

trans math

PROGRAMME
2012

ERM

ENSEIGNEMENT
SPÉCIFIQUE



Manuel
Numérique
PREMIUM

 Nathan

1 Fonctions

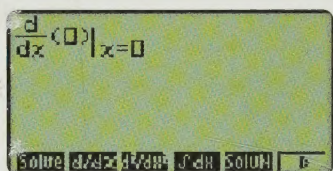
Objectifs

- 1 Afficher le nombre dérivé en 2 de la fonction f définie par $f(x) = -x^2 + 2x + 3$.
- 2 Tracer la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2 et afficher son équation.
- 3 Calculer l'intégrale de f entre -1 et 2. Afficher l'aire du domaine correspondant.

1 Afficher un nombre dérivé

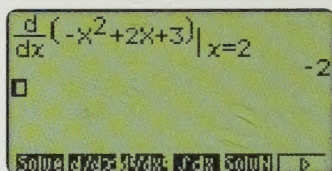
1. Sélectionnez le menu RUN-MAT.

- Indiquez l'option de calcul : **OPTN** **F4** (CALC).
- Choisissez le type : **F2** (d/dx).



2. Complétez les informations demandées.

- Saisissez l'expression de $f(x)$.
- Saisissez la valeur 2 puis validez par **EXE**.



$f'(2)$

2 Tracer la tangente en un point

1. Sélectionnez le menu GRAPH.

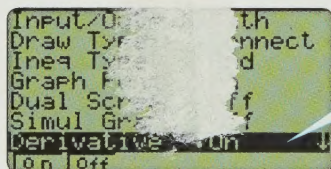
- Saisissez l'expression de la fonction puis **EXE**.
- Réglez la fenêtre d'affichage :

SHIFT **F3** (V-Window).

Paramétrez : $-2 \leq x \leq 4$ et $-3 \leq y \leq 5$.

- Vérifiez que le réglage suivant est activé :

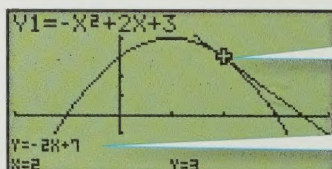
SHIFT **MEN** (CT UP).



Option de dérivation activée.

2. Affichez la courbe en appuyant sur **F6** (DRAW).

- Sélectionnez l'instruction Sketch (**SHIFT** **F4**) puis l'option Tang (**F2**).
- Déplacez le curseur à l'aide des touches de direction jusqu'à obtenir $x = 2$ puis validez par **EXE**.



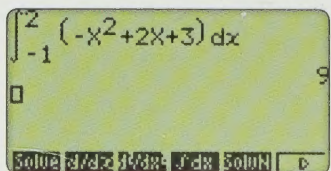
Tangente au point d'abscisse 2.

Équation de la tangente.

3 Calculer une intégrale

1. Sélectionnez le menu RUN-MAT.

- Indiquez l'option de calcul : **OPTN** **F4** (CALC).
- Choisissez le type : **F2** ($\int dx$).
- Complétez les informations demandées en utilisant les touches de direction, puis **EXE**.

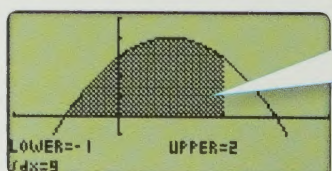


$\int_{-1}^2 f(x) dx$

2. Sélectionnez le menu GRAPH.

- Affichez la courbe de f (cf. § 1.2.2).
- Activez l'option graph : **G-Solv** **F6** **>** **F3** ($\int dx$).

Réglez les bornes au curseur : -1 **EXE** 2 **EXE**.



f est continue et positive sur $[-1; 2]$. L'intégrale exprime l'aire du domaine sous la courbe.





2 Suites

Objectifs

- 1 Dresser le tableau des dix premières valeurs de la suite (u_n) définie par : $u_n = \sqrt{n^2 + 1}$ ($n \in \mathbb{N}$).
- 2 Même question pour la suite (v_n) définie par : $v_0 = \frac{1}{2}$ et $v_{n+1} = \frac{3}{1+v_n}$ ($n \in \mathbb{N}$).
Afficher une représentation graphique de cette suite.

1 Dresser le tableau des valeurs d'une suite du type $u_n = f(n)$

1. Sélectionnez le menu RECUR.
- Réglez le type : **F3** (TYPE) **F1** ($F1 : a_n = An+B$).

```
F1: an=An+B
F2: an+1=Aan+Bn+C
F3: an+2=Aan+1+Ban+...
```

an **an+1** **an+2**

- Saisissez l'expression puis validez par **EXE**.

```
Recursion
an=√n²+1
bn:
cn:
```

n

2. Tableau de valeurs

- Paramétrez la plage des valeurs **F5** (SET).

```
Table Settings n
Start:0
End:9
```

n varie de 0 à 9.

- Affichez le tableau de valeurs : **F6** (TABL).

```
an=√(n²+1)
n an
0 1.4142
1 1.7321
2 2.2361
3 3.1623
```

1.414213562

FORM DEL **G-CON** **G-PLT**

Utilisez les touches de direction pour faire afficher les termes suivants.

2 Dresser le tableau des valeurs d'une suite récurrente du type $u_{n+1} = f(u_n)$

1. Sélectionnez le menu RECUR.
- Réglez le type : **F3** (TYPE) **F2** ($F2 : a_{n+1} = Aa_n + Bn + C$).
- Saisissez l'expression puis validez par **EXE**.

```
Recursion
an+1=3/(1+an)
bn+1:
cn+1:
```

n **an** **bn** **cn**

- Affichez le tableau de valeurs : **F6** (TABL).

```
an+1=3/(1+an)
n+1 an+1
0 0.5
1 2
2 1
3 1.5
```

3.2

FORM DEL **WEB** **G-CON** **G-PLT**

Utilisez les touches de direction pour faire afficher les termes suivants.

2. Tableau de valeurs

- Paramétrez la plage des valeurs : **F5** (SET).

```
Table Settings n+1
Start:0
End:9
a0:0.5
b0:0
c0:0
anStr:0.5
```

Valeur du 1^{er} terme.

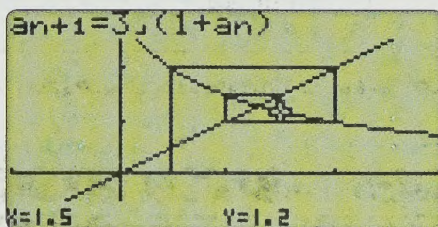
Valeur de départ pour une représentation graphique.

Note

Si on veut obtenir une représentation graphique de la suite, c'est ici qu'il faut indiquer le terme qui définit le départ de la construction.

3. Représentation graphique

- Réglez la fenêtre : **SHIFT** **F3** (V-Window)
Paramétrez : $-1 \leq x \leq 3$ et $-1 \leq y < 3$.
- Affichez la représentation graphique : **F6** (TABL) **F4** (WEB) **EXE** **EXE** **EXE** ... **EXE**.



3 Probabilités

Objectifs

X et Z sont deux variables aléatoires réelles.

- 1 X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10, p = 0,2$. Calculer $P(X = 2)$.
- 2 Z suit la loi normale standard. Calculer $P(-1,2 \leq Z \leq 0,8)$.

1. Sélectionnez le menu STAT.

• Indiquez l'option : **F5** (DIST) **F5** (BINM).

• Activez le type de calcul :

F1 (Bpd) (Binomial probability density)

• Complétez :

Nombre
de succès

Nombre
d'essais

Probabilité

```
Binomial P.D
Data :Variable
X :2
Numtrial:10
P :0.2
Save Res:None
Execute
[CALC]
```

• Validez **EXE**

$P(X = 2)$

```
Binomial P.D
P=0.30198988
```

2. Sélectionnez le menu STAT.

• Indiquez l'option : **F5** (DIST) **F1** (NORM).

• Activez le type de calcul :

F2 (Ncd) (Normal cumulative distribution)

• Complétez :

Borne inférieure

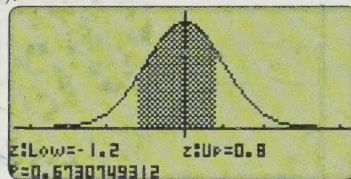
Borne supérieure

```
Normal C.D
Data :Variable
Lower :-1.2
Upper :0.8
O :1
W :0
Save Res:None
List Var
```

• Descendez la liste jusqu'à (Execute).

• Activez : **F6** (DRAW).

$P(-1,2 \leq Z \leq 0,8)$



4 Éléments de programmation

Objectif

Calculer la somme des termes successifs, du rang 0 au rang n , de la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et, pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, u_{n+1} = 0,2u_n + 1,5.$$

1. Sélectionnez le menu PRGM.

• Choisissez l'option 3 : NEW (**F3**).

• Nommez le programme [SOMME], puis **EXE**.

Algorithme à
programmer

```
Variables: I, N, U, S
Entrée: N
Traitement: U reçoit 1, S reçoit 1
Pour I de 1 à N Faire
    U reçoit 0,2U+1,5
    S reçoit S+U
Fin Pour
Sortie: Afficher S
```

2. Écrivez les instructions du programme.

• Validez chaque ligne d'instruction par **EXE**.

Le programme passe à la ligne suivante ↵

```
=====SOMME=====
"N=": ?>N#
1→U:1→S#
For 1→I To N#
0.2U+1.5→U:S+U→S#
Next#
"S":S
CLR/DISP/REL I/O : ▶
```

• Enregistrez ce programme : **SHIFT** **EXIT** (QUIT).

• Pour accéder aux commandes spécifiques décrites ci-dessous, appuyez sur **SHIFT** **VARS** (PRGM).

Instructions

COM CTL JUMP ? ▶ ▶
CLR/DISP/REL I/O : ▶
STR ▶

Commandes COM (**F1**)

If Then Else IEnd ▶
For To Step Next ▶
While WEnd Do LpW ▶

Signes REL (**F6** ▶ **F3**).

= ≠ > < ≥ ≤

Opérateurs logiques

On y accède en suivant :

OPTION **F6** ▶ **F6** ▶ **F4**

And Or Not Xor

Pour passer aux instructions suivantes, appuyez sur **F6**.

Sélectionnez l'instruction désirée en appuyant sur la touche correspondante.

trans math

ERM

ENSEIGNEMENT
SPÉCIFIQUE

PROGRAMME
2012

Sous la direction de :

Jean-Michel Barros

Patrick Bénizeau

Jean Morin

Saïd Aïmani

Louis-Marie Bonneval

Jean-Baptiste Devynck

Philippe Yvonnet

Le papier de cet ouvrage est composé
de fibres naturelles, renouvelables et
fabriquées à partir de bois provenant
de forêts gérées de manière
responsable.

 Nathan

SOMMAIRE

PRATIQUER L'ALGORITHMIQUE 10

Thème 1. Qu'est-ce qu'un algorithme ? 10

Thème 2. Variables et affectation 12

Thème 3. L'instruction conditionnelle 14

Thème 4. La boucle conditionnelle 16

Thème 5. La boucle incrémentale 18

1 SUITES 20

Activités 22

Cours 24

Exercices d'application 29

Activités de recherche 36

Exercices d'entraînement 42

Le jour du BAC 46

Pour aller plus loin 48

2 FONCTIONS : LIMITES 50

Activités 52

Cours 54

Exercices d'application 59

Activités de recherche 64

Exercices d'entraînement 68

Le jour du BAC 72

Pour aller plus loin 74

3 FONCTION EXPONENTIELLE 76

Activités 78

Cours 80

Exercices d'application 85

Activités de recherche 90

Exercices d'entraînement 96

Le jour du BAC 102

Pour aller plus loin 104

4 CONTINUITÉ ET DÉRIVATION 106

Activités 108

Cours 110

Exercices d'application 115

Activités de recherche 120

Exercices d'entraînement 124

Le jour du BAC 129

Pour aller plus loin 132

5 FONCTION LOGARITHME NÉPÉRIEN 134

Activités 136

Cours 138

Exercices d'application 142

Activités de recherche 150

Exercices d'entraînement 155

Le jour du BAC 161

Pour aller plus loin 164

6 FONCTIONS TRIGONOMÉTRIQUES 166

Activités 168

Cours 170

Exercices d'application 172

Activités de recherche 176

Exercices d'entraînement 182

Le jour du BAC 186

Pour aller plus loin 188

7 INTÉGRATION ET PRIMITIVES 190

Activités 192

Cours 194

Exercices d'application 200

Activités de recherche 208

Exercices d'entraînement 216

Le jour du BAC 225

Pour aller plus loin 228

8	NOMBRES COMPLEXES	230
	Activités	232
	Cours	234
	Exercices d'application	241
	Activités de recherche	248
	Exercices d'entraînement	253
	Le jour du BAC	259
	Pour aller plus loin	262

9	DROITES ET PLANS DE L'ESPACE	264
	Activités	266
	Cours	268
	Exercices d'application	270
	Activités de recherche	274
	Exercices d'entraînement	278
	Le jour du BAC	282
	Pour aller plus loin	284

10	GÉOMÉTRIE VECTORIELLE	286
	Activités	288
	Cours	290
	Exercices d'application	295
	Activités de recherche	302
	Exercices d'entraînement	307
	Le jour du BAC	313
	Pour aller plus loin	316

11	PRODUIT SCALAIRE DANS L'ESPACE	318
	Activités	320
	Cours	322
	Exercices d'application	325
	Activités de recherche	332
	Exercices d'entraînement	338
	Le jour du BAC	344
	Pour aller plus loin	346

12	PROBABILITÉS CONDITIONNELLES	348
	Activités	350
	Cours	352
	Exercices d'application	355
	Activités de recherche	360
	Exercices d'entraînement	366
	Le jour du BAC	372
	Pour aller plus loin	374

13	LOIS DE PROBABILITÉ À DENSITÉ	376
	Activités	378
	Cours	380
	Exercices d'application	384
	Activités de recherche	388
	Exercices d'entraînement	394
	Le jour du BAC	399
	Pour aller plus loin	402

14	LOIS NORMALES	404
	Activités	406
	Cours	408
	Exercices d'application	412
	Activités de recherche	418
	Exercices d'entraînement	425
	Le jour du BAC	430
	Pour aller plus loin	432

15	STATISTIQUE. ESTIMATION	434
	Activités	436
	Cours	438
	Exercices d'application	442
	Activités de recherche	448
	Exercices d'entraînement	453
	Le jour du BAC	458
	Pour aller plus loin	460



Retrouvez les corrigés des exercices sur le site
www.transmathlycee.net/eleve-TermS

Le vocabulaire de la logique	462
Quelques types de raisonnement	468
Rappels	471

DÉCOUVREZ VOTRE MANUEL



L'ouverture relie les mathématiques au monde d'aujourd'hui. Des **rappels** et des **exercices-tests** permettent de réactiver les connaissances. Suivent deux **activités** et un **problème ouvert**.



ACTIVITÉS

Activité 1 PROLIFÉRATION BACTÉRIENNE

Rappels & Exercices-tests

Suites arithmétiques

Une suite arithmétique est une suite (u_n) telle que pour tout n , $u_{n+1} - u_n = r$, où r est la raison.

Suites géométriques

Une suite géométrique est une suite (u_n) telle que pour tout n , $u_{n+1} = u_n \times q$, où q est le quotient.

Sens de variation d'une suite

On dit qu'une suite (u_n) est croissante si pour tout n , $u_{n+1} \geq u_n$. Elle est décroissante si pour tout n , $u_{n+1} \leq u_n$.

Activité 2 LA MÉTHODE DE HÉRON

LA MÉTHODE DE HÉRON

On cherche à résoudre l'équation $x^2 - 2 = 0$. On pose $x_0 = 1$ et on définit la suite (x_n) par la relation de récurrence $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right)$.

On montre que la suite (x_n) est croissante et bornée, donc elle converge. On trouve que la limite est $\sqrt{2}$.



Le cours, **adapté**, **simple et efficace**, présente l'essentiel à savoir.

COURS

1. Raisonnement par récurrence

1.1. Un nouveau type de raisonnement

On considère une propriété $P(n)$ dépendant d'un entier naturel n . Pour montrer que $P(n)$ est vraie pour tout n , on utilise le raisonnement par récurrence.

1.2. Principe du raisonnement par récurrence

Il faut démontrer deux choses :
1. $P(0)$ est vraie (cas de base).
2. Si $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ est vraie (pas de régression).

2. Limite d'une suite

2.1. Limite finie

On dit qu'une suite (u_n) a pour limite finie l si pour tout $\epsilon > 0$, il existe N tel que pour tout $n > N$, $|u_n - l| < \epsilon$.

2.2. Limite infinie

On dit qu'une suite (u_n) a pour limite infinie $+\infty$ si pour tout M , il existe N tel que pour tout $n > N$, $u_n > M$.

Démonstration exigible

On doit démontrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$. On utilise le raisonnement par récurrence.

Des résultats bien mis en évidence.

Les **démonstrations** exigibles du programme sont signalées. Un exercice de la rubrique « **Le Jour du BAC** » permet de travailler sur cette démonstration.



Les **exercices d'application** s'organisent en objectifs pour un **travail en autonomie**. Ils suivent les **capacités attendues**.

Application

Exercice 1 Mener un raisonnement par récurrence

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{1}{u_n} \right)$. On montre que $u_n > 1$ pour tout n .

Exercices

Exercice 2 Étudier le comportement d'une suite à l'infini

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{1}{u_n} \right)$. On étudie son comportement à l'infini.

Exercices

Exercice 3 Utiliser les théorèmes de comparaison

On compare la suite (u_n) à la suite (v_n) pour étudier son comportement à l'infini.

Les connaissances utiles sont rappelées au début de l'objectif.



La page « **Pour se tester** » permet à chaque élève d'évaluer l'acquisition des connaissances.

Pour se tester

Questions sur le cours

1. Définir une suite arithmétique. Donner son terme général.

2. Définir une suite géométrique. Donner son terme général.

Vrai ou faux

1. Une suite croissante est toujours bornée. (Faux)

2. Une suite bornée est toujours convergente. (Faux)

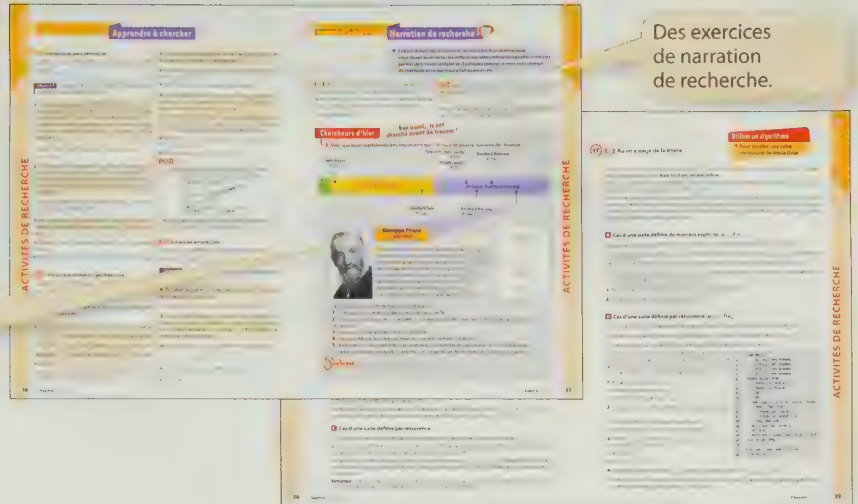
QCM

1. La suite (u_n) définie par $u_n = n^2$ est croissante. (Vrai)

2. La suite (u_n) définie par $u_n = \frac{1}{n}$ est décroissante. (Vrai)

Les « **Activités de recherche** » permettent d'aborder la **résolution de problèmes** de diverses façons : exercices guidés, narration de recherche, travaux dirigés, utilisation des TICE.

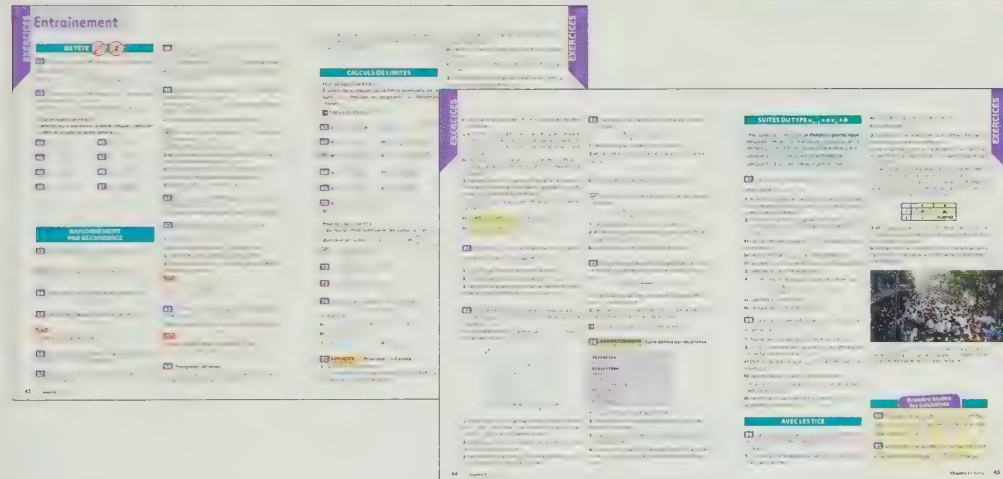
Une frise présente des mathématiciens à connaître.



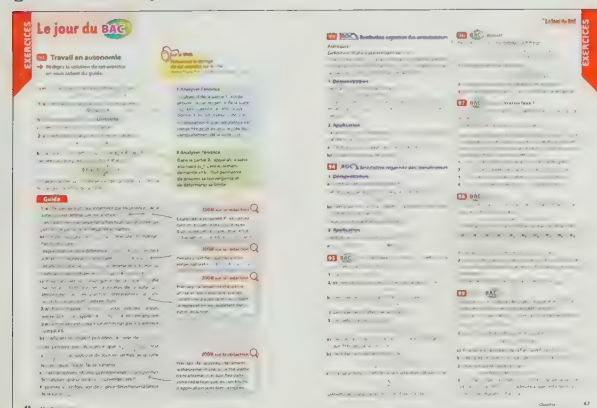
Des exercices de narration de recherche.

Les **exercices d'entraînement** sont classés par thème et sont de difficulté progressive.

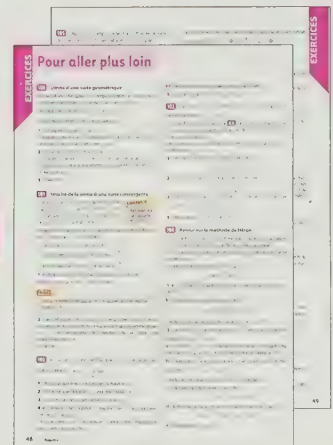
Retrouvez les corrigés des exercices sur le site www.transmathlycee.net/eleve-TermS



Dans les pages « **Le jour du BAC** », le premier exercice guide l'élève pour un « **travail en autonomie** ».



Les exercices « **Pour aller plus loin** » concluent la rubrique d'exercices.



Conseils pour travailler efficacement avec le Transmath

AP

Voici comment travailler efficacement avec votre manuel de Mathématiques. À chaque étape de votre travail, vous pouvez vous reporter aux pages indiquées ci-dessous.

En classe de Terminale S, l'accompagnement personnalisé doit être recentré sur les enseignements spécifiques, dont les Mathématiques.

Cet accompagnement personnalisé est organisé autour de trois axes : le soutien, l'approfondissement, la méthodologie.

soutien AP



MAÎTRISER LES BASES

- Les exercices d'application, organisés autour des **objectifs** du programme, permettent d'acquérir les **savoir-faire indispensables**.
- Dans chaque chapitre, la page « **Pour se tester** » permet de travailler à son rythme. Les corrigés détaillés sont téléchargeables sur le site : www.nathan.fr/transmath.net/eleve-TermS
Ils permettent à chacun de travailler de façon autonome.

méthodologie AP



PROGRESSER EN AUTONOMIE

- Les **exercices résolus** présentent les raisonnements propres à chaque chapitre. Vous pouvez essayer de les refaire après les avoir étudiés.
- Avec les exercices de **Mise en pratique**, vous pouvez appliquer tout de suite la méthode sur d'autres cas.
- Les exercices « **Apprendre à chercher** » vous aident à progresser en raisonnement, à maîtriser peu à peu les bons réflexes dans chaque chapitre.
- Certains travaux dirigés sont rédigés spécialement pour travailler un type de raisonnement particulier. Ils sont signalés.



S'ENTRAÎNER POUR LE BAC

- Dans chaque chapitre, le premier exercice des pages « **Le jour du BAC** » vous présente un exercice typique concernant le chapitre. Avec ses **commentaires** et son **guide**, vous disposez de tous les outils pour résoudre l'exercice.
Un corrigé détaillé est téléchargeable sur le site : www.nathan.fr/transmath.net/eleve-TermS
- 1 ou 2 pages d'exercices BAC suivent, pour vous permettre ensuite de vous entraîner.



approfondissement AP



APPROFONDIR

- Certains travaux dirigés ont pour vocation d'approfondir les connaissances.

Des exercices permettent de prolonger la situation explorée.

Approfondissement AP
Prolongements possibles
→ exercices 106 et 107

- Les exercices « **Pour aller plus loin** » font appel à des raisonnements plus complexes. En nombre raisonnable, ils vous permettent de progresser dans chaque chapitre.

PROGRAMME

D'après le B.O. spécial n° 8 du 13 octobre 2011

1. Analyse

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES
Suites Raisonnement par récurrence. Limite finie ou infinie d'une suite. Limites et comparaison. Opérations sur les limites. Comportement à l'infini de la suite (q^n) , q étant un nombre réel. Suite majorée, minorée, bornée.	- Savoir mener un raisonnement par récurrence. ◇ Dans le cas d'une limite infinie, étant donnés une suite croissante (u_n) et un nombre réel A, déterminer à l'aide d'un algorithme un rang à partir duquel u_n est supérieur à A. ⊠ Démontrer que si (u_n) et (v_n) sont deux suites telles que : $-u_n$ est inférieur ou égal à v_n à partir d'un certain rang ; $-u_n$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$; - alors v_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$. - Étudier la limite d'une somme, d'un produit ou d'un quotient de deux suites. ⊠ Démontrer que la suite (q^n), avec $q > 1$, a pour limite $+\infty$. - Déterminer la limite éventuelle d'une suite géométrique. - Utiliser le théorème de convergence des suites croissantes majorées.
Limites de fonctions Limite finie ou infinie d'une fonction à l'infini. Limite infinie d'une fonction en un point. Limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient ou d'une composée de deux fonctions. Limites et comparaison. Asymptote parallèle à l'un des axes de coordonnées.	- Déterminer la limite d'une somme, d'un produit, d'un quotient ou d'une composée de deux fonctions. - Déterminer des limites par minoration, majoration et encadrement. - Interpréter graphiquement les limites obtenues.
Continuité sur un intervalle, théorème des valeurs intermédiaires	Exploiter le théorème des valeurs intermédiaires dans le cas où la fonction est strictement monotone, pour résoudre un problème donné.
Calculs de dérivées : compléments	- Calculer les dérivées des fonctions : $x \mapsto \sqrt{u(x)}$; $x \mapsto ((u(x))^n)$, n entier relatif non nul ; $x \mapsto e^{u(x)}$; $x \mapsto \ln(u(x))$. - Calculer la dérivée d'une fonction $x \mapsto f(ax + b)$ où f est une fonction dérivable, a et b deux nombres réels.
Fonctions sinus et cosinus	- Connaître la dérivée des fonctions sinus et cosinus. - Connaître quelques propriétés de ces fonctions, notamment parité et périodicité. - Connaître les représentations graphiques de ces fonctions.
Fonction exponentielle Fonction $x \mapsto \exp(x)$. Relation fonctionnelle, notation e^x .	⊠ Démontrer l'unicité d'une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, égale à sa dérivée et qui vaut 1 en 0. ⊠ Démontrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$. - Utiliser la relation fonctionnelle pour transformer une écriture. - Connaître le sens de variation et la représentation graphique de la fonction exponentielle. - Connaître et exploiter $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$.
Fonction logarithme népérien Fonction $x \mapsto \ln x$. Relation fonctionnelle, dérivée.	- Connaître le sens de variation, les limites et la représentation graphique de la fonction logarithme népérien. - Utiliser, pour a réel strictement positif et b réel, l'équivalence $\ln a = b \Leftrightarrow a = e^b$. - Utiliser la relation fonctionnelle pour transformer une écriture. - Connaître et exploiter $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.
Intégration Définition de l'intégrale d'une fonction continue et positive sur $[a; b]$ comme aire sous la courbe. Notation $\int_a^b f(x) dx$. Théorème : si f est une fonction continue et positive sur $[a; b]$, la fonction F définie sur $[a; b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est dérivable sur $[a; b]$ et a pour dérivée f .	

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES
Primitive d'une fonction continue sur un intervalle.	- Déterminer des primitives des fonctions usuelles par lecture inverse du tableau des dérivées. - Connaître et utiliser les primitives de $u'e^u$, $u'u^n$ (n entier relatif, différent de -1) et, pour u strictement positive, $\frac{u'}{\sqrt{u}}$, $\frac{u'}{u}$. - Calculer une intégrale.
Théorème : toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives.	- Utiliser le calcul intégral pour déterminer une aire. - Encadrer une intégrale.
Intégrale d'une fonction continue de signe quelconque.	◇ Pour une fonction monotone positive, mettre en œuvre un algorithme pour déterminer un encadrement d'une intégrale.
Linéarité, positivité, relation de Chasles.	
Valeur moyenne.	

2. Géométrie - Nombres complexes

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES
Forme algébrique, conjugué.	Effectuer des calculs algébriques avec des nombres complexes.
Somme, produit, quotient.	Résoudre dans $\mathbb{C}$ une équation du second degré à coefficients réels.
Équation du second degré à coefficients réels.	
Représentation géométrique.	Représenter un nombre complexe par un point ou un vecteur.
Affixe d'un point, d'un vecteur.	Déterminer l'affixe d'un point ou d'un vecteur.
Forme trigonométrique :	Passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique et inversement.
– module et argument, interprétation géométrique dans un repère orthonormé direct ;	Connaître et utiliser la relation $\bar{z}z = z ^2$.
– notation exponentielle.	Effectuer des opérations sur les nombres complexes écrits sous différentes formes.

Géométrie dans l'espace

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES
Droites et plans	
Positions relatives de droites et de plans : intersection et parallélisme.	Étudier les positions relatives de droites et de plans.
Orthogonalité :	Établir l'orthogonalité d'une droite et d'un plan.
– de deux droites ;	
– d'une droite et d'un plan.	
Géométrie vectorielle	
Caractérisation d'un plan par un point et deux vecteurs non colinéaires.	Choisir une décomposition pertinente dans le cadre de la résolution de problèmes d'alignement ou de coplanarité.
Vecteurs coplanaires.	Utiliser les coordonnées pour :
Décomposition d'un vecteur en fonction de trois vecteurs non coplanaires.	– traduire la colinéarité ;
Repérage.	– caractériser l'alignement ;
Représentation paramétrique d'une droite.	– déterminer une décomposition de vecteurs.
Produit scalaire	
Produit scalaire de deux vecteurs dans l'espace : définition, propriétés.	Déterminer si un vecteur est normal à un plan.
Vecteur normal à un plan.	⊗ Caractériser les points d'un plan de l'espace par une relation $ax + by + cz = 0$ avec a, b, c trois nombres réels non tous nuls.
Équation cartésienne d'un plan.	- Déterminer une équation cartésienne d'un plan connaissant un point et un vecteur normal. - Déterminer un vecteur normal à un plan défini par une équation cartésienne. ⊗ Démontrer qu'une droite est orthogonale à toute droite d'un plan si et seulement si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan. - Choisir la forme la plus adaptée entre équation cartésienne et représentation paramétrique pour : – déterminer l'intersection d'une droite et d'un plan ; – étudier la position relative de deux plans.

3. Probabilités et statistique

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES
Conditionnement, indépendance	
Conditionnement par un événement de probabilité non nulle.	Construire un arbre pondéré en lien avec une situation donnée.
Notation $P_A(B)$.	- Exploiter la lecture d'un arbre pondéré pour déterminer des probabilités. - Calculer la probabilité d'un événement connaissant ses probabilités conditionnelles relatives à une partition de l'univers.
Indépendance de deux événements.	⊗ Démontrer que si deux événements A et B sont indépendants, alors il en est de même pour A et $\bar{B}$.

CONTENUS	CAPACITÉS ATTENDUES
Notions de loi à densité à partir d'exemples Loi à densité sur un intervalle. Loi uniforme sur $[a; b]$. Espérance d'une variable aléatoire suivant une loi uniforme. Loi exponentielle. Espérance d'une variable aléatoire selon une loi exponentielle. Loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$. Théorème de Moivre-Laplace (admis). Loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ d'espérance μ et d'écart-type σ .	• Connaître la fonction de densité de la loi uniforme sur $[a; b]$. • Calculer une probabilité dans le cadre d'une loi exponentielle. ▣ Démontrer que l'espérance d'une variable aléatoire suivant une loi exponentielle de paramètre λ est $\frac{1}{\lambda}$. • Connaître la fonction de densité de la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$ et sa représentation graphique. ▣ Démontrer que pour $\alpha \in]0; 1[$, il existe un unique réel positif u_α tel que $P(-u_\alpha \leq X \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$ lorsque X suit la loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. • Connaître les valeurs approchées $u_{0,05} \approx 1,96$ et $u_{0,01} \approx 2,58$. • Utiliser une calculatrice ou un tableur pour calculer une probabilité dans le cadre d'une loi normale (μ, σ^2). • Connaître une valeur approchée de la probabilité des événements suivants : $\{X \in [\mu - \sigma, \mu + \sigma]\}$, $\{X \in [\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma]\}$ et $\{X \in [\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma]\}$, lorsque X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
Intervalle de fluctuation	▣ Démontrer que si la variable aléatoire X_n suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$, alors, pour tout α dans $]0; 1[$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\frac{X_n}{n} \in I_n\right) = 1 - \alpha$, où I_n désigne l'intervalle $\left[p - u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}; p + u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$. • Connaître l'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% : $\left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$ où p désigne la proportion dans la population.
Estimation Intervalle de confiance. Niveau de confiance.	• Estimer par intervalle une proportion inconnue à partir d'un échantillon. • Déterminer une taille d'échantillon suffisante pour obtenir, avec une précision donnée, une estimation d'une proportion au niveau de confiance 0,95.

Algorithmique

Instructions élémentaires (affectation, calcul, entrée, sortie)

Les élèves, dans le cadre d'une résolution de problèmes, doivent être capables :

- d'écrire une formule permettant un calcul ;
- d'écrire un programme calculant et donnant la valeur d'une fonction, ainsi que les instructions d'entrées et sorties nécessaires au traitement.

Boucle et itérateur, instruction conditionnelle

Les élèves, dans le cadre d'une résolution de problèmes, doivent être capables de :

- programmer un calcul itératif, le nombre d'itérations étant donné ;
- programmer une instruction conditionnelle, un calcul itératif, avec une fin de boucle conditionnelle.

Notations et raisonnement mathématiques

Cette rubrique, consacrée à l'apprentissage des notations mathématiques et à la logique, ne doit pas faire l'objet de séances de cours spécifiques, mais doit être répartie sur toute l'année scolaire.

En complément des objectifs rappelés ci-dessous, le travail sur la notion d'équivalence doit naturellement être poursuivi (propriété caractéristique, raisonnement par équivalence) et l'on introduit le raisonnement par récurrence.

Notations mathématiques

Les élèves doivent connaître les notions d'élément d'un ensemble, de sous-ensemble, d'appartenance et d'inclusion, de réunion, d'intersection et de complémentaire et savoir utiliser les symboles de base correspondants : $\in, \subset, \cup, \cap$ ainsi que la notation des ensembles de nombres et des intervalles.

Pour le complémentaire d'un ensemble A , on utilise la notation des probabilités A .

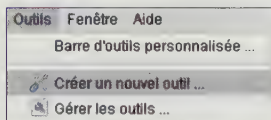
Pour ce qui concerne le raisonnement logique, les élèves sont entraînés sur des exemples à :

- utiliser correctement les connecteurs logiques « et », « ou » et à distinguer leurs sens des sens courants de « et », « ou » dans le langage usuel ;
- utiliser à bon escient les quantificateurs universel, existentiel (les symboles $\forall, \exists$ ne sont pas exigibles) et à repérer les quantifications implicites dans certaines propositions et, particulièrement, dans les propositions conditionnelles ;
- distinguer, dans le cas d'une proposition conditionnelle, la proposition directe, sa réciproque, sa contraposée et sa négation ;
- utiliser à bon escient les expressions « condition nécessaire », « condition suffisante » ;
- formuler la négation d'une proposition ;
- utiliser un contre-exemple pour infirmer une proposition universelle ;
- reconnaître et utiliser des types de raisonnement spécifiques : raisonnement par disjonction des cas, recours à la contraposée, raisonnement par l'absurde.

Activité

IDENTIFIER LES PHASES : ENTRÉE, TRAITEMENT ET SORTIE

- 1 Le logiciel GeoGebra permet de créer des macro-commandes appelées « outils ».
 - a) Créez une nouvelle figure GeoGebra avec trois points non alignés A, B et C puis construisez l'orthocentre H du triangle ABC.
 - b) Créez un nouvel outil en appliquant ces paramètres indiqués ci-dessous.



- Objets finaux : point H.
- Objets initiaux : A, B, C.
- Nom : orthocentre.

Si la création de l'outil orthocentre aboutit sans erreur, alors le procédé de construction que vous avez utilisé est reproductible. Cet outil pourra être utilisé pour construire rapidement l'orthocentre de n'importe quel triangle. Sinon, reprenez votre construction du point H pour la rendre reproductible pour n'importe quel triangle.

- 2 Décrivez la succession d'étapes qui vous a permis de construire l'orthocentre du triangle ABC.
- 3 Dans l'algorithme de construction que vous venez de décrire, identifiez les traitements, c'est-à-dire les créations d'objets géométriques intermédiaires qui ne constituent pas le résultat final.

Note

Dans le jargon des applications informatiques, le terme macro-commande désigne une commande créée par l'utilisateur et qui automatise une tâche complexe.

Aide

Dans GeoGebra, vous pouvez visualiser les différentes étapes de construction d'une figure : onglet affichage, protocole de construction.

Vocabulaire

Définition. Un algorithme est une **suite finie et ordonnée d'opérations** appliquées à des **données** en vue de produire un **résultat attendu**.

Les trois phases d'un algorithme sont :

- 1 l'**entrée** des données, parfois appelée « Input » ;
- 2 le **traitement** des données ;
- 3 la **sortie** du résultat, parfois appelée « Output ».

Exemple. Le calcul de l'image d'un nombre a par une fonction f suit un algorithme.

- La valeur a est donnée en **entrée**.
- Le **traitement** consiste à suivre les étapes de calcul définies par l'expression de $f(x)$.
- L'image $f(a)$ est donnée en **sortie**.

Un peu d'histoire. Le mot algorithme vient du nom du mathématicien persan al-Khwarizmi (début du IX^e siècle). En effet, il exposa le premier les méthodes de base de la résolution pas à pas des équations.

Cependant, les algorithmes sont plus anciens. Déjà en 1800 avant J.-C., les Mésopotamiens calculaient des valeurs approchées des racines carrées à l'aide d'algorithmes (cf. activité 3, p. 23).



Exercices

1 Entrée et sortie

Pedro et Virginie sont séparés par un paravent. Virginie a donné à Pedro un graphique à compléter.

Elle lui communique les informations suivantes :

« Trace :

- le point B symétrique de A par rapport à O,
- la droite d_1 perpendiculaire à (OA) passant par O,
- le cercle $\mathcal{C}$ de centre O passant par A,
- E et F, les points d'intersection entre d_1 et $\mathcal{C}$,
- les segments [AE], [EB], [BF] et [FA]. »

Pedro lui annonce : « C'est bon, j'ai réussi ».

1. Que comportait initialement le graphique ?

2. Qu'est-ce que Pedro a réussi à tracer ?

2 Problème de concentration

À la fin du cours de mathématiques, Lucas a manqué d'attention durant quelques instants. Lorsqu'il regarde au tableau, il lit et recopie :

$$f(x) = 3x^2 - 5x + 3$$

$$a = 0$$

$$f'(x) = 6x - 5$$

$$f'(a) = -5 \text{ et } f(a) = 3$$

$$\text{Tangente} \rightarrow y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

À finir pour demain.

Le soir venu, Lucas souhaite refaire l'exercice.

Quels ont été les éléments donnés par l'enseignant au début de l'exercice et la question que celui-ci a certainement posée ?

3 Trinôme

Voici un programme réalisé sur calculatrice.

Casio

TI

```
"AX²+BX+C"
"A"→A
"B"→B
"C"→C
"DELTA":B²-4AC→D
"A(X+α)²+β"
α:=-B/(2A)
β:=-D/(4A)
```

```
:Disp "AX²+BX+C"
:Prompt A,B,C
:B²-4AC→D
:Disp "DELTA=",D
:Pause
:Disp "A(X+α)²+β"
:Disp "α=", -B/(2
A)÷Frac
:Disp "β=", -D/(4
A)÷Frac
```

Identifiez les entrées, traitements et résultats donnés par ce programme.

4 Facile...

1. On imagine une machine capable de dériver une fonction et de résoudre les inéquations du type $f'(x) \geq 0$ sur un intervalle I.

Que pourriez-vous rapidement déduire en observant le résultat donné par l'algorithme suivant ?

Entrée des données

Entrée de l'expression $f(x)$

Entrée de l'intervalle I

Traitement des données

$f'(x)$ reçoit l'expression de la dérivée de f sur I.

S reçoit les solutions de l'inéquation $f'(x) \geq 0$ sur I.

Sortie des résultats

Affichage de S

2. Le logiciel XCAS en ligne : <http://www.xcasenligne.fr/> permet de programmer cet algorithme. On prend ici $I = \mathbb{R}$.

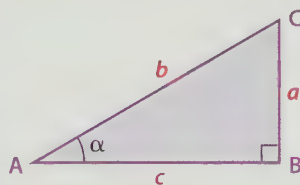
a) Recopiez le programme suivant dans la console puis validez en appuyant sur la touche entrée de votre clavier.

```
SigneDeriv(f):={
  local g,S;
  g:=deriver(f);
  S:=resoudre(g>=0);
  afficher ("la dérivée de f est f'(x)=",g);
  afficher ("f' est positive pour ",S)
  retourne ;
}
```

b) Saisissez ensuite `SigneDeriv(2x^3-3x^2-12x+2)` puis validez afin d'étudier le signe de la dérivée de la fonction f , dérivable sur $\mathbb{R}$, définie par $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 2$.

5 Comparer deux algorithmes

ABC est un triangle rectangle en B.



Pierre et Hakim ont écrit un algorithme leur permettant de calculer la distance AB.

Pierre	Hakim
Lire a et b	Lire b et α
c prend la valeur $\sqrt{b^2 - a^2}$	c prend la valeur $b \cos \alpha$
Afficher c	Afficher c

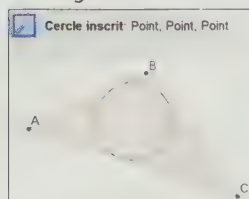
Que pensez-vous de l'affirmation suivante de Pierre ?

« Nos deux algorithmes affichent le même résultat donc ils sont équivalents ».

6 Un outil cercle inscrit



Sous GeoGebra, créez un outil permettant de construire le cercle inscrit d'un triangle dont les sommets sont donnés.



Activité

UNE MINI-CALCULATRICE

On dispose d'une mini-calculatrice comportant les touches suivantes et ne disposant d'aucun système de parenthèses.

En cas d'absence de saisie, l'appui sur une touche verte rappelle préalablement le dernier résultat affiché.

L'appui sur la touche $\sqrt{}$ déclenche le calcul de la racine carrée du nombre précédent le symbole $\sqrt{}$.

Tous les calculs sont effectués grâce à la mini-calculatrice.

f désigne la fonction affine définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -2x + 3$.

1. Que permet la séquence de calcul suivante ?

4 $\rightarrow$ A EXE - 2 $\times$ A + 3 EXE

2. Écrivez une séquence de calcul permettant d'obtenir l'antécédent de 5 par f .

2 $\rightarrow$ A	
10,5 $\times$ A + 3	24
Rep - 30	-6
4 $\sqrt{}$	2
7	8
4	5
1	2
,	0
EXE	$\rightarrow$
	B

Vocabulaire

• Dans la description d'un algorithme, les données sont **nommées** et sont souvent **variables**. Ces données peuvent être de plusieurs **types** : numériques, chaînes de caractères, listes, vecteurs, fonctions, ... Par exemple, un algorithme de calcul de l'aire d'un rectangle utilise les données initiales généralement nommées longueur et largeur. Ces données sont de type numérique et varient en fonction du rectangle auquel s'applique l'algorithme.

• En programmation, une **variable** est un **espace mémoire** identifié par un **nom** et destiné à stocker des données. Selon son type, une donnée occupe plus ou moins d'espace mémoire.

• Certains langages de programmation, comme AlgoBox, nécessitent de réserver l'espace mémoire alloué au stockage des informations avant l'exécution du programme. Il est alors nécessaire de **déclarer** préalablement les variables utilisées, ainsi que leur type.

• Afin de faciliter la programmation et la lisibilité d'un algorithme, il est utile de déclarer les variables avant la description de cet algorithme.

• Les instructions mettant en œuvre une ou plusieurs variables sont :

- l'**affectation** : saisie de l'utilisateur (entrée), résultat d'une opération ;
- les **opérations** : on utilise les opérations qui s'appliquent au type de données que la variable contient,
- l'**affichage** ou, plus généralement, la sortie des données contenues dans la variable.

Note

Le langage des calculatrices gère « dynamiquement » les variables. Ce qui signifie qu'il n'est pas nécessaire de les déclarer.

Exemple. Forme canonique d'un trinôme

L'algorithme utilise quatre variables numériques.

Les variables A, B et C servent à stocker les coefficients du trinôme. La variable D sert à stocker la valeur du discriminant. Le contenu de la variable D ne sera pas affiché et servira uniquement au traitement.

Casio

```
"AX²+BX+C"
A"?">A
B"?">B
C"?">C
"DELTA":B²-4AC>D
A"(X+α)²+β"
α="-B/(2A)"
β="-D/(4A)"
```

TI

```
:Disp "AX²+BX+C"
:Promt A,B,C
:B²-4AC>D
:Disp "DELTA=",D
:Pause
:Disp "A(X+α)²+β"
:Disp "α=", -B/(2
A)
:Disp "β=", -D/(4
A)
```

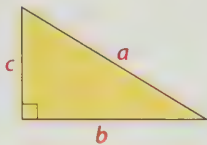
Exercices

Pour les exercices 7 et 8

Vous devez simuler l'utilisation de la mini-calculatrice présentée dans l'activité ci-contre.

7 Calcul d'hypoténuse

a , b et c désignent les longueurs des côtés d'un triangle rectangle. a est la longueur de l'hypoténuse. Décrivez une séquence de calcul permettant d'obtenir a lorsque $b = 5$ et $c = 4$.



8 Deux fonctions

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 2x + 5$.

g est la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-2\}$ par $g(x) = \frac{2x-1}{x+2}$.

a) Utilisez l'expression $x(x-2) + 5$ de $f(x)$ pour écrire une séquence de calcul permettant d'obtenir $f(4)$ en ne saisissant qu'une fois la valeur 4.

b) Même question en utilisant l'expression $2 - \frac{5}{x+2}$ de $g(x)$ pour obtenir $g(4)$.

9 Riri, Fifi, Loulou

Riri, Fifi et Loulou sont trois variables de type chaîne, c'est-à-dire pouvant stocker des phrases ou des mots écrits entre guillemets.

Associez à chaque algorithme le résultat qu'il affiche.

A
Riri prend la valeur «Fifi» Fifi prend la valeur «Loulou» Loulou prend la valeur Riri Afficher Loulou
B
Loulou prend la valeur «Riri» Riri prend la valeur «Loulou» Fifi prend la valeur Riri Afficher Fifi
C
Fifi prend la valeur «Riri» Loulou prend la valeur Fifi Riri prend la valeur Loulou Afficher Riri

1
« Riri »
2
« Fifi »
3
« Loulou »

10 Un minimum de variables

On considère l'algorithme de calcul suivant.

```
Choisir un nombre
L'élever au carré
Choisir un second nombre
L'élever au carré
Faire la somme des carrés
Afficher cette somme.
```

1. a) Identifiez et nommez les variables qu'il vous semble naturel d'utiliser.

b) Est-il possible de restreindre le nombre de variables utilisées à 2 ?

2. Programmez cet algorithme sur votre calculatrice ou un ordinateur en utilisant un minimum de variables.

11 Quelle économie ?

Le programme suivant permet d'afficher le prix hors taxes (PHT) et le prix toutes taxes comprises (PTTC) d'un achat de n articles identiques au prix unitaire hors taxes p . Le taux de TVA appliqué est t %.

```
DEBUT_ALGORITHME
  AFFICHER "Prix HT unitaire : "
  LIRE p
  AFFICHER "Nombre d'articles : "
  LIRE n
  AFFICHER "Taux de TVA (%) : "
  LIRE t
  PHT PREND_LA_VALEUR .....
  PTTC PREND_LA_VALEUR .....
  AFFICHER PHT
  AFFICHER PTTC
FIN_ALGORITHME
```

1. Identifiez les variables utilisées.

2. Complétez les instructions relatives aux calculs de prix.

3. L'algorithme suivant a la même fonction que le précédent.

```
DEBUT_ALGORITHME
  AFFICHER "Prix HT unitaire : "
  LIRE p
  AFFICHER "Nombre d'articles : "
  LIRE n
  AFFICHER "Taux de TVA (%) : "
  LIRE t
  p PREND_LA_VALEUR .....
  AFFICHER p
  p PREND_LA_VALEUR .....
  AFFICHER p
FIN_ALGORITHME
```

a) Identifiez les variables utilisées.

b) Complétez les instructions relatives aux calculs de prix.

c) L'économie du nombre de variables vous paraît-elle justifiée ?

Activité

EFFECTUER UN REGROUPEMENT EN CLASSES

La taille de 15 élèves d'une classe de terminale a été relevée et consignée dans une feuille de calcul d'un logiciel tableur.

On souhaite déterminer les effectifs cumulés croissants de la série statistique ainsi obtenue selon un regroupement en classes d'amplitude 10 cm.

La fonction NB.SI permet de compter le nombre de cellules vérifiant un critère donné à l'intérieur d'une plage. **NB.SI(plage; critère)**

1 Recopiez la feuille de calcul suivante dans un tableur.

2 En C2, saisissez **=NB.SI(A\$2:A\$16; « < »&B2)**.

3 On souhaite maintenant obtenir le regroupement en classes. Pour cela, on utilise la colonne D.

Par exemple, la cellule D2 indiquera le nombre d'élèves dont la taille est dans l'intervalle [155 ; 165[.

Quelle formule, à recopier vers le bas, peut-on saisir en D2 pour obtenir le résultat souhaité ?

	A	B	C
	Taille (cm)	Bornes des classes	Effectifs cumulés croissants
1			
2	173	155	
3	157	165	
4	182	175	
5	175	185	
6	189	195	
7	159		
8	159		
9	163		
10	185		
11	174		
12	173		
13	188		
14	177		
15	167		
16	179		

Vocabulaire

La résolution de certains problèmes conduit parfois à une situation dans laquelle la décision prise est soumise à **condition** :

- si la condition est vérifiée, on effectue une tâche précise,
- si elle n'est pas vérifiée, on effectue une autre tâche.

Cela se traduit dans un algorithme par le schéma ci-dessous :

**Si condition
alors tâche 1
sinon tâche 2
FinSi**

Instructions à effectuer si la condition est vérifiée.

Instructions à effectuer si la condition n'est pas vérifiée.

Instructions pour la calculatrice

Langage Casio

If <condition> $\leftarrow$
Then <instructions>
Else <instructions>
If End $\leftarrow$

Langage TI

If <condition>
:If <condition>
:Then
: <instructions>
:Else
: <instructions>
:End

Le « sinon » n'est pas systématique. Sans cette instruction, si la condition n'est pas vérifiée, la tâche n'est pas effectuée et l'algorithme passe à l'instruction suivante.

Exemple.

Deux nombres sont choisis par l'utilisateur. Le plus grand est affiché.

Protocole	Algorithme	Casio	TI
- Les variables A et B stockent deux nombres saisis par l'utilisateur. - Le plus grand des deux nombres est affiché.	A et B sont de type numérique Lire A et B Si A > B Alors afficher A Sinon afficher B FinSi	<pre> =====PLUSGRAN===== ?>A ?>B If A>B Then A Else B IfEnd TOP BTM SRC MENU A<=>B CHAR </pre>	<pre> PROGRAM:PLUSGRAN :Prompt A,B :If A>B :Then :Disp A :Else :Disp B </pre>

Exercices

12 Fonction définie par morceaux

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x - 1 & \text{si } x \geq 0 \\ -2x - 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Écrivez un programme qui, pour une valeur x saisie par l'utilisateur, renvoie le nombre $f(x)$.

13 Équation d'une droite

L'algorithme suivant permet de déterminer le coefficient directeur d'une droite passant par deux points d'abscisses différentes.

```

Variables
a, b, c, d, m de type numérique

Entrée
Afficher « Saisissez les coordonnées du point A. »
Lire a
Lire b
Afficher « Saisissez les coordonnées du point B. »
Lire c
Lire d

Traitement
m prend la valeur  $\frac{d - b}{c - a}$ 

Sortie
Afficher m
    
```

1. Complétez cet algorithme pour qu'il fournisse l'ordonnée à l'origine de cette droite.
2. Programmez cet algorithme sur votre calculatrice ou sur un ordinateur.
3. Cet algorithme ne prend pas en compte le cas d'une droite parallèle à l'axe des ordonnées.

Modifiez l'algorithme pour que ce cas soit traité.

14 Tester deux vecteurs

Le plan est rapporté à un repère orthonormé.

L'algorithme suivant a été écrit avec AlgoBox.

```

1  VARIABLES
2  a EST_DU_TYPE NOMBRE
3  b EST_DU_TYPE NOMBRE
4  c EST_DU_TYPE NOMBRE
5  d EST_DU_TYPE NOMBRE
6  DEBUT_ALGORITHME
7  AFFICHER "Entrez les coordonnées du vecteur u."
8  LIRE a
9  LIRE b
10 AFFICHER "Entrez les coordonnées du vecteur v."
11 LIRE c
12 LIRE d
13 SI (a*d-b*c==0) ALORS
14   DEBUT_SI
15   AFFICHER "u et v sont ....."
16   FIN_SI
17 SI (a*c+b*d==0) ALORS
18   DEBUT_SI
19   AFFICHER "u et v sont ....."
20   FIN_SI
21 FIN_ALGORITHME
    
```

a) Précisez l'objectif de cet algorithme et complétez les lignes 15 et 19.

b) Supposons $\vec{v} \neq \vec{0}$. Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, alors il existe un nombre k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

Modifiez l'algorithme pour qu'il affiche la valeur k lorsque cela est pertinent.

c) Que peut-on dire dans les cas $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$? Modifiez l'algorithme pour traiter séparément ces deux cas.

15 Trinôme

Modifiez le programme donné à l'exercice 3 pour qu'il calcule et affiche les éventuelles racines du trinôme.

16 Une précaution utile

Voici un algorithme.

```

Variables
A,B,C et H sont de type entier naturel

Entrée
Lire A, B, C
H prend la valeur C

Traitement
Si A<B
  Alors
    Si B>C
      Alors
        H prend la valeur B
        B prend la valeur C
      FinSi
    Sinon
      Si A>C
        Alors
          H prend la valeur A
          A prend la valeur C
        FinSi
      FinSi
    FinSi
  FinSi

Sortie
Afficher A, B, H
    
```

1. Testez cet algorithme en complétant le tableau suivant.

Entrées			Sorties		
A	B	C	A	B	H
4	8	7			
8	7	4			
8	4	7			
4	7	8			

2. Observez la colonne H et précisez alors l'objectif de cet algorithme.

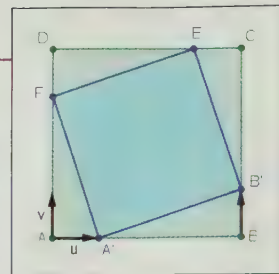
3. Application

Écrivez un programme indiquant si un triangle est rectangle. Les longueurs des côtés de ce triangle seront des entiers saisis par l'utilisateur dans un ordre quelconque.

Activité

DES CARRÉS IMBRIQUÉS

- Ouvrez une nouvelle figure sous GeoGebra puis créez les points A et B en saisissant $A = (0, 0)$ et $B = (4, 0)$. Créez le carré ABCD (Polygone régulier).
 - Créez les vecteurs $\vec{u} = \frac{1}{4} \vec{AB}$ et $\vec{v} = \frac{1}{4} \vec{BC}$.
Saisie: $u=0.25 \cdot \text{Vecteur}[A,B]$
 - Créez les points A' et B' tels que $\vec{AA'} = \vec{u}$ et $\vec{BB'} = \vec{v}$.
 - Créez le carré A'B'EF. Le carré A'B'EF est inscrit dans le carré ABCD. Cette construction est reproductible.
- Créez l'outil **Carré imbriqué** permettant de construire les objets finaux ci-contre à partir des objets initiaux (attention à l'ordre : point A puis point B).
- Utilisez cet outil pour créer un nouveau carré imbriqué dans A'B'EF.
- Combien faut-il construire de carrés pour que le côté du plus petit soit inférieure à 0,5 ?



Point A: A + u
Point B: B + v
Quadrilatère poly1 Polygone[A, B, 4]
Segment a'

Vocabulaire

- Un algorithme peut devoir réaliser plusieurs fois de suite la même tâche. On dit que l'algorithme répète **une boucle**. Le terme **itération** désigne un **passage dans la boucle**.
- Lorsqu'on réalise la même tâche tant qu'une condition est vérifiée, ou jusqu'à ce qu'une condition soit vérifiée, on parle de « **boucle conditionnelle** ». On distingue deux types de boucles conditionnelles.

- Boucle « Tant que »** : on exécute une certaine tâche tant qu'une condition est vérifiée. La condition est **testée avant** d'exécuter la tâche. La tâche peut ne pas être exécutée.
- Boucle « Jusqu'à »** : on exécute une certaine tâche jusqu'à ce qu'une condition soit vérifiée. La condition est **testée après** avoir exécuté la tâche. La tâche sera donc exécutée **au moins une fois**.

Exemple. Tracer la courbe représentative de la fonction f définie sur $[-10; 10]$ par $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$.

Instructions pour la calculatrice

Langage Casio

While <condition> ↵
<instructions>
WhileEnd ↵
Do ↵
<instructions>
LpWhile <condition> ↵

Langage TI

:While <condition>
:<instructions>
:End
:Repeat <condition>
:<instructions>
:End

Protocole	Algorithmme	Avec Albox
- En plus de la variable x, on utilise la variable numérique p pour le pas d'incrément de la variable x. - On affecte à p une valeur choisie par l'utilisateur et à x la borne inférieure de l'intervalle : -10. - On place le point de coordonnées $(x; f(x))$ et on incrémente x de la valeur de p. - On réitère la tâche précédente tant que $x \leq 10$.	Variables x et p de type numérique Entrée p prend une valeur choisie par l'utilisateur Traitement x prend la valeur -10 Tant que $x \leq 10$ Afficher le point $(x; f(x))$ x prend la valeur $x + p$ Fin de boucle Sortie La courbe est affichée	<pre> VARIABLES x EST_DU_TYPE NOMBRE pas EST_DU_TYPE NOMBRE DEBUT_ALGORITHME AFFICHER "Entrez le pas." LIRE pas x PREND_LA_VALEUR -10 TANT_QUE (x<=10) FAIRE DEBUT_TANT_QUE TRACER_POINT (x,F1(x)) x PREND_LA_VALEUR x+pas FIN_TANT_QUE FIN_ALGORITHME </pre> Fonction numérique utilisée : $F1(x)=(x-1)/(pow(x,2)+1)$ Utilisez l'onglet Dessiner dans un repère .

Exercices

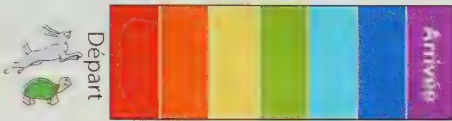
17 Passage en caisse

Lors du passage à la caisse d'une supérette, le prix de chaque article est saisi au clavier puis validé par l'appui sur la touche « entrée » de la caisse enregistreuse. La saisie et la validation de la valeur 0 déclenchent l'affichage de la somme à payer.

1. Programmez votre calculatrice pour qu'elle puisse servir de caisse enregistreuse.
2. Modifiez votre programme pour que le nombre d'articles achetés soit également affiché.

18 Le lièvre et la tortue

Il s'agit d'un jeu qui se joue avec un dé sur un plateau de sept cases.



Les règles de ce jeu suivent l'algorithme suivant.

Variables

T, L et D sont de type numérique
G est de type chaîne de caractères

Entrée

T et L prennent la valeur 0

Traitement

Jusqu'à ce que $T \geq 7$ ou $L = 7$, faire
D prend la valeur d'un jet de dé
Si $D=6$ alors
L=7
G= « Lièvre »
Sinon
T=T+D
FinSi
Si $T \geq 7$ alors
G = « Tortue »
FinSi
Fin de boucle

Sortie

Afficher « Le gagnant est : » G

Remarque. T et L désignent les positions respectives de la tortue et du lièvre.

1. Rédigez la règle du jeu sous forme d'un texte court.
2. Programmez cet algorithme sur votre calculatrice ou un ordinateur. Sur calculatrice, il peut être nécessaire de désigner le lièvre et la tortue par des nombres.
3. Modifiez et complétez cet algorithme pour réaliser une simulation de 1 000 parties.
4. L'un des deux protagonistes est-il avantagé par ces règles ? Si oui, modifiez le nombre de cases du plateau pour rendre ce jeu le plus équitable possible.

19 Algorithme de Babylone

Dès l'Antiquité, les Mésopotamiens ont su déterminer un encadrement de $\sqrt{n}$ ($n \in \mathbb{N}$) par deux fractions avec une précision remarquable.

Encadrement de $\sqrt{2}$ avec la précision p

Variables

u, v, a, b et p sont de type numérique

Entrée

u prend la valeur 2
v prend la valeur 1
Lire p

Traitement

Tant que $u-v > p$, faire
a prend la valeur $\frac{u+v}{2}$
b prend la valeur $\frac{4}{u+v}$

u prend la valeur a
v prend la valeur b
Fin de boucle

Sortie

Afficher u et v

$$v = 1$$

$$\frac{4}{u+v} = \frac{4}{3}$$

$$\frac{u+v}{2} = \frac{3}{2}$$

$$\approx \sqrt{2}$$

u et v sont les dimensions d'un rectangle dont l'aire vaut toujours 2.
À chaque itération, le rectangle obtenu est « un peu plus carré ».

1. Programmez cet algorithme puis déterminez un encadrement de $\sqrt{2}$ d'amplitude 10^{-5} .
2. Modifiez votre programme pour déterminer un encadrement de $\sqrt{5}$ d'amplitude 10^{-4} .

20 Division euclidienne

A, B et R désignent trois nombres entiers naturels.

1. Écrivez un algorithme permettant de calculer le reste de la division euclidienne de A par B.

2. On a donné ci-contre l'algorithme d'Euclide permettant de calculer le PGCD de deux entiers naturels.

Programmez cet algorithme sur votre calculatrice ou un ordinateur.

3. Calculez :
PGCD(660 ; 1 050) ;
PGCD(4 410 ; 2 100).

Entrée

Lire A et B
R prend la valeur 1

Traitement

Jusqu'à ce que $R = 0$,
Calculer le reste R de la division de A par B
A prend la valeur B
B prend la valeur R
Fin de boucle

Sortie

Afficher A

Activité

UNE SUITE DÉFINIE PAR RÉCURRENCE

(u_n) désigne la suite géométrique de terme initial $u_0 = 5$ et de raison $k = 0,9$.

1 On cherche à mettre en place un algorithme permettant de calculer le terme de rang p , p étant un entier naturel donné.

a) Complétez l'algorithme suivant pour qu'il réponde à ce besoin.

b) Programmez cet algorithme sur votre calculatrice ou un ordinateur.

2 Modifiez l'algorithme précédent pour qu'il vous permette de répondre aux questions suivantes.

À partir de quel rang les termes de la suite deviennent-ils inférieurs à 1 ? à 0,1 ?

Remarque. Attention au rang qui doit être affiché.

Variables

i , p et u sont des variables numériques

Entrée

i prend la valeur 0

u prend la valeur

Afficher «Entrez le rang p :»

Lire p

Traitement

Tant que i p

u prend la valeur

i prend la valeur $i+1$

Fin de boucle

Sortie

Afficher la valeur u

Vocabulaire

- Certains algorithmes nécessitent de contrôler le nombre d'itérations d'une boucle. On utilise pour cela un **compteur**, c'est-à-dire une variable servant à compter le nombre d'itérations effectuées.
- À chaque passage dans la boucle, le compteur est **incrémenté**. Cela signifie que sa valeur est augmentée d'une unité. On parle de **boucle incrémentale**.
- Les structures de type « tant que » ou « jusqu'à » permettent de mettre en place des boucles incrémentales, comme le montre l'activité précédente.
- Il est souvent envisageable d'utiliser une structure particulière : la boucle « pour ».

Pour i allant de 1 jusqu'à 10
faire tâche
FinPour

Cette boucle s'exécute 10 fois. À chaque itération, la variable i sera incrémentée d'une unité et prendra les valeurs successives : 1, 2, 3, ..., 10. Lorsque i prend la valeur 10, les instructions sont exécutées une dernière fois puis la boucle s'arrête.

La **valeur initiale** et la **valeur finale** sont à adapter suivant les besoins.

On peut aussi envisager de modifier le **pas d'incréméntation** (voir ci-contre).

Instructions pour la calculatrice

Langage Casio

For 1 → I To 10 ↵
<instructions>
Next ↵

Langage TI

: For (I, 1, 10)
: <instructions>
: End

Langage Casio

For 1 → I To 10 Step 2 ↵
...

Langage TI

: For (I, 1, 102)
...

Exemple. Le programme suivant simule un lancer de trois dés. Le résultat est stocké dans une liste.

Algobox	Casio	TI
<pre> VARIABLES ├── I EST DU TYPE NOMBRE ├── D EST DU TYPE LISTE └── DEBUT ALGORITHME ├── POUR I ALLANT DE 1 A 3 │ ├── DEBUT_POUR │ │ ├── D(I) PREND LA VALEUR ALGOBOX_ALEA_ENT(1,6) │ │ ├── AFFICHER D(i) │ │ └── FIN_POUR └── FIN_ALGORITHME </pre>	<pre> =====TROISDES===== ClrList L1 For 1→I To 3 RanInt#(1,6)→List 1[I] I Next List 1 </pre>	<pre> PROGRAM:TROISDES :EffListe L1 :For(I,1,3) : RanInt#(1,6)→L : (I) :End :Disp L1 </pre>

Exercices

21 Suite de l'activité

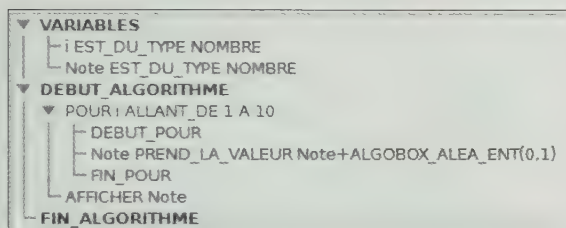
1. Modifiez l'algorithme de la question 1 a) de l'activité ci-contre pour remplacer la structure « Tant que » par une structure « Pour ».

2. Pourriez-vous utiliser une structure « Pour » afin de répondre à la question 2 de l'activité ?

22 Des réponses au hasard

Un questionnaire est composé de dix questions dont la réponse ne peut être que « vrai » ou « faux ». Chaque réponse exacte rapporte un point.

1. Justifiez que le programme écrit avec AlgoBox ci-dessous permet de simuler une note obtenue en répondant aléatoirement à ce questionnaire.

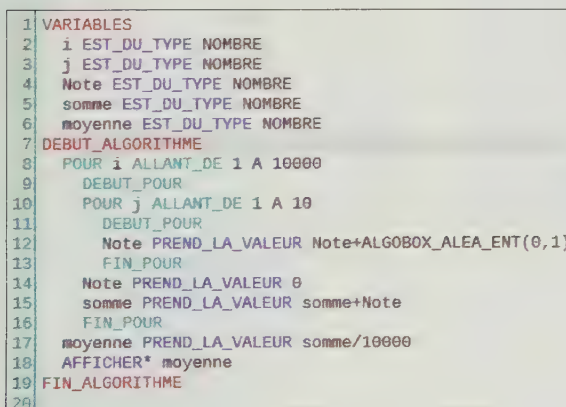


2. On souhaite calculer, pour 10 000 simulations, la moyenne des notes obtenues pour ces simulations.

Pierre a écrit le programme suivant.

Ce programme ne fonctionne pas correctement.

Corrigez-le.



3. L'enseignant estime qu'un élève répondant au hasard ne devrait pas pouvoir obtenir une note supérieure à 2,5. Pour cela, il décide de pénaliser les réponses erronées en leur attribuant des points négatifs.

Modifiez l'algorithme précédent pour aider l'enseignant à choisir la note négative qu'il faut attribuer à chaque mauvaise réponse.

23 Diviseurs

N désigne un entier naturel non nul.

Voici un algorithme permettant d'obtenir la liste des diviseurs de N.

```

I et N sont de type numérique

Entrée
Lire N
I prend la valeur 1

Traitement
Tant que x <  $\frac{N}{2}$ 
    Si I divise N
        Alors ajouter I à la liste
        des diviseurs
    FinSi
    Incrémenter I
Fin de boucle

Sortie
Afficher la liste des diviseurs
    
```

1. a) Pourquoi est-il inutile de tester les entiers plus grand que $\frac{N}{2}$?

b) Comment tester « I divise N » ?

c) Écrivez un programme donnant la liste de tous les diviseurs de N, N étant saisi par l'utilisateur.

2. Un jeu suit la règle suivante.

L'ordinateur choisit aléatoirement un entier compris entre 1 et 100.

• Si ce nombre possède sept diviseurs ou plus, le joueur marque p points, $p \in \mathbb{N}$.

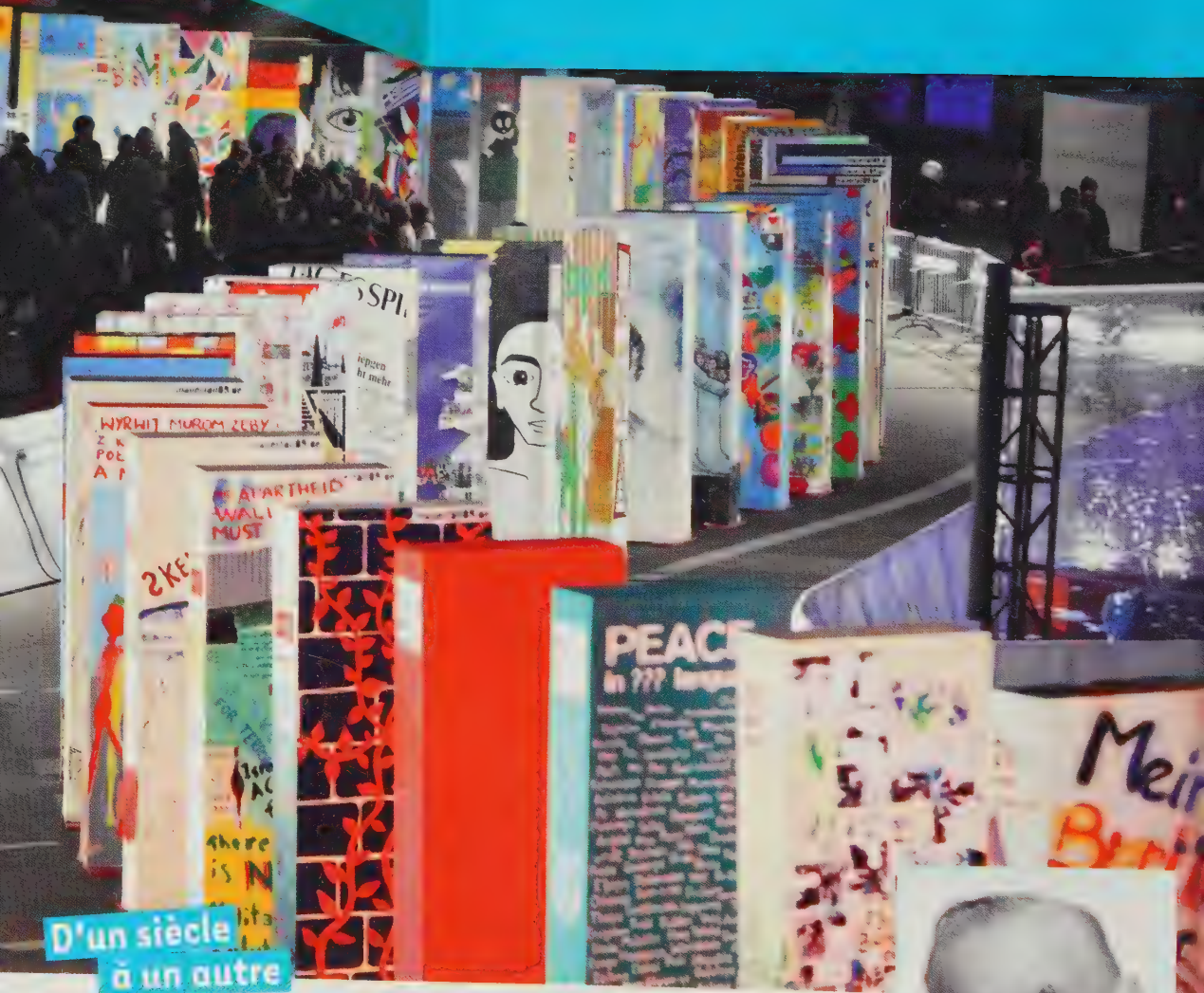
• Si ce nombre possède entre trois et six diviseurs, le joueur marque 1 point.

• Si ce nombre est premier, le joueur perd 10 points.

a) Modifiez le programme de la question 1. pour qu'il donne le nombre de diviseurs d'un entier donné.

b) Complétez ce programme pour qu'il permette de simuler 100 parties de ce jeu. On pourra choisir arbitrairement une valeur p .

c) Quelle valeur entière p choisiriez-vous pour rendre ce jeu le plus équitable possible ?



D'un siècle
à un autre

La chute en cascade de ces dominos géants symbolise la chute du mur de Berlin (lors du 20^e anniversaire de cet événement). Le premier domino va entraîner le deuxième, qui entraînera le troisième... Et tous les dominos finiront par tomber. Comme vous le verrez dans ce chapitre, le raisonnement par récurrence procède de la même idée.

Il semble que la première utilisation explicite de ce raisonnement se trouve chez Pascal, dans son *Traité du triangle arithmétique* (1654). Mais ce sont Dedekind et Peano qui l'ont rigoureusement formalisé au XIX^e siècle.



En savoir plus sur
Giuseppe Peano

→ Chercheurs d'hier, p. 37

Rappels

& Exercices-tests

Compléments
numériques

Suites arithmétiques

• Dire qu'une suite (u_n) est **arithmétique** signifie qu'il existe un nombre r , appelé la **raison**, tel que, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = u_n + r.$$

• (u_n) étant une suite arithmétique, pour tous entiers naturels m et p , $u_m = u_p + (m - p)r$.

En particulier, si le premier terme est u_0 , alors pour tout entier naturel n , $u_n = u_0 + nr$.

• La somme des entiers de 1 à n s'exprime par :

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Suites géométriques

• Dire qu'une suite (u_n) est **géométrique** signifie qu'il existe un nombre q non nul, appelé la **raison**, tel que, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = q \times u_n.$$

• (u_n) étant une suite géométrique, pour tous entiers naturels m et p , $u_m = q^{m-p} \times u_p$.

En particulier, si le premier terme est u_0 , pour tout entier naturel n , $u_n = q^n \times u_0$.

• La somme des puissances successives d'un nombre q **différent de 1** s'exprime par :

$$\sum_{k=0}^n q^k = 1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Sens de variation d'une suite

• (u_n) est **croissante** signifie que :
pour tout entier naturel n , $u_n \leq u_{n+1}$.

• (u_n) est **décroissante** signifie que :
pour tout entier naturel n , $u_n \geq u_{n+1}$.

• (u_n) est **constante** signifie que :
pour tout entier naturel n , $u_n = u_{n+1}$.

• Pour étudier le sens de variation d'une suite (u_n) , on peut :

– déterminer le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$;

– comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1 dans le cas où tous les

termes u_n sont **strictement positifs** ;

– étudier les variations de la fonction f lorsque la suite (u_n) est définie par $u_n = f(n)$, puisque f et (u_n) varient dans le même sens.

1 Vrai ou faux

Les suites sont définies pour tout entier naturel n .

a) La suite (u_n) définie par $u_n = 5 + 7n$ est arithmétique.

b) La suite (u_n) définie par $u_n = 1 + n^2$ est arithmétique.

c) La suite (u_n) définie par $u_n = 2n$ est géométrique.

d) Si u_n , u_{n+1} et u_{n+2} sont trois termes consécutifs d'une suite arithmétique, alors $u_n + u_{n+2} = 2u_{n+1}$.

2 QCM

Pour chaque affirmation, une seule réponse est exacte. Identifiez-la en justifiant votre choix.

1. La suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = \frac{2n+1}{n}$ est :

a) arithmétique

b) géométrique

c) ni arithmétique, ni géométrique

2. La suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par

$$u_{n+1} = u_n + \frac{2}{3} u_n \text{ est :}$$

a) arithmétique

b) géométrique

c) ni arithmétique, ni géométrique

3 Vrai ou faux

a) La suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 2n - 3$ est croissante.

b) La suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = 1 - \frac{1}{n}$ est strictement croissante.

c) Si une suite est strictement croissante, alors ses termes finissent par dépasser n'importe quel nombre choisi.

d) Si f est une fonction croissante sur $\mathbb{R}^+$, alors la suite définie par $u_n = f(n)$ est croissante.

4 QCM

Pour chaque affirmation, une seule réponse est exacte. Identifiez-la en justifiant votre choix.

1. La suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{3n-5}{7}$ est :

a) croissante

b) décroissante

c) non monotone

2. La suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout naturel n , $u_{n+1} = -2u_n + 5$ est :

a) croissante

b) décroissante

c) non monotone

3. (u_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = n^3 - n^2 + n$. La suite (u_n) est :

a) croissante

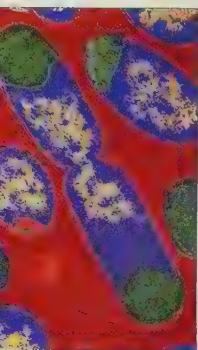
b) décroissante

c) non monotone



Corrigés sur www.transmathlycee.net/eleve-Terms

Activité 1 PROLIFÉRATION BACTÉRIENNE



La multiplication des bactéries comprend deux phases : une phase de croissance et une phase de division, chaque bactérie donnant naissance à deux bactéries, qui à leur tour donneront chacune deux bactéries, etc.

Dans le cas de la bactérie *Escherichia Coli*, la population double approximativement toutes les 20 minutes dans des conditions optimales de croissance. Pour modéliser le phénomène, on considère qu'elle double exactement toutes les 20 minutes.

On note u_n le nombre de bactéries *Escherichia Coli* obtenues (théoriquement) à l'issue de n périodes de 20 minutes, avec $u_0 = 1$ (il existe une unique bactérie au départ).

- 1 ▶ Exprimez u_n en fonction de n et précisez la nature de la suite (u_n) .
- 2 ▶ Estimez la population de bactéries obtenues en 4 heures.
- 3 ▶ Au bout de combien de temps la population bactérienne dépassera-t-elle la population de Tokyo (38 000 000 d'habitants), la ville la plus peuplée du monde (2011) ?
- 4 ▶ On assimile la Terre à une sphère de rayon $R = 6\,370$ km. Le volume d'une bactérie étant d'environ $1\,\mu\text{m}^3$, en combien de temps le volume de la Terre serait-il, en théorie, atteint par la descendance d'une seule bactérie ? Commentez ce résultat.

Activité 2 EXODE RURAL

On imagine un pays dont la population reste constante et égale à 10 millions d'habitants.

Des relevés annuels et une hypothèse de stabilité dans l'évolution permettent de considérer que chaque année, 10 % de la population rurale émigre vers les zones urbaines alors que 5 % de la population urbaine émigre vers les zones rurales.

Au début de l'étude (année 0), la répartition est : 6 millions de ruraux et 4 millions de citadins.

L'objectif de cette activité est de prévoir l'évolution de cette répartition et, en particulier, de savoir si, sous ces hypothèses, on peut prévoir une désertification totale des zones rurales.

On note r_n la population, en millions d'habitants, des zones rurales et u_n celle des zones urbaines à l'année n .

- 1 ▶ Prouvez que : pour tout entier naturel n ,
$$\begin{cases} r_{n+1} = 0,9r_n + 0,05u_n \\ u_{n+1} = 0,95u_n + 0,1r_n \end{cases}$$
- 2 ▶ a) Quelle hypothèse vous permet d'affirmer que pour tout entier naturel n , $u_n = 10 - r_n$?
b) Déduisez-en que pour tout entier naturel n , $r_{n+1} = 0,85r_n + 0,5$.
- 3 ▶ a) Dans un même repère, tracez la droite d d'équation $y = x$ et la droite Δ représentative de la fonction affine f définie par $f(x) = 0,85x + 0,5$.
b) Placez r_0 sur l'axe des abscisses, puis son image r_1 par la fonction f sur l'axe des ordonnées. Utilisez la droite d pour placer r_1 sur l'axe des abscisses.
Réitérez le procédé pour placer $r_2, r_3, \dots$
- 4 ▶ Quelle conjecture pouvez-vous alors émettre concernant :
a) le comportement des suites (r_n) et (u_n) ?
b) la désertification éventuelle des zones rurales ?
- 5 ▶ Utilisez votre calculatrice pour calculer r_{30} et u_{30} .
Modifiez la répartition initiale ($r_0 = 6$ et $u_0 = 4$). Que constatez-vous ?

Activité 3 LA MÉTHODE DE HÉRON

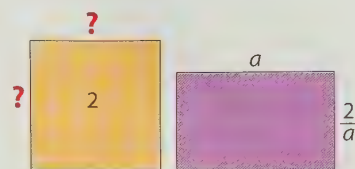
Les savants de l'Antiquité ont cherché des procédés pour calculer les racines carrées. Voici une méthode attribuée à Héron d'Alexandrie (I^{er} siècle de notre ère) pour calculer des valeurs approchées de $\sqrt{2}$.

1 Mise en situation

On considère un carré d'aire 2 et un rectangle de même aire, de dimensions a et $\frac{2}{a}$ (avec a rationnel, $a > 0$ et $a \neq \frac{2}{a}$).

a) Expliquez pourquoi le nombre $\sqrt{2}$ ne peut pas être strictement supérieur, à la fois, à a et à $\frac{2}{a}$.

Peut-il être strictement inférieur à a et $\frac{2}{a}$? Que pouvez-vous en conclure?



Un nombre rationnel est le quotient $\frac{p}{q}$ de deux nombres entiers ($q \neq 0$).

b) Il semble qu'en considérant la moyenne arithmétique de a et $\frac{2}{a}$, on puisse obtenir une approximation du nombre $\sqrt{2}$. Notons b cette valeur : $b = \frac{1}{2} \left(a + \frac{2}{a} \right)$.

Démontrez que le nombre $\frac{2}{b}$ appartient, comme b , à l'intervalle ouvert d'extrémités a et $\frac{2}{a}$.

Aide

Vous distinguerez les deux cas $a < \frac{2}{a}$ et $a > \frac{2}{a}$.

c) Expliquez pourquoi b et $\frac{2}{b}$ fournissent un encadrement plus fin de $\sqrt{2}$ que a et $\frac{2}{a}$.

On conçoit donc qu'en itérant ce processus, on obtient une suite de nombres rationnels qui permet d'approcher $\sqrt{2}$.

2 Calcul des premiers termes

On considère donc la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{2} \left(u_n + \frac{2}{u_n} \right)$. On admet que tous les termes de la suite sont non nuls.

a) Calculez successivement les valeurs exactes des nombres $u_0, \frac{2}{u_0}, u_1, \frac{2}{u_1}$ et u_2 . Placez-les sur un axe gradué.

b) Calculez u_3 et u_4 . (Donnez une valeur approchée à 10^{-6} près.) Que pouvez-vous en conclure?

3 Approche graphique

On considère les fonctions $x \mapsto x$ et $x \mapsto \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right)$ pour x appartenant à $]0; 2]$.

a) Déterminez les coordonnées $(x_0; y_0)$ du point d'intersection de leurs courbes représentatives.

b) Utilisez votre calculatrice pour obtenir une représentation des premiers termes de la suite (u_n) et conjecturez son comportement.

Aide

Avec Casio, utiliser le mode RECUR.
Avec TI, utiliser le mode SUITE.
Voir les instructions sur les rabats de la couverture.

Problèmes ouverts

Refaites les exemples après la chapitre ... Sont-ils plus faciles?

1 Quel est le reste de la division euclidienne par 8 de 3^{14} ? de 3^{15} ? de 3^{2012} ?

2 Quel est le nombre entier le plus proche de la somme $\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{2012 \times 2013}$?

1

Raisonnement par récurrence

1.1 | Un nouveau type de raisonnement

En classe de Première, certains résultats ont été admis sans démonstration.

C'est le cas, par exemple, de la propriété :

pour tout entier naturel n , la somme des entiers de 1 à n s'exprime par $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Notons (P_n) la proposition : $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

► La proposition (P_1) est vraie car $1 = \frac{1(1+1)}{2}$. De même, (P_2) est vraie car $1 + 2 = \frac{2(2+1)}{2}$.

On peut encore vérifier, par exemple, que (P_3) et (P_4) sont vraies.

Mais ceci ne démontre pas que (P_n) est vraie quel que soit n , puisque nous ne pouvons pas effectuer une infinité de vérifications.

► Le raisonnement qui va nous permettre de conclure peut être imagé ainsi :

Si l'on peut se placer sur un barreau d'une échelle, et
si l'on peut ensuite passer d'un barreau quelconque au suivant,
alors on peut gravir tous les barreaux, à partir du barreau initial.

► Dans notre exemple, la première étape est vérifiée : la proposition (P_1) est vraie.

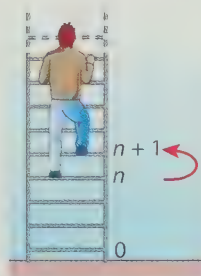
On conçoit et on admet que si l'on sait démontrer que « (P_n) vraie » entraîne « (P_{n+1}) vraie », alors la proposition est vraie pour tout n entier naturel (non nul).

Supposons donc (P_n) vraie, c'est-à-dire : $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Nous devons en déduire (P_{n+1}) : $1 + 2 + \dots + n + (n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$.

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + n + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = (n+1) \left(\frac{n}{2} + 1 \right) = \frac{(n+1)(n+2)}{2} \\ &= \frac{n(n+1)}{2} \text{ d'après } (P_n) \end{aligned}$$

Ainsi, (P_{n+1}) est vraie. On peut donc conclure que la proposition est vraie pour tout entier naturel n (non nul). Ce raisonnement est appelé **raisonnement par récurrence**.



1.2 | Principe du raisonnement par récurrence

Pour **démontrer par récurrence** qu'une proposition (P_n) est vraie pour tout entier naturel n supérieur ou égal à un entier naturel n_0 fixé, on procède en trois étapes.

- **Première étape** : on vérifie que (P_{n_0}) est vraie, c'est-à-dire que la proposition est vraie pour le premier indice n_0 . On dit qu'on a **initialisé** la récurrence.
- **Deuxième étape** : on suppose que pour un entier n quelconque ($n \geq n_0$), la proposition (P_n) est vraie, et sous cette hypothèse – dite de **récurrence** – on démontre que la proposition (P_{n+1}) est vraie.

On a ainsi prouvé que l'hypothèse de récurrence « (P_n) vraie » est **héréditaire**.

- **Troisième étape** : lorsque les deux étapes ont été réalisées, on conclut que la proposition (P_n) est vraie pour tout entier naturel n ($n \geq n_0$).

- **Initialisation**
- **Hérédité**
- **Conclusion**

2 Limite d'une suite

2.1 Limite finie

Définition 1

Dire qu'une suite (u_n) a pour **limite un nombre réel** ℓ signifie que tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à **partir d'un certain indice (ou rang)**.

Au plus un nombre fini de u_n avec $n < N$

Tous les u_n à partir d'un indice N

Au plus un nombre fini de u_n avec $n < N$

On écrit $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.



Animation

Cette définition traduit l'accumulation des termes u_n autour de ℓ .

On dit que la suite (u_n) est **convergente de limite** ℓ ou qu'elle converge vers ℓ .

► **Remarque.** Lorsqu'elle existe, la limite ℓ est **unique**. → Exercice 101, page 48

► **Suites de référence.** Les suites définies pour tout entier naturel n non nul par $u_n = \frac{1}{n}$, $v_n = \frac{1}{n^2}$, $w_n = \frac{1}{n^3}$, $t_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ ont pour limite 0.

2.2 Limite infinie

Définition 2

Dire qu'une suite (u_n) a pour **limite** $+\infty$ signifie que tout intervalle ouvert de la forme $]A; +\infty[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à **partir d'un certain indice**.

Au plus un nombre fini de u_n avec $n < N$

Tous les u_n à partir d'un indice N

On écrit $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.



Cette définition traduit l'idée que les termes u_n arrivent à dépasser tout nombre A , aussi grand soit-il.

► **Limite** $-\infty$. De même, l'écriture $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ signifie que tout intervalle ouvert de la forme $]-\infty; A[$ contient tous les termes de la suite (u_n) à partir d'un certain indice.

► **Suites de référence.** Les suites définies sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n$, $v_n = n^2$, $w_n = n^3$, $t_n = \sqrt{n}$ ont pour limite $+\infty$.

2.3 Limites et comparaison

Théorème 1

(u_n) et (v_n) sont deux suites. Si pour tout entier naturel n supérieur à un certain entier naturel n_0 ,

- $u_n \leq v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$;
- $u_n \leq v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

► **Démonstration exigible.** • Il s'agit de prouver que tout intervalle de la forme $]A; +\infty[$ contient tous les termes de la suite (v_n) à partir d'un certain indice. Soit A un nombre quelconque. $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ donc, par définition, l'intervalle $]A; +\infty[$ contient tous les termes u_n à partir d'un certain indice. Notons p cet indice.

On sait aussi qu'à partir de l'indice n_0 , $u_n \leq v_n$. Notons alors N le plus grand des deux entiers n_0 et p . À partir de l'indice N , l'intervalle $]A; +\infty[$ contient tous les termes u_n et donc *a fortiori* tous les termes v_n . Ceci étant vrai quel que soit A , on a bien : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

- De même, on prouve que : si pour tout entier $n \geq n_0$, $u_n \leq v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

ROC
→ Exercice 93
« Le jour du BAC ».

Animation

Théorème 2 Théorème d'encadrement (dit « des gendarmes »)

(admis)

 (u_n) , (v_n) et (w_n) sont trois suites.**Animation**

Si pour tout entier naturel n supérieur à un certain entier naturel n_0 , $v_n \leq u_n \leq w_n$ et si les suites (v_n) et (w_n) convergent vers la même limite ℓ , alors la suite (u_n) converge vers ℓ .

3 Opérations et limites

- Lorsque deux suites (u_n) et (v_n) ont des limites connues, on peut en général en déduire la limite de la suite **somme** $(u_n + v_n)$, de la suite **produit** $(u_n \times v_n)$ et de la suite **quotient** $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$.
- Ces règles opératoires, intuitivement évidentes, sont rassemblées dans les tableaux qui suivent.
- Une case contenant un point d'interrogation correspond à un cas où il n'y a pas de conclusion en général ; on dit alors que c'est un cas de **forme indéterminée**.

3.1 Théorèmes (admis)**Théorème 3** Limite d'une somme

Si (u_n) a pour limite	ℓ	ℓ ou $+\infty$	ℓ ou $-\infty$	$+\infty$
et si (v_n) a pour limite	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
alors $(u_n + v_n)$ a pour limite	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	?

Les rôles de (u_n) et (v_n) peuvent être échangés.

Théorème 4 Limite d'un produit

Si (u_n) a pour limite	ℓ	$\ell \neq 0$	∞	0
et si (v_n) a pour limite	ℓ'	∞	∞	∞
alors $(u_n \times v_n)$ a pour limite	$\ell \ell'$	∞	∞	?

Les rôles de (u_n) et (v_n) peuvent être échangés.

Théorème 5 Limite d'un quotient $\frac{u_n}{v_n}$ lorsque $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \neq 0$

Si (u_n) a pour limite	ℓ	ℓ	∞	$\pm\infty$
et si (v_n) a pour limite	$\ell' \neq 0$	∞	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$
alors $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ a pour limite	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	∞	?

On détermine le signe de la limite éventuelle d'un produit ou d'un quotient, en utilisant la règle des signes.

Théorème 6 Limite d'un quotient $\frac{u_n}{v_n}$ lorsque $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$

Si (u_n) a pour limite	$\ell \neq 0$ ou ∞	0
et si (v_n) a pour limite	0 en gardant un signe constant à partir d'un certain rang	0
alors $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$ a pour limite	∞	?

3.2 | Formes indéterminées

Les cas de formes indéterminées nécessitent une étude particulière chaque fois qu'ils se présentent. Pour les mémoriser, on les note « $\infty - \infty$ » ; « $0 \times \infty$ » ; « $\frac{\infty}{\infty}$ » ; « $\frac{0}{0}$ », mais ces écritures ne doivent jamais être utilisées dans une rédaction.

4

Limite d'une suite géométrique

(u_n) est une suite géométrique de raison q non nulle. Pour tout entier naturel n , $u_n = u_0 \times q^n$.

D'après les théorèmes sur les opérations et les limites, pour déterminer le comportement de la suite (u_n) à l'infini, il suffit de connaître celui de la suite (v_n) définie par $v_n = q^n$.

Théorème 7

q désigne un nombre. Si $q > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.

Démonstration exigible.

Le nombre q étant strictement supérieur à 1, notons a le réel strictement positif tel que $q = 1 + a$.

Le calcul des premiers termes de la suite : $q^0 = 1$, $q^1 = 1 + a$, $q^2 = 1 + 2a + a^2$, $q^3 = 1 + 3a + 3a^2 + a^3$, nous invite à comparer q^n et $1 + na$.

- Démontrons par récurrence que : pour tout entier naturel n , $q^n \geq 1 + na$.

- Initialisation : la propriété est vraie au rang 0 car $q^0 = 1 + 0a$.

- Hérédité : supposons la propriété vraie au rang n , c'est-à-dire $q^n \geq 1 + na$.

Comparons alors q^{n+1} et $1 + (n+1)a$.

Comme $q^n \geq 1 + na$ et $q > 0$, on a $q^n \times q \geq (1 + na) \times q$ soit $q^{n+1} \geq (1 + na)(1 + a)$,

soit $q^{n+1} \geq 1 + (n+1)a + na^2$ et donc $q^{n+1} \geq 1 + (n+1)a$ car $na^2 \geq 0$.

La propriété est vraie au rang $n+1$.

- Conclusion : pour tout entier naturel n , $q^n \geq 1 + na$.

- a est strictement positif donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (na) = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (1 + na) = +\infty$.

Nous sommes dans les conditions d'utilisation du théorème 1 : on en déduit $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.

Conséquence

Si $-1 < q < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.

La démonstration de ce résultat est donnée en exercice. ➔ **Exercice 100, page 48.**

Remarque

Si $q \leq -1$, alors la suite (q^n) n'a pas de limite et si $q = 1$, la suite (q^n) est constante (de limite 1).

Exemples

- La suite géométrique de terme général $u_n = 5(\sqrt{2})^n$ a pour raison $q = \sqrt{2}$.

Puisque $q > 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

- La suite géométrique de terme général $v_n = 3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$ a pour raison $q = \frac{1}{2}$.

Puisque $-1 < q < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

- La suite géométrique de terme général $w_n = (-2)^n$, dont les premiers termes sont 1, -2, 4, -8, 16, -32, ... n'a pas de limite.



ROC
➔ Exercice 94
« Le jour
du BAC ».

Animation

5 Convergence des suites monotones

Définition 3

- Dire qu'une suite (u_n) est **majorée** signifie qu'il existe un nombre M tel que, pour tout entier naturel n , $u_n \leq M$. Un tel nombre M est appelé un **majorant** de la suite (u_n) .
- Dire qu'une suite (u_n) est **minorée** signifie qu'il existe un nombre m tel que, pour tout entier naturel n , $u_n \geq m$. Un tel nombre m est appelé un **minorant** de la suite (u_n) .
- Une suite à la fois minorée et majorée est dite **bornée**.

Exemples

- $u_n = 3 - \sqrt{n}$. Pour tout entier naturel n , $u_n \leq 3$, donc la suite (u_n) est majorée par 3. Elle est aussi majorée par tout nombre supérieur à 3...
- $u_n = \frac{1}{n}$. La suite (u_n) est bornée car, pour tout entier naturel non nul n , $0 \leq \frac{1}{n} \leq 1$.

Théorème 8

(admis)

1. Toute suite croissante majorée est convergente.
2. Toute suite décroissante minorée est convergente.

Remarques

- Le théorème 8 affirme la convergence mais ne précise pas le nombre ℓ limite de la suite.
- Pour une suite croissante, si M est un majorant, on peut seulement affirmer que $\ell \leq M$.

Théorème 9

1. Toute suite croissante non majorée a pour limite $+\infty$.
2. Toute suite décroissante non minorée a pour limite $-\infty$.

LOGIQUE

Négation d'une proposition
→ p. 465

Démonstration

1. Soit (u_n) une suite croissante non majorée. Par négation de la définition d'une suite majorée, quel que soit le nombre A , il existe un indice N tel que $u_N > A$.

La suite étant croissante, il en résulte que tous les termes de la suite d'indice supérieur à N sont supérieurs à A . Quel que soit le nombre A , l'intervalle $]A; +\infty[$ contient donc tous les termes de la suite à partir d'un certain indice (l'indice N) : la suite (u_n) a pour limite $+\infty$.

2. De façon analogue, on démontre la partie 2.

Théorème 10

1. Si une suite (u_n) est croissante et admet pour limite ℓ , alors pour tout entier naturel n , $u_n \leq \ell$.
2. Si une suite (u_n) est décroissante et admet pour limite ℓ , alors pour tout entier naturel n , $u_n \geq \ell$.

Démonstration. • Raisonnons par l'absurde.

Supposons qu'il existe un terme de la suite noté u_N tel que $u_N > \ell$.

Notons λ la distance (non nulle) $u_N - \ell$. Par construction, $u_N > \ell + \frac{\lambda}{2}$.

La suite (u_n) est croissante, donc pour tout entier naturel $n \geq N$,

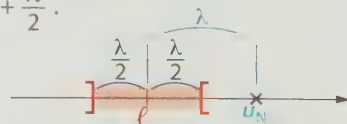
$u_n > \ell + \frac{\lambda}{2}$ et u_n est à l'extérieur de l'intervalle ouvert $\left] \ell - \frac{\lambda}{2}; \ell + \frac{\lambda}{2} \right[$.

Cet intervalle ne contient donc qu'un nombre fini de termes de la suite (au plus N).

Donc le nombre ℓ ne peut pas être la limite de la suite (u_n) (cf. définition 1 p. 25).

Ainsi, pour tout entier naturel n , $u_n \leq \ell$.

- La démonstration dans le cas où (u_n) est décroissante est analogue.



RAISONNER

Raisonnement par l'absurde
→ p. 468

OBJECTIF 1

Mener un raisonnement par récurrence

- Pour démontrer qu'une proposition (P_n) est vraie pour tout entier naturel n ($n \geq n_0$) :
 - Première étape : on vérifie que (P_{n_0}) est vraie (initialisation) ;
 - Deuxième étape : on suppose que (P_n) est vraie et on démontre que, sous cette hypothèse de récurrence, (P_{n+1}) est vraie (hérédité).
 - Troisième étape : on conclut.

EXERCICE RÉSOLU A Démontrer une égalité

Démontrez que pour tout entier naturel n non nul, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

► Méthode

- On commence par expliciter la proposition (P_n) .

- On **initialise** le processus en vérifiant que la proposition (P_n) est vraie pour le premier indice n , ici égal à 1.

- On vérifie l'**hérédité** : on suppose « (P_n) vraie », et on démontre que cela entraîne « (P_{n+1}) vraie », c'est-à-dire que :

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Rappel

Si x_1 et x_2 sont les racines du trinôme $ax^2 + bx + c$, alors ce trinôme se factorise sous la forme $a(x - x_1)(x - x_2)$.

- On **conclut**.

► Solution

- Notons (P_n) la proposition :

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Démontrons (P_n) par récurrence.

- • Démontrons que (P_1) est vraie.

$$\frac{1(1+1)(2+1)}{6} = \frac{6}{6} = 1 = 1^2, \text{ donc } (P_1) \text{ est vraie.}$$

- • Supposons que (P_n) est vraie.

$$\begin{aligned} 1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \\ &= (n+1) \left[\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1) \right] \\ &= (n+1) \times \frac{2n^2 + 7n + 6}{6}. \end{aligned}$$

Le trinôme $2x^2 + 7x + 6$ a deux racines -2 et $-\frac{3}{2}$, d'où sa factorisation : $(x+2)(2x+3)$. Il en résulte :

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

La propriété (P_{n+1}) est vraie.

- • Donc la proposition (P_n) est vraie pour tout entier naturel n non nul.

► Mise en pratique

- 1** 1. Démontrez que pour tout entier $n \geq 1$,

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

2. Déduisez-en une relation entre la somme des cubes et la somme des entiers de 1 à n .

- 2** 1. Démontrez que pour tout entier $n \geq 1$,

$$1 \times 2 + 2 \times 3 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

Pour les exercices 3 et 4

On utilise la notation suivante, pour $n \in \mathbb{N}^*$: $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$. On lit « factorielle n ».

- 3** Démontrez que pour tout entier $n \geq 1$,

$$1 + (2 \times 2!) + (3 \times 3!) + \dots + (n \times n!) = (n+1)! - 1.$$

- 4** Démontrez que pour tout entier $n \geq 1$,

$$n! \geq 2^{n-1}.$$

EXERCICE RÉSOLU B Démontrer des propriétés d'une suite

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}$.

Prouvez par récurrence que tous les termes de la suite (u_n) sont strictement positifs et que la suite est croissante.

► Méthode

- On traduit les deux propriétés à démontrer par une double inégalité.
- On **initialise** le processus, en vérifiant que la proposition (P_n) est vraie pour le premier indice n , ici égal à 0.
- On vérifie l'**hérédité** : on suppose « (P_n) vraie », et on démontre que cela entraîne « (P_{n+1}) vraie », c'est-à-dire $0 < u_{n+1} \leq u_{n+2}$.
- On **conclut**.

► Solution

- Il s'agit de démontrer que : pour tout entier naturel n , $0 < u_n \leq u_{n+1}$.
Notons (P_n) la proposition : $0 < u_n \leq u_{n+1}$.
- Démontrons que (P_0) est vraie.
 $u_0 = 1$ et $u_1 = \sqrt{u_0 + 1} = \sqrt{2}$.
 $0 < u_0 \leq u_1$, donc (P_0) est vraie.
- On suppose « (P_n) vraie » : $0 < u_n \leq u_{n+1}$
donc $1 < u_n + 1 \leq u_{n+1} + 1$.
La fonction *racine carrée* étant strictement croissante sur $[0; +\infty[$, on obtient :
$$\sqrt{1} < \sqrt{u_n + 1} \leq \sqrt{u_{n+1} + 1}$$

soit $1 < u_{n+1} \leq u_{n+2}$.
La propriété (P_{n+1}) est vraie.
- La proposition (P_n) est donc vraie pour tout entier naturel n : la suite (u_n) est croissante et à termes strictement positifs.

► Mise en pratique

5 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = u_n + 2n + 1.$$

Démontrez par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n \geq n^2$.

6 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = u_n^2 + 1.$$

Démontrez par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 4$, $u_n \geq 2^n$.

7 On considère la suite (u_n) de l'exercice résolu B définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n + 1}.$$

Démontrez par récurrence que pour tout entier naturel n , $0 < u_n < 2$.

8 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n + 5}.$$

Démontrez par récurrence, que pour tout entier naturel n , $2 \leq u_n < 3$.

9 On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et pour tout entier naturel n ,

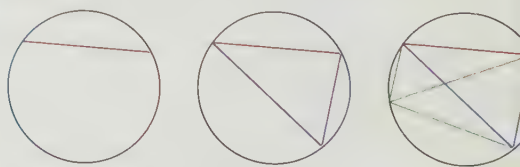
$$u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1.$$

Démontrez par récurrence, que pour tout entier naturel n , $\frac{1}{2} \leq u_n < 1$.

Aide

Vous pouvez utiliser les variations de la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$.

10 On place n points distincts ($n \geq 2$) sur un cercle et on note S_n le nombre total de segments que l'on peut tracer ayant pour extrémités deux de ces points.



1. Déterminez S_2 , S_3 , S_4 et S_5 .
2. Conjecturez l'expression de S_n en fonction de n .
3. Démontrez par récurrence votre conjecture.

Pour étudier la limite éventuelle d'une suite, on utilise les **théorèmes 1 à 6** en s'appuyant sur les limites des fonctions de référence.

EXERCICE RÉSOLU C

Utiliser les théorèmes de comparaison

Déterminez dans chaque cas, si elle existe, la limite de la suite (u_n) définie par :

a) $u_n = \frac{n + (-1)^n}{n}$ (pour $n \geq 1$) ;

b) $u_n = \frac{n}{\sqrt{n-1}}$ (pour $n \geq 2$).

Méthode

a) On encadre $(-1)^n$, ce qui nous conduit à un encadrement de (u_n) par deux expressions qui ont la même limite.

- On utilise la limite de la suite de référence définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par $v_n = \frac{1}{n}$.

- On peut alors utiliser le théorème 2.

b) Le calcul de quelques termes permet de conjecturer que les termes (u_n) deviennent aussi grands que l'on veut.

Une méthode consiste alors à mettre en évidence une suite de référence (v_n) dont la limite est $+\infty$ et telle que pour tout entier naturel $n \geq 2$, $v_n \leq u_n$.

Ici, (v_n) est la suite définie pour tout entier naturel $n \geq 2$ par $v_n = \sqrt{n}$.

Solution

► a) Pour tout entier naturel non nul n ,
 $-1 \leq (-1)^n \leq 1$.

D'où : $n - 1 \leq n + (-1)^n \leq n + 1$.

n étant non nul, $\frac{n-1}{n} \leq u_n \leq \frac{n+1}{n}$

soit encore $1 - \frac{1}{n} \leq u_n \leq 1 + \frac{1}{n}$.

► • Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$, il en résulte :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.$$

► • Étant dans les conditions d'utilisation du théorème 2, on peut conclure :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1.$$

► b) Pour tout entier naturel $n \geq 2$,

$$0 < \sqrt{n-1} < \sqrt{n} \text{ et donc } \frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n-1}}.$$

D'où :

$$\frac{n}{\sqrt{n}} < \frac{n}{\sqrt{n-1}} \text{ soit } \sqrt{n} < u_n.$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$, le théorème 1, par comparaison, permet de conclure :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

► Mise en pratique

Pour les exercices 11 à 14

Déterminez, si elle existe, la limite de la suite de terme général u_n .

11 $u_n = \frac{2 + 5(-1)^n}{n}$ avec $n \geq 1$.

12 $u_n = 2 + \frac{5(-1)^n}{n}$ avec $n \geq 1$.

13 $u_n = 3n - (-1)^n$ 14 $u_n = \frac{\sin(n^2 + 1)}{\sqrt{n+1}}$

15 La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel $n \geq 3$, par : $u_n = \frac{n^2 + 1}{\sqrt{n-2}}$.

1. Justifiez que pour tout entier $n \geq 3$, $u_n \geq n\sqrt{n}$.

2. Déduisez-en la limite de la suite (u_n) .

16 La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel $n \geq 4$, par :

$$u_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

1. Justifiez que pour tout entier k , $0 < k \leq n$, $\frac{1}{\sqrt{k}} \geq \frac{1}{\sqrt{n}}$, puis que pour tout entier $n \geq 4$, $u_n \geq \sqrt{n}$.

2. Précisez alors le comportement à l'infini de la suite (u_n) .

EXERCICES **SOU** **D** Lever une indétermination du type « $\infty - \infty$ » ou « $\frac{\infty}{\infty}$ »

Dans chaque cas, déterminez, si elle existe, la limite de la suite (u_n) .

a) $u_n = n - \sqrt{n}$. **b)** $u_n = \frac{2n^2 + 1}{n^2 + n} \quad (n \geq 1)$.

Méthode

a) En présence d'une forme indéterminée « $\infty - \infty$ », une factorisation permet, en général, de lever l'indétermination.

- On veut mettre en facteur le terme « dominant », ici n , lorsqu'il est non nul. Comme on étudie la limite en $+\infty$, seules les valeurs de « u_n » pour « n grand » nous intéressent. On se place dans le cas $n \neq 0$, réalisé dès que $n \geq 1$.

- On utilise les règles opératoires sur la limite d'une somme (théorème 3), puis celles sur la limite d'un produit (théorème 4).

b) On justifie que l'on est en présence d'une forme indéterminée « $\frac{\infty}{\infty}$ ».

- Le numérateur et le dénominateur sont des expressions polynômiales : le terme « dominant » est, pour chacune, le terme de plus haut degré. Ici c'est n^2 dans les deux cas. On factorise donc par n^2 , puis on simplifie l'écriture du quotient.

- On utilise les règles opératoires sur les limites pour conclure.

Solution

→ a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n) = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} = +\infty$.

Nous sommes en présence d'une forme indéterminée.

- ➡ • Pour tout entier $n \geq 1$:

$$n - \sqrt{n} = n \left(1 - \frac{\sqrt{n}}{n} \right) = n \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}} \right).$$

- ➡ • Or $\lim (n) = +\infty$ et, puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$,
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1$.

Donc, d'après la règle sur la limite d'un produit :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$

- ➡ **b)** $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2) = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2n^2 + 1) = +\infty$
et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^2 + n) = +\infty$.

Nous sommes en présence d'une forme indéterminée.

- • Pour tout $n \geq 1$:

$$\frac{2n^2+1}{n^2+n} = \frac{n^2\left(2+\frac{1}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \frac{2+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{1}{n}}$$

- • Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{n^2}\right) = 2 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.$$

Donc, d'après la règle sur la limite d'un quotient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2.$$

► Mise en pratique

Pour les exercices 17 à 19

Vérifiez que l'étude du comportement à l'infini de chaque suite conduit à une indétermination, puis levez cette indétermination et donnez la limite éventuelle de la suite.

17 a) $u_n = n^2 - 3n$. b) $u_n = n\sqrt{n} - n^2$.

18 a) $u_n = 3^n - 2^n$. b) $u_n = \frac{5^n - 1}{4^n + 3}$.

19 a) $u_n = \frac{5n^2 - 5}{2n(n+1)}$.

$$\text{b) } u_n = \frac{7n+3}{n^2}.$$

20 Étudiez le comportement à l'infini des suites (u_n) , (v_n) et (w_n) définies pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = \frac{3n^2 - 4}{n+1}, v_n = \frac{u_n}{n} \text{ et } w_n = u_n - 3n.$$

EXERCICE RÉSOLU E Étudier une suite s'exprimant avec des radicaux

Déterminez, si elle existe, la limite de la suite de terme général :

a) $u_n = 3n - \sqrt{n^2 + 1}$.

b) $v_n = \sqrt{n^2 + 1} - n$.

► Méthode

a) On examine si un calcul direct conduit au résultat ou si une indétermination nécessite une transformation d'écriture.

Notation

Le symbole $\forall$ signifie « quel que soit » ou « pour tout ». Il n'est utilisable que dans une proposition écrite en langage mathématique.

- On conjecture que lorsque n devient très grand, u_n se comporte comme $3n - \sqrt{n^2} = 2n$, d'où l'idée de mettre n en facteur, lorsque n est non nul.

- On utilise la propriété :

$$\text{si } x \geq 1, \text{ alors } 1 \leq \sqrt{x} \leq x.$$

- On utilise le théorème des gendarmes.

- On peut alors conclure.

b) On examine, de nouveau, si un calcul direct conduit au résultat. La méthode précédente conduit à une nouvelle indétermination.

- On considère l'expression $\sqrt{n^2 + 1} + n$, dite conjuguée de $\sqrt{n^2 + 1} - n$, pour laquelle il n'y a pas d'indétermination.

On multiplie et on divise v_n par cette expression conjuguée (non nulle), pour utiliser ensuite l'identité remarquable $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$.

► Solution

► a) Pour tout entier naturel n , $n^2 + 1 > n^2$.

La fonction *racine carrée* est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$. Il en résulte :

► $\forall n \in \mathbb{N}, \sqrt{n^2 + 1} > \sqrt{n^2}$ soit $\sqrt{n^2 + 1} > n$.

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^2 + 1} = +\infty$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} (3n) = +\infty$, nous sommes en présence d'une forme indéterminée.

► • Pour tout entier $n \geq 1$:

$$u_n = 3n - \sqrt{n^2} \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} = n \left(3 - \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} \right).$$

► • Or $1 + \frac{1}{n^2} > 1$ donc $1 \leq \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} \leq 1 + \frac{1}{n^2}$.

► • Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2} \right) = 1$, d'après le théorème des gendarmes, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} = 1$.

► • Ainsi $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 - \sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} \right) = 2$
d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

► b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^2 + 1} = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$: nous sommes en présence d'une forme indéterminée.

► • $\forall n \in \mathbb{N}, \sqrt{n^2 + 1} + n \neq 0$ et :

$$v_n = \frac{(\sqrt{n^2 + 1} - n)(\sqrt{n^2 + 1} + n)}{\sqrt{n^2 + 1} + n}$$

$$v_n = \frac{n^2 + 1 - n^2}{\sqrt{n^2 + 1} + n} = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1} + n}.$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{n^2 + 1} + n) = +\infty$, et par prise de l'inverse : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$.

► Mise en pratique

Pour les exercices 21 à 24

Déterminez, si elle existe, la limite de la suite (u_n) proposée.

21 a) $u_n = \sqrt{2n^2 - 5}$ (avec $n \geq 2$).

b) $u_n = \sqrt{n^2 + 3n}$.

22 a) $u_n = \sqrt{2n^2 - 5} - 2n$ (avec $n \geq 2$).

b) $u_n = n \left(\sqrt{2 + \frac{1}{n}} - \sqrt{2} \right)$ (avec $n > 0$).

23 a) $u_n = \sqrt{2n + 1} - \sqrt{2n - 1}$.

b) $u_n = \frac{n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n+2}}$.

24 a) $u_n = \frac{n}{\sqrt{n+1}} - \frac{n}{\sqrt{n+2}}$.

b) $u_n = \frac{3n - \sqrt{9n^2 + 1}}{\sqrt{n^2 + 5}}$.

OBJECTIF 3 Utiliser les suites géométriques

EXERCICE RESOLU F Calculer la limite (éventuelle) d'une somme de termes

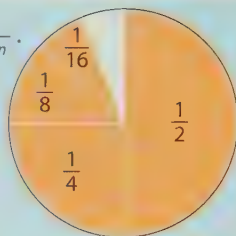
1. La suite (S_n) est définie pour tout entier $n \geq 1$ par $\sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n}$.

a) Que suggère ce dessin concernant la limite éventuelle de la somme S_n ?

b) Démontrez votre conjecture.

2. Déterminez la limite éventuelle de la suite (T_n) définie pour tout entier

$$n \geq 1 \text{ par } T_n = \frac{5}{4} + \left(\frac{5}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{5}{4}\right)^n = \sum_{k=1}^n \left(\frac{5}{4}\right)^k.$$



Méthode

1. a) On observe que chaque terme ajouté correspond à la moitié de la partie restante (en blanc). On s'approche ainsi du recouvrement du disque sans aller au-delà.

b) On met en évidence la somme des premiers termes d'une suite géométrique de raison q ($q = \frac{1}{2}$).

q étant différent de 1, on exprime cette somme en utilisant l'égalité :

$$1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

• Comme $-1 < q < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$; on en déduit $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

2. On reconnaît la somme des premiers termes d'une suite géométrique de raison q ($q = \frac{5}{4}$).

• Comme $q > 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$; on en déduit $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

Solution

➔ 1. a) On peut conjecturer que la suite (S_n) a pour limite l'aire du disque : 1 unité d'aire.

b) Pour tout entier $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} \text{➔ } S_n &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} \\ &= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} \right) \\ \text{d'où } S_n &= \frac{1}{2} \times \frac{1 - \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} \end{aligned}$$

• Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 1$.

2. $T_n = \frac{5}{4} \left(1 + \left(\frac{5}{4}\right) + \left(\frac{5}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{5}{4}\right)^{n-1} \right)$,

$$\begin{aligned} \text{d'où : } T_n &= \frac{5}{4} \times \frac{1 - \left(\frac{5}{4}\right)^n}{1 - \frac{5}{4}} = 5 \left(\left(\frac{5}{4}\right)^n - 1 \right) \\ T_n &= \left(5 \left(\frac{5}{4}\right)^n - 5 \right). \end{aligned}$$

• Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{4}\right)^n = +\infty$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$.

Mise en pratique

Pour les exercices 25 à 28

Déterminez, si elle existe, la limite lorsque n tend vers l'infini de la somme S_n .

25 $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{3^k} = \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{3^n}.$

26 $S_n = \sum_{k=0}^n \left(-\frac{1}{2}\right)^k = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \left(-\frac{1}{2}\right)^n.$

27 $S_n = 0,6 + 0,6^2 + \dots + 0,6^n.$

28 Le premier demi-disque a pour rayon 1 cm. On passe d'une figure à l'autre en « enlevant » un demi-disque dont le rayon est la moitié du précédent. Les aires a_n (en cm^2) constituent une suite.



1. Calculez a_0, a_1, a_2, a_3 .

2. La suite (a_n) est décroissante et minorée (par 0...) donc convergente. Calculez sa limite.

29 Questions sur le cours

Complétez les propositions suivantes.

- a) Si $q > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = \dots$.
- b) Si $-1 < q < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = \dots$.
- c) Une suite telle qu'il existe un nombre M supérieur à tous les termes de la suite est dite ... et le nombre M est un ... de la suite.
- d) Toute suite croissante et majorée est ...
- e) Toute suite décroissante non minorée a pour limite ...
- f) (u_n) et (v_n) sont deux suites. Si pour tout entier $n \geq n_0$, $u_n \leq v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, alors ...

30 Vrai ou faux

Vrai ou faux ? Justifiez votre réponse.

- a) Une suite bornée est convergente.
- b) Une suite monotone et convergente est bornée.
- c) (u_n) et (v_n) sont deux suites. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{u_n} = 0$.
- d) (u_n) et (v_n) sont deux suites. Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = 0$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$.
- e) Une suite non majorée a pour limite $+\infty$.
- f) (u_n) et (v_n) sont deux suites. Si la suite $(u_n \times v_n)$ converge, alors (u_n) et (v_n) sont convergentes.

31 QCM Une seule réponse exacte

Pour chaque affirmation, une seule réponse est exacte. Identifiez-la en justifiant votre réponse.

1. Pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \frac{3n+n^2}{n-1}$.
 a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$ b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$
2. Si pour tout entier naturel n , $v_n \leq u_n \leq w_n$, avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 2$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 3$, alors :
 a) la suite (u_n) est convergente
 b) la suite (u_n) n'a pas pour limite $+\infty$
 c) la suite (u_n) n'a pas de limite
3. La suite (u_n) est convergente et majorée par 3. Alors nécessairement :
 a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$ b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n \leq 3$
 c) La suite (u_n) est croissante
4. Si pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $-\frac{1}{2} \leq u_n - 2 \leq \frac{1}{n}$, alors :
 a) la suite (u_n) est décroissante
 b) la suite (u_n) est bornée
 c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2$

32 QCM Au moins une réponse exacte

Pour chaque affirmation, plusieurs réponses peuvent être exactes. Identifiez-les en justifiant vos réponses.

1. La suite (S_n) est définie pour tout n de $\mathbb{N}^*$ par :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} = \frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \dots + \frac{n}{n}$$
 a) La suite (S_n) est décroissante.
 b) La suite (S_n) n'a pas de limite réelle.
 c) La suite (S_n) est convergente.
 d) Pour tout entier naturel non nul n , $S_n = \frac{n+1}{2}$.
2. La suite (S_n) est définie pour n de $\mathbb{N}^*$ par :

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2}$$
 a) Pour tout entier naturel non nul n , $S_n = \frac{n+1}{2n}$.
 b) Pour tout entier naturel n non nul, $0 \leq S_n \leq \frac{1}{2}$.
 c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{2}$. d) La suite (S_n) est croissante.



Apprendre à chercher

33 Conjecturer puis démontrer

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n + 2}$.

Objectif Exprimer de manière explicite les termes de la suite (u_n) définie par récurrence.

1. L'intérêt du passage de la définition par récurrence à la définition explicite est de permettre le calcul direct d'un terme sans avoir à connaître ceux qui le précèdent.

Une approche est de calculer les premiers termes afin de conjecturer comment l'indice n de u_n intervient dans la valeur de u_n .

Calculez sous forme fractionnaire les termes u_1 , u_2 , u_3 , u_4 , u_5 et u_6 .

2. La lecture des résultats sous forme fractionnaire montre que tous ces nombres sont des inverses de nombres entiers naturels. Le lien entre les dénominateurs de deux termes consécutifs peut permettre de résoudre le problème.

Calculez la différence entre les dénominateurs de deux termes consécutifs allant de u_1 à u_6 .

3. Des puissances de 2 apparaissant (à une unité près), il semble maintenant possible d'exprimer u_n en fonction de n .

a) Énoncez une conjecture et testez-la sur les termes connus.

b) Prouvez, par récurrence, que votre conjecture est vraie.

34 Une suite arithmético-géométrique

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$.

Objectif Démontrer que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

1. On passe d'un terme au suivant par la fonction affine $x \mapsto \frac{1}{2}x + 1$. Graphiquement, les droites d'équations $y = x$ et $y = \frac{1}{2}x + 1$ se coupent en un point dont l'abscisse est la solution de l'équation $x = \frac{1}{2}x + 1$, c'est-à-dire 2.

Tracez ces droites et utilisez-les pour repérer sur l'axe des abscisses les premiers termes de la suite.

2. Cette approche graphique permet de conjecturer que la suite est croissante et majorée (par 2).

a) Démontrez par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n \leq 2$.

b) Justifiez alors la convergence de la suite (u_n) .

3. Il reste à déterminer la limite de la suite. Le nombre 2 semble un bon candidat, mais rien pour l'instant ne prouve que la limite soit bien égale à 2.

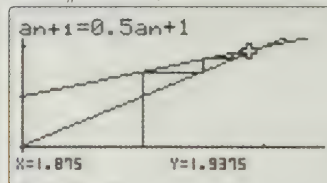
On s'intéresse donc à la suite (v_n) des différences, définie pour tout entier naturel n par $v_n = 2 - u_n$, en espérant pouvoir démontrer que cette suite est de limite zéro.

a) Exprimez v_{n+1} en fonction de v_n et déduisez-en la nature de la suite (v_n) .

b) Calculez alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

Note

La calculatrice permet d'obtenir une représentation des premiers termes de la suite (u_n) et de conjecturer son comportement.



Avec Casio, utiliser le mode RECUR. Avec TI, utiliser le mode SUITE. Voir les instructions sur les rabats de la couverture.

35 Un encadrement utile

La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel non nul n par $u_n = \frac{1}{n + \sqrt{1}} + \frac{1}{n + \sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{n + \sqrt{n}}$.

Objectif Démontrer que la suite (u_n) est convergente et préciser sa limite.

1. On observe que les n termes de la somme u_n sont des nombres positifs ordonnés.

Précisez quel est le plus petit, quel est le plus grand.

2. Chacun des termes de la somme est supérieur (ou égal) au plus petit et inférieur (ou égal) au plus grand. D'où l'idée d'encadrer la somme u_n afin d'utiliser le théorème des gendarmes.

a) Déduisez-en que pour tout entier naturel non nul n ,

$$\frac{n}{n + \sqrt{n}} \leq u_n \leq \frac{n}{n + 1}.$$

b) Calculez $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n + \sqrt{n}}$ puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n + 1}$.

c) Concluez.

Narration de recherche

→ L'objectif n'est pas seulement de résoudre le problème posé : vous devez aussi noter les différentes idées même lorsqu'elles n'ont pas permis de trouver la réponse. Expliquez pourquoi vous avez changé de méthode et ce qui vous a fait avancer, etc.

36 Alain et Béatrice étudient le comportement d'une suite (u_n) qu'ils savent croissante et majorée par 1.

Alain prétend que la suite est bornée et Béatrice affirme qu'il y a au plus un nombre fini de termes négatifs.

Qu'en pensez-vous ?

37 Dans cet exercice, on étudie la suite (u_n) définie par la donnée de u_0 ($u_0 \geq 0$) et pour tout entier naturel n ,

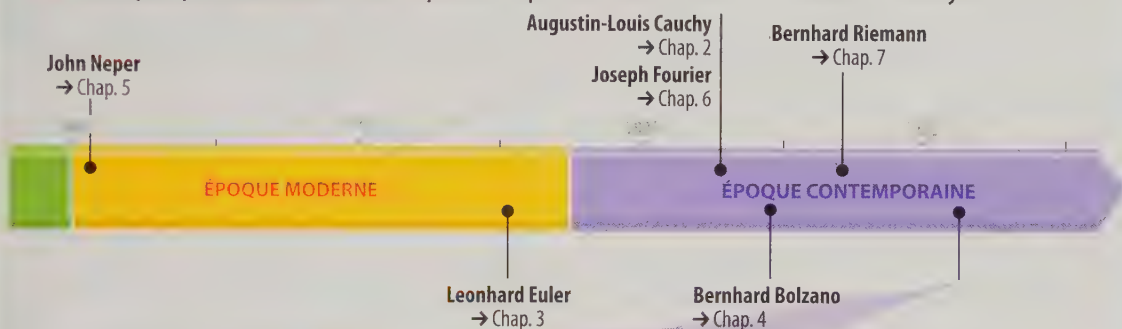
$$u_{n+1} = 5 - \frac{5}{u_n + 1}.$$

Précisez le sens de variation et la convergence éventuelle de la suite (u_n) suivant les valeurs de u_0 .

Chercheurs d'hier

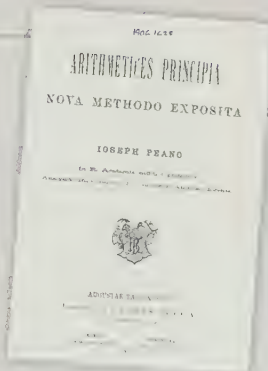
Eux aussi, ils ont
cherché avant de trouver !

Voici quelques mathématiciens importants qui ont travaillé dans le domaine de l'Analyse.



Giuseppe Peano (1858-1932)

S'appuyant sur des travaux antérieurs de Dedekind (*Was sind und was sollen die Zahlen*), Peano construisit l'ensemble $\mathbb{N}$ des nombres entiers naturels au moyen de cinq axiomes, c'est-à-dire cinq propositions acceptées comme vraies et à partir desquelles on démontre toutes les propriétés (construction exposée dans son *Arithmetices principia, nova methodo exposita*, 1889 – page de titre ci-contre).



Ces cinq axiomes s'énoncent aujourd'hui ainsi :

1. 0 désigne un nombre appelé Zéro, élément de $\mathbb{N}$.
2. Si n est un nombre, alors n admet un unique successeur qui lui est distinct et qui est aussi un nombre.
3. Zéro n'est le successeur d'aucun nombre.
4. Deux nombres dont les successeurs sont les mêmes sont égaux.
5. Induction : Si un ensemble E de nombres contient 0 et le successeur de tout nombre de E , alors tout nombre est dans E . (L'axiome 5 est le principe de récurrence vu dans ce chapitre.)

 **Sur le Web** serge.mehl.free.fr/chrono/Peano.html
fr.wikipedia.org/wiki/Giuseppe_Peano

Travaux dirigés

Utiliser un algorithme

→ Pour déterminer un rang

TP

38 Dépasser un seuil

On admet que la suite définie pour tout entier naturel n

par $u_n = \frac{n^2 \sqrt{n}}{n+1}$ est croissante et a pour limite $+\infty$. Cela signifie que, quel que soit le nombre A choisi aussi grand que l'on veut, tous les termes de la suite dépassent ce nombre à partir d'un certain indice.

OBJECTIF Un nombre A étant choisi, on souhaite déterminer à partir de quel indice n , $u_n > A$.

A Avec tableur

1. a) Vérifiez que les formules données dans le tableau ci-contre permettent (en recopiant vers le bas) de déterminer les premiers termes de la suite (u_n) .

	A	B
1	n	u_n
2	0	$=A2^2 * RACINE(A2)/(A2-1)$
3	1	$=A3^2 * RACINE(A3)/(A3-1)$

b) Déterminez le plus petit indice n tel que :

- $u_n > 800$
- $u_n > 10\,000$

2. Pour déterminer le plus petit indice n tel que $u_n > 10^6$, vous pouvez localiser le nombre cherché en incrémentant de 1 000 en 1 000. Déterminez ainsi n tel que $u_n > 5 \times 10^6$.

B Avec un algorithme

L'utilisation d'un algorithme permet d'obtenir des résultats de façon plus efficace que le tableur.

On utilise une boucle conditionnelle « tant que » : on incrémente l'indice n tant que u_n ne dépasse pas A .

1. Mise en œuvre d'un algorithme

Cet algorithme est rédigé pour l'étude d'une suite croissante de limite $+\infty$.

a) Programmez cet algorithme avec AlgoBox ou votre calculatrice pour la suite (u_n) .

b) Vérifiez les résultats obtenus à la partie A.

2. Adaptation de l'algorithme

On se propose d'adapter cet algorithme au cas d'une suite décroissante de limite $-\infty$.

a) On considère la suite (v_n) définie pour tout naturel n par $v_n = \frac{1-n^3}{2n+1}$. Prouvez que (v_n) est décroissante et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$.

b) Modifiez l'algorithme précédent pour déterminer à partir de quel indice n , $u_n < -A$, où A est un nombre positif donné. Testez cet algorithme avec la suite (v_n) pour : $A = 800$, $A = 10\,000$, $A = 5 \times 10^6$.

Variables

A, n

Algorithme

Saisir A

n reçoit 0

Tant que $u_n \leq A$

n reçoit $n+1$

Fin Tant que

Afficher « Le premier terme qui dépasse » A « est le terme d'indice » n

C Cas d'une suite définie par récurrence

On s'intéresse maintenant à l'étude de suites définies par récurrence, c'est-à-dire du type $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Un nombre positif A étant choisi, écrivez un algorithme permettant pour une telle suite, croissante, de limite $+\infty$, de déterminer à partir de quel indice n , u_n dépasse A .

2. La suite (u_n) est définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier n non nul, $u_{n+1} = u_n + \sqrt{u_n}$. Utilisez cet algorithme (avec AlgoBox ou votre calculatrice) pour obtenir l'indice à partir duquel les termes de la suite dépassent le nombre 10^6 .

Remarque. Le programme peut, selon la nature de la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$, utiliser des valeurs approchées de u_n . Cela peut entraîner une approximation sur la valeur de l'indice cherché.

Utiliser un algorithme

→ Pour étudier une suite monotone de limite finie

TP

39 Au voisinage de la limite

- Dire qu'une suite converge vers un nombre ℓ signifie que tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite **à partir d'un certain indice**.
- Dire qu'un nombre est, par exemple, « à moins de » 0,01 d'un nombre a revient à dire que ce nombre appartient à l'intervalle ouvert $]a - 0,01 ; a + 0,01[$.
- Pour une suite monotone qui converge vers un nombre ℓ , on peut se demander à partir de quel indice les termes de la suite sont aussi proches de ℓ que l'on veut, c'est-à-dire à une distance de ℓ aussi petite que l'on veut. La suite étant monotone, le fait qu'un terme soit dans un intervalle ouvert de centre ℓ entraîne que tous les termes suivants y sont aussi.

A Cas d'une suite définie de manière explicite, $u_n = f(n)$

Lorsque la suite (u_n) est définie de manière explicite, on peut envisager une étude « à la main ».

Considérons par exemple la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{3n+1}{n+2}$. On démontre (et vous pouvez le faire...) que la suite est croissante et a pour limite 3 lorsque n tend vers $+\infty$.

On souhaite déterminer à partir de quel indice les termes de la suite sont des valeurs approchées de 3 à 0,1 près, c'est-à-dire dans l'intervalle ouvert $]2,9 ; 3,1[$.

1. Résolvez la double inéquation $2,9 < \frac{3n+1}{n+2} < 3,1$ puis concluez.
2. Faites la même étude en remplaçant 0,1 par 0,001.

B Cas d'une suite définie par récurrence, $u_{n+1} = f(u_n)$

Lorsque la suite (u_n) est définie par récurrence, on doit souvent faire appel aux outils de calcul.

Considérons par exemple la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + 3$.

On démontre que la suite est croissante et a pour limite 6 lorsque n tend vers $+\infty$.

L'algorithme ci-contre, écrit avec AlgoBox, a donc pour objectif de déterminer à partir de quel indice les termes de la suite sont dans l'intervalle ouvert $]6 - r ; 6 + r[$, où r est un nombre strictement positif choisi par l'utilisateur.

1. À quelles lignes précise-t-on :

- la valeur du premier terme u_0 ?
- la fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$?

2. Les lignes 11 à 15 correspondent à une boucle conditionnelle.

- Précisez le test qui conditionne cette boucle.
- À quelle condition « sort-on » de cette boucle ?

3. Utilisez cet algorithme pour déterminer à partir de quel indice n , u_n appartient :

a) à $]5,99 ; 6,01[$;

b) à $]6 - 10^{-5} ; 6 + 10^{-5}[$.

4. La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_{n+1} = \frac{u_n}{3} + 2$.

Conjecturez le sens de variation de la suite et sa limite éventuelle L . Déterminez à partir de quel indice n on obtient une valeur approchée de L à 0,001 près.

```

1  VARIABLES
2  n EST_DU_TYPE NOMBRE
3  r EST_DU_TYPE NOMBRE
4  u EST_DU_TYPE NOMBRE
5  L EST_DU_TYPE NOMBRE
6  DEBUT_ALGORITHME
7  u PREND_LA_VALEUR 1
8  n PREND_LA_VALEUR 0
9  LIRE L
10 LIRE r
11 TANT_QUE (u<=L-r ou u>=L+r) FAIRE
12   DEBUT_TANT_QUE
13     u PREND_LA_VALEUR F1(u)
14     n PREND_LA_VALEUR n+1
15   FIN_TANT_QUE
16   AFFICHER "Le terme u"
17   AFFICHER n
18   AFFICHER " appartient à ]L-r;L+r[."
19 FIN_ALGORITHME
20
21 Fonction numérique utilisée :
22 F1(x)=x/2+3

```




40 Suite définie par une somme

Un type de raisonnement

Appliquer un procédé de sommation

La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel $n \geq 1$, par $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)}$.

OBJECTIF Déterminer une expression explicite de u_n en fonction de n afin d'étudier le comportement de la suite (u_n) quand n tend vers $+\infty$.

MISE EN ŒUVRE

- Pour conjecturer une expression de u_n et le comportement de la suite (u_n) , on dispose de deux méthodes :
 - calculer les premiers termes de la suite à l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice **A** ;
 - utiliser un procédé de sommation (qualifié de processus « de télescopage ») **B**.
- Pour démontrer la validité des conjectures émises, on utilise un raisonnement par récurrence **C**.

A Expérimenter à l'aide d'un tableur et conjecturer

1. **a)** On envisage d'obtenir l'affichage des trente premiers termes de la suite.

Vérifiez que les formules ci-contre vous permettent d'obtenir (en recopiant vers le bas) les premiers termes de la suite.

	A	B	C
1	n	$1/n(n+1)$	u_n
2	1	$=1/(A2*(A2+1))$	$=B2$
3	2	$=1/(A3*(A3+1))$	$=B3+C2$

b) Choisissez l'affichage des termes u_n sous la forme fractionnaire (Format – Cellule – Nombre – Fraction). Que pouvez-vous conjecturer en ce qui concerne la forme explicite du terme u_n ?

2. Sélectionnez les colonnes A et C pour afficher une représentation graphique de ces trente premiers termes.

Quelle est l'allure du nuage de points obtenu ?

Que pouvez-vous conjecturer en ce qui concerne le comportement de la suite ?

B Utiliser un procédé de sommation pour conjecturer

1. **a)** Vérifiez que, quel que soit le nombre k non nul, $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}$.

b) Utilisez cette propriété pour obtenir la somme définissant le terme u_4 .

Remarquez alors les simplifications possibles.

2. **a)** En vous inspirant du schéma ci-contre, déduisez-en une nouvelle expression de u_n .

Ce schéma constitue une illustration du procédé.

b) Que pouvez-vous alors conjecturer en ce qui concerne le comportement de la suite ? Est-ce conforme à vos conjectures du **A** ?

C Démontrer

a) Démontrez par récurrence que l'expression conjecturée de u_n est valable pour tout entier naturel $n \geq 1$.

b) Déterminez $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$. Cela confirme-t-il votre conjecture ?

D Appliquer

Étudiez de la même manière la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n , par :

$$v_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}.$$

$$\begin{array}{rcl}
 1 & - & \frac{1}{2} \\
 \frac{1}{2} & - & \frac{1}{3} \\
 \frac{1}{3} & - & \frac{1}{4} \\
 \vdots & & \vdots \\
 & & \vdots \\
 \frac{1}{n-1} & - & \frac{1}{n} \\
 \frac{1}{n} & - & \frac{1}{n+1} \\
 \hline
 u_n & = & \dots\dots
 \end{array}$$



41 Approximations du nombre π

OBJECTIF Approcher à l'aide d'une suite le nombre π .

Principe de la méthode d'encadrement

- On inscrit, dans un quart de disque de rayon 1, n rectangles de même largeur $\frac{1}{n}$.
- On conçoit qu'en augmentant le nombre n de rectangles, l'aire totale de ces rectangles est de plus en plus proche de l'aire $\frac{\pi}{4}$ du quart de disque (partie **A**).
- On en déduit un algorithme pour obtenir une approximation du nombre π (partie **B**).

A Expression de l'aire des rectangles

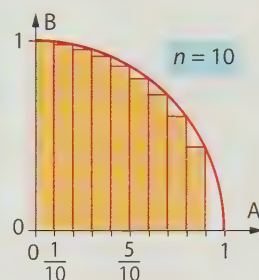
Sur le dessin ci-contre, on a représenté, dans un repère orthonormé, le quart de disque de rayon 1 dont les points ont des coordonnées $(x; y)$ positives.

On a partagé le rayon $[OA]$ en 10 segments de même longueur, puis dessiné les rectangles comme indiqués sur la figure. On note S_{10} la somme des aires de ces rectangles.

On notera ainsi S_n ($n \geq 2$) la somme des aires des rectangles associés à un partage du rayon $[OA]$ en n segments de même longueur.

1. Justifiez que l'équation $y = \sqrt{1-x^2}$, avec $x \in [0; 1]$, caractérise l'appartenance d'un point $M(x; y)$ à l'arc de cercle $\widehat{AB}$.

2. Exprimez alors S_{10} , puis S_n .



B Utilisation d'un algorithme

Dans l'algorithme ci-contre écrit avec AlgoBox :

– la ligne 7 correspond au choix du nombre n de segments de même longueur utilisés dans le partage du segment $[OA]$;

– le calcul de S_n est effectué dans la boucle (lignes 9 à 12).

1. a) Que reconnaissez-vous dans la ligne 18 ?

b) Qu'obtient-on à l'affichage ?

2. a) Utilisez Algobox (ou votre calculatrice) pour calculer S_n pour des valeurs de n de plus en plus grandes (jusqu'à 100 000).

b) Donnez la précision obtenue pour $n = 1000$.

c) Pour obtenir une approximation du nombre π , Archimède (III^e siècle avant J.-C.) a utilisé deux polygones réguliers de 96 côtés : l'un inscrit dans le cercle, l'autre circonscrit au cercle, ce qui lui a permis d'obtenir l'encadrement $3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}$.

Comparez votre résultat avec la précision obtenue par Archimède.

Remarque. Cette méthode d'approximation d'une aire par des rectangles, qui peut paraître ici d'une efficacité limitée, joue un rôle très important dans la théorie de l'intégration abordée dans le chapitre 7.

```

1  VARIABLES
2  n EST_DU_TYPE NOMBRE
3  S EST_DU_TYPE NOMBRE
4  i EST_DU_TYPE NOMBRE
5  A EST_DU_TYPE NOMBRE
6  DEBUT_ALGORITHME
7  LIRE n
8  S PREND_LA_VALEUR 0
9  POUR i ALLANT_DE 1 A n-1
10  DEBUT_POUR
11  S PREND_LA_VALEUR S+(1/n)*F1(i/n)
12  FIN_POUR
13  A PREND_LA_VALEUR 4*S
14  AFFICHER A
15  FIN_ALGORITHME
16
17  Fonction numérique utilisée :
18  F1(x)=sqrt(1-x*x)
  
```


Entraînement

DE TÊTE



42 La suite (u_n) est définie par $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n}$.

Calculez u_1 , u_2 , u_3 et conjecturez la valeur de u_{2012} .

43 La suite (u_n) est définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 2u_n - 3$.

Calculez u_1 , u_2 , u_3 et conjecturez la valeur de u_{2012} .

Pour les exercices 44 à 51

Déterminez, si elle existe, la limite lorsque n tend vers l'infini de la suite de terme général u_n .

44 $u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

45 $u_n = 2n + 1$.

46 $u_n = 1 + \frac{1}{n}$.

47 $u_n = \frac{n+2}{n}$.

48 $u_n = \frac{2n-3}{n^2}$.

49 $u_n = \sqrt{n+1}$.

50 $u_n = (-1)^n \sqrt{n}$.

51 $u_n = \frac{2n - n^2}{n+1}$.

RAISONNEMENT
PAR RÉCURRENCE

52 Démontrez que pour tout entier naturel $n \geq 2$,
 $5^n \geq 4^n + 3^n$.

53 Démontrez que pour tout entier naturel $n \geq 4$,
 $2^n \geq n^2$.

54 Démontrez que pour tout entier naturel $n \geq 2$,
 $3n^2 \geq (n+1)^2$.

55 Démontrez que pour tout entier naturel $n \geq 5$,
 $3^n \geq 2^n + 5n^2$.

Aide

Utiliser le résultat de l'exercice 54.

56 Démontrez par récurrence que pour tout entier naturel n , $4^n + 5$ est un multiple de 3.

57 Démontrez que pour tout entier naturel n , $2^{3n} - 1$ est un multiple de 7.

58 Pour tout entier naturel n , on note (P_n) la proposition : « $3^n \geq (n+2)^2$ ».

1. Les propositions (P_0) , (P_1) , (P_2) et (P_3) sont-elles vraies ?
2. Démontrez par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 3$, (P_n) est vraie.

59 La suite (u_n) est définie par $u_0 = 3$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = -u_n + 4$.

1. Déterminez u_1 , u_2 , u_3 , u_4 , u_5 et conjecturez l'expression de u_n en fonction de n .
2. Démontrez cette conjecture par récurrence.

60 La suite (u_n) est définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 2u_n - 3$.

1. Déterminez u_1 , u_2 , u_3 , u_4 , u_5 .
2. a) Étudiez les premiers termes de la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 3$.
b) Conjecturez l'expression de v_n en fonction de n .
c) Démontrez cette conjecture par récurrence.
3. Exprimez alors u_n en fonction de n .

61 La suite (u_n) est définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 5u_n - 8$.

Démontrez par récurrence que la suite (u_n) est constante.

62 Pour tout entier naturel n non nul, on pose :
 $S_n = 1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1)$.

1. Calculez S_1 , S_2 , S_3 et S_4 .
Conjecturez l'expression de S_n en fonction de n .
2. Démontrez cette conjecture par récurrence.
3. Observez la somme S_n et donnez une autre démonstration de la conjecture.

Aide

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

63 La suite (u_n) est définie par $u_0 \in]0; 1[$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n(2 - u_n)$.

Démontrez par récurrence que pour tout entier naturel n ,
 $0 < u_n < 1$.

Aide

Utiliser la fonction f définie sur l'intervalle $]0; 1[$ par :
 $f(x) = x(2 - x)$.

64 Polygones convexes

Un polygone est dit convexe lorsque chacun de ses angles mesure moins de π radians.

Démontrez par récurrence que la somme des mesures des angles d'un polygone convexe de n côtés ($n \geq 3$) est égale à $(n-2)\pi$ radians.

CALCULS DE LIMITES

Pour les exercices 65 à 70

Étudiez, dans chaque cas, la limite éventuelle de la suite (u_n) . Précisez les propriétés ou théorèmes utilisés.

→ Exercices résolus C, D, E.

65 a) $u_n = \frac{2n+3}{3n-1}$ b) $u_n = \frac{5n-3}{3n-5}$ c) $u_n = \frac{5+\cos(n)}{n}$

66 a) $u_n = n - \frac{1}{n+1}$ b) $u_n = \frac{n}{4} - 2 + \frac{2n}{n^2+1}$

67 a) $u_n = \frac{5n^2-3n+7}{n^2+n+1}$ b) $u_n = \frac{-3n^2+2n+4}{2(n+1)^2}$

68 a) $u_n = \frac{10n-1}{n^2+1}$ b) $u_n = \frac{2n^2-1}{3n+7}$

69 a) $u_n = \frac{\sqrt{n+1}}{n+1}$ b) $u_n = \frac{n\sqrt{n}+n}{n+2}$

70 a) $u_n = \sqrt{n^2+2n} - (n+1)$
b) $u_n = \sqrt{n}(\sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+1})$

Pour les exercices 71 à 73

Calculez la limite éventuelle des suites (u_n) et (v_n) , puis celle des suites $(u_n + v_n)$, $(u_n \times v_n)$ et $\left(\frac{u_n}{v_n}\right)$.

71 $u_n = \frac{n+1}{2n^2+1}$ et $v_n = n$.

72 $u_n = \frac{2n}{n+\sqrt{n}}$ et $v_n = \frac{3n+5}{n+2}$.

73 $u_n = \frac{n^2+1}{2(n+3)^2}$ et $v_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$.

74 Proposez deux suites (u_n) et (v_n) vérifiant :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty,$$

et telles que :

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = 0 \quad (\forall n \in \mathbb{N}, u_n + v_n \neq 0)$.

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n + v_n) = 10$.

c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 0$. d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = -5$.

75 LOGIQUE « Pour tout », « Il existe ».

1. La suite (u_n) est croissante.

Les propositions suivantes permettent-elles d'affirmer que la suite (u_n) est convergente ?

Justifiez votre réponse. Si la réponse est négative, proposez un contre-exemple.

a) Il existe un réel M tel que, pour tout entier naturel n , $u_n \leq M$.

b) Pour tout réel M , il existe un entier naturel n tel que $u_n \geq M$.

2. Les propositions suivantes permettent-elles d'affirmer que la suite (v_n) a pour limite $+\infty$?

Justifiez votre réponse. Si la réponse est négative, proposez un contre-exemple.

a) Il existe un réel M tel que, pour tout entier naturel n , $v_n \geq M$.

b) Pour tout réel M , il existe un entier naturel n tel que pour tout entier $m > n$, $v_m \geq M$.

ÉTUDE DE SUITES

76 La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n + 2n + 3$.

1. Étudiez le sens de variation de la suite (u_n) .

2. Démontrez que pour tout entier naturel n , $u_n > n^2$.

3. Déduisez-en le comportement en $+\infty$ de la suite (u_n) .

77 La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2}$.

1. Démontrez que pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq 2$.

2. Prouvez que la suite (u_n) est strictement croissante.

3. Quel est le comportement de la suite en $+\infty$? Justifiez votre réponse.

78 La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = \frac{n!}{n^n}$ où $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n$.

1. Justifiez que pour tout entier naturel non nul n ,

$$0 < u_n \leq \frac{1}{n}.$$

2. Quel est le comportement en $+\infty$ de la suite (u_n) ?

79 La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par $u_n = n + 1 - \cos(n)$.

1. Démontrez que pour tout entier naturel n ,

$$n \leq u_n \leq n + 2.$$

2. Quel est le comportement de la suite en $+\infty$?

80 LOGIQUE Nécessaire ou suffisant ?

Le théorème 8 précise que si la suite (u_n) est croissante et non majorée, alors elle a pour limite $+\infty$.

1. a) Déterminez les premiers termes de la suite définie, pour tout entier naturel n , par $u_n = n + (-1)^n$.

b) La suite est-elle majorée ? Est-elle croissante ? Justifiez vos réponses.

2. a) Soit A un nombre fixé. on note $E(A)$ sa partie entière. Pouvez-vous trouver un indice n_0 tel que pour tout entier naturel $n > n_0$, $u_n > A$? Quel est le comportement de la suite (u_n) en $+\infty$?

b) La condition « croissante et non majorée » suffit pour conclure que la limite d'une suite est $+\infty$. Mais est-elle nécessaire ?

3. Dans les deux cas ci-dessous, précisez si la condition surlignée est nécessaire, suffisante, nécessaire et suffisante ou ni nécessaire et ni suffisante.

(u_n) et (v_n) sont deux suites définies pour tout entier naturel n .

a) Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$.

b) Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$.

81 Les suites (u_n) et (v_n) sont définies pour tout entier naturel $n \geq 1$, par $u_n = \frac{1}{\sqrt{n^2 + 1}}$ et $v_n = \frac{1}{n}$.

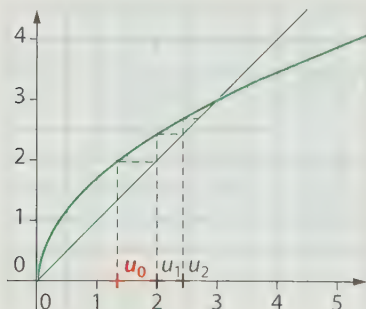
1. Prouvez que 1 est un majorant de la suite (u_n) .

2. Prouvez que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_n < v_n$.

3. De ces deux renseignements, lequel permet de déterminer le comportement de la suite (u_n) en $+\infty$?

82 Sont représentées sur le dessin ci-dessous, la fonction définie pour x positif par $f(x) = \sqrt{3x}$ et la droite d'équation $y = x$.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 \in [1; 3]$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \sqrt{3u_n}$.



1. L'intervalle $I = [1; 3]$ semble contenir tous les termes de la suite. Démontrez par récurrence que tous les termes (u_n) appartiennent effectivement à I .

2. Conjecturez le sens de variation de la suite (u_n) puis démontrez votre conjecture.

3. Démontrez que la suite (u_n) est convergente et conjecturez sa limite (voir l'exercice 103 p. 48).

83 La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k^2} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{n^2}.$$

1. Démontrez que la suite (u_n) est croissante.

2. a) Démontrez, par récurrence, que pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$u_n \leq 2 - \frac{1}{n}.$$

b) Que pouvez-vous en déduire pour la suite (u_n) ?

84 La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel non nul par :

$$u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^3} = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \dots + \frac{1}{n^3}.$$

1. Démontrez que la suite est (u_n) croissante.

2. a) Démontrez, par récurrence, que pour tout entier naturel $n \geq 1$, $u_n \leq 2 - \frac{1}{n}$.

b) Que pouvez-vous en déduire pour la suite (u_n) ?

85 On se propose d'étudier le comportement à l'infini de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = \frac{n}{n^2 + 1} + \frac{n}{n^2 + 2} + \dots + \frac{n}{n^2 + n}.$$

1. Quel est le plus petit des n termes de la somme définissant u_n ? Le plus grand ?

2. Déduisez-en un encadrement de u_n qui permet de déterminer le comportement de la suite en $+\infty$.

→ Exercice 35, Apprendre à chercher, page 36

86 ALGORITHMIQUE Suite définie par récurrence

Variables

n, u, i

Algorithme

Saisir n

u reçoit 1

Pour i de 1 à n

Afficher u

u reçoit $2 + \frac{u}{3}$

Fin Pour

1. Précisez l'objectif de cet algorithme.

2. Utilisez cet algorithme pour programmer votre calculatrice (ou un tableur).

3. Que pouvez-vous conjecturer pour de grandes valeurs de l'entier naturel n ?

4. Comment se traduit le remplacement de la ligne « u reçoit 1 » par « u reçoit 4 » sur le sens de variation de la suite ?

SUITES DU TYPE $u_{n+1} = a u_n + b$

Une suite (u_n) est dite **arithmético-géométrique** lorsqu'elle vérifie une relation de récurrence de la forme $u_{n+1} = a u_n + b$ où a et b sont deux réels, $a \neq 0$.

Lorsque $a = 1$, (u_n) est une suite arithmétique.

Lorsque $b = 0$, (u_n) est une suite géométrique.

87 La suite (u_n) est définie par $u_0 = -2$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{2}{3} u_n - 1$.

1. À l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur, calculez les vingt premiers termes de la suite (u_n) . Quelles conjectures pouvez-vous établir ?

2. On note α la limite supposée de la suite (u_n) et on considère alors la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - \alpha$.

a) Calculez les valeurs exactes des trois premiers termes de la suite (v_n) .

b) Démontrez que (v_n) est une suite géométrique.

c) Exprimez v_n en fonction de n , puis u_n en fonction de n .

3. Déduisez-en la limite de la suite (u_n) .

4. (S_n) est la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k = u_0 + u_1 + \dots + u_n.$$

a) Exprimez S_n en fonction de n .

b) Déduisez-en la limite de la suite (S_n) .

88 La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{u_n - 1}{2}$.

1. Donnez les cinq premiers termes de la suite (u_n) .

2. α est un nombre réel. La suite (v_n) est définie pour tout entier naturel n , par $v_n = u_n - \alpha$.

a) Démontrez que la suite (v_n) est géométrique si et seulement si $\alpha = -1$.

b) Exprimez alors v_n , puis u_n , en fonction de n .

c) Étudiez le sens de variation et la convergence éventuelle de la suite (u_n) .

d) Déterminez le plus petit entier naturel n tel que u_n appartient à l'intervalle $]-1 - 10^{-4}; -1 + 10^{-4}[$.

AVEC LES TICE

89 La population d'une ville augmente régulièrement de 5 % par an. On fait l'hypothèse que ce taux reste constant.

1. On note p_0 la population actuelle et p_n celle, prévisible, dans n années.

a) Exprimez p_n en fonction de p_0 et de n .

b) Justifiez que $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = +\infty$.

2. L'objectif est de déterminer dans combien d'années la population aura été multipliée par 10.

Cette recherche aboutit à une équation que l'on ne sait actuellement pas résoudre (les outils seront fournis dans le chapitre 5).

On peut cependant déjà répondre au problème posé en utilisant les outils de calculs : tableur, calculatrice, ...

Dans une feuille de calcul d'un tableur, complétez le tableau ci-dessous pour afficher les valeurs successives de p_n et répondre à la question posée.

	A	B
1	n	p_n
2	1	$=1,05^{\wedge}A2$

3. a) Proposez un algorithme permettant de résoudre le problème posé. L'utilisation d'une boucle conditionnelle est adaptée à la situation.

b) Utilisez alors cet algorithme pour programmer votre calculatrice (ou Algobox) et confirmer le résultat obtenu précédemment.



La population de Surat en Inde croît de 5 % par an, ce qui représente une des plus fortes croissances mondiales. En comparaison, les populations des villes de France croissent de 0 à 2 %.

Prendre toutes les initiatives

90 Proposez deux suites (u_n) et (v_n) vérifiant $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{v_n} = 3$ et pour tout entier naturel n , $u_n \neq 3v_n$.

91 Démontrez que la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n par $u_n = \frac{\sin(n)}{n}$ converge.

Le jour du BAC

92 Travail en autonomie

→ Rédigez la solution de cet exercice en vous aidant du guide.

Soit (u_n) la suite numérique définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 0 \text{ et } u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}.$$

1. a) Démontrez que, pour tout entier naturel n ,
 $0 \leq u_n < 4$.

b) Démontrez que (u_n) est croissante.

c) Déduisez-en que (u_n) converge.

2. a) Démontrez que pour tout entier naturel n ,
 $4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)$.

b) La suite (v_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = 4 - u_n$.
 Démontrez que pour tout entier naturel n ,

$$0 \leq v_n \leq \frac{1}{2^{n-2}}.$$

c) Déduisez-en la convergence de la suite (v_n) et sa limite, puis la limite de la suite (u_n) .

Guide

1. a) On pense à un raisonnement par récurrence, car la suite (u_n) est définie par récurrence.

C'est la stricte croissance de la fonction *racine carrée* qui permet de passer aux inégalités suivantes.

b) L'étude du signe de $u_{n+1} - u_n$ nécessite un changement d'écriture.

L'expression de cette différence, $\sqrt{3u_n + 4} - u_n$, incite à utiliser son expression conjuguée, $\sqrt{3u_n + 4} + u_n$.

L'étude du signe de $u_{n+1} - u_n$ se ramène ainsi à celle du trinôme du second degré $-x^2 + 3x + 4$ sur $[0 ; 4]$.

c) Pour prouver la convergence de la suite, il suffit maintenant d'exploiter les propriétés de la suite (u_n) démontrées dans les questions précédentes : la suite (u_n) est croissante et majorée, donc...

2. a) Pour majorer $4 - u_{n+1}$, vous pouvez utiliser l'expression (conjuguée) $4 + \sqrt{3u_n + 4}$ en remarquant que ce nombre est, pour tout entier naturel n , supérieur ou égal à 6.

b) Traduisez le résultat précédent à l'aide de v_{n+1} , v_n , puis prouvez par récurrence que $v_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n v_0$, soit $v_n \leq \frac{1}{2^{n-2}}$. La positivité de tous les termes de la suite (v_n) est, quant à elle, facile à établir.

c) L'encadrement obtenu précédemment vous permet de conclure que la suite (v_n) converge vers 0.

Exprimez u_n en fonction de v_n pour déterminer la limite de la suite (u_n) .



Sur le Web

Retrouvez le corrigé de cet exercice sur le site www.transmathlycee.net/eleve-TermS

Analyser l'énoncé

- L'objectif de la partie 1. est de prouver la convergence de la suite (u_n) . Les questions **a)** et **b)** vous donnent les outils pour conclure.
- L'utilisation d'une calculatrice est conseillée pour avoir une idée du comportement de la suite (u_n) .

Analyser l'énoncé

Dans la partie 2., apparaît la suite auxiliaire (v_n) . L'encadrement demandé en **b)** doit permettre de prouver sa convergence et de déterminer sa limite.

ZOOM sur la rédaction

Explicitez la propriété P_n et mettez bien en évidence les trois étapes d'un raisonnement par récurrence : initialisation – hérédité – conclusion.

ZOOM sur la rédaction

Pensez à justifier que, pour tout entier naturel n , $\sqrt{3u_n + 4} + u_n > 0$.

ZOOM sur la rédaction

Précisez clairement le théorème utilisé en vous assurant que les conditions d'application sont bien remplies et en les rappelant dans votre rédaction.

ZOOM sur la rédaction

Précisez, de nouveau, clairement le théorème utilisé (ici le théorème d'encadrement) et justifiez dans votre rédaction que les conditions d'application sont bien remplies.

93 ROC Restitution organisée des connaissances**Prérequis****Définition d'une suite tendant vers $+\infty$**

Dire qu'une suite (u_n) a pour limite $+\infty$ signifie que tout intervalle ouvert de la forme $]A; +\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain indice.

1. Démonstration

Démontrez le théorème suivant :

(u_n) et (v_n) sont deux suites.

Si pour tout entier naturel n supérieur à un certain entier naturel n_0 , $u_n \leq v_n$ et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.

2. Application

La suite (v_n) est définie par $v_0 = 1$ et pour tout entier naturel n , $v_{n+1} = v_n + 2n + 3$.

a) Démontrez que, pour tout entier naturel n , $v_n \geq n^2$.

b) Quelle est la limite de la suite (v_n) ?

94 ROC Restitution organisée des connaissances**1. Démonstration**

a) a est un réel strictement positif.

Démontrez par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, $(1+a)^n \geq 1+na$.

b) Déduisez de ce qui précède la limite d'une suite géométrique de raison $q > 1$.

Énoncez le théorème ainsi démontré.

2. Application

Déterminez la limite des suites définies par :

a) $u_n = (\sqrt{3} + 1)^n$. **b)** $v_n = \frac{1}{1,01^n}$.

95 BAC On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2$.

1. Calculez u_1 , u_2 et u_3 .

2. a) Démontrez que pour tout entier naturel $n \geq 4$, $u_n \geq 0$.

b) Déduisez-en que pour tout entier naturel $n \geq 5$, $u_n \geq n - 3$.

c) Déduisez-en la limite de la suite (u_n) .

3. On définit la suite (v_n) par :

$$n \in \mathbb{N}, v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2}.$$

a) Démontrez que la suite (v_n) est une suite géométrique. Précisez sa raison et v_0 .

b) Déduisez-en que pour tout n de $\mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{25}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}.$$

c) Soit la somme S_n définie pour tout entier naturel n par :

$$S_n = \sum_{k=0}^n u_k.$$

Déterminez l'expression de S_n en fonction de n .

96 BAC (Extrait)

On note (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}.$$

1. Prouvez que pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-3n-2}{n(2n+2)(2n+1)}.$$

2. Déduisez-en le sens de variation de la suite (u_n) .

3. Démontrez alors que (u_n) est une suite convergente.

97 BAC (Extrait) Vrai ou faux ?

On considère une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ dont aucun terme n'est nul.

On définit alors la suite (v_n) sur $\mathbb{N}$ par $v_n = -\frac{2}{u_n}$.

Pour chaque proposition, indiquez si elle est vraie ou fausse et proposez une démonstration pour la réponse indiquée. Dans le cas d'une proposition fausse, la démonstration consistera à fournir un contre-exemple.

1. Si (u_n) est convergente, alors (v_n) est convergente.

2. Si (u_n) est minorée par 2, alors (v_n) est minorée par -1 .

3. Si (u_n) est décroissante, alors (v_n) est croissante.

4. Si (u_n) est divergente, alors (v_n) converge vers 0.

98 BAC (Extrait)

On considère la suite (w_n) dont les termes vérifient, pour tout nombre entier naturel, $n \geq 1$:

$$n w_n = (n+1) w_{n-1} + 1 \text{ et } w_0 = 1.$$

Ce tableau donne les dix premiers termes de cette suite.

w_0	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	w_9
1	3	5	7	9	11	13	15	17	19

1. Détaillez le calcul permettant d'obtenir w_{10} .

2. Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte.

Donnez la nature de la suite (w_n) . Calculez w_{2009} .

99 D'après BAC

On note u_n le nombre de foyers, exprimé en millions, possédant un téléviseur à écran plat l'année n .

On pose $n = 0$ en 2005, $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{10}u_n(20 - u_n)$.

1. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0; 20]$ par :

$$f(x) = \frac{x}{10}(20 - x).$$

a) Étudiez les variations de la fonction f sur $[0; 20]$.

b) Déduisez-en que pour tout x de $[0; 10]$, $f(x) \in [0; 10]$.

2. Prouvez par récurrence que :

pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 10$.

3. Prouvez que la suite (u_n) est convergente et déterminez sa limite ℓ . (On admettra que cette limite est solution de l'équation $f(x) = x$.)

Pour aller plus loin

100 Limite d'une suite géométrique

L'objectif est d'étudier le comportement à l'infini de la suite géométrique (q^n) , avec $q \neq 0$ et $-1 < q < 1$.

On rappelle que pour $q > 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.

Le nombre q étant non nul, posons $p = \frac{1}{q}$.

1. On suppose que $0 < q < 1$.

Comparez alors p et 1. Déduisez-en la limite de p^n puis celle de q^n lorsque n tend vers $+\infty$.

2. On suppose maintenant que $-1 < q < 0$.

Considérez alors la suite de terme général $|q|^n$ et déduisez-en, par encadrement, le comportement en $+\infty$ de la suite (q^n) .

3. Concluez.

101 Unicité de la limite d'une suite convergente

L'objet de cet exercice est de démontrer l'unicité de la limite d'une suite convergente. Pour cela, on utilise un raisonnement par l'absurde.

LOGIQUE

Raisonnement
par l'absurde
→ p. 468

Supposons que la suite (u_n) admette deux limites finies ℓ et ℓ' distinctes ($\ell > \ell'$). Notons :

λ la distance (non nulle) de ℓ à ℓ' : $\lambda = \ell - \ell'$,

I_1 l'intervalle de centre ℓ et de rayon $\frac{\lambda}{3}$,

I_2 l'intervalle de centre ℓ' et de rayon $\frac{\lambda}{3}$.

1. a) Représentez ces deux intervalles sur un axe.

b) Prouvez que I_1 et I_2 sont disjoints.

Aide

Prenez un nombre quelconque de I_2 et prouvez qu'il ne peut pas appartenir à I_1 .

2. Par définition de la limite ℓ , que pouvez-vous dire de l'ensemble des termes de la suite qui n'appartiennent pas à I_1 ? De l'ensemble des termes de la suite qui appartiennent à I_2 ?

Concluez.

102 La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et pour tout

entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{u_n}{\sqrt{u_n^2 + 1}}$.

1. Prouvez que pour tout entier naturel n , $u_n > 0$.

2. Prouvez que la suite (u_n) est décroissante.

3. Justifiez la convergence de la suite (u_n) .

4. a) Donnez les valeurs exactes des cinq premiers termes de la suite.

Que pouvez-vous conjecturer concernant l'expression de u_n en fonction de n ?

b) Démontrez votre conjecture par récurrence.

5. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?

103 La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \sqrt{3u_n}$.

L'étude faite dans l'exercice 82 a permis d'établir que cette suite est croissante et bornée ($\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq 3$), donc convergente.

On conjecture que sa limite est 3 et on étudie la suite (v_n) définie par $v_n = 3 - u_n$.

1. Vérifiez que pour tout entier naturel n ,

$$v_{n+1} = \sqrt{3} \frac{3 - u_n}{\sqrt{u_n} + \sqrt{3}}.$$

2. Démontrez que pour tout entier naturel n ,

$$v_{n+1} \leq \frac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} v_n.$$

3. Démontrez, par récurrence, que pour tout entier naturel n , $v_n \leq 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} \right)^n$.

4. Déduisez-en $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

104 Retour sur la méthode de Héron

Dans l'activité 3, on a conjecturé que le nombre irrationnel $\sqrt{2}$ est la limite d'une suite de nombres rationnels.

On se propose, dans cet exercice, de démontrer cette conjecture.

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right).$$

1. a) Justifiez que la fonction f est dérivable pour tout x de $\mathbb{R}^*$.

b) Démontrez que pour tout x de $\mathbb{R}^*$:

$$f'(x) = \frac{(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})}{2x^2}.$$

Déduisez-en le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}^*$.

2. La suite (u_n) est définie par $u_0 = \frac{3}{2}$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Calculez u_1 et u_2 . (Donnez les résultats sous la forme de fractions, puis sous forme décimale arrondie à 10^{-5} .)

b) Démontrez par récurrence que pour tout entier naturel n , $\sqrt{2} < u_{n+1} < u_n \leq \frac{3}{2}$.

Déduisez-en que la suite (u_n) est convergente.

c) Démontrez que pour tout n de $\mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - \sqrt{2} < \frac{1}{2} (u_n - \sqrt{2}).$$

d) Déduisez-en par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$,

$$0 < u_n - \sqrt{2} \leq \frac{1}{2^n} (u_0 - \sqrt{2}).$$

e) Déduisez-en $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

105 Étudiez le comportement à l'infini de la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par :

$$u_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n E\left(\frac{k}{2}\right),$$

où E est la fonction partie entière qui à tout nombre x associe le nombre entier $E(x)$ tel que $E(x) \leq x < E(x) + 1$ c'est-à-dire le plus grand entier inférieur ou égal à x .

PROLONGEMENTS DU TD 41

Ces exercices prolongent le TD 41 : ils proposent d'autres approximations de réels à l'aide de suites.

106 Le nombre d'or

A. Calculs et conjectures

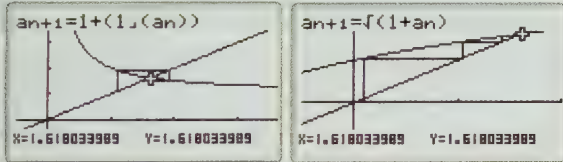
1. Définissez chacune des deux suites récurrentes (u_n) et (v_n) dont le calcul des premiers termes apparaît respectivement dans les colonnes A et B ($u_1 = v_1 = 1$).

	A	B
1	1	1
2	=1+1/A1	=RACINE(1+B1)
3	=1+1/A2	=RACINE(1+B2)

2. À l'aide d'un tableau ou d'une calculatrice, calculez les trente premiers termes de chacune des suites.

3. Les suites vous semblent-elles monotones ? Vous semblent-elles convergentes ?

Les vues d'écran de calculatrices ci-dessous confirment-elles vos conjectures ?



B. Démonstration

1. a) Démontrez, par récurrence, que pour tout entier naturel $n \geq 2$, $\frac{3}{2} \leq u_n \leq 2$.

b) Si la suite (u_n) converge, on note Φ sa limite.

On admet ici que Φ est la solution positive de l'équation $x = 1 + \frac{1}{x}$ (la démonstration sera proposée dans le chapitre 4).

Utilisez les graphiques des copies d'écran ci-dessus pour donner une valeur approchée du nombre Φ .

c) Calculez Φ et vérifiez que :

$$\frac{3}{2} \leq \Phi \leq 2.$$

d) Démontrez que pour tout $x \geq \frac{3}{2}$,

$$\left| \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \left(1 + \frac{1}{\Phi}\right) \right| \leq \frac{4}{9} \left| x - \Phi \right|.$$

e) Déduisez de ce qui précède que pour tout entier naturel $n \geq 2$, $|u_{n+1} - \Phi| \leq \frac{4}{9} |u_n - \Phi|$,

puis démontrez par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 2$, $|u_n - \Phi| \leq \left(\frac{4}{9}\right)^{n-2} |u_2 - \Phi|$.

f) Démontrez alors que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Ce nombre Φ est appelé « nombre d'or ».

2. a) Démontrez par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 2$, $\sqrt{2} \leq v_n \leq \Phi$.

b) On considère alors la suite (w_n) définie pour tout entier naturel non nul n par $w_n = \Phi - v_n$.

Vérifiez que $\Phi^2 = \Phi + 1$.

c) Justifiez que pour tout entier naturel non nul n ,

$$w_{n+1} = \frac{\Phi - v_n}{\Phi + \sqrt{1 + v_n}} \text{ puis déduisez-en que pour tout}$$

entier naturel non nul n , $w_{n+1} = \frac{w_n}{3}$.

d) Démontrez par récurrence que :

$$\forall n \text{ de } \mathbb{N}^*, w_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}.$$

e) Déduisez-en que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.

Commentaire. Les termes de la suite (u_n) sont des nombres rationnels (quotients d'entiers), ceux de la suite (v_n) sont des nombres irrationnels (qui ne s'expriment pas sous la forme de quotients d'entiers). Les deux suites ont pourtant la même limite : le nombre irrationnel Φ .

107 Le nombre e

La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n non nul

par $u_n = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}$, où $k! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times k$.

1. Calculs et conjecture

a) Vérifiez que les formules données dans la colonne B du tableau ci-dessous permettent, en recopiant vers le bas, de déterminer les premiers termes de la suite (u_n) .

	A	B
1	n	u_n
2	1	=1-1/FACT(A2)
3	2	=B2-1/FACT(A3)

b) Faites afficher les trente premiers termes de la suite (u_n) . Que pouvez-vous conjecturer quant au comportement de la suite (u_n) en $+\infty$?

2. Démonstrations

a) Prouvez la monotonie de la suite (u_n) .

b) Démontrez que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k!} \leq \frac{1}{2^{k-1}}$

c) Déduisez-en que la suite (u_n) est majorée par 3.

d) Les résultats obtenus vous permettent-ils de confirmer vos conjectures ?

Commentaire. on note e la limite de cette suite ($e \approx 2,718$). Vous retrouverez ce nombre e dans le chapitre 3.

Fonctions : limites



D'un siècle à un autre

Aux Jeux olympiques de Mexico en 1968, l'athlète américain Jim Hines est le premier à descendre sous la barre des 10 s (9,95 s). Les champions ont beau courir de plus en plus vite, ils ne peuvent dépasser une certaine limite. Des modélisations mathématiques prédisent que le record ultime du 100 m masculin se situe autour de 9,2 s et pourrait être atteint au XXIV^e siècle.

Au XIX^e siècle, Cauchy contribue à préciser la notion de limite en considérant des infiniments petits.



En savoir plus sur
**Augustin-Louis
Cauchy**

→ Chercheurs d'hier, p. 65

Rappels

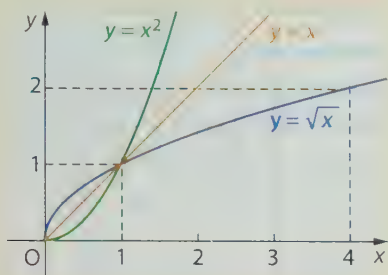
& Exercices-tests

Compléments
numériques

Comparaison de x , $\sqrt{x}$ et x^2

Pour tout x de $[0; 1]$, $x^2 \leq x \leq \sqrt{x}$.

Pour tout x de $]1; +\infty[$, $\sqrt{x} < x < x^2$.



Résoudre une inéquation

f et g sont deux fonctions définies sur un intervalle I , de courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

Résoudre l'inéquation $f(x) > g(x)$ revient :

- graphiquement, à trouver les abscisses des points de la courbe $\mathcal{C}_f$ situés au-dessus de la courbe $\mathcal{C}_g$;
- par le calcul, à déterminer les valeurs de x pour lesquelles la différence $f(x) - g(x)$ est positive.

Sinus et cosinus d'un réel

Les fonctions trigonométriques sont étudiées dans le chapitre 6.

Dans ce chapitre, nous n'utiliserons que la propriété suivante, vue en classes de Seconde et de Première :

Pour tout x :

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1 \quad \text{et} \quad -1 \leq \sin(x) \leq 1.$$

Notation

Pour tout x , le nombre $(\cos(x))^2$ pourra être noté plus simplement $(\cos x)^2$ ou $\cos^2(x)$.

1 Vrai ou faux

- Pour tout x , $(x+1)^2 \geq x+1$.
- Si $x \leq \sqrt{x} \leq x^2$, alors $x = 0$.
- Si $x > 1$, alors $\frac{3}{x^2} < \frac{4}{x}$.
- Si $x > 1$, alors $x^2 < x^3$.
- Si $x > 0$, $x-1 < (x-1)^2$.

2 QCM

Pour chaque affirmation, une seule réponse est exacte. Identifiez-la en justifiant votre réponse.

Les fonctions f , g et h sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x + 3, \quad g(x) = 3 - x^2 \quad \text{et} \quad h(x) = x^2 + 2x - 1.$$

- $f(x) \leq g(x)$ pour tout x de l'intervalle :
a) $\mathbb{R}$ b) $[-2; 0]$ c) $[-2; 2]$
- Pour tout x de l'intervalle $[-2; 1]$:
a) $g(x) < f(x)$ b) $h(x) \geq f(x)$ c) $g(x) \geq h(x)$
- a) Pour tout x , $x > \frac{3}{2}$, $h(x) < f(x)$.
b) Pour tout x de l'intervalle $]-2; 0]$,
 $[f(x) - g(x)] \times [f(x) - h(x)] \leq 0$.
c) Il n'existe pas de nombre x tel que :
 $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$.

3 Vrai ou faux

- Pour tout x , $x-1 \leq x - \cos(x) \leq x+1$.
- Quel que soit x , $2 \sin(x) + (\cos(x))^2 \geq 0$.
- f est une fonction définie sur un intervalle I telle que : pour tout x de I :
 $-1 \leq f(x) \leq 3$.
Alors, pour tout x de I , le nombre $\frac{f(x) + \sin(x)}{2}$ appartient à $[-1; 2]$.
- Il existe des nombres x de l'intervalle $]0; \pi]$ tels que $\sin(x) \leq -\frac{1}{x}$.



Consultez sur www.lesmaths.fr les exercices et les corrigés.

Activité 1

COMPORTEMENT D'UNE FONCTION À L'INFINI

L'objectif de cette activité est d'établir, pour une suite (u_n) définie par une relation du type $u_n = f(n)$, un lien entre le comportement de la fonction f et celui de la suite (u_n) à l'infini lorsque la fonction f est monotone et la suite (u_n) convergente.

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = \frac{3n-1}{n+2}$.

1 Calculs et conjectures

- a) À l'aide d'un tableur ou de votre calculatrice, calculez les vingt premiers termes de la suite (u_n) .
- b) Représentez dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ les sept premiers termes de la suite.
- c) Conjecturez le comportement de la suite (sens de variation et convergence éventuelle).

Rappel

Il s'agit de placer les points de coordonnées $(n; u_n)$ pour $n = 0, n = 1, \dots, n = 6$.

2 Démonstration

- a) Justifiez que la suite (u_n) a pour limite 3.
- b) Pour tout naturel n , $u_n = f(n)$ où f est la fonction $f: x \mapsto \frac{3x-1}{x+2}$ définie (et dérivable) sur $[0; +\infty[$.
 - Calculez $f'(x)$ et déduisez-en le sens de variation de la fonction f sur $[0; +\infty[$.
 - Que pouvez-vous en déduire pour la suite (u_n) ?
- c) Justifiez que pour tout naturel n , $u_n \leq 3$.

3 Comportement de la fonction f pour les grandes valeurs de x

- a) Utilisez la représentation des premiers termes de la suite (u_n) pour représenter la fonction f sur l'intervalle $[0; +\infty[$.
- b) Démontrez que pour tout x positif, $f(x) < 3$.
- c) Déterminez une valeur A de x telle que, pour tout x de l'intervalle $[A; +\infty[$, $f(x)$ appartient à l'intervalle $]2,99; 3[$.
- d) La suite (u_n) converge vers 3, donc tout intervalle de centre 3 contient tous les termes de la suite à partir d'un certain indice.
 - Démontrez que, quel que soit le nombre strictement positif α , l'intervalle ouvert $]3 - \alpha; 3 + \alpha[$ contient tous les nombres $f(x)$ pour x supérieur à un certain nombre positif A .
 - Exprimez ce nombre en fonction de α .

On dit alors que **$f(x)$ a pour limite 3 quand x tend vers $+\infty$** .

Comme nous avons noté $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$, nous noterons $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$.

4 Quand la suite (u_n) et la fonction f se comportent différemment

Une suite (u_n) définie par une relation du type $u_n = f(n)$ peut être convergente vers ℓ sans que la fonction f ait pour limite ℓ .

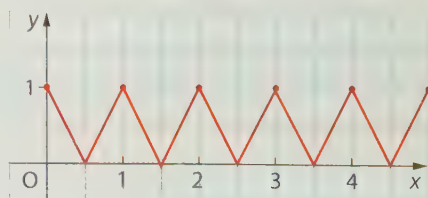
Considérons par exemple la suite définie pour tout entier naturel n par $u_n = f(n)$, où f est la fonction représentée ci-contre.

- a) Cette suite est constante (pour tout entier naturel n , $u_n = 1$) ; elle a donc pour limite 1.

L'intervalle ouvert $]0,9; 1,1[$ (du type $]1 - \alpha; 1 + \alpha[$) contient tous les termes de la suite.

Cet intervalle contient-il tous les $f(x)$ à partir d'une certaine valeur de x ?

- b) La fonction f peut-elle avoir 1 comme limite quand x tend vers $+\infty$?



Activité 2

DIFFÉRENTS COMPORTEMENTS À L'INFINI

L'objectif de cette activité est d'étudier le comportement de quelques fonctions lorsque la variable prend des valeurs de plus en plus grandes (vers $+\infty$).

On considère donc les fonctions suivantes, définies sur $]0; +\infty[$ par :

$$\bullet f_1(x) = x \quad \bullet f_2(x) = x^2 \quad \bullet f_3(x) = x\sqrt{x} \quad \bullet f_4(x) = \sqrt{x} \quad \bullet f_5(x) = 1 - \frac{1}{x}$$

1 Calculez la dérivée de chacune de ces fonctions puis dressez un tableau de variation.

2 **Étude du comportement de f_1 , f_2 et f_3 en $+\infty$**

a) Pour $x \geq 1$, ordonnez les nombres $f_1(x)$, $f_2(x)$ et $f_3(x)$.

b) Il est clair que lorsque x prend des valeurs de plus en plus grandes (vers $+\infty$), $f_1(x)$ tend vers $+\infty$... Pourquoi en est-il de même pour $f_2(x)$ et $f_3(x)$?

On dit alors que **$f_1(x)$, $f_2(x)$ et $f_3(x)$ tendent vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$.**

On note : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_2(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_3(x) = +\infty$.

3 **Étude du comportement de f_4 en $+\infty$**

a) Résolvez dans $]0; +\infty[$ les inéquations :

$$\bullet f_4(x) > 1000 ; \quad \bullet f_4(x) > 10^6.$$

b) M est strictement positif.

Pouvez-vous donner une valeur A strictement positive de x telle que pour tout $x > A$, $f_4(x) > M$?

Ainsi, pour tout nombre M strictement positif, le nombre $f_4(x)$ dépasse M dès que x est supérieur à un certain nombre A. On écrit alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_4(x) = +\infty$.

4 **Étude du comportement de f_5 en $+\infty$**

a) Déterminez le sens de variation de la fonction f_5 .

b) Justifiez que pour tout $x > 0$, $f(x) < 1$.

Déduisez-en la position relative de la courbe représentative de f_5 et de la droite d'équation $y = 1$.

c) Résolvez dans $]0; +\infty[$ les inéquations :

$$\bullet f_5(x) > 0,999 ; \quad \bullet f_5(x) > 1 - 10^{-6}.$$

d) α est un nombre réel strictement positif.

Pouvez-vous donner un nombre A strictement positif tel que pour tout $x > A$, $f_5(x) > 1 - \alpha$?

Ainsi, pour tout nombre α de l'intervalle $]0; 1[$, le nombre $f_5(x)$ est compris entre $1 - \alpha$ et 1 dès que x est supérieur à un certain nombre A. On écrit alors : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_5(x) = 1$.

Problème ouvert

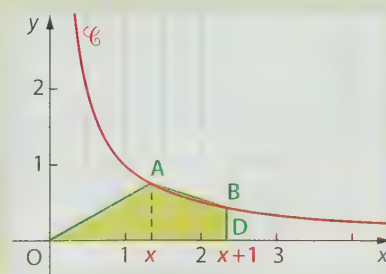
Refaites ces exercices après le chapitre... Est-il plus facile ?

f est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ et $\mathcal{C}$ est sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

À tout $x > 0$, on associe les points A et B de $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives x et $x + 1$. Le point D est le projeté orthogonal de B sur l'axe des abscisses.

On s'intéresse à l'aire du quadrilatère OABD.

Comment se comporte cette aire lorsque x devient « très grand » ? Lorsque x devient « très petit » en restant positif ?



1

Limite à l'infini

1.1 Limite finie en $+\infty$. Asymptote horizontale

Définition 1

Dire qu'une fonction f a pour **limite le nombre ℓ en $+\infty$** signifie que tout intervalle ouvert contenant ℓ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour tous les nombres x suffisamment grands (c'est-à-dire pour tous les x d'un certain intervalle $]A; +\infty[$).

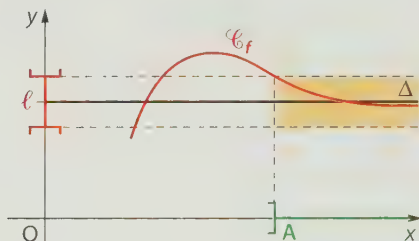
On dit aussi que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers $+\infty$ et on écrit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$.

Cette définition traduit l'accumulation des valeurs $f(x)$ autour du nombre ℓ .

On définit de manière analogue une limite finie ℓ' en $-\infty$. On écrit : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell'$.

► Interprétation graphique

Quel que soit l'intervalle ouvert contenant ℓ , et aussi petit soit-il, il existe un nombre A tel que la courbe $\mathcal{C}_f$ restreinte à l'intervalle $]A; +\infty[$ soit située dans la partie colorée ci-dessous.



Animation

► **Vocabulaire.** La droite Δ d'équation $y = \ell$ est dite **asymptote horizontale** à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

► **Exemple.** f est la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

Prouvons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, c'est-à-dire que pour tout nombre α strictement positif, $f(x) \in]-\alpha; \alpha[$ dès que x est supérieur à un certain nombre A .

Comme $f(x) > 0$, la condition $f(x) \in]-\alpha; \alpha[$ se réduit à $f(x) \in]0; \alpha[$.

Ceci équivaut à $\frac{1}{x^2} < \alpha$ donc à $x > \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$. Ainsi $A = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

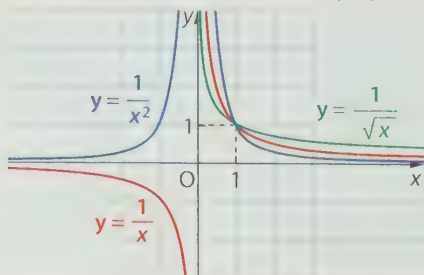
► Limites à l'infini de fonctions de référence

- Les fonctions $x \mapsto \frac{1}{x}$; $x \mapsto \frac{1}{x^2}$; $x \mapsto \frac{1}{x^n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) ont pour limite 0 en $+\infty$ et en $-\infty$.

Leurs courbes représentatives admettent l'axe des abscisses comme asymptote horizontale en $-\infty$ et en $+\infty$.

- La fonction $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$ a pour limite 0 en $+\infty$.

Sa courbe représentative admet l'axe des abscisses comme asymptote horizontale en $+\infty$.



1.2 Limite infinie en $+\infty$

Définition 2

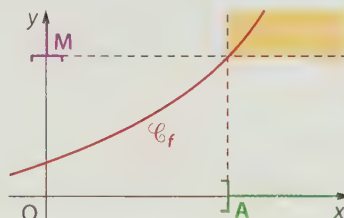
Dire qu'une fonction f a pour **limite $+\infty$ en $+\infty$** signifie que tout intervalle ouvert $]M; +\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour tous les nombres x suffisamment grands (c'est-à-dire pour tous les x d'un certain intervalle $]A; +\infty[$).

On dit aussi que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$ et on écrit $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Cette définition traduit l'idée que les valeurs $f(x)$ arrivent, pour les grandes valeurs de x , à dépasser n'importe quel nombre M aussi grand soit-il.

On définit de manière analogue $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ et les limites infinies en $-\infty$.

► **Interprétation graphique.** Quel que soit le nombre M , on peut trouver un nombre A tel que pour tout $x > A$, $f(x) > M$: la courbe $\mathcal{C}_f$ restreinte à $]A; +\infty[$ est dans la partie colorée ci-dessous.



Animation

► **Exemple.** f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.

Prouvons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, c'est-à-dire que pour tout nombre M strictement positif, $f(x) \in]M; +\infty[$ dès que x est inférieur à un certain nombre A .

La condition $f(x) > M$ s'écrit $x^2 > M$. Ceci équivaut à $x < -\sqrt{M}$ ou $x > \sqrt{M}$.

On peut donc prendre $A = \sqrt{M}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

► Limites à l'infini de fonctions de référence

• Pour tout entier naturel n :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty.$$

$$\bullet \text{ Si } n \text{ est pair : } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty.$$

$$\bullet \text{ Si } n \text{ est impair : } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty.$$

2

Limite infinie en un réel a . Asymptote verticale

2.1 Définitions

Définition 3

f est une fonction définie sur un **intervalle ouvert** I , le nombre a est une **borne de I** .

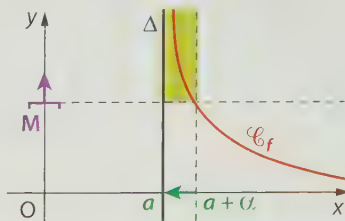
Dire que f a pour **limite $+\infty$ en a** signifie que tout intervalle ouvert $]M; +\infty[$ contient toutes les valeurs $f(x)$ pour tous les nombres x de l'intervalle I suffisamment proches de a , c'est-à-dire pour tous les nombres de I dans un certain intervalle $]a - \alpha; a[$ ou $]a; a + \alpha[$.

On dit aussi que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a et on écrit $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$.

Cette définition traduit l'idée que les valeurs $f(x)$ arrivent, pour des valeurs de x de plus en plus proches de a , à dépasser n'importe quel nombre M aussi grand soit-il.

On définit de manière analogue $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

► **Interprétation graphique dans le cas où $l =]a; +\infty[$.** Quel que soit le nombre M , on peut trouver un nombre $\alpha > 0$ tel que pour tout x de $]a; a + \alpha[$, $f(x) > M$: la courbe $\mathcal{C}_f$ restreinte à $]a; a + \alpha[$ est dans la partie colorée ci-dessous.



Animation

► **Vocabulaire.** La droite Δ d'équation $x = a$ est **asymptote verticale** à $\mathcal{C}_f$.

2.2 Limite à gauche, limite à droite

Étudions la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ lorsque x prend des valeurs de plus en plus proches de 0, en distinguant les deux cas : x positif ou x négatif.

• **Cas $x > 0$.**

Quel que soit le nombre $M > 0$, $\frac{1}{x} > M$ équivaut à $x < \frac{1}{M}$.

Autrement dit, quel que soit $M > 0$, l'intervalle $]M; +\infty[$ contient les nombres $f(x)$ dès que x appartient à $]0; \frac{1}{M}[$.

On dit que la **limite à droite en 0** de la fonction f est $+\infty$.

On note : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$.

Graphiquement, l'axe des ordonnées, d'équation $x = 0$, est asymptote verticale à la courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$.

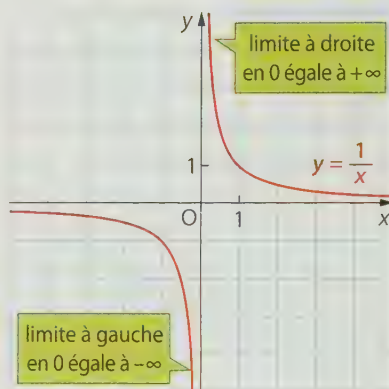
• **Cas $x < 0$.**

On prouve de manière analogue que lorsque x tend vers 0 en prenant des valeurs strictement **inférieures à zéro**, alors $\frac{1}{x}$ tend vers $-\infty$.

On dit que la **limite à gauche en 0** de la fonction f est $-\infty$.

On note : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$.

Ainsi, l'axe des ordonnées, d'équation $x = 0$, est (de nouveau) asymptote verticale à la courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$.



Définition 4

a désigne un nombre. f est une fonction définie sur $\mathbb{R} - \{a\}$.

Dire que f a une limite infinie en a signifie que f possède, en a , une limite à gauche et une limite à droite (infinies) et que **ces limites sont égales**. On a alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$.

Remarques

• La fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0 car $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}$.

• Pour une fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{a\}$, la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à la représentation de f si l'une au moins des limites $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ existe et est infinie.

3 Théorèmes sur les limites

3.1 Limites et opérations

Les théorèmes du chapitre 1 (tableaux du § 3.1) sur la limite d'une somme, d'un produit et d'un quotient de deux suites sont encore valables dans le cas de calculs de limites de fonctions.

3.2 Théorème d'encadrement (dit « des gendarmes »)

Théorème 1

f, g et h sont trois fonctions définies sur $I =]A; +\infty[$ (ou $I = \mathbb{R}$). ℓ désigne un nombre.

Si pour tout x de I , $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, et si g et h ont la même limite ℓ en $+\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$.

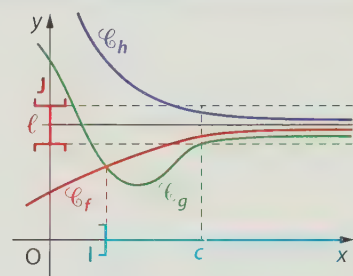
Démonstration. Par hypothèse, les fonctions g et h ont pour limite ℓ en $+\infty$.

Considérons un intervalle J ouvert contenant ℓ . Il contient toutes les valeurs $g(x)$ dès que $x > a$ et toutes les valeurs $h(x)$ dès que $x > b$. Notons c le plus grand des deux nombres a et b .

J contient donc toutes les valeurs $g(x)$ et $h(x)$ dès que $x > c$.

Puisque pour tout x de I , $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, J contient aussi toutes les valeurs $f(x)$ dès que $x > c$.

Ceci est vrai pour tout intervalle ouvert contenant ℓ , donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$.



Animation

► **Exemple.** Intéressons-nous au comportement en $+\infty$ de la fonction définie sur $I =]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$. Pour tout x de I , $-1 \leq \sin(x) \leq 1$, d'où $-\frac{1}{x} \leq f(x) \leq \frac{1}{x}$.

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, donc d'après le théorème 1, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 0$.

► **Remarque.** De même, f, g et h étant trois fonctions définies sur $I =]-\infty; A[$, si pour tout x de I , $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, et si g et h ont la même limite ℓ en $-\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \ell$.

3.3 Comparaison à l'infini

Théorème 2

f et g sont deux fonctions définies sur $I =]A; +\infty[$ (ou $I = \mathbb{R}$).

1. Si pour tout x de I , $f(x) \geq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2. Si pour tout x de I , $f(x) \leq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

Ce théorème s'adapte aux comparaisons en $-\infty$ ou en a .

Démonstration. 1. Par hypothèse, tout intervalle de la forme $]M; +\infty[$ contient toutes les valeurs de $g(x)$ pour x assez grand dans I .

Il contient donc aussi toutes les valeurs de $f(x)$ puisque $f(x) \geq g(x)$; ainsi $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2. On démontre de la même manière la deuxième partie du théorème.

► **Exemple.** Intéressons-nous au comportement en $+\infty$ de la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + (\cos x)^2$. Pour tout x , $(\cos x)^2 \geq 0$, donc $f(x) \geq x$.

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$, donc d'après le théorème 2, $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x + (\cos x)^2] = +\infty$.

4

Limite d'une fonction composée

4.1 Limite de la composée de deux fonctions

Théorème 3 f et g sont des fonctions.(admis) a, b et c désignent soit des nombres, soit $+\infty$, soit $-\infty$.Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ et $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = c$, alors $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = c$.

- Le nombre $g(f(x))$ est l'image par g du nombre $f(x)$: $x \mapsto f(x) \mapsto g(f(x))$.

Quand x tend vers a , $f(x)$ tend vers b et $g(f(x))$ tend vers c .

► **Exemple.** Étudions la limite éventuelle en $-\infty$ de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$. Utilisons un changement de variable et posons $Y = x^2 + x + 1$.

Ainsi $\sqrt{x^2 + x + 1} = \sqrt{Y}$. Or $\lim_{Y \rightarrow -\infty} Y = +\infty$ et $\lim_{Y \rightarrow +\infty} \sqrt{Y} = +\infty$; donc, d'après le théorème 3 :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + x + 1} = +\infty.$$

4.2 Limite de la composée d'une suite et d'une fonction

Théorème 4 f est une fonction définie sur un intervalle I .(admis) (v_n) est une suite dont tous les termes appartiennent à l'intervalle I . b et c désignent soit des nombres, soit $+\infty$, soit $-\infty$.Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = b$ et $\lim_{x \rightarrow b} f(x) = c$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(v_n) = c$.

► **Exemple.** Cherchons la limite éventuelle de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \sqrt{\frac{3n+2}{n+1}}$.
 $u_n = \sqrt{v_n}$ avec $v_n = \frac{3n+2}{n+1}$. Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 3$ et $\lim_{x \rightarrow 3} \sqrt{x} = \sqrt{3}$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \sqrt{3}$.

► Cas particulier

 f est une fonction définie sur un intervalle de la forme $]A; +\infty[$ et (u_n) est la suite définie pour tout entier naturel $n \geq A$, par $u_n = f(n)$.La lettre ℓ désigne soit un nombre, soit $+\infty$, soit $-\infty$.Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

► **Exemple.** Considérons la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = \frac{\sin(n)}{n}$.
 $u_n = f(n)$ où f est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$.
 Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ (voir l'exemple du théorème 1), donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.



► **Attention.** La réciproque de ce théorème est **fausse** : la suite (u_n) peut avoir une limite ℓ , sans que la fonction admette une limite (voir Activité 1, §4, p. 52).

OBJECTIF 1

Étudier la limite éventuelle d'une fonction

Les théorèmes concernant les opérations et les limites vues pour les suites (chapitre 1, p. 26) et valables pour les fonctions permettent de conclure, hormis dans quatre cas de formes indéterminées : « $\infty - \infty$ » ; « $0 \times \infty$ » ; « $\frac{\infty}{\infty}$ » ; « $\frac{0}{0}$ ».

EXERCICE « SOLU » A Étudier le comportement à l'infini d'un polynôme

Étudiez la limite éventuelle en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ ci-dessous.

a) $f(x) = x^3 - x^2 + 1$

b) $g(x) = (2x^2 + 1)(1 - x - x^3)$.

► Méthode

a) En $+\infty$: on examine si un calcul direct permet de conclure.

- En présence d'une forme indéterminée, on met en facteur le terme dominant.
- On étudie la limite de chacun des facteurs puis on conclut.

À retenir

À l'infini ($+\infty$ ou $-\infty$), un polynôme a même limite que son monôme de plus haut degré.

b) On est en présence d'un produit de deux polynômes. Chacun d'eux se comporte à l'infini comme son monôme de plus haut degré.

► Solution

► a) • En $+\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$.

Le calcul de la limite de $x^3 - x^2 + 1$ conduit à une forme indéterminée.

► • Pour tout x non nul, $f(x) = x^3 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\right)$.

► • $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$,

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^3}\right) = 1$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ donc, par produit,

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

• En $-\infty$: $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2) = -\infty$.

On peut conclure que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

► b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x^2 + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 = +\infty$.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - x - x^3) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x^3) = -\infty$.

Il en résulte $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x^2 + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^2 = +\infty$.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - x - x^3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3) = +\infty$.

Il en résulte $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty$.

► Mise en pratique

Pour les exercices 1 à 3

Dans chacun des cas, étudiez la limite de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

1 a) $f(x) = 3x^2 - 5x + 1$.

b) $f(x) = -2x^4 + 3$.

c) $f(x) = x^5 + x - 2$.

2 a) $f(x) = 2x - (3x^2 + x - 1)$.

b) $f(x) = 2(x^5 + 3x^3 + 1) - (x + 2x^5)$.

3 a) $f(x) = (x^3 - x^2 - 2)(-x + 5)$.

b) $f(x) = -3(x^3 - x)^2$.

c) $f(x) = \frac{x}{3}(2x + 1) - x^2(3x^3 - 1)$.

4 Sans développer, justifiez les limites suivantes.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 3)^2(2x - 1)^2 = +\infty$.

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 5)^2(-x + 2)^3 = +\infty$.

EXERCICE RESOLU B Étudier le comportement à l'infini d'une fonction rationnelle

Une **fonction rationnelle** est le quotient de deux fonctions polynômes.

Étudiez la limite éventuelle en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions rationnelles suivantes.

- a) f définie sur $\mathbb{R} - \{-3\}$ par $f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x + 3}$.
 b) g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{2x - 1}{x^2 + 1}$.

► Méthode

- a) On essaie d'appliquer les théorèmes sur les limites et les opérations.

Remarque

Pour chaque polynôme, on peut utiliser la règle pratique vue dans le résolu A.

- En présence d'une forme indéterminée, on met en facteur le terme dominant au numérateur et au dénominateur, puis on simplifie.

À retenir

À l'infini ($+\infty$ ou $-\infty$), une fonction rationnelle a même limite que le quotient simplifié des monômes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

- On conclut.

- b) Un calcul direct conduit à une indétermination.

- On étudie la limite du quotient des monômes de plus haut degré.
- On conclut.

► Solution

- a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + x - 1) = +\infty$
 et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 3) = +\infty$.
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + x - 1) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x + 3) = -\infty$.
 En $+\infty$, comme en $-\infty$, nous sommes en présence d'une forme indéterminée.

- On suppose x non nul.

$$\text{► } f(x) = \frac{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)}{x \left(1 + \frac{3}{x}\right)} = \frac{x^2}{x} \times \frac{1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{3}{x}}.$$

Or, quand x tend vers $-\infty$ et vers $+\infty$,

$$\frac{1}{x} \text{ et } \frac{1}{x^2} \text{ tendent vers } 0 \text{ donc } \frac{1 + \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{3}{x}} \text{ tend vers } 1.$$

- • Ainsi, $f(x)$ se comporte, à l'infini, comme le quotient $\frac{x^2}{x}$ c'est-à-dire comme x :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

- b) En $+\infty$ et en $-\infty$, nous sommes en présence d'une forme indéterminée (le numérateur et le dénominateur tendent vers l'infini).

- • En $+\infty$ et en $-\infty$, $g(x)$ se comporte comme le quotient $\frac{2x}{x^2}$ c'est-à-dire comme $\frac{2}{x}$:

$$\text{► } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0.$$

► Mise en pratique

Pour les exercices 5 et 6

Dans chacun des cas, étudiez la limite de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

5 a) $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ b) $f(x) = \frac{x^2+3}{x-1}$

c) $f(x) = \frac{x+2}{(x-3)^2}$

6 a) $f(x) = \frac{3x^2-5}{2x(x-1)}$ b) $f(x) = \frac{1-x^3}{(x^2-1)^2}$

c) $f(x) = \frac{x^5-3x^2+5x-2}{2x^2(x^3-3)}$

- 7 La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^n - 5}{x^4 + 1} \text{ avec } n \text{ entier naturel non nul.}$$

Déterminez la limite éventuelle de f en $+\infty$ et en $-\infty$ lorsque :

- a) $n < 4$;
 b) $n = 4$;
 c) $n > 4$ et n pair ;
 d) $n > 4$ et n impair.

- 8 a désigne un nombre.

La fonction f est définie sur $\mathbb{R} - \{-2\}$ par :

$$f(x) = \frac{ax^2 + 2x - 1}{x + 2}.$$

Étudiez, suivant les valeurs du nombre a , la limite éventuelle de $f(x)$ en $+\infty$ et en $-\infty$.

OBJECTIF

2

Interpréter graphiquement une limite

f est une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a; +\infty[$.

- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$,

alors la droite d'équation $y = \ell$ est **asymptote horizontale** à la courbe de f en $+\infty$.

- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ ou $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$,

alors la droite d'équation $x = a$ est **asymptote verticale** à la courbe de f .

EXERCICE RÉSOLU C Approcher une asymptote horizontale

La fonction f est définie sur l'intervalle $I = \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[$ par $f(x) = \frac{4x+3}{2x-1}$.

1. a) Démontrez que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ et déduisez-en l'existence d'une asymptote Δ à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f .

b) Précisez la position relative de Δ et de $\mathcal{C}_f$.

2. Déterminez un nombre A de I tel que, pour tout nombre $x > A$, $f(x) - 2 < 0,05$.

Méthode

1. a) On utilise la propriété sur le comportement d'une fonction rationnelle à l'infini, vue dans l'exercice résolu B.

b) On étudie le signe de la différence $f(x) - 2$.

Remarque

L'utilisation d'une calculatrice permet de vérifier les calculs.

2. On utilise l'expression de la différence $f(x) - 2$ et on résout l'inéquation.

• On conclut.

Solution

1. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{2x} = 2$.

La droite Δ d'équation $y = 2$ est donc asymptote horizontale à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

b) $f(x) - 2 = \frac{4x+3}{2x-1} - 2 = \frac{4x+3-2(2x-1)}{2x-1}$
 $f(x) - 2 = \frac{5}{2x-1}$.

$2x-1$ est strictement positif pour tout x de I , donc pour tout x de I , $f(x) > 2$: la courbe $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de son asymptote Δ .

2. $f(x) - 2 < 0,05$ équivaut à :

$$\frac{5}{2x-1} < \frac{5}{100}.$$

Pour tout x de I , $2x-1 > 0$, donc :

$f(x) - 2 < 0,05$ équivaut à :

$$2x-1 > 100$$

soit à $x > 50,5$.

➔ Conclusion : tout nombre $A \geq 50,5$ convient.

Mise en pratique

9 La fonction f est définie sur l'intervalle $] -4; +\infty[$ par $f(x) = \frac{-3x+1}{x+4}$.

1. Prouvez que la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f admet une asymptote horizontale Δ et étudiez la position relative de Δ et de $\mathcal{C}_f$.

2. Déterminez un nombre A de l'intervalle $] -4; +\infty[$ tel que pour tout nombre $x > A$,

$$f(x) + 3 < 0,1.$$

10 1. a) Justifiez que la fonction f définie sur l'intervalle $] -\infty; 0[$ par $f(x) = \frac{(2x-1)^2}{x^2}$ a pour limite 4 en $-\infty$.

b) Déduisez-en l'existence d'une asymptote horizontale à la courbe représentative de f .

2. Déterminez un nombre A tel que :

$$\text{si } x < A, \text{ alors } f(x) \in]3,99; 4,01[.$$

Utiliser un théorème de comparaison

f, g et h sont trois fonctions définies sur $I =]a; +\infty[$ et ℓ est un réel.

Théorème 1

Si pour tout x de I , $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$, et si g et h ont la même limite ℓ en $+\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$.

Théorème 2

– Si pour tout x de I , $f(x) \geq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

– Si pour tout x de I , $f(x) \leq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

• Ces propriétés sont analogues en $-\infty$ ou en a .

EXERCICE RÉSOLU D Déterminer une limite par encadrement ou par comparaison

Étudiez la limite éventuelle en $+\infty$:

a) de la fonction f définie sur $I =]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x + g(x)}{x - 1}$, avec pour tout x de I , $3 \leq g(x) \leq 4$.

b) de la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \sqrt{x^4 + 1}$.

Méthode

a) Un calcul direct conduit à une forme indéterminée. On utilise l'encadrement de g pour obtenir un encadrement de f par deux fonctions rationnelles.

• On détermine la limite éventuelle de chacune de ces fonctions en $+\infty$.

• On utilise le théorème d'encadrement. On s'assure au préalable que les conditions d'utilisation sont remplies. En particulier, on vérifie que les fonctions qui encadrent f ont la **même limite** en $+\infty$.

b) On conjecture que $h(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Une méthode consiste à minorer h par une fonction dont on connaît la limite en $+\infty$.

Remarque

On peut aussi utiliser le théorème 3 sur la limite d'une fonction composée.

Solution

➔ a) Pour tout x de I , $2x + 3 \leq 2x + g(x) \leq 2x + 4$ et $x - 1 > 0$. D'où l'encadrement :

$$\frac{2x + 3}{x - 1} \leq f(x) \leq \frac{2x + 4}{x - 1}.$$

➔ • Les fonctions rationnelles $x \mapsto \frac{2x + 3}{x - 1}$ et $x \mapsto \frac{2x + 4}{x - 1}$ se comportent en $+\infty$ comme le quotient $\frac{2x}{x}$ c'est-à-dire 2. Donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 3}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + 4}{x - 1} = 2.$$

➔ • Les conditions d'utilisation du théorème « des gendarmes » sont remplies, donc :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2.$$

➔ b) Pour tout x , $x^4 < x^4 + 1$.

La fonction *racine carrée* est strictement croissante sur $[0; +\infty[$, donc $\sqrt{x^4} < \sqrt{x^4 + 1}$, soit $x^2 < h(x)$. Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$, donc d'après le théorème de comparaison :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty.$$

Mise en pratique

11 Étudiez la limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{3x - \sin(x)}{x^2}$.

12 Une fonction f est telle que pour tout $x > 1$,

$$\frac{1}{x^2} \leq f(x) - 5 \leq \frac{1}{x}.$$

Étudiez le comportement de f en $+\infty$.

13 Une fonction f est telle que pour tout $x < -1$,

$$1 - \frac{1}{x} \leq 3 - 2f(x) \leq \frac{x - 1}{x + 1}.$$

Étudiez le comportement de f en $-\infty$.

14 Déterminez la limite éventuelle en $+\infty$ et en $-\infty$ des fonctions suivantes.

a) $x \mapsto x^3 - \cos(x)$.

b) $x \mapsto \frac{\cos(x)}{x}$.

15 Questions sur le cours

Complétez les propositions suivantes.

f et g sont deux fonctions définies sur $]3; +\infty[$.

a) Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$, alors la droite d'équation $y = 3$ est ... à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.

b) Si $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty$, la droite d'équation ... est asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.

c) Si pour tout x , $f(x) \geq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, alors ...

16 Vrai ou faux

Vrai ou faux ? Justifiez votre réponse.

f et g sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$, g ne s'annulant pas.

a) Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \times g(x) = 0$.

b) Si h est une fonction définie sur $[0; +\infty[$ telle que $0 \leq h(x) \leq \sqrt{x}$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$.

c) Si k est une fonction définie et strictement croissante sur $[0; +\infty[$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = +\infty$.

17 QCM Une seule réponse exacte

Pour chaque affirmation, une seule réponse est exacte. Identifiez-la en justifiant votre réponse.

1. Dans un repère donné, la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$ par $f(x) = \frac{3x+1}{x-2}$ admet comme asymptote la droite d'équation :

a) $y = 2$ **b)** $y = -\frac{1}{2}$ **c)** $y = 3$

2. f et g sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}^+$ telles que pour tout x de $\mathbb{R}^+$, $f(x) \leq g(x) \leq 2f(x)$.

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ est égal à :

a) 2 **b)** 0 **c)** On ne peut pas répondre.

3. On donne le tableau de variation d'une fonction f .

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
f	4	2	0	3

La courbe représentative de f admet :

a) une asymptote **b)** deux asymptotes
c) trois asymptotes

18 QCM Au moins une réponse exacte

Pour chaque affirmation, plusieurs réponses peuvent être exactes. Identifiez-les en justifiant vos réponses.

1. Dans un repère donné, la droite d'équation $y = 2$ est asymptote en $+\infty$ à la courbe représentative de la fonction f définie par :

a) $f(x) = \frac{2x+5}{\sqrt{x}+2}$ **b)** $f(x) = x - \frac{x^2+1}{x+2}$

c) $f(x) = 1 + \frac{x^2+3x+1}{x^2-2x+5}$

2. La fonction f est définie sur $\mathbb{R} - \{3\}$ par :

$$f(x) = \frac{2x + \sin(x)}{x-3}$$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$ **b)** $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = +\infty$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$

3. Dans un repère donné, la courbe représentative de la fonction f définie sur $]2; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x-2}$ admet comme asymptote la droite d'équation :

a) $x = 1$ **b)** $y = 0$ **c)** $y = 1$ **d)** $x = 2$

4. La fonction f est définie sur $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ par :

$$f(x) = \frac{2x^2+x}{x^2-1}$$

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ **b)** $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$

c) La droite d'équation $x+1=0$ est asymptote verticale à la courbe représentative de f .



Apprendre à chercher

19 Courbe et asymptote

La fonction f est définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par $f(x) = \frac{3x^2 - 5}{(x+1)^2}$.

Objectif Étudier la position de la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de f par rapport à son asymptote horizontale.

1. La courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote horizontale, notée Δ , en $+\infty$ et en $-\infty$.

Justifiez cette affirmation et déterminez une équation de cette asymptote.

2. Pour étudier la position de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à la droite Δ , on compare les nombres $f(x)$ et 3.

Pour cela, on étudie le signe de la différence $f(x) - 3$.

a) Exprimez la différence $f(x) - 3$.

b) Déterminez le signe de cette différence suivant les valeurs de x dans l'ensemble $\mathbb{R} - \{-1\}$.

c) Déduisez-en la position de la courbe $\mathcal{C}_f$ par rapport à la droite Δ .

20 Comparez des courbes à l'infini

f et g sont les fonctions définies sur $[1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} \quad \text{et} \quad g(x) = \sqrt{x^2 - 1}.$$

Δ est la droite d'équation $y = x$.

Objectif Étudier l'allure des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et leur position relative lorsque x tend vers $+\infty$.

1. Les deux fonctions ont pour limite $+\infty$ en $+\infty$.

Justifiez cette affirmation.

2. Les polynômes $x^2 + 1$ et $x^2 - 1$ ont le même terme dominant x^2 . On peut conjecturer que $f(x)$ et $g(x)$ se comportent pour les « grandes valeurs » (positives) de x comme $\sqrt{x^2}$ c'est-à-dire comme x .

a) Comparez, pour $x \geq 1$, les nombres x , $f(x)$ et $g(x)$. Quelles conséquences graphiques pouvez-vous déduire de cette comparaison ?

b) Vérifiez que pour tout $x \geq 1$:

$$f(x) - x = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + x} \quad \text{et} \quad g(x) - x = \frac{-1}{\sqrt{x^2 - 1} + x}.$$

c) Calculez $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x]$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - x]$.

Que pensez-vous de la conjecture faite ?

d) Déduisez-en l'allure des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et leur position relative lorsque x tend vers $+\infty$.

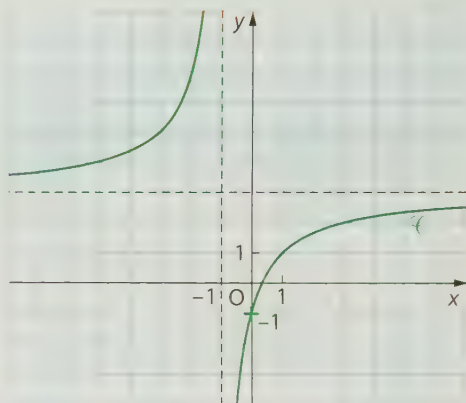
21 Retrouver l'équation d'une courbe

Le graphique ci-dessous donne une partie de la courbe représentative d'une fonction homographique f et de ses deux asymptotes.

Rappel

On appelle fonction homographique toute fonction qui peut s'écrire sous la forme : $f : x \mapsto \frac{ax + b}{cx + d}$, où a, b, c et d sont des nombres tels que $c \neq 0$ et $ad - bc \neq 0$.

La courbe représentative est une hyperbole.



Objectif Retrouver l'expression de $f(x)$.

1. On peut supposer qu'après simplification, $f(x)$ est de la forme $\frac{ax + b}{x + c}$, où a, b et c sont trois nombres à déterminer.

La fonction f est définie pour tout nombre x sauf pour une valeur associée à l'asymptote verticale.

a) Déterminez graphiquement cette valeur.

b) Déduisez-en la valeur de c .

2. La courbe admet une asymptote horizontale qui nous permet de déterminer, par exemple, la limite de f en $+\infty$.

a) Déterminez graphiquement $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

b) Déduisez-en que a est non nul et déterminez sa valeur.

3. Il reste à déterminer la valeur de b . Il suffit pour cela de connaître les coordonnées d'un point de la courbe.

Or, l'ordonnée du point d'intersection de la courbe et de l'axe des ordonnées est égale à -1 .

a) Déterminez b et donnez l'expression de $f(x)$.

b) Calculez $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ afin de vérifier l'exactitude de l'expression trouvée.

Narration de recherche

→ L'objectif n'est pas seulement de résoudre le problème posé : vous devez aussi noter les différentes idées même lorsqu'elles n'ont pas permis de trouver la réponse. Expliquez pourquoi vous avez changé de méthode et ce qui vous a fait avancer.

22 À la recherche d'une fonction

fest une fonction rationnelle définie pour x différent de 0 et de 2. Sa courbe représentative admet trois asymptotes dont les deux axes de coordonnées.

Enfin, $f(1) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = -1$.

Utilisez ces renseignements pour découvrir une telle fonction f .

23 A, B et C sont les points d'abscisses respectives x , $x+1$ et $x+2$ de la courbe représentative de la fonction *racine carrée* dans un repère orthonormé.

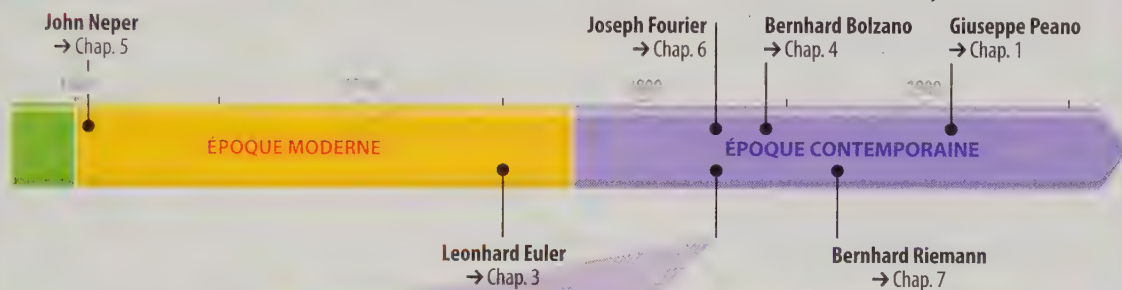
On note $S(x)$ l'aire du triangle ABC.

Étudiez le comportement de $S(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Chercheurs d'hier

Eux aussi, ils ont
cherché avant de trouver !

→ Voici quelques mathématiciens importants qui ont travaillé dans le domaine de l'Analyse.



Augustin-Louis Cauchy (1789-1857)



Entré à seize ans à l'École Polytechnique, il y enseigne une dizaine d'années plus tard, ainsi qu'au Collège de France. Pour des raisons politiques, il s'exile en 1830 mais retrouve son poste de professeur en 1838.

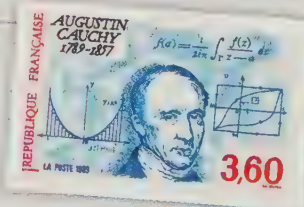
Son œuvre scientifique est considérable, en particulier sa contribution dans l'évolution des Mathématiques.

S'étant notamment efforcé de formuler de manière rigoureuse les découvertes en Analyse, nombreuses en ce XIX^e siècle, il est à l'origine de l'Analyse moderne. Il s'est attaché en particulier à la notion essentielle de limite.

Les définitions suivantes sont extraites de son *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique* (1821) :

« Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur finie, de manière à en différer aussi peu qu'on voudra, cette dernière est appelée limite de toutes les autres.

Lorsque les valeurs numériques successives d'une même variable croissent de plus en plus de manière à s'élever au-dessus de tout nombre donné, on dit que cette variable a pour limite l'infini positif. »



▲
Timbre français édité
pour le bicentenaire
de la naissance de Cauchy.

Sur le Web fr.wikipedia.org/wiki/Augustin_Louis_Cauchy
serge.mehl.free.fr/chrono/Cauchy.html

Travaux dirigés

TP

24 Au voisinage de la limite

COMPÉTENCES

TICE

- Tabuler les valeurs prises par une fonction.
- Utiliser des instructions de calcul formel.

Utiliser les outils de calcul

→ Pour approcher une limite avec une précision donnée

Mathématiques

- Calculer des limites.
- Exploiter le sens de variation d'une fonction.

On considère une fonction f définie sur un intervalle de la forme $[A; +\infty[$ et qui admet une limite finie ℓ en $+\infty$. L'objectif est de déterminer à partir de quelle valeur de x les nombres $f(x)$ deviennent proches de ℓ avec une précision fixée, aussi petite soit-elle.

A Un exemple

La fonction f est définie sur l'intervalle $]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$.

1. Justifiez que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$.
2. Déterminez par le calcul un nombre M tel que : si $x > M$, alors $1,99 < f(x) < 2,01$.
3. Reprenez les calculs pour déterminer à partir de quelle valeur de x les nombres $f(x)$ appartiennent à l'intervalle $]2 - 10^{-6}; 2 + 10^{-6}[$.

B Où les outils de calculs deviennent utiles

La fonction g est définie sur l'intervalle $]-1; +\infty[$ par $g(x) = \frac{5x^3 + x - 1}{x^3 + 1}$.

