$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = \frac{1-2^{n+1}}{1-2}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v}$$

$$\int x\,dx = \frac{1}{2}x^2 + C$$

$$\mathcal{D} : ax + by + cz = 0$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$e^{i\pi} + 1 = 0 \qquad \mathcal{M} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2}$$

$$\mathcal{P}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

$$n|2021 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, n = 2021k$$

Mathématiques en Terminale Générale

Saber NADI ZAHHAR

Tout d'abord, permettez-moi de vous remercier de l'attention que vous portez à mon ouvrage. Actuellement apprenti-chercheur en école d'ingénieurs, j'aspire à devenir professeur en Mathématiques. Mon livre s'adresse aux étudiants de Terminale Générale suivant l'un ou plusieurs des enseignements en Mathématiques issus de la réforme du Baccalauréat 2021.

Ce livre ne se présente en aucun cas comme un manuel scolaire. Ainsi, bien que vous y retrouviez l'essentiel du programme, il ne dispense aucunement l'enseignement transmis par vos professeurs. Toutefois, ce livre fournit un large panel d'exercices corrigés allant des applications de cours basiques aux problèmes types de l'examen du baccalauréat.

Vous retrouverez à la fin du livre des témoignages sur les différents cursus disponibles en études supérieures ainsi que des exercices adaptés de ce cursus. Mon espoir est d'offrir aux étudiants un avant-goût des mathématiques, pures ou appliquées, rencontrées en post-bac afin de renforcer les convictions d'orientation et les aider à forger un esprit critique.

Je remercie mon père ainsi que messieurs ABADIE, CARABIN, DAUGUET et GHASSANY pour avoir su partager leur passion des mathématiques avec une pédagogie et honnêteté intellectuelle admirable. Je remercie ma mère, mon frère ainsi que mes plus proches amis pour leur soutien et intérêt inconditionnel dans mes projets jusqu'alors entrepris.

Merci et bon travail, Saber.

Avant de commencer

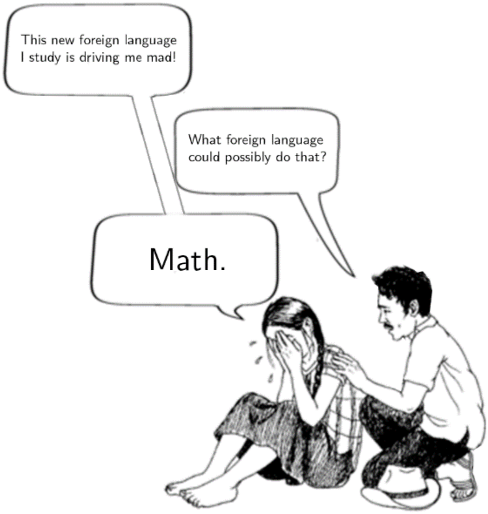
- Conseils et Lexique des Maths
- Vocabulaire ensembliste et logique

Programmation

- Rappels de seconde
- Résolution de problèmes

Enseignement de spécialité

Conseils et Lexique des Mathématiques



« The only way to understand mathematics, is to do mathematics. »

Paul Halmos, *A Hilbert Space Problem Book* (1982)

N'en déplaise aux esprits désintéressés et médias obscurantistes, les mathématiques sont et resteront éternellement à la portée de tous ceux suffisamment curieux et déterminés de comprendre la poésie qui régit notre monde.

Les mathématiciens Ramanujan et Gauss étaient nés dans des familles pauvres à des époques et sous des gouvernances différentes, Euler était chrétien tandis qu'Al-Khwarizmi musulman, Sophie-Germain était une femme et Turing homosexuel. Pourtant, les apports de ces mathématiciens et mathématiciennes sont mondialement reconnus et nous amènent au seul et unique « secret » d'un bon mathématicien : le travail.

On ne peut ni naître un génie en mathématiques, ni posséder un statut social facilitant l'accès à sa compréhension. L'entraînement est le seul maître dans l'apprentissage et le développement d'un esprit critique, passionné et rigoureux. Toutefois, dans le contexte d'un examen noté, i.e. le bac, les rédactions fournies en correction sont à considérer comme des références aux attentes des correcteurs.

Le langage mathématique est simple, clair et universel. Il est donc important d'en comprendre les principaux outils :

Une **définition** sert à introduire une notion où sont énoncés les différents attributs de l'objet. Par exemple : un cercle est défini comme l'ensemble des points équidistants à un même point.

Une **propriété** énonce une particularité notable d'une définition, sans pour autant être suffisante à la définir. Par exemple : La fonction carrée est positive sur son ensemble de définition, ce qui est aussi le cas de la fonction valeur absolue.

Une **conjecture** est une proposition qui reste à démontrer, elle peut donc être fausse. Par exemple : On remarque que,

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$

Je conjecture que pour tout entier naturel n, on a :

$$n^2 + (n+1)^2 = (n+2)^2$$

Cette conjecture est fausse, il suffit d'en développer les termes ou encore d'évaluer la proposition en $n = 0$.

Un **axiome** est une proposition considérée comme évidente et donc admise sans démonstration permettant d'établir des propositions plus complexes. Par exemple : La somme des angles d'un triangle est toujours égale à 180°.

Un **théorème** est une proposition démontrée à partir d'axiomes qui fait office de conclusion à une idée. Par exemple : Le nombre racine de 2 est irrationnel.

Un **corollaire** est une propriété issue d'un théorème. Par exemple : Le théorème de Pythagore est un cas particulier du théorème d'Al-Kashi et peut donc être vu comme un corollaire de ce dernier.

Vocabulaire ensembliste et logique

Voici quelques rappels sur les notations ensemblistes au programme :

Notation	Définition	Illustration
$\mathbb{R}$	Ensemble des réels	$]-\infty\,;+\infty[$
$\mathbb{R}\backslash\{a\}$	Ensemble des réels privé de a	$]-\infty\,;a[\cup]a\,;+\infty[$
$\mathbb{R}^*$ $\mathbb{R}_+$ $\mathbb{R}_-$	Ensemble des réels privé de 0 dit « R étoile » Ensemble des réels positifs dit « R plus » Ensemble des réels négatifs dit « R moins »	$]-\infty\,;0[\cup]0\,;+\infty[$ $[0\,;+\infty[$ $]-\infty\,;0]$
$\mathbb{R}^2$	Ensemble des couples de réels	$\{(x,y),x,y\in\mathbb{R}\}$
$\mathbb{N}$ $\mathbb{N}^*$	Ensemble des entiers naturels Ensemble des entiers naturels non nuls	$\{0,1,2,\ldots\}$ $\{1,2,3,\ldots\}$
$[\![a\,;b]\!]$	Ensemble des entiers compris entre a et b	$\{a,a+1,\ldots,b-1,b\}$
$\emptyset$	Ensemble vide	$\{\ \ \}$
$A\backslash B$	Ensemble des éléments de A n'appartenant pas à B dit « Complémentaire de B dans A » ou « A privé de B »	$\{x\in A,x\notin B\}$
$\overline{B}$	Ensemble des éléments n'appartenant pas à B dit « B barre »	$\{x\notin B\}$

Symbole	Signification	Exemple
$\in$	« Appartient à »	$0\in\mathbb{N},0\notin\mathbb{N}^*$
$\subset$	« Est inclus dans »	$\mathbb{Z}\subset\mathbb{R},\mathbb{Z}\not\subset\mathbb{N}$
$\forall$	« Pour tout »	$\forall x\in\mathbb{R},x^2\geq 0$
$\exists$	« Il existe »	$\exists x\in\mathbb{R},x^2=2$
$\exists!$	« Il existe un unique »	$\exists!\,x\in\mathbb{R},x^2=0$
$\Rightarrow$	« Implique »	$x=2\Rightarrow x^2=4$
$\Leftrightarrow$	« Équivaut »	$x\in\{\pm 2\}\Leftrightarrow x^2=4$
$\neg$	« Négation »	$\neg"n\in\mathbb{N}"="n\notin\mathbb{N}"$

Il existe plus d'une méthode pour démontrer une **assertion**, c'est-à-dire une phrase mathématique à valeur vraie ou fausse :

La **démonstration d'une équivalence** $P \Leftrightarrow Q$ consiste à démarrer d'une proposition P et d'arriver, par équivalences, à la seconde proposition Q. On peut aussi démontrer, par implications, le sens direct $P \Rightarrow Q$ puis sa réciproque $Q \Rightarrow P$.

La **démonstration d'une proposition universelle**, souvent formulée sous la forme d'une interrogation, laisserait penser qu'un contre-exemple est à trouver.

La **démonstration par disjonction de cas** consiste à segmenter la démonstration suivant différents cas particuliers où la nature est objets est plus facile à manipuler. Par exemple, l'expression de $(-1)^n$ est déterminable si l'on connaît la parité de n.

La **démonstration par l'absurde** consiste à supposer la proposition inverse $\neg P$ d'une proposition P et aboutir à une incohérence mathématique.

La **démonstration par contraposée** consiste à justifier l'implication $P \Rightarrow Q$ en démontrant $\neg P \Rightarrow \neg Q$, car les deux propositions sont équivalentes.

Algèbre

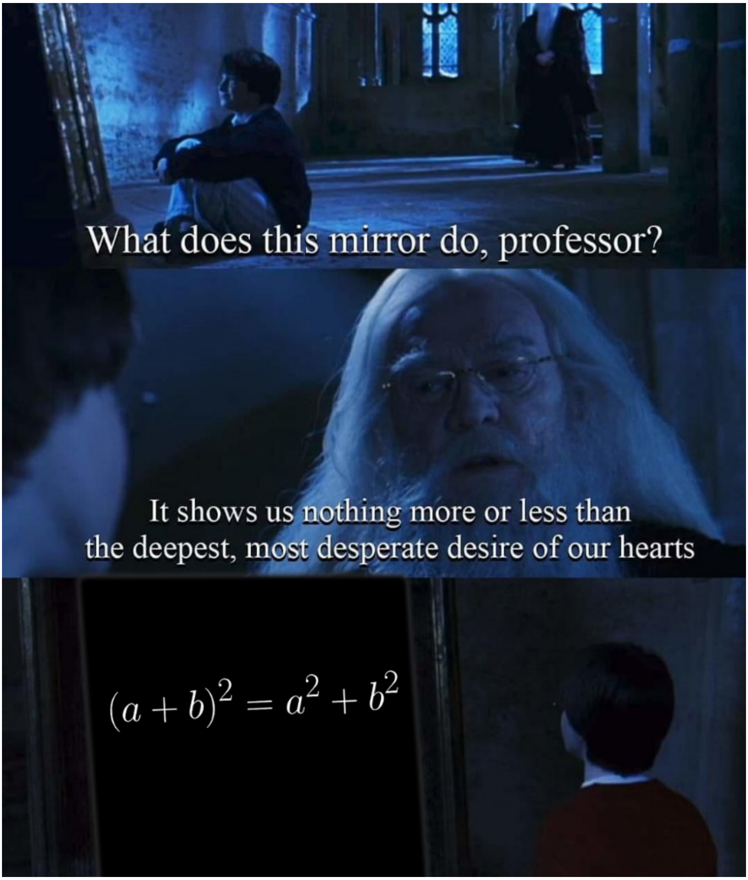
« L’algèbre ressemble à un tunnel ; vous passez sous la montagne, sans vous occuper des villages et des chemins tournants ; vous êtes de l'autre côté, et vous n'avez rien vu. »

Émile-Auguste Chartier, *Propos sur l’éducation* (1932)

L’algèbre, de l’arabe *al-ǧabr* (الجبر) « réunion (de morceaux) », étudie la résolution de problèmes mathématiques, exprimés sous forme d’équations, à travers diverses propriétés et opérations.

On doit la démocratisation de l’algèbre au mathématicien arabe Al-Khwarizmi (الخوارزمي) et son ouvrage *Abrégé du calcul par la restauration et la comparaison* ('الكتاب المختصر في حساب الجبر و المقابلة) alors que la méthode scientifique des différentes cultures de l’époque comptait sur des algorithmes convergents ou encore des raisonnements géométriques.

Dans cette partie, nous approfondirons la notion d’ensemble établie les années précédentes.



« And I believe that the Binomial Theorem and a Bach Fugue are, in the long run, more important than all the battles of history. »

James Hilton, *This Week Magazine* (1937)

Trouver les différentes façons possibles de trier des n-uplets (couples ou doublets, triplets, ...) au sein d'un ensemble fini est un problème traçant ses origines à l'Antiquité. Les définitions et outils abordés dans ce chapitre permettent la résolution de problèmes d'organisation tels que la répartition d'invités lors d'une réception ou encore la probabilité qu'un groupe particulier soit choisi.

Sommaire

Cours

Exercices d'application

Exercices d'approfondissement

Correction des exercices

Cours

I. Dénombrement

1. Ensembles finis, disjoints et cardinal d'un ensemble

Soit E un ensemble.

Définition (Ensemble fini)

E est dit un **ensemble fini** si E contient un nombre fini d'éléments.

Définition (Ensembles disjoints)

Deux ensembles E et E' sont dits **disjoints** s'il n'existe aucun élément commun aux deux ensembles, on note alors $E \cap E' = \emptyset$.

Définition (Cardinal d'un ensemble)

Le **cardinal** d'un ensemble E, noté $\operatorname{card}(E)$ ou $|E|$, correspond au nombre d'éléments de l'ensemble E.

Propriété (Cardinalité de l'ensemble vide)

Par convention, $\operatorname{card}(\emptyset) = 0$.

2. Principe additif et multiplicatif

Soit $\{E_1, \dots, E_n\}$ une famille de $n \in \mathbb{N}^*$ ensembles finis et $p \leq n$.

Propriété (Principe additif)

Si $E_1, \dots, E_p$ sont 2-à-2 disjoints, i.e. $\forall i, j \leq p, i \neq j \Leftrightarrow E_i \cap E_j = \emptyset$, alors :

$$\operatorname{card}(E_1 \cup \dots \cup E_p) = \operatorname{card}(E_1) + \dots + \operatorname{card}(E_p)$$

Définition (Produit cartésien)

Le **produit cartésien** de E_1 par E_2, noté $E_1 \times E_2$, correspond à l'ensemble des couples (e_1, e_2) où $e_1 \in E_1$ et $e_2 \in E_2$. Cette notion s'étend à l'ensemble des p-uplets $E_1 \times \dots \times E_p$. Finalement, on note $E_1^p = \underbrace{E_1 \times \dots \times E_1}_{p \text{ produits}}$.

Propriété (Principe multiplicatif)

On a,

$$\operatorname{card}(E_1 \times \dots \times E_p) = \operatorname{card}(E_1) \times \dots \times \operatorname{card}(E_p)$$

II. Arrangements et permutations

1. La factorielle d'un entier naturel

Définition (Factorielle n)

La **factorielle** d'un entier naturel non nul n, notée $n!$, est définie par :

$$n! = n \times (n-1) \times ... \times 2 \times 1$$

Propriété (Factorielle 0)

Par convention, $0! = 1$.

2. Arrangements et permutations

Soit E un ensemble de cardinal $|E| = n \in \mathbb{N}^*$ et $p \leq n$.

Définition (Arrangement)

Un **arrangement** de p éléments de E est un p-uplet d'éléments distincts de E dont l'ordre est fixe.

Propriété (Nombre d'arrangements)

Il existe $\frac{n!}{(n-p)!}$ arrangements de p éléments de E.

Définition (Permutation)

Une **permutation** est un arrangement à n éléments de E.

Propriété (Nombre de permutations)

Il existe $n!$ permutations de E.

III. Combinaisons

1. Coefficient binomial

Soit n, p deux entiers naturels tel que $p \leq n$.

Définition (Coefficient binomial)

Le **coefficient binomial**, noté $\binom{n}{p}$ et lu « p parmi n », est défini par :

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}$$

Propriétés (Coefficient binomial)

On a les propriétés suivantes :

- **Symétrie** : $\binom{n}{n-p} = \binom{n}{p}$
- **Relation de Pascal** : $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$ $\qquad (0 \leq p < n)$

De plus, on retiendra les valeurs : $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$ et $\binom{n}{1} = \binom{n}{n-1} = n$.

Démonstration (Relation de Pascal)

On a,

$$\begin{aligned}
\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} &= \frac{n!}{p!(n-p)!} + \frac{n!}{(p+1)!(n-(p+1))!} \\
&= \frac{n!}{p!(n-p)!} \times \frac{(p+1)}{(p+1)} + \frac{n!}{(p+1)!(n-(p+1))!} \times \frac{(n-p)}{(n-p)} \\
&= \frac{n!(p+1)}{(p+1)!(n-p)!} + \frac{n!(n-p)}{(p+1)!(n-p)!} \\
&= \frac{n!\cdot(n+1)}{(p+1)!(n-p)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{(p+1)!\big((n+1)-(p+1)\big)!} \\
&= \binom{n+1}{p+1}
\end{aligned}$$

Remarque (Triangle de Pascal)

Le **Triangle de Pascal**, connu en Chine comme le « Triangle de Yang Hui », est une illustration de la relation de Pascal permettant la simplification du calcul de coefficients binomiaux :

n \ k	0	1	2	3	4
0	1				
1	1	1			
2	1	2	1		
3	1	3	3	1	
4	1	4	6	4	1

2. Combinaisons

Soit E un ensemble de cardinal $|E| = n \in \mathbb{N}^*$ et $p \leq n$.

Définition (Combinaison)

Une **combinaison** $\mathcal{E}_p$ de p-éléments de E est telle que $\mathcal{E}_p \subset E$ et $|\mathcal{E}_p| = p$.

Propriété (Nombre de combinaisons)

Il existe $\binom{n}{p}$ combinaisons de p-éléments de E.

Propriété (Nombre de sous-ensembles)

Il existe $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$ sous-ensembles de E.

Démonstration (Nombre de sous-ensembles)

Pour construire un sous-ensemble de E, on décide d'ajouter, ou non, un élément de E à notre sous-ensemble. En réitérant ce procédé aux n éléments de E, on se retrouve avec $2 \times \ldots \times 2 = 2^n$ possibilités de sous-ensembles.

Exercices d'application

1. Dénombrement d'ensembles

1) Un restaurant propose 2 entrées, 3 plats et 4 desserts. On suppose qu'une commande contient exactement une entrée, un plat et un dessert.
   a. Déterminer le nombre de commandes possibles.
   b. Supposons qu'on souhaite changer le nombre de desserts proposés de sorte à avoir 30 combinaisons de commandes possibles, quel doit être le nouveau nombre de desserts ?
   c. On retient le nombre de desserts de la question précédente. Supposons qu'une commande contient désormais exactement une entrée, un plat et deux desserts, sachant qu'on puisse commander deux fois le même dessert, que devient le nombre de commandes possibles ?

2) L'accès à un immeuble est contrôlé par une saisie sur digicode. Le code secret est une combinaison de 4 caractères. Le clavier est composé des chiffres 0 à 9 et des lettres A et B, un caractère peut apparaître plusieurs fois.
   a. Déterminer le nombre de codes possibles.
   b. Supposons qu'un caractère ne peut être utilisé qu'une fois, que devient le nouveau nombre de codes possibles ? On oubliera cette supposition par la suite.
   c. Calculer le pourcentage de codes composés uniquement de chiffres pairs.
   d. Un autre clavier digicode est dit possédé 65536 combinaisons possibles. Supposons qu'un caractère puisse y apparaître plusieurs fois, quel est le nombre de caractères de ce nouveau digicode ?

3) Une classe de 16 garçons et 16 filles décide d'élire deux délégués.
   a. Déterminer le nombre de paires de délégués possibles si l'on attribue une place de délégué par sexe. Qu'en est-il si l'on omet cette condition ?
   b. Comme première réforme, les délégués décident d'attribuer les places de chaque élève. Combien de plans de classe sont possibles ?

2. Combinatoire aux cartes

On tire 5 cartes d'un jeu de 52 cartes composé des 4 familles de cœur, carreau, trèfle et pique. Chaque famille comporte 13 cartes numérotées de 1 à 10 puis J, Q, K. On référera à une carte portant la valeur 1 comme un « as ».

1) Déterminer le nombre de tirages possibles.

2) Déterminer le nombre de tirages possibles sous les conditions suivantes :
   a. On pioche 5 carreaux ou 5 cœurs.
   b. On pioche 2 trèfles et 3 piques.
   c. On pioche au moins 1 as.
   d. On pioche au plus 1 as.

3) Déterminer la probabilité d'obtenir les tirages suivants :
   a. Un « Three of a Kind », trois cartes de même valeur et deux cartes de valeurs différentes à la première.
   b. Un « Flush », cinq cartes de même couleur.
   c. Un « Two Pair », deux paires et une carte de valeur différente à la première et seconde paire.

3. Équilibre des tours

On considère un échiquier de taille $n \times n$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et p tours où $p \leq n$. En rappelant qu'une tour au jeu d'échecs peut attaquer n'importe quelle pièce rencontrée horizontalement ou verticalement, combien de configurations où les tours ne peuvent pas s'attaquer existe-t-il ?

Exercices d'approfondissement

4. Binôme de Newton

Généralisé en Occident par le mathématicien anglais Isaac Newton, le binôme qui lui est associé permet d'établir l'expression d'un développement en puissance :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

où a, b sont deux réels et n un entier naturel.

1) Soit $a, b \in \mathbb{R}$, étudions les cas $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$
   a. Rappeler les expressions de $(a+b)^0$, $(a+b)^1$ et $(a+b)^2$.
   b. Développer $(a+b)^3$ et $\sum_{k=0}^{3} \binom{3}{k} a^{3-k} b^k$. Que remarquez-vous ?
   c. Conjecturer les coefficients associés aux $a^i b^j$ de $(a+b)^4$.

2) Déterminons les coefficients associés au binôme $(a+b)^5$
   a. Construire le triangle de Pascal pour $n \in [\![0, 4]\!]$. Que remarquez-vous ?
   b. A l'aide des propriétés du coefficient binomial, construisez le cas $n = 5$.
   c. En supposant la formule du binôme vraie, déduire l'expression de $(a+b)^5$.

5. Construction du Triangle de Pascal

On souhaite construire le Triangle de Pascal à l'aide de Python.

1) Construisons le triangle à partir de la définition d'un nombre factoriel.
   a. Écrire un programme en Python qui, pour un entier n donné en argument de la fonction, renvoie son nombre factoriel $n!$.
   b. Écrire un programme en Python qui, pour deux entiers n, k donnés en arguments de la fonction, renvoie le coefficient binomial $\binom{n}{k}$.
   c. Écrire un programme en Python qui, pour un entier N donné en argument de la fonction, affiche les N premiers étages du Triangle de Pascal.

2) Construisons le triangle à partir de la relation de Pascal.
   a. Écrire "$\mathrm{L} = \big[[1,2],[3,4]\big]$" sur Python, qu'est-ce que les commandes "$\mathrm{L}[0]$" et "$\mathrm{L}[1][0]$" affichent ?
   b. Écrire un programme en Python qui, pour un entier N donné en argument de la fonction, construit et affiche ligne par ligne les N premières lignes du Triangle de Pascal en utilisant la relation de Pascal, on considérera que $\mathrm{L}[\mathrm{k}]$ représente la $\mathrm{k}+1$-ème ligne et que pour $k > n$, $\binom{n}{k} = 0$. On construira la liste de listes vides de taille N à partir de la commande "$[\mathrm{L} \;=\; [0] \times\ \mathrm{N\,for\,p\,in\,range(N)}]$".
   c. Selon vous, quelle méthode est la plus rapide des deux ?

6. Scale of powers

Compare the following numbers : $(3 \times 2)^4$, $(3^2)^4$, $3^{(2^4)}$, $3^4 \times 2^4$ and $3^{(2\times 4)}$ without calculating them.

Correction des exercices

1. Dénombrement d'ensembles

1)

a. On remarque que la commande est un triplet appartenant au produit cartésien $E \times P \times D$ où E, P et D représentent les ensembles des entrées, plats et desserts disponibles respectivement. Ainsi, le nombre de commandes possibles est égal au nombre d'éléments du produit cartésien.
D'où, par principe multiplicatif, $|E \times P \times D| = |\mathrm{E}| \times |P| \times |D| = 24$.
Le nombre de commandes possibles est 24.

b. On a, $\mathrm{card}(E \times P \times D) = 30 \Leftrightarrow |D| = \frac{30}{|E| \times |P|} = 5$.
Pour obtenir 30 uniques commandes, il faut proposer 5 desserts.

c. On ne considère plus l'ensemble $D = \{\text{dessert } 1, \dots, \text{dessert } 5\}$ mais plutôt l'ensemble des couples de desserts possibles $D^2 = \{(\text{dessert } 1, \text{dessert } 1), (\text{dessert } 1, \text{dessert } 2), \dots, (\text{dessert } 5, \text{dessert } 5)\}$ de cardinal $|D^2| = |D|^2 = 25$.
Donc, $|E \times P \times D^2| = 150$.
Le nombre de commandes possibles devient 150.

2)

a. On remarque que le digicode est un quadruplet appartenant au produit cartésien E^4 où E représente l'ensemble des caractères du digicode. Ainsi, le nombre de codes possibles est égal au nombre d'éléments du produit cartésien.
D'où, $|E^4| = |E|^4 = 12^4 = 20\,736$.
Le nombre de codes possibles est 20 736.

b. On considère désormais le digicode comme un arrangement de 4 caractères parmi les 12 disponibles.
Or, le nombre d'arrangements de 4 éléments de E est $\frac{12!}{(12-4)!} = 11\,880$.
Le nouveau nombre de codes possibles est 11 880.

c. Soit $E' = \{0, 2, 4, 6, 8\}$

Or, le nombre de codes possibles est $|E'|^4 = 5^4 = 625$.

Le pourcentage de codes pairs est $\frac{625}{20\,736} \simeq 0.03 = 3\%$.

d. De manière similaire à la question 2) a., on a,

$n^4 = 65\,536 \Longrightarrow n = (65\,536)^{1/4} = 16$.

Le nouveau digicode possède un clavier à 16 caractères.

3)

a. On remarque que les délégués forment un couple appartenant au produit cartésien $G \times F$ où G et F représentent l'ensemble des garçons et filles respectivement. Ainsi, le nombre de paires de délégués possibles est égal au nombre d'éléments du produit cartésien.

D'où, $|G \times F| = |G| \times |F| = \binom{16}{1}\binom{16}{1} = 16^2 = 256$.

Le nombre de paires de délégués possibles est 256.

Si la classe décide d'élire deux délégués indifféremment de leur sexe, on se retrouve avec $\binom{32}{2} = \frac{32!}{2!30!} = \frac{32\times31}{2\times1} = 496$ combinaisons de délégués.

b. Le plan de classe est distribué comme une permutation des élèves de la classe. En effet, après avoir choisi un élève, il nous reste 35 possibilités, après avoir choisi le second élève, il nous reste 34 possibilités, ce procédé est répété jusqu'à qu'il ne reste plus qu'un élève à placer.

Or, $36! \simeq 3.72 \cdot 10^{41}$.

Il existe plus de 10^{41} possibilités de plans de classe.

2. Combinatoire aux cartes

1) Le nombre de combinaisons de 5 cartes parmi le jeu de 52 cartes correspond au coefficient binomial $\binom{52}{5} = \frac{52!}{5!47!} = \frac{52\times51\times50\times49\times48}{5\times4\times3\times2\times1} = 2\,598\,960$.

2)

a. Le nombre de combinaisons de 5 carreaux parmi les 13 présents dans le jeu correspond au coefficient binomial $\binom{13}{5} = 1\,287$.
De manière similaire, on a 1 287 combinaisons de 5 cœurs.
La situation décrite étant la réunion de deux ensembles disjoints, on peut sommer les tirages.
Le nombre de tirages possibles est donc $1\,287 + 1\,287 = 2574$.

b. Supposons qu'on ait 2 trèfles, le nombre de tirages où les trois cartes autres sont des piques correspond au coefficient binomial $\binom{13}{3} = 286$. Sachant qu'il existe $\binom{13}{2} = 78$ tirages différents de 2 trèfles, on a au total $78 \times 286 = 22\,308$ tirages possibles sous ces conditions.

c. Piocher au moins 1 as revient à ne pas piocher 0 as. On en déduit que le nombre de tirages sous ces conditions est le nombre de tirages au total soustrait au nombres de tirages où l'on ne pioche aucun as. D'après la question 1), on retrouve $\binom{52}{5} - \binom{48}{5} = 321\,292$ tirages possibles sous ces conditions.

d. Supposons qu'on ait 1 as, le nombre de tirages où les quatre autres cartes ne sont pas des as correspond au coefficient binomial $\binom{48}{4} = 194\,580$. Sachant qu'il existe $\binom{4}{1} = 4$ tirages différents de 1 as, on a au total $\binom{4}{0}\binom{48}{5} + \binom{4}{1}\binom{48}{4} = 2\,490\,624$ tirages possibles sous ces conditions.

3) On suppose un tirage équiprobable.

a. On a, $\dfrac{\binom{13}{1}\binom{4}{3}\binom{12}{2}\binom{4}{1}^2}{\binom{52}{5}} = 0.0475$

b. On a, $\dfrac{\binom{13}{5}\binom{4}{1}}{\binom{52}{5}} = 0.0020$

c. On a, $\dfrac{\binom{13}{2}\binom{4}{2}^2\binom{11}{1}\binom{4}{1}}{\binom{52}{5}} = 0.4226$

3. Équilibre des tours

La première tour peut être placé librement sur une des n^2 cases, la seconde tour ne doit pas partager la même ligne que la première, il y a donc $(n-1)$ choix possibles pour sa ligne, de même pour sa colonne, elle possède donc $(n-1)^2$ cases de libres. On répète ce procédé jusqu'à la p-ème tour qui possède $(n-(p+1))^2$ cases de libres. Finalement, on obtient $n^2 \times \cdots \times (n-(p+1))^2$ configurations possibles ou encore $\left(A_n^p\right)^2$ où le carré du nombre d'arrangements de p éléments dans un ensemble à n éléments.

4. Binôme de Newton

1)

a. On a, pour tout réel a et b,
$(a+b)^0 = 1$
$(a+b)^1 = a+b$
$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$

b. On a, $\forall a, b \in \mathbb{R}$,
$$\begin{aligned}(a+b)^3 &= (a+b)^2(a+b)\\ &= (a^2+2ab+b^2)(a+b)\\ &= a^3+2a^2b+ab^2+a^2b+2ab^2+b^3\\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}a^{3-k}b^k &= \binom{3}{0}a^3+\binom{3}{1}a^2b+\binom{3}{2}ab^2+\binom{3}{3}b^3\\ &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\end{aligned}$$
On remarque que $\forall a, b \in \mathbb{R}, (a+b)^3 = \sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}a^{3-k}b^k$

c. On conjecture que $\forall a, b \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$
Donc, d'après notre conjecture, les coefficients devant les a^ib^j du développement $(a+b)^n$ seraient $\binom{n}{j}$ avec $i = n-j$ ou encore par symétrie du coefficient binomial $\binom{n}{i}$ et $j = n-i$.
Ainsi, $$\begin{aligned}(a+b)^4 &= \binom{4}{0}a^4+\binom{4}{1}a^3b+\binom{4}{2}a^2b^2+\binom{4}{3}ab^3+\binom{4}{4}b^4\\ &= a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4\end{aligned}$$

2)

a. On a,

n \ k	0	1	2	3	4
0	1				
1	1	1			
2	1	2	1		
3	1	3	3	1	
4	1	4	6	4	1

On remarque que les coefficients de la n-ème ligne coïncident avec les coefficients du développement $(a+b)^n$.

b. Il suffit de calculer au plus $\frac{n+1}{2} = 3$ coefficients binomiaux à l'aide de la relation de Pascal, le reste s'obtient par symétrie.
Par valeurs remarquables, on a $\binom{5}{0} = 1$ et $\binom{5}{1} = 5$
De plus, $\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!3!} = 10$.
Finalement, par symétrie, $\binom{5}{3} = \binom{5}{2} = 10$, $\binom{5}{4} = 5$ et $\binom{5}{5} = 1$.

c. On a, par binôme de Newton, $\forall a, b \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(a+b)^5 &= \binom{5}{0}a^5 + \binom{5}{1}a^4b + \binom{5}{2}a^3b^2 + \binom{5}{3}a^2b^3 + \binom{5}{4}ab^4 + \binom{5}{5}b^5 \\ &= a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5\end{aligned}$$

5. Construction du Triangle de Pascal

1)

a. On rappelle que pour tout entier naturel n, le nombre factoriel $n!$ correspond au produit des entiers naturels non nuls inférieurs à n.

```
def fact(n) :
  P = 1
  for k in range(1, n+1) :
    P = P * k
  return P
```

b. On a,

```
def binom(n, k) :
    return fact(n) / (fact(n-k) * fact(k))
```

c. Il existe, comme toujours, plusieurs façons d'écrire le programme, ici on utilisera des chaînes de caractères (string) pour afficher le résultat, pour cela il faudra convertir les coefficients binomiaux (float), on utilisera la fonction préconstruite **str** qui convertit la nature d'un objet en chaîne de caractères. On rappelle de plus que l'opérateur $+$ entre deux chaînes de caractères renvoie la concaténation des deux chaînes de caractères, par exemple : "abc" $+$ "cba" renvoie "abccba". Finalement, la fonction préconstruite **print** affiche l'objet passé en argument.

```
def TrianglePascal(N) :
    for n in range(1, N+1) :
        ligne = ""
        for k in range(1, n+1) :
            ligne = ligne + str(binom(n, k)) + " "
        print(ligne)
```

2)

a. On remarque que la commande "$\mathrm{L}[0]$" renvoie la liste $[1, 2]$ tandis que la commande "$\mathrm{L}[1][0]$" renvoie le premier élément de la seconde liste 3.

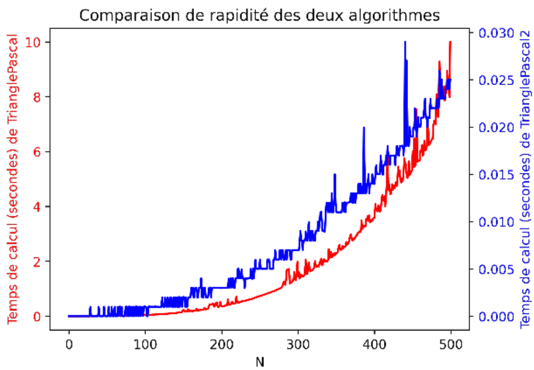
b. On a,

```
def TrianglePascal2(N) :
    L = [[0] * (N) for p in range(N)]
    for n in range(N) :
        for k in range(n+1) :
            if (k == 0) :
                L[n][k] = 1
            else :
                L[n][k] = L[n-1][k-1] + L[n-1][k]
        print(L[n])
```

c. La seconde méthode est plus rapide car elle utilise la relation de Pascal (addition d'entiers), alors que la première utilise des factoriels (produits).

Remarque

L'étude du temps de calcul d'un algorithme, dit **complexité algorithmique**, est central dans l'optimisation des programmes et permet de les comparer sans les exécuter. Ici, la première méthode imbrique trois boucles for (une boucle for qui contient une boucle for qui contient trois boucles for au même niveau de profondeur), sa complexité est dite d'ordre n^3 où n est le nombre d'itérations réalisé, la seconde méthode possède une complexité d'ordre n^2, ce qui explique l'explosion du temps de calcul de la première méthode par rapport à la seconde :



6. Scale of powers

We have,

$(3 \times 2)^4 = 3^4 \times 2^4$, $(3^2)^4 = 3^2 \times 3^2 \times 3^2 \times 3^2 = 3^{2+2+2+2} = 3^8$,

$3^{(2^4)} = 3^{(2\times2\times2\times2)} = 3^{16}$ and $3^{2\times4} = 3^8$.

Finally, $3^4 \times 2^4 < 3^4 \times 3^4 = 3^{4+4} = 3^8 < 3^{16}$.

Analyse

« L'analyse mathématique ne peut donner au physicien qu'un langage commode ; n'est-il pas à craindre que ce langage ne soit un voile interposé ? Loin de là, sans ce langage, la plupart des analogies intimes des choses nous seraient demeurées à jamais inconnues et nous aurions toujours ignoré l'harmonie interne du monde, qui est, la seule véritable réalité objective. »

Henri Poincaré, *La Valeur de la Science* (1905)

L'analyse, du grec antique *analúō* (ἀναλύω) « délier », étudie la notion de limites de suites et fonctions ainsi que des concepts orbitant comme la continuité, la dérivation et intégration de fonctions.

On doit la démocratisation de l'analyse aux mathématiciens européens modernes, originellement Newton et Leibniz, dont l'approfondissement fut principalement entrepris par Euler et Riemann.

Dans cette partie, nous approfondirons différentes notions permettant de caractériser les fonctions ainsi qu'étudierons certaines fonctions essentielles.

« In a race, the quickest runner can never over-take the slowest, since the pursuer must first reach the point whence the pursued started, so that the slower must always hold a lead. »

Aristote, *Physique VI* (IV$^{\text{è}}$ av. J.-C.)

Les suites numériques permettent la discrétisation de problèmes continus afin d'établir une première approche intuitive du comportement des fonctions à leurs limites. Nous étudierons une nouvelle méthode de démonstration ainsi qu'approfondirons la notion et les propriétés de limites de suites introduites en première. Les suites numériques trouvent de nombreuses applications dans la modélisation de problèmes d'architecture, de biologie ou encore de comptabilité.

Sommaire

Cours

Exercices d'application

Exercices d'approfondissement

Correction des exercices

COURS

I. Raisonnement par récurrence

1. Principe de récurrence

Définition (Hérédité d'une proposition)

Une proposition P_n est dite **héréditaire** à partir du rang $n_0 \in \mathbb{N}$ lorsque pour tout entier naturel $n \geq n_0$, P_n vraie implique que P_{n+1} l'est aussi.

Exemple (Hérédité d'une proposition)

Si l'on suppose une file de dominos et que le n_0-ème domino tombe, alors on sait que le (n_0+1)-ème domino tombera aussi et ainsi de suite. La proposition « Le domino de rang n tombe » est donc héréditaire à partir du rang n_0.

Théorème (Principe de récurrence)

Si une proposition P_n est vraie au rang $n_0 \in \mathbb{N}$ et héréditaire à partir de ce rang, alors P_n est vraie pour tout entier naturel $n \geq n_0$.

2. Inégalité de Bernoulli

Soit a un réel strictement positif.

Théorème (Inégalité de Bernoulli)

Pour tout entier naturel n, on a,

$$(1+a)^n \geq 1+na$$

Démonstration (Inégalité de Bernoulli)

On a, au rang $n=0$, $(1+a)^0 = 1 \geq 1+0\times a = 1$.

L'initialisation est vérifiée.

Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $(1+a)^n \geq 1+na$.

On a, $(1+a)^n \geq 1+na$ (hypothèse de récurrence)

$\Leftrightarrow (1+a)^n(1+a) \geq (1+na)(1+a)$

$\Leftrightarrow (1+a)^{n+1} \geq 1+(n+1)a+na^2 \geq 1+(n+1)a$ $(na^2 \geq 0)$

L'hérédité est vérifiée.

Comme la proposition est vraie au rang $n=0$ et héréditaire à partir de ce rang. Par principe de récurrence, on a, $\forall n \in \mathbb{N}, (1+a)^n \geq 1+na$.

II. Limite d'une suite

1. Limite finie ou infinie

Soit u_n une suite numérique définie sur $\mathbb{N}$.

Définition (Suite convergente)

Une suite u_n est dite **convergente** si elle admet pour limite $L \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire si pour tout intervalle ouvert I contenant L, I contient aussi tous les termes de u_n à partir d'un certain rang. On note alors :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = L$$

Définition (Suite divergente)

Une suite u_n est dite **divergente** lorsqu'elle ne converge pas. Il existe alors différents cas de divergence :

- **Divergence vers** $+\infty$: Pour tout intervalle $I =]A, +\infty[$ où $A \in \mathbb{R}$, I contient tous les termes de u_n à partir d'un certain rang. On note alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$
- **Divergence vers** $-\infty$: Pour tout intervalle $I =]-\infty, B[$ où $B \in \mathbb{R}$, I contient tous les termes de u_n à partir d'un certain rang. On note alors : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$
- **Limite non définie** : La suite u_n ne tend vers aucune valeur, finie ou infinie.

Remarque

La notation $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$ n'est valide que lorsque la convergence (ou divergence vers $\pm\infty$) a été démontrée, cette limite est par ailleurs unique.

Propriété (Limites usuelles)

On a,

$$\lim_{n \to +\infty} n = \lim_{n \to +\infty} n^2 = \lim_{n \to +\infty} \sqrt{n} = +\infty$$
$$\lim_{n \to +\infty} 1/n = \lim_{n \to +\infty} 1/n^2 = \lim_{n \to +\infty} 1/\sqrt{n} = 0$$

2. Opérations et théorèmes sur les limites

Soit u_n, v_n et w_n deux suites numériques définies sur $\mathbb{N}$.

Propriétés (Limite d'une somme et produit par un scalaire)

Soit k, L et L' des réels et $w_n = u_n + v_n$, on a,

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$	$L+L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$F.I.$

De plus, si $w_n = ku_n$, on a,

$k \in$	$\mathbb{R}$	$\{0\}$	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}_-^*$	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}_-^*$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	L	$\pm\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$	kL	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Propriétés (Limite d'un produit et quotient)

Soit L et L' des réels et $w_n = u_n \times v_n$, on a,

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	L	L	$\pm\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	L'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$	$L \times L'$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$F.I.$

De plus, si $w_n = u_n/v_n$, on a,

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	L	$L \neq 0$	L	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$L' \neq 0$	$0^{\pm}$	$\pm\infty$	L	$\pm\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} w_n$	L/L'	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	$F.I.$	$F.I.$

Remarques

La notation « F.I. » correspond à une forme indéterminée, qui nécessite une étude plus approfondie de l'expression de la suite pour aboutir au résultat.

De plus, lorsqu'un résultat est $\pm\infty$, on applique la règle des signes.

Finalement, la notation 0^+ (respectivement 0^-) correspond à une suite convergente vers 0 positivement (resp. négativement). Par exemple, $u_n = -1/n$ converge vers 0 négativement, la règle des signes l'a considère donc négative.

Théorème (Théorème de comparaison)

Si, à partir d'un rang $n_0 \in \mathbb{N}$, on a, pour tout entier $n \geq n_0$, $u_n \leq v_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

Démonstration (Théorème de comparaison)

On sait, par définition de la divergence de u_n, qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0, u_n$ appartient à un intervalle ouvert de la forme $]A, +\infty[$ où $A \in \mathbb{R}$.

De plus, par hypothèse, il existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_1, u_n \leq v_n$.

Donc, $\forall n \geq \max(n_0, n_1)\,, a < u_n \leq v_n \Longrightarrow a < v_n$.

La suite v_n vérifie la définition d'une suite divergente qui tend vers $+\infty$.

Donc, $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = +\infty$.

Corollaire (Théorème de comparaison)

De manière similaire, si à partir de $n_0 \in \mathbb{N}$, on a pour tout entier $n \geq n_0$, $u_n \geq v_n$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = -\infty$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$.

Théorème (Théorème d'encadrement)

Si à partir d'un rang $n_0 \in \mathbb{N}$, on a pour tout entier $n \geq n_0$, $u_n \leq v_n \leq w_n$ avec $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \lim\limits_{n \to +\infty} w_n = L \in \mathbb{R}$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = L$.

Remarque

Le théorème d'encadrement est aussi appelé **théorème des gendarmes**, faisant référence à deux gendarmes qui embarquent un suspect en tenant chacun un bras vers la gendarmerie, symbolisant la destination commune L.

III. Suites minorées, majorées et bornées

1. Suites minorées, majorées et bornées

Soit u_n une suite numérique définie sur $\mathbb{N}$.

Définition (Suite minorée, majorée et bornée)

Une suite u_n est dite **majorée** (respectivement **minorée**) s'il existe $M \in \mathbb{R}$ (resp. $m \in \mathbb{R}$) tel que pour tout entier naturel n, $u_n \leq M$ (resp. $u_n \geq m$). On dit que u_n est **bornée** si elle est à la fois minorée et majorée.

Propriété (Suite monotone minorée, majorée)

Si u_n admet pour limite $L \in \mathbb{R}$ et qu'elle est croissante sur $\mathbb{N}$ (respectivement décroissante sur $\mathbb{N}$), u_n est majorée (resp. minorée) par L.

Théorème (Convergence monotone)

Si u_n est croissante et majorée ou décroissante et minorée, alors elle est convergente.

Corollaire (Convergence monotone)

Si u_n est croissante et non majorée (respectivement décroissante et non minorée), alors elle est divergente vers $+\infty$ (resp. $-\infty$).

Démonstration (Convergence monotone)

Soit a un réel.

Comme u_n n'est pas majorée, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $u_{n_0} > a$.

De plus, comme u_n est croissante, pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq u_{n_0} > a$.

Il existe donc un rang n_0 à partir duquel tous les termes de u_n appartiennent à un intervalle ouvert de la forme $]A, +\infty[$ où $A \in \mathbb{R}$.

La suite u_n vérifie la définition d'une suite divergente qui tend vers $+\infty$.

Donc, $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

Remarque

En considérant la suite $-u_n$ on retrouve la démonstration d'une suite non minorée et décroissante qui tend vers $-\infty$.

2. Rappels sur les suites arithmétiques et géométriques

Soit u_n, v_n deux suites numériques définies sur $\mathbb{N}$.

