \text{ naturel.}$$

- Le module d'un quotient est le quotient des modules : $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$.

Ces résultats seront justifiés de façon immédiate au paragraphe 7.

- **Module d'une somme : inégalité triangulaire.**

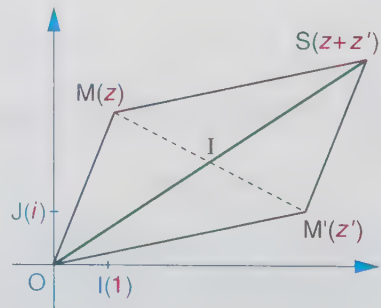
Dans le plan complexe, lorsque M est l'image de z et M' l'image de z' , alors le point S tel que $\vec{OS} = \vec{OM} + \vec{OM'}$ est l'image de $z + z'$ (paragraphe 2.2.).

Or : $OS \leq OM + M'S$ et $M'S = OM'$,
donc : $OS \leq OM + OM'$,

d'où :

$$|z + z'| \leq |z| + |z'| \quad \text{et} \quad |z + z'| \geq ||z| - |z'||.$$

En général, le module d'une somme n'est pas la somme des modules.



5

Formes trigonométriques d'un nombre complexe

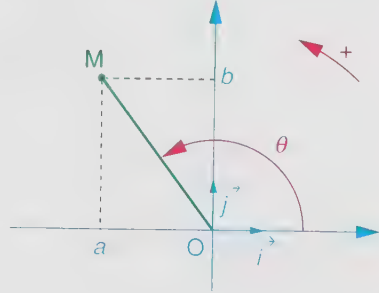
5.1. DÉFINITIONS

Dans le plan orienté, un repère orthonormal direct ayant été choisi, il existe deux façons de repérer un point M.

Première façon : par la donnée de ses coordonnées $(a; b)$.

Deuxième façon : lorsque $M \neq O$, par la donnée de l'angle $\theta = (\vec{i}, \vec{OM})$ et la distance $OM = r$.

Il existe en effet, un point M et un seul satisfaisant aux conditions $OM = r$, $(\vec{i}, \vec{OM}) = \theta$, lorsque r et $\theta \neq 0$ sont donnés. Cette autre façon de repérer un point va conduire à une autre écriture des nombres complexes.



Nous avons vu dans « Pour prendre un bon départ », page 18, que :

$$a = OM \cos \theta, \quad b = OM \sin \theta.$$

Donc si M a pour affixe le complexe $z = a + ib$, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} z &= OM \cos \theta + i(OM \sin \theta) \\ &= OM(\cos \theta + i \sin \theta). \end{aligned}$$

En outre, puisque $OM = |z|$, nous obtenons : $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$.

En résumé, nous énonçons :

THÉORÈME 1

z est un complexe *non nul*, de **forme algébrique** $a + ib$.

M est le point d'affixe z dans le repère orthonormal direct $(O; \vec{OI}, \vec{OJ})$ du plan orienté.

θ est une mesure en radians de $(\vec{OI}, \vec{OM})$.

Alors : $a = |z| \cos \theta$, $b = |z| \sin \theta$, et $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$.

1. On dit que θ est un **argument de z** et on note $\theta = \arg z$.

2. **Définition :** dans les conditions énoncées ci-dessus, on dit que l'écriture $|z|(\cos \theta + i \sin \theta)$ est une **forme trigonométrique de z** .

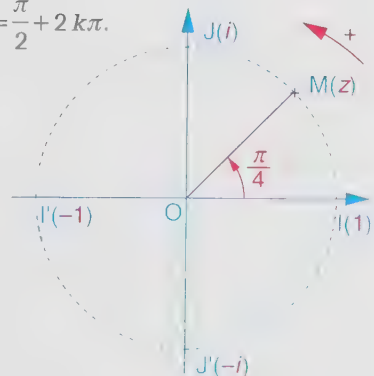
EXEMPLES

1. $\arg 1 = 0 + 2k\pi$; $\arg(-1) = \pi + 2k\pi$; $\arg i = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$.

2. Si $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$, on vérifie que $|z| = 1$; or $\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, donc une forme trigonométrique de z est : $z = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$.

Notez qu'une autre forme trigonométrique de z est par exemple : $z = \cos \frac{9\pi}{4} + i \sin \frac{9\pi}{4}$ ou

$$z = \cos \left(-\frac{7\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{7\pi}{4} \right) \text{ ou } \dots$$



3. Si $z = 1 - i\sqrt{3}$, $|z| = 2$, $\cos \theta = \frac{1}{2}$, $\sin \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, d'où $\theta = -\frac{\pi}{3}$,

et $z = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right)$.

4. $z = 0$ n'a pas d'arguments, car la définition de $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$ suppose $\overrightarrow{OM}$ non nul.

5.2. ÉCRITURE $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, AVEC r RÉEL NON NUL

Si $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, avec $r > 0$, alors : $|z| = r$ et $\arg z = \theta$.

Si $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, avec $r < 0$, alors : $|z| = -r$ et $\arg z = \pi + \theta$.

En effet, $z = r \cos \theta + i r \sin \theta$, donc : $|z|^2 = r^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r^2$, et puisque $r > 0$, $|z| = r$. Alors, $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$, et d'après le théorème ci-dessus, $\theta = \arg z$, donc $r(\cos \theta + i \sin \theta)$ est une forme trigonométrique de z .

Mais si $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$, avec $r < 0$, alors cette écriture **n'est pas** une forme trigonométrique de z . Pour obtenir une telle forme, écrivons que :

$z = -r(-\cos \theta - i \sin \theta)$; or, $-\cos \theta = \cos(\theta + \pi)$ et $-\sin \theta = \sin(\theta + \pi)$, d'où une forme trigonométrique de z , $z = -r(\cos(\pi + \theta) + i \sin(\pi + \theta))$.

5.3. ÉGALITÉ DE DEUX COMPLEXES ÉCRITS SOUS FORME TRIGONOMÉTRIQUE

Si deux complexes non nuls z et z' sont tels que :

$$|z|(\cos \theta + i \sin \theta) = |z'|(\cos \theta' + i \sin \theta'),$$

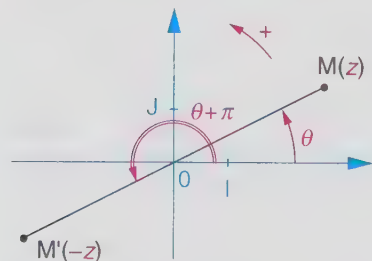
alors, $|z| = |z'|$ et $\theta = \theta' + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$.

En effet, notons M et M' les points d'affixes z et z' . Puisque $z = z'$, ces points sont confondus, donc $OM = OM'$, c'est-à-dire $|z| = |z'|$, et $(\vec{OI}, \overrightarrow{OM}) = (\vec{OI}, \overrightarrow{OM'})$, c'est-à-dire : $\theta = \theta'$, modulo 2π .

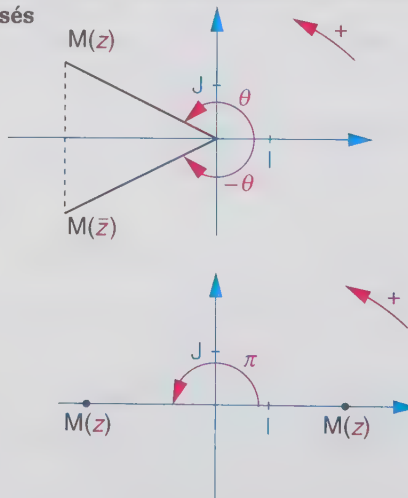
5.4. ARGUMENTS DE L'OPPOSÉ, DU CONJUGUÉ, D'UN RÉEL

z est un complexe non nul. θ est un argument.

a/ Tout argument de $-z$ s'écrit $\theta + \pi + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$



b) z et $\bar{z}$ ont des arguments principaux opposés



c) Dire que z est réel équivaut à dire que $M(z)$ est sur l'axe réel, donc à dire que $\vec{OI}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont colinéaires, donc que $(\vec{OI}, \overrightarrow{OM}) = 0$ ou $(\vec{OI}, \overrightarrow{OM}) = \pi$.

Dire que z est réel équivaut à dire qu'un argument de z est 0 ou π .

6

Formes exponentielles d'un complexe non nul

Certains des résultats et définitions de ce paragraphe seront utilisés lors de l'étude des équations différentielles (tome 1, chapitre 13).

6.1. AUTRES ÉCRITURES DES COMPLEXES DE MODULE 1

On désigne par $e^{i\theta}$ le nombre complexe de module 1 et d'argument θ .

Donc : $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$.

Exemples : $e^{i\pi} = -1$; $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$; $e^{i0} = 1$.

COMMENTAIRE

La formule $e^{i\pi} + 1 = 0$, écrite pour la première fois par Euler semble-t-il, a frappé les imaginations du fait qu'elle lie entre eux de façon simple cinq nombres fondamentaux, dont trois i , e , π restaient à l'époque quelque peu mystérieux.

Certains virent dans cette formule un signe de Dieu.

6.2. PROPRIÉTÉS**a/ Propriété fondamentale**

$$e^{i(\theta + \theta')} = e^{i\theta} e^{i\theta'}$$

En effet, $e^{i(\theta + \theta')} = \cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta')$
 $= \cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' + i(\sin \theta \cos \theta' + \cos \theta \sin \theta')$

et : $e^{i\theta} e^{i\theta'} = (\cos \theta + i \sin \theta)(\cos \theta' + i \sin \theta')$
 $= \cos \theta \cos \theta' - \sin \theta \sin \theta' + i(\sin \theta \cos \theta' + \cos \theta \sin \theta')$.

b/ Le conjugué de $e^{i\theta}$ est $e^{-i\theta}$, l'inverse de $e^{i\theta}$ est aussi $e^{-i\theta}$

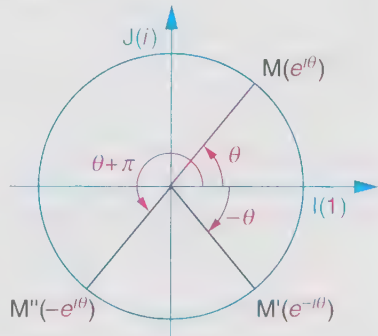
Pour tout réel θ :

$$e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}.$$

En effet :

$$\overline{e^{i\theta}} = \cos \theta - i \sin \theta = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) = e^{-i\theta}$$

$$\frac{1}{e^{i\theta}} = \frac{e^{-i\theta}}{e^{i\theta} e^{-i\theta}} = \frac{e^{-i\theta}}{e^{i0}} = e^{-i\theta}.$$

**c/ Autre propriété**

Pour tous réels θ et θ' , dire que $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$ équivaut à dire que $\theta = \theta' + 2k\pi$ (avec $k \in \mathbb{Z}$).

Ceci résulte directement du paragraphe 5.3.

6.3. FORMULES D'EULER

Par addition, puis par soustraction membre à membre des deux égalités suivantes :

$$\begin{cases} \cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta} \\ \cos \theta - i \sin \theta = e^{-i\theta} \end{cases}$$

on obtient les **formules d'Euler** (données dans son ouvrage *Introductio*, 1748).

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$

6.4. FONCTIONS À VALEURS COMPLEXES

Notons u et v deux fonctions à valeurs réelles, définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Il est possible de définir une fonction f en posant, pour tout x de I :

$$f(x) = u(x) + iv(x).$$

Alors $f(x)$ est un complexe; on dit que f est une fonction définie sur I et à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Par *définition*, on dit que f est dérivable sur I si u et v le sont, et que la fonction dérivée f' est définie sur I par $f'(x) = u'(x) + iv'(x)$; notez que f' est définie sur I et prend ses valeurs dans $\mathbb{C}$.

Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes, définie par $f(\theta) = \cos \theta + i \sin \theta$. Donc $f(\theta)$ est un complexe de module 1 et d'argument θ . f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$f'(\theta) = if(\theta).$$

Par ailleurs, $f(\theta + \theta') = f(\theta) + f(\theta')$ d'après 6.2. a/.

Ainsi f possède les propriétés fondamentales d'une fonction exponentielle à valeurs réelles, du type $x \mapsto e^{kx}$, k réel, x réel (tome 1, chapitre 8). C'est pour cela que nous avons noté $e^{i\theta}$ le nombre $f(\theta)$.

Remarque : au chapitre des équations différentielles (tome 1, chapitre 13), nous introduirons le nombre complexe e^{rx} , où r est un complexe et x un réel, et nous utiliserons le fait que ce nombre n'est jamais nul. En effet, si $r = u + iv$, avec u et v réels, $e^{rx} = e^{(u+iv)x} = e^{ux} e^{ivx} = e^{ux} (\cos vx + i \sin vx)$.

Or, $\cos vx + i \sin vx$ est un nombre non nul, car son module est 1, et e^{ux} n'est jamais nul, car pour tout y réel, $e^y \neq 0$.

6.5. FORMES EXPONENTIELLES D'UN COMPLEXE NON NUL

a/ Nous avons vu que tout complexe non nul dont un argument est θ peut s'écrire $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$.

Donc, compte tenu de ce qui précède :

$$z = |z| e^{i\theta}.$$

DÉFINITION

Une forme exponentielle d'un complexe non nul z , dont un argument est θ , est l'écriture $z = |z| e^{i\theta}$.

b/ Avec cette nouvelle notation $e^{i\theta}$, les résultats énoncés en 5.2. et 5.3. deviennent maintenant :

THÉORÈME 2

Si $z = re^{i\theta}$, avec $r > 0$, alors : $|z| = r$, et $\theta = \arg z$.
 r et r' sont des réels strictement positifs :

$$re^{i\theta} = r'e^{i\theta'} \iff r = r' \quad \text{et} \quad \theta = \theta' \quad (\text{modulo } 2\pi).$$

c/ Il en résulte, compte tenu du 6.2., que :

$$\text{Si } r \text{ est un réel strictement positif : } re^{i\theta} = re^{-i\theta}.$$

7 Intérêt des formes exponentielles dans le calcul de produits, de quotients

Alors que les formes algébriques se prêtent bien aux calculs de sommes, les formes exponentielles se prêtent bien aux calculs de produits et de quotients.

7.1. PRODUIT

a/ Si $z = |z| e^{i\theta}$ et $z' = |z'| e^{i\theta'}$, $z \neq 0$, $z' \neq 0$, alors :

$$zz' = |z| |z'| e^{i\theta} e^{i\theta'} = |z| |z'| e^{i(\theta+\theta')}.$$

Il résulte du paragraphe 6.5.b/ que :

$$\arg zz' = \arg z + \arg z' \quad (\text{modulo } 2\pi)$$

$$\text{et } |zz'| = |z| |z'|.$$

• Multiplier deux complexes non nuls revient à multiplier leurs modules et ajouter leurs arguments.

• Par conjugaison, nous obtenons :

$$\overline{zz'} = |z| |z'| e^{-i(\theta+\theta')} \quad \text{car } |\bar{z}| = |z| \quad \text{et} \quad |\bar{z'}| = |z'|.$$

Par ailleurs : $\bar{z} \times \bar{z'} = |z| e^{-i\theta} \times |z'| e^{-i\theta'}$, d'où : $\overline{zz'} = \bar{z} \times \bar{z'}$.

EXEMPLE D'APPLICATION

$z = 3 e^{-i\frac{\pi}{4}}$, $z' = 2 e^{\frac{2i\pi}{3}}$, alors un argument de zz' est $-\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{12}$ et $|zz'| = 6$.

7.2. FORMULE DE MOIVRE

Le résultat précédent s'étend à un nombre quelconque de complexes non nuls.

En particulier, si $\theta = \arg z$, alors z^n a pour argument $n\theta$, son module est $|z|^n$.

Lorsque $|z| = 1$, on obtient la formule de Moivre (1722) :

THÉOREME 3

Pour tout naturel n , et tout réel θ :

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + i \sin n\theta,$$

soit, en d'autres termes : $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$.

7.3. QUOTIENT

Si $z = |z| e^{i\theta}$ et $z' = |z'| e^{i\theta'}$, $z \neq 0$, $z' \neq 0$, alors : $\frac{z}{z'} = \frac{|z|}{|z'|} \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}$ et nous avons vu que

$$\frac{1}{e^{i\theta'}} = e^{-i\theta'}, \text{ d'où : } \frac{z}{z'} = \frac{|z|}{|z'|} e^{i(\theta-\theta')}.$$

$$\text{Donc } \arg \frac{z}{z'} = \arg z - \arg z' \quad (\text{modulo } 2\pi)$$

$$\text{et } \left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}.$$

• Diviser deux complexes non nuls revient à « diviser les modules et retrancher leurs arguments ».

• Par passage aux conjugués nous obtiendrions : $\left(\frac{\bar{z}}{\bar{z'}} \right) = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$.

EXEMPLE D'APPLICATION

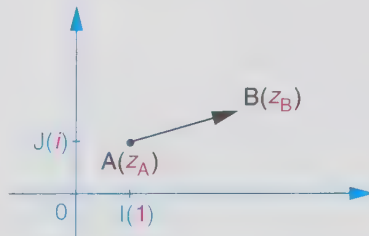
$z = 5 e^{\frac{5\pi}{4}}$, $z' = 2 e^{-\frac{\pi}{2}}$, alors un argument de $\frac{z}{z'}$ est : $\frac{5\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{2} \right)$, c'est-à-dire $\frac{17\pi}{12}$.

B. DEUXIÈME PARTIE : NOMBRES COMPLEXES EN GÉOMÉTRIE

Dans toute cette partie, $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ est un repère orthonormal direct.

8 Affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$

Par définition, l'affixe de $\overrightarrow{AB}$ est le complexe $a + ib$, où a et b sont les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$.
Notons z_B l'affixe de B , $z_B = x_B + iy_B$, et z_A l'affixe de A , $z_A = x_A + iy_A$. Alors, les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont : $(x_B - x_A; y_B - y_A)$, et par ailleurs $z_B - z_A = (x_B - x_A) + i(y_B - y_A)$.



L'affixe de $\overrightarrow{AB} = z_B - z_A$.

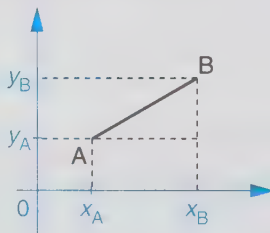
9 Applications du module à la Géométrie

a/ Distance et module

Dans le repère orthonormal $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, notons z_A et z_B les affixes des deux points A et B .

Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$.

Notons C le point tel que $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB}$. L'affixe de $\overrightarrow{OC}$ donc de C , est aussi $z_B - z_A$, et d'après le paragraphe ci-dessus : $OC = |z_B - z_A|$.



Or : $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB}$, donc : $AB = |z_B - z_A|$.

b/ Caractérisation d'un cercle

Le cercle $\mathcal{C}$ de centre A et de rayon r est l'ensemble des points M tels que $AM = r$.

Si, dans le plan complexe, on note z_A l'affixe de A et z_M celle de M , alors :

$M \text{ appartient au cercle de centre } A \text{ et de rayon } r \text{ équivaut à } |z_M - z_A| = r.$

En particulier, le cercle de centre O et de rayon 1 représente l'ensemble des complexes de module 1.

c/ EXEMPLE D'APPLICATION

Cherchons à situer dans le plan complexe l'ensemble E des points M dont l'affixe z est solution de : $|z - (1 + i)| = |z - (3 + 2i)|$.

Notons A le point d'affixe $1 + i$ et B le point d'affixe $3 + 2i$. Alors : $|z - (1 + i)| = MA$ et $|z - (3 + 2i)| = MB$.

L'ensemble E est donc l'ensemble des points équidistants de A et de B , c'est donc la médiatrice de $[AB]$.

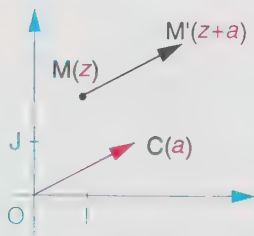
10 Interprétation géométrique de la fonction

$$f : z \longmapsto z + a$$

a étant un complexe donné, considérons la fonction f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(z) = z + a$.

Notons M le point d'affixe z et M' le point d'affixe $z + a$.

Alors l'affixe du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est $z + a - z$, c'est-à-dire a .



Notons C le point d'affixe a . Alors $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{MM'}$, et donc puisque $\overrightarrow{OC}$ est fixe, **M' est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{OC}$.**

Dans le plan complexe, la fonction f agit comme la translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe a .

11 Interprétation géométrique de la fonction

$$f : z \longmapsto az, a \neq 0$$

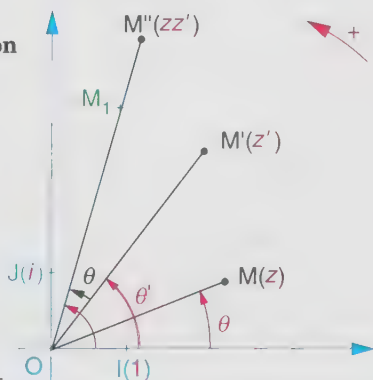
a/ Interprétation géométrique de la multiplication

Notons M le point d'affixe z , M' le point d'affixe z' , M'' le point d'affixe zz' .

Posons $\theta = \arg z$. De $\arg zz' = \arg z + \arg z'$ et de la relation de Chasles, nous déduisons :

$$(\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OM''}) = \theta.$$

Notons M_1 l'image de M' par la rotation r de centre O et d'angle θ . Alors M_1 est sur la demi-droite OM'' . Par ailleurs, de $|zz'| = |z||z'|$, nous déduisons que $OM'' = OM \times OM' = OM \times OM_1$, donc les points O, M_1, M étant alignés, M'' est l'image de M_1 par l'homothétie h de centre O et de rapport OM . Ainsi M'' est l'image de M par la composée r suivie de h . Nous verrons au chapitre 11 que cette composée est une similitude.



b/ a étant un complexe non nul donné, considérons la fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ défini par $f(z) = az$.

Notons M le point d'affixe a , M' celui d'affixe z et M'' celui d'affixe az . D'après l'interprétation géométrique de la multiplication, M'' est l'image de M par la composée de la rotation r d'angle $\arg a$ suivie de l'homothétie h de centre O , de rapport $|a|$.

Nous verrons au chapitre 11 que $h \circ r$ est la similitude de centre O , d'angle $\arg a$, de rapport $|a|$.

Dans le plan complexe, la fonction f agit comme cette similitude.

Cas particuliers :

- Lorsque $|a| = 1$, la fonction $z \longmapsto az$ agit comme la **rotation** de centre O et d'angle $\arg a$.

- Lorsque a est réel, la fonction $z \longmapsto az$ agit comme une **homothétie**. En effet, $\arg a = 0$.

12

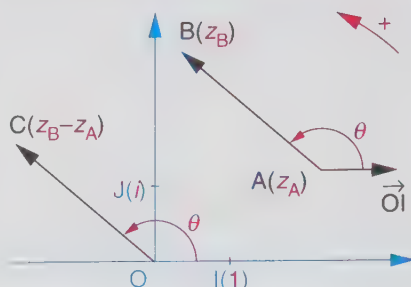
Angle $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM})$ et argument de $\frac{z_M - z_A}{z_M - z_B}$

a/ Arguments de $z_B - z_A$

A et B sont les points d'affixes respectives z_A et z_B avec $z_A \neq z_B$, dans un repère orthonormal direct $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.

Nous savons que : affixe $(\overrightarrow{AB}) = z_B - z_A$.

Notons C le point tel que $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AB}$; l'affixe de $\overrightarrow{OC}$ est aussi $z_B - z_A$ et donc un argument de $z_B - z_A$ est une mesure en radians de l'angle $(\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OC})$. Ainsi :



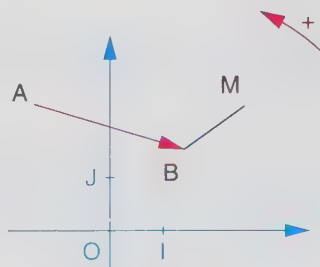
un argument de $z_B - z_A$ est une mesure en radians de l'angle $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{AB})$.

b/ A, B, M, sont trois points, $M \neq A$, $M \neq B$. Leurs affixes sont respectivement z_A, z_B, z_M . Nous savons que $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{BM}) = \arg(z_M - z_B)$ et :

$$(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{AM}) = \arg(z_M - z_A).$$

Donc :

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) &= (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{OI}) + (\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{AM}) \\ &= -\arg(z_M - z_B) + \arg(z_M - z_A) = \arg(z_M - z_A) - \arg(z_M - z_B) \\ &= \arg\left(\frac{z_M - z_A}{z_M - z_B}\right). \end{aligned}$$



Remarquons que $AM = |z_M - z_A|$, que $BM = |z_M - z_B|$, et donc que : $\left| \frac{z_M - z_A}{z_M - z_B} \right| = \frac{AM}{BM}$.

THÉORÈME 4

A, B, M sont trois points tels que $A \neq M$, $B \neq M$, et d'affixes z_A, z_B, z_M . Alors $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) = \arg\left(\frac{z_M - z_A}{z_M - z_B}\right)$ et $\frac{AM}{BM} = \left| \frac{z_M - z_A}{z_M - z_B} \right|$.

13

Exercices résolus

13.1. PASSAGE DE LA FORME ALGÈBRIQUE À LA FORME TRIGONOMÉTRIQUE ET INVERSEMENT

EXERCICE RÉSOLU 1

1. Écrivez le complexe $z = -1 + i\sqrt{3}$, sous forme trigonométrique, puis sous forme exponentielle.
2. Donnez le module et un argument de $Z = (1 - \sqrt{2})e^{i\frac{\pi}{4}}$.

SOLUTION COMMENTÉE ■■■

1. Il s'agit d'écrire z sous la forme : $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$.

MÉTHODE

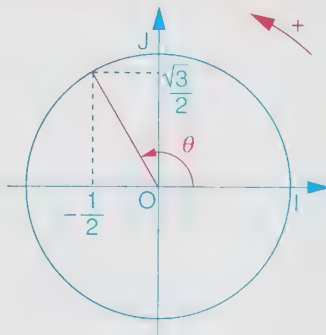
Le développement de $|z|(\cos \theta + i \sin \theta)$ donne : $|z| \cos \theta + i |z| \sin \theta$, qui est la forme algébrique de z . L'unicité de cette forme implique :

$|z| \cos \theta = -1$, $|z| \sin \theta = \sqrt{3}$; d'où : $\cos \theta = -\frac{1}{|z|}$, $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{|z|}$, ce qui permet de trouver $\cos \theta$, $\sin \theta$, donc θ . En effet, $|z|^2$ est connu, c'est : $(-1)^2 + (\sqrt{3})^2$.

Ainsi, $|z| = 2$, $\cos \theta = -\frac{1}{2}$, $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

La seule connaissance de $\cos \theta$ ou de $\sin \theta$ ne permet pas de déterminer θ , mais la connaissance de $\cos \theta$ et de $\sin \theta$ le permet.

À l'aide du cercle trigonométrique et des « valeurs remarquables » connues des sinus et cosinus, nous trouvons $\theta = \frac{2\pi}{3}$.



D'où, une forme trigonométrique de z :

$$z = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right).$$

Une forme exponentielle de z est : $z = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

2. Lorsque Z est écrit sous la forme : $re^{i\theta}$ avec $r > 0$, alors r est le module de Z et θ un argument. Mais ce n'est pas le cas lorsque $r < 0$. Il faut donc s'assurer du signe de $1 - \sqrt{2}$. Or $1 - \sqrt{2} < 0$. Pour obtenir la forme exponentielle de Z , nous écrivons : $Z = -(1 - \sqrt{2})(-e^{i\frac{\pi}{4}})$, donc

$Z = -(1 - \sqrt{2}) \left(-\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right)$, et nous savons que $-\cos \theta = \cos(\theta + \pi)$, $-\sin \theta = \sin(\theta + \pi)$, d'où :

$$Z = -(1 - \sqrt{2}) \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) = -(1 - \sqrt{2}) e^{i\frac{5\pi}{4}}.$$

Le module de Z est $-1 + \sqrt{2}$, un argument est $\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{5\pi}{4}$.

■■■■■■■■■■

 EXERCICE
RÉSOLU 2

1. Donnez le module et un argument de chacun des complexes : $z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = 1 - i$.

2. Trouvez le module et l'argument de chacun des complexes
a/ $u = \frac{z_1}{z_2}$ b/ u^5 .

3. Déduisez-en les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

SOLUTION COMMENTÉE ■■■

1. **a/** $|z_1|^2 = \left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \sqrt{2}; \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}; \sin \theta = -\frac{1}{2}.$

À l'aide du cercle trigonométrique et des « valeurs remarquables » connues des sinus et cosinus, nous trouvons $\theta = -\frac{\pi}{6}.$

Le module de z_1 est $\sqrt{2}$, son argument principal est $-\frac{\pi}{6}.$

b/ De la même façon, nous trouvons :

$|z_2| = \sqrt{2}$, argument principal de z_2 : $-\frac{\pi}{4}.$

2. Deuxième question

CONSEIL

Écrivez z_1 et z_2 sous forme exponentielle, car c'est cette forme qui, en général, se prête le mieux, au calcul de produit et de quotient.

$z_1 = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{6}}, z_2 = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}},$ d'où :

$$u = \frac{\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{6}}}{\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}} = e^{-i\frac{\pi}{6} + i\frac{\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{12}}.$$

Donc : $|u| = 1$, et un argument de u est : $\frac{\pi}{12}.$

Il en résulte que u^5 a pour module 1 et pour argument $\frac{5\pi}{12}.$

3. D'après 2., $u = \cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}.$

Si nous pouvons écrire $u = a + ib$ sans utiliser des lignes trigonométriques, nous en déduirons les valeurs exactes de $\cos \frac{\pi}{12}$ et de $\sin \frac{\pi}{12}.$

Or : $u = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2(1-i)} = \frac{(\sqrt{6} - i\sqrt{2})(1+i)}{4} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} + i \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$

Donc : $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ et $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$

■■■■■■■■■■

EXERCICE RÉSOLU 3

Trouvez la forme algébrique de $Z = \frac{1 - e^{i\theta}}{1 + e^{i\theta}}$, où θ est un réel différent de $\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$

SOLUTION COMMENTÉE ■■■

MÉTHODE

Multipliez dénominateur et numérateur par le conjugué du dénominateur.

θ est différent de π , modulo 2π , donc $e^{i\theta}$ est différent de -1 , donc $1 + e^{i\theta}$ n'est pas nul.

Le conjugué de $e^{i\theta}$ est $e^{-i\theta}$, celui de 1 est 1, donc le conjugué de $1 + e^{i\theta}$ est $1 + e^{-i\theta}$ (le conjugué d'une somme est la somme des conjugués).

ATTENTION de ne pas écrire que le conjugué est $1 - e^{i\theta}$ ou $1 - e^{-i\theta}$!

Donc :

$$Z = \frac{(1 - e^{i\theta})(1 + e^{-i\theta})}{(1 + e^{i\theta})(1 + e^{-i\theta})}.$$

En notant $z = 1 + e^{i\theta}$, le dénominateur est $z\bar{z}$ c'est-à-dire $|z|^2$.

Or, $z = 1 + \cos \theta + i \sin \theta$, d'où $|z|^2 = (1 + \cos \theta)^2 + \sin^2 \theta$
 $= 2(1 + \cos \theta).$

Le numérateur est : $[(1 - \cos \theta) - i \sin \theta][(1 + \cos \theta) - i \sin \theta]$, ce qui, tous calculs faits, s'écrit : $-2i \sin \theta$. D'où :

$$Z = \frac{-i \sin \theta}{1 + \cos \theta} \quad (Z \text{ est un imaginaire pur}).$$

■■■■■■■■■■

13.2. CONDITIONS POUR QU'UN COMPLEXE SOIT RÉEL

EXERCICE RÉSOLU 4

1. Comment choisir le complexe z pour que $Z = z^2 + 2z - 3$ soit réel?

2. Comment choisir le complexe z pour que $Z = \frac{z - 2i}{z + 1 - i}$ soit un réel?

SOLUTION COMMENTÉE ■■■

MÉTHODE

Pour démontrer qu'un complexe Z est réel, nous disposons de trois méthodes principales :

1. montrer que $\text{Im}(Z) = 0$;
2. montrer que $Z = \bar{Z}$;
3. Montrer que $\arg Z = 0$ ou $\arg Z = \pi$.

1. Première question

Il n'est pas facile de calculer un argument d'une somme. Nous allons utiliser alors la méthode 1, ou la méthode 2.

● **Méthode 1 : calcul de $\text{Im}(Z)$** en fonction de $\text{Re}(z)$ et de $\text{Im}(z)$.

Écrivons $z = x + iy$, avec x et y réels.

Alors :

$$\begin{aligned} Z &= (x + iy)^2 + 2(x + iy) - 3 \\ &= x^2 + 2ixy - y^2 + 2x + 2iy - 3 \\ &= (x^2 - y^2 + 2x - 3) + 2iy(x + 1). \end{aligned}$$

Donc : $\text{Im}(Z) = 2y(x + 1)$. Dire que $\text{Im}(Z) = 0$ équivaut donc à dire que $y(x + 1) = 0$, c'est-à-dire, $y = 0$ ou $x = -1$.

En conclusion, Z est réel équivaut à z est égal à $-1 + iy$ (avec y réel quelconque), ou z est réel.

Graphiquement, l'ensemble de ces complexes z est représenté dans le plan complexe par l'axe des abscisses et la droite d'équation $x = -1$.

● **Méthode 2 : calcul de $\bar{Z}$** , et dans ce calcul faire apparaître $z + \bar{z}$ (car $z + \bar{z} = \text{Re}(z)$) et $z - \bar{z}$ (car $z - \bar{z} = 2i \text{Im}(z)$).

D'après les propriétés des conjugués (voir paragraphe 3.3.) :

$$\bar{Z} = \overline{z^2 + 2z - 3} = \bar{z}^2 + 2\bar{z} - 3.$$

Dire que $\bar{Z} = Z$ équivaut à dire que :

$$\bar{z}^2 + 2\bar{z} - z = z^2 + 2z - 3$$

donc à dire que :

$$\begin{aligned} z^2 - \bar{z}^2 + 2(z - \bar{z}) &= 0 \\ (z - \bar{z})(z + \bar{z}) + 2(z - \bar{z}) &= 0 \\ (z - \bar{z})(z + \bar{z} + 2) &= 0. \end{aligned}$$

Écrivons $z = x + iy$ (avec x et y réels). Alors : $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z) = 2iy$ et $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z) = 2x$.

Ainsi l'égalité précédente s'écrit : $2iy(2x + 2) = 0$ soit $y(x + 1) = 0$.

D'où $y = 0$ ou $x = -1$.

En conclusion, Z est réel équivaut à z est réel ou $z = -1 + iy$ (avec y réel).

2. Deuxième question

Nous allons utiliser la **méthode 3** car il peut être facile de calculer un argument d'un quotient.

Z s'écrit $\frac{z-a}{z-b}$ avec $a = 2i$ et $b = -(1-i) = -1+i$; un argument de Z est donc, d'après le théorème 4, page 34, une mesure de $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{MA})$, en notant A l'image de a , B celle de b , M celle de z .

Mais le théorème 4 n'est valable que pour $z-a \neq 0$ et $z-b \neq 0$.

Dire que Z , non nul, est réel équivaut à dire que $\arg Z = 0$ ou $\arg Z = \pi$, donc à dire que $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{MA}) = 0$ ou $(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{MA}) = \pi$, donc que M appartient à la droite (AB) privée des points A et B .

Dire que $Z = 0$ équivaut à dire que $z = a$ et $z \neq b$. Donc l'ensemble des complexes z tels que Z soit réel est représenté par la droite (AB) privée du point B .

Or, l'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_B - z_A = -1 - i$, et « M appartient à (AB) » équivaut à dire « il existe λ réel tel que $\overrightarrow{AM} = \lambda \overrightarrow{AB}$ ».

L'affixe de $\overrightarrow{AM}$ est donc $z_M - z_A = \lambda(-1-i)$, donc $z_M = -\lambda + i(2-\lambda)$, avec λ réel, $\lambda \neq 1$.

■■■■■■■■■■

13.3. NOMBRES COMPLEXES ET GÉOMÉTRIE

EXERCICE RÉSOLU 5

f est l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $f(z) = iz$.

E est l'ensemble des complexes z tels que $|z-1|=1$.

Quelle est l'image de E par f ?

SOLUTION COMMENTÉE ■■■

Interprétons l'énoncé géométriquement.

Un repère orthonormal direct ayant été choisi, l'ensemble E des complexes z tels que $|z-1|=1$ est le cercle $\mathcal{C}$ de centre le point $I(1; 0)$ et de rayon 1 (paragraphe 9).

D'après le paragraphe 11, géométriquement f s'interprète comme la rotation de centre O et d'angle α , où α est un argument de i . Un argument de i est

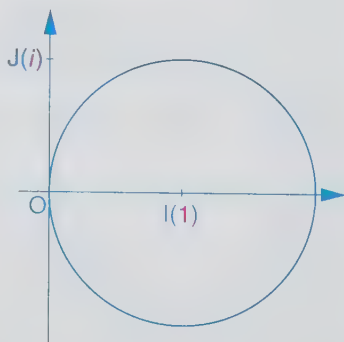
$$\frac{\pi}{2}, \text{ donc } \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

L'image de E par f est donc représentée géométriquement par l'image de $\mathcal{C}$ par la rotation de centre O et d'angle $+\frac{\pi}{2}$. Cette image est le cercle $\mathcal{C}'$ de centre le point J de coordonnées $(0; 1)$, donc d'affixe i , et de rayon est 1.

$\mathcal{C}'$ représente les complexes z' tels que $|z'-i|=1$.

L'image de E par f est donc l'ensemble des complexes z' tels que $|z'-i|=1$.

■■■■■■■■■■



TRAVAUX PRATIQUES D'APPLICATION

Vous trouverez d'autres applications des nombres complexes dans de nombreux travaux pratiques de géométrie.

1 Résolution des équations du second degré à coefficients réels

À l'origine, les complexes ont été introduits pour donner des racines carrées aux réels strictement négatifs ; nous allons voir que toute équation du second degré $az^2 + bz + c = 0$ avec a, b, c réels et $a \neq 0$, admet *toujours* deux solutions (éventuellement confondues).

1.1. Un premier exemple

Proposons-nous de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = -3$.

Profitons du fait que $i^2 = -1$ pour écrire l'équation sous la forme $z^2 = 3i^2$.

D'où successivement : $z^2 - 3i^2 = 0$

$$(z - i\sqrt{3})(z + i\sqrt{3}) = 0.$$

Les deux complexes solutions de l'équation $z^2 = -3$ sont donc :

$$z_1 = i\sqrt{3} \text{ et } z_2 = -i\sqrt{3}.$$

Résolvez chacune des équations :

a/ $z^2 + \frac{3}{4} = 0$.

b/ $z^2 = \cos^2 \theta - 1$ (avec θ réel donné).

c/ $z + \frac{4}{z} = 0$.

1.2. Équation $z^2 = r$, avec r réel et $r < 0$

a/ Vérifiez que $r = (i\sqrt{|r|})^2$.

b/ Déduisez-en les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^2 = r$.

Les complexes $i\sqrt{|r|}$ et $-i\sqrt{|r|}$ sont appelés les racines carrées du réel strictement négatif r .

1.3. Équation $az^2 + bz + c = 0$ avec a, b, c réels et $a \neq 0$

1. Proposons-nous de résoudre cette équation dans $\mathbb{C}$. À la différence de la résolution dans $\mathbb{R}$ de cette même équation, d'après 1.2., quel que soit son signe, le réel $\Delta = b^2 - 4ac$ admet une ou deux racines carrées ; notons z_0 l'une des racines carrées de $b^2 - 4ac$.

a/ Vérifiez que, pour tout complexe z :

$$az^2 + bz + c = a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right].$$

b/ Déduisez-en que l'équation à résoudre s'écrit :

$$a \left(z - \frac{b + z_0}{2a} \right) \left(z - \frac{b - z_0}{2a} \right) = 0.$$

En conséquence :

• lorsque $b^2 - 4ac = 0$, l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet l'unique solution $-\frac{b}{2a}$;

• lorsque $b^2 - 4ac \neq 0$, l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet deux solutions $z_1 = \frac{-b + z_0}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b - z_0}{2a}$ où z_0 désigne une racine carrée de $\Delta = b^2 - 4ac$.

Notez que lorsque $\Delta \geq 0$, l'équation $az^2 + bz + c = 0$ (avec $a \neq 0$) a une ou deux racines réelles.

Par contre, lorsque $\Delta < 0$, les deux solutions z_1 et z_2 sont des complexes conjugués non réels.

Dans ce cas, en écrivant $\Delta = i^2(-\Delta)$, nous obtenons : $z_0 = i\sqrt{-\Delta}$ et donc :

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}; \quad z_2 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

Formellement, les formules sont les mêmes que dans $\mathbb{R}$.

Dans tous les cas on obtient la factorisation : pour tout complexe z ,

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2).$$

2. a/ Résolvez dans $\mathbb{C}$ chacune des équations proposées :

$$2z^2 - 3z + 4 = 0; \quad \frac{3}{2}z^2 + z + \frac{1}{6} = 0; \quad 3z^2 + z + 1 = 0; \quad 5z^2 - 3z = 0.$$

b/ Proposez une écriture factorisée de :

$$z^2 + 4; \quad -z^2 + 2z - 2; \quad 5z^2 - 3z + \frac{9}{20}; \quad z^2 + 18z + 1681.$$

2 Des applications

2.1. Résolution de systèmes

a/ Résolvez dans $\mathbb{C}^2$ chacun des systèmes :

$$\begin{cases} u + v = 2 \\ uv = 50 \end{cases} \quad \begin{cases} u + v = -1 \\ uv = 1. \end{cases}$$

b/ Résolvez dans $\mathbb{C}^2$ le système $\begin{cases} zZ = \frac{1}{2} \\ z + 2Z = \sqrt{3}. \end{cases}$

2.2. Des équations bicarrées

1. Proposons-nous de résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 + 2z^2 + 4 = 0$.
Procédons comme dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire résolvons dans $\mathbb{C}^2$ le système :

$$\begin{cases} Z^2 + 2Z + 4 = 0 \\ Z = z^2. \end{cases}$$

a/ Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $Z^2 + 2Z + 4 = 0$.

Calculez le module et un argument de chacune des solutions Z_1 et Z_2 de cette équation.

b/ Calculez le module et un argument de chacune des solutions des équations $z^2 = Z_1$ et $z^2 = Z_2$.

c/ Concluez sur les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $z^4 + 2z^2 + 4 = 0$.

2. Il se trouve que dans $\mathbb{C}$ la résolution de cette équation bicarrée peut se faire plus simplement. Voici comment.

a/ Vérifiez que $z^4 + 4 = (z^2 + 2)^2 - 4z^2$.

b/ Déduisez-en une factorisation de $z^4 + 2z^2 + 4$, puis la résolution dans $\mathbb{C}$ de $z^4 + 2z^2 + 4 = 0$.

3. Une autre équation bicarrée

Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 + 10z^2 + 169 = 0$.

2.3. Équations et géométrie

t est un réel de l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

a/ Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :

$$z^2 - 2z \cos t + 1 = 0. \quad [1]$$

Donnez une forme trigonométrique de chaque solution.

b/ Dans cette question $t = \frac{\pi}{6}$.

Placez dans un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$ les images des solutions trouvées.

c/ On note z_1 la solution trouvée à la question **a/** dont la partie imaginaire est négative.

Pouvez-vous trouver t pour que $2z_1 = 1 - i\sqrt{3}$?

d/ Résolvez l'équation d'inconnue Z :

$$Z^4 - 2Z^2 \cos t + 1 = 0. \quad [2]$$

e/ M_1, M_2, M_3, M_4 sont les points dont les affixes sont les solutions de l'équation [2].

Pour quelle valeur de t ces quatre points sont-ils les sommets d'un carré?

3 Des équations du type $P(z) = 0$ où P est un polynôme complexe à coefficients RÉELS

Dire que P est un polynôme complexe à coefficients réels signifie que P est une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ du type :

$$z \mapsto a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

avec $a_0, a_1, \dots, a_n$ réels.

Lorsque $a_n \neq 0$, on dit que le polynôme est de degré n .

Nous admettons ici le résultat suivant : si z_0 est une racine du polynôme P (c'est-à-dire $P(z_0) = 0$), alors il existe un polynôme Q à coefficients réels, tel que pour tout complexe z :

$$P(z) = (z - z_0)Q(z).$$

3.1. Solutions conjuguées

P est le polynôme complexe à coefficients réels défini par :

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0.$$

Supposons que z_0 soit un complexe solution de l'équation $P(z) = 0$, c'est-à-dire $P(z_0) = 0$.

a/ Montrez que $\overline{P(z_0)} = P(\overline{z_0})$.

b/ Déduisez-en que $\overline{z_0}$ est aussi solution de l'équation $P(z) = 0$.

P est un polynôme complexe à coefficients réels.

Si l'équation $P(z) = 0$ admet une solution z_0 , **alors** son conjugué $\overline{z_0}$ est aussi solution de cette équation.

c/ Nous admettrons ici le résultat suivant : tout polynôme complexe de degré n a n racines dans $\mathbb{C}$ (distinctes ou confondues).

Montrez que tout polynôme réel de degré impair a au moins une racine réelle.

Et que tout polynôme réel de degré pair ne peut pas avoir un nombre impair de racines réelles.

3.2. Applications

1. On se propose de résoudre l'équation $z^4 - z^3 + 2z^2 - z + 1 = 0$.

a/ Vérifiez que i est solution de cette équation.

Déduisez-en une autre solution.

b/ Pourquoi existe-t-il un polynôme Q du second degré tel que l'équation s'écrive :

$$(z^2 + 1)Q(z) = 0?$$

c/ Résolvez l'équation.

2. On se propose de résoudre l'équation $z^4 - 6z^3 + z^2 + 10z - 18 = 0$.

a/ Vérifiez que $1 + i$ est solution de cette équation.

Déduisez-en une autre solution.

b/ Résolvez l'équation.

3. P est le polynôme complexe défini par $P(z) = z^4 - \sqrt{2}z^3 - 4\sqrt{2}z - 16$.

a/ Pourquoi sait-on qu'il existe un polynôme Q tel que, pour tout complexe z : $P(z) = (z^2 + 4)Q(z)$?

b/ Résolvez l'équation $P(z) = 0$.

c/ A, B, C, D sont les points d'affixes les solutions de l'équation précédente.

Démontrez que A, B, C, D sont sur un même cercle dont on donnera le centre et le rayon.

4

Racines n -ièmes de l'unité (n naturel non nul)

Les racines n -ièmes d'un réel positif sont définies au chapitre 9 page 000 du tome 1.

Par définition : tout complexe z tel que $z^n = 1$ est appelé racine n -ième de l'unité.

4.1. Deux exemples

1. Racines carrées de l'unité

L'équation $z^2 = 1$ a deux solutions et deux seulement : 1 et -1 .

Quels sont les modules et arguments de ces deux racines carrées de 1 ?

2. Racines cubiques de l'unité

a/ Factorisez $z^3 - 1$, puis résolvez l'équation $z^3 = 1$.

b/ Quels sont les modules et arguments des trois racines cubiques de 1 ?

c/ Placez dans un repère orthonormal direct les images A, B, C de ces trois racines cubiques de l'unité.

ABC est équilatéral. Pourquoi ?

d/ On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$; montrez que la troisième racine cubique de 1, autre que 1 et j , est égale à j^2 . Vérifiez que $j^2 = \bar{j}$.
Vérifiez que : $1 + j + j^2 = 0$.
Interprétez géométriquement cette égalité.

4.2. Cas général

Pour tout naturel $n \geq 1$, l'équation $z^n = 1$ admet toujours 1 pour solution, mais elle ne peut pas toujours être résolue rapidement par factorisations successives de $z^n - 1$.

L'utilisation des formes trigonométriques ou exponentielles et de la formule de Moivre est bien plus efficace.

a/ z est un complexe non nul tel que $z = |z| e^{i\theta}$.
Donnez une forme trigonométrique de z^n .

b/ Déduisez-en que si $z^n = 1$ alors $|z| = 1$ et que z a pour arguments $\frac{2k\pi}{n}$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

c/ Expliquez pourquoi les racines n -ièmes de l'unité sont les n complexes, notés ω_k pour k naturel $0 \leq k \leq n-1$, tels que : $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$.

d/ Si l'on note $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$, vérifiez que les n racines n -ièmes de l'unité sont :

$$1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}.$$

Pour tout naturel $n \geq 1$, les racines n -ièmes de l'unité sont les n complexes :

$$1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1},$$

$$\text{où } \omega = e^{\frac{2i\pi}{n}} = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}.$$

4.3. Premières applications et propriétés

a/ Montrez que la somme des n racines n -ièmes de l'unité est nulle, c'est-à-dire que, pour tout naturel $n \geq 1$,

$$1 + \omega + \omega^2 + \dots + \omega^{n-1} = 0.$$

b/ Montrez que le produit de deux racines n -ièmes de l'unité est une racine n -ième de l'unité.

Montrez que l'inverse d'une racine n -ième de l'unité est aussi une racine n -ième de l'unité.

c/ Vérifiez que pour $n = 2$, puis $n = 3$, vous retrouvez les racines carrées et cubiques de l'unité, déjà calculées.

d/ Représentez dans un repère orthonormal direct les images A, B, C, D des racines quatrièmes de l'unité. ABCD est un carré. Pourquoi ?

4.4. Interprétation géométrique

n est un naturel supérieur ou égal à 3.

Dans un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, notons $M_0, M_1, M_2, \dots, M_{n-1}$ les points dont les affixes sont les n racines n -ièmes de l'unité : $1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{n-1}$.

a/ Pourquoi les points $M_0, M_1, \dots, M_{n-1}$ sont-ils sur le cercle trigonométrique de centre O ?

b/ Calculez la distance $M_0 M_1$.

Montrez que pour tout naturel k tel que $0 \leq k \leq n-1$:

$$M_k M_{k+1} = 2 \sin \frac{\pi}{n}.$$

c/ Déduisez de la question a/ du paragraphe 4.3. que O est l'isobarycentre de $M_0, M_1, \dots, M_{n-1}$.

On dit que $M_0 M_1 M_2 \dots M_{n-1}$ est un polygone régulier convexe de centre O.

4.5. Résolution de l'équation $z^n = a$, où $a \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$

Lorsque $a = 0$, la seule solution de l'équation $z^n = 0$ est $z = 0$.

Par la suite, nous supposons $a \neq 0$; écrivons alors a sous forme exponentielle :

$$a = |a| e^{i\alpha} \quad (\text{où } \alpha \text{ est un réel}).$$

Pour résoudre l'équation $z^n = a$, cherchons z sous forme exponentielle : $z = |z| e^{i\theta}$.

Expliquez pourquoi les solutions sont les complexes tels que :

$$|z| = \sqrt[n]{|a|} \quad \text{et} \quad \theta = \frac{\alpha}{n} + k \times \frac{2\pi}{n} \quad (\text{avec } k \in \mathbb{Z}).$$

Applications :

a/ Donnez une forme exponentielle de $1 + i$.

Résolvez l'équation $z^2 = 1 + i$.

b/ Donnez une forme exponentielle du complexe $i - \sqrt{3}$.

Résolvez l'équation $z^5 = i - \sqrt{3}$.

5

Transformation de $a \cos \theta + b \sin \theta$ où a et b sont réels

5.1. Le procédé

a et b sont deux réels dont l'un au moins est non nul.

a/ θ est un réel.

Montrez que $a \cos \theta + b \sin \theta$ est la partie réelle du complexe $e^{i\theta}(a + ib)$.

b/ Démontrez que, pour tout réel θ :

$$a \cos \theta + b \sin \theta = r \cos(\theta - \varphi)$$

avec $r = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$ et $\varphi = \arg(a + ib)$.

c/ **Application :** utilisez cette transformation pour exprimer, à l'aide d'un cosinus, puis à l'aide d'un sinus, chacun des réels suivants :

- $\cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta$.
- $\cos 3\theta + \sin 3\theta$.
- $2 \cos \theta - 3 \sin \theta$ (trouvez une valeur approchée de φ avec la calculatrice).

5.2. Application à la résolution de l'équation

$$a \cos x + b \sin x = c$$

a et b sont des réels dont l'un au moins est non nul, et c un réel.

D'après ce qui précède, et avec les mêmes notations, résoudre :

$$a \cos x + b \sin x = c$$

est équivalent à résoudre l'équation :

$$r \cos(x - \varphi) = c.$$

1. **a/** Expliquez pourquoi l'équation n'a pas de solution lorsque $c^2 > a^2 + b^2$.

b/ Dans le cas où $c^2 \leq a^2 + b^2$, notons α un réel tel que $\cos \alpha = \frac{c}{r}$.

Trouvez alors les solutions de l'équation initiale.

2. **Application :** utilisez les résultats précédents pour résoudre chacune des équations suivantes.

a/ $\cos x + \sqrt{3} \sin x = -1$.

b/ $2 \cos x - 3 \sin x = -6$.

c/ $\cos 3x + \sin 3x = 1$.

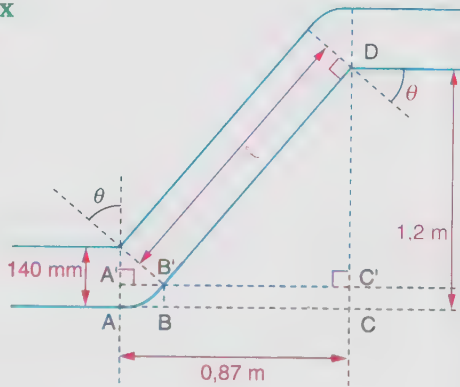
d/ $\sqrt{3} \cos^2 x + 2 \sin x \cos x - \sqrt{3} \sin^2 x = \sqrt{2}$.

Conseil : pensez à utiliser $\cos 2x$ et $\sin 2x$.

5.3. Un problème de tuyaux

Un plombier doit raccorder un tuyau posé sur le sol à un tuyau horizontal situé 1,2 mètre au-dessus du sol comme indiqué sur la figure ci-contre.

Pour relier ces deux tuyaux, il dispose de tuyaux droits et de tuyaux courbes. Tous les tuyaux utilisés ont pour rayon 70 mm. Le plombier veut déterminer la longueur ℓ du tuyau droit et l'angle θ des tuyaux courbes.



a/ Exprimez AB en fonction de $\sin \theta$ et BC en fonction de $\cos \theta$.
Déduez-en que : $140 \sin \theta + \ell \cos \theta = 870$. [1]

b/ Exprimez CC' en fonction de $\cos \theta$ et C'D en fonction de $\sin \theta$.
Déduez-en que : $140(1 - \cos \theta) + \ell \sin \theta = 1200$. [2]

c/ Déduez de [1] et [2] que :
 $87 \sin \theta - 106 \cos \theta = 14$.

d/ Donnez des valeurs approchées tronquées au centième du module et d'un argument de $87 - 106i$.
Donnez alors des valeurs approchées de θ en degrés et de ℓ en mètres.

6

Conversion de sommes en produits

6.1. Les formules

p et q sont deux réels, écrivons $e^{ip} + e^{iq}$ en mettant en facteur $e^{i \frac{p+q}{2}}$; il vient :

$$e^{ip} + e^{iq} = e^{i \frac{p+q}{2}} (e^{i \frac{p-q}{2}} + e^{i \frac{p-q}{2}}) = 2 e^{i \frac{p+q}{2}} \cos \frac{p-q}{2}.$$

1. Expliquez comment en déduire les formules :

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$$

$$\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}.$$

2. Déduisez-en les formules :

$$\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2 \sin \frac{p-q}{2} \cos \frac{p+q}{2}.$$

3. Autre méthode

- À partir des formules donnant $\cos(a+b)$ et $\cos(a-b)$, vérifiez que :

$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cos b,$$

puis posez : $a+b=p$, $a-b=q$, et retrouvez la formule qui donne $\cos p + \cos q$.

- Retrouvez de même la formule donnant $\sin p + \sin q$.

6.2. Applications

1. Résolvez dans $\mathbb{R}$ chacune des équations :

a/ $\cos 3x - \cos 5x = \sin 6x + \sin 2x$.

b/ $\sin x + \sin 2x + \sin 3x = 0$.

Conseil : transformez $\sin x + \sin 3x$ en un produit.

c/ $\cos 5x + 2 \cos 3x + 3 \cos x = 0$.

2. a/ Résolvez l'équation $z^5 = 1$.

Représentez les points d'affixe des solutions de l'équation dans un repère orthonormal direct.

b/ À l'aide de la somme de ces solutions, montrez que :

$$\cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{2}.$$

Montrez qu'alors : $\cos \frac{2\pi}{5} \cos \frac{4\pi}{5} = -\frac{1}{4}$.

c/ Déduisez-en les valeurs de $\cos \frac{2\pi}{5}$ et $\cos \frac{4\pi}{5}$.

7

Exemple de mise en œuvre des formules de Moivre et d'Euler

Au chapitre 6 du tome 1, vous trouverez d'autres utilisations des formules de Moivre et d'Euler, en particulier pour la recherche de primitives.

θ est un réel et n un naturel; proposons-nous de calculer les sommes :

$$C = 1 + \cos \theta + \cos 2\theta + \dots + \cos n\theta$$

$$S = \sin \theta + \sin 2\theta + \dots + \sin n\theta.$$

MÉTHODE

L'idée consiste à déterminer une forme trigonométrique du complexe $C + iS$ et à écrire ensuite que C est la partie réelle de ce complexe et S sa partie imaginaire.

a/ Notons $u = \cos \theta + i \sin \theta$.

Expliquez pourquoi : $C + iS = 1 + u + u^2 + \dots + u^n$.

b/ Dans le cas où $\theta = k \times 2\pi$ (avec $k \in \mathbb{Z}$), montrez que $C = n + 1$ et $S = 0$.

c/ Nous supposons par la suite $\theta \neq 2k\pi$.

Calculez $\sum_{i=0}^n u^i$.

d/ Mettez $e^{i\frac{\theta}{2}}$ en facteur dans $u - 1$ et $e^{i\frac{(n+1)\theta}{2}}$ en facteur dans $u^{n+1} - 1$, et déduisez-en que :

$$C + iS = (e^{i\frac{n\theta}{2}}) \frac{\sin \frac{(n+1)\theta}{2}}{\sin \frac{\theta}{2}}.$$

e/ Déduisez-en C et S .

8

Complexes et Géométrie

8.1. Des relations métriques dans le triangle

Dans le plan orienté, ABC est un triangle **direct**.

Notons :

- z_A, z_B, z_C les affixes des points A, B, C ;
- a, b, c les longueurs des segments $[BC], [AC], [AB]$;
- $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ les angles géométriques du triangle ABC .

a/ Démontrez que :

$$\frac{z_B - z_A}{z_B - z_C} = \frac{c}{a} (\cos \widehat{B} + i \sin \widehat{B}) \quad \text{et} \quad \frac{z_C - z_A}{z_C - z_B} = \frac{b}{a} (\cos \widehat{C} - i \sin \widehat{C}).$$

b/ Vérifiez que : $\frac{c}{a} (\cos \widehat{B} + i \sin \widehat{B}) + \frac{b}{a} (\cos \widehat{C} - i \sin \widehat{C}) = 1$.

Déduisez-en que : $a = b \cos \widehat{C} + c \cos \widehat{B}$ et $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$.

c/ Par « permutation de lettres » donnez des relations analogues aux deux précédentes dans le triangle ABC .

8.2. Lieu géométrique

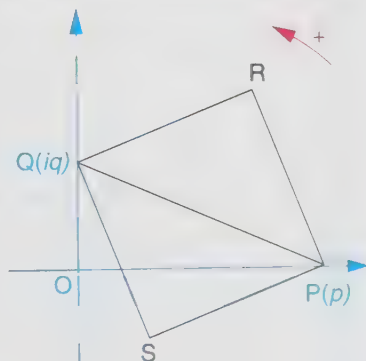
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

P est le point d'affixe le réel p et Q est le point d'affixe qi (avec q réel) de façon que la somme $p + q$ reste constante et égale à un réel a donné :

$$p + q = a.$$

On construit un carré $PRQS$ de diagonale $[PQ]$ de façon que :

$$(\overrightarrow{RQ}, \overrightarrow{RP}) = \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{SQ}, \overrightarrow{SP}) = -\frac{\pi}{2}.$$



a/ Notons z l'affixe de R et z' l'affixe de S.
Démontrez que :

$$\frac{z-p}{z-iq} = i \quad \text{et} \quad \frac{z'-p}{z'-iq} = -i.$$

b/ Déduez-en que lorsque P et Q se déplacent (avec $p+q=a$) le point R reste fixe.

c/ Démontrez que l'affixe du point S est :

$$z' = \frac{a-2q}{\sqrt{2}} e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

Déduez-en le lieu géométrique décrit par le point S lorsque P se déplace sur l'axe réel et Q sur l'axe imaginaire pur.

9

Étude de la transformation liée à

la fonction $f : z \longmapsto \frac{1}{z}$

Pour chaque complexe z **non nul**, nous noterons z' l'image de z par $f : z' = \frac{1}{z}$.

Choisissons dans le plan orienté un repère orthonormal direct, et associons à tout complexe z le point M d'affixe z .

Notons M' le point d'affixe $z' = \frac{1}{z}$. À la fonction $f : z \longmapsto z'$, nous pouvons associer alors une fonction F du plan complexe dans lui-même, $F : M(z) \longmapsto M'(z')$.

1. Sans calculs de coordonnées, en n'utilisant que les résultats connus sur les inverses et les conjugués :

a/ Montrez que l'axe des abscisses est globalement invariant par F, c'est-à-dire que F transforme tout point de cet axe en un point de cet axe.

b/ Montrez que z et z' ont mêmes arguments, puis déduisez que O, M, M' sont alignés, et que toute droite qui passe par l'origine est globalement invariante par F.

c/ Montrez que $OM \times OM' = 1$, et déduisez-en que l'image par F d'un cercle de centre O est un cercle de centre O.

2. Lorsque $z = x + iy$, on notera : $z' = x' + iy'$.

a/ Montrez que : $x' = \frac{x}{x^2 + y^2}$, $y' = \frac{y}{x^2 + y^2}$.

b/ Montrez que : $z = \frac{1}{z'}$ et sans nouveaux calculs, déduisez-en que :

$$x = \frac{x'}{x'^2 + y'^2} , \quad y = \frac{y'}{x'^2 + y'^2}.$$

3. Image d'une droite qui ne passe pas par l'origine

a/ d est la droite d'équation : $x + y + 1 = 0$.

Montrez que l'image par F de la droite d est un cercle $\mathcal{C}$ dont vous préciserez le centre I et le rayon.

Indication : écrivez l'équation trouvée de l'image de F sous la forme : $(x' - a)^2 + (y' - b)^2 = r^2$.

Vérifiez que ce cercle passe par l'origine et que (OI) et d sont perpendiculaires.

b/ d est la droite d'équation : $ax + by + c = 0$, $c \neq 0$.

Montrez que l'image par F de la droite d est un cercle $\mathcal{C}$ qui passe par l'origine.

4. Image d'un cercle

$\mathcal{C}$ est le cercle de centre A et de rayon r , où A est un point d'affixe z_0 , avec $z_0 = a + ib$, a et b réels.

Dire que le point $M(z)$ appartient à $\mathcal{C}$ équivaut donc à dire que : $|z - z_0|^2 = r^2$.

a/ Déduisez-en une relation entre x' et y' .

b/ Montrez que si $a^2 + b^2 = r^2$, c'est-à-dire si le cercle $\mathcal{C}$ passe par l'origine, alors l'image de $\mathcal{C}$ est une droite, et que cette droite est perpendiculaire à (OA) .

c/ Montrez que si $a^2 + b^2 \neq r^2$, alors l'image de $\mathcal{C}$ est un cercle dont vous préciserez le centre et le rayon.

10 Suites de nombres complexes

On pose, pour tout entier $k \geq 0$:

$$z_k = \frac{1 + k(k+1) + i}{1 + k(k+1) - i}$$

et on note : $|z_k| = \rho_k$ et $\text{Arg } z_k = \alpha_k$.

Partie A

1. Montrez que, pour tout $k \geq 0$,

$$\rho_k = 1 \quad \text{et} \quad \tan \frac{\alpha_k}{2} = \frac{1}{1 + k(k+1)}.$$

2. Placez dans le plan complexe les points d'affixes z_0 , z_1 et z_2 .

3. **a/** Démontrez que, pour tout entier $k \geq 0$, il existe un unique réel θ_k

de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, tel que :

$$\tan \theta_k = k.$$

b/ Calculez θ_0 et θ_1 et placez sur le cercle trigonométrique les points images de $e^{i\theta_0}$, $e^{i\theta_1}$, $e^{i\theta_2}$, $e^{i\theta_3}$, en utilisant un procédé de construction simple.

c/ Démontrez que, pour tout entier $k \geq 0$,

$$\frac{\alpha_k}{2} = \theta_{k+1} - \theta_k.$$

Indication : remarquez que $\frac{1}{1 + k(k+1)} = \frac{(k+1) - k}{1 + k(k+1)}$.

Partie B

On pose : $s_1 = z_1$, $s_2 = z_1 \cdot z_2$, $s_3 = z_1 \cdot z_2 \cdot z_3$, et pour tout entier $n \geq 4$, $s_n = z_1 \cdot z_2 \cdot z_3 \cdot \dots \cdot z_n$.

1. Quel est le module de s_n ?

Exprimez son argument en fonction de θ_{n+1} et de θ_1 .

2. Par définition, une suite de nombres complexes $(r_n e^{i\varphi_n})$ converge vers le nombre complexe $re^{i\varphi}$ si :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n = r \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n = \varphi.$$

Trouvez la limite de la suite s_n .

EXERCICES ET PROBLÈMES

Pour tester ses connaissances

Q.C.M.

Pour les exercices 1 à 9, une seule des réponses proposées est exacte.

1. L'égalité $\operatorname{Re}(zz') = \operatorname{Re}(z) \times \operatorname{Re}(z')$:
 a/ n'est jamais vraie ;
 b/ est vraie pour tous complexes z et z' ;
 c/ n'est vraie que pour z ou z' réel.
2. L'égalité $\operatorname{Re}(iz) = -\operatorname{Im} z$:
 a/ n'est jamais vraie ;
 b/ est vraie pour tout complexe z ;
 c/ n'est vraie que dans certains cas.
3. Dans le plan complexe les points $M_1(0)$, $M_2(\bar{z})$, $M_3\left(\frac{1}{z}\right)$ avec $z \neq 0$:
 a/ ne sont jamais alignés ;
 b/ sont toujours alignés ;
 c/ ne sont alignés que pour certaines valeurs de z .
4. r est un réel strictement positif, θ est un réel. Le conjugué de $re^{i\theta}$ est :
 a/ $-re^{i\theta}$; b/ $-re^{-i\theta}$; c/ $re^{-i\theta}$.
5. z est un complexe non nul, un de ses arguments est π . Alors :
 a/ z est un réel strictement négatif ;
 b/ z est un réel mais on ne peut pas préciser son signe ;
 c/ z n'est pas nécessairement un réel.
6. Si un nombre complexe z non nul a son conjugué égal à son inverse, alors on peut en déduire assurément que :
 a/ z est réel ;
 b/ z est imaginaire pur ;
 c/ $|z| = 1$.
7. Un nombre complexe z a pour forme trigonométrique $re^{i\theta}$. Alors la forme trigonométrique de $-z$ est :
 a/ $-re^{i\theta}$; b/ $-re^{-i\theta}$; c/ $re^{i(\pi+\theta)}$.

8. z est le complexe : $1 + e^{i\theta}$. Alors $\bar{z}$ est égal à :
 a/ $1 - e^{i\theta}$; b/ $1 - e^{-i\theta}$; c/ $1 + e^{-i\theta}$.

9. $z = \frac{1-2i}{3+i}$. Alors la forme algébrique de z est :
 a/ $\frac{5}{10} - \frac{7}{10}i$; b/ $\frac{1}{10} - \frac{7}{10}i$; c/ $\frac{1}{10} + \frac{7}{10}i$.

CALCULS DANS $\mathbb{C}$

Pour les exercices 10 à 15, déterminez la forme algébrique du complexe z .

10. $z = (1+i)(1-2i)$.
11. $z = (2-3i)(3i)$.
12. $z = (2i+1)(1+i)^2(3i-4)$.
13. $z = (5+4i)(3+7i)(2-3i)$.
14. f est la fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :
 $f(z) = z^3 - 2iz^2 - (1-i)z - 2i$.
 Calculez $f(i)$, $f(1-i)$, $f(1+i)$.
15. f est la fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :
 $f(z) = 2z^3 + (1+i)z^2 - (3+2i)z - 7 + 16i$.
 Calculez $f(1+i)$, $f(2-i)$, $f(2i)$.

Pour les exercices 16 à 19, déterminez la forme algébrique des complexes z et z' .

16. $z = \frac{1-i}{2i}$; $z' = \frac{2+i}{i}$.
17. $z = \frac{3-4i}{7+5i}$; $z' = \frac{1+2i}{3+i\sqrt{3}}$.
18. $z = \frac{(3-2i)(5+i)}{(5-i)}$; $z' = \frac{i(6i-8)}{(3+4i)(5-i)}$.
19. $z = \frac{1-e^{ix}}{1+e^{ix}}$ avec x réel.

Pour les exercices 20 à 23, résolvez le système d'inconnue le couple $(z; z')$ de complexes.

20. $\begin{cases} z + z' = 3 \\ 2z - z' = i \end{cases}$
21. $\begin{cases} 3z + z' = 5 + 2i \\ -z + z' = 1 - 2i \end{cases}$

$$22. \begin{cases} z - 2iz' = 5i \\ 2z - (1+i)z' = -2+6i. \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} (1+i)z + (1-i)z' = 2+i \\ 3z - 2iz' = 4-i. \end{cases}$$

Pour s'entraîner

CALCULS DANS $\mathbb{C}$

24. θ et α sont deux réels tels que $1 + e^{i\theta} e^{i\alpha} \neq 0$.
Montrez que $\frac{e^{i\theta} + e^{i\alpha}}{1 + e^{i\theta} e^{i\alpha}}$ est un réel.

Pour les exercices 25 et 26, θ désigne un réel; calculez z^n pour n naturel.

25. $z = 1 + \cos \theta + i \sin \theta$.

26. $z = 1 - \cos \theta + i \sin \theta$.

Pour les exercices 27 à 30, mettez $f(\theta)$ sous la forme $r \cos(\theta - \varphi)$.

27. $f(\theta) = 3 \cos \theta - \sqrt{3} \sin \theta$.

28. $f(\theta) = -2 \cos \theta - 2 \sin \theta$.

29. $f(\theta) = 3 \cos \theta + 4 \sin \theta$.

30. $f(\theta) = \cos \theta - 2 \sin \theta$.

Pour les exercices 31 à 36, trouvez l'erreur sans faire tout le calcul.

31. $e^{\frac{2}{7}i\pi} \times e^{-\frac{3}{4}i\pi} = 1 - \frac{1}{2}i$.

32. $e^{\frac{2}{7}i\pi} + e^{-\frac{3}{4}i\pi} = 2 - i$.

33. $(1+i)(1-i) = 0$.

34. $(1+i)(1-i) = 1$.

35. $z^2 + z + 2 = (z-1-i)(z+2-i)$.

36. $z^4 + z^2 + 3 = (z^2 - \sqrt{3}z + \sqrt{3})(z^2 + \sqrt{3}z + \sqrt{3})$.

PASSAGE D'UNE FORME À UNE AUTRE

Pour les exercices 37 à 45, écrivez z et z' sous forme trigonométrique.

37. $z = 1 - i\sqrt{3}$; $z' = -1 + i$.

38. $z = -2$; $z' = i$.

39. $z = \frac{\sqrt{2}}{1-i}$; $z' = \frac{1+\sqrt{2}+i}{1+\sqrt{2}-i}$.

40. $z = \frac{4}{1+i\sqrt{3}}$; $z' = \frac{2}{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}$.

41. $z = (-1+i)^3 e^{\frac{3}{4}i\pi}$.

42. $z = -2(1+i)^6$.

43. $z = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^3$.

44. $z = \frac{(\sqrt{3}+i)^9}{(1+i)^{12}}$.

45. $z = 1 + e^{i\theta} + e^{2i\theta}$.

Pour les exercices 46 à 48, écrivez z sous forme algébrique.

46. $z = e^{\frac{i\pi}{3}}$; $z = 2e^{-\frac{i\pi}{3}}$.

47. $z = \sqrt{3}e^{-\frac{5}{6}i\pi}$; $z = \sqrt{2}e^{\frac{3}{4}i\pi}$.

48. $z = (e^{\frac{i\pi}{7}})^9$; $z = -9e^{2\pi}$.

RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS

Pour les exercices 49 à 53, résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation du second degré.

49. $z^2 - 5z + 9 = 0$.

50. $z^2 - 2z = 0$.

51. $z^2 + 10 = 0$.

52. $2z^2 - 6z + 5 = 0$.

53. $z^2 + 6z + 34 = 0$.

RECHERCHE D'ENSEMBLES

Pour les exercices 54 et 55, placez les points d'affixes z_1, z_2, z_3, z_4 et trouvez un cercle passant par ces points.

54. $z_1 = -5+3i$; $z_2 = 2+2i$;
 $z_3 = 2-4i$; $z_4 = -6-4i$.

55. $z_1 = \sqrt{3}$; $z_2 = 1+\sqrt{3}+i$;
 $z_3 = 1+(\sqrt{3}+1)i$; $z_4 = i\sqrt{3}$.

Pour les exercices 56 à 64, trouvez l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie la condition donnée. Une solution géométrique est parfois préférable à une solution algébrique.

56. $|z - 4| = |z + 2i|$.

57. $|z + 1 + i| = |z - 3|$.

58. $|z - 5 + 3i| = 3$.

59. $|\bar{z} + 5 - i| = |z - 4i|$.

60. $z^2 = |z|$.

61. $z^2 = \bar{z}$.

62. $z + \bar{z} = |z|$.

63. $z + \bar{z} = |z|^2$.

64. $|z| = \left| \frac{1}{z} \right| = |z - 2|$.

65. Soit z un complexe non réel; A, B, C sont les points d'affixes z , z^2 et z^3 .

a/ Trouvez l'ensemble des points A tels que A, B et C soient distincts.

b/ On note O, I et J, les points d'affixes respectifs 0, 1 et -1 .

Montrez que lorsque A, B et C sont distincts, dire que le triangle ABC est rectangle équivaut à dire que le triangle OJA est rectangle. Déduisez-en l'ensemble des points A tels que le triangle ABC soit rectangle.

66. Déterminez l'ensemble des points M(z) tels que les points J(i), M(z) et M'(iz) soient alignés.

67. Déterminez l'ensemble des points M(z) tels que les points I(1), M(z) et M'(1 + z^2) soient alignés.

68. Déterminez l'ensemble des images des complexes z tels que :

$$u = (1 - z)(1 - iz)$$

a/ soit un réel;

b/ soit un imaginaire pur.

69. u est un complexe donné. Déterminez l'ensemble des points M(z) tels que le complexe $a = \frac{u - \bar{u}z}{1 - z}$ soit réel.

70. On considère le plan complexe rapporté à un repère orthonormé (O; $\vec{u}$, $\vec{v}$). θ désigne un nombre réel de l'intervalle $]-\pi; +\pi[$. Pour tout θ on définit le nombre complexe :

$$z(\theta) = \frac{1}{2}(1 + e^{i\theta})^2.$$

1. Calculez $(1 + e^{i\theta})e^{-i\frac{\theta}{2}}$, déduisez-en que le nombre complexe $(1 + e^{i\theta})$ a pour argument $\frac{\theta}{2}$. Calculez le module et l'argument de $z(\theta)$. Représentez dans le plan complexe $z(\frac{\pi}{6})$.

2. Soit M le point d'affixe $z(\theta)$ et A le point d'affixe 1.

On projette orthogonalement A en P sur la droite (OM).

Quel est l'ensemble des points P quand θ varie dans $]-\pi; +\pi[$?

3. Calculez la distance PM. On séparera les cas :

$$\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right] \quad \text{et} \quad \theta \in \left] -\pi; -\frac{\pi}{2} \right[\cup \left] \frac{\pi}{2}; \pi \right[.$$

4. Donnez une construction géométrique de l'ensemble des points M (construction point par point).

71. 1. Résolvez dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :

$$Z^2 - Z + 1 = 0.$$

2. Soient Z_A et Z_B les deux racines de cette équation, Z_A étant celle dont la partie imaginaire est positive.

Calculez les modules $|Z_A|$ et $|Z_B|$.

3. Le plan est rapporté à un repère orthonormé (O; $\vec{u}$, $\vec{v}$).

Tracez le cercle de centre O et de rayon 1. Placez les points A et B d'affixes Z_A et Z_B ainsi que le point C d'affixe -1 .

4. Calculez les modules $|Z_A - Z_B|$, $|Z_B - Z_C|$, $|Z_C - Z_A|$.

Déduisez-en la nature du triangle ABC.

72. 1. Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$z^2 + \sqrt{3}z + 1 = 0.$$

On désigne par z_B et z_C les racines de l'équation, la racine z_B ayant une partie imaginaire positive.

2. Le plan est rapporté au repère orthonormé (O; $\vec{u}$, $\vec{v}$). On note B, C les points d'affixes respectives z_B , z_C et A le point d'affixe i .

a/ Montrez que les points A, B et C appartiennent au cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon 1.

b/ Calculez le module de $z_A - z_B$.

Quelle est la nature du triangle OAB?

c/ Montrez que le quadrilatère OABC est un losange.

73. Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé (O; $\vec{u}$, $\vec{v}$), on considère le point

$$A_1 \text{ d'affixe } z_1 = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

1. Calculez $|z_1|$. Déduisez-en que A_1 est sur le cercle Γ de centre O, de rayon 1.

Représentez A_1 dans P .

(On prendra $\|\vec{u}\| = 4 \text{ cm.}$)

2. On considère le point A_0 d'affixe 1 et les points A_n d'affixes $z_n = (z_1)^n$ où n est un entier naturel non nul.

a/ Calculez z_2 . Représentez A_0 et A_2 dans P .

b/ Calculez $|z_n|$. Déduisez-en que les points A_n sont sur Γ .

3. Démontrez que :

$$z_{n+1} - z_n = (z_1)^n \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

Déduisez-en le module de $z_{n+1} - z_n$, puis la distance $A_n A_{n+1}$.

4. a/ Déduisez des questions précédentes que les triangles $OA_n A_{n+1}$ sont équilatéraux.

b/ Donnez une mesure des angles $\widehat{A_n OA_{n+1}}$. Déduisez-en que $A_6 = A_0$.

c/ Représentez les points A_n dans P .

74. Soit P le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$ avec $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1 \text{ cm.}$ On considère les nombres complexes :

$$z_A = 4 + 2i \quad \text{et} \quad z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i.$$

1. Calculez les nombres complexes :

$$z^2; \quad z_B = z^2 z_A; \quad z_C = z^{10} z_B; \quad z_D = z^{18} z_C.$$

2. a/ Représentez les points A, B, C, D d'affixes respectives z_A, z_B, z_C, z_D .

b/ Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$?

75. A, B et C sont les points du plan d'affixes respectifs $z, 1 + 3z, 1 + z$, avec $z \neq 0$. Quel est l'ensemble des points A tels que ABC soit isocèle en A ?

76. I et J sont les points d'affixes respectifs 1 et i . M et N sont les points du plan d'affixes respectives z et $2z$. Quel est l'ensemble des points M tels que les droites (IM) et (JN) soient parallèles.

EXERCICES DU BACCALAURÉAT

77. 1. On considère la suite géométrique de réels dont le premier terme est 1 et la raison est q ($q \neq 1$). Calculez $1 + q + q^2 + q^3 + q^4$.

2. a/ z désignant un nombre complexe quelconque différent de 1, calculez :

$$Z = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4.$$

b/ On suppose dans cette question que :

$$z = \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}.$$

Déduisez du a/ les valeurs de :

$$X = \cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} + \cos \frac{6\pi}{5} + \cos \frac{8\pi}{5}$$

et :

$$Y = \sin \frac{2\pi}{5} + \sin \frac{4\pi}{5} + \sin \frac{6\pi}{5} + \sin \frac{8\pi}{5}.$$

78. Soit les nombres complexes $z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2 = 1 - i$.

1. Mettez sous forme trigonométrique z_1, z_2 et $Z = \frac{z_1}{z_2}$.

2. Déduisez-en que $\cos \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$ et $\sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$.

3. On considère l'équation d'inconnue réelle x :

$$(\sqrt{6} + \sqrt{2}) \cos x + (\sqrt{6} - \sqrt{2}) \sin x = 2.$$

a/ Résolvez cette équation dans $\mathbb{R}$.

b/ Placez les points images des solutions sur le cercle trigonométrique.

79. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

On note $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon $R > 0$ et A le point de $\mathcal{C}$ d'affixe R .

Étant donné un entier $n \geq 2$, on note r la rotation de centre O d'angle $\frac{2\pi}{n}$.

On considère la suite de points $(M_k)_{k \geq 0}$ de $\mathcal{C}$ définie par la relation de récurrence :

$$M_{k+1} = r(M_k)$$

et la condition initiale $M_0 = A$.

On note z_k l'affixe de M_k .

1. a/ Pour tout $k \geq 0$, exprimez z_{k+1} en fonction de z_k .

b/ Déduisez-en l'expression de z_k en fonction de k et n .

c/ Comparez M_n et M_0 .

d/ Faites une figure lorsque $n = 16$ (on prendra $R = 4 \text{ cm.}$)

2. a/ Prouvez que, pour tout $k \geq 0$:

$$M_k M_{k+1} = 2R \sin \frac{\pi}{n}.$$

b/ On note :

$$L_n = M_0 M_1 + M_1 M_2 + \dots + M_{n-1} M_n$$

le périmètre du polygone régulier $(M_0, M_1, \dots, M_n)$.

Déterminez la limite de L_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Interprétez géométriquement le résultat ainsi obtenu.

- 80.** Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On note A le point d'affixe $4 + 2i$, B le point d'affixe $-2 - i$ et M le point d'affixe z .
Soit le nombre complexe :

$$Z = \frac{z - 4 - 2i}{z + 2 + i}.$$

- 1.** Donnez une signification géométrique de $|Z|$ et de $\arg Z$.
2. Précisez la nature puis construisez :
a/ l'ensemble des points M d'affixe z , tels que $|Z| = 1$;
b/ l'ensemble des points M d'affixe z , tels que $|Z| = 2$;
c/ l'ensemble des points M d'affixe z , tels que Z est un réel positif;
d/ l'ensemble des points M d'affixe z , tels que Z est un imaginaire pur.

- 81.** Soit f l'application de $\mathbb{C}$ dans lui-même définie par :

$$f(z) = z^4 - \sqrt{2}z^3 - 4\sqrt{2}z - 16.$$

- 1.** Trouvez les deux réels a et b tels que pour tout nombre complexe z on ait :

$$f(z) = (z^2 + 4)(z^2 + az + b).$$

- 2.** Déduisez-en l'ensemble des solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $f(z) = 0$.

- 3.** Placez dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ les images A, B, C, D des solutions de l'équation précédente, puis montrez que ces points sont sur un même cercle $\mathcal{C}$ dont on précisera le centre et le rayon.

- 82.** Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{OA}, \vec{OB})$. Unité graphique : 8 cm.

On note C le milieu du segment [AB].

Soit r la rotation de centre C et d'angle de mesure $-\frac{\pi}{2}$. Pour tout point M du plan d'affixe u , on note M' le transformé de M par r .

- 1. a/** Placez sur une figure les points O, A, B, M et M' lorsque $u = \frac{3}{4}$.

b/ Déterminez l'image du segment [OA] par r .

c/ Calculez l'affixe u' de M' en fonction de l'affixe u de M.

2. On note P le milieu du segment [OC].

Soit N le milieu du segment [BM] et N' le milieu du segment [AM'].

a/ Exprimez en fonction de u les affixes Z et Z' des vecteurs $\vec{PN}$ et $\vec{PN'}$.

b/ Prouvez que le triangle PNN' est rectangle et isocèle.

c/ Dans le cas où $u = \frac{3}{4}$, placez le triangle PNN' sur la figure précédente.

Pour chercher plus

- 83.** Prouvez que le nombre complexe $\left(\frac{-\sqrt{3}+i}{1+i}\right)^{12}$ est un réel strictement négatif.

Pour les exercices 84 à 88, résolvez l'équation.

84. $z^4 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$. **85.** $z^6 = -8$.

86. $z^4 = 12$. **87.** $z^4 - z^2 - 2 = 0$.

88. $z^4 + z^3 + 3z^2 - 5z = 0$.

- 89.** θ est un réel; calculez :

$$\left(\frac{1 + \cos \theta - i \sin \theta}{1 - \cos \theta - i \sin \theta}\right)^n$$

pour n naturel.

- 90. a/** Donnez une forme trigonométrique de $1 + i \tan \theta$ pour θ réel.

b/ Déduisez-en $(1 + i\sqrt{3})^{12}$.

- 91.** M est le point d'affixe $a + ib$ avec a et b réel.

a/ Donnez une condition nécessaire et suffisante pour que l'équation :

$$z^2 + (1 - b)z + a = 0$$

admette une racine double.

b/ Construisez l'ensemble des points M correspondants.

- 92.** A, B, C sont trois points d'affixes respectifs a, b, c .

a/ Démontrez qu'une condition nécessaire et suffisante pour que A, B, C soient alignés est que l'on ait :

$$a(\bar{b} - \bar{c}) + b(\bar{c} - \bar{a}) + c(\bar{a} - \bar{b}) = 0.$$

b/ A et B étant donnés, écrivez une condition nécessaire et suffisante à laquelle doivent satisfaire z et $\bar{z}$ pour que M(z) appartienne à la droite (AB).

- 93. Identité du parallélogramme**

z et z' sont les affixes des points M et M'.

a/ Interprétez sur un dessin $|z + z'|$ et $|z - z'|$.

b/ Démontrez l'identité : pour tous complexes z et z' :

$$|z + z'|^2 + |z - z'|^2 = 2|z|^2 + 2|z'|^2.$$

- 94**.** Trouvez tous les ensembles de trois complexes z_1, z_2, z_3 de module 1 tels que :

$$z_1 + z_2 + z_3 = z_1 z_2 z_3 = 1.$$

- 95. a/** Après avoir trouvé une racine réelle de l'équation : $z^4 - z^3 + 3z - 3 = 0$, résolvez cette équation dans $\mathbb{C}$.

b/ On sait que l'équation :

$$z^4 - z^3 + 5z^2 - 4z + 4 = 0$$

admet une racine imaginaire pure. Résolvez cette équation dans $\mathbb{C}$.

Problèmes de synthèse

96. Cercle de Nyquist

a, b, c, d sont quatre réels donnés, c et d sont non nuls.

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$, à valeurs complexes, par $f(x) = \frac{a + ibx}{c + idx}$.

L'objet du problème est de trouver l'ensemble $\mathcal{C}$ image de f .

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormal direct fixé. On note $M(f(x))$ le point d'affixe $f(x)$.

A. Étude d'un exemple

Dans cet exemple, on choisit : $a = 2, b = 1, c = 1, d = -1$.

1. On note A le point d'affixe $f(0)$. Placez A.

2. On note $(x'; y')$ les coordonnées du point M d'affixe $f(x)$.

a/ Exprimez x' et y' en fonction de x .

b/ Déduisez-en que les points $M(f(x))$ et $M'(f(-x))$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses, et donc qu'il suffit, pour trouver $\mathcal{C}$, de faire varier x dans l'intervalle $[0; +\infty[$.

3. Trouvez la position limite du point $M(f(x))$ lorsque x tend vers $+\infty$. Notez B ce point.

4. I étant le milieu de $[AB]$, calculez la distance IM.

5. Quel est, dans ce cas particulier, l'ensemble $\mathcal{C}$?

B. Étude du cas général

Trouvez l'ensemble $\mathcal{C}$ dans le cas général.

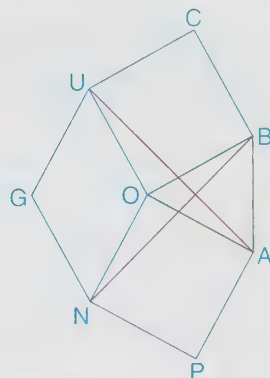
97. Problème du BOA, du BOUC, du PAON et du GNOU

(d'après P. Chevrier, Irem de Poitiers).

BOA est un triangle quelconque. BOUC et PAON sont des carrés, construits extérieurement au triangle BOA. GNOU est un parallélogramme.

On se place dans le cas où $\sin(\angle O\vec{A}, \angle O\vec{B}) > 0$.

Le but est de démontrer que (AU) et (BN) sont perpendiculaires et que $AU = BN$.



A. Par utilisation du produit scalaire

En utilisant le produit scalaire, démontrez que : $NB^2 = AU^2$ et que $\vec{NB} \cdot \vec{AU} = 0$.

Indication : $\vec{NB} = \vec{OB} - \vec{ON}$; $\vec{AU} = \vec{OU} - \vec{OA}$.

B. Par utilisation d'une rotation

Utilisez la rotation de centre O et d'angle $(\angle O\vec{B}, \angle O\vec{U})$, pour traiter l'exercice.

C. Par utilisation des complexes

Choisissez un repère orthonormal direct d'origine O.

Notez a, b, u, n , les affixes respectives de A, B, U, N.

1. Montrez que : $|b - n| = NB = AU$.

2. Montrez que : $\frac{u - a}{b - n} = i$. Concluez.

- 98.** f est la fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, définie par $f(z) = (\bar{z})^3$.

1. Quel est l'ensemble des nombres complexes z tels que $f(z) = \bar{z}$?

2. $(O; \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormal direct.

a/ Quel est l'ensemble des points $M(z)$ tels que z^4 soit imaginaire pur ?

b/ Déduisez-en l'ensemble des points $M(z)$ tels que le triangle OMM' soit rectangle en O, M' désignant le point d'affixe $f(z)$ lorsque z est l'affixe de M.

Représentez cet ensemble.

c/ Quel est l'ensemble des points $M(z)$ tels que O, $M(z)$, $M'(f(z))$, soient alignés ? Représentez cet ensemble.

3. On note U l'ensemble des complexes de module 1. Quelle est l'image de U par f ?

4. Quel est l'ensemble des points $M(z)$ tels que $f(z) = i$? Représentez cet ensemble.

99. Condition sur les affixes des sommets pour qu'un triangle soit équilatéral

On note j le nombre complexe :

$$\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}.$$

Le plan complexe est muni du repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1. a/ Placez les points d'affixe 1, j et j^2 .
b/ Montrez que $j^3 = 1$, que $j^2 = \bar{j}$.
c/ Montrez que : $1 + j + j^2 = 0$.
2. P est le point d'affixe z , P' est l'image de P par la rotation de centre O et d'angle $+\frac{\pi}{3}$;
 P'' est l'image de P par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{3}$.
Calculez, en fonction de z , les affixes z' et z'' de P' et de P'' .
3. A , B et C sont trois points d'affixes respectives a , b , c . Quelles sont les affixes des vecteurs $\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BA}$? Montrez que les propositions [1] et [2] suivantes sont équivalentes :
[1] ABC est équilatéral et de sens direct.
[2] $a + bj + cj^2 = 0$.

100. Factorisation d'un polynôme bicarré

a , b , c sont trois réels avec $a \neq 0$; on note $P(x) = ax^4 + bx^2 + c$. Dans le cas où $b^2 - 4ac \geq 0$, on écrit :

$$P(x) = a(x^2 - \alpha)(x^2 - \beta)$$

où α et β sont les racines du polynôme $X \mapsto aX^2 + bX + c$.

Suivant le signe de α et β , la factorisation peut, ou non, être poursuivie.

Nous supposons dans ce problème que :

$$b^2 - 4ac < 0.$$

1. Montrez qu'alors, pour tout réel x :

$$aP(x) > 0.$$

Déduisez-en que P n'a pas de racine.

On ne peut donc pas espérer trouver de polynôme du premier degré $x \mapsto a'x + b'$ tel que, pour tout réel x :

$$P(x) = (a'x + b')Q(x).$$

On va chercher à écrire $P(x)$ sous la forme $P(x) = Q_1(x) \times Q_2(x)$ où Q_1 et Q_2 sont deux polynômes à coefficients réels du second degré.

2. Pourquoi a-t-on $\frac{c}{a} > 0$? On pose $\frac{c}{a} = d^2$.

Comparez $\frac{1}{a}P(x)$ et $(x^2 + d)^2$ et montrez

que $\frac{1}{a}P(x)$ est une différence de carrés.

Déduisez-en la factorisation cherchée.

3. Application : factorisez :

$$x^4 + 1, \quad x^4 + x^2 + 1 \quad \text{et} \quad 2x^4 - 8x^2 + 9.$$

101. Factorisation d'un polynôme bicarré

Comme dans l'exercice précédent, on pose $a \neq 0$, b , c réels et $P(x) = ax^4 + bx^2 + c$; on s'en tient au cas $b^2 - 4ac < 0$.

1. Montrez qu'il existe deux complexes conjugués z_1 et $\bar{z}_1$ tels que, pour tout complexe z :

$$P(z) = a(z^2 - \bar{z}_1)(z^2 - z_1).$$

2. On pose $z_1 = u + iv$ avec u , v réels, et on cherche x et y réels tels que $t = x + iy$ et $t^2 = z_1$.

Montrez que xy a le signe de v et que x^2 et $-y^2$ sont solutions du système :

$$\begin{aligned} x^2 + (-y^2) &= u \\ x^2(-y^2) &= -\frac{v^2}{4}. \end{aligned}$$

Montrez que ce système admet un couple solution formé de deux réels de signes contraires.

Déduisez-en l'existence d'un couple $(x; y)$ tel que $P(x + iy) = 0$.

3. En posant $t = x + iy$, montrez que :

$$P(-t) = 0, \quad P(\bar{t}) = 0, \quad P(-\bar{t}) = 0.$$

4. Montrez que les coefficients du polynôme $z \mapsto (z - t)(z - \bar{t})$ sont réels et déduisez-en la factorisation de P en produit de deux polynômes du second degré.

e/ Application : factorisez $x^4 - 6x^2 + 25$ et $x^4 - x^2 + 1$.

3

Combinatoire

Pour prendre un bon départ	57
T.P. d'approche	59
Cours	61
T.P. d'application	72
Exercices et problèmes	78

La combinatoire s'intéresse à la résolution de problèmes de dénombrement d'objets. Le langage élémentaire de la théorie des ensembles s'avère très utile. Il est conseillé de connaître le principe de démonstration par récurrence (chapitre 2, tome 1).

POUR PRENDRE UN BON DÉPART

1 *Le langage des ensembles*

1.1. ENSEMBLE FINI. CARDINAL

Lorsqu'un ensemble E a n éléments, on dit que E est un **ensemble fini**. On dit alors que son **cardinal** est n , et on note : $\text{card } E = n$.

EXEMPLES

- $E = \{a, b, c\}$ est un ensemble fini et dans ce cas $\text{card } E = 3$.
- L'ensemble vide (ensemble qui n'a pas d'élément), noté $\emptyset$, est tel que $\text{card } \emptyset = 0$.
- Certains ensembles ne sont pas finis : par exemple, $\mathbb{N}$, l'intervalle $[0; 1]$ de $\mathbb{R}$ ont une infinité d'éléments.

1.2. APPARTENANCE. PARTIE D'UN ENSEMBLE. INCLUSION

- « x est un **élément** de E (ou x appartient à E)» se note : $x \in E$.

Lorsque x n'est pas élément de E on note $x \notin E$.

- Dire qu'un ensemble F est une **partie** de E (ou que F est un sous-ensemble de E ou que F est inclus dans E) signifie que *tous les éléments de F sont éléments de E* . On note alors : $F \subset E$.

- L'**ensemble des parties** de E se note $\mathcal{P}(E)$.

Notez que par convention l'ensemble vide $\emptyset$ est une partie de n'importe quel ensemble.

- Toute partie de E réduite à un seul élément est appelée **singleton**. Lorsque $\text{card } E = n$, il y a n singletons.

EXEMPLE

Si $E = \{a, b, c\}$, les singletons de E sont les parties : $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$.

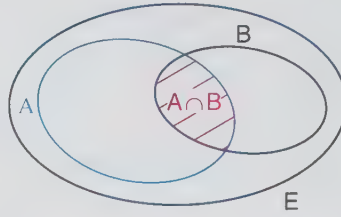
1.3. INTERSECTION. RÉUNION. COMPLÉMENTAIRE

a/ Intersection

A et B sont deux parties d'un ensemble E.

L'*intersection* de A et B est la partie de E, notée $A \cap B$, constituée des éléments communs à A et B.

Lorsque $A \cap B = \emptyset$, on dit que A et B sont des parties **disjointes** de E.



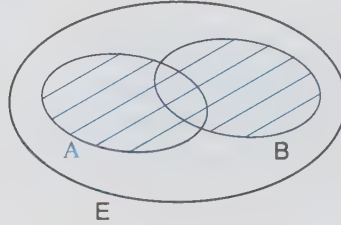
b/ Réunion

A et B sont deux ensembles quelconques.

La *réunion* de A et B est l'ensemble, noté $A \cup B$, constitué des éléments qui sont dans A ou bien dans B.

Lorsque A et B sont des ensembles *disjoints* :

$$\text{card}(A \cup B) = \text{card } A + \text{card } B.$$

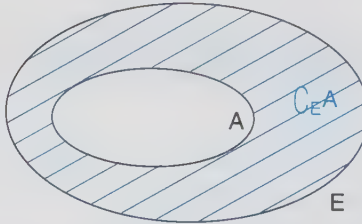


$A \cup B$ est représenté par la partie hachurée.

c/ Complémentaire

A est une partie d'un ensemble E.

Le *complémentaire* de A dans E est la partie de E, constituée des éléments de E qui n'appartiennent pas à A.



Le complémentaire de A dans E est noté $\complement_E A$, ou plus simplement $\bar{A}$.

$$A \cap \bar{A} = \emptyset$$

$$A \cup \bar{A} = A.$$

Notez que : $\text{card } \bar{A} = \text{card } E - \text{card } A$.

Exercice-test

A, B et C sont des intervalles de $\mathbb{R}$.

$$A = [0; 1], \quad B = \left[\frac{1}{2}; 3\right], \quad C = \left]-1; \frac{2}{3}\right[.$$

a/ Quel est l'ensemble $A \cap B$? L'ensemble $B \cap C$? L'ensemble $A \cap C$?

b/ Quel est l'ensemble $A \cup B$? L'ensemble $B \cup C$?

c/ Comparez $(A \cup B) \cap C$ et $(A \cap C) \cup (B \cap C)$.

d/ Comparez $\complement_{\mathbb{R}}(A \cap B)$ et $(\complement_{\mathbb{R}} A) \cup (\complement_{\mathbb{R}} B)$.

TRAVAUX PRATIQUES D'APPROCHE

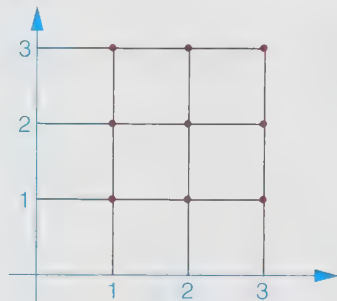
1 Couples. Triplets

A et B sont les deux ensembles suivants :

$$A = \{1, 2, 3\}, \quad B = \{1, 2, 3, 4\}.$$

1.1. Couples. Ensembles A^2 et B^2

La figure ci-contre représente dans un repère les points M dont l'abscisse x et l'ordonnée y sont des éléments de A.



a/ Les points $M(x; y)$ et $M'(y; x)$ sont-ils confondus ?

b/ Dans quels cas les points $M(x; y)$ et $M'(x'; y')$ sont-ils confondus ?

De manière générale, pour un ensemble E, on note E^2 l'ensemble des couples $(x; y)$, où x et y sont des éléments de E.

a/ Ici, $\text{card } A^2 = 3^2$. Pourquoi ?

b/ Et $\text{card } B^2 = 4^2$. Pourquoi ?

1.2. Triplets. Ensembles A^3 et B^3

• On considère les points M de l'espace dont les coordonnées x, y et z sont des éléments de A.

a/ Dans quel cas les points $M(x; y; z)$ et $M'(x'; y'; z')$ sont-ils confondus ?

b/ $(x_0; y_0)$ étant un couple de A^2 , combien existe-t-il de triplets $(x_0; y_0; z)$, avec z élément de A ? Graphiquement, où sont-ils situés ?

• De manière générale, pour un ensemble E, on note E^3 l'ensemble des triplets $(x; y; z)$, où x, y et z sont des éléments de E.

a/ Ici, $\text{card } A^3 = 3^3$. Pourquoi ?

b/ Et $\text{card } B^3 = 4^3$. Pourquoi ?

2 Nombre de classements sans ex aequo

Problème : pour un groupe d'élèves donné, combien y a-t-il de classements sans ex aequo par ordre de mérite ?

On notera N_k le nombre de classements possibles sans ex aequo de k élèves.

Pour un groupe de deux élèves $\{A, B\}$, il y a deux éléments possibles, que nous noterons (A, B) et (B, A) . Dans ce cas, $N_2 = 2$.

1. Le groupe comprend 3 élèves. Il est noté $\{A, B, C\}$. Trouvez N_3 .
2. Le groupe comprend 4 élèves. Il est noté $\{A, B, C, D\}$. Trouvez N_4 .
3. Quelle relation y a-t-il entre N_2 et N_3 ? Entre N_3 et N_4 ?
4. a/ Quelle relation prévoyez-vous entre N_{k-1} et N_k ?
b/ Justifiez votre conjecture.

3

Nombre de parties d'un ensemble

3.1. Nombre total de parties

Trouvez toutes les parties de l'ensemble E et précisez leur nombre, dans chacun des cas suivants.

Un conseil important : pour écrire toutes les parties de E , utilisez une règle de classification pour être sûr de ne pas en oublier et de ne pas compter deux fois la même partie...

- a/ $E = \emptyset$. Réponse : 1.
b/ $E = \{a\}$. Réponse : 2, car n'oubliez pas que, par convention, la partie vide est une partie de E .
c/ $E = \{a, b, c\}$. Réponse : 4. d/ $E = \{a, b, c\}$. Réponse : 8.
e/ $E = \{a, b, c, d\}$. Réponse : 16.

3.2. Nombre de parties à p -éléments

E est l'ensemble $\{a, b, c, d\}$.

Combien y a-t-il de parties de E contenant un seul élément? Contenant deux éléments? Contenant trois éléments? Contenant 4 éléments?

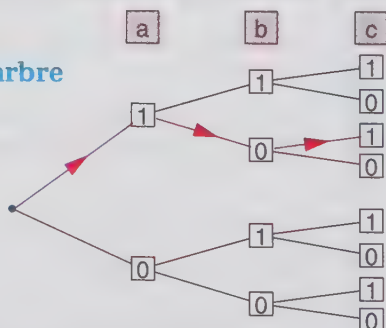
Ces nombres sont notés respectivement $C_4^1, C_4^2, C_4^3, C_4^4$.

Plus généralement, C_n^p désigne le nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments.

3.3. Représentation à l'aide d'un arbre

On peut représenter à l'aide d'un arbre les différentes parties d'un ensemble $\{a, b, c\}$.

Chaque branche de l'arbre représente une partie, chaque nœud de la branche étant numéroté « 1 » si l'élément correspondant est dans la partie, et numéroté « 0 » sinon.



Exemple : la branche de couleur rouge correspond à la partie $\{a, c\}$.

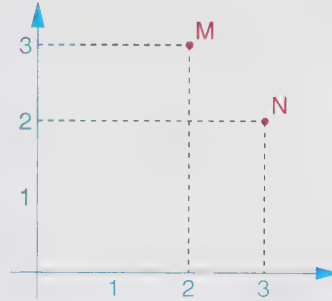
1. Indiquez la branche qui correspond à chacune des parties : $\{b\}$, $\{a, b, c\}$, $\emptyset$.
2. Comment peut-on utiliser cet arbre pour trouver les parties de l'ensemble $\{a\}$? de l'ensemble $\{a, b\}$?
3. a/ On rajoute à l'ensemble $\{a, b, c\}$ un élément d , obtenant ainsi l'ensemble $\{a, b, c, d\}$. Le nombre des parties de $\{a, b, c, d\}$ est 2^4 . Justifiez cette affirmation en utilisant l'arbre.
b/ Déduisez-en que le nombre de parties d'un ensemble à n éléments est égal à 2^n .

COURS

1 Ensemble E^p

1.1. EXEMPLE

• Dans le plan, lorsqu'un repère est choisi, chaque point est repéré par ses coordonnées $(x; y)$, c'est-à-dire par un couple de nombres. Mais dans l'écriture de ce couple, l'ordre a de l'importance : le point $M(2; 3)$ est distinct du point $N(3; 2)$. Aussi, dit-on qu'un **couple** de réels est une **liste ordonnée** de deux nombres réels. L'ensemble de tous ces couples est noté $\mathbb{R}^2$.



• Dans l'espace, le choix d'un repère permet de repérer chaque point par un **triplet** de nombres réels, c'est-à-dire par une **liste ordonnée** de trois nombres réels.

1.2. CAS GÉNÉRAL : DÉFINITION D'UN p -UPLET

Dans toute la suite, nous ne considérerons que des ensembles finis. Soit donc E un ensemble fini à n éléments; $\text{card } E = n$.

DÉFINITION 1

Un **p -uplet**, ou une **p -liste**, d'éléments de E , est une liste **ordonnée** de p -éléments de E , distincts ou confondus.

On note E^p l'ensemble de tous les p -uplets.

Un 2-uplet est appelé **couple**, un 3-uplet, un **triplet**.

Remarque : par convention, $E^1 = E$.

EXEMPLE

L'ensemble E contient 3 éléments notés a, b, c : $E = \{a, b, c\}$.

Voici des 4-uplets, éléments de E^4 :

$(a; b; c; a); (b; b; b; b); (a; c; a; b); (b; c; a; c); \dots$

Remarque : dans cet exemple, $p > n$. La définition 1 ne suppose pas nécessairement $p \leq n$.

1.3. ÉGALITÉ DE DEUX p -UPLETS

DÉFINITION 2

Dire que $(x_1; x_2; \dots; x_p)$ et $(y_1; y_2; \dots; y_p)$ sont égaux signifie que $x_i = y_i$, pour tout indice i : $1 \leq i \leq p$, c'est-à-dire : $x_1 = y_1$, et $x_2 = y_2$, et ..., et $x_p = y_p$.

Remarque : il suffit donc, pour que $(x_1; \dots; x_p)$ soit différent de $(y_1; \dots; y_p)$, que pour un seul indice i , x_i soit distinct de y_i .

1.4. CARDINAL DE E^p EN FONCTION DU CARDINAL DE E

Notons $a_1, a_2, \dots, a_n$ les éléments de E .

$$E = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}.$$

a/ Étude de deux cas particuliers.

• Cas où $p=2$

Nous pouvons représenter les couples de E^2 de la manière suivante :

a_n	(a_1, a_n)	(a_2, a_n)		(a_n, a_n)
a_j	(a_1, a_j)	(a_2, a_j)		(a_n, a_j)
a_2	(a_1, a_2)	(a_2, a_2)		(a_n, a_2)
a_1	(a_1, a_1)	(a_2, a_1)		(a_n, a_1)
	a_1	a_2		a_n

Il est clair que chaque colonne contient exactement n couples, que deux couples situés dans deux colonnes distinctes sont distincts, et donc, puisqu'il y a n colonnes, que le nombre de couples est n^2 .

$$\text{card}(E^2) = n^2 = (\text{card } E)^2.$$

• Cas où $p=3$

Pour écrire un triplet de E^3 : $(\square; \square; \square)$, il suffit de choisir un couple de E^2 , pour remplir les deux premières cases et de lui rajouter un élément *quelconque* de E . *Par exemple*, à partir du couple (a_1, a_2) , nous obtiendrons *tous* les triplets $(a_1; a_2; \square)$, c'est-à-dire tous les triplets dont le premier élément est a_1 et le deuxième élément est a_2 , en remplissant la troisième case avec un élément quelconque de E .

Nous construisons ainsi, à partir d'un couple *donné*, n triplets distincts, puisque leurs troisièmes éléments sont deux à deux distincts.

En faisant de même avec tous les couples nous obtiendrons *tous* les triplets et chaque triplet ne sera obtenu qu'une fois. Puisqu'il y a n^2 couples, le nombre de triplets est donc $n^2 \times n$.

$$\text{card}(E^3) = (\text{card } E^2) \times \text{card } E.$$

b/ Cas où p est quelconque

THÉORÈME 1

$$\text{card}(E^p) = (\text{card } E)^p.$$

En effet, un élément de E^p est un p -uplet, ou une p liste, et pour fabriquer un p -uplet, il suffit de remplir p cases avec un élément *quelconque* de E .

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & & & p \\ \square & \square & \square & \square & \dots & \square \end{array}$$

Supposons $\text{card } E = n$. Il y a donc n choix possibles pour remplir la première case, et pour chacun de ces choix, il y a encore n choix possibles pour remplir la deuxième case. Donc il y a $n \times n$ choix possibles pour remplir les deux premières cases, et ainsi de suite, donc au total n^p choix possibles. D'où $\text{card}(E^p) = (\text{card } E)^p$.

EXEMPLE D'APPLICATION : tirage avec remise dans une urne.

Une urne contient 3 boules numérotées 1, 2, 3. On effectue l'expérience suivante : on effectue 5 tirages *successifs* ; et après chaque tirage, on note le numéro de la boule tirée et on la remet dans l'urne. Le résultat de l'expérience est la liste des numéros sortis dans l'ordre des tirages.

Un tel résultat peut être identifié à un 5-uplet de l'ensemble E , $E = \{1, 2, 3\}$. Ainsi, le 5-uplet $(1, 3, 2, 2, 1)$ désigne le résultat suivant : la première boule tirée porte le n° 1, la deuxième le n° 3, la troisième le n° 2, la quatrième le n° 2, la cinquième le n° 1. Le cardinal de E^5 étant 3^5 , il y a dans ce cas $3^5 = 243$ résultats possibles, ce qui peut paraître surprenant. Surprenant, mais vrai.

Notez que, dans cet exemple, $p > n$.

2**Arrangements et permutations****2.1. DÉFINITIONS****a/ Arrangements****DÉFINITION 3**

E est un ensemble à n éléments.

Un **arrangement** de p éléments de E ou un p -arrangement de E est un p -uplet dont tous les éléments sont deux à deux **distincts**.

On note alors A_n^p le nombre de ces arrangements.

On dit aussi « **arrangement de n objets p à p** », plutôt qu'arrangement de p éléments.

EXEMPLE

$E = \{1, 2, 3\}$ et $p = 2$. Alors *tous* les arrangements de E à deux éléments sont : $(1; 2)$, $(1; 3)$, $(2; 3)$, $(2; 1)$, $(3; 1)$, $(3; 2)$. Dans ce cas, $A_3^2 = A_3^2 = 6$.

b/ Permutations**DÉFINITION 4**

Un arrangement de n objets est appelé **permutation**.

EXEMPLE

Les permutations de l'ensemble E , $E = \{a, b\}$, sont les couples $(a; b)$ et $(b; a)$.

2.2. CALCUL DE A_n^p **a/ Lorsque $p > n$, $A_n^p = 0$**

En effet, puisque $p > n$, une liste de p éléments de E contiendra nécessairement au moins deux fois le même élément, ce ne sera donc pas un arrangement.

b/ Calcul de A_n^p lorsque $p \leq n$ **THÉORÈME 2**

Lorsque $1 \leq p \leq n$, A_n^p est égal au produit des p facteurs : n , $n-1$, $n-2$, ...

$$A_n^p = n \times (n-1) \times (n-2) \times \dots \times [n-(p-1)].$$

En effet, un arrangement est un p -uplet dont tous les éléments sont *distincts deux à deux*. Or, pour écrire un tel p -uplet, il suffit de remplir p cases :

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & & \dots & & p \\ \square & \square & \square & & \dots & & \square \end{array}$$

de façon que les éléments de E qui y figurent soient distincts deux à deux.
Pour remplir la case n° 1, il y a n choix possibles ; ayant choisi un élément de E , soit a , pour remplir la case n° 2, il y a $n - 1$ choix possibles, puisqu'il reste dans E , $n - 1$ éléments distincts de a . Donc pour remplir les cases 1 et 2, il y a $n \times (n - 1)$ choix possibles ; et ainsi de suite, jusqu'à la case p .

Exemple : calcul de A_5^2 . Ici, $n = 5$, $p = 2$, donc $A_5^2 = 5 \times 4 = 20$.

2.3. NOMBRE DE PERMUTATIONS D'UN ENSEMBLE

D'après la définition 4, le nombre de permutations de l'ensemble E à n éléments est A_n^n . D'après le théorème 2, on obtient :

$$A_n^n = n \times (n - 1) \times (n - 2) \times \dots \times 1.$$

Pour simplifier, on note $A_n^n = n !$

DÉFINITION 5

n étant un entier naturel non nul, $n !$ désigne le produit des n premiers naturels non nuls.

$$n ! = n \times (n - 1) \times \dots \times 1.$$

Lorsque $n = 0$, on pose $0 ! = 1$.