1. « À la main »

- a) Justifiez que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 5$.
- b) On envisage de déterminer le plus petit entier M tel que : si $x > M$, alors $4,99 < g(x) < 5,01$. Des calculs « à la main » vous permettent-ils, comme dans le A, de répondre à cette question ?

2. Avec la calculatrice

- a) Utilisez la fonction Table (de 0 à 50, pas égal à 1). Quelle est la première valeur entière de x pour laquelle $g(x)$ appartient à l'intervalle $I =]4,99; 5,01[$?
- b) Observez les valeurs prises par g pour x entier de 0 à 50. Quel semble être le sens de variation de g sur l'intervalle $[0; 50]$?

La possibilité de voir les valeurs prises par g « sortir » de l'intervalle I nous oblige à étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

3. Étude des variations de g avec un logiciel de calcul formel

- a) Les résultats, sur la copie d'écran ci-contre, ont été obtenus avec un logiciel de calcul formel, ici GeoGebra.

Déduisez-en :

- les variations de la fonction h et le signe de $h(x)$,
 - la monotonie de la fonction g sur l'intervalle $[10; +\infty[$,
 - que pour tout x de cet intervalle, $g(x) \leq 5,01$.
- b) Quel est le plus petit entier M tel que : si $x > M$, alors $g(x) \in]4,999; 5,001[$?

x	g(x)
5	4.992
6	5
7	5.0029
8	5.0038

Algèbre	
Objets libres	
$g(x) = \frac{5x^3 + x - 1}{x^3 + 1}$	
Objets dépendants	
$g'(x) = \frac{-2x^3 + 18x^2 + 1}{x^6 + 2x^3 + 1}$	
$h(x) = -2x^3 + 18x^2 + 1$	
$h'(x) = -6x^2 + 36x$	

25 Quelle méthode utiliser en présence de radicaux ?

f, g et h sont trois fonctions définies sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$\bullet f(x) = \sqrt{x^2 + x} + x \quad \bullet g(x) = \sqrt{x^2 + x} - 2x \quad \bullet h(x) = \sqrt{x^2 + x} - x$$

OBJECTIF Choisir, pour chacune des fonctions f, g, h , la méthode adaptée pour déterminer sa limite en $+\infty$.

A Préliminaire

Déterminez $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x}$, en précisant les théorèmes utilisés.

B Inventaire des méthodes**1^{re} méthode**

a) Vérifiez que l'utilisation des théorèmes relatifs aux limites et opérations permet de déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Donnez cette limite.

b) Cette méthode convient-elle pour déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$? Justifiez.

2^e méthode

Lorsque l'utilisation de l'expression sous la forme d'une somme conduit à une forme indéterminée, on pense à transformer cette somme en produit.

a) Justifiez la factorisation suivante : pour tout $x > 0$:

$$g(x) = x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x}} - 2 \right).$$

b) Déterminez $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x}}$ et déduisez-en $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

c) Factorisez de même l'expression $h(x)$.

Cette factorisation vous permet-elle de déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$? Justifiez.

3^e méthode

Les deux précédentes méthodes ne permettent pas de déterminer la limite de la différence $h(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

On dispose alors d'une troisième méthode utilisant l'expression conjuguée de $h(x)$: $\sqrt{x^2 + x} + x$.

On se place dans le cas où $\sqrt{x^2 + x} + x$ est non nul, ce qui est réalisé lorsque $x > 0$.

a) Vérifiez qu'en utilisant l'expression $\frac{(\sqrt{x^2 + x} - x)(\sqrt{x^2 + x} + x)}{(\sqrt{x^2 + x} + x)}$, on peut, après simplification, lever l'indétermination.

b) Déterminez $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x)$.

C Applications

Déterminez la limite en $-\infty$ et en $+\infty$ de chacune des fonctions suivantes, définies sur $\mathbb{R}$.

$$\text{a) } f(x) = \sqrt{2x^2 - x + 1} - x \quad \text{b) } g(x) = \sqrt{4x^2 + 3} + 2x$$

1^{re} MÉTHODE

On calcule la limite de chaque terme et on applique les théorèmes relatifs à la somme.

2^e MÉTHODE

On factorise et on applique les théorèmes relatifs au produit.

3^e MÉTHODE

On multiplie et divise par l'expression conjuguée (non nulle) pour lever l'indétermination.

Rappel

$$\sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Entraînement

DE TÊTE

Pour les exercices 26 à 30

Dans chacun des cas, étudiez la limite de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

26 $f(x) = 5x^3 + 8x - 2$.

27 $f(x) = (x^2 - 1)(x^3 + 2)$.

28 $f(x) = \frac{3}{2x - 10}$.

29 $f(x) = x + \frac{1}{x - 1}$.

30 $f(x) = \frac{x}{x - 1} - \frac{x^2}{x + 1}$.

Pour les exercices 31 à 33

Dans chacun des cas, étudiez la limite éventuelle de la fonction f en l'endroit indiqué.

Il peut être nécessaire d'étudier la limite à droite et/ou la limite à gauche.

31 $f(x) = \frac{2x^2 + 3}{x - 2}$

a) En $+\infty$ b) En $-\infty$ c) En 2

32 $f(x) = \frac{1}{x^2} + x$

a) En $+\infty$ b) En $-\infty$ c) En 0

33 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x} - 1}$ en 1.

34 Vrai ou faux ?

La droite d'équation $x = 3$ est asymptote à la courbe représentative de la fonction f définie sur $] -1; +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{3x - 1}{x + 1}.$$

35 Vrai ou faux ?

La fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{0; 2\}$ par $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x - 2}$ admet deux asymptotes verticales et une asymptote horizontale.

36 f et g sont deux fonctions telles que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$.

Avec ces hypothèses, est-il toujours possible de déterminer les limites suivantes ?

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) \times g(x)]$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [2f(x) + g(x)]$

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [2f(x) - g(x)]$

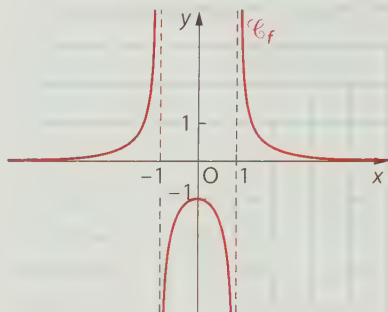
LIMITE D'UNE FONCTION

37 Lectures graphiques

Par convention, la représentation graphique d'une fonction donne avec exactitude l'allure des « branches infinies » de la courbe. Ainsi, on peut lire les limites d'une fonction sur sa courbe représentative.

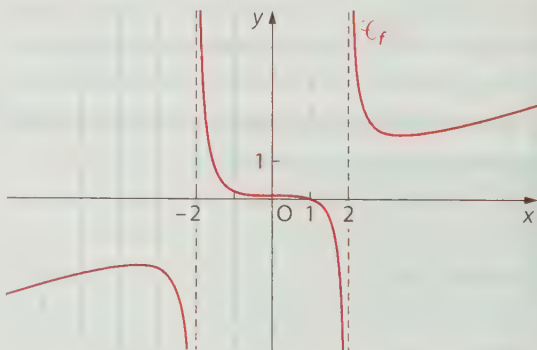
Ceci n'est évidemment pas vrai lorsqu'on observe la courbe représentative d'une fonction sur une calculatrice ou un grapheur.

1. La courbe $\mathcal{C}_f$ ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$.



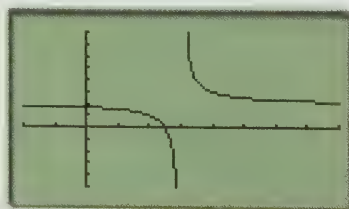
Donnez la limite de f en $-\infty$, en -1^- , en -1^+ , en 1^- , en 1^+ et en $+\infty$.

2. La courbe $\mathcal{C}_f$ ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-2; 2\}$.



Donnez la limite de f en $-\infty$, en -2^- , en -2^+ , en 2^- , en 2^+ et en $+\infty$.

38 L'écran de calculatrice ci-dessous affiche une partie de la courbe représentative d'une fonction f .



Quelles conjectures pouvez-vous émettre concernant des asymptotes éventuelles ?

39 Que pouvez-vous conjecturer concernant une éventuelle limite en 3 de la fonction f dont l'écran ci-dessous donne une partie de la table de valeurs ?

X	Y1
2.98	-100
2.99	-200
3	ERROR
3.01	200

2.98
FORM DEL ROW EDIT G-COM G-FLT

40 Le tableau ci-dessous décrit les variations d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	-5	$+\infty$
f(x)	$+\infty$	-2	3

1. Précisez la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$, puis les équations des éventuelles asymptotes horizontales ou verticales à la courbe représentative de f .

2. Construisez une courbe correspondant au tableau.

41 Le tableau ci-dessous décrit les variations d'une fonction f définie sur $]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$.

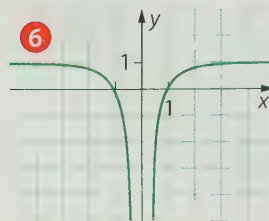
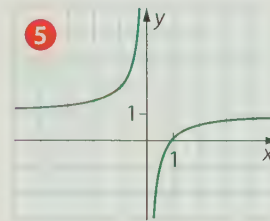
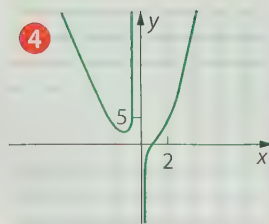
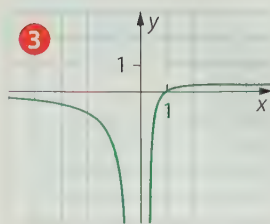
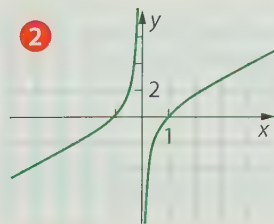
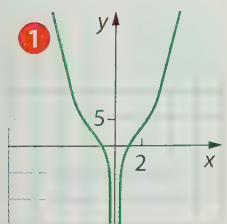
x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
f(x)	$-\infty$	4	$+\infty$	-2

1. Précisez la limite de f en $-\infty$, en 2^- , en 2^+ et en $+\infty$, puis donnez les équations des éventuelles asymptotes horizontales ou verticales à la courbe représentative de f .

2. Construisez une courbe correspondant au tableau.

42 Associez à chacune des fonctions suivantes sa représentation graphique choisie parmi les courbes ci-après.

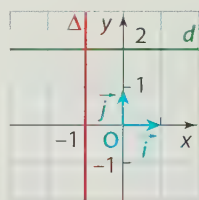
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2-1}{x} & g(x) &= \frac{x^2-1}{x^2} & h(x) &= \frac{x-1}{x^2} \\ k(x) &= \frac{x-1}{x} & m(x) &= x^2 - \frac{1}{x} & n(x) &= x^2 - \frac{1}{x^2} \end{aligned}$$



43 La courbe $\mathcal{C}$, représentative d'une fonction, admet pour asymptotes les droites d et Δ tracées ci-dessous, et ces droites seulement.

Parmi les fonctions suivantes, lesquelles conviennent ?

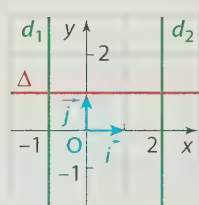
$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2x+3}{x+1} & g(x) &= \frac{2x-1}{x^2-1} \\ h(x) &= \frac{2x^2+2}{(x+1)^2} & k(x) &= \frac{x+2}{2(x+1)} \end{aligned}$$



44 La courbe $\mathcal{C}$, représentative d'une fonction, admet pour asymptotes les droites d_1 , d_2 et Δ tracées ci-dessous, et ces droites seulement.

Pour quelles valeurs de b , les fonctions suivantes conviennent-elles ?

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{x^2+bx}{x^2-x-2} \\ g(x) &= \frac{2x+b}{(x+1)(x-2)} \\ h(x) &= \frac{1}{x+1} + \frac{b}{x-2} + 1 \end{aligned}$$



45 1. Étudiez la limite en $-\infty$, en $+\infty$, en 1^- et en 1^+ de la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par $f(x) = \frac{2x+1}{x-1}$.

2. Précisez les équations des asymptotes et la position de la courbe représentative de f par rapport à l'asymptote horizontale.

46 1. Étudiez la limite en $-\infty$, en $+\infty$, en -1^- et en -1^+ de la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par $f(x) = \frac{-2x}{x+1}$.

2. Précisez les équations des asymptotes et la position de la courbe représentative de f par rapport à l'asymptote horizontale.

47 1. Déterminez l'allure de la représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-2\}$ par $f(x) = \frac{x^2 - 1}{2x + 4}$, pour x proche de -2 .

2. Déterminez un nombre $\alpha > 0$ tel que :
pour tout $x \in]-2 - \alpha; -2[$, $f(x) < -10$.

48 1. Déterminez la limite en $+\infty$ de la fonction définie sur l'intervalle $]1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{5x - 1}{x - 1}$.

2. Trouvez un nombre A tel que si $x > A$, alors $f(x)$ appartient à l'intervalle $]4,9; 5,1[$.

49 1. Déterminez la limite en 1 de la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par $f(x) = \frac{5x - 1}{(x - 1)^2}$.

2. Trouvez un nombre strictement positif α tel que si x appartient à l'intervalle $]1 - \alpha; 1 + \alpha[$, alors $f(x) > 10^3$.

50 La fonction f est définie sur l'intervalle $] - 2; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1 - x^2}{x + 2}.$$

1. Démontrez que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$.

2. Déterminez un nombre A tel que :
si $x > A$, alors $f(x) < -10^3$.

51 1. Justifiez que la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-2\}$ par $f(x) = \frac{1}{(x - 2)^2}$ a pour limite $+\infty$ en 2.

2. Trouvez un intervalle ouvert I , centré en 2, tel que :
pour tout x de I , $x \neq 2$, $f(x) > 100$.

Pour les exercices 52 à 55

Dans chacun des cas, étudiez la limite éventuelle de la fonction f en l'endroit indiqué.

Il peut être nécessaire d'étudier la limite à droite et/ou la limite à gauche.

Vérifiez les résultats avec une calculatrice ou un logiciel de calcul formel.

52 a) $f(x) = x^2 + \sqrt{x} - 5$ en $+\infty$.

b) $f(x) = \sqrt{x} + \frac{5}{x}$ en $+\infty$ et en 0.

53 a) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$ en -1 .

b) $f(x) = \frac{1}{x - x^2}$ en 0.

54 a) $f(x) = \sqrt{2x} - \sqrt{x}$ en $+\infty$.

b) $f(x) = \frac{x + 1}{\sqrt{x} - 1}$ en 1.

55 a) $f(x) = x - 2\sqrt{x} + 7$ en $+\infty$.

b) $f(x) = \frac{x^2 + x - \sqrt{x}}{x^2 + 1}$ en $+\infty$.

56 1. La fonction $f : x \mapsto \frac{x - 1}{(x - 2)(x + 1)}$ est-elle définie pour les réels -1 et 2 ?

2. Étudiez le comportement de $f(x)$ lorsque x tend vers -1 et lorsque x tend vers 2.

57 1. La fonction $f : x \mapsto \frac{x - 1}{x^2 - x - 6}$ est-elle définie pour les réels -2 et 3 ?

2. Étudiez le comportement de $f(x)$ lorsque x tend vers -2 et lorsque x se tend vers 3.

58 ALGORITHMIQUE

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{3 + \sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$.

1. a) Vérifiez que pour tout $x > 0$, f est dérivable et $f'(x) = \frac{-3}{4x\sqrt{x}}$.

b) Déterminez la limite éventuelle ℓ de f en $+\infty$.

c) Dressez le tableau de variation de f .

d) Justifiez l'existence d'une asymptote Δ à $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$ et donnez une équation de Δ .

2. On envisage de déterminer le plus petit entier A tel que pour tout $x \geq A$, $f(x) - \ell < 0,01$.

a) Traduisez graphiquement le problème posé.

b) L'algorithme suivant doit permettre de déterminer un tel entier A .

```
Entrer x
Tantque f(x) .....
    x reçoit ...
FinTantque
Afficher x
```

Complétez-le et programmez votre calculatrice (ou l'ordinateur) afin de résoudre le problème posé.

c) Vérifiez le résultat proposé en utilisant la fonction Table de votre calculatrice.

THÉORÈMES DE COMPARAISON

59 f est une fonction telle que pour tout $x > 1$,

$$\frac{3x + 1}{x} \leq f(x) \leq \frac{3x + 1}{x - 1}.$$

Cet encadrement permet-il de déterminer le comportement de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$?

60 f est une fonction telle que pour tout $x > 0$,

$$\frac{2x - 1}{x} \leq f(x) \leq \frac{3x}{x + 1}.$$

Cet encadrement permet-il de conclure que f admet une limite en $+\infty$?

61 f est une fonction telle que pour tout $x > 0$,

$$-\frac{1}{x} \leq 3f(x) - 1 \leq \frac{1}{x}.$$

Cet encadrement permet-il de déterminer le comportement de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$?

62 f est une fonction et A un nombre tels que pour tout x supérieur à A , $-1 + \frac{1}{x} \leq f(x) \leq 1 + \frac{1}{x}$.

Peut-on en conclure que f admet une limite en $+\infty$ et que cette limite est comprise entre -1 et 1 ?

63 f est une fonction telle que pour tout nombre $x < 0$, $f(x) \geq \frac{1}{4}x^2$. f a-t-elle une limite en $-\infty$?

64 LOGIQUE Implication directe et réciproque

Pour chaque implication (« Si..., alors... ») :

a) Précisez si elle est vraie.

b) Énoncez sa réciproque.

c) Cette implication réciproque est-elle vraie ? Justifiez.

1. f est une fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

Si pour tout $x \geq 0$, $f(x) \geq \sqrt{x}$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

2. f , g et h sont trois fonctions définies sur un intervalle $I = [A; +\infty[$ et pour tout x de I , $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$.

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \ell$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \ell$.

3. f est une fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

Si f est bornée, alors f admet une limite finie ℓ en $+\infty$.

LIMITE D'UNE FONCTION COMPOSÉE

Pour les exercices 65 à 67

Dans chacun des cas, étudiez la limite éventuelle de la fonction f en chacun des endroits indiqués.

65 a) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$; en $-\infty$ et en $+\infty$.

b) $f(x) = \sqrt{x + \frac{1}{x}}$; en $+\infty$ et en 0.

c) $f(x) = \sqrt{\frac{4x-1}{x+3}}$; en $+\infty$.

66 a) f définie sur $]3; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{\frac{x+2}{x-3}}$; en 3.

b) f définie sur $] -2; 4[\cup]4; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+2}-2}{\sqrt{x+5}-3} ; \text{ en } 4.$$

67 a) f définie sur $] -\infty; \frac{2}{3}[$ par $f(x) = \sqrt{\frac{x^2}{3-2x}}$; en $-\infty$.

b) f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \left(x - \sqrt{x} + \frac{1}{x}\right)^3$; en $+\infty$.

LIMITES ET SUITES

Pour les exercices 68 et 69

Dans chacun des cas, étudiez la limite éventuelle de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$.

68 a) $u_n = \sqrt{\frac{n^2+1}{2n+1}}$ b) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

69 a) $u_n = \sqrt{\frac{2n+3}{n+3}}$ b) $u_n = (n+1)^2 - \sqrt{n+1}$.

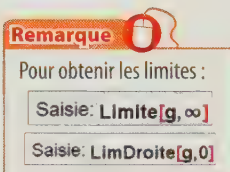
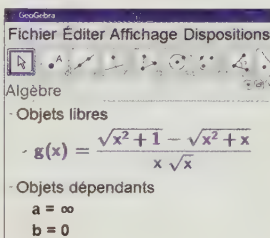
70 1. Démontrez par récurrence que, pour tout entier naturel n , $2^n > n$.

2. Utilisez le résultat précédent pour étudier la limite de la suite (u_n) dans chacun des cas suivants.

a) $u_n = \frac{3 \times 2^n + 1}{2^n + 3}$ b) $u_n = \frac{2^n - 1}{4^n + 1}$

AVEC LES TIC

71 1. Sur la vue d'écran ci-dessous, la fonction g est définie sur l'intervalle $I =]0; +\infty[$, a et b sont les limites de g aux bornes de I . Précisez la limite de la fonction g à droite en 0 et sa limite en $+\infty$.



2. Retrouvez ces résultats par le calcul.

3. Précisez la position de la courbe par rapport à son asymptote en $+\infty$.

72 1. Utilisez un outil de calcul formel pour déterminer les limites suivantes.

a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x+1}}$ b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2+x}{\sqrt{x^2+4}-2}$

2. Retrouvez ces résultats par le calcul.

Prendre toutes les initiatives

73 f et g sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 2}{(x+1)^2} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{2x+7}{x+1}.$$

Leurs courbes représentatives ont-elles les mêmes asymptotes ?

74 Étudiez $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+2} - \sqrt{x^2+x})$.

75 Étudiez $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+2} - ax)$ suivant les valeurs du nombre a .

76 Travail en autonomie

→ Rédigez la solution de cet exercice en vous aidant du guide.



Sur le Web

Retrouvez le corrigé de cet exercice sur le site www.transmathlycee.net/eleve-TermS

Vrai ou Faux

Pour chacune des affirmations ci-dessous, précisez si elle est vraie ou fausse. Justifiez votre réponse.

1. Si a est un nombre réel quelconque et f une fonction définie et strictement décroissante sur $[a; +\infty[$, alors

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

2. f et g sont deux fonctions définies sur $[0; +\infty[$, g ne s'annule pas. Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$,

$$\text{alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = -1.$$

3. Si f est une fonction définie sur $[0; +\infty[$ telle que $0 \leq f(x) \leq \sqrt{x}$ sur $[0; +\infty[$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

4. On considère un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

Si f est une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$, alors la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à la courbe représentative de f dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Analyser l'énoncé

Les quatre affirmations sont indépendantes. Essayez de relier ces affirmations à des théorèmes connus.

Analyser l'énoncé

Une vision « graphique » de la situation semble utile ici.

Analyser l'énoncé

Les hypothèses sur f et g conduisent à un cas d'indétermination. Cette affirmation est donc fausse.

Analyser l'énoncé

Un encadrement est donné par hypothèse. Le réflexe : le théorème des gendarmes.

Analyser l'énoncé

Une vision « graphique » de la situation semble utile ici.

Guide

1. Si la fonction f n'a pas pour limite $-\infty$ en $+\infty$, sachant qu'elle est décroissante, imaginez graphiquement l'allure de la courbe pour les grandes valeurs de x . Les fonctions de référence fournissent facilement un contre-exemple.

2. Pour trouver un contre-exemple, contentez-vous de prendre pour f et g des fonctions polynômes.

3. L'encadrement donné par hypothèse doit vous inciter à encadrer le quotient $\frac{f(x)}{x}$, puis à utiliser éventuellement le théorème dit « des gendarmes ».

4. Traduisez en termes de limites l'existence de cette asymptote : le fait que f n'est pas définie pour $x = 0$ entraîne-t-il nécessairement que f admet une limite infinie à gauche et/ou à droite en 0 ?

Vous pouvez vous contenter d'un dessin pour terminer.

ZOOM sur la rédaction

Précisez clairement que votre contre-exemple vérifie les hypothèses et infirme la conclusion.

ZOOM sur la rédaction

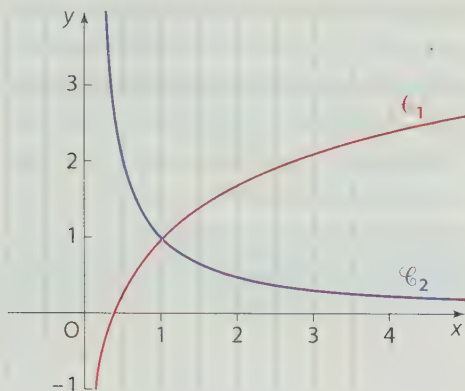
N'oubliez pas de justifier pourquoi on peut, ici, supposer x non nul.

ZOOM sur la rédaction

Un dessin bien expliqué peut, dans ce cas, avoir valeur de preuve.

77 BAC QCM

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormé les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ représentatives de deux fonctions f_1 et f_2 définies sur l'intervalle $]0; +\infty[$.



On sait que :

- l'axe des ordonnées est asymptote aux courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$;
- l'axe des abscisses est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_2$;
- la fonction f_1 est strictement croissante sur $]0; +\infty[$;
- la fonction f_2 est strictement décroissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$;
- la limite quand x tend vers $+\infty$ de $f_1(x)$ est $+\infty$.

Pour chacune des questions, une seule des trois propositions est exacte. Indiquez laquelle en justifiant votre réponse.

1. La limite quand x tend vers 0 de $f_2(x)$ est :

- a) 0 b) $+\infty$ c) On ne peut pas conclure.

2. La limite quand x tend vers $+\infty$ de $f_2(x)$ est :

- a) 0 b) 0,2 c) On ne peut pas conclure.

3. Le tableau de signes de $f_2(x) - f_1(x)$ est :

a)			
	x	0	$+\infty$
	$f_2(x) - f_1(x)$		+

b)			
	x	0	$+\infty$
	$f_2(x) - f_1(x)$		-

c)

x	0	1	$+\infty$
$f_2(x) - f_1(x)$		+	-

78 QCM

Pour chaque question, plusieurs propositions peuvent être exactes. Indiquez lesquelles en justifiant à chaque fois votre réponse.

f est la fonction définie sur $\mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}\right\}$ par $f(x) = \frac{3x+1}{2x+3}$ et $\mathcal{C}$ est sa représentation graphique dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{3}{2}$

c) $\lim_{x \rightarrow -\frac{3}{2}^+} f(x) = -\infty$

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\frac{3}{2}$

2. La courbe $\mathcal{C}$ admet comme asymptote la droite d'équation :

a) $x = -3$ b) $y = \frac{3}{2}$ c) $x = -\frac{3}{2}$ d) $y = 3$

3. Sur l'intervalle $\left]-\frac{3}{2}; +\infty\right[$, la courbe $\mathcal{C}$:

- a) est au-dessus de son asymptote horizontale.
b) est au-dessous de son asymptote horizontale.
c) coupe son asymptote horizontale.

79 Vrai ou faux

Pour chacune des affirmations ci-dessous, précisez si elle est vraie ou fausse. Justifiez votre réponse.

1. Si pour tout $x > 0$, $f(x) \leq \frac{2}{x}$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

2. Si pour tout $x > 0$, $2 + \frac{2}{x} \leq f(x) \leq 2 + \frac{3}{x}$, alors :
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$.

3. Si pour tout $x > 0$, $1 + \frac{3}{x} \leq f(x) \leq 2 + \frac{3}{x}$, alors la fonction f admet une limite en $+\infty$ comprise entre 1 et 2.

4. Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$, la courbe représentative de f ne coupe pas la droite d'équation $y = a$.

80 Vrai ou faux

f et g sont deux fonctions définies sur l'intervalle $[1; +\infty[$.

Pour chacune des affirmations ci-dessous, précisez si elle est vraie ou fausse. Justifiez votre réponse.

1. Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, alors :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

2. Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$, alors :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1.$$

3. Si pour tout $x \geq 1$, $g(x) - f(x) \leq 0$,
et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

4. Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

5. Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

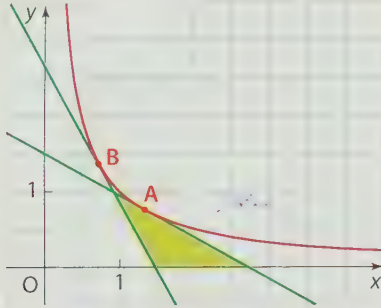
6. Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$, alors il existe $a \in [1; +\infty[$ tel que pour tout $x \in [a; +\infty[$, $f(x) = g(x)$.

D'après concours ESIEE 2008

Pour aller plus loin

81 Limite d'une aire

La courbe rouge ci-dessous représente dans un repère orthonormé la fonction f définie pour $x > 0$ par $f(x) = \frac{1}{x}$. a est strictement supérieur à 1.



Les points A et B de la courbe ont pour abscisses respectives a et $\frac{1}{a}$.

On note $S(a)$ l'aire du triangle coloré déterminé par les tangentes en A et B à la courbe et l'axe des abscisses.

Étudiez la limite de $S(a)$ lorsque a tend vers $+\infty$.

82 Image de l'image

f est la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x+3}{x-1}.$$

1. Calculez $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$.

2. a) Vérifiez que pour tout $x > 1$, $f(x) \in]1; +\infty[$.

b) Déterminez $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(f(x))$.

3. Retrouvez cette dernière limite en explicitant $f(f(x))$.

83 Calculez, suivant les valeurs du nombre a , la limite en $+\infty$ de la fonction f définie par :

$$f(x) = \sqrt{x^3 + ax^2 + ax} - x\sqrt{x+1}.$$

84 Majorée par sa limite

Démontrez la propriété suivante.

Si une fonction f définie et croissante sur un intervalle $I = [A; +\infty[$ admet une limite finie ℓ lorsque x tend vers $+\infty$, alors pour tout x de I , $f(x) \leq \ell$.

Aide

Voir la démonstration du théorème 9 du chapitre 1, p. 28.

85 Avec la partie entière

Étudiez la limite en $+\infty$ de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{E(x)}{x}$, où E est la fonction partie entière.

Rappel

Pour tout réel x , $E(x)$ est l'unique entier relatif tel que :
 $E(x) \leq x < E(x) + 1$.

86 Des points liés

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A(1; 2)$ et $B(-3; 1)$.

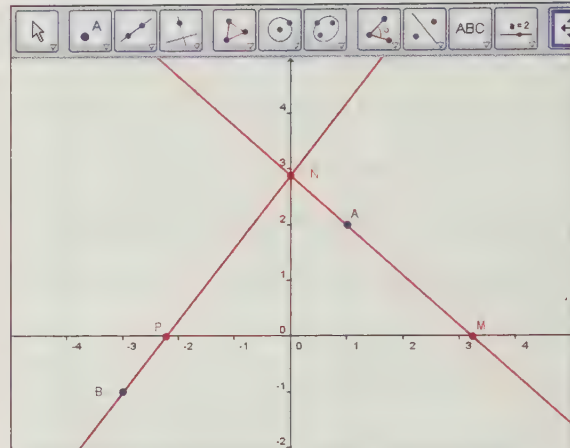
À tout nombre $m \neq 1$, on associe le point $M(m; 0)$.

La droite (AM) coupe l'axe des ordonnées en N et la droite (BN) coupe l'axe des abscisses en P.

On note $f(m)$ l'abscisse du point P.

1. Conjecturer avec GeoGebra

a) Reproduisez la figure ci-dessous.



b) Saisissez le point M et déplacez-le sur l'axe des abscisses.

Que devient le point P :

- lorsque $m \rightarrow +\infty$?
- lorsque $m \rightarrow -\infty$?
- lorsque $m \rightarrow 1$?
- lorsque $m \rightarrow \frac{1}{3}$?

2. Démontrer

a) Déterminez, en fonction de m , l'ordonnée du point N.

b) Déduisez-en l'abscisse $f(m)$ du point P.

c) Retrouvez par le calcul les limites conjecturées en 1. b).

87 Positions relatives

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x}$$

et la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2$.

$\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont les représentations graphiques respectives de f et de g dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminez les limites éventuelles de la fonction f en $-\infty$, 0^- , 0^+ et $+\infty$.

2. Utilisez votre calculatrice pour obtenir les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

Quelles conjectures pouvez-vous émettre ?

3. Déterminez la position relative des deux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ en fonction de x .

4. Pour x non nul, on note M et P les points de coordonnées respectives $(x; f(x))$ et $(x; g(x))$.

a) Que pouvez-vous conjecturer concernant le segment $[MP]$:

- lorsque x tend vers $+\infty$?
- lorsque x tend vers $-\infty$?

b) Démontrez votre conjecture par le calcul.

ASYMPTOTES OBLIQUES

88 On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{0\}$ par :

$$f(x) = -x + 1 + \frac{1}{x}.$$

1. Déterminez $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

2. a) Dans les calculs précédents, vous avez utilisé le fait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

$f(x)$ diffère donc de l'expression $-x + 1$ d'une quantité qui tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$ ou vers $-\infty$.

Que pouvez-vous en déduire graphiquement ?

b) Représentez, à l'aide de votre calculatrice ou d'un traceur de courbe, la courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite Δ d'équation $y = -x + 1$.

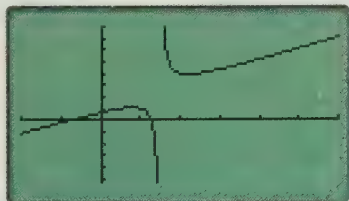
Définition

La droite d'équation $y = -x + 1$ est dite **asymptote oblique** à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $-\infty$ et en $+\infty$.

89 f est la fonction sur $\mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}\right\}$ par :

$$f(x) = \frac{2x^2 - x - 2}{2x - 3}.$$

La vue d'écran ci-dessous est une fenêtre sur la représentation graphique $\mathcal{C}_f$ de f .



1. Utilisez cette vue d'écran pour conjecturer :

- a)** la limite éventuelle de f en $-\infty$, en $+\infty$ et en $\frac{3}{2}$;
- b)** une équation de l'asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.

2. Vérifiez par le calcul l'exactitude de vos conjectures.

3. a) Quelle est l'allure de la courbe lorsque x tend vers $-\infty$? vers $+\infty$?

b) La fonction rationnelle f se comporte à l'infini comme le quotient des monômes de plus haut degré, soit comme $\frac{2x^2}{2x}$, donc comme x .

On peut ainsi conjecturer que la courbe $\mathcal{C}_f$ prend vers l'infini la direction de la droite d'équation $y = x$.

Utilisez votre calculatrice pour représenter f et la droite d'équation $y = x$. Que constatez-vous ?

c) Quelle modification vous semble nécessaire pour approcher au plus près les branches infinies de la courbe $\mathcal{C}_f$ par une droite ? Faites cette modification.

4. a) Déterminez a , b et c tels que pour tout $x \neq \frac{3}{2}$,

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{2x - 3}.$$

b) Déterminez :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)].$$

Quelle conséquence graphique en déduisez-vous ? Cela confirme-t-il votre choix fait en **3. c)** ?

90 On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de la fonction définie sur $\mathbb{R} - \left\{-\frac{3}{2}\right\}$ par $f(x) = \frac{x^2 - 5}{2x + 3}$.

1. Déterminez $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

2. La fonction rationnelle f se comporte à l'infini comme le quotient $\frac{x^2}{2x}$ (des monômes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur), c'est-à-dire comme $\frac{x}{2}$.

a) Représentez, à l'aide de votre calculatrice ou d'un traceur de courbe, la courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite δ d'équation $y = \frac{x}{2}$.

b) Graphiquement, la droite δ vous semble-t-elle un bon « guide » pour le tracé de la courbe $\mathcal{C}_f$ lorsque x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$? Étudiez le comportement de la différence $f(x) - \frac{x}{2}$ lorsque x tend vers $+\infty$ et lorsque x tend vers $-\infty$.

3. a) Vérifiez qu'il existe trois nombres a , b et c tels que pour tout $x \neq -\frac{3}{2}$, $f(x) = ax + b + \frac{c}{2x + 3}$.

b) Représentez graphiquement la droite Δ d'équation $y = ax + b$ (où a et b sont les nombres précédemment trouvés). Que pouvez-vous dire de la droite Δ ? Justifiez votre réponse.

91 En vous inspirant de l'étude faite dans l'exercice **90**, démontrez l'existence d'une asymptote oblique en $+\infty$ et en $-\infty$ à la courbe représentative de la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$ par $f(x) = \frac{x^2 - 7x + 3}{x - 2}$ et donnez son équation réduite.

Fonction exponentielle



D'un siècle
à un autre

Le ragondin, mammifère d'Amérique du Sud introduit en Europe au XIX^e siècle pour sa fourrure, est maintenant classé dans les espèces envahissantes : en l'absence des prédateurs naturels de son habitat d'origine comme le puma ou le caïman, il se reproduit très rapidement. Cette prolifération à taux de croissance constant est dite « exponentielle ».

Dans son *Traité des infiniment petits* (1748), Euler donne une définition et un calcul de la fonction exponentielle, en introduisant la notation e^x .



En savoir plus sur
Leonhard Euler

→ Chercheurs d'hier, p. 91

► Nombre dérivé

f est une fonction définie sur un intervalle I .
 a appartient à I et h est un nombre tel que $a + h$ appartient à I .

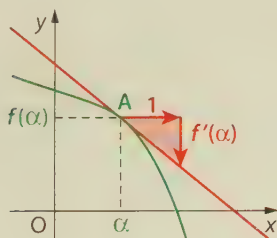
f est dérivable en a si le taux d'accroissement $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ de f entre a et $a + h$ a une limite finie quand h tend vers 0 :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a), \text{ nombre dérivé de } f \text{ en } a.$$

► Équation de la tangente à une courbe en un point

f est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I ; α est un nombre de I .
La courbe représentative de f admet au point d'abscisse α une tangente de coefficient directeur $f'(\alpha)$ et d'équation réduite :

$$y = f'(\alpha)(x - \alpha) + f(\alpha).$$



► Comparaison à l'infini

f et g sont deux fonctions définies sur $I =]b ; +\infty[$.

Si pour tout x de I , $f(x) \leq g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$.

► Limite d'une fonction composée

f et g sont deux fonctions.

Chacune des lettres a , b et c désigne soit un nombre, soit $+\infty$, soit $-\infty$.

Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ et $\lim_{x \rightarrow b} g(x) = c$,

alors $\lim_{x \rightarrow a} g(f(x)) = c$.

1 QCM

Pour chaque question, une seule affirmation est exacte. Identifiez-la en justifiant votre réponse.

f est la fonction polynôme définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 1.$$

On rappelle que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Sa fonction dérivée est f' définie par $f'(x) = 4x - 3$.

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$.

1. a) f est strictement décroissante sur l'intervalle $[-5 ; 1]$.

b) f est strictement croissante sur l'intervalle $\left[\frac{3}{4} ; +\infty\right]$.

c) f et f' varient dans le même sens.

2. La tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 2 a pour équation :

a) $y = 5(x - 2) + 2$

b) $y = 5x - 7$

c) $y = 3x - 7$

3. La droite d d'équation $y = x + 1$:

a) est tangente à $\mathcal{C}_f$

b) coupe $\mathcal{C}_f$

c) n'a pas de point commun avec $\mathcal{C}_f$.

4. Les tangentes à $\mathcal{C}_f$ aux points d'abscisses 0 et 2 :

a) sont parallèles

b) se coupent en $A(1 ; -3)$

c) coupent l'axe $(O ; \vec{j})$ en des points d'ordonnées entières.

2 Vrai ou faux

1. f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

Si pour tout nombre $x > 0$, $f(x) - x^2 > 0$,

alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.

$$2. \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{4x+1}{x+2}} = \frac{5}{3}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{4x+1}{x+2}} = 2.$$

4. f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

Si $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 2$ et $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$,

alors $\lim_{x \rightarrow 2} f(f(x)) = 3$.



Activité 1 LA CROISSANCE EXPONENTIELLE



Estimer la population mondiale des prochaines décennies est une préoccupation importante des économistes. Savoir si la Terre pourra nourrir tous ses habitants est, en effet, une question essentielle.

Pour cela, il est nécessaire de recourir à des modélisations de la croissance de cette population.

Le modèle démographique retenu par certains économistes, comme l'Anglais Thomas Robert Malthus (1766–1834), est celui d'une évolution selon une progression (suite) géométrique, ce qui signifie que le taux d'évolution d'une année à l'autre est constant.

Autrement dit, si P_n désigne la population mondiale à l'année n , le rapport $\frac{P_{n+1} - P_n}{P_n}$ est constant.

On parle alors de **croissance exponentielle**.

Ce vocabulaire est aussi utilisé en biologie et en mathématiques.

1 Évolution démographique

La population mondiale a atteint officiellement 7 milliards d'habitants le 31 octobre 2011, avec un taux de croissance estimé à environ 1,2 % par an.

On fait l'hypothèse d'une croissance exponentielle avec un taux de croissance constant de 1,2 % par an. Répondez aux questions suivantes, à l'aide d'une calculatrice ou d'un tableur.

- a) De combien d'habitants sera la population dans 20 ans ?
- b) Dans combien d'années atteindra-t-elle 10 milliards ?
- c) Combien d'années seront nécessaires au doublement de la population ?

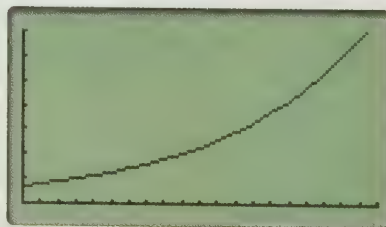
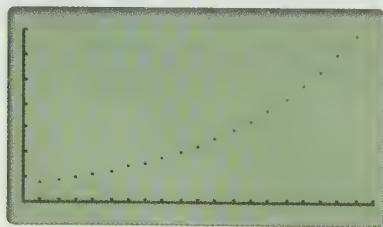
Cette hypothèse a été critiquée dès son émission comme étant trop simplificatrice et conduisant à des prévisions inutilement alarmistes. Il existe d'autres modèles de croissance, comme le modèle de Verhulst (voir l'exercice 21, p. 93).

2 Vers une représentation par une courbe

a) Représentez sur votre calculatrice les dix premiers termes de la suite géométrique de raison $1,012^{10}$ et de premier terme 7 (c'est-à-dire telle que pour tout entier naturel n , $a_n = 7 \times 1,012^{10n}$), qui correspond à l'évolution de la population mondiale suivant la modélisation vue en 1, de décennie en décennie. Fenêtre d'affichage : X de 0 à 20, pas 1 ; Y de 0 à 70, pas 10.

b) Représentez la fonction $x \mapsto 7 \times 1,012^{10x}$ pour $x \in [0 ; 15]$. (Utilisez la touche $(\wedge)$.)

Comparez la courbe obtenue avec la représentation précédente.



Conclusion : La calculatrice permet d'obtenir une courbe qui coïncide, pour les points d'abscisses entières, avec la représentation de la suite.

Activité 2

VERS UNE FONCTION ÉGALE À SA DÉRIVÉE



1 Une famille de droites

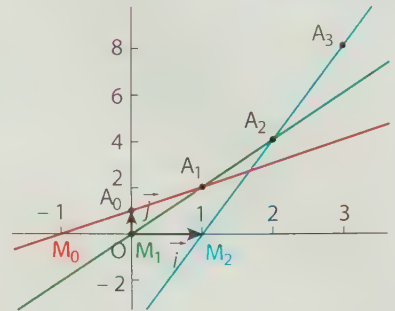
Sur la figure ci-contre, sont représentés, dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, les premiers termes de la suite géométrique (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = 2^n$.

Pour tout entier naturel n , on note A_n le point de coordonnées $(n; 2^n)$ et M_n l'intersection de $(A_n A_{n+1})$ avec l'axe des abscisses.

a) Quelle conjecture faites-vous concernant les abscisses des points M_0, M_1 et M_2 ? Démontrez-la.

b) On suppose avoir poursuivi la représentation des termes de la suite (u_n) et donc la construction des points M_n .

Vérifiez que pour tout entier naturel n , la droite $(A_n A_{n+1})$ a pour équation $y = 2^n x + 2^n(1 - n)$ et qu'elle coupe l'axe des abscisses en $M_n(n - 1; 0)$.



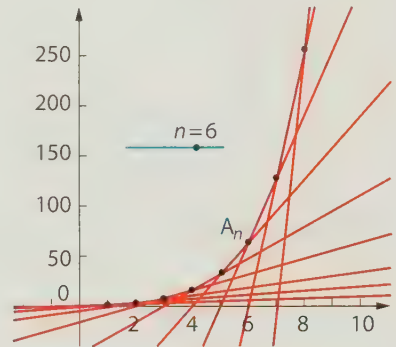
2 Mise en œuvre avec GeoGebra

a) Créez successivement :

- un curseur n (0 à 8 ; incrément 1),
- la suite de points $A_n = (n, 2^n)$,
- la droite $(A_n A_{n+1})$.

b) Faites afficher la trace de la droite lorsque le curseur varie. (Échelle : 1:20)

On conçoit l'existence de courbes représentatives de fonctions dérivables et strictement croissantes sur $\mathbb{R}$, ayant pour tangentes les droites $(A_n A_{n+1})$.



3 Une propriété caractéristique

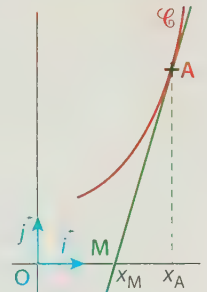
On suppose l'existence d'une fonction f dérivable et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ dont la courbe $\mathcal{C}$ dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ vérifie la propriété $\mathcal{P}$: pour tout point A de $\mathcal{C}$, la tangente en A à $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses en un point M d'abscisse $x_M = x_A - 1$.

a) Quelle hypothèse permet d'affirmer que $f'(x_A) > 0$?

b) Déterminez une équation de la tangente en A à $\mathcal{C}$.

c) Déduisez-en que M a pour abscisse $x_A - \frac{f(x_A)}{f'(x_A)}$.

d) Déduisez-en que la fonction f vérifie la propriété $\mathcal{P}$ si et seulement si $f' = f$. La fonction exponentielle étudiée dans ce chapitre est l'une de ces fonctions.



Problème ouvert

Refaites cet exercice après le chapitre 3.

... Est-il plus facile ?

Dans une chambre froide dont la température reste constante à 0°C , on place, à l'instant $t = 0$, un liquide dont la température est 70°C . Cinq minutes plus tard, sa température est de 60°C .

On conçoit que la température du liquide baisse continuellement, mais de moins en moins vite.

On admet que la température, exprimée en degré Celsius, est une fonction du temps t , notée θ , telle que $\theta'(t)$ soit proportionnel à la différence entre la température du liquide et celle de la pièce, c'est-à-dire $\theta'(t) = k(\theta(t) - 0)$. Quelle sera la température du liquide après 15 minutes ?

1

La fonction exponentielle

Théorème 1

f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, a et b sont deux nombres ($a \neq 0$).

Alors la fonction $g : x \mapsto f(ax + b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Sa dérivée g' est définie par $g'(x) = af'(ax + b)$.

Démonstration

Pour tout nombre $h \neq 0$, notons $\tau(h)$ le taux d'accroissement de g entre x et $x + h$:

$$\tau(h) = \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = \frac{f(ax+h+b) - f(ax+b)}{h}.$$

$$\text{Le nombre } a \text{ étant non nul, } \tau(h) = a \times \frac{f(ax+b+ah) - f(ax+b)}{ah}.$$

$$\text{Posons } ax+b = X \text{ et } ah = H; \text{ alors } \tau(h) = a \times \frac{f(X+H) - f(X)}{H}.$$

$$\text{Or : } \lim_{h \rightarrow 0} H = 0 \text{ et } \lim_{H \rightarrow 0} \frac{f(X+H) - f(X)}{H} = f'(X).$$

D'après le théorème sur la limite d'une fonction composée (chapitre 2, théorème 3, p. 58) :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(ax+b+ah) - f(ax+b)}{ah} = f'(ax+b).$$

Il en résulte $\lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = a \times f'(ax+b)$. Ainsi, g est dérivable en x .

Ce résultat étant vrai pour tout nombre x , g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = af'(ax+b)$.

Théorème 2

Il existe une **unique** fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

pour tout nombre x , $f'(x) = f(x)$, et $f(0) = 1$.

Démonstration exigible

L'existence d'une telle fonction est admise. Démontrons son unicité.

• Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

Prouvons que f ne s'annule jamais sur $\mathbb{R}$.

Considérons la fonction ϕ définie sur $\mathbb{R}$ par $\phi(x) = f(x) \times f(-x)$.

Produit de deux fonctions dérivables, la fonction ϕ est dérivable et pour tout nombre x ,

$\phi'(x) = f'(x) \times f(-x) + f(x) \times [-1 \times f'(-x)]$ d'après le théorème 1,

$\phi'(x) = f'(x) \times f(-x) - f(x) \times f'(-x)$.

Par hypothèse, pour tout nombre x , $f'(x) = f(x)$.

Il en résulte que pour tout nombre x , $\phi'(x) = f(x) \times f(-x) - f(x) \times f(-x) = 0$.

La fonction ϕ est donc constante sur $\mathbb{R}$.

Or, $\phi(0) = f(0) \times f(0) = 1$; donc pour tout nombre x , $\phi(x) = 1$, soit $f(x) \times f(-x) = 1$ [1].

On en déduit que pour tout nombre x , $f(x) \neq 0$ et $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$.

• Supposons qu'il existe une fonction g , différente de f , dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $g' = g$ et $g(0) = 1$.

Considérons la fonction ψ définie sur $\mathbb{R}$ par $\psi(x) = g(x) \times f(-x)$.

La fonction ψ est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc ψ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre x ,

$\psi'(x) = g'(x) \times f(-x) + g(x) \times [-f'(-x)] = g(x) \times f(-x) - g(x) \times f(-x) = 0$.

ψ est donc constante sur $\mathbb{R}$. Sa valeur est définie par $\psi(0) = g(0) \times f(0) = 1$.

Ainsi, pour tout x de $\mathbb{R}$, $\psi(x) = 1$, soit $g(x) \times f(-x) = 1$ [2].

D'où, d'après [1] et [2], pour tout nombre x , $f(x) \times f(-x) = g(x) \times f(-x) = 1$.

Comme f ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$, on peut simplifier l'égalité $f(x) \times f(-x) = g(x) \times f(-x)$, et pour tout nombre x , $f(x) = g(x)$. Or, ce résultat est absurde puisque, par hypothèse, $f \neq g$.

• Conclusion : la fonction f est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant $f' = f$ et $f(0) = 1$.

ROC

→ Exercice 78

« Le jour du BAC ».

LOGIQUE

Démonstration par l'absurde

→ p. 468

Définition 1

La fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$ est appelée **fonction exponentielle**.
On la note **exp**.

Conséquences immédiates

- La fonction exponentielle $\exp : x \mapsto \exp(x)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$,
 $(\exp)' = \exp$ et $\exp(0) = 1$.
- Pour tout nombre x , $\exp(x) \neq 0$ et $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$.

Théorème 3

a et b sont deux nombres, $a \neq 0$.

La fonction f définie par $f(x) = \exp(ax + b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre x ,

$$f'(x) = a \times \exp(ax + b).$$

Cela résulte directement de l'application du théorème 1 à la fonction exponentielle.

Exemple. Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \exp(-3x + 1)$.
 h est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre x , $h'(x) = -3 \exp(-3x + 1)$.

2**Propriétés de la fonction exponentielle****2.1 Propriétés****Théorème 4**

Pour tous nombres a et b , $\exp(a + b) = \exp(a) \times \exp(b)$.

Démonstration. Soit b un nombre quelconque. Le nombre $\exp(b)$ est non nul.

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{\exp(x + b)}{\exp(b)}$.

La fonction $x \mapsto \exp(x + b)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et a pour dérivée $x \mapsto 1 \times \exp'(x + b)$ (voir § 1).

Donc, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre x , $g'(x) = \frac{\exp'(x + b)}{\exp(b)} = \frac{\exp(x + b)}{\exp(b)} = g(x)$.

De plus, $g(0) = \frac{\exp(b)}{\exp(b)} = 1$.

La fonction g est donc telle que $g' = g$ et $g(0) = 1$: c'est la fonction exponentielle.

Ainsi, pour tout x de $\mathbb{R}$, $\exp(x) = \frac{\exp(x + b)}{\exp(b)}$, d'où $\exp(x + b) = \exp(x) \times \exp(b)$.

Pour $x = a$, on obtient $\exp(a + b) = \exp(a) \times \exp(b)$.

Remarque. L'égalité $\exp(a + b) = \exp(a) \times \exp(b)$ signifie que la fonction exponentielle transforme les sommes en produits.

Théorème 5

Pour tous nombres a et b , $\exp(a - b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$.

Démonstration. D'après le théorème 4, $\exp(a - b) = \exp(a + (-b)) = \exp(a) \times \exp(-b)$.

Or, pour tout nombre x , $\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$ (conséquence de la définition 1)

Il en résulte que $\exp(a - b) = \exp(a) \times \frac{1}{\exp(b)} = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}$.

Théorème 6

Pour tout nombre x et tout entier relatif n , $\exp(nx) = [\exp(x)]^n$.

Démonstration

- Démontrons par récurrence l'égalité dans le cas où n est un entier naturel.

Notons $\mathcal{P}_n$ la proposition : $\exp(nx) = [\exp(x)]^n$, avec $n \in \mathbb{N}$.

– Initialisation

Pour $n = 0$, pour tout nombre x , $\exp(0x) = \exp(0) = 1 = [\exp(x)]^0$, car $\exp(x) \neq 0$.

La proposition $\mathcal{P}_0$ est donc vraie.

– Hérédité

Supposons la proposition $\mathcal{P}_n$ vraie, c'est-à-dire $\exp(nx) = [\exp(x)]^n$.

Examinons la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$.

D'après le théorème 4 : $\exp[(n+1)x] = \exp(nx + x) = \exp(nx) \times \exp(x)$.

Or, par hypothèse de récurrence, $\exp(nx) = [\exp(x)]^n$;

donc $\exp[(n+1)x] = [\exp(x)]^n \times \exp(x)$, soit $\exp[(n+1)x] = [\exp(x)]^{n+1}$.

Ainsi, la proposition $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

– Conclusion

Comme la proposition $\mathcal{P}_n$ est vraie au rang 0 et héréditaire, on conclut que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n .

- Démontrons maintenant l'égalité dans le cas où n est un entier négatif.

Soit n un entier négatif, alors $n = -m$ avec m entier naturel.

Pour tout nombre x , $\exp(nx) = \exp(-mx) = \frac{1}{\exp(mx)} = \frac{1}{[\exp(x)]^m} = [\exp(x)]^{-m} = [\exp(x)]^n$.

Conséquence, déf.1

Car m

- Conclusion : On a donc prouvé que l'égalité est vraie pour tout entier relatif n .

2.2 | Nouvelle notation de la fonction exponentielle

On pose $e = \exp(1)$.

Une calculatrice indique $e \approx 2,718$.

Conséquences

D'après le théorème 6, pour tout entier relatif n , $\exp(n) = [\exp(1)]^n = e^n$.

On étend cette égalité à l'ensemble des nombres réels. Ainsi :

Pour tout nombre x , $\exp(x) = e^x$.

On lit « exponentielle de x » ou « e exposant x ».

D'où les notations simplifiées :

- $e^0 = 1$; $e^1 = e$.
- Pour tous nombres a et b , $e^{a+b} = e^a \times e^b$; $e^{-a} = \frac{1}{e^a}$; $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$.
- Pour tout nombre x et pour tout entier relatif n , $(e^x)^n = e^{nx}$.

3 Étude de la fonction exponentielle

3.1 Variations de la fonction exponentielle

Théorème 7

Pour tout nombre x , $e^x > 0$.

Démonstration

Pour tout nombre x , $e^x = e^{2 \times \frac{x}{2}} = \left(e^{\frac{x}{2}}\right)^2$; donc e^x est positif.

Or, e^x est non nul ; donc $e^x > 0$.

Théorème 8

La fonction exponentielle est **strictement croissante** sur $\mathbb{R}$.

Démonstration

Pour tout nombre x , $(\exp)'(x) = \exp(x)$ avec $\exp(x) > 0$.

Ainsi, la fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Conséquences

Pour tous nombres a et b :

1. $a < b$ équivaut à $e^a < e^b$.

2. $a = b$ équivaut à $e^a = e^b$.

Ces équivalences résultent de la stricte croissance de la fonction exponentielle sur $\mathbb{R}$.

Elles sont utilisées en particulier lors de la résolution d'équations et d'inéquations.

3.2 Limites à l'infini

Théorème 9

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

Démonstration exigible

• Démontrons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ en utilisant un théorème de comparaison (chapitre 2, théorème 2). Comparons les fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto x$.

Pour cela, étudions la fonction différence f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - x$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre x , $f'(x) = e^x - 1$.

Donc : $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 1 \Leftrightarrow e^x \geq e^0 \Leftrightarrow x \geq 0$.

D'où le tableau de variation de f ci-contre.

f admet sur $\mathbb{R}$ le nombre 1 comme minimum : pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) > 0$ soit $e^x > x$.

Or : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$; donc par comparaison :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty.$$

• Démontrons que $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.

Posons $Y = -x$; ainsi, $e^x = e^{-Y}$.

Or : $\lim_{Y \rightarrow +\infty} Y = +\infty$ et $\lim_{Y \rightarrow +\infty} e^{-Y} = \lim_{Y \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^Y} = 0$; donc, d'après le théorème sur la limite de la composée de deux fonctions (chapitre 2, théorème 4), $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		-	0
$f(x)$			+

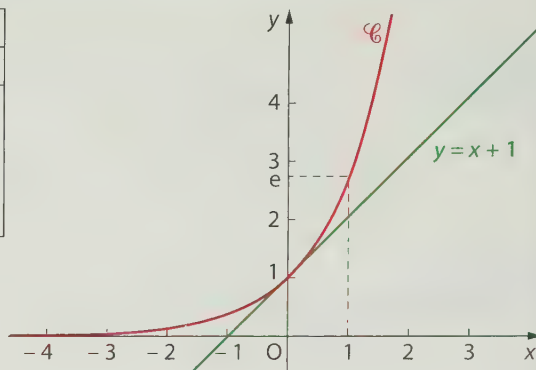
ROC

→ Exercice 68

3.3] Courbe représentative de la fonction exponentielle

Les résultats précédents se lisent dans le tableau de variation et sur la courbe représentative $\mathcal{C}$:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$(\exp)'(x)$	+	1	+	+
$\exp(x)$	0	1	e	$+\infty$



Remarques

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$: l'axe des abscisses, d'équation $y = 0$, est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$ en $-\infty$.
- La tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 a pour équation $y = \exp'(0)(x - 0) + \exp(0)$ soit $y = x + 1$.

3.4] Des limites importantes

Théorème 10

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$$

Démonstration

- La fonction exponentielle est dérivable en 0 et $\exp'(0) = \exp(0) = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(0 + x) - \exp(0)}{x}$$

On reconnaît la limite, quand x tend vers 0, du taux d'accroissement de la fonction $\exp$ entre 0 et $0 + x$; cette limite est égale au nombre dérivé de $\exp$ en 0. Ainsi, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \exp'(0) = 1$.

- Démontrons que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ en utilisant un théorème de comparaison.

Comparons les fonctions $x \mapsto e^x$ et $x \mapsto \frac{x^2}{2}$.

Pour cela, étudions la fonction différence f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre x , $f'(x) = e^x - x$.

Or, pour tout nombre x , $e^x > x$ (voir la démonstration du théorème 9) donc $f'(x) > 0$.

La fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, avec $f(0) = 1$.

Ainsi, pour tout nombre x strictement positif, $f(x) > 1 > 0$,

d'où $e^x > \frac{x^2}{2}$, soit $\frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$.

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$; donc par comparaison, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$		1	$+\infty$

- Démontrons que $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$. Posons $Y = -x$; ainsi, $x e^x = -Y e^{-Y} = -\frac{Y}{e^Y}$.

On a vu précédemment que $\lim_{Y \rightarrow +\infty} \frac{e^Y}{Y} = +\infty$; d'où, en considérant l'inverse : $\lim_{Y \rightarrow +\infty} \frac{Y}{e^Y} = 0$.

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow -\infty} Y = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{Y}{e^Y}\right) = 0$.

Donc d'après le théorème sur la limite de la composée de deux fonctions, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$.

OBJECTIF 1

Transformer une écriture exponentielle

- Pour tout nombre a , tout nombre b et tout entier relatif n :

$$e^{a+b} = e^a \times e^b ; \quad (e^a)^n = e^{an} ; \quad e^{-a} = \frac{1}{e^a} ; \quad e^a \cdot e^b = \frac{e^a}{e^{-b}}.$$

- La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$. Ainsi, une équation du type $e^{u(x)} = e^{v(x)}$ équivaut à $u(x) = v(x)$.

$e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$. Ainsi, une inéquation du type $e^{u(x)} < e^{v(x)}$ équivaut à $u(x) < v(x)$.

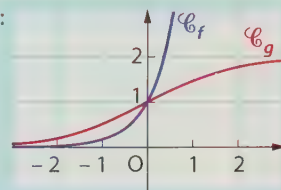
EXERCICE RÉSOLU A

Étudier quelques propriétés de courbes

Les courbes notées $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ représentent les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{2x} \text{ et } g(x) = \frac{2e^x}{1+e^x}.$$

- Prouvez que $\mathcal{C}_g$ admet une asymptote horizontale en $+\infty$.
- Étudiez l'intersection des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.



Méthode

- On étudie la limite de g en $+\infty$.

Un calcul direct conduit à une forme indéterminée. On transforme alors l'écriture de $g(x)$ en mettant en facteur e^x , puis on simplifie.

- L'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ est l'ensemble des points d'abscisse x telle que $f(x) = g(x)$.

- On transforme cette équation par équivalences successives.
- Pour tout nombre x , $e^x \neq 0$ donc on peut simplifier par e^x .
- On procède à un changement d'inconnue qui conduit à une équation de degré 2.
- On revient à l'équation initiale d'inconnue x en tenant compte de la condition $e^x > 0$.
- On conclut.

Solution

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1+e^x) = +\infty$.

Nous sommes en présence d'une forme indéterminée. Pour tout nombre x ,

$$g(x) = \frac{2e^x}{1+e^x} = \frac{2}{e^{-x} + 1}.$$

Or $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 2$.

Ainsi, la droite Δ d'équation $y = 2$ est asymptote à $\mathcal{C}_g$ en $+\infty$.

- Pour tout nombre x , $1+e^x \neq 0$, donc :

$$\begin{aligned} f(x) = g(x) &\Leftrightarrow e^{2x} = \frac{2e^x}{1+e^x} \Leftrightarrow (1+e^x)e^{2x} = 2e^x \\ &\Leftrightarrow (1+e^x)e^x = 2 \Leftrightarrow e^x + e^{2x} = 2 \\ &\Leftrightarrow e^{2x} + e^x - 2 = 0 \quad [1]. \end{aligned}$$

On pose $X = e^x$.

L'équation [1] s'écrit $X^2 + X - 2 = 0$ et a pour solutions dans $\mathbb{R}$: $X_1 = 1$ et $X_2 = -2$.

Or $X > 0$, donc l'équation [1] équivaut à $e^x = 1$, c'est-à-dire $e^x = e^0$ soit $x = 0$.

$\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ se coupent au seul point $A(0; 1)$.

Mise en pratique

1 f et g sont les fonctions définies dans l'exercice résolu A.

- a)** Démontrez que pour tout nombre x :

$$g(x) + g(-x) = 2.$$

b) Déduisez-en que le point $J(0; 1)$ est centre de symétrie de $\mathcal{C}_g$.

- a)** Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) \geq g(x)$.

b) Déduisez-en la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sur $\mathbb{R}$.

- 2** f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2.$$

- Représentez f sur votre calculatrice.
- Que conjecturez-vous ? Prouvez-le.

Connaître la courbe de la fonction exponentielle

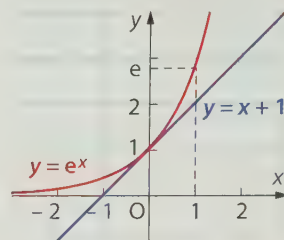
- La fonction exponentielle est l'unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.

Ainsi :

$$(\exp)' = \exp \text{ et } e^0 = 1.$$

- Connaître la courbe représentative de la fonction exponentielle permet de retenir que :

- pour tout nombre x , $e^x > 0$;
- la fonction $x \mapsto e^x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$;
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$;
- la tangente T_0 au point d'abscisse 0 a pour équation $y = x + 1$.



EXERCICE RESOLU B

Étudier la position de $\mathcal{C}_{\exp}$ par rapport à ses tangentes

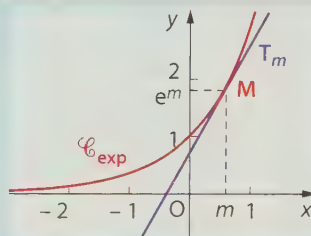
$\mathcal{C}_{\exp}$ est la courbe représentative de la fonction $x \mapsto e^x$.

M est un point quelconque de $\mathcal{C}_{\exp}$ d'abscisse m .

1. Déterminez une équation de la tangente T_m à $\mathcal{C}_{\exp}$ en M.

2. a) Prouvez que la courbe $\mathcal{C}_{\exp}$ est au-dessus de T_m .

b) Dédisez-en que pour tout nombre x , $e^x \geq x + 1$.



Méthode

1. On écrit une équation de la tangente au point M d'abscisse m de $\mathcal{C}_{\exp}$:

$$y = (\exp)'(m) \times (x - m) + \exp(m).$$

2. a) On étudie le signe de la fonction notée φ , différence entre la fonction $x \mapsto e^x$ et la fonction affine représentée par T_m .

- Pour cela, on examine les variations de φ .

- Le tableau de variation de φ indique le signe de $\varphi(x)$ pour tout nombre x .

Le calcul des limites en $-\infty$ et $+\infty$ n'est pas nécessaire à l'étude.

Remarque

$\mathcal{C}_{\exp}$ est au-dessus de n'importe laquelle de ses tangentes. On dit que la fonction exp est convexe.

b) On applique le résultat précédent au cas particulier de la tangente T_0 .

Solution

1. La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et égale à sa dérivée.

$$\Rightarrow \text{D'où } T_m : y = e^m(x - m) + e^m$$

$$\text{soit } T_m : y = e^m x + e^m(1 - m).$$

2. a) Pour tout nombre x , on pose :

$$\Rightarrow \varphi(x) = e^x - e^m x - e^m(1 - m).$$

φ est la différence de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc φ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout nombre x , $\varphi'(x) = e^x - e^m$.

$\Rightarrow$ En utilisant la stricte croissance de la fonction exp sur $\mathbb{R}$, on en déduit que :

$$\varphi'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x > e^m \Leftrightarrow x > m$$

$$\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = e^m \Leftrightarrow x = m$$

D'où le tableau de variation de φ :

x	$-\infty$	m	$+\infty$
$\varphi'(x)$	$-$	0	$+$
$\varphi(x)$			

φ admet sur $\mathbb{R}$ un minimum $\varphi(0) = 0$.

Donc, pour tout nombre x , $\varphi(x) \geq 0$ soit

$$e^x \geq e^m x + e^m(1 - m).$$

Ainsi, $\mathcal{C}_{\exp}$ est au-dessus de la tangente T_m .

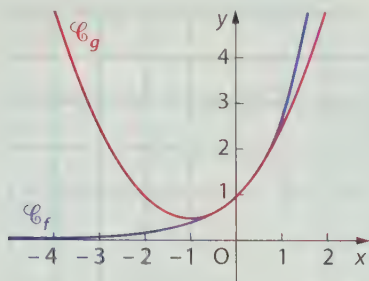
$\Rightarrow$ b) En particulier, $\mathcal{C}_{\exp}$ est au-dessus de T_0 d'équation $y = x + 1$.

Donc pour tout nombre x , $e^x \geq x + 1$.

Mise en pratique

3 Les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ représentent les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^x \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{x^2}{2} + x + 1.$$



1. Prouvez que $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont une tangente commune T_0 au point d'abscisse 0.

2. On se propose d'étudier la position relative des deux courbes.

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction φ en posant :

$$\text{pour tout } x \text{ de } \mathbb{R}, \varphi(x) = f(x) - g(x).$$

a) Calculez $\varphi'(x)$.

b) Déduisez-en le tableau de variation de φ .

indication

Pour tout x de $\mathbb{R}$, $e^x \geq x + 1$.

c) Concluez quant à la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

4 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{2e^x}.$$

1. a) Démontrez que pour tout nombre x :

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

b) Calculez la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. $\mathcal{C}$ désigne la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

a) Étudiez le sens de variation de f .

b) Déterminez une équation de la tangente T_0 à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

3. Pour tout nombre x , on pose :

$$d(x) = f(x) - x.$$

a) Vérifiez que pour tout nombre x ,

$$d'(x) = \frac{(e^x - 1)^2}{2e^x}.$$

b) Dressez le tableau de variation de d .

c) Déduisez-en la position de $\mathcal{C}$ par rapport à la tangente T_0 .

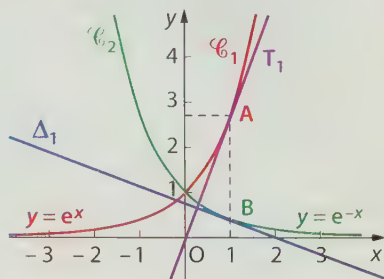
Remarque

T_0 traverse la courbe $\mathcal{C}$ en O. On dit que O est un point d'inflexion de $\mathcal{C}$.

5 Dans un repère orthonormé, on a tracé les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ d'équations respectives :

$$y = e^x \quad \text{et} \quad y = e^{-x}.$$

On désigne par A et B les points de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ de même abscisse 1.

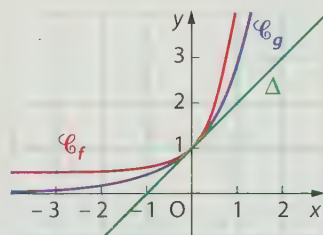


1. Déterminez une équation de la tangente T_1 à $\mathcal{C}_1$ en A et de la tangente Δ_1 à $\mathcal{C}_2$ en B.

2. Démontrez que T_1 et Δ_1 sont deux droites perpendiculaires.

3. Ce résultat reste-t-il valable dans le cas général où T_a et Δ_a sont les tangentes à $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ aux points d'abscisses a ($a \in \mathbb{R}$) ?

6 Dans un repère, on a tracé les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ représentant les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2}(e^{2x} + 1)$ et $g(x) = e^x$, ainsi que la droite Δ d'équation $y = x + 1$.



1. On rappelle que Δ est la tangente à la courbe $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse 0.

Prouvez que Δ est aussi tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.

2. On se propose de démontrer la conjecture :

$$\mathcal{C}_g \text{ est entre } \Delta \text{ et } \mathcal{C}_f.$$

a) Justifiez que $\mathcal{C}_g$ est au-dessus de Δ .

b) On définit la fonction d sur $\mathbb{R}$ par :

$$d(x) = g(x) - f(x).$$

Étudiez les variations de d , puis déduisez-en la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

c) Quel encadrement de e^x ($x \in \mathbb{R}$) pouvez-vous en déduire ?

OBJECTIF 3

Exploiter le comportement à l'infini de la fonction exp

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$: on dit qu'à l'infini (en $+\infty$ et en $-\infty$), e^x l'emporte sur x .

EXERCICE RÉSOLU C Étudier le comportement de deux suites

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier $n \geq 2$ par :

$$u_n = \frac{e^{2n}}{n-1} \quad \text{et} \quad v_n = n^2 e^{-n}.$$

1. Prouvez que la limite de la suite (u_n) est $+\infty$.

2. a) Vérifiez que pour tout entier $n \geq 2$, $v_n = 4 \left(-\frac{n}{2} \times e^{-\frac{n}{2}} \right)^2$.

b) Déduisez-en la limite de la suite (v_n) .

Méthode

1. Un calcul direct conduit à une forme indéterminée.

- On minore u_n pour utiliser un théorème de comparaison.

- On utilise la limite connue de $\frac{e^n}{n}$ en $+\infty$.

2. a) On prouve l'égalité demandée en partant du second membre, ce qui facilite le calcul.

b) On effectue un changement de variable.

- On utilise le théorème sur la limite de la composée d'une suite et d'une fonction (chapitre 2, théorème 4).

Solution

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{2n} = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n-1) = +\infty$.

➔ D'où une forme indéterminée.

Pour tout entier $n \geq 2$, $\frac{e^{2n}}{n-1} \geq \frac{e^{2n}}{n}$, donc :

$$u_n \geq e^n \times \frac{e^n}{n}.$$

➔ Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^n}{n} = +\infty$, donc :

➔ $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^n \times \frac{e^n}{n} = +\infty$.

Par comparaison, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

➔ 2. a) Pour tout entier $n \geq 2$,

$$4 \left(-\frac{n}{2} \times e^{-\frac{n}{2}} \right)^2 = 4 \left(-\frac{n}{2} \right)^2 \left(e^{-\frac{n}{2}} \right)^2 = 4 \times \frac{n^2}{4} e^{-n}$$

$$\text{d'où } 4 \left(-\frac{n}{2} \times e^{-\frac{n}{2}} \right)^2 = v_n.$$

➔ b) On pose $X = -\frac{n}{2}$; ainsi, $v_n = 4(Xe^X)^2$.

➔ Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} X = -\infty$ et $\lim_{X \rightarrow -\infty} 4(Xe^X)^2 = 0$, donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0.$$

Ainsi, (v_n) converge vers 0.

Mise en pratique

7 Déterminez, dans chaque cas, la limite en $+\infty$ de la fonction indiquée en utilisant la transformation d'écriture proposée.

a) $f(x) = \frac{e^x - 1}{x + 1}$, de la forme $\frac{e^x}{x} \times u(x)$.

b) $g(x) = \frac{e^{2x} + e^x}{x^2 + 1}$, de la forme $\left(\frac{e^x}{x} \right)^2 \times v(x)$.

8 On considère la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geq 1$ par $u_n = n e^{1-n}$.

1. Étudiez le sens de variation de (u_n) .

2. a) Justifiez que cette suite est convergente.

b) Déterminez sa limite.

9 La suite (u_n) est définie pour tout n de $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = \frac{n+1}{e^{2n}}.$$

1. Prouvez que la suite (u_n) est décroissante.

2. a) Justifiez que la suite (u_n) converge.

b) Quelle est sa limite ?

10 La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^2 e^{2x}}{e^x + 1}.$$

Sa courbe représentative $\mathcal{C}_f$ admet-elle une asymptote horizontale en $+\infty$? En $-\infty$? Justifiez.

11 Questions sur le cours

Complétez les propositions suivantes.

- a) La fonction exponentielle est la seule fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ qui vérifie : ... et ...
- b) Pour tous nombres a et b ,

$$e^a \times e^b = \dots \quad \text{et} \quad \frac{e^a}{e^b} = \dots$$
- c) La tangente à la courbe de la fonction $x \mapsto e^x$ au point d'abscisse 0 a pour équation ...
- d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = \dots$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = \dots$
- e) L'inéquation $e^{-x} < e^{-a}$ équivaut à $x \dots$

12 Vrai ou faux

Vrai ou faux ? Justifiez votre réponse.

- a) f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto e^{1-2x}$.
Alors $f' = -2f$ et $f(0,5) = 1$.
- b) La tangente à la courbe d'équation $y = e^x$ au point d'abscisse 1 a pour équation $y = ex$.
- c) L'équation $e^{2x} - (e+1)e^x + e = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$.
- d) L'ensemble de solutions de l'inéquation $e^{x^2-2x} \leq 1$ dans $\mathbb{R}$ est $[0; 2]$.

13 QCM Une seule réponse exacte

Pour chaque affirmation, une seule réponse est exacte. Identifiez-la en justifiant votre réponse.

1. On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) :

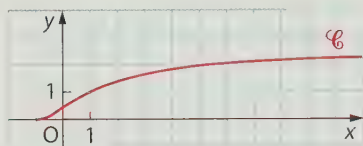
$$e^x(e^x + e) - e^x = e.$$

- a) L'équation (E) équivaut à $x(x+1) - x = 1$.
- b) Si $X = e^x$, alors (E) s'écrit $X^2 + (e-1)X - e = 0$.
- c) L'équation (E) a deux solutions.

2. On considère dans $\mathbb{R}$ l'inéquation (I) : $e^{x^2} \leq \frac{1}{e^2}$.

- a) (I) s'écrit $(e^x - e^{-1})(e^x + e^{-1}) \leq 0$.
- b) (I) a pour ensemble de solutions $[-e^{-1}; e^{-1}]$.
- c) (I) n'a pas de solution.

3. La courbe $\mathcal{C}$ est une représentation de la fonction f définie sur $]-1; +\infty[$ par $f(x) = e^{\frac{x-1}{x+1}}$.



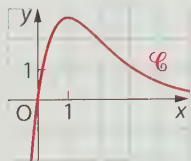
- a) La droite Δ d'équation $y=3$ est asymptote horizontale à $\mathcal{C}$.
- b) $f'(0) = e$.
- c) Pour tout nombre $x > -1$, $f(x) < e$.

14 QCM Au moins une réponse exacte

Pour chaque affirmation, plusieurs réponses peuvent être exactes. Identifiez-les en justifiant vos réponses.

1. La courbe $\mathcal{C}$ représente la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = xe^{2-x}.$$



- a) $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses en deux points.
- b) f admet sur $\mathbb{R}$ un maximum égal à e .
- c) La tangente T_2 au point d'abscisse 2 a pour équation $y = e - x$.
- d) $\mathcal{C}$ est au-dessous de T_2 lorsque $x < 2$, au-dessus de T_2 lorsque $x > 2$.

2. f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$f(x) = ae^{2x} + be^x, \quad a \in \mathbb{R}, \quad b \in \mathbb{R}.$$

Sa courbe $\mathcal{C}$ dans un repère admet une tangente horizontale au point $A(1; -e)$.

- a) $\mathcal{C}$ admet l'axe des abscisses comme asymptote horizontale.
- b) Pour tout nombre x , $f(x) = e^{2x-1} - 2e^x$.
- c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.
- d) λ désigne un nombre quelconque. Le nombre de solutions de l'équation $f(x) = \lambda$ est 0 ou 1 ou 2.



Apprendre à chercher

15 Tangentes passant par l'origine

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^x - x.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentant f dans un repère.

Objectif Déterminer les tangentes éventuelles à la courbe $\mathcal{C}$ passant par l'origine du repère.

1. Une première approche consiste à conjecturer le résultat à partir de la courbe $\mathcal{C}$.

a) Étudiez la fonction f et représentez la courbe $\mathcal{C}$ à l'aide de votre calculatrice ou d'un logiciel.

b) Conjecturez le nombre de tangentes solutions du problème.

2. On sait déterminer une équation de la tangente en un point de la courbe. Il s'agit alors de trouver la condition pour que cette tangente passe par l'origine du repère.

a) On note a un nombre quelconque.

Déterminez l'équation réduite de la tangente T_A à la courbe $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse a .

b) Pour quelle(s) valeur(s) de a la tangente T_A passe-t-elle par l'origine du repère ?

3. Si l'observation initiale de la courbe a pu conduire à conjecturer que la droite Δ d'équation $y = -x$ était une solution, l'étude précédente a démontré que ce n'était pas le cas.

Précisons néanmoins la position relative de $\mathcal{C}$ et Δ .

a) Démontrez que la courbe $\mathcal{C}$ est strictement au-dessus de la droite Δ .

b) Étudiez la limite en $-\infty$ de $f(x) - (-x)$.

Interprétez géométriquement ce résultat.

16 Dérivabilité

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{|x-1|}.$$

Objectif Étudier la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.

1. Avant tout calcul, une représentation graphique de f peut permettre d'avoir une idée de sa dérivabilité.

a) Représentez graphiquement f sur votre calculatrice ou à l'aide d'un logiciel.

b) Quelle conjecture pouvez-vous faire quant à la question posée ?

2. La fonction *valeur absolue* n'est pas dérivable sur $\mathbb{R}$. L'expression de $|x - 1|$ change selon que x est inférieur ou supérieur à 1.

Sur chacun des intervalles ouverts $]-\infty; 1[$ et $]1; +\infty[$, f est de la forme e^{ax+b} .

a) Donnez une écriture plus simple de $f(x)$ selon que x appartient à $]-\infty; 1[$ ou à $]1; +\infty[$.

b) Étudiez la dérivabilité de f sur chacun de ces intervalles ouverts.

3. Il reste à étudier la dérivabilité de f en 1.

Pour cela, on revient à la définition de la dérivabilité.

On étudie la limite lorsque h tend vers 0 du taux d'accroissement de f entre 1 et $1 + h$.

a) Calculez : $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ et $\lim_{h < 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$.

b) On admet que lorsque la limite à gauche et la limite à droite en 1 sont différentes, le taux d'accroissement n'a pas de limite en 1.

Concluez quant à la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$.

17 Tangentes et parallèles

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (3 - x)e^x$. On note $\mathcal{C}$ sa représentation graphique.

Objectif Prouver l'existence de deux tangentes à $\mathcal{C}$ parallèles à la droite d'équation $y = 2x$.

1. Le problème revient à prouver qu'il existe deux points de $\mathcal{C}$ en lesquels la courbe admet une tangente de coefficient directeur 2. Cela revient donc à prouver qu'il existe deux nombres distincts en lesquels f est dérivable et $f'(x)$ prend la valeur 2.

a) Justifiez la dérivabilité de f sur $\mathbb{R}$ et déterminez l'expression de $f'(x)$.

b) Quelle équation doit-on alors résoudre ?

2. On ne dispose pas de méthode permettant de résoudre cette équation. On étudie alors la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f'(x) - 2$.

a) Calculez $g'(x)$ et dressez le tableau de variation de la fonction g .

b) Déduisez du tableau de variation le nombre de solutions de l'équation $g(x) = 0$, puis concluez.

Note. Le théorème 4 du chapitre 4 permettra de confirmer ce résultat.

Narration de recherche

→ L'objectif n'est pas seulement de résoudre le problème posé : vous devez aussi noter les différentes idées même lorsqu'elles n'ont pas permis de trouver la réponse. Expliquez pourquoi vous avez changé de méthode et ce qui vous a fait avancer.

18 La fonction exp : une fonction polynôme ?

Existe-t-il une fonction polynôme P telle que :

$$P' = P \text{ et } P(0) = 1 ?$$

19 Optimiser une production

Une entreprise produit un bien en quantité x .

Le coût total de fabrication (en euros) est donné par :

$$C(x) = 20\,000 e^{\frac{x}{1000}}.$$

1. Quelle est la quantité à produire pour minimiser le

coût moyen unitaire $\frac{C(x)}{x}$?

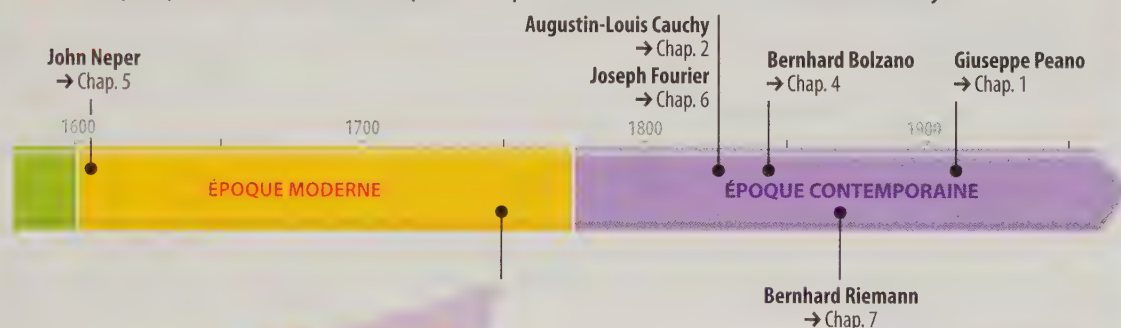
2. Le prix de vente unitaire imposé par le marché est 80 € et, à ce prix, toute la production est vendue.

Quelle est, à l'unité près, la quantité à produire pour maximiser le bénéfice ?

Chercheurs d'hier

Eux aussi, ils ont
cherché avant de trouver !

→ Voici quelques mathématiciens importants qui ont travaillé dans le domaine de l'Analyse.



Leonhard Euler (1707-1783)



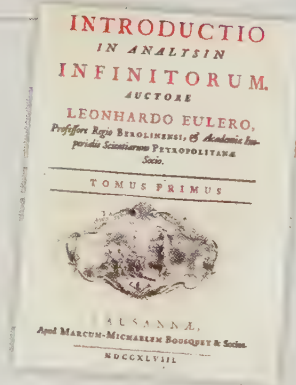
Le Suisse Leonhard Euler est l'un des plus grands mathématiciens de tous les temps.

Dans son *Introduction à l'analyse des infiniment petits* (1748 – page de titre ci-contre), il développe les propriétés des principales fonctions de l'Analyse, notamment la fonction exponentielle.

En étendant la définition de e^x à une variable complexe, il établit un lien entre la fonction

exponentielle et la trigonométrie (voir chapitre 8).

Il fit d'importantes découvertes en théorie des graphes et est également connu pour ses travaux en Sciences physiques (mécanique, dynamique des fluides, optique et astronomie).



Sur le Web

www.bibmath.net/bios/index.php
serge.mehl.free.fr/chrono/Euler.html

Travaux dirigés

Des Mathématiques
à la Biologie

TP

20 Réglage et évolution d'une perfusion

Lorsque l'on injecte un médicament par voie intraveineuse, la concentration $c(t)$ de médicament dans le sang (en mg/L) évolue en fonction du temps t (en h) selon la loi :

$$c(t) = \frac{d}{CI} \left(1 - e^{-\frac{CI}{16V}t} \right),$$

où d est le débit de la perfusion (en mg/h), V le volume de sang du patient (en L) et CI un coefficient positif appelé clairance (en L/h), caractérisant l'aptitude du patient à éliminer le médicament (plus CI est grand, plus le médicament est éliminé rapidement).

1. Concentration limite

Démontrez que la concentration c_p en « régime plateau », ou concentration limite, est égale à $\frac{d}{CI}$.

2. Le bon débit

Le débit doit être adapté au patient, afin que la concentration de médicament reste comprise dans la « fenêtre thérapeutique », c'est-à-dire entre le seuil d'efficacité thérapeutique (minimum utile) et le seuil de toxicité (maximum tolérable). Or, la clairance du patient est *a priori* inconnue.

C'est pourquoi on procède en deux temps : on règle d'abord le débit pour une valeur moyenne de la clairance puis, au bout de quelques heures, on mesure la concentration $c(t)$. On en déduit alors la clairance du patient et on adapte le débit.

On suppose, ici que le seuil d'efficacité d'un médicament est 12 mg/L et le seuil de toxicité 16 mg/L. On vise donc la concentration plateau $c_p = 15$ mg/L.

a) Pour un patient dont la clairance est 7,2 L/h, quel serait le débit d_1 nécessaire ?

b) À $t = 0$, on démarre la perfusion avec ce débit d_1 .

À $t = 5$ h, on effectue un prélèvement pour mesurer la concentration $c(5)$. Peu avant 10 h, le laboratoire indique que $c(5) = 5,9$ mg/L.

Sachant que $V = 5$ L, vérifiez que $CI \approx 4,4$ L/h.

c) Quelle est la concentration $c(10)$ atteinte à $t = 10$ h ?

d) À $t = 10$ h, on règle le débit à la valeur d_2 adaptée au patient pour une concentration plateau

$c_p = 15$ mg/L. La concentration évoluera ensuite selon la formule $c(t) = c(10) + \frac{d_2}{CI} \left(1 - e^{-\frac{CI}{16V}(t-10)} \right)$.

Démontrez que $c(10) + \frac{d_2}{CI} = c_p$. Déduisez-en la valeur de d_2 arrondie à 0,1 mg/h.

3. Avec un tableur

On maintient la perfusion à ce débit d_2 jusqu'à $t = 120$ h.

a) À l'aide d'un tableur, tabulez et représentez la fonction c sur l'intervalle $[0 ; 120]$. Vous prendrez un pas égal à 1 et vous afficherez une décimale pour $c(t)$.

b) Sur quelle durée (à 1 h près) le seuil d'efficacité thérapeutique de 12 mg/L a-t-il été dépassé ?

c) Vérifiez que si l'on avait conservé le débit initial, le seuil de toxicité de 16 mg/L aurait été dépassé.

D'après *Un exemple de démarche scientifique*, Dominique Barbolosi, Repères-IREM n° 71

TP

21 Fonctions logistiques

Des Mathématiques
aux Sciences Humaines

On appelle **fonction logistique** toute fonction f de la forme $f(x) = \frac{a}{1 + be^{-kx}}$ où a, b, k sont des constantes strictement positives. Les fonctions logistiques ont été introduites vers 1840 par le mathématicien belge Pierre-François Verhulst (1804-1849).

A Évolution d'une population

Le modèle proposé par Verhulst prend en compte des facteurs d'autorégulation (limitation de l'espace et des ressources). Ces hypothèses l'ont conduit à

la formule $P(t) = \frac{P_m}{1 + \left(\frac{P_m}{P_0} - 1\right)e^{-kt}}$ où $P(t)$ désigne la population à la date t ,

P_0 la population à la date 0, P_m la capacité d'accueil du milieu où évolue la population, k un coefficient positif caractérisant la vitesse d'évolution.

1. a) En supposant $P_m > P_0$, étudiez le sens de variation de la fonction logistique P sur $[0; +\infty[$ et sa limite en $+\infty$.

b) Interprétez ces résultats en termes de démographie.

2. Verhulst a appliqué son modèle à la population de la Belgique entre 1815 et 1845, pour laquelle il disposait des données ci-contre. En prenant l'année comme unité de temps et 1815 comme année 0, il a obtenu $k = 0,024$ et $P_m = 6\,940\,000$.

a) Vérifiez avec un tableur l'adéquation de sa formule avec les données observées.

b) Dans une colonne supplémentaire, faites afficher l'erreur relative (en format pourcentage) due à l'approximation de Verhulst.

Aide

$$\text{Erreur relative} = \frac{\text{Population suivant le modèle} - \text{Population observée}}{\text{Population observée}}$$

Année	Population
1815	3 627 253
1825	4 024 855
1826	4 073 751
1827	4 118 840
1828	4 160 279
1829	4 210 128
1830	4 247 113
1831	4 285 969
1832	4 326 697
1833	4 345 940
1834	4 376 214
1835	4 404 220
1836	4 448 769
1837	4 494 688
1838	4 525 687
1839	4 570 708
1840	4 608 776
1841	4 650 400
1842	4 693 190
1843	4 727 391
1844	4 763 246
1845	4 800 861

B Évolution d'un taux d'équipement en bien durable

Dans un pays, on appelle taux d'équipement des ménages pour un bien durable donné (automobile, téléviseur, lave-linge, ordinateur, téléphone mobile...), la proportion de ménages équipés de ce bien.

L'évolution du taux d'équipement d'un certain bien durable peut être modélisée de façon empirique par une fonction logistique : $T(t) = \frac{1}{1 + be^{-kt}}$ où $T(t)$ est le taux d'équipement à la date t , et b et k sont des constantes strictement positives dépendant du bien et de certaines caractéristiques (CSP, âge...) de la population étudiée.

1. Interprétez le sens de variation de la fonction T sur $\mathbb{R}$, et sa limite en $-\infty$ et en $+\infty$.

2. On mesure t en années à partir de 2000. Avec $b = 1$ et $k = 0,16$, on obtient approximativement l'évolution du taux d'équipement en téléphones mobiles en France entre 2000 et 2010.

a) Quel était le taux d'équipement en 2003 ? en 2010 ?

b) Avec ce modèle, quel taux d'équipement peut-on prévoir en 2015 ?



22 La fonction exponentielle en physique

A Chute verticale d'un corps dans un fluide

Un corps en chute verticale dans un fluide subit des frottements qui le freinent.

Pour des vitesses assez faibles, on peut modéliser ces frottements fluides par une force f de mesure algébrique $-kv(t)$, où $v(t)$ est la vitesse instantanée du corps, et k une constante positive dépendant de sa forme et de la nature du fluide. Si l'on néglige la poussée d'Archimède et si l'objet est lâché sans vitesse initiale, sa vitesse $v(t)$ évolue en fonction du temps t selon la loi $v(t) = \frac{Mg}{k} \left(1 - e^{-\frac{kt}{M}}\right)$, où M est sa masse et g l'accélération de la pesanteur ($g \approx 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$).

1. Cas général

- Étudiez le sens de variation sur $[0; +\infty[$ de la fonction v et déterminez sa limite en $+\infty$.
- Interprétez ces deux résultats en termes de physique.
- Déterminez une équation de la tangente à la courbe représentative de v au point d'abscisse 0, et interprétez-la en termes de physique.

2. Un exemple

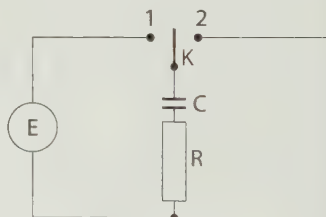
Une balle de ping-pong de masse $2,7 \times 10^{-3} \text{ kg}$ est lâchée dans l'air sans vitesse initiale.

On admet qu'elle subit une force de frottement de mesure algébrique $-kv(t)$, avec $k = 5,4 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$. Quelle est la vitesse limite ? Au bout de combien de temps est-elle approchée à $10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ près ?

B Charge et décharge d'un condensateur (circuit RC)

Le circuit électrique ci-contre comprend un résistor de résistance R , un condensateur de capacité C , une pile de force électromotrice E (et de résistance négligeable), un interrupteur K .

À chaque instant t , la tension aux bornes du condensateur est $u(t)$ et l'intensité du courant qui parcourt le circuit est $i(t) = C \frac{du}{dt} = Cu'(t)$.



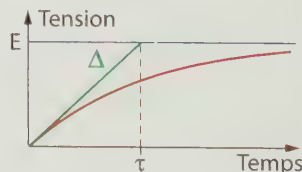
1. Charge

À l'instant $t = 0$, le condensateur étant déchargé, on bascule l'interrupteur en position 1.

Le condensateur se charge selon la loi : $u(t) = E \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$.

- Étudiez le sens de variation sur $[0; +\infty[$ de la fonction u et sa limite en $+\infty$.
- Justifiez la construction ci-contre de la constante de temps $\tau = RC$. (Δ est la tangente à l'origine.)
- Étudiez l'évolution de i en fonction du temps.
- Application numérique : $R = 10^3 \Omega$, $C = 10^{-3} \text{ F}$, $E = 6 \text{ V}$.

Quelle est la tension aux bornes du condensateur au bout de 10 s ?



2. Décharge

À l'instant $t = 10$, le condensateur étant chargé à la tension E , on bascule l'interrupteur en position 2.

Le condensateur se décharge selon la loi : $u(t) = Ee^{-\frac{t-10}{RC}}$.

- Étudiez le sens de variation sur $[10; +\infty[$ de la fonction u , et sa limite en $+\infty$.
- Étudiez l'évolution de i en fonction du temps. Comment interprétez-vous son signe ?
- Application numérique : $R = 10^3 \Omega$, $C = 10^{-3} \text{ F}$, $E = 6 \text{ V}$.

Quelle est l'intensité du courant au bout de 10 secondes (c'est-à-dire à l'instant $t = 20$) ?

23 Fonctions transformant les sommes en produits

On a vu, dans le cours, que la fonction exponentielle transforme les sommes en produits.

On se propose de déterminer toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ ayant cette propriété.

1. On suppose que f est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que pour tous nombres a et b , $f(a + b) = f(a) \times f(b)$.

a) Démontrez que $f(0)$ est égal soit à 0, soit à 1.

b) Démontrez que si $f(0) = 0$, alors pour tout nombre x , $f(x) = 0$.

Ainsi, la fonction nulle est une solution possible des fonctions cherchées.

2. On suppose désormais $f(0) = 1$.

a) Démontrez que pour tout nombre x , $f(x) \times f(-x) = 1$.

b) Déduisez-en que pour tout nombre x , $f(x) \neq 0$.

3. Étant donné un nombre a , on considère la fonction $g : x \mapsto f(a + x)$.

a) Démontrez que pour tout nombre x , $g'(x) = f(a) \times f'(x)$.

b) Déduisez-en que, pour tout nombre a , $f'(a) = f'(0) \times f(a)$.

Donc, f est une fonction telle que $f' = kf$ avec $k = f'(0)$ et $f(0) = 1$.

4. On considère la fonction $g : x \mapsto \frac{f(x)}{e^{kx}}$.

a) Prouvez que la fonction g est constante sur $\mathbb{R}$.

b) Déduisez-en que pour tout nombre x , $f(x) = e^{kx}$.

On a ainsi démontré que si f est une solution, alors soit f est la fonction nulle soit f est de la forme $x \mapsto e^{kx}$.

5. Vérifiez que la fonction nulle et les fonctions du type $x \mapsto e^{kx}$ transforment les sommes en produits.

6. Concluez.

24 Comparaison à l'infini de e^x et x^n

n désigne un entier naturel non nul.

1. On sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

On se propose de déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n}$.

On pose $Y = \frac{x}{n}$.

a) Démontrez que $\frac{e^x}{x^n} = \frac{1}{n^n} \left(\frac{e^Y}{Y} \right)^n$.

b) Déduisez-en que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$.

c) Déterminez $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x}$.

On dit que, en $+\infty$, e^x « l'emporte sur » x^n , ou que e^x tend vers l'infini « plus vite » que x^n .

2. On sait que $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$ lorsque n est pair et $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$ lorsque n est impair.

On se propose de déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x$.

On pose $Y = -x$.

a) Démontrez que $x^n e^x = (-1)^n \frac{Y^n}{e^Y}$.

b) Déduisez-en que $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$.

Entraînement

DE TÊTE



25 Simplifiez les écritures suivantes :

a) $e^{-x}e^2$. b) $(e^x)^3e^{-2x}$. c) $\frac{e^{x-1}}{e^{x+2}}$.

26 Résolvez les équations suivantes :

a) $e^{3-x} = 1$. b) $e^{x^2} = e^{-x}$.

27 Résolvez les inéquations :

a) $e^{2x} < e^x$. b) $e^{x+1} \leq 1$.

28 Indiquez la limite en $+\infty$ et en $-\infty$ de chacune des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}$ par :

a) $f(x) = xe^{-x}$. b) $f(x) = 2 + e^{-x}$.

c) $f(x) = e^{2x} + e^x + 2$.

29 Dans chacun des cas suivants, donnez la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

a) $f(x) = e^{2x+1}$. b) $f(x) = -3e^{-x} + 1$.

30 Une fonction u définie sur $\mathbb{R}$ a pour tableau de variation :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$u(x)$	$-\infty$	2	0

Quelle est la limite en $+\infty$ et en $-\infty$ de la fonction $f = e^u$?

CALCULS AVEC LA FONCTION EXPONENTIELLE

Pour les exercices 31 à 35

Résolvez dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations proposées.

31 a) $e^{2x^2+3} = e^{7x}$. b) $e^{x+1} = e^{\frac{2}{x}}$.

32 a) $3(e^x)^2 + e^x - 4 = 0$. b) $2e^{-x} = \frac{1}{e^x + 3}$.

33 a) $e^{2x+3} = e^{\frac{5}{x}}$. b) $e^{x^2} = (e^x)^2 e^3$.

34 a) $e^x \leq e^{x^2-12}$. b) $e^{2x+1} \leq e^{\frac{3}{x}}$.

35 a) $e^{x^2-5} \leq e^{-4x}$. b) $e^x + e^{-x} - 2 \geq 0$.

36 Donnez une justification précise de l'énoncé ci-dessous en citant les théorèmes et les propriétés utilisés.
« Pour tout x de l'intervalle $[-1; 1]$, $(1 - x^2)e^x \geq 0$. »

37 Quel est, suivant les valeurs de x , le signe de $e^{2x} - e^{x+1}$?

38 1. Prouvez que pour tout nombre x ,
 $(e^x + e^{-x})^2 - 4 \geq 0$.

2. Dédisez-en que pour tout nombre x , $\frac{e^x + e^{-x}}{2} \geq 1$.

39 Pour tout nombre x , on pose :

$$g(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

1. Démontrez que pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$[g(x)]^2 - [h(x)]^2 = 1.$$

2. Démontrez que pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$g(2x) = 2[g(x)]^2 - 1 \quad \text{et} \quad h(2x) = 2g(x) \times h(x).$$

40 Pour tout nombre x , on pose $f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

Démontrez que pour tout nombre x , $f(2x) = \frac{2f(x)}{1 + [f(x)]^2}$.

ÉTUDE DE LA FONCTION EXPONENTIELLE

Pour les exercices 41 à 45

Calculez la dérivée de la fonction f proposée sur l'intervalle I indiqué.

41 a) $f(x) = e^x - x - 4$; $I = \mathbb{R}$.

b) $f(x) = (x + 1)e^{-x}$; $I = \mathbb{R}$.

42 a) $f(x) = (x^2 + x - 1)e^x$; $I = \mathbb{R}$.

b) $f(x) = (x^2 + 2x + 3)e^{-x}$; $I = \mathbb{R}$.

43 a) $f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$; $I =]0; +\infty[$.

b) $f(x) = \frac{e^x - 1}{2e^x + 1}$; $I = \mathbb{R}$.

44 a) $f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x}$; $I =]0; +\infty[$.

b) $f(x) = \frac{1}{x}e^x$; $I =]0; +\infty[$.

45 a) $f(x) = x + 2 - \frac{2e^x}{e^x + 1}$; $I = \mathbb{R}$.

b) $f(x) = e^{1-x}(x^2 + 2x)$; $I = \mathbb{R}$.

46 f et g sont deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

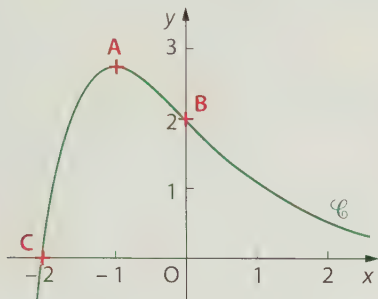
On note h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h = \frac{g}{f}$.

1. Calculez $f'(x)$ et $g'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.

2. Démontrez que $h' = \frac{1}{f^2}$.

47 La courbe $\mathcal{C}$ ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (ax + b)e^{-x}, \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux nombres.}$$



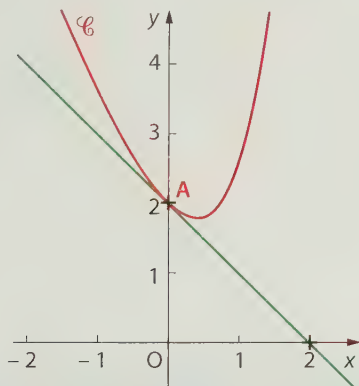
1. À l'aide des coordonnées des points B et C, déterminez les nombres a et b .

2. Calculez $f'(x)$.

Déduisez-en le maximum de f et les coordonnées de A.

48 On donne ci-dessous la courbe $\mathcal{C}$ représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ax + b + xe^x, \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont deux nombres.}$$



1. Trouvez a et b sachant que la tangente à $\mathcal{C}$ en A(0 ; 2) coupe l'axe des abscisses au point d'abscisse 2.

2. a) Calculez $f'(x)$ puis $f''(x)$.

b) Déduisez-en que f' a pour tableau de variation :

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	-2	$-2 - e^{-2}$	$+\infty$

DES LIMITES IMPORTANTES

Pour les exercices 49 à 51

Déterminez la limite éventuelle de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.

49 a) $f(x) = e^x + e^{-x}$. b) $f(x) = e^{-x^2-1}$.

c) $f(x) = e^{x^2+x}$. d) $f(x) = e^{2x} - e^{-x}$.

50 a) $f(x) = e^{2x} - e^x$. b) $f(x) = e^{3x} - e^{2x} + 2$.

51 a) $f(x) = \frac{e^x - 1}{2e^x + 1}$. b) $f(x) = \frac{e^{2x} + e^x + 1}{e^x + 2}$.

Pour les exercices 52 et 53

Déterminez la limite éventuelle de la fonction f en 0^+ et en $+\infty$.

52 a) $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$. b) $f(x) = \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}}$.

53 a) $f(x) = \frac{e^{2x}}{x^2}$. b) $f(x) = x^2 e^{-2x}$.

Aide

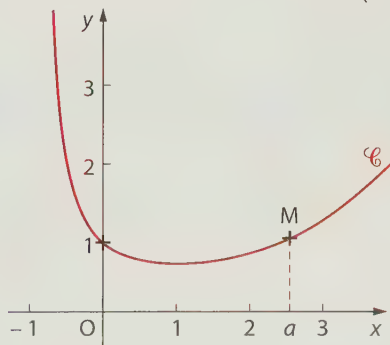
$$e^{2x} = (e^x)^2.$$

54 Pour tout nombre $x > 0$, exprimez $f(x)$ à l'aide du taux d'accroissement d'une fonction entre 0 et x . Déduisez-en la limite éventuelle de f en 0^+ .

a) $f(x) = \frac{e^x - 1}{2x}$. b) $f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x}$.

c) $f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{x}$. d) $f(x) = \frac{e^{3x} - 1}{5x}$.

55 On a tracé ci-dessous la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction f définie sur $]-1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{e^x}{(x+1)^2}$.



1. Démontrez que f a pour tableau de variation :

x	-1	1	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\frac{e}{4}$	$+\infty$

Rappel

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty.$$

2. M est un point de $\mathcal{C}$ d'abscisse a .

Démontrez qu'il existe deux valeurs de a , que l'on calculera, pour lesquelles la tangente en M passe par l'origine O du repère.

56 f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}, \text{ où } a, b, c \text{ sont trois nombres.}$$

La fonction f a pour tableau de variation :

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		0	0	
$f(x)$				

1. À l'aide des renseignements portés dans le tableau, déterminez les nombres a, b, c .

2. Complétez le tableau de variation en justifiant vos réponses.

Rappel

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x = 0.$$

57 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x^2 + 2)(x - 1)e^x.$$

On donne son tableau de variation :

x	$-\infty$	-2	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	+
$f(x)$	0				$+\infty$

Retrouvez par le calcul les résultats portés dans ce tableau.

SUITES ET EXPONENTIELLE

58 Dans chacun des cas suivants, étudiez la limite de la suite (u_n) en précisant les théorèmes utilisés.

a) La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \frac{e^n - 1}{2e^n + 3}.$$

b) La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \frac{e^n + 1}{e^n + 3}.$$

59 (u_n) est la suite définie pour tout n de $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = e^{-\frac{n}{2}}.$$

1. Démontrez que la suite (u_n) est géométrique.

2. On pose pour tout entier naturel n :

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n.$$

a) Exprimez S_n en fonction de n .

b) Quelle est la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$?

60 (u_n) est la suite définie pour tout n de $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = e^{\frac{1-n}{3}}.$$

1. Démontrez que la suite (u_n) est géométrique.

2. On pose pour tout entier naturel n :

$$P_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n.$$

a) Prouvez que pour tout n de $\mathbb{N}$, $P_n = e^{\frac{-n^2+5n+6}{6}}$.

b) Quelle est la limite de P_n quand n tend vers $+\infty$?

61 (u_n) est la suite définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = u_n e^{-u_n}.$$

1. Démontrez par récurrence que :

$$\text{pour tout entier naturel } n, u_n > 0.$$

2. Quel est le sens de variation de la suite (u_n) ?

3. Déduisez-en que la suite (u_n) est convergente.

62 Dans une entreprise

Dans une entreprise, on installe un nouvel atelier.

Pendant la période de « mise en route », la quantité produite le n -ième jour ($n \geq 1$) est donnée par :

$$u_n = 80 - 27e^{-0,1n}.$$

1. Démontrez que la suite (u_n) est strictement croissante.

2. On pose, pour tout entier $n \geq 1$, $v_n = e^{-0,1n}$.

a) Démontrez que la suite (v_n) est géométrique.

b) Calculez la somme $v_1 + v_2 + \dots + v_{12}$.

3. À la suite d'une avarie, l'atelier doit être arrêté après douze jours de fonctionnement.

Quelle est la production totale, à une unité près, obtenue pendant cette période ?



EXERCICES DE SYNTHÈSE

63 Masse salariale

On s'intéresse à des courbes permettant d'analyser la répartition de la masse salariale d'une entreprise.

Les fonctions f associées sont définies sur $[0; 1]$ et doivent vérifier les conditions suivantes :

- $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$;
- f est croissante sur $[0; 1]$;
- pour tout x de l'intervalle $[0; 1]$, $f(x) \leq x$.



Justifiez que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = xe^{x-1}$ vérifie les trois conditions précédentes.

64 1. Justifiez que pour tout nombre x , $e^x \geq x + 1$.

2. Déduisez-en que :

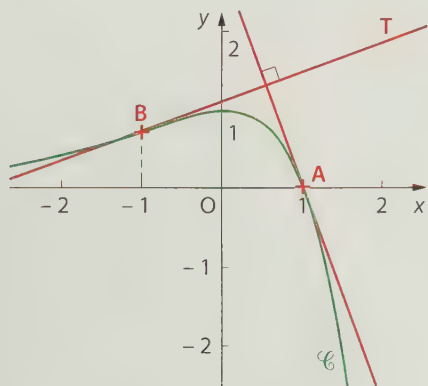
- a) $e^{-x} + x - 1 \geq 0$; b) $(x - 1)e^x + 1 \geq 0$.

3. Exploitez les résultats précédents pour démontrer que la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{e^x - 1}{x}$ est strictement croissante.

65 Dans un repère orthonormé, on a tracé la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (1 - x)e^x.$$

A et B sont les points de $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives 1 et -1.



1. Démontrez que les tangentes en A et B à la courbe $\mathcal{C}$ sont perpendiculaires.

2. Dans cette question, on se propose d'étudier la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la tangente T en B à $\mathcal{C}$.

Pour cela, on considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = (1 - x)e^x - \frac{1}{e}(x + 3).$$

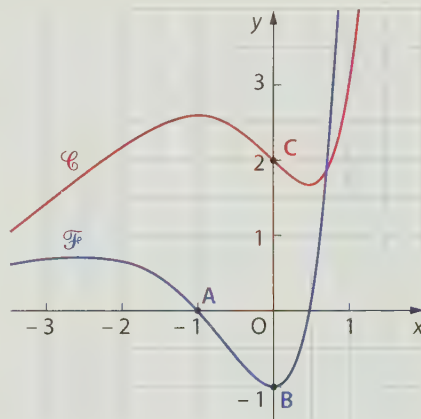
- Calculez $g'(x)$ et $g''(x)$ pour tout nombre x .
- Étudiez le sens de variation de g' et précisez $g'(-1)$.
- Déduisez-en le sens de variation de g et concluez.

66 Exploiter une représentation graphique

A. Lecture graphique

Dans un repère orthonormé, on a tracé les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{F}$ représentatives de deux fonctions définies et dérivables sur $\mathbb{R}$.

On sait que l'une des fonctions est la dérivée de l'autre. On note ces fonctions g et g' .



1. Associez à chaque fonction sa courbe.

On justifiera les résultats à l'aide d'un tableau de variation partiel qui sera complété dans la suite du problème.

2. Quel est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 ?

B. Détermination de la fonction g

La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$, où a, b, c sont trois nombres.

1. À l'aide des points A, B, C clairement définis sur la figure, trouvez les nombres a, b, c .

2. Complétez alors le tableau de variation de g en justifiant vos réponses.

3. On note T la tangente en C à la courbe $\mathcal{C}$ et φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = g(x) - (2 - x)$.

- Étudiez les variations de φ .
- Déduisez-en la position de $\mathcal{C}$ par rapport à T.

67 LOGIQUE Si et seulement si

1. f est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. M est un point de la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f , d'abscisse a telle que a appartient à I.

Démontrez que la tangente en M à $\mathcal{C}$ passe par l'origine du repère si et seulement si $f(a) - a f'(a) = 0$.

2. Application

f est la fonction définie sur $] -2 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{e^x}{x+2}$.
On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.
Démontrez qu'il existe deux tangentes à $\mathcal{C}_f$ passant par l'origine du repère.

68 ROC Restitution organisée des connaissances

Prérequis : La fonction exponentielle f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x ,

$$f'(x) = f(x).$$

1. Démonstration

a) Étudiez les variations de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^x - x$.

b) Déduisez-en $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x$.

2. Application

La fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x - \frac{4e^x}{e^x + 1}$.
Justifiez chaque affirmation portée dans son tableau de variation donné ci-dessous.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$		+	+
$h(x)$	$-\infty$	-2	$+\infty$

69 ROC Restitution organisée des connaissances

Prérequis : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

1. Démonstration

a) On se propose de trouver la limite de $\frac{e^x}{x^2}$ lorsque x tend vers $+\infty$.

• On pose $Y = \frac{x}{2}$. Vérifiez que $\frac{e^x}{x^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{e^Y}{Y} \right)^2$.

• Déduisez-en $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2}$.

b) En posant $Y = -x$, quelle est la limite de $x^2 e^x$ lorsque x tend vers $-\infty$?

2. Application

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 e^{-x}$.

Retrouvez par le calcul tous les résultats portés dans son tableau de variation donné ci-dessous.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$				
$f(x)$	$+\infty$	0	$\frac{4}{e^2}$	0

70 Fonction exponentielle et suite

On note φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = (x-1)e^x + 1$.

1. Étudiez les variations de φ sur $\mathbb{R}$ et déduisez-en le signe de $\varphi(x)$.

2. On note $\varphi', \varphi'', \varphi^{(3)}, \dots, \varphi^{(n)}$ les dérivées successives de φ . Démontrez par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, $\varphi^{(n)}(x) = e^x(x+n-1)$.

3. On pose, pour tout entier $n \geq 1$:

$$S_n = \frac{\varphi'(0)}{1!} + \frac{\varphi''(0)}{2!} + \dots + \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!}.$$

Rappel

Pour tout entier $n \geq 1$, $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$.

a) Vérifiez que pour tout entier $p \geq 1$:

$$\frac{p-1}{p!} = \frac{1}{(p-1)!} - \frac{1}{p!}.$$

b) Déduisez-en S_n en fonction de n , puis $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

71 Quantité d'azote dans un sol cultivé

Selon le Suisse Hans Jenny (1899-1992), spécialiste de l'étude des sols, la quantité Q d'azote dans un sol cultivé (en kg/ha) évolue en fonction du temps t (en année) selon la loi :

$$Q(t) = Q_e - (Q_e - Q_0)e^{-0,06t}.$$

1. En supposant $Q_0 < Q_e$, étudiez les variations sur $[0 ; +\infty[$ de la fonction Q . Vérifiez que $\lim_{t \rightarrow +\infty} Q(t) = Q_e$.

Cette quantité Q_e indépendante de Q_0 apparaît donc comme la valeur à laquelle se stabilise la quantité d'azote Q .

2. a) Vérifiez que la vitesse d'évolution à l'instant t , $\frac{dQ}{dt} = Q'(t)$, peut s'écrire $0,06Q_e - 0,06Q(t)$.

Cette vitesse résulte de deux facteurs : le sol absorbe l'azote atmosphérique à une vitesse constante v et élimine son azote à une vitesse proportionnelle à Q .

b) Jenny évalue v à 38 kg par ha et par an (en l'absence d'engrais et de résidus végétaux). Déterminez Q_e .

72 Réchauffement ou refroidissement

À l'instant $t=0$, un corps de température T_0 est placé dans un milieu de température ambiante T_a .

Sa température $T(t)$ évolue en fonction du temps t selon la loi de Newton : $T(t) = (T_0 - T_a)e^{-kt} + T_a$ où k est un coefficient positif dépendant de la surface de contact entre le corps et le milieu ambiant.

1. Étudiez sur $[0 ; +\infty[$ le sens de variation de la fonction $T : t \mapsto (T_0 - T_a)e^{-kt} + T_a$ et déterminez sa limite en $+\infty$.

Vous distinguerez les cas : $T_0 < T_a$; $T_0 = T_a$; $T_0 > T_a$.

Interprétez ces résultats en termes de physique.

2. Exemple : la température de votre appartement est 20 °C. À 20 h 00, vous sortez du four le gâteau que vous avez préparé pour vos invités : sa température est alors de 180 °C. Vous observez qu'à 20 h 30, elle est de 100 °C.

À quelle heure pourriez-vous servir le gâteau à la température idéale, soit 30 °C ?

AVEC LES TICE

73 Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = e^x$ et $g(x) = (1-x)e^{2x}$.

M est un point quelconque de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse t .

La tangente en M à $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des ordonnées en N.

Le point I est le milieu de $[MN]$.

Le but de l'exercice est de trouver sur quelle ligne se déplace le point I lorsque le point M décrit $\mathcal{C}_f$.

1. Expérimentation et conjecture

a) Créez les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

● Créez un curseur pour le paramètre t .

Réglages : $-10 \leq t \leq 10$; incrément : 0,1.

● Créez M sur $\mathcal{C}_f$ puis la tangente en M à $\mathcal{C}_f$ et enfin N.

● Créez I milieu de $[MN]$.

b) Activez la trace de I et déplacez le curseur.

Sur quelle ligne semble se déplacer le point I ?

2. Démonstration

a) Trouvez une équation de la tangente en M à $\mathcal{C}_f$.

b) Démontrez que N a pour coordonnées $(0; e^t(1-t))$.

c) Déduisez-en les coordonnées de I et concluez.

74 À chaque nombre m , on associe la fonction f_m définie sur $\mathbb{R}$ par $f_m(x) = (x+m)e^x$. On note $\mathcal{C}_m$ la représentation graphique de f_m dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et Γ la courbe d'équation $y = -e^x$.

1. Construction avec GeoGebra

● Créez un curseur m : $-5 \leq m \leq 5$, incrément 0,1.

● Créez $\mathcal{C}_m$ et Γ .

● Créez le point M_m de $\mathcal{C}_m$ d'abscisse 1 et la tangente T_m en M_m à $\mathcal{C}_m$.

2. Conjecture

Faites varier m .

a) Observez le point correspondant au minimum de f_m . Que pouvez-vous conjecturer ?

b) Observez la position de la tangente T_m . Que pouvez-vous conjecturer ?

3. Démonstration

a) Dressez le tableau de variation de f_m .

b) Calculez les coordonnées du point S_m correspondant au minimum de f_m .

Vérifiez que S_m appartient à Γ .

c) Démontrez que la tangente T_m a pour équation :

$$y = e(2x - 1 + mx).$$

Déduisez-en que, quel que soit le nombre m , T_m passe par un point fixe.

75 f, g, h sont trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^x, \quad g(x) = e^{-x} \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

On note $\mathcal{C}_f, \mathcal{C}_g, \mathcal{C}_h$ leurs courbes représentatives dans un repère orthonormé.

À tout nombre t , on associe les points M et N de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ de même abscisse t . On note T_M la tangente en M à $\mathcal{C}_f$, T_N la tangente en N à $\mathcal{C}_g$ et P le point d'intersection de ces tangentes. Enfin, I est le milieu de $[MN]$.

On s'intéresse dans la suite :

– aux tangentes T_M et T_N ;

– à la ligne décrite par le point I lorsque t varie ;

– à la position de la droite (PI) par rapport à la courbe $\mathcal{C}_h$.

1. Expérimentation et conjecture

a) Créez les courbes $\mathcal{C}_f, \mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_h$.

● Créez un curseur pour le paramètre t .

Réglages : $-10 \leq t \leq 10$; incrément : 0,1.

● Créez M et N sur $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

● Créez les tangentes T_M, T_N et le point P.

● Créez le point I et la droite (PI).

b) Activez la trace de I et déplacez le curseur.

● Quelle particularité semblent présenter les tangentes T_M et T_N ?

● Sur quelle ligne semble se déplacer le point I ?

● Quelle particularité semble présenter la droite (PI) ?

2. Démonstration

a) Démontrez que les tangentes aux points M et N sont perpendiculaires.

b) Calculez les coordonnées du point P, intersection de deux tangentes.

c) Calculez les coordonnées de I et vérifiez que I est un point de $\mathcal{C}_h$.

d) Démontrez que la droite (PI) est tangente à $\mathcal{C}_h$ en I.

Rappel

La tangente en I à $\mathcal{C}_h$ a pour vecteur directeur $\vec{u}(1; h'(t))$.

Prendre toutes les initiatives

76 La suite (u_n) est définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = u_n + 1$. On note (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = e^{-u_n}$.

Démontrez que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_0 + \dots + v_n) = \frac{1}{e-1}$.

77 La suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = n(e^{\frac{1}{n}} - 1)$ est-elle convergente ?

Le jour du BAC

78 Travail en autonomie

→ Rédigez la solution de cet exercice en vous aidant du guide.



Sur le Web

Retrouvez le corrigé de cet exercice sur le site www.transmathlycee.net/eleve-TermS

ROC Restitution organisée des connaissances

Prérequis

La fonction exponentielle est l'unique fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\text{pour tout nombre } x, g'(x) = g(x) \quad \text{et} \quad g(0) = 1.$$

Démonstration

Démontrez que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$.

Application

A. f est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$.
Quelle est la limite de f en 0 ? En $+\infty$?

B. La suite (u_n) est définie pour tout entier $n \geq 1$ par :

$$u_n = \frac{1}{n} \left(1 + e^{\frac{1}{n}} + e^{\frac{2}{n}} + \dots + e^{\frac{n-1}{n}} \right).$$

1. Démontrez que $1 + e^{\frac{1}{n}} + \dots + e^{\frac{n-1}{n}} = \frac{1 - e^{\frac{1}{n}}}{1 - e^{\frac{1}{n}}}$.

2. a) Démontrez que pour tout entier $n \geq 1$,

$$u_n = (e - 1) f\left(\frac{1}{n}\right).$$

b) Déduisez-en que la suite (u_n) converge vers $e - 1$.

Analyser l'énoncé

On pense à l'utilisation d'un taux d'accroissement.

Analyser l'énoncé

On remarque que $f(x) = \frac{1}{\frac{e^x - 1}{x}}$,
ce qui fait le lien avec le résultat de la démonstration.

Analyser l'énoncé

On reconnaît la somme des n premiers termes d'une suite particulière.

Analyser l'énoncé

On exprime u_n à l'aide de la fonction f , dont on a étudié le comportement au A.

Guide

Démonstration

Écrivez le taux d'accroissement de la fonction exponentielle en $x = 0$. On sait que la limite de ce taux est le nombre dérivé de la fonction exponentielle en 0.

Application

A. Pour obtenir la limite en 0, on utilise le résultat de la démonstration. Pour obtenir la limite en $+\infty$, n'oubliez pas que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

B. 1. On reconnaît dans l'expression $1 + e^{\frac{1}{n}} + \dots + e^{\frac{n-1}{n}}$

la somme des n premiers termes de la suite géométrique de raison $e^{\frac{1}{n}}$ et de premier terme 1.

2. a) Dans la question précédente, on a établi que $u_n = \frac{1}{n} \times \frac{1 - e^{\frac{1}{n}}}{1 - e^{\frac{1}{n}}}$. Exprimez $f\left(\frac{1}{n}\right)$ en fonction de n puis concluez.

b) Si l'on pose $\frac{1}{n} = X$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{X \rightarrow 0} f(X)$.

La partie A. de l'exercice vous permet de conclure.

ZOOM sur la rédaction

Pensez à écrire $f(x) = \frac{x}{e^x - 1}$
puis justifiez la limite quand x tend

vers $+\infty$ de $\frac{x}{e^x}$ et de $\frac{1}{1 - e^{-x}}$.

ZOOM sur la rédaction

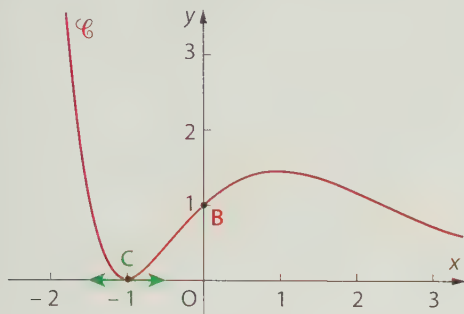
N'oubliez pas que pour $q \neq 1$,

$$1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1} = \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

Justifiez l'utilisation de cette formule.

79 BAC

On a tracé ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ où a, b, c sont trois nombres.



On donne son tableau de variation incomplet.

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0
$f(x)$			

1. a) À l'aide des renseignements portés sur la figure, déterminez les nombres a, b, c .

b) Complétez le tableau de variation en justifiant vos réponses.

2. Dans cette question, on se propose d'étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}$ et de la tangente T en B à $\mathcal{C}$.

a) Justifiez que le problème revient à déterminer le signe de $(x+1)\varphi(x)$ où φ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = (x+1)e^{-x} - 1$.

b) Étudiez le signe de $\varphi(x)$ et concluez.

80 BAC

A. f est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x-1}{x+1} - e^{-x}.$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

1. Démontrez que $\mathcal{C}$ admet une asymptote horizontale dont on donnera une équation.

2. Étudiez les variations de f sur $[0; +\infty[$.

3. Déterminez une équation de la tangente T à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

4. Démontrez que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $[1; 2]$. On note u cette solution. Déterminez un encadrement d'amplitude 10^{-1} de u .

B. n désigne un entier naturel non nul.

f_n est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f_n(x) = \frac{x-n}{x+n} - e^{-x}.$$

1. Dressez le tableau de variation de f_n .

2. a. Calculez $f_n(n)$. Quel est son signe ?

b) Démontrez par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $e^{n+1} > 2n + 1$.

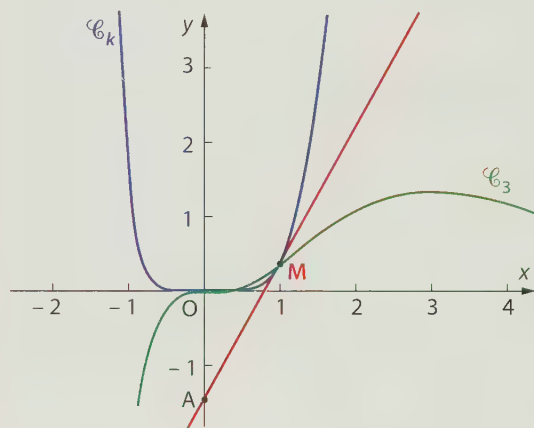
c) Démontrez que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $[n; n+1]$. On note u_n cette solution.

3. Calculez $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n}$.

81 BAC

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^n e^{-x}$. $\mathcal{C}_n$ est la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé. Sur la figure ci-dessous, on a tracé la courbe $\mathcal{C}_3$ ainsi qu'une courbe $\mathcal{C}_k$ ($k \in \mathbb{N}^*$).

La tangente T_k à $\mathcal{C}_k$ au point M d'abscisse 1 coupe l'axe des ordonnées en A de coordonnées $(0; -\frac{4}{e})$.



1. a) Quelle est la limite de f_1 en $+\infty$ et en $-\infty$?

b) Étudiez les variations de f_1 et dressez son tableau de variation.

c) À l'aide de la représentation précédente, justifiez que k est un entier pair supérieur ou égal à 2.

2. a) Démontrez que pour tout entier $n \geq 1$, toutes les courbes $\mathcal{C}_n$ passent par deux points fixes dont vous donnerez les coordonnées.

b) Vérifiez que pour tout entier $n \geq 2$ et tout nombre x , $f'_n(x) = x^{n-1}(n-x)e^{-x}$.

3. Sur la figure, f_3 semble admettre un maximum pour $x = 3$. Validez cette conjecture par une démonstration.

4. a) Démontrez que la tangente T_k en M à la courbe $\mathcal{C}_k$ coupe l'axe des ordonnées au point de coordonnées $(0; \frac{2-k}{e})$.

b) Déduisez-en la valeur de l'entier k .

c) Sur la figure, il semble que la fonction f_k soit strictement croissante sur $[0; +\infty[$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x) = +\infty$.

Validez ou non ces conjectures.

Pour aller plus loin

82 Étude d'une famille de fonctions

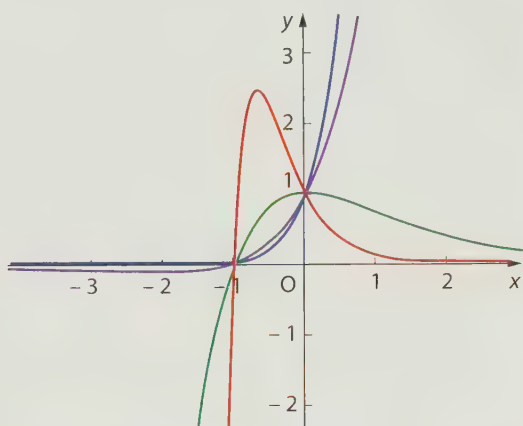
A. Étude d'une fonction

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x+1)e^{-x}$.

On note $\mathcal{C}_{-1}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Étudiez les variations de f , les limites en $+\infty$ et $-\infty$. Résumez les résultats dans un tableau le plus complet possible.

2. Repérez $\mathcal{C}_{-1}$ sur la figure ci-dessous.



B. Étude d'une famille de fonctions

Pour tout entier relatif m , on note f_m la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_m(x) = (x+1)e^{mx}$.

$\mathcal{C}_m$ est la courbe représentative de f_m .

1. a) Quelle est la nature de f_0 ?

Dans la suite, on suppose $m \neq 0$.

b) Déterminez les points d'intersection de $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_1$, et vérifiez que pour tout entier relatif m , ces points appartiennent à $\mathcal{C}_m$.

2. Étudiez la position relative de $\mathcal{C}_m$ et $\mathcal{C}_{m+1}$.

3. a) Calculez, pour tout nombre x , $f'_m(x)$.

b) Déduisez-en le sens de variation de f_m suivant les valeurs de m (on distinguera $m > 0$ et $m < 0$).

4. Sur la figure ci-dessus, on a tracé quatre courbes correspondant à quatre valeurs différentes de m : -1 ; -3 ; 1 ; 2 . Identifiez les courbes correspondant à ces valeurs en justifiant votre réponse.

83 Suite et fonction exponentielle

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x^2 + x + 1)e^x.$$

On note $f^{(1)}, f^{(2)}, \dots, f^{(n)}$ les dérivées successives de f .

$f^{(1)}$ désigne la dérivée notée habituellement f' .

1. a) Calculez $f^{(1)}(x)$.

b) Démontrez par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$, $f^{(n)}(x)$ s'écrit sous la forme $(x^2 + a_n x + b_n)e^x$, où a_n et b_n sont des entiers naturels.

2. Dans cette question, on considère les suites (a_n) et (b_n) définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$a_1 = 3 \text{ et } a_{n+1} = a_n + 2; \quad b_1 = 2 \text{ et } b_{n+1} = b_n + a_n.$$

a) Vérifiez que (a_n) est une suite arithmétique et exprimez a_n en fonction de n .

b) Démontrez que pour tout entier $n \geq 1$, $b_n = 2 + \sum_{i=1}^{n-1} a_i$ et déduisez-en l'expression de b_n en fonction de n .

c) Quelle est l'expression de $f^{(2012)}(x)$?

84 Position relative de deux courbes

A. Des démonstrations

φ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = e^x - \frac{x^2}{2}$.

1. a) Calculez, pour tout nombre x , $\varphi'(x)$ et $\varphi''(x)$.

b) Étudiez les variations de φ et déduisez-en que pour tout nombre x strictement positif, $\frac{e^x}{x} \geq \frac{x}{2}$.

c) Déduisez-en $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x}$.

2. ψ est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\psi(x) = e^x - \frac{x^3}{6}$.

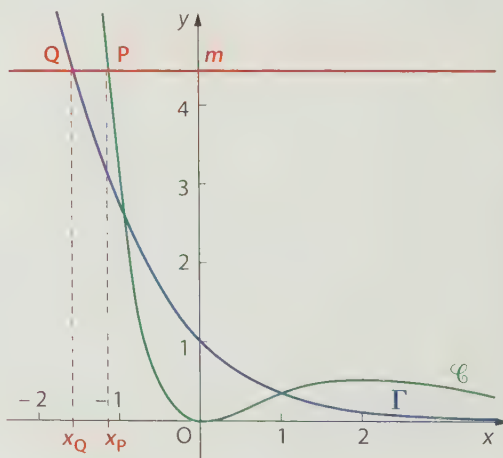
a) En vous aidant de la question 1., démontrez que, pour tout nombre x strictement positif, $\frac{e^x}{x^2} \geq \frac{x}{6}$.

b) Déduisez-en $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2}$.

B. Application

Dans un repère orthonormé, on a tracé les courbes $\mathcal{C}$ et Γ représentatives des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 e^{-x} \quad \text{et} \quad g(x) = e^{-x}.$$



1. Démontrez que les variations de f sont données par le tableau ci-après :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
	$+\infty$	$\searrow 0$	$\nearrow 4$ e^2	$\searrow 0$

2. Étudiez la position relative de $\mathcal{C}$ et Γ .

3. On admet que pour tout m strictement supérieur à $4e^{-2}$, la droite d'équation $y = m$ coupe $\mathcal{C}$ en P et Γ en Q.

P a pour coordonnées $(x_P; m)$ et Q, $(x_Q; m)$.

L'objectif de cette question est de calculer la valeur de x_P dans l'intervalle $]-\infty; -1]$ pour laquelle $PQ = 1$.

a) Pourquoi $PQ = x_P - x_Q$?

b) Justifiez que $f(x_P) = g(x_P - 1)$.

c) Déduisez-en la valeur de x_P puis celle de x_Q .

85 Une relation fonctionnelle

On admet les résultats suivants :

- Il existe une unique fonction f dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$. Cette fonction est notée $f(x) = e^x$.

- Il existe une unique fonction g dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$ telle que $g' = -g$ et $g(0) = 1$. Cette fonction est notée $g(x) = e^{-x}$.

φ est une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :

- pour tout nombre x , $[\varphi'(x)]^2 - [\varphi(x)]^2 = 1$;
- $\varphi'(0) = 1$;
- φ' est dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. a) Démontrez que $\varphi(0) = 0$ et que pour tout nombre x , $\varphi'(x) \neq 0$.

b) Démontrez que pour tout nombre x , $\varphi''(x) = \varphi(x)$.

2. On pose $u = \varphi' + \varphi$ et $v = \varphi' - \varphi$.

a) Démontrez que $u(0) = v(0) = 1$.

b) Démontrez que $u' = u$ et $v' = -v$.

3. Déduisez-en l'expression de $u(x)$ et de $v(x)$ pour tout nombre x . Quelle est alors l'expression de $\varphi(x)$?

86 Exponentielle et suite

A. La fonction g est définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par :

$$g(x) = e^x - x - 1.$$

1. Étudiez les variations de g .

2. Déterminez le signe $g(x)$ sur $[0; +\infty[$.

3. Déduisez des questions précédentes que :

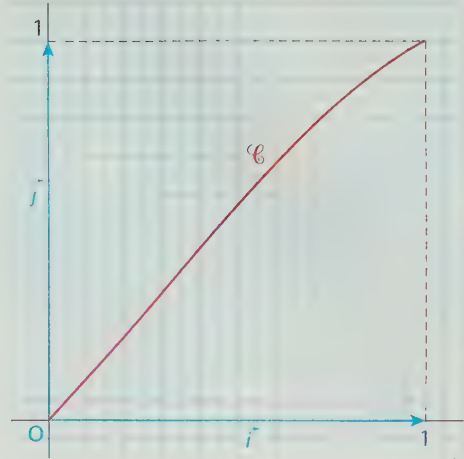
a) pour tout x de $[0; +\infty[$, $e^x - x > 0$;

b) pour tout x de $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$, $\frac{1}{2} \leq \frac{1}{e^x - x} \leq \frac{9}{10}$.

B. On considère la fonction f définie sur $I = [0; 1]$ par

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}.$$

On a tracé ci-après sa courbe représentative dans un repère orthonormé.



1. a) Démontrez que pour tout x de I , $f'(x) = \frac{h(x)}{(e^x - x)^2}$ où h est une fonction que l'on déterminera.

b) Étudiez les variations de h sur I et déduisez-en celles de f .

c) Démontrez que pour tout x de I , $f(x) \in I$.

2. On note la droite Δ d'équation $y = x$.

a) Démontrez que pour tout x de I , $f(x) - x = \frac{(1-x)g(x)}{e^x - x}$.

b) Déduisez-en la position relative de $\mathcal{C}$ et Δ sur I .

C. On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \text{ et pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Reproduisez la figure ci-dessus et tracez Δ .

Construisez sur l'axe des abscisses les premiers termes de la suite (u_n) . Quelle conjecture faites-vous quant à la convergence de la suite (u_n) ?

2. Démontrez que pour tout n de $\mathbb{N}$,

$$a) \frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1 ;$$

$$b) u_n - 1 \leq \left(\frac{9}{10}\right)^n (u_0 - 1).$$

3. La suite (u_n) est-elle convergente ? Le résultat est-il conforme à votre conjecture ?

87 Suite et nombre e

1. a) Justifiez que pour tout nombre x , $1 + x \leq e^x$ [1].

b) Déduisez-en que pour tout nombre x , $e^{-x} - 1 + x \geq 0$.

2. Démontrez que pour tout $x < 1$, $e^x \leq \frac{1}{1-x}$ [2].

3. a) À partir de l'inégalité [1], démontrez que :

$$\text{pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leq e.$$

b) De même, à partir de [2], démontrez que :

$$\text{pour tout entier naturel } n \text{ non nul, } e \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

4. On définit la suite (u_n) pour tout entier $n \geq 1$ par :

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

a) Démontrez que pour tout entier $n \geq 1$,

$$\frac{n}{n+1} e \leq u_n \leq e.$$

b) Déduisez-en que la suite (u_n) converge vers e .

Continuité et dérivation



D'un siècle
à un autre

Ce skieur s'en donne à cœur joie dans la poudreuse et dessine une magnifique trajectoire « continue ». La notion de continuité en mathématique est basée sur cette approche intuitive : une fonction est continue quand on peut tracer sa courbe « sans lever le crayon ». Mais pour définir rigoureusement cette notion, il fallut attendre la reconstruction des Mathématiques menée au XIX^e siècle par plusieurs mathématiciens, dont Bernhard Bolzano.



En savoir plus sur
Bernhard Bolzano

→ Chercheur d'hier p. 121

Dérivées de fonctions usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	intervalle(s)
x	1	$\mathbb{R}$
$mx + p$	m	$\mathbb{R}$
$ax^2 + bx + c$	$2ax + b$	$\mathbb{R}$
$x^n (n \in \mathbb{N}^*)$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$] -\infty ; 0[$ ou $] 0 ; +\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$] 0 ; +\infty[$

Opérations sur les dérivées

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I , λ est un nombre réel.

- $(u + v)' = u' + v'$
- $(\lambda u)' = \lambda u'$
- $(uv)' = u'v + uv'$
- $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2} \quad (v(x) \neq 0 \text{ sur } I).$

Dérivées des fonctions polynômes

Toute fonction polynôme :

$$P: x \mapsto a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

(avec $a_n \neq 0$) est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est :

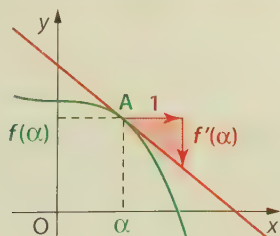
$$P': x \mapsto n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_1.$$

Équation d'une tangente

f est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I , α est un nombre appartenant à I .

La courbe représentative de f admet au point d'abscisse α une tangente d'équation réduite :

$$y = f'(\alpha)(x - \alpha) + f(\alpha).$$



1 QCM

Pour chaque affirmation, une seule réponse est exacte. Identifiez-la en justifiant votre réponse.

1. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^2 - 3x + 1$$

a pour dérivée la fonction $f'(x)$ définie sur $\mathbb{R}$ par :

a) $f'(x) = 2x - 3$

b) $f'(x) = 4x - 3$

c) $f'(x) = 4x^2 - 3$

2. La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto 3x^2 + 2$ est la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

a) $f(x) = 6x$

b) $f(x) = x^3 + 2$

c) $f(x) = x^3 + 2x - 3$

3. La fonction racine carrée définie sur $\mathbb{R}^+$:

a) est dérivable en 0

b) est dérivable sur $] 0 ; +\infty[$

c) est dérivable sur $] 0 ; +\infty[$

2 Vrai ou faux

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I .

a) La dérivée de $u - v$ est

$$u' - v'.$$

b) La dérivée de u^2 est $2u$.

c) La dérivée de $3uv$ est $3u'v'$.

d) Pour tout nombre x de I , $v(x) \neq 0$.

Alors $\frac{u+v}{v}$ et $\frac{u-v}{v}$ ont la même dérivée.

Rappel

On note u^2 la fonction :

$$x \mapsto [u(x)]^2 = u(x) \times u(x).$$

3 QCM

Pour chaque affirmation, une seule réponse est exacte. Identifiez-la en justifiant votre réponse.

1. La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x^2 - 3)^2$ a pour dérivée la fonction f' définie sur $\mathbb{R}$ par :

a) $f'(x) = 8x^2(2x^2 - 3)$

b) $f'(x) = 8x(2x^2 - 3)$

c) $f'(x) = 4(2x^2 - 3)$

2. f et g sont deux fonctions définies et dérivables sur le même intervalle I , telles que pour tout x de I , $f'(x) = g'(x)$.

On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ leurs courbes représentatives.

a) Toute droite tangente à $\mathcal{C}_f$ est tangente à $\mathcal{C}_g$.

b) Pour tout x de I , $f(x) = g(x)$.

c) Il existe un nombre k tel que, pour tout x de I :

$$f(x) - g(x) = k.$$



Activité 1

LA CALCULATRICE AURAIT-ELLE PEUR DU VIDE ?

L'objectif de cette activité est d'étudier la fonction *partie entière*, une fonction parfois utilisée en mathématiques, et de montrer, grâce à cette étude, que l'affichage de la calculatrice graphique doit être interprété.

1 La fonction *partie entière*

Tout nombre x appartient à un unique intervalle de la forme $[n ; n + 1[$ où n est un nombre entier. Cet entier n est appelé *partie entière* de x ; il est noté $E(x)$.

a) Pour chacun des nombres suivants, précisez l'unique intervalle de la forme $[n ; n + 1[$ qui le contient et donnez sa partie entière : $2,5$ 4 π $\frac{3}{4}$ -2 $-0,1$.

b) À chaque nombre x , la fonction *partie entière* associe un unique entier relatif n . Réciproquement, tout nombre entier relatif n est-il la partie entière d'un nombre x ?

• Prenons, par exemple, l'entier 0.

Donnez un nombre x dont la partie entière est 0, c'est-à-dire une solution de l'équation $E(x) = 0$. Précisez maintenant l'ensemble des solutions de cette équation $E(x) = 0$.

• Prenons un entier n quelconque. Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'équation $E(x) = n$.

c) Expliquez pourquoi l'équation $E(x) = 0,3$ n'a pas de solution.

2 Représentation graphique

a) Utilisez votre calculatrice graphique pour représenter la fonction $E : x \mapsto E(x)$ sur l'intervalle $[0 ; 3]$. Choisissez la fenêtre d'affichage : $0 \leq x \leq 3$ et $0 \leq y \leq 3$.

La fonction est préprogrammée dans la calculatrice :

b) En vous fiant uniquement à cette représentation graphique, conjecturez la ou les solutions de l'équation $E(x) = 0,3$. Est-ce cohérent avec l'étude faite en 1. c) ?

c) Les segments verticaux qui apparaissent sur l'écran posent problème.

• Modifiez la fenêtre d'affichage en choisissant $0,99 \leq x \leq 1,01$, puis $0,9999 \leq x \leq 1,0001$. Que constatez-vous ?

• Utilisez l'instruction **TABL** pour CASIO ou **table** pour TI, en utilisant un pas de plus en plus fin. Le nombre 0,3 apparaît-il dans les valeurs Y prises par la fonction ? Vérifiez que la table ne donne pour Y que des valeurs entières.

d) Précisez $E(1)$.

• Lorsque x tend vers 1, $x < 1$, quel est le comportement de $E(x)$? Répondez à la même question lorsque x tend vers 1, $x > 1$.

La fonction E est définie en 1 mais n'a pas de limite en 1. On dit qu'elle n'est pas continue en 1.

• La courbe représentative de la fonction E présente un saut en 1. Pour quels nombres retrouve-t-on ce phénomène ?

e) Représentez sur une feuille la fonction E sur l'intervalle $[0 ; 3]$, puis sur $[-2 ; 3]$. Indiquez clairement les images des entiers de l'intervalle.

Intg pour CASIO



partEnt pour TI



Activité 2

Calcul de l'impôt sur le revenu

L'objectif de cette activité est d'étudier le lien fonctionnel entre le montant des revenus et le montant de l'impôt pour un foyer.

Le tableau ci-contre précise les différents taux applicables pour le calcul de l'impôt sur les revenus de l'année 2010.

On considère alors la grille de calcul de l'impôt ci-dessous : R est le revenu imposable, N est le nombre de parts et QF est le quotient familial, c'est-à-dire le rapport R/N .

Tranches de revenus et taux applicables	
jusqu'à 5 963 €	0 %
de 5 963 € à 11 896 €	5,5 %
de 11 896 € à 26 420 €	14 %
de 26 420 € à 70 830 €	30 %
plus de 70 830 €	41 %

SI QF...			
n'excède pas	5 963 €	impôt =	0
est supérieur à	5 963 €	et inférieur ou égal à	11 896 €
impôt =	$(R \times 0,055) - (327,97 \text{ €} \times N)$		
est supérieur à	11 896 €	et inférieur ou égal à	26 420 €
impôt =	$(R \times 0,14) - (1\,339,13 \text{ €} \times N)$		
est supérieur à	26 420 €	et inférieur ou égal à	70 830 €
impôt =	$(R \times 0,30) - (5\,566,33 \text{ €} \times N)$		
est supérieur à	70 830 €	impôt =	$(R \times 0,41) - (13\,357,63 \text{ €} \times N)$

1 Quelques exemples

a) Calculez le quotient familial QF d'une famille dont le nombre de parts N est 2,5 et le revenu imposable R s'élève à 21 500 €, puis déduisez-en l'impôt dû par cette famille.

b) Déterminez le revenu imposable d'un contribuable ayant une seule part dont le montant de l'impôt est 3 600 €.

c) Un contribuable (une part) déclarant un revenu imposable de 26 421 € constate que, à un euro près, il change de tranche et atteint ainsi celle dans laquelle le taux d'imposition est de 30 %.

Calculez l'impôt correspondant aux revenus voisins de 26 421 € et 26 420 €.

Que constatez-vous, sachant que le montant doit être arrondi à l'euro le plus près ?

2 Étude de la fonction « Impôt »

Dans la suite de cette activité, on s'intéresse au cas d'une personne célibataire ayant une seule part ($N = 1$ et donc $QF = R$). L'impôt I est donc fonction de la variable R .

a) Précisez l'ensemble de définition de la fonction $f: R \mapsto I$ et son découpage en cinq intervalles résultant de la définition de l'impôt. Pour chacun de ces intervalles, indiquez clairement si les bornes appartiennent à l'intervalle.

b) Justifiez que sur quatre de ces intervalles la fonction f est affine strictement croissante.

3 Représentation graphique

a) Justifiez l'existence des nombres $\lim_{R \rightarrow 11\,896^+} f(R)$ et $\lim_{R \rightarrow 11\,896^-} f(R)$ et vérifiez leur égalité.

On dit que la fonction f est continue en 11 896.

b) Vérifiez qu'il en est de même aux autres bornes des cinq intervalles.

On dit que la fonction f est continue sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

c) Décrivez l'allure de la courbe.

Problème ouvert

Relisez cet exercice après le chapitre 5 ... Est-il plus facile ?

Combien existe-t-il de triangles isocèles d'aire 108 cm^2 et de périmètre 48 cm ?



Continuité d'une fonction

1.1 Limite finie en a

Définition 1 f est une fonction définie sur un intervalle I .

a est un nombre qui appartient à I ou qui est une borne de I .

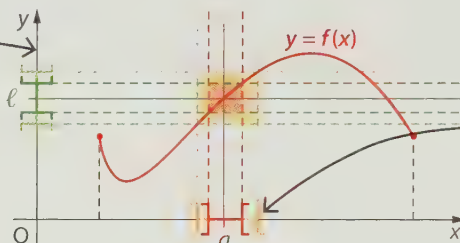
Dire qu'une fonction f a pour limite ℓ lorsque x tend vers a signifie que **tout** intervalle ouvert contenant ℓ contient **toutes les valeurs** $f(x)$ prises par tous les nombres x de l'intervalle I **suffisamment proches de a** .

On écrit $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \ell$.

Cette définition traduit l'accumulation des valeurs $f(x)$ « autour » du nombre ℓ .

Illustration

Quel que soit l'intervalle ouvert contenant ℓ , et aussi petit soit-il...



...il existe un intervalle ouvert contenant a pour lequel la courbe est dans la partie colorée.

Animation

1.2 Continuité en a , continuité sur un intervalle

Définition 2 • f est une fonction définie sur un intervalle I , a est un nombre appartenant à I .

Dire que f est continue en a signifie que f a une limite finie en a telle que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

• Dire que f est continue sur l'intervalle I signifie que f est continue en tout nombre de I .

1.3 Continuité et limites de suites

Théorème 1 La suite (u_n) est définie par la donnée de u_0 et la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

Si (u_n) a une limite finie ℓ et si f est continue en ℓ , alors $\ell = f(\ell)$.

Démonstration. f est continue en ℓ donc $\lim_{x \rightarrow \ell} f(x) = f(\ell)$. (u_n) converge vers ℓ , soit $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

Donc d'après le théorème 4 du chapitre 2, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(u_n) = f(\ell)$, soit encore $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = f(\ell)$.

Les suites (u_n) et (u_{n+1}) , qui ne diffèrent que par leurs premiers termes, ont la même limite ℓ , donc on conclut $\ell = f(\ell)$.

Remarques

• ℓ est solution de l'équation $x = f(x)$.

• Par abus de langage, on dit que l'on « passe à la limite » dans la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$ pour obtenir l'égalité $\ell = f(\ell)$.

2

Dérivabilité et continuité

Dans cette partie, f est une fonction définie sur un intervalle I , a est un réel appartenant à I .

2.1 | Lien entre dérivabilité et continuité

Théorème 2

- Si f est dérivable en a , alors f est continue en a .
- Si f est dérivable sur I , alors f est continue sur I .

Démonstration. Dire que f est dérivable en a signifie que la fonction τ , définie pour tout h différent de 0, avec $a + h$ dans I , par $\tau(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ a pour limite $f'(a)$ quand h tend vers 0.

Pour tout h non nul, $h\tau(h) = f(a+h) - f(a)$ d'où $f(a+h) = f(a) + h\tau(h)$.

Puisque $\lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = f'(a)$, il en résulte que $\lim_{h \rightarrow 0} h\tau(h) = 0$ et $\lim_{h \rightarrow 0} f(a+h) = f(a)$.

Posons $x = a + h$, soit $h = x - a$. Alors $\lim_{x \rightarrow a} h(x) = 0$ et $\lim_{h \rightarrow 0} f(x) = f(a)$. On peut donc conclure (théorème 3 sur la limite d'une fonction composée – chap. 2, p. 58) que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ et f est continue en a .



Attention. La réciproque de ce théorème est fautive. Une fonction peut être continue en a sans être dérivable en a . C'est le cas, par exemple de la fonction *racine carrée* en zéro (voir ci-dessous) et de la fonction *valeur absolue* en zéro.

2.2 | Continuité des fonctions usuelles

Nous avons étudié la dérivabilité de quelques fonctions dites « usuelles » et nous pouvons en déduire leur continuité.

- Les fonctions **polynômes** sont dérivables sur $\mathbb{R}$, donc continues sur $\mathbb{R}$.
- La fonction **inverse** ($x \mapsto \frac{1}{x}$) est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty; 0[$ et $]0; +\infty[$. Elle est donc continue sur chacun de ces intervalles.

• La fonction **racine carrée** ($x \mapsto \sqrt{x}$) est dérivable sur $]0; +\infty[$, donc continue sur $]0; +\infty[$. Elle n'est pas dérivable en 0 (le taux d'accroissement en 0 a pour limite $+\infty$). Mais puisque $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} = 0$, la fonction *racine carrée* est continue en 0, donc sur $[0; +\infty[$.

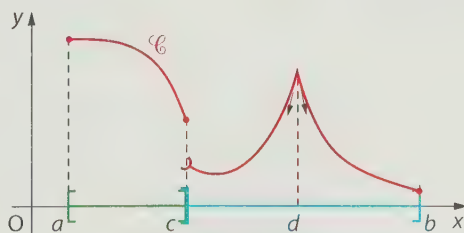
- La fonction **exponentielle** est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc continue sur $\mathbb{R}$.
- Il résulte de la définition 3 et des théorèmes relatifs aux opérations et limites vus au chapitre 2, que : toutes les fonctions construites par **somme, produit, quotient des fonctions usuelles** sont continues sur tout intervalle sur lequel elles sont définies.

2.3 | Aspect graphique

Graphiquement, la continuité d'une fonction f sur un intervalle I se traduit par le fait que la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f est d'un seul morceau.

La représentation ci-contre de la fonction f définie sur l'intervalle $[a; b]$ permet de conjecturer que :

- f est continue sur $[a; c]$ et sur $]c; b]$, mais n'est pas continue en c (f présente une « discontinuité » en c);
- f est continue en d mais n'est pas dérivable en d : la courbe admet deux demi-tangentes distinctes au point d'abscisse d .



3

Fonctions continues et résolution d'équations

3.1 Théorème des valeurs intermédiaires

Théorème 3

f est une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$.

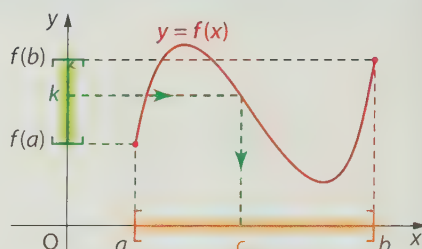
(admis)

Pour tout nombre k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe **au moins un** nombre c compris entre a et b tel que **$f(c) = k$** .

Autrement dit, pour tout nombre k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$, d'inconnue x , a **au moins une** solution c dans l'intervalle $[a; b]$.

Remarques

- $f(a)$ n'est pas nécessairement inférieur à $f(b)$.
- L'image $f(x)$ d'un nombre x de $[a; b]$ n'est pas nécessairement dans l'intervalle $[f(a); f(b)]$ ou $[f(b); f(a)]$.



Animation

Vocabulaire.

L'ensemble des images $f(x)$ pour x appartenant à l'intervalle I est noté $f(I)$ et est appelé **image de I par f** .

3.2 Fonction continue strictement monotone sur $[a; b]$

Théorème 4

f est une fonction **continue, strictement croissante** sur l'intervalle $I = [a; b]$.

1. L'image de l'intervalle I par f est l'intervalle $[f(a); f(b)]$.
2. Pour tout nombre k de $[f(a); f(b)]$, l'équation $f(x) = k$, d'inconnue x , a **une solution et une seule** dans l'intervalle $[a; b]$.

On obtient les mêmes conclusions avec une fonction **continue, strictement décroissante** en remplaçant $[f(a); f(b)]$ par $[f(b); f(a)]$.

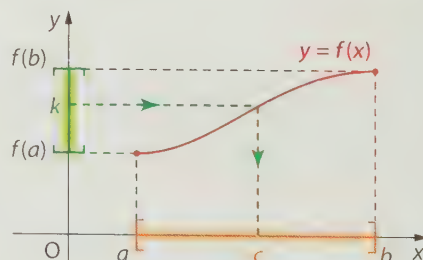
Démonstration.

1. La fonction f étant strictement croissante, pour tout x de I , $f(a) \leq f(x) \leq f(b)$. Donc l'image de tout nombre de I appartient à $[f(a); f(b)]$.

Réciproquement, tout nombre de $[f(a); f(b)]$ est l'image par f d'au moins un nombre de I (théorème 3).

Conclusion: l'image de I par f est l'intervalle $[f(a); f(b)]$.

2. L'équation $f(x) = k$ a au moins une solution dans I (théorème 3). Mais, elle ne peut pas avoir deux solutions distinctes car, f étant strictement croissante sur I , deux nombres distincts ont, par f , des images distinctes.

Cas particulier : équation $f(x) = 0$

Si f est une fonction **continue et strictement monotone** sur $I = [a; b]$, et si **$f(a) \times f(b) < 0$** , alors l'équation $f(x) = 0$ a **une solution et une seule** dans I .

En effet, l'hypothèse $f(a) \times f(b) < 0$ implique que $f(a)$ et $f(b)$ sont de signes contraires et non nuls. Donc 0 appartient à $[f(a); f(b)]$ ou $[f(b); f(a)]$.

3.3 Généralisation à un intervalle quelconque

Dans le théorème 3, l'intervalle $[a; b]$ est un intervalle fermé. On peut étendre ce théorème à un intervalle I quelconque.

Théorème 5 f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I .

(admis)

1. L'image $f(I)$ d'un intervalle I par f est un intervalle J .
2. Pour tout nombre k de J , l'équation $f(x) = k$ a une solution et une seule dans I .

Le tableau suivant précise l'intervalle $J = f(I)$ suivant le type de l'intervalle I .

La fonction f a une limite réelle ou infinie en chaque borne de I .

a et b désignent soit des nombres, soit $+\infty$, soit $-\infty$.

	f est strictement croissante sur I	f est strictement décroissante sur I
Si $I =$	$f(I)$ est l'intervalle	$f(I)$ est l'intervalle
$[a; b]$	$[f(a); f(b)]$	$[f(b); f(a)]$
$]a; b]$	$] \lim_{x \rightarrow a} f(x); f(b)]$	$[f(b); \lim_{x \rightarrow a} f(x) [$
$[a; b[$	$[f(a); \lim_{x \rightarrow b} f(x) [$	$] \lim_{x \rightarrow b} f(x); f(a)]$
$]a; b[$	$] \lim_{x \rightarrow a} f(x); \lim_{x \rightarrow b} f(x) [$	$] \lim_{x \rightarrow b} f(x); \lim_{x \rightarrow a} f(x) [$

Exemple. La fonction

$f : x \mapsto e^x$ est continue et

strictement croissante sur $I = \mathbb{R}$

avec $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.

Donc $f(I) =]0; +\infty[$.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	0	$+\infty$

Dans un tableau de variation, on convient que les **flèches obliques** traduisent la **continuité** et la **stricte monotonie** de la fonction sur l'intervalle considéré.

4

Calculs de dérivées

4.1 Dérivée de $x \mapsto u^n(x)$

Théorème 6 u est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I et n est un entier naturel.

1. Si $n \geq 2$, alors la fonction u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$.
2. Si $n \geq 1$, alors la fonction $\frac{1}{u^n}$ est dérivable pour tout réel x de I tel que $u(x) \neq 0$ et :

$$\left(\frac{1}{u^n}\right)' = -n \frac{u'}{u^{n+1}}. \text{ Cette égalité se note encore : } (u^{-n})' = -nu'u^{-n-1}.$$

Démonstration.

1. Démontrons, par récurrence, que la proposition « u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$ » est vraie pour tout entier $n \geq 2$.

• Pour $n = 2$, la fonction u^2 est le produit $u \times u$ donc u^2 est dérivable ; sa dérivée est $(u^2)' = uu' + u'u$. Ainsi $(u^2)' = 2u'u$. La proposition est vraie au rang 2.

- Supposons la proposition vraie au rang $n \geq 2$: « u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = nu'u^{n-1}$ ».

Alors la fonction u^{n+1} est le produit de deux fonctions dérivables sur I : u^n et u ; elle est donc dérivable sur I .

Sa dérivée est $(u^n \times u)' = (u^n)' \times u + u^n \times u' = nu'u^{n-1} \times u + u^n \times u'$, d'où $(u^{n+1})' = (n+1)u'u^n$.

La proposition est donc vraie au rang $n+1$.

- La proposition est vraie au rang 2 et héréditaire, donc elle est vraie pour tout entier $n \geq 2$.

2. Pour tout entier $n \geq 1$, u^n est dérivable sur I , donc $\frac{1}{u^n}$ est dérivable pour tout réel x de I tel que $u(x) \neq 0$. Sa dérivée est :

$$\left(\frac{1}{u^n}\right)' = \frac{0 \times u^n - 1 \times nu'u^{n-1}}{(u^n)^2} = \frac{-nu'u^{n-1}}{u^{2n}} = -n \frac{u'}{u^{2n-(n-1)}}, \text{ soit } \left(\frac{1}{u^n}\right)' = -n \frac{u'}{u^{n+1}}.$$

► **Exemple.** La fonction $f : x \mapsto (3x+1)^5$ est définie sur $\mathbb{R}$. $f = u^5$ avec $u(x) = 3x+1$.

u est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $u'(x) = 3$. Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x , $f'(x) = 15(3x+1)^4$.

4.2] Dérivée de $x \mapsto \sqrt{u(x)}$

Théorème 7 u est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I , et telle que pour tout x de I , $u(x) > 0$.

(admis) Alors la fonction $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

► **Exemple.** La fonction $f : x \mapsto \sqrt{3x+1}$ est définie sur $I =]-\frac{1}{3}; +\infty[$.

$f(x) = \sqrt{u(x)}$ où u est la fonction $x \mapsto 3x+1$ définie, dérivable et strictement positive sur I . La fonction f est donc dérivable sur I et pour tout x de I , $f'(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$.

4.3] Généralisation : dérivée de $x \mapsto f(u(x))$

Nous avons vu dans ce chapitre et le précédent :

$x \mapsto f(ax+b)$ a pour dérivée $x \mapsto af'(ax+b)$ (Chapitre 3, théorème 1)

$x \mapsto \exp(ax+b)$ a pour dérivée $x \mapsto a \times \exp(ax+b)$ (Chapitre 3, théorème 10)

$x \mapsto [u(x)]^n$ a pour dérivée $x \mapsto nu'(x)[u(x)]^{n-1}$ (Chapitre 4, théorème 6)

$x \mapsto \sqrt{u(x)}$ a pour dérivée $x \mapsto \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}} \quad (u(x) > 0)$ (Chapitre 4, théorème 7)

Ces résultats se généralisent de la manière suivante :

Théorème 8 Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I et f est une fonction dérivable sur un intervalle J contenant $u(I)$, alors la fonction g définie par $g(x) = f(u(x))$ est dérivable sur I .

Pour tout x de I , $g'(x) = u'(x) \times f'(u(x))$.

► **Exemple.** u est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I .

Alors la fonction $e^u : x \mapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I et $(e^u)' : x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$.

OBJECTIF

1

Étudier la continuité d'une fonction

f est une fonction définie sur un intervalle I , le réel a appartient à I ou est une borne de I .

- Dire que la fonction f est continue en a signifie que f a une limite finie en a telle que :

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

- Dire que la fonction f est continue sur l'intervalle I signifie que f est continue en tout réel de I .

EXERCICE RÉSOLU A

S'assurer de la continuité (ou non) d'une fonction

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{si } x \leq 1 \\ -x + 4 & \text{si } 1 < x \leq 3 \\ -x^2 + 8x - 15 & \text{si } x > 3 \end{cases}$

Étudiez la continuité de f sur $\mathbb{R}$.

Méthode

- On étudie la continuité de f sur chacun des intervalles mis en évidence par sa définition : $]-\infty; 1]$, $]1; 3]$ et $]3; +\infty[$. Sur ces intervalles, la continuité de f se déduit de sa nature.
- On étudie ensuite la continuité de f aux bornes (finies) de ces intervalles, en comparant les limites éventuelles de f à gauche et à droite de ces bornes.

- On conclut.

Solution

- Sur chacun des intervalles $]-\infty; 1]$, $]1; 3]$ et $]3; +\infty[$, f coïncide avec une fonction polynôme (de degré 1 ou 2) : elle est donc continue sur chacun de ces intervalles.

Étude en 1

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (x^2 + 2) = f(1) = 3 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1^+} (-x + 4) = 3, \\ \text{donc } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1).$$

La fonction f est continue en 1.

Étude en 3

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} (-x + 4) = f(3) = 1 \text{ et } \\ \lim_{x \rightarrow 3^+} (-x^2 + 8x - 15) = -9 + 24 - 15 = 0.$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x)$, f n'a pas de limite en 3, donc f n'est pas continue en 3.

- En résumé, f est continue sur $]-\infty; 3[$ et sur $]3; +\infty[$. Elle présente une discontinuité en 3.

Mise en pratique

Pour les exercices 1 à 3

Étudiez la continuité de la fonction f sur l'intervalle de définition I indiqué. Vérifiez votre étude en observant la courbe représentative de f sur votre calculatrice.

$$1 \bullet f(x) = \begin{cases} x - 2 & \text{si } 0 \leq x < 2 \\ -2x + 3 & \text{si } 2 \leq x \leq 4 \\ x - 9 & \text{si } 4 < x \leq 6 \end{cases} \bullet I = [0; 6].$$

$$2 \bullet f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x < 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } 0 \leq x \leq 4 \\ x & \text{si } x > 4 \end{cases} \bullet I = \mathbb{R}.$$

$$3 \bullet f(x) = \frac{|x|}{x} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0 \bullet I = \mathbb{R}.$$

4 Existe-t-il des valeurs de a pour lesquelles la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$?

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{si } x \geq 1 \\ -x^2 + ax + a & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

5 La fonction f est continue sur $D = [-5; 3]$.

Si $x \in [-5; -1]$, alors $f(x) = e^{-x}$

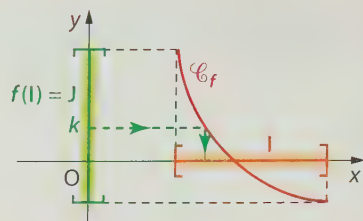
et si $x \in]1; 3]$, alors $f(x) = \frac{2x}{x+1}$.

Déterminez l'expression de f sur $]-1; 1]$, sachant que f est affine sur cet intervalle.

• **Théorème 5.** f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I .

1. L'image $f(I)$ d'un intervalle I par f est un intervalle J .
2. Pour tout nombre k de J , l'équation $f(x) = k$ a une solution et une seule dans I .

• De plus, si $I = [a; b]$ et si $f(a) \times f(b) < 0$, alors l'équation $f(x) = 0$ a une solution et une seule dans I .



EXERCICE RÉSOLU B Résoudre une équation de type $f(x) = k$

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 2 + e^{-x}$.

Démontrez que l'équation $f(x) = 2$ a deux solutions et deux seulement dans $\mathbb{R}$.

► Méthode

- On étudie les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

Pour cela :

- on exprime sa dérivée f' ;
- on détermine le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$;
- on détermine les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$;
- on en déduit le tableau de variation de la fonction f .

- La recherche des solutions de l'équation $f(x) = 2$ peut être illustrée sur le tableau de variation.

- On justifie que f est continue.
- On étudie la fonction sur chacun des intervalles sur lesquels elle est continue et strictement monotone :
 - on s'assure que 2 appartient aux intervalles images ;
 - on en déduit l'existence et l'unicité d'une solution sur chaque intervalle.
- On conclut.

► Solution

- f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x) = 1 - e^{-x}$.

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{-x} < 1 \Leftrightarrow -x < 0 \Leftrightarrow x > 0.$$

$$\text{En } +\infty : \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

$$\text{En } -\infty : f(x) = e^{-x}(xe^x - 2e^x + 1).$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

D'où le tableau de variation de f :

x	$-\infty$	α	0	β	$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

- f est dérivable donc continue sur $\mathbb{R}$.
- Les intervalles $I =]-\infty; 0]$ et $J = [0; +\infty[$ ont la même image par f : l'intervalle $] -1; +\infty[$ qui contient 2.
- f étant continue et strictement monotone sur I et sur J , l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α dans I et une unique solution β dans J .
- Ainsi l'équation $f(x) = 2$ a deux solutions et deux seulement dans $\mathbb{R}$.

► Mise en pratique

- 6** La fonction f est définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par :

$$f(x) = \frac{x^3}{x+1}.$$

1. Étudiez les variations de f sur $[-1, 5; -1]$.
2. Déduisez-en que l'équation $f(x) = 10$ a une solution unique α dans $[-1, 5; -1]$.

- 7** La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 6x + 1.$$

Démontrez que l'équation $f(x) = 4$ a trois solutions dans $\mathbb{R}$. Donnez un encadrement d'amplitude 0,01 de chaque solution.

EXERCICE RÉSOLU C

Résoudre une équation du type $f(x) = 0$

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 2x^2 - 1$.

Démontrez que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$ et que α appartient à l'intervalle $[2; 3]$. Donnez un encadrement d'amplitude 0,1 du nombre α .

► Méthode

- On justifie que f est dérivable, puis on étudie les variations de f sur $\mathbb{R}$.

► Solution

- Pour tout x de $\mathbb{R}$, la fonction polynôme f est dérivable et $f'(x) = 3x^2 - 4x = x(3x - 4)$.

L'étude du signe de $f'(x)$ conduit à :

x	$-\infty$	0	$\frac{4}{3}$	2	3	$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$		-1		$-\frac{59}{27}$	
				-	8	
						$+\infty$

- On prouve que l'équation n'a pas de solution en dehors de l'intervalle indiqué.
- On s'assure que les conditions d'application du théorème 4 sont remplies sur l'intervalle $[a; b]$ cité :
 - continuité et stricte monotonie de f ;
 - appartenance de 0 à l'intervalle image obtenu par l'étude du signe de $f(a) \times f(b)$.
- On utilise la fonction Table d'une calculatrice.

- Sur $]-\infty; 2]$, f admet -1 comme maximum, donc l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution.
- Sur $]3; +\infty]$, f admet 8 comme minimum, donc l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution.
- Sur $[2; 3]$, f est continue (puisque dérivable) et strictement croissante.
De plus, $f(2) \times f(3) = -8$,
soit $f(2) \times f(3) < 0$, donc $0 \in [f(2); f(3)]$.
L'équation $f(x) = 0$ admet donc une solution unique α dans l'intervalle $[2; 3]$.

- Avec une calculatrice : $2,2 < \alpha < 2,3$.

► Mise en pratique

- 8** La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 4x^3 - 3x - \frac{1}{2}.$$

- Calculez $f(-1)$, $f(-\frac{1}{2})$, $f(0)$ et $f(1)$.
- Déduisez-en que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins trois solutions distinctes dans $[-1; 1]$.

- 9** La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1.$$

- a)** Démontrez que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$ et que α appartient à l'intervalle $[1; 2]$.

- b)** Donnez un encadrement d'amplitude 0,1 du nombre α .

- 10** La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^3 + x + 1.$$

Précisez $f(-1)$ et $f(0)$ puis démontrez l'existence d'un unique nombre c de l'intervalle $] -1; 0[$ tel que $f(c) = 0$.

- 11 1.** Déterminez le nombre de solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation $x^3 + 3x^2 + 1 = 0$.

- 2.** Donnez un encadrement d'amplitude 0,01 des solutions éventuelles.

- 12** Le tableau de variation ci-dessous est celui d'une fonction f définie et continue sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	-1	4	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	2	-5	$+\infty$

Expliquez pourquoi l'équation $f(x) + 3 = 0$ admet exactement trois solutions distinctes sur $\mathbb{R}$.

- 13 1.** Un repère étant donné, déterminez le nombre de points communs à la courbe d'équation $y = e^{2x} + x - 2$ et à l'axe des abscisses.

- 2.** Donnez un encadrement d'amplitude 0,01 des solutions éventuelles.

OBJECTIF 3

Calculer des dérivées

u est une fonction dérivable sur I . a et b sont deux nombres.

- $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ (pour x tel que $u(x) > 0$)
- $(e^u)' = u'e^u$
- $[f(ax+b)]' = a f'(ax+b)$
- $(u^n)' = n u' u^{n-1}$ (pour n entier, $n \geq 2$)
- $\left(\frac{1}{u^n}\right)' = -n \frac{u'}{u^{n+1}} = -n u' u^{-n-1}$ (pour n naturel non nul et x tel que $u(x) \neq 0$)

EXERCICE RÉSOLU D Utilisez une forme usuelle pour dériver

Pour chacune des fonctions suivantes, précisez sur quel(s) intervalle(s) elle est dérivable et exprimez sa fonction dérivée.

a) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 3}$

b) $g(x) = (2x + 1)^5$

c) $h(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)^3}$

d) $k(x) = e^{x^2-3}$

Méthode

a) La fonction f est de la forme $\sqrt{u}$.

On détermine l'ensemble des réels x pour lesquels u est dérivable et $u(x) > 0$.

Expression de la dérivée : $f' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$.

b) La fonction g est de la forme u^n ($n \geq 2$).

Expression de la dérivée : $g' = nu'u^{n-1}$.

Remarque

$g(x)$ est un polynôme de degré 5, qu'il serait maladroit, ici, de développer.

c) La fonction h est de la forme $\frac{1}{u^n}$ ($n \geq 1$).

On détermine l'ensemble des réels x pour lesquels u est dérivable et $u(x) \neq 0$.

Expression de la dérivée : $h' = -n \frac{u'}{u^{n+1}}$.

d) La fonction k est du type e^u .

Expression de la dérivée : $k' = u'e^u$.

Solution

➔ **a)** f est de la forme $\sqrt{u}$ avec $u(x) = x^2 - 2x - 3$, trinôme dont les racines sont -1 et 3 .

$u(x) > 0$ sur $D =]-\infty; -1[\cup]3; +\infty[$.

u est dérivable sur chacun de ces intervalles. Donc f est dérivable sur D .

Comme $u'(x) = 2x - 2$, pour tout x de D :

$$f'(x) = \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x-3}} = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x-3}}.$$

➔ **b)** g est de la forme u^n avec $u(x) = 2x + 1$ et n un entier tel que $n \geq 2$.

u est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $u'(x) = 2$.

g est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$g'(x) = 5 \times 2(2x+1)^4 = 10(2x+1)^4.$$

➔ **c)** h est de la forme $\frac{1}{u^n}$ avec $u(x) = x^2 + 1$.

Pour tout réel x , $u(x) \neq 0$. De plus, u est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $u'(x) = 2x$.

h est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$h'(x) = -3 \times \frac{2x}{(x^2+1)^4} = \frac{-6x}{(x^2+1)^4}.$$

➔ **d)** k est de la forme e^u avec $u(x) = x^2 - 3$.

u est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $u'(x) = 2x$.

k est donc dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x de $\mathbb{R}$:

$$k'(x) = 2xe^{x^2-3}.$$

Mise en pratique

Pour les exercices 14 à 20

Exprimez la fonction dérivée f' de la fonction f en précisant sur quel(s) intervalle(s) f est dérivable.

14 a) $f(x) = (4 - 3x)^3$. **b)** $f(x) = (7x^2 + x - 3)^5$.

15 a) $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2 + 1}$. **b)** $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}}$.

16 a) $f(x) = x\sqrt{2x}$. **b)** $f(x) = \sqrt{x^3 - 2x}$.

17 a) $f(x) = \sqrt{3x^2 - 1}$.

b) $f(x) = \sqrt{\frac{3x-2}{2x-3}}$.

18 a) $f(x) = \frac{1}{(x-3)^3}$.

b) $f(x) = \frac{5}{(3-2x)^2}$.

19 a) $f(x) = e^{3x^2-1}$.

b) $f(x) = e^{2x} + e^{x^2-1}$.

20 a) $f(x) = \frac{e^{2x}}{x}$.

b) $f(x) = 2xe^{x+1}$.

21 Questions sur le cours

Complétez les propositions suivantes.

a) Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I , alors f est ... sur I .

Si f est une fonction continue sur un intervalle I , alors l'ensemble des images par f des nombres de I , noté $f(I)$, est ...

b) f est une fonction continue sur $[a; b]$.

Alors, pour tout nombre k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un nombre c compris entre a et b tel que ...

22 Vrai ou faux

Vrai ou faux ? Justifiez votre réponse.

a) Si f est une fonction continue sur un intervalle I , alors f est dérivable sur I .

b) La fonction f étant définie sur $I = [-1; 1]$ par $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$, l'ensemble des images par f des nombres de I est l'intervalle $[1; \sqrt{2}]$.

c) La fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = 3x^2 + \sqrt{4x}$ est dérivable sur $I =]0; +\infty[$ et pour tout x de I , $f'(x) = 6x + \frac{1}{2\sqrt{4x}}$.

23 QCM Une seule réponse exacte

Pour chaque affirmation, une seule réponse est exacte. Identifiez-la en justifiant votre réponse.

Le tableau de variation d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ est donné ci-dessous.

x	$-\infty$	$\frac{7}{3}$	3	$+\infty$		
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$		$-\frac{4}{27}$		0	$-\infty$

1. L'expression de $f(x)$ peut être :

- a)** $(2-x)(x-3)^2$ **b)** $(3x-7)(x-3)$ **c)** $\frac{2-x}{(x-3)^2}$

2. L'équation $f(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ exactement :

- a)** une solution **b)** deux solutions
c) trois solutions

3. L'ensemble des images par f des nombres de l'intervalle $] -\infty; 3[$ est :

- a)** $]0; +\infty[$ **b)** $[-\frac{4}{27}; +\infty[$ **c)** $[0; +\infty[$

4. L'équation $f(x) = x$ admet dans l'intervalle $[3; +\infty[$:

- a)** aucune solution **b)** une seule solution
c) plusieurs solutions

24 QCM Au moins une réponse exacte

Pour chaque affirmation, plusieurs réponses peuvent être exactes. Identifiez-les en justifiant vos réponses.

1. La fonction f est définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x - \sqrt{x}.$$

- a)** f est dérivable sur $I =]0; +\infty[$.
b) Pour tout x de I , $f'(x)$ est du signe de $2\sqrt{x}$.
c) f est strictement croissante sur l'intervalle $[\frac{1}{4}; +\infty[$.

2. La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^{1-x^2}$.

- a)** Pour tout x de $\mathbb{R}$, $g(x) = g(-x)$.
b) L'équation $g(x) = 2$ admet deux solutions.
c) L'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions.

3. La fonction h est définie sur $I =]-\infty; 1[$ par :

$$h(x) = \frac{x^3}{x-1}.$$

- a)** h est strictement décroissante sur I .
b) Pour tout nombre k , l'équation $h(x) = k$ admet une unique solution.
c) L'équation $h(x) = 7$ admet exactement trois solutions.

4. La fonction $f : x \mapsto \sqrt{e^{2x+1}}$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ a pour dérivée f' telle que :

- a)** $f'(x) = f(x)$ **b)** $f'(x) = e^x \sqrt{e}$ **c)** $f'(x) = 2\sqrt{e^{2x+1}}$



Apprendre à chercher

25 Polynômes de degré impair

L'écriture générale d'une fonction polynôme P de degré n , n naturel non nul, est :

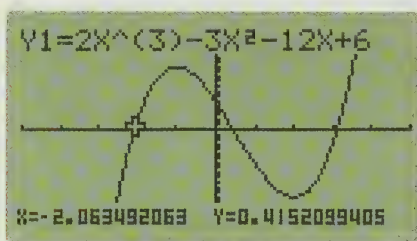
$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0.$$

Objectif Démontrer que si n est impair, l'équation $P(x) = 0$ a au moins une solution dans $\mathbb{R}$. Ainsi, tout polynôme de degré impair a au moins une racine réelle.

1. Il s'agit de prouver, lorsque n est impair, qu'il existe au moins un nombre réel c tel que $P(c) = 0$.

Le seul renseignement concernant la fonction P étant son degré, on ne peut envisager ni une étude précise, ni la possibilité d'établir un tableau de variation. Pour avoir une idée du comportement de P dans le cas « n impair », on peut commencer par étudier quelques fonctions polynômes particulières.

a) Utilisez votre calculatrice pour représenter quelques fonctions polynômes de degré impair.



b) Établissez le tableau de variation de chacune des fonctions P_1 , P_3 et P_5 définies sur $\mathbb{R}$ par $P_1(x) = 2x + 1$, $P_3(x) = -x^3 + 1$ et $P_5(x) = x^5 - 5x + 1$.

2. P étant une fonction continue, l'image de $\mathbb{R}$ par P est un intervalle J .

Le problème revient à montrer que cet intervalle J contient le nombre 0.

Déterminez l'intervalle image J pour P_1 , P_3 et P_5 . Que constatez-vous ?

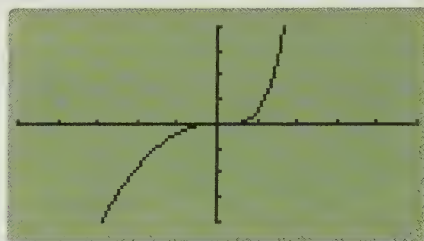
3. Il reste à démontrer que la propriété est vraie pour n entier naturel impair quelconque.

a) Précisez la limite de P en $+\infty$ et en $-\infty$. (Envisagez deux cas : $a_n > 0$ et $a_n < 0$.)

b) Précisez l'intervalle J , image de $\mathbb{R}$ par P . Concluez.

26 Utiliser une fonction auxiliaire

La simple observation d'une représentation graphique de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 e^{x-1} - \frac{x}{2}$ invite à conjecturer que f est croissante sur $\mathbb{R}$.



Objectif Vérifier l'exactitude de cette conjecture.

1. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (somme, produit de fonctions dérivables).

On envisage donc de déterminer le signe de $f'(x)$ pour en déduire les variations de f .

Exprimez $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.

2. Pour déterminer le signe de $f'(x)$, on pense à une factorisation.

Exprimez $f'(x)$ sous la forme $x \times g(x)$.

3. L'étude du signe de $g(x)$ est nécessaire. Comme il n'est pas possible de conclure directement, nous envisageons donc d'étudier les variations de cette fonction g sur $\mathbb{R}$.

a) Calculez $g'(x)$ et étudiez son signe suivant les valeurs de x .

b) Dressez le tableau de variation de g .

c) Démontrez qu'il existe un unique nombre α tel que : $g(\alpha) = 0$.

Justifiez l'appartenance de α à l'intervalle $]0,20 ; 0,21[$.

d) Déterminez le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x .

4. Nous sommes maintenant en mesure de déterminer le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x .

a) Étudiez, suivant les valeurs de x , le signe de $f'(x)$.

b) Déduisez-en le sens de variation de f ainsi que son tableau de variation.

c) Que pouvez-vous conclure ?

d) Déduisez du tableau de variation le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$.

e) Donnez l'allure de la représentation graphique de f restreinte à l'intervalle $[-1 ; 1]$ avec une unité graphique suffisante.

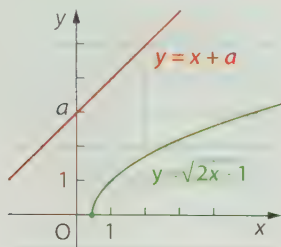
Narration de recherche



→ L'objectif n'est pas seulement de résoudre le problème posé : vous devez aussi noter les différentes idées même lorsqu'elles n'ont pas permis de trouver la réponse. Expliquez pourquoi vous avez changé de méthode et ce qui vous a fait avancer.

a désigne un nombre.

Déterminez selon les valeurs de a le nombre de solutions de l'équation $\sqrt{2x-1} = x+a$.



28 a, b et c sont trois nombres. u est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ qui a pour tableau de variation :

x	$-\infty$	0	a	b	$+\infty$
$u'(x)$			c	0	

1. Quel est le sens de variation de la fonction v_1 définie sur $\mathbb{R}$ par $v_1(x) = e^{u(x)}$?

2. Indiquez un intervalle sur lequel il est possible de préciser le sens de variation de la fonction v_2 définie sur $\mathbb{R}$ par $v_2(x) = u(x)e^{u(x)}$.

Chercheurs d'hier

Eux aussi, ils ont
cherché avant de trouver !

→ Voici quelques mathématiciens importants qui ont travaillé dans le domaine de l'Analyse.

John Neper
→ Chap. 5

Leonhard Euler
→ Chap. 3

Augustin-Louis Cauchy
→ Chap. 2
Joseph Fourier
→ Chap. 6

Giuseppe Peano
→ Chap. 1

1800

1900

ÉPOQUE CONTEMPORAINE

Bernhard Riemann
→ Chap. 7

Bernhard Bolzano
(1781-1848)



Prêtre, il fut professeur de Sciences de la religion et consacra son temps libre à l'étude des Mathématiques. Ses travaux portent principalement sur les fonctions, la logique et la théorie des nombres. Comme Augustin-Louis Cauchy, il s'est attaché à la reconstruction des Mathématiques par des démonstrations rigoureuses et complètes.

Son premier ouvrage, publié en 1817, est consacré au théorème des valeurs intermédiaires vu dans le cours de ce chapitre. Le titre de cet ouvrage est l'énoncé complet du théorème (voir ci-contre).

Rein analytischer
Beweis des Lehrsatzes,

daß
zwischen je zwei Größen, die ein ununter-
brochenes Mittel haben, auch eine dritte
Größe vorhanden ist;

von
Bernhard Bolzano,
Lehrer der Philosophie, der Mathematik, d. i. der Logik der
Religion und der Natur, und ordentlichem Professor der
Philosophie der Philosophie an der
Universität zu Prag

Für die Wissenschaften der Philosophie der
Mathematik.

Prag, 1817,
gebruckt bei Gottlieb Oesls.
Verlags-Druck Berlin 1894. Mayer & Müller.



Sur le Web serge.mehl.free.fr/chrono/Bolzano.html

Travaux dirigés

Approfondissement AP

29 La dérivée n'est pas toujours continue

L'objectif est de montrer qu'une fonction continue sur un intervalle peut ne pas être dérivable en certains nombres de cet intervalle. On donne les définitions suivantes.

Nombre dérivé à droite, nombre dérivé à gauche

a est un nombre et f est une fonction continue sur un intervalle ouvert contenant a .

- Si le rapport $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ a une limite finie lorsque h tend vers 0, $h > 0$, on dit que f est dérivable à droite en a . Cette limite est le **nombre dérivé à droite** de f en a , noté $f'_d(a)$.

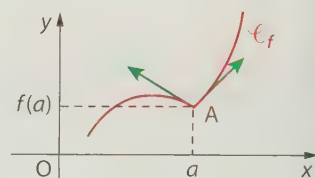
$\mathcal{C}_f$ admet une demi-tangente à droite A en $(a; f(a))$ de coefficient directeur $f'_d(a)$.

- On définit de même la dérivabilité à gauche en a et le **nombre dérivé à gauche** $f'_g(a)$.

- Si $f'_d(a) = f'_g(a)$, alors f est dérivable en a .

A Cas général

Quelles conjectures pouvez-vous émettre sur la continuité et la dérivabilité en a de la fonction f représentée ci-contre ?

**B** Étude d'un exemple

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 4 & \text{si } x < 2 \\ x^2 - 4 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$.

1. a) Utilisez votre calculatrice (ou un grapheur) pour représenter graphiquement la fonction f .
b) Démontrez que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Justifiez la dérivabilité de la fonction f sur les intervalles $I =]-\infty; 2[$ et $J = [2; +\infty[$.
3. On se pose naturellement la question de la dérivabilité de la fonction f pour $x = 2$.

- a) Calculez les limites éventuelles à droite ($h > 0$) et à gauche ($h < 0$) de 2 du rapport $\frac{f(2+h)-f(2)}{h}$.

- b) La fonction f est-elle dérivable en 2 ?

4. Donnez l'expression de la fonction f' et le tableau de variation de f .

Ainsi, pour être dérivable, une fonction doit être continue, mais sa fonction dérivée n'est pas nécessairement continue.

Une discontinuité de sa fonction dérivée se traduit graphiquement par deux demi-tangentes de coefficients directeurs différents. La courbe représentative de f présente alors un point dit **anguleux**.

C Applications

Dans chaque cas, étudiez la continuité et la dérivabilité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

a) $f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ \sqrt{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} -x^2 + 2x & \text{si } x < 0 \\ x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 2 \\ -x^2 + 8x - 8 & \text{si } x > 2 \end{cases}$

TP 30 Lorsque la dérivée est bornée

COMPÉTENCES

TICE

- Utiliser un grapheur
- Émettre des conjectures

Mathématiques

- Calculer des dérivées
- Démontrer un encadrement

La fonction f est définie sur $I = [1; 2]$ par $f(x) = \frac{x^4 + 1}{4}$.

L'objectif est d'étudier les variations de $f'(x)$ et du taux d'accroissement de f entre deux nombres de I .

A Constructions et conjectures

1. Construction de tangentes

a) Reproduisez la figure ci-contre.

● L'arc $\widehat{MN}$ est obtenu par Saisie: Fonction $(x^4+1)/4, 1, 2]$.

● Après avoir renommé les extrémités M et N, créez un point A sur $\widehat{MN}$ et la tangente en A à $\widehat{MN}$.

● Faites afficher l'équation réduite de la tangente, puis déplacez le point A sur $\widehat{MN}$.

b) Observez les variations du coefficient directeur de la tangente. Que pouvez-vous conjecturer ?

2. Construction de sécantes

a) Après avoir effacé la tangente en A, créez un nouveau point B de l'arc $\widehat{MN}$ et la droite (AB).

b) Déplacez tour à tour les points A et B sur $\widehat{MN}$. Observez les variations du coefficient directeur de la sécante (AB). Que pouvez-vous conjecturer concernant le taux d'accroissement de f entre x_A et x_B ?

B Démonstrations

1. Démontrez que pour tout x de I , $1 \leq f'(x) \leq 8$. Cela conforte-t-il votre première conjecture ?

2. a) Étudiez la dérivabilité et le sens de variation de la fonction ϕ définie sur I par $\phi(x) = 8x - f(x)$.

b) Déduez-en que pour tous nombres a et b de I (avec $a < b$), $\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq 8$.

c) A et B sont les points de $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives a et b (avec $a < b$).

Justifiez que le coefficient directeur de la droite (AB) ne dépasse pas 8.

3. a) En vous inspirant de ce qui précède, démontrez que pour tous nombres a et b de I (avec $a < b$) :

$$1 \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

b) Que pouvez-vous maintenant affirmer en ce qui concerne le coefficient directeur des droites qui coupent $\mathcal{C}$ en deux points distincts ?

On démontrerait de même la propriété suivante :

f est une fonction dérivable sur un intervalle I .

S'il existe deux nombres m et M tels que pour tout x de I , $m \leq f'(x) \leq M$, alors pour tous nombres a et b de I (avec $a < b$),

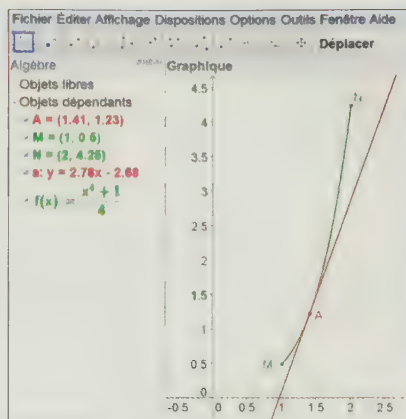
$$m \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq M.$$

Cela revient à dire que le coefficient directeur de toute droite sécante à la représentation graphique de la fonction f en deux points distincts est compris entre m et M .

Cette double inégalité peut encore s'écrire

$m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$,
ce qui se traduit par :

« Si la dérivée est bornée, alors les accroissements de la fonction le sont aussi. »



DE TÊTE



31 La fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x+1}$ si $x \geq 3$ et $f(x) = \frac{2}{3}x$ si $x < 3$ est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

32 Pourquoi la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 \text{ si } x \leq 0 \text{ et } f(x) = x + 1 \text{ si } x > 0$$

n'est-elle pas continue sur $\mathbb{R}$?

33 La fonction f est continue sur $I = [-3; 6]$ et vérifie $f(-3) = -2$ et $f(6) = 3$.

L'équation $f(x) = 0$ a-t-elle au moins une solution dans I ?

34 Le tableau de variation d'une fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$, continue sur $] -\infty; -1[$ et sur $] -1; +\infty[$, est donné ci-dessous.

x	$-\infty$	-3	-1	0	1	3	$+\infty$
$f(x)$							

1. Combien de solutions l'équation $f(x) = 0$ admet-elle ?
2. Pour chacune d'elles, donnez un encadrement par deux entiers.

35 La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{x^2+1}$.
Calculez $f'(x)$ pour tout réel x .

36 Pourquoi l'équation $x^3 + 3x - 2 = 0$ a-t-elle une solution et une seule dans l'intervalle $[0; 1]$?

DÉRIVATION DE $\sqrt{u}$

Pour les exercices 37 à 40

Calculez la dérivée de la fonction f sur l'intervalle I .

37 a) $f(x) = x\sqrt{x^2 + 1}$; $I = \mathbb{R}$.
b) $f(x) = x\sqrt{4 - x}$; $I =]-\infty ; 4[$.

38 a) $f(x) = \sqrt{1-x^2}$; $I =]-1; 1[$.
b) $f(x) = \sqrt{x^3+3}$; $I = [0; +\infty[$.

39 a) $f(x) = -x + \sqrt{x^2 + 9}$; $I = \mathbb{R}$.
b) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x+1}}$; $I = [0; +\infty[$.

40 a) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{1-x}}$; $I =]-1; 1[$.

b) $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x}$; $I =]0; +\infty[$.

41 Erreur de raisonnement

f est la fonction définie sur $I = [0 ; +\infty[$ par $f(x) = x\sqrt{x}$.

On cherche à savoir si la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f admet une tangente au point A d'abscisse 0.

On tient pour cela le raisonnement suivant : « Une équation de la tangente en A à $\mathcal{C}$ est donnée par $y = f'(0)x + f(0)$.

Or $f'(x) = \frac{3x}{2\sqrt{x}}$ donc $f'(0)$ n'existe pas.

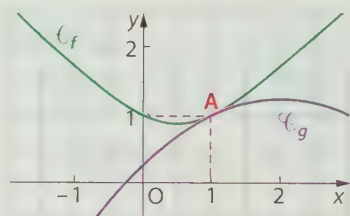
On en déduit que $\mathcal{C}$ n'a pas de tangente en A. »

Ce raisonnement est-il exact ? Justifiez votre réponse.
Si vous pensez que ce raisonnement est faux, proposez une solution.

42 Démontrer une conjecture

On a tracé ci-dessous les courbes représentatives des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1} \quad \text{et} \quad g(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{1}{4}.$$



1. Que pouvez-vous conjecturer pour ces deux courbes au point d'abscisse 1 ?
2. Démontrez votre conjecture.

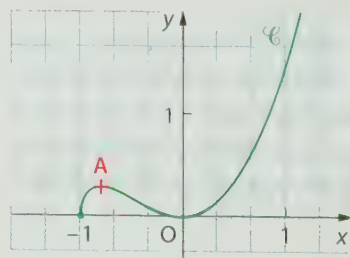
43 Une fonction et ses dérivées successives

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \sqrt{1+x^2}$.

1. Vérifiez que pour tout réel x , $\sqrt{1+x^2} \times f'(x) = f(x)$.
2. Déduisez-en que pour tout réel x :

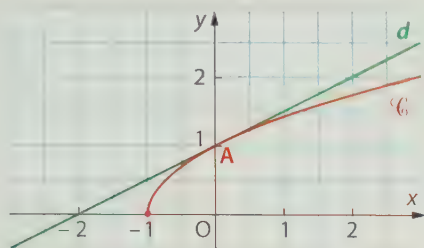
$$(1+x^2)f''(x) + xf'(x) - f(x) = 0.$$

44 On a tracé ci-dessous la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction f définie sur $I = [-1; +\infty[$ par $f(x) = x^2 \sqrt{x+1}$.



1. Dressez le tableau de variation de la fonction f .
2. Quelles sont les coordonnées du point A de $\mathcal{C}$ correspondant au maximum de f sur l'intervalle $[-1; 0]$?

45 On a tracé ci-dessous la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction f définie sur $[-1; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x+1}$ ainsi que la droite d d'équation $y = \frac{x}{2} + 1$.



1. Démontrez que la droite d est tangente à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 0.

2. On se propose de démontrer que pour tout x de l'intervalle $[-1; +\infty[$, la courbe $\mathcal{C}$ est en dessous de d .

Pour cela, on considère la fonction g définie sur $[-1; +\infty[$ par $g(x) = \sqrt{x+1} - \frac{x}{2} - 1$.

Étudiez les variations de la fonction g et dressez son tableau de variation. Concluez.

DÉRIVATION DE U^n ET DE $\frac{1}{U^n}$

Pour les exercices 46 à 50

Calculez la dérivée de la fonction f sur l'intervalle I .

46 a) $f(x) = (x^2 - 2x)^4$; $I = \mathbb{R}$.

b) $f(x) = (1 - 3x)^5$; $I = \mathbb{R}$.

47 a) $f(x) = (3x - 1)^2(1 - 2x)^3$; $I = \mathbb{R}$.

b) $f(x) = x^2(1 - x)^3$; $I = \mathbb{R}$.

48 a) $f(x) = \frac{1}{(1 - 2x)^3}$; $I =]\frac{1}{2}; +\infty[$.

b) $f(x) = \frac{2}{(3x + 1)^2}$; $I =]-\frac{1}{3}; +\infty[$.

49 a) $f(x) = \left(\frac{x+2}{x-1}\right)^2$; $I =]-\infty; +1[$.

b) $f(x) = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{x+1}$; $I =]-1; +\infty[$.

50 a) $f(x) = \left(\frac{2x-1}{x^2}\right)^3$; $I =]0; +\infty[$.

b) $f(x) = \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}\right)^2$; $I =]0; +\infty[$.

51 f est la fonction définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = x + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^3}$. Étudiez les variations de f et dressez son tableau de variation.

52 Dressez le tableau de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{(x+2)^3}{x^2+1}$.

DÉRIVATION DE e^u

Pour les exercices 53 à 56

Calculez la dérivée de la fonction f sur l'intervalle I .

53 a) $f(x) = e^{2x} - e^x$; $I = \mathbb{R}$.

b) $f(x) = e^{-x^2}$; $I = \mathbb{R}$.

54 a) $f(x) = 2(x-1)e^{x-1}$; $I = \mathbb{R}$.

b) $f(x) = (x+2)e^{-x}$; $I = \mathbb{R}$.

55 a) $f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$; $I =]0; +\infty[$.

b) $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}}$; $I =]0; +\infty[$.

56 a) $f(x) = e^{\frac{1+x}{1-x}}$; $I =]1; +\infty[$.

b) $f(x) = \frac{2}{2e^{2x} + 1}$; $I = \mathbb{R}$.

57 Dérivée en un point

f est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = xe^{\sqrt{x}}$.

On note u la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $u(x) = \sqrt{x}$.

1. a) Pourquoi peut-on affirmer que f est dérivable sur l'intervalle $I =]0; +\infty[$?

b) Calculez $f'(x)$ pour tout x de I .

2. La fonction u n'est pas dérivable en zéro.

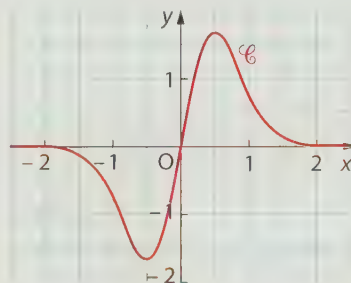
Faut-il en conclure que f n'est pas dérivable en zéro ? Justifiez votre réponse.

58 Fonction exponentielle et tangente en un point

a est un réel donné non nul et f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{ax}$. M est un point d'abscisse x_0 de la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f . M se projette orthogonalement en H sur l'axe des abscisses et la tangente en M à $\mathcal{C}$ coupe l'axe des abscisses en T .

Démontrez que la distance HT ne dépend pas du choix de M sur $\mathcal{C}$.

59 On a tracé ci-dessous la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2xe^{1-2x^2}$.



1. M est un point de $\mathcal{C}$ d'abscisse x et M' est le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse $-x$.

Démontrez que le milieu du segment $[MM']$ est un point indépendant du choix de M sur $\mathcal{C}$.

2. Il semble que la courbe $\mathcal{C}$ admette une tangente horizontale en chacun des points d'abscisse $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$.

a) Contrôlez l'exactitude de cette conjecture.

b) Quelles sont les coordonnées du point A correspondant au maximum de f ?

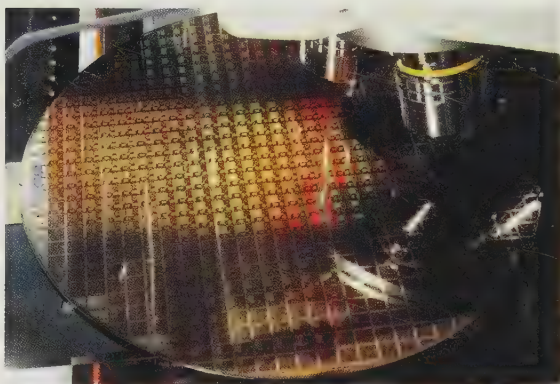
60 Dopage d'une puce

La fabrication de circuits électroniques nécessite de nombreuses étapes. Au cours de l'étape appelée dopage, des ions métalliques dits « dopants » sont introduits dans le silicium. Ces ions s'enfoncent progressivement dans le silicium.

La quantité d'ions dopants présents à la profondeur d ($d > 0$) s'exprime en fonction du temps t ($t > 0$) par :

$$N(t) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{\frac{-2d^2}{t}}.$$

Démontrez que $N(t)$ est maximal pour une valeur t_1 du temps que vous déterminerez en fonction de d . Déduisez-en $N(t_1)$.



Microprocesseurs sur une tranche de silicium.

LA CONTINUITÉ

61 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 - 3x - 2 & \text{si } x \leq 1 \\ f(x) = \frac{x-5}{x} & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

1. La fonction f est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

2. La fonction f est-elle dérivable sur $\mathbb{R}$?

62 f est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} \text{ si } x > 0 \text{ et } f(0) = \frac{1}{2}.$$

1. Démontrez que pour tout $x > 0$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}+1}$.

2. Déduisez-en que f est continue en $x = 0$.

63 La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1 - \sqrt{1+x^2}}{x} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = m.$$

Quelle valeur faut-il donner à m pour que la fonction f soit continue sur $\mathbb{R}$?

64 On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par $f(x) = 1 - x^2 e^{1-x^2}$. Son tableau de variation est donné ci-dessous.

x	0	1	$+\infty$
$f(x)$	1	0	1

1. Justifiez les résultats du tableau de variation.

2. n étant un entier naturel non nul, déterminez les valeurs de n pour lesquelles l'équation $f(x) = \frac{1}{n}$ admet deux solutions distinctes dans l'intervalle $[0; +\infty[$.

THÉORÈME DES VALEURS INTERMÉDIAIRES

65 Le tableau de variation d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est donné ci-dessous.

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	1	-3	$+\infty$

Pourquoi l'équation $f(x) + 1 = 0$ a-t-elle trois solutions et trois seulement dans $\mathbb{R}$?

66 f est la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x}.$$

1. Étudiez les variations de f et dressez son tableau de variation.

2. a) Déduisez-en que l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution α telle que $\alpha \in]1; 2[$.

b) Donnez un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .

67 Vrai ou faux ?

f est la fonction définie par $f(x) = \sqrt{x^3 - x + 1}$.

Dites si chacune des affirmations suivantes est vraie ou fausse. Justifiez chaque fois votre réponse.

1. L'équation $x^3 - x + 1 = 0$ a une unique solution α .

2. La fonction f est dérivable sur $]\alpha; +\infty[$.

3. m est un réel positif. Il existe des valeurs de m pour lesquelles l'équation $f(x) = m$ a trois solutions.

68 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2 + 4.$$

Quel est le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 0$ dans $\mathbb{R}$? Donnez, pour chacune des solutions, un encadrement d'amplitude 10^{-2} .

69 f est la fonction définie sur $I =]-2; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{-x^3}{x+2}.$$

Démontrez que l'équation $f(x) = 2$ a une unique solution α dans l'intervalle $] -2; +\infty[$ et donnez un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α .

70 ABC est un triangle isocèle en A dont le périmètre est égal à 20. On pose $BC = x$ ($x > 0$).

1. Démontrez que l'aire du triangle ABC est égale à :

$$\frac{x}{2} \sqrt{100 - 10x} \text{ avec } 0 \leq x \leq 10.$$

2. a) Étudiez les variations de la fonction f définie sur $[0; 10]$ par :

$$f(x) = \frac{x}{2} \sqrt{100 - 10x}.$$

b) Déduisez-en qu'il existe exactement deux valeurs de BC telles que le triangle ABC ait une aire égale à 10.

71 Avec une fonction auxiliaire

1. g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - 3x - 3$.

a) Démontrez que l'équation $g(x) = 0$ a une solution unique α dans $\mathbb{R}$.

b) Donnez une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

c) Déduisez des questions précédentes le signe de $g(x)$.

2. f est la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$ par :

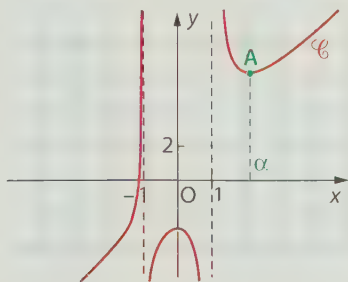
$$f(x) = \frac{2x^3 + 3}{x^2 - 1}.$$

a) Démontrez que pour tout x de $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$:

$$f'(x) = \frac{2x g(x)}{(x^2 - 1)^2}.$$

b) Dressez le tableau de variation de f .

c) On a tracé ci-dessous la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f .



Démontrez que le point A de $\mathcal{C}$ d'abscisse α a pour ordonnée $f(\alpha) = \frac{3(2\alpha + 3)}{\alpha^2 - 1}$.

72 ALGORITHMIQUE

On considère l'algorithme suivant dans lequel f est une fonction numérique.

Variables

a, b, c et p

Algorithme

Saisir a, b et p

Tantque $b - a > p$

c reçoit $\frac{a+b}{2}$

Si $f(a) \times f(c) < 0$, b reçoit c

Sinon a reçoit c

Fin Tantque

Sortie

Afficher c

1. Faites fonctionner l'algorithme avec :

$$f : x \mapsto x^2 - 2, a = 1, b = 2 \text{ et } p = 0,1.$$

Indiquer les valeurs successives des variables a, b et c dans un tableau comme ci-contre.

a	b	c
1	2	

Qu'obtenez-vous à l'affichage ?

2. a) Justifiez que la fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[1; 2]$ et vérifiez que $f(1) \times f(2) < 0$. Que pouvez-vous en déduire ?

b) Représenter graphiquement f sur l'intervalle $[1; 2]$ et placer successivement sur l'axe des abscisses les valeurs des variables a, b et c calculées précédemment.

Que constatez-vous ? Quel est l'objectif de l'algorithme ?

c) Précisez le rôle de la variable p .

3. Programmez votre calculatrice pour déterminer une valeur approchée à 10^{-3} près de la solution positive de l'équation $-x^3 - 3x + 2 = 0$.

73 f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, a et b sont deux réels tels que $0 < a < b < 1$, $f(a) = 0$ et $f(b) = 1$.

g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = f(x) - x$.

1. Démontrez que $g(a) < 0$ et $g(b) > 0$.

2. Déduisez-en que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution dans l'intervalle $]0; 1[$.

APPLICATION À L'ÉTUDE DE SUITES

74 BAC

a est un nombre tel que $-1 < a < 0$. La suite (u_n) est définie par $u_0 = a$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n^2 + u_n$.

1. Étudiez le sens de variation de la suite (u_n) .

2. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + x$.

a) Démontrez que si x appartient à l'intervalle $] -1; 0[$, alors il en est de même pour $f(x)$.

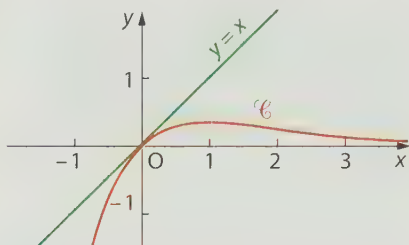
b) Démontrez par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$-1 < u_n < 0.$$

3. Étudiez la convergence de la suite (u_n) et déterminez sa limite si elle existe.

75 BAC

A. On donne ci-dessous, dans un repère orthonormé, la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-x}$.



1. Démontrez que la droite d d'équation $y = x$ est tangente à $\mathcal{C}$ en $x = 0$.

2. a) Démontrez que pour tout m appartenant à l'intervalle $]0; \frac{1}{e}[$, l'équation $f(x) = m$ a deux solutions.

b) Dans le cas où $m = \frac{1}{4}$, on note α et β les solutions (avec $\alpha < \beta$).

Déterminez un encadrement de α , d'amplitude 10^{-2} .

B. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \alpha$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. a) Reproduisez la figure en prenant 5 cm pour unité.

b) Conjecturez les variations et la convergence de (u_n) .

2. a) Démontrez par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n > 0$.

b) Démontrez que la suite (u_n) est décroissante.

c) Déduisez de la question précédente que la suite (u_n) converge vers un nombre ℓ que vous déterminerez.

AVEC LES TICE

76 Étude d'une famille de fonctions

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f_n(x) = (x^2 - 2x)^n$.

1. Avec GeoGebra

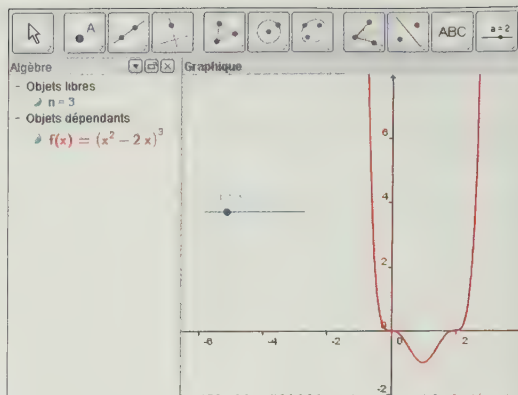
a) Créez un curseur pour n .

Réglages : $1 \leq n \leq 10$; incrément 1.

b) Créez la fonction f_n :

$$\text{Fonction } [(x^2 - 2x) \wedge n, -\infty, \infty].$$

c) Déplacez le curseur. Quelle particularité présentent les courbes représentatives ?



d) Activez la trace de la courbe. Quelle particularité présentent toutes ces courbes ?

2. Démonstration

n est un entier naturel, $n \geq 1$.

a) Étudiez les variations de la fonction f_n .

Aide Distinguer les cas « n pair », « n impair » et $n = 1$.

b) Dressez, pour n pair puis pour n impair, le tableau de variation de la fonction f_n .

c) Vérifiez que les courbes représentatives des fonctions f_n passent par quatre points fixes dont les coordonnées ne dépendent pas de l'entier n .

Prendre toutes les initiatives

77 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x + 1)e^x$.

Est-il vrai que l'équation $f(x) = -\frac{1}{16}$ a deux solutions distinctes ?

78 Peut-on affirmer que la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{2e^x - 2x - 1}$ est définie sur $\mathbb{R}$?

79 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x$ si $x \leq 1$ et $f(x) = ax + b$ si $x > 1$ (a et b sont deux réels). Déterminez les valeurs de a et b , si elles existent, pour lesquelles f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

80 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = xe^x - 3x - 2.$$

Précisez le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x .

81 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0.$$

1. Démontrez que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. La fonction dérivée f' est-elle continue sur $\mathbb{R}$?

82 Travail en autonomie

→ Rédigez la solution de cet exercice en vous aidant du guide.



Sur le Web

Retrouvez le corrigé de cet exercice sur le site

www.mathlycee.net/eleve-terminS

A. Étude d'une fonction

1. φ est la fonction définie sur $[0; 1]$ par $\varphi(x) = 1 - xe^x$.

a) Démontrez que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[0; 1]$ et que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

b) Déduisez-en le signe $\varphi(x)$ sur l'intervalle $[0; \alpha]$.

2. g est la fonction définie sur $[0; 1]$ par $g(x) = \frac{1+x}{1+e^x}$.

a) Démontrez que $g'(x) = \frac{\varphi(x)}{(1+e^x)^2}$.

b) Déduisez-en que g est croissante sur $[0; \alpha]$ et que $g(\alpha) = \alpha$.

B. Étude d'une suite réelle ayant pour limite α

On considère la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 0 \text{ et pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, u_{n+1} = g(u_n).$$

En exploitant les résultats de la partie A.

1. Démontrez par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$:

a) $0 \leq u_n \leq \alpha$

b) $u_n \leq u_{n+1}$

2. a) Déduisez-en que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ que l'on déterminera.

b) Déterminez une valeur approchée de ℓ arrondie à la sixième décimale.

Analyser l'énoncé

On pense au théorème des valeurs intermédiaires dans le cas d'une fonction strictement monotone.

Analyser l'énoncé

Le signe de $\varphi(x)$, déterminé dans la question 1., permettra de conclure.

Analyser l'énoncé

Le but de l'exercice est d'étudier la convergence d'une suite définie par $u_{n+1} = g(u_n)$, en exploitant des résultats sur g obtenus dans la partie A.

Guide

A. 1. a) On montre la stricte monotonie de la fonction φ sur $[0; 1]$.

Le théorème des valeurs intermédiaires et la stricte décroissance de φ sur $[0; 1]$ permettent ensuite de prouver l'existence et l'unicité de α , puis de vérifier l'encadrement proposé.

b) On en déduit le signe de $\varphi(x)$ sur $[0; \alpha]$.

2. b) $g'(x)$ s'annule pour $x = \alpha$ et α est tel que $\varphi(\alpha) = 0$, soit $e^\alpha = \frac{1}{\alpha}$.

La croissance de g sur l'intervalle $[0; \alpha]$ est immédiate.

B. 1. a) En exploitant le tableau de variation de g , on peut conclure que l'image de l'intervalle $[0; \alpha]$ par g est incluse dans $[0; \alpha]$. Ceci permet de montrer l'hérédité de la propriété.

2. a) On est en présence d'une suite croissante et majorée par α , d'où la conclusion immédiate. α étant l'unique solution de l'équation $g(x) = x$ dans $[0; 1]$, on peut conclure que $\ell = \alpha$.

ZOOM sur la rédaction

Exposez clairement la nécessité d'étudier les variations de la fonction φ . Assurez-vous ensuite que les conditions d'application du théorème 4 sont bien remplies.

ZOOM sur la rédaction

Faites bien ressortir les trois étapes du raisonnement par récurrence : initialisation - hérédité - conclusion.

ZOOM sur la rédaction

Citez précisément le théorème prouvant l'existence de ℓ dans l'intervalle $[0; 1]$.

83 BAC (Extrait)**ROC** Restitution organisée des connaissances**Prérequis**

La fonction exponentielle est dérivable en 0 et $(\exp)'(0) = 1$.

A. Démonstration

Justifiez que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$.

B. Application. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{xe^x}{e^x - 1} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 1.$$

1. a) Quelle est la limite de f en $-\infty$?

b) Vérifiez que pour tout réel x non nul :

$$f(x) = x \left(1 + \frac{1}{e^x - 1} \right).$$

Déduisez-en la limite de f en $+\infty$.

2. a) Démontrez que f est continue en 0.

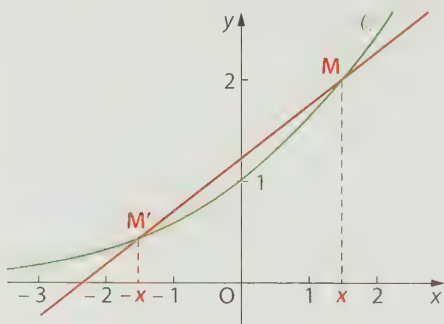
b) Démontrez que pour tout réel x , $e^x \geq x + 1$, et que l'égalité n'a lieu que pour $x = 0$.

3. a) Calculez la dérivée f' de f et déterminez la fonction g telle que pour tout x réel non nul :

$$f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(e^x - 1)^2}.$$

b) Donnez le tableau de variation de f .

4. On a tracé la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f . M et M' sont deux points de $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives x et $-x$.



a) Démontrez que l'ordonnée de M' est $\frac{x}{e^x - 1}$.

b) Déduisez-en le coefficient directeur de la droite (MM') .

c) On admet que la fonction f est dérivable en $x = 0$. Que suggère le résultat de la question **4. b)** ?

84 BAC Famille de fonctions

n est un entier naturel non nul et f_n est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f_n(x) = 1 - \frac{2n}{x+n} - e^{-x}$.

1. a) Étudiez les variations de f_n .

b) Précisez $f_n(0)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x)$.

2. a) Calculez $f_n(n)$ et précisez son signe.

b) Démontrez par récurrence que pour tout entier naturel n non nul, $e^{n+1} > 2n + 1$.

c) Déduisez-en le signe de $f_n(n + 1)$.

3. Démontrez que l'équation $f_n(x) = 0$ a une unique solution u_n et que $n < u_n < n + 1$.

85 D'après BAC Vrai ou faux

On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{x}{e^x + 1} \text{ et } g(x) = e^x(1 - x) + 1.$$

Dites si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez chaque fois votre réponse.

1. L'équation $g(x) = 0$ a une seule solution dans $\mathbb{R}$.

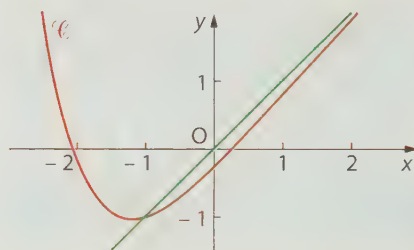
2. g est croissante sur $\mathbb{R}^+$.

3. Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x)$ est du signe opposé à celui de $g(x)$.

4. Si $g(a) = 0$, alors $f(a) = a - 1$.

86 BAC (Extrait)**A. Étude d'une fonction**

On donne ci-dessous la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - \frac{1}{4}(x + 1)e^{-x}$ ainsi que la droite d d'équation $y = x$.



1. a) Calculez, pour tout réel x , $f'(x)$ et $f''(x)$.

b) Déduisez-en les variations de f' .

c) Démontrez que l'équation $f'(x) = 0$ a une solution unique α telle que $-1, 21 < \alpha < -1, 20$.

2. a) Déduisez de la question précédente les variations de f .

b) Démontrez que si x appartient à l'intervalle $I = [-1; 0]$ alors $f(x)$ appartient également à I .

B. Étude d'une suite

On définit la suite (u_n) par $u_0 = 0$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. En utilisant la représentation graphique ci-dessus, que pouvez-vous conjecturer concernant le sens de variation et la convergence de la suite (u_n) ?

2. a) Démontrez par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $-1 < u_n < 0$.

b) Démontrez que la suite (u_n) est décroissante.

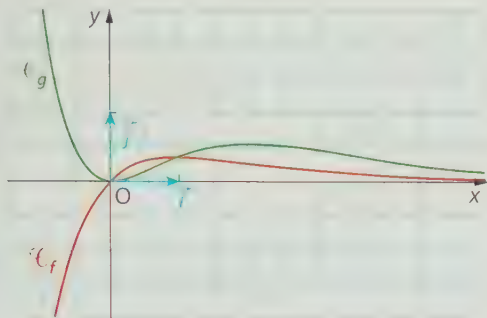
c) Déduisez-en que la suite (u_n) converge vers une limite ℓ que l'on déterminera.

87 D'après BAC Vrai ou faux

Les questions suivantes portent sur les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-x}$ et $g(x) = x^2e^{-x}$.

On donne ci-dessous leurs courbes représentatives $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ dans un repère orthonomé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

M est le point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse m et la tangente T_m en M à $\mathcal{C}_f$ coupe l'axe des ordonnées en N .



Dans les deux questions suivantes, dites pour chaque proposition si elle est vraie ou fausse. Justifiez vos réponses.

1. **a)** Pour tout réel x , $f'(x) + f(x) = e^{-x}$.
- b)** Pour tout réel x , $2f'(x) \leq 1$.
- c)** L'équation $4f(x) = 1$ a deux solutions distinctes.
2. **a)** Le point P de $\mathcal{C}_g$ d'abscisse m et N ont la même ordonnée.
- b)** Si H est un point de l'axe des ordonnées de coordonnées $(0; h)$, alors on peut mener par le point H trois tangentes à $\mathcal{C}_f$ si et seulement si $h \in]0; \frac{4}{e^2}[$.

88 BAC (Extrait)

Le but de l'exercice est de démontrer que l'équation (E) : $e^x = \frac{1}{x}$ admet une unique solution et de construire une suite qui converge vers cette unique solution.

A. Existence et unicité de la solution

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x - e^{-x}$.

1. Démontrez que x est solution de l'équation (E) si, et seulement si, $f(x) = 0$.

2. Étude du signe de la fonction f

- a)** Étudiez le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
- b)** Déduisez-en que l'équation (E) possède une unique solution sur $\mathbb{R}$, notée α .
- c)** Démontrez que α appartient à l'intervalle $[\frac{1}{2}; 1]$.
- d)** Étudiez le signe de f sur l'intervalle $[0; \alpha]$.

B. Deuxième approche

On note g la fonction définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par :

$$g(x) = \frac{1+x}{1+e^x}.$$

1. Démontrez que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à l'équation $g(x) = x$.

2. Déduisez-en que α est l'unique nombre vérifiant $g(\alpha) = \alpha$.

3. Calculez $g'(x)$ et déduisez-en que la fonction g est croissante sur l'intervalle $[0; \alpha]$.

C. Construction d'une suite de réels ayant pour limite α

On considère la suite (u_n) définie par : $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n , par $u_{n+1} = g(u_n)$.