Définitions (Suite arithmétique, suite géométrique)

Une **suite arithmétique** est une suite numérique u_n pour laquelle il existe un réel r, appelé **raison arithmétique**, tel que pour tout entier naturel n, on a,

$$u_{n+1} = u_n + r$$

Une **suite géométrique** est une suite numérique u_n pour laquelle il existe un réel q, appelé **raison géométrique**, tel que pour tout entier naturel n, on a,

$$u_{n+1} = u_n \times q$$

Théorèmes (Termes généraux d'une suite arithmétique et géométrique)

Si u_n est une suite arithmétique de raison $r \in \mathbb{R}$, alors pour tout entier naturel n, on a,

$$u_n = u_0 + nr$$

Si v_n est une suite géométrique de raison $q \in \mathbb{R}$, alors pour tout entier naturel n, on a,

$$v_n = v_0 \times q^n$$

Théorèmes (Sommes des premiers entiers et suite géométrique)

Pour tout entier naturel n, on a,

$$\sum_{k=0}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + \cdots + q^n = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

On en déduit que si u_n est arithmétique de raison r et v_n est géométrique de raison q, pour tout entier naturel n, on a,

$$\sum_{k=0}^{n} (u_0 + kr) = u_0 \cdot (n+1) + \frac{n(n+1)}{2} \cdot r = \frac{(u_0 + u_n)(n+1)}{2}$$

$$\sum_{k=0}^{n} (v_0 \times q^k) = v_0 \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Propriétés (Variations d'une suite arithmétique et géométrique)

Si u_n est une suite arithmétique de raison r et v_n une suite géométrique de raison q et premier terme v_0, on a,

r	$r < 0$	$r = 0$	$r > 0$	
u	décroissante	constante	croissante	
q	$q < 0$	$q \in \{0, 1\}$	$0 < q < 1$	$1 < q$
v $(v_0 > 0)$	pas de sens	constante	décroissante	croissante
v $(v_0 < 0)$	pas de sens	constante	croissante	décroissante

Théorèmes (Limites d'une suite arithmétique et géométrique)

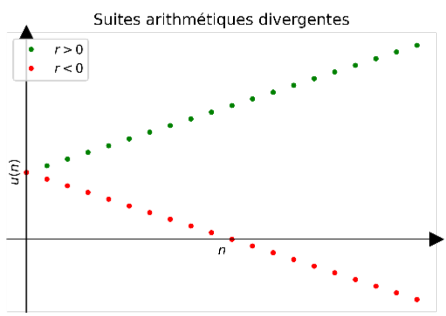
Si u_n est une suite arithmétique de raison r et premier terme u_0 ainsi que v_n une suite géométrique de raison q et premier terme v_0, on a,

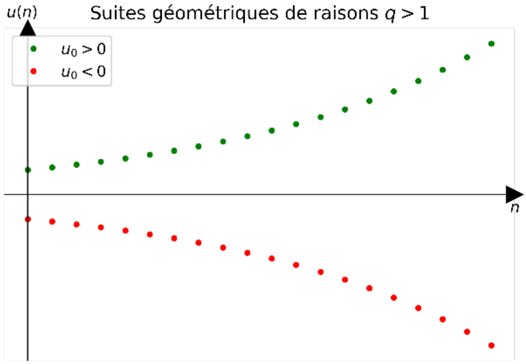
r	$r < 0$	$r = 0$	$r > 0$	
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$-\infty$	u_0	$+\infty$	
q	$q \leq -1$	$-1 < q < 1$	$q = 1$	$1 < q$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	pas de limite	0	v_0	$\text{signe}(v_0) \cdot \infty$

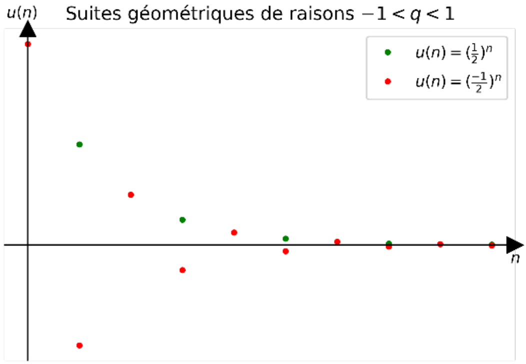
Démonstration (Limite d'une suite géométrique)

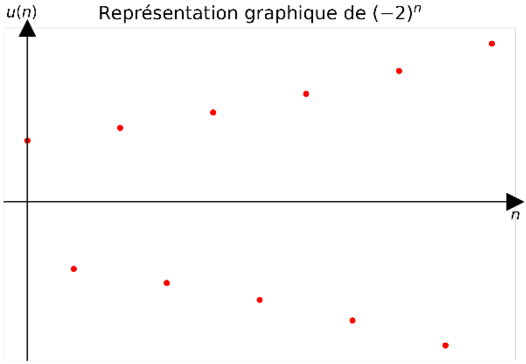
Soit une suite géométrique de raison $q > 1$ et premier terme 1.

On a, par inégalité de Bernoulli, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall a \in \mathbb{R}_+^*, (1+a)^n \geq 1 + na$.
On pose $q = a + 1$, ainsi pour tout entier naturel n, $q^n \geq 1 + na$.
Or, comme $a > 0$, la suite $(1 + na)$ diverge vers $+\infty$.
Donc, par théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.




Suites géométriques de raisons $q > 1$
$u(n)$
$u_0 > 0$
$u_0 < 0$
n


Suites géométriques de raisons $-1 < q < 1$
$u(n)$
$u(n) = (\frac{1}{2})^n$
$u(n) = (\frac{-1}{2})^n$
n


Représentation graphique de $(-2)^n$
$u(n)$
n

Exercices d'application

1. Assertions et démonstrations

Soit (u_n) et (v_n) deux suites numériques définies sur $\mathbb{N}$.

1) Déterminer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses, justifiez vos réponses par une démonstration ou un contre-exemple.
   a. Si (u_n) et (v_n) divergent, alors $(u_n + v_n)$ diverge.
   b. Si (u_n) converge et (v_n) diverge, alors $(u_n \times v_n)$ diverge.
   c. Si (u_n) n'est pas majorée, alors (u_n) diverge vers $+\infty$.
   d. Si (u_n) diverge vers $+\infty$, alors (u_n) croît à partir d'un certain rang.
   e. Si (u_n) est bornée à partir d'un certain rang, alors (u_n) converge.
   f. Si (u_n) est géométrique de raison q non nulle, alors $(1/u_n)$ est géométrique de raison $1/q$.
   g. Si (u_n) est arithmétique de raison r non nulle, alors (u_n) diverge.

2) Démontrer les propositions suivantes avec le raisonnement approprié.
   a. Pour tout entier naturel n, $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
   b. Pour tout entier naturel n, $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
   c. Pour tout entier naturel n, $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=0}^{n} k\right)^2 = \frac{n^2(n+1)^2(2n+1)^2}{36}$
   d. Pour tout entier naturel n, si n^2 est impair, alors n est impair.

2. Étude généralisée de suites

1) On étudie l'évolution de la population de bactéries dans un laboratoire. On a les populations des trois premiers jours $b_1 = 256$, $b_2 = 768$ et $b_3 = 2304$ bactéries où (b_n) correspond au nombre de bactéries le n-ème jour.
   a. Modéliser de la façon la plus adaptée la suite (b_n).
   b. D'après le modèle, déterminer à partir de quel jour la population excèdera les deux millions de bactéries.
   c. On estime la masse d'une bactérie à 10^{-16} kg, déterminer la masse totale de bactéries présente dans le laboratoire au 30ème jour.
   d. Déterminer la limite théorique du nombre de bactéries.
   e. En supposant que chaque bactérie se reproduit en se divisant en d'autres bactéries, cessant donc d'exister personnellement, déterminer le nombre de bactéries ayant vécu dans le laboratoire les dix premiers jours.

2) On étudie l'architecture d'un amphithéâtre. Le nombre de places par rangée augmente de quatre places à chaque nouvelle rangée et démarre à $r_1 = 10$ places où (r_n) correspond au nombre de places de la n-ème rangée.
   a. Déterminer l'expression de (r_n).
   b. Déterminer le nombre de places de la 4ème rangée.
   c. On dispose de 90 sièges, combien de rangées sont possibles ?

3) Soit (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$, on admettra $u_n \neq 0$.
   a. Soit (v_n) définie telle que pour tout entier naturel n, $v_n = \frac{1+u_n}{u_n}$, démontrer que la suite (v_n) est arithmétique.
   b. Déduire l'expression de (u_n)
   c. Déterminer le sens de variations de (u_n).
   d. Démontrer que (u_n) est bornée par 0 et 1.
   e. Déduire la limite de (u_n).

3. Étude de suites particulières

1) Soit (u_n) définie telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \sqrt{n + \sqrt{n - 1 + \sqrt{\ldots + \sqrt{1}}}}$
   a. Déterminer la relation de récurrence entre u_{n+1} et u_n.
   b. Démontrer que la suite $\left(\frac{u_n}{\sqrt{n}}\right)$ est minorée par 1.
   c. On suppose que $\left(\frac{u_n}{\sqrt{n}}\right)$ est majorée par $\left(\sqrt{1 + 2\frac{\sqrt{n-1}}{n}}\right)$, déterminer la limite de (u_n).

2) Soit (u_n) définie telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{n+2}{n^2+2n+1}$
   a. Déterminer le sens de variations de (u_n).
   b. Démontrer que (u_n) est majorée par 2.
   c. Déterminer la limite de (u_n).

3) Soit (u_n) et (v_n) définies telles que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n + n$ et $v_n = 2^n - n$.
   a. Soit (s_n) et (v_n) définies telles que $\forall n \in \mathbb{N}, s_n = \frac{u_n+v_n}{2}$ et $v_n = \frac{u_n-v_n}{2}$, démontrer que les suites (s_n) et (d_n) sont géométrique et arithmétique respectivement.
   b. Démontrer que (s_n) est bornée par (u_n) et (v_n).
   c. On suppose que (v_n) diverge vers $+\infty$, en déduire la limite de (s_n).

4) Soit (u_n) définie par $u_0 = 1$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - 1$
   a. Soit (e_n) définie telle que $\forall n \in \mathbb{N}, e_n = e^{-u_n}$, démontrer que la suite (e_n) est géométrique.
   b. Déterminer l'expression de (u_n).
   c. Déterminer la limite de (u_n).

4. Étude de convergence de suites

Soit (u_n) une suite numérique.

1) Après avoir établi leur nature convergente ou divergente, déterminer les éventuelles limites des suites suivantes :

   a. $u_n = \frac{\cos(n)+\sin(n)}{\sqrt{n}}$

   b. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

   c. $u_n = \frac{3^n-(-2)^n}{3^n}$

   d. $u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}$

   e. $u_n = e^{-\frac{1}{n+1}}$

   f. $u_n = \frac{n^2-1}{n+1}$

   g. $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$

   h. $u_n = \frac{n^2+n}{1-n^2}$

   i. $u_n = 3 + \frac{2}{n} - \frac{1}{n^2}$

   j. $u_n = n - \cos(n)$

2) Soit (u_n) définie par $u_0 = \alpha \in \mathbb{R}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n^2 + \frac{3}{2}u_n - 1$.

   a. Écrire un algorithme permettant d'établir si la suite (u_n) converge pour une valeur α donnée par l'utilisateur. On considérera qu'à partir d'une différence $|u_{n+1} - u_n| \leq 10^{-4}$, la suite aura convergée. Inversement, à partir d'une différence $|u_{n+1} - u_n| \geq 10^4$, la suite aura divergée.

   b. Conjecturer pour quelles valeurs de α la suite (u_n) est convergente.

Exercices d'approfondissement

5. Séries

Une **série** est définie comme la somme des premiers termes d'une suite numérique. Ainsi, à toute suite (u_n) on peut lui associer sa série $(\sum u_n)$ et on appelle **somme partielle d'ordre n** (S_n) la suite définie telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$$

1) Étudions la **série harmonique** (H_n) définie telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*, H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$
   a. Déterminer le sens de variations de (H_n).
   b. Démontrer que pour tout entier naturel non nul $n, H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$.
   c. Établir que (H_n) diverge vers $+\infty$. On raisonnera par l'absurde.
   d. On pose $u_n = H_n - \ln(n)$ et $v_n = H_n - \ln(n+1)$, montrer que les deux suites admettent la même nature quant à leur convergence.
   e. Écrire un algorithme permettant d'établir la limite de (u_n) et (v_n), notée γ et appelée **constante d'Euler**. On considèrera que pour une différence $|u_n - v_n| \leq 10^{-4}$, la limite est atteinte.

2) Étudions la **série de Riemann** (R_n) définie telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*, R_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$
   a. Démontrer (R_n) est positive.
   b. Déterminer le sens de variations de (R_n).
   c. On suppose que (R_n) est majorée par 2, en déduire que (R_n) converge.

3) Étudions la série $(\sum u_n)$ définie telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$
   a. Soit A, B, C trois réels tels que $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2}$, on supposera que $\forall n \in \mathbb{N}^*, an^2 + bn + c = a'n^2 + b'n + c' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \\ c = c' \end{cases}$.
   Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+2} - \frac{2}{n+1}\right)$
   b. Établir que la série $(\sum u_n)$ converge.
   c. La série $\left(\sum \frac{1}{n(n+1)}\right)$ converge-t-elle ?

6. Suite arithmético-géométrique

Une **suite arithmético-géométrique** est une suite (u_n) définie telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = qu_n + r$$

où q, r sont deux réels. Un rappeur et son manager décide d'étudier le nombre d'écoutes sur leur dernier album. On note $u_1 = 5000$, $u_2 = 4900$ et $u_3 = 4804$ où (u_n) correspond au nombre d'écoutes le n-ème jour.

a. En modélisant la suite (u_n) par une suite arithmético-géométrique, déterminer les valeurs des paramètres qui caractérisent (u_n). Interpréter.
b. Soit (v_n) définie telle que pour tout entier naturel $n, v_n = u_n - 2500$, démontrer que (v_n) est géométrique. En déduire l'expression de (u_n).
c. Déterminer la limite de (u_n) . Que dire du modèle arithmético-géométrique comparé à l'arithmétique et le géométrique ?
d. En remarquant le terme général de (u_n) peut se mettre sous la forme $u_n = q^{n-1}u_1 + \frac{q^{n-1}-1}{q-1}r$, déterminer le nombre d'écoutes des dix premiers jours.

7. Ratio test

The ratio test or **règle de d'Alembert** affirms that for any sequence (u_n) of strictly positive real numbers, if there exists $l \in \mathbb{R}_+$ such that :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \to_{n\to+\infty} l$$

Then, the following can be said about the nature of (u_n) :

- $l > 1$: The sequence (u_n) is divergent.
- $l < 1$: The sequence (u_n) is convergent.
- $l = 1$: The nature of sequence (u_n) cannot be conclude.

a. Study the sequence (u_n) defined by $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = n/2^n$.
b. Study the sequence (u_n) defined by $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = 1/n!$.

Correction des exercices

1. Assertions et démonstrations

1)

a. **Faux.** Les suites de termes généraux $u_n = n$ et $v_n = -n$ forment un contre-exemple.

b. **Faux.** Les suites de termes généraux $u_n = 0$ et $v_n = n$ forment un contre-exemple.

c. **Faux.** La suite de terme général $u_n = (-2)^n$ forme un contre-exemple.

d. **Faux.** La suite de terme général $u_n = n + (-1)^n$ forme un contre-exemple.

e. **Faux.** La suite de terme général $u_n = (-1)^n$ forme un contre-exemple.

f. **Vrai.** On a, $\forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} = \frac{1}{qu_n} = \frac{1}{q} \times \frac{1}{u_n} = q'v_n$, la suite (v_n) est donc géométrique de raison $1/q$.

g. **Vrai.** Le terme général d'une suite arithmétique $u_n = u_0 + nr$ nous permet d'affirmer que u_n diverge vers $+\infty$ ou $-\infty$ si $r \neq 0$.

2)

a. Démontrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

On a, au rang $n = 0$, $\sum_{k=0}^{n} k = 0 = \frac{0\times(0+1)}{2}$

L'initialisation est vérifiée.

Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

On a, $\sum_{k=0}^{n+1} k = \sum_{k=0}^{n} k + (n+1)$

$$= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \qquad \text{(hypothèse de récurrence)}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

L'hérédité est vérifiée.

Comme la proposition est vraie au rang $n = 0$ et héréditaire à partir de ce rang. Par principe de récurrence, on a, $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$

b. Démontrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

On a, au rang $n = 0$, $\sum_{k=0}^{n} k^2 = 0 = \frac{0\times(0+1)\times(2\cdot 0+1)}{6}$

L'initialisation est vérifiée.

Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

On a, $\sum_{k=0}^{n+1} k^2 = \sum_{k=0}^{n} k^2 + (n+1)^2$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2 \qquad \text{(hdr.)}$$

$$= (n+1)\left(\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1)\right)$$

$$= (n+1)\left(\frac{2n^2+n}{6} + \frac{6n+6}{6}\right)$$

$$= (n+1)\left(\frac{2n^2+7n+6}{6}\right)$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

L'hérédité est vérifiée.

Par principe de récurrence, on a, $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

c. Démontrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2(2n+1)^2}{36}$

On a, au rang $n = 0$, $\sum_{k=0}^{n} k^3 = 0 = \frac{0^2\times(0+1)^2\times(2\cdot 0+1)^2}{36}$

L'initialisation est vérifiée.

Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2(2n+1)^2}{36}$

On a, $\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \sum_{k=0}^{n} k^3 + (n+1)^3$

$$= \frac{n^2(n+1)^2(2n+1)^2}{36} + (n+1)^3 \qquad \text{(hdr.)}$$

$$= (n+1)^2\left(\frac{n^2(2n+1)^2}{36} + (n+1)\right)$$

$$= (n+1)^2\left(\frac{4n^4+4n^3+n^2}{36} + \frac{36n+36}{36}\right)$$

$$= \frac{(n+1)^2(n+2)^2(2n+3)^2}{36}$$

L'hérédité est vérifiée.

Par principe de récurrence, on a, $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{n^2(n+1)^2(2n+1)^2}{36}$

d. Démontrons par contraposée la proposition (n^2 impair $\Longrightarrow n$ impair) à partir de sa contraposée équivalente (n pair $\Longrightarrow n^2$ pair).

Soit $n \in \mathbb{Z}$, $\exists k \in \mathbb{Z}, n = 2k$, on a,

$n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \times (2k \times k)$

Or, $2k^2$ est un entier, donc $2 \times (2k^2)$ est un entier pair.

2. Étude généralisée de suites

1)

a. On remarque que $\frac{b_2}{b_1} = \frac{b_3}{b_2} = 3$, on peut modéliser (b_n) par une suite géométrique de raison $q = 3$ et premier terme $b_1 = 256$.

b. Pour tout entier naturel n, on a,

$$\begin{aligned} b_n \geq 2 \cdot 10^6 &\Leftrightarrow 256 \cdot 3^{n-1} \geq 2 \cdot 10^6 \\ &\Leftrightarrow \ln(3^{n-1}) \geq \ln\left(\frac{10^6}{128}\right) && \text{(ln est bijective)} \\ &\Leftrightarrow (n-1)\ln(3) \geq \ln\left(\frac{10^6}{128}\right) && \text{(propriété de ln)} \\ &\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln\left(\frac{10^6}{128}\right)}{\ln(3)} + 1 \simeq 9.22 \end{aligned}$$

La population de bactéries excèdera les deux millions de bactéries à partir du 10$^{\text{ème}}$ jour. On peut aussi répondre à l'aide d'un algorithme de seuil :

```
Variables
        B est un réel
        n est un entier naturel
Initialisation
        Affecter à B la valeur 256
        Affecter à n la valeur 1
Traitement
        Tant que B < 2.10^6
                Affecter à B la valeur 3 × B
                Affecter à n la valeur n + 1
        Fin Tant que
Sortie
        Afficher n
```

c. On a, $m_{\text{bactérie}} \times b_{30} = 10^{-16} \times 256 \times 3^{29} \simeq 1.76$ kg.

d. Par théorème, la suite (b_n) diverge vers $+\infty$ car sa raison est $3 > 1$.

e. On a,
$$\begin{aligned} \textstyle\sum_{k=1}^{10} b_k &= \textstyle\sum_{k=1}^{10} b_1 \cdot q^{k-1} \\ &= 256 \cdot \textstyle\sum_{p=0}^{9} 3^p && \text{(on pose } p = k-1\text{)} \\ &= 256 \cdot \frac{1-3^{10}}{1-3} = 7\,558\,144. \end{aligned}$$

2)

a. On sait que, pour tout entier naturel non nul n, $r_{n+1} = r_n + 4$, la suite (r_n) est donc arithmétique de raison $r = 4$.
Par théorème, $\forall n \in \mathbb{N}^*, r_n = r_1 + (n-1)r = 4n + 6$

b. On a, $r_4 = 22$.

c. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ le nombre de rangées, on a,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} r_n = 90 &\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{N}(r_1 + (n-1)r) = 90\\ &\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{N}(r_1 - r) + r\sum_{n=1}^{N} n = 90\\ &\Leftrightarrow N(r_1 - r) + r\frac{N(N+1)}{2} = 90\\ &\Leftrightarrow 6N + 4\frac{N(N+1)}{2} = 90\\ &\Leftrightarrow N^2 + 4N - 45 = 0\end{aligned}$$

Le polynôme $N^2 + 4N - 45$ admet pour discriminant $\Delta = 196 > 0$, il existe donc deux racines à ce polynôme $N_1 = -9$ et $N_2 = 5$. Comme $N \in \mathbb{N}^*$, le nombre de rangées est égal à 5.

3)

a. Pour tout entier naturel n, on a,

$$\begin{aligned}v_{n+1} - v_n &= \frac{1+u_{n+1}}{u_{n+1}} - \frac{1+u_n}{u_n}\\ &= \frac{1+\frac{u_n}{1+u_n}}{\frac{u_n}{1+u_n}} - \frac{1+u_n}{u_n}\\ &= \frac{1+2u_n}{u_n} - \frac{1+u_n}{u_n}\\ &= 1\end{aligned}$$

La suite (v_n) est bien arithmétique de raison $r = 1$.

b. Par définition, pour tout entier naturel n, on a,

$$\begin{aligned}v_n = v_0 + nr &\Leftrightarrow \frac{1+u_n}{u_n} = v_0 + nr\\ &\Leftrightarrow 1 + u_n = u_n(v_0 + nr)\\ &\Leftrightarrow 1 = u_n(v_0 + nr - 1)\\ &\Leftrightarrow u_n = \frac{1}{v_0+nr-1} = \frac{1}{n+2}\end{aligned}$$

c. Pour tout entier naturel n, on a, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+2}{n+3} < 1$, la suite (u_n) est strictement décroissante.

d. Pour tout entier naturel n, on a, $n \geq 0 \Leftrightarrow n+2 \geq 2 > 1 \Rightarrow u_n < 1$.
De plus, $\forall n \in \mathbb{N}, n+2 > 0 \Rightarrow u_n > 0$.
Donc, $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in]0,1[$

e. La suite (u_n) étant strictement décroissante et minorée, elle converge par théorème de convergence monotone.
De plus, $n+2 \to_{n\to+\infty} +\infty$, d'où par passage à l'inverse $\frac{1}{n+2} \to_{n\to+\infty} 0$.
Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

2. Étude généralisée de suites

1)

a. Pour tout entier naturel n, on a, $u_{n+1} = \sqrt{(n+1)+u_n}$

b. Pour tout entier naturel n, on a,

$$\sqrt{n-1+\sqrt{\ldots+\sqrt{1}}} > 0 \Rightarrow \sqrt{n} < \sqrt{n+\sqrt{n-1+\sqrt{\ldots+\sqrt{1}}}}$$

$$\Leftrightarrow 1 < \frac{u_n}{\sqrt{n}}$$

c. Pour tout entier naturel n, on a,
$0 \leq \frac{\sqrt{n-1}}{n} \leq \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \to_{n\to+\infty} 0$
Par théorème des gendarmes, $\left(\frac{\sqrt{n-1}}{n}\right)$ converge vers 0.
Par composition de limites, $\left(\sqrt{1+2\frac{\sqrt{n-1}}{n}}\right)$ converge vers 1.
Donc, par théorème des gendarmes, $\left(\frac{u_n}{\sqrt{n}}\right)$ converge vers 1.

2)

a. Pour tout entier naturel n, on a, $n+2 \neq 0 \Leftrightarrow u_n \neq 0$
Donc, $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \frac{(n+3)}{(n+2)^2} - \frac{(n+2)}{(n+1)^2}$

$$= \frac{(n+3)(n+1)^2 - (n+2)(n+2)^2}{(n+2)^2(n+1)^2}$$

$$= \frac{-(n^2+5n+5)}{(n+2)^2(n+1)^2} < 0,$$ (u_n) est st. décroissante.

b. Par décroissance, on a, pour tout entier naturel n, $u_n \leq u_0 = 2$.

c. Pour tout entier naturel n, on a,

$\frac{n+2}{n^2+2n+1} = \frac{\frac{1}{n}+\frac{2}{n^2}}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}$

Or, le numérateur converge vers 0 et le dénominateur converge vers 1.

Par quotient de limites, (u_n) converge vers 0.

3)

a. Pour tout entier naturel n, on a,

$s_n = \frac{u_n+v_n}{2} = 2^n$, on reconnaît le terme général d'une suite géométrique.

$d_n = \frac{u_n-v_n}{2} = n$, on reconnaît le terme général d'une suite arithmétique.

b. Pour tout entier naturel n, on a, $n \geq 0 \Leftrightarrow 2^n + n \geq 2^n \Leftrightarrow u_n \geq s_n$.

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 0 \Leftrightarrow -n \leq 0 \Leftrightarrow 2^n - n \leq 2^n \Leftrightarrow v_n \leq s_n$.

Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n \leq s_n \leq u_n$.

c. Par somme de limites divergeant vers $+\infty$, (u_n) diverge vers $+\infty$.

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \geq s_n \geq v_n$ et (v_n) diverge vers $+\infty$, par théorème des gendarmes, (s_n) diverge vers $+\infty$.

4)

a. Pour tout entier naturel n, on a,

$e_{n+1} = e^{-u_{n+1}} = e^{-u_n+1} = e \cdot e^{-u_n} = e \cdot e_n$

La suite (e_n) est bien géométrique de raison $q = e$.

b. Pour tout entier naturel n, on a,

$e_n = e_0 \cdot e^n = e^{n-1} = e^{-u_n} \Leftrightarrow -u_n = n - 1 \Leftrightarrow u_n = 1 - n$.

c. Par théorème d'une suite arithmétique de raison négative, (u_n) diverge vers $-\infty$.

4. Étude de convergence de suites

1)

a. Pour tout entier naturel non nul n, on a, $\cos(n), \sin(n) \in [-1, 1]$.

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*, -\frac{2}{\sqrt{n}} \leq u_n \leq \frac{2}{\sqrt{n}}$

Or, par limites usuelles, $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{2}{\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{n}} = 0$.

D'après le théorème des gendarmes, (u_n) converge vers 0.

b. Pour tout entier naturel n, on a,

$$u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$$
$$= \frac{n+1-n}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$$
$$= \frac{1}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})} \to_{n\to+\infty} 0,$$ (u_n) converge vers 0.

c. Pour tout entier naturel n, on a, $u_n = 1 - \left(\frac{-2}{3}\right)^n$

Par théorème d'une limite d'une suite géométrique de raison $|q| < 1$, $\left(\frac{-2}{3}\right)^n \to_{n\to+\infty} 0$, donc (u_n) converge vers 1.

d. Par inverse d'une suite divergente en $+\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n-1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

Par somme de limites finies, (u_n) converge vers 0.

e. Par inverse d'une suite divergente en $-\infty$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{n+1} = 0$

Par composition de limites, $e^{-\frac{1}{n+1}} \to_{n\to+\infty} e^0 = 1$.

f. Pour tout entier naturel n, on a,

$$u_n = \frac{n^2-1}{n+1} = \frac{(n-1)(n+1)}{n+1} = n - 1 \to_{n\to+\infty} +\infty.$$

g. Pour tout entier naturel n, on a, par somme géométrique,

$$u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1-(1/2)^{n+1}}{1-(1/2)}$$

Par théorème d'une limite d'une suite géométrique de raison $|q| < 1$, $\left(\frac{1}{2}\right)^n \to_{n\to+\infty} 0$, donc (u_n) converge vers $\frac{1}{1-(1/2)} = 2$.

h. Pour tout entier naturel non nul n, on a,

$u_n = \frac{n^2+n}{1-n^2} = \frac{1+1/n}{-1+1/n^2}$

Or, $1 + \frac{1}{n} \to_{n\to+\infty} 1$ et $-1 + \frac{1}{n^2} \to_{n\to+\infty} -1$

Par quotient de limites finies, (u_n) converge vers -1.

i. On a, $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{n^2} = 0$

Par somme de limites finies, (u_n) converge vers 3.

j. Pour tout entier naturel n, on a,

$-1 \leq \cos(n) \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -\cos(n) \leq 1$

$\Leftrightarrow n - 1 \leq n - \cos(n) \leq n + 1$

Or $(n-1)$ et $(n+1)$ divergent vers $+\infty$.

D'après le théorème des gendarmes, $(n - \cos(n))$ diverge vers $+\infty$.

2)

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(U^2 + U - 2)$

Variables

U est un réel

α est un réel

Initialisation

Lire α

Affecter à U la valeur α

Traitement

Tant que $\left|\frac{1}{2} \times (\mathrm{U}^2 + \mathrm{U} - 2)\right| > 10^{-4}$ et $\left|\frac{1}{2} \times (\mathrm{U}^2 + \mathrm{U} - 2)\right| < 10^4$

Affecter à U la valeur $\frac{1}{2} \times (\mathrm{U}^2 + \mathrm{U} - 2)$

Fin Tant que

Sortie

Si $\left|\frac{1}{2} \times (\mathrm{U}^2 + \mathrm{U} - 2)\right| \leq 10^{-4}$

Afficher « convergente »

Sinon

Afficher « divergente »

Fin Si

b. On conjecture que pour $\alpha \in [-4, 1]$, (u_n) est convergente.

5. Séries

1)

a. On a, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$H_{n+1} - H_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

$= \frac{1}{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ (relation de Chasles)

$= \frac{1}{n+1} > 0$, la suite (H_n) est donc strictement croissante.

b. On a, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$H_{2n} - H_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$

$= \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$ (relation de Chasles)

$\geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n}$

$= \frac{1}{2n}(2n - (n+1) + 1)$

$= \frac{1}{2}$

c. Supposons que (H_n) converge vers un réel l, d'après la question 1) b.,
$\forall n \in \mathbb{N}^*, H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2} \Longrightarrow l - l \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \geq \frac{1}{2}$.
On aboutit à une contradiction, ainsi (H_n) diverge bien, comme (H_n) est strictement croissante d'après la question 1) a., $\lim\limits_{n \to +\infty} H_n = +\infty$.

d. On a, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$u_n - v_n = \ln(n+1) - \ln(n)$

$= \ln\left(\frac{n+1}{n}\right)$

$= \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

Or, $\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ converge vers 1, par composition de limites, $(u_n - v_n)$ converge vers 0. Ainsi, que (u_n) et (v_n) convergent ou divergent, ont la même nature.

e. On a,

Variables

N est un entier naturel non nul

H est un réel

Initialisation

Affecter à N la valeur 1

Affecter à H la valeur 0

Traitement

Tant que $\left|\ln\left(1+\frac{1}{\mathrm{N}}\right)\right| > 10^{-4}$

Affecter à H la valeur $\mathrm{H} + 1/\mathrm{N}$

Affecter à N la valeur $\mathrm{N} + 1$

Fin Tant que

Sortie

Afficher $\mathrm{H} + \frac{1}{\mathrm{N}} - \ln(N)$ # On rajoute le terme manquant.

2)

a. Démontrons par récurrence que, $\forall n \in \mathbb{N}^*, R_n \geq 0$.

On a, au rang $n = 1$, $R_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 \geq 0$

L'initialisation est vérifiée.

Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $R_n \geq 0$

On a, $R_{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k^2}$

$= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2} + \frac{1}{(n+1)^2}$ (relation de Chasles)

Or, $n \in \mathbb{N}^*, n \geq 0 \Longrightarrow n + 1 > 0 \Longrightarrow (n+1)^2 > 0 \Longrightarrow \frac{1}{(n+1)^2} > 0$

De plus, par hypothèse de récurrence, $R_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2} \geq 0$

Par somme de réels positifs, $R_{n+1} \geq 0$, l'hérédité est vérifiée.

Par principe de récurrence, on a, $\forall n \in \mathbb{N}^*, R_n \geq 0$.

b. On a, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$R_{n+1} - R_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$

$= \frac{1}{(n+1)^2} > 0$, la suite (R_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}^*$.

c. Comme (R_n) est strictement croissante sur $\mathbb{N}^*$ et majorée par 2, d'après le théorème de convergence monotone, (R_n) est convergente.

3)

a. Tout d'abord, soit $A, B, C \in \mathbb{R}$, pour tout entier naturel non nul n, on a,

$$\begin{aligned}\frac{1}{n(n+1)(n+2)} &= \frac{A}{n} + \frac{B}{n+1} + \frac{C}{n+2} \\ &= \frac{A(n+1)(n+2)+Bn(n+2)+Cn(n+1)}{n(n+1)(n+2)} \\ &= \frac{(A+B+C)n^2+(3A+2B+C)n+(2A)}{n(n+1)(n+2)}\end{aligned}$$

Donc, A, B, C est solution du système :

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ 3A+2B+C=0 \\ 2A=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} B+C=-1/2 \\ 2B+C=-3/2 \\ A=1/2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow_{(L_2)-(L_1)\to(L_2)} \begin{cases} B+C=-1/2 \\ B=-1 \\ A=1/2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow_{(L_1)-(L_2)\to(L_1)} \begin{cases} C=1/2 \\ B=-1 \\ A=1/2 \end{cases}$$

On pourrait démontrer la relation par récurrence, on va cependant le faire par le calcul, d'après la question 3) a., $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1/2}{n} + \frac{-1}{n+1} + \frac{1/2}{n+2} \Longrightarrow u_{n-2} + u_{n-1} + u_n = \frac{1/2}{n-2} + \frac{-1/2}{n-1} + \frac{-1}{n+1} + \frac{1/2}{n+2}$$

Donc, $\sum_{k=1}^{n} u_k = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{n-2} + u_{n-1} + u_n$

$$\begin{aligned} &= \frac{1/2}{1} + \frac{-1/2}{1+1} + \frac{-1}{n+1} + \frac{1/2}{n+2} \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+2} - \frac{2}{n+1}\right)\end{aligned}$$

b. On a, $\lim\limits_{n\to+\infty} n+2 = \lim\limits_{n\to+\infty} n+1 = +\infty \Longrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+2} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0.$

Par somme de limites finies, $(\sum u_n)$ converge vers $1/4$.

c. De manière similaire, on remarque que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}\right)$

$$\begin{aligned} &= \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - \left(\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \to_{n\to+\infty} 1,\ \left(\sum \frac{1}{n(n+1)}\right) \text{ converge.}\end{aligned}$$

Remarque

On retiendra la notion de **somme télescopique** :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \sum_{n=n_0}^{N} (u_{n+1} - u_n) = u_N - u_{n_0}$$

6. Suite arithmético-géométrique

a. On a,

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = qu_n + r \\ u_1 = 5000 \\ u_2 = 4900 \\ u_3 = 4804 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4900 = 5000q + r \\ 4804 = 4900q + r \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow_{(L_1)-(L_2)\to(L_1)} \begin{cases} 96 = 100q \\ 4804 = 4900q + r \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow_{\frac{1}{100}(L_1)\to(L_1)} \begin{cases} 0.96 = q \\ 4804 = 4900q + r \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow_{(L_2)-4900(L_1)\to(L_2)} \begin{cases} 0.96 = q \\ 100 = r \end{cases}$$

On pourrait imaginer que chaque jour, 4% des auditeurs cessent d'écouter l'album tandis que 100 nouvelles personnes le découvrent.

b. Pour tout entier naturel non nul n, on a,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 2500 \\ &= 0.96u_n + 100 - 2500 \\ &= 0.96u_n - 2400 \\ &= 0.96(u_n - 2500) \\ &= 0.96v_n \end{aligned}$$

La suite (v_n) est bien géométrique de raison 0.96.

$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = v_1(0.96)^{n-1} = u_n - 2500 \Leftrightarrow u_n = 2500(1 + (0.96)^{n-1})$

c. Par théorème d'une suite géométrique de raison < 1, la suite (u_n) converge vers 2500. Contrairement aux autres, le modèle arithmético-géométrique permet à (u_n) d'avoir une limite finie et non nulle, permettant une modélisation plus complexe et réaliste.

d. On a,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10} u_k &= \sum_{k=1}^{10} \left(q^{k-1}u_1 + \frac{q^{k-1}-1}{q-1}r\right) \\ &= \sum_{k=1}^{10} \left(q^{k-1}\left(u_1 + \frac{r}{(q-1)}\right) + \frac{r}{1-q}\right) \\ &= \left(u_1 + \frac{r}{(q-1)}\right)\sum_{k=1}^{10} q^{k-1} + \frac{r}{1-q}\sum_{k=1}^{10} 1 \\ &= \left(u_1 + \frac{r}{(q-1)}\right)\sum_{p=0}^{9} q^{p} + \frac{r}{1-q}\sum_{k=1}^{10} 1 \qquad (p = k-1) \\ &= \left(u_1 + \frac{r}{(q-1)}\right)\cdot\frac{1-q^{10}}{1-q} + \frac{r}{1-q}\cdot 10 \\ &\simeq 45948 \text{ écoutes} \end{aligned}$$

7. Ratio test

a. Undeniably, $\forall n \in \mathbb{N}^*, n > 0$ and $2^n > 0$, thus $u_n > 0$.

Moreover, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)/2^{n+1}}{n/2^n} = \frac{2^n}{2^{n+1}} \times \frac{n+1}{n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

By product of finite limits, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow_{n\rightarrow+\infty} \ l = \frac{1}{2} < 1$.

By ratio test, we can affirm that (u_n) is indeed convergent.

Finally, by croissances comparées, (u_n) converges to 0.

b. By definition, $\forall n \in \mathbb{N}, n! > 0$, thus $u_n > 0$.

We have, $\forall n \in \mathbb{N}$,

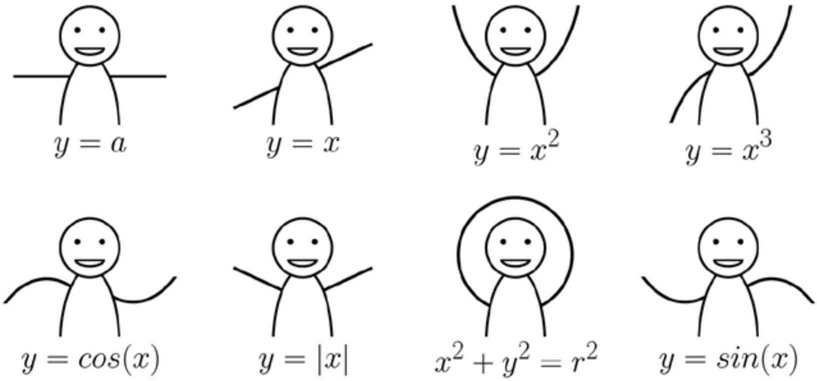
$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} \\ &= \frac{n!}{(n+1)!} \\ &= \frac{n!}{n!} \times \frac{1}{n+1} \\ &= \frac{1}{n+1}\end{aligned}$$

By inverse of a diverging limit to $+\infty$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} \rightarrow_{n\rightarrow+\infty} \ l = 0$.

By ratio test, we can affirm that (u_n) is indeed convergent.

Finally, by inverse of a diverging limit to $+\infty$, (u_n) converges to 0.

Fonctions réelles



« Dance is the mathematics of the soul. »

Nelly Mazloum

Les fonctions réelles permettent la généralisation des suites numériques à des ensembles transcendant les entiers naturels. Nous étudierons différentes notions caractérisant les fonctions ainsi qu'approfondirons la notion et les propriétés de la dérivation introduites en première. Les fonctions trouvent comme les suites numériques une multitude d'applications dans la modélisation de problèmes.

Sommaire

Cours

Exercices d'application

Exercices d'approfondissement

Correction des exercices

Cours

I. Limite de fonctions

1. Limite d'une fonction en un point et à l'infini

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

Définition (Limite à l'infini)

On dit que la fonction f admet pour limite L en $+\infty$ (resp. en $-\infty$) si pour tout intervalle ouvert I contenant L, I contient aussi toutes les valeurs de $f(x)$ à partir d'un x suffisamment grand (resp. suffisamment petit). On note alors :

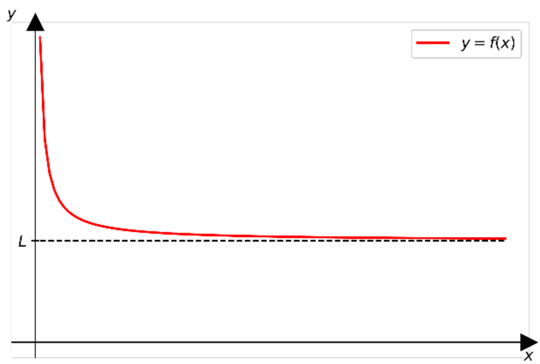
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L \left(\text{resp. } \lim_{x\to-\infty} f(x) = L\right)$$

On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ (ou $-\infty$) en $+\infty$ (resp. en $-\infty$) si tout intervalle ouvert $]A,+\infty[$ (ou $]-\infty,B[$) avec A (ou B) réel contient toutes les valeurs de $f(x)$ à partir d'un x suffisamment grand (resp. suffisamment petit). On note alors :

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\ \text{ou}\\ x\to-\infty}} f(x) = +\infty \left(\text{resp. } \lim_{\substack{x\to+\infty\\ \text{ou}\\ x\to-\infty}} f(x) = -\infty\right)$$

Définition (Asymptote horizontale)

Une **droite asymptotique horizontale** à la courbe représentative d'une fonction f correspond à la droite d'équation $y = L$ où L est la limite finie de f en $+\infty$ ou $-\infty$. Il s'agit de la droite vers laquelle la courbe de la fonction se rapproche.



Propriétés (Limites usuelles et croissances comparées)

On a,

$$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$$
$$\lim_{x\to+\infty} 1/x = \lim_{x\to-\infty} 1/x = 0$$
$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \text{ et } \lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$
$$\lim_{x\to\pm\infty} x^n = +\infty \ (n \text{ pair}) \text{ et } \lim_{x\to+\infty} x^n = -\lim_{x\to-\infty} x^n = +\infty \ (n \text{ impair})$$
$$\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} x^n e^x = 0 \ (n \text{ entier})$$
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \ (n \text{ entier})$$

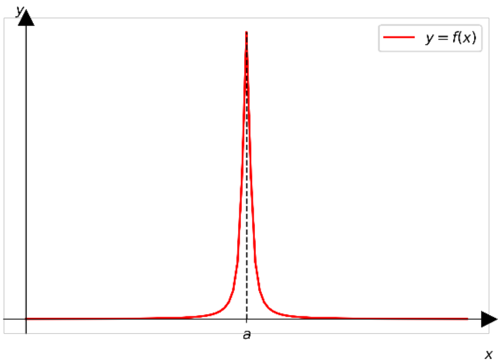
Définition (Limite en un point fini)

On dit que la fonction f admet pour limite $+\infty$ (resp. $-\infty$) en $a \in \mathbb{R}$ si tout intervalle ouvert $]A,+\infty[$ (resp. $]-\infty,B[$) avec A (resp. B) réel contient toutes les valeurs de $f(x)$ à partir d'un x suffisamment grand (resp. suffisamment petit):

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \ \left(\text{resp.} \lim_{x\to a} f(x) = -\infty\right)$$

Définition (Asymptote verticale)

Une **droite asymptotique verticale** à la courbe représentative d'une fonction f correspond à la droite d'équation $x = a$ où a est le point tel que f diverge.



Remarque

On pourra différencier, dans certains cas, les dérivabilités à gauche de celles à droites par la notation $x \to a^-$ et $x \to a^+$.

2. Opérations et théorèmes sur les limites

Soit f, g et h trois fonctions réelles et a un réel ou $+\infty$ ou $-\infty$.

Propriétés (Limite d'une somme, d'un produit et quotient)

Soit L et L' deux réels et si $h = f + g$, on a,

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a} h(x)$	$L + L'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$F.I.$

De plus, si $h = f \times g$, on a,

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	L	L	$\pm\infty$	0
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	L'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{x\to a} h(x)$	$L \times L'$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$F.I.$

Finalement, si $h = f/g$, on a,

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	L	$L \neq 0$	L	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0
$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$L' \neq 0$	$0^{\pm}$	$\pm\infty$	L	$\pm\infty$	0
$\lim\limits_{x\to a} h(x)$	L/L'	$\pm\infty$	0	$\pm\infty$	$F.I.$	$F.I.$

Théorème (Théorème de minoration et majoration)

S'il existe un réel a tel que pour tout $x > a$, $f(x) \leq g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

Corollaire (Théorème de comparaison)

De manière similaire au théorème de comparaison, s'il existe un réel a tel que pour tout $x > a$, $f(x) \leq g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

Théorème (Théorème d'encadrement)

S'il existe un réel a tel que pour tout $x > a$, $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = L$, alors $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = L$.