$n !$ se lit « factorielle n ».

Exemple : $5 ! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 120$.

Avec cette notation, nous énonçons le théorème suivant :

THÉORÈME 3

Le nombre des permutations d'un ensemble ayant n éléments est $n !$

3

Combinaisons

E est un ensemble à n éléments, $\text{card } E = n$. Soit p un naturel donné.

Problème : combien y a-t-il de parties de E contenant p éléments ?

Nous noterons C_n^p le nombre de ces parties.

DÉFINITION 6

Une partie à p éléments d'un ensemble à n éléments est appelée combinaison de E à p éléments (ou encore combinaison de n objets p à p).

Le nombre de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments est noté C_n^p ou $\binom{n}{p}$.

3.1. CAS PARTICULIERS

Lorsque $p > n$, $C_n^0 = 0$, car nous ne pouvons pas trouver une partie de E contenant plus d'éléments que E .

Lorsque $p = n$, $C_n^n = 1$: il n'y a qu'une seule partie de E ayant le même nombre d'éléments que E , c'est E .

Lorsque $p = 1$, $C_n^1 = n$: il y a n parties contenant un seul élément, ce sont les singletons (voir page 57).

Lorsque $p = 0$, $C_n^0 = 1$: il y a par convention une partie ne contenant pas d'élément, c'est l'ensemble vide (voir page 57).

3.2. EXEMPLE

Choisissons pour E un ensemble à 5 éléments : $E = \{a, b, c, d, e\}$ et $p = 3$.
Considérons une partie F à trois éléments, par exemple $\{a, b, c\}$.

Avec F , nous pouvons fabriquer des arrangements à trois éléments, ce sont : $(a; b; c)$; $(a; c; b)$; $(b; a; c)$; $(b; c; a)$; $(c; a; b)$; $(c; b; a)$.

Ces arrangements sont obtenus par permutation des éléments de F , leur nombre est donc égal à $3!$ (voir 2.3.).

En faisant de même avec toutes les parties de E à trois éléments, nous obtiendrons tous les arrangements à 3 éléments, et chacun d'entre eux ne sera obtenu qu'une fois.

Donc, le nombre total d'arrangements à 3 éléments de E , A_5^3 , est égal au nombre de parties à 3 éléments, multiplié par $3!$. Donc :

$$A_5^3 = C_5^3 \times 3!$$

3.3. CAS GÉNÉRAL : p QUELCONQUE, $1 \leq p \leq n$

La démonstration est analogue à celle de l'exemple ci-dessus. Avec une partie F ayant p éléments, nous pouvons obtenir, par permutation des éléments de F , des p -arrangements de E . Le nombre de tous ces arrangements est $p!$

En faisant de même avec toutes les parties de E à p éléments, nous obtenons tous les p -arrangements de E , et chacun d'eux n'est obtenu qu'une fois. Puisque ce nombre d'arrangements est égal à A_n^p , nous en déduisons que :

$$A_n^p = (\text{nombre de parties à } p \text{ éléments}) \times p!$$

$$A_n^p = p! C_n^p.$$

Or, $A_n^p = n \times (n-1) \times \dots \times (n-p+1)$. Multiplions et divisons par : $(n-p)!$ (en supposant $p \neq n$), c'est-à-dire par : $(n-p) \times (n-p-1) \times \dots \times 1$; nous obtenons :

$$A_n^p = \frac{n \times (n-1) \times \dots \times (n-p+1) \times (n-p) \times (n-p-1) \times \dots \times 1}{(n-p) \times (n-p-1) \times \dots \times 1} = \frac{n!}{n-p!}.$$

$$\text{Ainsi : } C_n^p = \frac{n!}{(n-p)! p!}.$$

En résumé :

THÉORÈME 4

Le nombre C_n^p de parties à p éléments d'un ensemble à n éléments est donné par l'une ou l'autre des deux égalités suivantes :

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}; \quad C_n^p = \frac{n \times (n-1) \times \dots \times (n-p+1)}{p!}.$$

Remarque sur la notation $\binom{n}{p}$:

elle permet de **mémoriser** l'égalité : $\binom{n}{p} = \frac{n(n-1)\dots(n-p+1)}{p(p-1)\dots \times 1}$.

La lettre n placée au-dessus de la lettre p rappelle qu'au numérateur le produit des p entiers consécutifs commence par n , et qu'au dénominateur le produit des p entiers consécutifs commence par p . Notez que dans C_n^p , p est au-dessus de n .

Notez bien : bien qu'écrit sous forme fractionnaire, C_n^p est toujours un entier naturel.

Exemple : $C_{15}^4 = \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 5 \times 7 \times 13 \times 3 = 1\,365$.

3.4. FORMULES SUR LES C_n^p . TRIANGLE DE PASCAL

a/ $\boxed{C_n^p = C_n^{n-p}}, \quad 0 \leq p \leq n$

Démonstration par le calcul

$$C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}, \text{ d'après le théorème 4}$$

$$\begin{aligned} C_n^{n-p} &= \frac{n!}{(n-p)!(n-(n-p))!} \text{, d'après le théorème 4,} \\ &= \frac{n!}{(n-p)!p!} \end{aligned}$$

b/ $\boxed{C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p}, \quad 1 \leq p \leq n-1$

Démonstration par le calcul

Posons $A = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$

$$= \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-p)!} + \frac{(n-1)!}{p!(n-1-p)!}$$

Or : $p! = (p-1)!p$; $(n-p)! = (n-1-p)!(n-p)$
donc :

$$\begin{aligned} & \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-1-p)!(n-p)} + \frac{(n-1)!}{(p-1)!(n-1-p)!p} \\ &= \frac{(n-1)!p + (n-1)!(n-p)}{(p-1)!(n-1-p)!(n-p)p} \\ &= \frac{(n-1)! [p + n - p]}{p!(n-p)!} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = C_n^p. \end{aligned}$$

Démonstration ensembliste

Choisir une partie F à p éléments revient à choisir son complémentaire $\bar{F}$, qui a $n-p$ éléments. Il y a donc autant de parties à p éléments que de parties à $n-p$ éléments.

Démonstration ensembliste

E est un ensemble à n éléments, et p un entier tel que : $1 \leq p \leq n-1$.

Fixons un élément a de E . Notons x le nombre des parties à p éléments qui contiennent a , et y le nombre des parties à p éléments qui ne contiennent pas a .

Le nombre total des parties à p éléments est donc $x + y$.
Donc : $C_n^p = x + y$.

Pour choisir une partie à p éléments qui ne contient pas a , il faut nécessairement choisir p éléments parmi les $n-1$ éléments distincts de a .

Donc : $y = C_{n-1}^p$.

Pour choisir une partie à p éléments qui contient a , il faut adjoindre à a , $p-1$ éléments pris parmi les $n-1$ éléments distincts de a (car un ensemble ne contient pas deux fois le même élément).
Donc : $x = C_{n-1}^{p-1}$, d'où le résultat.

c/ Procédé de calcul rapide des C_n^p . Triangle de Pascal

La relation $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$ permet de calculer rapidement de proche en proche les nombres C_n^p sans utiliser l'égalité $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$. On dresse le tableau ci-dessous, appelé **triangle de Pascal**.

C_n^p est à l'intersection de la ligne « n » et de la colonne « p ».

On commence à écrire la colonne : « $p = 0$ ». Dans cette colonne, on ne trouve que des chiffres 1 car $C_n^0 = 1$, pour tout n . Puis on écrit la diagonale, qui ne contient aussi que des chiffres 1, car $C_n^n = 1$, pour tout n .

On complète ensuite en utilisant la relation $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$, de sorte que C_n^p est la somme du nombre x « situé au-dessus de lui » — c'est C_{n-1}^{p-1} — et du nombre y « situé à gauche de x » — c'est C_{n-1}^p .

$n \backslash p$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	...
0	1									
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					
5	1	5	10	10	5	1				
6	1	6	15	20	15	6	1			
7	1	7	21	35	35	21	7	1		
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	

4 Formule du binôme

4.1. LA FORMULE DU BINÔME

• Introduction

On sait que : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$,
 $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

On se propose d'établir une formule plus générale pour $(a+b)^n$. On va d'abord développer un produit $(a_1 + b_1) \dots (a_n + b_n)$, et ensuite on prendra $a_1 = \dots = a_n = a$, $b_1 = \dots = b_n = b$.

• Avec deux facteurs : $(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)$, nous obtenons :

$$a_1 a_2 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + b_1 b_2. \quad (1)$$

Dans cette somme, chaque terme est un produit de deux facteurs, et chacun de ces produits contient soit **deux** facteurs « $a_\square$ », (c'est-à-dire deux fois la lettre a avec des indices différents), c'est le cas de $a_1 a_2$, soit **un** facteur $a_\square$, c'est le cas de $a_1 b_2$ et de $a_2 b_1$, soit **zéro** facteur $a_\square$, c'est le cas de $b_1 b_2$.

• Développons 3 facteurs : $(a_1 + b_1)(a_2 + b_2)(a_3 + b_3)$, ce qui revient à multiplier la somme (1) par $(a_3 + b_3)$. Nous obtenons :

$$a_1 a_2 a_3 + a_1 a_3 b_2 + a_2 a_3 b_1 + a_3 b_1 b_2 + a_1 a_2 b_3 + a_1 b_2 b_3 + a_2 b_1 b_3 + b_1 b_2 b_3.$$

Dans cette somme, chaque terme est un produit de **trois** facteurs, et chacun de ces produits contient soit **trois** facteurs $a_\square$, soit **deux** facteurs $a_\square$, soit **un** facteur $a_\square$, soit **zéro** facteur $a_\square$.

Combien y a-t-il par exemple de termes avec deux facteurs $a_\square$, c'est-à-dire de termes qui s'écrivent : $a_\square a_\square b_\square$?

Leur nombre est évidemment égal au nombre de parties de l'ensemble $\{a_1, a_2, a_3\}$, c'est-à-dire à C_3^2 . De même, il y a C_3^1 termes $a_\square b_\square b_\square$, C_3^3 termes $a_\square a_\square a_\square$, C_3^0 termes $b_\square b_\square b_\square$.

Maintenant, si $a_1 = a_2 = a_3 = a$, et $b_1 = b_2 = b_3 = b$, un terme $a_{\square} a_{\square} b_{\square}$ s'écrira $a^2 b$, un terme $a_{\square} b_{\square} b_{\square}$ s'écrira ab^2 , ...

D'où :

$$(a+b)(a+b)(a+b) = (a+b)^3 = C_3^0 b^3 + C_3^1 a b^2 + C_3^2 a^2 b + C_3^3 a^3.$$

• **Développons n facteurs :** $(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) \dots (a_n + b_n)$.

Nous obtenons une somme où chaque terme est de la forme :

$$\underbrace{a_{\square} \dots a_{\square}}_{p \text{ facteurs}} \times \underbrace{b_{\square} \dots b_{\square}}_{(n-p) \text{ facteurs}}$$

et où p prend toutes les valeurs de 0 à n .

Pour p fixé, le nombre de termes de la forme ci-dessus est égal au nombre de parties à p éléments de l'ensemble $\{a_1, \dots, a_n\}$, c'est-à-dire qu'il est égal à C_n^p . Maintenant, si tous les a_i sont égaux à un même nombre a , et tous les b_j sont égaux à un même nombre b , un tel terme s'écrit : $a^p b^{n-p}$, et la somme de tels termes est : $C_n^p a^p b^{n-p}$. p variant de 0 à n , en regroupant de même les autres termes, nous obtenons la **formule du binôme**, due semble-t-il, à Newton :

THÉORÈME 5

Pour tous complexes a et b , et pour tout naturel $n \geq 1$:

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^n C_n^p a^p b^{n-p}.$$

COMMENTAIRE

Notez qu'en particulier, la formule du binôme de Newton utilisée avec $a = 1$ et $b = x$ (puis $b = -x$) donne pour tout réel x :

$$(1+x)^n = 1 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + \dots + C_n^p x^p + \dots + C_n^n x^n$$

$$(1-x)^n = 1 - C_n^1 x + C_n^2 x^2 - \dots + (-1)^p C_n^p x^p + \dots + (-1)^n C_n^n x^n.$$

4.2. APPLICATION : NOMBRE DE PARTIES D'UN ENSEMBLE

Utilisons la formule du binôme de Newton dans le cas où $a = b = 1$; nous obtenons pour tout naturel $n \geq 1$:

$$(1+1)^n = C_n^0 1^n + C_n^1 1^{n-1} + \dots + C_n^p 1^{n-p} 1^p + \dots + C_n^n 1^n$$

$$= C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n.$$

Or $(1+1)^n = 2^n$; donc pour tout naturel $n \geq 1$:

$$C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n.$$

Interprétons ce résultat en termes de parties d'un ensemble F à n éléments. C_n^0 est le nombre de parties à 0 élément de F , C_n^1 le nombre de parties à 1 élément de F , ..., C_n^p le nombre de parties à p éléments de F , ..., C_n^n le nombre de parties à n éléments de F .

Donc $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n$ est le nombre total de parties de F , et nous pouvons énoncer le résultat suivant :

le nombre de parties d'un ensemble à n éléments est 2^n .

COMMENTAIRE HISTORIQUE

L'égalité $C_n^2 = \frac{1}{2} n(n-1)$ est attestée au III^e siècle de notre ère.

Au XII^e siècle, le mathématicien hindou, Bhaskara, connaît la formule générale permettant de calculer C_n^p . Au début du XIII^e siècle, Levi

ben Gerson sait calculer les arrangements de p éléments d'un ensemble à n éléments, et connaît les égalités $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}$ et $C_n^p = C_n^{n-p}$. Ses travaux semblent avoir eu peu d'influence sur son époque.

Plus tard, Cardan (1501-1576) montre que $2^n - 1$ est le nombre de parties non vides d'un ensemble à n éléments; Pascal et Fermat retrouvent la formule générale des C_n^p . Le procédé du triangle, attribué généralement à Pascal, semble être connu des Arabes dès le XIII^{e} siècle et des Chinois au XIV^{e} siècle.

5

Exercices résolus

5.1. À PROPOS D'UNE ERREUR CLASSIQUE

EXERCICE RÉSOLU 1

a/ Combien y a-t-il de mains de 5 cartes (c'est-à-dire de paquets de 5 cartes) dans un jeu de 32 cartes?

b/ Combien y en a-t-il contenant *exactement* 2 cœurs? (il y a 8 cœurs dans un jeu de 32 cartes).

c/ Combien y en a-t-il contenant au moins 1 roi? (il y a 4 rois en tout).

SOLUTION COMMENTÉE ■■■

a/ Une main de 5 cartes est une partie à 5 éléments. Le nombre de mains de 5 cartes dans un jeu de 32 cartes est donc C_{32}^5 c'est-à-dire :

$$\frac{32 \times 31 \times 30 \times 29 \times 28}{5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

La réponse est donc : 201 376.

b/ Pour constituer un paquet de 5 cartes contenant *exactement* 2 cœurs, on peut procéder ainsi :

(1) On choisit d'abord 2 cœurs parmi les huit.

(2) Puis 3 cartes parmi les 24 restantes.

Il y a C_8^2 façons de choisir 2 cœurs parmi 8. *Pour chacun de ces choix*, il y a C_{24}^3 façons de choisir 3 cartes parmi les 24 restantes.

Important : il convient de s'assurer qu'en procédant ainsi on n'obtient jamais plusieurs fois le même paquet de 5 cartes.

Il en est bien ainsi, car une modification de choix dans l'une des étapes (1) ou (2) ci-dessus conduit nécessairement à une modification du paquet de 5 cartes obtenu (car une carte au moins sera différente).

En définitive, le nombre cherché est égal à : $C_8^2 \times C_{24}^3$, c'est-à-dire : 123 092.

Remarque : pourquoi multiplie-t-on C_8^2 par C_{24}^3 ?

Pour chacune des C_8^2 façons de choisir 2 cœurs, il y a C_{24}^3 façons de choisir les 3 autres cartes. Le nombre total de choix possibles est donc :

$$\underbrace{C_{24}^3 + C_{24}^3 + \dots + C_{24}^3}_{C_8^2 \text{ fois}}, \text{ c'est-à-dire : } C_8^2 \times C_{24}^3.$$

c/ Notons A l'ensemble des mains de 5 cartes contenant au moins 1 roi.

Pour calculer card A, il est plus simple ici de calculer d'abord card $\bar{A}$, c'est-à-dire le nombre de mains de 5 cartes ne contenant aucun roi.

Constituer une main de 5 cartes ne contenant aucun roi revient à choisir les 5 cartes parmi les 28 cartes qui ne sont pas des rois.

On a donc : car $\bar{A} = C_{28}^5$. Or il y a C_{32}^5 mains de 5 cartes possibles.

Par suite : card $A = C_{32}^5 - C_{28}^5$. D'où card $A = 103\,096$.

CONSEIL

Lorsqu'une question est formulée avec « au moins », pensez à dénombrer le complémentaire : c'est parfois plus simple.

Une autre solution pour la question c/

Notons respectivement B_1 l'ensemble des mains de 5 cartes contenant exactement 1 roi ; B_2 : 2 rois ; B_3 : 3 rois ; B_4 : 4 rois.

Il est clair que : $\begin{cases} \text{les } B_i \text{ sont 2 à 2 disjoints, et que :} \\ A = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup B_4. \end{cases}$

MÉTHODE

$E_1, E_2, \dots, E_n$ sont des parties de E disjointes deux à deux, et dont la réunion totale est E .

Alors : $\text{card } E = \text{card } E_1 + \dots + \text{card } E_n$.

Donc $\text{card } A = \text{card } B_1 + \text{card } B_2 + \text{card } B_3 + \text{card } B_4$.

Pour constituer une main de 5 cartes contenant exactement 1 roi, on peut procéder ainsi :

- on choisit 1 roi parmi 4 : 4 choix possibles ;
- on choisit 4 cartes parmi les 28 restantes : C_{28}^4 choix possibles.

Donc $\text{card } B_1 = 4 \times C_{28}^4$.

De même, on a : $\text{card } B_2 = C_4^2 \times C_{28}^3$; $\text{card } B_3 = C_4^3 \times C_{28}^2$ et $\text{card } B_4 = C_4^4 \times C_{28}^1$.

Donc : $\text{card } A = 4 \times C_{28}^4 + C_4^2 \times C_{28}^3 + C_4^3 \times C_{28}^2 + C_4^4 \times C_{28}^1 = 103\,096$.

On retrouve le résultat précédent.

La première solution est évidemment plus rapide.

ATTENTION : UNE ERREUR CLASSIQUE

Nous proposons à présent la solution suivante pour cette question c/.

Pour constituer une main de 5 cartes contenant au moins un roi, on peut procéder ainsi :

- (1) on choisit d'abord 1 roi : il y a 4 choix possibles ;
 - (2) puis on choisit 4 cartes parmi les 31 cartes restantes (31 et non pas 28, car la main peut contenir d'autres rois) : il y a C_{31}^4 choix possibles.
- Le nombre de mains de 5 cartes contenant au moins 1 roi est donc égal à : $4 \times C_{31}^4 = 125\,860$.

Cette solution est fautive ! En effet, avec le procédé de dénombrement utilisé, *certaines mains ont été comptées plusieurs fois*.

Par exemple, la main {roi de pique, roi de trèfle, as de cœur, valet de carreau, sept de cœur} a été comptée :

- une fois lorsque le roi de pique a été choisi parmi les 4 rois (dans l'étape (1)) ;
- une autre fois lorsque c'est le roi de trèfle qui a été choisi dans l'étape (1).

■■■■■■■■■■

5.2. D'AUTRES EXERCICES

EXERCICE RÉSOLU 2

Nous appellerons mot de 3 lettres tout assemblage ordonné de trois lettres de l'alphabet français, une même lettre pouvant être utilisée plusieurs fois (un tel mot n'a donc pas nécessairement de sens). En utilisant les lettres du mot **paris**, et en n'utilisant que celles-là :

1. combien peut-on écrire de mots de trois lettres ?
2. Combien peut-on écrire de mots de trois lettres distinctes ?
3. Combien peut-on écrire de mots de trois lettres dont la deuxième lettre est la lettre a ?

SOLUTION COMMENTÉE ■■■

1. Ici l'objet est un mot ; sa propriété est d'avoir trois lettres, ordonnées (voir l'énoncé), prises parmi les lettres : p, a, r, i, s .

L'énoncé ne dit pas que les lettres du mot doivent être distinctes.

• **Pratiquement**, comment écrire un tel mot ? Nous le pouvons, par exemple, en remplissant chacune des trois cases, numérotées 1, 2, 3, pour rappeler que l'ordre intervient.

1	2	3

• **Quel est l'outil mathématique adapté ?**

Remplir ces trois cases selon un ordre, c'est fabriquer une 3-liste de 5 éléments pris dans l'ensemble : $\{p, a, r, i, s\}$.

Le nombre de ces 3-listes est donc : $5^3 = 125$.

2. Les mots où les lettres sont distinctes deux à deux sont des 3-listes dont les éléments sont distincts ; ce sont donc des 3-arrangements. Leur nombre est donc : A_5^3 , c'est-à-dire :

$$5 \times 4 \times 3 = 60.$$

CONSEIL

• Lorsque « l'ordre intervient », pensez aux p -listes (répétitions possibles) ou aux arrangements (répétitions non permises).

• Lorsque « l'ordre n'intervient pas », mais lorsqu'il s'agit de choisir p objets parmi n , les combinaisons sont un outil souvent bien adapté.

3. Les mots où la deuxième lettre est a s'obtiennent en remplissant dans l'ordre les cases 1 et 2, avec des lettres prises dans l'ensemble $E = \{p, a, r, i, s\}$. Cela revient à dénombrer tous les couples d'éléments de E . Leur nombre est A_5^2 , c'est-à-dire : $5 \times 4 = 20$.

1	2	3
	a	

■■■■■■■■■■

EXERCICE RÉSOLU 3

Démontrez que, pour tous naturels n et p , $1 \leq p \leq n$:

$$pC_n^p = nC_{n-1}^{p-1}.$$

SOLUTION COMMENTÉE ■■■

$$pC_n^p = \frac{p \times n!}{p!(n-p)!}. \text{ Or : } p! = p \times (p-1) \times (p-2) \times \dots \times 1$$

$$= p \times (p-1)!$$

$$\text{Donc : } pC_n^p = \frac{n!}{(p-1)!(n-p)!}. \text{ Par ailleurs : } nC_{n-1}^{p-1} = \frac{n \times (n-1)!}{(p-1)!(n-p)!}.$$

$$\text{Or, } n \times (n-1)! = n!, \text{ donc : } pC_n^p = nC_{n-1}^{p-1}.$$

■■■■■■■■■■

TRAVAUX PRATIQUES D'APPLICATION

1

Autour de la formule du binôme

1.1. Pour la technique

1. Développez chacun des produits suivants :

a/ $(2+x)^4$. **b/** $(1+x)^6$. **c/** $(1-x)^5$.

d/ $(2x-3)^3$. **e/** $\left(2x-\frac{1}{2}\right)^4$. **f/** $(1-i)^4$.

2. **a/** Écrivez la forme algébrique de $(1+i)^6$ en utilisant la forme trigonométrique de $1+i$.

b/ Retrouvez ce résultat par la formule du binôme.

1.2. Obtention de certaines relations

1. Écrivez le développement de $(1+x)^n$ donné par la formule du binôme.

2. Dédisez-en que :

a/ $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^p + \dots + C_n^n = 2^n$.

b/ $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \dots + (-1)^p C_n^p + \dots + (-1)^n C_n^n = 0$.

c/ $C_n^0 + 2C_n^1 + 2^2C_n^2 + \dots + 2^p C_n^p + \dots + 2^n C_n^n = 3^n$.

d*/ $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \dots + pC_n^p + \dots + nC_n^n = n2^{n-1}$ (pour $n \geq 1$).

3. **a/** Développez $(e^{ix} + e^{-ix})^4$.

b/ Dédisez-en une expression de $\cos^4 x$ en fonction de $\cos 4x$ et de $\cos 2x$.

4. On pose $f(x) = e^x + e^{-x}$.

Donnez une expression de $[f(x)]^5$ en fonction de $f(x)$, $f(3x)$ et $f(5x)$.

1.3. Utilisation de la formule du binôme dans des problèmes de dénombrement

Nous nous proposons de résoudre le **problème** suivant :

dans un ensemble E à n éléments, combien y a-t-il de couples (A, B) de parties disjointes ?

Un exemple : si $E = \{a\}$, il y a trois couples : $(\emptyset, \emptyset)$, $(\emptyset, \{a\})$ et $(\{a\}, \emptyset)$.

Notez bien que les couples (A, B) et (B, A) avec $B \neq A$ sont considérés bien sûr comme deux couples distincts.

1. Cas particuliers

a/ Cas $n=2$; $E = \{a, b\}$.

Écrivez tous les couples (A, B) de parties disjointes de E.

Conseil : il est très **important** de procéder avec méthode. **Par exemple**, écrivez d'abord tous les couples (A, B) tels que $\text{card } A = 0$, puis tous les couples tels que $\text{card } A = 1$, ...

b/ Cas $n=3$; $E = \{a, b, c\}$.

Écrivez tous les couples (A, B) de parties disjointes de E, en utilisant la méthode précédente.

2. Cas général : card E = n

a/ Calculez le nombre de couples (A, B) de parties disjointes dans chacun des cas suivants :

$$\text{card } A = 0; \quad \text{card } A = 1.$$

Indication : il y a 2^p parties dans un ensemble de cardinal p .

b/ Montrez que le nombre de couples (A, B) de parties disjointes telles que $\text{card } A = k$ ($0 \leq k \leq n$) est égal à : $C_n^k 2^{n-k}$.

c/ Déduisez-en que le nombre de couples de parties disjointes dans un ensemble à n éléments est égal à 3^n .

2

p-listes, arrangements, combinaisons à travers un modèle d'urne. Les différents types de tirages

Une urne contient 4 boules numérotées : 10, 20, 30, 40. On effectue trois types d'expériences.

2.1. Premier type d'expérience : tirages avec remise

Une expérience est définie par le protocole suivant :

on effectue trois *tirages successifs avec remise*, c'est-à-dire qu'après chaque tirage, on replace la boule tirée dans l'urne, et l'on note le numéro de chaque boule tirée suivant l'**ordre** dans lequel elle a été tirée.

Le résultat d'une expérience peut alors être représenté par un triplet, ou une 3-liste d'éléments de l'ensemble {10, 20, 30, 40}. Ainsi, le triplet (40, 20, 30) correspond au tirage suivant : la première boule tirée porte le n° 40, la deuxième le n° 20, la troisième le n° 30.

Combien y a-t-il de résultats d'expérience possibles ?

2.2. Deuxième type d'expérience : tirages sans remise

Une expérience est définie par le protocole suivant :

on effectue trois *tirages successifs sans remise*, c'est-à-dire que l'on ne replace pas dans l'urne la boule tirée, et l'on note le numéro de chaque boule tirée suivant l'**ordre** dans lequel elle a été tirée.

Le résultat d'une expérience peut alors être aussi représenté par un triplet, mais cette fois les éléments de ce triplet sont nécessairement deux à deux distincts, c'est donc un *arrangement*.

Combien y a-t-il de résultats d'expérience possibles ?

2.3. Troisième type d'expérience : tirage simultané

Une expérience est définie par le protocole suivant :

on tire *simultanément* 3 boules dans l'urne et on note les 3 numéros inscrits sur les boules tirées. Le résultat d'une expérience peut alors être représenté par une partie à 3 éléments de l'ensemble {10, 20, 30, 40}.

Combien y a-t-il de résultats d'expérience possibles ?

3

Quelques exercices classiques de dénombrement

Il est conseillé de traiter le T.P. 2 avant d'aborder celui-ci.

3.1. Urnes

Une urne contient 4 boules de couleurs bleue, jaune, rouge et verte. Nous noterons chaque boule par l'initiale de sa couleur : B, J, R, V.

Partie A

On effectue les deux types d'expériences suivantes.

- **Premier type** : on tire successivement 4 boules, *avec remise*, et on note la couleur de chaque boule tirée dans l'ordre du tirage.
 - **Deuxième type** : on tire successivement 4 boules, *sans remise*, et on note la couleur de chaque boule tirée dans l'ordre du tirage.
- Répondez aux questions suivantes, pour **chacun** des deux types d'expériences.

1. Combien y a-t-il de résultats d'expérience possibles ?
2. Combien y a-t-il de résultats d'expérience dans chacun des cas suivants :
 - a/ la 1^{re} boule tirée est rouge, la 2^{de} verte et la 3^e jaune ;
 - b/ la 1^{re} boule tirée est bleue et la 2^{de} jaune ;
 - c/ la 2^{de} boule tirée est verte et la 4^e bleue ;
 - d/ la 2^{de} boule est jaune.

Partie B

On tire à présent *simultanément* 3 boules de l'urne et l'on note la couleur des boules tirées ; par exemple, {B, J, V}, signifie que l'on a tiré simultanément la boule rouge, la boule jaune, la boule verte.

1. Combien y a-t-il de tirages possibles ?
2. Combien y a-t-il de tirages possibles contenant :
 - a/ la boule bleue ?
 - b/ la boule jaune ?
 - c/ la boule jaune et la boule rouge ?
3. Combien y a-t-il de tirages sans boule bleue ?

3.2. Jeux de cartes

On tire *simultanément* 6 cartes dans un jeu de 32 cartes. On dit que l'on a alors une main de 6 cartes.

1. Combien y a-t-il de mains de 6 cartes ?
2. Combien y a-t-il de mains de 6 cartes :
 - a/ contenant 4 rois ? b/ contenant 4 rois et 2 as ?
 - c/ contenant 6 cœurs ? d/ contenant *exactement* 3 trèfles ?
 - e/ contenant 1 sept, 1 huit, 1 neuf, 1 dix, 1 valet et 1 dame ?
 - f/ ne contenant aucun as ? g/ contenant au moins 1 roi ?
 - h/ contenant au moins 1 roi et au moins 1 cœur ?

4

Variations sur trois notes

On note E l'ensemble constitué par les trois notes de musique DO, MI, SOL : $E = \{\text{DO}, \text{MI}, \text{SOL}\}$.

4.1. On joue successivement trois notes de E *distinctes deux à deux, d'égales durées (trois noires par exemple)*.

a/ Combien de phrases musicales peut-on jouer ainsi ?

b/ Écrivez, comme dans l'exemple ci-contre, chacune de ces phrases.



4.2. On joue à présent successivement trois notes de E , non nécessairement distinctes deux à deux, d'égales durées (trois noires par exemple).

a/ Combien de phrases musicales peut-on jouer ainsi ?

b/ Combien y a-t-il de telles phrases dans lesquelles deux au moins des trois notes sont identiques ?

c/ Combien y en a-t-il dans lesquelles deux des trois notes et deux seulement sont identiques ?

Écrivez, comme dans l'exemple ci-contre, chacune de ces phrases.



4.3. On juxtapose à présent n phrases musicales ($n \in \mathbb{N}^*$).

Combien de mélodies différentes obtient-on dans chacun des cas suivants :

a/ chacune des huit phrases est du type du **1. a/**;

b/ chacune des huit phrases est du type du **2. a/**.

Application numérique (pour **a/** et **b/**) : $n = 4$; $n = 8$; $n = 16$; $n = 32$.

Un peu de solfège

Dans les exemples ci-dessus, chaque phrase musicale dure trois temps car chaque note dure un temps. Si la mesure est à trois temps, ce que l'on indique

en écrivant « $\frac{3}{4}$ » après la clé de sol au début du morceau, chaque phrase musicale remplit une mesure.

Voici une mélodie constituée par cinq phrases musicales : les quatre premières du type **2. a/** et la cinquième ne contenant qu'une note d'une durée de trois temps (on dit que c'est une blanche pointée).



4.4. Reste-t-il encore beaucoup de mélodies à composer ?

On peut jouer 88 notes différentes sur un piano. On juxtapose 10 phrases musicales constituées chacune par 3 notes parmi ces quatre-vingt-huit, distinctes ou confondues, d'égales durées (des noires par exemple).

Combien de mélodies différentes peut-on ainsi jouer ?

5.1. La circulation à un carrefour est réglée par n feux de circulation $F_1, F_2, \dots, F_n$, ne pouvant être que VERT ou ROUGE.

[En réalité, les feux sont tricolores, mais dans ce genre de problème, on néglige parfois « l'orange », pour simplifier.]

On note d la durée de chaque **cycle**, c'est-à-dire la durée entre deux passages au VERT (ou au ROUGE) d'un feu donné. On note $v_1, v_2, \dots, v_n$ les durées de VERT respectives de ces feux au cours d'un cycle. Ces durées sont calculées et **fixées** a priori en fonction de l'importance relative de chacune des voies de circulation.

Lorsque, pour des raisons de sécurité routière, deux feux F_i et F_j ne peuvent pas être verts en même temps, on dit que la paire $\{F_i, F_j\}$ est une **paire de disjonction**. Chacun des n feux fait partie, bien sûr, d'une paire de disjonction au moins, sinon il serait inutile.

Quel est le nombre maximum de paires de disjonction ? Quel est leur nombre minimum ?

Application numérique : $n = 3, n = 4, n = 5, n = 10$.

5.2. On suppose que $n = 3$ et qu'il y a 3 paires de disjonction :

$$P_1 = \{F_1, F_2\}, \quad P_2 = \{F_1, F_3\}, \quad P_3 = \{F_2, F_3\}.$$

Lors du réglage des feux au cours d'un cycle, deux choix sont possibles pour chacune de ces paires $\{F_i, F_j\}$: ou bien F_i passe au vert avant F_j , ou bien F_j avant F_i .

Lorsque, pour chaque paire de disjonction, un choix est réalisé, on dit que l'on a effectué un **arbitrage**.

On peut représenter chaque arbitrage par un triplet de nombres égaux à 1 ou à 0, dont la $i^{\text{ième}}$ coordonnée est relative à la $i^{\text{ième}}$ paire de disjonction : elle est égale à 1 si l'ordre de passage au vert des feux de la paire est le même que l'ordre des indices de ces feux.

Exemple : l'arbitrage (1, 1, 0) correspond aux choix suivants : F_1 passe au vert avant F_2 , F_1 avant F_3 et F_3 avant F_2 .

1. Combien y a-t-il d'arbitrages possibles ?

2. L'arbitrage (1, 0, 1) n'est pas réalisable pratiquement : pourquoi ?

3. a/ Écrivez tous les arbitrages possibles et déduisez-en le nombre d'arbitrages réalisables.

b/ Retrouvez ce résultat d'une autre manière.

5.3. Minimisation de la durée du rouge de chaque feu

Les durées du vert v_1, v_2, v_3 des feux F_1, F_2, F_3 étant **fixées**, la durée du rouge de chaque feu sera d'autant plus courte que la durée d du cycle sera plus courte.

On suppose qu'il y a 2 paires de disjonction :

$$P_1 = \{F_1, F_2\} \quad \text{et} \quad P_2 = \{F_2, F_3\}.$$

Chaque arbitrage est déterminé cette fois par un couple dont les coordonnées sont égales à 1 ou à 0.

1. a/ Combien y a-t-il d'arbitrages ?

b/ Y en a-t-il de non réalisables, pratiquement ?

2. L'unité de temps étant la seconde, on suppose que :

$$v_1 = 20; \quad v_2 = 30 \quad \text{et} \quad v_3 = 40.$$

Calculez d pour chacun des arbitrages et précisez le déroulement du, ou des cycles optimaux, c'est-à-dire de durée d minimale.

6

Comparaison du nombre des p -listes et du nombre des p -arrangements

Considérons un ensemble E à n éléments et p un entier naturel, $p \leq n$.

1. Le nombre de p -uplets, ou de p -listes, d'éléments de E est égal à n^p . Le nombre d'arrangements, p -listes d'éléments de E distincts deux à deux, est égal à A_n^p , et évidemment : $A_n^p \leq n^p$.

Retrouvez ce résultat à partir de la formule donnant A_n^p .

2. On suppose dans cette question que n est fixé, et que p prend toutes les valeurs entières entre 0 et n .

On pose alors $u_p = \frac{n^p}{A_n^p}$.

a/ Montrez que la suite finie (u_p) est strictement croissante.

b/ Précisez le minimum et le maximum de cette suite.

c/ Application numérique : précisez ce maximum et ce minimum lorsque $n = 5$, puis lorsque $n = 10$.

3. On suppose dans cette question que c'est p qui cette fois est fixé, égal à 2, et que c'est n qui varie de façon à prendre toutes les valeurs entières supérieures à 2.

On pose : $v_n = \frac{n^2}{A_n^2}$ avec $n \geq 2$.

a/ Calculez v_2 et v_3 .

b/ Montrez que, pour tout naturel $n \geq 2$, $v_n = 1 + \frac{1}{n-1}$.

c/ La suite (v_n) est-elle monotone ? A-t-elle une limite ?

4. On suppose maintenant que p reste fixé, mais cette valeur de p n'est pas précisée. On pose, pour tout $n \geq p$, $w_n = \frac{n^p}{A_n^p}$.

a/ Démontrez que la suite (w_n) a pour limite 1.

b/ Quel est le nombre des p -listes de E ($\text{card } E = n$) qui contiennent au moins deux éléments égaux ? On notera ce nombre N_n .

c/ Quelle est la limite de la suite : $n \mapsto \frac{N_n}{n^p}$, $n \geq p$?

Comment interpréter ce résultat ?

EXERCICES ET PROBLÈMES

Pour tester ses connaissances

Q.C.M.

Pour les exercices 1 à 7, une seule des réponses proposées est exacte.

1. A_{10}^4 est égal à :

a/ $\frac{10!}{6!4!}$. b/ $\frac{6!}{10!}$. c/ $\frac{10!}{6!}$.

2. a/ C_n^p est toujours égal à $\frac{A_n^p}{p!}$.

b/ C_n^p n'est jamais égal à $\frac{A_n^p}{p!}$.

c/ C_n^p est parfois égal à $\frac{A_n^p}{p!}$.

3. Le nombre de permutations d'un ensemble de 5 éléments est :

a/ 60. b/ 120. c/ 5^5 .

4. C_{100}^{80} est égal à :

a/ C_{80}^{20} . b/ C_{100}^{20} . c/ C_{180}^{100} .

5. Une urne contient cinq boules de couleurs différentes. On tire trois boules simultanément. Le nombre de tirages possibles est :

a/ 5^3 . b/ A_5^3 . c/ C_5^3 .

6. Avec les cinq chiffres 1, 2, 3, 4, 5, on peut écrire x nombres naturels à quatre chiffres (pas nécessairement distincts) et :

a/ $x = 5^4$. b/ $x = 4^5$. c/ A_5^4 .

7. x est un complexe.
 $(x-1)^5$ est égal à :

a/ $x^5 + 5x^4 + 10x^3 + 10x^2 + 5x + 1$.

b/ $-x^5 + 5x^4 - 10x^3 + 10x^2 - 5x + 1$.

c/ $x^5 - 5x^4 + 10x^3 - 10x^2 + 5x - 1$.

DÉNOMBREMENT

8. On donne quatre objets notés a, b, c, d .

a/ Écrivez tous les arrangements deux à deux de ces 4 objets.

b/ Écrivez tous les arrangements trois à trois de ces 4 objets.

9. Écrivez toutes les permutations de l'ensemble des lettres A, B, C, D.

10. Combien y a-t-il de façons de classer cinq concurrents, sans ex aequo ?

11. Combien peut-on faire de « mains » de 8 cartes avec un jeu de 32 cartes ?

FORMULE DU BINÔME

Pour les exercices 12 à 15, développez en utilisant directement la formule du binôme.

12. a/ $(2+x)^4$. b/ $(1+x)^6$.

13. a/ $(1-2x)^5$. b/ $(3x+4)^4$.

14. a/ $\left(2x - \frac{1}{2}\right)^4$. b/ $(2x-3)^5$.

15. a/ $(1-i)^5$. b/ $(2i-3)^4$.

16. On donne, dans le plan, huit points deux à deux distincts, et tels qu'il n'y en ait pas trois alignés.

a/ Si l'on trace toutes les droites qui passent par deux points quelconques pris parmi ces huit, combien y aura-t-il de droites tracées ?

b/ Si l'on trace tous les vecteurs qui ont deux quelconques de ces points pour extrémités, combien y aura-t-il de vecteurs ?

17. Dans un centre de vacances accueillant 120 personnes, on sait que 24 personnes font du tennis et 15 du canoë. En outre, 6 personnes pratiquent à la fois tennis et canoë. Combien de personnes ne pratiquent aucun des deux sports ?

Conseil : vous pouvez représenter la situation par des ensembles.

18. Un tournoi de football se joue entre cinq équipes. Chaque équipe doit rencontrer une fois et une seulement les quatre autres. Combien y a-t-il de matches joués en tout ? Combien chaque équipe joue-t-elle de matches ?

Pour s'entraîner

19. On donne un système de trois *inéquations* du premier degré à deux inconnues en faisant suivre :

$$ax + by + c, \quad a'x + b'y + c', \\ a''x + b''y + c''$$

de l'un des signes <0 , >0 , ≤ 0 , ≥ 0 .

Combien peut-on former de tels systèmes ?

20. Dans une pièce de théâtre, il y a 6 rôles qui peuvent être tenus par n'importe lesquelles des 20 personnes de la troupe.

Combien y a-t-il de distributions possibles de ces rôles ?

21. **a/** Combien y a-t-il de nombres naturels à 3 chiffres qui s'écrivent (dans le système décimal) sans utiliser le chiffre zéro ?

b/ Combien y a-t-il de nombre naturels à p chiffres qui s'écrivent, dans le système décimal, sans utiliser le chiffre zéro ?

22. Le tiercé

Vingt chevaux, portant chacun un numéro de 1 à 20, sont engagés dans une course. Trois d'entre eux vont arriver respectivement *premier*, *second*, et *troisième*. (On suppose qu'il n'y a pas d'ex aequo).

Par exemple : le premier est le n° 10, le second est le n° 3, le troisième est le n° 5.

Si on a misé sur ce classement : 10, 3, 5, on gagne le *tiercé dans l'ordre*; si on a misé sur ces trois chevaux, mais dans un ordre différent, on gagne le *tiercé dans le désordre*.

a/ Combien y a-t-il de *tiercés dans l'ordre* ?

b/ Combien y a-t-il de *tiercés dans le désordre* ?

23. Le Loto national

De façon simplifiée, la règle du jeu est la suivante : vous choisissez six nombres naturels parmi les naturels qui vont de 1 à 49.

Les responsables du Loto procèdent à un tirage de six nombres; si les six nombres tirés sont ceux que vous avez choisis, peu importe l'ordre, vous avez gagné; sinon vous avez perdu.

Votre chance de gagner est donc de une sur $\square$. Donnez la valeur de $\square$.

24. De manière générale, on appelle « mot » tout assemblage *ordonné* de lettres de l'alphabet. Par exemple, CCBVAV.

a/ Combien y a-t-il de mots de 6 lettres ?

b/ Combien y a-t-il de mots de 6 lettres, deux à deux distinctes ?

25. Les numéros de téléphone

Le 24 octobre 1985, une nouvelle numérotation téléphonique a été mise en place en France. Par exemple pour téléphoner de province en région parisienne, il faut composer : le 16, le 1, puis 8 chiffres.

Le premier de ces 8 chiffres est le 3 pour le Val-d'Oise et les Yvelines, le 6 pour l'Essonne et la Seine-et-Marne, le 4 pour la Seine, les Hauts-de-Seine, la Seine-Saint-Denis et le Val-de-Marne.

Combien peut-il y avoir d'abonnés :

a/ dans l'Essonne et la Seine-et-Marne ?

b/ dans l'ensemble de ces départements ?

26. Écriture Braille

Un caractère de l'écriture Braille destinée aux aveugles est formé de points obtenus en piquant la feuille de papier à travers *au moins un* des six trous de la grille ci-dessous :



Exemple : caractère Braille représentant la lettre M



a/ Combien de caractères Braille peut-on concevoir ?

b/ Dénombrez les caractères Braille formés de quatre points.

27. Une association est formée de 35 personnes dont 15 hommes et 20 femmes; on se propose de former un bureau de 5 personnes, dans lequel doivent se trouver au moins 2 femmes et 2 hommes.

Déterminez de combien de façons l'on peut former ce bureau dans les cas suivants :

a/ chaque membre de l'association est candidat;

b/ deux hommes refusent d'être candidats.

28. La main dans le sac

Dans un sac se trouvent cinq jetons verts numérotés de 1 à 5 et quatre jetons rouges numérotés de 1 à 4.

1. On tire successivement et sans remise 3 jetons du sac, et on note, dans l'ordre, le résultat du tirage.

a/ Combien y a-t-il de tirages possibles ?

b/ Combien y a-t-il de tirages ne contenant que des jetons verts ?

c/ Combien y a-t-il de tirages ne contenant aucun jeton vert ?

d/ Combien y a-t-il de tirages contenant au plus 2 jetons verts ?

2. Reprenez les questions précédentes dans le cas où l'on tire *simultanément* 3 jetons du sac.

29. « Mains » de 5 cartes

Dans un jeu de 32 cartes, combien y a-t-il de « mains » de 5 cartes, contenant :

a/ exactement 1 roi ?

b/ exactement 1 roi, 1 dame, 2 valets ?

30. Coïncidences

Soit le nombre 1 234. On utilise les quatre chiffres de ce nombre et, en les permutant au hasard, on obtient un nombre de quatre chiffres.

On dit qu'il y a coïncidence chaque fois qu'un chiffre retrouve sa place initiale. Ainsi, par exemple : si on compose le nombre 4213 il y a une coïncidence car le chiffre 2 a retrouvé sa place ; si on compose le nombre 1324 il y a deux coïncidences ; si on compose le nombre 1234, il y a quatre coïncidences, etc.

1. Combien de nombres peut-on obtenir ?

2. a/ Existe-t-il des nombres présentant exactement trois coïncidences ?

b/ Combien de nombres présentent exactement deux coïncidences ?

c/ Dressez la liste des nombres qui présentent exactement une coïncidence. Déduisez-en combien de nombres ne présentent aucune coïncidence.

1. Raymond Queneau intitule son ouvrage : « Cent mille milliards de poèmes. » Le titre est-il exact ?

2. Deux vers de E_{14} se terminent par le mot « destin ».

Combien y a-t-il de poèmes se terminant par « destin » ?

3. L'un des poèmes est le suivant :

*Le vieux marin breton de tabac prit sa prise
D'aucuns par-dessus tout prisent les
escargots*

*Sur l'antique bahut il choisit sa cerise
Qui sait si le requin boulotte les turbots ?*

*Le cheval Parthénon frissonnait sous la bise
Qui clochard devenant jetait ses oripeaux
Un frère même bas est la part indécise
Elle effraie le Berry comme les morvandiaux*

*Le loup est amateur de coq et de cocotte
On comptait les esprits acérés à la hotte
Il voudra retrouver le germe adultérin*

*Sa sculpture est illustre et dans le fond des
coques*

*On s'excuse il n'y a ni baleines ni phoques
Le mammifère est roi nous sommes son
cousin.*

(Oulipo, Atlas de Littérature Potentielle
collection Idées, © Gallimard.)

Combien y a-t-il de poèmes ne contenant aucun de ces quatorze vers ?

Combien y a-t-il de poèmes contenant exactement trois de ces quatorze vers ?

4. On s'intéresse maintenant aux poèmes fabriqués selon la règle (R) suivante : aucun mot ne doit rimer avec lui-même, c'est-à-dire que le mot final de deux vers différents ne peut être le même.

Or, dans les 140 vers composant les 14 ensembles, le mot « marchandise » est le seul mot terminant deux vers situés dans des ensembles différents, à savoir E_5 et E_7 .

Combien y a-t-il de poèmes satisfaisant à la règle (R) ? Et combien d'entre eux finissent par le mot « destin » ?

(Bac A₁)

Pour chercher plus

31. Sur une autoroute, une société pétrolière a installé 5 stations-service.

Elle veut affecter 5 gérants, notés A, B, C, D, E (un gérant à la tête de chaque station).

a/ De combien de façons peut-elle faire ces affectations ?

b/ Parmi ces façons, combien y en a-t-il où A, B, C sont affectés à trois stations consécutives :

— dans l'ordre alphabétique ?

— dans n'importe quel ordre ?

32. Pour quelques milliards de poèmes

Raymond Queneau, dans l'un de ses ouvrages, propose quatorze ensembles, $E_1, E_2, \dots, E_{14}$ contenant dix vers chacun.

Pour composer un poème, il suggère de choisir un vers dans chaque ensemble.

Le vers choisi dans E_1 est le premier vers du poème.

Le vers choisi dans E_2 est le deuxième vers du poème. Etc.

Cette règle sera respectée dans toute la suite.

33. a/ Écrivez la forme algébrique de $(1+i)^6$, en écrivant $1+i$ sous la forme $re^{i\theta}$.

b/ Retrouvez ce résultat par la formule du binôme.

34. Avec un jeu de 32 cartes, combien y a-t-il de mains de 5 cartes contenant :

a/ l'as de pique et au moins 2 trèfles ?

b/ 1 roi ou 1 cœur ?

35. Une enquête sur la lecture de trois revues X, Y, Z et portant sur un échantillon de 1 000 personnes donne les résultats suivants :

- 60 % lisent X, 50 % lisent Y et 50 % lisent Z;
 - 20 % lisent Y et Z, 30 % lisent X et Z, 30 % lisent X et Y;
 - 10 % lisent ces trois revues.
- Parmi ces 1 000 personnes :

- a/ Combien lisent deux de ces revues exactement ?
- b/ Combien ne lisent aucune de ces revues ?

36. Être bien dans ses chaussures

Un camelot présente un lot de chaussures en vrac composé de 13 paires assorties. Les chaussures ne se différencient que par leurs pointures ou par le fait qu'elles sont du pied droit ou du pied gauche. Parmi les 13 paires, il y a 4 paires de la pointure 40, 6 paires de la pointure 41 et 3 paires de la pointure 42. Un client se présente et choisit simultanément 2 chaussures dans le tas des 26 chaussures. Combien y a-t-il de cas :

- a/ où les 2 chaussures sont de pointures différentes ?
- b/ où les 2 chaussures ont même pointure ?
- c/ où les 2 chaussures sont du pied droit ?
- d/ où les 2 chaussures sont du même pied ?

37. La fabrication d'une pièce nécessite de passer celle-ci sur quatre machines A, B, C, D. Dénombrez les trajets possibles dans chacun des cas suivants :

- a/ l'ordre de passage est indifférent ;
- b/ la pièce doit d'abord passer par A ;
- c/ la pièce doit passer en B avant C et D.

38. 1. Combien existe-t-il de nombres naturels à 5 chiffres, le premier chiffre étant non nul ?

2. Parmi ces nombres :

- a/ Combien sont écrits avec au moins un chiffre pair ?
- b/ Combien commencent par 3 chiffres pairs suivis de 2 chiffres impairs ?
- c/ Combien contiennent 3 chiffres pairs et 2 chiffres impairs ?

39*. Une urne A contient 2 boules blanches, 3 boules bleues et 5 boules rouges. Une urne B contient 4 boules bleues. On tire simultanément 2 boules de l'urne A que l'on place dans l'urne B puis on tire 3 boules simultanément de l'urne B. Quel est le nombre de tirages tricolores possibles ?

40*. P et T

Dénombrez les numéros de téléphone de 8 chiffres commençant par 6 et contenant exactement deux fois le chiffre 2, une fois le 3, une fois le 4, trois fois le 5.

41*. 206 élèves de Seconde suivent des cours d'anglais (en première ou seconde langue). Ils suivent aussi des cours dans une ou deux autres langues :

128 font de l'allemand, 103 de l'espagnol, 59 du latin, 21 du russe, 25 de l'allemand et de l'espagnol, 37 de l'allemand et du latin et 11 de l'espagnol et du russe.

- a/ Combien ne font ni allemand ni espagnol ?
- b/ Combien font du latin et de l'espagnol ?
- c/ Combien ne font que de l'allemand ?

42*. a/ $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$.

Combien de nombres à n chiffres peut-on former avec les chiffres de A ?

- b/ Même question avec les chiffres de :
 $B = \{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$.

43*. On donne le carré suivant « découpé » régulièrement en 6×6 cases.

- a/ Combien y a-t-il de carrés au total ?



- b/ Reprenez la question dans le cas de $n \times n$ cases.

AVEC LES C_n^p

44. Résolvez dans $\mathbb{N}$ les équations :

- a/ $C_n^5 = 17 C_n^4$.
- b/ $C_{2n+4}^{3n-1} = C_{2n+4}^n$.
- c/ $C_{2n}^1 + C_{2n}^2 + C_{2n}^3 = 387n$.

45*. Démontrez que, pour tous naturels n et p tels que $0 \leq p \leq n+1$:

$$C_{n+1}^p = \sum_{k=0}^p C_n^{p-k}.$$

46*. $E = \{0; 1; 2; \dots; n\}$.

a/ Combien y a-t-il de couples $(x; y)$ d'éléments de E , avec $x < y$? Déduisez-en que

$$\sum_{p=0}^n p = C_{n+1}^2.$$

b/ Pour former un triplet $(x; y; z)$ d'éléments de E , avec $x < y < z$, on peut choisir y arbitrairement entre 0 et n . La valeur de y étant choisie, combien y a-t-il de choix pour x et z ?

Déduisez-en que la somme de tous les produits de deux naturels ayant pour somme n , est égale à C_{n+1}^3 , c'est-à-dire :

$$\sum_{\substack{a+b=n \\ a \in \mathbb{N}; b \in \mathbb{N}}} ab = C_{n+1}^3.$$

c/ Déduisez des questions précédentes que :

$$\sum_{p=0}^n p^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$$

47*. Démontrez de deux façons que, pour tous naturels n et p , tels que $p \leq n$:

$$C_p^p + C_{p+1}^p + \dots + C_n^p = C_{n+1}^{p+1}$$

a/ en supposant p fixé, et en raisonnant par récurrence sur n ;

b/ en écrivant $C_{k+1}^{p+1} = C_k^{p+1} + C_k^p$ pour :

$$p+1 \leq k \leq n.$$

48*. Démontrez que, pour tout naturel p et tout naturel $n \geq p+2$:

$$C_n^p = C_{n-2}^p + 2C_{n-2}^{p-1} + C_{n-2}^{p-2}$$

a/ par un calcul direct ;

b/ en dénombrant pour un ensemble E de cardinal n , le nombre de parties ayant p éléments :

- contenant a et b ;
 - contenant a ou bien b ;
 - ne contenant ni a ni b ;
- où a et b sont deux éléments distincts de E .

49*. Au sein d'une association de n membres est constitué un comité de p membres ; au sein du comité, un bureau de q membres ; au sein du bureau, un secrétariat de r membres. Il y a donc 4 catégories d'adhérents et N façons de grouper les adhérents dans ces 4 catégories.

a/ Calculez N de plusieurs façons différentes et démontrez que :

$$C_n^p \times C_p^q \times C_q^r = C_n^r \times C_{n-r}^{q-r} \times C_{n-q}^{p-q}.$$

b/ Application numérique : calculez N pour $n=40$, $p=14$, $q=9$, $r=3$.

POUR PRENDRE UN BON DÉPART

1 Événements associés à une expérience aléatoire

1.1. UN EXEMPLE : LE LANCER D'UN DÉ

On lance un dé dont les six faces sont numérotées 1, 2, 3, 4, 5 et 6, et à chaque lancer on note le nombre inscrit sur la face supérieure. *A priori*, on ne peut pas prévoir quel sera ce nombre.

On dit alors que l'on a effectué une **expérience aléatoire**.

Il y a six éventualités. En effet, le nombre inscrit sur la face supérieure du dé peut être l'un des six nombres 1, 2, 3, 4, 5, 6. On dira que l'ensemble des éventualités, noté souvent Ω , est l'ensemble :

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Lors d'une telle expérience aléatoire, on peut se poser des questions concernant le nombre obtenu.

Par exemple : le nombre obtenu sera-t-il pair ? sera-t-il impair ? sera-t-il un multiple de 3 ? sera-t-il égal à 2 ? sera-t-il supérieur à 4 ?...

UN PEU D'HISTOIRE

Pacioli (1445-1514) disserte sur les jeux de hasard ; Cardan (1501-1576) s'intéresse à des problèmes de dés et fait un relevé des précautions à prendre pour éviter la tricherie dans les jeux de hasard ; Galilée (1564-1642) montre que dans le lancer de trois dés, la somme des trois chiffres des faces supérieures est plus souvent 10 que 9.

Cependant, on situe la naissance du *calcul des probabilités* dans un échange de correspondance entre Pascal et Fermat (en 1654), à propos de deux problèmes posés par le chevalier de Méré. Ni l'un ni l'autre ne publient leurs résultats et c'est Huygens

qui, reprenant leurs travaux, résout d'autres problèmes et publie en 1657 le premier traité de probabilités.

Leibniz, Moivre, Jacob Bernoulli, Laplace et Gauss au XVIII^e siècle développent cette nouvelle branche des Mathématiques.

Le calcul des probabilités connaît un grand essor au XIX^e siècle avec Bertrand, Poincaré et Borel.

Kolmogoroff en fonde la théorie en 1936. Depuis, le calcul des probabilités se développe dans deux directions complémentaires : *la théorie et les applications*, ces dernières sont présentes dans la plupart des domaines de la connaissance.

On peut associer de manière naturelle à chacune des situations précédentes un sous-ensemble de Ω :

Situation	Sous-ensemble de Ω associé
Le nombre obtenu est pair	$\{2, 4, 6\}$
Le nombre obtenu est impair	$\{1, 3, 5\}$
Le nombre obtenu est un multiple de 3	$\{3, 6\}$
Le nombre obtenu est 2	$\{2\}$
Le nombre obtenu est strictement supérieur à 4	$\{5, 6\}$

Plus généralement, chaque situation peut être associée à un sous-ensemble de Ω . Pour cette raison, les sous-ensembles de Ω sont appelés **événements**. Les singletons sont appelés **événements élémentaires** (par exemple, $\{2\}$ en est un).

1.2. CAS GÉNÉRAL : NOTION D'ÉVÉNEMENT

DÉFINITION 1

Supposons que dans une expérience aléatoire il y ait un nombre fini n d'éventualités, désignées par $e_1, e_2, \dots, e_n$.
On appelle *événement* tout sous-ensemble de l'ensemble $\Omega = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ des éventualités.
Un événement est dit *élémentaire* s'il est constitué par un seul élément.

EXERCICE-TEST

Une expérience aléatoire consiste à lancer deux dés de couleurs, l'un rouge, l'autre bleu, et à noter le couple de chiffres obtenus, en prenant pour premier élément du couple le chiffre apparu sur le dé rouge.

- a/ Quel est l'ensemble Ω des éventualités ?
- b/ Quel est l'événement : le chiffre apparu sur le dé rouge est le double du chiffre apparu sur le dé bleu ?

1.3. ÉVÉNEMENTS DISJOINTS OU INCOMPATIBLES. ÉVÉNEMENT CONTRAIRE

- Deux événements A et B sont **disjoints** ou **incompatibles** s'ils n'ont aucun élément commun, c'est-à-dire si $A \cap B = \emptyset$.
- L'**événement contraire** d'un événement A est l'événement $\bar{A}$.

Exercice-test

- Reprenez l'expérience aléatoire du lancer d'un dé.
1. Citez deux événements A et B incompatibles.
 2. Quel est l'événement contraire de l'événement $P = \{2; 4; 6\}$?

2 Probabilité d'un événement

2.1. EXEMPLE : TIRAGE D'UNE BOULE DANS UNE URNE

Une urne contient deux boules blanches, quatre boules noires et une boule rouge. Une expérience aléatoire consiste à tirer au hasard une boule et à noter sa couleur. L'ensemble Ω des éventualités est : $\Omega = \{B, N, R\}$.

- Il est légitime de supposer qu'on a une chance sur sept de tirer une boule rouge, deux chances sur sept de tirer une blanche et quatre chances sur sept de tirer une noire.
- On traduit **mathématiquement** cela en disant que la **probabilité de l'événement élémentaire $\{R\}$** est égale à $\frac{1}{7}$, celle de $\{B\}$ à $\frac{2}{7}$ et celle de $\{N\}$ à $\frac{4}{7}$.

On écrit :

$$p(\{R\}) = \frac{1}{7}; \quad p(\{B\}) = \frac{2}{7}; \quad p(\{N\}) = \frac{4}{7}.$$

2.2. CAS GÉNÉRAL : PROBABILITÉ SUR UN ENSEMBLE D'ÉVENTUALITÉS

Ω est un ensemble *fini* d'éventualités associé à une expérience aléatoire : $\Omega = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$.

DÉFINITION 2

On dit qu'on définit une probabilité sur Ω lorsqu'on associe, à *chaque* événement élémentaire $\{e_i\}$, un nombre noté $p(\{e_i\})$ tel que :

- $p(\{e_i\})$ appartient à $[0; 1]$;
 - la somme $p(\{e_1\}) + p(\{e_2\}) + \dots + p(\{e_n\})$, est égale à 1.
- $p(\{e_i\})$ est appelé probabilité de l'événement élémentaire $\{e_i\}$.

DÉFINITION 3

A est un événement quelconque de Ω .

La **probabilité $p(A)$** de A est la somme des probabilités des événements élémentaires contenus dans A.

Conséquences :

- $p(\Omega) = 1$.
- Lorsque A est inclus dans B, $p(A) \leq p(B)$.
- Pour tout événement A : $0 \leq p(A) \leq 1$.

Exercices-tests

1. Reprenez l'expérience aléatoire de l'exemple 2.1. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule rouge ou noire ?
2. Une expérience aléatoire consiste à lancer un dé non pipé et à noter le chiffre apparu.
 - a/ Quel est l'ensemble Ω des éventualités ?
 - b/ Quelle est la probabilité d'obtenir comme résultat de l'expérience un nombre impair ? Un multiple de 4 ?

3 Probabilité d'une réunion. Probabilité de $\bar{A}$. Lien entre $p(A \cup B)$ et $p(A \cap B)$

THÉOREME 1

Lorsque A et B sont deux événements disjoints, on a :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B).$$

THÉOREME 2

Probabilité d'un événement contraire :

$$p(\bar{A}) = 1 - p(A).$$

THÉOREME 3

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B).$$

4 Cas où les événements élémentaires sont équiprobables

Lorsque les événements élémentaires ont tous la même probabilité élémentaire de se produire, on dit qu'ils sont équiprobables.

Ω est un ensemble fini d'éventualités sur lequel on a défini une probabilité.

THÉOREME 4

Si tous les événements élémentaires sont équiprobables, alors la probabilité $p(A)$ d'un événement A quelconque est donnée par :

$$p(A) = \frac{\text{Card } A}{\text{Card } \Omega}.$$

Exercices-tests

1. On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes.

Quelle est la probabilité pour que cette carte soit un roi ou une carte noire ?

2. On jette simultanément un dé rouge et un dé bleu et on note le couple de chiffres obtenu, le premier élément du couple étant le chiffre apparu sur le dé rouge.

a/ Quelle est la probabilité pour que le chiffre apparu sur le dé rouge soit le double de celui apparu sur le dé bleu ?

b/ Quelle est la probabilité pour que la somme des deux chiffres soit 6 ?

COURS

1

Notion de variable aléatoire. Loi de probabilité associée

1.1. EXEMPLES

a/ EXEMPLE 1

Lors d'un jeu, un joueur lance une pièce de monnaie non truquée et gagne 100 Francs s'il obtient PILE, perd 100 Francs, s'il obtient FACE.

L'ensemble Ω des éventualités est l'ensemble $\{P, F\}$. La pièce étant non truquée, les événements élémentaires P et F sont équiprobables, et donc la probabilité de chacun est $\frac{1}{2}$.

Associions à P le nombre 100, à F le nombre -100 , et posons :

$$X(P) = 100, \quad X(F) = -100.$$

On définit ainsi une fonction X de Ω dans $\mathbb{R}$.

On dit que X est une **variable aléatoire**.

On note $p(X=100)$ la probabilité que X prenne la valeur 100. Cette probabilité est égale à la probabilité d'obtenir PILE, elle est donc $\frac{1}{2}$. De même, $p(X=-100) = \frac{1}{2}$ car égale à la probabilité d'obtenir FACE. Donc :

$$p(X=100) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad p(X=-100) = \frac{1}{2} \quad [1]$$

On dit que ces deux égalités définissent la **loi de probabilité** de la variable aléatoire X , et que $(X=100)$ et $(X=-100)$ sont les événements élémentaires de cette loi de probabilité.

Remarque : dans cet exemple, les événements élémentaires de la loi de probabilité de X sont équiprobables.

b/ EXEMPLE 2

Une urne contient 4 boules blanches et 3 boules noires. On tire au hasard simultanément 3 boules de l'urne, et à chaque tirage, on note le nombre de boules noires tirées. L'ensemble Ω des éventualités est l'ensemble de tous les paquets de 3 boules, le cardinal de Ω est donc : $C_7^3 = 35$. Les événements élémentaires sont équiprobables. La probabilité d'un événement A est donc égale à $\frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega}$ (voir « Pour prendre un bon départ », théorème 4).

Associions à chaque élément de Ω , c'est-à-dire à chaque paquet de 3 boules, le nombre de boules noires contenues dans ce paquet. On définit ainsi une **variable aléatoire** X , c'est-à-dire une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$, dont les valeurs sont : 0, 1, 2, 3.

Déterminons la **loi de probabilité de X** , c'est-à-dire la probabilité de chacun des quatre événements élémentaires de cette loi, à savoir : $(X=0)$, $(X=1)$, $(X=2)$ et $(X=3)$. $p(X=0)$ est la probabilité de tirer un paquet de 3 boules dont aucune n'est noire. Notons A_0 l'ensemble des paquets de 3 boules qui ne contiennent pas de boules noires. Alors :

$$p(X=0) = \frac{\text{card } A_0}{\text{card } \Omega} = \frac{C_4^3}{C_7^3} = \frac{4!}{3!} \times \frac{3! \times 4!}{7!} = \frac{(4!)^2}{7!} = \frac{4}{35}.$$

Plus généralement, notons A_i l'ensemble des paquets de trois boules qui contiennent i boules noires ($i = 0, 1, 2, 3$). Alors :

$$p(X=1) = \frac{\text{card } A_1}{\text{card } \Omega} = \frac{C_4^2 \times C_3^1}{C_7^3} = \frac{18}{35}$$

$$p(X=2) = \frac{\text{card } A_2}{\text{card } \Omega} = \frac{C_4^1 \times C_3^2}{C_7^3} = \frac{12}{35}$$

$$p(X=3) = \frac{\text{card } A_3}{\text{card } \Omega} = \frac{C_4^0}{C_7^3} = \frac{1}{35}.$$

Remarque : dans cet exemple, les événements élémentaires de la loi de probabilité de X ne sont pas équiprobables.

1.2. CAS GÉNÉRAL

Ω désigne l'ensemble des éventualités d'une expérience aléatoire. On suppose, comme toujours dans ce chapitre, que Ω est un *ensemble fini* et qu'une probabilité est définie sur Ω .

Définir une **variable aléatoire** sur Ω , c'est associer à chaque événement élémentaire $\{e\}$ de Ω , un nombre réel $X(e)$.

Une **variable aléatoire** est donc une **fonction X de Ω dans $\mathbb{R}$** .

Notons $x_1, x_2, \dots, x_n$, les valeurs de X , et notons $p(X=x_i)$, la probabilité que X prenne la valeur x_i ($i = 1, 2, \dots, n$).

On dit que $(X=x_1), (X=x_2), \dots, (X=x_n)$ sont les événements élémentaires de la loi de probabilité de X .

Remarques

1. Notons A_i l'ensemble des éléments e de Ω tels que $X(e) = x_i$; $p(X=x_i)$ est donc égal à la probabilité, dans Ω , de l'événement A_i .

2. Posons $p_i = p(X=x_i)$. Alors : $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$.

En effet, il est clair que les A_i sont deux à deux disjoints et que leur réunion est égale à Ω . La somme des probabilités des A_i est donc égale à celle de Ω , or la probabilité de Ω est 1, d'où le résultat.

COMMENTAIRE

La terminologie « **variable aléatoire** », qui est la terminologie d'usage, est particulièrement inadaptée et peut prêter à confusion. En effet, une « **variable aléatoire** » est une **fonction**, et non une **variable** ! De plus, elle n'a rien d'aléatoire !

2

Espérance mathématique d'une variable aléatoire. Variance. Écart-type

2.1. ESPÉRANCE MATHÉMATIQUE

X est une variable aléatoire définie sur un ensemble d'éventualités Ω ; $x_1, x_2, \dots, x_n$ sont les valeurs de X .

Pour tout entier i de 1 à n , on pose : $p_i = p(X=x_i)$.

Par définition, l'**espérance mathématique** de X est le nombre égal à :

$$p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n.$$

L'espérance mathématique de X est notée $E(X)$. La somme : $p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_n x_n$, est notée : $\sum_{i=1}^n p_i x_i$, d'où :

$$E(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i, \text{ où } \begin{cases} \bullet \text{ les } x_i \text{ sont les valeurs possibles de } X \\ \bullet p_i = p(X = x_i). \end{cases}$$

REMARQUE : espérance mathématique et barycentre

Choisissons sur une droite d un repère $(O; \vec{i})$ et, pour chaque entier i de 1 à n , notons M_i le point de d d'abscisse x_i dans le repère $(O; \vec{i})$. Les points pondérés (M_i, p_i) ont un barycentre G , car $p_1 + p_2 + \dots + p_n = 1$, et l'abscisse de G (voir chapitre 5, page 00)

est $\frac{p_1 x_1 + \dots + p_n x_n}{p_1 + \dots + p_n}$, c'est-à-dire $E(X)$.

$E(X)$ est donc l'abscisse du barycentre des points (M_i, p_i) .

COMMENTAIRE : espérance mathématique et jeux de hasard

Supposons que lors d'un jeu, les valeurs d'une variable aléatoire traduisent des gains (valeurs positives) et des pertes (valeurs négatives), avec une probabilité p_i pour un gain x_i , une probabilité p_j pour une perte x_j . On conçoit alors que l'espérance mathématique traduise « l'espérance » de gain (ou de perte !) après un grand nombre de parties. Une espérance mathématique positive (resp. négative) signifie que le jeu est avantageux (resp. désavantageux) pour le joueur. Une espérance mathématique nulle signifie que le jeu est équitable : c'est le cas de l'exemple 1 du paragraphe 1.1.

L'origine de la notion « d'espérance mathématique » se trouve ainsi expliquée.

2.2. VARIANCE. ÉCART-TYPE

Posons $m = E(X)$.

Par définition, la variance de la variable aléatoire X est le nombre :

$$p_1 (x_1 - m)^2 + p_2 (x_2 - m)^2 + \dots + p_n (x_n - m)^2.$$

La variance de la variable aléatoire X est notée $V(X)$.

La somme $p_1 (x_1 - m)^2 + \dots + p_n (x_n - m)^2$ est notée $\sum_{i=1}^n p_i (x_i - m)^2$, d'où :

$$V(X) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - m)^2, \text{ où } \begin{cases} \bullet \text{ les } x_i \text{ sont les valeurs de } X \\ \bullet p_i = p(X = x_i) \\ \bullet m = E(X). \end{cases}$$

Par définition, l'écart-type de X est : $\sqrt{V(X)}$. Il est noté $\sigma(X)$.

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Remarques

1. Le calcul « à la main » de $V(X)$, donc de $\sigma(X)$, ne peut être effectué que si l'on connaît $E(X)$.

2. La variance peut s'interpréter comme étant l'abscisse du barycentre des points (M_i, p_i) d'abscisses $(x_i - m)^2$.

2.3. EXEMPLES

Reprenons les exemples 1. et 2. du paragraphe 1.1.

a/ EXEMPLE 1

On lance une pièce de monnaie et on gagne 100 F lorsqu'on obtient PILE, on perd 100 F si l'on obtient FACE.

Rappelons que, dans cet exemple, $\Omega = \{P, F\}$, et que X est définie par $X(P) = 100$,

$$X(F) = -100, \text{ et enfin que : } p(X = 100) = \frac{1}{2}, \quad p(X = -100) = \frac{1}{2}.$$

Avec les notations du paragraphe 2., nous écrivons :

$$x_1 = 100, \quad x_2 = -100, \quad p_1 = p(X = x_1) = \frac{1}{2}, \quad p_2 = p(X = x_2) = \frac{1}{2}.$$

Alors :

$$E(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 = \frac{1}{2} \times 100 + \frac{1}{2} \times (-100) = 0.$$

$$V(X) = \frac{1}{2}(x_1 - 0)^2 + \frac{1}{2}(x_2 - 0)^2 = \frac{1}{2}(100)^2 + \frac{1}{2}(-100)^2 = 10^4.$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{10^4} = 100.$$

Remarque

Ces résultats sont conformes à la réalité de l'expérience : si on lance la pièce un grand nombre de fois, l'espérance de gain ou de perte est nulle. Le jeu est équitable.

b/ EXEMPLE 2

On tire 3 boules d'une urne qui contient 4 boules blanches et 3 boules noires (voir page 101). Rappelons que :

— Ω est l'ensemble des paquets de 3 boules,

— X est la fonction qui associe à chaque paquet de 3 boules le nombre de boules noires contenues dans ce paquet. X prend donc 4 valeurs : 0, 1, 2, 3.

Avec les notations du paragraphe 2, nous écrivons :

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1, \quad x_3 = 2, \quad x_4 = 3, \quad p_1 = p(X = x_1), \quad p_2 = p(X = x_2), \quad p_3 = p(X = x_3), \quad p_4 = p(X = x_4).$$

$$\text{Nous avons vu en 1.1. que : } p_1 = \frac{4}{35}, \quad p_2 = \frac{18}{35}, \quad p_3 = \frac{12}{35}, \quad p_4 = \frac{1}{35}.$$

Alors :

$$\begin{aligned} E(X) &= p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3 + p_4 x_4 = \frac{4}{35} \times 0 + \frac{18}{35} \times 1 + \frac{12}{35} \times 2 + \frac{1}{35} \times 3 \\ &= \frac{45}{35} = \frac{9}{7}. \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } E(X) = \frac{9}{7}$$

On pose $m = E(X)$.

Alors :

$$\begin{aligned} V(X) &= p_1 (x_1 - m)^2 + p_2 (x_2 - m)^2 + p_3 (x_3 - m)^2 + p_4 (x_4 - m)^2 \\ &= \frac{4}{35} \left(0 - \frac{9}{7}\right)^2 + \frac{18}{35} \left(1 - \frac{9}{7}\right)^2 + \frac{12}{35} \left(2 - \frac{9}{7}\right)^2 + \frac{1}{35} \left(3 - \frac{9}{7}\right)^2. \end{aligned}$$

Nous trouvons : $V(X) = 0,552$

2.4. LIEN AVEC LA MOYENNE, LA VARIANCE ET L'ÉCART-TYPE D'UNE SÉRIE STATISTIQUE

a/ EXEMPLE

Dans l'exemple 2. traité ci-dessus, nous avons vu que :

$$E(X) = \frac{1}{35} [4 \times 0 + 18 \times 1 + 12 \times 2 + 1 \times 3]$$

$$V(X) = \frac{1}{35} \left[4 \left(0 - \frac{9}{7} \right)^2 + 18 \left(1 - \frac{9}{7} \right)^2 + 12 \left(2 - \frac{9}{7} \right)^2 + 1 \left(3 - \frac{9}{7} \right)^2 \right].$$

$E(X)$ est donc égal à la **moyenne** de la série statistique suivante :

Valeur x_i	0	1	2	3
Effectif k_i	4	18	12	1

$V(X)$ est égal à la **variance** de cette série statistique.

b/ Cas où les événements élémentaires de Ω sont équiprobables

La situation est analogue à celle de l'exemple.

En effet, $x_1, x_2, \dots, x_n$ étant les valeurs prises par X , notons k_i le nombre des éléments e de Ω tels que : $X(e) = x_i$. Alors, évidemment : $k_1 + \dots + k_n = \text{card } \Omega$.

Par conséquent : $p_i = p(X = x_i) = \frac{k_i}{\text{card } \Omega}$. D'où :

$$E(X) = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n = \frac{k_1}{\text{card } \Omega} x_1 + \dots + \frac{k_n}{\text{card } \Omega} x_n = \frac{1}{\text{card } \Omega} (k_1 x_1 + \dots + k_n x_n).$$

De même, en posant $m = E(X)$:

$$V(X) = \frac{1}{\text{card } \Omega} [k_1 (x_1 - m)^2 + \dots + k_n (x_n - m)^2].$$

Donc : $E(X)$ est la moyenne de la série statistique $(x_i; k_i)$ et $V(X)$ en est la variance.

COMMENTAIRE : cas général

On ne suppose plus que les événements élémentaires sont équiprobables.

Dans la pratique, on peut trouver un entier k tels que tous les nombres kp_i soient des entiers (par exemple, lorsque les p_i sont des décimaux, il suffit de prendre pour k une puissance de dix suffisamment grande).

$E(X)$ et $V(X)$ sont alors respectivement la moyenne et la variance de la série statistique $(x_i; kp_i)$, puisque le barycentre d'une famille de points pondérés reste inchangé lorsqu'on multiplie tous les coefficients, ou poids, par un même nombre non nul.

c/ Calcul de $E(X)$, de $V(X)$, de $\sigma(X)$, à l'aide d'une calculatrice

La plupart des calculatrices permettent d'obtenir directement la moyenne, la variance, et l'écart-type d'une série statistique. Avec ces calculatrices, l'espérance mathématique, la variance, et l'écart-type d'une variable aléatoire se calculent exactement de la même manière, en remplaçant les effectifs par les p_i .

D'autres calculatrices n'acceptent pas des réels p_i non entiers; il suffit alors de procéder avec elles de la manière indiquée dans le commentaire ci-dessus.

3

Fonction de répartition d'une variable aléatoire

3.1. EXEMPLE

Reprenons l'exemple du jeu PILE ou FACE dans lequel le joueur gagne 100 F s'il obtient PILE et perd 100 F s'il obtient FACE (exemple 1, paragraphe 1.1.).

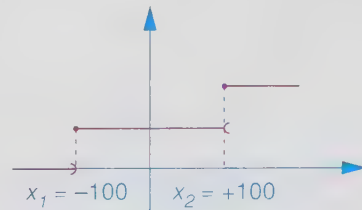
Rappelons que : $\Omega = \{P, F\}$, $X(P) = 100$, $X(F) = -100$,

et que : $p(X = 100) = \frac{1}{2}$, $p(X = -100) = \frac{1}{2}$.

À chaque réel x , associons le nombre $F(x)$ défini par $F(x) = p(X \leq x)$, où $p(X \leq x)$ désigne la probabilité que X prenne des valeurs inférieures ou égales à x .

La fonction F ainsi définie est appelée **fonction de répartition** de la variable aléatoire X .

Voici la courbe représentant F dans un repère orthogonal.



Il est clair, en effet, d'après la définition de F , que F est constante sur chacun des intervalles : $]-\infty; x_1[$, $[x_1; x_2[$, et $[x_2; +\infty[$, les valeurs constantes étant respectivement égales à 0, $\frac{1}{2}$, et 1.

3.2. PROPRIÉTÉS DE LA FONCTION DE RÉPARTITION F

L'exemple étudié met en évidence les propriétés suivantes de la fonction F , propriétés qui résultent directement de sa définition.

- F est définie sur tout l'ensemble $\mathbb{R}$.
- F est une fonction constante par intervalles.
- F est nulle lorsque x est strictement inférieur au plus petit des nombres x_i .
- F est constante, égale à 1, lorsque x est supérieur ou égal au plus grand des nombres x_i .
- F est croissante, au sens large.
- En chaque point x_i , le « saut » de la fonction est égal à $p(X = x_i)$.

3.3. CAS GÉNÉRAL

DÉFINITION

X est une variable aléatoire définie sur un ensemble Ω d'éventualités. La **fonction de répartition** de X est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = p(X \leq x).$$

PROPRIÉTÉS de F

Il résulte immédiatement de cette définition qu'une **fonction de répartition F** possède toutes les propriétés énoncées dans le paragraphe 3.2. ci-dessus (les valeurs de F étant les nombres $x_1, x_2, \dots, x_n$).

4

Probabilité conditionnelle**4.1. APPROCHE EXPÉRIMENTALE**

Une urne contient 26 boules de même rayon et de même poids, 10 **rouges** et 16 **noires**. Parmi ces boules, 13 sont **creuses** : 1 rouge et 12 noires, et 13 sont **pleines** : 9 rouges et 4 noires. Il est impossible de distinguer, par la vue ou le toucher, les boules creuses des boules pleines. Mais chaque boule peut être séparée en deux demi-boules, et il est possible alors de savoir si elle est pleine ou creuse.

On tire une boule au hasard. On constate qu'elle est **rouge**. On pose alors la question : « **Quelle est la probabilité pour que cette boule soit creuse ?** »

La réponse *intuitivement* évidente est : $\frac{1}{10}$.

En effet, parmi les 10 boules rouges, une seule est creuse.

On peut donc dire : *sachant que la boule tirée est rouge*, la probabilité pour qu'elle soit creuse est $\frac{1}{10}$.

Remarque : la probabilité de tirer une boule creuse est $\frac{1}{2}$ (13 boules sur 26 sont creuses). Le fait de savoir que la boule tirée est rouge intervient de manière essentielle.

4.2. APPROCHE D'UNE FORMULE GÉNÉRALE

Notons Ω l'ensemble constitué des boules contenues dans l'urne, notons R l'ensemble des boules rouges, N celui des boules noires, C celui des boules creuses et P celui des boules pleines.

Le tirage d'une boule est effectué au hasard, donc tous les événements élémentaires

sont équiprobables. Donc, pour tout événement A, $p(A) = \frac{\text{card } A}{\text{card } \Omega}$.

Notons $p(C/R)$ la probabilité de tirer une boule creuse sachant qu'elle est rouge :

$$p(C/R) = \frac{1}{10}.$$

Nous constatons que : $p(C/R) = \frac{p(C \cap R)}{p(R)}$. [1]

En effet : $p(C \cap R) = \frac{1}{26}$ et $p(R) = \frac{10}{26}$, car $\text{card}(C \cap R) = 1$ et $\text{card } R = 10$.

Donc : $\frac{p(C \cap R)}{p(R)} = \frac{1}{10}.$

On dit que $p(C/R)$ est la probabilité conditionnelle de C par rapport à R, et on utilise l'égalité [1] pour définir, de manière générale, une probabilité conditionnelle.

4.3. CAS GÉNÉRAL**DÉFINITION**

p est une probabilité définie sur un intervalle Ω d'éventualités. A et B sont deux parties de Ω , et $p(A) \neq 0$.

On appelle **probabilité conditionnelle** de l'événement B par rapport à l'événement A

le nombre $\frac{p(A \cap B)}{p(A)}$.

Ce nombre est noté $p(B/A)$; ainsi par définition, lorsque $p(a) \neq 0$:

$$p(B/A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}.$$

Remarques

- $p(B/A)$ se note aussi $p_A(B)$.
- $p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$, avec $p(B) \neq 0$.

4.4. AUTRES FORMULATIONS

De la définition, nous déduisons lorsque $p(A) \neq 0$, l'égalité :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B/A) \quad [1]$$

Dans de nombreux cas, comme dans l'exemple vu en 4.1., on connaît la probabilité conditionnelle d'un événement B par rapport à un événement A. On peut alors en déduire $p(A \cap B)$ en utilisant l'égalité [1] ci-dessus.

4.5. REMARQUES IMPORTANTES

Il n'est pas toujours indispensable, dans la résolution d'un problème de probabilités, de préciser l'ensemble Ω des éventualités ; d'ailleurs cet ensemble n'est pas toujours facile à expliciter.

Au contraire, il est parfois préférable de décrire les événements A et B dans le langage usuel et d'oublier que ce sont des sous-ensembles de Ω .

L'événement $A \cap B$ est alors décrit comme l'événement « A et B », l'événement $A \cup B$ est décrit comme l'événement « A ou B », l'événement $\bar{A}$ comme l'événement « non A ». Cette remarque est illustrée par l'exercice résolu qui suit.

4.6. EXERCICE RÉSOLU

EXERCICE RÉSOLU 1

On tire au hasard successivement sans remise 2 cartes dans un jeu de 32 cartes.

Quelle est la probabilité pour que la première carte tirée soit un pique **et** la deuxième, un cœur ?

SOLUTION COMMENTÉE ■■■

Rappelons qu'il y a 8 piques et 8 cœurs dans un jeu de 32 cartes.

Notons A l'événement : « la première carte tirée est un pique »,

et B l'événement : « la seconde carte tirée est un cœur ».

Il s'agit de calculer « A et B ». Pour cela, nous utilisons l'égalité :

$$p(A \text{ et } B) = p(A) \times p(B/A).$$

Les tirages sont effectués au hasard, donc les événements élémentaires sont

équiprobables, et donc : $p(A) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$.

$p(B/A)$ est la probabilité de tirer un cœur sachant que la première carte tirée est un pique. Lorsque la première carte tirée est un pique, il reste 31 cartes

dans le paquet dont 8 cœurs. Donc : $p(B/A) = \frac{8}{31}$.

D'où la probabilité cherchée :

$$p(A \text{ et } B) = p(A) \times p(B/A) = \frac{1}{4} \times \frac{8}{31} = \frac{2}{31}.$$

**COMMENTAIRE : autre solution,
sans probabilité conditionnelle**

À un tirage sans remise de deux cartes, on peut associer un couple $(x; y)$, où x désigne la première carte et y la seconde, avec $x \neq y$. Ainsi, un tirage de deux cartes peut être considéré comme un couple d'éléments distincts de l'ensemble E des 32 cartes; c'est donc un arrangement de 32 objets 2 à 2. Nous pouvons donc choisir comme ensemble Ω des éventualités l'ensemble de ces arrangements.

Le cardinal de Ω est alors : 32×31 .

Les arrangements qui donnent un cas favorable sont les couples $(x; y)$ où x est un pique et y un cœur. Leur nombre est donc : 8×8 .

D'où la probabilité cherchée : $\frac{8 \times 8}{32 \times 31} = \frac{2}{31}$.

La solution que nous avons donnée en premier est plus « simple », car elle résulte immédiatement de l'application d'une formule, et sous la forme où elle est proposée, elle nécessite moins d'efforts de modélisation et de calculs de dénombrement.

■■■■■■■■■■

5 Indépendance de deux événements

5.1. DÉFINITION

DÉFINITION

Dire que deux événements A et B sont **indépendants** signifie que :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B).$$

Justifions le choix de cette définition.

Nous avons vu que : $p(A \cap B) = p(A) \times p(B/A)$.

Donc, si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ et si $p(A) \neq 0$, nous obtenons : $p(B) = p(B/A)$.

Cette égalité signifie que la probabilité $p(B/A)$, c'est-à-dire la probabilité d'obtenir B sachant que A est réalisé, est égale à la probabilité $p(B)$ d'obtenir B .

Intuitivement, cela signifie que B ne dépend pas de A .

Nous verrons de même que $p(A) = p(A/B)$, lorsque $p(B) \neq 0$ et lorsque :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B),$$

et intuitivement, dire que $p(A) = p(A/B)$ signifie que A ne dépend pas de B .

Remarque : événements incompatibles et événements indépendants.

Il ne faut pas confondre « événements indépendants » et « événements incompatibles ».

Rappelons que, par définition, deux événements A et B sont dits incompatibles lorsque $A \cap B = \emptyset$. Il en résulte que : $p(A \cap B) = p(\emptyset) = 0$, et donc dans ce cas l'égalité $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ est impossible si $p(A) \neq 0$ et $p(B) \neq 0$.

Donc deux événements A et B incompatibles et tels que $p(A) \neq 0$, $p(B) \neq 0$ ne sont **jamais indépendants**.

5.2. EXERCICE RÉSOLU

EXERCICE RÉSOLU 2

Une urne contient 6 boules : 4 blanches et 2 noires. On effectue au hasard deux tirages *indépendants* avec remise. Quelle est la probabilité pour que la première boule tirée soit blanche, et la seconde noire ?

SOLUTION COMMENTÉE ■■■

Notons A l'événement : « la première boule tirée est blanche »,

et B l'événement : « la seconde boule tirée est noire ».

Il s'agit de calculer $p(A \text{ et } B)$. Les tirages sont indépendants, donc :

$$p(A \text{ et } B) = p(A) \times p(B). \text{ Or } p(A) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, p(B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

Donc :

$$p(A \text{ et } B) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}.$$

Remarque : constatez que, dans ce cas aussi, nous n'avons pas explicité l'ensemble Ω des éventualités, et que nous n'avons donc pas considéré A et B comme des ensembles. Nous avons préféré, parce que c'est plus commode, décrire les événements A et B dans le langage usuel. (Voir la remarque 4.5.) Une autre solution faisant intervenir explicitement un ensemble Ω d'éventualités est possible, voir le commentaire de l'exercice résolu 1.

■■■■■■■■■■

6 Formule des probabilités totales

6.1. UN EXEMPLE COMMENTÉ

Une agglomération est constituée par deux villes V_1 et V_2 . Sur un listing contenant les noms des habitants de cette agglomération on relève un nom **au hasard**.

Avec quelles données pourra-t-on être en mesure de répondre à la question suivante :

« Quelle est la probabilité pour que la personne portant ce nom soit un fumeur ? »

Bien entendu, si l'on connaît exactement le nombre total N d'habitants de l'agglomération et le nombre total n de fumeurs, la réponse est très simple : la probabilité cherchée est égale à $\frac{n}{N}$.

Mais pratiquement, dans des situations de ce type, on dispose rarement de renseignements aussi précis. On dispose parfois de renseignements s'exprimant en termes de pourcentages ou de probabilité concernant l'importance relative de ces villes, et relatifs à chacune d'elles.

Ainsi, par exemple, supposons que l'on dispose des deux hypothèses suivantes :

(1) La probabilité qu'un habitant pris au hasard dans la ville V_1 (resp. V_2) soit un fumeur est égale à 0,1 (resp. 0,2).

(2) 60 % des gens du listing habitent la ville V_1 , 40 % la ville V_2 .

Nous allons voir que ces données permettent de répondre à la question posée.

En effet, notons Ω l'ensemble des habitants de l'agglomération, A l'ensemble des habitants de V_1 , B l'ensemble des habitants de V_2 , et F l'ensemble des fumeurs de l'agglomération (en rouge sur la figure). Il s'agit de trouver $p(F)$.

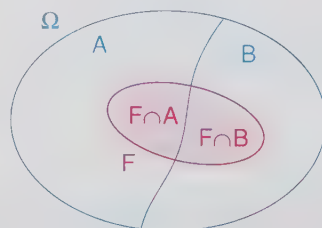
Tout fumeur habite l'une des villes V_1 ou V_2 et une seulement.

On a donc :

$$F = (F \cap A) \cup (F \cap B) \text{ et } (F \cap A) \cap (F \cap B) = \emptyset.$$

Par suite, puisque p est une probabilité, on a :

$$p(F) = p(F \cap A) + p(F \cap B).$$



Il suffit alors, pour conclure, d'utiliser les relations :

$$p(F \cap A) = p(A) \cdot p(F/A) \text{ et } p(F \cap B) = p(B) \cdot p(F/B).$$

On obtient donc :

$$p(F) = p(A) \cdot p(F/A) + p(B) \cdot p(F/B) \quad [R]$$

D'après l'hypothèse (1) : $p(F/A) = 0,1$ $p(F/B) = 0,2$.

D'après l'hypothèse (2) : $p(A) = 0,6$; $p(B) = 0,4$.

Donc : $p(F) = 0,6 \times 0,1 + 0,4 \times 0,2$. D'où : $p(F) = 0,14$.

La formule [R] est un cas particulier de la *formule des probabilités totales*.

6.2. REMARQUES

Analysons l'exemple précédent.

A et B sont deux sous-ensembles non vides de Ω tels que $\Omega = A \cup B$ et $A \cap B = \emptyset$: on dit que A et B constituent une **partition** de Ω .

p étant une probabilité, on a :

$$p(A) + p(B) = p(\Omega) = 1.$$

La relation « $p(F) = p(A) \cdot p(F/A) + p(B) \cdot p(F/B)$ » peut alors s'interpréter ainsi : le nombre $p(F)$ est le barycentre des nombres $p(F/A)$ et $p(F/B)$ munis des coefficients respectifs $p(A)$ et $p(B)$.

En d'autres termes, on peut trouver $p(F)$ dès que l'on connaît $p(F/A)$, $p(F/B)$ et les « poids » respectifs $p(A)$ et $p(B)$ de A et B.

COMMENTAIRE

Dans le cas particulier « $p(A) = p(B) = \frac{1}{2}$ », $p(F)$ est alors la demi-somme de $p(F/A)$ et $p(F/B)$. Intuitivement, dans l'exemple précédent ceci se conçoit aisément : « $p(A) = p(B)$ » signifie que les deux villes ont le même nombre d'habitants.

6.3. CAS GÉNÉRAL

• Définition d'une partition

On dit que des sous-ensembles *non vides* $B_1, B_2, \dots, B_n$ de Ω constituent une *partition* de Ω lorsque :

- les B_i sont deux à deux disjoints,
- et $\Omega = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n$.

THÉORÈME (formule des probabilités totales)

Si $B_1, B_2, \dots, B_n$ constituent une partition de Ω , la probabilité $p(A)$ d'un événement quelconque A de Ω est égale à :

$$p(A) = p(B_1) \cdot p(A/B_1) + p(B_2) \cdot p(A/B_2) + \dots + p(B_n) \cdot p(A/B_n).$$

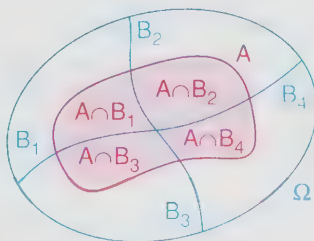
• Démonstration

1. Cas où $n=4$

L'ensemble A, colorié en rouge, est tel que :

- $A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup (A \cap B_3) \cup (A \cap B_4)$,
- et les ensembles $A \cap B_i$ sont disjoints deux à deux.

Ces propriétés se conçoivent et se vérifient aisément en utilisant le fait que les ensembles B_1, B_2, B_3 et B_4 constituent une partition de Ω .



On a donc, d'après les propriétés d'une probabilité :

$$p(A) = p(A \cap B_1) + p(A \cap B_2) + p(A \cap B_3) + p(A \cap B_4).$$

On en déduit alors la formule des probabilités totales, puisque :

$$p(A \cap B_i) = p(B_i) \cdot p(A/B_i) \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

2. Cas général

Dans le cas où n est un entier naturel quelconque, la démonstration est tout à fait analogue.

EXERCICE RÉSOLU 3

En 1992, le contrôle des voyageurs à un poste frontière est assuré par trois douaniers X, Y, Z. On sait que :

- (1) chaque voyageur est contrôlé par un douanier et un seul.
 - (2) la probabilité qu'il soit contrôlé par X est égale à 0,2, par Y à 0,3 et par Z à 0,5,
 - (3) le douanier X détecte les fraudeurs une fois sur 2, le douanier Y une fois sur 3 et enfin Z une fois sur 4.
- Quelle est la probabilité pour qu'un fraudeur se présentant au hasard à ce poste frontière en 1992 ne soit pas détecté ?

SOLUTION COMMENTÉE ■■■

Notons Ω l'ensemble des fraudeurs se présentant en 1992 à ce poste frontière. Notons A l'ensemble des fraudeurs contrôlés par le douanier X, B par Y et C par Z.

Notons enfin D l'ensemble des fraudeurs détectés.

On cherche donc $p(\bar{D})$.

L'hypothèse (3) concerne des probabilités de détecter des fraudeurs.

Calculons donc d'abord $p(D)$. On aura alors $p(\bar{D}) = 1 - p(D)$.

Les hypothèses (1), (2) et (3) nous invitent à utiliser la formule des probabilités totales. En effet :

- d'après l'hypothèse (1), A, B, C constituent une partition de Ω ;

- l'hypothèse (2) donne :

$$p(A) = 0,2 ; p(B) = 0,3 ; p(C) = 0,5 ;$$

- et l'hypothèse (3) donne :

$$p(D/A) = \frac{1}{2} ; p(D/B) = \frac{1}{3} ; p(D/C) = \frac{1}{4}.$$

On a donc :

$$p(D) = p(A) \cdot p(D/A) + p(B) \cdot p(D/B) + p(C) \cdot p(D/C).$$

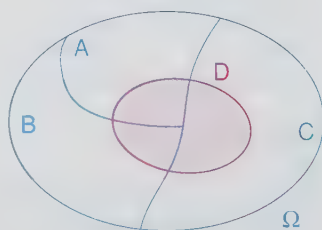
On obtient :

$$p(D) = 0,325. \text{ D'où } p(\bar{D}) = 0,675.$$

Un fraudeur a donc environ deux chances sur trois de ne pas être détecté.

Remarque : on aurait pu calculer directement $p(\bar{D})$ à l'aide de la formule des probabilités totales. En effet, l'hypothèse (3) donne :

$$p(\bar{D}/A) = \frac{1}{2} ; p(\bar{D}/B) = \frac{2}{3} \text{ et } p(\bar{D}/C) = \frac{3}{4}.$$



■■■■■■■■■■

TRAVAUX PRATIQUES D'APPLICATION

1 Deux classiques

1.1. Jeu de cartes

On tire au hasard une main de 5 cartes dans un jeu de 32 cartes.

Quelle est la probabilité que la main contienne :

- a/ 5 cartes de la même couleur.
- b/ 3 cœurs et 2 piques;
- c/ 1 carré (c'est-à-dire : 4 septs ou 4 huites ou ... ou 4 as);
- d/ au moins 1 trèfle;
- e/ au moins 2 rois et 2 cœurs.

1.2. Jeux de dés et variables aléatoires

On lance simultanément au hasard deux dés non pipés.

A. On définit une variable aléatoire X en associant à chaque lancer le total des points marqués sur les faces supérieures.

- 1. a/ Quelles sont les valeurs prises par X ?
- b/ Indiquez la loi de probabilité de X .
- 2. Tracez en repère orthogonal la courbe représentative de la fonction de répartition de X .
- 3. Calculez $E(X)$ et $V(X)$, en utilisant votre calculatrice si possible.

B. Voici la règle d'un jeu :

on gagne 1 franc si le total des points marqués sur les faces supérieures des 2 dés est supérieur ou égal à 10.

On perd 1 franc si ce total est inférieur ou égal à 5.

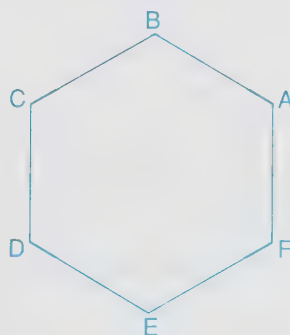
On n'est ni gagnant ni perdant si ce total est 6, 7, 8 ou 9.

On note Y la variable aléatoire associant à chaque lancer le « gain » (positif, négatif ou nul) correspondant.

- 1. Indiquez la loi de probabilité de Y .
- 2. Tracez en repère orthogonal la courbe représentative de la fonction de répartition de Y .
- 3. a/ Calculez $E(Y)$.
Le jeu est-il avantageux?
- b/ Calculez $V(Y)$ et $\sigma(Y)$.

2 Probabilités et géométrie

Une urne contient six jetons portant les lettres A, B, C, D, E, F. Ces six lettres sont également les sommets de l'hexagone régulier représenté ci-contre.



- 1. On tire au hasard de l'urne un paquet de trois jetons.

a/ Précisez l'ensemble Ω des éventualités, lié à cette expérience aléatoire.

b/ Calculez $\text{card } \Omega$.

2. À chaque tirage correspond un triangle (T) ayant comme sommets les sommets de l'hexagone écrits sur les jetons tirés.

Trouvez la probabilité de chacun des événements suivants :

a/ (T) est équilatéral.

b/ (T) est isocèle et non équilatéral.

c/ (T) est rectangle.

d/ (T) est quelconque, c'est-à-dire d'aucun des types précédents.

3. À chaque tirage on associe le plus grand angle, mesuré en degrés, du triangle (T). On définit ainsi une variable aléatoire X sur Ω .

a/ Quelles sont les valeurs prises par X ?

b/ Construisez en repère orthogonal la courbe représentative de la fonction de répartition de X .

c/ Calculez l'espérance mathématique et la variance de X .

3

Probabilités, Médecine et Biologie

3.1. Test médical

On suppose qu'un sujet, venant consulter dans un service hospitalier donné, a la probabilité 0,30 d'être atteint d'une maladie difficile à diagnostiquer. Chaque sujet subit un test. On sait que :

- si un sujet n'est pas malade, 9 fois sur 10 la réponse au test est négative ;
- s'il est malade, 8 fois sur 10 la réponse est positive.

1. Quelle est la probabilité pour qu'un sujet soit positif ?

Indication : utilisez la formule des probabilités totales.

2. Quelle est la probabilité pour qu'un sujet soit malade et positif ?

3. Si le résultat est positif, quelle est la probabilité pour que le sujet soit malade ?

Indication : remarquez que la probabilité demandée est une probabilité conditionnelle.

3.2. Affections indépendantes

On sait, par des enquêtes médicales, qu'un individu appartenant à une population donnée a la probabilité $\frac{1}{100}$ d'être atteint d'une affection A et la probabilité $\frac{1}{20}$ d'être atteint d'une autre affection B.

Si ces affections sont indépendantes, combien environ de sujets atteints de l'une au moins des deux affections doit-on s'attendre à trouver dans un échantillon de 10 000 sujets pris dans la population ?

3.3. Les albinos

Dans une population, le nombre de mâles est la moitié du nombre de femelles. Des études statistiques ont montré que, dans cette population, 6 % des mâles avaient le caractère albinos et 0,36 % des femelles avaient ce caractère.

1. Quelle est la probabilité pour qu'un individu au hasard soit un albinos ?

Indication : pensez à la formule des probabilités totales.

2. Quelle est la probabilité pour qu'un individu au hasard soit mâle et albinos ?
3. Déduisez-en la probabilité pour qu'un albinos de cette population soit un mâle.

Indication : remarquez que la probabilité demandée est une probabilité conditionnelle.

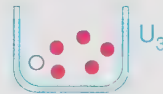
4 Deux pièces et trois urnes

On dispose de deux pièces de monnaie bien équilibrées et de trois urnes U_1 , U_2 , U_3 .

U_1 contient 4 boules blanches et 3 noires,

U_2 contient 2 blanches, 1 noire et 2 rouges,

U_3 contient 1 blanche et 5 rouges.



4.1. Première expérience aléatoire

Une épreuve aléatoire comporte deux étapes successives :

- (1) On jette d'abord, en même temps, les deux pièces.
- (2) Puis si on obtient 2 pile, on tire au hasard une boule de U_1 ,
si on obtient 2 face, on tire au hasard une boule de U_2 ,
si on obtient 1 pile et 1 face, on tire au hasard une boule de U_3 .

1. Calculez la probabilité de chacun des événements :

a/ « la boule tirée est blanche » ;

b/ « la boule tirée est noire » ;

c/ « la boule tirée est rouge ».

Indication : on pourra utiliser la formule des probabilités totales.

2. Le résultat du 1.c/ peut-il se déduire du 1.a/ et du 1.b/ ?

4.2. Deuxième expérience aléatoire

On modifie à présent la seconde étape de l'épreuve aléatoire précédente, la première étant inchangée :

Dans la seconde étape, on tire cette fois au hasard un paquet de **trois boules** de l'urne, celle-ci étant choisie comme précédemment en fonction du résultat de la première étape.

On considère alors la variable aléatoire X associant à chaque épreuve le nombre de boules blanches tirées.

1. a/ Quelles sont les valeurs de X ?

b/ Trouvez la loi de probabilité de X .

c/ Construisez la fonction de répartition de X .

2. Calculez $E(X)$ et $V(X)$.

5

Schéma de Bernoulli**5.1. Définition**

Lorsque, dans une expérience aléatoire, on s'intéresse uniquement à la réalisation d'un certain événement S précisé (on l'appelle « succès ») ou à sa non-réalisation (appelée « échec »), on dit que cette expérience correspond à un **schéma de Bernoulli**.

NOTE HISTORIQUE

C'est Jacob Bernoulli qui a décrit dans *Ars Conjectandi*, publié en 1713 à titre posthume, une épreuve de ce type qui porte aujourd'hui son nom.

5.2. Exemples

Exemple 1. Un jeu de dés est tel que le joueur gagne lorsque l'as sort et perd dans le cas contraire. Notons S l'événement « l'as sort ». L'événement contraire $\bar{S}$ est donc « l'as ne sort pas ». Si le dé est non pipé on a :

$$p(S) = \frac{1}{6} \quad \text{et} \quad p(\bar{S}) = \frac{5}{6} \quad (\text{car } p(\bar{S}) = 1 - p(S)).$$

Exemple 2. Une urne contient 10 boules : 4 rouges, 5 noires, 1 blanche. On tire une boule au hasard et on s'intéresse à l'événement S « la boule tirée est rouge », l'événement $\bar{S}$ est donc l'événement « la boule tirée est blanche ou noire ».

On a :

$$p(S) = \frac{4}{10} \quad \text{et} \quad p(\bar{S}) = \frac{6}{10}.$$

Indiquez trois autres exemples (de votre choix) d'expériences aléatoires correspondant à un schéma de Bernoulli, et précisez, pour chacun $p(S)$ et $p(\bar{S})$.

Dans une épreuve de Bernoulli, on note p la probabilité de $p(S)$. On définit une variable aléatoire X de la manière suivante :

$X = 1$ en cas de succès, c'est-à-dire si S est réalisé,

$X = 0$ en cas d'échec, c'est-à-dire si S n'est pas réalisé.

1. Calculez $E(X)$ et $V(X)$ en fonction de p .

2. Pour chacun des deux exemples précédents :

a/ calculez $E(X)$ et $V(X)$;

b/ construisez en repère orthogonal la courbe représentative de la fonction de répartition de X .

6

Loi binômiale**6.1. Un exemple commenté**

On se propose de résoudre le problème suivant : un dé pipé est tel que la probabilité d'obtenir le 6 est égale à $\frac{1}{4}$. On jette ce dé 5 fois de suite, le résultat de chaque lancer ne dépendant pas des autres. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement trois fois le 6 ?

Notons A l'événement « le 6 est obtenu exactement trois fois »,
et A_1 l'événement « le 6 est obtenu lors des trois premiers lancers ».

L'événement A_1 peut s'interpréter ainsi :

« le 6 sort au premier lancer » et « le 6 sort au second » et « le 6 sort au troisième » et « le 6 ne sort pas au quatrième » et « le 6 ne sort pas au cinquième ».

Notons respectivement E_1, E_2, E_3, E_4, E_5 chacun de ces cinq événements.

On admet que, d'après l'indépendance des lancers, la probabilité de A_1 est égale au produit des probabilités des E_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$).

$$\text{Or, } p(E_1) = p(E_2) = p(E_3) = \frac{1}{4} \text{ et } p(E_4) = p(E_5) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

D'où :

$$p(A_1) = \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2.$$

L'événement A , dont on cherche la probabilité, peut également se réaliser d'autres façons ; par exemple :

A_2 « le 6 sort aux trois derniers lancers » ou bien

A_3 « le 6 sort au premier lancer et aux deux derniers » ou bien...

1. a/ Indiquez deux autres événements A_4 et A_5 permettant de réaliser l'événement A .

b/ Il y a C_5^3 événements A_i permettant de réaliser A . Pourquoi ?

2. a/ Tous les A_i ont la même probabilité : $p(A_i) = \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^2$.

Pourquoi ?

b/ $p(A) = C_5^3 \left(\frac{1}{4}\right)^3 \left(\frac{3}{4}\right)^2$. Pourquoi ?

6.2. Cas général

1. Dans l'exemple précédent, l'expérience aléatoire est constituée par la succession de cinq épreuves de Bernoulli (voir la définition au T.P. 5), identiques et indépendantes pour lesquelles la probabilité p du succès S est $\frac{1}{4}$ (celle de l'échec, q , est donc $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$).

Plus généralement, considérons une expérience aléatoire constituée par la succession de n épreuves de Bernoulli, identiques et indépendantes, pour lesquelles nous notons p la probabilité du succès S et q la probabilité de l'échec $\bar{S}$ ($q = 1 - p$).

On peut démontrer, comme dans l'exemple ci-dessus, que la probabilité d'avoir k succès ($k = 0, 1, 2, \dots, n$) au cours de l'expérience est égale à :

$$C_n^k p^k q^{n-k}.$$

2. Variable aléatoire associée :

on associe à chaque expérience le nombre de succès. On définit ainsi une variable aléatoire X .

1. X peut prendre $(n + 1)$ valeurs : $0, 1, 2, \dots, n$. Pourquoi ?

2. $p(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$. Pourquoi ?

3. Vérifiez que : $\sum_{k=0}^n p_k = 1$, où $p_k = p(X = k)$.

Indication : pensez à la formule du binôme.

Le calcul de $E(X)$ est proposé dans le T.P. 7 « Manipulation du Σ ».

6.3. Quatre exercices d'applications

Les exercices suivants sont indépendants. On pourra, pour les résoudre, utiliser les résultats du 6.2.

1. Pièce de monnaie

On jette une pièce de monnaie non truquée 10 fois de suite, les lancers étant indépendants.

Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 6 fois pile ?

2. Urne

Une urne contient 10 boules dont 4 rouges. On effectue au hasard 7 tirages, indépendants, avec remise (on remet la boule tirée après chaque tirage).

Quelle est la probabilité d'obtenir exactement 5 boules non rouges ?

3. Jeux de cartes

On dispose de 6 jeux de cartes. On tire au hasard de chacun des jeux une main (c'est-à-dire un paquet) de 5 cartes, les tirages étant indépendants.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir :

a/ deux mains exactement contenant un carré ?

b/ k mains exactement contenant un carré ($k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$) ?

2. On note p_k la probabilité d'obtenir exactement les k mains contenant un carré. Rangez les nombres p_k par ordre croissant.

4. Nombre de garçons

Des études statistiques montrent que, lors d'une naissance, la probabilité d'avoir un garçon est d'environ 51 %.

Considérons une famille de quatre enfants, sans jumeaux. On suppose que les fécondations sont indépendantes.

Quelle est la probabilité pour que, dans cette famille, il y ait exactement 3 garçons ?

7

Manipulation du symbole $\sum_{i=1}^n$. Applications

Rappelons d'abord que si $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont des réels, on a, par définition :

$$\sum_{i=1}^n a_i = a_1 + a_2 + \dots + a_n.$$

7.1. Deux propriétés importantes

λ est un réel. $a_1, a_2, \dots, a_n$ sont des réels, ainsi que $b_1, b_2, \dots, b_n$. Vérifiez que :

$$1. \sum_{i=1}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=1}^n a_i + \sum_{i=1}^n b_i.$$

$$2. \sum_{i=1}^n (\lambda a_i) = \lambda \sum_{i=1}^n a_i.$$

7.2. Utilisation des deux propriétés

1. Démonstration du théorème de Koenig

X est une variable aléatoire sur Ω , prenant les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_n$. On pose $m = E(X)$ et $p_i = p(X = x_i) (i = 1, 2, \dots, n)$.

En utilisant le symbole $\sum_{i=1}^n$ et en justifiant les propriétés utilisées, démontrez que :

$$V(X) = \sum_{i=1}^n p_i x_i^2 - m^2.$$

COMMENTAIRE

Cette propriété est connue sous le nom de **théorème de Koenig**. Elle est usuellement énoncée sous la forme : $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$. Elle peut souvent être utile pour le calcul à la main de $V(X)$. Le calcul à la machine, bien sûr, est en général bien plus rapide.

2. Retour sur la loi binômiale : calcul de $E(X)$

Rappelons les notations et les résultats vus au T.P. 6.

X est une variable aléatoire prenant les valeurs $0, 1, 2, \dots, n$ et telle que :

$$p(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

où p et q sont deux réels de $[0; 1]$ tels que $p + q = 1$.

1. Montrez que, pour $k = 0, 1, 2, \dots, n$, on a :

$$k C_n^k = n C_{n-1}^{k-1}.$$

2. On pose : $A = \sum_{k=1}^n C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{n-k}$.

a/ Vérifiez que : $A = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k p^k q^{n-1-k}$.

b/ Déduisez-en que : $A = 1$.

3. a/ $E(X) = \sum_{k=1}^n k p C_n^k p^{k-1} q^{n-k}$. Pourquoi ?

b/ Déduisez de ce qui précède que :

$$E(X) = np.$$

Remarque : on peut démontrer que : $V(X) = npq$.

EXERCICES ET PROBLÈMES

Pour tester ses connaissances

Q.C.M.

Pour les exercices 1 à 7, une seule des réponses proposées est exacte.

Pour les exercices 1 à 4, l'urne considérée contient 10 boules : 5 blanches, 3 rouges et 2 noires.