1. Démontrez par récurrence que, pour tout entier naturel n : $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \alpha$.
2. Déduisez-en que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.
3. Justifiez l'égalité $g(\ell) = \ell$. Déduisez-en la valeur de ℓ .
4. À l'aide de la calculatrice, déterminez une valeur approchée de u_4 arrondie à la sixième décimale.

89 La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^x - x - 3.$$

1. **a)** Étudiez les variations de f sur $\mathbb{R}$.
- b)** Prouvez que l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$.
- c)** Vérifiez que $f(0) \times f(2) < 0$. Qu'en déduisez-vous ?
2. On considère l'algorithme suivant.

Variables

x , y et h

Algorithme

Saisir h , réel strictement positif

x reçoit 0

y reçoit -1

Tantque $y < 0$

x reçoit $x + h$

y reçoit $f(x)$

Fin Tantque

Sortie

Afficher $x - h$ et x

- a)** On saisit une valeur de h égale à 0,1. Quelles sont les valeurs affichées en sortie ?
- b)** Que vous permettent-elles d'affirmer ?
- c)** On souhaite obtenir un encadrement d'amplitude 10^{-3} de la solution négative de l'équation $f(x) = 0$. Quelles modifications de l'algorithme sont nécessaires ?

Pour aller plus loin

90 LOGIQUE Implications et réciproques

Dans chacun des trois cas suivants :

- précisez si la proposition $(P) \Rightarrow (Q)$ est vraie ;
- énoncez la proposition réciproque ;
- précisez si cette proposition réciproque est vraie.

Justifiez vos réponses.

1. (P) : La fonction f est continue et strictement monotone sur l'intervalle $[a; b]$.

(Q) : Pour k fixé, l'équation $f(x) = k$ admet une solution unique dans $[a; b]$.

2. La fonction f est définie sur l'intervalle $[a; b]$.

(P) : Le réel x_1 de $[a; b]$ est tel que $f'(x_1) = 0$.

(Q) : f admet un extremum en x_1 .

3. (P) : Les fonctions u et v sont dérivables en a .

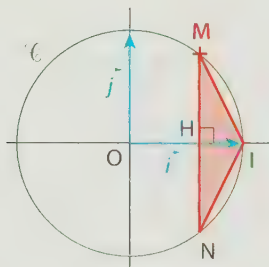
(Q) : La fonction uv est dérivable en a .

91 Étude d'une configuration

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère le cercle $\mathcal{C}$ d'équation $x^2 + y^2 = 1$ et le point I de coordonnées $(1; 0)$.

M et N sont deux points de $\mathcal{C}$ tels que la droite (MN) est perpendiculaire en H à la droite (OI) .

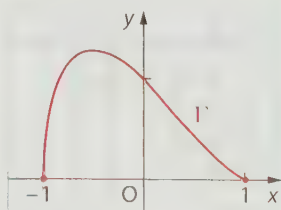
On note x l'abscisse du point H , avec $-1 \leq x \leq 1$.



1. Calculez l'aire du triangle MNI en fonction de x .

2. On a tracé ci-contre la courbe Γ représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[-1; 1]$ par $f(x) = (1-x)\sqrt{1-x^2}$.

a) Étudiez la dérivabilité de f en -1 et 1 .



Vos résultats sont-ils conformes au tracé ?

b) Pour quelle valeur de x , $f(x)$ est-il maximal ?

3. a) Déduisez-en la valeur de x pour laquelle l'aire du triangle MNI est maximale.

b) Quelle est alors la nature du triangle MNI ?

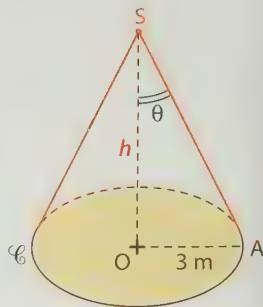
92 Intensité lumineuse

$\mathcal{C}$ est un cercle de centre O et de rayon 3 m. Sur la perpendiculaire en O au plan du cercle, on place une source lumineuse S .

Le but de l'exercice est de déterminer la hauteur h à laquelle il faut placer S pour que l'éclairement du cercle soit maximal.

La loi qui régit l'éclairement est la suivante :

L'intensité lumineuse est proportionnelle au cosinus de l'angle d'incidence θ et inversement proportionnelle au carré de la distance AS à la source.



1. Démontrez que l'éclairement est proportionnel à :

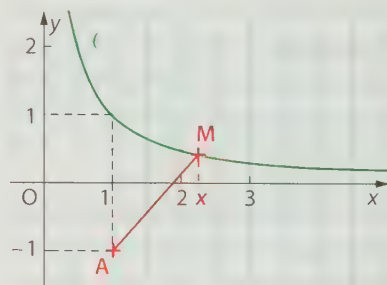
$$\frac{h}{(h^2 + 9)\sqrt{h^2 + 9}}.$$

2. Étudiez les variations de la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{(x^2 + 9)\sqrt{x^2 + 9}}$.

3. Déduisez-en à quelle hauteur il faut placer S pour que l'éclairement soit maximal.

93 Un problème d'optimisation

On a tracé ci-dessous, dans un repère orthonormé, la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = \frac{1}{x}$ avec $x > 0$. On a placé le point A de coordonnées $(1; -1)$.



Le but de l'exercice est de déterminer, s'il existe, le point M de $\mathcal{C}$ pour lequel la distance AM est minimale.

1. a) Justifiez que :

« AM est minimal » équivaut à « AM^2 est minimal ».

b) Calculez $d(x) = AM^2$ en fonction de l'abscisse x de M .

c) Démontrez que pour tout $x > 0$:

$$d'(x) = \frac{2f(x)}{x^3}$$

où $f(x)$ est un polynôme de degré 4.

2. a) Développez $(x-1)(4x^2 + x + 1)$.

b) Étudiez les variations de f sur $]0; +\infty[$.

3. a) Démontrez que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $]0; +\infty[$.

b) Déterminez un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .

4. Déduisez de ce qui précède les variations de la fonction d et concluez.

5. Pour $x = \alpha$, on obtient le point M_0 de $\mathcal{C}$ le plus proche de A.

Justifiez que la tangente de $\mathcal{C}$ en M_0 est perpendiculaire à la droite (AM_0) .

94 Étude d'une famille de fonctions

Pour tout entier naturel non nul n , on note f_n la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-1\}$ par :

$$f_n(x) = \frac{e^x}{(x+1)^n}.$$

1. En distinguant les cas n pair et n impair :

a) Étudiez la limite de la fonction f_n en $+\infty$ et en $-\infty$.

b) Étudiez les variations de la fonction f_n et dressez son tableau de variation.

2. Démontrez que toutes les courbes $\mathcal{C}_n$ représentatives des fonctions f_n passent par un même point.

3. Démontrez que pour tout réel x différent de -1 :

$$f'_n(x) = f_n(x) - n f_{n+1}(x).$$

95 Fonction exponentielle et suite

Notation. La fonction dérivée f' de f peut admettre elle-même une fonction dérivée notée f'' ou $f^{(2)}$.

On dit que $f^{(2)}$ est la **dérivée d'ordre 2** de f .

Par itération, on définit la dérivée d'ordre n de f , notée $f^{(n)}$, comme étant la dérivée de $f^{(n-1)}$.

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (1-2x)e^{2x}$. On note $f^{(1)} = f'$; $f^{(2)} = f''$, ..., $f^{(n)}$ les dérivées successives de f .

1. a) Calculez $f^{(1)}(x)$, $f^{(2)}(x)$, $f^{(3)}(x)$.

b) Démontrez par récurrence sur l'entier naturel n que :

$$f^{(n)}(x) = 2^n (1 - n - 2x) e^{2x}.$$

2. Pour un entier naturel n non nul, on note g_n la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g_n(x) = f^{(n)}(x)$.

La courbe $\mathcal{C}$ représentative de g_n admet une tangente horizontale en un point M_n .

a) Vérifiez que M_n a pour coordonnées :

$$x_n = -\frac{n}{2} \quad \text{et} \quad y_n = 2^n e^{-n}.$$

b) Démontrez que la suite (x_n) est arithmétique.

c) Démontrez que la suite (y_n) est géométrique. Étudiez sa limite.

96 Variations d'une aire

TICE

A. g est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = e^x - xe^x + 1.$$

1. Étudiez les variations de g et dressez son tableau de variation.

2. a) Démontrez que l'équation $g(x) = 0$ admet, dans $]0; +\infty[$, une unique solution. On note α cette solution.

b) Déterminez un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α .

c) Démontrez que $e^\alpha = \frac{1}{\alpha - 1}$.

B. Avec GeoGebra

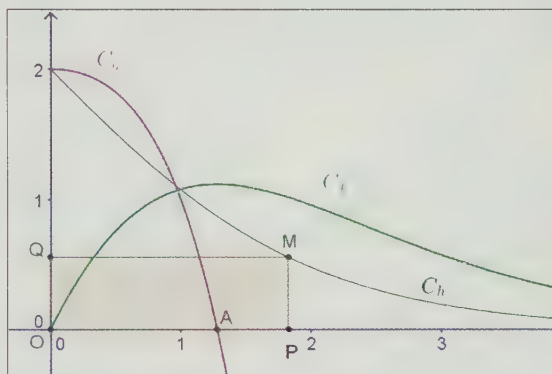
Le repère est choisi orthonormé (axe X : axe Y = 1 : 1).

1. ● Créez la représentation $\mathcal{C}_g$ de la fonction g et le point A de $\mathcal{C}_g$ d'ordonnée 0.

● Créez la représentation $\mathcal{C}_f$ de la fonction f définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{4x}{e^x + 1}$.

● Créez la perpendiculaire à l'axe des abscisses passant par A. Elle coupe $\mathcal{C}_f$ en un point B.

● Que pouvez-vous conjecturer ? Validez votre conjecture à l'aide d'une démonstration.



2. ● Dans le même repère, créez la représentation $\mathcal{C}_h$ de la fonction h définie sur l'intervalle $]0; +\infty[$ par $h(x) = \frac{4}{e^x + 1}$.

● Créez un point M de $\mathcal{C}_h$, ses projetés orthogonaux P et Q sur les axes et le rectangle OPMQ.

● Déplacez M et observez, dans la partie Algèbre, les variations de l'aire du rectangle.

● Que pouvez-vous conjecturer ? Validez votre conjecture à l'aide d'une démonstration.

3. Si $x_M = \alpha$, créez la tangente en M à la courbe $\mathcal{C}_h$. Cette tangente est-elle parallèle à la droite (PQ) ?

4. Les trois courbes ont-elles un point commun ?

97 Vrai ou faux

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)e^{-\frac{1}{x}} \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 0.$$

Dites si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez vos réponses.

1. f est continue en 0.

2. f est dérivable sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$, et, sur chacun de ces intervalles, $f'(x)$ est du signe de x .

3. Pour tout réel x , $f(x) \leq 1$.

Fonction logarithme népérien



D'un siècle
à un autre

L'échelle des décibels est logarithmique, ce qui est pertinent pour rendre compte de la perception humaine des sons : une **multiplication** de la puissance sonore par 2 se traduit par une **addition** de 3 décibels.

Ainsi, les voix des trois saxophonistes accompagnant la chanteuse Billie Holliday en 1957 (de g. à d. Lester Young, Coleman Hawkins, Gerry Mulligan) enrichissent l'harmonie sans paraître trois fois plus fort.

C'est Neper, au début du $xvii^e$ siècle, qui a eu cette idée féconde de transformer les multiplications en additions, pour simplifier les calculs astronomiques.



En savoir plus sur
John Neper

→ Chercheurs d'hier, p. 151

La fonction exponentielle

- La fonction exponentielle est l'unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :
pour tout nombre x , $f'(x) = f(x)$, et $f(0) = 1$.
Avec la notation $\exp$: pour tout nombre x ,
 $(\exp)'(x) = \exp(x)$ et $\exp(0) = 1$.
- Le nombre e est l'image de 1 :
 $\exp(1) = e$.

Somme et produit

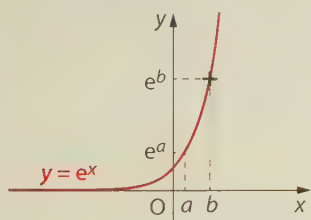
- La fonction exponentielle transforme les sommes en produits :
- pour tous nombres a et b , $e^{a+b} = e^a \times e^b$.

Sens de variation

La fonction exponentielle est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Pour tous nombres a et b :

- $a < b$ équivaut à $e^a < e^b$;
- $a = b$ équivaut à $e^a = e^b$.



Dérivée de $x \mapsto e^{u(x)}$

u est une fonction dérivable sur un intervalle I .

La fonction f définie par $f(x) = e^{u(x)}$ est dérivable sur I et pour tout x de I , $f'(x) = u'(x)e^{u(x)}$.

1 QCM

Pour chaque affirmation, une seule réponse est exacte. Identifiez-la en justifiant votre choix.

- Pour tout nombre x , $(e^x)^2$ est égal à :
a) e^{x^2} b) e^{2x} c) $2e^x$
- Pour tout nombre x , $(e^{2x})^3 \times (e^{-x})^2$ est égal à :
a) e^{3x} b) e^{4x} c) e^{7x}
- k est un nombre strictement positif.
Dans $\mathbb{R}$, l'équation $e^x = k$ admet exactement :
a) 0 solution b) 1 solution c) 2 solutions

2 Vrai ou faux

- $e^x < 1$ équivaut à $x < 1$.
- Pour tout nombre x , $-e^{-x} < 0$.
- Pour tout nombre x , $e^{x^2+3} > e^{x^2}$.
- Pour tout nombre x , $e^{2x} > e^x$.

3 Vrai ou faux

- L'équation $e^{x^2+3} = e^{4x}$ admet deux solutions distinctes dans $\mathbb{R}$.
- Il n'existe pas de nombre x tel que $e^{x^2} = e^{x-1}$.
- Il n'existe pas de nombre x tel que $e^x = ex$.
- L'équation $e^x = x$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$.

4 QCM

Pour chaque affirmation, une seule réponse est exacte. Identifiez-la en justifiant votre choix.

- La fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{e^x}{x}$.
 f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout x de $\mathbb{R}^*$, $f'(x)$ est égal à :
a) e^x b) $\frac{e^x(1-x)}{x^2}$ c) $\frac{e^x(x-1)}{x^2}$
- La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x^2+x}$.
 f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x)$ est égal à :
a) e^{-2x+1} b) $(-x^2+x)e^{-x^2+x}$ c) $(-2x+1)e^{-x^2+x}$



Activité 1

L'INVENTION DES LOGARITHMES

La fin du xvi^e siècle est l'époque des grands voyages maritimes (vers les Indes, les Amériques ...).

Les mesures astronomiques, nécessaires pour la navigation, impliquent des calculs longs et pénibles (trigonométrie, divisions, extractions de racines ...).

Pour simplifier ces calculs, on cherche à construire des **tables numériques à deux colonnes**, mettant en correspondance les nombres, de façon qu'au **produit** de deux nombres de la colonne de gauche corresponde la **somme** de deux nombres de la colonne de droite.

La première table de ce type est publiée en 1614 par l'astronome et mathématicien écossais **John Neper** (1550-1617). (Voir *Chercheurs d'hier*, p. 151.)



On en donne ci-contre un extrait (les nombres de la colonne de droite sont des valeurs approchées avec cinq décimales).

- 1 a) Choisissez dans la colonne de gauche deux nombres et leur produit. Vérifiez que leur correspondent, dans la colonne de droite, deux nombres et leur somme.
b) Quel nombre doit-on écrire en face de 10 ? de 15 ? de 20 ?
c) Quel nombre doit-on écrire en face de 1 ?
- 2 a) Quand on calcule le quotient de deux nombres de la colonne de gauche, que peut-on dire des nombres correspondants dans la colonne de droite ?
b) Déduisez-en les nombres à écrire en face de : 7 ; 1,5 ; 0,5 ; 0,1.
- 3 Pour désigner les nombres de la colonne de droite, on invente le mot « **logarithme** », construit à partir des deux mots grecs *logos* (rapport) et *arithmos* (nombre entier naturel). En effet, si les nombres de la colonne de gauche sont dans un rapport constant (c'est-à-dire en progression géométrique), alors ceux de la colonne de droite sont à différence constante (c'est-à-dire en progression arithmétique).
Vérifiez cette propriété en considérant, dans la première colonne, la suite 1, 2, 4, 8, 16.
- 4 Complétez les cases encore vides.
- 5 a) Quand on élève un nombre au carré, que peut-on dire de son logarithme ?
b) Déduisez-en le logarithme de : 25 ; 100 ; 0,01 ; 0,25.
- 6 a) Quand on prend la racine carrée d'un nombre, que peut-on dire de son logarithme ?
b) Déduisez-en le logarithme de $\sqrt{2}$ et de $\sqrt{5}$.

0,1	
0,5	
1	
1,5	
2	0,69315
3	1,09861
4	1,38629
5	1,60944
6	1,79176
7	
8	
9	
10	
11	2,39790
12	2,48491
13	2,56495
14	2,63906
15	
16	2,77259
17	2,83321
18	
19	2,94444
20	

Ainsi, cette table ramène les multiplications à des additions, les divisions à des soustractions, les extractions de racine carrée à des divisions par 2.

Un disciple de Neper, le mathématicien anglais Henry Briggs (1556-1630), publie en 1617 une autre table ayant les mêmes propriétés, mais plus commode pour les calculs : **les logarithmes décimaux** (voir l'exercice 35, p. 152). L'horloger suisse Jobst Bürgi (1552-1632), fabricant d'instruments destinés à l'astronomie, construit également, de façon indépendante, une table de logarithmes, qu'il publie en 1620.

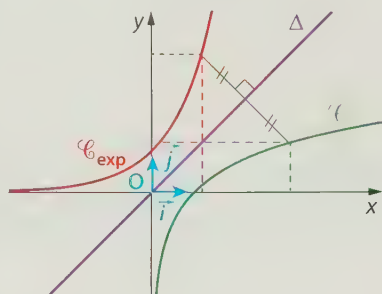
Activité 2 VERS UNE NOUVELLE FONCTION

Dans cette activité, le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est orthonormé. Δ est la droite d'équation $y = x$.

- 1 a) Tracez la droite Δ , puis placez les points $A(1; 2)$ et $B(2; 1)$.
Que pouvez-vous conjecturer concernant la position de ces deux points ? Démontrez-le.
- b) x et y sont deux nombres. On considère les points $M(x; y)$ et $N(y; x)$.
Que pouvez-vous conjecturer ? Démontrez-le.

- 2 On a tracé ci-contre la courbe $\mathcal{C}_{\text{exp}}$ représentative de la fonction exponentielle et la courbe $\mathcal{C}$ symétrique de $\mathcal{C}_{\text{exp}}$ dans la symétrie orthogonale d'axe Δ .

La fonction exp est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et l'image de $\mathbb{R}$ par la fonction exp est $]0; +\infty[$. De plus, chaque nombre x a une image e^x par la fonction exp et tout nombre strictement positif y est l'image d'un seul nombre.



a) $\mathcal{C}$ est la représentation graphique d'une fonction f .

- Sur quel intervalle I la fonction f est-elle définie ?
- À l'aide du 1 b), précisez $f(1)$ et $f(e)$.

b) Un nombre a étant fixé, quelles sont les coordonnées du point M de $\mathcal{C}_{\text{exp}}$ ayant pour abscisse a ?

- Déduisez-en les coordonnées du point M' de $\mathcal{C}$, symétrique de M par rapport à Δ , et exprimez $f(e^a)$ en fonction de a .

Rappel

Par la symétrie orthogonale d'axe Δ , l'image d'un point M est un point M' tel que :

- si M appartient à Δ , alors $M = M'$;
- si M n'appartient pas à Δ , alors Δ est la médiatrice de $[MM']$.

c) Un nombre $b > 0$ étant fixé, quelles sont les coordonnées du point N de $\mathcal{C}$ ayant pour abscisse b ?

- Déduisez-en les coordonnées du point N' de $\mathcal{C}_{\text{exp}}$, symétrique de N par rapport à Δ , et exprimez $e^{f(b)}$ en fonction de b .

d) Exprimez, en fonction de x , $f(e^x)$ pour un nombre x quelconque et $e^{f(x)}$ pour un nombre $x > 0$.

- 3 a) Conjecturez le sens de variation de f .

- Conjecturez son comportement en $+\infty$. Quelle autre limite pouvez-vous envisager ?

b) On suppose dans cette question que f est dérivable sur I .

- Déterminez la fonction g' , dérivée de la fonction définie sur I par $g(x) = e^{f(x)}$.
- Prouvez que pour tout x de I , $g'(x) = 1$ et déduisez-en alors $f'(x)$.

Est-ce compatible avec votre conjecture concernant le sens de variation de f ?

Conclusion. On met en évidence une nouvelle fonction f , telle que $f(e^x) = x$, et si $x > 0$, $e^{f(x)} = x$.

Cette fonction, définie sur $]0; +\infty[$, est dite « réciproque » de la fonction exponentielle.

On l'appelle **fonction logarithme népérien**. Ses propriétés sont étudiées dans ce chapitre.

Problème ouvert

... Est-il plus facile ?

Avec combien de chiffres s'écrit le nombre 2012^{2012} ?

1

La fonction logarithme népérien

1.1 Définition

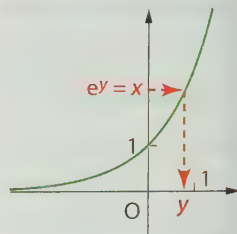
La fonction exponentielle étudiée dans le chapitre 3 est dérivable (donc continue) et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. De plus, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.

Il en résulte, d'après l'extension du théorème des valeurs intermédiaires (théorème 5, chapitre 4, p. 113), que :

- l'image de $\mathbb{R}$ par la fonction $\exp$ est l'intervalle $]0; +\infty[$;
- pour tout nombre $x > 0$, il existe un nombre y et un seul tel que $e^y = x$.

À chaque nombre $x > 0$, on peut associer un unique réel y .

On définit ainsi une fonction de $]0; +\infty[$ dans $\mathbb{R}$.



Définition 1

La fonction **logarithme népérien**, notée $\ln$, est définie sur $]0; +\infty[$.

Elle associe à tout nombre x strictement positif le nombre y , noté $\ln(x)$, dont l'exponentielle est x .

Conséquences

1. Pour tout nombre $x > 0$, $e^{\ln(x)} = x$ (par définition).
2. Pour tout nombre x , $\ln(e^x) = x$.
3. $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$.

Théorème 1

Pour tout nombre a strictement positif et pour tout nombre b ,

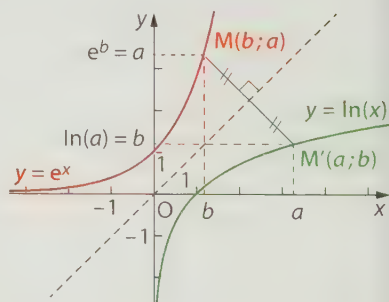
$$\ln(a) = b \text{ équivaut à } a = e^b.$$

Démonstration

Si $\ln(a) = b$, alors $e^b = e^{\ln(a)} = a$. Réciproquement, si $a = e^b$, alors $\ln(a) = \ln(e^b) = b$.

Conséquence graphique

Dire que le point $M(b; a)$ appartient à la courbe représentative de la fonction $\exp$, ou encore que $a = e^b$, revient à dire, d'après le théorème 1, que $b = \ln(a)$, c'est-à-dire que le point $M'(a; b)$ appartient à la courbe représentative de la fonction $\ln$. Dans un repère orthonormé, les deux courbes sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ (voir l'activité 2, p. 137).



1.2 Sens de variation

Théorème 2

La fonction $\ln$ est **strictement croissante** sur $]0; +\infty[$.

Démonstration

Considérons deux nombres strictement positifs u et v tels que $u < v$, soit encore $e^{\ln(u)} < e^{\ln(v)}$.

La fonction $\exp$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc nécessairement, $\ln(u) < \ln(v)$: la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Conséquence

Pour tous nombres a et b strictement positifs : $\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$ et $\ln(a) < \ln(b) \Leftrightarrow a < b$.

2

Propriétés de la fonction logarithme népérien

2.1 Propriété fondamentale

Théorème 3

Pour tous nombres a et b strictement positifs, $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$.

Démonstration. a et b sont deux nombres, $a > 0$ et $b > 0$.

$e^{\ln(a) + \ln(b)} = e^{\ln(a)} \times e^{\ln(b)} = ab$ et $e^{\ln(ab)} = ab$, donc $e^{\ln(ab)} = e^{\ln(a) + \ln(b)}$.

Il en résulte que $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$ (conséquence 2 du théorème 8 du chapitre 3, p. 83).

► **Remarque.** On dit que la fonction $\ln$ transforme les produits en sommes.

2.2 Conséquences de la propriété fondamentale

Théorème 4

Pour tous nombres a et b strictement positifs, $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$ et $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$.

Démonstration. D'après le théorème 3,

$\ln(a) = \ln\left(\frac{a}{b} \times b\right) = \ln\left(\frac{a}{b}\right) + \ln(b)$, d'où $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.

Dans le cas particulier $a = 1$, $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = \ln(1) - \ln(b) = -\ln(b)$.

Théorème 5

Pour tous nombres strictement positifs $a_1, a_2, \dots, a_n$:

$$\ln(a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n) = \ln(a_1) + \ln(a_2) + \dots + \ln(a_n).$$

Démonstration. Notons (P_n) cette proposition et démontrons par récurrence qu'elle est vraie quel que soit l'entier $n \geq 2$.

– Initialisation : la proposition est vraie pour $n = 2$ car $\ln(a_1 \times a_2) = \ln(a_1) + \ln(a_2)$.

– Hérédité : supposons (P_n) vraie pour un certain entier $n \geq 2$ et démontrons que (P_{n+1}) est vraie.

$\ln(a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n \times a_{n+1}) = \ln(a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n) + \ln(a_{n+1})$.

Puisque (P_n) est vraie, $\ln(a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n) = \ln(a_1) + \ln(a_2) + \dots + \ln(a_n)$, donc :

$\ln(a_1 \times a_2 \times \dots \times a_n \times a_{n+1}) = \ln(a_1) + \ln(a_2) + \dots + \ln(a_n) + \ln(a_{n+1})$. Ainsi, (P_{n+1}) est vraie.

– Conclusion : la proposition est vraie pour tout entier $n \geq 2$.

► Cas particuliers

1. Pour tout nombre a strictement positif et pour tout entier relatif n , $\ln(a^n) = n \ln(a)$.

Pour $n \geq 2$, cela résulte de la proposition précédente en posant $a_1 = a_2 = \dots = a_n = a$.

Pour $n = 1$ et $n = 0$, cela résulte de $a^1 = a$ et $a^0 = 1$.

Pour $n < 0$, $\ln(a^n) = \ln\left(\frac{1}{a^{-n}}\right) = -\ln(a^{-n}) = -(-n \ln(a)) = n \ln(a)$.

2. Pour tout nombre a strictement positif, $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a)$.

$a = \sqrt{a} \times \sqrt{a}$, d'où $\ln(a) = \ln(\sqrt{a}) + \ln(\sqrt{a})$, donc $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln(a)$.

► Exemples

1. $\ln(4^{-3}) + 5 \ln(2) = -3 \ln(2^2) + 5 \ln(2) = -6 \ln(2) + 5 \ln(2) = -\ln(2)$.

2. $\ln(\sqrt{3}) + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{5}{3}\right) = \frac{1}{2} \ln(3) + \frac{1}{2} \ln(5) - \frac{1}{2} \ln(3) = \frac{1}{2} \ln(5)$.

3 Étude de la fonction logarithme népérien

3.1 Dérivée de la fonction ln

On admet que la fonction ln est continue sur $]0; +\infty[$.

Théorème 6

La fonction ln est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Démonstration. x est un nombre strictement positif. Notons $\tau(h)$ le taux d'accroissement de la fonction ln entre x et $x+h$ (avec $h \neq 0$ tel que $x+h > 0$).

Ainsi, $\tau(h) = \frac{\ln(x+h) - \ln(x)}{h}$, et l'objectif est de prouver que $\lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = \frac{1}{x}$.

Posons $u = \ln(x+h)$ soit $x+h = e^u$, et $v = \ln(x)$ soit $x = e^v$. Ainsi, $\tau(h) = \frac{u-v}{e^u - e^v}$.

Notons alors $k = u - v$, d'où $u = v + k$. Ainsi, $\tau(h) = \frac{k}{e^{v+k} - e^v}$ [1].

La fonction ln est continue sur $]0; +\infty[$, d'où :

$$\lim_{h \rightarrow 0} k = \lim_{h \rightarrow 0} (u - v) = \lim_{h \rightarrow 0} [\ln(x+h) - \ln(x)] = \ln(x) - \ln(x) = 0.$$

De plus, la fonction exp est dérivable en v avec pour nombre dérivé e^v ;

d'où : $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{e^{v+k} - e^v}{k} = e^v = x$. Il en résulte $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{k}{e^{v+k} - e^v} = \frac{1}{x}$.

Ainsi, d'après le théorème sur la limite de la composée de deux fonctions (théorème 3, chapitre 2) :

$\lim_{h \rightarrow 0} k = 0$ et $\lim_{k \rightarrow 0} \frac{k}{e^{v+k} - e^v} = \frac{1}{x}$ implique, d'après [1], $\lim_{h \rightarrow 0} \tau(h) = \frac{1}{x}$.

Cela étant vrai pour tout $x > 0$, la fonction ln est dérivable sur $]0; +\infty[$ et $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

3.2 Limites et courbe représentative de la fonction ln

Théorème 7

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$$

Démonstration

• Démontrons que, quel que soit le nombre $M > 0$, $\ln(x) > M$ pour tout nombre x supérieur à un certain nombre A .

La fonction exp est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc $\ln(x) > M$ équivaut à $x > e^M$.

Posons $e^M = A$. Ainsi, $\ln(x) > M$ pour tout nombre $x > A$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$.

• Posons $X = \frac{1}{x}$. Alors, $\ln(x) = \ln\left(\frac{1}{X}\right) = -\ln(X)$. Or, $\lim_{x \rightarrow 0^+} X = +\infty$ et $\lim_{X \rightarrow +\infty} [-\ln(X)] = -\infty$;

donc, d'après le théorème sur la limite de la composée de deux fonctions, $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$.

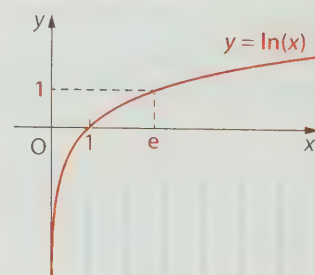
🔍 **En résumé.** La fonction ln est dérivable et strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty ;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty .$$

Cette dernière limite signifie que l'axe des ordonnées, d'équation $x = 0$, est asymptote verticale de la courbe représentative de la fonction ln.

x	0	1	e	$+\infty$
f'(x)		+	+	+
f(x)	$-\infty$	0	1	$+\infty$



3.3 Des limites importantes

Théorème 8

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$$

Démonstration

- La fonction $\ln$ est dérivable en 1 et $(\ln)'(1) = \frac{1}{1} = 1$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - \ln(1)}{x}.$$

On reconnaît la limite, quand x tend vers 0, du taux d'accroissement de la fonction $\ln$ entre 1 et $1+x$, limite égale au nombre dérivé de $\ln$ en 1. Ainsi, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = (\ln)'(1) = 1$.

- Posons, pour $x > 0$, $Y = \ln(x)$ soit $x = e^Y$; alors $\frac{\ln(x)}{x} = \frac{Y}{e^Y}$.

Or, $\lim_{Y \rightarrow +\infty} \frac{e^Y}{Y} = +\infty$ (théorème 10, chapitre 3, p. 84); donc $\lim_{Y \rightarrow +\infty} \frac{Y}{e^Y} = 0$.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} Y = +\infty$, le théorème sur la limite de la composée de deux fonctions (théorème 3, chapitre 2, p. 58) permet de conclure : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.

- Avec le même changement de variable, $x \ln(x) = Y e^Y$.

Or, $\lim_{x \rightarrow 0} Y = -\infty$ et $\lim_{Y \rightarrow -\infty} (Y e^Y) = 0$ (théorème 10, chapitre 3).

Le théorème 3 du chapitre 2 permet de conclure : $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$.

3.4 Dérivée de $x \mapsto \ln[u(x)]$

Théorème 9

u est une fonction dérivable et **strictement positive** sur un intervalle I .

La fonction f définie par $f(x) = \ln[u(x)]$ est dérivable sur I , et pour tout x de I , $f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

Démonstration

Cela se déduit immédiatement du résultat sur la dérivée de $x \mapsto f(u(x))$ (§4.3, chapitre 4) :

$$\text{pour tout } x \text{ de } I, f'(x) = u'(x) \times \ln'[u(x)] = u'(x) \times \frac{1}{u(x)} = \frac{u'(x)}{u(x)}.$$

4

La fonction logarithme décimal

Définition 2

La fonction **logarithme décimal**, notée **log**, est définie sur $]0; +\infty[$ par $\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$.

Remarques

- $\ln(10) > 0$, donc le nombre $k = \frac{1}{\ln(10)}$ est strictement positif. Ainsi, de $\log(x) = k \ln(x)$, on déduit que la fonction $\log$ a le même sens de variation que la fonction $\ln$.

- Elle transforme, comme la fonction $\ln$, les produits en sommes. → [exercice 35, page 152](#).

$\log(10) = 1$, $\log(10^2) = 2$, ... et pour tout entier relatif n , $\log(10^n) = n$.

- Les fonctions $\log$ et $\ln$ sont intégrées (de manières distinctes) dans les calculatrices :

log

ln

OBJECTIF 1 Transformer une écriture avec $\ln$

- Pour tout nombre $a > 0$, tout nombre $b > 0$ et tout entier relatif n :

$$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b) ; \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b) ; \quad \ln(a^n) = n \ln(a) ; \quad \ln(\sqrt[n]{a}) = \frac{1}{n} \ln(a).$$

- La fonction logarithme népérien est strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

Pour tous nombres a et b strictement positifs :

$$\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b \quad \text{et} \quad \ln(a) < \ln(b) \Leftrightarrow a < b.$$

EXERCICE RESOLU A Utiliser les formules de transformation

- Exprimez en fonction de $\ln(2)$ et de $\ln(3)$ les nombres : $A = \ln(12)$; $B = \ln\left(\frac{16}{81}\right)$; $C = \ln(\sqrt{72})$.

- On désigne par a et b deux nombres strictement positifs.

Écrivez chacune des expressions suivantes sous la forme $\ln(c)$:

$$M = 2 \ln(a) + \ln(b) ; \quad N = \ln(4a) - 2 \ln(2b) ; \quad P = \ln(4a) - 3 \ln(b) + 2.$$

Méthode

- On décompose chacun des nombres dont on veut calculer le logarithme sous la forme de produits ou de quotients à l'aide des entiers 2 et 3.

On applique alors les règles de calculs.

- On regroupe les termes pour obtenir le logarithme d'une seule expression.

On utilise les règles de calcul dans le sens « inverse » par rapport à la question précédente.

- N'oubliez pas que tout nombre p peut s'écrire sous la forme $\ln(e^p)$.

Solution

- ➔ 1. • $12 = 4 \times 3 = 2^2 \times 3$, donc :

$$A = \ln(2^2 \times 3) = \ln(2^2) + \ln(3) = 2 \ln(2) + \ln(3).$$

• De même, $\frac{16}{81} = \frac{2^4}{3^4}$; d'où : $B = \ln\left(\frac{2^4}{3^4}\right)$,

$$B = \ln(2^4) - \ln(3^4) = 4 \ln(2) - 4 \ln(3).$$

• $72 = 8 \times 9 = 2^3 \times 3^2$; d'où :

$$C = \ln(\sqrt{72}) = \frac{1}{2} \ln(72) = \frac{1}{2} \ln(2^3 \times 3^2)$$

$$C = \frac{\ln(2^3) + \ln(3^2)}{2} = \frac{3 \ln(2)}{2} + \ln(3).$$

- ➔ 2. • $M = 2 \ln(a) + \ln(b) = \ln(a^2) + \ln(b)$, donc :

$$M = \ln(a^2 b).$$

• $N = \ln(4a) - 2 \ln(2b) = \ln(4a) - \ln(4b^2)$

$$N = \ln\left(\frac{4a}{4b^2}\right) = \ln\left(\frac{a}{b^2}\right).$$

• $P = \ln(4a) - 3 \ln(b) + 2$

➔ $P = \ln(4a) - \ln(b^3) + \ln(e^2) = \ln\left(\frac{4ae^2}{b^3}\right).$

Mise en pratique

- Exprimez en fonction de $\ln(5)$:

a) $\ln(125)$; b) $\ln\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)$; c) $\ln\left(\frac{1}{625}\right).$

- Simplifiez l'écriture des nombres suivants :

a) $\ln(3) + \ln\left(\frac{1}{9}\right)$;

b) $3 \ln(\sqrt{2}) - \frac{1}{2} \ln(8)$;

c) $\ln(\sqrt{27}) + 2 \ln(2) - \ln(9) - \ln(8).$

- Calculez les nombres suivants :

a) $5 - \ln\left(\frac{1}{e^2}\right)$; b) $\ln(e\sqrt{e^3})$; c) $\ln\left(\frac{\sqrt{e}}{e^{-2}}\right).$

- x et y sont deux nombres strictement positifs.

Écrivez sous la forme $\ln(z)$:

a) $A = 3 \ln(x) - 2 \ln(y)$;

b) $B = \ln(4x) + \ln\left(\frac{y}{16}\right) + 1.$

EXERCICE RESOLU B Étudier la position de quelques courbes

1. Pour quelles valeurs du nombre x peut-on écrire l'égalité :

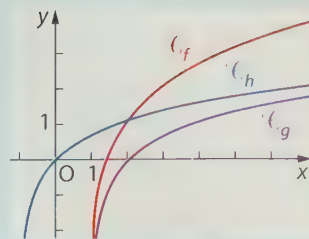
$$[E] \ln(x^2 - 1) = \ln(x - 1) + \ln(x + 1) ?$$

2. Les courbes ci-contre représentent les fonctions f, g et h définies respectivement sur $]1; +\infty[$, $]1; +\infty[$ et $]-1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(x^2 - 1), \quad g(x) = \ln(x - 1) \quad \text{et} \quad h(x) = \ln(x + 1).$$

a) Étudiez l'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_h$.

b) Étudiez la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sur $]1; +\infty[$.



► Méthode

1. On traduit les conditions d'existence des expressions avec un logarithme.

- On représente sur un axe l'ensemble des nombres qui satisfont aux trois conditions.

- On transforme le logarithme d'un produit en une somme.

2. a) On résout l'équation $f(x) = h(x)$.

- Une équation du type $\ln[u(x)] = \ln[v(x)]$ équivaut à $u(x) = v(x)$ sous les conditions $u(x) > 0$ et $v(x) > 0$.

b) On étudie le signe de la différence $f(x) - g(x)$.

- On utilise la stricte croissance de la fonction $\ln$ sur $]1; +\infty[$.

► Solution

► 1. Le nombre x doit vérifier les conditions :

$$x^2 - 1 > 0 \quad \text{et} \quad x - 1 > 0 \quad \text{et} \quad x + 1 > 0.$$

Ainsi, $(x < -1 \text{ ou } x > 1) \text{ et } x > 1 \text{ et } x > -1$,

► soit $x \in]1; +\infty[$.

► Pour tout $x > 1$, $\ln(x^2 - 1) = \ln[(x - 1)(x + 1)]$
donc $\ln(x^2 - 1) = \ln(x - 1) + \ln(x + 1)$.

► 2. a) L'équation $f(x) = h(x)$ est définie sur $]1; +\infty[$ où $x^2 - 1 > 0$ et $x + 1 > 0$.

► $\ln(x^2 - 1) = \ln(x + 1) \Leftrightarrow x^2 - 1 = x + 1$
 $\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$.

L'équation $x^2 - x - 2 = 0$ a pour solutions dans $\mathbb{R}$: $x_1 = -1$ et $x_2 = 2$. Seule la valeur 2 appartient à $]1; +\infty[$, donc convient.

Ainsi, $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_h$ se coupent en $A(2; \ln(3))$.

► b) Pour tout $x > 1$, d'après l'égalité [E] :

$$f(x) - g(x) = [\ln(x - 1) + \ln(x + 1)] - \ln(x - 1)$$

$$f(x) - g(x) = \ln(x + 1).$$

► Or, $x + 1 > 2$ donc $\ln(x + 1) > \ln(2)$; d'où :
 $f(x) - g(x) > 0$.

Ainsi, $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur $]1; +\infty[$.

► Mise en pratique

5 1. Pour quelles valeurs de x peut-on écrire :

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x) ?$$

2. a) Résolvez dans $]-1; 1[$ l'inéquation :

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) < \ln(1+x).$$

b) Interprétez graphiquement le résultat.

6 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \ln(\sqrt{x^2 + 1} + x) + \ln(\sqrt{x^2 + 1} - x).$$

1. Représentez f sur votre calculatrice.

2. Que conjecturez-vous ? Prouvez-le.

7 f et g sont les fonctions définies sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = [\ln(x)]^2$ et $g(x) = \ln\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. Vérifiez que pour tout nombre $x > 0$,

$$f(x) - g(x) = \ln(x)[\ln(x) + 1].$$

2. a) Résolvez l'inéquation $f(x) - g(x) < 0$.

b) Déduisez-en la position relative des courbes représentatives de f et g .

8 Dans un repère, on considère les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ d'équations respectives :

$$y = \ln(\sqrt{x^2 + 1}) \quad \text{et} \quad y = \ln(\sqrt{2x}).$$

1. À l'aide de votre calculatrice, conjecturez la nature de l'intersection des deux courbes.

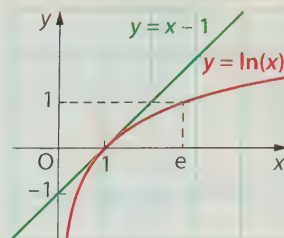
2. Démontrez votre conjecture.

9 Démontrez que pour tout nombre $a > 1$:

$$2 \ln(a - \sqrt{a}) = \ln(a) + 2 \ln(\sqrt{a} - 1).$$

La lecture de la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \ln(x)$ donne beaucoup de renseignements :

- $\ln(x)$ n'est défini que pour $x > 0$;
- $\ln(1) = 0$ et $\ln(e) = 1$;
- la fonction $\ln$ est **strictement croissante** sur $]0 ; +\infty[$;
- $\lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$;
- la tangente T_1 au point d'abscisse 1 a pour équation $y = x - 1$.



EXERCICE RÉSOLU C

Étudier la position de $\mathcal{C}_{\ln}$ par rapport à ses tangentes

$\mathcal{C}_{\ln}$ est la courbe représentative de la fonction $x \mapsto \ln(x)$.

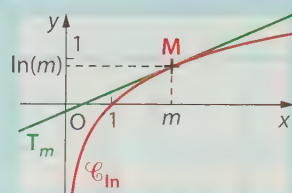
1. M est un point quelconque de $\mathcal{C}_{\ln}$, d'abscisse $m > 0$.

a) Déterminez une équation de la tangente T_m à $\mathcal{C}_{\ln}$ en M.

b) Prouvez que la courbe $\mathcal{C}_{\ln}$ est en dessous de T_m .

2. Déduisez-en que pour tout nombre x strictement positif,

$$\ln(x) \leq x - 1.$$



Méthode

1. a) On écrit une équation de la tangente au point M d'abscisse m de $\mathcal{C}_{\ln}$:

$$y = \ln'(m)(x - m) + \ln(m).$$

b) On étudie le signe de la fonction notée φ , différence entre la fonction $x \mapsto \ln(x)$ et la fonction affine représentée par T_m .

• Pour étudier le signe de φ , on examine ses variations à l'aide de sa fonction dérivée φ' .

• Le tableau de variation de φ indique le signe de $\varphi(x)$ pour tout nombre $x > 0$.

Le calcul des limites en 0 et $+\infty$ n'est pas nécessaire à l'étude.

Remarque

$\mathcal{C}_{\ln}$ est en dessous de n'importe laquelle de ses tangentes. On dit que la fonction $\ln$ est **concave**.

2. On applique le résultat précédent au cas particulier de la tangente T_1 .

Solution

1. a) La fonction $\ln$ est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et sa dérivée est définie par $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

$$\text{D'où } T_m : y = \frac{1}{m}(x - m) + \ln(m)$$

$$\text{soit } T_m : y = \frac{1}{m}x - 1 + \ln(m).$$

b) Pour tout nombre $x > 0$, on pose :

$$\varphi(x) = \ln(x) - \frac{1}{m}x + 1 - \ln(m).$$

φ est la différence de deux fonctions dérivables sur $]0 ; +\infty[$, donc φ est dérivable sur $]0 ; +\infty[$.

$$\text{Pour tout nombre } x > 0, \varphi'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{m}.$$

$$\text{Ainsi : } \varphi'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x} \geq \frac{1}{m} \Leftrightarrow x \leq m.$$

D'où le tableau de variation de φ :

x	0	m	$+\infty$
$\varphi'(x)$		+	0
$\varphi(x)$		↗	↘

On en déduit que pour tout nombre $x > 0$,

$$\varphi(x) \leq 0 \text{ soit } \ln(x) \leq \frac{1}{m}x - 1 + \ln(m).$$

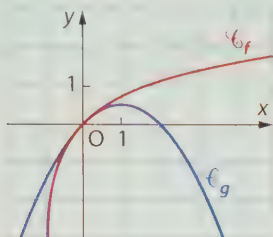
Ainsi, $\mathcal{C}_{\ln}$ est en dessous de la tangente T_m .

2. En particulier, $\mathcal{C}_{\ln}$ est en dessous de la tangente $T_1 : y = x - 1$.

Donc pour tout nombre $x > 0$, $\ln(x) \leq x - 1$.

Mise en pratique

10 Sur le graphique ci-dessous, on a tracé les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ représentant respectivement : la fonction $f : x \mapsto \ln(1+x)$ sur $]-1; +\infty[$ et la fonction $g : x \mapsto -\frac{x^2}{2} + x$ sur $\mathbb{R}$.



1. Prouvez que $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ont une tangente commune T_0 en O, origine du repère.

2. On se propose d'étudier la position relative des deux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sur $]-1; +\infty[$.

Pour cela, on définit la fonction φ en posant :

$$\text{pour tout } x > -1, \varphi(x) = f(x) - g(x).$$

a) Calculez l'expression de la dérivée φ' .

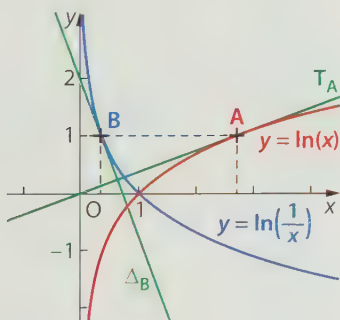
b) Déduisez-en le tableau de variation de φ .

c) Concluez quant à la position relative de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

11 Dans un repère orthonormé, on a tracé les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ d'équations respectives :

$$y = \ln(x) \text{ et } y = \ln\left(\frac{1}{x}\right).$$

On désigne par A et B les points de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ de même ordonnée 1.



1. Calculez les abscisses de A et B.

2. a) Déterminez une équation de la tangente T_A à $\mathcal{C}_1$ en A et de la tangente Δ_B à $\mathcal{C}_2$ en B.

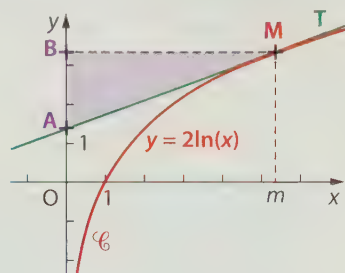
b) Vérifiez que les droites T_A et Δ_B sont perpendiculaires.

3. Le résultat précédent reste-t-il valable dans le cas où T et Δ sont les tangentes à $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ aux points de même ordonnée b ($b \in \mathbb{R}$) ?

12 Dans un repère orthonormé, la courbe $\mathcal{C}$ représente la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = 2 \ln(x)$.

m est un nombre strictement positif ; M est le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse m et B son projeté orthogonal sur l'axe des ordonnées.

La tangente T en M à $\mathcal{C}$ coupe l'axe (Oy) en A.



1. a) Déterminez une équation de T.

b) Déduisez-en les coordonnées du point A.

2. a) Comment choisir m pour que le point A soit en O ?

b) Exprimez l'aire du triangle ABM en fonction de m . Que constatez-vous ?

13 Les fonctions f et g sont définies sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = \ln(x)$ et $g(x) = \sqrt{x}$.

Pour tout nombre $x > 0$, on pose :

$$\varphi(x) = g(x) - f(x).$$

1. a) Étudiez les variations de la fonction φ .

b) Prouvez que pour tout nombre $x > 0$, $\sqrt{x} > \ln(x)$.

2. a) Démontrez que pour tout nombre $x > 1$,

$$0 < \frac{\ln(x)}{x} < \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

b) Retrouvez ainsi la limite de $\frac{\ln(x)}{x}$ quand x tend vers $+\infty$.

14 1. Étudiez les variations de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par : $f(x) = x + \ln(x)$.

2. a) Justifiez que pour tout entier naturel n , l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution, notée α_n , dans $]0; +\infty[$.

b) Justifiez que la suite (α_n) est croissante.

3. a) Prouvez que pour tout nombre $x > 0$, $f(x) \leq 2x - 1$.

b) Déduisez-en que pour tout entier naturel n ,

$$\alpha_n \geq \frac{n+1}{2}.$$

c) Quelle est la limite de la suite (α_n) ?

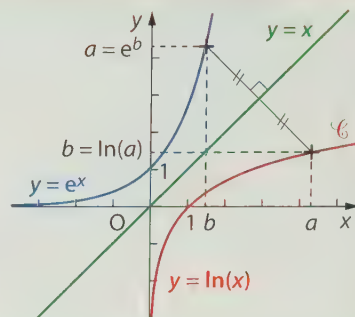
OBJECTIF 3

Utiliser le lien entre les fonctions $\ln$ et $\exp$

- Pour tout nombre a strictement positif et tout nombre b :

$$\ln(a) = b \Leftrightarrow a = e^b.$$

- Pour tout nombre $x > 0$, $e^{\ln(x)} = x$.
- Pour tout nombre x , $\ln(e^x) = x$.
- Dans un repère orthonormé, les courbes représentatives des fonctions $\ln$ et $\exp$ sont symétriques par rapport à la droite Δ d'équation $y = x$.



EXERCICE RÉSOLU D

Résoudre des équations et des inéquations

Résolvez dans $\mathbb{R}$: a) $[\ln(x-1)]^2 = 2 + \ln(x-1)$ [E] ; b) $e^{2x} - 2e^x - 8 > 0$ [I].

► Méthode

a) On détermine l'ensemble de définition de l'équation.

- On effectue un changement de variable qui conduit à une équation du 2nd degré.

- On revient à l'inconnue initiale x .

- On détermine les valeurs de x en utilisant le lien entre les fonctions $\ln$ et $\exp$.

b) On transforme l'inéquation à l'aide d'un changement d'inconnue.

- On se ramène à la résolution d'une inéquation du 2nd degré.

- On revient à l'inconnue initiale x en tenant compte des conditions éventuelles.

- On utilise le lien entre les fonctions $\ln$ et $\exp$ et leur sens de variation.

► Solution

► a) L'équation [E] n'est définie que pour x tel que $x-1 > 0$ c'est-à-dire $x > 1$.

[E] s'écrit $[\ln(x-1)]^2 - \ln(x-1) - 2 = 0$.

► On pose $X = \ln(x-1)$.

On obtient l'équation $X^2 - X - 2 = 0$ dont les solutions dans $\mathbb{R}$ sont $X_1 = -1$ et $X_2 = 2$.

► Ainsi, l'équation [E] équivaut à :

$$\ln(x-1) = -1 \text{ ou } \ln(x-1) = 2.$$

► En utilisant la fonction exponentielle, on obtient $x-1 = e^{-1}$ ou $x-1 = e^2$.

D'où l'ensemble des solutions :

$$\{1 + e^{-1}; 1 + e^2\}.$$

► b) L'inéquation est définie pour tout nombre x .

On pose $U = e^x$; [I] s'écrit $U^2 - 2U - 8 > 0$.

► Le trinôme $U^2 - 2U - 8$ admet pour racines $U_1 = -2$ et $U_2 = 4$; il est positif à l'extérieur de ses racines donc pour $U < -2$ ou $U > 4$.

► Mais, $U = e^x$ doit être strictement positif ; donc l'inéquation [I] équivaut à $e^x > 4$.

► En utilisant la fonction $\ln$, qui est strictement croissante sur $]0; +\infty[$, on obtient $x > \ln(4)$.

D'où l'ensemble des solutions : $] \ln(4); +\infty[$.

► Mise en pratique

Pour les exercices 15 à 18

Résolvez dans $\mathbb{R}$ chaque équation ou inéquation.

15 a) $e^{2x-3} = 4$; b) $\ln(3x-1) = 2$.

16 a) $2e^{2x-1} = e^x$; b) $\ln(x+2) = \ln(x)+1$.

17 $[\ln(x)]^2 - 5\ln(x) + 6 \geq 0$.

18 a) $e^{2x} < 12 - 6e^x$; b) $2e^{2x} - 4 > 0$.

19 Vrai ou faux

a) L'équation $e^{2x} + 3e^x = -2$ a deux solutions dans $\mathbb{R}$.

b) L'inéquation $[\ln(x)]^2 \leq -\ln(x)$ a pour ensemble de solutions $[e^{-1}; 1]$.

EXERCICE RÉSOLU E

Étudier des suites liées entre elles

(u_n) et (v_n) sont les suites définies pour tout entier naturel n par : $u_n = e^{1-n}$ et $v_n = \ln(u_n)$.

Pour tout entier naturel n , on pose $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$ et $P_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n$.

1. a) Justifiez que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

b) Déterminez un entier n_0 tel que $u_n \leq 10^{-4}$ dès que $n \geq n_0$.

2. Quelle est la limite de la suite (S_n) ? Déduisez-en la limite de la suite (P_n) .

► Méthode

1. a) On utilise le théorème sur la limite de la composée d'une suite et d'une fonction (théorème 4, chapitre 2).

b) On transforme l'inéquation d'inconnue n (entier naturel) en appliquant la fonction $\ln$, strictement croissante sur $]0; +\infty[$.

• On peut choisir pour n_0 le plus petit entier solution.

2. On détermine la nature de la suite (v_n) .

• On calcule la somme de $n+1$ termes consécutifs d'une suite arithmétique.

Rappel

$S = \text{nombre de termes} \times \text{moyenne des termes extrêmes}.$

• On transforme le produit P_n en utilisant la relation entre u_n et v_n :

$v_n = \ln(u_n)$ équivaut à $u_n = e^{v_n}$.

► Solution

► 1. a) On sait que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (1-n) = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0.$$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{1-n} = 0$. Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

► b) La condition $u_n \leq 10^{-4}$ s'écrit $e^{1-n} \leq 10^{-4}$.

Elle équivaut à $\ln(e^{1-n}) \leq \ln(10^{-4})$.

Ainsi, $1-n \leq -4 \ln(10)$ donc $n \geq 1 + 4 \ln(10)$.

► $1 + 4 \ln(10) \approx 10,21$; on choisit donc $n_0 = 11$.

Il suffit que $n \geq 11$ pour que $u_n \leq 10^{-4}$.

► 2. Pour tout entier naturel n , $v_n = 1-n$.

L'expression est du type $v_n = v_0 + nr$ avec $v_0 = 1$ et $r = -1$; donc (v_n) est la suite arithmétique de raison -1 et de premier terme 1.

► D'où $S_n = (n+1) \frac{(v_0 + v_n)}{2} = \frac{(n+1)(2-n)}{2}$.

On obtient alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = -\infty$.

► • On remarque que pour tout entier naturel n ,

$$P_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n = e^{v_0} \times e^{v_1} \times \dots \times e^{v_n}$$

$$P_n = e^{v_0 + v_1 + \dots + v_n} = e^{S_n}.$$

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$;

donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} P_n = 0$.

► Mise en pratique

20 Utilisez la fonction $\ln$ pour déterminer le plus petit entier n_0 tel que pour tout entier $n \geq n_0$:

a) $0,7^n < 10^{-4}$; b) $1,01^n \geq 10^6$.

21 La suite u est définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = e^{2n-1}$.

1. Quel est son sens de variation ? Sa limite ?

2. Déterminez le plus petit entier n_0 tel que $u_n \geq 10^{20}$ dès que $n \geq n_0$.

22 Les suites (u_n) et (v_n) sont définies sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = 2 \ln(n) - n$ et $v_n = e^{u_n}$.

1. Déterminez la limite de la suite (u_n) .

2. Déduisez-en la limite de la suite (v_n) .

23 Les suites (u_n) et (v_n) sont définies sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = n^n e^{-n}$ et $v_n = \ln(u_n)$.

1. Déterminez la limite de la suite (v_n) .

2. Déduisez-en la limite de la suite (u_n) .

24 Les fonctions f et g sont définies par :

$$f(x) = \ln(1+x), \quad x \in]-1; +\infty[,$$

$$g(x) = e^x - 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

1. Pour tout nombre $a > -1$ et tout nombre b , calculez $g[f(a)]$ et $f[g(b)]$.

2. Dans un repère orthonormé, prouvez que les courbes représentatives de f et g sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

OBJECTIF 4

Exploiter le comportement en $+\infty$ ou en zéro de la fonction $\ln$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$: on dit qu'en $+\infty$, x l'emporte sur $\ln(x)$.

• $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln(x) = 0$. • $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

EXERCICE RÉSOLU F Étudier l'existence d'asymptotes à une courbe

f est la fonction définie sur l'intervalle $I =]0 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x^2}$.

La courbe $\mathcal{C}$ représentative de f admet-elle des asymptotes ?

Méthode

- On examine le comportement de f aux bornes de son intervalle de définition.

Remarque

Le tracé de la courbe de f sur une calculatrice permet de conjecturer le résultat.

- On transforme l'écriture de $f(x)$.

On fait apparaître l'expression $\frac{\ln(1+x)}{x}$ dont on connaît la limite en 0.

- On transforme l'écriture de $f(x)$.

En $+\infty$, x l'emporte sur $\ln(x)$ d'où l'idée de faire apparaître l'expression $\frac{\ln(x)}{x}$ dont on connaît la limite en $+\infty$.

Remarque

L'écriture $\frac{\ln(1+x)}{1+x} \times \frac{1+x}{x^2}$ permet aussi de lever l'indétermination en $+\infty$.

Solution

- On calcule la limite de f en 0 et en $+\infty$.

– En 0, un calcul direct conduit à une forme indéterminée.

→ Pour tout nombre $x > 0$, $f(x) = \frac{1}{x} \times \frac{\ln(1+x)}{x}$.

Or : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$;
donc par multiplication, $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$.

Ainsi, la courbe $\mathcal{C}$ admet l'axe des ordonnées, d'équation $x = 0$, pour asymptote verticale.

– En $+\infty$, il y a indétermination.

→ $f(x) = \frac{\ln\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)}{x^2} = \frac{\ln(x) + \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x^2}$ soit

$f(x) = \frac{1}{x} \times \frac{\ln(x)}{x} + \frac{1}{x^2} \times \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$.

Or : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$;

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$;

donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Ainsi, $\mathcal{C}$ admet l'axe des abscisses, d'équation $y = 0$, pour asymptote horizontale.

Mise en pratique

25 f est la fonction définie dans l'exercice résolu F.

- Vérifiez que la dérivée f' de f est telle que pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(1+x)x^3}$$

avec $g(x) = x - 2(1+x)\ln(1+x)$.

- Étudiez les variations de la fonction g en précisant sa limite en 0.
- Déduisez-en le signe de f' sur I , puis dressez le tableau de variation de f .

26 f est la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^2}.$$

- Calculez la limite de f en 0 et en $+\infty$.

- a) Prouvez que pour tout nombre $x > 0$,

$$f'(x) = \frac{2[x^2 - (x^2 + 1)\ln(x^2 + 1)]}{x^3(x^2 + 1)}.$$

- b) Étudiez le signe du numérateur.

- Déduisez-en le tableau de variation de f .

27 Questions sur le cours

Complétez les propositions suivantes.

a) La fonction $\ln$ est telle que pour tout nombre $x > 0$ et tout nombre y : $\ln(x) = y \Leftrightarrow y = \dots$

b) Pour tous nombres a et b strictement positifs :
 $\ln(a) + \ln(b) = \dots$ et $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = \dots$

c) La fonction $\ln$ est telle que :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = \dots \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \dots$$

d) L'inéquation $\ln(x) > 1$ équivaut à $x \dots$

28 Vrai ou faux

Vrai ou faux ? Justifiez votre réponse.

a) f est la fonction $x \mapsto \ln(\sqrt{x})$ définie sur $]0; +\infty[$.

Alors, pour tout nombre $x > 0$, $f'(x) = \frac{1}{2x}$.

b) La tangente à la courbe d'équation $y = \ln(x)$ au point d'abscisse e passe par l'origine du repère.

c) L'équation $\ln(x^2) + \ln(x) - 2 = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.

d) Pour tout nombre $x > 0$, $x - 1 + \ln\left(\frac{1}{x}\right) < 0$.

29 QCM Une seule réponse exacte

Pour chaque affirmation, une seule réponse est exacte. Identifiez-la en justifiant votre réponse.

1. On considère dans $\mathbb{R}$ l'équation :

$$\ln(e^x + e^{-x} + 1) = \ln(7) - \ln(2) \quad [E].$$

a) L'équation $[E]$ équivaut à : $e^x + e^{-x} - 4 = 0$.

b) On pose $X = e^x$; $[E]$ s'écrit : $2X^2 - 5X + 2 = 0$.

c) L'équation $[E]$ n'a pas de solution.

2. L'inéquation $\ln(2-x) + \ln(2+x) - \ln(x) \geq \ln(3)$:

a) est définie sur $] -2; 2[$.

b) n'a pas de solution.

c) a pour ensemble de solutions $]0; 1[$.

3. Les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ sont les représentations graphiques des fonctions :

$$f_1 : x \mapsto \ln(e^x - 1),$$

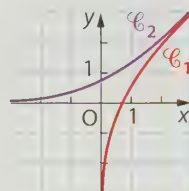
$$x \in]0; +\infty[$$

$$\text{et } f_2 : x \mapsto \ln(e^x + 1), x \in \mathbb{R}.$$

a) $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ ont un seul point commun.

b) $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ ont une tangente commune.

c) Pour tout nombre $x > 0$, $f_2[f_1(x)] = x$.



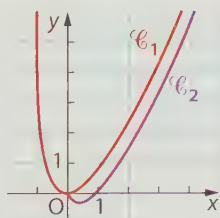
30 QCM Au moins une réponse exacte

Pour chaque affirmation, plusieurs réponses peuvent être exactes. Identifiez-les en justifiant vos réponses.

1. Les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ représentent les fonctions f_1 et f_2 définies respectivement sur $] -1; +\infty[$ et $]0; +\infty[$ par :

$$f_1(x) = x \ln(1+x) \quad \text{et}$$

$$f_2(x) = x \ln(x).$$



a) f_2 admet un minimum pour $x = e^{-1}$.

b) $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ ont un seul point commun.

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f_1(x) - f_2(x)) = 1$.

2. f est la fonction définie sur $I =] -1; 1[$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

a) Pour tout x de I , $f(x) + f(-x) = 0$.

b) f est dérivable sur I et pour tout x de I ,

$$f'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1-x}{1+x}.$$

c) Pour tout nombre λ , l'équation $f(x) = \lambda$ admet l'unique solution $x = \frac{e^{2\lambda} - 1}{e^{2\lambda} + 1}$.



Apprendre à chercher

31 Placement à intérêts composés

Un capital de 1 000 € est placé à intérêts composés au taux annuel de 3 %.

Objectif Déterminer au bout de combien d'années la valeur du capital dépasse 1 500 €.

1. La valeur augmente de 3 % par an.

a) On note v_n la valeur du capital au bout de n années. Démontrez que la suite (v_n) est géométrique. Précisez sa raison et son premier terme v_0 .

b) Exprimez v_n en fonction de n .

2. Le problème posé revient à résoudre une inéquation où l'inconnue est en exposant.

La fonction $\ln$ permet de transformer cette inéquation en une simple inéquation du premier degré.

a) Résolvez l'inéquation correspondant au problème posé, sachant que l'inconnue n est un entier naturel.

b) Déterminez la plus petite valeur de n vérifiant la condition.

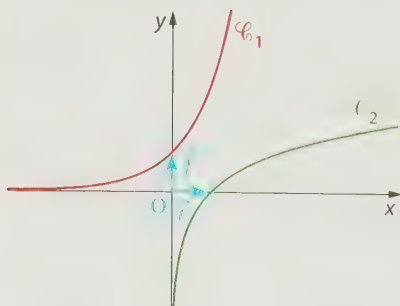
32 Tangentes communes à deux courbes

On considère dans un même repère les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ représentant respectivement les fonctions $\exp$ et $\ln$.

Objectif Déterminer les droites qui sont tangentes à la fois à $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

1. On trace les courbes pour avoir une idée.

Quelle conjecture pouvez-vous faire quant au nombre de tangentes communes aux deux courbes et à leur position ?



2. Une méthode consiste à déterminer l'équation réduite d'une tangente T_1 à $\mathcal{C}_1$ en un point quelconque (d'abscisse a), et, de même, l'équation réduite d'une tangente T_2 à $\mathcal{C}_2$ en un point quelconque (d'abscisse $b > 0$).

Déterminez l'équation réduite de T_1 et de T_2 .

3. Il s'agit de trouver les conditions sur a et b pour que les deux droites T_1 et T_2 soient confondues, ce qui signifie qu'elles ont le même coefficient directeur et la même ordonnée à l'origine.

a) Démontrez que ces deux droites sont confondues si, et seulement si :

$$\begin{cases} e^a = \frac{1}{b} \\ e^a(1-a) = \ln b - 1 \end{cases} \quad (S)$$

b) Prouvez que le système (S) équivaut à :

$$\begin{cases} e^a = \frac{1}{b} \\ e^a = \frac{a+1}{a-1} \end{cases}$$

4. L'équation $e^a = \frac{a+1}{a-1}$ ne peut pas être résolue par une méthode algébrique.

On pense alors à introduire la fonction f définie pour tout nombre x différent de 1 par $f(x) = e^x - \frac{x+1}{x-1}$, afin d'utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.

a) Étudiez les variations de la fonction f , et ses limites aux bornes de son ensemble de définition.

b) Déduisez-en qu'il y a deux valeurs pour lesquelles f s'annule.

c) On note a_1 et a_2 les solutions de l'équation $f(x) = 0$, avec $a_1 < 1 < a_2$.

Déterminez les couples solutions du système (S).

d) Concluez.

Commentaire

Utilisez un grapheur pour représenter les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$, ainsi que les droites T_1 et T_2 , afin de vérifier l'exactitude de vos calculs.

Narration de recherche

→ L'objectif n'est pas seulement de résoudre le problème posé : vous devez aussi noter les différentes idées même lorsqu'elles n'ont pas permis de trouver la réponse. Expliquez pourquoi vous avez changé de méthode et ce qui vous a fait avancer.

33 Écriture décimale d'un grand nombre

En 2011, le plus grand nombre premier connu était :

$$2^{43112609} - 1.$$

Combien de chiffres comporte son écriture décimale ?

Note Un nombre entier naturel est dit **premier** lorsqu'il n'admet que deux diviseurs, 1 et lui-même.

34 Temps de doublement

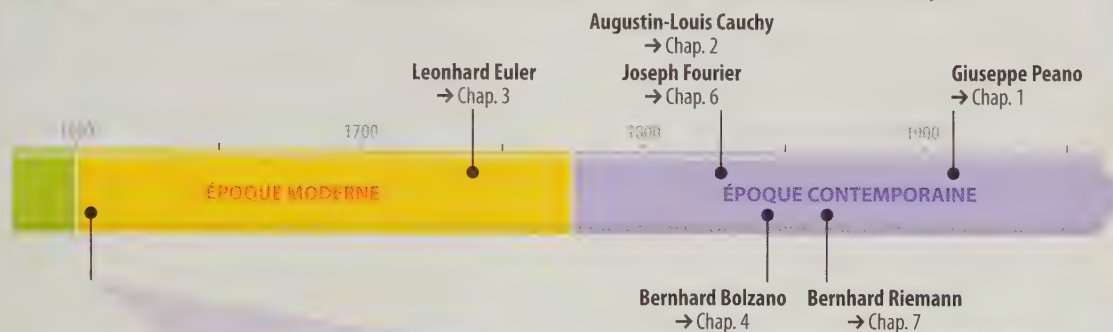
Quand un capital est placé à intérêts composés au taux de $r\%$ par an, les banquiers évaluent à environ $\frac{70}{r}$ le nombre d'années nécessaires à son doublement.

Comment s'explique cette formule approchée ?

Chercheurs d'hier

Eux aussi, ils ont
cherché avant de trouver !

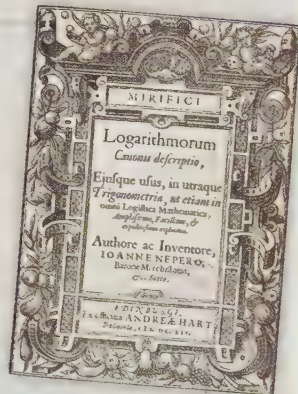
→ Voici quelques mathématiciens importants qui ont travaillé dans le domaine de l'Analyse.



John Neper (1550-1617)



L'Écossais John Neper a cherché à simplifier les calculs astronomiques, nécessaires notamment à la navigation. En 1614, il publie un court traité, *Mirifici Logarithmorum Canonis descriptio* (*Description de la règle merveilleuse des logarithmes*, page de titre ci-contre) dans lequel il expose un « procédé sûr et rapide » permettant de remédier à « l'ennui de ces longues opérations » : l'utilisation des logarithmes.



Un demi-siècle plus tard, l'invention par Newton et Leibniz du calcul différentiel (dérivées et intégrales) permettra de découvrir que, en plus de son utilité pratique pour les calculs, la fonction logarithme de Neper a des propriétés théoriques remarquables : elle a non seulement une dérivée très simple, mais aussi un lien étroit avec la fonction exponentielle.

Laplace rendit hommage à Neper : « L'invention des logarithmes, en réduisant le temps passé aux calculs de quelques mois à quelques jours, double, pour ainsi dire, la vie des astronomes. »



Sur le Web fr.wikipedia.org/wiki/Logarithme
www.bibmath.net/bios/index.php
serge.mehl.free.fr/chrono/Neper.html

Travaux dirigés

Approfondissement AP

Prolongements possibles
→ exercice 103

35 Autres fonctions logarithmes

A La fonction logarithme décimal

Peu de temps après la publication par Neper de ses tables de logarithmes, Henry Briggs publie une autre table de logarithmes, plus commode pour les calculs : la table des logarithmes décimaux.

L'idée est la suivante : si on multiplie les logarithmes de Neper par un même nombre k , on conservera la propriété de transformer les produits en sommes. Mais en choisissant k de façon que l'image de 10 soit 1, on aura d'autres propriétés intéressantes : l'image de 100 sera 2, celle de 1 000 sera 3, celle de 0,1 sera -1 ...

1. Étant donné un nombre k , on considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = k \ln(x)$.

Démontrez que pour tous nombres x et y strictement positifs, $f(xy) = f(x) + f(y)$.

2. Déterminez k de façon que $f(10) = 1$.

3. Pour tout nombre x strictement positif, on appelle

logarithme décimal de x le nombre :

$$\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}.$$

a) Démontrez que pour tous nombres x et y strictement positifs, $\log(xy) = \log(x) + \log(y)$.

b) Démontrez que pour tout entier n , $\log(10^n) = n$.

4. a) On donne $\log(347) \approx 2,5403$. Calculez de tête, avec quatre décimales : $\log(3470)$, $\log(34700)$, $\log(34,7)$, $\log(3,47)$, $\log(0,347)$, $\log(0,0347)$.

b) Quelle conjecture générale pouvez-vous faire ?

II. Logarithmes des nombres de 1 à 10 000.

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	23
150	17	609	638	667	696	725	754	783	811	840	869
1	898	926	955	984	013	041	070	099	127	156	185
2	18	184	213	241	270	298	327	355	384	412	441
3	469	498	526	554	583	611	639	667	696	724	753
4	782	810	838	867	895	924	952	979	005	032	059
5	19	033	061	089	117	145	173	201	229	257	285
6	312	340	368	396	424	451	479	507	535	562	590
7	590	618	645	673	700	728	756	783	811	838	865
8	866	893	921	948	976	003	030	058	085	112	139
9	20	140	167	194	222	249	276	303	330	358	385
100	412	439	466	493	520	548	575	602	629	656	683
1	683	710	737	763	790	817	844	871	898	925	952
2	952	978	005	032	059	085	112	139	165	192	219
3	21	219	245	272	299	325	352	378	405	431	458
4	484	511	537	564	590	617	643	669	696	722	749
5	748	775	801	827	854	880	906	932	958	985	012
6	22	011	037	063	089	115	141	167	193	220	246
7	272	298	324	350	376	402	427	453	479	505	531
8	531	557	583	608	634	660	686	712	737	763	789

Avant l'apparition des calculatrices (vers 1970), les tables de logarithmes décimaux étaient le principal outil pour effectuer des calculs numériques précis.

B Fonctions transformant les produits en sommes

Les fonctions de la forme $x \mapsto k \ln(x)$ transforment les produits en sommes. On peut se demander s'il y en a d'autres.

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, vérifiant pour tous nombres x et y , la relation [E] :

$$f(xy) = f(x) + f(y).$$

1. Démontrez que si $f(0)$ existe, alors f est la fonction nulle.

2. On écarte ce cas désormais, et on cherche f définie et dérivable sur $]0; +\infty[$ vérifiant la relation [E].

a) Démontrez que nécessairement $f(1) = 0$.

b) En supposant $x > 0$ fixé et $y > 0$ variable, démontrez que $xf'(xy) = f'(y)$.

Déduisez-en que pour tout nombre $x > 0$, $xf'(x) = f'(1)$.

3. On pose $f'(1) = k$.

a) Démontrez que pour tout x de $]0; +\infty[$, $f'(x) = \frac{k}{x}$.

b) Démontrez que f est la fonction $x \mapsto k \ln(x)$.

4. Concluez.

Aide

b) Étudiez la fonction $x \mapsto f(x) - k \ln(x)$.

36 La fonction logarithme en Physique

A En chimie : pH d'une solution aqueuse

Pour mesurer l'acidité d'une solution aqueuse, on utilise le **potentiel hydrogène pH** défini par : $\text{pH} = -\log([H^+])$ où $[H^+]$ est la concentration en ions H^+ (en ions-grammes par litre).

1. Une solution a pour pH 5. Quelle est la concentration en ions H^+ ?
2. Une solution est acide quand sa concentration en ions H^+ dépasse sa concentration en ions OH^- .
Or, dans les conditions normales de température et de pression, $[H^+] \times [OH^-] = 10^{-14}$.
Démontrez que, dans ces conditions, une solution est acide si et seulement si son pH est inférieur à 7.

B En acoustique : intensité d'un son

L'intensité I d'un son (en décibel, dB) est reliée à sa puissance de réception P (en watt par m^2) de façon qu'on ait, pour deux sons quelconques 1 et 2, $I_2 - I_1 = 10 \log \left(\frac{P_2}{P_1} \right)$.

1. À quelle variation d'intensité correspond un doublement de la puissance ?
2. Que signifie une augmentation de 10 dB en termes de puissance sonore ?

C En astronomie : magnitude apparente d'une étoile

Les astronomes de l'Antiquité (Hipparque, Ptolémée) avaient classé les étoiles visibles à l'œil nu selon leur brillance : les plus brillantes étaient dites de première grandeur, celles qui étaient un peu moins brillantes étaient de deuxième grandeur, etc. Le Soleil n'était pas considéré comme une étoile.

Aujourd'hui, on appelle **éclat** d'une étoile la puissance lumineuse par unité de surface qu'on en reçoit sur la Terre (en watt par m^2).

Pour faire le lien entre ces deux notions, on appelle **magnitude apparente** d'une étoile d'éclat E le nombre $m = -2,5 \log \left(\frac{E}{E_0} \right)$, où E_0 est l'éclat de Véga, choisie comme étoile de référence.

1. Quelle est la magnitude apparente de Véga ?
2. Démontrez que pour deux étoiles, celle qui a l'éclat le plus grand a la magnitude la plus petite.
3. Que signifie, pour une étoile, d'avoir une magnitude apparente négative ?
4. L'étoile la plus brillante (après le Soleil) est Sirius, dont l'éclat est 3,9 fois celui de Véga.
Quelle est la magnitude apparente de Sirius ?
5. Le Soleil a une magnitude apparente de $-26,7$. Calculez le rapport de son éclat à celui de Véga.

Culture scientifique

Le Very Large Telescope (VLT)

Le VLT de l'ESO (*European Southern Observatory*) est l'observatoire astronomique le plus puissant du monde dans le domaine visible du spectre de la lumière. Il est situé sur le Mont Paranal, au Chili, à 2 600 mètres d'altitude. Sur cette photo prise au crépuscule, on peut voir qu'un faisceau laser rouge est lancé à partir de l'un des quatre télescopes hauts de 8,2 mètres, pour créer une étoile artificielle à une altitude de 90 km dans la mésosphère de la Terre. Ce *Laser Guide Star* fait partie du système qui permet aux astronomes d'éliminer les effets de la turbulence atmosphérique et d'obtenir des images presque aussi nettes que si le télescope était dans l'espace.



37 La fonction logarithme en sciences

A Datation archéologique au carbone 14

La désintégration radioactive d'un corps suit une loi de la forme $m = m_0 e^{-kt}$, où m_0 désigne la masse initiale, m la masse au bout d'une durée t (en année), et k un coefficient positif caractéristique du corps considéré.

1. On appelle **demi-vie** d'un corps radioactif la durée au bout de laquelle la moitié de sa masse s'est désintégrée. Démontrez que la demi-vie est indépendante de la masse initiale, et exprimez-la en fonction de k .

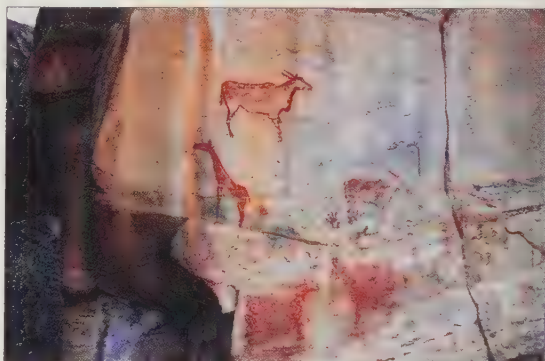
2. Le carbone 14 (^{14}C) est un isotope radioactif du carbone (^{12}C). Sa demi-vie est 5 730 années.

Déterminez son coefficient k .

3. Dans un organisme vivant, la proportion entre la masse de carbone 14 et la masse de carbone 12 reste constante, égale à 10^{-12} . À partir de la mort, cette proportion diminue du fait de la radioactivité du carbone 14. En mesurant cette proportion à une date donnée, on peut estimer la durée écoulée depuis la mort.

• On a retrouvé dans une grotte préhistorique les restes d'un foyer contenant des morceaux de charbon de bois, dans lesquels la proportion entre la masse de carbone 14 et la masse de carbone 12 est $2,5 \times 10^{-13}$.

Quel est l'âge de cet échantillon ?



B Hauteur d'un son

Entre 1830 et 1850, le physiologiste allemand Ernst Heinrich Weber (1795-1878) s'intéressa au système sensoriel de l'être humain et émit une loi formulant un lien entre la sensation (subjective) et l'excitation (objective). Le psychologue allemand Gustav Fechner (1801-1887) réalisa des expériences qui confirmèrent les travaux de Weber et en donna une formulation mathématique, la loi de Weber-Fechner : « La sensation croît comme le logarithme de l'excitation » (*Éléments de psychophysique*, 1860). Autrement dit : $S = K \ln(I)$ où S est la sensation perçue, I l'intensité de la stimulation et K une constante.

Cette loi, contestée dans certains domaines, est illustrée dans l'exercice précédent (intensité d'un son, magnitude apparente d'une étoile).

Un autre exemple est la hauteur h d'un son (en ton), perçue par l'oreille, qui dépend de la fréquence f (en Hz) de ce son de façon que pour deux sons quelconques 1 et 2, $h_2 - h_1 = k \ln\left(\frac{f_2}{f_1}\right)$, où k est une constante.

1. Sachant que monter d'une octave (6 tons) équivaut à doubler la fréquence, déterminez k .

2. Le tableau ci-dessous décrit une gamme chromatique tempérée, où l'écart de hauteur entre deux notes successives est un demi-ton (c'est le cas pour les touches successives, blanches et noires, d'un piano).

Le « la » est celui du diapason qui, par définition, vibre à 440 Hz.

Complétez le tableau en indiquant les fréquences des notes (à 10^{-1} près).

Note	do	do# =ré♭	ré	ré# =mi♭	mi	fa	fa# =sol♭	sol	sol# =la♭	la	la# =si♭	si	do
Fréquence (en Hz)										440			

DE TÊTE

38 Simplifiez :

- a) $\frac{e^{\ln(8)}}{e^{3\ln(2)}}$ b) $\ln(3) + \ln\left(\frac{1}{3}\right)$
 c) $\ln(\sqrt{2} + 1) + \ln(\sqrt{2} - 1)$

39 Indiquez, dans chaque cas, pour quels nombres x l'expression proposée a un sens.

- a) $\frac{1}{\ln(x)}$ b) $\frac{\ln(x+1)}{x}$
 c) $\ln(x+1) - \ln(x-1)$

40 Résolvez les inéquations suivantes :

- a) $\ln(x) < 1$ b) $e^x > 2$

41 Est-il vrai que la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x + \ln(x)$ est strictement croissante sur cet intervalle ?

42 Calculez :

- a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x}$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln(x))$
 c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \ln(x)}{x+1}$

43 La suite (u_n) est définie pour tout entier naturel n non nul par $u_n = \ln(2n) - \ln(n+1)$.
 Est-elle convergente ?

CALCULS AVEC LES FONCTIONS ln ET exp

44 f est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln\left(e^{\frac{1}{x}}\right) + e^{-\ln(x)}$$

Simplifiez l'écriture de $f(x)$.

45 Déterminez, dans chaque cas, pour quels nombres x l'expression proposée a un sens.

- a) $\ln(x^2 + 2x)$ b) $\ln(e^x - 1)$ c) $e^x + \ln(x)$
 d) $\frac{1}{\ln(x)}$ e) $e^{\ln(x^2-1)}$

46 Est-il vrai que la représentation graphique de la fonction f telle que $f(x) = \ln(e^x) - e^{\ln(x-1)}$ est une demi-droite « ouverte » (origine non comprise) ?

Pour les exercices 47 à 52

Résolvez l'équation ou l'inéquation proposée.

- 47** a) $\ln(3 - 2x) = 1$ b) $\ln(3 - x) = -2$
 c) $\ln(x^2 - 8) = 0$ d) $\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) = 2$

- 48** a) $e^{x+2} = 3$ b) $e^{\frac{x}{x+1}} = 2$
 c) $(e^x + 1)(e^x - 4) = 0$ d) $\ln(e^x + 1) = 2$

- 49** a) $\ln(2x - 1) \geq -1$ b) $\ln(x - 3) \leq 2$
 c) $-1 \leq \ln(x) \leq 2$ d) $\ln(1 + e^x) \leq 2$

- 50** a) $e^{x-1} < 2$ b) $(e^x + 1)(e^x - 4) \leq 0$
 c) $e^{\frac{x+1}{x}} > 3$ d) $\frac{1}{2} \leq e^x \leq 2$

- 51** a) $\ln(3x - 4) = \ln(x^2 - 4)$
 b) $\ln(-3x) = \ln(x^2 - 4)$

- 52** a) $\ln(x - 2) \leq \ln(2x - 1)$
 b) $\ln\left(1 + \frac{2}{x}\right) \geq \ln(x)$
 c) $\ln(x) \leq \ln(x^2 - 2x)$

53 Quel est l'ensemble des nombres pour lesquels l'égalité $\ln\left(\frac{x-1}{x+2}\right) = \ln(x-1) - \ln(x+2)$ est vraie ?

54 Résolvez, dans chaque cas, l'inéquation d'inconnue n entier naturel.

- a) $\left(\frac{2}{5}\right)^n \leq 0,2$ b) $\left(1 + \frac{3}{100}\right)^n \geq 2$

Pour les exercices 55 et 56

Résolvez l'équation ou l'inéquation proposée.

- 55** a) $2 \ln(x) = \ln(x+4) + \ln(2x)$
 b) $\ln[(x+3)(x+2)] = \ln(x+11)$
 c) $\ln(x+3) + \ln(x+2) = \ln(x+11)$

- 56** a) $\frac{1}{2} \ln(2x) = \ln(3-x) - \ln(\sqrt{x+1})$
 b) $\ln(5-x) - \ln(3) + \ln(x-1) \geq 0$

57 1. Résolvez l'équation :

$$[\ln(x)]^2 - 2 \ln(x) - 3 = 0$$

2. Résolvez l'inéquation :

$$[\ln(x)]^2 - 2 \ln(x) - 3 \geq 0$$

Aide Utilisez un changement d'inconnue.

58 1. Résolvez l'équation : $3e^{2x} - 7e^x + 2 = 0$.

2. Résolvez l'inéquation : $3e^{2x} - 7e^x + 2 > 0$.

Aide Utilisez un changement d'inconnue.

DES LIMITES IMPORTANTES

Pour les exercices 59 à 61

Étudiez la limite de la fonction f aux bornes de I .

- 59** a) $f(x) = \frac{1}{\ln(x)}$; $I =]1; +\infty[$.
 b) $f(x) = x(1 - \ln(x))$; $I =]0; +\infty[$.
 c) $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-4}\right)$; $I =]-\infty; -1[$.
 d) $f(x) = x + \ln(x+1) - \ln(x)$; $I =]0; +\infty[$.
- 60** a) $f(x) = \frac{x - \ln(x)}{x}$; $I =]0; +\infty[$.
 b) $f(x) = \frac{1}{x} + \ln(x)$; $I =]0; +\infty[$.
 c) $f(x) = x + \frac{\ln(x)}{x}$; $I =]0; +\infty[$.
 d) $f(x) = \ln(2 + e^x)$; $I =]-\infty; +\infty[$.
- 61** a) $f(x) = x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$; $I =]0; +\infty[$.
 b) $f(x) = x + x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$; $I =]0; +\infty[$.

Aide

Posez $X = \frac{1}{x}$.

- 62**
- f
- est la fonction définie sur
- $]0; +\infty[$
- par :

$$f(x) = x^2(1 - \ln(x)) \text{ si } x > 0 \text{ et } f(0) = 0.$$

1. Démontrez que
- f
- est continue en 0.

2. a) Calculez $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.

- b) Déduisez-en que
- f
- est dérivable en 0.

LA FONCTION $\ln$

- 63**
- 1.
- g
- est la fonction définie sur
- $\mathbb{R}$
- par
- $g(x) = xe^x + 1$
- .

Démontrez que pour tout x de $\mathbb{R}$, $g(x) > 0$.

- 2.
- f
- est la fonction définie sur
- $I =]0; +\infty[$
- par :

$$f(x) = e^x + \ln(x).$$

- a) Démontrez que pour tout
- x
- de
- I
- ,
- $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$
- .

- b) Dressez le tableau de variation de
- f
- .

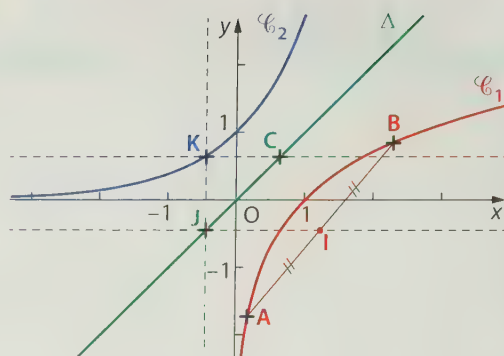
Remarque

On peut obtenir directement les variations de f sans calculer sa dérivée.

- c) Déduisez-en que pour tout nombre
- m
- , l'équation
- $f(x) = m$
- a une unique solution.

64 QCM

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on a tracé les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ d'équations respectives $y = \ln(x)$ et $y = e^x$, ainsi que la droite Δ d'équation $y = x$.



A et B sont deux points de $\mathcal{C}_1$ d'abscisses respectives a et b ; le point I est le milieu de $[AB]$.

J et C sont deux points de Δ ; K est un point de $\mathcal{C}_2$.

Les droites (IJ) et (KC) sont parallèles à l'axe des abscisses, et (JK) est parallèle à l'axe des ordonnées.

Dites si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.

Justifiez vos réponses

1. I a pour coordonnées
- $\left(\frac{a+b}{2}; \ln(\sqrt{ab})\right)$
- .

2. C a pour abscisse
- $e^{\sqrt{ab}}$
- .

3. La tangente à
- $\mathcal{C}_1$
- au point d'abscisse
- $\frac{a+b}{2}$
- est parallèle à
- Δ
- si, et seulement si,
- $a + b = 2$
- .

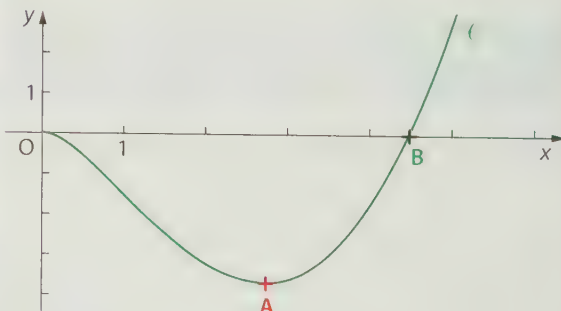
4. On note H le projeté orthogonal de B sur l'axe des abscisses. La tangente en B à
- $\mathcal{C}_1$
- coupe l'axe
- (Ox)
- en K.

K est le milieu de $[OH]$ si, et seulement si, $b = \frac{1}{e}$.

D'après Concours FESIC

- 65**
- On a tracé ci-dessous la courbe
- $\mathcal{C}$
- représentative de la fonction
- f
- définie sur
- $]0; +\infty[$
- par :

$$f(x) = x^2 \left[\ln(x) - \frac{3}{2} \right] \text{ si } x > 0 \text{ et } f(0) = 0.$$



Il semble que $\mathcal{C}$:

- admet en l'origine O du repère une tangente horizontale;
- passe par le point A associé au minimum de f sur $]0; +\infty[$;
- recoupe l'axe des abscisses en B.

Validez les conjectures énoncées en précisant en particulier les coordonnées des points A et B.

66 BAC

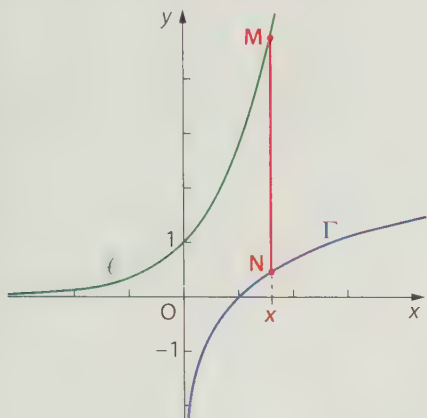
Dans un repère orthonormé, on a tracé les courbes $\mathcal{C}$ et Γ d'équations respectives :

$$y = e^x \quad \text{et} \quad y = \ln(x).$$

On rappelle que pour tout nombre x strictement positif :

$$e^x > \ln(x).$$

À tout nombre x strictement positif, on associe le point M de $\mathcal{C}$ et le point N de Γ de même abscisse x .



Le but de l'exercice est de trouver la valeur de x pour laquelle la distance MN est minimale.

1. On note φ la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$\varphi(x) = e^x - \ln(x).$$

a) Calculez $\varphi'(x)$ et démontrez que l'équation $\varphi'(x) = 0$ admet, dans $]0; +\infty[$, une unique solution notée α .

Déterminez une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

b) Déduisez-en que la distance MN est minimale lorsque $x = \alpha$.

2. a) Justifiez que $e^\alpha = \frac{1}{\alpha}$.

b) Déduisez-en que les tangentes à $\mathcal{C}$ et Γ aux points d'abscisse α sont parallèles.

67 BAC

f est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 \ln(x) \text{ si } x > 0 \quad \text{et} \quad f(0) = 0.$$

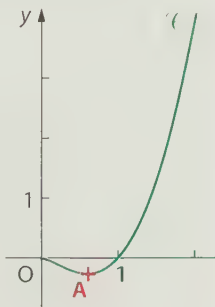
1. Démontrez que f est continue et dérivable en 0.

2. On a tracé ci-contre la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f .

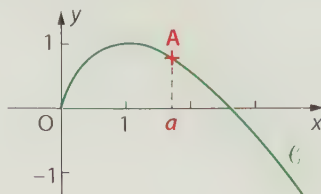
a) En A, la courbe $\mathcal{C}$ admet un minimum. Quelles sont les coordonnées de A ?

b) Démontrez qu'il existe deux tangentes à $\mathcal{C}$ passant par O.

Précisez une équation de chacune de ces tangentes.



68 $\mathcal{C}$ est la courbe représentative de la fonction f définie sur $I =]0; +\infty[$ par $f(x) = x(1 - \ln(x))$.



1. Dressez le tableau de variation de f et précisez ses limites aux bornes de I .

2. A est le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse a avec $a > 0$.

a) Quelles sont les coordonnées du point B, intersection de l'axe des ordonnées et de la tangente T_a en A à $\mathcal{C}$?

b) En tenant compte des résultats précédents, explicitez une démarche simple pour la construction de T_a .

69 f est une fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = ax + b + \frac{\ln(x)}{x} \quad \text{où } a \text{ et } b \text{ sont deux nombres.}$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

Le point $A(1; 0)$ est le point de $\mathcal{C}$ en lequel la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = 3x + 2$.

1. a) Démontrez que a et b sont solutions du système :

$$\begin{cases} a + 1 = 3 \\ a + b = 0. \end{cases}$$

b) Déduisez-en $f(x)$.

2. On note g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = 2x^2 + 1 - \ln(x).$$

a) Démontrez que pour tout x de $]0; +\infty[$, $g(x) > 0$.

b) Déduisez-en que f est strictement croissante sur l'intervalle $]0; +\infty[$.

ÉTUDES DE FONCTIONS
DU TYPE $x \mapsto \ln[u(x)]$

70 Zoom sur le théorème 6

f est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) \text{ si } x > 0 \text{ et } f(0) = 0.$$

On pose $u(x) = \frac{x}{x+1}$.

1. Pourquoi le théorème 6 ne permet-il pas d'affirmer que f est dérivable sur $]0; +\infty[$?

2. a) Vérifiez que f est continue en 0.

b) Pourquoi le théorème 6 ne permet-il pas de répondre à la question : f est-elle dérivable en 0 ?

c) Calculez $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(h) - f(0)}{h}$ et concluez.

71 LOGIQUE

f est la fonction définie sur $\mathcal{D} =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$ par $f(x) = x \ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right)$.

On vous propose le raisonnement suivant :

« f est dérivable sur $\mathcal{D}$ comme composée de fonctions dérivables sur $\mathcal{D}$. Pour tout x de $\mathcal{D}$, on peut écrire : $f(x) = x[\ln(x-1) - \ln(x+1)]$.

On obtient alors :

$$f'(x) = \ln(x-1) - \ln(x+1) + x \left[\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right],$$

$$\text{soit } f'(x) = \ln \left(\frac{x-1}{x+1} \right) + \frac{2x}{x^2-1}.$$

Ce raisonnement est-il exact ?

D'après Concours FESIC

72 f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = \ln(ax^2 + bx + c)$, où a , b et c sont trois nombres. Son tableau de variation est :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	$+\infty$
$f'(x)$			0		
$f(x)$			0	$\ln\left(\frac{5}{8}\right)$	

1. En utilisant les données du tableau, calculez a , b , c .

2. a) Calculez $f'(x)$.

b) Vérifiez que les variations de f sur $\mathbb{R}$ sont bien celles indiquées par le tableau.

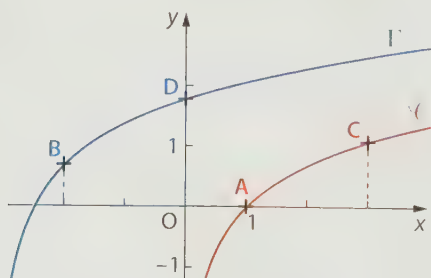
c) Quelle est la valeur exacte du minimum de f ?

73 Vrai ou faux

On a tracé ci-dessous, dans un repère orthonormé, les courbes $\mathcal{C}$ et Γ représentant respectivement la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \ln(x)$ et la fonction g définie sur $] -3; +\infty[$ par $g(x) = \ln(2x+6)$.

A et C sont les points de $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives 1 et 3 ;

B et D sont les points de Γ d'abscisses respectives -2 et 0 .



Dites si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez vos réponses.

1. Les tangentes en A à $\mathcal{C}$ et en B à Γ sont parallèles.

2. Le quadrilatère ABDC est un parallélogramme.

3. Si M et N sont deux points de $\mathcal{C}$ et Γ de même ordonnée, alors la distance MN est constante.

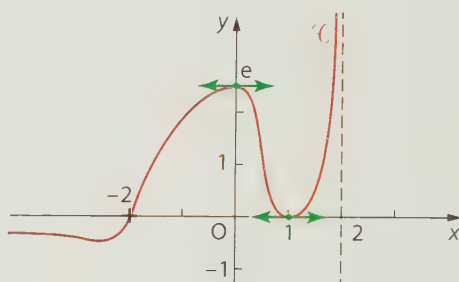
4. Si I et J sont deux points de $\mathcal{C}$ et Γ de même abscisse x , alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} IJ = \ln(2)$.

D'après Concours FESIC

74 Vrai ou faux

La courbe $\mathcal{C}$ ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction f définie sur $]-\infty; 2[$. La droite d'équation $x = 2$ et l'axe des abscisses sont asymptotes à $\mathcal{C}$.

On note g la fonction : $x \mapsto \ln[f(x)]$.



Parmi les propositions suivantes, dites celles qui sont exactes. Justifiez vos réponses.

1. g est définie sur $] -2; 2[$.

2. g est dérivable en 0 et $g'(0) = \frac{1}{e}$.

3. L'équation $g(x) = 1$ a exactement deux solutions dans l'intervalle $] -2; 2[$.

4. $\lim_{x \rightarrow 0} g[g(x)] = -\infty$.

75 Vrai ou faux

f et g sont les fonctions définies sur $I =]-\infty; 0[$ par :

$$f(x) = e^x + \ln(-x) \quad \text{et} \quad g(x) = xe^x + 1.$$

Parmi les propositions suivantes, dites celles qui sont exactes. Justifiez vos réponses.

1. Pour tout x de I , $g'(x) = e^x$.

2. Pour tout x de I , $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$.

3. Pour tout x de I , $g(x) > 0$.

4. La fonction f est strictement croissante sur I .

5. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

6. L'équation $f(x) = 0$ a une unique solution α dans I et $-1 < \alpha < 0$.

D'après Concours ESIEE

LA FONCTION $\ln$ ET LES SUITES

76 La suite (u_n) est définie par :

$$u_0 = e^3 \text{ et pour tout entier naturel } n, u_{n+1} = e\sqrt{u_n}.$$

1. Démontrez par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$u_n > 0.$$

2. On note (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \ln(u_n) - 2$.

a) Démontrez que la suite (v_n) est géométrique. Précisez sa raison.

b) Déduisez-en (v_n) puis (u_n) en fonction de n .

3. a) Quelle est la limite de la suite (v_n) ?

b) Prouvez que la suite (u_n) converge vers e^2 .

77 On a tracé ci-dessous, dans un repère orthonormé, la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction f définie sur

$$I =]0; +\infty[\text{ par } f(x) = \frac{1 + \ln(x)}{x}.$$

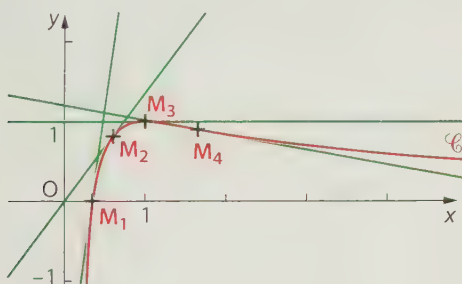
On a placé les points M_1, M_2, M_3, M_4 définis de la façon suivante :

– M_1 est l'intersection de $\mathcal{C}$ et de l'axe des abscisses ;

– M_2 est le point de $\mathcal{C}$ en lequel la tangente passe par l'origine O du repère ;

– M_3 est le point de $\mathcal{C}$ en lequel la tangente est parallèle à l'axe des abscisses ;

– M_4 est le point de $\mathcal{C}$ dont l'abscisse annule la dérivée seconde de f .



1. a) Calculez, pour tout x de $]0; +\infty[$, $f'(x)$ et $f''(x)$.

b) Déduisez-en les coordonnées des points M_1, M_2, M_3 et M_4 .

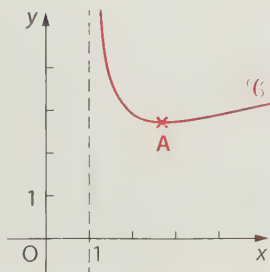
2. Démontrez que les abscisses de ces points, pris dans cet ordre, sont en progression géométrique.

78 On a tracé ci-contre la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction f définie sur $]1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x}{\ln(x)}.$$

1. a) Dressez le tableau de variation de f .

b) Déduisez-en les coor-



données du point A correspondant au minimum de f .

c) Démontrez que pour tout nombre $x > e$, $f(x) > e$.

2. On définit la suite (u_n) par :

$$u_0 = a \text{ avec } a > e \text{ et pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n).$$

a) À l'aide d'une calculatrice, tracez la courbe $\mathcal{C}$ et la droite Δ d'équation $y = x$. Conjecturez les variations de la suite (u_n) et sa limite éventuelle.

b) Démontrez par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$u_n > e.$$

c) Démontrez que la suite (u_n) est décroissante.

d) Déduisez-en que la suite (u_n) converge et précisez sa limite ℓ .

79 On définit la suite (u_n) pour tout entier $n \geq 2$ par :

$$u_n = \ln\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

Démontrez que pour tout entier $n \geq 2$:

$$u_2 + u_3 + \dots + u_n = -\ln(n).$$

80 (v_n) est la suite géométrique de premier terme $v_0 = 1,5$ et de raison $\frac{1}{2}$.

On définit la suite (w_n) par $w_n = \ln(v_n)$ pour tout n de $\mathbb{N}$.

1. Calculez v_n en fonction de n et déduisez-en que la suite (w_n) est arithmétique.

2. On pose $S_n = \sum_{i=0}^n w_i$.

a) Calculez S_n en fonction de n .

b) Étudiez la limite de la suite (S_n) .

3. Pour tout entier n , on pose $P_n = v_0 v_1 v_2 \dots v_n$.

a) Démontrez que $P_n = e^{S_n}$.

b) Étudiez la limite de la suite (P_n) .

81 Théorie de l'information

Les opérateurs de télécommunication cherchent à minimiser la taille des messages transmis, sans perdre d'information.

Pour mesurer la quantité d'information contenue dans un message, l'ingénieur américain Claude Shannon (1916-2001) a proposé, en 1948, la définition suivante : si le message désigne un élément parmi n éléments possibles, alors l'information qu'il apporte (en bit) est $I = \frac{\ln(n)}{\ln(2)}$.

1. Démontrez que $I = \frac{-\ln(p)}{\ln(2)}$ où p désigne la probabilité d'obtenir l'élément cherché en choisissant au hasard un élément parmi n .

2. Calculez la quantité d'information donnant le vainqueur d'un tournoi de tennis à 32 joueurs.

3. Au jeu « c'est plus, c'est moins », on doit deviner, par des questions binaires, un nombre entier entre 1 et 100. Calculez la quantité d'information que donne la réponse.

AVEC LES TICE

82 Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, $\mathcal{C}$ est le cercle de centre O et de rayon 1, et A le point de coordonnées $(0; 1)$.

On note Γ la courbe représentative de la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{4}[x^2 - 1 - 2 \ln(x)]$.

M est un point quelconque de Γ d'abscisse a , H est son projeté orthogonal sur l'axe des abscisses et K l'intersection de la droite (AH) et du cercle $\mathcal{C}$.

On se propose d'étudier le comportement de la droite (OK) et de la droite T, tangente en M à Γ .

1. Construire la figure avec GeoGebra

- Créez le cercle $\mathcal{C}$ et le point A.
- Créez un curseur pour le paramètre a (réglage : $0 < a \leq 10$; incrément : 0,1);
- Créez la courbe Γ .
- Créez le point M en saisissant $M = (a, f(a))$.
- Créez les points H et K ainsi que la tangente T en M à Γ .
- Créez la droite (OK).

2. Conjecturer

Faites varier a à l'aide du curseur.

Quelle particularité semblent présenter les droites (OK) et T?

3. Démontrer

- Démontrez la conjecture précédente.
- Déduisez-en une construction de la tangente à Γ en un point M quelconque.

83 Pour tout entier m strictement positif, on considère la fonction f_m définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f_m(x) = \ln(e^x + mx) - x.$$

On note $\mathcal{C}_m$ sa courbe représentative dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Construction des courbes avec GeoGebra

- Créez un curseur pour le paramètre m (réglage : $1 \leq m \leq 10$, incrément 1).
- Saisissez $f_m(x) = \ln(e^x + mx) - x$.
- Créez le point O, puis la tangente en O à $\mathcal{C}_m$.

2. Conjecture

Faites varier m à l'aide du curseur.

- Que pouvez-vous dire des variations de f_m ?
- Quelle particularité semble présenter la tangente en O à $\mathcal{C}_m$?
- Que pouvez-vous conjecturer concernant les courbes associées à deux valeurs différentes du paramètre m ?

3. Étude et propriétés

a) Justifiez la dérivabilité de f_m sur $[0; +\infty[$ et exprimez $f'_m(x)$ pour tout nombre $x > 0$.

Déduisez-en les variations de f_m .

b) Démontrez que pour tout nombre $x > 0$,

$$f_m(x) = \ln\left(1 + \frac{mx}{e^x}\right).$$

Déduisez-en la limite de f_m en $+\infty$ et dressez le tableau de variation de f_m .

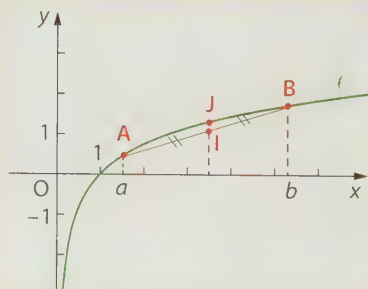
c) Prouvez que pour tout nombre $x > 0$, $f_m(x) \leq \frac{m}{e}$.

d) Déterminez l'équation réduite de la tangente en O à $\mathcal{C}_m$. Cela conforte-t-il votre conjecture?

e) p et m sont deux entiers strictement positifs ($p < m$). Étudiez la position relative des courbes $\mathcal{C}_p$ et $\mathcal{C}_m$.

Prendre toutes les initiatives

84 $\mathcal{C}$ est la courbe d'équation $y = \ln(x)$. A et B sont deux points de $\mathcal{C}$ d'abscisses respectives a et b ($0 < a < b$). Le point I est le milieu du segment [AB] et J est le point de $\mathcal{C}$ de même abscisse que I.



Démontrez que pour tout point A et tout point B de $\mathcal{C}$, le point I est toujours en dessous de J.

85 (u_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 0 \quad \text{et} \quad \text{pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - 2.$$

(v_n) est la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = e^{u_n \ln(2)}$.

1. Démontrez que la suite (v_n) est géométrique.

2. Démontrez que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n v_k = \frac{4}{3}$.

86 a et b sont deux nombres. Démontrez que : $e^a - e^{-a} = 2b$ équivaut à $a = \ln(b + \sqrt{1 + b^2})$.

87 Travail en autonomie

→ Rédigez la solution de cet exercice en vous aidant du guide.

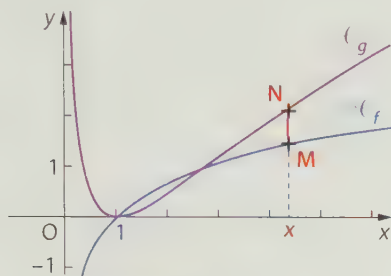


Sur le Web

Retrouvez le corrigé de cet exercice sur le site

www.transmathlycee.net/eleve-termS

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on a tracé les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ représentatives, respectivement, des fonctions f et g définies sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \ln(x)$ et $g(x) = (\ln(x))^2$.



1. Étudiez la position relative de ces deux courbes.

2. Pour x appartenant à l'intervalle $]0; +\infty[$, M et N sont des points de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ de même abscisse x .

a) h est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$h(x) = f(x) - g(x).$$

Étudiez les variations de h sur $]0; +\infty[$.

b) Sur l'intervalle $[1; e]$, pour quelle valeur de x la distance MN est-elle maximale ? Déduisez-en alors la valeur maximale de MN .

c) Démontrez que sur $]0; 1[\cup]e; +\infty[$, il existe deux nombres a et b ($a < b$) pour lesquels la distance MN est égale à 1. Précisez les valeurs de a et b à 10^{-1} près.

Analyser l'énoncé

On est ramené à étudier le signe de $f(x) - g(x)$.

Analyser l'énoncé

Dans les deux questions, on s'intéresse à la distance MN :

- sur $[1; e]$, on cherche une valeur maximale ;
- sur $] -\infty; 1[\cup]e; +\infty[$, on est ramené à une résolution d'équation.

Guide

1. $f(x) - g(x)$ se factorise facilement et on est ramené à étudier le signe d'un produit de facteurs.

La figure donnée vous permet de vérifier simplement l'exactitude de vos calculs.

2. a) Le calcul de la dérivée est simple, ainsi que l'étude de son signe sur $]0; +\infty[$.

b) Attention, la distance MN est $y_N - y_M$ ou $y_M - y_N$, selon que x appartient à l'intervalle $[1; e]$ ou non.

Le signe de $h(x)$ vous aidera à choisir la bonne écriture et la réponse apparaît dans le tableau de variation.

c) On se ramène ici à la résolution d'une équation du second degré dont l'inconnue est $\ln(x)$.

On peut poser $\ln(x) = X$ et se ramener à la résolution d'un système.

ZOOM sur la rédaction

Bien que cela ne soit pas demandé, il est recommandé de dresser le tableau de variation de h en plaçant 1 et e .
Il est nécessaire, pour terminer l'exercice, de connaître le signe de $h(x)$.

ZOOM sur la rédaction

Il est important de justifier clairement que $MN = y_M - y_N$ lorsque $x \in [1; e]$.

88 BAC Logarithme et suite

On considère l'équation [E] : $x + \ln(x) = 0$.

Le but de l'exercice est de prouver que l'équation [E] a une unique solution α dans l'intervalle $I =]0; +\infty[$ et d'utiliser une suite convergente pour obtenir un encadrement de α .

A. Existence et unicité de la solution

f est la fonction définie sur I par $f(x) = x + \ln(x)$.

Étudiez les variations de f sur I et déduisez-en l'existence d'un nombre α unique de I tel que $f(\alpha) = 0$.

Vérifiez que $\frac{1}{2} < \alpha < 1$.

B. Encadrement de α

1. g est la fonction définie sur I par : $g(x) = \frac{4x - \ln x}{5}$.

a) Démontrez qu'un nombre x de I est solution de l'équation [E] si, et seulement si, $g(x) = x$.

b) Étudiez les variations de g sur I et démontrez que pour tout x de l'intervalle $J = \left[\frac{1}{2}; 1\right]$, $g(x)$ appartient à J .

2. La suite (u_n) est définie par :

$$u_0 = \frac{1}{2} \text{ et pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, u_{n+1} = g(u_n).$$

a) Démontrez par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$:

$$\frac{1}{2} \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1.$$

b) Déduisez-en que la suite (u_n) converge vers α .

3. a) Trouvez une valeur de u_{10} arrondie à la sixième décimale.

b) On admet que u_{10} est une valeur approchée par défaut à 5×10^{-4} près de α .

Déduisez-en un encadrement de α sous la forme $u \leq \alpha \leq v$ où u et v sont des nombres décimaux écrits avec trois décimales.

89 ROC Restitution organisée des connaissances

Prérequis : Une suite tend vers $+\infty$ si, pour tout nombre A , tous les termes de la suite sont supérieurs à A à partir d'un certain rang.

A. Démonstration

Démontrez qu'une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.

B. Application

f est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

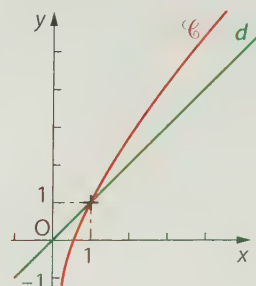
$$f(x) = x + \ln(x).$$

1. a) Étudiez les variations de f et dressez son tableau de variation.

b) Démontrez que pour tout n de $\mathbb{N}$, l'équation $f(x) = n$ a une unique solution α_n dans l'intervalle $]0; +\infty[$.

Ainsi, $\alpha_n + \ln(\alpha_n) = n$.

2. a) Reproduisez la courbe $\mathcal{C}$ ci-dessous représentative de f .



Placez $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ et α_4 sur l'axe des abscisses.

b) Quelle est la valeur exacte de α_1 ?

c) Démontrez que la suite (α_n) est strictement croissante.

3. a) Déterminez une équation de la droite Δ tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.

b) Étudiez la position relative de $\mathcal{C}$ et Δ .

4. a) Démontrez que pour n de $\mathbb{N}^*$, $\frac{n+1}{2} \leq \alpha_n$.

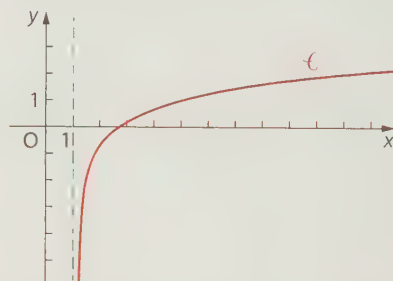
b) Déduisez-en la limite de la suite (α_n) .

90 BAC Tangentes à une courbe

On a tracé, dans un repère orthonormé, la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction f définie sur $]1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(x) - \frac{1}{\ln(x)}.$$

Le but de l'exercice est de chercher les tangentes à $\mathcal{C}$ passant par l'origine O du repère.



1. Soit a un nombre de l'intervalle $]1; +\infty[$. Démontrez que la tangente T_a à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a passe par l'origine O si, et seulement si,

$$f(a) - a f'(a) = 0.$$

2. On note g la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par :

$$g(x) = f(x) - x f'(x).$$

a) Démontrez que sur $]1; +\infty[$, les équations $g(x) = 0$ et $(\ln(x))^3 - (\ln(x))^2 - \ln(x) - 1 = 0$ sont équivalentes.

b) Après avoir étudié les variations de la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(t) = t^3 - t^2 - t - 1$, démontrez que la fonction u s'annule une fois et une seule sur $\mathbb{R}$.

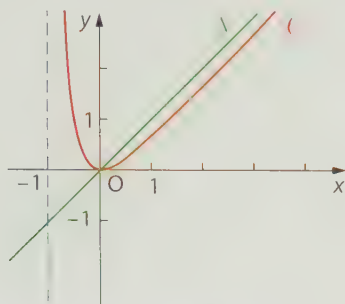
c) Déduisez-en l'existence d'une unique tangente à $\mathcal{C}$ passant par O .

91 BAC Logarithme et suite

f est la fonction définie sur $]-1; +\infty[$ par :

$$f(x) = x - \frac{\ln(x+1)}{x+1}.$$

La courbe $\mathcal{C}$ représentative de f est donnée ci-dessous.
 Δ est la droite d'équation $y = x$.

**A. Étude de certaines propriétés de $\mathcal{C}$**

1. Calculez $f'(x)$ pour tout x de $]-1; +\infty[$.

2. Pour tout x de $]-1; +\infty[$, on pose :

$$N(x) = (1+x)^2 + \ln(1+x) - 1.$$

a) Vérifiez que l'on définit ainsi une fonction strictement croissante sur $]-1; +\infty[$.

b) Calculez $N(0)$ et déduisez-en les variations de f .

3. Calculez les coordonnées du point d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ et de la droite Δ .

B. Étude d'une suite convergente

1. Démontrez que : si $x \in [0; 4]$, alors $f(x) \in [0; 4]$.

2. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

a) Tracez, à l'aide d'une calculatrice, la courbe $\mathcal{C}$ et la droite Δ . Conjoncturez les variations de la suite (u_n) et son éventuelle limite.

b) Démontrez que pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n \in [0; 4]$.

c) Étudiez le sens de variation de la suite (u_n) .

d) Démontrez que la suite (u_n) est convergente et calculez sa limite ℓ .

92 BAC Vrai ou faux

f est la fonction définie sur $]-1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(x^2 + x + 1) - 2\ln(x+1).$$

Dites si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses.
 Justifiez votre réponse.

a) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$ b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

c) f est croissante sur l'intervalle $[1; +\infty[$.

d) L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle $]-1; +\infty[$.

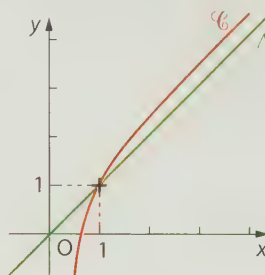
e) L'équation $f(x) = 1$ admet une unique solution dans l'intervalle $]-1; +\infty[$.

93 BAC

f est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x + \frac{\ln(x)}{x}.$$

Dans un repère orthonormé, on a tracé sa courbe représentative $\mathcal{C}$ ainsi que la droite Δ d'équation $y = x$.



1. a) g est la fonction définie sur I par :

$$g(x) = x^2 + 1 - \ln(x).$$

Quel est le signe de $g(x)$ sur l'intervalle I ?

b) Déduisez-en les variations de f et dressez son tableau de variation.

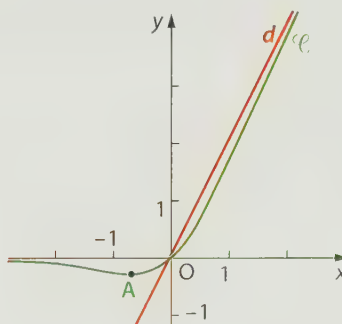
2. a) Étudiez la position relative de $\mathcal{C}$ et Δ .

b) Quelle est la limite de $f(x) - x$ quand x tend vers $+\infty$?
 M et N étant deux points de $\mathcal{C}$ et Δ , de même abscisse x , que peut-on dire alors de la distance MN lorsque x tend vers $+\infty$?

c) Quelles sont les coordonnées du point A de $\mathcal{C}$ en lequel la tangente à $\mathcal{C}$ est parallèle à Δ ?

94 BAC

On a tracé ci-dessous la droite d d'équation $y = 2x$ et la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \ln(e^{2x} - e^x + 1)$.



1. Justifiez que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

2. a) Exprimez $f'(x)$ et étudiez son signe sur $\mathbb{R}$.

b) Dressez le tableau de variation de f .

Précisez les coordonnées du point A correspondant au minimum de f sur $\mathbb{R}$.

3. Étudiez la position relative de d et $\mathcal{C}$.

Pour aller plus loin

95 Vrai ou faux

f et g sont deux fonctions définies et dérivables sur $I =]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x^2 + 2 - 2 \ln(x) \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{-x^2 - 2 \ln(x)}{x}.$$

Dites si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez chacune de vos réponses.

- a) Pour tout x de I , $f(x) \geq 3$.
- b) Pour tout x de I , $g'(x) = \frac{-f(x)}{x^2}$.
- c) La courbe $\mathcal{C}$ représentative de g est strictement en dessous de la droite d d'équation $x + y = 0$ si, et seulement si, x appartient à $]1; +\infty[$.
- d) L'équation $g(x) = 0$ a une unique solution α dans $]0; +\infty[$.

96 LOGIQUE

On cherche à calculer la limite éventuelle de $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ quand n tend vers $+\infty$.

Pour cela, on tient le raisonnement suivant :

« Soit f la fonction définie sur $] -1; +\infty[$ par $f(x) = \ln(1+x)$. On sait que f est dérivable sur $] -1; +\infty[$ et que pour tout $x > -1$, $f'(x) = \frac{1}{1+x}$. Or, en utilisant le changement de variable $x = \frac{1}{n}$, on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[n \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = f'(0) = 1.$$

De plus, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e^{n \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)}$.

Donc, on en déduit que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \lim_{t \rightarrow 1} e^t = e$.

La limite cherchée est donc le nombre e .

Le raisonnement est-il exact et la rédaction est-elle rigoureuse ?

97 Suite et fonction

1. f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x - \ln(x^2 + 1).$$

- a) Étudiez les variations de f sur l'intervalle $[0; 1]$.
- b) Déduisez-en que : si $x \in [0; 1]$, alors $f(x) \in [0; 1]$.
- c) Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = x$.

2. La suite (u_n) est définie pour tout n de $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

- a) Démontrez par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}$: $u_n \in [0; 1]$.
- b) Étudiez le sens de variation de la suite (u_n) .
- c) Déduisez-en que la suite (u_n) est convergente et déterminez sa limite.

98 Suite et fonction

A. f et g sont deux fonctions définies sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(x+1) - x \quad \text{et} \quad g(x) = \ln(x+1) - x + \frac{x^2}{2}.$$

- 1. Étudiez les variations de f et de g .
- 2. Déduisez-en que pour tout x de $[0; +\infty[$,

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x \quad [1].$$

B. La suite (u_n) est définie par tout n de $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_1 = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = u_n \left(1 + \frac{1}{2^{n+1}} \right).$$

- 1. a) Démontrez par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}^*$: $u_n > 0$.

b) Démontrez par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$\ln(u_n) = \ln\left(1 + \frac{1}{2}\right) + \ln\left(1 + \frac{1}{2^2}\right) + \dots + \ln\left(1 + \frac{1}{2^n}\right).$$

2. On pose, pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$S_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} \quad \text{et} \quad T_n = \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^n}.$$

a) À l'aide de [1], démontrez que pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$S_n - \frac{1}{2} T_n \leq \ln(u_n) \leq S_n.$$

b) Calculez S_n et T_n en fonction de n , et déduisez-en $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n$.

3. a) Démontrez que la suite (u_n) est strictement croissante.

b) Déduisez-en que la suite (u_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

4. On admet que si deux suites (v_n) et (w_n) sont convergentes et telles que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $v_n \leq w_n$ alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n$.

Démontrez que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\frac{5}{6} \leq \ln(u_n) \leq 1$.
Déduisez-en un encadrement de ℓ .

99 Suite et fonction

1. En étudiant les variations de deux fonctions convenablement choisies, démontrez que pour tout x de l'intervalle $[0; +\infty[$,

$$x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x.$$

2. Démontrez par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

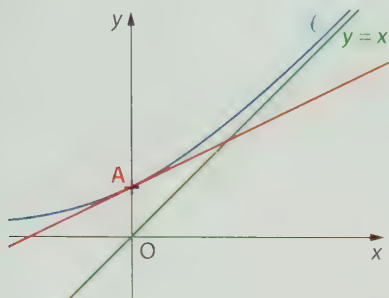
3. Utilisez les résultats des deux questions précédentes pour trouver la limite de la suite (u_n) définie pour tout n de $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right) \left(1 + \frac{2}{n^2}\right) \dots \left(1 + \frac{n}{n^2}\right).$$

Aide Intéressez-vous à la suite de terme général $\ln(u_n)$.

100 QCM

$\mathbb{C}$ est la courbe représentative d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ telle que pour tout x , $f(x) = \ln(ae^x + b)$, où a et b sont deux nombres. On sait, de plus, que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ et que la tangente au point A d'abscisse 0 a pour coefficient directeur $\frac{1}{2}$.



Parmi les affirmations suivantes, plusieurs peuvent être exactes. Justifiez chacune de vos réponses.

- a) $f(x) = \ln(e^x + 1)$.
- b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = 0$.
- c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$.
- d) $f'(x) = \frac{1}{e^x + 1}$.

101 1. f_1 est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $f_1(x) = 2x - 2 + \ln(x^2 + 1)$. Étudiez les variations de f_1 et dressez son tableau de variation.

2. n est un entier naturel non nul. On considère la fonction f_n définie sur $[0; +\infty[$ par $f_n(x) = 2x - 2 + \frac{\ln(x^2 + 1)}{n}$.

a) Démontrez que la fonction f_n est strictement croissante sur $[0; +\infty[$.

b) Démontrez que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution α_n dans $[0; +\infty[$.

c) Justifiez que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $0 < \alpha_n < 1$.

3. Démontrez que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $f_n(\alpha_{n+1}) > 0$.

4. a) Démontrez que la suite (α_n) est croissante.

b) Déduisez-en qu'elle est convergente.

c) Utilisez l'expression $\alpha_n = 1 - \frac{\ln(\alpha_n^2 + 1)}{2n}$ pour déterminer la limite de la suite (α_n) .

102 f est la fonction définie sur $I =]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} + 1 - x.$$

1. a) Démontrez que f est dérivable sur I et que $f'(x)$ est du signe de $N(x) = -[2(x\sqrt{x} - 1) + \ln(x)]$.

b) Calculez $N(1)$ et déterminez le signe de $N(x)$ en distinguant les cas $0 < x < 1$ et $x \geq 1$.

c) Déduisez-en le sens de variation de f sur I et son tableau de variation.

2. On définit une suite (u_n) par son premier terme u_0 appartenant à $[1; 2]$ et pour tout naturel n ,

$$u_{n+1} = \frac{\ln(u_n)}{\sqrt{u_n}} + 1.$$

a) Démontrez que pour tout nombre x de $[1; 2]$:

$$0 \leq \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}} \leq 1.$$

b) Démontrez par récurrence que pour tout entier naturel n , u_n appartient à $[1; 2]$.

3. a) En remarquant que $u_{n+1} = f(u_n) + u_n$, déterminez le sens de variation de la suite (u_n) .

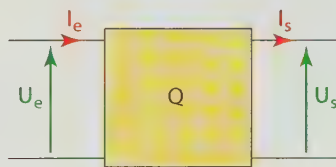
b) Déduisez-en que la suite (u_n) est convergente et déterminez la valeur exacte de sa limite ℓ .

PROLONGEMENT DU TD 36

Cet exercice propose un autre exemple d'utilisation du logarithme décimal en sciences physiques.

103 En électronique : le quadripôle

Un quadripôle est un composant à deux entrées et deux sorties permettant le transfert d'énergie entre deux dipôles. C'est l'élément principal d'un amplificateur sonore.



On appelle :

– **gain en tension**, le nombre $G_U = 20 \log \left(\frac{U_s}{U_e} \right)$, où U_e et U_s sont les tensions en entrée et en sortie.

– **gain en courant**, le nombre $G_I = 20 \log \left(\frac{I_s}{I_e} \right)$, où I_e et I_s sont les intensités en entrée et en sortie.

– **gain en puissance**, le nombre $G_P = 10 \log \left(\frac{P_s}{P_e} \right)$, où P_e et P_s sont les puissances en entrée et en sortie.

Ces gains s'expriment en décibel (dB).

1. Démontrez que si la résistance R est la même en entrée et sortie, alors $G_U = G_I = G_P$.

On rappelle que $P = RI^2 = \frac{U^2}{R}$.

2. Si un quadripôle multiplie la tension par 10, quel est son gain en tension ?

3. Que signifie qu'un gain en courant est négatif ?

4. Que signifie un gain en puissance de 6 dB ?

Fonctions trigonométriques



D'un siècle
à un autre

En musique, une note produite par un instrument de musique est décomposable en une succession de sons purs : les harmoniques. Le timbre du son musical est justement caractérisé par le nombre et l'intensité de ces harmoniques. C'est en réalisant un travail de physicien sur la chaleur que Joseph Fourier mit au point un outil fondamental pour l'étude des fonctions périodiques en mathématiques : la décomposition en séries trigonométriques.



En savoir plus sur
Joseph Fourier

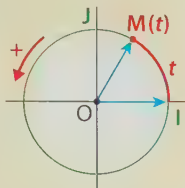
→ Chercheurs d'hier, p. 177

Repérage sur un cercle trigonométrique

- Sur un cercle trigonométrique, à tout nombre t , on associe un point M unique ;
- si un point M est associé à un nombre t , alors il est aussi associé à tout nombre t' tel que : $t' = t + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Chacun des nombres précédents est une mesure, en radian, de l'angle orienté de vecteurs $(\vec{OI}, \vec{OM})$.

- Parmi toutes ces mesures, il en existe une et une seule qui appartient à l'intervalle $]-\pi ; \pi]$. Il s'agit de la **mesure principale** de l'angle orienté de vecteurs $(\vec{OI}, \vec{OM})$.

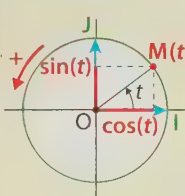


Cosinus et sinus d'un nombre

- M est le point d'un cercle trigonométrique, associé au nombre t . Dans le repère orthonormé $(O ; \vec{OI}, \vec{OJ})$: $\cos(t)$ est l'abscisse de M ; $\sin(t)$ est l'ordonnée de M .

- Relation trigonométrique fondamentale : pour tout nombre t ,

$$\cos^2(t) + \sin^2(t) = 1.$$



Valeurs remarquables

t	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(t)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin(t)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

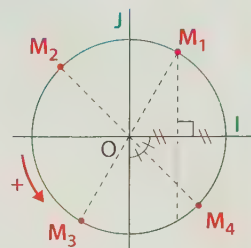
Angles associés

En utilisant les propriétés de symétrie du cercle, on obtient les relations entre le cosinus et le sinus d'angles associés. Par exemple :

$$\cos(-t) = \cos(t) \quad \text{et} \quad \sin(-t) = -\sin(t).$$

1 Vrai ou faux

- Le point M_1 est associé au nombre $\frac{\pi}{3}$.
- Le point M_2 est associé au nombre $\frac{5\pi}{6}$.
- Le point M_3 est associé au nombre $-\frac{3\pi}{4}$.
- Le point M_4 est associé au nombre $-\frac{\pi}{4}$.



2 Vrai ou faux

Sur un cercle trigonométrique :

- il existe un nombre entier relatif k tel que $-\frac{7\pi}{12}$ et $\frac{29\pi}{12}$ sont égaux à $2k\pi$ près.
- $\frac{13\pi}{4}$ et $\frac{5\pi}{4}$ sont associés au même point.
- $(\vec{OI}, \vec{OM}) = \frac{13\pi}{4}$. Sa mesure principale est $\frac{5\pi}{4}$.
- $(\vec{OI}, \vec{OM}) = -\frac{17\pi}{6}$. Sa mesure principale est $-\frac{5\pi}{6}$.

3 QCM

Pour chaque question, une seule affirmation est exacte. Identifiez-la en justifiant votre réponse.

M est un point d'un cercle trigonométrique.

La mesure principale de $(\vec{OI}, \vec{OM})$ est t avec $t > 0$.

- Si $\cos(t) = \frac{1}{3}$, alors :
 a) $\sin(t) < 0$ b) $\sin(t) = \frac{2}{3}$ c) $\sin(t) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$
- Si $\cos^2(t) - \sin^2(t) = \frac{1}{2}$, alors $\cos(t)$ peut être égal à :
 a) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

4 Vrai ou faux

- $\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$.
- L'équation $\cos(x) = 1$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.
- L'équation $\sin(x) = \frac{1}{2}$ admet exactement deux solutions dans $]-\pi ; \pi]$.



Activité 1

DÉCOUVRIR UNE SINUSOÏDE

Animation

TICE



$(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$ est un repère orthonormé direct et $\mathcal{C}$ est le cercle trigonométrique de centre O .

À chaque nombre t de l'intervalle $[-3\pi; 3\pi]$, on associe le point M_t du cercle trigonométrique $\mathcal{C}$; M_t a pour coordonnées $(\cos(t); \sin(t))$ dans le repère $(O; \overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.

L'unité de mesure d'angle étant le radian, ce point est tel que $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM_t}) = t + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

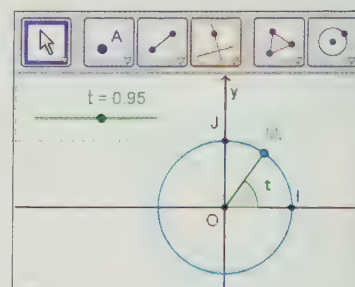
L'objectif est de représenter, à l'aide du logiciel GeoGebra, les variations de chacune des coordonnées du point M_t en fonction du nombre t , c'est-à-dire les variations des fonctions $t \mapsto \cos(t)$ et $t \mapsto \sin(t)$.

1 Allure de la courbe représentative de $t \mapsto \sin(t)$

a) Choisissez l'unité d'angle :

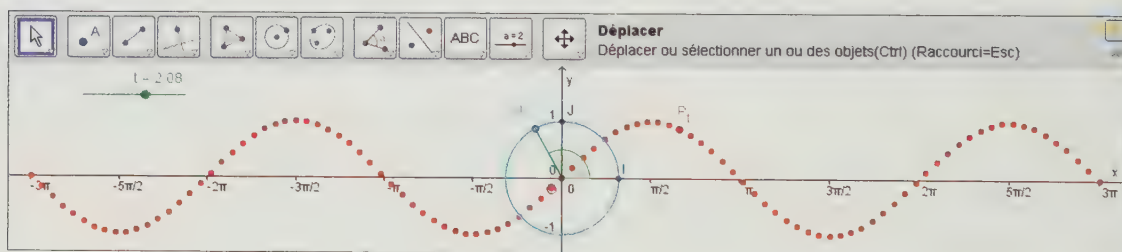
Options Configuration... Avancé Unité d'angle Radian

- Créez successivement
 - les points $O(0; 0)$, $I(1; 0)$ et $J(0; 1)$;
 - le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ de centre O ;
 - un curseur t , avec $-3\pi \leq t \leq 3\pi$;
 - le point M_t de $\mathcal{C}$ associé au nombre t .



b) Pour représenter graphiquement les variations de l'abscisse $\sin(t)$ du point M_t lorsque t décrit l'intervalle $[-3\pi; 3\pi]$, on considère le point P_t de coordonnées $(t; \sin(t))$.

- Créez le point P_t de coordonnées $(t; \sin(t))$.
- Activez la trace du point P_t et faites varier t .

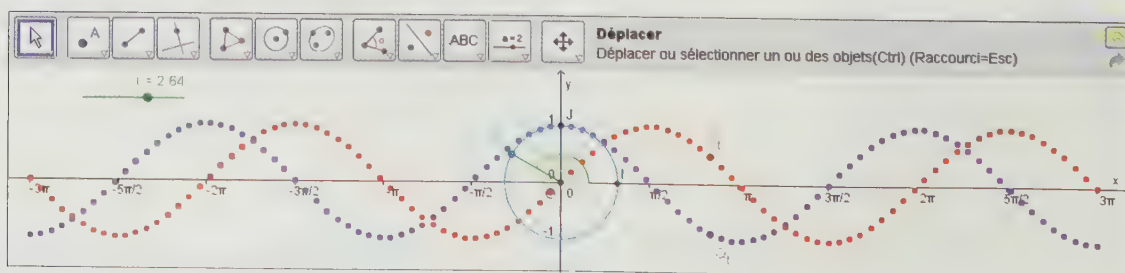


Le point P_t a pour coordonnées $(t; \sin(t))$, donc lorsque t décrit $[-3\pi; 3\pi]$, la trace du point P_t donne l'allure de la courbe qui représente la fonction $t \mapsto \sin(t)$.

Cette courbe est appelée **sinusoïde**.

2 Allure de la courbe représentative de $t \mapsto \cos(t)$

Mettez en œuvre un processus similaire qui permet d'obtenir l'allure de la courbe qui représente la fonction $t \mapsto \cos(t)$ sur l'intervalle $[-3\pi; 3\pi]$.



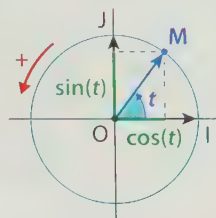
Activité 2

PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES DES COURBES

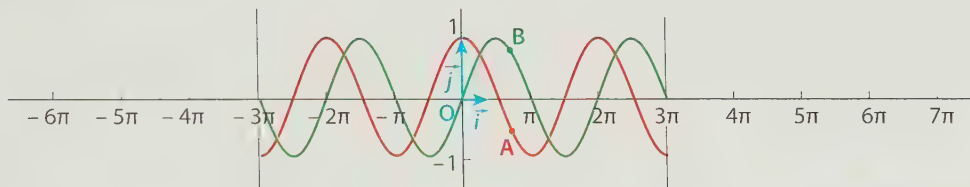
Animation

$(O; \vec{OI}, \vec{OJ})$ est un repère orthonormé direct et $\mathcal{C}$ est le cercle trigonométrique de centre O . Pour tout nombre t , on note M le point du cercle $\mathcal{C}$ associé à t ; le point M a pour coordonnées $(\cos(t); \sin(t))$.

Le but de cette activité est de mettre en évidence les propriétés des coordonnées du point M pour certains angles associés, afin d'en déduire des propriétés géométriques des courbes.



- 1 M' désigne le point du cercle $\mathcal{C}$ associé au nombre $-t$.
 - a) Placez le point M' . Que pouvez-vous dire des points M et M' ?
 - b) Exprimez les coordonnées du point M' en fonction de $\cos(t)$ et $\sin(t)$.
- 2 Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. (Voir figure ci-dessous.)
 - a) On considère les points A et A' de coordonnées respectives $(t; \cos(t))$ et $(-t; \cos(-t))$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Comment construire le point A' à partir du point A ?
 - b) On considère les points B et B' de coordonnées respectives $(t; \sin(t))$ et $(-t; \sin(-t))$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Comment construire le point B' à partir du point B ?
- 3 M_1 est le point du cercle $\mathcal{C}$ associé au nombre $t + 2\pi$.
 - a) Exprimez les coordonnées de M_1 en fonction de t .
 - b) Que pouvez-vous dire des points M et M_1 ?
- 4
 - a) Comment construire le point $A_1(t + 2\pi; \cos(t + 2\pi))$ à partir du point A ?
 - b) Comment construire le point $B_1(t + 2\pi; \sin(t + 2\pi))$ à partir du point B ?
- 5 Les courbes obtenues dans l'activité 1 représentent l'ensemble des points A et B lorsque t décrit l'intervalle $[-3\pi; 3\pi]$.

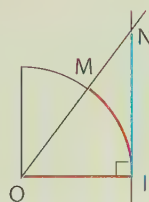


- a) Quelles propriétés de ces courbes avez-vous mises en évidence dans la question 2 ?
- b) Comment pourriez-vous, à partir de ces deux courbes, construire l'ensemble des points A et l'ensemble des points B pour t décrivant $\mathbb{R}$?

Problème ouvert

Reformulez le problème après le chapitre 6... Est-il plus facile ?

Existe-t-il une position du point M sur le quart de cercle ci-contre tel que le trajet $O - I - M$ (en rouge) soit de même longueur que le trajet $I - N$ (en bleu) ?





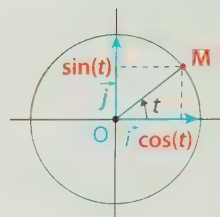
Fonction cosinus et fonction sinus

1) Définitions

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

À tout nombre t , on associe un point unique M du cercle trigonométrique de centre O .

Le point M a pour coordonnées $(\cos(t); \sin(t))$.



Définition 1

La fonction qui à tout nombre t , associe le nombre $\cos(t)$ est appelée **fonction cosinus**.

$$\cos : t \mapsto \cos(t)$$

Définition 2

La fonction qui à tout nombre t , associe le nombre $\sin(t)$ est appelée **fonction sinus**.

$$\sin : t \mapsto \sin(t)$$

► **Remarque.** Pour tout nombre t , $-1 \leq \cos(t) \leq 1$ et $-1 \leq \sin(t) \leq 1$.

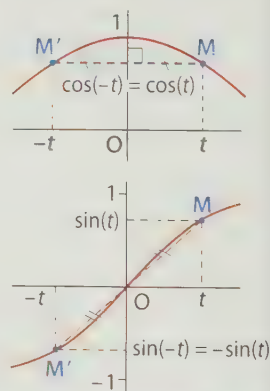
2) Propriétés des fonctions cosinus et sinus

- Pour tout nombre t , $\cos(-t) = \cos(t)$: on dit que la fonction cosinus est **paire**.
- Pour tout nombre t , $\sin(-t) = -\sin(t)$: on dit que la fonction sinus est **impaire**.

Interprétation graphique

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- Les points $M(t; \cos(t))$ et $M'(-t; \cos(-t))$ sont symétriques par rapport à l'axe $(O; \vec{j})$. La courbe représentative de la **fonction cosinus** est donc **symétrique par rapport à l'axe $(O; \vec{j})$** .
- Les points $M(t; \sin(t))$ et $M'(-t; \sin(-t))$ sont symétriques par rapport à l'origine O du repère. La courbe représentative de la **fonction sinus** est donc **symétrique par rapport à l'origine O** du repère.

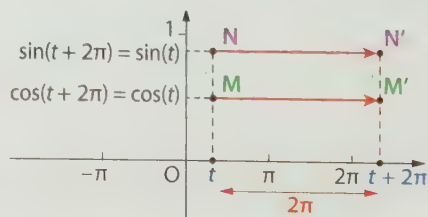


Pour tout nombre t , $\cos(t + 2\pi) = \cos(t)$ et $\sin(t + 2\pi) = \sin(t)$: on dit que les fonctions cosinus et sinus sont **périodiques**, de période 2π (ou « 2π -périodiques »).

Conséquences graphiques

Les points $M(t; \cos(t))$ et $M'(t + 2\pi; \cos(t + 2\pi))$ sont tels que $\overrightarrow{MM'} = 2\pi\vec{i}$. De même, les points $N(t; \sin(t))$ et $N'(t + 2\pi; \sin(t + 2\pi))$ sont tels que $\overrightarrow{NN'} = 2\pi\vec{i}$.

Il suffit donc d'étudier les fonctions sinus et cosinus sur un intervalle de longueur 2π . On obtient chaque courbe sur $\mathbb{R}$ par des translations de vecteurs $2k\pi\vec{i}$ ($k \in \mathbb{Z}$).



3 Étude des fonctions cosinus et sinus

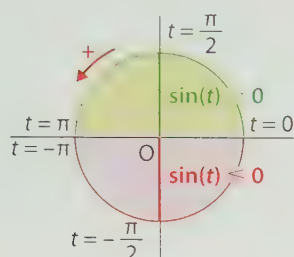
► Dérivées

Théorème 1 Les fonctions sinus et cosinus sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et pour tout nombre t ,

$$\sin'(t) = \cos(t) \quad \text{et} \quad \cos'(t) = -\sin(t)$$

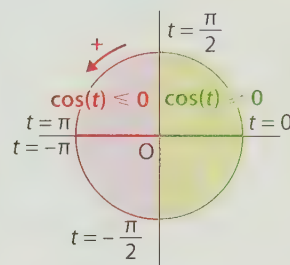
► Tableaux de variation

Les fonctions sinus et cosinus étant périodiques de période 2π , il suffit de les étudier sur un intervalle d'amplitude 2π . On choisit l'intervalle $]-\pi; \pi]$, centré en 0.



t	$-\pi$	0	π
Signe de $\sin(t)$	-	+	

t	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	π
Signe de $\cos(t)$	-	+	-	

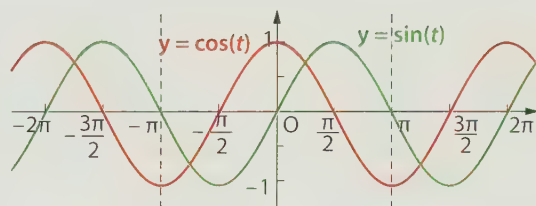


t	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\sin'(t) = \cos(t)$	-	0	+	0
$\sin(t)$	0	-1	1	0

t	$-\pi$	0	π
$\cos'(t) = -\sin(t)$	+	0	-
$\cos(t)$	-1	1	-1

► Courbes représentatives

En utilisant les propriétés de parité et de périodicité vues dans le paragraphe 1.2, ainsi que les valeurs remarquables connues, on obtient, dans un repère orthogonal, les deux sinusoides ci-contre.



4 Dérivation : compléments

Théorème 2 a et b sont deux nombres.

Les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \sin(at + b)$ et $g(t) = \cos(at + b)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et pour tout nombre t , $f'(t) = a \times \cos(at + b)$ et $g'(t) = -a \times \sin(at + b)$.

► **Exemples.** La fonction $f : x \mapsto \sin(3x - 1)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 3 \cos(3x - 1)$.

La fonction $g : x \mapsto \cos\left(\frac{x}{2} + 1\right)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = -\frac{1}{2} \sin\left(\frac{x}{2} + 1\right)$.

Théorème 3

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h)}{h} = 1$$

Démonstration. La fonction sinus est dérivable en 0 (théorème 1), ce qui revient à dire que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sin(h) - \sin(0)}{h} = \sin'(0) = \cos(0) = 1.$$

OBJECTIF 1 Utiliser les propriétés des fonctions sinus et cosinus

- a et b sont deux nombres.

Les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \sin(at + b)$ et $g(t) = \cos(at + b)$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, et pour tout nombre t , $f'(t) = a \cos(at + b)$ et $g'(t) = -a \sin(at + b)$. (**Théorème 2**)

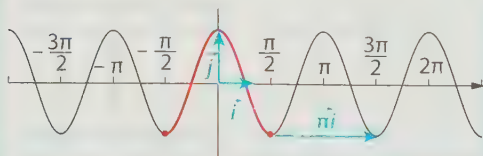
EXERCICE RÉSOLU A Étudier les variations d'une fonction

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \cos(2t)$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Vérifiez que, pour tout nombre t et tout entier relatif k , $f(-t) = f(t)$ et $f(t + k\pi) = f(t)$.
2. Déterminez $f'(t)$ et étudiez son signe sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
3. Dressez le tableau de variation de f sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, puis donnez les variations de f sur $\mathbb{R}$.

► Méthode

1. On utilise le fait que la fonction cosinus est paire.
- On utilise le fait que la fonction cosinus est périodique, de période 2π .
2. La fonction f est la composée de la fonction cosinus et de la fonction affine $t \mapsto 2t$.
Le théorème 2, p. 171, permet de déterminer l'expression de la fonction dérivée f' .
3. La fonction f est paire (pour tout nombre t , $f(-t) = f(t)$). Cette propriété permet de déduire le comportement de f sur $\left[-\frac{\pi}{2}; 0\right]$.
- On utilise la périodicité de la fonction f .

**► Solution**

1. Pour tout nombre x , $\cos(-x) = \cos(x)$, donc pour tout nombre t ,
 $f(-t) = \cos(-2t) = \cos(2t) = f(t)$.
- Pour tout nombre t et tout entier relatif k ,
 $f(t + k\pi) = \cos(2t + 2k\pi) = \cos(2t) = f(t)$.
- 2. Pour tout nombre t , $f'(t) = -2 \sin(2t)$.
Si $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, alors $0 \leq 2t \leq \pi$ et $\sin(2t) \geq 0$.
Ainsi, $f'(t) \leq 0$ sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
- 3. La fonction f est paire (d'après 1.), d'où la symétrie de la courbe par rapport à $(O; \vec{j})$:

t	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$
$f(t)$	-1	1	-1

- La fonction f est périodique (d'après 1.).
La courbe $\mathcal{C}$ s'obtient par des translations de vecteur $k\pi \vec{i}$, $k \in \mathbb{Z}$.

► Mise en pratique

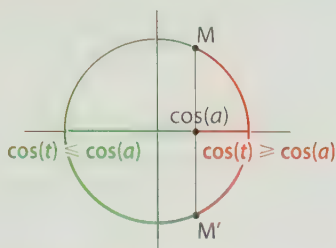
- 1 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
 $f(x) = \sin(2x)$.

1. Démontrez que, pour tout nombre x ,
 $f(-x) = -f(x)$.
2. Déterminez $f'(x)$ et étudiez son signe sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
3. Dressez le tableau de variation de f sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

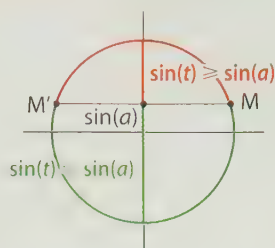
- 2 g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
 $g(x) = \cos\left(4x + \frac{\pi}{4}\right)$.

1. Démontrez que pour tout nombre x et tout entier relatif k :
 $g\left(x + k\frac{\pi}{2}\right) = g(x)$.
2. Étudiez les variations de g sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{16}; \frac{7\pi}{16}\right]$.

- Deux points d'un cercle trigonométrique, d'abscisse $\cos(a)$ (avec $a \neq k\pi$) définissent deux arcs représentant les solutions de $\cos(t) \geq \cos(a)$ et $\cos(t) \leq \cos(a)$.



- Deux points d'un cercle trigonométrique, d'abscisse $\sin(a)$ (avec $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$) définissent deux arcs représentant les solutions de $\sin(t) \geq \sin(a)$ et $\sin(t) \leq \sin(a)$.

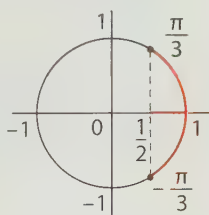


Exercice résolu B Résoudre une inéquation trigonométrique

Résolvez dans $[0; 2\pi[$ l'inéquation $\cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right) \geq \frac{1}{2}$ et représentez l'ensemble des solutions sur un cercle trigonométrique $\mathcal{C}$.

Méthode

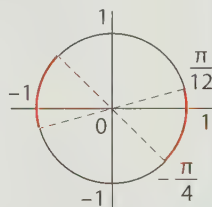
- Dans un premier temps, on ne se soucie pas de l'intervalle de résolution $[0; 2\pi[$.
- On lit sur $\mathcal{C}$ un encadrement de $2t + \frac{\pi}{6}$. Pour tenir compte de la périodicité de la fonction cosinus, il ne faut pas oublier le terme $+2k\pi$ dans la résolution.
- L'ensemble des solutions est représenté sur le cercle trigonométrique. On doit prendre k dans $\mathbb{Z}$, le choix de $k = 0$ et $k = 1$ suffit.
- L'ensemble des solutions dans l'intervalle $[0; 2\pi[$ se lit sur le cercle trigonométrique.



Solution

$$\begin{aligned} \Rightarrow \cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right) &\geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\left(2t + \frac{\pi}{6}\right) \geq \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &\Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq 2t + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ &\Rightarrow -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2t \leq \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \\ &\Rightarrow -\frac{\pi}{4} + k\pi \leq t \leq \frac{\pi}{12} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}). \end{aligned}$$

Sur le cercle trigonométrique, l'ensemble des solutions est représenté par les deux arcs en couleur.



$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{L'ensemble des solutions dans } [0; 2\pi[\text{ est :} \\ \left[0; \frac{\pi}{12}\right] \cup \left[\frac{3\pi}{4}; \frac{13\pi}{12}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}; 2\pi\right]. \end{aligned}$$

Mise en pratique

3 Résolvez, dans chaque cas, l'inéquation dans l'intervalle I .

- $\sin(2x) \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}; I = [0; 2\pi[$.
- $2\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) - \sqrt{2} \geq 0; I =]-\pi; \pi]$.
- $2\cos\left(3x - \frac{\pi}{6}\right) + \sqrt{3} < 0; I = [0; 2\pi[$.
- $\cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) > -\frac{\sqrt{3}}{2}; I =]-\pi; \pi]$.
- $1 - 2\sin\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) > 0; I = [0; 2\pi[$.

4 f est la fonction définie sur l'intervalle $I = [0; 2\pi[$ par $f(x) = \sin(2x) - x\sqrt{2}$.

- Déterminez $f'(x)$ et étudiez son signe sur I .
- Dressez le tableau de variation de f sur I .

5 g est la fonction définie sur l'intervalle $I = [-\pi; \pi]$ par $g(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) - x$. Étudiez les variations de g sur l'intervalle I .

EXERCICE RESOLU C Résoudre une équation

Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'équation : $2 \cos^2(x) - 3 \cos(x) - 2 = 0$.

► Méthode

- L'équation se présente sous la forme d'une équation du second degré « en $\cos(x)$ ».
- Un changement de variable permet de mettre en évidence une équation du second degré.
- On tient compte du fait que X doit appartenir à l'intervalle $[-1; 1]$.
- On utilise les valeurs remarquables ainsi que la périodicité de la fonction cosinus.

► Solution

Pour tout nombre x , on pose $X = \cos(x)$, avec $X \in [-1; 1]$.

L'équation $2 \cos^2(x) - 3 \cos(x) - 2 = 0$ est ainsi équivalente au système :

$$(S) \begin{cases} X = \cos(x) \\ 2X^2 - 3X - 2 = 0 \end{cases}$$

On résout l'équation $[E] : 2X^2 - 3X - 2 = 0$.

$\Delta = 9 + 16 = 5^2$; $\Delta > 0$, donc $[E]$ admet deux solutions distinctes :

$$X_1 = \frac{3-5}{4} = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{3+5}{4} = 2.$$

Seule la solution X_1 appartient à l'intervalle $[-1; 1]$, donc résoudre (S) revient à résoudre :

$$\begin{cases} X = \cos(x) \\ X = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\cos(x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

ou $x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Donc l'ensemble des solutions de l'équation $2 \cos^2(x) - 3 \cos(x) - 2 = 0$ est :

$$\left\{ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

► Mise en pratique

6 Résolvez dans $\mathbb{R}$ les équations :

a) $2 \sin^2(x) - \sin(x) - 1 = 0$.

b) $\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(x)}{2}$.

7 1. Déterminez le nombre de solutions de l'équation $12 \sin^2(x) + \sin(x) - 1 = 0$ dans l'intervalle $[0; 2\pi[$.

2. Déterminez une valeur approchée, à 10^{-3} près, de chacune des solutions.

8 P désigne le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$P(x) = 2x^3 + x^2 - 5x + 2.$$

1. Vérifiez que 1 est une racine de ce polynôme.

2. Déterminez les nombres a , b et c tels que pour tout nombre x , $P(x) = (x-1)(ax^2 + bx + c)$.

3. a) Étudiez le signe de $P(x)$ sur $\mathbb{R}$.

b) Déduisez-en les solutions de l'inéquation :

$$2 \cos^3(x) + \cos^2(x) - 5 \cos(x) + 2 \leq 0$$

dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$.

9 P est le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$P(X) = -12X^2 - 6X + 6.$$

1. Factorisez le polynôme P .

2. f est la fonction définie sur $[0; 2\pi[$ par :

$$f(x) = 4 \cos^3(x) + 3 \cos^2(x) - 6 \cos(x).$$

a) Déterminez l'expression de la dérivée $f'(x)$.

b) À l'aide de la réponse à la question **1**, étudiez le signe de $f'(x)$ puis dressez le tableau de variation de f sur l'intervalle $[0; 2\pi[$.

10 Questions sur le cours

Complétez les propositions suivantes.

a) Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, la courbe représentant la fonction cosinus est symétrique par rapport à ...

b) La courbe représentant la fonction sinus est l'image de la courbe représentant la fonction cosinus par la translation de vecteur ...

c) Les variations de la fonction sinus dépendent directement du signe de la fonction ...

d) $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin(t)}{t} = \dots$

11 Vrai ou faux

Vrai ou faux ? Justifiez votre réponse.

a) Si x et y sont deux nombres tels que $x \geq y$, alors $\cos(x) \geq \cos(y)$.

b) Si x et y sont deux nombres tels que $x \neq y$, alors $\sin(x) \neq \sin(y)$.

c) La fonction sinus est croissante sur l'intervalle $\left[-\frac{13\pi}{3}; -\frac{25\pi}{6}\right]$.

d) La fonction cosinus est monotone sur l'intervalle $\left[\frac{9\pi}{4}; \frac{11\pi}{4}\right]$.

12 QCM Une seule réponse exacte

Pour chaque affirmation, une seule réponse est exacte. Identifiez-la en justifiant votre réponse.

1. Dans un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$, $\mathcal{C}$ est le cercle trigonométrique de centre O et I le point de coordonnées $(1; 0)$.

Le point le plus proche de I sur le cercle $\mathcal{C}$ est :

a) $M_1\left(\frac{53\pi}{4}\right)$ b) $M_2\left(-\frac{32\pi}{3}\right)$

c) $M_3\left(\frac{47\pi}{3}\right)$ d) $M_4\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

2. L'expression de la dérivée de la fonction u définie sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = 3 \cos(3x + 3)$ est :

a) $u'(x) = -3 \sin(3)$ b) $u'(x) = -3 \sin(3x + 3)$

c) $u'(x) = -9 \sin(3x + 3)$ d) $u'(x) = 3 \cos(3)$

3. v est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$v(x) = \cos(2x) - \sin(2x).$$

a) $v'(x) = 0$ b) $v'(x) = 2v(x)$

c) $v'(x) - 2v(x) = -4 \cos(2x)$

4. n désigne un entier naturel non nul.

Sur l'intervalle $[-n\pi; n\pi]$, l'équation $\sin(x) = 0$ admet exactement :

a) une solution b) $2n$ solutions

c) $2n + 1$ solutions d) $2(n + 1)$ solutions

13 QCM Au moins une réponse exacte

Pour chaque affirmation, plusieurs réponses peuvent être exactes. Identifiez-les en justifiant vos réponses.

1. $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ est égal à :

a) $\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right)$ b) $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$

c) $\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)$ d) $\cos\left(-\frac{11\pi}{6}\right)$

2. $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ est strictement inférieur à :

a) $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ b) $\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$

c) $\sin\left(\frac{11\pi}{5}\right)$ d) $\sin\left(-\frac{12\pi}{5}\right)$

3. Si x appartient à $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{2\pi}{3}\right]$, alors :

a) $\sin(x) > 0$ b) $\cos(x) \geq -\frac{1}{2}$

c) $\sin(x) \geq \cos(x)$ d) $\cos(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$



Apprendre à chercher

14 Étude d'une fonction

La fonction f est définie sur l'intervalle $I =]0 ; \pi[$ par :

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{x}.$$

Objectif Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle I .

1. La fonction f est le quotient de deux fonctions dérivables sur I , quotient dont le dénominateur ne s'annule pas sur I . Elle est donc dérivable sur I .

Exprimez $f'(x)$ pour tout x de I .

2. L'expression de $f'(x)$ ne nous permet pas d'en donner directement le signe lorsque x parcourt I .

Le dénominateur étant un carré, $f'(x)$ est donc du signe du numérateur $x \cos(x) - \sin(x)$.

a) Justifiez la dérivabilité sur I de la fonction n définie sur I par $n(x) = x \cos(x) - \sin(x)$, et exprimez $n'(x)$ pour tout x de I .

b) Après avoir étudié le signe de $n'(x)$ sur I , déterminez les variations de n sur ce même intervalle et complétez son tableau de variation.

c) Déduisez de ce qui précède le signe de $f'(x)$ puis les variations de f sur l'intervalle I .

15 Étude d'une fonction (suite)

La fonction g est définie sur l'intervalle $J = [0 ; \pi]$ par :

$$g(0) = 1 \text{ et } g(x) = \frac{\sin(x)}{x} \text{ si } x \in]0 ; \pi].$$

On remarquera que la fonction g « prolonge » la fonction f définie dans l'exercice précédent.

Objectif Étudier la continuité et la dérivabilité de la fonction g sur l'intervalle J .

1. Le quotient $\frac{\sin(x)}{x}$ n'a de sens que pour x non nul, ce qui explique la donnée de $g(0)$.

Cependant, il paraît opportun d'analyser le choix fait pour $g(0)$.

a) Quelle est la limite quand x tend vers 0 de $\frac{\sin(x)}{x}$?

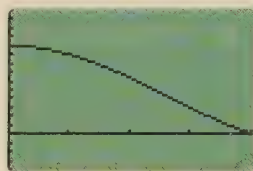
b) Étudiez la continuité de la fonction g sur l'intervalle J .

2. On s'intéresse, dans cette question, à la dérivabilité de la fonction g sur J .

On admet ici (voir l'exercice précédent) que la fonction g est dérivable sur $]0 ; \pi]$. On étudie donc seulement la dérivabilité de g en 0.

a) Justifiez que : prouver la dérivabilité de g en 0 revient à démontrer que le quotient $\frac{\sin(h) - h}{h^2}$ a une limite finie quand h tend vers 0 (avec $h > 0$).

La représentation graphique de g , obtenue avec une calculatrice, permet de conjecturer que la courbe admet une demi-tangente horizontale au point d'abscisse 0 et donc que $\frac{\sin(h) - h}{h^2}$ a pour limite 0 quand h tend vers 0.



On pense alors à encadrer $\frac{\sin(h) - h}{h^2}$ par deux expressions ayant pour limite 0 en 0.

À l'aide d'une calculatrice, on conjecture que :

$$-h \leq \frac{\sin(h) - h}{h^2} \leq 0$$

b) Démontrez que, pour tout nombre $h > 0$,

$$\sin(h) - h \leq 0.$$

Aide Étudiez les variations de la fonction ϕ définie sur l'intervalle $]0 ; \pi]$ par $\phi(h) = \sin(h) - h$.

On envisage donc de prouver que pour $h > 0$,

$$-h \leq \frac{\sin(h) - h}{h^2}, \text{ ce qui équivaut à } \sin(h) - h \geq -h^3.$$

On introduit pour cela la fonction ψ définie sur $]0 ; \pi]$ par $\psi(h) = h^3 - h + \sin(h)$.

c) Déterminez ψ' .

Vous est-il possible d'en étudier le signe ?

d) Déterminez $\psi''(h)$, puis $\psi'''(h)$.

e) Étudiez le signe de $\psi'''(h)$.

Déduisez-en les variations de ψ'' sur $]0 ; \pi]$.

f) Étudiez le signe de $\psi''(h)$, puis les variations de ψ' et enfin le signe de $\psi'(h)$ sur $]0 ; \pi]$.

g) Concluez en précisant le théorème utilisé.

Remarque. Un autre encadrement de ce taux d'accroissement est proposé dans l'exercice 59, p 184 (partie B.3.)

Narration de recherche

→ L'objectif n'est pas seulement de résoudre le problème posé : vous devez aussi noter les différentes idées même lorsqu'elles n'ont pas permis de trouver la réponse. Expliquez pourquoi vous avez changé de méthode et ce qui vous a fait avancer.

16 f et g sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x + \sin(x) \quad \text{et} \quad g(x) = x^2 - 2\sin(x).$$

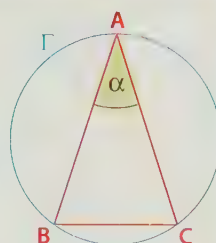
Déterminez et justifiez le nombre d'extremums locaux de chacune de ces fonctions sur $\mathbb{R}$.

17 Γ est un cercle de rayon 1.

ABC est un triangle isocèle inscrit dans ce cercle.

On note α l'angle $\widehat{BAC}$.

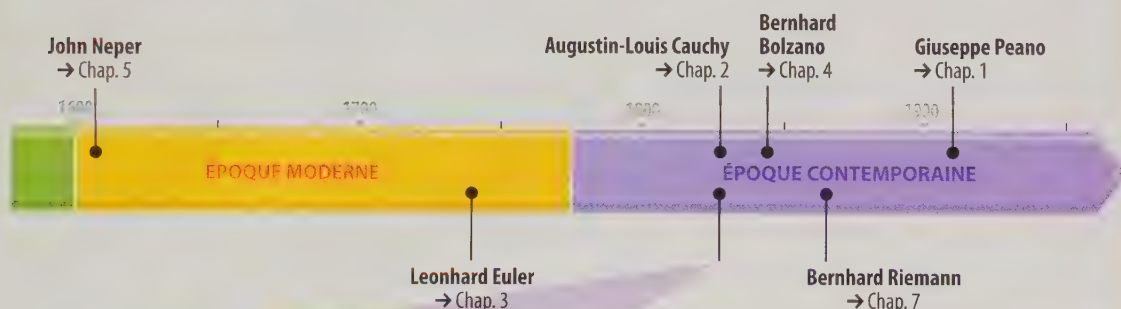
Pour quelle mesure α l'aire de ce triangle est-elle maximale ?



Chercheurs d'hier

Eux aussi, ils ont
cherché avant de trouver !

→ Voici quelques mathématiciens importants qui ont travaillé dans le domaine de l'Analyse.



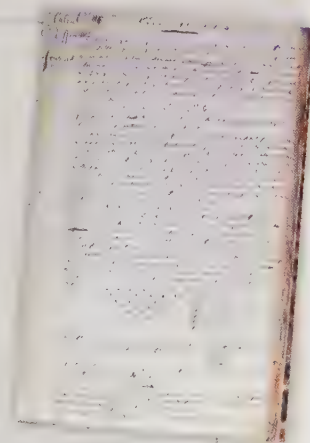
Joseph Fourier
(1768-1830)

Joseph Fourier entre en 1794 à l'École Normale Supérieure, où il a comme professeurs Lagrange, Monge et Laplace. En 1797, il devient professeur à l'École Polytechnique. Il fait partie des savants qui accompagnent Bonaparte en Égypte.

En 1802, il est nommé préfet de l'Isère. C'est à Grenoble qu'il mène ses recherches sur la propagation de la chaleur. Il met notamment

en évidence l'effet de serre de l'atmosphère terrestre.

Il développe une méthode pour décomposer une fonction périodique en somme de fonctions sinusoïdales. Cette méthode trouvera de nombreuses applications en physique : thermodynamique, acoustique, électromagnétisme...



Page de son
**Calcul différentiel
et intégral.**



Sur le Web www.bibmath.net/bios/index.php
serge.mehl.free.fr/chrono/Fourier.html

Travaux dirigés

Des Mathématiques aux Sciences Physiques

TP **Quand la musique fait vibrer**

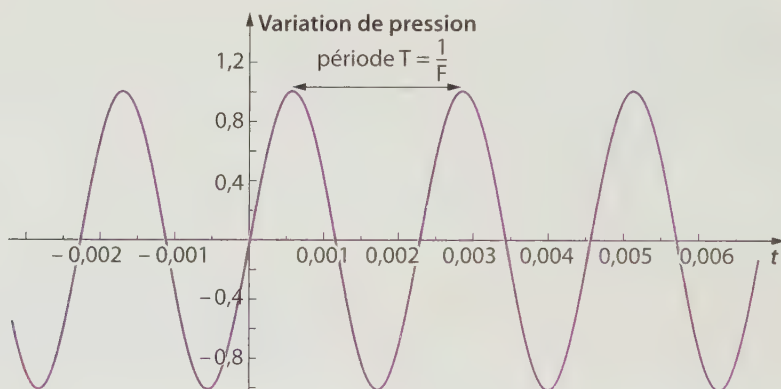
Un son « pur » (ou « simple ») est une onde sinusoïdale. Un son est perçu en raison des variations de la pression atmosphérique que provoque l'onde en se propageant dans l'air.

Un son pur est caractérisé par :

- sa **fréquence** (nombre de pulsations par seconde), qui détermine sa tonalité ;
- son **amplitude** (différence de pressions extrêmes), qui détermine son intensité, son volume.

On admet qu'un son pur de **fréquence F** (en hertz) et d'**amplitude P** (en pascal) peut être représenté par la fonction $t \mapsto P \times \sin(2\pi F \times t)$ où t désigne la variable temps (en seconde).

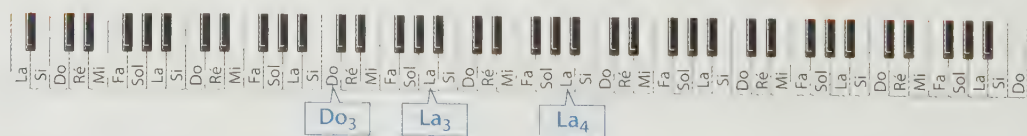
Exemple : Le La₃ est un son pur de fréquence 440 Hz. Pour une amplitude donnée de 1, cette note peut être associée à la fonction $\text{La}_3(t) = \sin(880\pi t)$.



A Étude des fréquences

1. Déterminez la période de la fonction $t \mapsto P \times \sin(2\pi F \times t)$.
2. La gamme tempérée est la gamme musicale principalement utilisée dans la musique occidentale depuis la fin du xvi^e siècle. Elle repose sur la division de l'octave en douze intervalles égaux, appelés demi-tons : un demi-ton entre le Do et le Do#, un demi-ton entre le Do# et le Ré, etc.

Le rapport des fréquences de deux notes séparées par une octave est 2. Par exemple, le La_3 (La de la 3^e octave), qui est la note de référence (tonalité du téléphone), a une fréquence de 440 Hz. Le La_4 (une octave plus haut) a une fréquence de 880 Hz.



- a) Dans la gamme tempérée, le rapport entre les fréquences de deux notes séparées par un demi-ton est donc constant. Que vaut ce rapport ?
- b) Quel est le rapport des fréquences entre le Do_3 et le La_3 ?
- c) Déterminez la fréquence du Do_3 à 10^{-2} Hz près.

d) À l'aide d'un tableau, déterminez les fréquences de toutes les notes, du Do_1 au Si_7 .

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Octave	1	2	3	4	5	6	7
2	Do							
3	Do#							
4	Ré							
5	Ré#-Mi♭							
6	Mi							
7	Fa							
8	Fa#							
9	Sol							
10	Sol#							
11	La	110,00 Hz	220,00 Hz	440,00 Hz	880,00 Hz	1 760,00 Hz	3 520,00 Hz	7 040,00 Hz
12	La#-Si♭							
13	Si							

B Les harmoniques

On note désormais $A_n(t)$ l'expression de la fonction représentant le signal d'une **note A** à l'**octave n** pour une **amplitude de 1**.

1. À l'aide d'un traceur de courbes, représentez le signal sinusoïdal La_1 et Mi_3 (pour des amplitudes de 1), sur un intervalle d'amplitude 10^{-2} s. Que constatez-vous ?

On dit que le Mi_3 est une **harmonique** du La_1 .

Une note H est une harmonique d'une note N si le rapport $\frac{\text{fréquence de H}}{\text{fréquence de N}}$ est un entier.

2. Dans la gamme tempérée, quelles sont toutes les notes harmoniques du La_1 (à 3Hz près) ?

On appelle cet ensemble la **gamme harmonique** du La_1 .

Lorsqu'un instrument produit une note, c'est en fait une « harmonie » dans laquelle cette note est « dominante ». Par exemple, si un piano joue un La_1 , il jouera en fait le La_1 ainsi que toutes ses harmoniques, mais avec des amplitudes moindres que la dominante La_1 .

Le signal obtenu est la somme des signaux de chaque harmonique produite.

3. À l'aide d'un traceur de courbes, tracez, sur un intervalle d'amplitude 10^{-2} s, les signaux f et g définis respectivement par :

$$f(t) = \text{La}_1(t) + 0,25 \times \text{Mi}_3(t) + 0,05 \text{La}_3(t) \quad \text{et} \quad g(t) = \text{La}_1(t) + 0,8 \times \text{Mi}_3(t) + 0,15 \text{La}_3(t).$$

Ces deux signaux définissent la même note sous deux « timbres » différents.

C'est ce qui se produit lorsque deux instruments différents jouent la même note (une flûte et un violoncelle par exemple).



un **La** au violoncelle



un **La** à la flûte

C Un algorithme de synthétiseur : le La_1 de « l'aléaphone »

1. Écrivez un algorithme permettant de :

- générer aléatoirement un nombre entier n compris entre 3 et 10 ;
- générer n nombres aléatoires $a_1, a_2, \dots, a_n$ compris dans l'intervalle $[0; 1]$;
- représenter le signal h défini par :

$$h(t) = \sin(110\pi t) + a_1 \sin(220\pi t) + a_2 \sin(330\pi t) + \dots + a_n \sin(110(n+1)\pi t).$$

2. Programmez cet algorithme sur votre calculatrice ou à l'aide d'un logiciel adapté.

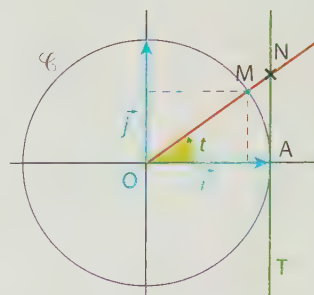
19 La fonction tangente

OBJECTIF Étudier les propriétés d'une nouvelle fonction : la fonction tangente.**A Approche graphique**

La figure ci-contre représente le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ de centre O dans le repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On note T la tangente à $\mathcal{C}$ au point $A(1; 0)$.

Pour tout nombre t de l'intervalle $I =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, on note M le point du cercle trigonométrique associé à t .



1. a) Justifiez que la droite (OM) coupe la tangente T pour tout nombre t de l'intervalle I .

b) Exprimez les coordonnées de $\overrightarrow{OM}$ en fonction de t .

c) On appelle N le point d'intersection de (OM) et de T . On note $\tan(t)$ (on lit « tangente t ») l'ordonnée du point N ; le vecteur $\overrightarrow{ON}$ a donc pour coordonnées $(1; \tan(t))$.

Démontrez que pour tout t de I , $\tan(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)}$.

2. On envisage de représenter dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ la fonction tangente définie sur I .

a) Étudiez la dérivabilité de la fonction tangente sur l'intervalle I et déterminez une expression de sa fonction dérivée.

b) Démontrez que pour tout t de I , $\tan(-t) = -\tan(t)$.

Quelle conséquence graphique résulte de cette propriété ?

c) Déduisez-en les variations de la fonction tangente sur l'intervalle I .

Dressez son tableau de variation sur I , en précisant les limites aux bornes de cet intervalle.

3. a) La fonction tangente est dérivable en 0 (voir **2. a)**).

Justifiez que la représentation graphique $\mathcal{C}_{\tan}$ de la fonction tangente sur I passe par l'origine O du repère et déterminez l'équation réduite de la tangente d en O à $\mathcal{C}_{\tan}$.

b) On envisage, dans cette question, d'étudier la position relative de $\mathcal{C}_{\tan}$ et d .

On considère pour cela la fonction f définie sur I par $f(x) = \tan(x) - x$.

Étudiez les variations de f sur I .

Déduisez-en le signe de $f(x)$ sur I et la position de $\mathcal{C}_{\tan}$ par rapport à d .

B Généralisation

Les fonctions sinus et cosinus étant définies sur $\mathbb{R}$, on envisage d'étendre la fonction tangente à $\mathbb{R}$.

1. Déterminez les valeurs pour lesquelles la fonction tangente n'est pas définie.

2. On note $\mathcal{D}$ l'ensemble des nombres pour lesquels la fonction tangente est définie.

Justifiez que pour tout nombre t de $\mathcal{D}$, $\tan(t + \pi) = \tan(t)$. Ainsi, la fonction tangente est périodique, de période π . Quelle conséquence graphique en déduisez-vous ?

3. Dans cette question, k désigne un nombre entier relatif quelconque.

Prouvez que la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ est asymptote verticale à la courbe représentant la fonction tangente.

4. Tracez, éventuellement à l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel adapté, la courbe représentative de la fonction tangente et ses éventuelles asymptotes sur l'intervalle $]-\frac{5\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}[$.



20 Le mystérieux algorithme des calculatrices



**Des Mathématiques
À l'informatique et aux
sciences du numérique**

OBJECTIF Découvrir et compléter l'algorithme CORDIC utilisé par les calculatrices et certains langages de programmation

L'algorithme CORDIC (*COordinate Rotation Digital Computer*, calcul numérique par rotation de coordonnées), développé par Jack E. Volder en 1959, permet un calcul peu gourmand en ressources informatiques pour certaines fonctions. C'est le cas ici de la fonction tangente (voir exercice 19), mais aussi des fonctions logarithme et exponentielle (chapitres 3 et 5).

Son principe repose sur un calcul itératif à partir d'une table de valeurs connues de la fonction tangente (la saisie de cette table étant fastidieuse, la liste « tab » propose une version aménagée de celle-ci).

L'algorithme ci-dessous présente une version de CORDIC et permet d'obtenir une approximation de $\tan(\alpha)$, pour α appartenant à $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

```

1 VARIABLES
2 alpha EST_DU_TYPE NOMBRE
3 tab EST_DU_TYPE LISTE
4 k EST_DU_TYPE NOMBRE
5 x EST_DU_TYPE NOMBRE
6 resultat EST_DU_TYPE NOMBRE
7 y EST_DU_TYPE NOMBRE
8 temp EST_DU_TYPE NOMBRE
9
10
11 DEBUT_ALGORITHME
12 k PREND_LA_VALEUR 0
13 x PREND_LA_VALEUR 1
14 y PREND_LA_VALEUR 0
15 //Peuplement de la table de valeurs servant aux calculs
16 tab[0] PREND_LA_VALEUR atan(1)
17 tab[1] PREND_LA_VALEUR atan(0.1)
18 tab[2] PREND_LA_VALEUR atan(0.01)
19 tab[3] PREND_LA_VALEUR atan(0.001)
20 tab[4] PREND_LA_VALEUR atan(0.0001)
21 LIRE alpha
22 //la ligne suivante marque le début de
23 //l'algorithme de CORDIC
24 TANT_QUE (alpha>0.0001) FAIRE
25   DEBUT_TANT_QUE
26     TANT_QUE (alpha<tab[k]) FAIRE
27       DEBUT_TANT_QUE
28         k PREND_LA_VALEUR k+1
29       FIN_TANT_QUE
30     alpha PREND_LA_VALEUR alpha-tab[k]
31     temp PREND_LA_VALEUR x
32     x PREND_LA_VALEUR x-y*pow(0.1,k)
33     y PREND_LA_VALEUR y+temp*pow(0.1,k)
34   FIN_TANT_QUE
35   // Le résultat est calculé et affiché
36   resultat PREND_LA_VALEUR y/x
37
38
39 AFFICHER* resultat
40
41
42 FIN_ALGORITHME

```

1. Saisissez cet algorithme dans l'éditeur de texte du logiciel AlgoBox.

2. Pour un nombre α de l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, comparez les valeurs obtenues avec cet algorithme et la touche **tan** de votre calculatrice.

3. La fonction tangente est ici définie sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par $\tan(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)}$.

a) Exprimez $\cos^2(t)$ en fonction de $\tan^2(t)$.

b) En remarquant que, sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$, $\cos(t)$ et $\sin(t)$ sont toujours positifs ou nuls, prouvez que $\cos(t) = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2(t)}}$. Exprimez de même $\sin(t)$ en fonction de $\tan(t)$.

4. À l'aide des résultats de la question précédente, complétez les lignes vides de l'algorithme afin que celui-ci affiche une valeur approchée de $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$.

Entraînement

DE TÊTE

- 21 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3 \sin(x) - 2 \cos(x).$$

Calculez, pour tout nombre x , $f'(x)$.

- 22 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sin(2x) - 3 \cos(x).$$

Calculez, pour tout nombre x , $f'(x)$.

- 23 Quelle est la limite de $x + \sin(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$?

- 24 Quelles sont les solutions dans $[0; \pi]$ de l'équation $\sin(x) = \frac{1}{2}$?

- 25 Est-il vrai que pour tout réel a de l'intervalle $[-1; 1]$, l'équation $\cos(x) = a$ admet une unique solution dans l'intervalle $[0; \pi]$?

- 26 La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \sin(x)$ est-elle croissante sur $\mathbb{R}$?

CALCULS DE DÉRIVÉES - TANGENTES

Pour les exercices 27 à 33

Calculez, dans chaque cas, la fonction dérivée de la fonction f sur l'ensemble $\mathcal{D}$ indiqué.

- 27 a) $f(x) = 3 \sin(x) - 2 \cos(x)$; $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

b) $f(x) = \cos(x) \sin(x)$; $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

- 28 a) $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$; $\mathcal{D} = \mathbb{R}^*$.

b) $f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$; $\mathcal{D} =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

- 29 a) $f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x) - 1}$; $\mathcal{D} =]0; \pi[$.

b) $f(x) = \frac{2 + \sin(x)}{2 + \cos(x)}$; $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

- 30 a) $f(x) = \cos(2x)$; $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

b) $f(x) = \sin\left(-2x + \frac{\pi}{3}\right)$; $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

- 31 a) $f(x) = \cos(2x - 1) \sin(2x + 3)$; $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

b) $f(x) = \frac{\cos(2x) - x}{\sin(2x) + x}$; $\mathcal{D} = \mathbb{R}^*$.

- 32 a) $f(x) = \cos^2(x)$; $\mathcal{D} = \mathbb{R}$.

b) $f(x) = \frac{\sin^2(x)}{\cos(x)}$; $\mathcal{D} =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.

- 33 a) $f(x) = \sqrt{\cos(x)}$;

$$\mathcal{D} = \left]0; \frac{\pi}{2}\right[.$$

b) $f(x) = e^{\sin(x)}$;

$$\mathcal{D} = \mathbb{R}.$$

c) $f(t) = e^{-t} \cos(t)$;

$$\mathcal{D} = \mathbb{R}.$$

- 34 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (1 + \sin(x)) e^{-2x}.$$

Démontrez que pour tout nombre x :

$$f'(x) + 2f(x) = e^{-2x} \cos(x).$$

- 35 Déterminez, dans chaque cas, les dérivées d'ordre 1, 2 et 3 de f , ainsi que l'ensemble sur lequel votre calcul est valable.

a) $f(x) = \cos(2x) + \sin(2x)$. b) $f(x) = \frac{1}{\cos(x)}$.

- 36 $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont les courbes représentatives des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sin(x)$ et $g(x) = \cos(x)$.

Les tangentes à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse $\frac{\pi}{4}$ et à $\mathcal{C}_g$ au point d'abscisse $\frac{3\pi}{4}$ sont-elles parallèles ?

37 LOGIQUE Implication

Dites si les implications suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez vos réponses.

- Si une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ a pour période 2π , alors sa fonction dérivée f' a aussi pour période 2π .
- Si une fonction f paire est dérivable sur $\mathbb{R}$, alors sa fonction dérivée f' est impaire.

LIMITES

- 38 Déterminez $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{x}$.

Aide $\frac{\sin(2x)}{x} = 2 \frac{\sin(2x)}{2x}$.

Pour les exercices 39 à 41

Calculez les limites demandées.

39 a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(4x)}{x}$.

b) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\sin(2x - 1)}{2 - 4x}$.

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{\sin(3x)}$.

d) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sin(x + 2)}{\sin(4 - x^2)}$.

40 a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - \sin(4x)}{3x}$.

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sin(x + 1)}{x^2 - 1}$.

41 a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$.

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$.

Aide

Posez $X = \frac{1}{x}$.

42 a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 3 \cos(x))$. b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cos(x)}{x^2 + 1}$.

c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin\left(\frac{1}{x}\right)}{2x - 1}$.

43 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(3x)}{x} & \text{si } x \neq 0, \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}, a \in \mathbb{R}.$$

Déterminez la limite de f en 0 et déduisez-en la valeur de a pour laquelle f est continue sur $\mathbb{R}$.

44 La fonction f est définie sur $[-1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \sqrt{x+1} - 3 \cos(x).$$

Déterminez la limite éventuelle de f en $+\infty$.

Rappel Pour tout nombre x , $-1 \leq \cos(x) \leq 1$.

45 f est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\cos(x)}{x}.$$

1. Déterminez la limite de f en 0.

2. a) Déterminez deux nombres a et b tels que :
pour tout nombre x strictement positif, $\frac{a}{x} \leq f(x) \leq \frac{b}{x}$.

b) Déduisez-en la limite de f en $+\infty$.

46 f est la fonction définie sur $]1; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x + \sin(x)}{x - 1}.$$

1. Démontrez que pour tout x de $]1; +\infty[$,

$$0 \leq f(x) - 1 \leq \frac{2}{x-1}.$$

2. Déduisez-en la limite de f en $+\infty$.

47 1. Démontrez que pour tout nombre x ,

$$\frac{1}{5} \leq \frac{1}{3 - 2 \cos(x)} \leq 1.$$

2. Déduisez-en $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{3 - 2 \cos(x)}$.

Pour les exercices 48 et 49

Étudiez, dans chaque cas, la limite éventuelle de la suite (u_n) .

48 a) $u_n = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right); \quad n \in \mathbb{N}.$

b) $u_n = \frac{n \sin(n)}{n^2 + 1}; \quad n \in \mathbb{N}.$

c) $u_n = n(2 + \cos(n)); \quad n \in \mathbb{N}.$

49 a) $u_n = \left(\frac{\cos(n)}{n^2}\right); \quad n \in \mathbb{N}^*.$

b) $u_n = \frac{(n+1) \sin(n)}{1 - 3n^2}; \quad n \in \mathbb{N}.$

RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS ET D'INÉQUATIONS

Pour les exercices 50 et 51

Résolvez, dans chaque cas, l'équation ou l'inéquation dans l'intervalle I .

50 a) $\cos(3x) = \frac{1}{2}; \quad I = [0; 2\pi].$

b) $\sin\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = 0; \quad I =]-\pi; \pi].$

c) $2 \cos\left(\pi - \frac{x}{2}\right) = -1; \quad I =]-2\pi; 2\pi].$

51 a) $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0; \quad I = \mathbb{R}.$

b) $\sin(x) = \cos(x); \quad I = \mathbb{R}.$

Aide $\cos(x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right).$

c) $\sqrt{2} \sin\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -1; \quad I = \mathbb{R}.$

52 Résolvez l'inéquation $\cos(x) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ dans chacun des intervalles I suivants :

a) $I = [0; 2\pi[.$ b) $I =]-\pi; \pi].$ c) $I = \mathbb{R}.$

53 Résolvez l'inéquation $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \geq \frac{\sqrt{3}}{2}$ dans chacun des intervalles I suivants :

a) $I = [0; \pi].$ b) $I =]-\pi; \pi].$ c) $I = \mathbb{R}.$

54 Résolvez chaque inéquation dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$.

a) $4 \sin^2(x) - 3 \leq 0.$

b) $2 \cos^2\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 \geq 0.$

Aide

Pensez à factoriser.

55 Résolvez dans l'intervalle $I = [0; 2\pi[$:

a) l'équation $2 \cos^2(x) - 3 \cos(x) - 2 = 0.$

b) l'inéquation $2 \cos^2(x) - 3 \cos(x) - 2 \leq 0.$

56 Résolvez dans l'intervalle $I =]-\pi; \pi]$:

a) l'équation $4 \sin^2(x) + 2(1 - \sqrt{3}) \sin(x) - \sqrt{3} = 0.$

b) l'inéquation $4 \sin^2(x) + 2(1 - \sqrt{3}) \sin(x) - \sqrt{3} \geq 0.$

Aide $16 + 8\sqrt{3} = 4(1 + \sqrt{3})^2.$

57 LOGIQUE Implication et réciproque

1. La proposition suivante est-elle vraie ou fausse ?

« Si $x \in \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$, alors $2 \cos(x) - 1 \geq 0$. »

2. Énoncez la réciproque de cette proposition.

Cette réciproque est-elle vraie ? Justifiez.

ÉTUDES DE FONCTIONS

58 f est la fonction définie par $f(x) = \frac{2}{2 + \cos(x)}$.

- Justifiez que f est définie par tout x de $\mathbb{R}$.
- Prouvez que f est paire.
- Déterminez $f'(x)$ et étudiez son signe sur l'intervalle $[0; \pi]$. Déduisez-en les variations de f sur cet intervalle.
- Dressez le tableau de variation de f sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$.

59 Étude d'une fonction

A. Restitution organisée des connaissances

Prérequis : la fonction sinus est dérivable en zéro et son nombre dérivé en zéro est 1.

Démonstration

Démontrez que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$.

B. Application

f est la fonction définie sur $[0; 2\pi]$ par :

$$f(0) = 1 \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{\sin(x)}{x} \quad \text{si } x \in]0; 2\pi].$$

L'objet de cet exercice est d'étudier précisément la fonction f sur $[0; 2\pi]$.

1. Étude d'une fonction auxiliaire

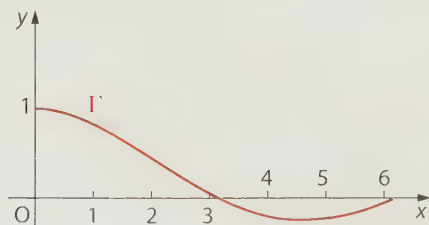
On a tracé ci-contre la courbe représentative de la fonction g définie sur $[0; 2\pi]$ par :

$$g(x) = x \cos(x) - \sin(x).$$

- Étudiez les variations de g et dressez son tableau de variation.
- Démontrez qu'il existe un nombre α unique de $[\pi; 2\pi]$ tel que $g(x) = 0$.
Donnez un encadrement de α d'amplitude 10^{-1} .

2. Étude de la fonction f

- Démontrez que la fonction f est continue en zéro.
- Étudiez les variations de f sur l'intervalle $[0; 2\pi]$.
- On a tracé ci-dessous la courbe Γ représentative de f sur l'intervalle $[0; 2\pi]$.



Justifiez que la fonction f admet un minimum pour $x = \alpha$ et que $f(\alpha) = \cos \alpha$.

3. Étude de la dérivabilité de f en 0

- Prouvez que pour tout nombre $x \geq 0$:
$$0 \leq x - \sin(x) \leq \frac{x^3}{6}.$$

Aide

Considérez la fonction $\varphi : x \mapsto \sin(x) - x + \frac{x^3}{6}$ et calculez les dérivés φ' , φ'' et φ''' pour en déduire le signe de φ .

Voir l'exercice 15, question 2.

- Démontrez que f est dérivable en 0 et calculez $f'(0)$.

60 Suite et fonction trigonométrique

On se propose d'étudier l'existence et les propriétés de la suite (u_n) définie par la donnée de u_0 et :

$$\text{pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+1} = \sqrt{\frac{1 - u_n}{2}}.$$

- a)** Démontrez que la suite (u_n) existe si, et seulement si, $u_0 \in [-1; 1]$.
- b)** Déterminez u_0 de manière que la suite (u_n) soit constante.
- 2.** Dans la suite de l'exercice, on pose :
$$u_0 = \sin(\alpha_0) \quad \text{avec } \alpha_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right].$$

- Justifiez ce choix.

Que devient (u_n) si $\alpha_0 = \frac{\pi}{6}$?

- Démontrez que pour tout $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$,

$$\sqrt{\frac{1 - \sin(\alpha)}{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right).$$

- Établissez que pour tout n de $\mathbb{N}$, il existe un unique nombre α_n dans $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $u_n = \sin(\alpha_n)$.
Quelle relation lie α_n et α_{n+1} ?

- On considère la suite (β_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\beta_n = \alpha_n - \frac{\pi}{6}.$$

- Démontrez que cette suite est géométrique.
- Déduisez-en α_n puis u_n en fonction de n et α_0 .
- La suite (u_n) a-t-elle une limite ? Quelle est-elle ?

61 Vrai ou faux

Dites si les propositions suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez chaque réponse.

f est la fonction définie sur $I = \left[-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right]$ par :

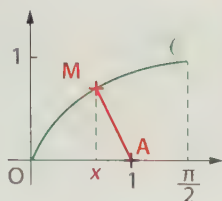
$$f(x) = \sin^2(x) \cos(2x).$$

- Pour tout x de I , $f(x) \geq 0$.
- Pour tout x de I , $f'(x) = \sin 2x(1 - 4 \sin^2(x))$.
- La fonction f est décroissante sur $\left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}\right]$.
- La fonction f est décroissante sur $\left[-\frac{\pi}{4}; -\frac{\pi}{6}\right]$.
- Pour tout x de I , $f(x) \leq \frac{1}{8}$.

62 Une distance minimale

$\mathcal{C}$ est la courbe représentative, dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, de la fonction f définie sur $[0; \frac{\pi}{2}]$ par $f(x) = \sin(x)$.

A est le point de coordonnées $(1; 0)$ et M un point quelconque de $\mathcal{C}$, d'abscisse x .



Le but de l'exercice est de trouver la position de M sur $\mathcal{C}$ pour laquelle la distance AM est minimale.

1. Démontrez que : $AM^2 = (x - 1)^2 + \sin^2(x)$.

2. On considère la fonction f définie sur $I = [0; \frac{\pi}{2}]$ par :

$$f(x) = (x - 1)^2 + \sin^2(x).$$

a) Calculez, pour tout x de I , $f'(x)$ et $f''(x)$.

b) Déduisez de la question précédente les variations de f' et dressez son tableau de variation.

c) Démontrez qu'il existe un unique nombre α de I pour lequel $f'(\alpha) = 0$.

Donnez un encadrement de α d'amplitude 10^{-1} .

3. a) Déduisez de la question 2. c) les variations de f et dressez son tableau de variation.

b) Concluez.

4. On note M_0 le point d'abscisse α .

Démontrez que la tangente en M_0 à la courbe $\mathcal{C}$ est perpendiculaire à la droite (AM_0) .

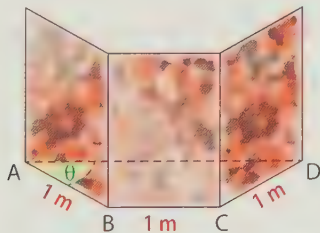
63 Polygone de sustentation d'un paravent

Un paravent est constitué de trois panneaux de même largeur comme indiqué sur la figure ci-dessous :

$$AB = BC = CD = 1 \text{ m.}$$

On note θ la mesure, en radian, de l'angle $\widehat{BAD}$.

On souhaite disposer ces trois panneaux de manière que l'aire $\mathcal{A}(\theta)$ du trapèze isocèle ABCD soit maximale (aire du polygone de sustentation).



1. Démontrez que $\mathcal{A}(\theta) = (1 + \cos(\theta)) \sin(\theta)$.

2. a) Étudiez les variations de la fonction f définie sur l'intervalle $[0; \frac{\pi}{2}]$ par :

$$f(\theta) = (1 + \cos(\theta)) \sin(\theta).$$

b) Dressez le tableau de variation de f et concluez.

AVEC LES TICE

64 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{2} + \sin(x)$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. On appelle T la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse zéro. Déterminez une équation de T et précisez la position relative de T et $\mathcal{C}$.

2. a) À l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel adapté, conjecturez l'existence de deux droites tangentes à $\mathcal{C}$ en une infinité de points.

Quel en serait le coefficient directeur ?

b) Prouvez cette conjecture et caractérisez les abscisses de tous les points de tangence entre $\mathcal{C}$ et chacune de ces droites.

65 1. En vous aidant éventuellement d'un outil de calcul formel, conjecturez l'expression de $f^{(n)}(x)$, où $f^{(n)}$ désigne la dérivée n -ième (ou d'ordre n) de f dans chacun des cas suivants :

a) $f(x) = \cos(x) + \sin(x)$.

b) $f(x) = \cos^2(x)$.

2. Démontrez par récurrence ces conjectures.

Vous pouvez vérifier avec le module tableur de GeoGebra.

Tableur			
	A	B	C
1	$\cos(x) + \sin(x)$		
2	$=A1'(x)$		
3			
4			

Copie vers le bas

Prendre toutes les initiatives

66 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x \cos(x)$.

Par récurrence, déterminez pour tout nombre x , l'expression $f^{(n)}(x)$ de la dérivée n -ième de la fonction f .

67 Résolvez, dans $]-\pi; \pi]$, l'inéquation :

$$4 \cos^2(x) + 2(\sqrt{2} - 1) \cos(x) - \sqrt{2} \geq 0.$$

68 f est la fonction définie sur $[0; \pi]$ par :

$$f(x) = \cos^2(x) \sin(2x).$$

Démontrez que pour tout x de $[0; \pi]$, $f(x) \leq \frac{3\sqrt{3}}{8}$.

69 f est la fonction définie sur $I = [-\pi; \pi]$ par :

$$f(x) = 2 \sin(x) (1 + \sin(x)).$$

1. Étudiez les variations de f sur I , et dressez son tableau de variation.

2. m est un réel. Discutez suivant les valeurs de m le nombre de solutions de l'équation $f(x) = m$ dans I .

Le jour du BAC

70 Travail en autonomie

→ Rédigez la solution de cet exercice en vous aidant du guide.



Sur le Web

Retrouvez le corrigé de cet exercice sur le site www.transmathlycee.net/eleve-TermS

Les suites (u_n) et (v_n) sont définies pour tout n de $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \sin\left(\frac{1}{n^2}\right) + \sin\left(\frac{2}{n^2}\right) + \dots + \sin\left(\frac{n}{n^2}\right)$$

et
$$v_n = \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2}.$$

1. Prouvez que la suite (v_n) converge vers $\frac{1}{2}$.

2. a) Prouvez que chacune des fonctions :

$$f : x \mapsto x - \sin(x),$$

$$g : x \mapsto \cos(x) + \frac{x^2}{2} - 1,$$

$$\text{et } h : x \mapsto \sin(x) + \frac{x^3}{6} - x$$

ne prend que des valeurs positives ou nulles sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

b) Justifiez que, pour tout entier $n \leq 1$:

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 \leq n^4.$$

Déduisez du a) que pour tout entier $n \leq 1$:

$$v_n - \frac{1}{6} \times \frac{1}{n^2} \leq u_n \leq v_n.$$

c) Prouvez que la suite (u_n) est convergente et calculez sa limite.

► Analyser l'énoncé

Déterminer le signe des valeurs prises par les fonctions, f , g et h nécessite l'étude de leurs variations et donc l'étude du signe de leurs dérivées.

► Analyser l'énoncé

La suite (u_n) est encadrée par deux suites, donc on peut penser à utiliser un théorème d'encadrement (dit « des gendarmes »).

Guide

1. En écrivant $v_n = \frac{1+2+\dots+n}{n^2}$, vous retrouvez au numérateur une somme connue.

Calculez cette somme en fonction de n et concluez.

2. a) Étudiez d'abord les variations de f et précisez le signe de $f(x)$ pour $x \geq 0$.

En remarquant ensuite que $g'(x) = f(x)$ et $h'(x) = g(x)$, l'étude des fonctions se fait simplement.

b) Un raisonnement par récurrence est possible, mais on peut aussi utiliser le fait que chaque terme de la somme est inférieur ou égal à n^3 .

Grâce au a), vous pouvez encadrer $\sin(x)$ par deux polynômes :

$$x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x) \leq x.$$

Pour obtenir u_n , il suffit de remplacer x successivement par $\frac{1}{n^2}$, $\frac{2}{n^2}$, etc., jusqu'à $\frac{n}{n^2}$.

c) C'est le théorème des gendarmes.

ZOOM sur la rédaction

Si vous choisissez un raisonnement par récurrence, pensez à respecter les différentes étapes :

- initialisation
- hérédité
- conclusion.

ZOOM sur la rédaction

Les inégalités de même sens « s'ajoutent » membre à membre.

71 BAC

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-\cos(x)}$.

- 1. a)** Justifiez que f est paire et 2π -périodique.
- b)** Construisez son tableau de variation sur $[0; \pi]$.
- c)** Tracez la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la restriction de f à l'intervalle $[0; \pi]$ dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ où l'unité de longueur est 5 cm.
- 2.** On se propose de rechercher les tangentes à $\mathcal{C}$ passant par l'origine O du repère.
 a est un nombre et A le point de $\mathcal{C}$ ayant pour abscisse a . Écrivez une équation de la tangente en A à $\mathcal{C}$ et prouvez que cette tangente passe par O si, et seulement si, $a \sin(a) = 1$.

- 3.** On définit la fonction ψ sur $]0; \pi]$ par :

$$\psi(x) = \sin(x) - \frac{1}{x}.$$

- a)** Étudiez les variations de ψ (on pourra étudier les variations de ψ' pour connaître le signe de ψ').
- b)** Déduisez-en l'existence, pour la fonction ψ , d'un maximum absolu M en un point x_0 (on ne cherchera à calculer ni x_0 , ni M).
- c)** Calculez $\psi'(\frac{\pi}{2})$ et $\psi(\frac{\pi}{2})$; déduisez-en la position de x_0 par rapport à $\frac{\pi}{2}$ et le signe de M .
- d)** Démontrez alors que ψ s'annule pour deux nombres p et q de $]0; \pi]$ et donnez, en justifiant, une valeur décimale approchée par défaut, à 10^{-1} près, de p et de q .
- 4.** En utilisant les résultats précédents, concluez quant au nombre de tangentes à $\mathcal{C}$ passant par O .

72 BAC

On considère la suite (u_n) de premier terme $u_0 = 0$ et définie pour tout entier naturel n par la relation :

$$u_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 + u_n}.$$

- 1.** Démontrez que pour tout entier $n > 0$:
- $$\frac{\sqrt{2}}{2} \leq u_n \leq 1.$$
- 2.** Démontrez que pour tout x de l'intervalle $[0; \pi]$,
- $$\sqrt{\frac{1 + \cos(x)}{2}} = \cos\left(\frac{x}{2}\right).$$
- 3.** Démontrez par récurrence que pour tout entier naturel n ,
- $$u_n = \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right).$$
- 4.** Déterminez la limite de la suite (u_n) .

73 BAC

Soit f la fonction définie sur $I = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$ par $f(x) = 1 + \sin(2x) + 2\cos(x)$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

- 1.** En observant la courbe sur un écran, faites une conjecture sur l'existence d'un centre de symétrie pour $\mathcal{C}$.
- 2.** Prouvez cette conjecture.
- 3.** Démontrez que pour tout x de I ,
$$f'(x) = -2(\sin(x) + 1)(2\sin(x) - 1).$$
- 4.** Étudiez les variations de f sur I .
- 5.** Prouvez que l'équation $f(x) = 0$ possède exactement deux solutions dans I et donnez un encadrement d'amplitude 10^{-1} de chacune de ces deux solutions. On note α la plus petite des solutions et β la plus grande.
- 6.** Déduisez-en les variations de la fonction g définie sur I par $g(x) = 2x - \cos(2x) + 4\sin(x)$.

74 BAC

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x - \sin(x)$.

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

L'objet de cet exercice est l'étude de la fonction f et de sa courbe $\mathcal{C}$.

- 1.** Calculez la dérivée de f et déduisez-en les variations de f sur $\mathbb{R}$.
- 2. a)** Démontrez que pour tout x de $\mathbb{R}$,
$$2x - 1 \leq f(x) \leq 2x + 1.$$
Déduisez-en la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
- 3.** $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont les droites d'équations respectives :
$$y = 2x - 1 \quad \text{et} \quad y = 2x + 1.$$
- a)** Déterminez les points communs à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}_1$ d'une part, à $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}_2$ d'autre part.
- b)** Précisez les tangentes à $\mathcal{C}$ en ces points.
- 4.** Tracez avec précision dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unités graphiques : 2 cm) la courbe $\mathcal{C}$ sur l'intervalle $[0; \pi]$. Déterminez et tracez les tangentes au point O et au point A d'abscisse π . Tracez également $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$.

75 BAC

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2 + \cos(x))e^{1-x}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

- 1.** Démontrez que pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) > 0$.
- 2. a)** Démontrez que pour tout x de $\mathbb{R}$,
$$\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos(x) + \sin(x).$$
- b)** Déduisez-en que pour tout x de $\mathbb{R}$,
$$2 + \cos(x) + \sin(x) > 0.$$
- c)** Démontrez que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.
- 3.** Quelles sont les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$?
- 4.** Démontrez que, dans l'intervalle $[0; \pi]$, l'équation $f(x) = 3$ admet une solution unique α et donnez un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .

Pour aller plus loin

76 L'inégalité de Huygens

f est la fonction définie sur $I = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$f(x) = 2 \sin(x) + \frac{\sin(x)}{\cos(x)} - 3x.$$

1. Justifiez que, sur l'intervalle I , le signe de $f'(x)$ est celui de $2 \cos^3(x) - 3 \cos^2(x) + 1$.

2. Soit P le polynôme défini sur $]0; 1]$ par :

$$P(X) = 2X^3 - 3X^2 + 1.$$

Étudiez le signe de $P(X)$ sur $]0; 1]$.

3. Déduisez-en le signe de $f'(x)$, puis les variations de f sur l'intervalle I .

4. Prouvez alors que, pour tout nombre x de I ,

$$2 \sin(x) + \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \geq 3x.$$

Remarque. Christian Huygens (1629-1695), mathématicien et physicien néerlandais, a joué un rôle fondamental dans le développement du calcul moderne. Il est célèbre pour la formulation de la théorie ondulatoire de la lumière et le calcul de la force centrifuge.

77 ALGORITHMIQUE

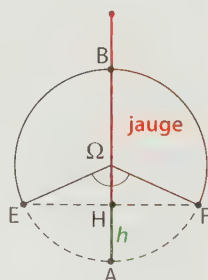


La cuve d'un wagon citerne a la forme d'un cylindre de 3 m de diamètre sur 11 m de long.

1. Déterminez le volume total de cette citerne.

2. On donne ci-contre une

coupe transversale de la citerne. On note h la longueur du segment $[AH]$, V le volume de liquide présent dans la citerne pour une hauteur h de liquide et α l'angle $(\Omega E, \Omega F)$.



a) Exprimez, en fonction de α , le volume de liquide présent dans la citerne, puis h .

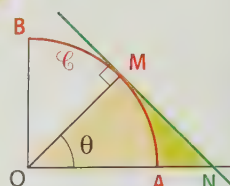
b) Écrivez un algorithme permettant de compléter la table suivante.

Volume (en litre)	10 000	20 000	30 000	...
Hauteur de liquide (à 0,1 m près)				

3. On souhaite mettre en place une jauge qui permette d'évaluer le volume de liquide présent dans la citerne. Cette jauge sera graduée en dizaines de milliers de litres. Représentez cette jauge à l'échelle 1/20 avec une précision de 1 mm.

78 Comparer des aires TICE

$\mathcal{C}$ est un quart de cercle de rayon 1 et M un point de $\mathcal{C}$. On note $\widehat{AOM} = \theta$ avec $\theta \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. La tangente en M à $\mathcal{C}$ coupe (OA) en N .



Le but de cet exercice est de comparer les aires des domaines coloriés en orange et en vert. On note $f(\theta)$ l'aire du domaine orange et $g(\theta)$ l'aire du domaine vert.

1. Conjecturer avec GeoGebra

Construisez la figure. Créez le secteur circulaire OAM, le triangle OMN et l'angle θ .

Déplacez le point M sur l'arc $\widehat{AB}$ et comparez les deux aires pour conjecturer.

2. Démontrer

On note h la fonction définie sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$h(\theta) = f(\theta) - g(\theta).$$

a) Démontrons que pour θ de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$,

$$h(\theta) = \frac{1}{2} \left(2\theta - \frac{\sin(\theta)}{\cos(\theta)} \right).$$

b) Démontrons que pour θ de $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$,

$$h'(\theta) = \frac{\cos(2\theta)}{2 \cos^2(\theta)}.$$

c) Étudiez les variations de h et dressez son tableau de variation.

d) Démontrons qu'il existe un unique nombre α dans l'intervalle $\left]0; \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $h(\alpha) = 0$.

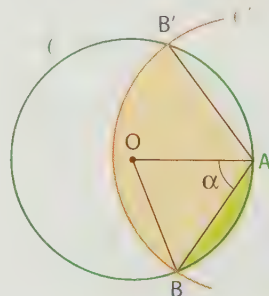
Encadrez α dans un intervalle d'amplitude 10^{-1} .

e) Comparez alors les aires des deux domaines.

79 Aire commune à deux disques

Partie A.

On considère un disque $\mathcal{D}$ de centre O et de rayon R délimité par un cercle $\mathcal{C}$ et A un point de $\mathcal{C}$.



Le but de l'exercice est de tracer un cercle $\mathcal{C}'$ de centre A qui partage le disque $\mathcal{D}$ en deux parties de même aire. On appelle B et B' les points d'intersection de $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$. On note α la mesure en radian, comprise entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, de l'angle $\widehat{OAB}$.

1. Démontrez que le rayon AB du cercle $\mathcal{C}'$ est égal à $2R \cos(\alpha)$.
2. a) Déterminez une mesure en radian de l'angle $\widehat{AOB}$ en fonction de α .
b) Déduisez-en l'aire, en unité d'aire, du secteur circulaire AOB du disque $\mathcal{D}$ en fonction de α et de R.
3. a) Calculez, en unité d'aire, l'aire du triangle AOB.
b) Déduisez-en l'aire du domaine colorié en vert sur la figure.
4. On appelle $\mathcal{D}'$ le disque de centre A et de rayon AB délimité par $\mathcal{C}'$. Calculez l'aire du domaine colorié en orange.
5. a) On note $\mathcal{A}$ l'aire du domaine commun à $\mathcal{D}$ et $\mathcal{D}'$. Calculez $\mathcal{A}$.
b) Démontrez que $\mathcal{C}'$ partage $\mathcal{D}$ en deux parties de même aire si, et seulement si, α vérifie :

$$2\alpha \cos(2\alpha) - \sin(2\alpha) + \frac{\pi}{2} = 0.$$

Partie B.

On note g la fonction définie sur $I = \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ par :

$$g(x) = 2x \cos(2x) - \sin(2x) + \frac{\pi}{2}.$$

1. Calculez, pour tout x de I , $g'(x)$ et résolvez dans I l'équation $g'(x) = 0$.
2. Dressez le tableau de variation de g sur I , en précisant $g(0)$ et $g\left(\frac{\pi}{2}\right)$.
3. a) Déduisez-en l'existence, dans I , d'un unique nombre α_0 solution de l'équation $g(x) = 0$.
b) Déterminez un encadrement de α_0 d'amplitude 10^{-2} .
4. Concluez.

80 Un calcul de limites

1. Établissez successivement, à l'aide d'études des variations de fonctions bien choisies, les inégalités suivantes pour tout nombre $x > 0$.

- a) $\sin(x) \leq x$; b) $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos(x)$;
c) $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin(x)$; d) $\cos(x) \leq 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$.

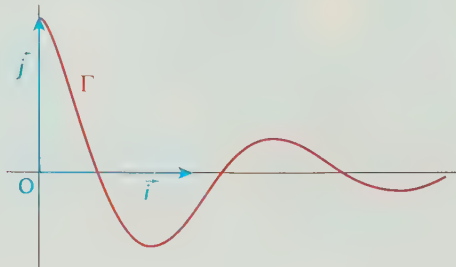
2. Déduisez-en pour tout nombre x strictement positif un encadrement de $\sin(x)$ et de $\cos(x)$ par deux polynômes.
3. Calculez :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos(x) - 1}{x^2} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x) - x}{x^2}.$$

81 Trigonométrie et exponentielle

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

On a tracé la courbe Γ représentative de la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = e^{-x} \cos(4x)$.



On considère également la fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = e^{-x}$ et on nomme $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. a) Démontrez que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.
b) Quels sont les coordonnées des points communs à $\mathcal{C}$ et Γ ?
2. On définit la suite (u_n) sur $\mathbb{N}$ par $u_n = f\left(n \frac{\pi}{2}\right)$.
a) Démontrez que (u_n) est une suite géométrique. Précisez sa raison.
b) Déduisez-en le sens de variation de la suite (u_n) et étudiez sa convergence.

3. a) Démontrez que pour tout x de $[0; +\infty[$:

$$f'(x) = -e^{-x} [\cos(4x) + 4 \sin(4x)].$$

- b) Déduisez-en que les courbes Γ et $\mathcal{C}$ ont la même tangente en chacun de leurs points communs.
4. Donnez une valeur approchée, à 10^{-1} près par excès, du coefficient directeur de la tangente T à Γ au point d'abscisse $\frac{\pi}{2}$. Complétez le graphique en traçant T et $\mathcal{C}$.

82 Composée de fonctions

g est la fonction définie sur $]-1; 1[$ par $g(0) = 0$ et

$$g'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ où } g' \text{ désigne la dérivée de } g \text{ sur }]-1; 1[$$

(on ne cherchera pas à expliciter $g(x)$).

On considère la fonction h définie sur $]-\pi; 0[$ par :

$$h(x) = g[\cos(x)].$$

1. Démontrez que pour tout x de $]-\pi; 0[$, $h'(x) = 1$, où h' désigne la dérivée de h .
2. Calculez $h\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ et déduisez-en l'expression de $h(x)$.

83 LOGIQUE « Il existe... », « Pour tout... »

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3 \sin(2x) - 2 \cos(2x).$$

Justifiez la proposition suivante :

il existe deux nombres a et b tels que pour x de $\mathbb{R}$,

$$f''(x) + af'(x) + bf(x) = 0.$$

Intégration et primitives



D'un siècle
à un autre

Pour mesurer comment l'air pousse sur la voile, les physiciens décomposent celle-ci en éléments de surface « aussi petits que l'on veut », puis effectuent un calcul de poussée sur chacun de ces éléments de surface.

Ils calculent alors la limite de la somme de forces de poussée infiniment petites sur tous les éléments de la surface de la voile. Parmi les différentes approches de l'intégrale, celle qui consiste à l'appréhender comme la limite d'une somme d'éléments « aussi petits que l'on veut » est due à l'Allemand Bernhard Riemann.

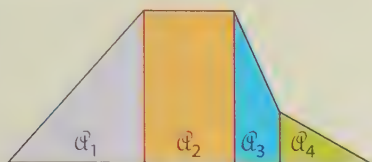


En savoir plus sur
Bernhard Riemann

→ Chercheurs d'hier, p. 209

Notions sur les aires

- Pour calculer l'aire $\mathcal{Q}$ d'une surface délimitée par un polygone, on décompose cette surface en figures usuelles (triangle, trapèze...) dont on sait calculer l'aire.

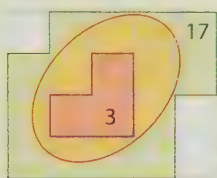


$$\mathcal{Q} = \mathcal{Q}_1 + \mathcal{Q}_2 + \mathcal{Q}_3 + \mathcal{Q}_4$$

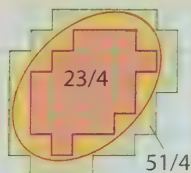
- Si une surface est délimitée par une courbe fermée, on obtient une valeur approchée de son aire en l'encadrant de plus en plus finement par des surfaces polygonales.

Exemple : L'unité d'aire (u.a.) est l'aire d'un carreau. On note $\mathcal{Q}$ l'aire de la surface délimitée par la courbe orange :

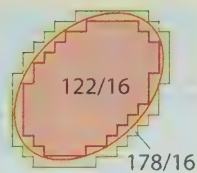
$$3 < \mathcal{Q} < 17$$



En quadrillant plus finement avec un carreau qui représente un quart puis un seizième d'unité d'aire, on obtient :



$$5,75 < \mathcal{Q} < 12,75$$

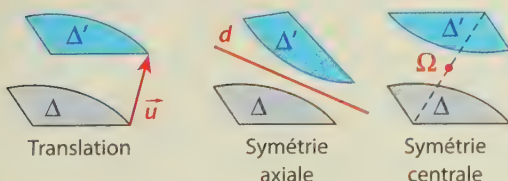


$$7,625 < \mathcal{Q} < 11,25$$

En poursuivant ce processus, on peut obtenir des encadrements de plus en plus précis de l'aire $\mathcal{Q}$.

Translations, symétries et aires

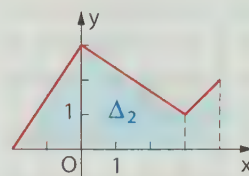
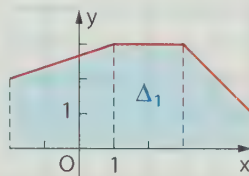
Si une translation ou une symétrie transforme un domaine Δ du plan d'aire $\mathcal{Q}$ en un domaine Δ' d'aire $\mathcal{Q}'$, alors $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}'$.



1 QCM

Pour chaque question, une seule affirmation est exacte. Identifiez-la en justifiant votre réponse.

L'unité d'aire (u.a.) est celle du carré de côté 1.

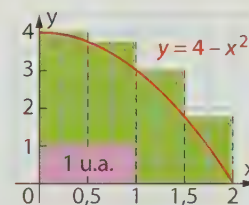
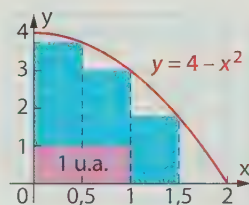


1. a) aire(Δ_1) = 18 b) aire(Δ_1) = $\frac{52}{3}$ c) aire(Δ_1) = $\frac{35}{2}$
2. a) aire(Δ_2) = 10 b) aire(Δ_2) = $\frac{21}{2}$ c) aire(Δ_2) = $\frac{20}{3}$

2 QCM

Même consigne que pour l'exercice 1.

On a encadré l'aire $\mathcal{Q}$ du domaine Δ délimité par les axes et l'arc de parabole d'équation $y = 4 - x^2$, $x \in [0; 2]$, suivant les schémas ci-dessous.

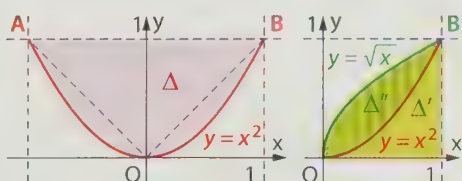


Quel encadrement peut-on en déduire ?

- a) $17 < \mathcal{Q} < 25$ b) $4,25 < \mathcal{Q} < 6,25$
c) $\frac{1}{2} \times \sum_{k=0}^3 \left[4 - \frac{k^2}{4} \right] < \mathcal{Q} < \frac{1}{2} \times \sum_{k=0}^4 \left[4 - \frac{k^2}{4} \right]$

3 Vrai ou faux

Archimède a prouvé que l'aire du domaine Δ représenté ci-dessous valait quatre tiers de l'aire du triangle AOB (l'unité d'aire est celle du carré de côté 1). Δ' est l'aire du domaine vert et Δ'' celle du domaine hachuré.



Ces affirmations sont-elles vraies ou fausses ?

- a) aire(Δ) = $\frac{4}{3}$ b) aire(Δ') = $\frac{2}{3}$ c) aire(Δ'') = $\frac{1}{6}$



Activité 1

AIRE SOUS LA PARABOLE



$\mathcal{P}$ est la représentation graphique, dans un repère orthonormé, de la fonction $f : x \mapsto x^2$ définie sur $[0 ; 1]$.
L'objectif est de définir l'aire $\mathcal{A}$ du domaine $\mathcal{D}$ situé sous la courbe $\mathcal{P}$ sur l'intervalle $[0 ; 1]$.
L'unité d'aire est celle du carré de côté 1.

1 Protocole d'encadrement

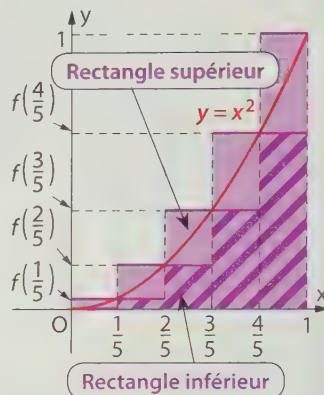
n est un entier strictement supérieur à 1. On partage l'intervalle $[0 ; 1]$ en n sous-intervalles de même longueur $\frac{1}{n}$.

Sur chaque intervalle $\left[\frac{k}{n} ; \frac{k+1}{n}\right]$ (pour $0 \leq k \leq n-1$), on construit les rectangles inférieur (hachuré) et supérieur de hauteurs respectives $f\left(\frac{k}{n}\right)$ et $f\left(\frac{k+1}{n}\right)$. La figure ci-contre illustre le cas $n = 5$.

On note u_n la somme des aires des rectangles inférieurs et v_n celle des aires des rectangles supérieurs.

a) Vérifiez que $u_n = \frac{1}{n} \left[f\left(\frac{0}{n}\right) + f\left(\frac{1}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n-1}{n}\right) \right]$.

b) De même, exprimez v_n .



2 Algorithme de calcul

a) Calculez, à l'aide de l'algorithme indiqué, les valeurs de u_n et v_n lorsque $n = 5 ; 10 ; 100 ; 1\,000$.



Avec une Casio

```
=====AIRE PAR=====
"N=": ?>N#
0→U: 0→V#
For 1→K To N#
  U+(1÷N)×((K-1)÷N)²→U#
  V+(1÷N)×(K÷N)²→V#
Next#
"U=": U#
"V=": V#
```



Avec une TI

```
PROGRAM:AIREPAR
:Promet N
:0→U:0→V
:For(K,1,N)
:U+(1/N)*((K-1)/N)^2→U
:N→Z→U
:V+(1/N)*(K/N)^2→V
:End
:Disp "U",U
:Disp "V",V
```

b) Pour tout entier $n \geq 2$, $u_n \leq \mathcal{A} \leq v_n$. On conçoit que lorsque n augmente, l'aire du domaine Δ est encadrée de plus en plus finement. Conjecturez la limite éventuelle de chacune des suites (u_n) et (v_n) .