Démonstration (Limites de l'exponentielle)

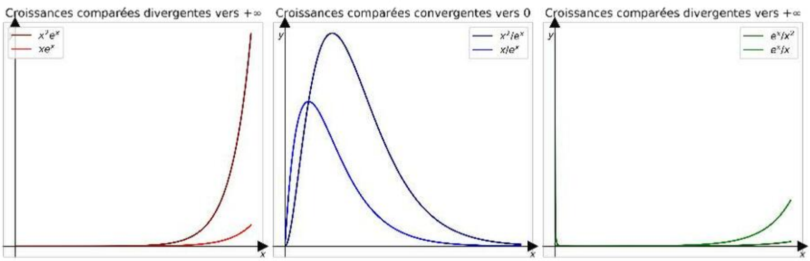
La suite (e^n) est une suite géométrique de raison $e > 1$, par théorème, la suite diverge vers $+\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} e^n = +\infty$. Pour tout réel A, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $e^{n_0} > A$. Comme la fonction exponentielle est strictement croissante, $\forall x > n_0, e^x > e^{n_0} > A$. Ainsi, tout intervalle ouvert $]A, +\infty[$ contient toutes les valeurs de e^x pour x suffisamment grand. On respecte bien la définition d'une fonction admettant pour limite $+\infty$ en $+\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

De plus, comme $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{e^x} = 0$, or $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{e^x} = e^{-x}$, en posant $X = -x$, on retrouve $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$.

Démonstration (Croissances comparées)

La fonction $x \mapsto e^x - \frac{x^2}{2}$ admet pour dérivée $x \mapsto e^x - x$ qui admet pour dérivée $x \mapsto e^x - 1$. Cette fonction est strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$, par théorème, $x \mapsto e^x - x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et minorée par $e^0 - 0 = 1 > 0$, la fonction est donc strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$, par théorème, la fonction initiale est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et minorée par $e^0 - \frac{0^2}{2} = 1 > 0$, la fonction est donc strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$, d'où $\forall x > 0, \frac{e^x}{x} > \frac{x}{2}$, par théorème de comparaison, la fonction $x \mapsto \frac{e^x}{x}$ admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$. On généralise le résultat à l'aide de l'expression $\frac{e^x}{x^n} = \left(\frac{1}{n} \times \frac{e^{x/n}}{x/n}\right)^n$ qui diverge bien vers $+\infty$ en $+\infty$.

On représente les différentes croissances comparées :



II. Dérivation de fonctions

1. Rappels de première

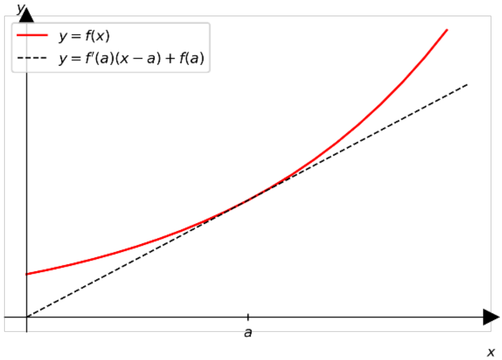
Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ et a un réel.

Définition (Nombre dérivé)

Une fonction f est **dérivable** en a si le taux d'accroissement de la fonction f en ce point est fini, on note alors $f'(a) = \lim\limits_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

Définition (Tangente à une courbe)

La tangente à la courbe représentative d'une fonction f au point d'abscisse a correspond à la droite d'équation $y = f'(a)(x-a) + f(a)$



Propriétés (Dérivées usuelles)

On a,

$f(x)$	a	ax	x^n $(n \in \mathbb{N}^*)$	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x}$	e^x
$\mathcal{D}_f$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}_+$	$\mathbb{R}$
$f'(x)$	0	a	nx^{n-1}	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	e^x
$\mathcal{D}_{f'}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}$

Théorème (Dérivées d'opérations)

On a, pour toutes fonctions u, v dérivables sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$:

$$(u+v)' = u' + v', (ku)' = ku' \text{ et } (uv)' = u'v + uv'$$

Si v ne s'annule pas sur I :

$$\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2} \text{ et } \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

Théorème (Relation Variations - Signe)

On a,

$$f'(x) \geq 0 \text{ sur } I \Leftrightarrow f \text{ croissante sur } I$$
$$f'(x) \leq 0 \text{ sur } I \Leftrightarrow f \text{ décroissante sur } I$$

2. Dérivée d'une composée de fonctions

Soit f, g deux fonctions dérivables sur I et J respectivement avec pour tout $x \in J, g(x) \in I$.

Définition (Fonction composée)

La **composée** de g par f, notée $f \circ g$ et lue « f rond g » est la fonction définie sur J par $(f \circ g)(x) = f\big(g(x)\big)$.

Propriété (Dérivée d'une composée)

La dérivée de $f \circ g$ est définie sur J par $(f \circ g)'(x) = g'(x)f'\big(g(x)\big)$.

Propriété (Dérivée de composées usuelles)

On a,

fonction	$\sqrt{u(x)}$	$e^{u(x)}$	$u(x)^n$ $(n \in \mathbb{Z}^*)$	$\ln\big(u(x)\big)$
condition	$u(x) > 0$	Aucune	si $n < 0$: $u(x) \neq 0$	$u(x) > 0$
dérivée	$\dfrac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$	$u'(x)e^{u(x)}$	$nu'(x)u^{n-1}(x)$	$\dfrac{u'(x)}{u(x)}$

III. Continuité de fonctions

1. Notion de continuité

Soit f une fonction définie sur $I \subset R$ et a un réel de I.

Définition (Continuité en un point et sur un intervalle)

Une fonction f est **continue** en a si $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. On prolonge la définition de continuité sur un ensemble I par $\forall x_0 \in I, \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Remarque

On pourra différencier les continuités à gauche des continuités à droites.

Théorème (Relation Dérivation - Continuité)

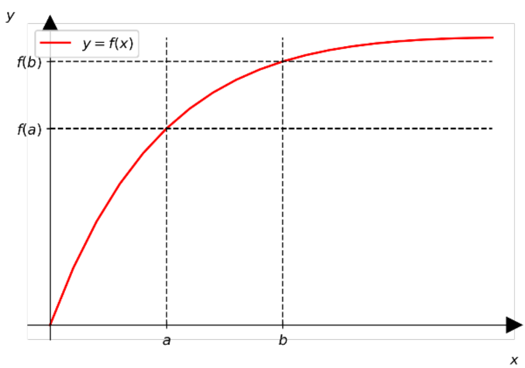
Si f est dérivable sur I, alors elle est continue sur I.

2. Théorème sur la continuité

Soit f une fonction continue et monotone sur $[a, b]$ où a, b sont deux réels.

Théorème (Théorème des valeurs intermédiaires)

Pour tout réel compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe un réel $c \in [a, b]$ tel que $f(c) \in [f(a), f(b)]$. Ainsi, l'équation $f(x) = k \in [f(a), f(b)]$ admettra toujours au moins une solution dans l'intervalle $[a, b]$.



Corollaire (Théorème des valeurs intermédiaires)

Si f est strictement monotone sur $[a,b]$, la solution à l'équation $f(x)=k$ admet une unique solution dans $[a,b]$.

Théorème (Point fixe)

Soit (u_n) une suite définie par $u_0 \in [a,b]$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$. Si (u_n) converge vers $L \in I$, alors $f(L) = L$, appelé **point fixe de f**.

Propriété (Variations d'une suite définie par une fonction)

Soit (u_n) une suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = f(n)$. La monotonie de f sur $[0,+\infty[$ est la même pour (u_n) sur $\mathbb{N}$.

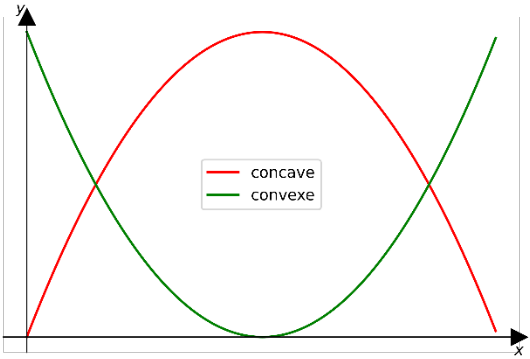
IV. Convexité de fonctions

1. Notion de convexité et concavité

Soit f une fonction dérivable sur $I \subset R$ et dont la dérivée est dérivable sur I.

Définition (Fonction convexe, fonction concave)

Une fonction f est **convexe** sur I si sa courbe représentative est située au-dessus de ses tangentes. Une fonction f est **concave** sur I si sa courbe représentative est située en-dessous de ses tangentes.



Propriété (Relation Dérivée Seconde – Convexité/Concavité)

On a,

$$f''(x) \geq 0 \text{ sur } I \Leftrightarrow f \text{ convexe sur } I$$
$$f''(x) \leq 0 \text{ sur } I \Leftrightarrow f \text{ concave sur } I$$

Démonstration (Relation Dérivée Seconde – Convexité/Concavité)

Soit f une fonction à la dérivée seconde positive sur I, c'est-à-dire la dérivée f' croissante sur I. On pose $g(x) = f(x) - f'(x)(x-a) + f(a)$ où $a \in I$.

La fonction g est dérivable sur I, on a, $g'(x) = f'(x) - f'(a)$.

Comme f' est croissante sur I, la fonction $g'(x)$ est négative sur $]-\infty, a]$ et positive sur $[a, +\infty[$, donc g est décroissante sur $]-\infty, a]$ et croissante sur $[a, +\infty[$. Ainsi, g admet pour minimum $g(a) = 0$, donc g est positive sur I.

Finalement, $\forall x \in I, g(x) \geq 0 \Leftrightarrow f(x) \geq f'(x)(x-a) + f(a)$.

2. Point d'inflexion

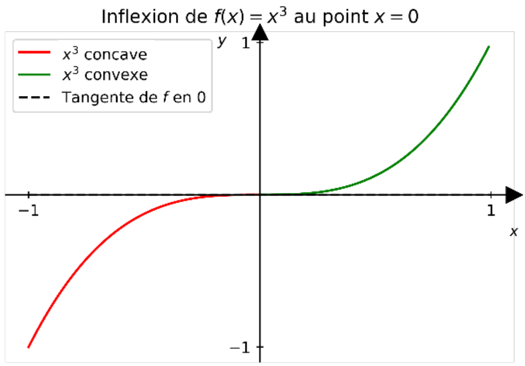
Soit f une fonction deux fois dérivable sur $I \subset \mathbb{R}$ et a un réel.

Définition (Point d'inflexion)

Un **point d'inflexion** a est un point telle que la courbe représentative de f traverse sa tangente en ce point.

Remarque

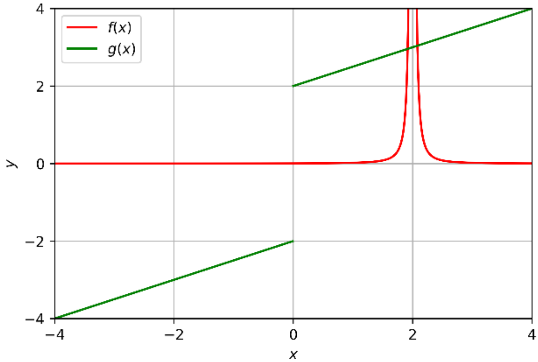
La convexité/concavité change au point d'inflexion a, d'où $f''(a) = 0$.



Exercices d'application

1. Étude de convergence de fonctions

1) Conjecturer les différentes limites remarquables des fonctions représentées sur les graphiques suivants et donner les équations d'asymptotes :



2) Après avoir établi leur nature, déterminez les éventuelles limites des fonctions suivantes :

a. $f(x) = -2x + 3 - \frac{3}{x}$ en $+\infty$

b. $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$ en $+\infty$

c. $f(x) = \frac{4x^2+2x+1}{x+2}$ en $-\infty$

d. $f(x) = xe^{-x}$ en $+\infty$

e. $f(x) = x^2 - \sin(x)$ en $+\infty$

f. $f(x) = e^x - x^2 + 1$ en $+\infty$

g. $f(x) = \frac{\cos(x)}{x}$ en $-\infty$

h. $f(x) = \frac{x^2+4}{4+\cos(x)}$ en $-\infty$

i. $f(x) = -x^3 + 2x^2$ en $+\infty$

j. $f(x) = \frac{2x^2+1}{4x-1}$ en $\frac{1}{4}$ et $-\infty$

k. $f(x) = \sqrt{\frac{2x-1}{3x+1}}$ en $+\infty$

l. $f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$ en 1

m. $f(x) = \frac{e^x-x}{e^x+x}$ en $+\infty$

n. $f(x) = \frac{x\sin(x)}{x^2+1}$ en $+\infty$

o. $f(x) = x - \sqrt{x}$ en $+\infty$

p. $f(x) = \frac{5}{x+1}$ en $-\infty$

q. $f(x) = e^x - e^{-x}$ en $-\infty$

r. $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ en 1

s. $f(x) = \frac{1}{x+1}$ en -1^+

2. Étude de dérivées de fonctions

1) Après avoir établi leur dérivabilité, déterminez les dérivées des fonctions suivantes :

a. $f(x) = \frac{1}{x+1}$

b. $f(x) = e^x - x^2 + 2x + 3$

c. $f(x) = \frac{\cos(x)}{x}$

d. $f(x) = xe^{-x}$

e. $f(x) = 3x^2 + 2x + 1$

f. $f(x) = (2x+1)^2$

g. $f(x) = e^{x^2+2x+1}$

h. $f(x) = \sqrt{2x-1}$

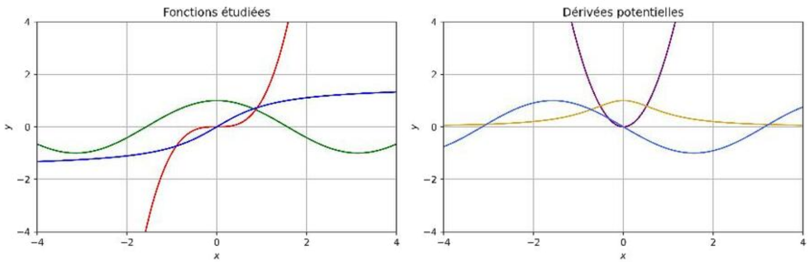
i. $f(x) = x^x$

j. $f(x) = \frac{x\sqrt{x}}{x-2}$

k. $f(x) = (x+3)^3$

l. $f(x) = 3$

2) Associer à chaque fonction représentée sur le graphique de gauche sa potentielle dérivée représentée sur le graphique de droite :



3. Étude de continuité de fonctions

Étudier la continuité des fonctions suivantes :

a. $f(x) = \frac{1}{x+1}$

b. $f(x) = x\sqrt{x}$

c. $f(x) = \frac{e^x}{\cos(x)}$

d. $f(x) = 2x^2 + 1$

e. $f(x) = e^{x^2+1}$

f. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{(x+1)^2}$

EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

4. Coûts de production

Une société de marchand de glaces souhaite optimiser ses coûts de production. On estime le coût total de fabrication d'une glace à la vanille par la fonction $C(q) = \frac{1}{5}q^3 - 4q^2 + 20q$ où q représente le nombre de glaces fabriquées. La société précise qu'elle ne peut produire qu'au maximum 10 glaces.

1) On pose $C_M(q) = \frac{C(q)}{q}$ le coût unitaire moyen.
   a. Déterminer l'expression de $C_M(q)$. Interpréter son sens.
   b. Déterminer le nombre d'unités à fabriquer pour minimiser le coût unitaire moyen.

2) On pose $C_m(q) = C'(q)$ le coût marginal.
   a. Déterminer l'expression de $C_m(q)$.
   b. Vérifier que pour la valeur de q trouvée à la question 1) b., le coût marginal et unitaire moyen coïncident.
   c. Déterminer le sens de variations de C.
   d. Déterminer l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe représentative de C au point d'abscisse 7.

3) On pose $B(q) = -(q-5)(q-12)$ le bénéfice en euros.
   a. Déterminer pour quel intervalle d'unités la production de glaces à la vanille est rentable. On supposera que toute unité produite est vendue.
   b. Calculer le nombre d'unités nécessaire pour maximiser le bénéfice.

5. Trajectoire d'un frisbee

Un concepteur de jouets modélise la hauteur d'un frisbee par la fonction T définie par $T(x) = \frac{-ax^2+bx}{cx+d}$ où a, b, c, d sont des réels et $x \in [0,5]$ correspond à la distance entre le lanceur et le jouet.

1) On considère le cas $a = c = d = 1$ et $b = 5$.
   a. Déterminer les variations de T.
   b. Déduire que T admet une altitude maximale et la calculer.
   c. Déterminer à quelle distance la pente de la trajectoire est maximale.
   d. Étudier la convexité de T.

2) On considère désormais $a \in \mathbb{R}_+$ et b, c, d restent inchangés.
   a. Déterminer le nouveau point où l'altitude est maximale en fonction de a
   b. En supposant que a est mesuré par la force, quelle doit-être la force à appliquer pour que le frisbee tombe à une distance $x = 10$?

6. Algorithme de dichotomie

La **méthode de dichotomie** est une méthode de « recherche de zéro » d'une fonction, elle consiste à restreindre l'intervalle $[a, b]$ contenant la solution en sélectionnant une des bornes selon les critères suivants : on pose $m = \frac{a+b}{2}$, si $f(a)f(m) \leq 0$ alors $b = m$, sinon $a = m$. On répète jusqu'à avoir atteint une précision satisfaisante. La méthode est une conséquence du théorème des valeurs intermédiaires, en effet, pour une fonction continue sur $[a, b]$, si $f(a)f(b) \leq 0$, il existe un réel c tel que $f(c) = 0$. Soit f définie par $f(x) = -x^3 + 2x^2 - x + 1$.

a. Déterminer les variations de f.
b. Démontrer que f admet une unique solution α à l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[1,2]$.
c. Écrire l'algorithme de dichotomie sur Python et, pour un seuil de précision d'au moins 10^{-4}, estimez la valeur de α.

7. Fonctions à plusieurs variables

Une **fonction à plusieurs variables** peut référer à différentes notions, ici on retiendra qu'il s'agit d'une fonction définie de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ avec $p \in \mathbb{N}^*$. Étudions-en les propriétés et les applications pour $p = 2$.

1) Soit f définie par $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

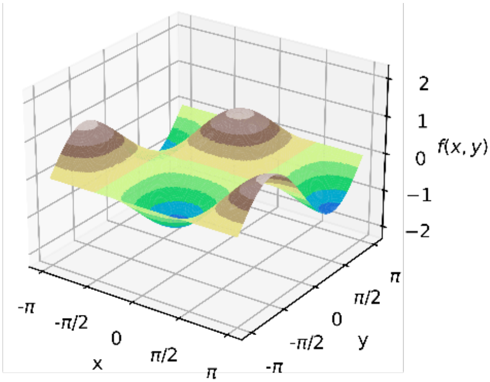
   a. La notion de continuité s'étend depuis les fonctions à une variable. Ainsi, f est continue en (a,b) si et seulement si $f(x,y) \to_{(x,y)\to(a,b)} f(a,b)$. Montrer que f est continue en $(0,0)$.

   b. La notion de dérivabilité est révisée lors du passage à plusieurs variables. Donc, une fonction f n'est plus dite dérivable mais partiellement dérivable par rapport à une de ses variables x ou y, notées $\partial_x f$ et $\partial_y f$ ou encore $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$. Pratiquement, dériver partiellement une fonction revient à dériver classiquement la fonction en supposant toutes les variables comme constantes exceptées celle de référence pour la dérivée. Par exemple, la fonction $g : (x,y) \mapsto \cos(x) + xy$ admet pour dérivées partielles les fonctions $\partial_x g : (x,y) \mapsto -\sin(x) + y$ et $\partial_y g : (x,y) \mapsto x$. En admettant qu'elles existent, déterminer les dérivées partielles de la fonction f.

   c. La notion d'extrema s'étend depuis les fonctions à une variable. Ainsi, f admet un minimum, resp. maximum, en $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ si et seulement si $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) \geq f(a,b)$, resp. $f(x,y) \leq f(a,b)$. Démontrer que f admet un minimum global en $(0,0)$.

   d. Soit v la fonction vitesse définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ par $v(d,t) = d/t$. Démontrer que v est continue sur son ensemble de définition et en admettant que v soit différentiable (partiellement dérivable), interpréter ses dérivées partielles par rapport à ses variables.

2) On modélise l'altitude d'un terrain par rapport au niveau de la mer par la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = \cos(x)\sin(y)$.



a. Montrer que l'étude de la fonction sur $\left]-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times]-\pi, \pi]$ suffit.

b. On appelle **gradient** de f le vecteur $\vec{\nabla}(f) = \left(\partial_x f, \partial_y f\right)$. De plus, chaque solution (x, y) à $\vec{\nabla}(f) = (0, 0)$ est dit **point candidat** de f. Déterminer les points candidats de z sur l'ensemble réduit de la question 2) a.

c. On appelle **dérivée partielle d'ordre 2** la dérivée partielle d'une dérivée partielle. Par exemple, la fonction $f : (x, y) \mapsto x^2 + 2xy + 3y^2$ admet pour dérivées partielles d'ordre 1 et d'ordre 2 :

$$\begin{cases} \partial_x f : (x, y) \mapsto 2x + 2y \\ \partial_y f : (x, y) \mapsto 2x + 6y \end{cases} \text{et} \begin{cases} \partial_{xx} f : (x, y) \mapsto 2 \\ \partial_{xy} f : (x, y) \mapsto 2 \\ \partial_{yx} f : (x, y) \mapsto 2 \\ \partial_{yy} f : (x, y) \mapsto 6 \end{cases}$$

Finalement, un minimum de f au point (x^*, y^*) est caractérisé par $\partial_{xx} f(x^*, y^*) > 0$ et $\partial_{yy} f(x^*, y^*) > 0$ tandis qu'un maximum est caractérisé par $\partial_{xx} f(x^*, y^*) < 0$ et $\partial_{yy} f(x^*, y^*) < 0$. Conclure quant à la nature d'un des points candidats trouvés à la question 2) b.

8. Functional equation

Find all real-valued functions f that satisfy, for all real numbers x, y :

$$f(x + y)^2 = f(x)^2 + f(y)^2$$

We may start by studying the case $x = y = 0$ then $y = -x$.

Correction des exercices

1. Étude de convergence de fonctions

1) La fonction g admet en 0 : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} g(x) = -2$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} g(x) = 2$. Par conséquent la courbe verte admet des asymptotes horizontales d'équations $y = -2$ et $y = 2$. De plus, g diverge vers $\pm\infty$ lorsque x tend vers $\pm\infty$. D'autre part, $f(x)$ diverge vers $+\infty$ lorsque x tend vers 2, la courbe rouge admet donc une asymptote verticale d'équation $x = 2$. Finalement, f converge vers 0 lorsque x tend vers $\pm\infty$, la courbe rouge admet donc une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.

2)

a. La fonction f est somme d'une fonction qui diverge vers $-\infty$ en $+\infty$ et d'une fonction qui converge vers $3 - 0 = 3$ en $+\infty$.
Par somme d'une limite infinie et limite finie, f diverge vers $-\infty$ en $+\infty$.

b. La fonction f est somme de fonctions qui divergent vers $+\infty$ en $+\infty$.
Par somme de limites infinies égales, f diverge vers $+\infty$ en $+\infty$.

c. La fonction f est quotient d'une fonction qui diverge vers $+\infty$ en $-\infty$ et d'une fonction qui diverge vers $-\infty$ et $-\infty$, levons l'indétermination.
On a, pour tout $x \neq -2$, $f(x) = \frac{4x^2+2x+1}{x+2}$

$$= 4x \cdot \frac{\left(1+\frac{1}{2x}+\frac{1}{4x^2}\right)}{\left(1+\frac{2}{x}\right)}$$

Or, la fraction *artificielle* converge vers 1 en $-\infty$, par produit d'une limite infinie et limite finie, f diverge vers $-\infty$ en $-\infty$.

Remarque (Factorisation par le plus haut degré)

Lorsqu'on rencontre une forme indéterminée $\frac{\infty}{\infty}$ n'impliquant que des polynômes, appelée **fonction rationnelle**, on cherchera toujours à factoriser le numérateur et dénominateur par leur plus haut degré respectif. On remarque que lorsque le numérateur possède le plus haut des deux degrés, la fonction rationnelle divergera vers l'infini et dans le cas inverse convergera vers 0, dans le cas de degrés égaux, la fonction convergera vers le rapport des deux coefficients dominants.

d. La fonction f est produit d'une fonction qui diverge vers $+\infty$ en $+\infty$ et d'une fonction qui converge vers 0 en $+\infty$, levons l'indétermination.
On a, pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = xe^{-x}$
$$= \frac{x}{e^x}$$
$$= \frac{1}{\left(\frac{e^x}{x}\right)}$$
Or, par croissances comparées, $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, donc par inverse d'une fonction de limite infinie, f converge vers 0 en $+\infty$.

e. La fonction f est somme d'une fonction qui diverge vers $+\infty$ en $+\infty$ et d'une fonction qui diverge sans limite, levons l'indétermination.
On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - \sin(x) \geq x^2 - 1$
Or, la fonction polynôme $x \mapsto x^2 - 1$ diverge vers $+\infty$ en $+\infty$, donc par théorème de comparaison, f diverge vers $+\infty$ en $+\infty$.

f. La fonction f est somme d'une fonction qui diverge vers $+\infty$ en $+\infty$ et d'une fonction qui diverge vers $-\infty$ en $+\infty$, levons l'indétermination.
On a, pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = e^x - x^2 + 1$
$$= e^x \left(1 - \frac{x^2}{e^x} + \frac{1}{e^x}\right)$$
De manière similaire à la question d., on retrouve que le facteur de droite $x \mapsto 1 - \frac{x^2}{e^x} + \frac{1}{e^x}$ converge vers 1 en $+\infty$, par produit d'une limite infinie et limite finie, f diverge vers $+\infty$ en $+\infty$.

g. La fonction f est quotient d'une fonction qui diverge sans limite en $-\infty$ et d'une fonction qui diverge vers $-\infty$ en $-\infty$, levons l'indétermination.
On a, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $f(x) = \frac{\cos(x)}{x} \in \left[-\frac{1}{x}, \frac{1}{x}\right]$
Or, la fonction inverse converge vers 0 en $-\infty$, par théorème des gendarmes, f converge vers 0 en $-\infty$.

h. La fonction f est quotient d'une fonction qui diverge vers $+\infty$ en $-\infty$ et d'une fonction qui diverge sans limite en $-\infty$, levons l'indétermination.
On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2+4}{4+\cos(x)} \geq \frac{x^2+4}{5}$
Or, le polynôme $x \mapsto \frac{x^2+4}{5}$ et diverge vers $+\infty$ en $-\infty$, par théorème de comparaison, f diverge vers $+\infty$ en $-\infty$.

i. La fonction f est somme d'une fonction qui diverge vers $-\infty$ en $+\infty$ et d'une fonction qui diverge vers $+\infty$ et $+\infty$, levons l'indétermination.
On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -x^3 + 2x^2$
$$= -x^3\left(1 - \frac{2}{x}\right)$$
Or, la fonction $x \mapsto 1 - \frac{2}{x}$ converge vers 1 en $+\infty$, par produit d'une limite infinie et limite finie, f diverge vers $-\infty$ en $+\infty$.

j. La fonction f est quotient d'une fonction qui converge vers $\frac{9}{8}$ en $\frac{1}{4}$ et d'une fonction qui converge vers 0 et $\frac{1}{4}$, déterminons le signe.
$x \mapsto 4x - 1$ est négative pour $x \leq \frac{1}{4}$ et positive pour $x \geq \frac{1}{4}$.
Par inverse d'une limite nulle, $\lim\limits_{\substack{x \to 1/4 \\ x \leq 1/4}} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 1/4 \\ x \geq 1/4}} f(x) = +\infty$.
La fonction f est quotient d'une fonction qui converge vers $+\infty$ en $-\infty$ et d'une fonction qui diverge vers $-\infty$ et $-\infty$, levons l'indétermination.
De manière similaire à la question c., par factorisation par le plus haut degré, f diverge vers $-\infty$ en $-\infty$.

k. La fonction f est quotient d'une fonction qui diverge vers $+\infty$ en $+\infty$ et d'une fonction qui diverge vers $+\infty$ et $+\infty$, levons l'indétermination.
De manière similaire à la question c. et j., par factorisation par le plus haut degré, f converge vers $\sqrt{\frac{2}{3}}$ en $+\infty$.

l. La fonction f est quotient d'une fonction qui converge vers 0 en 1 et d'une fonction qui converge vers 0 et 1, levons l'indétermination.

On a, pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$, $f(x) = \frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$
$$= \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x+1)}$$
$$= \frac{x-1}{x+1}$$

Par quotient d'une limite nulle et limite finie, f converge vers 0 en 1.

Remarque (Factorisation par la racine commune)

Lorsqu'on rencontre une forme indéterminée $\frac{0}{0}$ n'impliquant que des polynômes, on cherchera toujours à factoriser le numérateur et dénominateur par leur racine commune, de sorte à se retrouver dans un cas solvable.

m. La fonction f est quotient d'une fonction qui diverge vers $+\infty$ en $+\infty$ et d'une fonction qui diverge vers $+\infty$ en $+\infty$, levons l'indétermination.

On a, pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x-x}{e^x+x}$
$$= \frac{e^x}{e^x} \cdot \frac{1-\frac{x}{e^x}}{1+\frac{x}{e^x}}$$
$$= \frac{1-\frac{x}{e^x}}{1+\frac{x}{e^x}}$$

De manière similaire à la question d., par croissances comparées, f converge vers 1 en $+\infty$.

n. La fonction f est quotient d'une fonction de nature à déterminer en $+\infty$ et d'une fonction qui diverge vers $+\infty$ en $+\infty$, levons l'indétermination.

On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x\sin(x)}{x^2+1} \in \left[-\frac{x}{x^2+1}, \frac{x}{x^2+1}\right]$

De manière similaire à la question c., j. et k., par factorisation par le plus haut degré et théorème des gendarmes, f converge vers 0 en $+\infty$.

o. La fonction f est somme d'une fonction qui diverge vers $+\infty$ en $+\infty$ et d'une fonction qui diverge vers $-\infty$ en $+\infty$, levons l'indétermination.

De manière similaire à la question c., j., k. et n., par factorisation par le plus haut degré, f diverge vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.

p. Par quotient d'une limite finie et infinie, f converge vers 0 en $-\infty$.

q. Par somme d'une limite finie et infinie, f converge vers $-\infty$ en $-\infty$.

r. Par quotient d'une limite finie et nulle (positive des deux côtés), f diverge vers $+\infty$ en 1^- et 1^+.

s. Par quotient d'une limite finie et nulle (positive du côté droit), f diverge vers $+\infty$ en -1^+.

2. Étude de dérivées de fonctions

1)

a. Par inverse d'une fonction dérivable qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.
On a, pour tout $x \neq -1, f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}$

b. Par somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
On a, pour tout $x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x - 2x + 2$

c. Par quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^*$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}^*$, f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$.
On a, pour tout $x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{-\sin(x)\cdot x - \cos(x)\cdot 1}{x^2}$
$= -\frac{x\sin(x)+\cos(x)}{x^2}$

d. Par produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
On a, pour tout $x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^{-x} - xe^{-x}$
$= e^{-x}(1-x)$

e. Par somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
On a, pour tout $x \in \mathbb{R}, f'(x) = 6x + 2$

f. Par produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
On a, pour tout $x \in \mathbb{R}, f'(x) = 8x + 4$

g. La fonction $x \mapsto x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, par composition de fonctions dérivables, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
On a, pour tout $x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2(x+1)e^{(x+1)^2}$

h. La fonction $x \mapsto 2x - 1$ est dérivable sur $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, par composition de fonctions dérivables, f est dérivable sur $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$.
On a, pour tout $x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{2}{2\sqrt{2x-1}}$
$= \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$

i. On remarque que pour tout $x > 0$, $x^x = e^{x\ln(x)}$, or $x \mapsto x\ln(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ par produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ et $x \mapsto e^x$ dérivable sur $\mathbb{R}$, par composition de fonctions dérivables, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
On a, pour tout $x > 0, f'(x) = \left(\ln(x) + \frac{x}{x}\right) \cdot e^{x\ln(x)}$
$= (1 + \ln(x)) \cdot x^x$

j. Par quotient de fonctions dérivables sur $]0,2[\, \cup\,]2,+\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0,2[\, \cup\,]2,+\infty[$, f est dérivable sur $]0,2[\, \cup\,]2,+\infty[$.
On a, pour tout $x \in\,]0,2[\, \cup\,]2,+\infty[, f'(x) = \frac{\left(\sqrt{x}+\frac{x}{2\sqrt{x}}\right)\cdot(x-2)-x\sqrt{x}}{(x-2)^2}$
$= \frac{\frac{3}{2}\sqrt{x}\cdot(x-2)-x\sqrt{x}}{(x-2)^2}$
$= \frac{\sqrt{x}\left(\frac{3}{2}(x-2)-x\right)}{(x-2)^2}$
$= \frac{\sqrt{x}\left(\frac{1}{2}x-3\right)}{(x-2)^2}$
$= \frac{(x-6)\sqrt{x}}{2(x-2)}$

k. Par produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
On a, pour tout $x \in \mathbb{R}, f'(x) = 3(x+3)^2$

l. Par théorème, pour tout $x \in \mathbb{R}, f'(x) = 0$.

2) En s'appuyant sur la relation signe-dérivée et variations-fonction, on peut conjecturer que la fonction représentée par la courbe bleu ciel est la dérivée de la fonction représentée par la courbe verte. Un problème s'impose quant aux courbes violette et jaune, toutes deux représentatives de dérivées positives, donc fonctions croissantes. Toutefois, on observe qu'en $x = 0$, la courbe violette admet pour ordonnée $y = 0$ tandis que la courbe jaune admet pour ordonnée $y > 0$, or une dérivée nulle est représentée graphiquement par une tangente horizontale, ainsi, on peut déduire que la fonction représentée par la courbe violette est la dérivée de la fonction représentée par la courbe rouge, dont la pente en $x = 0$ est nulle, par élimination on associe la dérivée représentée par la courbe jaune à la fonction représentée par la courbe bleue.

3. Étude de continuité de fonctions

a. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$, la fonction f est donc continue sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ par théorème.

b. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, la fonction f est donc continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Remarque

La fonction f est continue à droite en 0, en effet, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = f(0) = 0$.

c. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$, la fonction f est donc continue sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$.

d. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction f est donc continue sur $\mathbb{R}$.

e. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction f est donc continue sur $\mathbb{R}$.

f. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$, la fonction f est donc continue sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$.

4. Coûts de production

1)

a. On a, pour tout $q \in [0, 10], C_M(q) = \frac{1}{5}q^2 - 4q + 20$.

D'après son nom et sa relation à la fonction du coût, on peut interpréter le coût unitaire moyen comme le coût de produire une unité supplémentaire sachant qu'on en a déjà q produites. En effet, la plupart des prix de production n'évolue pas linéairement, c'est-à-dire que deux fois plus d'unités produites n'implique pas forcément deux fois plus de coûts. Par exemple, si dix produits alimentaires peuvent être livrés par un individu, ajouter un onzième pourrait requérir un second livreur ou du moins un second trajet, ce qui coûte naturellement plus que si le même livreur était capable de livrer onze produits.

b. La fonction C_M est polynômiale, elle est donc dérivable sur $[0, 10]$.
On a, pour tout $q \in [0, 10], C'_M(q) = \frac{2}{5}q - 4$
Or, $C'_M(q) = 0 \Leftrightarrow q = 10$ unités.
Le coût unitaire moyen est minimisé à dix unités.

2)

a. Tout d'abord, C est polynômiale, elle est donc dérivable sur $[0, 10]$
On a, pour tout $q \in [0, 10], C_m(q) = C'(q)$

$$= \frac{3}{5}q^2 - 8q + 20$$

b. On a, $C_m(10) = 0$ et $C_M(10) = 0$.

c. La dérivée de C, soit C_m, est un polynôme du second degré de discriminant $\Delta = (-8)^2 - 4 \times \frac{3}{5} \times 20 = 16\ (= 4^2)$, le polynôme admet donc deux racines réelles $q_2 = 10$ et $q_1 = 10/3$, le polynôme admet un coefficient dominant positif, $C_m(q)$ est donc négative sur $\left[\frac{10}{3}, 10\right]$ et positive en dehors. Ainsi, la fonction C est croissante sur $\left[0, \frac{10}{3}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{10}{3}, 10\right]$.

d. On a, $\mathcal{T} : y = C_m(7)(q - 7) + C(7) = 58.8 - 6.6x$

3)

a. On a, $B(q) \geq 0 \Leftrightarrow -(q-5)(q-12) \geq 0$
On déduit que la vente de glaces est rentable pour 5 à 10 glaces produites et vendues.

b. La fonction B est produit de fonctions dérivables sur $[0,10]$, B est donc dérivable sur $[0,10]$.
On a, $B'(q) = -(q-12) - (q-5) = -2q + 17$
Ainsi, il vient que $B'(q)$ est positive sur $[0,8.5]$ et négative sur $[8.5,10]$, ainsi B admet un maximum en $q = 8.5$ de valeur $B(8.5) = 12.5$ euros.

5. Trajectoire d'un frisbee

1)

a. Par quotient de fonctions dérivables sur $[0,5]$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0,5]$, T est dérivable sur $[0,5]$.
On a, pour tout $x \in [0,5], T'(x) = \frac{(5-2x)\cdot(x+1)-(5x-x^2)}{(x+1)^2}$
$= -\frac{x^2+2x-5}{(x+1)^2}$
Le polynôme $x \mapsto x^2 + 2x - 5$ admet pour discriminant $\Delta = 24 > 0$. Par théorème, le polynôme admet pour racines $x_1 = \frac{-2+\sqrt{24}}{2}, x_2 = \frac{-2-\sqrt{24}}{2}$ on remarque que $\sqrt{24} < \sqrt{25} = 5$, donc $x_1 \in [0,5]$ et $x_2 < 0$. Il vient alors que $T'(x)$ est positive sur $[0, x_1]$ et négative sur $[x_1, 5]$. Par théorème, T est croissante sur $[0, x_1]$ et décroissante sur $[x_1, 5]$.

b. On a établi que T est dérivable sur $[0,5]$, par théorème, T est continue sur $[0,5]$. De plus, T est croissante $[0, x_1]$ et décroissante sur $[x_1, 5]$, par corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, T admet un maximum en $x = x_1$ de valeur $T(x_1) = 7 - 2\sqrt{6} \simeq 2.101$.

c. Par quotient de fonctions dérivables sur $[0,5]$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0,5]$, T' est dérivable sur $[0,5]$.
On a, pour tout $x \in [0,5], T''(x) = -\frac{(2x+2)(x+1)^2-(x^2+2x-5)\cdot 2(x+1)}{(x+1)^4}$
$= -\frac{12}{(x+1)^3}$

On remarque que $T''(x)$ est strictement négative sur $[0,5]$, par théorème, T' est strictement décroissante sur $[0,5]$ et admet donc un maximum en 0 de valeur $T'(0) = 5$.

d. On a établi à la question c. que $T''(x)$ est négative sur $[0,5]$, par théorème, T est concave sur $[0,5]$.

2)

a. De manière similaire à la partie 1), on retrouve pour tout $x \in [0,5]$, $T'(x) = -\frac{ax^2+2ax-5}{(x+1)^2}$. Ainsi, la nouvelle altitude maximale se situe en $x_a = \frac{-2a+\sqrt{4a^2+20a}}{2}$.

b. On a, $T(10) = 0 \Leftrightarrow -100a + 50 = 0 \Leftrightarrow a = 0.5$.
En appliquant une force de 0.5 unités, le frisbee retombera à une distance 10 du lanceur.

6. Algorithme de dichotomie

a. Par somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
On a, pour tout $x \in \mathbb{R}, f'(x) = -3x^2 + 4x - 1$
Le polynôme $f'(x)$ admet pour racines $x_1 = \frac{1}{3}$ et $x_2 = 1$.
Le coefficient dominant de $f'(x)$ est négatif, par théorème, $f'(x)$ est strictement positive sur $\left]\frac{1}{3}, 1\right[$ et strictement négative sur $\mathbb{R}\backslash\left]\frac{1}{3}, 1\right[$. Par théorème, f est strictement croissante sur $\left[\frac{1}{3}, 1\right]$ et strictement décroissante sur $\left]-\infty, \frac{1}{3}\right[$ et $]1, +\infty[$.

b. D'après la question a., f est strictement décroissante sur $[1, 2]$. Or, $f(1) = 1 > 0$ et $f(2) = -1 < 0$ et f est continue sur $[1, 2]$ car dérivable sur $[1, 2]$. D'après un corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, f admet une unique solution α à l'équation $f(x) = 0$ sur l'intervalle $[1, 2]$.

c.

```python
def f(x) :
    return -x**3 + 2*x**2 - x + 1

a = 1
b = 2
m = (a+b)/2

while abs(f(m) - 0) > 10**(-4) :
    # La notion de précision d'estimation est toujours la distance
    # (positive donc abs) entre l'estimation et la solution.
    # Si par chance f(c) == 0, on ne rentre pas dans la boucle.
    if f(a)*f(m) < 0 :
        b = m
    elif f(b)*f(m) < 0 :
        # Le elif est important, car pour chaque itération.
        # On souhaite remplacer soit a soit b, mais jamais les deux
        # au même tour de dichotomie.
        a = m
    m = (a+b)/2
    if f(a) == 0 :
        # Si par chance f(a) == 0, on retourne a.
        print(a)
    elif f(b) == 0 :
        # idem.
        print(b)

print(m)
```

On retrouve $\alpha \simeq 1.755$.

7. Fonctions à plusieurs variables

1)

a. On a, $\forall x, y \in \mathbb{R}^*$,
$x > 0 \Longrightarrow x^2 > 0 \Longrightarrow x^4 > 0$ et sans perte de généralité $y^2, y^4 > 0$.
Donc, $\forall x, y \in \mathbb{R}^*, f(x,y) > 0$.
De plus, $\forall x, y \in \mathbb{R}^*$,
$f(x,y) = \frac{x^4+y^4}{x^2+y^2} = \frac{x^4}{x^2+y^2} + \frac{y^4}{x^2+y^2}$
Or, $\forall x, y \in \mathbb{R}^*, x^2 > 0$ et $y^2 > 0$, donc,
$\forall x, y \in \mathbb{R}^*, f(x,y) \leq \frac{x^4}{x^2} + \frac{y^4}{y^2} = x^2 + y^2 \to_{(x,y)\to(0,0)} 0$.
D'après le théorème des gendarmes, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$.
Finalement, la fonction f est bien continue en $(0,0)$.

b. On a, $\forall x, y \in \mathbb{R}^*$,
$\partial_x f(x,y) = \frac{4x^3(x^2+y^2)-2x(x^4+y^4)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^5+4x^3y^2-2xy^4}{(x^2+y^2)^2}$
$\partial_y f(x,y) = \frac{4y^3(x^2+y^2)-2y(x^4+y^4)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2y^5+4x^2y^3-2x^4y}{(x^2+y^2)^2}$

c. On a, $\forall x, y \in \mathbb{R}^*$, $f(x,y) > 0 = f(0,0)$.
La fonction f admet donc un maximum global en $(0,0)$.

d. Par produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}_+^*$, v est continue sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.
De plus, $\forall d, t \in \mathbb{R}_+^*, \partial_d v(d,t) = 1/t$ et $\partial_t v(d,t) = -d/t^2$.
On remarque que $\forall d, t \in \mathbb{R}_+^*, \partial_d v(d,t) > 0$ et $\partial_t v(d,t) < 0$.
Cela fait sens car la dérivée représente le taux d'accroissement. Effectivement, plus la distance parcoure est grande, plus rapide la vitesse. Inversement, plus le temps de parcours est grand, plus lente la vitesse.

2)

a. On a, $\forall x, y \in \mathbb{R}, z(x+2\pi, y) = \cos(x+2\pi)\sin(y) = \cos(x)\sin(y)$
$= z(x,y)$
De manière similaire, $\forall x, y \in \mathbb{R}, z(x, y+2\pi) = z(x,y)$
Ainsi, il suffit de restreindre les ensembles à des intervalles de longueur 2π pour pouvoir étudier la fonction dans son ensemble d'origine.

b. On a,

$$\vec{\nabla}(z) = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} \partial_x z(x,y) = 0 \\ \partial_y z(x,y) = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\sin(x)\sin(y) = 0 \\ \cos(x)\cos(y) = 0 \end{cases}$$

Si $\sin(x) = 0$, alors $x \in \{0, \pi\}$.

Ainsi, $\cos(x) \neq 0$ et donc $\cos(y) = 0$, alors $y \in \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$.

Si $\sin(x) \neq 0$, donc $\sin(y) = 0$, alors $y \in \{0, \pi\}$.

Ainsi, $\cos(y) \neq 0$ et donc $\cos(x) = 0$, alors $x \in \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\}$.

Finalement, on retrouve l'ensemble des points candidats de la fonction z

$\mathcal{S} = \left\{\left(0, \frac{-\pi}{2}\right), \left(0, \frac{\pi}{2}\right), \left(\pi, \frac{-\pi}{2}\right), \left(\pi, \frac{\pi}{2}\right), \left(\frac{-\pi}{2}, 0\right), \left(\frac{-\pi}{2}, \pi\right), \left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)\right\}$.

c. Étudions le point candidat $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, on a, $\forall x, y \in \left]-\frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \times]-\pi, \pi]$,

$\partial_{xx} z(x,y) = -\cos(x)\sin(y)$ et $\partial_{yy} z(x,y) = -\cos(x)\sin(y)$.