1. On tire successivement, *sans remise*, 2 boules de l'urne. La probabilité de tirer une blanche puis une rouge est égale à :

a/ $\frac{3}{20}$ b/ $\frac{1}{6}$ c/ $\frac{1}{9}$

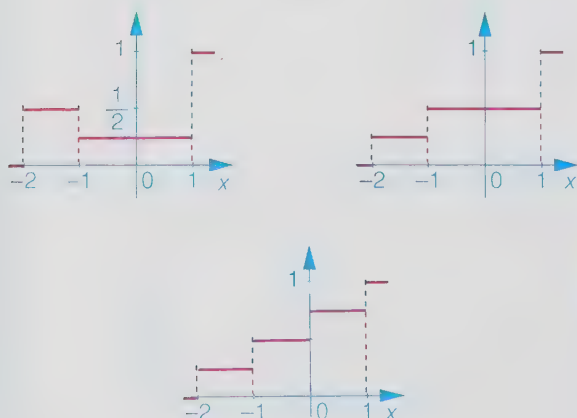
2. On tire *simultanément* 2 boules. La probabilité de tirer une boule blanche et une boule rouge est égale à :

a/ $\frac{3}{20}$ b/ $\frac{1}{6}$ c/ $\frac{1}{3}$

3. On tire successivement 2 boules *en remettant* dans l'urne la première boule tirée avant de tirer la seconde. La probabilité de tirer une blanche puis une rouge est égale à :

a/ $\frac{3}{20}$ b/ $\frac{1}{3}$ c/ $\frac{6}{5}$

4. On tire une boule de l'urne. On gagne 1 F si la boule tirée est blanche. On perd 1 F si elle est rouge et 2 F si elle est noire. X est la variable aléatoire associant à chaque tirage le gain algébrique correspondant (une perte est considérée comme un gain négatif). La fonction de répartition de X a l'allure suivante :



5. X est la variable aléatoire définie dans l'exercice 4.

L'espérance mathématique de X est égale à :

a/ 0. b/ $\frac{3}{10}$ c/ $-\frac{3}{10}$

6. X est la variable aléatoire définie dans l'exercice 4.

La variance de X est égale à :

a/ 0. b/ -2,3. c/.

7. p est une probabilité définie sur un ensemble d'éventualités Ω . A et B constituent une partition de Ω ; on a : $p(A) = \frac{1}{3}$. E est un événement tel

que : $p(E/A) = \frac{1}{2}$ et $p(E/B) = \frac{3}{4}$.

Alors, p(E) est égal à :

a/ 0,2. b/ $\frac{2}{3}$ c/ 0,6.

8. Un club de vacances comprend 100 touristes. Un sondage donne le résultat suivant :

	Homme	Femme
Pratique un sport	48	12
Ne pratique pas un sport	16	24

On choisit un touriste au hasard.

a/ Quelle est la probabilité que ce soit un homme ? une femme ? qu'il pratique un sport ? qu'il n'en pratique pas ? que ce soit un homme pratiquant un sport ?

b/ Sachant qu'il s'agit d'un homme, quelle est la probabilité qu'il pratique un sport ?

Pour s'entraîner

PROBABILITÉS GÉNÉRALES

9. On lance deux dés non pipés ; l'un est rouge et l'autre bleu. Une issue est représentée par un couple (r; b) où r et b sont respectivement les faces supérieures des dés rouge et bleu.

- a/** Déterminez les parties A, B et C, ensembles respectifs des couples tels que $r = b$; $b \geq r + 3$ et $r + b = 10$.
- b/** Calculez les probabilités $P(A)$, $P(B)$ et $P(C)$.
- c/** Quelle est la probabilité pour que les dés indiquent des résultats différents ?

10. Quelle est la probabilité pour qu'un joueur recevant une main de 5 cartes prises au hasard dans un jeu de 32 cartes, obtienne :

- a/** un roi ?
- b/** deux dames ?
- c/** quatre trèfles ?
- d/** au moins deux piques ?

11. Dans un lycée, 40 % des élèves ont déclaré aimer l'étude des Sciences naturelles, 60 % des Mathématiques, 15 % des Sciences naturelles et des Mathématiques. Quelle est la probabilité de tirer au hasard un élève de ce lycée qui :

- a/** aime les Sciences naturelles, mais pas les Mathématiques ?
- b/** aime les Mathématiques, mais pas les Sciences naturelles ?
- c/** n'aime ni les Sciences naturelles, ni les Mathématiques ?

12. À la douane

Un car se présente à une frontière ; le chauffeur sait que parmi ses 50 passagers, 10 tentent de frauder. Le douanier choisit au hasard 8 personnes pour les contrôler.

- a/** Quelle est la probabilité pour que les 8 personnes soient des fraudeurs ?
- b/** Quelle est la probabilité pour que, sur ces 8 personnes, l'une au moins soit un fraudeur ?

13. Une urne contient 12 boules noires et 2 boules blanches.

- a/** On tire simultanément 3 boules. Quelle est la probabilité d'avoir 2 boules blanches ? au moins une boule blanche ?
- b/** Combien de boules faut-il tirer, au minimum, pour que la probabilité d'avoir au moins une boule blanche soit supérieure à $\frac{5}{6}$?

14. Mots croisés

On veut construire une grille de mots croisés ayant 5 lignes et 5 colonnes. On numérote les cases de 1 à 25, et on écrit ces nombres sur des cartons, que l'on met dans une urne. On tire au hasard de celle-ci, huit cartons simultanément et on noircit les huit cases correspondantes.

a/ Quelle est la probabilité, lors d'une épreuve, d'obtenir une grille ainsi constituée : une case noire au centre du carré et une à chacun des sommets, les 3 autres cases noires étant à une place quelconque ?

b/ Quelle est la probabilité d'obtenir, lors d'une épreuve, une grille dont une colonne est composée de cases noires, les 3 autres cases noires étant à une place quelconque ?

15. Dans une urne, on place dix jetons sur lesquels sont écrits cinq nombres positifs et cinq nombres négatifs. On tire simultanément deux jetons de l'urne. Y a-t-il plus de chances que le produit des deux nombres écrits soit positif ou négatif ?

16. On considère tous les nombres de quatre chiffres formés par deux 1 et deux 2. On tire au hasard un de ces nombres. Déterminez la probabilité de tirer un nombre dont les deux 1 se suivent, sachant que le chiffre des unités est 2.

17. Tiercé

Douze chevaux sont au départ de la course du tiercé. Un joueur joue au hasard une combinaison de 5 chevaux.

a/ Quelle est la probabilité pour qu'il gagne le tiercé dans le désordre, c'est-à-dire que les trois chevaux arrivés en tête figurent parmi les cinq choisis par le joueur ?

b/ L'un des chevaux qu'il joue, ne participe pas à la course. Quelle est la probabilité pour que le joueur gagne le tiercé dans le désordre ?

c/ Même question lorsque deux des chevaux joués ne participent pas à la course.

18. Tirage au sort

Le programme d'une épreuve d'examen comporte 100 sujets. Trois d'entre eux, tirés au sort, sont proposés à chaque candidat. Un candidat n'ayant étudié que le quart des sujets du programme subit l'épreuve. Quelle est la probabilité pour que ce candidat ait étudié :

- a/** les trois sujets proposés ?
- b/** deux de ces sujets ?
- c/** aucun des trois ?
- d/** au moins l'un des trois ?

19. Fonction et probabilité

1. f est la fonction telle que :

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x}$$

Étudiez ses variations et tracez sa représentation graphique.

2. a/n est un naturel non nul, une urne électorale contient $n - 1$ bulletins « non » et $n + 1$ bulletins « oui ».

Pour réaliser un sondage sommaire, on prélève deux bulletins, chaque bulletin ayant la même probabilité d'être prélevé. Calculez la probabilité P_n de l'événement : « on a prélevé 2 bulletins portant des votes différents ».

b/ Utilisez la première question pour trouver le naturel n_0 pour lequel la probabilité P_{n_0} est maximum. Calculez P_{n_0} .

- 20.** Deux personnes, A et B, écrivent chacune, au hasard, un nombre entier de deux chiffres. Soit m le nombre écrit par A, n le nombre écrit par B. Tous les couples d'entiers (m, n) ($10 \leq m \leq 99, 10 \leq n \leq 99$) sont supposés équiprobables.

a/ Quelle est la probabilité pour que A et B écrivent le même nombre? En d'autres termes, calculer la probabilité de l'ensemble Δ des couples $(m, n) \in \Omega$ tels que $m = n$.

b/ Soit E l'ensemble des couples $(m, n) \in \Omega$ tels que $10 \leq m < 50$ et $10 \leq n < 50$. Calculez $p(E)$.

c/ Soit F l'ensemble des couples $(m, n) \in \Omega$ tels que $10 \leq m < 50$ ou $10 \leq n < 50$. Calculez $p(F)$.

d/ Soit G l'ensemble des couples $(m, n) \in \Omega$ tels que $m > n$. Soit G' l'ensemble des couples $(m, n) \in \Omega$, tels que $m \leq n$. Calculez $p(G)$ et $p(G')$.

VARIABLES ALÉATOIRES

- 21.** On lance deux dés et on lit la somme S des faces supérieures. Si $S \leq 5$ alors on perd 1 franc; si $6 \leq S \leq 9$ alors on gagne 0,4 franc, si $10 \leq S \leq 12$ alors on gagne 2 francs. G est la variable aléatoire qui à une issue associe le gain algébrique correspondant.

a/ Déterminez la loi de probabilité de G.

b/ Quelle est votre espérance de gain si vous jouez un grand nombre de fois à ce jeu?

c/ Quel est l'écart-type de G?

d/ Tracez la courbe de la fonction de répartition de G.

- 22.** Un dé pipé est tel que :

$$P(6) = 0,2; \quad P(1) = 0,1; \\ P(2) = P(3) = P(4) = P(5) = 0,175.$$

On lance le dé deux fois consécutives, on lit chaque fois le point sur la face supérieure et X est la variable aléatoire qui donne la somme des points marqués.

a/ Déterminez $E(X)$, $V(X)$, $\sigma(X)$.

b/ Tracez la courbe représentant la fonction de répartition de X.

- 23.** Les faces d'un dé cubique sont numérotées respectivement :

$$6; 6; 6; 5; 4; 3.$$

On suppose que, lors d'un lancer, la probabilité d'apparition de chaque face est kx , x étant le numéro de la face et k étant un nombre réel.

1. Déterminez k .

2. Une épreuve consiste à lancer le dé une fois. On considère la variable aléatoire X qui, à chaque épreuve, associe le nombre inscrit sur la face supérieure du dé.

a/ Quelle est la loi de probabilité de X?

b/ Déterminez la fonction de répartition F de X.

Représentez F.

c/ Calculez l'espérance mathématique de X.

d/ Calculez la variance et l'écart-type de X.

- 24.** On considère un dé rouge et un dé vert cubiques non pipés.

Le dé rouge comporte :

2 faces numérotées	— 1
2 faces numérotées	0
2 faces numérotées	1.

Le dé vert comporte :

1 face numérotée	0
3 faces numérotées	1
2 faces numérotées	2.

On lance simultanément les deux dés.

On note X la somme des points obtenus.

1. Déterminez la loi de probabilité de X.

2. Définissez F, fonction de répartition de X et construisez sa représentation graphique.

3. Calculez l'espérance mathématique et la variance de X.

- 25.** Une urne contient quatre boules vertes, deux blanches et une rouge, indiscernables au toucher. On tire au hasard et simultanément trois boules. Les tirages sont équiprobables.

1. Chaque boule verte tirée vaut 1 F, chaque blanche 2 F, la rouge 5 F.

Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque tirage de trois boules le gain en francs. Déterminez la loi de probabilité de X.

2. a/ Calculez l'espérance mathématique $E(X)$.

b/ Quelle valeur positive ou négative aurait-il fallu attribuer à chaque boule blanche pour que $E(X)$ soit nulle, les boules vertes et la boule rouge conservant leur valeur initiale?

26. Espérances

Une roulette comporte les numéros de 0 à 7. Il y a, au moins, deux façons distinctes de jouer à cette roulette.

1^{er} jeu : si le 2, le 5 ou le 6 sort on est quitte; si le 3 ou le 7 sort on perd 1 franc; si le 0 ou le 4 sort on perd 2 francs; si le 1 sort on gagne 3 francs.

X est la variable aléatoire associée à ces gains ou pertes.

2° jeu : si le 2 ou le 7 sort on est quitte ; si le 6 sort on perd 1 franc ; si le 1, le 3 ou le 5 sort on gagne 1 franc ; si le 0 ou le 4 sort on gagne 5 francs.

Y est la variable aléatoire associée à ce jeu. Déterminez les lois de probabilité de X et de Y ainsi que leurs espérances mathématiques.

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES. PROBABILITÉS TOTALES

27. Une urne contient 5 boules noires, 6 boules blanches et 2 boules rouges. On tire simultanément 3 boules.

a/ Quelle est la probabilité de tirer trois boules de couleurs différentes ?

b/ Sachant qu'une des boules tirées est noire, quelle est la probabilité que les deux autres soient rouges ?

28. Une urne contient 3 boules blanches et 3 boules noires indiscernables au toucher. On tire au hasard et simultanément trois boules.

a/ Calculez la probabilité de chacun des événements :

A : « obtenir au moins une boule blanche ».

B : « obtenir au moins deux boules noires ».

C : « obtenir au moins une boule blanche et une boule noire ».

b/ Calculez :

$$p(A|B), \quad p(A|C), \quad p(B|A),$$

$$p(B|C), \quad p(C|A), \quad p(C|B).$$

29. Jeu électronique

Pierre possède un jeu électronique. Une partie est un duel entre Pierre et un monstre choisi par la machine.

Deux choix équiprobables sont possibles :

La machine choisit soit le monstre M_1 , soit le monstre M_2 .

Les deux monstres sont de forces inégales et on admet que si Pierre combat M_1 la probabilité pour qu'il gagne la partie est $1/3$; si Pierre combat M_2 la probabilité pour qu'il gagne la partie est $1/4$.

1. Pierre joue une partie.

Soit G l'événement : « Pierre gagne la partie. » Calculez la probabilité de G.

2. Pierre joue une partie. Sachant qu'il a gagné, quelle est la probabilité qu'il ait joué contre M_2 ?

30. Sur le campus

Une enquête est faite auprès de la population étudiante d'un campus universitaire.

On note F la population féminine, I l'ensemble

des étudiants, garçons et filles, sachant jouer d'un instrument de musique.

L'enquête révèle que :

F représente 48 % de la population étudiante ; I représente 40 % de la population étudiante ; chez les étudiants du groupe I, 45 % sont des filles.

1. Quelle est la probabilité pour qu'un étudiant interrogé au hasard appartienne au groupe I ?

2. a/ On interroge un étudiant au hasard. Quelle est la probabilité pour que ce soit une fille sachant jouer d'un instrument de musique ?

b/ On interroge une fille du campus. Quelle est la probabilité pour que cette fille sache jouer d'un instrument de musique ?

31. Les deux maladies

Dans une population donnée, 15 % des individus ont une maladie M_a . Parmi les individus atteints de la maladie M_a , 20 % ont une maladie M_b et parmi les individus non atteints de la maladie M_a , 4 % ont la maladie M_b .

On prend un individu au hasard et on désigne respectivement par A et B les événements suivants :

« l'individu est atteint de la maladie M_a » ;

« l'individu est atteint de la maladie M_b ».

$\bar{A}$ désigne l'événement contraire de A.

a/ Donnez les valeurs de $P(A)$, $P(B|A)$ et $p(B|\bar{A})$.

b/ Calculez $P(B)$.

c/ Calculez $p(A|B)$.

32. Facteur Rhésus

Le sang humain est classé en 4 groupes distincts : A, B, AB et O.

Indépendamment du groupe, le sang peut posséder le facteur Rhésus. Si le sang d'un individu possède ce facteur il est dit de Rhésus positif (noté Rh^+), s'il ne possède pas ce facteur il est dit de Rhésus négatif (noté Rh^-). Sur une population P les groupes sanguins se répartissent d'après le tableau suivant :

A	B	AB	O
40 %	10 %	5 %	45 %

Pour chaque groupe la proportion d'individus possédant ou non le facteur Rhésus se répartit d'après le tableau suivant :

Groupe	A	B	AB	O
Rh^+	82 %	81 %	83 %	80 %
Rh^-	18 %	19 %	17 %	20 %

Un individu ayant du sang du groupe O et de Rhésus négatif est appelé un *donneur universel*.

1. **a/** Quelle est la probabilité pour qu'un individu pris au hasard dans la population P ait un sang du groupe O ?

b/ Quelle est la probabilité pour qu'un individu pris au hasard dans la population P soit un donneur universel ?

c/ Quelle est la probabilité pour qu'un individu pris au hasard dans la population P ait un sang de Rhésus négatif ?

2. Quelle est la probabilité pour qu'un individu pris au hasard parmi ceux possédant le facteur Rhésus négatif soit du groupe O ?

ÉVÉNEMENTS INDÉPENDANTS

33. On lance deux pièces. Montrez que les événements « *la première pièce donne face* » et « *les pièces donnent le même résultat* » sont indépendants.

34. On lance deux dés, l'un rouge et l'autre bleu.

a/ Les événements : « *le dé rouge donne un nombre pair* » et « *le dé bleu un nombre impair* » sont-ils indépendants ?

b/ Les événements « *la somme des points marqués est 11* » et « *le point marqué par le dé bleu n'est pas 5* » sont-ils indépendants ?

35. On lance successivement trois pièces.

a/ Montrez que les événements « *la première pièce indique face* » et « *une seule des deux autres pièces indique pile* » sont indépendants.

b/ Les événements : « *on a exactement deux pile* » et « *on a trois pile* » sont-ils indépendants ?

36. On lance deux dés (l'un est blanc et l'autre bleu).

Sachant que le dé blanc indique 4, quelle est la probabilité que l'autre dé indique un nombre supérieur à 4 ?

37. Une population se répartit en quatre classes selon deux caractères A et B. Le tableau suivant indique les fréquences relatives de chaque classe.

	B	$\bar{B}$
A	a	b
$\bar{A}$	c	d

Quelle relation simple doivent vérifier a , b , c , d pour que A et B soient indépendants ?

Pour chercher plus

38. Poker

Au poker, on distribue à un joueur X une main de 5 cartes d'un jeu de 32 cartes. Chaque carte a une valeur (par ordre croissant : 7, 8, 9, 10, valet, dame, roi, as) et une couleur (pique, cœur, carreau, trèfle).

Quelle est la probabilité pour que le joueur reçoive :

a/ une « *quinte floche* » (5 cartes consécutives de la même couleur) ;

b/ une « *couleur* » (5 cartes de la même couleur et ne constituant pas une « *quinte floche* ») ;

c/ un « *carré* » (4 cartes de la même valeur) ;

d/ un « *full* » (3 cartes de la même valeur et 2 autres cartes de la même valeur, par exemple 3 rois et 2 valets) ;

e/ une « *quinte* » (5 cartes consécutives et ne constituant pas une « *quinte floche* ») ;

f/ un « *brelan* » (3 cartes de la même valeur, les 5 cartes ne constituant pas un « *full* ») ;

g/ deux « *paires* » (2 cartes de la même valeur et 2 autres de la même valeur, par exemple : 2 as, 2 « 7 » et 1 valet) ;

h/ une « *paire* » (2 cartes de la même valeur, les 5 cartes n'entrant dans aucune des catégories précédentes).

39. Belote

Hervé, Éric, Muriel et Mathias jouent à la belote. Chacun reçoit une main de 8 cartes d'un jeu de 32 cartes (constitué comme dans l'exercice précédent). À chaque partie, une couleur est privilégiée et porte le nom d'*atout*. Quelle est la probabilité pour que, au cours d'une partie, Muriel ait :

a/ un « *carré* » et un seul (4 cartes de même valeur) ;

b/ un « *cent* » (au moins 5 cartes consécutives d'une même couleur) ;

c/ un « *cinquante* » (exactement 4 cartes consécutives d'une même couleur) ;

d/ la « *belote* » (roi et dame d'*atout*) ;

e/ un « *cinquante beloté* » (exactement 4 cartes d'*atout* consécutives, dont la dame et le roi) ;

f/ un « *cent beloté* » (au moins 5 cartes consécutives d'*atout*, dont la dame et le roi) ;

g/ une « *tierce belotée* » (exactement 3 cartes d'*atout* consécutives, dont la dame et le roi) ;

h/ une « *tierce belotée* » et un « *cent* ».

40. On dispose de trois urnes U_1 , U_2 , U_3 , chacune renfermant des boules blanches et noires indistinctes au toucher.

La probabilité de tirer une blanche est : $\frac{1}{2}$ dans

U_1 , $\frac{1}{3}$ dans U_2 , $\frac{1}{4}$ dans U_3 .

On tire au hasard une boule de chaque urne.

a/ Calculez les probabilités P_0 , P_1 , P_2 , P_3 d'obtenir respectivement 0, 1, 2 ou 3 boules blanches.

b/ On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de blanches obtenues.

Quelle est la fonction de répartition de X ?

Représentez-la.

41. Question d'adresse

Deux gamins, Gégé et Nanard, ont chacun deux pierres. Ils visent à tour de rôle une bouteille, Gégé en premier. Les probabilités

qu'ils l'atteignent sont respectivement $\frac{1}{3}$ et $\frac{1}{4}$.

Quelle est la probabilité pour que Gégé fasse mouche le premier?

42. Au service

Un joueur de tennis a pour probabilité $\frac{1}{3}$ de

servir correctement sa première balle.

Est-il exact d'affirmer que ce joueur est certain de servir au moins une fois correctement sa première balle en trois services?

43. Paris sur des figures

1. On tire simultanément 3 cartes d'un jeu de 32 cartes, X désigne la variable aléatoire égale au nombre de figures obtenues dans ce tirage. Tous les tirages étant supposés équiprobables, établissez la loi de probabilité de X puis calculez l'espérance mathématique de X .

2. On tire maintenant successivement trois cartes d'un jeu de 32 cartes, chaque carte tirée étant remise dans le jeu avant le tirage de la suivante (un tel tirage est appelé tirage avec remise). Y désigne la variable aléatoire égale au nombre de figures obtenues dans ce tirage. Tous les tirages étant supposés équiprobables, établissez la loi de probabilité de Y puis calculez l'espérance mathématique de Y .

3. Un joueur A parie d'obtenir au moins 2 figures en tirant simultanément 3 cartes d'un jeu de 32 cartes.

Un joueur B parie lui aussi d'obtenir au moins 2 figures en tirant avec remise 3 cartes d'un jeu de 32 cartes.

Tous les tirages étant supposés équiprobables, lequel des 2 joueurs a la plus grande probabilité de gagner son pari?

44. Soit n un élément de $\mathbb{N}^*$.

1. Une urne contient $(n + 1)$ boules vertes et $(n - 1)$ boules rouges. Un essai consiste à tirer une boule. On suppose l'équiprobabilité des

tirages. Si la boule est rouge, on perd; si elle est verte, on gagne.

Quelle est la probabilité P_1 de gagner? Quelle est celle P_2 de perdre?

2. L'urne contient maintenant $(n + 1)$ boules vertes, $(n - 1)$ boules rouges et 2 boules oranges. Un essai consiste à tirer une boule. Si elle est rouge, on perd; si elle est verte, on gagne; si elle est orange, on fait un autre essai sans remettre cette boule dans l'urne. Le jeu est donc terminé après trois essais au plus. Quelle est la probabilité P'_1 de gagner et celle P'_2 de perdre?

Comparez avec les résultats obtenus au 1.

45. Une variable aléatoire inhabituelle

Une boîte contient neuf carrés numérotés de 1 à 9; une deuxième boîte contient quatre disques numérotés de 1 à 4. On tire indépendamment un objet de chacune des deux boîtes. Les objets d'une même boîte sont supposés avoir la même probabilité d'être tirés.

a/ On considère la variable aléatoire X qui, à chaque tirage, associe la valeur absolue de la différence des nombres indiqués sur les objets tirés. Déterminez la loi de probabilité de X et son espérance mathématique.

b/ Déterminez et représentez graphiquement la fonction de répartition de X .

46. Quatre jetons à caser

On considère 4 cases numérotées de 1 à 4 et quatre jetons numérotés de 1 à 4. Un joueur place un jeton (et un seul) au hasard sur chacune des 4 cases.

1. Combien y a-t-il de répartitions possibles des 4 jetons dans les 4 cases?

2. On suppose par la suite chacune de ces répartitions équiprobable.

On dit qu'un jeton est « en place » quand il a été placé dans la case portant le même numéro que lui.

a/ On associe à chaque répartition des quatre jetons dans les quatre cases le nombre de jetons « en place ». On définit ainsi une variable aléatoire X .

Déterminez sa loi de probabilité et représentez sa fonction de répartition. Calculez $E(X)$.

b/ On suppose que le joueur gagne 5 francs s'il met tous les jetons « en place », qu'il gagne x francs s'il ne met aucun jeton « en place » et qu'il perd 1 franc dans les autres cas.

On désigne par Y le gain algébrique du joueur. Déterminez x pour que le jeu soit équitable (on dit qu'un jeu est équitable, lorsque l'espérance du gain est nulle).

47. Jeu de billes

On considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer trois billes numérotées 1, 2, 3, en direction de trois trous notés a , b , c ;

chaque bille entre dans un trou et chaque trou peut recevoir jusqu'à trois billes.

1. Quel est le nombre de possibilités ?

2. On suppose que les événements élémentaires liés à cette expérience sont équiprobables.

Quelle est la probabilité pour que :

a/ chaque trou reçoive une bille ?

b/ le trou a reçoive deux billes exactement ?

c/ chaque trou reçoive au maximum deux billes ?

3. On désigne par X la variable aléatoire représentant le nombre de billes tombées dans le trou a. Définissez la loi de probabilité de X et déterminez son espérance mathématique.

48. Médecins de nuit

Dans une certaine ville, il y a trois médecins. Quatre habitants malades la même nuit appellent un médecin au téléphone après avoir choisi au hasard l'un des trois médecins dans l'annuaire.

1. Quelle est la probabilité pour que les 4 malades appellent le même médecin ?

2. Quelle est la probabilité pour que les trois médecins soient appelés ?

49. Vaccins

Le quart d'une population a été vacciné contre une maladie contagieuse. Au cours d'une épidémie, on constate qu'il y a parmi les malades un vacciné pour quatre non vaccinés ; on sait de plus qu'au cours de cette épidémie, il y avait un malade sur douze parmi les vaccinés.

Quelle était la probabilité de tomber malade pour un individu non vacciné ?

50. Test

Un laboratoire fabrique un test pour détecter des souris malades.

Des essais montrent que 96 fois sur 100 le test est positif alors que la souris est malade. 94 fois sur 100 le test est négatif alors que la souris n'est pas malade.

Dans une population de souris comprenant 3 % de souris malades, on essaie le test sur une souris et on constate qu'il est positif.

Quelle est la probabilité que la souris soit malade ?

51. Dépistage

Pour prévenir l'extension d'une épidémie virale on décide de soumettre la population menacée à des tests. D'une façon générale le résultat de chaque test est positif pour les porteurs de virus, négatif pour les personnes qui ne sont pas atteintes ; mais il y a des exceptions. Le but de l'exercice est de comparer deux procédures de dépistage, l'une n'utilisant qu'un test, l'autre consistant en la succes-

sion de deux tests identiques réalisés indépendamment l'un de l'autre.

On choisit un individu X au hasard et on considère les événements suivants :

— V : « X est porteur du virus » ;

— T : « le test appliqué à X est positif ».

On donne $p(V) = 0,1$:

$$p(\bar{T}/V) = 0,05 \quad \text{et} \quad p(T/\bar{V}) = 0,03.$$

1. Dans cette question on étudie la procédure de contrôle qui n'utilise qu'un test.

Calculez la probabilité pour que X soit porteur du virus sachant que le test appliqué à X est négatif.

2. On effectue maintenant deux tests identiques dans des conditions qui garantissent l'indépendance des résultats.

Calculez la probabilité pour que X soit porteur du virus sachant que les deux tests ont été négatifs.

52. Probabilités et suite

1. Démontrez que, pour tout réel $x \geq 0$ et pour tout entier $n \geq 0$, on a :

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

2. On dispose de n boules numérotées de 1 à n . On les place toutes au hasard dans n boîtes (chaque boîte pouvant contenir de 0 à n boules). On désigne par P_n la probabilité que chaque boîte contienne exactement une

boule. Montrez que $P_n = \frac{n!}{n^n}$.

3. En utilisant le 1., montrez que, pour tout entier $n > 0$, on a :

$$\frac{P_n}{P_{n+1}} \geq 2.$$

Déduisez-en que $P_n \leq \frac{1}{2^{n-1}}$.

Quelle est la limite de P_n quand n tend vers $+\infty$?

53. n numéros n

Soit n un nombre entier supérieur à 1.

On considère une urne dans laquelle se trouvent :

une boule portant le numéro 1,
deux boules portant le numéro 2,
trois boules portant le numéro 3,
etc.,

n boules portant le numéro n .

1. Combien l'urne contient-elle de boules ?

2. On tire au hasard une boule dans l'urne, tous les tirages sont supposés équiprobables.

a/ On suppose dans cette question que n est pair.

Exprimez en fonction de n la probabilité pour que la boule tirée porte :

— un numéro pair,

— un numéro impair.

b/ Dans cette question, on suppose seulement que le nombre total de boules dans l'urne est 21. Quelle est la probabilité pour que la boule tirée porte un numéro strictement supérieur à 4 ?

54. Indépendance de trois événements

Par définition, dire que trois événements A, B, C sont indépendants, c'est affirmer que :

$$\begin{cases} p(A \cap B) = p(A)p(B) \\ p(A \cap C) = p(A)p(C) \\ p(B \cap C) = p(B)p(C) \end{cases} \quad [1]$$

$$\text{et : } p(A \cap B \cap C) = p(A)p(B)p(C). \quad [2]$$

Le but de l'exercice est de montrer que [2] ne se déduit pas de [1].

On lance deux pièces de monnaie discernables, A est l'événement « la première pièce donne face », B : « la deuxième pièce donne pile », C : « les deux pièces donnent ou toutes deux face ou toutes deux pile ».

1. Les relations [1] sont-elles vraies ?
2. La relation [2] est-elle vraie ?

55. Trois variables aléatoires

On considère une urne contenant trois boules identiques numérotées 1, 2 et 3. Trois tirages successifs avec remise sont effectués, et l'on appelle *a*, *b* et *c* les trois numéros ainsi obtenus ; tous les tirages sont équiprobables.

1. Soit *X* la variable aléatoire égale à la somme *a* + *b*. Étudiez la loi de probabilité de *X*.

2. Soit *Y* la variable aléatoire égale à 2*c*. Calculez la probabilité de l'événement *X* = *Y*.

3. On considère la variable aléatoire *Z* définie par :

si *X* = *Y*, alors *Z* = - 2 ;
si *X* > *Y*, alors *Z* = - 1 ;
si *X* < *Y*, alors *Z* = + 3.

Donnez la loi de probabilité de *Z*. Quelle est l'espérance mathématique de *Z* ?

Pour les exercices 56 à 59, il est conseillé de revoir les T.P. 5 et 6, page 102.

56. Une urne contient 12 boules blanches et 8 boules noires. On effectue des tirages dans cette urne, chacune des 20 boules ayant la même probabilité d'être tirée.

1. On tire simultanément 5 boules. Quelle est la probabilité d'obtenir :

a/ 3 boules blanches et 2 boules noires ?

b/ des boules de couleurs différentes ?

2. On tire successivement 5 boules, la boule tirée étant remise dans l'urne après chaque tirage. Quelle est la probabilité d'obtenir :

a/ 3 boules blanches et 2 boules noires, dans cet ordre ?

b/ 3 boules blanches et 2 boules noires dans un ordre quelconque ?

3. On tire successivement 3 boules en remettant la boule après chaque tirage si elle est blanche, en ne la remettant pas si elle est noire.

Quelle est la probabilité de tirer :

a/ exactement une boule blanche ?

b/ au moins une boule blanche ?

57. On lance une pièce cinq fois de suite. On suppose que la probabilité pour avoir face est de 0,48.

a/ Calculez la probabilité pour obtenir exactement deux fois face.

b/ Calculez la probabilité pour avoir au moins une fois face.

58. Surprenant ?

Un questionnaire à choix multiple (Q.C.M.) est constitué de 8 questions.

Pour chacune d'elles, 3 réponses sont proposées dont une seule est exacte.

Un candidat répond au hasard à chacune des 8 questions.

Quelle est la probabilité pour qu'il ait au moins 4 réponses exactes ?

59. Daltoniens

1. Cinq pour cent des hommes sont daltoniens ; ceci signifie que la probabilité pour qu'un homme pris au hasard soit daltonien est égale à $\frac{5}{100}$. On suppose que le nombre *N*

des hommes est suffisamment grand pour que une « légère » modification de *N* ne modifie pas cette probabilité.

Quelle est la probabilité pour que, sur cinq hommes pris au hasard, trois exactement soient daltoniens ?

2. Dans un groupe de 100 hommes, cinq sont daltoniens. On en choisit cinq. Quelle est la probabilité pour qu'il y ait exactement 3 daltoniens parmi eux ?

3. Expliquez pourquoi les résultats du 1. et du 2. sont différents.

5

Pour prendre un bon départ	114
Cours	117
T.P. d'application	124
Exercices et problèmes	129

Angles de vecteurs

Déterminants

Points cocycliques

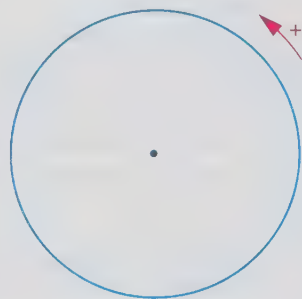
POUR PRENDRE UN BON DÉPART

Rappelons qu'un formulaire de trigonométrie se trouve à la page 309 du tome 1.

1 Orientation du plan

Le plan est orienté lorsqu'on a choisi le même sens de parcours sur tous les cercles; le sens choisi est dit positif ou direct; en général, on choisit comme sens direct celui indiqué sur la figure ci-contre.

Le plan étant orienté, un cercle trigonométrique est un cercle de rayon 1, orienté dans le sens direct.



2 Angle d'un couple de vecteurs non nuls dans le plan orienté

2.1. MESURES D'UN ANGLE DE VECTEURS. MESURE PRINCIPALE

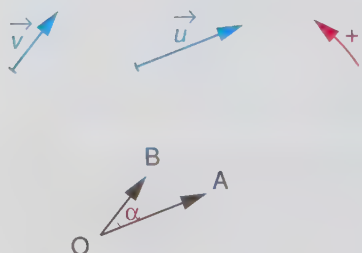
Dans le plan orienté, on associe à chaque couple de vecteurs non nuls un ensemble de mesures et on dit que ce sont les mesures de l'angle de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$.

Dans toute la suite, sauf mention expresse, ces mesures seront exprimées **en radians**. Par exemple, dans le cas de la figure ci-contre :

- l'orientation du plan est celle indiquée par la flèche rouge;

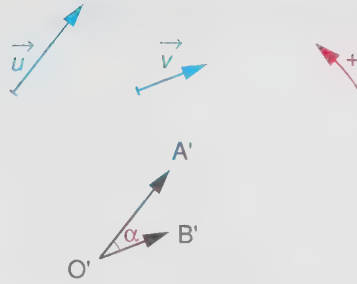
- $\vec{OA} = \vec{u}$, $\vec{OB} = \vec{v}$;

- si α est la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{AOB}$, $0 \leq \alpha \leq \pi$, alors, on convient que **chacun** des nombres $\alpha + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$, est une mesure de l'angle de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$.



On dit que α est la **mesure principale** de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$. Notez que la différence entre deux mesures quelconques est un multiple de 2π .

Autre exemple : dans le cas de la figure ci-contre, si α' est une mesure de l'angle géométrique $\widehat{A'O'B'}$, $0 \leq \alpha' \leq \pi$, toute autre mesure de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ est : $-\alpha' + 2k\pi$, avec $k \in \mathbb{Z}$. On dit que $(-\alpha')$ est la **mesure principale**.



Ainsi, parmi toutes les mesures d'un angle de vecteurs, il en est une et une seule qui est dans l'intervalle $[-\pi; +\pi]$, et c'est cette mesure qu'on appelle **mesure principale**.

La valeur absolue de la mesure principale de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ est la mesure de l'angle géométrique déterminé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

2.2. ÉGALITÉ DE DEUX ANGLES DE VECTEURS

Dire que deux angles de vecteurs sont égaux signifie qu'ils ont même mesure principale.

Il en résulte qu'ils ont alors même ensemble de mesures.

Nous écrivons alors : $(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}', \vec{v}')$ (modulo 2π),

ou : $(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}', \vec{v}') [2\pi]$.

Conformément à l'usage, nous confondrons un angle et sa mesure. Par exemple, l'écriture $(\vec{u}, \vec{v}) = -\frac{\pi}{3} [2\pi]$ signifie qu'une mesure de $(\vec{u}, \vec{v})$ est $-\frac{\pi}{3}$. Toutes les autres

mesures sont alors $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

2.3. LA RELATION DE CHASLES

Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$:

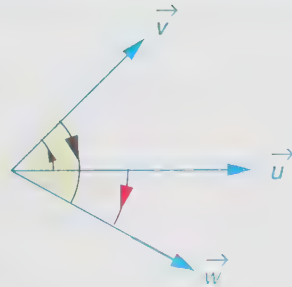
$$(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w}).$$

Cette relation signifie que la somme d'une mesure quelconque de $(\vec{u}, \vec{v})$ et d'une mesure quelconque de $(\vec{v}, \vec{w})$ est une mesure de $(\vec{u}, \vec{w})$.

Mais la somme des mesures principales n'est pas, en général, la mesure principale de $(\vec{u}, \vec{w})$. Par exemple, si $(\vec{u}, \vec{v})$ et $(\vec{v}, \vec{w})$ ont chacun $-\frac{2\pi}{3}$ pour

mesure principale, alors $-\frac{4\pi}{3}$ est une mesure

de $(\vec{u}, \vec{w})$, mais ce n'est pas sa mesure principale car $-\frac{4\pi}{3}$ n'est pas dans l'intervalle $[-\pi; +\pi]$.



De la relation de Chasles, nous déduisons que :

$$(\vec{u}, \vec{v}) = -(\vec{v}, \vec{u}).$$

2.4. ANGLE DE VECTEURS COLINÉAIRES

Dire que les vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires équivaut à dire que $(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ ou $(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$, modulo 2π .



2.5. COSINUS ET SINUS DE L'ANGLE DE DEUX VECTEURS NON NULS

Par définition, le cosinus (resp. le sinus) de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ est le cosinus (resp. le sinus) de sa mesure principale α exprimée en radians.

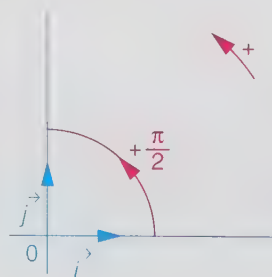
Remarque : $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \cos(\vec{v}, \vec{u})$ et $\sin(\vec{u}, \vec{v}) = -\sin(\vec{v}, \vec{u})$.

3 Repère orthonormal direct. Base orthonormale directe

3.1. DÉFINITIONS

Une unité de longueur étant choisie, un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est orthonormal si les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont unitaires, $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$, et si les droites $(O; \vec{i})$ et $(O; \vec{j})$ sont perpendiculaires.

Dans le plan orienté, si le repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est tel que $(\vec{i}, \vec{j}) = +\frac{\pi}{2}$, on dit qu'il est direct et que la base $(\vec{i}, \vec{j})$ est orthonormale directe.

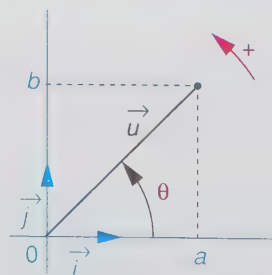


3.2. EXPRESSION DES COORDONNÉES D'UN VECTEUR $\vec{u}$ EN FONCTION DE $\theta = (\vec{i}, \vec{u})$

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormal direct; $\vec{u}$ est un vecteur non nul de coordonnées $(a; b)$. Posons $\theta = (\vec{i}, \vec{u})$.

Alors : $a = \|\vec{u}\| \cos \theta$, $b = \|\vec{u}\| \sin \theta$.

Ce résultat est redémontré au chapitre 7, page 161.



COURS

1 Déterminant d'un couple de vecteurs. Applications

1.1. DÉFINITION

Nous avons montré dès la classe de Seconde que la colinéarité de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, dont on connaît les coordonnées $(x; y)$, $(x'; y')$ dans une base $(\vec{i}; \vec{j})$, se traduit par $xy' - x'y = 0$. Et nous avons dit que le nombre $xy' - x'y$ est le déterminant du couple $(\vec{u}, \vec{v})$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

DÉFINITION 1

Le déterminant du couple $(\vec{u}, \vec{v})$ dans une base $(\vec{i}, \vec{j})$ est le nombre $xy' - x'y$, où $(x; y)$ et $(x'; y')$ sont respectivement les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$.

Notation : ce déterminant est noté $\det_{(\vec{i}, \vec{j})}(\vec{u}; \vec{v})$ ou plus simplement, lorsque la base est déjà précisée : $\det(\vec{u}; \vec{v})$.

On écrit :
$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}.$$

Le nombre $xy' - x'y$ s'obtient alors par « produit en croix » dans l'ordre des flèches

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ \swarrow & \searrow \end{vmatrix}$, et par soustraction : $(1) - (2)$.

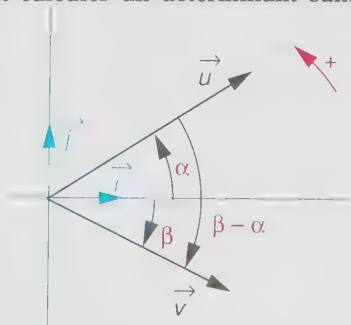
Remarque : il résulte de la définition que : $\det(\vec{u}, \vec{v}) = -\det(\vec{v}, \vec{u})$.

1.2. EXPRESSION DU DÉTERMINANT DANS LE PLAN ORIENTÉ

Nous allons voir que dans le plan orienté on peut calculer un déterminant sans utiliser de coordonnées.

Considérons dans le plan orienté, un repère **orthonormal direct** $(O; \vec{i}, \vec{j})$, et deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, non nuls, dont les coordonnées respectives dans la base orthonormale directe $(\vec{i}; \vec{j})$ sont : $(a; b)$, $(c; d)$.

$$\begin{aligned}\vec{u} &= a\vec{i} + b\vec{j} \\ \vec{v} &= c\vec{i} + d\vec{j}.\end{aligned}$$



Le déterminant de $(\vec{u}; \vec{v})$ dans la base $(\vec{i}; \vec{j})$ est donc : $ad - bc$.

Posons : $\alpha = (\vec{i}, \vec{u})$ et $\beta = (\vec{i}, \vec{v})$.

D'après le paragraphe 3.2. de « Pour prendre un bon départ » (voir p. 116) :

$$a = \|\vec{u}\| \cos \alpha \quad b = \|\vec{u}\| \sin \alpha$$

$$c = \|\vec{v}\| \cos \beta \quad d = \|\vec{v}\| \sin \beta.$$

$$\begin{aligned}\text{Donc, } ad - bc &= \|\vec{u}\| \cos \alpha \times \|\vec{v}\| \sin \beta - \|\vec{u}\| \sin \alpha \times \|\vec{v}\| \cos \beta \\ &= \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| (\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta) \\ &= \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\beta - \alpha).\end{aligned}$$

Or, $\beta - \alpha$ est une mesure de l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$: en effet, d'après la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}(\vec{u}, \vec{v}) &= (\vec{u}, \vec{i}) + (\vec{i}, \vec{v}) \\ &= -(\vec{i}, \vec{u}) + (\vec{i}, \vec{v}) = -\alpha + \beta.\end{aligned}$$

Donc, $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v})$.

Remarque : lorsque l'un des vecteurs au moins est nul, nous poserons $\det(\vec{u}, \vec{v}) = 0$, en conformité avec la définition 1, car alors : $xy' - yx' = 0$.

THÉORÈME 1

Dans toute base orthonormale directe du plan orienté, le déterminant du couple $(\vec{u}, \vec{v})$, avec $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls, est égal à :

$$\|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v}).$$

COMMENTAIRES

1. Le déterminant dépend de l'orientation choisie; en effet, si α est une mesure de $(\vec{u}, \vec{v})$ pour une orientation du plan, alors $-\alpha$ est une mesure de $(\vec{u}, \vec{v})$ pour l'autre orientation possible; et $\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$.

Le déterminant est donc transformé en son opposé par changement d'orientation du plan.

2. Le déterminant dépend aussi de l'unité de longueur choisie, car tel est le cas pour la norme d'un vecteur.

1.3. COLINÉARITÉ DE DEUX VECTEURS

Rappelons le résultat établi en classe de Seconde :

THÉORÈME 2

Dire que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires équivaut à dire que le déterminant du couple $(\vec{u}, \vec{v})$, dans n'importe quelle base, est nul.

Remarque : nous pouvons retrouver ce résultat, dans le cas de bases orthonormales directes. En effet, dans ce cas, dire que le déterminant $(\vec{u}, \vec{v})$ est nul équivaut à dire, lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls, que $\sin(\vec{u}, \vec{v}) = 0$, donc que $(\vec{u}, \vec{v}) = 0$, ou $(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$, donc que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires (paragraphe 2.4., page 116).

Lorsque l'un des vecteurs est nul, les deux vecteurs sont alors colinéaires et $\det(\vec{u}; \vec{v}) = 0$.

COMMENTAIRE

Lien avec le déterminant d'un système de deux équations linéaires à deux inconnues.

Soit le système (S) d'inconnue le couple $(x; y)$:

$$(S) \begin{cases} ax + by = k \\ a'x + b'y = k'. \end{cases}$$

Soit $(O; \vec{i}, \vec{j})$ un repère.

Notons $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, les vecteurs qui dans ce repère ont pour coordonnées respectives $(a; a')$, $(b; b')$ et $(k; k')$.

Alors, dire que $(x; y)$ est solution de (S) équivaut à dire que l'on a : $x\vec{u} + y\vec{v} = \vec{w}$.

Cherchons donc les couples $(x; y)$ de réels tels que l'on ait : $x\vec{u} + y\vec{v} = \vec{w}$. Supposons $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires; alors on sait que $(O; \vec{u}, \vec{v})$ est un repère du plan, et donc que tout vecteur t s'écrira de manière unique : $t = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$; en particulier, il existe un couple unique $(x; y)$ tel que $\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}$.

Dans le cas où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, le système (S) a donc une solution et une seule. Or d'après le théorème 2, dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, équivaut à dire que $\det(\vec{u}; \vec{v}) \neq 0$; or $\det(\vec{u}; \vec{v}) = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - ba'$, et nous retrouverons le résultat connu : si $ab' - a'b \neq 0$ le système (S) a une solution et une seule. Dans les classes antérieures, nous avons appelé $ab' - a'b$ le déterminant du système (S).

EXEMPLE D'APPLICATION : équation d'une droite.

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, la droite d passe par le point $A(3; 1)$ et a pour direction celle du vecteur $\vec{u}(2; 1)$. Comment trouver une équation de d ?

Dire que le point $M(x; y)$ appartient à d équivaut à dire que les vecteurs $\vec{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires, donc que $\det(\vec{u}; \vec{AM}) = 0$. Or, les coordonnées de $\vec{AM}$ sont

$$(x-3; y-1) \text{ et } \det(\vec{u}, \vec{AM}) = \begin{vmatrix} 2 & x-3 \\ 1 & y-1 \end{vmatrix} = (x-3) - 2(y-1).$$

Une équation de la droite d est donc : $x - 2y - 2 = 0$.

1.4. AIRE D'UN TRIANGLE ET AIRE D'UN PARALLÉLOGRAMME

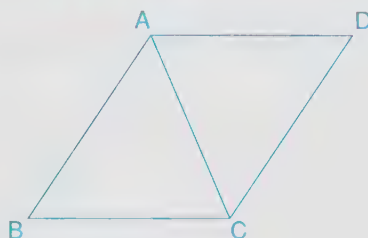
Nous avons vu en classe de Première que l'aire S d'un triangle ABC est telle que :

$$2S = bc \sin \hat{A} = ca \sin \hat{B} = ab \sin \hat{C},$$

avec $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$, $\hat{A} = \widehat{BAC}$,

$\hat{B} = \widehat{CBA}$, $\hat{C} = \widehat{BCA}$.

Il résulte directement de l'expression du déterminant et de celle du sinus d'un angle de vecteurs que :



$$\text{aire}(ABC) = \frac{1}{2} |\det(\vec{BC}, \vec{BA})| = \frac{1}{2} |\det(\vec{AB}, \vec{AC})| = \frac{1}{2} |\det(\vec{CA}, \vec{CB})|.$$

L'aire du parallélogramme ABCD est égale à $2S$, où S est l'aire du triangle ABC ou ADC ,

donc : aire du parallélogramme ABCD = $|\det(\vec{AB}, \vec{AC})|$.

Dans cette formule, le déterminant est calculé dans une base orthonormale directe.

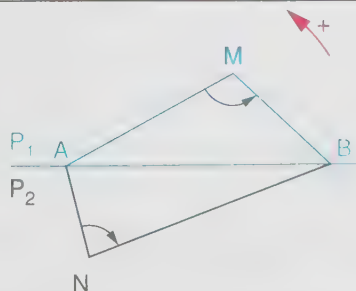
2

Angles directs, triangles et quadrilatères directs, dans le plan orienté

2.1. ANGLES DIRECTS

Un angle de vecteurs est direct si sa mesure appartient à $]0; \pi[$ et indirect si elle appartient à $]-\pi; 0[$.

Dans le cas de la figure, pour tout M du demi-plan P_1 , l'angle $(\vec{MA}, \vec{MB})$ est direct (sa mesure principale est dans $]0; \pi[$), pour tout point N du demi-plan P_2 , l'angle $(\vec{NA}, \vec{NB})$ est indirect (sa mesure principale est dans $]-\pi; 0[$).

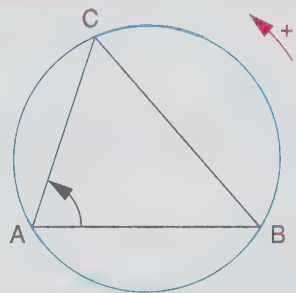


2.2. TRIANGLES ET QUADRILATÈRES DIRECTS

Par définition, nous disons qu'un triangle ABC est direct lorsque l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est direct, c'est-à-dire lorsque la mesure principale de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est positive, donc égale à $\widehat{BAC}$.

En d'autres termes, dire que le triangle ABC est direct, c'est dire que sur le cercle circonscrit à ce triangle, les points A, B, C se succèdent dans le sens direct.

On définit de même un quadrilatère de sens direct.



3 Angles de vecteurs dont les mesures diffèrent d'un multiple de π

Pour exprimer plus commodément la colinéarité de deux vecteurs, la cocyclicité de quatre points, nous introduisons, conformément au programme, les « angles de vecteurs modulo π ». Cette notion ne sera plus utilisée dans les « Cours » des autres chapitres.

3.1. DÉFINITION ET EXEMPLES

DÉFINITION 2

Dire que $(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}', \vec{v}')$ (modulo π) signifie :

- ou bien que $(\vec{u}, \vec{v})$ et $(\vec{u}', \vec{v}')$ ont la même mesure principale;
- ou bien que leurs mesures principales diffèrent de π .

EXEMPLES

1. Si $(\vec{u}, \vec{v})$ a pour mesure principale $\frac{\pi}{4}$, et si $(\vec{u}', \vec{v}')$ a pour mesure principale $-\frac{3\pi}{4}$, alors :

$$(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}', \vec{v}') \text{ (modulo } \pi), \text{ car } \frac{\pi}{4} - \left(-\frac{3\pi}{4}\right) = \pi.$$

2. Si $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{2\pi}{3} [2\pi]$, et si $(\vec{u}', \vec{v}') = \frac{5\pi}{3} [2\pi]$,

alors : $(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}', \vec{v}') \text{ (modulo } \pi).$

En effet, la mesure principale de $(\vec{u}, \vec{v})$ est $\frac{2\pi}{3}$, celle de $(\vec{u}', \vec{v}')$ est $-\frac{\pi}{3}$ et

$$\frac{2\pi}{3} - \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \pi.$$

3. Si $(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{13\pi}{4} [2\pi]$ et si $(\vec{u}', \vec{v}') = \frac{5\pi}{4} [2\pi]$,

alors : $(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}', \vec{v}') \text{ (modulo } \pi)$

car $(\vec{u}, \vec{v})$ et $(\vec{u}', \vec{v}')$ ont tous deux $\frac{\pi}{4}$ pour mesure principale.

Remarque : dans les exemples 1. et 2., les angles $(\vec{u}, \vec{v})$ et $(\vec{u}', \vec{v}')$ ne sont pas égaux. Dans l'exemple 3., ils le sont.

3.2. CONSÉQUENCES

Il résulte directement des définitions que :

- si : $(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}', \vec{v}') \pmod{2\pi}$, alors $(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}', \vec{v}') \pmod{\pi}$.

En effet, $(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}', \vec{v}') \pmod{2\pi}$ signifie que $(\vec{u}, \vec{v})$ et $(\vec{u}', \vec{v}')$ ont la même mesure principale.

- La relation de Chasles, vraie modulo 2π , reste donc encore vraie modulo π .

Remarque : notez que $(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}', \vec{v}') \pmod{\pi}$ n'implique pas $(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}', \vec{v}') \pmod{2\pi}$ (voir les exemples ci-dessus).

3.3. INTÉRÊT DE LA DÉFINITION 2

Cette définition permet d'exprimer plus simplement certains résultats.

- Il en est ainsi, par exemple, de la colinéarité de deux vecteurs non nuls. Nous avons vu, page 116, que la colinéarité de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ **non nuls** se traduit par $(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \pmod{2\pi}$, ou $(\vec{u}, \vec{v}) = \pi \pmod{2\pi}$.

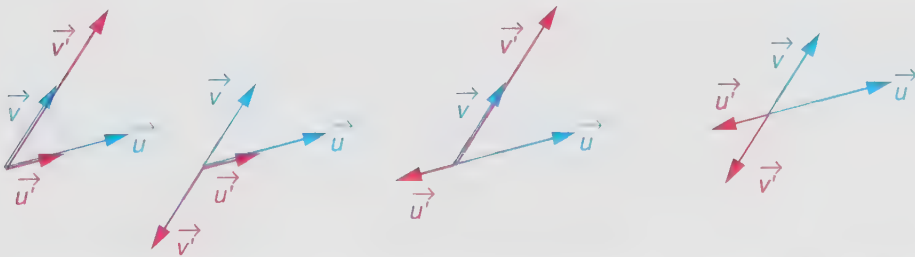
Avec la définition 2, nous pouvons énoncer maintenant le résultat suivant :

Dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** équivaut à dire que :

$$(\vec{u}, \vec{v}) = 0, \text{ modulo } \pi.$$

- De même, nous pourrions énoncer le résultat suivant :

Lorsque $\vec{u}'$ est colinéaire à $\vec{u}$: $(\vec{u}' = \lambda \vec{u})$ et lorsque $\vec{v}'$ est colinéaire à $\vec{v}$: $(\vec{v}' = \lambda' \vec{v})$, alors $(\vec{u}', \vec{v}') = (\vec{u}, \vec{v}) \pmod{\pi}$.



Conséquence pratique : lorsqu'on travaille **modulo π** , on peut remplacer $(\vec{u}, \vec{v})$ par n'importe quel couple $(\vec{u}', \vec{v}')$ avec $\vec{u}'$ colinéaire à $\vec{u}$ et $\vec{v}'$ colinéaire à $\vec{v}$.

Remarquez que cela est faux lorsqu'on travaille modulo 2π .

4

Le théorème de l'angle inscrit. Application

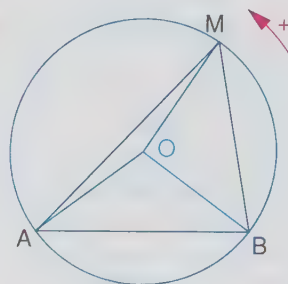
4.1. LE THÉORÈME DE L'ANGLE INSCRIT

THÉORÈME 3

A, M, B sont trois points distincts d'un cercle de centre O.

Alors,

$$2(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \pmod{2\pi}.$$



Démontrons ce théorème. Toutes les égalités qui suivent sont modulo 2π .

D'après la relation de Chasles, $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}) + (\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MB})$. [1]

Or, les triangles AOM et BOM sont isocèles en O, donc :

$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}) = (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AM}) \text{ et } (\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BO}).$$

$$\text{Donc, } (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}) + (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}) = (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AM}) + (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}).$$

$$\text{Mais } (\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AM}) = (-\overrightarrow{OA}, -\overrightarrow{MA}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{MA}),$$

$$\text{d'où : } (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}) + (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{MA}) + (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MO}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{MO}).$$

De même, nous obtiendrions : $(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{OB})$, et d'après [1] :

$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{MO}) + (\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \pmod{2\pi}.$$

Remarque : notons ω la mesure principale de $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ et α la mesure principale de $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$. Nous obtenons, d'après le théorème 3, $2\alpha = \omega \pmod{2\pi}$, c'est-à-dire :

$$2\alpha = \omega + 2k\pi, \text{ d'où } \alpha = \frac{\omega}{2} + k\pi.$$

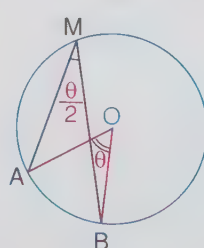
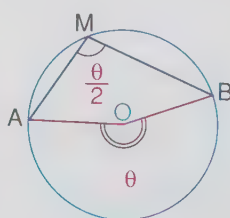
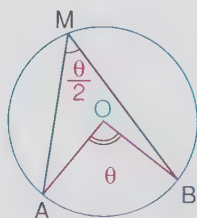
Puisque α et $\frac{\omega}{2}$ sont dans l'intervalle $[-\pi; +\pi]$, k ne peut prendre que les valeurs 0, 1, ou -1.

$$\text{Donc, } \alpha = \frac{\omega}{2}, \text{ ou } \alpha = \frac{\omega}{2} + \pi, \text{ ou } \alpha = \frac{\omega}{2} - \pi.$$

COMMENTAIRE

Avec les *angles géométriques*, nous obtenons les résultats indiqués par les figures ci-dessous. L'utilisation des angles de vecteurs permet de ne pas distinguer tous ces cas.

L'angle $\widehat{AMB}$ est dit inscrit dans le cercle, l'angle $\widehat{AOB}$ est dit angle au centre.



4.2. ANGLES INSCRITS INTERCEPTANT LE MÊME ARC

Si nous supposons maintenant les deux points A et B choisis et fixés sur le cercle, le théorème 3 reste valable quel que soit le point M du cercle, distinct de A et de B. Ainsi, pour deux points M et N du cercle, la mesure principale de $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ est soit $\frac{\omega}{2}$, soit $\frac{\omega}{2} + \pi$, soit $\frac{\omega}{2} - \pi$, et il en est de même de $(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB})$.

Il en résulte, soit qu'ils ont la même mesure principale, soit que leurs mesures principales diffèrent de π , et donc, d'après la définition 2 que :

$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}) \text{ (modulo } \pi).$$

THÉORÈME 4

A et B sont deux points distincts d'un cercle.

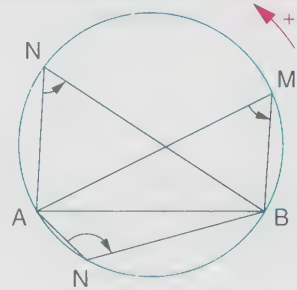
Pour tous points M et N du cercle, distincts de A et de B :

$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}) \text{ (modulo } \pi).$$

COMMENTAIRE

Les angles $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ et $(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB})$ ont même mesure principale lorsque M et N sont dans le même demi-plan de frontière (AB), et ils ont des mesures principales qui diffèrent de π lorsque M et N ne sont pas dans le même demi-plan de frontière (AB).

Les angles géométriques $\widehat{AMB}$ et $\widehat{ANB}$ sont égaux ou supplémentaires.



4.3. POINTS COCYCLIQUES

THÉORÈME 5

M, N, A, B sont quatre points tels que trois d'entre eux ne sont pas alignés, et tels que :

$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}) \text{ (modulo } \pi).$$

Alors, M, N, A et B sont sur un même cercle.

Conformément au programme, ce théorème est démontré en Travaux pratiques, voir le T.P. 1 d'application.

TRAVAUX PRATIQUES D'APPLICATION

1 Points cocycliques

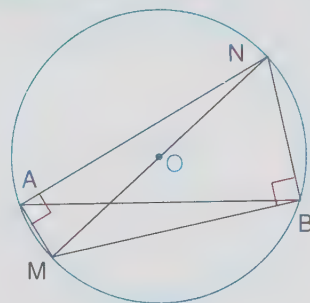
Dire que **des points sont cocycliques** signifie qu'ils appartiennent à un même cercle.

Le but de ce T.P. est de trouver une condition nécessaire et suffisante pour que quatre points soient cocycliques.

1.1. Préliminaire : angles à côtés perpendiculaires

A, B, M, N sont quatre points du plan, distincts et tels que les droites (MA) et (NA) d'une part, (MB) et (NB) d'autre part, soient perpendiculaires.

Les angles $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ et $(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB})$ sont dits à côtés perpendiculaires.



a/ Pourquoi les points A, B, M, N appartiennent-ils à un même cercle ?

b/ Déduisez-en que :

$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}) \pmod{\pi}.$$

On énonce le résultat suivant :

Si les angles $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})$ et $(\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB})$ sont à côtés perpendiculaires, alors :

$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{NA}, \overrightarrow{NB}) \pmod{\pi}.$$

1.2. Angle inscrit avec un côté tangent

1. $\mathcal{C}$ est un cercle de centre O ; A et B sont deux points distincts de ce cercle. T est un point de la tangente en A à $\mathcal{C}$, et distinct de A. De plus I est le milieu de [AB]. On dit parfois que $(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB})$ est un angle inscrit avec un côté tangent.

a/ En utilisant 1.1., montrez que :

$$(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OI}) \pmod{\pi}.$$

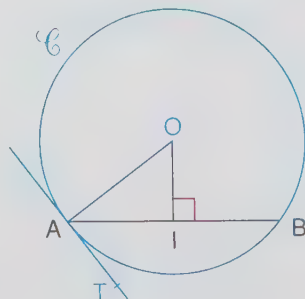
b/ Déduisez-en que :

$$(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2} (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \pmod{\pi}.$$

c/ M est un point de $\mathcal{C}$ distinct de A et de B.

Pourquoi a-t-on :

$$(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \pmod{\pi}?$$



Nous énonçons alors le résultat suivant :

Quels que soient les points M, A, B, distincts deux à deux d'un cercle $\mathcal{C}$ de centre O, et quel que soit le point T de la tangente en A au cercle, $T \neq A$:

$$(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \text{ (modulo } \pi).$$

2. Réciproquement, dans la même situation, supposons que T' soit un point distinct de A, et tel que :

$$(\overrightarrow{AT'}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \text{ (modulo } \pi).$$

Le point T' est-il sur la tangente en A au centre ?

En utilisant la relation de Chasles, montrez que :

$$(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AT'}) = 0 \text{ (modulo } \pi),$$

et concluez sur la position du point T'.

L'ensemble des points T, distincts de A, tels que :

$$(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \text{ (modulo } \pi),$$

avec $M \in \mathcal{C}$, est la tangente en A au cercle $\mathcal{C}$, privée de A.

1.3. Points cocycliques

A, B, C, D sont quatre points distincts deux à deux.

Supposons que les points A, B, C ne soient pas alignés. Nous savons, d'après le théorème 5 que si D appartient au cercle qui passe par A, B, C, alors :

$$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) \text{ (modulo } \pi).$$

Nous nous proposons d'étudier la proposition réciproque, à savoir : que peut-on dire d'un point D tel que :

$$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) \text{ [modulo } \pi]$$

sachant que A, B et C ne sont pas alignés ?

1. Vérifiez que les points A, B et D ne sont pas alignés.

2. Notons $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit à ABC et $\mathcal{C}'$ le cercle circonscrit à ABD. Notons T un point distinct de A de la tangente à $\mathcal{C}$ en A.

a/ Montrez que $(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})$ [modulo π].

b/ Déduisez-en que T est sur la tangente en A au cercle $\mathcal{C}'$ (voir le point 2 de 1.2.).

c/ Déduisez-en que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont confondus.

Nous avons démontré, pour quatre points dont trois ne sont pas alignés, que « A, B, C, D sont cocycliques » **implique** « $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})$ [π] », et réciproquement que « $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB})$ [π] » **implique** « A, B, C, D sont cocycliques ».

Les deux propositions sont donc équivalentes. D'où le résultat suivant :

A, B, C, D sont quatre points tels que trois d'entre eux ne sont pas alignés.

Dire que A, B, C et D sont cocycliques équivaut à dire que :

$$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) \text{ [modulo } \pi].$$

2

Ensemble des points M tels que

$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha \text{ (modulo } \pi)$$

A et B sont deux points donnés, α un réel donné.

Le but ici est de déterminer l'ensemble E des points M tels que

$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha \text{ (modulo } \pi)$, et de construire cet ensemble pour quelques valeurs de α .

2.1. Recherche de cet ensemble

1. Supposons que α soit un multiple de π ; $\alpha = k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

Vérifiez que l'ensemble E est la droite (AB) privée des points A et B.

2. Supposons que α ne soit pas un multiple de π .

a/ Choisissons par exemple $\alpha = \frac{\pi}{3}$. Placez un point M tel que $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \alpha \text{ (modulo } \pi)$.

b/ En utilisant les résultats du T.P. 1, montrez que E est le cercle circonscrit au triangle ABM, hormis les points A et B.

c/ Sans utiliser le point M, mais en utilisant la droite (AT), telle que $(\overrightarrow{AT}, \overrightarrow{AB}) = \frac{\pi}{3}$, construisez le centre de ce cercle (voir T.P. 1, paragraphe 1.2.).

d/ Quel est l'ensemble E' des points M tels que :

$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \frac{\pi}{3} \text{ (modulo } 2\pi)?$$

3. Reprenez les questions du 2., avec :

$$\alpha = -\frac{\pi}{2}; \quad \alpha = \frac{\pi}{4}; \quad \alpha = \frac{3\pi}{4}.$$

2.2. Application à la Topographie

La Topographie a pour but de représenter, sur une feuille plane, une portion plus ou moins grande de la surface terrestre. Un topographe est celui qui dresse la « carte » d'une région.

Pour ce faire, il dispose d'une planchette sur laquelle est collée sa feuille de dessin, et sur cette feuille se trouvent matérialisés par des points certains repères naturels tels que clochers, châteaux d'eau, pylônes électriques, etc.

Il arrive parfois que le topographe, situé en un lieu M du terrain, veuille placer (approximativement) ce point M sur sa feuille de dessin. En termes de métier, on dit qu'il « se relève ».

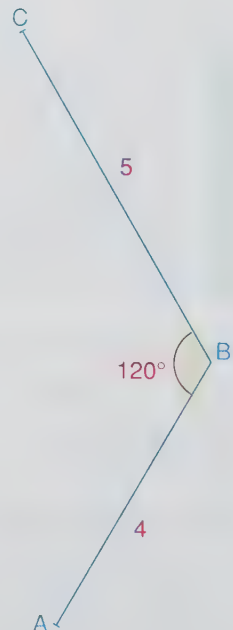
Il opère alors ainsi : il mesure les angles entre sa position M et des points A, B, C déjà matérialisés sur sa feuille. Puis, en utilisant les résultats du 2.1., il place le point M.

Supposez que le topographe voit, du point M où il est, trois clochers, A, B, C tels que (en degrés) :

$$\widehat{AMB} = 60, \quad \widehat{BMC} = 45.$$

Supposez que, sur sa feuille, les points A, B, C soient disposés comme ci-contre (l'unité de longueur est le centimètre).

Où se trouve le point M ?



COMMENTAIRE

Pour dresser les cartes, on utilise de plus en plus les photographies aériennes, mais certains travaux nécessitent d'aller encore sur le terrain, et parfois encore de « se relever ».

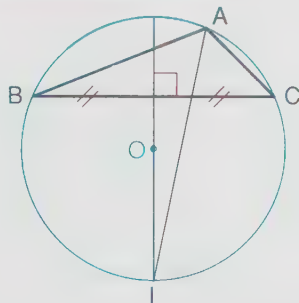
3

Quelques applications de la cocyclicité

Les cinq exercices sont indépendants.

3.1. Construction sans rapporteur d'une bissectrice

1. $\widehat{BAC}$ est un angle inscrit dans un cercle de centre O . La médiatrice de $[BC]$ coupe en I l'arc intercepté par l'angle $\widehat{BAC}$.



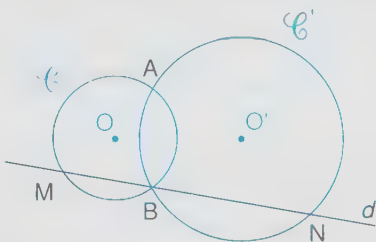
La droite (AI) est bissectrice de $\widehat{BAC}$.
Pourquoi ?

2. PQR est un triangle donné.

Comment construire les bissectrices intérieures sans utiliser le rapporteur ?

3.2. Des angles constants

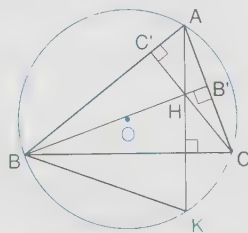
Deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont sécants en A et B . Par B , on trace une droite d qui recoupe le cercle $\mathcal{C}$ en M et le cercle $\mathcal{C}'$ en N .



La mesure de chacun des angles du triangle AMN ne dépend pas du choix de la droite d .
Pourquoi ?

3.3. Les symétriques de l'orthocentre par rapport aux côtés

ABC est un triangle, H est son orthocentre. Nous allons voir que le symétrique de H par rapport à l'un des côtés est sur le cercle circonscrit à ABC .



Ce résultat a déjà été démontré en classe de Première et de plusieurs façons. En voici une autre.

Notons K le symétrique de H par rapport à (BC) .

a/ En utilisant le fait que la réflexion transforme un angle de vecteurs en son opposé, vérifiez que :

$$(\overrightarrow{KB}, \overrightarrow{KC}) = (\overrightarrow{HC}, \overrightarrow{HB}) \quad (2\pi).$$

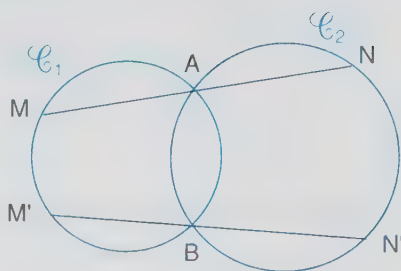
b/ Quel est le résultat qui permet d'affirmer que :

$$(\overrightarrow{HB}, \overrightarrow{HC}) = (\overrightarrow{HB'}, \overrightarrow{HC'}) \quad (\text{modulo } \pi)?$$

c/ Montrez que $(\overrightarrow{KB}, \overrightarrow{KC}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \quad (\text{modulo } \pi)$, puis concluez.

3.4. Un parallélisme surprenant

$\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont deux cercles sécants en A et B. Par A, on mène une sécante quelconque qui coupe le cercle $\mathcal{C}_1$ en M et le cercle $\mathcal{C}_2$ en N. Par B, on mène une sécante quelconque qui coupe $\mathcal{C}_1$ en M' et $\mathcal{C}_2$ en N'. Alors les droites (MM') et (NN') sont parallèles, nous allons le démontrer.



MÉTHODE

La présence de nombreux points cocycliques invite à utiliser les angles pour démontrer le parallélisme.

Nous allons donc démontrer que $\overrightarrow{MM'}$ et $\overrightarrow{NN'}$ sont colinéaires, c'est-à-dire que $(\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{NN'}) = 0$ (modulo π).

Nous allons donc calculer $(\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{NN'})$ de façon à utiliser les hypothèses.

1. Justifiez chacune des égalités suivantes :

a/ $(\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{NN'}) = (\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{M'B}) + (\overrightarrow{M'B}, \overrightarrow{NN'})$ (modulo π).

b/ $(\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{M'B}) = (\overrightarrow{M'M}, \overrightarrow{M'B})$ (modulo π).

c/ $(\overrightarrow{M'M}, \overrightarrow{M'B}) = (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AB})$ (modulo π).

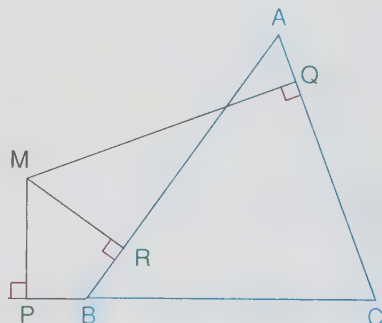
d/ $(\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AB}) = (\overrightarrow{N'N}, \overrightarrow{N'B}) = (\overrightarrow{N'N}, \overrightarrow{M'B})$ (modulo π).

2. Concluez.

3.5. La droite de Simson

ABC est un triangle, M est un point quelconque, P est le projeté orthogonal de M sur (BC), R est le projeté orthogonal de M sur (AB), et Q celui de M sur (AC).

Le but est de caractériser le point M tel que P, R et Q soient alignés.



1. Justifiez les égalités suivantes :

a/ $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MR}) = (\overrightarrow{QA}, \overrightarrow{QR}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{QR})$ (modulo π).

b/ $(\overrightarrow{MR}, \overrightarrow{MB}) = (\overrightarrow{PR}, \overrightarrow{PB}) = (\overrightarrow{PR}, \overrightarrow{CB})$ (modulo π).

c/ $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{QR}) + (\overrightarrow{QR}, \overrightarrow{PR}) + (\overrightarrow{PR}, \overrightarrow{CB})$ (modulo π).

d/ $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) + (\overrightarrow{QR}, \overrightarrow{PR})$.

2. a/ Déduisez-en que les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(A) M est sur le cercle circonscrit au triangle ABC.

(B) les points P, Q et R sont alignés.

b/ Rédigez le théorème que vous venez de démontrer en utilisant la locution **si, et seulement si**.

La droite (PQR) est appelée **droite de Simson** associée au point M du cercle circonscrit au triangle ABC.

EXERCICES ET PROBLÈMES

Pour tester
ses connaissances

Q.C.M.

Pour les exercices 1 à 7, une seule des réponses proposées est exacte.

1. Un angle de vecteurs a pour mesure en radians $-41 \frac{\pi}{6}$. Alors, sa mesure principale est :

a/ $\frac{7\pi}{6}$; b/ $-\frac{5\pi}{6}$; c/ $\frac{\pi}{6}$.

2. Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont tels que :

$(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{3}$, modulo 2π . Alors :

a/ $(-\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{3}$ (modulo 2π),

b/ $(-\vec{u}, \vec{v}) = -\frac{\pi}{3}$ (modulo 2π),

c/ $(-\vec{u}, \vec{v}) = -\frac{2\pi}{3}$ (modulo 2π).

3. Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont tels que :

$(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{3}$, modulo π . Alors :

a/ $(-\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\pi}{3}$ (modulo π),

b/ $(-\vec{u}, \vec{v}) = -\frac{\pi}{3} + \pi$ (modulo π),

c/ $(-\vec{u}, \vec{v}) = -\frac{\pi}{3}$ (modulo π).

4. L'angle $(\vec{u}, \vec{v})$ a pour mesure $-\frac{\pi}{6}$; l'angle

$(\vec{u}', \vec{v}')$ a pour mesure $\frac{5\pi}{6}$. Alors :

a/ $(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}', \vec{v}')$ (modulo 2π),

b/ $(\vec{u}, \vec{v}) = -(\vec{u}', \vec{v}')$ (modulo 2π),

c/ $(\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}', \vec{v}')$ (modulo π).

5. Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont tels que :

$(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ (modulo π).

Alors on peut affirmer que :

a/ les vecteurs sont colinéaires et de même sens,

b/ les vecteurs sont colinéaires et de sens inconnus,

c/ l'un des vecteurs est nul.

6. Dans un repère, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont respectivement pour coordonnées $(-6; 21)$, $(-2; 7)$. Alors leur déterminant est :

a/ 0; b/ -42; c/ -84.

7. $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont des vecteurs non colinéaires.

Les vecteurs $\vec{u} = -\frac{3}{2}\vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{v} = 2\vec{i} + \lambda\vec{j}$ sont colinéaires lorsque :

a/ $\lambda = -\frac{4}{3}$; b/ $\lambda = -\frac{3}{4}$; c/ $\lambda = \frac{3}{4}$.

ANGLES DE VECTEURS

Pour les exercices 8 à 10, on donne une mesure d'un angle $(\vec{u}, \vec{v})$. Donnez la mesure principale de $(\vec{u}, \vec{v})$, son cosinus et son sinus

8. $17 \frac{\pi}{3}$.

9. $-\frac{9\pi}{4}$.

10. $\frac{7\pi}{6}$.

Pour les exercices 11 à 13, trouvez grâce aux informations données, la mesure principale de l'angle $(\vec{u}, \vec{v}) = \alpha$.

11. $\sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan \alpha < 0$.

12. $\tan \alpha = -\sqrt{3}$, $\cos \alpha < 0$.

13. $\cos \alpha = -\frac{1}{2}$, $\tan \alpha > 0$.

DÉTERMINANTS

Pour les exercices 14 à 17, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donnés par leurs coordonnées dans la base orthonormale directe $(\vec{i}, \vec{j})$. Calculez $\sin(\vec{u}, \vec{v})$

14. $\vec{u} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$; 15. $\vec{u} = -2\vec{i} + \vec{j}$;
 $\vec{v} = -\vec{i} - 2\vec{j}$. $\vec{v} = 2\vec{i} - \vec{j}$.

16. $\vec{u} = (1 + \sqrt{2})\vec{i} + (\sqrt{2} - 1)\vec{j}$;
 $\vec{v} = (\sqrt{2} - 1)\vec{i} + (\sqrt{2} + 1)\vec{j}$.

17. $\vec{u} = (3 - 2\sqrt{2})\vec{i} + \vec{j}$;
 $\vec{v} = (\sqrt{2} - 1)\vec{i} + (\sqrt{2} + 1)\vec{j}$.

130 - Angles de vecteurs. Déterminants. Points cocycliques

EXERCICES DU BACCALAURÉAT

- 32.** On considère dans le plan complexe les points O d'affixe zéro, A d'affixe 1, B d'affixe -1 .
À tout point M du plan complexe d'affixe $z \neq 1$, on associe le point M' d'affixe :

$$z' = \frac{z-1}{1-\bar{z}}.$$

1. a/ Établissez que $|z'| = 1$.

b/ Établissez que $\frac{z'-1}{z-1}$ est réel.

c/ Établissez que $\frac{z'+1}{z-1}$ est imaginaire pur (c'est-à-dire est le produit de i par un réel).

2. a/ Interprétez géométriquement, à l'aide des points M, M', O, A, B les trois propriétés établies dans la question précédente.

b/ Donnez une construction géométrique de M' connaissant M .

- 33*.** Soit un triangle ABC , les points P, Q et R pris respectivement sur $(BC), (CA), (AB)$ et tous distincts de A, B et C . Démontrez que les cercles CPQ, AQR et BRP passent par un même point I puis démontrez que $ABCI$ sont cocycliques si, et seulement si, les points P, Q et R sont alignés.

- 34.** Soit A, B, C, D quatre points distincts deux à deux, cocycliques et tels que les droites (AB) et (CD) soient orthogonales. On note O le point d'intersection de (AB) et (CD) et O' le milieu de $[AD]$. Montrez que (OO') est orthogonale à (CB) .

- 35.** Soit ABC un triangle (de sens direct) ayant ses trois angles aigus.

1. Construisez les cercles C_a, C_b et C_c tels que :

• $C_a - \{C, B\}$ soit l'ensemble des points P tels que :

$$(\overrightarrow{PC}, \overrightarrow{PB}) \equiv \frac{\pi}{3} [\pi],$$

• $C_b - \{A, C\}$ soit l'ensemble des points Q tels que :

$$(\overrightarrow{QA}, \overrightarrow{QC}) \equiv \frac{\pi}{3} [\pi],$$

• $C_c - \{B, A\}$ soit l'ensemble des points R tels que :

$$(\overrightarrow{RB}, \overrightarrow{RA}) \equiv \frac{\pi}{3} [\pi]$$

(on pourra utiliser les triangles équilatéraux construits à l'extérieur du triangle ABC et dont un côté est $[CB], [AC]$ ou $[BA]$).

Démontrez que C_a, C_b et C_c ont un point commun, noté I .

2. Soit P un point de C_a extérieur au triangle ABC . La droite (PC) recoupe C_b en un point Q . Soit R le point d'intersection des droites (QA) et (PB) . Montrez que R est un point de C_c . Quelle est la nature du triangle PQR ?

3. À chaque triangle PQR on associe :

$$\ell(PQR) = IP + IQ + IR.$$

a/ Déterminez P pour que IP soit maximum. Soit P_0 ce point. Construisez le triangle $P_0Q_0R_0$ déterminé à partir de P_0 .

b/ Montrez que $\ell(PQR)$ est maximum pour $P_0Q_0R_0$.

Pour chercher plus

- 36.** d est une droite et A est un point extérieur à d . Δ est la perpendiculaire à d menée par A . H est un point quelconque de Δ . Existe-t-il sur la droite d deux points B et C tels que H soit l'orthocentre du triangle ABC

et tels que $\frac{\pi}{3}$ soit une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$?

37. Lieu géométrique

I et J sont deux points d'un cercle $\mathcal{C}$. M est un point de $\mathcal{C}$. La perpendiculaire en I à (MI) rencontre (MJ) en P , et la perpendiculaire en J à (MJ) rencontre (MI) en Q . M décrit le cercle $\mathcal{C}$.

1. Quel est alors le lieu géométrique du point P ? du point Q ?

Indication : montrez que, modulo π , les angles $(\overrightarrow{PI}, \overrightarrow{PJ})$ et $(\overrightarrow{QI}, \overrightarrow{QJ})$ sont constants.

2. Montrez que (PQ) passe par un point fixe.

- 38.** ABC est un triangle.

$\mathcal{C}_1$ est le cercle tangent à (AB) et passant par B et C .

$\mathcal{C}_2$ est le cercle tangent à (CB) et passant par C et A .

$\mathcal{C}_3$ est le cercle tangent à (AC) et passant par A et B .

Démontrez que ces trois cercles ont un point commun.

- 39*.** A, B, C, D sont quatre points. Trouvez l'ensemble des points M tels que :

$$\det(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \det(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MD}).$$

Problèmes de synthèse

40. Avec les nombres complexes

Partie A

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct, A, B, H sont les points d'afixes respectives a , b et $\frac{a+b}{2}$, et $a \neq b$.

À chaque point $M(z)$ distinct de A, B, H, on associe le point $M'(z')$ tel que :

$$\frac{z' - a}{z' - b} = -\frac{z - a}{z - b}. \quad [1]$$

1. Montrez que $(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B}) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) + \pi$, modulo 2π .

2. a/ Montrez que :

$$\left(z' - \frac{a+b}{2}\right) \left(z - \frac{a+b}{2}\right) = \left(\frac{b-a}{2}\right)^2.$$

b/ Déduez-en que la droite (AB) est bissectrice de $(\overrightarrow{HM}, \overrightarrow{HM'})$, et que : $HM \times HM' = HA^2$.

c/ Montrez, sans calculs nouveaux, que si K est le milieu de $[MM']$, la droite (MM') est bissectrice de $(\overrightarrow{KA}, \overrightarrow{KB})$.

3. On suppose que :

$$a = 2i, \quad b = 4 + 3i, \quad z = 1 + 4i.$$

Placez alors le point $M'(z')$.

Partie B

Application aux racines carrées d'un nombre complexe

1. α est un complexe non nul, z_1 et z_2 sont les deux racines carrées de α .

Les points M_1 , M_2 , A, B ont pour affixes respectives z_1 , z_2 , α et 1.

Montrez que pour $a = \alpha$ et $b = 1$, z_1 et z_2 vérifient la relation [1] énoncée au début de la partie A.

2. Déduez-en que $(M_1 M_2)$ est bissectrice de $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$, où O est l'origine du repère.

3. Placez les points M_1 et M_2 lorsque $\alpha = -3 + 2i$.

41*. L'objet du problème est de déterminer les triangles dont trois droites données distinctes D_1 , D_2 , D_3 sont les hauteurs ou les médiatrices ou les bissectrices.

1. Examen du cas où deux des droites sont perpendiculaires.

a/ Montrez que deux hauteurs d'un triangle sont perpendiculaires si et seulement si ce triangle est rectangle.

b/ Montrez que, si Δ est une bissectrice (intérieure ou extérieure) de l'angle $\widehat{A}$ d'un triangle non aplati ABC et si Δ' est une bissectrice de l'angle $\widehat{B}$, Δ et Δ' ne sont ni parallèles ni perpendiculaires.

c/ D_1 , D_2 et D_3 passent par H; D_1 et D_2 sont perpendiculaires.

Montrez que tout point A_1 de D_1 est sommet d'un triangle dont D_1 , D_2 et D_3 sont les hauteurs.

2. Problème des hauteurs

D_1 , D_2 et D_3 passent par H et sont deux à deux non perpendiculaires.

Montrez que tout point A_1 de D_1 est sommet d'un triangle dont D_1 , D_2 et D_3 sont les hauteurs.

3. Problème des médiatrices

a/ ABC est un triangle non aplati; A' , B' et C' sont les milieux des côtés.

Montrez que les médiatrices de ABC sont les hauteurs de $A'B'C'$.

b/ Trouvez un triangle dont D_1 , D_2 , D_3 sont les médiatrices; comment trouve-t-on les autres?

4. Problème des bissectrices

a/ ABC est un triangle; les bissectrices intérieures se coupent en I; la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{A}$ et les bissectrices extérieures de $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ se coupent en J_A ; on définit de façon analogue les points J_B et J_C . Précisez les hauteurs et l'orthocentre de chacun des triangles $J_A J_B J_C$, $I J_B J_C$, $I J_A J_C$, $I J_A J_B$.

Faites un dessin avec $AB = 3$ cm, $BC = 6$ cm, $CA = 4$ cm.

b/ Construisez un triangle dont D_1 , D_2 , D_3 sont les bissectrices intérieures.

c/ Construisez un triangle dont D_1 est une bissectrice intérieure, D_2 et D_3 sont deux bissectrices extérieures.

6

Pour prendre un bon départ	133
Cours	136
T.P. d'application	149
Exercices et problèmes	154

L'outil vectoriel

Ce chapitre traite des sujets suivants : dans le plan et l'espace, projections ponctuelles et vectorielles, barycentre de n points, caractérisations de droites, demi-droites, segments.

« La caractérisation vectorielle d'un plan et sa traduction dans un repère », ne sont plus au programme.

POUR PRENDRE UN BON DÉPART

1 *Barycentre*

On appelle point pondéré (ou massif) tout couple (A, a) où A est un point et a un nombre. On dit que a est le coefficient (ou le poids) de A .

1.1. BARYCENTRE DE DEUX POINTS PONDÉRÉS

Pour deux points pondérés (A, a) , (B, b) , lorsque $a + b \neq 0$, il existe un point G et un seul tel que :

$$a \overrightarrow{GA} + b \overrightarrow{GB} = \vec{0}.$$

Ce point G est appelé le barycentre de (A, a) , (B, b) .

G est le barycentre des points pondérés (A, a) , (B, b) , $a + b \neq 0$.
Alors, pour tout point M : $a \overrightarrow{MA} + b \overrightarrow{MB} = (a + b) \overrightarrow{MG}$.

1.2. BARYCENTRE DE TROIS POINTS PONDÉRÉS

Pour trois points pondérés (A, a) , (B, b) , (C, c) tels que $a + b + c \neq 0$, il existe un point G et un seul tel que :

$$a \overrightarrow{GA} + b \overrightarrow{GB} + c \overrightarrow{GC} = \vec{0}.$$

Ce point G est le barycentre de (A, a) , (B, b) , (C, c) .

Exercices-tests

1. Montrez que pour tout point M :

$$a \overrightarrow{MA} + b \overrightarrow{MB} + c \overrightarrow{MC} = (a + b + c) \overrightarrow{MG}. \quad [1]$$

2. Savoir placer le barycentre de 3 points.

ABC est un triangle. Le but est de placer sur la figure le barycentre G des points : (A, 2), (B, -1), (C, 3).

a/ Notons H le barycentre de (A; 2), (B; -1).

En utilisant la relation [1] avec $M = H$, montrez que : $3\overrightarrow{HC} = 4\overrightarrow{HG}$, puis déduisez-en que : $\overrightarrow{GH} + 3\overrightarrow{GC} = \vec{0}$, et donc que G est le barycentre de (H, 1), (C, 3).

b/ Placez G sur la figure.

c/ Les droites (BG) et (AC) se coupent en L. Pourquoi peut-on affirmer que L est le barycentre de (A, 2), (C, 3)?

2 Forme vectorielle du théorème de Thalès

THÉORÈME DE THALÈS (cas des triangles)

ABC est un triangle, M est un point de (AB), N est un point de (AC) et (MN) est parallèle à (BC).

k est le nombre tel que : $\overrightarrow{AM} = k \overrightarrow{AB}$.

Alors : $\overrightarrow{AN} = k \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{MN} = k \overrightarrow{BC}$.

RÉCIPROQUE DU THÉORÈME DE THALÈS

ABC est un triangle, M est sur (AB), N sur (AC).

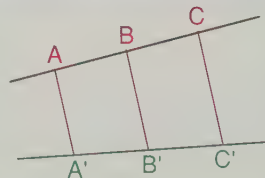
Si $\overrightarrow{AM} = k \overrightarrow{AB}$ ET $\overrightarrow{AN} = k \overrightarrow{AC}$, alors (MN) et (BC) sont parallèles.

THÉORÈME DE THALÈS GÉNÉRALISÉ en géométrie plane

A, B, C sont trois points alignés.

A', B', C' sont leurs projetés sur une droite d parallèlement à une direction donnée.

Si $\overrightarrow{AC} = k \overrightarrow{AB}$, alors $\overrightarrow{A'C'} = k \overrightarrow{A'B'}$.



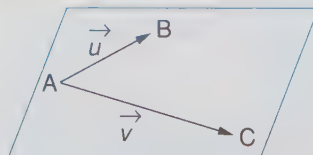
3 Interprétation vectorielle de l'incidence et du parallélisme dans l'espace

3.1. VECTEURS DIRECTEURS D'UN PLAN DANS L'ESPACE

Un point A et deux vecteurs **non colinéaires** $\vec{u}$ et $\vec{v}$ déterminent un plan et un seul; en effet, si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, ce plan est le plan (ABC).

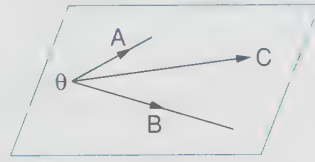
On dit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ forment un système de **vecteurs directeurs** de ce plan; plan qui est donc l'ensemble des points M tels que :

$$\overrightarrow{AM} = a\vec{u} + b\vec{v} \text{ avec } a \text{ et } b \text{ réels.}$$



3.2. VECTEURS COPLANAIRES

Dire que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires signifie que lorsqu'on choisit un point O quelconque, le point O et les points A, B, C tels que : $\vec{OA} = \vec{u}$, $\vec{OB} = \vec{v}$, $\vec{OC} = \vec{w}$ sont coplanaires.



MÉTHODE

Pour démontrer que 3 vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires, on peut démontrer :

- ou bien que deux d'entre eux sont colinéaires,
- ou bien, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$, par exemple, ne sont pas colinéaires, que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.

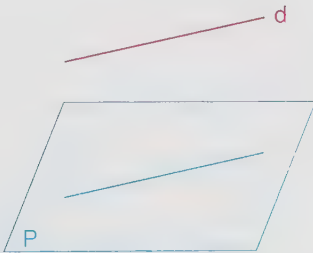
3.3. DROITES PARALLÈLES

Dire que les droites (AB) et (CD) sont parallèles équivaut à dire qu'il existe un réel k tel que $\vec{AB} = k\vec{CD}$.

3.4. PARALLÉLISME D'UNE DROITE ET D'UN PLAN

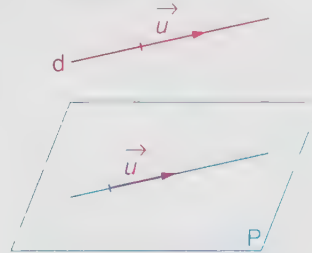
Point de vue ponctuel

Dire qu'une droite d est parallèle à un plan P équivaut à dire que d est parallèle à une droite de P .



Point de vue vectoriel

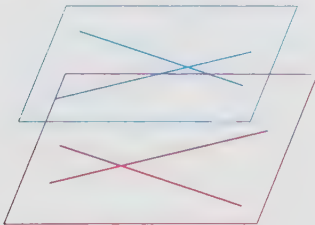
Dire qu'une droite d de vecteur directeur $\vec{u}$ est parallèle à un plan P équivaut à dire qu'il existe dans P une droite de vecteur directeur $\vec{u}$.



3.5. PARALLÉLISME DE DEUX PLANS

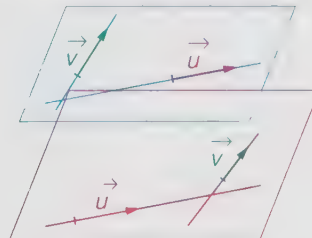
Point de vue ponctuel

Dire que deux plans sont parallèles équivaut à dire que l'un d'eux contient deux droites sécantes qui sont parallèles à deux droites de l'autre plan.



Point de vue vectoriel

Dire que deux plans sont parallèles équivaut à dire qu'un système de vecteurs directeurs de l'un est un système de vecteurs directeurs de l'autre.

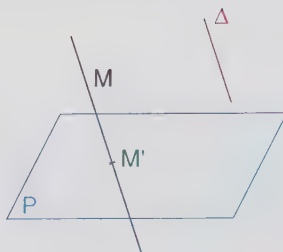


1 Projections dans l'espace

1.1. DÉFINITIONS (rappels)

a/ Projection sur un plan

P est un plan et Δ une droite non parallèle à P. Par tout point M de l'espace, il passe une droite et une seule parallèle à Δ . Cette droite coupe le plan P en un point que nous noterons M'.

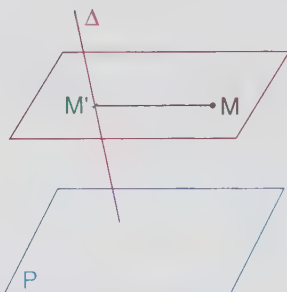


Par définition, M' est le projeté de M sur P parallèlement à Δ .

Lorsque Δ est *perpendiculaire* à P, on dit que M' est le *projeté orthogonal* de M sur le plan P.

b/ Projection sur une droite

P est un plan et Δ une droite non parallèle à P. Par tout point M de l'espace, il passe un plan et un seul parallèle à P. Ce plan coupe Δ en un point que nous noterons M'.



Par définition, M' est le projeté de M sur Δ parallèlement à P.

Lorsque Δ est *perpendiculaire* à P, on dit que M' est le *projeté orthogonal* de M sur Δ .

c/ EXEMPLE D'APPLICATION

$(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère de l'espace.

Notons d la droite de repère $(O; \vec{k})$ et P le plan qui passe par O et dont $\vec{i}$ et $\vec{j}$ forment un système de vecteurs directeurs; autrement dit, P est le plan de repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Un point M de l'espace se projette sur P parallèlement à d en un point m .

Ce même point M se projette sur d parallèlement à P en un point m' .

Ainsi, $OmMm'$ est un parallélogramme et :

$$\overrightarrow{Om} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{Om'}.$$

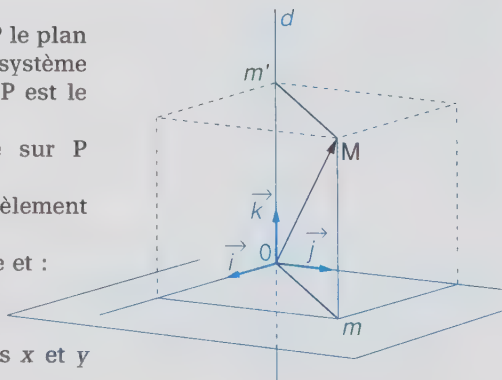
m est dans P, donc il existe deux réels x et y tels que :

$$\overrightarrow{Om} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

m' est un point de d , donc il existe un réel z tel que :

$$\overrightarrow{Om'} = z\vec{k}.$$

Donc : $\overrightarrow{Om} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$



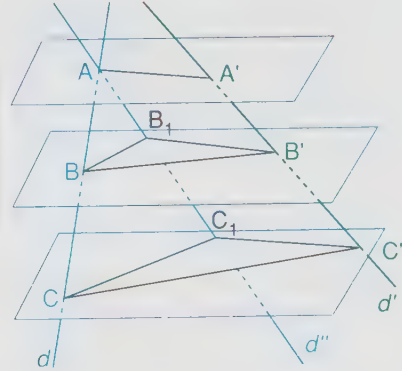
Lorsque M a pour coordonnées $(x; y; z)$ dans $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, son projeté m sur le plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$ parallèlement à la droite $(O; \vec{k})$ a pour coordonnées $(x; y)$ dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$; et son projeté m' sur la droite $(O; \vec{k})$ parallèlement au plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$ a pour coordonnées z dans le repère $(O; \vec{k})$.

1.2. THÉORÈME DE THALÈS DANS L'ESPACE. CONSÉQUENCES

a/ Théorème de Thalès dans l'espace

THÉORÈME 1

Trois plans parallèles coupent une droite d en A, B et C , et une droite d' , respectivement en A', B' et C' .
Si $\overrightarrow{AC} = k \overrightarrow{AB}$, alors $\overrightarrow{A'C'} = k \overrightarrow{A'B'}$.



En effet, menons par A la parallèle d'' à la droite d' . d'' coupe l'un des plans en B_1 , l'autre en C_1 (voir figure). Alors les droites (BB_1) et (CC_1) sont parallèles, ainsi que les droites (B_1B') et (C_1C') .

Appliquons le théorème de Thalès de la géométrie plane (voir page 134).

Alors, d'après ce théorème, dans le plan (ABB_1) , de $\overrightarrow{AC} = k \overrightarrow{AB}$ nous déduisons $\overrightarrow{AC_1} = k \overrightarrow{AB_1}$. Puis dans le plan $(B_1B'C_1C_1)$, de $\overrightarrow{AC_1} = k \overrightarrow{AB_1}$ nous déduisons :

$$\overrightarrow{A'C'} = k \overrightarrow{A'B'}.$$

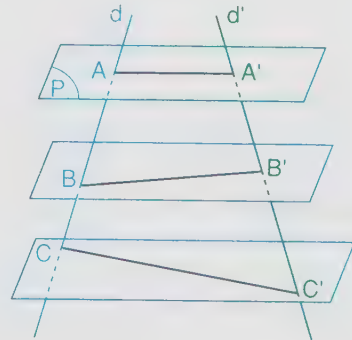
b/ Conséquence : projection sur une droite

Supposons que trois points distincts A, B, C de l'espace soient tels que $\overrightarrow{AC} = k \overrightarrow{AB}$. Alors ces points sont alignés sur une droite d .

Notons A', B', C' leurs projetés respectifs sur une droite d' parallèlement à un plan P (voir figure).

Alors, la situation est celle du théorème de Thalès, et donc d'après ce théorème :

$$\overrightarrow{A'C'} = k \overrightarrow{A'B'}.$$



Trois points A, B, C sont projetés en A', B', C' sur une droite.
Si $\overrightarrow{AC} = k \overrightarrow{AB}$, alors $\overrightarrow{A'C'} = k \overrightarrow{A'B'}$.

1.3. PROJECTION SUR UN PLAN

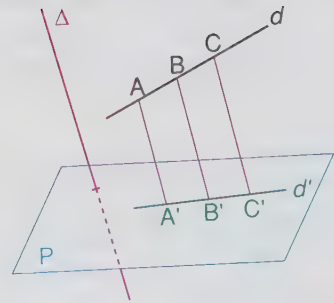
a/ La projection sur un plan conserve l'alignement

THÉORÈME 2

A, B et C sont trois points *alignés* ;
A', B', C' sont leurs projetés respectifs sur un plan P parallèlement à une droite Δ .

Alors :

1. A', B', C' sont *alignés*.
2. Si $\overrightarrow{AC} = k \overrightarrow{AB}$, alors $\overrightarrow{A'C'} = k \overrightarrow{A'B'}$.



Démontrons ce théorème. Le plan Q déterminé par les droites Δ et d coupe P selon une droite d' .

Les points A', B' et C' sont à la fois dans Q et dans P, donc ils appartiennent à la droite d' .

Le théorème de Thalès de la géométrie plane, cité page 134, dit que si $\overrightarrow{AC} = k \overrightarrow{AB}$, alors $\overrightarrow{A'C'} = k \overrightarrow{A'B'}$.

On traduit la conclusion 1 de ce théorème en disant que :

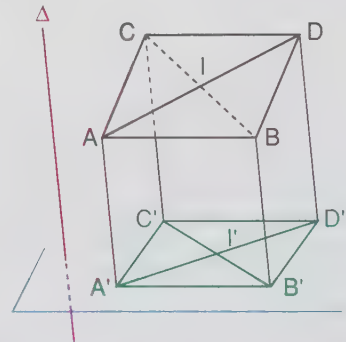
la projection sur un plan conserve l'alignement.

On déduit du point 2, avec $k = 2$, que si B est milieu de [AC], alors B' est milieu de [A'C'].

b/ La projection sur un plan conserve le parallélisme

d et d' sont deux droites parallèles. Choisissons deux points A et B sur d , deux points C et D sur d' , de façon que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Alors ABDC est un parallélogramme. Notons I son centre et notons A', B', C', D', I' les projetés respectifs sur un plan P parallèlement à Δ . Si le plan (ABDC) n'est pas parallèle à Δ , A'B'D'C' est un quadrilatère, et puisque la projection conserve le milieu, I' est le milieu des diagonales [A'D'], [C'B'].



Donc A'B'D'C' est un parallélogramme, $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'}$, les droites (A'B') et (C'D') sont parallèles.

Si le plan (ABDC) est parallèle à Δ , (A'B') et (C'D') sont confondues.

Donc, deux droites parallèles sont projetées sur un plan selon deux droites parallèles ou confondues :

la projection sur un plan conserve le parallélisme.

Il résulte aussi de la démonstration que :

si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, alors $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{C'D'}$

Si $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, alors $\overrightarrow{A'D'} = \overrightarrow{A'B'} + \overrightarrow{A'C'}$.

1.4. PROJECTION VECTORIELLE ASSOCIÉE À UNE PROJECTION PONCTUELLE

Notons p une projection sur un plan.

Soit $\vec{u}$ un vecteur, A et M deux points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AM}$; associons à $\vec{u}$ le vecteur $\vec{u}' = \overrightarrow{A'M'}$; ce vecteur dépend-il des points A et M ? Supposons que l'on ait aussi $\vec{u} = \overrightarrow{IN}$, alors, si A', M', I', N' sont les images de A, M, I, N par p , de l'égalité $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{IN}$, on déduit $\overrightarrow{A'M'} = \overrightarrow{I'N'}$ d'après 1.3.b/. Au vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AM}$ on associe donc un seul vecteur $\vec{u}' = \overrightarrow{A'M'}$.

On définit ainsi une application, notée π , de l'ensemble des vecteurs dans lui-même, en posant $\pi(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{A'M'}$.

DÉFINITION 1

p est une projection ponctuelle.

On appelle *projection vectorielle associée à p* l'application notée π , définie par $\pi(\overrightarrow{AM}) = \overrightarrow{A'M'}$, où A' et M' sont les images respectives des points A et M par p .

Il résulte immédiatement de cette définition et du paragraphe 1.3. que, pour tous points A, B, C et tout réel k :

$$\pi(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \pi(\overrightarrow{AB}) + \pi(\overrightarrow{AC}) \quad \text{et} \quad \pi(k\overrightarrow{AB}) = k\pi(\overrightarrow{AB}).$$

Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, pour tout réel k , on a alors :

$$\pi(\vec{u} + \vec{v}) = \pi(\vec{u}) + \pi(\vec{v}) \quad \text{et} \quad \pi(k\vec{u}) = k\pi(\vec{u}).$$

Ce que l'on traduit en disant que π est une **application linéaire**.

De manière analogue, on peut associer une projection vectorielle à une projection ponctuelle sur une droite.

2 Existence et caractéristiques du barycentre de n points

Vous avez déjà utilisé le barycentre soit en Mathématiques soit en Physique. Le but, ici, est d'en faire l'étude dans un cas plus général, celui où l'on considère un nombre quelconque n de points (en classe de Première, l'étude a été faite pour $n = 2$, $n = 3$ ou $n = 4$).

Les démonstrations et les résultats qui vont être donnés sont valables aussi bien en géométrie plane qu'en géométrie de l'espace; aussi, dans tout ce paragraphe, parlerons-nous de points sans préciser s'ils appartiennent au plan ou à l'espace; cette précision n'est nécessaire qu'au moment de l'emploi de coordonnées.

a/ Considérons n points, distincts ou non, $A_1, \dots, A_n$, affectés respectivement des coefficients $a_1, \dots, a_n$ ($a_1, \dots, a_n$ sont des réels).

Problème : existe-t-il un point G et un SEUL tel que :

$$a_1 \overrightarrow{GA_1} + a_2 \overrightarrow{GA_2} + \dots + a_n \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}?$$

Pour résoudre le problème posé, remarquons que, pour tout point G :

$$\begin{aligned} a_1 \overrightarrow{GA_1} + a_2 \overrightarrow{GA_2} + \dots + a_n \overrightarrow{GA_n} &= a_1 \overrightarrow{GA_1} + a_2 (\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{A_1 A_2}) + \dots + a_n (\overrightarrow{GA_1} + \overrightarrow{A_1 A_n}) \\ &= (a_1 + \dots + a_n) \overrightarrow{GA_1} + a_2 \overrightarrow{A_1 A_2} + \dots + a_n \overrightarrow{A_1 A_n} \\ &= a \overrightarrow{GA_1} + \vec{u}, \end{aligned}$$

avec $\alpha = a_1 + \dots + a_n$, $\vec{u} = a_2 \overrightarrow{A_1 A_2} + \dots + a_n \overrightarrow{A_1 A_n}$.

Le problème s'énonce alors : existe-t-il un point G et un seul tel que $\alpha \overrightarrow{GA_1} + \vec{u} = \vec{0}$, c'est-à-dire $\alpha \overrightarrow{GA_1} = -\vec{u}$?

Deux cas se présentent alors :

• **Premier cas : $\alpha \neq 0$**

Dans ce cas, le point A_1 et le vecteur $\vec{u}$ étant donnés, nous savons qu'il existe un point G et un seul tel que $\overrightarrow{GA_1} = -\frac{1}{\alpha} \vec{u}$.

La réponse au problème posé est oui.

• **Deuxième cas : $\alpha = 0$**

Si $\vec{u} = \vec{0}$, alors, pour tout point G : $0 \times \overrightarrow{GA_1} = \vec{0}$, et dans ce cas il n'existe donc pas un seul point G tel que $\alpha \overrightarrow{GA_1} = -\vec{u}$.

Si $\vec{u} \neq \vec{0}$, alors, il n'existe pas de point G tel que $0 \times \overrightarrow{GA_1} \neq \vec{0}$.

Donc, dans le cas $\alpha = 0$, la réponse au problème est non.

En résumé,

THÉORÈME 3 ET DÉFINITION 2

$(A_1, a_1), (A_2, a_2), \dots, (A_n, a_n)$, sont n points pondérés.

Si : $a_1 + a_2 + \dots + a_n \neq 0$, alors il existe un point G et **UN SEUL** tel que $a_1 \overrightarrow{GA_1} + a_2 \overrightarrow{GA_2} + \dots + a_n \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$.

Ce point G est appelé **barycentre** de ces n points pondérés.

Remarquons de plus, toujours dans le cas où $\alpha \neq 0$, que pour tout point G :

$a_1 \overrightarrow{GA_1} + \dots + a_n \overrightarrow{GA_n} = \vec{u}$; en effet, nous avons vu, que pour tout point G,

$a_1 \overrightarrow{GA_1} + \dots + a_n \overrightarrow{GA_n} = \alpha \overrightarrow{GA_1} + \vec{u}$.

Puisque cela est vrai pour tout G, cela est vrai pour tout point M, et selon l'usage, nous dirons que le vecteur $a_1 \overrightarrow{MA_1} + \dots + a_n \overrightarrow{MA_n}$ ne dépend pas de M.

Si : $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0$, alors le vecteur $a_1 \overrightarrow{MA_1} + a_2 \overrightarrow{MA_2} + \dots + a_n \overrightarrow{MA_n}$ ne dépend pas de M, il est égal à $a_2 \overrightarrow{A_1 A_2} + \dots + a_n \overrightarrow{A_1 A_n}$.

Ainsi, dire qu'un point G est **LE barycentre de $(A_1, a_1), \dots, (A_n, a_n)$** signifie que :

$$a_1 + \dots + a_n \neq 0, \text{ et } a_1 \overrightarrow{GA_1} + \dots + a_n \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}.$$

b/ Définition de l'isobarycentre

Lorsque tous les coefficients $a_1, \dots, a_n$, sont égaux on dit que G est l'**isobarycentre** des points $A_1, A_2, \dots, A_n$.

• L'**isobarycentre** de deux points A et B est le point G tel que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$, c'est donc le milieu de [AB].

• L'**isobarycentre** de trois points A, B, C formant triangle est le point G tel que $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$, c'est donc le **centre de gravité** du triangle ABC.

COMMENTAIRE

Le barycentre G ne dépend évidemment pas de l'ordre dans lequel on considère les points massifs $(A_1, a_1), \dots, (A_n, a_n)$. On dit parfois

que G est le barycentre du système $(A_1, a_1), \dots, (A_n, a_n)$, et $\sum_{i=1}^n a_i$ est appelée la **masse totale** du système.

3 Propriétés du barycentre

3.1. PROPRIÉTÉ FONDAMENTALE : RÉDUCTION DE $\sum_{i=1}^n a_i \overrightarrow{MA_i}$

$(A_1, a_1), (A_2, a_2), \dots, (A_n, a_n)$, sont n points ayant un barycentre G . Alors $a_1 + \dots + a_n \neq 0$ et $a_1 \overrightarrow{GA_1} + \dots + a_n \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$.

Or, pour tout point M , et tout indice i de 1 à n :

$$\overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MA_i},$$

d'où :

$$a_1 (\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MA_1}) + \dots + a_n (\overrightarrow{GM} + \overrightarrow{MA_n}) = \vec{0},$$

et donc : $a_1 \overrightarrow{MA_1} + \dots + a_n \overrightarrow{MA_n} = \alpha \overrightarrow{MG}$, avec $\alpha = a_1 + \dots + a_n$.

THÉORÈME 4

$(A_1, a_1), \dots, (A_n, a_n)$ sont n points pondérés avec $a_1 + \dots + a_n \neq 0$.

G est le barycentre de ces n points pondérés.

Alors, pour tout point M :

$$a_1 \overrightarrow{MA_1} + a_2 \overrightarrow{MA_2} + \dots + a_n \overrightarrow{MA_n} = (a_1 + \dots + a_n) \overrightarrow{MG}.$$

Remarque : la réciproque est vraie. Si G est un point tel que, pour tout point M , $a_1 \overrightarrow{MA_1} + \dots + a_n \overrightarrow{MA_n} = (a_1 + \dots + a_n) \overrightarrow{MG}$, et si $a_1 + a_2 + \dots + a_n \neq 0$, alors G est le barycentre des n points pondérés $(A_1, a_1), \dots, (A_n, a_n)$.

En effet, lorsque $M = G$, on obtient : $a_1 \overrightarrow{GA_1} + \dots + a_n \overrightarrow{GA_n} = \vec{0}$.

3.2. COORDONNÉES ET AFFIXE DU BARYCENTRE

Dans le plan, muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, d'après le théorème 4 utilisé avec $M = O$, nous obtenons, en posant $\alpha = a_1 + \dots + a_n$:

$$a_1 \overrightarrow{OA_1} + \dots + a_n \overrightarrow{OA_n} = \alpha \overrightarrow{OG}.$$

Si nous notons $(x_i; y_i)$ les coordonnées du point A_i , et $(x_G; y_G)$, celles de G , nous obtenons :

$$\begin{aligned} x_G &= \frac{1}{\alpha} (a_1 x_1 + \dots + a_n x_n) \\ y_G &= \frac{1}{\alpha} (a_1 y_1 + \dots + a_n y_n). \end{aligned}$$

Il en résulte que dans le plan complexe, si nous notons z_i l'affixe de A_i , et z_G l'affixe de G , nous obtenons :

$$z_G = \frac{1}{\alpha} (a_1 z_1 + \dots + a_n z_n)$$

car $z_G = x_G + iy_G$, et, $z_j = x_j + iy_j$, pour tout j de 1 à n .

COMMENTAIRE

Dans l'espace, les coordonnées du barycentre s'obtiennent par un raisonnement analogue, on travaille avec trois coordonnées au lieu de deux.