3 Étude des sommes des aires des rectangles

a) On rappelle (voir l'exercice résolu A du chapitre 1, page 29) que :

$$\text{pour tout entier } n \geq 1, 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Vérifiez que pour tout entier $n \geq 2$, $v_n = \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n^3}$ puis déduisez-en que $v_n = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}$.

b) Démontrez que la suite (v_n) admet pour limite $\ell = \frac{1}{3}$.

c) Prouvez que pour tout entier $n \geq 2$, $u_n = v_n - \frac{1}{n}$, puis que la suite (u_n) converge aussi vers ℓ .

Conclusion

La limite commune des suites (u_n) et (v_n) est, dans l'unité d'aire choisie, l'aire $\mathcal{A}$ du domaine $\mathcal{D}$.

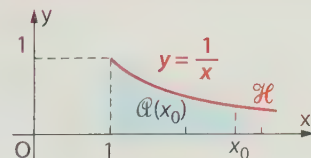
Activité 2

D'UNE FONCTION « AIRE » À LA FONCTION $\ln$

$\mathcal{H}$ est la représentation graphique, dans un repère orthonormé, de la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $I = [1; +\infty[$. L'unité d'aire est celle du carré de côté 1.

Pour tout x_0 de I , on note $\mathcal{Q}(x_0)$ l'aire du domaine délimité par $\mathcal{H}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = x_0$.

L'objectif est d'étudier la dérivabilité en x_0 de la fonction $\mathcal{Q}$, puis de déterminer une expression de $\mathcal{Q}(x_0)$.



1 Encadrement du taux d'accroissement et expression du nombre dérivé

a) On suppose que h est un nombre tel que $h > 0$.

- Utilisez les aires de rectangles bien choisis pour prouver que :

$$h \times f(x_0 + h) \leq \mathcal{Q}(x_0 + h) - \mathcal{Q}(x_0) \leq h \times f(x_0).$$

- Déduisez-en que :
$$\frac{1}{x_0 + h} \leq \frac{\mathcal{Q}(x_0 + h) - \mathcal{Q}(x_0)}{h} \leq \frac{1}{x_0}.$$

b) On suppose que $x_0 > 1$, et que h est un nombre tel que $h < 0$ et $x_0 + h \in I$.

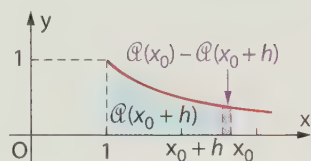
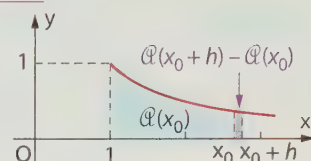
- Justifiez de la même façon que :

$$-h \times f(x_0) \leq \mathcal{Q}(x_0) - \mathcal{Q}(x_0 + h) \leq -h \times f(x_0 + h).$$

- Déduisez-en que :
$$\frac{1}{x_0} \leq \frac{\mathcal{Q}(x_0 + h) - \mathcal{Q}(x_0)}{h} \leq \frac{1}{x_0 + h}.$$

c) Justifiez que la fonction $\mathcal{Q}$ est dérivable en x_0 . Indiquez $\mathcal{Q}'(x_0)$.

d) Quel lien avez-vous établi entre les fonctions $\mathcal{Q}$ et f sur l'intervalle I ?



2 Expression de l'aire

La fonction $\ln$ restreinte à l'intervalle I est telle que $(\ln)' = f$ et $\ln(1) = 0$. Ainsi, elle a la même dérivée et prend la même valeur en 1 que la fonction $\mathcal{Q}$.

a) On considère la fonction différence d définie sur I par $d = \mathcal{Q} - \ln$. Justifiez que d est dérivable sur I puis calculez sa dérivée.

b) Déduisez-en qu'il existe un nombre k tel que pour tout x de I , $d(x) = k$.

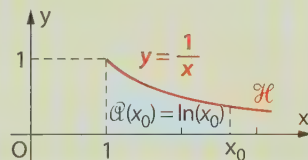
c) Déterminez la valeur de la constante k . Que pouvez-vous en déduire ?

Conclusion. La fonction aire $\mathcal{Q}$ est dérivable sur I et $\mathcal{Q}' = f$.

On dit que $\mathcal{Q}$ est une primitive sur I de la fonction inverse f .

L'aire du domaine sous $\mathcal{H}$ entre 1 et x_0 s'exprime en u.a. par :

$$\mathcal{Q}(x_0) = \ln(x_0).$$



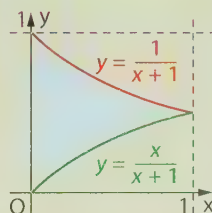
Problème ouvert

Refaites les activités après le chapitre ... Est-il plus facile ?

Le motif d'une oriflamme est représenté dans un repère orthonormé (unité : 1 m) par le domaine $\mathcal{D}$ délimité par l'axe des ordonnées et les courbes d'équations

$$y = \frac{1}{x+1} \text{ et } y = \frac{x}{x+1}, \quad x \in [0; 1].$$

L'aire du motif dépasse-t-elle 0,40 m² ?



1

Notion d'intégrale

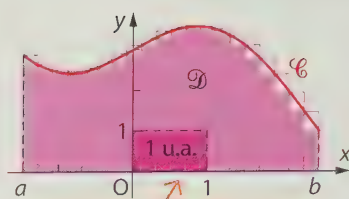
1.1 | Aire sous la courbe et intégrale

f est une fonction **continue et positive** sur $[a; b]$, $a \leq b$.

$\mathcal{C}$ est sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

On note $\mathcal{D}$ le domaine situé « sous la courbe $\mathcal{C}$ », c'est-à-dire délimité par $\mathcal{C}$ et les droites d'équations $x = a$, $x = b$ et $y = 0$.

On admet que $\mathcal{D}$ a une aire $\mathcal{A}$ que l'on peut approcher aussi précisément que l'on veut par des sommes d'aires de rectangles.



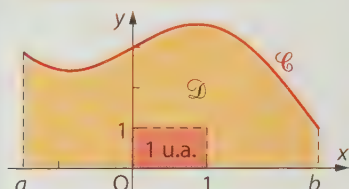
L'unité d'aire (u.a.) est l'aire du rectangle de base 1.

Définition 1

f est une fonction **continue et positive** sur un intervalle $[a; b]$.

On appelle **intégrale de f sur $[a; b]$** le nombre qui exprime l'aire, en u.a., du domaine $\mathcal{D}$ délimité par la courbe $\mathcal{C}$ de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

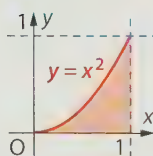
On note : $\int_a^b f(t) dt = \text{aire}(\mathcal{D})$.



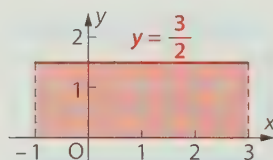
$\int_a^b f(t) dt$ se lit « somme de a à b de $f(t) dt$ » ou « intégrale de a à b de $f(t) dt$ ».

On note indifféremment $\int_a^b f(t) dt$, $\int_a^b f(x) dx$, $\int_a^b f(u) du \dots$

Exemples



$$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3} \text{ (voir l'activité 1)}$$



$$\int_{-1}^3 \frac{3}{2} dt = 4 \times \frac{3}{2} = 6$$

1.2 | Dérivabilité d'une fonction aire

Théorème 1

f est une fonction **continue et positive** sur un intervalle $[a; b]$.

Alors, la fonction $\Phi : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est dérivable sur $[a; b]$ et $\Phi' = f$.

On admet ce résultat dans le cas général.

Principe de la démonstration. On se place dans le cas où f est croissante sur $I = [a; b]$.

x_0 et h sont deux nombres : $x_0 \in I$, $h \neq 0$ et $x_0 + h \in I$.

- Si $h > 0$, comme f est croissante, $f(x_0) \leq f(x_0 + h)$. $\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)$ exprime l'aire sous $\mathcal{C}$ sur $[x_0; x_0 + h]$.

On encadre cette aire par celles de deux rectangles de même largeur h et de hauteurs $f(x_0)$ et $f(x_0 + h)$:

$$h \times f(x_0) \leq \Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0) \leq h \times f(x_0 + h).$$

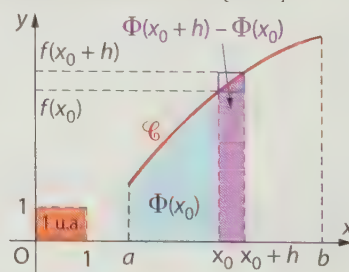
$$\text{D'où : } f(x_0) \leq \frac{\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)}{h} \leq f(x_0 + h).$$

- Si $h < 0$, on démontre de même que : $f(x_0 + h) \leq \frac{\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)}{h} \leq f(x_0)$.

- Or, f est continue en x_0 , donc $\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$. Donc, d'après le théorème d'encadrement :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi(x_0 + h) - \Phi(x_0)}{h} = f(x_0). \text{ Ainsi, } \Phi \text{ est dérivable en } x_0 \text{ et } \Phi'(x_0) = f(x_0).$$

Ce résultat est vrai pour tout x_0 de $[a; b]$, donc Φ est dérivable sur $[a; b]$ et $\Phi' = f$.



2

Primitives d'une fonction continue

2.1 Définition. Lien entre deux primitives

Définition 2 f est une fonction continue sur un intervalle I .

Une primitive de f sur I est une fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$.

La connaissance d'une primitive de f sur I permet de les trouver toutes, d'où le théorème 2.

Théorème 2 f est une fonction définie et continue sur un intervalle I , qui admet une primitive Φ sur I . Alors, f admet une infinité de primitives sur I et toute primitive F de f sur I est définie par :

$$F(x) = \Phi(x) + k \quad (k \text{ constante réelle}).$$

Démonstration. Φ est dérivable sur I et $\Phi' = f$. Soit k un nombre ; la fonction $F : x \mapsto \Phi(x) + k$ est aussi dérivable sur I avec $F' = \Phi' = f$. Donc, F est une primitive de f sur I .

Ce résultat est vrai pour tout nombre k , donc f admet une infinité de primitives sur I .

• Réciproquement, si F est une primitive de f sur I , alors $F' = f = \Phi'$ d'où $F' - \Phi' = 0$.

La fonction différence $F - \Phi$ a une dérivée nulle sur I , donc $F - \Phi$ est une fonction constante.

Il existe un nombre k tel que pour tout x de I , $F(x) - \Phi(x) = k$ d'où $F(x) = \Phi(x) + k$.

► **Conséquence 1.** Calcul de l'intégrale d'une fonction f continue et positive sur $[a ; b]$

Le théorème 1 prouve l'existence d'une primitive Φ de f sur $[a ; b]$, définie par $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$.

Si l'on connaît une primitive quelconque F de f , on peut alors calculer l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$.

En effet, il existe une constante k telle que pour tout x de $[a ; b]$, $F(x) = \Phi(x) + k$.

Ainsi, $F(a) = \Phi(a) + k$ avec $\Phi(a) = 0$; donc $k = F(a)$.

Or, $\int_a^b f(t) dt = \Phi(b) = F(b) - k$; donc $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$.

► **Conséquence 2.** Primitive avec condition initiale

Si f admet des primitives sur I , alors pour tout x_0 de I et tout nombre y_0 , il existe une primitive et une seule F de f sur I vérifiant la condition (dite initiale) $F(x_0) = y_0$.

En effet, si Φ est une primitive de f sur I , alors toute autre primitive F de f sur I est définie par $F(x) = \Phi(x) + k$ ($k \in \mathbb{R}$). Or, la condition $F(x_0) = y_0$ s'écrit $\Phi(x_0) + k = y_0$ donc $k = y_0 - \Phi(x_0)$.

La valeur de k est unique, d'où le résultat.

2.2 Existence de primitives

Théorème 3 Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I .

On admet le résultat pour un intervalle I quelconque.

Principe de la démonstration. On se place dans le cas où I est un intervalle fermé $[a ; b]$.

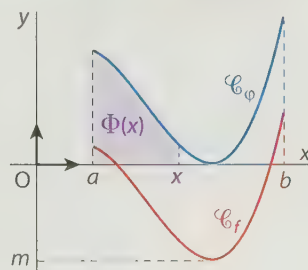
On admet le résultat suivant : toute fonction continue sur un intervalle $[a ; b]$ admet un minimum et un maximum sur $[a ; b]$.

f est une fonction continue sur I et m son minimum ;

alors, pour tout x de I , $f(x) - m \geq 0$.

La fonction $\varphi : x \mapsto f(x) - m$ est continue et positive sur I , donc, d'après le théorème 1, elle admet une primitive Φ sur I et pour tout x de I , $\Phi'(x) = \varphi(x) = f(x) - m$.

Alors, la fonction $F : x \mapsto \Phi(x) + mx$ est dérivable sur I et $F'(x) = \Phi'(x) + m = f(x)$. Ainsi, F est une primitive de f sur I .





Calculs de primitives

3.1 Primitives des fonctions usuelles

On obtient le tableau suivant par « lecture inverse » du tableau des dérivées usuelles.

Fonction $f : x \mapsto \dots$	Une primitive $F : x \mapsto \dots$	Sur l'intervalle $I = \dots$
m (constante)	mx	$\mathbb{R}$
x^n ($n \in \mathbb{N}$)	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^n}$ (ou x^{-n}) (n entier, $n \geq 2$)	$-\frac{1}{n-1} \times \frac{1}{x^{n-1}}$ (ou $-\frac{x^{-n+1}}{-n+1}$)	$] -\infty ; 0[$ ou $] 0 ; +\infty[$
$\frac{1}{x} = x^{-1}$	$\ln(x)$	$] 0 ; +\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$] 0 ; +\infty[$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$
$\cos(x)$	$\sin(x)$	$\mathbb{R}$
$\sin(x)$	$-\cos(x)$	$\mathbb{R}$

3.2 Primitives et opérations sur les fonctions

- Des opérations sur les fonctions dérivables et de la définition d'une primitive, on déduit :

Théorème 4 Si F et G sont des primitives respectivement des fonctions f et g sur un intervalle I , alors $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I .

Théorème 5 Si F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle I et λ un nombre, alors λF est une primitive de λf sur I .

- Les primitives de certains types de fonctions se déduisent des résultats connus sur les dérivées. Dans chaque cas, u désigne une fonction dérivable, à dérivée continue, sur un intervalle I .

Fonction f du type ...	Une primitive F du type ...	Conditions
$u'u^n$ ($n \in \mathbb{N}$)	$\frac{1}{n+1} u^{n+1}$	
$\frac{u'}{u^n}$ (ou $u'u^{-n}$) (n entier, $n \geq 2$)	$-\frac{1}{n-1} \times \frac{1}{u^{n-1}}$ (ou $-\frac{1}{-n+1} u^{-n+1}$)	Pour tout x de I , $u(x) \neq 0$.
$\frac{u'}{u} = u'u^{-1}$	$\ln(u)$	Pour tout x de I , $u(x) > 0$.
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$	Pour tout x de I , $u(x) > 0$.
$u'e^u$	e^u	
$x \mapsto u(ax+b)$ ($a \neq 0$) ($x \in J$)	$x \mapsto \frac{1}{a} U(ax+b)$	Pour tout x de J , $ax+b \in I$. U primitive de u sur I .

4

Intégrale d'une fonction continue

4.1 Extension de la notion d'intégrale

On a défini l'intégrale d'une fonction f continue et positive sur un intervalle $[a; b]$ ($a \leq b$), et on a vu que si F est une primitive de f sur $[a; b]$, alors $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$.

On admet que cette formule peut être étendue au cas d'une fonction continue de signe quelconque, quelles que soient les bornes a et b de l'intégrale, sous la forme suivante :

Définition 3

f est une fonction continue sur un intervalle I , F est une primitive de f sur I , a et b sont deux nombres quelconques de I .

L'intégrale de la fonction f entre a et b est le nombre $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$.

On écrit $\int_a^b f(t) dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Exemples

$$\bullet \int_{-2}^5 3 dt = [3t]_{-2}^5 = 15 - (-6) = 21$$

$$\bullet \int_1^{-1} u^2 du = \left[\frac{u^3}{3} \right]_1^{-1} = -\frac{1}{3} - \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}.$$

Conséquences

$$\bullet \int_a^a f(t) dt = F(a) - F(a) = 0.$$

$$\bullet \int_b^a f(t) dt = F(a) - F(b) = -\int_a^b f(t) dt.$$

4.2 Linéarité de l'intégration

Théorème 6

f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I , λ est un nombre. Pour tous a et b de I :

$$\bullet \int_a^b (f + g)(t) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt$$

$$\bullet \int_a^b \lambda f(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt$$

Démonstration. F et G sont des primitives sur I respectivement de f et g .

Alors, $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I , et λF est une primitive de λf sur I .

$$\bullet \int_a^b (f + g)(t) dt = [F(b) + G(b)] - [F(a) + G(a)] = F(b) - F(a) + G(b) - G(a) = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt.$$

$$\bullet \int_a^b \lambda f(t) dt = \lambda F(b) - \lambda F(a) = \lambda [F(b) - F(a)] = \lambda \int_a^b f(t) dt.$$

Fonction continue et négative sur $[a; b]$ et aire

Si f est négative sur $[a; b]$, alors $\int_a^b f(t) dt = -\text{aire}(\mathcal{D}_f)$.

En effet, $-f$ est positive sur $[a; b]$, et les domaines $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}_{-f}$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses, donc ont la même aire.

$$\text{D'où } \text{aire}(\mathcal{D}_f) = \text{aire}(\mathcal{D}_{-f}) = \int_a^b (-f(t)) dt = -\int_a^b f(t) dt.$$

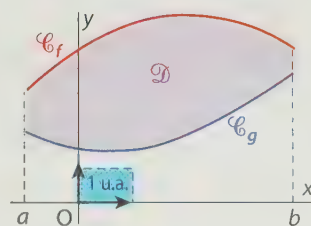
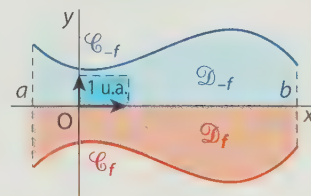
Aire d'un domaine entre deux courbes sur $[a; b]$

Si $\mathcal{C}_f$ est au-dessus $\mathcal{C}_g$ sur $[a; b]$, alors l'aire du domaine $\mathcal{D}$ délimité par $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sur $[a; b]$ est $\text{aire}(\mathcal{D}) = \int_a^b (f - g)(t) dt$.

En effet, lorsque f et g sont positives (voir schéma ci-contre),

$$\text{aire}(\mathcal{D}) = \int_a^b f(t) dt - \int_a^b g(t) dt = \int_a^b (f(t) - g(t)) dt.$$

On admet que ce résultat reste valable dans le cas général.



4.3 Relation de Chasles

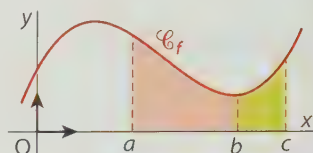
Théorème 7 f est une fonction continue sur un intervalle I . Quels que soient les nombres a, b et c de I :

$$\int_a^b f(t) dt + \int_b^c f(t) dt = \int_a^c f(t) dt \quad (\text{relation de Chasles}).$$

Démonstration. Soit F est une primitive de f sur I . Alors :

$$\int_a^b f(t) dt + \int_b^c f(t) dt = F(b) - F(a) + F(c) - F(b) = F(c) - F(a) = \int_a^c f(t) dt.$$

Remarque. Lorsque f est positive sur I et $a \leq b \leq c$, la relation de Chasles traduit l'additivité des aires : l'aire de la réunion de deux domaines adjacents est la somme des aires de chacun d'eux. Mais avec les intégrales, la relation est vraie quels que soient l'ordre des nombres a, b, c de I et le signe de f .



Exemple. Intégrale d'une fonction affine par morceaux

On calcule l'intégrale $K = \int_{-2}^5 f(x) dx$ où f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = |x| - 2$.

Ainsi, $f(x) = x - 2$ si $x \geq 0$ et $f(x) = -x - 2$ si $x < 0$. Donc :

$$\int_{-2}^5 f(x) dx = \int_{-2}^0 (-x - 2) dx + \int_0^5 (x - 2) dx. \text{ Or : } \int_{-2}^0 (-x - 2) dx = \left[-\frac{x^2}{2} - 2x \right]_{-2}^0 = 0 - (-2 + 4) = -2$$

$$\text{et } \int_0^5 (x - 2) dx = \left[\frac{x^2}{2} - 2x \right]_0^5 = \left(\frac{25}{2} - 10 \right) - 0 = \frac{5}{2}. \text{ Donc } K = -2 + \frac{5}{2} = \frac{1}{2}.$$

K se calcule aussi avec des aires (l'unité d'aire étant, dans un repère orthonormé, celle du carré de côté 1).

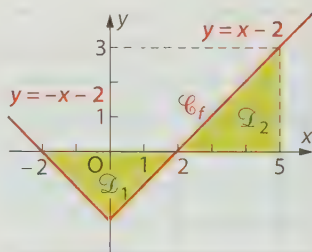
On distingue les intervalles où f garde le même signe :

$f \leq 0$ sur $[-2; 2]$ et $\int_{-2}^2 f(x) dx = -\text{aire}(\mathcal{D}_1)$;

$f \geq 0$ sur $[2; 5]$ et $\int_2^5 f(x) dx = \text{aire}(\mathcal{D}_2)$.

D'après la relation de Chasles, $\int_{-2}^5 f(x) dx = \int_{-2}^2 f(x) dx + \int_2^5 f(x) dx$.

Ainsi, $K = -\text{aire}(\mathcal{D}_1) + \text{aire}(\mathcal{D}_2)$ soit $K = -4 + 4,5 = 0,5$.



4.4 Positivité et ordre

Théorème 8 f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle I .

a et b sont deux nombres de I tels que $a \leq b$.

1. Si pour tout t de $[a; b]$, $f(t) \geq 0$, alors $\int_a^b f(t) dt \geq 0$ (propriété de positivité).

2. Si pour tout t de $[a; b]$, $f(t) \leq g(t)$, alors $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$.

Démonstration

1. $f \geq 0$ sur $[a; b]$ et $\int_a^b f(t) dt$ exprime l'aire (en u.a.) sous $\mathcal{C}_f$; d'où le résultat.

2. Par hypothèse, $f \leq g$ donc $g - f \geq 0$ sur $[a; b]$; ainsi, d'après 1. : $\int_a^b (g - f)(t) dt \geq 0$.

En utilisant la linéarité de l'intégration, $\int_a^b g(t) dt - \int_a^b f(t) dt \geq 0$; donc $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$.

Remarques

- La réciproque de la propriété 1. est fausse (voir l'exemple du paragraphe 4.3.).
- De même, la réciproque de la propriété 2. est fausse.

5 Valeur moyenne d'une fonction continue

Animation

5.1 Valeur moyenne

La moyenne d'une série de N nombres x_i est $\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$. On généralise cette notion au cas des valeurs prises par une fonction sur un intervalle $[a; b]$ sous la forme suivante :

Définition 4

f est une fonction continue sur un intervalle $[a; b]$ ($a < b$).

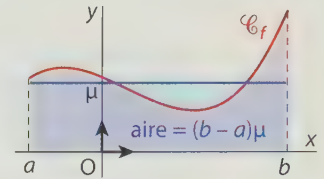
La **valeur moyenne** de la fonction f sur $[a; b]$ est le nombre μ défini par :

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt.$$

Interprétation dans le cas d'une fonction positive

La valeur moyenne μ est telle que $\int_a^b f(t) dt = (b-a)\mu$.

Ainsi, lorsque f est positive sur $[a; b]$, le nombre μ peut être interprété comme la hauteur du rectangle construit sur $[a; b]$ et ayant la même aire que le domaine $\mathcal{D}$ situé sous la courbe $\mathcal{C}_f$.



Exemple. La valeur moyenne de la fonction sinus sur $[0; \pi]$ est $\mu = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(t) dt$.

Or, $\int_0^\pi \sin(t) dt = [-\cos(t)]_0^\pi = (-\cos(\pi)) - (-\cos(0)) = 2$; donc $\mu = \frac{2}{\pi}$.

5.2 Inégalité de la moyenne

Théorème 9

f est une fonction continue sur un intervalle I , a et b sont deux nombres de I tels que $a < b$.

M et m sont deux nombres tels que pour tout t de $[a; b]$, $m \leq f(t) \leq M$. Alors :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t) dt \leq M(b-a) \quad (\text{inégalité de la moyenne}).$$

Démonstration. Par hypothèse, pour tout t de $[a; b]$, $m \leq f(t) \leq M$ [1]. Les fonctions constantes $t \mapsto m$ et $t \mapsto M$ sont telles que : $\int_a^b m dt = [mt]_a^b = m(b-a)$ et $\int_a^b M dt = M(b-a)$.

Puisque $a < b$, on est dans les conditions d'utilisation du théorème 8.2. On dit, par abus de langage que l'« on intègre les inégalités [1] sur $[a; b]$ ». D'où :

$$\int_a^b m dt \leq \int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b M dt, \text{ soit } m(b-a) \leq \int_a^b f(t) dt \leq M(b-a).$$

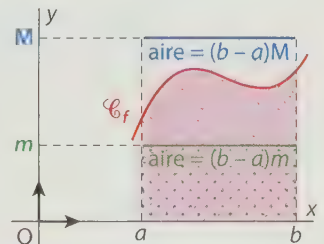
Interprétation dans le cas d'une fonction positive

Si f est bornée sur $[a; b]$ par deux constantes m et M positives, alors l'inégalité de la moyenne signifie que l'aire sous la courbe $\mathcal{C}_f$ sur $[a; b]$ est comprise entre les aires des rectangles construits sur $[a; b]$ et de hauteurs respectives m et M .

Encadrement de la valeur moyenne

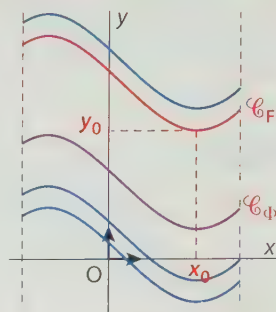
En divisant chaque membre de $m(b-a) \leq \int_a^b f(t) dt \leq M(b-a)$

par le nombre strictement positif $b-a$, on obtient $m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(t) dt \leq M$, c'est-à-dire un encadrement de la valeur moyenne de f sur $[a; b]$: $m \leq \mu \leq M$.



OBJECTIF 1 Déterminer une primitive

- f est une fonction continue sur un intervalle I . Alors :
 - f admet des primitives sur I ;
 - si l'on connaît une primitive Φ de f sur I , toute autre primitive de f sur I s'écrit $\Phi + k$ où k est une constante ;
 - il existe une unique primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$.
- Dériver et chercher des primitives sont des opérations inverses l'une de l'autre dans le cadre des fonctions continues sur un intervalle I .
Les courbes ci-contre représentent quelques primitives de f sur I .

**EXERCICE RESOLU A** Reconnaître une primitive

Prouvez que la fonction F est une primitive de la fonction continue f sur l'intervalle I .

$$F(x) = \frac{2}{3}x\sqrt{x} ; f(x) = \sqrt{x} ; I = [0 ; +\infty[.$$

Méthode

On prouve que F est dérivable sur I et que $F' = f$.

- F est le produit de deux fonctions. L'une est dérivable sur I , mais l'autre l'est seulement sur $]0 ; +\infty[$.

- On étudie la dérivabilité de F sur $]0 ; +\infty[$.

- On utilise la formule $(uv)' = u'v + uv'$.

- On étudie la dérivabilité de F à droite en 0.
Pour cela, on examine la limite du taux d'accroissement de F entre 0 et h lorsque h tend vers 0.

- On conclut.

Solution

F est le produit des fonctions :

$$x \mapsto \frac{2}{3}x \text{ et } x \mapsto \sqrt{x}.$$

- Sur $]0 ; +\infty[$, F est dérivable comme produit de deux fonctions dérivables.

Pour tout $x > 0$,

$$F'(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x} + \frac{2}{3}x \times \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{2}{3}\sqrt{x} + \frac{1}{3}\sqrt{x} = \sqrt{x}.$$

- Examinons si F est dérivable à droite en 0.

$$\text{Pour } h > 0, \quad \frac{F(0+h) - F(0)}{h} = \frac{\frac{2}{3}h\sqrt{h}}{h} = \frac{2}{3}\sqrt{h};$$

$$\text{d'où } \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{F(0+h) - F(0)}{h} = 0.$$

Ainsi, F est dérivable à droite en 0 et le nombre dérivé en 0 vaut 0 soit $f(0)$.

- Finalement, pour tout x de I , $F'(x) = f(x)$, donc F est une primitive de f sur I .

Mise en pratique

Pour les exercices 1 à 3

Vérifiez que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle I .

1 $F(x) = x \ln(x) - x$; $f(x) = \ln(x)$; $I =]0 ; +\infty[$.

2 $F(x) = (x+1)e^{-x}$; $f(x) = -xe^{-x}$; $I = \mathbb{R}$.

3 $F(x) = \frac{2}{5}x^2\sqrt{x}$; $f(x) = x\sqrt{x}$; $I =]0 ; +\infty[$.

Pour les exercices 4 et 5

Précisez si les fonctions F et G sont deux primitives de la même fonction f sur l'intervalle I .

4 $F(x) = \frac{x^2 + 3x - 1}{x - 1}$; $G(x) = \frac{x^2 + 7x - 5}{x - 1}$;
 $I =]1 ; +\infty[$.

5 $F(x) = \cos(2x)$; $G(x) = -2\sin^2(x)$; $I = [0 ; \pi]$.

EXERCICE RÉSOLU B

Déterminer une primitive à l'aide des formules

Déterminez, dans chaque cas, une primitive F sur l'intervalle I de la fonction f continue sur I .

a) $f(x) = (3x - 1)^6$; $I = \mathbb{R}$.

b) $f(x) = \frac{4}{(2x - 1)^4}$; $I =]\frac{1}{2} ; +\infty[$.

c) $f(x) = 6xe^{x^2+1}$; $I = \mathbb{R}$.

d) $f(x) = \frac{8x}{1-x^2}$; $I =]-1 ; 1[$.

Méthode

a) On écrit f sous la forme : $f = \alpha u' u^n$, u étant une fonction, α un nombre et n un entier naturel.

• La dérivée de u^{n+1} est $(n+1)u' u^n$ donc une primitive de $u' u^n$ est $\frac{1}{n+1} u^{n+1}$.

b) On utilise des exposants négatifs.

On écrit f sous la forme : $f = \alpha u' u^{-n}$, u étant une fonction, α un nombre et n un entier naturel.

• La dérivée de u^{-n+1} est $(-n+1)u' u^{-n}$ donc une primitive de $u' u^{-n}$ est $\frac{1}{-n+1} u^{-n+1}$.

c) On écrit f sous la forme : $f = \alpha u' e^u$, u étant une fonction et α un nombre.

• La dérivée de e^u est $u' e^u$ donc une primitive de $u' e^u$ est e^u .

d) On écrit f sous la forme : $f = \alpha \frac{u'}{u}$, u étant une fonction telle que $u(x) > 0$ sur I et α un nombre.

• La dérivée de $\ln(u)$ est $\frac{u'}{u}$ donc une primitive de $\frac{u'}{u}$ avec $u > 0$ est $\ln(u)$.

Solution

➔ **a)** On pose $u(x) = 3x - 1$; alors $u'(x) = 3$.
 $f(x) = \frac{1}{3} \times 3 \times (3x - 1)^6$ donc $f = \frac{1}{3} u' u^6$.

➔ Une primitive de f sur I est :

$$F = \frac{1}{3} \times \frac{1}{7} u^7 = \frac{1}{21} u^7.$$

$$\text{Donc } F(x) = \frac{1}{21} (3x - 1)^7.$$

➔ **b)** On pose $u(x) = 2x - 1$; alors $u'(x) = 2$.
 $f(x) = 2 \times 2 \times (2x - 1)^{-4}$ donc $f = 2u' u^{-4}$.

➔ Une primitive de f sur I est :

$$F = 2 \times \frac{1}{-3} u^{-3} = \frac{-2}{3u^3}.$$

$$\text{Donc } F(x) = -\frac{2}{3(2x - 1)^3}.$$

➔ **c)** On pose $u(x) = x^2 + 1$; alors $u'(x) = 2x$.
 $f(x) = 3 \times 2x \times e^{x^2+1}$ donc $f = 3u' e^u$.

➔ Une primitive de f sur I est $F = 3e^u$.
 Donc $F(x) = 3e^{x^2+1}$.

➔ **d)** On pose $u(x) = 1 - x^2$; alors $u'(x) = -2x$.
 $f(x) = -4 \times \frac{-2x}{1-x^2}$ donc $f = -4 \times \frac{u'}{u}$.

u est une fonction polynôme du 2nd degré, de racines -1 et 1 . Elle est strictement positive entre ses racines : pour tout x de I , $u(x) > 0$.

➔ Une primitive de f sur I est $F = -4 \ln(u)$.

$$\text{Donc } F(x) = -4 \ln(1 - x^2).$$

Mise en pratique

Pour les exercices 6 à 11

Déterminez, dans chaque cas, une primitive de la fonction f sur l'intervalle I .

6 a) $f(x) = (3x + 2)^3$; $I = \mathbb{R}$.

b) $f(x) = 2(3x - 1)^5$; $I = \mathbb{R}$.

7 a) $f(x) = \sin(2x - \pi)$; $I = [0 ; \pi]$.

b) $f(x) = 4 \cos(2x + 1)$; $I = [0 ; \pi]$.

8 a) $f(x) = e^{-x+1}$; $I = \mathbb{R}$.

b) $f(x) = 2e^{3x-2}$; $I = \mathbb{R}$.

9 a) $f(x) = \frac{4}{\sqrt{2x+1}}$; $I =]-\frac{1}{2} ; +\infty[$.

b) $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2+1}}$; $I = \mathbb{R}$.

10 a) $f(x) = \frac{2}{x-4}$; $I =]4 ; +\infty[$.

b) $f(x) = \frac{8}{(x-4)^3}$; $I =]4 ; +\infty[$.

11 a) $f(x) = \sin(x) \cos^2(x)$; $I = \mathbb{R}$.

b) $f(x) = \cos(x) (\sin^2(x) + 1)$; $I = [0 ; \pi]$.

EXERCICES

C Déterminer la primitive vérifiant une condition initiale

Déterminez, dans chaque cas, la primitive F de la fonction f sur l'intervalle I , qui vérifie la condition imposée.

a) $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 3x - 4$, $I = \mathbb{R}$; condition : $F(-1) = 6$.

b) $f(x) = e^x - \frac{1}{x}$, $I =]0; +\infty[$; condition : $F(1) = 0$.

Méthode

a) On s'assure que f admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

• Une primitive Φ de f sur $\mathbb{R}$ est la somme des primitives de chacun de ses monômes.

Aide

Une primitive de $x \mapsto ax^p$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto a \frac{x^{p+1}}{p+1}$.

• Toute autre primitive F de f sur $\mathbb{R}$ s'écrit :

$$F = \Phi + k \quad (k \text{ constante}).$$

• On détermine la valeur de la constante k à partir de la condition initiale.

Remarque

Une primitive sur $\mathbb{R}$ d'une fonction polynôme de degré n est une fonction polynôme de degré $n+1$.

b) On reprend la méthode du a).

• On obtient des primitives sur I par lecture du tableau du paragraphe 3.1, page 196.

Aide

- Une primitive de $x \mapsto e^x$ sur $\mathbb{R}$ est $x \mapsto e^x$.
- Une primitive de $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0; +\infty[$ est $x \mapsto \ln(x)$.

Solution

a) La fonction polynôme f est continue sur $\mathbb{R}$, donc elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$.

Une primitive Φ est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\Phi(x) = 2 \times \frac{x^4}{4} - 5 \times \frac{x^3}{3} + 3 \times \frac{x^2}{2} - 4x$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 4x.$$

La primitive cherchée F est telle que :

$$F(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 4x + k \quad (k \in \mathbb{R}).$$

La condition initiale $F(-1) = 6$ s'écrit

$$\frac{1}{2} + \frac{5}{3} + \frac{3}{2} + 4 + k = 6, \text{ d'où } k = -\frac{5}{3}.$$

$$\text{Ainsi, } F(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 4x - \frac{5}{3}.$$

b) f est dérivable donc continue sur I , par conséquent, elle admet des primitives sur I .

Une primitive Φ vérifie $\Phi(x) = e^x - \ln(x)$.

F est telle que $F(x) = e^x - \ln(x) + k$ ($k \in \mathbb{R}$).

La condition initiale $F(1) = 0$ s'écrit $e - \ln(1) + k = 0$, d'où $k = -e$.

$$\text{Ainsi, } F(x) = e^x - \ln(x) - e.$$

Mise en pratique

Pour les exercices 12 à 14

Déterminez la primitive F de la fonction f sur l'intervalle I , qui vérifie la condition imposée.

12 a) $f(x) = x^4 - 4x^3 - x$, $I = \mathbb{R}$; $F(2) = -1$.

b) $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{3}$, $I = \mathbb{R}$; $F(-1) = 0$.

13 a) $f(x) = \sin(x) + 1$, $I = [0; 2\pi]$; $F(\pi) = \pi$.

b) $f(x) = 1 - 2\cos(2x)$; $I = [0; 2\pi]$; $F(\pi) = 1$.

14 a) $f(x) = e^x - x$, $I = \mathbb{R}$; $F(0) = -1$.

b) $f(x) = 1 - e^{-x}$, $I = [0; 4]$; $F(2) = -1$.

Pour les exercices 15 à 17

La fonction F est dérivable sur l'intervalle I . De plus, on donne l'expression de sa dérivée et les coordonnées d'un point A de la courbe $\mathcal{C}_F$. Quelle est l'expression de $F(x)$?

15 $I =]0; +\infty[$, $F'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}$; $A(e; 1)$.

16 $I =]-\infty; 0[$, $F'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x^3}$; $A(-2; 2)$.

17 $I = \mathbb{R}$, $F'(x) = e^{2x} - 2e^x$; $A(\ln(2); 0)$.

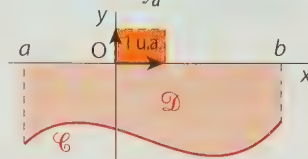
OBJECTIF 2 Calculer une intégrale

f est une fonction continue sur un intervalle $I = [a ; b]$.

• $\mathcal{C}$ désigne sa courbe représentative dans un repère orthogonal et $\mathcal{D}$ est le domaine délimité par $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

1. Si $f \geq 0$ sur I , alors $\int_a^b f(t) dt = \text{aire}(\mathcal{D})$.

2. Si $f \leq 0$ sur I , alors $\int_a^b f(t) dt = -\text{aire}(\mathcal{D})$.

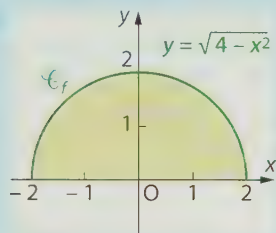


• Si F est une primitive quelconque de f sur $[a ; b]$, alors $\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$.

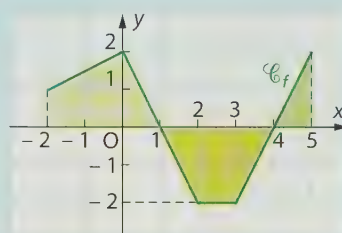
EXERCICE RÉSOLU D Utiliser des aires pour calculer une intégrale

Calculez, dans chaque cas, l'intégrale K de la fonction f représentée sur son intervalle de définition.

a)



b)



Méthode

a) f est positive sur $[-2 ; 2]$, donc l'intégrale est définie par l'aire du domaine $\mathcal{D}$ situé « sous la courbe ».

• On prouve que $\mathcal{C}_f$ est un demi-cercle.
Une équation du cercle de centre $I(x_0 ; y_0)$ et de rayon r est $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$.

• On utilise la formule : $\text{aire}(\text{disque}) = \pi r^2$.

b) On décompose l'intervalle de définition en sous-intervalles sur lesquels f garde un signe constant.

• On calcule la somme algébrique des aires (en u.a.) des domaines $\mathcal{D}_1, \mathcal{D}_2, \mathcal{D}_3$ ainsi définis.

Solution

a) f est continue et positive sur $[-2 ; 2]$, donc $K = \int_{-2}^2 f(t) dt = \text{aire}(\mathcal{D})$.

$$M(x ; y) \in \mathcal{C}_f \Leftrightarrow y = \sqrt{4 - x^2}, x \in [-2 ; 2].$$

Cette condition équivaut à :

$$y^2 = 4 - x^2, y \geq 0 \text{ soit } x^2 + y^2 = 4, y \geq 0.$$

On reconnaît une équation du demi-cercle de centre $O(0 ; 0)$ et de rayon 2 situé dans le demi-plan d'équation $y \geq 0$.

Donc $K = \frac{1}{2} \times \pi \times 2^2$ soit $K = 2\pi$.

b) Sur $[-2 ; 5]$, f est continue et change de signe, mais d'après la relation de Chasles : $\int_{-2}^5 f(t) dt = \int_{-2}^1 f(t) dt + \int_1^4 f(t) dt + \int_4^5 f(t) dt$.

$K = \text{aire}(\mathcal{D}_1) - \text{aire}(\mathcal{D}_2) + \text{aire}(\mathcal{D}_3)$.
 $K = (3 + 1) - 4 + 1$ soit $K = 1$.

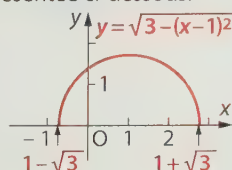
Mise en pratique

18 f est la fonction représentée ci-dessous.

1. Vérifiez que sa courbe est un demi-cercle.

2. Déduisez-en la valeur

de $J = \int_{1-\sqrt{3}}^{1+\sqrt{3}} f(t) dt$.



19 La fonction f est définie sur $[-3 ; 5]$ par :

$$f(x) = |x - 1| - 2.$$

1. Représentez f dans un repère orthogonal.

2. Déduisez-en la valeur de $\int_{-3}^5 f(t) dt$.

EXERCICE RESOLU E Calculer une intégrale à l'aide d'une primitive

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{1+e^x}$.

1. Vérifiez que pour tout réel x , $f(x) = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}$.
2. Déduisez-en la valeur de l'intégrale $J = \int_0^1 f(x) dx$.

► Méthode

1. On transforme le second membre de l'égalité pour retrouver $f(x)$.

2. On ne connaît pas une primitive de f sur $\mathbb{R}$. Pour calculer J , on utilise alors la transformation d'écriture précédente et la propriété de linéarité de l'intégration (**théorème 6**).

• On sait calculer la première intégrale de l'expression [1] ; pour la deuxième, on cherche une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto \frac{e^x}{1+e^x}$.

• Une primitive de $\frac{u'}{u}$ avec $u > 0$ est $\ln(u)$.

• Le résultat peut s'exprimer avec le logarithme d'un seul nombre.

► Solution

1. Pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$1 - \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1+e^x}{1+e^x} - \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1}{1+e^x}.$$

2. $J = \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \left(1 - \frac{e^x}{1+e^x}\right) dx$, d'où :

$$J = \int_0^1 1 dx - \int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx \quad [1].$$

On considère la fonction $h : x \mapsto \frac{e^x}{1+e^x}$.

► On pose $u(x) = 1+e^x$; alors $u'(x) = e^x$.

On reconnaît une expression du type $h = \frac{u'}{u}$ avec $u > 0$ sur $\mathbb{R}$.

► Ainsi, une primitive de h sur $\mathbb{R}$ est définie par : $H(x) = \ln(1+e^x)$.

D'où :

$$\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x} dx = [\ln(1+e^x)]_0^1 = \ln(1+e) - \ln(2).$$

D'autre part : $\int_0^1 1 dx = [x]_0^1 = 1$.

Donc d'après [1] : $J = 1 - \ln(1+e) + \ln(2)$.

► Ainsi : $J = \ln(e) - \ln(1+e) + \ln(2)$

$$J = \ln\left(\frac{2e}{1+e}\right).$$

► Mise en pratique

Pour les exercices 20 à 25

Calculez les intégrales suivantes à l'aide de primitives.

20 a) $I = \int_0^4 (t-3) dt$. b) $J = \int_4^{-1} (t^2 - 4t) dt$.

21 a) $I = \int_1^2 \left(t^2 - \frac{1}{t}\right) dt$.

b) $J = \int_1^4 \left(\frac{1}{2\sqrt{t}} - \frac{1}{t}\right) dt$.

22 a) $I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(t) dt$. b) $J = \int_0^{-\pi} \sin(2t) dt$.

23 a) $I = \int_1^9 \frac{1}{\sqrt{t}} dt$. b) $J = \int_{-2}^2 \frac{1}{\sqrt{2t+5}} dt$.

24 a) $I = \int_1^1 e^{3t+4} dt$. b) $J = \int_0^1 (te^{t^2-1}) dt$.

25 a) $I = \int_0^1 t(t^2+1)^3 dt$. b) $J = \int_0^\pi (\sin(t) - t) dt$.

26 1. Quelle est l'expression de la dérivée de la fonction $x \mapsto x \ln(x)$, $x \in]0; +\infty[$?

2. Déduisez-en la valeur de l'intégrale :

$$K = \int_1^e (\ln(x) + 1) dx.$$

27 On pose : $I = \int_0^\pi \cos^2(x) dx$.

1. Justifiez que pour tout nombre x ,

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{\cos(2x)}{2}.$$

2. Déduisez-en la valeur de I .

28 On pose : $J = \int_2^4 \frac{2x-1}{x-1} dx$.

1. Déterminez les nombres a et b tels que :

$$\text{pour tout nombre } x \neq 1, \frac{2x-1}{x-1} = a + \frac{b}{x-1}.$$

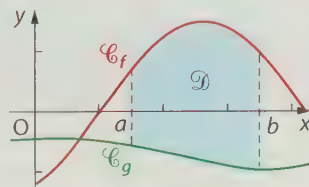
2. Déduisez-en la valeur de J .

OBJECTIF 3 Calculer une aire

$\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ sont les courbes représentatives de deux fonctions f et g continues sur un intervalle I ; a et b sont deux nombres de I , $a < b$.

Si $\mathcal{C}_f$ est au-dessus de $\mathcal{C}_g$ sur $[a; b]$, alors l'aire du domaine $\mathcal{D}$ entre les deux courbes sur $[a; b]$ s'exprime en u.a. par :

$$\text{aire}(\mathcal{D}) = \int_a^b (f - g)(t) dt.$$

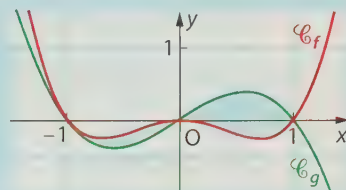


EXERCICE RÉSOLU E Déterminer l'aire du domaine compris entre deux courbes

Les fonctions polynômes f et g sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2(x^2 - 1) \quad \text{et} \quad g(x) = x(1 - x^2).$$

- Étudiez la position relative de leurs courbes représentatives.
- Utilisez l'étude précédente pour calculer l'aire du domaine $\mathcal{D}$ compris entre les deux courbes sur l'intervalle $[-1; 1]$.



Méthode

- On étudie le signe de la fonction différence $\varphi = f - g$.
 - On factorise l'expression puis on détermine son signe.
 - On interprète alors le signe de $\varphi = f - g$. $\varphi(x) \leq 0$ signifie $\mathcal{C}_f$ au-dessous de $\mathcal{C}_g$.
- On décompose $[-1; 1]$ en sous-intervalles sur lesquels $\varphi = f - g$ garde un signe constant. Sur $[0; 1]$, $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de $\mathcal{C}_g$, donc l'aire du domaine délimité par $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ est $\int_0^1 (g - f)(t) dt = - \int_0^1 (f - g)(t) dt$.
 - On détermine une primitive Φ de $\varphi = f - g$ sur $\mathbb{R}$, puis on calcule $\text{aire}(\mathcal{D})$.
 - On exprime l'aire du domaine $\mathcal{D}$ en u.a.

Solution

- On pose : $\varphi(x) = f(x) - g(x)$.
 $\varphi(x) = x^2(x^2 - 1) - x(1 - x^2) = (x^2 - 1)(x^2 + x)$
 $\varphi(x) = (x - 1)(x + 1)x(x + 1) = x(x - 1)(x + 1)^2$.
 φ s'annule pour les valeurs $-1, 0$ et 1 .
 Le signe de $\varphi(x)$ est celui de $x(x - 1)$, donc négatif entre les racines 0 et 1 .
- Ainsi, $\mathcal{C}_f$ est au-dessous de $\mathcal{C}_g$ sur $[0; 1]$ et au-dessus sur $]-\infty; 0] \cup [1; +\infty[$.
- aire($\mathcal{D}$) = $\int_{-1}^0 (f - g)(t) dt + \int_0^1 (g - f)(t) dt$
 $\text{aire}(\mathcal{D}) = \int_{-1}^0 (f - g)(t) dt - \int_0^1 (f - g)(t) dt$.
 $f(t) - g(t) = t^4 - t^2 - (t - t^3) = t^4 + t^3 - t^2 - t$
 donc une primitive Φ de φ sur $\mathbb{R}$ est définie par $\Phi(t) = \frac{t^5}{5} + \frac{t^4}{4} - \frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2}$.
- Ainsi : aire($\mathcal{D}$) = $[\Phi(t)]_{-1}^0 - [\Phi(t)]_0^1$
 $\text{aire}(\mathcal{D}) = [\Phi(0) - \Phi(-1)] - [\Phi(1) - \Phi(0)]$.
 Or, $\Phi(0) = 0$; donc :
 $\text{aire}(\mathcal{D}) = -\Phi(-1) - \Phi(1) = 0,5$.

Mise en pratique

29 Soit $\mathcal{H}$ l'arc d'hyperbole d'équation

$$y = \frac{1}{x}, \quad x \in]0; +\infty[$$

et Δ la droite d'équation $y = x$.

- Tracez $\mathcal{H}$ et Δ dans un repère orthonormé.
- Déterminez l'aire du domaine $\mathcal{D}$ compris entre les deux courbes sur l'intervalle $[0,5; 2]$.

30 1. Représentez sur votre calculatrice la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $y = 2xe^{-x^2}$, $x \in [0; +\infty[$.

2. λ désigne un nombre, $\lambda > 0$.

a) Exprimez en fonction de λ , l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ du domaine $\mathcal{D}$ délimité par $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$.

b) Calculez $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{A}(\lambda)$. Interprétez le résultat.

OBJECTIF 4 Encadrer une intégrale

f et g sont deux fonctions continues sur $[a; b]$, $a \leq b$.

• Si pour tout t de $[a; b]$, $f(t) \leq g(t)$, alors : $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$ (théorème 8.2).

• Si m et M sont deux nombres tels que pour tout t de $[a; b]$, $m \leq f(t) \leq M$, alors :

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(t) dt \leq M(b-a) \quad (\text{inégalité de la moyenne}) \quad (\text{théorème 9}).$$

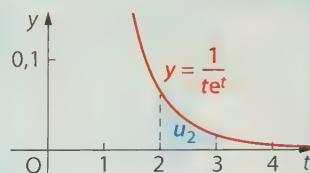
EXERCICE RESOLU G Étudier une suite d'intégrales

La courbe ci-contre représente la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{te^t}$ sur $]0; +\infty[$.

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose : $u_n = \int_n^{n+1} f(t) dt$.

1. Démontrez que pour tout entier $n \geq 1$, $f(n+1) \leq u_n \leq f(n)$.

2. La suite (u_n) est-elle convergente ?



► Méthode

1. On encadre la fonction f sur tout intervalle d'intégration du type $[n; n+1]$.

• On utilise le sens de variation de f .

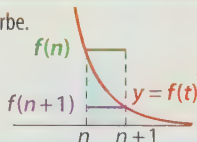
Rappel

Si la fonction u est dérivable et ne s'annule pas sur $]0; +\infty[$, alors $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$.

• On applique l'inégalité de la moyenne.

Illustration

u_n représente l'aire sous la courbe. Elle est encadrée par les aires des rectangles de base $[n; n+1]$ et de hauteurs $f(n+1)$ et $f(n)$.



2. On utilise le théorème d'encadrement (théorème 2, chapitre 1).

► Solution

1. Sur $]0; +\infty[$, f est dérivable et :

$$f'(t) = \frac{-(e^t + te^t)}{t^2 e^{2t}} = \frac{e^t(-1-t)}{t^2 e^{2t}} = \frac{-1-t}{t^2 e^t}.$$

Sur $]0; +\infty[$, $f'(t) < 0$ donc f est décroissante.

Ainsi, pour tout t tel que $n \leq t \leq n+1$:

$$f(n+1) \leq f(t) \leq f(n).$$

n est un entier naturel non nul.

► D'après l'inégalité de la moyenne avec $a = n$, $b = n+1$, $m = f(n+1)$ et $M = f(n)$:

$$(n+1-n)f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(t) dt \leq (n+1-n)f(n)$$

$$\text{soit} \quad f(n+1) \leq u_n \leq f(n).$$

2. $\lim_{t \rightarrow +\infty} te^t = +\infty$ donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$.

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n+1) = 0$.

D'après le théorème d'encadrement, la suite (u_n) converge vers 0.

► Mise en pratique

Pour les exercices 31 et 32

Démontrez la double inégalité en encadrant convenablement la fonction à intégrer.

31 $\sqrt{2} \leq \int_1^2 \sqrt{1+t^3} dt \leq 3.$

32 $75e^{-5} \leq \int_2^5 x^2 e^{-x} dx \leq 12e^{-2}.$

33 On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par : $u_n = \int_0^1 (1+t^n)e^t dt$.

1. Prouvez que pour tout n de $\mathbb{N}$, $0 \leq u_{n+1} \leq u_n$.

2. La suite (u_n) converge-t-elle ? Pourquoi ?

34 On considère la suite (v_n) définie pour tout entier $n \geq 1$ par : $v_n = \int_1^n \frac{x}{x+1} dx$.

1. Prouvez que la suite (v_n) est croissante.

2. La suite (v_n) est-elle convergente ?

35 Comparez sans les calculer les nombres : $I = \int_{\pi}^{2\pi} x^2 \sin(x) dx$ et $J = \int_{\pi}^{2\pi} x \sin(x) dx$.

36 Questions sur le cours

Complétez les propositions suivantes.

f est une fonction continue sur un intervalle I , F est une primitive de f sur I .

- a) F est dérivable sur I et $F' = \dots$
- b) Si G est une autre primitive de f sur I , alors $F - G = \dots$
- c) Pour tous a et b de I , $\int_a^b f(t) dt = \dots$
- d) Pour tous a, b, c de I ,
 $\int_a^b f(t) dt + \int_b^c f(t) dt = \dots$
- e) Si pour tout t de l'intervalle $[a; b]$ inclus dans I ,
 $m \leq f(t) \leq M$, alors $\dots \leq \int_a^b f(t) dt \leq \dots$

37 Vrai ou faux

Vrai ou faux ? Justifiez votre réponse.

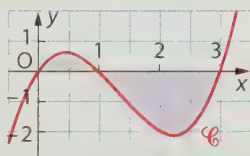
f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x}$.

- a) Une primitive de f sur $\mathbb{R}$ est $F = -f$.
- b) L'aire du domaine $\mathcal{D}$ délimité par la courbe $\mathcal{C}_f$ et l'axe des abscisses sur $[0; \ln(2)]$ vaut 0,5 u.a.
- c) On pose $\mathcal{Q}(\lambda) = \int_0^\lambda f(t) dt$;
alors $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{Q}(\lambda) = +\infty$.
- d) La suite (u_n) définie par $u_n = \int_{n-1}^n f(t) dt$,
 $n \in \mathbb{N}^*$, est décroissante.
- e) Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $u_1 + u_2 + \dots + u_n = 1 - e^{-n}$.

38 QCM Une seule réponse exacte

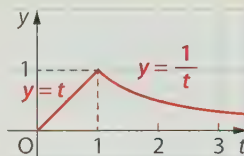
Pour chaque affirmation, une seule réponse est exacte. Identifiez-la en justifiant votre réponse.

1. La courbe $\mathcal{C}$ représente la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x(x-1)(x-3)$.
 $\mathcal{D}$ est le domaine colorié.



- a) $\int_0^1 f(t) dt = 0,5$.
- b) $\int_1^3 f(t) dt = -3$.
- c) $\text{aire}(\mathcal{D}) = \frac{37}{12}$ (u.a.).
- d) $\int_0^3 f(t) dt = -2,2$.

2. La courbe représente une fonction f continue sur $[0; +\infty[$. Pour $x \geq 0$, on pose $\Phi(x) = \int_0^x f(t) dt$.



- a) $\Phi(1) = 1$.
- b) Si $x > 1$, alors $\Phi(x) = \ln(x)$.
- c) La fonction Φ n'est pas dérivable en 1.
- d) Φ est la primitive de f telle que $\Phi(0) = 0$.

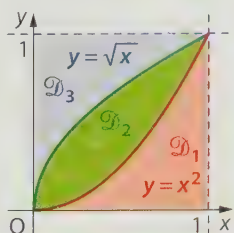
39 QCM Au moins une réponse exacte

Pour chaque affirmation, plusieurs réponses peuvent être exactes. Identifiez-les en justifiant vos réponses.

1. On pose : $J = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx$ et $K = \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2} dx$.

- a) $J = \frac{\ln(2)}{2}$.
- b) $J + K = 1$.
- c) $K = \frac{1 - \ln(2)}{2}$.

2. Dans le repère ortho-normé ci-contre :



- a) $\text{aire}(\mathcal{D}_1) = 0,3$ u.a.
- b) $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_3$ sont symétriques par rapport à la droite Δ d'équation $y = x$.
- c) $\mathcal{D}_1$, $\mathcal{D}_2$ et $\mathcal{D}_3$ ont la même aire.

3. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t^n} dt.$$

- a) La suite (u_n) est décroissante.
- b) Pour tout entier $n \geq 1$, $u_n \leq 1$.
- c) La suite (u_n) est convergente.

4. On pose : $A = \int_0^{\frac{\pi}{4}} t \sin^2(t) dt$ et $B = \int_0^{\frac{\pi}{4}} t \cos^2(t) dt$.

- a) $A > B$.
- b) $A + B = \frac{\pi^2}{32}$.
- c) $\frac{\pi^2}{64} \leq B \leq \frac{\pi^2}{32}$.



Apprendre à chercher

40 Sur la piste d'une primitive

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^x \sin(x).$$

Objectif Trouver une primitive F de f sur $\mathbb{R}$.

1. La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, donc l'existence de primitives de f sur $\mathbb{R}$ est assurée. Mais on ne reconnaît pas, dans l'expression de $f(x)$, l'une des formes usuelles qui permet le calcul de primitives.

Une piste consiste à examiner les dérivées successives de f . En effet, lors d'une première dérivation vont apparaître des termes du type $e^x \cos(x)$ et donc, lors de la deuxième, des termes du type $e^x \sin(x)$, d'où la possibilité d'établir une relation entre $f''(x)$, $f'(x)$ et $f(x)$.

a) Pour tout nombre x , calculez $f'(x)$ et $f''(x)$.

b) Exprimez $f(x)$ comme une combinaison de $f'(x)$ et $f''(x)$, du type $f(x) = af'(x) + bf''(x)$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

2. On connaît une primitive de f' et une primitive de f'' sur $\mathbb{R}$, d'où l'expression d'une primitive de f .

Déduisez-en une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

41 Primitive de $x \mapsto Q(x)e^{-x}$ où Q est une fonction polynôme

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (x^2 + x - 2)e^{-x}.$$

Objectif Exprimer, si possible, une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ sous la forme $F(x) = P(x)e^{-x}$ où P est une fonction polynôme.

1. On ne connaît pas de primitive de f sur $\mathbb{R}$. On en cherche une qui s'exprime sous la forme indiquée.

On suppose d'abord qu'une telle fonction polynôme P existe et on en tire les conséquences.

Si F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$, alors pour tout nombre x , $F'(x) = f(x)$.

a) Prouvez que pour tout nombre x ,

$$P'(x) - P(x) = x^2 + x - 2 \quad [1].$$

b) Quel est le degré de la fonction polynôme P ?

2. On pose alors : $P(x) = ax^2 + bx + c$.

Or, dire que deux polynômes non nuls sont égaux signifie que leurs coefficients respectifs sont égaux. On identifie donc les coefficients dans l'égalité [1].

a) Déduisez-en que les coefficients a, b, c vérifient :

$$\begin{cases} -a = 1 \\ 2a - b = 1 \\ b - c = -2 \end{cases}$$

b) Donnez alors l'expression de $P(x)$.

3. On a prouvé que si P existe, alors son expression est celle obtenue ci-dessus. Il s'agit maintenant de s'assurer que P est bien solution du problème posé.

Vérifiez-le, puis concluez.

Commentaire

Cette méthode peut être généralisée. Ainsi, toute fonction du type $x \mapsto Q(x)e^{ax}$, où a est un nombre donné et Q une fonction polynôme de degré n , admet sur $\mathbb{R}$ une primitive du type $x \mapsto P(x)e^{ax}$ où P est aussi une fonction polynôme de degré n .

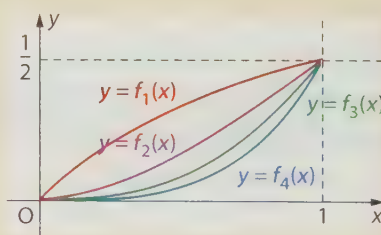
42 Convergence d'une suite d'intégrales

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx.$$

Objectif Étudier la convergence de la suite (u_n) .

1. Les fonctions notées $f_n : x \mapsto \frac{x^n}{1+x}$ sont continues et positives sur $[0; 1]$, d'où l'idée d'interpréter la valeur de u_n comme l'aire sous la courbe de f_n .



On peut conjecturer le sens de variation de (u_n) .

a) Démontrez que la suite (u_n) est décroissante.

b) La suite (u_n) est-elle convergente ? Pourquoi ?

2. Dès lors, il s'agit de déterminer la limite de (u_n) .

On peut conjecturer cette limite sur le graphique. D'où l'idée d'encadrer u_n pour pouvoir conclure.

a) Prouvez que pour tout n de $\mathbb{N}^*$ et tout x de $[0; 1]$,

$$0 \leq f_n(x) \leq x^n.$$

b) Déduisez-en que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$.
 Concluez.

Narration de recherche

→ L'objectif n'est pas seulement de résoudre le problème posé : vous devez aussi noter les différentes idées même lorsqu'elles n'ont pas permis de trouver la réponse. Expliquez pourquoi vous avez changé de méthode et ce qui vous a fait avancer.

43 Un motif de décoration

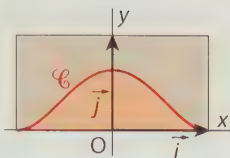
Le schéma représente le plan d'un panneau décoratif.

L'aire de la région sous la courbe $\mathcal{C}$ doit mesurer un tiers de l'aire du panneau.

Pour des raisons de symétrie, la courbe $\mathcal{C}$ a une équation du type : $y = ax^4 + bx^2 + c$, $-1 \leq x \leq 1$.

De plus, la courbe $\mathcal{C}$ doit être tangente à l'axe horizontal aux points d'abscisses -1 et 1 .

Déterminez une équation de la courbe $\mathcal{C}$.



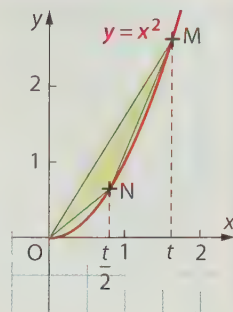
44 Un rapport constant

M et N sont des points de la demi-parabole d'équation :

$$y = x^2, \quad x \geq 0.$$

M et N ont pour abscisses respectives t et $\frac{t}{2}$, $t > 0$.

$\mathcal{C}$ désigne l'aire (en u.a.) du triangle OMN et $\mathcal{Q}$ celle du domaine curviligne [OMN].

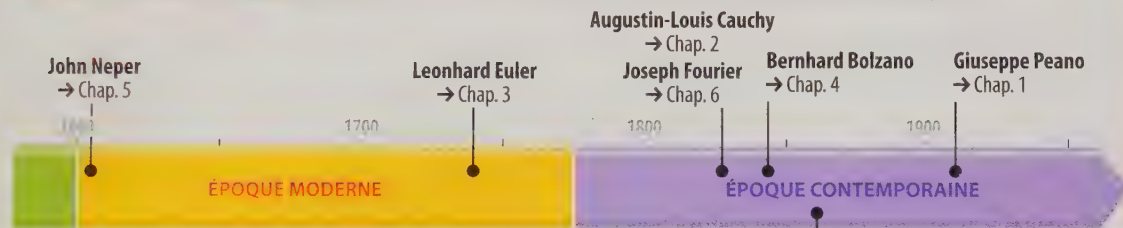


Archimède a démontré que le rapport $\frac{\mathcal{C}}{\mathcal{Q}}$ était constant, donc indépendant de t . Sauriez-vous trouver sa valeur ?

Chercheurs d'hier

Eux aussi, ils ont cherché avant de trouver !

→ Voici quelques mathématiciens importants qui ont travaillé dans le domaine de l'Analyse.



Bernhard Riemann
(1826-1866)

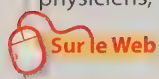
En 1854, Riemann recherche à quelles conditions une fonction admet une intégrale. Cela le conduit à redéfinir cette notion, largement utilisée par les mathématiciens depuis son invention par Leibniz à la fin du XVII^e siècle. Alors que Leibniz utilisait le langage des

infinitésimaux (dx désignant une variation infiniment petite de x), Riemann utilise le langage des limites, introduit au début du XIX^e siècle par Cauchy et Weierstrass.

Le langage des infinitésimaux est délaissé en mathématiques, mais il reste utilisé par les physiciens, et la notation dx subsiste dans l'écriture des dérivées $\frac{dy}{dx}$ et des intégrales $\int_a^b f(x) dx$.

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{d\left(\frac{1}{x} \log\left(1 - \frac{1}{x}\right)\right)}{dx} \approx \sum_{n=1}^N \frac{1}{x_n} \log\left(1 - \frac{1}{x_n}\right) \Delta x_n$$

Extrait du manuscrit d'un article de Riemann sur la répartition des nombres premiers (1859).



Sur le Web serge.mehl.free.fr/chrono/Riemann.html
ljk.imag.fr/membres/Bernard.Ycart/MC2/node10.html

Travaux dirigés

Utiliser une calculatrice



→ Pour calculer des intégrales

TP

45 Trouver une valeur approchée d'une aire

COMPÉTENCES

TICE

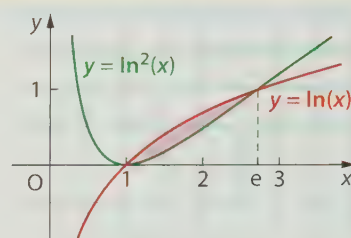
- Choisir une option de calcul.
- Saisir un calcul d'intégrale.

Mathématiques

- Étudier le signe d'une fonction.
- Calculer une aire par une intégrale.

Dans un repère orthonormé, on a représenté les courbes d'équations : $y = \ln(x)$ et $y = \ln^2(x)$, $x \in]0; +\infty[$.

On se propose d'obtenir une valeur approchée de l'aire du domaine $\mathcal{D}$ délimité par les deux courbes.



1. Expression de l'aire

Pour tout nombre $x > 0$, on pose : $\varphi(x) = \ln(x) - \ln^2(x)$.

a) Étudiez le signe de φ sur l'intervalle $]0; +\infty[$, puis déduisez-en la position relative des deux courbes.

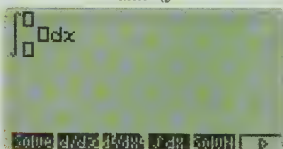
b) Justifiez que l'aire du domaine $\mathcal{D}$ s'exprime, en u.a., par : $\text{aire}(\mathcal{D}) = \int_1^e \varphi(x) dx$.

2. Calcul d'une valeur approchée à 0,001 près

Avec une Casio

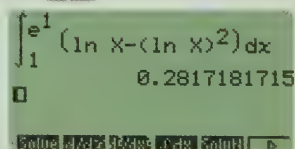


- a) Sélectionnez le mode RUN-MAT.
- Définissez l'option de calcul : **OPTN** **F4** (CALC).
- Choisissez le type : **F4** $\left(\int dx\right)$.



- b) Complétez les informations demandées :

- l'expression de $\varphi(x)$,
 - les bornes d'intégration 1 et e^1 .
- (Utilisez les touches de direction $\blacktriangle$ $\blacktriangledown$.)
- Validez par **EXE**

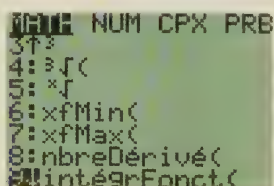


Vous obtenez : $\text{aire}(\mathcal{D}) \approx 0,282$ u.a.

Avec une TI



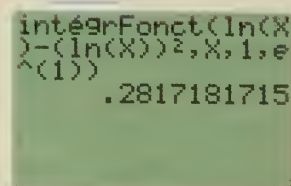
- a) Placez-vous dans l'écran de calcul.
- Appuyez sur la touche **math** puis sur **9** pour sélectionner l'option 9, intégrFonct(.



- b) Complétez l'instruction suivant le modèle :

intégrFonct (fonction, variable, borne inf, borne sup).

- Validez par **entrer**.



Vous obtenez : $\text{aire}(\mathcal{D}) \approx 0,282$ u.a.

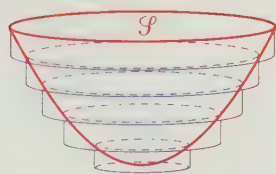
46 Calculer le volume d'un solide

A Volume d'un bol

$\mathcal{S}$ est le solide engendré par la rotation de l'arc de parabole d'équation $z = y^2$, $-1 \leq y \leq 1$, dans un repère orthonormé d'axes (Oy) et (Oz) (unité : 1 dm).

On conçoit qu'en encadrant $\mathcal{S}$ de plus en plus finement par un empilage de cylindres, on peut approcher son volume $\mathcal{V}$.

L'objectif est de déterminer la valeur exacte de $\mathcal{V}$.

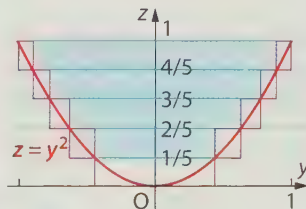


Principe de la méthode d'encadrement

■ Sur (Oz), on subdivise $[0; 1]$ en n ($n \geq 1$) sous-intervalles de même longueur.

■ On définit alors $n-1$ cylindres intérieurs (c.i.) et n cylindres extérieurs (c.e.).

Les figures représentent le cas $n = 5$.



On note u_n la somme des volumes des c.i. et v_n celle des c.e.

1. a) Justifiez que pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = \frac{\pi}{n^2} [1 + 2 + \dots + (n-1)]$.

b) Démontrez que pour tout entier $n \geq 1$, $u_n = \frac{\pi}{2} \times \frac{n-1}{n}$. Déduisez-en la limite ℓ de la suite (u_n) .

2. a) Prouvez que pour tout entier $n \geq 1$, $v_n = u_n + \frac{\pi}{n}$, puis que (v_n) converge aussi vers ℓ .

b) Déduisez-en le volume $\mathcal{V}$ du bol. Ce bol contient-il plus de 1 litre?

Rappel

Volume d'un cylindre : $V = \pi r^2 h$.

B Utilisation du calcul intégral

On admet le résultat suivant :

Dans un repère orthonormé, un solide $\mathcal{S}$ est délimité par les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ d'équations respectives $z = a$ et $z = b$ ($a < b$).

L'aire de sa section par un plan variable horizontal $\mathcal{P}$ d'équation $z = t$ ($t \in [a; b]$) est notée $S(t)$. Si la fonction S est continue sur $[a; b]$, le volume $\mathcal{V}$ de $\mathcal{S}$ se calcule en unité de volume (u.v.) par :

$$\mathcal{V} = \int_a^b S(t) dt \quad [1].$$

1. a) Exprimez en fonction de t l'aire $S(t)$ de la section du bol $\mathcal{S}$ par le plan d'équation $z = t$ ($t \in [0; 1]$).

b) Retrouvez, avec la formule [1], le volume du bol.

2. $\mathcal{S}$ est une demi-boule de centre O et de rayon R.

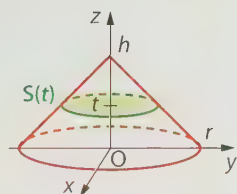
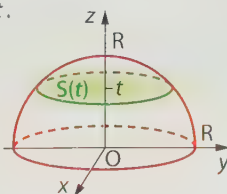
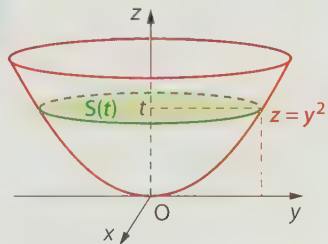
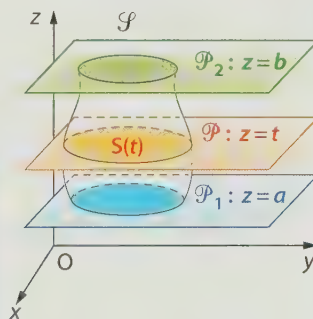
a) Justifiez que son volume est : $\mathcal{V} = \int_0^R \pi (R^2 - t^2) dt$.

b) Retrouvez l'expression du volume d'une boule.

3. $\mathcal{S}$ est un cône de rayon r et de hauteur h .

a) Prouvez que $S(t) = \pi \frac{r^2}{h^2} (h-t)^2$.

b) Retrouvez l'expression du volume d'un cône.



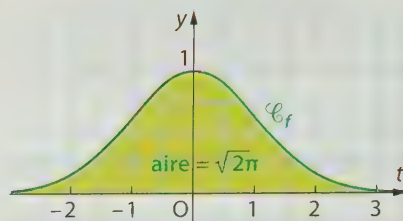
47 Tabuler une primitive

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$.

$\mathcal{C}_f$ désigne sa courbe représentative dans un repère orthogonal d'origine O .

On admet que le domaine sous la courbe, bien que non borné, a une aire finie égale à $\sqrt{2\pi}$ (u.a.).

f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$, donc elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$. Cependant, on ne peut pas exprimer une primitive de f à l'aide de fonctions usuelles.



OBJECTIFS Étudier la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0 définie par : $x \mapsto F(x) = \int_0^x f(t) dt$.
Tabuler les valeurs de $F(a)$, où a est un nombre positif, avec une précision donnée.

A Étude de la fonction F

1. a) Prouvez que la fonction f est paire. Déduisez-en une propriété géométrique de $\mathcal{C}_f$.
b) Étudiez les variations de f sur $[0; +\infty[$.
2. a) Démontrez que pour tout nombre x positif, $F(-x) = -F(x)$.

Aide

Utilisez des considérations sur les aires et la propriété de symétrie de $\mathcal{C}_f$.

- b) Justifiez que la courbe représentative de F est symétrique par rapport à l'origine O .
3. a) Étudiez les variations de F sur $[0; +\infty[$ et précisez sa limite en $+\infty$.

Aide

Interprétez la limite de F en $+\infty$ comme l'aire sous la courbe sur $[0; +\infty[$.

- b) Dressez le tableau de variation de F sur $\mathbb{R}$.

B Approximation des valeurs de $F(a)$ ($a > 0$)

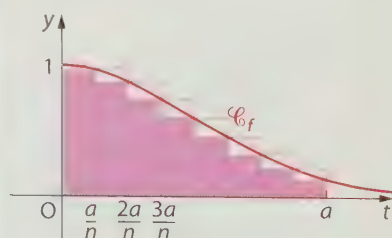
Dans cette partie, on se propose de calculer une valeur approchée de $F(a)$ avec $a > 0$.

$F(a) = \int_0^a f(t) dt$ exprime l'aire sous la courbe $\mathcal{C}_f$ sur l'intervalle $[0; a]$.

On encadre alors cette aire de plus en plus finement par des aires de rectangles.

Principe de la méthode des rectangles

- On partage l'intervalle $[0; a]$ en n sous-intervalles ($n \geq 1$) de même longueur $\frac{a}{n}$.
- Ainsi, l'aire sous $\mathcal{C}_f$ peut être encadrée par la somme des aires des n rectangles « inférieurs » et celle des n rectangles « supérieurs » correspondants.



Pour tout entier $n \geq 1$, on appelle u_n la somme des aires des n rectangles supérieurs et v_n la somme des aires des n rectangles inférieurs.

Tous ces rectangles ont la même largeur $\frac{a}{n}$ et des hauteurs qui sont les images par f des abscisses des points de la subdivision.

$$\text{Ainsi : } u_n = \frac{a}{n} \left[f(0) + f\left(\frac{a}{n}\right) + f\left(\frac{2a}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{(n-1)a}{n}\right) \right] \quad \text{soit} \quad u_n = \frac{a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{(k-1)a}{n}\right)$$

$$\text{et} \quad v_n = \frac{a}{n} \left[f\left(\frac{a}{n}\right) + f\left(\frac{2a}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{(n-1)a}{n}\right) + f(a) \right] \quad \text{soit} \quad v_n = \frac{a}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{ka}{n}\right).$$

1. a) Justifiez que pour tout entier $n \geq 1$, $u_n - v_n = \frac{a}{n} \left[1 - e^{-\frac{a^2}{2}} \right]$.

b) Quelle est la limite de la suite $(u_n - v_n)$?

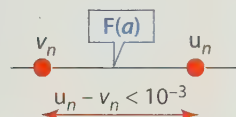
2. a) Prouvez que pour tout entier $n \geq 1$, $u_n - v_n < 10^{-3}$ équivaut à $n > 1000a \left(1 - e^{-\frac{a^2}{2}} \right)$.

b) On rappelle que la partie entière d'un nombre A est le plus grand nombre entier inférieur ou égal à A . Cet entier, noté $E(A)$, est tel que : $E(A) \leq A < E(A) + 1$.

On pose $A = 1000a \left(1 - e^{-\frac{a^2}{2}} \right)$ et $N = E(A) + 1$.

Justifiez que pour tout entier n tel que $n \geq N$, $u_n - v_n < 10^{-3}$.

Conclusion. On a ainsi encadré l'aire $F(a)$ par deux nombres v_n et u_n dont la différence ne dépasse pas 0,001 dès que $n \geq N$.



C Algorithme d'encadrement

L'algorithme ci-contre, écrit avec AlgoBox, permet d'obtenir un encadrement de $F(a)$, pour $a > 0$, dont l'amplitude ne dépasse 10^{-3} .

1. a) À quelle ligne intervient l'entier N qui définit le nombre de subdivisions nécessaires ?

b) À quelles actions correspondent les lignes 14 et 15 ?

2. Utilisez cet algorithme pour dresser une table des valeurs de $F(a)$ lorsque a prend les valeurs de 0 à 3 avec un pas de 0,2.

Arrondissez à 10^{-3} près par défaut la valeur de u_n obtenue par l'algorithme.

3. Comment faut-il modifier cet algorithme pour obtenir des encadrements dont l'amplitude n'excède pas une valeur p fixée ?

Aide

Introduisez une nouvelle variable p du type nombre, puis définissez l'entier N en fonction de p et de a .

```

1  VARIABLES
2  a EST_DU_TYPE NOMBRE
3  n EST_DU_TYPE NOMBRE
4  u EST_DU_TYPE NOMBRE
5  v EST_DU_TYPE NOMBRE
6  k EST_DU_TYPE NOMBRE
7  DEBUT_ALGORITHME
8  LIRE a
9  n PREND_LA_VALEUR floor(1000*a*(1-F1(a)))+1
10 u PREND_LA_VALEUR 0
11 v PREND_LA_VALEUR 0
12 POUR k ALLANT_DE 1 A n
13   DEBUT_POUR
14   u PREND_LA_VALEUR u+(a/n)*F1((k-1)*a/n)
15   v PREND_LA_VALEUR v+(a/n)*F1(k*a/n)
16   FIN_POUR
17 AFFICHER "encadrement de F(a) : "
18 AFFICHER v
19 AFFICHER "< F(a) <"
20 AFFICHER u
21 FIN_ALGORITHME
22
23 Fonction numérique utilisée :
24 F1(x)=exp(-pow(x,2)/2)

```

Remarque. En probabilité, on utilise la fonction $\varphi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f$ (voir chapitre 14).

48 Mouvement uniformément accéléré

La chronophotographie ci-contre illustre un mouvement rectiligne uniformément accéléré (M.R.U.A.), c'est-à-dire un mouvement tel que l'accroissement de la vitesse du mobile durant un intervalle de temps donné est proportionnel à la durée, avec un coefficient positif.



1. L'approche de Nicole Oresme

D'après *L'œuvre scientifique de Nicole Oresme*, Alain Costé, Université de Caen.

Dans l'un de ses ouvrages en latin *Traité sur la configuration des qualités et du mouvement*, le savant français Nicole Oresme (1320 - 1382) étudie en particulier un mouvement rectiligne uniformément accéléré.

● Il représente la vitesse instantanée d'un mobile en fonction du temps. Il s'intéresse à la portion du plan balayée sous la courbe et affirme : « l'aire de la surface balayée pendant un intervalle de temps donné est proportionnelle à la distance parcourue par le mobile ».

● Dans le cas où la vitesse augmente uniformément, Nicole Oresme obtient une figure en forme de trapèze (figure 1).

Si I est le milieu de [AB], l'aire du trapèze ABCD est égale à celle du rectangle ABC'D'. Il en déduit que : « la distance parcourue durant l'intervalle de temps AB est la même que celle qu'il parcourrait s'il était mu d'une vitesse uniforme égale à celle qu'il possède à l'instant moyen ».

● Il considère ensuite le cas où la vitesse initiale est nulle. Alors, les points A et D sont confondus. Par un découpage géométrique, il montre que les aires des trapèzes sont proportionnelles à 1, 3, 5, 7... (figure 2).

Or, poursuit-il, « comme l'a remarqué Pythagore : $1 = 1$ fois 1 ; $1 + 3 = 2$ fois 2 ; $1 + 3 + 5 = 3$ fois 3 ; $1 + 3 + 5 + 7 = 4$ fois 4 ; ... on obtient toujours un nombre carré. Par ce moyen, on peut déterminer les rapports mutuels des quantités totales [i.e. aires] ».

● Démontrez la relation attribuée à Pythagore : $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2k - 1) = k^2$.

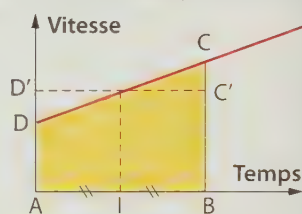


Figure 1

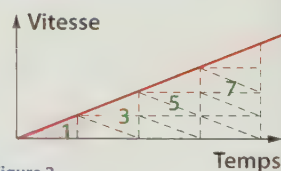


Figure 2

2. Le point de vue du physicien

Sur la figure 2, la vitesse (en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$) est proportionnelle au temps (en s) dans le rapport noté a .

On partage l'intervalle de temps $[0 ; t]$ en k intervalles de même longueur θ ; ainsi, $t = k\theta$.

a) Justifiez que la distance parcourue est : $d(t) = \frac{1}{2}a\theta^2(1 + 3 + 5 + \dots + (2k - 1))$.

b) Retrouvez la loi fondamentale établie par Nicole Oresme : si la vitesse à l'instant zéro est nulle, alors la distance parcourue est proportionnelle au carré du temps.

3. Le point de vue du mathématicien : l'apport du calcul intégral

La trajectoire rectiligne étant munie d'un repère, le mobile est repéré par son abscisse $x(t)$.

On considère la figure 1 : le mobile démarre du point P d'abscisse x_0 avec une vitesse v_0 .

a) Justifiez que : $v(t) = at + v_0$ où $v_0 = v(0)$. Que représente le coefficient a ?

b) Exprimez la distance parcourue entre les instants t_1 et t_2 ($t_1 < t_2$) à l'aide d'une intégrale.

c) A est associé à l'instant t_0 et B à l'instant t_1 ; on note V_m la vitesse associée à I.

Prouvez que : $(t_1 - t_0)V_m = \int_{t_0}^{t_1} v(t) dt$. Que représente V_m pour la fonction vitesse v ?

d) Déterminez l'expression de la loi horaire du mouvement, c'est-à-dire l'expression de $x(t)$.

Des Mathématiques aux Sciences de l'ingénieur

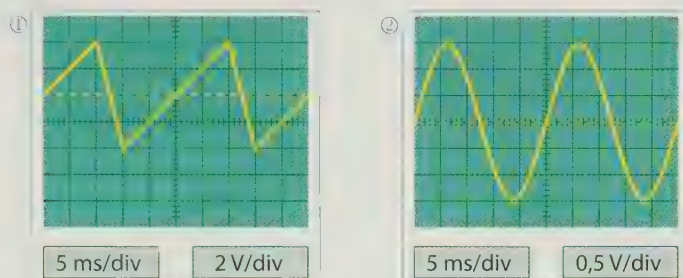
49 Valeur moyenne, valeur efficace

Un générateur de signaux électriques (GDS ou GBF) envoie, dans un conducteur ohmique, un courant périodique. Un écran indique les variations, en fonction du temps t , de la tension $u(t)$ aux bornes de ce dipôle. On s'intéresse aux signaux périodiques, de période T , et aux paramètres appelés tension moyenne et tension efficace.

- La **tension moyenne** $\bar{U}$ est définie comme le quotient de l'aire algébrique du domaine compris entre la courbe et l'axe des temps par la période.
- La **tension efficace** U_{eff} est la tension d'un courant continu (intensité constante) qui générerait la même énergie thermique dans le conducteur ohmique durant une période.

1. Tension moyenne

Sur les écrans ci-dessous sont représentés deux signaux périodiques (les sensibilités sont indiquées).

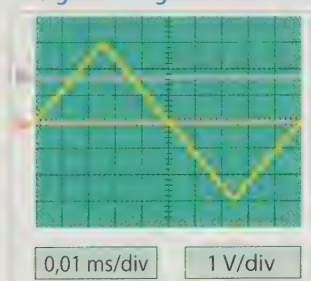


- Dans chacun des cas, précisez par lecture graphique la période T du signal.
- Utilisez les aires pour déterminer, dans chacun des cas, la tension moyenne $\bar{U}$.
- Justifiez que : $\bar{U} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u(t) dt$.

2. Tension efficace

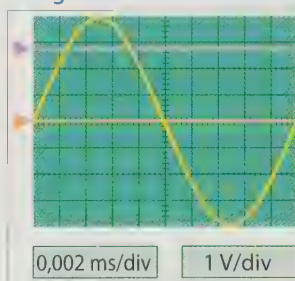
- On considère des signaux périodiques de valeur moyenne nulle ; ils sont dits alternatifs.

① Signal triangulaire alternatif



U_{eff} _____
 $\bar{U}$ _____

② Signal sinusoïdal alternatif



Dans chacun des cas, indiquez par lecture la tension maximale et la tension efficace

- On considère un dipôle purement résistif de résistance R .

On rappelle que l'énergie absorbée par la résistance sur une période T s'exprime par :

$$E = \frac{U^2}{R} \times T \quad (\text{tension continue}) \quad \text{et} \quad E = \frac{1}{R} \int_0^T u^2(t) dt \quad (\text{tension alternative}).$$

Déduisez-en que : $U_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt$.

- Un signal sinusoïdal alternatif est défini par $u(t) = U_{\text{max}} \sin(\omega t)$ où U_{max} est la valeur maximale et $\omega = \frac{2\pi}{T}$ la pulsation. Démontrez que : $\sqrt{2} U_{\text{eff}} = U_{\text{max}}$.

Remarque. Pour un signal triangulaire alternatif, on démontre que $\sqrt{3} U_{\text{eff}} = U_{\text{max}}$.

Aide

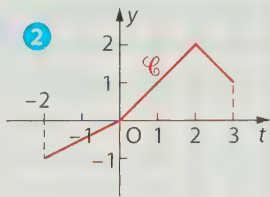
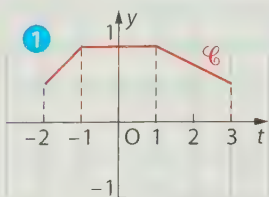
$$\sin^2(\omega t) = \frac{1 - \cos(2\omega t)}{2}$$

Entraînement

DE TÊTE

50 Pour chaque figure, la courbe $\mathcal{C}$ représente une fonction affine par morceaux.

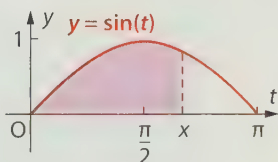
Quelle est la valeur de l'intégrale $\int_{-2}^3 f(t) dt$?



51 La courbe $\mathcal{C}$ représente la fonction sinus sur $[0; \pi]$. F est la fonction définie sur $[0; \pi]$ par :

$$F(x) = \int_0^x \sin(t) dt.$$

Quel est le sens de variation de la fonction F ?



52 Dans chacun des cas, donnez une primitive de la fonction f sur l'intervalle I .

a) $f(x) = \frac{1}{x^2}$; $I =]0; +\infty[$.

b) $f(x) = \frac{1}{x-1}$; $I =]1; +\infty[$.

c) $f(x) = e^{-x}$; $I = \mathbb{R}$.

d) $f(x) = \sin(2x)$; $I = [0; \pi]$.

53 Vrai ou faux

a) La fonction $x \mapsto \ln(x) - 1$ est la primitive sur $]0; +\infty[$ de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ qui s'annule en e .

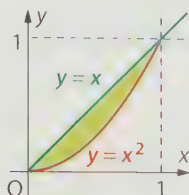
b) La fonction $x \mapsto e^{x \ln(2)}$ est la primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $x \mapsto e^{x \ln(2)}$ dont la courbe passe par le point de coordonnées $(1; 2)$.

54 Donnez la valeur de chaque intégrale.

a) $\int_0^1 (3x^2 - 2x) dx$. **b)** $\int_0^\pi \sin(x) dx$.

c) $\int_1^e \frac{1}{t} dt$. **d)** $\int_0^{-1} e^{-t} dt$.

55 Quelle est l'aire (en u.a.) du domaine colorié sur la figure ci-contre ?

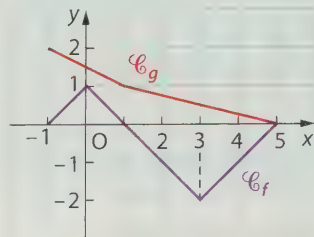


56 On pose $K = \int_2^3 \frac{1}{1+x^2} dx$.

Leïla affirme que $0,1 \leq K \leq 0,2$. A-t-elle raison ?

DES AIRES AUX INTÉGRALES

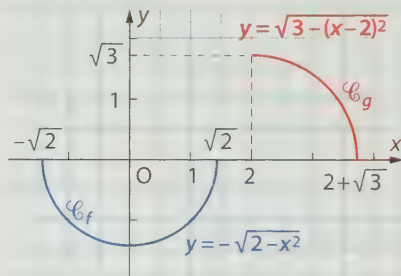
57 Les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ représentent deux fonctions affines par morceaux f et g .



1. Quelle est la valeur de l'intégrale de f et celle de l'intégrale de g sur l'intervalle $[-1; 5]$?

2. Déduisez-en les intégrales sur $[-1; 5]$ des fonctions $f + 4g$ et $5f - 2g$.

58 Les fonctions f et g sont représentées par les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ dont une équation est indiquée.



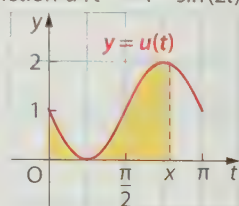
1. Prouvez que ces courbes sont des arcs de cercle dont vous préciserez le centre et le rayon.

2. Déduisez-en la valeur de chaque intégrale :

$$J = \int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} f(t) dt \quad \text{et} \quad K = \int_2^{2+\sqrt{3}} g(t) dt.$$

59 La courbe représente la fonction $u : t \mapsto 1 - \sin(2t)$ sur l'intervalle $[0; \pi]$.

Pour tout x de $[0; \pi]$, on note $U(x)$ l'aire du domaine défini par la courbe, l'axe des abscisses et les droites verticales associées aux abscisses 0 et x .

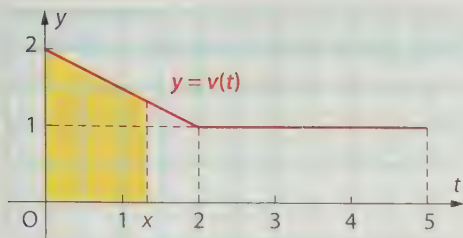


1. Précisez les valeurs $U(0)$ et $U(\pi)$.

2. a) Quelle est la dérivée de la fonction U ?

b) Dressez le tableau de variation de U .

60 La courbe représente une fonction v continue sur l'intervalle $[0; 5]$. Pour tout x de $[0; 5]$, on note $V(x)$ l'aire du domaine « sous la courbe » sur l'intervalle $[0; x]$.



1. Définissez la fonction v .
2. Exprimez $V(x)$ en fonction de x .

Aide On distinguera les cas $0 \leq x \leq 2$ et $2 < x \leq 5$.

3. a) Justifiez que la fonction V est dérivable sur $[0; 5]$ et indiquez l'expression de sa dérivée.
- b) Dressez le tableau de variation de V sur $[0; 5]$.

PRIMITIVES

Pour les exercices 61 à 63

Prouvez, dans chaque cas, que la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle I indiqué.

61 $I =]0; +\infty[$.

- a) $f(x) = \ln(x) - \frac{1}{x} + 1$; $F(x) = (x-1)\ln(x)$.
- b) $f(x) = x^4 \ln(x)$; $F(x) = \frac{x^5}{25}(5\ln(x) - 1)$.

62 $I = \mathbb{R}$.

- a) $f(x) = (x-1)e^{1-x}$; $F(x) = -xe^{1-x}$.
- b) $f(x) = x^2 e^{-x}$; $F(x) = -(x^2 + 2x + 2)e^{-x}$.

63 $I = [0; 2\pi]$.

- a) $f(x) = \cos(x) - \cos^3(x)$; $F(x) = \frac{1}{3}\sin^3(x)$.
- b) $f(x) = \sin(x)\cos(x)$; $F(x) = \frac{1}{4}\cos(2x + \pi)$.

Pour les exercices 64 à 66

Indiquez si les fonctions F et G sont deux primitives de la même fonction f sur l'intervalle I .

- 64** a) $I =]\frac{1}{2}; +\infty[$. $F(x) = \frac{3}{2x-1}$; $G(x) = \frac{9-6x}{4x-2}$.
- b) $I = \mathbb{R}$. $F(x) = \frac{1}{x^2+1}$; $G(x) = \frac{5+3x^2}{2(1+x^2)}$.

65 $I = \mathbb{R}$.

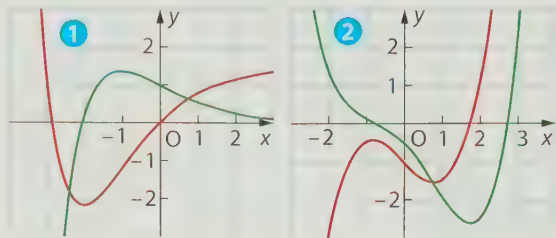
- a) $F(x) = \sin(x) - \cos(x) - 1$; $G(x) = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.
- b) $F(x) = \frac{2x + \sin(2x)}{4}$; $G(x) = \frac{1}{2}(x - 1 + \sin(x)\cos(x))$.

66 $I = \mathbb{R}$.

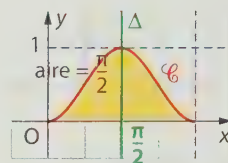
- a) $F(x) = e^x(\cos(x) + \sin(x))$; $G(x) = e^x \cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$.
- b) $F(x) = e^{\frac{1}{2}x + \ln(2)}$; $G(x) = 2\sqrt{e^x}$.

67 Dans chacun des cas, les courbes représentées sont associées à une fonction f et à une de ses primitives F sur l'intervalle de définition.

Attribuez à chaque courbe la fonction qui convient.



68 La courbe $\mathcal{C}$ représente une fonction trigonométrique f sur l'intervalle $[0; \pi]$. La droite Δ d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ est axe de symétrie de $\mathcal{C}$.



Φ est la primitive de f sur $[0; \pi]$ telle que $\Phi(0) = 0$.

1. Exprimez $\Phi(x)$ sous la forme d'une intégrale.
2. Précisez les valeurs de $\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right)$ et $\Phi(\pi)$.
3. Dressez le tableau de variation de la fonction Φ .

Pour les exercices 69 et 70

Déterminez l'expression d'une primitive de la fonction continue f sur l'intervalle I indiqué.

69 Fonctions polynômes

- a) $f(x) = 8x^3 - 6x^2 + 1$; $I = \mathbb{R}$.
- b) $f(x) = 9x^2 - 4x + 5$; $I = \mathbb{R}$.
- c) $f(x) = \frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{5}x^2 + \frac{1}{10}$; $I = \mathbb{R}$.
- d) $f(x) = \frac{10x^4 - 8x^3 + 3x^2}{12}$; $I = \mathbb{R}$.

70 Fonctions puissances à exposants négatifs

- a) $f(x) = \frac{2}{x^3}$; $I =]0; +\infty[$.
- b) $f(x) = -\frac{3}{x^2}$; $I =]-\infty; 0[$.
- c) $f(x) = \frac{1}{2x}$; $I =]0; +\infty[$.
- d) $f(x) = -\frac{1}{x^3} + \frac{4}{x^2} - \frac{1}{x}$; $I =]0; +\infty[$.

71 Vrai ou faux

On considère les fonctions trigonométriques f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \cos(x) - \sin(x) \quad \text{et} \quad g(x) = \cos(x) + \sin(x).$$

- a) g est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
- b) $-f$ est la primitive de g sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en $\frac{\pi}{4}$.

Pour les exercices 72 à 77

Reconnaissez, dans l'expression de la fonction f , l'une des formes citées dans le titre puis déduisez-en une primitive de f sur l'intervalle I indiqué.

72 Forme $\alpha u'u^n$ ($n \in \mathbb{N}$)

$$I = \mathbb{R}.$$

$$\text{a) } f(x) = (2x+1)^{2012}; \quad \text{b) } f(x) = x(1-x^2)^5.$$

$$\text{c) } f(x) = \cos(x) \sin(x); \quad \text{d) } f(x) = e^x(1-e^x)^2.$$

73 Forme $\alpha u'u^{-n}$ (n entier, $n \geq 2$)

$$\text{a) } f(x) = \frac{1}{(2x-1)^{2012}}; \quad I = \left] \frac{1}{2}; +\infty \right[.$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{1}{x(\ln(x))^2}; \quad I =]1; +\infty[.$$

$$\text{c) } f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^4}; \quad I = \mathbb{R}.$$

74 Forme $\alpha \frac{u'}{\sqrt{u}}$ ($u > 0$)

$$\text{a) } f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-1}}; \quad I =]1; +\infty[.$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}; \quad I =]1; +\infty[.$$

$$\text{c) } f(x) = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x+1}}; \quad I = \mathbb{R}.$$

75 Forme $\alpha u'e^u$

$$I = \mathbb{R}.$$

$$\text{a) } f(x) = e^{-2x+1}; \quad \text{b) } f(x) = xe^{-x^2+1}.$$

$$\text{c) } f(x) = (x+1)e^{x^2+2x-3}; \quad \text{d) } f(x) = e^{\sin(x)} \cos(x).$$

76 Forme $\alpha \frac{u'}{u}$ ($u > 0$)

$$\text{a) } f(x) = \frac{2}{x-1}; \quad I =]1; +\infty[.$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{x-2}{-x^2+4x-3}; \quad I =]1; 3[.$$

$$\text{c) } f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}; \quad I = \mathbb{R}.$$

77 Forme $f(x) = \alpha u(ax+b)$ ($a \neq 0$)

$$I = \mathbb{R}.$$

$$\text{a) } f(x) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right); \quad \text{b) } f(x) = 2 \sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right).$$

78 1. Utilisez les formules de dérivation d'un produit ou d'un quotient pour déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle I indiqué.

$$\text{a) } f(x) = \sin(x) + x \cos(x); \quad I = \mathbb{R}.$$

$$\text{b) } f(x) = \frac{x \cos(x) - \sin(x)}{x^2}; \quad I =]0; +\infty[.$$

$$\text{c) } f(x) = \frac{1 - \ln(x)}{x^2}; \quad I =]0; +\infty[.$$

2. Vérifiez vos réponses.

CALCULS D'INTÉGRALES**Pour les exercices 79 à 84**

Calculez la valeur exacte de chaque intégrale à l'aide d'une primitive.

$$\text{79 a) } I = \int_{-1}^4 (2x-3)^2 dx; \quad \text{b) } J = \int_{-2}^1 (x-4)^3 dx.$$

$$\text{c) } K = \int_0^1 (2x+1)(x^2+x) dx; \quad \text{d) } L = \int_1^2 2x(x^2+1)^3 dx.$$

$$\text{80 a) } I = \int_0^2 \frac{3t}{(t^2+1)^2} dt; \quad \text{b) } J = \int_1^2 \frac{t^3}{t^4+1} dt.$$

$$\text{c) } K = \int_0^3 \frac{1}{(2t+1)^2} dt; \quad \text{d) } L = \int_1^2 \frac{1}{3t+2} dt.$$

$$\text{81 a) } I = \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{1+x}} dx; \quad \text{b) } J = \int_0^{-1} \frac{2}{\sqrt{1-3x}} dx.$$

$$\text{c) } K = \int_{-1}^{\sqrt{3}} \frac{3x}{\sqrt{x^2+1}} dx; \quad \text{d) } L = \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx.$$

$$\text{82 a) } I = \int_{\ln(2)}^{\ln(3)} 4e^t dt; \quad \text{b) } J = \int_0^1 te^{t^2-1} dt.$$

$$\text{c) } K = \int_{\frac{1}{3}}^1 e^{1-2t} dt; \quad \text{d) } L = \int_{\frac{\pi}{3}}^0 e^{\cos(t)} \sin(t) dt.$$

$$\text{83 a) } I = \int_2^1 \frac{x-3}{x} dx; \quad \text{b) } J = \int_{-1}^1 \frac{x}{4-x^2} dx.$$

$$\text{c) } K = \int_1^2 \frac{x+1}{(x^2+2x)^2} dx; \quad \text{d) } L = \int_2^1 \frac{x+1}{x^2+2x} dx.$$

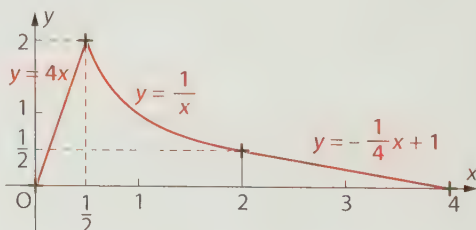
$$\text{84 a) } I = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\pi} \frac{\sin(t) - t \cos(t)}{t^2} dt.$$

$$\text{b) } J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(2t - \frac{\pi}{3}\right) dt.$$

$$\text{c) } K = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\cos(t) - t \sin(t)) dt.$$

$$\text{d) } L = \int_1^2 \sin\left(\pi t + \frac{\pi}{4}\right) dt.$$

85 La courbe rouge représente une fonction f définie par intervalles. Calculez les intégrales I, J, K, L à l'aide de la relation de Chasles.



$$\text{a) } I = \int_0^2 f(x) dx; \quad \text{b) } J = \int_3^1 f(x) dx.$$

$$\text{c) } K = \int_0^4 f(x) dx; \quad \text{d) } L = \int_3^1 \frac{1}{f(x)} dx.$$

86 Dans chaque cas, calculez I en utilisant les propriétés de l'intégration (relation de Chasles, linéarité).

a) $I = \int_1^e \ln(t) dt + \int_1^e \left(t + \ln\left(\frac{1}{t}\right) \right) dt.$

b) $I = \int_1^e \ln(1+t^2) dt + \int_0^1 \ln(1+t^2) dt - \int_0^e \ln(1+t^2) dt.$

c) $I = \int_{\pi}^{\frac{\pi}{6}} \cos(2t) dt - \int_{\pi}^{\frac{7\pi}{6}} \cos(2t) dt.$

87 1. Déterminez deux nombres a et b tels que pour tout x de $\mathbb{R} - \{-3; 3\}$:

$$\frac{6}{x^2 - 9} = \frac{a}{x - 3} + \frac{b}{x + 3}.$$

2. Déduisez-en $I = \int_4^{11} \frac{1}{x^2 - 9} dx.$

88 1. Déterminez trois nombres a , b et c tels que pour tout nombre $x \neq -2$:

$$\frac{x^2 - 5}{x + 2} = ax + b + \frac{c}{x + 2}.$$

2. Déduisez-en $J = \int_{-1}^6 \frac{x^2 - 5}{x + 2} dx.$

89 1. Déterminez trois nombres a , b et c tels que pour tout nombre $x \neq 1$:

$$\frac{x^2}{(x - 1)^2} = a + \frac{b}{x - 1} + \frac{c}{(x - 1)^2}.$$

2. Déduisez-en $K = \int_2^5 \frac{x^2}{(x - 1)^2} dx.$

Pour les exercices 90 et 91

Reportez-vous à l'exercice 40, p. 208, pour la méthode de recherche d'une primitive de la fonction f .

90 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x \sin(x).$$

1. Prouvez que pour tout nombre x :

$$f''(x) + f(x) = 2 \cos(x).$$

2. Déduisez-en la valeur de l'intégrale :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin(x) dx.$$

91 f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (1 - x)e^x.$$

1. Prouvez que pour tout nombre x :

$$f''(x) - 2f'(x) + f(x) = 0.$$

2. Déduisez-en la valeur de l'intégrale :

$$I = \int_0^1 f(t) dt.$$

92 On se propose de calculer $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(2t)}{1 + 2 \sin(t)} dt.$

1. Calculez la valeur de $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t)}{1 + 2 \sin(t)} dt.$

2. a) Démontrez que $I + J = 1.$

b) Déduisez-en la valeur de $I.$

COMPARAISON - VALEUR MOYENNE ENCADREMENT

93 Comparez, sans les calculer, les nombres I et $J.$

a) $I = \int_1^2 (xe^x) dx$ et $J = \int_1^2 (x^2 e^x) dx.$

b) $I = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2} dt$ et $J = \int_0^1 \frac{t}{1+t^2} dt.$

94 Démontrez les inégalités suivantes.

a) $\int_{\frac{1}{2}}^1 \ln(t) dt \geq -\frac{\ln(2)}{2}$ b) $\int_1^2 \frac{1}{1+t^2} dt \leq \frac{1}{2}.$

c) $-\frac{\pi}{2} \leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin(t^2 + 1) dt \leq \frac{\pi}{2}.$

95 Démontrez les encadrements suivants.

a) $\frac{1}{5} \leq \int_1^3 \frac{1}{1+x^2} dx \leq 1.$

b) $\frac{1}{\sqrt{5}} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx \leq \frac{1}{2}.$

c) $\frac{\sqrt{\ln(2)}}{2} \leq \int_{-\sqrt{\ln(2)}}^0 e^{-x^2} dx \leq \sqrt{\ln(2)}.$

96 Calculez la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle I indiqué.

a) $f(x) = 5 \sin(2x)$; $I = [0 ; \pi].$

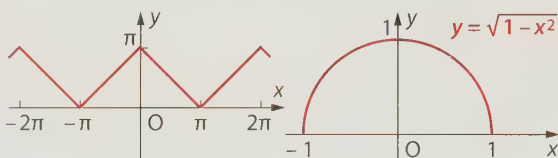
b) $f(x) = 5 \cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$; $I = \left[0 ; \frac{\pi}{2}\right].$

c) $f(x) = \cos(x) \times e^{\sin(x)}$; $I = \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right].$

97 Déterminez graphiquement la valeur moyenne, sur l'intervalle I indiqué, de la fonction représentée.

a) $I = [-\pi ; \pi] ;$

b) $I = [-1 ; 1].$



98 Utilisez l'inégalité de la moyenne pour donner un encadrement de la valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle I indiqué.

a) $f : x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$; $I = [0 ; 1].$

b) $f : x \mapsto \ln(x)$; $I = [1 ; e].$

c) $f : x \mapsto e^{x^2}$; $I = [1 ; \sqrt{2}].$

99 Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

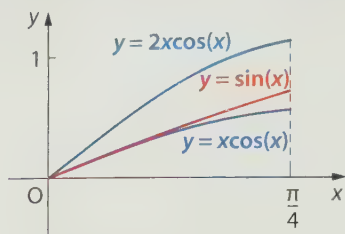
$$I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^n \sin(2x) dx.$$

1. Démontrez que pour tout entier naturel n non nul :

$$0 \leq I_n \leq \left(\frac{\pi}{4}\right)^{n+1}.$$

2. Quelle est la limite de la suite (I_n) ?

100 On se propose de démontrer que pour tout x de l'intervalle $I = \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$, $x \cos(x) \leq \sin(x) \leq 2x \cos(x)$.



On considère la fonction f définie sur l'intervalle I par :

$$f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

1. Démontrez que f est dérivable sur I puis calculez $f'(x)$.

2. a) Justifiez que pour tout x de I ,

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{\cos^2(t)} dt.$$

b) Prouvez que pour tout t de I ,

$$1 \leq \frac{1}{\cos^2(t)} \leq 2.$$

c) Déduisez-en que pour tout x de I , $x \leq f(x) \leq 2x$.

3. Concluez.

101 BAC On se propose de déterminer une valeur approchée, à 10^{-2} près, de l'intégrale $L = \int_0^1 f(x) dx$ où f est la fonction définie sur $[0; 1]$ par $x \mapsto \frac{e^{-x}}{2-x}$.

1. Démontrez que pour tout x de $[0; 1]$,

$$\frac{1}{e} \leq f(x) \leq \frac{1}{2} \quad [1].$$

2. J et K sont les intégrales définies par :

$$J = \int_0^1 (2+x)e^{-x} dx \quad \text{et} \quad K = \int_0^1 x^2 f(x) dx.$$

a) Prouvez que $J = 3 - 4e^{-1}$.

Aide Voir les exercices 40 et 41, p. 208.

b) Utilisez l'encadrement [1] pour démontrer que :

$$\frac{1}{3e} \leq K \leq \frac{1}{6} \quad [2].$$

c) Démontrez que $J + K = 4L$.

d) Déduisez-en un encadrement de L , puis donnez une valeur approchée de L à 10^{-2} près.

102 ALGORITHMIQUE Méthode des rectangles

On se propose de déterminer un encadrement de $J = \int_0^3 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx$, dont l'amplitude n'excède pas 10^{-2} .

1. Justifiez que la fonction à intégrer est positive et décroissante sur $[0; +\infty[$.

2. a) Justifiez que l'amplitude A de l'encadrement est telle que $A < \frac{21}{10n}$.

b) Déduisez-en une valeur de n qui assure un encadrement de J d'amplitude inférieure à 10^{-2} .

3. Voici un algorithme incomplet écrit avec AlgoBox.

```

1  VARIABLES
2  n EST_DU_TYPE NOMBRE
3  k EST_DU_TYPE NOMBRE
4  I EST_DU_TYPE NOMBRE
5  S EST_DU_TYPE NOMBRE
6  DEBUT_ALGORITHME
7  LIRE n
8  I PREND_LA_VALEUR 0
9  S PREND_LA_VALEUR 0
10 POUR k ALLANT_DE 1 A n
11   DEBUT_POUR
12   I PREND_LA_VALEUR I+.....
13   S PREND_LA_VALEUR S+.....
14   FIN_POUR
15 AFFICHER "Encadrement de l'intégrale J"
16 AFFICHER I
17 AFFICHER "<J<"
18 AFFICHER S
19 FIN_ALGORITHME
20
21 Fonction numérique utilisée :
22 F1(x)=1/sqrt(pow(x,2)+1)
  
```

La variable I reçoit la somme des aires des rectangles « inférieurs » et la variable S celle des aires des rectangles « supérieurs ».

a) Complétez les lignes d'instruction en pointillés.

b) Quelle valeur de n doit-on saisir lors du lancement du programme ?

c) Testez l'algorithme.

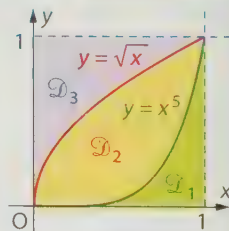
Le résultat obtenu est-il en accord avec une valeur approchée de J obtenue à la calculatrice ?

4. Comment modifier ce programme pour obtenir un encadrement de l'intégrale $L = \int_0^2 \sqrt{x^2+1} dx$ dont l'amplitude ne dépasse pas 10^{-2} ?

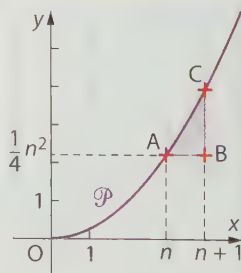
CALCULS D'AIRES

103 Les courbes d'équations $y = \sqrt{x}$ et $y = x^5$ déterminent, à l'intérieur du carré unité, trois domaines D_1, D_2, D_3 .

Calculez, en unité d'aire, l'aire de chacun d'eux.



104 $\mathcal{P}$ est la branche de parabole d'équation $y = \frac{1}{4}x^2$, avec $x \geq 0$. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note u_n l'aire du domaine délimité par $\mathcal{P}$ et les droites d'équations $x = n+1$ et $y = \frac{1}{4}n^2$. Démontrez que la suite (u_n) est arithmétique.



105 On considère la fonction f définie sur $[0; 1]$ par :

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}.$$

$\mathcal{C}$ désigne sa courbe représentative dans un repère orthonormé (unité graphique : 10 cm).

Δ est la droite d'équation $y = x$.

1. a) Prouvez que pour tout x de $[0; 1]$,

$$f(x) - x = \frac{(1-x)(e^x - x - 1)}{e^x - x}.$$

b) Étudiez la position relative de $\mathcal{C}$ et Δ sur $[0; 1]$.

2. Calculez l'aire, en cm^2 , du domaine plan délimité par la courbe $\mathcal{C}$, la droite Δ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

106 BAC f est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = xe^{-x^2}.$$

$\mathcal{C}$ désigne sa courbe dans un repère orthogonal (unités graphiques : 1 cm en abscisse, 5 cm en ordonnée).

1. Justifiez que $\mathcal{C}$ admet l'axe des abscisses comme asymptote en $+\infty$.

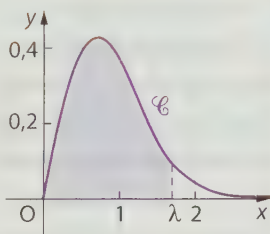
Aide

Pour $x > 0$, vérifiez que $f(x) = \frac{1}{x} \times \frac{x^2}{e^{x^2}}$.

2. λ est un nombre strictement positif.

a) Exprimez, en cm^2 , l'aire $\mathcal{A}(\lambda)$ du domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe $\mathcal{C}$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$.

b) Quelle est la limite de $\mathcal{A}(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$? Interprétez géométriquement ce résultat.



107 On se propose de calculer l'intégrale :

$$I(a) = \int_0^a \ln(x+1) dx,$$

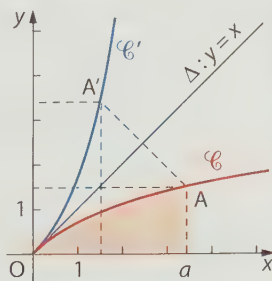
où a est un nombre strictement positif donné.

On admet que, dans un repère orthonormé, les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ d'équations respectives $y = \ln(x+1)$ et $y = e^x - 1$ ($x \in [0; +\infty[$) sont symétriques par rapport à la droite Δ d'équation $y = x$.

1. Prouvez, par des considérations sur les aires, que :

$$I(a) = a \ln(a+1) - \int_0^{\ln(a+1)} (e^x - 1) dx.$$

2. Déduisez-en la valeur de $I(a)$ en fonction de a .

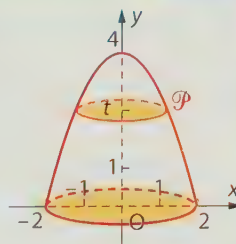


PROLONGEMENT DU TD 46

108 Dans un repère orthonormé, $\mathcal{P}$ est l'arc de parabole d'équation :

$$y = 4 - x^2, \quad -2 \leq x \leq 2.$$

Par rotation autour de l'axe (Oy), $\mathcal{P}$ définit un solide de révolution noté Σ .



1. a) Quelle est la nature de la section de Σ par un plan perpendiculaire à (Oy) au point de coordonnées $(0; t)$ avec $0 \leq t \leq 4$?

b) Exprimez en fonction de t , $0 \leq t \leq 4$, son aire $S(t)$.

2. Calculez le volume (en u.v.) de Σ .

109 f est la fonction définie sur l'intervalle $[0; 2]$ par :

$$f(x) = (x-2)e^x.$$

$\mathcal{C}$ est sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 1 cm).

1. Étudiez les variations de la fonction f .

2. $\mathcal{D}$ est la partie du plan comprise entre $\mathcal{C}$ et l'axe des abscisses sur l'intervalle $[0; 2]$.

Quelle est, en cm^2 , la valeur exacte de l'aire $\mathcal{A}$ de $\mathcal{D}$?

Aide

Voir les exercices 40 et 41, p. 208.

3. En tournant autour de l'axe $(O; \vec{i})$, $\mathcal{C}$ engendre un solide de révolution de volume $\mathcal{V}$.

a) Déterminez trois nombres a, b, c tels que la fonction $G: x \mapsto (ax^2 + bx + c)e^{2x}$ est une primitive de la fonction f^2 sur l'intervalle $[0; 2]$.

b) Déduisez-en la valeur exacte, en cm^3 , de $\mathcal{V}$.

110 BAC f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}.$$

$\mathcal{C}$ désigne sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Prouvez que $\mathcal{C}$ admet deux asymptotes horizontales dont vous préciserez les équations.

2. λ désigne un nombre positif.

On note $V(\lambda)$ l'intégrale $\int_{-\lambda}^0 \pi [f(x)]^2 dx$. On admet que $V(\lambda)$ est une mesure, exprimée en unité de volume, du volume engendré par la rotation, autour de l'axe des abscisses, de l'arc de $\mathcal{C}$ obtenu pour $-\lambda \leq x \leq 0$.

a) Déterminez deux nombres a, b tels que pour tout x :

$$\frac{e^{2x}}{(e^x + 1)^2} = \frac{ae^x}{e^x + 1} + \frac{be^x}{(e^x + 1)^2}.$$

b) Exprimez $V(\lambda)$ en fonction de λ .

c) Calculez la limite de $V(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$. Interprétez géométriquement ce résultat.

DANS LES AUTRES SCIENCES

111 Intensité efficace (électricité)

L'intensité, à un instant $t \geq 0$, d'un courant alternatif de période T s'exprime sous la forme :

$$i(t) = I_m \sin(\omega t)$$

où I_m représente l'intensité maximale du courant et ω sa pulsation avec $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

On appelle intensité efficace du courant, notée I_e , l'intensité d'un courant continu qui produit en une période le même effet calorifique à travers une résistance R .

Ainsi, l'énergie W fournie dans l'intervalle $[0; T]$ est $W = R \int_0^T i^2(t) dt$ en courant alternatif et $W = RI_e^2 T$ en courant continu.

1. Prouvez que I_e^2 est la valeur moyenne de la fonction i^2 sur $[0; T]$.

2. Exprimez I_e en fonction de I_m .

Aide

$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}.$$

112 BAC Vitesse instantanée (cinématique)

Un cycliste roule sur une route descendante rectiligne et très longue. On note $v(t)$ sa vitesse à l'instant t , où t est exprimé en s et $v(t)$ en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$.

On suppose, de plus, que la fonction v ainsi définie est dérivable sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

Un modèle simple permet de considérer que la fonction v doit vérifier les conditions :

$$v(0) = 0 \text{ et } 10v'(t) + v(t) = 30.$$

1. Prouvez que la fonction v définie sur $[0; +\infty[$ par $v(t) = 30 \left(1 - e^{-\frac{t}{10}}\right)$ vérifie les conditions indiquées.

2. Étudiez le sens de variation de la fonction v en précisant sa limite en $+\infty$.

3. On considère, dans cette situation, que la vitesse du cycliste est stabilisée lorsque son accélération $v'(t)$ est inférieure à $0,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Déterminez, à 1 s près, la plus petite valeur de t à partir de laquelle la vitesse du cycliste est stabilisée.

4. a) Pour $t \geq 0$, justifiez que la distance parcourue à partir de l'instant initial est $d(t) = \int_0^t v(u) du$.

b) Quelle est, à 1 m près, la distance parcourue par ce cycliste en 35 secondes ?



EXERCICES DE SYNTHÈSE

113 BAC Égalité d'aires

Partie A. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $I =]0; +\infty[$ par $f(x) = \ln(x) + 1 - \frac{1}{x}$.

1. a) Étudiez les variations de f sur l'intervalle I .

b) Déduisez-en le signe de $f(x)$ lorsque x décrit I .

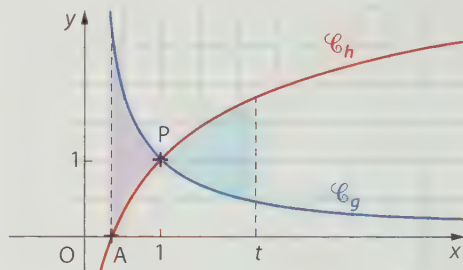
2. a) Vérifiez que la fonction F définie sur $]0; +\infty[$ par $F(x) = (x-1)\ln(x)$ est une primitive de f sur I .

b) Justifiez que F est strictement croissante sur $[1; +\infty[$.

c) Prouvez que l'équation $F(x) = 1 - e^{-1}$ admet une unique solution, notée α , dans l'intervalle $[1; +\infty[$. Donnez un encadrement de α d'amplitude 10^{-2} .

Partie B. On considère les fonctions g et h définies sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = \frac{1}{x}$ et $h(x) = \ln(x) + 1$.

Sur le graphique, on a tracé leurs courbes $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_h$.



1. A est le point d'intersection de l'axe des abscisses et de $\mathcal{C}_h$. Quelles sont les coordonnées de A ?

2. P est le point d'intersection des courbes $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_h$. Justifiez que les coordonnées de P sont $(1; 1)$.

3. On note $\mathcal{A}$ l'aire du domaine délimité par $\mathcal{C}_g$, $\mathcal{C}_h$ et les droites d'équations $x = e^{-1}$ et $x = 1$.

a) Exprimez, en unité d'aire, l'aire $\mathcal{A}$ à l'aide de la fonction f définie dans la partie A.

b) Prouvez que $\mathcal{A} = 1 - e^{-1}$.

4. t est un nombre strictement supérieur à 1.

On note $\mathcal{A}_t$ l'aire du domaine délimité par droites d'équations $x = 1$, $x = t$, et les courbes $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_h$.

On veut déterminer une valeur de t telle que : $\mathcal{A} = \mathcal{A}_t$.

a) Prouvez que $\mathcal{A}_t = (t-1)\ln(t)$.

b) Concluez.

114 BAC Suites et intégrales

f est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(x+3)}{x+3}.$$

1. Étudiez les variations de la fonction f sur $[0; +\infty[$ et précisez sa limite en $+\infty$.

2. On définit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par son terme général :

$$u_n = \int_n^{n+1} f(x) dx.$$

a) Justifiez que pour tout x de $[n; n+1]$,

$$f(n+1) \leq f(x) \leq f(n).$$

b) Déduisez-en que pour tout entier naturel n ,

$$f(n+1) \leq u_n \leq f(n).$$

c) Justifiez que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et précisez sa limite.

3. a) On pose, pour tout entier naturel n ,

$$I_n = \int_0^n f(x) dx.$$

Exprimez I_n en fonction de n .

b) On pose, pour tout entier $n \geq 1$,

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}.$$

Calculez S_n . La suite $(S_n)_{n \geq 1}$ est-elle convergente ?

115 BAC Primitives et aire

Partie A. On donne le tableau de variation d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow 0$	$\nearrow 4e^{-2}$	$\searrow 0$

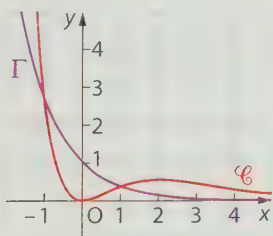
On définit la fonction F sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \int_2^x f(t) dt$.

1. Déterminez les variations de la fonction F sur $\mathbb{R}$.

2. Prouvez que $0 \leq F(3) \leq 4e^{-2}$.

Partie B. On a tracé les représentations graphiques $\mathcal{C}$ et Γ des fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 e^{-x} \quad \text{et} \quad g(x) = e^{-x}.$$



1. a) Vérifiez que les variations de f sont celles du tableau de la partie A.

b) Étudiez les positions relatives de $\mathcal{C}$ et Γ .

2. h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = (x^2 - 1)e^{-x}$.

a) Déterminez une primitive H de h sur $\mathbb{R}$ sachant qu'elle s'exprime sous la forme $H(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ où a, b, c sont trois nombres.

b) α est un nombre tel que $\alpha \geq 1$.

On considère la partie du plan délimitée par $\mathcal{C}$, Γ et les droites d'équations $x = 1$ et $x = \alpha$.

Déterminez en fonction de α l'aire $\mathcal{A}(\alpha)$, exprimée en unité d'aire, de cette partie du plan.

c) Quelle est la limite de $\mathcal{A}(\alpha)$ lorsque α tend vers $+\infty$?

116 LOGIQUE Raisonnement exact ou pas ?

Soit u la suite définie pour tout n de $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \int_1^n e^{-t^2} dt.$$

On veut prouver que la suite u est convergente.

On considère pour cela le raisonnement suivant :

« Je choisis $m = 0$ et $M = 1$.

Pour tout t de $[1; n]$, on a $t^2 \geq t$, donc $0 \leq e^{-t^2} \leq e^{-t}$.

Il s'ensuit que $0 \leq u_n \leq \int_1^n e^{-t} dt$ d'où $0 \leq u_n \leq [-e^{-t}]_1^n$ soit enfin $0 \leq u_n \leq e^{-1} - e^{-n} \leq 1$.

Cet encadrement étant vrai pour tout n de $\mathbb{N}^*$, la suite u apparaît bornée par $m = 0$ et $M = 1$.

La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ est continue et positive sur $[1; n]$; u_n représente donc l'aire de la portion de plan comprise entre les droites d'équations $x = 1$, $x = n$, $y = 0$, et la courbe représentative de cette fonction. Cette aire augmente quand n augmente, ce qui se traduit par le fait que la suite u est croissante.

Conclusion : la suite u est croissante et majorée par 1, donc la suite u est convergente ».

Ce raisonnement est-il exact ? Justifiez.

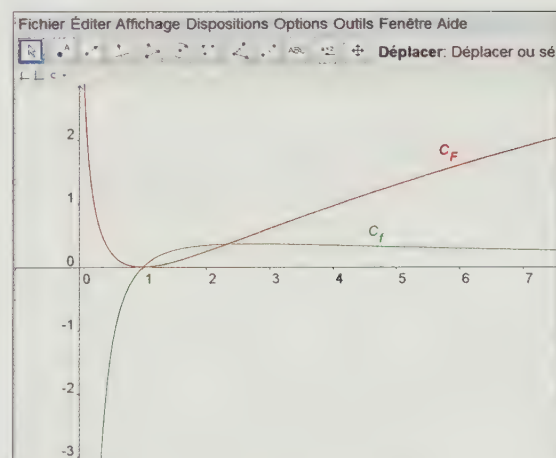
D'après Concours FESIC

AVEC LES TICE

117 Avec GeoGebra, on a représenté sur l'intervalle $]0; +\infty[$:

- la fonction $f : x \mapsto \frac{\ln(x)}{x}$;

- sa primitive F sur $]0; +\infty[$ qui s'annule en 1.



1. Déterminez l'expression de $F(x)$.

2. Vérifiez votre réponse avec le logiciel.

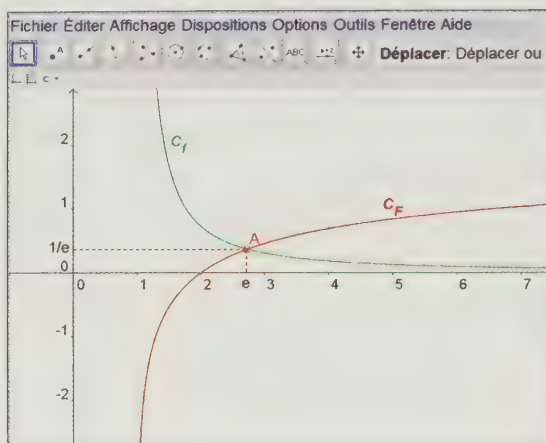
Aide : Utilisez l'instruction « Dérivée » puis éventuellement « Simplifier ».

3. La courbe de F semble couper la courbe de f au point correspondant au maximum de la fonction f . Cette conjecture est-elle exacte ? Justifiez.

118 Avec GeoGebra, on a représenté sur l'intervalle $]1; +\infty[$:

– la fonction $f : x \mapsto \frac{1}{x \ln(x)}$;

– sa primitive F sur $]1; +\infty[$ dont la courbe passe par le point $A(e; f(e))$.

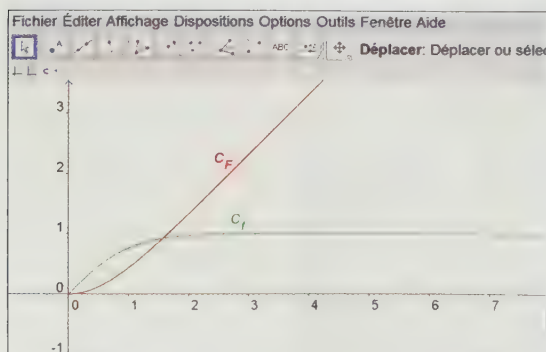


1. Déterminez l'expression de $F(x)$.
2. Vérifiez votre réponse avec le logiciel.
3. La courbe de F semble couper l'axe des abscisses au point d'abscisse 2. Cette conjecture est-elle exacte ? Justifiez.

119 Avec GeoGebra, on a représenté sur l'intervalle $[0; +\infty[$:

– la fonction $f : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$;

– sa primitive F sur $[0; +\infty[$ qui s'annule en 0.



1. Déterminez l'expression de $F(x)$.
2. Vérifiez votre réponse avec le logiciel.
3. Quelle est la limite en $+\infty$ de f ? Celle de F ? Justifiez vos réponses.

Prendre toutes les initiatives

120 Calcul d'une intégrale

Quelle est la valeur exacte de $\int_0^1 \sqrt{x(1-x)} dx$?

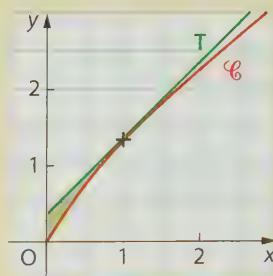
121 Aire entre une courbe et une de ses tangentes

Sur la figure, $\mathcal{C}$ représente la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = x(1 + e^{-x}).$$

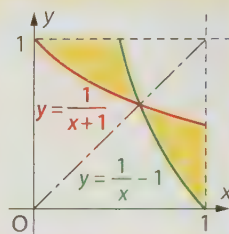
T désigne la tangente à $\mathcal{C}$ de coefficient directeur 1.

L'aire (en u.a.) du domaine défini par l'axe des ordonnées, la courbe $\mathcal{C}$ et la tangente T dépasse-t-elle un dixième ?



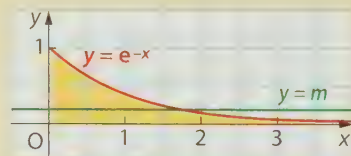
122 Calcul d'une aire

Déterminez à 1 millième près une valeur approchée de l'aire du domaine colorié, exprimée en unité d'aire.



123 Partage d'un domaine

Le domaine $\mathcal{D}$ défini par l'axe des abscisses et la courbe d'équation $y = e^{-x}$, $x \in [0; +\infty[$, est partagé en deux par la droite d'équation $y = m$ ($0 < m < 1$).



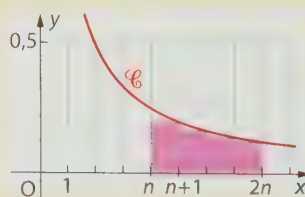
Déterminez m pour que les deux parties aient la même aire.

124 Convergence d'une suite

La courbe $\mathcal{C}$ représente la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ définie sur $]0; +\infty[$.

On définit la suite (S_n) par : pour tout entier $n \geq 1$,

$$S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{2n}.$$



Prouvez que (S_n) converge et précisez sa limite.

125 Travail en autonomie

→ Rédigez la solution de cet exercice en vous aidant du guide.



Sur le Web

Retrouvez le corrigé de cet exercice sur le site www.dunsmathlycee.net/eleve-TermS

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+e^{-x}} dx.$$

1. **a)** Démontrez que $u_0 + u_1 = 1$.
- b)** Calculez u_1 puis déduisez-en u_0 .
2. Prouvez que pour tout entier naturel n , $u_n \geq 0$.
3. **a)** Démontrez que pour tout entier naturel n non nul :

$$u_n + u_{n+1} = \frac{1-e^{-n}}{n}.$$

- b)** Déduisez-en que pour tout entier naturel n non nul :

$$u_n \leq \frac{1-e^{-n}}{n}.$$

4. Prouvez que (u_n) converge vers une limite que vous préciserez.

Analyser l'énoncé

Notez que la somme de deux termes consécutifs de la suite s'exprime en fonction de n .

Ces relations seront sûrement exploitées dans l'enchaînement des questions.

Analyser l'énoncé

Pensez à regrouper les résultats intermédiaires. La suite (u_n) est encadrée par deux suites, donc on peut penser à l'utilisation du théorème d'encadrement.

Guide

1. **a)** Utilisez la linéarité de l'intégration.

Vous obtenez une seule intégrale facile à calculer.

$$\text{b) } u_1 = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} dx.$$

Cherchez une primitive de la fonction à intégrer.

Vous devez reconnaître une forme usuelle.

2. Regardez le signe de la fonction à intégrer. Vous pouvez alors conclure.

3. **a)** Utilisez la linéarité de l'intégration pour écrire une seule intégrale.

Pensez alors à utiliser les propriétés de la fonction exponentielle.

$$e^{-nx} + e^{-(n+1)x} = e^{-nx}(1+e^{-x}).$$

La somme $u_n + u_{n+1}$ s'exprime alors comme l'intégrale d'une fonction que vous pouvez intégrer.

- b)** Vous connaissez le signe de u_{n+1} . Vous pouvez en déduire l'inégalité demandée.

4. Écrivez un encadrement de u_n .

Examinez la limite de la suite qui majore la suite (u_n) .

Vous pouvez alors conclure.

ZOOM sur la rédaction

Précisez bien la forme utilisée. Indiquez les conditions imposées pour exprimer cette primitive.

ZOOM sur la rédaction

Justifiez la simplification de la fonction à intégrer. Précisez la méthode utilisée pour obtenir une primitive sur $[0; 1]$ de cette fonction. Détaillez vos calculs.

ZOOM sur la rédaction

Mettez bien en évidence l'articulation entre les différentes questions. Citez le théorème utilisé et justifiez que les conditions de son application sont bien remplies.

126 ROC Restitution organisée des connaissances

Prérequis

u et v sont deux fonctions continues sur $[a; b]$ ($a < b$).

- Si $u \geq 0$ sur $[a; b]$, alors $\int_a^b u(t) dt \geq 0$.
- Pour tous nombres α et β ,

$$\int_a^b [\alpha u(t) + \beta v(t)] dt = \alpha \int_a^b u(t) dt + \beta \int_a^b v(t) dt.$$

Démonstration

Démontrez que si f et g sont deux fonctions continues sur un intervalle $[a; b]$ avec $a < b$,
 et si, pour tout t de $[a; b]$, $f(t) \leq g(t)$ alors :

$$\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt.$$

127 Vrai ou faux

Répondez par vrai ou par faux à chacune des questions.
 Justifiez votre réponse. La calculatrice est interdite.

On considère les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos^2(t) dt \quad \text{et} \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \sin^2(t) dt.$$

a) Pour tout nombre t , $\cos^2(t) - \sin^2(t) = \sin(2t)$.

b) $I + J = \pi$. c) $I - J = -\frac{1}{2}$.

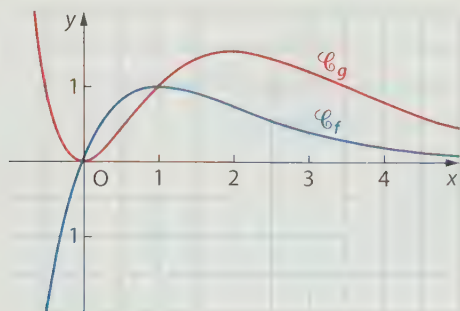
d) $I = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{4}$ et $J = \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{4}$.

D'après Concours FESIC

128 BAC Des intégrales et des aires

Les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ ci-dessous représentent les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = xe^{1-x} \quad \text{et} \quad g(x) = x^2 e^{1-x}.$$


1. Calcul d'intégrales

Pour tout entier naturel n , on définit l'intégrale I_n par :

$$I_0 = \int_0^1 e^{1-x} dx \quad \text{et pour } n \geq 1, I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx.$$

a) Calculez la valeur exacte de I_0 .

b) Prouvez que pour tout entier naturel n :

$$(n+1)I_n - I_{n+1} = 1.$$

Aide Utilisez la formule $u'v + uv' = (uv)'$.

c) Déduisez-en la valeur exacte de I_1 puis celle de I_2 .

2. Calcul d'une aire plane

a) Étudiez la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

b) On désigne par $\mathcal{A}$ l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine plan compris entre $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ d'une part, les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$ d'autre part.
 En exprimant $\mathcal{A}$ comme la différence de deux aires que vous préciserez, démontrez que $\mathcal{A} = 3 - e$.

3. Étude de l'égalité de deux aires

a désigne un nombre strictement supérieur à 1.

On note $\mathcal{P}(a)$ l'aire, exprimée en unité d'aire, du domaine plan compris entre $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ d'une part, les droites d'équations $x = 1$ et $x = a$ d'autre part.

On admet que $\mathcal{P}(a)$ s'exprime par :

$$\mathcal{P}(a) = 3 - e^{1-a}(a^2 + a + 1).$$

L'objectif de cette question est de prouver qu'il existe une et une seule valeur de a pour laquelle les aires $\mathcal{A}$ et $\mathcal{P}(a)$ sont égales.

a) Prouvez que l'équation $\mathcal{P}(a) = \mathcal{A}$ est équivalente à :

$$e^a = a^2 + a + 1.$$

b) Dans cette partie, toute trace d'argumentation, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Concluez quant à l'existence et l'unicité du réel a solution du problème.

129 BAC Comparaison d'aires

1. On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \ln(x) - \frac{2}{x}.$$

Voici son tableau de variation :

x	0	2,3	x_0	2,4	$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$		0		$+\infty$

Démontrez toutes les propriétés de g regroupées dans ce tableau.

2. f est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{5 \ln(x)}{x}.$$

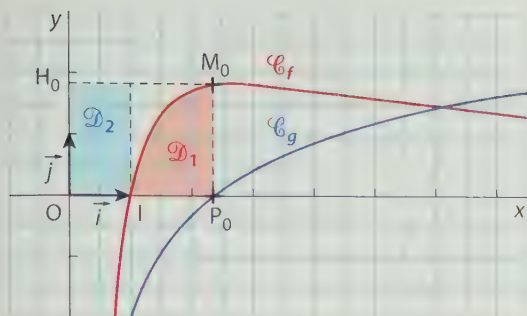
a) Prouvez que $f(x_0) = \frac{10}{x_0^2}$ où x_0 est le nombre vu au 1.

b) a désigne un nombre strictement supérieur à 1.

Exprimez $\int_1^a f(t) dt$ en fonction de a .

3. On a tracé, dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ représentatives de f et g . On appelle I le point de coordonnées $(1; 0)$, P_0 le point d'intersection de $\mathcal{C}_g$ et de l'axe des abscisses, M_0 le point de $\mathcal{C}_f$ ayant même abscisse que P_0 , et H_0 le projeté orthogonal de M_0 sur l'axe des ordonnées.

$\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ sont les domaines plans indiqués sur la figure.



Démontrez que $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ ont la même aire, puis donnez un encadrement de cette aire, d'amplitude 0,2.

130 BAC De la conjecture à la preuve

(I_n) désigne la suite définie pour tout n de $\mathbb{N}^*$ par :

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx.$$

1. Calculez I_1 .

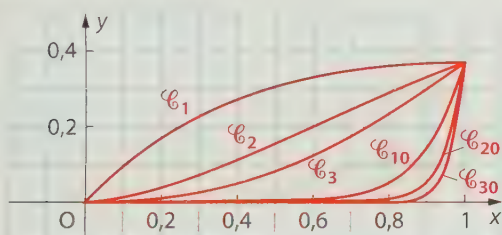
2. Pour tout naturel n non nul, on note $\mathcal{C}_n$ la représentation graphique de la fonction f_n définie sur $[0; 1]$ par :

$$f_n(x) = x^n e^{-x}.$$

Ainsi, pour tout naturel n non nul :

$$I_n = \int_0^1 f_n(x) dx.$$

On a tracé ci-dessous $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \mathcal{C}_{10}, \mathcal{C}_{20}, \mathcal{C}_{30}$.



a) Formulez une conjecture sur le sens de variation de la suite (I_n) en décrivant votre démarche.

b) Démontrez cette conjecture.

c) Déduisez-en que la suite (I_n) converge.

d) Déterminez $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

131 BAC Encadrement d'une intégrale

Le but de cet exercice est de donner un encadrement du nombre J défini par :

$$J = \int_0^1 \frac{x^2 e^x}{1+x} dx.$$

f est la fonction définie sur $[0; 1]$ par :

$$f(x) = \frac{e^x}{1+x}.$$

1. Étudiez les variations de f sur $[0; 1]$.

2. On pose pour tout entier naturel n , $S_n = \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{5}\right)$.

a) Justifiez que pour tout entier k entre 0 et 4, on a :

$$\frac{1}{5} f\left(\frac{k}{5}\right) \leq \int_{\frac{k}{5}}^{\frac{k+1}{5}} \frac{e^x}{1+x} dx \leq \frac{1}{5} f\left(\frac{k+1}{5}\right).$$

b) Déduisez-en l'encadrement suivant :

$$\frac{1}{5} S_4 \leq \int_0^1 \frac{e^x}{1+x} dx \leq \frac{1}{5} (S_5 - 1).$$

c) Donnez une valeur approchée à 10^{-4} près de S_4 et de S_5 , puis déduisez-en l'encadrement :

$$1,091 \leq \int_0^1 \frac{e^x}{1+x} dx \leq 1,164.$$

3. a) Démontrez que pour tout x de $[0; 1]$:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + \frac{x^2}{1+x}.$$

b) Justifiez l'égalité :

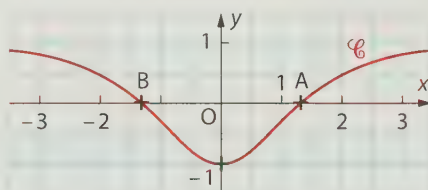
$$\int_0^1 \frac{e^x}{1+x} dx = \int_0^1 (1-x)e^x dx + J.$$

c) Calculez $\int_0^1 (1-x)e^x dx$.

d) Déduisez-en un encadrement de J d'amplitude inférieure à 10^{-1} .

132 BAC Primitive et aire

La courbe $\mathcal{C}$ ci-dessous représente la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = 1 - \frac{4e^t}{e^{2t} + 1}$.



1. a) L'axe des ordonnées semble être axe de symétrie de $\mathcal{C}$. Prouvez que cette conjecture est vraie.

b) On note a l'abscisse du point A et on pose $c = e^a$.

Prouvez que c est une solution de l'équation :

$$X^2 - 4X + 1 = 0.$$

Déduisez-en la valeur exacte de a .

c) Dressez le tableau du signe de $f(t)$.

2. On se propose d'étudier quelques propriétés de la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

a) Déterminez les variations de la fonction F sur $\mathbb{R}$.

b) Interprétez géométriquement le nombre $F(a)$.

Déduisez-en que $-a \leq F(a) \leq 0$.

c) On cherche la limite éventuelle de F en $+\infty$.

Prouvez que pour tout nombre positif t , $f(t) \geq 1 - 4e^{-t}$.

Déduisez-en que pour tout nombre positif x ,

$$F(x) \geq x - 4.$$

Concluez.

d) Dans cette question, toute trace de recherche ou d'initiative, même incomplète, sera prise en compte.

Déterminez la limite de $F(x)$ lorsque x tend vers $-\infty$.

Pour aller plus loin

133 Intégration par parties

1. Démonstration

On se propose de démontrer le théorème suivant :

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I , dont les dérivées u' et v' sont continues sur I .

Alors, pour tous nombres a et b de I :

$$\int_a^b u(t) v'(t) dt = [u(t) v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t) v(t) dt.$$

C'est la **formule d'intégration par parties**.

a) Justifiez que la fonction uv est dérivable sur I et que sa dérivée $(uv)'$ est continue sur I .

b) Prouvez que :

$$\int_a^b (uv)'(t) dt = \int_a^b (u'(t) v(t) + u(t) v'(t)) dt.$$

c) Déduisez-en la formule d'intégration par parties.

2. Application

Calculez, en utilisant la formule d'intégration par parties :

a) $J = \int_0^1 (1-t) e^{-t} dt$ **b)** $K = \int_1^e \ln(t) dt$

Aide

a) Posez $u(t) = 1-t$ et $v'(t) = e^{-t}$.

b) Posez $u(t) = \ln(t)$ et $v'(t) = 1$.

Pour les exercices 134 à 139, utilisez la formule d'intégration par parties vue dans l'exercice 133.

134 Calculs d'intégrales

On se propose de calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}, J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} dx, K = \int_0^1 \sqrt{x^2+1} dx.$$

1. f est la fonction définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par :

$$f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+1}).$$

a) Calculez l'expression de sa dérivée f' .

b) Déduisez-en la valeur exacte de I .

2. a) Justifiez que $I + J = K$.

b) À l'aide d'une intégration par parties portant sur K , prouvez que $K = \sqrt{2} - J$.

c) Déduisez-en la valeur exacte de J et celle de K .

135 Calculs d'intégrales

On considère les intégrales $I = \int_0^\pi e^x \cos(2x) dx$,

$$J = \int_0^\pi e^x \cos^2(x) dx \text{ et } K = \int_0^\pi e^x \sin^2(x) dx.$$

1. À l'aide de deux intégrations par parties successives, prouvez que $I = \frac{e^\pi - 1}{5}$.

2. a) Calculez $J + K$ et $J - K$.

b) Déduisez-en la valeur exacte de J et celle de K .

136 Calculs de primitives

f et g sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^{2x} \cos(x) \text{ et } g(x) = e^{2x} \sin(x).$$

Chacune de ces fonctions est continue sur $\mathbb{R}$ donc admet une unique primitive sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0.

Ces primitives s'expriment sous forme intégrale par :

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt \text{ et } G(x) = \int_0^x g(t) dt.$$

1. Par intégration par parties, prouvez que pour tout nombre x :

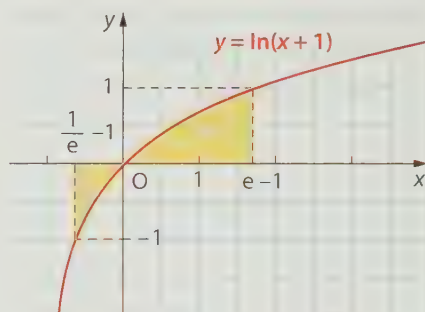
$$F(x) = e^{2x} \sin(x) - 2G(x)$$

$$\text{et } G(x) = -e^{2x} \cos(x) + 1 + 2F(x).$$

2. Déduisez-en l'expression de $F(x)$ et de $G(x)$.

137 Calcul d'aire

Calculez, en unité d'aire, l'aire du domaine colorié représenté ci-dessous.



138 Calcul de volume

Sur la figure ci-contre, l'arc de courbe $\widehat{AB}$ représente la fonction définie sur $[0; 1]$ par :

$$f(x) = e^{1-x}.$$

t est un nombre quelconque de l'intervalle $[1; e]$.

1. Résolvez dans $\mathbb{R}$ l'équation $e^{1-x} = t$ d'inconnue x .

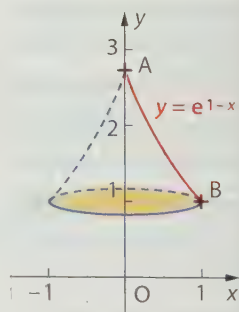
2. On considère le solide obtenu par rotation de l'arc de courbe $\widehat{AB}$ autour de l'axe des ordonnées.

On note $\mathcal{V}$ son volume exprimé en unité de volume.

a) Justifiez que $\mathcal{V} = \pi \int_1^e (1 - \ln(t))^2 dt$.

Aide Voir l'exercice 46, p. 211.

b) Calculez $\mathcal{V}$ en utilisant deux intégrations par parties successives.



139 Convergence d'une suite d'aires

1. Calculez l'intégrale $J = \int_0^1 x e^{-x} dx$.

2. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on pose :

$$S_n = \frac{1}{n^2} e^{-\frac{1}{n}} + \frac{2}{n^2} e^{-\frac{2}{n}} + \dots + \frac{n}{n^2} e^{-\frac{n}{n}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} e^{-\frac{k}{n}}.$$

a) Exprimez S_n à l'aide de la fonction $f : x \mapsto x e^{-x}$.

b) Prouvez que la suite (S_n) converge vers le nombre J .

140 La constante d'Euler

1. Prouvez que pour n de $\mathbb{N}^*$ et tout x de $[0; 1]$:

$$\frac{1}{n} - \frac{x}{n^2} \leq \frac{1}{x+n} \leq \frac{1}{n}.$$

2. a) Calculez $\int_0^1 \frac{1}{x+n} dx$.

b) Déduisez-en que pour tout entier $n \geq 1$:

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} \leq \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}.$$

3. On appelle U la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n).$$

Démontrez que la suite U est décroissante.

4. On désigne par V la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$V_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n+1).$$

Démontrez que la suite V est croissante.

5. a) Prouvez que la suite U converge. On note γ sa limite.

b) Démontrez que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n - V_n) = 0$.

Déduisez-en que la suite V converge aussi vers γ .

c) Déterminez une valeur approchée de γ à 10^{-2} près par une méthode de votre choix.

Remarque. Le nombre γ est appelé **constante d'Euler**.

141 Primitive et suite

Pour tout nombre x de $[0; +\infty[$, on pose :

$$F(x) = \int_0^x \ln(1 + e^{-2t}) dt.$$

1. Étudiez le sens de variation de F .

2. a désigne un nombre strictement positif.

a) Justifiez que pour tout t de $[1; 1+a]$, $\frac{1}{1+a} \leq \frac{1}{t} \leq 1$.

b) Déduisez-en que $\frac{a}{1+a} \leq \ln(1+a) \leq a$.

3. x désigne un nombre strictement positif.

a) Démontrez que :

$$\int_0^x \frac{e^{-2t}}{1+e^{-2t}} dt \leq F(x) \leq \int_0^x e^{-2t} dt.$$

b) Déduisez-en que :

$$\frac{1}{2} \ln(2) - \frac{1}{2} \ln(1+e^{-2x}) \leq F(x) \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-2x}.$$

4. On admet que lorsque x tend vers $+\infty$, la limite de $F(x)$ est un nombre noté ℓ .

Justifiez que $\frac{1}{2} \ln(2) \leq \ell \leq \frac{1}{2}$.

5. (u_n) est la suite définie pour tout n de $\mathbb{N}$ par :

$$u_n = \int_n^{n+1} \ln(1+e^{-2t}) dt.$$

a) Démontrez que pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq \ln(1+e^{-2n})$.

b) Déduisez-en que (u_n) converge et précisez sa limite.

6. Pour tout entier naturel n , on pose $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$.

a) Exprimez S_n à l'aide de la fonction F et de n .

b) Prouvez que la suite (S_n) converge et précisez sa limite.

142 Intégrale et aire

On se propose de calculer le nombre $K = \int_0^{0.5} \sqrt{1-t^2} dt$.

1. On considère F la fonction définie sur $[0; 1]$ par :

$$F(x) = \int_0^x \sqrt{1-t^2} dt.$$

a) Justifiez que la fonction F est dérivable sur $[0; 1]$, puis exprimez sa dérivée F' .

b) La fonction G est définie pour tout x de $I = [0; \frac{\pi}{2}]$ par :

$$G(x) = F(\sin(x)).$$

Prouvez que G est dérivable sur I

et que pour tout x de I ,

$$G'(x) = \cos^2(x).$$

c) Démontrez que pour tout x de I ,

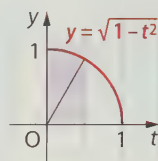
$$G(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin(2x).$$

d) Déduisez-en la valeur exacte de K .

2. Retrouvez la valeur de K en utilisant la représentation graphique ci-contre et des considérations sur les aires.

Aide

Voir chapitre 4, §4.3.

**143 Suite et intégrale**

(u_n) est la suite définie pour tout n de $\mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2} e^{\frac{t}{n}} dt.$$

1. a) Étudiez les variations de la fonction φ définie sur $[0; 2]$ par : $\varphi(t) = \frac{2t+3}{t+2}$.

b) Déduisez-en que pour tout n de $\mathbb{N}^*$,

$$\frac{3}{2}n\left(e^{\frac{2}{n}} - 1\right) \leq u_n \leq \frac{7}{4}n\left(e^{\frac{2}{n}} - 1\right).$$

c) On rappelle que $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1$.

Prouvez que si (u_n) admet une limite ℓ , alors :

$$3 \leq \ell \leq \frac{7}{2}.$$

2. a) Vérifiez que pour tout t de $[0; 2]$,

$$\frac{2t+3}{t+2} = 2 - \frac{1}{t+2}.$$

Déduisez-en la valeur de l'intégrale $J = \int_0^2 \frac{2t+3}{t+2} dt$.

b) Démontrez que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $J \leq u_n \leq e^{\frac{2}{n}} \times J$.

c) Prouvez que (u_n) converge et précisez sa limite ℓ .

Nombres complexes

D'un siècle
à un autre

La méthode de résolution des équations du troisième degré, publiée par l'Italien Cardan dans *Ars Magna* (1545), aurait été empruntée à un autre Italien, Tartaglia. Cette méthode fait apparaître des nombres « imaginaires » qui donnent accès aux solutions réelles : les nombres complexes étaient nés !

Ces nombres complexes sont aujourd'hui abondamment utilisés pour les simplifications d'écriture et de calculs qu'ils permettent, notamment en physique pour décrire le fonctionnement d'oscillateurs électriques.

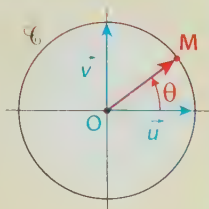


En savoir plus sur
Jérôme Cardan

→ Chercheurs d'hier, p. 249

Repérage d'un point sur le cercle trigonométrique

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
M est un point du cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ de centre O. θ est une mesure en radian de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$. Alors :



- M a pour coordonnées $(\cos \theta; \sin \theta)$.
- Chaque nombre de la forme $\theta + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) est une mesure de l'angle orienté $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$.
- Parmi toutes les mesures de $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$, il en existe une et une seule dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$ appelée **mesure principale** de $(\vec{u}, \overrightarrow{OM})$.

Trigonométrie

Les formules d'addition

Quels que soient les nombres a et b :

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$$

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$

$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$$

Les formules de duplication

Pour tout nombre a :

$$\sin(2a) = 2 \sin(a) \cos(a)$$

$$\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a)$$

L'équation du second degré

• Le **discriminant** de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) est le nombre $\Delta = b^2 - 4ac$.

• Dans l'ensemble $\mathbb{R}$:

– si $\Delta < 0$, l'équation n'a pas de solution ;

– si $\Delta = 0$, l'équation a une seule solution

$$x_0 = -\frac{b}{2a};$$

– si $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions distinctes :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Pour les exercices 1 à 5

Dites si les propositions sont vraies ou fausses. Vous justifierez votre réponse.

1 a) Deux nombres opposés ont le même sinus.

b) Si deux nombres ont le même cosinus, alors ils sont égaux.

c) Si $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = \frac{125\pi}{6}$, alors sa mesure principale est $-\frac{\pi}{6}$.

2 Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

$\mathcal{C}$ est le cercle

trigonométrique de centre O, et Γ le cercle de centre O et de rayon r . M est un point de Γ tel que $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = \theta$. La demi-droite $[OM)$ coupe $\mathcal{C}$ en A.

a) $\overrightarrow{OM} = r \overrightarrow{OA}$.

b) M a pour coordonnées $(r \cos(\theta); r \sin(\theta))$.

3 a désigne un nombre.

a) $\cos(2a) = 2 \cos^2(a) - 1$.

b) $\sin^2(a) = \frac{1 - \cos(2a)}{2}$.

4 L'équation $-3x^2 + 4x - 1 = 0$ a pour solutions 1 et $\frac{1}{3}$.

5 a désigne un nombre.

On considère l'équation $ax^2 - 6x - 6 = 0$.

a) Pour tout $a > 0$, l'équation a deux solutions distinctes dans $\mathbb{R}$.

b) Si $a = 10$, l'équation a pour solution $-\frac{1}{2}$.

6 QCM

Pour chaque affirmation, une seule réponse est exacte. Identifiez-la en justifiant votre réponse.

1. $\sin\left(\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{4}\right)$ est égal à :

a) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$

b) $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$

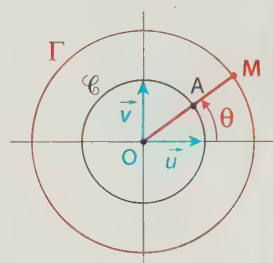
c) $\frac{\sqrt{3} + \sqrt{2}}{2}$

2. $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ est égal à :

a) $\frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2}$

b) $\frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2}$

c) $1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$



Activité 1

DES NOMBRES RÉELS AUX NOMBRES IMAGINAIRES

Jérôme Cardan (1501-1576) a fourni, dans son ouvrage *Ars Magna*, une formule pour déterminer une solution X de l'équation $X^3 + pX + q = 0$ dans le cas où $4p^3 + 27q^2 \geq 0$:

$$X = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4}}}.$$

- 1 On considère l'équation $X^3 - 36X - 91 = 0$ ($p = -36$ et $q = -91$).

- a) À l'aide d'une calculatrice, appliquez la formule de Cardan afin de déterminer une solution α de cette équation.
- b) Déterminez deux nombres b et c tels que, pour tout réel X , $X^3 - 36X - 91 = (X - \alpha)(X^2 + bX + c)$.
- c) Achevez la résolution de l'équation $X^3 - 36X - 91 = 0$. Combien a-t-elle de solutions dans $\mathbb{R}$?

- 2 On considère l'équation (E) : $X^3 - 15X - 4 = 0$ ($p = -15$ et $q = -4$).

- a) Calculez $4p^3 + 27q^2$. Peut-on appliquer la formule de Cardan à cette équation ? Pourquoi ?
- b) Utilisez une calculatrice graphique afin de conjecturer le nombre de solutions de l'équation (E).
- c) Pour résoudre cette équation malgré le problème posé par le signe de $4p^3 + 27q^2$, Cardan utilise des racines de nombres négatifs. Plus tard, Raffaello Bombelli (1526-1572) introduira un nombre « imaginaire », que nous noterons i , tel que $i^2 = -1$.

Ainsi, dans le cas présent, on peut écrire $\frac{p^3}{27} + \frac{q^2}{4} = -121 = 11^2 \times i^2 = (11i)^2$.

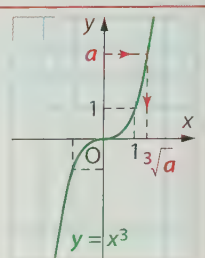
- En utilisant le nombre i , démontrez que pour déterminer la solution de l'équation (E) par la formule de Cardan, il suffit de trouver deux nombres « imaginaires » dont les cubes s'écrivent $2 + 11i$ et $2 - 11i$.
- En utilisant les règles de calcul des nombres réels et l'égalité $i^2 = -1$, démontrez que :

$$(2 + i)^3 = 2 + 11i \text{ et } (2 - i)^3 = 2 - 11i.$$

- Déduisez-en que 4 est la valeur donnée par la formule de Cardan pour l'équation (E).
- Vérifiez que 4 est bien solution de l'équation (E).
- d) Déterminez deux réels b et c tels que, pour tout réel X : $X^3 - 15X - 4 = (X - 4)(X^2 + bX + c)$.
- e) Achevez la résolution de l'équation $X^3 - 15X - 4 = 0$.

Note

Pour tout nombre a , la notation $\sqrt[3]{a}$ désigne la racine cubique de a : c'est l'unique nombre qui, élevé au cube, donne a .



Histoire des

mathématiques La querelle de Fontana et Cardan

Au XVI^e siècle, les mathématiciens se défiaient lors de concours mathématiques publics, au cours desquels ils montraient leur habileté. Ils avaient ainsi pour habitude de garder secrètes leurs découvertes.

Au cours de l'un de ces concours, le mathématicien Niccolo Fontana dit Tartaglia (« Le Bègue ») (1499-1557) trouva en 1534 une méthode générale pour résoudre les équations du type $X^3 + pX + q = 0$. Il semble qu'il ait été le premier à utiliser pour cela la racine carrée d'un nombre négatif. Il garda sa méthode secrète, mais accepta de la dévoiler à Cardan, à la condition que celui-ci la garde secrète.

Cardan développa la méthode de Fontana et réussit à l'étendre à toute équation du 3^e degré et du 4^e degré (avec son assistant Ferrari). Apprenant que la méthode de Fontana avait été découverte avant celui-ci par Scipione del Ferro, il passa outre sa promesse et publia ces résultats dans son *Ars magna* (1545).

Dans *Quesiti et invenzioni diverse* (1546) (page de titre ci-contre), Fontana attaqua violemment Cardan ; il s'ensuivit une longue querelle avec Cardan et Ferrari. Celle-ci prit fin au cours d'un concours entre Fontana et Ferrari, que Ferrari gagna.

C'est finalement le nom de Cardan qui resta associé à cette méthode de résolution.



Activité 2

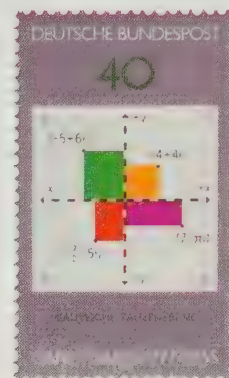
REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE DES NOMBRES COMPLEXES

1 Introduction

En 1811, dans une correspondance avec un autre mathématicien, Carl Friedrich Gauss (1777-1855) écrit :

« De même qu'on peut se représenter tout le domaine des quantités réelles par moyen d'une ligne droite indéfinie, de même on peut se figurer le domaine complet de toutes les quantités, les réelles et les imaginaires, au moyen d'un plan indéfini, où chaque point, déterminé par son abscisse a et son ordonnée b , représente en même temps la quantité $a + ib$ ».

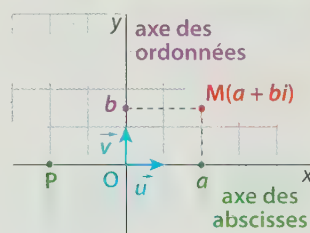
Timbre allemand édité pour le bicentenaire de la naissance de Gauss.



Adoptons la représentation de Gauss. $(O; \vec{u}, \vec{v})$ est un repère orthonormé du plan.

Il est admis que l'axe des abscisses de ce repère représente l'ensemble $\mathbb{R}$ des réels. Ainsi, à tout réel x , on associe un point P sur l'axe des abscisses : le point de coordonnées $(x; 0)$. Et, réciproquement, à tout point P de l'axe des abscisses, on associe un réel x .

On convient que tout point M du plan représente aussi un nombre z , qui n'est donc pas un nombre réel et qu'on appelle **nombre complexe**.



On convient également que :

- le point V de coordonnées $(0; 1)$ représente le nombre complexe i tel que $i^2 = -1$;
- tout point M de coordonnées $(a; b)$ représente le nombre complexe $z = a + bi$;
- tout point de l'axe des ordonnées, de coordonnées $(0; b)$ représente le nombre complexe bi .

2 Application

a) Placez les points N_1 , N_2 et N_3 représentant les nombres complexes $3i$, 0 et $-i$.

Quelles sont les coordonnées de ces points dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$?

b) Quels sont les nombres complexes représentés par les points $N_4(0; 5)$ et $N_5(0; -2)$?

c) Placez les points M_1 , M_2 et M_3 représentant respectivement les nombres complexes :

$$z_1 = 2 + 3i, \quad z_2 = -1 + 4i \quad \text{et} \quad z_3 = 5 + i \times (-2) = 5 - 2i.$$

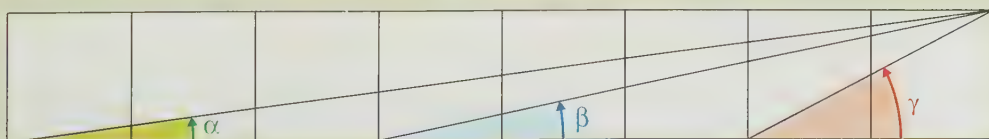
Quelles sont les coordonnées de ces points dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$?

d) Quels sont les nombres complexes représentés par les points $M_4(1; 2)$ et $M_5(-\sqrt{2}; \frac{3}{5})$?

Problème ouvert

Révisitez vos exercices après le chapitre 8 ... Est-il plus facile ?

α , β et γ désignent les mesures principales des angles orientés. Que vaut la somme $\alpha + \beta + \gamma$?



1

Les nombres complexes

1.1 | Forme algébrique d'un nombre complexe

Théorème 1 Il existe un ensemble, noté $\mathbb{C}$, d'éléments appelés **nombres complexes**, tel que :

(admis)

1. $\mathbb{C}$ contient l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels ;
2. $\mathbb{C}$ contient un élément i tel que $i^2 = -1$;
3. $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication qui suivent des règles de calcul analogues à celles de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{R}$;
4. tout nombre complexe z s'écrit de **manière unique** sous la forme $z = a + bi$ où a et b sont deux réels. Cette écriture est appelée la **forme algébrique** de z .

► **Vocabulaire**

- On dit que le réel a est la **partie réelle** de z et on la note $a = \text{Re}(z)$.
- On dit que le réel b est la **partie imaginaire** de z et on la note $b = \text{Im}(z)$.
- Tout nombre complexe de la forme $z = bi$ (b réel) est appelé **imaginaire pur**.

► **Conséquences**

- Dire que le nombre complexe z est **réel** équivaut à dire que $\text{Im}(z) = 0$.
- Dire que le nombre complexe z est **imaginaire pur** équivaut à dire que $\text{Re}(z) = 0$.

Théorème 2 Deux nombres complexes sont égaux si, et seulement si, ils ont même partie réelle et même partie imaginaire :

$$\ll a + bi = a' + b'i \gg \text{équivaut à} \ll a = a' \text{ et } b = b' \gg.$$

► **Remarque.** En particulier, « $a + bi = 0$ » équivaut à « $a = 0$ et $b = 0$ ».

1.2 | Calculer dans $\mathbb{C}$

Grâce aux propriétés de l'ensemble $\mathbb{C}$, on calcule dans $\mathbb{C}$ comme dans $\mathbb{R}$, en tenant compte de $i^2 = -1$.

- Par exemple, si $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$, alors :

$$z + z' = (a + bi) + (a' + b'i), \text{ soit } z + z' = (a + a') + (b + b')i ; \leftarrow$$

$$\begin{aligned} \text{Re}(z + z') &= \text{Re}(z) + \text{Re}(z') \\ \text{Im}(z + z') &= \text{Im}(z) + \text{Im}(z') \end{aligned}$$

$$zz' = (a + bi)(a' + b'i) = aa' + bb'i^2 + a'bi + ab'i, \text{ soit } zz' = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i.$$

- Il en résulte que les **identités remarquables** valables dans $\mathbb{R}$ le sont aussi dans $\mathbb{C}$. En particulier :

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2.$$

2

Conjugué d'un nombre complexe

2.1 | Définition

Définition 1 Le conjugué d'un nombre complexe $z = a + bi$ est le nombre complexe $a - bi$. On le note $\bar{z}$.

► **Exemples.** Si $z = 3 + 2i$, alors $\bar{z} = 3 - 2i$; si $z = 5$, alors $\bar{z} = 5$; si $z = -3i$, alors $\bar{z} = 3i$.

► **Conséquence.** Si $z = a + bi$, alors $z + \bar{z} = 2a$ et $z - \bar{z} = 2bi$; d'où :
 $z + \bar{z} = 2\operatorname{Re}(z)$ et $z - \bar{z} = 2i\operatorname{Im}(z)$.

Il en résulte que :

- « Le nombre complexe z est réel » équivaut à « $z = \bar{z}$ ».
- « Le nombre complexe z est imaginaire pur » équivaut à « $z + \bar{z} = 0$ ».

► Relation fondamentale

Pour tout nombre complexe z , le produit $z\bar{z}$ est un réel positif. Si $z = a + bi$, alors :

$$z\bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2.$$

2.2 Opérations sur les nombres conjugués

Théorème 3 z et z' sont deux nombres complexes.

$$\bullet \quad \overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}' \quad \bullet \quad \overline{zz'} = \bar{z} \times \bar{z}' \quad \bullet \quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'} \quad (z' \neq 0)$$

Démonstration

On pose $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$.

$$\bullet \quad zz' = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i, \text{ donc } \overline{zz'} = (aa' - bb') - (ab' + a'b)i.$$

D'autre part, $\bar{z} = a - bi$ et $\bar{z}' = a' - b'i$. Donc :

$$\bar{z} \times \bar{z}' = (a - bi)(a' - b'i) = (aa' - bb') - (ab' + a'b)i. \text{ D'où } \overline{zz'} = \bar{z} \times \bar{z}'.$$

- Les autres résultats se démontrent de manière analogue.

► **Remarque.** Ces résultats s'étendent à une somme de n termes ou à un produit de n facteurs. En particulier, pour tout naturel n non nul et tout nombre complexe z non nul : $\overline{(z^n)} = (\bar{z})^n$.



Équation du second degré à coefficients réels

On appelle équation du second degré à **coefficients réels** toute équation qui peut s'écrire :

$$aX^2 + bX + c = 0$$

où X est l'inconnue, et a, b, c sont trois réels donnés, $a \neq 0$.

Résoudre dans $\mathbb{C}$ cette équation, c'est trouver tous les nombres complexes u tels que $au^2 + bu + c = 0$.

Théorème 4 Dans $\mathbb{C}$, l'équation $az^2 + bz + c = 0$, $a \neq 0$, a, b, c réels a **toujours** des solutions.

On note Δ le discriminant de cette équation : $\Delta = b^2 - 4ac$.

- Si $\Delta > 0$, l'équation a deux solutions réelles.
- Si $\Delta = 0$, l'équation a une solution double réelle.
- Si $\Delta < 0$, l'équation a deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{avec} \quad z_2 = \bar{z}_1.$$

► **Conséquence.** Dans $\mathbb{C}$, le trinôme $az^2 + bz + c$ se **factorise toujours** sous la forme :

$$az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2).$$

Démonstration. Les règles de calcul dans $\mathbb{C}$ étant analogues à celles dans $\mathbb{R}$, on obtient :

$$az^2 + bz + c = a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \right] = a \left[\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} \right]$$

Forme canonique

Puisque $a \neq 0$, résoudre dans $\mathbb{C}$ cette équation, c'est résoudre : $\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = 0$.

• Si $\Delta > 0$ ou si $\Delta = 0$, on sait que l'équation a deux solutions dans $\mathbb{R}$ et deux seulement (distinctes ou égales). Elle a donc deux solutions complexes et deux seulement puisque $\mathbb{R}$ est inclus dans $\mathbb{C}$.

• Si $\Delta < 0$, alors $\sqrt{-\Delta}$ existe et avec $i^2 = -1$, $(i\sqrt{-\Delta})^2 = \Delta$. Donc :

$$\left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2} = \left(z + \frac{b}{2a} \right)^2 - \left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right)^2 = \left(z + \frac{b}{2a} - \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right) \left(z + \frac{b}{2a} + \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a} \right).$$

Ainsi, l'équation a deux solutions :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{avec} \quad z_2 = \overline{z_1}.$$

4

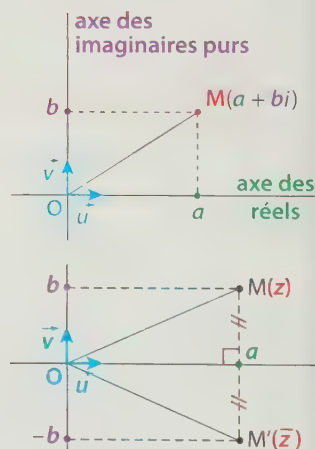
Représentation géométrique d'un nombre complexe

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

4.1 Affixe d'un point

Animation

- À tout nombre complexe $z = a + bi$, on associe le point M de coordonnées $(a; b)$. M est l'image de z. On note $M(z)$.
- Si M est un point de coordonnées $(a; b)$ dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$, le nombre complexe $z = a + bi$ est appelé l'affixe du point M.



Conséquences

- « M appartient à l'axe des abscisses » équivaut à « $\text{Im}(z) = 0$ ».
- « M appartient à l'axe des ordonnées » équivaut à « $\text{Re}(z) = 0$ ».
- Le point $M'(\bar{z})$ est symétrique de $M(z)$ par rapport à l'axe des abscisses.

4.2 Affixe d'un vecteur

De même qu'à un point M de coordonnées $(a; b)$, on associe son affixe $z_M = a + bi$, à tout vecteur $\vec{w}$ de coordonnées $(a; b)$, on associe le nombre complexe $z = a + bi$.

Définition 2

L'affixe d'un vecteur $\vec{w}$ de coordonnées $(a; b)$ est le complexe $z = a + bi$.

Théorème 5

Si z_M et $z_{M'}$ sont les affixes respectives des points M et M' dans un même repère orthonormé, alors l'affixe du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ est égale à $z_{M'} - z_M$:

$$\text{affixe}(\overrightarrow{MM'}) = z_{M'} - z_M.$$

Démonstration. Si $z_M = x + yi$ et $z_{M'} = x' + y'i$, alors les coordonnées de M et M' sont respectivement $(x; y)$ et $(x'; y')$. Donc le vecteur $\overrightarrow{MM'}$ a pour coordonnées $(x' - x; y' - y)$.

Ainsi, par définition, l'affixe de $\overrightarrow{MM'}$ est $(x' - x) + (y' - y)i$, soit $z_{M'} - z_M$.

➤ Règles de calcul sur les affixes de vecteurs

$\vec{w}$ et $\vec{w'}$ ont pour affixes respectives z et z' .

- « $\vec{w} = \vec{w'}$ » équivaut à « $z = z'$ ».
- $\vec{w} + \vec{w'}$ a pour affixe $z + z'$ et pour tout réel k , $k\vec{w}$ a pour affixe kz .

➤ Affixe du milieu d'un segment

Si I est le milieu du segment $[AB]$, alors $2\vec{AI} = \vec{AB}$ soit $2(z_I - z_A) = z_B - z_A$; d'où $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$.

5

Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

5.1 Introduction

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. $z = a + bi$ est un nombre complexe non nul et M est le point d'affixe z .

La demi-droite $[OM)$ coupe le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ de centre O en A .

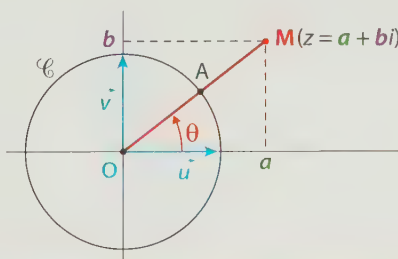
On note $(\vec{u}, \vec{OA}) = \theta$ et $OM = r$.

Le point A a pour coordonnées $(\cos(\theta); \sin(\theta))$. De plus, $\vec{OA} = r\vec{OA}$ avec $r = OM = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Il en résulte que M a pour coordonnées $(r \cos(\theta); r \sin(\theta))$.

Ainsi, le nombre complexe $z = a + bi$, affixe de M , s'écrit aussi :

$$z = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta)).$$



5.2 Module et argument d'un nombre complexe non nul

Définition 3

z est un nombre complexe non nul, $z = a + bi$, $a \neq 0$ ou $b \neq 0$.

- Un **argument** de z , noté $\arg(z)$, est une des mesures, exprimée en radian, de l'angle $(\vec{u}, \vec{OM})$.
- Le **module** de z , noté $|z|$, est la longueur OM ; ainsi : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ et $|z|^2 = z\bar{z}$.

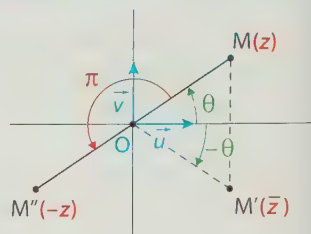
Si θ est un argument d'un nombre complexe z non nul, alors tout nombre de la forme $\theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, est un argument de z . Au lieu d'écrire $\arg(z) = \theta + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, on écrit :

$$\arg(z) = \theta \pmod{2\pi}.$$

$\pmod{2\pi}$ se lit « modulo 2π ».

► **Conséquences.** Pour tout nombre complexe z non nul :

- $\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$
- $\arg(-z) = \arg(z) + \pi$
- $|\bar{z}| = |z|$
- $|-z| = |z|$



5.3] Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Définition 4 Tout nombre complexe non nul s'écrit sous la forme suivante, dite **forme trigonométrique** :

$$z = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta)) \text{ avec } r = |z| \text{ et } \theta = \arg(z) \pmod{2\pi}.$$

► **Égalité de deux nombres complexes écrits sous forme trigonométrique**

Si $z = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$ et $z' = r'(\cos(\theta') + i \sin(\theta'))$:

$$« z = z' » \text{ équivaut à } « r = r' \text{ et } \theta = \theta' \pmod{2\pi} ».$$

► **Lien entre forme algébrique et forme trigonométrique**

- Si l'on connaît r et θ , alors $a = r \cos(\theta)$ et $b = r \sin(\theta)$.
- Si l'on connaît a et b , alors $r = OM = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ et θ est défini par :

$$\cos(\theta) = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

► **Exemples**

- Si $z = 1 - i$; $r = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$; $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\sin \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ d'où $\theta = -\frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$. Soit :

$$z = \sqrt{2} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right].$$

- Si $z = 2 \left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right]$ alors $z = 2 \left[-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right] = -1 + \sqrt{3}i$.

! ► **Attention.** Toute écriture de la forme $z = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$ n'est pas une forme trigonométrique.

Théorème 6 Si $z = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$ avec $r > 0$, alors $r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$ est la forme trigonométrique de z ; $|z| = r$ et $\arg(z) = \theta \pmod{2\pi}$.

Démonstration. $|z|^2 = (r \cos(\theta))^2 + (r \sin(\theta))^2 = r^2$. Comme $|z|$ et r sont positifs, $|z| = r$.

Notons θ' un argument de z ; la forme $z = r(\cos(\theta') + i \sin(\theta'))$ implique $\cos(\theta) = \cos(\theta')$ et $\sin(\theta) = \sin(\theta')$, donc $\theta = \theta' \pmod{2\pi}$.

$|z| = r$ et $\theta = \theta' \pmod{2\pi}$, donc $r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$ est une forme trigonométrique de z .

5.4] Interprétation géométrique du module et de l'argument

Théorème 7 Si A et B sont deux points d'affixes respectives z_A et z_B dans un repère orthonormé $(O ; \vec{u}, \vec{v})$, alors :

$$AB = |z_B - z_A|.$$

Démonstration. Il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$.

Or, $\overrightarrow{OM}$ a pour affixe $z_M - 0 = z_M$ et $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_B - z_A$; donc $z_M = z_B - z_A$.

Il en résulte que $|z_M| = |z_B - z_A|$. Or par définition, $|z_M| = OM$ et $OM = AB$, donc $AB = |z_B - z_A|$.

► Caractérisation d'un cercle et de la médiatrice d'un segment

A et B sont deux points d'affixes z_A et z_B dans un repère orthonormé.

- $M(z)$ appartient au **cercle de centre A et de rayon r** si, et seulement si, $AM = r$, ce qui se traduit par $|z - z_A| = r$.
- $M(z)$ appartient à la **médiatrice du segment $[AB]$** si, et seulement si, $AM = BM$, ce qui se traduit par $|z - z_A| = |z - z_B|$.

Théorème 8

Si A et B sont deux points d'affixes respectives z_A et z_B dans un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, tels que $A \neq B$, alors :

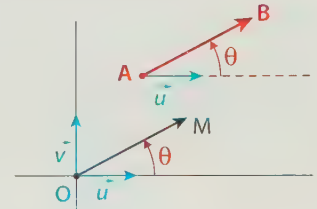
$$(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A).$$

Démonstration. Il existe un unique point M tel que $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB}$.

Comme précédemment, $z_M = z_B - z_A$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = (\vec{u}, \overrightarrow{AB})$.

Or $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = \arg(z_M)$.

On en déduit que $(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_M) = \arg(z_B - z_A) \pmod{2\pi}$.



6

Notation exponentielle de la forme trigonométrique

6.1 Cas d'un nombre complexe de module 1

Animation

Tout nombre complexe de module 1 s'écrit $z = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$ avec $\theta = \arg(z) \pmod{2\pi}$.

On note f la fonction qui à tout réel θ , associe le complexe $f(\theta) = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$. On se propose de démontrer que pour tous réels θ et θ' , $f(\theta + \theta') = f(\theta) \times f(\theta')$ et $f(0) = 1$.

$$\begin{aligned} f(\theta) \times f(\theta') &= [\cos(\theta) + i \sin(\theta)][\cos(\theta') + i \sin(\theta')] \\ &= [\cos(\theta) \cos(\theta') - \sin(\theta) \sin(\theta')] + i [\cos(\theta) \sin(\theta') + \sin(\theta) \cos(\theta')] \end{aligned}$$

soit : $f(\theta) \times f(\theta') = \cos(\theta + \theta') + i \sin(\theta + \theta') = f(\theta + \theta')$.

De plus, $f(0) = \cos(0) + i \sin(0) = 1$.

Ainsi, comme la fonction exponentielle, f « transforme les sommes en produits » et $f(0) = 1$.

D'où l'idée de poser $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$. L'égalité $f(\theta + \theta') = f(\theta) \times f(\theta')$ démontrée s'écrit alors $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta + \theta')}$, ce qui justifie cette notation exponentielle.

Définition 5

Le complexe de module 1 dont un argument est θ est noté $e^{i\theta}$ avec :

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta).$$

► **Exemples.** $e^{i\pi} = -1$; $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$.

6.2 | Notation exponentielle de la forme trigonométrique

Théorème 9

Tout nombre complexe z non nul de module r et d'argument θ s'écrit sous la forme suivante, dite notation exponentielle : $z = re^{i\theta}$ avec $r = |z|$ et $\theta = \arg(z) \pmod{2\pi}$.

Démonstration. z , non nul, a pour forme trigonométrique $z = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$ avec $r = |z|$.

Comme $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$, z s'écrit donc sous la forme $z = re^{i\theta}$.

► **Conséquences.** Si $r > 0$ et $r' > 0$:

• $\overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}$.

• « $re^{i\theta} = r'e^{i\theta'}$ » équivaut à « $r = r'$ et $\theta = \theta' \pmod{2\pi}$ ».

6.3 | Module et argument d'un produit

z et z' sont deux nombres complexes non nuls tels que $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$, avec $r > 0$ et $r' > 0$.

Alors : $zz' = re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = r \times r' \times e^{i\theta} \times e^{i\theta'}$ soit $zz' = rr'e^{i(\theta+\theta')}$ (voir §6.1).

Théorème 10

Quels que soient les nombres complexes non nuls z et z' :

La proposition 1 est vraie quels que soient z et z' .

1. $|zz'| = |z| \times |z'|$

2. $\arg(zz') = \arg z + \arg z' \pmod{2\pi}$

► **Conséquence.** On démontre par récurrence que pour tout entier naturel n non nul et tout nombre complexe z non nul :

• si $z = re^{i\theta}$, alors $z^n = r^n e^{in\theta}$; • $|z^n| = |z|^n$ et $\arg(z^n) = n \arg(z) \pmod{2\pi}$.

D'où, en particulier, $[\cos(\theta) + i \sin(\theta)]^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$ pour tout entier naturel n non nul et tout nombre réel θ . Cette dernière égalité est la **formule de Moivre**.

6.4 | Module et argument d'un quotient

z et z' sont deux nombres complexes non nuls tels que $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$, avec $r > 0$ et $r' > 0$.

On pose $Z = \frac{z}{z'}$, soit $z = Zz'$. Alors $r = |z| \times r'$ et $\arg(z) = \arg(Z) + \arg(z')$ soit $|Z| = \frac{r}{r'}$ et $\arg(Z) = \theta - \theta' \pmod{2\pi}$. Donc $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'} e^{i(\theta-\theta')}$.

Théorème 11

Quels que soient les nombres complexes non nuls z et z' :

1. $\left| \frac{z}{z'} \right| = \frac{|z|}{|z'|}$.

2. $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z' \pmod{2\pi}$.

► **Remarque.** Ces égalités permettent de mémoriser les **formules trigonométriques d'addition et de duplication** vues en Première S. Par exemple, en identifiant parties réelles et parties imaginaires de $e^{ia}e^{ib}$ et $e^{i(a+b)}$, on retrouve les formules d'addition.

• $e^{ia}e^{ib} = (\cos(a) + i \sin(a))(\cos(b) + i \sin(b))$
 $= [\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)] + i[\cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b)]$
 • $e^{i(a+b)} = \cos(a+b) + i \sin(a+b)$

D'où les formules donnant $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$. → **exercice 88, page 255.**

Animation

OBJECTIF

1

Calculer dans $\mathbb{C}$

• Tout nombre complexe s'écrit de manière unique sous la forme $z = a + bi$ où a et b sont deux réels et i est le nombre complexe tel que $i^2 = -1$.

• $(a + bi) + (a' + b'i) = (a + a') + (b + b')i$.

• $(a + bi)(a' + b'i) = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i$.

• $\bar{z} = a - bi$ est le conjugué de $z = a + bi$.

• $z\bar{z} = a^2 + b^2$.

• Opérations sur les conjugués

$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z'}$; $\overline{zz'} = \bar{z} \times \bar{z'}$; si $z' \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$; $z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z)$; $z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z)$

• Caractérisation d'un réel et d'un imaginaire pur

« z réel » équivaut à « $z = \bar{z}$ ».

« z imaginaire pur » équivaut à « $z + \bar{z} = 0$ ».

EXERCICE RESOLU A Utiliser les règles de calcul

On considère les nombres complexes $z_1 = 1 + i$ et $z_2 = 4 - 5i$.

Déterminez la forme algébrique de chacun des nombres complexes suivants.

a) $z_1 + z_2$.

b) $z_1 z_2$.

c) $3z_1 + 4z_2$.

d) z_1^3 .

► Méthode

a) Pour calculer la somme $z_1 + z_2$, on additionne les parties réelles entre elles et les parties imaginaires entre elles.

b) Pour calculer le produit $(a + ib)(a' + ib')$, on développe en utilisant $i^2 = -1$.

d) Pour calculer z_1^3 , on utilise l'égalité suivante de $\mathbb{R}$, valable également dans $\mathbb{C}$:

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3.$$

► Solution

► a) $z_1 + z_2 = 1 + i + 4 - 5i = 5 - 4i$.

► b) $z_1 z_2 = (1 + i)(4 - 5i) = 4 + 4i - 5i - 5i^2$.
Donc $z_1 z_2 = 9 - i$.

c) $3z_1 + 4z_2 = 3(1 + i) + 4(4 - 5i) = 3 + 3i + 16 - 20i$
 $3z_1 + 4z_2 = 19 - 17i$.

► d) $(1 + i)^3 = 1 + 3i + 3i^2 + i^3$.

Or, $i^2 = -1$, donc $i^3 = -i$. D'où :

$$z_1^3 = 1 + 3i - 3 - i = -2 + 2i.$$

► Mise en pratique

1 On donne les nombres complexes :

$$z_1 = -1 + 2i \text{ et } z_2 = 3 + 4i.$$

Déterminez la forme algébrique de :

a) $z_1 + z_2$; b) $z_1 - z_2$; c) $z_1 - 3z_2$; d) $z_1 z_2$.

2 Donnez la forme algébrique des nombres complexes suivants.

a) $(1 + i)^2$. b) $(1 - i)^2$. c) $(3 - i)^2$.

3 On pose $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1. Donnez la forme algébrique de j^2 .

2. Vérifiez que $1 + j + j^2 = 0$.

4 Quels sont les entiers naturels n pour lesquels $(1 + i)^n$ est un réel ?

5 Donnez la forme algébrique des nombres complexes suivants.

a) $(2 + i)^2(1 - 3i)$.

b) $(5 - 2i)(1 + 4i)(2 - i)$.

6 x et y sont deux nombres réels. Quelle est la forme algébrique de $(x + 1 + iy)(x - 1 - iy)$?

7 On donne les nombres complexes :

$$z_1 = 1 - 3i, \quad z_2 = 4 + 2i \text{ et } z_3 = 5 - 2i.$$

Calculez :

a) $\operatorname{Re}(z_1 + z_2 + z_3)$; b) $\operatorname{Im}(iz_1)$;

c) $\operatorname{Im}(z_1 z_2)$;

d) $\operatorname{Re}(2z_1 - 3z_2 + z_3)$.

EXERCICES

EXERCICES

1. Écrivez $z = \frac{-2+3i}{4-5i}$ sous forme algébrique.

2. On pose $z = x + yi$.

Quelle relation doit lier x et y pour que le nombre $Z = (z + i)(1 - iz)$ soit réel ?

3. z est un nombre complexe. On pose $Z = z\bar{z} + iz - i\bar{z} + 2$.

Le nombre complexe Z est-il réel ?

Méthode

1. Pour trouver la forme algébrique d'un quotient de deux nombres complexes, on multiplie le numérateur et le dénominateur par le conjugué du dénominateur car $z\bar{z} = a^2 + b^2$ est toujours un nombre réel.

2. Z réel se traduit au moins de deux manières :
 Z réel $\Leftrightarrow \text{Im}(Z) = 0$ ou Z réel $\Leftrightarrow Z = \bar{Z}$.

3. On exploite les résultats suivants :
 $z\bar{z}$ est un réel et $z - \bar{z} = 2i \text{ Im}(z)$.

Solution

1. Le conjugué de $4 - 5i$ est $4 + 5i$ et
 $(4 - 5i)(4 + 5i) = 16 + 25 = 41$.
 $z = \frac{(-2 + 3i)(4 + 5i)}{(4 - 5i)(4 + 5i)} = \frac{-8 + 12i - 10i - 15}{41}$.
 Ainsi, la forme algébrique de z est :
 $-\frac{23}{41} + \frac{2}{41}i$.

2. Z est réel si et seulement si $\text{Im}(Z) = 0$.
 Cherchons la forme algébrique de Z .
 $Z = [x + iy + i][1 - ix + y]$
 $Z = [x + i(y + 1)][1 - ix + y]$
 $= 2x(y + 1) + i[(y + 1)^2 - x^2]$.
 Ainsi, Z est réel si, et seulement si,
 $(y + 1)^2 - x^2 = 0$.

3. $Z = z\bar{z} + i(z - \bar{z}) + 2$.
 Or, $z - \bar{z} = 2i \text{ Im}(z)$
 donc $Z = z\bar{z} + i(2i \text{ Im}(z)) + 2$
 soit $Z = z\bar{z} - 2 \text{ Im}(z) + 2$.
 $z\bar{z}$ et $\text{Im}(z)$ sont des réels, donc Z est un réel.

Mise en pratique

8 Déterminez la forme algébrique de chacun des nombres complexes suivants.

a) $i(1 - i)$. b) $(2 - 3i)(4 + i)$. c) $\frac{3 + 2i}{4 - i}$.

9 Écrivez sous forme algébrique :

a) $\frac{1}{2 + 3i}$. b) $\frac{2}{1 + i} - \frac{3}{1 - i}$. c) $\frac{2 + 3i}{5 - 2i}$.

10 z est un nombre complexe.

Précisez, dans chaque cas, si Z est réel ou imaginaire pur ou ni l'un ni l'autre.

a) $Z = z + \bar{z} - 3i$. b) $Z = z - \bar{z} + 5i$.
 c) $Z = z\bar{z} - z + \bar{z}$. d) $Z = \bar{z}(z + i) + i(5i - z)$.

11 z est un nombre complexe.

Dans chacun des cas suivants, exprimez $\bar{z}$ en fonction de z .

a) $Z = -2 + iz$. b) $Z = (i + z)(2 - iz)$.
 c) $Z = (2iz + 3)^2$. d) $Z = \frac{1 + iz}{2z - i}$.

12 On note $z = x + yi$, x et y réels. On pose :

$$Z = \frac{z - 1}{z + 1} \text{ avec } z \neq -1.$$

Démontrez que Z a pour forme algébrique :

$$\frac{x^2 + y^2 - 1}{(x + 1)^2 + y^2} + \frac{2y}{(x + 1)^2 + y^2}i.$$

13 On note :

$$z_1 = \frac{1 + i}{2 - i} \text{ et } z_2 = \frac{1 - i}{2 + i}.$$

Pourquoi peut-on affirmer sans calcul que $z_1 + z_2$ est un nombre réel ?

14 Résolvez chacune des équations suivantes.

a) $(3 - 2i)z = i - 2$.
 b) $(2 + i)\bar{z} = 3i$.

OBJECTIF 2 Résoudre des équations dans $\mathbb{C}$

- u et v sont deux nombres complexes donnés, $u \neq 0$; l'équation $uz + v = 0$ a pour solution $z = -\frac{v}{u}$.
- On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $az^2 + bz + c = 0$ avec a, b, c réels, $a \neq 0$.

$\Delta = b^2 - 4ac$ est le discriminant de l'équation.

- Si $\Delta > 0$, alors l'équation a deux solutions réelles distinctes.
- Si $\Delta = 0$, alors l'équation a une solution double réelle.
- Si $\Delta < 0$, alors l'équation a deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}.$$

EXERCICE RÉSOLU C

Résolvez dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes en donnant les solutions sous forme algébrique.

- a) $(2+i)z - 3 + i = 0$. b) $z = 2\bar{z} - 2 + 6i$. c) $z^2 - 8\sqrt{3}z + 64 = 0$.

Méthode

a) On applique la méthode de résolution d'une équation du premier degré.

b) Une méthode consiste à remplacer z par $x + yi$ et $\bar{z}$ par $x - yi$.

Les nombres complexes $z = a + bi$ et $z' = a' + bi'$ sont égaux si, et seulement si, $a = a'$ et $b = b'$.

- On conclut.

c) Il s'agit d'une équation du second degré à coefficients réels ($a = 1$, $b = -8\sqrt{3}$, $c = 64$). On calcule Δ .

- On applique les formules :

$$\Delta = -64 \quad \text{donc} \quad \sqrt{-\Delta} = \sqrt{64}.$$

Solution

➔ a) $(2+i)z - 3 + i = 0$ équivaut à $z = \frac{3-i}{2+i}$
soit $z = \frac{(3-i)(2-i)}{5} = \frac{5-5i}{5} = 1-i$.

➔ b) En posant $z = x + yi$, l'équation $z = 2\bar{z} - 2 + 6i$ équivaut à :
 $x + yi = 2(x - yi) - 2 + 6i$
soit $-x + 3yi = -2 + 6i$.
Cette équation équivaut à :
 $-x = -2$ et $3y = 6$ soit $x = 2$ et $y = 2$.

➔ • La solution est donc $z = 2 + 2i$.

➔ c) $\Delta = 3 \times 64 - 4 \times 64 = -64$.
 $\Delta < 0$, donc l'équation a deux solutions complexes conjuguées :

➔ • $z_1 = \frac{8\sqrt{3} - i\sqrt{64}}{2} = 4\sqrt{3} - 4i$ et
 $z_2 = \bar{z}_1 = 4\sqrt{3} + 4i$.

Mise en pratique

Pour les exercices 15 à 17

Résolvez dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes et donnez les solutions sous forme algébrique.

15 a) $3iz - 2 + 4i = (1 - 2i)z + 6$.

b) $(3 + 2i)z = 2i\bar{z} - 5i$.

16 a) $z^2 - (2 + 3i)^2 = 0$. c) $z^2 + 4 = 0$.

b) $iz^2 + (3 - 4i)z = 0$. d) $\frac{z+1}{z-1} = i$.

17 a) $z^2 - 2z + 4 = 0$. b) $z^2 - 8z + 25 = 0$.

c) $z^2 + 2\sqrt{3}z + 3 = 0$.

18 Au réel a on associe l'équation :
 $z^2 - 6z + a = 0$.

1. Pour quelle valeur de a le nombre complexe $3 - i$ est-il solution de cette équation ?
2. Donnez alors l'autre solution.

19 On donne l'équation (E) :
 $z^3 - 12z^2 + 48z - 128 = 0$.

1. Vérifiez que 8 est solution de (E).
2. a) Déterminez des réels a, b, c tels que pour tout z de $\mathbb{C}$,
 $z^3 - 12z^2 + 48z - 128 = (z - 8)(az^2 + bz + c)$.
b) Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

OBJECTIF 3

Passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique

- Tout nombre complexe non nul s'écrit sous la forme : $z = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$; θ est un argument de z et r est le module de z .
- Si $z = a + bi$ est la forme algébrique d'un complexe non nul, alors :

$$r = \sqrt{a^2 + b^2}, \cos(\theta) = \frac{a}{r} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{b}{r}.$$
- Si $z = r(\cos(\theta) + i \sin(\theta))$ avec $r > 0$, alors $|z| = r$ et $\arg(z) = \theta \pmod{2\pi}$.

EXERCICE RÉSOLU D Transformer des écritures

On pose $z_1 = \sqrt{3} + i$ et $z_2 = 1 - i$.

1. Écrivez z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.
2. Déterminez le module et un argument de $Z = -4[\cos(\theta) + i \sin(\theta)]$.

Méthode

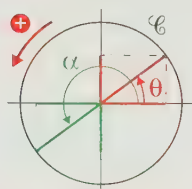
1. On calcule le module $|z_1|$ puis on le met en facteur dans z_1 .

- On en déduit les valeurs de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ et on détermine θ .

- On procède de la même façon.

2. On cherche un angle α tel que :

$$-\cos(\theta) - i \sin(\theta) = \cos(\alpha) + i \sin(\alpha).$$



On utilise le cercle trigonométrique :
 $\alpha = \theta + \pi$.

Solution

➔ 1. $|z_1| = \sqrt{3+1} = 2, z_1 = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$.

➔ • Donc $\cos(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin(\theta) = \frac{1}{2}$.

Donc $\arg(z_1) = \frac{\pi}{6} \pmod{2\pi}$.

Ainsi, z_1 a pour forme trigonométrique :

$$2\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right].$$

➔ • $|z_2| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}, z_2 = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$.

Donc $\cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\sin(\theta) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Et $\arg(z_2) = -\frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$. Il en résulte que :

$$z_2 = \sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right].$$

➔ 2. $Z = 4[-\cos(\theta) - i \sin(\theta)]$

$$Z = 4[\cos(\theta + \pi) + i \sin(\theta + \pi)].$$

Donc $|Z| = 4$ et $\arg(z) = \theta + \pi \pmod{2\pi}$.

Mise en pratique

20 Donnez une forme trigonométrique de chacun des nombres suivants.

a) $z_1 = \sqrt{3} - i\sqrt{3}$. b) $z_2 = 2i$. c) $z_3 = \frac{1}{1+i}$.

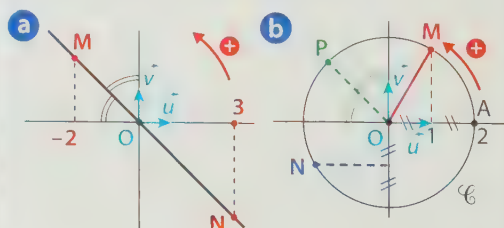
21 θ est un nombre réel.

Donnez une forme trigonométrique de chacun des nombres suivants.

a) $z_1 = -2[\cos(\theta) + i \sin(\theta)]$.

b) $z_2 = 3[\sin(\theta) + i \cos(\theta)]$.

22 Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Donnez sous forme trigonométrique les affixes des points indiqués.



- Tout nombre complexe z **non nul** s'écrit sous la forme :

$$z = re^{i\theta} \quad \text{où } r = |z| \quad \text{et } \theta = \arg(z) \pmod{2\pi}.$$

- Si $z = re^{i\theta}$ et $z' = r'e^{i\theta'}$, $r > 0$ et $r' > 0$, alors $zz' = rr'e^{i(\theta+\theta')}$; $z^n = r^n e^{in\theta}$, ($n \in \mathbb{N}$); $\frac{z}{z'} = \frac{r}{r'} e^{i(\theta-\theta')}$.

EXERCICE RÉSOLU E Exploiter une transformation d'écriture

On donne $z_1 = -2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right)$ et $z_2 = -1 + i$.

1. Donnez la forme algébrique de z_1 et de $z_1 z_2$.
2. Écrivez z_1 , z_2 et $z_1 z_2$ sous forme exponentielle.
3. Déduisez-en la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

► Méthode

1. On remplace $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$ par leurs valeurs exactes.

2. Attention, $-2 \left[\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right]$ n'est pas une forme trigonométrique car $-2 < 0$.
On utilise la notation exponentielle.

- On détermine le module et un argument de z_2 .

- On calcule le produit $z_1 z_2$ à partir des écritures exponentielles de z_1 et z_2 .

3. On simplifie en prenant la mesure principale de l'argument.

- On dispose de deux expressions de z sous forme algébrique : on identifie les parties réelles et imaginaires.

- On conclut.

► Solution

$$\begin{aligned} \rightarrow 1. z_1 &= -2 \left[\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right] = -1 - i\sqrt{3}. \\ z_1 z_2 &= (-1 - i\sqrt{3})(-1 + i) = (1 + \sqrt{3}) + (\sqrt{3} - 1)i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow 2. -2 &= 2e^{i\pi} \text{ et } \cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3} = e^{i\frac{\pi}{3}}; \\ \text{donc } z_1 &= 2e^{i\pi} \times e^{i\frac{\pi}{3}} = 2e^{i\frac{4\pi}{3}}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \bullet |z_2| &= \sqrt{2}, \cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ et } \sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}. \\ \text{Donc } \theta &= \frac{3\pi}{4} \pmod{2\pi} \text{ et } z_2 = \sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}}. \end{aligned}$$

$$\rightarrow \bullet z_1 z_2 = 2e^{i\frac{4\pi}{3}} \times \sqrt{2} e^{i\frac{3\pi}{4}} = 2\sqrt{2} e^{i\frac{25\pi}{12}}.$$

$$\begin{aligned} \rightarrow 3. \frac{25\pi}{12} &= \frac{24\pi}{12} + \frac{\pi}{12} = 2\pi + \frac{\pi}{12} \text{ donc} \\ z_1 z_2 &= 2\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{12}} = 2\sqrt{2} \left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \bullet \text{ Donc } z_1 z_2 &= 2\sqrt{2} \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) + 2\sqrt{2} i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \\ \text{et } z_1 z_2 &= (1 + \sqrt{3}) + (\sqrt{3} - 1)i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \bullet \text{ Il en résulte que :} \\ \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \\ \text{et } \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}. \end{aligned}$$

► Mise en pratique

23 Écrivez les nombres complexes suivants sous forme exponentielle.

a) $z_1 = 2\sqrt{3} - 2i$. b) $z_2 = (2 - 2i)(3 + i\sqrt{3})$.
c) $z_3 = \frac{\sqrt{3} - 3i}{1 - i}$. d) $z_4 = -2i \left(\cos\frac{\pi}{5} + i \sin\frac{\pi}{5} \right)$.

24 Donnez le module et un argument de chacun des nombres suivants.

a) $\sqrt{2} e^{i2\theta}$. b) $-e^{-i\theta}$. c) $-2ie^{i\theta}$.

25 On pose $z_1 = -3e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_2 = 2 - 2i$.

1. Donnez la forme algébrique de z_1 et de $z_1 z_2$.
2. Écrivez z_1 , z_2 et $z_1 z_2$ sous forme exponentielle, puis sous forme trigonométrique.
3. Déduisez-en la valeur exacte de :
 $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$.

OBJECTIF 5

Exploiter géométriquement l'afixe d'un vecteur

A et B sont deux points d'afixes respectives z_A et z_B .

- L'afixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_B - z_A$.
- $AB = |z_B - z_A|$; $(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A) \pmod{2\pi}$.
- Le point M d'afixe z appartient au cercle de centre A et de rayon $r > 0$ si, et seulement si, $|z - z_A| = r$.
- Le point M d'afixe z appartient à la médiatrice du segment $[AB]$ si, et seulement si, $|z - z_A| = |z - z_B|$.

EXERCICE RESOLU F

Étudier une configuration géométrique

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1. Placez les points A et B d'afixes respectives $z_A = 2$ et $z_B = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$. Précisez la nature du triangle OAB.
2. Déterminez la forme exponentielle de l'afixe du milieu I du segment $[AB]$.
3. E est le point d'afixe $z_E = -2 - 2\sqrt{3}i$. Les points O, I, E sont-ils alignés?

Méthode

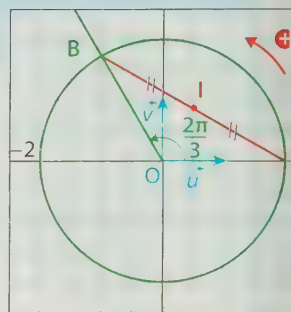
1. Pour placer B, on utilise le module et l'argument. En effet, si M a pour affixe $z = re^{i\theta}$, $r > 0$, alors $OM = r$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{OM}) = \theta \pmod{2\pi}$. Le point M est l'intersection d'un cercle et d'une demi-droite.

2. On utilise la formule $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$ qui donne l'afixe du milieu d'un segment.

3. Pour démontrer que trois points A, B, C sont alignés, une méthode consiste à prouver que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires soit $z_C - z_A = k(z_B - z_A)$ avec k réel.

Solution

- ➔ 1. $|z_B| = 2$ donc $OB = 2$.
 $\arg(z_B) = \frac{2\pi}{3}$ donc $(\vec{u}, \overrightarrow{OB}) = \frac{2\pi}{3}$. D'où le placement de B.
 $|z_A| = |z_B| = 2$ donc $OA = OB$: le triangle OAB est isocèle en O.
- ➔ 2. Écrivons z_B sous forme algébrique.
 $z_B = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = -1 + i\sqrt{3}$.
 Donc $z_I = \frac{2 - 1 + i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$.
- ➔ 3. Le vecteur $\overrightarrow{OE}$ a pour affixe $-2(1 + i\sqrt{3})$ et le vecteur $\overrightarrow{OI}$ a pour affixe $\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\overrightarrow{OE} = -4\overrightarrow{OI}$.
 Il en résulte que les points O, E, I sont alignés.



Mise en pratique

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

- 26** 1. Placez les points A, B, C, D d'afixes respectives $-4 - 3i$, $3 - 2i$, $4 + 5i$, $-3 + 4i$.

2. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD?

- 27** 1. Placez les points A, B et C d'afixes respectives $-3 - 2i$, $2 - i$ et $-2 + 6i$.

2. Démontrez que le triangle ABC est isocèle.

- 28** Les points A et B ont pour afixes respectives $a = 2$ et $b = 2e^{i\frac{3\pi}{4}}$.
 I est le milieu du segment $[AB]$.

1. Faites une figure.
2. a) Trouvez une mesure de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OI})$.
 b) Déterminez la forme algébrique de l'afixe de I.
 c) Déduisez-en que $OI = \sqrt{2} - \sqrt{2}$.
3. a) Donnez l'afixe de I sous forme exponentielle.
 b) Déduisez-en la valeur exacte de : $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.

29 Questions sur le cours

Complétez les propositions suivantes.

- a) On pose $z = a + bi$, a et b réels.
Le conjugué de z est ... et le module de z est ...
- b) $z = \bar{z}$ si, et seulement si, ...
- c) $z + \bar{z} = 0$ si, et seulement si, ...
- d) $r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$ est une forme trigonométrique d'un nombre complexe si r est ...
- e) On pose $z = re^{i\theta}$, $r > 0$.
Le module de z est ... et un argument de z est ...

30 Vrai ou faux

Vrai ou faux ? Justifiez votre réponse.

z et z' sont deux nombres complexes.

- a) $|z + z'| = |z| + |z'|$.
- b) Si $\arg(z) = \arg(z') \pmod{2\pi}$, alors $z = z'$.
- c) Si z est un nombre réel non nul, alors :
 $\arg(z) = 0 \pmod{2\pi}$ ou $\arg(z) = \pi \pmod{2\pi}$.
- d) Si $|z + 2 - i| = 3$, alors $M(z)$ appartient au cercle de centre A d'affixe $-2 + i$ et de rayon 3.

31 QCM Une seule réponse exacte

Pour chaque affirmation, une seule réponse est exacte. Identifiez-la en justifiant votre réponse.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1. z est un nombre complexe.

Le conjugué de $z + 3i + 2$ est :

- a) $z + 3i + 2$
- b) $\bar{z} - 3i + 2$
- c) $z - 3i + 2$

2. Une forme trigonométrique de $-3\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)$ est :

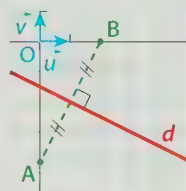
- a) $-3\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$
- b) $3\left[\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right]$
- c) $3\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$

3. L'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie l'égalité $|z - i| = |-1 - i|$:

- a) est une droite
- b) est un cercle
- c) est un point

4. La droite d représentée ci-contre est l'ensemble des points M d'affixe z telle que :

- a) $|z - 4i| = 2$
- b) $|z + 4i| = |z - 2|$
- c) $|z - 4i| = |z + 2|$



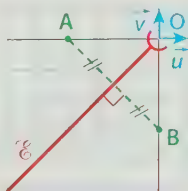
32 QCM Au moins une réponse exacte

Pour chaque affirmation, plusieurs réponses peuvent être exactes. Identifiez-les en justifiant vos réponses.

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1. L'ensemble $\mathcal{E}$ (en rouge) est l'ensemble des points M d'affixe z telle que :

- a) $|z + 3| = |z + 3i|$
- b) $\arg(z) = \frac{5\pi}{4} \pmod{2\pi}$
- c) $\arg(z) = -\frac{3\pi}{4} \pmod{2\pi}$



2. L'ensemble des points M d'affixe z telle que $|z| = 2$ et $\arg(z) = \frac{\pi}{6} + k\pi$ où k décrit $\mathbb{Z}$ est :

- a) un cercle
- b) une demi-droite
- c) une paire de points

3. Les points A, B et C ont pour affixes respectives :

$$a = 1 + i, b = 2 - \sqrt{3} + (2 + \sqrt{3})i \text{ et } c = 3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

- a) Le triangle ABC est équilatéral.
- b) Les points O, A, C sont alignés.
- c) Le point d'affixe $4i$ est équidistant de A et C.



Apprendre à chercher

33 Recherche d'ensemble

u est un nombre complexe donné. Pour tout nombre complexe z , $z \neq 1$ et $z \neq i$, on pose :

$$Z_1 = \frac{u - \bar{u}z}{1 - z} \quad \text{et} \quad Z_2 = \frac{z + i}{z - i}.$$

Objectif Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que Z_1 est un réel et l'ensemble des nombres complexes z tels que Z_2 est imaginaire pur. Dans chaque cas, représenter cet ensemble.

1. Il s'agit d'un problème de détermination d'ensemble. Les propositions « Z est réel » et « Z est imaginaire pur » peuvent se traduire de trois façons chacune :

Z est un réel	Z est un imaginaire pur
(1) $\text{Im}(Z) = 0$	(1) $\text{Re}(Z) = 0$
(2) $Z = \bar{Z}$	(2) $Z + \bar{Z} = 0$
(3) $\arg(Z) = 0$ ou π , $Z \neq 0$	(3) $\arg(Z) = -\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{\pi}{2}$, $Z \neq 0$

La première façon exige le calcul de $\text{Im}(Z)$ ou de $\text{Re}(Z)$, en général à partir de l'écriture algébrique $z = x + yi$, x et y réels.

Choisir, parmi ces trois façons, la mieux adaptée est parfois délicat. La présence de u et de son conjugué $\bar{u}$ dans l'expression Z_1 incite à passer par « $Z = \bar{Z}$ » pour déterminer le premier ensemble.

a) Justifiez que $\bar{Z}_1 = \frac{\bar{u} - u\bar{z}}{1 - \bar{z}}$.

b) Démontrez que :

$$Z_1 = \bar{Z}_1 \text{ équivaut à } (u - \bar{u})(1 - |z|^2) = 0.$$

2. Le raisonnement s'articule alors ainsi : on note $\mathcal{E}$ l'ensemble recherché ; de ce qui précède, il résulte que :

$$\langle z \in \mathcal{E} \rangle \text{ équivaut à } \langle (u - \bar{u})(1 - |z|^2) = 0 \rangle \quad [1].$$

Il s'agit de tirer de [1] une condition sur z .

a) Démontrez que si $u - \bar{u} = 0$, alors $\mathcal{E}$ est l'ensemble $\mathbb{C}$ privé de 1.

b) Démontrez que si $u - \bar{u} \neq 0$, alors $\mathcal{E}$ est l'ensemble des nombres complexes de module 1, privé de 1.

c) Représentez l'ensemble $\mathcal{E}$ lorsque $u - \bar{u} \neq 0$.

3. Pour déterminer le deuxième ensemble, on peut hésiter entre la première et la deuxième façon. On propose de traiter les deux.

Avec (1)

On pose $z = x + yi$, avec x et y réels, et on exprime la forme algébrique de Z_2 , $Z_2 = X + Yi$, en fonction de x et de y .

Pour le raisonnement, on note $\mathcal{F}$ l'ensemble des nombres complexes z tels que Z_2 est imaginaire pur.

a) Démontrez que $X = \frac{x^2 + y^2 - 1}{x^2 + (y - 1)^2}$ et $Y = \frac{2x}{x^2 + (y - 1)^2}$.

b) Démontrez que $\mathcal{F}$ est l'ensemble des nombres complexes z , $z \neq i$, $z = x + yi$, avec x et y réels, tels que :

$$x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

c) Représentez cet ensemble.

4. Avec (2)

Pour utiliser la deuxième façon, on a besoin de l'expression de $\bar{Z}_2$.

a) Calculez $\bar{Z}_2$ en fonction du conjugué $\bar{z}$ de z .

b) Calculez $Z_2 + \bar{Z}_2$ en fonction de z et $\bar{z}$.

c) Démontrez que $\mathcal{F}$ est l'ensemble des nombres complexes z , $z \neq i$, dont le module est égal à 1.

d) Interprétez géométriquement cet ensemble.

34 Équation du troisième degré dans $\mathbb{C}$

On considère le polynôme du troisième degré :

$$P(z) = z^3 - (3 + 4i)z^2 - 6(3 - 2i)z + 72i.$$

Objectif Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$ [1].

1. Pour résoudre une équation de deuxième degré à coefficients réels, on utilise la méthode générale à l'aide du discriminant Δ . On ne dispose pas d'une telle méthode pour les équations du troisième degré. En revanche, si l'on connaît une solution z_0 de $P(z)$, on peut chercher à mettre $z - z_0$ en facteur dans $P(z)$. Ainsi, l'équation [1] s'écrit sous la forme : $(z - z_0)(az^2 + bz + c) = 0$, où a , b , c sont des nombres complexes (ou réels).

a) Vérifiez que $z_0 = 4i$ est solution de l'équation $P(z) = 0$.

b) Développez l'expression $(z - z_0)(az^2 + bz + c)$.

2. Pour avoir l'égalité $P(z) = (z - z_0)(az^2 + bz + c)$ pour tout nombre complexe z , on admet qu'il suffit que les coefficients des termes de même degré de $P(z)$ et de la forme développée du polynôme $(z - z_0)(az^2 + bz + c)$ soient égaux.

a) Déterminez trois nombres a , b , et c tels que, pour tout z de $\mathbb{C}$, $P(z) = (z - z_0)(az^2 + bz + c)$.

b) Achevez la résolution de l'équation $P(z) = 0$.

3. Utilisez la même démarche pour résoudre l'équation :

$$3z^3 + (1 + 6i)z^2 + (16 + 2i)z + 32i = 0.$$

Narration de recherche

→ L'objectif n'est pas seulement de résoudre le problème posé : vous devez aussi noter les différentes idées même lorsqu'elles n'ont pas permis de trouver la réponse. Expliquez pourquoi vous avez changé de méthode et ce qui vous a fait avancer, etc.

35 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. a et b sont deux réels de l'intervalle $]0; \frac{\pi}{2}[$. Les points M et N ont respectivement pour affixes e^{ia} et e^{ib} .

Faites une figure et déterminez, en fonction de a et b , le module et un argument de $e^{ia} + e^{ib}$.

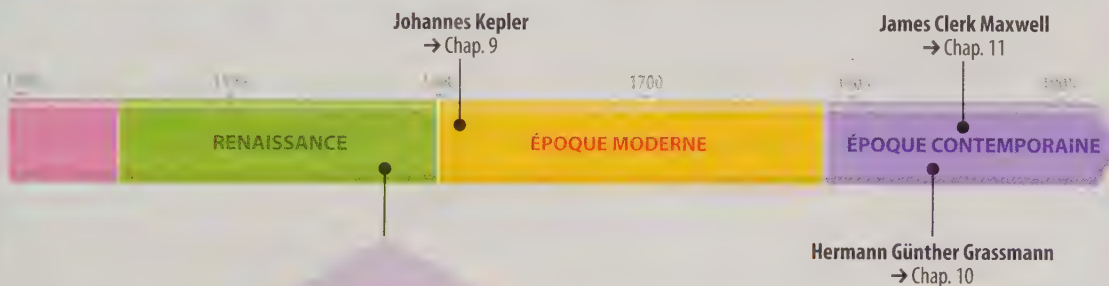
36 On pose $z = -\sin(2\theta) + 2i\cos^2(\theta)$ avec $\theta \in]-\pi; \pi[$.

1. Suivant les valeurs de θ , trouvez le module et un argument de z .
2. Pour quelles valeurs de θ , z et $1 - z$ ont-ils le même module ?

Chercheurs d'hier

Eux aussi, ils ont
cherché avant de trouver !

→ Voici quelques mathématiciens importants qui ont travaillé dans le domaine de la Géométrie.



Jérôme Cardan (1501-1576)

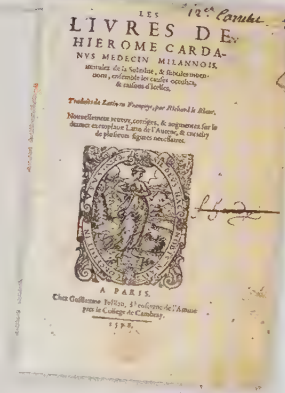


Jérôme Cardan (ou Girolamo Cardano) eut une vie mouvementée, où il fut à la fois médecin, astrologue, ingénieur et mathématicien. Il inventa notamment un système pour transmettre la rotation d'un axe à un autre, qu'on appelle encore aujourd'hui un *cardan*.

Il publia, en 1545, *Ars Magna sive de regulis algebraicis* (*Grand art selon les règles algébriques*), où il étudiait

notamment les équations du troisième degré. Cette publication suscita une violente controverse avec Nicolo Tartaglia, qui revendiquait la paternité de la méthode.

Pour trouver la solution de certaines équations du troisième degré, Cardan utilisait la racine carrée d'un nombre négatif. Mais il ne donna pas de statut à ces « nombres impossibles ». C'est Rafaelle Bombelli qui le fit en introduisant des nombres « imaginaires » dans son *Algèbre* publiée en 1572.



Page de titre d'un
des ouvrages de médecine
de Cardan (1578).



Sur le Web

serge.mehl.free.fr/chrono/Cardan.html
www.math93.com/Tartaglia-Cardan.html

Travaux dirigés

Utiliser GeoGebra



37 Ensemble de points

COMPÉTENCES

TICE

- Utiliser un logiciel de géométrie dynamique.
- Utiliser un curseur.
- Tester des conjectures.

Mathématiques

- Utiliser la notation exponentielle.
- Prouver l'alignement de trois points.
- Démontrer une conjecture.