Ainsi, $\partial_{xx} z\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = \partial_{yy} z\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = -1 < 0$.

Le point $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ est un maximum global de z de hauteur $z\left(0, \frac{\pi}{2}\right) = 1$. (cf. la figure)

8. Functional equation

First, we have,

$$f(0)^2 = f(0+0)^2 = f(0)^2 + f(0)^2 \Leftrightarrow f(0)^2 = 2f(0)^2$$
$$\Leftrightarrow 0 = f(0)^2$$
$$\Leftrightarrow f(0) = 0$$

Moreover, we have, $\forall x, y \in \mathbb{R}$,

$f(0)^2 = f\big(x + (-x)\big)^2 = f(x)^2 + f(-x)^2 \Leftrightarrow f(x)^2 + f(-x)^2 = 0$

However, both $f(x)^2$ and $f(-x)^2$ are positive quantities.

Thus, $f(x)^2 + f(-x)^2 = 0 \Leftrightarrow f(x)^2 = 0$ and $f(-x)^2 = 0$.

Finally, the only solution of $f(x+y)^2 = f(x)^2 + f(y)^2$ is the zero function.

There are

$$4 \cdot \log_{36}(6)$$

types of people in this world :
Those who understand logarithms and
those who don't.

« You have no idea how much poetry there is in a table of logarithms. »

Carl Friedrich Gauss, *The Music of the Primes* (2003)

Le logarithme népérien, aussi nommé logarithme naturel, permet, comme les autres logarithmes, de transformer les produits en somme. La fonction se retrouve particulièrement pratique lors du calcul de gigantesques valeurs. Nous introduirons la notion de logarithme ainsi qu'étudierons la fonction suivant les caractéristiques vu au chapitre « Fonctions réelles ». Le logarithme népérien a une place omniprésente dans la modélisation de problèmes dynamiques du fait de sa relation à l'exponentielle.

Sommaire

Cours

Exercices d'application

Exercices d'approfondissement

Correction des exercices

Cours

I. Définition et propriétés

1. Définition

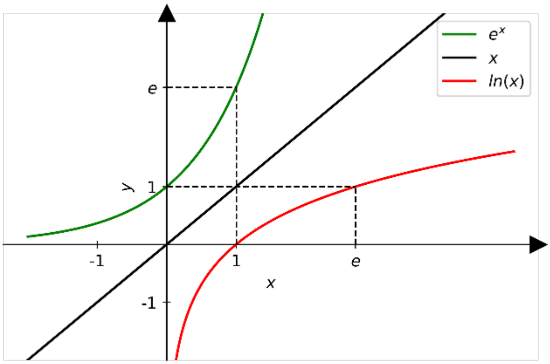
Définition (Logarithme népérien)

La fonction **logarithme népérien**, notée ln, est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par l'unique solution de l'équation $e^x = a$, notée $\ln a$. On note alors :

$$\ln : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln x \end{array}$$

Remarque

La fonction ln est réciproque de la fonction exp, c'est-à-dire que $\exp \circ \ln = \ln \circ \exp = \text{fonction identité}$, elles sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



2. Propriétés

Soit a, b deux réels strictement positifs.

Propriété (Relation fonctionnelle)

On a, $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$

Corollaires (Relation fonctionnelle)

On a, $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$ et $\ln(x^n) = n\ln(x)$ où $n \in \mathbb{Z}$.

Propriétés (Équations et inéquations)

On a, $\ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$ et $\ln(a) > \ln(b) \Leftrightarrow a > b$.

II. Étude de la fonction

1. Généralités

Propriété (Dérivabilité et continuité du logarithme népérien)

La fonction ln est dérivable, donc continue, sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée $\ln' : x \mapsto \frac{1}{x}$.

Démonstration (Dérivée du logarithme népérien)

Par théorème, on a, d'une part, $\forall x > 0, \left(e^{\ln(x)}\right)' = (\ln(x))' e^{\ln(x)}$, d'autre part $e^{\ln x} = x \Longrightarrow \left(e^{\ln(x)}\right)' = 1$. Donc, $(\ln(x))' = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x}$

Propriété (Logarithme népérien)

La fonction ln est strictement croissante et concave sur $\mathbb{R}_+^*$ de limites $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} -\infty$.

2. Croissances comparées

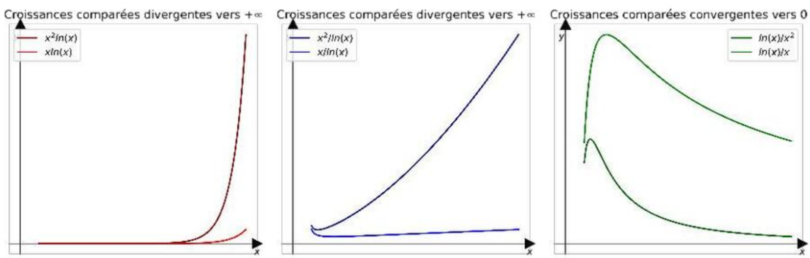
Propriétés (Croissances comparées)

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0 \ (n \in \mathbb{N}^*)$$
$$\lim_{x\to 0^+} x\ln(x) = 0 \text{ et } \lim_{x\to 0^+} x^n \ln(x) = 0 \ (n \in \mathbb{N}^*)$$

Démonstration (Croissance comparée du logarithme)

On pose $X = -\ln x$ et $x = e^{-X}$, si $x \to 0^+ \Leftrightarrow X \to +\infty$ alors par propriété,

D'où, $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln(x) = \lim\limits_{X\to+\infty} (-X)e^{-X} = \lim\limits_{X\to+\infty} -\frac{X}{e^X} = 0$.



Exercices d'application

1. Simplification de quantités

Simplifier les quantités suivantes :

a. $\ln(e^2) - \ln(1/e)$
b. $3\ln(6) + 2\ln(11)$
c. $\ln(\sqrt{5} - 2) + \ln(\sqrt{5} + 2)$
d. $\ln(8) - \ln(4)$
e. $\ln(5e^3/2)$
f. $20\ln(2\sqrt{e}) - e^{2\ln(2)}$
g. $\ln(e^4)$
h. $e^{\ln(4)} + e^{\ln(5)}$
i. $\forall n \in \mathbb{N} \sum_{k=1}^{n} \ln(e^k) = \ln(e) + \cdots + \ln(e^n)$

2. Résolution d'équations et d'inéquations

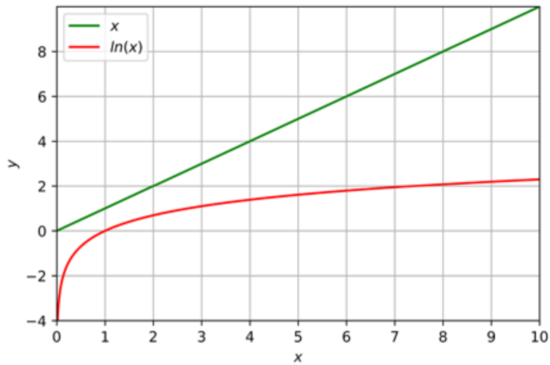
Résoudre les équations ou inéquations suivantes :

a. $3^x = 2$
b. $x^3 = 2$
c. $\ln(x) = 10$
d. $e^{2x+1} = 5$
e. $\ln(x^2 - 1) - \ln(2x - 1) + \ln(2) = 0$
f. $\ln(1 + x) \leq 1$
g. $e^x + e^{1-x} = 1$
h. $\sqrt{\ln(3x + 1)} = 2$
i. $(e^x - 1)(5 + 2\ln(x)) = 0$
j. $(2x + 1)(9\ln(x) - 1) \geq 0$
k. $(\ln(x))^2 = 9$
l. $\ln(1/x) \leq 0$
m. $2\ln(2x + 1) - 3 = 1$
n. $\ln(2x + 1) + \ln(x) = 0$
o. $\ln(x^2) = (\ln(x))^2$
p. $\ln(-x) < 3$
q. $(\ln(x))^2 + \ln(x) - 6 = 0$

3. Position relative de la courbe de ln par rapport à la droite $y = x$

Démontrer que, pour tout réel x strictement positif :

$$\ln(x) \leq x$$



4. Applications de la fonction logarithme

1) On applique la loi de refroidissement de Newton à une théière initialement chauffée à $T_0 = T(0) = 100°\text{C}$ où T représente la température moyenne de la théière définie par $T(t) = T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt}$ avec T_a la température ambiante de 20°C, t le temps en minutes et k un paramètre réel.
   a. On remarque après deux minutes que la température de la théière à chutée à 75°C. Déterminer l'expression de k.
   b. On peut réutiliser la théière sans dégradation de qualité du thé lorsque sa température est inférieure à 30°C, déterminer à partir de quel instant pourra-t-on réutiliser la théière.
   c. Vers quelle température de la théière converge-t-elle ?

2) On souhaite étudier l'investissement P au sein d'un compte bancaire à taux 10% annuel, c'est-à-dire que chaque année, la somme contenue dans le compte augmente de 10%.
   a. Déterminer l'expression de P en fonction du nombre d'années passées.
   b. Déterminer à partir de quelle année aura-t-on doublé notre investissement dans le compte bancaire.

EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

5. Démonstrations de propriétés à partir de l'intégrale

A l'aide du chapitre « Primitives et équations différentielles » et « Calcul intégral », nous sommes en mesure d'établir que pour tout $x > 0$:

$$\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t} dt$$

A l'aide de cette nouvelle définition du logarithme népérien, démontrez les propositions suivantes :

a. $\forall a, b > 0, \ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow a = b$.

b. La fonction $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

6. Logarithme de base a

Le **logarithme de base a**, noté $\log_a$ est la fonction définie telle que :

$$\forall x > 0, \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

1) Études le cas $a = 10$, appelé **logarithme décimal**, noté $\log_{10}$:

a. Calculer $\log_{10}(10)$, $\log_{10}(100)$ et $\log_{10}(0{,}01)$.

b. Démontrer que pour tout $x, y > 0$: $10^x = y \Leftrightarrow x = \log_{10}(y)$.

c. Soit **l'échelle de Richter** R, représentant la magnitude d'un séisme définie par $R(I) = \log_{10}\left(\frac{I}{I_0}\right)$ où I correspond à l'intensité d'un séisme et I_0 une référence. On prend pour référence un séisme ayant eu lieu en Corée de magnitude $I_0 = 5{,}4$ au mois de novembre 2017. Comparer sur l'échelle de Richter avec le plus violent séisme jamais enregistré au Japon d'une magnitude estimée à $I = 9{,}1$.

d. Quel devrait être l'intensité I d'un séisme pour que sa magnitude selon l'échelle de Richter soit de 2 ?

2) Étudions le cas $a \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$.

a. Déterminer les variations de $\log_a$.

b. Déterminer le signe de $\log_a(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x > 0, \log_a(x^n) = n \log_a(x)$.

d. Comparer les quantités 5^{5^5} et 9^9.

e. Résoudre $\log_x(x + 2) = 2$.

7. Résolution d'équations avancées

A l'aide des indications fournies, résoudre les équations suivantes :

a. $4^x + 6^x = 9^x$ en remarquant que $\frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2$

b. $(x^2 - 7x + 11)^{x^2-13x+42} = 1$ en effectuant une disjonction de cas.

c. $x^{\sqrt{x}} = \left(\sqrt{x}\right)^x$ à l'aide de la relation exp – ln.

d. $8^x = 10y$ et $2^x = 5y$ à l'aide d'un système non-linéaire.

e. $2^{2x} - 3^{x-1/2} = 3^{x+1/2} - 2^{2x-1}$ en l'écrivant comme $4^x \times a = 3^x \times b$.

f. $\ln(x)\ln(y) = \ln(xy)$ avec $y > 0$ et $y \neq e$.

g. $\log_4(x) + \log_2(x) = 6$ à l'aide de la définition exercice 6.

8. Logarithmic battle

Let $N = 2020$, after reading exercise 7, compare the following :

$$\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{\log_n(N!)} = \frac{1}{\log_2(N!)} + \frac{1}{\log_3(N!)} + \cdots + \frac{1}{\log_N(N!)}$$

and

$$\ln(2) \prod_{n=2}^{N} \log_n(n+1) = \ln(2) \times (\log_2(3))(\log_3(4)) \ldots (\log_N(N+1))$$

Correction des exercices

1. Simplification de quantités

a. On a, $\ln(e^2) - \ln(1/e) = 2\ln(e) + \ln(e) = 3\ln(e) = 3$

b. On a, $3\ln(6) + 2\ln(11) = \ln(6^3 + 11^2) = \ln(337)$

c. On a, $$\begin{aligned}\ln(\sqrt{5}-2) + \ln(\sqrt{5}+2) &= \ln\left((\sqrt{5}-2)(\sqrt{5}+2)\right)\\ &= \ln(5-4)\\ &= \ln(1)\\ &= 0\end{aligned}$$

d. On a, $\ln(8) - \ln(4) = \ln(8/4) = \ln(2)$

e. On a, $\ln(5e^3/2) = \ln(5) + \ln(e^3) - \ln(2) = 3 + \ln(5/2)$

f. On a, $$\begin{aligned}20\ln(2\sqrt{e}) - e^{2\ln(2)} &= 20(\ln(2) + \ln(\sqrt{e})) - \left(e^{\ln(2)}\right)^2\\ &= 20\left(\ln(2) + \tfrac{1}{2}\right) - 4\\ &= 6 + 20\ln(2)\end{aligned}$$

g. On a, $\ln(e^4) = 4\ln(e) = 4$

h. On a, $e^{\ln(4)} + e^{\ln(5)} = 4 + 5 = 9$

i. On a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $$\begin{aligned}\textstyle\sum_{k=1}^{n} \ln(e^k) &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} k \cdot \ln(e)\\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} k\\ &= \tfrac{n(n+1)}{2}\end{aligned}$$

2. Résolution d'équations et inéquations

a. On a, $3^x = 2 \Leftrightarrow \ln(3^x) = \ln(2) \Leftrightarrow x = \frac{\ln(2)}{\ln(3)}$

b. On a, $x^3 = 2 \Leftrightarrow x = 2^{1/3}$

c. On a, $\ln(x) = 10 \Leftrightarrow x = e^{10}$

d. On a, $e^{2x+1} = 5 \Leftrightarrow 2x + 1 = \ln(5) \Leftrightarrow x = \frac{\ln(5)-1}{2}$

e. On a, $\ln(x^2 - 1) - \ln(2x - 1) + \ln(2) = 0 \Leftrightarrow \ln\left(2\frac{x^2-1}{2x-1}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow 2\frac{x^2-1}{2x-1} = 1$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 1 = \frac{1}{2}(2x - 1)$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 1 = x - \frac{1}{2}$$
$$\Leftrightarrow x^2 - x + \frac{1}{2} = 0$$

Le discriminant du polynôme $x \mapsto x^2 - x + \frac{1}{2}$ est négatif, ainsi le polynôme ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Pas de solution.

f. On a, $\ln(1 + x) \leq 1 \Leftrightarrow 0 < 1 + x \leq e$

$$\Leftrightarrow -1 < x \leq e - 1$$

Remarque

On rappelle que la propriété $e^{\ln(x)} = x$ est valide **uniquement** si $x > 0$. Néanmoins, $\ln(e^x) = x$ est valide pour tout x réel. Cela est dû aux ensembles de définitions respectifs des fonctions exp et ln.

g. On a, $e^x + e^{1-x} = 1 \Leftrightarrow \frac{e^{2x}+e}{e^x} = 1$

$$\Leftrightarrow e^{2x} + e = e^x$$
$$\Leftrightarrow e^{2x} - e^x + e = 0$$
$$\Rightarrow_{X=e^x} X^2 - X + e = 0$$

Le discriminant du polynôme $X \mapsto X^2 - X + e$ est négatif, ainsi le polynôme ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Pas de solution.

Remarque (Changement de variable)

Il est coutume de résoudre les équations $a\big(y(x)\big)^2 + by(x) + c = 0$ en posant la variable $X = y(x)$, ce qui ramène à résoudre l'équation du second degré $aX^2 + bX + c = 0$. Toutefois, on ne doit pas oublier de déterminer les solutions finales à notre équation à l'aide de la relation $y(x) = X$, il n'est pas impossible que des solutions trouvées en X ne se transposent pas à l'équation en $y(x)$. D'où l'implication et non l'équivalence.

h. On a, $\sqrt{\ln(3x+1)} = 2 \Leftrightarrow \ln(3x+1) = 4$

$$\Leftrightarrow 3x+1 = e^4$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{e^4-1}{3}$$

i. On a, $(e^x - 1)(5 + 2\ln(x)) = 0 \Longrightarrow \begin{cases} e^x - 1 = 0 \\ \text{ou} \\ 5 + 2\ln(x) = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} e^x = 1 \\ \text{ou} \\ \ln(x) = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ou} \\ x = e^{-\frac{5}{2}} \end{cases}$$

On remarque que $x = 0$ n'est pas une solution valable car $\ln$ n'est pas définie en 0. L'unique solution est $\mathcal{S} = \left\{e^{-\frac{5}{2}}\right\}$.

j. On a, $(2x+1)(9\ln(x) - 1) \geq 0$.

$x \mapsto 2x+1$ est positive sur $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$

$x \mapsto 9\ln(x) - 1$ est positive sur $\left[e^{1/9}, +\infty\right[$

De plus, lorsque $x \mapsto 2x+1$ est négative, $x \mapsto 9\ln(x) - 1$ n'est pas définie, la seule solution est l'intervalle $\left[e^{1/9}, +\infty\right[$.

k. On a, $(\ln(x))^2 = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} \ln(x) = 3 \\ \text{ou} \\ \ln(x) = -3 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = e^3 \\ \text{ou} \\ x = e^{-3} \end{cases}$$

l. On a, $\ln\left(\frac{1}{x}\right) \leq 0 \Leftrightarrow -\ln(x) \leq 0$

$$\Leftrightarrow \ln(x) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \geq 1$$

m. On a, $2\ln(2x+1) - 3 = 1 \Leftrightarrow \ln(2x+1) = 2$

$$\Leftrightarrow 2x+1 = e^2$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{e^2-1}{2}$$

n. On a, $\ln(2x+1)+\ln(x)=0 \Leftrightarrow \ln\big(x(2x+1)\big)=0$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow x(2x+1)=1\\&\Leftrightarrow 2x^2+x-1=0\end{aligned}$$

Le discriminant du polynôme $x\mapsto 2x^2+x-1$ est strictement positif, ainsi le polynôme s'annule en $x_1=-1$ et $x_2=\frac{1}{2}$. L'ensemble des solutions est $S=\left\{-1,\frac{1}{2}\right\}$.

o. On a, $\ln(x^2)=\ln(x)^2 \Leftrightarrow 2\ln(x)-\ln(x)^2=0$

$$\begin{aligned}&\Leftrightarrow \ln(x)\,(2-\ln(x))=0\\&\Leftrightarrow \begin{cases}\ln(x)=0\\ \text{ou}\\ 2-\ln(x)=0\end{cases}\\&\Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\ \text{ou}\\ x=e^2\end{cases}\end{aligned}$$

p. On a, $\ln(-x)<3 \Leftrightarrow 0<-x<e^3$

$$\Leftrightarrow 0>x>-e^3$$

q. On a, $\ln(x)^2+\ln(x)-6=0 \Rightarrow_{X=\ln(x)} X^2+X-6=0$

$$\Leftrightarrow X^2+X-6=0$$

Le discriminant du polynôme $x\mapsto X^2+X-6$ est strictement positif, ainsi le polynôme s'annule en $X_1=-3$ et $X_2=2$. Or, $X=\ln(x)$, donc les solutions sont $x_1=e^{-3}$ et $x_2=e^2$.

3. Position relative de la courbe de ln par rapport à la droite $y = x$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $f(x) = \ln(x) - x$.
Par somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
On a, $\forall x > 0, f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}$
Ainsi, la fonction $f'(x)$ est strictement positive sur $]0,1[$ et strictement négative sur $]1,+\infty[$, par théorème, la fonction f est strictement croissante sur $]0,1[$ et strictement décroissante sur $]1,+\infty[$. Par théorème des valeurs intermédiaires, f admet un maximum global en 1 de valeur $f(1) = -1$.
Ainsi, $\forall x > 0, f(x) \leq f(1) = -1 < 0 \Longrightarrow \ln(x) - x < 0 \Longleftrightarrow \ln(x) < x.$

$$\Longrightarrow \ln(x) \leq x.$$

Donc, pour tout réel x strictement positif, $\ln(x) \leq x$.

4. Applications de la fonction logarithme

1)

a. On a, $\forall t > 0, T(t) = T_a + (T_0 - T_a)e^{-kt}$

Or,
$$\begin{aligned} T(2) = 75 &\Longleftrightarrow T_a + (T_0 - T_a)e^{-2k} = 75 \\ &\Longleftrightarrow 20 + (100 - 20)e^{-2k} = 75 \\ &\Longleftrightarrow e^{-2k} = \frac{55}{80} \\ &\Longleftrightarrow k = -\frac{1}{2}\ln\left(\frac{55}{80}\right) \simeq 0.187 \end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned} T(t) < 30 &\Longleftrightarrow 20 + 80e^{-kt} < 30 \\ &\Longleftrightarrow e^{-kt} < \frac{1}{8} \\ &\Longleftrightarrow t < -\frac{1}{k} \cdot \ln\left(\frac{1}{8}\right) \simeq 11.1 \text{ minutes} \end{aligned}$$

Après 11 minutes et 6 secondes, la théière sera réutilisable.

c. Pour tout $t > 0, -kt < 0$, donc $t \mapsto e^{-kt}$ converge vers 0 en $+\infty$.
Par somme d'une limite finie et limite nulle, T converge vers la température ambiante $T_a = 20°C$.

2)

a. Intuitivement, on retrouve la notion de suite géométrique, c'est-à-dire, $\forall t > 0, P(t+1) = (1+0.1)P(t)$.
Ainsi, on déduit pour tout $t > 0, P(t) = (1+0.1)^t P(0)$
$$= \left(\frac{11}{10}\right)^t P(0)$$

b. On a, $P(t) = 2P(0) \Leftrightarrow \left(\frac{11}{10}\right)^t P(0) = 2P(0)$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{11}{10}\right)^t = 2$$
$$\Leftrightarrow t = \frac{\ln(2)}{\ln\left(\frac{11}{10}\right)} \simeq 7.272$$
Après environ 7 ans et 100 jours, soit dans le cadre de l'exercice 8 ans, on aura doublé notre investissement.

Remarque (Finance quantitative)

Cette modélisation de la finance est dite à **intérêts composés**, c'est-à-dire que pour l'année $t+1$, on réinvestit ce que l'on a gagné, à savoir $10\% \times P(t)$, en plus de la somme initiale $P(t)$. Dans une modélisation à **intérêts simples**, on investit chaque année uniquement la somme initiale $P(0)$, ce qui nous rapporte chaque année $10\% \times P(0)$. Bien entendu, cette approche est moins lucrative, mais aussi moins risquée, dans l'éventuel cas d'une crise, l'investissement à intérêts simples nous a permis de mettre à l'abri tout ce qui a pu être remporté.

5. Démonstrations de propriétés à partir de l'intégrale

a. On a, $\forall a, b > 0, \ln(a) = \ln(b) \Leftrightarrow \int_1^a \frac{1}{x} dx = \int_1^b \frac{1}{x} dx$

$$\Leftrightarrow \int_1^a \frac{1}{x} dx - \int_1^b \frac{1}{x} dx = 0$$
$$\Leftrightarrow \int_1^a \frac{1}{x} dx + \int_b^1 \frac{1}{x} dx = 0$$
$$\Leftrightarrow \int_b^a \frac{1}{x} dx = 0$$

Or, la fonction $x \mapsto 1/x$ est strictement positive sur $[a, b]$, par propriété de l'intégrale, les bornes doivent être égales, i.e. $a = b$.

b. La fonction $x \mapsto 1/x$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, par croissance de l'intégrale, $\forall a, b > 0, a > b \Longrightarrow \int_1^a \frac{1}{x} dx > \int_1^b \frac{1}{x} dx \Leftrightarrow \ln(a) > \ln(b)$. Par définition, la fonction $\ln$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

6. Logarithme de base a

1)

a. On a, $\log_{10}(10) = \frac{\ln(10)}{\ln(10)} = 1$

$$\log_{10}(100) = \frac{\ln(100)}{\ln(10)} = \frac{2\ln(10)}{\ln(10)} = 2$$
$$\log_{10}(0{,}01) = \frac{\ln(0{,}01)}{\ln(10)} = \frac{-2\ln(10)}{\ln(10)} = -2$$

b. On a, $\forall x, y > 0, 10^x = y \Leftrightarrow \log_{10}(10^x) = \log_{10}(y)$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln(10^x)}{\ln(10)} = \log_{10}(y)$$
$$\Leftrightarrow x\frac{\ln(10)}{\ln(10)} = \log_{10}(y) \Leftrightarrow x = \log_{10}(y)$$

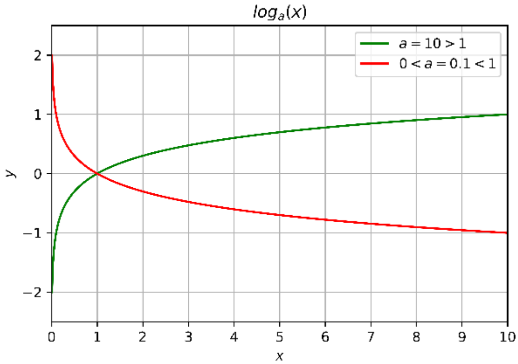
c. On a, $R(I) = \log_{10}\left(\frac{9{,}1}{5{,}4}\right) = 0.227$.

d. On a, $R(I) = 2 \Leftrightarrow \log_{10}\left(\frac{I}{5{,}4}\right) = 2 \Leftrightarrow I = 5{,}4 \cdot 10^2 = 540$.

2)

a. Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$, la fonction $\log_a$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.
On a, $\forall x > 0, \log_a'(x) = \frac{1/x}{\ln(a)} = \frac{1}{x\ln(a)}$
Ainsi, si $\ln(a) < 0 \Leftrightarrow a \in]0, 1[$, $\log_a$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$, si $\ln(a) > 0 \Leftrightarrow a > 1$, $\log_a$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

b. On a, $\log_a(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$.
De plus, la fonction $\log_a$ « démarre » sous l'axe des abscisses pour $a > 1$ et au-dessus de l'axe des abscisses pour $a \in]0,1[$. Ainsi, la fonction $\log_a$ est du signe de $-\ln(a)$ sur $]0,1[$ et de signe $\ln(a)$ sur $]1,+\infty[$.



c. On a, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x > 0, \log_a(x^n) = \frac{\ln(x^n)}{\ln(a)} = \frac{n\ln(x)}{\ln(a)} = n\log_a(x)$

d. On a, $\log_5\left(5^{5^5}\right) = 5^5\log_5(5) = 5^5$.
De plus, $\log_5(9^9) = 9\log_5(9) < 9\log_5(25) = 18\log_5(5) = 18$.
Ainsi, par croissance, $\log_5(9^9) < \log_5\left(5^{5^5}\right) \Longrightarrow 9^9 < 5^{5^5}$.

e. On a, $\log_x(x+2) = 2 \Leftrightarrow \frac{\ln(x+2)}{\ln(x)} = 2$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \ln(x+2) = 2\ln(x)\\
&\Leftrightarrow \ln(x+2) - \ln(x^2) = 0\\
&\Leftrightarrow \ln\left(\frac{x+2}{x^2}\right) = 0\\
&\Leftrightarrow \frac{x+2}{x^2} = 1\\
&\Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0\\
&\Leftrightarrow (x+1)(x-2) = 0\\
&\Longrightarrow_{x\in\mathbb{R}_+^*\setminus\{1\}} x = 2.
\end{aligned}$$

7. Résolution d'équations avancées

a. On a, $4^x + 6^x = 9^x \Leftrightarrow 1 + \frac{6^x}{4^x} = \frac{9^x}{4^x} \Leftrightarrow 1 + \left(\frac{3}{2}\right)^x - \left(\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)^x = 0$

$$\Leftrightarrow 1 + \left(\frac{3}{2}\right)^x - \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} = 0$$

$$\Rightarrow_{X=\left(\frac{3}{2}\right)^x} 1 + X - X^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow X \in \left\{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right\}$$

Or, $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2} < \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{4}}{2} = -\frac{1}{2} < 0$, donc $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}$ n'a pas de solution.

De plus, $\left(\frac{3}{2}\right)^x = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x \ln\left(\frac{3}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\ln\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}\right)}{\ln\left(\frac{3}{2}\right)}$$

b. Par convention dans $\mathbb{R}, a^b = 1$ implique un des trois cas suivants : a est égal à 1, b est égal à 0 ou a est égal à -1 et b est un entier pair.

On a, $x^2 - 13x + 42 = 0 \Leftrightarrow x \in \{6, 7\}$

De plus, $x^2 - 7x + 11 = 1 \Leftrightarrow x \in \{2, 5\}$

Ajouté à cela, $x^2 - 7x + 11 = -1 \Leftrightarrow x \in \{3, 4\}$

Or, $x^2 - 13x + 42|_{x=3} = 12$ et $x^2 - 13x + 42|_{x=4} = 6$ sont pairs.

Finalement, $\mathcal{S} = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

c. On a, $x^{\sqrt{x}} = \left(\sqrt{x}\right)^x \Leftrightarrow e^{\sqrt{x}\ln(x)} = e^{x\ln(\sqrt{x})}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}\ln(x) = x\ln(\sqrt{x})$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x}\ln(x) = \frac{1}{2}x\ln(x)$$

On remarque que $x = 1$ est solution évidente.

On suppose $x \in \mathbb{R}_+^* \backslash \{1\}$, ainsi $\ln(x) \neq 0$, on a,

$x^{\sqrt{x}} = \left(\sqrt{x}\right)^x \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1}{2}x \Leftrightarrow_{x>0} x = \frac{1}{4}x^2$

$$\Leftrightarrow x \in \{0, 2\}$$

On a bien dans l'équation finale les solutions $\mathcal{S} = \{0, 1, 2\}$

d. On a, $\begin{cases} 8^x = 10y \\ 2^x = 5y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{3x} = 10y \\ 2^x = 5y \end{cases} \Rightarrow 2^{3x} = 2 \times 2^x$

$$\Leftrightarrow 3x = x + 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = \frac{1}{5}2^x = \frac{\sqrt{2}}{5}$$

Donc, $\mathcal{S} = \left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{5}\right)\right\}$

e. On a, $2^{2x} - 3^{x-1/2} = 3^{x+1/2} - 2^{2x-1} \Leftrightarrow 4^x - \frac{3^x}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} \cdot 3^x - \frac{4^x}{2}$

$$\Leftrightarrow 4^x + \frac{4^x}{2} = \frac{3^x}{\sqrt{3}} + \sqrt{3} \cdot 3^x$$

$$\Leftrightarrow 4^x\left(1 + \frac{1}{2}\right) = 3^x\left(\frac{1}{\sqrt{3}} + \sqrt{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{4}{3}\right)^x = \frac{\left(\frac{4}{\sqrt{3}}\right)}{\left(\frac{3}{2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow x \ln\left(\frac{4}{3}\right) = \ln\left(\frac{8}{3\sqrt{3}}\right)$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3\ln(2) - \frac{3}{2}\ln(3)}{2\ln(2) - \ln(3)} = \frac{3}{2}$$

f. On a, $\ln(x)\ln(y) = \ln(xy) \Leftrightarrow \ln(x)\ln(y) = \ln(x) + \ln(y)$

$$\Leftrightarrow \ln(x)\left(\ln(y) - 1\right) = \ln(y)$$

$$\Leftrightarrow \ln(x) = \frac{\ln(y)}{\ln(y) - 1}$$

$$\Leftrightarrow x = e^{\frac{\ln(y)}{\ln(y)-1}}$$

g. On a, $\log_4(x) + \log_2(x) = 6 \Leftrightarrow \frac{\ln(x)}{\ln(4)} + \frac{\ln(x)}{\ln(2)} = 6$

$$\Leftrightarrow \ln(x) = \frac{6}{\frac{1}{\ln(4)} + \frac{1}{\ln(2)}} \Leftrightarrow x = e^{\frac{6\ln(4)\ln(2)}{\ln(8)}} = 16$$

8. Logarithmic battle

We have,

$$\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{\log_n(N!)} = \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{\ln(N!)/\ln(n)} = \sum_{n=2}^{N} \frac{\ln(n)}{\ln(N!)} = \frac{\ln(2)}{\ln(N!)} + \frac{\ln(3)}{\ln(N!)} + \cdots + \frac{\ln(N)}{\ln(N!)}$$

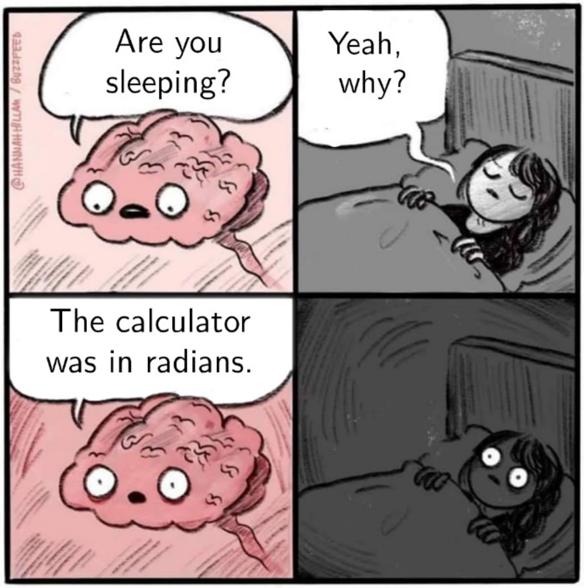
$$= \frac{\sum_{n=2}^{N}\ln(n)}{\ln(2 \times 3 \times \ldots \times N)}$$

$$= \frac{\sum_{n=2}^{N}\ln(n)}{\sum_{n=2}^{N}\ln(n)} = 1$$

$$\ln(2)\prod_{n=2}^{N}\log_n(n+1) = \ln(2)\log_2(3)\log_3(4)\ldots\log_N(N+1)$$

$$= \ln(2)\frac{\ln(3)}{\ln(2)}\frac{\ln(4)}{\ln(3)}\ldots\frac{\ln(N+1)}{\ln(N)} = \ln(N+1) > \ln(e) = 1$$

Fonctions trigonométriques



« Can you imagine young people nowadays making a study of trigonometry for the fun of it? Well I did. »

Clyde Tombaugh

Les fonctions trigonométriques sont classiques dans le cursus scolaire. Nous rappellerons les principales notions vues en première ainsi qu'étudierons certaines caractéristiques introduites dans le chapitre « Fonctions réelles ». Les fonctions trigonométriques trouvent bien entendu leurs applications en architecture et dans la modélisation de comportements naturels comme l'allure d'une corde au repos.

Sommaire

Cours

Exercices d'application

Exercices d'approfondissement

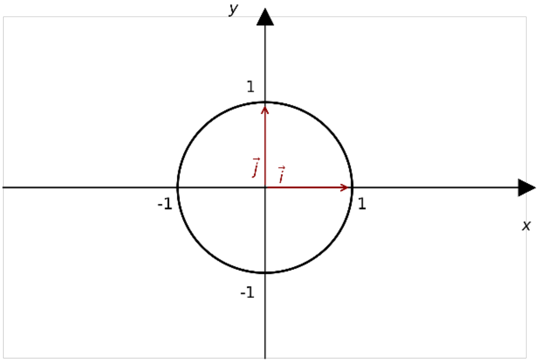
Correction des exercices

Cours

I. Rappels de première

1. Définition

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ orienté dans le sens direct et on considère le cercle trigonométrique de centre O et rayon 1.



Définitions (Fonctions cosinus et sinus)

Pour tout angle x formé par les vecteurs $\vec{\imath}$ et $\overrightarrow{OM}$, on appelle **cosinus** et **sinus** du réel x, notés $\cos(x)$ et $\sin(x)$, l'abscisse et l'ordonnée du point M.

2. Propriétés et valeurs remarquables

Soit x un réel.

Propriétés (Relations fonctionnelles)

On a, $\cos(x)$ et $\sin(x) \in [-1, 1]$ et $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.

De plus, on retiendra les valeurs remarquables suivantes :

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π
$\cos(x)$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1
$\sin(x)$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0

Propriétés (Périodicité)

On a, $\forall k \in \mathbb{Z}, \cos(x + 2k\pi) = \cos(x)$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin(x)$.

Propriétés (Parité)

On a, $\cos(-x) = \cos(x)$ et $\sin(-x) = -\sin(x)$.

II. Étude des fonctions

1. Dérivabilité

Théorème (Dérivabilité des fonctions cosinus et sinus)

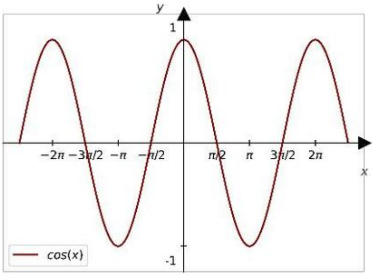
Les fonctions $\cos$ et $\sin$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et admettent pour dérivées les fonctions $\cos' = -\sin$ et $\sin' = \cos$ respectivement.

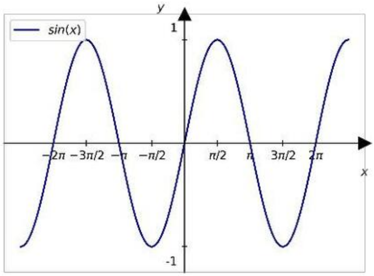
2. Variations et représentations graphiques

Propriétés (Variations des fonctions cosinus et sinus)

Par théorème, il vient que cos est décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et croissante sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, inversement sin est croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

Les fonctions ont pour représentations graphiques :





Exercices d'application

1. Résolution d'équations et d'inéquations

Résoudre les équations et inéquations suivantes :

a. $\cos(x) = \frac{1}{2}$

b. $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

c. $\cos(x) = \sin(x)$

d. $\cos(x) = \cos(2x)$

e. $\sin^2(x) \leq 1$

f. $\sin^2(x) + \sin(x) = 0$

g. $\sin(x) + \sin(2x) = 0$

h. $\tan(x)\tan(2x) = 1$

i. $\cos(x - \pi) = \sin(x)$

j. $\cos^4(x) + \sin^4(x) > 2$

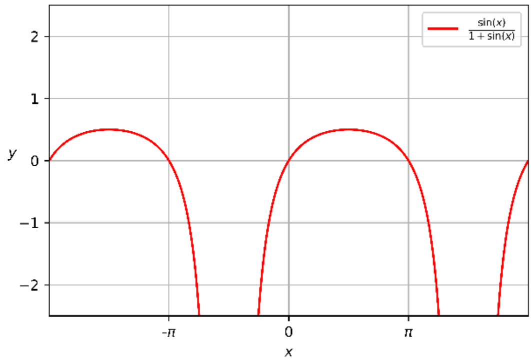
k. $\sin^2(x) - 1 = 0$

l. $\cos(x) - 2 \leq 0$

m. $e^{\sin(x)} = 1$

n. $\cos\left(\frac{x}{3}\right) = 1$

2. Étude de fonctions trigonométriques



1) Soit f définie par $f(x) = \frac{\sin(x)}{1+\sin(x)}$

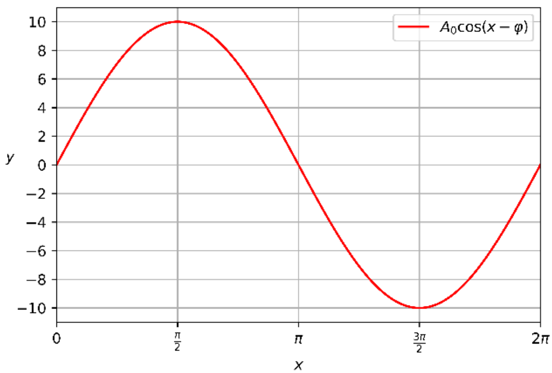
   a. Déterminer le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de la fonction f.

   b. Démontrer que f est 2π-périodique.

   c. Montrer que $f(\pi - x) = f(x)$.

   d. Déterminer les variations de f sur l'intervalle réduit $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

   e. Déterminer les limites de f sur cet intervalle réduit.



2) On étudie la propagation d'un son dont l'amplitude est modélisée par la fonction $A(t) = A_0 \cos(t - \varphi)$. On indique qu'initialement le son enregistre une amplitude nulle et une pente égale à 10. On note $A_0 > 0$.

   a. Déterminer les coefficients A_0 et φ.

   b. Déterminer la période T du signal. En déduire la fréquence f du signal.

   c. Étudier la parité de la fonction A.

Exercices d'approfondissement

3. Fonctions trigonométriques hyperboliques

Soit les fonctions **cosinus hyperbolique** et **sinus hyperbolique**, notées cosh et sinh respectivement, définies sur $\mathbb{R}$ par $\cosh(x) = \frac{e^x+e^{-x}}{2}$ et $\sinh(x) = \frac{e^x-e^{-x}}{2}$.

1) Étudions les fonctions cosh et sinh.
   a. Déterminer les dérivées de cosh et sinh.
   b. Déterminer les variations de cosh et sinh.
   c. Déduire le signe de cosh et sinh.

2) Étudions la fonction **tangente hyperbolique**, notée $\tanh = \frac{\sinh}{\cosh}$.
   a. Déterminer l'expression de $\tanh(x)$.
   b. Démontrer que $\frac{1}{\cosh^2} = 1 - \tanh^2$.
   c. On suppose que tanh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, déterminer la limite de tanh en $+\infty$.

3) On relève la hauteur de points à l'aide d'un logiciel de mesure numérique. Comparons la précision des modélisations $x \mapsto 2\cosh\left(\frac{x}{2}\right) - 2$ et $x \mapsto \frac{x^2}{4}$.
   a. Quelle modélisation respecte mieux l'allure d'une corde dont les hauteurs relevées sont $h(0) = 0$ et $h(2) = 1.1$?
   b. Quelle modélisation respecte mieux l'allure d'une arche dont les hauteurs relevées sont $h(-1) = h(1) = 0.25$?
   c. Quelle modélisation respecte mieux l'allure d'un dôme dont les hauteurs relevées sont $h(0) = 0$ et $h(2) = 1.043$? (La précision sera évaluée au millième)

4. Fonction tangente

Soit la **fonction tangente**, notée tan, définie par $\tan = \frac{\sin}{\cos}$.

a. Déterminer le domaine de définition de la fonction tangente.
b. Étudier la parité et périodicité de la fonction tangente.
c. Déterminer les variations de la fonction tangente sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

5. Fonctions trigonométriques réciproques

Soit $x \in [-1,1]$, les fonctions réciproques à cos et sin , notées respectivement arccos et arcsin, sont définies telle que $\arccos(\cos(x)) = x$ et $\arcsin(\sin(x)) = x$. De plus, on admet que ces fonctions sont dérivables sur $]-1,1[$ par $\arccos'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $\arcsin'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

a. Déterminer les variations de arcsin et arccos sur $]-1,1[$.

b. Montrer que, pour tout $x \in]-1,1[$, $\arccos(x) + \arcsin(x) = \pi/2$.

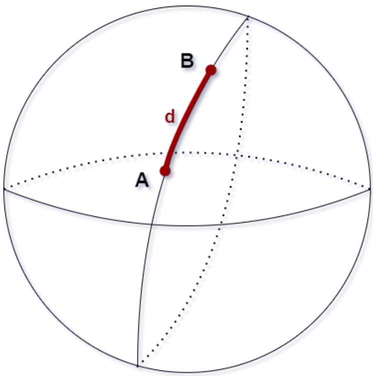
c. Montrer que, pour tout $x \in]-1,1[$, $\sin(\arccos(x)) = \sqrt{1-x^2}$.

6. Haversine formula

The haversine formula derives from the haversine function defined by $\text{hav}(\theta) = \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ and returns the great circle distance between points A and B :

$$d = 2r \arcsin\left(\sqrt{\sin^2\left(\frac{\text{Lat}_\text{B} - \text{Lat}_\text{A}}{2}\right) + \cos(\text{Lat}_\text{A})\cos(\text{Lat}_\text{B})\sin^2\left(\frac{\text{Lon}_\text{B} - \text{Lon}_\text{A}}{2}\right)}\right)$$

where Lat is the latitude and Lon the longitude in radians of the points.



We'll compare this formula with the Pythagorean theorem approximation $d = \frac{\pi}{180} r\sqrt{dl^2 - dL^2}$ where dl, dL are the variation (in degrees) between points.

a. Compare with Casablanca (33.59°, -7.60°) and Fes (34.03°, -5.00°).

b. Compare with Casablanca and Kuala Lumpur (3.14°, 101.69°).

c. Finally, compare Kuala Lumpur and Ecuador (-1.79°, -78.14°), interpret.