3.3. BARYCENTRE DE DEUX ET DE TROIS POINTS

Le barycentre de deux points A et B distincts est sur la droite (AB).

En effet, notons G le barycentre de (A, a), (B, b) ($a + b \neq 0$).

Alors, d'après le théorème 4, pour tout point I : $a \overrightarrow{IA} + b \overrightarrow{IB} = (a + b) \overrightarrow{IG}$.

En particulier, pour I = A : $a \overrightarrow{AA} + b \overrightarrow{AB} = (a + b) \overrightarrow{AG}$,

$$\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a + b} \overrightarrow{AB}.$$

Cette égalité prouve que G est sur la droite (AB).

Dans l'espace, le barycentre de trois points A, B, C distincts, non alignés, est dans le plan (ABC).

La démonstration est analogue à la précédente. Nous obtiendrions :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a + b + c} \overrightarrow{AB} + \frac{c}{a + b + c} \overrightarrow{AC},$$

et cette égalité prouve que $\overrightarrow{AG}$ est dans le plan déterminé par $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, donc dans le plan (ABC).

3.4. BARYCENTRE DE (A_1, ka_1) , ..., (A_n, ka_n)

G est le barycentre des n points massifs (A_1, a_1) , ..., (A_n, a_n) .

Donc :

$$\sum_{i=1}^n a_i \neq 0 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^n a_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}.$$

Nous en déduisons que, pour tout réel k : $\sum_{i=1}^n ka_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0}$, et, si k est non nul :

$$\sum_{i=1}^n ka_i \neq 0.$$

Il en résulte, d'après le théorème 3, que G est le barycentre des points massifs (A_1, ka_1) , ..., (A_n, ka_n) . Ainsi :

Pour tout réel k non nul, les points pondérés (A_1, a_1) , ..., (A_n, a_n) et les points (A_1, ka_1) , ..., (A_n, ka_n) ont le même barycentre.

On ne change pas le barycentre de n points pondérés en multipliant tous les coefficients par un même nombre non nul.

COMMENTAIRES

- Le barycentre G des points massifs (A_1, a_1) , ..., (A_n, a_n) est donc aussi le barycentre de $\left(A_1, \frac{a_1}{\alpha}\right)$, ..., $\left(A_n, \frac{a_n}{\alpha}\right)$ où $\alpha = \sum_{i=1}^n a_i$; et alors :

$$\frac{a_1}{\alpha} + \dots + \frac{a_n}{\alpha} = 1 \quad (\alpha \neq 0).$$

- Lorsque l'on a : $a_1 = a_2 = \dots = a_n$, et $a_1 \neq 0$, l'isobarycentre G des points massifs (A_1, a_1) , ..., (A_n, a_n) est aussi l'isobarycentre des points massifs $(A_1, 1)$, ..., $(A_n, 1)$.

3.5. ASSOCIATIVITÉ DE LA BARYCENTRATION

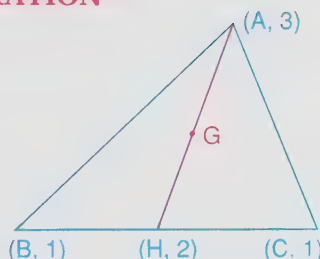
a/ Exemple

Comment placer, sur la figure, le barycentre de (A, 3), (B, 1), (C, 1)?

Remarquez que ce barycentre existe car : $3 + 1 + 1 \neq 0$.

Notons-le G. G est déterminé par :

$$3\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}. \quad [1]$$



Notons H le barycentre de (B, 1), (C, 1), H ici est le milieu de [BC] : $\vec{HB} + \vec{HC} = \vec{0}$.
D'après le théorème 4, pour tout point M : $\vec{MB} + \vec{MC} = 2\vec{MH}$.

Avec $M = G$, nous obtenons : $\vec{GB} + \vec{GC} = 2\vec{GH}$, et en reportant dans [1] :

$3\vec{GA} + 2\vec{GH} = \vec{0}$, et cette égalité prouve que G est barycentre de (H, 2), (A, 3).

Or le coefficient de H, qui est 2, est la somme du coefficient 1 de B et du coefficient 1 de C.

Ainsi, dans la recherche du barycentre de (A, 3), (B, 1), (C, 1) nous pouvons remplacer (B, 1), (C, 1) par leur barycentre H affecté de la somme de leurs coefficients.

b/ Cas général

Considérons n points pondérés $(A_1, a_1), \dots, (A_n, a_n)$ avec $n \geq 3$ et $a_1 + \dots + a_n \neq 0$.
Notons G leur barycentre.

Supposons que pour un entier p , $2 \leq p \leq n-1$, $a_1 + \dots + a_p \neq 0$.

Alors les points $(A_1, a_1), \dots, (A_p, a_p)$ ont un barycentre, notons-le H.

D'après le théorème 4, pour tout point I :

$$a_1 \vec{IA_1} + \dots + a_p \vec{IA_p} = \beta \vec{IH} \text{ avec } \beta = a_1 + \dots + a_p.$$

En particulier, pour $I = G$, nous obtenons :

$$a_1 \vec{GA_1} + \dots + a_p \vec{GA_p} = \beta \vec{GH}.$$

Or G est le barycentre des points $(A_1, a_1), \dots, (A_n, a_n)$; donc :

$$a_1 \vec{GA_1} + \dots + a_p \vec{GA_p} + a_{p+1} \vec{GA_{p+1}} + \dots + a_n \vec{GA_n} = \vec{0}.$$

$$\text{D'où : } \beta \vec{GH} + a_{p+1} \vec{GA_{p+1}} + \dots + a_n \vec{GA_n} = \vec{0}.$$

D'après le théorème 3, nous déduisons de cette égalité que G est le barycentre de $(H, \beta), (A_{p+1}, a_{p+1}), \dots, (A_n, a_n)$. D'où le théorème suivant :

THÉORÈME 5 (dit du barycentre partiel)

$(A_1, a_1), \dots, (A_n, a_n)$ sont n points pondérés ($n \geq 3$) tels que $\sum_{i=1}^n a_i \neq 0$.

Si p de ces points ($2 \leq p \leq n-1$) ont une masse totale β non nulle, et si H est le barycentre de ces p points, alors le barycentre G de $(A_1, a_1), \dots, (A_n, a_n)$ est aussi le barycentre du système constitué par (H, β) et les $n-p$ points restants.

Ainsi, dans la recherche du barycentre de plusieurs points, on peut remplacer certains d'entre eux par leur barycentre affecté de la somme de leurs coefficients.

Il en résulte que pour construire le barycentre de plusieurs points, il suffit de savoir construire le barycentre de deux points.

Remarque : lorsque n réels $a_1, \dots, a_n$, ont une somme non nulle, quel que soit l'entier p , $2 \leq p \leq n$, on peut trouver p réels parmi $a_1, \dots, a_n$, dont la somme n'est pas nulle.

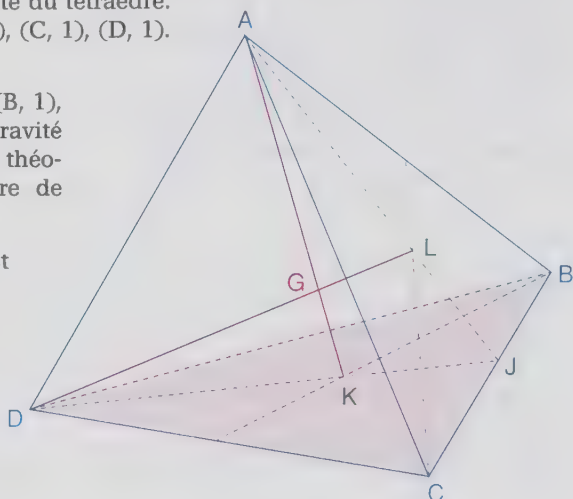
c/ Exemple d'application au tétraèdre

ABCD est un tétraèdre. Notons G l'isobarycentre des quatre points A, B, C, D. On dit encore que G est le centre de gravité du tétraèdre.

G est le barycentre de (A, 1), (B, 1), (C, 1), (D, 1).

- Notons K l'isobarycentre de (B, 1), (C, 1), (D, 1). K est le centre de gravité du triangle BCD. Alors, d'après le théorème 5, G est aussi le barycentre de (A, 1), (K, 3).

Donc : $\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GK} = \vec{0}$, et ainsi G est sur le segment [AK], et $AG = \frac{3}{4} AK$.



(En effet, d'après le théorème 4, pour tout point M, $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MK} = 4\overrightarrow{MG}$, et avec $M = A$, nous obtenons : $3\overrightarrow{AK} = 4\overrightarrow{AG}$, et donc puisque les points sont alignés et que G est entre A et K : $AG = \frac{3}{4} AK$.)

- Notons L l'isobarycentre du triangle ABC, c'est-à-dire le centre de gravité du triangle ABC. Alors, toujours d'après le théorème 5, G est barycentre de (D, 1), (L, 3), donc G est aussi sur le segment [DL] et $DG = \frac{3}{4} DL$.

- Nous pouvons dire aussi que G est barycentre de (B, 1), (M, 3) où M est le centre de gravité de ADC : $BG = \frac{3}{4} BM$.

Et nous pouvons dire aussi que G est le barycentre de (C, 1), (N, 3), où N est le centre de gravité de ABD : $CG = \frac{3}{4} CN$.

Ainsi, dans le tétraèdre ABCD les segments joignant chaque sommet au centre de gravité de la face opposée, sont concourants au point G, isobarycentre de A, B, C, D.

- Notons I le milieu de [AD] et J le milieu de [BC]. Alors I est barycentre de (A, 1), (D, 1) et J est barycentre de (B, 1), (C, 1). D'après le théorème 5, nous pouvons dire que G, barycentre de (A, 1), (B, 1), (C, 1), (D, 1) est aussi barycentre de (I, 2), (J, 2). Donc G est le milieu de [IJ].

- Par un raisonnement analogue, nous montrerions que G est le milieu des segments joignant les milieux des arêtes opposées.

Ainsi, dans le tétraèdre ABCD, les segments joignant les milieux des arêtes opposées sont concourants en G, isobarycentre de A, B, C, D.

3.6. LE BARYCENTRE EST CONSERVÉ PAR PROJECTION

Notons G le barycentre de deux points (A, a) , (B, b) , $a + b \neq 0$. Notons A' , B' , G' les projetés respectifs de A , B , G , sur une droite ou sur un plan.

Nous savons que le barycentre G des points (A, a) , (B, b) est le point G de la droite (AB) tel que : $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b} \overrightarrow{AB}$ (voir paragraphe 3.3.).

Nous en déduisons que $\overrightarrow{A'G'} = \frac{b}{a+b} \overrightarrow{A'B'}$ (voir paragraphe 1.2. et paragraphe 1.3.).

Il en résulte que $a \overrightarrow{G'A'} + b \overrightarrow{G'B'} = \vec{0}$, donc G' est le barycentre de (A', a) , (B', b) .

Le projeté du barycentre de deux points pondérés est donc le barycentre des projetés affectés des mêmes coefficients. En utilisant ce résultat et le théorème du barycentre partiel, on montre de proche en proche que le projeté du barycentre de n points pondérés est le barycentre des projetés affectés des mêmes coefficients.

4

Caractérisation de droites, demi-droites, segments. Représentations paramétriques

Dans ce paragraphe, nous travaillons dans l'espace; les résultats suivants se transposent aisément au cas de la géométrie plane.

4.1. CAS DES DROITES

$a/$ A et B sont deux points *distincts*.

On peut traduire l'appartenance d'un point M à la droite (AB) des trois façons suivantes :

- **traduction vectorielle** : il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t \overrightarrow{AB}$;
- **traduction analytique** dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Notons $(x_0; y_0; z_0)$ les coordonnées de A , et $(a; b; c)$ les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$. Alors, dire que $M(x; y; z)$ appartient à la droite (AB) équivaut à dire qu'il existe un réel t tel que $\overrightarrow{AM} = t \overrightarrow{AB}$, c'est-à-dire tel que :

$$\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc. \end{cases}$$

Ce système est appelé **une représentation paramétrique** de la droite (AB) et on dit que t est le paramètre. On dit aussi que ce système est un système d'équations *paramétriques*.

À chaque réel t on associe un point $M_t(x_0 + ta; y_0 + tb; z_0 + tc)$ et un seul; *reciproquement*, à chaque point M de (AB) correspond un réel t et un seul tel que $\overrightarrow{AM} = t \overrightarrow{AB}$;

- **traduction barycentrique** : nous avons vu que le barycentre des points massifs (A, a) , (B, b) est sur la droite (AB) , quels que soient les réels a et b tels que $a + b \neq 0$. *Reciproquement*, soit M un point de la droite (AB) , alors il existe un réel t , et un seul, tel que $\overrightarrow{AM} = t \overrightarrow{AB}$; or $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}$, et donc de $\overrightarrow{AM} = t \overrightarrow{AB}$, nous déduisons :

$$(1 - t) \overrightarrow{MA} + t \overrightarrow{MB} = \vec{0}.$$

Comme $1 - t + t$ est non nul, cette égalité prouve que M est le barycentre de $(A, 1 - t)$, (B, t) .

Ainsi, l'ensemble des barycentres de deux points distincts A et B est la droite (AB) .

Dire que M appartient à la droite (AB) équivaut à dire que :		
il existe un réel t tel que : $\overrightarrow{AM} = t \overrightarrow{AB}$	il existe un réel t tel que : $\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{cases}$ avec $A(x_0; y_0; z_0)$ $\overrightarrow{AB}(a; b; c)$ et $M(x; y; z)$	il existe un réel t tel que : M soit le barycentre des points massifs : $(A, 1-t), (B, t)$
Traduction vectorielle	Traduction analytique	Traduction barycentrique

b/ EXEMPLES D'APPLICATION

● EXEMPLE 1

Équation paramétrique d'une droite dans un repère.

d est la droite qui passe par le point $A(1; 2; -1)$ et qui est dirigée par le vecteur $\vec{u}(2; -1; 0)$.

Dire que $M(x; y; z)$ appartient à d équivaut à dire qu'il existe un réel t tel que : $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$, donc tel que :

$$\begin{cases} x-1=2t \\ y-2=-t \\ z+1=0 \end{cases} \quad \text{d'où une représentation paramétrique de } d : \begin{cases} x=2t+1 \\ y=-t+2 \\ z=-1, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

● EXEMPLE 2

Comment trouver un point, un vecteur directeur d'une droite définie paramétriquement ?

- d est la droite définie, dans un repère, par :

$$\begin{cases} x = -t + 1 \\ y = -3t + 4 \\ z = t. \end{cases}$$

Nous pouvons dire directement que le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(-1; -3; 1)$ est un vecteur directeur de d et que d passe par le point $A(1; 4; 0)$. Nous pourrions démontrer en effet que la droite d' dirigée par $\vec{u}$ et qui passe par le point $A(1; 4; 0)$ a même représentation paramétrique que la droite d , donc que c'est la droite d .

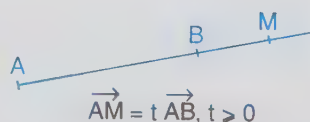
- d est la droite du plan définie paramétriquement par :

$$\begin{cases} x = -2t + 3 \\ y = 3t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Alors le vecteur $\vec{u}(-2; 3)$ est un vecteur directeur de d , et d passe par le point de coordonnées $(3; 0)$.

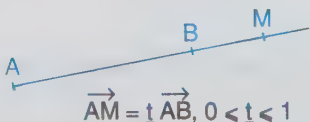
4.2. CAS DES DEMI-DROITES

L'appartenance d'un point M à la demi-droite $[AB)$ (demi-droite d'origine A qui passe par B) se traduit de manière analogue : il suffit de remplacer dans le tableau précédent « t réel » par « t réel positif » ($t \geq 0$).



4.3. CAS D'UN SEGMENT

L'appartenance d'un point M au segment $[AB]$ se traduit de manière analogue : il suffit de remplacer dans le tableau précédent « t réel » par « t réel de $[0; 1]$ » ($0 \leq t \leq 1$).



5 Exercices résolus

EXERCICE RÉSOLU 1

ATTENTION, DANGER ! Comment trouver l'intersection de deux droites dont on connaît des équations paramétriques ?

d et d' sont deux droites du plan respectivement définies par :

$$\begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = 3t - 1, \\ t \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t + 1 \\ t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

1. Trouvez l'erreur dans le raisonnement suivant :

Notons I , s'il existe, le point d'intersection des deux droites.

I est sur d , donc : $\begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = 3t - 1 \end{cases}$; I est sur d' , donc : $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t + 1 \end{cases}$.

Donc $2t + 3 = 2t - 1$. Or ceci est impossible, donc les droites ne sont pas sécantes.

2. Rectifiez le raisonnement.

SOLUTION COMMENTÉE ■■■

1. L'erreur est une **erreur de logique**.

L'erreur vient de ce que l'on a utilisé le même paramètre t pour placer le point I sur d et sur d' . En effet, dire que I est sur d , équivaut à dire qu'il **existe** un certain réel t associé à I , et donc pas n'importe lequel, tel que $x = 2t + 3$, $y = 3t - 1$. (Chaque point de d est associé à un réel et à un seul; le point I , s'il existe, est associé à un unique réel t .) Tout point de d' est aussi associé à un réel et à un seul.

Le point I , en tant que point de d' , est donc associé à un réel t' , mais il n'y a aucune raison *a priori* pour que $t = t'$.

2. On doit donc raisonner ainsi :

Dire que les droites d et d' ont un point commun $I(x; y)$ équivaut à dire qu'il existe deux réels t et t' tels que :

$$\begin{cases} x = 2t + 3 \\ y = 3t - 1 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 2t' - 1 \\ y = t' + 1 \end{cases}$$

ce qui équivaut à dire que t et t' sont solutions du système :

$$\begin{cases} 2t + 3 = 2t' - 1 \\ 3t - 1 = t' + 1. \end{cases}$$

Or ce système a une solution : $t = 2$, $t' = 4$. Donc d et d' ont un point commun I , de coordonnées $x = 7$, $y = 5$.

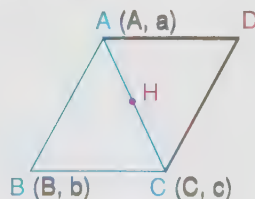
■■■■■■■■■■

EXERCICE RÉSOLU 2

On veut qu'un point donné D soit le barycentre de (A, a) , (B, b) , (C, c) , où A, B, C sont donnés. Comment trouver a, b, c ?

Exemple : $ABCD$ est un parallélogramme.

Trouvez des coefficients a, b, c , pour que D soit barycentre de (A, a) , (B, b) , (C, c) .



SOLUTION COMMENTÉE ■■■

MÉTHODE

Utiliser le théorème du barycentre partiel : d'après ce théorème, D est le barycentre, par exemple, de (B, b) et de (H, a + c), où H est le barycentre de (A, a), (C, c).

Puis, utiliser le fait que le barycentre de deux points distincts est sur la droite qu'ils déterminent.

Notons donc H le barycentre de (A, a), (C, c). Nous choisissons donc $a + c \neq 0$. H est sur (AC). Donnons à H le coefficient $a + c$.

D est alors barycentre de (B, b), (H, a + c). Donc D, B, H, sont alignés. Il en résulte que H est à l'intersection des diagonales, c'est donc le milieu de [AC] et de [BD].

H est donc l'isobarycentre de (A, a), (C, c) donc $a = c$.

D est barycentre de (B, b) (H, 2a), donc :

$$b \overrightarrow{DB} + 2a \overrightarrow{DH} = \vec{0}.$$

Or H est le milieu de [BD], donc : $\overrightarrow{DB} = 2 \overrightarrow{DH}$, c'est-à-dire : $\overrightarrow{DB} - 2 \overrightarrow{DH} = \vec{0}$.

Nous pouvons donc choisir $b = 1$, $2a = -2$, donc $a = -1$ et $c = -1$.

Il est facile de contrôler que D est bien le barycentre de (A, -1), (B, 1), (C, -1).

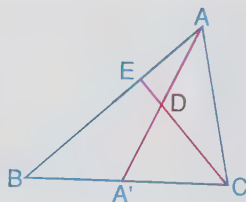
■■■■■■■■■■

EXERCICE RÉSOLU 3

Utilisation du barycentre pour préciser la position de points.

ABC est un triangle, A' est le milieu de [BC], D est le milieu de [AA'].

La droite (CD) coupe (AB) en E. Précisez la position de E sur la droite (AB), c'est-à-dire, trouvez le nombre k tel que $\overrightarrow{EA} = k \overrightarrow{BA}$.



SOLUTION COMMENTÉE ■■■

MÉTHODE

«Faire apparaître» D comme le barycentre de (A, a), (B, b), (C, c). Ainsi, d'après le théorème du barycentre partiel, si (CD) coupe (AB) en E, alors E est le barycentre de (A, a), (B, b). On peut donc placer E lorsqu'on connaît a et b.

Cherchons donc des nombres a, b, c, de façon que D soit le barycentre de (A, a), (B, b), (C, c).

Pour cela, utilisons le théorème du barycentre partiel et les hypothèses.

Si on remplace (B, b), (C, c) par leur barycentre H, alors H est sur (BC) et D est sur (AH). Compte tenu de la figure, donc des hypothèses, nous faisons en sorte que $H = A'$. Puisque A' est milieu de [BC], nous devons choisir $b = c$. Alors A' est affecté du coefficient 2c, et D est barycentre de (A, a), (A', 2c). Or D est milieu de [AA'], donc isobarycentre de A et de A', donc $a = 2c$. Nous pouvons donc choisir $a = 1$, $b = 2$, $c = 2$.

Ainsi D est barycentre de (A, 1) (B, 2) (C, 2).

Il en résulte que E est le barycentre de (A, 1), (B, 2).

En effet, notons E' ce barycentre, il est sur (AB).

D'après le théorème du barycentre partiel, D est barycentre de (E', 3), (C, 2), donc D, E' et C sont alignés.

Donc $E' = E$.

D'où : $\overrightarrow{EA} + 2 \overrightarrow{EB} = \vec{0}$, d'où nous déduisons : $\overrightarrow{EA} = \frac{1}{3} \overrightarrow{BA}$.

■■■■■■■■■■

TRAVAUX PRATIQUES D'APPLICATION

1 Pour la technique : outil vectoriel dans l'espace

Les cinq exercices sont indépendants.

1.1. Points non coplanaires

A, B, C et D sont quatre points non coplanaires.
Placez le point O tel que :

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}.$$

1.2. Dans un tétraèdre

ABCD est un tétraèdre.

1. Démontrez que :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}.$$

2. G est le milieu de [AC] et F le milieu de [BD].

Démontrez que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ est colinéaire à $\overrightarrow{GF}$.

1.3. Points coplanaires : utilisation d'un repère

Dans l'espace, ABC est un triangle, G est son centre de gravité. D est le symétrique de A par rapport à G. $\vec{u}$ est un vecteur donné non nul et non parallèle au plan (ABC). Les points A', B', C', D' sont définis par :

$$\overrightarrow{AA'} = -3\vec{u}; \quad \overrightarrow{BB'} = \vec{u}; \quad \overrightarrow{CC'} = 2\vec{u}; \quad \overrightarrow{DD'} = \vec{u}.$$

Le but de l'exercice est de démontrer que les quatre points A', B', C', D' sont coplanaires.

1. Considérez le repère de l'espace (A; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) avec $\vec{i} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{j} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{k} = \vec{u}$.

Trouvez les coordonnées dans ce repère des points A', B', C', D'.

2. Montrez qu'il existe des réels a et b, tels que $\overrightarrow{A'D'} = a\overrightarrow{A'C'} + b\overrightarrow{A'B'}$, puis concluez.

1.4. Pyramide dont la base est un parallélogramme

SABCD est une pyramide dont la base ABCD est un parallélogramme. I est le milieu de [SA], J est le milieu de [SB], K le milieu de [SC].

Montrez que les plans (BCI) et (AJK) se coupent suivant la droite d qui est parallèle à (JK) et qui passe par le centre de gravité du triangle SAB.

1.5. Représentations paramétriques de droites

(O; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) est un repère de l'espace.

1. d est la droite qui passe par le point A(-1; 3; 5) et qui est dirigée par le vecteur $\vec{u}(-3; 1; 4)$.

Donnez une représentation paramétrique de d, et calculez les coordonnées des points d'intersection de d avec chacun des plans (O; $\vec{i}, \vec{j}$), (O; $\vec{i}, \vec{k}$), (O; $\vec{j}, \vec{k}$).

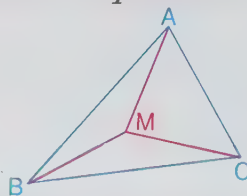
2. Mêmes questions avec la droite d' qui passe par le point B(0; 1; 4) et qui est dirigée par le vecteur $\vec{v}(-1; -1; 1)$.

3. Les droites d et d' sont-elles sécantes ?

2

Quelques propriétés du triangle mises en évidence par l'utilisation du barycentre

ABC est un triangle et M est un point intérieur au triangle.



2.1. Préliminaire

1. Montrez que :

$$\det(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) \overrightarrow{MA} + \det(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA}) \overrightarrow{MB} + \det(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \overrightarrow{MC} = \vec{0}.$$

Indication : utilisez un repère.

2. Déduisez-en que M est le barycentre des trois points pondérés (A, aire MBC), (B, aire MAC), (C, aire MAB).

2.2. Existence et situation d'un point M tel que MBC, MAB, MAC aient la même aire

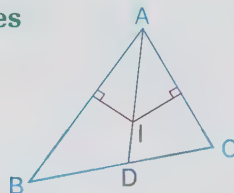
1. Montrez qu'il existe un point M et un seul tel que ces trois aires soient égales.

2. Précisez la position du point M.

3. Voyez-vous une autre démonstration de ce résultat ?

2.3. Propriété des bissectrices intérieures

I est le centre du cercle inscrit dans ABC, c'est-à-dire que I est le point de concours des bissectrices. Notons r le rayon du cercle inscrit.



1. Déduisez du 2.1. que I est le barycentre de (A, a), (B, b), (C, c) avec $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$.

2. D est le pied de la bissectrice menée par A.

a/ Montrez que D est le barycentre de (B, b), (C, c).

b/ Déduisez-en que : $\frac{DB}{DC} = \frac{c}{b}$.

c/ Calculez BD lorsque $c = 8$, $b = 6$.

2.4. Centre du cercle circonscrit

Le triangle ABC a tous ses angles aigus.

Le centre du cercle circonscrit de ABC est barycentre de : (A, $\sin 2\hat{A}$), (B, $\sin 2\hat{B}$), (C, $\sin 2\hat{C}$). Pourquoi ?

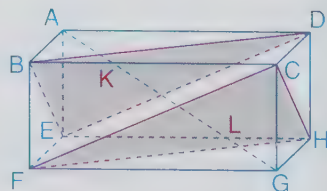
3

Isobarycentre d'un parallélépipède

ABCDEFGH est un parallélépipède.

1. Montrez que les plans (BDE) et (FHC) sont parallèles.

2. On note K le centre de gravité du triangle BDE et L le centre de gravité du triangle FHC.



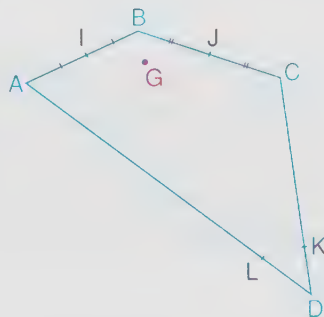
- a/ En partant de l'égalité : $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CG}$, montrez que $\overrightarrow{AG} = 3 \overrightarrow{AK}$.
- b/ En partant de l'égalité : $\overrightarrow{GA} = \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}$, montrez que $\overrightarrow{GA} = 3 \overrightarrow{GL}$.
3. Déduez que K est l'intersection de (AG) et du plan (BDE), puis que L est l'intersection de (AG) et du plan (FCH).
4. Montrez que $\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{KL} = \overrightarrow{LG}$.
5. On note O l'isobarycentre des huit sommets du parallélépipède.
- a/ Montrez que O est le barycentre de (K, 3), (L, 3), (A, 1), (G, 1).
- b/ Montrez que O est le milieu de [AG].
6. Montrez que les segments diagonaux [AG], [BH], [DF] et [EC] sont concourants en O, et que O est le milieu de chacun d'eux.
7. On note P le centre de ABCD, Q le centre de EFGH, R le centre de ABEF, S le centre de CDHG, U le centre de BCFG, V le centre de ADHE. Montrez que [PQ], [RS], [UV] sont concourants en O et que O est le milieu de chacun d'eux.

4 Droites concourantes. Droites coplanaires

Les deux exercices sont indépendants.

4.1. Dans le plan

ABCD est un quadrilatère du plan.
G est le centre de gravité du triangle ABC. I est le milieu de [AB], J est le milieu de [CB]. K est le point défini par $\overrightarrow{CK} = \frac{3}{4} \overrightarrow{CD}$, et L le point défini par $\overrightarrow{DL} = \frac{1}{4} \overrightarrow{DA}$.



Le but de l'exercice est de démontrer que (IK), (JL) et (GD) sont concourantes en un point O.

1. Par utilisation du barycentre.

MÉTHODE

L'idée est de «faire apparaître» le point de concours comme un barycentre. Donc, trouver des coefficients a, b, c, d , de sorte que le barycentre O de (A, a), (B, b), (C, c), (D, d) soit sur (IK), (GD), (JL). Cela suppose, d'après le théorème du barycentre partiel, que O soit aussi barycentre de (I, $a+b$), (K, $c+d$), que O soit aussi barycentre de (G, $a+b+c$), (D, d), que O soit aussi barycentre de (J, $b+c$), (L, $a+d$).

- a/ Vérifiez que I est le barycentre de (A, 1), (B, 1), puis que J est le barycentre de (B, 1), (C, 1).
- b/ Vérifiez que G est barycentre de (A, α), (B, α), (C, α), puis que L est barycentre de (A, 1), (D, 3) et enfin que K est barycentre de (C, 1), (D, 3).
- c/ Déduez-en que si O est le barycentre de (A, 1), (B, 1), (C, 1), (D, 3), alors O est sur (IK), (GD), (JL) et donc que ces trois droites sont concourantes.

2. Par utilisation d'un repère.

Considérez, par exemple, le repère $(A, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\vec{i} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{j} = \overrightarrow{AC}$. Notez $(a; b)$ les coordonnées de D dans ce repère.

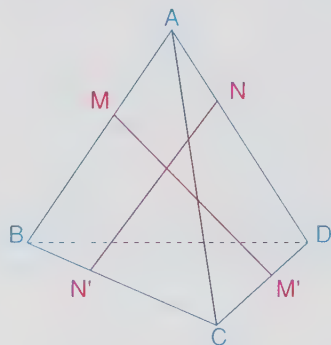
- Calculez les coordonnées de tous les points désignés de la figure.
- Montrez que les droites (IK), (JL), (GD), sont concourantes.
- L'emploi du barycentre est-il toujours utile ?

4.2*. Dans l'espace

ABCD est un tétraèdre.

M, M', N, N' sont quatre points définis par :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} &= \frac{2}{5} \overrightarrow{AB}; & \overrightarrow{DM'} &= \frac{2}{5} \overrightarrow{DC}; \\ \overrightarrow{AN} &= \frac{1}{3} \overrightarrow{AD}; & \overrightarrow{BN'} &= \frac{1}{3} \overrightarrow{BC}.\end{aligned}$$



Le but est de démontrer que les droites (MM') et (NN') sont coplanaires et pour cela de démontrer qu'elles ont un point commun.

MÉTHODE

Choisir des coefficients a, b, c, d , de sorte que le barycentre O de $(A, a), (B, b), (C, c), (D, d)$ soit à la fois sur (MM') et sur (NN'). D'après le théorème du barycentre partiel, cela suppose que O soit aussi le barycentre de $(M, a+b), (M', c+d)$; et que O soit aussi le barycentre de $(N, a+d), (N', b+c)$.

En utilisant la méthode indiquée ci-dessus, trouvez des coefficients a, b, c, d qui conviennent, puis montrez que (MM') et (NN') ont un point commun.

5 Inégalité : $(a_1 + \dots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + \dots + a_n^2)$

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormal.

On note E l'ensemble des points M dont les coordonnées $(x; y)$ sont telles que $y \geq x^2$.

1. Tracez la parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = x^2$ et représentez graphiquement l'ensemble E.

2. A_1 et A_2 sont deux points de E de coordonnées respectives $(a_1; b_1), (a_2; b_2)$. Notons G le barycentre de $(A_1, \lambda), (A_2, 1 - \lambda)$, où λ est un réel de $[0; 1]$.

a/ G appartient au segment $[A_1 A_2]$. Pourquoi ?

b/ Calculez les coordonnées de G et montrez que G appartient à E. Interprétez géométriquement ce résultat.

3. $A_1, \dots, A_n$ sont n points de E , ($n \geq 3$).

a/ Sans calculs, montrez que leur isobarycentre est un point de E .

b/ Lorsque $A_1, \dots, A_n$ sont les points d'abscisses $a_1, \dots, a_n$ de la courbe $\mathcal{P}$, déduisez-en que : $(a_1 + \dots + a_n)^2 \leq n(a_1^2 + \dots + a_n^2)$.

4. Pourriez-vous démontrer cette inégalité par récurrence ?

6 Recherche de minimum

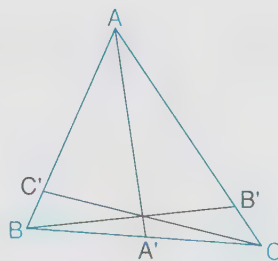
(D'après Exercices de géométrie, I.R.E.M. de Nantes.)

M est un point intérieur à un triangle ABC . La droite (MA) coupe (BC) en A' ; la droite (MB) coupe (AC) en B' et la droite (MC) coupe (AB) en C' .

On se propose de déterminer un point M tel que la somme :

$$s = \frac{MA}{MA'} + \frac{MB}{MB'} + \frac{MC}{MC'}$$

soit minimale.



1. Montrez que M peut être considéré comme le barycentre des points massifs (A, α) , (B, β) , (C, γ) où α, β, γ sont des réels strictement positifs.

2. Déduisez-en que :

$$\alpha \overrightarrow{MA} + (\beta + \gamma) \overrightarrow{MA'} = \vec{0}$$

et qu'alors :

$$\frac{MA}{MA'} = \frac{\beta + \gamma}{\alpha}$$

3. Déduisez-en que :

$$s = \left(\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} \right) + \left(\frac{\gamma}{\alpha} + \frac{\alpha}{\gamma} \right) + \left(\frac{\beta}{\gamma} + \frac{\gamma}{\beta} \right).$$

4. Étudiez les variations de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par

$$f(x) = x + \frac{1}{x}.$$

Déduisez-en que :

a/ pour tout $x > 0$ on a $f(x) \geq 2$;

b/ pour tout $x > 0$, $f(x) = 2$ si et seulement si $x = 1$.

5. Déduisez-en que « s minimale » équivaut à : $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\beta}{\gamma} = 1$.

Déduisez-en la position de M pour que s soit minimale.

EXERCICES ET PROBLÈMES

Pour tester ses connaissances

Q.C.M.

Pour les exercices 1 à 6, une seule des réponses proposées est exacte.

1. I est le milieu du segment [AB]. Alors A est le barycentre de :

a/ (I, 2) et (B, 1);
b/ (I, -2) et (B, 1);
c/ (I, 1) et (B, -2).

2. A, B, C, D, sont quatre points distincts et non alignés tels que $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \vec{0}$. Alors :

a/ C est le barycentre de (A, 1) et (D, 1);
b/ B est le barycentre de (C, 1) et (D, -1);
c/ ABCD est un parallélogramme.

3. ABC est un triangle. G est le barycentre de (A, a), (B, 1), (C, 2), où a est un réel différent de -1 et de -3.

La droite (CG) coupe (AB) en F.
Alors :

a/ F n'est pas le barycentre de (A, a), (B, 1).
b/ F est le barycentre de (A, a), (B, 1).
c/ F n'est le barycentre de (A, a), (B, 1), que pour certaines valeurs de a.

4. SABC est un tétraèdre. I est le milieu de [AC]. G est le barycentre de (A, a), (B, b), (C, c), (S, d) et G est sur SI. Alors :

a/ $b \neq 0$ et $a = c$;
b/ $b = 0$ et $a = c$;
c/ $b \neq 0$ et $a \neq 0$.

5. Deux droites d et d' de l'espace ont pour représentations paramétriques respectivement :

$$\begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 1 - 4\lambda \\ z = 2 + 3\lambda, \\ \lambda \in \mathbb{R} \end{cases} \quad \begin{cases} x = -2 - \frac{\lambda}{3} \\ y = 3 + \frac{2\lambda}{3} \\ z = \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2}, \\ \lambda \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Alors :

a/ d et d' sont confondues;

b/ d et d' sont parallèles et distinctes;
c/ d et d' ont un seul point commun.

6. ABC est un triangle dans l'espace. G est son centre de gravité. ABC se projette sur un plan parallèlement à une droite, en un triangle A'B'C', et G en G'. Alors :

a/ G' n'est pas toujours à l'intérieur de A'B'C'.
b/ G' est le centre de gravité de A'B'C'.
c/ G' est toujours à l'intérieur de A'B'C', mais n'est pas toujours le centre de gravité de A'B'C'.

BARYCENTRES

Pour les exercices 7 à 9, ABCD est un carré de centre E. Placez le barycentre du système de points pondérés.

7. (A, 1), (B, -1), (C, 1), (E, -2).
8. (A, -1), (B, 2), (C, 4), (E, -2).
9. (A, 2), (B, -2), (C, 2), (D, 1).

REPRÉSENTATIONS PARAMÉTRIQUES

Pour les exercices 10 à 12, un repère ayant été choisi, donnez une représentation paramétrique de la droite D de l'espace.

10. D passe par A(-2; 3; 5) et B(2; 1; 3).
11. D passe par A(1; 2; 4) et est parallèle à (BC); B(0; 2; 3), C(-1; 2; 1).
12. D passe par A(-1; 0; 1) et est parallèle à (BC); $B\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{6}\right)$, $C\left(-\frac{1}{3}; \frac{3}{4}; 0\right)$.

Pour s'entraîner

13. ABC est un triangle; I est le milieu de [AB] et J est le point tel que $\overrightarrow{CJ} = \frac{1}{3} \overrightarrow{CA}$.

Les droites (CI) et (BJ) se coupent en E.
En utilisant le théorème du barycentre partiel, montrez que E est le barycentre de (A, 1), (B, 1), (C, 2).

14. A, B, C, D sont quatre points de l'espace et a, b, c, d quatre réels non nuls; O est un point de l'espace.

On note $\vec{V}$ le vecteur :

$$a \vec{OA} + b \vec{OB} + c \vec{OC} + d \vec{OD}.$$

On suppose $\vec{V} = \vec{0}$. Quel est le barycentre du système (A, a), (B, b), (C, c) lorsque $a + b + c \neq 0$?

15. ABC est un triangle équilatéral dont la longueur du côté est 12 cm.

Représentez l'ensemble E des points M du plan tels que les vecteurs :

$$\vec{V} = \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}$$

et :
$$\vec{V'} = \vec{MA} + 2\vec{MB} + 3\vec{MC}$$

soient colinéaires.

Indication : réduisez l'écriture de $\vec{V}$ et celle de $\vec{V'}$ en utilisant des barycentres.

16. ABCD est un rectangle tel que $AB=6$ et $BC=4$.

1. Trouvez les réels x pour lesquels il existe un unique point M tel que $\vec{CM} = 2x\vec{MA} + x\vec{MB}$. On notera E l'ensemble de ces réels x . A tout réel x de E, on associe alors le point M tel que :

$$\vec{CM} = 2x\vec{MA} + x\vec{MB}.$$

2. a/ Précisez le point M associé à $x=0$.

b/ Construisez géométriquement le point I associé à $x=1$.

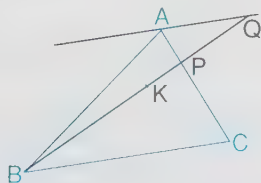
3. Trouvez le lieu géométrique des points M lorsque x décrit E.

17. Parallélisme

ABC est un triangle.

K est le barycentre de (A, 2), (B, 1), (C, 1).

La droite (KB) coupe (AC) en P et coupe en Q la parallèle à (BC) menée par A.



1. Montrez que P est le barycentre de (A, 2), (C, 1).

2. Montrez que P est le barycentre de (K, 2), (Q, 1).
Déduez-en que (AK) et (CQ) sont parallèles.

3. Trouvez le point D tel que P soit l'isobarycentre de A, Q, D.

18. De deux façons

ABC est un triangle.

K est le point tel que $\vec{BK} = \frac{1}{3}\vec{BC}$; D est le point tel que $\vec{AD} = 2\vec{AB} + \vec{AC}$.

Démontrez de deux façons que A, K et D sont alignés :

1. en montrant qu'il existe un nombre k tel que : $\vec{AD} = k\vec{AK}$;

2. en utilisant, après l'avoir justifié, le fait que A est le barycentre de (B, -2), (C, -1), (D, 1).

19. ABCD est un tétraèdre. I et J sont les milieux respectifs de [AB] et [CD]. m est un réel non nul et G_m est le barycentre de (A, 1), (B, 1), (C, $m-2$), (D, m).

1. a/ Situez les points G_2 (cas $m=2$) et G_1 (cas $m=1$).

b/ Montrez que G_2 est le milieu de $[G_1, I]$.

2. a/ Montrez que :

$$2m\vec{IG_m} = (m-2)\vec{IC} + m\vec{ID}.$$

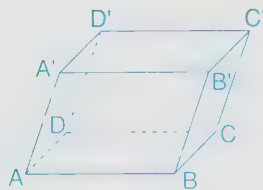
b/ Déduez-en que tous les points G_m appartiennent à un plan fixe que vous préciserez.

c/ Réciproquement, tout point de ce plan fixe est-il un point G_m , c'est-à-dire le barycentre de (A, 1), (B, 1), (C, $m-2$), (D, m), pour une valeur convenable de m ?

20. Alignement

ABCD est un tétraèdre.

a est un réel. I et J sont les milieux respectifs de [AB] et [CD]. E et F sont les points définis par : $\vec{AE} = a\vec{AD}$, $\vec{BF} = a\vec{BC}$. H est le milieu de [EF].



a/ Montrez que F est le barycentre de (B, $1-a$), (C, a), et que E est le barycentre de (A, $1-a$), (D, a).

b/ En utilisant le théorème du barycentre partiel, montrez que H est le barycentre de (A, $1-a$), (B, $1-a$), (C, a), (D, a).
Déduez-en que I, J et H sont alignés.

21. ABD est un triangle. A' est le symétrique de A par rapport à B. C est le point tel que

$$\vec{AC} = \frac{2}{3}\vec{AD}.$$

Les droites (A'C) et (BD) se coupent en O.
Démontrez que O est le milieu de [BD].

22. ABC est un triangle rectangle en A :

$$AB=3 \text{ et } AC=2.$$

1. **a/** Placez le barycentre K de A (1) et B (2).

b/ Placez le barycentre D de A (2), B (-2) et C (-3). Comparez les vecteurs $\overrightarrow{KD}$ et $\overrightarrow{AC}$.

2. Pour $m \neq 0$ et $m \neq 2$, on note H_m le barycentre de A $\left(1 + \frac{2}{m}\right)$, B $\left(2 - \frac{5}{m}\right)$ et C $\left(-\frac{3}{m}\right)$.

a/ Soit I le milieu de [BD]. Déterminez des réels a , b et c tels que I soit le barycentre de A(a), B(b) et C(c).

b/ Montrez que tous les points H_m sont sur la droite (KI).

c/ Déterminez l'ensemble des points H_m .

23. Géométrie analytique

Les trois questions sont indépendantes. $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère donné.

1. Les points A(2; -1; 3), B(1; 2; 0), C(-2; 1; 2) et D(-1; -2; 5) sont-ils les sommets d'un parallélogramme?

2. Quelles sont les coordonnées de l'isobarycentre des points A(6; 4; 1), B(0; -1; 2), C(0; 0; 3)?

3. On considère les points A(2; 0; -1), B(1; -4; 8) et C(7; -12; 22).

Quelles sont les coordonnées du vecteur $2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$? Que peut-on en conclure?

24. ABC est un triangle. B' est le milieu de [AC], C' le milieu de [AB], D le barycentre de (A, 3), (B, 2) et I est le barycentre de (A, 2), (B, 2), (A, 1), (C, 1).

1. **a/** Montrez que I est le barycentre de (B', 1), (C', 2), et que I est aussi le barycentre de (D, 5), (C, 1).

b/ Déduez-en que I est le point d'intersection des droites (B'C') et (CD).

2. La droite (AI) recoupe la droite (BC) en E. Précisez la position de E sur la droite (BC).

Indication : vous pourrez utiliser le fait que I est le barycentre de (B', 1), (C', 2).

25. $(A_1, a_1), \dots, (A_n, a_n)$ sont n points massifs avec $n \geq 3$ et $\sum_{i=1}^n a_i \neq 0$. Nous allons montrer que pour tout naturel p tel que $1 \leq p \leq n-1$, on peut trouver un sous-système de p points ayant un barycentre partiel.

a/ Traitez le cas $p=1$.

b/ Pour $p \geq 2$, on suppose que chaque fois que l'on choisit p réels dans la liste $a_1, a_2, \dots, a_n$ la somme de ces p réels est nulle. Montrez que $a_1 = a_2$, puis que $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

c/ Concluez.

EXERCICES DU BACCALAURÉAT

26. On considère dans le plan orienté un triangle ABC.

Soit : G le barycentre du système

$$\{(A, 3), (B, 1), (C, 1)\},$$

Q le barycentre du système $\{(A, 3), (C, 1)\}$ et

R le barycentre du système $\{(A, 3), (B, 1)\}$.

1. Démontrez que les droites (BQ) et (CR) passent par G.

2. Soit P le milieu de [BC], démontrez que les points A, P, G sont alignés. Exprimez $\overrightarrow{PG}$ en fonction de $\overrightarrow{PA}$.

3. On suppose B et C fixes et que le point A décrit l'ensemble E des points M du plan tels

$$\text{que } (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC}) = \frac{\pi}{2}.$$

Déterminez alors l'ensemble E' décrit par le point G.

27. On considère un triangle isocèle ABC de côtés $BC=2a$, $AC=AB=3a$, a étant un réel positif fixé. On note A' le milieu de [BC] et H l'orthocentre du triangle.

1. Soit θ une mesure de l'angle $\widehat{BAC}$. Montrez que $\cos \theta = \frac{7}{9}$.

2. Soit B' le projeté orthogonal de B sur la droite (AC). Calculez $\frac{B'A}{B'C}$. Déduez-en deux

réels α et γ tels que le point B' soit le barycentre du système : (A, α); (C, γ).

3. En s'aidant de la deuxième question, déterminez trois réels a , b , c tels que le point H soit le barycentre du système :

$$\{(A, a); (B, b); (C, c)\}.$$

28*. 1. Démontrez que pour tout entier naturel n non nul :

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

2. Soit P le plan rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On note J l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ des n premiers entiers naturels non nuls. On appelle $M_{(m,p)}$ le point de coordonnées (m, p) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, (m, p) appartenant à $J \times J$. On affecte chaque point $M_{(m,p)}$ du coefficient m ; on note $(M_{(m,p)}, m)$ le point pondéré obtenu.

a/ Déterminez, dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ les coordonnées du barycentre G_1 du système $\{(M_{(1,p)}, 1); p \in J\}$, obtenu pour $m=1$. Déterminez, dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, les coordonnées du barycentre G_{m_0} du système $\{(M_{(m_0,p)}, m_0); p \in J\}$, obtenu pour $m=m_0$.

b/ Déduisez-en les coordonnées du barycentre G du système :

$$\{(M_{(m,p)}, m); (m, p) \in J \times J\}.$$

29*. A, B, C sont trois points non alignés de l'espace E; on donne un point P de E et trois réels x, y, z .

Trouvez les points M de E tels que :

$$(M; \overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC})$$

soit un repère de E et que les coordonnées de P dans ce repère soient x, y, z .

Pour chercher plus

30. Deux triangles ABC et A'B'C' de l'espace ont même centre de gravité.

a/ Démontrez que $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$.

b/ Étudiez la réciproque.

31. ABC est un triangle équilatéral. $AB = a$. G est le point tel que :

$$\overrightarrow{GB} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC}.$$

a/ Calculez GA, GB, GC.

b/ Trouvez des réels a, b, c tels que G soit barycentre de (A, a), (B, b), (C, c).

32. ABCD sont quatre points non coplanaires; E est le milieu de [AB], F est tel que $\overrightarrow{BF} = \frac{2}{3} \overrightarrow{BC}$ et G est le barycentre de (C, 1) et (D, 3). Montrez qu'il existe un point H unique sur la droite (AD) tel que les droites (HF) et (EG) soient concourantes.

33. Droites concourantes dans l'espace

ABCD est un tétraèdre; E, F, G sont les points tels que :

$$\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{EB}, \quad \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{FD}, \quad \overrightarrow{BG} = 3\overrightarrow{GC}.$$

Trouvez le point H de la droite (AD) tel que les droites (GH) et (EF) soient concourantes.

34. Pour préciser, dans l'espace, des points d'intersection

ABCD est un tétraèdre; E est le point du segment [BD] tel que $5BE = 2BD$ et F le point du segment [AC] tel que $AC = 3AF$. J est le milieu du segment [EF].

a/ On note P le plan passant par A, B et J, et Q le plan passant par C, D et J. Prouvez l'existence d'une droite Δ passant par J et coupant les droites (AB) et (CD).

b/ Trouvez des coefficients $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ tels que J soit barycentre de (A, α), (B, β), (C, γ), (D, δ).

c/ En utilisant les barycentres partiels de (A, α), (B, β) et (C, γ), (D, δ) montrez l'existence de la droite Δ en précisant la position des points communs à Δ , (AB) et (CD).

35. Parallélisme

ABC est un triangle.

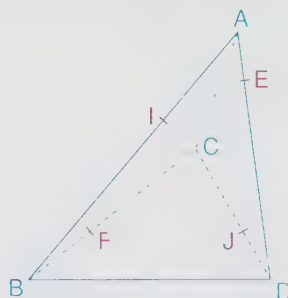
A' est le barycentre de (B, 2), (C, -3). B' est le barycentre de (C, -3), (A, 1). C' est le barycentre de (A, a), (B, b).

Comment choisir a et b pour que les droites (AA'), (B, B') et (CC') soient parallèles?

36. Dans un parallélépipède

ABCD A'B'C'D' est un parallélépipède.

I est le centre de gravité du triangle A'B'C'.



1. Démontrez que $3\overrightarrow{DI} = 2\overrightarrow{DB'}$.

2. Déduisez-en que I est le point d'intersection de (DB') avec le plan (A'BC').

3. Démontrez que la droite (DB') coupe le plan (ACD') en un point qui est le symétrique de I par rapport au centre du parallélépipède.

37*. À l'aide du **T.P.2.** et en étudiant d'abord le cas où les angles du triangle sont aigus, puis l'autre cas, montrez que le barycentre de (A, $a \cos \widehat{A}$), (B, $b \cos \widehat{B}$), (C, $c \cos \widehat{C}$) est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

$$(a = BC, \quad b = CA, \quad c = AB.)$$

38.** Trouvez l'isobarycentre des centres des quatre cercles tangents aux trois côtés d'un triangle.

Problèmes de synthèse

39. Lieux géométriques

ABCD est un tétraèdre. I est le milieu de [AB] et J est le milieu de [CD]. M et N sont les points définis par : $\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MC} = \vec{0}$, $\overrightarrow{NB} + k\overrightarrow{ND} = \vec{0}$, où k est une constante réelle, $k \neq -1$.

1. Quel est le lieu géométrique de M, et quel est celui de N, lorsque k décrit $\mathbb{R} - \{-1\}$?

2. O est le milieu de [MN]. Montrez que $\overrightarrow{OI} + k\overrightarrow{OJ} = \vec{0}$.

Quel est le lieu géométrique des points O?

3. a étant un réel donné, on désigne par I_1 et J_1 les points tels que :

$$\overrightarrow{I_1 A} = a \overrightarrow{I_1 B}, \quad \overrightarrow{J_1 C} = a \overrightarrow{J_1 D}.$$

Quel est, lorsque k décrit $\mathbb{R} - \{-1\}$, le lieu géométrique (L) des points P tels que :

$$\overrightarrow{PM} = a \overrightarrow{PN}?$$

4. Montrez que la droite (MN) varie en restant parallèle à un plan fixe, et que (L) reste parallèle à un autre plan fixe lorsqu'on fait varier a .

40*. Suites et barycentres

A_0 et B_0 sont deux points distincts ; on désigne par A_1 le milieu de $[A_0 B_0]$ et par B_1 le barycentre de $(A_0, 1)$, $(B_0, 2)$. Par itération, on définit deux suites de points $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_{n+1} soit le milieu de $[A_n B_n]$ et B_{n+1} soit le barycentre de $(A_n, 1)$, $(B_n, 2)$.

a/ Prenez $A_0 B_0 = 20$ cm et construisez $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3, A_4, B_4$.

b/ On pose $v_n = A_n B_n$.

Démontrez que la suite v est une suite géométrique.

Trouvez un naturel n_0 tel que si $n \geq n_0$:

$$A_n B_n \leq A_0 B_0 \times 10^{-6}.$$

c/ Calculez $\frac{A_n A_{n+1}}{B_n B_{n+1}}$. Montrez que si les points A_n et B_n se rapprochent arbitrairement d'un point fixe, celui-ci a une position précise, notée Ω dans les questions suivantes.

d/ On pose $u_n = A_n A_{n+1}$.

Démontrez que la suite u est une suite géométrique. Exprimez $A_0 A_n$ puis ΩA_n en fonction de n .

Que pouvez-vous en déduire concernant la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$?

Procédez de même pour la suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

e/ Trouvez une homothétie h de centre Ω telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n = h(A_n)$.

f/ À l'aide de ce qui précède, étudiez les variations et limites des suites numériques $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$x_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2} \quad \text{et} \quad y_{n+1} = \frac{x_n + 2y_n}{3}.$$

7

Produit scalaire Produit vectoriel

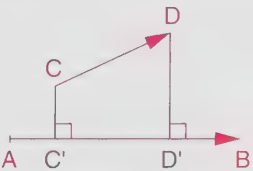
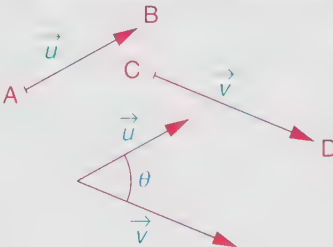
Pour prendre un bon départ	159
Cours	162
T.P. d'application	179
Exercices et problèmes	191

POUR PRENDRE UN BON DÉPART

1 Produit scalaire de deux vecteurs du plan

1.1. DIVERSES EXPRESSIONS

• Le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$ de deux vecteurs du plan peut être calculé de plusieurs manières qui évidemment donnent toutes le même résultat. Elles sont indiquées dans le tableau suivant :

 $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = \vec{AB} \cdot \vec{C'D'} = \overline{AB} \times \overline{C'D'}$	 $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = \overline{AB} \times \overline{CD} \times \cos \theta$ $\vec{u} \cdot \vec{v} = \ \vec{u}\ \times \ \vec{v}\ \times \cos \theta$	Dans un repère orthonormal $\vec{u}(x; y)$ $\vec{v}(x'; y')$ $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$
---	--	---

Autre expression : $2(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2$.

• Il est important de comprendre la signification de l'égalité $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = \vec{AB} \cdot \vec{C'D'}$. Elle dit que :

on ne change pas le produit scalaire de deux vecteurs en remplaçant l'un d'eux par sa projection orthogonale sur la droite qui porte l'autre.

Remarque : lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires**, alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|, \quad \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont de même sens}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|, \quad \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont de sens contraires.}$$

1.2. RÈGLES DE CALCUL

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, et quel que soit le réel a :

$$1. \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}. \quad 2. \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}. \quad 3. (a\vec{u}) \cdot \vec{v} = a(\vec{u} \cdot \vec{v}).$$

Exercices-tests

1. $\vec{u}$ est un vecteur de norme 2. $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormal et $(\vec{i}, \vec{u}) = \frac{\pi}{3}$.

Calculez $\vec{u} \cdot \vec{i}$ et $\vec{u} \cdot \vec{j}$.

2. ABC est un triangle. O est un point de [BC]. On sait que :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AO} = 5 \quad \text{et que} \quad \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AO} = 3.$$

Calculez $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AO}$ et $\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{OA}$.

2

Applications du produit scalaire en géométrie plane

2.1. CALCULS DE DISTANCES

La notation $\overline{AB}^2$ désigne le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$.

$$\overline{AB}^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} \quad \|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}.$$

Pour calculer une distance AB, on peut calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$.

2.2. ORTHOGONALITÉ

Dire que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux équivaut à dire que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

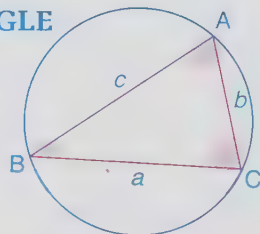
2.3. RELATIONS MÉTRIQUES DANS UN TRIANGLE

a/ Notations

ABC est un triangle quelconque.

L'usage est de noter : $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$,

$\widehat{A} = \widehat{BAC}$, $\widehat{B} = \widehat{CBA}$, $\widehat{C} = \widehat{BCA}$, et de noter $\sin A$ au lieu de $\sin \widehat{A}$, $\cos A$ au lieu de $\cos \widehat{A}$...



On note p le demi-périmètre ($2p = a + b + c$), et S l'aire de ABC, R le rayon du cercle circonscrit.

b/ Avec ces notations

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R.$$

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A.$$

c/ Le théorème de la médiane : $AB^2 + AC^2 = 2AO^2 + \frac{BC^2}{2}$, où O est le milieu de [BC].

Exercices-tests

1. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux. Calculez : $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2$ en fonction de $\|\vec{u}\|$ et de $\|\vec{v}\|$.

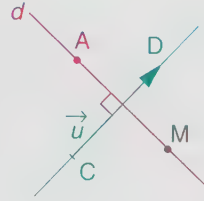
2. ABC est un triangle. $a = 6$, $\widehat{B} = \frac{2\pi}{3}$, $\widehat{C} = \frac{\pi}{4}$.

Calculez b , c , $\widehat{A}$.

2.5. CARACTÉRISATION D'UNE DROITE PAR UN POINT ET UN VECTEUR NORMAL

La droite d qui passe par le point A et qui est orthogonale au vecteur $\vec{u}$ ($\vec{u} \neq 0$) est l'ensemble des points M tels que :

$$\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0.$$

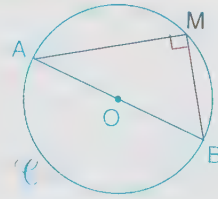


Si dans un repère orthonormal, la droite d a pour équation : $ax + by + c = 0$ alors le vecteur $\vec{u}(a; b)$ est orthogonal à la droite d .

2.6. CARACTÉRISATION D'UN CERCLE DE DIAMÈTRE [AB]

Le cercle de diamètre $[AB]$ est l'ensemble des points M tels que :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0.$$



2.7. LIEN ENTRE LES COORDONNÉES DE M ET L'ANGLE $(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère **ORTHONORMAL**. Dans ce repère le point M a pour coordonnées (x, y) . Alors :

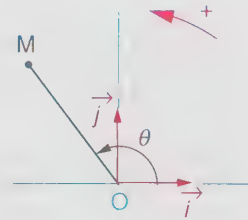
$$x = OM \cos(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) \quad y = OM \sin(\vec{i}, \overrightarrow{OM}).$$

En effet : $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$,

donc : $\overrightarrow{OM} \cdot \vec{i} = x$ et $\overrightarrow{OM} \cdot \vec{j} = OM \cos(\overrightarrow{OM}, \vec{i})$.

$\overrightarrow{OM} \cdot \vec{j} = y$, et $\overrightarrow{OM} \cdot \vec{j} = OM \cos(\overrightarrow{OM}, \vec{j}) = OM \sin(\vec{i}, \overrightarrow{OM})$,

car $\cos(\overrightarrow{OM}, \vec{j}) = \cos(\vec{j}, \overrightarrow{OM}) = \cos\left[(\vec{i}, \overrightarrow{OM}) - \frac{\pi}{2}\right]$.



3

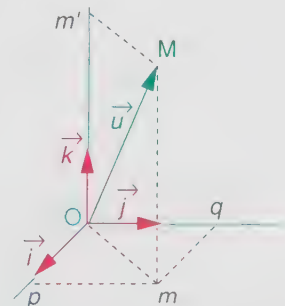
Géométrie analytique dans l'espace

Dans un repère ORTHONORMAL, si le vecteur $\vec{u}$ a pour coordonnées $(a; b; c)$, alors :

$$\|\vec{u}\|^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Dans un repère ORTHONORMAL, si les points M et M' ont pour coordonnées respectives $(x; y; z)$ et $(x'; y'; z')$ alors :

$$MM'^2 = (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2.$$



Dans un repère ORTHONORMAL, dire que les vecteurs $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$ sont ORTHOGONAUX équivaut à dire que :

$$xx' + yy' + zz' = 0.$$

A. PREMIÈRE PARTIE : LE PRODUIT SCALAIRE DANS L'ESPACE

1 Définition du produit scalaire de deux vecteurs de l'espace

1.1. PRODUIT SCALAIRE DANS UN REPÈRE ORTHONORMAL

Choisissons un repère **orthonormal** et associons à tout couple de vecteurs $\vec{u}(x; y; z)$, $\vec{v}(x'; y'; z')$, le nombre $xx' + yy' + zz'$.

Nous pouvons traduire l'orthogonalité de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ par une « **formule simple** : $xx' + yy' + zz' = 0$, et calculer la norme de $\vec{u}$, par exemple, par une « **formule simple**, elle aussi :

$$\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Notez que cette expression est de la forme : $xx' + yy' + zz'$, avec $x = x'$, $y = y'$, $z = z'$. *Tout cela a été vu en classe de Premières.*

Le nombre $xx' + yy' + zz'$ est appelé produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans le repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1.2. LE PRODUIT SCALAIRE EST INDÉPENDANT DU CHOIX DU REPÈRE

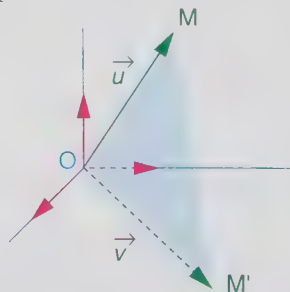
Dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont respectivement pour coordonnées $(x; y; z)$, $(x'; y'; z')$. Alors leur produit scalaire dans $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est $xx' + yy' + zz'$. Supposons que dans un autre repère orthonormal, $(O'; \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient $(X; Y; Z)$, $(X'; Y'; Z')$. Alors leur produit scalaire dans ce repère est : $XX' + YY' + ZZ'$. Montrons que : $xx' + yy' + zz' = XX' + YY' + ZZ'$.

Pour cela, notons M et M' les points tels que :

$$\vec{OM} = \vec{u}, \quad \vec{OM'} = \vec{v}.$$

Alors, dans $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$\begin{aligned} OM^2 &= x^2 + y^2 + z^2 \\ OM'^2 &= x'^2 + y'^2 + z'^2 \end{aligned}$$



et, puisque le vecteur $\vec{MM'}$ a pour coordonnées $(x' - x; y' - y; z' - z)$, nous obtenons :

$$\begin{aligned} MM'^2 &= (x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2 \\ &= x'^2 + y'^2 + z'^2 + x^2 + y^2 + z^2 - 2(xx' + yy' + zz'). \end{aligned}$$

Il en résulte que :

$$\begin{aligned} 2(xx' + yy' + zz') &= OM^2 + OM'^2 - MM'^2 \\ &= \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{v} - \vec{u}\|^2. \end{aligned}$$

Ainsi, $xx' + yy' + zz'$ ne dépend que de la longueur de $\vec{u}$, de la longueur de $\vec{v}$, et de la longueur de $\vec{v} - \vec{u}$. Or, ces trois longueurs sont des données constantes, dès que sont donnés les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

En calculant $2(XX' + YY' + ZZ')$ dans $(O'; \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$, nous trouverions donc aussi : $\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2$, d'où le résultat.

1.3. CONCLUSION

DÉFINITION 1

Nous pouvons donc définir **LE produit scalaire** de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace, comme étant le nombre :

$$xx' + yy' + zz'$$

où $(x; y; z)$, $(x'; y'; z')$ sont les coordonnées de ces vecteurs dans un repère **orthonormal** arbitrairement choisi.

Notation : comme en géométrie plane, le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

1.4. UNE AUTRE EXPRESSION DU PRODUIT SCALAIRE

Nous avons prouvé au paragraphe 1.2. que :

$$2(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2.$$

2

Propriétés et autres expressions du produit scalaire

2.1. RÈGLES DE CALCULS DU PRODUIT SCALAIRE

Les règles de calculs du produit scalaire dans l'espace sont analogues aux règles de calcul du produit scalaire dans le plan.

THÉORÈME 1

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, tous réels a et b :

(1) $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$.

(2) $(a\vec{u}) \cdot (b\vec{v}) = ab(\vec{u} \cdot \vec{v})$.

(3) $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.

Prouvons par exemple, la proposition (3).

Les autres propriétés se démontreraient de manière analogue.

Choisissons un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et notons $(x; y; z)$, $(x'; y'; z')$ et $(x''; y''; z'')$ les coordonnées respectives des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.

Alors, $\vec{v} + \vec{w}$ a pour coordonnées : $(x' + x''; y' + y''; z' + z'')$.

$$\begin{aligned} \text{Donc : } \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) &= x(x' + x'') + y(y' + y'') + z(z' + z'') \\ &= xx' + xx'' + yy' + yy'' + zz' + zz'' \\ &= xx' + yy' + zz' + xx'' + yy'' + zz'' \\ &= \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}. \end{aligned}$$

2.2. LE PRODUIT SCALAIRE ET LA RELATION DE CHASLES

La règle (3) : $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$, se traduit en disant que le **produit scalaire est distributif par rapport à l'addition**.

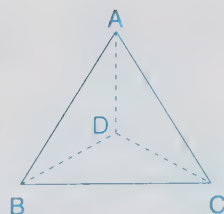
Pour calculer un produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{u}$ ou pour démontrer des égalités, il sera souvent avantageux d'écrire $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$, grâce à la relation de Chasles, et de calculer alors $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.

L'utilisation du produit scalaire avec la relation de Chasles est une méthode très utilisée soit pour calculer plus facilement, soit pour démontrer des propriétés géométriques.

EXEMPLE D'APPLICATION

Dans le tétraèdre $ABCD$, on connaît le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD}$, soit a , et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$, soit b . Si l'on veut calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC}$, en fonction de a et de b , on écrira : $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD}$, d'où :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BD}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = b - a.$$



2.3. AUTRES EXPRESSIONS DU PRODUIT SCALAIRE

Nous allons prouver les résultats suivants :

Pour calculer le produit scalaire de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace, on peut calculer le produit scalaire de deux vecteurs *coplanaires* $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$, avec $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$.

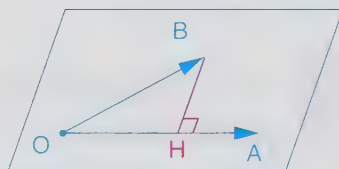
Donc, pour deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, non nuls :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

et :

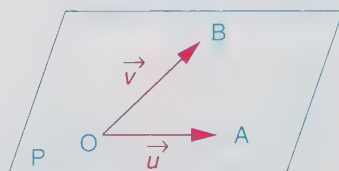
$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OH}$$

où H est le projeté orthogonal de B sur (OA).



Démontrons ces résultats.

Deux vecteurs de l'espace, $\vec{u}$ et $\vec{v}$, peuvent toujours être représentés par des vecteurs *coplanaires*; en effet, il suffit pour cela de choisir trois points O, A, B tels que : $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$, et il y a toujours au moins un plan P qui contient ces trois points.



Or, nous avons vu au paragraphe 1 que $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2)$, et cette expression est exactement celle qui donne, **dans le plan P**, le produit scalaire $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ (voir « Pour prendre un bon départ », paragraphe 1). Les résultats énoncés se déduisent alors directement des différentes expressions du produit scalaire dans le plan.

Remarque

Lorsque les deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** :

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|, & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont de même sens} \\ \vec{u} \cdot \vec{v} &= -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|, & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont de sens contraires.} \end{aligned}$$

3

Utilité du produit scalaire

3.1. CALCUL DE DISTANCE ET CARRÉ SCALAIRE

Comme dans le cas de la géométrie plane, nous obtenons :

$$\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}.$$

En effet, lorsque $\vec{u} = \vec{v}$, l'égalité $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$ conduit à : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|^2$, car $\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \cos 0 = 1$.

Lorsque $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, nous écrirons aussi : $\overrightarrow{AB}^2$ au lieu de $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$, d'où :

$$\overrightarrow{AB}^2 = AB^2.$$

Lorsque $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(a; b; c)$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$ est égal à : $a^2 + b^2 + c^2$, d'où $AB^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

On retrouve ainsi le résultat vu en classe de Première.

MÉTHODE

Ainsi, pour calculer une distance AB , il suffit de calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}$.

3.2. VECTEURS ORTHOGONAUX

Nous avons rappelé dans « Pour prendre un bon départ » le résultat suivant :

« dire que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux, équivaut à dire que $xx' + yy' + zz' = 0$, où $(x; y; z)$ et $(x'; y'; z')$ sont les coordonnées de $\vec{u}$ et de $\vec{v}$ dans un repère orthonormal ».

Avec la définition du produit scalaire, nous pouvons énoncer ce résultat sous la forme suivante :

THÉORÈME 1

Dire que deux vecteurs sont orthogonaux équivaut à dire que leur produit scalaire est nul.

3.3. CALCULS D'ANGLES

L'égalité $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$ peut permettre de calculer $\cos(\vec{u}, \vec{v})$, en particulier lorsqu'on connaît les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans un repère orthonormal. Mais la connaissance de son seul cosinus ne permet pas de déterminer l'angle $(\vec{u}, \vec{v})$. Il faudrait pour cela, et ce serait suffisant, connaître aussi son sinus. Nous verrons au paragraphe 8. comment il est possible de calculer $\sin(\vec{u}, \vec{v})$.

4

Orthogonalité de droites et de plans

Rappelons ceci : dire que le plan P est dirigé par les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, ou que $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ sont des vecteurs directeurs du plan, signifie que $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ ne sont pas colinéaires et que P est parallèle au plan (OAB) . Plus généralement, étant donnés deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on dira que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs directeurs de P , si $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ le sont, avec $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.

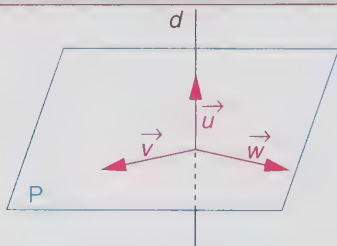
Nous allons interpréter vectoriellement les principaux résultats énoncés dans les classes antérieures au sujet de droites orthogonales et de droites et plans perpendiculaires.

4.1. DROITE PERPENDICULAIRE À UN PLAN

a/ Point de vue ponctuel

MÉTHODE

Pour démontrer qu'une droite d est perpendiculaire à un plan P , il suffit de démontrer qu'elle est orthogonale à deux droites *sécantes* du plan.



d est alors orthogonale à toute droite du plan P .

Interprétation vectorielle

MÉTHODE

Pour démontrer qu'une droite d est perpendiculaire à un plan P , il suffit de démontrer qu'un vecteur directeur $\vec{u}$ de d est orthogonal à un couple $\vec{v}$, $\vec{w}$ de vecteurs directeurs de P :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{u} \cdot \vec{w} = 0.$$

$\vec{u}$ est alors orthogonal à tout vecteur $\vec{AB}$, où A et B sont des points de P .

On dit alors que le vecteur $\vec{u}$ est un *vecteur normal* à P .

b/ Définition d'un vecteur normal à un plan

Dire qu'un vecteur $\vec{u}$, *non nul*, est normal à un plan P , signifie que la direction de $\vec{u}$ est orthogonale à P . Il en résulte que $\vec{u}$ est orthogonal à tout couple de vecteurs directeurs de P .

Lorsque $\vec{u}$ est normal à P , on dit aussi que P est orthogonal à $\vec{u}$.

Remarques

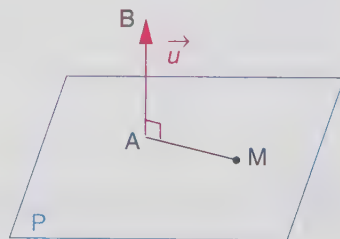
- Si $\vec{u}$ est normal à P , alors $\vec{u}$ est un vecteur directeur de n'importe quelle droite perpendiculaire à P .
- Si $\vec{u}$ est un vecteur normal à P , alors $\vec{u}$ est normal à tout plan Q parallèle à P .

4.2. CARACTÉRISATION D'UN PLAN PAR UN POINT ET UN VECTEUR NORMAL

A est un point, et $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, un vecteur *non nul*.

Nous savons que l'ensemble des points M tels que les droites (AM) et (AB) soient perpendiculaires est le plan P perpendiculaire en A à (AB) . (Nous convenons ici de dire que si M est en A , (AA) est perpendiculaire à AB .)

Or, dire que (AM) et (AB) sont perpendiculaires, équivaut à dire que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0$. D'où le théorème suivant :



THÉORÈME 2

A est un point et $\vec{u}$ un vecteur non nul.

Le plan P qui passe par A , et qui est orthogonal à $\vec{u}$, est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0$.

4.3. DROITES ORTHOGONALES DANS L'ESPACE

Rappelons que deux droites orthogonales de l'espace ne sont pas nécessairement sécantes. Lorsque deux droites sont orthogonales et sécantes, nous dirons qu'elles sont perpendiculaires.

Point de vue ponctuel

MÉTHODE

Pour démontrer que deux droites d_1 et d_2 sont orthogonales, il suffit de démontrer que d_1 est perpendiculaire à un plan contenant d_2 .

Point de vue vectoriel

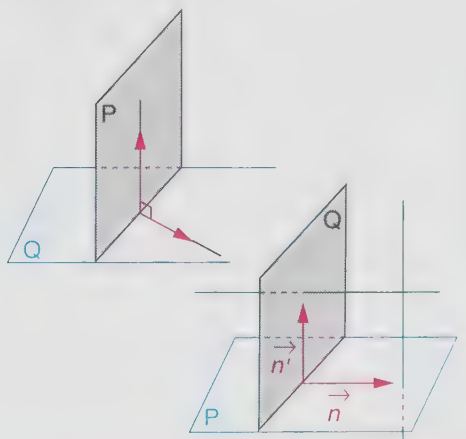
MÉTHODE

Pour démontrer que deux droites d_1 et d_2 sont orthogonales, il suffit de démontrer qu'un vecteur directeur de l'une est orthogonal à un vecteur directeur de l'autre.

4.4. PLANS PERPENDICULAIRES

Point de vue ponctuel

Par **définition**, dire que deux plans sont perpendiculaires signifie que l'un d'eux contient une droite perpendiculaire à l'autre.



Point de vue vectoriel

Deux plans sont perpendiculaires *si et seulement si* un vecteur normal à l'un est vecteur directeur d'une droite de l'autre.

MÉTHODE

$\vec{n}$ est un vecteur normal à P et $\vec{n'}$ un vecteur normal à Q. Pour démontrer que les plans P et Q sont perpendiculaires, il suffit de démontrer que les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ sont orthogonaux, à savoir $\vec{n} \cdot \vec{n'} = 0$.

4.5. PROJECTION ORTHOGONALE SUR UN PLAN DE DEUX DROITES PERPENDICULAIRES

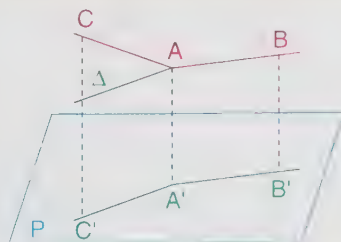
THÉORÈME 3

(AB) et (AC) sont deux droites perpendiculaires en A, qui se projettent orthogonalement sur un plan P, selon deux droites (A'B') et (A'C').

- Si (AB) est parallèle à P, alors (A'B') et (A'C') sont perpendiculaires.
- Si (A'B') et (A'C') sont perpendiculaires, alors (AB), ou (AC), est parallèle à P.

Nous allons démontrer ce théorème.

Auparavant, notons que les droites (AA'), (BB'), (CC') sont parallèles et donc que les points A, B, A', B', d'une part, et les points A, C, A', C', d'autre part sont coplanaires.



a/ On suppose (AB) parallèle au plan P

Nous allons montrer que, sous cette hypothèse, nous obtenons : $(A'B') \perp (A'C')$.

Puisque (AB) est parallèle au plan P et coplanaire avec $(A'B')$, (AB) est parallèle à $(A'B')$, donc (AB) est perpendiculaire à (AA') ; or, (AB) est aussi perpendiculaire à (AC), donc (AB) est perpendiculaire au plan $(AA'CC')$. Il en est donc de même de $(A'B')$, et donc $(A'B') \perp (A'C')$.

b/ On suppose que $(A'B')$ et $(A'C')$ sont perpendiculaires

Nous allons montrer que, sous cette hypothèse, nous obtenons : (AB) est parallèle à P, ou (AC) est parallèle à P.

Supposons (AC) **non** parallèle à P, donc $(A'C')$ et (AC) sont sécantes.

La droite $(A'C')$ est orthogonale à (AB) : en effet, elle est orthogonale au plan $(AA'BB')$, car orthogonale à (AA') et $(A'B')$.

La droite (AB), qui est orthogonale aux sécantes (AC) et $(A'C')$, est donc perpendiculaire au plan $(ACA'C')$.

Mais il en est de même de $(A'B')$; en effet $(A'B') \perp (AA')$ et $(A'B') \perp (A'C')$. Donc (AB) et $(A'B')$ sont parallèles, donc (AB) est parallèle à P.

Remarque : on énonce aussi ce théorème sous la forme suivante :

une condition nécessaire et suffisante pour qu'un angle droit se projette orthogonalement selon un angle droit, est que l'un de ses côtés au moins soit parallèle au plan sur lequel on projette.

5 Le produit scalaire en géométrie analytique

5.1. ÉQUATION CARTÉSIENNE D'UN PLAN DANS UN REPÈRE ORTHONORMAL

a/ $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormal.

P est un plan dont on connaît un point A de coordonnées $(x_0; y_0; z_0)$ et un vecteur normal $\vec{u}$ de coordonnées $(a; b; c)$.

P est donc l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0$ (théorème 2). Donc, dire que $M(x; y; z)$ appartient à P, équivaut à dire que :

$$(x - x_0)a + (y - y_0)b + (z - z_0)c = 0,$$

donc, à dire que : $ax + by + cz - (ax_0 + by_0 + cz_0) = 0$.

Cette condition, nécessaire et suffisante, d'appartenance d'un point $M(x; y; z)$ au plan P est appelée équation cartésienne de P dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Cette équation est de la forme :

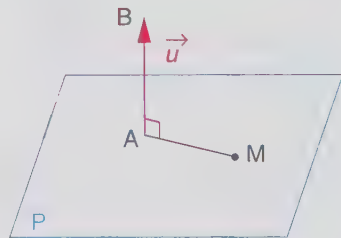
$$ax + by + cz + d = 0, \text{ avec } a, b, c \text{ non tous nuls.}$$

b/ Réciproquement, étant donnés quatre réels a, b, c, d , avec a, b et c , non tous nuls, cherchons l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que :

$$ax + by + cz + d = 0.$$

Choisissons trois nombres x_0, y_0, z_0 tels que $ax_0 + by_0 + cz_0 + d = 0$. Un tel choix est toujours possible. (Par exemple, si $c \neq 0$, on choisit arbitrairement x_0, y_0 , puis

on choisit $z_0 = \frac{-ax_0 - by_0 - d}{c}$.)



Notons A le point de coordonnées $(x_0; y_0; z_0)$ et $\vec{u}$ le vecteur de coordonnées $(a; b; c)$, qui est non nul par hypothèse.

Soit M(x; y; z) un point tel que :

$$ax + by + cz + d = 0. \quad [1]$$

Alors, en remplaçant d par $-ax_0 - by_0 - cz_0$ dans l'égalité ci-dessus, nous obtenons successivement des conditions équivalentes à [1] :

$$\begin{aligned} ax + by + cz - ax_0 - by_0 - cz_0 &= 0 \\ a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) &= 0 \\ \vec{AM} \cdot \vec{u} &= 0. \end{aligned}$$

Notons P le plan qui passe par A et qui est orthogonal à $\vec{u}$.

L'ensemble des points M(x; y; z) tels que $ax + by + cz + d = 0$ est donc ce plan P. D'où, en résumé, le théorème suivant :

THÉORÈME 4

$(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère ORTHONORMAL.

1. Tout plan P a une équation de la forme :

$$ax + by + cz + d = 0 \quad \text{avec } (a, b, c) \neq (0, 0, 0),$$

et alors le vecteur $\vec{u}(a; b; c)$ est un vecteur normal à P.

2. a, b, c, d étant quatre réels donnés, avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, l'ensemble des points M(x; y; z) tels que :

$$ax + by + cz + d = 0$$

est un plan orthogonal au vecteur $\vec{u}(a; b; c)$.

EXEMPLE D'APPLICATION

A est le point de coordonnées (2; 3; 1) et $\vec{u}$ est le vecteur de coordonnées (1; 0; 1), dans un repère orthonormal. Cherchons dans ce repère une équation du plan P qui passe par A et qui est orthogonal à $\vec{u}$.

Nous pouvons opérer de deux façons :

Première méthode : d'après le théorème 4, une équation de P est de la forme $ax + by + cz + d = 0$, avec $(a; b; c)$ coordonnées de $\vec{u}$, donc de la forme : $x + z + d = 0$. Or le point A, appartient à P, donc : $2 + 1 + d = 0$, $d = -3$. Une équation de P est donc : $x + z - 3 = 0$.

Deuxième méthode : d'après le théorème 2, P est l'ensemble des points M(x; y; z) tels que $\vec{AM} \cdot \vec{u} = 0$, donc tels que :

$$\begin{aligned} (x - 2) \times 1 + (y - 3) \times 0 + (z - 1) \times 1 &= 0 \\ x + z - 3 &= 0. \end{aligned}$$

Une équation de P est donc : $x + z - 3 = 0$.

5.2. ÉQUATION D'UNE SPHÈRE

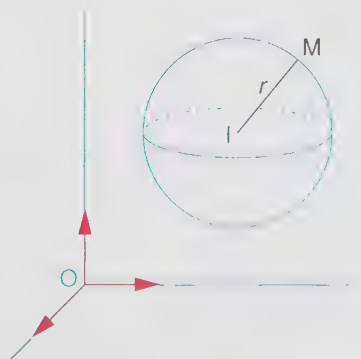
$(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormal.

S est la sphère de centre I(a; b; c) et de rayon r.

Dire qu'un point M appartient à S équivaut à dire que : $IM^2 = r^2$, donc à dire, successivement que :

$$\vec{IM} \cdot \vec{IM} = r^2$$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2.$$



Cette relation d'appartenance est appelée «équation de la sphère S».

6

Exercices résolus

6.1. LE THÉORÈME DES TROIS PERPENDICULAIRES

EXERCICE
RÉSOLU 1

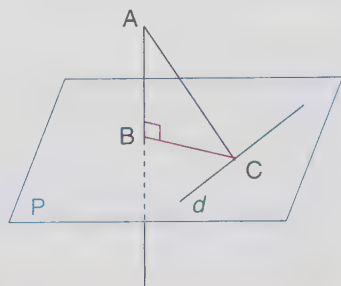
d est une droite contenue dans un plan P .

A est un point extérieur à P . B est le projeté orthogonal de A sur P .

Montrez que A et B se projettent orthogonalement sur d en un même point C .

SOLUTION COMMENTÉE ■■■

Notons C le projeté orthogonal de B sur d . Il s'agit alors de montrer que C est le projeté orthogonal de A sur d , c'est-à-dire que (AC) est perpendiculaire à d .



1. MÉTHODE sans utiliser le produit scalaire

Pour démontrer que deux droites d_1 et d_2 sont orthogonales, on démontre que d_1 est perpendiculaire à un plan contenant d_2 .

La droite (AC) est dans le plan (ABC) . Nous allons démontrer que d est perpendiculaire à ce plan, il en résultera : $d \perp (AC)$. Pour démontrer que d est perpendiculaire au plan (ABC) , il suffit de démontrer que $d \perp (AB)$ et $d \perp (BC)$. Or, (AB) est perpendiculaire à P , par hypothèse, donc (AB) est orthogonale à toute droite de P , et donc $(AB) \perp d$. De plus, par hypothèse $d \perp (BC)$, d'où le résultat.

2. MÉTHODE utilisant le produit scalaire

Introduire un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite d et montrer que $\overrightarrow{AC} \cdot \vec{u} = 0$.

Pour pouvoir utiliser les hypothèses $(AB) \perp d$, c'est-à-dire $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = 0$, et $(BC) \perp d$, c'est-à-dire $\overrightarrow{BC} \cdot \vec{u} = 0$, nous décomposons $\overrightarrow{AC}$ en $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$.

D'où $\overrightarrow{AC} \cdot \vec{u} = (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) \cdot \vec{u} = \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} + \overrightarrow{BC} \cdot \vec{u} = 0$, d'où le résultat.

■■■■■■■■■■

6.2. INTERSECTION DE PLANS

EXERCICE
RÉSOLU 2

Dans un repère orthonormal, deux plans P_1 et P_2 ont pour équations :

$$(P_1) : x - 4y + 7 = 0; \quad (P_2) : x - 2z + 5 = 0.$$

Donnez une représentation paramétrique de leur droite d d'intersection, si elle existe.

SOLUTION COMMENTÉE ■■■

MÉTHODE

Les points $M(x; y; z)$, communs à P_1 et P_2 , sont les points tels que :
 $x - 4y + 7 = 0$ et $x - 2z + 5 = 0$.

Ce sont donc les points dont les coordonnées sont solutions du système

$$(S) : \begin{cases} x - 4y + 7 = 0 \\ x - 2z + 5 = 0 \end{cases} \quad \text{soit } (S) : \begin{cases} x - 4y = -7 \\ x - 2z = -5 \end{cases}$$

On résout donc ce système (S) qui, *a priori*, soit n'a pas de solution (plans non sécants), soit en a une infinité (plans sécants).

La méthode de Gauss conduit, avec $L_2 \leftarrow L_1 - L_2$, à :

$$\begin{cases} x - 4y + 0z = -7 \\ -4y + 2z = -2 \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{cases} x = 4y - 7 \\ y = \frac{1+z}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x = -3 + 4z \\ y = \frac{1+z}{2} \end{cases}$$

Les solutions de (S) sont donc les triplets : $\left(-3 + 4z; \frac{1+z}{2}; z\right)$, où z est un réel quelconque.

Les plans P_1 et P_2 sont donc sécants selon une droite d .

Puisque z est un réel quelconque, il suffit de poser $z = t$, pour obtenir une représentation paramétrique de d .

Nous obtenons donc :

$$\begin{cases} x = -3 + 4t \\ y = 1 + t \\ z = t, \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

■■■■■■■■■

6.3. RECONNAÎTRE DES PLANS PERPENDICULAIRES, DES PLANS PARALLÈLES

EXERCICE
RÉSOLU 3

P et Q sont deux plans d'équations respectives :
 $ax + by + cz + d = 0$, $a'x + b'y + c'z + d' = 0$, dans un repère orthonormal.

Justifiez les deux affirmations suivantes :

a/ Dire que P et Q sont parallèles équivaut à dire qu'il existe un réel λ , tel que $a' = \lambda a$, $b' = \lambda b$, $c' = \lambda c$.

b/ Dire que P et Q sont perpendiculaires équivaut à dire que $aa' + bb' + cc' = 0$.

SOLUTION COMMENTÉE ■■■

Dans les deux cas, nous allons utiliser des vecteurs normaux à P et Q respectivement.

a/ Parallélisme

MÉTHODE

Utiliser le résultat suivant : dire que P et Q sont parallèles équivaut à dire qu'un vecteur normal de Q est colinéaire à un vecteur normal de P .

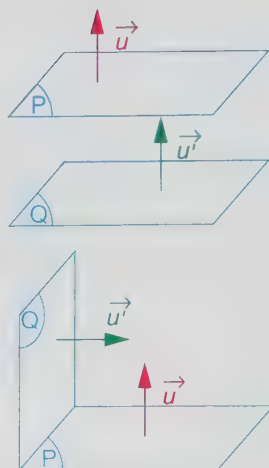
Nous savons (voir théorème 4) que le vecteur $\vec{u}(a; b; c)$ est normal à P, et que le vecteur $\vec{u'}(a'; b'; c')$ est normal à Q.

« P parallèle à Q » équivaut à « $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ colinéaires » et donc à « il existe un réel λ tel que $\vec{u'} = \lambda \vec{u}$ », c'est-à-dire : « il existe un réel λ tel que $a' = \lambda a$, $b' = \lambda b$, $c' = \lambda c$ ».

b/ Orthogonalité

MÉTHODE

Utiliser le résultat suivant : dire que P et Q sont perpendiculaires équivaut à dire qu'un vecteur normal de P est orthogonal à un vecteur normal de Q.



Avec les notations du a/, dire que P est perpendiculaire à Q équivaut à dire que $\vec{u} \cdot \vec{u'} = 0$, c'est-à-dire à : $aa' + bb' + cc' = 0$.

■■■■■■■■■■

6.4. TROUVER L'INTERSECTION D'UNE DROITE ET D'UN PLAN

EXERCICE RÉSOLU 4

Dans un repère orthonormal, le plan P a pour équation : $x - 2y + 3z - 1 = 0$, et la droite d a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + t \\ z = -1 + 2t, \quad t \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Trouvez les coordonnées du point d'intersection du plan P et de la droite d , lorsque ce point existe.

SOLUTION COMMENTÉE ■■■

MÉTHODE

Dire qu'un point $M(x; y; z)$ appartient à P et à d , c'est dire qu'il existe un réel t , tel que :

$$(1 - t) - 2(2 + t) + 3(-1 + 2t) - 1 = 0. \quad [1]$$

Donc, si cette équation d'inconnue t a une solution t_0 , la droite d coupe P au point $M(t_0)$; si cette équation n'a pas de solution, la droite d et le plan P sont parallèles. L'équation [1] s'écrit : $3t = 7$.

Elle a une solution : $t_0 = \frac{7}{3}$. Les coordonnées du point $M(t_0)$, intersection de P et de d , sont donc :

$$x = 1 - \frac{7}{3} = -\frac{4}{3}; \quad y = 2 + \frac{7}{3} = \frac{13}{3}; \quad z = -1 + \frac{14}{3} = \frac{11}{3}.$$

■■■■■■■■■■

B. DEUXIÈME PARTIE : LE PRODUIT VECTORIEL

NOTE HISTORIQUE

Le calcul vectoriel, maintenant étudié en Mathématiques, a été utilisé d'abord par les physiciens, les mécaniciens et les ingénieurs. Son origine remonte aux travaux de Hamilton (1805-1865) et, de Grassman (1809-1877), mais son développement est essentiellement dû au physicien Maxwell (1831-1879), au chimiste Gibbs (1839-1903), à l'ingénieur Heaviside (1850-1925). Plus tard, les mathématiciens, faisant abstraction de la nature physique des « vec-

teurs », ont développé la théorie des espaces vectoriels.

Le produit vectoriel est un outil essentiel en Mécanique et en Physique. Il sert par exemple à définir le moment d'une force en un point, la force magnétique qui s'exerce sur une particule électrique en mouvement dans un champ magnétique; pour un solide en rotation, le produit vectoriel permet de calculer la vitesse d'un point en utilisant le vecteur rotation.

7

Orientation de l'espace

Nous allons orienter l'espace comme le font les physiciens. Les physiciens disposent de plusieurs moyens pour orienter l'espace : par l'observateur d'Ampère, par la « règle des trois doigts de la main droite », ou par la « règle de la paume et du pouce ». Nous n'utiliserons que le premier de ces moyens : **l'observateur d'Ampère**.

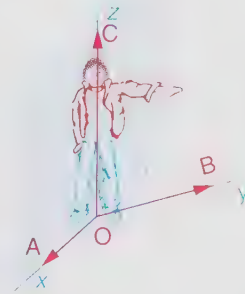
7.1. REPÈRES DIRECTS, BASES DIRECTES

$a/ (O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ est un repère de l'espace; notons Ox , Oy et Oz les demi-droites d'origine O qui contiennent respectivement A , B et C .

Un « **observateur d'Ampère** », pour ce repère, est un personnage placé le long de Oz , les pieds en O et qui regarde dans la direction de Ox .

Si Oy est placé à gauche de l'observateur, on dit que le sens du repère est **direct** (ou *positif*).

Si Oy est placé à droite de l'observateur, on dit que le sens du repère est **indirect** (ou *négatif*).



Remarques

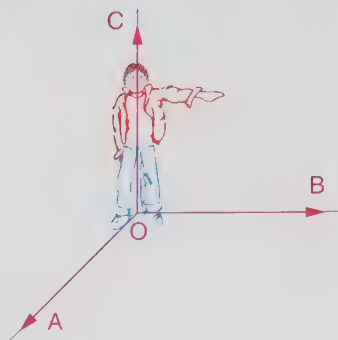
1. L'ordre dans lequel sont donnés les vecteurs $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ et $\overrightarrow{OC}$ est fondamental pour la détermination du sens du repère.

2. La figure ci-contre représente un repère $(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ orthonormal direct.

Mais, par exemple, $(O; \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC})$ est indirect.

b/ Lorsque le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est direct (resp. indirect), on dit que la **base** $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est **directe** (resp. **indirecte**).

c/ On dit que «l'on travaille dans l'espace orienté» pour indiquer que l'on n'utilise que des repères, ou bases, **directs**.

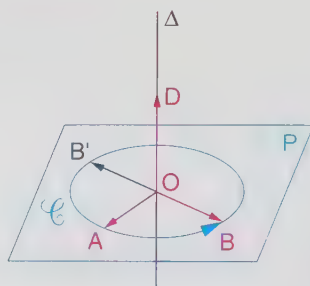


7.2. ORIENTATION D'UN PLAN DANS L'ESPACE

L'espace est orienté; P est un plan et $\mathcal{C}$ un cercle de centre O , de ce plan.

Considérons la droite Δ perpendiculaire à P en O , et choisissons sur Δ un vecteur directeur, par exemple $\overrightarrow{OD}$; nous avons ainsi orienté la droite Δ .

Soit A et B deux points du cercle $\mathcal{C}$ tels que le repère $(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OD})$ soit direct.



L'orientation du plan P est alors donnée par le repère $(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$; le sens direct est celui indiqué par la flèche sur la figure.

Si l'on choisit d'orienter Δ de façon contraire, l'orientation du plan P est alors donnée par le repère $(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB'})$; le sens direct est le sens contraire à celui indiqué par la flèche sur la figure.

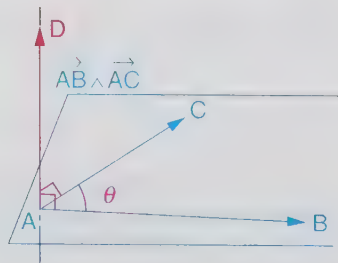
En résumé, dans l'espace orienté, orienter un plan, c'est orienter une normale à ce plan. On dit que l'orientation d'un plan est donnée par une normale orientée.

8

Définition du produit vectoriel de deux vecteurs

8.1. CAS DE DEUX VECTEURS $\overrightarrow{AB}$ ET $\overrightarrow{AC}$ NON COLINÉAIRES

A, B, C sont trois points non alignés; ils déterminent donc un plan. On désigne par θ la mesure en radians de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$.



DÉFINITION 2

Si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux vecteurs **non colinéaires** de l'espace orienté, le produit vectoriel de $\overrightarrow{AB}$ par $\overrightarrow{AC}$, dans cet **ordre**, noté $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$, est le vecteur $\overrightarrow{AD}$ défini par les conditions suivantes :

1. la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC);
2. le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ est direct;
3. la longueur AD est égale à $AB \times AC \times \sin \theta$.

Remarques

- Ces trois conditions déterminent le point D sans ambiguïté : la première dit que D est sur la perpendiculaire Δ en A au plan (ABC); la deuxième permet de dire sur quelle demi-droite d'origine A de Δ se trouve le point D; la troisième donne la distance de A à D.
- Vous noterez que $\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = |\det(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})|$, et donc que cette norme est égale à l'aire du parallélogramme formé sur les côtés [AB] et [AC] (chapitre 5).
- Notez que (AD) est perpendiculaire à (AB) et à (AC). $\overrightarrow{AD}$ est un vecteur normal au plan (ABC).

8.2. CAS DE DEUX VECTEURS $\overrightarrow{AB}$ ET $\overrightarrow{AC}$ COLINÉAIRES

Par **définition**, si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, le produit vectoriel de $\overrightarrow{AB}$ par $\overrightarrow{AC}$ est le vecteur nul.

Dans ce cas : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \vec{0}$.

Vous noterez que, dans cette définition, parmi les points A, B, C, deux d'entre eux, ou les trois, peuvent être confondus.

8.3. DÉFINITION DE $\vec{u} \wedge \vec{v}$

a/ Considérons maintenant deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace; on peut toujours trouver trois points A, B et C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

Nous admettons que si A', B' et C' sont trois autres points tels que $\vec{u} = \overrightarrow{A'B'}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{A'C'}$ alors : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A'B'} \wedge \overrightarrow{A'C'}$.

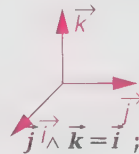
Aussi posons-nous la définition suivante : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

b/ Conséquences

$$1. (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{u} = 0; (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{v} = 0.$$

Donc, lorsqu'il n'est pas nul, le vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est normal à tout plan P dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$, c'est-à-dire à tout plan P qui admet $(\vec{u}, \vec{v})$ pour vecteurs directeurs.

2. $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormale directe. Alors : $\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}$; $\vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}$; $\vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}$ (voir schéma ci-dessus).



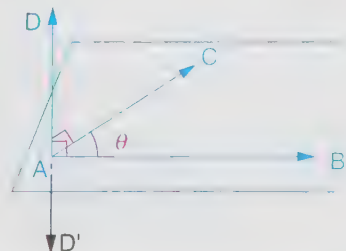
9

Propriétés du produit vectoriel. Expression analytique

9.1. AUTRES RÈGLES DE CALCUL DU PRODUIT VECTORIEL

a/ Nous avons $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$; notons :
 $\overrightarrow{AD'} = \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AB}$.

D'après la définition, D' est symétrique de D par rapport à A, donc $\overrightarrow{AD'} = -\overrightarrow{AD}$.



Pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace orienté on a :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -(\vec{v} \wedge \vec{u}).$$

b/ Nous admettons le résultat suivant :

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et pour tous réels a et b :

$$\begin{aligned}(a\vec{u}) \wedge (b\vec{v}) &= ab(\vec{u} \wedge \vec{v}) \\ \vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) &= (\vec{u} \wedge \vec{v}) + (\vec{u} \wedge \vec{w}).\end{aligned}$$

9.2. CONDITION DE NULLITÉ D'UN PRODUIT VECTORIEL

- Par définition, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs colinéaires, alors : $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.
- Supposons que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient deux vecteurs *non* colinéaires; alors si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, les trois points, A, B, C sont *non* alignés.
D'après la définition 2, il existe un point D unique tel que $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$, et $\overrightarrow{AD} \neq \vec{0}$.
En effet, la longueur AD, qui est égale à $AB \times AC \times \sin \theta$, n'est pas nulle, puisqu'aucun des réels AB, AC, $\sin \theta$ n'est nul.
Donc, si deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires : $\vec{u} \wedge \vec{v} \neq \vec{0}$.
Nous résumons cette discussion par le théorème suivant :

THÉORÈME 5

Dire que le produit vectoriel de deux vecteurs est nul, équivaut à dire que ces deux vecteurs sont colinéaires.

9.3. EXPRESSION ANALYTIQUE DU PRODUIT VECTORIEL DANS UNE BASE ORTHONORMALE DIRECTE ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$)

($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) est une base orthonormale directe. Nous avons vu en 8.3. que :

$$\vec{i} \wedge \vec{j} = \vec{k}, \quad \vec{j} \wedge \vec{k} = \vec{i}, \quad \vec{k} \wedge \vec{i} = \vec{j}. \quad (1)$$

D'après 9.1., nous en déduisons :

$$\vec{j} \wedge \vec{i} = -\vec{k}, \quad \vec{k} \wedge \vec{j} = -\vec{i}, \quad \vec{i} \wedge \vec{k} = -\vec{j}.$$

Calculons les coordonnées dans la base ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ lorsque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de l'espace ayant pour coordonnées respectives (x ; y ; z) et (x' ; y' ; z') :

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \quad \text{et} \quad \vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}.$$

Alors :
$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) \wedge (x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}).$$

D'après les règles de calcul du produit vectoriel, il vient :

$$\begin{aligned}\vec{u} \wedge \vec{v} &= xx'(\vec{i} \wedge \vec{i}) + xy'(\vec{i} \wedge \vec{j}) + xz'(\vec{i} \wedge \vec{k}) + yx'(\vec{j} \wedge \vec{i}) + yy'(\vec{j} \wedge \vec{j}) + yz'(\vec{j} \wedge \vec{k}) \\ &\quad + zx'(\vec{k} \wedge \vec{i}) + zy'(\vec{k} \wedge \vec{j}) + zz'(\vec{k} \wedge \vec{k}) \\ &= (xy' - yx')(\vec{i} \wedge \vec{j}) + (yz' - zy')(\vec{j} \wedge \vec{k}) + (zx' - xz')(\vec{k} \wedge \vec{i}),\end{aligned}$$

soit, compte tenu de (1) :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = (yz' - zy')\vec{i} + (zx' - xz')\vec{j} + (xy' - yx')\vec{k}.$$

COMMENTAIRE

Pratiquement, pour obtenir les coordonnées de $\vec{u} \wedge \vec{v}$, on procède de la façon suivante : on écrit sur une première ligne les coordonnées de $\vec{u}$ en répétant la première puis la seconde après la dernière, puis de même les coordonnées de $\vec{v}$ sur une seconde ligne :

$$\begin{array}{cccccc} x & y & z & x & y \\ x' & y' & z' & x' & y' \end{array}$$

Pour calculer la *première* coordonnée de $\vec{u} \wedge \vec{v}$, on calcule le déterminant qui suit la *première* colonne, ce déterminant dans le cas présent est :

$$\begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix}.$$

Pour calculer la *deuxième* coordonnée de $\vec{u} \wedge \vec{v}$, on calcule le déterminant qui suit la *deuxième* colonne, donc ici :

$$\begin{vmatrix} z & x \\ z' & x' \end{vmatrix}$$

et pour calculer la *troisième* coordonnée, on calcule le déterminant qui suit la troisième colonne :

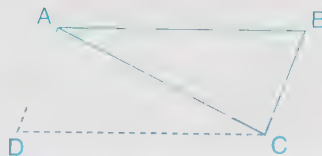
$$\begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix}.$$

10 Aire d'un parallélogramme, d'un triangle

• L'aire d'un parallélogramme ABCD est égale au déterminant de $(\vec{BA}, \vec{BC})$ calculé dans une base orthonormale directe. Or cette aire est la norme du produit vectoriel $\vec{BA} \wedge \vec{BC}$ (voir paragraphe 8.1.), d'où : $\text{aire}(\text{ABCD}) = \|\vec{BA} \wedge \vec{BC}\|$.

• L'aire d'un triangle ABC est la moitié de l'aire du parallélogramme de côtés $[\text{AB}]$ et $[\text{BC}]$, d'où :

$$\text{aire}(\text{ABC}) = \frac{1}{2} \|\vec{BA} \wedge \vec{BC}\|.$$



11 Exercices résolus

11.1. UTILISATION DU PRODUIT VECTORIEL POUR TROUVER L'ÉQUATION D'UN PLAN

EXERCICE RÉSOLU 1

$(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormal.

A, B, C sont les points de coordonnées :

$$A(-1; 1; 3); \quad B(2; 1; 0); \quad C(4; -1; 5).$$

a/ Existe-t-il un plan unique contenant ces trois points ?

b/ Si oui, donnez une équation de ce plan.

SOLUTION COMMENTÉE ■■■

a/ Existence d'un plan passant par ABC.

MÉTHODE

Calculer le produit vectoriel $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$, ou $\vec{BC} \wedge \vec{BA}$, ou ...

Le résultat du calcul permet de savoir si A, B, C sont alignés ou non. En outre, si A, B, C ne sont pas alignés, $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ est un vecteur **normal** au plan (ABC).

Les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont $(3; 0; -3)$, celles de $\overrightarrow{AC}$ sont $(5; -2; 2)$. Calcul des coordonnées de $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$:

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & -3 & 3 & 0 \\ 5 & -2 & 2 & 5 & -2 \end{vmatrix}$$

Première coordonnée : $\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -6$.

Deuxième coordonnée : $\begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -21$.

Troisième coordonnée : $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = -6$.

Le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ a donc pour coordonnées : $(-6; -21; -6)$, il n'est pas nul, donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires ; A, B et C ne sont pas alignés, et donc ils déterminent un plan et un seul.

b/ Trouvons une équation de ce plan. $\vec{u}$ est normal au plan, et A est dans ce plan. Donc $M(x; y; z)$ appartient à P, à la condition, nécessaire et suffisante, que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0$.

D'où une équation du plan (ABC) :

$$\begin{aligned} -6(x+1) - 21(y-1) - 6(z-3) &= 0 \\ -6x - 21y - 6z + 33 &= 0 \\ 2x + 7y + 2z - 11 &= 0. \end{aligned}$$

■■■■■■■■■■

11.2. INTERSECTION DE PLANS

EXERCICE RÉSOLU 2

Dans un repère orthonormal, deux plans P_1 et P_2 ont pour équations :

$$P_1 : x - 4y + 7 = 0; \quad P_2 : x - 2z + 5 = 0.$$

Donnez un vecteur directeur de leur droite d'intersection, si elle existe.

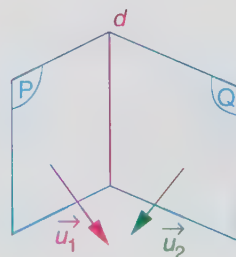
SOLUTION COMMENTÉE ■■■

MÉTHODE

Notons $\vec{u}_1$ un vecteur normal à P_1 et $\vec{u}_2$ un vecteur normal à P_2 .

Si $\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = \vec{0}$, alors $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont colinéaires, donc les plans sont parallèles.

Si $\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 \neq \vec{0}$, les plans sont sécants. La droite d'intersection d est orthogonale à $\vec{u}_1$ et à $\vec{u}_2$; elle est donc dirigée par $\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2$.



Le vecteur $\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2$ a pour coordonnées $(8; 2; 4)$. Donc les deux plans sont sécants selon une droite d dirigée par $\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2$.

Remarque : il suffit alors de trouver un point A commun à P_1 et à P_2 pour trouver une représentation paramétrique de d .

Mais si l'on veut une représentation paramétrique de d , il est préférable en général de procéder comme dans l'exercice résolu 2 du paragraphe 6.2. La méthode ci-dessus est surtout intéressante pour trouver un vecteur directeur de d .

■■■■■■■■■■

TRAVAUX PRATIQUES D'APPLICATION

1 Équations de cercles, de tangentes à un cercle

Le but de ce T.P. est de revoir quelques résultats vus en classes de Première. On travaille dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1.1. Équations de cercles

1. Écrivez une équation du cercle de centre $I(4; -1)$ et de rayon 3.
2. Écrivez une équation du cercle de diamètre $[AB]$ où A et B sont les points de coordonnées respectives : $(-1; 4)$, $(3; 8)$.

Conseil : reportez-vous au paragraphe 2.6. de « Pour prendre un bon départ ».

3. $\mathcal{C}$ est le cercle d'équation : $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 20$.
Trouvez son centre et son rayon.

Indication : écrivez l'équation donnée sous la forme :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

1.2. Intersection de cercles

$\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont les deux cercles d'équations respectives :

$$x^2 + y^2 - 6x + 4y = -5, \quad x^2 + y^2 + 2x - 10y = -6.$$

Étudiez l'intersection de ces deux cercles.

1.3. Intersection d'une droite et d'un cercle. Tangentes

$\mathcal{C}$ est le cercle d'équation : $x^2 + y^2 - 4x - 6y = -9$.

A est le point de coordonnées : $(-1; 1)$; d est une droite qui passe par A et qui est dirigée par le vecteur $\vec{u}(a; b)$.

Le but est de trouver les coordonnées des points d'intersection de d et $\mathcal{C}$, lorsque ces points existent.

1. Donnez une représentation paramétrique de la droite d .
2. **a/** Écrivez l'équation d'inconnue t , dont les solutions donneront les points d'intersection de $\mathcal{C}$ et de d , lorsque ces points existent.
b/ À quelle condition, nécessaire et suffisante, doivent satisfaire a et b , pour que la droite d coupe $\mathcal{C}$ en deux points distincts ? Trouvez alors les coordonnées de ces deux points d'intersection.
c/ Calculez les coordonnées de chacun des points de contact des tangentes à $\mathcal{C}$ issues de A.
3. Notons I le centre de $\mathcal{C}$.
a/ Le cercle $\mathcal{C}'$ de centre A et de diamètre AI recoupe $\mathcal{C}$ en deux points T et T'. Les droites (AT) et (AT') sont les tangentes à T issues de A. Pourquoi ?
b/ Écrivez une équation du cercle $\mathcal{C}'$ et trouvez les coordonnées de T et de T'.
c/ Comparez cette démarche et celle suivie à la question 2.

2 Sphère circonscrite à un tétraèdre

A, B, C, D sont quatre points non coplanaires de l'espace. Savoir si ces quatre points sont situés sur une même sphère revient à savoir s'il existe un point O situé à égale distance de ces quatre points.

Nous supposons ici que les quatre points A, B, C, D, sont les sommets d'un tétraèdre.

1. Rappelons que le plan médiateur d'un segment [PQ] est le plan perpendiculaire à [PQ] en son milieu. C'est donc aussi l'ensemble des points de l'espace équidistants de P et Q.

Vérifiez l'affirmation énoncée ci-dessus.

2. Cherchons d'abord l'ensemble Δ des points équidistants des trois points A, B, C.

a/ Vérifiez qu'il existe un tel point, et un seul, dans le plan (ABC).

b/ Montrez que Δ est une droite, précisez sa position.

3. Montrez que Δ coupe le plan médiateur de [AD].

Indication : raisonnez par l'absurde, supposez que Δ et ce plan ne sont pas sécants et trouvez une contradiction.

Il existe donc un point O et un seul de l'espace, équidistant des sommets du tétraèdre, et donc une sphère, et une seule, qui passe par ces quatre sommets. Cette **sphère est dite circonscrite au tétraèdre**.

4. Examinez le cas où ABCD est régulier.

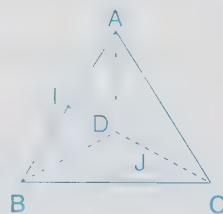
3 Propriétés du tétraèdre régulier. Application à la Chimie

3.1. Propriétés du tétraèdre régulier

Un tétraèdre régulier est un tétraèdre dont toutes les arêtes ont la même longueur.

Deux arêtes d'un tétraèdre sont dites opposées lorsqu'elles n'ont pas de point commun.

ABCD est un tétraèdre régulier et $AB = a$.



1. Propriétés des arêtes

Le but de cette partie est de démontrer que :

- deux arêtes opposées d'un tétraèdre régulier sont orthogonales ;
- la droite qui joint les milieux de deux arêtes opposées d'un tétraèdre régulier est perpendiculaire à chacune de ces arêtes.

a/ Calculez : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}$.

b/ Montrez que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

Indication : calculez $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD}$ en utilisant l'égalité $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$.

c/ Montrez que les droites (AC) et (BD) sont orthogonales, ainsi que les droites (AD) et (BC).

d/ I est le milieu de [AB] et J celui de [CD].

Vérifiez que $\vec{IJ} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \overrightarrow{BC} + \frac{1}{2} \overrightarrow{CD}$, et déduisez-en que (IJ) est perpendiculaire à (AB) et à (CD).

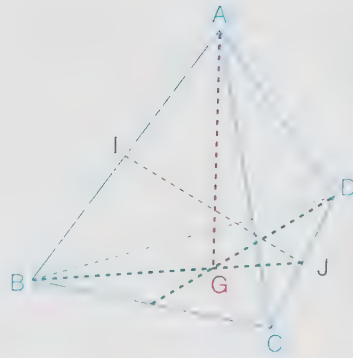
2. Hauteurs du tétraèdre régulier

a/ G est le centre de gravité du triangle BCD.

Calculez $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{BD}$, et déduisez-en que (AG) est la hauteur issue de A du tétraèdre.

(La hauteur issue de A est la perpendiculaire menée de A sur le plan BCD.)

b/ Précisez les autres hauteurs du tétraèdre.