→ Pour étudier des ensembles

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

A est le point d'affixe 1 et B est le point d'affixe i ; θ est un réel de l'intervalle $[0; 2\pi[$ et M le point d'affixe $z = e^{i\theta}$.

A Étude de l'ensemble des points tels que $z = e^{i\theta}$, $\theta \in [0; 2\pi[$

1. a) Avec GeoGebra, placez les points A et B.
b) Placez le point M. Pour cela :
 - créez un curseur pour θ entre 0 et 2π ;
 - saisissez $z = e^{i \cdot \theta}$ ou $z = \exp(i \cdot \theta)$, puis validez ;
 - saisissez $M = z$, puis validez.

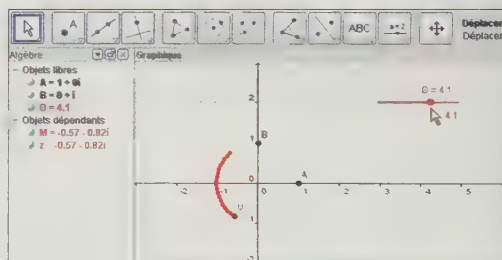
Décochez l'affichage de l'étiquette de z pour qu'elle ne se superpose pas à celle de M.

2. Activez la trace du point M, puis conjecturez la nature de l'ensemble $\mathcal{C}$ décrit par le point M lorsque θ décrit l'intervalle $[0; 2\pi[$.

3. Démontrez cette conjecture.

Aide

GeoGebra « reconnaît » le nombre complexe i .
On peut donc saisir les affixes de A et B.



B D'autres études d'ensembles

1. P est le point d'affixe $1 + z$, où z est l'affixe du point M.

- a) Placez le point P et affichez sa trace lorsque θ décrit l'intervalle $[0; 2\pi[$.
- b) Que peut-on conjecturer sur l'ensemble $\mathcal{C}'$ décrit par le point P lorsque θ décrit l'intervalle $[0; 2\pi[$?
- c) Démontrez cette conjecture.

2. M' est le point d'affixe $z' = re^{i\theta}$, où r est un nombre réel strictement positif.

- a) Après avoir créé un deuxième curseur pour $r > 0$, placez M' .

Affichez simultanément les traces de M et M' lorsque θ décrit l'intervalle $[0; 2\pi[$.

Recommencez en faisant cette fois varier r .

- b) Qu'observez-vous ? Expliquez vos observations.

3. S est le point d'affixe $1 + z + z^2$, où z est l'affixe de M.

- a) Placez le point S et affichez sa trace lorsque θ décrit l'intervalle $[0; 2\pi[$.

- b) Conjecturez la position relative des points O, M et S. (O est l'origine du repère.)

- c) Démontrez que pour tout réel θ de l'intervalle $[0; 2\pi[$, le nombre complexe $\frac{1+z+z^2}{z}$ est réel.

- d) Démontrez la conjecture émise dans la question 3. b).

Aide

Saisissez $P = (1 + z)$.

Approfondissement AP

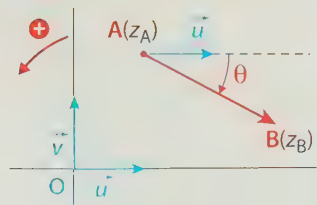
Prolongements possibles
→ exercices 102, 122 et 123

38 Utiliser l'affixe d'un vecteur

On place dans un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

On rappelle que si $\vec{AB}$ est un vecteur, alors :

- $AB = |z_B - z_A|$ (théorème 7) ;
- si $\vec{AB} \neq \vec{0}$, alors $(\vec{u}, \vec{AB}) = \arg(z_B - z_A)$ (théorème 8).

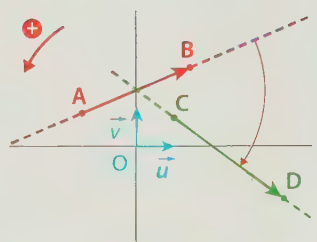


A Quelques résultats

1. Angle de deux vecteurs

A, B, C, D sont quatre points d'affixes respectives z_A, z_B, z_C, z_D telles que $z_A \neq z_B$ et $z_C \neq z_D$.

- a) Prouvez que $(\vec{AB}, \vec{CD}) = (\vec{u}, \vec{CD}) - (\vec{u}, \vec{AB})$.
- b) Déduisez-en que $(\vec{AB}, \vec{CD}) = \arg(z_D - z_C) - \arg(z_B - z_A)$



puis que $(\vec{AB}, \vec{CD}) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$

- c) Déduisez-en une condition nécessaire et suffisante sur l'argument du nombre complexe $\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$ pour que :

- le vecteur $\vec{AB}$ soit colinéaire au vecteur $\vec{CD}$ (ou que les droites (AB) et (CD) soient parallèles) ;
- les droites (AB) et (CD) soient perpendiculaires.

LOGIQUE

Condition nécessaire et suffisante
→ p. 464

2. Cas particulier

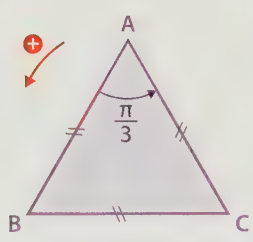
A, B, M sont trois points d'affixes respectives a, b, z telles que $z \neq a$ et $z \neq b$.

Démontrez que $(\vec{MA}, \vec{MB}) = \arg\left(\frac{z-b}{z-a}\right)$ et $\left|\frac{z-b}{z-a}\right| = \frac{MB}{MA}$.

3. Caractérisation de certains triangles

A, B, C sont trois points distincts deux à deux, d'affixes respectives z_A, z_B, z_C . Démontrez les équivalences suivantes.

- a) « ABC est rectangle en A » équivaut à « $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ est imaginaire pur ».
- b) « ABC est un triangle équilatéral direct » équivaut à « $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ».



B Applications

1. On désigne par A, B, I les points d'affixes respectives $z_A = 3 + 2i, z_B = -3$ et $z_I = 1 - 2i$.

- a) Écrivez sous forme algébrique $Z = \frac{z_B - z_I}{z_A - z_I}$.
- b) Déduisez-en que le triangle IAB est rectangle isocèle.

2. On désigne par A, B, C les points d'affixes respectives $z_A = -2i, z_B = -\sqrt{3} + i, z_C = \sqrt{3} + i$.

- a) Écrivez sous forme algébrique $\frac{z_B - z_A}{z_C - z_A}$.
- b) Déduisez-en la nature du triangle ABC.

39 Analyse fréquentielle des signaux

- Un signal périodique de période T est tel que :
pour tout réel t , $u(t + T) = u(t)$.
- La fréquence du signal est $\omega = \frac{1}{T}$, exprimée en hertz.
- La valeur moyenne d'un signal est donnée par la formule :

$$U_{\text{moy}} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt.$$

Plus N est grand,
plus on se rapproche
du signal exact $u(t)$.

- Le mathématicien français Joseph Fourier (1768-1830) a montré qu'un signal périodique quelconque, sous certaines conditions, peut se construire mathématiquement comme somme de sa valeur moyenne et d'une somme finie ou infinie de fonctions sinusoïdales de périodes multiples de T :

$$u_N(t) = a_0 + \sum_{n=1}^N a_n \cos(\omega n t) + b_n \sin(\omega n t), \text{ où } a_0 = U_{\text{moy}}.$$

A Calcul des coefficients a_n et b_n

1. Démontrez que pour tout réel x ,

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{et} \quad \sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

2. ω désigne un nombre réel et n un entier naturel tel que $n \geq 1$.

a) Exprimez $\cos(\omega n t)$ et $\sin(\omega n t)$ en fonction de $e^{i\omega n t}$ et $e^{-i\omega n t}$.

b) Déduisez-en que $a_n \cos(\omega n t) + b_n \sin(\omega n t) = \frac{a_n - ib_n}{2} e^{i\omega n t} + \frac{a_n + ib_n}{2} e^{-i\omega n t}$.

3. On pose $c_0 = a_0 = U_{\text{moy}}$ et pour tout entier $n \geq 1$, $c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}$ et $c_{-n} = \frac{a_n + ib_n}{2}$.

Démontrez que $u_N(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{i\omega n t}$.

B Signal rectangulaire exemple (1)

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on donne :

$$c_n = \frac{1}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

a) Justifiez que $a_0 = \frac{1}{2}$ et que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $b_n = 0$.

b) Démontrez que, si n est pair, alors $a_n = 0$, et que, si n est impair, $n = 2p + 1$ ($p \in \mathbb{N}$) alors :

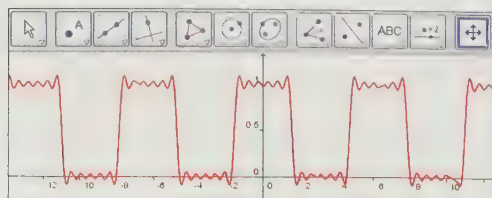
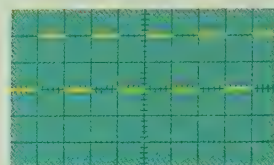
$$a_n = a_{2p+1} = \frac{2(-1)^p}{\pi(2p+1)}.$$

c) Déduisez-en que :

$$u_5(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cos(t) - \frac{2}{3\pi} \cos(3t) + \frac{2}{5\pi} \cos(5t).$$

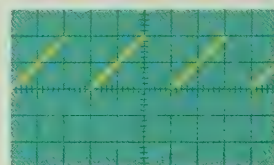
d) À l'aide de GeoGebra, tracez l'allure de u_{11} .

Que constatez-vous ?

Exemples de signaux
 2π -périodiques

① Signal rectangulaire

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\frac{\pi}{2} \leq t < \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{si } \frac{\pi}{2} \leq t < \frac{3\pi}{2} \end{cases}$$



② Signal en dents de scie

$$u(t) = t \quad \text{si } t \in [0; 2\pi[$$

C Signal en « dents de scie » exemple (2)

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on donne :

$$c_n = \frac{1}{n} i.$$

a) Justifiez que $a_0 = \pi$ et que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, $a_n = 0$.

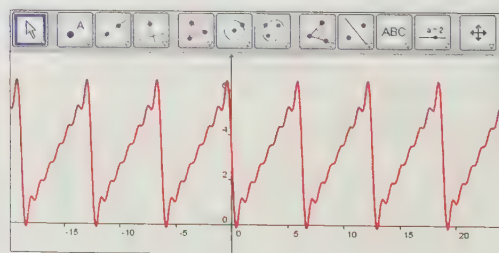
b) Démontrez que, pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$b_n = -\frac{2}{n}.$$

c) Déduisez-en que :

$$u_4(t) = \pi - 2 \left[\sin(t) + \frac{1}{2} \sin(2t) + \frac{1}{3} \sin(3t) + \frac{1}{4} \sin(4t) \right].$$

d) À l'aide de GeoGebra, tracez l'allure de u_7 . Que constatez-vous ?



DE TÊTE

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct (O ; $\vec{u}$, $\vec{v}$).

40 On pose $z_1 = 2 + 4i$ et $z_2 = 3 - 2i$.

Donnez la forme algébrique des nombres :

• $z_1 + z_2$ • $z_1 - z_2$ • $3z_1$

41 Déterminez la forme algébrique de chacun des nombres suivants.

a) $(2i)^2$; $(-i\sqrt{3})^2$; $(1+i)^2$.

b) $2i(3+5i)$ et $2(3-i)+4(i+2)$.

42 Quelle est la partie réelle de $(2+3i)(5+4i)$?

43 Quel est le conjugué de $i - \sqrt{2}$?

44 Donnez le module des nombres suivants.

a) $1+i$. b) $2i$. c) $-2+i$. d) $2+3i$.

45 Donnez un argument de chacun des nombres suivants.

a) -3 . b) i . c) $-i$. d) $(-i\sqrt{2})^4$.

46 Sachant que $\frac{\pi}{5}$ est un argument de z , donnez un argument de chacun des nombres suivants.

a) $3z$. b) $-z$. c) $\bar{z}$. d) $\frac{1}{z}$.

47 Donnez la forme algébrique de chacun des nombres suivants.

a) $2e^{i\pi}$. b) $3e^{i\frac{\pi}{2}}$. c) $e^{i\frac{\pi}{4}}$.

48 Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 = -4$.

49 Donnez la notation exponentielle de $-2e^{i\frac{\pi}{5}}$.

L'ENSEMBLE DES NOMBRES COMPLEXES

Pour les exercices 50 à 54

Donnez la forme algébrique des nombres complexes proposés.

50 $z_1 = (3+i)(4-2i)$; $z_2 = (3-i)^2$;
 $z_3 = (2+i\sqrt{3})(2-i\sqrt{3})$.

51 $z_1 = (1+i)(4-3i)(1-i)$; $z_2 = (3+i)^2(3-2i)$.

52 $z_1 = \frac{2}{1+i}$; $z_2 = \frac{1}{3-i\sqrt{2}}$; $z_3 = \frac{1}{i\sqrt{2}-3}$.

53 $z_1 = \frac{2-5i}{3+2i}$; $z_2 = \frac{6+3i}{1-2i}$; $z_3 = \frac{3i}{3+4i}$.

54 $z_1 = \frac{2}{1-2i} + \frac{3}{2+i}$; $z_2 = 2i - \frac{3}{2-i}$.

55 Pour tout nombre complexe z , on pose $f(z) = z^2 - z$ avec $z = x + yi$, x et y réels.

Démontrez que $f(z)$ a pour partie réelle $x^2 - y^2 - x$ et pour partie imaginaire $y(2x - 1)$.

56 Résolvez dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes d'inconnue z . (Donnez les solutions sous forme algébrique.)

a) $iz = 3 + i$.

b) $(2-i)z - 2i = iz + 2 - 3i$.

c) $(2iz + i)(4z - 8 - 4i) = 0$.

d) $\frac{z-2i}{z+2} = 4i$.

57 Résolvez dans $\mathbb{C}$ les systèmes suivants.

a) $\begin{cases} 3z + z' = 2 - 5i \\ z - z' = -2 + i \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3z + z' = 5 + 2i \\ -z + z' = 1 - 2i \end{cases}$

CONJUGUÉ D'UN COMPLEXE

58 Donnez une forme algébrique du conjugué $\bar{z}$ du complexe z dans chacun des cas suivants.

a) $z = 2 + 5i$. b) $\frac{1}{i+2}$. c) $z = \frac{2-i}{2i+1}$.

d) $z = (3-2i)(i+1)$. e) $z = \frac{i(3-2i)}{2i+1}$.

59 On note $z_1 = \frac{2i+1}{i+2}$ et $z_2 = \frac{1-2i}{2-i}$.

1. Pourquoi peut-on affirmer sans calcul que $z_1 + z_2$ est réel et $z_1 - z_2$ imaginaire pur ?

2. Retrouvez ces résultats par le calcul.

60 Écrivez en fonction de $\bar{z}$ le conjugué du nombre complexe Z dans chacun des cas suivants.

a) $Z = -2i + 3z$. b) $Z = 3 + i - 2iz$.

c) $Z = (2-iz)(2z-4+3i)$. d) $Z = \frac{2i+1-iz}{5i+2z}$.

61 Résolvez dans $\mathbb{C}$ les équations d'inconnue z .

a) $4\bar{z} + 2i - 4 = 0$.

b) $(iz - 2 + i)(2i\bar{z} + i - 2) = 0$.

c) $2z + i\bar{z} = 4$.

d) $2iz - \bar{z} = 4i$.

62 Résolvez dans $\mathbb{C}$ les équations d'inconnue z .

a) $\frac{\bar{z}+i}{\bar{z}-i} = 1$.

b) $\frac{2}{\bar{z}+i} + \frac{2}{\bar{z}-i} = 4$.

ÉQUATION DU SECOND DEGRÉ
À COEFFICIENTS RÉELS

63 Résolvez dans $\mathbb{C}$ chacune des équations suivantes d'inconnue z .

- a) $2z^2 - 6z + 5 = 0$. b) $z^2 - 5z + 9 = 0$.
 c) $z^2 + z + 1 = 0$. d) $z^2 - 2z + 3 = 0$.
 e) $z^2 = z + 1$. f) $z^2 + 3 = 0$.
 g) $z^2 - (1 + \sqrt{3})z + \sqrt{3} = 0$. h) $z^2 + 2\sqrt{2}z + 4 = 0$.
 i) $(z^2 + 2)(z^2 - 4z + 4) = 0$. j) $\frac{z-3}{z-2} = z$.
 k) $z^2 - 2(1 + \sqrt{2})z + 2(\sqrt{2} + 2) = 0$.

64 θ est un réel de l'intervalle $[0; 2\pi[$.

1. Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2(\sin(\theta))z + 1 = 0$.

2. Donnez les solutions sous forme exponentielle.

65 θ est un réel de l'intervalle $[0; 2\pi[$.

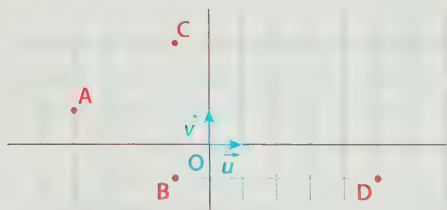
Résolvez dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes.

- a) $z^2 - 2(1 + 2\cos\theta)z + 5 + 4\cos\theta = 0$.
 b) $z^2 - 2(1 + \cos\theta)z + 2(1 + \cos\theta) = 0$.

AFFIXE D'UN POINT,
AFFIXE D'UN VECTEUR

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

66 1. Par lecture graphique, déterminez les affixes des points A, B, C et D puis celles des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.



2. Que peut-on dire des droites (AB) et (CD) ? Justifiez.

67 1. Placez les points A, B et C d'affixes respectives $a = 1 + 2i$, $b = -3 - i$ et $c = 3 - 2i$.

2. Déterminez l'affixe du point D tel que le quadrilatère ABCD soit un parallélogramme.

68 1. Calculez $(1 + i)^2$, $(1 + i)^4$ et $(1 + i)^8$.

2. M_n est le point d'affixe $(1 + i)^n$, $n \in \mathbb{N}$. Pour quelles valeurs de n , le point M_n appartient-il à l'axe des abscisses ?

69 Dans chacun des cas suivants, représentez l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie l'égalité proposée.

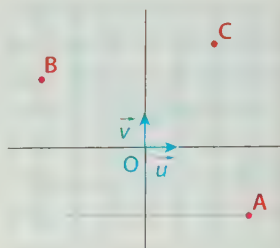
- a) $\operatorname{Re}(z) = -2$. b) $\operatorname{Im}(z) = 3$.

FORME TRIGONOMETRIQUE
ET NOTATION EXPONENTIELLE

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

70 1. Calculez le module des affixes respectives a, b et c des points A, B et C représentés ci-contre.

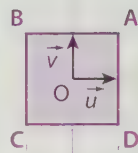
2. Déduisez-en que les points A, B et C appartiennent à un même cercle de centre O.



71 Calculez le module de chacun des nombres complexes suivants.

- $z_1 = -3 + 4i$ • $z_2 = \sqrt{6} - i\sqrt{2}$ • $z_3 = (\sqrt{6} - i\sqrt{2})^2$
 • $z_4 = (-3 + 4i)(\sqrt{6} - i\sqrt{2})$ • $z_5 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{-3 + 4i}$

72 Donnez l'affixe de chaque sommet du carré représenté ci-contre, puis un argument de chacune de ces affixes.

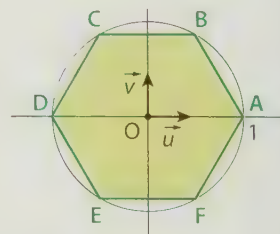


73 1. Représentez les points A, B, C, D, E, F, G et H d'affixes respectives $1 + i$, $-1 - i$, 5 , -3 , $2i$, $3 - 3i$, $-5i$ et $4 + 4i$.

2. Donnez, sans calcul, par des considérations géométriques un argument de chacun de ces nombres.

74 L'hexagone régulier ABCDEF est de centre O.

Donnez l'affixe de chacun des sommets de l'hexagone, puis un argument de chacune de ces affixes.



75 Dans chacun des cas suivants, représentez l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie l'égalité donnée.

- a) $\arg(z) = \frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}$. b) $\arg(z) = -\frac{\pi}{6} \pmod{2\pi}$.
 c) $\arg(iz) = \frac{5\pi}{4} \pmod{\pi}$. d) $\arg\left(\frac{z}{1+i}\right) = \frac{\pi}{4} \pmod{\pi}$.

76 Déterminez, dans chaque cas, un argument dans $]-\pi; \pi]$ de z .

- a) $z = (2 - 2i)(1 + i)$. b) $z = 2i(\sqrt{2} + i\sqrt{6})$.
 c) $z = -3i(1 + i)$. d) $z = (\sqrt{3} + i)^3$.

77 Déterminez, dans chaque cas, une forme trigonométrique de z .

- a) $z = 3 + 3i\sqrt{3}$. b) $z = 2 - 2i\sqrt{3}$.
 c) $z = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$. d) $z = 2 - 2i$.
 e) $z = -3i$. f) $z = -5$.
 g) $z = -\frac{2}{5} + \frac{2i\sqrt{3}}{5}$. h) $z = \frac{3}{1-i}$.
 i) $z = (1 - i\sqrt{3})(1 + i)$. j) $z = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2 - 2i}$.

78 Donnez une forme trigonométrique de chacun des nombres complexes suivants.

- a) $z_1 = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$. b) $z_2 = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$.
 c) $z_3 = -\cos\left(\frac{\pi}{5}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$.
 d) $z_4 = -7 \left[\cos\left(\frac{2\pi}{7}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{7}\right) \right]$.
 e) $z_5 = \sin\left(\frac{\pi}{9}\right) + i \cos\left(\frac{\pi}{9}\right)$.

79 Écrivez sous forme trigonométrique chacun des nombres complexes suivants.

- a) $z_1 = \left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \right]^{10}$.
 b) $z_2 = (\sqrt{2} - i\sqrt{2}) \left(-\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{7}\right) \right)$.
 c) $z_3 = (1 + i)^{2012} (1 - i)^{2013}$.

80 BAC On donne les nombres complexes :

$$z_1 = \frac{\sqrt{6} - i\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad z_2 = 1 - i.$$

1. Donnez une forme trigonométrique de :

$$z_1, z_2 \quad \text{et} \quad \frac{z_1}{z_2}.$$

2. Donnez une forme algébrique de $\frac{z_1}{z_2}$.

3. Déduisez-en que :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

81 On considère le nombre complexe :

$$z = (\sqrt{3} + 1) + (\sqrt{3} - 1)i.$$

1. Écrivez z^2 sous forme algébrique.

2. Déterminez le module et un argument de z^2 .

3. À l'aide des propriétés du module et des arguments, donnez le module et un argument de z .

4. Déduisez-en la valeur exacte de :

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \quad \text{et} \quad \sin\left(\frac{\pi}{12}\right).$$

82 LOGIQUE Implication

Pour chacune des implications suivantes :

- a) Dites si elle est vraie.
 b) Formulez l'implication réciproque.
 c) Dites si cette implication réciproque est vraie.

Toutes les réponses doivent être justifiées.

1. Si $|z| = 1$, alors $\bar{z} = \frac{1}{z}$.
 2. Si $z = z'$ ou $z = -z'$, alors $|z| = |z'|$.
 3. Si $\frac{z}{\bar{z}}$ est réel, alors z est réel ou z est imaginaire pur.

83 Donnez une forme exponentielle de chacun des nombres complexes suivants.

- $z_1 = -2ie^{i\frac{\pi}{3}}$ • $z_2 = (1 - i)e^{i\frac{\pi}{6}}$ • $z_3 = -\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{5}}$
 • $z_4 = \frac{3}{e^{i\frac{\pi}{7}}}$ • $z_5 = \frac{-2}{3e^{i\frac{\pi}{5}}}$ • $z_6 = \frac{3i}{e^{i\frac{2\pi}{5}}}$

84 On pose $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$, $z_2 = 3e^{-i\frac{\pi}{4}}$ et $z_3 = \sqrt{2}e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

Trouvez une forme exponentielle de chacun des nombres suivants.

$$z_1 z_2 \quad \frac{z_1}{z_2} \quad z_1^3 \quad z_1 z_2 z_3 \quad z_3^4 \quad \frac{z_2}{z_3}$$

85 On pose $z_1 = -1 - i$ et $z_2 = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$.

1. Écrivez $\frac{z_1}{z_2}$ sous forme algébrique, puis sous forme exponentielle.

2. Déduisez-en le module et un argument de $\frac{z_1}{z_2}$, puis la valeur exacte de $\cos\frac{11\pi}{12}$ et $\sin\frac{11\pi}{12}$.

86 BAC Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique 4 cm). On note A, B, C, D les points d'affixes respectives :

$$a = 1, \quad b = e^{i\frac{\pi}{3}}, \quad c = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i, \quad d = \frac{\sqrt{3}}{2}e^{-i\frac{\pi}{6}}.$$

1. Écrivez c sous forme exponentielle et d sous forme algébrique.

2. a) Placez les points A, B, C, D dans le repère.

b) Démontrez que le quadrilatère OACB est un losange.

87 Dans chacun des cas suivants, écrivez z sous forme exponentielle et déduisez-en la forme algébrique de $\bar{z}$ et celle de $\frac{1}{z}$.

- a) $z = \frac{6}{1+i}$. b) $z = (1 + i\sqrt{3})^4$.
 c) $z = 3ie^{i\frac{\pi}{3}}$. d) $z = -12e^{i\frac{\pi}{4}}$.

88 À l'aide de la notation exponentielle, retrouvez les formules trigonométriques donnant :

- $\cos(a + b)$ et $\sin(a + b)$;
 • $\cos(a - b)$ et $\sin(a - b)$;
 • $\cos(2a)$ et $\sin(2a)$.

NOMBRES COMPLEXES ET GÉOMÉTRIE

Pour les exercices de cette rubrique, le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

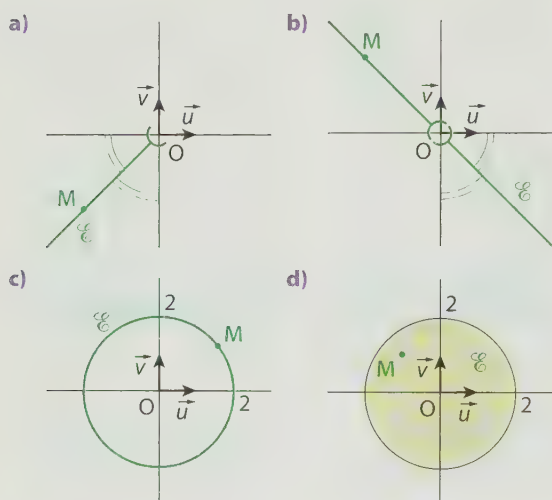
- 89** 1. Placez les points A, B, C d'affixes respectives :

$$z_A = -\frac{1}{3} - 2i, \quad z_B = 1 + 2i, \quad z_C = \frac{7}{3} + 6i.$$

2. Les points A, B, C sont-ils alignés ?

- 90** Dans chacun des cas suivants, on a représenté un ensemble $\mathcal{E}$ de points M du plan dont l'affixe a pour module r et pour argument θ .

Caractérisez à l'aide de r ou de θ , ou des deux, cet ensemble $\mathcal{E}$.



- 91** 1. Placez les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$$z_A = 1,5i, \quad z_B = 3,5 + i, \quad z_C = 1 - 1,5i \text{ et } z_D = -2,5 - i.$$

2. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? Justifiez.

- 92** On donne dans le plan complexe les points A, B et C d'affixes respectives :

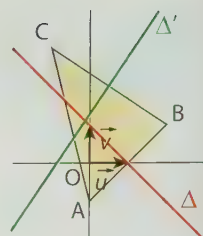
$$z_A = -2, \quad z_B = 1 + i \text{ et } z_C = -1 - 3i.$$

1. Placez les points A, B et C.
2. Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifiez.

- 93** Soit Γ l'ensemble des points M du plan complexe dont l'affixe z vérifie : $|z - (2 - i)| = \sqrt{2}$.

1. On note A le point d'affixe $2 - i$.
a) Démontrez que : $M \in \Gamma$ si, et seulement si, $AM = \sqrt{2}$.
b) Déduisez-en l'ensemble Γ . Représentez Γ .
2. Déterminez d'une autre façon l'ensemble Γ en utilisant la forme algébrique de $z = x + yi$, où x et y sont réels.

- 94** Sur la figure ci-contre, on a placé les points A, B, C d'affixes respectives $-i$, $2 + i$, $-1 + 3i$, et les droites médiatrices Δ et Δ' des segments [AB] et [BC] respectivement.



1. Prouvez que :

$$M(z) \in \Delta \Leftrightarrow |z - (-i)| = |z - 2 - i|.$$

2. Caractérisez de manière analogue l'appartenance d'un point $M(z)$ à la médiatrice Δ' .
3. Déterminez et représentez l'ensemble des points $M(z)$ tels que :

$$|z + i| = |z - 2 - i| = |z + 1 - 3i|.$$

- 95** Δ est l'ensemble des points du plan complexe d'affixe z telle que :

$$|z - 1 - 2i| = |z + 2 - i|.$$

1. On note A et B les points d'affixes respectives $1 + 2i$ et $-2 + i$.

- a) Démontrez que : $M \in \Delta$ si, et seulement si, $MA = MB$.
b) Déduisez-en l'ensemble Δ .

2. Déterminez d'une autre façon l'ensemble Δ en utilisant la forme algébrique de $z = x + yi$, où x et y sont réels.

- 96** 1. Dans chacun des cas suivants, déterminez l'ensemble des points M du plan complexe dont l'affixe z vérifie la condition donnée.

- a) $|z - 3| = 2$. b) $|z + 2i| = 1$.
c) $|z - i| = |z + 2|$. d) $|z - (2 + i)| = |z|$.

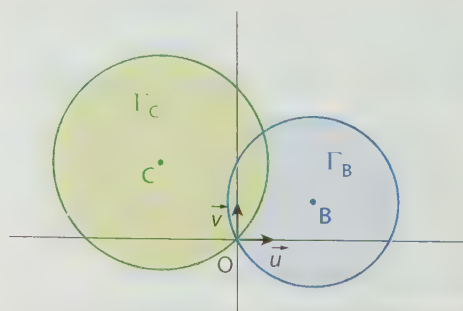
2. a) Justifiez que pour tout nombre complexe z ,

$$|\bar{z} + i| = |z - i|.$$

- b) Déduisez-en l'ensemble des points M du plan complexe tels que : $|\bar{z} + i| = 2$.

- c) Même question avec : $|\bar{z} - 2i| = |z + 2|$.

- 97** Sur la figure ci-dessous, on a représenté les cercles de centres B et C d'affixes respectives $z_B = 2 + i$ et $z_C = -2 + 2i$, et passant par l'origine O du repère. On note Γ_B et Γ_C les disques fermés correspondants.



1. Prouvez que :

$$M(z) \in \Gamma_B \text{ si, et seulement si, } |z - 2 - i| \leq \sqrt{5}.$$

2. Caractérisez de manière analogue l'appartenance du point $M(z)$ au disque Γ_C .

3. Caractérisez l'ensemble $\mathcal{E}$ des points $M(z)$ tels que :

$$|z - 2 - i| \leq \sqrt{5} \text{ et } |z + 2 - 2i| \leq 2\sqrt{2}.$$

98 Le bras du robot

Le bras d'un robot est formé de trois tiges pouvant pivoter (dans un même plan) autour des points A et B, le point A étant fixe. On se place dans un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1. Calculez les affixes de A, B et C.

2. On suppose dans cette question que :

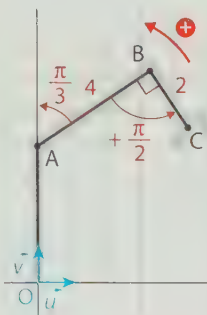
$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OA}) = \theta, \theta \in]0; \frac{\pi}{2}[.$$

a) Démontrez alors que C a pour affixe :

$$z_C = (4 \sin(\theta) + 2 \cos(\theta)) + i(4 - 2 \sin(\theta) + 4 \cos(\theta)).$$

b) Pour quelle valeur de θ le bras du robot atteint-il le point d'affixe $3\sqrt{2} + i(4 + \sqrt{2})$?

Bras articulé du robot Opportunity envoyé sur la planète Mars. À son extrémité, se trouvent des instruments de mesures.



EXERCICES DE SYNTHÈSE

99 ROC Restitution organisée des connaissances

Prérequis

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Si z et z' sont deux nombres complexes non nuls, alors $\arg(zz') = \arg z + \arg z' \pmod{2\pi}$.

1. Démonstration

z et z' sont deux nombres complexes non nuls.

Démontrez que :

a) $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg z - \arg z' \pmod{2\pi}$;

b) $\arg\left(\frac{1}{z^2}\right) = -2 \arg z \pmod{2\pi}$.

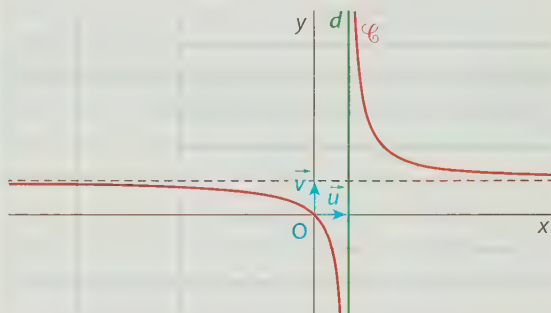
2. Application

z est un complexe non nul d'image M. On associe à M le point M' d'affixe $\frac{1}{z^2}$. On note d la demi-droite d'origine O et de vecteur directeur $\vec{w}$ tel que $(\vec{u}, \vec{w}) = \frac{\pi}{3}$.

a) Quel est l'ensemble des points M' lorsque M décrit la demi-droite d privée de O ?

b) Quel est l'ensemble des points M lorsque M' décrit la demi-droite d privée de O ?

100 Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On a tracé dans ce repère la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction $f: x \mapsto \frac{x}{x-1}$ et la droite d d'équation $x = 1$. Au point M d'affixe z , on associe le point M' d'affixe $Z = z^2 - 2(1+i)z$.



Démontrez que si M est un point de $\mathcal{C}$, alors M' est un point de l'axe des abscisses.

101 BAC

z est un complexe non nul et $z' = \frac{-2}{z}$.

1. Quelle relation lie les modules de z et z' ? Les arguments de z et z' ?

2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, M est le point d'affixe z , M' le point d'affixe z' . $\mathcal{D}$ est le disque de centre O et de rayon 2, privé de O. A est le point d'affixe a telle que $|a| = 2$ et $\arg(a) = \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$.

a) Quel est l'ensemble des points M' lorsque le point M décrit $\mathcal{D}$?

b) Quel est l'ensemble des points M' lorsque le point M décrit le segment $[OA]$ privé de O ?

102 ROC Restitution organisée des connaissances

Prérequis. z est un nombre complexe tel que $z = a + bi$ où a et b sont deux réels. On note $\bar{z}$ le conjugué de z tel que $\bar{z} = a - bi$.

1. Démonstration

a) Démontrez que pour tous nombres complexes z et $\bar{z}$,

$$\bar{z} \times z' = \bar{z} \times \bar{z}'.$$

b) Démontrez par récurrence que pour tout entier naturel n non nul et tout nombre complexe z :

$$\overline{z^n} = (\bar{z})^n$$

2. Application 1

On considère l'équation (E) : $z^4 = -4$, où z est un nombre complexe.

a) Démontrez que si z est solution de (E), alors $-z$ et $\bar{z}$ sont aussi solutions de (E).

b) On considère le nombre complexe $z_0 = 1 + i$.

• Écrivez z_0 sous forme exponentielle.

• Vérifiez que z_0 est solution de (E).

c) Déduisez des questions précédentes trois autres solutions de l'équation (E).

3. Application 2

Cette partie utilise les résultats du TD 38, page 251.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

A, B, C, D ont pour affixes respectives :

$$z_A = 1 + i, z_B = -1 + i, z_C = -1 - i, z_D = 1 - i.$$

a) Placez A, B, C, D dans le repère.

b) Soit E le point d'affixe $-1 + \sqrt{3}$.

Démontrez que le triangle BCE est équilatéral et que $(\vec{CE}, \vec{CB}) = \frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}$.

c) F est le point d'affixe $-i(1 + \sqrt{3})$.

Démontrez que $\frac{z_A - z_E}{z_A - z_F}$ est un réel.

Déduisez-en que les points A, E, F sont alignés.

AVEC LES TICE

103 Trouver un ensemble de points

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Les points A, B, C ont respectivement pour affixes $4; 4 + 4i; 4i$. Les points M et N sont définis par $\overrightarrow{AM} = m\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CN} = -m\overrightarrow{CB}$, m étant un réel de l'intervalle $[0; 1]$.

Ω est le milieu du segment $[MN]$.

1. Conjecturer avec GeoGebra

a) Créez un curseur pour le paramètre m avec $0 \leq m \leq 4$ (incrément 0,1).

b) Créez les points A, B et C et les vecteurs $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CB}$.

c) Saisissez :

$$M = A + (m) \text{ vecteur } (u) \text{ et } N = C + (-m) \text{ vecteur } (v).$$

e) Créez le point Ω , milieu de $[MN]$ et affichez sa trace.

f) Faites varier m à l'aide du curseur. Quelle ligne semble décrire le point Ω ?

2. Démontrez votre conjecture.

104 Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Le réel m décrit l'intervalle $[0; 4]$. P et Q ont respectivement pour affixes m et $(4 - m)i$. $\mathcal{C}$ est le cercle de centre A, milieu de $[PQ]$, et passant par P. La médiatrice du segment $[PQ]$ coupe $\mathcal{C}$ aux points C et B (avec $(\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2}$).

On s'intéresse au comportement des points C et B lorsque m décrit l'intervalle $[0; 4]$.

A. Construisez la figure avec GeoGebra.

Aide

- Créez un curseur de paramètre m avec $0 \leq m \leq 4$ (incrément : 0,1).
- Saisissez $P = m + 0i$ et $Q = 0 + (4 - m)i$. Affichez la trace de B et C.

B. Conjecturer

Faites varier m à l'aide du curseur. Quelles conjectures faites-vous concernant B et C ?

C. Démontrez

1. a) Démontrez que $(\vec{u}, \overrightarrow{AC}) - (\vec{u}, \overrightarrow{AP}) = \frac{\pi}{2}$.

b) Déduisez-en que $\arg(z_C - z_A) - \arg(z_P - z_A) = \frac{\pi}{2}$ puis que $\frac{z_C - z_A}{z_P - z_A} = i$.

c) Démontrez alors que le point C est fixe en calculant son affixe.

2. a) Démontrez que B a pour affixe $z_B = (m - 2)(1 - i)$.

b) Démontrez que $z_B = (2 - m)\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$ si $0 \leq m \leq 2$, et $z_B = (m - 2)\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}$ si $2 \leq m \leq 4$.

c) Déduisez-en que B décrit un segment que l'on précisera.

Prendre toutes les initiatives

105 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

M, N, P sont trois points d'affixes respectives z, z^2 et z^3 , $z \in \mathbb{C}$.

Quel est l'ensemble des points M tels que le triangle MNP est rectangle en P ?

106 Déterminez, puis représentez dans le plan complexe, l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie z^3 est réel.

107 z_1 et z_2 sont deux nombres complexes de module 1, et d'arguments respectifs α et β .

Démontrez que $\frac{(z_1 + z_2)^2}{z_1 z_2}$ est un réel positif ou nul.

108 Travail en autonomie

→ Rédigez la solution de cet exercice en vous aidant du guide.



Sur le Web

Retrouvez le corrigé de cet exercice sur le site www.transmathlycee.net/eleve-TermS

Vrai ou faux

Pour chacune des propositions suivantes, indiquez si elle est vraie ou fausse et donnez une démonstration de la réponse choisie.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1. A est le point d'affixe $2 - 5i$ et B est le point d'affixe $7 - 3i$.

Proposition 1. Le triangle OAB est rectangle isocèle.

2. On note Δ l'ensemble des points M d'affixe z telle que :

$$|z - i| = |z + 2i|.$$

Proposition 2. Δ est une droite parallèle à l'axe des réels.

3. z est un nombre complexe non nul.

Proposition 3. Si $\frac{\pi}{2}$ est un argument de z , alors :

$$|i + z| = 1 + |z|.$$

4. Soit $z = 3 + i\sqrt{3}$.

Proposition 4. Pour tout entier naturel n non nul, z^{3n} est imaginaire pur.

5. z est un nombre complexe non nul.

Proposition 5. Si $|z| = 1$, alors $z^2 + \frac{1}{z^2}$ est un nombre réel.

Analyser l'énoncé

Les cinq affirmations sont indépendantes.

Analyser l'énoncé

Il s'agit de traduire une situation géométrique à l'aide des complexes.

Analyser l'énoncé

Le calcul des premiers termes vous permet de répondre.

Guide

1. Une figure vous permet de choisir judicieusement les longueurs et les angles à calculer. Vous pouvez ainsi opter pour le calcul de $\frac{z_A}{z_B - z_A}$ et son interprétation.

2. Notez A et B les points d'affixes i et $-2i$, et traduisez le module de l'affixe d'un vecteur en termes de distance.

3. z a pour argument $\frac{\pi}{2}$, c'est donc un nombre imaginaire pur tel que $\text{Im}(z) > 0$, ou encore de la forme $z = ib$ avec $b > 0$.

4. On peut écrire z sous forme exponentielle et exploiter la formule $(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$.

5. Dire que $|z| = 1$ signifie que $z = e^{i\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$.

ZOOM sur la rédaction

Si vous optez pour le calcul

de $\frac{z_A}{z_B - z_A} = Z$, justifiez clairement que $|Z| = \frac{OA}{AB}$ et $\arg(Z) = (\overline{AB}, \overline{OA})$.

ZOOM sur la rédaction

N'oubliez pas de traduire $|z - i| = |z + 2i|$ en termes d'équivalence. Donnez la définition exacte de l'ensemble Δ .

ZOOM sur la rédaction

Justifiez clairement que $b > 0$, condition indispensable pour conduire le raisonnement.

109 BAC Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, d'unité graphique 2 cm.

On réalisera une figure que l'on complètera tout au long de l'exercice.

On considère les points A d'affixe i , B d'affixe $-2i$ et D d'affixe 1.

On appelle E le point tel que le triangle ADE est équilatéral direct.

Soit f l'application qui à tout point M d'affixe $z (z \neq i)$ associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = \frac{2z-i}{iz+1}$.

1. Démontrez que le point E a pour affixe :

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)(1+i).$$

2. Exprimez sous forme algébrique l'affixe du point D' associé au point D par l'application f .

a) Démontrez que pour tout nombre complexe z différent de i , $(z' + 2i)(z - i) = 1$.

b) Déduisez-en que pour tout point M d'affixe $z (z \neq i)$:

$$BM' \times AM = 1 \text{ et } (\vec{u}; \overrightarrow{BM'}) = -(\vec{u}; \overrightarrow{AM}) + k \times 2\pi, \text{ où } k \in \mathbb{Z}.$$

3. a) Démontrez que les points D et E appartiennent au cercle $\mathcal{C}$ de centre A et de rayon $\sqrt{2}$.

b) En utilisant les résultats de la question 2. b), placez le point E' associé au point E par l'application f . Vous laissez apparents les traits de construction.

4. Quelle est la nature du triangle $BD'E'$? Justifiez.

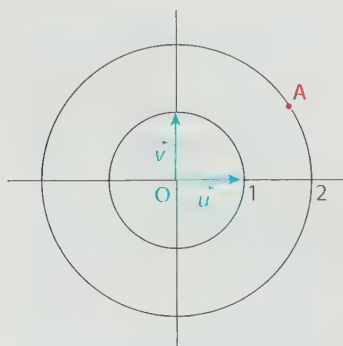
110 BAC Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on associe à tout point M d'affixe z non nulle, le point M' milieu du segment $[MM_1]$ où M_1 est le point d'affixe $\frac{1}{z}$.

Le point M' est appelé image de M.

1. a) Démontrez que :

$$OM \times OM_1 = 1 \text{ et } (\vec{u}; \overrightarrow{OM_1}) = -(\vec{u}; \overrightarrow{OM}) \pmod{2\pi}.$$

b) Sur la figure ci-dessous, le point A appartient au cercle de centre O et de rayon 2.



Construisez le point A' image de A. (On laissera apparent les traits de construction.)

2. a) Justifiez que pour tout nombre complexe z non nul, le point M' a pour affixe :

$$z' = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right).$$

b) B et C sont les points d'affixes respectives $2i$ et $-2i$. Calculez les affixes des points B' et C' , images respectives de B et C.

c) Placez B, C, B' , C' sur la figure précédente.

3. Déterminez l'ensemble des points M tels que $M' = M$.

4. Prise d'initiative

Démontrez que si M appartient au cercle de centre O et de rayon 1, alors son image M' appartient au segment $[KL]$ où K et L sont les points d'affixes respectives -1 et 1 .

111 BAC Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique 2 cm).

On considère les points A, B et C d'affixes respectives :

$$z_A = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, z_B = \overline{z_A} \text{ et } z_C = -3.$$

Partie A.

1. Écrivez z_A et z_B sous forme exponentielle.

2. Placez les points A, B, C.

3. Démontrez que le triangle ABC est équilatéral.

Partie B. Soit f l'application qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe :

$$z' = \frac{1}{3}iz^2.$$

On note O' , A' , B' , C' les points associés par f aux points O, A, B, C respectivement.

1. a) Déterminez la forme exponentielle des affixes des points A' , B' et C' .

b) Placez les points A' , B' et C' .

c) Démontrez l'alignement des points O, A, B' , ainsi que celui des points O, B, A' .

2. Démontrez que si M appartient à la droite (AB), alors M' appartient à la parabole d'équation $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{3}{4}$.

112 BAC QCM

Pour chaque question, plusieurs réponses peuvent être exactes. Justifiez vos réponses.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

1. $\mathcal{E}$ est l'ensemble des points M d'affixe z vérifiant $z = 1 - 2i + e^{i\theta} (\theta \in \mathbb{R})$.

a) $\mathcal{E}$ est une droite passant par le point d'affixe $2 - 2i$.

b) $\mathcal{E}$ est le cercle de centre d'affixe $-1 + 2i$ et de rayon 1.

c) $\mathcal{E}$ est le cercle de centre d'affixe $1 - 2i$ et de rayon 1.

d) $\mathcal{E}$ est le cercle de centre d'affixe $1 - 2i$ et de rayon $\sqrt{5}$.

2. f est l'application qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = -iz - 2i$.

a) Le point d'affixe $-1 - 2i$ est un antécédent du point d'affixe i par f .

b) Si $z = -1 - i$, alors les points M et M' sont confondus.

c) Si $|z'| = 1$, alors M est un point du cercle de centre A d'affixe -2 et de rayon 1 .

d) Si $\arg(z) = \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$ alors le point M' décrit une demi-droite.

3. On considère, dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation (E) :

$$z + |z|^2 = 7 + i.$$

a) (E) admet deux solutions distinctes qui ont 1 pour partie imaginaire.

b) (E) admet une solution qui a pour partie imaginaire 2.

c) Si z_1 et z_2 sont les solutions de (E), alors $\sqrt{2} e^{-\frac{3i\pi}{4}}$ est la forme exponentielle du nombre complexe $\frac{z_1}{z_2}$ avec $\operatorname{Re}(z_2) > 0$.

113 BAC

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. On considère l'application f du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe $z' = z^2 - 4z$.

1. On note A et B les points d'affixes respectives $z_A = 1 - i$ et $z_B = 3 + i$.

a) Calculez les affixes des points A' et B' , images respectives des points A et B par f .

b) On suppose que deux points ont la même image par f . Démontrez qu'ils sont confondus ou que l'un est l'image de l'autre par une symétrie centrale que l'on précisera.

2. I est le point d'affixe -3 .

a) Démontrez que le quadrilatère $OMIM'$ est un parallélogramme si, et seulement si, $z^2 - 3z + 3 = 0$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 3z + 3 = 0$.

3. a) Exprimez $z' + 4$ en fonction de $z - 2$. Déduisez-en une relation entre $|z' + 4|$ et $|z - 2|$, puis entre $\arg(z' + 4)$ et $\arg(z - 2)$.

b) Les points J et K ont pour affixes respectives $z_J = 2$ et $z_K = -4$.

Démontrez que tous les points M du cercle $\mathcal{C}$ de centre J et de rayon 2 ont leurs images M' sur un même cercle que l'on déterminera.

c) E est le point d'affixe $z_E = -4 - 3i$.

Donnez la forme trigonométrique de $z_E + 4$ et, à l'aide du **3. a)**, démontrez qu'il existe deux points dont l'image par f est E .

Précisez sous forme algébrique l'affixe de ces deux points.

114 BAC Vrai ou faux

Pour chaque proposition, indiquez si elle est vraie ou fausse. Justifiez votre réponse.

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$. f est l'application qui à tout nombre complexe z non nul associe le nombre complexe $z' = f(z) = \left(\frac{z}{|z|}\right)^2$.

On note M le point d'affixe $z = x + yi$ ($z \neq 0$) et M' le point d'affixe $z' = x' + yi'$.

a) $x' = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ et $y' = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$.

b) « $z' \in \mathbb{R}$ » équivaut à « M appartient à l'axe des ordonnées ».

c) $f[(1+i)^8]$ est un réel.

d) Il existe un seul point M tel que M et M' soient confondus.

115 BAC QCM

Pour chaque question, une seule des trois propositions est exacte. Justifiez chaque fois votre réponse.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct d'origine O .

1. Une solution de l'équation $2z + \bar{z} = 9 + i$ est :

a) 3 **b)** i **c)** $3 + i$

2. z est un nombre complexe, $|z + i|$ est égal à :

a) $|z| + 1$ **b)** $|z - 1|$ **c)** $|i\bar{z} + 1|$

3. z est un nombre complexe d'argument θ ; un argument de $-\frac{1+i\sqrt{3}}{\bar{z}}$ est :

a) $-\frac{\pi}{3} + \theta$ **b)** $-\frac{2\pi}{3} + \theta$ **c)** $\frac{2\pi}{3} - \theta$

4. n est un entier naturel. Le nombre complexe $(\sqrt{3} + i)^n$ est un imaginaire pur si, et seulement si :

a) $n = 4$ **b)** $n = 6k + 3, k \in \mathbb{Z}$ **c)** $n = 6k, k \in \mathbb{Z}$

5. A et B sont deux points d'affixes respectives i et -1 . L'ensemble des points M d'affixe z telle que $|z - i| = |z + 1|$ est :

a) la droite (AB) **b)** le cercle de diamètre $[AB]$

c) La droite perpendiculaire à $[AB]$ passant par O

6. Ω est le point d'affixe $1 - i$. L'ensemble des points M d'affixe $z = x + yi$ vérifiant $|z - 1 + i| = |3 - 4i|$ a pour équation :

a) $y = -x + 1$ **b)** $(x - 1)^2 + y^2 = \sqrt{5}$

c) $z = 1 - i + 5e^{i\theta}, \theta \in \mathbb{R}$

Pour aller plus loin

116 Suite et nombres complexes (I)

1. a) (r_n) est la suite géométrique réelle de premier terme r_0 strictement positif et de raison $\frac{2}{3}$.

Exprimez r_n en fonction de r_0 et de n .

b) (θ_n) est la suite arithmétique réelle de premier terme θ_0 appartenant à $\left[0; \frac{\pi}{3}\right]$ et de raison $\frac{2\pi}{3}$.

Exprimez θ_n en fonction de θ_0 et n .

c) On pose $z_n = r_n(\cos \theta_n + i \sin \theta_n)$, $n \in \mathbb{N}$.

Sachant que z_0, z_1 et z_2 sont tels que $z_0 z_1 z_2 = 8$, déterminez le module et un argument de z_1 et de z_2 .

2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique 4 cm), on appelle M_n le point d'affixe z_n .

a) Placez les points M_0, M_1, M_2 et M_3 .

b) Pour tout n de $\mathbb{N}$, calculez $M_n M_{n+1}$ en fonction de n .

c) On pose pour tout entier naturel n , $I_n = \sum_{k=0}^n M_k M_{k+1}$.

Exprimez I_n en fonction de n et déterminez la limite de I_n quand n tend vers $+\infty$.

117 Suite et nombres complexes (II)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique 1 cm).

On considère les nombres complexes :

$$a = \frac{\sqrt{3} + 1}{4} + i \left(\frac{\sqrt{3} - 1}{4} \right) \text{ et } z_0 = 6 + 6i.$$

Pour tout entier naturel n non nul, on désigne par A_n le point d'affixe z_n définie par $z_n = a^n z_0$.

Partie A

1. Déterminez la forme algébrique de z_1 et de a^2 .

2. Déterminez une forme exponentielle de z_1 et démontrez que $a^2 = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{6}}$.

3. a) Exprimez z_3 , puis z_7 en fonction de z_1 et de a^2 .

b) Placez les points A_0, A_1, A_3 et A_7 , images respectives des nombres complexes z_0, z_1, z_3 et z_7 .

Partie B

Pour tout entier naturel n , on pose $|z_n| = r_n$.

1. a) Démontrez que pour tout entier naturel n ,

$$r_n = 12 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^{n+1}.$$

b) Déduisez-en que la suite (r_n) est une suite géométrique dont vous préciserez le premier terme et la raison.

2. Déterminez la limite de la suite (r_n) et interprétez géométriquement le résultat obtenu.

3. Déterminez le plus petit entier naturel p tel que $OA_p \leq 10^{-3}$ et donnez alors une mesure en radian de l'angle orienté $(\vec{u}; \overrightarrow{OA_p})$.

118 Suite et nombres complexes (III)

On considère les nombres complexes z_n définis, pour tout entier naturel n , par :

$$z_0 = 1 \quad \text{et} \quad z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + i \frac{\sqrt{3}}{4} \right) z_n.$$

On note A_n le point d'affixe z_n .

1. a) Calculez sous forme algébrique les nombres z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 et z_6 .

b) Dans un repère orthonormé direct (unité graphique 8 cm), placez les points $A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5$ et A_6 .

2. Pour tout entier naturel n , on pose $d_n = |z_{n+1} - z_n|$.

a) Vérifiez que pour tout entier $n \geq 1$,

$$z_{n+1} - z_n = \left(\frac{3}{4} + i \frac{\sqrt{3}}{4} \right) (z_n - z_{n-1}).$$

b) Déduisez-en une relation entre d_n et d_{n-1} pour tout $n \geq 1$, puis une expression de d_n en fonction de n et d_0 .

c) Fournissez une interprétation géométrique des nombres d_n .

d) On pose $L_n = \sum_{k=0}^{n-1} A_k A_{k+1}$; L_n est la longueur de la ligne polygonale de sommets successifs $A_0, A_1, \dots, A_n$.

Déterminez L_n en fonction de n , puis la limite de L_n quand n tend vers $+\infty$.

3. Pour tout entier naturel n , on désigne par a_n l'argument de z_n dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$.

a) Établissez une relation entre a_n et a_{n-1} pour tout entier $n \geq 1$. Déduisez-en l'expression de a_n en fonction de n .

b) Pour quelles valeurs de n , les points O, A_0 et A_n sont-ils alignés ?

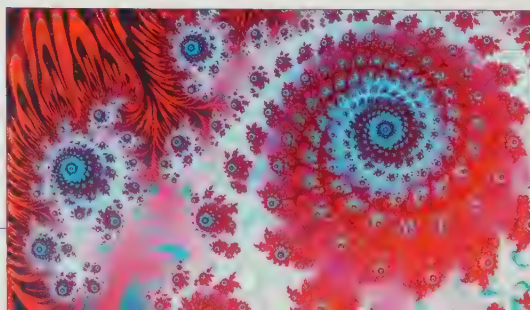
Culture mathématique

Les ensembles de Julia

Ces ensembles constituent une très belle collection d'images. Ils sont liés aux suites de nombres complexes définies par la relation de récurrence $z_{n+1} = z_n^2 + c$ (z_0 et c étant deux nombres complexes donnés).

L'ensemble de Julia correspondant est la frontière de l'ensemble des nombres z_0 pour lesquelles la suite est bornée, c'est-à-dire telle que : il existe un réel M tel que pour tout naturel n , $|z_n| \leq M$.

(La frontière d'un ensemble est constituée des points qui, de façon intuitive, sont « situés au bord » de cet ensemble.)



119 Résolution d'une équation

On pose $P(z) = z^4 - 6z^3 + 23z^2 - 34z + 26$.

1. α est un nombre complexe quelconque.

a) Démontrez que $P(\bar{\alpha}) = \overline{P(\alpha)}$.

b) Déduisez-en que si $P(\alpha) = 0$, alors $P(\bar{\alpha}) = 0$.

2. a) Calculez $P(1+i)$.

b) Indiquez deux solutions complexes de l'équation $P(z) = 0$.

3. On pose $Q(z) = [z - (1+i)][z - (1-i)]$.

a) Vérifiez que $P(z)$ est le produit du polynôme $Q(z)$ et d'un polynôme $Q_1(z)$ du second degré que l'on déterminera.

b) Résolvez dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

120 Dans le plan complexe, M est un point d'affixe $z = x + yi$, x et y réels. Lorsque $z \neq 1$, on associe au point M le point M' d'affixe Z telle que : $Z = \frac{5z-2}{z-1}$.

1. Exprimez $Z + \bar{Z}$ en fonction de z et $\bar{z}$.

2. Démontrez que le point M' appartient à l'axe des ordonnées si, et seulement si, le point M appartient à un cercle privé d'un point.

121 Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

À tout nombre complexe $z = x + yi$, $z \neq -1$, on associe le nombre complexe $Z = \frac{2iz-i}{z+1}$.

1. Exprimez $\bar{Z}$ en fonction de $\bar{z}$.

2. a) Justifiez que $|Z| = 1$ équivaut à $Z\bar{Z} = 1$.

b) Démontrez que l'ensemble $\mathcal{C}_1$ des points M d'affixe z tels que $|Z| = 1$ est un cercle que l'on construira dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

3. a) Justifiez que « Z est imaginaire pur » équivaut à « $Z + \bar{Z} = 0$ ».

b) Déduisez-en l'ensemble $\mathcal{C}_2$ des points M d'affixe z tels que Z est imaginaire pur.

PROLONGEMENTS DU TD 38**122 Fonction trigonométrique et nombres complexes**

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère le point A d'affixe 2 et le cercle $\mathcal{C}$ de centre O passant par A . On note α le nombre complexe $1 + i\sqrt{3}$ et $\bar{\alpha}$ le conjugué de α .

1. a) Démontrez que $\alpha^2 - 4\alpha = 2\bar{\alpha} - 8$.

b) Démontrez que les points B et C d'affixes respectives α et $\bar{\alpha}$ appartiennent au cercle $\mathcal{C}$.

2. D est le point de $\mathcal{C}$ d'affixe $2e^{i\theta}$ où θ est un réel de $]-\pi; \pi]$. On note E le point de $\mathcal{C}$ tel que $(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OE}) = \frac{\pi}{3}$. Justifiez que E a pour affixe $z_E = \alpha e^{i\theta}$.

3. On note F et G les milieux respectifs des segments $[BD]$ et $[CE]$.

a) Justifiez que F a pour affixe $z_F = \frac{\alpha}{2} + e^{i\theta}$ et que G a pour affixe $z_G = \frac{\alpha e^{i\theta} + \bar{\alpha}}{2}$.

b) En utilisant la question 1. a), démontrez que :

$$\frac{z_G - 2}{z_F - 2} = \frac{\alpha}{2}.$$

c) Déduisez-en que le triangle AFG est équilatéral.

4. Dans cette question, toute trace de recherche ou d'initiative sera prise en compte.

On se propose de démontrer qu'il existe une position du point D pour laquelle la longueur du côté $[AF]$ du triangle AFG est minimale.

a) Démontrez que :

$$AF^2 = 4 - 3 \cos(\theta) + \sqrt{3} \sin(\theta).$$

b) On considère la fonction f définie sur $]-\pi; \pi]$ par :

$$f(x) = 4 - 3 \cos(x) + \sqrt{3} \sin(x).$$

Le tableau ci-dessous donne les variations de f sur l'intervalle $]-\pi; \pi]$.

Justifiez et complétez le tableau de variation.

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
f				

c) Concluez.

123 Nombres complexes et géométrie

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Partie A

A, B, C sont des points d'affixes respectives a, b, c . Les points A, B, C sont distincts deux à deux. On rappelle que :

$$(\vec{u}; \overrightarrow{AB}) = \arg(b - a).$$

Démontrez que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \pmod{2\pi}$.

Partie B

A est le point d'affixe $1+i$. À tout point M d'affixe z non nulle, on associe le point M' d'affixe $z' = \frac{z-1-i}{z}$. M' est appelé image de M .

1. a) Déterminez sous forme algébrique l'affixe du point B' , image du point B d'affixe i .

b) Démontrez que $z' \neq 1$.

2. a) Déterminez l'ensemble $\mathcal{C}$ des points M pour lesquels $|z'| = 1$.

b) Déterminez l'ensemble $\mathcal{A}$ des points M pour lesquels z' est un réel différent de 1.

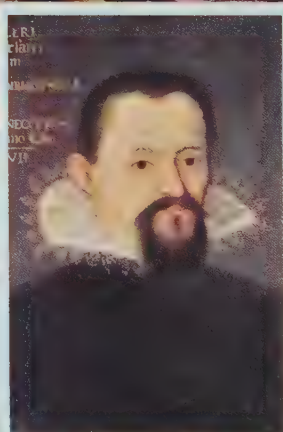
Droites et plans de l'espace



D'un siècle
à un autre

Pour imaginer et concevoir des édifices toujours plus audacieux, les ingénieurs architectes s'appuient en permanence sur la géométrie euclidienne qui est un outil idéalement adapté à la vision et à la mesure de l'espace physique.

Dans ses recherches déterminantes sur la structure de l'Univers (*Mysterium Cosmographicum*, 1596), l'astronome allemand Johannes Kepler propose, dans une vision très euclidienne, que les planètes sont séparées par des polyèdres réguliers.



En savoir plus
Johannes Kepler

→ Chercheurs d'hier p. 275

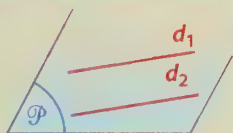
Rappels

& Exercices-tests

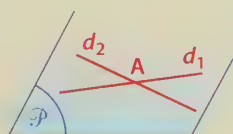
Compléments
numériques

Positions relatives de deux droites ou de deux plans

• Dire que deux droites sont **parallèles** signifie qu'elles sont soit coplanaires sans point commun, soit confondues.

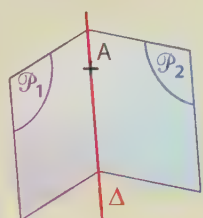


• Dire que deux droites sont **sécantes** signifie qu'elles sont situées dans un même plan et ont un seul point commun.



• Dire que deux plans sont **parallèles** signifie soit qu'ils n'ont aucun point commun, soit qu'ils sont confondus.

• Deux plans non parallèles sont **sécants** et leur intersection est une droite.



• Si deux plans distincts ont en commun un point A, leur intersection est une droite qui passe par A.

Position d'une droite et d'un plan

• Dire qu'une droite d et un plan $\mathcal{P}$ sont **parallèles** signifie soit que d est contenue dans $\mathcal{P}$, soit que d et $\mathcal{P}$ n'ont aucun point commun.

• Dire qu'une droite d et un plan $\mathcal{P}$ sont **sécants** signifie que leur intersection est réduite à un point A.

Règles de base

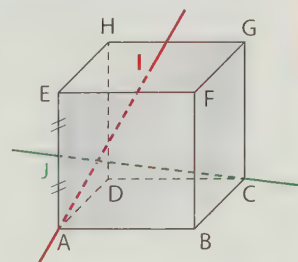
• Par trois points non alignés A, B, C passe un seul plan, noté (ABC).

• Si A et B sont deux points distincts d'un plan $\mathcal{P}$, alors tous les points de la droite (AB) appartiennent au plan $\mathcal{P}$.

Pour chacun des exercices suivants, dites si les propositions sont vraies ou fausses. Vous justifierez votre réponse.

1 ABCDEFGH est un cube. I est le centre de la face EFGH et J le milieu de l'arête [EA].

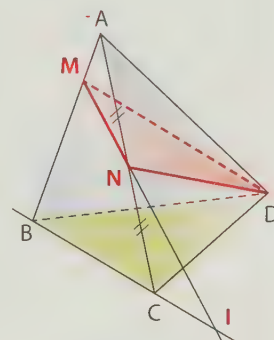
• Les droites (AI) et (CJ) sont sécantes.



2 ABCD est un tétraèdre.

M est le point du segment [AB] tel que $4AM = AB$ et N est le milieu de l'arête [AC]. Les droites (MN) et (BC) se coupent en I.

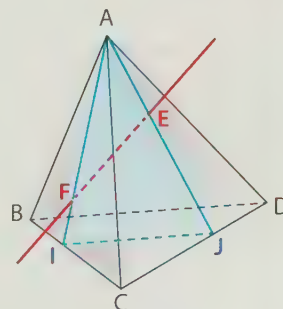
• Les plans (BCD) et (MND) sont sécants selon la droite (DI).



3 ABCD est un tétraèdre.

E est un point de la face ACD et F un point de la face ABC tels que la droite (EF) et le plan (BCD) sont sécants.

• La droite (EF) coupe le plan (BCD) en un point K aligné avec I et J.

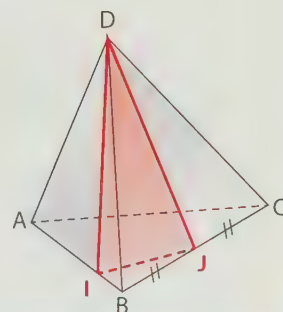


4 ABCD est un tétraèdre.

I est le point de l'arête [AB] tel que $4IB = AB$ et J est le milieu de l'arête [BC].

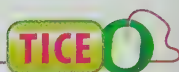
a) Le plan (DIJ) coupe la face ADC en un point.

b) Le plan (DIJ) coupe le plan (ADC) suivant une droite.



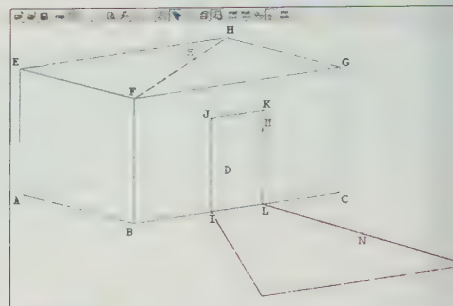
Corrigés sur www.transmathlycee.net/eleve-Term5

Activité 1 LA NAPPE DE LUMIÈRE



La chambre d'une maison a la forme d'un parallélépipède rectangle. La porte IJKL est rectangulaire. Une source de lumière ponctuelle S est placée au plafond sur la diagonale [FH].

L'objectif de cette activité est de représenter, sur une vue en perspective cavalière, la tache de lumière que laisse passer l'ouverture de la porte, à l'extérieur de la pièce sur le sol (ABCD).



1 Simulation à l'aide d'un logiciel de géométrie

a) Avec Geospace, créez dans l'ordre :

- le parallélépipède rectangle (en général dans la base sous le nom : pavé) puis la porte IJKL ;
- le point S libre sur le segment [FH] ;
- le point M libre dans le polygone IJKL (auquel vous avez donné un nom) ;
- le point N, intersection de la droite (SM) et du plan (ABC).
- Pour avoir une idée de la tache de lumière, activez la trace du point N :

Afficher ► Sélection trace ; sélectionnez le point N et cliquez sur OK.

Activez le mode Trace

- Saisissez alors le point M et déplacez-le en parcourant, dans un premier temps, le tour de la porte.

Décrivez la trace du point N obtenue et conjecturez sa nature.

- Vous est-il possible de « remplir » la partie du plan délimitée par la trace précédente ? Comment ?

b) Déplacez la source de lumière S sur le segment [FH] puis animez de nouveau le point M et activez la trace de N. Cette trace est-elle la même que précédemment ? Est-elle de la même nature ?



Note Le logiciel GeoGebra (version 5) inclut désormais la 3D. Les versions utilisant GeoGebra de tous les TP sont disponibles sur le site www.transmathlycee.net

2 Analyse de la situation et conclusion

a) Justifiez que : « M étant un point quelconque de la bordure de la porte, le rayon lumineux issu de S coupe le plan (ABC) en un point N. »

On conçoit que le point N décrit le contour de la tache de lumière lorsque M décrit le tour de la porte IJKL.

b) M parcourt le segment [KL]. Pourquoi le point N appartient-il au plan (SKL) ? Justifiez votre réponse. Or N appartient aussi au plan (ABC). Quelle ligne décrit alors le point N lorsque M parcourt [KL] ?

c) M parcourt le segment [IJ]. Inspirez-vous de ce qui précède pour préciser quelle ligne décrit le point N lorsque M parcourt [IJ].

d) M parcourt le segment [JK]. Le point N appartient donc au plan (ABC) et au plan (SJK). La droite (IL) du plan (ABC) est parallèle à la droite (JK) du plan (SJK).

Que pouvez-vous alors dire de la droite commune aux deux plans ? (Pensez au théorème « du toit », vu en seconde). Précisez quelle ligne décrit le point N lorsque M parcourt [JK].

e) M parcourt le segment [IL]. Que pouvez-vous alors dire des points M et N ? Concluez.

f) Déduisez de ce qui précède la nature du contour de la tache de lumière.

3 Construction de la tache de lumière

Les rayons de lumière [SK] et [SJ] coupent le plan (ABC) respectivement en P et Q.

a) Construction du point P

- La parallèle à (FB) passant par S coupe le plan (ABC) en S'. Justifiez que S' est un point du segment [BD].
- Les droites (S'L) et (SK) sont-elles sécantes ? Justifiez. Quel est leur point commun ?

b) Construisez de même le point Q, puis terminez la construction de la tache de lumière.

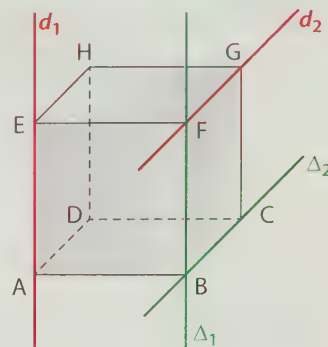
Activité 2 ORTHOGONALITÉ DANS L'ESPACE

1 Droites orthogonales

Dans le cube ci-contre, d_1 et d_2 sont deux droites non coplanaires. Si l'on trace par B les droites Δ_1 et Δ_2 , parallèles respectivement à d_1 et d_2 , ces droites sont perpendiculaires. Il en serait de même si l'on traçait les parallèles à d_1 et d_2 passant par un point quelconque de l'espace.

On dit que d_1 et d_2 sont deux droites **orthogonales**.

- Citez d'autres couples de droites orthogonales sur la figure ci-contre.



2 Deux droites suffisent...

La droite d coupe le plan $\mathcal{P}$ en B. De plus, d est perpendiculaire à deux droites d_1 et d_2 du plan $\mathcal{P}$ sécantes en B.

On note A, I et J, les points situés respectivement sur d , d_1 et d_2 tels que $AB = BI = BJ = 1$. On pose $\alpha = \widehat{IBJ}$.

L'objectif de l'activité est de démontrer que la droite d est perpendiculaire à la droite d_3 , bissectrice de l'angle $\widehat{IBJ}$. H est l'intersection des droites (IJ) et d_3 .

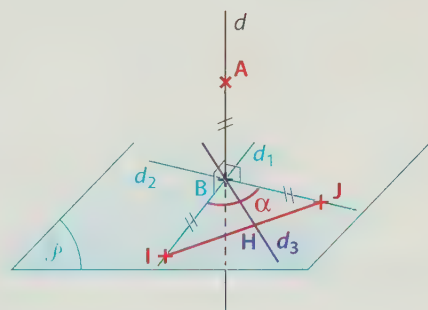
a) Quelle est la nature du triangle IAJ ?

b) Pourquoi les triangles BHI et BHJ sont-ils rectangles ?

c) Démontrez que $BH^2 = 1 - IH^2$ et $AH^2 = 2 - IH^2$.

d) Déduisez-en que $AH^2 - BH^2 = AB^2$, puis que d_3 et d sont deux droites perpendiculaires.

On démontrerait de même que la droite d est perpendiculaire à la droite d_4 , bissectrice de l'angle formé par d_1 et d_3 .



Conclusion

Si une droite est perpendiculaire en un point B à deux droites d'un plan $\mathcal{P}$ sécantes en B, on dit que la droite **d est perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$** .

On peut démontrer que la droite d est perpendiculaire à toutes les droites de $\mathcal{P}$ passant par B.

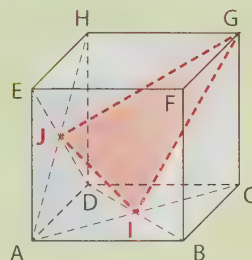
Problème ouvert

Refaites cet exercice après le chapitre 9. ... Est-il plus facile ?

ABCDEFGH est un cube d'arête 4 cm.

I et J sont les centres respectifs des faces ABCD et ADHE.

L'aire du triangle IGJ dépasse-t-elle 7 cm^2 ?



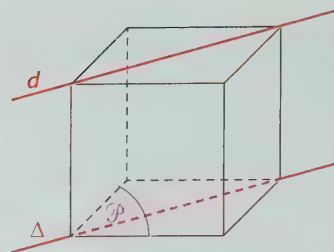
1 Parallélisme dans l'espace

Théorème 1

(admis)

Si une droite d est parallèle à une droite Δ contenue dans un plan $\mathcal{P}$, alors d est parallèle au plan $\mathcal{P}$.

$$\left. \begin{array}{l} d \parallel \Delta \\ \Delta \text{ est contenue dans } \mathcal{P} \end{array} \right\} \Rightarrow d \parallel \mathcal{P}$$

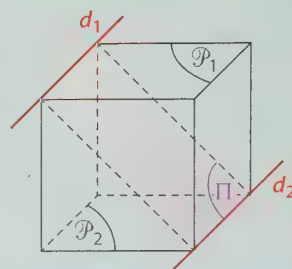


Théorème 2

(admis)

Si deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles, alors tout plan Π qui coupe $\mathcal{P}_1$ coupe $\mathcal{P}_2$ et les intersections sont deux droites parallèles.

$$\left. \begin{array}{l} \mathcal{P}_1 \parallel \mathcal{P}_2 \\ \Pi \cap \mathcal{P}_1 = d_1 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Pi \cap \mathcal{P}_2 = d_2 \\ d_1 \parallel d_2 \end{array} \right.$$

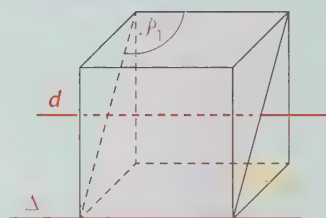


Théorème 3

(admis)

Si une droite d est parallèle à deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sécants suivant une droite Δ , alors d et Δ sont deux droites parallèles.

$$\left. \begin{array}{l} d \parallel \mathcal{P}_1 \\ d \parallel \mathcal{P}_2 \\ \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \Delta \end{array} \right\} \Rightarrow d \parallel \Delta$$

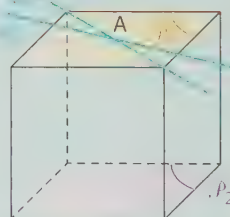


Théorème 4

(admis)

Si un plan $\mathcal{P}_1$ contient deux droites sécantes parallèles à un plan $\mathcal{P}_2$, alors $\mathcal{P}_1$ est parallèle à $\mathcal{P}_2$.

$$\left. \begin{array}{l} d_1 \text{ est contenue dans } \mathcal{P}_1 \\ d_2 \text{ est contenue dans } \mathcal{P}_1 \\ d_1 \cap d_2 = \{A\} \\ d_1 \parallel \mathcal{P}_2 \text{ et } d_2 \parallel \mathcal{P}_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \mathcal{P}_1 \parallel \mathcal{P}_2$$



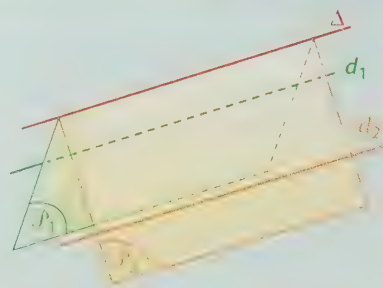
Théorème 5

Théorème du toit

d_1 et d_2 sont deux droites parallèles, d_1 est contenue dans $\mathcal{P}_1$ et d_2 dans $\mathcal{P}_2$.

Si $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants, alors leur droite commune Δ est parallèle à d_1 et d_2 .

$$\left. \begin{array}{l} d_1 \parallel d_2 \\ d_1 \text{ est contenue dans } \mathcal{P}_1 \\ d_2 \text{ est contenue dans } \mathcal{P}_2 \\ \mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \Delta \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \Delta \parallel d_1 \\ \Delta \parallel d_2 \end{array} \right.$$



Démonstration
→ Chapitre 10,
p. 292.

2 Orthogonalité dans l'espace

2.1 Droites orthogonales

Définition 1

Dans l'espace, dire que deux droites d_1 et d_2 sont **orthogonales** signifie qu'on peut trouver un point I tel que les parallèles à ces droites passant par I sont perpendiculaires.

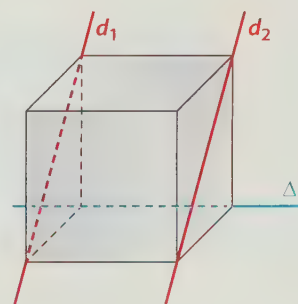
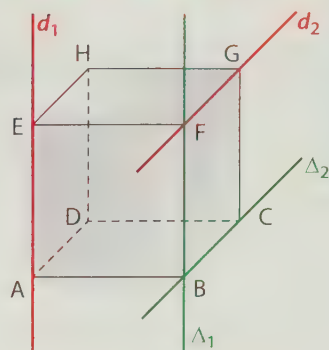
On écrit $d_1 \perp d_2$.

Théorème 6

(admis)

Si deux droites sont parallèles, alors toute droite orthogonale à l'une est orthogonale à l'autre.

$$\left. \begin{array}{l} d_1 \parallel d_2 \\ d_1 \perp \Delta \end{array} \right\} \Rightarrow d_2 \perp \Delta$$



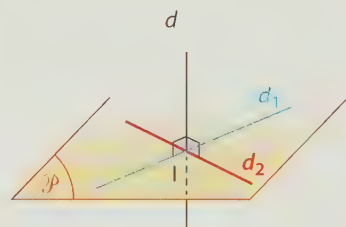
2.2 Droites perpendiculaires à un plan

Définition 2

I est l'intersection d'une droite d et d'un plan $\mathcal{P}$.

Dire que d et $\mathcal{P}$ sont **perpendiculaires** signifie que d est perpendiculaire à deux droites d_1 et d_2 de $\mathcal{P}$ passant par I .

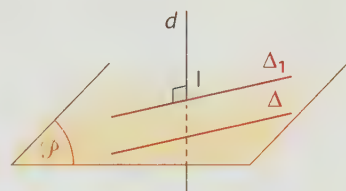
Remarque. On admet alors que d est perpendiculaire à toute droite Δ de $\mathcal{P}$ passant par I .



Théorème 7

Si une droite d est perpendiculaire à un plan $\mathcal{P}$, alors d est orthogonale à toute droite Δ contenue dans $\mathcal{P}$.

Démonstration. D'après la remarque précédente, la droite Δ_1 du plan $\mathcal{P}$ parallèle à Δ passant par I , est perpendiculaire à d . Donc, d'après le théorème 6, d est orthogonale à Δ .



Théorème 8

Pour qu'une droite d et un plan $\mathcal{P}$ soient perpendiculaires, il suffit que d soit orthogonale à deux droites sécantes de $\mathcal{P}$.

Démonstration
→ Chapitre 11,
page 323.

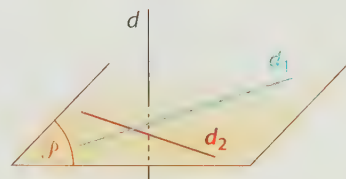
Conséquences

1. Si deux droites sont perpendiculaires à un plan $\mathcal{P}$, alors elles sont parallèles.

$$\left. \begin{array}{l} d_1 \perp \mathcal{P} \\ d_2 \perp \mathcal{P} \end{array} \right\} \Rightarrow d_1 \parallel d_2$$

2. Si deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont perpendiculaires à une même droite d , alors ils sont parallèles.

$$\left. \begin{array}{l} d \perp \mathcal{P}_1 \\ d \perp \mathcal{P}_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \mathcal{P}_1 \parallel \mathcal{P}_2$$

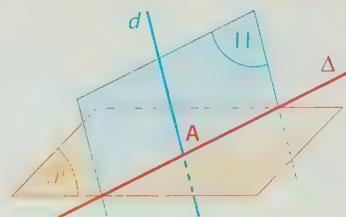


OBJECTIF 1 Déterminer l'intersection d'une droite et d'un plan

Méthode du plan auxiliaire

Pour déterminer l'intersection d'un plan $\mathcal{P}$ et d'une droite d qui n'est pas parallèle à $\mathcal{P}$:

- on choisit un plan Π qui contient d et qui coupe $\mathcal{P}$;
- on détermine la droite Δ , intersection des plans Π et $\mathcal{P}$;
- le point commun à d et Δ est alors l'intersection de d et $\mathcal{P}$.


EXERCICE RÉSOLU A
Animation

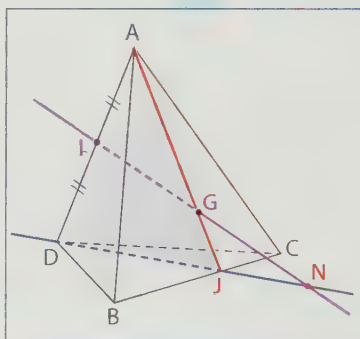
ABCD est un tétraèdre. I est le milieu de l'arête [AD], G un point de la face ABC distinct des sommets et tel que la droite (IG) ne soit pas parallèle au plan (BCD). On note N l'intersection de la droite (IG) et du plan (BCD). Construisez le point N en justifiant les différentes étapes de la construction.

Méthode

On utilise la **méthode du plan auxiliaire**.

- On choisit un plan contenant la droite (IG) et qui coupe le plan (BCD) : c'est le plan (AIG).
- On cherche la droite intersection des plans (AIG) et (BCD) : c'est la droite (DJ).

- On détermine le point commun à (IG) et (DJ).


Solution

- Le plan (AIG) contient la droite (IG) et est sécant au plan (BCD).
- Le point D est commun aux deux plans. Il en est de même du point d'intersection J des droites (AG) et (BC). Donc (DJ) est l'intersection de ces deux plans.
- N est le point d'intersection de (IG) et (DJ).

Mise en pratique Pour ces exercices, vous pouvez vous aider d'un logiciel de géométrie.

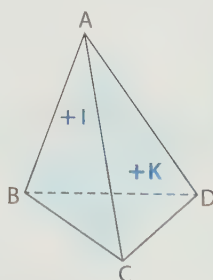
1 SABCD est une pyramide de sommet S, M est un point de [AS] et N un point de [CS] tels que (MN) n'est pas parallèle au plan (ABC).

Justifiez les étapes de la construction du point E intersection de (MN) et de (ABC). Construisez ce point.

2 Dans le tétraèdre ABCD, I et K sont des points des faces ABC et ACD tels que la droite (IK) n'est pas parallèle au plan (BCD).

1. Construisez le point d'intersection de (IK) et de (BCD).

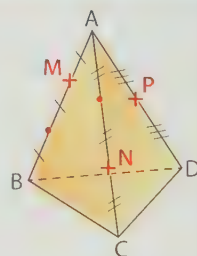
2. Construisez le point d'intersection de (BD) et de (AIK).



3 ABCD est un tétraèdre, P est le milieu de [AD], M et N sont les points de [AB] et [AC] tels que $3AM = AB$ et $3CN = CA$.

Les droites (MN), (MP) et (NP) coupent le plan (BCD) respectivement en I, J, K.

Placez ces points. Pourquoi sont-ils alignés ?

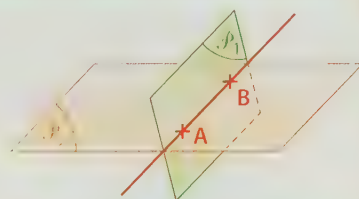


4 ABCDEFGH est un cube, M est le milieu de l'arête [EA].

1. Construisez le point K, intersection de la droite (HM) et du plan (ABC).

2. On trace par M la droite d parallèle à (HB). Construisez le point I, intersection de la droite d et du plan (ABC).

Pour trouver l'intersection de deux plans sécants $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$, il suffit de trouver deux points A et B distincts, communs aux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$. L'intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ est alors la droite (AB).

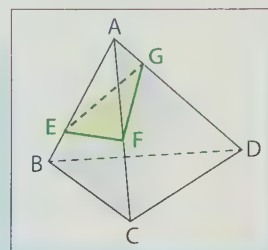


EXERCICE RÉSOLU B

ABCD est un tétraèdre.

E, F, G sont des points des arêtes [AB], [AC] et [AD] tels que les droites (EF), (FG) et (EG) ne sont pas parallèles au plan (BCD).

1. Construisez la droite Δ , intersection des plans (EGF) et (BCD).
2. Démontrez que les droites Δ , (BC) et (EF) sont concourantes.



Méthode

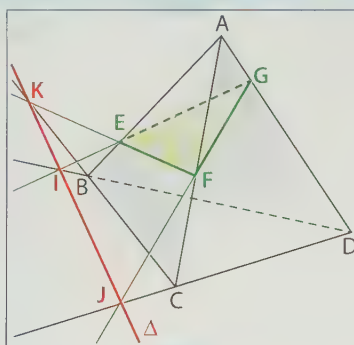
1. On cherche deux points I et J communs aux deux plans. Pour cela, on cherche, par exemple, les intersections de (GE) et (GF) avec (BCD).

- On conclut.

2. On détermine l'intersection de deux des droites, ici (EF) et (BC).

- On montre que ce point appartient à la troisième droite, ici Δ .
- On conclut.

Solution

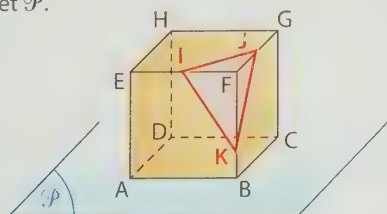


1. La droite (GE), contenue dans le plan (ABD), n'est pas parallèle à (BD) ; elle coupe donc (BD) en un point, noté I. La droite (GF), contenue dans le plan (ACD), n'est pas parallèle à (CD) ; elle coupe donc (CD) en un point, noté J. • I et J sont deux points communs des plans (EGF) et (BCD) : (IJ) est donc la droite Δ .

- ➔ 2. La droite (EF), contenue dans le plan (ABC), n'est pas parallèle à (BC) ; elle coupe donc (BC) en un point, noté K.
- ➔ • K est un point commun aux plans (EFG) et (BCD), donc K appartient à Δ .
- ➔ • Le point K est commun aux droites Δ , (BC) et (EF), qui sont donc concourantes en K.

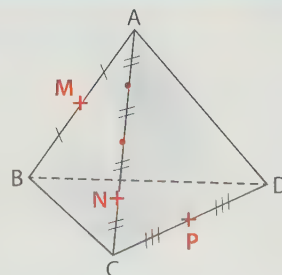
► **Mise en pratique** Pour ces exercices, vous pouvez vous aider d'un logiciel de géométrie.

5 On pose un cube ABCDEFGH sur un plan $\mathcal{P}$. I et J sont les milieux respectifs de [EF] et [FG], et K est le point de [BF] tel que $4BK = BF$. Construisez la droite Δ , intersection des plans (IJK) et $\mathcal{P}$.



6 ABCD est un tétraèdre.

M et P sont les milieux respectifs des arêtes [AB] et [CD], N est le point de l'arête [AC] tel que $4AN = 3AC$.



Tracez les intersections du plan (MNP) avec les faces du tétraèdre.

Étudier l'orthogonalité de droites et de plans

• **Théorème 7.** Si une droite d est perpendiculaire à un plan $\mathcal{P}$, alors elle est orthogonale à toute droite de $\mathcal{P}$.

• **Théorème 8.** Pour qu'une droite soit perpendiculaire à un plan $\mathcal{P}$, il suffit qu'elle soit orthogonale à deux droites sécantes de $\mathcal{P}$.

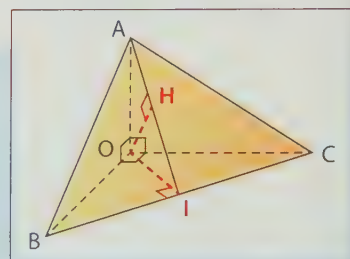
EXERCICE RÉSOLU C

OABC est un tétraèdre trirectangle (les triangles AOB, AOC et BOC sont rectangles en O).

I est le projeté orthogonal de O sur (BC) et H celui de O sur (AI).

1. Démontrez que (AI) est une hauteur du triangle ABC.

2. Démontrez que (OH) est perpendiculaire au plan (ABC).



► Méthode

1. Pour prouver que (BC) est perpendiculaire à (AI), il suffit de prouver que (BC) est perpendiculaire à un plan contenant (AI).

On choisit le plan (AOI) et on montre que la droite (BC) est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

On applique plusieurs fois les théorèmes 7 et 8.

• On conclut.

2. Pour prouver que (OH) est perpendiculaire au plan (ABC), il suffit de démontrer qu'elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

► Solution

► 1. La droite (OA) est perpendiculaire aux droites sécantes (OB) et (OC), donc elle est perpendiculaire au plan (BOC) (th. 8).

Donc (BC) est orthogonale à (OA) (th. 7).

De plus (BC) est perpendiculaire à (OI) car I est le projeté orthogonal de O sur (BC).

Ainsi, la droite (BC) est orthogonale à (OA) et à (OI), qui sont deux droites sécantes du plan (AOI). Donc la droite (BC) est orthogonale au plan (AOI) (th. 8).

(BC) est donc orthogonale à (AI) (th. 7).

► • Les droites (BC) et (AI) étant sécantes en I, (AI) est la hauteur issue de A dans le triangle ABC.

► 2. (OH) est perpendiculaire à (AI) car H est le projeté orthogonal de O sur (AI).

(OH) est orthogonale à (BC) car (BC) est perpendiculaire au plan (AOI) (th. 7).

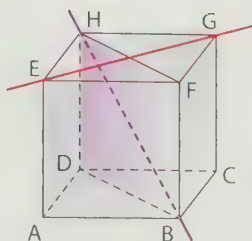
Donc (OH) est orthogonale aux droites sécantes (AI) et (BC) du plan (ABC) : (OH) est perpendiculaire au plan (ABC) (th. 8).

► Mise en pratique

7 ABCDEFGH est un cube.

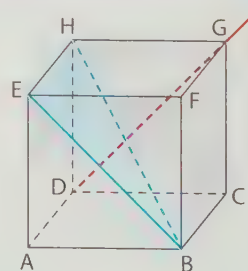
1. Démontrez que la droite (EG) est perpendiculaire au plan (BDH).

2. Déduisez-en que les droites (EG) et (HB) sont orthogonales.



8 ABCDEFGH est un cube.

Démontrez que la droite (DG) est perpendiculaire au plan (BEH).



9 Questions sur le cours

Complétez les propositions suivantes.

- a) Si deux points A et B distincts appartiennent à un plan $\mathcal{P}$, alors la droite (AB) est ...
- b) Si deux plans sécants sont parallèles à une droite d , alors leur intersection est ...
- c) Pour qu'une droite d soit perpendiculaire à un plan $\mathcal{P}$, il suffit que d soit orthogonale à ... de $\mathcal{P}$.
- d) Si un plan $\mathcal{P}_1$ contient deux droites ... parallèles à un plan $\mathcal{P}_2$, alors $\mathcal{P}_1$ est ... au plan $\mathcal{P}_2$.

10 Vrai ou faux

Vrai ou faux ? Justifiez votre réponse.

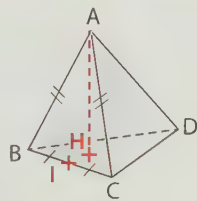
- a) Trois points A, B, C définissent toujours un plan.
- b) Deux droites parallèles et distinctes définissent un plan.
- c) Si deux plans sont parallèles, toute droite de l'un est parallèle à au moins une droite de l'autre.
- d) Deux droites parallèles à une même droite sont parallèles entre elles.
- e) Deux plans sont parallèles si une droite de l'un est parallèle à une droite de l'autre.

11 QCM Une seule réponse exacte

Pour chaque affirmation, une seule réponse est exacte. Identifiez-la en justifiant votre réponse.

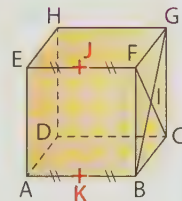
1. ABCD est un tétraèdre, tel que $AB = AC$ et $DB \neq DC$.

I est le milieu de [BC] et H le projeté orthogonal de A sur le plan (BCD). Alors :



- a) les points H, I, D sont alignés
- b) les droites (BC) et (IH) sont perpendiculaires
- c) H est l'orthocentre du triangle BCD

2. ABCDEFGH est un cube d'arête 1. I est le centre de la face BCGF; J et K sont les milieux respectifs de [EF] et [AB]. Alors :



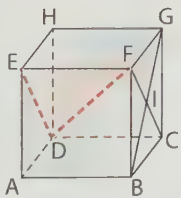
- a) l'intersection des plans (IBJ) et (ABC) est la droite (CK)
- b) le tétraèdre FIJB a pour volume $\frac{1}{24}$
- c) le triangle IJK est rectangle

12 QCM Au moins une réponse exacte

Pour chaque affirmation, plusieurs réponses peuvent être exactes. Identifiez-les en justifiant vos réponses.

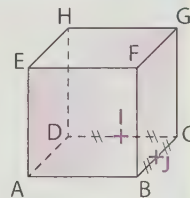
1. ABCDEFGH est un cube d'arête 1. I est le centre de la face BCGF. Alors :

- a) la droite (BG) est perpendiculaire au plan (EDF)
- b) les droites (EF) et (DI) sont coplanaires
- c) le triangle DIB est rectangle en B



2. ABCDEFGH est un cube d'arête 1. I et J sont les milieux respectifs de [DC] et [BC]. Alors :

- a) le plan (EGJ) coupe le segment [AB] en son milieu
- b) la droite (IH) est parallèle au plan (EGJ)
- c) le tétraèdre EFJG a pour volume $\frac{1}{6}$



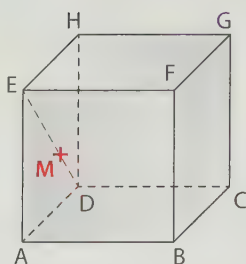
Apprendre à chercher

13 Section plane d'un cube

ABCDEFGH est un cube d'arête 4 cm.

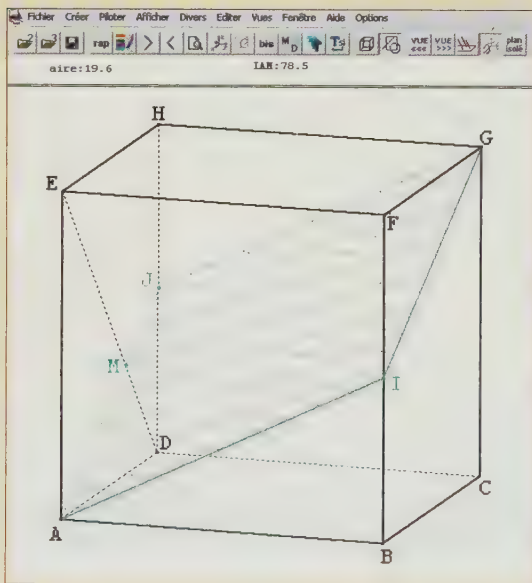
M est le point du segment [DE] tel que $3DM = DE$.

La droite (BF) coupe le plan (AMG) en I.



Objectif Représenter la section du cube par le plan (AMG). Calculer l'aire de cette section et la mesure, à un degré près, de l'angle IAM.

1. L'utilisation d'un logiciel de géométrie permet de conjecturer la nature de $\mathcal{S}$ ainsi que l'aire et la mesure de l'angle.



M est un point particulier de la figure. Vous pouvez tracer en vraie grandeur le carré ADHE et placer M.

- Que représente M pour le triangle ADH ?
- Construisez le point J, intersection de la droite (DH) et du plan (AMG), puis le segment intersection du plan (AMG) et de la face DCGH.

2. On sait que lorsque le plan (AMG) coupe deux faces opposées parallèles, les segments obtenus sont parallèles.

- Terminez la construction de la section $\mathcal{S}$.

- Démontrez que I est le milieu du segment [BF].

- Démontrez que la section $\mathcal{S}$ est un losange.

3. Pour calculer l'aire de cette section, il suffit de calculer, par exemple, la longueur de ses diagonales.

- Calculez la longueur des diagonales du losange AIGJ.

- Déduisez-en la valeur exacte de l'aire de la section $\mathcal{S}$, ainsi que la mesure, arrondie au degré, de l'angle IAM.

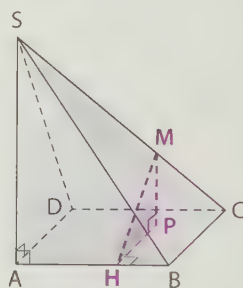
14 Un calcul de distance

SABCD est une pyramide dont la base est un carré de côté 4 cm et le sommet S est un point de la perpendiculaire en A au plan (ABC) tel que $AS = 6$ cm.

M est le point de l'arête [CS] tel que $3CM = CS$.

La perpendiculaire au plan (ABC) passant par M coupe celui-ci en P : on dit que P est le **projeté orthogonal** de M sur le plan (ABC).

P se projette orthogonalement en H sur la droite (AB).



Objectif Calculer la distance MH.

1. En tenant compte des données, on peut tirer des conséquences immédiates.

- Démontrez que P est un point de la diagonale [AC].
- Démontrez que (MH) est perpendiculaire à (AB).

2. La présence du triangle rectangle MPH nous amène à calculer MP et PH afin d'en déduire MH.

En exploitant uniquement le théorème de Thalès, on obtient MP et PH.

- Calculer MP.
- Démontrez que $\frac{PH}{BC} = \frac{2}{3}$, et déduisez-en PH.
- Déduisez-en la valeur de MH.

Remarque. La suite de cet exercice est proposée en « Narration de recherche », exercice 16 ci-contre.

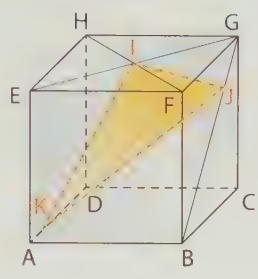
Narration de recherche



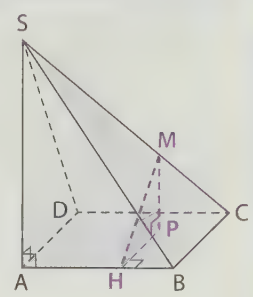
→ L'objectif n'est pas seulement de résoudre le problème posé : vous devez aussi noter les différentes idées même lorsqu'elles n'ont pas permis de trouver la réponse. Expliquez pourquoi vous avez changé de méthode et ce qui vous a fait avancer, etc.

15 ABCDEFGH est un cube. I est le centre de la face EFGH. J et K sont les points des segments [BG] et [AD] tels que :

$4GJ = GB$ et $4AK = AD$.
Avec un logiciel de géométrie, construisez la section du cube par le plan (IJK).
Quelle conjecture faites-vous sur la nature de cette section ? Prouvez-le.



16 SABCD est une pyramide dont la base est un carré ABCD de côté 4 cm et le sommet S est un point de la perpendiculaire en A au plan (ABC) tel que $AS = 6$ cm. M est un point de l'arête [CS] qui se projette orthogonalement en P sur le plan (ABC). P se projette orthogonalement en H sur (AB). Comment choisir M sur l'arête [CS] pour que la distance MH soit minimale ? (Voir un cas particulier à l'exercice 14.)



Chercheurs d'hier

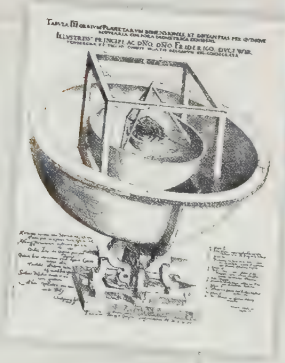
Eux aussi, ils ont cherché avant de trouver !

→ Voici quelques mathématiciens importants qui ont travaillé dans le domaine de la Géométrie.



Johannes Kepler
(1571-1630)

Cet astronome allemand doit sa renommée aux « lois de Kepler », qui rendent compte du mouvement des planètes sur leur orbite, qu'il publie dans son ouvrage sur la structure de l'Univers, le *Mysterium Cosmographicum* (1596). En se fondant sur l'hypothèse héliocentrique de Nicolas Copernic, il répond à trois questions portant sur le nombre de planètes, leur distance au Soleil et enfin leur vitesse.



Il y développe également une théorie des polyèdres réguliers permettant de construire un modèle de l'Univers. Kepler remarqua que l'on pouvait intercaler entre les orbites des six planètes connues à l'époque (illustration ci-contre) les cinq solides réguliers de Platon : le cube, le tétraèdre, le dodécaèdre, l'icosaèdre et enfin l'octaèdre.



Sur le Web fr.wikipedia.org/wiki/Johannes_Kepler
camille.ollivier.free.fr/Helio-geo-centrisme/kepler_mys.htm


TP 17 Sections planes d'un cube
COMPÉTENCES
TICE

- Construire une figure de l'espace à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique
- Émettre des conjectures

Mathématiques

- Justifier le parallélisme de droites
- Démontrer que des droites de l'espace sont concourantes

→ Pour étudier les sections d'un cube par un plan

ABCDEFGH est un cube. I et J sont les milieux des arêtes [EF] et [FG] et N est un point de l'arête [AE]. Déterminons la nature de la section du cube par le plan (NIJ) suivant la position du point N.

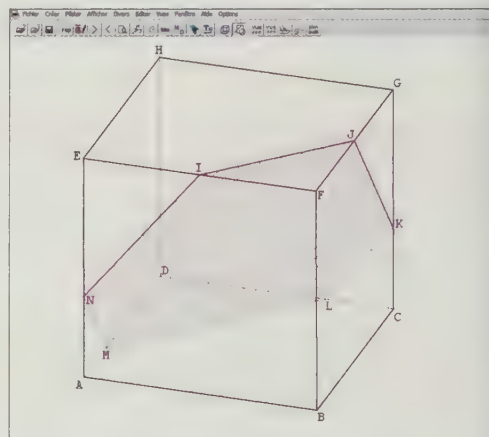
A Mise en œuvre (avec Geospace)
1. Construction d'une section par un plan

Créez :

- les points $A(4; 0; 0)$, $B(4; 4; 0)$, $C(0; 4; 0)$, $D(0; 0; 0)$, $E(4; 0; 4)$, $F(4; 4; 4)$, $G(0; 4; 4)$ et $H(0; 0; 4)$, puis le cube ABCDEFGH ;
- les milieux I et J respectivement des arêtes [EF] et [FG] et le point N libre sur [AE] ;
- le plan (NIJ) ;
- la section : Créer-Ligne ► Polygone convexe

► Section d'un polyèdre par un plan.

Nommez les sommets K, L et M de la section IJKLMN.


2. Étude de la section

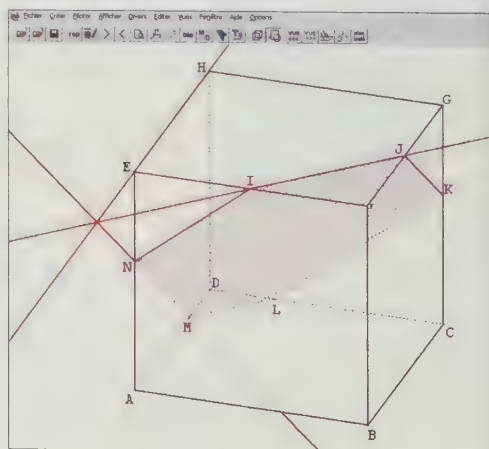
Déplacez le point N sur le segment [AE] et décrivez la section du cube par le plan (NIJ) selon la position du point N.

Remarque. Pour d'autres exemples de sections d'un cube par un plan, voir l'exercice 13, p. 274.

B Étude d'une configuration

Dans cette partie, la section du cube est un hexagone IJKLMN (comme sur la figure proposée).

1. **a)** Justifiez le parallélisme des droites (MN) et (JK).
- b)** Donnez deux autres couples de droites parallèles (liées à l'hexagone).
2. **a)** Créez les droites (IJ), (EH) et (MN). Que conjecturez-vous ? Démontrez-le.
- b)** Proposez trois autres droites de la figure ayant la même propriété.



18 Les alvéoles des ruches

Les abeilles stockent leur miel dans des alvéoles. Chaque alvéole est un prisme droit à base hexagonale (ouverture de l'alvéole). L'autre extrémité de l'alvéole (fond de l'alvéole) est un emboîtement de trois losanges identiques appelés **rhombes**.

La forme hexagonale de l'ouverture fut repérée par Aristote dès le IV^e siècle av. J.-C. Elle a, par la suite, intrigué de nombreux scientifiques. Ainsi, au XVIII^e siècle, Maraldi détermina d'une manière expérimentale que la mesure des angles de ces rhombes était 109,47° et 70,53° ; Réaumur suggéra que cette construction permettait d'utiliser le minimum de cire.

OBJECTIF Réfléchir à la validité de l'hypothèse de Réaumur.

MISE EN ŒUVRE

Σ est un prisme droit d'axe Δ et de hauteur h . Sa base est un hexagone régulier $ABCDEF$ tel que $AB = a$ ($h > a$).

On note $\mathcal{P}$ le plan contenant (AC) qui coupe Δ en S et $[BG]$ en B_1 .

On cherche donc la mesure θ de l'angle $\widehat{AB_1C}$ pour laquelle la somme $\mathcal{P} = \text{aire}(AB_1CS) + 2 \text{aire}(HGB_1A)$ est minimale (cette somme est le tiers de l'aire totale de l'alvéole).

A Questions préliminaires

De la figure 1, on a extrait les figures 2 et 3.

1. Figure 2. Démontrez que P est le milieu de $[AC]$ et de $[OB]$, puis exprimez AP en fonction de a .

2. Figure 3. Démontrez que P est le milieu de $[B_1S]$.

3. Figure 1. Démontrez que le quadrilatère AB_1CS est un losange.

B Le calcul des angles

1. Démontrez que la somme $\mathcal{P}$ est minimale si, et seulement si, la différence $\mathcal{D} = \text{aire}(AB_1CS) - 2[\text{aire}(ABB_1)]$ est minimale.

2. a) On pose $BB_1 = x$ avec $x > 0$. Démontrez que :

$$B_1P = \frac{1}{2} \sqrt{4x^2 + a^2}.$$

b) Calculez, en fonction de a et x , $\text{aire}(AB_1CS)$ et $\text{aire}(ABB_1)$, puis en déduire l'expression de $\mathcal{D}$.

3. f est la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{4x^2 + a^2} - x.$$

a) Étudiez les variations de f et dressez son tableau de variation.

b) Déduisez-en la valeur x_0 pour laquelle $\mathcal{D}$ est minimale.

4. a) Calculez B_1P et AB_1 pour $x = x_0$.

b) Déduisez-en $\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$, puis démontrez que $\cos(\theta) = -\frac{1}{3}$. En comparant la valeur de θ avec la valeur expérimentale de Maraldi, discutez de la validité de l'hypothèse de Réaumur.

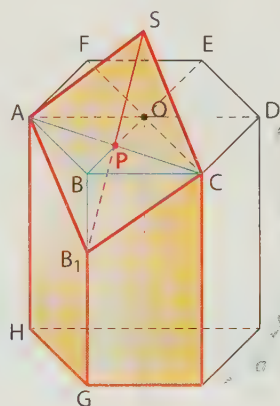
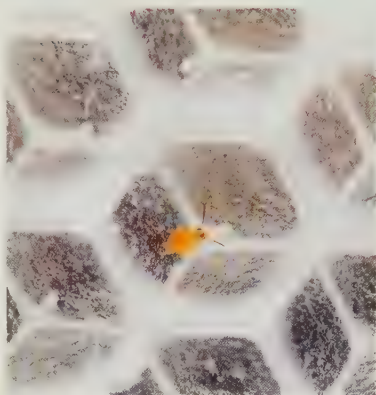


Figure 1

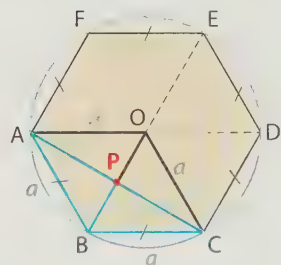


Figure 2

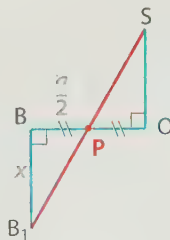


Figure 3

DE TÊTE



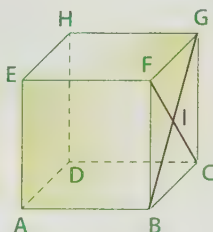
19 $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont deux plans et d est une droite. Pour chacune des propositions suivantes, quelles conséquences peut-on tirer concernant la droite d et le plan $\mathcal{P}_2$?

- a) Si $d \parallel \mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_1 \parallel \mathcal{P}_2$, alors ...
 b) Si $d \perp \mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_1 \parallel \mathcal{P}_2$, alors ...
 c) Si $d \perp \mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_1 \perp \mathcal{P}_2$, alors ...

20 ABCDEFGH est un cube, I est le centre de la face BCGF.

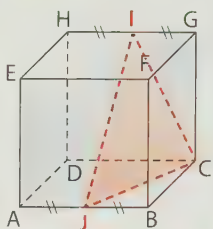
1. Quelle est la nature du triangle BEG ?

2. Les droites (EG) et (AI) sont-elles sécantes ?



21 ABCDEFGH est un cube, I et J sont les milieux respectifs des arêtes [HG] et [AB].

Le point E est-il un point du plan (ICJ) ?



INTERSECTION D'UNE DROITE ET D'UN PLAN

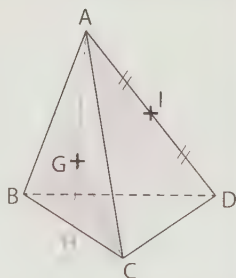
Pour les exercices 22 à 25, vous pouvez éventuellement vous aider d'un logiciel de géométrie.

22 En utilisant les théorèmes de géométrie plane...

ABCD est un tétraèdre, I est le milieu de [AD] et G le centre de gravité du triangle ABC.

1. Construisez le point F, intersection de la droite (IG) et du plan (BCD).

2. Démontrez que les diagonales du quadrilatère BDCF se coupent en leur milieu. En déduire la nature de BDCF.



Aide Tracez la parallèle à (AG) passant par I qui coupe (DF) en E.

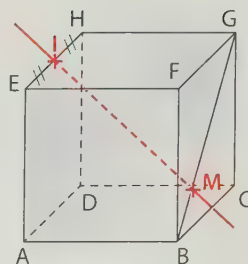
23 ABCDEFGH est un cube, I et J sont les centres respectifs des faces ABFE et BCGF.

On note $\mathcal{P}_1$ le plan (IFH) et $\mathcal{P}_2$ le plan (DJB).

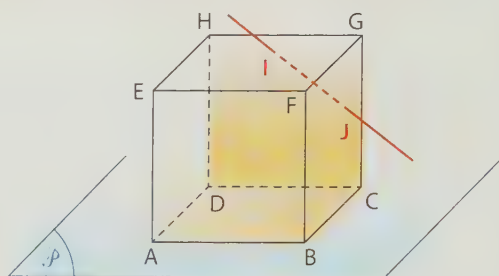
1. a) Construisez l'intersection de $\mathcal{P}_1$ et de la face ADHE.
 b) Construisez l'intersection de $\mathcal{P}_2$ et de la face BCGF.
 2. Déduisez-en que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles.

24 ABCDEFGH est un cube, I est le milieu de [EH] et M le point de [BG] tel que $4BM = BG$.

Construisez l'intersection de la droite (IM) et du plan (ABC).



25 Un cube est posé sur un plan $\mathcal{P}$. I est un point de la face EFGH et J un point de la face BCGF tels que la droite (IJ) n'est pas parallèle au plan $\mathcal{P}$.

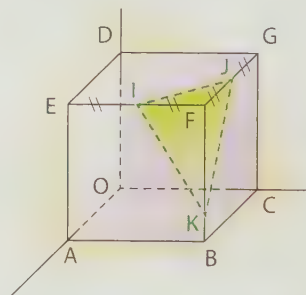


Construisez l'intersection de la droite (IJ) et du plan $\mathcal{P}$.

26 Comme l'indique la figure ci-dessous, un cube OABCDEFG est disposé dans un angle d'une pièce.

I et J sont les milieux respectifs des arêtes [EF] et [FG].

K est un point de l'arête [FB] distinct de F et B.



1. Construisez les points L, M, N, P, Q, R, intersections du plan (IJK) et des droites (AB), (BC), (DG), (GC), (EA) et (ED) respectivement.

2. La droite (LM) coupe la droite (OA) en U et la droite (OC) en V.

a) Pourquoi les points U, Q, R sont-ils alignés ?

b) En est-il de même des points V, N, P ?

c) Pourquoi les droites (QR), (OD) et (NP) sont-elles concourantes en W ?

3. Si K est le milieu du segment [BF], quelle est la nature du triangle UVW ?

INTERSECTION DE DEUX PLANS

Pour les exercices de cette rubrique, vous pouvez conjecturer la réponse à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

27 ABCDEFGH est un cube.

I et J sont les points des arêtes [DC] et [BC] tels que $4DI = DC$ et $4BJ = 3BC$.

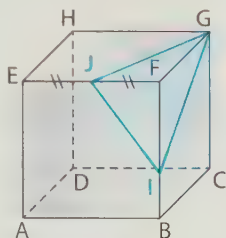
1. Faites une figure et construisez le point K, intersection du plan (EGJ) et du segment [AB].

2. Déduez-en que la droite (IH) est parallèle au plan (EGJ).

28 ABCDEFGH est un cube.

J est le milieu de [EF] et I le point de [BF] tel que $3BI = BF$.

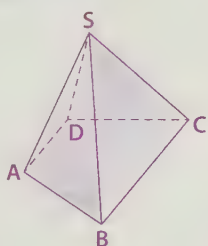
Construisez l'intersection des plans (GIJ) et (ABC).



29 SABCD est une pyramide dont la base ABCD est un trapèze ((AD) parallèle à (BC)). Construisez :

a) L'intersection des plans (SAD) et (SBC).

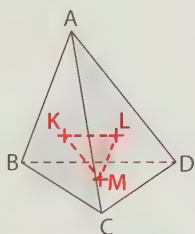
b) L'intersection des plans (SAB) et (SDC).



30 ABCD est un tétraèdre.

K, L, M sont les centres de gravité respectifs des triangles ABC, ACD et BCD.

Démontrez que les plans (KLM) et (ABD) sont parallèles.



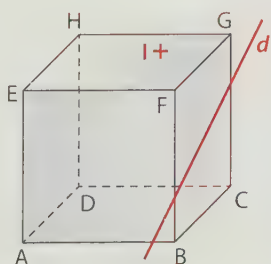
SECTION D'UN POLYÈDRE PAR UN PLAN

Pour les exercices de cette rubrique, vous pouvez conjecturer la réponse à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.

31 I est un point de la face EFGH du cube ABCDEFGH. d est une droite du plan (BCG).

1. Construisez la section du cube par le plan défini par I et la droite d.

2. Quelle est la nature de cette section ?

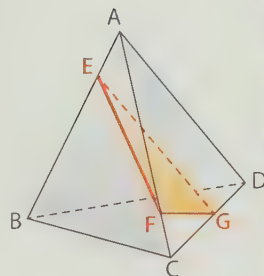


32 1. Construisez la section du tétraèdre par le plan (EFG).

2. Comment faut-il placer les points E, F, G pour que la section soit :

a) un trapèze ?

b) un parallélogramme ?



33 Par un point I de l'arête [AC] d'un tétraèdre ABCD, on trace le plan $\mathcal{P}$ parallèle aux droites (AB) et (CD).

1. Tracez la section de ce tétraèdre par $\mathcal{P}$.

2. a) Quelle est la nature de cette section ?

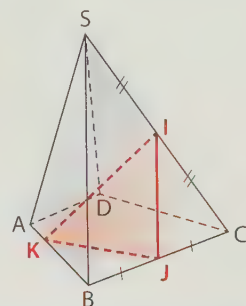
b) Cette section peut-elle être un rectangle ?

34 SABCD est une pyramide.

I et J sont les milieux respectifs de [CS] et [CB].

K est le point de [AB] tel que $4AK = AB$.

Construisez la section de la pyramide par le plan (IJK).



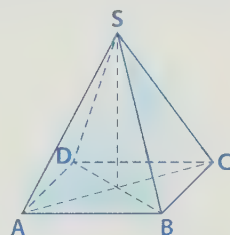
DROITES ET PLANS ORTHOGONAUX

35 LOGIQUE Équivalence

Les propositions « La droite d est perpendiculaire à un plan $\mathcal{P}$ contenant Δ » et « d est orthogonale à Δ » sont-elles équivalentes ?

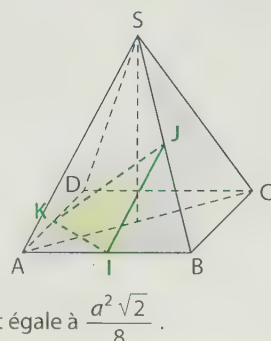
36 SABCD est une pyramide régulière dont la base ABCD est un carré.

Démontrez que les droites (AS) et (DB) sont orthogonales.

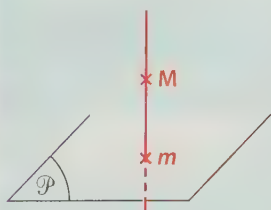


37 SABCD est une pyramide régulière dont toutes les arêtes ont pour mesure a . I, J, K sont les milieux respectifs des arêtes [AB], [BS] et [AD].

En utilisant le résultat de l'exercice 36, démontrez que le triangle KIJ est rectangle en I et que son aire est égale à $\frac{a^2\sqrt{2}}{8}$.



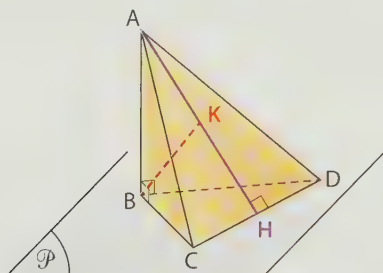
38 Projeté orthogonal d'un point



Étant donné un plan $\mathcal{P}$ et un point M , il existe une droite et une seule passant par M et perpendiculaire à $\mathcal{P}$. Cette droite coupe $\mathcal{P}$ en un point m appelé **projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$** .

BCD est un triangle du plan $\mathcal{P}$. A est un point (distinct de B) de la perpendiculaire en B au plan $\mathcal{P}$.

On note H le projeté orthogonal de A sur (CD) et K le projeté orthogonal de B sur le plan (ACD) .

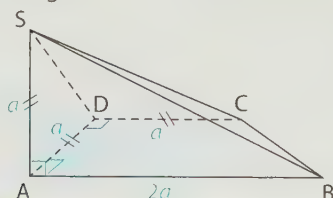


Démontrez que les points A , K , H sont alignés.

39 SABCD est une pyramide dont la base ABCD est un trapèze rectangle en A et D .

La droite (AS) est perpendiculaire au plan (ABC) . De plus : $AD = DC = AS = a$ et $AB = 2a$, $a > 0$.

Démontrez que toutes les faces de la pyramide sont des triangles rectangles.



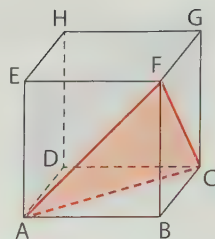
40 BAC

$ABCD$ est un tétraèdre régulier (toutes les faces sont des triangles équilatéraux). I , J , K , L , M et N sont les milieux des arêtes $[AB]$, $[CD]$, $[AD]$, $[BC]$, $[BD]$ et $[AC]$.

1. a) Démontrez que le quadrilatère $IKJL$ est un losange.
b) Déduisez-en que les droites (IJ) et (KL) sont perpendiculaires. On admettra que, de même, (IJ) et (MN) d'une part, et (MN) et (LK) d'autre part, sont aussi des droites perpendiculaires.
2. a) Démontrez que la droite (IJ) est orthogonale aux droites (LN) et (NK) .
b) Déduisez-en que (IJ) est orthogonale à (AB) et (CD) .
3. Démontrez que le point G , milieu de $[IJ]$, est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre $ABCD$.

41 ABCDEFGH est un cube d'arête a .

En calculant de deux manières le volume du tétraèdre $BACF$, démontrez que la distance de B au plan (ACF) est égale à $\frac{a\sqrt{3}}{3}$.



Note

La distance de B au plan (ACF) est la longueur BH , où H est le projeté orthogonal de B sur le plan (ACF) .

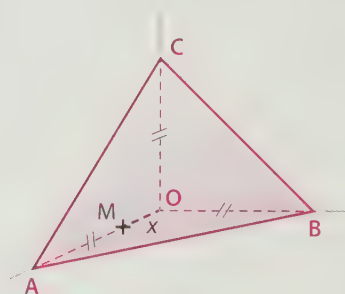
EXERCICES DE SYNTHÈSE

42 Volume maximal

$OABCD$ est un tétraèdre tel que $OA = OB = OC = a$.

Les trois triangles OAB , OAC et OBC sont rectangles en O .

M est un point du segment $[OA]$. On pose $OM = x$ avec $0 \leq x < a$.



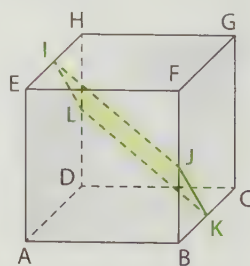
Le plan $\mathcal{P}$ passant par M et parallèle aux droites (OC) et (AB) coupe le tétraèdre selon un quadrilatère $MNPQ$.

1. Quelle est la nature de ce quadrilatère ?
2. a) Calculez, en fonction de x et de a , le volume de la pyramide $OMNPQ$.
b) Comment choisir M sur $[OA]$ pour que ce volume soit maximal ?

43 Savoir extraire une figure plane

$ABCDEFGH$ est un cube d'arête a . I , J , K , L sont les milieux respectifs de $[EH]$, $[BF]$, $[BC]$ et $[HD]$.

1. Quelle est la nature du quadrilatère $IJKL$?
2. Calculez la mesure, en radian, de l'angle aigu formé par les diagonales $[LJ]$ et $[IK]$ du quadrilatère $IJKL$.



44 Arêtes opposées orthogonales

ABC est un triangle quelconque d'orthocentre H. M est un point de la droite Δ perpendiculaire en H au plan (ABC). Démontrez que les arêtes opposées au tétraèdre MABC sont orthogonales deux à deux.

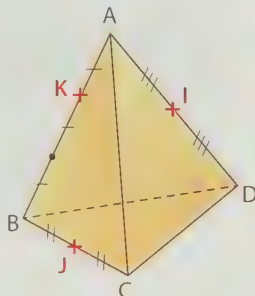
45 Le théorème de Thalès

ABCD est un tétraèdre.

I et J sont les milieux respectifs de [AD] et [BC]. K est le point de l'arête [AB] tel que $3AK = AB$.

1. a) Construisez le point M, intersection de la droite (IK) et du plan (BCD).

b) Démontrez que D est le milieu de [BM].



Aide Notez E le milieu de [BK] et tracez [ED].

2. a) Déduisez de la question précédente la construction du point L, intersection de [CD] et du plan (IJK).

b) Déterminez la valeur de k pour laquelle $CL = kCD$.

Aide Tracez [EJ].

46 Section d'une pyramide par un plan

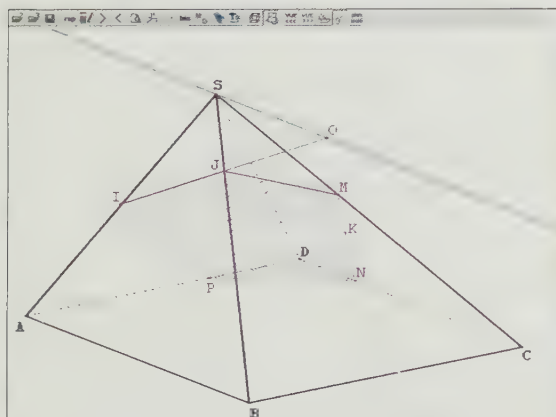
SABCD est une pyramide et ABCD est un parallélogramme.

I est le milieu de l'arête [AS]. J est le point de l'arête [SB] tel que $SJ = \frac{1}{4} SB$.

K est le centre de gravité du triangle SDC.

Avec un logiciel de géométrie dynamique, on a tracé la section IJMNP de la pyramide par le plan (IJK).

Le but de l'exercice est d'étudier la figure afin de construire cette section sans le logiciel.



1. a) Pourquoi l'intersection des plans (SAB) et (SDC) est-elle la droite Δ passant par S et parallèle à (AB) ?

b) La droite (IJ) coupe Δ en O. Pourquoi les points O, K, M, N sont-ils alignés ?

2. Pourquoi les droites (IJ), (AB) et (NP) sont-elles concourantes ?

3. Reproduisez la pyramide, placez I, J, K.

Écrivez le programme qui permet de tracer la section du plan (IJK) et de la pyramide.

AVEC LES TICE

47 1. Conjecturer

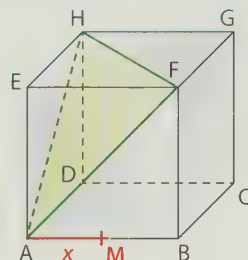
ABCDEFGH est un cube.

• Avec GeoSpace, définissez le plan $\mathcal{P}$ passant par un point quelconque M de [AB] et parallèle au plan (AFH).

• Construisez le polygone intersection du cube et du plan $\mathcal{P}$.

• Afficher le périmètre de ce polygone, puis déplacez M.

• Quelle conjecture faites-vous ?



2. Démontrer

On pose $AM = x$ avec $0 \leq x \leq a$, a étant l'arête du cube.

Calculez le périmètre du polygone.

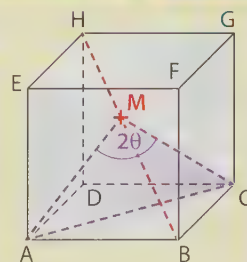
Est-ce en conformité avec votre conjecture ?

Prendre toutes les initiatives

48 Dans le cube ci-contre d'arête a , M est un point variable de la diagonale [HB].

On note 2θ la mesure de l'angle $\widehat{AMC}$.

Où faut-il choisir M sur [HB] pour que la mesure de l'angle $\widehat{AMC}$ soit maximale ?



49 $\mathcal{P}$ est un plan ; A et B sont deux points distincts n'appartenant pas à $\mathcal{P}$ tels que la droite (AB) coupe $\mathcal{P}$ en O. M est un point variable tel que (AM) coupe $\mathcal{P}$ en I et (BM) coupe $\mathcal{P}$ en J.

Démontrez que lorsque M varie, la droite (IJ) passe par un point fixe.

Le jour du BAC

50 Travail en autonomie

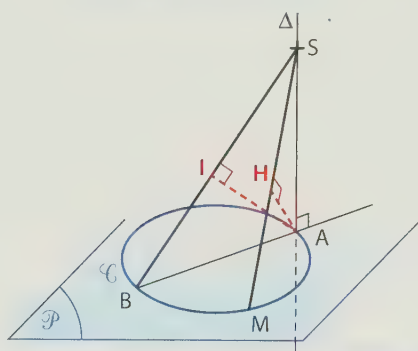
→ Rédigez la solution de cet exercice en vous aidant du guide.



Sur le Web

Retrouvez le corrigé de cet exercice sur le site www.transmathlycee.net/eleve-TermS

$\mathcal{C}$ est un cercle de diamètre $[AB]$ contenu dans un plan $\mathcal{P}$.
 S est un point de la droite Δ perpendiculaire en A au plan $\mathcal{P}$ et M est un point du cercle $\mathcal{C}$ distinct de A et B .
 Le point A se projette orthogonalement en I sur la droite (SB) et en H sur la droite (SM) .



1. a) Démontrez que la droite (BM) est perpendiculaire au plan (ASM) .

b) Démontrez que la droite (AH) est perpendiculaire au plan (BMS) .

2. On note Π le plan passant par A et I , et perpendiculaire à la droite (SB) .

a) Démontrez que H appartient au plan Π .

b) Démontrez que, lorsque M décrit $\mathcal{C}$, le point H appartient au cercle Γ , intersection du plan Π et de la sphère de diamètre $[AS]$.

Analyser l'énoncé

Presque toutes les questions portent sur l'orthogonalité de droites et de plans : repérez dans l'énoncé les cas d'orthogonalité.

N'oubliez pas le point M qui appartient au cercle de diamètre $[AB]$.

Analyser l'énoncé

On utilise le théorème 8 : pour montrer que $d \perp \mathcal{P}$, il suffit de montrer $d \perp d_1$ et $d \perp d_2$, avec d_1 et d_2 sécantes et contenues dans $\mathcal{P}$.

Analyser l'énoncé

La question a) dit que H appartient à Π . Donc il suffit de montrer que H est sur la sphère de diamètre $[AS]$.

Guide

1. a) Cherchez deux droites du plan (ASM) sécantes et orthogonales à (BM) . Vous avez le choix entre (AM) , (AS) et (SM) . Pensez au théorème 7 : si $d \perp \mathcal{P}$, alors toute droite de $\mathcal{P}$ est orthogonale à d .

b) On sait que (AH) est perpendiculaire à (SM) . Pour la deuxième droite, utilisez la question précédente et le théorème 7.

2. Il n'existe pas de théorème pour montrer qu'un point appartient à un plan. Mais on sait que par A et I , il ne passe qu'un seul plan perpendiculaire à (SB) . L'astuce consiste à montrer que Π est le plan (AHI) . Ainsi H appartient à Π .

ZOOM sur la rédaction

Listez toutes les hypothèses, avant d'en déduire la conclusion. Précisez bien que les droites sont sécantes quand vous appliquez le théorème 8.

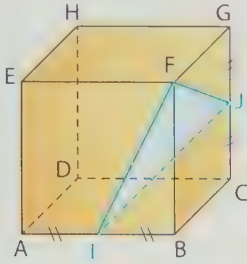
ZOOM sur la rédaction

Le point-clé de la rédaction est de préciser qu'il n'existe qu'un seul plan passant par A et I et perpendiculaire à (SB) et d'en déduire que $(AHI) = \Pi$.

51 QCM

ABCDEFGH est un cube d'arête 1.

I et J sont les milieux respectifs des arêtes [AB] et [CG].



Pour chaque question, une seule des trois réponses proposées est exacte. Identifiez-la et justifiez votre choix.

1. Le triangle IFJ est :

- a)** isocèle **b)** équilatéral **c)** rectangle isocèle

2. La section du cube par le plan (IFJ) est :

- a)** un parallélogramme
b) un trapèze
c) un quadrilatère quelconque

3. Le plan (IFJ) coupe la droite (BC) en K.

- a)** C est le milieu de [BK]. **b)** $2BK = 3BC$. **c)** $BK = 3BC$.

4. Le plan (IFJ) coupe le segment [DC] en L.

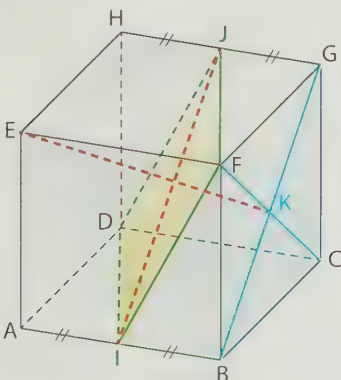
- a)** $5CL = CD$. **b)** $6CL = CD$. **c)** $4DL = 3DC$.

52 BAC (Extrait)

ABCDEFGH est un cube d'arête 1.

I et J sont les milieux respectifs des arêtes [AB] et [HG].

K est le centre de la face BCGF.



1. Démontrez que le quadrilatère IFJD est un losange d'aire $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

2. Démontrez que la droite (IJ) est orthogonale à la droite (FC).

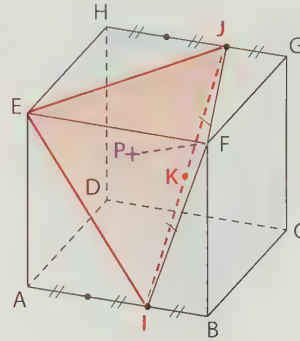
3. Déduisez-en que la droite (IJ) est perpendiculaire au plan (ECF) ainsi qu'à la droite (EK).

53 BAC (Extrait)

ABCDEFGH est un cube d'arête 1.

I est le point de l'arête [AB] tel que $3AI = 2AB$ et J celui de l'arête [HG] tel que $3HJ = 2HG$.

K est le milieu du segment [IJ]. La perpendiculaire menée par F au plan (EIJ) coupe ce plan en P.



1. **a)** Démontrez que les triangles IEJ et IFJ sont isocèles.

b) Déduisez-en que la droite (IJ) est perpendiculaire au plan (EKF).

2. Démontrez que la droite (IJ) est perpendiculaire au plan (EPF).

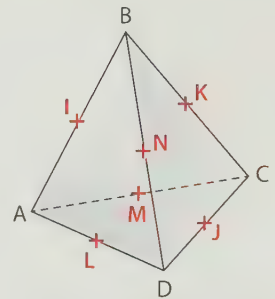
3. **a)** Déduisez des questions précédentes que les points E, F, P, K sont coplanaires.

b) Démontrez que les points E, K, P sont alignés.

54 BAC (Extrait)

ABCD est un tétraèdre tel que $AB = CD$, $AD = BC$, $AC = BD$. (Un tel tétraèdre est dit **équifacial**.)

I, J, K, L, M, N sont les milieux respectifs des arêtes [AB], [DC], [BC], [AD], [AC] et [BD].



1. **a)** Quelle est la nature du quadrilatère IKJL ? Précisez également la nature de IMJN et KNLM.

b) Déduisez-en que les droites (IJ), (KL) et (MN) sont concourantes en un point G et qu'elles sont perpendiculaires deux à deux.

2. **a)** Démontrez que la droite (IJ) est perpendiculaire au plan (MKN).

b) Déduisez-en que (IJ) est perpendiculaire aux droites (AB) et (CD).

3. Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte.

Démontrez que G est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD.

Pour aller plus loin

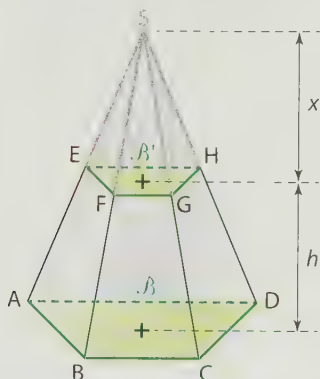
55 Volume d'un tronc de pyramide

A. Expression du volume

ABCDEFGH est un tronc de pyramide (les bases sont parallèles). $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont les aires des bases et h la hauteur de ce tronc.

La pyramide SEFGH est une réduction de la pyramide SABCD. Si k est le coefficient de réduction, alors :

$$\mathcal{B}' = k^2 \mathcal{B}.$$



1. a) Justifiez que $k = \frac{x}{x+h}$ (1).

b) À partir de (1), démontrez que $x = \frac{h(\sqrt{\mathcal{B}\mathcal{B}'} + \mathcal{B}')}{\mathcal{B} - \mathcal{B}'}$.

2. a) Vérifiez que le tronc de pyramide a pour volume :

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} [(\mathcal{B} - \mathcal{B}')x + \mathcal{B}h].$$

b) Déduisez-en que :

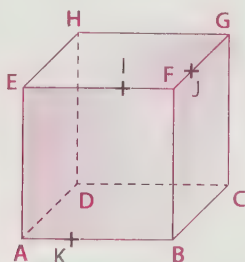
$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} h(\mathcal{B} + \mathcal{B}' + \sqrt{\mathcal{B}\mathcal{B}'}).$$

B. Application

Le cube ci-contre a pour arête 9 cm. Les points I, J, K des arêtes [EF], [FG] et [AB] sont tels que :

$$FI = FJ = AK = 3 \text{ cm}.$$

Le plan (IJK) partage le cube en deux solides ; un de ces deux solides contient B. Le but de l'exercice est de calculer le volume de ce solide.



1. a) Construisez la section du cube par le plan (IJK).

b) Démontrez que cette section est un trapèze isocèle.

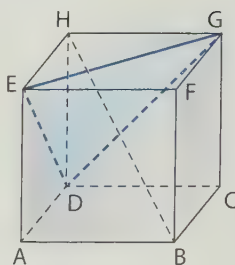
2. En utilisant les résultats de la partie A., calculez le volume demandé.

56 Triangle et centre de gravité

1. Dans le cube ci-contre, démontrez que la droite (HB) est perpendiculaire au plan (EDG).

2. a) Construisez le point K, intersection de la droite (HB) et du plan (EDG).

b) Démontrez que K est le centre de gravité du triangle EDG.

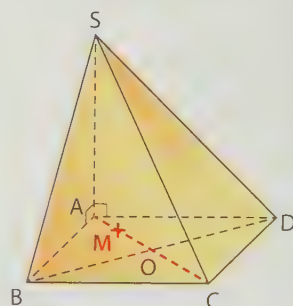


57 Aire et fonction. Section d'une pyramide

SABCD est une pyramide dont la base est un carré. S est un point de la perpendiculaire en A au plan (ABC).

SA = AB = 6 cm.

M est un point du segment [AC]. On trace par M le plan $\mathcal{P}$ perpendiculaire à [AC].



1. Construisez la section de la pyramide par le plan $\mathcal{P}$ dans chacun des cas suivants :

a) M appartient au segment [OA].

b) M appartient au segment [OC].

2. On pose $AM = x$ avec $0 \leq x \leq 6\sqrt{2}$.

Exprimez en fonction de x l'aire de la section suivant que M appartient à [OA] ou [OC].

3. On note f la fonction définie sur $I = [0; 6\sqrt{2}]$ qui à x associe l'aire de la section.

a) Démontrez que f est continue sur l'intervalle I .

b) f est-elle dérivable sur l'intervalle I ?

c) Tracez la courbe $\mathcal{C}$ représentative de f , ainsi que les tangentes à $\mathcal{C}$ aux points d'abscisses $x = 0$, $x = 3\sqrt{2}$ et $x = 6\sqrt{2}$.

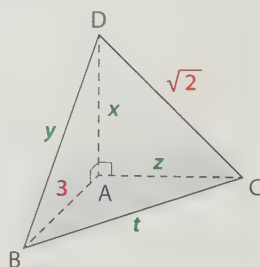
58 Une bonne année pour le « foot »...

ABCD est un tétraèdre tel que les faces ABC, ABD et ACD sont des triangles rectangles en A.

1. Exprimez y^2 , z^2 et t^2 en fonction de x^2 .

2. Quelle est la valeur minimale de :

$$BC^6 + BD^6 - AC^6 - AD^6 ?$$



59 Une aire minimale

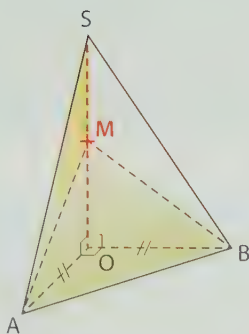
OABS est un tétraèdre tel que les triangles SOA, SOB et AOB sont rectangles en O.

OA = OB = 2 et OS = 3.

M décrit l'arête [OS].

On pose $OM = x$ avec $0 \leq x \leq 3$.

On note f la fonction qui à x associe la somme des aires des triangles AMS et AMB.



1. Démontrez que $f(x) = 3 - x + \sqrt{2x^2 + 4}$.

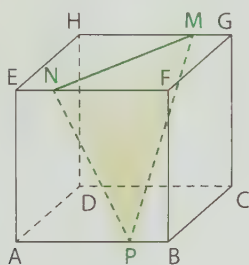
2. Quelle est la position du point M sur [OS] pour laquelle la somme des aires est minimale ?

60 Section pentagonale d'un cube

ABCDEFGH est un cube d'arête 8 cm.

M, N, P sont les points respectivement des arêtes [GH], [EF] et [AB] tels que :

$$EN = MG = PB = 2 \text{ cm.}$$



1. a) Construisez le point Q, intersection du plan (MNP) avec l'arête [BC], et le point R, intersection du plan (MNP) avec l'arête [CG].

b) Vérifiez que la section du cube par le plan (MNP) est un pentagone.

2. a) Calculez la longueur des côtés du pentagone.

b) Dessinez ce pentagone en vraie grandeur puis calculez, en degré, la mesure de ses angles.

61 TICE Volume d'une pyramide

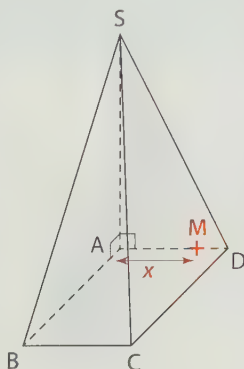
SABCD est une pyramide. ABCD est un rectangle et S est un point de la perpendiculaire en A au plan (ABC).

AB = AS = 14 cm et

AD = 7 cm.

M est un point de l'arête [AD] tel que $AM = x$.

On trace par M le plan perpendiculaire à (AD) qui coupe [BC] en I, [SC] en J et [SD] en K.



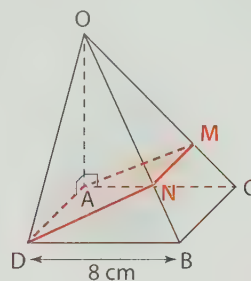
Comment choisir M sur l'arête [AD] pour que le volume de la pyramide AMIJK soit maximal ?

Conjecturez la réponse avec un logiciel de géométrie dynamique, puis démontrez le résultat.

62 Fonction, aire et volume

OACBD est une pyramide dont la base est un carré de côté 8 cm. Le sommet O est un point de la perpendiculaire en A au plan (ABC) tel que OA = 8 cm.

Un plan variable passant par A et D coupe l'arête [OB] en N et l'arête [OC] en M.



1. a) Démontrez que les faces latérales de la pyramide sont des triangles rectangles.

b) Déduisez-en que le quadrilatère AMND est un trapèze rectangle.

2. On pose $OM = x\sqrt{2}$ avec $0 \leq x \leq 8$.

a) Calculez MN et AM en fonction de x .

b) Déduisez-en l'aire du trapèze AMND en fonction de x .

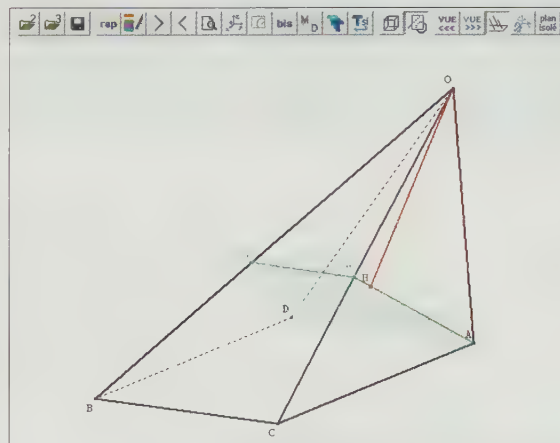
3. a) Étudiez les variations de la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 8]$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}(x + 8)\sqrt{(8 - x)^2 + x^2}.$$

b) Déduisez-en la valeur de x pour laquelle l'aire du trapèze est minimale.

4. Démontrez que le volume de la pyramide OAMND est un trinôme du second degré en x .

On démontrera que le projeté orthogonal H de O sur le plan (AMN) est un point du segment [AM] et on calculera l'aire (OAM) de deux façons.

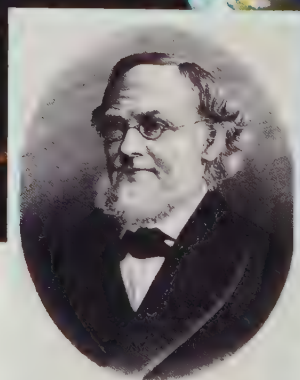




D'un siècle
à un autre

En physique, le concept de vecteur est largement utilisé. Les points de l'espace étant repérés par des coordonnées, les vecteurs position, vitesse, accélération... permettent de résoudre par le calcul des problèmes de mécanique assez complexes, tels que l'étude de la trajectoire des planètes.

Hermann Günther Grassmann, mathématicien allemand peu reconnu de son temps, a mis en place les fondements du calcul vectoriel.



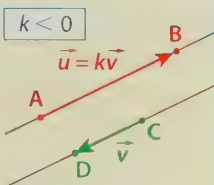
H. Grassmann

En savoir plus sur
Hermann Günther Grassmann

→ Chercheurs d'hier, p. 303

Colinéarité

• Dire que deux vecteurs non nuls $\vec{AB}$ et $\vec{CD}$ sont colinéaires signifie que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.



• Dire que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires signifie qu'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

• Le vecteur nul noté $\vec{0}$ est colinéaire à tout vecteur du plan.

Direction d'une droite

• Tout vecteur $\vec{u}$ non nul et colinéaire au vecteur $\vec{AB}$ est un vecteur directeur de la droite (AB).



• Si $A(3; -2)$ et $B(6; 4)$, alors le vecteur $\vec{u}(1; 2)$ est un vecteur directeur de la droite (AB).

Repérage et coordonnées

Le plan est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

• Pour tout vecteur $\vec{w}$, il existe un unique couple de nombres $(x; y)$ tels que $\vec{w} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

x et y sont les **coordonnées** de $\vec{w}$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

• Les coordonnées d'un point M sont celles du vecteur $\vec{OM}$.

• Si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives $(a; b)$ et $(a'; b')$, alors :

$\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(a + a'; b + b')$;

$k\vec{u}$ a pour coordonnées $(ka; kb)$;

« $\vec{u} = \vec{v}$ » équivaut à « $a = a'$ et $b = b'$ ».

• Si les points A et B ont pour coordonnées respectives $(x_A; y_A)$ et $(x_B; y_B)$, alors le milieu I de $[AB]$ a pour coordonnées :

$$\left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2} \right).$$

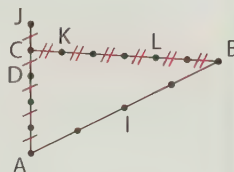
• Avec les notations précédentes, si le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est **orthonormé**, alors :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}.$$

1 Vrai ou faux

Dites si les propositions sont vraies ou fausses. Justifiez vos réponses.

1. A, B, C sont trois points distincts. Les points D, I, J, K et L sont définis comme l'indique la figure ci-contre.



a) Les vecteurs $\vec{DK}$ et $\vec{AL}$ sont colinéaires.

b) Les vecteurs $\vec{CI}$ et $(\vec{CB} + \vec{CA})$ sont colinéaires.

c) Les points I, J et K sont alignés.

2. A, B, C sont trois points distincts, et $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ désignent trois vecteurs non nuls.

a) Si $\vec{u} = \vec{v} + \vec{w}$, alors $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont des vecteurs directeurs de la droite $(A; \vec{u})$.

b) Si $3\vec{u} + 2\vec{v} = \vec{0}$, alors les droites $(A; \vec{u})$ et $(B; \vec{v})$ sont parallèles.

2 QCM

Pour chaque affirmation, une seule réponse est exacte. Identifiez-la en justifiant votre réponse.

1. Quel triplet n'est pas un repère du plan ?

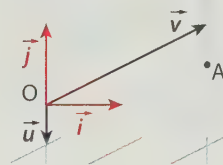
a) $(A; \vec{u}, \vec{v})$ b) $(O; \vec{i}, \vec{v})$

c) $(O; \vec{u}, \vec{j})$ d) $(A; \vec{j}, \vec{i})$

2. Dans le repère $(O; \vec{u}, \vec{v})$, le vecteur $\vec{AJ}$ a pour coordonnées :

a) $(-1; 1)$ b) $(-3; 1)$

c) $(-3; -1)$ d) $(3; -1)$



3 QCM

Pour chaque affirmation, une seule réponse est exacte. Identifiez-la en justifiant votre réponse.

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les vecteurs $\vec{u}(-1; \frac{2}{3})$ et $\vec{v}(\frac{1}{2}; -2)$ ainsi que les points $A(1; -2)$ et $B(-3; 1)$.

1. Le point C tel que $\vec{AC} + \vec{BC} = \vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées :

a) $(-\frac{1}{2}; -\frac{4}{3})$ b) $(-\frac{5}{2}; -\frac{7}{3})$ c) $(-\frac{5}{4}; -\frac{7}{6})$

2. Le point $D(-1; 2)$ est :

a) le milieu de $[AB]$

b) un point de la médiatrice de $[AB]$

c) un point du cercle de diamètre $[AB]$



Activité 1

VECTEURS ET PLANS DANS UN CUBE

Animation

ABCDEFGH est un cube d'arête 1.

1 Visualiser et utiliser un vecteur dans différents plans

a) On se place dans le plan contenant la face ABFE.

• Que pouvez-vous dire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{EF}$ d'une part, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{BF}$ d'autre part ?

• À quelle autre face le vecteur $\overrightarrow{AE}$ appartient-il ?

• On note $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AE}$.

Exprimez $\overrightarrow{AF}$ en fonction de $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

b) On se place maintenant dans le plan contenant la face AEHD et on note $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$.

• Exprimez $\overrightarrow{AH}$ en fonction de $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

On remarque que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ peuvent être représentés dans plusieurs faces du cube.

• Recopiez et complétez le tableau suivant en indiquant si chaque vecteur peut être représenté dans la face indiquée.

	ABFE	AEHD	ABCD	BCGF	CDHG	EFGH
$\vec{u}$	Oui					
$\vec{v}$	Oui					
$\vec{w}$	Non	Oui				

• Existe-t-il une face dans laquelle les trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ peuvent être tous représentés ?

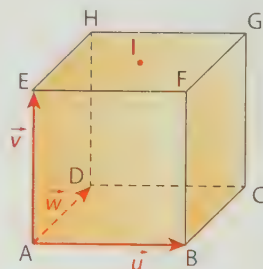
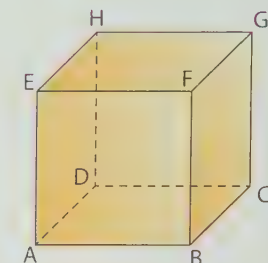
2 Écrire une somme de vecteurs issus de plans différents

I est le centre de la face EFGH.

a) Justifiez que le point I appartient au plan (AFH).

b) Dans le plan (AFH), exprimez $\overrightarrow{AI}$ en fonction de $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AH}$.

c) Déduisez du 1 b) que $2\overrightarrow{AI} = \vec{u} + 2\vec{v} + \vec{w}$.



3 Calculer une distance

On note J le centre de la face BCGF. On souhaite calculer la distance AJ.

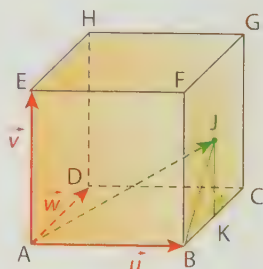
a) Justifiez que le triangle ABJ est rectangle en B.

b) L'application du théorème de Pythagore dans le triangle ABJ permet ainsi de calculer la distance AJ. Il faut préalablement connaître la distance BJ.

Justifiez que $BJ = \frac{\sqrt{2}}{2}$ puis calculez la distance AJ.

c) En utilisant les questions précédentes, déterminez trois nombres réels x, y et z tels que $\overrightarrow{AJ} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$.

• Comparez $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ à la distance AJ.



Activité 2

CARACTÉRISATION D'UNE DROITE



1 Deux vieilles connaissances...

a) Dans Geogebra, saisissez $A = (-2, -1)$ et $B = (2, 1)$ puis créez la droite $d = \text{droite}[A, B]$.

Dans la fenêtre Algèbre, la caractérisation algébrique qui est associée par défaut à la droite d est une **équation cartésienne** de d .

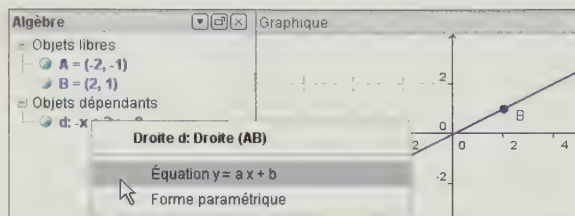
Retrouvez cette équation par le calcul.

Rappel

Dans un repère, dire que $\vec{u}(a; b)$ et $\vec{v}(a'; b')$ sont colinéaires signifie que $ab' - a'b = 0$.

b) Le menu contextuel associé à la droite d (obtenu à l'aide d'un clic droit sur l'objet d dans la fenêtre Algèbre) permet de visualiser l'**équation réduite** de la droite d .

Retrouvez l'équation réduite de d par le calcul.



2 ... et une nouvelle

Le menu contextuel indique une troisième forme de caractérisation algébrique de la droite d : la **forme paramétrique**.

a) Quel objet peut être associé au couple de coordonnées $(4; 2)$?

b) Complétez la proposition (P_1) suivante : « Dire qu'un point M appartient à la droite d signifie qu'il existe un nombre réel λ tel que $\vec{AM} = \dots \vec{AB}$. »

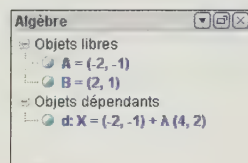
c) Nommons respectivement x et y l'abscisse et l'ordonnée du point M .

Complétez la proposition suivante pour qu'elle soit équivalente à (P_1) : « Dire qu'un point M appartient à la droite d signifie qu'il existe un nombre réel λ tel que $\begin{cases} x = -2 + \dots \\ y = \dots + 2\lambda \end{cases}$.

Cette dernière caractérisation correspond à la forme paramétrique générée par GeoGebra.

Qu'appelle-t-on ici le paramètre ?

Dans le langage particulier utilisé par le logiciel, la droite d est l'ensemble de tous les points M tels que « $M = A + \lambda \vec{AB}$ » où λ parcourt $\mathbb{R}$.



3 Application

Dans le champ de saisie de GeoGebra, entrez : Saisie: $D: X = (-2, 1) + t \cdot (3, 1)$

a) Par simple lecture de cette saisie, donnez les coordonnées d'un point et d'un vecteur directeur de la droite D tracée.

b) En utilisant la question 2. c) comme modèle, écrivez le « système paramétrique » caractérisant la droite D .

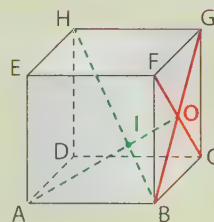
Problème ouvert

... Est-il plus facile ?

ABCDEFGH est un cube.

O est le centre du carré BCGF.

Démontrez que les droites (AO) et (HB) sont sécantes en I, centre de gravité du triangle BAG.



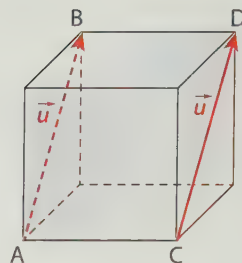
1 Vecteurs de l'espace

1.1 Définitions et règles de calcul

La notion de vecteur vue en géométrie plane se généralise à l'espace.

1. À tout couple de points (A, B) de l'espace, on associe le vecteur $\overrightarrow{AB}$ de la façon suivante.

- Lorsque $A \neq B$, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a :
 - pour **direction** celle de la droite (AB) ;
 - pour **sens** celui de A vers B ;
 - pour **longueur** ou **norme** la distance AB. On note $\|\overrightarrow{AB}\| = AB$.
- Lorsque $A = B$, le vecteur $\overrightarrow{AA}$ est le **vecteur nul** noté $\vec{0}$.



On dit que deux vecteurs non nuls sont égaux lorsqu'ils ont même direction, même sens et même longueur. On note $\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ (voir la figure ci-dessus).

2. Lorsque quatre points A, B, C, D ne sont pas alignés :

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ équivaut à « ABCD est un parallélogramme ».

3. Pour tout point A de l'espace, pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe un unique point C tel que $\overrightarrow{AC} = \vec{u}$.

4. Les règles de calcul, y compris la relation de Chasles, sont les mêmes qu'avec les vecteurs du plan.

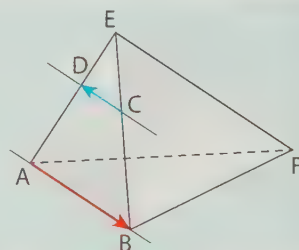
1.2 Vecteurs colinéaires, parallélisme, alignement

La colinéarité de deux vecteurs de l'espace se définit comme en géométrie plane.

Définition 1

Dire que deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires signifie que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

Par convention, le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur $\vec{u}$.



Comme dans le plan, on démontre les résultats suivants.

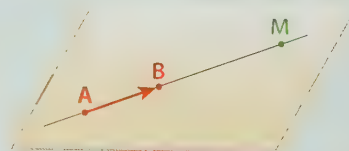
Théorème 1

- Dire que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont colinéaires équivaut à dire qu'il existe un nombre k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.
- Dire que les points A, B, C distincts sont alignés équivaut à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires, donc à dire qu'il existe un nombre k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$.

Théorème 2

A et B sont deux points distincts de l'espace.

La droite (AB) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, c'est-à-dire l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$, t étant un nombre quelconque.



2 Vecteurs coplanaires

2.1 Caractérisation vectorielle d'un plan de l'espace

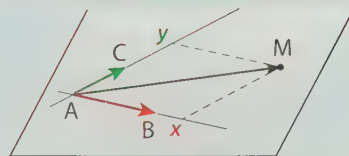
Théorème 3

A, B, C sont trois points non alignés.

Le plan (ABC) est l'ensemble des points M définis par :

$$\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC},$$

x et y étant des nombres quelconques.



Animation

Démonstration

• A, B, C n'étant pas alignés, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires donc $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère du plan (ABC).

Donc si M est dans ce plan, il existe un couple $(x; y)$ tel que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$.

• Réciproquement, nous allons prouver que tout point M de l'espace tel que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ est un point du plan (ABC).

Puisque $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère du plan ABC, il existe dans ce plan un point N de coordonnées $(x; y)$ tel que $\overrightarrow{AN} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ d'où $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AN}$ et $M = N$. M est donc bien dans le plan (ABC).

On dit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ dirigent le plan ou sont des **vecteurs directeurs** du plan (ABC).

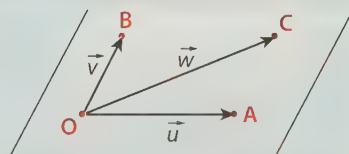
D'une manière générale, un plan est déterminé par un point et deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires.

On note : $\mathcal{P}(A, \vec{u}, \vec{v})$.

2.2 Vecteurs coplanaires

Définition 2

Dire que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires signifie que lorsqu'on choisit un point O quelconque, le point O et les points A, B, C tels que $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$ sont dans un même plan.



► **Remarque.** Si les vecteurs non nuls $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires, les points O, A, B sont alignés. Donc il existe au moins un plan qui contient la droite (OA) et le point C, et les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires. Donc si deux vecteurs parmi les trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont colinéaires, alors $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont **nécessairement** coplanaires.

Théorème 4

$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont trois vecteurs tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

Dire que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont **coplanaires** équivaut à dire qu'il existe des nombres a et b tels que :

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}.$$

Démonstration

On utilise les notations de la figure ci-dessus.

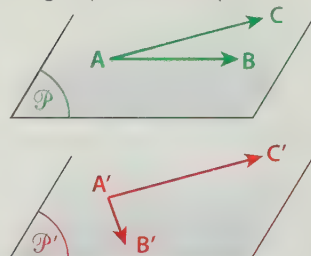
Puisque $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, ils sont des vecteurs directeurs du plan (OAB). Par définition « $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires » signifie que C appartient au plan (OAB). D'après le théorème 3, cette appartenance équivaut à « il existe a et b tels que $\overrightarrow{OC} = a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB}$ » soit :

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}.$$

► Conséquences

1. Dire que **quatre points** A, B, C, D sont **coplanaires** équivaut à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.
2. Dire que les **droites** (AB) et (CD) sont **coplanaires** équivaut à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires.
3. Dire que deux **plans** sont **parallèles** équivaut à dire que deux vecteurs non colinéaires de l'un et deux vecteurs non colinéaires de l'autre sont coplanaires.

Figure pour la conséquence 3.



2.3 Application : démonstration du théorème du toit

Rappelons l'énoncé de ce théorème du chapitre 9 (théorème 5, p. 268) : d_1 et d_2 sont deux droites parallèles, $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ deux plans **distincts** tels que d_1 est contenue dans $\mathcal{P}_1$ et d_2 dans $\mathcal{P}_2$.

Si $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants, alors la droite Δ intersection est parallèle à d_1 et d_2 .

▣ Démonstration

Notons $\vec{u}$ un vecteur directeur de d_1 et d_2 , et $\vec{w}$ un vecteur directeur de Δ .

Notons $(\vec{u}, \vec{v}_1)$ un couple de vecteurs directeurs de $\mathcal{P}_1$ et $(\vec{u}, \vec{v}_2)$ un couple de vecteurs directeurs de $\mathcal{P}_2$.

La droite Δ est contenue dans $\mathcal{P}_1$ donc d'après le théorème 4, il existe un couple $(x_1; y_1)$ tel que :

$$\vec{w} = x_1 \vec{u} + y_1 \vec{v}_1 \quad (1).$$

De même, Δ étant contenue dans $\mathcal{P}_2$, il existe un couple $(x_2; y_2)$ tel que $\vec{w} = x_2 \vec{u} + y_2 \vec{v}_2$ (2).

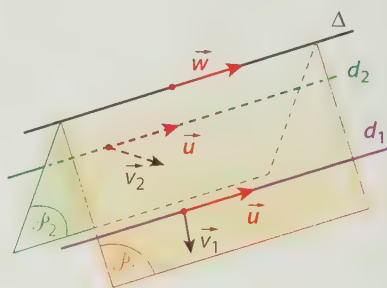
Il résulte de (1) et (2) que :

$$x_1 \vec{u} + y_1 \vec{v}_1 = x_2 \vec{u} + y_2 \vec{v}_2 \text{ soit } (x_1 - x_2) \vec{u} = y_2 \vec{v}_2 - y_1 \vec{v}_1 \quad (3).$$

- Si $x_1 \neq x_2$, alors $\vec{u}$, $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ sont coplanaires. Ce qui est impossible car les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants.

Donc $x_1 = x_2$ et $y_1 = y_2 = 0$ car $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ ne sont pas colinéaires.

En conclusion, $\vec{w} = x_1 \vec{u}$ et Δ est parallèle à d_1 et d_2 .



3

Repérage dans l'espace

3.1 Repère dans l'espace

Choisir un repère de l'espace, c'est se donner un point O (origine du repère) et un triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de vecteurs **non coplanaires**. On note $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ le repère. Le triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est appelé **base de vecteurs** de l'espace.

3.2 Coordonnées d'un point. Coordonnées d'un vecteur

Théorème 5

$(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère de l'espace.

Pour tout point M de l'espace, il existe un unique triplet de nombres $(x; y; z)$ tel que :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Démonstration

- Démontrons l'existence du triplet $(x ; y ; z)$.

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ étant non coplanaires, le plan $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ et la droite $\Delta(M ; \vec{k})$ ne sont pas parallèles. Notons M' le point d'intersection du plan $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ et de la droite Δ .

M' est un point du plan $(O ; \vec{i}, \vec{j})$; il existe donc deux nombres x et y tels que $\overrightarrow{OM'} = x\vec{i} + y\vec{j}$.

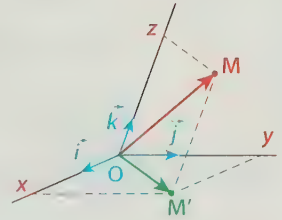
Les vecteurs $\overrightarrow{MM'}$ et $\vec{k}$ sont colinéaires, il existe donc un nombre z tel que $\overrightarrow{MM'} = z\vec{k}$.

Or, d'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM'} + \overrightarrow{M'M}$, donc $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

- On admet l'unicité de cette écriture.

$(x ; y ; z)$ sont les coordonnées de M dans le repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

x est l'**abscisse**, y l'**ordonnée** et z la **cote** de M dans ce repère.

**Définition 3**

(admis)

$(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère. Au vecteur $\vec{u}$ associons M tel que $\overrightarrow{OM} = \vec{u}$. Par définition, les **coordonnées de $\vec{u}$** sont les coordonnées $(x ; y ; z)$ de M .

Ainsi, tout vecteur $\vec{u}$ s'écrit de manière unique :

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

3.3 Décomposition d'un vecteur en fonction de trois vecteurs non coplanaires

Théorème 6

- $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont trois vecteurs **non coplanaires**. Pour tout vecteur $\vec{V}$, il existe un triplet unique de nombres $(x ; y ; z)$ tel que $\vec{V} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$.
- $(x ; y ; z)$ sont les **coordonnées de $\vec{V}$** dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

3.4 Calculs sur les coordonnées

Tous les résultats de la géométrie plane s'étendent à l'espace par l'adjonction d'une troisième coordonnée.

1. Dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées $(x ; y ; z)$ et $(x' ; y' ; z')$, alors :
 - pour tout réel k , $k\vec{u}$ a pour coordonnées $(kx ; ky ; kz)$;
 - le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(x + x' ; y + y' ; z + z')$.
- Si A et B ont pour coordonnées $(x_A ; y_A ; z_A)$ et $(x_B ; y_B ; z_B)$, alors :
 - le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(x_B - x_A ; y_B - y_A ; z_B - z_A)$;
 - le milieu I du segment $[AB]$ a pour coordonnées $\left(\frac{x_A + x_B}{2} ; \frac{y_A + y_B}{2} ; \frac{z_A + z_B}{2}\right)$.

2. Dans un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \text{et} \quad \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}.$$

4

Représentations paramétriques

Dans tout ce paragraphe, le plan est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ quelconque.

4.1 Paramétrage d'une droite

Théorème 7

La droite d passant par $A(x_0; y_0; z_0)$ et dirigée par le vecteur $\vec{u}(a; b; c)$ est l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que :

$$(S): \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

Animation

Démonstration. La relation d'appartenance de $M(x; y; z)$ à la droite d se traduit par :

« Il existe un nombre t tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$ »,

ce qui équivaut analytiquement à :

$$x - x_0 = at, y - y_0 = bt \text{ et } z - z_0 = ct, t \in \mathbb{R}. \text{ D'où le résultat.}$$

Le système (S) est appelé **représentation paramétrique** de la droite d dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$; t est le **paramètre**.

Pour le paramètre on peut utiliser n'importe quelle lettre : s, k , etc.

À chaque valeur de t , on associe un point $M(x_0 + at; y_0 + bt; z_0 + ct)$ et un seul. Réciproquement, à chaque point M de d correspond un seul nombre t tel que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u}$.

Conséquence

Lorsqu'une représentation paramétrique d'une droite d est écrite sous la forme (S), alors on peut affirmer que d passe par $A(x_0; y_0; z_0)$ et que $\vec{u}(a; b; c)$ est un vecteur directeur de d .

Exemple. La représentation paramétrique de la droite d est donnée ci-contre.

Le point de paramètre 1 est le point $M(2; 0; 3)$.

Le point $P(-6; -4; -1)$ appartient-il à d ? P appartient à d si, et seulement si, il existe t tel que :

$$-6 = 2t; -4 = t - 1 \text{ et } -1 = t + 2.$$

On trouve ici $t = -3$ donc P est un point de d .

$$d: \begin{cases} x = 2t \\ y = t - 1, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = t + 2 \end{cases}$$

4.2 Paramétrage d'un plan

On caractérise un plan $\mathcal{P}$ par la donnée d'un point A et de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires. Le plan $\mathcal{P}(A; \vec{u}, \vec{v})$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u} + s\vec{v}$.

Cette caractérisation conduit donc, comme pour la droite $d(A; \vec{u})$, à une représentation paramétrique du plan. Cette représentation dépendra cette fois de deux paramètres t et s .

Le plan étant muni d'un repère quelconque $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, le point A a pour coordonnées $(x_0; y_0; z_0)$, $\vec{u}(a; b; c)$ et $\vec{v}(\alpha; \beta; \gamma)$. L'appartenance de $M(x; y; z)$ à $\mathcal{P}$ se traduit par :

« Il existe deux nombres t et s tels que $\overrightarrow{AM} = t\vec{u} + s\vec{v}$ »,

ce qui équivaut à : $x - x_0 = at + \alpha s; y - y_0 = bt + \beta s; z - z_0 = ct + \gamma s, t \in \mathbb{R}$.

On dira donc que le système :

$$(S): \begin{cases} x = x_0 + at + \alpha s \\ y = y_0 + bt + \beta s, \quad t \in \mathbb{R} \text{ et } s \in \mathbb{R} \\ z = z_0 + ct + \gamma s \end{cases}$$

est une représentation paramétrique de $\mathcal{P}(A; \vec{u}, \vec{v})$.

OBJECTIF 1

Utiliser des décompositions de vecteurs

Colinéarité

- Dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires équivaut à dire qu'il existe un nombre k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$.
- Dire que les points A, B, C distincts sont alignés équivaut à dire que les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires.
- Dire que les droites (AB) et (CD) sont parallèles équivaut à dire que les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires.

Coplanarité

- $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont trois vecteurs tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
Dire que $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont coplanaires équivaut à dire qu'il existe des nombres a et b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$.
- Dire que deux plans sont parallèles équivaut à dire que deux vecteurs non colinéaires de l'un et deux vecteurs non colinéaires de l'autre sont coplanaires.

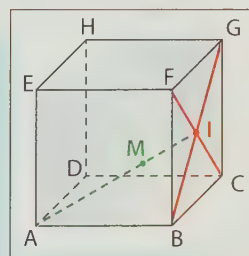
EXERCICE RÉSOLU A

Démontrer que trois points sont alignés

ABCDEFGH est un cube. I est le centre de la face BCGF.

Le point M est tel que $\vec{MA} + 2\vec{MI} = \vec{0}$.

Démontrez que les points B, M, H sont alignés.



Méthode

- On cherche à exprimer le vecteur $\vec{BM}$ en fonction du vecteur $\vec{BH}$.
Pour cela, on transforme la somme $\vec{MA} + 2\vec{MI}$ à l'aide de la relation de Chasles.
- On tient compte du fait que I est le centre de la face BCGF.
- On veut faire intervenir le point H. On identifie le rectangle ABGH dans lequel $\vec{BA} + \vec{BG} = \vec{BH}$.
- On conclut.

Solution

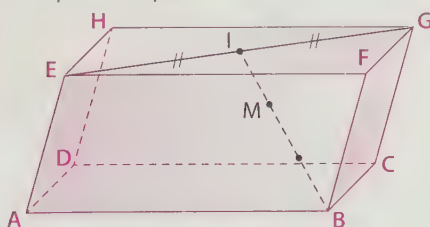
- $\vec{MA} + 2\vec{MI} = \vec{MB} + \vec{BA} + 2\vec{MB} + 2\vec{BI}$
soit $\vec{MA} + 2\vec{MI} = 3\vec{MB} + \vec{BA} + 2\vec{BI}$.
- I est le milieu de [BG] donc $2\vec{BI} = \vec{BG}$.
Donc $\vec{MA} + 2\vec{MI} = 3\vec{MB} + \vec{BA} + \vec{BG}$.
- ABGH est un rectangle donc $\vec{BA} + \vec{BG} = \vec{BH}$.
Finalement, $\vec{MA} + 2\vec{MI} = 3\vec{MB} + \vec{BH}$.
Or, $\vec{MA} + 2\vec{MI} = \vec{0}$ donc $3\vec{MB} + \vec{BH} = \vec{0}$.
- Ainsi $\vec{BH} = 3\vec{BM}$ et les points B, M, H sont alignés.

Mise en pratique

1 ABCDEFGH est un parallélépipède.

I est le milieu du segment [EG].

M est le point tel que $\vec{MB} + 2\vec{MI} = \vec{0}$.



- a) Justifiez que $2\vec{MI} = \vec{ME} + \vec{MG}$.
- b) Déduisez-en que $\vec{MB} + \vec{ME} + \vec{MG} = \vec{0}$ (1).
2. Démontrez que les points D, M, F sont alignés.

2 ABCDEFGH est un cube. I, J et K sont les milieux respectifs de [AB], [AE] et [CG].

Le point L est tel que :

$$3\vec{EL} = 2\vec{EI}.$$

1. a) Démontrez que :

$$3\vec{JL} = \vec{EJ} + \vec{AB}.$$

b) Déduisez-en que B, J, L sont alignés.

2. a) Démontrez que les vecteurs $\vec{JL}$ et $\vec{HK}$ sont colinéaires.

b) Déduisez-en la valeur de k telle que $\vec{HK} = k\vec{JL}$.

EXERCICE RÉSOLU B

Démontrer que des vecteurs sont coplanaires

Animation

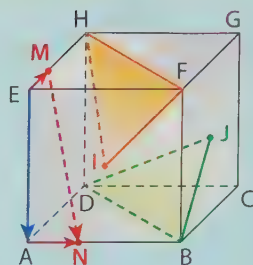
ABCDEFGH est un cube. I et J sont les centres des faces ABFE et BCGF.

Les points M et N sont tels que $3\overrightarrow{EM} = \overrightarrow{EH}$ et $3\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB}$.

1. Démontrez que les vecteurs $\overrightarrow{EA}$, $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{BH}$ sont coplanaires.

2. a) Justifiez que A est un point du plan (HFI) et que G est un point du plan (DBJ).

b) Déduisez-en que les plans (HFI) et (DBJ) sont parallèles.



► Méthode

1. Pour prouver que ces vecteurs sont coplanaires, il suffit de prouver l'existence de nombres a et b tels que $\overrightarrow{MN} = a\overrightarrow{EA} + b\overrightarrow{BH}$. Avec la relation de Chasles, on décompose $\overrightarrow{MN}$ en une somme de vecteurs qui fait apparaître $\overrightarrow{EM}$ et $\overrightarrow{AN}$ sur lesquels on a des informations.

• On a une relation avec $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{EA}$; il manque $\overrightarrow{BH}$. On décompose donc $\overrightarrow{DB}$ en faisant apparaître $\overrightarrow{BH}$.

• On conclut.

2. a) On utilise un raisonnement géométrique : les centres des faces sont les intersections des diagonales.

b) On démontre que ces deux plans sont dirigés par un même couple de vecteurs non colinéaires.

► Solution

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AN} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{EH} + \overrightarrow{EA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}.$$

Or $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AD}$ donc

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{EA} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD})$$

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{EA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DB} \quad (1).$$

$$\bullet \text{ De plus } \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HB} - \overrightarrow{EA}.$$

En remplaçant $\overrightarrow{DB}$ par $\overrightarrow{HB} - \overrightarrow{EA}$ dans (1), il vient :

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{EA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{HB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{EA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{EA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{BH}.$$

► • Donc les trois vecteurs sont coplanaires.

► 2. a) Le point I est le milieu de la diagonale [AF] et J celui de la diagonale [BG]. Il en résulte que A est un point du plan (HFI) et G un point du plan (DBJ).

► b) HFBD et AHGB sont deux rectangles. Il en résulte que $\overrightarrow{HF} = \overrightarrow{DB} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{BG} = \vec{v}$.

Le plan (HFI) est dirigé par $\overrightarrow{HF}$ et $\overrightarrow{AH}$ et le plan (DBJ) par $\overrightarrow{DB}$ et $\overrightarrow{BG}$. Ces deux plans étant dirigés par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont parallèles.

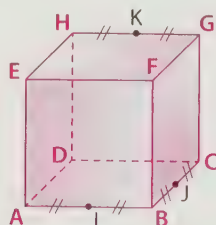
► Mise en pratique

3 ABCD est un tétraèdre. E est le point de l'espace tel que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$.

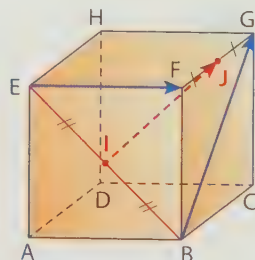
Les vecteurs $\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{BE}$ sont-ils coplanaires ?

4 ABCDEFGH est un cube. I, J et K sont les milieux respectifs de [AB], [BC] et [HG].

Les points I, J, K, E sont-ils coplanaires ?



5 ABCDEFGH est un cube. I et J sont les milieux respectifs de [EB] et [FG].



1. En décomposant le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ de deux manières, démontrez que $2\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{BG}$.

2. Déduisez-en que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{BG}$ sont coplanaires.

- $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère de l'espace et M un point de l'espace.
- Il existe un unique triplet $(x; y; z)$ tel que $\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. $(x; y; z)$ sont les coordonnées de M dans le repère.
- Si A a pour coordonnées $(x_A; y_A; z_A)$ et $B(x_B; y_B; z_B)$, alors $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées :

$$(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A).$$
- Le triplet de vecteurs non nuls $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ forme une base de vecteurs de l'espace si, et seulement si, $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires.

EXERCICE RÉSOLU C

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les points $A(5; 0; 0)$, $B(2; -1; 1)$, $C(10; 1; -2)$ et $D(3; 2; 1)$.

1. On pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ et $\vec{w} = \overrightarrow{AD}$.

Démontrez que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base des vecteurs de l'espace.

2. On se place dans le repère $(A; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$. I est le milieu du segment $[BC]$. L est le point tel que $3\overrightarrow{AL} = \overrightarrow{AD}$ et G est le centre de gravité du triangle BCD.

Démontrez que les droites (AI) et (GL) sont parallèles.

Méthode

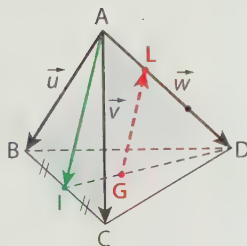
1. Il s'agit de prouver que les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires, c'est-à-dire de démontrer qu'il n'existe pas de nombres a et b tels que :

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}.$$

• On conclut.

2. Pensez à faire une figure.

• On cherche les coordonnées de I, L et G.



• Pour démontrer que les droites (AI) et (GL) sont parallèles, il suffit de démontrer que les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{GL}$ sont colinéaires.

Solution

1. Les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ ont respectivement pour coordonnées $(-3; -1; 1)$; $(5; 1; -2)$; $(-2; 2; 1)$. La condition $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ se traduit par :

$$\begin{cases} -2 = -3a + 5b \\ 2 = -a + b \\ 1 = a - 2b \end{cases}$$

ce qui équivaut à
$$\begin{cases} -2 = -3a + 5b \\ b = -3 \\ a = -5 \end{cases}$$

Or $-3a + 5b = 0 \neq -2$ donc le système n'a pas de solution.

• $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ne sont pas coplanaires donc $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est une base des vecteurs de l'espace.

2. Dans le repère $(A; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$, les points B, C, D ont respectivement pour coordonnées $(1; 0; 0)$, $(0; 1; 0)$ et $(0; 0; 1)$.

• I a pour coordonnées $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0)$.

$\overrightarrow{AL} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ donc $L(0; 0; \frac{1}{3})$.

• Posons $G(x; y; z)$. $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{ID}$ avec

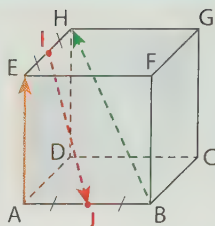
$\overrightarrow{IG}(x - \frac{1}{2}; y - \frac{1}{2}; z)$ et $\overrightarrow{ID}(-\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; 1)$.

Donc G a pour coordonnées $(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3})$.

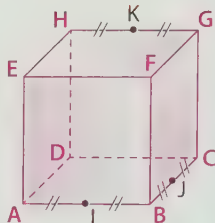
• Le vecteur $\overrightarrow{AI}$ a pour coordonnées $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0)$ et $\overrightarrow{GL}(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; 0)$. Il en résulte que $\overrightarrow{GL} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$. Ces vecteurs étant colinéaires, les droites (AI) et (LG) sont parallèles.

Mise en pratique

6 ABCDEFGH est un cube. I et J sont les milieux des arêtes [EH] et [AB]. On choisit le repère $(D; \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$. Démontrez que les vecteurs $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{BH}$ sont coplanaires.



7 On reprend l'exercice **4** de l'objectif 2. On choisit le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$. Les points I, J, K, E sont-ils coplanaires ?



8 Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les vecteurs $\vec{u}(-2; 3; -1)$, $\vec{v}(1; -1; -2)$, $\vec{w}(4; -2; -18)$.

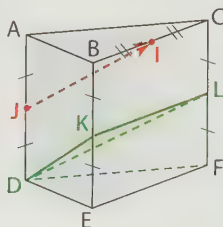
1. a) Existe-t-il des nombres a et b tels que :

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}.$$

b) Que pouvez-vous en conclure ?

2. Déduisez de la question précédente que le point $M(5; -1; -14)$ appartient au plan passant par $A(1; 1; 4)$ et dirigé par le couple de vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$.

9 ABCDEF est un prisme droit. I, J, K, L sont les milieux respectifs des arêtes [BC], [AD], [BE] et [CF].



On choisit le repère $(B; \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BE})$.

1. Démontrez que les vecteurs $\overrightarrow{JI}$, $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{KD}$ sont coplanaires.

2. Que pouvez-vous dire de la position relative de la droite (IJ) et du plan (DKL) ?

10 Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les points $D(1; 0; 1)$ et $E(4; -2; 1)$ et les vecteurs $\vec{u} = -3\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ et $\vec{v} = \vec{i} + 2\vec{k}$.

La droite (DE) est-elle parallèle à un plan $\mathcal{P}$ dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$?

11 Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les vecteurs $\vec{u}(0; -1; 1)$, $\vec{v}(-2; -1; 3)$ et $\vec{w}(-1; -1; -1)$.

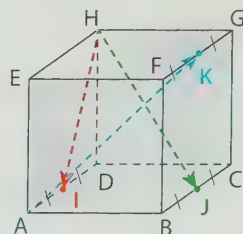
On pose $\overrightarrow{AB} = \vec{u}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{v}$, $\overrightarrow{AD} = \vec{w}$.

$(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ est-il un repère de l'espace ?

12 Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les points $A(3; 1; -2)$, $B(6; 5; -4)$, $C(1; 4; 1)$.

Le point $H(4; 8; -1)$ est-il dans le plan (ABC) ?

13 Dans le cube ci-dessous, on choisit le repère $(D; \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$.



I, J et K sont les milieux des arêtes [AD], [BC] et [FG].

1. Calculez les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AK}$, $\overrightarrow{HI}$ et $\overrightarrow{HJ}$.

2. a) Existe-t-il deux nombres a et b tels que :

$$\overrightarrow{AK} = a\overrightarrow{HI} + b\overrightarrow{HJ} ?$$

b) Que pouvez-vous en conclure ?

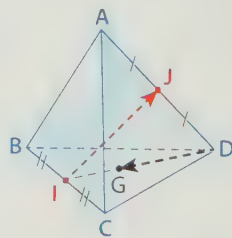
14 Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les points $A(3; 2; 1)$, $B(1; 2; 0)$, $C(3; 1; -2)$ et $M(13; 1; 3)$.

Les quatre points A, B, C, M sont-ils coplanaires ?

15 ABCD est un tétraèdre. I et J sont les milieux respectifs des arêtes [BC] et [AD]. G est le centre de gravité du triangle BCD.

On pose :

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}.$$



On se propose de démontrer de deux manières que les vecteurs $\vec{u}$, $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{DG}$ sont coplanaires.

1^{re} méthode : sans repère.

1. a) Démontrez que $2\overrightarrow{IJ} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AC}$.

b) Démontrez que $3\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AD}$.

2. Déduisez-en que $\vec{u} = -6(\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{DG})$.

Concluez.

2^e méthode : avec un repère.

On choisit le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$.

1. a) Trouvez les coordonnées des points I, J et G.

b) Déduisez-en les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$, $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{DG}$.

2. Concluez.

Exploiter la caractérisation paramétrique d'une droite

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, la droite d passant par $A(x_0; y_0; z_0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(a; b; c)$ a pour représentation paramétrique :

$$(S): \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

EXERCICE RÉSOLU D Déterminer une représentation paramétrique d'une droite

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, d est la droite passant par $A(-1; 0; 1)$ et $B(-5; -2; 7)$.

- Déterminez une représentation paramétrique de d .
- Quelle est l'intersection de la droite d et du plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$?

Méthode

1. On définit la droite d par le point A et le vecteur $\overrightarrow{AB}$ ou un vecteur $\vec{u}$ colinéaire à $\overrightarrow{AB}$.

2. On traduit l'appartenance de M à la droite d , puis au plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

• On en déduit la valeur de t , puis les coordonnées du point M.

• On conclut.

Solution

1. Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(-4; -2; 6)$. on peut choisir pour vecteur directeur $\vec{u}(2; 1; -3)$. Ainsi la droite d a pour représentation paramétrique :

$$(S): \begin{cases} x = -1 + 2t \\ y = t \\ z = 1 - 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

2. Notons $M(x; y; z)$ un point de cette intersection.

$M \in d$ si, et seulement si, il existe t tel que :

$$x = -1 + 2t, y = t \text{ et } z = 1 - 3t.$$

$M \in (O; \vec{i}, \vec{j})$ si, et seulement si, $z = 0$.

• Donc M appartient à l'intersection si, et seulement si, $x = -1 + 2t$, $y = t$ et $1 - 3t = 0$, soit $t = \frac{1}{3}$.

• Donc d coupe le plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$ au point $M(-\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; 0)$.

Mise en pratique. Pour tous les exercices, l'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

16 d est la droite passant par $A(-1; 2; 0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(0; -1; 1)$.

1. Donnez une représentation paramétrique de d .

2. Calculez les coordonnées des éventuels points d'intersection de d avec les plans $(O; \vec{i}, \vec{j})$, $(O; \vec{i}, \vec{k})$ et $(O; \vec{j}, \vec{k})$.

17 Reprenez les questions de l'exercice **16** lorsque la droite d est définie par les points :

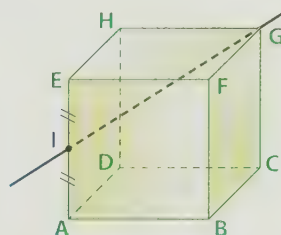
$$A(2; -1; 1) \text{ et } B(-2; 1; 3).$$

18 Précisez la nature géométrique de l'ensemble défini par :

$$(S) \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 3t \\ z = -t - 2 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

19 ABCDEFGH est un cube d'arête 1. Le point I est le milieu de l'arête [EA].

On choisit le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



1. Donnez une représentation paramétrique de la droite (IG).

2. Quelles sont les coordonnées du point K intersection de la droite (IG) et du plan (ABC) ?

EXTRAIRE-RÉSOLU E Étudier la position relative de deux droites

Dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les droites d et Δ ont respectivement pour représentation paramétrique :

$$d: \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - 3t \\ z = 3 - 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \Delta: \begin{cases} x = s \\ y = -3 - 3s \\ z = 1 - s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}.$$

Étudiez la position relative de ces deux droites.

► Méthode

- Ces droites peuvent être parallèles, sécantes ou non coplanaires. On définit géométriquement d et Δ .
- On regarde si les coordonnées de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont proportionnelles pour savoir si ces droites sont parallèles.
- On cherche si d et Δ ont un point commun.

► Solution

- La droite d passe par $A(1; 2; 3)$ et a pour vecteur directeur $\vec{u}(1; -3; -3)$.
La droite Δ passe par $B(0; -3; 1)$ et a pour vecteur directeur $\vec{v}(1; -3; -1)$.
- Les coordonnées $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas proportionnelles donc ces vecteurs ne sont pas colinéaires et d et Δ ne sont pas parallèles.
- d et Δ ont un point commun si, et seulement si, il existe un couple $(t; s)$ vérifiant :

$$\begin{cases} t + 1 = s \\ -3t + 2 = -3s - 3 \\ -3t + 3 = -s + 1 \end{cases}$$

$$\text{ce qui équivaut à } \begin{cases} t - s = -1 & (1) \\ -3t + 3s = -5 & (2) \\ -3t + s = -2 & (3) \end{cases}$$

(2) s'écrit $t - s = \frac{5}{3}$ donc (1) et (2) sont incompatibles et le système n'a pas de solution.

- On conclut.

- Les droites d et Δ sont donc non coplanaires.

► **Mise en pratique.** Pour tous les exercices, l'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

20 d et Δ sont deux droites de l'espace définies par :

$$d: \begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = -t - 1 \\ z = t + 1 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \Delta: \begin{cases} x = s + 1 \\ y = 2s - 3 \\ z = -s + 2 \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}$$

Prouvez que ces droites sont sécantes.

21 La droite d est définie par le point $A(2; -3; 5)$ et le vecteur directeur $\vec{u}(1; 2; 1)$, et la droite Δ est définie par le point $B(7; 2; 4)$ et le vecteur directeur $\vec{v}(3; 1; -1)$.

Étudiez la position relative de ces deux droites.

22 La droite (AB) est définie par $A(1; -1; 2)$ et $B(-1; 3; 4)$, et Δ a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -t \\ y = 5 - 2t \\ z = 5 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Étudiez la position relative des droites (AB) et Δ .

23 On donne les points $A(0; 5; 5)$, $B(-1; 3; 0)$, $C(-3; 2; 4)$ et $D(4; 7; -3)$.

Démontrez que les droites (AB) et (CD) sont coplanaires.

24 Étudiez la position relative des droites :

$$d: \begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 1 + t \\ z = -3 + 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad d': \begin{cases} x = 6s \\ y = 1 - 2s \\ z = 3 - 4s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}$$

25 Que peut-on dire des droites d et Δ définies ci-dessous ?

$$d: \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 3t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \Delta: \begin{cases} x = 2s \\ y = 5 - 6s \\ z = 1 - 2s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}$$

26 Questions sur le cours

Complétez les propositions suivantes.

- a) A et B sont deux points distincts. La droite (AB) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = \dots$
- b) A, B, C sont trois points non alignés, le plan (ABC) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} = \dots$
- c) Dire que les droites (AB) et (CD) sont coplanaires équivaut à dire que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont...
- d) Si $\vec{u}$ a pour coordonnées $(x; y; z)$ dans un repère orthonormé, alors $\|\vec{u}\| = \dots$

27 Vrai ou faux

Vrai ou faux ? Justifiez votre réponse.

- a) $(A; \vec{u}, \vec{v})$ est un plan $\mathcal{P}$; d est la droite définie par B et $\vec{w} = 2\vec{u} - \vec{v}$. Alors d est parallèle à $\mathcal{P}$.
- b) ABCD est un tétraèdre. Le point M tel que $2\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$ est un point d'une arête.
- c) L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les points $A(4; 3; -1)$, $B(3; 5; -4)$, $C(1; 8; -3)$ et $D(2; 5; 7)$.
 - Les points A, B, C, D sont coplanaires.
 - Les droites (AB) et (CD) sont sécantes.
 - Le triangle ABC est isocèle.

28 QCM Une seule réponse exacte

Pour chaque affirmation, une seule réponse est exacte. Identifiez-la en justifiant votre réponse.

Pour les questions 1. et 2., l'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Les vecteurs $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = 2\vec{i} + 7\vec{j} - 3\vec{k}$ et $\vec{w} = 4\vec{i} + m\vec{j} - \vec{k}$ sont coplanaires si :

- a) $m = 8$
- b) $m = 9$
- c) $m = -6$

2. La droite d passant par $A(-1; 0; 1)$ et dirigée par $\vec{u}(2; 1; -3)$ a pour représentation paramétrique :

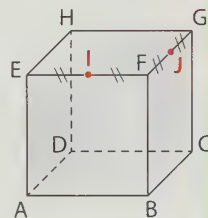
- a) $\begin{cases} x = -3 - 4s \\ y = -1 - 2s \\ z = -2 - 6s \end{cases} (s \in \mathbb{R})$
- b) $\begin{cases} x = 3 - 6r \\ y = 2 - 3r \\ z = -5 + 9r \end{cases} (r \in \mathbb{R})$
- c) $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t \\ z = 1 + 3t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$

3. ABCDEFGH est un cube d'arête 1.

I est le milieu de [EF] et J est le milieu de [FG].

Les droites (AI) et (CJ) sont :

- a) parallèles
- b) coplanaires
- c) non coplanaires



29 QCM Au moins une réponse exacte

Pour chaque affirmation, plusieurs réponses peuvent être exactes. Identifiez-les en justifiant vos réponses.

Pour les questions 1. et 2., l'espace est rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé.

1. On donne $A(3; 0; 0)$, $B(1; 1; 0)$, $C(0; 2; 1)$ et le point M tel que $\overrightarrow{OM} = 3\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC}$.

- a) A, B, C sont alignés.
- b) M appartient au plan (ABC).
- c) Il existe deux nombres x et y tels que : $\overrightarrow{OA} = x\overrightarrow{OB} + y\overrightarrow{OC}$.
- d) O, M, B, C sont coplanaires.

2. On donne $\vec{u}(1; 2; 3)$, $\vec{v}(2; 3; 1)$ et $\vec{w}(3; 1; 2)$.

- a) $(O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est un repère du plan.
- b) Si $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$ et $\overrightarrow{OC} = \vec{w}$, alors le triangle ABC est équilatéral.
- c) $M(1; 4; 13)$ est un point du plan $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

3. ABCDEFGH est un cube; I, J, K, L et M sont les milieux respectifs de [AB], [BC], [CG], [GH] et [AE].

- a) $\vec{IJ}$ et $\vec{MK}$ sont colinéaires.
- b) $\vec{AI}$, $\vec{JK}$ et $\vec{ME}$ sont coplanaires.
- c) E, I, J, K sont coplanaires.
- d) J appartient au plan (MIL).



30 Démontrer que deux droites sont sécantes

Un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est donné. On considère les points $A(3; -1; 1)$, $B(3; -3; -1)$ et les vecteurs $\vec{u}(1; 0; -2)$ et $\vec{v}(2; 1; -3)$. d est la droite passant par A et dirigée par $\vec{u}$ et d' est la droite passant par B et dirigée par $\vec{v}$.

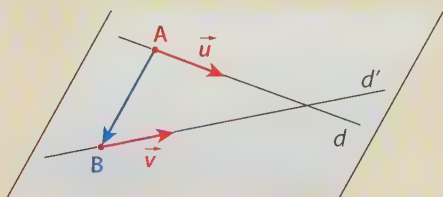
Objectif Prouver que les droites d et d' sont sécantes et trouver les coordonnées de leur point d'intersection.

1. Il s'agit de démontrer que deux droites de l'espace sont sécantes, donc de démontrer qu'elles sont non parallèles et coplanaires. La donnée des coordonnées nous incite à un traitement analytique du problème.

a) Justifiez que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

b) Que pouvez-vous en déduire pour d et d' ?

2. Il reste à prouver que d et d' sont coplanaires. Le point A et les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ déterminent un plan.



Il suffit donc de prouver que les vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont coplanaires. Ce qui revient à prouver qu'il existe deux nombres a et b tels que $\vec{AB} = a\vec{u} + b\vec{v}$ (1).

a) Traduire l'égalité (1) à l'aide des coordonnées. Vous obtenez trois équations à deux inconnues a et b .

b) Choisissez deux de ces équations et résolvez le système obtenu. a et b sont-ils solutions de la troisième équation ? Concluez.

3. Il reste à calculer les coordonnées $(x; y; z)$ du point I intersection de d et d' . Pour cela, on traduit vectoriellement le fait que le point I appartient à d et à d' .

a) Justifiez l'existence de deux nombres k et k' tels que : $\vec{AI} = k\vec{u}$ et $\vec{BI} = k'\vec{v}$.

b) Traduisez ces deux égalités avec les coordonnées. Déduisez-en k et k' , puis les coordonnées du point I.

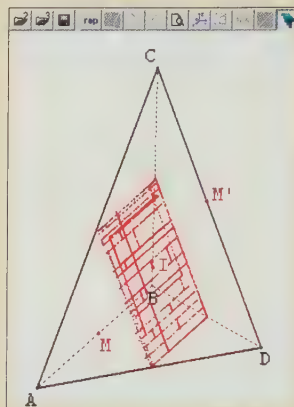
31 Déterminer un ensemble de points

ABCD est un tétraèdre. M et M' sont deux points variables sur les arêtes [AB] et [CD].

Le point I est le milieu du segment [MM'].

Objectif Démontrer que I est à l'intérieur d'un quadrilatère particulier lorsque M et M' se déplacent sur [AB] et [CD].

1. On peut utiliser un logiciel de géométrie pour conjecturer à quel ensemble appartient I. Sinon, on peut choisir des positions particulières de M et M' et placer les points I correspondants.



a) Justifiez que les milieux E, F, H, G de [AC], [BC], [BD] et [AD] sont des points I particuliers.

b) Quelle est la nature du quadrilatère EFHG ?

2. Le point I semble être dans le parallélogramme EFHG. Choisissons comme repère $(A; \vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD})$.

Les points M et M' sont tels que :

$$\vec{AM} = t\vec{AB} \text{ et } \vec{CM'} = s\vec{CD}$$

avec $t \in [0; 1]$ et $s \in [0; 1]$.

On va donc calculer les coordonnées du point I en fonction de s et t .

a) Démontrons que I a pour coordonnées :

$$x = \frac{t}{2}; y = \frac{1}{2} - \frac{s}{2}; z = \frac{s}{2}.$$

b) Déduisez-en que I est un point du plan $\mathcal{P}(E, \vec{EF}, \vec{EG})$.

3. Reste désormais à montrer que I est dans le parallélogramme EFGH.

a) Démontrons que $2\vec{EI} = \vec{EM} + \vec{EM'} = \vec{AM} + \vec{CM'}$.

b) En tenant compte de $\vec{AM} = t\vec{AB}$ et $\vec{CM'} = s\vec{CD}$, déduisez de la question 3. a) que $\vec{EI} = t\vec{EF} + s\vec{EG}$, $t \in [0; 1]$, $s \in [0; 1]$.

Concluez.

Remarque. On a démontré que I est un point du parallélogramme EFHG. Réciproquement, montrons qu'un point J intérieur à EFHG est le milieu d'un segment [MM'].

En effet : $\vec{EJ} = x\vec{EF} + y\vec{EG}$, $x \in [0; 1]$, $y \in [0; 1]$ alors $2\vec{EJ} = x\vec{AB} + y\vec{CD}$, $x\vec{AB} = \vec{AM}$ et $y\vec{CD} = \vec{CM'}$ soit $2\vec{EJ} = \vec{AM} + \vec{CM'} = \vec{AJ} + \vec{JM} + \vec{CJ} + \vec{JM'}$.

Or $\vec{AJ} + \vec{CJ} = 2\vec{EJ}$ donc $\vec{JM} + \vec{JM'} = \vec{0}$ et J est le milieu du segment [MM'].

Narration de recherche

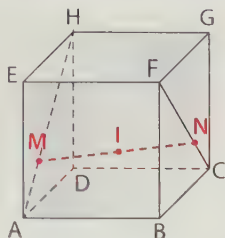
→ L'objectif n'est pas seulement de résoudre le problème posé : vous devez aussi noter les différentes idées même lorsqu'elles n'ont pas permis de trouver la réponse. Expliquez pourquoi vous avez changé de méthode et ce qui vous a fait avancer, etc.

32 ABCDEFGH est un cube d'arête 1.

M est un point du segment [AH], N est le point du segment [FC] tel que $CN = AM$ et I est le milieu du segment [MN].

1. Faites une figure en utilisant un logiciel adapté.

2. Quelle ligne décrit le point I lorsque M parcourt le segment [AH] ? Justifiez votre réponse.



33 $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormé de l'espace.

On donne le point $A(1; 0; 0)$.

1. B et C sont deux points du plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$ tels que le triangle ABC est équilatéral de centre O.

Déterminez des coordonnées possibles des points B et C.

2. D est un point de l'espace tel que le tétraèdre ABCD est régulier : toutes ses arêtes ont la même longueur.

Déterminez des coordonnées possibles du point D.

Chercheurs d'hier

Eux aussi, ils ont
cherché avant de trouver !

→ Voici quelques mathématiciens importants qui ont travaillé dans le domaine de la Géométrie.

Jérôme Cardan
→ Chap. 8

Johannes Kepler
→ Chap. 9

James Clerk Maxwell
→ Chap. 11

RENAISSANCE

ÉPOQUE MODERNE

ÉPOQUE CONTEMPORAINE



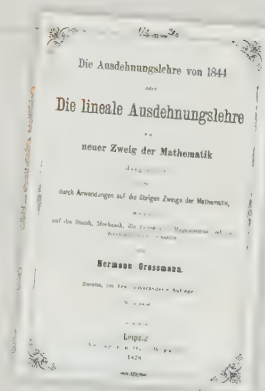
Hermann Grassmann
(1809-1877)

Mathématicien et philosophe allemand, Hermann Grassmann étudia d'abord la théologie avant d'enseigner les mathématiques.

En 1844, il publie *Die Lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik*. Il y expose les axiomes de la théorie des espaces vectoriels tels que nous les connaissons aujourd'hui, formalisant ainsi les travaux initiés par d'autres mathématiciens avant lui comme

François Viète (1540-1603) ou Gottfried Leibnitz (1646-1716).

Il faudra attendre le début du xx^e siècle pour que ses travaux soient reconnus et largement utilisés. Il est aujourd'hui considéré comme le père des structures vectorielles, qui ont donné naissance à nombre de théories mathématiques et d'applications technologiques.



Sur le Web fr.wikipedia.org/wiki/Herman_Günther_Grassmann

Travaux dirigés

Utiliser Geospace



→ Pour conjecturer

TP

34 Étudier la position relative de deux plans

COMPÉTENCES

TICE

- Construire une figure de l'espace pour conjecturer.

Mathématiques

- Démontrer le parallélisme de deux plans.

ABCDEFGH est un cube.

I, J et K sont les milieux respectifs des segments $[HD]$, $[EH]$ et $[AD]$.

L est le centre de gravité du triangle ABE.

L'objectif de ce TP est d'étudier la position relative des plans (JIC) et (BLK).

1. Conjecturer avec Geospace

- a) • Créez le cube ABCDEFGH.

Pour cela créez, par exemple, les points :

$A(4; 0; 0)$, $B(4; 4; 0)$, $C(0; 4; 0)$ et $D(0; 0; 0)$

puis les points $E(4; 0; 4)$, $F(4; 4; 4)$, $G(0; 4; 4)$ et $H(0; 0; 4)$.

- Créez les milieux I, J et K respectivement des segments $[HD]$, $[EH]$ et $[AD]$.

- Pour créer le centre de gravité L du triangle (ABE), créez deux médianes de ce triangle et leur point d'intersection, ou utilisez la commande :

Créer – Point ► Barycentre (A, 1) (B, 1) (E, 1).

- Créez enfin les triangles (JIC) et (BLK) :

Créer – Ligne ► Polygone convexe ► Défini par ses sommets

- b) Faites pivoter le cube et observez les deux triangles (JIC) et (BLK).

- c) Conjecturez ainsi la position relative des plans définis par ces triangles.

Observez les triangles (JIC) et (BLK).

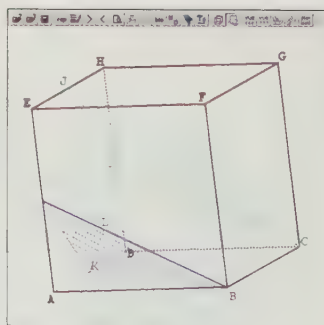
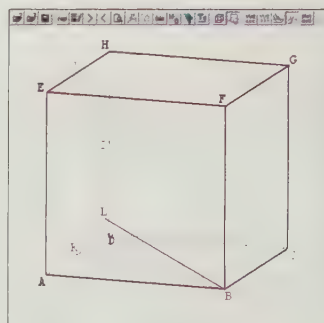
Quels vecteurs vous semblent colinéaires ?

- d) Créez la section du cube par le plan (JIC) :

Créer – Ligne ► Polygone convexe

► Section d'un polyèdre par un plan.

Pouvez-vous conjecturer la colinéarité de deux autres vecteurs ?



2. Démontrer

Pour prouver que les plans (JIC) et (BLK) sont parallèles, il suffit de prouver que ces deux plans sont dirigés par un même couple de vecteurs non colinéaires. En observant les figures construites, on peut remarquer qu'un tel couple apparaît assez naturellement : le couple $(\vec{CI}, \vec{IJ})$.

On note M le milieu de l'arête $[AE]$.

- a) Justifiez que :

- $\vec{BL}$ et $\vec{BM}$ sont colinéaires ;
- $(\vec{BM}, \vec{KM})$ est un couple de vecteurs directeurs du plan (BLK) ;
- $\vec{KM} = \vec{IJ}$ et $\vec{BM} = \vec{CI}$.

- b) Concluez.

35 Centre de gravité d'un tétraèdre

OBJECTIF Définir la notion de centre de gravité d'un tétraèdre ABCD par analogie avec le centre de gravité d'un triangle.

Dans un triangle ABC, le centre de gravité G est le point de concours des médianes. Le point G est caractérisé par la relation $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$.

Dans le tétraèdre ABCD, définissons donc le point G par la relation :

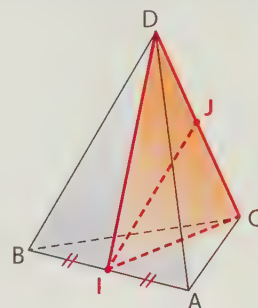
$$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} + \vec{GD} = \vec{0} \quad (1),$$

et définissons les analogues des médianes pour le tétraèdre :

– on appelle **plan médian** issu d'une arête le plan contenant cette arête et passant par le milieu de l'arête opposée.

– une **bi-médiane** est une droite passant par le milieu de deux arêtes opposées.

Exemples. Le plan (DIC) est le plan médian issu de l'arête [DC]. (IJ) est une bi-médiane du tétraèdre ABCD.



1. Dans cette question, on se propose de construire le point G.

On appelle I et J les milieux respectifs des segments [AB] et [AC].

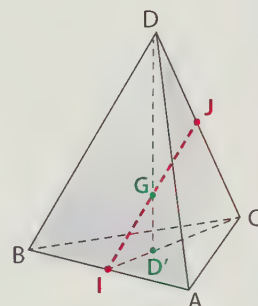
D' désigne le centre de gravité du triangle ABC.

On a donc $\vec{D'A} + \vec{D'B} + \vec{D'C} = \vec{0} \quad (2)$.

a) Démontrez, en tenant compte de (2), que :

$$3\vec{GD'} + \vec{GD} = \vec{0}, \text{ puis que } \vec{D'G} = \frac{1}{4}\vec{D'D}.$$

b) Déduisez-en que les points D', D et G sont alignés et placez le point G.



2. Combien y a-t-il de plans médians dans un tétraèdre ?

3. On se propose de démontrer que toutes les bi-médianes d'un tétraèdre ABCD sont concourantes en G.

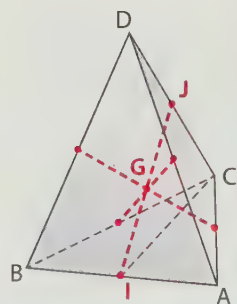
a) Combien y a-t-il de bi-médianes dans un tétraèdre ?

b) Prouvez que la droite (IJ) est contenue dans les plans médians issus des arêtes [AB] et [CD].

• Déduisez-en que chaque bi-médiane du tétraèdre est contenue dans deux plans médians.

c) À l'aide de l'égalité (1), prouvez que le point G appartient à la bi-médiane (IJ) ainsi qu'à chaque bi-médiane du tétraèdre.

d) Concluez.



Vous remarquez ici l'analogie :

« Le centre de gravité d'un triangle est le point de concours des médianes. »

« Le centre de gravité d'un tétraèdre est le point de concours des bi-médianes (et aussi des plans médians). »

4. L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On note $(x_M; y_M; z_M)$ les coordonnées d'un point désigné par la lettre M.

a) À l'aide de la relation (1), exprimez $\vec{OG}$ en fonction de $\vec{OA}$, $\vec{OB}$, $\vec{OC}$, et $\vec{OD}$.

b) Déduisez-en les coordonnées du point G en fonction des coordonnées des points A, B, C et D.

36 Vecteur moment d'une force

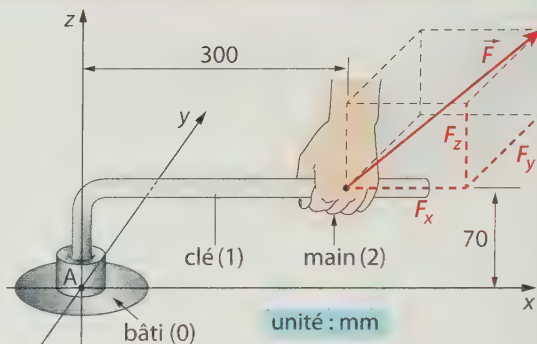
OBJECTIF Découvrir la notion de moment de force utilisée dans l'étude des actions mécaniques appliquées à un solide.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(A; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. (Ax) , (Ay) et (Az) désignent les axes de ce repère.

Une clé (1) est utilisée pour desserrer une vis bloquée sur un bâti (0).

L'effort exercé par la main (2) de l'opérateur est représenté par le vecteur $\vec{F}(F_x; F_y; F_z)$.

La force exercée en $M(x_M; y_M; z_M)$ produit, sous certaines conditions, un mouvement de rotation de la clé (1) autour du pivot A.



1. On suppose que la position de M et de la clé sont telles que l'indique le croquis, et que la clé peut pivoter autour de l'axe (Az) .

Quelles seraient les caractéristiques d'une force qui ne provoquerait pas de rotation de la clé ?

2. L'aptitude de la force $\vec{F}$ à faire tourner la clé autour du pivot A est appelée **moment de $\vec{F}$ en A** et est symbolisée par un vecteur noté $\mathcal{M}_{(A)}(\vec{F})$.

Les coordonnées de ce vecteur dépendent des caractéristiques du vecteur force et de la position du point M où s'applique cette force. On a ici :

$$\vec{F} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} \quad M \begin{pmatrix} x_M \\ y_M \\ z_M \end{pmatrix} \quad \mathcal{M}_{(A)}(\vec{F}) \begin{pmatrix} F_y z_M - F_z y_M \\ F_z x_M - F_x z_M \\ F_x y_M - F_y x_M \end{pmatrix}$$

$\mathcal{M}_{(A)}(\vec{F})$ est égal au produit vectoriel $\vec{F} \wedge \vec{AB}$. Ce vecteur est normal au plan formé par $\vec{AB}$ et $\vec{F}$.

• Donnez les coordonnées du point M indiquées par le croquis.

3. On applique en M la force $\vec{F}_1(60; 200; 0)$.

• Déterminez les coordonnées du vecteur moment $\mathcal{M}_{(A)}(\vec{F}_1)$ de $\vec{F}_1$ en A.

4. L'abscisse $\mathcal{M}_x$ du vecteur moment indique l'aptitude à pivoter autour de l'axe (Ax) , son ordonnée $\mathcal{M}_y$ indique l'aptitude à pivoter autour de l'axe (Ay) et sa cote $\mathcal{M}_z$ indique l'aptitude à pivoter autour de l'axe (Az) .

Chacune des composantes, ainsi que la norme, du vecteur moment s'exprime en newton · mètre (N · m).

La vis ne peut pivoter qu'autour de l'axe (Oz) .

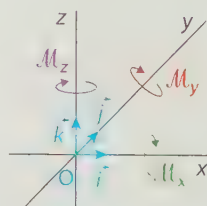
Justifiez que seule la composante $\vec{F}_y$ du vecteur force est nécessaire pour permettre à la vis de pivoter autour de son axe.

5. Le couple de serrage de la vis (à vaincre pour la desserrer) est de 65 N · m.

La force $\vec{F}_1$ permet-elle de desserrer la vis ?

6. On applique maintenant en M la force $\vec{F}_2(40; 250; -20)$.

La force $\vec{F}_2$ permet-elle de desserrer la vis ?



Physique appliquée

Application à la voile

Plus le point d'application d'une force $\vec{F}$ est loin de l'axe de rotation, plus le moment de $\vec{F}$ est grand. Ainsi, pour diminuer le gîte d'un voilier (son inclinaison sur le côté), on se met « au rappel ». Le passager, en étendant son corps au maximum, éloigne son centre de gravité de l'axe de rotation du bateau. Le poids $\vec{P}$ s'appliquant au centre de gravité, le moment de cette force augmente et le gîte diminue.



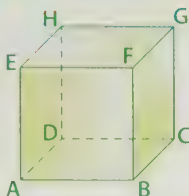
DE TÊTE

37 1. Avec quel sommet du cube est confondu le point M tel que :

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DH} ?$$

2. Même question avec le point N tel que :

$$\overrightarrow{EN} = \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{EC}.$$



Pour les exercices 38 à 42

L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

38 On donne les points $A(3; 0; -1)$ et $B(-2; 3; 2)$.

- Quelles sont les coordonnées du milieu de $[AB]$?
- Quelles sont les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$?

39 La droite d passant par $A(2; 1; -1)$ est dirigée par le vecteur $\vec{u}(1; -1; 1)$.

Pourquoi le point $B(3; 0; 0)$ est-il un point de d ?

40 Pour quelle valeur de b les vecteurs $\vec{u}(2; -4; 6)$ et $\vec{v}(-1; 2; b)$ sont-ils colinéaires ?

41 On se place dans un repère orthonormé. Quelle est la norme du vecteur $\vec{u} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + 3\vec{k}$?

42 La droite d a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 1 - t \\ z = -2 + t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

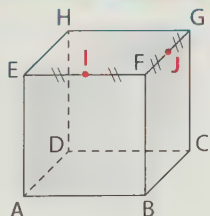
Le point $A(3; 2; -3)$ est-il un point de d ?

VECTEURS DE L'ESPACE

Pour les exercices 43 à 45

ABCDEFGH est un cube.

Les points I et J sont les milieux respectifs des arêtes $[EF]$ et $[FG]$.



43 Complétez chacune des égalités suivantes par un sommet du cube.

a) $\overrightarrow{A...} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BF}.$

b) $\overrightarrow{CE} = \overrightarrow{C...} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{HE}.$

44 Quel est le vecteur d'origine A défini par :

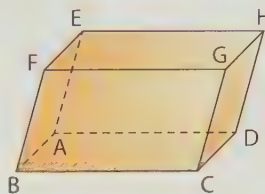
a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{FJ} ?$

b) $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HJ} ?$

45 Les vecteurs $\vec{IJ}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont-ils colinéaires ?

Pour les exercices 46 à 48

ABCDEFGH est un parallélépipède.



46 Démontrez les égalités suivantes.

a) $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{CG} + \overrightarrow{EB} = \vec{0}.$

b) $\overrightarrow{GF} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{GA}.$

47 Complétez par un sommet du parallélépipède.

a) $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CE}.$

b) $\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{E...} + \overrightarrow{CG}.$

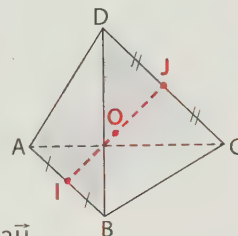
48 Situez les points P et Q vérifiant les égalités suivantes.

a) $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}.$

b) $\overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}.$

Pour les exercices 49 à 51

ABCD est un tétraèdre, I est le milieu de $[AB]$, J celui de $[CD]$ et O celui de $[IJ]$.



49 1. Complétez :

$\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{...} + \overrightarrow{JC} = \overrightarrow{AC}.$

2. Démontrez que $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\vec{IJ}.$

50 Justifiez que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}.$

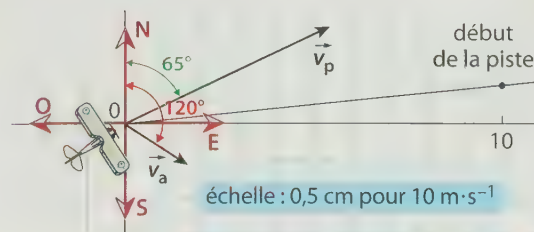
51 1. Justifiez que :

$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OI}$ et $\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = 2\overrightarrow{OJ}.$

2. Déduisez-en que $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}.$

52 La vitesse $\vec{v}$ d'un avion est la somme vectorielle de sa vitesse propre $\vec{v}_p$ par rapport à l'air (mesurée par l'anémomètre) et de la vitesse $\vec{v}_a$ de l'air (du vent).

Le « cap » est l'angle formé par l'axe de l'avion et la direction du Nord. La « route » est l'angle formé par la trajectoire réelle de l'avion et la direction du Nord.



1. Un avion se déplace à la vitesse $v_p = 60 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ en affichant un cap de 65° .

La météo annonce un vent de vitesse $v_a = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ soufflant dans la direction 120° .

Déterminez les coordonnées du vecteur $\vec{v}_p$.

2. Cet avion est en approche d'un terrain d'aviation. Sur son système de géolocalisation, le début de la piste d'atterrissage se trouve à la verticale du point $P(10; 1)$.

a) Sa route actuelle lui permet-elle d'arriver à la verticale de la piste d'atterrissage ?

b) Sachant que le vent reste stable en vitesse et en direction, et que sa vitesse propre demeure constante en valeur, quel cap (à 1° près) doit-il prendre pour arriver à la verticale de la piste ?

3. L'avion vole actuellement à une altitude de 3 000 m par rapport au niveau de la mer. La piste est à une altitude de 250 m.

a) Quelle doit être sa vitesse (à $0,1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ près) de descente moyenne pour se présenter en début de piste dans de bonnes conditions ?

b) Comment peut-on inclure cette vitesse de descente dans la caractérisation du vecteur représentant la vitesse propre de l'avion ?

VECTEURS COLINÉAIRES

Pour les exercices 53 à 59

L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

53 Dans chacun des cas suivants, précisez si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

a) $\vec{u}(2; 1; -3)$ et $\vec{v}(1; 2; 2)$.

b) $\vec{u}(14; -24,5; 17,5)$ et $\vec{v}(-4; 7; -5)$.

54 On donne les points $A(1; -1; 2)$, $B(0; 5; 3)$ et $C(4; -19; -1)$. Ces points sont-ils alignés ?

55 Existe-t-il des valeurs de a et b pour lesquelles les points $A(1; 0; -3)$, $B(-3; 2; 1)$ et $C(a; b; 5)$ sont alignés ?

56 On donne les points $A(3; 2; 2)$, $B(-1; -4; 4)$, $C(1; 0; 1)$ et $D(3; 3; 2)$. Les droites (AB) et (CD) sont-elles parallèles ?

57 Déterminez les nombres a et b pour lesquels les vecteurs $\vec{u}(-2; a; -5)$ et $\vec{v}(4; -6; b)$ sont colinéaires.

58 La droite d est dirigée par $\vec{u}(2; -1; 3)$ et la droite d' est dirigée par $\vec{v}(-4; 2; -6)$.

Quel théorème vous permet d'affirmer que ces deux droites sont parallèles ?

59 On donne les points $A(5; 2; 1)$, $B(7; 3; 1)$, $C(-1; 4; 5)$ et $D(-3; 3; 5)$.

Le quadrilatère ABCD est-il un parallélogramme ?

60 A, B, C sont trois points non alignés de l'espace. I est le milieu de $[BC]$. Le point G est tel que $\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}$.

1. Démontrez que $\vec{GB} + \vec{GC} = 2\vec{GI}$.

2. Déduisez-en que les points G, A, I sont alignés et que G est le centre de gravité du triangle ABC.

61 Suite de l'exercice 60

ABCD est un tétraèdre, I est le milieu de $[BC]$. Le point G est le centre du gravité du triangle ABC, c'est-à-dire le point tel que :

$$\vec{GA} + \vec{GB} + \vec{GC} = \vec{0}.$$

On considère le point K tel que :

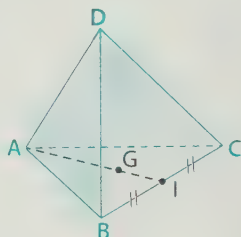
$$\vec{KA} + \vec{KB} + \vec{KC} + \vec{KD} = \vec{0}.$$

1. a) Démontrez que $3\vec{KG} + \vec{KD} = \vec{0}$.

b) Déduisez-en que K, G, D sont alignés.

2. Trouvez le réel k tel que :

$$\vec{DK} = k\vec{DG}.$$



VECTEURS COPLANAIRES

62 ABCD est un tétraèdre. Le point M est tel que :

$$\vec{MA} + 2\vec{MB} - \vec{MC} = \vec{0}.$$

1. a) Démontrez que $\vec{AM} = \vec{AB} - \frac{1}{2}\vec{AC}$.

b) Déduisez-en que M est un point du plan (ABC).