Correction des exercices

1. Résolution d'équations et d'inéquations

a. On a, $\cos(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

b. On a, $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

c. On a, $\cos(x) = \sin(x) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

d. On a, $\cos(x) = \cos(2x) \Leftrightarrow \cos(x) = 2\cos^2(x) - 1$

$$\Leftrightarrow 2\cos^2(x) - \cos(x) - 1 = 0$$

$$\Longrightarrow_{X=\cos(x)} 2X^2 - X - 1 = 0$$

Le polynôme $X \mapsto 2X^2 - X - 1$ admet pour racines $X_1 = -\frac{1}{2}$ et $X_2 = 1$.

Or, $\cos(x) = X_1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$

De plus, $\cos(x) = X_2 \Leftrightarrow x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Finalement, $\mathcal{S} = \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\} \cup \left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

e. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}, \sin(x) \leq 1 \Longrightarrow \sin^2(x) \leq 1$

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \mathbb{R}$

f. On a, $\sin^2(x) + \sin(x) = 0 \Leftrightarrow \sin(x)\,(1 + \sin(x)) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x) = 0 \\ \text{ou} \\ \sin(x) = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

g. On a, $\sin(x) + \sin(2x) = 0 \Leftrightarrow \sin(x) + 2\sin(x)\cos(x) = 0$

$$\Leftrightarrow \sin(x)\,(1 + 2\cos(x)) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x) = 0 \\ \text{ou} \\ \cos(x) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \text{ou} \\ x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$$

h. On a, $\tan(x)\tan(2x) = 1 \Leftrightarrow \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \cdot \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)} = 1$

$$\Leftrightarrow \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \cdot \frac{2\cos(x)\sin(x)}{2\cos^2(x)-1} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sin^2(x)}{2\cos^2(x)-1} = 1$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1$$

$$\Leftrightarrow 2\sin^2(x) = 2(1 - \sin^2(x)) - 1$$

$$\Leftrightarrow \sin^2(x) = \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x) = \frac{1}{2} \\ \text{ou} \\ \sin(x) = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in \left\{\pm\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

i. On a, $\cos(x - \pi) = \sin(x) \Leftrightarrow \cos(x)\cos(-\pi) - \sin(x)\sin(-\pi) = \sin(x)$

$$\Leftrightarrow -\cos(x) = \sin(x)$$

$$\Leftrightarrow \cos(x) = -\sin(x)$$

$$\Leftrightarrow \cos(-x) = \sin(-x)$$

$$\Leftrightarrow -x \in \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$\Leftrightarrow x \in \left\{-\frac{\pi}{4} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

j. On a, $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x) \in [-1, 1], \sin(x) \in [-1, 1]$

Donc, $\forall x \in \mathbb{R}, \cos^4(x) \in [0, 1], \sin^4(x) \in [0, 1]$

Finalement, $\forall x \in \mathbb{R}, \cos^4(x) + \sin^4(x) \leq 2$.

Pas de solution.

k. On a, $\sin^2(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin(x) = 1 \\ \text{ou} \\ \sin(x) = -1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x \in \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

l. On a, $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x) \leq 1 \Leftrightarrow \cos(x) - 2 \leq -1 \leq 0$

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \mathbb{R}$.

m. On a, $e^{\sin(x)} = 1 \Leftrightarrow \sin(x) = 0$

$$\Leftrightarrow x \in \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

n. On a, $\cos\left(\frac{x}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{3} \in \{2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

$$\Leftrightarrow x \in \{6k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

2. Étude de fonctions trigonométriques

1)

a. On a, $x \in \mathcal{D}_f \Leftrightarrow 1 + \sin(x) \neq 0$

$$\Leftrightarrow \sin(x) \neq -1$$

$$\Leftrightarrow x \notin \left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{D}_f = \mathbb{R}\backslash\left\{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$$

b. On a, $\forall x \in \mathcal{D}_f, f(x + 2\pi) = \frac{\sin(x+2\pi)}{1+\sin(x+2\pi)} = \frac{\sin(x)}{1+\sin(x)} = f(x)$

f est bien 2π-périodique.

c. On a, $\forall x \in \mathcal{D}_f, f(\pi - x) = \frac{\sin(\pi-x)}{1+\sin(\pi-x)} = \frac{\sin(\pi)\cos(-x)+\sin(-x)\cos(\pi)}{1+\sin(\pi)\cos(-x)+\sin(-x)\cos(\pi)}$

$$= \frac{\sin(x)}{1+\sin(x)} = f(x)$$

d. Par quotient de fonctions dérivables sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, f est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

On a, $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], f'(x) = \frac{\cos(x)(1+\sin(x))-\sin(x)(\cos(x))}{(1+\sin(x))^2}$

$$= \frac{\cos(x)}{(1+\sin(x))^2}$$

Or, $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], 0 \leq \cos(x) \leq 1$.

La fonction $f'(x)$ est positive sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, par théorème, la fonction f est croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

e. Par quotient d'une limite finie (négative) et limite nulle (0^+), f diverge vers $-\infty$ en $-\frac{\pi}{2}^+$ et converge vers $\frac{1}{2}$ en $\frac{\pi}{2}$.

2)

a. On a, $\begin{cases} A(0) = 0 \\ A'(0) = 10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A_0 \cos(-\varphi) = 0 \\ -A_0 \sin(-\varphi) = 10 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A_0 \cos(\varphi) = 0 \\ A_0 \sin(\varphi) = 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos(\varphi) = 0 \\ A_0 \sin(\varphi) = 10 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \varphi = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ A_0(-1)^k = 10 \end{cases}$$

Or, $A_0 > 0 \Rightarrow (-1)^k > 0 \Leftrightarrow k$ pair $\Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ et $A_0 = 10$.

On choisit la mesure principale $\varphi = \frac{\pi}{2}$ pour simplifier les résultats.

On a, $\forall t > 0, A(t) = 10\cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = 10\sin(t)$

b. On a, $\forall t > 0, A(t+T) = A(t) \Leftrightarrow A_0\cos(t + T - \varphi) = A_0\cos(t - \varphi)$

$$\Leftrightarrow \cos\left(t + T - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \sin(t+T) = \sin(t)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t + T = t + 2k\pi \\ \text{ou} \\ t + T = -t + \pi + 2k\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} T = 2k\pi \\ \text{ou} \\ T = -2t + (2k+1)\pi \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

On remarque que la seconde équation fournie une période non constante, la période est donc $T = 2\pi$ tandis que la fréquence est $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}$.

c. On a, $\forall t > 0, A(-t) = 10\sin(-t) = -10\sin(t) = -A(t)$

La fonction A est impaire.

3. Fonctions trigonométriques hyperboliques

1)

a. Les fonctions cosh et sinh sont sommes de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, cosh et sinh sont donc dérivables sur $\mathbb{R}$.

On a, $\forall x \in \mathbb{R}, \cosh'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \sinh(x)$

$$\sinh'(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = \cosh(x)$$

b. On remarque que pour tout réel $x, \cosh(x) > 0$, par théorème, sinh est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

On a, $\sinh(x) > 0 \Leftrightarrow e^x > e^{-x} \Leftrightarrow x > 0$, par théorème, cosh est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

c. cosh est positive sur $\mathbb{R}$..

sinh est négative sur $\mathbb{R}_-^*$ et positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

2)

a. On a établi que $\forall x \in \mathbb{R}, \cosh(x) > 0$, donc tanh est définie sur $\mathbb{R}$.

On a, $\forall x \in \mathbb{R}, \tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

b. On a, $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{\cosh^2(x)} = \left(\frac{2}{e^x + e^{-x}}\right)^2$

$$= \frac{4}{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}$$

$$\begin{aligned} 1 - \tanh^2(x) &= 1 - \left(\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\right)^2 \\ &= 1 - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{e^{2x} + 2 + e^{-2x}} \\ &= \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{e^{2x} + 2 + e^{-2x}} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{e^{2x} + 2 + e^{-2x}} \\ &= \frac{4}{e^{2x} + 2 + e^{-2x}} \\ &= \frac{1}{\cosh^2(x)} \end{aligned}$$

c. On a, $\forall x \in \mathbb{R}, \tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$

$$= \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} \to_{(x \to +\infty)} 1$$

3)

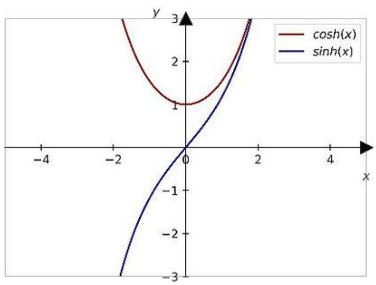
a. On remarque que l'erreur en $x = 0$ est la même pour les deux modèles et en $x = 2$ l'erreur du second modèle est dix fois plus grande que le premier modèle.

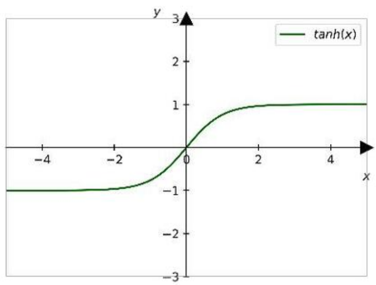
b. On remarque que l'erreur en $x = -1$ et en $x = 1$ est la même pour chacun des modèles dû à la parité. Le second modèle présente une erreur nulle tandis que le premier modèle présente une erreur non nulle.

c. On remarque que l'erreur en $x = 0$ est la même pour pour les deux modèles. Le second modèle présente une erreur plus faible d'un millième que le premier modèle.

Remarque (Tangente hyperbolique)

Au-delà de la physique appliquée, la fonction $\tanh$ trouve certaines applications en informatique, utilisée comme fonction de transfert de données afin d'entraîner des modèles de réseaux de neurones, composante avancée de la data science. Voici une représentation graphique des fonctions trigonométriques :





4. Fonction tangente

a. On a, $x \in \mathcal{D}_{\tan}, \cos(x) \neq 0 \Leftrightarrow x \notin \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

Donc, $\mathcal{D}_{\tan} = \mathbb{R} \backslash \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$

b. On a, $\forall x \in \mathcal{D}_{\tan}, \tan(-x) = \frac{\sin(-x)}{\cos(-x)} = -\frac{\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$

$$\tan(x + 2\pi) = \frac{\sin(x+2\pi)}{\cos(x+2\pi)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x)$$

La fonction tan est 2π-périodique.

c. Par quotient de fonctions dérivables sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, tan est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

On a, $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \tan'(x) = \frac{\cos(x)\cos(x) + \sin(x)\sin(x)}{\cos^2(x)}$

$$= \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Comme $\tan'(x)$ est strictement positive sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, par théorème, tan est strictement croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Remarque (Fonction tangente)

La fonction tangente est aussi populaire qu'elle est utilisée dans le monde de l'industrie. Un exemple serait la modélisation des dynamiques aéronautiques, l'allure de la fonction tangente est effectivement similaire à celle observer chez les aéronefs.

5. Fonctions trigonométriques réciproques

a. On a, $\forall x \in]-1,1[\,, 1-x^2>0$.
Ainsi, $\forall x \in]-1,1[$, $\arccos'(x)<0$ et $\arcsin'(x)>0$.
Par théorème, arccos est strictement décroissante sur $]-1,1[$ et arcsin est strictement croisssante sur $]-1,1[$.

b. Par somme de fonctions dérivables sur $]-1,1[$, la fonction $x \mapsto \arccos(x)+\arcsin(x)$ est dérivable sur $]-1,1[$.
On a, $\forall x \in]-1,1[, \arccos'(x)+\arcsin'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=0$.
Par théorème, $x \mapsto \arccos(x)+\arcsin(x)$ est constante sur $]-1,1[$.
Il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in]-1,1[, \arcsin(x)+\arccos(x)=C$.
Or, $\arcsin(0)+\arccos(0)=0+\frac{\pi}{2}=C$.
Donc, $\forall x \in]-1,1[, \arccos(x)+\arcsin(x)=\pi/2$.

c. On a, $\forall x \in]-1,1[$,

$$\begin{aligned}\sin^2(\arccos(x))+\cos^2(\arccos(x))=1 &\Leftrightarrow \sin^2(\arccos(x))+x^2=1\\ &\Leftrightarrow \sin^2(\arccos(x))=1-x^2\end{aligned}$$

Or, $\forall x \in]-1,1[, \arccos(x) \in]0,\pi[$ et $\forall y \in]0,\pi[, \sin(y)>0$.
Donc, $\forall x \in]-1,1[, \sin(\arccos(x))=\sqrt{1-x^2}$.

6. Haversine formula

a. We have,

$d_{\text{hav}} \simeq 245.14\,\text{km}$ and $d_{\text{pyth}} \simeq 293.22\,\text{km}$.

b. We have,

$d_{\text{hav}} \simeq 11581.01\,\text{km}$ and $d_{\text{pyth}} \simeq 12615.36\,\text{km}$.

c. We have,

$d_{\text{hav}} \simeq 19863.79\,\text{km}$ and $d_{\text{pyth}} \simeq 20003.70\,\text{km}$.

Differences arise when one or more points are away from the equator. This is because the radius at these points is different and thus differences in latitudes do not have the same length as at the equator, taken as reference.

Additional notes

The haversine formula is internationally recognized and used in different fields of applied mechanics or for that matter, any domain requiring real life distances. However, the Earth itself is not a perfect sphere as its radius varies with latitude, being smaller at the poles than the equator. Still, the haversine formula remains one of the best approximations of real life distances to this date.

Primitives et équations différentielles

When you realize that « World's Savior » is a career intrinsically bound to unemployment :

« Among all of the mathematical disciplines the theory of differential equations is the most important... It furnishes the explanation of all those elementary manifestations of nature which involve time. »

Sophus Lie

Les équations différentielles permettent d'établir la relation entre une fonction et ses dérivées successives, dans un contexte d'évolution dynamique au cours du temps. Nous étudierons cette année uniquement les équations différentielles linéaires d'ordre 1 à coefficients continus, permettant une introduction au principe et ses applications basiques. Les équations différentielles régissent la plupart des lois naturelles retrouvées en biologie, dynamique des populations et physique.

Sommaire

Cours

Exercices d'application

Exercices d'approfondissement

Correction des exercices

Cours

I. Primitive d'une fonction

1. Définition

Soit f une fonction continue sur $I \subset \mathbb{R}$

Définition (Primitive d'une fonction)

Une **primitive de f** sur I est une fonction F dérivable sur I telle que $F' = f$.

2. Propriétés et primitives usuelles

Soit F et G les primitives de f et g sur $I \subset \mathbb{R}$ et k un réel.

Propriétés (Primitives)

On a, les propriétés suivantes :

- **Linéarité** : $(F+G)$ est la primitive de $(f+g)$ et (kF) celle de (kf).
- **Différence** : La différence de primitives d'une même fonction est une constante.

Propriété (Théorème fondamental de l'intégration)

Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.

Propriétés (Primitives usuelles)

On a,

fonction	a	x^n ($n \in \mathbb{Z}^*$)	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	e^x
une primitive	ax	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$	$-\frac{1}{x}$	$\ln(x)$	$\sqrt{x}$	e^x
intervalle	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$ ($n \geq 0$) $\mathbb{R}^*$ (sinon)	$\mathbb{R}^*$	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}_+^*$	$\mathbb{R}$

Démonstration (Différence de primitives d'une même fonction est une constante)

Soit F_1 et F_2 deux primitives d'une fonction continue f sur I.

Donc, $(F_1 - F_2)$ est une primitive de la fonction nulle sur I.

Par théorème, la fonction $(F_1 - F_2)$ est constante sur I, qu'on note $C \in \mathbb{R}$.

Finalement, $\forall x \in I, (F_1 - F_2)(x) = C$.

II. Équation différentielle

1. Définition

Définition (Équation différentielle)

Une **équation différentielle** est une équation dont l'inconnue est une fonction et ses dérivées.

Définition (Équation différentielle de la forme $y' = f$)

Soit f une fonction définie sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. On dit que la fonction g est une solution de l'équation différentielle $y' = f$ sur I si et seulement si g est dérivable sur I telle que $\forall x \in I, g'(x) = f(x)$.

2. Résolution d'équations différentielles de référence

Propriété (Résolution des équations différentielles de la forme $y' = ay$)

Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ où $a \in \mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $y : x \mapsto Ce^{ax}$ où C est une constante réelle.

Propriété (Linéarité de la résolution)

Si f et g sont deux solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ où $a \in \mathbb{R}$, alors $(f + g)$ est solution et (kf) l'est aussi pour $k \in \mathbb{R}$.

Démonstration (Résolution des équations différentielles de la forme $y' = ay$)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = Ce^{ax}$ où $C \in \mathbb{R}$.
D'où, $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = aCe^{ax} = af(x)$.
Donc, f est bien solution de $y' = ay$.

Réciproquement, soit f une solution de $y' = ay$.
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = e^{-ax}f(x)$.
D'où, $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = e^{-ax}f'(x) - ae^{-ax}f(x)$
Comme f est solution de $y' = ay$, on a,
$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = e^{-ax}af(x) - ae^{-ax}f(x) = 0$
La fonction g est donc constante sur $\mathbb{R}$ de valeur $g(0) = f(0) = C$.
Donc, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = e^{ax}g(x) = Ce^{ax}$.

Propriété (Résolution des équations différentielles de la forme $y' = ay + b$)

Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ où $a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $y : x \mapsto u(x) + v(x)$ où u est une solution particulière de $y' = ay + b$ et v une solution quelconque de $y' = ay$.

Remarque

La fonction $x \mapsto -\frac{b}{a}$ est une solution particulière de l'équation différentielle $y' = ay + b$.

Corollaire (Résolution des équations différentielles de la forme $y' = ay + b$)

Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ où $a \in \mathbb{R}^*, b \in \mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme $y : x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$ où $C \in \mathbb{R}$.

Propriété (Résolution des équations différentielles de la forme $y' = ay + f$)

Les solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ où $a \in \mathbb{R}^*$ et f une fonction définie sur I sont les fonctions de la forme $y : x \mapsto u(x) + v(x)$ où u est une solution particulière de $y' = ay + f$ et v une solution quelconque de $y' = ay$.

Exercices d'application

1. Calcul de primitives

Calculer les primitives, qui s'annulent en 0 $(C = 0)$, des fonctions suivantes :

a. $f(x) = 2x$
b. $f(x) = 1$
c. $f(x) = x^2 + x + 1$
d. $f(x) = 3x^2 - 1$
e. $f(x) = 4x + 3$
f. $f(x) = 2x + 1$
g. $f(x) = x + \frac{1}{\sqrt{x}}$
h. $f(x) = \frac{1}{x^2} - x^2$
i. $f(x) = \frac{x^2-1}{x^3}$
j. $f(x) = \sin(x) + 2\cos(x)$
k. $f(x) = 1 - x + x^2 - x^3$
l. $f(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x + 1$
m. $f(x) = xe^{x^2}$
n. $f(x) = (9x^2 - 1)\left(x^3 - \frac{x}{3}\right)^2$
o. $f(x) = \frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}$
p. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$
q. $f(x) = \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$
r. $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$
s. $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$
t. $f(x) = \frac{1}{x\ln(x)}$
u. $f(x) = \frac{e^x}{e^x-1}$
v. $f(x) = e^{-x} + e^{2x+1}$
w. $f(x) = \cos(x)\sin(x)$
x. $f(x) = 3e^{2x} + 2e^x$
y. $f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$ où il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tels que $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1}$
z. $f(x) = \ln(x)$

2. Résolution d'équations différentielles

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a. $y' = 3y$
b. $y' = -\frac{y}{2}$
c. $y' = 3y + 2$
d. $y' = -y + x$ où la solution particulière est $y : x \mapsto ax + b$
e. $y' + 2y = x^2$ où la solution part. est $y : x \mapsto ax^2 + bx + c$
f. $y' + y = 2\sin(x)$ où la solution part. est $y : x \mapsto a\cos(x) + b\sin(x)$
g. $y' = -2y + 5$ où $y(0) = 1$
h. $2y' = y - 1$ où $y(1) = 4$
i. $y'' + 2y' = x$ où $z = y'$
j. $yy' + y^2 = 0$ où $z = y^2$

3. Modélisation par équations différentielles

1) On étudie l'évolution de la population mondiale dont le taux de croissance, ou dérivée, est proportionnel à elle-même. On exprimera t en années.
   a. Exprimer l'équation différentielle vérifiée par la population mondiale P.
   b. Si la population double tous les siècles, à partir de quel nombre d'années la population aura-t-elle triplée ?

2) On étudie l'évolution du nombre de particules N au sein d'un composé radioactif. On a la relation suivante $N' = -\lambda N$ où $\lambda = 2$.
   a. Initialement, on a $N(0) = N_0 = 1000$ particules présentes.
   b. On appelle **temps de demi-vie**, le temps τ tel que $N(\tau) = \frac{N_0}{2}$, déterminer le temps de demi-vie τ du nombre de particules.
   c. A quel instant peut-on considérer le nombre de particules comme nul.

3) Construire les équations différentielles linéaires d'ordre 1 dont les solutions sont les fonctions suivantes :
   a. $f(x) = e^x - 1$
   b. $f(x) = x + 1$

Exercices d'approfondissement

4. Équations différentielles d'ordre supérieur et non linéaire

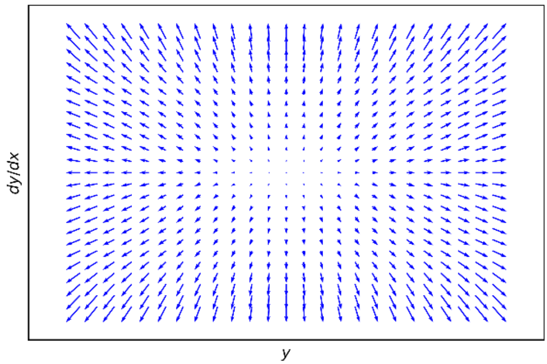
On appelle **équation caractéristique** d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 l'équation $r^2 + ar + b = 0$ où $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $y'' + ay' + by = 0$. Si le discriminant du polynôme caractéristique est strictement positif de racines α et β, alors les solutions sont de la forme $y: x \mapsto \lambda e^{\alpha x} + \mu e^{\beta x}$ où λ et μ sont des réels. Si le discriminant est nul de racine double γ, alors les solutions sont de la forme $y: x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{\gamma x}$ où λ et μ sont des réels.

1) Résoudre les équations différentielles du second ordre suivantes :
   a. $y'' - 2y' + y = 0$ où $y(0) = y'(0) = 1$
   b. $y'' + 9y = 0$ où $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$
   c. $y'' + 10y' + 25y = 0$ où $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$

2) Conjecturer les formes générales des solutions aux équations différentielles non linéaires suivantes :
   a. $y' = y^2$ où y est dérivable $n \in \mathbb{N}^*$ fois.
   b. $y' - e^{x-y} = 0$ où $y(0) = 0$
   c. $\begin{cases} y'(t) = x(t) \\ x'(t) = y(t) \end{cases}$ où x' et y' sont dérivables.

5. Phase portrait

The **phase portrait** is a graphic representation of a dynamical system, e.g. the evolution of the rate of change y' with respect to the quantity y. We can use a vector field to describe where a state "moves to" at the next time step. Interpret the central point $(y = 0, y' = 0)$ of the following vector field :



6. DI Method

We wish to establish a primitive of $x \mapsto 2x\sin(2x)$ through a variant of the **integration by parts**, known as the **Differentiate-Integrate Method**.

Let d and i be infinitely differentiable and integrable respectively, i.e. for all $n \in \mathbb{N}$, $d^{(n)}$ the n-th successive derivative of d and $i_{(n)}$ the n-th successive primitive of i are well-defined. By convention, $d^{(0)} = d$ and $i_{(0)} = i$.

Verify that the primitive of $x \mapsto 2x\sin(2x)$ is :

$$x \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n d^{(n)}(x) i_{(n+1)}(x)$$

Correction des exercices

1. Calcul de primitives

a. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, par théorème, f est continue sur $\mathbb{R}$ et admet une primitive F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = x^2 + C$ où $C \in \mathbb{R}$.
Or, d'après l'énoncé, $F(0) = 0 \Leftrightarrow C = 0$.
Donc, F est définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = x^2$.

Remarque (Constante d'intégration)

La constante C est dite **constante d'intégration** et demeure vitale lors du calcul de primitives. En fonction des conditions initiales, on peut obtenir un C différent de zéro, on considérera ici que toutes les constantes d'intégrations sont nulles.

b. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, par théorème, f est continue sur $\mathbb{R}$ et admet une primitive F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = x$.

c. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, par théorème, f est continue sur $\mathbb{R}$ et admet une primitive F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x$.

d. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, par théorème, f est continue sur $\mathbb{R}$ et admet une primitive F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = x^3 - x$.

e. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, par théorème, f est continue sur $\mathbb{R}$ et admet une primitive F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = 2x^2 + 3x$.

f. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, par théorème, f est continue sur $\mathbb{R}$ et admet une primitive F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = x^2 + x$.

g. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, par théorème, f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et admet une primitive F définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $F(x) = \frac{x^2}{2} + 2\sqrt{x}$.

h. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, par théorème, f est continue sur $\mathbb{R}^*$ et admet une primitive F définie sur $\mathbb{R}^*$ par $F(x) = -\frac{1}{x} - \frac{x^3}{3}$.

i. On a, $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, par théorème, f est continue sur $\mathbb{R}^*$ et admet une primitive F définie sur $\mathbb{R}^*$ par $F(x) = \ln(|x|) + \frac{1}{2x^2}$.

j. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, par théorème, f est continue sur $\mathbb{R}$ et admet une primitive F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = -\cos(x) + 2\sin(x)$.

k. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, par théorème, f est continue sur $\mathbb{R}$ et admet une primitive F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$.

l. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, par théorème, f est continue sur $\mathbb{R}$ et admet une primitive F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2} + x$.

m. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, par théorème, f est continue sur $\mathbb{R}$ et admet une primitive F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}$.

n. On a, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 3\left(3x^2 - \frac{1}{3}\right)\left(x^3 - \frac{x}{3}\right)^2$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, par théorème, f est continue sur $\mathbb{R}$ et admet une primitive F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \left(x^3 - \frac{x}{3}\right)^3$.

o. On a, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -\left(-\frac{\sin'(x)}{\sin^2(x)}\right)$

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$, par théorème, f est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ et admet une primitive F définie sur $\mathbb{R}\backslash\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ par $F(x) = -\frac{1}{\sin(x)}$.

p. La fonction f est dérivable sur $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$, par théorème, f est continue sur $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ et admet une primitive F définie sur $\left]\frac{1}{2}, +\infty\right[$ par $F(x) = \sqrt{2x - 1}$.

q. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, par théorème, f est continue sur $\mathbb{R}$ et admet une primitive F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = 2\sqrt{x^2+x+1}$.

r. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, par théorème, f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et admet une primitive F définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $F(x) = \ln(x) + 2\sqrt{x}$.

s. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash]-1,1[$, par théorème, f est continue sur $\mathbb{R}\backslash]-1,1[$ et admet une primitive F définie sur $\mathbb{R}\backslash]-1,1[$ par $F(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2-1)$.

t. On a, $\forall x > 0, f(x) = \frac{1/x}{\ln(x)}$
La fonction f est dérivable sur $]1,+\infty[$, par théorème, f est continue sur $]1,+\infty[$, et admet une primitive F définie sur $]1,+\infty[$, par $F(x) = \ln(\ln(x))$.

u. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, par théorème, f est continue sur $]0,+\infty[$ et admet une primitive F définie sur $]0,+\infty[$ par $F(x) = \ln(e^x - 1)$.

v. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, par théorème, f est continue sur $\mathbb{R}$ et admet une primitive F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = -e^{-x} + \frac{1}{2}e^{2x+1}$.

w. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, par théorème, f est continue sur $\mathbb{R}$ et admet une primitive F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \frac{1}{2}\sin^2(x)$.

x. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$, par théorème, f est continue sur $\mathbb{R}$ et admet une primitive F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \frac{3}{2}e^{2x} + 2e^x$.

y. Soit $A, B \in \mathbb{R}$ tels que, $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,0\}, \frac{1}{x(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} = \frac{(A+B)x+A}{x(x+1)}$
Donc, $A = 1$ et $B = -1$, d'où $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{-1,0\}, f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$
La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$, par théorème, f est continue sur $]0,+\infty[$ et admet une primitive F définie sur $]0,+\infty[$ par $F(x) = \ln(x) - \ln(x+1) = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$.

z. La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$, par théorème, f est continue sur $]0,+\infty[$ et admet une primitive F définie sur $]0,+\infty[$ par $F(x) = x\ln(x) - x$.

2. Résolution d'équations différentielles

a. L'équation différentielle linéaire d'ordre 1 sans second membre admet pour solution les fonctions $y : x \mapsto Ce^{3x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

b. L'équation différentielle linéaire d'ordre 1 sans second membre admet pour solution les fonctions $y : x \mapsto Ce^{-x/2}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

c. L'équation différentielle linéaire d'ordre 1 admet pour solution particulière la fonction $y : x \mapsto -\frac{2}{3}$ et pour solution à $y' = 3y$ les fonctions $y : x \mapsto Ce^{3x}$ avec $C \in \mathbb{R}$. Donc, les solutions de l'équation différentielle sont de la forme $y : x \mapsto Ce^{3x} - \frac{2}{3}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

d. L'équation différentielle linéaire d'ordre 1 admet pour solution particulière la fonction $y : x \mapsto x - 1$ et pour solution à $y' = -y$ les fonctions $y : x \mapsto Ce^{-x}$ avec $C \in \mathbb{R}$. Donc, les solutions de l'équation différentielle sont de la forme $y : x \mapsto Ce^{-x} + x - 1$ avec $C \in \mathbb{R}$.

e. L'équation différentielle linéaire d'ordre 1 admet pour solution particulière la fonction $y : x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ et pour solution à $y' = -2y$ les fonctions $y : x \mapsto Ce^{-2x}$ avec $C \in \mathbb{R}$. Donc, les solutions de l'équation différentielle sont de la forme $y : x \mapsto Ce^{-2x} + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$ avec $C \in \mathbb{R}$.

f. L'équation différentielle linéaire d'ordre 1 admet pour solution particulière la fonction $y : x \mapsto \sin(x) - \cos(x)$ et pour solution à $y' = -y$ les fonctions $y : x \mapsto Ce^{-x}$ avec $C \in \mathbb{R}$. Donc, les solutions de l'équation différentielle sont de la forme $y : x \mapsto Ce^{-x} + \sin(x) - \cos(x)$ avec $C \in \mathbb{R}$.

g. L'équation différentielle linéaire d'ordre 1 admet pour solution particulière la fonction $y : x \mapsto \frac{5}{2}$ et pour solution à $y' = -2y$ les fonctions $y : x \mapsto Ce^{-2x}$ avec $C \in \mathbb{R}$. Donc, les solutions de l'équation différentielle sont de la forme $y : x \mapsto Ce^{-2x} + \frac{5}{2}$ avec $C \in \mathbb{R}$.
Donc, $\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = Ce^{-2x} + \frac{5}{2}$, or $y(0) = 1 \Leftrightarrow C = -\frac{3}{2}$.
Finalement, l'unique solution est la fonction $y : x \mapsto \frac{1}{2}(5 - 3e^{-2x})$

h. On remet sous forme canonique l'équation différentielle, on a, $2y' = y - 1 \Leftrightarrow y' = \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}$.
L'équation différentielle linéaire d'ordre 1 admet pour solution particulière la fonction $y : x \mapsto 1$ et pour solution à $y' = \frac{1}{2}y$ les fonctions $y : x \mapsto Ce^{x/2}$ avec $C \in \mathbb{R}$. Donc, les solutions de l'équation différentielle sont de la forme $y : x \mapsto Ce^{x/2} + 1$ avec $C \in \mathbb{R}$.
Donc, $\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = Ce^{x/2} + 1$, or $y(1) = 4 \Leftrightarrow C = \frac{3}{\sqrt{e}}$
Finalement, $\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = \frac{3}{\sqrt{e}}e^{x/2} + 1$

i. On a, $y'' + 2y' = x \Leftrightarrow z' = -2z + x$
L'équation différentielle linéaire d'ordre 1 admet pour solution particulière la fonction $z : x \mapsto \frac{1}{2}$ et pour solution à $z' = -2z$ les fonctions $z : x \mapsto Ce^{-2x}$ avec $C \in \mathbb{R}$. Donc, les solutions de l'équation différentielle sont de la forme $z : x \mapsto Ce^{-2x} + \frac{1}{2}$ avec $C \in \mathbb{R}$.
Or, $y' = z$, comme z est continue sur $\mathbb{R}$, par théorème, z admet une primitive y définie sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = -\frac{C}{2}e^{-2x} + \frac{1}{2}x$.

j. On a, $yy' + y^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}z' = -z \Leftrightarrow z' = -2z$
L'équation différentielle linéaire d'ordre 1 admet pour solution les fonctions $z : x \mapsto Ce^{-2x}$ avec $C \in \mathbb{R}$.
Or, $y^2 = z$, on a deux fonctions solutions y_1 et y_2 définies sur $\mathbb{R}$ par $y_1(x) = \sqrt{Ce^{-2x}}$ et $y_2 = -\sqrt{Ce^{-2x}}$ à condition que $C \geq 0$.

3. Modélisation par équations différentielles

1)

a. On sait qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $P' = kP$.

b. On a, par résolution de l'équation différentielle de la question a., la forme de la solution P est $P : t \mapsto Ce^{kt}$ avec $C \in \mathbb{R}$.
Or, $P(t+100) = 2P(t) \Leftrightarrow Ce^{k(t+100)} = 2Ce^{kt} \Leftrightarrow k = \frac{\ln(2)}{100}$
Donc, $P(t+\tau) = 3P(t) \Leftrightarrow Ce^{k(t+\tau)} = 3Ce^{kt} \Leftrightarrow \tau = \frac{\ln(3)}{k} = \frac{100\ln(3)}{\ln(2)}$
$= 158.496$

La population aura triplée après 159 années.

2)

a. Par théorème, $\exists C \in \mathbb{R}, \forall t \geq 0, N(t) = Ce^{-2t}$.
Or, $N(0) = 1000 \Leftrightarrow C = N_0 = 1000$.

b. On a, $N(\tau) = \frac{N_0}{2} \Leftrightarrow e^{-2\tau} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \tau = -\frac{\ln(1/2)}{2} \simeq 0.346$.

c. Le nombre de particules est entier, cependant le modèle renvoie des valeurs continues dans l'intervalle $[0,1]$, on arrondira dans ce cas.
On a, $N(t) < 1 \Leftrightarrow 1000e^{-2t} < 1 \Leftrightarrow t > \frac{\ln\left(\frac{1}{1000}\right)}{-2} \simeq 3.45$.

3)

a. On a, $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^x = f(x) - 1$
Ainsi, f est solution de $y' = y - 1$ avec $f(0) = 0$.

b. On a, $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 1 = f(x) - x$
Ainsi, f est solution de $y' = y - x$ avec $f(0) = 1$.

4. Équations différentielles d'ordre supérieur et non linéaire

1)

a. L'équation différentielle linéaire d'ordre 2 admet pour équation caractéristique $r^2 - 2r + 1 = 0$ de racine double $\gamma = 1$.
Par théorème, les solutions de l'équation différentielle sont de la forme $y : x \mapsto (\lambda x + \mu)e^x$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Or, $\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 1 \\ \lambda + \mu = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 1 \\ \lambda = 0 \end{cases}$
Finalement, $\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = e^x$.

b. L'équation différentielle linéaire d'ordre 2 admet pour équation caractéristique $r^2 + 9r = 0$ de racines $\alpha = 0$ et $\beta = -3$.
Par théorème, les solutions de l'équation différentielle sont de la forme $y : x \mapsto \lambda + \mu e^{-3x}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Or, $\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ \lambda - 3\mu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + \mu = 1 \\ 4\lambda = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 1/4 \\ \lambda = 3/4 \end{cases}$
Finalement, $\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = \frac{1}{4}(3 + e^{-3x})$.

c. L'équation différentielle linéaire d'ordre 2 admet pour équation caractéristique $r^2 + 10r + 25 = 0$ de racine double $\gamma = -5$.
Par théorème, les solutions de l'équation différentielle sont de la forme $y : x \mapsto (\lambda x + \mu)e^{-5x}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Or, $\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 1 \\ \lambda - 5\mu = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 1 \\ \lambda = 5 \end{cases}$
Finalement, $\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = (5x + 1)e^{-5x}$.

2)

a. On remarque que $y'' = 2y'y = 2y^3$ et $y''' = 6y'y^2 = 6y^4$
Parmi les fonctions typiques (polynômes, exponentielles, trigonométriques, …), les fonctions rationnelles $\frac{P(x)}{Q(x)}$ semblent être les meilleures candidates à résoudre ce genre d'équation.
En effet, on rappelle la dérivée de la fonction $x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ dont la dérivée est $x \mapsto \frac{2}{x^3}$ et généralement sa n-ème dérivée $x \mapsto (-1)^n \frac{n}{x^{n+1}}$.

En réalité, les fonctions de la forme $y : x \mapsto \frac{1}{c-x}$ où $c \in \mathbb{R}$ sont solutions de l'équation. Elles permettent de régler l'apparition d'un signe négatif pour les dérivées impaires ainsi que respectent l'apparition de $n!$ au numérateur après n dérivations.

b. On a, $y' - e^{x-y} = 0 \Leftrightarrow y' \cdot e^{y} = e^{x}$
Il vient que $y : x \mapsto x$ par théorème.

c. On a, $\begin{cases} y'(t) = x(t) \\ x'(t) = y(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y''(t) = x'(t) = y(t) \\ x''(t) = y'(t) = x(t) \end{cases}$
Ainsi on se retrouve à résoudre $y'' - y = 0$ et $x'' - x = 0$ deux équations différentielles d'ordre 2 avec pour équations caractéristiques $r^2 - 1 = 0$ admettant pour racines $r_1 = -1$ et $r_2 = 1$.
Par théorème, y et x prenne la forme $f : x \mapsto \lambda e^{-x} + \mu e^{x}$ où $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

5. Phase portrait

Here, it is apparent that $y = 0$ is an extremum.
Indeed, at $(0,0)$ we have $y' = 0$, which means a null derivative.
Moreover, the extremum is a maximum since a small disturbance, such as a change in speed (dy/dx axis) or in position (y axis), from the central position results in a diverging arrow from the central position, acting the same way as a ball situated at the top of a hill. A minimum would have had all arrows point towards itself, since small disturbance lead to a return to the status quo.

6. DI Method

First, $\forall x \in \mathbb{R}, d(x) = 2x \Rightarrow d^{(1)}(x) = d'(x) = 2 \Rightarrow d^{(2)}(x) = d''(x) = 0$.
Moreover, $\forall x \in \mathbb{R}, i_{(1)}(x) = -\frac{1}{2}\cos(2x) \Rightarrow i_{(2)}(x) = -\frac{1}{4}\sin(2x)$.
Finally, $\forall x \in \mathbb{R}, \sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n d^{(n)}(x) i^{(n+1)}(x) = -x\cos(2x) + \frac{1}{2}\sin(2x)$.
If we differentiate the result, we obtain, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\left(-x\cos(2x) + \frac{1}{2}\sin(2x)\right)' &= -\cos(2x) + 2x\sin(2x) + \cos(2x) \\ &= 2x\sin(2x).\end{aligned}$$

$$Life = \int_{birth}^{death} \frac{happiness}{time} \Delta time$$

« In my free time I do differential and integral calculus. »

Karl Marx

Les intégrales originent d'un besoin géométrique de calculer les aires, elles finissent par être étudiées et généralisées au même moment que les autres notions du calcul infinitésimal durant la Renaissance, on étudie aujourd'hui une formalisation de l'époque moderne des mathématiciens Lebesgue et Riemann. Nous introduirons la notion d'intégrale ainsi que les différentes propriétés qui les caractérisent.

Sommaire

Cours

Exercices d'application

Exercices d'approfondissement

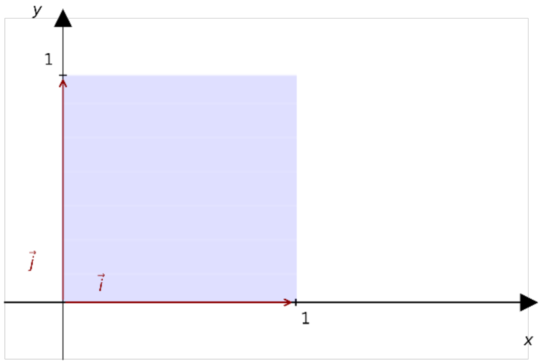
Correction des exercices

Cours

I. Notion d'intégrale

1. Intégrale d'une fonction continue positive

On se place dans le plan muni d'un repère $(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ et on considère le rectangle unité qui possède une aire de 1 unité d'aire, notée u.a. elle sert de référence de mesure dans un plan où les repères physiques ne sont pas précisés.



Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a, b]$ où $a, b \in \mathbb{R}$.

Définition (Intégrale d'une fonction)

On appelle **intégrale de f** sur $[a, b]$ l'aire en u.a. de la surface délimitée par les axes $(x = a)$, $(x = b)$, $(y = 0)$ et la courbe $\big(y = f(x)\big)$, on la note alors :

$$\int_a^b f(x)dx$$

Remarque

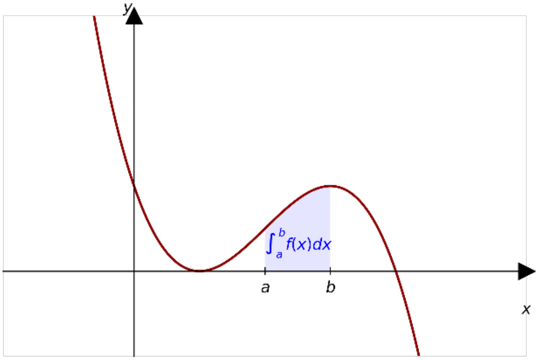
La notation est lue « l'intégrale de $f(x)dx$ entre a et b », a et b correspondent aux bornes d'intégration tandis que dx indique que x est la variable, dite muette car elle est interchangeable avec n'importe quelle autre lettre, comme l'indice de sommation k dans $\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{j=0}^{n} u_j = \sum_{N=0}^{n} u_N$ etc.

2. Généralisation aux fonctions continues

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ où $a,b \in \mathbb{R}$.

Définition (Intégrale d'une fonction)

La notion d'intégrale d'une fonction non-positive est similaire à celle d'une fonction positive à l'exception que si f est négative sur $[a,b]$ alors $\int_a^b f(x)dx$ prend un signe négatif.



Propriété (Relation de Chasles)

On a, pour tout réel $c \in [a,b]$, $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

Conséquences (Relation de Chasles)

On a,

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

II. Relation Intégrale - Primitive

1. Théorème fondamental de l'intégration

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a, b]$.

Théorème (Théorème fondamental de l'intégration)

La fonction F définie sur $[a, b]$ par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f qui s'annule en a.

Démonstration (Théorème fondamental de l'intégration)

Supposons f strictement croissante sur $[a, b]$ et $h > 0$.

On a, $\forall x \in [a, b], F(x+h) - F(x) = \int_a^{x+h} f(x)dx - \int_a^x f(x)dx$

$$= \int_a^{x+h} f(x)dx + \int_x^a f(x)dx$$

$$= \int_x^{x+h} f(x)dx \qquad \text{(Chasles)}$$

Or, par stricte croissance de f, l'aire est bornée par $hf(x)$ et $hf(x+h)$

Donc, $\forall x \in [a, b], f(x) < \frac{F(x+h)-F(x)}{h} < f(x+h)$

Comme f est continue, $\forall x \in [a, b], \lim\limits_{h \to 0} f(x+h) = f(x)$

D'après le théorème des gendarmes, pour tout $x \in [a, b], \frac{F(x+h)-F(x)}{h}$ converge vers $f(x)$ lorsque h tend vers 0. Ainsi, F est dérivable en x et on a $F'(x) = f(x)$. F est donc une primitive de f telle que $F(a) = 0$.

Si f n'est pas strictement croissante sur $[a, b]$, il suffit de segmenter l'intégrale sur des bornes où f est strictement monotone qui s'annulent deux-à-deux.

Théorème (Théorème fondamental de l'intégration)

Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives sur cet intervalle.

2. Propriétés sur les intégrales

Soit f, g deux fonctions continues sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ de primitives F, G et k un réel.

Propriété (Relation Intégrale - Primitive)

$\forall a, b \in I, \int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Propriétés (Linéarité de l'intégrale)

On a, pour tous réels a, b de I,

$$\int_a^b \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

Propriété (Croissance de l'intégrale)

Si $\forall x \in I, f(x) \geq g(x)$ alors $\forall [a, b] \subset I, \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$.

Conséquence (Positivité de l'intégrale)

Si $\forall x \in I, f(x) \geq 0$ alors $\forall [a, b] \subset I, \int_a^b f(x)dx \geq 0$.

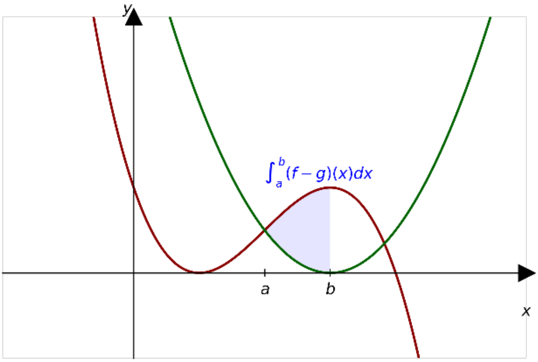
III. Théorèmes sur les intégrales

1. Calcul d'aire entre deux courbes et valeur moyenne

Soit f, g deux fonctions continues sur un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Définition (Aire délimitée par deux courbes)

L'**aire délimitée par deux courbes** correspond à la différence entre les deux aires, des courbes désignées, l'une par rapport à l'autre, sur un intervalle défini.