3. Propriétés de l'isobarycentre du tétraèdre

O est l'isobarycentre du tétraèdre ABCD, donc :

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}.$$

a/ Montrez que les points A, O, G, sont alignés.

b/ Calculez AG et AO.

c/ Montrez que O est le milieu de [IJ].

d/ Calculez les longueurs OA et OB et OI.

Indication : travaillez dans le plan (AOB).

e/ Montrez que le point O est équidistant des sommets du tétraèdre. On dit que O est le **centre** du tétraèdre.

4. Calcul de l'angle géométrique $\widehat{AOB}$

a/ Évaluez le produit scalaire $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ des deux façons suivantes :

- $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \times OB \times \cos \alpha$, où $\alpha = \widehat{AOB}$;
- $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = (\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IA}) \cdot (\overrightarrow{OI} + \overrightarrow{IB})$.

b/ Déduisez-en une approximation de α exprimée en degrés.

c/ Montrez que $\widehat{AOB} = \widehat{BOC} = \widehat{COD} = \widehat{DOA}$.

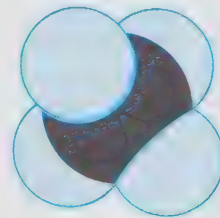
3.2. Application de ces résultats à la chimie

Voici représentée ci-contre la molécule de méthane CH_4 . Les noyaux des quatre atomes d'hydrogène sont les sommets d'un *tétraèdre régulier*. Le noyau C de l'atome de carbone est à l'intérieur de ce tétraèdre, à *égale distance de chacun des sommets*, C est donc le centre de ce tétraèdre.

Pour simplifier la représentation de la molécule de méthane, on utilise le schéma ci-contre, où les *valences* sont figurées en couleur et les arêtes du tétraèdre en pointillés (pour mémoire).

Ce schéma est la *formule stéréochimique* du méthane; Le Bel (1847-1930) et Van't Hoff (1852-1911) sont les créateurs de cette branche de la chimie : la *stéréochimie*.

Des mesures ont permis de déterminer la longueur des liaisons C—H : $1,09 \times 10^{-10}$ mètres.



a/ Déterminez une approximation de la mesure de l'angle formé par deux liaisons C—H.

b/ Déterminez la longueur de l'arête du tétraèdre, c'est-à-dire la distance entre deux atomes d'hydrogène.

4 Tétraèdre orthocentrique

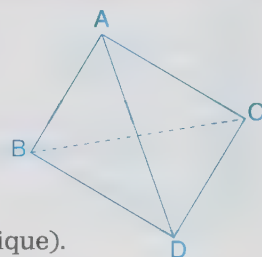
4.1. Préliminaire : le théorème des trois perpendiculaires

Reportez-vous à l'exercice résolu 1, page 170.

4.2. Une propriété caractéristique du tétraèdre orthocentrique

Un tétraèdre ABCD est dit *orthocentrique* lorsque les arêtes opposées, c'est-à-dire sans point commun, sont orthogonales :

$$(AB) \perp (CD), (AC) \perp (BD), (AD) \perp (BC).$$



1. Préliminaire

ABCD est un tétraèdre (pas nécessairement orthocentrique).

a/ Montrez que $\vec{DA} \cdot \vec{BC} + \vec{DB} \cdot \vec{CA} + \vec{DC} \cdot \vec{AB} = 0$.

Indication : écrivez $\vec{BC} = \vec{BD} + \vec{DC}$, $\vec{CA} = \vec{CD} + \vec{DA}$, $\vec{AB} = \dots + \dots$.

b/ Déduez-en que si, dans un tétraèdre, deux paires d'arêtes opposées sont orthogonales, alors les deux autres arêtes opposées sont orthogonales, et donc ABCD est orthocentrique.

2. Propriété du tétraèdre orthocentrique

ABCD est un tétraèdre orthocentrique.

a/ On note A' le projeté orthogonal de A sur la face (BCD). On dit que AA' est la *hauteur* du tétraèdre issue de A.

b/ Montrez que (CD) est perpendiculaire au plan (ABA') et déduisez-en que : $(CD) \perp (BA')$. On notera K le point d'intersection de (CD) et de (BA').

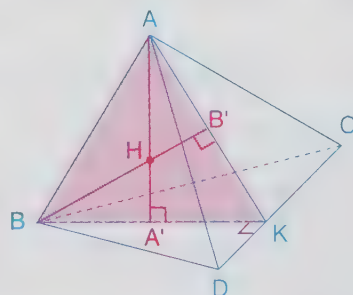
c/ Montrez que (BC) est perpendiculaire à (DA') et déduisez-en que A' est l'orthocentre du triangle (BCD).

d/ On note B' le projeté orthogonal de B sur la face (ACD). Montrez rapidement, en procédant comme dans b/ et c/, que B' est l'orthocentre du triangle ACD.

e/ Montrez que (AB') passe par K.

Indication : utilisez le théorème des trois perpendiculaires. Déduez-en que les droites (AA') et (BB') sont concourantes.

f/ Montrez que les quatre hauteurs du tétraèdre sont concourantes.



Le point de concours des hauteurs est appelé **orthocentre** du tétraèdre orthocentrique.

3. Étude d'une réciproque

Démontrez le résultat suivant :

dans un tétraèdre ABCD, **si** le projeté orthogonal A' de A sur le plan (BCD) est l'orthocentre du triangle (BCD), **alors** le tétraèdre ABCD est orthocentrique.

COMMENTAIRE

Ainsi, en général, les hauteurs d'un tétraèdre ne sont pas concourantes.

Une condition, nécessaire et suffisante, pour qu'elles le soient, est que le tétraèdre soit orthocentrique.

Notez aussi que, d'après le 3 ci-dessus, le projeté orthogonal d'un sommet sur la face opposée n'est pas en général, l'orthocentre de cette face. Cela n'est vrai que dans un tétraèdre orthocentrique.

4.3. Une autre propriété caractéristique du tétraèdre orthocentrique

1. ABCD est un tétraèdre *quelconque*.

a/ Démontrez les égalités suivantes :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}, \quad \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}.$$

b/ Déduisez-en que :

$$\begin{aligned} AB^2 + CD^2 + 2\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} &= AD^2 + BC^2 - 2\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} \\ AD^2 + BC^2 + 2\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} &= AC^2 + BD^2 + 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}. \end{aligned}$$

c/ Si, de plus, ABCD est un tétraèdre orthocentrique, démontrez que :

$$AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2 = AC^2 + BD^2.$$

2. Étude du problème réciproque

ABCD est un tétraèdre tel que :

$$AB^2 + CD^2 = AD^2 + BC^2 = AC^2 + BD^2.$$

a/ Démontrez que l'on a :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD}.$$

b/ Démontrez alors que le tétraèdre ABCD est orthocentrique.

5

À propos du cube

Les deux exercices sont indépendants.

5.1. Quelques propriétés du cube

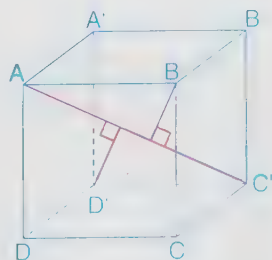
ABCD A'B'C'D' est un cube de côté a.

a/ Calculez les longueurs des segments [AC], [AC'].

Que pouvez-vous dire du tétraèdre ACB'D' ?
Donnez une approximation de la mesure en degrés de l'angle $\widehat{BAC'}$.

b/ Le point B se projette orthogonalement en H sur la droite (AC').

En prenant, pour plan de la figure, le plan (ABC'D'), dessinez le triangle ABC' et le point H.



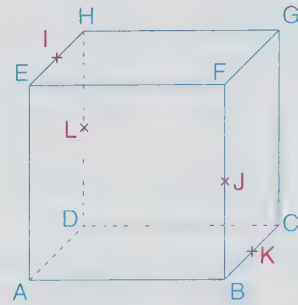
D' se projette en K sur (AC') . Placez le point K sur la figure précédente. Calculez les distances AH , HK et KC' .

c/ Montrez que les points D et A' se projettent orthogonalement en H sur (AC') et que B et C' se projettent orthogonalement en K sur $(A'C)$.

5.2. Calculs de distances et d'angles

$ABCDEFGH$ est un cube de côté a .

I, J, K, L sont les milieux respectifs des segments $[EH]$, $[BF]$, $[BC]$ et $[DH]$.



a/ Démontrez que (IJ) est parallèle au plan $(ABGH)$.

Indication : exprimez le vecteur $\vec{IJ}$ en fonction des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AH}$.

b/ Démontrez que (IL) est perpendiculaire au plan $(ABGH)$.

c/ Déduisez de ce qui précède que le quadrilatère $IJKL$ est un rectangle.

d/ Quelle est la nature des quadrilatères $AKGI$ et $AJGL$?

Déduisez-en que le plan $(IJKL)$ est le plan médiateur du segment $[AG]$.

e/ Calculez les longueurs des côtés et des diagonales du rectangle $IJKL$ et démontrez que l'angle aigu des diagonales est de 60° .

6 Dans un tétraèdre trirectangle

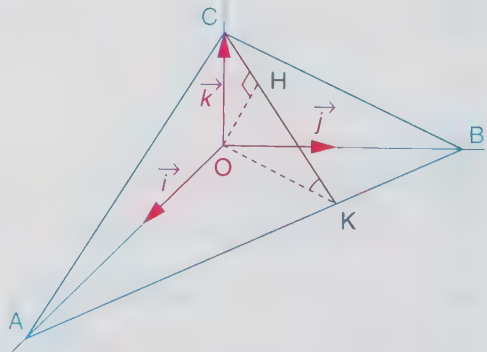
$OABC$ est un tétraèdre trirectangle en O , c'est-à-dire que les droites OA, OB, OC sont deux à deux perpendiculaires.

En outre :

$$OC = 1, \quad OB = 2, \quad OA = 3.$$

Choisissons le repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ défini par :

$$\vec{i} = \frac{1}{3} \vec{OA}; \quad \vec{j} = \frac{1}{2} \vec{OB}; \quad \vec{k} = \vec{OC}.$$



On note H le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC) .

1. a/ Calculez les coordonnées du point H .

Indication : écrivez une équation du plan (ABC) , et déduisez-en une représentation paramétrique de (OH) .

b/ Calculez $\vec{OC} \cdot \vec{AB}$, $\vec{OH} \cdot \vec{AB}$ et déduisez-en que (AB) est perpendiculaire au plan (OCH) .

c/ Démontrez que H est l'orthocentre du triangle ABC . Vous pourrez pour cela calculer $\vec{AB} \cdot \vec{CH}$ et $\vec{AC} \cdot \vec{BH}$.

Remarque : H est l'orthocentre du triangle ABC parce que le tétraèdre OABC est orthocentrique (voir T.P. 4).

2. a/ Montrez que C et O se projettent orthogonalement sur (AB) en un même point K, et calculez les coordonnées de K.

b/ Calculez l'angle $\widehat{OKC}$.

3. a/ On note (S) la sphère circonscrite au tétraèdre OABC. Précisez son centre I et son rayon r .

b/ Calculez les coordonnées de l'isobarycentre G du tétraèdre, et précisez sa position par rapport à O et I.

7

Recherche de surfaces de niveau**7.1. Surfaces de niveau de : $M \mapsto \overrightarrow{OM} \cdot \vec{u}$**

1. $\vec{u}$ étant un vecteur non nul et O un point, le but est de déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{OM} \cdot \vec{u} = k$, où k est un réel donné. Considérez le point B tel que $\overrightarrow{OB} = \vec{u}$.

a/ Démontrez que l'ensemble cherché est un plan perpendiculaire en H à la droite (OB), le point H étant tel que : $\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{OB} = k$.

Indication : écrivez que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM}$.

b/ Examinez le cas où $k = 0$.

2. Nous allons maintenant, dans un cas particulier, trouver une **équation cartésienne de ce plan**.

$(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormal.

A est le point de coordonnées $\left(1; -1; \frac{1}{2}\right)$ et $\vec{u}$ le vecteur de coordonnées $(2; -1; 5)$.

Déterminez une équation cartésienne de l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 3$.

7.2. Surfaces de niveau de $f : M \mapsto MA^2 + MB^2$

A et B sont deux points distincts **donnés**.

À chaque point M de l'espace, on associe le réel $f(M) = MA^2 + MB^2$.

Le but est de trouver la surface de niveau de f relative à k où k est un réel donné, c'est-à-dire l'ensemble des points M de l'espace tels que :

$$MA^2 + MB^2 = k.$$

MÉTHODE

Introduire le milieu O de [AB] pour transformer $MA^2 + MB^2$ en une autre écriture plus facile à interpréter.

Montrez, en écrivant :

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 &= \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 \\ &= (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AO})^2 + (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BO})^2 \end{aligned}$$

que :

$$MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + \frac{AB^2}{2}.$$

Trouver l'ensemble des points M tels que $MA^2 + MB^2 = k$ revient donc à trouver l'ensemble des points M tels que $2MO^2 + \frac{AB^2}{2} = k$.

À partir de l'égalité ci-dessus, trouvez l'ensemble cherché (vous discuterez selon le signe de $\frac{k}{2} - \frac{AB^2}{4}$).

Précisez cet ensemble lorsque $AB = 6$ et $k = 24$.

7.3. Surfaces de niveau de $f : M \mapsto MA^2 - MB^2$

1. Cherchons l'ensemble des points M de l'espace tels que $MA^2 - MB^2 = k$ où k est un réel donné.

Dans l'étude de $MA^2 + MB^2 = k$ nous avons fait intervenir le point O milieu de $[AB]$; faisons de même ici.

a/ En partant de $MA^2 - MB^2 = \overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2$ et en utilisant le fait que $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB}$, montrez que :

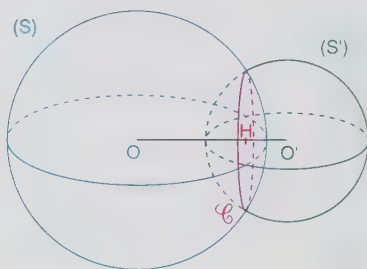
$$MA^2 - MB^2 = 2 \overrightarrow{MO} \cdot \overrightarrow{BA} = 2 \overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OM} \cdot 2 \overrightarrow{AB}.$$

b/ En utilisant 7.1., trouvez l'ensemble cherché.

2. Application : intersection de deux sphères.

S et S' sont deux sphères sécantes de rayons respectifs r et r' , et $r > r'$, de centres respectifs O et O'.

On note I le milieu de $[OO']$.



Montrez que l'intersection de ces deux sphères est un cercle $\mathcal{C}$ déterminé par les conditions suivantes :

— le plan de $\mathcal{C}$ est perpendiculaire à (OO') ;

— le centre de $\mathcal{C}$ est le point H de $[OO']$ défini par : $OH = \frac{r^2 - r'^2 + OO'^2}{2 OO'}$;

— le rayon de $\mathcal{C}$ est égal à : $r^2 - OH^2$.

Indication : dire qu'un point M est commun aux deux sphères équivaut à dire que M appartient à (S) et que : $MO^2 - MO'^2 = r^2 - r'^2$.

7.4. Surfaces de niveau de $f : M \mapsto \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB}$

Cherchons l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = k$ où k est un réel donné.

1. Trouvez cet ensemble.

Indication : en notant O le milieu de $[AB]$, montrez d'abord que $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = MO^2 - OA^2$.

2. Examinez le cas où k est nul.

8

Lignes ou surfaces de niveaux de :

$$M \longmapsto \sum_{i=1}^n a_i MA_i^2. \text{ Applications}$$

8.1. Transformations de $\sum_{i=1}^n a_i MA_i^2$

$A_1, A_2, \dots, A_n$ sont n points donnés du plan ou de l'espace ;

$a_1, a_2, \dots, a_n$ sont n réels donnés.

Le but est de trouver l'ensemble des points M (du plan ou de l'espace) tels

que : $\sum_{i=1}^n a_i MA_i^2 = k$, où k est un réel donné. (Cet ensemble est appelé, dans

le cas du plan, ligne de niveau relative à k de l'application :

$M \longmapsto \sum_{i=1}^n a_i MA_i^2$; et dans le cas de l'espace, surface de niveau relative à

k de l'application : $M \longmapsto \sum_{i=1}^n a_i MA_i^2$.)

Au T.P. précédent, nous avons traité le cas de deux points $A_1 = A$, $A_2 = B$, avec $a_1 = a_2 = 1$, puis $a_1 = 1$, $a_2 = -1$.

Nous avons simplifié l'expression $MA^2 + MB^2$ en utilisant le milieu O de $[AB]$, qui, dans le cas $a_1 = a_2 = 1$, est l'isobarycentre de A et B . Cela a permis de lier M , non plus aux deux points A et B , mais seulement au seul point O , et en conséquence de trouver plus facilement l'ensemble cherché.

Nous allons suivre ici, la même idée.

MÉTHODE

Transformer la somme $\sum_{i=1}^n a_i MA_i^2$ de façon à ne lier M qu'à un SEUL point fixe, pour trouver plus facilement l'ensemble cherché. Au vu des données, ce point fixe est naturellement le barycentre, lorsqu'il existe.

On suppose que les points $(A_1, a_1), \dots, (A_n, a_n)$, ont un barycentre G .

1. En écrivant que $\overrightarrow{MA_i} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA_i}$, et $MA_i^2 = \overrightarrow{MA_i} \cdot \overrightarrow{MA_i}$, vérifiez que :

$$\sum_{i=1}^n a_i MA_i^2 = (a_1 + \dots + a_n) MG^2 + a_1 GA_1^2 + \dots + a_n GA_n^2.$$

2. **Application** : dans l'espace, le triangle ABC est équilatéral, $AB = 3$. Déterminez l'ensemble des points M de l'espace tels que :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 25.$$

8.2. Application : dans un triangle, distance du centre de gravité au centre du cercle inscrit

ABC est un triangle qui n'est pas équilatéral ; notons $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$. On se propose de calculer la distance du centre de gravité G au centre I du cercle inscrit de ce triangle.

1. Montrez que $GA^2 = \frac{1}{9} (2b^2 + 2c^2 - a^2)$.

2. Modifiez l'écriture de $aMA^2 + bMB^2 + cMC^2$ sachant que I est le barycentre des points (A, a) , (B, b) et (C, c) .

3. En calculant $a MA^2 + b MB^2 + c MC^2$ lorsque $M = A$, puis $M = B$, puis $M = C$, montrez que :

$$a IA^2 + b IB^2 + c IC^2 = abc.$$

4. En calculant $a GA^2 + b GB^2 + c GC^2$ de deux manières, calculez GI .

8.3. Une autre application (cas : $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0$)

Dans le cas où $a_1 + a_2 + \dots + a_n = 0$, les points $(A_1, a_1), \dots, (A_n, a_n)$ n'ont pas de barycentre. Mais nous savons alors que le vecteur

$a_1 \overrightarrow{IA_1} + a_2 \overrightarrow{IA_2} + \dots + a_n \overrightarrow{IA_n}$ est indépendant du point I ; si I' est un autre point, alors : $a_1 \overrightarrow{I'A_1} + \dots + a_n \overrightarrow{I'A_n} = a_1 \overrightarrow{IA_1} + \dots + a_n \overrightarrow{IA_n}$.

ABC est un triangle équilatéral et D est le point tel que $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BD}$.

On se propose de déterminer l'ensemble d des points M du plan ou de l'espace, tels que :

$$MA^2 + MB^2 - MC^2 - MD^2 = 3 AB^2.$$

1. I est un point quelconque.

Déterminez LE vecteur $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{ID}$.

2. Vérifiez que, pour tout point I :

$$MA^2 + MB^2 - MC^2 - MD^2 = 2 \overrightarrow{MI} \cdot (\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} - \overrightarrow{IC} - \overrightarrow{ID}) + IA^2 + IB^2 - IC^2 - ID^2.$$

3. Déterminez un point particulier de l'ensemble d cherché.

4. Montrez que l'ensemble d est une droite, ou un plan dont $\overrightarrow{BC}$ est un vecteur normal.

8.4. Lignes ou surfaces de niveau de l'application

$$f : M \longmapsto \frac{MA}{MB}$$

A et B sont deux points donnés de l'espace ou du plan.

1. a/ Trouvez, en géométrie plane, la ligne de niveau de f relative à

1, c'est-à-dire l'ensemble des points M du plan tels que : $\frac{MA}{MB} = 1$.

b/ Trouvez en géométrie de l'espace, la surface de niveau de f relative à 1.

2. k est un réel donné strictement positif et différent de 1.

a/ L'ensemble des points M tels que $\frac{MA}{MB} = k$ est l'ensemble des points M tels que $MA^2 - k^2 MB^2 = 0$. Prouvez cette affirmation.

b/ Montrez qu'en géométrie plane, cet ensemble est un cercle dont vous préciserez le centre et le rayon.

c/ Montrez qu'en géométrie de l'espace, cet ensemble est une sphère, dont vous préciserez le centre et le rayon.

9

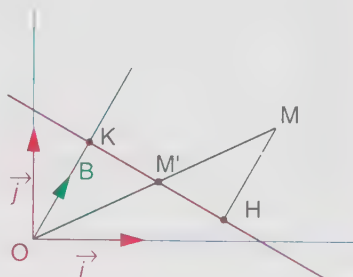
Distance d'un point à une droite, à un plan

9.1. En géométrie plane

1. $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormal. d est la droite qui dans ce repère, a pour équation $ax + by + c = 0$. M est le point de coordonnées $(x; y)$.

Le but est de calculer la distance de M à la droite d .

Notons B le point de coordonnées $(a; b)$, M' le point d'intersection de (OM) et d , K l'intersection de (OB) et d , et H le projeté orthogonal de M sur (OB) . Les coordonnées de M' seront notées $(x'; y')$.



a/ Sans calculs, justifiez l'égalité :

$$\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{KH} = \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{M'M}.$$

b/ Montrez que : $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{M'M} = ax + by + c$.

c/ Montrez que : $KH = \frac{|ax + by + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$.

2. Application

d est la droite d'équation $y = 2x - 1$, et M est le point de coordonnées $(-8; 3)$.

Calculez la distance de M à d .

3. Autre méthode

MÉTHODE

Écrire une équation paramétrique de la perpendiculaire Δ à d , menée par M .
En déduire les coordonnées du point d'intersection de Δ et d , puis la distance de M à d .

Les données sont celles de la question 2 : $M(-8; 3)$, et d est la droite d'équation : $y = 2x - 1$.

En suivant la méthode exposée ci-dessus, calculez la distance de M à d .

9.2. En géométrie de l'espace

1. d est une droite déterminée par un point A et un vecteur directeur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$. M est un point de l'espace.

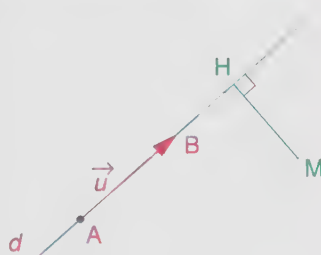
Par définition, la distance de M à d est MH , où H est le projeté orthogonal de M sur d .

a/ En écrivant que $\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA}$, montrez que :

$$\|\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{MH} \wedge \overrightarrow{AB}\| = MH \times AB.$$

b/ Déduisez-en que :

$$MH = \frac{\|\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{AB}\|}{AB}.$$



2. Applications

a/ Dans un repère orthonormal direct, on place les points $A(1; 0; 0)$, $B(0; 0; 1)$ et $M(1; 1; 1)$.

Calculez la distance de M à la droite (AB) .

b/ Dans un repère orthonormal direct, la droite d a pour représentation paramétrique :

$$x = 1 + 2t, \quad y = 1 - t, \quad z = 1 + t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

A est le point de coordonnées $(2; -1; 3)$.

Calculez la distance de A à d .

c/ Dans un repère orthonormal direct, on place les points $A(1; 0; 0)$ et $B(0; 1; 0)$.

d est la droite qui passe par A et qui est dirigée par le vecteur $\vec{u}(1; 2; 1)$; d' est la parallèle à d , menée par B .

Calculez la distance de d' à d .

9.3. Distance d'un point à un plan

Dans un repère orthonormal, le plan P a pour équation : $2x - 3y + 5z = 4$, et le point M a pour coordonnées $(1; 2; 1)$.

Calculez la distance de M au plan P .

MÉTHODE

Écrire une équation paramétrique de la perpendiculaire Δ au plan P , issue de M .
En déduire les coordonnées du point d'intersection de P et de Δ , puis la distance de M à P .

EXERCICES ET PROBLÈMES

Pour tester
ses connaissances

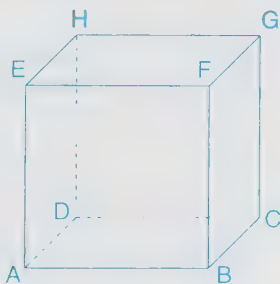
Q.C.M.

Pour les exercices 1 à 7, une seule des réponses proposées est exacte.

1. Dans un repère orthonormal, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives : $(3; -4; a)$, $(2; 0; 6)$. Alors :
- a/ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont toujours orthogonaux ;
 b/ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont jamais orthogonaux ;
 c/ sont orthogonaux pour une seule valeur de a .

2. ABCDEFGH est un cube, $AB = a$. Alors :

- a/ $\vec{AB} \cdot \vec{HF} = 0$;
 b/ $\vec{AB} \cdot \vec{HF} = a^2$;
 c/ $\vec{AB} \cdot \vec{HF} = -a^2$.



3. ABCDEFGH est un cube, $AB = a$. Alors :

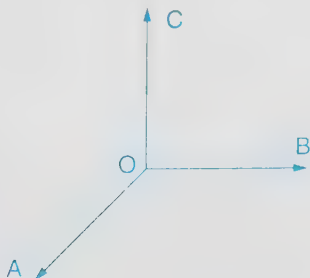
- a/ $\vec{AB} \cdot \vec{BG} = \vec{AB} \cdot \vec{BC}$;
 b/ $\vec{AB} \cdot \vec{BG} = a^2$; c/ $\vec{AB} \cdot \vec{BG} = a\sqrt{2}$.

4. $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormal. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont tels que : $\vec{u} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = -\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$. Alors :

- a/ $\vec{u} \cdot \vec{i} = \vec{v} \cdot \vec{i}$;
 b/ $\vec{u} \cdot \vec{j} = \vec{v} \cdot \vec{j}$; c/ $\vec{u} \cdot \vec{k} = -\vec{v} \cdot \vec{k}$.

5. Le repère $(O; \vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC})$ est direct. Alors :

- a/ $(O; \vec{OC}, \vec{OA}, \vec{OB})$ est indirect ;
 b/ $(O; \vec{OB}, \vec{OA}, \vec{OC})$ est indirect ;
 c/ $(O; \vec{OB}, \vec{OC}, \vec{OA})$ est indirect.



6. Dans un repère orthonormal, les plans P et Q ont pour équations respectives :

$$2x - z - 1 = 0; \quad x + y + 1 = 0.$$

Alors P et Q sont :

- a/ parallèles et confondus ;
 b/ parallèles et distincts ;
 c/ sécants.

7. Dans un repère orthonormal, M est le point de coordonnées $(1; 1; 1)$. Le plan qui passe par l'origine du repère et qui est normal au vecteur $\vec{OM}$, a pour équation :

- a/ $x + y + z = 1$;
 b/ $x + y + z + \sqrt{3} = 0$;
 c/ $-x - y - z = 0$.

CALCULS (PRODUIT SCALAIRE)

Pour les exercices 8 et 9, la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est orthonormale ; calculez $\vec{u} \cdot \vec{v}$, $\vec{v} \cdot \vec{w}$ et $\vec{w} \cdot \vec{u}$.

8. $\vec{u} = (1 + \sqrt{2})\vec{i} + \sqrt{3}\vec{j}$
 $\vec{v} = (1 - \sqrt{2})\vec{i} - \vec{k}$
 $\vec{w} = \sqrt{3}\vec{j} + \vec{k}$.

9. $\vec{u} = \frac{2}{3}\vec{i} - \frac{1}{6}\vec{j} + \frac{1}{2}\vec{k}$
 $\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{i} - 2\vec{j} + \frac{2}{3}\vec{k}$
 $\vec{w} = \vec{i} + \vec{k}$.

Pour les exercices 10 à 13, deux vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ sont donnés par leurs coordonnées dans la base orthonormale $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Trouvez un vecteur $\vec{u'}$ colinéaire à $\vec{u}$, un vecteur $\vec{v'}$ dans un plan dont un système de vecteurs directeurs est $(\vec{u}, \vec{v})$ et un vecteur $\vec{w'}$ tels que $(\vec{u'}, \vec{v'}, \vec{w'})$ forme une base orthonormale

10. $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$
 $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j}$.

11. $\vec{u} = \vec{i} + \vec{k}$
 $\vec{v} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$.

12. $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$
 $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j}$.

13. $\vec{u} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$
 $\vec{v} = \vec{i}$.

Calculs (Produit Vectoriel)

Pour les exercices 14 à 17, $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormale directe; calculez $\vec{u} \wedge \vec{v}$.

$$14. \vec{u} = \vec{j} - 2\vec{k} \\ \vec{v} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}.$$

$$15. \vec{u} = \vec{i} - 2\vec{k} \\ \vec{v} = \vec{i} + \vec{j}.$$

$$16. \vec{u} = \vec{i} - 2\vec{j} - \frac{5}{2}\vec{k} \\ \vec{v} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}.$$

$$17. \vec{u} = \vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} + \frac{1}{2}\vec{k} \\ \vec{v} = \frac{1}{3}\vec{i} - \frac{4}{9}\vec{j} + \frac{1}{6}\vec{k}.$$

Pour les exercices 18 à 22, $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est une base orthonormale directe.

Sans calculer les coordonnées de $\vec{u} \wedge \vec{v}$, donnez une preuve du fait que $\vec{w} \neq \vec{u} \wedge \vec{v}$.

$$18. \vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j} \\ \vec{v} = \vec{i} + 2\vec{j} \\ \vec{w} = \vec{i} - 3\vec{k}.$$

$$21. \vec{u} = \vec{j} - 2\vec{k} \\ \vec{v} = \vec{i} + \vec{k} \\ \vec{w} = \vec{i} + \vec{j}.$$

$$19. \vec{u} = \vec{i} - \vec{k} \\ \vec{v} = \vec{i} + 2\vec{k} \\ \vec{w} = \vec{0}.$$

$$22. \vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k} \\ \vec{v} = 4\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k} \\ \vec{w} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}.$$

$$20. \vec{u} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k} \\ \vec{v} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + 2\vec{k} \\ \vec{w} = \vec{i} - 4\vec{j}.$$

Pour s'entraîner

Dans toute cette partie, les coordonnées d'un point de l'espace, les équations de plans, droites, sphères sont toujours supposées données relativement à un repère orthonormal, éventuellement direct, $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Cette hypothèse ne sera pas rappelée à chaque exercice.

Dans le cas de la géométrie plane, il est supposé aussi qu'un repère orthonormal a été choisi.

Calculs Divers

23. a et b sont des réels donnés.

Le vecteur $\vec{u}(x; y; z)$, avec :

$$x = \cos a \cos b; \quad y = \cos a \sin b; \\ z = \sin a,$$

est-il un vecteur unitaire ?

24. Dans chaque cas, existe-t-il un réel x tel que :

$$(x\vec{u} + \vec{v}) \cdot \vec{w} = 0 ?$$

a/ $\vec{u}(1; -1; 3); \vec{v}(2; -3; 5); \vec{w}(1; 1; 1).$

b/ $\vec{u}(2; 0; 1); \vec{v}(-1; 2; 1); \vec{w}(-1; 4; 2).$

25. Calculs d'angles

a/ Le vecteur $\vec{u}$ est tel que :

$$\vec{u} = 2\vec{i} + \sqrt{2}(\vec{j} + \vec{k}).$$

Donnez une mesure en radians de $(\vec{u}, \vec{i})$, de $(\vec{u}, \vec{j})$, de $(\vec{u}, \vec{k})$.

b/ $\vec{u}$ est le vecteur de coordonnées $(1; \frac{1}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2})$.

Déterminez l'angle $(\vec{i}, \vec{u})$.

Indication pour a/ et b/ : calculez le cosinus et le sinus de l'angle demandé.

26. a/ Vérifiez que les vecteurs $\vec{u}(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3})$ et $\vec{v}(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$ sont unitaires et orthogonaux.

b/ Déterminez tous les vecteurs $\vec{w}$ tels que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ soit une base orthonormale.

27. a/ Vérifiez que $\vec{u}(3, -4, 1)$ et $\vec{v}(2, 1, -2)$ sont orthogonaux.

b/ Explicitiez une base orthonormale $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ telle que $\vec{e}_1$ (respectivement $\vec{e}_2$) soit colinéaire à $\vec{u}$ (respectivement à $\vec{v}$).

28. Trouvez un vecteur $\vec{u}(\alpha; \beta; \gamma)$ orthogonal au vecteur $\vec{v}(1; 2; 0)$ et faisant un angle de mesure $\frac{\pi}{4}$ avec $\vec{j}$.

29. On donne les vecteurs :

$$\vec{u}(1; 1; 1); \quad \vec{v}(1; -2; 0); \\ \vec{w}(1; 0; 3).$$

On pose :

$$\vec{e}_1 = \vec{u}; \quad \vec{e}_2 = \vec{v} + \alpha \vec{e}_1; \quad \vec{e}_3 = \vec{w} + \beta \vec{e}_1 + \gamma \vec{e}_2 \\ (\alpha, \beta, \gamma, \text{réels}).$$

a/ Pouvez-vous trouver α, β, γ , tels que : $\vec{e}_1$ soit orthogonal à $\vec{e}_2$, et que $\vec{e}_3$ soit orthogonal à $\vec{e}_1$ et à $\vec{e}_2$?

b/ Pouvez-vous trouver une base orthonormale $(\vec{f}_1, \vec{f}_2, \vec{f}_3)$, telle que pour tout entier i de 1 à 3, $\vec{f}_i$ soit colinéaire à $\vec{e}_i$?

30. Triangle rectangle isocèle

On donne A(1, 1, $\sqrt{2}$) et B($\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, 0). C est le symétrique de A par rapport à O. Montrez que le triangle ABC est isocèle rectangle.

31. Résolution d'un triangle

a/ Trouvez les longueurs des côtés ainsi que les angles du triangle ABC avec A(2 $\sqrt{2}$; 0; 0), B(0; 3; 0), C(0; 0; 3).

b/ Même question pour le triangle AOI, où I est le milieu de [BC].

ÉQUATIONS DE DROITES ET DE PLANS

2. Écrivez dans chacun des cas suivants une représentation paramétrique de la droite qui passe par A et qui est perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$:

a/ $A(-1, 8, 3)$, $\mathcal{P} : 2x - 6y + 3z - 4 = 0$;

b/ $A(x_0, y_0, z_0)$, $\mathcal{P} : x - y = 0$;

c/ $A(x_0, y_0, z_0)$, $\mathcal{P} : y - z = 0$;

d/ $A(x_0, y_0, z_0)$, $\mathcal{P} : z - x = 0$.

Pour les exercices 33 à 37, donnez une équation du plan déterminé par les points A, B et C (vérifiez auparavant que ces points ne sont pas alignés).

33. $A(1; 2; 0)$, $B(0; 0; 1)$, $C(1; 5; 5)$.

34. $A(-2; -3; 0)$
 $B(-4; 16; 10)$
 $C(6; 3; 9)$.

35. $A\left(-\frac{3}{2}; 2; 7\right)$
 $B\left(-1; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$
 $C\left(8; -4; -\frac{2}{5}\right)$.

36. $A(2\sqrt{2}; 1; 3)$
 $B(2\sqrt{5}; 0; 2)$
 $C(1; 3\sqrt{3}; -2)$.

37. $A(5; 2; 0)$
 $B(3; 5; -1)$
 $C(-2; -3; 1)$.

Pour les exercices 38 à 41, le point A et les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont les coordonnées suivantes. Écrivez, dans chacun des cas, une équation du plan passant par A et dont $\vec{u}$ et $\vec{v}$ forment un système de vecteurs directeurs.

38. $A(1; 0; 1)$
 $\vec{u}(1; 2; 3)$
 $\vec{v}(2; 3; 0)$.

39. $A(1; \sqrt{2}; \sqrt{3})$
 $\vec{u}(\sqrt{2}; \sqrt{3}; 2)$
 $\vec{v}(\sqrt{3}; \sqrt{2}; \sqrt{5})$.

40. $A(0; 0; 0)$
 $\vec{u}(1; 1; 1)$
 $\vec{v}(1; -1; 1)$.

41. $A\left(-\frac{2}{3}; 0; \frac{1}{4}\right)$
 $\vec{u}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{3}; \sqrt{6}\right)$
 $\vec{v}\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{6}; \frac{1}{2}\right)$.

42. Calculez les coordonnées de l'isobarycentre G des points A(10, 5, -10), B(-1, -15, 17) et C(2, 20, 21).

Vérifiez que A, B, C déterminent un plan et que M(-10, 5, 5) se projette orthogonalement en G sur le plan (ABC).

43. Donnez une équation du plan P :

a/ P est le plan passant par A(1, 0, 5) et admettant le vecteur $\vec{n}(1, -1, 0)$ comme vecteur normal.

b/ P est le plan médiateur du segment [A, B] avec A(3, -2, -5) et B(1, 4, 3).

44. Donnez une équation du plan P orthogonal à la droite (AC) et passant par l'orthocentre du triangle (ABC), avec A(3, 0, 4), B(-1, 1, 1) et C(2, 0, 0).

45. P est le plan d'équation $3x - y + 5z = 0$.

1. Montrez que pour tout réel m :

$$mx + (3m + 5)y + z = 0$$

est l'équation d'un plan P_m et que P et P_m sont perpendiculaires.

2. Étudiez l'ensemble des points communs à tous les plans P_m , m décrivant $\mathbb{R}$.

46. Pour quelle valeur du réel m peut-on trouver un plan perpendiculaire au plan d'équation $x + y - z + 1 = 0$ et parallèle au plan d'équation $mx + 2y + 3z - 4 = 0$?

47. Donnez une équation du plan P qui est perpendiculaire au plan d'équation $x - 2y - z + 1 = 0$ et qui passe par les points A(0, 0, 0) et B(0, 1, 0).

Pour les exercices 48 à 50, calculez la distance de A à la droite D.

48. $A(-2; 1)$, $D : y = 2x - 4$.

49. $A(1; 2)$, D passe par B(-4; 1) et C(1; 3).

50. $A(-2; 1)$, D passe par B(-2; 3) et C(1; 3).

Pour les exercices 51 et 52, calculez la distance de A au plan P.

51. $A(1; 2; -3)$, $P : 2x - y + z + 1 = 0$.

52. $A(-1; 1; 1)$, P passe par B(0; 1; 0), C(-1; 1; 0) et D(-1; -2; -3).

53. Montrez que les plans P et P' sont parallèles :

$$P : x - 2y + 3z - 2 = 0$$

$$P' : x - 2y + 3z + 1 = 0.$$

Déterminez l'ensemble des points équidistants de P et de P'.

54. Montrez que le point A(1, 1, 1) est à égale distance des plans P et P' :

$$P : ax + by + cz = 0$$

$$P' : bx + cy + az = 0.$$

Évaluez cette distance lorsque P et P' sont perpendiculaires et en déduire la distance de A à leur droite d'intersection.

55. Exprimez dans chaque cas les coordonnées (x', y', z') du point M', projeté orthogonal de M(x, y, z) sur le plan P d'équation :

a/ P : $x=0$; b/ P : $y=0$;
 c/ P : $z=0$; d/ P : $x-y=0$;
 e/ P : $y-z=0$; f/ P : $z-x=0$.

56. P est le plan d'équation $x+y+z=1$ et P' le plan d'équation $x-z=0$.

1. Calculez la distance d'un point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ à P et à P'.

2. Déduisez-en que l'ensemble des points M de $\mathbb{E}$ équidistants de P et P' est la réunion de deux plans perpendiculaires.

SPHÈRES

57. Dans chaque cas, donnez une équation de la sphère :

a/ de centre $\Omega(1, -3, 2)$ et passant par l'origine;

b/ de diamètre [A, B] avec A(1, -1, 1) et B(-2, 2, 0).

58. Quelle est l'équation du plan tangent en A(1, 4, -5) à la sphère de centre $\Omega(1, 3, -2)$ passant par A?

59. À quelle condition nécessaire et suffisante (portant sur les coefficients a, b et c) le plan d'équation $ax+by+cz-1=0$ est-il tangent à la sphère de centre O et de rayon 1?

Pour les exercices 60 à 65, trouvez le rayon et le centre de la sphère d'équation.

60. $x^2+y^2+z^2-16x-8y-2z=0$.

61. $x^2+y^2+z^2-3x+y+1=0$.

62. $x^2+y^2+z^2-2x-8z+3=0$.

63. $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z=0$.

64. $x^2+y^2+z^2-4x+4y-6z-10=0$.

65. $x^2+y^2+z^2+2x-4y+5z=0$.

66. Trouvez l'intersection de la sphère d'équation :

$$x^2+y^2+z^2-6x+y-3z+2=0$$

et de la droite passant par A(0; 1; 2) et B(1; 2; -2).

67. a/ Trouvez l'intersection des plans P et Q et de la sphère S sachant que :

• P passe par A(0; 1; 0), B(0; 0; 1) et C(1; 2; 3);

• Q passe par C et est perpendiculaire à la droite (AB);

• S a pour centre C et pour rayon 2.

b/ Dessinez sans faire apparaître le repère.

VOLUMES

68. Un cube a un volume de 512 cm^3 . Quelle est la longueur de sa diagonale?

69. Quel est le volume d'une sphère dont l'aire est 1 m^2 ?

70. Dans l'unité cm^3 , le volume d'une sphère est exprimé par le même nombre que son aire lorsque l'unité est le cm^2 . Quel est le rayon de cette sphère?

71. La figure ci-dessous représente un cube. $AB=a$.

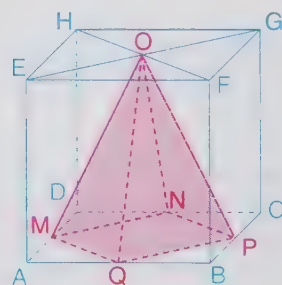
M, N, P, Q sont les milieux des arêtes.

O est le centre du carré EFGH.

1. Calculez le volume et l'aire totale de la pyramide OMNPQ.

2. On note $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit au triangle NPQ.

Calculez le volume du cône de sommet O et de base $\mathcal{C}$.



72. ABC est un triangle isocèle en A, $AB=AC=5$, $BC=3$.

Par rotation autour de la droite (BC), le triangle engendre un solide de révolution. Trouvez le volume de ce solide.

73. 1. Un cône de révolution a pour hauteur h et le rayon de son cercle de base est R.

Montrez que l'aire latérale de ce cône est :

$$\pi R \sqrt{R^2 + h^2}.$$

2. Déduisez-en l'aire latérale d'un tronc de cône de révolution de hauteur 30 cm, dont la « grande base » est un cercle de rayon 15 cm, et la « petite base » est un cercle de rayon 12 cm.

**RECHERCHE D'ENSEMBLES
ET DE LIEUX.
LIGNES DE NIVEAUX**

74. A, B, C, D sont quatre points donnés de l'espace.

I est le milieu de [AB] et J le milieu de [CD].

a/ En utilisant les points I et J, calculez :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD}, \text{ et } \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD}.$$

b/ Déduisez-en l'ensemble des points M tels que :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = 0$$

puis l'ensemble des points M tels que :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MD} = 0.$$

75. A, B et C sont trois points dans l'espace et non alignés.

a/ M est un point quelconque de l'espace. Que pouvez-vous dire du vecteur :

$$\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}?$$

b/ Quel est l'ensemble des points M tels que :

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{MC} = 0$$

où O est un point donné ?

76. A et B sont deux points donnés du plan. Quel est l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\frac{MA}{MB} = 2?$$

77. A et B sont deux points donnés de l'espace. Quel est l'ensemble des points M tels que :

$$MA^2 + MB^2 = \frac{5}{2} AB^2?$$

78. A et B sont deux points de l'espace tels que $AB = 2$.

Trouvez dans chaque cas l'ensemble dans l'espace des points M tels que :

a/ $MA^2 - MB^2 = 1$;

b/ $MA^2 + MB^2 = 3$;

c/ $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM} = -2$.

79. ABC est un triangle équilatéral, $AB = a$. Quel est l'ensemble des points M du plan ABC tels que :

$$2MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2a^2?$$

80. Produit vectoriel

A, B, C sont trois points donnés non alignés.

a/ Quel est l'ensemble des points M tels que :

$$\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{0}?$$

b/ Quel est l'ensemble des points M tels que :

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC}?$$

c/ Vérifiez ce que vous avez trouvé en utilisant la géométrie analytique (choisissez un repère adapté).

EXERCICES DU BACCALAURÉAT

81. (A, B, C) est un triangle, on pose $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$.

A' est le milieu du segment [BC], B' celui de [AC], C' celui de [AB].

Soit G l'isobarycentre du triangle (A, B, C).

1. Montrez que pour tout point M du plan :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + \frac{a^2 + b^2 + c^2}{3}.$$

2. En calculant de deux façons différentes $(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC})^2$ établissez que :

$$2\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = 3MG^2 - \frac{a^2 + b^2 + c^2}{6}.$$

3. On considère les points communs aux cercles de diamètres [AA'] et [BC], montrez que, lorsqu'ils existent, ils appartiennent à un cercle de centre G dont on donnera le rayon en fonction de a, b et c.

82. Soit (ABC) un triangle rectangle en A, tel que $AB = a$ et $AC = 3a$ (où $a > 0$). On fera une figure en prenant $a = 2$ cm.

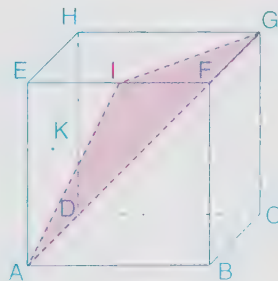
1. Construisez le barycentre G du système $\{(A, -5)(B, 6)(C, 2)\}$.

2. Calculez GA^2 , GB^2 et GC^2 en fonction de a.

3. Déterminez et construisez l'ensemble (Γ) des points M vérifiant :

$$-5MA^2 + 6MB^2 + 2MC^2 = 12a^2.$$

83.



Soit le cube ABCD EFGH représenté par la figure ci-dessus.

L'espace est orienté par le repère orthonormal direct $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

On désigne par I le milieu de [EF] et par K le centre du carré ADHE.

1. a/ Vérifiez que $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA}$.

b/ Déduisez-en l'aire du triangle IGA.

2. Calculez le volume du tétraèdre ABIG et déduisez-en la distance du point B au plan AIG.

- 84.** L'unité est le cm. On donne dans le plan un triangle ABC rectangle en A tel que $AB = 8$ et $AC = 4$.

1. Construisez le barycentre G des points A, B, C respectivement affectés des coefficients 3, -1, 2.

2. Déterminez et construisez l'ensemble E des points M du plan vérifiant :

$$3MA^2 - MB^2 + 2MC^2 = -32.$$

3. Déterminez et construisez l'ensemble E des points M du plan vérifiant :

$$\|3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|.$$

- 85.** Dans le plan $\mathcal{P}$ on considère trois points A, B et C tels que :

$$\|\overrightarrow{AB}\| = \|\overrightarrow{AC}\| = 4d \quad \text{et} \quad \|\overrightarrow{BC}\| = 2d$$

où d est un réel strictement positif donné.

On considère les points A, B et C affectés respectivement des coefficients λ , 1 et 1 où $\lambda \in \mathbb{R} - \{-2\}$.

1. Déterminez l'ensemble Δ des barycentres G_λ de ces points lorsque λ décrit $\mathbb{R} - \{-2\}$.

2. Dans le cas où $\lambda = -1$, on appelle G le barycentre des points A, B et C affectés respectivement des coefficients -1, 1 et 1.

a/ Déterminez G.

b/ Déterminez l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M du plan vérifiant l'égalité :

$$\|\overrightarrow{MB}\|^2 + \|\overrightarrow{MC}\|^2 = \|\overrightarrow{MA}\|^2.$$

3. a/ Démontrez que pour tout point M du plan $\mathcal{P}$, $\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} - 2\overrightarrow{MA}$ est un vecteur constant que l'on déterminera.

b/ Déterminez l'ensemble Δ' des points M du plan $\mathcal{P}$ tels que :

$$\|\overrightarrow{MB}\|^2 + \|\overrightarrow{MC}\|^2 - 2\|\overrightarrow{MA}\|^2 = 32d^2.$$

- 86.** 1. Soit A, B, C et D quatre points distincts de l'espace. Démontrez que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales si et seulement si :

$$AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2.$$

(On pourra par exemple exprimer $AC^2 - AD^2$ ainsi que $BC^2 - BD^2$ sous forme de produits scalaires.)

2. On considère un tétraèdre ABCD tel que (AB) est perpendiculaire à (CD) et (BC) perpendiculaire à (AD). Montrez que (BD) est perpendiculaire à (AC).

- 87.** Soit un tétraèdre régulier ABCD, c'est-à-dire tel que :

$$AB = AC = AD = BC = BD = CD = a.$$

1. Soit A' l'isobarycentre du triangle BCD. Déterminez le réel m tel que le point G, milieu

de [AA'], soit le barycentre du système $\{(A, m), (B, 1), (C, 1), (D, 1)\}$.

Placez ces différents points sur une figure. Calculez GA^2 et GB^2 en fonction de a .

2. Déterminez l'ensemble Σ des points M de l'espace tels que :

$$6MA^2 + 2MB^2 + 2MC^2 + 2MD^2 = 5a^2.$$

3. Déterminez l'ensemble Π des points M de l'espace tels que :

$$MB^2 + MC^2 + MD^2 - 3MA^2 = a^2.$$

Vérifiez que Π est le plan médiateur de [AA'].

4. Déterminez l'intersection $\mathcal{C}$ de Σ et Π et prouvez que les milieux I, J, K des segments [AB], [AC], [AD] appartiennent à $\mathcal{C}$. Placez $\mathcal{C}$ sur la figure.

Pour chercher plus

- 88.** Plan non parallèle à l'un des plans de coordonnées

1. Montrez que tout plan non parallèle à l'un des plans de coordonnées a une équation de la forme :

$$\frac{x}{u} + \frac{y}{v} + \frac{z}{w} = 1,$$

où u, v, w sont des réels non nuls. Donnez une interprétation géométrique de ces réels.

2. Examinez le problème réciproque.

- 89.** Projections d'un triangle et orthocentre

On projette orthogonalement un triangle ABC sur un plan P non perpendiculaire au plan (ABC). On obtient un triangle A'B'C', où A', B', C' sont respectivement les projetés de A, B, C.

On note H l'orthocentre de ABC et H' l'orthocentre de A'B'C'.

À quelle condition, nécessaire et suffisante, portant sur les plans P et (ABC), H' est-il le projeté de H ?

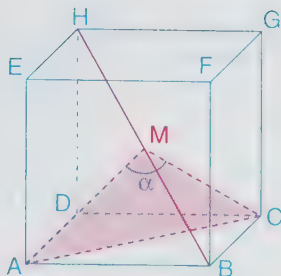
- 90.** Projections d'un triangle rectangle sur deux plans

On projette un triangle rectangle ABC, orthogonalement sur deux plans sécants P et P', et on obtient deux triangles A'B'C' et A''B''C''.

À quelle condition, nécessaire et suffisante, les triangles A'B'C' et A''B''C'' sont-ils tous deux rectangles, l'un en A', l'autre en A'' ?

- 91.** Problème d'optimisation

ABCDEFGH est un cube. M est un point de la diagonale [BH].



On note α l'angle sous lequel « on voit de M la diagonale [AC] » :

$$\alpha = \widehat{AMC}.$$

On note I le milieu de [AC].

Le but est de trouver la valeur maximum de α .

Montrez que α est maximum lorsque M est le projeté orthogonal de A sur [HB], et calculez la valeur de ce maximum.

(D'après B. Destainville, IREM de Toulouse.)

92. Expression analytique d'une projection

1. $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormal. La projection orthogonale sur un plan P associe à tout point M(x; y; z) le point M'(x'; y'; z') tel que :

$$(S) \begin{cases} x' = \frac{1}{9}(5x + 2y - 4z) \\ y' = \frac{1}{9}(2x + 8y + 2z) \\ z' = \frac{1}{9}(-4x + 2y + 5z). \end{cases}$$

On notera p cette projection orthogonale. Trouvez une équation du plan P.

Indication : P est l'ensemble des points invariants par p . Définissez P par un point et un vecteur normal $\vec{u}$.

Le système (S) est appelé « expression analytique de p ».

2. On donne la droite d qui passe par A(0; 0; 1) et qui est dirigée par le vecteur $\vec{v}(1; -1; 2)$.

Donnez l'expression analytique de la projection orthogonale sur d .

93. Choisir un repère pour démontrer

$\mathcal{C}$ est un cercle d'un plan P, O est le centre de $\mathcal{C}$, R est son rayon. A est un point de l'espace extérieur à P.

M est un point de $\mathcal{C}$. Q est le plan perpendiculaire en M à la droite (AM).

Le but est de démontrer que lorsque M décrit $\mathcal{C}$, le plan Q passe par un point fixe.

Démontrez ce résultat.

Indication : choisissez un repère orthonormal

$(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de sorte que dans ce repère le cercle $\mathcal{C}$ ait pour équation :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = R^2 \\ z = 0. \end{cases}$$

Notez (a; b; c) les coordonnées, fixes, de A.

94. Équation d'un plan tangent à une sphère

$(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormal.

1. S est la sphère de centre O de rayon R.

M(a; b; c) est un point de S.

Donnez une équation du plan tangent à S en M.

2. Même question, lorsque S est la sphère de centre I de coordonnées $(x_0; y_0; z_0)$.

95. Volume d'un tétraèdre

ABCD est un tétraèdre.

Montrez que le volume de ce tétraèdre est égal à :

$$\frac{1}{6} |(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) \cdot \overrightarrow{AD}|.$$

Problèmes de synthèse

Ces problèmes peuvent être traités sans utiliser le produit scalaire.

96. P est un plan, A un point de P, D une droite de P passant par A et B un point hors du plan P.

B se projette orthogonalement en H sur P et en M sur D.

a/ Montrez que (AM) et le plan (BHM) sont perpendiculaires.

Déduisez-en que (BHM) et (BMA) sont des plans perpendiculaires.

b/ Le plan orthogonal à la droite (AB) mené par H coupe cette droite au point I et la droite (BM) au point N.

Montrez que (HN) est perpendiculaire à (BM) et que le point N est le projeté du point H sur le plan (ABM).

c/ Quel est l'ensemble des points N lorsque D tourne autour de A en restant dans P?

97. Recherche de minimum

1. a/ On donne dans l'espace un segment [AB], de milieu O, et une droite fixe D. Les deux droites D et (AB) ne sont pas forcément dans un même plan. M étant un point variable de la droite D, comment varie la somme $MA^2 + MB^2$ lorsque M décrit la droite D?

b/ Établissez que cette somme possède un minimum; quelle est la position correspondante du point M?

c/ Peut-on remplacer les points A et B par deux autres points fixes, A' et B', de la droite (AB) tels que le minimum de $MA'^2 + MB'^2$ et le minimum de $MA^2 + MB^2$ soient obtenus pour la même position de M sur la droite D?

2. Les deux points fixes A et B étant donnés, on suppose, dans cette question, que le point M peut se déplacer arbitrairement sur un plan fixe, P.

Déterminez la position du point M pour que la somme $MA^2 + MB^2$ soit minimum.

3. Les deux points fixes A et B étant donnés, on suppose, dans cette question, que le point M peut se déplacer arbitrairement sur une sphère fixe, S.

Montrez que la somme $MA^2 + MB^2$ admet, en général, un minimum unique. On déterminera la position correspondante de M.

Il existe un cas d'exception, que l'on précisera.

4. Les deux points fixes A et B étant donnés, on suppose, dans cette question, que le point M décrit un cercle fixe, C, quelconque dans l'espace.

Montrez que la somme $MA^2 + MB^2$ admet en général un minimum unique, correspondant à une position de M, que l'on précisera.

Il existe un cas d'exception, que l'on étudiera.

98. Lieu géométrique

SABCD est une pyramide de sommet S, de base le parallélogramme ABCD.

On choisit un point A' sur le segment [SA] et un point B' sur le segment [SB] tels que (A'B') soit parallèle à (AB).

1. a/ M étant un point du segment [SC], construisez l'intersection N de (SD) avec le plan (A'B'M). Justifiez la construction.

b/ Quelle est la nature du quadrilatère A'B'MN?

c/ Comment faut-il choisir M pour que A'B'MN soit un parallélogramme?

2. On désigne par I le point d'intersection des droites (A'N) et (B'M) lorsqu'il existe et par J celui des droites (A'M) et (B'N).

a/ Quel est le lieu géométrique du point I lorsque M décrit [SC]?

b/ Quel est l'ensemble des points J lorsque M décrit [SC]?

99. Cube tronqué. Volumes

ABCDEFGH est un cube dont l'arête mesure 4 cm.

1. On considère le solide ABCDEGH obtenu en enlevant à ce cube le tétraèdre BEFG.

a/ Calculez le volume V, en cm^3 , de ce solide.

b/ Un plan parallèle au plan ABCD coupe ce solide suivant le pentagone IJKLM. On désigne par x la distance AI (unité : le centimètre). Démontrez que : $IJ = KL = 4 - x$, et calculez l'aire du pentagone IJKLM.

2. a/ Calculez le volume $v(x)$, en cm^3 , du solide ABCDIJKLM.

b/ Montrez qu'il existe un réel x_0 dans $]0; 4[$ et un seul, tel que $v(x_0) = \frac{V}{2}$.

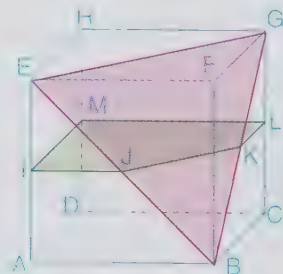
Démontrez que x_0 est solution de l'équation :

$$x^3 - 96x + 160 = 0.$$

Donnez un encadrement d'amplitude 1 mm de x_0 .

3. (S) est le solide obtenu en enlevant au cube ses huit « coins », c'est-à-dire les tétraèdres EBG, FCH, GDE, HAF, BDE, FCB, GDC et ACH.

Représentez ce solide et calculez son volume en cm^3 .



TRAVAUX PRATIQUES D'APPROCHE

Mouvements ponctuels

1. Trajectoires

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormal fixe du plan.

1. Dans ce repère, l'équation horaire du mouvement d'un mobile ponctuel M est :

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

Nous noterons $M(t)$ la position du mobile à l'instant t . D'après l'équation horaire, la position de $M(t)$ est définie par ses coordonnées $(\cos t; \sin t)$.

a/ Placez les points $M(0)$, $M\left(\frac{\pi}{6}\right)$, $M\left(\frac{\pi}{4}\right)$, $M\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $M\left(\frac{\pi}{2}\right)$.

b/ Quelle est la trajectoire du mobile ? Indiquez son sens de parcours.

2. Dans ce même repère, l'équation horaire du mouvement d'un autre mobile ponctuel N est :

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad t \in [0; 2\pi].$$

Quelle est la trajectoire du mobile N ? Indiquez son sens de parcours.

2. Deux trajectoires peuvent avoir un point commun sans que les mobiles se rencontrent

Deux mobiles ponctuels M et N se déplacent dans le plan.

Dans un repère, l'équation horaire de M est :

$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 2 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, \text{ et celle de N est : } \begin{cases} x = t \\ y = 1 + 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

a/ Quelles sont les trajectoires respectives de M et N ?

b/ Montrez que ces trajectoires ont un point commun et un seul.

c/ Vérifiez que pourtant les positions de M et N ne sont jamais confondues.

COURS

Dans tout ce chapitre, les repères considérés seront toujours des **repères orthonormaux**. Cette précision sera parfois omise.

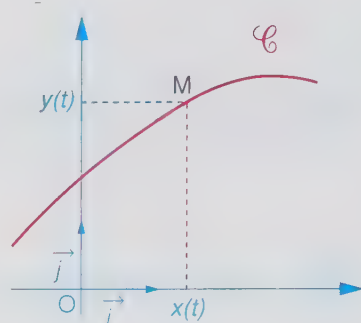
1 Définitions

1.1. EN CINÉMATIQUE

Vous avez appris en Mécanique que pour décrire le mouvement *plan* d'un mobile *ponctuel* M , on précise à chaque instant sa position par rapport à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Les coordonnées $(x; y)$ de M sont des fonctions *connues* du temps, et le système :

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \quad t \in I, \text{ où } I \text{ est un intervalle précisé}$$

de $\mathbb{R}$, est appelé **équation horaire** du mouvement.



L'ensemble des positions du point M est appelé **trajectoire du point mobile M** . Notons $\mathcal{C}$ cette trajectoire.

1.2. EN MATHÉMATIQUES

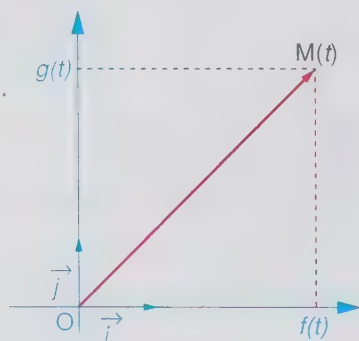
Dans la situation décrite ci-dessus, le mathématicien dira que l'écriture :

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \quad t \in I,$$

est une **représentation paramétrique** de la courbe $\mathcal{C}$.

Plus généralement, considérons deux fonctions f et g définies sur le *même* intervalle I et à valeurs réelles, et choisissons dans le plan un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

À chaque réel t de I , associons alors le point $M(t)$ de coordonnées $(f(t); g(t))$.



L'ensemble des points $M(t)$ est appelée **courbe paramétrée**.

Une **représentation paramétrique** dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$ de cette courbe, est donnée par :

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \quad t \in I.$$

On dit que le point de coordonnées $(f(t); g(t))$ est le **point de paramètre t** . On le note en général $M(t)$.

À chaque réel t de I nous associons donc aussi le vecteur $\overrightarrow{OM}(t)$ défini par :

$$\overrightarrow{OM}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j}.$$

On dit que la fonction $t \mapsto \overrightarrow{OM}(t)$ est une **fonction vectorielle** définie sur I .

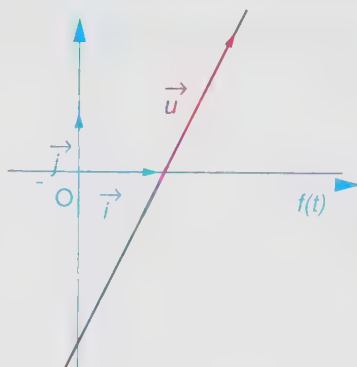
1.3. EXEMPLES

EXEMPLE 1 : droite paramétrée

À chaque réel t , associons, dans un repère choisi, le point $M(t)$ de coordonnées $(2+3t; 1-t)$. Nous noterons parfois M_t au lieu de $M(t)$. Une représentation paramétrique de la courbe paramétrée ainsi

$$\text{définie est donc } \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Cette courbe paramétrée est une droite. En effet, le point M_0 de paramètre 0 a pour coordonnées $(1; 0)$, et si nous notons $\vec{u}$ le vecteur de coordonnées $(1; 2)$, nous obtenons : $\vec{M_0 M_t} = t\vec{u}$. Cette égalité, vraie pour tout t , prouve que M_t décrit la droite dirigée par $\vec{u}$ et qui passe par M_0 .



EXEMPLE 2 : cercle paramétré

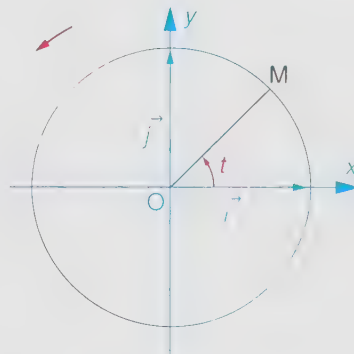
Cherchons à déterminer la courbe paramétrée $\mathcal{C}$ qui, dans un repère orthonormal, a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad t \in [0; 2\pi].$$

Il est clair que, pour tout t ,

$$x^2(t) + y^2(t) = 1,$$

donc le point $M(t)$ est sur le cercle de centre O et de rayon 1.



Lorsque t décrit $[0; 2\pi]$, il est clair que $M(t)$ décrit tout le cercle $\mathcal{C}$. La courbe cherchée est donc ce cercle $\mathcal{C}$.

Remarque : notez l'importance du renseignement « $t \in I$ » dans la définition d'une courbe paramétrée; en effet, si à l'exemple précédent nous prenons $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, la courbe cherchée n'est plus le cercle $\mathcal{C}$ précédent, mais seulement un quart de cercle.

De même, nous verrions que la courbe de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = \cos 2t \\ y = \sin 2t \end{cases} \quad t \in [0; \pi], \text{ est aussi le cercle de centre } O \text{ et de rayon } 1.$$

Ces représentations paramétriques sont différentes : les points $M(t)$ de même paramètre t dans ces deux représentations n'ont pas la même position sur le cercle.

Ainsi, une courbe paramétrée peut avoir plusieurs représentations paramétriques différentes.

1.4. COURBES $y = f(x)$ ET COURBES PARAMÉTRÉES

Les courbes d'équations $y = f(x)$ sont des courbes paramétrées.

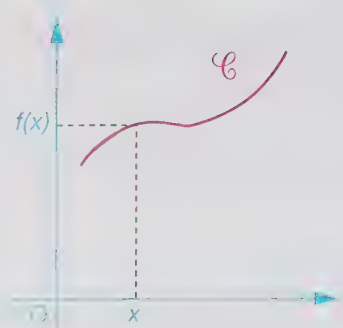
En effet, lorsque f est une fonction définie sur un intervalle I , sa courbe représentative dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est l'ensemble des points $(x; f(x))$, avec x dans I .

Il est clair alors que la courbe paramétrée définie par :

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases} \quad t \in I$$

est la courbe représentative de f .

La notion de courbe paramétrée est donc une généralisation de la notion de courbe utilisée jusqu'ici.



2 Vecteur dérivé. Tangente

2.1. DÉFINITIONS

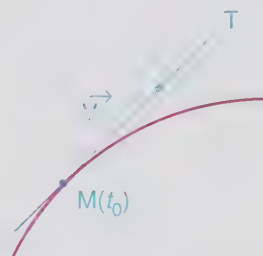
Considérons la courbe $\mathcal{C}$ définie dans un repère orthonormal par :

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \quad t \in I.$$

Supposons les fonctions f et g dérivables sur I .

On dit que le vecteur $\vec{V}(f'(t); g'(t))$ est le vecteur dérivé en t .

Supposons en outre qu'en un point t_0 de I , les deux nombres $f'(t_0)$ et $g'(t_0)$ ne soient pas simultanément nuls. Le vecteur $\vec{V}_0(f'(t_0); g'(t_0))$ n'est donc pas nul, et nous pouvons alors considérer la droite T , dirigée par $\vec{V}_0$ et passant par $M(t_0)$.



Dans les conditions énoncées ci-dessus, par définition :

- on dit que le vecteur $\vec{V}(f'(t_0); g'(t_0))$ est le vecteur dérivé en t de la fonction $t \mapsto \overrightarrow{OM}(t)$;
- lorsque en t_0 le vecteur dérivé $\vec{V}_0$ n'est pas nul, on dit que la droite T qui passe par $M(t_0)$ et qui est dirigée par $\vec{V}_0$ est la tangente à la courbe paramétrique au point $M(t_0)$.

Justifions l'origine de cette définition.

Notons M_0 le point $M(t_0)$. Considérons le vecteur $\frac{\overrightarrow{M_0M}(t)}{t - t_0}$, $t \neq t_0$.

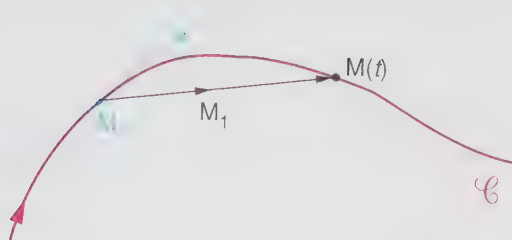
Ce vecteur est un **vecteur directeur** de la sécante $(M_0M(t))$. Ses coordonnées sont :

$$\left(\frac{f(t) - f(t_0)}{t - t_0}, \frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} \right).$$

Lorsque t tend vers t_0 , elles ont pour limite $(f'(t_0); g'(t_0))$.

En Cinématique

$\overrightarrow{M_0M_1} = \frac{\overrightarrow{M_0M}(t)}{t - t_0}$ est le vecteur *vitesse moyenne* entre les instants t_0 et t .



Ainsi le vecteur $\vec{V}_0$ apparaît, lorsque $M(t)$ tend vers M_0 , comme la position limite des vecteurs directeurs des sécantes $(M_0M(t))$. Et donc, la droite T apparaît comme la position limite des sécantes $(M_0M(t))$, d'où son nom, en conformité avec ce qui a été dit pour les tangentes aux courbes d'équations $y = f(x)$.

$\vec{V}_0$, limite des vecteurs vitesse moyenne, est le vecteur *vitesse instantanée à l'instant t_0* .

Le sens de $\vec{V}_0$ est celui du mouvement.

2.2. EXEMPLES

EXEMPLE 1 : le cercle

Nous avons vu au paragraphe 1.3. que la courbe paramétrée définie, dans un repère orthonormal, par :

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad t \in [0; 2\pi],$$

est le cercle de centre O et de rayon 1.



Pour une valeur t_0 du paramètre, $0 \leq t_0 \leq 2\pi$, nous obtenons, en posant $f(t) = \cos t$, $g(t) = \sin t$, $f'(t_0) = -\sin t_0$, $g'(t_0) = \cos t_0$.

Quel que soit t_0 , $f'(t_0)$ et $g'(t_0)$ ne sont pas simultanément nuls, et donc, il existe au point $M(t_0)$ une tangente à cette courbe paramétrée qui est le cercle $\mathcal{C}$.

Observons que le produit scalaire $\overrightarrow{OM}(t_0) \cdot \vec{V}_0$ est nul, car égal à :

$$-\sin t_0 \cos t_0 + \cos t_0 \sin t_0.$$

Les droites (OM) et T sont donc perpendiculaires : la tangente à la courbe $\mathcal{C}$, définie par définition, coïncide avec la tangente au cercle définie en Géométrie : droite passant par $M(t_0)$ et perpendiculaire au rayon.

EXEMPLE 2 : cas des courbes d'équation $y = f(x)$

Notons $\mathcal{C}$ la courbe représentative d'une fonction f définie sur un intervalle I. Nous avons vu au 1.4. qu'une représentation paramétrique de $\mathcal{C}$ est :

$$\begin{cases} x = t \\ y = f(t) \end{cases} \quad t \in I.$$

Supposons f dérivable en un point t_0 de I. Le vecteur dérivé en t_0 a alors pour coordonnées : $(1; f'(t_0))$, il est donc non nul. La droite T dirigée par $\vec{V}_0$ et qui passe par $(t_0; f(t_0))$ est tangente à la courbe paramétrée. Il est facile de voir qu'une équation cartésienne de cette droite T est $y - f(t_0) = f'(t_0)(x - t_0)$. T est donc la tangente à la courbe selon la définition donnée en classe de Première.

2.3. CAS PARTICULIERS : TANGENTE VERTICALE, HORIZONTALE

Lorsque la première coordonnée du vecteur dérivé $\vec{V}_0$ est nulle, par exemple si ses coordonnées sont $(0; b)$, avec $b \neq 0$, alors $\vec{V}_0 = b\vec{j}$: la direction de $\vec{V}_0$ est celle de $\vec{j}$. La tangente en $M(t_0)$ est verticale.

De même, lorsque la seconde coordonnée du vecteur $\vec{V}_0$ est nulle, la tangente en $M(t_0)$ est horizontale.

3

Comment construire une courbe paramétrée ?

Nous allons tracer la courbe paramétrée définie dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ par la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 3t^2 - 2 \\ y = 3t - t^3 \end{cases} \quad t \in [-2; 2].$$

Posons : $f(t) = 3t^2 - 2$ et $g(t) = 3t - t^3$.

3.1. ÉTUDE DES FONCTIONS f ET g

Étudions les fonctions f et g sur l'intervalle $[-2; 2]$ et établissons un tableau de variation commun pour ces deux fonctions.

Pour tout t : $f'(t) = 6t$ et $g'(t) = 3 - 3t^2 = 3(1 - t^2)$.

Ainsi :

t	-2	-1	0	1	2				
f'	-12	-	-6	-	0	+	6	+	12
f	10								
		1					1		10
			-2						
g	2						2		
		-2							-2
g'	-9	-	0	+	3	+	0	+	-9

3.2. UTILISATION DU TABLEAU DE VARIATION POUR TRACER LA COURBE

a/ Première étape

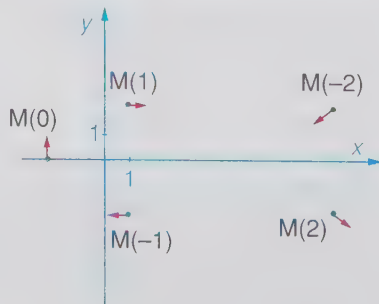
On place les cinq points correspondants aux valeurs du paramètre qui apparaissent dans le tableau de variation (voir figure ci-dessous).

$$\begin{aligned} M(-2) &= (10; 2); & M(-1) &= (1; -2); & M(0) &= (-2; 0); \\ M(1) &= (1; 2); & M(2) &= (10; -2). \end{aligned}$$

b/ Deuxième étape

En chacun de ces points, on trace le vecteur dérivé.

Lorsqu'il n'est pas nul, un tel vecteur indique «le sens du mouvement», et est un vecteur directeur de la tangente au point.



Pratiquement, on peut remplacer un vecteur dérivé par un vecteur non nul colinéaire et de MÊME sens. Un tel vecteur est appelé **vecteur tangent**.

Ainsi, par exemple, le vecteur dérivé pour $t = -2$ a pour coordonnées $(-12; -9)$. Pour des commodités de dessin, nous préférons le remplacer par le vecteur de coordonnées $\left(-\frac{4}{3}; -1\right)$.

Une équation **cartésienne** de la tangente en $M(-2)$ est $y - 2 = \frac{3}{4}(x - 10)$.

Notez que les tangentes en $M(-1)$, $M(1)$ sont **horizontales** ($g'(-1)=0$, $g'(1)=0$), et que la tangente au point $M(0)$ est **verticale** ($f'(0)=0$).

En $M(-1)$ nous avons remplacé le vecteur dérivé par le vecteur $(-1; 0)$, en $M(1)$ le vecteur dérivé est remplacé par le vecteur $(1; 0)$, ...

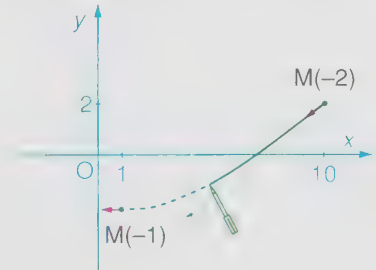
c/ Troisième étape

On trace la courbe sur les intervalles où f et g sont monotones toutes les deux.

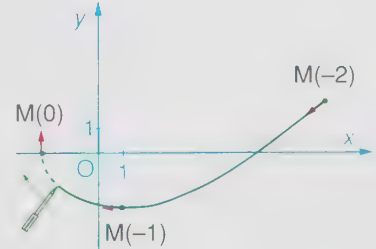
Ici, il s'agit des intervalles $[-2; -1]$, $[-1; 0]$, $[0; 1]$ et $[1; 2]$.

- Dans l'intervalle $[-2; -1]$, f et g sont décroissantes toutes les deux : « $M(t)$ se déplace de $M(-2)$ à $M(-1)$, de façon que son abscisse décroisse, donc vers la *gauche*, et de façon que son ordonnée décroisse, donc vers le *bas* ».

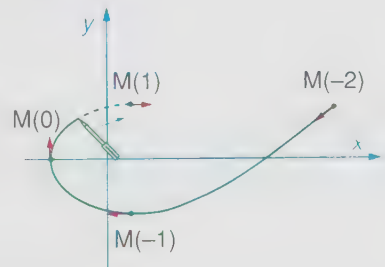
D'où le tracé indiqué par la figure.



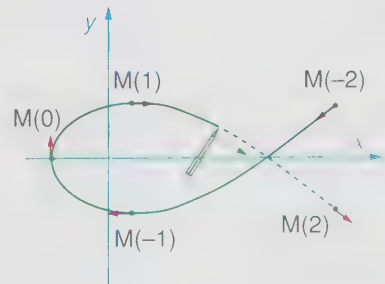
- Dans l'intervalle $[-1; 0]$, « l'abscisse de $M(t)$ décroît et son ordonnée croît », donc, « à partir de $M(-1)$ jusqu'au point $M(0)$, $M(t)$ se déplace vers la gauche (l'abscisse décroît) et vers le haut (l'ordonnée croît) ». D'où le tracé de la courbe indiqué par la figure.



- Dans l'intervalle $[0; 1]$, « l'abscisse de $M(t)$ croît et l'ordonnée croît ». D'où le tracé de la courbe indiqué par la figure.



- Dans l'intervalle $[1; 2]$, « l'abscisse de $M(t)$ croît et l'ordonnée décroît ». D'où le tracé de la courbe indiqué par la figure.



COMMENTAIRES

1. Les tracés ont été faits dans « le sens des t croissants ».

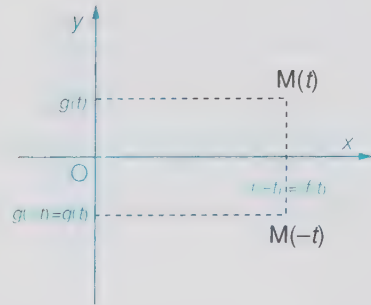
2. L'orientation des vecteurs dérivés (ou des vecteurs colinéaires à ces vecteurs et de même sens) est utile pour le tracé. Observez comment la figure faite lors de la deuxième étape préfigure le tracé définitif de la courbe.

3.3. ÉLÉMENTS DE SYMÉTRIE DE LA COURBE

On constate que l'axe des abscisses semble être axe de symétrie de la courbe.

C'est effectivement le cas, car l'intervalle $[-2; +2]$ est centré en zéro, et, pour tout t de cet intervalle, nous obtenons :

$$\begin{aligned}f(-t) &= 3(-t)^2 - 2 = f(t) \\g(-t) &= 3(-t) - (-t)^3 = -g(t).\end{aligned}$$



Il en résulte que les points $M(t)$ et $M(-t)$ ont même abscisse et des ordonnées opposées; ils sont donc symétriques par rapport à l'axe des abscisses et la portion de la courbe décrite lorsque t varie de -2 à 0 est symétrique de la portion de courbe décrite lorsque t varie de 0 à 2 .

Nous aurions donc pu réduire l'intervalle d'étude à l'intervalle $[0; 2]$.

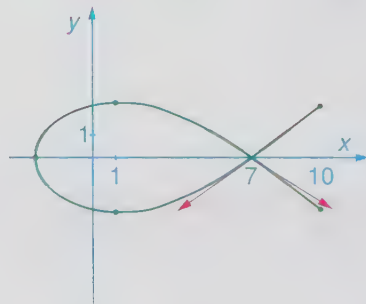
En pratique, chercher à réduire l'intervalle d'étude doit évidemment être fait avant l'étude elle-même.

Mais pour cette année, conformément au programme, les indications utiles vous seront données lorsque cette réduction sera possible.

3.4. REMARQUE 1 : POINT DOUBLE DE LA COURBE

Il y a un point et un seul où « la courbe se coupe elle-même ». Ce point est appelé un **point double**. Par raison de symétrie, il est situé sur l'axe des abscisses, sinon son symétrique par rapport à cet axe serait aussi un point double, et il y aurait alors deux points doubles.

Les points de la courbe situés sur l'axe des abscisses sont les points associés aux valeurs du paramètre qui sont solutions de l'équation $g(t) = 0$, c'est-à-dire : $3t - t^3 = 0$.



Ces points sont donc $M(0)$, $M(-\sqrt{3})$ et $M(\sqrt{3})$. Or $M(-\sqrt{3})$ et $M(\sqrt{3})$ ont tous deux pour coordonnées $(0; 7)$. Ce point $(0; 7)$ est le point double de $\mathcal{C}$, obtenu pour deux valeurs distinctes du paramètre.

3.5. REMARQUE 2 : POINTS D'INTERSECTION DE LA COURBE AVEC L'AXE DES ORDONNÉES

Ce sont les points correspondants aux valeurs du paramètre qui sont solutions de l'équation $f(t) = 0$, c'est-à-dire ici : $3t^2 - 2 = 0$. Ce sont donc les points $M\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$,

$$M\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right).$$

TRAVAUX PRATIQUES D'APPLICATION

1 Une courbe de Lissajous

On considère la courbe paramétrée définie dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ par la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = \sin 2t \\ y = \sin 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

1. a/ Déterminez les périodes des fonctions $t \mapsto \sin 2t$ et $t \mapsto \sin 3t$ et montrez que 2π est une période commune à ces deux fonctions.

b/ t_0 est une valeur du paramètre; montrez que les points $M(t_0)$ et $M(t_0 + 2\pi)$ sont confondus. Que peut-on dire des points $M(t_0 + 2k\pi)$, $k \in \mathbb{Z}$?

c/ Déduez-en que l'ensemble des points $M(t)$ pour $t \in [a; b]$ est identique à l'ensemble des points $M(t)$ pour $t \in [a + 2\pi; b + 2\pi]$. Que peut-on dire des ensembles des points $M(t)$ pour : $t \in [a + 2k\pi; b + 2k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$?

d/ Montrez que l'on obtient tous les points de la courbe en considérant les points $M(t)$ pour $t \in [-\pi; \pi]$.

2. Montrez que les points $M(t_0)$ et $M(-t_0)$ sont symétriques par rapport à l'origine : déduisez-en que la portion de courbe correspondant à $t \in [-\pi; 0]$ est symétrique, par rapport à l'origine, de la portion de courbe correspondant à $t \in [0; \pi]$.

3. Montrez que les points $M(t_0)$ et $M(\pi - t_0)$ sont symétriques par rapport à Oy. Déduez-en que la portion de courbe correspondant à $t \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ est symétrique de celle qui correspond à $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par rapport à Oy.

4. Étudiez les fonctions $t \mapsto \sin 2t$ et $t \mapsto \sin 3t$ sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et établissez un tableau des variations simultanées de ces fonctions.

5. Montrez que la portion de courbe correspondant à $t \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$ coupe l'axe Ox en un point; déterminez les coordonnées de ce point et un vecteur tangent en ce point.

6. En prenant 5 cm pour unité sur les deux axes, tracez la portion de courbe correspondant à $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

7. En utilisant les propriétés géométriques de la courbe obtenues aux questions 2. et 3., montrez comment on peut tracer toute la courbe à partir du tracé fait ci-dessus.

8. Cette courbe admet un second axe de symétrie; démontrez-le.

9*. Montrez que la courbe peut aussi être définie paramétriquement par :

$$\begin{aligned} x &= \sin \frac{t}{3} \\ y &= \sin \frac{t}{2} \end{aligned} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{et aussi par} \quad \begin{cases} x = \sin 2t \\ y = -\cos 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

(Dans le deuxième cas, posez $T = \frac{\pi}{2} - t$)

COMMENTAIRE

On obtient facilement une telle courbe de Lissajous sur l'écran d'un oscillographe cathodique en appliquant une d.d.p. sinusoïdale $V_1 = \sin 2\omega t$ pour le balayage horizontal, et un d.d.p. $V_2 = \sin 3\omega t$ pour le balayage vertical.

2 Courbe de Bézier

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

$A(a_1, a_2)$, $B(b_1, b_2)$, $C(c_1, c_2)$ sont trois points du plan.

On appelle courbe de Bézier, définie à partir des trois points de contrôle successifs A, B et C, l'ensemble $\mathcal{C}$ des points $M(t)$ définis par :

$$\overrightarrow{OM}(t) = (1-t)^2 \overrightarrow{OA} + 2t(1-t) \overrightarrow{OB} + t^2 \overrightarrow{OC}, \quad t \in [0, 1].$$

1. Montrez que A et C appartiennent à $\mathcal{C}$.

2. On choisit $A=O$, $B(3, 12)$, $C(0, 9)$.

a/ En projetant sur les axes de coordonnées l'égalité vectorielle définissant $\mathcal{C}$, montrez que $\mathcal{C}$ admet pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \quad t \in [0, 1]$$

$$\text{où } f(t) = 6t - 6t^2, \quad g(t) = 24t - 15t^2.$$

b/ Étudiez les variations des fonctions f et g pour $t \in [0, 1]$.

Montrez que les droites (OB) et (BC) sont tangentes respectivement en O et C à la courbe $\mathcal{C}$.

c/ Tracez la courbe $\mathcal{C}$.

3. a/ Déterminez $B'(b'_1, b'_2)$ de telle sorte que la courbe de Bézier $\mathcal{C}'$ définie à partir des points de contrôle successifs $A(0, 0)$, $B'(b'_1, b'_2)$ et $C(0, 9)$ vérifie :

- $\mathcal{C}'$ passe par un point d'abscisse -1 et la tangente en ce point est verticale;

- la tangente à $\mathcal{C}'$ en C est la droite (BC).

b/ Dans ces conditions, montrez que la courbe $\mathcal{C}'$ a comme représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -4t + 4t^2 \\ y = 14t - 5t^2 \end{cases}$$

c/ Montrez que la droite (OB') est tangente en O à $\mathcal{C}'$ et que les points B', C et B sont alignés.

d/ Tracez sur le même dessin les courbes $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ et le triangle OBB' .

3 Courbe paramétrée. Longueur d'un arc

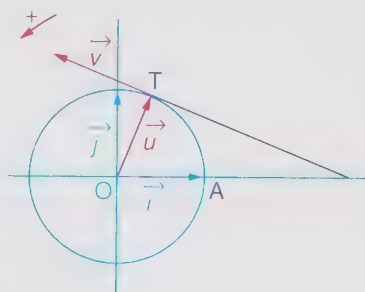
(D'après BTS en assistance technique d'ingénieur - 1990.)

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormal direct dans le plan orienté.
 $\mathcal{C}$ est le cercle de centre O et de rayon 1. A est le point tel que $\overrightarrow{OA} = \vec{i}$.

À chaque réel t on associe le point T du cercle $\mathcal{C}$, tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OT}) = t$ radians.

On pose $\vec{u} = \overrightarrow{OT}$, et on désigne par $\vec{v}$ le vecteur unitaire tel que $(\vec{u}, \vec{v}) = +\frac{\pi}{2}$.

La droite $(T, \vec{v})$ est donc la tangente en T au cercle $\mathcal{C}$. Sur cette tangente, on note M le point tel que $\overrightarrow{MT} = -t\vec{v}$.



1. Vérifiez que le segment MT et le petit arc de cercle AT ont la même longueur.

2. Montrez que les coordonnées de M dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ sont :

$$\begin{cases} x = f(t) = \cos t + t \sin t \\ y = g(t) = \sin t - t \cos t. \end{cases}$$

On pourra utiliser : $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OT} + \overrightarrow{TM}$.

3. Étudiez les variations des fonctions f et g sur l'intervalle $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Dressez le tableau de variation.

4. **a/** Montrez que l'équation $f(t) = 0$ a deux racines dans l'intervalle $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$. On note t_1 et t_2 ces deux racines ($t_1 < t_2$). Donnez une valeur approchée de t_1 à 10^{-2} près.
 Vérifiez que $6,12 < t_2 < 6,13$.

b/ Montrez que l'équation $g(t) = 0$ a deux racines dans l'intervalle $\left[0; \frac{5\pi}{2}\right]$. On note t_3 et t_4 ces deux racines.

Vérifiez que $4,49 < t_3 < 4,50$ et $7,72 < t_4 < 7,73$.

5. On désigne par (Γ_1) la partie de (Γ) parcourue par le point M lorsque t décrit l'intervalle $\left[-\frac{5\pi}{2}; +\frac{5\pi}{2}\right]$.

Construisez (Γ_1) .

6. Calculez la longueur de Γ_1 .

On donne la formule donnant la longueur d'un arc de courbe : pour

$$a \leq t \leq b, \quad \ell = \int_a^b \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2} dt.$$

EXERCICES ET PROBLÈMES

Pour s'entraîner

Pour les exercices 1 à 4, tracez la courbe paramétrée définie par :

$$1. \begin{cases} x(t) = t^2 + 1 \\ y(t) = t^2 - 2t + 2 \end{cases} \quad t \in [-1; 2].$$

$$2. \begin{cases} x(t) = t^3 + 3t^2 - 9t + 11 \\ y(t) = 2t^3 + 9t^2 + 12t \end{cases} \quad t \in [-4; 3].$$

$$3. \begin{cases} x(t) = 2t^3 - 3t^2 \\ y(t) = (t+1)^2 \end{cases} \quad t \in [-2; 2].$$

$$8. \begin{cases} x(t) = t^2 - 2t \\ y(t) = \frac{1}{t^2 + 1} \end{cases} \quad t \in [-1; 2].$$

Pour les exercices 5 à 15, la courbe paramétrée proposée a une **équation cartésienne** simple; donnez cette équation et construisez la courbe.

$$5. \begin{cases} x(t) = \cos^2 t \\ y(t) = -2 \sin^2 t + 1 \end{cases} \quad t \in [0; 2\pi].$$

$$6. \begin{cases} x(t) = \ln t - 1 \\ y(t) = t + \ln t \end{cases} \quad t > 0.$$

$$7. \begin{cases} x(t) = \cos t + \sin t \\ y(t) = \cos t - \sin t \end{cases} \quad t \in [0; 2\pi].$$

$$8. \begin{cases} x(t) = \frac{2t}{1+t^2} \\ y(t) = \frac{1-t^2}{1+t^2} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

$$9. \begin{cases} x(t) = 3 + 2t \\ y(t) = -t + 1 \end{cases} \quad t \in [-1; 4].$$

$$10. \begin{cases} x(t) = e^t - 1 \\ y(t) = t + \frac{1}{e^t + 1} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

$$11. \begin{cases} x(t) = 2t^2 - 1 \\ y(t) = 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

$$12. \begin{cases} x(t) = \frac{1-t^2}{t^2} \\ y(t) = \frac{1+t^2}{2t^2} \end{cases} \quad t \neq 0.$$

$$13. \begin{cases} x(t) = \cos 2t + 3 \\ y(t) = \sin^2 t + 1 \end{cases} \quad t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right].$$

$$14. \begin{cases} x(u) = \frac{1}{\cos u} \\ y(u) = \tan^2 u \end{cases} \quad u \in \left]-\frac{\pi}{2}; +\frac{\pi}{2}\right[.$$

$$15. \begin{cases} x(t) = 2 \sin t \\ y(t) = -\cos t \end{cases} \quad t \in [0; 2\pi].$$

Pour les exercices 16 à 24, tracez la courbe définie par la représentation paramétrique proposée.

$$16. \begin{cases} x(t) = t^2 + t \\ y(t) = t^3 + 1 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

$$17. \begin{cases} x(t) = \frac{1}{t} \\ y(t) = t^2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}^*.$$

$$18. \begin{cases} x(t) = \cos 2t \\ y(t) = \sin 3t \end{cases} \quad t \in [0; \pi].$$

$$19. \begin{cases} x(t) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} \\ y(t) = \frac{e^t - e^{-t}}{2} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

$$20. \begin{cases} x(t) = \sqrt{2} \cos t \\ y(t) = \cos t + \sin t \end{cases} \quad t \in [0; 2\pi].$$

$$21. \begin{cases} x(t) = t \ln t \\ y(t) = \frac{t^3}{3} - 4t + 1 \end{cases} \quad t > 0.$$

$$22. \begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = (\sin t)(1 + \cos t) \end{cases} \quad t \in [0; 2\pi].$$

$$23. \begin{cases} x(t) = -\frac{t^3}{3} + t \\ y(t) = t^2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

$$24. \begin{cases} x(t) = 2e^t + e^{-t} \\ y(t) = 2e^t - e^{-t} \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

EXERCICES DU BACCALAURÉAT

25. Dans le plan rapporté à un repère orthonormal, on considère la courbe $\mathcal{C}$ dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = \cos^2 t + \cos t - 1 \\ y = (1 + \cos t) \sin t. \end{cases}$$

1. Que peut-on dire des points M et M' de $\mathcal{C}$ de paramètres respectifs t et $-t$?
Déduez-en qu'il suffit de construire la partie de $\mathcal{C}$ correspondant aux valeurs de t de l'intervalle $[0, \pi]$ pour pouvoir obtenir $\mathcal{C}$.

2. Étudiez les variations de x et y lorsque t appartient à l'intervalle $[0, \pi]$.

3. Tracez la courbe $\mathcal{C}$ en précisant les tangentes à $\mathcal{C}$ aux points de paramètres $0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}$.

On admettra qu'au point de paramètre π la tangente est parallèle à l'axe des abscisses.

Indication : on prendra 6 cm comme unité de longueur.

26. 1. Dans un repère orthonormé, on considère le point G_t de coordonnées $(x(t), y(t))$ où :

$$x(t) = \frac{1}{3} (\cos 2t + 2 \cos t), \quad y(t) = \sin 2t.$$

Pour tout t réel, comparez $G_{t+2\pi}$ et G_t , puis G_{-t} et G_t .

2. Étudiez les variations des fonctions $x \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sur l'intervalle $[0, \pi]$.

3. Tracez la courbe (Γ) , ensemble des points G_t pour $t \in [-\pi, \pi]$. En particulier, prenez soin de préciser les points de contact des tangentes parallèles à l'un des axes de coordonnées.

(D'après Bac C.)

27. On considère le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

θ désigne un nombre réel de l'intervalle $]-\pi, +\pi[$.

Pour tout θ , on définit le nombre complexe :

$$z(\theta) = \frac{1}{2} (1 + e^{i\theta})^2.$$

1. Calculez $(1 + e^{i\theta}) e^{-i\frac{\theta}{2}}$; déduisez-en que le nombre complexe $(1 + e^{i\theta})$ a pour argument $\frac{\theta}{2}$.

Calculez le module et l'argument de $z(\theta)$.
Représentez dans le plan complexe $z\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

2. Soit M le point d'affixe $z(\theta)$ et A le point d'affixe 1. On projette orthogonalement A en P sur la droite (OM).

Quel est l'ensemble des points P quand θ varie dans $]-\pi, \pi[$?

Calculez la distance PM. On séparera les cas :

$$\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \quad \text{et} \quad \theta \in \left]-\pi, -\frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[.$$

3. Donnez une construction géométrique de l'ensemble des points M (construction point par point).

28. Le plan P est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On se propose de tracer la courbe C ensemble des points du plan dont les coordonnées sont définies en fonction de la variable réelle t par :

$$M(t) \begin{cases} x(t) = 2 \cos t - \cos 2t \\ y(t) = 2 \sin t + \sin 2t. \end{cases}$$

1. Montrez que l'on passe du point de paramètre t au point de paramètre $t + \frac{2\pi}{3}$ par une rotation de centre O et dont une mesure de l'angle est $\frac{2\pi}{3}$.

2. Montrez que l'on peut réduire l'intervalle d'étude à l'intervalle $\left[0, \frac{2\pi}{3}\right]$.

3. On appelle I et A les points correspondant respectivement à $t = 0$ et $t = \frac{\pi}{3}$.

Construisez la droite D tangente en I à C.
On admettra que la tangente en A à C existe et passe par O.
Tracez la courbe C.

Pour chercher plus

- 29*. $\mathcal{C}$ est la courbe définie paramétriquement par :

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{t^2}{1+t^2} \\ y(t) &= \frac{t^3}{1+t^2} \end{aligned} \quad t \in \mathbb{R}.$$

1. Étudiez les fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$, sur $[0; +\infty[$.

2. Vous constatez que $x'(0) = y'(0) = 0$. Le vecteur $\overrightarrow{OM}(t)$, $t \neq 0$, est évidemment un vecteur directeur de la droite (OM(t)).

Montrez que : $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$, et déduisez-en que l'axe des abscisses est tangent en O à la courbe $\mathcal{C}$.

3. Placez le point $M(t)$ et le point $H(1; y(t))$. Calculez la distance MH en fonction de t , et montrez que : $\lim_{t \rightarrow +\infty} MH = 0$.

On dit alors que la droite d'équation $x = 1$ est asymptote à $\mathcal{C}$ au voisinage de $+\infty$.

4. Tracez la courbe $\mathcal{C}$.

30*. Construisez la courbe Γ définie paramétriquement par :

$$\begin{cases} x(t) = 2 \cos t + \cos 2t \\ y(t) = 2 \sin t - \sin 2t \end{cases}$$

Montrez que Γ est globalement conservée par une rotation que vous préciserez.

31. Spirale

Γ est la courbe définie paramétriquement par :

$$\begin{cases} x(t) = e^t \cos t \\ y(t) = e^t \sin t \end{cases}$$

1. Par quelles transformations du plan les points $M(t + 2\pi)$ et $M(t - 2\pi)$ se déduisent-ils du point $M(t)$?

2. Étudiez les fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$ sur l'intervalle $[0; 2\pi]$.

3. Construisez la partie de la courbe Γ correspondant à l'intervalle $[0; 2\pi]$.

Déduisez-en alors la partie de la courbe Γ correspondant à l'intervalle $[-2\pi; 4\pi]$.

Problème de synthèse

PROBLÈME DU BACCALAURÉAT

32. (P) est le plan rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$;

A est le point de coordonnées $(1, 0)$.

(C) est le cercle de centre O et de rayon 1.

A tout point de (P) de coordonnées (x, y) on associe son affixe z égale à $x + iy$ où i est le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$.

f est l'application de $\mathbb{C}$ dans lui-même définie par :

$$f(z) = 2z - z^2.$$

F est l'application de (P) dans lui-même qui à tout point m d'affixe z associe le point M d'affixe Z égale à $f(z)$.

On prendra 3 cm pour unité de longueur.

Le but de ce problème est d'étudier l'image (K) du cercle (C) par F .

I. Soit m un point de cercle (C) d'affixe z et M son image par F .

1. a/ Soit m_1 et m_2 les points d'affixes respectives z^2 et $2z$.

Quels sont les modules de z , $2z$ et z^2 ?
Donnez les arguments de $2z$ et z^2 en fonction de celui de z .

b/ Montrez que le quadrilatère Om_1m_2M est un parallélogramme.

c/ Déduisez-en une construction géométrique simple de M à partir de m .

2. Montrez que A et M sont symétriques orthogonalement par rapport à la tangente (T) en m au cercle (C).

Déduisez-en une autre construction de M à partir de m .

II. Soit e^{it} , $t \in [-\pi, \pi]$ l'affixe d'un point m de (C).

1. Calculez $f(e^{it})$ et déduisez-en que l'image (K) de (C) par F est la courbe paramétrée :

$$\begin{cases} X(t) = 2 \cos t - \cos 2t \\ Y(t) = 2 \sin t - \sin 2t \end{cases} \quad (t \in [-\pi, \pi]).$$

2. Montrez que les points d'affixes $f(e^{it})$ et $f(e^{-it})$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses. Qu'en déduisez-vous pour (K)?

Étudiez sur l'intervalle $[0, \pi]$ les variations des fonctions X et Y de la variable t .

3. a/ Montrez que si t est différent de 0, la tangente à (K) au point M de paramètre t est dirigée par le vecteur de coordonnées :

$$\left(\cos \frac{3t}{2}, \sin \frac{3t}{2} \right).$$

On admettra que ce résultat est encore valable quand t est nul.

b/ Montrez que le vecteur $\overrightarrow{mM}$ est orthogonal à la tangente à (K) en M.

4. Construisez les points de (K) où la tangente est parallèle aux axes de coordonnées.

5. Tracez (K).

TRAVAUX PRATIQUES D'APPROCHE

1 Particularités géométriques d'une parabole. Miroirs paraboliques

La parabole dessinée ci-dessous représente la coupe d'un miroir parabolique. Dans le repère considéré, la parabole a pour équation $y = x^2$. (Le repère est orthonormal, l'unité de longueur choisie est 8 cm.)

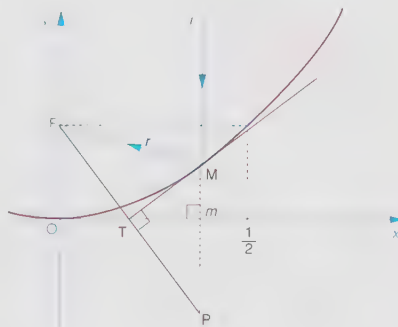
Un rayon lumineux i , parallèle à l'axe (Oy) du miroir rencontre le miroir en M ; le rayon réfléchi, r , est alors symétrique de i par rapport à la tangente en M à la parabole.

Nous allons voir que, quel que soit le rayon incident i , le rayon réfléchi passe par un point fixe appelé foyer.

Ainsi, un miroir parabolique concentre en un seul point toute l'énergie d'un faisceau de rayons lumineux.

Et nous allons voir aussi que la parabole est l'ensemble des points équidistants du foyer F et d'une droite fixe.

Notons a l'abscisse de M , et m le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses.



1. Donnez l'équation de la tangente en M à la parabole.
2. T est le point d'intersection de la tangente en M à la parabole et de l'axe Ox .
Montrez que T est le milieu de $[Om]$.
3. La perpendiculaire en T à la tangente coupe le rayon incident en P et l'axe de la parabole en F .
Montrez que les points P et F sont symétriques par rapport à la droite (MT) ; déduisez-en que le rayon réfléchi passe par F .
4. Vérifiez que les coordonnées de F sont indépendantes de a .
Que peut-on en déduire?
Vérifiez aussi que l'ordonnée de P est indépendante de a .
5. Déduisez-en que tout point de la parabole est à égale distance de F et d'une droite fixe, à préciser.

1 Présentation des coniques

1.1. UN PEU D'HISTOIRE

Les coniques sont les paraboles, les hyperboles, les ellipses. (Les droites et les cercles sont des coniques particulières, dites dégénérées.)

Vous connaissez déjà les paraboles et les hyperboles, comme courbes représentatives des fonctions trinômes et des fonctions homographiques (chapitre 1, tome 1); nous les étudions ici d'un point de vue géométrique.

Pour les mathématiciens grecs, les coniques sont l'intersection d'un plan et d'un cône de révolution, d'où leurs noms.

Apollonius (-260; -200), étudie ces courbes de façon approfondie dans un traité célèbre intitulé *Sections coniques*.

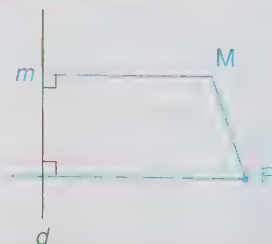


Mais l'exposé qui va suivre adopte, conformément au programme, un tout autre point de vue : une conique n'y apparaîtra pas comme l'intersection d'un cône et d'un plan, mais comme l'ensemble des points du plan dont le rapport des distances à une droite et à un point fixe reste constant.

1.2. DÉFINITION D'UNE CONIQUE ET DE SES ÉLÉMENTS CARACTÉRISTIQUES

Donnons-nous une droite d , un point F **non situé sur** d et un réel e **strictement positif**.

À chaque point M du plan, associons son projeté orthogonal m sur la droite d .



L'ensemble des points M du plan tels que $\frac{MF}{Mm} = e$ est appelé **conique de foyer**

F , de directrice d , d'excentricité e .

La perpendiculaire à d , menée par F , est l'**axe focal** de la conique.

Lorsque $e = 1$, la conique est appelée **parabole**.

Lorsque $e > 1$, la conique est appelée **hyperbole**.

Lorsque $0 < e < 1$, la conique est appelée **ellipse**.

Remarque : la conique que nous venons de définir est aussi l'ensemble des points M tels que : $MF^2 - e^2 Mm^2 = 0$.

En effet, avec des nombres positifs et $Mm \neq 0$, l'égalité $\frac{MF}{Mm} = e$ est équivalente à

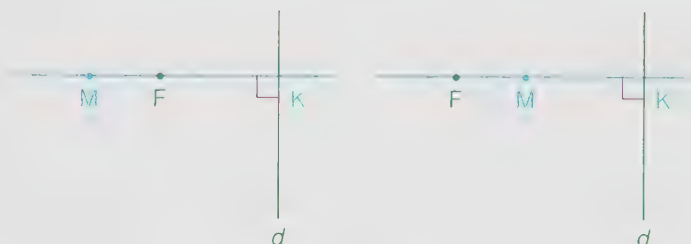
$$\frac{MF^2}{Mm^2} = e^2, \text{ et donc à } MF^2 - e^2 Mm^2 = 0.$$

2 Sommets d'une conique

$\mathcal{C}$ est une conique de foyer F , de directrice d .

Notons K l'intersection de l'axe focal et de la directrice.

Les points communs à l'axe focal et à la conique sont les points M qui satisfont à la condition suivante : « M, F, K , sont alignés, et $MF = eMK$ ».



Vectoriellement, cette condition se traduit par :

$$\overrightarrow{MF} = e \overrightarrow{MK} \text{ ou } \overrightarrow{MF} = -e \overrightarrow{MK}$$

c'est-à-dire, par : $\overrightarrow{MF} - e \overrightarrow{MK} = \vec{0}$ ou $\overrightarrow{MF} + e \overrightarrow{MK} = \vec{0}$. [1]

Dans le cas où $e \neq 1$, la condition [1] se traduit encore par : M est le barycentre de $(F, 1)$, $(K, -e)$ ou M est le barycentre de $(F, 1)$, (K, e) .

Dans le cas où $e = 1$, nous obtenons $\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{MK}$ ou $\overrightarrow{MF} = -\overrightarrow{MK}$. Or il n'existe pas de point M tel que $\overrightarrow{MF} = \overrightarrow{MK}$, mais il existe un point M et un seul tel que $\overrightarrow{MF} = -\overrightarrow{MK}$: le milieu M de $[EK]$.

En résumé,

- Si $e \neq 1$, c'est-à-dire si la conique est une ellipse ou une hyperbole, l'axe focal rencontre la conique en deux points distincts; ces points sont appelés les **SOMMETS** de l'ellipse ou de l'hyperbole.
- Si $e = 1$, c'est-à-dire si la conique est une parabole, l'axe focal rencontre la conique en un seul point, appelé **SOMMET** de la parabole.

3 Où il est dit ce que nous allons faire

Une conique $\mathcal{C}$ étant donnée par son foyer F , sa directrice d , son excentricité e , nous allons en donner une équation dans un repère orthonormal, puis de cette équation nous déduirons le tracé de la conique et quelques-unes de ses propriétés.

Mais pour aboutir à une équation « simple », nous choisirons un repère orthonormal particulier : l'un des axes de ce repère sera l'axe focal de la conique, l'origine de ce repère sera le sommet de la conique dans le cas de la parabole, le point équidistant des deux sommets dans les autres cas.

4

Équation réduite d'une parabole

4.1. ÉQUATION RÉDUITE D'UNE PARABOLE

Considérons la parabole $\mathcal{P}$ de directrice d , de foyer F . Notons S son sommet, et K le point d'intersection de l'axe focal et de la directrice. Nous avons vu que S est le milieu de $[FK]$.

Définition du PARAMÈTRE d'une PARABOLE

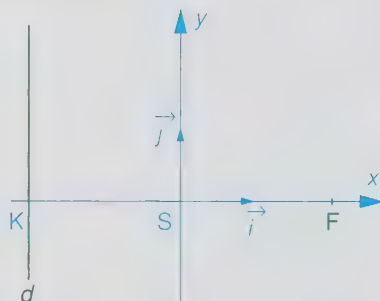
On appelle paramètre d'une parabole la **distance** du foyer à la directrice.
On note p ce paramètre.

$$p = FK; \quad FS = \frac{p}{2}; \quad p > 0.$$

Choisissons un repère orthonormal $(S; \vec{i}, \vec{j})$ tel que l'axe des abscisses soit l'axe focal orienté de S vers F .

Les coordonnées de K sont alors $\left(-\frac{p}{2}; 0\right)$,

celles de F sont : $\left(\frac{p}{2}; 0\right)$.



Pour tout point $M(x; y)$ du plan :

$$MF^2 = \left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 \quad \text{et} \quad Mm^2 = \left(\frac{p}{2} + x\right)^2$$

donc :

$$MF^2 - Mm^2 = y^2 - 2px.$$

Or, dire que M appartient à $\mathcal{P}$ équivaut à dire que $MF^2 - Mm^2 = 0$, voir remarque paragraphe 1.2., donc à dire que :

$$y^2 = 2px.$$

Cette relation d'appartenance de M à $\mathcal{P}$ est appelée équation réduite de la parabole.

THÉORÈME 1

$\mathcal{P}$ est une parabole de sommet S , de foyer F de paramètre p .
 $(S; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormal d'origine S et dont l'axe des abscisses est l'axe focal de $\mathcal{P}$, orienté du sommet vers le foyer.
Dans un tel repère, l'équation réduite de $\mathcal{P}$ est :

$$y^2 = 2px.$$

Remarque : Notez que les coordonnées de F sont $\left(\frac{p}{2}; 0\right)$.

Notez qu'une équation de la directrice d est $x = -\frac{p}{2}$.

4.2. TRACÉ DE LA PARABOLE $\mathcal{P}$

La parabole $\mathcal{P}$ est l'ensemble des points M dont les coordonnées $(x; y)$ dans $(S; \vec{i}, \vec{j})$ sont telles que $y^2 = 2px$.

Puisque ici $p > 0$, nécessairement $x \geq 0$, et donc $y = \sqrt{2px}$ ou $y = -\sqrt{2px}$.

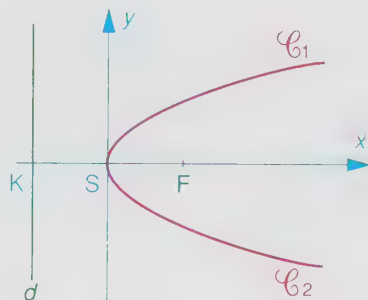
Notons $\mathcal{C}_1$ la courbe représentant la fonction $f_1 : x \mapsto \sqrt{2px}$ et $\mathcal{C}_2$ la courbe représentant la fonction $f_2 : x \mapsto -\sqrt{2px}$.

Nous avons appris, en Analyse, à tracer $\mathcal{C}_1$, nous obtenons une courbe dont l'allure est celle de la courbe ci-contre.

Puisque $f_2 = -f_1$, la courbe $\mathcal{C}_2$ est symétrique de $\mathcal{C}_1$, par rapport à l'axe des abscisses, c'est-à-dire par rapport à l'axe focal.

La parabole $\mathcal{P}$, ensemble des points $M(x; y)$ tels que $y^2 = 2px$, est donc la réunion de $\mathcal{C}_1$ et de $\mathcal{C}_2$:

$$\mathcal{P} = \mathcal{C}_1 \cup \mathcal{C}_2.$$



Les moyens de l'Analyse permettent, par exemple, de tracer la tangente à P en un point donné.

Notez que la tangente au sommet est l'axe des ordonnées : sa direction est donc celle de la directrice.

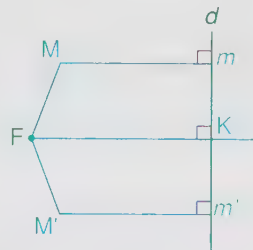
COMMENTAIRES

1. Symétrie d'une conique par rapport à l'axe focal.

Nous venons de voir que l'axe focal est axe de symétrie de la parabole.

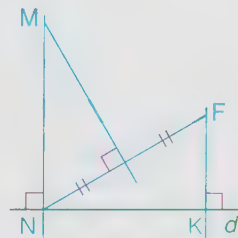
En fait, **quelle que soit la conique $\mathcal{C}$ considérée, l'axe focal de $\mathcal{C}$ est un axe de symétrie de $\mathcal{C}$.**

En effet, si M est un point de $\mathcal{C}$, alors $Mm = eMF$, où e est l'excentricité de $\mathcal{C}$. Or la réflexion par rapport à l'axe focal conserve le foyer, la directrice, et comme toute réflexion elle conserve la distance et l'orthogonalité. Donc, pour les symétriques M' et m' , nous obtenons : $M'm' = eM'F$, et donc M' appartient à $\mathcal{C}$.



2. Tracé point par point de la parabole.

Pour obtenir un point M de $\mathcal{P}$, il suffit de choisir un point N de la directrice d . Alors M est l'intersection de la médiatrice de $[NF]$ et de la perpendiculaire à d en N .



4.3. RÉCIPROQUE : COURBES D'ÉQUATION : $y^2 = ax$, $a \neq 0$

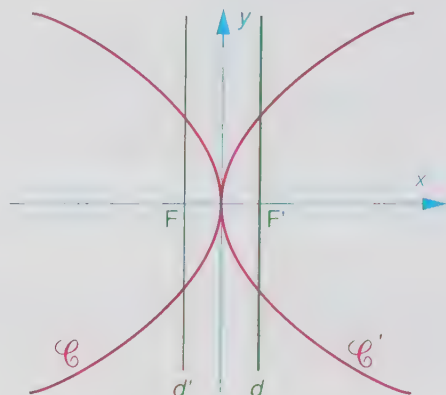
$(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormal donné. Notons $\mathcal{C}$ l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $y^2 = ax$, où a est un réel non nul donné. Est-ce que $\mathcal{C}$ est une parabole ?