2. À quel plan appartient le point N tel que :

$$\vec{AN} + \vec{BN} - \vec{DN} = \vec{0} ?$$

63 ABCDEFGH est un cube.

I est le milieu de $[AB]$ et J celui de $[EH]$.

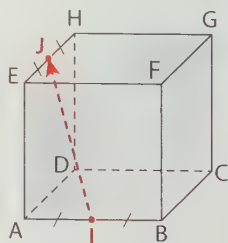
1. Démontrez que

$$\vec{IJ} = \vec{AE} + \frac{1}{2}\vec{BD}.$$

2. Déduisez-en que

$$2\vec{IJ} = \vec{AE} - \vec{HB}.$$

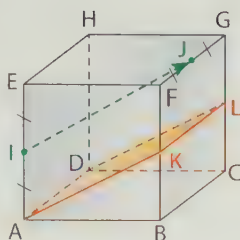
3. Pourquoi peut-on en déduire que les vecteurs $\vec{AE}$, $\vec{HB}$ et $\vec{IJ}$ sont coplanaires ?



64 ABCDEFGH est un cube ;
I, J, K, L sont les milieux respectifs des arêtes [AE], [FG], [FB], [CG].

Démontrez que la droite (IJ) est parallèle au plan (AKL).

Aide $\vec{IJ} = \vec{IF} + \vec{FJ} \dots$

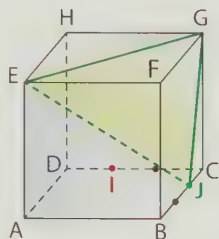


65 ABCDEFGH est un cube ;
I et J sont les points tels que $3\vec{DI} = \vec{DC}$ et $3\vec{CJ} = \vec{CB}$.

1. Construisez le point K intersection du plan (EGJ) et de la droite (AB).

2. a) Trouvez le nombre k tel que $\vec{AK} = k\vec{AB}$.

b) Déduisez-en que (HI) est parallèle au plan (EGJ).



Pour les exercices 66 à 72

L'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

66 On donne les vecteurs $\vec{u}(-1; 3; 2)$, $\vec{v}(4; 0; 2)$ et $\vec{w}(-7; 9; 4)$.

1. Calculez $3\vec{u} - \vec{v} - \vec{w}$.

2. Les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont-ils coplanaires ?

67 Les points $A(2; 0; 1)$, $B(1; 2; 1)$, $C(8; -4; 1)$ et $D(1; 12; -3)$ sont-ils coplanaires ?

68 1. Démontrez que les points $A(3; 2; 1)$, $B(1; 2; 0)$, et $C(3; 1; -2)$ ne sont pas alignés.

2. Pour quelle valeur de m le point $M(m; 1; 3)$ appartient-il au plan (ABC) ?

69 Quelles relations doivent vérifier x, y, z pour que les points $A(3; 2; 1)$, $B(1; 2; 0)$, $C(3; 1; -2)$ et $D(x; y; z)$ soient dans un même plan ?

70 On donne les points $A(2; 1; 3)$, $B(-1; 0; 5)$, $C(1; 1; 1)$, $D(1; 0; 1)$ et $E(4; -2; 1)$

1. Démontrez que les points A, B, C ne sont pas alignés.

2. La droite (DE) est-elle parallèle au plan (ABC) ?

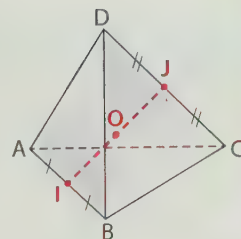
71 On donne les vecteurs $\vec{u}(0; -1; 1)$, $\vec{v}(-2; -1; 3)$ et $\vec{w}(-1; -1; -1)$. Le triplet $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est-il une base des vecteurs de l'espace ?

72 On donne les vecteurs $\vec{u}(1; 1; 1)$, $\vec{v}(2; 7; -3)$ et $\vec{w}(1; m; 2)$. Comment faut-il choisir m pour que $(O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ soit un repère de l'espace ?

73 ABCD est un tétraèdre.
Les points I, J, O sont les milieux respectifs des segments [AB], [CD] et [IJ].

1. Pourquoi $(O; \vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC})$ est-il un repère de l'espace ?

2. Quelles sont les coordonnées des points I, J, D dans ce repère ?



CALCULER DANS UN REPÈRE

Dans toute cette rubrique, l'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

74 On donne les points $A(3; 0; 4)$, $B(2; 3; 1)$, $C(-1; 2; 3)$ et $D(0; -1; 6)$.

1. Justifiez que ces quatre points sont coplanaires.

2. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ?

75 Calculez la norme des vecteurs :

• $\vec{u} = 2\vec{i} - 3\vec{j}$; • $\vec{v} = \vec{i} + 5\vec{k}$; • $\vec{w} = \sqrt{2}\vec{i} - \sqrt{3}\vec{j} + \vec{k}$.

76 a est un nombre réel.

On donne les vecteurs $\vec{u}(a; 3; 3)$ et $\vec{v}(5; -1; 2)$.

Trouvez les valeurs de a pour lesquelles :

a) $\|\vec{u}\| = 5$. **b)** $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$. **c)** $\|\vec{u} + \vec{v}\| = \sqrt{30}$.

77 On donne les points $A(0; 1; 3)$, $B(\sqrt{2}; 0; 2)$ et $C(\sqrt{2}; 2; 2)$. Quelle est la nature du triangle ABC ?

78 On donne les points :

$A(1; 1; \sqrt{2})$ et $B(\sqrt{2}; -\sqrt{2}; 0)$.

C est le symétrique de A par rapport à O.

Démontrez que le triangle ABC est rectangle et isocèle.

79 On donne les points $A(5; 1; 3)$, $B(5; -3; -1)$, $C(1; 1; -1)$ et $D(1; -3; 3)$.

Démontrez que le tétraèdre ABCD est régulier.

Rappel

Un tétraèdre est régulier si toutes ses faces sont des triangles équilatéraux.

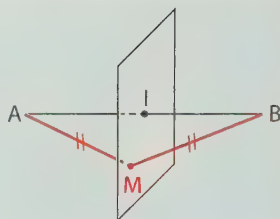
80 On donne les points $A(2; 3; -1)$, $B(2; 8; -1)$, $C(7; 3; -1)$ et $D(2; -1; 2)$. Démontrez que les points B, C, D sont sur une même sphère de centre A.

81 Trouvez, sur l'axe des abscisses, un point C équidistant de $A(2; -1; 3)$ et de $B(0; 5; -1)$.

82 Plan médiateur

Le plan médiateur d'un segment $[AB]$ est le plan perpendiculaire à $[AB]$ en son milieu I . C'est donc l'ensemble des points M équidistants de A et B :

$$\|\vec{MA}\| = \|\vec{MB}\|.$$



On donne les points $A(5; 2; -1)$ et $B(3; 0; 1)$.

Indiquez parmi les points suivants ceux qui appartiennent au plan médiateur de $[AB]$.

- $C(-2; 5; -2)$ • $D(1; 1; -3)$ • $E(3; 2; 1)$

83 On donne les points $A(2; 1; 0)$ et $B(-1; 4; 2)$.

1. Trouvez le nombre c tel que le point $C(1; 1; c)$ soit équidistant de A et B .

2. M est un point de coordonnées $(x; y; z)$.

Démontrez que :

« M est un point du plan médiateur de $[AB]$ » équivaut à « $3x - 3y - 2z + 8 = 0$ ».

REPRÉSENTATIONS PARAMÉTRIQUES

Dans toute cette rubrique, l'espace est muni d'un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

84 Donnez une représentation paramétrique de la droite d dans chacun des cas suivants.

a) $d = (A, \vec{u})$ avec $A(-1; 2; 0)$ et $\vec{u}(0; -1; 1)$.

b) $d = (AB)$ avec $A(2; 1; -1)$ et $B(2; -1; 1)$.

85 Précisez la nature géométrique de chacun des ensembles $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ définis par les représentations paramétriques suivantes.

$$\bullet \mathcal{E}_1 \begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = t + 2 \\ z = t - 2 \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \bullet \mathcal{E}_2 \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 3t \\ z = t + 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

86 La droite Δ a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = -2 + 2t \\ z = -1 - t \end{cases} t \in \mathbb{R}.$$

1. a) Déterminez le point I de Δ de paramètre 0.

b) Déterminez un vecteur $\vec{u}$ directeur de Δ .

c) Justifiez qu'il existe un point de Δ d'abscisse -5 .

2. La droite Δ passe-t-elle par $A(-10; \frac{16}{3}; -\frac{14}{3})$?

87 Dans chacun des cas suivants, donnez une représentation paramétrique de la droite Δ parallèle à d et passant par $I(-4; 5; -2)$.

a) $d = (O; \vec{k})$.

b) $d = (AB)$ avec $A(-1; 3; -8)$ et $B(-3; 3; -4)$.

c) d a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -2t \\ z = 2 - 5t \end{cases} t \in \mathbb{R}.$$

88 On donne les droites d et d' de représentations paramétriques :

$$d: \begin{cases} x = 6 - 3s \\ y = -7 + 2s \\ z = -1 + s \end{cases} s \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad d': \begin{cases} x = -3 + t \\ y = -3 \\ z = -5 + 2t \end{cases} t \in \mathbb{R}$$

Démontrez que ces droites sont sécantes et déterminez les coordonnées de leur point d'intersection.

89 LOGIQUE « Il existe », « Pour tout »

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère la droite Δ de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = 2 - t \end{cases} t \in \mathbb{R}.$$

$\mathcal{P}(A, \vec{u}, \vec{v})$ est le plan passant par $A(0; 0; 3)$ et dirigé par les vecteurs $\vec{u} = \vec{j} - \vec{k}$ et $\vec{v} = \vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$.

m est un réel et D_m est la droite passant par les points $I(1; 1; 0)$ et $J_m(3; 1 - m; m)$.

Pour chacune des affirmations suivantes, dites si elle est vraie ou fausse. Justifiez chaque réponse.

a) Il existe une unique valeur de m pour laquelle les droites Δ et D_m sont parallèles.

b) Il existe une valeur de m pour laquelle Δ et D_m sont sécantes.

c) Pour tout m de $\mathbb{R}$, Δ et D_m ont une intersection vide.

d) Pour tout m de $\mathbb{R}$, D_m coupe le plan $\mathcal{P}(A, \vec{u}, \vec{v})$.

90 La droite d passe par le point $A(0; 2; 3)$ et est dirigée par le vecteur $\vec{u}(1; 1; 1)$. La droite d' passe par les points $B(2; 0; -1)$ et $C(4; -2; 2)$.

Étudiez la position relative de ces deux droites.

91 La droite d passe par le point $A(2; 0; 5)$ et est dirigée par le vecteur $\vec{u}(2; 5; -1)$. La droite d' passe par le point $B(2; 2; -1)$ et est dirigée par le vecteur $\vec{v}(1; 2; 1)$.

Après avoir montré que ces droites sont sécantes, calculez les coordonnées de leur point d'intersection.

92 ABCDEFGH est un cube ; I, J, K sont les milieux respectifs des segments [HG], [HE] et [AB].

On choisit le repère :

(H ; $\overrightarrow{HE}$, $\overrightarrow{HG}$, $\overrightarrow{HD}$).

1. a) Vérifiez que les droites (AJ) et (CI) sont sécantes.

b) Calculez les coordonnées de leur point d'intersection.

2. Les droites (CJ) et (FK) sont-elles coplanaires ?

93 On donne les points A(2;1;0), B(0;1;1) et C(0;3;2).

1. Démontrez que les points A, B, C ne sont pas alignés.

2. Vérifiez que $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\vec{k}$ ne sont pas colinéaires.

3. La droite passant par O dirigée par $\vec{k}$ coupe le plan (ABC) au point I.

Calculez les coordonnées de I.

94 On donne les vecteurs $\vec{u}(1;3;-1)$ et $\vec{v}(-1;2;2)$.

1. Pourquoi ce couple de vecteurs peut-il diriger un plan ?

2. Déterminez une représentation paramétrique du plan $\mathcal{P}$ passant par A(3;-1;4) et dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

95 On donne les points A(4;-1;3), B(3;2;-1) et C(-1;3;2).

1. Après avoir vérifié que les points A, B, C déterminent un plan, donnez une représentation paramétrique de ce plan.

2. Les points D(-3;-2;13) et E(-5;7;11) appartiennent-ils au plan (ABC) ?

96 **1.** Démontrez que les trois points A(-1;2;5), B(1;0;-2) et C(0;2;-3) définissent un plan.

2. Déterminez une représentation paramétrique de ce plan.

3. a) Prouvez que les plans (ABC) et (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) ne sont pas parallèles.

b) Déduisez-en une représentation paramétrique de la droite Δ intersection de ces deux plans.

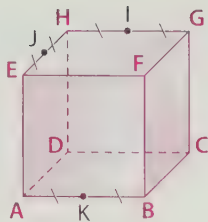
97 Le plan $\mathcal{P}$ a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -2 + t + s \\ y = -t + 2s \\ z = 1 + 3t - s \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}.$$

1. Précisez la position relative du plan $\mathcal{P}$ et du plan (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$).

2. Déterminez une représentation paramétrique du plan Π passant par A(1;3;0) et parallèle à $\mathcal{P}$.

3. Déterminez une représentation paramétrique de la droite Δ intersection de Π et du plan (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$).

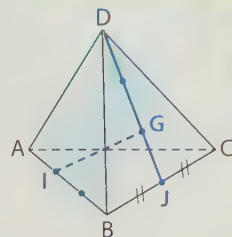


POSITION RELATIVE DE DROITES ET DE PLANS

98 ABCD est un tétraèdre. J est le milieu de [BC].

I et G sont tels que $3\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AB}$ et $3\overrightarrow{JG} = \overrightarrow{JD}$.

À l'aide d'un repère judicieusement choisi, démontrez que la droite (IG) est parallèle au plan (ACD).



99 Dans un repère (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$), on donne le point A(0;2;-1) et les vecteurs $\vec{u}(-2;3;-1)$, $\vec{v}(1;-1;2)$, $\vec{w}(1;-3;-4)$.

1. Calculez $2\vec{u} + 3\vec{v} + \vec{w}$.

2. Déduisez-en la position relative des plans (A, $\vec{u}$, $\vec{v}$) et (O, $\vec{u}$, $\vec{w}$).

100 Quelle est la position relative de la droite passant par le point A(-2;5;-3) et dirigée par le vecteur $\vec{u} = -2\vec{i} + 3\vec{j}$ avec le plan (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$) ?

101 ROC Restitution organisée des connaissances

Prérequis

Si A, B, C sont trois points non alignés, le plan (ABC) est l'ensemble des points M définis par $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ où x et y sont des réels quelconques.

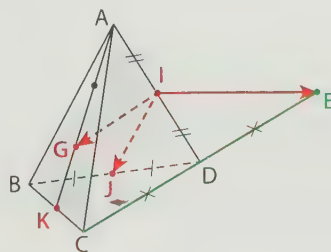
1. Démonstration

$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont trois vecteurs tels que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires. Démontrez que :
dire que « $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires » équivaut à dire que « Il existe des réels a et b tels que $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ ».

2. Application

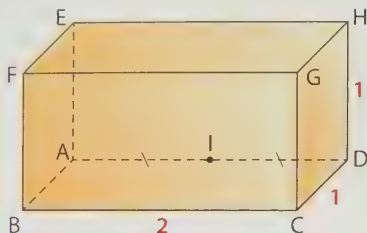
ABCD est un tétraèdre. Les points I, J, K sont les milieux respectifs de [AD], [BD] et [BC]. Le point E est le symétrique de C par rapport à D et le point G est tel que $3\overrightarrow{KG} = \overrightarrow{KA}$.

En choisissant un repère adapté, démontrez que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{IG}$ et $\overrightarrow{IE}$ sont coplanaires.



102 BAC

Une unité de longueur étant choisie dans l'espace, ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle tel que $CD = HD = 1$ et $BC = 2$. I est le milieu de l'arête [AD].



L'espace est muni du repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AE})$.

1. Quelles sont les coordonnées des points E, H, G ?
2. a) Démontrez que le volume $\mathcal{V}$ du tétraèdre GFHI est égal à $\frac{1}{3}$.
b) Démontrez que le triangle FIH est rectangle en I.
c) En exprimant le volume $\mathcal{V}$ d'une autre manière, calculez la distance du point G au plan (FIH).
3. a) Donnez une représentation paramétrique du plan (FIH) et de la droite (AG).
b) Déduisez-en les coordonnées du point K intersection du plan (FIH) et de la droite (AG).
4. On note Σ la sphère de centre G passant par K. Le plan (FIH) coupe-t-il la sphère Σ ? Quelle est la nature de l'intersection ? Justifiez.

AVEC LES TICE

103 L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les points $A(1; -1; 0)$, $B(2; 0; 1)$, $C(-1; 1; 0)$ et $D(-2; 0; 1)$. t et m sont deux réels. Les points P et Q sont définis par :

$$\overrightarrow{AP} = t\overrightarrow{AB} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{CQ} = -t\overrightarrow{CD}.$$

On note G le point tel que $(1+m)\overrightarrow{GP} + (1-m)\overrightarrow{GQ} = \vec{0}$.

A. Conjecturer avec Geospace

1. a) Calculez en fonction de t les coordonnées des points P et Q.
b) Déduisez-en, en fonction de t et m , les coordonnées du point G.

2. Créez les points A, B, C et D en utilisant leurs coordonnées. Puis créez les droites (AB) et (CD) et le solide ABCD.

- Créez les variables libres t et m :

Créer – Numérique ► Variable réelle libre

- Faites afficher ces variables :

Créer – Affichage ► Variable numérique déjà définie

- Créez les points P, Q et G.

- Faites afficher la trace du point G :

Afficher – Sélection Trace puis sélectionnez le point G et passez en mode Trace.

3. Faites varier la valeur de t en pilotant t au clavier :

Piloter – Piloter au clavier

puis sélectionnez la variable t .

Que conjecturez-vous concernant le point G ?

4. Faites varier la valeur de m en pilotant m au clavier :

Piloter – Piloter au clavier

puis sélectionnez la variable m .

Que conjecturez-vous concernant le point G ?

B. Démontrer

1. On suppose t fixé.

Démontrez que l'ensemble des points G est une droite que l'on définira par un point et un vecteur directeur.

2. On suppose m fixé.

Démontrez que l'ensemble des points G est une droite que l'on définira par un point et un vecteur directeur.

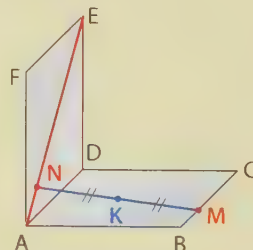
3. a) On suppose que t et m varient. Démontrez que G est un point de la surface Γ d'équation $x^2 - y^2 = 4z$.

- b) Représentez les intersections de Γ avec les plans $(O; \vec{i}, \vec{j})$, $(O; \vec{j}, \vec{k})$ puis $(O; \vec{i}, \vec{k})$.

Prendre toutes les initiatives

104 ABCD et ADEF sont deux carrés situés dans deux plans perpendiculaires. Le point M est tel que $\overrightarrow{BM} = t\overrightarrow{BC}$ et le point N est tel que $\overrightarrow{AN} = s\overrightarrow{AE}$, avec $t \in [0; 1]$ et $s \in [0; 1]$. K est le milieu de [MN].

Démontrez que K reste équidistant de A et B lorsque t et s décrivent l'intervalle $[0; 1]$.



105 Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les points $A(-2; 3; 5)$, $B(1; -1; 0)$ et $C(0; 2; -4)$. K est le symétrique de A par rapport à B. Les points L et M sont tels que $3\overrightarrow{CL} = \overrightarrow{CB}$ et $3\overrightarrow{CM} = -\overrightarrow{CA}$.

Démontrez que les droites (CK), (AL) et (BM) sont concourantes.

106 Travail en autonomie

→ Rédigez la solution de cet exercice en vous aidant du guide.



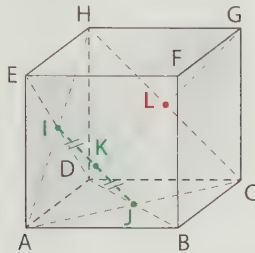
Sur le Web

Retrouvez le corrigé de cet exercice sur le site

www.transmathlycee.net/eleve/TermS

ABCDEFGH est un cube d'arête 1. L'espace est rapporté au repère orthonormé $(A ; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$.

I et J sont les centres des faces ADHE et ABCD. K est le milieu du segment $[IJ]$.



1. a) Calculez les coordonnées des points I, J et K.
- b) Démontrez que les points A, K et G ne sont pas alignés.

2. a) Démontrez que les vecteurs $\vec{AD}$, $\vec{AK}$ et $\vec{AG}$ sont coplanaires.

- b) Que peut-on en déduire pour les points A, D, K et G ?

- c) Après en avoir montré l'existence, calculez les réels a et b tels que : $k\vec{D} + a\vec{K} + b\vec{A} = \vec{O}$.

3. On note L le centre de la face DCGH.

- a) Démontrez que K est le milieu de $[AL]$.

- b) Déduisez-en que le quadrilatère AJLI est un losange.

Analyser l'énoncé

On montre ainsi l'existence du plan (AKG).

Analyser l'énoncé

On reconnaît la relation caractérisant trois vecteurs coplanaires.

Analyser l'énoncé

Cette question est indépendante de la question 2. Le calcul analytique utilise uniquement les coordonnées de I, J et L.

Guide

1. a) Les centres des faces sont les intersections des diagonales des carrés. Ainsi, I et J sont les milieux de $[AK]$ et $[AC]$; le calcul des coordonnées est simple.

- b) Prouver que ces points ne sont pas alignés revient à prouver qu'il n'existe pas de réel k tel que $\vec{AK} = k\vec{AG}$.

2. a) On calcule d'abord les coordonnées de $\vec{AD}$, $\vec{AK}$ et $\vec{AG}$. Il reste ensuite à montrer qu'il existe deux réels α et β tels que, par exemple, $\vec{AK} = \alpha\vec{AD} + \beta\vec{AG}$.

- c) D'après ce qui précède, ces trois vecteurs sont coplanaires, d'où l'existence de a et b . Les calculs effectués au 2. a) doivent vous permettre de trouver les valeurs de a et b .

3. b) On montre facilement que AJLI est un parallélogramme. Il reste à montrer par exemple que $AI = AJ$.

ZOOM sur la rédaction

Rappelez les formules qui donnent les coordonnées du milieu d'un segment.

ZOOM sur la rédaction

Pour cette question 2, énoncez clairement les théorèmes liés à la coplanarité de vecteurs.

ZOOM sur la rédaction

Rappelez ici qu'un losange est un parallélogramme qui a deux côtés consécutifs de même longueur.

107 D'après BAC

Partie A

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les points :

$A(-1; 0; 2)$, $B(3; 2; -4)$, $C(1; -4; 2)$ et $D(5; -2; 4)$.

I et K sont les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[CD]$. Le point J est tel que $\vec{BJ} = \frac{1}{4}\vec{BC}$.

1. a) Déterminez les coordonnées des points I, J et K.

b) Démontrez que ces trois points ne sont pas alignés.

2. On donne les vecteurs $\vec{u}(1; -2; 2)$ et $\vec{v}(3; -1; -3)$.

Démontrez que les plans (IJK) et $\mathcal{P}(I, \vec{u}, \vec{v})$ sont confondus.

3. a) Déterminez une représentation paramétrique de la droite (AD) .

b) Démontrez que le plan $\mathcal{P}$ et la droite (AD) sont sécants au point L de coordonnées $(\frac{1}{2}; -\frac{1}{2}; \frac{5}{2})$.

c) Vérifiez que $\vec{AL} = \frac{1}{4}\vec{AD}$.

Partie B. Généralisation

ABCD est un tétraèdre. I et K sont les milieux respectifs des arêtes $[AB]$ et $[CD]$. Les points L et J sont tels que :

$$\vec{AL} = \frac{1}{4}\vec{AD} \text{ et } \vec{BJ} = \frac{1}{4}\vec{BC}.$$

En choisissant un repère adapté, démontrez que les droites (IK) et (LJ) sont concourantes et que les points I, J, K, L sont coplanaires.

108 D'après BAC

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Pour chacune des propositions suivantes, indiquez si elle est vraie ou fausse et donnez une démonstration de la réponse choisie.

1. La droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = t + 2 \\ y = -2t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 3t - 1 \end{cases}$$

est parallèle au plan $\mathcal{P}(A, \vec{u}, \vec{v})$ avec $A(3; 0; 0)$, $\vec{u}(1; -1; 1)$ et $\vec{v}(0; 1; -2)$.

2. Les droites de représentations paramétriques respectives :

$$\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 + t \\ z = -3 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \text{ et } \begin{cases} x = 7 + 2u \\ y = 2 + 2u \\ z = -6 - u \end{cases}, u \in \mathbb{R}$$

sont sécantes.

3. On donne les points :

$A(-1; 0; 2)$, $B(1; 4; 0)$ et $C(3; -4; -2)$.

Le point $M(x; y; z)$ appartient au plan (ABC) si, et seulement si, $x + z = 1$.

109 D'après BAC

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On note d la droite passant par les points $A(1; -2; -1)$ et $B(3; -5; -2)$.

1. Démontrez qu'une représentation paramétrique de d est :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - 3t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = -1 - t \end{cases}$$

2. d' est la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2 - t' \\ y = 1 + 2t', \quad t' \in \mathbb{R} \\ z = t' \end{cases}$$

Démontrez que d et d' ne sont pas coplanaires.

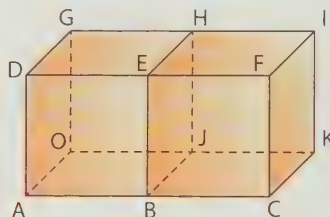
3. On considère le plan $\mathcal{P}$ passant par le point $C(0; -3; 0)$ et dirigé par les vecteurs $\vec{u}(1; -4; 0)$ et $\vec{v}(0; -5; 1)$.

a) Démontrez que le plan $\mathcal{P}$ contient la droite d .

b) Démontrez que le plan $\mathcal{P}$ et la droite d' se coupent en un point D dont on déterminera les coordonnées.

110 D'après BAC QCM

Deux cubes d'arête 1 sont disposés comme l'indique la figure ci-dessous. L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O; \vec{OA}, \vec{OJ}, \vec{OK})$.



Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Identifiez-la.

Justifiez vos réponses.

1. Le triangle GIB est :

a) rectangle b) équilatéral c) isocèle

2. Le point M tel que $2\vec{MO} - \vec{MA} + \vec{MC} = \vec{O}$ est le point :

a) K b) I c) J

3. Une représentation paramétrique de la droite (KE) est :

$$\begin{aligned} \text{a) } & \begin{cases} x = t \\ y = 2 + t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases} & \text{b) } & \begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = t \\ z = 4t \end{cases}, t \in \mathbb{R}. \\ \text{c) } & \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 1 + t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z = 1 - t \end{cases} \end{aligned}$$

4. Le volume du tétraèdre DACH est :

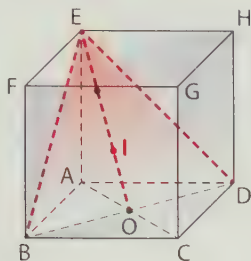
a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{6}$ c) $\frac{1}{3}$

5. La distance de C au plan (ADH) est :

a) 2 b) $\frac{1}{2}$ c) $\sqrt{2}$

111 BAC

ABCDEFGH est un cube d'arête 1. O est le centre de la face ABCD. L'espace est rapporté au repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



Partie A

- Démontrez que le triangle BDE est équilatéral.
- I est le centre de gravité du triangle BDE ($\overrightarrow{OI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OE}$). Calculez les coordonnées de I et démontrez que les points A, I et G sont alignés.

Partie B. Une droite particulière

Pour tout nombre k , M_k est le point de la droite (AG) tel que :

$$\overrightarrow{AM_k} = k\overrightarrow{AG}.$$

$\mathcal{P}_k$ est le plan passant par M_k et parallèle au plan (BDE). N_k est le point d'intersection du plan $\mathcal{P}_k$ et de la droite (BC).

- a) À l'aide de la partie A., identifiez : $M_{1/3}$; $\mathcal{P}_{1/3}$ et $N_{1/3}$.
- b) Calculez la distance $M_{1/3}N_{1/3}$.
- a) Calculez les coordonnées du point M_k .
- b) Déterminez une représentation paramétrique du plan $\mathcal{P}_k$ et de la droite (BC).
- c) Déduisez-en que N_k a pour coordonnées $(1; 3k - 1; 0)$.
3. Pour quelle valeur de k la distance M_kN_k est-elle minimale ? Calculez alors cette distance.

112 ROC Restitution organisée des connaissances

Prérequis

La droite d passant par le point A et dirigée par le vecteur $\vec{u}$ est l'ensemble des points M tels que :

$$\overrightarrow{AM} = t\vec{u}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Le plan $\mathcal{P}$ passant par A et dirigé par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires est l'ensemble des points M tels que :

$$\overrightarrow{AM} = t'\vec{u} + s\vec{v}, \quad t' \in \mathbb{R} \text{ et } s \in \mathbb{R}.$$

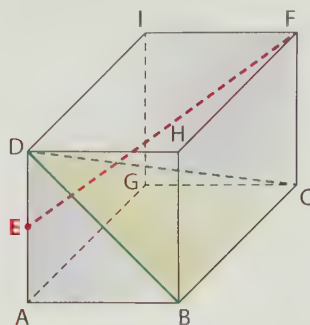
1. Démonstration

L'espace est muni d'un repère.

- Quelle est la représentation paramétrique de la droite passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ et dirigée par $\vec{u}(a; b; c)$?
- Quelle est la représentation paramétrique du plan passant par $A(x_A; y_A; z_A)$ et dirigé par $\vec{u}(a; b; c)$ et $\vec{v}(\alpha; \beta; \gamma)$ ($\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires) ?

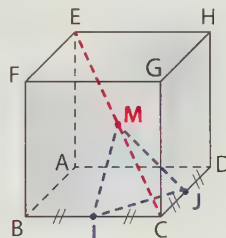
2. Application

ABCGDHFI est un parallépipède rectangle. E est le milieu de [AD]. On choisit le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$.



- Déterminez une représentation paramétrique :
 - de la droite (EF) ;
 - du plan (BCD).
- Déduisez-en les coordonnées du point K, s'il existe, intersection de la droite (EF) et du plan (BCD).

113 ABCDEFGH est un cube d'arête 1, les points I et J sont les milieux des arêtes [BC] et [CD]. M est un point quelconque du segment [EC]. On choisit le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



- Quelles sont les coordonnées des points C, E, I, J ?
- Justifiez l'existence d'un réel t appartenant à l'intervalle $[0; 1]$ tel que les coordonnées de M soient $(1-t; 1-t; t)$.
- a) Démontrez que les points E et C sont (chacun) équidistants aux points I et J.
- b) Déduisez-en que le triangle MIJ est isocèle en M.
- c) Exprimez IM^2 en fonction de t .
4. Le but de cette question est de déterminer la position de M sur le segment [CE] pour laquelle la mesure de l'angle $\widehat{IMJ}$ est maximale. On note α cette mesure en radians.
 - En admettant que $\alpha \in [0; \pi]$, démontrez que la mesure de α est maximale lorsque $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ est maximal.
 - Déduisez-en que la mesure de l'angle $\widehat{IMJ}$ est maximale lorsque la longueur IM est minimale.
 - Étudiez les variations de la fonction f définie sur $[0; 1]$ par $f(t) = 3t^2 - t + \frac{1}{4}$.
 - Déduisez-en qu'il existe un unique point M_0 de [EC] tel que la mesure α soit maximale. Quelle est cette mesure ?

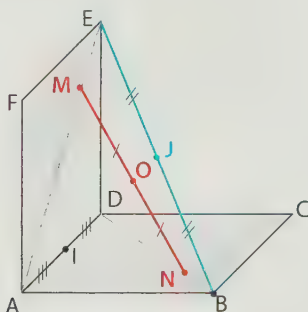
Pour aller plus loin

114 Distance minimale

Deux carrés de côté 1 sont situés dans deux plans perpendiculaires.

M est un point de $[AE]$ et N un point de $[BD]$ tels que $\overrightarrow{AM} = k\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{DN} = k\overrightarrow{DB}$ avec $k \in [0; 1]$.

On choisit le repère $(D; \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DE})$.



1. a) Calculez les coordonnées de M et de N en fonction de k , ainsi que celles du vecteur $\overrightarrow{MN}$.

b) Pour quelle valeur de k la distance MN est-elle minimale ?

2. I est le milieu de $[AD]$, J celui de $[BE]$ et O celui de $[MN]$.

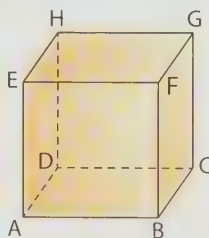
a) Démontrez que $\overrightarrow{IO} = k\overrightarrow{IJ}$.

b) Déduisez-en que O appartient à un segment fixe lorsque k décrit l'intervalle $[0; 1]$.

115 Points équidistants de trois points

ABCDEFGH est un cube d'arête 1. On choisit le repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

Le but de l'exercice est de déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points $M(x; y; z)$ équidistants de A, H et G.



1. a) Calculez AM^2 , GM^2 et HM^2 .

b) Démontrez que « $M(x; y; z)$ est équidistant de A, H et G » équivaut à :

$$(S) \begin{cases} y + z = 1 \\ x + y + z = \frac{3}{2} \end{cases}$$

2. Déduisez-en que l'ensemble $\mathcal{E}$ est la droite Δ dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 1 - t, t \in \mathbb{R} \\ z = t \end{cases}$$

3. Démontrez que la droite Δ passe par les milieux des segments $[EF]$ et $[DC]$.

116 Des points alignés

On considère un tétraèdre OABC.

1. A', B' et C' sont les points tels que :

$$\overrightarrow{OB'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OC} \text{ et } \overrightarrow{OA'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA}.$$

a) Justifiez que les droites (AC) et (A'C') sont sécantes en R, que les droites (AB) et (A'B') sont sécantes en S et que les droites (BC) et (B'C') sont sécantes en T.

b) Démontrez que les points R, S, T sont alignés.

2. Plus généralement, on considère trois réels quelconques α, β et γ .

A', B' et C' sont les points définis par :

$$\overrightarrow{OB'} = \alpha\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC'} = \beta\overrightarrow{OC} \text{ et } \overrightarrow{OA'} = \gamma\overrightarrow{OA}.$$

a) Quelles conditions doivent vérifier α, β, γ pour que les points R, S, T existent de manière unique ?

b) Prouvez que lorsque les points R, S, T existent et sont uniques, alors ils sont alignés.

117 QCM

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Identifiez-la. Justifiez vos réponses.

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A(-2; 0; -4)$, $B(0; -2; -4)$ et $C(0; a; 0)$ où a est un réel.

1. Une équation paramétrique de la droite (AB) est :

- a) $\begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = -3t - 3, t \in \mathbb{R}. \\ z = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = -2t - 1, t \in \mathbb{R}. \\ z = -4 \end{cases}$
- c) $\begin{cases} x = t + 2 \\ y = t + 4, t \in \mathbb{R}. \\ z = -4 \end{cases}$

2. On note $\mathcal{P}$ le plan médiateur du segment $[AB]$: c'est le plan perpendiculaire au segment $[AB]$ et passant par son milieu.

a) $\mathcal{P}$ passe par O, le centre du repère.

b) $\mathcal{P}$ passe par le point de coordonnées $(0; 1; 0)$.

c) Aucune des deux affirmations précédentes n'est correcte.

3. La longueur AB est égale à :

- a) $2\sqrt{2}$. b) $4\sqrt{2}$. c) $6\sqrt{2}$.

4. Le triangle ABC est rectangle en A si :

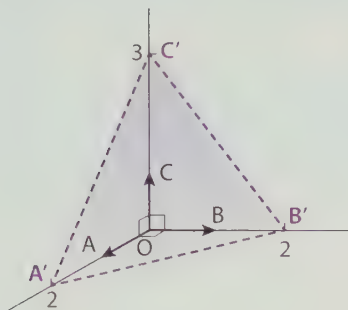
- a) $a = 4$. b) $a = 2$. c) $a = 8$.

5. L'intersection de la sphère de centre A et de rayon $\sqrt{3}$ et du plan $\mathcal{P}$ est :

- a) vide. b) un point. c) un cercle de rayon 1.

118 $(O; \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ est un repère orthonormé.

On donne les points $A'(2; 0; 0)$, $B'(0; 2; 0)$ et $C'(0; 0; 3)$.



1. Justifiez qu'une représentation paramétrique du plan $(A'B'C')$ est :

$$\begin{cases} x = 2 - t - 2s \\ y = t \\ z = 3s \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R}.$$

2. Donnez une représentation paramétrique des droites (AC) et (BC) .

3. La droite (AC) coupe le plan $(A'B'C')$ en K et la droite (BC) coupe le plan $(A'B'C')$ en L . Calculez les coordonnées des points K et L .

4. a) Démontrez que les droites (AB) , $(A'B')$ et (KL) sont parallèles.

b) Caractérisez alors l'intersection des plans (ABC) et $(A'B'C')$ à l'aide des points précédemment définis.

SEGMENTS ET DEMI-DROITES

119 Segments et demi-droites

L'espace est rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. A a pour coordonnées $(x_0; y_0; z_0)$. B est un point distinct de A . On pose $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ avec $\vec{u}$ de coordonnées $(a; b; c)$.

1. Justifiez l'équivalence suivante :

$M(x; y; z) \in [AB]$ équivaut à :

$$(S) \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt, t \in [0; 1] \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

2. Justifiez l'affirmation suivante : « Pour traduire l'appartenance de M à la demi-droite $[AB)$, il suffit de remplacer $t \in [0; 1]$ par $t \in [0; +\infty[$ dans le système (S) . »

120 L'espace est rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Trouvez la nature géométrique de chacun des ensembles suivants.

$$\bullet \mathcal{E}_1 : \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = 3t \\ z = t + 1 \end{cases} \quad t \in [0; 1]$$

$$\bullet \mathcal{E}_2 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + t \\ z = -1 + 2t \end{cases} \quad t \in [-1; 0]$$

$$\bullet \mathcal{E}_3 : \begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = t + 2 \\ z = t - 2 \end{cases} \quad t \in [0; +\infty[$$

121 L'espace est rapporté à un repère $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On donne les points $A(-2; 1; 0)$ et $B(2; 3; 1)$.

Donnez une représentation paramétrique de chacun des ensembles suivants.

a) La droite (AB) .

b) Le segment $[AB]$.

c) La demi-droite $[AB)$.

d) La demi-droite $[BA)$.

122 Déterminez, dans chaque cas, la nature de l'ensemble géométrique $\mathcal{E}$ défini par la représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + f(t) \\ y = -2 + f(t) \\ z = -1 + f(t) \end{cases}$$

a) $f(t) = \cos t, t \in \mathbb{R}$.

b) $f(t) = -\frac{1}{4}t^2 + \frac{5}{2}t - \frac{21}{4}, t \in \mathbb{R}$.

c) $f(t) = 1 + \frac{1}{t}, t \in \mathbb{R}^*$.

123 Vrai ou faux

Pour chacune des affirmations, dites si elle est vraie ou fausse. Justifiez chaque réponse.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les points $A(1; 2; 3)$, $B(-1; 4; 3)$, $C(-2; 1; 3)$ et $D(5; 4; -3)$.

J est le milieu de $[BC]$, K est le point tel que D est le milieu de $[CK]$.

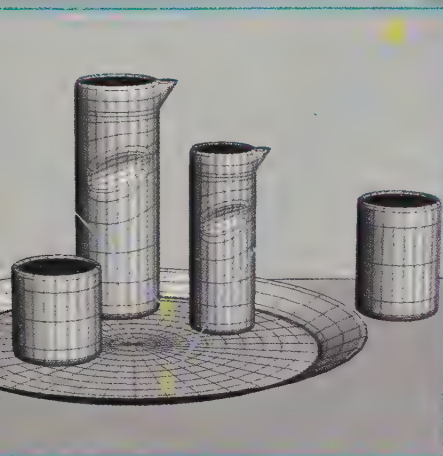
a) A, B, C ne sont pas alignés.

b) Dans le triangle ABC , les médianes se coupent au point de coordonnées $(-2; 7; 9)$.

c) Le point K a pour coordonnées $(12; 7; -9)$.

d) La droite (KJ) coupe le plan $(O; \vec{j}, \vec{k})$ au point $E(0; 3; -\frac{8}{3})$.

Produit scalaire dans l'espace



D'un siècle
à un autre

Les images de synthèse utilisent des structures polygonales (à gauche) auxquelles les artistes numériques donnent un aspect réaliste (à droite) en utilisant des techniques de « rendu ». Elles calculent notamment, en de nombreux points, le produit scalaire entre le vecteur de vue et la normale à la surface. Le concept de produit scalaire doit beaucoup à la physique. Le physicien écossais James Clerk Maxwell a rendu incontournable l'usage des vecteurs.



En savoir plus sur
James Clerk Maxwell

→ Chercheurs d'hier, p. 333

Rappels

& Exercices-tests

Compléments
numériques

Les expressions du produit scalaire dans le plan

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls, d'angle géométrique associé θ .

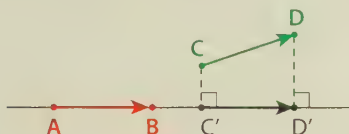
$$\bullet \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} [\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2].$$

$$\bullet \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\theta).$$

• Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées $(x; y)$ et $(x'; y')$ dans un repère orthonormé, alors :

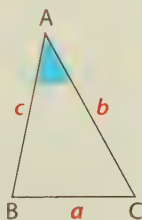
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'.$$

• Si $\vec{C'D'}$ est le projeté orthogonal de $\vec{CD}$ sur la droite (AB) , alors $\vec{AB} \cdot \vec{CD} = \vec{AB} \cdot \vec{C'D'}$.



Théorème de Pythagore « généralisé »

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} \text{ ou } BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\vec{AB} \cdot \vec{AC}$$



Orthogonalité

• « $\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux » équivaut à :
« $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ ».

• Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées $(x; y)$ et $(x'; y')$ dans un repère orthonormé, alors :

« $\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux » équivaut à :
« $xx' + yy' = 0$ ».

Vecteur normal

Dans un repère orthonormé :

• Si la droite d a une équation de la forme $ax + by + c = 0$ ($a \neq 0$ ou $b \neq 0$), alors $\vec{u}(-b; a)$ est un **vecteur directeur** de d et $\vec{n}(a; b)$ est un **vecteur normal** à d .

• Si un vecteur non nul $\vec{n}$ de coordonnées $(a; b)$ est normal à une droite d , alors d a une équation de la forme $ax + by + c = 0$.

Pour les exercices 1 à 6

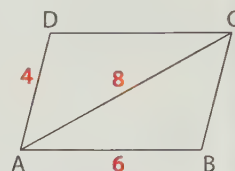
Dites si les propositions sont vraies ou fausses. Vous justifierez vos réponses.

1 Si $|\vec{u} \cdot \vec{v}| = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$, alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

2 ABCD est un parallélogramme.

a) $\vec{AB} \cdot \vec{AD} = 6$.

b) $BD = 2\sqrt{10}$.

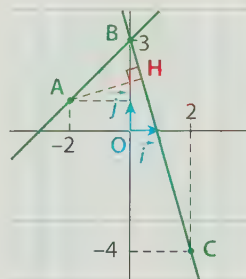


3 A, B, C et H sont représentés dans un repère orthonormé.

a) $\vec{CA} \cdot \vec{CB} = 32$.

b) $CH = \frac{16\sqrt{2}}{5}$.

c) La mesure de $\widehat{ACB}$ arrondie au degré est 23° .

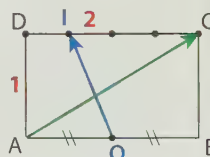


4 Dire que $(\vec{u} + \vec{v})$ et $(\vec{u} - \vec{v})$ sont orthogonaux équivaut à dire que $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\|$.

5 ABCD est un rectangle ;
DC = 2, AD = 1, 4DI = DC.

O est le milieu de [AB].

Les vecteurs $\vec{AC}$ et $\vec{OI}$ sont orthogonaux.

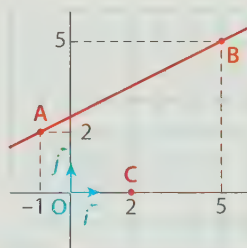


6 a) La médiatrice de [AB] a pour équation :

$$4x + 2y - 10 = 0.$$

b) La parallèle à (AB) passant par C a pour équation
 $y = \frac{1}{2}x - 1$.

c) La droite d'équation $y = -2x + 5$ est une droite de vecteur normal $\vec{AB}$.



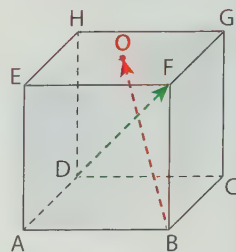
Corrigés sur www.transmathly.com

Activité 1

LE PRODUIT SCALAIRE : DU PLAN À L'ESPACE

ABCDEFGH est un cube d'arête 1, O est le centre de la face EFGH.

On note $\vec{u} = \overrightarrow{BO}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{DF}$.



1 a) Pourquoi les points D, B, F, O sont-ils coplanaires ?

- Dessinez en vraie grandeur le rectangle DBFH et placez le point O.
- b) Dans cette question, on se propose de calculer, dans le plan DBFH, le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{v}$.
- Justifiez que $\overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{DH} + \overrightarrow{BO} \cdot \overrightarrow{HF} = DH^2 - \overrightarrow{OF} \cdot \overrightarrow{HF}$.
- Déduisez-en que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

2 Dans cette partie, on munit l'espace du repère orthonormé $(D; \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$.

a) Quelles sont les coordonnées de F, B, H dans ce repère ?

Déduisez-en celles de O.

b) Calculez les coordonnées $(x; y; z)$ de $\overrightarrow{DF}$ et celles $(x'; y'; z')$ de $\overrightarrow{BO}$.

Calculez $xx' + yy' + zz'$.

- En vous rapportant à l'expression analytique du produit scalaire dans le plan, que peut représenter dans l'espace l'expression $xx' + yy' + zz'$?

Que traduit alors la nullité de cette expression ?

c) Démontrez que la droite (AC) est perpendiculaire au plan (DBF) et déduisez-en que les droites (AC) et (BH) sont orthogonales.

- Calculez les coordonnées $(x; y; z)$ de $\overrightarrow{AC}$ et $(x'; y'; z')$ de $\overrightarrow{BH}$.

Calculez $xx' + yy' + zz'$. Quelle conclusion en tirez-vous ?

Conclusion

On verra dans le cours que, dans un repère orthonormé, si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives $(x; y; z)$ et $(x'; y'; z')$, alors le nombre $xx' + yy' + zz'$ est la forme analytique du produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ dans l'espace.

Activité 2

ANGLE GÉOMÉTRIQUE DE DEUX VECTEURS DE L'ESPACE

ABCDEFGH est un cube d'arête 1.

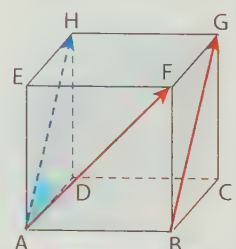
$(D; \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$ un repère orthonormé de l'espace.

Dans le plan, on sait définir l'angle géométrique associé à deux vecteurs. On se pose donc la question suivante :

Qu'appelle-t-on angle géométrique associé à deux vecteurs de l'espace ?

Pour répondre, on retiendra la méthode suivante :

Pour représenter l'angle géométrique associé à deux vecteurs de l'espace, on choisit des représentants de ces vecteurs situés dans un même plan.



Animation

1 On note α la mesure en radian de l'angle géométrique associé aux vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{BG}$.

a) Pourquoi cet angle est-il celui associé aux vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AH}$?

b) Quelle est la nature du triangle AFH ? Déduisez-en la valeur de α .

2 a) Dans le repère choisi, quelles sont les coordonnées des points A, F, B, G ?
Déduisez-en les coordonnées $(x; y; z)$ et $(x'; y'; z')$ des vecteurs $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{BG}$.

b) Calculez $xx' + yy' + zz'$, puis AF et BG.

• Calculez $\frac{xx' + yy' + zz'}{AF \times BG}$. Interprétez ce résultat.

• Quel lien faites-vous avec le produit scalaire dans le plan ?

3 Application

On note β la mesure en radian de l'angle géométrique associé aux vecteurs $\overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{AD}$.

a) Pourquoi le problème se ramène-t-il à chercher la mesure de l'angle $\widehat{CBH}$?

b) Quelle est la nature du triangle CBH ?

• Démontrez que $\cos(\beta) = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Quelle est la mesure β arrondie au dixième ?

• Retrouvez $\cos(\beta)$ en vous aidant de la question 2 a).

Problèmes ouverts

Révisitez ces exercices après le chapitre...

... Sont-ils plus faciles ?

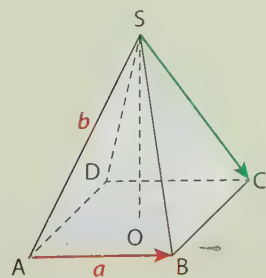
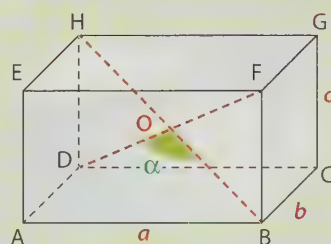
1 ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle. O est l'intersection des diagonales [HB] et [DF].

On note α la mesure de l'angle $\widehat{DOB}$.

a) Démontrez que $\cos(\alpha) = \frac{c^2 - a^2 - b^2}{c^2 + a^2 + b^2}$.

b) Déduisez-en que dans un cube d'arête a , la mesure α de l'angle $\widehat{DOB}$ est indépendante de la longueur de l'arête.

Donnez une valeur approchée de α à un degré près.



2 SABCD est une pyramide régulière. O est le centre du carré ABCD. $AB = a$ et $AS = b$.

Quelle relation doivent vérifier a et b pour que l'angle géométrique associé aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{SC}$ ait pour mesure $\frac{\pi}{4}$ (en radian) ?

1

Produit scalaire dans l'espace

1.1 Définition

Définition 1

Dans l'espace, une unité de longueur étant choisie, le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est le nombre noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} [\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2]$$

Deux vecteurs de l'espace sont nécessairement coplanaires.

En effet, quels que soient les trois points A, B, C tels que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$, il existe **au moins un** plan $\mathcal{P}$ contenant les points A, B, C.

L'unité de longueur dans le plan étant celle choisie dans l'espace, la définition du produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ de l'espace coïncide avec celle du produit scalaire de ces mêmes vecteurs dans le plan $\mathcal{P}$.

Il en résulte que les expressions du produit scalaire établies dans le plan (voir les rappels page 319) sont encore valables dans l'espace.

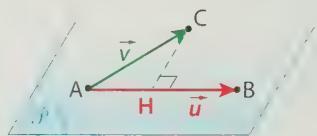
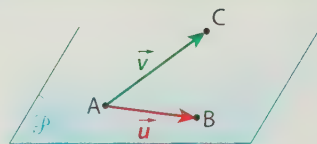
- Si α est la mesure de l'angle géométrique associé à $\vec{u}$ et $\vec{v}$, alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\alpha) ;$$

Conséquence : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AB}\|^2 = AB^2$ (1).

- Si dans un plan $\mathcal{P}$, H est le projeté orthogonal de C sur (AB) alors :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH} .$$



1.2 Expression analytique du produit scalaire

Théorème 1

Si dans un repère orthonormé $(x ; y ; z)$ et $(x' ; y' ; z')$ sont les coordonnées respectives de $\vec{u}$ et $\vec{v}$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$

Démonstration. D'après la conséquence (1) : $\|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2$, $\|\vec{v}\|^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$ et $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 = (x + x')^2 + (y + y')^2 + (z + z')^2$.

Donc, d'après la définition 1 :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} [(x + x')^2 + (y + y')^2 + (z + z')^2 - x^2 - y^2 - z^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2]$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} [x^2 + x'^2 + 2xx' + y^2 + y'^2 + 2yy' + z^2 + z'^2 + 2zz' - x^2 - y^2 - z^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2]$$

soit

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz' .$$

1.3 Règles de calcul

Les règles de calcul sont identiques à celles utilisées dans le plan. (Les démonstrations se font à l'aide du théorème 1.)

Théorème 2

$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont trois vecteurs de l'espace. a et b désignent deux nombres.

$$1. \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

$$2. \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

$$3. (a\vec{u}) \cdot (b\vec{v}) = (ab)(\vec{u} \cdot \vec{v}) .$$

2

L'orthogonalité dans l'espace

2.1 Vecteurs orthogonaux

Définition 2

Dans l'espace, dire que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont **orthogonaux** signifie que si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{CD}$, alors les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

► **Convention.** Le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs.

Théorème 3

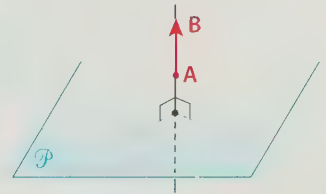
1. Dire que « deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux » équivaut à dire que « $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ ».
2. Donc dans un repère orthonormé, « les vecteurs $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$ sont orthogonaux » équivaut à « $xx' + yy' + zz' = 0$ ».

2.2 Vecteur normal à un plan

Définition 3

Dire que le vecteur $\overrightarrow{AB}$ non nul est **normal au plan** $\mathcal{P}$ signifie que la droite (AB) est perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$.

► **Remarque.** Tout vecteur $\vec{n}$ non nul colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ est aussi un vecteur normal à $\mathcal{P}$.



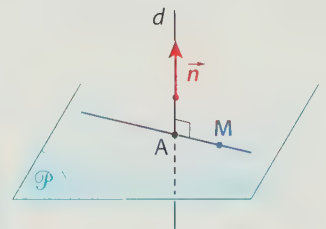
2.3 Orthogonalité d'une droite et d'un plan

d est une droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{n}$.

Le plan $\mathcal{P}$ perpendiculaire à d en A est l'ensemble des points M tels que le vecteur $\overrightarrow{AM}$ est orthogonal à $\vec{n}$.

Le vecteur $\vec{n}$ est donc normal à $\mathcal{P}$. Il en résulte que :

Le plan $\mathcal{P}$ qui passe par A et de vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$.



On peut désormais démontrer le théorème 8 du chapitre 9. Rappelons son énoncé.

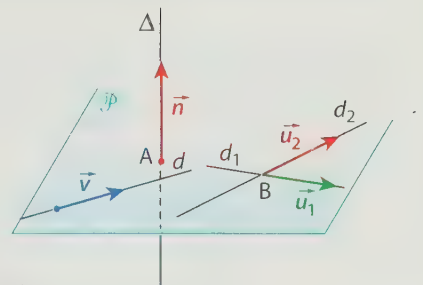
Pour qu'une droite Δ et un plan $\mathcal{P}$ soient perpendiculaires, il suffit que Δ soit orthogonale à deux droites sécantes de $\mathcal{P}$.

☐ **Démonstration exigible.** Les droites d_1 et d_2 sécantes en B ont respectivement pour vecteurs directeurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$. Ces vecteurs ne sont ni nuls ni colinéaires. Donc $\mathcal{P}$ est défini par A, $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$, ou B, $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$. La droite Δ est définie par A et le vecteur $\vec{n}$.

Par hypothèse, Δ est orthogonale à d_1 et d_2 donc $\vec{n} \cdot \vec{u}_1 = \vec{n} \cdot \vec{u}_2 = 0$.

Notons d une droite de $\mathcal{P}$ de vecteur directeur $\vec{v}$. Il existe deux nombres a et b tels que $\vec{v} = a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2$ donc $\vec{n} \cdot \vec{v} = \vec{n} \cdot (a\vec{u}_1 + b\vec{u}_2) = \vec{n} \cdot a\vec{u}_1 + \vec{n} \cdot b\vec{u}_2 = a(\vec{n} \cdot \vec{u}_1) + b(\vec{n} \cdot \vec{u}_2)$.

Il en résulte que $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$ donc Δ est orthogonale à une droite quelconque de $\mathcal{P}$.



ROC

→ Exercice 48

Animation

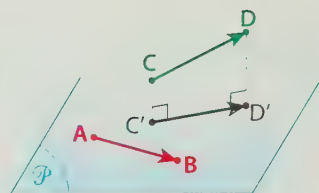
2.4 Projection orthogonale sur un plan

On ne change pas le produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ en remplaçant l'un d'entre eux (par exemple $\overrightarrow{CD}$) par le vecteur $\overrightarrow{C'D'}$ tel que C' et D' sont les projetés orthogonaux de C et D sur un plan $\mathcal{P}$ contenant la droite (AB) .

En effet :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot (\overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'D'} + \overrightarrow{D'D}) = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'} + \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{D'D}.$$

$$\text{Or } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DD'} = 0 \text{ donc } \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{C'D'}.$$



2.5 Équation cartésienne d'un plan

Théorème 4 Dans un repère orthonormé :

1. Si $\vec{n}(a; b; c)$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$, alors $\mathcal{P}$ a une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$.
2. Réciproquement, si a, b, c sont trois nombres donnés non tous nuls, l'ensemble des points M tel que $ax + by + cz + d = 0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$.



ROC
→ Exercice 92
« Le jour
du BAC ».

Démonstration exigible

1. Par définition, $\vec{n}(a; b; c)$ normal à $\mathcal{P}$ est non nul. Choisissons un point $A(x_0; y_0; z_0)$ de $\mathcal{P}$. Le plan $\mathcal{P}$ est l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$, soit :

$$(x - x_0)a + (y - y_0)b + (z - z_0)c = 0 \text{ (voir 2.3).}$$

$$\text{Donc } ax + by + cz - ax_0 - by_0 - cz_0 = 0.$$

$$\text{En posant } d = -ax_0 - by_0 - cz_0, \text{ on obtient } ax + by + cz + d = 0.$$

Ainsi, $ax + by + cz + d = 0$ est une équation de $\mathcal{P}$.

2. Réciproquement, notons $\mathcal{E}$ l'ensemble des points M tels que $ax + by + cz + d = 0$. Les nombres a, b, c sont non tous nuls ; supposons donc $a \neq 0$.

Le point $A\left(-\frac{d}{a}; 0; 0\right)$ est un point de $\mathcal{E}$.

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = a\left(x + \frac{d}{a}\right) + by + cz = ax + by + cz + d.$$

Il en résulte que « M appartient à $\mathcal{E}$ » équivaut à « $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$ ».

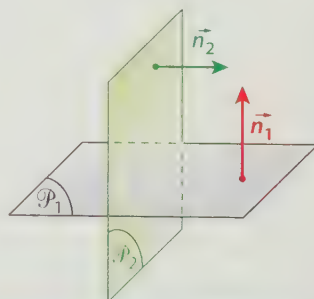
Donc $\mathcal{E}$ est le plan $\mathcal{P}$ passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Animation

2.6 Plans perpendiculaires

Dire que $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont perpendiculaires signifie qu'une droite perpendiculaire à l'un et une droite perpendiculaire à l'autre sont orthogonales.

Cela revient à dire que si $\vec{n}_1$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}_1$ et $\vec{n}_2$ un vecteur normal à $\mathcal{P}_2$, alors $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont deux vecteurs orthogonaux. Ainsi :



Dire que « $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont perpendiculaires » équivaut à dire que « $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$ ».

OBJECTIF 1 Calculer un produit scalaire

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de l'espace, d'angle géométrique associé θ .

Pour calculer $\vec{u} \cdot \vec{v}$, on peut utiliser les expressions suivantes :

$$1. \vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} [\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2]$$

$$2. \vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\theta).$$

3. Dans un repère orthonormé, si $\vec{u} = (x; y; z)$ et $\vec{v} = (x'; y'; z')$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$.

4. Si dans un plan $\mathcal{P}$ contenant les points A, B, C, le point H est le projeté orthogonal de C sur (AB), alors :

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AH}.$$

EXERCICE RÉSOLU A Calculer et exploiter un produit scalaire

ABCDEFGH est un cube d'arête 1. O est le centre de la face EFGH. On se place dans le repère orthonormé (A ; $\vec{AB}$, $\vec{AD}$, $\vec{AE}$).

1. Justifiez la suite d'égalités : $\vec{AO} \cdot \vec{BF} = \vec{AO} \cdot \vec{AE} = \vec{AE}^2 = 1$.

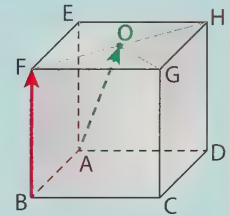
2. a) Quelles sont les coordonnées du point O dans le repère choisi ?

b) Calculez AO.

3. On note θ la mesure de l'angle géométrique associé aux vecteurs $\vec{BF}$ et $\vec{AO}$.

a) Démontrez que $\cos(\theta) = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

b) Déduisez-en la valeur de θ à un degré près.

**► Méthode**

• La présence du cube nous incite à rechercher une projection orthogonale et à utiliser l'expression 4 du produit scalaire.

2. a) On applique la formule de calcul des coordonnées du point d'un segment.

b) On applique la formule :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

valable dans le repère choisi car il est orthonormé.

3. a) La présence de $\cos(\theta)$ nous incite à utiliser l'expression 2 du produit scalaire.

b) On conclut en utilisant la calculatrice.

► Solution

1. Les vecteurs $\vec{BF}$ et $\vec{AE}$ sont égaux donc $\vec{AO} \cdot \vec{BF} = \vec{AO} \cdot \vec{AE}$.

• De plus, la droite (AE) est perpendiculaire au plan (EGH). Elle est donc perpendiculaire à toutes les droites de ce plan, et en particulier à la droite (EO).

Ainsi E est le projeté orthogonal de O sur cette droite et $\vec{AO} \cdot \vec{AE} = \vec{AE} \cdot \vec{AE} = \vec{AE}^2 = 1$.

2. a) O est le milieu du segment [EG] avec $E(0; 0; 1)$ et $G(1; 1; 1)$. D'où $O\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1\right)$.

b) D'où $\vec{AO}\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 1\right)$ et $AO = \sqrt{\frac{3}{2}}$.

3. a) On sait que $\vec{AO} \cdot \vec{AE} = 1$; $AO = \sqrt{\frac{3}{2}}$; $AE = 1$. Or, $\vec{AO} \cdot \vec{AE} = AO \times AE \times \cos(\theta)$ donc $\cos(\theta) = \sqrt{\frac{2}{3}}$.

b) Donc θ a pour mesure 35° à un degré près.

► Mise en pratique. Pour ces exercices, on se place dans un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$).

1 On donne les points A(2 ; -1 ; 3) B(1 ; 0 ; -1) et C(0 ; -1 ; 2). On note θ la mesure de l'angle géométrique associé aux vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$.

1. Démontrez que $\cos(\theta) = \frac{\sqrt{10}}{5}$.

2. Déduisez-en la valeur de θ au dixième de degré près.

2 On donne les points A(-1 ; 1 ; 2), B(0 ; 1 ; 0), C(2 ; 0 ; 2).

1. Calculez les produits scalaires :

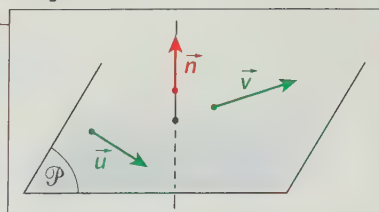
$$\vec{AB} \cdot \vec{AC}, \vec{BA} \cdot \vec{BC}, \vec{CA} \cdot \vec{CB}.$$

2. Déterminez une valeur approchée à un degré près des mesures des angles du triangle ABC.

OBJECTIF 2

Prouver qu'un vecteur est normal à un plan

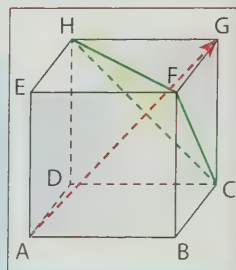
Pour prouver qu'un vecteur $\vec{n}$ non nul est normal à un plan $\mathcal{P}$, il suffit de prouver qu'il est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de $\mathcal{P}$.



EXERCICE RÉSOLU B Démontrer avec ou sans repère

ABCDEFGH est un cube d'arête 1. Le but de l'exercice est de démontrer que le vecteur $\vec{AG}$ est normal au plan (CFH) de deux manières :

- a) sans utiliser de repère ; b) à l'aide du repère orthonormé (A ; $\vec{AB}$, $\vec{AD}$, $\vec{AE}$).



Méthode

- a) On démontre que le vecteur $\vec{AG}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (CFH) : $\vec{HF}$ et $\vec{FC}$.

- On conclut.

- b) On détermine les coordonnées de F, G, H, C dans le repère puis celles de $\vec{AG}$, $\vec{HF}$ et $\vec{FC}$.

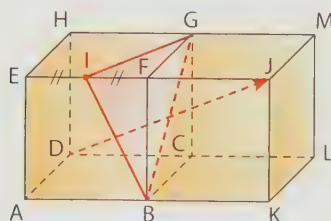
- On calcule les produits scalaires $\vec{AG} \cdot \vec{HF}$ et $\vec{AG} \cdot \vec{FC}$.

Solution

- ➔ a) Le point A se projette orthogonalement en E sur le plan (EFG) donc $\vec{AG} \cdot \vec{HF} = \vec{EG} \cdot \vec{HF} = 0$ car $[\vec{EG}]$ et $[\vec{HF}]$ sont les diagonales du carré EFGH.
- A se projette orthogonalement en B sur le plan (BCG) donc $\vec{AG} \cdot \vec{FC} = \vec{BG} \cdot \vec{FC} = 0$.
- ➔ • Donc $\vec{AG}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (CFH) donc $\vec{AG}$ est un vecteur normal au plan (CFH).
- ➔ b) Déterminons les coordonnées de F, G, H, C : $F(1; 0; 1)$, $G(1; 1; 1)$, $H(0; 1; 1)$ et $C(1; 1; 0)$.
D'où $\vec{AG}(1; 1; 1)$, $\vec{HF}(1; -1; 0)$ et $\vec{FC}(0; 1; -1)$.
- ➔ • $\vec{AG} \cdot \vec{HF} = 0$ et $\vec{AG} \cdot \vec{FC} = 0$, d'où le résultat.

Mise en pratique

- 3 Deux cubes sont disposés comme l'indique la figure ci-dessous. I est le milieu de [EF]. Le but de l'exercice est de démontrer que $\vec{DJ}$ est un vecteur normal au plan (BIG).



1. Démontrez que $\vec{BI} \cdot \vec{AJ} = 0$.

2. a) Démontrez que :

$$\vec{BI} \cdot \vec{DJ} = \vec{BI} \cdot \vec{AJ} \text{ et } \vec{GI} \cdot \vec{DJ} = \vec{GI} \cdot \vec{HJ}.$$

- b) Déduisez de la question précédente que $\vec{DJ}$ est un vecteur normal au plan (BIG).

- 4 L'espace est rapporté à un repère orthonormé (O ; $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$). On donne les points $A(2; 0; 2)$, $M(3; -1; 3)$, et les vecteurs $\vec{u}(2; 0; -2)$ et $\vec{v}(-1; -2; -1)$.

- Démontrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.
- Démontrer que le vecteur $\vec{AM}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$ défini par A et les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

- 5 Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(1; 0; 1)$, $B(0; -1; 2)$ et $C(2; 5; 2)$.

- Vérifiez que ces points ne sont pas alignés.
- Prouvez que le vecteur $\vec{n}(3; -1; 2)$ est normal au plan (ABC).

- Si le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(a; b; c)$ (a, b, c non tous nuls) est normal au plan $\mathcal{P}$, alors $\mathcal{P}$ a une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$.
- Si a, b, c sont trois nombres non tous nuls, l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que $ax + by + cz + d = 0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$.

EXERCICE RESOLU C

Cas d'un plan défini par un point et un vecteur normal

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Dans chacun des cas suivants, déterminez une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.

a) Le plan $\mathcal{P}$ est défini par $A(1; 0; 3)$ et a pour vecteur normal $\vec{n}(1; 2; -2)$.

b) Le plan $\mathcal{P}$ est le plan parallèle au plan $\mathcal{Q}$ d'équation $2x - y + 3z - 1 = 0$ passant par $B(1; -2; 3)$.

Méthode

a) On connaît un vecteur $\vec{n}(a; b; c)$ normal à $\mathcal{P}$ donc $\mathcal{P}$ a une équation de la forme $ax + by + cz + d = 0$.

• Pour trouver la valeur de d , on écrit que A est un point de $\mathcal{P}$.

• On conclut.

b) Lorsque deux plans sont parallèles, un vecteur normal à l'un est normal à l'autre.

• On traduit le fait que le plan $\mathcal{P}$ passe par B .

• On conclut.

Solution

a) $\vec{n}$ a pour coordonnées $(1; 2; -2)$ donc $\mathcal{P}$ a une équation de la forme $x + 2y - 2z + d = 0$.

• Les coordonnées de A vérifient l'équation $x + 2y - 2z + d = 0$ donc $1 - 6 + d = 0$ soit $d = 5$.

• $\mathcal{P}$ a pour équation $x + 2y - 2z + 5 = 0$.

b) Un vecteur normal au plan $\mathcal{Q}$ est le vecteur $\vec{n}(2; -1; 3)$. $\vec{n}$ est également normal à $\mathcal{P}$ donc $\mathcal{P}$ a une équation de la forme :

$$2x - y + 3z + d = 0.$$

• $B(1; -2; 3)$ est un point de $\mathcal{P}$ donc $2 + 2 + 9 + d = 0$ soit $d = -13$.

• $\mathcal{P}$ a pour équation : $2x - y + 3z - 13 = 0$.

Mise en pratique

Pour les exercices 6 à 10

Les coordonnées sont données dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

6 Le point A pour coordonnées $(2; 0; 1)$.

Trouvez une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par A et de vecteur normal $\vec{OA}$.

7 Les points A et B ont respectivement pour coordonnées $(1; 1; -1)$ et $(2; -2; 2)$.

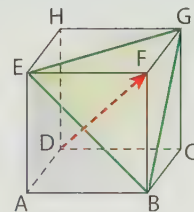
Trouvez une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par A et de vecteur normal $\vec{AB}$.

8 Les points A et B ont respectivement pour coordonnées $(3; -2; 2)$ et $(6; 1; 5)$.

Prouvez que le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + y + z - 3 = 0$ passe par le point A en étant perpendiculaire à la droite (AB) .

9 ABCDEFGH est un cube d'arête 1.

$(D; \vec{DA}, \vec{DC}, \vec{DH})$ un repère orthonormé.



1. Calculez les produits scalaires $\vec{DF} \cdot \vec{EG}$ et $\vec{DF} \cdot \vec{BG}$.

2. a) Déduisez-en un vecteur normal au plan (EBG) .

b) Trouvez une équation cartésienne de ce plan.

10 Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, $\mathcal{P}$ est le plan d'équation $2x + y - 3z + 1 = 0$.

Déterminez un point A et deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires permettant de définir le plan $\mathcal{P}$.

EXERCICE RÉSOLU D Cas d'un plan défini par trois points

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Les points A, B, C ont respectivement pour coordonnées $(1; -2; 4)$, $(-2; -6; 5)$ et $(-4; 0; -3)$.

1. Démontrez que les points A, B, C ne sont pas alignés. Ils définissent donc un plan $\mathcal{P}$.

2. a) Trouvez un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.

b) Déduisez-en une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$.

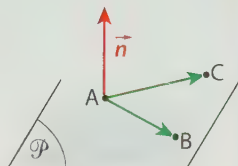
► Méthode

1. On démontre que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, par exemple, ne sont pas colinéaires.

• On vérifie que les coordonnées ne sont pas proportionnelles.

• On conclut.

2. a) Dire que $\vec{n}(x; y; z)$ est normal au plan $\mathcal{P}$ équivaut à dire que $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ et $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.



• On choisit un vecteur $\vec{n}$ en prenant par exemple $z = 1$.

b) On est ramené à chercher l'équation d'un plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$ (voir l'exercice résolu D).

• Il est conseillé de vérifier que les coordonnées de B et C vérifient bien l'équation obtenue.

► Solution

► 1. $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(-3; -4; 1)$ et $\overrightarrow{AC}(-5; 2; -7)$.

► • $(-3; -4; 1)$ et $(-5; 2; -7)$ ne sont pas proportionnelles donc il n'existe pas de réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k \overrightarrow{AB}$.

► • Les points A, B, C ne sont pas alignés.

► 2. a) Notons $\vec{n}(x; y; z)$ le vecteur cherché.

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = -3x - 4y + z = 0 \quad (1).$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = -5x + 2y - 7z = 0 \quad (2).$$

Le système (1) et (2) équivaut à :

$$\begin{cases} -3x - 4y + z = 0 \\ -10x + 4y - 14z = 0 \end{cases}$$

$$\text{soit à } \begin{cases} -13x - 13z = 0 \\ -5x + 2y - 7z = 0 \end{cases} \text{ donc à } \begin{cases} x = -z \\ y = z \end{cases}.$$

► • Les coordonnées de $\vec{n}$ sont de la forme $(-z; z; z)$. On choisit $z = 1$ donc $\vec{n}(-1; 1; 1)$.

► b) Le vecteur $\vec{n}(-1; 1; 1)$ est normal à $\mathcal{P}$ donc $\mathcal{P}$ a une équation de la forme :

$$-x + y + z + d = 0.$$

Or $A \in \mathcal{P}$ donc $-1 - 2 + 4 + d = 0$
d'où $d = -1$.

► • $\mathcal{P}$ a pour équation $-x + y + z - 1 = 0$.

► Mise en pratique

11 Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(-1; 0; 2)$, $B(1; 4; 0)$ et $C(3; -4; -2)$.

1. Démontrez que A, B, C définissent un plan $\mathcal{P}$.

2. a) Démontrez que le vecteur $\vec{n}(1; 0; 1)$ est normal au plan $\mathcal{P}$.

b) Déduisez-en une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.

12 ABCDEFGH est un cube d'arête 1. I est le milieu de $[AB]$, J celui de $[HG]$ et K le centre de la face BCGF. On choisit le repère orthonormé $(D; \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$.

Démontrez que le vecteur $\overrightarrow{EK}$ est normal au plan (DIJ). Déduisez-en une équation cartésienne du plan (DIJ).

13 Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les points $A(1; 1; 0)$, $B(1; 2; 1)$ et $C(3; -1; 2)$.

1. Démontrez que le point A et les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ définissent un plan $\mathcal{P}$.

2. a) Démontrez que si $\vec{n}(x; y; z)$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$, alors ses coordonnées vérifient le système $\begin{cases} y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases}$

b) Déduisez-en une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.

14 Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les points $A(1; -2; 3)$ et $B(-1; 1; 0)$.

Trouvez une équation du plan $\mathcal{P}$ passant par O et perpendiculaire à la droite (AB).

- $\mathcal{P}$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}$ et d est une droite de vecteur directeur $\vec{u}$.
Si $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$, alors la droite d est strictement parallèle à $\mathcal{P}$ ou incluse dans $\mathcal{P}$.
Si $\vec{n} \cdot \vec{u} \neq 0$, alors la droite d coupe le plan $\mathcal{P}$ en un point I .
- $\mathcal{P}_1$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}_1$ et $\mathcal{P}_2$ un plan de vecteur normal $\vec{n}_2$.
Si $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ sont colinéaires, alors les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont strictement parallèles ou confondus.
Si $\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ ne sont pas colinéaires, alors les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants suivant une droite Δ .

EXERCICE RÉSOLU E Étudier l'intersection d'une droite et d'un plan

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. La droite d a pour représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 \\ z = 3 - 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \mathcal{P} \text{ a pour équation cartésienne } x + y + z - 1 = 0.$$

Démontrez que la droite d coupe $\mathcal{P}$ en un point I , puis calculez les coordonnées de I .

► Méthode

- Pour démontrer l'existence de I , il suffit de prouver qu'un vecteur $\vec{u}$ directeur de d n'est pas orthogonal à un vecteur normal à $\mathcal{P}$.
- Pour trouver les coordonnées $(x; y; z)$ de I , on traduit le fait que I appartient à $\mathcal{P}$ et à d .
- On détermine la valeur de t , puis on en déduit les coordonnées de I .
- On conclut.

► Solution

- $\vec{u}(1; 0; -2)$ est un vecteur directeur de d et $\vec{n}(1; 1; 1)$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$.
 $\vec{u} \cdot \vec{n} = 1 - 2 = -1 \neq 0$; donc d coupe $\mathcal{P}$ en un point I .
- Dire que $I(x; y; z)$ appartient à $\mathcal{P}$ et d signifie que les coordonnées $(x; y; z)$ vérifient le système :

$$\begin{cases} x + y + z - 1 = 0 \\ x = -1 + t \\ y = 2 \\ z = 3 - 2t \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} -1 + t + 2 + 3 - 2t - 1 = 0 \\ x = -1 + t \\ y = 2 \\ z = 3 - 2t \end{cases}$$
 soit $t = 3$; donc $x = 2, y = 2, z = -3$.
- I a pour coordonnées $(2; 2; -3)$.

► **Mise en pratique.** Pour tous les exercices, l'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

15 Démontrez que le plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x - y + z - 8 = 0$ et la droite d passant par $A(3; -1; 0)$ et $B(1; 1; -1)$ se coupent en un point I dont vous calculerez les coordonnées.

16 Le plan $\mathcal{P}$ a pour équation :

$$3x + 2y - z - 6 = 0.$$

Quelles sont les coordonnées des points d'intersection de $\mathcal{P}$ avec les axes du repère ?

17 Étudiez la position relative de la droite d d'équation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -8 + 2t \\ y = 7 - t \\ z = 6 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

et du plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x + 3y - z + 4 = 0$.

18 1. Démontrez que les points $A(2; 1; 3)$, $B(-3; -1; 7)$ et $C(3; 2; 4)$ définissent un plan $\mathcal{P}$.

2. d est la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -7 + 2t \\ y = -3t \\ z = 4 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

a) Démontrez que d est orthogonale à $\mathcal{P}$.

b) Quelles sont les coordonnées du point H commun à d et $\mathcal{P}$?

19 Le plan $\mathcal{P}$ passant par $A(1; 2; 1)$ est dirigé par les vecteurs $\vec{u} = 2\vec{j} + \vec{k}$ et $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

La droite d passe par les points $B(-1; 0; 1)$ et $C(3; 2; 4)$.

Quelle est la position de d par rapport à $\mathcal{P}$?

EXERCICE RESOLU F Étudier la position relative de deux plans

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. Démontrez que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ d'équations respectives $x + y - z + 2 = 0$ et $3x + y + z + 4 = 0$ sont sécants.
2. Déterminez une représentation paramétrique de leur droite d'intersection Δ .

► Méthode

1. Pour démontrer que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants, on peut démontrer que deux vecteurs normaux à $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ ne sont pas colinéaires.

2. On traduit l'appartenance de $M(x; y; z)$ à Δ en écrivant que les coordonnées de M vérifient les équations des deux plans.

• On remplace z par $x + y + 2$ dans la deuxième équation.

• On cherche une représentation paramétrique de Δ . Or y et z s'expriment en fonction de x , qui prend toutes les valeurs de $\mathbb{R}$.

• On conclut.

► Solution

➔ 1. $\vec{n}_1(1; 1; -1)$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}_1$;
 $\vec{n}_2(3; 1; 1)$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}_2$.

Les coordonnées de ces deux vecteurs ne sont pas proportionnelles. Il en résulte que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants suivant une droite Δ .

2. Les coordonnées $(x; y; z)$ d'un point M quelconque de Δ vérifient le système :

$$(S): \begin{cases} x + y - z + 2 = 0 \\ 3x + y + z + 4 = 0 \end{cases}$$

➔ • (S) équivaut à (S') :

$$\begin{cases} x + y - z + 2 = 0 \\ 4x + 2y + 6 = 0 \end{cases}$$

➔ • Soit à $\begin{cases} y = -2x - 3 \\ z = -x - 1 \end{cases}$

x prend toutes les valeurs dans $\mathbb{R}$; on pose donc $x = t$ ($t \in \mathbb{R}$). Il en résulte que $y = -2t - 3$ et $z = -t - 1$.

➔ • La droite Δ a donc pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = t \\ y = -2t - 3, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = -t - 1 \end{cases}$$

► Mise en pratique

Pour tous les exercices, l'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

20 Démontrez que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ d'équations respectives $x + 2y - z + 1 = 0$ et $2x + 3y - z + 2 = 0$ sont sécants suivant une droite Δ dont on donnera une représentation paramétrique.

21 Reprenez les questions de l'exercice 20 avec les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ d'équations respectives $x - y - z = 0$ et $2x - y + 2z = 0$.

22 La proposition suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifiez votre réponse.

« Les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ d'équations respectives $x + 2y - z - 1 = 0$ et $2x - y + z - 4 = 0$ sont sécants suivant la droite Δ passant par $A(1; 2; 4)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(-1; 3; 5)$. »

23 Les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ ont pour équations respectives $x + y - 3z + 3 = 0$ et $x - 2y + 6z = 0$.

1. Démontrez que $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants suivant une droite d de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = -1 + 3t, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = t \end{cases}$$

2. Démontrez que la droite d et le plan Π d'équation $2x - y + 2z + 2 = 0$ sont sécants et déterminez les coordonnées de leur point d'intersection.

24 Questions sur le cours

Complétez les propositions suivantes.

On se place dans un repère orthonormé.

a) Si α est une mesure de l'angle géométrique associé à $\vec{u}$ et $\vec{v}$, alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = \dots$.

b) On donne $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$.

Dire que $xx' + yy' + zz' = 0$ équivaut à dire que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont $\dots$.

c) Si $\vec{n}(a; b; c)$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$, alors $\mathcal{P}$ a une équation de la forme $\dots$.

d) $\vec{n}$ est un vecteur non nul et A est un point. L'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ est $\dots$.

25 Vrai ou faux

Vrai ou faux ? Justifiez votre réponse.

On se place dans un repère orthonormé.

a) La droite d passant par $A(2; 0; -1)$ et dirigée par $\vec{u}(1; -2; 3)$ est parallèle au plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + 2y + z - 3 = 0$.

b) La droite d a pour représentation paramétrique $x = 1 + 4t; y = 2 + 2t; z = 3 - 2t \quad (t \in \mathbb{R})$.

Le plan $\mathcal{P}$ passant par $A(2; -1; 3)$ et orthogonal à d a pour équation $2x + y - 3 = 0$.

c) On donne les points $A(1; 2; -4)$, $B(-3; 4; 1)$, $C(-11; 8; 11)$ et $D(-3; 4; 1)$.

Les droites (AB) et (CD) ne sont pas coplanaires.

26 QCM Une seule réponse exacte

Pour chaque affirmation, une seule réponse est exacte. Identifiez-la en justifiant votre réponse.

Pour les questions 1 et 2, ABCDEFGH est un cube d'arête 1. $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ est un repère orthonormé. I et J sont les milieux de (EF) et (FG).

Le point L est tel que $4\overrightarrow{BL} = \overrightarrow{BA}$.

1. Le plan $\mathcal{P}$ d'équation $4x - 4y + 3z - 3 = 0$ est :

a) le plan (GLE) **b)** le plan (LEJ) **c)** le plan (GFA)

2. Le plan parallèle au plan $\mathcal{P}$ passant par I coupe la droite (FB) au point de coordonnées :

a) $(0; 0; \frac{1}{4})$ **b)** $(1; 0; \frac{1}{5})$ **c)** $(1; 0; \frac{1}{3})$

Pour les questions 3 et 4, le plan $\mathcal{P}$ a pour équation $x + 2y - 3z - 1 = 0$ dans un repère orthonormé.

3. Une équation d'un plan $\mathcal{Q}$ perpendiculaire à $\mathcal{P}$ est :

a) $x + 2y - 3z + 3 = 0$

b) $4x - 5y - 2z + 3 = 0$

c) $3x - 2y + z + 1 = 0$

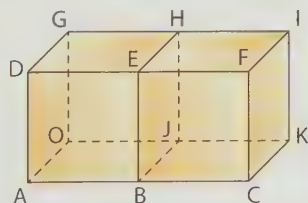
4. Le point $A(-1; -3; 2)$ se projette orthogonalement sur $\mathcal{P}$ au point de coordonnées :

a) $(0; -1; 1)$ **b)** $(0; -1; -1)$ **c)** $(-2; 5; 5)$

27 QCM Au moins une réponse exacte

Pour chaque affirmation, plusieurs réponses peuvent être exactes. Identifiez-les en justifiant vos réponses.

Pour les questions 1 et 2, on considère les deux cubes d'arête 1 ci-contre.



1. Si α est une mesure de l'angle géométrique associé aux vecteurs $\overrightarrow{AH}$ et $\overrightarrow{FC}$, alors $\cos(\alpha)$ est égal à :

a) $\frac{1}{\sqrt{3}}$

b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $-\frac{1}{\sqrt{3}}$

2. a) Le triangle GBI est rectangle isocèle.

b) La droite (EJ) est perpendiculaire au plan (GBI).

c) Le tétraèdre EGBI a pour volume $\frac{1}{3}$.

3. Dans un repère orthonormé, on donne les points $A(2; 1; 0)$ et $C(6; -7; -4)$. $\mathcal{P}$ est le plan d'équation $4x + y + 5z + 3 = 0$ et d est la droite de représentation paramétrique :

$x = 1 + 2t; y = -2 - 3t; z = -1 - t \quad (t \in \mathbb{R})$.

a) Le plan $\mathcal{P}$ contient d . **b)** $C \in \mathcal{P}$. **c)** $C \in d$.



Apprendre à chercher

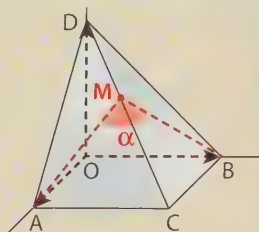
28 Valeur maximale d'un angle

$(O; \vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OD})$ est un repère orthonormé.

C a pour coordonnées $(1; 1; 0)$. M est un point de $[DC]$ tel que $\vec{DM} = t\vec{DC}$ avec $t \in [0; 1]$.

Objectif Trouver la valeur de t pour laquelle la mesure de l'angle $\widehat{AMB}$ est maximale.

1. Les coordonnées des sommets de la pyramide ABCD sont faciles à calculer. La relation $\vec{DM} = t\vec{DC}$ permet alors de calculer simplement les coordonnées de M.



a) Calculer $\widehat{AMB}$ lorsque M est en C, puis lorsque M est en D.

b) Calculez les coordonnées des points A, B, D.

c) Déduisez-en que M a pour coordonnées $(t; t; 1-t)$.

2. Le produit scalaire permet de calculer $\cos(\alpha)$ où α est une mesure de l'angle $\widehat{AMB}$.

a) Démontrez que $\cos(\alpha) = \frac{\vec{MA} \cdot \vec{MB}}{MA^2}$.

b) Calculer $\vec{MA} \cdot \vec{MB}$ et MA^2 en fonction de t .

c) Déduisez-en que $\cos(\alpha) = \frac{3t^2 - 4t + 1}{3t^2 - 4t + 2}$.

3. Afin de trouver la valeur de t pour laquelle α est maximal, on est amené à étudier, sur l'intervalle $[0; 1]$, les variations de la fonction f définie par $f(t) = \frac{3t^2 - 4t + 1}{3t^2 - 4t + 2}$.

a) Étudiez les variations de f et dressez le tableau de variation.

b) Pourquoi la mesure de α est-elle maximale lorsque la valeur de t est minimale ?

c) Précisez cette valeur de t .

d) Déduisez-en α .

29 Plans perpendiculaires

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les points $A(1; -1; 2)$ et $B(2; 0; 4)$, et le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x - y + 3z - 4 = 0$.

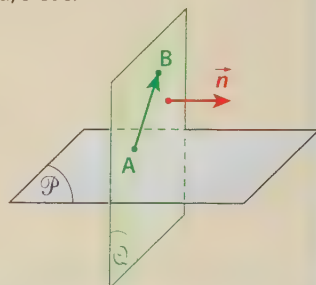
Objectif Trouver une équation du plan $\mathcal{Q}$ perpendiculaire à $\mathcal{P}$ et passant par A et B.

On admet l'existence et l'unicité de $\mathcal{Q}$.

1. Si on connaît un vecteur $\vec{n}(a; b; c)$ normal à $\mathcal{Q}$, on sait trouver une équation de ce plan passant par A (ou B).

Demandons-nous quelles hypothèses peuvent permettre de trouver $\vec{n}$ c'est-à-dire a, b et c .

Par hypothèse, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ sont perpendiculaires, donc $\vec{n}$ est orthogonal à un vecteur $\vec{u}$ normal à $\mathcal{P}$. De plus, $\vec{n}$ est orthogonal à $\vec{AB}$.



a) Déterminez les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$ normal au plan $\mathcal{P}$.

b) Pourquoi $\vec{AB}$ et $\vec{u}$ ne sont-ils pas colinéaires ? (Voir la remarque ci-dessous.)

c) Justifiez que $\vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ et $\vec{n} \cdot \vec{AB} = 0$. Déduisez-en que $a - b + 3c = 0$ et $a + b + 2c = 0$.

2. Les deux égalités précédentes ne permettent pas de trouver des valeurs uniques pour a, b, c . Ceci est normal car il y a une infinité de vecteurs normaux à un plan. Mais notre objectif est de trouver un triplet. Il suffit donc de choisir par exemple une valeur particulière pour c .

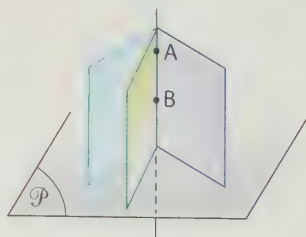
a) Calculez a et b en fonction de c .

b) Vérifiez que $\vec{n}(-5; 1; 2)$ est normal à $\mathcal{Q}$.

c) Déduisez-en une équation de $\mathcal{Q}$.

Remarque. L'unicité de $\mathcal{Q}$ est due au fait que la droite (AB) n'est pas perpendiculaire à $\mathcal{P}$.

Si la droite (AB) est perpendiculaire à $\mathcal{P}$, on trouve une infinité de plans $\mathcal{Q}$.



Narration de recherche

→ L'objectif n'est pas seulement de résoudre le problème posé : vous devez aussi noter les différentes idées même lorsqu'elles n'ont pas permis de trouver la réponse. Expliquez pourquoi vous avez changé de méthode et ce qui vous a fait avancer, etc.

30 Tour de contrôle de trafic aérien

On se propose d'étudier une modélisation d'une tour de contrôle de trafic aérien chargée de surveiller deux routes aériennes représentées par deux droites de l'espace.

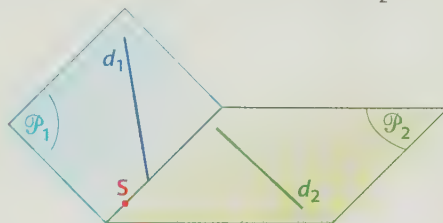
On rapporte l'espace à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ (l'unité est le kilomètre).

Le plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$ représente le sol. Les deux unités « aériennes » à contrôler sont représentées par deux droites d_1 et d_2 de représentations paramétriques :

$$d_1 : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 9 + 3t \\ z = 2 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R}) \quad d_2 : \begin{cases} x = \frac{1}{2} + 2s \\ y = 4 + s \\ z = 4 - s \end{cases} \quad (s \in \mathbb{R})$$

On peut installer au sommet S de la tour de contrôle de coordonnées $(3; 4; 0, 1)$ un appareil de surveillance qui émet un rayon représenté par la droite Δ .

On note $\mathcal{P}_1$ le plan défini par le point S et la droite d_1 et $\mathcal{P}_2$ le plan défini par le point S et la droite d_2 .



Que pensez-vous des affirmations suivantes ? Justifiez vos réponses.

« Les deux routes aériennes ne sont pas coplanaires. L'une coupe $\mathcal{P}_1$ et l'autre $\mathcal{P}_2$. Il est donc possible de choisir la direction du rayon Δ pour qu'il coupe à la fois d_1 et d_2 ». Trouvez une représentation paramétrique de Δ .

Chercheurs d'hier

Eux aussi, ils ont
cherché avant de trouver !

→ Voici quelques mathématiciens importants qui ont travaillé dans le domaine de la Géométrie.

Jérôme Cardan
→ Chap. 8

Johannes Kepler
→ Chap. 9

Hermann Günther Grassmann
→ Chap. 10

RENAISSANCE

ÉPOQUE MODERNE

ÉPOQUE CONTEMPORAINE

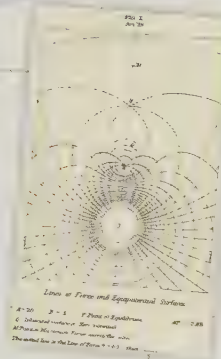


James Clerk Maxwell
(1831-1879)

C'est pour ses recherches en électromagnétisme, qui ouvrirent la voie vers les résultats de la relativité restreinte, que Maxwell est reconnu comme l'un des savants les plus importants du XIX^e siècle. Einstein décrit ses travaux comme les « plus profonds et fructueux que la physique ait connu depuis le temps de Newton ».

C'est grâce à une approche vectorielle que Maxwell élabore les équations différentielles décrivant la nature des champs électromagnétiques dans l'espace et le temps

(publiées dans son *Traité d'électricité et de magnétisme*, 1873 – extrait ci-contre).



▲
Lignes de champ
et lignes
équipotentielles.



Sur le Web

cct.cnes.fr/cct13/infos/maxwell.htm
serge.mehl.free.fr/anx/ProdScal.html

Travaux dirigés

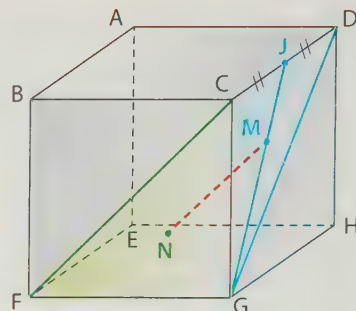
Communiquer ses résultats
Exercer son esprit critique

31 Comparer trois démonstrations

ABCDEFGH est un cube d'arête 1.

Les points M et N sont les centres de gravité respectifs des triangles CGD et FGC.

OBJECTIF Comparer trois démonstrations de la proposition :
« La droite (MN) est perpendiculaire aux droites (BG) et (CH). »



MISE EN ŒUVRE

Chaque élève choisit l'une des trois manières de démontrer la proposition. Puis chaque démonstration est présentée à l'oral au reste de la classe. Quelle est la manière qui paraît la plus efficace ?

A Manière 1 : avec un repère orthonormé

On choisit un repère orthonormé afin d'obtenir pour M et N des coordonnées simples.

On peut prendre par exemple le repère orthonormé $(G ; \overrightarrow{GF} ; \overrightarrow{GH} ; \overrightarrow{GC})$.

1. a) Quelles sont les coordonnées des points F, C et D et du milieu J de l'arête [CD] ?

b) Déduisez-en les coordonnées des points M et N.

2. Démontrez que la droite (MN) est perpendiculaire aux droites (GB) et (CH).

Note

Le choix de ce repère lié au cube est possible car les normes de ces trois vecteurs sont égales à 1.

B Manière 2 : avec une étude géométrique

On note O le centre de la face BCGF.

1. Démontrez que (OJ) est parallèle à (MN) (*théorème de Thalès*) et à (FD) (*théorème des milieux*).

2. a) Démontrez que (GB) est perpendiculaire au plan (FCD) et (CH) au plan (FGD).

b) Déduisez-en que (FD) est perpendiculaire à (GB) et à (CH). Concluez.

C Manière 3 : avec l'outil vectoriel

1. a) Démontrez que : $3\overrightarrow{GM} = 2\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GH}$ et $3\overrightarrow{GN} = \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{GC}$.

b) Déduisez-en que : $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{GF} - \overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GH})$.

2. Calculez $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{CH}$.

3. Concluez.

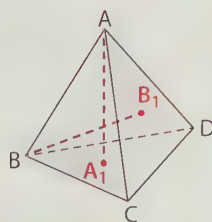
D Quelle manière vous paraît la plus efficace ?

TP 31 Caractérisation d'un tétraèdre orthocentrique

ABCD est un tétraèdre, A_1 étant le projeté orthogonal de A sur le plan (BCD). On dit que $[AA_1]$ est la **hauteur** du tétraèdre issue de A.

Par définition, un tétraèdre est **orthocentrique** lorsque quatre hauteurs sont concourantes en H. Le point H est alors appelé l'**orthocentre du tétraèdre**.

OBJECTIF Caractériser les tétraèdres orthocentriques par une proposition (P).
(P) est alors une **condition nécessaire et suffisante** pour qu'un tétraèdre soit orthocentrique.



LOGIQUE

Voir le Vocabulaire de la logique
→ p. 464
Condition nécessaire et suffisante.

A Explorer la situation avec Geospace

Tout d'abord, explorons la situation autour de deux hauteurs d'un tétraèdre, celle issue de A et celle issue de B. Posons-nous la question : quelle est la **condition nécessaire et suffisante** pour que ces deux hauteurs soient concourantes ?

1. **a)** Créez les points $A(0; 0; 3)$, $B(0; 0; -1)$, $C(3; 0; 2)$ et $D(0; 2; 0)$ puis créez le tétraèdre ABCD (nommez-le p) :

Créer – Solide ► Polyèdre ► Défini par ses sommets

Créez les droites passant par A et B respectivement perpendiculaires aux plans (BCD) et (ACD) :

Créer – Ligne ► Droite(s) ► Perpendiculaire à un plan

Ce sont les hauteurs issues de A et B. Nommez-les d_1 et d_2 .

b) Créez l'intersection des deux droites :

Créer – Point ► Intersection 2 droites

Nommez H ce point. Quelle boîte de dialogue apparaît ?

c) Modifiez les coordonnées de C en $(3; 0; 2)$:

Divers – Modifier/Dupliquer

Que constatez-vous ? Quelle est la position relative de (AB) et (CD) ?

2. Supposons que (AA_1) et (BB_1) se coupent en H.

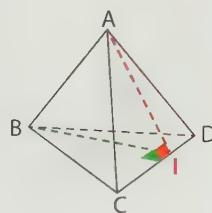
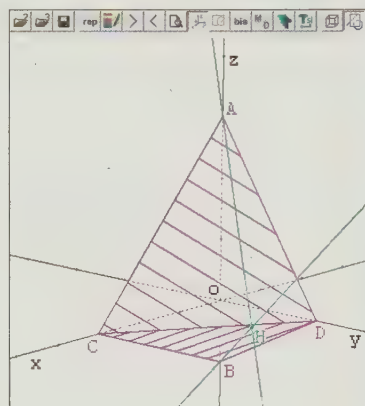
Démontrez que les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

3. Supposons que (AB) et (CD) sont deux droites orthogonales.

a) Démontrez que A et B se projettent en un même point I sur [CD].

b) Déduisez-en que les hauteurs $[AA_1]$ et $[BB_1]$ se coupent en H, orthocentre du triangle BIA.

4. Énoncez alors cette condition nécessaire et suffisante.



B Trouver la caractérisation

1. Démontrez que si les quatre hauteurs sont concourantes, alors les couples d'arêtes opposés sont orthogonaux.

2. Supposons que la droite (AB) est orthogonale à la droite (CD) et que la droite (BC) est orthogonale à la droite (AD). Justifiez que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$. Puis déduisez-en que $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.

3. Notons H l'intersection des hauteurs issues de A et B, et démontrons que les hauteurs issues de C et D passent par H.

a) Justifiez la suite d'égalités : $\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AH}) \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.

b) Démontrez de même que $\overrightarrow{CH} \cdot \overrightarrow{AD} = 0$ et déduisez que la droite (CH) est orthogonale au plan (BAD).

4. On démontre de manière analogue que (DH) est orthogonale au plan (ABC).

Déduisez-en la proposition (P) qui caractérise un tétraèdre orthocentrique.

33 Intersection de trois plans**A Positions relatives de trois plans**

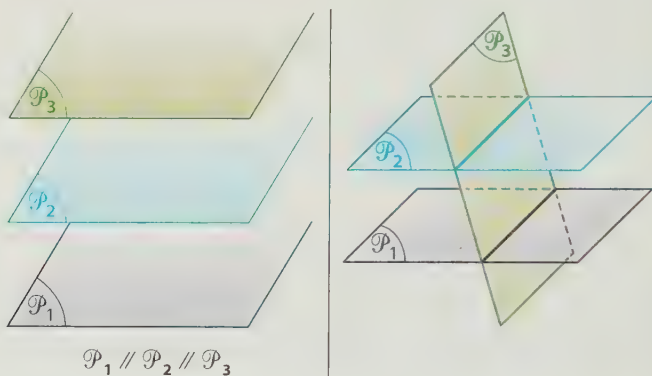
$\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3$ sont trois plans distincts deux à deux. Pour étudier leur intersection, une idée consiste à examiner d'abord l'intersection $\mathcal{C}$ de deux d'entre eux, $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ par exemple. Et si cette intersection est non vide, d'étudier l'intersection de $\mathcal{C}$ et du troisième plan.

Les différents cas se résument ci-dessous.

→ Si $\mathcal{P}_1 \parallel \mathcal{P}_2$

Les trois plans n'ont aucun point commun.

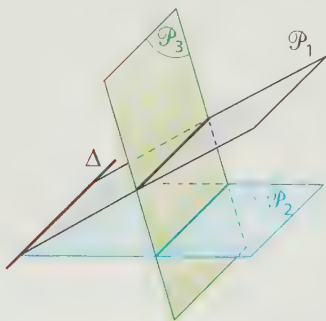
Animation



→ Si $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2 = \Delta$

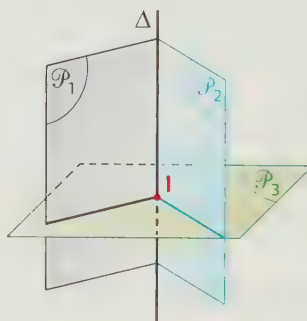
Si $\Delta \parallel \mathcal{P}_3$

Les trois plans n'ont aucun point commun.



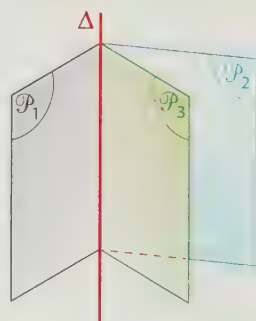
Si $\Delta \cap \mathcal{P}_3 = \{I\}$

Les trois plans ont un seul point commun, le point I.



Si Δ incluse dans $\mathcal{P}_3$

Les trois plans ont une droite en commun, la droite Δ .

**B Application**

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ ont pour équations respectives :

$$x + y - 2z - 1 = 0 \quad \text{et} \quad 3x + y - z - 1 = 0.$$

1. Déterminez une représentation paramétrique de la droite Δ , intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

2. a) $\mathcal{P}_3$ est le plan d'équation $x - y + 3z + 1 = 0$.

Démontrez que la droite Δ est commune aux trois plans $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3$.

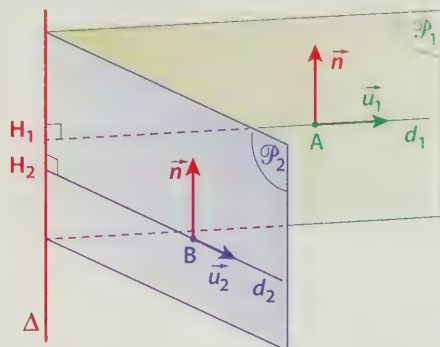
b) $\mathcal{P}_3$ est le plan d'équation $x - y + 3z - 3 = 0$. Démontrez que les plans $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3$ n'ont aucun point commun.

c) $\mathcal{P}_3$ est le plan d'équation $2x - y + 3z - 1 = 0$. Démontrez que les plans $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3$ ont un seul point commun.

34 Perpendiculaire commune à deux droites

d_1 et d_2 sont deux droites non coplanaires définies respectivement par $(A, \vec{u}_1)$ et $(B, \vec{u}_2)$.

On se propose de démontrer qu'il existe une unique droite Δ qui coupe d_1 et d_2 perpendiculairement. On dit que Δ est la **perpendiculaire commune** à d_1 et d_2 .



1. Pourquoi $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ ne sont-ils pas colinéaires ?

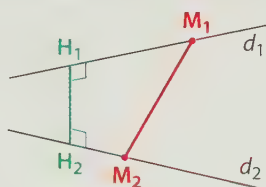
2. On note $\vec{n}$ un vecteur non nul orthogonal à $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$. $\mathcal{P}_1$ est le plan défini par $(A, \vec{n}, \vec{u}_1)$ et $\mathcal{P}_2$ est le plan défini par $(B, \vec{n}, \vec{u}_2)$.

a) Démontrez que $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants suivant une droite Δ .

b) Démontrez que Δ est perpendiculaire en H_1 à d_1 et en H_2 à d_2 .

c) Déduisez-en que Δ est la seule droite sécante à d_1 et d_2 , et perpendiculaire à ces deux droites. Δ est donc la perpendiculaire commune à d_1 et d_2 .

Remarque. H_1H_2 est la plus courte distance entre deux points quelconques M_1 et M_2 de ces deux droites.

**3. Une application**

$(O; \vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OD})$ est un repère orthonormé.

Le point C a pour coordonnées $(1; 1; 0)$.

Le but de cette partie est de déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ , perpendiculaire commune aux droites (AD) et (OC) .

a) On cherche un vecteur $\vec{n}$ orthogonal à $\vec{u}_1 = \vec{AD}$ et $\vec{u}_2 = \vec{OC}$.

Démontrez que le vecteur $\vec{n}(1; -1; 1)$ est bien orthogonal à $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.

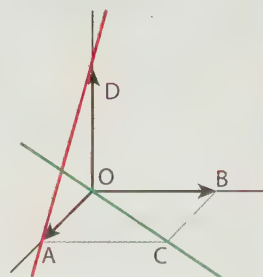
b) $\mathcal{P}_1$ est le plan $(A, \vec{n}, \vec{u}_1)$ et $\mathcal{P}_2$ le plan $(O, \vec{n}, \vec{u}_2)$.

• Trouvez un vecteur normal à $\mathcal{P}_1$ et un vecteur normal à $\mathcal{P}_2$.

• Déduisez-en une équation cartésienne de $\mathcal{P}_1$ ainsi que de $\mathcal{P}_2$.

c) En utilisant les résultats de la question 2. b), démontrez que la droite Δ a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = \frac{2}{3} - t \\ y = t \\ z = \frac{1}{3} - t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$



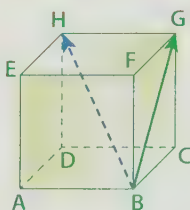
Entraînement

DE TÊTE

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

35 ABCDEFGH est un cube d'arête 1.

Calculez $\vec{BG} \cdot \vec{BH}$.



36 Le vecteur $\vec{u}(1; -2; 4)$ est-il orthogonal au vecteur $\vec{v}(2; 3; 1)$?

37 Le point $A(1; 8; -3)$ appartient-il à la droite d de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = t - 1 \\ y = 2 + 3t \\ z = -1 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} ?$$

38 Le point $B(2; -1; 1)$ est-il le projeté orthogonal de $A(1; 1; 1)$ sur le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x - 2y - 4 = 0$?

39 Le vecteur $\vec{u}\left(\frac{1}{3}; -\frac{1}{2}; 1\right)$ est-il un vecteur directeur de la droite d de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 3 - 3t \\ z = -1 + 6t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} ?$$

40 On donne les points $A(-2; 0; 1)$ et $B(1; 0; 0)$ ainsi que le vecteur $\vec{u}(1; 1; 1)$. Trouvez :

- une représentation paramétrique de la droite Δ passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$;
- une équation du plan $\mathcal{P}$ perpendiculaire à Δ et passant par B.

LE PRODUIT SCALAIRE DANS L'ESPACE

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

41 On donne les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées respectives $(1; \sqrt{3}; 0)$ et $(0; -\sqrt{3}; 1)$.

1. Calculez $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

2. Quelle est, à un degré près, la mesure de l'angle géométrique associé à $\vec{u}$ et $\vec{v}$?

42 On donne $A(2; -1; 3)$, $B(1; 0; -1)$ et $C(0; -1; 2)$. Quelle est, à un degré près, la mesure de $\widehat{BAC}$?

43 $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs tels que :

$$\|\vec{u}\| = 5; \|\vec{v}\| = 3 \text{ et } \vec{u} \cdot \vec{v} = -4.$$

Calculez :

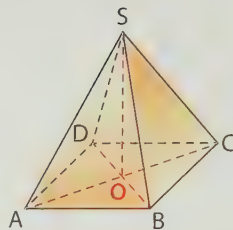
a) $2\vec{u} \cdot (\vec{v} - 3\vec{u})$

b) $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - 3\vec{v})$.

44 SABCD est une pyramide régulière, ABCD est un carré de centre O. Toutes les arêtes ont pour longueur a .

Calculez en fonction de a :

- $\vec{SA} \cdot \vec{SB}$
- $\vec{SA} \cdot \vec{SC}$
- $\vec{AS} \cdot \vec{AC}$

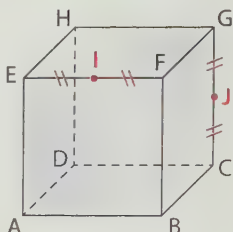


45 ABCDEFGH est un cube d'arête a . I et J sont les milieux respectifs de [EF] et [CG].

1. Calculez en fonction de a :

- $\vec{EI} \cdot \vec{HC}$
- $\vec{EI} \cdot \vec{GJ}$
- $\vec{EI} \cdot \vec{JA}$
- $\vec{JH} \cdot \vec{JD}$

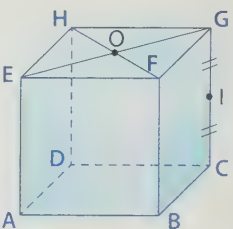
2. On note θ la mesure de l'angle géométrique associé aux vecteurs $\vec{AE}$ et $\vec{BH}$. Démontrez que $\cos(\theta) = \frac{1}{\sqrt{3}}$.



46 ABCDEFGH est un cube d'arête a . O est le centre de la face EFGH et I le milieu du segment [CG].

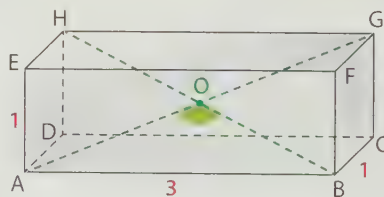
Calculez en fonction de a :

- $\vec{AO} \cdot \vec{CG}$
- $\vec{AO} \cdot \vec{GI}$



47 ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle tel que $AB = 3$, $AE = BC = 1$.

Les diagonales [AG] et [BH] se coupent en O.



Quelle est la mesure (en radian) de l'angle $\widehat{AOB}$ arrondie au dixième ?

ORTHOGONALITÉ DANS L'ESPACE

48 **ROC** Restitution organisée des connaissances

$\mathcal{P}$ est le plan défini par les droites d_1 et d_2 , sécantes en A et de vecteurs directeurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.

Δ est la droite passant par A et de vecteur directeur un vecteur $\vec{n}$ orthogonal aux vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$.

Démontrez que Δ est orthogonale à toute droite d du plan $\mathcal{P}$.

Pour les exercices 49 à 52

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

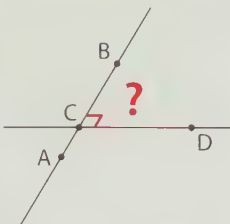
49 Les vecteurs $\vec{u}\left(\frac{5}{4}; -\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$ et $\vec{v}\left(-\frac{2}{5}; 2; 3\right)$ sont-ils orthogonaux ?

50 Pour quelle(s) valeur(s) du nombre α les vecteurs

$$\vec{u}\left(\frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{1}{3}; 2\right) \text{ et } \vec{v}\left(\alpha; 2\alpha; \frac{1}{2}\right)$$

sont-ils orthogonaux ?

51 Les points A, B, C, D ont respectivement pour coordonnées $(1; 0; -2)$, $(3; 3; 1)$, $(4; \frac{9}{2}; \frac{5}{2})$ et $(1; \frac{13}{2}; \frac{5}{2})$. Le point C est-il le projeté orthogonal du point D sur la droite (AB) ?



52 On donne les points :

$$A(2; -5; 1), B(0; 2; 6) \text{ et } C(-2; 3; 1).$$

Démontrez que la droite d passant par C et de vecteur directeur $\vec{u}(-4; 1; -3)$ est orthogonale à la droite (AB).

53 ABCDEFGH est un cube d'arête a .

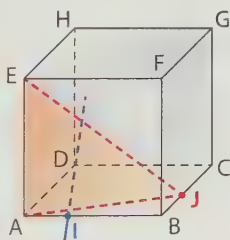
Les droites (AF) et (EC) sont-elles orthogonales ?

54 ABCDEFGH est un cube d'arête 1. Les points I et J sont tels que :

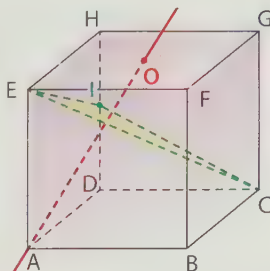
$$3\vec{AI} = \vec{AB} \text{ et } 3\vec{BJ} = \vec{BC}.$$

1. Démontrez que les droites (DI) et (AJ) sont perpendiculaires.

2. Déduisez-en que la droite (DI) est perpendiculaire au plan (AJE).



55 ABCDEFGH est un cube d'arête 1. Le point I est le milieu de [HD] et le point O est le centre de la face EFGH. On se propose de démontrer de deux manières que la droite (AO) est perpendiculaire au plan (ECI).

**1. Manière 1 : avec un repère**

On choisit le repère orthonormé $(D; \vec{DA}, \vec{DC}, \vec{DH})$.

a) Quelles sont les coordonnées des points A, E, I, O, C ?

b) Calculez $\vec{AO} \cdot \vec{EC}$ et $\vec{AO} \cdot \vec{EI}$. Concluez.

2. Manière 2 : sans repère

a) En écrivant que $\vec{AO} = \vec{AE} + \vec{EO}$ et $\vec{EC} = \vec{EG} + \vec{GC}$, calculez $\vec{AO} \cdot \vec{EC}$.

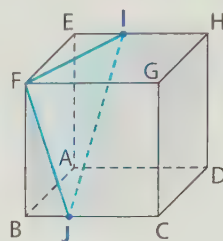
b) En utilisant la relation de Chasles, calculez $\vec{AO} \cdot \vec{EI}$. Concluez.

56 ABCDEFGH est un cube d'arête 1. Les points I et J sont tels que :

$$3\vec{EI} = \vec{EH} \text{ et } 3\vec{BJ} = \vec{BC}.$$

L'espace est rapporté au repère orthonormé :

$$(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE}).$$



La perpendiculaire menée par G au plan (FIJ) coupe le plan (ABC) au point N de coordonnées $(x; y; 0)$.

1. a) Démontrez que la droite (GN) est orthogonale aux droites (FI) et (FJ).

b) Calculez $\vec{GN} \cdot \vec{FI}$ et $\vec{GN} \cdot \vec{FJ}$ en fonction de x et y .

2. Déduisez-en les coordonnées du point N.

ÉQUATION CARTÉSIENNE D'UN PLAN**Pour les exercices 57 à 66**

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

57 Déterminez, dans chaque cas, une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

a) $A(2; 0; 1)$ et $\vec{n}(1; -1; 3)$.

b) $A(\sqrt{2}; -2; 5)$ et $\vec{n}(2; -3; -1)$.

58 Déterminez, dans chaque cas, une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ perpendiculaire en A à la droite (AB).

a) $A(2; 0; -1)$ et $B(0; 1; 3)$.

b) $A(\sqrt{2}; -2; 5)$ et $B(-1; 3; 2)$.

59 Le plan $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne :

$$3x + 2y - 5 = 0.$$

Les points A et B ont pour coordonnées respectives $(1; 2; 1)$ et $(\frac{5}{2}; 3; 1)$.

La droite (AB) est-elle orthogonale au plan $\mathcal{P}$?

60 Le plan $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne $x - 3y + 2z - 5 = 0$ et le point A a pour coordonnées $(2; 3; -1)$. Est-il vrai que le point H $(3; 0; 1)$ est le projeté orthogonal de A sur le plan $\mathcal{P}$?

61 On donne le point A de coordonnées $(1; -1; 2)$ et le vecteur $\vec{u} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$.

Quelle est la nature de l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tels que $\vec{AM} \cdot \vec{u} = 5$?

62 Le plan $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne :

$$2x + y - 3z - 2 = 0.$$

1. Définissez $\mathcal{P}$ par un point A et un vecteur normal $\vec{n}$.
2. Définissez $\mathcal{P}$ par un point B et deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires.

63 On donne les points A(1; -1; 3), B(0; 3; 1), C(2; 1; 3), D(4; -6; 2) et E(6; -7; -1).

1. Démontrez que les points A, B, C définissent un plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal $\vec{DE}$.
2. Déduisez-en une équation cartésienne de $\mathcal{P}$.

64 Déterminez une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ défini par le point A(1; 2; 1) et les vecteurs $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{v} = \vec{j} - \vec{k}$.

65 On donne les points :

$$A(3; -2; 1), B(5; 2; -3) \text{ et } C(6; -2; -2).$$

1. Vérifiez que les points A, B, C ne sont pas alignés, et que $\vec{n}(2; 1; 2)$ est un vecteur normal au plan (ABC).
2. Déduisez-en une équation cartésienne du plan (ABC).

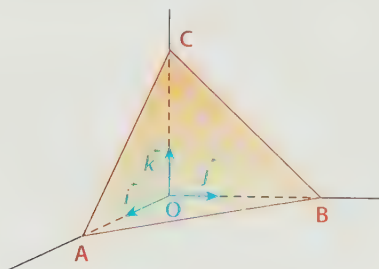
66 Le plan $\mathcal{P}$ a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + t - 2s \\ y = 2 - t + s \\ z = 2t - s \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad s \in \mathbb{R}.$$

1. Définissez le plan $\mathcal{P}$ par un point et deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires.
2. Définissez le plan $\mathcal{P}$ par une équation cartésienne.

67 $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormé. Les points A, B, C ont pour coordonnées respectives $(a; 0; 0)$, $(0; b; 0)$ et $(0; 0; c)$, où a, b, c sont non nuls.

Démontrez que $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).



68 Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les points A, B, C ont respectivement pour coordonnées $(2; 0; 0)$, $(0; 2; 0)$, $(0; 0; 1)$.

1. En utilisant le résultat de l'exercice 67, trouvez une équation cartésienne du plan (ABC).

2. Le point O se projette orthogonalement en H sur le plan (ABC).

- a) Donnez une représentation paramétrique de la droite (OH).
- b) Déduisez-en les coordonnées de H.
- c) Démontrez que H est l'orthocentre du triangle ABC.

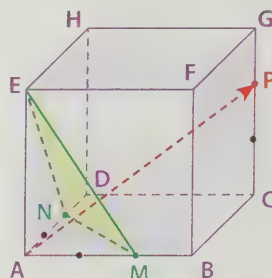
69 ABCDEFGH est un cube d'arête 1. Les points M, N, P sont tels que :

$$3\vec{AM} = 2\vec{AB};$$

$$3\vec{AN} = 2\vec{AD};$$

$$3\vec{CP} = 2\vec{CG}.$$

On choisit le repère orthonormé $(B; \vec{BA}, \vec{BC}, \vec{BF})$.



1. Démontrez que $\vec{AP}$ est normal au plan (EMN).
2. Déduisez-en une équation cartésienne du plan (EMN).

POSITION RELATIVE D'UNE DROITE ET D'UN PLAN

Pour les exercices 70 à 75

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

70 On donne les points A(-1; 2; 3) et B(1; 2; 1).

Le plan $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne :

$$x + y - z - 1 = 0.$$

Calculez les coordonnées du point I, intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite (AB).

71 La droite d est définie par le point A(2; -1; 0) et le vecteur directeur $\vec{u}(1; -2; 1)$.

Le plan $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne :

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} - \frac{z}{6} - 1 = 0.$$

Calculez les coordonnées du point d'intersection du plan $\mathcal{P}$ et d .

72 Dans chacun des cas suivants, déterminez l'intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite d .

a) $\mathcal{P} : x - 2y + 2z - 1 = 0$ et $d : \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = t \\ z = 1 - 3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$

b) $\mathcal{P} : 2x + 3y - z = 0$ et $d : \begin{cases} x = 1 + s \\ y = 1 + 2s \\ z = -3 + 8s \end{cases}, \quad s \in \mathbb{R}.$

73 On donne les points A(1; 0; 2), B(3; -1; 1) et C(1; 2; -3), et la droite d de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 7t + 1 \\ y = 10t - 4 \\ z = 4t + 1 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

1. Vérifiez que les points A, B, C définissent un plan $\mathcal{P}$.
2. Démontrez que la droite d est perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$.
3. Quelles sont les coordonnées du point H, commun à la droite d et au plan $\mathcal{P}$?

74 Les points A, B, C, D ont pour coordonnées respectives $(2; 4; 3)$, $(4; -2; 3)$, $(1; -1; 1)$, $(3; 3; 3)$.

1. Vérifiez que A, B, C ne sont pas alignés et que le vecteur $\vec{n}(3; 1; -4)$ est un vecteur normal au plan (ABC).
2. Déterminez une équation cartésienne du plan (ABC) ainsi qu'une représentation paramétrique de la droite d passant par D et perpendiculaire au plan (ABC).
3. Déduisez-en les coordonnées du point H, projeté orthogonal de D sur le plan (ABC).

75 LOGIQUE Il existe, Pour tout

Les points A et B ont respectivement pour coordonnées $(2; 1; -1)$ et $(3; 0; 0)$. À tout nombre m , on associe le plan $\mathcal{P}_m$ d'équation cartésienne :

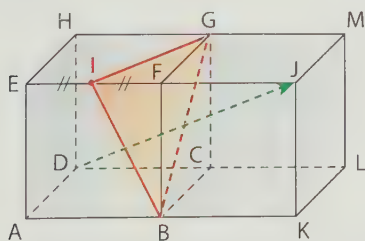
$$mx + y + mz + m - 1 = 0.$$

Pour chaque affirmation, dites si elle est vraie ou fausse. Justifiez.

1. Pour tout m , la droite (AB) est incluse dans $\mathcal{P}_m$.
2. Il existe une valeur de m pour laquelle la droite (AB) est perpendiculaire à $\mathcal{P}_m$.
3. Pour tout m , la droite (AB) et le plan $\mathcal{P}_m$ sont sécants.
4. Il existe une valeur de m et une seule pour laquelle $\mathcal{P}_m$ est parallèle à la droite (AB).

76 Deux cubes d'arête 1 sont disposés comme l'indique la figure ci-dessous. L'espace est rapporté au repère orthonormé $(D ; \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH})$.

Le point I est le milieu de [EF].



- 1. a)** Démontrez que $\overrightarrow{DJ}$ est normal au plan (BIG).
- b)** Déduisez-en une équation cartésienne du plan (BIG).
- 2. a)** Déterminez une représentation paramétrique de la droite Δ passant par F et perpendiculaire au plan (BIG).
- b)** La droite Δ coupe le plan (BIG) en L. Le point L est-il l'orthocentre du triangle BIG ?

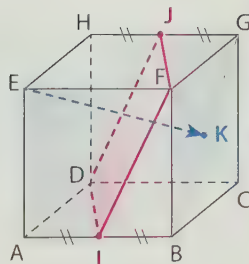
77 Aire et volume

ABCDEFGH est un cube d'arête 1. Les points I et J sont les milieux de $[AB]$ et $[HG]$, K est le centre de la face BCGF.

L'espace est muni du repère orthonormé :

$(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}).$

- 1.** Démontrez que EIFJD est un losange d'aire $\frac{\sqrt{6}}{2}$.
- 2. a)** Démontrez que le vecteur $\vec{EK}$ est normal au plan (DIJ).
- b)** Déduisez-en les coordonnées de L, intersection de la droite (EK) et du plan (DIJ).
- 3.** Calculez le volume de la pyramide EIFJD.



POSITION RELATIVE DE DEUX PLANS

Dans toute cette rubrique, l'espace est muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

78 $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont deux plans d'équations respectives :

$$x - 2y + 3z - 5 = 0 \quad \text{et} \quad x + y + z + 1 = 0.$$

- 1. a)** Démontrez $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants.
- b)** Trouvez une représentation paramétrique de la droite Δ , intersection de ces deux plans.
- 2.** Déterminez une équation cartésienne du plan $\mathcal{R}$ passant par $A(2; 5; -2)$ et perpendiculaire à $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

79 1. Δ est la droite intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ d'équations respectives :

$$x - y + z - 3 = 0 \quad \text{et} \quad 2x + z = 0.$$

Donnez une représentation paramétrique de Δ .

- 2.** Déterminez les coordonnées du point d'intersection de Δ et du plan $\mathcal{R}$ d'équation $x + y - z = 0$ (si ce point existe).

80 La droite Δ est l'intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ d'équations respectives :

$$2x - y + 5 = 0 \quad \text{et} \quad 3x + y - z = 0.$$

La droite Δ est-elle parallèle au plan $\mathcal{Q}$ d'équation $5x - 5y + z = 0$?

81 Distance d'un point à une droite

Les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ ont pour équations respectives :

$$x + 2y - z + 1 = 0 \quad \text{et} \quad x - y - z = 0.$$

1. Démontrez que ces plans sont perpendiculaires.
2. Donnez une représentation paramétrique de la droite Δ , intersection de ces deux plans.

3. A est le point de coordonnées $(0; 1; 1)$.

Comme dans le plan, la distance d'un point A à la droite Δ est la distance AH, où H est le point d'intersection de la droite Δ et de la perpendiculaire à Δ passant par A.

- a) Trouvez une représentation paramétrique de la droite d_1 passant par A et perpendiculaire à $\mathcal{P}_1$.
- b) Trouvez une représentation paramétrique de la droite d_2 passant par A et perpendiculaire à $\mathcal{P}_2$.
- c) Déduisez-en les coordonnées des points H_1 et H_2 , intersections respectives de d_1 avec $\mathcal{P}_1$ et de d_2 avec $\mathcal{P}_2$.
- d) Calculez AH_1 et AH_2 .

Déduisez-en la distance du point A à la droite Δ .

82 On donne le point A de coordonnées $(1; 1; 2)$, et les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ d'équations respectives :

$$x + 2y - z - 4 = 0 \quad \text{et} \quad 2x + 3y - 2z - 5 = 0.$$

1. Démontrez que les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants suivant une droite Δ dont vous donnerez une représentation paramétrique.

2. a) Déterminez une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par A et perpendiculaire à Δ .

b) Déduisez-en les coordonnées du point H intersection du plan $\mathcal{P}$ et de la droite Δ , puis la distance du point A à la droite Δ (voir l'exercice **81**).

83 À tout nombre m , on associe le plan $\mathcal{P}_m$ d'équation :

$$x + (1 - m)y + 2mz - 1 = 0.$$

1. On note Δ la droite d'intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$. Donnez une représentation paramétrique de la droite Δ .

2. Démontrez que la droite Δ est contenue dans chacun des plans $\mathcal{P}_m$.

3. On suppose $m \neq \frac{1}{5}$.

Démontrez que deux plans $\mathcal{P}_{m_1}$ et $\mathcal{P}_{m_2}$ sont orthogonaux si, et seulement si, $m_2 = \frac{m_1 - 2}{5m_1 - 1}$.

AVEC LES TICE

84 Chercher une valeur minimale

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les points $A(1; 0; 1)$, $B(3; 1; 1)$, $C(1; 1; -1)$ et $D(2; -1; 0)$. I est le milieu du segment $[AB]$ et $M(x; y; z)$ est un point de la droite (CD).

On se propose de déterminer le point M_0 , s'il existe, pour lequel $m = MA^2 + MB^2$ est minimale.

A. Conjecturer avec Geospace

1. a) Créez les points A, B, C et D ainsi que le point I et la droite (CD), puis créez le point M :

Créer – Point ► Point libre ► Sur une droite

b) Créez les segments $[AB]$, $[MA]$ et $[MB]$.

c) Créez le nombre m (nom du calcul : m)

Créer – Numérique ► Calcul algébrique

puis saisissez $MA^2 + MB^2$.

Enfin, créez l'affichage de m (faites afficher 3 décimales) :

Créer – Affichage ► Variable numérique déjà définie

2. a) Déplacez le point M sur la droite (CD). Quelle semble être la valeur minimale de m ?

b) Tracez par I la droite d perpendiculaire à la droite (CD). Quel semble être le point M_0 ?

B. Démontrer

On pose $\vec{CM} = t\vec{CD}$, avec $t \in \mathbb{R}$.

1. a) Déterminez l'expression des coordonnées de M en fonction de t .

b) Calculez $MA^2 + MB^2$ en fonction de t .

2. Déterminez la valeur de t pour laquelle $MA^2 + MB^2$ est minimale. Calculez cette valeur minimale puis comparez avec la conjecture faite.

3. a) Calculez les coordonnées du point M_0 .

b) Démontrez que les droites (IM_0) et (CD) sont perpendiculaires. Concluez.

85 Mesure d'un angle

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les points $A(2; 2; 2)$, $B(2; -2; -2)$, $C(-2; 2; -2)$ et $D(-2; -2; 2)$. ABCD est un tétraèdre régulier (toutes ses faces sont des triangles équilatéraux).

M est un point du segment $[BC]$. On pose $\vec{BM} = t\vec{BC}$, avec $t \in [0; 1]$.

On se propose de déterminer la valeur t_0 , si elle existe, pour laquelle la mesure m de l'angle AMD est maximale.

A. Conjecturer avec Geospace

1. a) Créez les points A, B, C et D.

b) Créez le point M :

Créer – Point ► Point libre ► Sur un segment

c) Créez le nombre m (nom du calcul : m) :

Créer – Numérique ► Calcul géométrique

► Angle géométrique

Créez l'affichage de m (faites afficher 3 décimales) :

Créer – Affichage ► Variable numérique déjà définie

2. Déplacez le point M sur [BC]. Quelle semble être la valeur maximale de m ?
Quelle semble être la position de M sur le segment [BC] ?

B. Démontrer

1. Démontrons que :

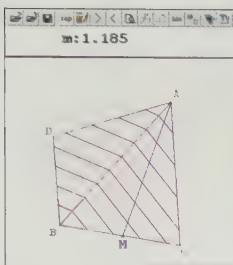
$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MD} = 16(2t^2 - 2t + 1).$$

2. a) Calculez MA et MD en fonction de t .

- b) Dédisez-en que :

$$\cos(\widehat{AMD}) = \frac{2t^2 - 2t + 1}{2t^2 - 2t + 2}.$$

3. En étudiant les variations d'une fonction f définie sur l'intervalle $[0; 1]$, démontrez que la mesure m de l'angle est maximale lorsque M est le milieu A du segment [BC]. Comparez avec la conjecture faite.



ÉQUATION D'UNE SPHÈRE

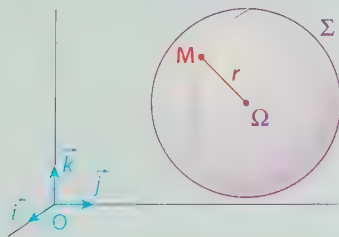
L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Σ est la sphère de centre $\Omega(x_0; y_0; z_0)$ et de rayon r .

Dire que « $M(x; y; z)$ est un point de Σ » équivaut à dire que « $\Omega M^2 = r^2$ », c'est-à-dire :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2.$$

Cette équation est une équation de la sphère $\Sigma(\Omega; r)$.



86 Vrai ou faux

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les points :

$$A(2; 1; -1), B(-1; 2; 4), C(0; -2; 3), D(1; 1; -2),$$

et le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x - 2y + z + 1 = 0$.

Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifiez vos réponses.

1. Les points A, B, C définissent un plan.
2. La droite (AC) est contenue dans le plan $\mathcal{P}$.
3. Une représentation paramétrique de la droite (AC) est :

$$\begin{cases} x = 2t \\ y = -2 + 3t, & t \in \mathbb{R}. \\ z = 3 - 4t \end{cases}$$

4. Les droites (AB) et (CD) sont orthogonales.

5. Le point $E\left(-\frac{4}{3}; \frac{2}{3}; \frac{5}{3}\right)$ est le projeté orthogonal de C sur le plan $\mathcal{P}$.

6. La sphère de centre D et de rayon $\frac{\sqrt{6}}{3}$ est tangente au plan $\mathcal{P}$.

- 87 On considère les points $A(1; -1; 4)$, $B(7; -1; -2)$ et $C(1; 5; -2)$.

1. a) Démontrons que le triangle ABC est équilatéral.

- b) Déterminez une équation cartésienne du plan (ABC).

2. d est la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -2t \\ y = -2t - 2, & t \in \mathbb{R}. \\ z = -2t - 3 \end{cases}$$

- a) Démontrons que d est perpendiculaire au plan (ABC).

- b) Quelles sont les coordonnées de G, intersection de la droite d et du plan (ABC) ?

- c) Démontrons que G est le centre de gravité du triangle ABC.

3. On note Σ la sphère de centre G passant par A.

- a) Démontrons que Σ a pour équation :

$$(x - 3)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 24.$$

- b) Quelles sont les coordonnées des points E et F, intersections de d et de la sphère Σ ?

Prendre toutes les initiatives

- 88 On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ ont pour équations respectives $2x + y - 3z + 1 = 0$ et $x - y + 2 = 0$.

Déterminez une équation du plan $\mathcal{R}$ passant par l'origine du repère et contenant la droite intersection des plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$.

- 89 Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les points $A(1; 2; 3)$, $B(0; 1; 4)$, $C(-1; -3; 2)$ et $D(4; -2; 5)$.

Le projeté orthogonal de D sur le plan (ABC) est-il le centre de gravité du triangle ABC ?

90 Étude d'un raisonnement

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé, on donne les points $A(1; 0; -1)$, $B(4; 3; 0)$, $C(7; -1; 1)$.

On veut prouver que les points A, B, C définissent un plan. Pour cela, on tient le raisonnement suivant :

« $\overrightarrow{AB}(3; 3; 1)$ et $\overrightarrow{AC}(6; -1; 2)$. Il en résulte que $AB = \sqrt{19}$, $AC = \sqrt{41}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 17$. Comme $|\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}| \neq AB \times AC$, les points A, B, C ne sont pas alignés donc ils déterminent un plan. »

Ce raisonnement est-il exact ?

Le jour du BAC

91 Travail en autonomie

→ Rédigez la solution de cet exercice en vous aidant du guide.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ et d est la droite passant par $A(1; -2; -1)$ et $B(3; -5; -2)$.

1. Vérifiez que la droite d a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -2 - 3t, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = -1 - t \end{cases}$$

2. d' est la droite de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2 - s \\ y = 1 + 2s, \quad s \in \mathbb{R}. \\ z = s \end{cases}$$

Démontrez que les droites d et d' ne sont pas coplanaires.

3. $\mathcal{P}$ est le plan d'équation $4x + y + 5z + 3 = 0$.

a) Démontrez que le plan $\mathcal{P}$ contient la droite d .

b) Démontrez que d' coupe $\mathcal{P}$ en un point C dont vous préciserez les coordonnées.

4. Δ est la droite passant par C et de vecteur directeur $\vec{v}(1; 1; -1)$.

a) Démontrez que Δ et d' sont perpendiculaires.

b) Démontrez que Δ coupe perpendiculairement d en un point E dont vous préciserez les coordonnées.

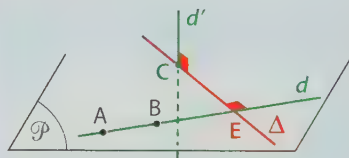


Sur le Web

Retrouvez le corrigé de cet exercice sur le site www.transmathlycee.net/eleve-TermS

Analyser l'énoncé

Il est intéressant de visualiser la situation.



d est incluse dans $\mathcal{P}$, $\mathcal{P} \cap d' = \{C\}$, $\Delta \perp d'$.

L'objectif est donc de déterminer la perpendiculaire commune aux droites d et d' (voir TD34 page 337).

Guide

2. Les vecteurs directeurs $\vec{u}(2; -3; -1)$ et $\vec{u'}(-1; 2; 1)$ vous permettent de démontrer que ces droites ne sont pas parallèles. En cherchant s'il existe deux réels t et s

tels que $\begin{cases} 1 + 2t = 2 - s \\ -2 - 3t = 1 + s, \\ -1 - t = s \end{cases}$, on voit si d et d' ont un point

commun. Puis on conclut.

3. a) Il suffit simplement de vérifier que A et B sont deux points de $\mathcal{P}$.

b) Il suffit de chercher la solution du système formé de l'équation paramétrique de d' et de l'équation de $\mathcal{P}$. On trouve que C a pour coordonnées $(6; -7; -4)$.

4. a) Le point C est commun aux droites Δ et d' . Il suffit donc de calculer $\vec{u'} \cdot \vec{v}$ avec $\vec{u'}(-1; 2; 1)$.

b) Après avoir démontré que Δ a pour représentation

paramétrique $\begin{cases} x = 6 + k \\ y = -7 + k, \quad k \in \mathbb{Z}, \\ z = -4 - k \end{cases}$, il reste à prouver

que Δ et d sont sécantes et perpendiculaires.

ZOOM sur la rédaction

Dans la rédaction, faites bien ressortir les étapes de la démonstration.

On démontre que les droites ne sont pas parallèles... donc elles sont sécantes ou non coplanaires. On justifie ensuite que ces droites ont un point commun puis on conclut.

ZOOM sur la rédaction

Là encore, bien faire ressortir les étapes.

Il faut montrer que Δ et d' d'une part, et Δ et d d'autre part, sont sécantes. Ensuite, à l'aide des vecteurs directeurs, on démontre qu'elles sont perpendiculaires.

92 ROC Restitution organisée des connaissances

1. Démonstration

L'espace est muni d'un repère orthonormé. a, b, c sont trois nombres non tous nuls.

a) Démontrez que si $\vec{n}(a; b; c)$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$, alors $\mathcal{P}$ a une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$.

b) Réciproquement, démontrez que l'ensemble des points $M(x; y; z)$ tel que $ax + by + cz + d = 0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}(a; b; c)$.

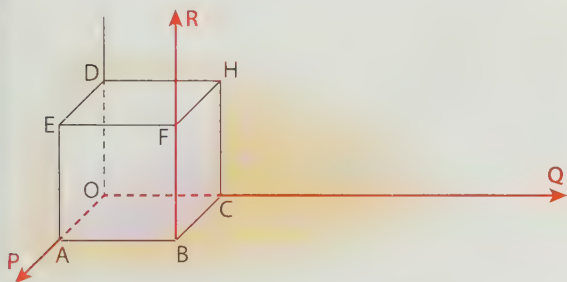
2. Application

$\mathcal{P}$ est le plan d'équation $2x + y - z + 2 = 0$.

Trouvez une équation du plan $\mathcal{Q}$ passant par les points $A(1; 0; 0)$ et $B(0; 1; 1)$ et perpendiculaire à $\mathcal{P}$.

93 BAC

OABCEDEFH est un cube d'arête 1. $\vec{OP} = 2\vec{OA}$, $\vec{OQ} = 4\vec{OC}$ et $\vec{OR} = 2\vec{BF}$. L'espace est muni du repère orthonormé $(O; \vec{OA}, \vec{OC}, \vec{OD})$.



1. a) Quelle est la nature du triangle PQR ?

b) Vérifiez que le plan (PQR) a pour équation : $4x + 2y + z - 8 = 0$.

2. Soit H le projeté orthogonal de D sur le plan (PQR).

a) Trouvez une représentation paramétrique de la droite (DH).

b) Déduisez-en les coordonnées de H.

c) Démontrez que H est un point de la droite (PR).

94 BAC QCM

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Indiquez la bonne réponse en justifiant.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On donne les points $A(1; 2; -4)$, $B(-3; 4; 1)$, et le plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x + 3y - z + 4 = 0$.

1. La droite d a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -8 + 2t \\ y = 7 - t \\ z = 6 + t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

a) Le plan $\mathcal{P}$ et la droite d sont sécants.

b) $\mathcal{P}$ et d n'ont aucun point commun.

c) La droite d est incluse dans le plan $\mathcal{P}$.

2. $\mathcal{P}'$ est le plan d'équation $x + 4y - 3z + 4 = 0$.

a) $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles et distincts.

b) $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont confondus.

c) $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants suivant une droite de vecteur directeur $-\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

d) Aucune des réponses précédentes n'est exacte.

3. Le plan médiateur du segment $[AB]$ a pour équation :

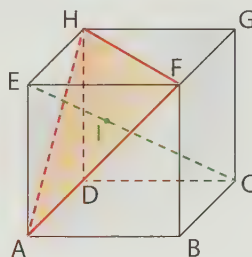
a) $-4x + 2y + 5z - \frac{5}{2} = 0$.

b) $-4x + 2y + 5z + \frac{5}{2} = 0$.

c) Aucune des réponses précédentes n'est exacte.

95 BAC QCM

ABCDEFGH est un cube d'arête 1. I est l'intersection de la droite (EC) et du plan (AFH). L'espace est muni du repère orthonormé $(D; \vec{DA}, \vec{DC}, \vec{DH})$.



1. Déterminez :

a) une représentation paramétrique de la droite (EC) ;

b) une équation cartésienne du plan (AFH).

2. Déduisez-en les coordonnées de I et démontrez que la droite (EI) est perpendiculaire au plan (AFH).

3. a) Démontrez que la droite (IH) est perpendiculaire à la droite (AF).

b) Que représente I pour le triangle AFH ?

4. Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète ou d'initiative non fructueuse sera prise en compte.

Un tétraèdre est dit de **type 1** si toutes ses faces ont la même aire.

Un tétraèdre est dit de **type 2** si toutes ses arêtes opposées sont orthogonales deux à deux.

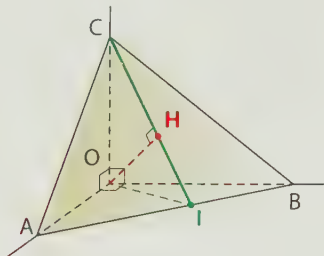
Un tétraèdre est dit de **type 3** s'il est à la fois du type 1 et du type 2.

Précisez de quel type est le tétraèdre EAFH.

Pour aller plus loin

96 Une propriété du tétraèdre trirectangle

OABC est un tétraèdre trirectangle (les triangles AOB, AOC, BOC sont rectangles en O). Le point H est le projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC).



1. a) Pourquoi la droite (AB) est-elle orthogonale aux droites (OH) et (OC) ?

b) Déduisez-en que la droite (AB) est perpendiculaire aux droites (OI) et (IC).

2. a) En exprimant de deux manières l'aire du triangle OIC, démontrez que :

$$\frac{1}{OH^2} = \frac{1}{OC^2} + \frac{1}{OI^2}.$$

b) Démontrez de même que :

$$\frac{1}{OI^2} = \frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2}.$$

c) On pose $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$ ($a > 0, b > 0, c > 0$) et $OH = h$ ($h > 0$).

Vérifiez que $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$ [1].

3. En exprimant de deux manières le volume du tétraèdre OABC, démontrez que :

$$[\text{aire}(ABC)]^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{4h^2} \quad [2].$$

4. Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète ou d'initiative non fructueuse sera prise en compte.

Démontrez que le carré de l'aire du triangle ABC est égale à la somme des carrés des aires des autres faces du tétraèdre.

97 Tétraèdre régulier et sphère circonscrite

L'espace est muni du repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Les points A, B, C ont pour coordonnées respectives $(a; 0; 0)$, $(0; a; 0)$, $(0; 0; a)$ où a est un nombre strictement positif.

I est le milieu du segment [AB] et H est le pied de la hauteur issue de O dans le triangle OIC.

Le point D est tel que $\vec{OD} + \vec{OH} = \vec{0}$.

1. Démontrez que H est l'orthocentre du triangle ABC.

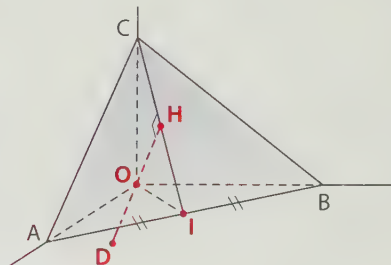
2. Démontrez que le tétraèdre DABC est un tétraèdre régulier.

Rappel

Un tétraèdre est régulier lorsque ses arêtes ont la même longueur.

3. Démontrez que le centre Ω de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD est un point de la droite (OH).

Calculez les coordonnées de Ω .



98 LOGIQUE Implication

Le plan $\mathcal{P}$ a pour équation $x - y + 2z - 3 = 0$ et Δ est la droite passant par $A(2; p; 1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(-1; m; 1)$ où p et m sont des nombres réels.

Dites si les affirmations suivantes sont vraies ou fausses. Justifiez votre réponse.

1. Si $m \neq 1$, alors pour tout réel p , l'intersection de Δ et $\mathcal{P}$ est un point.

2. Si $p = 1$, alors pour tout réel m , l'intersection de Δ et $\mathcal{P}$ est un point.

3. Si $p \neq 1$, alors pour tout réel m , $\Delta \cap \mathcal{P} = \emptyset$.

4. Si $m = 1$ et $p = 1$, alors pour tout réel m , $\mathcal{P} \cap \Delta = \Delta$.

5. Si $m = 1$ et $p \neq 1$, alors pour tout réel m , $\mathcal{P} \cap \Delta = \emptyset$.

99 Perpendiculaire commune à deux droites

Cet exercice prolonge le TD34, page 337.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère la droite d passant par $A(0; 0; 3)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{u}(1; 0; -1)$, et la droite d' passant par $B(2; 0; 4)$ et dont un vecteur directeur est $\vec{v}(0; 1; 1)$.

L'objectif de cet exercice est de démontrer qu'il existe une droite unique perpendiculaire à la fois à d et à d' , de la déterminer et de dégager une propriété de cette droite.

1. On considère un point M de d et un point M' de d' définis par $\vec{AM} = a\vec{u}$ et $\vec{BM'} = b\vec{v}$ où a et b sont des nombres réels.

Exprimez les coordonnées des points M et M', puis celles du vecteur $\overrightarrow{MM'}$ en fonction de a et b.

2. Démontrez que la droite (MM') est perpendiculaire à d et d' si, et seulement si, le couple (a ; b) est solution du système $\begin{cases} 2a + b = 1 \\ a + 2b = -1 \end{cases}$.

3. a) Résolvez le système précédent.

b) Déduisez-en les coordonnées de deux uniques points M et M', notés H et H', tels que la droite (HH') est bien une perpendiculaire commune à d et d'.

c) Démontrez que $HH' = \sqrt{3}$ unité de longueur.

4. M et M' sont deux points quelconques de d et d' respectivement.

a) En utilisant les coordonnées obtenues à la question 1., démontrez que :

$$MM'^2 = (a+b)^2 + (a-1)^2 + (b+1)^2 + 3.$$

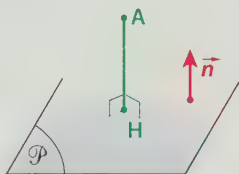
b) Déduisez-en que la distance MM' est minimale lorsque $M=H$ et $M'=H'$.

100 Distance d'un point à un plan

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Le plan $\mathcal{P}$ a pour équation $ax + by + cz + d = 0$ et on note $\vec{n}(a; b; c)$ un vecteur normal à $\mathcal{P}$.

Le point $A(x_0; y_0; z_0)$ se projette orthogonalement en $H(\alpha; \beta; \gamma)$ sur le plan $\mathcal{P}$.



A. Démonstration

La droite (AH) passe par A et a pour vecteur directeur $\vec{n}$.

1. a) Les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires.

Déduisez-en que $|\vec{n} \cdot \overrightarrow{AH}| = \|\vec{n}\| \times AH$,

puis $|\vec{n} \cdot \overrightarrow{AH}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \times AH$ [1].

2. a) En utilisant la forme analytique du produit scalaire, démontrez que :

$$|\vec{n} \cdot \overrightarrow{AH}| = |a\alpha + b\beta + c\gamma - ax_0 - by_0 - cz_0|.$$

b) Justifiez que $a\alpha + b\beta + c\gamma = -d$.

c) Déduisez-en que :

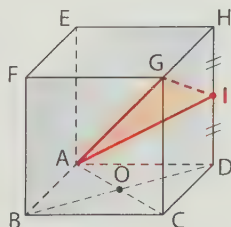
$$AH = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

AH est la distance du point A au plan $\mathcal{P}$.

B. Application

ABCDEFGH est un cube d'arête 1.

I est le milieu de l'arête [HD] et O est le centre de la face ABCD. L'espace est muni du repère orthonormé $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.



1. Vérifiez que le plan (AGI) a pour équation $x + y - 2z = 0$ et que le vecteur $\overrightarrow{OE}$ est un vecteur normal à ce plan.

2. Dans cette question, on se propose de calculer de trois manières la distance du point E au plan (AGI).

a) Manière 1

À l'aide de la formule établie dans la partie A., démontrez que la distance de E au plan (AGI) est égale à $\frac{\sqrt{6}}{3}$.

b) Manière 2

• Déterminez une représentation paramétrique de la droite (OE).

• Déduisez-en les coordonnées au point K d'intersection de la droite (OE) et du plan (AGI).

• Calculez alors la distance EK.

c) Manière 3

• Calculez l'aire du triangle EAI et déduisez-en que le volume du tétraèdre GAIE est égal à $\frac{1}{6}$.

• Calculez l'aire du triangle AGI et déduisez-en la distance du point E au plan (AGI).

PROLONGEMENT DU TD 33

101 Position relative de trois plans

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On donne les points $A(1; 0; 2)$, $B(1; 1; 4)$ et $C(-1; 1; 1)$.

1. a) Démontrez que les points A, B, C ne sont pas alignés.

b) Vérifiez que $\vec{n}(3; 4; -2)$ est un vecteur normal au plan (ABC).

c) Déduisez-en une équation du plan (ABC).

2. Les plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ ont pour équations respectives :

$$2x + y + 2z + 1 = 0 \quad \text{et} \quad x - 2y + 6z = 0.$$

Démontrez que $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont sécants selon une droite Δ dont vous déterminerez une représentation paramétrique.

3. a) Étudiez la position relative de Δ et du plan (ABC).

b) Que peut-on dire alors de la position relative des plans (ABC), $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$?

102 Intersection de trois plans

Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les points $A(1; 1; 0)$, $B(1; 2; 1)$, $C(3; -1; 2)$, et les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ d'équations respectives :

$$x + 2y - z - 4 = 0 \quad \text{et} \quad 2x + 3y - 2z - 5 = 0.$$

Quelle est l'intersection (si elle existe) des plans $\mathcal{P}$, $\mathcal{Q}$ et (ABC) ?

Probabilités conditionnelles



D'un siècle
à un autre

Le gène des cheveux roux étant un gène récessif, la probabilité qu'un enfant naisse roux est assez faible. Et pourtant, les enfants de la célèbre famille Weasley de la saga « *Harry Potter* » sont tous roux. En effet, si le gène est présent dans une famille, cette probabilité est alors bien supérieure. C'est parce qu'une des raisons de la réalisation de cet événement complexe (une de ses causes) est déjà réalisée.

Thomas Bayes, en s'intéressant aux « *probabilités des causes* » vers la fin du XVIII^e siècle, a été amené à définir la probabilité d'un événement sachant qu'une des causes était réalisée, formule à la base des probabilités conditionnelles.



En savoir plus sur
Thomas Bayes

→ Chercheurs d'hier, p. 361

Rappels

& Exercices-tests

Compléments
numériques

Probabilités d'événements

Une expérience aléatoire est modélisée par un univers U muni d'une loi de probabilité P .

- Si A et B sont deux événements quelconques,

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

- Si $A \cap B = \emptyset$ (A et B incompatibles), alors :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

- $A \cap \bar{A} = \emptyset$ et $A \cup \bar{A} = U$.

Ainsi : $P(A) + P(\bar{A}) = 1$.

Représentation par un tableau

Pour étudier l'intersection ou la réunion de deux événements A et B , on utilise souvent un tableau à double entrée.

- Événement $A \cap B$
- Événement $A \cup B$.

	B	$\bar{B}$
A	$A \cap B$	
$\bar{A}$		

On peut y lire les égalités suivantes sur les événements contraires de $A \cap B$ et $A \cup B$:

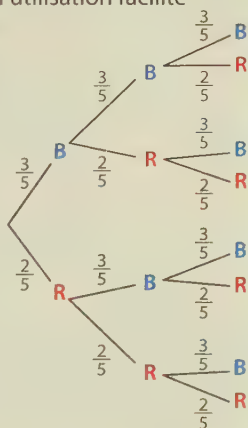
$$\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B} \quad \text{et} \quad \overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}.$$

Répétition d'épreuves identiques et indépendantes

La répétition de n épreuves identiques et indépendantes peut être représentée par un **arbre pondéré** dont l'utilisation facilite le calcul de probabilités.

Exemple : tirage au hasard de trois boules successivement et avec remise dans une urne qui contient trois boules bleues (B) et deux rouges (R).

Remarque. Dans ce chapitre, lors d'un tirage dans une urne, toutes les boules (ou jetons) ont la même probabilité d'être tirées.



1 Vrai ou faux

Deux revues A et B sur l'orientation sont mises à la disposition des élèves de terminale d'un lycée.

54 % ont lu A , 35 % ont lu B et 33 % n'ont lu ni A ni B .

On interroge au hasard un élève de terminale.

La probabilité qu'il ait lu :

- au moins une revue est 0,89 ;
- les deux revues est 0,22 ;
- uniquement la revue B est 0,13.

2 Vrai ou faux

On lance deux fois un dé cubique parfait. On note :

A l'événement « La somme des numéros est 5 » ;

B l'événement « Le produit des numéros est 6 ».

- $P(A) = P(B)$
- $P(A \cup B) = \frac{2}{9}$
- $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = \frac{17}{18}$

3 Vrai ou faux

Dans une ville, une enquête a montré que :

70 % des ménages pratiquaient le tri sélectif,

31 % consommaient des produits bio,

27 % ne pratiquaient pas le tri sélectif et ne mangeaient pas bio.

On interroge un ménage de la ville au hasard.

On note T l'événement « Il pratique le tri sélectif »

et B l'événement « Il mange bio ».

- $P(T \cup B) = 0,73$
- $P(T \cap B) = 0,39$
- $P(T \cap \bar{B}) = 0,31$
- $P(\bar{T} \cap B) = 0,03$
- $P(\bar{T} \cap \bar{B}) = 0,27$
- $P(\bar{T} \cap \bar{B}) = 0,72$

4 QCM

Pour chaque question, une seule affirmation est exacte. Identifiez-la en justifiant votre réponse

Une urne contient trois boules indiscernables au toucher : une rouge R , une verte V et une noire N .

On tire successivement avec remise trois boules.

On note U l'événement « Tirage unicolore », B l'événement « Tirage bicolore » et T l'événement « Tirage tricolore ».

- $P(U) = \frac{1}{3}$
 - $P(U) = \frac{1}{9}$
 - $P(U) = \frac{1}{27}$
- $P(B) = \frac{2}{3}$
 - $P(B) = \frac{1}{3}$
 - $P(B) = \frac{1}{9}$
- $P(T) = \frac{1}{3}$
 - $P(T) = \frac{1}{9}$
 - $P(T) = \frac{2}{9}$



Complément de l'ouvrage : Probabilités conditionnelles

Activité 1

TABLEAUX DE RÉPARTITION ET FRÉQUENCES CONDITIONNELLES

Pour mesurer l'efficacité d'un vaccin, un laboratoire a effectué des tests auprès de 1 000 volontaires répartis en deux groupes :

- le groupe A contient 600 personnes qui ont été vaccinées ;
- le groupe B contient 400 personnes qui ont reçu un placebo.

Le virus est ensuite inoculé à l'ensemble des volontaires.



1 Tableau de répartition des résultats globaux

Les résultats des tests sont présentés dans le tableau des effectifs ci-dessous.

On note V l'ensemble des personnes vaccinées et M l'ensemble des personnes malades.

On désigne par $f(V)$ la fréquence des personnes vaccinées et par $f(\bar{V})$ celle des personnes non vaccinées.

	Groupe A	Groupe B	TOTAL
Malade	120	180	300
Sain	480	220	700
TOTAL	600	400	1 000

a) Quelles sont les valeurs de $f(V)$ et $f(\bar{V})$?

b) Quel est l'effectif de $V \cap M$? de $\bar{V} \cap M$?

Déduisez-en les fréquences associées $f(V \cap M)$ et $f(\bar{V} \cap M)$.

2 Tableaux de répartition par groupe et fréquences conditionnelles

L'intérêt de l'étude est de connaître les fréquences suivantes :

- celle des personnes malades parmi les personnes vaccinées ;
- celle des personnes malades parmi les personnes non vaccinées.

On considèrera que le vaccin est efficace si la première fréquence est sensiblement inférieure à la seconde.

a) On considère les personnes du groupe A.

- Recopiez puis complétez le tableau ci-contre.

La fréquence des personnes malades **parmi les personnes vaccinées** est alors notée $f_V(M)$.

On dit que $f_V(M)$ est la fréquence conditionnelle de M parmi V .

- Comparez $f(V \cap M)$ et $f(V) \times f_V(M)$. Le résultat était-il prévisible ?

b) On considère les personnes du groupe B.

- Recopiez puis complétez le tableau ci-contre.

La fréquence des personnes malades **parmi les personnes non vaccinées** est alors notée $f_{\bar{V}}(M)$.

- Justifiez que $f(\bar{V} \cap M) = f(\bar{V}) \times f_{\bar{V}}(M)$.

c) Comparez les fréquences conditionnelles $f_V(M)$ et $f_{\bar{V}}(M)$.

Pensez-vous que le vaccin est efficace ?

Groupe A	Malade	Sain
Fréquence		

Groupe B	Malade	Sain
Fréquence		

Conclusion

La fréquence conditionnelle de M parmi V est telle que $f_V(M) = \frac{f(V \cap M)}{f(V)}$.

Cette égalité s'étend aux probabilités et permet de définir une répartition de probabilité que l'on appelle **probabilité conditionnelle**.

Activité 2

PROBABILITÉ CONDITIONNELLE



On lance deux dés cubiques parfaits, l'un **rouge**, l'autre **vert**.

L'univers U est l'ensemble des 36 couples équiprobables $(x; y)$ où x et y sont des entiers entre 1 et 6.

On considère les deux événements suivants :

A : « La somme des numéros sortis est strictement supérieure à 6 » ;

B : « Le produit des numéros sortis est strictement inférieur à 18 ».

On se place dans le cas où l'événement A est réalisé.

L'objectif est alors de déterminer la probabilité que l'événement B soit réalisé.

1 Simulation avec un tableur : échantillon de taille 10 000

Protocole de simulation

- Lors du lancer de rang n , on affiche les numéros sortis : x (dé rouge) ; y (dé vert).
- Pour chacun des événements A, B, $A \cap B$, on code 1 s'il est réalisé, 0 sinon.
Le code de la réalisation de $A \cap B$ est égal au produit des codes de A et B.
- Au terme des 10 000 lancers, le nombre de réalisations de chacun des événements A, B et $A \cap B$ est la somme des codes obtenus.
- La fréquence conditionnelle de B sachant que A est réalisé est le rapport :

$$f_A(B) = \frac{\text{nombre de réalisations de « A et B »}}{\text{nombre de réalisations de A}}$$

a) Ouvrez une feuille de calcul ; complétez la ligne 1 comme indiqué, puis les cellules de A2 jusqu'à E2.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	n	x	y	x+y	x*y	A	B	A et B	$f_A(B)$

b) Codez, de F2 à H2, la réalisation des événements A, B puis celle de $A \cap B$ selon le protocole.

c) Copiez vers le bas la plage A2:H2 pour obtenir la simulation de 10 000 lancers.

d) Calculez en I2 la fréquence conditionnelle $f_A(B)$.

Observez les résultats de plusieurs simulations (Excel : ; Calc :). Que constatez-vous ?



En F2 et G2 : =SI(Test;Valeur_si_vrai;Valeur_si_faux)

En I2 : =SOMME(H2:H10001)/SOMME(F2:F10001)

2 Mise en place d'un modèle

Toutes les issues d'un lancer sont équiprobables et peuvent être représentées dans un tableau.

a) Calculez $P(A)$, $P(B)$ et $P(A \cap B)$. Quelle est la valeur exacte de $\frac{P(A \cap B)}{P(A)}$?

On dira que ce nombre est la probabilité conditionnelle de B sachant que A est réalisé.

b) Le résultat est-il en accord avec la fréquence conditionnelle observée lors des simulations ?

Conclusion. On définit ainsi une nouvelle loi de probabilité appelée **probabilité conditionnelle**.

Problème ouvert

Relisez le chapitre 12... Est-il plus facile ?

Lors d'un jeu télévisé, un présentateur montre trois portes fermées à un candidat. Derrière l'une d'elles se trouve une voiture et derrière chacune des deux autres, une chèvre.

Le candidat désigne une porte. Pour ménager le suspense, le présentateur ouvre une des deux autres portes, et évidemment il y a une chèvre. Il propose alors au candidat de modifier son choix.

Quelle stratégie conseillez-vous au joueur : changer ou ne pas changer ?

1

Probabilité conditionnelle

1.1 Étude d'une situation : représentation par un arbre pondéré

Dans un lycée, 54 % des élèves sont des filles (F). Parmi les filles, 72 % sont externes (E) alors que parmi les garçons (G), le pourcentage d'externes est 76 %.

On interroge au hasard un élève et on s'intéresse aux deux critères : sexe (F ou G) et qualité (E ou $\bar{E}$). L'univers de cette expérience aléatoire est donc l'ensemble des élèves du lycée, et chaque élève a la même probabilité d'être interrogé.

La situation peut être représentée par le graphique ci-dessous appelé arbre pondéré.

Dessin des branches

- Au départ, il y a deux possibilités, F ou G, représentées par deux branches.
- Au nœud F, il y a deux cas, E ou $\bar{E}$, selon que la fille est externe ou non. De même à partir du nœud G.



Inscription des probabilités

- Sur la branche — F, on inscrit $P(F) = 0,54$.
- Sur la branche — E, on inscrit la probabilité, pour une fille, d'être externe : 0,72.
On la note $P_F(E)$, ce qui se lit « probabilité de E sachant F ».
- Sur la branche — $\bar{E}$, on inscrit la probabilité, pour une fille, de ne pas être externe : 0,28.
On la note $P_F(\bar{E})$.
- Parmi les filles, 72 % sont externes et 28 % ne le sont pas, donc $P_F(E) + P_F(\bar{E}) = 1$.
- On complète de même l'arbre à partir de G.

Événement représenté par un chemin

Le chemin $\xrightarrow{0,54} F \xrightarrow{0,72} E$ représente l'événement « L'élève est une fille et elle est externe ». Cet événement est $F \cap E$. Calculons sa probabilité.

Si N désigne l'effectif du lycée, alors le nombre de filles est $0,54 \times N$ et le nombre de filles externes est $0,72 \times (0,54 \times N) = 0,54 \times 0,72 \times N$.

Or, il y a équiprobabilité, donc $P(F \cap E) = \frac{0,54 \times 0,72 \times N}{N} = P(F) \times P_F(E)$. Ainsi :

$P(F \cap E)$ est le produit des probabilités inscrites sur le chemin $\xrightarrow{0,54} F \xrightarrow{0,72} E$ et l'égalité $P(F \cap E) = P(F) \times P_F(E)$ signifie que $P_F(E) = \frac{P(F \cap E)}{P(F)}$.

On généralise cette idée.

1.2 Probabilité de B sachant A

Définition 1

A et B sont deux événements d'une même expérience aléatoire avec $P(A) \neq 0$.

La probabilité conditionnelle de B sachant A est le nombre noté $P_A(B)$ défini par :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}.$$

Conséquence : probabilité de l'intersection $A \cap B$

On déduit de la définition le calcul de $P(A \cap B)$ sous la forme :

$$\text{si } P(A) \neq 0, P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B) ; \text{ si } P(B) \neq 0, P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A).$$

1.3 Formule des probabilités totales

Exemple. Trois machines M_1, M_2 et M_3 réalisent respectivement 20 %, 30 % et 50 % de la production d'une entreprise. On estime à 1,5 %, 2 % et 1 % les proportions de pièces défectueuses produites respectivement par M_1, M_2 et M_3 . On choisit une pièce au hasard dans la production.

L'objectif est de calculer la probabilité de l'événement B : « La pièce est bonne ».

Pour tout entier i de 1 à 3, on note M_i l'événement : « La pièce est produite par M_i ».

- Illustrons la situation par un arbre pondéré.

La pièce choisie est produite par l'une des machines, d'où les branches initiales menant à M_1, M_2 et M_3 .

À partir de chaque nœud M_i , soit la pièce est bonne (B), soit elle est défectueuse ($\bar{B}$). Plaçons-nous au nœud M_1 .

On connaît $P_{M_1}(\bar{B}) = 0,015$, donc $P_{M_1}(B) = 1 - 0,015 = 0,985$.

D'où les probabilités inscrites sur $M_1 \rightarrow \bar{B}$ et $M_1 \rightarrow B$.

Pour les autres branches, on procède de même.

- Calculons les probabilités correspondant aux trois chemins menant à la réalisation de l'événement B .

$\text{---}M_1 \text{---}B$, $\text{---}M_2 \text{---}B$, $\text{---}M_3 \text{---}B$ représentent les événements $M_1 \cap B$, $M_2 \cap B$ et $M_3 \cap B$. Ainsi, B est la réunion de ces événements deux à deux incompatibles ; d'où :

$$P(B) = P(M_1 \cap B) + P(M_2 \cap B) + P(M_3 \cap B) \quad [1].$$

$P(M_1 \cap B)$ est le produit des probabilités inscrites sur les branches du chemin $\text{---}M_1 \text{---}B$;

donc $P(M_1 \cap B) = P(M_1) \times P_{M_1}(B) = 0,2 \times 0,985$.

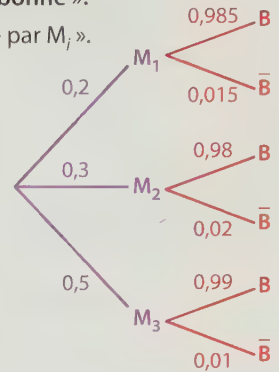
De même, $P(M_2 \cap B) = 0,3 \times 0,98$ et $P(M_3 \cap B) = 0,5 \times 0,99$.

Ainsi, $P(B) = 0,2 \times 0,985 + 0,3 \times 0,98 + 0,5 \times 0,99 = 0,986$.

- La méthode de calcul définie par la formule [1] est illustrée par le tableau.

– On remplit les cases correspondant aux probabilités du type $P(M_i \cap B)$.

– La probabilité de B est la somme des probabilités des événements $M_i \cap B$.



	B	$\bar{B}$	
M_1	$0,2 \times 0,985$	$0,2 \times 0,015$	$P(M_1)$
M_2	$0,3 \times 0,98$	$0,3 \times 0,02$	$P(M_2)$
M_3	$0,5 \times 0,99$	$0,5 \times 0,01$	$P(M_3)$
	$P(B)$	$P(\bar{B})$	1

► Cas général : formule des probabilités totales

Théorème 1

(admis)

Si l'univers U d'une expérience aléatoire est la réunion d'événements, $A_1, A_2, \dots, A_n$ deux à deux incompatibles, alors pour tout événement B ,

$$P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B)$$

avec, pour tout entier i de 1 à n , si $P(A_i) \neq 0$, $P(A_i \cap B) = P(A_i) \times P_{A_i}(B)$.

On dit que $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ est une partition de U .

1.4 Construction et utilisation des arbres pondérés

Règle 1

La somme des probabilités sur les branches partant d'un même nœud vaut 1 (loi des nœuds).

Règle 2

La probabilité d'un événement représenté par un chemin est égale au produit des probabilités inscrites sur les branches de ce chemin (loi des chemins).

Règle 3

La probabilité d'un événement E est la somme des probabilités des événements associés aux chemins qui mènent à E .

2

Indépendance

2.1 Événements indépendants

A et B sont deux événements d'une même expérience aléatoire tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$.

Dans certaines situations, le fait de savoir que A est réalisé ne change pas la probabilité que B le soit. On dit alors que **B est indépendant de A**, ce qui signifie $P_A(B) = P(B)$.

L'événement $A \cap B$, qui vérifie $P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)$, est donc tel que : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Mais alors $P(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = P_B(A)$, ce qui veut dire que **A est indépendant de B**. D'où la définition :

Définition 2

Dire que deux événements A et B sont indépendants signifie que : $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Remarques

- La notion d'indépendance est liée à la loi de probabilité P.

- Il ne faut pas confondre indépendance et incompatibilité.

Supposons que A et B sont incompatibles ; alors $A \cap B = \emptyset$, donc $P(A \cap B) = 0$.

Si $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$, alors $P(A) \times P(B) \neq 0$ donc la relation $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ n'est jamais vérifiée : les événements A et B ne sont pas indépendants.

Exemple. On tire au hasard un jeton de l'urne ci-contre.

On note respectivement R, V, N les événements :

« Le jeton est rouge », « Le jeton est vert », « Le jeton est noir ».

A, B, C sont les événements associés au tirage de la lettre indiquée.

Les événements R et A sont-ils indépendants ? Même question pour R et B.

Deux méthodes sont possibles.

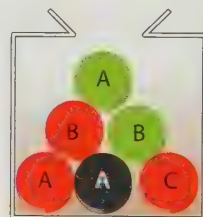
– Par exemple, pour R et A, comparons $P_R(A)$ et $P(A)$.

$P_R(A) = \frac{1}{3}$ et $P(A) = \frac{1}{2}$, donc $P_R(A) \neq P(A)$. Ainsi, R et A ne sont pas indépendants.

– Pour R et B, comparons $P(R \cap B)$ et $P(R) \times P(B)$, puis utilisons la définition 2.

$R \cap B$ signifie « Tirage du jeton B rouge » ; donc $P(R \cap B) = \frac{1}{6}$ et $P(R) \times P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

Ainsi, $P(R \cap B) = P(R) \times P(B)$; donc R et B sont indépendants.



2.2 Passage aux événements contraires

Théorème 2

Si deux événements A et B sont indépendants, alors il en est de même pour les événements :

1. $\bar{A}$ et B

2. A et $\bar{B}$

3. $\bar{A}$ et $\bar{B}$.

Démonstration exigible

1. A et B sont indépendants, donc $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ [1].

Or, A et $\bar{A}$ sont deux événements incompatibles dont la réunion est l'univers,

donc d'après la formule des probabilités totales : $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$.

D'où $P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$, soit, d'après [1], $P(\bar{A} \cap B) = P(B) - P(A) \times P(B)$.

Ainsi, $P(\bar{A} \cap B) = (1 - P(A)) \times P(B) = P(\bar{A}) \times P(B)$; donc $\bar{A}$ et B sont indépendants.

2. La démonstration est analogue : il suffit d'échanger les rôles de A et B.

3. D'après 1., $\bar{A}$ et B sont indépendants, donc d'après 2., $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont indépendants.

ROC
→ Exercice 54
« Le jour du
BAC »

Animation

OBJECTIF 1

Construire et exploiter un arbre pondéré

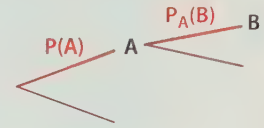
- Dans une expérience aléatoire, si l'événement A est tel que $P(A) \neq 0$, alors pour tout événement B :

$$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \text{ soit } P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B).$$

- Lors de la réalisation d'un arbre pondéré, on inscrit d'abord $P(A)$, puis la probabilité conditionnelle $P_A(B)$.

Le chemin rouge représente l'événement $A \cap B$.

- La somme des probabilités sur les branches partant d'un même nœud vaut 1. (**Règle 1**)
- La probabilité d'une issue représentée par un chemin est le produit des probabilités inscrites le long de ce chemin. (**Règle 2**)
- La probabilité d'un événement E est la somme des probabilités des issues associées aux chemins qui mènent à E. (**Règle 3**)



EXERCICE RÉSOLU A Contrôle de fabrication

Dans un atelier, 2 % des pièces fabriquées sont défectueuses.

Lors d'un contrôle, on choisit une pièce au hasard dans la fabrication. On estime que :

- si la pièce est défectueuse, la probabilité qu'elle soit refusée est 0,99 ;
- si la pièce est bonne, la probabilité qu'elle soit acceptée est 0,96.

1. Représentez la situation par un arbre pondéré.
2. Calculez la probabilité que la pièce choisie soit bonne et refusée.

Méthode

1. On traduit les données de l'énoncé en termes de probabilité en distinguant bien les probabilités conditionnelles. Les événements qui conditionnent les autres sont au départ.

- Pour la réalisation de l'arbre, on utilise :

- la probabilité de l'événement contraire

$$P(\bar{D}) = 1 - P(D)$$

- la loi des nœuds : **règle 1**

$$P_D(R) + P_D(\bar{R}) = 1 \text{ et } P_{\bar{D}}(R) + P_{\bar{D}}(\bar{R}) = 1$$

2. On repère le chemin qui représente l'intersection des deux événements considérés.

- On applique la loi des chemins : **règle 2**.

Solution

1. Notons D l'événement « Pièce défectueuse » et R l'événement « Pièce refusée ». Ainsi, $\bar{D}$ signifie « Pièce bonne » et $\bar{R}$ « Pièce acceptée ».

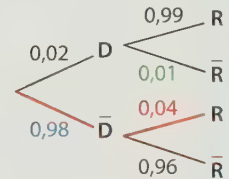
D'après l'énoncé :

$$P(D) = 0,02,$$

$$P_D(R) = 0,99$$

$$\text{et } P_{\bar{D}}(\bar{R}) = 0,96.$$

D'où l'arbre ci-contre.



2. L'événement « Pièce bonne et refusée » n'est autre que l'événement $\bar{D} \cap R$.

$$\text{Or, } P(\bar{D} \cap R) = P(\bar{D}) \times P_{\bar{D}}(R) ; \text{ donc :}$$

$$P(\bar{D} \cap R) = 0,98 \times 0,04 = 0,0392.$$

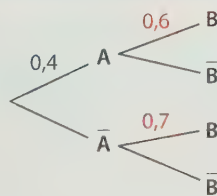
Mise en pratique

1. Recopiez puis complétez l'arbre pondéré ci-contre.

2. Calculez les probabilités des événements :

$$A \cap B ; A \cap \bar{B} ;$$

$$\bar{A} \cap B ; \bar{A} \cap \bar{B}.$$



2. Une urne contient deux boules blanches et trois noires. On tire l'une après l'autre deux boules au hasard et sans remise.

1. Représentez l'expérience par un arbre.

2. Calculez la probabilité d'obtenir :

a) deux boules blanches ; b) deux boules noires ;

c) une boule blanche et une boule noire.

EXERCICE RÉSOLU B Sondage dans une entreprise

Le secteur de production d'une entreprise est composé de trois catégories de personnel : les ingénieurs (I), les techniciens de production (T) et les agents de maintenance (M).

Il y a 8 % d'ingénieurs et 82 % de techniciens de production. Les femmes (F) représentent 50 % des ingénieurs, 25 % des agents de maintenance et 60 % des techniciens de production.

On interroge au hasard un membre du personnel de cette entreprise.

1. Construisez un arbre pondéré qui représente cette expérience.
2. Quelle est la probabilité que la personne interrogée soit un homme ?
3. Si la personne est une femme, quelle est, à 10^{-2} près, la probabilité qu'elle soit ingénieur ?

Méthode

1. On traduit l'énoncé en repérant les probabilités conditionnelles.
 - On utilise la répartition du personnel :

$$P(I) + P(M) + P(T) = 1.$$
 - On utilise la loi des nœuds : **règle 1**.
 - Lors de la réalisation de l'arbre, les probabilités sur les branches du deuxième niveau sont des probabilités conditionnelles.

Pour démarrer l'arbre, deux choix sont *a priori* possibles : la catégorie ou le sexe.
 Or, on connaît la probabilité de chaque catégorie, donc on démarre par I, M et T.

2. On repère tous les chemins qui mènent à la réalisation de cet événement.

- On applique alors la **règle 3**.
 Cette règle traduit la formule des probabilités totales.

3. On utilise la définition de la probabilité conditionnelle d'un événement.

- On applique la loi des chemins : **règle 2**.

Solution

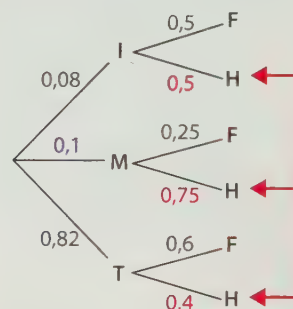
1. On note H l'événement « La personne est un homme ». D'après l'énoncé :

- $P(I) = 0,08$ et $P(T) = 0,82$, donc

$$\rightarrow P(M) = 1 - P(I) - P(T) = 0,1 ;$$

- $P_I(F) = 0,5$, $P_M(F) = 0,25$ et $P_T(F) = 0,6$; donc
 $P_I(H) = 0,5$, $P_M(H) = 0,75$ et $P_T(H) = 0,4$.

D'où l'arbre pondéré représentant l'expérience :



2. On calcule $P(H)$.

- Trois chemins — I — H, — M — H, — T — H mènent à H, donc $P(H)$ est la somme des probabilités des événements associés à ces chemins.

- $$P(H) = P(I \cap H) + P(M \cap H) + P(T \cap H)$$

$$P(H) = P(I) \times P_I(H) + P(M) \times P_M(H) + P(T) \times P_T(H)$$

$$P(H) = 0,08 \times 0,5 + 0,1 \times 0,75 + 0,82 \times 0,4$$
 donc $P(H) = 0,443$.

- 3. Il s'agit de calculer $P_F(I) = \frac{P(I \cap F)}{P(F)}$.

Or, $F = \bar{H}$; d'où $P(F) = 1 - P(H) = 0,557$.

- De plus, $P(I \cap F) = 0,08 \times 0,5 = 0,04$.

$$\text{Donc } P_F(I) = \frac{0,04}{0,557} \approx 0,072.$$

Mise en pratique

- 3 A et B sont deux événements relatifs à une même expérience aléatoire tels que :

$$P(A) = 0,5, P(B) = 0,6 \text{ et } P(A \cup B) = 0,8.$$

Calculez $P(A \cap B)$, $P_A(B)$ et $P_B(A)$.

- 4 A et B sont deux événements relatifs à une même expérience aléatoire tels que :

$$P(A) = 0,4, P_B(A) = 0,3 \text{ et } P(A \cap B) = 0,2.$$

Calculez $P_A(B)$, $P(B)$ et $P(A \cup B)$.

Mise en pratique (suite)

5 A et B sont deux événements d'un même univers tels que :

$$P(A) = \frac{1}{3}, P_A(B) = \frac{1}{4} \text{ et } P_{\bar{A}}(B) = \frac{1}{2}.$$

Calculez $P(A \cap B)$, $P(\bar{A} \cap B)$ et $P(B)$.

6 A et B sont deux événements d'un même univers tels que :

$$P(A) = \frac{1}{2}, P(\bar{B}) = \frac{3}{4} \text{ et } P(A \cap \bar{B}) = \frac{2}{5}.$$

Calculez $P_A(\bar{B})$, $P(\bar{A} \cap \bar{B})$ et $P_{\bar{A}}(\bar{B})$.

7 D'un arbre à un tableau

Une grande entreprise est divisée en deux secteurs notés A et B.

65 % de ses salariés travaillent dans le secteur A. Le directeur des ressources humaines s'intéresse au niveau de stress des employés. Un questionnaire informatisé est proposé de manière anonyme à tous les salariés des deux secteurs.

Cette enquête révèle que dans le secteur A, 20 % du personnel se dit stressé, tandis que dans le secteur B, ce taux est 30 %. On choisit au hasard le questionnaire d'un des employés.

On note S l'événement « L'employé est stressé ».

1. a) Construisez un arbre pondéré représentant l'expérience.

b) Complétez le tableau ci-contre par les probabilités qui conviennent.

	A	B
S		
$\bar{S}$		

2. L'entreprise examine l'opportunité d'installer une salle de repos. Le projet ne sera réalisé que si le taux d'employés stressés dépasse 25 %. L'implantation de la salle aura-t-elle lieu ? Le résultat était-il prévisible ?

8 D'un tableau aux arbres

Le tableau ci-contre indique les résultats d'un sondage sur l'installation d'un parc d'horodateurs, auprès d'un échantillon de personnes fréquentant une ville.

On choisit au hasard une personne de l'échantillon. On considère les événements :

A : « La personne a une opinion positive » ;

H : « La personne habite dans la ville ».

1. Calculez $P(A)$, $P(H)$, $P_A(H)$ et $P_H(A)$.

2. Représentez la situation par un arbre :

a) en commençant par A et $\bar{A}$;

b) en commençant par H et $\bar{H}$.

	H	$\bar{H}$
A	125	175
$\bar{A}$	150	50

9 À la suite d'un sondage effectué à propos de la construction d'un barrage, on estime que :

– 65 % de la population concernée est contre la construction, et parmi ces opposants, 70 % sont des écologistes ;

– parmi les personnes qui ne sont pas opposées à la construction, 20 % sont des écologistes.

On interroge une personne au hasard.

1. Calculez la probabilité qu'elle soit opposée à la construction du barrage et écologiste.

2. Calculez la probabilité qu'elle ne soit pas opposée à la construction du barrage et soit écologiste.

3. Déduisez-en la probabilité qu'une personne interrogée soit écologiste.

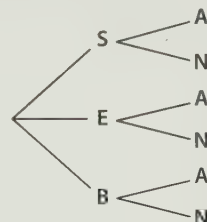
10 Un bijoutier vend des perles de culture pour fabriquer des colliers. Ces perles n'ont que deux couleurs possibles : argent (A) et noir (N).

D'autre part, elles n'ont que trois formes possibles : sphérique (S), équilibrée (E) ou baroque (B).

Dans son stock, 44 % des perles sont équilibrées et 40 % sont baroques. De plus, 60 % des perles sont argentées et, parmi elles, 15 % sont sphériques et la moitié sont baroques.

Le bijoutier choisit une perle au hasard dans son stock.

On se propose de représenter l'expérience par un arbre pondéré du type indiqué, que vous complétez au fur et à mesure.



1. Reproduisez et complétez cet arbre par les probabilités fournies par l'énoncé.

2. a) Quelle est la probabilité de $S \cap A$? de $B \cap A$?

b) Justifiez que :

$$P(S \cap A) + P(E \cap A) + P(B \cap A) = P(A).$$

Déduisez-en $P(E \cap A)$.

c) Calculez, sous forme fractionnaire, $P_S(A)$, $P_E(A)$, $P_B(A)$.

3. Déduisez-en l'arbre complet.

11 Une urne contient cinq boules, trois noires numérotées 1, 2, 3, et deux blanches numérotées 1, 2. On tire successivement deux boules au hasard et sans remise.

1. Calculez les probabilités des événements :

A : « Les boules ont la même couleur » ;

B : « La somme des numéros est 3 ».

2. Calculez $P_B(A)$ et $P_A(B)$.

Étudier l'indépendance de deux événements

- Dans une expérience aléatoire, dire que les événements **A** et **B** sont indépendants signifie :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B).$$
- Si $P(A) \neq 0$, la condition d'indépendance s'écrit aussi : $P_A(B) = P(B)$.
- Si **A** et **B** sont indépendants, alors **A** et $\bar{B}$ le sont aussi, de même que $\bar{A}$ et $\bar{B}$. (**Théorème 2**)

EXERCICE RESOLU C

Un week-end en toute indépendance

Le comité d'entreprise d'une société bretonne souhaite organiser un week-end à Paris.

Une enquête est réalisée auprès des 1 200 employés afin de connaître leur choix en matière de moyen de transport : avion (A), train (T), voiture particulière (V).

On interroge au hasard un employé de cette entreprise.

On définit naturellement les événements F, H, T, A, V. Par exemple :

F est l'événement « L'employé est une femme »

et T est l'événement « L'employé préfère le train ».

Le tableau ci-contre indique les résultats de cette enquête.

	T	A	V	TOTAL
F	468	144	108	720
H	150	96	234	480
TOTAL	618	240	342	1 200

1. Les événements F et T sont-ils indépendants ?
2. Étudiez de même l'indépendance des événements A et F, puis A et H.

► Méthode

1. On compare la probabilité de l'intersection des deux événements et le produit de leurs probabilités.

2. On peut reprendre la méthode précédente, mais on peut aussi en utiliser une autre : on compare la probabilité d'un événement et sa probabilité conditionnelle.

- On applique le théorème 2.

► Solution

1. L'univers est l'ensemble des employés et tous ont la même probabilité d'être interrogés.

$$P(F \cap T) = \frac{468}{1200} = \frac{39}{100};$$

$$P(F) = \frac{720}{1200} = \frac{3}{5} \text{ et } P(T) = \frac{618}{1200} = \frac{103}{200}.$$

$$\text{D'où } P(F) \times P(T) = \frac{309}{1000}.$$

$$\text{Ainsi, } P(F \cap T) \neq P(F) \times P(T).$$

Donc F et T ne sont pas indépendants.

2. $P(F) \neq 0$, donc on compare $P(A)$ et $P_F(A)$.

$$P(A) = \frac{240}{1200} = \frac{1}{5} \text{ et } P_F(A) = \frac{144}{720} = \frac{1}{5};$$

$$\text{donc } P(A) = P_F(A).$$

Ainsi, A et F sont indépendants.

De l'indépendance de A et F, on déduit celle de A et $\bar{F}$ c'est-à-dire de A et H.

► Mise en pratique

12 Une association propose différentes activités à ses 96 adhérents, dont l'aviron et le badminton.

Douze membres s'inscrivent pour l'aviron, trente-deux pour le badminton dont quatre pour les deux. On prend au hasard la fiche d'un adhérent.

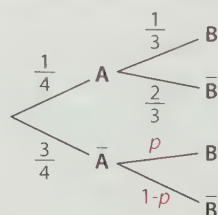
On considère les événements :

A : « L'adhérent est inscrit à l'aviron » ;

B : « L'adhérent est inscrit au badminton ».

1. Les événements A et B sont-ils indépendants ?
2. En est-il de même pour $\bar{A}$ et $\bar{B}$?

13 A et B sont deux événements relatifs à une expérience aléatoire représentée par l'arbre suivant.



Comment choisir la valeur de p pour que les événements A et B soient indépendants ?

14 Questions sur le cours

Complétez les propositions suivantes.

A et B sont deux événements de probabilités non nulles, relatifs à une même expérience aléatoire.

a) $P_A(B) = \dots$

b) $P(A \cap B) = P(A) \times \dots = P(B) \times \dots$

c) Sur l'arbre pondéré qui représente l'expérience, les probabilités conditionnelles inscrites vérifient :

$$P_A(B) + P_A(\bar{B}) = \dots$$

d) Pour tout événement E, les événements $A \cap E$ et $\bar{A} \cap E$ sont tels que $P(A \cap E) + P(\bar{A} \cap E) = \dots$

e) Si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$, alors A et B sont ...

15 Vrai ou faux

Vrai ou faux ? Justifiez votre réponse.

1. On dispose de deux dés cubiques, l'un parfait, l'autre truqué où la probabilité de sortie du 6 est 0,25. On choisit au hasard l'un des deux dés.

On note S « Sortie du 6 », et T « Le dé est truqué ».

a) $P_T(\bar{S}) = 0,75$ b) $P(S) = 0,2$ c) $P_S(T) = 0,6$

2. On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes. On note A « La carte est un as », C « La carte est un cœur » et F « La carte est une figure ».

a) A et C sont indépendants b) $P_F(C) = 0,375$

c) $P_C(\bar{F}) = 0,625$ d) $P_A(\bar{C}) = 0,75$

16 QCM Une seule réponse exacte

Pour chaque affirmation, une seule réponse est exacte. Identifiez-la en justifiant votre réponse.

1. Dans un lycée, il y a 180 élèves en Terminale S. Les filles (F) sont 25 % de plus que les garçons (G).

Le tableau indique leur répartition par spécialité.

	M	PC	SVT
F	35 %	25 %	40 %
G	40 %	35 %	25 %

On choisit un élève de Terminale S au hasard.

La probabilité que l'élève soit :

a) une fille est $\frac{5}{8}$; b) en spécialité SVT est $\frac{1}{3}$

c) un garçon en spécialité M est 0,4 .

2. Une urne contient des boules équiprobables lors d'un tirage. 20 % des boules portent le numéro 1 et sont rouges ; les autres portent le numéro 2 et parmi elles, 10 % sont rouges et les autres sont vertes. On tire une boule au hasard.

a) La probabilité qu'elle soit rouge est 0,2.

b) Si la boule tirée porte le numéro 2, la probabilité qu'elle soit verte est 0,72.

c) Si la boule tirée est rouge, la probabilité qu'elle porte le numéro 1 est $\frac{5}{7}$.

17 QCM Au moins une réponse exacte

Pour chaque affirmation, plusieurs réponses peuvent être exactes. Identifiez-les en justifiant vos réponses.

1. Une urne contient sept boules blanches et trois noires. Un joueur tire au hasard une boule.

– Si elle est blanche, il lance un dé cubique parfait (n° 1 à 6), sinon un dé tétraédrique parfait (n° 1 à 4).

– Il gagne s'il obtient le numéro 1.

B est l'événement « Il tire une boule blanche », N « Il tire une boule noire » et G « Il gagne ». Alors :

a) $P(N \cap G) = \frac{1}{4}$ b) $P(G) = \frac{23}{120}$

c) $P_G(B) = \frac{14}{23}$ d) $P_G(N) = \frac{16}{23}$

2. Un marchand de cycles achète son stock de pneus chez 3 fournisseurs : 30 % chez A, 40 % chez B et le reste chez C. Les fournisseurs B et C garantissent respectivement 95 % et 85 % de leurs pneus sans défaut. Une étude statistique indique que 12,5 % des pneus du stock ont un défaut. Le marchand prend au hasard un pneu dans son stock. La probabilité que le pneu :

a) provienne de A et soit sans défaut est 0,24.

b) provienne de A sachant qu'il a un défaut est 0,48.

c) s'il provient de A, soit sans défaut est 0,9.



18 Choisir son arbre

Une étude statistique sur un groupe de sportifs a permis d'estimer qu'en période de compétition, pour un sportif choisi au hasard dans ce groupe, la probabilité d'être déclaré positif au contrôle antidopage est 0,02.

La prise d'un médicament peut influencer le résultat du contrôle. Ce médicament est pris par 25% des sportifs du groupe. Pour un sportif utilisant ce médicament, la probabilité d'être déclaré positif est 0,05.

On choisit au hasard un sportif du groupe.

On note M l'événement « Il utilise le médicament » et D l'événement « Il est déclaré positif ».

Objectif Calculer la probabilité qu'il soit déclaré positif sachant qu'il n'utilise pas le médicament.

1. Il s'agit d'abord de traduire les données et la question en termes de probabilités. L'univers de l'expérience est le groupe de sportifs et chacun de ces sportifs a la même probabilité d'être choisi. Le texte indique que $P(D) = 0,02$, $P(M) = 0,25$ et $P_M(D) = 0,05$. Il s'agit de calculer $P_{\bar{M}}(D)$.

On pense alors à construire un arbre pondéré en commençant par M et $\bar{M}$, de façon à enchaîner par les probabilités conditionnées par M et par $\bar{M}$.

Représentez l'expérience par cet arbre pondéré.

2. On n'oublie pas que le texte donne la probabilité de D et que cette hypothèse n'a pas été encore utilisée. L'arbre indique que la réalisation de D est obtenue par deux chemins ; il s'agit d'exploiter cette opportunité.

a) Quels sont ces chemins menant à D ?

Indiquez les événements qu'ils représentent.

b) Citez le théorème qui vous permet d'exprimer la probabilité de D en fonction de $P_{\bar{M}}(D)$.

c) Déduisez-en $P_{\bar{M}}(D)$.

Remarque. Une autre approche est possible : on peut utiliser un tableau à double entrée.

$$P(M \cap D) = P(M) \times P_M(D) = 0,0125$$

Après avoir complété le tableau, on

$$\text{calcule } P_{\bar{M}}(D) = \frac{P(M \cap D)}{P(\bar{M})}.$$

	D	$\bar{D}$	
M	0,0125		0,25
$\bar{M}$			
	0,02		1

19 Une suite de parties

Max joue n parties successives sur sa console de jeu. On admet que la probabilité qu'il gagne la première partie est 0,1, et que :

– s'il gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la suivante est 0,8 ;

– s'il perd une partie, la probabilité qu'il gagne la suivante est 0,6.

Pour tout entier $n \geq 1$, on note G_n l'événement « Max gagne la n -ième partie ». On pose $p_n = P(G_n)$.

Objectif Max peut-il espérer, en jouant suffisamment longtemps, avoir trois chances sur quatre de gagner une partie ?

1. On examine le processus sur les deux premières parties. La probabilité que Max gagne la première partie est 0,1, donc la probabilité qu'il la perde est 0,9. L'énoncé incite à utiliser un arbre pondéré pour représenter les deux premières parties.

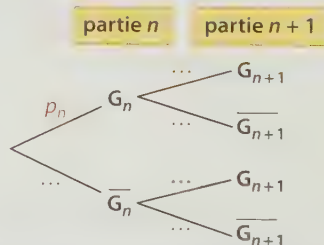
a) Construisez cet arbre pondéré.

b) Vérifiez que $p_2 = 0,62$.

2. Lors de l'enchaînement des différentes parties, la réalisation d'un arbre devient vite fastidieuse.

Une idée est de chercher une relation de récurrence entre la probabilité de gagner la partie $n+1$ et celle de gagner la partie n .

a) Reproduisez puis complétez l'arbre ci-dessous.



b) Déduisez-en que pour tout entier $n \geq 1$,

$$p_{n+1} = 0,2p_n + 0,6.$$

3. Ainsi, (p_n) est une suite récurrente du type $p_{n+1} = ap_n + b$ (voir chapitre 1). Or, il s'agit de comparer, pour n suffisamment grand, p_n et 0,75. D'où l'idée d'introduire la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geq 1$ par $u_n = p_n - 0,75$.

a) Démontrez que la suite (u_n) est géométrique. Précisez son premier terme et sa raison.

b) Pour tout entier $n \geq 1$, déduisez-en le signe de u_n .

c) Concluez quant à la question posée.

Narration de recherche

→ L'objectif n'est pas seulement de résoudre le problème posé : vous devez aussi noter les différentes idées même lorsqu'elles n'ont pas permis de trouver la réponse. Expliquez pourquoi vous avez changé de méthode et ce qui vous a fait avancer, etc.

20 La pièce truquée

Un tricheur a dans sa poche deux pièces de monnaie ; l'une est équilibrée tandis que l'autre est truquée. Pour la pièce truquée, une étude statistique a permis d'établir que Face sort trois fois plus souvent que Pile. Il prend l'une des deux pièces au hasard et il obtient huit fois Face en dix lancers. Quelle est, à 10^{-3} près, la probabilité qu'il ait pris la pièce truquée ?

21 Dur d'oreille

Dans le hall d'une gare, les informations diffusées par haut-parleur sont en général annoncées deux fois. L'objectif est de réduire le risque que l'information ne soit pas perçue. On suppose que pour une personne prise au hasard parmi les passagers, la probabilité qu'elle perçoive l'information la première fois est 0,6. Comparez les résultats des deux modèles suivants.

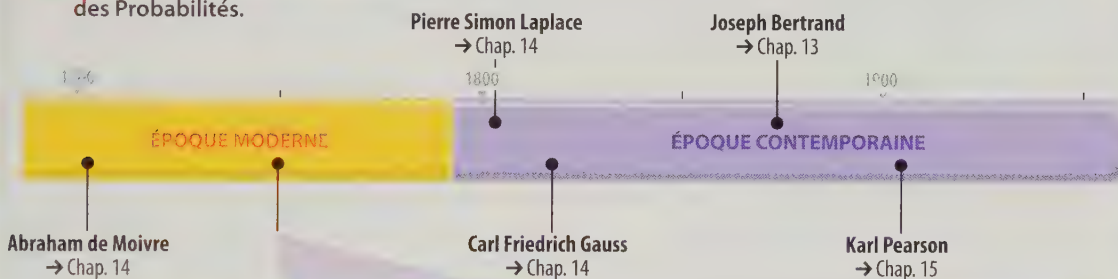
a) Il y a indépendance entre la réaction des passagers à la première annonce et à la deuxième.

b) Lors de la deuxième annonce, les passagers qui n'ont pas compris la première fois tendent l'oreille, de sorte que la probabilité qu'ils perçoivent l'information passe à 0,9.

Chercheurs d'hier

Eux aussi, ils ont
cherché avant de trouver !

→ Voici quelques mathématiciens importants qui ont travaillé dans le domaine de la Statistique et des Probabilités.

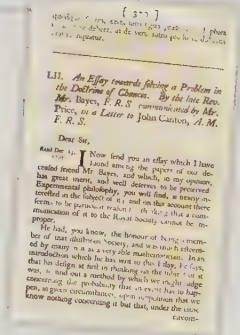


Thomas Bayes
(1702-1761)

Mathématicien britannique et pasteur de l'église presbytérienne, ses découvertes en probabilités ont été résumées dans son *Essay towards solving a problem in the doctrine of chances*, publié après sa mort en 1763.

Ses travaux, prolongés par ceux du Français Laplace, ont permis de définir une méthode de calcul de « la probabilité des causes » : on observe un phénomène qui peut avoir plusieurs causes, comment déterminer la cause la plus probable ?

Des applications modernes exploitent ses idées, notamment en médecine (diagnostic, test clinique) et dans les systèmes d'information (classification automatique dans la lutte contre les spams).



Première page de l'article
« *An Essay towards solving
a Problem in the Doctrine
of Chances* ».

Sur le Web serge.mehl.free.fr/chrono/Bayes.html
jybaudot.fr/Probab/bayes.html

TP

22 Duel : le premier à 5

COMPÉTENCES

TICE

- Boucle conditionnelle.
- Boucle itérative.

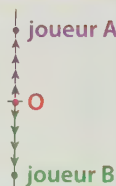
Mathématiques

- Variable aléatoire.
- Statistique : fréquence et moyenne.

Deux joueurs A et B s'affrontent dans un jeu vidéo. Un joueur marque +1 s'il gagne une partie, -1 s'il perd. Le vainqueur du duel est celui qui arrive le premier à 5.

On suppose qu'à chaque partie, le joueur A possède trois chances sur cinq de gagner.

Le déroulement du jeu peut être assimilé au déplacement aléatoire d'un pion sur un axe vertical : au départ, le pion est à l'origine ; si A gagne, le pion monte d'un cran, si B gagne, il descend d'un cran.



OBJECTIFS Simuler le déroulement d'un duel. Estimer la probabilité que le joueur A gagne.

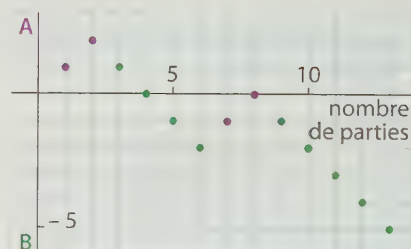
Estimer le nombre moyen de parties lors d'un duel.

A Simulation du jeu

1. Exemple de marche aléatoire

Le graphique ci-contre représente une marche aléatoire associée à un duel.

- Qui a gagné ce duel ? Après combien de parties ?
- Quel est le nombre de parties gagnées par A ?
- Combien de fois le pion est-il repassé par l'origine ? Interprétez ces éventualités.



2. Nombres de parties jouées

On note N la variable aléatoire qui indique le nombre de parties jouées jusqu'à ce qu'il y ait un gagnant.

- Quelle est la plus petite valeur que N peut prendre ? Avec quelle probabilité ?
- Justifiez que N peut prendre une infinité de valeurs.

3. Algorithme de simulation du jeu

Voici un algorithme, à compléter, permettant de représenter un duel et d'indiquer le nombre de parties nécessaires pour obtenir un vainqueur.

- y désigne l'ordonnée du pion ;
- N désigne le nombre de parties jouées.

- Quel est le rôle de la variable h ?
- À quelle condition le duel s'arrête-t-il ? Déduisez-en le critère à inscrire à la ligne 8.

Aide « $a = 0$ ou $b = 0$ » équivaut à « $a \times b = 0$ ».

- Quelle instruction inscrire à la ligne 11 ? à la ligne 17 ?

```

1  VARIABLES
2  h EST_DU_TYPE NOMBRE
3  y EST_DU_TYPE NOMBRE
4  N EST_DU_TYPE NOMBRE
5  DEBUT_ALGORITHME
6  N PREND_LA_VALEUR 0
7  y PREND_LA_VALEUR 0
8  TANT_QUE (.....) FAIRE
9  DEBUT_TANT_QUE
10 h PREND_LA_VALEUR ALGOBOX_ALEA_ENT(1,5)
11 SI (.....) ALORS
12   DEBUT_SI
13   y PREND_LA_VALEUR y+1
14   FIN_SI
15 SINON
16   DEBUT_SINON
17   y PREND_LA_VALEUR .....
18   FIN_SINON
19 N PREND_LA_VALEUR N+1
20 TRACER_POINT (N,y)
21 FIN_TANT_QUE
22 AFFICHER "Le nombre de parties est : "
23 AFFICHER N
24 FIN_ALGORITHME

```

d) Testez cet algorithme plusieurs fois. Existe-t-il toujours un vainqueur du duel ?

Note. Les instructions de la ligne 6 à la ligne 21, privées de la ligne 20 (utilisée pour le graphique), constituent le programme « nombre de parties » de la partie C.

B Fréquence de réalisation de l'événement « A est vainqueur »

On note S_A l'événement « A est vainqueur » lors d'un duel.

On se propose de simuler 10 000 duels et d'afficher la fréquence de réalisation de l'événement S_A .

D'après la loi des grands nombres, la fréquence observée a 95 % de chances d'être une approximation à 10^{-2} près de la probabilité de S_A (notion vue en 2^{de}).

Voici un algorithme, à compléter, qui affiche la fréquence de réalisation de l'événement S_A .

- La variable L est une liste dans laquelle on enregistre les 10 000 résultats d'un duel.
- La variable k est un compteur qu'on incrémente à chacune des 10 000 boucles.
- S est la variable qui indique le nombre de réalisations de l'événement S_A .
- F est la variable qui donne la fréquence de S_A .

1. a) Le bloc (ligne 12 à 24) reprend le programme précédant qui simule un duel.

Complétez les instructions qui manquent.

b) Que signifie l'instruction de la ligne 25 ?

c) Quel est le rôle de l'instruction conditionnelle (ligne 26 à 29) ? Complétez-la.

d) Quelle valeur prend la variable F (ligne 31) ?

2. Testez ce programme. Estimez la probabilité de S_A .

3. Comment modifier l'algorithme pour obtenir une estimation de la probabilité de l'événement S_B , « B est vainqueur » lors d'un duel ?

Peut-on affirmer *a priori* que les événements S_A et S_B sont des événements contraires ?

```

1  VARIABLES
2  L EST_DU_TYPE LISTE
3  k EST_DU_TYPE NOMBRE
4  h EST_DU_TYPE NOMBRE
5  F EST_DU_TYPE NOMBRE
6  S EST_DU_TYPE NOMBRE
7  y EST_DU_TYPE NOMBRE
8  DEBUT_ALGORITHME
9  S PREND_LA_VALEUR 0
10 POUR k ALLANT_DE 1 A 10000
11   DEBUT_POUR
12   y PREND_LA_VALEUR 0
13   TANT_QUE (.....) FAIRE
14     DEBUT_TANT_QUE
15     h PREND_LA_VALEUR ALGOBOX_ALEA_ENT(1,5)
16     SI (.....) ALORS
17       DEBUT_SI
18       y PREND_LA_VALEUR y+1
19     FIN_SI
20     SINON
21       DEBUT_SINON
22       y PREND_LA_VALEUR .....
23     FIN_SINON
24   FIN_TANT_QUE
25   L[k] PREND_LA_VALEUR y
26   SI (y==5) ALORS
27     DEBUT_SI
28     S PREND_LA_VALEUR .....
29   FIN_SI
30   FIN_POUR
31   F PREND_LA_VALEUR .....
32   AFFICHER "La fréquence de S_A est : "
33   AFFICHER F
34 FIN_ALGORITHME

```

C Nombre moyen de parties dans un duel

On se propose de calculer le nombre moyen de parties lors de la simulation de 10 000 duels. On donne ci-contre le programme de cet algorithme.

– L est la liste où on enregistre le nombre N de parties lors d'un duel.

– h, k, y sont les variables utilisées en B.

– T est la variable qui indique le total des termes de la liste L .

– F est la variable qui indique la moyenne du nombre de parties sur les 10 000 duels.

1. Écrivez ce programme avec AlgoBox. Testez-le.

2. Donnez une estimation du nombre moyen de parties durant un duel.

Variables

L (liste) h, k, y, N, T, F (nombres)

Entrée

T reçoit 0

Traitement

Pour k variant de 1 à 10000

Programme « nombre de parties »

Enregistrer N dans $L[k]$

T reçoit $T+L[k]$

Fin pour

F reçoit $T/10000$

Sortie

Afficher « moyenne du nombre de parties : »

Afficher F

Commentaire. On admet que ce nombre moyen est une estimation de l'espérance de la variable aléatoire N .

23 Test de dépistage

Une maladie atteint 10 % d'une population.

Un test de dépistage vise à détecter si un individu est malade.

Ce test devrait être positif si l'individu est malade, négatif sinon. Mais il est imparfait :

– la probabilité qu'un test soit positif sachant que l'individu est sain est 0,008 ;

– la probabilité qu'un test soit négatif sachant que l'individu est malade est 0,02.

On choisit un individu au hasard dans la population. On note :

M l'événement « L'individu est atteint de la maladie » ; T l'événement « Le test est positif ».

On appelle **valeur diagnostique** d'un test la probabilité qu'un individu dont le test est positif soit malade, c'est-à-dire $P_T(M)$. On appelle **fiabilité** d'un test la probabilité $P(M \cap T) + P(\bar{M} \cap \bar{T})$.

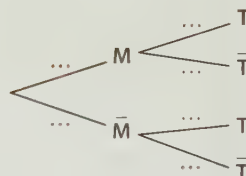
OBJECTIFS Calculer la valeur diagnostique et évaluer la fiabilité du test.

Prouver l'influence de la proportion d'individus malades sur les résultats.

A Étude du test**1. Valeur diagnostique**

a) Reproduisez puis complétez l'arbre pondéré illustrant la situation.

b) Calculez la valeur diagnostique du test.

**2. Fiabilité du test**

Une erreur de test survient :

– soit lorsque l'individu est sain et le test positif (cas d'un « faux positif »),

– soit lorsque l'individu est malade et le test négatif (cas d'un « faux négatif »).

a) Reproduisez puis complétez le tableau ci-contre en indiquant les probabilités.

b) Quelle est la probabilité qu'un individu sur lequel on a pratiqué le test soit un « faux positif » ? Un « faux négatif » ?

c) Calculez la probabilité d'une erreur de test et déduisez-en la fiabilité du test.

	T	$\bar{T}$	
M			
$\bar{M}$			

B Influence de la proportion de malades

On se place dans le cas où la proportion de malades dans la population est x avec $0 < x < 1$.

1. Sur la valeur diagnostique

a) Exprimez la valeur diagnostique, notée $d(x)$, en fonction de x , puis étudiez ses variations sur $]0 ; 1[$.

b) À partir de quelle valeur de x la valeur diagnostique dépasse-t-elle 0,9 ?

2. Sur la fiabilité du test

a) Exprimez la fiabilité du test, notée $f(x)$, en fonction de x .

b) Pour quelles valeurs de x cette fiabilité dépasse-t-elle 0,99 ?

Commentaire. La valeur diagnostique et la fiabilité du test, sur la population étudiée, dépendent de la proportion d'individus malades. Pour une maladie rare, un cas de test positif n'assure pas le diagnostic. Aussi convient-il d'effectuer d'autres tests indépendants. En outre, un dépistage systématique de la population présente l'inconvénient de produire une quantité non négligeable de « faux positifs », ce qui pose des problèmes éthiques.





Des Mathématiques aux SVT

24 Loi d'équilibre génétique

Étant donné un gène possédant un couple d'allèles A et a, on dit qu'une plante est **homozygote** lorsqu'elle contient les deux mêmes allèles sur une paire de chromosomes homologues : elle est alors de génotype AA ou aa.

Une plante est **hétérozygote** lorsqu'elle est de génotype Aa.

Certaines plantes, le lupin par exemple (voir ci-contre), se reproduisent par autogamie (ou autofécondation) : tout se passe pour la descendance comme si l'on fécondait deux plantes de même génotype, chaque chromosome d'une paire étant sélectionné au hasard.



OBJECTIF Étudier la descendance par autogamie d'une plante hétérozygote.

A Générations successives

1. Première génération

Une plante de génotype AA donne par autogamie une plante de génotype AA.

De même, une plante de génotype aa donne une plante aa.

Déterminez à l'aide d'un arbre les probabilités que la descendance de première génération d'une plante de génotype Aa soit une plante de génotype AA, Aa, aa.

2. Générations suivantes

Partant d'une plante hétérozygote (Aa à la génération 0), on constitue, par autogamie, des générations successives. On note $(AA)_n$ l'événement « La plante de la n -ième génération est de génotype AA », et on définit de façon analogue les événements $(Aa)_n$ et $(aa)_n$.

Pour tout entier naturel n , on appelle x_n , y_n et z_n les probabilités respectives des événements $(AA)_n$, $(Aa)_n$ et $(aa)_n$.

a) Quelles sont les valeurs de x_0 , y_0 , z_0 ? Déduisez-en celles de x_1 , y_1 , z_1 .

b) Pour tout entier $n \geq 1$, exprimez les probabilités conditionnelles suivantes :

- $(AA)_{n+1}$ sachant $(AA)_n$
- $(AA)_{n+1}$ sachant $(Aa)_n$
- $(AA)_{n+1}$ sachant $(aa)_n$.

c) Démontrez, en utilisant les résultats précédents, que pour tout entier naturel n :

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{4}y_n \quad \text{et} \quad y_{n+1} = \frac{1}{2}y_n.$$

d) Déduisez-en l'expression de z_{n+1} en fonction de x_n et y_n .

B Évolution dans le temps

1. Conjectures

a) Utilisez votre calculatrice ou un tableur pour déterminer les valeurs (écrites avec six décimales) de x_n , y_n et z_n pour chaque entier n entre 0 et 10.

b) Que pouvez-vous conjecturer sur le comportement des trois suites ?

2. Étude des suites (x_n) , (y_n) , (z_n)

a) Quelle est la nature de la suite (y_n) ? Pour tout entier naturel n , exprimez y_n en fonction de n .

b) Justifiez que : $x_n - x_0 = (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \dots + (x_1 - x_0) = \frac{1}{4}(y_{n-1} + y_{n-2} + \dots + y_0)$.

Déduisez-en, pour tout entier naturel n , l'expression de x_n puis de z_n en fonction de n .

c) Déterminez les limites des suites (x_n) , (y_n) et (z_n) . Interprétez le résultat.

Entraînement

DE TÊTE

25 Le tableau suivant indique la répartition des employés d'une entreprise.

	Cadres	Techniciens	Agents
Femmes	6	13	21
Hommes	7	9	24

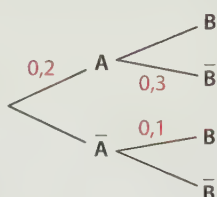
On interroge au hasard un employé.

On note par l'initiale de la catégorie correspondante l'événement « La personne interrogée est... ».

Calculez sous forme fractionnaire les probabilités :

a) $P(H)$ b) $P_C(H)$ c) $P_H(A)$ d) $P_A(F)$

26 A et B sont deux événements relatifs à une expérience aléatoire représentée par l'arbre ci-contre.



Calculez les probabilités :

a) $P(A \cap B)$ b) $P(\bar{A} \cap B)$ c) $P(B)$

27 A et B sont deux événements relatifs à une même expérience aléatoire tels que :

$$P(A) = 0,2, P(B) = 0,1 \text{ et } P(A \cap B) = 0,05.$$

Calculez les probabilités suivantes :

a) $P_B(A)$ b) $P_A(B)$ c) $P(\bar{A} \cap B)$

28 On tire une carte dans un jeu bien battu de trente-deux cartes. On considère les événements :

A : « La carte est un as » ; B : « La carte est un cœur » ;

C : « La carte est rouge ».

Les événements indiqués sont-ils indépendants ?

a) A et B b) A et C c) B et C

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

29 Deux ateliers A et B fabriquent des puces électroniques. Pour une commande de 2 000 pièces, A produit 1 200 puces et B le reste. Une étude a montré que A produit 4 % de puces défectueuses et que B en produit 3 %.

On prélève une puce au hasard dans la commande.

On appelle A l'événement « La puce provient de A »,

B « La puce provient de B » et

D « La puce est défectueuse ».

1. Recopiez puis complétez le tableau des effectifs de la commande.

	D	$\bar{D}$	Total
A			
B			
Total			

2. Calculez sous forme fractionnaire les probabilités suivantes :

a) $P(D)$; $P(A \cap D)$; $P_D(A)$.

b) $P(\bar{D})$; $P(\bar{D} \cap B)$; $P_{\bar{D}}(B)$.

30 Parmi les élèves de terminale scientifique (T) d'un lycée, 42 % ont choisi la spécialité mathématiques (M) et 55 % étudient l'espagnol (E) en langue vivante 2. De plus, 27 % ne font ni espagnol, ni spécialité mathématiques.

On interroge un élève de terminale scientifique au hasard.

1. Réalisez un diagramme du type indiqué, puis inscrivez les probabilités déduites de l'énoncé.



2. a) Calculez la probabilité qu'un élève suivant la spécialité mathématiques étudie l'espagnol.

b) Calculez la probabilité qu'un élève apprenant l'espagnol suive la spécialité mathématiques.

31 Un sondage indique les connexions d'un échantillon d'internautes (I) à trois sites notés A, B, C.

Voici les résultats :

• 50 % visitent le site A, 36 % le site B, 40 % le site C ;

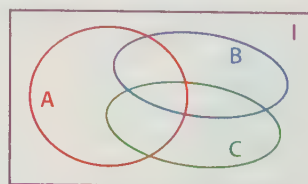
• 12 % visitent les sites A et B, 10 % les sites A et C, 15 % les sites B et C.

• 9 % ne visitent aucun des trois sites.

On interroge au hasard un internaute de l'échantillon.

On désigne par le nom du site l'événement « Cet internaute visite le site ... ».

1. Réalisez un diagramme du type indiqué, puis inscrivez toutes les probabilités déduites de l'énoncé.



2. Calculez et interprétez les probabilités suivantes :

a) $P_A(B)$; $P_A(C)$; $P_A(B \cap C)$; $P_A(B \cup C)$.

b) $P_C(A)$; $P_C(B)$; $P_{A \cap C}(B)$; $P_{A \cup C}(B)$.

Aide

On admet la formule $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$.

FORMULE DES PROBABILITÉS TOTALES

32 Un lot de bulbes de tulipes est composé de deux variétés :

- 60 % de la variété A dont 95 % donneront une fleur ;
- 40 % de la variété B dont 90 % donneront une fleur.

On prend un bulbe au hasard dans ce lot.

On note F l'événement « Le bulbe produit une fleur ».

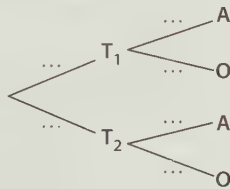
1. Réalisez un tableau à double entrée et complétez-le par les probabilités qui conviennent.

	A	B	
F			
$\bar{F}$			

2. Justifiez le calcul de la probabilité de l'événement F .

33 Un tiroir T_1 contient cinq pièces d'or et cinq pièces d'argent, un tiroir T_2 contient quatre pièces d'or et six pièces d'argent. On choisit au hasard l'un des tiroirs et dans ce tiroir, on prend une pièce au hasard.

1. Recopiez puis complétez l'arbre pondéré qui représente cette expérience aléatoire. Les événements considérés sont désignés de façon naturelle par T_1 , T_2 , O et A .



2. a) Calculez la probabilité de prendre une pièce d'or.

b) On a extrait une pièce d'or.

Quelle est la probabilité qu'elle provienne de T_1 ?

34 Dans un club sportif, 30 % des membres pratiquent le tennis, 60 % sont des hommes et parmi eux, 55 % ne jouent pas au tennis.

On interroge au hasard un membre de ce club.

Quelle est la probabilité, si c'est une femme, qu'elle ne pratique pas le tennis ?

35 Le personnel d'un hôpital est réparti entre trois catégories : médecins (M), soignants (S) et personnels administratifs ou techniques (AT).

- 12 % sont des médecins et 71 % des soignants ;
- 67 % des médecins sont des hommes et 92 % des soignants sont des femmes.

On interroge au hasard un membre du personnel.

1. Quelle est la probabilité que la personne interrogée soit une femme soignante ? Une femme médecin ?

2. On sait que 80 % du personnel est féminin.

a) Calculez la probabilité que la personne interrogée soit une femme AT.

b) Déduisez-en la probabilité, à 10^{-3} près, que la personne interrogée soit une femme sachant que cette personne est dans la catégorie AT.

36 Une école d'ingénieurs organise la sélection de ses futurs étudiants de la manière suivante :

- après examen de leur dossier scolaire, 15 % des candidats sont admis directement ;
- tous les autres candidats passent une épreuve écrite dont le taux de réussite est estimé à 60 % ;
- tous les candidats ayant réussi l'épreuve écrite sont convoqués pour passer une épreuve orale. Ceux qui réussissent l'épreuve orale sont alors admis.

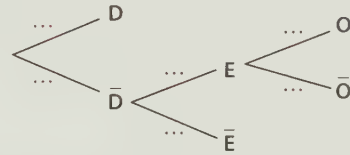
On estime que les candidats ont une chance sur trois de réussir l'épreuve orale.

On choisit un candidat au hasard.

On considère les événements suivants :

- D : « Le candidat est admis sur dossier » ;
- E : « Le candidat passe et réussit l'épreuve écrite » ;
- O : « Le candidat passe et réussit l'épreuve orale » ;
- A : « Le candidat est admis ».

1. Recopiez puis complétez l'arbre pondéré décrivant les différentes étapes de la sélection.



2. Calculez les probabilités $P(E)$ et $P(O)$.

3. Justifiez que la probabilité que le candidat soit admis est $P(A) = 0,32$.

4. Parmi les candidats admis, quelle est la proportion de ceux qui ont été admis sur dossier ?

INDÉPENDANCE ET CONDITIONNEMENT

37 A et B sont deux événements indépendants relatifs à une même expérience aléatoire tels que :

$$P(A) < P(B), P(A \cap B) = 0,4 \text{ et } P(A \cup B) = 0,9.$$

Déterminez $P(A)$ et $P(B)$.

38 Un dé cubique truqué est tel que la probabilité de sortie d'un numéro est proportionnelle à ce numéro.

On lance ce dé et on considère les événements :

- A : « Le numéro est pair » ;
- B : « Le numéro est supérieur ou égal à 3 » ;
- C : « Le numéro obtenu est 3 ou 4 ».

1. a) Calculez les probabilités de A, B, C.

b) Calculez la probabilité conditionnelle $P_A(B)$.

2. Les événements A et B sont-ils indépendants ?

Même question pour les événements A et C.

39 Condition d'indépendance

Une urne contient cinq boules blanches et cinq boules noires. On en prélève n ($n \geq 2$) au hasard, successivement et avec remise.

1. a) Calculez les probabilités des événements :

- « Toutes les boules tirées sont de la même couleur » ;
- « On obtient exactement une boule blanche ».

b) On considère les événements :

A : « On obtient des boules des deux couleurs » ;

B : « On obtient au plus une boule blanche ».

Déduisez-en les probabilités suivantes :

$$P(A \cap B) = \frac{n}{2^n}, P(A) = 1 - \frac{1}{2^{n-1}}, P(B) = \frac{n+1}{2^n}.$$

2. Prouvez que A et B sont indépendants si, et seulement si, $2^{n-1} = n+1$.

3. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier $n \geq 2$ par $u_n = 2^{n-1} - (n+1)$.

a) Calculez u_2, u_3, u_4 .

b) Prouvez que la suite (u_n) est strictement croissante.