Définition (Valeur moyenne d'une fonction)

La **valeur moyenne** m d'une fonction f est définie telle que :

$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

2. Intégration par parties

Soit u, v deux fonctions dérivables sur un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$.

Théorème (Intégration par parties)

On a,

$$\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

Démonstration (Intégration par parties)

Les fonctions u et v sont dérivables sur $[a, b]$, donc le produit uv est dérivable sur $[a, b]$ tel que $(uv)' = u'v + uv'$ qui est continue sur $[a, b]$.

Donc, $[u(x)v(x)]_a^b = \int_a^b (uv)'(x)dx$

$= \int_a^b \big(u'(x)v(x) + u(x)v'(x)\big)dx$

$= \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx$ (linéarité $\int$)

Finalement, $\int_a^b u'(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u(x)v'(x)dx$.

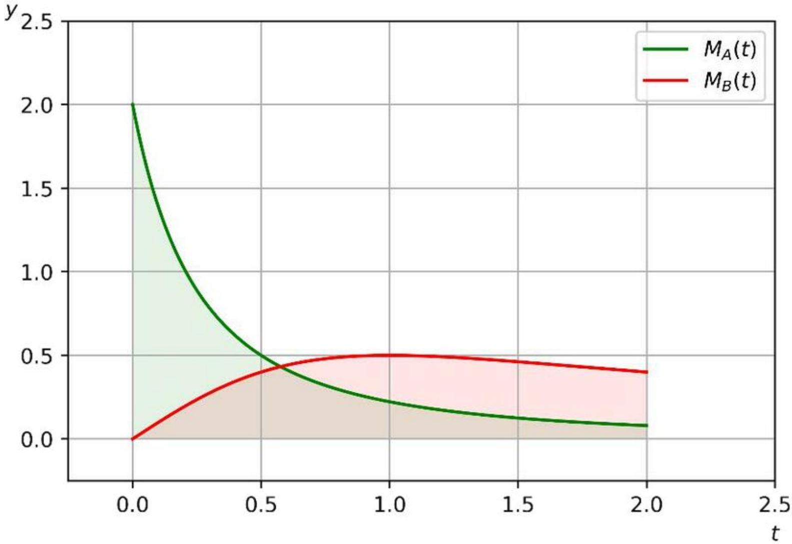
Exercices d'application

1. Calcul d'intégrales

Calculer les intégrales suivantes :

a. $\int_{-1}^{3} 2x dx$
b. $\int_{2}^{3} 1 dx$
c. $\int_{0}^{1} (x^2 + 2x - 1) dx$
d. $\int_{-1}^{1} \cos(x)\, dx$
e. $\int_{-1}^{1} \sin(x)\, dx$
f. $\int_{0}^{10} (4x^3 - 3x^2 + 2x) dx$
g. $\int_{-1}^{1} e^{2x+1} dx$
h. $\int_{1}^{2} \sqrt{x} dx$
i. $\int_{0}^{\pi/2} \sin(2x)\, dx$
j. $\int_{1}^{\mathrm{e}} \frac{dx}{x}$
k. $\int_{1}^{\alpha} \frac{dx}{x^2}$ où $\alpha > 1$
l. $\int_{-1}^{1} x e^{x} dx$
m. $\int_{0}^{2\pi} \cos^2(t)\, dt$
n. $\int_{0}^{2} \frac{t^2}{1+t^3} dt$
o. $\int_{1}^{e} \frac{\ln(x)}{x} dx$
p. $\int_{0}^{1/2} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} dt$
q. $\int_{0}^{2\pi} \cos(\theta)\, d\theta$
r. $\int_{1}^{2} \frac{dz}{\sqrt{z}+\sqrt{z-1}}$
s. $\int_{0}^{\ln(e)} t e^{t^2} dt$
t. $\int_{e}^{e^2} \frac{dx}{x \ln(x)}$
u. $\int_{1}^{e} x \ln(x)\, dx$
v. $\int_{0}^{1} e^{-x} dx$
w. $\int_{0}^{1} \frac{2x}{1+x} dx$
x. $\int_{0}^{1} \sqrt{x+1}\, dx$
y. $\int_{0}^{1} (3x^2 + 6x + 3) e^{(x+1)^3} dx$
z. $\int_{V_0}^{V_f} \frac{RT}{V} dV$

2. Comparaison d'aires et propriétés sur les intégrales

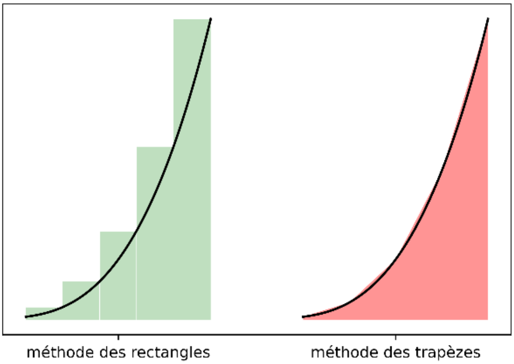


1) On souhaite comparer la productivité de deux machines effectuant une commande sur un laps de temps. La machine A est estimée réaliser $M_A(t) = \frac{0.5}{(t+0.5)^2}$ millions d'opérations au t-ème instant tandis que la machine B est estimée réaliser $M_B(t) = \frac{t}{t^2+1}$ millions d'opérations.
   a. Calculer le nombre d'opérations moyen réalisé par chaque machine.
   b. En supposant que l'aire sous la courbe de chaque fonction sur un intervalle corresponde à la productivité de la machine sur ce laps de temps. Comparer la productivité des machines A et B sur $[0s, 2s]$.

2) Soit f une fonction continue sur un intervalle I. Soit a, b deux réels de I.
   a. Que dire de l'intégrale $\int_{-a}^{a} f(x)dx$ si f est paire ? impaire ? On supposera qu'on peut changer de variable d'intégration, par exemple, poser $y = 2x$ en se rappelant que cela implique $dy = 2dx$.
   b. Si f est bornée par m et M deux réels sur I. Montrer que la valeur moyenne de f sur $[a, b]$ est aussi bornée par m et M.

3. Méthodes d'approximation d'aires

L'approximation d'intégrales est un sujet essentiel en analyse numérique qui permet de passer outre la recherche d'une primitive, tâche qui se révèle parfois impossible. On désire approximer l'intégrale $I = \int_1^2 \frac{1}{x} dx = \ln(2)$ estimée à 0.693.



1) La **méthode des rectangles** consiste à simplifier l'aire sous la courbe en N rectangles de longueur $1/N$ et de hauteur $f(x_n)$ où la suite des abscisses (x_n) est définie par $x_0 = 1$ et $\forall n \in [\![0, N-1]\!], x_n = x_0 + \frac{n}{N}$.
   a. Exprimer l'approximation I_{R} de l'intégrale I en fonction de N.
   b. Écrire un programme Python qui demande en argument le nombre de subdivisions N et renvoie la valeur de I_R.
   c. La méthode actuellement décrite est en réalité une des deux versions de la méthode des rectangles, dite **à gauche**, réécrivez le programme si l'on considère la méthode des rectangles **à droite** où (x_n) est définie par $x_1 = 1 + 1/N$ et $\forall n \in [\![1, N]\!], x_n = x_1 + n/N$, comparez pour $N = 100$.

2) La **méthode des trapèzes** est similaire à celle des rectangles à l'exception qu'elle considère une hauteur $\frac{f(x_n)+f(x_{n+1})}{2}$
   a. Exprimer l'approximation I_{T} de l'intégrale I en fonction de N.
   b. Écrire un programme Python qui demande en argument le nombre de subdivisions N et renvoie la valeur de I_T, comparez aux deux méthodes précédentes pour $N = 100$.

EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

4. Suites d'intégrales

1) Étudions l'**intégrale de Wallis** (I_n) telle que $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(x)dx$
   a. Calculer I_0 et I_1.
   b. Montrer que pour tout entier naturel $n, I_n \geq 0$.
   c. Déterminer le sens de variations de la suite (I_n). Déduire sa nature.
   d. Montrer que pour tout entier naturel $n, (n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$
   e. Démontrer que pour tout entier naturel $n, I_{2n} = I_0 \cdot \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2}$

2) On suppose pour toute fonction continue f sur $[a,b] \subset \mathbb{R}$, on peut exprimer son intégrale sur $[a,b]$ par la **somme de Riemann** suivante :

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+\frac{k(b-a)}{n}\right) \rightarrow_{n\to+\infty} \int_a^b f(x)dx$$

   a. Déterminer la limite de la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$
   b. Déterminer la limite de la suite $\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$

3) Étudions le **développement en série** de l'exponentielle $e = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$
   a. On considère la suite (I_n) définie telle que $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x dx$.
   Calculer I_0.
   b. Démontrer que la suite (I_n) converge vers 0.
   c. Démontrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \frac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}$
   d. A l'aide d'une somme télescopique, déduire le résultat indiqué en énoncé.

5. Intégrales convergentes

Soit f une fonction continue sur $[a,b] \subset \mathbb{R}$. L'intégrale $\int_a^b f(x)dx$ est dite **convergente** lorsque $\int_a^b f(x)dx$ est finie, à noter que a ou b peut prendre la valeur d'une borne infinie ou interdite de la fonction f. Par théorème, $\int_a^b f(x)dx$ est convergente si et seulement si $\lim_{X \to b^-} \int_a^X f(x)dx$ et $\lim_{X \to a^+} \int_X^b f(x)dx$ existent et sont finies. Étudier la nature des intégrales suivantes :

a. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$
b. $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$
c. $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x}$
d. $\int_0^1 \frac{dx}{x}$
e. $\int_0^{+\infty} (e^t + t)e^{-2t}dt$
f. $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^n \lfloor x \rfloor dx$

6. Dominated convergence theorem

In measure and integral theory, French mathematician Lebsgue established that for a sequence $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ of functions converging to a function f that is also dominated by some integrable function g, i.e., $\forall n \in \mathbb{N}, |f_n| \leq g$ with $\int g$ finite. Then, $(\int f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converges to $\lim_{n\to+\infty} \int f_n = \int f$.

Use this theorem on (f_n) defined on $[0,1]$ by $f_n : x \mapsto \frac{n\sin(x)}{1+n^2\sqrt{x}}$

Correction des exercices

1. Calcul d'intégrales

a. On a, $\int_{-1}^{3} 2x dx = [x^2]_{-1}^{3} = 9 - 1 = 8$

b. On a, $\int_{2}^{3} 1 dx = [x]_2^3 = 3 - 2 = 1$

c. On a, $\int_0^1 (x^2 + 2x - 1) dx = \left[\frac{x^3}{3} + x^2 - x\right]_0^1 = \frac{1}{3}$

d. On a, $\int_{-1}^{1} \cos(x)\, dx = [\sin(x)]_{-1}^{1} = \sin(1) - \sin(-1) = 2\sin(1)$

e. On a, $\int_{-1}^{1} \sin(x)\, dx = [-\cos(x)]_{-1}^{1} = -\cos(1) - (-\cos(-1)) = 0$

f. On a, $\int_0^{10} (4x^3 - 3x^2 + 2x) dx = [x^4 - x^3 + x^2]_0^{10} = 9100$

g. On a, $\int_{-1}^{1} e^{2x+1} dx = \left[\frac{1}{2} e^{2x+1}\right]_{-1}^{1} = \frac{e^4 - 1}{2e}$

h. On a, $\int_1^2 \sqrt{x} dx = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}\right]_1^2 = \frac{2}{3}(2\sqrt{2} - 1)$

i. On a, $\int_0^{\pi/2} \sin(2x)\, dx = \left[-\frac{1}{2}\cos(2x)\right]_0^{\pi/2} = 1$

j. On a, $\int_1^e \frac{1}{x} dx = [\ln(x)]_1^e = 1$

k. On a, $\forall \alpha > 1, \int_1^{\alpha} \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^{\alpha} = 1 - \frac{1}{\alpha}$

l. On a, par intégration par parties, $\int_{-1}^{1} x e^x dx = [x e^x]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} e^x dx$
$$= 2/e$$

m. On a, $\int_0^{2\pi} \cos^2(t)\, dt = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1 + \cos(2t)}{2}\right) dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{\cos(2t)}{4}\right]_0^{2\pi} = \pi$

n. On a, $\int_0^2 \frac{t^2}{1 + t^3} dt = \left[\frac{1}{3}\ln(1 + t^3)\right]_0^2 = \frac{\ln(9)}{3}$

o. On a, $\int_1^e \frac{\ln(x)}{x} dx = \left[\frac{1}{2}\ln^2(x)\right]_1^e = \frac{1}{2}$

p. On a, $\int_0^{1/2} \frac{t}{\sqrt{1-t^2}}\, dt = \left[-\sqrt{1-t^2}\right]_0^{1/2} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$

q. On a, $\int_0^{2\pi} \cos(\theta)\, d\theta = [-\sin(\theta)]_0^{2\pi} = 0$

r. On a,
$$\begin{aligned}\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{z}+\sqrt{z-1}} dz &= \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{z}+\sqrt{z-1}} \times \frac{\sqrt{z}-\sqrt{z-1}}{\sqrt{z}-\sqrt{z-1}} dz \\ &= \int_1^2 \left(\sqrt{z} - \sqrt{z-1}\right) dz \\ &= \left[\frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3}(z-1)^{\frac{3}{2}}\right]_1^2 \\ &= \frac{4}{3}\left(\sqrt{2} - 1\right)\end{aligned}$$

s. On a, $\int_0^{\ln(e)} t e^{t^2} dt = \left[\frac{1}{2} e^{t^2}\right]_0^{\ln(e)} = \frac{1}{2}(e-1)$

t. On a, $\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln(x)} dx = [\ln(\ln(x))]_e^{e^2} = \ln(2)$

u. On a, par intégration par parties,
$$\begin{aligned}\int_1^e x\ln(x)\, dx &= \left[\frac{1}{2}x^2\ln(x)\right]_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e x dx \\ &= \frac{1}{4}(1+e^2)\end{aligned}$$

v. On a, $\int_0^1 e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^1 = 1 - \frac{1}{e}$

w. On a,
$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{2x}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{2x+2-2}{1+x} dx &= 2\int_0^1 \frac{1+x}{1+x} dx - 2\int_0^1 \frac{1}{1+x} dx \\ &= 2 - \ln(4)\end{aligned}$$

x. On a, $\int_0^1 \sqrt{x+1} dx = \left[\frac{2}{5}(x+1)^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 = \frac{2}{3}\left(2\sqrt{2} - 1\right)$

y. On a,
$$\begin{aligned}\int_0^1 (3x^2+6x+3)e^{(x+1)^3} dx &= \int_0^1 3(x+1)^2 e^{(x+1)^3} dx \\ &= \left[e^{(x+1)^3}\right]_0^1 = e(e^7 - 1)\end{aligned}$$

z. On a, $\int_{V_0}^{V_f} \frac{RT}{V} dV = [RT\ln(V)]_{V_0}^{V_f} = RT\ln\left(\frac{V_f}{V_0}\right)$

2. Comparaison d'aires et propriétés sur les intégrales

1)

a. Les valeurs moyennes m_A et m_B des fonctions M_A et M_B respectivement durant le laps de temps $[0,2]$ sont :
$m_A = \frac{1}{2}\int_0^2 M_A(t)dt = \frac{4}{10}$ million d'opérations
$m_B = \int_0^2 M_B(t)dt = \frac{\ln(5)}{4} \simeq 0.402$ million d'opérations.

b. On a établi à la question précédente les aires sous les courbes M_A et M_B sur le même intervalle $[0,2]$, en effet $m_A = \frac{1}{\mathrm{b-a}} \times Aire(M_A)$, ainsi on déduit que la productivité de la machine B est légèrement supérieure à celle de la machine A.

2)

a. On a,
$$\begin{aligned}
\int_{-a}^{a} f(x)dx &= \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_0^a f(x)dx \\
&= \int_a^0 f(-y)(-dy) + \int_0^a f(x)dx \quad \text{(chgt. var. } y=-x) \\
&= -\int_a^0 f(-y)dy + \int_0^a f(x)dx \\
&= \int_0^a f(-y)dy + \int_0^a f(x)dx \\
&= \begin{cases} \int_0^a -f(y)dy + \int_0^a f(x)dx & \text{si } f \text{ impaire} \\ \int_0^a f(y)dy + \int_0^a f(x)dx & \text{si } f \text{ paire} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0 & \text{si } f \text{ impaire} \\ 2\int_0^a f(x)dx & \text{si } f \text{ paire} \end{cases}
\end{aligned}$$

b. On a, $\forall x \in [a,b], m \leq f(x) \leq M$

Par croissance de l'intégrale, on a,
$$\begin{aligned}
&\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx \\
&m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a) \\
&m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M \\
&m \leq \mu_f \leq M
\end{aligned}$$

3. Modélisation par équations différentielles

1)

a. On a, $I_R = \sum_{n=0}^{N-1} \text{Aire}(\text{Rectangle}_\text{n}) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{f(x_n)}{N} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{x_n}$

b.

```
I = 0
x0 = 1
N = int(input("Nombre de subdivisions : "))

for n in range(N) :
    x = x0 + n/N
    I += 1/x

print(I/N)
```

c.

```
I = 0
x0 = 1
N = int(input("Nombre de subdivisions : "))

for n in range(1, N+1) :
    x = x0 + n/N
    I += 1/x

print(I/N)
```

La première méthode renvoie 0.696 tandis que la seconde méthode renvoie 0.691, la seconde méthode est plus précise pour $N = 100$.

2)

a. On a, $I_R = \sum_{n=0}^{N-1} \text{Aire}(\text{Trapèze}_\text{n}) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{f(x_n)+f(x_{n+1})}{2N} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_{n+1}}\right)$

b.

```
I = 0
x0 = 1
x1 = x0 + 1/N
N = int(input("Nombre de subdivisions : "))

for n in range(N) :
    x = x0 + n/N
    y = x1 + n/N
    I += (1/x + 1/y) / 2

print(I/N)
```

La troisième méthode renvoie 0.693, la précision est parfaite.

4. Suites d'intégrales

1)

a. On a,

$I_0 = \int_0^{\pi/2} dx = \pi/2$

$I_1 = \int_0^{\pi/2} \cos(x)\, dx = [\sin(x)]_0^{\pi/2} = 1$

b. On a, $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \cos(x) \geq 0$

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \cos^n(x) \geq 0$

Par positivité de l'intégrale, $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{\pi/2} \cos^n(x)\, dx \geq 0$

Finalement, $\forall n \in \mathbb{N}, I_n \geq 0$.

c. On a, $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \cos(x) \leq 1$

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \cos^n(x) \leq \cos^{n-1}(x)$

Par croissance de l'intégrale, $\forall n \in \mathbb{N}, \int_0^{\pi/2} \cos^n(x)\, dx \leq \int_0^{\pi/2} \cos^{\mathrm{n}-1}(x)\, dx$

Finalement, $\forall n \in \mathbb{N}, I_n \leq I_{n-1}$, la suite (I_n) est décroissante.

Par théorème de la limite monotone, (I_n) est convergente.

d. On a, $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+2} = \int_0^{\pi/2} \cos^{n+2}(x)\, dx$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\pi/2} \cos(x) \cos^{n+1}(x)\, dx \\
&= [\sin(x) \cos^{n+1}(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1) \int_0^{\pi/2} \sin^2(x) \cos^n(x)\, dx \\
&= (n+1) \int_0^{\pi/2} \sin^2(x) \cos^n(x)\, dx \\
&= (n+1) \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2(x)) \cos^n(x)\, dx \\
&= (n+1) \int_0^{\pi/2} \cos^n(x) - \cos^{n+2}(x)\, dx \\
&= (n+1) I_n - (n+1) I_{n+2}
\end{aligned}$$

D'où, $\forall n \in \mathbb{N}, (n+2) I_{n+2} = (n+1) I_n$

e. Démontrons autrement que par récurrence la propriété :

On a, d'après la question d., au rang $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_{2n} = \frac{2n-1}{2n} I_{2n-2}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} I_{2n-4} \\
&= \frac{2n-1}{2n} \cdot \frac{2n-3}{2n-2} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{2} I_0
\end{aligned}$$

Il vient que $\forall n \in \mathbb{N}, I_{2n} = \frac{(2n-1)/(2^n n!)}{2^n n!} I_0 = \frac{(2n)!}{(2^n n!)^2} I_0$

2)

a. On a, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \{1, \dots, n\}, \frac{k}{n^2+k^2} = \frac{1}{n} \cdot \frac{k/n}{1+(k/n)^2}$

Soit f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$

Par quotient de fonctions dérivables sur $[0,1]$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[0,1]$, la fonction f est dérivable sur $[0,1]$, par théorème, la fonction f est continue sur $[0,1]$.

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+k^2} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(k/n)$

Par somme de Riemann, $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(k/n) \to_{n\to+\infty} \int_0^1 f(x)dx$

$$=_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx$$
$$=_{n\to+\infty} \left[\frac{1}{2}\ln(1+x^2)\right]_0^1$$
$$= \frac{\ln(2)}{2}$$

b. On a, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall k \in \{1, \dots, n\}, \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+2k/n}}$

Soit f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+2x}}$

Par inverse d'une fonction dérivable et ne s'annulant pas sur $[0,1]$, f est dérivable sur $[0,1]$, par théorème, f est continue sur $[0,1]$.

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(k/n)$

Par somme de Riemann, $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(k/n) \to_{n\to+\infty} \int_0^1 f(x)dx$

$$=_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+2x}} dx$$
$$=_{n\to+\infty} \left[\sqrt{1+2x}\right]_0^1$$
$$= \sqrt{3} - 1$$

3)

a. On a, $I_0 = \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x dx = \int_0^1 e^x dx = e - 1$

b. On a, $\forall x \in [0,1], 0 \leq 1 - x \leq 1 \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1]\ 0 \leq \frac{(1-x)^n}{n!} \leq \frac{1}{n!}$

$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0,1]\ 0 \leq \frac{(1-x)^n}{n!} e^x \leq \frac{e^x}{n!}$$
$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x dx \leq \int_0^1 \frac{e^x}{n!} dx$$
$$\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq \int_0^1 \frac{(1-x)^n}{n!} e^x dx \leq \frac{e-1}{n!}$$

D'après le théorème des gendarmes, (I_n) converge vers 0.

c. Démontrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \frac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}$

On a, au rang $n = 0, I_1 = \int_0^1 (1-x)e^x dx$.

Par intégration par parties, on a,

$$I_1 = ([e^x]_0^1) - \left([xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx\right) = 2[e^x]_0^1 - [xe^x]_0^1$$
$$= 2(e-1) - e$$
$$= e - 1 - 1 = I_0 - \frac{1}{(n+1)!}$$

L'initialisation est vérifiée.

Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $I_n = \frac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}$

On a, $I_{n+1} = \int_0^1 \frac{(1-x)^{n+1}}{(n+1)!} e^x dx$

Par intégration par parties, on a,

$$I_{n+1} = \left[\frac{-(1-x)^{n+2}}{(n+2)!} e^x\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{-(1-x)^{n+2}}{(n+2)!} e^x dx$$
$$= \frac{1}{(n+2)!} + I_{n+2}$$

L'hérédité est vérifiée.

Par principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \frac{1}{(n+1)!} + I_{n+1}$.

d. On a, d'après la question 3) c., $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \frac{1}{(n+1)!} + I_{n+1} \Leftrightarrow I_n - I_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!}$$
$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n} (I_k - I_{k+1}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(k+1)!}$$
$$\Leftrightarrow I_0 - I_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - \frac{1}{0!}$$
$$\Leftrightarrow e - 1 - I_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} - 1$$
$$\Leftrightarrow e - I_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

Or, (I_n) est convergente, donc $(e - I_n)$ l'est aussi.

Ainsi, $\left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)$ converge et admet pour limite $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e - 0 = e$.

5. Intégrales convergentes

a. Soit $X > 1$, on a, $\int_1^X \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_1^X$
$$= 1 - \frac{1}{X}$$

Or $\lim\limits_{X \to +\infty} 1 - \frac{1}{X} = 1$

L'intégrale est donc convergente de valeur $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = 1$

b. Soit $X > 0$, on a, $\int_X^1 \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x}\right]_X^1$
$$= \frac{1}{X} - 1$$

Or $\lim\limits_{X \to 0^+} \frac{1}{X} - 1 = +\infty$

L'intégrale est donc divergente.

c. Soit $X > 1$, on a, $\int_1^X \frac{dx}{x} = [\ln(x)]_1^X$
$$= \ln(X)$$

Or $\lim\limits_{X \to +\infty} \ln(X) = +\infty$

L'intégrale est donc divergente.

d. Soit $X > 0$, on a, $\int_X^1 \frac{dx}{x} = [\ln(x)]_X^1$
$$= -\ln(X)$$

Or $\lim\limits_{X \to 0^+} \ln(X) = -\infty$

L'intégrale est donc divergente.

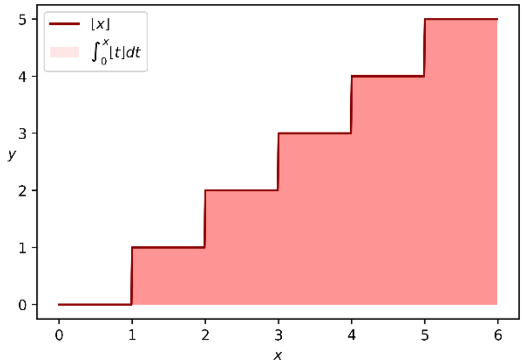
e. Soit $T > 0$, on a, $\int_0^T (e^t + t)e^{-2t}dt = \int_0^T (e^{-t} + te^{-2t})dt$
$$= \int_0^T e^{-t}dt + \int_0^T te^{-2t}dt$$
$$= [-e^{-t}]_0^T + \left[-\frac{1}{2}te^{-2t}\right]_0^T - \int_0^T \frac{e^{-2t}}{-2}dt$$
$$= [-e^{-t}]_0^T + \left[-\frac{1}{2}te^{-2t}\right]_0^T + \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-2t}\right]_0^T$$
$$= -e^{-T} + 1 - \frac{1}{2}Te^{-2T} - \frac{1}{4}e^{-2T} + \frac{1}{4}$$

Or, par croissances comparées, $\lim\limits_{T \to +\infty} Te^{-T} = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{T \to +\infty} Te^{-2T} = 0$

De plus, $\lim\limits_{T \to +\infty} e^{-T} = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{T \to +\infty} e^{-2T} = 0$

Finalement, l'intégrale est convergente de valeur $\int_0^{+\infty} (e^t + t)e^{-2t}dt = \frac{5}{4}$

f. Calculons quelques valeurs de l'intégrale,
Pour $n = 0$, $\int_0^n \lfloor x \rfloor dx = \int_0^0 \lfloor x \rfloor dx = 0$
Pour $n = 1$, $\int_0^n \lfloor x \rfloor dx = \int_0^1 \lfloor x \rfloor dx$, or, pour $x \in [0, 1[$, la hauteur $\lfloor x \rfloor$ est nulle, pour $x \in \{1\}$, la longueur est nulle. En sommant les deux aires, par linéarité de l'intégrale, on retrouve une intégrale nulle.
Pour $n = 2$, $\int_0^n \lfloor x \rfloor dx = \int_0^1 \lfloor x \rfloor dx + \int_1^2 \lfloor x \rfloor dx = \int_1^2 \lfloor x \rfloor dx$
De manière analogue, pour $x \in [1, 2[$, la hauteur $\lfloor x \rfloor = 1$ et la longueur est $2 - 1 = 1$, l'aire du rectangle est 1, pour $x \in \{2\}$, l'aire est nulle.
On peut représenter ce résultat :



Donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_0^n \lfloor x \rfloor dx = \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{(k+1)^-} \lfloor x \rfloor dx$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} k = \frac{(n-1)n}{2}$$

6. Dominated convergence theorem

We have, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall\, x \in [0,1]$

$\left|\frac{n\sin(x)}{1+n^2\sqrt{x}}\right| \leq \left|\frac{n}{1+n^2\sqrt{x}}\right| = \frac{n}{1+n^2\sqrt{x}} \leq \frac{n}{n^2\sqrt{x}} = \frac{1}{n\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}} \coloneqq g(x)$

Indeed, $\int_0^1 g(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \left[2\sqrt{x}\right]_0^1 = 2 < +\infty$.

Moreover, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [0,1], 0 \leq \left|\frac{n\sin(x)}{1+n^2\sqrt{x}}\right| \leq \frac{1}{n\sqrt{x}} \to_{n\to+\infty} 0$

Thus, by squeeze theorem, $\forall x \in [0,1], f_n(x) \to_{n\to+\infty} 0 \coloneqq f(x)$.

Finally, we can apply the dominated convergence theorem, such that,

$\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n dx = \int_0^1 f(x)dx \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{n\sin(x)}{1+n^2\sqrt{x}}dx = \int_0^1 0dx = 0.$

Géométrie

« La géométrie est l'art du raisonnement correct à partir de figures mal dessinées. »

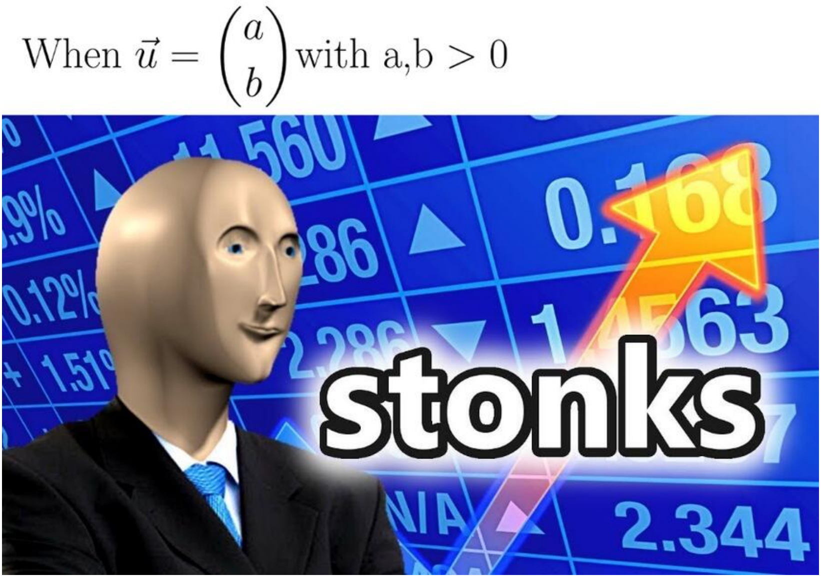
Auteur contesté (René Descartes, Henri Poincaré, George Pólya)

La géométrie, du grec antique *geometria* (γεωμετρία) « mesurer, terre », étudie les figures du plan et de l'espace.

La géométrie n'a cessé d'être révolutionnée par les civilisations en modifiant les axiomes qui la caractérise, on différencie alors la géométrie euclidienne de la non-euclidienne, dont le plan d'existence peut prendre la forme d'une sphère.

Dans cette partie, nous approfondirons les notions de géométrie de première.

Géométrie vectorielle dans l'espace



« There is no royal road to geometry. »

Karl Marx

La géométrie vectorielle permet de décrire la position et l'orientation des objets dans le plan et l'espace. Nous approfondirons la notion de vecteur établie en année de première ainsi qu'introduirons certains objets de l'espace.

Sommaire

Cours

Exercices d'application

Correction des exercices

Cours

I. Vecteurs de l'espace

1. Définition

Définition (Vecteur de l'espace)

Un **vecteur de l'espace** est un objet géométrique caractérisé par une direction, un sens et une norme.

Remarque

Les vecteurs de l'espace respectent toutes les propriétés des vecteurs du plan étudiées l'année précédente.

2. Translation et combinaisons linéaires

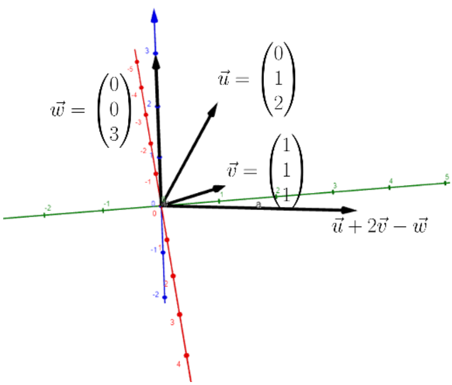
Soit $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs de l'espace.

Définition (Translation)

Une **translation de vecteur $\vec{u}$** est une application qui à tout point de l'espace M renvoie le point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

Définition (Combinaison linéaire)

Une **combinaison linéaire de vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$** correspond à un vecteur de la forme $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$ où α, β et γ sont des réels.

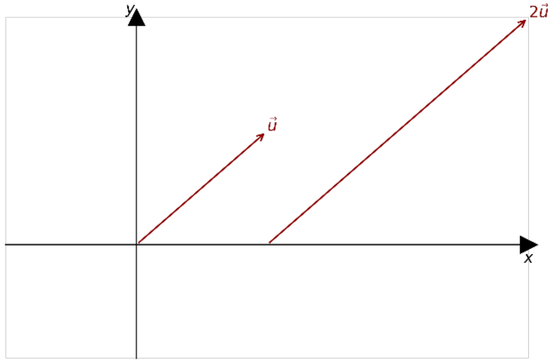


II. Droites et plans de l'espace

1. Définitions et propriétés

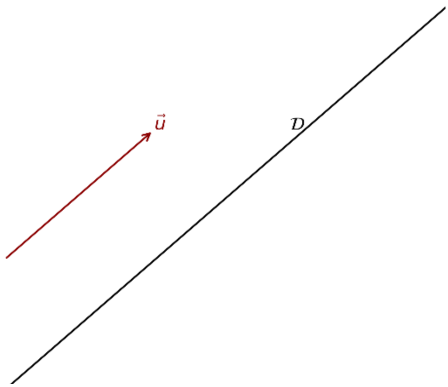
Définition (Vecteurs colinéaires)

La **colinéarité** de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls correspond à une même direction des vecteurs, traduit par la relation $\vec{u} = k\vec{v}$ où $k \in \mathbb{R}$.



Définition (Vecteur directeur)

Un **vecteur directeur à la droite ($\mathcal{D}$)** est un vecteur $\vec{u}$ non nul tel qu'il possède la même direction que la droite ($\mathcal{D}$).



Propriété (Construction d'une droite à partir d'un point et vecteur directeur)

La droite ($\mathcal{D}$) passant par un point A de l'espace de vecteur directeur $\vec{u}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires.

Propriété (Critère de parallélisme par les vecteurs directeurs)

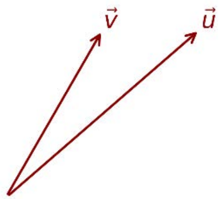
Deux droites sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.

Propriété (Direction d'un plan de l'espace)

Deux vecteurs non nuls et non colinéaires déterminent la direction d'un plan.

Propriété (Construction d'un plan à partir de deux vecteurs non colinéaires)

Le plan $(\mathcal{P})$ passant par un point A de l'espace de vecteurs directeurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$ où $x, y \in \mathbb{R}$.



On remarque que les deux vecteurs sont non colinéaires. Ainsi il est possible d'exprimer $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ comme combinaisons linéaires de ces deux vecteurs. Inversement, si $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ forme la base d'un plan, alors $(\vec{u}, \vec{v})$ aussi.

Propriété (Critère de parallélisme par les vecteurs directeurs)

Deux plans sont parallèles s'ils sont dirigés par le même couple de vecteurs directeurs non colinéaires.

2. Position relative de droites et plans de l'espace

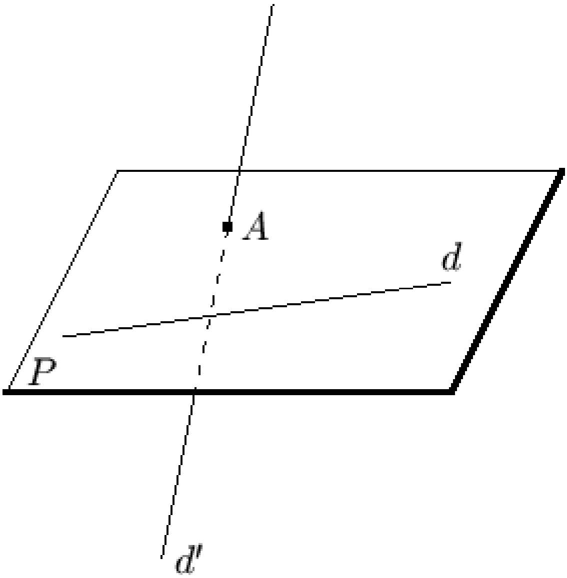
Soit $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ deux droites de l'espace ainsi que $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{P}')$ deux plans de l'espace.

Définition (Coplanarité de droites)

Les droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont dites **coplanaires** si elles appartiennent au même plan.

Propriété (Coplanarité de droites de l'espace)

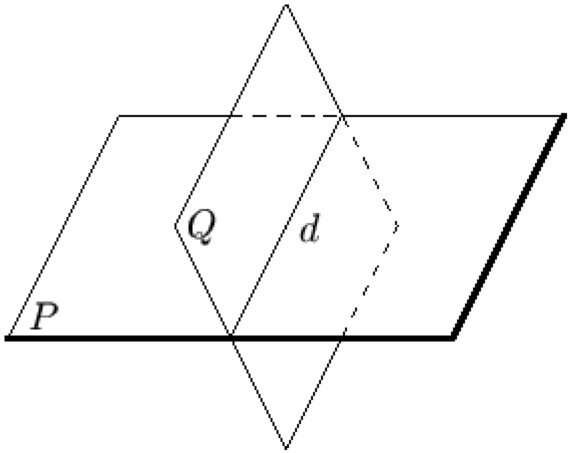
Deux droites de l'espace sont soit coplanaires soit non coplanaires.



On remarque ici que d' intersecte le plan $\mathcal{P}$ en un point, elle n'appartient donc pas au plan. On ne peut construire un plan comprenant les deux droites car elles ne sont pas parallèles.

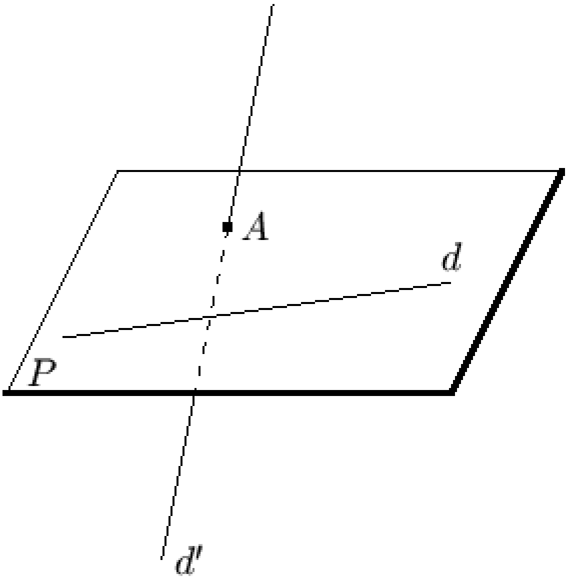
Propriété (Position relative de deux plans de l'espace)

Deux plans de l'espace sont soit sécants soit parallèles.



On remarque ici que Q intersecte le plan $\mathcal{P}$ suivant la droite d, les deux plans sont sécants. Si P, Q possèdent des paires de vecteurs directeurs colinéaires, alors ils sont parallèles, confondus s'ils possèdent un point en commun.

Propriété (Position relative d'une droite et d'un plan de l'espace)



On remarque ici que d' intersecte le plan $\mathcal{P}$ en un point. La droite d est incluse dans le plan $\mathcal{P}$. Finalement il existe le cas où les deux objets ne possèdent aucun point en commun.

III. Bases et repères de l'espace

1. Vecteurs coplanaires

Soit $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs de l'espace.

Propriété (Coplanarité de vecteurs de l'espace)

Trois vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires si l'on peut décomposer l'un des vecteurs en combinaison linéaire des autres tel que $\vec{u} = x\vec{v} + y\vec{w}$ où $x, y \in \mathbb{R}$.

Propriété (Décomposition d'un vecteur en trois vecteurs non coplanaires)

Si les vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont non coplanaires, alors pour tout vecteur $\vec{z}$ il existe une unique décomposition en combinaison linéaire $\vec{z} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$ où $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Démonstration (Décomposition d'un vecteur en trois vecteurs non coplanaires)

Soit $\overrightarrow{AB}$ un vecteur représentant le vecteur $\vec{z}$.

Soit $(\mathcal{P})$ un plan de repère $(A\,; \vec{u}, \vec{v})$

Si $B \in (\mathcal{P})$, par propriété, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tels que $\overrightarrow{AB} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.

Sinon, on considère la droite $(\mathcal{D})$ passant par B de vecteur directeur $\vec{w}$.

Comme $\vec{w}$ n'est pas colinéaire à $\vec{u}$ et $\vec{v}$, $(\mathcal{D})$ est sécant avec $(\mathcal{P})$ en C.

Comme A et B appartiennent à $(\mathcal{P})$, $\overrightarrow{AC}$ est sous la forme $\overrightarrow{AC} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$.

Comme B et C appartiennent à $(\mathcal{D})$, $\overrightarrow{BC}$ est colinéaire à $\vec{w}$, $\overrightarrow{BC} = \gamma\vec{w}$.

Finalement, par relation de Chasles, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$.

L'existence est vérifiée.

Supposons qu'il existe deux vecteurs vérifiant $\vec{z} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \alpha'\vec{u} + \beta'\vec{v} + \gamma'\vec{w} \Leftrightarrow (\alpha - \alpha')\vec{u} + (\beta - \beta')\vec{v} + (\gamma - \gamma')\vec{w} = \vec{0}$

Supposons qu'au moins un des coefficients soit non nul, on aurait donc $\vec{w} = \frac{\alpha-\alpha'}{\gamma-\gamma'}\vec{u} + \frac{\beta-\beta'}{\gamma-\gamma'}\vec{v}$, or cela contredit la condition de non coplanarité entre $\vec{w}$ et $\vec{u}$ et $\vec{v}$, tous les coefficients sont donc nuls.

L'unicité est vérifiée.

2. Base et repère de l'espace

Soit O un point et $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ des vecteurs non coplanaires de l'espace.

Définition (Base de l'espace)

Le triplet $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ forme une **base de l'espace**.

Définition (Repère de l'espace)

Le quadruplet $\left(O\,; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ forme un **repère de l'espace**.

Exercices d'application

1. Applications en géométrie vectorielle

Soit $(O : \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ le repère du plan considéré.

1) Calculez les combinaisons linéaires suivantes :
   a. $\vec{u} = (2,0)$, $\vec{v} = (-1,0)$ et $\vec{u} + 3\vec{v}$ et les représentez.
   b. $\vec{u} = (1,1)$, $\vec{v} = (-1,0)$ et $2\vec{u} - \vec{v}$.
   c. $\vec{u} = (1,4)$, $\vec{v} = (1,3)$ et $\vec{u} - 3\vec{v}$.
   d. $\vec{u} = \left(-\frac{1}{2}, 1\right)$, $\vec{v} = (2,4)$ et $2\vec{u} + \vec{v}$.
   e. $\vec{u} = (-1,3)$, $\vec{v} = (1,1)$ et $\vec{u} + \vec{v}$.

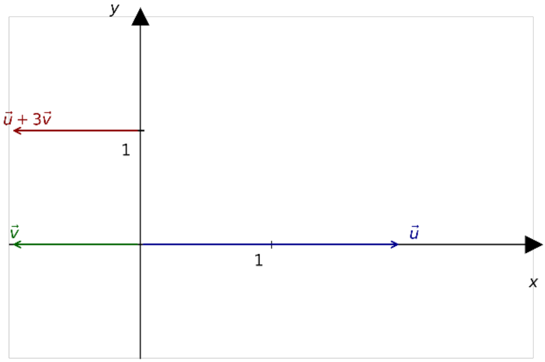
2) Démontrer les propositions suivantes :
   a. Les plans $(\mathcal{P})$ de vecteurs directeurs $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ et $(\mathcal{P}')$ de vecteurs directeurs $2\vec{\imath}$ et $-\vec{\jmath}$ sont parallèles.
   b. Les plans $(\mathcal{P})$ passant par les points $A(1,2,3), B(0,0,1)$ et $C(-1,0,1)$ et $(\mathcal{P}')$ passant par les points $D(1,1,1), E(1,0,0)$ et $F(-2,1,2)$ ne sont pas parallèles.
   c. Les droites $(\mathcal{D})$ de vecteur directeur $\vec{u} = (1,1,0)$ et $(\mathcal{D}')$ de vecteur directeur $\vec{v} = (-1,2,3)$ sont sécantes.
   d. Les droites $(\mathcal{D})$ passant par les points $A(1,1,1)$ et $B(-1,2,0)$ et $(\mathcal{D}')$ passant par les points $C(1,2,3)$ et $D(5,4,1)$ sont parallèles.
   e. Les vecteurs $\vec{x} = (1,0,0)$, $\vec{y} = (0,1,2)$ et $\vec{z} = (0,2,-1)$ forment une base de l'espace.
   f. Les points $A(2,-1,4)$, $B(1,0,1)$, $C(6,-7,0)$ et $D(13,-16,5)$ sont coplanaires.