Supposons $a > 0$. Introduisons le point $F\left(\frac{a}{4}; 0\right)$ et la droite d , d'équation : $x = -\frac{a}{4}$.

Alors d'après le théorème 1, la parabole de foyer F et de directrice d a pour équation : $y^2 = ax$, donc l'ensemble $\mathcal{C}$ est cette parabole.

Supposons $a < 0$, alors : $-a > 0$, et donc, d'après ce qui précède la courbe $\mathcal{C}'$ d'équation : $y^2 = -ax$, est la parabole de foyer $F' \left(-\frac{a}{4}; 0 \right)$ et de directrice, la droite d' , d'équation $x = \frac{a}{4}$.

Or la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y^2 = ax$ est symétrique de $\mathcal{C}'$ par rapport à l'axe des ordonnées (Oy).



En utilisant les propriétés de la symétrie, il est facile de montrer que $\mathcal{C}$ est la parabole de foyer $F \left(\frac{a}{4}; 0 \right)$ et de directrice la droite d , d'équation $x = -\frac{a}{4}$. D'où le théorème suivant :

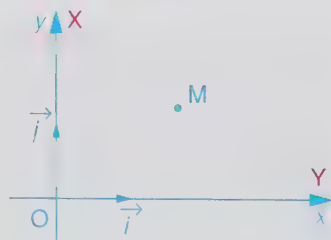
THÉORÈME 2

Étant donné un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et un nombre a non nul, la courbe d'équation $y^2 = ax$ est la parabole de foyer $F \left(\frac{a}{4}; 0 \right)$, de directrice la droite d d'équation $x = -\frac{a}{4}$.
Le paramètre de cette parabole est alors $\left| \frac{a}{2} \right|$.

4.4. LIENS AVEC LA DÉFINITION ANTÉRIEURE DE LA PARABOLE

$a/ (O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormal et a un réel non nul. Notons $\mathcal{P}$ la courbe qui, dans ce repère, a pour équation $y = ax^2$, $a \neq 0$. Montrons que $\mathcal{P}$ est une parabole.

Faisons d'abord la **remarque** suivante : si un point M a pour coordonnées $(x; y)$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, alors ses coordonnées $(X; Y)$ dans $(O; \vec{j}, \vec{i})$ sont données par : $X = y$, $Y = x$. En effet, l'axe des abscisses de $(O; \vec{j}, \vec{i})$ est l'axe $(O; \vec{j})$, c'est-à-dire l'axe des ordonnées de $(O; \vec{i}, \vec{j})$; et l'axe des ordonnées de $(O; \vec{j}, \vec{i})$ est l'axe $(O; \vec{i})$, c'est-à-dire l'axe des abscisses de $(O; \vec{i}, \vec{j})$.



Donc, dans $(O; \vec{j}, \vec{i})$, $\mathcal{P}$ a pour équation $X = aY^2$, ou encore $Y^2 = \frac{1}{a} X$. D'après le théorème 2, $\mathcal{P}$ s'identifie donc à la parabole de foyer le point $F \left(\frac{1}{4a}; 0 \right)$, de directrice

la droite d , d'équation $X = -\frac{1}{4a}$. Donc, dans le repère *initial* $(O; \vec{i}, \vec{j})$, le foyer F a pour coordonnées $\left(0; \frac{1}{4a}\right)$, et la directrice a pour équation $y = -\frac{1}{4a}$.

THÉORÈME 3

Dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, la courbe d'équation $y = ax^2$, $a \neq 0$, est la parabole de foyer $F\left(0; \frac{1}{4a}\right)$, de directrice d la droite d'équation : $y = -\frac{1}{4a}$, de sommet O .

Son paramètre est alors égal à : $\left|\frac{1}{2a}\right|$.

b/ Parabole d'équation $y = ax^2 + bx + c$.

Nous avons vu en Analyse que toute fonction trinôme possède un extremum et un seul. Notons S le point de la courbe correspondant à cet extremum.

Nous avons vu, par utilisation de la forme canonique, que dans le repère $(S; \vec{i}, \vec{j})$, $\mathcal{P}$ a pour équation $Y = aX^2$ (le nombre a est le même que celui qui figure dans $y = ax^2 + bx + c$). $\mathcal{P}$ est donc une parabole, de sommet S , d'après le théorème 3.

5

Équations réduites d'une ellipse et d'une hyperbole

5.1. NOTATIONS ET RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES

Considérons la conique $\mathcal{C}$ de foyer F , de directrice d , d'excentricité e , avec $e \neq 1$. Notons (FK) son axe focal.

Nous avons vu que cette conique a deux sommets ; l'un, noté S_1 , est le barycentre de $(F, 1)$, (K, e) , l'autre, noté S_2 , le barycentre de $(F, 1)$, $(K, -e)$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{S_1 F} + e \overrightarrow{S_1 K} &= \vec{0} \\ \overrightarrow{S_2 F} - e \overrightarrow{S_2 K} &= \vec{0}.\end{aligned}$$

Comme e est positif, le sommet S_1 est un point du segment $[FK]$.

Notons O le milieu de $[S_1 S_2]$ et considérons un repère **orthonormal** $\mathcal{R}$ d'origine O et tel que l'axe des abscisses soit l'axe focal orienté de O vers F , alors l'axe des ordonnées soit parallèle à la directrice.

Posons : $OS_1 = a$, $OF = c$.

De $\overrightarrow{S_1 F} + e \overrightarrow{S_1 K} = \vec{0}$, nous déduisons :

$$\overrightarrow{S_1 O} + \overrightarrow{OF} + e(\overrightarrow{S_1 O} + \overrightarrow{OK}) = \vec{0}$$

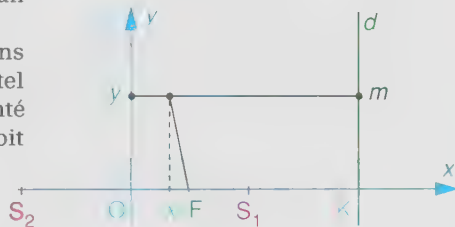
soit : $\overrightarrow{OF} + e \overrightarrow{OK} = (1+e) \overrightarrow{OS_1}$. [1]

De même, de $\overrightarrow{S_2 F} - e \overrightarrow{S_2 K} = \vec{0}$, nous déduisons :

$$\overrightarrow{OF} - e \overrightarrow{OK} = (1-e) \overrightarrow{OS_2}. \quad [2]$$

Or $\overrightarrow{OS_1} = -\overrightarrow{OS_2}$, donc, par addition membre à membre de [1] et [2], puis par soustraction :

$$\overrightarrow{OF} = e \overrightarrow{OS_1}, \quad \overrightarrow{OS_1} = e \overrightarrow{OK}.$$



En prenant la norme de chacun de ces vecteurs, et compte tenu du fait que $e > 0$, nous obtenons :

$$c = ea, \quad a = e \times OK,$$

d'où :

$$e = \frac{c}{a} \quad OK = \frac{a^2}{c}.$$

5.2. ÉQUATION RÉDUITE D'UNE CONIQUE À CENTRE

Cherchons dans le repère $\mathcal{R}$ défini ci-dessus une équation de la conique $\mathcal{C}$. Rappelons que $\mathcal{C}$ est l'ensemble des points M tels que :

$$MF^2 - eMm^2 = 0$$

(voir remarque en 1.2.).

Pour tout point M de coordonnées $(x; y)$:

$$MF^2 = (x - c)^2 + y^2$$

et :

$$e^2 \times Mm^2 = \frac{c^2}{a^2} \left(x - \frac{a^2}{c} \right)^2 = \left(\frac{cx}{a} - a \right)^2.$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned} MF^2 - e^2 \times Mm^2 &= (x - c)^2 + y^2 - \left(\frac{cx}{a} - a \right)^2 \\ &= x^2 \left(\frac{a^2 - c^2}{a^2} \right) + y^2 + c^2 - a^2. \end{aligned}$$

L'égalité $MF^2 - e^2 \times Mm^2 = 0$ équivaut donc à :

$$\frac{a^2 - c^2}{a^2} x^2 + y^2 = a^2 - c^2.$$

Or $\frac{c}{a} = e$ et $e \neq 1$, donc $a^2 - c^2 \neq 0$, et donc en conclusion : dire que $M(x; y)$ appartient à la conique (hyperbole ou ellipse) équivaut à dire que :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1.$$

5.3. CONSÉQUENCES : SYMÉTRIES

L'équation précédente montre que si le point M de coordonnées $(x; y)$ appartient à la conique considérée, les points M' de coordonnées $(-x; y)$ et M'' de coordonnées $(-x; -y)$ appartiennent également à cette conique.

Les ellipses et les hyperboles admettent donc, en plus de l'axe focal, un deuxième axe de symétrie : la médiatrice de $[S_1 S_2]$; elles admettent aussi le milieu O de $[S_1 S_2]$ comme centre de symétrie. On dit que les hyperboles et les ellipses sont des « coniques à centre ».

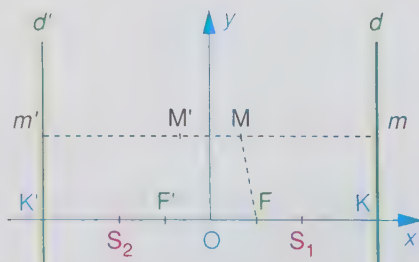
COMMENTAIRE

Foyers et directrices associés

Appelons s la réflexion d'axe la médiatrice de $[S_1 S_2]$.

$F' = s(F)$ est un point de l'axe focal, $d' = s(d)$ est une droite perpendiculaire à l'axe focal en $K' = s(K)$.

Pour tout point M , les points m et $m' = s(m)$ sont les projetés orthogonaux sur d et sur d' des deux points M et $M' = s(M)$.



Comme la conique est invariante par s , dire que M appartient à la conique équivaut à dire que M' appartient à la conique, c'est-à-dire $\frac{M'F}{M'm} = e$; or : $\frac{M'F}{M'm} = \frac{MF'}{Mm'}$ car une réflexion conserve la distance;

donc M appartient à la conique si, et seulement si, $\frac{MF'}{Mm'} = e$.

Cela signifie que la conique considérée est aussi la conique de foyer F' , de directrice d' et d'excentricité e .

Ainsi, toute conique à centre admet deux paires de foyers et directrices associés $\{F, d\}$ et $\{F', d'\}$.

5.4. ÉQUATIONS RÉDUITES D'UNE ELLIPSE ET D'UNE HYPERBOLE

Nous partons de l'équation réduite obtenue en 5.2. :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1, \text{ avec } OS_1 = a, OF = c \text{ et } c = ea$$

Ellipse ($0 < e < 1$)

Dans ce cas, comme $c = ea$, nous obtenons $c < a$; le foyer F appartient donc à $[S_1 S_2]$.

En posant $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, l'équation de l'ellipse, dans le repère considéré s'écrit :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

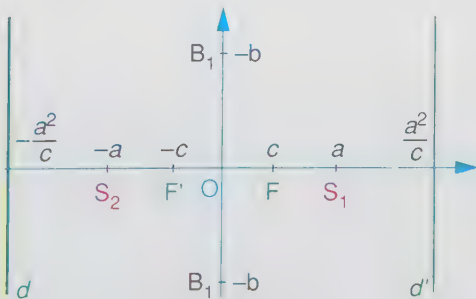
Grand axe et petit axe

Les points $B_1(0; b)$ et $B_2(0; -b)$ sont des points de l'ellipse. Ils sont situés sur la médiatrice de $[S_1 S_2]$.

Comme $b = \sqrt{a^2 - c^2}$, nous obtenons $b < a$, et $B_1 B_2 < S_1 S_2$.

On dit que $(S_1 S_2)$ est le **grand axe de l'ellipse** et $(B_1 B_2)$ le **petit axe**.

Notez que ces axes sont des axes de symétrie de l'ellipse.

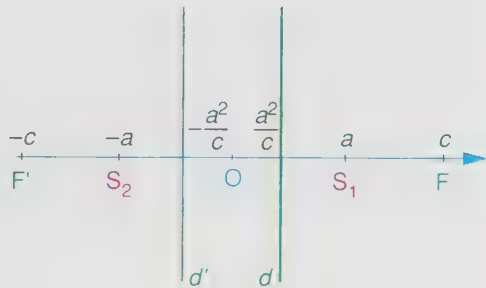


Hyperbole ($e > 1$)

Dans ce cas, comme $c = ea$, nous obtenons $c > a$; le foyer F est donc extérieur au segment $[S_1 S_2]$ et $a^2 - c^2 < 0$.

En posant $b = \sqrt{c^2 - a^2}$, l'équation de l'hyperbole dans le repère considéré s'écrit :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



5.5. ÉTUDE RÉCIPROQUE

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormal donné. Notons $\mathcal{C}$ l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, où a et b sont deux réels donnés strictement positifs, $a \neq b$.
Est-ce que $\mathcal{C}$ est une ellipse ?

• **Supposons $a > b$** , et introduisons alors les éléments suivants :

— le point F de coordonnées $(c; 0)$ avec $c = \sqrt{a^2 - b^2}$; notons que $c < a$ et $c > 0$;

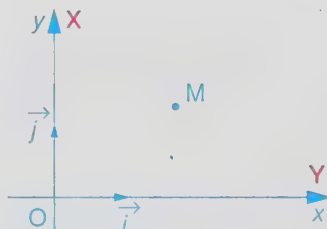
— la droite d d'équation $x = \frac{a^2}{c}$;

— le réel strictement positif $e = \frac{c}{a}$; notons que $0 < e < 1$.

D'après l'étude faite en 5.3., l'équation de l'ellipse de foyer F , de directrice d et d'excentricité e , est : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; donc l'ensemble $\mathcal{C}$ est cette ellipse.

• **Supposons $a < b$** , et considérons alors le repère $(O; \vec{j}, \vec{i})$. Si un point M a pour coordonnées $(x; y)$ dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$, ses coordonnées (x', y') dans $(O; \vec{j}, \vec{i})$ sont $x' = y$, $y' = x$. (Voir paragraphe 4.4.)

Donc, dans $(O; \vec{j}, \vec{i})$, l'ensemble $\mathcal{C}$ a pour équation : $\frac{x'^2}{b^2} + \frac{y'^2}{a^2} = 1$ et $b > a$. Nous avons vu, ci-dessus, que dans ce cas, $\mathcal{C}$ est une ellipse. D'où le théorème :



THÉORÈME 4

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormal, a et b sont deux réels **strictement positifs** avec $a \neq b$.

L'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ est une ellipse.

L'axe focal de cette ellipse est l'axe des abscisses lorsque $a > b$, et c'est l'axe des ordonnées lorsque $a < b$.

De manière analogue, nous démontrerions le résultat suivant :

THÉORÈME 5

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormal, a et b sont deux réels **strictement positifs**, avec $a \neq b$.

L'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ est une hyperbole dont l'axe focal est l'axe des abscisses.

L'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ est une hyperbole dont l'axe focal est l'axe des ordonnées.

5.6. TABLEAUX RÉCAPITULATIFS

L'étude précédente permet de préciser les éléments caractéristiques de l'ellipse d'équation : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, et de l'hyperbole d'équation : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Nous les rassemblons dans les tableaux suivants.

• Ellipse : équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Éléments de l'ellipse lorsque $a > b$			
c	Excentricité e	Foyer	Directrice associée
$\sqrt{a^2 - b^2}$	$\frac{c}{a}$	$F(c; 0)$	équation $x = \frac{a^2}{c}$

• Hyperbole

Éléments de l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$			
c	Excentricité e	Foyer	Directrice associée
$\sqrt{a^2 + b^2}$	$\frac{c}{a}$	$F(c; 0)$	équation $x = \frac{a^2}{c}$

5.7. POUR MÉMORISER CES RÉSULTATS

1. Vous pouvez ne retenir que les deux cas ci-dessus :

— pour l'ellipse : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, avec $a > b$;

— pour l'hyperbole, la forme : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

2. Remarquez que dans les deux cas, ellipse, hyperbole, les foyers ont même coordonnées, et les directrices même équation.

3. Ensuite, dans ces cas-là, pour déterminer c , pensez que : $c^2 = a^2 + b^2$ ou $c^2 = a^2 - b^2$, et que : « le signe à choisir est le signe contraire de celui de l'équation » :

— l'équation de l'ellipse a un signe +, $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right)$, alors $c^2 = a^2 - b^2$ (signe moins);

— l'équation de l'hyperbole a un signe -, $\left(\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\right)$, alors $c^2 = a^2 + b^2$ (signe plus).

(Retenez aussi que l'on ne peut pas prendre $c^2 = b^2 - a^2$, car $a > b$.)

4. Dans les autres cas : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, avec $a < b$, $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, pensez que l'axe focal est l'axe des coordonnées. Les coordonnées de F sont alors $(0; c)$ au lieu de $(c; 0)$

et la directrice a pour équation : $y = \frac{b^2}{c}$, au lieu de $x = \frac{a^2}{c}$; l'excentricité est alors $\frac{c}{b}$.

(En effet, si le repère initial est $(O; \vec{i}, \vec{j})$ alors, dans le repère $(O; \vec{j}, \vec{i})$, l'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ devient $\frac{x'^2}{b^2} + \frac{y'^2}{a^2} = 1$; et dans $(O; \vec{j}, \vec{i})$, l'équation : $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, devient :

$$\frac{x'^2}{b^2} - \frac{y'^2}{a^2} = 1, \text{ et vous \u00eates ramen\u00e9s aux cas pr\u00e9c\u00e9dents}).$$

Pour des exemples, voyez les exercices r\u00e9solus.

6 Courbes d'\u00e9quations : $\alpha x^2 + \beta y^2 = \gamma$

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un rep\u00e8re orthonormal donn\u00e9. $\mathcal{C}$ est l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que : $\alpha x^2 + \beta y^2 = \gamma$, o\u00f9 α, β, γ sont des r\u00e9els donn\u00e9s, non nuls.

Alors $\mathcal{C}$ est une conique \u00e0 centre ou l'ensemble vide. En effet, puisque γ est non nul, par division par γ ,

$$\text{l'\u00e9quation } \alpha x^2 + \beta y^2 = \gamma \text{ est \u00e9quivalente \u00e0 une \u00e9quation de la forme} \\ \frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 1. \quad [1]$$

Il r\u00e9sulte directement des th\u00e9or\u00e8mes 4 et 5 que :

1. Si $p < 0, q < 0$, il n'existe pas de couple $(x; y)$ solutions de l'\u00e9quation [1] : $\mathcal{C}$ est l'ensemble vide.

2. Si $p > 0, q > 0$, $\mathcal{C}$ est une ellipse de centre O.

a/ Si $p > q > 0$, l'axe des abscisses est le grand axe, donc l'axe focal.

b/ Si $q > p > 0$, l'axe des ordonn\u00e9es est le grand axe, donc l'axe focal.

c/ Si $q = p$, $\mathcal{C}$ est le cercle de centre O, de rayon $\sqrt{p}$.

3. Si $pq < 0$, $\mathcal{C}$ est une hyperbole de centre O.

a/ Si $p > 0, q < 0$, l'axe focal est l'axe des abscisses.

b/ Si $p < 0, q > 0$, l'axe focal est l'axe des ordonn\u00e9es.

7 Ellipses : d'autres propri\u00e9t\u00e9s

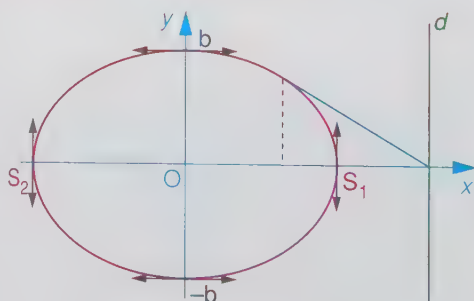
7.1. TRAC\u00c9 DE L'ELLIPSE \u00c0 PARTIR DE L'\u00c9QUATION : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Comme l'ellipse admet pour axes de sym\u00e9trie les axes de coordonn\u00e9es, il suffit alors de tracer la portion d'ellipse contenue dans le premier quadrant et d'effectuer les sym\u00e9tries par rapport \u00e0 ces axes pour obtenir toute la courbe.

Si $M(x; y)$ est dans le premier quadrant, alors $x \geq 0$ et $y \geq 0$; la relation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

\u00e9quivaut donc, dans ce cas, \u00e0 :

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$



Nous sommes alors ramenés à étudier la fonction $f : x \mapsto \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}$ sur $[0; a]$.

L'étude classique de la fonction et le tracé de sa représentation graphique permettent de tracer l'ellipse.

L'ellipse admet une tangente en chaque point car f est dérivable sur $[0; a]$.

7.2. PARAMÉTRAGE DE L'ELLIPSE

Considérons la courbe paramétrée (E) définie par :

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} \quad t \in [0; 2\pi]$$

où a et b sont deux réels donnés strictement positifs.

Dans un repère orthonormal, le point M, de paramètre t , a pour coordonnées

$(x = a \cos t; y = b \sin t)$. Nous en déduisons, puisque a et b sont non nuls : $\cos t = \frac{x}{a}$,

$\sin t = \frac{y}{b}$, d'où : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Ainsi, M appartient à l'ellipse, dont l'équation réduite,

dans ce repère orthonormal, est :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

En outre, lorsque t décrit l'intervalle $[0; 2\pi]$, le point M décrit toute l'ellipse.

THÉORÈME 7

Dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

est aussi la courbe définie paramétriquement par :

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases} \quad t \in [0; 2\pi].$$

7.3. ELLIPSE ET CERCLE PRINCIPAL

Les notations sont celles du paragraphe précédent.

À chaque point M de paramètre t de l'ellipse, associons le point M' de coordonnées

$$x' = x = a \cos t, \quad y' = a \sin t.$$

Notez que : $\overrightarrow{PM'} = k \overrightarrow{PM}$, où P est le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses, et

$k = \frac{a}{b}$. On dit alors que M' est l'image de M

par l'affinité orthogonale dont l'axe, est l'axe des abscisses, et de rapport k .

M' est le point de paramètre t du cercle $\mathcal{C}$ représenté paramétriquement par :

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = a \sin t \end{cases} \quad t \in [0; 2\pi],$$

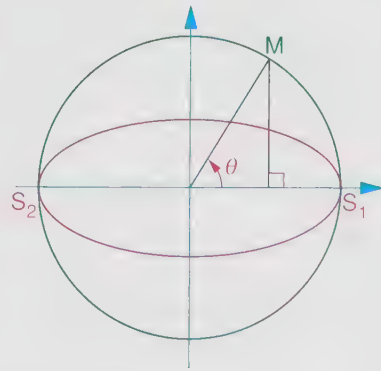
et il est clair que lorsque M décrit toute l'ellipse, M' décrit tout le cercle $\mathcal{C}$.

$\mathcal{C}$ est appelé cercle principal de l'ellipse : son centre est O et son diamètre : $[S_1 S_2]$, S_1 et S_2 sont, rappelons-le, les sommets de l'ellipse.

Ce cercle est l'image de l'ellipse par l'affinité orthogonale citée ci-dessus.

Si $M(t)$ est le point de paramètre t de l'ellipse, alors t est le cosinus de l'angle $(\vec{i}, \overrightarrow{OM'})$, où M' est le point de paramètre t du cercle principal (voir figure).

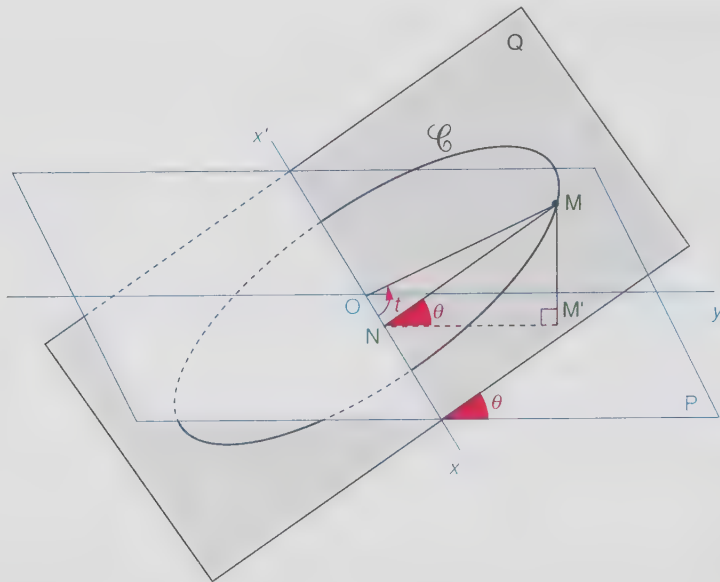
Toutes ces considérations seront développées au T.P. d'application 1.



7.4. PROJECTION D'UN CERCLE SUR UN PLAN

Nous allons montrer que :

la projection orthogonale d'un cercle sur un plan est une ellipse.



$\mathcal{C}$ est un cercle de centre O situé dans un plan Q . P est un plan qui passe par O . Désignons par $\mathcal{C}'$ l'ensemble des projetés orthogonaux de tous les points de $\mathcal{C}$, sur le plan P . Choisissons dans P un repère orthonormal, d'origine O , et dont l'axe des abscisses $(O; \vec{i})$ est la droite d'intersection des plans P et Q . Notons r le rayon du cercle $\mathcal{C}$, et θ l'angle aigu formé par les plans P et Q .

M est un point quelconque du cercle $\mathcal{C}$, M' sa projection orthogonale sur P , N sa projection sur l'axe $(O; \vec{i})$. Notons t l'angle $(\vec{i}, \vec{OM})$, et $(x'; y')$ les coordonnées de M' . Alors, voir figure, x' est aussi l'abscisse de N , donc : $x' = OM \cos t = r \cos t$. $y' = NM' = NM \cos \theta$, or $NM = OM \sin t$, donc : $y' = r \sin t \cos \theta$.

Or $r \cos \theta$ est constant, en posant : $b = r \cos \theta$, nous obtenons :

$$x' = a \cos t, \quad y' = b \sin t.$$

Lorsque M décrit $\mathcal{C}$, t varie de 0 à 2π , donc une équation paramétrique de $\mathcal{C}'$ est :

$$\begin{cases} x' = a \cos t \\ y' = b \sin t \end{cases} \quad t \in [0; 2\pi].$$

$\mathcal{C}'$ est donc une ellipse, d'après le théorème 7.

8

Hyperboles : d'autres propriétés

8.1. TRACÉ DE L'HYPERBOLE À PARTIR DE L'ÉQUATION :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Puisque cette hyperbole admet les axes de coordonnées comme axes de symétrie, il suffit alors de tracer la branche d'hyperbole située dans le premier quadrant, puis d'effectuer les symétries par rapport à ces axes pour obtenir toute la courbe.

Si $M(x; y)$ est dans le premier quadrant, alors $x \geq 0$ et $y \geq 0$; dans ce cas, l'égalité

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ équivaut à :}$$

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}.$$

Nous sommes donc conduits à étudier la fonction f définie sur $[a; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2},$$

et à tracer sa courbe représentative, ce que nous savons faire par les moyens de l'Analyse.

La courbe admet une tangente en chaque point.

Elle admet aussi des asymptotes obliques : en effet, nous pouvons écrire, pour $x > 0$:

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{b}{ax} \sqrt{x^2 - a^2} = \frac{b}{a} \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}}.$$

$$\text{Or, } \lim_{+\infty} \left(x \mapsto \sqrt{1 - \frac{a^2}{x^2}} \right) = 1, \text{ donc } \lim_{+\infty} \left(x \mapsto \frac{f(x)}{x} \right) = \frac{b}{a}.$$

Nous obtenons :

$$f(x) - \frac{b}{a}x = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{b}{a}x = \frac{b}{a} (\sqrt{x^2 - a^2} - x) = \frac{b}{a} \frac{-a^2}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} = \frac{-ab}{\sqrt{x^2 - a^2} + x}$$

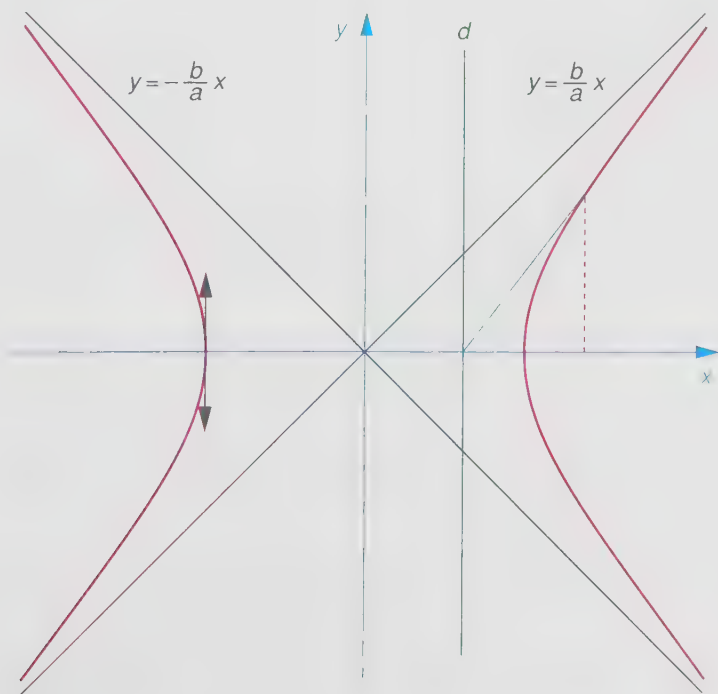
$$\text{donc : } \lim_{+\infty} \left(x \mapsto f(x) - \frac{b}{a}x \right) = 0.$$

La droite d'équation $y = \frac{b}{a}x$ est asymptote au voisinage de $+\infty$ à la courbe $\mathcal{C}$

représentant f ; en outre, pour $x > 0$, $f(x) - \frac{b}{a}x < 0$, donc l'hyperbole est au-dessous

de cette asymptote.

La courbe se trace alors aisément.



Remarque : hyperbole équilatère.

Lorsque $a = b$, l'hyperbole est appelée équilatère.

L'excentricité d'une hyperbole équilatère est $\sqrt{2}$. En effet : $c = \sqrt{a^2 + b^2} = a\sqrt{2}$ et

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{2}.$$

8.2. LIEN AVEC LES DÉFINITIONS ANTÉRIEURES

Jusqu'à présent, nous avons appelé « hyperbole » toute courbe représentative d'une fonction $x \mapsto \frac{a}{x}$, $a \neq 0$, et plus généralement les courbes représentatives des

fonctions homographiques : $x \mapsto \frac{ax + b}{cx + d}$, $ad - bc \neq 0$, $c \neq 0$.

Nous verrons au T.P. d'application 4, que les courbes représentant les fonctions homographiques sont bien des hyperboles telles que nous venons de les définir en géométrie.

9

Image d'une conique par une transformation usuelle

a/ Démontrons d'abord par exemple, que l'image d'une conique par une homothétie est une conique.

Remarquons d'abord qu'une homothétie conserve le rapport des distances. En effet, une homothétie h de rapport k , « multiplie les distances par $|k|$ » ; donc si A' , B' , C' , D' , sont les images par h de quatre points quelconques distincts A , B , C , D , nous

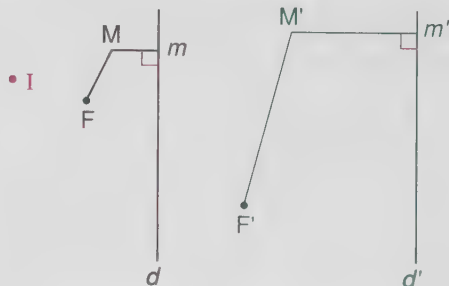
obtenons : $A'B' = |k|AB$, $C'D' = |k|CD$, d'où : $\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{AB}{CD}$. (Notez que $CD \neq 0$, implique : $C'D' \neq 0$.)

Donnons-nous donc une conique $\mathcal{C}$ de foyer F , de directrice d , d'excentricité e , et une homothétie h .

L'image de d par h est une droite d' , l'image de F est un point F' .

M étant un point de $\mathcal{C}$, $\frac{MF}{Mm} = e$, où m

est le projeté orthogonal de M sur d .



Notons M' , m' les images de M et m par h . L'homothétie conserve l'orthogonalité, donc m' est le projeté de M' sur d' . En outre, h conserve le rapport des distances,

donc $\frac{M'F'}{M'm'} = e$; cette égalité prouve que M' appartient à la conique $\mathcal{C}'$ de foyer F' , de directrice d' , d'excentricité e (la même que $\mathcal{C}$).

Réciproquement, soit N' un point de $\mathcal{C}'$. Notons N l'image de N' par l'homothétie h^{-1} de centre I , de rapport $\frac{1}{k}$. Alors, comme ci-dessus, nous montrerions que N

appartient à $\mathcal{C}$. Or $N = h^{-1}(N')$, donc $N' = h(N)$. Donc N' est l'image d'un point de $\mathcal{C}$.

En conclusion, tout point de $\mathcal{C}$ a pour image un point de $\mathcal{C}'$, et tout point de $\mathcal{C}'$ est l'image d'un point de $\mathcal{C}$: donc, $h(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$.

b/ De manière analogue, nous montrerions que l'image de $\mathcal{C}$ par une réflexion, ou une translation, ou une rotation, est une conique de même excentricité.

L'image d'une conique, par une translation, une rotation, une réflexion, ou une homothétie est une conique de même excentricité.

10

Exercices résolus : mise en place des courbes

$y^2 = 2px$, ou $\alpha x^2 + \beta y^2 = \gamma$

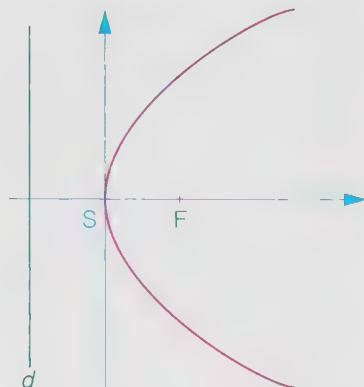
EXERCICE RÉSOLU 1

Précisez le foyer et la directrice de la parabole $\mathcal{P}$ qui dans le repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ a pour équation $y^2 = 5x$.

SOLUTION ■■■

D'après le théorème 2, le foyer de $\mathcal{P}$ est donc le point $F\left(\frac{5}{4}; 0\right)$, et sa directrice est

donc la droite d d'équation $x = -\frac{5}{4}$.



■■■■■■■■■■

EXERCICE RÉSOLU 2

Précisez le foyer et la directrice de la parabole $\mathcal{P}$ qui, dans le repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$, a pour équation :

$$y = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 1.$$

SOLUTION ■■■

$\mathcal{P}$ représente la fonction trinôme

$$f : x \mapsto \frac{1}{4}x^2 - 2x + 1.$$

Nous savons que le sommet S de la parabole a pour abscisse le nombre x_0 tel que : $f'(x_0) = 0$.

Or, pour tout x , $f'(x) = \frac{x}{2} - 2$, donc $x_0 = 4$.

L'ordonnée de S est alors : $y_0 = -3$.

Nous savons, (voir paragraphe 4.1.) que dans le repère $(S; \vec{i}, \vec{j})$, $\mathcal{P}$ a pour équation

$$Y = \frac{1}{4}X^2.$$

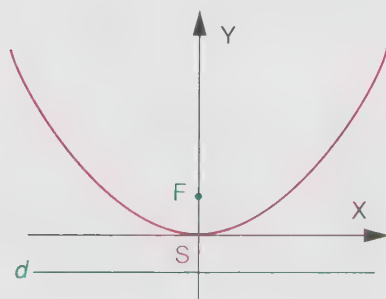
(Vous pouvez retrouver ce résultat en utilisant la forme canonique.)

Cette équation est du type : $Y = aX^2$. D'après le théorème 3, le foyer F de $\mathcal{P}$ a pour coordonnées $\left(0; \frac{1}{4a}\right)$ dans $(S; \vec{i}, \vec{j})$, donc ses coordonnées sont $(0; 1)$.

La directrice a alors pour équation dans $(S; \vec{i}, \vec{j})$: $y = -1$.

Donc, dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$, F a pour coordonnées $(4; -2)$, et d a pour équation : $y = -4$.

■■■■■■■■■■



EXERCICE RÉSOLU 3

Identifiez et déterminez, les éléments caractéristiques de la courbe $\mathcal{C}$ qui, dans le repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ a pour équation : $x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$.

SOLUTION ■■■

L'équation de $\mathcal{C}$ est du type : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$,
c'est donc une ellipse.

Ici, $a = 1$, $b = \sqrt{2}$ car $a > 0$, $b > 0$. Donc :
 $a < b$, l'axe focal est l'axe des ordonnées.
Ici $c^2 = 1$, donc dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$, le foyer F
a pour coordonnées $(1; 0)$. (Voir paragraphe 5.7.)

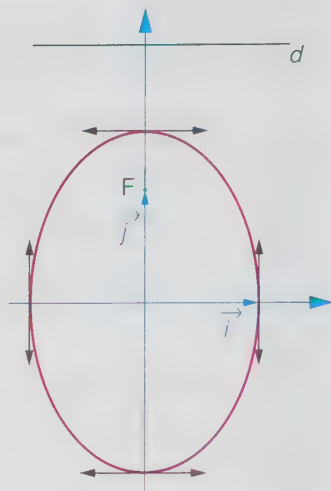
Donc, dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$, la directrice associée
à ce foyer a pour équation :

$$y = 2, \left(y = \frac{b^2}{c} \right).$$

L'excentricité est $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Nous obtenons l'ellipse représentée ci-dessus ; le grand axe est porté par l'axe des ordonnées.

Les sommets sont les points de coordonnées $(0; \sqrt{2})$ et $(0; -\sqrt{2})$.



■■■■■■■■■■

EXERCICE RÉSOLU 4

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormal.
Déterminez les éléments caractéristiques de la conique
d'équation $2y^2 - x^2 = 2$.

SOLUTION ■■

L'équation s'écrit : $-\frac{x^2}{2} + y^2 = +1$.

$\mathcal{C}$ est donc une hyperbole dont l'axe focal est l'axe des ordonnées. Ici : $c = \sqrt{3}$.
Dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$, le foyer F a donc pour coordonnées $(0; \sqrt{3})$ et la directrice d
a pour équation : $y = \frac{\sqrt{3}}{3}$. (Voir le paragraphe 5.7.)

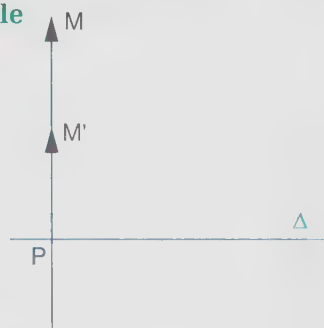
■■■■■■■■■■

TRAVAUX PRATIQUES D'APPLICATION

1 Cercle principal de l'ellipse

1.1. Préliminaires : affinité orthogonale

Δ est une droite du plan, k est un réel. On appelle *affinité orthogonale d'axe Δ et de rapport k* , et on note $\mathcal{A}_{\Delta, k}$ (ou $\mathcal{A}$ s'il n'y a pas d'ambiguïté) l'application du plan dans lui-même qui, à chaque point M , fait correspondre le point $M' = \mathcal{A}(M)$ défini par $PM' = k PM$, P désignant le projeté orthogonal de M sur Δ .



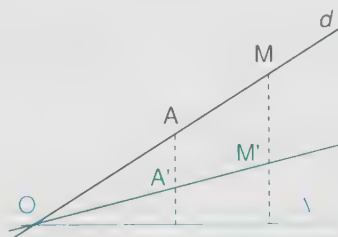
1. Montrez que tout point de Δ est invariant par $\mathcal{A}_{\Delta, k}$, et que tout point invariant par $\mathcal{A}_{\Delta, k}$ est un point de Δ .

2. Montrez que la bijection réciproque de $\mathcal{A}_{\Delta, k}$ est une affinité d'axe Δ . Quel est son rapport ?

3. d est une droite qui coupe Δ en O et A est un point de d distinct de O ; alors, pour chaque point M de d , il existe un unique réel m tel que $OM = m OA$.

Montrez que si A' et M' sont les images de A et M par $\mathcal{A}$, alors :

$$\overrightarrow{OM'} = m \overrightarrow{OA'}.$$



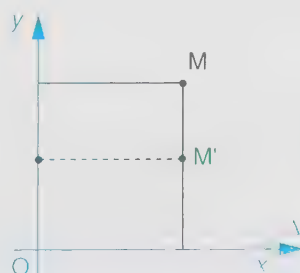
4. Quelle est l'image par $\mathcal{A}$ d'une droite qui coupe Δ en O ?

5. d est une droite parallèle à Δ .

Montrez que l'image de d par $\mathcal{A}$ est parallèle à d et à Δ .

6. On choisit une origine O sur Δ et on considère un repère dont l'axe des abscisses est porté par Δ et dont l'axe des ordonnées est perpendiculaire en O à Δ .

Montrez que si M a pour coordonnées $(x; y)$ alors son image M' par $\mathcal{A}$ a pour coordonnées $(x; ky)$.



1.2. Ellipse et cercle principal

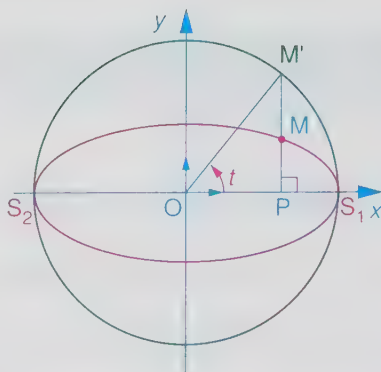
$\mathcal{E}$ est une ellipse de centre O , de sommets S_1 et S_2 .

Le **cercle principal** de l'ellipse est le cercle de centre O et de diamètre $[S_1 S_2]$.

Dans le repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ représenté sur la figure, l'ellipse $\mathcal{E}$ a pour équation : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, a > b$.

L'ellipse $\mathcal{E}$ est aussi représentée paramétriquement par :

$$\begin{cases} x = a \cos \theta \\ y = b \sin \theta \end{cases} \quad \theta \in [0; 2\pi].$$



1. Vérifiez que le cercle principal $\mathcal{C}$ est représenté paramétriquement par :

$$\begin{cases} x' = a \cos \theta \\ y' = a \sin \theta \end{cases} \quad \theta \in [0; 2\pi].$$

2. Montrez que le cercle principal $\mathcal{C}$ est l'image de l'ellipse $\mathcal{E}$, par une affinité orthogonale, dont vous préciserez l'axe et le rapport.
3. Montrez, réciproquement, que $\mathcal{E}$ est l'image de $\mathcal{C}$, par une affinité orthogonale que vous préciserez.

1.3. Tangentes à l'ellipse

Les notations sont celles des paragraphes précédents.

M est un point du cercle principal $\mathcal{C}$. La tangente à $\mathcal{C}$ en M coupe l'axe des abscisses en T. Le point P est le projeté orthogonal de M sur l'axe des abscisses, et M_1 est l'intersection de $\mathcal{E}$ et [MP].

1. **a/** En utilisant une affinité orthogonale, montrez que (TM_1) est tangente à $\mathcal{E}$ en M_1 .

Conseil : utilisez des représentations paramétriques de $\mathcal{E}$ et $\mathcal{C}$, plutôt que des équations cartésiennes.

- b/** Déduisez-en un moyen pour tracer les tangentes à $\mathcal{E}$ issues d'un point de l'axe focal.

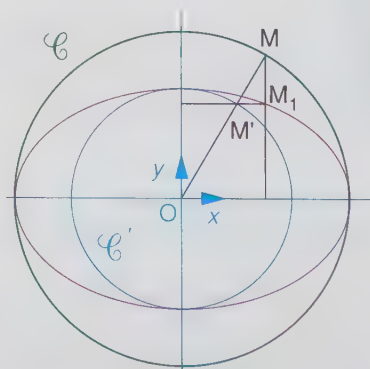
1.4. Construction point par point de l'ellipse connaissant a et b

On se donne deux réels positifs $0 < b < a$ et on veut construire l'ellipse $\mathcal{E}$ d'équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Justifiez les tracés et les affirmations suivantes.

1. On trace le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon a : c'est le cercle principal de l'ellipse.
2. On trace le cercle $\mathcal{C}'$ de centre O et de rayon b. On prend un point M sur $\mathcal{C}$, le rayon [OM] coupe $\mathcal{C}'$ en M' .
3. On trace la parallèle à l'axe Ox en M' et la perpendiculaire à Ox en M. Ces droites se coupent en M_1 et M_1 est un point de $\mathcal{E}$.



2**Intersection d'une ellipse et d'une droite**

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormal et $\mathcal{E}$ est l'ellipse dont une équation est : $\frac{x^2}{R^2} + \frac{y^2}{r^2} - 1 = 0$, où R et r sont deux réels tels que : $0 < r < R$.

D est une droite qui passe par le point $A(a; 0)$ et qui est dirigée par le vecteur unitaire $\vec{u}(\alpha; \beta)$. On a alors : $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

1. Trouvez une représentation paramétrique de D .

(Réponse : $x = a + \alpha t$, $y = \beta t$.)

2. Montrez qu'un point $M(t)$ de D appartient à $\mathcal{E}$ si et seulement si le paramètre t est solution de l'équation :

$$(\alpha^2 r^2 + \beta^2 R^2) t^2 + 2 \alpha a r^2 t + r^2 (a^2 - R^2) = 0. \quad [1]$$

3. Précisez dans quel cas :

a/ D rencontre $\mathcal{E}$ en deux points distincts.

b/ D ne rencontre pas $\mathcal{E}$.

c/ D rencontre $\mathcal{E}$ en un point et un seul.

Dans ce cas D est tangente à $\mathcal{E}$.

4. Puissance d'un point par rapport à un cercle.

On suppose que $\mathcal{E}$ est un cercle, c'est-à-dire que $R = r$, et que D rencontre $\mathcal{E}$ en deux points P et Q .

a/ Montrez que le produit $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ}$ est constant, donc indépendant de la direction D .

Commentaire : cette constante est appelée « puissance du point A par rapport au cercle $\mathcal{C}$ ».

b/ Exprimez cette constante en fonction de AO et de R .

3**Autour de la transformation de Joukowski :**

$$z \longmapsto \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$$

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormal du plan.

f est la fonction, définie pour tout complexe $z \neq 0$, par $f(z) = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$.

On note X la partie réelle de $f(z)$ et Y sa partie imaginaire.

À chaque point m d'affixe z , $z \neq 0$, on associe le point M d'affixe $f(z)$.

1. a/ Montrez que lorsque m décrit le cercle de centre O et de rayon 2, M décrit une ellipse $\mathcal{E}$ de centre O .

Tracez cette ellipse et précisez comment M la décrit.

Indication : posez $z = 2 e^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

b/ Plus généralement, quelle est l'image par f d'un cercle de centre O et de rayon r ?

Conseil : n'oubliez pas le cas particulier $r = 1$.

2. $\vec{a} / \vec{u}$ est un vecteur tel que $(\vec{i}, \vec{u}) = \frac{\pi}{6}$. D est la demi-droite d'origine O et dirigée par $\vec{u}$.

Montrez que lorsque m décrit D, M décrit une branche d'hyperbole $\mathcal{H}$, que vous préciserez.

Indication : posez $z = re^{i\frac{\pi}{6}}$, $r \geq 0$.

b/ Plus généralement, quelle est l'image par f d'une demi-droite d'origine O ?

3. Montrez que les tangentes à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{H}$ en chacun de leurs points d'intersection sont orthogonales.

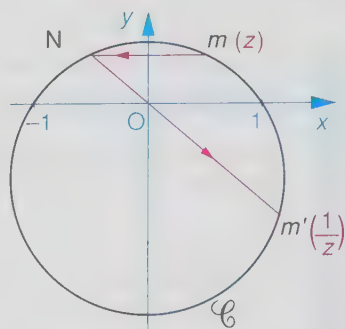
4. $\mathcal{C}$ est un cercle qui passe par les points d'affixe -1 et 1 . $m(z)$ est un point de $\mathcal{C}$ situé dans le demi-plan d'équation $y \geq 0$.

N est le symétrique de m par rapport à l'axe des ordonnées.

a/ Montrez que le point $m' \left(\frac{1}{z} \right)$ est l'intersection de $\mathcal{C}$ et de (ON).

Indication : vous pouvez utiliser la puissance de O par rapport à $\mathcal{C}$. (Voir T.P. 2.) Cette puissance est -1 .

b/ Déduisez-en un procédé de construction point par point de la courbe $\mathcal{H}'$ décrite par le point M ($f(z)$), lorsque m décrit une seule fois le cercle $\mathcal{C}$, en partant du point d'affixe 1, et en tournant dans le sens direct.



Commentaire : La fonction $z \mapsto \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right)$, appelée transformation de Joukowski, est utilisée en Mécanique des fluides. Elle a servi, entre autres, à perfectionner des profils d'avion.

4 À propos d'hyperboles

Nous considérons une hyperbole $\mathcal{H}$ de centre O et d'équation réduite $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ dans le repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ décrit au paragraphe 8.1.

4.1. Équation d'une hyperbole rapportée à ses asymptotes

1. Les notations étant celles de la figure, considérons le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ avec :

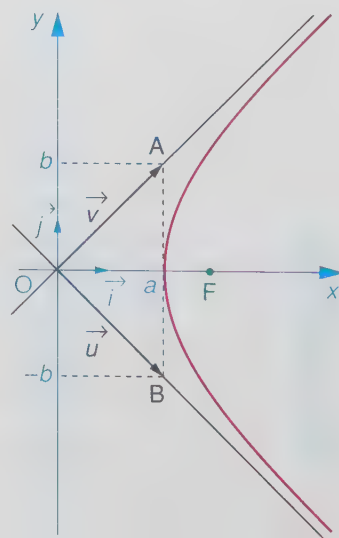
$$\begin{aligned} \vec{u} &= \vec{OB} = a\vec{i} - b\vec{j} \\ \vec{v} &= \vec{OA} = a\vec{i} + b\vec{j} \end{aligned}$$

Notez que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs directeurs des asymptotes de $\mathcal{H}$.

Soit M un point de coordonnées $(x; y)$ dans le repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et de coordonnées $(X; Y)$ dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

a/ Montrez que :

$$x = a(X + Y); \quad y = b(X - Y).$$



b/ Montrez que dans $(O; \vec{u}, \vec{v})$ l'équation de l'hyperbole est alors :

$$XY = \frac{1}{4}.$$

2. Choisissons maintenant un autre repère $(O; \vec{u}_1, \vec{v}_1)$ où $\vec{u}_1$ est colinéaire à $\vec{u}$ et $\vec{v}_1$ colinéaire à $\vec{v}$.

Montrez que dans le repère $(O; \vec{u}_1, \vec{v}_1)$ l'hyperbole a une équation de la forme :

$$Y_1 = \frac{k}{X_1},$$

où k est un réel non nul.

Remarques : l'hyperbole $\mathcal{H}$ représente donc dans ce repère la courbe de la fonction homographique : $X \mapsto \frac{k}{X}$.

3. Étudions la réciproque. Donnons-nous un repère *quelconque* $(O; \vec{u}, \vec{v})$ et un réel k non nul. Cherchons l'ensemble $\mathcal{H}$ des points $M(x; y)$ tels que $xy = k$.

Montrez que $\mathcal{H}$ est une hyperbole ayant pour asymptotes les axes de coordonnées.

4.2. Propriété des cordes d'une hyperbole

Le but de cette partie est de démontrer le résultat suivant : une droite *quelconque* coupe une hyperbole en deux points M et N , et coupe les asymptotes en deux points P et Q .

Alors $[MN]$ et $[PQ]$ ont le même milieu.

Reprenez la situation du paragraphe 4.1.

Considérez une droite *quelconque* d , d'équation $y = \alpha x + \beta$ dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$; supposez que d coupe l'hyperbole en deux points M et N , et les asymptotes en deux points P et Q , puis démontrez le résultat énoncé.

5

Pour la technique : changement de repères

A. $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormal. $\mathcal{C}$ est l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que :

$$4x^2 + y^2 + 16x - 2y + 13 = 0.$$

Le but est d'identifier l'ensemble $\mathcal{C}$ et de le représenter.

1. Écrivez le premier membre de l'équation sous la forme :

$$4(x - \blacksquare_1)^2 + (y - \blacksquare_2)^2 - \blacksquare = 0.$$

2. Considérez alors le point I de coordonnées $(\blacksquare_1, \blacksquare_2)$ dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$, et montrez que dans le repère $(I; \vec{i}, \vec{j})$, l'ensemble $\mathcal{C}$ a pour équation :

$$X^2 + \frac{Y^2}{4} = 1.$$

3. Précisez alors l'ensemble $\mathcal{C}$, ainsi que ses éléments caractéristiques, et représentez-le dans le repère $(I; \vec{i}, \vec{j})$.

B. $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormal. $\mathcal{C}$ est l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que :

$$x^2 + 2y^2 + 8y + 6 = 0.$$

En procédant, comme en 5.1., identifiez l'ensemble $\mathcal{C}$ et représentez-le.

EXERCICES ET PROBLÈMES

Pour tester ses connaissances

Q.C.M.

Pour les exercices 1 à 5, une seule des réponses proposées est exacte.

1. Dans un repère orthonormal, l'ellipse E a pour équation : $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$. Alors :

a/ l'axe focal de E est l'axe des ordonnées;
b/ l'axe focal de E est l'axe des abscisses et un foyer a pour coordonnées $(0; \sqrt{7})$;
c/ l'axe focal de E est l'axe des abscisses et un foyer a pour coordonnées $(\sqrt{7}; 0)$.

2. Dans un repère orthonormal, la parabole $\mathcal{P}$ a pour équation $y = 2x^2$. Alors :

a/ le foyer de $\mathcal{P}$ a pour coordonnées $(\frac{1}{8}; 0)$;
b/ le foyer de $\mathcal{P}$ a pour coordonnées $(0; \frac{1}{8})$ et sa directrice a pour équation $y = -\frac{1}{8}$;
c/ le foyer de $\mathcal{P}$ a pour coordonnées $(0; \frac{1}{8})$ et sa directrice a pour équation : $y = \frac{1}{8}$.

3. Dans un repère orthonormal, $\mathcal{C}$ est l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$. Alors, l'un des foyers a pour coordonnées :

a/ $(\sqrt{5}; 0)$; b/ $(-\sqrt{5}; 0)$; c/ $(0; \sqrt{5})$.

4. Dans un repère orthonormal, $\mathcal{C}$ est l'hyperbole d'équation : $-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$. Alors, l'un des foyers a pour coordonnées :

a/ $(-\sqrt{13}; 0)$; b/ $(\sqrt{13}; 0)$; c/ $(0; \sqrt{13})$.

5. f est la fonction : $x \mapsto \sqrt{4x^2 - 1}$, $\mathcal{C}$ est sa courbe représentative dans un repère orthonormal. Alors :

a/ $\mathcal{C}$ est une demi-parabole;
b/ $\mathcal{C}$ est une demi-ellipse;
c/ $\mathcal{C}$ est une demi-hyperbole.

Pour s'entraîner

RECHERCHE D'ÉQUATIONS

Pour les exercices 6 à 9, un repère orthonormal est fixé; le point F et la droite D sont donnés. Trouvez une équation de la parabole de foyer F et de directrice D .

6. $F(3; 2)$; $D: x = 1$.

7. $F(1; 4)$; $D: x = 3$.

8. $F(1; 4)$; $D: y = 2$.

9. $F(-2; 1)$; $D: y = -1$.

Pour les exercices 10 à 14, on donne la distance d entre un point F et une droite D , et un réel e . Choisissez un repère orthonormal et trouvez une équation de la conique de foyer F , de directrice D et d'excentricité e .

10. $d = 4$, $e = 1$. 13. $d = 1$, $e = 2$.

11. $d = 9$, $e = \frac{4}{5}$. 14. $d = 1$, $e = \frac{1}{2}$.

12. $d = 9$, $e = \frac{5}{4}$.

RECONNAÎTRE LA CONIQUE

Pour les exercices 15 à 25, on donne, dans un repère orthonormal, une équation de la conique $\mathcal{C}$. Identifiez cette conique et précisez ses éléments caractéristiques : foyer, directrice, excentricité.

15. $4x^2 - 9y^2 = 1$.

16. $x^2 - 4y^2 = 9$.

17. $x^2 + 2x = 2y$.

18. $2y + 3x^2 = 0$.

19. $4x^2 + 9y^2 = 36$.

20. $3y + x^2 = 0$.

21. $-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{8} = \frac{1}{2}$.

22. $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{6} = 1$.

23. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

24. $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$.

25. $-\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$.

PARABOLES

26. Lieu géométrique

D est une droite et M un point n'appartenant pas à D.

Quel est le lieu du foyer d'une parabole de directrice D et qui passe par M ?

Pour les exercices 27 à 29, on donne deux points distincts A et F. Trouvez la directrice d'une parabole $\mathcal{P}$ de foyer F passant par A et satisfaisant à l'autre condition donnée. Discutez le nombre de solutions.

27. L'axe Δ est donné.28. $\mathcal{P}$ passe par le symétrique A' de A par rapport à F.29. $\mathcal{P}$ passe par un point M, $M \neq A$ tel que $FA = FM$.

Pour les exercices 30 et 31, on donne une droite D et un point A non situé sur D. Trouvez le foyer d'une parabole $\mathcal{P}$ passant par A, et de directrice D et satisfaisant à l'autre condition. Discutez le nombre de solutions.

30. L'axe Δ est donné.31. $\mathcal{P}$ passe par un point M, $M \neq A$.32. On donne une droite D, un point M et un réel positif p . Trouvez le foyer d'une parabole de directrice D, de paramètre p et passant par M. Discutez le nombre de solutions.

AFFINITÉ ORTHOGONALE

33. $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormal. On considère le cercle $\mathcal{C}$ d'équation :

$$x^2 + y^2 - 4x + 4y - 1 = 0.$$

a/ Trouvez l'image $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$ par l'affinité orthogonale d'axe, l'axe des abscisses et de rapport $\frac{1}{3}$.

b/ Trouvez l'image $\mathcal{C}''$ de $\mathcal{C}'$ par l'affinité orthogonale d'axe, l'axe des ordonnées et de rapport $\frac{1}{3}$.

34. $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormal. On considère l'ellipse $\mathcal{E}$ d'équation :

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

a/ Trouvez le rapport k d'une affinité orthogonale d'axe, l'axe des abscisses qui transforme $\mathcal{E}$ en un cercle.

b/ D est une droite parallèle à l'axe des abscisses ; quelle est l'image de $\mathcal{E}$ par l'affinité orthogonale d'axe D et de rapport k ?

c/ Δ est une droite parallèle à l'axe des ordonnées ; quelle est l'image de $\mathcal{E}$ par l'affinité orthogonale d'axe Δ et de rapport $\frac{1}{k}$?

35. $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormal. On considère le cercle $\mathcal{C}$ d'équation :

$$x^2 + 2x + y^2 - 6y = 0.$$

a/ Trouvez l'image $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$ par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

b/ Trouvez l'image $\mathcal{C}''$ de $\mathcal{C}'$ par l'affinité orthogonale d'axe, l'axe des abscisses et de rapport 2.

c/ Que se passe-t-il en composant dans l'autre sens (affinité puis rotation) ?

EXERCICES DU BACCALAURÉAT

36. $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé direct. Soit E l'ensemble des points du plan dont l'affixe z vérifie la relation :

$$2|z|^2 - \frac{i}{2}(z^2 - \bar{z}^2) = 1.$$

Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et E' l'image de E par r .

a/ Déterminez une équation cartésienne de E' . Déterminez E' .

b/ Déduisez-en le tracé de E (unité : 5 cm).

37. Soit θ un réel appartenant à l'intervalle $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.

On considère l'équation (E) d'inconnue complexe z :

$$(\cos^2 \theta) z^2 - 4(\cos \theta) z + 5 - \cos^2 \theta = 0. \quad (\text{E})$$

1. Résolvez l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes. Précisez pour quelle valeur de θ l'équation admet une racine double. Donnez la valeur de cette racine double.

2. Soit P le plan complexe rapporté à un repère orthonormal. On appelle M' et M'' les points de P dont les affixes respectives sont les nombres z' et z'' solutions de l'équation (E).

Montrez que lorsque θ varie, M' et M'' se déplacent sur une hyperbole (H). Déterminez

le centre, les sommets et les asymptotes de (H). Tracez (H).

3. Montrez que, lorsque θ décrit l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, l'ensemble (E) décrit par les points M' et M'' est une branche de (H).

38. On donne dans le plan un point O et une droite (Δ) ne passant pas par O.

On se propose de donner une construction de l'intersection d'une droite (D) passant par O et non perpendiculaire à (Δ) avec l'ellipse (E)

d'excentricité $\frac{1}{2}$, de foyer O et de directrice associée (Δ).

On note $\vec{i}$ un vecteur unitaire orthogonal à (Δ) et $\vec{j}$ un vecteur unitaire de (D).

1. Pour tout point M de (D), on définit les deux points H et H' tels que $\overline{MH}$ et $\overline{MH'}$ soient orthogonaux à (Δ) et de même norme égale à $2 \cdot MO$.

Montrez que, lorsque M décrit (D), H et H' décrivent deux droites (D_1) et (D_2) passant par O, dont vous préciserez un vecteur directeur en fonction de $\vec{i}$ et de $\vec{j}$.

2. L'une des droites (D_1) et (D_2) peut-elle être parallèle à (Δ) ?

3. Utilisez les questions précédentes pour construire l'intersection de l'ellipse (E) et de la droite (D). Faites une figure soignée dans laquelle vous prendrez 4 cm pour la distance

de O à (Δ) et $\frac{\pi}{3}$ pour une mesure de l'angle ($\vec{i}, \vec{j}$). Il n'est pas demandé de construire l'ellipse (E).

39. Le plan est rapporté à un repère orthonormé ($O; \vec{i}, \vec{j}$). On considère le cercle $\mathcal{C}$ de centre O et de rayon a et le cercle $\mathcal{C}'$ de centre O et de rayon b où a et b sont des nombres réels donnés tels que $0 < b < a$.

On note D et D' les droites passant par O et de vecteurs directeurs respectifs $\vec{i}$ et $\vec{j}$.

Pour tout nombre réel θ , on note P le point du cercle C tel que θ soit une mesure (en radians) de l'angle ($\vec{i}, \overrightarrow{OP}$) et P' le point d'intersection de $\mathcal{C}'$ avec la demi-droite Δ d'origine O passant par P. Soit enfin M le point d'intersection de la droite passant par P parallèle à D' et de la droite passant par P' parallèle à D.

1. Calculez les coordonnées x et y de M en fonction de θ . Déduisez-en la nature de l'ensemble E décrit par M lorsque θ parcourt $\mathbb{R}$.

2. a/ Déterminez un vecteur directeur de la tangente T à la courbe E au point M.

b/ Soit N le point d'intersection de la droite passant par P parallèle à D et de la droite passant par P' parallèle à D'. Prouvez que T est orthogonale à la droite (ON). Déduisez-en une construction géométrique de T.

3. On prend $a = 6$ et $b = 3$. Construisez sur une même figure les cercles C et C', les droites D et D' et l'ensemble E. Placez sur cette figure

les points I', P', M et N correspondant à $\theta = \frac{\pi}{4}$,

et la tangente T en M à E. (On prendra 1 cm pour unité graphique.)

40. Le plan est rapporté à un repère orthonormal ($I; \vec{i}, \vec{j}$). Soit α un réel non nul. On désigne par O_1 le point de coordonnées $(\alpha, 0)$ et par O_2 le point de coordonnées $(-\alpha, 0)$.

$P_1(\alpha)$ est la parabole de sommet I et de foyer O_1 .
 $P_2(\alpha)$ est la parabole de sommet O_1 et de foyer O_2 .

1. Montrez que les équations des paraboles $P_1(\alpha)$ et $P_2(\alpha)$ dans le repère ($I; \vec{i}, \vec{j}$) sont respectivement $y^2 = 4\alpha x$ et $y^2 = -8\alpha x + 8\alpha^2$.

2. a/ Déterminez les coordonnées des points d'intersection M_α et N_α des deux paraboles $P_1(\alpha)$ et $P_2(\alpha)$. On désignera par M_α le point d'intersection dont l'ordonnée est du signe de α .

b/ Déduisez-en l'ensemble des points M_α et N_α lorsque α décrit $\mathbb{R}^*$.

3. Montrez que $P_1(\alpha)$ et $P_2(\alpha)$ sont respectivement les images de $P_1(1)$ et $P_2(1)$ par l'homothétie de centre I et de rapport α .
Déduisez-en que $\overline{IM_\alpha} = \alpha \overline{IM_1}$ et $\overline{IN_\alpha} = \alpha \overline{IN_1}$ et retrouvez le résultat obtenu au 2. b/.

41. Le plan est muni d'un repère orthonormal direct ($O; \vec{u}, \vec{v}$).

Pour tous réels x et y , $z = x + iy$ est l'axe du point M de coordonnées (x, y) , c'est aussi celle du vecteur $\overline{OM} = x\vec{u} + y\vec{v}$.

A est le point d'axe $2i$, D la droite d'équation $y = 0$.

f est la fonction complexe de la variable complexe qui à z non réel associe :

$$z' = \frac{z - 2i}{z - \bar{z}}$$

F associe à tout point M de $P - D$ d'axe z le point M' d'axe z' .

1. Exprimez les parties réelle et imaginaire de z' en fonction de celles de z .

2. B est le point d'axe $\frac{1}{2}$. Quelles sont les images respectives par F des demi-droites ouvertes d'origine O portées par l'axe imaginaire, l'axe imaginaire étant l'ensemble des points d'abscisse nulle.

3. Quelle est l'axe du projeté orthogonal H sur D du point M d'axe z ?
Quelle est celle de $\overline{HM}$?

Montrez que l'ensemble des points M d'axe z tels que $|f(z)| = \frac{1}{2}$ est une parabole dont vous préciserez le foyer et la directrice.

- 42.** Le plan (P) est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On considère l'ensemble (E) des points M de (P) de coordonnées (x, y) vérifiant l'équation :

$$25(x^2 + y^2) = (3x - 16)^2. \quad (1)$$

1. En interprétant géométriquement l'équation (1), démontrez que (E) est une conique de foyer O et de directrice la droite (Δ)

d'équation $x = \frac{16}{3}$. Donnez la nature et l'excentricité de (E).

Dans toute la suite de l'exercice, M désigne un point de (E) et θ une détermination de l'angle de vecteurs $(\vec{u}, \vec{OM})$.

2. a/ Déduisez de l'équation (1) une relation du premier degré entre OM et l'abscisse x de M.

b/ Démontrons que $OM = \frac{16}{5 + 3 \cos \theta}$.

3. On suppose ici que θ appartient à $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$.

La droite (OM) coupe (Δ) en I et recoupe (E) en un point M'.

- a/ Démontrons que $\frac{1}{OM} + \frac{1}{OM'}$ est une constante indépendante de M.

b/ Démontrons que $\frac{1}{OM} - \frac{1}{OM'} = \frac{2}{OI}$.

- 43.** On donne dans le plan deux points fixes distincts F et A. On considère les ellipses E dont un foyer est F et A le sommet de l'axe focal le plus voisin de F.

1. a/ Quel est l'ensemble des points O centres des ellipses E?

b/ Soit O un point de cet ensemble et soit D la perpendiculaire en O à la droite (AF). Construisez (au moyen du compas seulement) les sommets B et B' de l'ellipse E appartenant à D.

2. a/ Soit B un sommet du petit axe d'une ellipse E; montrez que B appartient à une parabole P de foyer F dont vous déterminerez la directrice Δ .

b/ Déterminez la partie de P qui est l'ensemble des points B.

- 44.** Dans le plan P muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on appelle disque unité l'ensemble des points M tels que $OM \leq 1$. On note D ce disque. On appelle distance d'un point M à D, et on note $d(M, D)$, la plus petite des distances de M aux points de D.

1. Démontrons que si M est extérieur au disque, alors $d(D, M) = MM_0$, où M_0 est l'intersection du cercle unité avec le segment $[O, M]$.

Déduisez-en que si x et y sont les coordonnées de M, on a alors :

$$d(M, D) = \sqrt{x^2 + y^2} - 1.$$

2. Soit Δ la droite d'équation $y = -2$. Cherchez l'ensemble des points M du plan tels que : $d(M, D) = 2d(M, \Delta)$.

Représentez D, Δ et l'ensemble obtenu sur une même figure.

- 45.** On considère, dans le plan P rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ où l'unité de longueur est 6 cm, les points M_θ de coordonnées (x, y) définies par :

$$x = \frac{\cos \theta}{2 + \cos \theta}, \quad y = \frac{\sin \theta}{2 + \cos \theta}$$

avec θ élément de $[0, 2\pi]$.

1. Calculez en fonction de θ la distance OM_θ et la distance de M_θ à la droite D d'équation $x = 1$.

2. Déduisez-en que, pour tout réel θ élément de $[0, 2\pi]$, les points M_θ appartiennent à une même ellipse (E) dont vous préciserez l'excentricité, le grand axe ainsi que les coordonnées des quatre sommets et des points d'intersection avec l'axe des ordonnées.

3. Tracez l'ellipse (E).

46. Dans l'espace

L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère le plan (P) d'équation $3x + 4z - 5 = 0$ et l'ensemble (I) des points du plan (xOy) équidistants du plan (P) et de l'origine.

1. Calculez la distance au plan (P) d'un point M_0 de $\mathcal{E}$ de coordonnées (x_0, y_0, z_0) . Déduisez-en que (I) admet pour équation dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$:

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{3x - 5}{5} \right)^2.$$

2. Soit (D) la droite d'intersection des plans (P) et (xOy) . Montrez que (I) est une conique de foyer O et de directrice associée (D). Déterminez son excentricité.

3. Précisez la nature de (I), les sommets de l'axe focal, le centre et les autres sommets. On donnera les coordonnées de ces points dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan (xOy) . Représentez (I) dans ce même repère.

- 47.** FGH est un triangle équilatéral de côté de longueur ℓ .

Soit ($\mathcal{H}$) l'hyperbole de foyer F, de directrice (GH) et d'excentricité 2.

1. Déterminez les sommets S et S' de cette hyperbole (vous remarquerez que S et S' sont sur la hauteur issue de F dans le triangle FGH), son centre O et le deuxième foyer F'. Calculez en fonction de ℓ , la distance des sommets $2a$ et la distance des foyers $2c$.

2. On choisit le repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ où O est le centre de l'hyperbole et $\vec{i}$ un vecteur unitaire de la demi-droite $[OF]$. Écrivez une équation de $(\mathcal{H})$. Donnez l'allure de $(\mathcal{H})$.

Pour chercher plus

Pour les exercices 48 à 53, on donne, dans un repère orthonormal, une équation de la conique $\mathcal{C}$. Identifiez cette conique et précisez ses éléments caractéristiques : foyer, directrice, excentricité.

Indication : changez de repère. (Voir T.P. 5.)

48. $y^2 = 4x + 2y + 11$.

49. $9x^2 - 18x + 4y^2 + 16y - 11 = 0$.

50. $9(x-2)^2 - 16(y+1)^2 + 1 = 0$.

51. $4x^2 - 9y^2 - 36y = 0$.

52. $x^2 - 2x - 4y^2 - 3 = 0$.

53. $16x^4 - 72x^2y^2 + 81y^4 = 1$.

Pour les exercices 54 et 55, trouvez l'ensemble des points M dont les coordonnées $(x; y)$ dans un repère orthonormal, sont telles que :

54. $x|x| + 4|y|y = 1$.

55. $x|x| - 4|y|y = 1$.

56. Lieu géométrique

A et B sont deux sommets d'une ellipse E , situés sur deux axes distincts. Quel est le lieu géométrique du centre de gravité des triangles ABM lorsque M décrit E ?

57. E est une ellipse de centre O . Un point M de E étant donné, trouvez analytiquement deux points M' et M'' sur E tels que O soit le centre de gravité du triangle $MM'M''$.

58. Lieu géométrique

On donne un point A , une droite D et une distance d . Quel est l'ensemble des points M dont la somme de la distance à A et à la droite D est d ?

59. Quelques particularités de la parabole

$\mathcal{P}$ est une parabole de foyer F de directrice d . K est le projeté orthogonal de F sur d . S est le sommet de $\mathcal{P}$.

1. M est un point de $\mathcal{P}$, Δ est la tangente en M à $\mathcal{P}$.

a/ Montrez analytiquement que le symétrique de F par rapport à Δ est sur la directrice.

b/ Réciproquement, N est un point de d , et Δ' est la médiatrice de $[FN]$. Montrez que Δ' est tangente à $\mathcal{P}$.

2. M est un point de $\mathcal{P}$, H est le projeté orthogonal de M sur d .

m est le projeté orthogonal de M sur l'axe focal (FK).

La tangente en M à $\mathcal{P}$ coupe l'axe focal en T . La perpendiculaire en M à cette tangente coupe l'axe focal en N .

a/ Faites la figure correspondante.

b/ Montrez que mN est égale au paramètre. (Le segment $[mN]$ est appelé « sous-normale ».)

c/ Montrez que S est le milieu de mT . (Le segment $[mT]$ est appelé « sous-tangente ».)

d/ Montrez que F est le milieu de $[TN]$.

60. Courbe orthoptique de la parabole

a/ Une parabole $\mathcal{P}$ a pour foyer F et pour directrice D ; on note H le projeté orthogonal d'un point M de $\mathcal{P}$ sur D .

Montrez analytiquement que la tangente en M à $\mathcal{P}$ est la médiatrice de $[FH]$.

b/ Deux droites T_1 et T_2 sécantes et non perpendiculaires sont données, ainsi qu'un point F .

Trouvez la directrice d'une parabole $\mathcal{P}$ de foyer F à laquelle T_1 et T_2 sont tangentes.

c/ Deux droites T_1 et T_2 sécantes et non perpendiculaires sont données, ainsi qu'une droite D .

Trouvez le foyer d'une parabole $\mathcal{P}$ de directrice D à laquelle T_1 et T_2 sont tangentes.

d/ Trouvez l'ensemble E des points N du plan d'où l'on peut mener deux tangentes perpendiculaires à une parabole $\mathcal{P}$ donnée.

Remarque : des points de E , on voit la parabole sous un angle droit; E est la courbe orthoptique de $\mathcal{P}$.

61. Une particularité de l'hyperbole

$\mathcal{H}$ est une hyperbole de centre O .

M est un point de $\mathcal{H}$ et Δ est la tangente en M à $\mathcal{H}$.

Δ coupe les asymptotes de $\mathcal{H}$ en deux points A et B .

1. Montrez analytiquement que M est le milieu de $[AB]$.

2. Réciproquement, N est un point de $\mathcal{H}$; une droite Δ' passant par N coupe les asymptotes en deux points P et Q , de sorte que N soit le milieu de $[PQ]$. Montrez que Δ' est tangente à $\mathcal{H}$.

3. M est un point de $\mathcal{H}$. La tangente en M à $\mathcal{H}$ coupe les asymptotes en deux points A et B . Montrez que l'aire du triangle OAB ne dépend pas de M .

62. Courbe orthoptique de l'ellipse

Le plan est rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. On considère l'ellipse E d'équation cartésienne : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. On cherche à déterminer l'ensemble Γ des points M du plan

desquels « on voit l'ellipse E sous un angle droit », c'est-à-dire desquels on puisse mener deux tangentes à E, T_1 et T_2 orthogonales entre elles. La courbe Γ obtenue est appelée courbe orthoptique de l'ellipse E.

1. Trouvez les points de Γ appartenant à des tangentes à E verticales.

2. Soit $M_0(x_0, y_0)$ et D_m la droite de pente m passant par M_0 . Montrez que D_m a deux points communs confondus avec E (et lui est donc tangente) si, et seulement si, m est solution de l'équation d'inconnue X :

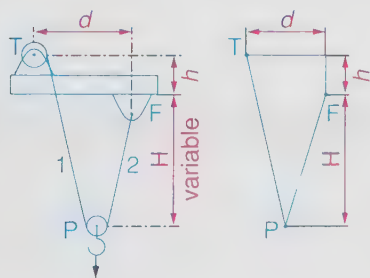
$$(x_0^2 - a^2)X^2 - 2x_0y_0X + y_0^2 - b^2 = 0.$$

3. Montrez que M_0 se trouve sur Γ si, et seulement si, $x_0^2 + y_0^2 = a^2 + b^2$.

4. Construisez E et Γ pour $a = 5$ et $b = 3$.

Problèmes de synthèse

63. Treuil électrique



La figure représente un treuil fixe électrique pour levage de 5 tonnes au moyen d'une poulie mobile P dont on se propose de trouver le lieu ou trajectoire (L) lorsque H varie.

On rappelle que les brins de câble 1 et 2 allant respectivement au tambour moteur T et au point fixe F sont toujours également inclinés sur la verticale. On néglige dans la suite les rayons de T et P.

1. Démontrez que le lieu (L) de P est une partie de conique que vous définirez en position et grandeur par rapport aux points fixes T, F et aux constantes d, h : déterminez le centre, les axes, les foyers, les asymptotes.

2. Les données numériques étant les suivantes :

$$d = 0,40 \text{ m}; \quad h = 0,30 \text{ m}; \\ 1,00 \text{ m} \leq H \leq 11,00 \text{ m},$$

trouver, en mm, l'écart entre les verticales des positions extrêmes de P et, en degrés, l'inclinaison de la tangente à la trajectoire (L) pour $H = 1,00 \text{ m}$.

64. Famille de coniques

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$ on considère la courbe représentée par l'équation :

$$y^2 = 2px + qx^2. \quad (1)$$

À tout couple de nombres réels (p, q) correspond une courbe, notée $\Gamma(p, q)$, d'équation (1). Lorsque p et q prennent des valeurs réelles arbitraires, les courbes $\Gamma(p, q)$ constituent une famille notée ϕ .

1. Pour quelles valeurs de q les courbes $\Gamma(p, q)$ sont-elles :

a/ des paraboles ?

b/ des hyperboles ?

c/ des ellipses d'axe focal, l'axe des abscisses ?

d/ des ellipses d'axe focal parallèle à l'axe des ordonnées ?

2. Exprimez, dans chacun de ces cas, l'excentricité de $\Gamma(p, q)$ en fonction de q .

65. Étude de fonctions. Changement de repères. Transformations

1. a/ Étudiez la fonction f définie sur $[-1, +1]$ par :

$$f(x) = -x + \sqrt{2(1-x^2)}.$$

b/ On appelle C la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Précisez les tangentes à C aux points d'abscisses -1 et $+1$, au point A d'abscisse nulle, et au point B d'ordonnée nulle. Tracez la courbe C en prenant 5 cm pour unité de longueur.

2. a/ Soit f_1 la fonction numérique définie sur $[-1, +1]$ par :

$$f_1(x) = -x - \sqrt{2(1-x^2)}$$

et soit C_1 la courbe représentative de f_1 dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Comparez pour x quelconque, $f_1(x)$ et $f(-x)$ et interprétez le résultat. Tracez C_1 .

b/ On désigne par D, D', Δ les droites du plan P d'équations respectives $x=1$, $x=-1$, $x+y=0$ et l'on désigne respectivement par H, H', K les projetés orthogonaux sur D, D', Δ d'un point quelconque N de P. Soit E l'ensemble des points N du plan P tels que $NK^2 + NH \cdot NH' = 0$. Montrez que $E = C \cup C_1$ et vérifiez qu'une équation cartésienne de E est :

$$3x^2 + y^2 + 2xy - 2 = 0. \quad (E)$$

3. Soit $\vec{U}$ et $\vec{V}$ les images respectives de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans la rotation vectorielle d'angle θ donné. On définit dans P un nouveau repère $(O; \vec{U}, \vec{V})$ et on désigne par X, Y les coordonnées dans

ce repère du point ayant x, y pour coordonnées dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On pose $Z = X + iY, z = x + iy$.

a/ Montrez que $z = Z(\cos \theta + i \sin \theta)$. Déduisez-en les expressions de x et y en fonction de X, Y et θ , puis celle de $3x^2 + y^2 + 2xy$ en fonction de X, Y et 2θ .

b/ On suppose $\theta = \frac{\pi}{8}$. Trouvez une équation de E dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$ correspondant. Déduisez-en que E est une ellipse dont vous indiquerez la longueur du demi-grand axe α et la longueur du demi-petit axe β . Vérifiez que : $\frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{2} - 1$.

4. À tout couple (a, b) de réels vérifiant $a \neq 0$ et $a + b \neq 0$ on associe l'application $\varphi_{a,b}$ du plan dans lui-même qui au point $M(x, y)$ associe $M'(x', y')$ défini par :

$$\begin{cases} x' = ax \\ y' = bx + (a + b)y \end{cases}$$

dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On se propose de trouver, parmi les applications $\varphi_{a,b}$, celles qui laissent invariante l'ellipse E du 2.

a/ Écrivez la relation que doivent vérifier les coordonnées x, y d'un point M pour que son image M' par $\varphi_{a,b}$ appartienne à E (utilisez l'équation (E)).

Exprimez que les points A et B de E (cf. 1. b/) satisfont à cette relation.

Vérifiez que, s'il en est ainsi, tout point de E a son image sur E .

Déduisez-en qu'il existe quatre applications de ϕ qui laissent E invariante.

b/ Précisez la nature de ces quatre transformations.

66. On considère la relation :

$$6z^2 - 3z \sin \theta + \cos \theta = 0, \quad (1)$$

qui lie les deux variables θ et z .

1. z étant un nombre réel donné, (1) est alors une équation en θ ; on cherche les valeurs réelles de θ , solutions de cette équation, en fonction de z .

a/ Calculez effectivement ces valeurs lorsque $z = \frac{\sqrt{3}}{3}$ et $z = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

b/ Discutez suivant les valeurs de z l'existence des solutions de l'équation et le nombre des extrémités des arcs du cercle trigonométrique qui ont pour mesures ces solutions.

2. θ étant un nombre réel donné, (1) est alors une équation en z ; on cherche les valeurs réelles ou complexes de z , solutions de cette équation.

Déterminez les valeurs de θ pour lesquelles (1) possède :

a/ une racine double;

b/ deux racines réelles et distinctes;

c/ deux racines complexes.

Dans ce dernier cas, calculez le module des racines en fonctions de θ et montrez qu'il est compris entre deux nombres indépendants de θ .

3. Dans un plan on donne un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$

a/ Déterminez le transformé (E) du cercle (C) de centre O et de rayon 1 dans l'affinité orthogonale d'axe, l'axe des abscisses et de rapport $\frac{1}{2}$. Le point M appartenant à (C) , on

pose $(\vec{Ox}, \vec{OM}) = \theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi$. Calculez en fonction de θ les coordonnées du point M' transformé de M dans cette affinité.

b/ On donne la parabole (P) qui a pour tangente au sommet l'axe des ordonnées et pour foyer le point F de coordonnées $(\frac{1}{6}; 0)$.

H est le point de coordonnées $(0; z), z \neq 0$. Déterminez en fonction de z l'équation de la tangente (T) à (P) , qui passe par H .

c/ Montrez que l'équation (1) est une condition nécessaire et suffisante que doivent vérifier θ et z pour que le point M' appartienne à (T) .

Interprétez géométriquement les résultats des questions **a/** et **b/** (z réel).

Déduisez-en les points communs et les tangentes communes à (E) et (P) .

PROBLÈMES DU BACCALAURÉAT

67. α et β étant deux nombres réels donnés, on considère l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$z^2 + \alpha z + \beta = 0. \quad (1)$$

1. Le plan étant muni d'un repère orthonormé (unité : 2 cm), soit M le point de coordonnées (α, β) .

Quel est l'ensemble des points M tels que l'équation (1) possède :

a/ Une solution double?

b/ Deux solutions réelles distinctes?

c/ Deux solutions distinctes, non réelles? (On représentera ces différents ensembles dans le plan.)

2. y étant un réel quelconque, exprimez les solutions de l'équation (1) dans le cas où :

$$\alpha = -2y \text{ et } \beta = -1.$$

Vérifiez que ces solutions sont réelles, de signes contraires, puis résolvez l'équation d'inconnue x réelle :

$$e^{2x} - 2ye^x - 1 = 0.$$

3. Résolvez l'équation (1) dans le cas où :

$$\alpha = 13 \text{ et } \beta = 49.$$

4. Déduisez-en les solutions de l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

$$(z^2 - 1)(z^4 + 13z^2 + 49) = 0.$$

Vérifiez que ses solutions sont les nombres complexes :

$$z_k = 2e^{ik\frac{\pi}{3}} - e^{-ik\frac{\pi}{3}},$$

[k décrivant $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$].

5. Dans le plan muni du repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on note M_k le point d'affixe z_k , k décrivant $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Démontrez que les points M_k sont sur une même ellipse (E).

6. Démontrez qu'une affinité orthogonale d'axe $(O; \vec{u})$ transformant (E) en le cercle de diamètre $[M_0, M_3]$ transforme l'hexagone $M_0 M_1 M_2 M_3 M_4 M_5$ en un hexagone régulier. Déduisez-en que les droites $(M_0 M_1)$, $(M_1 M_2)$, $(M_2 M_3)$, $(M_3 M_4)$, $(M_4 M_5)$ et $(M_5 M_0)$ sont tangentes à une même ellipse (E').

Tracez les ellipses (E) et (E') et placez les points M_k .

68. Le plan P orienté est rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 4 cm). Dans ce qui suit les équations des courbes et les coordonnées des points seront données dans ce repère.

Soit A le point de coordonnées $(-1; 0)$.

I. Soit φ la fonction de l'intervalle $[-1; 1]$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(x) = x \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$

1. Étudiez les variations de φ et tracez sa courbe représentative (S_1) .

Précisez les tangentes ou demi-tangentes éventuelles à (S_1) aux points A et O.

2. Soit (S_2) l'image de (S_1) par la symétrie orthogonale par rapport à l'axe des abscisses. Donnez une équation de (S_2) . Vérifiez que $(S) = (S_1) \cup (S_2)$ a une équation :

$$x^3 + xy^2 + x^2 - y^2 = 0.$$

Tracez (S).

3. Soit λ un réel non nul et N le point de coordonnées $(0; \lambda)$. Écrivez une équation cartésienne, notée (1), de la droite (AN) en fonction de λ . Vérifiez que le cercle C_λ , de centre N, passant par O, a pour équation :

$$x^2 + y^2 - 2\lambda y = 0. \quad (2)$$

Pour tout λ non nul, (AN) et C_λ se coupent en deux points distincts d'ordonnée non nulle. Exprimez λ en fonction de x et y à l'aide de l'équation (2). Reportez l'expression trouvée dans l'équation (1) et vérifiez que les deux

points d'intersection de (AN) et de C_λ appartiennent à (S).

Déduisez-en une construction de (S), par points, à la règle et au compas.

II. Les questions de cette partie du problème doivent être résolues sans calculs.

M étant un point de P, on se propose d'étudier, s'ils existent, les points M' de P vérifiant à la fois les deux conditions suivantes :

$$A, M, M' \text{ alignés}, \quad (1)$$

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'} = 0. \quad (2)$$

Soit C le cercle de diamètre [OA].

1. Trouvez l'ensemble des points M' dans les cas suivants (on pourra s'aider d'une figure pour chacun des cas) :

a/ M est en O.

b/ M est en A.

c/ M est un point de C autre que O et A.

d/ M est un point de l'axe des abscisses autre que O et A.

e/ M est un point de l'axe des ordonnées autre que O.

2. On suppose que le point M n'est pas sur C. Démontrez qu'il existe un point unique M' vérifiant les conditions (1) et (2).

Donnez une construction géométrique de M' (faire un dessin).

3. Soit P^* le plan privé du cercle C et des axes de coordonnées.

À tout point M de P^* , on associe le point M' vérifiant les conditions (1) et (2).

Démontrez que M' est un point de P^* . On note f la fonction de P^* dans P^* qui à M associe $M' = f(M)$. Démontrez que $f \circ f$ est l'identité de P^* .

III. On désigne par f l'application précédemment définie.

1. Soit (S^*) la courbe (S) privée de A et O. En utilisant les questions I.3. et II.3. déterminez $f(S^*)$.

2. a/ Soit $(x; y)$ les coordonnées de M et $(x'; y')$ celles de $M' = f(M)$.

Vérifiez que :

$$x' = \frac{-y^2}{x^2 + y^2 + x}, \quad y' = \frac{xy}{x^2 + y^2 + x}.$$

b/ Soit (E) la courbe d'équation :

$$4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 8y^2 = 1.$$

Tracez (E). Précisez sa nature, ses éléments de symétrie, ses sommets.

c/ Soit D^* la droite d'équation $x = 1$ privée de son point d'ordonnée nulle.

Démontrez que $f(D^*)$ est la courbe (E) privée de O et A.

POUR PRENDRE UN BON DÉPART

1 Composée de deux réflexions

Des rappels sur **translations**, **réflexions**, **rotations**, se trouvent dans le lexique, page 316.

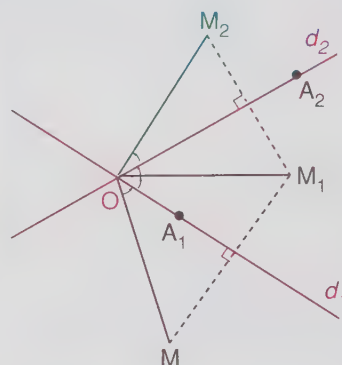
1.1. COMPOSÉE DE DEUX RÉFLEXIONS D'AXES SÉCANTS

La notation s_d désigne la réflexion par rapport à la droite d .

THÉORÈME 1

d_1 et d_2 sont deux droites sécantes en O . Alors $s_{d_2} \circ s_{d_1}$ est la **rotation** de **centre O** et d'**angle $2(\overrightarrow{OA_1}, \overrightarrow{OA_2})$** où A_1 est un point quelconque de d_1 et A_2 un point quelconque de d_2 , distincts de O .

Notez que $s_{d_1} \circ s_{d_2}$ est la rotation de centre O et d'angle $2(\overrightarrow{OA_2}, \overrightarrow{OA_1})$, et donc, qu'en général, $s_{d_1} \circ s_{d_2} \neq s_{d_2} \circ s_{d_1}$.



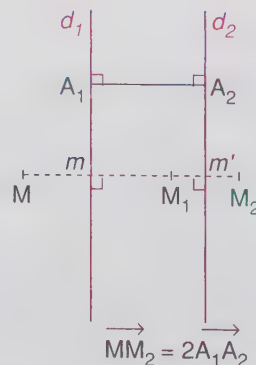
1.2. COMPOSÉE DE DEUX RÉFLEXIONS D'AXES PARALLÈLES

THÉORÈME 2

La composée $s_{d_2} \circ s_{d_1}$ de deux réflexions d'axes parallèles est une **translation**.

Le vecteur de cette translation est $2\overrightarrow{A_1A_2}$, où A_1 et A_2 sont des points de d_1 et d_2 respectivement, avec (A_1A_2) perpendiculaire à d_1 .

Notez que $s_{d_1} \circ s_{d_2} \neq s_{d_2} \circ s_{d_1}$.



COURS

1 Généralités sur les transformations du plan

1.1. DÉFINITIONS

On dit que l'on a défini une **application bijective** f , ou une **bijection**, du plan dans lui-même, lorsque :

— à chaque point M , on associe un point N et un seul, appelé alors image de M par f et noté $f(M)$, $N = f(M)$;

— et lorsque chaque point N est l'image par f d'un point M et d'un seul.

Une application bijective est appelée une **transformation** du plan.

EXEMPLES

1. Les translations, les réflexions, les rotations, les homothéties sont des transformations.

2. La projection sur une droite n'est pas une transformation : deux points peuvent avoir le même projeté.

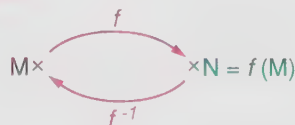
3. L'**identité** est la transformation, en général notée i , qui, à chaque point M , associe le point M lui-même : $i(M) = M$.

1.2. ÉGALITÉ DE DEUX TRANSFORMATIONS f ET g

Dire que $f = g$ signifie que : $f(M) = g(M)$ pour tout point M .

1.3. RÉCIPROQUE D'UNE TRANSFORMATION

a/ Lorsque f est une transformation, à chaque point N on peut associer l'unique point M tel que $f(M) = N$.



On définit ainsi une transformation, dite **reciproque** de f , et notée f^{-1} .

Dire que $N = f(M)$ équivaut à dire que $M = f^{-1}(N)$.

b/ Nous avons vu en classe de Première que :

- si r est la **rotation** de centre O et d'angle α , alors r^{-1} est la rotation de centre O et d'angle $-\alpha$;
- si t est la **translation** de vecteur $\vec{u}$, alors t^{-1} est la translation de vecteur $-\vec{u}$;
- si s est une **réflexion**, alors $s^{-1} = s$.

1.4. COMPOSÉE DE TRANSFORMATIONS

a/ f et g étant deux transformations, la transformation $g \circ f$ est la transformation définie par :

$$(g \circ f)(M) = g(f(M)) \text{ pour tout point } M.$$

La transformation $f \circ g$ est définie par : $(f \circ g)(M) = f(g(M))$. En général, $f \circ g \neq g \circ f$. Par itération, on définit la composée de plusieurs transformations. Ainsi, $f \circ g \circ h$ est la transformation : $f \circ (g \circ h)$, et c'est aussi $(f \circ g) \circ h$.

Rappelons que i désigne la transformation « identité » ($i(M) = M$, pour tout point M).

Pour toute transformation f : $f \circ i = i \circ f = f$,

et : $f \circ f^{-1} = f^{-1} \circ f = i$.

En particulier, si s est une **réflexion** : $s \circ s = i$.

b/ Conséquence. Pour toutes transformations f , g et h :

si $h = f \circ g$, alors $f = h \circ g^{-1}$, ou $g = f^{-1} \circ h$.

En effet, de $h = f \circ g$, nous déduisons : $h \circ g^{-1} = f \circ g \circ g^{-1}$.

Mais $g \circ g^{-1} = i$, et $f \circ i = f$, d'où le résultat.

De l'égalité $h = f \circ g$, nous pouvons déduire aussi : $f^{-1} \circ h = f^{-1} \circ f \circ g = g$.

2 Déplacements

2.1. DÉFINITION

a/ DÉFINITION 1

On appelle **déplacement** toute transformation qui conserve la distance et les angles orientés.

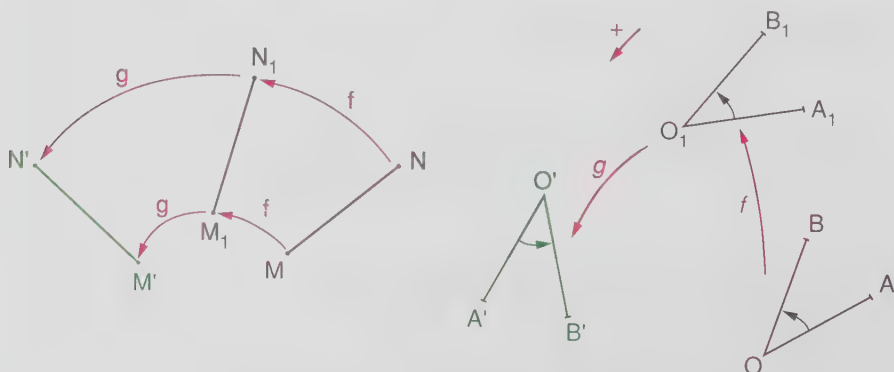
EXEMPLES

- Les rotations, les translations, sont des déplacements. L'identité est un déplacement. Une réflexion n'est pas un déplacement : elle transforme un angle orienté en son opposé.
- Rappelons qu'une symétrie centrale par rapport à un point O est une rotation de centre O et d'angle π .

b/ Première conséquence

La composée $g \circ f$ de deux déplacements g et f est un déplacement.

La démonstration de ce résultat ne fait que décrire la figure suivante :



M' et N' sont les images respectives de M et N par $g \circ f$, et $M'N' = M_1N_1 = MN$.

O', A', B' sont les images par $g \circ f$ de O, A, B et :

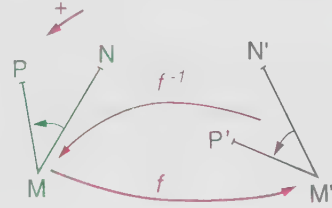
$$(\overrightarrow{O'A'}, \overrightarrow{O'B'}) = (\overrightarrow{O_1A_1}, \overrightarrow{O_1B_1}) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}).$$

c/ Deuxième conséquence

La réciproque f^{-1} d'un déplacement f est un déplacement.

En effet, considérons deux points quelconques M et N , et leurs images par f^{-1} : $M' = f^{-1}(M)$, $N' = f^{-1}(N)$. Alors : $M = f(M')$ et $N = f(N')$, donc $MN = M'N'$, et donc f^{-1} conserve la distance.

Nous verrions de même que f^{-1} conserve les angles orientés.



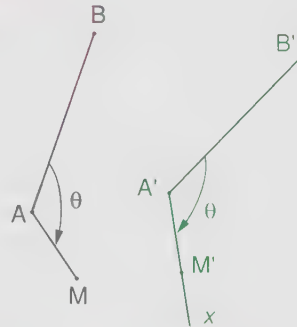
2.2. DÉTERMINATION D'UN DÉPLACEMENT

La connaissance des images A' et B' de deux points A et B permet de déterminer l'image par f de n'importe quel point M .

En effet, puisque f est un déplacement :

$$A'M' = AM, \text{ et } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'M'}).$$

L'image de M est le point M' de la demi-droite $A'x$, tel que $A'M' = AM$ (voir la figure ci-contre). On dit qu'un déplacement est déterminé par deux points distincts et leurs images.



2.3. CONSÉQUENCE : ÉGALITÉ DE DEUX DÉPLACEMENTS

Pour démontrer que deux déplacements f et g sont égaux, il suffit de démontrer que pour deux points A et B distincts, quelconques, $f(A) = g(A)$, $f(B) = g(B)$.

En effet, puisque $A' = f(A) = g(A)$, $B' = f(B) = g(B)$, nous obtiendrons d'après ce qui précède $M' = f(M) = g(M)$, pour tout point M , donc $f = g$.

2.4. DÉPLACEMENTS ÉCHANGEANT DEUX SEGMENTS DE MÊME LONGUEUR

Nous savons que les rotations et les translations sont des déplacements. *Nous allons voir que tout déplacement est en fait une translation ou une rotation.*

a/ Démontrons d'abord le théorème suivant :

THÉORÈME 1

Étant donnés quatre points A, B, A', B' , tels que $A \neq B$, et $A'B' = AB$, alors :

- si $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$, il existe une **translation** et une **seule** qui transforme A en A' et B en B' ;
- si $\overrightarrow{A'B'} \neq \overrightarrow{AB}$, il existe une **rotation** et une **seule** qui transforme A en A' et B en B' .

En effet, les hypothèses sur les points A, B, A' et B' font que deux cas peuvent se présenter et deux seulement.

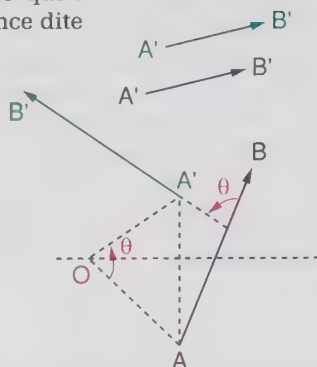
Premier cas : $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$

Dans ce cas, la translation t de vecteur $\overrightarrow{AA'}$ transforme A en A' et B en B' . Si t' est une autre translation, telle que : $t'(A) = A$, $t'(B) = B'$, alors $t' = t$, d'après la conséquence dite en 2.3., car t et t' sont des déplacements.

Deuxième cas : $\overrightarrow{A'B'} \neq \overrightarrow{AB}$

Dans ce cas, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) \neq 0$, et $A \neq A'$, ou $B \neq B'$. Supposons $A \neq A'$.

Posons $\theta = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$. Notons O le point de la médiatrice de $[AA']$ tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = \theta$. La rotation r de centre O et d'angle θ transforme A en A' . Elle transforme B en un point B_1 tel que : $A'B_1 = AB = A'B'$, et tel que : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B_1}) = \theta = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$; donc $B_1 = B'$.



Ainsi : $r(A) = A'$, $r(B) = B'$. Si r' est une autre rotation qui transforme A en A' et B en B' , alors $r' = r$, d'après 2.3., car r et r' sont des déplacements. Le théorème 1 est ainsi démontré.

b/ Construction du centre de la rotation qui transforme $[AB]$ en $[A'B']$

La démonstration du théorème 1, cas $\overrightarrow{A'B'} \neq \overrightarrow{AB}$, montre que le centre O de la rotation qui transforme A en A' et B en B' est le point O de la médiatrice de $[AA']$ tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$, lorsque $A \neq A'$.

Lorsque $A = A'$, ce centre est évidemment le point A .

Notez que lorsque les droites (AA') et (BB') ne sont pas parallèles, le centre O est l'intersection des médiatrices de $[AA']$ et de $[BB']$.

2.5. NATURE D'UN DÉPLACEMENT

THÉORÈME 2

Tout déplacement est soit une translation, soit une rotation.

En effet, un déplacement f est déterminé par la donnée de deux points A et B distincts et de leurs images A' , B' . Ainsi $A \neq B$, et $A'B' = AB$.

D'après le théorème 1, il existe une translation t ou une rotation r qui transforme A en A' et B en B' . Donc $f = t$ ou $f = r$, d'après 2.3.

3

Composée de deux rotations, d'une translation et d'une rotation

3.1. COMPOSÉE DE DEUX ROTATIONS

Considérons deux rotations : $r_1(O_1, \theta_1)$, $r_2(O_2, \theta_2)$. r_1 et r_2 sont des déplacements, donc $r_2 \circ r_1$ est un déplacement; d'après le théorème 2, $r_2 \circ r_1$ est donc soit une translation, soit une rotation.

r_1 transforme deux points A et B en A_1, B_1 , tels que : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A_1B_1}) = \theta_1$.

r_2 transforme A_1, B_1 en deux points A', B' , tels que : $(\overrightarrow{A_1B_1}, \overrightarrow{A'B'}) = \theta_2$.

Il en résulte que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \theta_1 + \theta_2$. Or, A', B' sont les images de A et B par $r_2 \circ r_1$. D'après le théorème 1, nous obtenons donc :

r_1 est une rotation d'angle θ_1 et r_2 une rotation d'angle θ_2 .

- lorsque : $\theta_1 + \theta_2 \neq 0$ (modulo 2π), $r_2 \circ r_1$ est une **rotation** d'angle $\theta_1 + \theta_2$;
- lorsque : $\theta_1 + \theta_2 = 0$ (modulo 2π), $r_2 \circ r_1$ est une **translation**.

Vous verrez au T.P. d'application 5, comment construire le centre de $r_2 \circ r_1$.

3.2. COMPOSÉE D'UNE TRANSLATION ET D'UNE ROTATION

Considérons une translation t et une rotation $r(O, \theta)$, $\theta \neq 0$.

Alors $t \circ r$ est un déplacement, donc c'est une translation ou une rotation. Mais si A' et B' sont les images respectives de A et B par $t \circ r$, nous obtenons : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}) = \theta$, et donc :

Lorsque t est une translation, et r une rotation d'angle θ , alors $t \circ r$ est une rotation d'angle θ .

Nous verrions de même que :

$r \circ t$ est une rotation d'angle θ .

Remarque : en général, $r \circ t \neq t \circ r$, et $r_1 \circ r_2 \neq r_2 \circ r_1$.

4 Isométries

4.1. DÉFINITION

DÉFINITION 2

On appelle **isométrie** toute transformation qui conserve la distance.

EXEMPLES

Les déplacements sont des isométries. Les réflexions, qui rappelons-le, ne sont pas des déplacements, sont des isométries.

De manière analogue à ce qui était fait dans le cas des déplacements, nous verrions que :

la composée de deux isométries est une isométrie;
la réciproque d'une isométrie est une isométrie.

Les déplacements, les réflexions, leurs composées sont des isométries. Nous allons voir qu'il n'y en a point d'autres, et plus précisément que **toute isométrie est soit un déplacement, soit une composée $t \circ s$** , où t est une translation et s une réflexion. Nous verrons enfin que toute isométrie est une composée de réflexions, au plus trois.

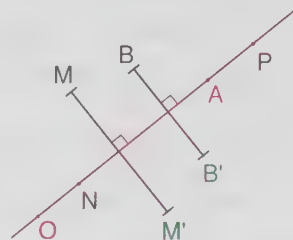
4.2. ISOMÉTRIES AYANT AU MOINS UN POINT FIXE

Rappelons ceci : dire que le point O est un **point fixe** de la transformation f signifie que : $f(O) = O$, c'est-à-dire que O est sa propre image.

Considérons une isométrie f ayant au moins un point fixe O , et distincte de l'identité.

a/ Premier cas : f a un autre point fixe, A

Puisque f n'est pas l'identité, il existe un point, que nous noterons B , qui est distinct de son image B' . Alors, f étant une isométrie, et O et A étant fixes ($O = O'$, $A = A'$), nous obtenons : $OB = OB'$, $AB = AB'$, et donc (OA) est la médiatrice de $[BB']$.



Supposons que N soit un autre **point fixe** de f , $N = N'$, alors : $NB = NB'$, et donc N est sur (OA) .

D'autre part, soit P un point de (OA) d'image P' . Alors : $P'A = PA$, $P'O = PO$, donc si $P \neq P'$, (OA) est la médiatrice de $[PP']$. Mais la médiatrice de $[PP']$ ne peut passer par P . Donc $P = P'$.

En résumé, nous venons de voir que tout point fixe est sur (OA) , et que tout point de (OA) est fixe.

Donc si M est un point extérieur à (OA) , son image M' est distincte de M , et des égalités $M'A = MA$, $M'O = MO$, nous déduisons que (OA) est la médiatrice de $[MM']$: M' est donc le symétrique de M par rapport à OA . Il résulte de tout ceci que **f est la réflexion d'axe OA** .

b/ Deuxième cas : O est le seul point fixe de f

Prenons un autre point A et son image A' . Alors $OA' = OA$ et $A \neq A'$.

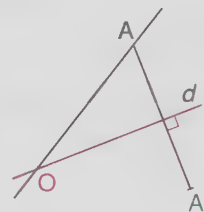
La médiatrice d de $[AA']$ passe par O .

Notons s la réflexion d'axe d .

La composée $f \circ s$ est une isométrie, car composée de deux isométries, et :

$$(s \circ f)(O) = s(f(O)) = s(O) = O$$

$$(s \circ f)(A) = s(f(A)) = s(A') = A.$$



$s \circ f$ a donc deux points fixes, et ce n'est pas l'identité car $f \neq i$.

D'après le premier cas, nous obtenons : $s \circ f = s'$, où s' désigne la réflexion d'axe (OA) . Nous en déduisons :

$$s^{-1} \circ s \circ f = s^{-1} \circ s', \text{ puis } i \circ f = s^{-1} \circ s', \text{ car } s^{-1} \circ s = i; \text{ puis : } f = s \circ s', \text{ car } i \circ f = f, \text{ } s^{-1} = s \text{ (paragraphe 1.4. b/).}$$

Or, la composée de deux réflexions d'axes sécants en O est une rotation de centre O (voir paragraphe 1.1. de « Pour prendre un bon départ »).

D'où, en résumé :

Une isométrie qui a un seul point fixe O est une rotation de centre O .
Une isométrie, distincte de l'identité, qui a au moins deux points fixes est une réflexion.

Remarque : il résulte de ceci qu'une isométrie qui a trois points fixes distincts est l'identité.

4.3. ISOMÉTRIES N'AYANT PAS DE POINT FIXE

Supposons que l'isométrie f n'ait aucun point fixe.

Donnons-nous un point O , son image O' , $O' \neq O$.

Notons t' la translation de vecteur $\overrightarrow{O'O}$. Alors :



$(t' \circ f)(O) = O$. L'isométrie $g = t' \circ f$ a donc au moins un point fixe O , c'est donc *a priori*, soit une rotation, soit une réflexion, soit l'identité.

Notons t la réciproque de $t' : t = (t')^{-1}$. t est la translation de vecteur $\overrightarrow{OO'}$. De $g = t' \circ f$, nous déduisons : $t \circ g = f$ (paragraphe 1.4. b/).

Si g est une rotation d'angle non nul, alors $t \circ g$ est une rotation (paragraphe 3.2.), et donc son centre est un point fixe de $t \circ g$, donc de f . Or f n'a pas de point fixe, donc g n'est pas une rotation d'angle non nul.

Si g est l'identité, alors f est la translation t . Si g est une réflexion s , alors $f = t \circ s$.

En résumé :

Si une isométrie f n'a pas de point fixe, alors :

- soit f est une translation,
- soit f s'écrit $t \circ s$, où t est une translation et s une réflexion.

Le théorème suivant résulte directement des résumés en **a/** et **b/**, et du fait que tout déplacement est une translation ou une rotation.

4.4. RÉCAPITULATION

THÉORÈME 3

Toute isométrie est :

- soit un déplacement,
- soit une réflexion,
- soit la composée $t \circ s$ d'une translation t de vecteur non nul et d'une réflexion s .

4.5. CONSÉQUENCES DU THÉORÈME 3 : PROPRIÉTÉS DES ISOMÉTRIES

1. Les isométries CONSERVENT, outre la distance :

- l'alignement, le parallélisme, l'orthogonalité,
- le contact,
- le barycentre,
- la mesure des angles géométriques,
- les aires.

2. Les isométries TRANSFORMENT :

- les droites en droites, les segments en segments,
- les cercles en cercles,
- les coniques en coniques de même excentricité.

Le fait que les isométries conservent le barycentre sera démontré au paragraphe 6.5. En effet, hormis pour le barycentre, nous savons que tous ces résultats sont vrais pour les translations, les réflexions, les rotations, et donc pour leurs composées. Or, toute isométrie est un déplacement, ou une réflexion, ou la composée d'une réflexion et d'une translation.

Remarque : si $f = t \circ s$, alors f ne conserve pas les angles orientés, puisque la réflexion s les change en leurs opposés et que la translation t les conserve.

Les isométries se divisent donc en deux classes disjointes : celles qui conservent les angles orientés, ce sont les **déplacements**, celles qui changent les angles orientés en leurs opposés, on dit que ce sont les **anti-déplacements**.

5

Décomposition d'isométries en produits de réflexions

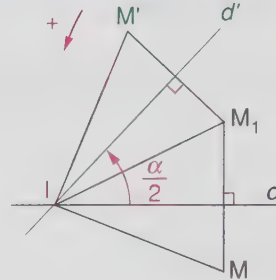
5.1. CAS D'UNE ROTATION

THÉORÈME 4

Toute rotation $r(I, \alpha)$ peut être considérée comme la composée de deux réflexions d'axes sécants en I , l'une de ces réflexions pouvant être arbitrairement choisie.

En effet, choisissons n'importe quelle droite d passant par I , et traçons la droite d' , image de la droite d par la rotation de centre I et d'angle $\frac{\alpha}{2}$. D'après le théorème 1, rappelé dans le paragraphe 1.1. de « Pour prendre un bon départ », nous obtenons $r = s_{d'} \circ s_d$.

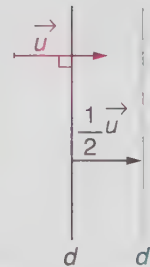
On dit que l'on a décomposé r en produit de deux réflexions.



5.2. CAS D'UNE TRANSLATION

THÉORÈME 5

Toute translation $t_{\vec{u}}$ peut être considérée comme composée de deux réflexions dont les axes sont orthogonaux à $\vec{u}$, l'une de ces deux réflexions pouvant être arbitrairement choisie.



En effet, choisissons arbitrairement une droite d orthogonale à $\vec{u}$, et traçons la droite d' , image de d par la translation de vecteur $\frac{1}{2} \vec{u}$. Alors, d'après le théorème 2, rappelé dans « Pour prendre un bon départ », nous obtenons : $t = s_{d'} \circ s_d$.

On dit que l'on a décomposé t en produit de deux réflexions.

5.3. CAS D'UNE ISOMÉTRIE

Bien que ce cas ne figure pas au programme, disons que toute isométrie est soit une réflexion, soit la composée de deux réflexions, soit la composée de trois réflexions. En effet, une isométrie f est :

- soit un déplacement, et alors d'après 5.1. et 5.2., f est la composée de deux réflexions,
- soit une réflexion,
- soit une composée $t \circ s$, où t est une translation et s une réflexion, et dans ce dernier cas, f est la composée de trois réflexions, d'après 5.2.

6

Isométries vectorielles

Notons $\mathcal{V}$ l'ensemble des vecteurs du plan.

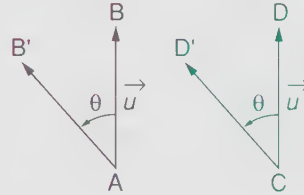
Lorsqu'on associe à chaque vecteur $\vec{u}$ un vecteur $\vec{u}'$ et **un seul**, on dit que l'on définit une fonction, ou une application de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}$. Voici un exemple.

6.1. EXEMPLE : ROTATIONS VECTORIELLES

a/ Définition d'une rotation vectorielle.

Donnons-nous d'abord un réel $\theta \neq 0$. À un vecteur $\vec{u}$, représenté par exemple par les points A, B , $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, associons le vecteur $\vec{u}' = \overrightarrow{AB'}$, tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB'}) = \theta$ et $AB' = AB$.