4. Déduisez-en la valeur de l'entier naturel n pour que les événements A et B soient indépendants.

40 Transmission de l'asthme

En France, les statistiques font apparaître que parmi les adultes, environ 4 % des hommes et 5 % des femmes sont asthmatiques. Dans la population, on considère l'ensemble des couples homme-femme.

Dans cet exercice, les résultats seront arrondis, si nécessaire, à 10^{-3} près.

1. Étude de l'état d'asthme du couple

On choisit un couple au hasard. On note H l'événement « L'homme est asthmatique » et F « La femme est asthmatique ». On admet que les événements F et H sont indépendants.

a) Recopiez puis complétez le tableau de probabilités ci-contre.

	F	$\bar{F}$	
H			
$\bar{H}$			

b) Déduisez-en la probabilité de chacun des événements suivants concernant les deux adultes du couple :

A : « Aucun n'est asthmatique » ;

B : « Un seul est asthmatique » ;

C : « Les deux sont asthmatiques ».

2. Transmission de l'asthme au premier enfant

Les études actuelles montrent que :

- si aucun des deux parents n'est asthmatique, la probabilité que leur enfant soit asthmatique est 0,1 ;
- si un seul des deux parents est asthmatique, la probabilité que leur enfant soit asthmatique est 0,3 ;
- si les deux parents sont asthmatiques, la probabilité que leur enfant soit asthmatique est 0,5.

On note E l'événement « Le premier enfant du couple est asthmatique ».

a) Construisez un arbre illustrant cette situation.

b) Calculez $P(E)$.

c) Calculez les probabilités conditionnelles $P_E(A)$ et $P_E(\bar{A})$. Interprétez ces deux résultats.

d) Quelle est la probabilité qu'un enfant non asthmatique ait au moins l'un de ses deux parents asthmatique ?

42 BAC Suite et probabilité

Avant le début des travaux de construction d'une autoroute, une équipe d'archéologie préventive procède à des sondages successifs en des points régulièrement espacés sur le terrain.

Si le n -ième sondage donne lieu à la découverte de vestiges, il est dit positif.

On désigne par V_n l'événement « Le n -ième sondage est positif » et on note p_n sa probabilité.

L'expérience acquise au cours de ce type d'investigation permet de prévoir que :

- si un sondage est positif, la probabilité que le suivant soit aussi positif est 0,6 ;
- si un sondage est négatif, la probabilité que le suivant soit aussi négatif est 0,9.

On suppose que le premier sondage est positif c'est-à-dire $p_1 = 1$.

1. Calculez les probabilités des événements :

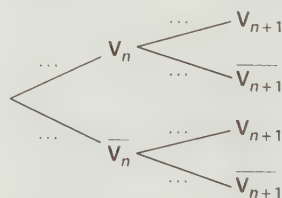
A : « Les deuxième et troisième sondages sont positifs » ;

B : « Les deuxième et troisième sondages sont négatifs ».

2. Calculez la probabilité p_3 que le troisième sondage soit positif.

3. On désigne par n un entier naturel tel que $n \geq 2$.

Recopiez puis complétez l'arbre ci-dessous en fonction des données de l'énoncé.



4. Prouvez que pour tout entier $n \geq 1$,

$$p_{n+1} = 0,5p_n + 0,1.$$

5. On note u la suite définie pour tout entier $n \geq 1$ par :

$$u_n = p_n - 0,2.$$

a) Démontrez que u est une suite géométrique dont vous préciserez le premier terme et la raison.

b) Exprimez p_n en fonction de n .

c) Calculez et interprétez la limite de la suite (p_n) .

42 Suite double et probabilité

Laura débute un jeu dans lequel elle a autant de chance de gagner que de perdre la première partie.

On admet que si elle gagne une partie, la probabilité qu'elle gagne la suivante est 0,6 ; si elle perd une partie, la probabilité qu'elle perde la suivante est 0,7.

Pour tout entier $n \geq 1$, on note G_n l'événement « Laura gagne la n -ième partie ».

1. Calculez les probabilités $P(G_2)$ et $P(\overline{G_2})$.

2. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose :

$$x_n = P(G_n) \text{ et } y_n = P(\overline{G_n}).$$

Prouvez que pour tout entier $n \geq 1$:

$$\begin{cases} x_{n+1} = 0,6x_n + 0,3y_n \\ y_{n+1} = 0,4x_n + 0,7y_n \end{cases}$$

3. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose :

$$v_n = x_n + y_n \text{ et } w_n = 4x_n - 3y_n.$$

a) Prouvez que la suite (v_n) est constante.

b) Démontrez que la suite (w_n) est géométrique puis exprimez w_n en fonction de n .

4. a) Pour tout entier $n \geq 1$, exprimez x_n en fonction de n .

b) Prouvez que la suite (x_n) converge vers un nombre que vous préciserez. Interprétez ce résultat.

43 Un sac contient dix jetons équiprobables au tirage : sept blancs numérotés de 1 à 7, et trois noirs numérotés de 1 à 3. On prélève au hasard, successivement et sans remise deux jetons de l'urne.

1. a) Calculez la probabilité de l'événement D :

« Tirer deux jetons blancs ».

b) Calculez la probabilité de l'événement I :

« Tirer deux jetons dont les numéros sont impairs ».

c) Les événements D et I sont-ils indépendants ?

2. Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de jetons blancs obtenus lors de ce tirage.

a) Déterminez la loi de probabilité de X.

b) Quelle est l'espérance de X ?

44 LOGIQUE Implication

A et B sont deux événements relatifs à une même expérience aléatoire, avec $0 < P(A) < 1$ et $0 < P(B) < 1$.

Les implications $(Q_1) \Rightarrow (Q_2)$ sont-elles vraies ?

a) (Q_1) : A est inclus dans B ; (Q_2) : $P_A(B) = 1$.

b) (Q_1) : A et B sont incompatibles.

(Q_2) : $P(B) = (1 - P(A))P_{\overline{A}}(B)$.

c) (Q_1) : A et B sont indépendants.

(Q_2) : $P(\overline{A} \cap \overline{B}) = P_{\overline{A}}(\overline{B}) \times P_{\overline{B}}(\overline{A})$.

d) (Q_1) : A et B sont indépendants.

(Q_2) : $P(\overline{A} \cup \overline{B}) = (1 - P(A))(1 - P(B))$.

EXERCICES DE SYNTHÈSE**45 BAC Test de dépistage**

Les résultats seront donnés sous forme décimale en arrondissant à 10^{-4} près.

Dans un pays, 2 % de la population est contaminée par un virus.

A. On dispose d'un test de dépistage de ce virus qui a les propriétés suivantes :

– la probabilité qu'une personne contaminée ait un test positif est 0,99 (sensibilité du test) ;

– la probabilité qu'une personne non contaminée ait un test négatif est 0,97 (spécificité du test).

On fait passer ce test à une personne choisie au hasard dans cette population.

On note V l'événement « La personne est contaminée par le virus » et T l'événement « Le test est positif ».

1. Traduisez la situation à l'aide d'un arbre pondéré.

2. Démontrez que la probabilité que le test soit positif est 0,0492.

3. a) Justifiez par le calcul la phrase suivante :

« Si le test est positif, il y a environ 40 % de chances que la personne soit contaminée ».

b) Déterminez la probabilité qu'une personne ne soit pas contaminée sachant que son test est négatif.

B. On choisit successivement et au hasard dix personnes de la population.

On considère que les choix sont indépendants.

On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de personnes contaminées parmi ces dix personnes.

1. Justifiez que X suit une loi binomiale dont vous précisez les paramètres.

2. Calculez la probabilité qu'il y ait au moins deux personnes contaminées parmi les dix.

46 BAC La marche de l'empereur

Dans un zoo, l'unique activité d'un manchot est l'utilisation d'un bassin aquatique équipé d'un sautoir pour plonger et d'un toboggan.

On a observé que si un manchot choisit :

– le sautoir, la probabilité qu'il le reprenne est 0,8 ;

– le toboggan, la probabilité qu'il le reprenne est 0,3.

Lors du premier passage, les deux équipements ont la même probabilité d'être choisis.

Pour tout entier $n \geq 1$, on considère les événements :

S_n : « Le manchot utilise le sautoir lors de son n -ième passage » ;

T_n : « Le manchot utilise le toboggan lors de son n -ième passage ».

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $u_n = P(T_n)$.

1. a) Vérifiez que $P(T_2) = 0,25$.

b) Recopiez puis complétez l'arbre ci-contre.

c) Démontrez que pour tout entier $n \geq 1$:

$$u_{n+1} = 0,1u_n + 0,2.$$

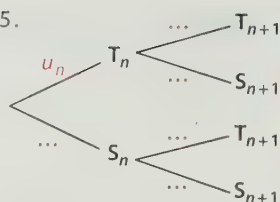
d) À l'aide d'une calculatrice, indiquez une conjecture concernant la limite de la suite (u_n) .

2. On considère la suite (v_n) définie pour tout entier $n \geq 1$ par $v_n = u_n - \frac{2}{9}$.

a) Prouvez que la suite (v_n) est géométrique. Précisez sa raison et son premier terme.

b) Exprimez v_n puis u_n en fonction de n .

c) Calculez la limite de la suite (u_n) . Ce résultat permet-il de valider la conjecture du 1. d) ?



AVEC LES TICE

47 Simulation et probabilités

Deux pièces A et B sont telles que lors d'un lancer, A donne Face avec une probabilité de 0,4 et B avec une probabilité de 0,6. On considère l'expérience suivante :

- un joueur choisit au hasard une pièce et la lance ;
- s'il obtient Face, il la relance ; s'il obtient Pile, il change de pièce puis lance cette dernière.

Un joueur procède à k lancers successifs.

Pour tout entier n ($1 \leq n \leq k$), on note :

A_n l'événement « On utilise la pièce A lors du n -ième lancer » et F_n l'événement « On obtient Face lors du n -ième lancer ». On pose : $a_n = P(A_n)$ et $u_n = P(F_n)$.

L'objectif est de simuler 1 000 expériences de ce type dans le cas de dix lancers successifs ($k = 10$).

À partir du résultat, il s'agira de conjecturer le comportement des suites (a_n) et (u_n) .

Protocole de simulation

- Choix de la pièce initiale : soit A, soit B.
- Résultat d'un lancer :
 - Pièce A : on simule le lancer par le choix au hasard d'un entier entre 1 et 5. Les entiers 1 et 2 correspondent à Face, les entiers 3, 4, 5 à Pile.
 - Pièce B : on procède de même, mais les entiers 1, 2, 3 correspondent à Face, et 4, 5 à Pile.
- Codage d'un résultat : Face codé 1 et Pile codé 0.

1. Simulation avec le tableur Calc

a) Ouvrez une feuille de calcul du type indiqué :

	A	B	C	D	E	F
1	Expérience	Pièce initiale	Lancer 1	Lancer 2		

En colonne A, on numérote les expériences.

En colonne B, on choisit la pièce initiale.

Aide En B2 : `=SI(ALEA.ENTRE.BORNES(1;2)=1;"A";"B")`

b) Simulation des lancers

On distingue deux phases : d'abord le choix de la pièce, puis le résultat du lancer de cette pièce.

• Lancer 1

– En C2, on recopie le choix de la pièce B2.

– En D2, on simule le résultat selon le protocole.

`=SI(((C2="A")ET(ALEA.ENTRE.BORNES(1;5)<=2)) OU ((C2="B")ET(ALEA.ENTRE.BORNES(1;5)<=3));1;0)`

• Lancer 2

La pièce lancée dépend du résultat du lancer 1.

Pour « A et Face » ou « B et Pile », on lance la pièce A, sinon on lance la pièce B.

– En E2, on utilise donc l'instruction :

`=SI(((C2="A")ET(D2=1))OU((C2="B")ET(D2=0));"A";"B")`

– En F2, le résultat du lancer se calcule comme pour le lancer 1. Recopiez donc la cellule D2.

• Lancers suivants

Le processus est enclenché, il suffit de recopier vers la droite la plage [E2:F2] jusqu'en V2. Vous obtenez les dix lancers réalisant une simulation de l'expérience 1.

• Échantillon de 1 000 expériences

Sélectionnez la plage de l'expérience 1, [A2:V2], et recopiez-la vers le bas jusqu'au rang 1 000.

2. Calcul des fréquences de réalisation

a) Collectez les résultats de cet échantillon en affichant les fréquences de A_n et F_n .

Aide Utilisez l'instruction `NB.SI(plage;critère)`.

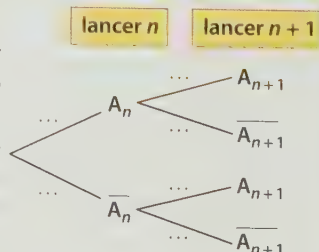
Affichez la fréquence de A1 en C1005 et celle de F1 en D1006. Recopiez [C1005:D1006] jusqu'en [U1005:V1006].

	A	B	C	D	E	F
1003						
1004		Lancers	La 1		La 2	
1005	Fréquences	Pièce A_n				
1006		Face F_n				

b) Simulez sur de nouveaux échantillons de taille 1 000 (), et conjecturez alors le comportement des suites des fréquences de A_n et F_n .

3. Démonstration

a) Pour tout entier $n \geq 1$, complétez l'arbre illustrant le choix de la pièce lors de deux lancers consécutifs. Déduisez-en l'expression de a_{n+1} en fonction de a_n .



Quelle est la nature de la suite (a_n) ?

b) De même, représentez par un arbre l'expérience de rang $n \geq 1$, en utilisant les événements A_n et F_n .

Déduisez-en l'expression de u_n en fonction de a_n .

Quelle est la nature de la suite (u_n) ?

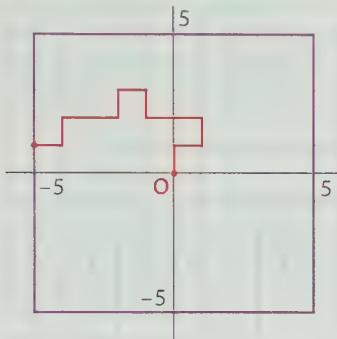
c) Ces résultats sont-ils en accord avec le comportement observé des fréquences de A_n et F_n ?

48 ALGORITHMIQUE Marche aléatoire

Un point M peut se déplacer sur un quadrillage, d'un pas (c'est-à-dire d'une unité) dans chacune des directions.

Les déplacements possibles se font avec les probabilités suivantes :

0,2 (droite) ; 0,3 (gauche) ; 0,4 (haut) ; 0,1 (bas).



Au départ, M est en O. Il se déplace jusqu'à ce qu'il atteigne le bord du carré centré en O, de côté 10.

On note N la variable aléatoire qui indique le nombre de pas effectués.

On se propose d'utiliser un algorithme pour calculer des valeurs prises par N, puis pour estimer le nombre moyen de pas nécessaires.

Protocole

On code 1 un déplacement d'un pas vers la droite, 2 vers la gauche, 3 vers le haut et 4 vers le bas.

Par exemple, la marche représentée ci-dessus se code : 313223242242

Chaque déplacement se traduit par une relation sur les coordonnées $(x ; y)$ du point M.

Code	Déplacement	Relation
1	1 pas vers la droite	x devient $x + 1$
2	1 pas vers la gauche	x devient $x - 1$
3	1 pas vers le haut	y devient $y + 1$
4	1 pas vers le bas	y devient $y - 1$

1. Justifiez que M atteint le bord du carré si, et seulement si, $(x - 5)(x + 5)(y - 5)(y + 5) = 0$.

2. En utilisant cette condition, programmez avec Algo-Box un algorithme, appelé « Nombre de pas », qui indique

le nombre de pas nécessaires pour que M atteigne le bord du carré. (Voir la partie A de l'exercice 22, page 362.)

Testez cet algorithme.

3. On se propose de simuler 10 000 marches aléatoires du point M pour estimer le nombre moyen de pas nécessaires pour que M atteigne les bords du carré.

a) Programmez cette simulation. (Voir la partie C de l'exercice 22.)

Testez cet algorithme.

b) Donnez une estimation du nombre moyen de pas.

Prendre toutes les initiatives

49 Une étude statistique du service de maintenance d'une entreprise, concernant les pannes sur la chaîne de production, a montré que :

- la probabilité qu'il n'y ait pas de panne mais que l'alarme se déclenche est 0,002 ;
- la probabilité qu'il y ait une panne et que l'alarme ne se déclenche pas est 0,003 ;
- la probabilité qu'il y ait une panne est 0,04.

Quelle est la probabilité, s'il y a une panne, que l'alarme se déclenche ?

50 Quatre urnes U_1, U_2, U_3, U_4 contiennent chacune quatre boules.

Pour tout entier $k, 1 \leq k \leq 4$, l'urne U_k contient k boules blanches, les autres étant noires. On choisit une urne au hasard, puis une boule dans cette urne.

Quelle est la probabilité d'obtenir une boule blanche ?

51 Dans un lot de 100 pièces de monnaie, toutes de même apparence, ont été mélangées soixante pièces équilibrées avec quarante pièces non équilibrées.

La probabilité d'obtenir Face avec une pièce non équilibrée est 0,75.

On prend une pièce au hasard et on la lance.

Quelle est la probabilité, si l'on obtient Face, que la pièce soit équilibrée ?

52 Un joueur en ligne se confronte régulièrement à un adversaire lors de plusieurs parties successives.

Il a constaté que :

- il avait une chance sur deux de remporter la première partie ;
- lorsqu'il gagne une partie, il a 20 % de chances de perdre la suivante ;
- lorsqu'il perd une partie, il a 40 % de chances de perdre la suivante.

Évaluez ses chances de succès à la longue.

Le jour du BAC

53 Travail en autonomie

→ Rédigez la solution de cet exercice en vous aidant du guide.



Sur le Web

Retrouvez le corrigé de cet exercice sur le site www.transmathlycee.net/eleve-TermS

A. On dispose d'un dé cubique parfait A qui possède une face verte, deux noires et trois rouges. Une première expérience consiste à lancer deux fois de suite ce dé.

On note la couleur de la face obtenue à chaque lancer.

1. a) On désigne par C l'événement « Au terme des deux lancers, les deux faces ont la même couleur ».

Calculez $P(C)$.

b) Calculez la probabilité que les deux faces aient des couleurs différentes.

2. À l'issue d'un jeu, les deux faces obtenues sont de la même couleur.

Quelle est la probabilité que les deux faces soient vertes ?

B. On dispose d'un second dé cubique parfait B présentant quatre faces vertes et deux faces noires.

Voici une nouvelle expérience. On lance le dé B :

– si la face est verte, on relance B et on note la couleur obtenue ;

– sinon, on lance le dé A et on note la couleur obtenue.

1. Calculez la probabilité d'obtenir deux faces vertes.

2. Quelle est la probabilité d'obtenir une face verte au deuxième lancer ?

Analyser l'énoncé

Le protocole de cette expérience indique la succession de deux épreuves identiques et indépendantes (lancer d'un dé parfait).

Analyser l'énoncé

Une issue est un couple de couleurs $(C_1 ; C_2)$ obtenues lors des deux lancers. Sa probabilité est le produit des probabilités de chaque résultat.

Analyser l'énoncé

Le protocole de cette nouvelle expérience indique que le second lancer est conditionné par le résultat du premier lancer.

D'où la mobilisation des connaissances sur les probabilités conditionnelles.

Guide

A. 1. a) La répétition, dans les mêmes conditions, d'une épreuve peut être représentée par un arbre.

Vous pouvez utiliser cette opportunité, ou bien lui préférer une représentation en tableau.

N'oubliez pas qu'il y a trois couleurs possibles.

b) Que représente l'événement indiqué par rapport à l'événement C ? Déduisez-en le résultat.

2. L'événement C est réalisé. Il s'agit donc de calculer une probabilité conditionnelle. Revenez à la définition.

B. 1. L'enchaînement des deux lancers peut être représenté par un arbre pondéré.

Veillez à bien utiliser les résultats de la première partie dans le cas où on lance le dé A.

Repérez le chemin qui conduit à la réalisation de l'événement indiqué.

2. L'obtention d'une face verte au second lancer est conditionnée par la couleur sortie lors du premier. Pensez à utiliser la formule des probabilités totales.

ZOOM sur la rédaction

Indiquez le type de représentation que vous utilisez et justifiez le calcul de la probabilité demandée.

ZOOM sur la rédaction

La réalisation de l'arbre doit être soignée. Son utilisation a valeur de preuve, ce qui ne vous dispense pas de bien préciser les règles ou théorèmes utilisés.

ZOOM sur la rédaction

Explicitez, dans cette situation, la formule des probabilités totales.

54 ROC Restitution organisée des connaissances

Prérequis : On rappelle que deux événements A et B sont indépendants pour la probabilité P si, et seulement si, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

1. Démonstration

On considère deux événements A et B associés à une même expérience aléatoire.

a) Démontrez que $P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A})$.

b) Démontrez que si les événements A et B sont indépendants pour la probabilité P, alors les événements $\bar{A}$ et B le sont aussi.

2. Application

Chaque matin de classe, Stéphane peut être victime de deux événements indépendants :

R : « Il n'entend pas son réveil sonner » ;

S : « Son scooter mal entretenu tombe en panne ».

Il a observé que chaque jour de classe, la probabilité de R est égale à 0,1 et celle de S est 0,05. Lorsqu'au moins l'un des événements se produit, Stéphane est en retard au lycée, sinon il est à l'heure.

a) Calculez la probabilité qu'un jour de classe donné, Stéphane entende son réveil sonner et que son scooter tombe en panne.

b) Calculez la probabilité que Stéphane soit à l'heure au lycée un jour de classe donné.

c) Au cours d'une semaine, Stéphane se rend cinq fois au lycée. On admet que le fait qu'il entende son réveil sonner un jour de classe donné n'influe pas sur le fait qu'il l'entende ou non les jours suivants.

Quelle est la probabilité (arrondie à trois décimales) que Stéphane entende le réveil sonner au moins quatre fois au cours d'une semaine ?

55 Vrai ou faux

Vous justifierez vos réponses. La calculatrice est interdite.

On dispose de quatre urnes numérotées de 1 à 4, et composées ainsi :

- urne U_1 : 1 boule bleue et 3 boules rouges ;
- urne U_2 : 2 boules bleues et 4 boules rouges ;
- urne U_3 : 3 boules bleues et 5 boules rouges ;
- urne U_4 : 6 boules rouges.

Un joueur choisit une urne au hasard, puis prélève une boule au hasard de cette urne. Il n'est gagnant que s'il tire une boule bleue. On désigne par G l'événement « Le joueur gagne » et par U_i ($1 \leq i \leq 4$) l'événement « Le joueur choisit l'urne U_i ».

a) $P_{U_1}(G) = \frac{2}{3} P_{U_3}(G)$

b) $P(G) = \frac{9}{8}$

c) $P(U_1) = \frac{1}{6}$

d) $P_{U_2}(G) = P_G(U_2)$

D'après Concours FESIC

56 BAC QCM

Chaque question comporte quatre réponses, une seule est exacte. Indiquez laquelle en justifiant.

1. Une urne contient cinq boules noires et trois boules rouges, équiprobables au tirage.

On extrait au hasard, successivement et sans remise trois boules de l'urne. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules noires et une rouge ?

a) $\frac{75}{512}$ b) $\frac{13}{56}$ c) $\frac{15}{65}$ d) $\frac{15}{28}$

2. Au cours d'une épidémie de grippe, on vaccine le tiers de la population. Parmi les grippés, un sur dix est vacciné. La probabilité qu'une personne choisie au hasard dans la population soit grippée est 0,25.

Quelle est la probabilité, pour un individu vacciné de cette population, de contracter la grippe ?

a) $\frac{1}{120}$ b) $\frac{3}{40}$ c) $\frac{1}{12}$ d) $\frac{4}{30}$

3. A et B sont deux événements indépendants relatifs à une même expérience aléatoire de loi de probabilité P.

$P(A \cup B) = \frac{4}{5}$ et $P(\bar{A}) = \frac{3}{5}$. Donc la probabilité de B est :

a) $\frac{2}{5}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{3}{5}$ d) $\frac{1}{2}$

57 BAC L'affaire est dans le sac

On considère des sacs de billes $S_1, S_2, S_3, \dots$ tels que S_1 contient trois billes jaunes et deux vertes, et chacun des suivants $S_2, S_3, \dots$ contient deux billes jaunes et deux vertes. Le but de l'exercice est d'étudier l'évolution des tirages successifs d'une bille de ces sacs, effectués de la manière suivante :

- on tire au hasard une bille de S_1 ;
- on place cette bille dans S_2 , puis on tire au hasard une bille dans S_2 ;
- on place alors cette bille dans S_3 , puis on tire au hasard une bille dans S_3 ; etc.

Pour tout entier $n \geq 1$, on note E_n l'événement « La bille tirée dans S_n est verte » et $P(E_n)$ sa probabilité.

1. a) D'après l'énoncé, donnez les valeurs de $P(E_1)$, $P_{E_1}(E_2)$, $P_{\bar{E}_1}(E_2)$. Déduisez-en la valeur de $P(E_2)$.

b) À l'aide d'un arbre pondéré, exprimez $P(E_{n+1})$ en fonction de $P(E_n)$.

2. On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_1 = 0,4 \\ u_{n+1} = 0,2u_n + 0,4 \end{cases} \text{ pour tout entier } n \geq 1.$$

a) Démontrez que la suite (u_n) est majorée par 0,5.

b) Démontrez que la suite (u_n) est croissante.

c) Justifiez que la suite (u_n) est convergente et précisez sa limite.

3. a) À l'aide des résultats précédents, indiquez comment varient les probabilités $P(E_n)$.

b) Pour quelles valeurs de l'entier naturel n a-t-on :

$$0,49999 \leq P(E_n) \leq 0,5 ?$$

Pour aller plus loin

58 Tirages conditionnés

On considère trois urnes U_1, U_2, U_3 .

U_1 contient deux boules noires et trois rouges ;

U_2 contient une boule noire et quatre rouges ;

U_3 contient trois boules noires et quatre rouges.

Une expérience consiste à tirer au hasard une boule de U_1 et une boule de U_2 , à les mettre dans U_3 , puis à tirer au hasard une boule de U_3 .

Pour i prenant les valeurs 1, 2, 3, on désigne par N_i l'événement « On tire une boule noire de l'urne U_i ».

De même, on définit l'événement R_i : « On tire une boule rouge de l'urne U_i ».

1. Représentez par un arbre pondéré cette expérience aléatoire.

Aide

Sur un chemin à trois branches du type $A \rightarrow B \rightarrow C$, on inscrit successivement les probabilités $P(A)$, $P_A(B)$, $P_{A \cap B}(C)$.

2. a) Calculez les probabilités des événements :

$$N_1 \cap N_2 \cap N_3 \quad \text{et} \quad N_1 \cap R_2 \cap N_3.$$

b) Déduisez-en la probabilité de $N_1 \cap N_3$.

c) Calculez de même la probabilité de $R_1 \cap N_3$.

3. Déduisez de la question précédente la probabilité de l'événement N_3 .

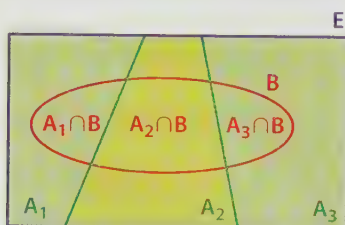
4. Les événements N_1 et N_3 sont-ils indépendants ?

5. Sachant que la boule tirée dans U_3 est noire, quelle est la probabilité que la boule tirée dans U_1 soit rouge ?

59 Formule de Bayes

On considère trois événements A_1, A_2, A_3 , de probabilités non nulles, relatifs à une expérience aléatoire. Ces événements sont deux à deux incompatibles et ont pour réunion l'univers E .

B est un événement de probabilité non nulle.



1. Démonstration

a) Écrivez la formule des probabilités totales qui permet de calculer la probabilité de B .

b) Déduisez-en la formule dite de Bayes :

$$P_B(A_1) = \frac{P(A_1) \times P_{A_1}(B)}{P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + P(A_3) \times P_{A_3}(B)}.$$

2. Application

Une entreprise fait fabriquer des paires de chaussettes auprès de trois fournisseurs A_1, A_2, A_3 .

Toutes ces paires de chaussettes sont regroupées en un stock unique. La moitié du stock vient du fournisseur A_1 , le tiers de A_2 et le reste de A_3 .

Une étude statistique a montré que :

- 5 % des paires provenant de A_1 ont un défaut ;
- 1,5 % des paires provenant de A_2 ont un défaut ;
- sur l'ensemble du stock, 3,5 % des paires de chaussettes ont un défaut.

On prélève au hasard une paire de chaussettes dans le stock de l'entreprise.

Pour tout entier i entre 1 et 3, on appelle A_i l'événement « La paire provient du fournisseur A_i » et D l'événement « La paire présente un défaut ».

Les résultats seront donnés sous forme fractionnaire.

a) Calculez les probabilités : $P(A_1 \cap D)$ et $P(A_2 \cap D)$.

b) Déduisez-en $P(A_3 \cap D)$, puis $P_{A_3}(D)$.

c) Utilisez la formule de Bayes pour calculer la probabilité que la paire provienne du fournisseur A_1 sachant qu'elle a un défaut.

Commentaire. L'événement D dépend des événements A_1, A_2, A_3 . La formule de Bayes permet le calcul de $P_{D_0}(A_i)$, c'est-à-dire la probabilité de la cause A_i sachant que la réalisation de D est assurée. De nos jours, cette formule de calcul des probabilités des causes trouve de nombreuses applications, notamment dans les domaines de la reconnaissance de forme ou en médecine (diagnostic).

60 Marche aléatoire

On étudie le mouvement aléatoire d'une puce.

Cette puce se déplace sur trois cases notées A, B, C .

À l'instant $t = 0$, la puce est en A .

Pour tout entier naturel n :

– si à l'instant n , la puce est en A , alors à l'instant $n + 1$, elle a une chance sur trois de sauter en B , sinon elle saute en C ;

– si à l'instant n , la puce est en B , alors à l'instant $n + 1$, elle a autant de chances de sauter en A ou en C ;

– si à l'instant n , la puce est en C , alors elle y reste.

On désigne par A_n (respectivement B_n, C_n) l'événement « À l'instant n , la puce est en A » (respectivement en B , en C). On pose : $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$, $c_n = P(C_n)$.

Ainsi, $a_0 = 1$, $b_0 = 0$ et $c_0 = 0$.

On pourra s'aider d'arbres pondérés.

1. Calculez a_n, b_n, c_n pour n entier entre 1 et 3.

2. a) Prouvez que pour tout entier naturel n ,

$$a_n + b_n + c_n = 1 \quad \text{et} \quad \begin{cases} 2a_{n+1} = b_n \\ 3b_{n+1} = a_n \end{cases}$$

b) Démontrez que pour tout entier naturel n ,

$$6a_{n+2} = a_n.$$

c) Déduisez-en que pour tout entier naturel p :

$$\begin{cases} a_{2p} = \left(\frac{1}{6}\right)^p & \text{et} & a_{2p+1} = 0 \\ b_{2p} = 0 & \text{et} & b_{2p+1} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^p \end{cases}$$

3. a) Justifiez que les suites (a_n) et (b_n) convergent vers 0.

b) Que pouvez-vous en déduire pour la suite (c_n) ? Interprétez ce résultat.

61 Culture de bactéries

On étudie une culture de bactéries. L'évolution de chaque bactérie est la suivante :

une bactérie vivante à l'instant t peut, à l'instant $t + 1$:

- mourir avec une probabilité $p_1 = 0,2$;
- continuer à vivre avec une probabilité $p_2 = 0,5$;
- se diviser en deux bactéries identiques avec une probabilité $p_3 = 0,3$.

On suppose que les bactéries présentes dans le milieu de culture évoluent indépendamment les unes des autres.

1. On se place dans le cas où, à un instant donné t , deux bactéries sont présentes dans le milieu.

On appelle X la variable aléatoire qui indique le nombre total de bactéries à l'instant $t + 1$.

Déterminez la loi de probabilité de X .

2. On suppose qu'au début de la phase de culture, c'est-à-dire à l'instant $t = 0$, une seule bactérie est présente dans le milieu.

a) À l'aide d'un arbre, donnez le nombre de bactéries possibles aux instants $t = 1$ et $t = 2$.

b) On considère les événements :

- A_1 : « À l'instant $t = 1$, il y a une bactérie » ;
- A_2 : « À l'instant $t = 1$, il y a deux bactéries » ;
- B_1 : « À l'instant $t = 2$, il y a une bactérie » ;
- B_2 : « À l'instant $t = 2$, il y a deux bactéries ».

Quelles sont les probabilités :

$$P_{A_1}(B_1), P_{A_1}(B_2), P_{A_2}(B_1) \text{ et } P_{A_2}(B_2) ?$$

c) Calculez la probabilité de B_1 et celle de B_2 .

3. On appelle Y la variable aléatoire indiquant le nombre de bactéries vivantes dans la solution à l'instant $t = 2$.

Déterminez la loi de probabilité de Y

62 Simulation et probabilités TICE

On reprend l'expérience et les notations de l'exercice 47, mais on adapte le protocole aux conditions suivantes :

- la pièce A est équilibrée ;
- la pièce B est telle que lors d'un lancer, on obtient Face avec la probabilité 0,25.

Le but de l'exercice est de simuler 1 000 expériences dans le cas de 50 lancers successifs.

1. Simulation et conjecture

a) Reprenez le processus des questions 1. et 2. de l'exercice 47, en l'adaptant aux nouvelles conditions.

b) Conjecturez le comportement des suites des fréquences de A_n et F_n .

2. Démonstration

a) Prouvez que pour tout entier $n \geq 1$,

$$a_{n+1} = 0,25(3 - a_n).$$

b) On admet que la suite (a_n) est convergente. Déduisez-en sa limite.

c) Pour tout entier $n \geq 1$, exprimez u_n en fonction de a_n , puis déduisez-en la limite de la suite (u_n) .

PROLONGEMENT DU TP 24

63 Génétique : génotypes de génération 1

Une population (génération 0) de plantes est composée d'individus de génotypes AA, Aa, aa dans les proportions respectives p_0 , q_0 , r_0 . Un couple de cette population donne naissance à un individu dont le génotype est constitué de deux allèles, pris chacun de façon équiprobable dans le génotype de chaque parent (par exemple si les parents sont de génotype AA et aa, les descendants auront le génotype Aa).

Les génotypes Aa et aA sont identiques.

1. Étudiez le génotype de la descendance (première génération) de tous les couples de parents possibles. Les résultats seront présentés dans un tableau du type ci-dessous, dans lequel pour chaque croisement, la probabilité d'obtention du génotype est indiquée en rouge.

Parents	AA	Aa	aa
AA	AA 1	AA 1/2 Aa 1/2	Aa 1
Aa	...	...	...
aa	...	...	...

2. Les couples se forment au hasard. On appelle p_1 , q_1 , r_1 les proportions respectives d'individus de génotypes AA, Aa, aa dans la première génération.

a) Vérifiez que : $p_1 = (p_0 + 0,5q_0)^2$ et $r_1 = (r_0 + 0,5q_0)^2$.

b) Prouvez que $p_1 - r_1 = p_0 - r_0$.

On pose alors $\alpha = p_1 - r_1 = p_0 - r_0$.

c) Démontrez que :

$$p_1 = \frac{1}{4}(1 + \alpha)^2; \quad r_1 = \frac{1}{4}(1 - \alpha)^2; \quad q_1 = \frac{1}{2}(1 - \alpha^2).$$

d) Quelles sont les expressions de p_2 , q_2 , r_2 en fonction de α ? Que pouvez-vous conclure ?

Commentaire. Lors d'un appariement aléatoire, il y a stabilité des génotypes à partir de la génération 1. C'est la loi de Hardy-Weinberg.

Lois de probabilité à densité



D'un siècle
à un autre

Les calculs de probabilités permettent de modéliser les situations rencontrées dans les nombreuses files d'attente (aéroports, hôpitaux, serveurs téléphoniques, caisses des grands magasins...) et de rechercher des solutions optimales.

Le mathématicien français Joseph Bertrand (1822 - 1900) est l'auteur d'un célèbre traité de *Calcul des probabilités* (1889) qui a fortement inspiré l'enseignement des probabilités au xx^e siècle.



En savoir plus sur
Joseph Bertrand

→ Chercheurs d'hier, p. 389

Variable aléatoire

On considère une expérience aléatoire d'univers fini U muni d'une loi de probabilité P .

- Une **variable aléatoire** X est une fonction qui à chaque issue associe un nombre.

Si l'on note $x_1, x_2, \dots, x_k$ les différentes valeurs prises par X , alors la **loi de X** est représentée par un tableau du type :

Valeurs x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_k
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	$\dots$	p_k

- L'**espérance mathématique** de X est la moyenne des valeurs x_i : $E(X) = \sum_{i=1}^k p_i x_i$.

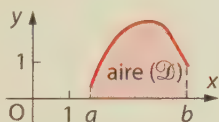
Calculs d'aires

f est une fonction continue et positive sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Le domaine $\mathcal{D}$ sous la courbe $\mathcal{C}$ de f est l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que : $x \in I$ et $0 \leq y \leq f(x)$.

- Si $I = [a; b]$,

$$\text{aire}(\mathcal{D}) = \int_a^b f(x) dx$$

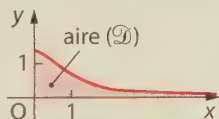
(en u.a.)



- Si $I = [0; +\infty[$,

$$\text{aire}(\mathcal{D}) = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a f(x) dx$$

(lorsque cette limite existe).



Intervalle de $\mathbb{R}$

I et J désignent deux intervalles de $\mathbb{R}$.

Remarque. $\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$ et $\emptyset =]a; a[$ ($a \in \mathbb{R}$) sont des intervalles particuliers.

- Intersection.** Pour tout nombre x :

$$x \in I \cap J \Leftrightarrow (x \in I) \text{ et } (x \in J).$$

L'intersection de deux intervalles est un intervalle.

- Réunion.** Pour tout nombre x :

$$x \in I \cup J \Leftrightarrow (x \in I) \text{ ou } (x \in J).$$

Si I et J sont non vides et disjoints ($I \cap J = \emptyset$), alors leur réunion n'est pas un intervalle.

1 Vrai ou faux

Une urne contient 4 jetons blancs et 3 noirs. On tire au hasard successivement les 7 jetons sans remise.

On note X la variable aléatoire qui prend pour valeur le nombre k lorsque le premier jeton blanc apparaît au k -ième tirage.

- a) X prend les valeurs 1, 2, 3, 4.
 b) $P(X = 1) = \frac{4}{7}$.
 c) $P(X = 2) = \frac{12}{49}$.
 d) $P(X = 3) = \frac{4}{35}$.
 e) $E(X) = 2$.

f) Le premier jeton blanc sort au 3^e tirage. Alors, la probabilité d'obtenir un jeton noir au 4^e tirage est 0,25.

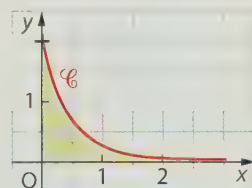
2 QCM

Pour chaque question, une seule affirmation est exacte. Identifiez-la en justifiant votre réponse.

1. La courbe $\mathcal{C}$ représente la fonction $f : x \mapsto 2e^{-2x}$ sur l'intervalle $I = [0; +\infty[$.

Alors l'aire du domaine sous la courbe $\mathcal{C}$ sur I :

- a) n'existe pas
 b) est 1 u.a.
 c) dépasse 1 u.a.



2. $\mathcal{C}$ est la courbe représentative de la fonction f définie sur $I = [0; \frac{\pi}{2}]$ par $f(x) = \sin(\frac{x}{2})$. On note $\mathcal{A}$ l'aire, en u.a., du domaine sous la courbe $\mathcal{C}$ sur I . Alors :

- a) $\mathcal{A} = 2 - \sqrt{2}$ b) $\mathcal{A} = \sqrt{2} - 1$ c) $\mathcal{A} \leq 0,5$.

3 QCM

Pour chaque question, une seule affirmation est exacte. Identifiez-la en justifiant votre réponse.

On considère les intervalles $I =]1; +\infty[$ et $J = [\ln(3); +\infty[$.

1. L'intersection $I \cap J$ est égale à :

- a) $]1; \ln(3)[$ b) $\emptyset$ c) $[\ln(3); +\infty[$.

2. La réunion $I \cup J$ est égale à :

- a) $\mathbb{R}$ b) $]1; +\infty[$ c) $[\ln(3); +\infty[$.

4 Vrai ou faux

I et J sont deux intervalles non vides tels que I est contenu strictement dans J . Alors :

- a) il existe un nombre x tel que : $x \in I$ et $x \notin J$.
 b) pour tout x : $x \in I \Rightarrow x \in J$. c) $I \cap J = I$. d) $I \cup J = J$.



Activité 1

CHOIX D'UN NOMBRE AU HASARD DANS $[0; 1]$



Les expériences aléatoires étudiées jusqu'ici conduisaient à définir un univers fini $U = \{e_1; e_2; \dots; e_n\}$ muni d'une loi de probabilité P qui attribuait à chaque issue e_i sa probabilité $P(e_i)$ telle que $P(e_i) \geq 0$ et $\sum_{i=1}^n P(e_i) = 1$. Dans le cas d'un univers contenant une infinité d'issues, par exemple l'intervalle $[0; 1]$, la même démarche conduit à attribuer à chaque issue une probabilité nulle. L'objectif de cette activité est de montrer comment on définit la probabilité d'un événement qui est un intervalle contenu dans l'univers $[0; 1]$.

1 Vers une nouvelle approche

On choisit au hasard un nombre dans $[0; 1]$. L'univers $[0; 1]$ contient une infinité d'issues.

On note X la variable aléatoire qui indique le nombre obtenu. Les issues étant équiprobables, on note p la probabilité $P(X = x)$ où $0 \leq x \leq 1$. On suppose $p > 0$.

On considère, pour tout entier naturel n non nul, l'événement $A_n = \left\{ \frac{1}{n}; \frac{2}{n}; \frac{3}{n}; \dots; \frac{n}{n} \right\}$.

a) Exprimez $P(X \in A_n)$ en fonction de n et de p . Que devient cette probabilité lorsque $n > \frac{1}{p}$?

b) Quelle valeur est-il nécessaire d'attribuer à la probabilité p ?

2 Simulation avec un tableur

ALEA() permet d'obtenir un nombre au hasard dans $[0; 1]$. On partage $[0; 1]$ en dix sous-intervalles disjoints : $I_1 = [0; 0,1]$, $I_2 = [0,1; 0,2]$, ..., $I_{10} = [0,9; 1]$.

B3		=NB.SI(A3:A10002;"<0,1")/10000				
	A	B	C	D	E	F
1	Nombre au hasard		Sous-intervalles I_k			
2		[0; 0,1]	[0,1; 0,2]	[0,2; 0,3]	[0,3; 0,4]	[0,4; 0,5]
3	0,806154312125910	0,0119				

a) Ouvrez une feuille de calcul puis complétez comme ci-dessus.

La plage A3:A10002 donne la simulation de 10 000 nombres au hasard (15 décimales) dans $[0; 1]$.

La plage B3:K3 indique la fréquence (4 décimales) de réalisation des événements « $X \in I_k$ ».



Saisissez en B3 : =NB.SI(A3:A10002;"<0,1")/10000 ; en B4 : =(NB.SI(A3:A10002;">=0,1")-NB.SI(A3:A10002;">=0,2"))/10000 ; etc.

b) Représentez l'histogramme des fréquences.

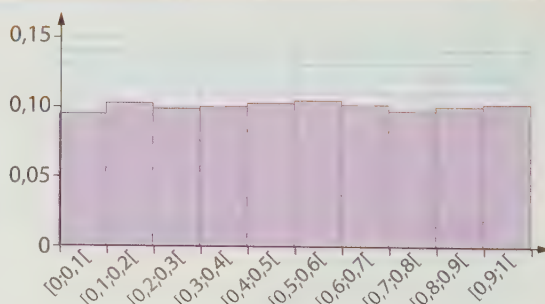
Quelle est la répartition de ces fréquences ?

c) Quelle probabilité est-il naturel d'associer à chaque événement « $X \in I_k$ » ?

d) Calculez alors :

$P(X < 0,5)$, $P(X < 0,2)$, $P(X \geq 0,8)$, $P(0,3 \leq X < 0,8)$.

e) On considère un intervalle $I = [\alpha; \beta]$ contenu dans $[0; 1]$. Conjecturez la valeur de $P(X \in I)$.



3 Des aires aux probabilités

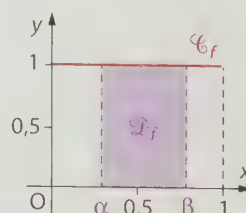
f est la fonction constante définie sur $[0; 1]$ par $x \mapsto 1$;

l'aire sous sa courbe est 1 u.a.

a) Soit $I = [\alpha; \beta]$ un intervalle quelconque contenu dans $[0; 1]$.

Quelle est l'aire (en u.a.) du domaine $\mathcal{D}_f$ sous la courbe de f sur I ?

b) Comparez la valeur obtenue avec celle de $P(X \in I)$ conjecturée en 2 c).



Conclusion. On admet que le choix au hasard d'un nombre dans $[0; 1]$ peut être modélisé par la loi de probabilité qui à tout intervalle $[\alpha; \beta]$ contenu dans $[0; 1]$ associe $P(X \in [\alpha; \beta]) = \text{aire}(\mathcal{D}_f)$.

Activité 2

VERS LA DENSITÉ DE PROBABILITÉ D'UNE LOI



On choisit au hasard et de façon indépendante deux nombres x et y dans $[0; 1]$.

On note D la variable aléatoire qui indique la différence $x - y$ des deux nombres.

- 1 a) Quel est l'univers U associé à cette expérience aléatoire ?
b) Quel est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire D ?

2 Simulation avec un tableur

On va simuler 10 000 fois cette expérience puis dresser la table des fréquences regroupées en classes d'amplitude 0,1. Pour tout entier k entre 1 et 20, on pose : $I_k = [-1 + 0,1(k-1); -1 + 0,1k[$.

a) Ouvrez une feuille de calcul puis complétez.

La plage $A3:A10002$ donne la simulation de 10 000 valeurs prises par D (15 décimales) ;

La plage $B3:U3$ indique la fréquence (4 décimales) de chaque événement « $D \in I_k$ ».

B3		f_k	$=NB.SI(A3:A10002;"<-0,9")/10000$		
	A	B	C	D	E
1	Valeur de D		Intervalles I_k		
2		$[-1; -0,9[$	$[-0,9; -0,8[$	$[-0,8; -0,7[$	$[-0,7; -0,6[$
3	-0,236986814205261	0,0007			

Aide

Saisissez en B3 : $=NB.SI(A3:A10002;"<-0,9")/10000$; en B4 : $=(NB.SI(A3:A10002;">=-0,9")-NB.SI(A3:A10002;">=-0,8"))/10000$; etc.

b) Affichez l'histogramme des fréquences.

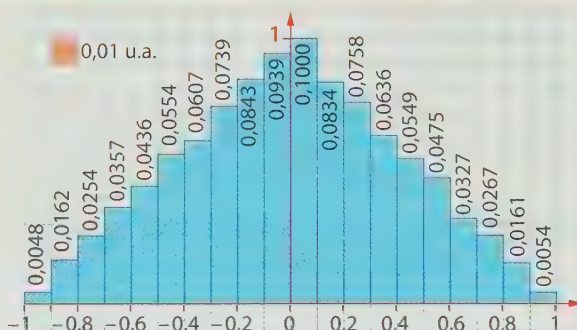
c) Sur l'histogramme ci-contre, l'unité de l'axe des ordonnées est choisie de façon que l'aire de chaque rectangle indique la fréquence de l'événement « $D \in I_k$ » correspondant.

Quelle est la somme des aires des rectangles ?

d) Indiquez la fréquence (à 10^{-3} près) de chacun des événements : « $D < 0$ » ;

« $D \geq 0,5$ » ; « $-0,2 \leq D \leq 0,2$ » ;

« $0,3 < D < 0,8$ » ; « $-0,75 \leq D \leq 0,25$ ».



3 Mise en place d'un modèle

L'histogramme peut être « ajusté » par la courbe d'une fonction f continue et positive définie sur $[-1; 1]$.

a) On admet que f est affine par morceaux. Conjecturez son expression. Calculez l'aire sous sa courbe.

b) $I = [\alpha; \beta]$ ($\alpha \leq \beta$) est un intervalle inclus dans $[-1; 1]$. On admet que $P(D \in I) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$.

Calculez la probabilité de chacun des événements du **d)**.

Les résultats sont-ils en accord avec les fréquences observées lors de la simulation ?

Conclusion. On a mis en évidence une fonction f continue et positive sur $[-1; 1]$ dont l'aire sous la courbe est 1 u.a. Cette **fonction**, dite **de densité**, permet le calcul des probabilités suivant la loi de D .

Problème ouvert

Refaites ces exercices après le chapitre ... Est-il plus facile ?

On choisit au hasard et de façon indépendante deux nombres x et y de l'intervalle $[0; 1]$.

M est la variable aléatoire qui indique le plus grand des deux nombres et I celle qui indique le plus petit.

Quelle est la probabilité de chacun des événements « $M \leq 0,4$ » et « $I \leq 0,4$ » ?

1

Lois de probabilité à densité

1.1 Introduction

- Dans les situations étudiées jusqu'à présent, à une expérience aléatoire on associait un univers fini U muni d'une loi de probabilité P . Toute variable aléatoire X ne prenait alors qu'un nombre fini de valeurs $x_1, x_2, \dots, x_k$.
- Cependant, certaines expériences aléatoires conduisent à utiliser des variables aléatoires qui prennent toutes les valeurs d'un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Exemple

1. On tire sur une cible circulaire de 1 m de rayon, sans jamais la manquer. La variable aléatoire qui indique la distance, en mètre, du point d'impact au centre prend toutes les valeurs de $[0; 1]$.
2. Lors d'un appel téléphonique, la durée de communication est une variable aléatoire qui prend ses valeurs dans un intervalle de temps.

- Dans ces conditions, il n'est plus possible de définir la loi de X en dressant le tableau des probabilités de chacun des événements « $X = x_i$ » puisqu'il y en a une infinité.

Une autre approche est alors nécessaire. On s'intéresse aux événements du type « **X prend ses valeurs dans un intervalle J** » noté « **$X \in J$** ».

Il s'agit alors de définir la probabilité $P(X \in J)$.

La notation « $X \in J$ » est abusive car X n'est pas un nombre. Elle prolonge la notation « $X = a$ » déjà utilisée.

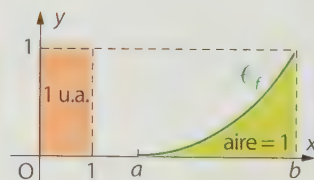
1.2 Variable aléatoire suivant une loi à densité

Dans ce paragraphe, I désigne un intervalle I (borné ou non) de $\mathbb{R}$.

Définition 1

On appelle **densité de probabilité sur I** toute fonction f définie sur I telle que :

- f est continue et positive sur I ;
- l'aire sous la courbe $\mathcal{C}_f$ est égale à 1 u.a.



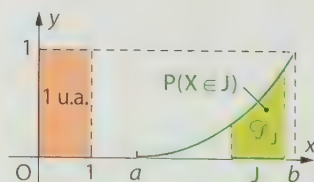
Définition 2

f désigne une densité de probabilité définie sur I .

Dire qu'une **variable aléatoire X suit la loi de densité f** signifie qu'à tout intervalle J inclus dans I , on associe la probabilité :

$$P(X \in J) = \text{aire}(\mathcal{D}_J)$$

où $\mathcal{D}_J$ est le domaine sous la courbe $\mathcal{C}_f$ sur l'intervalle J .



Remarque. Pour tous intervalles J et K inclus dans I :

- $P(X \notin J) = 1 - P(X \in J)$.
 - $P(X \in J \cup K) = P(X \in J) + P(X \in K) - P(X \in J \cap K)$.
- En particulier, lorsque J et K sont disjoints : $P(X \in J \cup K) = P(X \in J) + P(X \in K)$.

Conséquence. D'après la définition 2, si $J =]\alpha; \beta]$ avec $\alpha \leq \beta$, alors $P(X \in J) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$.
Si $\alpha = \beta$, J est réduit à la seule valeur α et $P(X = \alpha) = \int_{\alpha}^{\alpha} f(x) dx = 0$.

Ainsi, la probabilité que X prenne une valeur isolée est nulle ;
d'où $P(X \leq \alpha) = P(X < \alpha)$.

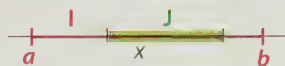
« $X \in J$ » se note aussi « $\alpha \leq X \leq \beta$ ».



Loi uniforme

2.1 | Modèle : tirage d'un nombre au hasard dans $[a; b]$

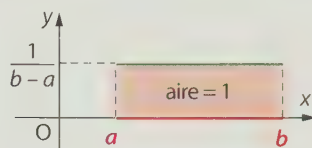
Si l'on choisit au hasard un nombre dans l'intervalle $I = [a; b]$, $a < b$, on conçoit que la probabilité que ce nombre soit dans le sous-intervalle J est le quotient de la longueur de J par celle de I .



On admet que ce modèle correspond à une densité de probabilité constante sur I . Or, l'aire sous la courbe devant être égale à 1, la valeur de cette constante est $\frac{1}{b-a}$. D'où la définition :

Définition 3

Une variable aléatoire X suit une **loi uniforme** sur l'intervalle $[a; b]$ ($a < b$) lorsque sa densité de probabilité f est la fonction constante sur I , de valeur $\frac{1}{b-a}$.

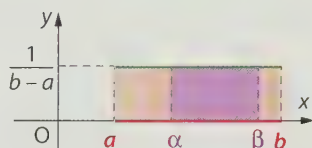


► Conséquence

Pour tout intervalle $J = [\alpha; \beta]$ avec $a \leq \alpha \leq \beta \leq b$,

$$P(X \in J) = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_{\alpha}^{\beta} dx = \frac{\beta - \alpha}{b-a}. \text{ Ainsi :}$$

$$P(X \in J) = \frac{\text{longueur de } J}{\text{longueur de } I}.$$



► **Remarque.** Si J et K sont deux intervalles de même longueur inclus dans I , alors $P(X \in J) = P(X \in K)$. D'où le nom de loi uniforme.

► **Exemple.** On choisit un nombre au hasard dans l'intervalle $[0; 10]$.

Par définition, la variable aléatoire X qui indique le nombre choisi suit la loi uniforme sur $[0; 10]$.

$$\text{Ainsi : } P(X = 1) = 0; \quad P(X > 7) = \frac{10-7}{10} = 0,3; \quad P(e \leq X \leq \pi) = \frac{\pi - e}{10} \approx 0,042.$$

2.2 | Espérance mathématique

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire X dont la densité de probabilité f est définie sur un intervalle fermé $[a; b]$ est :

$$E(X) = \int_a^b x f(x) dx \quad [1].$$

► **Remarque.** Dans le cas d'une variable aléatoire X qui ne prend qu'un nombre fini de valeurs $x_1, x_2, \dots, x_k$ avec les probabilités $p_1, p_2, \dots, p_k$, on sait que $E(X) = \sum_{i=1}^k x_i \times p_i$ [*].

Dans [1], on retrouve la somme (intégrale) des produits $x \times f(x) dx$ où $f(x) dx$ représente l'aire d'un rectangle de dimensions $f(x)$ et dx , que l'on peut interpréter comme la probabilité que X prenne des valeurs très proches de x . Ainsi, la formule [1] apparaît comme un prolongement de la formule [*].

Théorème 1

X est une variable aléatoire qui suit la **loi uniforme** sur l'intervalle $[a; b]$ ($a < b$).

Alors, son espérance mathématique est $E(X) = \frac{a+b}{2}$.

$E(X)$ correspond à la moyenne de tous les nombres entre a et b .

Démonstration. $E(X) = \int_a^b x \times \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \left[\frac{x^2}{2} \right]_a^b = \frac{1}{b-a} \times \frac{b^2 - a^2}{2} = \frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2}.$

3

Lois exponentielles

3.1 | Modèle : loi de durée de vie sans vieillissement

Prenons un exemple : notons X la variable aléatoire qui donne la durée de vie, en année, d'un composant électronique. *A priori*, X prend ses valeurs dans l'intervalle $[0; +\infty[$.

Pour tout t de $[0; +\infty[$, « $X \geq t$ » est l'événement « La durée de vie dépasse t années ».

On dit que la durée de vie de ce composant est **sans vieillissement** lorsque la probabilité qu'il fonctionne encore h années supplémentaires sachant qu'il fonctionne à l'instant t ne dépend pas de t .

Cela se traduit par : la probabilité conditionnelle $P_{X \geq t}(X \geq t + h)$ ne dépend pas de t .

Cette probabilité est donc égale, en particulier, à $P_{X \geq 0}(X \geq h)$, probabilité obtenue pour $t = 0$.

Or : $P_{X \geq 0}(X \geq h) = \frac{P(X \geq h \text{ et } X \geq 0)}{P(X \geq 0)}$ par définition,

« $X \geq 0$ » est l'événement certain donc $P(X \geq 0) = 1$

et « $X \geq h$ et $X \geq 0$ » est aussi l'événement « $X \geq h$ ».

Donc, $P_{X \geq 0}(X \geq h) = P(X \geq h)$.

Ainsi, pour tous nombres $t \geq 0$ et $h \geq 0$, $P_{X \geq t}(X \geq t + h) = P(X \geq h)$.

Nous dirons par définition :

Définition 4

Une variable aléatoire à valeurs positives X suit une loi **sans vieillissement** (ou **sans mémoire**) lorsque pour tous nombres positifs t et h ,

$$P_{X \geq t}(X \geq t + h) = P(X \geq h).$$

► **Exemple.** Si la durée de vie X d'un composant électronique est sans vieillissement, la probabilité que sa durée de vie dépasse dix ans sachant qu'il a déjà fonctionné sept ans est $P_{X \geq 7}(X \geq 10)$, soit, avec $t = 7$ et $h = 3$, $P_{X \geq 7}(X \geq 7 + 3) = P(X \geq 3)$.

Autrement dit, le composant fonctionne « sans mémoire » des sept années passées.

3.2 | Loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$

On peut alors se demander si les phénomènes sans vieillissement correspondent à un type de loi particulier. La réponse est apportée dans ce qui suit.

Définition 5

λ désigne un nombre strictement positif.

Une variable aléatoire X suit une **loi exponentielle de paramètre λ** lorsque sa densité de probabilité est la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}.$$

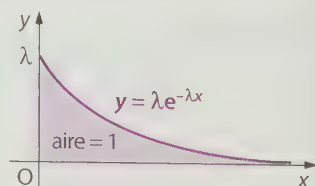
► **Remarque.** On peut vérifier que f est bien une densité de probabilité sur $[0; +\infty[$. En effet :

– la fonction f est continue et positive sur $[0; +\infty[$

– et pour tout nombre positif a ,

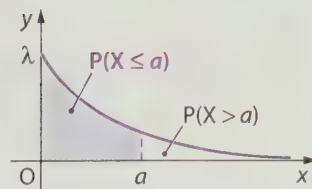
$$\int_0^a \lambda e^{-\lambda x} dx = [-e^{-\lambda x}]_0^a = -e^{-\lambda a} + 1 \text{ donc } \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a f(x) dx = 1, \text{ ce qui}$$

signifie que l'aire sous la courbe de f sur $[0; +\infty[$ est égale à 1.



► **Conséquences.** Pour tous nombres a et b tels que $0 \leq a \leq b$:

- $P(X \leq a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda x} dx = [-e^{-\lambda x}]_0^a$ soit $P(X \leq a) = 1 - e^{-\lambda a}$;
- « $X > a$ » est l'événement contraire de « $X \leq a$ »,
donc $P(X > a) = e^{-\lambda a}$;
- $P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda x} dx$, d'où $P(a \leq X \leq b) = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$.



Théorème 2

X est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

Alors, la loi de X est **sans vieillissement** (ou **sans mémoire**).

▣ **Démonstration.** Prouvons que pour tous nombres positifs t et h , $P_{X \geq t}(X \geq t + h) = P(X \geq h)$.

Par définition, $P_{X \geq t}(X \geq t + h) = \frac{P(X \geq t + h \text{ et } X \geq t)}{P(X \geq t)}$.

L'événement « $X \geq t + h$ et $X \geq t$ » signifie « $X \geq t + h$ » ; d'où $P_{X \geq t}(X \geq t + h) = \frac{P(X \geq t + h)}{P(X \geq t)}$.

Or, $P(X \geq t + h) = e^{-\lambda(t+h)}$ et $P(X \geq t) = e^{-\lambda t}$; donc $P_{X \geq t}(X \geq t + h) = \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda t - \lambda h + \lambda t} = e^{-\lambda h}$.

Comme $e^{-\lambda h} = P(X \geq h)$, on obtient $P_{X \geq t}(X \geq t + h) = P(X \geq h)$: la loi de X est sans vieillissement.

► **Remarque.** On admet que réciproquement, les variables aléatoires à densité sans vieillissement suivent une loi exponentielle.

Ainsi, les variables aléatoires qui suivent une loi exponentielle sont **les seules** variables aléatoires à densité sans vieillissement.

3.3 Espérance mathématique

X est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle. Sa densité f est définie sur $[0; +\infty[$. On définit alors l'espérance mathématique de X par la limite suivante (lorsqu'elle existe) :

$$E(X) = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a x f(x) dx.$$

Théorème 3

X est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

Alors, son espérance mathématique est $E(X) = \frac{1}{\lambda}$.

▣ **Démonstration exigible.** Pour tout nombre $a \geq 0$, calculons l'intégrale $I(a) = \int_0^a \lambda x e^{-\lambda x} dx$.

La fonction g définie sur $[0; +\infty[$ par $g(x) = \lambda x e^{-\lambda x}$ est le produit des fonctions dérivables $x \mapsto x$ et $x \mapsto \lambda e^{-\lambda x}$ sur $[0; +\infty[$. Donc g est dérivable sur $[0; +\infty[$.

Pour tout nombre $x \geq 0$, $g'(x) = \lambda e^{-\lambda x} - \lambda^2 x e^{-\lambda x} = \lambda e^{-\lambda x} - \lambda g(x)$, d'où $g(x) = \frac{1}{\lambda} (\lambda e^{-\lambda x} - g'(x))$.

On en déduit que $I(a) = \int_0^a g(x) dx = \frac{1}{\lambda} \int_0^a (\lambda e^{-\lambda x} - g'(x)) dx = \frac{1}{\lambda} [-e^{-\lambda x} - g(x)]_0^a$.

soit $I(a) = \frac{1}{\lambda} [(-e^{-\lambda a} - g(a)) - (-1 - g(0))] = \frac{1}{\lambda} (-e^{-\lambda a} - \lambda a e^{-\lambda a} + 1)$.

- Il s'agit alors de calculer la limite de $I(a)$ lorsque a tend vers $+\infty$.

Posons $Y = -\lambda a$. Ainsi, $I(a) = \frac{1}{\lambda} (-e^Y + Y e^Y + 1)$ et comme $\lambda > 0$, $\lim_{a \rightarrow +\infty} Y = -\infty$.

Or, $\lim_{Y \rightarrow -\infty} e^Y = 0$ et $\lim_{Y \rightarrow -\infty} Y e^Y = 0$ (voir chapitre 3) ; d'où $\lim_{Y \rightarrow -\infty} (-e^Y + Y e^Y + 1) = 1$.

Finalement, $\lim_{a \rightarrow +\infty} I(a) = \frac{1}{\lambda}$ donc $E(X) = \frac{1}{\lambda}$.



ROC

→ Exercice 57

« Le jour
du Bac »

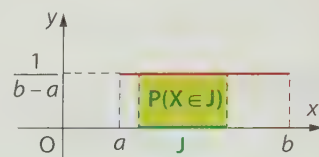
Animation

OBJECTIF 1 Utiliser une loi uniforme

X est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $I = [a; b]$ ($a < b$).

- Sa densité de probabilité est la fonction constante $x \mapsto \frac{1}{b-a}$.
- Pour tout intervalle J contenu dans I ,

$$P(X \in J) = \frac{\text{longueur de } J}{\text{longueur de } I}$$



EXERCICE RÉSOLU A Calculer des probabilités selon la loi uniforme

À partir de 7 h 00, les bus passent toutes les quinze minutes à un arrêt A.

Un usager se présente en A entre 7 h 00 et 7 h 30. On fait l'hypothèse que la durée X (en min) entre 7 h 00 et l'heure de son arrivée en A est une variable aléatoire uniformément répartie sur l'intervalle $[0; 30]$. Quelle est la probabilité que cet usager attende le prochain bus :

a) moins de 5 minutes ?

b) plus de 10 minutes ?

Méthode

a) On traduit l'événement en utilisant la variable aléatoire X .

- Si A et B sont deux événements incompatibles, alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- On utilise la formule :

$$P(X \in J) = \frac{\text{longueur de } J}{\text{longueur de } I}$$

b) On reprend la méthode du a).

- Si J et K sont deux intervalles de même longueur, alors $P(X \in J) = P(X \in K)$.

Solution

a) On note E : « Attente de moins de 5 min ».

E signifie que l'usager arrive entre 7 h 10 et 7 h 15, ou entre 7 h 25 et 7 h 30, donc :

$$E = \{10 < X < 15\} \cup \{25 < X < 30\}.$$

► E est la réunion de deux événements incompatibles, donc :

$$P(E) = P(10 < X < 15) + P(25 < X < 30).$$

► Or $P(10 < X < 15) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}$ et

$$P(25 < X < 30) = \frac{5}{30} = \frac{1}{6}; \text{ donc } P(E) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

► b) On note F : « Attente de plus de 10 minutes ».

F signifie que l'usager arrive entre 7 h 00 et 7 h 05, ou entre 7 h 15 et 7 h 20.

$$\text{D'où } P(F) = P(0 < X < 5) + P(15 < X < 20).$$

► Comme en a), $P(F) = \frac{5}{30} + \frac{5}{30} = \frac{1}{3}$.

Mise en pratique

1 X est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0; 10]$. Calculez :

a) $P(X \leq 3)$. b) $P(X > 6)$. c) $P(3 < X < 8)$.

2 Une usine fabrique des tubes de diamètre 200 mm. Le diamètre des pièces produites est une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $[198; 202]$. On choisit un tube au hasard. Après contrôle, on le rejette si son diamètre D vérifie $D \leq 198,1$ ou $D \geq 201,9$. Quelle est la probabilité que le tube soit rejeté ?

3 Anne et Boris se donnent rendez-vous dans un café entre 12 h 00 et 13 h 00. Anne arrive à 12 h 20.

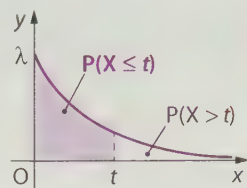
On suppose que la durée (en min) entre midi et l'heure d'arrivée de Boris est une variable aléatoire uniformément répartie sur l'intervalle $[0; 60]$.

Calculez la probabilité que :

- a) Boris arrive avant Anne.
- b) Anne attende Boris plus de vingt minutes.
- c) Anne attende Boris moins de cinq minutes.

X est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

- Sa **densité de probabilité** est définie sur $[0; +\infty[$ par : $x \mapsto \lambda e^{-\lambda x}$.
- Pour tout nombre positif t , $P(X < t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$.
- La loi de X est **sans vieillissement** (ou **sans mémoire**) :
pour tous nombres positifs t et h , $P_{X \geq t}(X \geq t + h) = P(X \geq h)$.
- L'espérance mathématique de X est : $E(X) = \frac{1}{\lambda}$.



EXERCICE RÉSOLU B

Calculer des probabilités selon une loi exponentielle

La durée de vie, exprimée en année, d'un composant électronique est une variable aléatoire notée T qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Une étude statistique a permis d'estimer que pour ce type de composant, la durée de vie ne dépasse pas 5 ans avec une probabilité de 0,675.

1. Calculez la valeur de λ arrondie à trois décimales.
2. Quelle est la probabilité, arrondie à trois décimales, qu'un composant de ce type dure :
 - a) moins de 8 ans ?
 - b) plus de 10 ans ?
 - c) au moins 8 ans sachant qu'il fonctionne encore au bout de 3 ans ?

Méthode

1. On traduit la condition de l'énoncé par une équation d'inconnue λ .

- T est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$, donc sa densité de probabilité est définie sur $[0; +\infty[$ par $x \mapsto \lambda e^{-\lambda x}$.
- On utilise la fonction $\ln$, fonction réciproque de la fonction $\exp$.

2. a) On exprime l'événement indiqué à l'aide de T , puis on calcule sa probabilité.

T est une variable aléatoire à densité, donc :
 $P(T < t) = P(T \leq t)$.

b) On utilise l'événement contraire, dont on sait calculer la probabilité.

c) On utilise le fait qu'une loi exponentielle est sans vieillissement.

- On applique la formule
 $P_{T \geq t}(T \geq t + h) = P(T \geq h)$ avec $t = 3$ et $h = 5$.

Solution

1. D'après l'énoncé, $P(T \leq 5) = 0,675$.

$$\Rightarrow P(T \leq 5) = \int_0^5 \lambda e^{-\lambda x} dx = [-e^{-\lambda x}]_0^5 = -e^{-5\lambda} + 1.$$

On résout l'équation $1 - e^{-5\lambda} = 0,675$:

$$1 - e^{-5\lambda} = 0,675 \Leftrightarrow e^{-5\lambda} = 0,325$$

$$\Leftrightarrow -5\lambda = \ln(0,325)$$

$$\Leftrightarrow \lambda = -\frac{\ln(0,325)}{5}.$$

Ainsi, $\lambda \approx 0,225$.

2. a) L'événement considéré s'écrit « $T < 8$ ».

$$P(T < 8) = \int_0^8 \lambda e^{-\lambda x} dx = [-e^{-\lambda x}]_0^8 = -e^{-8\lambda} + 1,$$

$$\Rightarrow \text{d'où } P(T < 8) \approx 0,834.$$

b) On considère l'événement « $T > 10$ ».

$$P(T > 10) = 1 - P(T \leq 10) \text{ et}$$

$$P(T \leq 10) = \int_0^{10} \lambda e^{-\lambda x} dx = [-e^{-\lambda x}]_0^{10} = -e^{-10\lambda} + 1.$$

$$P(T > 10) = 1 - (-e^{-10\lambda} + 1) = e^{-10\lambda}.$$

Donc $P(T > 10) \approx 0,106$.

c) Il s'agit de calculer $P_{T \geq 3}(T \geq 8)$.

Or, T suit une loi exponentielle, donc la loi de T est sans vieillissement.

$$\Rightarrow \text{Ainsi, } P_{T \geq 3}(T \geq 8) = P_{T \geq 3}(T \geq 3 + 5) = P(T \geq 5).$$

Or, d'après l'énoncé, $P(T < 5) \approx 0,675$;
donc $P(T \geq 5) = 1 - P(T < 5) = 0,325$.

On conclut : $P_{T \geq 3}(T \geq 8) = 0,325$.

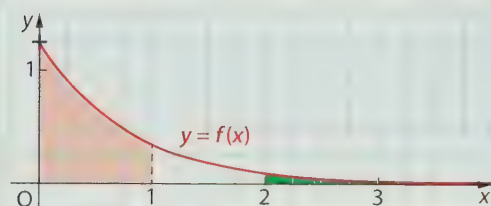
Mise en pratique

4 Vrai ou faux

La durée de vie, exprimée en année, d'un appareil est modélisée par une variable aléatoire X qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,07$.

1. La probabilité (à 10^{-2} près) que l'appareil ait une durée de vie supérieure à 10 ans est égale à 0,50.
2. Sachant que l'appareil a fonctionné 10 ans, la probabilité (à 10^{-2} près) qu'il fonctionne encore 5 ans est égale à 0,75.

5 X désigne une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. La courbe tracée ci-dessous représente la fonction densité f associée.



1. a) Quelle est la valeur de λ ?
b) Déduisez-en l'expression de $f(x)$.
2. a) Quelle est la valeur exacte (en u.a.) de l'aire sous la courbe de f sur $[0; 1]$?
À quelle probabilité correspond cette aire ?
b) Calculez la valeur exacte de $P(X > 2)$.
Interprétez graphiquement cette probabilité.
c) Déduisez des calculs précédents la probabilité $P(1 \leq X \leq 2)$ à 10^{-3} près.
3. a) Quelle est l'espérance mathématique de X ?
b) Déduisez-en sans calcul $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t \lambda x e^{-\lambda x} dx$.

6 La durée de vie T , exprimée en jour, d'un composant est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,005$. Une année sera assimilée à 365 jours.

1. Calculez à 10^{-3} près la probabilité de chacun des événements suivants :
a) la durée de vie dépasse 300 jours ;
b) la durée de vie est d'au plus une année ;
c) la durée de vie est comprise entre 1 et 2 ans.
2. La demi-vie de la loi de T est la durée notée $t_{1/2}$ telle que $P(T \leq t_{1/2}) = P(T > t_{1/2})$.
a) Justifiez que $t_{1/2}$ vérifie $P(T \leq t_{1/2}) = 0,5$.
b) Calculez à un jour près la valeur de $t_{1/2}$.

7 On modélise le temps d'attente, en minute, entre deux clients à un guichet par une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

Une étude statistique a permis d'établir que le temps moyen d'attente est de 5 minutes. Les résultats seront donnés en valeurs exactes.

1. Quelle est la probabilité d'attendre plus de 10 minutes ? Plus de 5 minutes ?
2. Quelle est la probabilité d'attendre encore au moins 5 minutes sachant qu'on a déjà attendu 10 minutes ?
Citez la propriété utilisée.

8 La durée d'attente X , exprimée en seconde, à un distributeur automatique est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. La probabilité que l'attente dépasse une minute est 0,942.

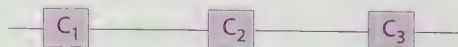
Les résultats seront donnés à 10^{-3} près.

1. Calculez une valeur approchée de λ .
2. Calculez la probabilité que l'attente dure entre 4 et 5 minutes.

9 Le temps de réponse T , exprimé en seconde, à un terminal commandé par un ordinateur est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ , telle que $P(T \geq 3) = 0,452$.

1. Le temps de réponse dépasse 2 secondes. Quelle est la probabilité qu'il dépasse 5 secondes ?
2. Calculez la probabilité, à 10^{-3} près, que ce temps de réponse ne dépasse pas 5 secondes.

10 Un système électronique est constitué de trois composants montés en série.



Les durées de vie, exprimées en heure, de ces composants sont indépendantes et suivent la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 10^{-4}$.

On note p la probabilité qu'un composant de ce type fonctionne au moins 1 000 heures.

1. Prouvez que $p = e^{-0,1}$.
2. On note S l'événement « Le système fonctionne au moins 1000 heures ».
a) Exprimez $P(S)$ en fonction du nombre p .
b) Déduisez-en une valeur approchée, à 10^{-3} près, de la probabilité de S .

11 Questions sur le cours

Complétez les propositions suivantes.

1. X désigne une variable aléatoire qui admet une densité de probabilité f sur un intervalle I .

a) Si α et β sont deux nombres de I tels que $\alpha \leq \beta$, alors $P(X \in [\alpha; \beta]) = \dots$

b) Pour tout nombre α de I , $P(X < \alpha) \dots P(X \leq \alpha)$.

2. X suit la loi uniforme sur $I = [a; b]$ ($a < b$).

a) Sa densité f est telle que : $\forall x \in I, f(x) = \dots$;

b) Pour tout intervalle $J, J \subset I, P(X \in J) = \dots$.

3. X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ sur l'intervalle $I = [0; +\infty[$.

a) Sa densité f est telle que : $\forall x \in I, f(x) = \dots$;

b) L'espérance mathématique de X est $E(X) = \dots$.

12 Vrai ou faux

Vrai ou faux ? Justifiez votre réponse.

X désigne une variable aléatoire.

1. La fonction densité f de X est définie par :

$$f(x) = 1 + x \text{ si } x \in [-1; 0[$$

$$\text{et } f(x) = 1 - x \text{ si } x \in [0; 1].$$

a) $P(X < 0,5) = 0,75$.

b) Pour tout x de $[0; 1]$, $P(X \leq -x) = P(X \geq x)$.

2. X suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0; 1]$.

a) Pour tout x de $[0; 1]$, $P(X \leq x) = x$.

b) Pour tout x de $[0; 1]$, $P(X \leq x) = P(X \geq 1 - x)$.

3. X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

a) Si $P(X \geq 2) = 0,25$, alors $\lambda = \ln(2)$.

b) Si $E(X) = 10^3$, alors $P(X \leq 2\,500) < 0,9$.

13 QCM Une seule réponse exacte

Pour chaque affirmation, une seule réponse est exacte. Identifiez-la en justifiant votre réponse.

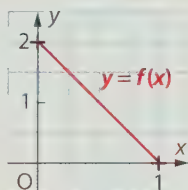
1. La fonction densité f d'une variable aléatoire M est représentée ci-contre sur $[0; 1]$.

a) $P(M \leq 0,5) = 0,875$.

b) $P\left(\frac{1}{4} \leq M \leq \frac{3}{4}\right) = 0,75$.

c) $E(M) = \frac{1}{3}$.

d) Pour tout m de $[0; 1]$, $P(M \leq m) = 2m^2 - m$.



2. À l'entrée d'un port, un feu destiné aux plaisanciers

est rouge pendant 2,5 min puis vert pendant 1,5 min.

À midi, le feu passe au rouge. Un bateau se présente entre 12 h 00 et 12 h 08. La variable aléatoire T qui donne le temps écoulé (en min), de midi à l'heure d'arrivée du bateau devant le feu suit la loi uniforme sur $[0; 8]$. Alors, la probabilité que le bateau :

a) passe sans s'arrêter est 0,25.

b) attende plus de 45 s est 0,4375.

c) passe ou n'attende pas plus de 30 s est 0,75.

14 QCM Au moins une réponse exacte

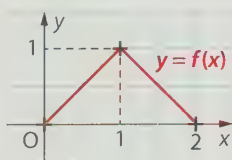
Pour chaque affirmation, plusieurs réponses peuvent être exactes. Identifiez-les en justifiant vos réponses.

1. La fonction densité f d'une variable aléatoire X est représentée ci-contre sur l'intervalle $[0; 2]$.

a) $P(0,5 \leq X \leq 1,5) = 0,5$.

b) Pour tout x de $[0; 1]$, $P(X \leq x) = P(X \geq 2 - x)$.

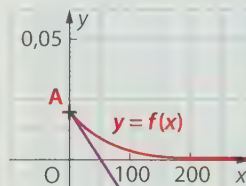
c) L'espérance mathématique de X vaut 1.



2. La courbe représente la densité f d'une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ . La tangente T en A coupe l'axe des abscisses en $B(50; 0)$.

a) L'abscisse de B est égale à $E(X)$. b) $\lambda = 2 \times 10^{-2}$.

c) Si $x_0 = \ln(2) \times E(X)$, alors $P(X \leq x_0) = 0,5$.



Apprendre à chercher

15 Attente à un feu tricolore

Un feu tricolore reste cinquante-cinq secondes au vert, cinq secondes à l'orange puis soixante secondes au rouge. Un piéton ne peut traverser que lorsque le feu est rouge. À 8 h 00, le feu passe au rouge. On s'intéresse aux piétons qui se présentent entre 8 h 00 et 8 h 05.

T est la variable aléatoire qui donne, en seconde, le temps écoulé de 8 h 00 jusqu'à l'heure d'arrivée devant le feu d'un piéton désirant traverser.

On suppose que T suit la loi uniforme sur $[0 ; 300]$.

Objectif Calculer la probabilité qu'un piéton attende moins de dix secondes, plus de vingt secondes.

1. L'énoncé décrit le protocole de l'expérience (traversée du piéton au feu rouge) et indique le choix de la seconde comme unité de temps. La variable aléatoire T suit une loi uniforme, donc on sait calculer la probabilité de tout événement du type « $T \in J$ », où J est un sous-intervalle de $[0 ; 300]$, par un quotient de longueurs.

D'où l'idée de représenter la situation sur un axe muni d'une échelle des temps de 0 à 300.

Réalisez ce schéma en distinguant les couleurs des feux successifs.

2. Pour calculer les probabilités demandées, il s'agit de définir les événements à l'aide de sous-intervalles de $[0 ; 300]$. Pour cela, on utilise le schéma précédent.

- a) Pour une attente de moins de 10 secondes, dans quels intervalles de temps doit se situer T ? Déduisez-en la probabilité que l'attente ne dépasse pas 10 secondes.
- b) De même, calculez la probabilité que l'attente dure plus de vingt secondes.

16 Distribution uniforme dans un carré unité

Dans un repère orthonormé, on choisit au hasard un point $M(X ; Y)$ du carré unité $\mathcal{C}$. On modélise ce choix par le couple $(X ; Y)$, où les coordonnées X et Y sont indépendantes et suivent la loi uniforme sur $[0 ; 1]$. Un événement A est alors représenté par une partie $\mathcal{A}$ du carré unité et on admet que la loi de probabilité est définie par :

$$P(A) = \frac{\text{aire}(\mathcal{A})}{\text{aire}(\mathcal{C})} = \text{aire}(\mathcal{A}).$$

On note S la variable aléatoire qui au point M associe la somme de ses coordonnées.

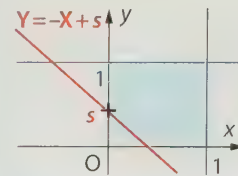
Objectif Calculer $P(S \leq s)$ pour tout nombre s de $[0 ; 2]$.

1. X et Y prennent leurs valeurs dans $[0 ; 1]$, donc $S = X + Y$ prend ses valeurs dans $[0 ; 2]$.

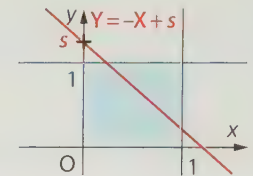
Il s'agit de représenter l'événement « $S \leq s$ » dans le carré unité $\mathcal{C}$. Il suffit d'exprimer cet événement à l'aide d'une inégalité sur les coordonnées X et Y.

- a) Vérifiez que : « $S \leq s$ » équivaut « $Y \leq -X + s$ ».
- b) Reproduisez les deux figures et hachurez dans chaque cas la partie du carré qui représente « $S \leq s$ ».

Cas : $0 \leq s \leq 1$



Cas : $1 < s \leq 2$



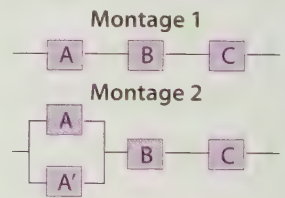
2. Pour la loi indiquée, la probabilité de l'événement « $S \leq s$ » correspond à l'aire de cette partie hachurée.

Dans chacun des cas, exprimez en fonction de s l'aire de la partie hachurée. Concluez.

17 Durée de vie d'un système

Pour transmettre un signal électronique, on réalise deux montages utilisant des composants identiques.

Les durées de vie (en mois) des composants sont indépendantes et suivent la même loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,002$.



Objectif Comparer les probabilités que la durée de vie de chacun des systèmes dépasse 5 ans.

La durée de vie d'un système dépend de celle de chacun de ses composants. On note X la durée de vie (en mois) du système 1, Y celle du système 2 et T celle d'un composant quelconque dont la loi est connue.

Il s'agit de comparer $P(X > 60)$ et $P(Y > 60)$.

- L'événement « $X > 60$ » est réalisé lorsque A, B et C ont chacun une durée de vie qui dépasse 60 mois.
- L'événement « $Y > 60$ » est réalisé lorsque le bloc AA', le composant B et le composant C ont chacun une durée de vie qui dépasse 60 mois.

- a) Justifiez que $P(X > 60) = e^{-180\lambda}$.
- b) À quelle condition, l'événement E, « La durée de vie du bloc AA' dépasse 60 mois », est-il réalisé ? Déduisez-en que : $P(E) = 2P(T > 60) - [P(T > 60)]^2$.
- c) Prouvez que $P(Y > 60) = 2e^{-180\lambda} - e^{-240\lambda}$.
- d) Concluez.

Narration de recherche

→ L'objectif n'est pas seulement de résoudre le problème posé : vous devez aussi noter les différentes idées même lorsqu'elles n'ont pas permis de trouver la réponse. Expliquez pourquoi vous avez changé de méthode et ce qui vous a fait avancer.

18 Une aire au hasard

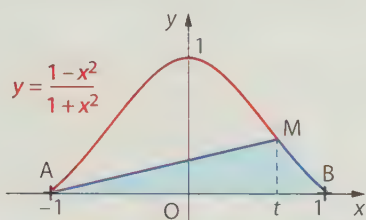
On choisit un nombre t au hasard dans $[-1; 1]$.

Ce choix se fait suivant la loi uniforme sur $[-1; 1]$.

M est le point d'abscisse t de la courbe d'équation :

$$y = \frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

On note S la variable aléatoire qui donne l'aire du triangle ABM.



Comment choisir le nombre θ de l'intervalle $[0; 1]$ pour que $P(S \leq \theta) = 0,5$?

19 Une durée de vie optimale

Un fabricant propose dans un sachet deux types de composants électroniques :

- deux tiers de composants de type C_1 dont la durée de vie (en année) suit une loi exponentielle de paramètre λ ;
- un tiers de composants de type C_2 dont la durée de vie (en année) suit une loi exponentielle de paramètre 2λ .

Une étude statistique a montré qu'un composant pris au hasard dans le sachet a une durée de vie supérieure à 3 ans avec une probabilité de 0,99.

Quelle est, à 10^{-4} près, la valeur du paramètre λ ?

Chercheurs d'hier

Eux aussi, ils ont
cherché avant de trouver !

Voici quelques mathématiciens importants qui ont travaillé dans le domaine de la Statistique et des Probabilités.

Thomas Bayes
→ Chap. 12

Carl Friedrich Gauss
→ Chap. 14

Karl Pearson
→ Chap. 15

ÉPOQUE MODERNE

ÉPOQUE CONTEMPORAINE

Abraham de Moivre
→ Chap. 14

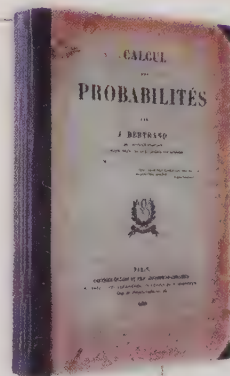
Pierre Simon Laplace
→ Chap. 14

Joseph Bertrand
(1822-1900)



Mathématicien et historien des sciences, Joseph Bertrand, diplômé de l'École Polytechnique et de l'École des Mines, marqua son époque par sa précocité et la diversité des domaines dans lesquels il exerça ses talents. Du calcul différentiel et intégral à l'arithmétique, des probabilités aux sciences économiques, de l'électricité à la thermodynamique, il aborda la plupart des sujets scientifiques de son époque.

Dans son ouvrage *Calcul des probabilités*, publié en 1889, Bertrand présente notamment le problème connu sous le nom de « paradoxe de Bertrand » (voir l'exercice 67).



Sur le Web www.bibmath.net/bios/index.php

Travaux dirigés

TP

20 La probable rencontre

COMPÉTENCES

TICE

- Simuler suivant la loi uniforme.
- Dénombrer des cellules sous condition.

Utiliser un tableau

→ Pour simuler une répartition uniforme

	A	B	C
1			
2			

Mathématiques

- Utiliser une loi uniforme.
- Résoudre des inéquations du 2nd degré.

1. Situation

Léa et Clément se sont donné rendez-vous dans un café entre 18 h 00 et 19 h 00. Aucun des deux n'attendra plus d'un quart d'heure et jamais au-delà de 19 h 00.

Les instants d'arrivée de chacun d'eux sont indépendants et assimilés à des variables aléatoires qui suivent la loi uniforme sur $[0; 1]$ (l'instant 0 correspond à 18 h 00 et l'instant 1 à 19 h 00).

On note X l'instant d'arrivée de Léa, Y celui de Clément et R l'événement « La rencontre a lieu dans l'intervalle de temps $[0; 1]$ ».

a) Exprimez la durée d'attente selon que Léa ou Clément arrive en premier au rendez-vous.

Déduisez-en que la durée d'attente est définie par $|X - Y|$.

b) Justifiez que l'événement R signifie « $|X - Y| \leq \frac{1}{4}$ ».

2. Simulation à l'aide d'un tableau

a) Ouvrez une feuille de calcul et complétez-la comme indiqué en simulant la situation sur un échantillon de taille 10 000.

	A	B	C	D
1	Léa : X	Clément : Y	Attente : $ X - Y $	Fréquence de R
2				
3				

Aide

- Colonne C : utilisez la fonction Abs() du tableur.
- Colonne D : utilisez l'instruction NB.SI(plage;critère)/10 000.

b) Faites afficher la fréquence de réalisation de R en D2.

c) Simulez plusieurs fois cette expérience (F9) avec Excel ; (Ctrl) (↑) (F9) avec Calc).

D'après la loi des grands nombres, la fréquence obtenue donne une approximation de la probabilité cherchée. Peut-on estimer que cette probabilité dépasse 0,5 ?

3. Démonstration

Si X prend la valeur x et Y la valeur y , on modélise la situation par le point $M(x; y)$ du carré unité d'un repère orthonormé. L'événement R est alors représenté par une partie $\mathcal{R}$ du carré unité et on admet que sa probabilité est définie par $P(R) = \frac{\text{aire}(\mathcal{R})}{\text{aire}(\text{carré})} = \text{aire}(\mathcal{R})$.

a) Justifiez que : « $|X - Y| \leq \frac{1}{4}$ » équivaut à « $X - \frac{1}{4} \leq Y \leq X + \frac{1}{4}$ ».

b) Coloriez la partie $\mathcal{R}$ du carré unité qui représente l'événement R . Déduisez-en la valeur de $P(R)$.

4. Durée d'attente pour une probabilité de rencontre donnée

On se place dans la situation où l'attente tolérée par Léa et Clément ne dépasse pas une durée t ($0 < t < 1$). On note R_t l'événement : « La rencontre a lieu dans l'intervalle de temps $[0; 1]$ ».

Ainsi, R_t signifie « $|X - Y| \leq t$ ».

a) Représentez, comme en 3., la zone associée à l'événement R_t .

b) Exprimez la probabilité de R_t en fonction de t .

c) Quelle est, à une minute près, la durée d'attente tolérée par Léa et Clément pour que $P(R_t) = 0,8$?

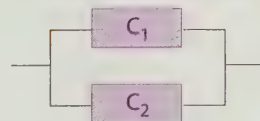
21 Montage en série ou en parallèle ?

Un signal se transmet par l'intermédiaire de deux composants électroniques notés C_1 et C_2 . On se place dans le cas où la durée de vie, exprimée en jour, de chacun des composants suit une loi exponentielle de paramètre λ et où ces durées de vie sont indépendantes l'une de l'autre.

T_1 désigne la durée de vie de C_1 et T_2 celle de C_2 .

On admet que dire que les durées de vie T_1 et T_2 sont indépendantes signifie que pour tout nombre $t \geq 0$, $P(T_1 \leq t \text{ et } T_2 \leq t) = P(T_1 \leq t) \times P(T_2 \leq t)$.

Montage en parallèle



Montage en série



OBJECTIF Comparer les lois de durée de vie des systèmes lors d'un montage en parallèle et lors d'un montage en série.

A Durée de vie du système

1. Montage en parallèle

On note X la variable aléatoire qui indique la durée (en jour) de transmission du signal.

La transmission s'arrête à l'instant t lorsque C_1 et C_2 ne fonctionnent plus à cet instant.

a) Prouvez que pour tout nombre $t \geq 0$, $P(X \leq t) = P(T_1 \leq t) \times P(T_2 \leq t)$.

b) Déduisez-en que : $P(X \leq t) = (1 - e^{-\lambda t})^2$ [1].

c) On rappelle que si f est la densité associée à X , alors pour tout nombre $t \geq 0$, $P(X \leq t) = \int_0^t f(u) du$.

• Quelle est la dérivée de la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par $t \mapsto \int_0^t f(u) du$?

• Déduisez-en l'expression de la densité f .

2. Montage en série

On note Y la variable aléatoire qui indique la durée (en jour) de transmission du signal.

La transmission s'arrête à l'instant t lorsque C_1 ou C_2 ne fonctionne plus à cet instant.

a) Prouvez que pour tout nombre $t \geq 0$, $P(Y \leq t) = P(T_1 \leq t) + P(T_2 \leq t) - P(T_1 \leq t) \times P(T_2 \leq t)$.

b) Déduisez-en que : $P(Y \leq t) = 1 - e^{-2\lambda t}$ [2].

c) De la même façon qu'en 1. c), déterminez l'expression de la densité g associée à Y .

B Comparaison des deux systèmes

1. Durée de transmission

Pour tout nombre t positif, on pose $d(t) = P(Y \leq t) - P(X \leq t)$.

a) Étudiez le signe de $d(t)$ sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

b) Interprétez le résultat obtenu.

2. Espérance mathématique

On rappelle que si g est la densité associée à la variable aléatoire Y , alors $E(Y) = \lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a tg(t) dt$.

a) Vérifiez que pour tout nombre $a \geq 0$, $\int_0^a tg(t) dt = \left(-a - \frac{1}{2\lambda}\right)e^{-2\lambda a} + \frac{1}{2\lambda}$. Déduisez-en $E(Y)$.

Aide

Une primitive sur $[0; +\infty[$ de $t \mapsto 2\lambda te^{-2\lambda t}$ est du type $t \mapsto (\alpha t + \beta)e^{-2\lambda t}$.

b) Vérifiez que pour tout nombre $a \geq 0$, $\int_0^a tf(t) dt = 2 \int_0^a \lambda te^{-\lambda t} dt - \int_0^a tg(t) dt$. Déduisez-en $E(X)$.

c) Comparez les durées moyennes de transmission du signal suivant les deux systèmes.

22 Désintégration radioactive

A L'aspect probabiliste de la désintégration radioactive

En physique, on considère que la durée de vie T d'un noyau radioactif suit une loi de durée de vie sans vieillissement, autrement dit, une loi exponentielle de paramètre λ .

λ est la **constante radioactive**, caractéristique de l'élément étudié.

1. Loi de désintégration radioactive

On considère l'expérience qui consiste à examiner un noyau de cet élément à un instant t .

a) Que signifie l'événement « $T \geq t$ » ? Justifiez que $P(T \geq t) = e^{-\lambda t}$.

b) On suppose qu'à l'instant initial ($t = 0$), le corps radioactif contient N_0 noyaux actifs.

On note Z_t la variable aléatoire indiquant le nombre de noyaux non désintégrés à l'instant t .

Les noyaux se désintègrent indépendamment les uns des autres et du milieu environnant, et la probabilité qu'un noyau ne soit pas désintégré à l'instant t est $p = e^{-\lambda t}$.

Quelle est la loi de la variable aléatoire Z_t ?

c) Déduisez-en que le nombre moyen $N(t)$ de noyaux présents à l'instant t est : $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$.

2. Demi-vie d'un élément radioactif

La **demi-vie** d'un élément radioactif est la durée, notée $t_{1/2}$, telle que : $P(T \leq t_{1/2}) = 0,5$.

a) Démontrez que : $t_{1/2} = \frac{\ln(2)}{\lambda}$. Vérifiez que la demi-vie correspond au temps nécessaire pour que la moitié des atomes d'un échantillon donné se soient désintégrés.

b) Après deux demi-vies, quel est le nombre moyen d'atomes non désintégrés ?

3. Durée de vie moyenne d'un élément radioactif

La **durée de vie moyenne**, notée τ , d'un élément radioactif est l'espérance mathématique $E(T)$ de la variable aléatoire de durée de vie T .

Exprimez τ en fonction de λ . Justifiez l'approximation utilisée en physique : $\tau \approx 1,44t_{1/2}$.

B Application

1. Le technétium ^{99m}Tc a une demi-vie de 6 heures. Déterminez sa constante radioactive.

2. Calculez, à 10^{-3} près, la probabilité qu'un atome de ^{99m}Tc se désintègre :

a) avant 4 heures ;

b) après 10 heures.

3. À partir de quelle durée de vie peut-on considérer que la probabilité qu'un atome de ^{99m}Tc se désintègre est supérieure à 0,95 ?

Les propriétés du technétium 99m font de cet élément un excellent radiotracer en médecine nucléaire, notamment en raison de sa très courte demi-vie qui limite l'irradiation des patients. Il est utilisé lors d'une scintigraphie, technique d'imagerie médicale permettant l'exploration physiologique de certains organes du corps. Compte tenu de sa demi-vie, il ne peut pas être stocké. Il est préparé à la demande, sur site (hôpitaux, laboratoires), par désintégration β du molybdène 99, l'un des produits de fission de l'uranium 235.

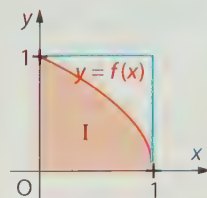
Ci-contre, préparation sur site, dans une enceinte plombée, des produits radioactifs nécessaires pour un examen.



23 Les méthodes de Monte-Carlo

On appelle **méthode de Monte-Carlo**, toute méthode qui vise à calculer une valeur numérique en utilisant des procédés probabilistes.

On se propose de calculer une valeur approchée de l'intégrale $I = \int_0^1 f(x) dx$, où f est une fonction continue sur $[0; 1]$ à valeurs dans $[0; 1]$.



A Méthode dite « du rejet »

Principe de la méthode du rejet

■ On admet que, lors d'un tirage au hasard d'un point du carré unité, la probabilité de tirer un point du domaine $\mathcal{D}$ situé sous la courbe de f est :

$$p = \text{aire}(\mathcal{D}) = I.$$

■ On tire au hasard un grand nombre N de points dans ce carré unité.

■ D'après la loi des grands nombres, la fréquence $f = \frac{\text{nombre de points dans } \mathcal{D}}{\text{nombre total de points}}$ est une valeur approchée de la probabilité p donc de l'intégrale I .

L'algorithme ci-contre permet le calcul d'une valeur approchée de I .

1. Le choix d'un point du carré unité est défini par les valeurs indépendantes de ses coordonnées X et Y .

a) Quelle loi suivent les variables aléatoires X et Y ?

b) À quelles lignes correspond ce choix ?

2. Quelle variable de l'algorithme contient la fréquence des points situés dans le domaine $\mathcal{D}$?

3. Quel est l'effet sur le dessin du déplacement de l'instruction 18 entre les instructions 19 et 20 ?

4. Déterminez avec cet algorithme une valeur approchée de $I = \int_0^1 \sqrt{1-x} dx$ pour $N = 10\,000$.

Remarque. On admet que la précision de l'approximation est de l'ordre de $\frac{1}{\sqrt{N}}$.

```

1  VARIABLES
2  N EST_DU_TYPE NOMBRE
3  x EST_DU_TYPE NOMBRE
4  y EST_DU_TYPE NOMBRE
5  k EST_DU_TYPE NOMBRE
6  D EST_DU_TYPE NOMBRE
7  I EST_DU_TYPE NOMBRE
8  DEBUT_ALGORITHME
9  LIRE N
10 D PREND_LA_VALEUR 0
11 POUR k ALLANT_DE 1 A N
12   DEBUT_POUR
13   x PREND_LA_VALEUR random()
14   y PREND_LA_VALEUR random()
15   SI (y <= f1(x)) ALORS
16     DEBUT_SI
17     D PREND_LA_VALEUR D+1
18     TRACER_POINT (x,y)
19   FIN_SI
20   FIN_POUR
21 AFFICHER "Nombre de points sous la courbe:"
22 AFFICHER D
23 I PREND_LA_VALEUR D/N
24 AFFICHER "I a pour valeur approchée:"
25 AFFICHER I
26 FIN_ALGORITHME
27
28 Fonction numérique utilisée :
29 f1(x)=sqrt(1-x)
    
```

B Méthode de l'espérance

Principe de la méthode de l'espérance

■ On choisit au hasard N valeurs de l'abscisse X du point M dans $[0; 1]$.

■ On calcule la somme S des N valeurs prises par la variable aléatoire $f(X)$.

■ On admet alors que la moyenne des N valeurs de $f(X)$ est une valeur approchée de l'espérance de $f(X)$ dont la valeur exacte est donnée par I .

Variables

N, x, S, k, I

Algorithme

0 $\rightarrow$ S; Lire N

Pour k de 1 à N

nombre aléatoire entre 0 et 1 $\rightarrow x$

$S + f(x) \rightarrow S$

Fin Pour

$S/N \rightarrow I$

Afficher I

1. a) Programmez l'algorithme ci-contre sur votre calculatrice ou avec AlgoBox.

b) Calculez une valeur approchée de l'intégrale $I = \int_0^1 \sqrt{1-x} dx$ lorsque $N = 10\,000$.

2. De même, calculez une valeur approchée de $J = \int_0^1 \sqrt{1-x^3} dx$ pour $N = 10\,000$.

Entraînement

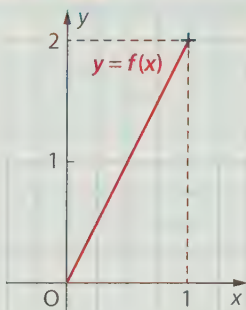
DE TÊTE



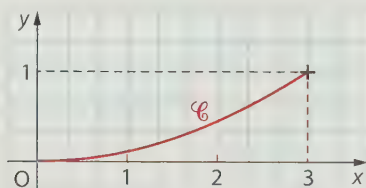
24 Une variable aléatoire X suit la loi de densité f dont voici la représentation graphique sur $[0; 1]$.

Calculez les probabilités suivantes :

- a) $P(X \leq 0,5)$;
 b) $P(X > 0,75)$;
 c) $P(0,25 < X < 0,75)$.



25 La courbe ci-contre représente la fonction $g : x \mapsto \frac{1}{9}x^2$ sur l'intervalle $[0; 3]$.

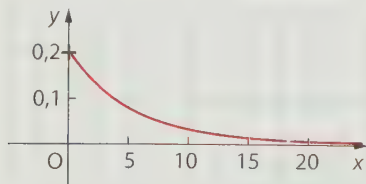


- Justifiez que g définit une densité de probabilité.
- Une variable aléatoire X suit la loi de densité g . Pour tout nombre t de $[0; 3]$, exprimez la probabilité $P(X \leq t)$ en fonction de t .

26 Une variable aléatoire U suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0; 10]$.

- Quelle est la densité de probabilité associée à U ?
- Déterminez les probabilités suivantes :
 a) $P(U \in [1,7; 9,2])$; b) $P(U < 7,5)$; c) $P(U \geq 2,5)$.

27 La variable aléatoire T suit la loi exponentielle dont la loi de densité est représentée ci-dessous.



- Quelle est la valeur du paramètre λ ?
- Quelle est la valeur de l'espérance de T ?

28 La durée de vie T d'un système électronique, exprimée en année, suit une loi exponentielle telle que $P(T \leq 3) = 0,32$.

Le système fonctionne depuis 5 ans. Quelle est la probabilité que sa durée de vie dépasse 8 ans ?

LOIS À DENSITÉ

29 On considère la fonction f définie sur $[0; 1]$ par :

$$f(x) = 3x^2.$$

- Justifiez que f est une densité de probabilité.
- X est une variable aléatoire de loi de densité f . Calculez les probabilités suivantes :
 a) $P(X \geq 0,5)$; b) $P(X < 0,1)$; c) $P(0,2 < X < 0,8)$.

30 g est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$g(x) = 2xe^{-x^2}.$$

- Pour tout nombre positif a , on pose :

$$I(a) = \int_0^a g(x) dx.$$

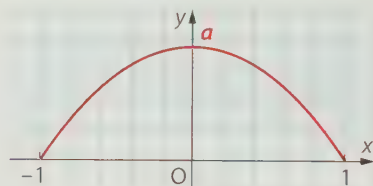
Calculez $I(a)$ puis déduisez-en $\lim_{a \rightarrow +\infty} I(a)$.

- Justifiez que g est une densité de probabilité.
- X est une variable aléatoire qui suit la loi de densité g . Déterminez le nombre m tel que $P(X \leq m) = 0,5$.

31 La fonction f représentée ci-dessous définit une densité de probabilité sur $[-1; 1]$.

Pour tout nombre x tel que $-1 \leq x \leq 1$,

$$f(x) = a(1 - x^2) \text{ avec } a \text{ positif.}$$



- Quelle est la valeur exacte de a ?
- X est une variable aléatoire de loi de densité f . Prouvez géométriquement que pour tout t de $[0; 1]$:
 a) $P(X \geq t) = P(X \leq -t)$.
 b) $P(0 \leq X \leq t) = \frac{1}{2} - P(X \geq t)$.

32 On considère la fonction f définie sur $[0; \pi]$ par :

$$f(t) = a \sin(t) \text{ avec } a \text{ positif.}$$

- Pour quelle valeur de a , f est-elle une densité ?
- X est une variable aléatoire de loi de densité f .
 a) Calculez les probabilités suivantes :

$$P\left(X \leq \frac{\pi}{6}\right); \quad P\left(\frac{\pi}{3} < X < \frac{2\pi}{3}\right); \quad P\left(X > \frac{3\pi}{4}\right).$$

 b) Calculez l'espérance de X .

Aide

On pourra poser $g(t) = t \times f(t)$ et vérifier que pour tout t de $[0; \pi]$, $g(t) = \cos(t) - g''(t)$.

33 A la découverte d'une densité

On tire au hasard sur une cible de rayon 1 m sans jamais la manquer.

X est la variable aléatoire qui donne la distance, en mètre, de l'impact au centre de la cible.

Ainsi, X prend ses valeurs dans l'intervalle $[0; 1]$.

Selon le modèle usuel, pour tout t de $[0; 1]$, la probabilité de l'événement « $X \leq t$ » est définie par :

$$P(X \leq t) = \frac{\text{aire}(\text{disque de rayon } t)}{\text{aire}(\text{cible})}.$$

1. Pour tout t de $[0; 1]$, on pose : $F(t) = P(X \leq t)$.

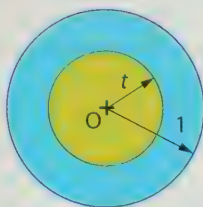
Exprimez $F(t)$ en fonction de t .

2. On note f la densité sur $[0; 1]$ de la loi de X .

a) Écrivez $F(t)$ sous forme intégrale.

b) Justifiez que F est dérivable sur $[0; 1]$ et précisez sa dérivée.

c) Déduisez-en l'expression de la densité f .

**34 Dans une sphère**

Une particule M se déplace au hasard à l'intérieur d'une enceinte sphérique de rayon R .

Y est la variable aléatoire qui indique la distance OM .

On utilise le modèle qui définit la probabilité de l'événement « $Y \leq t$ », où t appartient à $[0; R]$, par :

$$P(Y \leq t) = \frac{\text{volume}(\text{boule de rayon } t)}{\text{volume}(\text{enceinte})}$$

1. Pour tout t de $[0; R]$, on pose :

$$F(t) = P(Y \leq t).$$

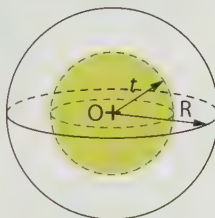
Exprimez $F(t)$ en fonction de t .

2. On note f la densité de la loi de Y .

a) Justifiez que $F' = f$.

b) Déduisez-en l'expression de f sur $[0; R]$.

c) Calculez l'espérance de Y .



Rappel

$$V_{\text{Boule}} = \frac{4}{3} \pi R^3.$$

2. Peut-on trouver un intervalle I centré en 0 tel que $P(X \in I) = 0,7$?

36 I désigne un intervalle du type $[-\alpha; \alpha]$ avec $\alpha > 0$. On choisit un nombre au hasard dans I .

1. Calculez α , sous la forme $n\sqrt{2}$ ($n \in \mathbb{N}$), pour que la probabilité que le nombre choisi appartienne à $[-\sqrt{2}; \sqrt{8}]$ soit égale à 0,3.

2. Quelle est alors la probabilité que ce nombre appartienne à l'intervalle $[\sqrt{2}; \sqrt{18}]$?

37 L'instant d'arrivée d'un bus à un arrêt suit une loi uniformément distribuée entre 10 h 00 et 10 h 30.

Vous arrivez à cet arrêt à 10 h 00.

1. Quelle est la probabilité que votre attente dure dix minutes ou plus ?

2. Si à 10 h 15, le bus n'est pas encore arrivé, quelle est la probabilité que votre attente dure au moins dix minutes supplémentaires ?

38 Alix reçoit Ben entre 7 h 25 et 7 h 45 pour prendre un café avant de partir au lycée. Ben peut arriver à tout instant au hasard, uniquement dans cette plage horaire.

1. Quelle densité de probabilité peut-on attribuer à la variable aléatoire T qui indique l'instant d'arrivée (en minute) après 7 h 00 de Ben ?

2. Calculez la probabilité que Ben arrive chez Alix :

a) à 7 h 30 ;

b) avant 7 h 30 ;

c) après 7 h 30 ;

d) entre 7 h 35 et 7 h 37.

3. En moyenne, sur un grand nombre de visites, à quelle heure arrive-t-il ?

39 Une rame de métro relie deux stations M_1 et M_2 en 8 à 12 minutes.

On note X la durée du trajet lors d'une liaison et on suppose que X suit la loi uniforme sur $[8; 12]$.

1. Quelle est la densité de probabilité de la loi de X ?

2. Calculez la probabilité que la rame relie les deux stations en moins de 9 min 30 s.

3. La rame quitte M_1 à 8 h 00 et un usager arrive en M_2 à 8 h 11. Cette rame reste en gare une minute.

Quelle est la probabilité que l'usager soit obligé d'attendre la rame suivante ?

LOI UNIFORME

35 On choisit au hasard un nombre dans $[-3; 7]$.

X est la variable aléatoire qui indique le nombre choisi.

1. Calculez les probabilités des événements suivants :

a) « $X < 0$ » ;

b) « $|X| \leq 5$ » ;

c) « $X < 0$ » et « $|X| > 1$ » ;

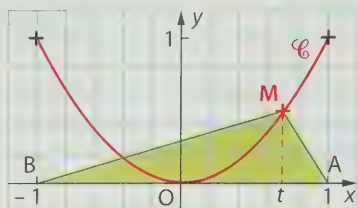
d) « $X \geq 0$ » ou « $X \leq 1$ ».

40 $\mathcal{C}$ est, dans un repère orthonormé, l'arc de parabole d'équation $y = x^2$ avec $-1 \leq x \leq 1$.

On choisit un nombre t dans l'intervalle $[-1; 1]$; ce choix se fait suivant la loi uniforme sur $[-1; 1]$.

M est le point de la courbe $\mathcal{C}$ d'abscisse t .

On note S la variable aléatoire qui donne l'aire, en u.a., du triangle ABM .



1. Calculez les probabilités suivantes :

a) $P(S \leq 0,25)$; b) $P(S > 0,5)$; c) $P(S = 1)$.

2. Déterminez le nombre τ tel que : $P(S \leq \tau) = 0,5$.

LOIS EXPONENTIELLES

Pour les exercices de cette rubrique, les probabilités demandées seront arrondies à 10^{-3} près.

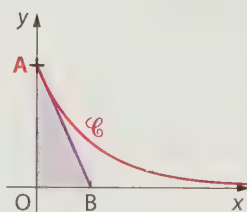
41 Le temps, en heure, nécessaire pour réparer une console de jeux suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1$.

1. Quelle est la probabilité que le temps de réparation dépasse deux heures ?

2. Quelle est la probabilité qu'une réparation prenne au moins quatre heures, étant donné que sa durée a déjà dépassé trois heures ?

42 La courbe $\mathcal{C}$ représente la densité f d'une loi exponentielle de paramètre λ .

La tangente à $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse 0 coupe l'axe des abscisses en B.



1. Écrivez une équation de la tangente en A à $\mathcal{C}$.

2. Démontrez que l'abscisse de B est égale à λ^{-1} .

3. Vérifiez que $[AB]$ partage le domaine limité par les axes et $\mathcal{C}$ en deux parties de même aire.

Les exercices 43 à 45 utilisent la notion de demi-vie associée à une variable aléatoire de durée de vie de type exponentiel (exercice 22, p. 392).

43 La durée de vie T , en heure, d'un transistor suit une loi exponentielle telle que : $P(T \leq 1000) = 0,095$.

1. Calculez la probabilité conditionnelle :

$$P_{T \geq 1000}(T \geq 2000).$$

2. Déterminez, à 1 h près, la durée notée $t_{1/2}$ telle que :

$$P(T \leq t_{1/2}) = 0,5.$$

44 X est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ .

1. Déterminez en fonction de λ la valeur $t_{1/2}$ telle que :

$$P(X \leq t_{1/2}) = P(X > t_{1/2}).$$

2. On suppose que $t_{1/2} = 99$. Calculez $P(100 \leq X \leq 200)$.

45 La durée de vie X , en année, d'un élément radioactif suit une loi exponentielle de paramètre λ .

1. La demi-vie $t_{1/2}$ du carbone $^{14}_6\text{C}$ est estimée à environ 5 568 ans, avec $t_{1/2}$ défini par $P(X \leq t_{1/2}) = 0,5$.

a) Calculez $P(X < 1000)$.

b) Déterminez, à un an près, la valeur de x telle que :

$$P(X < x) = 0,2.$$

2. La demi-vie du césium ($^{137}_{55}\text{Cs}$) est $t_{1/2} \approx 30$ ans.

Répondez aux mêmes questions.

Méthode de datation



La méthode de datation utilisée (spectrométrie de masse par accélérateur) ne nécessite qu'un infime prélèvement de matière, réduisant ainsi au minimum les dommages causés à l'échantillon. Les gants portés par le manipulateur permettent d'éviter la contamination de cet échantillon, qui pourrait conduire à des résultats erronés.

Les laboratoires utilisent toujours la valeur estimée par Willard Libby en 1951, $5\,568 \pm 30$ ans, même si, depuis, de nouvelles mesures donnent une valeur de $5\,734 \pm 40$ ans.

Les exercices 46 et 47 portent sur les systèmes de montage en série ou en parallèle (exercice 21, p. 391).

46 Deux composants A et B sont montés en série sur une machine. La durée de vie (exprimée en jour) de chacun d'eux est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,0004$.

La panne d'au moins l'un d'entre eux, A ou B, entraîne l'indisponibilité de la machine. Les pannes de A et B sont supposées indépendantes les unes des autres.

On note T_A la durée de vie de A et T_B celle de B.

1. a) Calculez $P(T_A \geq 300)$.

b) Calculez la probabilité que la machine fonctionne après 300 jours.

2. On se place dans le cas où les composants A et B sont montés en parallèle. La machine n'est alors indisponible que si A et B sont en panne. Calculez la probabilité que la machine fonctionne après 300 jours.

47 LOGIQUE Négation d'une proposition

Trois composants identiques C_1, C_2, C_3 sont montés en parallèle. Ils fonctionnent indépendamment les uns des autres et leurs durées de vie respectives T_1, T_2, T_3 suivent la même loi exponentielle de paramètre λ .

On note T la durée de vie du montage.

1. Proposition ① : « Le système fonctionne lorsqu'au moins un de ses composants fonctionne. »

Pour tout nombre $t \geq 0$, utilisez ① pour traduire l'événement « $T \geq t$ », puis calculez sa probabilité.

Aide

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

2. a) Énoncez la proposition ②, négation de ①.

b) Pour tout nombre $t \geq 0$, utilisez ② pour traduire l'événement « $T < t$ », puis déduisez-en $P(T \geq t)$.

3. Comparez les deux méthodes.

EXERCICES DE SYNTHÈSE**48 BAC** Routes dangereuses

Une entreprise d'autocars dessert une région montagneuse. En chemin, les véhicules peuvent être bloqués par des incidents extérieurs (chutes de pierres, présence de troupeaux sur la route, verglas, etc.).

Un autocar part du dépôt. On note D la variable aléatoire qui mesure la distance, en km, que l'autocar va parcourir jusqu'à ce que survienne un incident. On admet que D suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{82}$.

Les résultats demandés seront arrondis à 10^{-3} près.

1. Calculez la probabilité que la distance parcourue sans incident soit :

a) comprise entre 50 et 100 km ; **b)** supérieure à 300 km.

2. Sachant que l'autocar a déjà parcouru 300 km sans incident, quelle est la probabilité qu'il n'en subisse pas non plus au cours des 25 prochains kilomètres ?

3. Quelle est la distance moyenne d_m parcourue sans incident ? Justifiez.

4. L'entreprise possède 96 autocars. Les distances parcourues par chacun d'eux sont des variables aléatoires de même loi exponentielle vue ci-dessus.

Les incidents qui peuvent survenir aux autocars sont indépendants les uns des autres.

Pour tout nombre $d > 0$, X_d désigne la variable aléatoire qui donne le nombre d'autocars n'ayant subi aucun incident après avoir parcouru d kilomètres.

a) Quelle est la loi de la variable aléatoire X_{d_m} ?

b) Quel est, à une unité près, le nombre moyen d'autocars n'ayant subi aucun incident après avoir parcouru d_m kilomètres ?

49 Durée d'attente aux caisses

D'après une étude statistique sur la durée d'attente, en minute, aux vingt caisses d'un hypermarché :

– six caisses ont une durée d'attente qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,05$;

– les autres caisses ont une durée d'attente qui suit la loi exponentielle de paramètre $\mu = 0,1$.

Un client choisit une caisse au hasard. On note T sa durée d'attente, exprimée en minute.

1. On désigne par t un nombre positif.

On se propose de déterminer la probabilité $P(T \leq t)$.

a) Représentez la situation par un arbre pondéré.

b) Déduisez-en $P(T \leq t)$.

2. Calculez à 10^{-3} près la probabilité que ce client attende :

a) moins d'un quart d'heure ; **b)** plus de 10 minutes ;

c) entre 5 et 20 minutes.

50 Remboursement garanti

Un fabricant vend un modèle de jouet électronique.

La variable aléatoire T qui indique la durée de vie, exprimée en année, d'un jouet pris au hasard dans la production suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{3}$.

Pour chaque probabilité demandée, on donnera sa valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-4} près.

1. a) Quelle est la probabilité p que le jouet ne fonctionne plus au bout d'un an ?

b) On désigne par t un nombre positif.

Exprimez en fonction de t la probabilité $P(T > t)$.

2. J'ai acheté un jouet de ce type.

On note A l'événement « Le jouet n'a aucune défaillance pendant un an » et B l'événement « Le jouet n'a aucune défaillance pendant trois ans ».

Calculez les probabilités $P(A)$, $P(B)$ puis $P_A(B)$.

3. Le fabricant garantit ses jouets un an. Il s'engage alors à rembourser les jouets défectueux.

a) Quel taux de remboursement doit-il prévoir ?

b) Quelle durée de garantie t_0 (à 1 mois près) aurait-il dû proposer pour que ce taux ne dépasse pas 8 % ?

4. Un commerçant achète un lot de trois jouets et le fabricant offre pour chaque jouet la garantie d'un an. X désigne le nombre de jouets remboursés sur ce lot.

a) Dressez en fonction de p le tableau de la loi de X .

b) Quelle est en fonction de p l'espérance de X ?

D'après Concours ENI

AVEC LES TICE

51 De la loi uniforme à la loi exponentielle

On choisit au hasard un nombre x de $[0; 1]$, puis on lui associe le nombre $y = -2 \ln(1 - x)$.

On note X la variable aléatoire qui indique le nombre choisi et Y la variable aléatoire définie par :

$$Y = -2 \ln(1 - X).$$

On sait que X suit la loi uniforme sur $[0; 1]$.

On se propose de déterminer la loi de Y .

1. Ensemble des valeurs prises par Y

- Étudiez la fonction $f : x \mapsto -2 \ln(1 - x)$ sur $[0; 1]$.
- Déduisez-en l'ensemble des valeurs prises par Y .

2. Expérimentation avec un tableur

Ouvrez une feuille de calcul et complétez comme indiqué.

	A	B	C	D	E
1	Valeurs de X	Valeurs de Y	[0;1[	[1;2[	[2;3[
2					

- Simulez 10 000 valeurs de X et les valeurs correspondantes de Y .

Affichez avec 4 décimales la fréquence des événements « $Y \in [n; n + 1[$ » où n est un entier entre 0 et 12.

Aide

Par exemple pour la fréquence des valeurs de Y dans $[1; 2[$, saisissez en D2 l'instruction :
 $= (\text{NB.SI}(\text{B2:B10001}; "<2") - \text{NB.SI}(\text{B2:B10001}; "<1")) / 10000$

- Représentez l'histogramme des fréquences avec affichage des étiquettes.

Remarque. L'amplitude de chaque classe est 1, donc l'aire de chaque rectangle (qui correspond à la hauteur) indique directement la fréquence.

- Identifiez le type de loi de probabilité que semble suivre la variable aléatoire Y .
- Vérifiez votre conjecture en affichant une courbe de tendance adaptée qui ajuste l'histogramme.

3. Démonstration

- Pour tout nombre t positif, prouvez que l'événement « $Y \leq t$ » signifie « $X \leq 1 - e^{-\frac{1}{2}t}$ ».

Justifiez alors que $P(Y \leq t) = 1 - e^{-\frac{1}{2}t}$.

- On note f la densité de probabilité de la loi de Y et on pose pour tout nombre t positif, $F(t) = P(Y \leq t)$.

- Exprimez $F(t)$ sous la forme d'une intégrale.
- Justifiez que F est dérivable sur $[0; +\infty[$ et précisez la fonction dérivée de F .
- Déduisez-en l'expression de la fonction densité f .
- Ce résultat correspond-il à l'expérimentation ?

52 ALGORITHMIQUE Seuil d'une durée de vie

X est une variable aléatoire qui suit une loi de durée de vie sans vieillissement de paramètre $k > 0$.

On désigne par a un nombre tel que $0 < a < 1$.

L'objectif est de trouver le plus grand entier n tel que :

$$P(X \leq n) \leq 1 - a.$$

- Résolvez le problème algébriquement en exprimant n en fonction de k et a .

Aide Utilisez la fonction partie entière.

- on donne ci-dessous un algorithme dont l'objectif est de déterminer n .

```

Variables
k, a, n
Algorithme
Lire k
Lire a
n reçoit 0
Tant que f(n) ≤ 1 - a
    Faire n reçoit n + 1
Fin Tant Que
Afficher n

```

- Quelle est la fonction f utilisée ?
- Testez cet algorithme avec AlgoBox pour les couples $(k; a)$ suivants :
 $(0,1; 0,05); (0,01; 0,1); (0,1 \ln(2); 0,2)$.
Comparez les résultats avec les valeurs exactes du 1.
- Modifiez cet algorithme pour qu'il fonctionne.

Prendre toutes les initiatives

53 $(O; A, B)$ est un repère orthonormé direct.

On choisit un nombre θ dans l'intervalle $[0; \pi]$ selon la loi uniforme.

M est le point du cercle trigonométrique de centre O , repéré par θ .

Quelle est la probabilité que l'aire du triangle AOM soit inférieure à 0,25 ?

54 T est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ .

On note τ son espérance et $t_{1/2}$ sa demi-vie c'est-à-dire le nombre tel que $P(T \leq t_{1/2}) = 0,5$.

Léa affirme que la probabilité que T soit entre $t_{1/2}$ et τ ne dépend pas du paramètre λ .

Léa a-t-elle raison ?

55 Travail en autonomie

→ Rédigez la solution de cet exercice en vous aidant du guide.

Vrai ou faux

Pour chaque proposition, dites si elle est vraie ou fausse, puis proposez une démonstration pour la réponse indiquée.

X désigne une variable aléatoire.

On rappelle que : $V(X) = E[(X - E(X))^2]$.

1. Si X suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0 ; 5]$, alors :

a) il existe unique nombre a de $[0 ; 5]$ tel que :

$$7P(X \leq a) = 8P(X \geq a).$$

b) la variance de X est égale à 2.

2. Si X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,2$ sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, alors :

a) pour tout nombre a positif, $P(X \geq a) = 1 - e^{-0,2a}$.

b) il existe un unique nombre positif b tel que :

$$7P(X \leq b) = 8P(X \geq b).$$

c) pour tous nombres c et d positifs :

$$P_{X \geq c}(X \geq c + 4) = P_{X \geq d}(X \geq d + 4).$$



Sur le Web

Retrouvez le corrigé de cet exercice sur le site

www.mathlycee.net/eleve-TermS

Analyser l'énoncé

Attention, une justification est attendue.

Analyser l'énoncé

La partie 1 propose :

- la résolution d'une équation ;
- le calcul de la variance de X , d'où la nécessité d'utiliser la formule indiquée.

Analyser l'énoncé

La partie 2 propose :

- un calcul direct de probabilité ;
- la résolution d'une équation ;
- la vérification d'une égalité.

D'où la mobilisation des connaissances sur une loi exponentielle.

Guide

1. Cette partie porte sur la loi uniforme sur $[0 ; 5]$.

a) Pour obtenir la probabilité que X appartienne à un sous-intervalle I de $[0 ; 5]$, on peut utiliser directement la formule :

$$P(X \in I) = \frac{\text{longueur de } I}{\text{longueur de } [0 ; 5]}.$$

Déduisez-en la mise en équation puis la résolution.

b) Vous connaissez, d'après le cours, la densité f de la loi de X ainsi que l'espérance $E(X)$.

Il s'agit d'appliquer la formule $V(X) = E[(X - E(X))^2]$ c'est-à-dire $V(X) = \int_0^5 [x - E(X)]^2 f(x) dx$.

2. Cette partie porte sur une loi exponentielle.

a) Vous connaissez l'expression de la densité f ainsi que la formule : $P(X < a) = P(X \leq a) = \int_0^a f(x) dx$.

Les événements « $X \geq a$ » et « $X < a$ » sont contraires l'un de l'autre. Déduisez-en la probabilité cherchée.

b) En utilisant l'événement contraire de « $X \geq b$ », vous pouvez transformer l'équation proposée en $15P(X \leq b) = 8$.

Déduisez-en la mise en équation puis la résolution.

c) Les probabilités conditionnelles qui interviennent doivent vous rappeler que la loi de la variable aléatoire X est sans vieillissement. Utilisez cette propriété.

ZOOM sur la rédaction

a doit appartenir à $[0 ; 5]$. Donc, avant de conclure, assurez-vous que cette condition est remplie.

ZOOM sur la rédaction

Précisez l'expression de la densité ainsi que la valeur de $E(X)$.

ZOOM sur la rédaction

Détaillez le calcul de l'intégrale qui donne la valeur de la variance.

ZOOM sur la rédaction

Lors du calcul d'une intégrale, précisez la primitive utilisée.

ZOOM sur la rédaction

Dans la résolution de l'équation, mettez en évidence les différentes étapes et notamment l'utilisation de la fonction $\ln$.

56 ROC Restitution organisée des connaissances

La durée de vie, exprimée en heure, d'un agenda électronique est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

On rappelle que pour tout $t \geq 0$,

$$P(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx.$$

La fonction R définie sur $[0; +\infty[$ par $R(t) = P(X > t)$ est appelée fonction de fiabilité.

1. Restitution organisée des connaissances

a) Démontrez que pour tout nombre $t \geq 0$, $R(t) = e^{-\lambda t}$.

b) Démontrez que la variable X suit une loi de durée de vie sans vieillissement, c'est-à-dire que pour tout nombre $s \geq 0$, la probabilité conditionnelle $P_{X>t}(X > t + s)$ ne dépend pas du nombre $t \geq 0$.

2. Application

Dans cette question, on prend $\lambda = 0,000\ 26$.

Les probabilités seront données avec trois décimales.

a) Calculez $P(X \leq 1000)$ et $P(X > 1000)$.

b) Sachant que l'événement « $X > 1000$ » est réalisé, calculez la probabilité de l'événement « $X > 2\ 000$ ».

c) Sachant qu'un agenda a fonctionné plus de 2 000 heures, quelle est la probabilité qu'il tombe en panne avant 3 000 heures ? Pouvait-on prévoir ce résultat ?

57 ROC Restitution organisée des connaissances**Prérequis**

T est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

On désigne par f sa densité de probabilité.

L'espérance mathématique de T est définie par :

$$E(T) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^x t f(t) dt.$$

1. Démonstration

a) Pour tout nombre positif t , on pose : $\varphi(t) = t f(t)$.

Justifiez que la fonction φ est dérivable sur $[0; +\infty[$ et vérifie pour tout $t \geq 0$:

$$\varphi(t) = e^{-\lambda t} - \frac{1}{\lambda} \varphi'(t).$$

b) Démontrez que pour tout nombre positif x :

$$\int_0^x \varphi(t) dt = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} - x e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda}.$$

c) Déduisez-en la valeur de $E(T)$.

2. Application

La durée de vie T , exprimée en heure, d'un jeu électronique est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle. Une étude statistique a montré que la durée de vie moyenne de ce type de jeu est 4 000 h.

a) Calculez à 10^{-3} près la probabilité que la durée de vie d'un tel jeu soit entre 2 000 h et 6 000 h.

b) Calculez à une heure près la durée δ pour laquelle $P(T \geq \delta) = 0,5$.

58 BAC Prise d'initiative

On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de kilomètres parcourus sans crevaisson par un pneu d'un type donné. On fait l'hypothèse que X suit une loi exponentielle de paramètre λ .

1. Prouvez que $P(500 \leq X \leq 1000) = e^{-500\lambda} - e^{-1000\lambda}$.

2. Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

La probabilité que le pneu parcoure entre 500 et 1 000 kilomètres sans crevaisson est estimée à 0,25.

Déterminez, à 10^{-4} près, la valeur du paramètre λ .

59 BAC QCM

Cet exercice est constitué de six questions : chacune comporte trois réponses, une seule est exacte.

Indiquez laquelle en justifiant la réponse.

On s'intéresse à la durée de vie notée T , exprimée en année, d'un appareil ménager avant la première panne. On modélise cette situation en considérant que la variable aléatoire T suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. Pour tout $t \geq 0$, la valeur de $P(T \in [t; +\infty[)$ est :

- a)** $1 - e^{-\lambda t}$ **b)** $e^{-\lambda t}$ **c)** $1 + e^{-\lambda t}$

2. Le nombre t tel que $P(T \in [0; t]) = P(T \in [t; +\infty[)$ est :

- a)** $\frac{\ln(2)}{\lambda}$ **b)** $\frac{\lambda}{\ln(2)}$ **c)** $\frac{\lambda}{2}$

3. D'après une étude statistique, la probabilité que l'appareil tombe en panne avant la fin de la première année est 0,18. La valeur exacte de λ est alors :

- a)** $\ln\left(\frac{50}{41}\right)$ **b)** $\ln\left(\frac{41}{50}\right)$ **c)** $\frac{\ln(82)}{\ln(100)}$

4. Sachant que cet appareil n'a connu aucune panne au cours des deux premières années après sa mise en service, la probabilité qu'il ne connaisse aucune panne l'année suivante est :

- a)** $P(T \in [1; +\infty[)$ **b)** $P(T \in [3; +\infty[)$ **c)** $P(T \in [2; 3])$

Dans la suite de l'exercice, on prendra $\lambda = 0,2$.

5. La probabilité que l'appareil n'ait pas eu de panne au cours des trois premières années est, à 10^{-4} près :

- a)** 0,552 3 **b)** 0,548 8 **c)** 0,451 2

6. Dix appareils neufs de ce type ont été mis en service en même temps. X est la variable aléatoire qui désigne le nombre d'appareils qui n'ont pas eu de panne au cours des trois premières années.

La valeur la plus proche de la probabilité de l'événement « $X = 4$ » est :

- a)** 0,555 5 **b)** 0,802 2 **c)** 0,160 7

60 BAC Avec des lots de composants

Pour la fabrication d'appareils électroniques, un club achète des composants tous identiques mais dont certains présentent un défaut. On estime que la probabilité qu'un composant ait un défaut est 0,02. Les probabilités seront données à 10^{-2} près.

Partie A. On admet que le nombre de composants présentés dans le magasin est suffisamment important pour que l'achat de cinquante composants soit assimilé à cinquante tirages indépendants avec remise.

Le club achète cinquante composants. On note X le nombre de composants défectueux parmi eux.

1. Quelle est la probabilité que :

a) deux composants soient défectueux ?

b) au moins un composant soit défectueux ?

2. Quel est, par lot de cinquante composants achetés, le nombre moyen de composants défectueux ?

Partie B. On suppose que la durée de vie T_1 (en heure) de chaque composant défectueux suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 = 5 \times 10^{-4}$ et que la durée de vie T_2 (en heure) de chaque composant sans défaut suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda_2 = 10^{-4}$.

1. Calculez la probabilité que la durée de vie d'un composant soit supérieure à 1 000 heures :

a) si ce composant est défectueux ;

b) si ce composant est sans défaut.

2. T désigne la durée de vie (en heure) d'un composant acheté au hasard.

Prouvez que la probabilité que ce composant soit en état de marche après t heures de fonctionnement est :

$$P(T \geq t) = 0,02e^{-5 \times 10^{-4}t} + 0,98e^{-10^{-4}t}.$$

3. Sachant que le composant acheté est encore en état de fonctionner 1 000 heures après son installation, quelle est la probabilité que ce composant soit défectueux ?

61 Vrai ou faux

Pour chacune des questions, dites si la proposition est vraie ou fausse. Justifiez vos réponses. Calculatrice interdite.

Une rampe lumineuse est constituée d'ampoules bleues, rouges et jaunes provenant de deux usines U_1 et U_2 . U_1 produit 60 % des ampoules.

La durée de vie, en année, de chacune de ces ampoules suit une loi exponentielle dont le paramètre est indiqué dans le tableau suivant :

Ampoules	bleues	rouges	jaunes
de U_1	$\lambda_{B1} = 0,25$	$\lambda_{R1} = 0,20$	$\lambda_{J1} = 0,15$
de U_2	$\lambda_{B2} = 0,20$	$\lambda_{R2} = 0,15$	$\lambda_{J2} = 0,10$

1. La probabilité qu'une ampoule rouge dure moins de 5 ans sachant qu'elle vient de U_1 est $0,6(1 - e^{-1})$.

2. La probabilité qu'une ampoule bleue dure moins de 5 ans est $1 - 0,6e^{-1,25} - 0,4e^{-1}$.

3. La probabilité qu'une ampoule jaune dure entre 5 et 10 ans est $0,6(e^{-0,75} - e^{-1,5}) + 0,4(e^{-0,5} - e^{-1})$.

4. La demi-vie d'une ampoule jaune de U_2 est $4 \ln(2)$.

D'après Concours FESIC

62 BAC Bombardement de particules

Un récipient contient un gaz constitué de deux sortes de particules : 75 % de particules A et 25 % de particules B. Les particules sont projetées sur une cible formée de deux compartiments K_1 et K_2 .

L'expérience est modélisée de la manière suivante :

– une particule au hasard parmi celles du type A entre dans K_1 (respectivement K_2) avec la probabilité $\frac{1}{3}$ (respectivement $\frac{2}{3}$) ;

– une particule au hasard parmi celles du type B entre dans chacun des compartiments avec la probabilité 0,5.

Partie A. On considère une particule au hasard.

1. Calculez la probabilité de chacun des événements suivants concernant la particule :

A_1 : « type A dans K_1 » ; A_2 : « type A dans K_2 » ;

B_1 : « type B dans K_1 » ; B_2 : « type B dans K_2 » ;

C_1 : « dans K_1 » ; C_2 : « dans K_2 ».

2. On procède cinq fois de suite et de façon indépendante à l'épreuve décrite en introduction.

Le nombre de particules étant grand, on admettra que les proportions 75 % et 25 % restent constantes.

Quelle est la probabilité de l'événement E : « Il y a exactement deux particules dans K_2 » ?

Partie B. Les particules A sont radioactives et se transforment spontanément en particules B.

On note $p(t)$ la proportion de particules A dans le gaz. Ainsi, à l'instant $t = 0$, on a $p(0) = 0,75$.

Plus généralement, si t est exprimé en année, on a $p(t) = 0,75e^{-\lambda t}$ où λ est une constante positive.

La demi-vie des particules A est 5 730 ans.

Note La demi-vie est le temps au bout duquel le nombre de particules restantes est la moitié du nombre initial.

1. Donnez une valeur approchée de λ à 10^{-5} près par défaut.

2. Au bout de combien d'années 10 % des particules A se seront-elles transformées en particules B ?

3. Déterminez la valeur de t (à un an près) pour laquelle il y aura autant de particules A que de particules B.

Pour aller plus loin

Pour les exercices 63 et 64, on utilise la formule de calcul de la variance (lorsqu'elle existe) d'une variable aléatoire X : $V(X) = E[(X - E(X))^2]$.

63 Variance et loi uniforme

X est une variable aléatoire qui suit la loi uniforme sur l'intervalle $[a; b]$ ($a < b$).

1. a) Quelle est l'expression de la densité f de X ?

b) Quelle est la valeur de l'espérance de X ?

2. La variance de X est alors définie par :

$$V(X) = \int_a^b (x - E(X))^2 f(x) dx.$$

Démontrez que $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$.

64 Variance et loi exponentielle

X est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. a) Quelle est l'expression de la densité f de X ?

b) Quelle est la valeur de l'espérance de X ?

2. La variance X est alors définie par :

$$V(X) = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A (x - E(X))^2 f(x) dx.$$

a) g est la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$g(x) = \lambda \left(x - \frac{1}{\lambda} \right)^2 e^{-\lambda x}.$$

Déterminez les nombres a, b, c tels que la fonction G définie par $G(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-\lambda x}$ soit une primitive de g sur $[0; +\infty[$.

b) Pour tout nombre A strictement positif, on pose :

$$I(A) = \int_0^A g(x) dx.$$

Vérifiez que $I(A) = -\left(A^2 + \frac{1}{\lambda^2}\right)e^{-\lambda A} + \frac{1}{\lambda^2}$.

c) Déduisez-en que $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

65 Loi du max et loi du min

On choisit au hasard deux nombres dans $[0; 10]$.

On modélise ce choix par le couple $(X; Y)$ où les variables aléatoires X et Y sont indépendantes et suivent la loi uniforme sur $[0; 10]$.

A. Loi du max

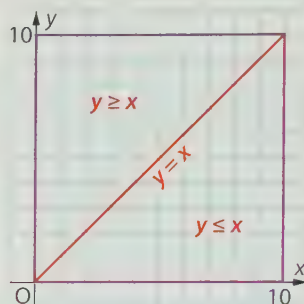
On se propose de déterminer la loi de la variable aléatoire Z qui indique le plus grand des deux nombres. On écrit : $Z = \max(X; Y)$. Z prend ses valeurs dans $[0; 10]$.

1. Méthode géométrique

La droite d'équation $Y = X$ détermine, dans le carré ci-après, deux parties triangulaires définies respectivement par $Y \leq X$ et $Y \geq X$.

a) Pour tout nombre t de $[0; 10]$, on considère l'événement « $Z \leq t$ ».

Coloriez la zone qui représente cet événement.



Aide Étudiez la situation dans chaque triangle.

b) Calculez, avec des aires, $P(Z \leq t)$ en fonction de t .

2. Méthode probabiliste

a) Justifiez que l'événement « $Z \leq t$ » n'est autre que l'événement « $X \leq t$ » $\cap$ « $Y \leq t$ ».

b) Calculez alors $P(Z \leq t)$ en fonction de t .

3. Pour tout t de $[0; 10]$, on pose $F(t) = P(Z \leq t)$.

On note f la densité de probabilité de la loi de Z .

a) Justifiez que F est dérivable sur $[0; 10]$ et que $F' = f$.

b) Déduisez-en l'expression de la densité f .

B. Loi du min

On se propose de déterminer la loi de la variable aléatoire T qui indique le plus petit des deux nombres. On écrit : $T = \min(X; Y)$. T prend ses valeurs dans $[0; 10]$.

1. Méthode géométrique

a) Pour tout nombre t de $[0; 10]$, on considère l'événement « $T > t$ ». Coloriez dans un carré de côté 10 la zone qui représente cet événement.

b) Calculez, avec des aires, $P(T > t)$ en fonction de t , puis déduisez-en $P(T \leq t)$.

2. Méthode probabiliste

a) Justifiez que l'événement « $T > t$ » n'est autre que l'événement « $X > t$ » $\cap$ « $Y > t$ ».

b) Calculez $P(T > t)$ en fonction de t , puis $P(T \leq t)$.

3. Pour tout t de $[0; 10]$, on pose $G(t) = P(T \leq t)$.

On note g la densité de probabilité de la loi de T .

a) Justifiez que G est dérivable sur $[0; 10]$ et que $G' = g$.

b) Déduisez-en l'expression de la densité g .

66 Distribution uniforme dans un cube unité

Dans un repère orthonormé de l'espace, on choisit au hasard un point M du cube unité $\mathcal{C}$. Ce choix est modélisé par le triplet $(X; Y; Z)$ de ses coordonnées, indépendantes entre elles et de même loi uniforme sur $[0; 1]$.

Un événement A est alors représenté par une partie $\mathcal{A}$ du cube unité et on admet que la loi de probabilité est définie par : $P(A) = \frac{\text{volume}(\mathcal{A})}{\text{volume}(\mathcal{C})} = \text{volume}(\mathcal{A})$.

L'objectif de cet exercice est d'étudier la loi de probabilité de la variable aléatoire $S = X + Y + Z$.

1. Quel est l'ensemble des valeurs prises par S ?

2. Pour tout t de $[0; 3]$, on se propose de déterminer $P(S \leq t)$. L'événement « $S \leq t$ » est représenté dans le cube $\mathcal{C}$ par la partie en dessous du plan d'équation :

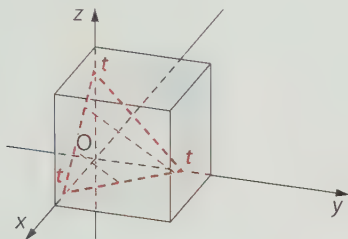
$$X + Y + Z = t.$$

On note $\mathcal{P}$ le solide représentant l'événement « $S \leq t$ ». Dans chacun des cas suivants, calculez le volume de $\mathcal{P}$ et déduisez-en $P(S \leq t)$.

a) Cas 1 : $0 \leq t \leq 1$ (fig. 1)

$\mathcal{P}$ est un tétraèdre trirectangle.

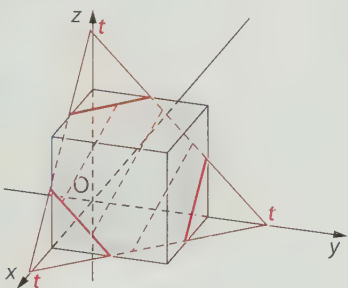
Fig. 1



b) Cas 2 : $1 < t \leq 2$ (fig. 2)

$\mathcal{P}$ est un tétraèdre trirectangle privé de trois « coins ».

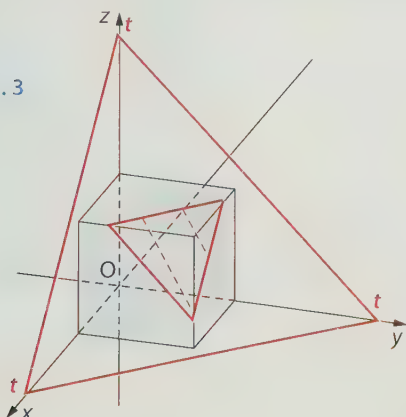
Fig. 2



c) Cas 3 : $2 < t \leq 3$ (fig. 3)

$\mathcal{P}$ est le cube privé d'un « coin ».

Fig. 3



3. Pour tout t de $[0; 3]$, on pose $F(t) = P(S \leq t)$.

On appelle f la densité de la loi de S .

a) Justifiez que F est dérivable sur $[0; 3]$ et que $F' = f$.

b) Déduisez-en l'expression de la densité f sur $[0; 3]$ en distinguant les trois sous-intervalles.

67 Le paradoxe de Bertrand

$\mathcal{C}$ est un cercle de centre O et de rayon 1. On choisit une corde de $\mathcal{C}$ au hasard.

On se propose de calculer la probabilité que cette corde soit plus longue que le côté c du triangle équilatéral inscrit dans $\mathcal{C}$.

1. Justifiez que $c = \sqrt{3}$.

2. La longueur d'une corde est une variable aléatoire X qui prend ses valeurs dans l'intervalle $[0; 2]$.

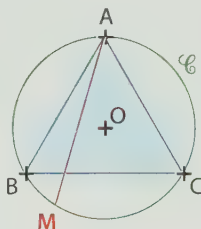
On cherche donc la probabilité $p = P(X > c)$.

a) Protocole 1

Un point A est fixé sur $\mathcal{C}$. Une corde est alors déterminée par le choix au hasard d'un point M de $\mathcal{C}$.

• Où devez-vous placer M sur $\mathcal{C}$ pour que la corde $[AM]$ ait une longueur supérieure à c ?

• Déduisez-en la probabilité p_1 .

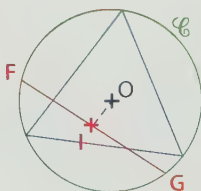


b) Protocole 2

Une corde est déterminée par le choix au hasard de son milieu I dans le disque.

• Où devez-vous placer I dans le disque pour que la corde $[FG]$ ait une longueur supérieure à c ?

• Déduisez-en la probabilité p_2 .



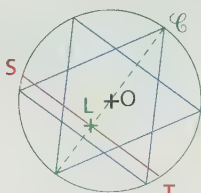
c) Protocole 3

Une corde est fixée sur $\mathcal{C}$.

On choisit alors la corde au hasard parmi toutes les cordes qui lui sont parallèles. Sa longueur est déterminée par sa distance d au centre O ($d = OL$).

• Où devez-vous choisir L sur le diamètre perpendiculaire à (ST) pour que la longueur de $[ST]$ soit supérieure à c ?

• Déduisez-en la probabilité p_3 .



Commentaire

Le paradoxe n'est qu'apparent. On utilise à chaque fois la loi uniforme, mais sur des univers différents car la définition de la corde change selon le protocole. C'est ce qui explique les trois probabilités différentes obtenues.

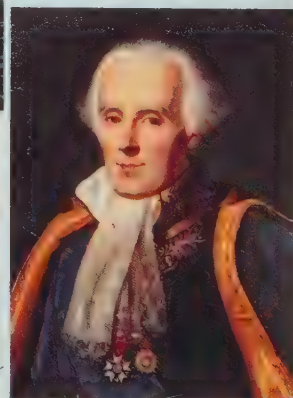


D'un siècle
à un autre

L'église de Hallgrímur à Reykjavik est la plus haute d'Islande, en raison de la forme très particulière de son clocher de 73 m, inspirée des orgues basaltiques naturelles.

Mais pour un statisticien, cette forme évoque la « courbe en cloche » de la loi normale.

Cette loi de probabilité a été introduite en 1809 par Gauss dans le contexte de mesures astronomiques, et reprise en 1812 par Laplace dans sa *Théorie analytique des probabilités*.



En savoir plus sur
Pierre Simon Laplace

→ Chercheurs d'hier, p. 419

Loi binomiale

On répète n fois une épreuve de Bernoulli où la probabilité de succès est p .

On note X la variable aléatoire qui indique le nombre de succès.

- X suit la loi binomiale de paramètres n et p , notée $\mathcal{B}(n, p)$:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

où l'entier naturel k varie de 0 à n .

- L'espérance de X est np .
- L'écart-type de X est $\sqrt{np(1-p)}$.

Histogramme d'une loi binomiale

- Pour représenter une loi binomiale, le graphique le plus naturel est le **diagramme en bâtons**, où sont indiquées en abscisses les valeurs possibles et où les hauteurs des bâtons sont égales aux probabilités.
- Pour transformer ce diagramme en bâtons en **histogramme**, il suffit de remplacer chaque bâton par un rectangle de largeur 1 et de même hauteur. Les probabilités sont alors égales aux aires des rectangles.

Espérance et variance

X est une variable aléatoire dont la loi de probabilité est définie par :

Valeurs x_i	x_1	x_2	...	x_k
$P(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_k

- **Espérance** : $\mu = E(X) = \sum_{i=1}^k p_i x_i$.
- **Variance** : $V(X) = \sum_{i=1}^k p_i (x_i - \mu)^2 = E((X - \mu)^2)$.
- **Écart-type** : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.
- Pour tous nombres a et b ,
 $E(aX + b) = aE(X) + b$ et $V(aX) = a^2 V(X)$.

1 QCM

Pour chaque question, une seule affirmation est exacte. Identifiez-la en justifiant votre réponse.

Une urne contient cinq boules équiprobables au tirage, dont une seule boule rouge. On tire au hasard une boule 16 fois avec remise et on note X la variable aléatoire qui indique le nombre d'apparitions de la boule rouge.

1. Une valeur approchée de $P(X = 3)$ à 10^{-2} près est :

- a) 0,75 b) 0,21 c) 0,25

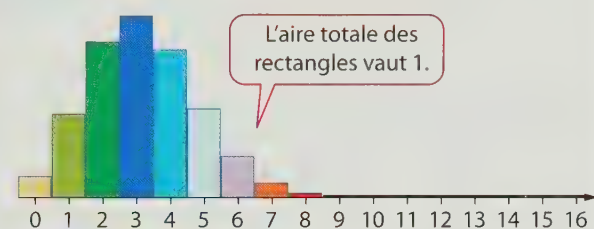
2. L'espérance de X est :

- a) 3,2 b) 80 c) $\frac{5}{16}$

3. L'écart-type de X est :

- a) 2,56 b) 1,6 c) 0,8

4. La loi de probabilité de X est représentée ci-dessous par un histogramme.



L'aire des trois plus grands rectangles représente :

- a) $P(2 < X \leq 4)$ b) $P(2 \leq X < 4)$ c) $P(2 \leq X \leq 4)$

2 Vrai ou faux

La variable aléatoire X prend les valeurs $x_1, x_2, \dots, x_k$ avec les probabilités respectives $p_1, p_2, \dots, p_k$.

On note μ son espérance et σ son écart-type.

1. La variable aléatoire $X' = X - \mu$ vérifie :

- a) $E(X') = \mu$ b) $V(X') = V(X) = \sigma^2$

2. La variable aléatoire $Z = \frac{1}{\sigma} X'$ vérifie :

- a) $E(Z) = 0$ b) $V(Z) = 1$

3 QCM

Une seule affirmation est exacte. Identifiez-la en justifiant votre réponse.

On pose $Z = \frac{X - 3,2}{1,6}$, où X est la variable aléatoire définie dans l'exercice 1. Alors, à 10^{-2} près :

- a) $P\left(Z = -\frac{1}{8}\right) \approx 0,12$ b) $P\left(Z = -\frac{1}{8}\right) \approx 0,25$
c) $P\left(Z = -\frac{1}{8}\right) \approx 0$



Activité 1

POIDS D'UN NOUVEAU-NÉ

TICE



L'histogramme des fréquences ci-dessous indique la répartition du poids à la naissance (en kg) des bébés nés à terme dans une grande maternité pendant une période assez longue.

Les classes de poids sont des intervalles fermés à gauche et ouverts à droite.

Il s'agit, en toute rigueur, de la masse.

1 Exploitation de l'histogramme

a) Avec le langage statistique

• Quelle est l'aire totale de l'histogramme ? l'aire d'un rectangle élémentaire ?

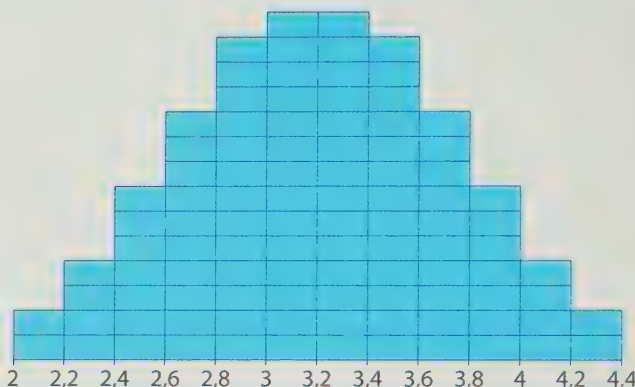
Déduisez-en le tableau des fréquences f_i .

• Quelle est la proportion de bébés dont le poids est strictement inférieur à 3,2 kg ? strictement inférieur à 4 kg ? compris entre 3,2 kg et 4 kg ?

• Ouvrez une feuille de calcul d'un tableur et saisissez les données avec :

en colonne A, les centres x_i des intervalles ; en colonne B, les fréquences f_i .

On admet, pour la suite, (vous pouvez faire les calculs avec un tableur ou une calculatrice) que le poids moyen d'un nouveau-né est 3,2 kg et l'écart-type des poids 0,5 kg (à 0,01 kg près).



b) Avec le langage probabiliste

On choisit un bébé au hasard dans cette population et on appelle X la variable aléatoire qui indique son poids (en kg).

- Déterminez $P(X < 4)$, $P(X < 3,2)$, $P(3,2 \leq X < 4)$.
- Quelle est l'espérance μ de X ? son écart-type σ ?

2 Changement de variable et ajustement d'une courbe à l'histogramme

a) Changement de variable aléatoire

On pose $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$. Placez en colonne C les valeurs z_i de Z .

b) Histogramme des fréquences pour Z (on ne demande pas de le dessiner)

- Vérifiez que pour l'histogramme des fréquences de Z , l'amplitude des classes est $\frac{0,2}{\sigma}$.
- En remarquant que les fréquences sont inchangées, déduisez-en que les hauteurs d_i des rectangles, appelées **densités de fréquence**, sont obtenues en multipliant les fréquences f_i par 5σ . Placez ces valeurs en colonne D.

c) Ajustement par une fonction

φ désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

- Tabulez cette fonction dans une nouvelle colonne E, en prenant comme abscisses les valeurs z_i .
- Représentez sur un même graphique cette fonction et les densités d_i (sélectionner les colonnes C, D, E, puis « nuage de points » avec EXCEL ou « XY (dispersion) » avec CALC). Qu'observez-vous ?

3 Retour aux données initiales

a) Exprimez X en fonction de Z , puis démontrez que $P(3,2 \leq X < 4) = P(0 \leq Z < 1,6)$.

b) Exprimez, de façon approchée, cette probabilité par une intégrale de la fonction φ (on ne demande pas de la calculer).

Activité 2

LOI BINOMIALE : AJUSTEMENT D'UNE COURBE À L'HISTOGRAMME

On lance 25 fois une pièce équilibrée et on appelle succès l'apparition de Pile.

On note X la variable aléatoire qui indique le nombre de succès parmi les 25 lancers.

1 Loi du nombre de succès

- Quelle est la loi de probabilité de X ? son espérance μ ? son écart-type σ ? Tabulez cette loi avec une calculatrice pour les valeurs entières de 0 à 25.
- Sur un papier quadrillé (en mode « paysage »), tracez le **diagramme en bâtons** représentant la loi de X . Vous prendrez comme unité 1 cm sur l'axe des abscisses, 1 m (oui !) sur l'axe des ordonnées.
- Pour transformer le diagramme en bâtons en **histogramme**, donnez à chaque bâton une épaisseur de 1, en remplaçant chaque abscisse k par l'intervalle $[k - 0,5 ; k + 0,5]$.
 - Quelle est l'aire totale de cet histogramme ? Précisez l'unité d'aire.
 - Hachurez la portion de l'histogramme dont l'aire est égale à $P(11 < X < 15)$.

2 Changement de variable et ajustement par une fonction

On cherche une fonction continue dont la courbe s'ajuste au bord supérieur de l'histogramme.

a) Changement de variable aléatoire

On pose $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$.

Pour obtenir l'histogramme de la loi de Z , il suffit de changer les graduations sur les deux axes.

- Modifiez la graduation sur l'axe des abscisses pour qu'elle indique les valeurs de Z à l'emplacement des valeurs correspondantes de X . Vérifiez que l'origine a changé et que la nouvelle unité est 2,5 cm.
- Modifiez en conséquence la graduation sur l'axe des ordonnées pour que les aires restent inchangées. Vérifiez que la nouvelle unité est 40 cm.

b) Ajustement par une fonction

φ désigne la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

- Avec une calculatrice, tabulez cette fonction pour les valeurs de -3 à 3 avec un pas de 0,4.
- En utilisant la nouvelle graduation des deux axes, placez les points correspondants sur le graphique (vous pouvez multiplier les images par 40 pour avoir les ordonnées en cm) et reliez-les sommairement. Qu'observez-vous ?

3 Retour au nombre de succès

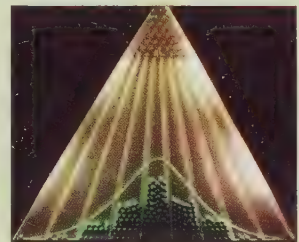
- Exprimez X en fonction de Z , puis prouvez que $P(11 < X < 15) = P(11,5 < X < 14,5) = P(-0,4 < Z < 0,8)$.
- Exprimez, de façon approchée, cette probabilité par une intégrale de la fonction φ (on ne demande pas de la calculer).

Problème ouvert

Refaites ces exercices après le chapitre ... Est-il plus facile ?

Sur une **planche de Galton**, n rangées horizontales de clous sont disposées en quinconce : 1 clou, puis 2, puis 3, ... puis n . On incline la planche et on insère des petites billes par le haut, de façon que lors d'une rencontre avec un clou, chaque bille ait autant de chances d'aller à droite qu'à gauche. Arrivées en bas, les billes se répartissent dans $n + 1$ cases.

Sur le document ci-contre, où $n = 8$, on a représenté une courbe : laquelle et pourquoi ?



1 Loi normale standard

1.1 Densité de probabilité de Laplace-Gauss

Définition 1 On appelle **fonction de Laplace-Gauss** la fonction φ définie sur $\mathbb{R}$ par :

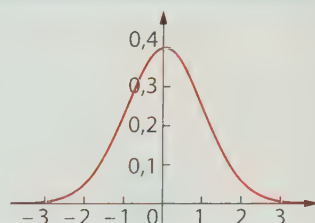
$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

La fonction φ est continue, dérivable, strictement positive sur $\mathbb{R}$.

Elle est paire et admet en 0 un maximum, égal à $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

Elle a pour limite 0 en $+\infty$ et en $-\infty$.

Sa représentation graphique ci-contre s'appelle **courbe de Gauss** ou **courbe en cloche**.



Théorème 1 L'aire totale du domaine sous la courbe en cloche est égale à 1.

(admis)

La démonstration consisterait à établir que $\lim_{a \rightarrow +\infty} \int_0^a \varphi(t) dt = \frac{1}{2}$ et $\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \varphi(t) dt = \frac{1}{2}$.

Il en résulte que la fonction φ , continue et positive sur $\mathbb{R}$, peut définir une densité de probabilité.

Définition 2 Dire qu'une variable aléatoire Z suit la **loi normale standard** signifie qu'elle admet pour **densité de probabilité la fonction φ** .

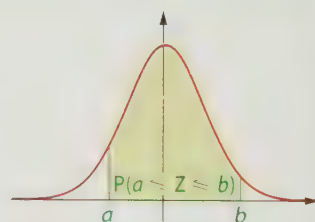
Autrement dit, pour tous nombres a et b tels que $a \leq b$,

$$P(a \leq Z \leq b) = \int_a^b \varphi(t) dt.$$

La probabilité que Z soit compris entre a et b est l'aire du domaine sous la courbe en cloche entre les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.

Remarque. Pour tout nombre x , $P(Z = x) = 0$; donc :

$$P(a \leq Z \leq b) = P(a < Z \leq b) = P(a \leq Z < b) = P(a < Z < b).$$



1.2 Calcul de probabilités

Pour calculer des probabilités, il est commode d'introduire une fonction auxiliaire.

Définition 3 Z étant une variable aléatoire qui suit la loi normale standard, on pose pour tout nombre x :

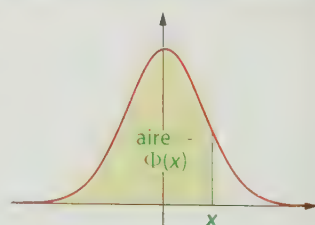
$$\Phi(x) = P(Z \leq x).$$

Autrement dit, le nombre $\Phi(x)$ est l'aire du domaine sous la courbe en cloche, à gauche de la verticale correspondant au point d'abscisse x .

Ainsi, $\Phi(0) = 0,5$, d'après la symétrie de la courbe en cloche par rapport à l'axe (Oy) . On admet que Φ est une primitive de φ , à savoir la primitive qui vérifie $\Phi(0) = 0,5$.

Remarque. La fonction Φ s'appelle la **fonction de répartition** de Z . Sa représentation graphique est donnée page 410.

Φ ne peut pas s'exprimer à l'aide des fonctions élémentaires. Les tableurs et les calculatrices permettent d'obtenir des valeurs (approchées) → **Exercices 24 et 25, pages 420 et 421.**



Théorème 2

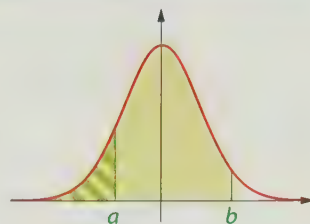
Si une variable aléatoire Z suit la loi normale standard, alors pour tous nombres a et b tels que $a \leq b$,

$$P(a \leq Z \leq b) = \Phi(b) - \Phi(a).$$

Démonstration. $\Phi(a)$ est l'aire du domaine (hachuré sur la figure) sous la courbe, situé à gauche de l'abscisse a ; $\Phi(b)$ est l'aire du domaine sous la courbe, situé à gauche de l'abscisse b .

Par soustraction, on obtient l'aire du domaine sous la courbe, situé entre a et b . On aurait pu aussi utiliser la formule d'intégration :

$$P(a \leq Z \leq b) = \int_a^b \varphi(t) dt = \Phi(b) - \Phi(a).$$

**Théorème 3**

Pour tout nombre réel x , $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

Démonstration. $\Phi(-x) = P(Z \leq -x)$ par définition, et $P(Z \leq -x) = P(Z < -x)$.

Or, $P(Z < -x) = P(Z > x)$ par symétrie de la courbe en cloche par rapport à l'axe des ordonnées ; donc $\Phi(-x) = P(Z > x)$.

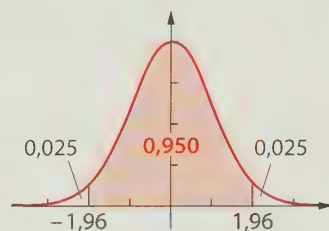
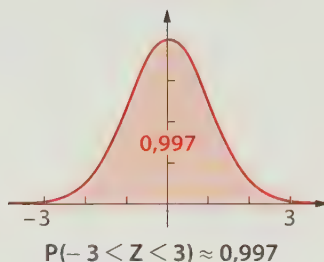
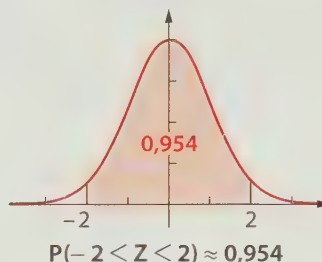
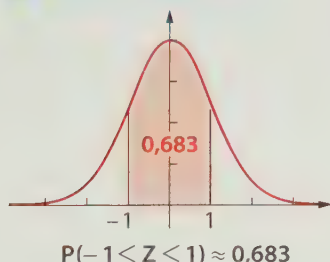
« $Z > x$ » est l'événement contraire de « $Z \leq x$ », donc $P(Z > x) = 1 - P(Z \leq x)$. D'où le résultat.

► **Exemple.** $\Phi(1,96) \approx 0,975$ donc $\Phi(-1,96) \approx 0,025$.

On peut en déduire : $P(Z > 1,96) = P(Z < -1,96) \approx 0,025$;

$P(-1,96 < Z < 1,96) \approx 0,950$;

$P(Z < -1,96 \text{ ou } Z > 1,96) \approx 0,050$.

► **Valeurs à connaître****1.3] Espérance et variance****Théorème 4**

Si la variable aléatoire Z suit la loi normale standard, alors son espérance est 0 et sa variance 1.

Démonstration
Exercices 82 et 83
→ p. 432.

Pour cette raison, la loi normale standard s'appelle aussi **loi normale centrée réduite** : « centrée » car $E(Z) = 0$, « réduite » car $V(Z) = 1$. On dit en abrégé que Z suit la loi $\mathcal{N}(0; 1)$.

1.4] Intervalle centré en 0 de probabilité donnée**Théorème 5**

Z est une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(0; 1)$.

Étant donné un nombre α , $0 < \alpha < 1$, il existe un unique nombre strictement positif u_α tel que :

$$P(-u_\alpha < Z < u_\alpha) = 1 - \alpha.$$



ROC

→ Exercice 78

« Le jour du BAC »

Animation

Démonstration exigible

Cherchons un nombre $x > 0$ tel que : $P(-x < Z < x) = 1 - \alpha$.

Cette équation équivaut à $\Phi(x) - \Phi(-x) = 1 - \alpha$, c'est-à-dire

$$2\Phi(x) - 1 = 1 - \alpha \text{ (théorème 3), soit } \Phi(x) = 1 - \frac{\alpha}{2}.$$

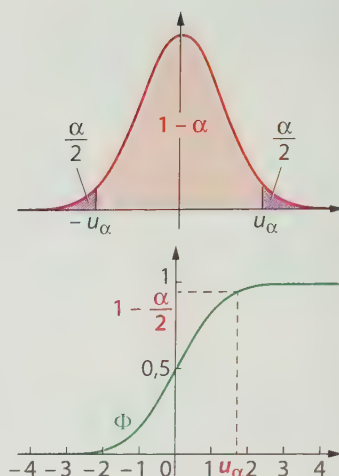
Cette équation a-t-elle une solution dans $]0; +\infty[$?

La fonction Φ est continue et strictement croissante sur $]0; +\infty[$;

$$\lim_{x \rightarrow 0} \Phi(x) = \Phi(0) = \frac{1}{2} \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = 1.$$

$$\text{Or, } 0 < \alpha < 1 ; \text{ donc } \frac{1}{2} < 1 - \frac{\alpha}{2} < 1.$$

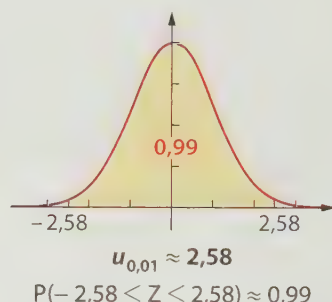
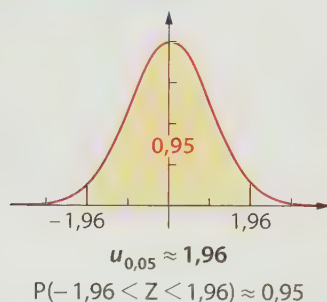
D'après le théorème 5 du chapitre 4, l'équation $\Phi(x) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ a une solution unique dans $]0; +\infty[$: on la note u_α .



► **Remarque.** L'intervalle $I =]-u_\alpha; u_\alpha[$, centré en 0, vérifie $P(X \in I) = 1 - \alpha$.

Les intervalles $[-u_\alpha; u_\alpha]$, $[-u_\alpha; u_\alpha[$ et $] -u_\alpha; u_\alpha]$ vérifient la même propriété.

Exemples à connaître



2 Loi normale générale

2.1 Présentation

Définition 4

μ désigne un nombre et σ un nombre strictement positif.

Dire que la variable aléatoire X suit la loi normale de paramètres μ et σ^2 signifie que la variable aléatoire $\frac{X - \mu}{\sigma}$ suit la loi $\mathcal{N}(0; 1)$.

Autrement dit, la variable aléatoire $\frac{X - \mu}{\sigma}$ admet pour densité de probabilité la fonction φ .
On dit en abrégé que X suit la loi $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$.

2.2 Espérance et variance

Théorème 6

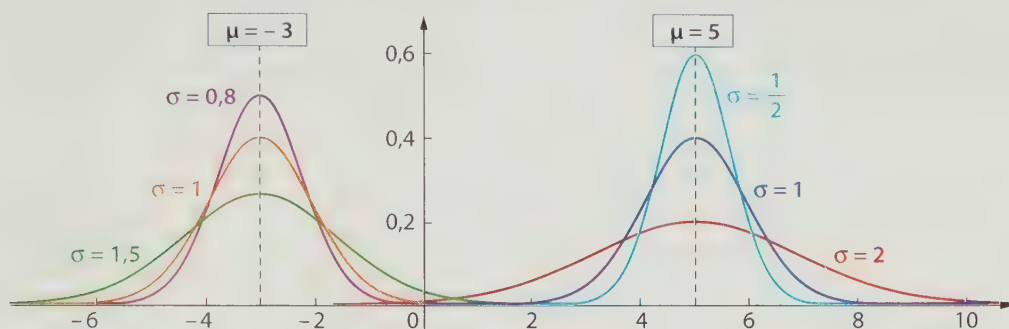
Si la variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$, alors son espérance est μ et sa variance σ^2 .

Une démonstration du théorème 6 fait l'objet de l'exercice 45, page 426.

2.3] Allure des courbes de densité

$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$ équivaut à $X = \sigma Z + \mu$. Donc quand Z prend les valeurs $-2, -1, 0, 1, 2, \dots$, X prend les valeurs $\mu - 2\sigma, \mu - \sigma, \mu, \mu + \sigma, \mu + 2\sigma \dots$ → Exercice 70, page 429

Cela suggère que la densité de probabilité de X est représentée par une « courbe en cloche », mais dont l'axe de symétrie a pour équation $x = \mu$, et qui est plus ou moins étirée horizontalement selon la valeur de σ . L'aire sous la courbe étant égale à 1, plus σ est grand, plus son sommet est bas :



Approximation normale d'une loi binomiale

Théorème 7

(admis)

Théorème de Moivre-Laplace

X est une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$, et Z la variable aléatoire $\frac{X - E(X)}{\sigma(X)} = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$.

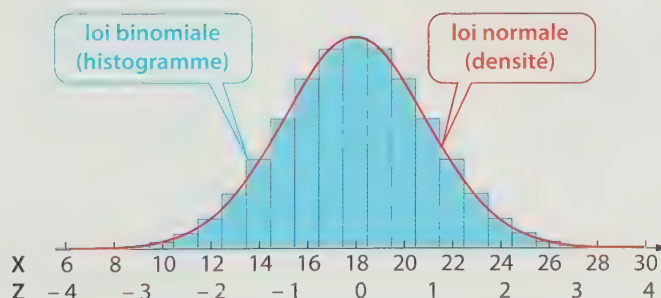
Animation

Pour tous nombres a et b tels que $a \leq b$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(a \leq Z \leq b) = \int_a^b \varphi(t) dt$.

Autrement dit, pour les grandes valeurs de n , la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$ est très proche de la loi normale de même espérance np et de même variance $np(1-p)$.

► **Remarque.** Quand on a $n \geq 30$, $np \geq 5$, $n(1-p) \geq 5$, l'erreur sur les probabilités calculées est très faible. On ne fera l'approximation que lorsque ces trois conditions sont vérifiées.

► **Exemple.** $n = 36$, $p = 0,5$. Les trois conditions sont remplies. $E(X) = np = 18$; $V(X) = np(1-p) = 9$.



Calculons $P(17 \leq X \leq 19)$ par l'approximation normale.

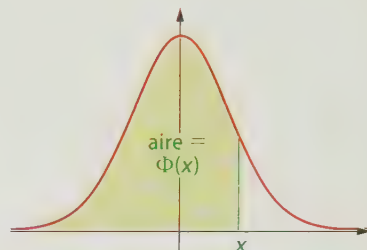
Il faut d'abord l'écrire $P(16,5 \leq X \leq 19,5)$. En effet, on remplace un diagramme en bâtons par un histogramme, donc chaque segment vertical est remplacé par un rectangle vertical de même hauteur et de largeur 1 (voir Activité 2). C'est ce qu'on appelle la **correction de continuité**.

$P(16,5 \leq X \leq 19,5) = P(-0,5 \leq Z \leq 0,5) \approx \Phi(0,5) - \Phi(-0,5) \approx 0,6915 - 0,3085 = 0,383$.

OBJECTIF 1

Calculer des probabilités avec la loi normale standard

- Les expressions suivantes sont synonymes : loi normale standard, loi normale d'espérance 0 et de variance 1, loi normale centrée réduite, loi $\mathcal{N}(0; 1)$.
- Z est une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(0; 1)$.
 - Pour calculer $P(Z \in I)$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$, on utilise la **fonction de répartition Φ** , définie par : $\Phi(x) = P(Z \leq x)$.
 - Pour tous nombres a et b tels que $a \leq b$, $P(a \leq Z \leq b) = \Phi(b) - \Phi(a)$ (**théorème 2**).
 - Pour tout nombre x , $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ (**théorème 3**).
- Les propriétés de la courbe en cloche facilitent le calcul des probabilités en utilisant des aires.
 - L'aire totale sous la courbe est égale à 1.
 - L'axe des ordonnées est axe de symétrie.
 - L'aire du domaine situé à gauche de x est égale à $\Phi(x)$.
 - $P(a < Z < b)$ est l'aire du domaine sous la courbe, situé entre les abscisses a et b .



EXERCICE RESOLU A

Calculer des probabilités avec les événements ou avec les aires

Une variable aléatoire Z suit la loi $\mathcal{N}(0; 1)$. On donne $\Phi(1,8) \approx 0,964$ et $\Phi(2,3) \approx 0,989$.

Calculez les probabilités ci-après de deux façons :

1. en utilisant le langage des événements ;

2. en utilisant le langage des aires.

a) $P(Z > 2,3)$; b) $P(Z < -1,8)$; c) $P(-1,8 < Z < 2,3)$; d) $P(Z < 1,8 \text{ ou } Z > 2,3)$.

Vous donnerez les résultats avec trois décimales.

Méthode

1. Avec le langage des événements

a) On considère l'événement contraire, pour pouvoir utiliser la fonction Φ .

b) On utilise le théorème 3 :

$$\Phi(-x) = 1 - \Phi(x).$$

c) On utilise le théorème 2 :

$$P(a < Z < b) = \Phi(b) - \Phi(a).$$

d) On utilise le résultat précédent, et la formule

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A).$$

• Une autre méthode

Si deux événements A et B sont incompatibles, $P(A \text{ ou } B) = P(A) + P(B)$.

Solution

1. Avec le langage des événements

a) « $Z > 2,3$ » est l'événement contraire de « $Z \leq 2,3$ ». Donc :

$$P(Z > 2,3) = 1 - P(Z \leq 2,3) = 1 - \Phi(2,3)$$

$$P(Z > 2,3) \approx 1 - 0,989 = 0,011.$$

b) $P(Z < -1,8) = \Phi(-1,8) = 1 - \Phi(1,8)$

$$P(Z < -1,8) \approx 1 - 0,964 = 0,036.$$

c) $P(-1,8 < Z < 2,3) = \Phi(2,3) - \Phi(-1,8)$

$$P(-1,8 < Z < 2,3) \approx 0,989 - 0,036 = 0,953.$$

d) « $Z < -1,8 \text{ ou } Z > 2,3$ » est l'événement contraire de « $-1,8 \leq Z \leq 2,3$ ». Donc :

$$P(Z < -1,8 \text{ ou } Z > 2,3) = 1 - P(-1,8 \leq Z \leq 2,3)$$

$$P(Z < -1,8 \text{ ou } Z > 2,3) \approx 1 - 0,953 = 0,047.$$

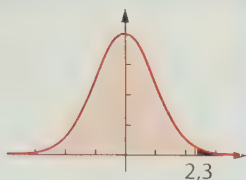
• Les événements « $Z < -1,8$ » et « $Z > 2,3$ » sont incompatibles. Donc :

$$P(Z < -1,8 \text{ ou } Z > 2,3) = P(Z < -1,8) + P(Z > 2,3)$$

$$P(Z < -1,8 \text{ ou } Z > 2,3) \approx 0,036 + 0,011 = 0,047.$$

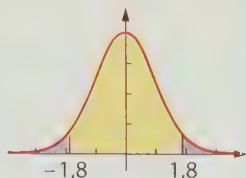
2. Avec le langage des aires

a) L'aire totale sous la courbe est égale à 1.

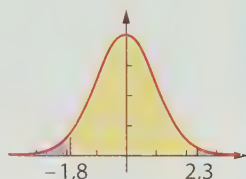


b) L'axe des ordonnées est axe de symétrie.

L'aire du domaine situé à gauche de x est égale à $\Phi(x)$.



c) $P(a < Z < b)$ est l'aire du domaine compris entre les abscisses a et b , égale à $\Phi(b) - \Phi(a)$.



d) On utilise le résultat précédent.

• Une autre méthode

2. Avec le langage des aires

a) $P(Z > 2,3)$ est l'aire du domaine situé à droite de l'abscisse 2,3. C'est donc le complément à 1 de l'aire du domaine situé à gauche de l'abscisse 2,3, soit $\Phi(2,3) \approx 0,989$. Donc $P(Z > 2,3) \approx 1 - 0,989 = 0,011$.

b) $P(Z < -1,8)$ est l'aire du domaine situé à gauche de l'abscisse -1,8. Par symétrie, c'est aussi l'aire du domaine situé à droite de l'abscisse 1,8. Celle-ci est le complément à 1 de l'aire du domaine situé à gauche de l'abscisse 1,8, égale à $\Phi(1,8) \approx 0,964$. Donc $P(Z < -1,8) \approx 1 - 0,964 = 0,036$.

c) $P(-1,8 < Z < 2,3)$ est l'aire du domaine entre les abscisses -1,8 et 2,3. C'est donc la différence entre l'aire du domaine à gauche de 2,3, égale à $\Phi(2,3) \approx 0,989$, et l'aire du domaine à gauche de -1,8, égale à $\Phi(1,8) \approx 0,964$. Donc : $P(-1,8 < Z < 2,3) \approx 0,989 - 0,036 = 0,953$.

d) L'aire du domaine extérieur à $[-1,8 ; 2,3]$ est le complément à 1 de l'aire du domaine intérieur à $[-1,8 ; 2,3]$. Donc : $P(Z < -1,8 \text{ ou } Z > 2,3) \approx 1 - 0,953 = 0,047$.

• Les domaines à gauche de -1,8 et à droite de 2,3 sont disjoints. Donc : $P(Z < -1,8 \text{ ou } Z > 2,3) = P(Z < -1,8) + P(Z > 2,3)$. $P(Z < -1,8 \text{ ou } Z > 2,3) \approx 0,036 + 0,011 = 0,047$.

Mise en pratique

1 La variable aléatoire Z suit la loi $\mathcal{N}(0 ; 1)$.

1. Déterminez $P(Z < -2,3)$ et $P(Z < 2,9)$ avec un tableur ou une calculatrice, avec trois décimales.

2. Déduisez-en, sans outil de calcul :

a) $P(Z \geq -2,3)$; b) $P(Z > 2,9)$;

c) $P(-2,3 \leq Z \leq 2,9)$; d) $P(Z < -2,3 \text{ ou } Z > 2,9)$.

2 La variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{N}(0 ; 1)$.

Calculez à 10^{-2} près la probabilité que X prenne ses valeurs à l'extérieur de l'intervalle $[-1,5 ; 1,8]$.

3 La variable aléatoire Z suit la loi $\mathcal{N}(0 ; 1)$.

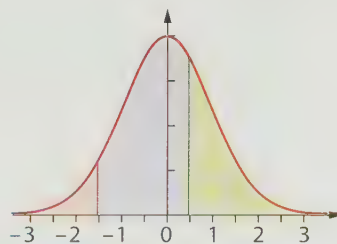
Calculez à 10^{-3} près :

a) $P(-1,2 < Z < 1,2)$; b) $P(Z < -1,2 \text{ ou } Z > 1,2)$.

4 La variable aléatoire T suit la loi $\mathcal{N}(0 ; 1)$.

Calculez $P(-1,7 \leq T \leq 2,1)$ avec trois décimales.

5 Sous la courbe de Gauss ci-dessous, les deux droites verticales délimitent trois domaines.



Déterminez leurs aires respectives, à 10^{-2} près.

6 La variable aléatoire Y suit la loi normale standard. Illustrez par un schéma :

a) $P(Y < 2)$;

b) $P(Y > -1)$;

c) $P(-1 < Y < 2)$;

d) $P(Y < -1 \text{ ou } Y > 2)$.

OBJECTIF 2

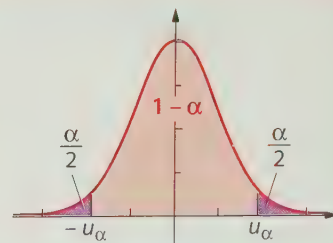
Déterminer un intervalle centré en 0 de probabilité donnée

Z est une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(0; 1)$.

• Pour tout α de $]0; 1[$, il existe un unique intervalle $I = [-u_\alpha; u_\alpha]$, avec $u_\alpha > 0$, tel que $P(Z \in I) = 1 - \alpha$ (théorème 5).

• Le nombre strictement positif u_α vérifie $\Phi(u_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$.

On peut s'aider de la courbe en cloche pour retrouver cette formule qui permet de déterminer u_α de façon approchée avec un tableur ou une calculatrice (exercices 26 et 27).



EXERCICE RESOLU B Exploiter les propriétés de la courbe en cloche

Z est une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(0; 1)$.

Déterminez l'intervalle fermé I de centre 0 tel que $P(X \in I) = 0,8$.

Vous donnerez les bornes de l'intervalle avec deux décimales.

► Méthode

• On cherche r strictement positif tel que $P(-r \leq Z \leq r) = 0,8$, c'est-à-dire tel que l'aire du domaine sous la courbe en cloche situé entre $-r$ et r soit égale à 0,8.

• On illustre la situation par un schéma.

Remarque

S'il s'agit de déterminer $I =]-r; r[$ ou $[-r; r[$ ou $] -r; r]$, on procède de la même façon. On obtiendra la même valeur de r (voir la remarque, p. 410).

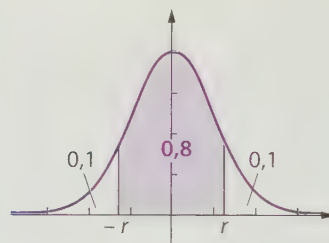
• On détermine α .

• On utilise la fonction de répartition Φ : le nombre r est tel que $\Phi(r) = 1 - \frac{\alpha}{2}$.

• On détermine l'antécédent de 0,9 par Φ avec une calculatrice (ou par lecture inverse d'une table de valeurs de Φ).

► Solution

Soit r le rayon de l'intervalle I ; on cherche r tel que $P(-r \leq X \leq r) = 0,8$. D'où le schéma :



► $P(-r \leq X \leq r) = 0,8 = 1 - \alpha$, donc $\alpha = 0,2$.

► Ainsi, $\Phi(r) = 1 - 0,1 = 0,9$.

► Avec une calculatrice ou un tableur, on obtient $r \approx 1,28$.

Donc $I \approx [-1,28; 1,28]$.

► Mise en pratique

7 Déterminez $u_{0,4}$ avec deux décimales.

8 Z est une variable aléatoire qui suit la loi normale standard.

Déterminez l'intervalle ouvert I de centre 0 tel que $P(X \in I) = 0,7$.

Vous donnerez les bornes de l'intervalle I avec trois décimales.

9 T est une variable aléatoire qui suit la loi normale standard.

Déterminez à 10^{-2} près le nombre r strictement positif tel que $P(-r < T \leq r) = 90\%$.

10 La variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{N}(0; 1)$. Déterminez l'intervalle fermé I de centre 0 tel que $P(X \notin I) = \frac{1}{3}$. Vous donnerez les bornes de l'intervalle I avec deux décimales.

Calculer des probabilités avec une loi normale générale

Dire qu'une variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$ signifie que la variable aléatoire $\frac{X - \mu}{\sigma}$ suit la loi $\mathcal{N}(0; 1)$. Le calcul d'une probabilité suivant la loi $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$ se ramène alors au calcul d'une probabilité selon la loi $\mathcal{N}(0; 1)$.

EXERCICE RESOLU C Utiliser une loi normale

Une machine fabrique des tubes métalliques de diamètre attendu 12 mm. Mais le diamètre réel X (en mm) fluctue légèrement de façon aléatoire autour de cette valeur : il suit la loi normale d'espérance 12 et d'écart-type 0,08. Les tubes de diamètre inférieur à 11,9 ou supérieur à 12,2 sont rejetés.

1. Calculez avec trois décimales : **a)** $P(X < 11,9)$; **b)** $P(X > 12,2)$; **c)** $p = P(11,9 \leq X \leq 12,2)$.
2. Interprétez en termes de proportions les résultats obtenus.

Méthode

1. a) On introduit la variable aléatoire $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$.
On se ramène ainsi au calcul de probabilités du type $P(Z \in J)$ où Z suit la loi $\mathcal{N}(0; 1)$.
Pour cela, on part des inégalités sur X :
– on soustrait μ à chaque membre ;
– puis on divise chaque membre par σ ($\sigma > 0$).

b) On procède comme en **a)**.

- On utilise l'événement contraire.

c) On effectue le calcul directement en utilisant un encadrement de Z .

2. On interprète les probabilités calculées dans les questions précédentes en tenant compte des conditions d'acceptation ou de rejet.

- On conclut.

Solution

1. a) Posons $Z = \frac{X - 12}{0,08}$: la variable aléatoire Z suit la loi $\mathcal{N}(0; 1)$.
 $P(X < 11,9) = P(X - 12 < -0,1)$
 $= P\left(\frac{X - 12}{0,08} < \frac{-0,1}{0,08}\right)$
 $= P(Z < -1,25) = \Phi(-1,25) \approx 0,106.$

b) $P(X > 12,2) = P(X - 12 > 0,2)$
 $= P\left(\frac{X - 12}{0,08} > \frac{0,2}{0,08}\right)$
 $= P(Z > 2,5) = 1 - \Phi(2,5).$
 $P(X > 12,2) \approx 1 - 0,994 = 0,006.$

c) $P(11,9 \leq X \leq 12,2) = P(-0,1 \leq X - 12 \leq 0,2)$
Donc $p = P\left(\frac{-0,1}{0,08} \leq \frac{X - 12}{0,08} \leq \frac{0,2}{0,08}\right)$
 $p = P(-1,25 \leq Z \leq 2,5) = \Phi(2,5) - \Phi(-1,25)$
 $p \approx 0,994 - 0,106 = 0,888.$

2. Seuls les tubes dont le diamètre, en mm, est compris entre 11,9 et 12,2 sont acceptés, avec la probabilité p . Or $p \approx 0,888$.
Donc 88,8 % des tubes sont acceptés.
11,2 % sont rejetés : 10,6 % sont trop petits et 0,6 % sont trop grands.

Mise en pratique

11 L'indice de masse corporelle (IMC) d'un individu est le quotient de sa masse (en kg) par le carré de sa taille (en m). En France aujourd'hui, il a pour moyenne 25,5 et pour écart-type 4.

En admettant qu'il suit une loi normale, quelle est la proportion de personnes :

- a) en sous-poids ($\text{IMC} < 18,5$) ?
- b) en surpoids ($25 < \text{IMC} < 30$) ?
- c) obèses ($\text{IMC} > 30$) ?

12 Un producteur de pamplemousses a constaté que le diamètre des fruits arrivés à maturité était en moyenne de 12 cm, avec un écart-type de 3 cm.

En supposant que le diamètre suit une loi normale, quelle est la proportion de pamplemousses dont le diamètre est :

- a) inférieur à 11 cm ?
- b) compris entre 11 et 14 cm ?
- c) supérieur à 14 cm ?

OBJECTIF 4

Utiliser l'approximation normale d'une loi binomiale

Lors d'un schéma de Bernoulli, la variable aléatoire X indiquant le nombre de succès suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$.

- Sous les conditions $n \geq 30$, $np \geq 5$, $n(1-p) \geq 5$, on peut approcher cette loi binomiale par la loi normale de même espérance np et de même variance $np(1-p)$.
- Pour calculer une probabilité concernant X , on effectue d'abord la **correction de continuité**, puis on procède comme pour une variable aléatoire suivant une loi normale (**théorème 7**).

EXERCICE RESOLU D Approcher la loi du nombre de succès

On lance 180 fois un dé cubique régulier et on note X la variable aléatoire qui indique le nombre d'apparitions du 6. En utilisant l'approximation normale de la loi binomiale, calculez, à 10^{-3} près :

- a) $P(X \leq 20)$; b) $P(X > 40)$; c) $P(X \leq 20 \text{ ou } X > 40)$.

► Méthode

- On identifie l'épreuve de Bernoulli, les paramètres n et p de la loi binomiale.
 - On vérifie que les conditions d'approximation sont remplies : $n \geq 30$, $np \geq 5$, $n(1-p) \geq 5$.
 - On calcule l'espérance $\mu = np$ et l'écart-type $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$.
 - On introduit la variable aléatoire $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$: Z suit sensiblement la loi $\mathcal{N}(0; 1)$.
- a) On effectue au préalable sur X la correction de continuité.
- On transforme les inégalités concernant X en inégalités concernant Z . On est ainsi ramené à calculer des probabilités avec la loi $\mathcal{N}(0; 1)$.
- b) On procède comme en a).

- c) Si deux événements A et B sont incompatibles, $P(A \text{ ou } B) = P(A) + P(B)$.

► Solution

- Il s'agit d'un schéma de Bernoulli, le succès étant l'apparition du 6 ; X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 180$ et $p = \frac{1}{6}$.
- $n = 180$, $np = 30$ et $n(1-p) = 150$; donc les conditions d'approximation sont remplies.
- X a pour espérance $np = 30$ et pour écart-type $\sqrt{np(1-p)} = 5$.
- Posons $Z = \frac{X - 30}{5}$; la variable aléatoire Z suit sensiblement la loi $\mathcal{N}(0; 1)$.
- a) $P(X \leq 20) = P(X \leq 20,5)$
 $= P(X - 30 \leq -9,5)$
 $= P\left(\frac{X - 30}{5} \leq \frac{-9,5}{5}\right)$
 $= P(Z \leq -1,9) \approx \Phi(-1,9) \approx 0,029$.
- b) $P(X > 40) = P(X > 40,5)$
 $= P(X - 30 > 10,5)$
 $= P\left(\frac{X - 30}{5} > \frac{10,5}{5}\right)$
 $= P(Z > 2,1) \approx 1 - \Phi(2,1)$
 $\approx 1 - 0,982 = 0,018$.
- c) Les deux événements « $X \leq 20$ » et « $X > 40$ » sont incompatibles. Donc :
 $P(X \leq 20 \text{ ou } X > 40) = P(X \leq 20) + P(X > 40)$
 $\approx 0,029 + 0,018 = 0,047$.

► Mise en pratique

13 D'un jeu de 32 cartes bien mélangées, on tire au hasard une carte 70 fois avec remise.

On note X la variable aléatoire indiquant le nombre d'apparitions d'un cœur.

En utilisant l'approximation normale de la loi binomiale, calculez à 10^{-2} près :

- a) $P(X < 16)$ b) $P(16 \leq X \leq 20)$ c) $P(X > 20)$.

14 Un générateur de nombres au hasard génère une succession de 100 chiffres de 0 à 9, les dix chiffres étant équiprobables.

On appelle X la variable aléatoire indiquant le nombre d'apparitions du 9.

En utilisant l'approximation normale de la loi binomiale, calculez $P(8 < X \leq 11)$ à 10^{-3} près.

15 Questions sur le cours

Complétez les propositions suivantes.

1. Z est une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(0; 1)$, et Φ est sa fonction de répartition.

a) Pour tous réels a et b , $a \leq b$, $P(a \leq Z \leq b) = \dots$

b) Pour tout nombre x , $\Phi(x) + \Phi(-x) = \dots$

c) $P(Z \geq 0) = \dots$ d) $P(Z < -2 \text{ ou } Z > 2) \approx \dots$

e) $P(-1,96 < Z \leq 1,96) \approx \dots$ f) $P(-u_\alpha \leq Z \leq u_\alpha) = \dots$

2. X est une variable aléatoire.

a) Dire que X suit $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$ signifie que $\frac{X - \mu}{\sigma}$ suit $\dots$

b) Si X suit $\mathcal{B}(n, p)$, alors sous certaines conditions la loi de X peut être approchée par la loi normale d'espérance $\dots$ et de variance $\dots$

16 Vrai ou faux

Vrai ou faux ? Justifiez votre réponse.

1. Z est une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(0; 1)$.

a) $P(Z \leq 2,58) \approx 0,995$. b) $u_{0,1} \approx 3$.

2. X est une variable aléatoire.

a) Si X suit $\mathcal{N}(-20; 16)$, alors la variable aléatoire $0,25X + 5$ suit $\mathcal{N}(0; 1)$.

b) Si X suit $\mathcal{N}(230; 144)$, alors $P(X < 230) = 0,5$.

c) Si X suit $\mathcal{N}(8; 0,01)$, alors $P(7,8 < X < 8,2) \approx 0,95$.

d) Si X suit $\mathcal{B}(100; 0,2)$, alors la variable aléatoire $\frac{X - 100}{0,2}$ suit $\mathcal{N}(0; 1)$.

e) Si X suit $\mathcal{B}(16; 0,1)$, alors sa loi peut être approchée par $\mathcal{N}(1,6; 1,44)$.

f) Si X suit $\mathcal{B}(50; 0,3)$, alors $P(X < 30) = P(X \leq 29,5)$.

17 QCM Une seule réponse exacte

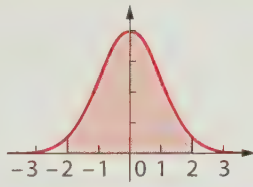
Pour chaque affirmation, une seule réponse est exacte. Identifiez-la en justifiant votre réponse.

1. Sous la courbe de Gauss ci-contre, l'aire du domaine colorié vaut, à 10^{-2} près :

a) 0,68 b) 0,95 c) 0,99

2. $u_{0,5} \approx$

a) 1,96 b) $\frac{2}{3}$ c) 2



3. Si la variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{N}(50; 100)$, alors $P(40 \leq X \leq 60) \approx$

a) 0,68 b) 0,95 c) 1

4. $\mathcal{B}(400; 0,8)$ peut être approchée par :

a) $\mathcal{N}(400; 0,64)$ b) $\mathcal{N}(320; 8)$ c) $\mathcal{N}(320; 64)$

18 QCM Au moins une réponse exacte

Pour chaque affirmation, plusieurs réponses peuvent être exactes. Identifiez-les en justifiant vos réponses.

1. Z est une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(0; 1)$.

a) $P(-2 < Z \leq 2) \approx 0,954$

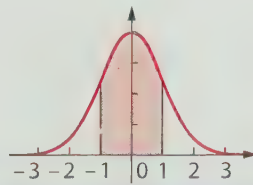
b) $P(Z \leq 2) \approx 0,977$ c) $u_{0,023} \approx 2$

2. Sous la courbe de Gauss ci-contre, l'aire coloriée est égale à :

a) $P(-1 < Z < 1)$

b) $P(-1 \leq Z \leq 1)$

c) environ 0,683



3. X est une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(5; 0,01)$.

a) $P(4,8 \leq X < 5,2) \approx 0,954$

b) $10X - 50$ suit la loi $\mathcal{N}(0; 1)$

c) $P(X \leq 5) = P(X \geq 5)$

4. X est une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(-3; 10)$.

a) $P(X + 3 \geq 0) = 0,5$

b) $E(X - 3) = 0$

c) $\sigma(X) = 10$



Apprendre à chercher

19 Taux de cholestérol

Un centre de médecine préventive a relevé le taux de cholestérol des personnes venues en consultation :

- taux inférieur à 1,5 g : 16 % ;
- taux compris entre 1,5 g et 2,5 g : 76 % ;
- taux supérieur à 2,5 g : 8 %.

On suppose que le taux de cholestérol est réparti selon une loi normale.

Objectif Déterminer la moyenne et l'écart-type du taux de cholestérol.

1. L'énoncé suggère que le taux de cholestérol est une variable aléatoire. L'épreuve aléatoire consiste à choisir un consultant au hasard. On peut appeler T la variable aléatoire qui indique son taux de cholestérol.

Traduisez en termes de probabilités les données de l'énoncé. Sont-elles toutes les trois nécessaires ?

2. On peut appeler μ et σ l'espérance et l'écart-type de T , qu'il s'agit de déterminer.

Dire que T suit la loi $\mathcal{N}(\mu ; \sigma^2)$ signifie que la variable centrée réduite associée Z suit la loi $\mathcal{N}(0 ; 1)$.

- a) Traduisez les données à l'aide de Z .
- b) Exprimez-les à l'aide de la fonction Φ .

3. En passant aux antécédents par la fonction Φ , on peut traduire (de façon approchée) ces deux conditions par deux conditions plus simples.

a) Démontrez que μ et σ vérifient :

$$\frac{\mu - 1,5}{\sigma} \approx 0,994 \quad \text{et} \quad \frac{\mu - 2,5}{\sigma} \approx -1,405.$$

b) Déterminez des valeurs approchées de μ et σ à 10^{-2} près.

20 Gare au contrôle !

Dans une grande ville, la société de transports en commun estime à 2 % la proportion de personnes voyageant sans titre de transport. Un agent effectue chaque jour 1 000 contrôles indépendants.

Objectif Trouver la probabilité, un jour donné, de verbaliser plus de 25 contrevenants.

1. L'agent répète 1 000 fois un contrôle, dans les mêmes conditions.

Expliquez pourquoi la situation est un schéma de Bernoulli, et précisez-en l'ordre et le paramètre.

2. Le nombre de contrevenants verbalisés est donc une variable aléatoire dont la loi est connue. On note X cette variable aléatoire.

Précisez la loi de X , son espérance et son écart-type.

3. Pour calculer la probabilité cherchée, on peut utiliser la loi binomiale ou bien son approximation normale.

- a) Calculez $P(X > 25)$ à 10^{-2} près avec la loi binomiale.
- b) Vérifiez que les conditions d'approximation normale de la loi binomiale sont remplies, puis calculez ainsi $P(X > 25)$ à 10^{-2} près.

21 Démarchage téléphonique

Une association humanitaire sollicite par téléphone des personnes choisies au hasard dans l'annuaire, pour proposer des bons de soutien à 50 €.

Elle estime à 8 % la probabilité que la personne appelée réponde favorablement.

Elle contacte 200 personnes par jour. On assimilera cette procédure à un schéma de Bernoulli.

Objectif Déterminer la probabilité d'obtenir plus de 1 000 euros dans une journée.

1. Le nombre de réponses favorables est aléatoire.

On appelle X la variable aléatoire indiquant le nombre de réponses favorables dans une journée.

Précisez la loi de X , son espérance et son écart-type.

2. La recette est une variable aléatoire, qui dépend de X .

Exprimez en fonction de X la recette quotidienne R , puis calculez, à 10^{-2} près, la probabilité cherchée.

3. On peut aussi envisager l'approximation normale.

Vérifiez que l'approximation normale est possible, puis calculez ainsi, à 10^{-2} près, la probabilité cherchée.

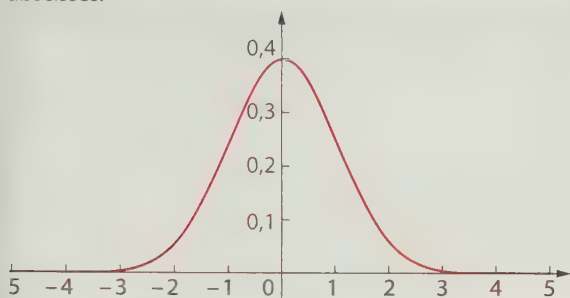


Narration de recherche

→ L'objectif n'est pas seulement de résoudre le problème posé : vous devez aussi noter les différentes idées même lorsqu'elles n'ont pas permis de trouver la réponse. Expliquez pourquoi vous avez changé de méthode et ce qui vous a fait avancer.

22 Asymptote ou tangente ?

On a représenté la fonction de Laplace-Gauss φ avec un ordinateur dont l'écran a une résolution de 100 pixels par pouce (1 pouce = 2,54 cm), en prenant comme unités 1 dm sur l'axe des ordonnées et 1 cm sur l'axe des abscisses.



1. On a alors l'impression que la courbe se confond avec l'axe des abscisses en dehors d'un certain intervalle I centré en 0. En quoi est-ce surprenant ?

2. Déterminez I , sachant que l'ordinateur qui trace la courbe confond deux points quand leur distance est inférieure à la taille d'un pixel.

23 Les flacons de médicament

Dans un laboratoire pharmaceutique, une machine automatique remplit des flacons avec un certain médicament liquide. Les flacons sont vendus comme contenant 100 ml de produit.

Quand la machine est réglée sur la valeur μ (en ml), la quantité de liquide par flacon est une variable aléatoire suivant une loi normale de moyenne μ et d'écart-type 1 ml.

1. La machine est réglée sur $\mu = 101$ ml.

Quelle est la probabilité que la quantité de liquide dans un flacon soit inférieure à 100 ml ?

2. Sur quelle valeur de μ (à 0,1 ml près) faut-il régler la machine pour qu'au plus 5 % des flacons contiennent une quantité de liquide inférieure à 100 ml ?

Chercheurs d'hier

Eux aussi, ils ont
cherché avant de trouver !

Voici quelques mathématiciens importants qui ont travaillé dans le domaine de la Statistique et des Probabilités.

Thomas Bayes
→ Chap. 12

Carl Friedrich Gauss

Karl Pearson
→ Chap. 15

ÉPOQUE MODERNE

ÉPOQUE CONTEMPORAINE

Abraham de Moivre

Joseph Bertrand
→ Chap. 13

Pierre Simon Laplace
(1749-1827)



En 1733, de Moivre utilise l'exponentielle pour approcher la loi binomiale. En 1809, Gauss introduit une loi de probabilité pour modéliser les erreurs de mesures astronomiques.

Trois ans plus tard, Laplace fait le lien entre ces deux travaux, en démontrant que la loi binomiale peut être approchée par la loi de Gauss.

THÉORIE
ANALYTIQUE
DES PROBABILITÉS;
PAR M. LE COMTE LAPLACE,

Chancelier de l'Université, Grand Officier de la Légion d'Honneur,
Membre de l'Institut impérial et de l'Académie des Sciences de Paris,
des Sciences royales de Suède et de Suébourg, des Académies des
Sciences de Berlin, de Brunswick, de Göttingue, de Halle, de Vienne,
d'Utrecht, etc.

PARIS,
Chez M. COURcier, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques,
rue des Argues, n° 15.
1812.

Sur le Web serge.mehl.free.fr/anx/loi_normale.html

Travaux dirigés

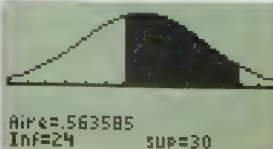
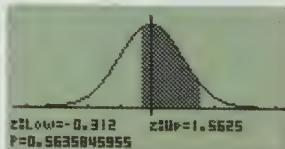
Utiliser sa calculatrice



→ Pour calculer des probabilités

TP

24 Calculer des probabilités selon $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$ 1. La variable aléatoire Z suit la loi normale standard.Tabulez la fonction de répartition $\Phi: x \mapsto P(Z \leq x)$ lorsque x décrit $[-2; 2]$ avec un pas de 0,01.2. La variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance $\mu = 25$ et d'écart-type $\sigma = 3,2$.Affichez la probabilité $p_1 = P(24 \leq X \leq 30)$ avec, si possible, le dessin illustrant l'aire associée.**Note :** le mot *distribution* est synonyme de *loi de probabilité*.

Étapes	TI	Casio
1. Valeurs de Φ	Mode FONC	Menu TABLE
• Choisir la distribution normale	$f(x)$ 2nde var (distrib)	OPTN F6 (▷) F3 (STAT) F1 (DIST) F1 (NORM)
• Choisir la fonction de répartition	2 DISTRIB DESSIN 1: normalFdp< 2: normalFRép<	F2 (Ncd) ("normal cumulative distribution")
• Compléter dans l'ordre	-10 ⁹⁹ , borne inf. assimilée à $-\infty$ Borne sup. variable Espérance puis écart-type	-1E99, borne inf. assimilée à $-\infty$ Borne sup. variable Écart-type puis espérance
• Valider	V1: normalFRép<(-10 ⁹⁹ , X, 0,1) entrer	V1=NormCD(-1E99, X, 1, 0) EXE
• Définir la table	2nde fenêtre (déf table) DEFINIR TABLE DébTbl=-2 Pas=0,01	F5 (SET) Start:-2 End:2 Step:0.01
• Afficher la table	2nde graphe (table) X Y1 -2 .02275 -1.99 .0233 -1.98 .02385 -1.97 .02442	F6 (TABL) X Y1 -2 0.0227 -1.99 0.0232 -1.98 0.0238 -1.97 0.0244
2. Calcul de p_1	Écran de calcul	Menu STAT
• Renseigner la fenêtre (TI)	fenêtre FENETRE Xmin=18 Xmax=32 Xgrad=1 Ymin=-1 Ymax=2	
• Choisir la distribution normale	2nde var (distrib) ► (DESSIN) 1 DISTRIB DESSIN 1: normalFdp< 2: normalFRép<	F5 (DIST) F1 (NORM) F2 (Ncd) ("normal cumulative distribution")
• Compléter / Renseigner comme indiqué	Borne inf. Borne sup. Espérance puis écart-type normalFRép<(24, 30, 25, 3,2)	Normal C.D Data: Variable Lower: 24 Upper: 30 σ: 3.2 μ: 25 Save Rest: None Execute
• Afficher la représentation graphique	entrer 	F6 (Draw) 
• On lit : $p_1 \approx 0,5636$.		

Utiliser un tableur

→ Pour tabuler la fonction de répartition Φ de la loi $\mathcal{N}(0 ; 1)$



25 Afficher des probabilités selon la loi normale standard

COMPÉTENCES

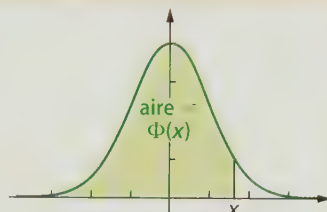
TICE

- Tabuler une fonction.
- Représenter graphiquement une fonction.

Mathématiques

- Exploiter la fonction de répartition de la loi normale standard.

On se propose de tabuler, entre -3 et 3 , la fonction de répartition Φ de la loi $\mathcal{N}(0; 1)$ et d'afficher sa représentation graphique avec un tableur.



1. Tabulation de la fonction Φ

La fonction **LOI.NORMALE.STANDARD** du tableur est la fonction de répartition Φ .

- a) Ouvrez une feuille de calcul d'un tableur et complétez les cellules A1, B1 et A2 comme indiqué.

	B2		=LOI.NORMALE.STANDARD(A2)		
	A	B	C	D	E
1	x	$P(Z \leq x)$			
2	-3	0,0013			

Calculez $\Phi(-3)$ en B2.

- b)** On veut obtenir des valeurs approchées de $\Phi(x)$ pour x compris entre -3 et 3 , avec un pas de $0,1$.

Pour cela :

- entrez en A3 la formule : $= A2+0,01$;
- recopiez en B3 la formule écrite en B2 ;
- recopiez vers le bas la plage de cellules A3:B3 jusqu'à ce que la valeur 3 apparaisse dans la colonne A.

Vous afficherez les valeurs de $\Phi(x)$ avec quatre décimales.

	A3		$f_x = A2+0,1$
	A	B	C
1	x	$P(Z \leq x)$	
2	-3	0,0013	
3	-2,9	0,0019	
4			

2. Propriété de la fonction Φ

- Entrez en C2 la formule : =LOI.NORMALE.STANDARD(-A2) .
- Entrez en D2 la formule : =B2+C2.
- Recopiez ces deux formules vers le bas.

Quelle propriété de Φ a-t-on ainsi vérifiée ?

3. Représentation graphique de la fonction Φ

- Sélectionnez la plage de cellules A2:B62.
 - Choisissez Insertion / Nuage de points / Points liés.
 - Comment se traduit sur la courbe la propriété du **2.** ?
- 4.** On se propose de déterminer une valeur approchée du réel x tel que $\Phi(x) = 0,85$.
- Situez 0,85 entre deux valeurs consécutives de la colonne B.
 - Justifiez alors que 1,05 est une valeur approchée de x à 0,05 près.
 - Interprétez ce résultat :
 - en termes de probabilité ;
 - en termes d'aire sous la courbe de Gauss.

	A	B		A	B
1	x	$P(Z \leq x)$	1	x	$P(Z \leq x)$
2	-3	0,0013	32	0	0,5000
3	-2,9	0,0019	33	0,1	0,5398
4	-2,8	0,0026	34	0,2	0,5793
5	-2,7	0,0035	35	0,3	0,6179
6	-2,6	0,0047	36	0,4	0,6554
7	-2,5	0,0062	37	0,5	0,6915
8	-2,4	0,0082	38	0,6	0,7257
9	-2,3	0,0107	39	0,7	0,7580
10	-2,2	0,0139	40	0,8	0,7881
11	-2,1	0,0179	41	0,9	0,8159
12	-2	0,0228	42	1	0,8413
13	-1,9	0,0287	43	1,1	0,8643
14	-1,8	0,0359	44	1,2	0,8849
15	-1,7	0,0446	45	1,3	0,9032
16	-1,6	0,0548	46	1,4	0,9192
17	-1,5	0,0668	47	1,5	0,9332
18	-1,4	0,0808	48	1,6	0,9452
19	-1,3	0,0968	49	1,7	0,9554
20	-1,2	0,1151	50	1,8	0,9641
21	-1,1	0,1357	51	1,9	0,9713
22	-1	0,1587	52	2	0,9772
23	-0,9	0,1841	53	2,1	0,9821
24	-0,8	0,2119	54	2,2	0,9861
25	-0,7	0,2420	55	2,3	0,9893
26	-0,6	0,2743	56	2,4	0,9918
27	-0,5	0,3085	57	2,5	0,9938
28	-0,4	0,3446	58	2,6	0,9953
29	-0,3	0,3821	59	2,7	0,9965
30	-0,2	0,4207	60	2,8	0,9974
31	-0,1	0,4602	61	2,9	0,9981
			62	3	0,9987

Remarque. Une valeur plus précise est fournie par la fonction LOI.NORMALE.STANDARD.INVERSE (voir TP 27).

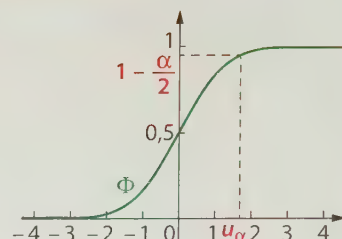
TP

26 Déterminer selon $\mathcal{N}(0; 1)$ un intervalle centré en 0, de probabilité donnée

α étant un nombre compris strictement entre 0 et 1, le nombre u_α vérifie $\Phi(u_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$.

1. Calculez $u_{0,05}$ à 10^{-3} près.
2. Tabulez u_α pour α variant de 0,01 à 0,99 avec un pas de 0,01 et un affichage à quatre décimales.

Utiliser sa calculatrice

→ Pour tabuler les valeurs u_α 

Étapes	TI	Casio																										
1. Valeur de $u_{0,05}$	Mode CALCUL	Menu RUN-MAT																										
• Choisir la distribution normale inverse (fonction réciproque de la fonction Φ)	2nde var (distrib) puis 3 DESSIN DESSIN 1:normalFdp 2:normalFRép 3:FracNormale	OPTN F5 (STAT) F3 (DIST) F1 (NORM) F3 (InvN) InvN InvN																										
• Compléter dans l'ordre	Valeur $1 - \frac{\alpha}{2}$ (ici 0,975) Espérance puis écart-type FracNormale(0.975,0,1)	Valeur $1 - \frac{\alpha}{2}$ (ici 0,975) Écart-type puis espérance InvNormCD(0.975,1,0)																										
• Afficher la valeur de $u_{0,05}$ • Lire : $u_{0,05} \approx 1,960$	entrer FracNormale(0.975,0,1) 1.959963986	EXE InvNormCD(0.975,1,0) 1.959963985 D																										
2. Valeurs de u_α	Mode FONC	Menu TABLE																										
• Choisir la distribution normale inverse (fonction réciproque de la fonction Φ)	f(x) 2nde var (distrib) puis 3 DESSIN DESSIN 1:normalFdp 2:normalFRép 3:FracNormale	OPTN F6 (D) F3 (STAT) F1 (DIST) F1 (NORM) F3 (InvN)																										
• Compléter dans l'ordre. • Valider	Valeur $1 - \frac{\alpha}{2}$ (ici $1 - \frac{X}{2}$) Espérance puis écart-type Graph1 Graph2 Graph3 Y1:FracNormale(1-X/2,0,1) entrer	Valeur $1 - \frac{\alpha}{2}$ (ici $1 - \frac{X}{2}$) Écart-type puis espérance Table Func :Y= Y1=InvNormCD(1-X/2,1,0) EXE																										
• Définir la table	2nde fenêtre (déf table) DEFINIR TABLE DébTbl=.01 Pas=.01	F5 (SET) Start:0.01 End :0.99 Step :0.01																										
• Afficher la table	2nde graphe (table) <table><thead><tr><th>X</th><th>Y1</th></tr></thead><tbody><tr><td>0.01</td><td>2.5758</td></tr><tr><td>0.02</td><td>2.3263</td></tr><tr><td>0.03</td><td>2.1701</td></tr><tr><td>0.04</td><td>2.0537</td></tr><tr><td>0.05</td><td>1.96</td></tr><tr><td>0.06</td><td>1.8808</td></tr><tr><td>0.07</td><td>1.8119</td></tr></tbody></table> X=.01	X	Y1	0.01	2.5758	0.02	2.3263	0.03	2.1701	0.04	2.0537	0.05	1.96	0.06	1.8808	0.07	1.8119	F6 (TABL) <table><thead><tr><th>X</th><th>Y1</th></tr></thead><tbody><tr><td>0.01</td><td>2.5758</td></tr><tr><td>0.02</td><td>2.3263</td></tr><tr><td>0.03</td><td>2.17</td></tr><tr><td>0.04</td><td>2.0537</td></tr></tbody></table> 0.01 FORM DEL END EDIT FCON G-PLT	X	Y1	0.01	2.5758	0.02	2.3263	0.03	2.17	0.04	2.0537
X	Y1																											
0.01	2.5758																											
0.02	2.3263																											
0.03	2.1701																											
0.04	2.0537																											
0.05	1.96																											
0.06	1.8808																											
0.07	1.8119																											
X	Y1																											
0.01	2.5758																											
0.02	2.3263																											
0.03	2.17																											
0.04	2.0537																											

	A	B	C
1			
2			

TP

27 Déterminer selon $\mathcal{N}(0; 1)$ un intervalle centré en 0, de probabilité donnée

COMPÉTENCES

TICE

- Tabuler une fonction.

Mathématiques

- Exploiter la fonction réciproque de la fonction Φ .
- Déterminer u_α .

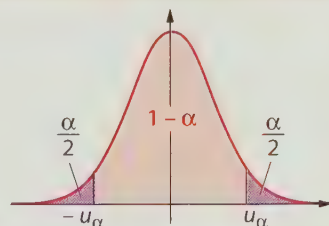
α étant un nombre compris strictement entre 0 et 1, le nombre u_α est défini par $P(-u_\alpha < Z < u_\alpha) = 1 - \alpha$, où la variable aléatoire Z suit la loi $\mathcal{N}(0; 1)$.

Cela équivaut à $\Phi(u_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$ (cf. démonstration du théorème 5).

u_α est donc l'antécédent de $1 - \frac{\alpha}{2}$ par la fonction Φ .

Or, la fonction `LOI.NORMALE.STANDARD.INVERSE` du tableur est la fonction réciproque de la fonction Φ .

En appliquant cette fonction à $1 - \frac{\alpha}{2}$, on obtient u_α .

1. Calcul de $u_{0,01}$

a) Ouvrez une feuille de calcul d'un tableur et complétez les cellules A1, B1 et C1 comme indiqué.

– Entrez en A2 : 0,01.

– Entrez en B2 : $1 - A2/2$.

	A	B	C	D
1	α	$1 - \alpha/2$	u_α	
2	0,01	0,995		

b) Entrez en C2 : `LOI.NORMALE.STANDARD.INVERSE(B2)`.

	A	B	C	D	E	F
1	α	$1 - \alpha/2$	u_α			
2	0,01	0,995	2,576			

Pour la colonne C, précisez « nombre avec trois décimales ».

• Interprétez le résultat :

- en termes de probabilité ;
- en termes d'aire sous la courbe de Gauss.

2. Tabulation de u_α sur $[0,01; 0,99]$ par pas de 0,01

a) Entrez en A3 : $A2 + 0,01$.

	A	B	C	D
1	α	$1 - \alpha/2$	u_α	
2	0,01	0,995	2,576	
3	0,02			

- Recopiez en B3 le contenu de B2 et en C3 le contenu de C2.
- Recopiez la plage de cellules A3:C3 vers le bas jusqu'à ce que la valeur 0,99 apparaisse dans la colonne A.

b) Interprétez le résultat de la ligne 6 :

- en termes de probabilité ;
- en termes d'aire sous la courbe de Gauss.

	A	B	C		A	B	C
1	α	$1 - \alpha/2$	u_α	51	0,5	0,75	0,674
2	0,01	0,995	2,576	52	0,51	0,745	0,659
3	0,02	0,99	2,326	53	0,52	0,74	0,643
4	0,03	0,985	2,170	54	0,53	0,735	0,628
5	0,04	0,98	2,054	55	0,54	0,73	0,613
6	0,05	0,975	1,960	56	0,55	0,725	0,598
7	0,06	0,97	1,881	57	0,56	0,72	0,583
8	0,07	0,965	1,812	58	0,57	0,715	0,568
9	0,08	0,96	1,751	59	0,58	0,71	0,553
10	0,09	0,955	1,695	60	0,59	0,705	0,539
11	0,1	0,95	1,645	61	0,6	0,7	0,524
12	0,11	0,945	1,598	62	0,61	0,695	0,510
13	0,12	0,94	1,555	63	0,62	0,69	0,496
14	0,13	0,935	1,514	64	0,63	0,685	0,482
15	0,14	0,93	1,476	65	0,64	0,68	0,468
16	0,15	0,925	1,440	66	0,65	0,675	0,454
17	0,16	0,92	1,405	67	0,66	0,67	0,440
18	0,17	0,915	1,372	68	0,67	0,665	0,426
19	0,18	0,91	1,341	69	0,68	0,66	0,412
20	0,19	0,905	1,311	70	0,69	0,655	0,399
21	0,2	0,9	1,282	71	0,7	0,65	0,385
22	0,21	0,895	1,254	72	0,71	0,645	0,372
23	0,22	0,89	1,227	73	0,72	0,64	0,358
24	0,23	0,885	1,200	74	0,73	0,635	0,345
25	0,24	0,88	1,175	75	0,74	0,63	0,332
26	0,25	0,875	1,150	76	0,75	0,625	0,319
27	0,26	0,87	1,126	77	0,76	0,62	0,305
28	0,27	0,865	1,103	78	0,77	0,615	0,292
29	0,28	0,86	1,080	79	0,78	0,61	0,279
30	0,29	0,855	1,058	80	0,79	0,605	0,266
31	0,3	0,85	1,036	81	0,8	0,6	0,253
32	0,31	0,845	1,015	82	0,81	0,595	0,240
33	0,32	0,84	0,994	83	0,82	0,59	0,228
34	0,33	0,835	0,974	84	0,83	0,585	0,215
35	0,34	0,83	0,954	85	0,84	0,58	0,202
36	0,35	0,825	0,935	86	0,85	0,575	0,189
37	0,36	0,82	0,915	87	0,86	0,57	0,176
38	0,37	0,815	0,896	88	0,87	0,565	0,164
39	0,38	0,81	0,878	89	0,88	0,56	0,151
40	0,39	0,805	0,860	90	0,89	0,555	0,138
41	0,4	0,8	0,842	91	0,9	0,55	0,126
42	0,41	0,795	0,824	92	0,91	0,545	0,113
43	0,42	0,79	0,806	93	0,92	0,54	0,100
44	0,43	0,785	0,789	94	0,93	0,535	0,088
45	0,44	0,78	0,772	95	0,94	0,53	0,075
46	0,45	0,775	0,755	96	0,95	0,525	0,063
47	0,46	0,77	0,739	97	0,96	0,52	0,050
48	0,47	0,765	0,722	98	0,97	0,515	0,038
49	0,48	0,76	0,706	99	0,98	0,51	0,025
50	0,49	0,755	0,690	100	0,99	0,505	0,013

TP

28 Ajuster des données par une loi normale

Approfondissement AP

Prolongement possible

→ exercice 91

On dispose de données statistiques concernant une variable aléatoire.

On voudrait savoir si la répartition des données se fait approximativement selon une loi normale.

Principe de la méthode de Henri

■ Si X suivait la loi $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$, alors $\frac{X - \mu}{\sigma}$ suivrait la loi $\mathcal{N}(0; 1)$.