Correction des exercices

1. Applications en géométrie vectorielle

1)

a. On a, $\vec{u} + 3\vec{v} = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2-3\\0+0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}$



b. On a, $2\vec{u} - \vec{v} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

c. On a, $\vec{u} - 3\vec{v} = \begin{pmatrix}-2\\-5\end{pmatrix}$

d. On a, $2\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$

e. On a, $\vec{u} + \vec{v} = \begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$

2)

a. Il est évident que $2\vec{\imath}$ est combinaison linéaire de $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Il en va de même pour $-\vec{\jmath}$ est colinéaire à $(\vec{\imath}, \vec{\jmath})$. Ainsi, les deux plans sont parallèles.

b. Déterminons les vecteurs directeurs non colinéaires de $(\mathcal{P})$, on a,
$\overrightarrow{AB} = (-1, -2, -2)$ et $\overrightarrow{AC} = (-2, -2, -2)$.
On simplifiera ces vecteurs par $\overrightarrow{u_1} = (1, 2, 2)$ et $\overrightarrow{v_1} = (1, 1, 1)$.
Déterminons les vecteurs directeurs non colinéaires de $(\mathcal{P})$, on a,
$\overrightarrow{DE} = (0, -1, -1)$ et $\overrightarrow{DF} = (-3, 0, 1)$.
On simplifiera ces vecteurs par $\overrightarrow{u_2} = (0, 1, 1)$ et $\overrightarrow{v_2} = (3, 0, -1)$.

Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\overrightarrow{v_2} = \lambda\overrightarrow{u_1} + \mu\overrightarrow{v_1} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 = \lambda + \mu \\ 0 = 2\lambda + \mu \\ -1 = 2\lambda + \mu \end{cases}$

Or, $2\lambda + \mu$ ne peut à la fois être égal à 0 et -1.

Comme $\overrightarrow{v_2}$ n'est pas combinaison linéaire, les plans ne sont pas parallèles.

c. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires. En effet, on a un rapport de -1 entre leurs coordonnées suivant $\vec{\imath}$ mais un rapport de 2 entre leurs coordonnées suivant $\vec{\jmath}$. Les droites sont par propriété sécantes.

d. La droite $(\mathcal{D})$ est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{AB} = (-2, 1, -1)$ tandis que la droite $(\mathcal{D}')$ est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{CD} = (4, 2, -2)$ qui n'est pas colinéaire à $\overrightarrow{AB}$. Les droites sont par propriété sécantes.

e. On a, $\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$, $\vec{x} \cdot \vec{z} = 0$ et $\vec{y} \cdot \vec{z} = 0$, comme l'ensemble $\{\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\}$ sont orthogonaux deux-à-deux, le triplet $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ forme une base de l'espace.

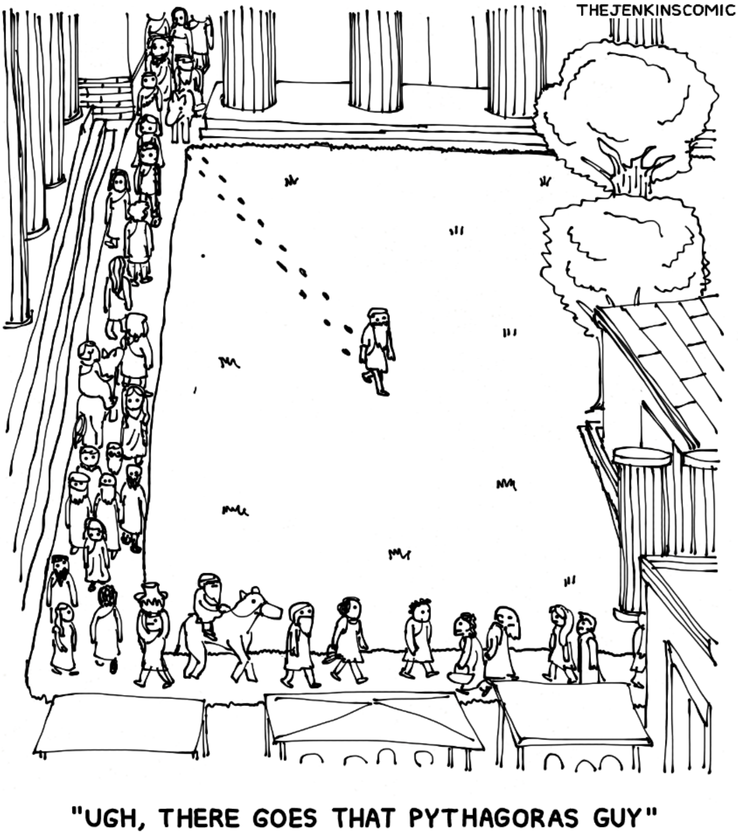
f. Supposons que les points sont coplanaires. Par définition, il existe un plan tel que tous les points y appartiennent. On peut chercher à déterminer l'équation cartésienne de ce plan à l'aide de deux vecteurs non colinéaires. Toutefois, on va montrer que $\overrightarrow{AD}$ est combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, ce qui revient à dire que D appartient au plan $\left(A\,; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ qui est naturellement un plan contenant les quatre points.

On a, $\overrightarrow{AB} = (-1, 1, -3)$, $\overrightarrow{AC} = (4, -6, -4)$ et $\overrightarrow{AD} = (11, -15, 1)$.

$$\text{Soit } \lambda, \mu \in \mathbb{R} \text{ tels que } \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow \begin{cases} -\lambda + 4\mu = 11 \\ \lambda - 6\mu = -15 \\ -3\lambda - 4\mu = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mu = 2 \\ \lambda = -3 \\ -3\lambda - 4\mu = 1 \end{cases}$$

Effectivement, $\overrightarrow{AD} = -3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$, les quatre points sont coplanaires.



« Educate the children and it won't be necessary to punish the men. »

Pythagoras

Nous approfondirons les notions de produit scalaire, d'orthogonalité et vecteur normal vus en année de première.

Sommaire

Cours

Exercices d'application

Exercices d'approfondissement

Correction des exercices

Cours

I. Produit scalaire dans l'espace

1. Définition

Définition (Produit scalaire)

Le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u}\cdot\vec{v}$, est défini par :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \begin{cases} \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\cos(\vec{u},\vec{v}) & \text{si } \vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ ne sont pas nuls} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

2. Propriétés

Soit $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ des vecteurs de l'espace.

Propriétés (Production scalaire)

On a, $\vec{u}\cdot\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$ ainsi que les propriétés suivantes :

- **Symétrie** : $\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$
- **Bilinéarité** : $\vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\cdot\vec{v}+\vec{u}\cdot\vec{w}$ et $\forall k \in \mathbb{R}, (k\vec{u})\cdot\vec{v} = k(\vec{u}\cdot\vec{v})$
- **Orthogonalité** : $\vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \iff \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

Propriétés (Identités remarquables)

On a,

$$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

$$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$$

Propriétés (Formules de polarisation)

On a,

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2)$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{4}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2)$$

Propriétés (Expression cartésienne)

Si $\vec{u} = (x, y, z)$ et $\vec{v} = (x', y', z')$ où x, x', y, y', z et z' sont des réels, on a :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

II. Orthogonalité dans l'espace

1. Orthogonalité de droites et plans

Définition (Orthogonalité de deux droites)

Deux droites sont orthogonales si et seulement si leurs parallèles passant par un même point sont perpendiculaires.

Propriété (Orthogonalité de deux droites)

Deux droites sont orthogonales si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont orthogonaux.

Définition (Orthogonalité d'une droite et d'un plan)

Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si cette droite est orthogonale à deux droites sécantes du plan.

Propriété (Orthogonalité d'une droite et d'un plan)

Si une droite est orthogonale à un plan, alors elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

Propriété (Orthogonalité d'une droite et d'un plan)

Une droite est orthogonale à un plan si et seulement si le vecteur directeur de cette droite est orthogonal à deux vecteurs directeurs non colinéaires du plan.

2. Vecteur normal et projection orthogonale

Définition (Vecteur normal)

Un **vecteur normal au plan** $(\mathcal{P})$ est un vecteur $\vec{n}$ non nul tel qu'il soit orthogonal à tout vecteur directeur de $(\mathcal{P})$.

Propriété (Construction d'un plan à partir d'un point et vecteur normal)

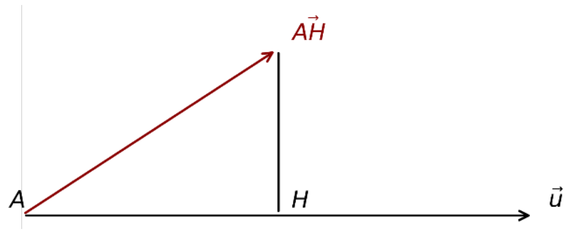
Le plan $(\mathcal{P})$ passant par un point A de l'espace de vecteur normal $\vec{n}$ est l'ensemble des points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux.

Propriété (Caractérisation d'un vecteur normal à un plan)

Un vecteur non nul $\vec{n}$ est normal à un plan $(\mathcal{P})$ si et seulement si $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de $\mathcal{P}$.

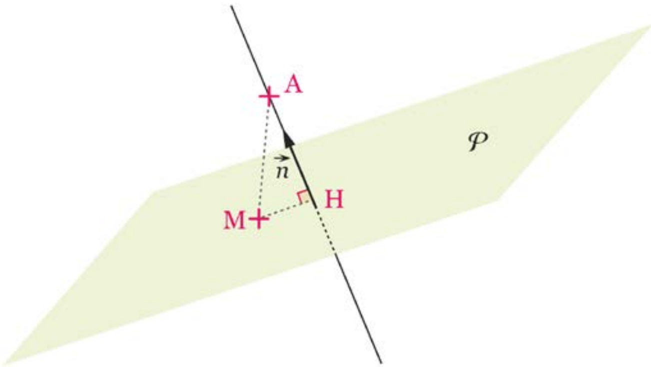
Définition (Projection orthogonale d'un point sur une droite)

La projection orthogonale d'un point A sur une droite $(\mathcal{D})$ est le point H appartenant à $(\mathcal{D})$ tel que $(AH) \perp (\mathcal{D})$



Définition (Projection orthogonale d'un point sur un plan)

La projection orthogonale d'un point A sur un plan $(\mathcal{P})$ est le point H appartenant à $(\mathcal{P})$ tel que $(AH) \perp (\mathcal{P})$



Propriété (Projeté orthogonal sur un plan)

Le projeté orthogonal d'un point A sur un plan $(\mathcal{P})$ est le point du plan le plus proche de A.

Démonstration (Projeté orthogonal sur un plan)

Soit H le projeté orthogonal du point A appartenant au plan $(\mathcal{P})$.

Supposons qu'il existe M appartenant au plan $(\mathcal{P})$ tel que $AM \leq AH$.

D'où, $AM^2 \leq AH^2$ (car les distances sont positives)

Or, (AH) est orthogonale à $(\mathcal{P})$, donc (AH) est orthogonale à toute droite de $(\mathcal{P})$, en particulier (AM).

Le triangle AHM est donc rectangle en H.

D'après le théorème de Pythagore, $AH^2 + MH^2 = AM^2$

D'après notre hypothèse, $AH^2 + MH^2 \leq AH^2 \Longrightarrow MH^2 \leq 0 \Longleftrightarrow MH^2 = 0$, ce qui revient à dire que M et H sont confondus. Il n'existe donc pas de point appartenant au plan $(\mathcal{P})$ plus proche de A que le point H.

III. Distances dans l'espace

1. Base et repère orthonormé

Soit $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ une base de l'espace et $\left(O\,; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ un repère de l'espace.

Définition (Base orthonormée)

La base $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ est **orthonormée** si les vecteurs $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ sont deux à deux orthogonaux et unitaires, c'est-à-dire $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = \left\|\vec{k}\right\| = 1$.

Définition (Repère orthonormée)

Le repère $\left(O\,; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ est orthonormé si sa base $\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ est orthonormée.

2. Distance de deux points de l'espace

Soit A, B deux points de coordonnées (x_A, y_A, z_A) et (x_B, y_B, z_B) dans le plan de repère $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

Théorème (Distance entre deux points de l'espace)

On a,

$$AB^2 = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2}$$

Exercices d'application

1. Applications en géométrie vectorielle

1) Calculer les produits scalaires $\vec{u} \cdot \vec{v}$ dans les cas suivants :
   a. $\vec{u} = (1, 0)$ et $\vec{v} = (0, 2)$
   b. $\vec{u} = (-1, 1)$ et $\vec{v} = (1, 1)$
   c. $\vec{u} = (3, 2)$ et $\vec{v} = (1, 0)$
   d. $\vec{u} = (0, -1)$ et $\vec{v} = \left(2, \frac{3}{2}\right)$
   e. $\vec{u} = (0, 0)$ et $\vec{v} = (1, 2020)$
   f. $\vec{u} = (1, 2, 3)$ et $\vec{v} = (-1, 1, 0)$
   g. $\vec{u} = (3, 4, 3)$ et $\vec{v} = \vec{u}$
   h. $\vec{u} = (1, 1, 0)$ et $\vec{v} = (0, 2, 3)$

2) Démontrer les propositions suivantes :
   a. Les droites $(\mathcal{D})$ de vecteur directeur $\vec{u} = (1, 0, 3)$ et $(\mathcal{D}')$ de vecteur directeur $\vec{v} = (-1, 0, 6)$ ne sont ni parallèles ni orthogonales.
   b. Les droites $(\mathcal{D})$ de vecteur directeur $\vec{u} = (1, 0, -3)$ et $(\mathcal{D}')$ de vecteur normal $\vec{n} = (-2, 0, 6)$ sont orthogonales.
   c. Les droites $(\mathcal{D})$ de vecteur directeur $\vec{u} = (1, 2, 3)$ et $(\mathcal{D}')$ de vecteur directeur $\vec{v} = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\right)$ sont parallèles.
   d. Les vecteurs $\vec{u} = (1, 2, 3)$ et $\vec{v} = \left(-1, 0, \frac{1}{3}\right)$ sont orthogonaux.
   e. La droite $(\mathcal{D})$ de vecteur directeur $\vec{u} = (1, 2)$ admet un vecteur normal $\vec{n} = (-10, 5)$.

3) Déterminer si les quadruplets de points suivants sont coplanaires :
   a. $A(1, 2, 2), B(-1, -2, -1), C(3, 4, 4)$ et $D(-2, 3, 1)$
   b. $A(0, 0, 0), B(1, 1, 1), C(2, 2, 2)$ et $D(-1, -1, -1)$

4) Déterminer la distance entre les points et plans suivants :
   a. $A(1, 0, 2)$ et $B(-10, -20, 30)$.
   b. $A(1, 1, 1)$ et $(\mathcal{P})$ d'équation $x + y + z = 3$, et si $(\mathcal{P}) : x + y + z = 6$?
   c. $(\mathcal{P}_1)$ passant par $A(1, 0, 3)$ et $(\mathcal{P}_2)$ d'équation $x - 2y + 3z - 4 = 0$

2. Produit vectoriel

Le **produit vectoriel** entre le vecteur $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$, est défini par :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_y v_z - u_z v_y \\ u_z v_x - u_x v_z \\ u_x v_y - u_y v_x \end{pmatrix}$$

1) Étudions les propriétés de l'opérateur :
   a. $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3, \vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$
   b. $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3, \vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}$
   c. $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3, \vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{u}$ et $\vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{v}$
   d. $\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^3, \vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$

2) On considère les points $A(1,1,0)$, $B(2,0,0)$, $C(4,2,0)$ et $D(3,3,0)$.
   a. Déterminer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.
   b. Déterminez la norme du vecteur calculé à la question 2) a. et comparez-la à l'aire du parallélogramme $ABCD$, que remarquez-vous ?

3) Soit $\vec{a}, \vec{b}$ deux vecteurs non nuls de l'espace. On souhaite résoudre l'équation vectorielle $\vec{a} \wedge \vec{x} = \vec{b}$. On utilisera les propriétés établies de la question 1) Montrer que $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \wedge \vec{b})$ forme une base de l'espace.

Exercices d'approfondissement

3. A straight hyperbola

We wish to draw a somewhat hyperbolic curve. For that, let $n \in \mathbb{N}^*$ such that n is even and draw for every $i \in \{1, \dots, n\}$ straight lines $(n-i, 0)$ and $(0, i)$.

a. Construct the figure for $n = 5$.

b. Construct the figure for $n = 10$ as well as the three symmetries of every line according to the x axis, y axis and origin.

Correction des exercices

1. Applications en géométrie vectorielle

1)

a. On a, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times 0 + 0 \times 2 = 0 + 0 = 0$

b. On a, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

c. On a, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 3$

d. On a, $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\frac{3}{2}$

e. On a, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

f. On a, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times (-1) + 2 \times 1 + 3 \times 0 = -1 + 2 + 0 = 1$

g. On a, $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\|^2 = 3^2 + 4^2 + 3^2 = 34$

h. On a, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2$

2)

a. Il n'existe pas de réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont donc pas colinéaires. De plus, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times (-1) + 0 \times 0 + 3 \times 6 = 17 \neq 0$, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont donc pas orthogonaux.
Par propriété, les droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ ne sont ni parallèles ni orthogonales.

b. On remarque que $\vec{u} = -\frac{1}{2}\vec{n}$, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont donc colinéaires. Or, par définition, $\vec{n}$ est orthogonal à tout vecteur directeur de $(\mathcal{D})$, par transitivité de l'orthogonalité, ou de manière équivalente à comment opère deux droites parallèles dont on sait qu'une troisième droite est perpendiculaire à l'une des deux, et par transitivité perpendiculaire aux deux, $\vec{u}$ est orthogonal à tout vecteur directeur $\vec{v}$ de la droite $(\mathcal{D}')$. Par propriété, les droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont orthogonales.

c. On remarque que $\vec{u} = 3\vec{v}$, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont donc colinéaires. Par propriété, les droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ sont parallèles.

d. On a, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \times (-1) + 2 \times 0 + 3 \times \frac{1}{3} = -1 + 1 = 0$

Par définition, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

e. On a, $\vec{u} \cdot \vec{n} = 1 \times (-10) + 2 \times 5 = -10 + 10 = 0$, les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux, par définition, $\vec{n}$ est un vecteur normal à $(\mathcal{D})$.

3) On peut établir la coplanarité de différentes manières, nous en verrons différents exemples dans le chapitre de géométrie suivant.

a. Déterminons la paire de vecteurs non colinéaires du plan (ABC). On a, $\overrightarrow{AB} = (-2, -4, -3)$ et $\overrightarrow{AC} = (2, 2, 2)$.

Déterminons si le point D appartient au plan (ABC), ce qui équivaut à dire que $\overrightarrow{AD} = (-3, 1, -1)$ est combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Soit $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\overrightarrow{AD} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 = -2\lambda + 2\mu \\ 1 = -4\lambda + 2\mu \\ -3 = -3\lambda + 2\mu \end{cases}$

$$\Leftrightarrow_{L_1 = L_1 - L_2} \begin{cases} -4 = 2\lambda \\ 1 = -4\lambda + 2\mu \\ -3 = -3\lambda + 2\mu \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow_{L_1 = \frac{1}{2}L_1} \begin{cases} \lambda = -2 \\ 1 = -4\lambda + 2\mu \\ -3 = -3\lambda + 2\mu \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -2 \\ \mu = -7/2 \end{cases}$$

Comme le vecteur $\overrightarrow{AD}$ se décompose dans le repère $\left(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$, le point D appartient au plan (ABC). Ainsi, les quatre points sont coplanaires.

b. On remarque que les vecteurs $\overrightarrow{AB} = (1, 1, 1)$, $\overrightarrow{AC} = (2, 2, 2)$ et $\overrightarrow{AD} = (-1, -1, -1)$ sont colinéaires et admettent pour point d'application commun le point A. Ainsi, les points A, B, C et D sont alignés et forment une droite. On en déduit que les points sont coplanaires dans tous les plans contenant la droite (AB).

4)

a. On a, $AB = \sqrt{\left(1-(-10)\right)^2 + \left(0-(-20)\right)^2 + (2-30)^2}$
$= \sqrt{121+400+784} = \sqrt{1305}$

b. On déduit un évident vecteur normal de $(\mathcal{P})$: $\vec{n} = (1,1,1)$.
Soit H le projeté orthogonal de A sur $(\mathcal{P})$.
Par définition, $\overrightarrow{AH} = k\vec{n}$ avec k la distance orthogonale de A à $(\mathcal{P})$.
Ainsi, $\overrightarrow{AH} = k\vec{n} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1+k \\ y = 1+k \\ z = 1+k \end{cases}$
De plus, H appartient au plan $(\mathcal{P}) \Leftrightarrow x+y+z = 3$
$\Leftrightarrow (1+k)+(1+k)+(1+k) = 3$
$\Leftrightarrow k = 0.$
En réalité, A est déjà sur le plan ! On aurait dû le vérifier avant…
Dans l'autre cas, on retrouve une distance $k = 1$.

c. Soit H le projeté orthogonal de A sur $(\mathcal{P}_2)$.
Par définition, $\overrightarrow{AH} = k\vec{n}$ avec k la distance orthogonale de A à $(\mathcal{P}_2)$ et $\vec{n}$ un vecteur normal de $(\mathcal{P}_2)$, on prendra $\vec{n} = (1,-2,3)$.
Ainsi, $\overrightarrow{AH} = k\vec{n} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1+k \\ y = -2k \\ z = 3+3k \end{cases}$
De plus, H appartient au plan $(\mathcal{P}_2) \Leftrightarrow x-2y+3z = 4$
$\Leftrightarrow 1+k+4k+9+9k = 4$
$\Leftrightarrow 10+15k = 4$
$\Leftrightarrow k = -6/15$
Dans ce contexte, la distance est positive, on retrouve donc une distance de $6/15$. En effet, si on avait défini $n = (-1,2,-3)$ qui reste un vecteur normal de $(\mathcal{P}_2)$ on retrouverait le résultat positif susmentionné.

2. Produit vectoriel

1)

a. On a, $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3, \vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_x + w_x \\ v_y + w_y \\ v_z + w_z \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} u_y(v_z + w_z) - u_z(v_y + w_y) \\ u_z(v_x + w_x) - u_x(v_z + w_z) \\ u_x(v_y + w_y) - u_y(v_x + w_x) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} u_y v_z - u_z v_y \\ u_z v_x - u_x v_z \\ u_x v_y - u_y v_x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_y w_z - u_z w_y \\ u_z w_x - u_x w_z \\ u_x w_y - u_y w_x \end{pmatrix}$$

$$= \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$$

b. On a, $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3, \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} u_y v_z - u_z v_y \\ u_z v_x - u_x v_z \\ u_x v_y - u_y v_x \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} u_z v_y - u_y v_z \\ u_x v_z - u_z v_x \\ u_y v_x - u_x v_y \end{pmatrix}$

$$= -\begin{pmatrix} v_y u_z - v_z u_y \\ v_z u_x - v_x u_z \\ v_x u_y - v_y u_x \end{pmatrix}$$

$$= -\vec{v} \wedge \vec{u}$$

c. On a, $\forall \vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3, (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{u} = \begin{pmatrix} u_y v_z - u_z v_y \\ u_z v_x - u_x v_z \\ u_x v_y - u_y v_x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix}$

$$= u_x(u_y v_z - u_z v_y) + u_y(u_z v_x - u_x v_z)$$
$$+ u_z(u_x v_y - u_y v_x)$$
$$= u_x u_y v_z - u_y u_x v_z$$
$$+ u_z u_v v_y - u_x u_z v_y$$
$$+ u_y u_z v_x - u_z u_y v_x = 0$$

D'après la question 1) b., $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{v} = -(\vec{v} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{v}$

Par antisymétrie, $-(\vec{v} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{v} = 0$.

d. On a, $\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^3, \vec{u} \wedge \vec{u} = \begin{pmatrix} u_y u_z - u_z u_y \\ u_z u_x - u_x u_z \\ u_x u_y - u_y u_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2)

a. On a, $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 0-1 \\ 0-0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 4-1 \\ 2-1 \\ 0-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

b. On a, $\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 4^2} = 4$

De plus, $\mathcal{A}_{ABCD} = \text{base} \times \text{hauteur}$

Déterminons les coordonnées du projeté orthogonal H du point A sur la droite (BC), on a, $\overrightarrow{AH} = k\vec{n}$ où $\vec{n}$ est un vecteur normal à la droite (BC), on prendra par exemple $\vec{n} = (-1, 1, 0)$.

On a, $\overrightarrow{AH} = k\vec{n} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = -k \\ y - 1 = k \\ z - 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - k \\ y = 1 + k \\ z = 0 \end{cases}$

Or, H appartient à la droite (BC), cette droite est plane (car même coordonnées en z), on peut facilement déterminer son équation de droite $y = mx + p$ où $m = \frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} = 1$ et $p = -2$.

Donc, $y_H = x_H - 2 \Leftrightarrow (1 + k) = (1 - k) - 2 \Leftrightarrow k = -1$

La hauteur est donc $AH = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

La base $BC = \sqrt{2^2 + 2^2 + 0^2} = 2\sqrt{2}$

Finalement, $\mathcal{A} = 4$.

On peut conjecturer que la norme du vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$ correspond à l'aire du parallélogramme formé par cette paire de vecteur.

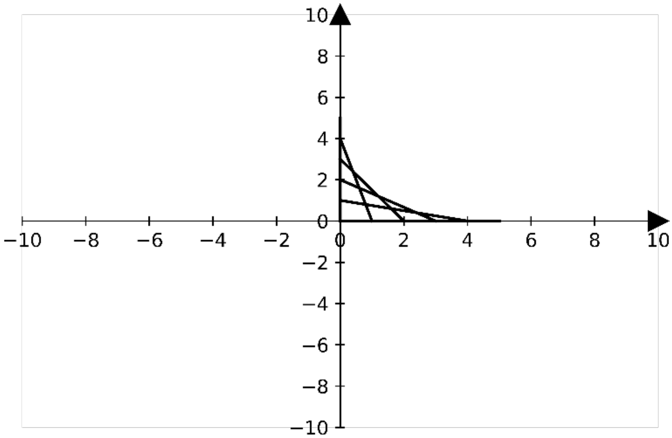
3) On a, d'après la question 1) c., $\vec{b} = \vec{a} \wedge \vec{x} \perp \vec{a}$, ainsi les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$ sont orthogonaux. De plus, $\vec{a} \wedge \vec{b} \perp \vec{b}$ et $\vec{a} \wedge \vec{b} \perp \vec{a}$. Par définition, $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{a} \wedge \vec{b}\right)$ forme une base de l'espace.

Remarque (Produit vectoriel)

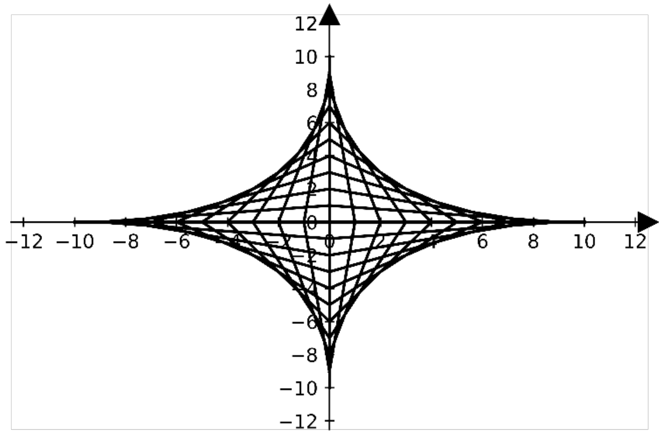
Le **produit vectoriel** se révèle être un opérateur majeur en sciences industrielles et physiques. L'opérateur permet en effet de construire un vecteur normal aux deux vecteurs d'entrées, formant ainsi une base, qui plus est orthonormée si les deux vecteurs d'entrées sont orthonormés. Le produit vectoriel prend aussi place centrale dans l'expression de forces et particulièrement la notion de **moment**, défini comme l'équivalent rotationnel d'une force.

3. A straight hyperbola

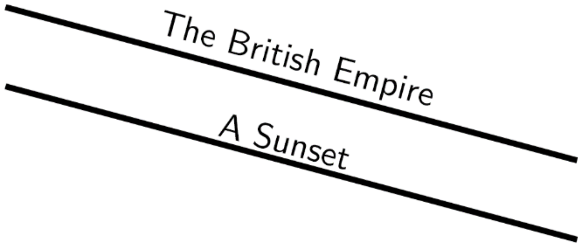
a. We have,



b.



Parallel lines are two lines which never meet.
For example :



« All models divide naturally into two a priori parts: one is kinematics, whose aim is to parameterize the forms of the states of the process under consideration, and the other is dynamics, describing the evolution in time of these forms. »

Rene Thom

Nous étudierons deux façons de modéliser des droites et plans de l'espace.

Sommaire

Cours

Exercices d'application

Exercices d'approfondissement

Correction des exercices

Cours

I. Équation cartésienne d'un plan

On considère le plan $(\mathcal{P})$ muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ de vecteur normal non nul $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$.

Théorème (Équation cartésienne d'un plan)

Le plan $(\mathcal{P})$ admet une équation cartésienne de la forme $ax + by + cz + d = 0$ avec $d \in \mathbb{R}$.

Corollaire (Construction d'une équation cartésienne d'un plan)

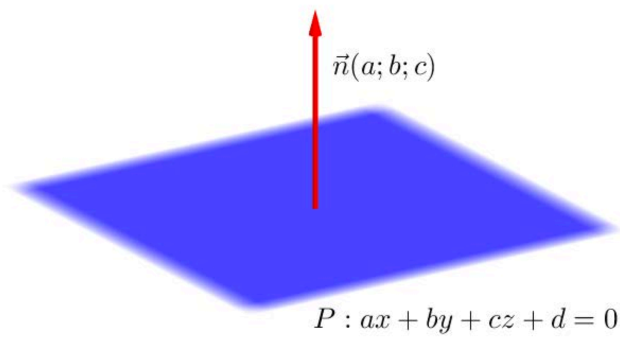
L'ensemble des points M de coordonnées (x, y, z) tels que $ax + by + cz + d = 0$ où $a, b, c \in \mathbb{R}^*$ et $d \in \mathbb{R}$ forme un plan.

Démonstration (Équation cartésienne d'un plan)

Soit A un point d'un plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ où $a, b, c \in \mathbb{R}$ de coordonnées (x_A, y_A, z_A).

On a, pour tout point M de coordonnées (x, y, z),

$$\begin{aligned} M \in (\mathcal{P}) &\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \\ &\Leftrightarrow a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0 \\ &\Leftrightarrow ax + by + cz + (-ax_A - by_A - cz_A) = 0 \end{aligned}$$



II. Représentation paramétrique d'une droite

On considère la droite $(\mathcal{D})$ dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ de vecteur directeur $\vec{u}=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ où $a,b,c\in\mathbb{R}$ passant par le point A de coordonnées (x_A,y_A,z_A).

Théorème (Représentation paramétrique d'une droite)

Soit M le point de coordonnées (x,y,z), on a,

$$M\in(\mathcal{D})\Leftrightarrow\exists t\in\mathbb{R},\begin{cases}x=x_A+at\\y=y_A+bt\\z=z_A+ct\end{cases}$$

Remarque

On remarque que, construire la droite $(\mathcal{D})$ revient à tracer tous les points de coordonnées (x_A+at,y_A+bt,z_A+ct) où $t\in\mathbb{R}$.

Exercices d'application

1. Équations cartésiennes et paramétriques

1) Déterminer un, ou deux pour les plans, vecteur(s) directeur(s) et un vecteur normal des droites, ou plans, suivant(e)s :

   a. $(\mathcal{P}) : x+y+z=0$

   b. $(\mathcal{P}) : x-2y+3z=1$

   c. $(\mathcal{P}) : 2x+z=-2$

   d. $(\mathcal{D}) : \begin{cases} x = 3t \\ y = 1+2t, t \in \mathbb{R} \\ z = 5-2t \end{cases}$

   e. $(\mathcal{D}) : \begin{cases} x = 2-t \\ y = 3+t, t \in \mathbb{R} \\ z = 5 \end{cases}$

   f. $(\mathcal{D}) : \begin{cases} x = 2-16t \\ y = 3t \qquad , t \in \mathbb{R} \\ z = 4 \end{cases}$

   g. $(\mathcal{D}) : \begin{cases} x = 1-\frac{2t}{100} \\ y = 5+\frac{3t}{100} \; , t \in \mathbb{R} \\ z = 19+\frac{4t}{100} \end{cases}$

2) Déterminer une équation cartésienne du plan passant par le point A et de vecteur normal $\vec{n}$ suivant :

   a. $A(1,2,3)$ et $\vec{n}=(1,0,1)$

   b. $A(1,0,1)$ et $\vec{n}=(1,-1,0)$

   c. $A(0,0,0)$ et $\vec{n}=(2,2,3)$

   d. $A(5,2,-1)$ et $\vec{n}=(-1,1,-2)$

3) Déterminer une équation cartésienne d'un plan passant par le point de votre choix et parallèle aux plans suivants :

   a. $(\mathcal{P})$ passant par $A(1,2,3)$ de vecteur normal $\vec{n}=(1,0,1)$

   b. $(\mathcal{P})$ passant par $A(1,0,-1)$ de vecteur normal $\vec{n}=(2,1,3)$

   c. $(\mathcal{P})$ passant par $A(0,-1,4)$ de vecteur normal $\vec{n}=(2,2,3)$

4) Déterminer la position relative du plan $(\mathcal{P})$ d'équation $x+y+z=0$ avec les plans d'équations cartésiennes suivantes :
   a. $(\mathcal{P}')$: $x-y+z=0$
   b. $(\mathcal{P}')$: $2x-3y+z=-3$
   c. $(\mathcal{P}')$: $2x+2y+2z=0$

5) Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal du point A sur les droites et plans suivants :
   a. $A(1,2,3)$ et $(\mathcal{D})$: $\begin{cases} x=1+2t \\ y=2-2t \\ z=2+2t \end{cases} ,t\in\mathbb{R}$
   b. $A(1,2,3)$ et $(\mathcal{D})$: $\begin{cases} x=2-t \\ y=1+3t \\ z=-t \end{cases} ,t\in\mathbb{R}$
   c. $A(1,0,-2)$ et $(\mathcal{P})$: $x+y+z=1$

6) Déterminer une représentation paramétrique des droites suivantes :
   a. $A(1,-1,10)$ et $B(0,0,4)$
   b. $A(1,0,2)$ et $B(1,-1,3)$
   c. $A(-2,1,2)$ et $B(1,0,2)$

2. Équation de sphère

Soit $\left(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k}\right)$ un repère orthonormé. Soit $(\mathcal{D})$ une droite et $(\mathcal{S})$ une sphère de centre $\Omega(a,b,c)$ et de rayon r. On appelle **équation cartésienne** de la sphère $\mathcal{S}$ l'équation suivante :

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

On suppose que la distance $d(\mathcal{S},\mathcal{D})$ entre une droite $(\mathcal{D})$ et une sphère $(\mathcal{S})$ est la distance entre le centre du cercle Ω et son projeté orthogonal sur $(\mathcal{D})$.

a. En comparant la distance $d(\mathcal{S},\mathcal{D})$ au rayon r, concluez quant au nombre d'intersections entre la droite $\mathcal{D}$ et $\mathcal{S}$.
b. Déterminer le centre et rayon de la sphère $(\mathcal{S})$ d'équation $x^2+y^2+z^2-4x-2y+1=0$

Exercices d'approfondissement

3. Représentation paramétrique de plan

On souhaite dans cet exercice explorer la notion de **représentation paramétrique** d'un plan.

1) Soit les ensembles de points $(\mathcal{E}_1) : \begin{cases} x = 2 + s + 2t \\ y = 2 + 2s + t, (s, t) \in \mathbb{R}^2 \\ z = 1 - s - t \end{cases}$ ainsi que $(\mathcal{E}_2) : \begin{cases} x = 1 + 3s' - t' \\ y = 3 + 3s' + t', (s', t') \in \mathbb{R}^2 \\ z = 1 - 2s' \end{cases}$
   a. Montrer que $(\mathcal{E}_1)$ et $(\mathcal{E}_2)$ décrivent le même ensemble de points.
   b. Supposons que ces ensembles représentent un plan, par quelle paire de vecteurs non colinéaires serait-il dirigé ?

2) Soit $(\mathcal{P}) : x + y + z = 1$.
   a. Déterminer une paire de vecteurs directeurs non colinéaires.
   b. Déduire une représentation paramétrique de $(\mathcal{P})$.

4. Parametrical equation of a curve

Let x, y be two strictly positive real numbers such that $x^x = y^y$.

We shall remind that all real numbers are found on the real numbers line, i.e. x and y are colinear and thus there exists $t \in \mathbb{R}$ such that $y = tx$. Determine the coordinates of the curve satisfying the equation $x^x = y^y$ only using t.

Correction des exercices

1. Équations cartésiennes et paramétriques

1)

a. L'équation cartésienne du plan nous est fournie, on commence donc par en déduire simplement un vecteur normal $\vec{n} = (1, 1, 1)$. On sait que tout vecteur directeur du plan est orthogonal à $\vec{n}$. Ainsi on prend pour premier vecteur directeur $\overrightarrow{u_1} = (-1, 1, 0)$. On sait que le second vecteur directeur doit être non colinéaire au premier, par exemple $\overrightarrow{u_2} = (0, 1, -1)$.

b. On a, $\vec{n} = (1, -2, 3)$, $\overrightarrow{u_1} = (2, 1, 0)$ et $\overrightarrow{u_2} = (-3, 0, 1)$.

c. On a, $\vec{n} = (2, 0, 1)$, $\overrightarrow{u_1} = (-1, 0, 2)$ et $\overrightarrow{u_2} = (0, 1, 0)$.

d. La représentation paramétrique de la droite nous est fournie, on commence donc par en déduire simplement un vecteur directeur $\vec{u} = (3, 2, -2)$. On en déduit un vecteur normal $\vec{n} = (-2, 3, 0)$.

e. On a, $\vec{u} = (-1, 1, 0)$ et $\vec{n} = (0, 0, 1)$.

f. On a, $\vec{u} = (-16, 3, 0)$ et $\vec{n} = (0, 0, 1)$.

g. On a, $\vec{u} = (-2, 3, 4)$ et $\vec{n} = (2, 0, 1)$.

2)

a. Soit $M \in (\mathcal{P}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

$$\Leftrightarrow x - 1 + z - 3 = 0$$
$$\Leftrightarrow x + z = 4$$

b. Soit $M \in (\mathcal{P}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

$$\Leftrightarrow x - 1 - y = 0$$
$$\Leftrightarrow x - y = 1$$

c. Soit $M \in (\mathcal{P}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow 2x + 2y + 3z = 0$

d. Soit $M \in (\mathcal{P}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-5 \\ y-2 \\ z+1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow -(x-5) + (y-2) - 2(z+1) = 0$

$\Leftrightarrow -x + y - 2z = -1$

3)

a. Soit $M \in (\mathcal{P}) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow x - 1 + z - 3 = 0$

$\Leftrightarrow x + z = 4$

Un plan parallèle au plan $(\mathcal{P})$ possède naturellement le même vecteur normal. On peut supposer par exemple que ce plan passe par $B(1,2,4)$.

On retrouve $M \in (\mathcal{P}') \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \cdot \vec{n} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow x + z = 5$

b. De manière similaire à la question 3) a., le plan d'équation cartésienne $2x + y + 3z = 0$ est parallèle au plan $(\mathcal{P}) : 2x + y + 3z = -1$ passant par $B\left(-\frac{1}{2}, 0, 0\right)$.

c. De manière similaire à la question 3) a., le plan d'équation cartésienne $2x + 2y + 3z = 0$ est parallèle au plan $(\mathcal{P}) : 2x + 2y + 3z = 10$ passant par $B(1,1,2)$.

4)

a. Les deux plans ont des vecteurs normaux non colinéaires, ils sont sécants.

On a, $M \in (\mathcal{P}) \cap (\mathcal{P}') \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x - y + z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow_{L_1 = L_1 - L_2} \begin{cases} y = 0 \\ x + z = 0 \end{cases}$

L'ensemble de solutions est l'intersection entre la droite $x + z = 0$ et le plan $y = 0$.

b. Les deux plans ont des vecteurs normaux non colinéaires, ils sont sécants.

On a, $M \in (\mathcal{P}) \cap (\mathcal{P}') \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=0 \\ 2x-3y+z=-3 \end{cases} \Leftrightarrow_{L_2=L_2-L_1} \begin{cases} x+y+z=0 \\ x-4y=-3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow_{L_1=L_1-L_2} \begin{cases} 5y+z=3 \\ x-4y=-3 \end{cases}$

L'ensemble de solutions est l'intersection du plan $5y+z=3$ et du plan $x-4y=-3$.

c. Les deux plans ont des vecteurs normaux colinéaires, ils sont parallèles.

5)

a. Soit H le projeté orthogonal de A sur $(\mathcal{D})$.

On trouve un vecteur normal évident de $(\mathcal{D})$, par exemple $\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Par définition, $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow x-1-y+2+z-3=0$

Or, par définition, $H \in (\mathcal{D}) \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x=1+2t \\ y=2-2t \\ z=2+2t \end{cases}$

Donc, $1+2t-1-2+2t+2+2+2t-3=0 \Leftrightarrow t=1/6$

Finalement, $H \begin{pmatrix} 4/3 \\ 5/3 \\ 7/3 \end{pmatrix}$

b. Soit H le projeté orthogonal de A sur $(\mathcal{D})$.

On trouve un vecteur normal évident de $(\mathcal{D})$, par exemple $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

Par définition, $\overrightarrow{AH} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \\ z-3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow -x+1+3y-6-z+3=0$

Or, par définition, $H \in (\mathcal{D}) \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x=2-t \\ y=1+3t \\ z=-t \end{cases}$

Donc, $-2+t+1+3+9t-6+t+3=0 \Leftrightarrow t=1/11$

Finalement, $H\begin{pmatrix}21/11\\14/11\\-1/11\end{pmatrix}$

c. Soit H le projeté orthogonal de A sur $(\mathcal{P})$.

On trouve un vecteur normal évident de $(\mathcal{D})$, par exemple $\vec{n}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

Par définition, $\exists k\in\mathbb{R}, \overrightarrow{AH}=k\vec{n} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1+k\\y=k\\z=-2+k\end{cases}$

Or, par définition, $H\in(\mathcal{P}) \Leftrightarrow (1+k)+k+(-2+k)=1$

$$\Leftrightarrow k=2/3$$

Finalement, $H\begin{pmatrix}5/3\\2/3\\-4/3\end{pmatrix}$

6)

a. Déterminons un vecteur directeur de (AB), par exemple $\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\-1\\6\end{pmatrix}$

Ainsi, $M\in(\mathcal{D}) \Leftrightarrow \exists t\in\mathbb{R}, \overrightarrow{AM}=t\vec{u}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=1+t\\y=-1-t\\z=10+6t\end{cases}$$

Si l'on souhaite vraiment avoir la forme canonique d'une représentation paramétrique, alors $(\mathcal{D}) : \begin{cases}x=1+t\\y=-1-t\\z=10+6t\end{cases}, t\in\mathbb{R}$

b. De manière similaire à la question 6) a., $(\mathcal{D}) : \begin{cases}x=1\\y=t\\z=2-t\end{cases}, t\in\mathbb{R}$

c. De manière similaire à la question 6) a., $(\mathcal{D}) : \begin{cases}x=-2-3t\\y=1-t\\z=2\end{cases}, t\in\mathbb{R}$

2. Équation de sphère

1)

a. Si $d(\mathcal{S},\mathcal{D}) > r$, alors il n'y a pas d'intersection. En effet, le projeté orthogonal de Ω sur $(\mathcal{D})$ est le point le plus proche entre les deux objets, ainsi si cette distance dépasse le rayon de la sphère, c'est le cas de tous les autres points. Or, une sphère est bien évidemment définie comme l'ensemble de points équidistants de Ω à une distance r.

Si $d(\mathcal{S},\mathcal{D}) = r$, alors il existe une unique intersection qui est le projeté orthogonal.

Si $d(\mathcal{S},\mathcal{D}) < r$, alors il existe deux intersections. En effet, si l'on pose la représentation paramétrique $(\mathcal{D}) : \begin{cases} x = x_A + x_u k \\ y = y_A + y_u k \\ z = z_A + z_u k \end{cases}$ où (x_A, y_A, z_A) est un point de la droite et (x_u, y_u, z_u) un vecteur directeur de la droite.

On a, $d(\mathcal{S},\mathcal{D}) = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$

$= \sqrt{(x_A + x_u k - a)^2 + (y_A + y_u k - b)^2 + (z_A + z_u k - c)^2}$

On remarque bien le polynôme de degré 2 en k dont le discriminant nous amène à la conjecture énoncée.

b. On a, $x^2 - 4x = x^2 + 2(-2)x + (-2)^2 - (-2)^2 = (x-2)^2 - (-2)^2$

$y^2 - 2y = y^2 + 2\left(-\frac{1}{2}\right)y + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2$

Donc, $(\mathcal{S}) : (x-2)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 + (z-0)^2 + 1 - (-2)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 0$

D'où, $\Omega = \left(2, -\frac{1}{2}, 0\right)$ et $r = \sqrt{-\left(1 - (-2)^2 - \left(-\frac{1}{2}\right)^2\right)} = \sqrt{\frac{13}{4}}$

3. Représentation paramétrique de plan

1)

a. On a, $M \in (\mathcal{E}_1) \cap (\mathcal{E}_2) \Leftrightarrow \exists (s, s', t, t') \in \mathbb{R}^4 \begin{cases} 2 + s + 2t = 1 + 3s' - t' \\ 2 + 2s + t = 3 + 3s' + t' \\ 1 - s - t = 1 - 2s' \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 + t = 2 + s' - t' \\ 2 + 2s + t = 3 + 3s' + t' \\ 1 - s - t = 1 - 2s' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 + s' - t' \\ s = 1 + s' + t' \\ 1 - s - t = 1 - 2s' \end{cases}$$

On remarque que t et s sont combinaisons linéaires de s' et t'. Un point de l'ensemble $(\mathcal{E}_1)$ peut s'exprimer sous la forme d'un point de $(\mathcal{E}_2)$.

b. On remarque que s et t font déplacer le point sur l'espace $(\mathcal{E}_1)$ de manière indépendante, chacun forme alors un axe ou vecteur directeur de $(\mathcal{E}_1)$. On en déduit $\overrightarrow{u_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

2)

a. Le plan $(\mathcal{P})$ admet pour vecteur normal $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

On a les vecteurs non colinéaires et orthogonaux à $\vec{n}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

b. Déterminons un point appartenant au plan $(\mathcal{P})$, par exemple $A(0,0,1)$.