Pour être sûr que nous avons bien défini ainsi une fonction, ou une application : $\vec{u} \mapsto \vec{u}'$, il importe de vérifier que le vecteur $\vec{u}$ n'a qu'une image.



D'où le problème : si nous choisissons d'autres points C, D pour représenter le vecteur $\vec{u}$, $\vec{u} = \overrightarrow{CD}$, et que nous associons à $\vec{u}$ le vecteur $\overrightarrow{CD'}$, tel que $(\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CD'}) = \theta$, $CD' = CD$, obtiendrons-nous alors $\overrightarrow{CD'} = \overrightarrow{AB'}$? Nous allons voir que la réponse est oui, et donc que : $\vec{u} \mapsto \vec{u}'$ est bien une application.

En effet : $(\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{CD'}) = (\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{AB'}) + (\overrightarrow{AB'}, \overrightarrow{CD}) + (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{CD'}) = -\theta + 0 + \theta = 0$.

Donc les vecteurs $\overrightarrow{CD'}$ et $\overrightarrow{AB'}$ sont colinéaires et de même sens, et, puisqu'ils ont même norme (car $CD' = CD = AB = AB'$), ils sont égaux.

L'application $\vec{u} \mapsto \vec{u}'$ que nous venons de définir est appelée **rotation vectorielle d'angle θ** .

La rotation vectorielle d'angle θ associe à chaque vecteur $\vec{u}$ le vecteur $\vec{u}'$, tel que $(\vec{u}, \vec{u}') = \theta$, et $\|\vec{u}'\| = \|\vec{u}\|$.

Nous noterons $\tilde{r}$ (lire **r tilde**) une rotation vectorielle.

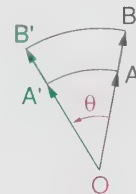
b/ Linéarité d'une rotation vectorielle $\tilde{r}$.

- Montrons que, pour tout réel λ , tout vecteur $\vec{u}$:

$$\tilde{r}(\lambda \vec{u}) = \lambda \tilde{r}(\vec{u}). \quad [1]$$

Posons $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = \lambda \vec{u}$, $\overrightarrow{OA'} = \tilde{r}(\vec{u})$, $\overrightarrow{OB'} = \lambda \overrightarrow{OA'} = \lambda \tilde{r}(\vec{u})$.

En utilisant la rotation de centre O et d'angle θ , il est facile de montrer que : $\overrightarrow{OB'} = \tilde{r}(\overrightarrow{OB})$, c'est-à-dire : $\lambda \tilde{r}(\vec{u}) = \tilde{r}(\lambda \vec{u})$.



- Montrons que, pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$: $\tilde{r}(\vec{u} + \vec{v}) = \tilde{r}(\vec{u}) + \tilde{r}(\vec{v})$. [2]

En effet, posons :

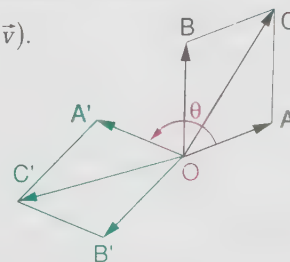
$$\overrightarrow{OA} = \vec{u}, \overrightarrow{OB} = \vec{v}, \quad \vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{OC}, \quad \overrightarrow{OA'} = \tilde{r}(\vec{u}), \quad \overrightarrow{OB'} = \tilde{r}(\vec{v}).$$

Par la rotation $r(O, \theta)$, le parallélogramme $OACB$ est transformé en parallélogramme $OA'C'B'$, donc :

$$\overrightarrow{OC'} = \tilde{r}(\overrightarrow{OC}) = \tilde{r}(\vec{u} + \vec{v}). \text{ Mais :}$$

$$\overrightarrow{OC'} = \overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} = \tilde{r}(\vec{u}) + \tilde{r}(\vec{v}),$$

d'où le résultat.



Parce qu'elle vérifie les conditions [1] et [2], on dit que $\tilde{r}$ est linéaire. Comme en outre, elle conserve la norme par définition, on dit que c'est une **isométrie vectorielle**.

6.2. CAS GÉNÉRAL ET AUTRE EXEMPLE

a/ De manière générale :

dire qu'une application $\tilde{f}$ de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}$ est une isométrie vectorielle signifie que :

- $\tilde{f}$ est linéaire, c'est-à-dire que, pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, tout réel λ :

$$\tilde{f}(\lambda \vec{u}) = \lambda \tilde{f}(\vec{u}), \quad \tilde{f}(\vec{u} + \vec{v}) = \tilde{f}(\vec{u}) + \tilde{f}(\vec{v}),$$

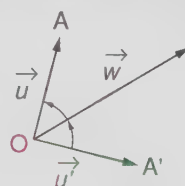
- et que f conserve la norme, c'est-à-dire que $\|\tilde{f}(\vec{u})\| = \|\vec{u}\|$.

b/ EXEMPLE : réflexion vectorielle.

Nous avons vu que la rotation vectorielle est une isométrie vectorielle.

Un autre exemple d'isométrie vectorielle est donné par la réflexion vectorielle par rapport à un vecteur donné $\vec{w}$, non nul. On la note $\tilde{s}_w$.

Cette réflexion vectorielle associe à chaque vecteur $\vec{u}$ le vecteur $\vec{u}'$ de même norme que $\vec{u}$, et tel que : $(\vec{u}', \vec{w}) = (\vec{w}, \vec{u})$.



Comme dans le cas de la rotation vectorielle, nous montrerons l'unicité du vecteur $\vec{u}$ ainsi défini, et la linéarité de l'application $\tilde{s}_w$.

6.3. PROPRIÉTÉS DES ISOMÉTRIES VECTORIELLES

a/ Il résulte directement de la définition d'une isométrie vectorielle que : la composée de deux isométries vectorielles est une isométrie vectorielle.

b/ Une isométrie vectorielle $\tilde{f}$ conserve le produit scalaire.

Il s'agit de montrer que pour tous vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \tilde{f}(\vec{u}) \cdot \tilde{f}(\vec{v}).$$

Nous savons que : $2(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2$.

Posons : $\vec{u}' = \tilde{f}(\vec{u})$, $\vec{v}' = \tilde{f}(\vec{v})$.

Alors $2(\vec{u}' \cdot \vec{v}') = \|\vec{u}'\|^2 + \|\vec{v}'\|^2 - \|\vec{u}' - \vec{v}'\|^2$.

$\tilde{f}$ étant linéaire : $\tilde{f}(\vec{u} - \vec{v}) = \tilde{f}(\vec{u}) - \tilde{f}(\vec{v}) = \vec{u}' - \vec{v}'$.

En outre, $\tilde{f}$ conserve la norme, donc $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u}' \cdot \vec{v}'$.

6.4. ISOMÉTRIE VECTORIELLE ASSOCIÉE À UNE ISOMÉTRIE PLANE

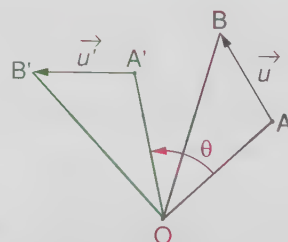
a/ À la rotation r de centre O et d'angle θ , nous pouvons associer la rotation vectorielle $\tilde{r}$ d'angle θ .

Alors, si $A' = r(A)$ et $B' = r(B)$, alors :

$$(\vec{AB}, \vec{A'B'}) = \theta,$$

et donc la rotation $\tilde{r}$ d'angle θ est telle que $\tilde{r}(\vec{AB}) = \vec{A'B'}$.

Il est clair alors que $\tilde{r}$ est aussi associée à toute autre rotation plane de centre distinct de O, mais d'angle θ .

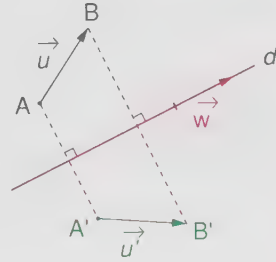


Remarquons que $\tilde{r}$ conserve le déterminant exprimé dans une base orthonormale directe. En effet dans ce cas, $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\vec{u}, \vec{v})$. Or $\tilde{r}$ conserve les normes, et aussi les angles de vecteurs puisqu'il en est ainsi de r .

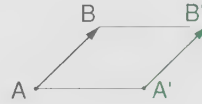
Donc : $\det(\vec{u}, \vec{v}) = \det(\tilde{r}(\vec{v}), \tilde{r}(\vec{v}))$.

b/ À la réflexion s d'axe d , nous pouvons associer la réflexion vectorielle $\tilde{s}_w$, où $\vec{w}$ est un vecteur directeur quelconque de d .

Si $A' = s(A)$, $B' = s(B)$, alors : $\tilde{s}_w(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{A'B'}$.



c/ À toute translation t , nous pouvons associer l'identité de $\mathcal{V}$, c'est-à-dire l'application $\vec{u} \mapsto \vec{u}$. En effet, si $A' = t(A)$, $B' = t(B)$, alors $\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$.



d/ De manière générale, si f est une isométrie $t \circ s$, où t est une translation, et s une réflexion, nous lui associerons l'isométrie vectorielle $\tilde{f}$, telle que, $\tilde{f} = \tilde{t} \circ \tilde{s}$ c'est-à-dire $\tilde{s}$, car $\tilde{t}$ est l'identité de $\mathcal{V}$.

Si $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, alors $\tilde{f}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{A'B'}$.

6.5. LES ISOMÉTRIES CONSERVENT LE BARYCENTRE

Dire qu'une application f conserve le barycentre signifie que l'image du barycentre est le barycentre des images affectées des mêmes coefficients.

Les isométries conservent le barycentre.

Démontrons d'abord qu'une isométrie f conserve le barycentre G de deux points (A, a) , (B, b) , $a + b \neq 0$. Il s'agit de démontrer que G' est le barycentre de (A', a) , (B', b) , avec $G' = f(G)$, $A' = f(A)$, $B' = f(B)$.

Le barycentre G de (A, a) , (B, b) est caractérisé par : $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b} \overrightarrow{AB}$ (chapitre 6, paragraphe 3.3.).

Notons $\tilde{f}$ l'isométrie vectorielle associée à f .

Alors : $\tilde{f}(\overrightarrow{AG}) = \tilde{f}\left(\frac{b}{a+b} \overrightarrow{AB}\right) = \frac{b}{a+b} \tilde{f}(\overrightarrow{AB})$, car f est linéaire.

Or, $\tilde{f}(\overrightarrow{AG}) = \overrightarrow{A'G'}$, $\tilde{f}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{A'B'}$, donc : $\overrightarrow{A'G'} = \frac{b}{a+b} \overrightarrow{A'B'}$, et cette égalité prouve que G' est le barycentre de (A', a) , (B', b) . Donc f conserve le barycentre de deux points.

En utilisant, le théorème du barycentre partiel, on montre immédiatement que f conserve le barycentre de 3 points, et de proche en proche, de n points.

7

Exercices résolus

7.1. UTILISATION D'UN DÉPLACEMENT TRANSFORMANT UN SEGMENT EN UN SEGMENT DE MÊME LONGUEUR

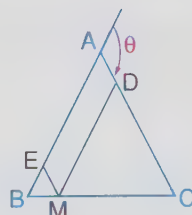
EXERCICE RÉSOLU 1

ABC est un triangle isocèle en A.
M est un point du segment [BC]. La parallèle à (AC) menée par M coupe (AB) en E, et la parallèle à (AB) menée par M coupe (AC) en D.
Démontrez que lorsque M décrit le segment [BC], la médiatrice de [ED] passe par un point fixe.

SOLUTION COMMENTÉE ■■■

1. Tirons quelques conséquences immédiates des hypothèses et de l'examen de la figure ci-contre.

{ MEAD est un parallélogramme ;
les triangles MEB et MDC sont isocèles.



2. Examinons la conclusion : il s'agit de trouver un point **fixe** de la figure, équidistant de E et D. *Comment faire ?* La présence de segments isométriques suggère d'utiliser la méthode suivante :

MÉTHODE

Pour démontrer que la médiatrice d'un segment [PQ] passe par un point **fixe**, il suffit de prouver que P est l'image de Q par une rotation dont le centre est un point **fixe** de la figure.

3. Comment dans cette voie, utiliser les hypothèses et leurs premières conséquences ?

Nous remarquons que $BE = EM = AD$, donc il existe un déplacement f qui transforme B en A et E en D ;

$$\begin{aligned} f : B &\longrightarrow A \\ E &\longrightarrow D. \end{aligned}$$

Or (BE) et (AD) ne sont pas parallèles, donc ce déplacement est une rotation r et l'angle θ de cette rotation est $(\overrightarrow{BE}, \overrightarrow{AD})$, c'est-à-dire $(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC})$, voir figure. Son centre O est sur la médiatrice de [AB], et de [ED]. Mais nous ne pouvons pas affirmer encore que O est fixe car E et D sont variables. Néanmoins, nous avons vu que A est l'image de B par r , et donc $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) = \theta$. Donc, O est le point de la médiatrice de [AB] tel que $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) = \theta$. Or cette médiatrice et θ sont fixes, donc O est fixe.

Remarque : O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. En effet, dans un triangle isocèle en A, et de sens direct, le centre O du cercle circonscrit est le point O de la médiatrice de [AB] tel que :

$$(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}) = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{AC}).$$

■■■■■■■■■■

7.2. DÉTERMINATION D'UNE COMPOSÉE D'ISOMÉTRIES

EXERCICE
RÉSOLU 2

ABC est un triangle rectangle isocèle tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = +\frac{\pi}{2}$.

I est le milieu du segment [BC].

On note R_B la rotation de centre B et d'angle $+\frac{\pi}{2}$, R_C la rotation

de centre C et d'angle $+\frac{\pi}{2}$, et T la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$.

Déterminez la transformation $S = R_C \circ T \circ R_B$.

(D'après Bac, 1989.)

SOLUTION COMMENTÉE ■■■

Remarque : la transformation S est parfaitement déterminée par sa définition : $S = R_C \circ T \circ R_B$. Il faut comprendre la question de l'énoncé de la manière suivante : « ne peut-on pas exprimer plus simplement la transformation S ? »

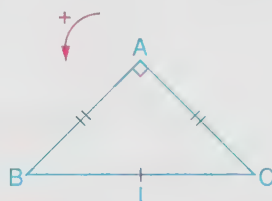
Étudions d'abord $T \circ R_B$.

R_B est une rotation d'angle non nul, donc $T \circ R_B$ est une rotation d'angle égal à celui

de R_B , c'est-à-dire $+\frac{\pi}{2}$ (voir paragraphe 3.2. du Cours).

Posons $r = T \circ R_B$. Nous pourrions penser à préciser le centre de r , mais dans ce cas, et très souvent lors de la composition de plusieurs déplacements, il est inutile de préciser ce centre.

En effet : $S = R_C \circ r$, et nous savons que la composée de deux rotations d'angles θ_1 et θ_2 est une rotation d'angle $\theta_1 + \theta_2$, lorsque $\theta_1 + \theta_2 \neq 0$. Or, ici $\theta_1 + \theta_2 = \pi$. Donc, $R_C \circ r$ est une rotation d'angle π , c'est-à-dire une symétrie centrale.



MÉTHODE

Pour trouver le centre d'une symétrie centrale, il suffit de trouver l'image M' d'un point M quelconque. Le centre est alors le milieu de $[MM']$. On choisit M de façon que M' soit facile à trouver.

Choisissons le cas simple $M = B$; nous obtenons immédiatement $R_B(B) = B$, donc : $(T \circ R_B)(B) = T(B) = C$, car T est la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$. Donc $r(B) = C$. Ensuite, $(R_C \circ r)(C) = R_C(C) = C$.

Le centre cherché est le milieu I de [BC].

En conclusion, S est la symétrie centrale de centre I.

■■■■■■■■■■

7.3. COMPOSÉE DE ROTATIONS

EXERCICE
RÉSOLU 3

A, I, J sont trois points non alignés, α est un réel donné, $\alpha \neq 0$.

R_I est la rotation de centre I et d'angle α .

B est l'image de A par R_I , C est l'image de J par R_I .

R_A est la rotation de centre A et d'angle α .

D est l'image de J par R_A .

Démontrez que ABCD est un parallélogramme.

SOLUTION COMMENTÉE ■■■

Examinons la conclusion : parmi toutes les façons connues pour démontrer qu'un quadrilatère est un parallélogramme, laquelle choisir, compte tenu des hypothèses ?

Par hypothèse, nous disposons de rotations de centres distincts, d'angles égaux. Or, « parallélogramme », évoque plutôt « translation ». Mais nous savons que la composée de deux rotations peut être une translation, lorsque la somme de leurs angles est égale à 0 (modulo 2π). Or, ce peut être le cas ici, car r_I^{-1} , r_A^{-1} ont un angle égal à $-\alpha$, et r_I , r_A un angle égal à α .

Un examen plus attentif des hypothèses montre que :

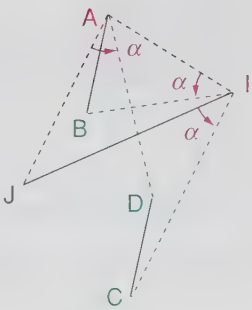
$$C \xrightarrow{R_I^{-1}} J \xrightarrow{R_A} D.$$

Donc D est l'image de C par $R_A \circ R_I^{-1}$.
Et $R_A \circ R_I^{-1}$ est une translation dont le vecteur est évidemment $\overrightarrow{CD}$. Notons t cette translation.

Si nous prouvons que son vecteur est aussi $\overrightarrow{BA}$, alors nous obtiendrons $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{BA}$, et nous pourrions conclure que ABCD est un parallélogramme. Cherchons donc $t(B)$.

$R_A \circ R_I^{-1}(B) = R_A(A) = A$. Donc $t(B) = A$, le vecteur de t est bien $\overrightarrow{BA}$, d'où le résultat annoncé.

■■■■■■■■■■



7.4. UN EXERCICE DE CONSTRUCTION

EXERCICE
RÉSOLU 4

d_1 et d_2 sont deux droites sécantes en I.
P et Q sont deux points donnés, tels que la droite (PQ) n'est parallèle ni à d_1 , ni à d_2 .
Construisez un point M sur d_1 et un point N sur d_2 , tels que $MN = PQ$, c'est-à-dire tels que MPQN soit un parallélogramme.

SOLUTION COMMENTÉE ■■■

MÉTHODE

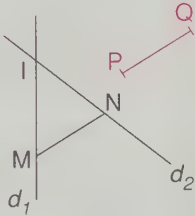
1. Première étape : analyse.

a/ On suppose le problème résolu, c'est-à-dire la construction effectivement réalisée.

b/ On repère comment les éléments à construire (points, droites, cercles...), sont liés aux éléments donnés.

c/ On essaie souvent de ramener le problème à la recherche de points clés dont la connaissance permet de construire la figure demandée.

En général, on détermine ces points comme intersections de lignes connues.



Étape a : supposons le problème résolu.

Étape b : M est sur d_1 , N sur d_2 , et $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$.

Étape c : cherchons à faire apparaître l'un des points à construire, N par exemple, comme intersection de deux lignes que nous pourrions facilement construire. N est sur d_2 . N est-il sur une autre droite fixe ? Puisque $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ}$, N est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{PQ}$, donc N est sur la droite d' image de d_1 par cette translation.

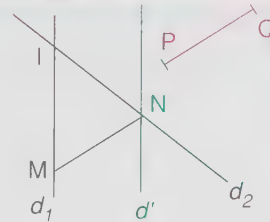
Donc, s'il existe deux points M et N répondant à la question, nécessairement N est l'intersection de d_2 et d' ; et M est l'intersection de d_1 et de la parallèle à (PQ) menée par N.

MÉTHODE

2. Deuxième étape : synthèse.

On indique la construction en justifiant que la figure faite répond aux conditions demandées. C'est la réciproque de la phase « analyse ».

Pour construire M et N, on procède ainsi : on trace la droite d'image de d_1 par la translation de vecteur $\overrightarrow{PQ}$. Puisque d_1 et d_2 sont sécantes, d' et d_2 le sont aussi. Notons N leur point d'intersection. Par N, menons la parallèle à (PQ) et notons M son point d'intersection avec d_1 , qui existe puisque (PQ) n'est pas parallèle à d_1 .



Alors les points M et N répondent à la question. En effet, M est sur d_1 , N sur d_2 , et puisque N est aussi sur d' , il est facile de voir, vu la définition de d' , que N est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{PQ}$, donc $MN = PQ$.

Remarque : dans certains cas, une **discussion** peut s'imposer dans la phase synthèse, pour savoir si la construction est possible ou non. Par exemple, si l'énoncé n'avait pas précisé : « PQ non parallèle à d_1 », nous aurions dû distinguer deux cas. Le cas : $d_1 \parallel (PQ)$, alors la construction demandée est impossible. Le cas : d_1 non parallèle à (PQ), qui a été traité.

■■■■■■■■■■

7.5. FONCTIONS COMPLEXES ET ISOMÉTRIES

EXERCICE
RÉSOLU 5

f est la fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par : $f(z) = z' = -jz + i$, où j est le complexe de module 1 et d'argument $\frac{2\pi}{3}$.

F est l'application du plan dans lui-même qui, à chaque point M d'axe z , associe le point M' d'axe $z' = f(z)$. Caractérisez F .

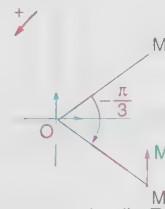
SOLUTION COMMENTÉE ■■■

MÉTHODE

Se ramener alors aux « interprétations géométriques » de fonctions complexes connues qui sont : $z \mapsto az$ avec $|a| = 1$; $z \mapsto b + z$.

Nous savons, (chapitre 2, paragraphe 11.), que $z \mapsto az$ « s'interprète géométriquement », comme la rotation de centre O, origine du repère, et d'angle $\arg a$; et que $z \mapsto b + z$, comme la translation dont le vecteur a pour affixe b .

Or, pour obtenir $z' = f(z)$, nous pouvons d'abord calculer $-jz$, puis ensuite ajouter i , c'est-à-dire que géométriquement, pour trouver M' (z'), nous pouvons d'abord placer le point $M_1 (-jz)$, puis de là obtenir M' (z') par la translation t dont le vecteur a pour affixe i .



Or, $M \mapsto M_1$ est la rotation r de centre O et d'angle $\arg(-j)$. Donc $F = t \circ r$.

Or, $\arg(-j) = \arg j + \pi = \frac{5\pi}{3} = -\frac{\pi}{3}$, donc F est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

Pour trouver son centre, il suffit de chercher le point fixe de F , donc le nombre z_0 tel que $z_0 = f(z_0)$. z_0 est alors l'axe du centre de la rotation F .

Or, $z_0 = f(z_0)$ équivaut à $z_0 = -jz_0 + i$, donc à $z_0 = \frac{i}{1+j}$.

TRAVAUX PRATIQUES D'APPLICATION

1

Présentation des problèmes de lieux géométriques

1.1. En quoi consiste, en général, un problème de lieu géométrique ?

On suppose que l'un des points d'une figure donnée se déplace sur une ligne **fixe** (L). Notons M ce point variable.

Alors, un autre point N qui dépend de M d'une manière *bien définie* par l'énoncé, varie également : lorsque l'on change la position de M, on change aussi la position de N.

Le problème est de savoir quelle ligne **fixe** est décrite alors par le point N. C'est cette ligne que l'on appelle le lieu géométrique du point N.

Remarque : notons f la fonction : $M \mapsto f(M) = N$.

Chercher le lieu de N, c'est chercher l'ensemble de tous les points $f(M)$, c'est donc chercher l'image par f de la ligne (L) sur laquelle M se déplace.

1.2. Les étapes du raisonnement

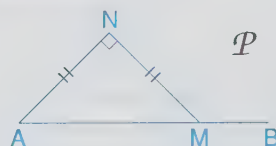
1. Étude directe : on cherche sur quelle ligne **fixe** se trouve le point N dont on cherche le lieu. Notons (L_1) cette ligne.

Pour mener à bien cette recherche, il est conseillé de bien distinguer les éléments **fixes** des éléments **variables**, puis de chercher les liens entre les éléments fixes et les variables.

2. Étude réciproque : on pose la question de savoir si le point N décrit toute la ligne (L_1) .

Cette ligne (L_1) n'est pas toujours décrite entièrement, comme le montre l'exemple étudié ci-contre, d'où la nécessité de l'étude réciproque, en général.

EXEMPLE

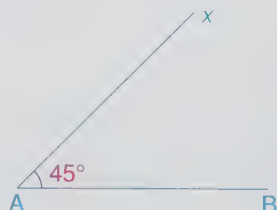


$[AB]$ est un segment donné, $AB = 1$.

M est un point de $[AB]$.

Dans le demi-plan $\mathcal{P}$ de frontière (AB) , on construit le triangle rectangle isocèle ANM.

Quel est le lieu géométrique du point N lorsque M décrit le segment $[AB]$?



A et B sont fixes.

AMN est rectangle et isocèle, donc $\widehat{MAN} = 45^\circ$.

Donc N est sur la demi-droite **fixe** Ax.

(L_1) est cette demi-droite.

Par hypothèse,

$$AN = \frac{\sqrt{2}}{2} AM.$$

La longueur AM variant de 0 à 1, AN varie de 0 à $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

N ne décrit que le segment $[AP]$ de Ax, avec $AP = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

1.3. Cas où l'étude réciproque est inutile

Lorsqu'on peut prouver que la fonction $f : M \mapsto N$, est une application connue, alors en général on peut connaître facilement $f(L)$, dont nous avons dit que c'était le lieu cherché (voir remarque en 1.1.).

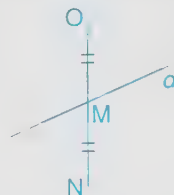
1. EXEMPLE 1

Ainsi, dans l'exemple étudié ci-dessus, nous aurions pu dire ceci : construisons la demi-droite Ax , alors N est le projeté orthogonal de M sur Ax . Dans ce cas, f est la projection orthogonale sur Ax . Le lieu de N est donc l'image par f du segment $[AB]$.

Dans cette solution, la réciproque est inutile, puisque l'on connaît directement $f(L)$.

2. EXEMPLE 2

d est une droite et O un point extérieur à d . M est un point de d et N est le symétrique de O par rapport à M . Quel est le lieu géométrique de N lorsque M décrit d ?



Nous remarquons que $\overrightarrow{ON} = 2\overrightarrow{OM}$. Donc N est l'image de M par l'homothétie de centre O , fixe et de rapport 2, fixe aussi. Le lieu de N est donc l'image de d par cette homothétie.

3. En résumé, À RETENIR

Il n'est pas nécessaire d'envisager l'étude réciproque lorsque l'on parvient à démontrer que le point N dont on cherche le lieu est l'image par une transformation usuelle du point M qui « bouge ».

2

Quelques problèmes de lieux géométriques

Les cinq exercices sont indépendants.

2.1. Exercice 1

$\mathcal{C}$ est un cercle de centre O . Δ est une droite extérieure à $\mathcal{C}$. P est un point de $\mathcal{C}$. On trace le cercle $\mathcal{C}'$ de centre P , de rayon PO . On note M et M' les points de contact des tangentes à $\mathcal{C}'$, parallèles à Δ .

Quel est le lieu de M , et quel est le lieu de M' , lorsque P décrit le cercle $\mathcal{C}$?

Indication : introduisez les points d'intersection Q et Q' de $\mathcal{C}$ et de son diamètre perpendiculaire à Δ .

2.2. Exercice 2

Deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$, de même rayon, sont sécants en A et A' .

On note O le centre de $\mathcal{C}$ et O' le centre de $\mathcal{C}'$.

Une droite passant par A coupe $\mathcal{C}$ en B et $\mathcal{C}'$ en C .

La perpendiculaire menée par B à (BC) et la parallèle menée par C à (OO') se coupent en M .

On note A_1 le symétrique de A par rapport à O , et A_2 le symétrique de A par rapport à O' .

1. Prouvez que : $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{A_2A_1} = 2\overrightarrow{O'O}$.

2. Quel est le lieu géométrique de M lorsque la droite (BC) pivote autour de A ?

2.3. Exercice 3

A est un point extérieur à une droite d . B est un point de d , et C est le point tel que ABC soit un triangle équilatéral direct.

Quel est le lieu géométrique du point C lorsque B décrit d ?

2.4. Exercice 4 : lieu des centres des rotations qui transforment une droite d en une droite d'

1. $a/$ r est la rotation de centre O et d'angle θ . d est une droite, et d' est son image par r . Prouvez que O est équidistant de d et de d' .

$b/$ Déduez-en une façon de construire l'image d'une droite donnée par une rotation donnée.

2. d et d' sont deux droites données. Trouvez le lieu des centres des rotations qui transforment d en d' .

2.5. Exercice 5

O et I sont deux points donnés. r est la rotation de centre O, d'angle $+\frac{\pi}{2}$.

Quel est le lieu des points M tels que M, I, M' soient alignés ?
 M' désigne l'image de M par r .

Indication : introduisez le point $I' = r(I)$.

3

Quelques problèmes de construction

Les quatre exercices sont indépendants.

3.1. Exercice 1

d est une droite, A un point extérieur. r et ℓ sont deux nombres strictement positifs.

Construisez un cercle de rayon r , passant par A, et tel que l'intersection de d et du disque soit une corde de longueur ℓ .

3.2. Exercice 2

ABC est un triangle non-isocèle tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = +\frac{\pi}{3}$ (modulo 2π).

d_1 est la demi-droite d'origine B et qui passe par A.

d_2 est la demi-droite d'origine C et qui passe par A.

On souhaite construire un point P sur d_1 et un point Q sur d_2 , de sorte que :
 $BP = CQ = PQ$.

Pour ce faire, on emploie la **MÉTHODE d'élimination d'une contrainte**, c'est-à-dire que l'on construit d'abord un point P sur d_1 et un point Q sur d_2 tel que $BP = CQ$.

1. Supposez que de tels points P et Q soient effectivement construits. Montrez alors que la médiatrice de $[PQ]$ passe par un point **fixe** O, et que le triangle OPQ est équilatéral.

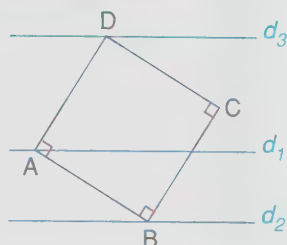
2. Construisez alors des points P et Q tels que P soit sur d_1 , Q sur d_2 , et : $BP = CQ = PQ$.

3.3. Construction d'un carré ayant trois sommets sur trois droites parallèles données

d_1, d_2, d_3 sont trois droites données, parallèles deux à deux.

Construisez un carré ABCD, de sorte que A soit sur d_1 , B sur d_2 , D sur d_3 .

Indication : le point A ayant été arbitrairement choisi sur d_1 , sur quelle droite, autre que d_3 , doit se trouver le point D ?

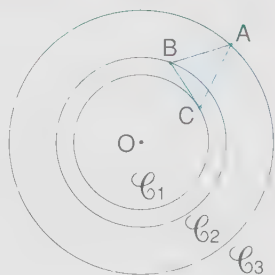


3.4. Construction d'un triangle équilatéral ayant ses sommets sur trois cercles concentriques donnés

$\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3$ sont trois cercles de centre O, de rayons respectifs r_1, r_2, r_3 .

Construisez un triangle équilatéral ABC de sorte que A soit sur $\mathcal{C}_3$, B sur $\mathcal{C}_2$, et C sur $\mathcal{C}_1$.

Indication : le point A ayant été arbitrairement choisi sur $\mathcal{C}_3$, sur quel cercle, autre que $\mathcal{C}_1$, doit se trouver le point C ?



4

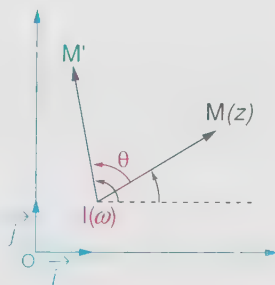
Rotations et nombres complexes

4.1. Forme complexe d'une rotation

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormal direct du plan orienté.

r est la rotation de centre le point I d'affixe ω et d'angle θ .

1. M est le point distinct de I et d'affixe z ; M' est l'image de M par r et z' est son affixe. Montrez que $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$. (Voyez le chapitre 1.)



On dit que : $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$ est la **forme complexe** de la rotation r .

2. Quelle est la forme complexe d'une rotation de centre O ?

4.2. Application : composée de deux rotations de centres distincts

$r_1(O_1; \theta_1), r_2(O_2; \theta_2)$ sont deux rotations données, telles que $\theta_1 + \theta_2 \neq 0$ (modulo 2π) et $O_1 \neq O_2$. Nous savons, paragraphe 3.1. du Cours, que $r_2 \circ r_1$ est une rotation d'angle $\theta_1 + \theta_2$. Notons r cette rotation.

Le but de l'exercice est de déterminer le centre de r , où $r = r_2 \circ r_1$.

Choisissez le repère orthonormal direct $(O_1; \vec{i}, \vec{j})$ tel que $\vec{i}$ et $\overrightarrow{O_1O_2}$ aient le même sens. Notez a l'abscisse de O_2 , M_1 l'image par r_1 d'un point M, z_1 l'affixe de M_1 , M' l'image par r_2 de M' , z' l'affixe de M' .

1. Écrivez la forme complexe de r_1 , puis celle de r_2 , enfin celle de $r_2 \circ r_1$.
2. Trouvez l'abscisse du centre I de $r_2 \circ r_1$.

Indication : I est le point fixe de $r_2 \circ r_1$.

3. Application : sur une figure, avec $O_1 O_2 = 5$ cm, placez le point I dans chacun des cas suivants :

$$a/ \theta_1 = \frac{\pi}{2}, \quad \theta_2 = \frac{\pi}{4};$$

$$b/ \theta_1 = -\frac{\pi}{3}, \quad \theta_2 = \frac{2\pi}{3}.$$

5 Composée de deux rotations

5.1. Préliminaire : construction du centre de la composée

$r_1(O_1; \theta_1)$ et $r_2(O_2; \theta_2)$ sont deux rotations de centres distincts, $O_1 \neq O_2$, et $\theta_1 + \theta_2 \neq 0$ (modulo 2π). Nous savons (paragraphe 3.1. du Cours) que $r_2 \circ r_1$ est une rotation d'angle $\theta_1 + \theta_2$.

Le but de ce paragraphe est de donner des méthodes pour déterminer le centre de $r_2 \circ r_1$, autrement que par l'utilisation des complexes (voir T.P. 4).

1. PREMIÈRE MÉTHODE

On trouve l'image A' par $r_2 \circ r_1$ d'un point A .

Alors, le centre de $r_2 \circ r_1$ est le point O de la médiatrice de $[AA']$, tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = \theta_1 + \theta_2$.

2. DEUXIÈME MÉTHODE

On trouve les images A' , B' par $r_2 \circ r_1$, de deux points A et B .

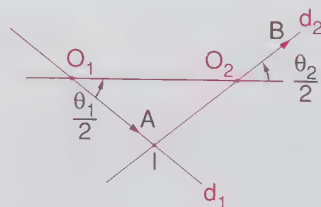
Alors $r_2 \circ r_1$ est la rotation qui transforme A en A' et B en B' . Alors, (voir le paragraphe 2.4. du Cours) si les médiatrices de $[AA']$ et $[BB']$ sont sécantes, leur point d'intersection est le centre cherché; et si elles sont parallèles, le centre est le point O de la médiatrice de $[AA']$ tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$.

3. TROISIÈME MÉTHODE

On décompose chacune des deux rotations en produit de deux réflexions en utilisant chaque fois la réflexion d'axe $(O_1 O_2)$.

Précisément, notons s la réflexion d'axe $(O_1 O_2)$ et décomposons r_1 en produit de deux réflexions : $s \circ s_1$ (voir paragraphe 5.). Alors, s_1 est la réflexion d'axe d_1 , où d_1 est la droite qui passe par O_1 et qui est dirigée par un vecteur $\overrightarrow{O_1 A}$ tel que :

$$(\overrightarrow{O_1 A}, \overrightarrow{O_1 O_2}) = \frac{\theta_1}{2}.$$



Décomposons ensuite r_2 en produit $s_2 \circ s$; s_2 est alors la réflexion dont l'axe est la droite d_2 qui passe par O_2 et qui est dirigée par un vecteur $\overrightarrow{O_2 B}$ tel que : $(\overrightarrow{O_1 O_2}, \overrightarrow{O_2 B}) = \frac{\theta_2}{2}$.

Puisque $\theta_1 + \theta_2 \neq 0$, modulo 2π , d_1 et d_2 sont sécantes.
Nous obtenons donc :

$$r_2 \circ r_1 = s_2 \circ s \circ s \circ s_1 = s_2 \circ s_1,$$

car $s \circ s$ est l'identité i , et : $s_2 \circ i \circ s_1 = s_2 \circ s_1$.

Or $s_2 \circ s_1$ est la rotation de centre I , où I est le point d'intersection de d_1 et de d_2 . (Théorème 1 de « Pour prendre un bon départ ».)

Donc I est le centre de $r_2 \circ r_1$.

Sur une figure placez deux points O_1 et O_2 , puis placez en utilisant la troisième méthode, le centre de la rotation $r_2 \circ r_1$, dans chacun des cas suivants :

a/ $\theta_1 = +\frac{\pi}{3}$, $\theta_2 = -\frac{2\pi}{3}$.

b/ $\theta_1 = \frac{\pi}{4}$, $\theta_2 = -\frac{\pi}{2}$.

5.2. Applications

Les deux questions suivantes sont indépendantes.

1. Condition pour que $r_2 \circ r_1 = r_1 \circ r_2$.

r_1 et r_2 sont des rotations d'angles non nuls.

Montrez que l'égalité $r_2 \circ r_1 = r_1 \circ r_2$, n'est possible qu'à la condition que r_1 et r_2 aient le même centre.

2. Lieu géométrique.

$[AB]$ est un segment de longueur 6 cm.

r_1 est la rotation de centre A et d'angle $+\frac{\pi}{3}$, r_2 est la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{3}$. Notons M_1 l'image d'un point quelconque M par r_1 , et M_2 l'image de M par r_2 .

a/ Montrez que la médiatrice de $[M_1 M_2]$ passe par un point fixe O .

MÉTHODE

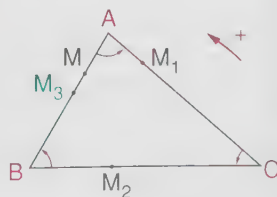
Démontrez que M_2 est l'image de M_1 par une rotation de centre fixe.

b/ Quel est le lieu géométrique des points M tels que $M_1 M_2 = 8$ cm ?

5.3. La boucle se refermera-t-elle ?

ABC est un triangle quelconque de sens direct.
 M est un point de (AB) .

M_1 est l'image de M par la rotation r_1 de centre A et d'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$; M_2 est l'image de M_1 par la rotation de centre C et d'angle $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$; M_3 est l'image de M_2 par la rotation r_3 de centre B et d'angle $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA})$.



Le but de l'exercice est de répondre à la question suivante :
Peut-on choisir M pour que $M_3 = M$?

1. Vérifiez que M_3 est l'image de M par la transformation $r_3 \circ r_2 \circ r_1$, puis montrez que cette transformation est une symétrie centrale s .

Indication : rappelons que pour le triangle ABC :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) = \pi.$$

2. Montrez que le centre I de s est sur (AB) . Pour cela vous pourrez montrer que $A' = s(A)$ est sur (AB) .
3. Placez le point A' . Placez I .
4. Concluez en répondant à la question initiale.

6

Un théorème attribué à Napoléon. Utilisation d'une rotation vectorielle

Nous allons présenter deux solutions de ce problème, l'une d'elles (6.2.) utilise les rotations vectorielles.

6.1. Le théorème de Napoléon : une première solution

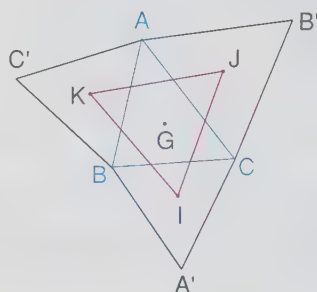
(En réalité, on ne peut affirmer avec certitude que Napoléon soit vraiment l'auteur du théorème qui suit.)

Sur les côtés d'un triangle quelconque ABC de sens direct, et à l'extérieur de celui-ci, on construit les triangles équilatéraux BCA' , CAB' , ABC' . On désigne par I , J , K les centres de gravité respectifs de ces triangles. G désigne le centre de gravité de ABC .

Attention : A , A' , G , I , ne sont pas alignés en général.

Alors IJK est un triangle équilatéral et G est son centre de gravité.

Voici une démonstration de ce résultat.



1. Montrez que : $\overrightarrow{AA'} = 3\overrightarrow{GI}$. Introduisez le milieu A_1 de $[BC]$.
2. Montrez que : $\overrightarrow{BB'} = 3\overrightarrow{GJ}$ et que $\overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GK}$.
3. a/ En utilisant la rotation de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{3}$, montrez que $BB' = CC'$ et que $(\overrightarrow{BB'}, \overrightarrow{CC'}) = \frac{2\pi}{3}$.
b/ Montrez que : $AA' = BB'$ et que $(\overrightarrow{AA'}, \overrightarrow{BB'}) = \frac{2\pi}{3}$, $(\overrightarrow{CC'}, \overrightarrow{AA'}) = \frac{2\pi}{3}$.
c/ Déduisez de 1. et 2. et des égalités $AA' = BB' = CC'$, que G est le centre du cercle circonscrit au triangle IJK .
d/ Déduisez que : $(\overrightarrow{GI}, \overrightarrow{GJ}) = (\overrightarrow{GJ}, \overrightarrow{GK}) = (\overrightarrow{GK}, \overrightarrow{GI}) = \frac{2\pi}{3}$.
4. Montrez enfin que IJK est un triangle équilatéral dont G est le centre de gravité.

6.2. Démonstration utilisant une rotation vectorielle

1. Montrez que : $\overrightarrow{AA'} = 3\overrightarrow{GI}$, $\overrightarrow{BB'} = 3\overrightarrow{GJ}$, $\overrightarrow{CC'} = 3\overrightarrow{GK}$ (voir questions 1. et 2. de 6.1.).

2. Notons $\tilde{r}$ la rotation vectorielle d'angle $+\frac{2\pi}{3}$.

a/ Vérifiez que $\tilde{r}(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{CB'}$, $\tilde{r}(\overrightarrow{CA}) = \overrightarrow{BC}$.

b/ Or $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA'}$. Déduisez du a/ que $\tilde{r}(\overrightarrow{AA'}) = \overrightarrow{BB'}$.

c/ Déduisez du 1. que :

$$\tilde{r}(\overrightarrow{GI}) = \frac{1}{3} \tilde{r}(\overrightarrow{AA'}) = \overrightarrow{GJ}.$$

d/ Montrez que $\tilde{r}(\overrightarrow{GJ}) = \overrightarrow{GK}$.

3. Notons f la rotation de centre G et d'angle $+\frac{2\pi}{3}$, et $\tilde{f}$ la rotation vectorielle associée à f .

a/ Vérifiez que : $\tilde{f} = \tilde{r}$.

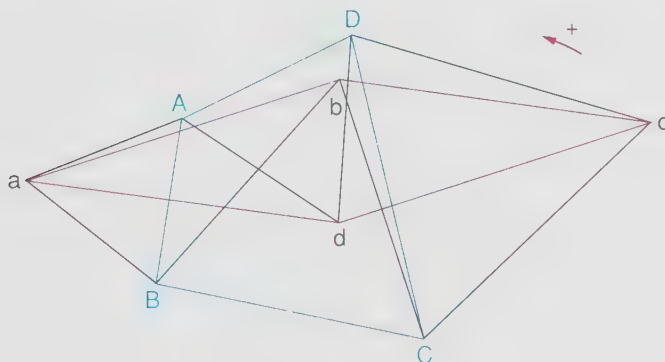
b/ Déduisez-en que : $f(I) = J$, $f(J) = K$, $f(K) = I$, puis que IJK est un triangle équilatéral dont G est le centre de gravité.

7

Composée de deux rotations (suite)

ABCD est un quadrilatère convexe direct. On construit, sur les côtés du quadrilatère, alternativement à l'extérieur et à l'intérieur, les triangles équilatéraux ABa , BCb , CDc et $DA d$.

On se propose de montrer que le quadrilatère $abcd$ est un parallélogramme.



r_1 est la rotation de centre A, d'angle $\frac{\pi}{3}$ et r_2 est la rotation de centre C,

d'angle $-\frac{\pi}{3}$.

1. Vérifiez que $r_2 \circ r_1$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{ab}$.

2. Quelle est l'image de d par $r_2 \circ r_1$?

3. Concluez.

8.1. Préliminaire : construction du centre de la rotation $t \circ r$

Nous avons vu au paragraphe 3.2. du Cours que lorsque t et r sont toutes deux distinctes de l'identité, l'isométrie $t \circ r$ est une rotation, d'angle θ , où θ est l'angle de r .

Voici trois méthodes pour construire le centre de $t \circ r$.

PREMIÈRE MÉTHODE

On cherche l'image A' par $t \circ r$ d'un point A .

Alors, le centre $t \circ r$ est le point O de la médiatrice de $[AA']$, tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OA'}) = \theta$.

DEUXIÈME MÉTHODE

On cherche les images A' et B' par $t \circ r$ de deux points A et B distincts.

$t \circ r$ est alors LE déplacement qui transforme A en A' et B en B' , donc la rotation qui transforme A en A' et B en B' , et nous avons vu au paragraphe 2.4. du Cours comment construire le centre de cette rotation.

TROISIÈME MÉTHODE

Décomposer t et r en produit de réflexions. Voyez l'exercice 79, page 280.

8.2. Application

ABC est un triangle; à l'extérieur de celui-ci, on construit les carrés BAHI, BDEC, CFGA et les parallélogrammes BIJD et CEKF.

On se propose de montrer que le triangle AJK est isocèle et rectangle en A.

On note r la rotation de centre B, d'angle $\frac{\pi}{2}$ et t la translation de vecteur $\overrightarrow{BD}$.

1. Montrez que la rotation $t \circ r$ est la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre, le centre O du carré BDEC.

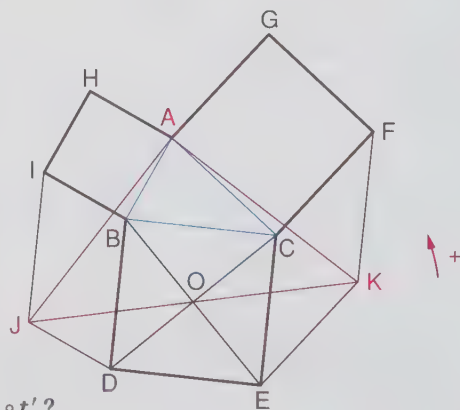
2. Quelle est l'image de A par $t \circ r$?

On note r' la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et t' la translation de vecteur $\overrightarrow{KF}$.

3. Quelle est l'image de K par $r' \circ t'$?

4. Montrez que $r' \circ t'$ est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

5. Déduisez de tout ce qui précède que le triangle AJK est rectangle et isocèle en A, et que O est le milieu de son hypoténuse.



9

Rectangles isométriques : une propriété surprenante

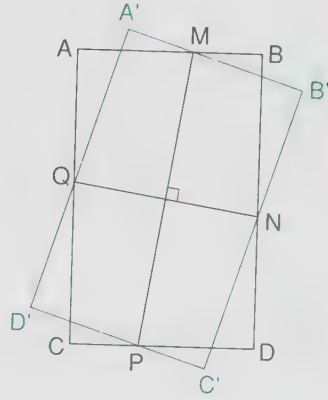
Deux rectangles ABCD et A'B'C'D' sont isométriques ($AB = A'B'$, $AD = A'D'$). Ils sont disposés de telle sorte que leurs frontières se coupent en huit points distincts, comme sur la figure suivante.

Alors, *quelle que soit cette disposition*, on obtient :

$$(MP) \perp (QN), \text{ et}$$

$$(\text{aire de l'intersection}) > \frac{1}{2} (\text{aire du rectangle}).$$

Voici une démonstration de ce résultat.



1. a/ Justifiez l'existence d'un déplacement qui transforme A en A' et B en B', et donc le rectangle ABCD en le rectangle A'B'C'D'.

b/ Pourquoi ce déplacement n'est-il pas une translation ? C'est donc une rotation r . Notons O son centre et α son angle.

2. a/ M est l'image par r d'un point M_1 de $[AB]$. Pourquoi ?

b/ N est l'image par r d'un point N_1 de $[BC]$. Pourquoi ?

c/ O est donc situé à l'intersection des médiatrices de $[MM_1]$ et de $[NN_1]$. Pourquoi ?

Remarquez que ces médiatrices sont perpendiculaires.

3. Déduisez de la question 2. que $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) = -\frac{\pi}{2}$.

Conseil : si besoin est, faites une figure auxiliaire représentant les triangles OM_1M et ON_1N .

4. a/ Démontrez de même que $(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}) = -\frac{\pi}{2}$, que $(\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OP}) = -\frac{\pi}{2}$, et que $(\overrightarrow{OQ}, \overrightarrow{OM}) = -\frac{\pi}{2}$.

b/ Déduisez-en que (MP) et NQ sont perpendiculaires.

5. a/ Montrez que $\text{aire}(MNPQ) > \frac{1}{2} BC \times AB$.

b/ Déduisez-en que l'aire de l'intersection des deux rectangles isométriques est supérieure (strictement) à la moitié de l'aire du rectangle ABCD.

10

Géométrie analytique : recherche de l'angle et du centre d'une rotation

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormal direct, l'unité de longueur est le centimètre.

1. Placez les points : A(1; 1), B(2; 2), C(-3; 3), D(-4; 4).

2. Justifiez l'existence d'un déplacement qui transforme A en C et B en D, et montrez que ce déplacement est une rotation.

3. Notons r cette rotation, I son centre, α son angle.
Donnez la valeur de α , et les coordonnées de I .

4. **a/** Justifiez l'existence d'une rotation qui transforme A en D et B en C .

b/ Précisez la valeur de son angle, et les coordonnées de son centre, que nous noterons J .

5. Notons K le milieu de $[AB]$ et L le milieu de $[CD]$. Montrez que le quadrilatère $IJKL$ est un carré.

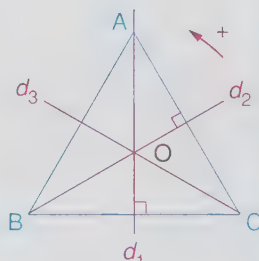
11

Détermination des isométries transformant une figure en une autre

Nous avons vu, au paragraphe 5.3. du Cours, que toute isométrie est soit une réflexion, soit la composée de deux, ou de trois réflexions. Pour trouver les isométries qui laissent globalement invariante une figure donnée, il suffit donc de trouver les réflexions qui la laissent globalement invariante, puis de les composer.

11.1. Isométries laissant globalement invariant un triangle équilatéral

ABC est un triangle équilatéral de sens direct. Le but de l'exercice est de trouver toutes les isométries f qui laissent ce triangle globalement invariant, c'est-à-dire telles que l'image de ABC par f soit le triangle ABC .



1. **a/** Montrez que si une isométrie f laisse ABC globalement invariant, alors nécessairement f transforme chaque côté en un côté.

b/ Déduez-en que f « transforme » l'ensemble $\{A, B, C\}$ en l'ensemble $\{A, B, C\}$.

2. Montrez que, réciproquement, si une isométrie f « transforme » $\{A, B, C\}$ en $\{A, B, C\}$, alors elle laisse globalement invariant le triangle ABC .

3. Montrez que si f est une isométrie qui laisse globalement invariant l'ensemble $\{A, B, C\}$, alors $f(O) = O$, où O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC .

4. Déduez de tout ce qui précède que si f est une isométrie qui laisse ABC globalement invariant, alors f est l'une des transformations suivantes : identité, $r\left(O; \frac{2\pi}{3}\right)$, $r\left(O; \frac{4\pi}{3}\right)$, s_{d_1} , s_{d_2} , s_{d_3} , où d_1 , d_2 , d_3 sont les trois médianes du triangle.

11.2. Isométries laissant globalement invariant un carré

$ABCD$ est un carré de sens direct, de centre O .

1. En vous inspirant du travail fait en 11.1., montrez qu'il existe huit isométries laissant ce carré globalement invariant.

2. Composez deux à deux ces isométries, présentez les résultats dans un tableau à double entrée, et vérifiez que chaque composée est bien une isométrie déjà trouvée.

12 Expression analytique de transformations

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormal.

12.1. Expression analytique d'une translation

1. t est la translation de vecteur $\vec{u}$ dont les coordonnées dans la base $(\vec{i}; \vec{j})$ sont $(a; b)$. On notera généralement $(x; y)$ les coordonnées d'un point quelconque M , et $(x'; y')$ les coordonnées de son image M' par M .

Montrez que :
$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b. \end{cases}$$

On dit que cette écriture est l'**expression analytique** de la translation t .

2. **Réciproquement**, f est une application du plan qui à chaque point $M(x; y)$ associe le point $M'(x', y')$ tel que : $x' = x + a$, $y' = y + b$.

f est-elle une translation ?

3. **Image d'une parabole.**

$\mathcal{P}$ est la parabole d'équation : $y = 2x^2 - x + 1$.

Déterminez son image par la translation de vecteur $(-2; 3)$.

12.2. Expression analytique d'une réflexion

d est la droite d'équation $ax + by + c = 0$. On note s la réflexion d'axe d . Le point M a pour coordonnées $(x_0; y_0)$.

a/ Quelles sont les coordonnées de $M' = s(M)$.

b/ Quelle est alors l'expression analytique de s ?

12.3. Expression analytique d'une rotation

1. En utilisant la forme complexe d'une rotation, voir le T.P.4., donnez l'expression analytique d'une rotation de centre $I(a; b)$ et d'angle θ .

2. Tracez l'**hyperbole** $\mathcal{H}$ d'équation : $y = \frac{x}{x-1}$, puis déterminez son

image $\mathcal{H}'$ par la rotation de centre $I(2; 2)$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

EXERCICES ET PROBLÈMES

Pour tester ses connaissances

Q.C.M.

Pour les exercices 1 à 6, une seule des réponses proposées est exacte.

1. t est une translation et r une rotation. Alors, $t \circ r$ est :
- a/ toujours, soit une rotation, soit une translation;
 - b/ parfois une réflexion;
 - c/ parfois la composée d'une translation t' et d'une réflexion p' .

2. ABCD est un carré de centre H. L'image de ce carré par une isométrie f :
- a/ n'est pas nécessairement un carré;
 - b/ est toujours un carré de centre $f(H)$;
 - c/ est toujours un carré, mais le centre du carré image n'est pas nécessairement $f(H)$.

3. ABCD est un carré tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = -\frac{\pi}{2}$.
 C' est le symétrique de C par rapport à B.
 R_A est la rotation de centre A, d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
 R_C est la rotation de centre C, d'angle $+\frac{\pi}{2}$.
 Alors, $R_A \circ R_C$ est :
- a/ une rotation;
 - b/ la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$;
 - c/ la translation de vecteur $\overrightarrow{AC'}$.

4. Dans un repère orthonormal, on place les points A(1; 1), B(2; 2), C(3; 3) et D(4; 2). Alors :
- a/ il n'existe pas de déplacement f tel que $f(A) = C$ et $f(B) = D$;
 - b/ il existe une rotation r et une seule, telle que $r(A) = C$, $r(B) = D$, et le centre de r est le point H(0; 4);
 - c/ il existe une rotation r et une seule telle que $r(A) = C$, $r(B) = D$, et le centre de r est le point I(1; 4).

5. r_1 et r_2 sont deux rotations de centres I_1 et I_2 , d'angles α_1 et α_2 , respectivement. On sait que $r_1 \circ r_2$ n'a pas de point fixe. Alors, on peut en déduire que :
- a/ $\alpha_2 = \alpha_1$;
 - b/ $\alpha_2 = -\alpha_1$;
 - c/ $I_1 = I_2$.

6. r est une rotation d'angle non nul, et s est une réflexion. Alors $s \circ r$:

- a/ est un déplacement;
- b/ n'est jamais un déplacement;
- c/ peut être, ou non, un déplacement.

Pour s'entraîner

COMPOSITION D'ISOMÉTRIES

Pour les exercices 7 à 11, ABCD est un carré de sens direct; dans chaque cas déterminez $h = g \circ f$ et construisez h (ABCD).

7. f est la réflexion d'axe (AB); g est la réflexion d'axe (CD).
8. f est la réflexion d'axe (AC); g est la réflexion d'axe (BD).
9. f est la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$; g est la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
10. f est la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{4}$;
 g est la rotation de centre C et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.
11. f est la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$;
 g est la réflexion d'axe (AC).

Pour les exercices 12 à 14, ABC est un triangle équilatéral de sens direct et de centre O; dans chaque cas déterminez $h = g \circ f$ et construisez h (ABC).

12. f est la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$;
 g est la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
13. f est la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$;
 g est la réflexion d'axe (AO).
14. f est la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$;
 g est la réflexion d'axe (AO).

Pour les exercices 15 à 17, ABCD est un carré de sens direct.

Décomposez la rotation h en deux réflexions $h = g \circ f$. Construisez les images de ABCD par f et h .

15. h est la rotation de centre A et d'angle plat ; f est la réflexion d'axe (AB).

16. h est la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$; g est la réflexion d'axe (AB).

17. h est la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$; f est la réflexion d'axe (AB).

ÉCRITURE COMPLEXE

Pour les exercices 18 à 22, donnez la fonction $F : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ qui, à l'axe de M, associe l'axe de $f(M)$.

18. f est la translation de vecteur $2\vec{i} - \vec{j}$.

19. f est la translation de vecteur $\vec{i}$.

20. f est la rotation de centre I d'axe $1 - 2i$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

21. f est la rotation de centre I d'axe $2 + i$ et d'angle $-\frac{\pi}{6}$.

22. f est la rotation de centre I d'axe $6 - 5i$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

Pour les exercices 23 à 28, identifiez la transformation qui au point d'axe z associe le point d'axe Z .

23. $Z = -z + 2i$.

24. $Z = -2z - 3 + 2i$.

25. $Z = iz + 1$.

26. $Z = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)z$.

27. $Z = \frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)z + 2i\sqrt{2}$.

28. $Z = -iz - 1 + 3i$.

29. Au point M d'axe z on associe M' d'axe Z par une rotation f d'angle $\frac{\pi}{2}$; on sait que $f(A) = B$ où A et B ont pour axes les nombres complexes $1 + i$ et $-2 + 2i$. Calculez Z en fonction de z .

30. Les points A et B ont pour axes les nombres complexes a et b . En utilisant des rotations d'angle droit :

Déterminez les axes des points C et D tels que ABCD soit un carré de sens direct.

Pour les exercices 31 à 34, trouvez la forme complexe de f , g et $h = g \circ f$; identifiez h .

31. f est la rotation de centre A $(2 - i)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$; g est la translation de vecteur $\vec{u}(1 - i)$.

32. f est la translation de vecteur $\vec{u}(1 - i)$; g est la rotation de centre A $(2 - i)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

33. f est la rotation de centre A $(1 - i)$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$; g est la rotation de centre B $(2 + i)$ et d'angle $\frac{3\pi}{4}$.

34. f est la rotation de centre A $(2 + i)$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$; g est la rotation de centre B $(-1 + 2i)$ et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

COMPOSITION (SUITE)

35. Dans le plan orienté, on considère le triangle ABC tel que $AB = AC$, $(\vec{AB}, \vec{AC}) = \frac{\pi}{2}$.

I, J et K sont les milieux respectifs de [BC], [CA] et [AB].

On note r la rotation de centre I et d'angle $\frac{\pi}{2}$

et t la translation de vecteur $\frac{1}{2}\vec{BC}$.

On pose : $f = r \circ t$ et $g = t \circ r$.

1. Trouvez l'image de K par f et celle de J par g .

Précisez la nature et les éléments caractéristiques de f et de g .

2. a/ Précisez la nature de la transformation $g \circ f^{-1}$.

b/ Quelle est l'image de A par $g \circ f^{-1}$? Caractérisez alors cette transformation.

c/ M est un point quelconque du plan, M₁ l'image de M par f et M₂ l'image de M par g . Construisez le quadrilatère ACM₂M₁.

- 36.** Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC de sens direct. A' , B' et C' sont les milieux respectifs de $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. Soit P le point tel que :

$$PA = PC \text{ et } (\overrightarrow{PA}, \overrightarrow{PC}) = \frac{\pi}{2}.$$

Soit Q le point tel que :

$$QA = QB \text{ et } (\overrightarrow{QA}, \overrightarrow{QB}) = -\frac{\pi}{2}.$$

a/ r_P est la rotation de centre P et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

r_Q est la rotation de centre Q et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

$s_{A'}$ est la symétrie de centre A' .

Étudiez l'image de A par la transformation :

$$f = r_Q \circ s_{A'} \circ r_P.$$

Que dire de f ?

b/ Quelle est la nature du triangle $A'PQ$?

Indication : introduisez le point P' , symétrique de P par rapport à A' .

- 37.** On choisit dans le plan un repère orthonormal direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On donne les points $A(\sqrt{3}, 0)$, $B(0, 3)$.

r_1 est la rotation de centre A , d'angle $\frac{\pi}{2}$.

r_2 est la rotation de centre B , d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

s est la réflexion d'axe (AB) .

Précisez la nature et les éléments géométriques de chacune des applications :

$$r_2 \circ r_1, \quad s \circ r_1, \quad r_2 \circ s.$$

- 38.** ABCD est un carré de sens direct :

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}.$$

r est la rotation de centre A , d'angle $\frac{\pi}{2}$.

t est la translation de vecteur $\overrightarrow{AC}$.

s est la symétrie de centre C .

- 1.** Déterminez la nature et les éléments caractéristiques des transformations :

$$f = t \circ r, \quad g = s \circ t \circ r, \quad f \circ g.$$

2. a/ Donnez les écritures complexes de f et g dans un repère orthonormal que vous préciserez.

b/ Quel est l'ensemble des points M tels que $f(M) = g(M)$?

Indication : $f(M) = g(M)$ équivaut à :

$$M = f^{-1}(g(M)).$$

- 39.** A , B , C , D sont des points distincts tels que :

$$AB = CD \text{ et } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = \frac{\pi}{2}.$$

On note I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[CD]$.

1. a/ Justifiez l'existence d'une rotation unique r telle que $r(A) = C$ et $r(B) = D$. Faites une figure sur laquelle vous placerez le centre E de r .

Précisez l'angle de la rotation r .

b/ On désigne par r' la rotation transformant A en D et B en C . Précisez son angle.

Placez le centre F de r' sur la figure précédente.

2. a/ Montrez que le quadrilatère EIFJ est un carré.

b/ Qu'est-ce que $r' \circ r^{-1}$?

c/ Qu'est-ce que $r' \circ r$?

d/ Qu'est-ce que $r' \circ r^{-1} \circ r'$?

EXERCICES DU BACCALAURÉAT

- 40.** Soit un triangle isocèle OAB ($OA = OB$) et un point P variable du segment $[AB]$, $P \neq A$ et $P \neq B$. La parallèle menée de P à la droite (OB) coupe la droite (OA) en A' et la parallèle menée de P à la droite (OA) coupe la droite (OB) en B' .

a/ Démontrez que $OA' = BB'$.

b/ Déduisez-en qu'il existe une rotation r telle que $r(O) = B$ et $r(A') = B'$ dont vous déterminerez l'angle en fonction de l'angle de vecteurs $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB})$.

Démontrez que $r(A) = O$. Déterminez alors le centre Ω de cette rotation.

c/ Montrez que les quatre points O , A' , B' , Ω sont cocycliques.

- 41.** Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A , B , C deux à deux distincts dont les affixes respectives sont les nombres complexes a , b , c .

1. M étant le point du plan d'affixe le nombre complexe z , exprimez, en fonction de z :

a/ l'affixe z' du point M' image de M par la rotation de centre A et d'angle de mesure $+\frac{\pi}{3}$ (en radians) ;

b/ l'affixe z'' du point M'' image de M par la rotation de centre A et d'angle de mesure $-\frac{\pi}{3}$ (en radians).

2. Que peut-on dire du triangle ABC si les nombres complexes a , b , c vérifient :

$$a/ \frac{c-a}{b-a} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3};$$

$$b/ \frac{c-a}{b-a} = \cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{3}.$$

3. Établissez que le triangle ABC est un triangle équilatéral si, et seulement si :

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ca.$$

42. Dans le plan orienté rapporté au repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points distincts A, B, C d'affixes respectives $a, b, -b$.

1. Donnez une condition nécessaire et suffisante vérifiée par a et b pour que les points A, B, C soient alignés.

On suppose dans la suite que les points A, B, C ne sont pas alignés et que la base $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est directe, c'est-à-dire que la mesure principale de $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est positive.

2. Sur les droites (AB) et (AC), à l'extérieur du triangle ABC, on construit les carrés AFGB et ACDE, et le parallélogramme AEHF de façon que les bases $(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AB})$ et $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE})$ soient directes.

a/ En considérant la rotation de centre A qui transforme C en E, montrez que l'axe du point E est :

$$e = -ib + a(1-i).$$

b/ Calculez les affixes f, h, d des points respectifs F, H, D en fonction de a et b .

3. Déduisez du 2. que :

a/ $FE = 2OA$ et que les droites (EF) et (OA) sont perpendiculaires.

b/ $BD = CH$ et que les droites (BD) et (CH) sont perpendiculaires.

43. ABCD désigne un rectangle du plan orienté, tel que :

$$AD = BC = a \quad \text{et} \quad AB = CD = 2a$$

et tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$. O est le point d'intersection des diagonales du rectangle.

Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, et

t la translation de vecteur $\frac{1}{4} \overrightarrow{AB}$.

1. Dessinez le rectangle ABCD et son image $A'B'C'D'$ par $f = t \circ r$ (avec $a = 4$ cm).

2. Expliquez pourquoi f est une rotation. Déterminez son angle. Donnez une construction de son centre Ω .

[Remarque : ce point Ω est utilisé par les ébénistes lorsqu'ils construisent une table rectangulaire que l'on peut faire pivoter autour de Ω puis déplier pour en doubler la surface, la table restant centrée sur son rectangle d'assiette.]

44. Dans le plan orienté, on donne trois points A, B, C, non alignés, se succédant dans le sens direct sur le cercle circonscrit au triangle qu'ils déterminent (on dit que le triangle ABC est « direct »).

1. On appelle O et O' les points tels que :

— le triangle BAO soit isocèle, rectangle en O et direct;

— le triangle ACO' soit isocèle, rectangle en O' et direct.

Faites la figure, en justifiant la construction des points O et O'.

2. Soit r la rotation de centre O dont l'angle a pour mesure $+\frac{\pi}{2}$.

Soit r' la rotation de centre O' dont l'angle a pour mesure $+\frac{\pi}{2}$.

a/ Déterminez l'image de B par $r' \circ r$.

b/ Déterminez la nature et les éléments caractéristiques de $r' \circ r$.

45. Dans le plan orienté P, on considère un triangle équilatéral ABC direct, c'est-à-dire tel que l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ ait pour mesure $\frac{\pi}{3}$.

On désigne par r_1 la rotation de centre A et d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$ et par r_2 la rotation de

centre B et d'angle de mesure $\frac{2\pi}{3}$.

Pour tout point M du plan, on pose $N = r_1(M)$, $M' = r_2(N)$. On pose $r = r_2 \circ r_1$.

1. a/ Soit D le symétrique de C par rapport à la droite (AB). Déterminez $r(D)$ et $r(B)$.

b/ Montrez que r est la symétrie centrale par rapport au milieu Ω de [BD].

2. a/ Montrez que l'ensemble Γ des points M du plan tels que M, N et M' soient alignés est un cercle passant par les points A et Ω (on pourra considérer l'angle $(M\Omega; MA)$).

b/ Prouvez que Γ admet [AD] pour diamètre et que le milieu I de [AB] appartient à Γ . Construisez le cercle Γ .

46. Dans P, plan orienté muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ deux points A et B ont pour coordonnées respectives $(-a; 0)$ et $(a; 0)$ (a réel strictement positif).

r_A est la rotation de centre A, d'angle de mesure $\frac{\pi}{3}$.

r_B est la rotation de centre B, d'angle de mesure $-\frac{2\pi}{3}$.

Pour tout point M du plan P, on note $M_A = r_A(M)$ et $M_B = r_B(M)$.

1. M étant un point donné de P, construisez les points M_A et M_B ; justifiez la construction.

2. Démontrez que le milieu du segment $[M_A M_B]$ est un point fixe indépendant du choix de M :

a/ en composant les applications r_A^{-1} puis r_B ;

b/ en utilisant les nombres complexes.

47. Dans le plan orienté, on considère deux points distincts A et B .

On note R_A et R_B les rotations de centres respectifs A et B et d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$.

Pour tout point M du plan, on note M_1 et M_2 les images respectives de M par R_A et R_B .

1. On considère la transformation

$$T = R_B \circ R_A^{-1}.$$

a/ Construisez le point C image du point A par T .

b/ Déterminez la nature et les éléments caractéristiques de T .

c/ Déduisez-en la nature du quadrilatère $M_1 M_2 CA$.

2. On suppose que le point M décrit le cercle (Γ) de diamètre $[AB]$.

a/ Déterminez et construisez l'ensemble (Γ_2) décrit par le point M_2 quand M décrit (Γ) .

b/ Soient ω et ω_2 les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[BC]$.
Comparez les vecteurs $\overrightarrow{\omega\omega_2}$ et $\overrightarrow{AC}$.

c/ Déterminez l'ensemble décrit par le point I , milieu de $[M_1 M_2]$ quand M décrit (Γ) .

48. Dans le plan complexe P rapporté au repère orthonormal $(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, l'unité graphique étant 4 cm, on définit l'application f qui au point d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = -jz + i$, où $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

1. Montrez que f admet exactement un point invariant Ω , dont on donnera l'affixe. Caractérisez géométriquement f .

2. On définit dans P la suite $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $\begin{cases} M_0 = O \\ \text{pour tout } n, M_{n+1} = f(M_n). \end{cases}$

a/ Construisez Ω , M_0 , M_1 , M_2 .

b/ Pour tout entier n , on note z_n l'affixe de M_n et on pose $Z_n = z_n - e^{i\frac{\pi}{6}}$.
Déterminez un nombre complexe a tel que, pour tout entier n , $Z_{n+1} = aZ_n$.
Mettez a sous forme trigonométrique et déterminez un entier p strictement positif tel que $a^p = 1$.

c/ Calculez Z_n puis z_n en fonction de n . Calculez Z_{1989} et placez M_{1989} sur le dessin.

49. Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC tel que $AB = AC$ et $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$ modulo 2π .

soient I , J , K les milieux respectifs de $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$.

On appelle R la rotation de centre I et d'angle

de mesure $\frac{\pi}{2}$ et T la translation de vecteur $\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

On pose : $f = R \circ T$ et $g = T \circ R$.

1. a/ Déterminez l'image de K par f et l'image de J par g .

b/ Précisez la nature et les éléments caractéristiques des applications f et g .

2. a/ Déterminez la nature de la transformation $g \circ f^{-1}$ (f^{-1} étant l'application réciproque de f).

b/ Cherchez l'image de A par $g \circ f^{-1}$ et caractérisez alors cette application.

c/ Soit M un point quelconque du plan, M_1 l'image de M par f et M_2 l'image de M par g . Quelle est la nature du quadrilatère $ACM_2 M_1$?

50. Dans le plan orienté, $ABCD$ et $AEFG$ sont deux carrés tels que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{2}$ (modulo 2π) et

$$(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AG}) = \frac{\pi}{2} \text{ (modulo } 2\pi).$$

On désigne par M , N , P et Q les milieux respectifs des segments $[BD]$, $[DE]$, $[EG]$, $[GB]$.

1. Montrez que $MNPQ$ est un parallélogramme.

2. Soit R la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Déterminez l'image du segment $[BE]$ par cette rotation R .

Déduisez-en que $MNPQ$ est un carré.

3. On désigne par ℓ et m les longueurs respectives des côtés des carrés $ABCD$ et $AEFG$. On pose $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE}) = \alpha$, $\alpha \in [0; 2\pi[$.

a/ Exprimez, en fonction de ℓ , m et α , la longueur des côtés du carré $MNPQ$.

b/ Déterminez α pour que l'aire du carré $MNPQ$ soit maximale.

51. On considère dans le plan orienté (P) deux points distincts A et B . Pour tout point M de (P) , on appelle M' l'image de M dans la rotation

r_A de centre A , d'angle $-\frac{\pi}{3}$ et M'' l'image de

M dans la rotation r_B de centre B , d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

1. De l'étude $r_B \circ (r_A)^{-1}$, déduisez que, pour tout point M de (P) , le milieu de $[M'M'']$ est un

point fixe J dont on démontrera qu'il appartient au centre de diamètre [AB].

2. Le but de cette question est de déterminer l'ensemble des points M pour lesquels M, M', M'' sont alignés.

a/ Pour tout point M de (P) distinct de A et B, démontrez que :

$$(\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{MM''}) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) - \frac{\pi}{2} \text{ (modulo } 2\pi).$$

b/ Déduisez-en l'ensemble des points M du plan tels que M, M', M'' soient alignés.

52. Dans le plan orienté, on suppose donnés deux points distincts O et I. On note r le quart de tour direct de centre O et s la symétrie centrale de centre I.

1. a/ Soit OJO'G le carré direct de centre I (c'est-à-dire que $(\overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{OG}) = \frac{\pi}{2}$).

Placez ces différents points sur une figure. (On prendra $OI = 4$ cm.)

b/ Prouvez que $s \circ r$ est la rotation de centre J d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

c/ Déduisez-en que J est le seul point du plan tel que $r(J) = s(J)$.

Désormais, pour tout couple (M, N) de points du plan, on note :

A et B les images de M par r et s ;

C et D les images de N par r et s .

2. Soit M un point donné distinct de J. On suppose que J est le milieu du segment [MN]. Démontrez que ABCD est un carré de centre G. Placez M et N et le carré ABCD sur la figure.

3. Le point M étant toujours donné distinct de J, on suppose inversement que N est tel que ABCD soit un carré. Prouvez que J est le milieu de [MN] et que G est le centre du carré ABCD (on introduira le milieu J' de [MN] et le centre G' du carré ; on comparera alors $r(J')$ et $s(J)$).

4. Soit r' le quart de tour direct de centre G. Prouvez que $r' \circ r = s$. Déduisez-en que sous les hypothèses de la question 2. le carré ABCD est direct (c'est-à-dire que $r'(A) = B$).

53. 1. Dans le plan orienté, on considère un carré PQRS de centre O pour lequel l'angle $(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ})$ est égal à $+\frac{\pi}{2}$. Soit ABCD un

parallélogramme tel que P, Q, R, S appartiennent respectivement aux segments [AB], [BC], [CD], [DA].

a/ Montrez que les droites (AD) et (DC) sont les images des droites (BC) et (AB) par la symétrie s de centre O. Montrez que O est le centre du parallélogramme ABCD.

b/ Soit Δ l'image de la droite (AB) par la rotation r de centre O, d'angle $(+\frac{\pi}{2})$.

Établissez que Q est commun aux droites (BC) et Δ .

2. Soit A, B, C, D les points de coordonnées respectives (1, -2), (3, 2), (-1, 2) et (-3, -2), dans un plan orienté rapporté au repère orthonormal (O; $\vec{i}, \vec{j}$).

En utilisant la question précédente, construisez un carré inscrit dans le parallélogramme ABCD (on donnera les coordonnées des sommets de ce carré).

LIEUX GÉOMÉTRIQUES

54. $\mathcal{C}$ est un cercle de centre O ; A et B sont deux points fixes de ce cercle. M est un point variable du cercle $\mathcal{C}$ et H est l'orthocentre du triangle MAB. Le cercle de centre M et de rayon MH et le cercle de centre H et de rayon MH se coupent en P et Q.

Quel est le lieu géométrique du point P et quel est le lieu géométrique du point Q, lorsque M décrit $\mathcal{C}$?

55. B est un point fixe d'une droite donnée d . C est un point variable de d . BMC est un triangle isocèle en M tel que le rayon de son cercle circonscrit a une longueur donnée constante : R.

a/ Quel est le lieu géométrique du point M lorsque C décrit d ?

b/ Quel est le lieu géométrique du point H, orthocentre de MBC, lorsque C décrit d ?

Indication. Vous pourrez utiliser le résultat suivant : le symétrique de l'orthocentre par rapport à l'un des côtés est sur le cercle circonscrit.

56. A et B sont deux points fixes d'un cercle $\mathcal{C}$, non diamétralement opposés. Un point M variable décrit le petit arc AB du cercle $\mathcal{C}$. Sur la demi-droite d'origine B et passant par M, on place le point N tel que $BN = AM$. Quel est le lieu géométrique de N lorsque M décrit l'arc AB ?

Indication. Utilisez la rotation de centre I, milieu de l'arc AB, qui transforme A en B.

57. $\mathcal{C}$ est un cercle fixe de centre O ; A et B sont deux points fixes de $\mathcal{C}$, non diamétralement opposés. Un point P variable décrit la droite (AB). On désigne par w le centre du cercle passant par P et tangent à $\mathcal{C}$ en A, et on désigne par w' le centre du cercle passant par P et tangent à $\mathcal{C}$ en B.

a/ Quel est le lieu de w et le lieu de w' lorsque P décrit (AB) ?

b/ Montrez que la médiatrice de $[ww']$ passe par un point fixe.

Pour chercher plus

- 58.** Un point A décrit un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et se projette orthogonalement en P sur un diamètre fixe $[BC]$. Sur la demi-droite d'origine O et passant par A , on place le point R tel que $OR = OP$. Quel est le lieu géométrique du point R lorsque A décrit $\mathcal{C}$?

PROBLÈMES DE CONSTRUCTION

- 59.** $\mathcal{C}$ est un cercle, D et Δ sont deux droites sécantes en I ; I est à l'intérieur du cercle $\mathcal{C}$. Trouvez M sur D et M' sur $\mathcal{C}$ tels que Δ soit la médiatrice de $[MM']$.

- 60.** $\mathcal{C}$ est un cercle de centre O et A un point de $\mathcal{C}$; B est le point tel que $\overrightarrow{OB} = \frac{3}{2} \overrightarrow{OA}$ et D la perpendiculaire à (OB) passant par B . Trouvez un point M de D et un point N de $\mathcal{C}$ tels que $OAMN$ soit un parallélogramme.

- 61.** O_1AO_2 est un triangle rectangle en A avec $O_1A = 2$ cm, $O_2A = 6$ cm. $\mathcal{C}_1$ est le cercle de centre O_1 et de rayon 2 cm, $\mathcal{C}_2$ est le cercle de centre O_2 et de rayon 3 cm. Trouvez une droite Δ parallèle à (O_2A) sur laquelle $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ découpent des cordes de même longueur.

- 62.** Construisez un quadrilatère $ABCD$, connaissant les longueurs et les directions des diagonales $[AC]$ et $[BD]$ et les longueurs AB et CD .

Indication. Vous pourrez placer $[AC]$, puis utiliser la translation de vecteur $\overrightarrow{BD}$.

- 63.** d et d' sont deux droites données, A est un point donné de d , et A' un point donné de d' . ℓ est un réel donné, $\ell > 0$. Construisez deux points M et M' , M sur d et M' sur d' , tels que : $AM = A'M'$ et $MM' = 2\ell$.

- 64. Inscrire un carré dans un parallélogramme**
 $ABCD$ est un carré, de centre O , tel que $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = +\frac{\pi}{2}$.

1. On construit un parallélogramme $PQRS$ de sorte que A appartienne à $[PQ]$, B appartienne à $[QR]$, C à $[RS]$ et D à $[SP]$.

Montrez, en utilisant la symétrie de centre O , que O est le centre du parallélogramme $PQRS$.

2. On note Δ l'image de (PQ) par la rotation de centre O et d'angle $+\frac{\pi}{2}$. Montrez que, sauf dans un cas à préciser, B est l'intersection de Δ et de (QR) .

3. On donne un parallélogramme $P'Q'R'S'$ de centre O' . Indiquez un procédé de construction pour inscrire un carré dans ce parallélogramme.

- 65.** $[AB]$ est un segment de longueur a , M est un point variable de ce segment. On construit d'un même côté de la droite (AB) les triangles équilatéraux PAM et QMB ; C est le point d'intersection des droites (AP) et (BQ) ; I est le milieu de $[AC]$ et J celui de $[BC]$.

1. Quel est l'ensemble des milieux O de $[PQ]$ lorsque M décrit le segment $[AB]$?

2. Démontrez qu'il existe une rotation qui transforme P en Q et I en J . Déduisez-en que la médiatrice de $[PQ]$ passe par un point fixe F . Que représente F pour le triangle ABC ? Quel est le centre du cercle circonscrit au triangle MPQ ?

3. K désigne le centre du cercle circonscrit au triangle PQC . Quel est l'ensemble des points K lorsque M décrit le segment $[AB]$?

4. Construisez les points P et Q dans chacun des cas suivants :

- a/ on connaît la direction de la droite (PQ) ;
b/ on connaît la longueur du segment $[PQ]$.

ÉTUDE DE FIGURES

- 66.** On donne deux cercles égaux de centres O et O' tangents extérieurement en un point A . Un point M décrit le cercle (O) et un point M' décrit (O') de façon que $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{O'M'}) = +\frac{\pi}{2}$.

1. Montrez que la médiatrice de $[MM']$ passe par un point fixe w .

2. Soit w' le symétrique de w par rapport à (OO') . On fait correspondre à M le point M_1 dans la rotation de centre w' et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. Montrez que $(M'M_1)$ passe par un point fixe.

3. Démontrez que l'aire du triangle $w'M'M$ garde une valeur constante.

- 67.** ABC est un triangle de sens direct; M, N, P sont les sommets des triangles rectangles, isocèles, directs MCB, NAC et PBA; I, J, K sont les milieux de [BC], [CA], [AB], R et S sont les milieux de [AM] et [NP].

a/ Démontrez que les triangles INP, KMN et JMP sont rectangles isocèles. Déduisez-en que les segments [AM], [BN], et [CP] sont respectivement égaux et perpendiculaires à [NP], [PM] et [MN] et qu'ils sont concourants.

b/ Démontrez que JRKS est un carré de centre le milieu de [AI].

c/ On construit le parallélogramme NAPQ. Démontrez que BMCQ est un carré, puis que les triangles ABC et MNP ont même centre de gravité.

- 68.** Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$, A et B sont les points de coordonnées respectives $(0, \sqrt{3})$ et $(1, 0)$; r_1

est la rotation de centre A, d'angle $\frac{\pi}{6}$; r_2 est

la rotation de centre B, d'angle $\frac{\pi}{3}$.

On désigne par f la composée $r_2 \circ r_1$.

1. a/ En utilisant les nombres complexes, précisez la nature et les éléments caractéristiques de f .

b/ A' et B' étant les images de A et B par f , démontrez analytiquement que la droite (A'B') est la médiatrice du segment [AB].

2. a/ En utilisant des arguments géométriques, démontrez que A' est sur la médiatrice de [AB].

b/ On désigne par B₁ l'image de B par r_1 . Démontrez que B' est le centre du cercle passant par A, B, B₁.

c/ Déduisez-en que la droite (A'B') est la médiatrice de [AB].

- 69.** ABCD est un parallélogramme de sens direct.

a/ On construit des carrés de sens direct ADD₁A₁, DCC₂D₂, CBB₁C₁ et BAA₂B₂.

Quelle est la nature du quadrilatère dont les sommets sont les centres de ces carrés?

b/ On construit des carrés de sens indirect ADD₁A₁, DCC₂D₂, CBB₁C₁ et BAA₂B₂.

Quelle est la nature du quadrilatère dont les sommets sont les centres de ces carrés?

70*. Problème de minimum

ABC est un triangle; D et E sont deux points du segment [BC].

Trouvez les points M sur [AB] et N sur [AC] tels que la somme DM + MN + NE soit minimale.

Indication : traitez d'abord le cas où l'angle A est le plus petit des trois angles du triangle.

RECHERCHE D'ISOMÉTRIES

71. Isométries conservant deux droites

d et d' sont deux droites données.

Trouvez tous les déplacements qui laissent globalement invariante la figure formée par ces deux droites dans chacun des cas suivants :

a/ d et d' sont distinctes et parallèles.

b/ d et d' sont perpendiculaires.

c/ d et d' sécantes, et *non* perpendiculaires.

72. Isométries conservant un losange

ABCD est un losange, *non* carré. Trouvez toutes les isométries qui laissent ce losange globalement invariant.

Problèmes de synthèse

UTILISATION DE PLUSIEURS MÉTHODES

73. Un énoncé du baccalauréat

Dans le plan on donne deux droites parallèles D et Δ , et un point A n'appartenant à aucune de ces droites.

Construisez un triangle ABC vérifiant simultanément les conditions suivantes :

— ABC est rectangle en A.

— ABC est isocèle.

— B est sur D et C est sur Δ .

Précisez le nombre de solutions au problème posé.

(Toute méthode sera acceptée; géométrie, analytique, utilisation de nombres complexes, ...)

1. Méthode élémentaire

Notez H et K les projetés orthogonaux de A sur D et Δ , respectivement, montrez que AH = KC, AK = BH, et traitez l'exercice.

2. Méthode analytique

Choisissez Δ pour axe des abscisses d'un repère orthonormal dont l'axe des ordonnées passe par A et traitez l'exercice en utilisant les relations entre les longueurs AB, BC, CA.

3. Utilisation des nombres complexes

Choisissez un repère orthonormal direct d'origine A dont l'axe réel est perpendiculaire à Δ ; notez b l'affixe de B, c celle de C, montrez que $b = ic$ ou $c = ib$, et terminez l'exercice.

4. Utilisation de rotations

Utilisez des rotations de centre A et d'angles droits pour traiter l'exercice.

74. On donne deux droites sécantes D et Δ . Traitez chacune des deux questions de deux façons : analytiquement (choisissez bien le repère), puis en utilisant une transformation.

1. On donne un point I dans le plan ; construisez A sur D et B sur Δ tels que I soit le milieu de $[A, B]$.

2. On donne un vecteur $\vec{u}$ du plan ; construisez A sur D et B sur Δ tels que $\vec{AB} = \vec{u}$.

75. Traitez par **deux méthodes différentes au moins** l'exercice :

On donne deux droites perpendiculaires D et Δ et un point A . Comment peut-on construire un triangle équilatéral ABC tel que $B \in D$ et $C \in \Delta$?

76. Traitez par **deux méthodes différentes au moins** l'exercice :

On donne un cercle $\mathcal{C}$, une droite Δ , et un point A .

Comment peut-on construire un triangle équilatéral ABC tel que B soit sur le cercle $\mathcal{C}$ et que C soit sur Δ ?

77. H est le milieu de l'hypoténuse BC d'un triangle rectangle isocèle ABC . Un point M de la droite (BC) se projette orthogonalement en P et Q sur les droites (AB) et (AC) . Le but est de montrer que HPQ est rectangle isocèle.

1. Traitez l'exercice en utilisant une rotation.

2. Traitez l'exercice par la géométrie analytique ou à l'aide des nombres complexes.

78. 1. ABC est équilatéral de sens direct, et M est un point du segment $[BC]$. On construit à l'extérieur de ABC les triangles équilatéraux BME et CMF . On note G, G_1, G_2 les centres de gravité des triangles ABC, BME et CMF .

a/ On note R_1 la rotation de centre G_1 et d'angle $-\frac{2\pi}{3}$ et R_2 la rotation de centre G_2 et

d'angle $-\frac{2\pi}{3}$.

Montrez que $R_2 \circ R_1$ est la rotation de centre G et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

b/ En décomposant R_1 et R_2 en réflexions montrez que le triangle GG_1G_2 est équilatéral.

2. On note $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

a/ Précisez dans quel repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ les points A, B et C ont pour affixes $\ell, \ell j$ et ℓj^2 où ℓ est un réel strictement positif.

b/ P est un point quelconque du plan ; on note p son affixe ; on note Q l'image de P par la rotation de centre C et d'angle $-\frac{\pi}{3}$ et R l'image

de P par la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Enfin H_1 et H_2 sont les autres de gravité des triangles BPQ et CPR .

Calculez les affixes de H_1 et H_2 en fonction de ℓ et p et montrez que OH_1H_2 est un triangle équilatéral.

AUTRES SITUATIONS

79. Centre d'une rotation $t \circ r$

t est la translation de vecteur $\vec{u}$, $\vec{u} \neq \vec{0}$.

r est la rotation de centre O , d'angle θ , $\theta \neq 0$. Le but de l'exercice est de construire le centre I de la rotation $t \circ r$, en décomposant t et r en produit de réflexions.

d est la droite qui passe par O et qui est orthogonale à $\vec{u}$; s est la réflexion d'axe d . Soit $\vec{v}$ un vecteur directeur de d .

1. d_1 est la droite qui passe par O et qui est dirigée par un vecteur $\vec{w}$ tel que $(\vec{w}, \vec{v}) = \frac{\theta}{2}$.

Vérifiez que $r = s \circ s_{d_1}$.

2. d_2 est l'image de d par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\vec{u}$.

a/ Vérifiez que $t = s_{d_2} \circ s$.

b/ Vérifiez que $t \circ r = s_{d_2} \circ s_{d_1}$.

c/ Vérifiez que d_1 et d_2 sont sécantes et que leur point d'intersection est le centre de la rotation $t \circ r$.

80. Utilisation de symétries centrales dans des problèmes de construction

Partie A. Préliminaire

1. Pourquoi la composée de trois symétries centrales est-elle une symétrie centrale ?

2. Pourquoi la composée de quatre symétries centrales est-elle une translation ?

Partie B. Problèmes de construction

Utilisons les résultats du A. pour étudier les trois situations ci-dessous, indépendantes les unes des autres.

1. ABC est un triangle et $f = s_C \circ s_B \circ s_A$ est la composée des symétries de centres A, B et C . I est le centre de la symétrie f .

On pose : $J = s_A(I)$, $K = s_B(J)$.

Que pouvez-vous dire des triangles IJK et ABC ; déduisez-en une construction du point I .

2. Construction d'un pentagone connaissant les milieux de ses côtés.

On donne cinq points A, B, C, D, E et on cherche un pentagone $IJKLM$ tel que A, B, C, D et E soient les milieux respectifs de $[IJ], [JK], [KL], [LM]$ et $[MI]$.

a/ Si on a une solution, que pouvez-vous dire de l'image de I par la composée :

$$f = S_E \circ S_D \circ S_C \circ S_B \circ S_A ?$$

b/ Construisez alors le pentagone IJKLM.

3. Construction d'un quadrilatère connaissant les milieux de ses côtés.

On donne quatre points A, B, C, D et on cherche un quadrilatère IJKL tel que A, B, C, D soient les milieux respectifs de [IJ], [JK], [KL] et [IL].

Montrez que cela n'est possible que si ABCD est un parallélogramme et qu'alors il y a une infinité de solutions.

81. Transformations et famille de courbes

f est la fonction définie par : $f(x) = x + \frac{1-e^x}{1+e^x}$.

1. Étudiez la fonction f et tracez sa courbe représentative $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. **Conseil :** f est impaire.

2. Pour tout réel a , on définit les applications S_a et T_a du plan dans lui-même : au point M de coordonnées $(x; y)$ dans $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on associe les points $S_a(M)$ de coordonnées $(-x + 2a; -y + 2a)$, et $T_a(M)$, de coordonnées $(x + a; y + a)$.

a/ Montrez que S_a est une réflexion dont vous préciserez l'axe, et T_a une translation dont vous préciserez le vecteur.

b/ Vérifiez que, pour tout réel a :

$$S_a = T_a \circ S_a \circ T_a^{-1}.$$

3. On note $\mathcal{C}_a$, l'image de $\mathcal{C}$ par T_a .

a/ Utilisez la question B.2. pour montrer que le point I $(a; a)$ est centre de symétrie de $\mathcal{C}_a$.

b/ Montrez qu'il existe une fonction f_a , telle que l'équation de $\mathcal{C}_a$ soit $y = f_a(x)$. Vérifiez que :

$$f_a(x) = a + f(x - a).$$

82. Transformations et isométries définies analytiquement

Dans tout le problème, on travaille dans un repère orthonormal fixé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Soit a, b, c, d quatre nombres réels. On considère les deux systèmes de relations :

$$(1) \begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ b^2 + d^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad (2) \begin{cases} |ad - bc| = 1 \\ a^2 = d^2 \\ b^2 = c^2. \end{cases}$$

Montrez, soit algébriquement, soit trigonométriquement (en remarquant que, si $\alpha^2 + \beta^2 = 1$, il existe au moins un angle θ tel que $\alpha = \cos \theta$ et $\beta = \sin \theta$), que (1) implique (2). La réciproque est-elle vraie ?

2. On considère la transformation ponctuelle $\mathcal{R}$ qui, à chaque point $m(x, y)$, fait correspondre le point $M'(X', Y')$ tel que :

$$X' = \frac{4}{5}x - \frac{3}{5}y$$

$$Y' = \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y.$$

a/ Quels sont les points fixes de $\mathcal{R}$?

b/ Montrez que $Om = OM'$ et que, si P' est l'image de p , on a toujours $pm = P'M'$.

c/ Calculez, à $2k\pi$ près, l'angle de vecteurs $(\vec{Om}, \vec{OM'})$ et précisez la nature de $\mathcal{R}$.

3. Dans les mêmes conditions, on considère la transformation $\mathcal{S}$ qui à chaque point $m(x, y)$ fait correspondre le point $M''(X'', Y'')$ tel que :

$$X'' = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y$$

$$Y'' = \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y.$$

a/ Quels sont ses points fixes ?

b/ Montrez que $\mathcal{S}$ est une symétrie axiale.

4. Plus généralement, tout système de relations :

$$\begin{cases} X = ax + by \\ Y = cx + dy, \end{cases}$$

où a, b, c, d sont des nombres réels vérifiant l'inégalité $ad - bc \neq 0$, définit une transformation ponctuelle $\mathcal{T}$ par laquelle tout point $m(x, y)$ a pour image $M(X, Y)$.

a/ Recherchez un ensemble de conditions nécessaire et suffisante entre les nombres a, b, c, d pour que la transformation correspondante soit une isométrie, c'est-à-dire conserve les distances (M et P étant les images de m et p , on a $mp = MP$ quels que soient m et p).

b/ À quelle condition cette isométrie est-elle un déplacement ?

c/ À quelle condition est-elle une symétrie axiale ?

5. On se propose maintenant d'étudier la transformation $\mathcal{T}'$ particulière définie par :

$$\begin{cases} X = x \\ Y = 3x + 2y. \end{cases}$$

a/ A-t-elle des points fixes ?

b/ Quelle est la figure transformée, soit d'une droite parallèle à Ox , soit d'une droite parallèle à Oy ?

c/ Donnez un procédé graphique simple de construction de l'image M d'un point quelconque m .

T.P. d'approche	282
Cours	283
T.P. d'application	291
Exercices et problèmes	297

Des rappels sur l'homothétie se trouvent dans le lexique, page 316.

TRAVAUX PRATIQUES D'APPROCHE



Composition d'une homothétie et d'une rotation de même centre

1. Généralités

h est l'homothétie de centre O de rapport k positif, r est la rotation de centre O et d'angle θ . On note f la transformation $r \circ h$.

1. Vérifiez que si M' est l'image par f d'un point M , alors :

$$\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}, \quad (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \theta.$$

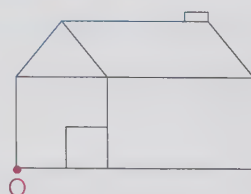
2. Vérifiez que f multiplie les distances par k et conserve les angles orientés : pour cela, montrez que pour trois points quelconques M, N, P , d'images respectives M', N', P' :

$$M'N' = kMN, \quad (\overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{M'P'}) = (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}).$$

2. Construction d'images par une transformation $r \circ h$

Construisez l'image de la maison représentée ci-contre par la transformation $f = r \circ h$, où h est l'homothétie de centre O de rapport 2, et r

la rotation de centre O et d'angle $+\frac{\pi}{2}$.



COURS

1 Définitions. Généralités

1.1. DÉFINITION D'UNE SIMILITUDE

DÉFINITION 1

Une similitude directe est :

- soit une translation,
- soit la composée d'une homothétie de rapport **positif**, et d'une rotation de **MÊME** centre.

La définition ne précise pas l'ordre dans lequel on compose car, dans ce cas, le produit est commutatif, comme nous allons le voir.

Précisément, notons h une homothétie de centre I , de rapport k , $k > 0$, et une rotation r d'angle θ , et de **même** centre que h , à savoir le point I .

Alors : $r \circ h = h \circ r$.

Ce résultat sera démontré au paragraphe 3.4.

Remarques

1. Les propriétés des translations vous sont connues, nous n'étudierons donc par la suite que les propriétés des autres similitudes.
2. Nous dirons, au paragraphe 2., pourquoi les translations ont été incluses dans la famille des similitudes.

1.2. LES ROTATIONS ET LES HOMOTHÉTIES SONT DES SIMILITUDES

1. **Toute rotation est une similitude directe.** En effet, considérons une rotation r de centre O . L'homothétie h de centre O et de rapport 1 est la transformation identité ; donc $r = r \circ h$, ce qui prouve que r est une similitude directe.

2. **De même, toute homothétie de rapport $k > 0$ est une similitude directe.** En effet, si h est une telle homothétie de centre O , nous pouvons écrire : $h = r \circ h$, où r est la rotation de centre O et d'angle nul (cette rotation r est l'identité).

1.3. CENTRE, ANGLE ET RAPPORT D'UNE SIMILITUDE $r \circ h$

Considérons une similitude s qui est la composée d'une rotation r de centre O , d'angle θ , et d'une homothétie h de centre O et du rapport k , $k > 0$. $s = h \circ r = r \circ h$.

Par définition,

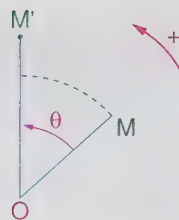
- le **centre de la similitude s** est le centre commun de r et h ,
- le **rapport de s** est le rapport de l'homothétie h ,
- l'**angle de s** est l'angle de la rotation r .

Remarques

1. La donnée d'un angle θ , d'un nombre $k > 0$, d'un point O , définit une similitude s et une seule : la similitude $r \circ h$, composée de la rotation de centre O et d'angle θ , par l'homothétie de centre O et de rapport k .

2. La similitude s , de centre O , de rapport k , d'angle θ , est la transformation qui laisse O invariant, et qui à chaque point M , associe le point M' tel que :

$$OM' = kOM \text{ et } (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \theta.$$



3. Les rotations sont les similitudes de rapport 1. Les homothéties sont les similitudes d'angle nul.

2 Propriété fondamentale d'une similitude directe

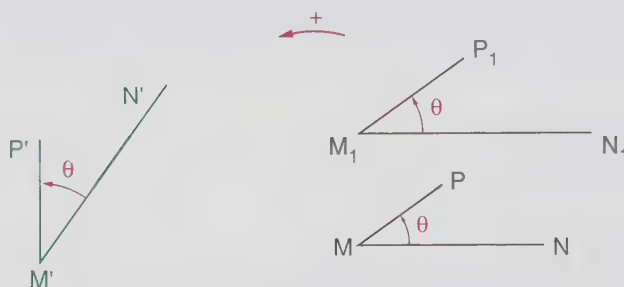
Considérons une similitude directe s qui s'écrit $r \circ h$, où h est l'homothétie de centre I , de rapport k , $k > 0$, et r la rotation de même centre I , d'angle θ .

M, N, P , étant trois points quelconques, notons :

$$\begin{aligned} M_1 &= h(M), & N_1 &= h(N), & P_1 &= h(P) \\ M' &= r(M_1), & N' &= r(N_1), & P' &= r(P_1). \end{aligned}$$

Alors :

$$M' = s(M), \quad N' = s(N), \quad P' = s(P).$$



Toute homothétie de rapport k « multiplie les distances par $|k|$ », et conserve les angles orientés, donc ici, nous obtenons, puisque $k > 0$:

$$M_1N_1 = kMN, \quad (\overrightarrow{M_1N_1}, \overrightarrow{M_1P_1}) = (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}).$$

Toute rotation conserve la distance et les angles orientés, donc :

$$M'N' = M_1N_1, \quad (\overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{M'P'}) = (\overrightarrow{M_1N_1}, \overrightarrow{M_1P_1}).$$

Il en résulte :

$$M'N' = kMN, \quad (\overrightarrow{M'N'}, \overrightarrow{M'P'}) = (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP}).$$

Ces égalités sont vraies quels que soient les points M, N, P , d'où le théorème suivant :

THÉORÈME 1

Toute similitude directe $r \circ h$ conserve les angles orientés et multiplie les distances par k , où k est le rapport de l'homothétie h .

Puisque les translations multiplient les distances par k ($k = 1$) et conservent les angles orientés, on dit que les **translations sont des similitudes directes**.

Remarque sur la définition d'une similitude.

Certains auteurs appellent similitude directe toute transformation qui conserve les angles orientés et qui multiplie les distances par un réel k , $k > 0$. Avec cette définition, les homothéties, les rotations, mais aussi les translations sont des similitudes.

Ils montrent alors qu'une telle transformation s'écrit $r \circ h$ (ou $h \circ r$), où h est une homothétie de rapport k , et r une rotation de même centre que h .

La présentation des similitudes selon cette définition vous est proposée au T.P. 7.

COMMENTAIRE

La similitude s est qualifiée de directe parce qu'elle conserve les angles orientés. La composée d'une réflexion et d'une homothétie de rapport k est une transformation qui multiplie les distances par k et qui change les angles orientés en leurs opposés. Une telle transformation est appelée similitude indirecte. L'étude des similitudes indirectes n'est pas au programme. Lorsqu'il nous arrivera de parler de similitudes sans autre précision, il s'agira en fait de similitudes directes.

3 Écriture complexe d'une similitude $r \circ h$

3.1. PRÉLIMINAIRE : ÉCRITURE COMPLEXE D'UNE ROTATION

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormal direct du plan orienté. r est la rotation de centre I , d'angle θ . Notons ω l'afixe de I .

À chaque point M d'afixe z , la rotation r associe le point M' d'afixe z' , et si $M \neq I$:

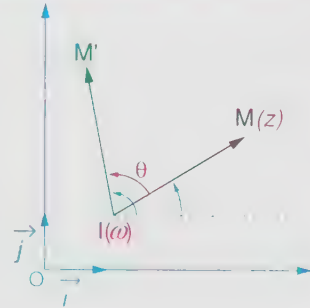
$$IM' = IM, \quad (\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM'}) = \theta.$$

$$\text{Or, } (\overrightarrow{IM}, \overrightarrow{IM'}) = \arg \left(\frac{z' - \omega}{z - \omega} \right) \quad (\text{chapitre 2, théorème 4}).$$

$$\text{De plus : } \left| \frac{z' - \omega}{z - \omega} \right| = \frac{IM'}{IM} = 1.$$

Donc $\frac{z' - \omega}{z - \omega}$ est le complexe de module 1 et d'argument θ , c'est donc $e^{i\theta}$ (chapitre 2, page 29). En résumé, $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$, pour $z \neq \omega$.

Lorsque M est en I , c'est-à-dire lorsque $z = \omega$, M' est aussi en I , donc $z' = \omega$, et par conséquent l'égalité ci-dessus est encore vraie.



L'écriture : $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega)$ est appelée **écriture complexe** de la rotation $r(I, \theta)$. ω est l'afixe de I .

COMMENTAIRE

Lorsque $\omega = 0$, c'est-à-dire lorsque le centre de la rotation est l'origine O du repère, nous obtenons : $z' = e^{i\theta}z = az$, avec $a = e^{i\theta}$. Ainsi, nous retrouvons l'écriture donnée au chapitre 2, paragraphe 11 et l'idée fondamentale : multiplier un complexe z par un complexe de module 1 et d'argument θ , c'est « faire tourner » le vecteur $OM(z)$ d'un angle θ .

3.2. PRÉLIMINAIRE : ÉCRITURE COMPLEXE D'UNE HOMOTHÉTIE

Dans le repère orthonormal direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$, l'homothétie $h(I; k)$ associe à chaque point $M(z)$ le point $M(z')$ tel que : $\overrightarrow{IM'} = k\overrightarrow{IM}$, donc tel que :

$$z' - \omega = k(z - \omega), \quad \text{où } \omega \text{ est l'afixe de } I.$$

Cette écriture est appelée « **écriture complexe** de l'homothétie $h(I; k)$ ».

COMMENTAIRE

Lorsque $\omega=0$, c'est-à-dire lorsque I est l'origine du repère, nous obtenons : $z' = kz$. Ainsi, multiplier un complexe z par un réel $k > 0$ revient à multiplier le vecteur $\overrightarrow{OM}(z)$ par k .

3.3. ÉCRITURE COMPLEXE D'UNE SIMILITUDE $s = r \circ h$

Les notations sont celles utilisées dans 3.1. et 3.2. : ω est l'afixe de I , centre commun de r et h .

Le point $M(z)$ a pour image par h , le point $M_1(z_1)$, tel que :

$$z_1 - \omega = k(z - \omega), \text{ d'après 3.2.} \quad [1]$$

Le point $M_1(z_1)$ a pour image par r , le point $M'(z')$, tel que :

$$z' - \omega = e^{i\theta}(z_1 - \omega), \text{ d'après 3.1.} \quad [2]$$

Il résulte de [1] et [2] que :

$$z' - \omega = ke^{i\theta}(z - \omega).$$

Or $M' = (r \circ h)(M)$. L'écriture complexe de s est donc :

$$z' - \omega = ke^{i\theta}(z - \omega).$$

Réciproquement, soit k un réel positif et θ un réel; il est immédiat de montrer que la transformation du plan qui, au point M d'afixe z , associe le point M' d'afixe z' telle que $z' - \omega = ke^{i\theta}(z - \omega)$ est la composée de l'homothétie de centre le point I d'afixe ω , de rapport k et de la rotation de centre I , d'angle θ . C'est donc la similitude de centre I , de rapport k , d'angle θ .

THÉORÈME 2

Dans un repère orthonormal direct, I est le point d'afixe ω . D'autre part, k est un réel positif et θ est un réel.

Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

1. La transformation f du plan est la similitude de centre I , de rapport k et d'angle θ .
2. L'image par f du point M d'afixe z est le point M' d'afixe z' tel que :

$$z' - \omega = ke^{i\theta}(z - \omega).$$

Remarques

- Avec $k = 1$, on obtient l'écriture complexe de la rotation $r(I, \theta)$.
- Avec $\theta = 0$, on obtient l'écriture complexe de l'homothétie $h(I, k)$.

3.4. $r \circ h = h \circ r$

Notons maintenant $M''(z'')$ l'image du point $M(z)$ par $h \circ r$: $M'' = h(r(M))$.

En opérant comme dans 3.3., si nous notons z_2 l'afixe de $r(M)$, nous obtenons :

$$z_2 - \omega = e^{i\theta}(z - \omega),$$

puis :

$$z'' - \omega = k(z_2 - \omega),$$

d'où :

$$z'' - \omega = ke^{i\theta}(z - \omega).$$

Il en résulte que $z'' = z'$, donc que $M'' = M'$, donc que : $(h \circ r)(M) = (r \circ h)(M)$.

Cette égalité est vraie quel que soit M , d'où :

$$h \circ r = r \circ h.$$

Remarque : l'égalité $r \circ h = h \circ r$ est due essentiellement au fait que r et h ont le même centre. En général, si la rotation r et l'homothétie h ont des centres différents, alors :

$$r \circ h \neq h \circ r.$$

4

Écriture réduite d'une similitude et résumé des résultats

4.1. ÉCRITURE RÉDUITE D'UNE SIMILITUDE

Nous avons vu que l'écriture complexe d'une similitude s de centre $I(\omega)$, de rapport k , d'angle θ , est : $z' = \omega = ke^{i\theta}(z - \omega)$.

L'égalité : $z' - \omega = ke^{i\theta}(z - \omega)$ s'écrit aussi :

$$z' = ke^{i\theta}z + \omega(1 - ke^{i\theta})$$

qui est de la forme $z' = az + b$, avec $a = ke^{i\theta}$, $b = \omega(1 - ke^{i\theta})$.

Réciproquement, donnons-nous deux complexes a et b , avec $a \neq 0$, et considérons la transformation f du plan, qui, au point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = az + b.$$

Deux cas se présentent :

- $a = 1$, alors $z' = z + b$ et f est la translation de vecteur d'affixe b ;
- $a \neq 1$, alors f admet un point invariant et un seul, c'est le point I dont l'affixe ω vérifie $\omega = a\omega + b$, soit $\omega = \frac{b}{1-a}$.

Nous pouvons alors écrire en remplaçant b par $(1-a)\omega$: $z' = az + \omega - a\omega$
 $z' - \omega = a(z - \omega)$.

Une forme exponentielle de a est $a = |a|e^{i\theta}$, où θ est l'un de ses arguments ; alors :

$$z' - \omega = |a|e^{i\theta}(z - \omega).$$

Dans ce cas, le théorème 2 dit que f est la similitude de centre I , de rapport $|a|$, et d'angle θ . En résumé, si la transformation f a pour écriture complexe dans un repère orthonormal :

$$z' = az + b, \quad a \neq 0$$

alors, si $a = 1$, f est une translation,
 si $a \neq 1$, f est une similitude.

4.2. RÉSUMÉ DES RÉSULTATS

THÉORÈME 3

Toute similitude directe s a une écriture complexe de la forme :
 $z' = az + b$, avec $a \neq 0$.
 Cette écriture est appelée écriture réduite de la similitude.
 Le rapport de s est $|a|$ et l'angle de s est $\arg a$ (modulo 2π).

THÉORÈME 4

Si une transformation f a une écriture complexe de la forme :
 $z' = az + b$, avec $a \neq 0$ alors f est une similitude.

- Si $a = 1$, alors f est une translation.
- Si $a \neq 1$, alors f est la similitude directe s , telle que :
 - le **centre** de s est le point d'affixe ω tel que : $\omega = a\omega + b$,
 - le **rapport** k de s est $|a|$,
 - l'**angle** θ de s est $\arg a$ (modulo 2π).

5

Propriétés des similitudes directes

Une similitude directe est soit une translation, soit une composée $r \circ h$ où h est une homothétie et r une rotation.

En tant que telle, elle hérite de toutes les propriétés communes aux homothéties et aux rotations. Donc :

- Toute similitude TRANSFORME les droites en droites, les segments en segments, les cercles en cercles, les coniques en coniques de même excentricité.
- Toute similitude CONSERVE le parallélisme, l'alignement, l'orthogonalité, le contact.
- Toute similitude de rapport k MULTIPLIE les distances par k et les aires par k^2 .

En outre,

Toute similitude conserve le barycentre.

En effet, nous savons que les translations et les rotations conservent le barycentre. Donc pour montrer qu'une similitude $r \circ h$ conserve le barycentre, il suffit de montrer que toute homothétie h conserve le barycentre.

Montrons d'abord qu'une homothétie h conserve le barycentre de deux points (A, a) , (B, b) , c'est-à-dire, montrons que G' est le barycentre de (A', a) , (B', b) avec $G' = h(G)$,

$A' = h(A)$, $B' = h(B)$. Pour cela, il suffit de montrer que : $\overrightarrow{A'G'} = \frac{b}{a+b} \overrightarrow{A'B'}$ (chapitre 6 paragraphe 3.3.).

Or, par hypothèse : $\overrightarrow{AG} = \frac{b}{a+b} \overrightarrow{AB}$,

d'où : $k \overrightarrow{AG} = k \frac{b}{a+b} \overrightarrow{AB}$, où k est le rapport de h .

Mais : $k \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{A'G'}$, $k \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$, d'où le résultat.

L'homothétie h conserve donc le barycentre de deux points, en utilisant le théorème du barycentre partiel, on en déduit qu'elle conserve le barycentre de trois points, et de proche en proche, celui de n points.

6

Exercices résolus

6.1. SAVOIR TROUVER LES ÉLÉMENTS CARACTÉRISTIQUES D'UNE SIMILITUDE À PARTIR DE SON ÉCRITURE COMPLEXE

EXERCICE RÉSOLU 1

Déterminez la similitude directe s d'écriture complexe, dans un repère orthonormal $(O; \vec{i}, \vec{j})$:

$$z' = (i - 1)z + 2 - i.$$

SOLUTION COMMENTÉE ■■■

MÉTHODE

- Le centre de s est le point X d'affixe ω , solution de l'équation $z' = z$.
- On utilise ensuite le théorème 4.

1. L'écriture complexe de s est de la forme : $z' = az + b$, avec $a \neq 1$; donc s n'est pas une translation. Il s'agit donc de trouver son centre, son angle, son rapport.

L'équation $z' = z$ est l'équation : $(i - 1)z + 2 - i = z$, soit encore : $(i - 2)z = i - 2$, dont la solution est 1.

Le centre de s est donc le point d'affixe $\omega = 1$.

2. On se souvient que lorsque s a pour écriture complexe : $z' = az + b$, le rapport de s est $|a|$ et l'angle de s est $\arg a$.

Ici : $a = i - 1$, donc $|a| = |i - 1| = \sqrt{2}$, $\arg a = \frac{3\pi}{4}$.

■■■■■■■■■■

6.2. LIEU GÉOMÉTRIQUE

EXERCICE RÉSOLU 2

ABCD est un carré direct, le plan étant orienté comme sur la figure.