On pourrait écrire, pour tout nombre x , $P(X \leq x) = P\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$.

La fonction $F: x \mapsto P(X \leq x)$ vérifierait donc, pour tout nombre x , $F(x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$ [1].

Or, la fonction Φ admet une fonction réciproque, notée Φ^{-1} (cf. TP 26 et 27).

Donc, en inversant la formule [1], on obtiendrait $\Phi^{-1}(F(x)) = \frac{x - \mu}{\sigma} = \frac{1}{\sigma}x - \frac{\mu}{\sigma}$.

La fonction $g: x \mapsto \Phi^{-1}(F(x))$ serait affine, donc représentée par une droite.

■ Par conséquent, pour tester si des données sont réparties selon une loi normale, on peut déterminer les valeurs prises par la fonction g , puis examiner si les points de sa représentation graphique sont sensiblement alignés.

■ Si c'est le cas, la droite obtenue (dite *droite de Henri*) a pour équation $y = \frac{1}{\sigma}x - \frac{\mu}{\sigma}$.

En échangeant les axes, autrement dit en permutant les rôles de x et y , on obtient la droite d'équation $x = \frac{1}{\sigma}y - \frac{\mu}{\sigma}$, c'est-à-dire $y = \sigma x + \mu$.

Sur cette équation sont en évidence les paramètres μ (ordonnée à l'origine) et σ (coefficient directeur).

On se propose de mettre en œuvre à l'aide d'un tableur la méthode ci-dessus, pour vérifier que la distribution des poids des nouveau-nés (voir Activité 1) se fait approximativement suivant une loi normale.

Posons, pour tout nombre x , $F(x) = P(X \leq x)$. On connaît les images par F des bornes supérieures x_i des classes : ce sont les fréquences cumulées fc_i .

Par exemple, $F(2,4) = P(X \leq 2,4) = 0,02 + 0,04 = 0,06$.

Note

Attention : dans l'activité 1, les x_i désignaient les centres des classes ; ici, ils désignent les bornes supérieures des classes.

1. a) Entrez en colonne A les poids x_i , en colonne B les fréquences f_i et en colonne C les fréquences cumulées fc_i .

b) Pour chaque fréquence cumulée fc_i , calculez en colonne D son antécédent y_i par la fonction Φ , en utilisant la fonction `LOI.NORMALE.STANDARD.INVERSE`.

	A	B	C
	Poids x_i	Fréquence f_i	Fréquence cumulée fc_i
1			
2	2,2	0,02	0,02
3	2,4	0,04	0,06
4	2,6	0,07	
5	2,8	0,1	
6	3	0,13	
7	3,2	0,14	
8	3,4	0,14	
9	3,6	0,13	
10	3,8	0,1	
11	4	0,07	
12	4,2	0,04	
13	4,4	0,02	

Note

Attention, le nombre 1 n'a pas d'antécédent, donc il faut exclure du calcul la dernière fréquence cumulée.

2. a) Recopiez les x_i en colonne E, puis représentez graphiquement (nuage de points) les couples $(y_i; x_i)$, de sorte que les y_i soient en abscisses et les x_i en ordonnées.

b) Au vu des points obtenus, une loi normale convient-elle comme modèle de répartition des données ?

3. a) Affichez la droite d'ajustement et son équation réduite : faire un clic droit sur l'un des points, choisir Ajouter une courbe de tendance, puis cocher « Linéaire » et « Afficher l'équation sur le graphique ».

b) Interprétez les deux coefficients de cette équation.

	A	B	C	D	E	F
	Poids x_i	Fréquence f_i	Fréquence cumulée fc_i	y_i	Poids x_i	
1						
2	2,2	0,02	0,02	-2,05	2,2	

DE TÊTE



29 On donne $\Phi(0,5) \approx 0,69$. Calculez $\Phi(-0,5)$.

30 La variable aléatoire Z suit la loi $\mathcal{N}(0; 1)$.

On donne $P(Z < 1) \approx 0,84$. Calculez $P(-1 < Z < 1)$.

31 La variable aléatoire Z suit la loi $\mathcal{N}(0; 1)$.

Le cours signale trois « valeurs à connaître » :

$$P(-1 < Z < 1) \approx 0,683 ; \quad P(-2 < Z < 2) \approx 0,954 ;$$

$$P(-3 < Z < 3) \approx 0,997 ;$$

Ces formules fournissent trois valeurs de u_α : lesquelles ?

32 La variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{N}(15; 9)$.

Calculez $P(X < 15)$, $E(X)$, $\sigma(X)$.

33 La variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{B}(400; 0,2)$.

Explicitez la variable aléatoire $\frac{X - E(X)}{\sigma(X)}$.

34 La variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{B}(100; 0,5)$. En vue de calculer $P(40 < X \leq 60)$ par l'approximation normale, effectuez la correction de continuité préalable (on ne demande que cette première étape).

LOI NORMALE CENTRÉE RÉDUITE

35 La variable aléatoire Z suit la loi normale standard.

1. Déterminez $P(Z \leq 1,2)$, avec un tableur ou une calculatrice, en arrondissant à trois décimales.

2. Déduisez-en, sans outil de calcul :

a) $P(Z > 1,2)$;

b) $P(Z \leq -1,2)$;

c) $P(-1,2 < Z \leq 1,2)$;

d) $P(Z \leq -1,2 \text{ ou } Z > 1,2)$.

36 La variable aléatoire Z suit la loi normale centrée réduite. Calculez $P(-1 < Z \leq 2)$ puis $P(-2 \leq Z < 1)$.

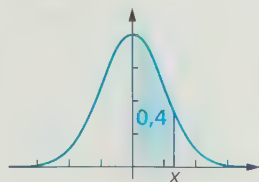
Commentez.

37 En utilisant la fonction Φ , donnez une valeur approchée à 10^{-4} près de chaque intégrale :

a) $\int_0^1 e^{-\frac{t^2}{2}} dt$;

b) $\int_{-1}^1 e^{-\frac{t^2}{2}} dt$.

38 Sous la courbe de Gauss ci-contre, l'aire du domaine colorié vaut 0,4. Déterminez x à 10^{-2} près.

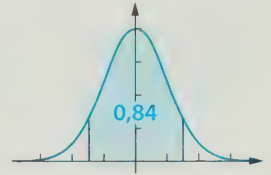


39 Z est une variable aléatoire qui suit la loi normale standard.

Déterminez à 10^{-2} près le nombre r strictement positif tel que $P(-r < X < r) = 0,72$.

40 Déterminez $u_{0,3}$ à 10^{-3} près.

41 Sous la courbe de Gauss ci-contre, le domaine colorié est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Son aire vaut 0,84. Quelle est sa largeur (à 10^{-2} près) ?



42 La variable aléatoire Z suit la loi normale standard.

Déterminez à 10^{-2} près le rayon de l'intervalle ouvert I de centre 0 tel que $P(X \notin I) = 10 \%$.

43 Avec des valeurs absolues

Z est une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(0; 1)$.

1. r désigne un nombre strictement positif.

a) Interprétez graphiquement $P(|Z| \leq r)$ et $P(|Z| > r)$.

b) Démontrez que :

$$P(|Z| \leq r) = 2\Phi(r) - 1 \quad \text{et} \quad P(|Z| > r) = 2(1 - \Phi(r)).$$

2. Application

Calculez, à 10^{-3} près :

a) $P(|Z| < 1)$, $P(|Z| < 2)$, $P(|Z| < 3)$;

b) $P(|Z| \geq 1)$, $P(|Z| \geq 2)$, $P(|Z| \geq 3)$.

44 Points d'inflexion de la courbe de Gauss

φ désigne la fonction de Laplace-Gauss.

1. a) Démontrez que pour tout x de $\mathbb{R}$,

$$\varphi'(x) = -x\varphi(x) \quad \text{et} \quad \varphi''(x) = (x^2 - 1)\varphi(x).$$

b) Déduisez-en que la fonction φ' admet un maximum et un minimum.

2. On appelle Γ la courbe de Gauss et I son point d'abscisse 1.

a) Déterminez une équation de la tangente T à Γ en I .

b) À l'aide de GeoGebra, tracez Γ et T .

Observez qu'en I , la tangente T traverse la courbe Γ (on ne demande pas de le démontrer).

3. Expliquez sans calcul pourquoi il en est de même au point J d'abscisse -1 .

Remarque. On dit que I et J sont des points d'inflexion de la courbe.

LOI NORMALE GÉNÉRALE

45 Espérance et variance d'une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$

On se propose de démontrer le théorème 6 :

si la variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$, son espérance est μ et sa variance σ^2 .

On admet que les propriétés $E(aY + b) = aE(Y) + b$ et $V(Y) = E((Y - E(Y))^2)$, vraies pour une variable aléatoire discrète Y , restent vraies pour une variable aléatoire à densité.

1. On pose $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$.

a) Précisez $E(Z)$ et $V(Z)$.

b) Démontrez que $V(Z) = E(Z^2)$.

c) Exprimez X en fonction de Z .

2. Déduisez-en que $E(X) = \mu$.

3. Déduisez-en que $V(X) = \sigma^2$.

46 Une variable aléatoire X suit la loi normale d'espérance -4 et d'écart-type 7.

Calculez avec trois décimales :

a) $P(X \leq -11)$ et $P(X > 3)$; b) $P(-11 \leq X \leq 3)$;

c) $P(X < -11 \text{ ou } X > 3)$; d) $P(-18 < X < 10)$;

e) $P(X \leq -18 \text{ ou } X \geq 10)$; f) $P(X \leq -10 \text{ ou } X \geq 18)$.

47 Contrôle de production

Une machine produit des clous dont la longueur moyenne est 12 mm, avec un écart-type de 0,2 mm.

La longueur L d'un clou pris au hasard est une variable aléatoire qui suit une loi normale.

Un clou est jugé défectueux si sa longueur est supérieure à 12,5 mm ou inférieure à 11,5 mm.

1. Quelle est la proportion de clous défectueux ?

2. Pour un clou défectueux pris au hasard, quelle est la probabilité que sa longueur soit inférieure à 11,5 mm ?

48 Durée de vie d'une ampoule

La durée de vie (en heure) d'une ampoule électrique d'un type donné suit une loi normale de moyenne 2 200 et d'écart-type 200.

Quelle est la probabilité qu'une telle ampoule dure :

a) moins de 2 000 heures ?

b) plus de 2 400 heures ?

c) entre 2 000 et 2 400 heures ?

Vous donnerez les résultats avec deux décimales.

49 Pointure

On admet que la longueur du pied d'un homme adulte (en cm) suit une loi normale de moyenne 26,5 et d'écart-type 1,7. Les pointures usuelles sont réparties en dix tranches de 0,7 cm, entre 23 cm et 30 cm. Un magasin voudrait prévoir pour chaque pointure la proportion de chaussures à commander.

Calculez ces dix proportions, en utilisant un tableur ou la commande « Table » de votre calculatrice.

50 « Poids » des nouveau-nés

On considère la situation de l'activité 1, page 406.

1. Calculez à 10^{-2} près l'intégrale de la question 3. b) :

$$\int_0^{1,6} \varphi(t) dt.$$

2. Comparez ce résultat avec la valeur exacte de $P(3,2 \leq X < 4) = 0,44$ trouvée à la question 1. b).

51 Grand froid

Au pôle Nord, la température en hiver (en $^{\circ}\text{C}$) suit approximativement une loi normale de moyenne -34 et d'écart-type 5. Sur 180 jours d'hiver, pendant combien de jours peut-on s'attendre à ce que la température soit :

a) inférieure à -40° ? b) supérieure à -30° ?

Une région très convoitée



Si la banquise arctique constitue un excellent marqueur du réchauffement climatique, c'est aussi un lieu investi d'un enjeu économique important : le pôle Nord abriterait jusqu'à 13 % du pétrole et 30 % du gaz naturel mondiaux encore non découverts.

52 Chocolat

Dans une usine de confiserie, une machine produit des tablettes de chocolat. La masse indiquée sur l'emballage de chaque tablette de chocolat est 100 g. Mais la masse réelle (en g) fluctue légèrement de façon aléatoire : elle suit une loi normale de moyenne 100 et d'écart-type 0,8. Une tablette de chocolat n'est pas vendable si sa masse est inférieure à 98 g.

Quelle est la proportion de tablettes invendables ?

53 Hauteur limitée

Dans un sous-marin, l'espace de vie et de circulation de l'équipage est calculé au plus juste. On admet que la taille (en cm) d'un sous-marinier suit une loi normale de moyenne 170 et d'écart-type 20.

Quelle doit être la hauteur de plafond minimale pour qu'au moins 95 % des membres de l'équipage puissent s'y tenir debout ?

54 Premier et troisième quartiles

À l'écrit d'un concours, les notes obtenues par les 2 000 candidats se répartissent selon une loi normale d'espérance 9,25 et d'écart-type 3,62.

On classe les candidats en trois catégories :

A : les 500 meilleurs, qui sont admis sans oral ;

C : les 500 moins bons, qui sont refusés sans oral ;

B : les 1 000 autres, qui passeront un oral.

1. On appelle x la note qui sépare les groupes C et B.

a) Démontrez que $\Phi\left(\frac{x - 9,25}{3,62}\right) = 0,25$.

b) Déduisez-en la valeur de x , arrondie à deux décimales.

2. Déterminez de même la note y (arrondie à deux décimales) qui sépare les groupes B et A.

Remarque. x et y sont respectivement le premier et le troisième quartile de cette distribution.

55 Gestion de stock

Dans un supermarché, le gérant a établi une statistique de ses ventes quotidiennes de packs d'eau minérale. Il apparaît que le nombre X de packs vendus chaque jour suit une loi normale de moyenne 52 et d'écart-type 12.

1. Le gérant ne peut pas stocker plus de 76 packs dans sa réserve. Avec un tel stock, quelle serait la probabilité qu'un jour donné il ne puisse pas répondre à la demande (rupture de stock) ?

2. Il ne souhaite pas remplir complètement la réserve, car cela rend la manutention difficile. Mais il voudrait limiter à 5 % le risque de rupture de stock. Quel doit être au minimum son stock quotidien ?

56 « Amortissement » d'une chaudière

Une entreprise fabrique des chaudières.

On note X la variable aléatoire qui, à chaque chaudière prélevée au hasard dans la production, associe sa durée de fonctionnement, en année. On admet que X suit une loi normale de moyenne 15 et d'écart-type 3.

Une chaudière est dite « amortie » si sa durée de fonctionnement est supérieure ou égale à dix ans.

Calculez la probabilité qu'une chaudière prélevée au hasard dans la production soit amortie.

Vous arrondirez le résultat à trois décimales.

57 La variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{N}(\mu; 0,16)$.

Déterminez μ , à 10^{-1} près, pour que :

a) $P(X < -3,2) = 0,05$. b) $P(X > 5,6) = 0,05$.

58 La variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{N}(120; \sigma^2)$.

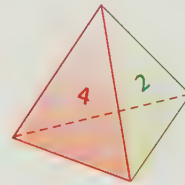
Déterminez σ , à 10^{-1} près, pour que :

a) $P(X < 100) = 0,05$. b) $P(X > 140) = 0,05$.

APPROXIMATION NORMALE D'UNE LOI BINOMIALE

Pour les exercices de cette rubrique, vous vérifierez que l'approximation normale d'une loi binomiale est justifiée et vous comparerez les résultats obtenus par cette approximation à ceux que fournirait la loi binomiale. Les valeurs des probabilités seront données avec trois décimales.

59 On lance 100 fois un dé tétraédrique régulier dont une seule face est rouge et on appelle succès l'arrêt du dé sur cette face. On note X la variable aléatoire indiquant le nombre de succès.



Calculez la probabilité $P(20 < X < 30)$.

60 Gauchers

On estime à 16 % la proportion de gauchers dans une population. On choisit dans cette population 900 personnes au hasard « avec remise ». Quelle est (à 10^{-2} près) la probabilité qu'il y ait, dans cet échantillon :

a) au plus 140 gauchers ?

b) au moins 150 gauchers ?



61 Lancers d'une pièce

On considère la situation de l'activité 2, page 407 (25 lancers d'une pièce équilibrée).

1. Calculez à 10^{-2} près l'intégrale de la question 3. b) :

$$\int_{-0,4}^{0,8} \varphi(t) dt.$$

2. Comparez ce résultat avec la valeur de $P(11 < X < 15)$ calculée avec la loi binomiale.

62 Réponse au hasard

Un questionnaire à choix multiples comprend 36 questions. Pour chaque question, trois réponses sont proposées, dont une seule est exacte. Un candidat très ignorant choisit une réponse au hasard à chaque question. On appelle X la variable aléatoire indiquant le nombre de réponses exactes.

Calculez $P(X > 5)$.

63 Fille ou garçon

En France aujourd'hui, les démographes estiment à 0,512 la probabilité qu'un bébé à naître soit un garçon. Sur une année, on prévoit 820 000 naissances environ.

Quelle est la probabilité que parmi 820 000 nouveau-nés, le nombre de garçons dépasse 420 000 ?

64 Composants électroniques

Une usine fabrique des composants électroniques. On estime à 0,02 la probabilité qu'un composant pris au hasard dans la production soit défectueux.

En bout de chaîne, on teste 400 composants choisis au hasard avec remise.

Calculez à 10^{-2} près la probabilité d'avoir au moins vingt composants défectueux dans l'échantillon.

65 Allergie

Pour un certain traitement médical, on a observé que les patients peuvent faire une réaction allergique avec une probabilité 0,02. On prévoit de traiter 1 225 personnes.

Quelle est la probabilité qu'il y en ait au moins 30 qui fassent cette réaction allergique ?

66 Surréservation

La compagnie aérienne Mankpad Air estime à 0,1 la probabilité qu'un client ayant réservé sa place ne se présente pas à l'embarquement.

Sur le vol MA 2012, l'avion a une capacité de 300 places. Pour optimiser son remplissage, la compagnie a accepté plus de 300 réservations. Ce faisant, elle court le risque que se présentent à l'embarquement plus de 300 personnes ayant réservé, auquel cas elle devra indemniser ceux qui ne pourront embarquer.

On note n le nombre de réservations acceptées par la compagnie, et X la variable aléatoire indiquant le nombre de personnes ayant réservé qui se présentent à l'embarquement. On suppose les comportements des clients indépendants les uns des autres

- Justifiez que X suit une loi binomiale dont vous préciserez les paramètres.
- Justifiez que cette loi binomiale peut être approchée par une loi normale dont vous préciserez les paramètres.
- On suppose dans cette question que $n = 324$. Quelle est la probabilité que la compagnie ne puisse pas embarquer tous les passagers qui se présentent ?
- La compagnie souhaite limiter à 1 % le risque de ne pouvoir embarquer tous les passagers qui se présentent. Déterminez le nombre maximum de places qu'elle peut proposer à la réservation.

Aide

Démontrez que $\frac{300,5 - 0,9n}{0,3\sqrt{n}} \approx 2,326$, puis posez $x = \sqrt{n}$.

**67 LOGIQUE Négation d'une double inégalité**

Une variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{B}(36; 0,2)$.

1. Calculez à 10^{-3} près :

- a) $P(6 < X < 9)$; b) $P(6 \leq X < 9)$;
c) $P(6 < X \leq 9)$; d) $P(6 \leq X \leq 9)$.

2. a) Écrivez les événements contraires des précédents et donnez leur probabilité à 10^{-3} près.

- b) Comparez ces résultats avec ceux que donnerait l'approximation normale.

68 ALGORITHMIQUE

Vous voulez calculer $P(0 < Z < 1,5)$, où la variable aléatoire Z suit la loi $\mathcal{N}(0; 1)$. Mais votre calculatrice ne dispose pas de la fonction Φ .

Écrivez un algorithme permettant d'obtenir le résultat à 10^{-2} près.

Aide

Reportez-vous à l'exercice 47 du chapitre 7, p.212.

69 ALGORITHMIQUE Méthode de Monte-Carlo

Dans un repère orthonormé, on appelle $\mathcal{C}$ le carré construit sur le repère et $\mathcal{D}$ le domaine situé entre les abscisses 0 et 1, sous la courbe $\mathcal{H}$ d'équation $y = \frac{1}{x+1}$.

1. On choisit au hasard un point dans $\mathcal{C}$.

Calculez la probabilité qu'il soit dans $\mathcal{D}$, c'est-à-dire le rapport de l'aire de $\mathcal{D}$ à l'aire de $\mathcal{C}$.

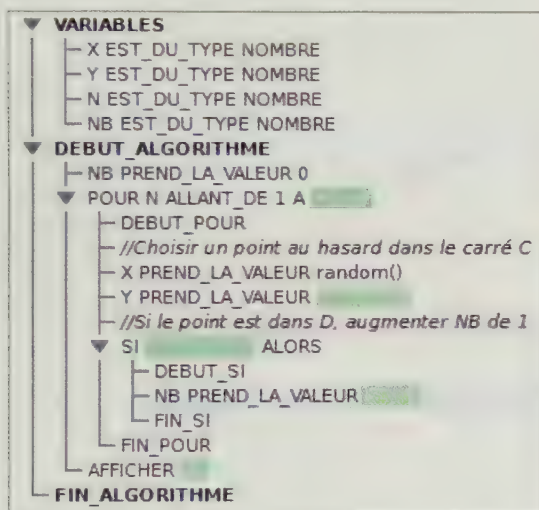
2. On choisit 10 000 points au hasard dans $\mathcal{C}$.

On appelle X la variable aléatoire indiquant le nombre de ces points qui sont dans $\mathcal{D}$.

Calculez $P(6\,800 < X < 7\,050)$.

3. L'algorithme ci-dessous permet de réaliser l'expérience du 2. et fournit la valeur prise par X .

Complétez les parties manquantes.



4. Réalisez un programme correspondant à cet algorithme, et exécutez-le plusieurs fois.

Le résultat du 2. est-il confirmé ?

AVEC LES TICE**70** Densité de la loi $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$

X est une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$.
On cherche l'expression de sa densité de probabilité f .
On appelle F sa fonction de répartition, définie par :

$$F(x) = P(X \leq x).$$

1. a) Démontrez que pour tout nombre x :

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right).$$

b) Sachant que F est une primitive de f , déduisez-en que pour tout nombre x , $f(x) = \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$.

2. a) Représentez f à l'aide de GeoGebra : vous définirez deux curseurs μ et σ , pour faire varier μ entre -10 et 10 , et σ entre 0 et 5 .

b) Observez l'évolution des courbes selon que μ ou σ varie.

3. a) Démontrez que la courbe représentative de f admet pour axe de symétrie la droite d'équation $x = \mu$.

b) Précisez les coordonnées exactes du sommet de la courbe représentative de f .

4. a) Affichez l'aire du domaine situé sous la courbe entre les abscisses $\mu - 2\sigma$ et $\mu + 2\sigma$.

Aide Utilisez l'instruction : `Intégrale(f,  $\mu - 2\sigma$ ,  $\mu + 2\sigma$ )`.

b) Que peut-on conjecturer en faisant varier μ et σ ?

c) Démontrez cette conjecture.

Prendre toutes les initiatives**71 Vaccins**

On évalue à 0,3 la probabilité qu'une personne en âge d'être vaccinée contre la grippe demande à être vaccinée avant l'hiver.

Dans une région de 1,5 million d'habitants en âge d'être vaccinés, l'Agence Régionale de Santé veut prévoir un stock suffisant de doses de vaccin.

Combien doit-elle en commander pour limiter à 1 % le risque d'en manquer ?



72 Une entreprise fabrique en grande quantité des tiges métalliques cylindriques pour l'industrie.

On note L la variable aléatoire qui, à chaque tige prélevée au hasard dans la production, associe sa longueur (en mm). On suppose que L suit une loi normale de moyenne 100 et d'écart-type 0,3.

Une tige de ce type est considérée comme conforme lorsque sa longueur appartient à l'intervalle $[99,5; 100,5]$.

On contrôle successivement 100 tiges prélevées au hasard et avec remise. Quelle est la probabilité d'avoir au moins 95 tiges conformes ?

73 Travail en autonomie

→ Rédigez la solution de cet exercice en vous aidant du guide.

Dans une usine de matériel électrique, une machine fabrique des résistors de résistance attendue 50 ohms. Mais la résistance effective R fluctue légèrement de façon aléatoire autour de cette valeur : elle suit une loi normale de moyenne 50 ohms et d'écart-type 0,5 ohm.

Les résistors dont la résistance est inférieure à 49 ohms ou supérieure à 51 ohms sont mis au rebut en vue d'être recyclés.

1. Quelle est, à 10^{-2} près, la probabilité qu'un résistor pris au hasard soit mis au rebut ?

2. La machine produit 1 900 résistors par jour. On suppose indépendantes les productions de chaque résistor.

On note X la variable aléatoire indiquant le nombre de résistors mis au rebut lors d'une journée donnée.

Précisez la loi de probabilité de X , son espérance et son écart-type.

3. Quelle est, à 10^{-2} près, la probabilité que sur une journée il y ait plus de 100 résistors mis au rebut ?

Vous détaillerez votre méthode de calcul.



Sur le Web

Retrouvez le corrigé de cet exercice sur le site

www.transmathlycee.net/eleve-TermS

Analyser l'énoncé

R est une variable aléatoire.

Analyser l'énoncé

Le mot « moyenne » est l'équivalent en langage statistique du mot « espérance » en langage probabiliste.

Analyser l'énoncé

On cherche la probabilité que R prenne ses valeurs en dehors d'un intervalle centré sur l'espérance.

Analyser l'énoncé

On reconnaît un schéma de Bernoulli.

Analyser l'énoncé

L'énoncé laisse le choix de la méthode, car il y en a deux.

Guide

1. R suit une loi normale dont l'espérance μ et l'écart-type σ sont connus.

Pour calculer une probabilité, on se ramène à la variable aléatoire $Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$, qui suit la loi $\mathcal{N}(0; 1)$.

Et pour Z , on utilise la fonction de répartition Φ .

Les valeurs de Φ sont fournies par la calculatrice.

Vous pouvez calculer d'abord la probabilité que le résistor soit bon, puis passer à l'événement contraire.

2. La probabilité qu'un résistor produit soit mis au rebut vient d'être calculée.

On répète 1 900 fois la production d'un résistor, pour laquelle on peut appeler « succès » le fait qu'il soit défectueux (même si ici le mot « échec » paraît mieux approprié...).

3. Deux méthodes sont possibles :

- soit l'utilisation de la loi binomiale,
- soit son approximation normale, après avoir vérifié que les conditions sont remplies.

Que vous choisissiez l'une ou l'autre des deux méthodes, vous avez avantage à considérer l'événement contraire : « Il y a au plus 100 transistors mis au rebut ».

ZOOM sur la rédaction

Rappelez la définition d'une loi normale, pour justifier l'introduction de Z . N'hésitez pas à dessiner sommairement une courbe en cloche pour illustrer votre raisonnement.

ZOOM sur la rédaction

Avant de parler de loi binomiale, expliquez pourquoi il s'agit d'un schéma de Bernoulli, en soulignant l'indépendance des productions des résistors. Précisez son ordre n et son paramètre p . Et indiquez que X est bien le nombre de succès.

ZOOM sur la rédaction

Si vous utilisez la loi binomiale, faites attention aux inégalités strictes ou larges. Si vous utilisez l'approximation normale, vérifiez que les conditions sont remplies, et n'oubliez pas la correction de continuité.

74 On dispose d'un dé tétraédrique régulier, dont une seule face est rouge. On le lance 300 fois, et on note X la variable aléatoire qui indique le nombre de chutes sur la face rouge.

1. Quelle est la loi de probabilité de X ? Précisez ses paramètres.

2. Justifiez que la loi de probabilité de X peut être approchée par une loi normale.

Précisez les paramètres de cette loi normale.

3. En utilisant l'approximation normale de la loi binomiale, calculez $P(60 < X \leq 90)$.

Vous donnerez le résultat avec deux décimales.

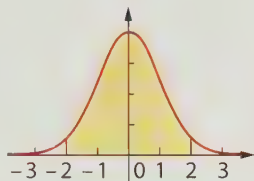
75 QCM

Pour chaque question, une seule des trois réponses proposées est correcte.

Une réponse exacte rapporte un point, une réponse fausse fait perdre 0,5 point.

1. On a représenté ci-contre la courbe de Gauss.

À 10^{-2} près, l'aire du domaine colorié vaut :



a) 0,68. b) 0,95. c) 1.

2. À 10^{-3} près :

a) $u_{0,4} \approx 0,345$. b) $u_{0,4} \approx 0,645$. c) $u_{0,4} \approx 0,842$.

3. Si la variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{N}(2\,000; 10\,000)$, alors, à 10^{-3} près :

a) $P(1\,800 \leq X \leq 2\,200) \approx 0,683$.

b) $P(1\,800 \leq X \leq 2\,200) \approx 0,954$.

c) $P(1\,800 \leq X \leq 2\,200) \approx 0,997$.

4. X est une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(15; 0,25)$.

a) $P(14 \leq X < 15) \approx 0,68$.

b) $2X - 30$ suit la loi $\mathcal{N}(0; 1)$.

c) $P(X \leq 16) \approx 0,4$.

5. X est une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{B}(25; 0,1)$.

a) $P(X < 12) = P(X \leq 12)$.

b) $P(X > 12) = P(X > 12,5)$.

c) X suit sensiblement la loi $\mathcal{N}(2,5; 1,5)$.

6. X est une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{B}(100; 0,1)$.

a) X suit sensiblement la loi $\mathcal{N}(100; 0,01)$.

b) $P(X < 10) = 0,5$.

c) $\frac{X-10}{3}$ suit sensiblement la loi $\mathcal{N}(0; 1)$.

76 ROC Restitution organisée des connaissances

Prérequis : Z est une variable aléatoire qui suit la loi normale standard. Sa densité φ est une fonction paire. Sa fonction de répartition Φ est définie par $\Phi(x) = P(X \leq x)$.

Pour tout intervalle I , $P(X \notin I) = 1 - P(X \in I)$.

1. Démonstration

Démontrez que pour tout nombre x ,
 $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$.

Vous illustrerez la démonstration à l'aide de la courbe de Gauss.

2. Application

On donne $\Phi(1,7) \approx 0,955$.

Calculez sans outil de calcul : $P(-1,7 < Z \leq 1,7)$.

77 ROC Restitution organisée des connaissances

Prérequis : si Z est une variable aléatoire suivant la loi normale standard, sa fonction de répartition Φ vérifie $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ pour tout nombre x .

1. Démonstration

Démontrez que pour tout nombre r strictement positif :

$$P(-r < Z < r) = 2\Phi(r) - 1.$$

2. Application

On donne $\Phi(1,5) \approx 0,933$.

Calculez sans outil de calcul : $P(-1,5 < Z < 1,5)$.

78 ROC Restitution organisée des connaissances

Prérequis : si Z est une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0; 1)$, sa fonction de répartition Φ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Elle vérifie $\Phi(0) = \frac{1}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = 1$.

1. Démonstration

On désigne par α un nombre de $]0; 1[$.

a) Démontrez qu'il existe un nombre strictement positif u_α et un seul tel que $\Phi(u_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$.

b) Démontrez que $P(-u_\alpha < Z < u_\alpha) = 1 - \alpha$.

2. Application

Déterminez l'intervalle ouvert I de centre 0 tel que :

$$P(Z \in I) = 0,9.$$

Vous donnerez les bornes avec deux décimales.

79 Une enquête a montré que 50 % des élèves du lycée Delacour utilisent quotidiennement un ordinateur. On interroge successivement et de manière indépendante 64 élèves de ce lycée choisis au hasard et « avec remise ». On note X la variable aléatoire qui comptabilise ceux qui utilisent quotidiennement un ordinateur.

1. Justifiez que la loi de probabilité de X est une loi binomiale et précisez les paramètres de cette loi.

2. Justifiez que cette loi peut être approchée par une loi normale dont vous préciserez les paramètres.

3. Calculez la probabilité qu'au plus 36 élèves utilisent quotidiennement un ordinateur.

D'après BTS Informatique de Gestion

Pour aller plus loin

80 Globules rouges

Le nombre X de globules rouges par mm^3 de sang est en moyenne de $4,5 \times 10^6$. Pour 95 % des humains, ce nombre est compris entre 4×10^6 et 5×10^6 .

En supposant que X suit une loi normale, quels en sont les paramètres ?

81 Durée de sommeil

La durée de sommeil quotidienne S d'un adulte est en moyenne de 7,5 heures. On évalue à 10 % la proportion d'adultes qui dorment plus de 9 heures ou moins de 6 heures par jour. On suppose que S suit une loi normale.

1. Quel en est l'écart-type ?
2. Quelle est la proportion d'adultes qui dorment entre 7 et 8 heures par jour ?

82 Espérance d'une variable aléatoire Z suivant la loi normale standard

On se propose de démontrer la première partie du théorème 4 : si une variable aléatoire suit la loi normale standard, son espérance est 0.

φ désigne la fonction de Laplace-Gauss.

1. a) Vérifiez que pour tout nombre x ,

$$x\varphi(x) = -\varphi'(x).$$

- b) Déduisez-en $\int_0^b x\varphi(x) dx$, puis :

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b x\varphi(x) dx.$$

2. Calculez de même $\int_a^0 x\varphi(x) dx$, puis :

$$\lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 x\varphi(x) dx.$$

3. Concluez, sachant que $E(Z)$ est la somme de ces deux limites.

83 Variance d'une variable aléatoire Z suivant la loi normale standard

On se propose de démontrer la deuxième partie du théorème 4 : si une variable aléatoire suit la loi normale standard, sa variance est 1.

1. Justifiez que $V(Z) = E(Z^2)$.

2. a) Démontrez que pour tout nombre x ,

$$x^2\varphi(x) = \varphi''(x) + \varphi(x).$$

- b) Déduisez-en que pour tous les nombres a et b ,

$$\int_a^b x^2\varphi(x) dx = \varphi'(b) - \varphi'(a) + \int_a^b \varphi(x) dx.$$

- c) Déduisez-en :

$$\lim_{b \rightarrow +\infty} \int_0^b x^2\varphi(x) dx \quad \text{et} \quad \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 x^2\varphi(x) dx.$$

On admettra que $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi'(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi'(x) = 0$.

3. Concluez, sachant que $E(Z^2)$ est la somme des deux limites d'intégrales obtenues en 2. c).

84 Étude de la fonction de répartition Φ

1. Démontrez que pour tout nombre x ,

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} + \int_0^x \varphi(t) dt.$$

Aide Distinguez les deux cas $x \geq 0$ et $x < 0$.

2. Étudiez les variations de la fonction Φ .

3. a) Justifiez, à l'aide de la courbe de Gauss, que :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \Phi(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \Phi(x) = 1.$$

- b) Déduisez-en que la courbe représentant Φ admet deux asymptotes.

85 Propriétés de la courbe de la fonction Φ

On appelle Γ la courbe représentant la fonction Φ et K son point d'abscisse 0.

1. Démontrez que K est centre de symétrie pour Γ .

Aide M étant un point quelconque de Γ , trouvez les coordonnées de son symétrique M' par rapport à K , pour établir que M' appartient à Γ .

2. Déterminez l'équation réduite de la tangente T en K à la courbe Γ .

3. On appelle g la fonction affine représentée par la droite T , et h la fonction $\Phi - g$.

- a) Étudiez les variations de h sur $]-\infty; +\infty[$, et déduisez-en son signe.

- b) Déduisez-en qu'en K , la tangente T traverse la courbe Γ . On dit que K est un *point d'inflexion*.

4. Démontrez que le coefficient directeur des tangentes à Γ est maximal en K .

86 Quantiles de la loi $\mathcal{N}(0; 1)$

Soit Z une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0; 1)$. Étant donné un nombre α strictement compris entre 0 et 1, on appelle **quantile d'ordre α** le nombre q_α tel que :

$$P(Z \leq q_\alpha) = \alpha.$$

1. Quel est le quantile d'ordre 0,5 (*médiane*) ?

2. Démontrez que q_α est l'antécédent de α par la fonction Φ . Justifiez son existence et son unicité.

3. a) Déterminez les quantiles d'ordre 0,25 et 0,75 (*premier et troisième quartiles*).

- b) Déterminez les quantiles d'ordre : 0,1 ; 0,2 ; 0,3 ; 0,4 ; 0,5 ; 0,6 ; 0,7 ; 0,8 ; 0,9 (*déciles*).

- c) Déterminez les quantiles d'ordre 0,01 et 0,99 (*premier et dernier centiles*).

4. Démontrez que pour tout α de $]0; 1[$, les quantiles d'ordre α et $1 - \alpha$ sont opposés.

5. Démontrez que pour tout α de $]0; 1[$, $u_\alpha = q_{1-\frac{\alpha}{2}}$.

87 Z est une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0; 1)$.

Soit $I = [a; b]$ un intervalle de rayon r donné ($r > 0$).

1. Démontrez que : $P(Z \in I) \leq P(Z \in [-r; r])$.

Aide Distinguez les cas $b > r$, $0 \leq b \leq r$, $-r \leq b < 0$, $b < -r$. Interprétez les probabilités en termes d'aires et utilisez la symétrie de la courbe en cloche par rapport à l'axe des ordonnées.

2. Déduisez-en que $P(Z \in I)$ est maximal quand l'intervalle I est centré en 0.

88 Don du sang

Dans un centre de collecte de sang, on commence par mesurer la température corporelle et la pression artérielle des personnes qui se présentent pour un don.

On admet que pour une personne prise au hasard parmi celles qui se présentent :

– la température corporelle T (en $^{\circ}\text{C}$) suit une loi normale d'espérance 37 et d'écart-type 0,4 ;

– la pression artérielle systolique S (en cm Hg) suit une loi normale d'espérance 12 et d'écart-type 2.

1. On note F l'événement « La personne a de la fièvre », c'est-à-dire que sa température dépasse 37,8.

Calculez la probabilité de F .

2. On note H l'événement « La personne est hypotendue », c'est-à-dire que sa pression artérielle systolique est inférieure à 9.

Calculez la probabilité de H .

3. Le don de sang est refusé si la personne a de la fièvre (risque d'infection) ou si la personne est hypotendue (risque d'évanouissement). On admet, pour simplifier, que ce sont les seuls cas de refus.

En supposant indépendants les événements F et H , calculez la probabilité que le don soit refusé.

4. La personne s'est vue refuser le don du sang. Quelle est la probabilité :

a) qu'elle ait de la fièvre ?

b) qu'elle ait de l'hypotension ?

c) qu'elle ait de la fièvre et de l'hypotension ?

Les résultats seront donnés avec trois décimales.

89 Loterie

Une roue est divisée en dix secteurs égaux numérotés de 0 à 9. Un jeu de foire consiste, après avoir misé 1 €, à faire tourner cette roue devant un index : si la roue s'arrête sur le 9, le joueur récupère sa mise augmentée de 4 €, sinon il perd sa mise.

On suppose que les dix numéros sont équiprobables.



Le forain prévoit 100 clients dans sa journée.

1. Quelle est son espérance de bénéfice sur ce jeu ?

2. Quelle est la probabilité :

a) qu'il perde de l'argent ?

b) que son bénéfice dépasse 30 € ?

Aide Appelez X le nombre de clients qui gagnent et exprimez le bénéfice B en fonction de X .

90 Contrôle de qualité

Une entreprise fabrique en grande quantité des plaques métalliques rectangulaires pour l'industrie.

Dans ce qui suit, les résultats seront arrondis à 10^{-3} .

On prélève au hasard une pièce dans la production, et on appelle X et Y les variables aléatoires qui indiquent respectivement sa longueur et sa largeur (en mm).

On suppose que X suit la loi $\mathcal{N}(250; 4)$, et Y la loi $\mathcal{N}(150; 2,25)$.

1. Calculez la probabilité de l'événement A :

« La longueur est comprise entre 246 et 254 ».

2. Calculez la probabilité de l'événement B :

« La largeur est comprise entre 146 et 154 ».

3. Une pièce est conforme si sa longueur est comprise entre 246 et 254, et sa largeur entre 146 et 154. On admet que les deux événements A et B sont indépendants.

Calculez la probabilité que la pièce soit conforme.

4. La pièce prélevée est non conforme.

Quelle est la probabilité :

a) que sa longueur soit inférieure à 246 ?

b) que sa largeur soit supérieure à 154 ?

PROLONGEMENT DU TP 28

91 Astéroïde

Un astronome a observé un astéroïde dont il voudrait mesurer le diamètre avec précision. Mais les mesures sont entachées d'erreurs aléatoires. C'est pourquoi il effectue 100 mesures de ce diamètre.

Il obtient les résultats suivants :

Mesure (km)	683 à 684	684 à 685	685 à 686	686 à 687	687 à 688	688 à 689	689 à 690	690 à 691
Effectif	1	5	15	27	25	17	8	2

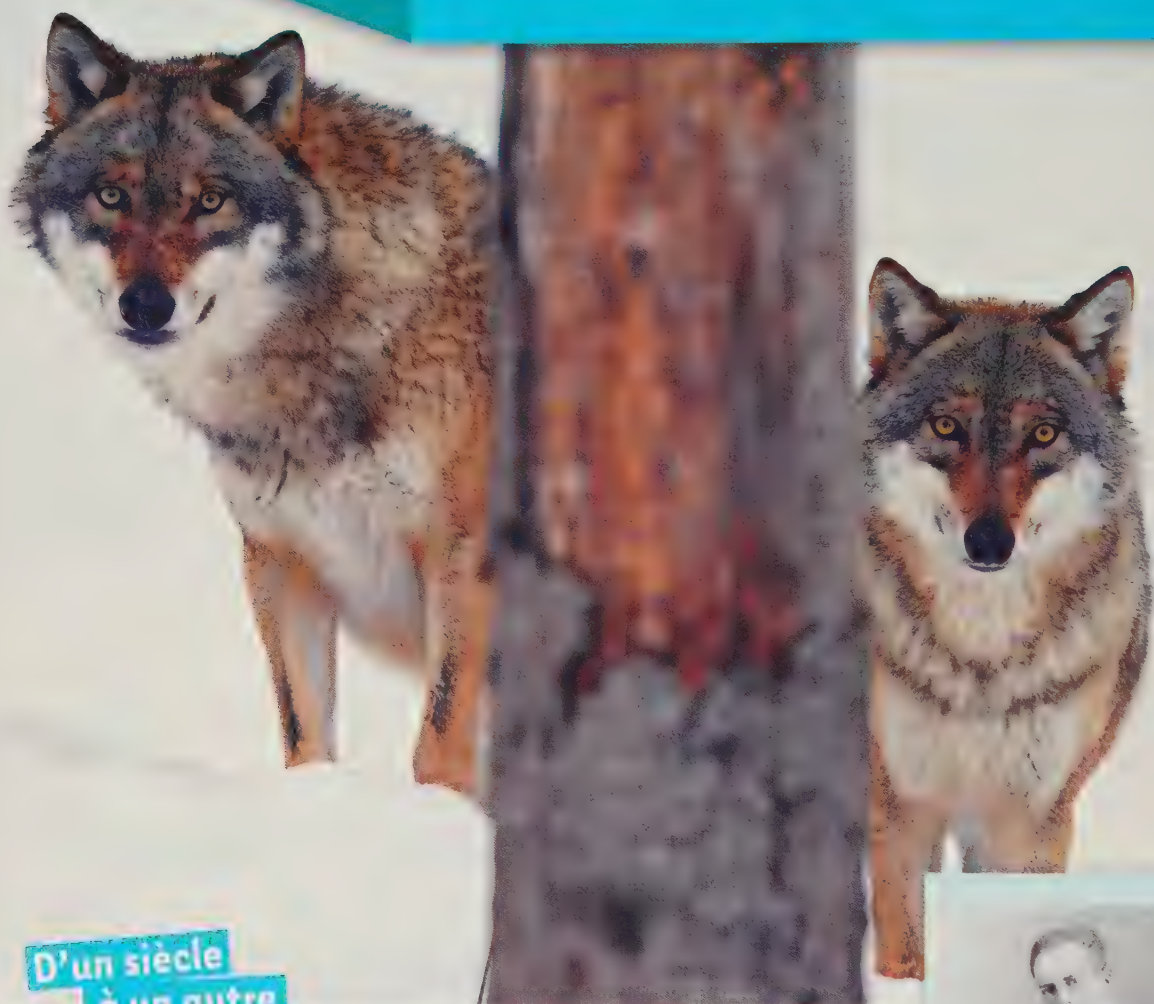
En utilisant la méthode de Henri (exercice 28, p. 424) :

a) vérifiez qu'une loi normale est adaptée à ces données.

b) donnez l'espérance et l'écart-type de cette loi normale.

Remarque. L'espérance est une bonne estimation du diamètre cherché, et l'écart-type indique la précision de la mesure.

Statistique Estimation



D'un siècle
à un autre

Les loups sont officiellement revenus en France en 1992. Vingt ans après, on estime qu'ils sont près de 200, mais il n'est pas possible de les compter à vue. Le suivi scientifique de l'espèce passe donc par l'utilisation d'outils statistiques qui permettent estimations et projections.

Le britannique Karl Pearson, considéré comme un des fondateurs des statistiques modernes, a notamment introduit le test du χ^2 pour décider si des écarts sont dus au hasard ou non.



En savoir plus sur
Karl Pearson

→ Chercheurs d'hier, p. 449

Échantillonnage

- Un **échantillon aléatoire** de taille n est une liste de n résultats obtenus par n répétitions indépendantes de la même épreuve.
- Un **schéma de Bernoulli** d'ordre n et de paramètre p est une répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes, de probabilité de succès p .
- Dans un schéma de Bernoulli d'ordre n et de paramètre p , le nombre de succès est une variable aléatoire qui suit la **loi binomiale de paramètres n et p** , notée $\mathcal{B}(n, p)$.

Intervalle de fluctuation

Au sein d'une population, on suppose que la proportion d'un certain caractère est p . On prélève dans cette population au hasard et avec remise un échantillon de taille n .

- On est alors en présence d'un schéma de Bernoulli et la variable aléatoire X comptant le nombre de succès suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$.
- On note a le plus petit entier tel que $P(X \leq a) > 0,025$ et b le plus petit entier tel que $P(X \leq b) \geq 0,975$.

Alors, pour la fréquence $F = \frac{X}{n}$, l'**intervalle de fluctuation au seuil de 95 %** est $I = \left[\frac{a}{n}; \frac{b}{n} \right]$.

Prise de décision

On fait l'hypothèse que la proportion d'un caractère dans une population est p . On observe ensuite la fréquence f de ce caractère dans un échantillon de taille n .

- Si $f \in I$, alors on **accepte** l'hypothèse selon laquelle cette proportion est p .
- Si $f \notin I$, alors on **rejette** cette hypothèse avec un risque d'erreur (rejeter à tort) de 5 %.

Les exercices portent sur la situation décrite ci-après. Il s'agit, pour chaque question, d'indiquer la réponse exacte, en justifiant votre choix.

Une publicité affirme que 80 % des Français aiment le chocolat. Un sondage à ce sujet est ensuite réalisé auprès de 1 000 Français choisis au hasard.

On fait l'hypothèse que la proportion de Français aimant le chocolat est bien 0,8.

La population française est suffisamment nombreuse pour qu'on puisse assimiler le choix des 1 000 sondés à une suite de tirages avec remise.

1 Cette dernière phrase permet d'assimiler ce sondage à un schéma de Bernoulli.

a) Vrai

b) Faux

2 La variable aléatoire X indiquant le nombre de personnes de cet échantillon aimant le chocolat suit la loi binomiale :

a) $\mathcal{B}(80; 1\,000)$ b) $\mathcal{B}(1\,000; 80)$ c) $\mathcal{B}(1\,000; 0,8)$

3 On donne ci-contre un extrait de la table des probabilités cumulées de X .

L'intervalle de fluctuation au seuil de 95 % de la fréquence de personnes de cet échantillon aimant le chocolat est :

a) [775 ; 825]

b) [772 ; 825]

c) [0,775 ; 0,824]

k	$P(X \leq k)$
...	...
772	0,01591
773	0,01923
774	0,02311
775	0,02765
...	...
822	0,96384
823	0,96985
824	0,97501
825	0,97942

4 Lors du sondage, on observe que la fréquence de personnes aimant le chocolat est $f = 0,75$.

Alors, l'hypothèse $p = 0,8$ est :

a) rejetée au risque d'erreur de 5 %

b) acceptée

5 Lors un autre sondage de taille 1 000, on a observé $f = 0,812$. Dans ce cas, f est suffisamment proche de 0,8 pour qu'on accepte l'hypothèse $p = 0,8$.

a) Vrai

b) Faux

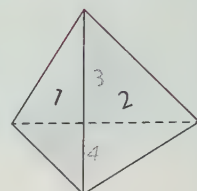


Activité 1

FRÉQUENCE DE SUCCÈS ET APPROXIMATION NORMALE

On effectue 100 lancers d'un dé tétraédrique parfait dont les quatre faces sont numérotées respectivement 1, 2, 3 et 4. On appelle F la variable aléatoire indiquant la fréquence de l'apparition du numéro 1 au terme des 100 lancers.

On se propose d'examiner si la loi de la fréquence du nombre de succès peut être approchée par une loi normale.



1 Loi de la fréquence du nombre de succès

- Donnez l'ensemble des valeurs que peut prendre F .
● Conjecturez la valeur possible de F qui vous semble la plus probable.
- On note X la variable aléatoire qui indique le nombre d'apparitions du 1 au terme des 100 lancers.
● Quelle est la loi de X ? Justifiez.
● Déduisez-en son espérance $E(X)$, sa variance $V(X)$ et démontrez que son écart-type $\sigma(X)$ vaut $\frac{5\sqrt{3}}{2}$.
- Écrivez F en fonction de X .
● Déterminez alors $E(F)$ et $V(F)$, puis démontrez que $\sigma(F) = \frac{\sqrt{3}}{40}$.
- On rappelle que si Z est une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{B}(n, p)$, alors pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, $P(Z = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

Calculez, à 10^{-4} près, les probabilités suivantes :

- $P(F = 0,25)$;
- $P(0,24 \leq F \leq 0,26)$.

2 Une nouvelle variable ?

Y est une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}\left(0,25 ; \frac{3}{1600}\right)$, c'est-à-dire telle que $E(F) = E(Y)$ et $V(F) = V(Y)$.

On se propose de comparer les lois de F et Y .

- À l'aide de votre calculatrice, donnez, à 10^{-4} près, les probabilités suivantes :
● $P(0,245 \leq Y \leq 0,255)$;
- $P(0,235 \leq Y \leq 0,265)$.

Remarque

L'utilisation de Y nécessite une correction de continuité :

pour **a)** $F = 0,25 \Leftrightarrow X = 25 \Leftrightarrow 24,5 \leq X \leq 25,5 \Leftrightarrow 0,245 \leq F \leq 0,255$. De même pour **b)**.

- Comparez les résultats de la question précédente et ceux obtenus en **1 d)**, puis formulez une conjecture concernant les lois de F et Y .

- En supposant la conjecture validée, calculez une valeur approchée de $P(0,2 \leq F \leq 0,3)$. Arrondissez votre résultat à 10^{-4} près.

Aide

N'oubliez pas la correction de continuité.

Conclusion

Plus généralement, on verra, dans le cours, que la loi de la fréquence de succès $F = \frac{X}{n}$, où X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, peut, sous certaines conditions, être approchée par la loi normale $\mathcal{N}\left(p ; \frac{p(1-p)}{n}\right)$.

Activité 2

ESTIMATION PAR « CAPTURE-RECAPTURE »

On cherche à évaluer le nombre N de poissons dans un étang.

On y prélève une première fois un échantillon de 200 poissons que l'on marque et que l'on remet dans l'étang.

Ensuite, on effectue 625 prélèvements successifs, au hasard et avec remise (un même poisson peut être attrapé plusieurs fois). On appelle F la proportion de poissons marqués dans un tel échantillon de 625 prises.

1 Rôle de l'échantillon

Peut-on affirmer que la fréquence observée de poissons marqués lors de la recapture est nécessairement la même que la proportion p de poissons marqués dans l'étang ? Justifiez votre réponse.

2 Encadrement de la population de poissons par un intervalle

Compte tenu de son procédé, cette recapture peut être modélisée par un schéma de Bernoulli d'ordre 625 et de paramètre p .

Un résultat vu en classe de 2^{de} dit alors que dans environ 95 % des cas, $F \in \left[p - \frac{1}{\sqrt{625}} ; p + \frac{1}{\sqrt{625}} \right]$.

a) Démontrez que : $p - \frac{1}{25} \leq F \leq p + \frac{1}{25}$ équivaut à $F - \frac{1}{25} \leq p \leq F + \frac{1}{25}$.

b) On a observé 50 poissons marqués lors des 625 prises de la recapture.

En faisant le pari que cet échantillon entre dans les 95 % de cas étudiés ci-dessus, quel encadrement de p pouvez-vous écrire ?

c) Quel encadrement plausible de N pouvez-vous en déduire ?

3 Utilisation d'un autre type d'encadrement

On admettra que $\left[F - 1,96 \frac{\sqrt{F(1-F)}}{\sqrt{625}} ; F + 1,96 \frac{\sqrt{F(1-F)}}{\sqrt{625}} \right]$ est également un intervalle donnant un encadrement de p dans environ 95 % des cas.

a) En faisant le même pari qu'à la question 2 **b)**, déduisez-en un nouvel encadrement plausible de N .

b) Des deux intervalles obtenus, quel est celui qui donne l'encadrement de N le plus précis ?

Problèmes ouverts

Refaites ces exercices après le chapitre ... Sont-ils plus faciles ?

1 Un programme permet, par simulations, d'afficher la fréquence de l'apparition du 1 au terme de n lancers d'un dé parfait à quatre ou six faces. Au préalable et sans le divulguer, ce programme choisit au hasard le nombre de faces du dé simulé : quatre ou six.

Estimez la valeur minimale de n qui vous permettra de dévoiler, avec un risque d'erreur d'au plus 5 %, le nombre de faces initialement choisi par le programme.

2 Un cybercafé est composé de deux pièces équipées chacune du même nombre d'ordinateurs. Lors d'un tournoi, 100 personnes se présentent successivement et choisissent au hasard, indépendamment les unes des autres, l'une des deux pièces.

Estimez le nombre minimal d'ordinateurs qu'il doit y avoir dans chaque pièce pour que dans au moins 95 % des cas, la personne qui entre puisse trouver un ordinateur disponible dans la salle de son choix.

1

Compléments sur les lois normale et binomiale

1.1] Loi normale : intervalles centrés sur l'espérance

L'allure en cloche de la courbe de densité d'une variable aléatoire X qui suit la loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ et la symétrie de cette courbe par rapport à la droite d'équation $x = \mu$ conduisent à étudier des intervalles centrés en μ .

Le théorème 1 précise les intervalles associés à une probabilité donnée.

Théorème 1

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$.

Pour tout nombre α de $]0; 1[$, $P(X \in [\mu - \sigma u_\alpha; \mu + \sigma u_\alpha]) = 1 - \alpha$,

où u_α est l'unique nombre strictement positif tel que $P\left(-u_\alpha \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq u_\alpha\right) = 1 - \alpha$.

Démonstration

Si X suit la loi $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$, alors, par définition, $\frac{X - \mu}{\sigma}$ suit la loi $\mathcal{N}(0; 1)$.

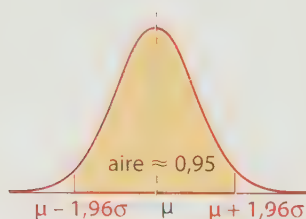
Soit α un nombre de $]0; 1[$; on sait (théorème 5 du chapitre 14, p. 409) qu'il existe un unique nombre strictement positif u_α tel que $P\left(-u_\alpha \leq \frac{X - \mu}{\sigma} \leq u_\alpha\right) = 1 - \alpha$ [1].

Or, $\sigma > 0$; donc [1] équivaut à $P(-\sigma u_\alpha \leq X - \mu \leq \sigma u_\alpha) = 1 - \alpha$,

soit $P(\mu - \sigma u_\alpha \leq X \leq \mu + \sigma u_\alpha) = 1 - \alpha$.

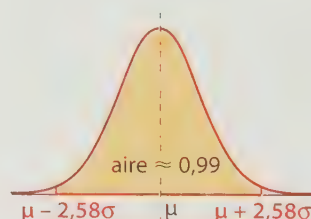
Valeurs remarquables

$$u_{0,05} \approx 1,96$$



$$P(\mu - 1,96\sigma \leq X \leq \mu + 1,96\sigma) \approx 0,95$$

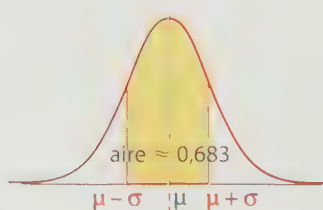
$$u_{0,01} \approx 2,58$$



$$P(\mu - 2,58\sigma \leq X \leq \mu + 2,58\sigma) \approx 0,99$$

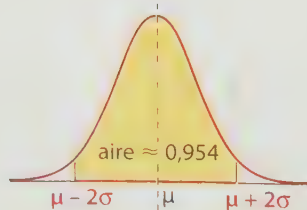
Valeurs à connaître

$$u_{0,317} \approx 1$$



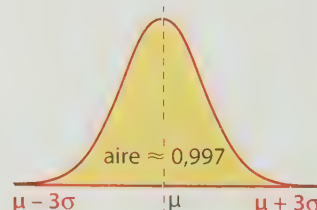
$$P(X \in [\mu - \sigma; \mu + \sigma]) \approx 0,683$$

$$u_{0,046} \approx 2$$



$$P(X \in [\mu - 2\sigma; \mu + 2\sigma]) \approx 0,954$$

$$u_{0,003} \approx 3$$



$$P(X \in [\mu - 3\sigma; \mu + 3\sigma]) \approx 0,997$$

1.2] Loi de la fréquence de succès F_n

Dans la suite du cours, X_n est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

Elle indique le nombre de succès dans un schéma de Bernoulli d'ordre n et de paramètre p .

La variable aléatoire $F_n = \frac{X_n}{n}$ indique alors la **fréquence de succès lors des n épreuves**.

La loi de F_n se déduit de celle de X_n :

$$\text{pour tout entier } k \text{ de } 0 \text{ à } n, P\left(F_n = \frac{k}{n}\right) = P(X_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Théorème 2

L'espérance et l'écart-type de la fréquence de succès F_n sont tels que :

$$E(F_n) = p \quad \text{et} \quad \sigma(F_n) = \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}.$$

Démonstration. D'après les propriétés de l'espérance et de la variance :

$$E(F_n) = E\left(\frac{1}{n} X_n\right) = \frac{1}{n} E(X_n) \quad \text{et} \quad V(F_n) = V\left(\frac{1}{n} X_n\right) = \frac{1}{n^2} V(X_n).$$

Or, X_n suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$; donc $E(X_n) = np$ et $V(X_n) = np(1-p)$.

$$\text{Ainsi, } E(F_n) = \frac{1}{n} \times np \quad \text{et} \quad V(F_n) = \frac{1}{n^2} \times np(1-p) ;$$

$$\text{d'où } E(F_n) = p \quad \text{et} \quad \sigma(F_n) = \sqrt{V(F_n)} = \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}.$$

1.3] Approximation de la loi de F_n par une loi normale

Il résulte du théorème de Moivre-Laplace (chapitre 14, p. 411) que sous certaines conditions ($n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$), on peut approcher la loi de la variable aléatoire $\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ par la loi $\mathcal{N}(0; 1)$.

$$\text{Or, la variable aléatoire } \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \text{ s'écrit aussi } \frac{\frac{X_n}{n} - \frac{np}{n}}{\frac{\sqrt{np(1-p)}}{n}} = \frac{\frac{X_n}{n} - p}{\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}} \text{ soit } \frac{F_n - E(F_n)}{\sigma(F_n)}.$$

Ainsi, la loi de cette variable aléatoire associée à la fréquence de succès F_n peut être approchée par la loi normale $\mathcal{N}(0; 1)$. D'où la règle d'approximation suivante :

Règle 1

Sous les conditions $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$, la loi de la fréquence de succès F_n peut être approchée par la loi normale de même espérance et de même variance, $\mathcal{N}\left(p; \frac{p(1-p)}{n}\right)$.

► **Exemple.** On effectue 100 lancers d'une pièce équilibrée et on appelle succès l'apparition de Pile. F_{100} indique la fréquence de succès dans un schéma de Bernoulli d'ordre $n = 100$ et de paramètre $p = 0,5$.

$$\text{D'après le théorème 2, } E(F_{100}) = 0,5 \quad \text{et} \quad \sigma(F_{100}) = \frac{\sqrt{0,5 \times 0,5}}{\sqrt{100}} = 0,05.$$

Les trois conditions de l'approximation sont vérifiées ; en effet : $n = 100$ ($n \geq 30$), $np = 50$ ($np \geq 5$) et $n(1-p) = 50$ ($n(1-p) \geq 5$). On peut donc approcher la loi de F_{100} par la loi $\mathcal{N}(0,5; 0,05^2)$.

2

Prise de décision

2.1 Intervalle de fluctuation asymptotique au seuil $1 - \alpha$

La loi de la fréquence de succès F_n peut être approchée par la loi $\mathcal{N}\left(p; \frac{p(1-p)}{n}\right)$. On peut alors, grâce au théorème 1, déterminer des intervalles qui contiennent les valeurs de F_n avec une probabilité d'autant plus proche d'une valeur donnée que n est grand. C'est ce qu'affirme le théorème 3.

Théorème 3

Pour tout nombre α de $]0; 1[$, on pose $I_n = \left[p - u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}; p + u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$.

Alors, la probabilité $P(F_n \in I_n)$ tend vers $1 - \alpha$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Démonstration exigible. X_n suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$, donc d'après le théorème de Moivre-Laplace :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(-u_\alpha \leq \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq u_\alpha\right) = 1 - \alpha \text{ (par définition de } u_\alpha \text{ pour la loi } \mathcal{N}(0; 1)). \text{ Or,}$$

$$-u_\alpha \leq \frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq u_\alpha \text{ équivaut à } -u_\alpha \sqrt{np(1-p)} \leq X_n - np \leq u_\alpha \sqrt{np(1-p)}, \text{ soit}$$

$$np - u_\alpha \sqrt{np(1-p)} \leq X_n \leq np + u_\alpha \sqrt{np(1-p)}, \text{ puis } p - u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq \frac{X_n}{n} \leq p + u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}$$

ce qui signifie $F_n \in I_n$. Finalement : $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(F_n \in I_n) = 1 - \alpha$.

Définition 1

Pour tout nombre α de $]0; 1[$, $I_n = \left[p - u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}; p + u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$ est appelé **intervalle de fluctuation asymptotique de F_n au seuil $1 - \alpha$** .

2.2 Intervalle de fluctuation au seuil de 95 %

Comme $u_{0,05} \approx 1,96$, un intervalle de fluctuation asymptotique de F_n au seuil de 95 % est :

$$I = \left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right].$$

Retour sur un intervalle de fluctuation vu en classe de seconde

On a vu que F_n appartient à l'intervalle $J = \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ dans environ 95 % des cas.

- Comparons les intervalles de fluctuation I et J .

$p(1-p) = -p^2 + p$ est un trinôme du second degré ; il admet un maximum en $p = 0,5$, qui est égal à $0,25$. Ainsi, pour tout nombre p de $[0; 1]$, $0 \leq p(1-p) \leq 0,25$.

La fonction *racine carrée* étant croissante sur $\mathbb{R}^+$, on en déduit : $0 \leq \sqrt{p(1-p)} \leq 0,5$.

Alors, $0 \leq 1,96 \sqrt{p(1-p)} \leq 1,96 \times 0,5$, donc $0 \leq 1,96 \sqrt{p(1-p)} \leq 1$.

On en déduit : $p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq p$ et $p \leq p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \leq p + \frac{1}{\sqrt{n}}$; donc :

$$\left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right] \subset \left[p - \frac{1}{\sqrt{n}}; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] \text{ soit } I \subset J.$$

- Ainsi, $P(F_n \in I) \leq P(F_n \in J)$. Sous les conditions $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$, $P(F_n \in I) \approx 0,95$ et on admet alors que dans la plupart des cas, on peut dire que $P(F_n \in J) \geq 0,95$.

2.3 Règle de prise de décision

Dans une population d'effectif N , on suppose que la proportion d'un certain caractère est p .

On souhaite **juger cette hypothèse**. Pour cela, on prélève dans la population, au hasard et avec remise, un échantillon de taille n sur lequel on observe la fréquence f_{obs} de ce caractère.

f_{obs} est une réalisation de la variable aléatoire donnant la fréquence de succès $F_n = \frac{X_n}{n}$, où X_n , qui indique le nombre d'individus présentant le caractère étudié, suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$.

Si les conditions d'approximation $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$ sont remplies, alors dans environ 95 % des cas, la fréquence F_n est dans l'intervalle de fluctuation asymptotique :

$$I = \left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]. \text{ D'où la règle de prise de décision suivante.}$$

Règle 2

- Si $f_{\text{obs}} \in I$, alors on **accepte** l'hypothèse que la proportion est p .
- Si $f_{\text{obs}} \notin I$, alors on **rejette** cette hypothèse, au seuil de 5 %.

Cela signifie que le risque d'erreur (rejet à tort) est d'environ 5 %.



Estimation par intervalles de confiance

On envisage le cas où la proportion p d'un certain caractère dans une population **est inconnue**.

On cherche alors à estimer p à partir d'un échantillon de taille n (tirage au hasard et avec remise).

On supposera les trois conditions d'approximation remplies : $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$.

Soit F_n la variable aléatoire qui à chacun des échantillons de taille n associe la fréquence du caractère dans cet échantillon. Dans environ 95 % des cas, F_n prend ses valeurs dans l'intervalle $\left[p - \frac{1}{\sqrt{n}} ; p + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$. D'où le résultat suivant :

$$\text{La proportion inconnue } p \text{ est telle que : } P\left(F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq p \leq F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \approx 0,95.$$

Démonstration. $P\left(p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq F_n \leq p + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \approx 0,95.$

Or : $p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq F_n \leq p + \frac{1}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow -\frac{1}{\sqrt{n}} \leq F_n - p \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow -F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq -p \leq -F_n + \frac{1}{\sqrt{n}} ; \text{ donc :}$
 $p - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq F_n \leq p + \frac{1}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq p \leq F_n + \frac{1}{\sqrt{n}} . \text{ Ainsi, } P\left(F_n - \frac{1}{\sqrt{n}} \leq p \leq F_n + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \approx 0,95.$

Définition 2

On observe une fréquence f_{obs} sur un échantillon de taille n . On appelle **intervalle de confiance** de p au **niveau de confiance de 95 %** l'intervalle $\left[f_{\text{obs}} - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f_{\text{obs}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$.

Remarque. Cet intervalle de confiance a pour centre f_{obs} et pour amplitude $\frac{2}{\sqrt{n}}$.

On admet que l'intervalle $\left[f_{\text{obs}} - 1,96 \frac{\sqrt{f_{\text{obs}}(1-f_{\text{obs}})}}{\sqrt{n}} ; f_{\text{obs}} + 1,96 \frac{\sqrt{f_{\text{obs}}(1-f_{\text{obs}})}}{\sqrt{n}} \right]$ est aussi un intervalle de confiance de p au niveau de confiance de 95 %.

Règle 3

Pour estimer une proportion inconnue à partir d'un échantillon, on utilise en général l'encadrement fourni par un intervalle de confiance au niveau de confiance de 95 %.

OBJECTIF 1 Prendre une décision à partir d'un échantillon

- Intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la fréquence de succès F_n
 F_n est la variable aléatoire indiquant la fréquence de succès dans un schéma de Bernoulli d'ordre n et de paramètre p . On note I l'intervalle $\left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$.

Sous les conditions $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$, $P(F_n \in I) \approx 0,95$.

- Règle de prise de décision (Règle 2)

On **suppose** que dans une population la proportion d'un certain caractère est p .

On observe la fréquence f_{obs} de ce caractère sur un échantillon de taille n , sous les conditions précédentes.

Un échantillon aléatoire de taille n est assimilé à une suite de tirages avec remise.

– Si $f_{\text{obs}} \in I$, alors on **accepte** l'hypothèse que la proportion est p .

– Si $f_{\text{obs}} \notin I$, alors on **rejette** cette hypothèse au seuil (rejet à tort) de 5 %.

EXERCICE RÉSOLU A
Prendre une décision au seuil de risque de 5 %

D'après une étude de l'INSEE, en 2006, la moitié des bébés français sont nés hors mariage.

Sur un échantillon de 1 000 naissances au cours de l'année 2010, on a observé que 556 ont eu lieu hors mariage.

On fait l'hypothèse que la proportion de naissances hors mariage en 2010 est la même qu'en 2006.

1. Pouvez-vous affirmer qu'au seuil de risque de 5 %, les résultats observés sur l'échantillon confirment l'hypothèse de l'énoncé ?

2. Vérifiez que la probabilité de commettre une erreur lors de cette prise de décision est d'environ 5 %.

► Méthode

1. On énonce l'hypothèse.

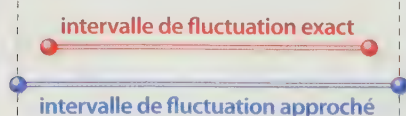
- On s'assure que les conditions d'approximation sont vérifiées.

- On détermine l'intervalle de fluctuation I à 95 %.

- On arrondit sa borne inférieure à 10^{-3} près par défaut et sa borne supérieure à 10^{-3} près par excès de façon à obtenir un intervalle plus large qui contient I .

à 0,001 par défaut

à 0,001 par excès



- On applique la règle de prise de décision.

► Solution

➔ 1. L'hypothèse est que la proportion de naissances hors mariage en 2010 est $p = 0,5$.

➔ $n = 1000$, $np = 500$ et $n(1-p) = 500$, donc les conditions d'approximation sont vérifiées.

➔ $I = \left[0,5 - 1,96 \frac{\sqrt{0,5 \times 0,5}}{\sqrt{1000}} ; 0,5 + 1,96 \frac{\sqrt{0,5 \times 0,5}}{\sqrt{1000}} \right]$.

➔ Si l'on arrondit les bornes à 10^{-3} près, alors $I \approx [0,469 ; 0,531]$.

C'est un intervalle de fluctuation de la fréquence de naissances hors mariage à 95 % sur un échantillon aléatoire de taille 1000.

Sur l'échantillon étudié, la fréquence observée de naissances hors mariage est $f_{\text{obs}} = 0,556$.

Ainsi, $f_{\text{obs}} \notin I$, donc les résultats observés sur l'échantillon ne confirment pas l'hypothèse

➔ $p = 0,5$: cette hypothèse est rejetée au seuil de 5 %.

2. On calcule, sous l'hypothèse $p = 0,5$, la probabilité que la variable aléatoire qui indique la fréquence prenne ses valeurs en dehors de l'intervalle I .

● On utilise la règle 1 du cours.

2. On commet une erreur si l'hypothèse $p = 0,5$ est rejetée à tort.

► Soit F la variable aléatoire indiquant la fréquence de succès dans un schéma de Bernoulli d'ordre 1 000 et de paramètre 0,5. On cherche $P(F \notin I)$.

► F suit une loi proche de $\mathcal{N}\left(0,5; \frac{0,25}{1000}\right)$.
 $P(F \notin I) = 1 - P(F \in I) \approx 1 - 0,9501 \approx 0,0499$: la probabilité de commettre une erreur est d'environ 5 %.

► Mise en pratique

Pour ces exercices, chaque fois que l'on considère un échantillon aléatoire, il s'agit d'un échantillon assimilé à une suite de tirages avec remise. Les bornes des intervalles de fluctuation seront écrites avec trois décimales.

1 Publicité

Un sondage auprès de 900 consommateurs d'une grande marque M montre que 774 en sont satisfaits. Par ailleurs, une publicité affirme que 90 % des consommateurs de M en sont satisfaits.

On fait l'hypothèse que la proportion de consommateurs satisfaits de la marque M est $p = 0,9$.

1. Démontrez que les trois conditions d'approximation sont vérifiées.

2. Déterminez l'intervalle de fluctuation I à 95 % de la fréquence de consommateurs satisfaits de M sur un échantillon aléatoire de taille 900.

3. Pouvez-vous affirmer qu'au seuil de risque de 5 %, les résultats du sondage sont en accord avec l'annonce publicitaire ?

2 Développement durable

En acier ou en aluminium, la canette est recyclable. En France, 60 % des canettes ont été recyclées en 2009.

Lors d'un sondage réalisé en 2010 auprès de 500 personnes, on a posé la question suivante : « Avez-vous recyclé votre dernière canette ? ».

On a alors récolté 320 réponses positives.

On fait l'hypothèse que la proportion de canettes recyclées en 2010 est la même qu'en 2009, soit $p = 0,6$.



1. Calculez les bornes de l'intervalle

$$I = \left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$$

où n désigne la taille de l'échantillon étudié.

2. Donnez une valeur approchée de la probabilité $P(F_{500} \in I)$ où F_{500} représente la fréquence de canettes recyclées sur un échantillon aléatoire de taille 500, sans oublier de vérifier les trois conditions qui valident votre réponse.

3. À partir de ce sondage, pouvez-vous affirmer qu'au risque de 5 %, la fréquence observée de canettes recyclées correspond à la proportion p ?

3 Tabac

L'Institut National de Prévention et d'Éducation pour la Santé (INPES) a étudié la proportion de fumeurs quotidiens de tabac en France en 2010. Chez les 15-19 ans, 26 % des garçons et 20 % des filles sont des fumeurs quotidiens.

Sur un échantillon de 1 000 Lillois de cette tranche d'âge, dont 450 sont des filles, on a dénombré 178 fumeurs quotidiens chez les garçons et 98 chez les filles.

On fait l'hypothèse que dans la ville de Lille, la proportion de fumeurs quotidiens chez les 15-19 ans est de 26 % pour les garçons et de 20 % pour les filles.

Répondez aux questions suivantes pour les garçons puis pour les filles.

1. Vérifiez les trois conditions d'application de la règle de prise de décision.

2. Déterminez pour un tel sondage l'intervalle de fluctuation I à 95 % de la fréquence de fumeurs quotidiens chez les 15-19 ans.

3. Pouvez-vous considérer, au seuil de risque de 5 %, que la fréquence observée de jeunes fumeurs quotidiens lillois dans cet échantillon est en accord avec la proportion de jeunes fumeurs quotidiens de la population française ?

Estimer une proportion à partir d'un échantillon

- Intervalle de confiance d'une proportion p au niveau de confiance 95 %

La proportion p d'un certain caractère dans une population est **inconnue**.

Afin d'estimer p , on observe la fréquence f_{obs} de ce caractère sur un échantillon de taille n .

Un tel échantillon est assimilé à une suite de n tirages avec remise.

On supposera les trois conditions d'approximation remplies.

Alors, l'intervalle $\left[f_{\text{obs}} - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f_{\text{obs}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ est un **intervalle de confiance** de la proportion p au **niveau de confiance** de 95 %.

Dans le contexte des sondages, un intervalle de confiance est souvent appelé « fourchette de sondage ».

EXERCICE RESOLU B

Utiliser une fourchette de sondage à 95% de confiance

L'institut Ipsos a réalisé en 2011 un sondage auprès de 600 jeunes âgés de 6 à 18 ans. Cette enquête classe les premières envies des enfants et adolescents à la veille de la rentrée scolaire.

On assimile le choix de ces 600 jeunes à une suite de tirages au hasard et avec remise.

Les trois envies les plus fréquentes sont :

1) de nouveaux vêtements (34 %) ; 2) de nouvelles chaussures (28 %) ; 3) un ordinateur portable (23 %).

1. Calculez, à partir de cette enquête, les trois fourchettes de sondage à 95 % de confiance, correspondant aux trois envies les plus fréquentes. Arrondissez leurs bornes à 0,1 % près.

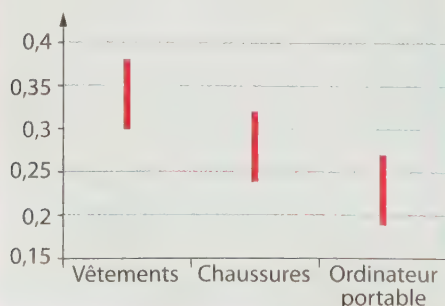
2. a) Est-il vraisemblable qu'au niveau national, parmi les jeunes de 6 à 18 ans, l'envie d'un ordinateur portable dépasse (en termes de proportion) l'envie de nouveaux vêtements ?

b) Vous paraît-il plausible que, sur la population des jeunes de 6 à 18 ans, l'envie d'un ordinateur portable dépasse celle de nouvelles chaussures ?

Méthode

1. On détermine les intervalles de confiance au niveau 95 % des trois proportions correspondantes.

● On arrondit leur borne inférieure à 0,1 % près par défaut et leur borne supérieure à 0,1 % près par excès, de façon à obtenir un intervalle plus large qui contient la fourchette de sondage correspondante.



Solution

➔ **1.** À partir du sondage Ipsos, le calcul des fourchettes à 95 % de confiance donne les estimations des proportions de jeunes de 6 à 18 ans dont la première envie à la veille de la rentrée scolaire est d'avoir :

– de nouveaux vêtements

$$V = \left[0,34 - \frac{1}{\sqrt{600}} ; 0,34 + \frac{1}{\sqrt{600}} \right]$$

soit environ [29,9 % ; 38,1 %] ;

– de nouvelles chaussures

$$C = \left[0,28 - \frac{1}{\sqrt{600}} ; 0,28 + \frac{1}{\sqrt{600}} \right]$$

soit environ [23,9 % ; 32,1 %] ;

– un ordinateur portable

$$O = \left[0,23 - \frac{1}{\sqrt{600}} ; 0,23 + \frac{1}{\sqrt{600}} \right]$$

soit environ [18,9 % ; 27,1 %].

2. On examine l'intersection des intervalles de confiance.

a) L'intersection est vide.

b) L'intersection est un intervalle.

2. a) La réponse est non car d'après 1., la plus grande valeur de la fourchette O (27,1 %) reste inférieure à la plus petite valeur de la fourchette V (29,9 %).

b) Oui, cela est plausible car, d'après 1., certaines valeurs de la fourchette O dépassent certaines valeurs de la fourchette C (27 % pour O et 24 % pour C par exemple).

► Mise en pratique

Pour tous les exercices de cette rubrique, chaque fois que l'on considère un échantillon aléatoire, il s'agit d'un échantillon assimilé à une suite de tirages avec remise.

4 Élections

Deux candidats (M. Legrand et M. Lepetit) se présentent à une élection.

Le dernier sondage effectué auprès d'un échantillon aléatoire de 400 personnes donne M. Legrand gagnant à 54 %.



M. Lepetit affirme alors : « Ce sondage rend ma victoire plausible ! »

1. Déterminez, à partir de cette étude, la fourchette à 95% de confiance de la proportion de personnes envisageant de voter pour M. Lepetit.

2. À partir de cette fourchette, commentez l'affirmation de ce candidat.

5 Abstentionnistes

Lors d'un sondage réalisé début 2010 auprès d'un échantillon aléatoire de 1 000 personnes inscrites sur les listes électorales, 525 ont affirmé ne pas vouloir aller voter lors du premier tour des élections régionales 2010.

1. Déterminez, à partir de cette enquête, l'intervalle de confiance à 95 % de la proportion d'abstentions lors de ce premier tour. Écrivez ses bornes avec quatre décimales.

2. Après ce premier tour, le ministère de l'Intérieur a annoncé le résultat définitif de l'abstention : 53,64 %.

Un sondage est qualifié de « bon » si l'intervalle de confiance obtenu à partir de celui-ci contient la valeur qu'il est censé estimer.

Le sondage de l'énoncé est-il « bon » ?

3. Un institut a réalisé, avant le premier tour des élections, un « bon » sondage sur un échantillon de 1 000 personnes.

Donnez un encadrement du nombre de personnes sondées ayant répondu NON à la question : « Irez-vous voter aux élections régionales 2010 ? »

6 Pièce truquée ?

Pour savoir si une pièce est équilibrée, on la lance 200 fois.

1. On a obtenu 120 fois Pile.

Est-il vraisemblable que la pièce soit équilibrée ?

Justifiez votre réponse à l'aide d'un intervalle de confiance à 95 % (bornes écrites avec trois décimales).

2. Quelles sont les valeurs possibles du nombre de Pile pour pouvoir affirmer au niveau de confiance de 95 % que la pièce est équilibrée ?

3. Dans cette question, on utilise un intervalle de confiance à 95 % du type :

$$\left[f_{\text{obs}} - 1,96 \frac{\sqrt{f_{\text{obs}}(1-f_{\text{obs}})}}{\sqrt{n}} ; f_{\text{obs}} + 1,96 \frac{\sqrt{f_{\text{obs}}(1-f_{\text{obs}})}}{\sqrt{n}} \right].$$

a) Reprenez la question 1.

b) On se propose de répondre à la question 2.

Pour cela, on introduit les suites u et v définies pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq 200$ par :

$$u_k = \frac{k}{200} - 1,96 \frac{\sqrt{\frac{k}{200} \left(1 - \frac{k}{200}\right)}}{\sqrt{200}} \text{ et}$$

$$v_k = \frac{k}{200} + 1,96 \frac{\sqrt{\frac{k}{200} \left(1 - \frac{k}{200}\right)}}{\sqrt{200}}.$$

À l'aide d'un tableur ou d'une calculatrice, dressez la table des valeurs prises par ces deux suites.

Concluez.

4. Comparez les résultats obtenus avec ces deux types d'intervalles de confiance.

OBJECTIF

3

Déterminer la taille suffisante d'un échantillon pour estimer une proportion avec une précision donnée

- Amplitude de l'intervalle de confiance au niveau 95 %

L'intervalle de confiance $\left[f_{\text{obs}} - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f_{\text{obs}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ d'une proportion p au niveau 95 %, obtenu à partir d'un échantillon de taille n , a pour centre f_{obs} et pour amplitude $\frac{2}{\sqrt{n}}$.

EXERCICE RÉSOLU C Utiliser l'amplitude d'un intervalle de confiance

Peu avant une élection nationale qu'on prévoit serrée entre plusieurs candidats, un institut de sondage est chargé de déterminer, pour chaque candidat, des fourchettes à 95 % de confiance ayant une amplitude maximale de 1 %.

Déterminez une taille d'échantillon suffisante pour obtenir une estimation aussi précise des intentions de vote.

Méthode

- On utilise l'intervalle de confiance au niveau

$$95 \% : \left[f_{\text{obs}} - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f_{\text{obs}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \right].$$

- On traduit l'énoncé par une inéquation, puis on la résout.

- On utilise :

– la décroissance de la fonction *inverse* sur $]0 ; +\infty[$;

– la croissance de la fonction *carré* sur $[0 ; +\infty[$.

- On conclut.

Solution

➔ L'amplitude d'un tel intervalle de confiance au niveau 95 %, pour la proportion p d'intentions de vote, est $\frac{2}{\sqrt{n}}$ où n désigne la taille de l'échantillon étudié.

➔ On cherche donc un entier naturel non nul n qui vérifie l'inéquation $\frac{2}{\sqrt{n}} \leq 0,01$.

Par passage aux inverses, cette inéquation ➔ équivaut à $\frac{\sqrt{n}}{2} \geq 100$ soit $\sqrt{n} \geq 200$.

➔ En élevant au carré, cela équivaut à : $n \geq 40\,000$.

➔ Ainsi, pour obtenir une estimation aussi précise des intentions de vote, il suffit de sonder un échantillon de taille (supérieure ou égale à) 40 000.

Mise en pratique

7 Une urne contient des boules rouges et des boules noires. On cherche à estimer la proportion p de boules rouges de l'urne à l'aide de tirages au hasard et avec remise.

Combien de tirages suffit-il d'effectuer pour déterminer un encadrement de p d'amplitude 0,1 au niveau de confiance de 95 % ?

8 Par combien faut-il multiplier la taille d'un échantillon pour obtenir un intervalle de confiance d'une proportion à 95 % dix fois plus petit ?

9 Pour un sondage portant sur 1 000 personnes, on parle parfois de « marge d'erreur d'environ $\pm 3\%$ au niveau de confiance de 95 % ».

1. Expliquez cette expression.

2. Combien de personnes suffit-il de sonder pour obtenir une marge d'erreur de $\pm 1\%$ au niveau de confiance de 95 % ?

10 Questions sur le cours

Complétez les propositions suivantes.

1. Si X suit $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$, alors $P(X \in [\dots; \dots]) \approx 0,95$.

2. Soit F_n la fréquence de succès dans un schéma de Bernoulli d'ordre n et de paramètre p ($n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$).

a) Alors $E(F_n) = \dots$ et $\sigma(F_n) = \dots$

b) F_n peut être approchée par la loi $\mathcal{N}(\dots; \dots)$.

c) Si $I = \left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$, alors $P(F_n \in I) \approx \dots$

d) Sur un échantillon de taille n , F_n prend la valeur f_{obs} . Alors, $\left[f_{\text{obs}} - \frac{1}{\sqrt{n}}; f_{\text{obs}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$ est un intervalle de ... de la proportion p au niveau ... %.

11 Vrai ou faux

Vrai ou faux ? Justifiez votre réponse.

1. F_{300} indique la fréquence d'apparition du 6 au cours de 300 lancers d'un dé cubique parfait.

a) On peut approcher la loi de F_{300} par la loi $\mathcal{N}\left(\frac{1}{6}; \frac{1}{2160}\right)$.

b) $[0,14; 0,18]$ est un intervalle de fluctuation de F_{300} à 95 %.

2. En utilisant son propre dé, Dorian a obtenu 90 fois le 6 sur les 300 lancers. Alors, pour ce dé :

a) l'hypothèse selon laquelle la probabilité d'apparition du 6 vaut $\frac{1}{6}$ est rejetée au seuil de 5 %.

b) $[0,307; 0,407]$ est un intervalle de confiance de la probabilité d'apparition du 6 au niveau 95 %.

12 QCM Une seule réponse exacte

Pour chaque affirmation, une seule réponse est exacte. Identifiez-la en justifiant votre réponse.

Une urne contient dix boules équiprobables au tirage, des rouges et des vertes.

On note p la proportion de boules vertes dans l'urne.

On effectue 50 tirages successifs au hasard et avec remise. On a obtenu une boule verte à 15 reprises.

1. Un intervalle de confiance de p au niveau 95 % est :

a) $[0,25; 0,35]$ b) $[0,15; 0,45]$ c) $[0,05; 0,55]$

2. Donc, au niveau de confiance de 95 %, le nombre de boules vertes dans l'urne est :

a) soit 4, soit 5 b) entre 3 et 7 c) entre 2 et 4

3. Pour obtenir une amplitude dix fois plus petite de l'intervalle de confiance de p à 95 %, il suffit de multiplier le nombre initial de tirages par :

a) 100 b) 10 c) 4

13 QCM Au moins une réponse exacte

Pour chaque affirmation, plusieurs réponses peuvent être exactes. Identifiez-les en justifiant vos réponses.

1. D'après un sondage réalisé en 2011 auprès d'un échantillon de 1 200 jeunes représentatifs de la population française âgée de 8 à 17 ans, 48 % d'entre eux se connectent régulièrement à un réseau social.

À partir de cette enquête et en se basant sur la fourchette de sondage à 95 % de confiance, une valeur vraisemblable de la proportion p de jeunes Français de 8 à 17 ans qui se connectent régulièrement à un réseau social est :

a) $p = 0,46$ b) $p = 0,4$ c) $p = 0,55$ d) $p = 0,491$

2. Une publicité affirme que la moitié des jeunes Français de 8 à 17 ans se connectent régulièrement à un réseau social. On fait l'hypothèse que $p = 0,5$.

Selon la règle de prise de décision au seuil de risque de 5 %, cette hypothèse est acceptée à partir d'un sondage disant que se connectent à un réseau social :

a) 54 % d'un échantillon de 1 200 jeunes

b) 54 % d'un échantillon de 600 jeunes

c) 46 % d'un échantillon de 600 jeunes



14 Contrôle de fluctuation

On lance un dé tétraédrique parfait. On s'intéresse à la fréquence F_n d'apparition du 1 et à sa fluctuation autour de sa valeur théorique $\frac{1}{4}$ lors de n lancers successifs.

Objectif Déterminer un nombre de lancers suffisant pour que la fréquence F_n soit éloignée d'au plus $\frac{1}{100}$ de la valeur $\frac{1}{4}$ avec un risque d'erreur d'environ 5 %.

1. Il s'agit de déterminer un nombre de lancers suffisant pour que $0,24 \leq F_n \leq 0,26$, avec un risque d'erreur d'environ 5 %.

On sait que F_n prend ses valeurs dans un intervalle de fluctuation à environ 95 %, avec un risque d'erreur d'environ 5 %. On peut donc envisager d'utiliser un tel intervalle, soit celui vu en Terminale, soit celui vu en Seconde.

On commence par celui vu en Terminale. Il faut donc d'abord déterminer à partir de quelle valeur de n les trois conditions d'approximation $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$ sont remplies.

- a) Pour quelles valeurs de n est-ce réalisé ?
- b) On supposera $n \geq 30$. Rappelez l'intervalle de fluctuation asymptotique de F_n au seuil de 95 %.
- c) Déduisez-en un nombre de lancers suffisant pour que la fréquence F_n soit éloignée d'au plus $\frac{1}{100}$ de la valeur $\frac{1}{4}$ avec un risque d'erreur d'environ 5 %.

2. On utilise maintenant l'intervalle de fluctuation à environ 95 % vu en Seconde.

- a) Rappelez l'intervalle de fluctuation de F_n au seuil de 95 % vu en Seconde.
- b) Déduisez-en un nombre de lancers suffisant pour que la fréquence F_n soit éloignée d'au plus $\frac{1}{100}$ de la valeur $\frac{1}{4}$ avec un risque d'erreur d'environ 5 %.

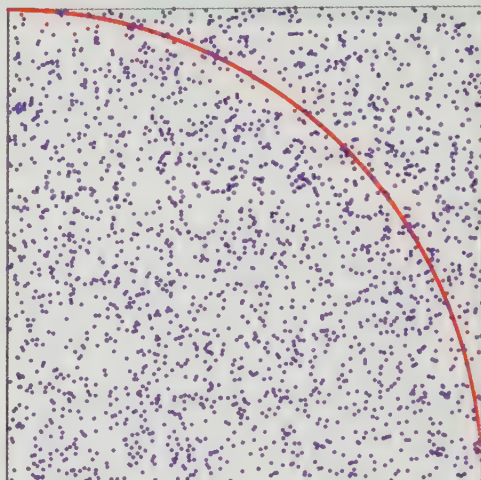
3. On compare les résultats obtenus à l'aide de ces deux intervalles de fluctuation.

Lequel des deux intervalles de fluctuation permet d'atteindre l'objectif avec le moins de lancers ?

15 Approximation de π

On considère un quart de cercle de rayon 1 inscrit dans un carré de côté 1. On note p la probabilité qu'un point choisi au hasard dans ce carré soit dans le quart de disque.

Sur 2 500 points choisis au hasard dans ce carré, 1 977 sont situés dans le quart de disque.



Objectif Déterminer un encadrement de π à partir des intervalles de confiance.

1. La valeur observée de la fréquence de points dans le quart de disque va permettre de déterminer un intervalle de confiance à 95 % de p et donc de π .

- a) Déterminez l'intervalle de confiance de p au niveau 95 %. Écrivez ses bornes avec quatre décimales.
- b) Déduisez-en un encadrement de π au niveau de confiance de 95 %.

2. Un second intervalle de confiance utilisant la valeur remarquable 1,96 peut être utilisé.

Reprenez les deux questions précédentes en utilisant comme intervalle de confiance de p au niveau 95 % :

$$\left[f_{\text{obs}} - 1,96 \frac{\sqrt{f_{\text{obs}}(1-f_{\text{obs}})}}{\sqrt{n}} ; f_{\text{obs}} + 1,96 \frac{\sqrt{f_{\text{obs}}(1-f_{\text{obs}})}}{\sqrt{n}} \right]$$

3. On compare les résultats obtenus à l'aide de ces deux intervalles de confiance.

Quel intervalle de confiance permet d'obtenir l'estimation la plus précise de π ?

4. L'amplitude du premier intervalle de confiance de p à 95 % peut être aussi petite que l'on veut en prenant n assez grand.

À partir de combien de points choisis au hasard dans ce carré peut-on obtenir, à l'aide du premier intervalle de confiance, un encadrement de π d'amplitude inférieure ou égale à 0,1 ?

Narration de recherche

→ L'objectif n'est pas seulement de résoudre le problème posé : vous devez aussi noter les différentes idées même lorsqu'elles n'ont pas permis de trouver la réponse. Expliquez pourquoi vous avez changé de méthode et ce qui vous a fait avancer, etc.

16 À table !

Dans un lycée, 600 élèves prennent leur repas de midi à la cantine. Chaque élève choisit au hasard et indépendamment des autres élèves l'une des deux salles de réfectoire. Chacune de ces deux salles contient le même nombre de places.

Estimez le nombre minimal de places qu'il doit y avoir dans chaque salle pour que la probabilité que chaque élève trouve une place dans la salle qu'il a choisie soit supérieure ou égale à 99 %.

17 Question confidentielle

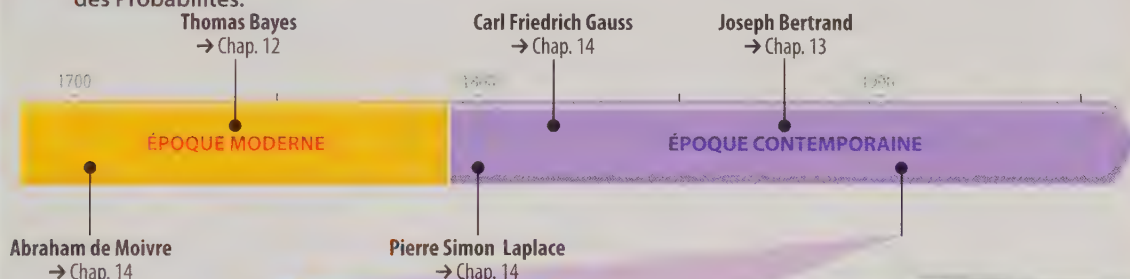
Lors d'un sondage, on demande à chaque personne sondée, avant de répondre « oui » ou « non » à une question confidentielle posée, de lancer un dé cubique parfait. Seule la personne sondée connaît le résultat de ce lancer. Si le résultat est 6, alors la personne répond à la question selon ses convictions, sinon elle ment. On suppose que les personnes sondées jouent parfaitement le jeu. Sur 1 000 personnes sondées, 425 ont répondu « oui ». Le choix de ces personnes est assimilé à 1 000 tirages successifs au hasard et avec remise.

Déterminez alors un intervalle de confiance à 95 % de la proportion p des opinions « oui » dans la population (bornes écrites avec trois décimales).

Chercheurs d'hier

Eux aussi, ils ont cherché avant de trouver !

Voici quelques mathématiciens importants qui ont travaillé dans le domaine de la Statistique et des Probabilités.

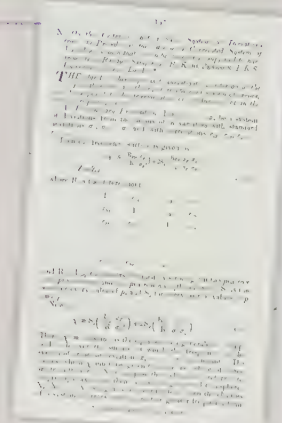


Karl Pearson
(1857-1936)

Mathématicien britannique, il est l'un des fondateurs des statistiques modernes à la fin du XIX^e siècle.

Il impressionne ses contemporains par l'étendue et la variété de ses apports à cette nouvelle branche des mathématiques qui mêle probabilités et statistiques.

Sa principale contribution est la création du test du χ^2 (« khi-deux ») destiné à tester si un modèle théorique est adapté à des données observées ou si l'écart entre valeurs observées et valeurs théoriques est significatif.



Extrait de son article présentant le test χ^2 (1900).

Sur le Web serge.mehl.free.fr/chrono/Pearson.html

Travaux dirigés

Utiliser un tableur

	A	B	C
1			
2			

TP

15 Vérification du seuil d'un intervalle de fluctuation

→ Pour étudier des échantillons aléatoires de grande taille

COMPÉTENCES

TICE

- Utiliser des formules contenant des adresses de cellules.
- Utiliser des instructions conditionnelles.

Mathématiques

- Connaître les caractéristiques de la variable aléatoire F_n .
- Interpréter le résultat des simulations.

F_n est la variable aléatoire indiquant la fréquence de succès dans un schéma de Bernoulli d'ordre n et de paramètre p . Si les conditions $n \geq 30$, $np \geq 5$ et $n(1-p) \geq 5$ sont vérifiées, alors $P(F_n \in I) \approx 0,95$ où I est un intervalle de fluctuation asymptotique de F_n à 95 %, du type $I = [E(F_n) - 1,96\sigma(F_n); E(F_n) + 1,96\sigma(F_n)]$. L'objectif de cette activité est de vérifier le résultat précédent d'un point de vue statistique.

On considère 1 000 échantillons de taille n de l'épreuve de Bernoulli de paramètre p . On note m la moyenne et s l'écart-type de la série des fréquences de succès observées. Il s'agit de vérifier qu'environ 95 % des 1 000 valeurs prises par la fréquence F_n sont dans l'intervalle $[m - 1,96s; m + 1,96s]$.

1. Simulation

Prenons par exemple $n = 100$ et $p = 0,4$.

a) Ouvrez une feuille de calcul. Complétez les cellules D2 et D3 (respectivement $E(F_n)$ et $\sigma(F_n)$).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Paramètres		Caractéristiques			1 000 sim de F_n	$[m - 1,96s; m + 1,96s]$		Résultat
2		$n = 100$	espérance						
3		$p = 0,4$	écart-type						
4									
5	Conditions		Échantillon						
6		$n \geq 30$	moyenne $m =$						
7		$np \geq 5$	écart-type $s =$						
8		$n(1-p) \geq 5$							

b) Saisissez dans les cellules B6 à B8 l'instruction conditionnelle qui renvoie « OUI » si la condition correspondante est vérifiée, « NON » sinon.

c) On simule les valeurs prises par F_n , avec la fonction : $= \text{CRITERE.LOI.BINOMIALE}(n; p; \text{ALEA}()) / n$.

Entrez la formule adéquate en F2 et recopiez-la vers le bas afin d'obtenir un échantillon de 1 000 valeurs.

2. Mise en évidence du seuil de l'intervalle de fluctuation

a) Écrivez les formules adéquates dans les cellules D6 et D7.

b) Saisissez en G2 l'instruction conditionnelle qui renvoie 1 si la valeur de F_n est dans l'intervalle $[m - 1,96s; m + 1,96s]$, 0 sinon. Recopiez-la vers le bas.

Aide

Excel : s'inspirer de la formule $=\text{SI}(\text{ET}(\text{condition1}; \text{condition2}); 1; 0)$

Calc : s'inspirer de la formule $=\text{SI}(\text{ET}(\text{condition1}) \text{ ET}(\text{condition2}); 1; 0)$

c) Déduisez-en la formule à copier dans la cellule I2 (en format %) permettant de calculer la proportion de valeurs de F_n qui sont dans l'intervalle $[m - 1,96s; m + 1,96s]$.

d) Remplacez n et p par 80 et 0,3 dans les cellules B2 et B3. Observez d'autres cas possibles. Que constatez-vous ?

Utiliser un tableur

→ Pour représenter des fourchettes de sondage

TP

19 Un premier tour renversant

COMPÉTENCES

TICE

- Simuler plusieurs sondages.
- Composer des instructions conditionnelles.
- Dénombrer une plage de cellules.

Mathématiques

- Calculer des fourchettes de sondage à 95 % de confiance.
- Interpréter l'intersection de ces fourchettes.

Le vendredi 19 avril 2002, deux jours avant le premier tour des élections présidentielles, un dernier sondage a été effectué sur 1 000 électeurs par l'institut BVA.

Les résultats étaient les suivants : Jacques Chirac 19 % ; Lionel Jospin 18 % ; Jean-Marie Le Pen 14 %.

D'après ce sondage, Jacques Chirac et Lionel Jospin devaient s'affronter au second tour.

La surprise a donc été grande, le dimanche suivant, au vu des résultats définitifs :

Jacques Chirac 19,88 % ; Jean-Marie Le Pen 16,86 % ; Lionel Jospin 16,18 %.

Ainsi, c'est Jean-Marie Le Pen qui affronta Jacques Chirac au second tour.

L'objectif de cette activité est double : vérifier que le sondage BVA rendait plausible un tel duel pour le second tour et mettre en évidence la difficulté de prévoir l'ordre des candidats à l'issue du premier tour.

1. Analyse du sondage BVA

- Calculez, à partir du sondage BVA, les trois fourchettes de sondage à 95 % de confiance correspondant aux intentions de vote pour chacun des trois candidats. Arrondissez les bornes à 0,1 % près.
- Les fourchettes obtenues contiennent-elles les valeurs qu'elles sont censées estimer ?
- En se basant sur ces fourchettes, déterminez tous les duels plausibles pour le second tour.

2. Simulation d'un sondage aléatoire sur 1 000 personnes à partir des résultats définitifs

- Ouvrez une feuille de calcul. Entrez =ALEA() en A2, puis recopiez vers le bas jusqu'en A1001.

	B2						
	A	B	C	D	E	F	G
1	Aléas	Sondage			Chirac	Jospin	Le Pen
2	0,52953615	4		Borne inf. fourchette			
3	0,45691018	3		Borne sup. fourchette			
4	0,37642847	3		Fréquence			

- Entrez =SI(A2<=0,1988;1;SI(A2<=0,3606;2;SI(A2<=0,5292;3;4))) en B2, et recopiez vers le bas jusqu'en B1001. Expliquez pourquoi cette formule permet de simuler un sondage aléatoire sur 1 000 personnes à partir des résultats définitifs du premier tour des élections présidentielles 2002.

Que représente l'issue 4 de cette formule ?

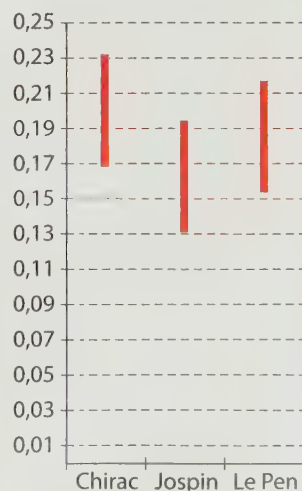
- À l'aide de la fonction NB.SI, complétez les cellules E4, F4 et G4 donnant les fréquences observées pour chaque candidat.

- Écrivez en E2 et E3, en fonction de E4, les formules calculant respectivement la borne inférieure et la borne supérieure de la fourchette de sondage à 95 % de confiance pour Jacques Chirac. Recopiez ces formules vers la droite jusqu'à la colonne G.

- Après avoir sélectionné la plage E1:G4, insérez un graphique « stock » ou « cours » qui permet de visualiser les trois fourchettes comme sur l'image ci-contre.

- Effectuez plusieurs simulations (Excel : F9, Calc : Ctrl ⇧ F9). Obtient-on toujours le « bon » ordre ?

Expliquez d'où vient cette difficulté à prévoir l'ordre des candidats.



20 Essai thérapeutique

Deux groupes de personnes atteintes par une même maladie sont soignés par deux traitements différents. On observe, par la suite, la différence entre les taux de guérison dans chacun des deux groupes.

On se pose alors les questions suivantes, qui soulèvent deux hypothèses.

- Est-ce que les taux « théoriques » de guérison sont les mêmes pour ces deux traitements et donc, est-ce que cette différence observée est uniquement liée à des fluctuations d'échantillonnage ?
- Ou bien est-ce que cette différence est suffisamment importante (on parle alors de différence « statistiquement significative ») pour pouvoir distinguer le traitement le plus efficace des deux ?

On veut trancher entre ces deux hypothèses à l'aide d'une règle de prise de décision.

1. Prise de décision

On constitue deux échantillons aléatoires de patients souffrant de la même maladie.

L'un des échantillons, de taille n_A , est constitué de malades soumis à un traitement A dont le taux théorique de guérison p_A est inconnu, l'autre est constitué de malades soumis à un traitement B dont le taux théorique de guérison p_B est inconnu. On supposera remplies les conditions :

$$n_A \geq 30, n_B \geq 30, n_A p_A \geq 5, n_B p_B \geq 5, n_A(1 - p_A) \geq 5 \text{ et } n_B(1 - p_B) \geq 5.$$

Les deux hypothèses envisagées sont donc : $p_A = p_B$ (H_0) et $p_A \neq p_B$ (H_1).

On se place sous l'hypothèse (H_0) et on note p le taux théorique commun de guérison ($p = p_A = p_B$).

On désigne par F_A le taux de guérison dans un échantillon aléatoire de taille n_A sous le traitement A et par F_B le taux de guérison dans un échantillon aléatoire de taille n_B sous le traitement B.

a) En utilisant la règle 1, rappelez par quelles lois peuvent être approchées les lois de F_A et F_B .

On identifiera par la suite les lois de F_A et F_B à leurs lois approchées respectives.

b) On admet que la variable aléatoire $F_A - F_B$ suit une loi normale et que :

$$E(F_A - F_B) = E(F_A) - E(F_B) \quad \text{et} \quad V(F_A - F_B) = V(F_A) + V(F_B).$$

• Déterminez l'espérance et l'écart-type de $F_A - F_B$.

• Déduisez-en que la variable aléatoire $X = \frac{F_A - F_B}{\sqrt{p(1-p)\left(\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}\right)}}$ suit la loi $\mathcal{N}(0; 1)$.

• Rappelez alors une valeur approchée de la probabilité $P(-1,96 \leq X \leq 1,96)$.

Commentaire. À l'issue des traitements, on note f_A le taux de guérison observé dans l'échantillon de taille n_A , et f_B le taux de guérison observé dans l'échantillon de taille n_B .

On obtient une estimation de la valeur observée de X en remplaçant p (inconnu) par la moyenne pondérée des taux f_A et f_B . Ainsi, $x_{\text{obs}} = \frac{f_A - f_B}{\sqrt{\hat{p}(1-\hat{p})\left(\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}\right)}}$ où $\hat{p} = \frac{n_A f_A + n_B f_B}{n_A + n_B}$.

Il en résulte la règle de prise de décision suivante :

Si $x_{\text{obs}} \in [-1,96; 1,96]$, alors on accepte l'hypothèse (H_0) selon laquelle $p_A = p_B$.

Si $x_{\text{obs}} \notin [-1,96; 1,96]$, alors on rejette l'hypothèse (H_0) au seuil de 5 % (et on accepte (H_1)).

2. Application

Dans un groupe de 200 malades, on a constitué par tirage au sort une série soumise à un nouveau traitement A et une série soumise au traitement classique B. Les résultats sont :

- avec le traitement A : 24 guérisons sur 80 patients ;
- avec le traitement B : 30 guérisons sur 120 patients.

a) Pouvez-vous affirmer au seuil de 5 % que ces deux traitements ont le même taux de guérison ?

b) Reprenez la question précédente avec les mêmes taux de guérison observés mais pour des effectifs dix fois plus importants dans chaque groupe.

DE TÊTE



Dans les exercices de cette rubrique, chaque fois que l'on considère un échantillon aléatoire, il s'agit d'un échantillon assimilé à une suite de tirages avec remise.

21 Une étude a permis de modéliser la taille d'un nourrisson (en cm) à sa naissance par une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(50; 1,2^2)$.

Sur un échantillon aléatoire de 1 000 naissances :

a) combien y a-t-il, environ, de nourrissons mesurant entre 48,8 cm et 51,2 cm ?

b) combien y a-t-il, environ, de nourrissons dont la taille n'est pas comprise entre 46,4 cm et 53,6 cm ?

22 Soit F_{100} la variable aléatoire indiquant la fréquence de succès dans un schéma de Bernoulli d'ordre $n = 100$ et de paramètre $p = 0,1$.

1. Proposez une expérience aléatoire que peut modéliser F_{100} .

2. Déterminez l'espérance $E(F_{100})$ et l'écart-type $\sigma(F_{100})$ de la variable aléatoire F_{100} .

3. Les conditions permettant d'approcher la loi de F_{100} par une loi normale sont-elles remplies ?

Si c'est le cas, précisez l'espérance et la variance de cette loi normale.

23 On fait l'hypothèse que sur une copie de philosophie d'un élève de Terminale, la proportion de mots écrits avec au moins une faute d'orthographe est $p = 0,2$. On prend une copie au hasard, on compte alors 100 mots écrits avec au moins une faute d'orthographe dans un paragraphe de 400 mots (le choix de ces mots est assimilé à une suite de tirages au hasard et avec remise).

1. L'intervalle de fluctuation à 95 % de la fréquence de mots ayant au moins une faute d'orthographe sur un échantillon aléatoire de 400 mots est $[0,16; 0,24]$.

Pouvez-vous affirmer qu'au seuil de risque de 5 %, les résultats observés sur l'échantillon de 400 mots confirment l'hypothèse de l'énoncé ?

2. Même question mais avec un seuil de 1 %, sachant que l'intervalle de fluctuation à 99 % est $[0,14; 0,26]$.

24 Un sondage effectué en 2007 en France auprès d'un échantillon aléatoire de 2 500 foyers révèle que 45 % de ces foyers ont accès à internet.

1. Quelle est la fourchette à 95 % de la proportion de foyers ayant un accès à internet en France en 2007 ?

2. Par combien faudrait-il multiplier le nombre de sondés donné dans l'énoncé pour obtenir une fourchette à 95 %, d'amplitude 0,01 ?

LOI NORMALE ET INTERVALLES

25 Dans un lycée, la moyenne de mathématiques d'un élève de Terminale S pris au hasard est une variable aléatoire qui suit approximativement la loi $\mathcal{N}(10,5; 6,25)$.

Le proviseur de ce lycée dit alors : « Environ deux tiers des élèves de Terminales S ont une moyenne de mathématiques située entre 8 et 13 ».

A-t-il raison ? Justifiez.

26 La longueur d'un saut (en mètre) d'un kangourou adulte peut être modélisée par une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$.

On sait qu'environ 95 % des sauts d'un kangourou adulte mesurent entre 2 mètres et 10 mètres de long.

1. a) En supposant que l'intervalle de longueur, donné dans l'énoncé, est centré sur l'espérance μ , précisez les valeurs de μ et σ (à 10^{-2} près).

b) Déduisez-en un intervalle de longueur (au cm près) correspondant à environ 99 % des sauts d'un kangourou adulte.

2. a) On a pu observer, chez les kangourous adultes, des longueurs de saut dépassant les 13 mètres.

Calculez à 10^{-4} près la probabilité d'un tel événement.

b) Si l'on considère qu'un kangourou adulte effectue 10 000 sauts par jour, estimez alors le nombre quotidien de sauts dépassant les 13 mètres de long.

27 X est une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$ et I un intervalle centré sur l'espérance μ .

Recopiez et complétez les tableaux suivants (arrondissez si nécessaire les valeurs obtenues à 10^{-3} près).

μ	0			500
σ	1	4		100
I		$[-1; 7]$	$[-2; 1,2]$	
$P(X \in I)$	0,99		0,954	0,683

μ		0,4		
σ		0,1		
I	$[4; 6]$		$[-5; 5]$	$[-6; 0]$
$P(X \in I)$	0,95	0,954	0,683	0,997

FRÉQUENCE DE SUCCÈS

28 Dans chacune des situations suivantes, déterminez l'espérance et l'écart-type de la fréquence de succès, puis, si les conditions d'approximation sont remplies, précisez la loi normale approchant la loi de la fréquence de succès.

a) Fréquence d'apparition de Pile au terme de 400 lancers d'une pièce équilibrée.

b) Fréquence de l'événement « Obtenir une figure » au terme de 100 tirages au hasard et avec remise d'une carte d'un jeu de 32 cartes.

c) Fréquence de l'événement « Somme des résultats des deux dés supérieure ou égale à 9 » au terme de dix lancers de deux dés cubiques parfaits.

29 Le 218

Le « 218 » est un jeu très simple : un joueur choisit au hasard un code à trois chiffres (entre 0 et 9). Si ce code contient au moins l'un des chiffres 2, 1, 8 à la même place que dans 218, le joueur a gagné.

1. On appelle F la variable aléatoire donnant la fréquence de succès au « 218 » lors de 100 tentatives.

Prouvez que la loi de F peut être approchée par la loi normale $\mathcal{N}(0,271; 0,002)$.

2. Un jour, Mathieu se vante, auprès de son professeur de mathématiques, d'avoir gagné plus de 40 fois au « 218 » sur 100 tentatives.

« Quelle chance, rétorque celui-ci, gagner plus de 40 fois à ce jeu sur 100 tentatives se produit dans moins de deux cas pour mille ! ». Justifiez cette réponse.

30 ALGORITHMIQUE Une urne aléatoire

Une urne contient cinq boules équiprobables au tirage. Deux couleurs y sont représentées : le rouge et le noir. Cependant, on ne connaît pas le nombre de boules associé à chaque couleur.

Le but de cet exercice est d'estimer un nombre suffisant de tirages au hasard et avec remise à effectuer afin de déterminer la proportion de boules rouges dans l'urne avec un risque d'erreur d'au plus 5 %.

1. Soit p la proportion de boules rouges dans l'urne. Quelles sont les valeurs possibles de p ?

2. On note F_n la variable aléatoire indiquant la fréquence de boules rouges obtenues après n tirages au hasard et avec remise. On suppose que les conditions d'approximation sont remplies.

a) Rappelez l'intervalle I de fluctuation (centré en p) à 95 % de F_n en fonction de n et p .

b) Résolvez l'inéquation d'inconnue n , $n \in \mathbb{N}^*$:

$$1,96 \frac{\sqrt{0,2 \times 0,8}}{\sqrt{n}} < 0,1.$$

Que représente l'ensemble des solutions trouvés ?

c) En vous inspirant de la question précédente, déterminez un nombre suffisant de tirages (au hasard et avec remise) qui permet de trouver la proportion de boules rouges dans l'urne avec un risque d'erreur d'au plus 5 %.

3. Programme de simulation

On donne ci-dessous des programmes réalisés sur des calculatrices.

TI

```
PROGRAM: URNE
:Promet N
:0→C
:entAléat(1,4)/5
→P
:For(I,1,N)
:If NbrAléat≤P
:Then
:C+1→C
:End
:End
:Disp C/N
:Pause
:Disp P
```

Casio

```
===== URNE =====
?→N#
0→C#
RanInt#(1,4)÷5→P#
For 1→I To N#
If Ran# ≤ P#
Then C+1→C#
IfEnd#
Next#
C÷N#
P
```

a) Que représentent, dans ces programmes, les lettres N , C et P par rapport au problème d'urne aléatoire ?

b) Vérifiez le résultat de la question 2. **c)** en exécutant ce programme sur votre calculatrice avec la valeur de n adéquate.

Devinez alors la valeur de p avant que la calculatrice ne l'affiche.

PRISE DE DÉCISION

Dans les exercices qui suivent, chaque fois que l'on considère un échantillon aléatoire, il s'agit d'un échantillon assimilé à une suite de tirages avec remise.

31 On suppose que la proportion d'un certain caractère dans une population est p . On observe une fréquence notée f_{obs} sur un échantillon aléatoire de taille n de cette population.

F_n est la variable aléatoire indiquant la fréquence de succès dans un schéma de Bernoulli d'ordre n et de paramètre p .

I désigne l'intervalle de fluctuation (centré en p) à 95 % de F_n , sous trois conditions à vérifier.

On veut alors prendre une décision au seuil de risque de 5 % pour savoir si la fréquence observée est en accord avec la proportion p .

Recopiez et complétez le tableau ci-après.

Les bornes de I seront écrites avec trois décimales.

Il y a plusieurs réponses possibles pour f_{obs} .

n	1 000	100	400	10 000
p	0,2	0,4	0,05	0,9
Trois conditions				
I				
f_{obs}	0,25		0,07	
Décision		accepte		rejette

32 Inquiétudes à Woburn

Woburn est une petite ville industrielle du Massachusetts, au Nord-Est des États-Unis. Dans les années 70, la communauté locale s'émeut du grand nombre d'enfants atteints de leucémie dans certains quartiers de la ville : entre 1969 et 1979, on a observé douze cas de leucémie sur un échantillon de 11 748 enfants de moins de 14 ans.

À cette même époque, aux États-Unis, la proportion p de leucémies chez les enfants de moins de 14 ans est 0,00045. On fait l'hypothèse qu'à Woburn, la proportion théorique de leucémies chez les enfants de moins de 14 ans est la même que celle des États-Unis.

1. a) Vérifiez que les trois conditions d'application de la règle de prise de décision sont remplies.

b) Déterminez les intervalles de fluctuation (centrés en p) à 95 % et à 99 % de la fréquence de leucémies sur un échantillon aléatoire de 11 748 enfants de moins de 14 ans. Écrivez les bornes de ces intervalles avec cinq décimales.

2. a) Peut-on considérer, au seuil de risque de 5 %, que la fréquence observée de leucémies chez les enfants de moins de 14 ans à Woburn, dans cet échantillon, est en accord avec la proportion de leucémies chez les enfants de moins de 14 ans dans la population américaine ?

b) Même question mais au seuil de 1 %.

*D'après un document du groupe
« Statistiques et citoyenneté », IREM Paris-Nord*

Commentaire. Une enquête conduite par le Département de la Santé Publique du Massachusetts en 1981 confirmera que les sols de Woburn ont été contaminés par des résidus de tannerie et de produits chimiques. Les industriels concernés seront condamnés et la dépollution des sites sera engagée. Du point de vue étiologique, c'est l'exposition des enfants in utero à cette eau contaminée qui serait à l'origine des cas de leucémies observés.

33 La roue du voyage

Un salon du tourisme a permis à 200 visiteurs, tirés au sort, de jouer pour gagner un séjour au Sri Lanka. Le jeu est simple : une roue de loterie se met à tourner de manière automatique puis s'arrête au bout d'un moment. Si le secteur de la roue correspondant au séjour, d'angle au centre 18° , est désigné par le pointeur, alors c'est gagné ! Sur les 200 joueurs, il y a eu deux gagnants.

On suppose que la proportion p de gagnants est égale au quotient de l'aire du secteur associé au séjour par l'aire de la roue.

1. a) Quelle est la valeur de p ?

b) Vérifiez que les trois conditions d'approximation permettant une prise de décision sont remplies.

c) Déterminez l'intervalle de fluctuation I (centré en p) à 95 % de la fréquence de gagnants sur un échantillon aléatoire de taille 200.

Écrivez les bornes de I avec trois décimales.

2. Compte tenu du nombre de gagnants observé, accepte-t-on au seuil de risque de 5 % l'hypothèse formulée dans l'énoncé ?

3. Entre quelles valeurs aurait dû se situer le nombre de gagnants pour qu'on accepte l'hypothèse de l'énoncé ?



34 LOGIQUE Réciproque

On suppose que la proportion d'un certain caractère dans une population est p .

On observe une fréquence notée f_{obs} sur un échantillon aléatoire de taille n de cette population.

On sait que $f_{\text{obs}} > p$ et que cette fréquence observée rejette la proportion p supposée, au seuil de 5 %.

Pour chaque affirmation écrite entre guillemets, indiquez si elle est vraie ou fausse. Justifiez.

1. La même étude, sur un autre échantillon aléatoire de taille n , a permis d'observer une fréquence f'_{obs} .

a) « Si $f'_{\text{obs}} > f_{\text{obs}}$, alors f'_{obs} rejette la proportion p supposée, au seuil de 5 % »

b) « La réciproque de l'implication précédente est vraie. »

c) « Si $f'_{\text{obs}} < f_{\text{obs}}$, alors on peut affirmer au seuil de risque de 5 % que f'_{obs} est en accord avec la proportion p . »

d) « La réciproque de l'implication précédente est vraie. »

2. La même étude, sur un échantillon aléatoire de taille $2n$, a permis d'observer la même fréquence f_{obs} .

« Cela amène au rejet, au seuil de 5 %, de la proportion p supposée. »

INTERVALLES DE CONFIANCE

Dans les exercices de cette rubrique, chaque fois que l'on considère un échantillon aléatoire, il s'agit d'un échantillon assimilé à une suite de tirages avec remise.

35 Le tableau ci-dessous donne la répartition, en huit catégories, des personnes ayant été au moins une fois au cinéma au cours des douze derniers mois. Ces résultats ont été établis pour chacune des huit catégories à partir d'échantillons aléatoires de 1 200 personnes.

	Femmes	Hommes
16/24 ans	83 %	84 %
25/39 ans	66 %	64 %
40/59 ans	54 %	47 %
60 ans ou plus	27 %	21 %

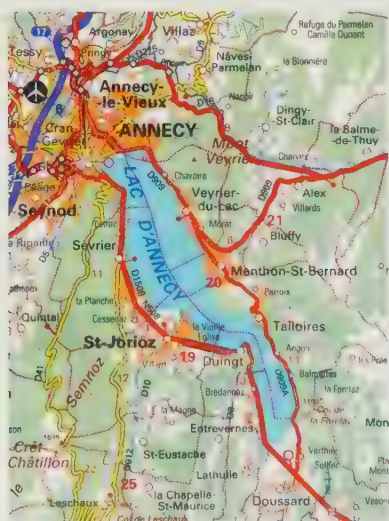
1. Calculez, à partir de cette enquête, la fourchette de sondage à 95 % de confiance pour chacune des catégories. Écrivez leurs bornes avec trois décimales.

2. a) Pour chaque catégorie d'âge, paraît-il plausible qu'au niveau national l'ordre des proportions entre les hommes et les femmes s'inverse par rapport aux fréquences observées dans cette étude ?

b) Même question en supposant que la taille des échantillons étudiés est multipliée par 50 et que les fréquences observées ne changent pas.

36 Encadrement de la superficie du lac d'Annecy

La carte rectangulaire autour du lac d'Annecy ci-dessous correspond à une zone géographique mesurant 20 km de long (axe Nord-Sud) sur 15 km de large (axe Est-Ouest).



Le but de cet exercice est de déterminer un encadrement de la superficie de ce lac.

Pour cela, 500 points sont tracés de manière aléatoire sur cette carte. On en dénombre alors 51 qui sont « dans le lac ». On note p le quotient de la superficie du lac par celle de la zone rectangulaire.

1. a) À partir de l'expérience relatée dans l'énoncé, déterminez un intervalle de confiance de p au niveau 95 %. Écrivez ses bornes avec trois décimales.

b) Déduisez-en un encadrement de la superficie du lac (en km^2) au niveau de confiance de 95 %.

2. a) Reprenez les questions **1. a)** et **b)** en utilisant comme intervalle de confiance de p au niveau 95 % :

$$\left[f_{\text{obs}} - 1,96 \frac{\sqrt{f_{\text{obs}}(1-f_{\text{obs}})}}{\sqrt{n}} ; f_{\text{obs}} + 1,96 \frac{\sqrt{f_{\text{obs}}(1-f_{\text{obs}})}}{\sqrt{n}} \right]$$

b) Quel est l'intervalle de confiance qui a permis d'obtenir l'estimation la plus précise de la superficie du lac d'Annecy ?

3. À partir de combien de points tracés aléatoirement sur cette carte peut-on obtenir, à l'aide du premier intervalle de confiance, un encadrement de la superficie du lac d'Annecy d'amplitude inférieure ou égale à 1 km^2 ?

Note La superficie du lac d'Annecy est d'environ 27 km^2 .

37 Question confidentielle

Un sondeur cherche à obtenir, auprès de jeunes scolarisés de 15-16 ans, des réponses sincères à une question sur un sujet sensible, à laquelle on répond par « oui » ou par « non ».

Pour éviter les fausses réponses concernant ce sujet sensible, il demande à chaque jeune sondé de tirer au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes et de la remettre dans le paquet afin d'être la seule personne à connaître la carte tirée. Si cette carte est un cœur, alors le jeune doit répondre sincèrement à la question, sinon il doit mentir.

On suppose que les personnes sondées jouent parfaitement le jeu. On note p la proportion de jeunes scolarisés de 15-16 ans qui devraient répondre « oui » et q la proportion de jeunes scolarisés de 15-16 ans répondant « oui » à ce sondage.

1. Prouvez, éventuellement à l'aide d'un arbre pondéré, que $q = -0,5p + 0,75$.

2. a) Sur un échantillon aléatoire de 2 500 jeunes scolarisés de 15-16 ans, il y a eu 1 375 « oui » à ce sondage. Déterminez un intervalle de confiance de q au niveau 95 %.

b) Déduisez-en un intervalle de confiance de p au niveau 95 %.

3. Supposons que le sondeur adopte le procédé suivant : si la carte tirée est rouge, alors le jeune doit répondre sincèrement à la question, sinon il doit mentir. Quel problème rencontrerait-il ?

38 On souhaite déterminer, à partir d'un échantillon aléatoire de taille n , un encadrement d'une proportion p au niveau de confiance de 95 %, d'amplitude inférieure ou égale à e , où e est un nombre strictement positif.

1. a) Déterminez, en fonction de e , une taille suffisante pour obtenir une estimation aussi précise de p .

b) Déduisez-en une taille suffisante dans chacun des cas suivants : $e = 0,1$; $e = 0,05$; $e = 0,01$.

2. Pour obtenir un intervalle de confiance d'amplitude k fois plus petite ($k \in \mathbb{N}^*$), par combien faut-il multiplier la taille de l'échantillon aléatoire ?

AVEC LES TICE

39 Comparaison des intervalles de confiance

Pour estimer une proportion inconnue p à partir de la fréquence observée sur un échantillon aléatoire de taille n , on dispose des deux intervalles de confiance à 95 % :

$$IC1 = \left[f_{\text{obs}} - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f_{\text{obs}} + \frac{1}{\sqrt{n}} \right] \text{ et}$$

$$IC2 = \left[f_{\text{obs}} - 1,96 \frac{\sqrt{f_{\text{obs}}(1-f_{\text{obs}})}}{\sqrt{n}} ; f_{\text{obs}} + 1,96 \frac{\sqrt{f_{\text{obs}}(1-f_{\text{obs}})}}{\sqrt{n}} \right].$$

On souhaite comparer les amplitudes de ces intervalles suivant les valeurs de f_{obs} .

On fixe la taille d'échantillon à $n = 100$.

1. En utilisant un tableur

a) Ouvrez une feuille de calcul et complétez la première ligne comme ci-dessous. Affichez toutes les fréquences observées possibles dans la colonne A.

	A	B	C	D	E
1	Fréq. obs.	Borne inf. IC1	Borne sup. IC1	Borne inf. IC2	Borne sup. IC2
2	0	-0,1	0,1	0	0
3	0,01	-0,09	0,11	-0,009501754	0,029501754
4	0,02	-0,08	0,12	-0,00744	0,04744
5	0,03	-0,07	0,13	-0,003435095	0,063435095
6	0,04	-0,06	0,14	0,001592001	0,078407999
7	0,05	-0,05	0,15	0,00728279	0,09271721

b) Les colonnes B et C (resp. D et E) contiennent respectivement les bornes inférieures et supérieures de IC1 (resp. IC2).

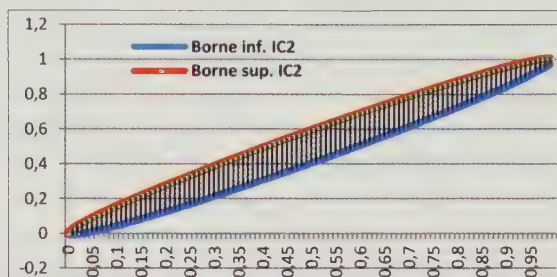
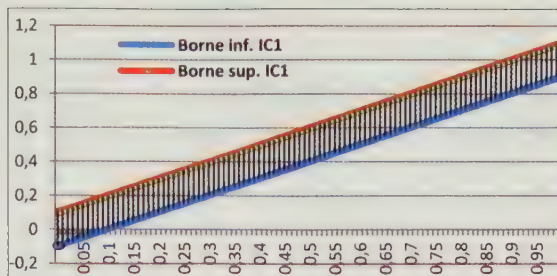
Entrez en B2, C2, D2 et E2 les formules qui permettent de compléter ces colonnes par recopie vers le bas.

c) Sélectionnez les colonnes A, B, C et insérez un graphique « stock » ou « cours ».

Faites de même avec les colonnes A, D, E.

d) Expliquez les valeurs aberrantes situées dans certains intervalles de confiance (valeurs négatives ou supérieures à 1).

e) Comparez graphiquement les amplitudes des deux types d'intervalles de confiance en fonction de f_{obs} .



2. En utilisant une fonction

On note f la fonction définie sur $[0 ; 1]$ par :

$$f(x) = 0,392 \sqrt{x(1-x)}.$$

a) Étudiez les variations de f sur $[0 ; 1]$.

b) Déduisez-en une comparaison des amplitudes des deux types d'intervalles de confiance en fonction de f_{obs} .

Prendre toutes les initiatives

40 À quoi joues-tu ?

Un programme permet, par simulations, d'afficher la fréquence d'apparition du 1 au terme de n lancers d'un dé parfait. Cependant, au préalable et sans le divulguer, ce programme choisit au hasard le nombre de faces du dé simulé : soit 6, soit 8, soit 12.

Estimez la valeur minimale de n qui vous permettra de dévoiler, avec un risque d'erreur d'au plus 5 %, le nombre de faces initialement choisi par le programme.

41 Capture-Marquage-Recapture

Une équipe de biologistes capture et marque 100 tortues terrestres sur une île.

On suppose que cette population de tortues est close (pas d'échange avec l'extérieur).

Quelques jours plus tard, cette équipe capture à nouveau 50 tortues puis les relâche. Ils observent 22 tortues marquées lors de cette recapture, assimilée à une suite de tirages au hasard et avec remise.

Donnez un encadrement de la population de tortues sur cette île avec un niveau de confiance de 95 %.

42 Travail en autonomie

→ Rédigez la solution de cet exercice en vous aidant du guide.



Sur le Web

Retrouvez le corrigé de cet exercice sur le site www.transmathlycee.net/eleve-Term5

Dans une population donnée, la proportion p de femmes accouchant prématurément est 0,04.

Sur un échantillon aléatoire de 170 femmes accouchant et ayant plus de 35 ans, on a observé 13 accouchements prématurés.

Cet échantillon aléatoire est assimilé à une suite de tirages au hasard et avec remise.

On fait l'hypothèse que la proportion de femmes enceintes de plus de 35 ans accouchant prématurément est aussi $p = 0,04$.

1. a) Vérifiez que les trois conditions d'application de la règle de prise de décision sont remplies.

b) Déterminez les intervalles de fluctuation (centrés en p) à 95 % et à 99 % de la fréquence F de femmes accouchant prématurément sur un échantillon aléatoire de taille 170. Écrivez les bornes de ces intervalles avec quatre décimales.

2. a) À partir des résultats de cette enquête, accepte-t-on ou rejette-t-on l'hypothèse de l'énoncé au seuil de 5 % ?

b) Même question mais au seuil de 1 %.

Analyser l'énoncé

On peut utiliser les résultats du cours concernant la variable aléatoire indiquant la fréquence de succès dans un schéma de Bernoulli d'ordre $n = 170$ et de paramètre $p = 0,04$.

Analyser l'énoncé

La proportion p de femmes accouchant prématurément est connue, mais celle de femmes enceintes de plus de 35 ans accouchant prématurément n'est que supposée être égale à p .

Analyser l'énoncé

Les questions guident pour la mise en place d'une prise de décision au seuil de risque de 5 % puis au seuil de 1 %.

Guide

On utilise, ici, les notations du cours.

1. a) Les trois conditions sont :

$$n \geq 30, np \geq 5 \text{ et } n(1-p) \geq 5.$$

b) L'intervalle de fluctuation à 99 % est :

$$\left[p - 2,58 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 2,58 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right].$$

Arrondissez les bornes inférieures à 10^{-4} près par défaut et les bornes supérieures à 10^{-4} près par excès.

2. Appliquez la règle de prise de décision :

- si $f_{\text{obs}} \in I$, alors on accepte l'hypothèse que la proportion est p ;
- si $f_{\text{obs}} \notin I$, alors on rejette cette hypothèse au seuil correspondant.

Attention, lors d'une prise de décision, le seuil représente la probabilité de commettre une erreur dans le cas du rejet de l'hypothèse, mais surtout pas dans le cas où l'on accepte l'hypothèse : la probabilité d'accepter à tort est très difficile à déterminer.

ZOOM sur la rédaction

Veillez à bien définir les variables utilisées et les intervalles obtenus. Accompagnez vos calculs par des phrases d'explication, même s'il s'agit essentiellement d'un procédé calculatoire. (Inspirez-vous de l'exercice résolu A, page 442.)

ZOOM sur la rédaction

Si l'on accepte l'hypothèse lors d'une prise de décision au seuil de risque de 1 %, évitez la phrase de conclusion suivante : « Il y a 99 % de chances que la proportion supposée soit bien égale à p ». Gardez-vous de quantifier l'erreur commise dans un tel cas, on ne la connaît pas !

43 ROC Restitution organisée des connaissances**Prérequis : Théorème de Moivre-Laplace**

X est une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$, et Z la variable aléatoire $\frac{X - E(X)}{\sigma(X)} = \frac{X - np}{\sqrt{np(1-p)}}$.

Pour tous nombres a et b tels que $a \leq b$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(a \leq Z \leq b) = \int_a^b \varphi(t) dt$$

où φ est la densité de la loi $\mathcal{N}(0; 1)$.

1. Démonstration

X_n est une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$ où n est un naturel non nul et p un nombre entre 0 et 1.

On pose : $F_n = \frac{X_n}{n}$

$$\text{et } I = \left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right].$$

Démontrez que $\lim_{n \rightarrow \infty} P(F_n \in I) \approx 0,95$.

I est un intervalle de fluctuation asymptotique de F_n au seuil de 95 %.

2. Application

Dans chacune des situations suivantes, déterminez un intervalle de fluctuation asymptotique de la fréquence de succès au seuil de 95 %. Les bornes de ces intervalles seront écrites avec trois décimales.

- a)** Fréquence de « Face » au terme de 900 lancers d'une pièce équilibrée.
- b)** Fréquence de l'événement « Obtenir un as » au terme de 100 tirages au hasard et avec remise d'une carte d'un jeu de 32 cartes.
- c)** Fréquence de l'événement « Les deux dés donnent le même numéro » au terme de 400 lancers de deux dés cubiques parfaits.

44 Vraiment du hasard ?

Au moment de corriger une question du bac, où il fallait choisir une réponse parmi quatre propositions, un professeur s'exaspère : « On dirait qu'ils ont tous répondu au hasard à cette question ! ». En fait, sur son échantillon de 120 copies, il a observé 42 bonnes réponses à cette question. Cet échantillon aléatoire est assimilé à une suite de tirages au hasard et avec remise.

On fait alors l'hypothèse que la proportion de bonnes réponses à cette question est $p = 0,25$.

- 1. a)** Vérifiez que les trois conditions d'application de la règle de prise de décision sont remplies.
- b)** Déterminez les intervalles de fluctuation (centrés en p) à 95 % et à 99 % de la fréquence F de bonnes réponses à cette question sur un échantillon aléatoire de taille 120. Écrivez les bornes de ces intervalles avec trois décimales.

2. Pouvez-vous affirmer qu'au seuil de risque de 5 %, les résultats observés sur l'échantillon confirment l'hypothèse de l'énoncé ? Même question mais au seuil de 1 %.

45 QCM

Pour chaque question, une seule des trois réponses proposées est exacte. Identifiez-la, en justifiant votre choix.

On rappelle que si Z est une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(0; 1)$, et si $\alpha \in]0; 1[$, alors u_α est l'unique nombre strictement positif tel que $P(-u_\alpha \leq Z \leq u_\alpha) = 1 - \alpha$.

1. α_1 et α_2 appartiennent à $]0; 1[$. Si $\alpha_1 \leq \alpha_2$, alors :

- a)** $u_{\alpha_1} \leq u_{\alpha_2}$.
- b)** $u_{\alpha_1} \geq u_{\alpha_2}$.
- c)** on ne peut pas comparer u_{α_1} et u_{α_2} .

2. F_n est la fréquence de succès dans un schéma de Bernoulli d'ordre n et de paramètre p . On suppose que les trois conditions d'approximation sont remplies.

I_α est l'intervalle de fluctuation de F_n au seuil $1 - \alpha$:

$$I_\alpha = \left[p - u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right].$$

α_1 et α_2 appartiennent à $]0; 1[$. Si $\alpha_1 \leq \alpha_2$, alors :

- a)** $I_{\alpha_1} \subset I_{\alpha_2}$.
- b)** $I_{\alpha_2} \subset I_{\alpha_1}$.
- c)** on ne peut pas comparer I_{α_1} et I_{α_2} .

3. On fait l'hypothèse que la proportion d'un certain caractère dans une population est p . On observe une fréquence de ce caractère sur un échantillon aléatoire de taille n de cette population.

● Si, lors de la prise de décision au seuil de risque de 5 %, l'hypothèse est acceptée, alors, au seuil de 1 % :

- a)** l'hypothèse est nécessairement acceptée.
- b)** l'hypothèse est nécessairement refusée.
- c)** l'hypothèse peut encore être soit acceptée soit refusée.

● Si, lors de la prise de décision au seuil de risque de 5 %, l'hypothèse est refusée, alors, au seuil de 1 % :

- a)** l'hypothèse est nécessairement acceptée.
- b)** l'hypothèse est nécessairement refusée.
- c)** l'hypothèse peut encore être soit acceptée soit refusée.

46 Contrôle d'une livraison

Une grande quantité de pièces doit être livrée à une chaîne d'hypermarchés. On considère un échantillon de 900 pièces prélevées au hasard dans cette livraison. La livraison est assez importante pour assimiler cet échantillon à une suite de tirages au hasard et avec remise.

On constate que 864 pièces sont sans défaut. On note p la proportion de pièces sans défaut dans cette livraison.

1. Déterminez un intervalle de confiance de p au niveau 95 %. Écrivez ses bornes avec trois décimales.

2. Même question en utilisant :

$$\left[f_{\text{obs}} - 1,96 \frac{\sqrt{f_{\text{obs}}(1-f_{\text{obs}})}}{\sqrt{900}} ; f_{\text{obs}} + 1,96 \frac{\sqrt{f_{\text{obs}}(1-f_{\text{obs}})}}{\sqrt{900}} \right]$$

comme intervalle de confiance de p à 95 %.

3. Quel est l'intervalle de confiance qui a permis d'obtenir l'estimation la plus précise ?

Pour aller plus loin

Dans les exercices qui suivent, chaque fois que l'on considère un échantillon aléatoire, il s'agit d'un échantillon assimilé à une suite de tirages avec remise.

47 Contrôle de qualité

1. X est une variable aléatoire qui suit la loi $\mathcal{N}(\mu; \sigma^2)$. On rappelle que $P(X \in I_\alpha) = 1 - \alpha$,

où $I_\alpha = [\mu - \sigma u_\alpha; \mu + \sigma u_\alpha]$ avec $\alpha \in]0; 1[$.

β est un nombre appartenant à l'intervalle $]0; 1[$.

a) Démontrez que : si $u_\alpha \leq u_\beta$, alors $\alpha \geq \beta$.

b) Écrivez la contraposée de l'implication :

si $\alpha < \beta$, alors $u_\alpha > u_\beta$.

c) Déduisez-en que la fonction $\alpha \mapsto u_\alpha$ définie sur $]0; 1[$ est strictement décroissante.

2. Application

En utilisant les mêmes notations que dans le cours, on accepte que la proportion d'un certain caractère est p lors d'une prise de décision au seuil α si, et seulement si,

$$f_{\text{obs}} \in \left[p - u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}; p + u_\alpha \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right].$$

Une publicité affirme qu'on a une chance sur dix de gagner à un certain jeu. Au cours d'une étude portant sur un échantillon aléatoire de 400 joueurs, on a compté 28 gagnants.

a) Vérifiez que les trois conditions d'application de la règle de prise de décision sont remplies.

b) Démontrez que les résultats de cette étude sont en accord avec l'annonce publicitaire lors d'une prise de décision au seuil de risque α si, et seulement si, $u_\alpha \geq 2$.

c) Déduisez-en la plus grande valeur de α (à 0,1 % près), notée α_0 , pour que les résultats de cette étude soient en accord avec l'annonce publicitaire lors d'une prise de décision au seuil α .

d) Sans faire de calcul supplémentaire, quel serait alors, à partir de cette étude, le résultat lors d'une prise de décision au seuil de 5 % ? au seuil de 1 % ?

Remarque. Cette valeur est appelée le **degré de signification** lors d'une prise de décision.

48 Test unilatéral

Lors d'une campagne publicitaire, la société As promet d'importants bons d'achat pour les personnes qui auront tiré un as d'un jeu de 32 cartes lors de leur passage en magasin.

Léo dit alors à ses parents : « Je veux y aller, car hier je me suis entraîné et j'ai retourné 20 fois un as sur 100 tentatives ! ». La fréquence élevée ($f_{\text{obs}} = 0,2$)

annoncée par Léo peut être considérée soit comme le fruit de la fluctuation due au hasard, soit comme le résultat d'une triche.

On suppose que Léo n'a pas triché, ce qui revient à faire l'hypothèse que la probabilité p de tirer un as sous ces conditions était bien $\frac{1}{8}$.

1. On appelle F la variable aléatoire donnant la fréquence de sortie d'un as lors de 100 tentatives. Prouvez que la loi de F peut être approchée par la loi $\mathcal{N}\left(\frac{1}{8}; \frac{7}{6400}\right)$.

2. Déterminez, à l'aide de votre calculatrice, la valeur de t , à 10^{-4} près, vérifiant $P(F \leq t) = 0,95$.

Cette valeur de t représente la frontière des fréquences considérées comme « significativement supérieures » à p au seuil de risque de 5 %.

3. On définit la règle de prise de décision suivante :

– si $f_{\text{obs}} \leq t$, alors on accepte l'hypothèse de l'énoncé ;

– si $f_{\text{obs}} > t$, alors on refuse l'hypothèse de l'énoncé, au risque de 5 %.

Autrement dit, Léo n'est considéré comme un tricheur, au seuil de 5 %, que si la fréquence observée dépasse cette valeur critique t .

À partir de cette règle, pouvez-vous présumer, au seuil de 5 %, que Léo a triché ?

4. Même question mais au seuil de 1 %.

49 Test bilatéral relatif à une moyenne

Dans une usine, une machine produit des barres de métal de longueur 92,50 cm. La machine se dérégulant au cours du temps, on veut tester la moyenne m des longueurs des barres qu'elle produit.

On suppose que la variable aléatoire X , qui à tout échantillon de 30 barres de métal prélevées au hasard associe la moyenne des longueurs, en cm, des barres de l'échantillon, suit une loi $\mathcal{N}(m; 0,03^2)$.

On fait l'hypothèse que la moyenne m des longueurs des barres est encore 92,50 cm.

1. Déterminez, à l'aide de votre calculatrice, un intervalle I centré en 92,5 tel que $P(X \in I) = 0,95$.

Écrivez les bornes de I avec trois décimales.

2. Le prélèvement, au hasard, d'un échantillon de 30 barres dans la production de la machine donne les résultats suivants :

Longueur (en cm)	92,1	92,2	92,3	92,4	92,5
Nombre de barres	3	2	6	5	5
Longueur (en cm)	92,6	92,7	92,8	92,9	
Nombre de barres	3	2	2	2	

Calculez, à 10^{-3} près, la moyenne observée m_{obs} des longueurs des 30 barres de métal de cet échantillon.

3. On définit la règle de prise de décision suivante :

- si $m_{\text{obs}} \in I$, alors on accepte l'hypothèse de l'énoncé ;
- si $m_{\text{obs}} \notin I$, alors on refuse l'hypothèse de l'énoncé, au seuil de 5 %.

Au vu des résultats de cet échantillon, accepte-t-on l'hypothèse de l'énoncé au seuil de risque de 5 % ?

D'après BTS 2008

50 Intervalle de confiance d'une moyenne

Un industriel de l'agroalimentaire conditionne du ketchup dans des bouteilles en verre.

On s'intéresse à la masse de sucre, exprimée en gramme, contenue dans chaque bouteille.

On prélève au hasard et avec remise un échantillon de 25 bouteilles dans un lot important.

On note $\bar{S}$ la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 25 bouteilles prélevées au hasard et avec remise dans ce lot, associe la moyenne des masses de sucre (en g) contenues dans les bouteilles de cet échantillon.

On suppose que $\bar{S}$ suit la loi $\mathcal{N}\left(\mu; \frac{49}{25}\right)$ où μ est inconnue (moyenne des masses de sucre contenues dans chacune des bouteilles de ce lot). Pour l'échantillon prélevé, la moyenne obtenue est $\bar{s} = 137,7$.

1. Démontrez que :

$$P\left(\mu \in \left[\bar{s} - 1,96 \times \frac{7}{5}; \bar{s} + 1,96 \times \frac{7}{5}\right]\right) \approx 0,95.$$

2. L'intervalle $\left[\bar{s} - 1,96 \times \frac{7}{5}; \bar{s} + 1,96 \times \frac{7}{5}\right]$ est appelé intervalle de confiance de μ au niveau de confiance de 95 %. Déterminez cet intervalle de confiance.

D'après BTS 2008

PROLONGEMENTS DU TD 20

Ces exercices prolongent le TD 20, p. 452. On utilise ici les mêmes notations.



51 Fumeurs et indice de Ruffier

L'indice de résistance de Ruffier est destiné à mesurer la capacité d'adaptation physiologique à l'effort.

Il est donné par la formule $\frac{F1 + F2 + F3 - 200}{10}$

où $F1$ est la fréquence cardiaque au repos, $F2$ celle mesurée immédiatement après un effort de 30 flexions des jambes en 45 secondes, et $F3$ celle mesurée une minute après ce même effort.

Une étude s'intéresse à la différence d'adaptation du cœur à l'effort entre les fumeurs et les non-fumeurs.

Pour cela, on utilise l'indice de Ruffier.

On conclut à une bonne adaptation à l'effort si et seulement si cet indice est inférieur ou égal à 5.

Sur un échantillon aléatoire de 1 240 fumeurs, on en a compté 347 ayant une bonne adaptation à l'effort.

Sur un échantillon aléatoire de 1 510 non-fumeurs, on en a compté 484 ayant une bonne adaptation à l'effort.

On se place sous l'hypothèse selon laquelle la proportion théorique de fumeurs ayant une bonne adaptation à l'effort est la même que celle des non-fumeurs.

1. Calculez la valeur x_{obs} .

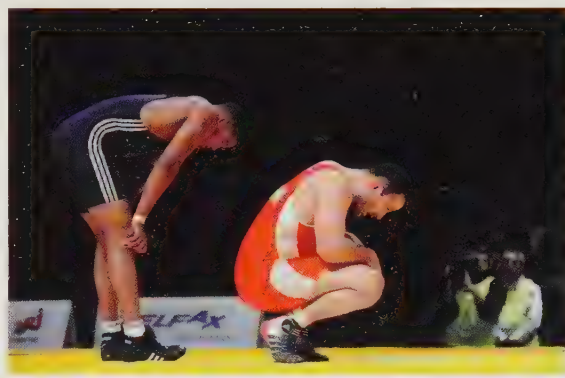
2. a) À partir des résultats de cette étude, accepte-t-on ou rejette-t-on l'hypothèse de l'énoncé au seuil de 5 % ?

b) Même question au seuil de 1 %.

3. Écrivez, sur votre calculatrice, un programme permettant, à partir de n_A , n_B , f_A , f_B , α , d'afficher x_{obs} et le résultat de la prise de décision au seuil de risque α .

Note

L'indice A correspond à l'échantillon des fumeurs et l'indice B à l'échantillon des non-fumeurs.



52 Effet de taille

On s'intéresse à l'impact des tailles d'échantillon dans une prise de décision lors de la comparaison de deux proportions.

1. a) Calculez x_{obs} dans le cas :

$$n_A = 400, n_B = 300, f_A = 0,15 \text{ et } f_B = 0,20.$$

b) Quel est, dans ce cas, le résultat de la prise de décision concernant l'égalité des proportions au seuil de 5 % ?

2. Démontrez qu'avec les mêmes fréquences f_A et f_B mais avec des effectifs n_A et n_B tous deux multipliés par k , la valeur observée x_{obs} sera multipliée par $\sqrt{k}$.

3. En reprenant l'exemple du **1. a)**, mais avec des effectifs deux fois plus importants, quelle est la nouvelle valeur de x_{obs} ? Quel sera donc le résultat de la prise de décision au seuil de risque de 5 % ?

4. Par combien au minimum (à 0,1 près) faut-il multiplier les effectifs du **1. a)** pour aboutir à un rejet de l'égalité des proportions au seuil de 1 % ?

Ces pages peuvent être utilisées dès le début de l'année car les exemples proposés sont tous tirés des classes précédentes.

1

Les conjonctions « et », « ou »

1.1 La conjonction « et »

En mathématiques, le sens de la conjonction « et » est le sens du langage courant.

- Le nombre x est supérieur à 1 **et** inférieur à 3.
- Le triangle ABC est rectangle **et** isocèle.

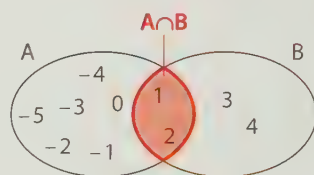


► L'ensemble « A et B »

Considérons les deux ensembles de nombres :

$A = \{-5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2\}$ et $B = \{1; 2; 3; 4\}$.

Les nombres qui appartiennent à la fois à A et B sont les nombres : 1 et 2. L'ensemble de ces nombres est appelé « **A inter B** » ; il est noté $A \cap B$. On écrit : $A \cap B = \{1; 2\}$.



1.2 La conjonction « ou » en langage mathématique

On l'a vu, en mathématiques, le sens de la conjonction « et » est le sens du langage courant. Il n'en est pas de même pour la conjonction « ou ». Dans le langage courant, le « ou » est **exclusif**. En mathématiques, le « ou » est **non exclusif** : il est **inclusif**.

► Exemple

Dans un jeu de 52 cartes, on tire une carte au hasard. On gagne si la carte tirée est « un roi ou une carte de couleur rouge ».

On gagne à ce jeu lorsque la carte est un roi qui n'est pas de couleur rouge, ou alors une carte de couleur rouge qui n'est pas un roi, ou alors un roi de couleur rouge.

Ainsi, en mathématiques, le « ou » accepte les deux cas à la fois.

► L'ensemble « A ou B »

Reprenons les deux ensembles A et B précédents. Quels sont les nombres qui appartiennent à A ou B ? En mathématiques, la réponse est la suivante.

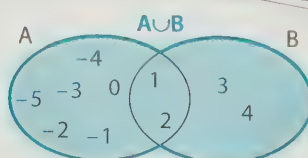
Ces nombres sont :

- soit les nombres qui sont dans A sans être dans B : $-5; -4; -3; -2; -1; 0$;
- soit les nombres qui sont dans B sans être dans A : $3; 4$;
- soit les nombres qui sont dans A et dans B : $1; 2$.

Ce sont donc les nombres : $-5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4$.

L'ensemble des nombres qui appartiennent à A ou à B est appelé « **A union B** » ; il est noté $A \cup B$.

On écrit : $A \cup B = \{-5; -4; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; 4\}$.



Les nombres qui sont à la fois dans A et B ne sont écrits qu'une seule fois.

1.3] Emploi de « et » et de « ou » : exemples

Pour deux nombres a et b :

- $ab = 0$ équivaut à $a = 0$ **ou** $b = 0$;
- $ab \neq 0$ équivaut à $a \neq 0$ **et** $b \neq 0$;
- $a^2 + b^2 = 0$ équivaut à $a = 0$ **et** $b = 0$.

2

L'implication

Le mot **proposition** désigne, à notre niveau, une phrase qui est soit vraie, soit fausse. Une proposition sera notée (P) ou (Q).

2.1] L'implication : si..., alors...

Examinons l'énoncé suivant : « Si $x \geq 2$, alors $x^2 \geq 4$ ».

Cet énoncé affirme ceci :

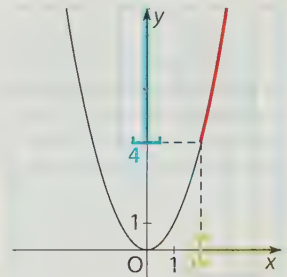
si la proposition (P) : « $x \geq 2$ » est vraie, **alors** la proposition (Q) : « $x^2 \geq 4$ » est vraie. Un tel énoncé est une **implication**.

Le graphique ci-contre montre que l'implication est vraie.

On dit alors que l'**hypothèse** (P) **implique** la **conclusion** (Q).

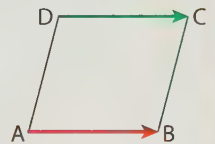
Ce qui se traduit par **Si** (P), **alors** (Q) ou par (P) **donc** (Q).

Pour signifier que (P) implique (Q), on peut écrire $(P) \Rightarrow (Q)$.



Autre exemple

« Si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, alors ABCD est un parallélogramme (éventuellement aplati) » est aussi une implication vraie.



Implications implicites

« Implicite » signifie que l'implication n'est pas exprimée comme on vient de l'expliquer.

Parfois, dans un énoncé, l'implication est **implicite**. Par exemple, « Deux nombres opposés ont leurs carrés égaux » est une implication implicite.

En effet, cette phrase signifie : « Si deux nombres sont opposés, alors leurs carrés sont égaux ».

2.2] Condition suffisante, condition nécessaire

Dans l'implication « Si (P), alors (Q) », on dit que (P) est une **condition suffisante** pour (Q) et que (Q) est une **condition nécessaire** pour (P).

Exemple

« Si le quadrilatère ABCD est un losange, alors ABCD est un parallélogramme. »

(P)

(Q)

Il **suffit** que (P) soit vraie pour que (Q) soit vraie.

Il **faut** que (Q) soit vraie pour que (P) le soit. En effet, si (Q) est fausse (si ABCD n'est pas un parallélogramme), (P) est fausse aussi (ABCD ne peut pas être un losange).



2.3] Implication réciproque d'une implication

Reprenons l'implication : « Si $x \geq 2$, alors $x^2 \geq 4$ ».

Par définition, l'implication réciproque de « si (P), alors (Q) » est « si (Q), alors (P) ».

L'implication réciproque s'énonce :

$$\text{« Si } x^2 \geq 4, \text{ alors } x \geq 2 \text{ ».}$$

Cette implication est fausse.

En effet, le nombre $x = -3$ est tel que « $x^2 \geq 4$ » est vraie et « $x \geq 2$ » est fausse.

Autre exemple

Reprenons l'autre exemple du paragraphe 2.1. L'implication réciproque de « si (P), alors (Q) » est : « Si ABCD est un parallélogramme (éventuellement aplati), alors $\overline{AB} = \overline{DC}$ ».

Cette implication réciproque est vraie.

3

Propositions équivalentes

3.1] Un exemple pour comprendre

Reprenons les propositions :

(P) : « $\overline{AB} = \overline{DC}$ »

et (Q) : « ABCD est un parallélogramme (éventuellement aplati) ».

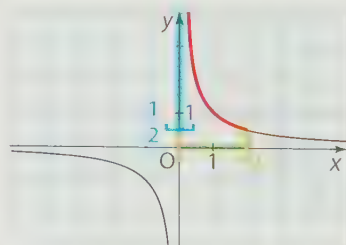
Nous avons vu que « Si (P), alors (Q) » et « Si (Q), alors (P) » sont des implications vraies.

On dit alors que (P) et (Q) sont équivalentes.

Deux propositions (P) et (Q) sont **équivalentes** lorsque (P) implique (Q) et lorsque (Q) implique (P). On peut écrire $(P) \Leftrightarrow (Q)$, ce qui se traduit par (P) **équivalent à** (Q) ou par (P) **si et seulement si** (Q).

Autre exemple

1. Comme le montre le graphique ci-dessous, « $\frac{1}{x} \geq \frac{1}{2}$ » équivaut à « $x \in]0; 2]$ ».



2. « ABC est un triangle rectangle en A » équivaut à « $BC^2 = AB^2 + AC^2$ ».

3.2] Condition nécessaire et suffisante

Lorsque (P) équivaut à (Q), on dit que (P) est une **condition nécessaire et suffisante pour** (Q) ou que (Q) est une condition nécessaire et suffisante pour (P).

4

Les quantificateurs

4.1 | Les locutions « Quel que soit », « Pour tout »

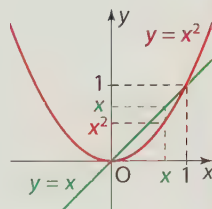
Exemple

1. La proposition (P) : « Quel que soit le nombre x de l'intervalle $[0 ; 1]$, $x^2 \leq x$ » est une proposition vraie illustrée par la figure ci-contre.

Quel que soit est appelé **quantificateur universel**. Ce quantificateur permet de préciser l'ensemble des nombres x tels que $x^2 \leq x$.

Il signifie que **tout** nombre x de l'intervalle $[0 ; 1]$ possède la propriété $x^2 \leq x$. On peut dire aussi : « Pour tout nombre x de l'intervalle $[0 ; 1]$, $x^2 \leq x$ ».

« **Pour tout** » est aussi un **quantificateur universel**.



2. « Pour tout nombre x , $x^2 + 4x - 5 = (x + 2)^2 - 9$ » est une proposition vraie.

3. « Pour tout x de l'intervalle $[-1 ; 2]$, $x^2 \in [1 ; 4]$ » est une proposition fausse. En effet, 0 est dans $[-1 ; 2]$ et $0^2 \notin [1 ; 4]$.

4. « Quelle que soit la série de données statistiques, la médiane est comprise entre les quartiles Q_1 et Q_3 » est une proposition vraie.

Remarque : « Pour tout » et « un »

Parfois, « quel que soit » ou « pour tout » sont remplacés par l'article indéfini « un ».

Par exemple, la proposition : « Dans **un** triangle, les médianes sont concourantes » doit se comprendre ainsi : « **Pour tout** triangle, les médianes sont concourantes ».

4.2 | La locution « Il existe au moins un »

Un exemple pour comprendre

f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x + 3$.

La proposition « **Il existe au moins** un nombre x tel que $f(x) \geq 5$ » est une proposition vraie.

En effet, par exemple, $f(2) \geq 5$. (En réalité, tous les nombres x tels que $x \geq 1$ sont tels que $f(x) \geq 5$.)

Il existe au moins un est appelé **quantificateur existentiel**.

Autres exemples

1. « **Il existe au moins** un nombre x tel que $4 \cos x = 5$ » est une proposition fausse.

En effet, $4 \cos x = 5$ signifie $\cos x = \frac{5}{4} > 1$ et pour tout nombre x , $-1 \leq \cos x \leq 1$.

2. Considérons la proposition (P) : « Si a , b et c sont trois nombres positifs tels que $a + b + c = 12$, alors parmi ces trois nombres, il en existe au moins un qui est supérieur ou égal à 4 ».

Cette proposition est vraie. En effet, si a , b et c , positifs, sont tous strictement inférieurs à 4, leur somme est strictement inférieure à 12. Donc au moins l'un de ces nombres est supérieur ou égal à 4.

5

Négation d'une proposition

5.1 | Définition

À partir d'une proposition (P), on peut toujours énoncer une autre proposition notée (**non P**) qui est la négation de (P). Par exemple, la négation de la proposition « Le triangle ABC **est** isocèle » est : « Le triangle ABC **n'est pas** isocèle ».

Des deux propositions, évidemment, si l'une est vraie, l'autre est fausse, et réciproquement.

5.2] Négation d'une proposition (P_1 et P_2)

On tire une carte d'un jeu de 32 cartes et on considère la proposition (P) : « la carte tirée est une figure de couleur rouge ».

(P) est de la forme (P_1 et P_2) avec :

(P_1) : « la carte est une figure » et (P_2) : « la carte est rouge ».

Dans le tableau ci-contre, (P) est représentée par la case verte.

	Figure	7, 8, 9, 10, as
Rouge	(P)	
Noire		

Donc (non P) est représentée par les trois cases bleues.

Ainsi, nier (P), c'est dire que « la carte n'est pas une figure » ou « la carte n'est pas rouge ».

La négation de (P_1 et P_2) est la proposition ((non P_1) ou (non P_2)).

5.3] Négation d'une proposition (P_1 ou P_2)

On tire une carte dans un jeu de 32 cartes.

La proposition (P) : « la carte tirée est un Pique ou une figure » est de la forme (P_1 ou P_2) avec :

(P_1) : « la carte tirée est un Pique » et (P_2) : « la carte tirée est une figure ».

Dans le tableau ci-contre, (P) est représentée par les trois cases vertes.

	Figure	7, 8, 9, 10, as
Pique		
Non pique		Non (P)

Donc (non P) est représentée par la case bleue.

Ainsi, nier (P), c'est dire que la carte tirée n'est pas un Pique **et** n'est pas une figure.

La négation de (P_1 ou P_2) est la proposition ((non P_1) et (non P_2)).

5.4] Négation d'une proposition universelle

Une proposition universelle est une proposition qui contient le seul quantificateur « pour tout » ou « quel que soit » (ou « pour tous » ou « quels que soient »).

Exemple

Prenons la proposition (P) suivante : « **Pour tout** nombre x , $(x + 1)^2 > 0$ ».

Nier (P), c'est dire : « Il **existe au moins un** nombre x tel que $(x + 1)^2 \leq 0$ ».

(Non P) est vraie car pour $x = -1$, $(x + 1)^2 = 0$. Donc (P) est fausse.

Cas général

Notons (P) la proposition : « **Pour tout élément** x d'un ensemble E , x **satisfait** à une condition C ».

Alors (non P) est la proposition :

« Il **existe au moins un** élément x de E qui **ne satisfait pas** à la condition C ».

Conséquence : démonstration par recours à un contre-exemple

À l'aide d'un contre-exemple, démontrons que la proposition (P) : « Pour tout nombre $x > -1$, $x^2 > 1$ » est fausse.

Démontrer que (P) est fausse revient à démontrer que sa négation (non P) est vraie.

Or (non P) est :

« Il **existe au moins un** nombre x tel que $x > -1$, et tel que $x^2 \leq 1$ ».

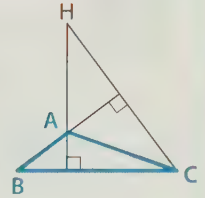
Il s'agit donc de trouver un tel nombre x .

On cherche au plus simple : zéro convient car $0 > -1$ et $0^2 \leq 1$. Donc (P) est fausse.

5.5] Négation d'une proposition existentielle

► **Exemple.** La négation de la proposition (P) : « Il existe au moins un triangle dont l'orthocentre est à l'extérieur du triangle » est : « Pour tout triangle, l'orthocentre est à l'intérieur du triangle ».

Ici, (P) est vraie (figure ci-contre), et donc (non P) est fausse.



► Cas général

Notons (P) la proposition : « Il existe au moins un élément x de l'ensemble E qui satisfait à une condition C ». Alors (non P) est la proposition :

« Pour tout élément x de E , x ne satisfait pas à C ».

6

Contraposée d'une implication

Par définition, la **contraposée** de l'implication :

« (P) implique (Q) » est « (non Q) implique (non P) ».

Une implication et sa contraposée sont **équivalentes** : elles sont toutes les deux vraies, ou toutes les deux fausses.

► Intérêt de la contraposée

1. Le théorème de Pythagore est vrai :

Si (P) : « Un triangle ABC est rectangle en A », alors (Q) : « $BC^2 = AB^2 + AC^2$ ».

Donc sa contraposée est vraie. Or sa contraposée s'énonce :

Si (non Q) : « Dans un triangle ABC, $BC^2 \neq AB^2 + AC^2$ », alors (non P) : « ABC n'est pas rectangle en A ». Cette contraposée permet de démontrer qu'un triangle n'est pas rectangle.

2. La proposition suivante est vraie :

« Dans un repère, si les vecteurs $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ sont colinéaires, alors $xy' - x'y = 0$. »

Par contraposée, on déduit une autre proposition vraie :

« Dans un repère, si deux vecteurs $\vec{u}(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$ sont tels que $xy' - x'y \neq 0$, alors les vecteurs ne sont pas colinéaires. »

► Différence entre implication réciproque et contraposée

La réciproque de « (P) implique (Q) » est « (Q) implique (P) » tandis que la contraposée est « (non Q) implique (non P) ».

► Exemple

$(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère du plan.

Une équation de la droite d est $y = mx + p$ et une équation de la droite d' est $y = m'x + p'$.

Considérons l'implication (A) :

« d est parallèle à d' implique que $m = m'$ ».

(P)

(Q)

L'implication réciproque de (A) est : « $m = m'$ implique que d est parallèle à d' ».

La contraposée de (A) est : « $m \neq m'$ implique que d et d' sont non parallèles ».

Ces implications sont toutes vraies.

La réciproque sert à démontrer que deux droites du plan sont parallèles, tandis que la contraposée sert à démontrer que deux droites du plan sont non parallèles, c'est-à-dire sécantes.



Démontrer une implication

1.1 Par implications successives

Notons (P) la proposition : « $0 < x < 2$ et $0 < y < 2$ » et (Q) la proposition : « $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} > 1$ ».
Démontrons que « (P) implique (Q) » est vraie.

$$(P) : \begin{cases} 0 < x < 2 \\ \text{et} \\ 0 < y < 2 \end{cases} \Rightarrow (P_1) : \begin{cases} \frac{1}{x} > \frac{1}{2} \\ \text{et} \\ \frac{1}{y} > \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow (Q) : \frac{1}{x} + \frac{1}{y} > 1.$$

Passage à l'inverse
On ajoute membre à membre des inégalités de même sens.

On a effectué la démonstration par **implications successives** $(P) \Rightarrow (P_1) \Rightarrow (Q)$.

L'**organigramme** d'une démonstration par implications successives est :

$$(P) \Rightarrow P_1 \Rightarrow P_2 \Rightarrow \dots \Rightarrow P_n \Rightarrow (Q),$$

où chaque proposition (P_i) se déduit des propositions précédentes ou d'une partie d'entre elles.

1.2 Par transformation de la conclusion

Au lieu de démontrer que (P) implique (Q), on remplace (Q) par une proposition (Q') **qui lui est équivalente**. L'**organigramme** d'une telle démonstration est $(P) \Rightarrow (Q') \Leftrightarrow (Q)$.

► **Exemple.** Démontrons que : « pour tous nombres x et y positifs, $2\sqrt{xy} \leq x + y$ ».

Cette proposition est l'implication : (P) : « $x \geq 0$ et $y \geq 0$ » implique (Q) : « $2\sqrt{xy} \leq x + y$ ».

Dans l'ensemble des nombres positifs, on sait que « $a \leq b$ » équivaut à « $a^2 \leq b^2$ ».

On remplace donc (Q) : « $2\sqrt{xy} \leq x + y$ » par la proposition équivalente (Q') : « $4xy \leq (x + y)^2$ ».

(Q') équivaut à (Q₁) : « $4xy \leq x^2 + y^2 + 2xy$ » ; (Q₁) équivaut à (Q₂) : « $0 \leq (x - y)^2$ ».

(Q₂) est vraie car tout carré est positif ou nul, donc $(P) \Rightarrow (Q_2) \Leftrightarrow (Q_1) \Leftrightarrow (Q') \Leftrightarrow (Q)$.

1.3 Par utilisation de la contraposée

Une proposition et sa contraposée sont équivalentes. Ainsi, pour démontrer qu'une proposition est vraie, **on peut démontrer que sa contraposée est vraie**.

► **Exemple.** Démontrons la proposition :

$$\text{Si le carré d'un entier naturel } n \text{ est pair, alors } n \text{ est pair.}$$

(P) (Q)

La contraposée de cette implication est :

$$\text{Si } n \text{ est un entier naturel impair, alors } n^2 \text{ est impair.}$$

(non Q) (non P)

Supposons donc que n est impair, c'est-à-dire que $n = 2k + 1$, où k est un entier naturel.

Alors $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$. Donc n^2 est impair. Ainsi, la contraposée est vraie donc la proposition « Si le carré d'un entier naturel n est pair, alors n est pair » est vraie.

1.4 Par l'absurde

Pour démontrer par l'absurde l'implication « (P) implique (Q) », on conserve l'hypothèse (P) et **on ajoute l'hypothèse (non Q)**.

À partir de l'hypothèse (P et (non Q)), on déroule un raisonnement qui aboutit à une contradiction ou à une proposition impossible. Il en résulte que (non Q) est fausse, donc que (Q) est vraie.

Démontrons avec cette méthode l'implication :

Si (P) : « x est un nombre différent de 3 », alors (Q) : « $\frac{x+1}{x-3}$ est différent de 1 ».

Supposons ((P) et (non Q)), c'est-à-dire :

$$\left\{ \begin{array}{l} x \neq 3 \\ \frac{x+1}{x-3} = 1 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(P)} \\ \text{et} \\ \text{(non Q)} \end{array} \quad \text{alors} \quad \left\{ \begin{array}{l} x \neq 3 \\ x+1 = x-3 \end{array} \right. \quad \text{soit} \quad \left\{ \begin{array}{l} x \neq 3 \\ 4 = 0x \end{array} \right.$$

D'où l'impossibilité. En conclusion, la proposition (non Q) est fausse et (Q) est vraie.

2

Démontrer une équivalence

Pour démontrer l'équivalence : (P) équivaut à (Q), on retiendra deux façons.

1 Par double implication

On démontre que (P) $\Rightarrow$ (Q) et (Q) $\Rightarrow$ (P).

2 Par équivalences successives

On démontre que (P) $\Leftrightarrow$ (Q₁) puis (Q₁) $\Leftrightarrow$ (Q₂), ... jusqu'à (Q_n) $\Leftrightarrow$ (Q).

Par double implication : étude d'un exemple

a et b sont des nombres positifs.

Démontrons l'équivalence :

$$(P) : \ll a < b \gg \text{ équivaut à } (Q) : \ll a^2 < b^2 \gg.$$

• Supposons que (P) est vraie : $a < b$.

(Q) : « $a^2 < b^2$ » équivaut à (Q') : « $(a+b)(a-b) < 0$ ».

a et b sont positifs et $b > a$, donc $b > 0$; ainsi $a+b > 0$.

$a < b$ soit $a-b < 0$, donc $(a+b)(a-b) < 0$.

Ainsi (P) $\Rightarrow$ (Q') est vraie.

Donc (P) $\Rightarrow$ (Q) est vraie.

• Supposons que (Q) est vraie : $a^2 < b^2$.

Alors $(a+b)(a-b) < 0$.

a et b sont positifs et $b > a$, donc $b > 0$; ainsi $a+b > 0$.

Comme $(a+b)(a-b) < 0$, on a donc $a-b < 0$, soit $a < b$.

Donc (Q) $\Rightarrow$ (P) est vraie.

• Conclusion : (P) $\Rightarrow$ (Q) et (Q) $\Rightarrow$ (P) donc (P) $\Leftrightarrow$ (Q).

Par équivalences successives : étude d'un exemple

Démontrons que (P) : « $a^2 = b^2$ » équivaut à (Q) : « $a = b$ ou $a = -b$ ».

(P) équivaut à (P₁) : « $a^2 - b^2 = 0$ » et (P₁) équivaut à (P₂) : « $(a+b)(a-b) = 0$ ».

Enfin (P₂) équivaut à (Q) : « $a = -b$ ou $a = b$ ».

Ainsi (P) $\Leftrightarrow$ (P₁) $\Leftrightarrow$ (P₂) $\Leftrightarrow$ (Q).

Quelle méthode choisir ?

On utilise plutôt la méthode par équivalences successives lorsque les équivalences intermédiaires sont bien connues.

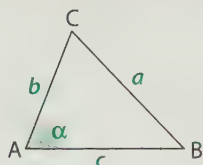
Sinon, en cas de doute, il est préférable d'opérer en deux étapes, par double implication.

3

Autres types de raisonnements

3.1] Démonstration par disjonction des cas : exemple

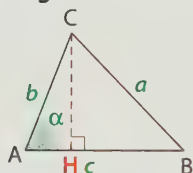
ABC est un triangle. On note $AB = c$, $AC = b$, $BC = a$ et α la mesure, en degré, de l'angle $\widehat{BAC}$.



On se propose de démontrer que : $\text{aire}(\text{triangle ABC}) = \frac{1}{2} bc \sin(\alpha)$.

Pour cela, on va examiner les **trois seuls cas de figures possibles** : $\widehat{BAC}$ est un angle aigu ou $\widehat{BAC}$ est un angle obtus ou $\widehat{BAC}$ est un angle droit.

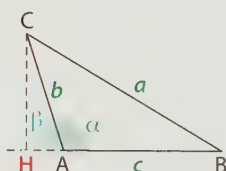
- 1^{er} cas : $\widehat{BAC}$ est un angle aigu



Dans le triangle rectangle AHC, $CH = b \sin(\alpha)$.

Or $\text{aire}(\text{ABC}) = \frac{1}{2} AB \times CH$. Donc $\text{aire}(\text{ABC}) = \frac{1}{2} bc \sin(\alpha)$.

- 2^e cas : $\widehat{BAC}$ est un angle obtus



Dans le triangle rectangle AHC, $CH = b \sin(\beta)$.

Or $\beta = 180^\circ - \alpha$ et $\sin(180^\circ - \alpha) = \sin(\alpha)$.

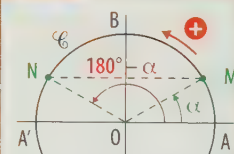
Donc $CH = b \sin(\alpha)$ et $\text{aire}(\text{ABC}) = \frac{1}{2} bc \sin(\alpha)$.

- 3^e cas : $\widehat{BAC}$ est un angle droit

Alors $\text{aire}(\text{ABC}) = \frac{1}{2} AC \times AB = \frac{1}{2} bc = \frac{1}{2} bc \sin(\alpha)$ car $\sin(\alpha) = 1$.

- **Conclusion** : Pour tout triangle ABC, $\text{aire}(\text{ABC}) = \frac{1}{2} bc \sin(\alpha)$.

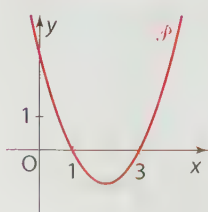
Note



M et N sont symétriques par rapport à la droite (OB), donc :

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin \alpha.$$

3.2] Démonstration par utilisation d'un contre-exemple



f est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x + 3$.

(P) est la proposition : « Pour tout nombre x , $x^2 - 4x + 3 \geq 0$ ».

(P) est une proposition universelle.

Pour démontrer que (P) est une proposition fausse, il suffit de trouver un **contre-exemple**, c'est-à-dire de prouver que la proposition (non P) :

« Il existe un nombre x tel que $x^2 - 4x + 3 < 0$ »

est une proposition vraie.

Pour $x = 2$, $f(2) = 4 - 8 + 3 = -1 < 0$ donc (non P) est vraie. Ainsi la proposition (P) est fausse.

Ces rappels viennent compléter ceux qui se trouvent dans chaque chapitre.

1

Le trinôme et l'équation du second degré

$P(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) est un trinôme du second degré.

$\Delta = b^2 - 4ac$ est le **discriminant** de $P(x)$.

		$\Delta < 0$	$\Delta = 0$	$\Delta > 0$
Équation $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)	résolution	pas de solution	une solution dite double $x_0 = -\frac{b}{2a}$	deux solutions distinctes $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$
Trinôme $P(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)	factorisation	pas de factorisation	$P(x) = a(x - x_0)^2$	$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$
	signe	$P(x)$ est du signe de a pour tout x de $\mathbb{R}$.	$P(x)$ est du signe de a pour tout x de $\mathbb{R}$.	$P(x)$ est du signe de a sauf lorsque x est entre x_1 et x_2 , auquel cas $P(x)$ et a sont de signes contraires.

2

Dérivation

2.1 Dérivée en un point

- f est une fonction définie sur un intervalle I , a et $a + h$ appartiennent à I .

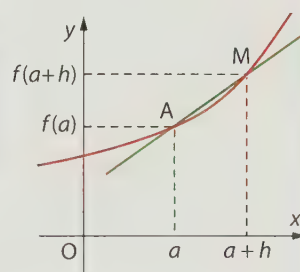
f est dérivable en a

signifie que

$\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ tend vers un nombre b lorsque h tend vers 0

- Ce nombre est appelé le nombre dérivé de f en a . Il est noté $f'(a)$.

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a).$$

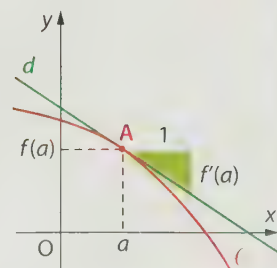


2.2 Tangente en un point

- $\mathcal{C}$ est la courbe représentative d'une fonction f dérivable en a . La droite d qui passe par $A(a; f(a))$ et de coefficient directeur $f'(a)$ est la tangente en A à $\mathcal{C}$.

- Une équation de d est :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$



2.3 Fonctions dérivées

Fonction	Dérivée	Commentaire
$x \mapsto k$ (constante)	$x \mapsto 0$	$x \in \mathbb{R}$
$x \mapsto x$	$x \mapsto 1$	$x \in \mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$x \mapsto -\frac{1}{x^2}$	$x \in]-\infty; 0[$ ou $x \in]0; +\infty[$
$x \mapsto x^n$ $n \in \mathbb{N}^*$	$x \mapsto nx^{n-1}$	$x \in \mathbb{R}$
$x \mapsto \sqrt{x}$	$x \mapsto \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$x \in]0; +\infty[$

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I

Fonction	Dérivée	Commentaire
$u + v$	$u' + v'$	$x \in I$
λu ($\lambda \in \mathbb{R}$)	$\lambda u'$	$x \in I$
uv	$u'v + uv'$	$x \in I$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	$v(x) \neq 0$ sur I

3

Les suites

3.1 Généralités

Une suite est une fonction définie sur $\mathbb{N}$ ou sur $\mathbb{N}$ privé de ses premiers éléments $0, 1, 2, \dots, k$.

Deux manières de définir une suite

- Par une **formule explicite** qui permet de calculer **directement** les termes.

Exemple : $u_n = 2n - 5$.

- Par la donnée du premier terme et d'une **relation de récurrence** qui permet de calculer un terme à partir du précédent.

Exemple : $u_1 = -3$ et $u_{n+1} = 2u_n - 5$.

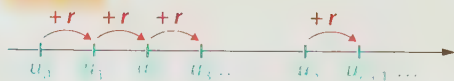
3.2 Suites arithmétiques. Suites géométriques

- Dire qu'une suite est **arithmétique** signifie qu'il existe un nombre r tel que pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = u_n + r.$$

r est la **raison** de la suite.

cas $r > 0$



- Si (u_n) est une suite arithmétique de raison r et de premier terme u_0 , alors :

$$u_n = u_0 + nr.$$

- Pour tous entiers naturels m et p :

$$u_m = u_p + (m - p)r.$$

- La somme des entiers de 1 à n s'écrit :

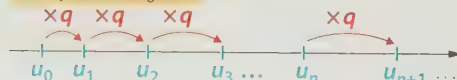
$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

- Dire qu'une suite (u_n) est **géométrique** signifie qu'il existe un nombre non nul q tel que pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = qu_n$$

q est la **raison** de la suite.

cas $q > 1$ et $u_0 > 0$



- Si (u_n) est une suite géométrique de raison q et de premier terme u_0 , alors :

$$u_n = u_0 q^n.$$

- Pour tous entiers naturels m et p :

$$u_m = q^{m-p} u_p.$$

- La somme des puissances successives d'un nombre q , différent de 1, s'écrit :

$$1 + q + \dots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

3.3 Comportement d'une suite

► Sens de variation d'une suite

Dire que la suite (u_n) est...	strictement croissante	strictement décroissante	constante
signifie que pour tout entier naturel n	$u_n < u_{n+1}$	$u_n > u_{n+1}$	$u_n = u_{n+1}$

► Comment étudier le sens de variation d'une suite ?

Pour étudier le sens de variation d'une suite, on peut :

- Étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$.
- Étudier le sens de variation de la fonction f pour les suites définies par $u_n = f(n)$:
 - si f est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$, alors la suite (u_n) est strictement croissante ;
 - si f est strictement décroissante sur $[0 ; +\infty[$, alors la suite (u_n) est strictement décroissante ;
- Comparer le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ avec 1 si tous les termes de la suite sont **strictement positifs**.



Vecteurs

4.1 Vecteurs colinéaires

- Dire que deux vecteurs non nuls $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires équivaut à dire qu'il existe un nombre $k (k \neq 0)$ tel que $\overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}$.
- Les trois propositions suivantes sont équivalentes.

$$(AB) // (CD) \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{CD} \text{ sont colinéaires} \Leftrightarrow \text{Il existe un nombre } k (k \neq 0) \text{ tel que } \overrightarrow{CD} = k\overrightarrow{AB}.$$

- Dire que trois points A, B, C, distincts deux à deux, sont alignés équivaut à dire qu'il existe un nombre $k (k \neq 0)$ tel que :

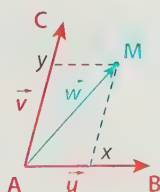
$$\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}.$$

4.2 Expression d'un vecteur en fonction de deux vecteurs non colinéaires

- Si A, B, C sont trois points non alignés, alors pour tout point M, il existe un couple unique de nombres $(x ; y)$ tels que $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$. Le couple $(x ; y)$ est le couple des coordonnées de M dans le repère $(A ; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.
- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs **non colinéaires**, alors pour tout vecteur $\vec{w}$, il existe un couple unique de nombres $(x ; y)$ tels que :

$$\vec{w} = x\vec{u} + y\vec{v}.$$

Le couple $(x ; y)$ est le couple des coordonnées de $\vec{w}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v})$.



4.3 Repères et coordonnées

On se place dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

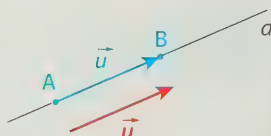
- Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ sont $(x_B - x_A; y_B - y_A)$.
- $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont respectivement pour coordonnées $(x; y)$ et $(x'; y')$; k est un nombre. Alors :
 - le vecteur $\vec{u} + \vec{v}$ a pour coordonnées $(x + x'; y + y')$;
 - le vecteur $k\vec{u}$ a pour coordonnées $(kx; ky)$;
 - dire que « $\vec{u} = \vec{v}$ » équivaut à dire « $x = x'$ et $y = y'$ ».
- On donne $\vec{u}(X; Y)$ et $\vec{v}(X'; Y')$.
Dire que « $\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{v}$ » équivaut à dire que « $XY' - X'Y = 0$ ».

5

La droite

5.1 Vecteur directeur d'une droite

- Un vecteur directeur d'une droite est un vecteur non nul $\vec{u}$ dont la direction est celle de d .
- Un point A et un vecteur non nul $\vec{u}$ définissent une droite d unique. On note $d(A, \vec{u})$.
- Dire que « les deux droites d et d' , de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$, sont parallèles » équivaut à dire que « $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont colinéaires ».



5.2 Équation cartésienne d'une droite

Dans un repère :

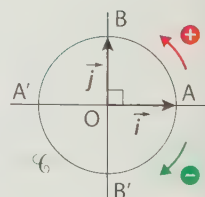
- Toute droite d a une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$ ($a \neq 0$ ou $b \neq 0$). Le vecteur $\vec{u}(-b; a)$ est un vecteur directeur de d .
- Si a, b, c sont trois nombres tels que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$, l'ensemble des points M tels que $ax + by + c = 0$ est une droite de vecteur directeur $\vec{u}(-b; a)$.

6

Angles orientés et trigonométrie

6.1 Cercle trigonométrique

- Un cercle trigonométrique $\mathcal{C}$ est un cercle de rayon 1 sur lequel on a distingué deux sens de parcours :
la flèche rouge indique le **sens direct** et la verte indique le **sens indirect**.
- Le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ est un repère **orthonormé direct**.



6.2 Le radian

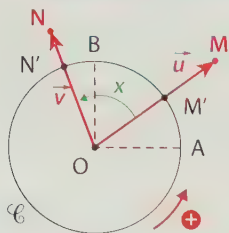
- Un angle de « 1 radian » est un angle au centre interceptant, sur un cercle, un arc de longueur égale au rayon du cercle.
- Tableau de correspondance :

mesure en degré : d	180°	90°	60°	45°	30°
mesure en radian : α	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$

$$180 \times \alpha = \pi \times d$$



6.3 Angle orienté d'un couple de vecteurs. Mesure principale



• $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls, $\vec{u} = \overrightarrow{OM'}$, $\vec{v} = \overrightarrow{ON'}$. M' et N' sont les points d'intersection des demi-droites $[OM)$ et $[ON)$ avec le cercle trigonométrique $\mathcal{C}$. Les mesures en radian de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ sont les mesures en radian de l'angle $(\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{ON'})$. On note $(\vec{u}, \vec{v}) = x + k2\pi$.

• Parmi les mesures $x + k2\pi$ de l'angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$, il en existe une et une seule dans l'intervalle $]-\pi ; \pi]$. Cette mesure est la **mesure principale** de $(\vec{u}, \vec{v})$.

► **Exemple.** $\frac{205}{6}\pi = 34\pi + \frac{\pi}{6} = 17 \times (2\pi) + \frac{\pi}{6}$ donc la mesure principale est $\frac{\pi}{6}$.

6.4 Cosinus et sinus d'un angle orienté

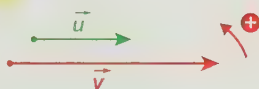
Le cosinus (resp. le sinus) d'un angle orienté $(\vec{u}, \vec{v})$ est le cosinus (resp. le sinus) de l'une quelconque de ses mesures en radian. On note $\cos(\vec{u}, \vec{v})$ (resp. $\sin(\vec{u}, \vec{v})$).

► **Conséquence.** L'angle orienté de deux vecteurs $(\vec{u}, \vec{v})$ et l'angle géométrique associé ont le même cosinus.

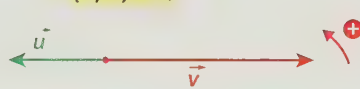
6.5 Angles orientés et colinéarité

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls.

« $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires et de même sens » équivaut à « $(\vec{u}, \vec{v}) = 0$ ».



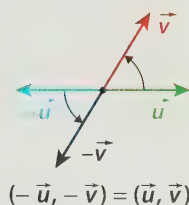
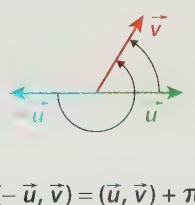
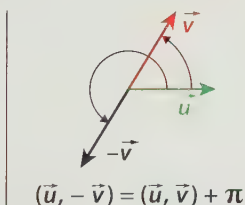
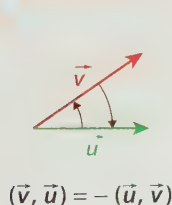
« $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et de sens contraires » équivaut à « $(\vec{u}, \vec{v}) = \pi$ ».



6.6 La relation de Chasles

Pour tous vecteurs non nuls $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$: $(\vec{u}, \vec{v}) + (\vec{v}, \vec{w}) = (\vec{u}, \vec{w})$.

► **Conséquences**



6.7 Les formules d'addition et de duplication

Quels que soient les nombres a et b :

• $\cos(a + b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$

• $\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$

• $\cos(a - b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$

• $\sin(a - b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$

• $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$

• $\sin(2a) = 2\sin(a)\cos(a)$

7

Le produit scalaire

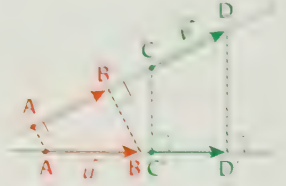
7.1 Les diverses formes du produit scalaire

► **Définition.** Le nombre noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ (qui se lit « $\vec{u}$ scalaire $\vec{v}$ ») est :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \left[\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2 \right]$$

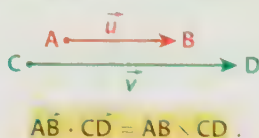
Par convention, $\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 = \|\vec{u}\|^2$

► Autres expressions du produit scalaire

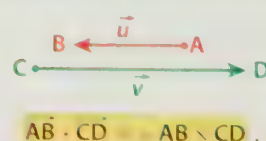
Forme analytique	En fonction des normes et de l'angle	Produit scalaire et projection orthogonale
Dans un repère orthonormé, si $\vec{u} = (x; y)$ et $\vec{v} = (x'; y')$ sont deux vecteurs non nuls, alors : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$ $\vec{u} \cdot \vec{u} = x^2 + y^2$ d'où $\ \vec{u}\ = \sqrt{x^2 + y^2}$	$\vec{u} \cdot \vec{v} = \ \vec{u}\ \times \ \vec{v}\ \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$ ou $\vec{u} \cdot \vec{v} = \ \vec{u}\ \times \ \vec{v}\ \times \cos \theta$ 	$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overline{AB} \cdot \overline{CD} = \overline{AB} \cdot \overline{C'D'}$ $= \overline{A'B'} \cdot \overline{CD}$ 

► Cas particulier de deux vecteurs colinéaires

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ de même sens :



$\vec{u}$ et $\vec{v}$ de sens contraires :



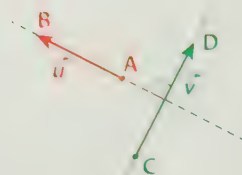
7.2 Produit scalaire et orthogonalité

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls, $\vec{u} = \overline{AB}$ et $\vec{v} = \overline{CD}$.

• Dire que « $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux » équivaut à dire que « les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires ».

• Dire que « $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux » équivaut à dire que « $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$ ou $\overline{AB} \cdot \overline{CD} = 0$ ».

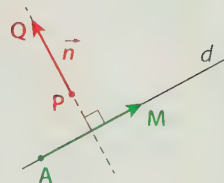
• Dans un repère orthonormé, $\vec{u}$ a pour coordonnées $(x; y)$ et $\vec{v}(x'; y')$. Dire que « $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux » équivaut à dire que « $xx' + yy' = 0$ ».



7.3 Droite et produit scalaire

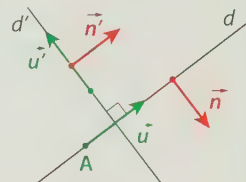
► Vecteur normal à une droite

- Dire qu'un vecteur non nul ($\vec{n} = \overrightarrow{PQ}$) est **normal** à une droite d signifie que les droites (PQ) et d sont perpendiculaires.
- Dire que « un point M appartient à la droite d passant par A de vecteur normal $\vec{n}$ » équivaut à dire que « $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$ ».



► **Conséquence.** $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ sont des vecteurs directeurs des droites d et d' et $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ sont des vecteurs normaux à ces deux droites.

$$d \perp d' \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{n}' = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{u}' = 0 \Leftrightarrow \vec{n} \text{ et } \vec{u}' \text{ colinéaires}$$



► Vecteur normal et équation de droite

Dans un repère orthonormé :

- Si d a une équation de la forme $ax + by + c = 0$ ($a \neq 0$ ou $b \neq 0$), alors $\vec{n}(a; b)$ est un vecteur normal à d .
- Réciproquement, si $\vec{n}(a; b)$ non nul est normal à une droite d , alors d a une équation de la forme $ax + by + c = 0$.

7.4 Calculer des longueurs et des angles

ABC est un triangle quelconque. On note $a = BC$; $b = AC$; $c = AB$.
Les angles de sommets respectifs A, B, C sont notés $\hat{A}$, $\hat{B}$, $\hat{C}$.

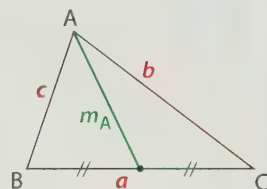
- **Théorème de Pythagore généralisé**

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

- **Théorème de la médiane**

$$b^2 + c^2 = 2m_A^2 + \frac{a^2}{2}$$

m_A est la mesure de la médiane issue de A.



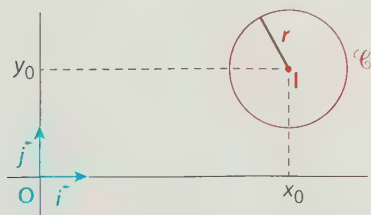
7.5 Cercle et produit scalaire

- **Équation d'un cercle défini par son centre et son rayon.**

$\mathcal{C}$ est un cercle de rayon r et de centre $I(x_0; y_0)$ dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Une équation de $\mathcal{C}$ est :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$



- **Équation d'un cercle de diamètre [AB].**

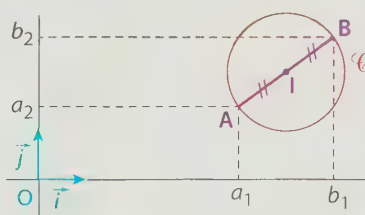
Le cercle de diamètre [AB] est l'ensemble des points M tels que :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0.$$

Le cercle $\mathcal{C}$ a pour équation :

$x^2 + y^2 - (a_1 + b_1)x - (a_2 + b_2)y + a_1b_1 + a_2b_2 = 0$,
équation de la forme :

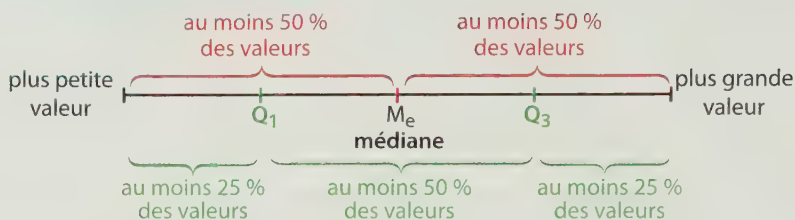
$$x^2 + y^2 + ax + by + c = 0.$$



8

Statistiques

8.1 Médiane et quartiles



8.2 Paramètres de dispersion

► Étendue et écart interquartile

L'étendue est la différence entre les valeurs extrêmes : $e = x_{\max} - x_{\min}$.

L'écart interquartile est la différence entre Q_3 et Q_1 : $E = Q_3 - Q_1$.

► Variance et écart-type

(x_p, n_p) est une série statistique d'effectif total $N = n_1 + \dots + n_p$ et de moyenne $\bar{x}$.

$$\text{Variance : } V = \frac{n_1(x_1 - \bar{x})^2 + \dots + n_p(x_p - \bar{x})^2}{N}.$$

$$\text{Écart-type : } s = \sqrt{V}.$$

9

Les probabilités

9.1 Généralités

U est l'univers de l'expérience, $e_1, \dots, e_n$ sont les issues de probabilités $P(e_1), \dots, P(e_n)$.

• Si $U = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$, alors $P(e_1) + P(e_2) + \dots + P(e_n) = 1$.

• La probabilité d'un événement A , notée $P(A)$, est la somme des probabilités des événements élémentaires inclus dans A .

• Si les événements élémentaires sont équiprobables :

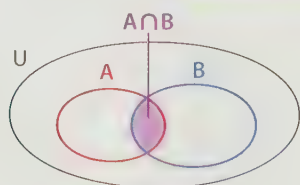
$$P(A) = \frac{\text{nombre d'issues favorables à } A}{\text{nombre d'issues possibles}}.$$

• $\bar{A}$ est l'événement contraire de A : $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

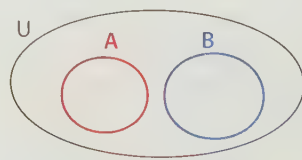
• Quels que soient les événements A et B , $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

• Lorsque A et B n'ont pas d'issues communes, on dit qu'ils sont incompatibles.

Dans ce cas, $A \cap B = \emptyset$ et $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$



A et B incompatibles.
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

9.2 Loi d'une variable aléatoire et paramètres

U est l'univers associé à une expérience aléatoire.

- Définir une variable aléatoire X sur U , c'est associer à chaque issue de U un nombre x .

- X est une variable aléatoire sur un univers U muni d'une loi de probabilité P .

On note x_i ($1 \leq i \leq k$) les valeurs prises par X .

Définir une loi de probabilité consiste à associer à chaque valeur x_i la probabilité de l'événement « $X = x_i$ ».

valeur x_i	x_1	x_2	...	x_k
probabilité $P(X = x_i)$	p_1	p_2	...	p_k

- L'espérance de X , notée $E(X)$, est :

$$E(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + \dots + p_k x_k = \sum_{i=1}^k p_i x_i.$$

- La variance de X , notée $V(X)$, est :

$$V(X) = p_1 (x_1 - E(X))^2 + \dots + p_k (x_k - E(X))^2 = \sum_{i=1}^k p_i (x_i - E(X))^2$$

ou

$$V(X) = \sum_{i=1}^k p_i x_i^2 - [E(X)]^2.$$

- L'écart-type de X , noté $\sigma(X)$, est : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

9.3 Épreuve de Bernoulli. Loi de Bernoulli

- Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire qui admet **exactement deux issues** :

S (succès) de probabilité p et $\bar{S}$ (échec) de probabilité q telle que $q = 1 - p$.

- Dans une épreuve de Bernoulli, on note Y la variable aléatoire, qui prend la valeur 1 lorsque S est réalisé et la valeur 0 en cas d'échec.

On dit que Y suit une **loi de Bernoulli** de paramètre p .

k	0	1
$P(Y = k)$	$1 - p$	p

- On appelle **schéma de Bernoulli d'ordre n** l'expérience aléatoire qui est la répétition de n épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

- La loi de probabilité de la variable aléatoire X qui à chaque issue associe le nombre k de succès au terme de n épreuves, est définie par :

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \quad (k \text{ entier naturel tel que } 0 \leq k \leq n).$$

On dit que X suit une **loi binomiale de paramètres n et p** .

$$E(X) = np \quad V(X) = np(1 - p) \quad \sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}.$$

Affixe d'un point, d'un vecteur	237
Angle géométrique de vecteurs	320
Angle orienté de vecteurs	474
Approximation normale d'une loi	
Arbre pondéré	352
Argument d'un nombre complexe	238
Asymptote	54, 55
Comparaison de fonctions	57
Comparaison de suites	25
Composition de fonctions	58
Conjugué (nombre)	235
Continuité	110-111
Convergence d'une suite monotone	28
Coordonnées dans l'espace	293

DE

Densité de probabilité	381
Dérivée	
• de e^u	
• de $\ln(u)$	
• de $\sqrt{u}$	
• de u^n	115
• d'une fonction composée	114
Droite(s)	
• orthogonales	269
• orthogonale à un $\vec{v}$	323
• perpendiculaire à u	323
Écart-type d'une variable aléatoire	405, 439
Encadrement d'une fonction	57
Équation cartésienne d'un plan	324
Équation d'une sphère	343
Équation du second degré dans $\mathbb{C}$	236
Espérance d'une variable aléatoire	308, 405, 409-410, 439
Estimation d'une proportion	441
Événements	
• incompatibles	349, 354
• indépendants	354
Exponentielle (fonction)	80

Fonction(s)	170
• cosinus, sinus	408
• de répartition (loi $N(0; 1)$)	80
• tangente	138
Formes indéterminées	180
Forme	26
• algébrique	234
• trigonométrique	238
Formule des probabilités totales	353

Inégalité de la moyenne	199
Intégrale	194
Intervalle centré	409, 438
Intervalle de confiance	441
Intervalle de fluctuation	435, 440
Limite(s)	
• à droite, à gauche	56
• d'une fonction	54, 110
• d'une fonction composée	58
• d'une suite géométrique	27
• d'une suite	25
• finie	55
• infinie	25
• et comparaison	26, 57

Logarithme décimal (fonction)	141, 152-153
Logarithme népérien (fonction)	138
Loi de probabilité	353, 380-382, 405, 439
Loi des chemins, des nœuds	353
Loi exponentielle	382
Loi normale	408
Loi uniforme	381

M N

Module d'un nombre complexe	238
Monotone (suite)	28
Nombres complexes	234
Nombre dérivé	77
Notation exponentielle	240

Q **P**

Opérations sur les fonctions dérivées	107
Opérations sur les limites	26
Orthogonalité de droites et de plans	323
Plans perpendiculaires	324
Primitives	195
Prise de décision	441
Probabilité conditionnelle	352
Probabilités	349, 352
Produit scalaire	319, 322

RS

Raison d'une suite	24
Raisonnement par récurrence	24
Relation de Chasles	198
Repérage dans l'espace	292
Représentations paramétriques	294
Schéma de Bernoulli	435
Sens de variation d'une suite	21
Suite	
• arithmétique, géométrique	21
• convergente	25
• croissante, décroissante	21
• majorée, minorée, bornée	28

TV

Tangente	77
Théorème	
• d'encadrement	26, 57
• de Moivre-Laplace	411
• des gendarmes	26, 57
• des valeurs intermédiaires	112
Valeur moyenne d'une fonction	199
Variance	405, 409-410
Vecteur(s) de l'espace	
• colinéaires	290
• coplanaires	291
• directeurs d'un plan	291
• directeur d'une droite	290, 291
• normal à un plan	323

Crédits photographiques. Couverture : Tomas Rodriguez/Corbis. **20h :** AFP/Getty images. **20b :** Droits réservés. **22 :** Cosmosphoto/Dowsett A.B./SPL. **37g :** Droits réservés. **37d :** BnF. **45 :** Corbis/Olivier Polot. **50h :** AFP/Staff. **50s :** BIS/Collection Archives Labor. **65g :** BIS/Collection Archives Labor. **65d :** Musée de la Poste, Paris. **78h :** Florent Cardinaux. **78b :** BIS/Collection Archives Labor. **91g :** BIS/Collection Archives Labor. **91d :** ETH-Bibliothek Zürich. **98 :** Agefotostock/A. Farnsworth. **106h :** Agefotostock/P. Royer. **106b :** BIS/Collection Archives Nathan. **121g :** BIS/Collection Archives Nathan. **121d :** Collection particulière. **126 :** Rea/Jérôme Favre. **134h :** Magnum photos/F. Driggs. **134b :** Akg-images/SPL. **136 :** BIS/Collection Archives Nathan. **151g :** Akg-images/ SPL. **151d :** Leemage/ SPL. **152 :** Collection particulière. **153 :** ESO/Serge Brunier. **154 :** Corbis/Robert Harding World Imagery/Patrick Dieudonné. **166h :** Getty Images/Marcus Lyon. **166b :** BIS/Collection Archives Labor. **177g :** BIS/Collection Archives Labor. **177d :** Bridgeman Giraudon/ J.-L. Charmet. **188 :** Fotolia.com/Soleg. **190h :** Agefotostock/Sharon Green. **190b :** Leemage/ Bianchetti. **209g :** Leemage/Bianchetti. **209d :** Niedersächsische Staats und Universitätsbibliothek, Göttingen. **214 :** Michel Hans. **222 :** Photononstop/Marcel Jolibois. **230h :** Rea/Image Source. **230b :** Leemage/MP. **249g :** Leemage/MP. **249d :** Kharbine Tapabor/Collection Jean Vigne. **257 :** Phototake/NASA/ESA. **264h :** ACME, Londres. **264b :** BIS/JuppFranz/Collection Archives Labor. **275g :** BIS/JuppFranz/Collection Archives Labor. **275d :** BIS/Collection Archives Labor. **286h :** Novapix/ESA. **286b :** Leemage/Selva. **303g :** Leemage/Selva. **303d :** BnF. **306 :** AFP/Marcel Mochet. **307 :** Corbis/roy House. **318h :** Julien Cottier. **318b :** Archivo LARA/ Planeta. **333g :** Archivo LARA/Planeta. **333d :** Collection particulière. **348h :** Collection Christophe L. **348b :** Droits réservés. **350 :** BSIP/Deloche. **361g :** Droits réservés. **361d :** Archive of Equitable life assurance society, Londres/DR. **364 :** Corbis/AIDS Alliance/Gideon Mendel for The International HIV. **365 :** Fotolia.com/Durluby. **376h :** Getty Images/California CPA. **376b :** RMN-GP/Daniel Arnaudet. **389g :** RMN-GP/Daniel Arnaudet. **389d :** Collection particulière. **392 :** BSIP/Humbert. **396 :** Cosmosphoto/S.P.L./James King-Holmes. **400s :** Photo12/Alamy/ Simon Balsou. **404b :** Leemage/Luigia Ricciarini. **407 :** Antoine Taveneaux. **418 :** Rea/Gilles Rolé. **419mg :** Leemage/Luigia Ricciarini. **419md :** BnF. **419b :** Deutsche Bundesbank. **426 :** Corbis/Xinhua Press/Zhang Jiansong. **427 :** Corbis/epa/Mike Nelson. **428 :** Corbis/epa/Rungroj Yongrit. **429 :** Corbis/BSIP. **434h :** Biosphoto/Michael Breuer. **434b :** Akg-images/SPL. **443 :** Fotolia.com/cultura2. **445 :** Fotolia.com/Marc Aucouturier. **449g :** Akg-images/SPL. **449d :** Collection particulière. **455 :** StudioX/Imago. **456 :** © IGN-2012. Extraits de la carte IGN D74 SCAN⁺/Autorisation n°80-1222. **461 :** Regards du Sport (vandystadt.com)/Gérard Vandystadt et Christian Petit.

1 Fonctions

Objectifs

- 1 Afficher le nombre dérivé en 2 de la fonction f définie par $f(x) = -x^2 + 2x + 3$.
- 2 Tracer la tangente à la courbe C_f au point d'abscisse 2 et afficher son équation.
- 3 Calculer l'intégrale de f entre -1 et 2. Afficher l'aire du domaine correspondant.

1 Afficher un nombre dérivé

1. Placez-vous dans l'écran de Calcul :
 - activez **math**; menu MATH option 8 : `nbreDérivé(`.
 - Validez par **entrer**.

```

MATH NUM CPX PRB
4+5J(
5: xJ
6: xFMin(
7: xFMax(
8: nbreDérivé(
9: intégrFonct(
0: Solveur...
    
```

2. Complétez l'instruction en respectant le modèle :
 `nbreDérivé(fonction, variable, valeur).`
 - Validez par **entrer**.

```

nbreDérivé(-X^2+2
X+3,X,2)
-2
    
```

$f'(2)$

2 Tracer la tangente en un point et afficher son équation

1. Placez-vous dans l'éditeur de fonctions `f(x)`.
 - Saisissez l'expression de $f(x)$ dans Y1 puis **entrer**.
 - Réglez la fenêtre d'affichage : **fenêtre**.
 Paramétrez comme indiqué.

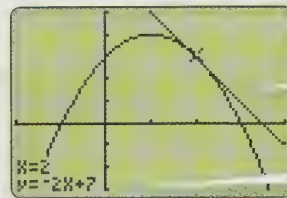
```

FENETRE
Xmin=-2
Xmax=4
X9rad=1
Ymin=-3
Ymax=5
Y9rad=1
Xres=1
    
```

x entre
-2 et 4.

y entre
-3 et 5.

2. Placez-vous dans le module graphique **graphe**.
 - Appuyez sur **2nde prgm** (dessin).
 - Sélectionnez l'option 5 : **Tangente(**; validez par **5**.
 - Saisissez pour x la valeur 2; validez par **entrer**.



Tangente
au point
d'abscisse 2.

Équation de
la tangente.

3 Calculer une intégrale

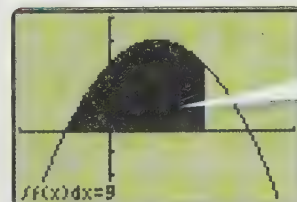
1. Placez-vous dans l'écran de Calcul.
 - Activez **math**; menu MATH option 9 : `intégrFonct(`. Validez par **entrer**.
 - Complétez l'instruction : `intégrFonct(fonction, variable, borne inf, borne sup).`
 - Validez par **entrer**.

```

intégrFonct(-X^2+
2X+3,X,-1,2)
9
    
```

$\int_{-1}^2 f(x) dx$

2. Placez-vous dans le module graphique : **graphe**.
 - Affichez la courbe de f .
 - Activez **2nde trace** (calculs) option 7 : $\int f(x) dx$.
 - Saisissez les bornes. Validez par **entrer**.



f est continue et
positive sur $[-1; 2]$.
L'intégrale
exprime l'aire
du domaine sous
la courbe.

2 Suites

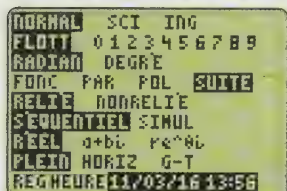
Objectifs

- 1 Dresser le tableau des dix premières valeurs de la suite (u_n) définie par : $u_n = \sqrt{n^2 + 1}$ ($n \in \mathbb{N}$).
- 2 Même question pour la suite (v_n) définie par : $v_0 = \frac{1}{2}$ et $v_{n+1} = \frac{3}{1+v_n}$ ($n \in \mathbb{N}$).
Afficher une représentation graphique de cette suite.

1 Dresser le tableau des valeurs d'une suite du type $u_n = f(n)$

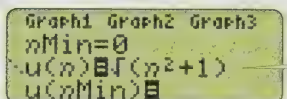
1. Placez-vous en mode SUITE :

- activez **mode** ; option SUITE, validez par **entrer** puis **2nde mode** (quitter).



Option SUITE en surbrillance.

- Activez **f(x)** ; saisissez l'expression de u_n .



Expression de u_n .

2. Tableau de valeurs

- Définissez la plage de valeurs :

2nde fenêtre (déf table)

(réglages : DébTbl = 0 et Pas = 1).

- Demandez l'affichage :

2nde graphe (table).

n	u(n)
0	1
1	1.4142
2	2.2361
3	3.1623
4	4.1231
5	5.099
6	6.0828

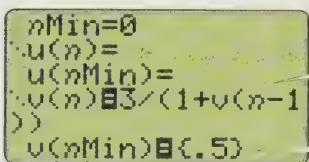
u(n)=1.414213562

Utilisez les touches de direction pour faire afficher les termes suivants.

2 Dresser le tableau des valeurs d'une suite récurrente du type $u_{n+1} = f(u_n)$

1. Reprenez le mode SUITE.

- Activez **f(x)** ; saisissez l'expression de v_n .



Relation de récurrence.

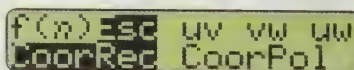
Valeur du 1^{er} terme.

Note

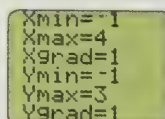
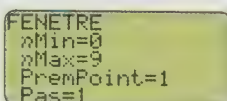
La relation de récurrence sera traduite ici sous la forme $v_n = \frac{3}{1+v_{n-1}}$.

3. Représentation graphique

- Activez : **2nde zoom** (format) ; menu Esc.



- Réglez la fenêtre d'affichage comme indiqué.



- Appuyez sur **graphe** puis sur **trace**.

Tracez la représentation graphique à l'aide de la touche de direction : **▶▶▶▶...**

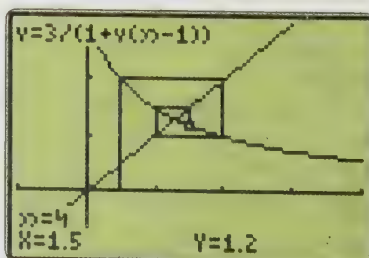
2. Tableau de valeurs

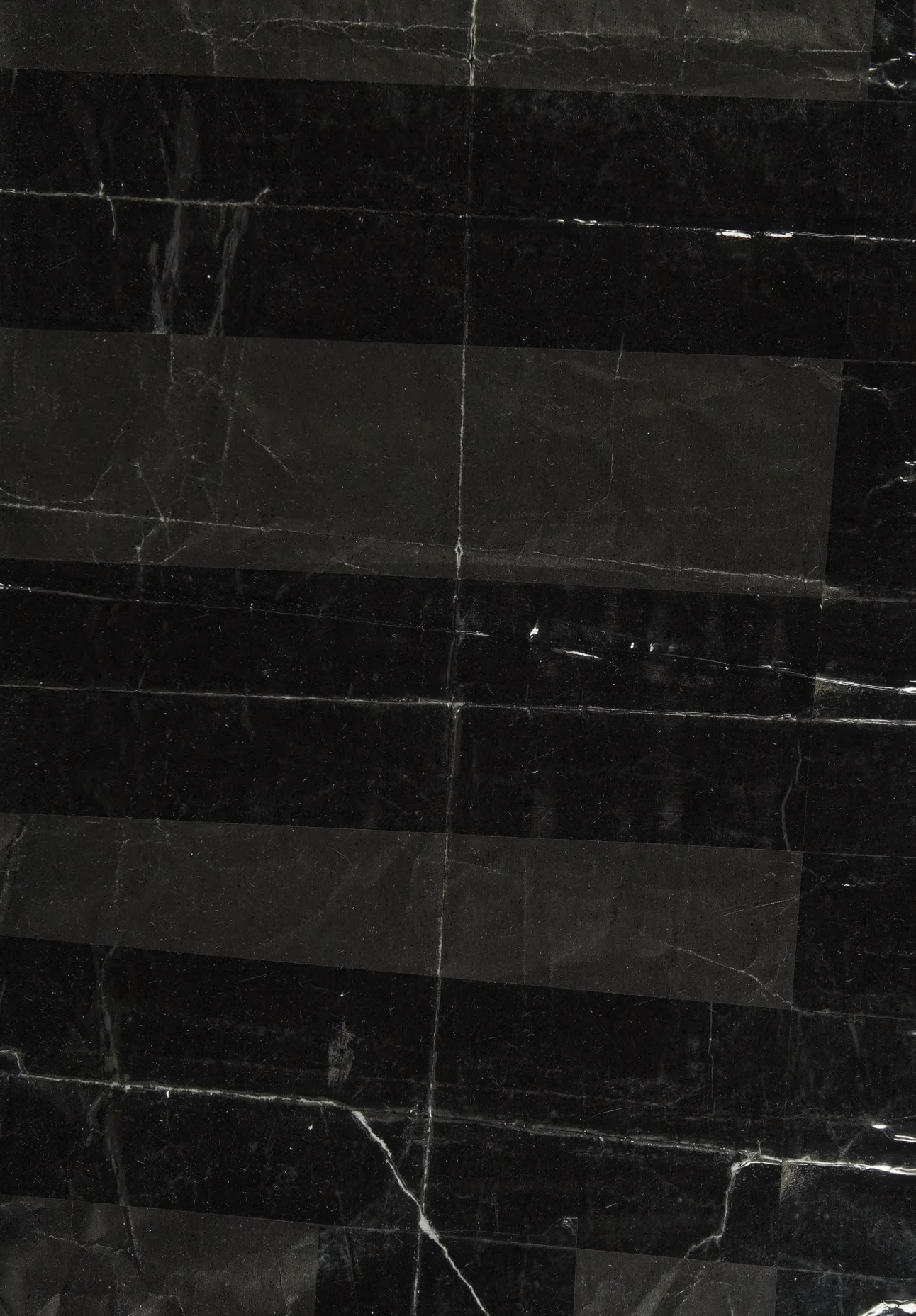
- Reprenez le réglage précédent pour définir la plage de valeurs (cf. § 1.2).
- Affichez le tableau : **2nde graphe** (table).

n	v(n)
0	.5
1	2
2	1
3	1.5
4	1.2
5	1.3636
6	1.2692

v(n)=1.5

Utilisez les touches de direction pour faire afficher les termes suivants.





3 Probabilités

Objectifs

X et Z sont deux variables aléatoires réelles.

- ❶ X suit la loi binomiale de paramètres $n=10$ et $p=0,2$.
- ❷ Z suit la loi normale standard. Calculer $P(-1,2 \leq Z \leq 0,8)$.

1. Placez-vous dans l'écran de Calcul.

- Activez **2nde** **var** (distrib); Menu DISTRIB.
- Prenez l'option A: binomFdp(. Validez par **entrer**.

```
DISTRIB DESSIN
0:FFRÉP(
1:binomFdp(
2:binomFRép(
```

- Complétez, dans l'ordre, puis validez par **entrer**.

Nombre d'essais

binomFdp(10,0.2,2)

Probabilité

P(X = 2)

Nombre de succès

.301989888

2. Placez-vous dans l'écran de Calcul.

- Activez **2nde** **var** (distrib); Menu DISTRIB.
- Prenez l'option 2: normalFRép(. Validez par **entrer**.
- Complétez, dans l'ordre, puis validez par **entrer**.

Borne sup. normalFRép(-1.2,0.8,0.1)

Borne inf.

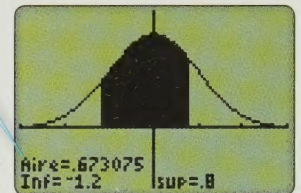
Esperance

Écart-type

.6730749348

- Pour obtenir la zone de répartition ombrée :
 - Réglez la fenêtre : $-3 \leq x \leq 3$ et $-0,25 \leq y \leq 0,5$.
 - Activez **2nde** **var** (distrib); menu DESSIN;
 - option 1: OmbreNorm(; **entrer**.
 - Complétez comme ci-dessus. Validez par **entrer**.

$P(-1,2 \leq Z \leq 0,8)$



4 Éléments de programmation

Objectif

Calculer la somme des termes successifs, du rang 0 au rang n , de la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \text{ et, pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}, u_{n+1} = 0,2u_n + 1,5.$$

1. Appuyez sur **prgm** **►►**.

- Sélectionnez l'option 1 (NOUV).
- Nommez le programme [SOMME], puis **entrer**.

Algorithme à programmer

```
Variables: I,N,U,S
Entrée: N
Traitement: U reçoit 1, S reçoit 1
  Pour I de 1 à N Faire
    U reçoit 0,2U+1,5
    S reçoit S+U
  Fin Pour
Sortie: Afficher S
```

2. Écrivez les instructions du programme.

- Validez chaque ligne d'instruction par **EXE**. Le programme passe à la ligne en affichant **:**.

```
PROGRAM: SOMME
:Prompt N
:1→U:1→S
:For(I,1,N)
:0.2U+1.5→U
:S+U→S
:End
:Disp "S=":S
```

- Enregistrez ce programme : **2nde** **mode** (quitter).

- Pour accéder aux commandes spécifiques décrites ci-dessous, appuyez sur **prgm**.

Menu Contrôle (CTL)

```
CTL E/S EXEC
1:If
2:Then
3:Else
4:For(
5:While
6:Repeat
7:End
```

Menu Entrée/Sortie (E/S)

```
CTL E/S EXEC
1:Input
2:Prompt
3:Disp
4:AffGraph
5:AffTable
6:Output(
7:codeTouch(
```

Menu Test & Logique

Tapez **2nde** **math** (tests)

```
TEST LOGIQUE
1:=
2:#
3:>
4:<
5:<=
6:>=
```


Manuel
Numérique
PREMIUM

Le manuel numérique enrichi et personnalisable

- ▶ L'intégralité du manuel papier en version numérique.
- ▶ Des outils pratiques et simples à utiliser : zoom, spot...
- + **150 ressources multimédias** : animations, exercices interactifs, fichiers TICE, etc.

Démonstrations, détails de l'offre et équipement élèves sur
www.nathan.fr/manuels-numeriques

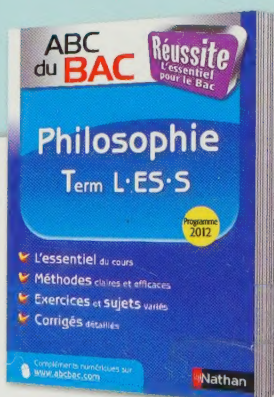
**Pour réviser et s'entraîner
efficacement**

**Conformes
aux nouveaux
programmes**

Pour aller
droit au but

Pour aller
plus loin

S'EXERCER
intensivement



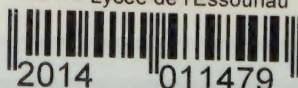
→ **Réussite**

L'essentiel pour le B

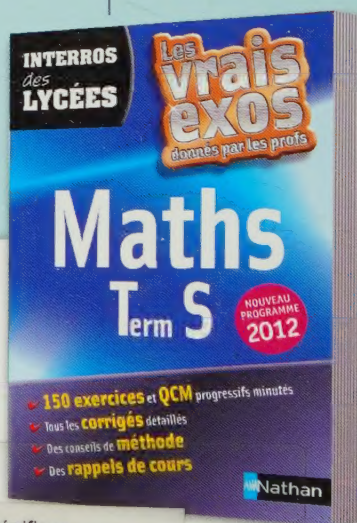


M059 / Transmath Term S spécifique
Nathan

Lycée de l'Essouriau



Etiquette à ne pas enlever



INTERROS des Lycées
Les vrais exos donnés
par les profs

ISBN : 978-2-09-172663-2



Nathan