M est un point de la droite (DC) ; la perpendiculaire à (AM) passant par A coupe (BC) en N et I est le milieu de [MN].

a/ Montrez que le triangle rectangle AMN est isocèle.

b/ Montrez que I est l'image de M par une similitude fixe.

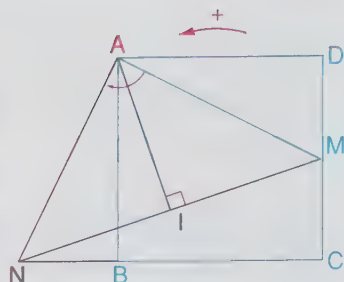
c/ Quel est l'ensemble décrit par le point I lorsque M décrit (DC).

(D'après *Exercices de géométrie, I.R.E.M. de Nantes.*)

SOLUTION COMMENTÉE ■■■

MÉTHODE

Pour démontrer que le triangle AMN est rectangle et isocèle, on pense à démontrer que N est l'image de M par une rotation de centre A et d'angle $+\frac{\pi}{2}$, ou $-\frac{\pi}{2}$.



1. Ici, vu la présence d'angles droits dans la figure (ABCD est un carré), pour démontrer que AMN est isocèle, on pense à démontrer que N est l'image de M par la rotation r de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

Pour montrer que $r(M) = N$, nous utilisons la méthode suivante :

MÉTHODE

Si un point M appartient à l'intersection de 2 lignes, son image $r(M)$ est dans l'intersection des images de ces 2 lignes.

M est l'intersection des droites (AM) et (DC).

Or, l'image de (DC) par r est (BC), et l'image par r de (AM) est la perpendiculaire à (AM) en A. $r(M)$ est donc à l'intersection de ces deux droites, donc c'est N. Le triangle AMN est donc rectangle et isocèle en A.

2. Le milieu I de [MN] est tel que :

$$AI = \frac{\sqrt{2}}{2} AM$$

$$(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{AI}) = -\frac{\pi}{4}$$

puisque le triangle AMN est rectangle isocèle.

Il se déduit donc de M, par la similitude f de centre A, de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

3. M décrit la droite (DC) et $I = f(M)$, donc I décrit l'image de (DC) par f . Nous savons que cette image est une droite d' . Pour trouver d' , on peut chercher les images de D et C par f . Nous trouvons : $f(D) = O$, où O est le centre du carré et $f(C) = B$. Donc le lieu de I est la droite (OB).

■■■■■■■■■■

TRAVAUX PRATIQUES D'APPLICATION

1 Cercles homothétiques

1.1. Cas de deux cercles non concentriques et de rayons différents

RAPPEL

$\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont des cercles *non concentriques*, de centres respectifs O et O' , de rayons respectifs R et R' , avec $R \neq R'$.

1. Aors, il existe deux homothéties, et deux seulement, transformant $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}'$:

— l'une a pour rapport $\frac{R'}{R}$ et pour centre le point I de (OO') tel que

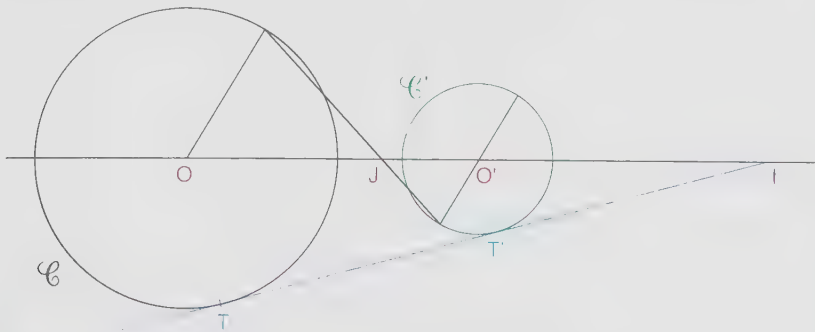
$$\overrightarrow{IO'} = \frac{R'}{R} \overrightarrow{IO};$$

— l'autre a pour rapport $-\frac{R'}{R}$ et pour centre le point J de (OO') tel que

$$\overrightarrow{JO'} = -\frac{R'}{R} \overrightarrow{JO}.$$

On peut dire que I est le barycentre des points massifs $(O; R')$, $(O'; -R)$, et J celui de $(O; R')$, $(O'; R)$.

2. Chacune des tangentes communes à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ passe par l'un des points I ou J .



1. Démontrez chacun des résultats énoncés ci-dessus.
2. Indiquez et justifiez, la façon dont ont été construits I et J sur la figure ci-dessus.
3. Dans le cas de la figure ci-dessus, combien y a-t-il de tangentes communes à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$?

1.2. Autres cas

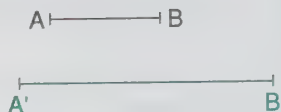
Déterminez les homothéties transformant $\mathcal{C}$ en $\mathcal{C}'$ dans chacun des cas suivants :

1. $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ ont des rayons distincts et sont tangents extérieurement, puis intérieurement.
2. $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ ont des rayons distincts et sont concentriques.
3. $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ ont même rayon.

2 Segments homothétiques

$[AB]$ et $[A'B']$ sont deux segments donnés, $AB \neq A'B'$, et (AB) parallèle à $(A'B')$.

1. Montrez qu'il existe deux homothéties et deux seulement qui transforment $[AB]$ en $[A'B']$, situez leurs centres et précisez leurs rapports.



2. Montrez que les deux centres et les milieux de $[AB]$ et de $[A'B']$ sont alignés.

3. **Application : ABCD est un trapèze**, avec (AB) et (CD) parallèles. Les diagonales (AC) et (BD) se coupent en I , les côtés (AD) et (BC) se coupent en J .

Montrez que la droite (IJ) passe par les milieux des bases (AB) et (CD) .

3 Problèmes de lieux géométriques

Les six exercices sont indépendants.

Les cinq premiers peuvent être résolus en utilisant une homothétie, le sixième en utilisant une similitude.

- 3.1. d et d' sont deux droites fixes, sécantes en O . A est un point fixe. Une droite Δ varie en restant parallèle à une direction fixe. Δ coupe d en B et d' en C . I est le milieu de $[BC]$.

1. Quel est le lieu géométrique des points I lorsque Δ varie ?
2. Quel est le lieu géométrique du centre de gravité des triangles ABC ?

- 3.2. $\mathcal{C}$ est un cercle de centre O , A est un point extérieur au disque. M est un point de $\mathcal{C}$. La bissectrice intérieure issue de O , du triangle AOM , coupe (AM) en N .

Quel est le lieu des points N lorsque M décrit $\mathcal{C}$?

Indication : dans tout triangle BCD , en notant E le point où la bissectrice intérieure de $\widehat{CBD}$ coupe CD , on obtient : $\frac{EC}{CB} = \frac{ED}{DB}$,

c'est-à-dire : $\vec{EC} = -\frac{CB}{DB} \vec{ED}$.

- 3.3. Deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont tangents extérieurement en un point A . P est un point fixe non situé sur $\mathcal{C}$, non situé sur $\mathcal{C}'$. Une sécante variable qui passe par P coupe $\mathcal{C}$ en M et N . La droite (AM) coupe $\mathcal{C}'$ en M' et la droite (AN) coupe $\mathcal{C}'$ en N' .

Montrez que $(M'N')$ passe par un point fixe.

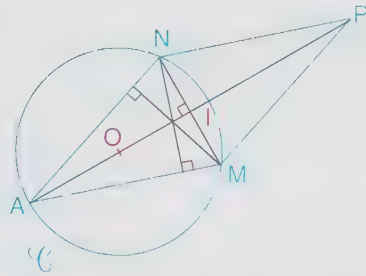
- 3.4. Deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont tangents extérieurement en un point A . Dans $\mathcal{C}$, on trace une corde variable $[AM]$, et dans $\mathcal{C}'$, la corde $[AM']$, perpendiculaire à $[AM]$.

Montrez que (MM') passe par un point fixe.

3.5. $\mathcal{C}$ est un cercle de centre O.

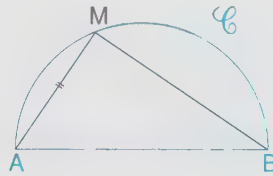
A est un point de $\mathcal{C}$.

Deux points M et N, distincts de A, décrivent le cercle $\mathcal{C}$ de sorte que la longueur MN reste constante. On construit le parallélogramme AMPN, et on note I le centre de ce parallélogramme.



1. Montrez que l'orthocentre K du triangle MNP est un point fixe de la figure, autrement dit, qu'il est indépendant de la position de M et N.
2. Quel est le lieu du point I? Quel est le lieu du point P?
3. Quel est le lieu de l'orthocentre H du triangle AMN?

3.6. $\mathcal{C}$ est un demi-cercle de diamètre [AB]. M est un point de $\mathcal{C}$ distinct de A et B. N est le point de la demi-droite (BM), qui passe par M et tel que $AM = BN$.



Quel est le lieu de N, lorsque M décrit $\mathcal{C}$ privé de A et B?

Indication : choisissez un repère d'origine A et trouvez une relation entre l'abscisse x de M et l'abscisse x' de N.

4 Problème de construction

La résolution de ces problèmes nécessite de connaître les résultats sur les cercles homothétiques (T.P. 1).

Cercles tangents à un cercle donné et à une droite donnée

$\mathcal{C}$ est un cercle donné de centre O. d est une droite donnée extérieure à $\mathcal{C}$. On veut construire un cercle $\mathcal{C}_1$ tangent à d et à $\mathcal{C}$.

1. Supposons le problème résolu.

Les notations sont signifiées par la figure.

a/ Vérifiez qu'il suffit de connaître les points T et T_1 pour pouvoir construire le cercle $\mathcal{C}_1$.

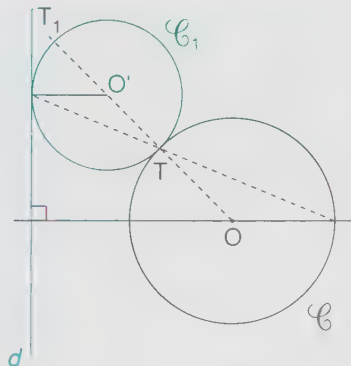
b/ Montrez que la droite (TT_1) passe par un point fixe.

Indication : $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_1$ sont homothétiques.

2. Synthèse

a/ Dédisez du 1 un procédé de construction qui permette de tracer un cercle $\mathcal{C}_1$ tangent à d et à $\mathcal{C}$.

b/ Justifiez que le cercle ainsi construit est effectivement tangent à $\mathcal{C}$ et à d .



Composition de deux homothéties. Une application

5.1. Composition de deux homothéties de centres distincts

$h_1(O_1; k_1)$ et $h_2(O_2; k_2)$ sont deux homothéties données, avec $O_1 \neq O_2$.
Le but de l'exercice est de caractériser la transformation $h_2 \circ h_1$.

1. Utilisation des nombres complexes

Les notations sont les suivantes :

h_1 transforme tout point M d'affixe z en un point M_1 d'affixe z_1 , tel que : $z_1 = k_1 z + b_1$, k_1 réel, $k_1 \neq 1$.

h_2 transforme chaque point M_1 d'affixe z_1 en un point M' d'affixe z' , tel que : $z' = k_2 z_1 + b_2$, k_2 réel, $k_2 \neq 1$.

a/ Donnez l'écriture complexe de $h_2 \circ h_1$.

b/ Déduisez-en que $h_2 \circ h_1$ est une translation lorsque $k_1 k_2 = 1$, et que $h_2 \circ h_1$ est une homothétie, de rapport $k_1 k_2$, lorsque $k_1 k_2 \neq 1$.

c/ Dans ce dernier cas, montrez que le centre de $h_2 \circ h_1$, le centre de h_1 et le centre de h_2 sont alignés.

2. Sans utiliser les nombres complexes

a/ Montrez que, pour tous points M et N d'images M' et N' par $h_2 \circ h_1$: $\overrightarrow{M'N'} = k_1 k_2 \overrightarrow{MN}$.

b/ Supposez qu'une transformation f ait la propriété suivante : pour tous points M et N d'images M' et N' par f : $\overrightarrow{M'N'} = k \overrightarrow{MN}$, avec k réel, $k \neq 1$.

Démontrez que f est une homothétie de rapport k , lorsque $k_1 k_2 \neq 1$.

c/ Déduisez-en que $h_2 \circ h_1$ est une homothétie de rapport $k_1 k_2$. Montrez que son centre est aligné avec O_1 et O_2 .

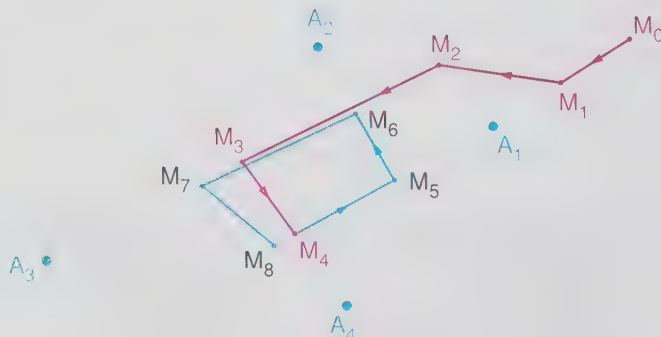
Indication : choisissez un point A , posez $A' = f(A)$. Notez I le barycentre de $(A', 1)$, $(A, -k)$ et h l'homothétie de centre I de rapport k . Montrez alors que pour tout M , $f(M) = h(M)$.

5.2. Une application (D'après *Mélanges géométriques* de M. Dofal)

A_1, A_2, A_3, A_4 sont quatre points donnés.

Un mobile ponctuel M se déplace de la manière suivante.

A l'instant initial, M est en M_0 . Ensuite, M se dirige de M_0 vers A_1 en ligne droite. Arrivé au point M_1 , milieu de $[M_0 A_1]$, il se dirige en ligne droite vers A_2 . Arrivé en M_2 , milieu de $[M_1 A_2]$, il se dirige en ligne droite vers A_3 . Arrivé en M_3 , milieu de $[M_2 A_3]$, il se dirige en ligne droite vers A_4 . Arrivé en M_4 , milieu de $[M_3 A_4]$ il se dirige en ligne droite vers A_1 , et ainsi de suite...



Sur la figure les points M_0, M_4, M_8 semblent alignés. Nous allons voir que ce n'est pas fortuit.

1. Montrez que M_4 est l'image de M_0 par la composée de 4 homothéties : $h_4 \circ h_3 \circ h_2 \circ h_1$, où pour chaque entier i de 1 à 4, h_i est une homothétie de centre A_i . Quel est le rapport de h_i ?
2. Notons H_0 l'homothétie : $h_4 \circ h_3 \circ h_2 \circ h_1$. Quel est le rapport de H_0 ?
3. Quelle est l'image de M_4 par H_0 ? Concluez sur l'alignement des points M_0, M_4, M_8 .
4. Montrez que tous les points d'indice $4^n, n \in \mathbb{N}$, sont alignés.
5. On note G_0 le centre de H_0 . Placez G_0 sur la figure.

6

Utilisation des nombres complexes

Les deux exercices sont indépendants.

6.1. Étude d'une configuration

$ABCD$ est un quadrilatère convexe; on construit, à l'extérieur du quadrilatère, les triangles isocèles $A'BA, B'CB, C'DC, D'AD$, rectangles en A', B', C', D' .

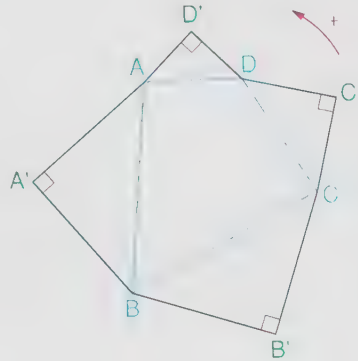
Le but de l'exercice est de montrer que les droites $(A'C')$ et $(B'D')$ sont perpendiculaires et que les segments $[A'C']$ et $[B'D']$ ont même longueur.

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ étant un repère orthonormé direct quelconque, on désigne par a, b, c, d les affixes des points A, B, C, D .

On peut remarquer par exemple que A' se déduit de B par la similitude plane

directe de centre A , de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$,

d'angle $-\frac{\pi}{4}$.



1. Calculez les affixes des points A', B', C', D' .
2. Déduisez-en les affixes des vecteurs $\overrightarrow{A'C'}$ et $\overrightarrow{B'D'}$. Concluez.

6.2. Recherche d'un ensemble de points

On se propose de déterminer l'ensemble des points M dont l'axe z est telle que :

$$|(1-i)z + 2-i| = \sqrt{2}.$$

Si on pose $z' = (1-i)z + 2-i$, on sait que le point M' d'axe z' est l'image du point M d'axe z par une similitude s que l'on va préciser.

1. Déterminez le centre, l'angle et le rapport de la similitude s .
2. Déterminez l'antécédent O_1 de O par s , O étant l'origine du repère dans lequel on considère les affixes des points.
3. Déduisez-en que l'on a $OM' = \sqrt{2}$ si et seulement si $O_1M = 1$.

4. Quel est l'ensemble des points M d'affixe z tels que :

$$|(1-i)z + 2 - i| = \sqrt{2}?$$

5. Donnez d'autres méthodes conduisant au résultat.

7

Autre présentation des similitudes directes

Appelons similitude directe toute transformation f qui multiplie les distances par un nombre $k > 0$ et qui conserve les angles orientés.

1. Les translations, les rotations, les homothéties, les réflexions sont-elles des similitudes directes, au sens de cette définition ?

2. Soit f une similitude directe qui multiplie les distances par k , ($k > 0$). Notons h une homothétie de centre un point A et de rapport $\frac{1}{k}$.

a/ Montrez que la transformation $g = h \circ f$ est un déplacement.

b/ Vérifiez que : $f = h^{-1} \circ g$.

3. Supposons que g soit une rotation de centre I et d'angle θ , $\theta \neq 0$. Notez qu'*a priori*, I et A sont distincts.

Choisissons un repère orthonormal direct $(A; \vec{i}, \vec{j})$, dans ce repère l'affixe de I est ω .

a/ De la relation $f = h^{-1} \circ g$, déduisez l'écriture complexe de f dans $(A; \vec{i}, \vec{j})$.

b/ Déduisez-en que f a un point fixe I' et un seul.

c/ Vérifiez que $f = h_1 \circ r_1$, où r_1 est la rotation de centre I' d'angle θ , et où h_1 est l'homothétie de même centre I' et de rapport k .

f est donc une similitude au sens de la Définition 1 du Cours.

Supposons que g soit une translation de vecteur $\vec{u}$. En écrivant la forme complexe de $h^{-1} \circ g$, dans un repère, vérifiez que f est une translation ou une homothétie.

EXERCICES ET PROBLÈMES

Pour tester ses connaissances

Q.C.M.

Pour les exercices 1 à 5, une seule des réponses proposées est exacte.

- ABCD est un carré de sens direct. h est la similitude de centre A, de rapport $\sqrt{2}$, d'angle $-\frac{\pi}{4}$. Alors : par $r \circ h$:
a/ l'image de D est O ;
b/ l'image de D est C ;
c/ l'image de C est D.
- La transformation dont une écriture complexe est : $z' = 2z - i$ est :
a/ une translation ;
b/ une rotation ;
c/ une homothétie.
- La transformation dont une écriture complexe est : $z' = (1 + i)z$ est :
a/ une rotation ;
b/ une translation ;
c/ une similitude qui n'est ni une rotation, ni une translation.
- La transformation dont une écriture complexe est : $z' = 2iz - 1$ est :
a/ une similitude de rapport $\sqrt{2}$, d'argument $\frac{\pi}{2}$;
b/ une similitude de rapport 2, d'argument $\frac{\pi}{2}$;
c/ une similitude de rapport 2, d'argument π .
- La similitude dont une écriture complexe est : $z' = (1 + i)z + 3$ a pour centre le point d'affixe :
a/ 3 ; **b/** $\frac{1}{1+i}$; **c/** $3i$.

Pour s'entraîner

CONSTRUCTION D'IMAGES

- ABCD est un carré de sens direct. h est l'homothétie de centre A, de rapport 2 ; r est la rotation de centre A, d'angle $\frac{\pi}{2}$.
 Construisez l'image du carré par $h \circ r$.
- ABCD est un carré de sens direct. h est l'homothétie de centre A de rapport $\sqrt{2}$; r est la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
 Construisez l'image du carré par $h \circ r$.
- ABCD est un carré de sens direct. h est l'homothétie de centre D de rapport $-\sqrt{2}$; r est la rotation de centre D, d'angle $\frac{3\pi}{4}$.
 Construisez l'image du carré par $h \circ r$.
- ABC est un triangle équilatéral de sens direct, de centre O. h est l'homothétie de centre O de rapport 2, r est la rotation de centre O, d'angle $-\frac{\pi}{3}$.
 Construisez l'image du triangle par $h \circ r$.
- ABCD est un carré de centre O tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = +\frac{\pi}{2}$. s est la similitude de centre A, de rapport $\sqrt{2}$, d'angle $+\frac{\pi}{4}$.
 Construisez l'image du carré par s .
- ABC est un triangle équilatéral tel que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = +\frac{\pi}{3}$. I est le milieu de [AB] et J est le milieu de [AC]. s est la similitude de centre J, de rapport $\sqrt{3}$, d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
 Construisez l'image du triangle par s .
- ABC est un triangle rectangle isocèle en A tel que : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = +\frac{\pi}{2}$. On construit le carré CBED tel que $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}) = +\frac{\pi}{2}$. s est la similitude de centre D, d'angle $+\frac{\pi}{4}$, de rapport $\sqrt{2}$.
 Construisez l'image de ABC par s . Que pouvez-vous dire du triangle image ?

ÉCRITURE COMPLEXE

Pour les exercices 13 à 25, on donne l'écriture complexe, dans un repère orthonormal fixé, d'une transformation f . Reconnaissez f et précisez ses éléments caractéristiques.

13. $z' = 4z - 3$. 14. $z' = z - 4i$.
15. $z' = (1+i)z + 2i$. 16. $z' = \frac{1-i}{2}z + 1-i$.
17. $z' = (1+i\sqrt{3})z + 1$.
18. $z' = (2-2i)z + 2-3i$.
19. $z' = -2iz - 1$.
20. $z' = (3+4i)z + 4-2i$.
21. $z' = (-1+2i)z + 3-4i$.
22. $z' = \frac{1+i}{1-i}z + 2i$. 23. $z' = \frac{2-i}{i+1}z$.
24. $z' = 5z - 3i$.
25. $z' = \sqrt{2}iz + 4$.

26. Dans le plan complexe, f est la fonction :

$$f : M(z) \longmapsto M'(z')$$

$$\text{avec } z' = u^2 z + u - 1$$

où u est un complexe donné.

- Déterminez l'ensemble des nombres complexes u pour lesquels f est une translation.
- Même question avec f rotation d'angle droit positif.
- Même question avec f homothétie de rapport -2 .
- Déterminez la nature de f et ses caractéristiques lorsque $u = 1-i$.

RECHERCHE D'IMAGES

Pour les exercices 27 à 30, on donne, dans un repère orthonormal fixé, l'écriture complexe d'une transformation f . Trouvez l'image par f des droites ou des cercles donnés.

27. $z' = (1+2i)z + 2-5i$;
- $\mathcal{C}$ passe par $A(1-2i)$ et $B(-1+i)$;
 - $\mathcal{C}$ a pour centre $I(1-i)$ et pour rayon $\sqrt{5}$.
28. $z' = 2iz - 3$;
- $\mathcal{C}_1$ a pour centre $I(1+i)$ et pour rayon 2;
 - $\mathcal{C}_2$ a pour centre $O(0)$ et pour rayon 1;
 - D est la droite passant par les points communs à $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

29. $z' = (\sqrt{3}-i)z$;

- $\mathcal{C}$ passe par $O(0)$;
- D est la droite passant par :
 $A(1+i)$ et $B(-4i)$.

30. $z' = (3+4i)z - 4+2i$;
- $\mathcal{C}$ passe par $I(1-i)$ et est tangent en $J(2)$ à la droite passant par J et $K(2i)$.

Pour les exercices 31 à 33, A et A' sont donnés par leurs affixes m et m' ; le rapport k et l'angle α sont donnés par $a = ke^{i\alpha}$; trouvez l'axe de la similitude f de rapport k et d'angle α telle que $f(A) = A'$.

31. $m = 0$, $m' = 2+3i$,
 $a = 2+2i$.
32. $m = 1+2i$, $m' = 3-i$,
 $a = \sqrt{3}-i$.
33. $m = 2-i$, $m' = 3-i$,
 $a = 3+4i$.

COMPOSÉE D'UNE ROTATION ET D'UNE HOMOTHÉTIE DE CENTRES DISTINCTS

Pour les exercices 34 à 38, ABCD est un carré tel que $(\overline{AB}, \overline{AD}) = -\frac{\pi}{2}$. On donne une homothétie h et

une rotation r de centres distincts. Trouvez la similitude $s_1 = r \circ h$, puis la similitude $s_2 = h \circ r$, soit de manière géométrique, soit en utilisant des écritures complexes après choix d'un repère orthonormal direct. Notez que, en général, $h \circ r \neq r \circ h$.

34. h est l'homothétie de centre A , de rapport 2, r est la rotation de centre B , d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
35. h est l'homothétie de centre A , de rapport -2 , r est la rotation de centre B , d'angle $+\frac{\pi}{2}$.
36. h est l'homothétie de centre A , de rapport $-\sqrt{2}$, r est la rotation de centre C , d'angle $+\frac{\pi}{4}$.
37. h est l'homothétie de centre A , de rapport $\sqrt{2}$, r est la rotation de centre C , d'angle $-\frac{\pi}{4}$.
38. h est l'homothétie de centre D , de rapport $\frac{1}{2}$, r est la rotation de centre O , d'angle $+\frac{\pi}{2}$. O est le centre du carré.

EXERCICES DU BACCALAURÉAT

Les modifications du programme font que nombre d'exercices du baccalauréat sur les similitudes ne sont plus d'actualité.

Parmi les modifications il faut noter : suppression de la composition des similitudes, des homothéties, suppression du théorème sur l'existence et l'unicité d'une similitude échangeant deux segments donnés.

- 39.** Soit P le plan complexe muni du repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$, unité : 1 cm. On donne les points A et B d'abscisses respectives 12 et 9 i et l'application f de P dans P qui au point M d'abscisse z associe le point M' d'abscisse Z défini par $Z = -\frac{3}{4}iz + 9i$.

1. Démontrez que f admet un point invariant Ω de coordonnées $(\frac{108}{25}, \frac{144}{25})$. Démontrez que f est une similitude plane directe d'angle $-\frac{\pi}{2}$, de rapport $\frac{3}{4}$. Quel est son centre ?

2. Quelles sont les images par f des points A et O ? Montrez que Ω est un point commun aux cercles $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ de diamètres respectifs $[OA]$ et $[OB]$. Établissez que Ω est le pied de la hauteur issue de O dans le triangle AOB et montrez que $\Omega A \times \Omega B = \Omega O^2$. Faites une figure comportant les points A , B , Ω ainsi que les cercles $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$.

- 40.** Dans le plan orienté on considère un carré $ABCD$ de centre O . On suppose que ce carré est direct, c'est-à-dire que (AB, AD) a pour mesure $\frac{\pi}{2}$. On désigne par :

r le quart de tour direct de centre A ,
 t la translation de vecteur $\vec{AB}$,
 h l'homothétie de centre C de rapport $\sqrt{3}$.

1. a/ Prouvez que $r' = t \circ r$ est une rotation, dont on précisera l'angle.

b/ Déterminez les images de A et B par r' . Déduisez-en le centre de r' .

2. On se propose d'étudier la transformation $f = r' \circ h$.

a/ Montrez que f est une similitude directe dont on précisera l'angle et le rapport.

b/ Soit I le centre de f . Déterminez l'image de C par f . Prouvez que $(\vec{IC}, \vec{ID}) = \frac{\pi}{2}$ et que $ID = \sqrt{3}IC$.

c/ Déterminez et construisez l'ensemble Γ des points M du plan tels que $(\vec{MC}, \vec{MD}) = \frac{\pi}{2}$.

Donnez une mesure de l'angle $(\vec{CD}, \vec{CI})$. Placez I sur la figure.

d/ Prouvez que l'ensemble Γ' des points M du plan tels que $MD^2 - 3MC^2 = 0$ est un cercle dont on précisera le centre G et le rayon. Construisez Γ' .

- 41.** Le plan P est rapporté à un repère orthonormal $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Soit $z = x + iy$ l'abscisse d'un point $M(x, y)$ de ce plan.

a/ Déterminez l'ensemble des points M du plan (P) tels que :

$$|(1-i)z + 2i| = 2.$$

b/ Étudiez la transformation de (P) , qui au point M d'abscisse z , fait correspondre le point M' d'abscisse :

$$z' = (1-i)z + 2i.$$

c/ En utilisant la transformation précédente, retrouvez le résultat du **a/**.

- 42.** Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct (unité : 2 cm). r est un nombre réel strictement supérieur à 1.

On considère les points $A(-1; 0)$, $A'(r; 0)$ et $I(0; -r)$.

Soit (C) le cercle de centre A et de rayon 1, (C') le cercle de centre A' et de rayon r .

La figure sera faite dans le cas $r = 2$.

1. Dans cette question, r est quelconque dans l'intervalle $]1; +\infty[$. Déterminez, en fonction de r , le centre et le rayon du cercle (C_1) transformé du cercle (C') par la similitude de centre I , de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

2. Dans cette question, $r = 2$. Construisez l'un des triangles rectangles isocèles IMM' dont le sommet de l'angle droit M appartient au cercle (C) et le sommet M' appartient au cercle (C') .

- 43.** Dans le plan on considère deux cercles C et C' de centres respectifs O et O' , de même rayon R , tangents extérieurement en un point A .

À tout point M de C on associe le point M' de C' tel que :

$$(\vec{OM}, \vec{O'M'}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \text{ entier.}$$

1. Montrez qu'il existe une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$,

dont on construira géométriquement le centre Ω , qui envoie C sur C' . Quelle est l'image de M par cette rotation ?

2. Montrez que I , milieu de MM' , est l'image de M par une similitude f directe de centre Ω . Déterminez les éléments caractéristiques de cette similitude. Déduisez-en le lieu de I quand M décrit C .

3. Donnez l'image de O par la similitude f et une mesure de l'angle $(\vec{OM}, \vec{AI})$.

- 44.** Soit O un point du plan orienté. À chaque point M du plan on associe le point G de la manière suivante :
- si M est en O , G est en O ;
 - si M est distinct de O , on construit le triangle OMM' rectangle en M tel que :

$$(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \frac{\pi}{4}.$$

Le point G est alors le centre de gravité du triangle OMM' .

1. Montrez que, si M est distinct de O :

a/ $\cos(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OG}) = \frac{2\sqrt{5}}{5}.$

b/ $\sin(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OG}) = \frac{\sqrt{5}}{5}.$

c/ $\frac{OG}{OM} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$

2. Déduisez-en la nature et les éléments caractéristiques de la transformation S du plan qui à chaque point M associe G .

3. Soit D une droite ne passant pas par O . On suppose que M décrit D .

a/ Quel est le lieu L du point G quand M décrit D ?

b/ Indiquez une construction géométrique de L .

- 45.** Dans le plan orienté, on considère un carré direct $ABCD$ de centre O (c'est-à-dire tel que

$$(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{2}).$$

Soit P un point du segment $[BC]$ distinct de B . On note Q l'intersection de (AP) avec (CD) . La perpendiculaire Δ à (AP) passant par A coupe (BC) en R et (CD) en S .

1. Faites une figure (prenez $BC = 3$ cm et $BP = 1$ cm et placez (BC) horizontale sur la feuille).

2. Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a/ Précisez l'image de la droite (BC) par r .

b/ Déterminez les images de R et P par r .

c/ Quelle est la nature des triangles RAQ et PAS ?

3. On note N le milieu du segment $[PS]$ et M celui du segment $[QR]$.

Soit s la similitude directe de centre A , d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

a/ Précisez les images des points R et P par s .

b/ Quel est le lieu géométrique du point N quand P décrit le segment $[BC]$ privé de B ?

c/ De ce qui précède, déduisez que les points M , B , N et D sont alignés.

LIEUX GÉOMÉTRIQUES

- 46.** B et C sont deux points fixes. Un point A varie de sorte que le triangle ABC soit rectangle en A .

Quel est alors le lieu géométrique du centre de gravité du triangle ABC ?

- 47.** Trois points donnés A , B , C sont tels que $\overline{AC} = 3\overline{AB}$.

Un point M décrit le cercle de diamètre $[BC]$. La parallèle à (CM) passant par B coupe (AM) en P .

Quel est le lieu géométrique du point P ?

- 48.** d est une droite fixe. A et B sont deux points fixes non situés sur d . On note C le symétrique de A par rapport à un point M de d .

Lorsque M décrit d :

a/ Quel est le lieu du milieu E de $[AM]$?

b/ Quel est le lieu du centre de gravité G du triangle ABM ?

c/ Quel est le lieu de C ?

d/ Quel est le lieu du point d'intersection de (BM) et (CO) (O étant le milieu de $[AB]$)?

- 49.** On donne un cercle $\mathcal{C}$ de diamètre $[AB]$, de centre O , et un point I de la droite (AB) extérieur au cercle $\mathcal{C}$.

A tout point M de $\mathcal{C}$ distinct de A et B , on associe le point N diamétralement opposé à M sur $\mathcal{C}$ et le point M' d'intersection des droites (BN) et (IM) .

Quel est le lieu du point M' lorsque M décrit $\mathcal{C}$ privé de A et B ?

- 50.** B et C sont deux points fixes.

H est un point fixe du segment $[BC]$. A est un point variable de la droite Δ perpendiculaire en H à (BC) .

G est le centre de gravité du triangle ABC , E est le milieu de $[AC]$, F est le milieu de $[AB]$. Quels sont les lieux respectifs des points G , E et F ?

- 51.** $\mathcal{C}$ est un cercle de centre O , A et B sont deux points diamétralement opposés sur $\mathcal{C}$.

a/ Pour tout point M de $\mathcal{C}$, distinct de A et B , on construit le point Q tel que $MABQ$ soit un parallélogramme. Déterminez le lieu géométrique du point I , milieu du segment $[MQ]$; puis le lieu du centre de gravité G du triangle BQM , lorsque M décrit $\mathcal{C}$ privé des points A et B .

b/ On note N le symétrique de A par rapport à M et P le point d'intersection des droites (ON) et (BM) . Quel rôle joue le point P relativement au triangle ANB ?

Trouvez une homothétie de centre B transformant M en P et déterminez le lieu géométrique du point P lorsque M décrit $\mathcal{C}$ privé des points A et B .

- 52.** On donne un cercle $\mathcal{C}$ et deux points distincts A et B de $\mathcal{C}$.
M est un point variable de $\mathcal{C}$ distinct de A et B. On note E le milieu de [BM] et F le milieu de [AE]. La droite (MF) coupe (AB) en I. Quel est le lieu géométrique du point I lorsque M décrit $\mathcal{C}$?

Pour chercher plus

53. Lieu géométrique

Trois points A, B, C sont donnés sur un cercle $\mathcal{C}$ de centre O et M un point variable de $\mathcal{C}$ tel que ABCM soit un quadrilatère convexe. Trouvez le lieu géométrique du point d'intersection des droites passant par les milieux des côtés opposés de ce quadrilatère.

PROBLÈMES DE CONSTRUCTION

- 54.** d_1 et d_2 sont deux droites sécantes en A. I est un point extérieur à d_1 et à d_2 . Construisez un point M de d_1 et un point N de d_2 , tels que

$$\overrightarrow{IN} = -\frac{3}{2} \overrightarrow{IM}.$$

- 55.** $\mathcal{C}$ est un cercle et I est un point non situé sur $\mathcal{C}$. Construisez une droite qui passe par I, qui coupe le cercle en deux points A et B de sorte que A soit le milieu de [IB].

- 56.** $\mathcal{C}$ est un cercle de centre O, Δ est une droite extérieure au disque. Construisez une droite qui passe par O, qui coupe $\mathcal{C}$ en M, Δ en N, de sorte que M soit le milieu de [ON].

- 57*.** d_1 et d_2 sont deux droites non parallèles, mais leur point d'intersection O est en dehors de la feuille.
M est un point de la feuille.
Comment tracer néanmoins la droite (OM) sur la feuille ?

D'AUTRES SITUATIONS

58. Une similitude cachée

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormal direct. D est la droite $(O; \vec{i})$, Δ est la droite $(O; \vec{j})$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs non nuls tels que :

$$(\vec{i}, \vec{u}) = (\vec{j}, \vec{v}) = +\frac{\pi}{6}.$$

Pour chaque point M, on note D_M et Δ_M les droites qui passent par M et de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. D_M coupe Δ en m , Δ_M coupe Δ en p .

On note M' le point dont les projections orthogonales sur Δ et Δ sont respectivement m et p .

Enfin, on note f la fonction : $M \mapsto M'$.

Le but de l'exercice est de démontrer, de deux façons, que f est une similitude.

1. Méthode géométrique

a/ Construisez l'image de M dans chacun des cas suivants :

- M n'appartient pas à la réunion de Δ et de Δ .
- M appartient à Δ , et M est distinct de O.
- M appartient à Δ , et M est distinct de O.
- $M = O$.

b/ On suppose M distinct de O. Montrez que les points O, m , p , M et M' sont sur un même cercle; montrez que le triangle OMM' est rectangle en M et que $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = +\frac{\pi}{3}$.

c/ Déduez-en que f est une similitude.

2. Méthode analytique

a/ Démontrez que les coordonnées $(x'; y')$ de M' sont :

$$\begin{cases} x' = x - y\sqrt{3} \\ y' = x\sqrt{3} + y \end{cases}$$

où $(x; y)$ sont les coordonnées de M.

b/ Exprimez l'affixe z' de M' en fonction de l'affixe z de M, et déduisez-en que f est une similitude.

- 59.** OO'A est un triangle rectangle isocèle en A et $(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AO'}) = +\frac{\pi}{2}$.

Les cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ passant par A et de centres respectifs O et O' se recoupent en B.

À tout point M de $\mathcal{C}$, on associe M' de $\mathcal{C}'$ tel qu'une mesure de $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})$ soit $-\frac{\pi}{2}$.

1. Montrez qu'il existe une rotation r , que vous caractériserez, transformant O en O' et M en M' ?

2. M étant distinct de B, les droites (BM) et (BM') recoupent respectivement $\mathcal{C}'$ en N' et $\mathcal{C}$ en N. Montrez que N' est l'image de N par la rotation r .

3. On construit les carrés MBM'P' et NBN'Q'. Montrez que les points P et Q sont respectivement les images des points M et N par une similitude directe S dont vous préciserez centre, rapport et angle. Déduez-en les ensembles décrits par les points P et Q lorsque M varie sur $\mathcal{C}$.

60. Recherche d'ensembles

S est la transformation dont l'écriture complexe dans un repère orthonormal est :

$$z' = (1 + i)z + 2.$$

1. **a/** Vérifiez que S est une similitude, précisez ses éléments caractéristiques. Le centre de S sera noté I.

b/ Donnez une construction géométrique du point M' image par S d'un point M.

2. Quel est l'ensemble $\mathcal{C}_1$ des points M tels que $\|OM\| = \|OM'\|$, avec $M' = S(M)$?

3. Quel est l'ensemble $\mathcal{C}_2$ des points M tels que $OM \cdot OM' = 0$, avec $M' = S(M)$?

4. Donnez une construction géométrique des images des points d'intersection de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

61. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unités graphiques : 5 cm), on considère les points A d'abscisse 1 et B d'abscisse i . On appelle D l'image de A dans la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{3}$ et C l'image de B

dans la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

1. **a/** Faites une figure.

b/ Montrez que les points A, B, C, D sont sur un même cercle (Γ) dont vous préciserez le centre et le rayon.

c/ Déterminez la nature du triangle OCD ; déduisez-en que $AB = CD$.

2. **a/** Calculez les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{BC}$. Déduisez-en la nature du quadrilatère ABCD.

b/ Démontrez que les diagonales (AC) et (BD) sont perpendiculaires et que $AC = BD$.

3. On désigne par J le point d'intersection de (AC) et (BD) (le calcul de l'abscisse de J n'est pas demandé dans cette question). Démontrez que (OJ) est un axe de symétrie de ABCD.

4. Soit h l'homothétie qui transforme A en C et D en B, et soit r la rotation de centre J et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

a/ Comparez $r \circ h$ et $h \circ r$.

b/ On note $S = h \circ r$. Donnez la nature de S et ses éléments caractéristiques.

c/ Déterminez l'image de A par S. Déduisez-en l'abscisse de J.

d/ Démontrez géométriquement que l'image O' de O par S est sur la droite (OB). Calculez l'abscisse de O' .

Problèmes de synthèse

PROBLÈMES DU BACCALAURÉAT

62. Suites de carrés

Dans le plan P rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ on considère les points A_n de l'axe $(O; \vec{i})$ définis par :

$$\overrightarrow{OA_1} = \vec{i}, \quad \overrightarrow{A_1A_2} = 2\vec{i}, \\ \overrightarrow{A_2A_3} = 2^2\vec{i}, \quad \dots, \quad \overrightarrow{A_nA_{n+1}} = 2^n\vec{i}, \dots$$

puis les carrés $K_1, K_2, \dots, K_n, \dots$ construits respectivement sur les segments $[OA_1], [A_1A_2], \dots, [A_{n-1}A_n], \dots$ et dont les sommets ont une ordonnée positive.

K_1 est l'ensemble des quatre points O, A_1, B_1, C_1 ,

K_2 est l'ensemble des quatre points A_1, A_2, B_2, C_2 ,

K_n est l'ensemble des quatre points A_{n-1}, A_n, B_n, C_n , où l'abscisse de B_n est supérieure à celle de C_n .

On fera une figure en prenant un centimètre comme unité.

I. Étude de la suite des carrés K_n

1. Calculez les coordonnées de B_n et de C_n . Montrez que les points $C_1, C_2, \dots, C_n$ d'une part, les points $B_1, B_2, \dots, B_n$ d'autre part appartiennent à deux droites dont on donnera des équations.

2. Soit O_n le centre du carré K_n . Calculez les coordonnées de I_n et précisez la disposition des points I_n .

3. Calculez l'aire u_n de K_n , puis la somme :

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n.$$

Déterminez la limite de la suite $\left(\frac{S_n}{4^n}\right)$.

4. Montrez que, pour tout $n \geq 1$, il existe une homothétie de centre $\Omega(-1; 0)$ transformant le carré K_1 en le carré K_n . Précisez le rapport de cette homothétie. Retrouvez ainsi les résultats obtenus au 1. et au 2.

5. Soit d la rotation de centre O_1 et d'angle π . Montrez que $h' = h \circ d$ est encore une homothétie transformant K_1 en K_n ; déterminez son centre Ω' et son rapport lorsque $n = 2$.

II. Étude des similitudes directes transformant K_1 en K_2

On connaît déjà deux similitudes directes transformant K_1 en K_2 , à savoir les homothéties h et h' introduites dans la partie I. On se propose de les déterminer toutes.

1. Soit f une similitude directe transformant K_1 en K_2 . Prouvez que $g = h^{-1} \circ f$ est une similitude directe laissant K_1 globalement invariant.

2. Soit g une similitude directe laissant K_1 globalement invariant.

a/ Prouvez que g fixe le centre O_1 de K_1 .

b/ Montrez que g est une rotation.

3. Explicitez toutes les similitudes directes g laissant K_1 globalement invariant, en fonction de la rotation r de centre O_1 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

4. Déduisez-en que les seules similitudes directes transformant K_1 et K_2 sont h , h' , $h \circ r$ et $h' \circ r$.

Déterminez leur rapport et leur angle.

5. À tout point M d'affixe z on associe son image par l'une des similitudes h , h' , $h \circ r$ et $h' \circ r$.

Calculez les affixes de ces images, notées respectivement z_1 , z_2 , z_3 et z_4 en fonction de z . Déduisez-en les centres ω et ω' des similitudes $h \circ r$ et $h' \circ r$.

Placez sur une même figure K_1 , K_2 , O_1 , O_2 , Ω , Ω' , ω et ω' .

6. Déterminez l'ensemble des points N tels que $NO_2 = 2NO_1$.

Prouvez enfin que les centres des similitudes précédentes appartiennent à cet ensemble et complétez la figure.

(Bac E.)

53. Des « jolygones »

Soit P le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

I. 1. On prend pour point M_0 l'origine O du repère; soit alors M_1 le point du plan P tel que $\overrightarrow{OM_0M_1} = \vec{i}$.

On fixe un nombre réel $r > 0$ et un nombre réel θ dans $\mathbb{R} - \{k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$. Soit M_2 le point du plan P tel que :

$$\|\overrightarrow{M_1M_2}\| = r \|\overrightarrow{M_0M_1}\|$$

et : $(\overrightarrow{M_0M_1}; \overrightarrow{M_1M_2}) = \theta$.

Calculez l'affixe v_0 du vecteur $\overrightarrow{M_0M_1}$ et l'affixe v_1 du vecteur $\overrightarrow{M_1M_2}$.

2. Les points M_0 , M_1 , M_2 ayant été définis ci-dessus, pour tout $n \geq 1$ dans $\mathbb{N}$, on définit le point M_{n+1} à partir des points M_{n-1} et M_n , par :

$$\|\overrightarrow{M_nM_{n+1}}\| = r \|\overrightarrow{M_{n-1}M_n}\|$$

et :

$$(\overrightarrow{M_{n-1}M_n}; \overrightarrow{M_nM_{n+1}}) = \theta.$$

On obtient ainsi une suite de points :

$$M_0, M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$$

et la figure obtenue en traçant les segments $[M_0M_1]$, $[M_1M_2]$, ..., $[M_nM_{n+1}]$, ... est appelée « jolygone ».

On note v_n l'affixe du vecteur $\overrightarrow{M_nM_{n+1}}$.

a/ Démontrez que pour tout $n \geq 1$:

$$v_n = re^{i\theta} v_{n-1}.$$

b/ Déduisez-en, pour tout $n \geq 0$, l'expression de v_n en fonction de n , r et θ .

c/ Dans cette question, on suppose $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et

$$\theta = \frac{\pi}{4}.$$

Calculez v_n pour $0 \leq n \leq 3$ et placez les points M_0 , M_1 , M_2 , M_3 , M_4 , en prenant 8 cm pour unité de longueur.

II. Dans toute la suite du problème on suppose $0 < r < 1$ et, pour tout $n \geq 0$, on note z_n l'affixe du point M_n .

1. Calculez z_0 , z_1 et z_2 .

2. Pour tout $n \geq 0$, exprimez v_n en fonction de z_n et z_{n+1} ; déduisez-en que, pour tout $n \geq 1$:

$$z_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}.$$

3. On rappelle que pour tout nombre complexe $z \neq 1$, on a :

$$1 + z + z^2 + \dots + z^{n-1} = \frac{1 - z^n}{1 - z}.$$

Calculez, pour tout $n \geq 0$, z_n en fonction de n , r et θ .

4. a/ Démontrez que le module du nombre complexe $z_n - \frac{1}{1 - re^{i\theta}}$ tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

b/ On note Ω le point du plan P d'affixe $\omega = \frac{1}{1 - re^{i\theta}}$. Interprétez géométriquement le résultat de la question a/ ci-dessus.

5. Pour tout $n \geq 0$, on note z'_n l'affixe du vecteur $\overrightarrow{\Omega M_n}$.

a/ Calculez z'_n en fonction de n , r et θ .

b/ Établissez qu'il existe un nombre complexe $a \neq 0$ tel que, pour tout $n \geq 1$, $z'_n = az'_{n-1}$.

c/ En interprétant géométriquement la relation précédente, déterminez une similitude directe f telle que, pour tout $n \geq 1$:

$$f(M_{n-1}) = M_n.$$

Précisez le centre, le rapport et l'angle de cette similitude.

d/ Dans cette question, on suppose $r = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et

$\theta = \frac{\pi}{4}$; calculez dans ce cas les coordonnées

du point Ω et placez ce point sur la figure précédemment tracée.

Indiquez une construction géométrique simple de M_n connaissant Ω et M_{n-1} et placez les points M_5 , M_6 , M_7 et M_8 sur la figure.

(Bac E.)

Notions sur les transformations de l'espace

Pour l'étude de la géométrie de l'espace, les transformations essentielles restent les translations, les homothéties, les réflexions, les rotations.

L'étude des symétries ou des rotations laissant un solide invariant est utile dans d'autres domaines que les Mathématiques, par exemple en Mécanique ou dans l'étude des cristaux.

COURS

1 Translations

1.1. DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS

DÉFINITION 1

La translation de vecteur $\vec{u}$ est la transformation qui, à chaque point M de l'espace, associe le point M' tel que $\overline{MM'} = \vec{u}$.

Propriétés

- t est la translation de vecteur $\vec{u}$.

Alors, pour tous points M et N de l'espace, avec $M' = t(M)$ et $N' = t(N)$, on a $\overline{M'N'} = \overline{MN}$.

- $t_{\vec{u}}$ et $t_{\vec{v}}$ sont les translations de vecteurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Alors :

$$t_{\vec{u}} \circ t_{\vec{v}} = t_{\vec{v}} \circ t_{\vec{u}} = t_{\vec{u} + \vec{v}}$$

où $t_{\vec{u} + \vec{v}}$ est la translation de vecteur $\vec{u} + \vec{v}$.

1.2. IMAGES D'UNE DROITE, D'UN PLAN, D'UN CERCLE, D'UNE SPHÈRE

Par une translation :

- l'image d'une droite est une droite parallèle;
- l'image d'un plan est un plan parallèle;
- l'image d'un cercle situé dans un plan P est un cercle de même rayon et situé dans un plan parallèle à P;
- l'image d'une sphère est une sphère de même rayon.

Nous admettons ces résultats.

2 Homothéties

2.1. DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS

DÉFINITION 2

L'homothétie de centre le point O et de rapport le réel k non nul est la transformation qui, à chaque point M de l'espace, associe le point M' tel que $\overrightarrow{OM'} = k \overrightarrow{OM}$.

Lorsque $k = -1$, l'homothétie est la symétrie centrale de centre O .

Propriétés

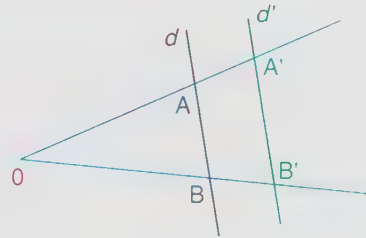
- h est l'homothétie de centre O et de rapport k .
Alors, pour tous points M et N de l'espace, avec $M' = h(M)$ et $N' = h(N)$, on a $\overrightarrow{M'N'} = k \overrightarrow{MN}$.
- Le centre O , un point M , et son image $M' = h(M)$ sont alignés.

2.2. IMAGES D'UNE DROITE, D'UN PLAN, D'UN CERCLE, D'UNE SPHÈRE

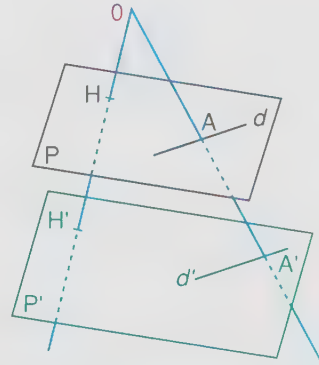
- Par une homothétie, l'image d'une droite est une droite parallèle.

En effet, si la droite d passe par le centre O de l'homothétie h , alors il est évident que l'image de d est la droite d elle-même.

Si d ne passe pas par O , alors d et O sont dans un même plan P , et l'on sait que dans ce plan, l'image de d est une droite d' parallèle à d .

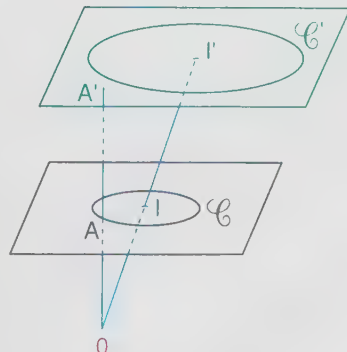


- Par une homothétie, l'image d'un plan est un plan parallèle.



- Par une homothétie, l'image d'un cercle $\mathcal{C}$ est un cercle $\mathcal{C}'$.

Les plans des deux cercles sont parallèles, les deux centres se correspondent dans l'homothétie et le rapport $\frac{R'}{R}$ où R est le rayon de $\mathcal{C}$ et R' celui de $\mathcal{C}'$, est égal à la valeur absolue du rapport d'homothétie.



- Par une homothétie, l'image d'une sphère est une sphère.

Nous admettons ces résultats.

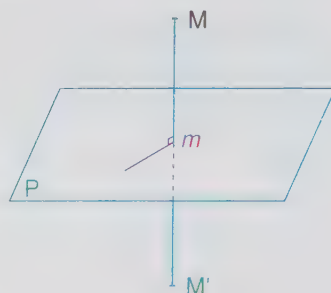
3 Réflexions ou symétries orthogonales

3.1. DÉFINITIONS

DÉFINITION 3

La **réflexion d'axe la droite d** est la transformation qui laisse invariant chaque point de d , et qui à chaque point M n'appartenant pas à d , associe le point M' tel que d soit la médiatrice de $[MM']$ dans le plan défini par M et d .

La **réflexion de plan P** est la transformation qui laisse invariant chaque point de P et qui, à chaque point M n'appartenant pas à P , associe le point M' tel que P soit le plan médiateur du segment $[MM']$.



Le plan médiateur du segment $[MM']$ lorsque $M \neq M'$ est le plan qui contient le milieu de $[MM']$ et qui est perpendiculaire à la droite (MM') .

3.2. CENTRE DE SYMÉTRIE, AXE DE SYMÉTRIE, PLAN DE SYMÉTRIE D'UNE FIGURE

Dire qu'une droite d (resp. un plan P) est un **axe de symétrie** d'une figure F (resp. un plan de symétrie) signifie que l'image de F par la réflexion d'axe d (resp. par la réflexion de plan P) est la figure F elle-même.

Dans ce cas, on dit que F est globalement invariante par la réflexion d'axe d (resp. par la réflexion de plan P).

Dire qu'un point O est centre de symétrie d'une figure F signifie que l'image de F par la symétrie centrale de centre O est la figure F elle-même.

Dans ce cas, on dit que F est globalement invariante par cette symétrie centrale.

Pour des exemples, reportez-vous aux Travaux pratiques d'application.

3.3. IMAGE D'UNE DROITE, D'UN PLAN, D'UN CERCLE, D'UNE SPHÈRE

Par une réflexion :

- l'image d'une droite est une droite, en général non parallèle;
- l'image d'un plan est un plan, en général non parallèle;
- l'image d'un cercle est un cercle de même rayon;
- l'image d'une sphère est une sphère de même rayon.

Nous admettons ces résultats.

3.4. COMPOSÉE DE DEUX RÉFLEXIONS PAR RAPPORT À DES PLANS SÉCANTS

P_1 et P_2 sont deux plans sécants selon la droite d ; s_1 et s_2 sont respectivement les réflexions de plans P_1 et P_2 .

Étudions la composée $s_2 \circ s_1$, en cherchant l'image d'un point M par $s_2 \circ s_1$.

Si M est situé sur d , alors M est invariant par $s_2 \circ s_1$.

Considérons donc un point M non situé sur d . Notons Q le plan passant par M et perpendiculaire à la droite d .

Ce plan Q coupe P_1 et P_2 selon deux droites d_1 et d_2 sécantes en un point m de d .

Notons M' l'image de M par la réflexion d'axe d_1 ; le milieu de $[MM']$ qui est sur d_1 , appartient donc à P_1 ; par ailleurs (MM') est perpendiculaire à P_1 , car orthogonale à deux droites sécantes de P_1 , à savoir d et d_1 .

Donc P_1 est le plan médiateur de $[MM']$, et M' est aussi l'image de M dans la réflexion de plan P_1 .

De même, le point M'' image de M' dans la réflexion d'axe d_2 est aussi l'image de M' dans la réflexion de plan P_2 .

Donc $M'' = (s_2 \circ s_1)(M)$ et $M'' = (s'_2 \circ s'_1)(M)$, en notant s'_1 et s'_2 les réflexions du plan Q , d'axes respectifs d_1 et d_2 .

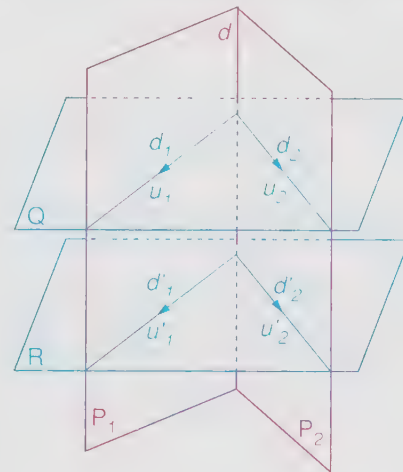
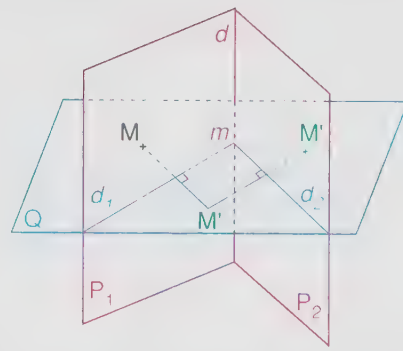
Dans le plan Q , on passe donc de M à M'' par la rotation égale à la composée des deux réflexions s'_2 et s'_1 .

Orientons la droite d , définissant ainsi une orientation du plan Q (voir chapitre 7, paragraphe 7.2.).

Nous pouvons alors mesurer l'angle $(\vec{u}_1; \vec{u}_2)$ où $\vec{u}_1$ est un vecteur directeur de d_1 et $\vec{u}_2$ un vecteur directeur de d_2 .

Dans ces conditions, M'' s'obtient à partir de M par la rotation dans le plan Q , de centre m et d'angle $2(\vec{u}_1; \vec{u}_2)$.

Remarquons alors ceci : soit R un autre plan perpendiculaire à d ; R coupe P_1 et P_2 selon deux droites d'_1 et d'_2 . Les droites d_1 et d'_1 sont parallèles, de même que d_2 et d'_2 . L'orientation de d étant fixée, les plans R et Q sont orientés, et nous admettrons ici que $2(\vec{u}_1; \vec{u}_2) = 2(\vec{u}'_1; \vec{u}'_2)$ où $\vec{u}'_1$ et $\vec{u}'_2$ sont respectivement des vecteurs directeurs de d'_1 et de d'_2 ; en d'autres termes, nous admettrons ici que l'angle $2(\vec{u}_1; \vec{u}_2)$ ne dépend pas de M . Cette étude conduit à poser la définition suivante.



4

Définition d'une rotation autour d'un axe

DÉFINITION 4

d est une droite, $\vec{k}$ un vecteur unitaire de d orientant la droite d (ainsi tout plan Q perpendiculaire à d est orienté).

La rotation d'axe d orienté par $\vec{k}$ et d'angle α est la transformation définie par les conditions suivantes :

- si M n'est pas sur d , désignons par m le projeté orthogonal de M sur d , et par Q le plan passant par m et orthogonal à d .
Le point M' , image de M par la rotation, est le point du plan Q tel que :

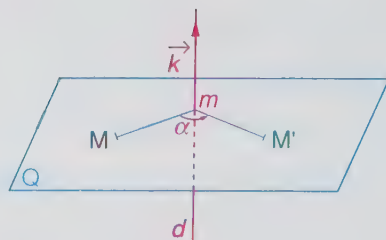
$$mM' = mM \text{ et } (\overrightarrow{mM}; \overrightarrow{mM'}) = \alpha;$$

- si M est sur d , alors $M' = M$.

On note $r(d, \vec{k}, \alpha)$ cette rotation.
Si l'on oriente d par le vecteur $-\vec{k}$,
l'orientation du plan Q est changée et
alors :

$$r(d, \vec{k}, \alpha) = r(d, -\vec{k}, -\alpha).$$

Avec cette définition, nous pouvons
énoncer le résultat du paragraphe précé-
dent selon le théorème suivant :



THÉORÈME 1

La composée $s_2 \circ s_1$ de deux réflexions s_1 et s_2 de plans respectifs P_1 et P_2 sécants selon une droite d , est une rotation d'axe d .

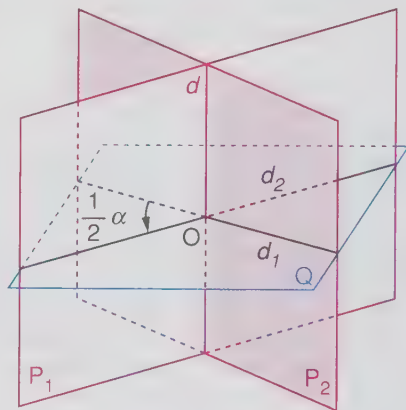
Pour obtenir l'angle de la rotation, on oriente la droite d , et on choisit un plan Q perpendiculaire à d . Ce plan est alors orienté par sa normale d . Il coupe P_1 et P_2 selon deux droites d_1 et d_2 ; l'angle de la rotation est alors $2(\vec{u}_1; \vec{u}_2)$ où $\vec{u}_1$ est un vecteur directeur de d_1 et $\vec{u}_2$ un vecteur directeur de d_2 .

Réciproquement, toute rotation autour d'un axe se décompose en le produit de deux réflexions par rapport à des plans sécants selon d , l'un de ces plans pouvant être choisi arbitrairement.

Nous admettons ces résultats.

DÉFINITION D'UN DEMI-TOUR

Remarquez que la rotation d'axe d et d'angle π est la réflexion d'axe d ; on appelle cette transformation le **demi-tour** d'axe d .



5

Propriétés communes à ces transformations

Comme en géométrie plane, on peut démontrer que chacune des transformations considérées, translation, homothétie, réflexion, rotation :

- conserve le barycentre;
 - conserve le parallélisme : elle transforme deux droites (resp. plans) parallèles en deux droites (resp. plans) parallèles;
 - conserve l'orthogonalité : elle transforme deux droites orthogonales (resp. plans perpendiculaires) en deux droites orthogonales (resp. plans perpendiculaires).
- Nous admettons ici ces résultats.

En outre, les translations, les réflexions, les rotations sont des isométries : elles conservent la distance, ainsi que les aires planes et les volumes.

En revanche, en général, les homothéties ne conservent pas la distance; une homothétie de rapport k , « multiplie les distances par $|k|$, les aires par k^2 et les volumes par $|k|^3$ ». Nous admettons ici tous ces résultats.

TRAVAUX PRATIQUES D'APPLICATION

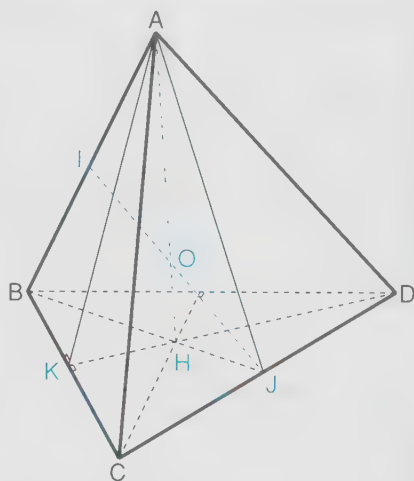
1

Exemples de recherche de réflexions ou de rotations laissant invariant un solide usuel

1.1. Le tétraèdre régulier

Considérons un tétraèdre régulier ABCD. Le but de l'exercice est de trouver toutes les réflexions et les rotations laissant le tétraèdre globalement invariant, ce qui revient à trouver les réflexions et les rotations laissant l'ensemble $\{A, B, C, D\}$ globalement invariant.

On remarquera que l'isobarycentre des points A, B, C, D est invariant par chacune de ces transformations; il appartient donc à l'axe ou au plan d'une réflexion, ainsi qu'à l'axe d'une rotation laissant $\{A, B, C, D\}$ globalement invariant.



a/ I et J sont les milieux des arêtes opposées [AB] et [CD].

Montrez que la droite (IJ) est perpendiculaire à chacune des droites (AB) et (CD).

Déduisez-en que (IJ) est axe de symétrie du tétraèdre.

Définissez de la même manière deux autres axes de symétrie du tétraèdre.

b/ H est le centre de gravité du triangle BCD.

Montrez que la droite (AH) est perpendiculaire au plan (BCD); donnez une mesure de chacun des angles (HB; HC), (HC; HD) et (HD; HB).

Déduisez-en qu'il existe trois rotations d'axe (AH) conservant le tétraèdre, l'un étant la transformation identité de l'espace. On notera **id** cette identité.

Montrez alors qu'il existe 8 rotations distinctes de **id** laissant le tétraèdre globalement invariant et qui ne sont pas des réflexions.

Indication : on remarquera qu'une réflexion d'axe d est une rotation d'axe d et d'angle plat.

c/ Montrez que la réflexion de plan (ABJ) laisse le tétraèdre globalement invariant.

Définissez de la même manière 5 autres plans de symétrie du tétraèdre.

d/ Existe-t-il d'autres réflexions ou rotations laissant le tétraèdre globalement invariant ?

Vocabulaire : considérons une rotation laissant un polyèdre invariant; si l'angle de cette rotation est $\frac{2k\pi}{n}$, où n est un naturel, $n \geq 2$, et k un entier

tel que $1 \leq k \leq n-1$ on dit que l'axe de cette rotation est un axe d'ordre n du polyèdre (si $n=2$ on dit aussi axe binaire, ternaire si $n=3$, quaternaire du polyèdre (si $n=2$ on dit aussi axe binaire, ternaire si $n=3$, quaternaire si $n=4$).

1.2. Le cube

Considérons un cube $ABCD A' B' C' D'$. On se propose de trouver les réflexions et rotations laissant ce cube globalement invariant, ce qui revient à trouver les rotations et réflexions laissant l'ensemble $\{A, B, C, D, A', B', C', D'\}$ globalement invariant.

a/ Montrez que le cube admet un centre de symétrie.

b/ I et J sont les centres des carrés $AA'D'D$ et $BB'C'C$.

Montrez que (IJ) est un axe quaternaire du cube.

Pouvez-vous définir, de la même manière, deux autres axes quaternaires du cube ? Vérifiez que ces axes quaternaires sont aussi axes de symétrie du cube.

c/ B se projette orthogonalement en H sur (AC') .

Montrez que H est au tiers de $[AC']$ à partir de A .

d/ Montrez que D et A' se projettent orthogonalement en H sur (AC') .

e/ Montrez que D' , B' et C se projettent orthogonalement en K sur (AC') , K étant au tiers de $[AC']$ à partir de C' .

f/ Montrez alors que (AC') est un axe ternaire du cube, et que les autres diagonales sont aussi des axes ternaires.

Indications : vous pouvez remarquer que H peut être considéré comme le centre du triangle $A'DB$ dans le tétraèdre régulier $C'A'DB$.

g/ A'' et C'' sont les milieux des côtés $[AA']$ et $[CC']$.

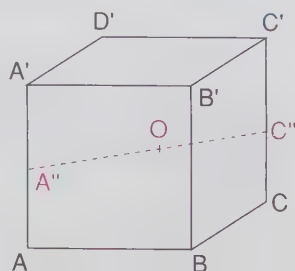
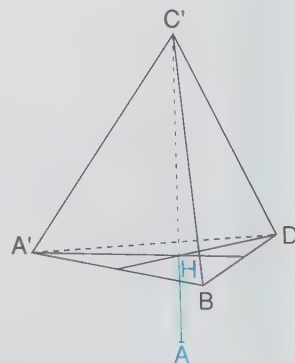
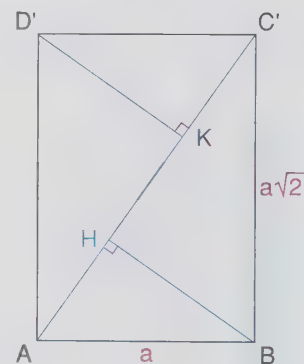
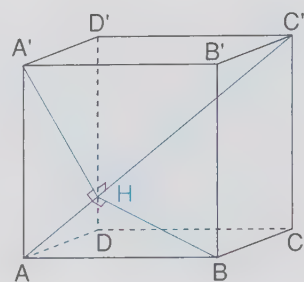
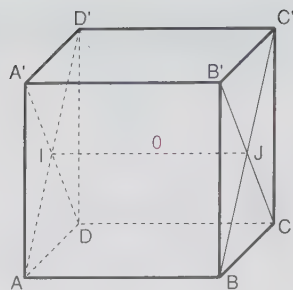
Montrez que $(A''C'')$ est un axe de symétrie (ou axe binaire) du cube.

Définissez de la même manière cinq autres axes de symétrie du même type.

h/ Dédisez-en que le cube admet neuf axes de symétrie (n'oubliez pas les axes d'ordre 4).

i/ Montrez que le cube admet six plans de symétrie perpendiculaire aux axes de symétrie.

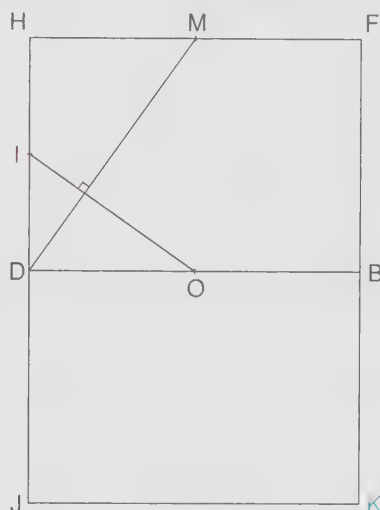
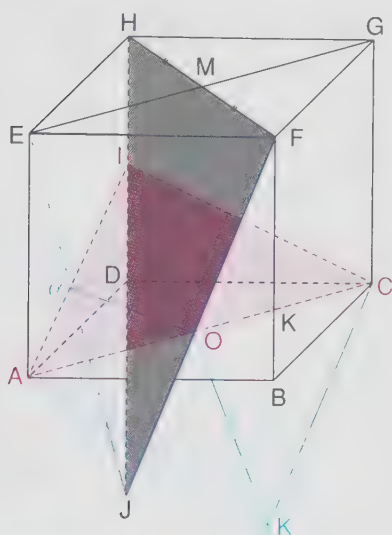
f*/ Montrez qu'il n'existe pas d'autres rotations ou réflexions laissant le cube globalement invariant.



2 Autour du cube

ABCDEFGH est un cube.

I est le milieu de $[HD]$, O est le milieu de $[AC]$, M est le milieu de $[HF]$. Le plan (ACI) coupe (BF) en K et J est le point tel que D soit le milieu de $[JH]$.



1. Montrez que le plan (ACI) est le plan médiateur de $[FJ]$.
2. Montrez que les segments $[FJ]$ et $[AC]$ se coupent en O et que les plans (ACI) et (FHJ) sont perpendiculaires et sécants selon (OI) .
3. s est la réflexion de plan (ACI) .

a/ Quelles sont les images par s des points A, C, F?

b/ D se projette en d sur le plan (ACI) .

Vérifiez que d appartient à (OI) . Construisez alors l'image D' de D par s .

Déduisez-en la position de $H' = s(H)$ et $B' = s(B)$.

Indication : vous pouvez utiliser le fait que I est le milieu de $[HD]$ et que O est le milieu de $[BD]$.

c/ Montrez que M se projette en d sur le plan (ACI) . Construisez $M' = s(M)$.

4. Les plans (ACI) et (EFJ) sont perpendiculaires.

Montrez que leur intersection est la droite $(O\alpha)$, α étant le point commun aux droites (AI) et (EJ) dans le plan (EJA) .

Construisez alors le projeté orthogonal de E sur le plan (ACI) et $E' = s(E)$.

Déduisez-en que $G' = s(G)$, sachant que M est le milieu de $[EG]$.

EXERCICES ET PROBLÈMES

Pour s'entraîner

1. ABCD et ABEF sont deux carrés situés dans des plans perpendiculaires.

a/ Démontrez que (FC) est orthogonale à (DB) et à (AE).

b/ H et K sont les centres de gravité des triangles ABC et ABF. Montrez que (HK) est la perpendiculaire commune à (DB) et (AE).

2. P_1 et P_2 sont deux plans sécants; déterminez les plans P tels que pour la réflexion s de plan P on ait :

$$s(P_1) = P_2.$$

3. P_1 et P_2 sont deux plans sécants; déterminez les demi-tours d'axes tels que :

$$d(P_1) = P_2.$$

Pour les exercices 4 à 6, d_1 et d_2 sont les demi-tours d'axes D_1 et D_2 ; en les décomposant en réflexions, déterminez $d_2 \circ d_1$.

4. D_1 parallèle à D_2 .

5. D_1 perpendiculaire à D_2 .

6. D_1 orthogonale à D_2 .

7. Trouvez le lieu géométrique du symétrique d'un point O par rapport à un plan P qui passe par une droite fixe.

8. Trouvez le lieu géométrique du symétrique d'un point O par rapport à une droite qui varie dans un plan en passant par un point fixe I.

9. A, B, C sont trois points non alignés. À tout point M de l'espace, on associe les points M_1 et M_2 tels que $MABM_1$ et $MACM_2$ soient des parallélogrammes, puis le point M' tel que MM_1M_2M' soit un parallélogramme. Identifiez la transformation qui transforme M en M' .

10. Un triangle JAB rectangle dans un plan Q a pour longueurs de ces côtés : $JA = 5$, $JB = 3$ et $AB = 4$. Le point I est tel que $\vec{JI} = \frac{1}{3} \vec{JA}$. On note P le plan perpendiculaire à Q contenant le côté [AB], S la sphère de centre I et de rayon 3, h l'homothétie de centre J et de rapport 2. Précisez dans le plan P les intersections de P avec les sphères S et h(S).

11. On considère dans l'espace quatre points A, B, C, D tels que :

$$AC = AB = BC = BD = AD = a$$

(a réel positif donné).

1. a/ I étant le milieu du segment [AB], montrez que les droites (IC) et (ID) sont perpendiculaires à la droite (AB).

b/ Montrez que $IC = ID$; exprimez cette longueur en fonction de a.

2. Soit S_1 la réflexion de plan (ABC) et S_2 la réflexion de plan (ABD).

a/ Quelle est la nature de la transformation $R = S_1 \circ S_2$?

b/ Déterminez en fonction de a la longueur $x = CD$ pour que R soit une rotation d'angle plat.

12. Dans l'espace, on considère trois points alignés A, B, C et un point O. On désigne par G l'isobarycentre des points A, B, C. Soit A' , B' , C' les points définis par les relations :

$$\begin{aligned}\vec{OA'} &= \vec{OB} + \vec{OC}, & \vec{OB'} &= \vec{OC} + \vec{OA}, \\ \vec{OC'} &= \vec{OA} + \vec{OB}.\end{aligned}$$

1. Montrez que les segments $[AA']$, $[BB']$, $[CC']$ ont le même milieu I et calculez OI en fonction de OG .

2. On se propose de retrouver les résultats de la question 1. en utilisant des transformations convenables.

a/ Soit A_1 , B_1 , C_1 les milieux respectifs des segments $[BC]$, $[CA]$, $[AB]$. Montrez qu'il existe une homothétie f de centre G et une seule transformant A en A_1 , B en B_1 , C en C_1 ; précisez le rapport de f.

b/ Montrez qu'il existe une homothétie g de centre O et une seule transformant A_1 en A' , B_1 en B' , C_1 en C' ; précisez le rapport de g.

c/ Déterminez la nature de $g \circ f$; concluez.

13. Sections du cube

On donne un cube ABCDA'B'C'D'. L'arête mesure a ; on donne un réel b positif et $b < a$. Un sommet étant choisi (par exemple C), on considère les trois points situés à une distance b et C sur les demi-droites d'origine C portant les côtés du cube. On coupe le cube par le plan P, passant par ces trois points et on supprime la partie du cube située du même côté de P que le point C. Dans chacun des cas proposés :

1. dessinez ce qui reste du cube après l'opération effectuée avec le point A ;

2. dessinez ce qui reste après les mêmes opérations effectuées aux points A' et B' ;

3. dessinez ce qui reste après les mêmes opérations effectuées aux huit sommets ;

4. calculez le volume du solide restant.

$$a/ 1^{\text{er}} \text{ cas : } b = \frac{a}{3} \quad b/ 2^{\text{e}} \text{ cas : } b = \frac{a}{2}$$

$$c/ 3^{\text{e}} \text{ cas : } b = a.$$

EXERCICES DU BACCALAURÉAT

14. On considère dans l'espace quatre points A, B, C, D tels que :

$$AC = AB = BC = BD = AD = a$$

(a réel positif donné).

1. a/ I étant le milieu du segment [AB], montrez que les droites (IC) et (ID) sont perpendiculaires à la droite (AB).

b/ Montrez que $IC = ID$; exprimez cette longueur en fonction de a.

2. Soit S_1 la réflexion de plan (ABC) et S_2 la réflexion de plan (ABD).

a/ Quelle est la nature de la transformation $R = S_1 \circ S_2$?

b/ Déterminez en fonction de a la longueur $x = CD$ pour que R soit une rotation d'angle plat.

15. Soit Δ_1 et Δ_2 deux droites distinctes de l'espace. On note R_1 et R_2 les demi-tours d'axes respectifs Δ_1 et Δ_2 .

Le but de l'exercice est de déterminer une condition nécessaire et suffisante portant sur Δ_1 et Δ_2 pour que $R_2 \circ R_1 = R_1 \circ R_2$.

1. On suppose que Δ_1 et Δ_2 sont sécantes en un point O et sont orthogonales. On note Δ la droite orthogonale en O au plan P contenant Δ_1 et Δ_2 . On note P_1 et P_2 les plans passant par Δ et contenant respectivement Δ_1 et Δ_2 .

a/ Faites une figure.

b/ On note S_P , S_{P_1} et S_{P_2} les réflexions par rapport aux plans respectifs P, P_1 et P_2 . Déterminez $S_P \circ S_{P_1}$ et $S_{P_2} \circ S_P$.

c/ Dédisez-en que $R_2 \circ R_1$ est le demi-tour R_Δ d'axe Δ .

d/ Prouvez que $R_2 \circ R_1 = R_1 \circ R_2$.

2. Réciproquement on suppose que :

$$R_2 \circ R_1 = R_1 \circ R_2.$$

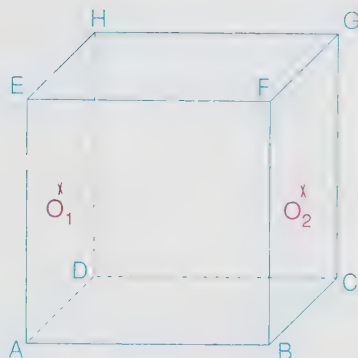
Soit A un point de Δ_1 n'appartenant pas à Δ_2 et B l'image de A par R_2 .

a/ Montrez que la droite (AB) et la droite Δ_2 sont sécantes et orthogonales.

b/ En utilisant la relation $R_2 \circ R_1 = R_1 \circ R_2$, prouvez que $B = R_1(B)$.

c/ Dédisez-en que Δ_1 et Δ_2 sont sécantes et orthogonales.

16.



On considère un cube $ABCDEFGH$; on appelle O_1 et O_2 les centres respectifs des faces $ADHE$ et $BCGF$.

Soit N un point du segment [HF] et P un point du segment [AC] définis par :

$$\overrightarrow{HN} = k \overrightarrow{HF} \text{ et } \overrightarrow{AP} = k \overrightarrow{AC} \text{ où } k \in [0; 1].$$

1. Montrez que N est barycentre du système des points pondérés $\{(H, 1-k), (F, k)\}$ et que P est barycentre du système des points pondérés $\{(A, 1-k), (C, k)\}$.

2. Soit d le demi-tour d'axe $(O_1 O_2)$.

Quelles sont les images par d des points A, C et P?

3. I étant le milieu du segment [NP], montrez que $\overrightarrow{HN} + \overrightarrow{AP} = 2 \overrightarrow{O_1 I}$ puis que :

$$\overrightarrow{HF} + \overrightarrow{AC} = 2 \overrightarrow{O_1 O_2}.$$

Dédisez-en que : $\overrightarrow{O_1 I} = k \overrightarrow{O_1 O_2}$, $k \in [0; 1]$. Quel est l'ensemble des points I lorsque k décrit l'intervalle $[0; 1]$?

17. 1. Dans l'espace, on considère une droite Δ et le demi-tour s d'axe Δ . Étant donné deux points A et C, on note B et D leurs transformés par s. On note I le milieu de [AB] et J le milieu de [CD]. On suppose que A, B, C, D ne sont pas coplanaires.

a/ Faites une figure.

b/ Prouvez que $AC = BD$ et $BC = AD$.

2. Réciproquement, soit (A, B, C, D) un tétraèdre tel que $AC = BD$ et $BC = AD$. On note I et J les milieux respectifs de [AB] et [CD].

a/ Montrez que :

$$BC^2 + BD^2 = 2BJ^2 + \frac{1}{2} CD^2$$

$$AC^2 + AD^2 = 2AJ^2 + \frac{1}{2} CD^2.$$

b/ Dédisez-en que (IJ) est orthogonale à (AB).

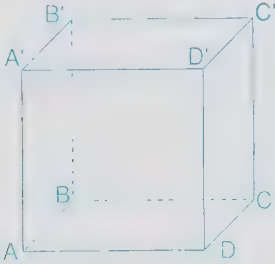
c/ Prouvez de même que (IJ) est orthogonale à (CD).

d/ Déterminez les images de A, B, C, D par le demi-tour s d'axe (IJ).

3. Soit (A, B, C, D) un tel tétraèdre. On note K et L les milieux respectifs de $[AC]$ et $[BD]$ et G l'isobarycentre de (A, B, C, D) . Montrez que (IJ) et (KL) sont sécantes en G et que $IKJL$ est un losange de centre G . Placez ces points sur la figure.

18. $ABCD A'B'C'D'$ est un cube (voir figure). On note :

- s_1 la réflexion de plan $(AA'BB')$;
- s_2 la réflexion de plan $(BB'CC')$;
- s_3 la réflexion de plan $(CC'DD')$;
- s_4 la réflexion de plan $(DD'AA')$.



1. a/ Montrez que $r' = s_2 \circ s_1$ est un demi-tour dont on précisera l'axe.

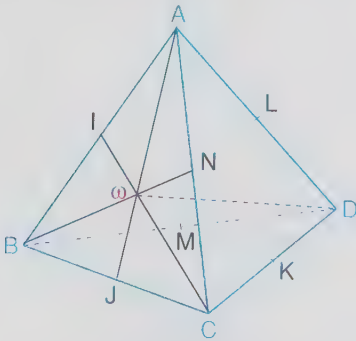
b/ Déterminez de même la nature de $r'' = s_4 \circ s_3$.

2. On note s la réflexion de plan $(BB'DD')$.

a/ Déterminez les réflexions s' et s'' telles que : $r' = s \circ s'$ et $r'' = s'' \circ s$.

b/ Déduisez-en que $t = r'' \circ r'$ est la translation de vecteur $2\vec{BD}$.

19. Dans l'espace orienté, on considère un tétraèdre régulier $ABCD$. Les points I, J, K, L, M et N sont les milieux respectifs des segments $[AB], [BC], [CD], [DA], [BD]$ et $[AC]$.



1. a/ Démontrez que la droite (BC) est orthogonale au plan (ADJ) .

b/ Indiquez cinq autres orthogonalités démontrables de la même manière qu'au 1.

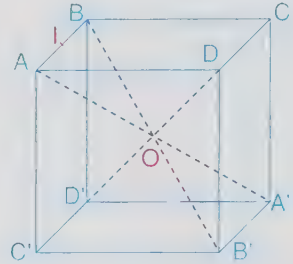
c/ Soit w l'isobarycentre des points A, B et C . Démontrez que (Dw) est orthogonale au plan (ABC) .

2. On considère la réflexion s par rapport au plan (ADJ) et la réflexion s' par rapport au plan (CDI) . On pose $r = s \circ s'$.

a/ Déterminez l'axe de la rotation r .

b/ Déterminez les images par r de A, B et C . En déduire une mesure de l'angle de r .

20. Dans l'espace, on considère le cube de centre O représenté sur la figure ci-dessous :



1. a/ Démontrez que les plans OAB et OBC sont des plans de symétrie de ce cube.

Soit s_1 et s_2 les réflexions correspondantes.

b/ Soit $f = s_1 \circ s_2$.

Précisez les images des huit sommets du cube par f .

Déterminez l'axe de la rotation f et montrez que les plans ACD' et $A'C'D$ sont invariants par f .

Déduisez-en l'angle de f .

2. Soit I le milieu du segment $[AB]$.

a/ Démontrez que la droite (OI) est un axe de symétrie du cube.

Soit r le demi-tour correspondant.

b/ Indiquez la nature de $g = r \circ f$. Pour cela, on écrira r sous la forme $r = s_3 \circ s_1$, où s_3 est une réflexion dont on indiquera le plan.

c/ Précisez les images des huit sommets du cube par g et déterminez enfin les éléments caractéristiques de g .

21. Dans l'espace orienté, on considère deux points distincts A et D et le plan P orthogonal en A à la droite (AD) . On convient d'orienter P en choisissant pour vecteur normal le vecteur $\vec{AD}$.

Dans le plan P on considère deux points B et C tels que le triangle ABC soit équilatéral de sens direct.

On pose $AB = BC = CA = a$. On note I le milieu du segment BC .

1. a/ Placez les éléments précédents sur une figure (on représentera $\vec{AD}$ vertical ascendant).

b/ Montrez que le plan (IAD) est le plan médiateur du segment $[BC]$.

2. Soit s_1 la réflexion par rapport au plan (ABC) et s_2 la réflexion par rapport au plan (DBC) .

On note $r = s_1 \circ s_2$.

a/ Indiquez l'image de D par r et déterminez l'axe et l'angle de r .

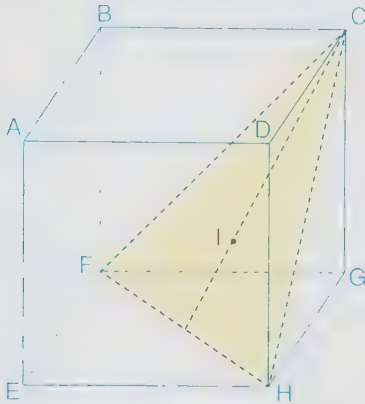
Le plan (AID) est orienté de telle sorte que

$(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AD})$ ait pour mesure $\frac{\pi}{2}$.

b/ Déterminez en fonction de a la distance

AD pour que l'angle de r ait pour mesure $\frac{\pi}{2}$.

- 22.** On considère un cube ABCDEFGH d'arête a . On note I l'isobarycentre du triangle CFH.



1. a/ Montrez que le triangle CFH est équilateral.

b/ Prouvez que les points A, G et I appartiennent au plan médiateur de [CH] et au plan médiateur de [CF].

c/ Déduez-en que la droite (AG) est orthogonale au plan CFH et qu'elle passe par I.

2. On note P le plan contenant les droites (AB) et (HG) et P' le plan contenant les droites (AD) et (FG).

On désigne par s et s' les réflexions par rapport aux plans P et P'.

a/ Déterminez l'intersection des plans P et P'.

b/ Déterminez les images des points C, F et H par s et s' , puis par $s' \circ s$.

c/ Indiquez la nature de $s' \circ s$ et déterminez ses éléments caractéristiques.

- 23.** On considère un triangle équilatéral ABC dans l'espace orienté $\mathcal{E}$.

Soit :

— O le centre de gravité du triangle ABC ;

— I un point extérieur au plan (ABC), équidistant de A, B et C ;

— J le symétrique de I par rapport au plan (ABC).

On suppose le plan (ABC) orienté de telle sorte que l'angle $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ soit de sens direct.

On se propose de déterminer l'ensemble $\mathcal{R}$ des réflexions de l'espace qui transforment l'ensemble $\{A, B, C\}$ en lui-même.

1. Soit S un élément de $\mathcal{R}$. On note P le plan de S.

a/ Montrez que P passe nécessairement par O.

b/ Montrez que I a pour image I ou J par S. Que peut-on en déduire pour P ?

c/ On se place dans le cas où $S(I) = I$. Déterminez alors le plan P en considérant les différentes possibilités pour l'image de A.

2. Déduez-en l'ensemble $\mathcal{R}$.

3. Déterminez l'ensemble obtenu en composant 2 à 2 les éléments de $\mathcal{R}$.

Combien de transformations distinctes trouve-t-on ainsi ?

Précisez les demi-tours obtenus.

- 24.** Soit ABCD un tétraèdre régulier, G son isobarycentre et H l'isobarycentre du triangle ABD.

On note I, J, K et L les milieux respectifs des segments [AD], [BC], [AC] et [BD].

1. a/ Démontrez que les droites (IJ) et (KL) sont concourantes en G.

b/ Démontrez que la droite (CG) coupe le plan (ABD) en H.

c/ Placez sur une figure les données précédentes.

2. Soit s_1 la réflexion par rapport au plan (BIC) et s_2 la réflexion par rapport au plan (ALC). On pose $r = s_2 \circ s_1$.

a/ Montrez que (BIC) est le plan médiateur du segment [AD] ; déduisez-en les images de A et de D par s_1 .

Déterminez de même les images de B et de D par s_2 .

b/ Déterminez les images des points A, B, C, D et G par r .

c/ Démontrez que r est une rotation dont on déterminera l'axe et l'angle.

- 25. 1.** Dans l'espace, on donne deux points A et B distincts.

a/ Montrez que toute rotation R de l'espace transformant A en B a son axe D inclus dans le plan médiateur de [A, B].

b/ Réciproquement, soit D une droite du plan médiateur de [A, B].

Montrez qu'il existe une rotation R et une seule d'axe D transformant A en B. On pourra introduire le projeté orthogonal K de A sur D.

2. Soit OABC un tétraèdre régulier.

a/ Montrez qu'il existe une rotation R_1 et une seule d'axe (OC) transformant A en B.

b/ Montrez que le projeté orthogonal K de A sur (OC) est le milieu de [OC].

c/ Déterminez le cosinus de l'angle de la rotation R_1 .

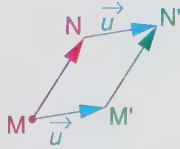
LEXIQUE

RAPPELS SUR LES TRANSFORMATIONS USUELLES

Définitions et propriétés spécifiques

Translations

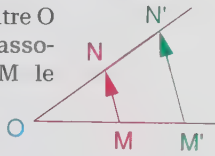
- La translation de vecteur $\vec{u}$ associe à chaque point M le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.
- Pour tous points M et N d'images respectives M' et N' par la translation, on a : $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$.



Homothéties

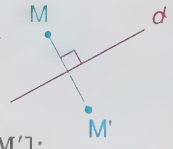
- L'homothétie de centre O et de rapport k ($k \neq 0$) associe à chaque point M le point M' tel que :

$$\overrightarrow{OM'} = k \overrightarrow{OM}.$$
- Pour tous points M et N d'images respectives M' et N' par l'homothétie, on a : $\overrightarrow{M'N'} = k \overrightarrow{MN}$.
 On en déduit $M'N' = |k| \times MN$.



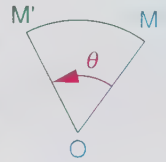
Réflexions

- La réflexion par rapport à la droite d associe :
- à chaque point M extérieur à d , le point M' tel que d soit la médiatrice de $[MM']$;
 - à chaque point M de d , le point M lui-même.



Rotations

- La rotation de centre O et d'angle θ , $\theta \neq 0$, laisse O invariant et associe à chaque point M , distinct de O , le point M' tel que :



$$OM' = OM \quad (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \theta.$$

- Pour tous points M et N d'images M' et N' : $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{M'N'}) = \theta$ et $M'N' = MN$.

Propriétés communes

1. Ces quatre transformations TRANSFORMENT : les droites en droites, les segments en segments, les cercles en cercles, les parallélogrammes en parallélogrammes, les coniques en coniques.

2. CONSERVATION

Dans ce qui suit, l'image d'un point A (resp. B , C) est notée A' (resp. B' , C').

Dire qu'une transformation CONSERVE :	SIGNIFIE que :
le parallélisme	les images de deux droites parallèles sont deux droites parallèles
l' orthogonalité	les images de deux droites perpendiculaires sont deux droites perpendiculaires
les angles orientés	$(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$
les angles géométriques	$\widehat{A'B'C'} = \widehat{ABC}$
la distance	$A'B' = AB$
le barycentre	l'image du barycentre est le barycentre des images
le contact	deux lignes tangentes ont pour images des lignes tangentes

Propriétés des translations, réflexions, homothéties, rotations.

On peut dire que «**tout est conservé**» par ces transformations, **SAUF** que l'homothétie ne conserve pas la distance, ni l'aire et **SAUF** que la réflexion ne conserve pas les angles orientés (elle transforme un angle orienté en son opposé).

CORRIGÉS DES EXERCICES

CHAPITRE 1

$$1 \quad \left(x = \frac{48}{11}, y = \frac{4}{11}, z = 1 \right).$$

8 Il y a 3 équations pour 4 inconnues.

Le système peut s'écrire :

$$\begin{cases} 3x + 4y + z = 3 - 2t \\ 6x + 8y + 2z = 7 - 5t \\ 9x + 12y + 3z = 13 - 10t \end{cases}$$

Si un 4-uplet (x, y, z, t) est solution, alors nécessairement :

$$3x + 4y + z = 3 - 2t,$$

et :

$$\begin{aligned} 2(3 - 2t) &= 7 - 5t, \\ 3(3 - 2t) &= 13 - 10t, \end{aligned}$$

d'où $t = 1$. Il est clair que tous les 4-uplets, (x, y, z, t) , avec $t = 1$, et $3x + 4y + z = 1$ sont solutions ; on peut donc choisir x et y arbitrairement, et z tel que :

$$z = 1 - 3x - 4y.$$

Les solutions sont donc les 4-uplets : $(x, y, 1 - 3x - 4y, 1)$, où x et y sont des réels quelconques, ce que nous trouverions par la méthode de Gauss.

CHAPITRE 2

1 Réponse : **c**/

$$zz' = aa' - bb' + i(ab' + a'b).$$

$\operatorname{Re}(zz') = aa' - bb'$, $\operatorname{Re}(z) = a$, $\operatorname{Re}(z') = a'$, dans l'égalité proposée n'a lieu que si $bb' = 0$, c'est-à-dire si $b = 0$ ou $b' = 0$.

2 **b**/ Car $\operatorname{Re}(iz) = -b$, avec $z = a + ib$.

3 **b**/ Car $\arg \bar{z} = \arg \frac{1}{z}$.

4 Réponse : **c**/

5 Réponse : **a**/

6 **c**/ Car : $z\bar{z} = 1$ et $z\bar{z} = |z|^2$.

7 **c**/ Car : $|-z| = |z|$ et $\arg(-z) = \arg z + \pi = \theta + \pi$.

8 **c**/ Car : $\frac{1}{1 + e^{i\theta}} = \frac{1}{1 + e^{i\theta}} = 1 + e^{-i\theta}$.

9 Réponse : **b**/

$$10 \quad f(\theta) = 2\sqrt{3} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right).$$

11 Les nombres $e^{i\theta}$ ont pour module 1 ; la somme de deux nombres de module 1 a un

module inférieur à 2 (inégalité triangulaire).

Or, $|2 - i| = \sqrt{5}$, et $\sqrt{5} > 2$.

$$\begin{aligned} 39 \quad z &= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}} = e^{i\frac{\pi}{4}} \\ &= \cos \frac{\sqrt{2}}{2} + i \sin \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

CHAPITRE 3

$$1 \quad \mathbf{c} / A_n^p = n(n-1) \dots [n-(p-1)]$$

$$= \frac{n!}{n-p!};$$

$$\text{donc } A_{10}^4 = \frac{10!}{6!}.$$

$$2 \quad \mathbf{a} / C_n^p = \frac{n!}{p!n-p!} = \frac{A_n^p}{p!}.$$

3 **b**/ Le nombre demandé est $5!$, et $5! = 120$.

$$4 \quad \mathbf{b} / C_n^p = C_n^{n-p}.$$

5 **c**/ Le nombre de tirages est le nombre de parties à 3 éléments prises dans un ensemble de 5 éléments.

6 **a**/ Un naturel à quatre chiffres pris dans l'ensemble $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, peut être considéré comme une liste de 4 éléments de E . Or le nombre de ces listes est 5^4 .

7 Réponse : **c**/

11 Le nombre de mains de 8 cartes prises dans un jeu de 32, est égal au nombre de parties à 8 éléments dans un ensemble de 32 éléments, il est donc égal à C_{32}^8 .

CHAPITRE 4

1 **b**/ La probabilité de tirer une boule blanche est $\frac{5}{10}$, et le tirage étant sans remise, la probabilité de tirer une rouge parmi les 9 restantes est $\frac{3}{9}$, d'où la probabilité de tirer une blanche, puis une rouge est :

$$\frac{5}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{1}{6}.$$

2 **c**/ Il y a C_{10}^2 , soit 45 paires de boules, et parmi ces paires il y en a 15 constituées d'une boule blanche et d'une boule rouge.

3 **a**/ Même démarche qu'au numéro 1, mais le tirage étant cette fois avec remise, la probabilité de tirer une boule rouge est $\frac{3}{10}$, donc la probabilité de tirer une blanche puis une rouge est :

$$\frac{5}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{3}{20}.$$

4 **b**/ En effet, dans le schéma **a**/, la fonction n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$, et le schéma **c**/ ne peut convenir car la fonction présente un saut en zéro qui n'a pas lieu d'être.

5 Réponse : **c**/

6 **c**/ On peut voir que **a**/ ne convient pas, car lorsque $i > 1$, une variance n'est jamais nulle, et on peut voir que **b**/ ne convient pas, car une variance n'est jamais négative.

7 **b**/ Il suffit d'appliquer la formule des probabilités totales car A et B forment une partition :

$$\text{alors } p(E) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \times \frac{2}{4} = \frac{2}{3}.$$

8 **a**/ La probabilité pour que le touriste choisi soit un homme est : $\frac{64}{100}$; une femme : $\frac{36}{100}$; qu'il pratique un sport : $\frac{60}{100}$; qu'il n'en pratique pas : $\frac{40}{100}$; que ce soit un homme pratiquant un sport : $\frac{16}{100}$.

$$\mathbf{b} / \frac{16}{64}.$$

CHAPITRE 5

1 **b**/ $-\frac{41\pi}{6} = -6\pi - \frac{5\pi}{6}$, donc une mesure de cet angle est $-\frac{5\pi}{6}$, et comme :

$$-\pi \leq -\frac{5\pi}{6} \leq \pi,$$

$-\frac{5\pi}{6}$ est la mesure principale.

2 c/ Faire une figure.

3 a/ Voir le paragraphe 3.3.

4 c/ $-\frac{\pi}{6}$ est la mesure principale de $(\vec{u}, \vec{v})$, $\frac{5\pi}{6}$ est la mesure principale de $(\vec{u}', \vec{v}')$,
et $\frac{5\pi}{6} - \left(-\frac{\pi}{6}\right) = \pi$.

5 b/ Voir le paragraphe 3.3.

6 a/ On peut calculer le déterminant ou voir que : $\vec{v} = \frac{1}{3}\vec{u}$, donc que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, donc que leur déterminant est nul.

7 a/ $\vec{i}$ et $\vec{j}$ forment une base : en effet, ils ne sont pas colinéaires. Dans cette base,

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = -\frac{3}{2}\lambda - 2,$$

et ce déterminant est nul lorsque $\lambda = \frac{4}{3}$ et seulement lorsque $\lambda = \frac{4}{3}$.

14 $\|\vec{u}\| = 5$, $\|\vec{v}\| = \sqrt{5}$. Par ailleurs :

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} = -10.$$

Donc, $-10 = 5\sqrt{5} \sin(\vec{u}, \vec{v})$,

$$\text{et } \sin(\vec{u}, \vec{v}) = -\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

CHAPITRE 6

1 b/ $2\vec{AI} - \vec{AB} = \vec{0}$, donc A est le barycentre de (I, 2), (B, -1), ou encore de (I, -2), (B, 1), puisqu'on ne change pas le barycentre en multipliant les coefficients par un nombre non nul, ici -1.

2 c/ Si C' est le point tel que ABC'D soit un parallélogramme, alors $\vec{AC'} = \vec{AB} + \vec{AD}$, donc $\vec{AC'} = \vec{AC}$ et $C' = C$. On peut voir aussi que l'hypothèse dit que A est le barycentre de (B, 1), (C, -1), (D, 1); donc A est le barycentre de (E, 2), (C, -1) où E est le barycentre de (B, 1), (D, 1), c'est-à-dire le milieu de [BD].

La relation : $2\vec{AE} - \vec{AC} = \vec{0}$ dit alors que E est milieu de [AC]. Donc ABCD est un parallélogramme.

3 a/ Notons F' le barycentre de (A, a), (B, 1). Alors G est le barycentre de (F', a+1), (C, 2) (théorème du barycentre partiel). Donc F', C et G sont alignés et F est sur (AB). Donc F' = F.

4 Réponse : b/

5 a/ Un vecteur directeur de d est $\vec{u}(2; -4; 3)$ et un vecteur directeur de d' est $\vec{v}\left(-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{1}{2}\right)$.

Nous obtenons : $\vec{u} = -6\vec{v}$, donc d et d' sont parallèles ou confondues. Mais le point A(-1, 1, 2) est un point de d; voyons si c'est un point de d'; pour cela, voyons s'il est possible de trouver un réel λ tel que :

$$\begin{aligned} -1 &= -2\frac{\lambda}{3}; & 1 &= 3 + \frac{2\lambda}{3}; \\ 2 &= \frac{1}{2} - \frac{\lambda}{2}; \end{aligned}$$

la première condition implique : $\lambda = -3$; la deuxième et la troisième aussi, donc A est aussi sur d'. Donc d et d' sont confondues.

6 b/ Une projection conserve le barycentre.

CHAPITRE 7

1 c/ $\vec{u} \cdot \vec{v} = 6 + 6a$, donc « $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux » équivaut à : $a = -1$.

2 b/ Utilisez le repère (DA, DC, DH).

3 Réponse : b/

4 c/ $\vec{u} \cdot \vec{k} = 1$ et $\vec{v} \cdot \vec{k} = -1$, d'où le résultat.

5 c/ Faire une figure.

6 c/ Le système : $\begin{cases} 2x - z - 1 = 0 \\ x + y + 1 = 0 \end{cases}$ a une infinité de solutions :

$(x; -1-x; 2x-1)$, avec x réel quelconque. Ou bien voir que les vecteurs $\vec{u}(2, 0, -1)$ et $\vec{v}(1, 1, 0)$, qui sont respectivement normaux à P et Q ne sont pas colinéaires, donc P et Q ne sont pas parallèles.

7 c/ Le plan cherché a pour équation : $x + y + z = d$, et puisqu'il passe par l'origine, $d = 0$. L'équation $x + y + z = 0$, s'écrit aussi : $-x - y - z = 0$.

18 Le vecteur $\vec{w}$ n'est pas orthogonal à $\vec{u}$.

33 $\vec{AB}(-1, -2, 1)$; $\vec{AC}(0, 3, 5)$. $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ a pour coordonnées : $(-13, 5, -3)$. Donc A, B, C, non alignés. $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ est normal au plan (ABC), une équation de ce plan est donc :

$$-13x + 5y - 3z + d = 0.$$

B lui appartient, donc $d = 3$.

CHAPITRE 9

1 c/ Nous sommes dans le cas : $a > b$; alors $c^2 = a^2 - b^2$, soit ici, $c^2 = 4 - 3 = 1$, $c = 1$, et l'axe focal est l'axe des abscisses et un foyer a pour coordonnées (c, 0), c'est-à-dire (1, 0).

2 b/ Voir le théorème 3.

3 c/ Nous sommes dans le cas : $a < b$; alors $c^2 = b^2 - a^2 = 5$, $c = \sqrt{5}$, et l'axe focal est l'axe des ordonnées; un foyer a donc pour coordonnées (0, c).

4 c/ Nous sommes dans le cas où « le signe moins est devant x^2 », alors $c^2 = a^2 + b^2$, et l'axe focal est l'axe des ordonnées. Un foyer a donc pour coordonnées (0; c), c'est-à-dire ici (0, $\sqrt{13}$).

5 c/ C est la demi-hyperbole d'équations : $y \geq 0$ et $y^2 = 4x^2 - 1$, ou $4x^2 - y^2 = 1$.

8 Dans le repère orthonormal fixé (O; $\vec{i}, \vec{j}$), le sommet S de la parabole a pour coordonnées (1; 3). Appliquons le théorème 1. Prenons pour repère le repère orthonormal d'origine S, dont l'axe des abscisses est l'axe focal orienté de S vers F, et l'axe des ordonnées est l'axe (S, $\vec{j}$). Notons (S; $\vec{i}', \vec{j}'$) ce repère. Alors, d'après le théorème 1, dans (S; $\vec{i}', \vec{j}'$), $\mathcal{P}$ a pour équation : $Y^2 = 2pX$, où p est le paramètre, ici $p = 2$. Cherchons l'équation de $\mathcal{P}$ dans (O; $\vec{i}, \vec{j}$). D'après les choix faits : $\vec{j}' = \vec{j}$, $\vec{i}' = \vec{j}$. Pour tout point M, $\vec{OM} = \vec{OS} + \vec{SM}$, donc, si on note (x, y) les coordonnées de M dans (O; $\vec{i}, \vec{j}$) :

$$\begin{aligned} x\vec{i} + y\vec{j} &= \vec{i} + 3\vec{j} + X\vec{i}' + Y\vec{j}' \\ &= (1+Y)\vec{i} + (3+X)\vec{j}, \end{aligned}$$

donc :

$$x = 1 + Y, \quad y = 3 + X, \quad Y = x - 1, \quad X = y - 3;$$

d'où une équation de $\mathcal{P}$ dans (O; $\vec{i}, \vec{j}$) : $(x-1)^2 = 4(y-3)$

c'est-à-dire : $y = \frac{1}{4}(x^2 - 2x + 13)$.

CHAPITRE 10

1 a/ La composée de deux déplacements est toujours un déplacement, et un déplacement est soit une rotation, soit une translation.

2 b/ Une isométrie conserve les distances, l'orthogonalité, les angles.

3 c/ La somme des angles de R_A et de R_C est nulle, modulo 2π . Donc, $r_A \circ r_C$ est une translation. Nous savons que : $R_C(C) = C$ et $r_A(C) = C'$, donc $r_A \circ r_C$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{CC'}$.

4 b/ $AB = \sqrt{2}$, $CD = \sqrt{2}$. Donc il existe un déplacement f , et un seul, tel que : $f(A) = C$ et $f(B) = D$. Puisque $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \neq 0$, ce déplacement est une rotation d'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = -\frac{\pi}{2}$. Le centre de

cette rotation est à l'intersection des médiatrices de $[AC]$ et $[BD]$, c'est donc le point $(3; 1)$.

5 b/ $r_1 \circ r_2$ est nécessairement un déplacement, si ce déplacement n'a pas de point fixe, c'est une translation et cela n'est possible que si $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$.

6 b/ Si $s \circ r$ était un déplacement f , alors : $s \circ r = f$, d'où $s = f \circ r^{-1}$, et donc s serait un déplacement, car composée de deux déplacements. Or une réflexion n'est jamais un déplacement.

CHAPITRE 11

1 Réponse : **c/**

2 c/ L'écriture complexe est de la forme : $z' = az + b$, avec a réel, différent de 1. Il s'agit donc d'une homothétie.

Notons z_0 l'affixe du centre de cette homothétie, alors : $z_0 = 2z_0 - i$, d'où $z_0 = i$. Le rapport de cette homothétie est 2.

3 c/ Notons z_0 l'affixe du centre de cette similitude, alors : $z_0 = (1+i)z_0$, d'où $z_0 = 0$; le centre est l'origine du repère. Le rapport de la similitude est $|1+i|$, soit $\sqrt{2}$, et l'angle est $\arg(1+i)$, soit $\frac{\pi}{4}$.

4 Réponse : **c/**

5 c/ Le centre est le point d'affixe z_0 tel que : $z_0 = (1+i)z_0 + 3$, d'où $z_0 = 3i$.

12 s(C) = B; s(B) = F, F étant le point d'intersection de (AB) et (DE) ; $s(A) = G$, G étant le point tel que $EBGF$ soit un carré de sens direct.

L'image par s de ABC est le triangle BFG qui est rectangle isocèle en G ; l'aire de BFG est deux fois celle de ABC .

INDEX

A

Affinité orthogonale	225
Affixe	
d'un point	22
d'un vecteur	32
Aire	
d'un parallélogramme	119, 177
d'un triangle	119, 160, 177
Angle	
d'un couple de vecteurs	
non nuls	114
orienté direct	119
Arguments d'un complexe	27
Arrangement	63
Axe focal (conique)	214

B

Barycentre	139
Base directe de l'espace	173
Bijective (application)	245
Binôme de Newton	68

C

Cardinal d'un ensemble	57
Cercle principal de l'ellipse	225
Cocycliques (points)	123
Combinaison	64
Complémentaire	58
Complexes (nombres)	18
Composée	
de réflexions d'axes parallèles ..	244
de réflexions d'axes sécants	244
de rotations	248
de rotations et translations	248
d'homothéties et rotations	282
Composition de transformations ..	245
Conique	213
Conjugué d'un complexe	24
Cosinus	
de l'angle de deux vecteurs	
non nuls	116
Courbes paramétrées	199

D

Déplacement	246
Déterminant	117
Directrice (conique)	214
Distance	
d'un point à une droite	190
d'un point à un plan	190

E

Écart-type	89
Ellipse	215
Ensemble	
fini	57
vide	57
Équation	
cartésienne d'un plan	168
du second degré dans $\mathbb{C}$	39
réduite d'une ellipse	219
réduite d'une hyperbole	219
réduite d'une parabole	216
Espérance mathématique	88
Événement(s)	
contraires	84
élémentaire	84

équiprobables	86
incompatibles	95
indépendants	95
(intersection d')	86
(réunion d')	86
Excentricité (conique)	214

F

Factorielle	64
Forme(s)	
algébrique d'un complexe	21
exponentielles d'un complexe ...	29
réduite d'une similitude	287
trigonométriques	
d'un complexe	27
Formule(s)	
de Moivre	31
d'Euler	29
des probabilités totales	97
Fonction de répartition	92
Foyer (conique)	214

G

Grand axe d'une ellipse	221
-------------------------------	-----

H

Homothétie	316
de l'espace	305
réciproque	179
Hyperbole	215

I

i	19, 20, 21
Identité du plan	245
Imaginaire pur	22
Intersection d'ensembles	58
Isobarycentre	140
Isométrie	249
vectorielle	253

L

Loi de probabilité	87
--------------------------	----

M

Module d'un complexe	25
----------------------------	----

N

Nombre(s) complexe(s)	18
-----------------------------	----

O

Orientation	
de l'espace	173
d'un plan de l'espace	174
du plan	114
Orthogonalité (droites et plans) ...	165

P

Parabole	215
Paramètre d'une parabole	216

Partie

d'un ensemble	57
imaginaire d'un complexe	22
réelle d'un complexe	22
Partition	97
Permutation	64
Petit axe de l'ellipse	221
Point(s)	
cocycliques	123
image d'un complexe	22
Probabilités	83
conditionnelles	93
probabilités totales	96
Produit	
scalaire dans le plan	159
scalaire dans l'espace	162
vectoriel	174
Projection	
ponctuelle	136
vectorielle	139
P-uplet	7, 61

R

Racines	
d'un complexe non nul	44
n -ièmes de l'unité	42
Réflexion	316
de l'espace	306
Repère orthonormal direct	
de l'espace	173
du plan	116
Représentations paramétriques	
d'une droite	145
Réunion d'ensembles	58
Rotation	316
de l'espace	307

S

Similitude directe	282
(forme réduite d'une)	287
(rapport d'une)	283
Sinus de l'angle de deux vecteurs ..	116
Sommet d'une conique	215
Sphère	169
Surface de niveau	185
Symétrie orthogonale	316
de l'espace	306
Système(s)	
d'équations linéaires	5
équivalents	8

T

Transformation(s) du plan	245
(réciproque d'une)	245
Translation	316
de l'espace	304
Triangle	
de Pascal	67
direct	119

V

Vecteur(s)	
colinéaires	116
dérivé	202
normal	166
orthogonaux	165
Variable aléatoire	87
Variance	89



COLLECTION TRANSMATH

- MATHÉMATIQUES 2^e (programme de 1990)
- MATHÉMATIQUES 1^{re} A₁.B. (programme de 1991)
- MATHÉMATIQUES 1^{re} S.E. (programme de 1991)
 - Tome 1** : Algèbre - Analyse
 - Tome 2** : Géométrie - Probabilités
- MATHÉMATIQUES Terminales A₁.B. (programme de 1992)
- MATHÉMATIQUES Terminales C.E. (programme de 1992)
 - Tome 1** : Analyse
 - Tome 2** : Nombres complexes
Probabilités - Géométrie
- MATHÉMATIQUES Terminales D (programme de 1992)

DICTIONNAIRE DE MATHÉMATIQUES

Christian Lixi, Marc Gourion

Un dictionnaire qui est également un abrégé de cours illustré d'exemples variés.

- 850 entrées : les définitions, les notions de base, les principaux théorèmes, les noms des grands mathématiciens ;
- des index pour les notations mathématiques ;
- les formules mathématiques.