On a, $(\mathcal{P}) : \begin{cases} x = s \\ y = -s + t, (s,t) \in \mathbb{R}^2 \\ z = 1 + t \end{cases}$

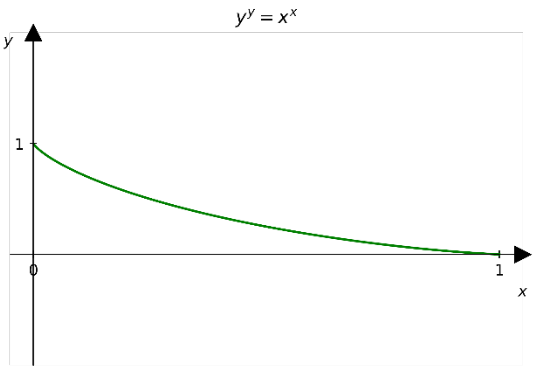
4. Parametrical equation of a curve

Let $x, y \in \mathbb{R}_+^*, \exists t \in \mathbb{R}_+^*, y = tx$, we have,

$x^x = y^y \Leftrightarrow x^x = (tx)^{tx} \Leftrightarrow x^x \times x^{-tx} = t^{tx} \Leftrightarrow x^{x(1-t)} = t^{tx} \Leftrightarrow x = t^{\frac{t}{1-t}}$

Moreover, $y = tx = tt^{\frac{t}{1-t}} = t^{\frac{1-t+t}{1-t}} = t^{\frac{1}{1-t}}$

Thus $(x,y) \in {\mathbb{R}_+^*}^2, x^x = y^y \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}_+^*, (x,y) = \left(t^{\frac{t}{1-t}}, t^{\frac{1}{1-t}}\right)$



Probabilités et Statistiques

« Quels que soient les progrès des connaissances humaines, il y aura toujours place pour l'ignorance et par suite pour le hasard et la probabilité. »

Émile Borel, *Le Hasard* (1914)

Le hasard, de l'arabe andalou *az-zahr* (الزّهر) « dé, fleur », est la notion fondatrice des probabilités, qu'on souhaite le plus possible démystifier et prédire.

Alors que les statistiques se contentaient d'établir des rapports et analyses sur des données du passé, l'apparition des probabilités et de l'inférence statistique ont donné naissance à la prédiction du futur, originellement la rentabilité de jeux de hasard et d'assurance. On doit majoritairement la théorie des probabilités au mathématicien français Émile Borel.

Dans cette partie, nous approfondirons les notions de probabilités de première ainsi qu'introduirons différentes lois de probabilités usuelles.

Succession d'épreuves indépendantes

« In this world, is the destiny of mankind controlled by some transcendental entity or law? Is it like the hand of God hovering above? At least it is true that man has no control, even over his own will. »

Kentaro Miura, *Berserk, Vol. 1* (1990)

L'anticipation des comportements humains est un enjeu conséquent qui permet aux entreprises d'optimiser leurs stratégies de ventes. Cependant, dans une société qui ne cesse d'être interconnectée, il est difficile de différencier la cause de la conséquence ou même de prédire adéquatement ces comportements mentionnés. La notion d'indépendance entre événements permet d'en simplifier la plus laborieuse contrainte du lien entre les actions d'un individu 1 et d'un individu 2. Les définitions et outils abordés dans ce chapitre permettent la modélisation problèmes relevant de l'aléatoire et comment quantifier la fréquence d'apparition d'un événement par rapport à un autre.

Sommaire

Cours

Exercices d'application

Exercices d'approfondissement

Correction des exercices

COURS

I. Répétition d'épreuves indépendantes

1. Généralités

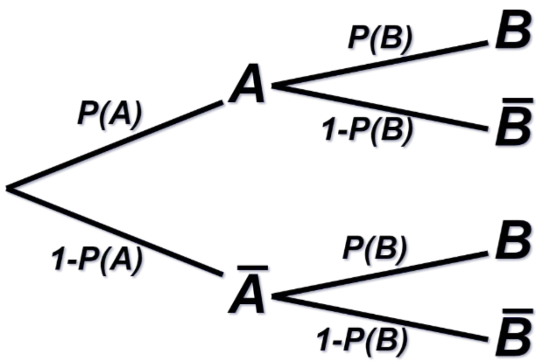
Définitions (Épreuves identiques et indépendantes)

On appelle **série d'épreuves identiques et indépendantes** plusieurs épreuves, ou expériences aléatoires, si elles possèdent toutes les mêmes issues ainsi que chaque issue possède la même probabilité.

Propriété (Probabilités d'expérience aléatoire à deux issues)

Si l'on considère l'expérience aléatoire à deux issues A et B de probabilités respectives $P(A)$ et $P(B)$ et qu'on répète deux fois l'expérience de manière identique et indépendante, alors on a les probabilités suivantes :

$P(\text{"}A \text{ puis } A\text{"}) = P(A)P(A) = P(A)^2$
$P(\text{"}A \text{ puis } B\text{"}) = P(A)P(B)$
$P(\text{"}B \text{ puis } A\text{"}) = P(B)P(A) = P(A)P(B)$
$P(\text{"}B \text{ puis } B\text{"}) = P(B)P(B) = P(A)^2$



2. Extension à n épreuves

Propriétés (Relations fonctionnelles)

Si l'on considère la série d'épreuves identiques et indépendantes à $n \in \mathbb{N}^*$ issues $A_1, A_2, \dots, A_n$, alors la probabilité d'obtenir la suite d'issues "A_1 puis A_2 puis … A_n" est :

$$P(A_1) \times P(A_2) \times \dots \times P(A_n)$$

II. Épreuve et Schéma de Bernoulli

1. Épreuve et Schéma de Bernoulli

Définition (Épreuve de Bernoulli)

Une **épreuve de Bernoulli** est une expérience aléatoire à deux issues qu'on peut définir comme « succès » et « échec ».

Propriété (Loi de Bernoulli)

Une **loi de Bernoulli** est une loi de probabilité de paramètre $p \in [0, 1]$ qui caractérise une épreuve de Bernoulli en associant les probabilités suivantes :

$P(\text{"succès"}) = p$.

$P(\text{"échec"}) = 1 - p$.

Propriété (Espérance et variance de la loi de Bernoulli)

Soit X une variable aléatoire réelle qui suit la loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$, notée $X \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$, on a :

$$E(X) = p \text{ et } V(X) = p(1 - p)$$

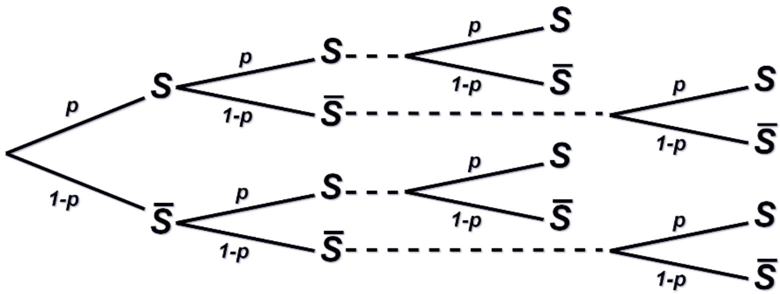
Définition (Schéma de Bernoulli)

Un **schéma de Bernoulli** est la répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

2. Loi binomiale

Définition (Loi binomiale)

Une **loi binomiale** est une loi de probabilité définie sur un sous-ensemble de $\mathbb{N}$ quantifiant le nombre de succès d'un schéma de Bernoulli à $n \in \mathbb{N}^*$ répétitions de probabilité $p \in [0,1]$.



Définition (Coefficient binomial)

On rappelle que le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ où $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq k \leq n$ correspond au nombre de combinaisons de k parmi n possibles, autrement :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Propriété (Loi binomiale)

Soit X une variable aléatoire réelle suivant une loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$, noté $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$, on a

$$\forall k \in \{0,\ldots,n\}, P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Démonstration (Loi binomiale)

Le nombre de chemins à k succès contient $n-k$ échecs, comme un succès a une probabilité de p et un échec une probabilité de $1-p$ et que la série d'épreuves est indépendante, on a la probabilité $p^k(1-p)^{n-k}$ pour un chemin.

Finalement, il existe $\binom{n}{k}$ chemins menant à k succès, d'où le résultat :

$$\forall k \in \{0,\ldots,n\}, P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

Exercices d'application

1. Modélisation de successions d'épreuves

1) Une urne contient 3 boules bleues, 2 boules vertes et 1 boule rouge indiscernables au toucher. On tire sans remise successivement deux boules de l'urne.
   a. Représenter l'expérience aléatoire par un arbre pondéré.
   b. Quelle est la probabilité de tirer deux boules bleues ? deux boules rouges ?
   c. Quelle est la probabilité de tirer une boule verte au second tirage ?
   d. Quelle est la probabilité de tirer exactement une boule rouge parmi les deux boules tirées ?
   e. Reprendre les questions précédentes si l'on considère désormais un tirage avec remise.

2) Lors d'un questionnaire à choix multiples, un élève décide de répondre aux cinq questions de façon aléatoire et indépendante. On suppose une seule réponse correcte parmi quatre choix avec un choix possible par question.
   a. Calculer la probabilité que l'élève ait plus de la moyenne au QCM.
   b. Un professeur a surpris l'élève se vanter de sa méthode à ses camarades et se demande qui aurait pu obtenir un score parfait avec cette méthode. En supposant que la classe du professeur ait une taille n, déterminer n tel que l'événement « au moins un élève a obtenu le score parfait au QCM » admet une probabilité supérieure à 0.95.

2. Modélisation de schémas de Bernoulli

1) Une université possède un amphithéâtre de 100 places. L'administration estime que 85% de l'amphithéâtre est occupé en moyenne à chaque cours magistral. L'université décide alors de constituer une classe de 110 élèves. On supposera que la présence des élèves à un cours magistral est indépendante des autres.
   a. Quelle est la probabilité que le nombre d'élèves présents dans l'amphithéâtre soit égale à 100 ?
   b. Quelle est la probabilité que le nombre d'élèves présents dans l'amphithéâtre dépasse le nombre de places ?
   c. Quelle est la probabilité qu'aucun élève ne se présente à l'amphithéâtre ?

2) Une urne contient 10 boules rouges et 7 boules vertes. On tire 4 boules avec remise et on note X la variable aléatoire correspondant au nombre de boules vertes.
   a. Quelle est la probabilité d'obtenir que des boules vertes ?
   b. Quelle est la probabilité d'obtenir trois boules rouges ?

3) Soit X la variable aléatoire suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ et $k \leq n$.
   a. Rappeler la probabilité que la variable aléatoire X soit égale à k.
   b. Supposons que $P(X = n) = 0.25$, déterminez p en fonction de n.
   c. Supposons que $P(X \leq n - 1) = 0.99$, déterminez $P(X = n)$.
   d. Supposons que $p = 0.5$, déterminez n tel que $P(X < 1) < 0.25$.

Exercices d'approfondissement

3. Loi géométrique

La **loi géométrique** est définie comme la loi de probabilité consistant à répéter un schéma de Bernoulli jusqu'à la première réussite.

a. Déterminer l'expression de $P(X = k)$ où X suit une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ avec k le nombre d'échecs avant la première réussite et p la probabilité d'un succès.

b. Lors d'un déménagement, vous faites appel à l'un de vos contacts afin qu'il vous aide avec une chance sur trois qu'il accepte. Quelle est la probabilité que la troisième personne contactée soit celle qui vous aide ? Quelle est la probabilité que parmi les trois premiers appelés, l'un d'entre eux vous aide ?

c. On lance une pièce équilibrée. Quelle est la probabilité que le premier pile arrive dès le premier coup ? après dix échecs ? A partir de combien d'échecs la probabilité d'obtenir le premier pile est inférieure à 10^{-2} ?

d. Lors d'un appel d'urgence, on estime qu'en moyenne 20% des appels concernent un incendie. En supposant que les appels sont indépendants entre eux, quelle est la probabilité que le premier signalement d'un incendie apparaisse au troisième appel ?

4. Loi de Poisson

Introduit par Siméon Poisson dans son ouvrage *Recherches sur la probabilité des jugements en matière criminelle et en matière civile* (1837), la **loi de Poisson** $\mathcal{P}(\lambda)$ décrit le comportement du nombre d'événements apparaissant sur un intervalle de temps. La loi de probabilité est définie par :

$$X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda) \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$$

a. Le nombre de pannes d'électricité dans un village sur un an est modélisé par la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 3$. Quelle est la probabilité qu'au cours de l'année il y ait exactement une panne d'électricité ?

b. Le nombre de scores parfaits à un test est modélisé par la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 0.5$. Quelle est la probabilité qu'au cours du semestre il y ait exactement 10 scores parfaits ?

c. Le nombre d'accidents à une intersection est modélisé par la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 1.4$. Quelle est la probabilité que durant l'année il n'arrive aucun accident ? trois accidents ?

d. Le nombre de produits défectueux d'une usine est de 1%. On sélectionne au hasard 100 produits et l'on note X la variable aléatoire correspondant au nombre de produits défectueux. Quelle est la probabilité qu'il y ait exactement deux produits défectueux ? Comparer avec une approximation par la loi de Poisson où $\lambda = np = 1$.

e. Montrer que la somme de deux lois de Poisson indépendantes est une loi de Poisson.

5. Hypergeometric Law

The **hypergeometric distribution law** $\mathcal{H}$ describes, as opposed to the binomial distribution law, the probability of k successes in n draws without replacement or "sans remise". Moreover, n corresponds to the sampling size of a population of size N with overall K successes. Let $X \hookrightarrow \mathcal{H}(N, K, n)$, we have :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \max(0, n + K - N) \leq k \leq \min(n, K)\,, P(X = k) = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

That is, $\binom{K}{k}$ or the number of combinations with k successes given the total possibilities of successes K.

$\binom{N-K}{n-k}$ or the number of combinations of failures given the total possibilities of failures.

$\binom{N}{n}$ or the number of combinations of samples given the overall size of the population.

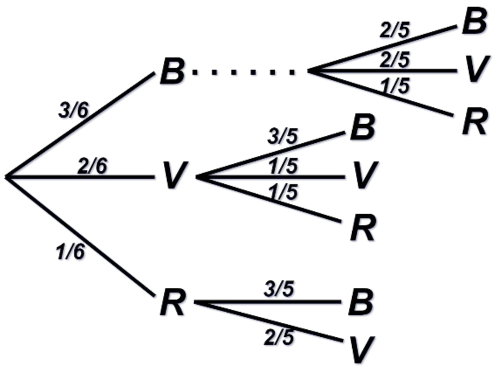
a. The French neighborhood « Luth I » is estimated to inhabit 230 young adults from which 132 are female. We survey 10 young adults on their voting behavior. What is the probability that exactly 7 of these young adults are female ?
b. Compare the probability found with the probability of the event $Y = 7$ where $Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(10, \frac{132}{230}\right)$.

Correction des exercices

1. Modélisation de succession d'épreuves

1)

a.



b. On notera par les variables T_1 et T_2 les résultats au premier et second tirage respectivement prenant des valeurs dans l'ensemble $\{"B","V","R"\}$ correspondant aux analogues des couleurs présentes dans l'urne.

On a, $P("T_1 = B" \cap "T_2 = B") = P("T_1 = B") \times P_{"T_1=B"}("T_2 = B")$
$= \frac{3}{6} \times \frac{2}{5}$
$= \frac{1}{5}$

$P("T_1 = R" \cap "T_2 = R") = P("T_1 = R") \times P_{"T_1=R"}("T_2 = R")$
$= \frac{1}{6} \times 0$
$= 0$, ce résultat pouvait être déduit.

c. On a, $P("T_2 = V") = P("T_1 = B" \cap \ "T_2 = V")$
$+ P("T_1 = V" \cap "T_2 = V") + P("T_1 = R" \cap "T_2 = V")$
$= \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} + \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \times \frac{2}{5}$
$= \frac{1}{3}$

d. Soit $E = ("T_1 = R" \cap "T_2 \neq R") \cup ("T_1 \neq R" \cap "T_2 = R")$, on remarque que les deux événements sont disjoints.

On a, $P(E) = P("T_1 = R" \cap "T_2 \neq R") + P("T_1 \neq R" \cap "T_2 = R")$
$= \frac{1}{6} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{6} \times \frac{2}{5} + \frac{3}{6} \times \frac{1}{5} + \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{3}$

e. On a une répétition de deux épreuves identiques et indépendantes, d'où,

$P("T_1 = B" \cap "T_2 = B") = \left(\frac{3}{6}\right)^2 = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

$P("T_1 = R" \cap "T_2 = R") = \left(\frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{36}$

$P("T_2 = V") = \frac{2}{6}$

$P(E) = \frac{1}{6} \times \frac{3}{6} + \frac{1}{6} \times \frac{2}{6} + \frac{3}{6} \times \frac{1}{6} + \frac{2}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{4}$

2)

a. Soit N la variable aléatoire correspondant à la note de l'élève suivant une loi binomiale $\mathcal{B}\left(5,\ \frac{1}{4}\right)$, car l'expérience consiste à répéter un schéma de Bernoulli de manière indépendante et identique.

On a, $P(N \geq 2.5) = P(N = 3) + P(N = 4) + P(N = 5)$
$$= \binom{5}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{3}{4}\right)^2 + \binom{5}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^4\left(\frac{3}{4}\right)^1 + \binom{5}{5}\left(\frac{1}{4}\right)^5\left(\frac{3}{4}\right)^0$$
$$= \frac{53}{512} \simeq 0.1$$

b. Soit $\mathcal{N}$ le nombre d'élèves ayant obtenu un score parfait et $(\mathcal{N}_i)_{1\leq i\leq n}$ le score du i-ème élève avec $n \in \mathbb{N}^*$.

On a, $P(\mathcal{N} \geq 1) = 1 - P(\mathcal{N} < 1) = 1 - P(\mathcal{N} = 0)$
$$= 1 - P(\text{"}\mathcal{N}_1 < 5\text{"} \cap \ldots \cap \text{"}\mathcal{N}_n < 5\text{"})$$

Par indépendance, on a,
$P(\mathcal{N} \geq 1) = 1 - P(\mathcal{N}_1 < 5) \times \ldots \times P(\mathcal{N}_n < 5)$

Le schéma étant aussi une répétition d'épreuves identiques, on a,
$$= 1 - P(\mathcal{N}_1 < 5)^n$$

Finalement, par probabilité totales,
$$P(\mathcal{N} \geq 1) = 1 - \left(1 - P(\mathcal{N}_1 = 5)\right)^n$$
$$= 1 - \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^5\right)^n$$

Donc, on résout l'équation,
$$1 - \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^5\right)^n > 0.95 \Leftrightarrow \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^5\right)^n < 0.05$$
$$\Leftrightarrow n > \frac{\ln(0.05)}{\ln\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^5\right)} \simeq 3066.13 = 3067$$

Pour une classe supérieure à 3067 élèves, la probabilité qu'au moins un élève ait un score parfait avec la méthode décrite est supérieure à 95%.

2. Modélisation de schémas de Bernoulli

1)

a. Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre d'élèves présents aux cours magistraux. L'expérience consiste à vérifier si chaque élève est présent ou non, ce qui suit un schéma de Bernoulli par hypothèse. On a donc X qui suit une loi binomiale $\mathcal{B}(110, 0.85)$.
On a, $P(X = 100) = \binom{110}{100} \cdot 0.85^{100} \cdot 0.15^{10} \simeq 0.024$.
Il y a environ 1 chance sur 40 que l'amphithéâtre soit utilisé complètement sans surplus d'élèves.

b. On a,
$$\begin{aligned} P(X > 100) &= 1 - P(X \leq 100) \\ &= 1 - \textstyle\sum_{k=0}^{100} P(X = k) \\ &= 1 - \textstyle\sum_{k=0}^{100} \binom{110}{k} \cdot 0.85^{k} \cdot 0.15^{110-k} \\ &\simeq 1 - 0.976 \simeq 0.024 \end{aligned}$$
Il y a environ 1 chance sur 40 que l'amphithéâtre soit surchargé. On utilise Frép ou fonction de répartition de la loi binomiale pour calculer $P(X \leq x)$.

c. On a,
$$\begin{aligned} P(X = 0) &= \binom{110}{0} \cdot 0.85^{0} \cdot 0.15^{110} \\ &\simeq 10^{-91} \simeq 0 \end{aligned}$$
Il y a virtuellement aucune chance que l'amphithéâtre soit vide.

2)

a. La loi de X est une loi binomiale $\mathcal{B}\left(4, \frac{7}{17}\right)$
On a, $P(X = 4) = \binom{4}{4} \cdot \left(\frac{7}{17}\right)^{4} \cdot \left(\frac{10}{17}\right)^{0} = \frac{2401}{83521} \simeq 0.029$

b. On a, $P(X = 1) = \binom{4}{1} \cdot \left(\frac{7}{17}\right)^{1} \cdot \left(\frac{10}{17}\right)^{3} = \frac{28000}{83521} \simeq 0.335$

3)

a. On a, $\forall k \in \{0, \ldots, n\}, P(X = k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

b. On a, $P(X = n) = 0.25 \Leftrightarrow \binom{n}{n} p^n (1-p)^0 = 0.25$

$$\Leftrightarrow p^n = 0.25$$
$$\Leftrightarrow p = (0.25)^{1/n}$$

c. On a, $P(X \leq n-1) = 1 - P(X > n-1)$

$$= 1 - P(X = n)$$
$$= 0.99$$

Donc, $P(X = n) = 0.01$

d. On a, $P(X < 1) < 0.25 \Leftrightarrow P(X = 0) < 0.25$

$$\Leftrightarrow (1-p)^n < 0.25$$
$$\Leftrightarrow n < \frac{\ln(0.25)}{\ln(1-p)} = 2$$

Donc, $n = 1$, car $n = 0$ n'a pas de sens dans le cadre de la définition d'une loi binomiale.

3. Loi géométrique

a. Il n'existe qu'un chemin tel qu'on réalise k échecs puis un succès.
Les échecs sont indépendants entre eux par hypothèse du schéma de Bernoulli et donc possède une probabilité identique. On obtient l'expression d'une loi géométrique : $\forall k \in \mathbb{N}, P(X = k) = p(1-p)^k$.

Remarque (Loi géométrique)

Il existe en réalité deux définitions à la loi géométrique, aussi appelée loi binomiale négative, toutes deux aussi valables dans le milieu des statistiques. La seconde considère que le succès a lieu à la k-ème tentative. Ainsi X correspondrait au nombre d'étapes nécessaires pour rencontrer le premier succès, donnant ainsi l'expression : $\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X = k) = p(1-p)^{k-1}$.

b. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{3}\right)$, on suppose que les deux premières personnes n'aient pas acceptées d'aider.
On a, $P(X = 2) = \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{27}$
De plus,
$$\begin{aligned} P(X \leq 2) &= P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^2 \\ &= \frac{19}{27} \end{aligned}$$

c. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{2}\right)$.
On a, $P(X = 0) = \frac{1}{2}$
$$P(X = 10) = \frac{1}{2048}$$
$$\begin{aligned} P(X = n) < 10^{-2} &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^n} < 10^{-2} \\ &\Leftrightarrow 2^{n+1} > 10^2 \\ &\Leftrightarrow n > \frac{2\ln(10)}{\ln(2)} - 1 \simeq 5.64 \end{aligned}$$
À partir de 6 échecs, les chances d'obtenir son premier pile sont inférieures à 1%.

d. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{20}{100}\right)$.
On a, $P(X = 2) = \frac{1}{5} \times \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{16}{125}$

4. Loi de Poisson

a. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(3)$,
On a, $P(X=1) = 3e^{-3} \simeq 0.15$

b. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}\left(\frac{1}{2}\right)$,
On a, $P(X=10) = \frac{1}{2^{10}} \times \frac{1}{10!} \times e^{-1/2} \simeq 0$

c. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(1.4)$,
On a, $P(X=0) = (1.4)^0 \times \frac{1}{0!} \times e^{-1.4} \simeq 0.25$
$P(X=3) = (1.4)^3 \times \frac{1}{3!} \times e^{-1.4} \simeq 0.11$

d. Soit $Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n=100, p=0.01)$,
On a, $P(Y=2) = \binom{100}{2} \cdot 0.01^2 \cdot 0.99^{98}$
$= 0.185$
De plus, $X \hookrightarrow \mathcal{P}(1) \Longrightarrow P(X=2) \simeq 0.184$.

Remarque (Approximation d'une loi binomiale)

Dans le cadre de probabilités très faibles ou de nombre d'essais très grand on observe que la loi binomiale converge vers une loi de Poisson $\mathcal{P}(np)$. Il s'agit d'un théorème peu connu mais important dans l'allègement des calculs, les coefficients binomiaux étant coûteux à calculer en succession.

e. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\alpha)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\beta)$ avec $\alpha, \beta > 0$ et X, Y indépendantes.
On a, $Z = X + Y$, d'où, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
P(Z=n) = P(X+Y=n) = P(X=n-Y) &= \textstyle\sum_{k=0}^{n} P(X=n-k \cap Y=k) \\
&= \textstyle\sum_{k=0}^{n} P(X=n-k)P(Y=k) \\
&= \textstyle\sum_{k=0}^{n} e^{-\alpha} \frac{\alpha^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\beta} \frac{\beta^k}{k!} \\
&= e^{-(\alpha+\beta)} \frac{1}{n!} \textstyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n! \beta^k \alpha^{n-k}}{(n-k)!k!} \\
&= e^{-(\alpha+\beta)} \frac{1}{n!} \textstyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \beta^k \alpha^{n-k} \\
&= e^{-(\alpha+\beta)} \frac{1}{n!} (\alpha+\beta)^n \\
&= e^{-(\alpha+\beta)} \frac{(\alpha+\beta)^n}{n!} \Leftrightarrow Z \hookrightarrow \mathcal{P}(\alpha+\beta)
\end{aligned}$$

5. Hypergeometric Law

a. Let X be the random variable corresponding to the number of females surveyed amongst the 10 sampled young adults.
Evidently, X follows the hypergeometric law $\mathcal{H}(230, 132, 10)$.
Thus, by definition,
$P(X = 7) = \frac{\binom{132}{7}\binom{98}{3}}{\binom{230}{10}} \simeq 0.1915$

b. Let $Y \hookrightarrow \mathcal{B}\left(10, \frac{132}{230}\right)$
We have,
$P(Y = 7) = \binom{10}{7}\left(\frac{132}{230}\right)^7\left(1 - \frac{132}{230}\right)^3 \simeq 0.1904.$
The two probabilities are equal at 10^{-2} precision.
Indeed, in some cases such as $n \leq 0.05N$ and $0 \ll p \ll 1$, the $\mathcal{H}$ law can be approximated by the binomial $\mathcal{B}$ law, reducing the complex task of calculating binomial coefficients.

« It is a mathematical fact that the casting of this pebble from my hand alters the centre of gravity of the universe. »

Thomas Carlyle, *Sartor Resartus* (1836)

Nous approfondirons les notions établies au précédent chapitre à travers les notions d'espérance et variance auxquelles s'attendre.

Sommaire

Cours

Exercices d'application

Exercices d'approfondissement

Correction des exercices

Cours

I. Somme de variables aléatoires

1. Loi de probabilité

Soit X, Y deux variables aléatoires réelles à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Définition (Loi de probabilité)

La loi de probabilité de la variable aléatoire $(X+Y)$ est défini par :

$$P(X+Y=k)=\sum\nolimits_{i+j=k} P\big((X=i)\cap(Y=j)\big)$$

Propriété (Loi de probabilité)

Si X et Y sont indépendantes, alors :

$$P(X+Y=k)=\sum\nolimits_{i+j=k} P(X=i)P(Y=j)$$

2. Espérance et variance

Soit X, Y deux variables aléatoires réelles.

Propriétés (Espérance et variance)

On a les propriétés suivantes :

- **Linéarité** : $\forall a, b \in \mathbb{R}, E(aX+b)=aE(X)+b$ et $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$
- **Translation affine** : $\forall a, b \in \mathbb{R}, V(aX+b)=a^2V(X)$
- **Combinaison linéaire** : Si X, Y indépendantes, $V(X+Y)=V(X)+V(Y)$

II. Échantillonnage

1. Échantillon d'une loi de probabilité

Soit n un entier naturel non nul.

Définition (Échantillon d'une loi de probabilité)

Un **échantillon identique et indépendant d'une loi de probabilité** $(X_k)_{1\leq k\leq n}$ de taille n est une famille de n variables aléatoires identiques, au sens de même loi de probabilité, et indépendantes deux-à-deux, au sens $\forall i,j, i \neq j \Longrightarrow X_i, X_j$ sont indépendantes.

Propriété (Échantillon d'une loi de probabilité)

Soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ un échantillon de taille n de variables aléatoires identiques et indépendantes. On a les propriétés suivantes :

- **Espérance d'une somme** : $E(\sum X_k) = E(X_1) + E(X_n) = \sum E(X_k)$
- **Variance d'une somme** : $V(\sum X_k) = V(X_1) + \cdots + V(X_n) = \sum V(X_k)$

2. Application à la loi binomiale

Soit n un entier naturel non nul.

Propriété (Relation Loi de Bernoulli - Loi Binomiale)

Soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ un échantillon indépendant deux-à-deux de taille n de la loi de Bernoulli de paramètre p. La variable aléatoire $S = X_1 + \cdots + X_n$ suit une loi binomiale de paramètres n et p.

Propriété (Espérance et variance de loi binomiale)

Soit X une variable aléatoire réelle qui suit une loi binomiale de paramètres n et p, on a $E(X) = np$, $V(X) = np(1-p)$ et $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{np(1-p)}$.

Démonstration (Espérance et variance de loi binomiale)

Soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ un échantillon indépendant deux-à-deux de taille n de la loi de Bernoulli de paramètre p.

On a, $E(X_1 + \cdots + X_n) = \sum E(X_k) = \sum p = np$

Par indépendance, $V(X_1 + \cdots + X_n) = \sum V(X_k) = \sum p(1-p) = np(1-p)$

Exercices d'application

1. Détermination de lois de probabilités

1) On considère le restaurant d'entreprise dans lequel on doit obligatoirement et exactement commander un élément de chaque catégorie pour son déjeuner d'après le menu suivant :

Entrée	Plat	Dessert
Entrée n°1 : 1€ Entrée n°2 : 2€	Plat n°1 : 4€ Plat n°2 : 5€ Plat n°3 : 7€	Dessert n°1 : 2€ Dessert n°2 : 3€

a. Soit X la variable aléatoire correspondant au prix payé après choix du menu. On considèrera que chaque élément est pris équiprobablement à sa catégorie et que les catégories sont choisies indépendamment les unes des autres. Représenter l'expérience par un arbre pondéré.

b. Déterminer la loi de probabilité de X.

c. Déterminer $E(X)$, à quoi correspond cette quantité ?

d. De combien le prix du dessert $n°1$ doit-il augmenter pour que la nouvelle espérance soit le double de celle calculée à la question c. ?

2) On lance deux dés équilibrés, le premier dé possède six faces numérotées de 1 à 6 tandis que le second possède six faces numérotées 1, 1, 1, 2, 2 et 3.

a. Soit D_1 et D_2 les variables aléatoires correspondant à la face du premier et second dé respectivement. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $\mathcal{D} = D_1 + D_2$.

b. Si les valeurs prises par $\mathcal{D}$ correspondaient à un gain, combien gagnerait-on en moyenne en participant à l'expérience sans frais de participation ?

3) La **loi uniforme** correspond à la loi de probabilité équiprobable sur un ensemble d'entiers successifs. Soit U la variable aléatoire suivant la loi uniforme $\mathcal{U}(\mathcal{E})$ où $\mathcal{E}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{N}$.

a. Supposons que $\mathcal{E} = [\![1, 6]\!]$, calculer $P(U = 2)$.

b. Supposons que $\mathcal{E} = [\![n, m]\!]$ où $n, m \in \mathbb{N}$, déterminer $E(U)$.

4) On modélise la variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli de paramètre p par le code Python suivant :

```
import random

def X() :
    if random.randint(1, 100) <= 27 :
        return 1
    else :
        return 0
```

a. Déterminer le paramètre p.

b. Modifier le code Python afin de modéliser une loi binomiale de paramètre $n = 10$ et p déterminé à la question a.

5) Let X and Y be two independent random variables follow the binomial laws $\mathcal{B}\left(2, \frac{1}{3}\right)$ and $\mathcal{B}\left(4, \frac{1}{4}\right)$ respectively. Calculate the probability of $\{X + Y = 5\}$.

2. Échantillonnage

1) Soit (X_1, X_2, X_3) un échantillon indépendant de taille 3 suivant la même loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{2}$.
   a. Déterminer la loi de $X = 2X_1$.
   b. Déterminer la loi de $X' = X_1 + X_3$.
   c. Déterminer l'espérance et variance de $X_1 - 2X_3$.
   d. Déterminer l'espérance et écart-type de $3X_2$.

2) Une filiale pharmaceutique rapporte un taux d'efficacité de 99% sur son médicament. Elle effectue une étude sur 100 patients choisis au hasard et relève par la variable aléatoire X le nombre de patients soignés.
   a. Déterminer la loi de X.
   b. Quelle est la probabilité que le médicament ait satisfait 100% des patients ?
   c. Quelle devrait être le taux d'efficacité du médicament pour que la probabilité que 100% des patients soient satisfaits soit égale à 1% ?

3) Un concessionnaire automobile remarque que 2% des véhicules vendus sont remboursés pour défaut technique après moins d'un an. Il décide de se rendre dans l'usine qui s'occupe de la production de ses automobiles. Sur une journée, il choisit au hasard 7 véhicules et leur fait passer un second test technique, on note X la variable aléatoire correspondant au nombre de véhicules validés à tort au premier test.
   a. Déterminer la loi de X.
   b. Quelle est la probabilité qu'aucun véhicule ne soit défectueux ?
   c. Commentez sur l'étude menée par le concessionnaire à l'aide d'arguments probabilistes et statistiques.

4) Une étude rapporte que l'été précédent, 80% des touristes ont logés dans des hôtels. A l'aéroport, on demande à 30 familles de touristes si elles ont logé dans un hôtel durant leurs vacances. Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de familles ayant bien logé dans un hôtel.
   a. Déterminer la loi de X.
   b. Quelle est la probabilité que 25 familles aient logé dans un hôtel ?
   c. Déterminer le plus petit nombre de familles m tel que $P(X \leq m) = 0.5$.

5) A Chinese rice farmer from Wenzhou remembered that in May of last year, out of the 30 days, 20 were rainy. Depending on the number of rainy days this year, he wishes to invest more or less in rice grains. Let X be the random variable corresponding to how many days were rainy in May of this year.
   a. Establish the law of X, we suppose that rainy days are independent.
   b. What is the probability that in May, all days will be rainy ?
   c. What is the probability that in May, 20 days will be rainy ?
   d. If the probability of k rainy days is superior to 0.1, the farmer is willing to invest 200 rice grains more than for $(k-1)$ rainy days. Supposing that for 0 rainy days, the farmer will invest 0 rice grains, establish the interval of rice grains the farmer is likely to invest.

Exercices d'approfondissement

3. La maison est toujours gagnante

Cet exercice vise à démystifier plusieurs concepts concernant les jeux de hasard. Cet exercice ou mon opinion sur ces « jeux » ne sont aucunement glorifiant, pour rappel, il est interdit pour un mineur de participer à un tel jeu, qu'il soit en ligne, en établissement (casinos, bar à loto) ou encore dans la rue.

1) La roulette française est composée de 37 nombres numérotés de 0 à 36. A l'exception du chiffre 0, colorié en vert, les nombres pairs sont coloriés en rouge et les nombres impairs en noir. La composition mécanique de la roulette étant équilibrée et le lancer de la bille étant laissée au joueur, on considèrera que chaque numéro a la même chance d'être récipient de la bille. On considère un joueur qui choisit au hasard un des numéros et mise m€.
   a. Considérons le pari sur un unique nombre. On remporte 35 fois sa mise, ainsi que sa mise de départ, si la bille atterrit sur le numéro sélectionné, autrement on perd la mise. Déterminer le gain moyen d'un joueur.
   b. Considérons le pari sur une couleur rouge ou noire. On remporte une fois sa mise, ainsi que sa mise de départ, si la bille atterrit sur la couleur sélectionnée, autrement on perd sa mise. Déterminer le gain moyen.
   c. Si un village de mille habitants participe à ce jeu, combien d'argent peut le village espéré gagner, ou perdre ?

2) Étudions le mythe du casino « plus le temps passe sans qu'une machine n'affiche un jackpot, plus la probabilité qu'un jackpot arrive est grande. »
   a. En considérant que la machine décide indépendamment de faire apparaitre un jackpot, montrer que la probabilité qu'un jackpot arrive est **sans mémoire**, c'est-à-dire indépendante des événements passés.
   b. A l'aide d'un programme Python, montrez qu'une succession de trois piles ou trois faces au jeu du pile ou face n'implique pas nécessairement que la quatrième issue sera différente des trois précédentes.

3) On tire deux cartes au black jack. On considère une partie gagnée si ces deux cartes forment la valeur 21, c'est-à-dire, si l'on a pioché un 10 (ou une face) et un as. Si c'est le cas, on gagne m fois sa mise, sinon on la perd. Déterminer pour quelles valeurs de m la maison est gagnante.

4. Combinaisons non linéaires de variables aléatoires

1) Soit X une variable aléatoire qui prend équiprobablement des valeurs dans l'ensemble $X(\Omega) = \{-3, -2, 1, 4\}$.
   a. Déterminer la loi de X.
   b. Soit $Y = (X+1)^2$. Déterminer $Y(\Omega)$ et la loi de Y.
   c. Soit $Z = e^{-2X+1}$. Déterminer $Z(\Omega)$ et la loi de Z.

2) Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un échantillon de taille $n \in \mathbb{N}^*$ indépendant deux-à-deux suivant la loi de X, c'est-à-dire celle de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1[$.
   a. Soit $M = \max(X_1, \dots, X_n)$. Déterminer $P(M = 0)$
   b. Supposons que X suive une loi quelconque. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(\max(X_1, \dots, X_n) \leq x) = P(X \leq x)^n$.

5. Lois marginales

Soit X et Y deux variables aléatoires dont les probabilités conjointes sont :

$X \backslash Y$	0	1	2	3
0	$10/220$	$40/220$	$30/220$	$4/220$
1	$30/220$	$60/220$	$18/220$	0
2	$15/220$	$12/220$	0	0
3	$1/220$	0	0	0

A partir de ce tableau. Déterminer la loi de X et la loi de Y, appelées **lois marginales** de X et loi marginale de Y.

6. Variable aléatoire continue

On appelle **variable aléatoire continue** la variable aléatoire réelle X telle qu'il existe une fonction f_X, dite densité de X, définie et non négative sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall A \subset \mathbb{R}, P(X \in A) = \int_{x \in A} f(x)dx$$

De plus, on appelle **fonction de répartition** de X, notée F_X, la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F_X(x) = P(X \leq x)$.

Finalement, on admettra les notions introduites au chapitre « Calcul intégral » et particulièrement l'exercice « Intégrales convergentes ».

1) Soit X une variable aléatoire réelle de densité f_X.
   a. Montrer que F_X est croissante sur $\mathbb{R}$.
   b. Montrer que $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.
   c. Montrer que $\forall a, b \in \mathbb{R}, P(a \leq X \leq b) = F_X(b) - F_X(a)$.

2) Soit X une variable aléatoire réelle de densité f_X définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_X(x) = \begin{cases} \alpha x & \text{si } 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   a. Déterminer α.
   b. Déterminer l'expression de $F_X(x)$.
   c. Soit $Y = 2X + 1$ et $Z = e^X$, déterminer les expressions $F_Y(x)$ et $F_Z(x)$.

3) Soit X une variable aléatoire réelle suivant la **loi exponentielle** $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$ de densité f_X définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f_X(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } 0 \leq x \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

   a. Déterminer l'expression de $F_X(x)$.
   b. Montrer que X est **sans mémoire**, c'est-à-dire $\forall x, t \in \mathbb{R}_+$, $P(X > x + t | X > t) = P(X > x)$.
   c. On définit l'espérance d'une variable aléatoire continue X par la quantité $E(X) = \int_{x \in \mathbb{R}} x f(x)dx$, déterminer $E(X)$.
   d. Le **théorème de transfert** établie que pour toute fonction g continue, $E\big(g(X)\big) = \int_{x \in \mathbb{R}} g(x)f(x)dx$, sachant que $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$, déterminer $V(X)$.

7. Covariance

We call **covariance** of random variables X and Y the quantity :

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E\big[\big(X - E(X)\big)\big(Y - E(Y)\big)\big] = E(XY) - E(X)E(Y)$$

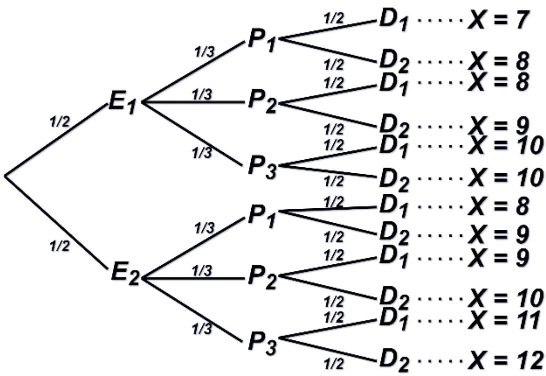
Calculate the covariance of X and Y from exercise 5.

Correction des exercices

1. Détermination de lois de probabilités

1)

a. On a,



b. On a,

x	7	8	9	10	11	12
$P(X = x)$	1/12	3/12	3/12	2/12	2/12	1/12

c. On a, $E(X) = \sum_{k=7}^{12} k \cdot P(X = k) = \frac{7+8\times3+9\times3+10\times2+11\times2+12}{12} = 9\frac{1}{3}$

On s'attend en moyenne à ce qu'un client paye 9.33€.

d. On cherche $E(X_{\text{nouveau prix}}) = 2E(X_{\text{ancien prix}})$

Donc, $\frac{(5+x)+(6+x)+(8+x)+(6+x)+(7+x)+(9+x)+59}{12} = 18\frac{1}{3} \Leftrightarrow x = \frac{94}{3}$

2)

a. On a,

d	2	3	4	5	6	7	8	9
$P(\mathcal{D} = d)$	1/12	5/36	1/6	1/6	1/6	1/6	1/12	1/36

b. En moyenne $E(\mathcal{D}) = \frac{3\times2+3\times5+4\times6+5\times6+6\times6+7\times6+8\times3+9}{36} \simeq 5.17€$

3)

a. Soit $U \hookrightarrow \mathcal{U}(\{1,2,\dots,6\})$

On a, par équiprobabilité, $P(U=2) = \frac{\text{Card}(\{2\})}{\text{Card}(\mathcal{E})} = \frac{1}{6}$

b. Soit $U \hookrightarrow \mathcal{U}(\{n, n+1, \dots, m\})$ où $n, m \in \mathbb{N}$ avec $n \leq m$.

On a, $E(U) = \sum_{k\in\mathcal{E}} k \cdot P(U=k)$

$$\begin{aligned}
&= \textstyle\sum_{k=n}^{m} k \cdot \frac{\text{Card}(\{k\})}{\text{Card}(\{n,n+1,\dots,m\})} \\
&= \textstyle\sum_{k=n}^{m} k \cdot \frac{1}{m-n+1} \\
&= \frac{1}{m-n+1} \textstyle\sum_{k=n}^{m} k \\
&= \frac{1}{m-n+1} \left(\sum_{k=0}^{m} k - \sum_{k=0}^{n-1} k\right) \\
&= \frac{1}{m-n+1} \left(\frac{m(m+1)}{2} - \frac{(n-1)n}{2}\right) \\
&= \frac{m^2+m-n^2+n}{2(m-n+1)} \\
&= \frac{(m-n+1)(m+n)}{2(m-n+1)} = \frac{m+n}{2}
\end{aligned}$$

4)

a. On remarque que sur les 100 valeurs prises équiprobablement par randint, 27 d'entre elles renvoie la valeur 1. Ainsi on estime $p = \frac{27}{100}$.

b.

```python
import random

def X() :
    S = 0
    for n in range(10) :
        if random.randint(1, 100) <= 27 :
            S += 1
    return S
```

5) On a, $P(X+Y=5) = \sum_{k=0}^{4} P(\text{"}X = 5-k\text{"} \cap \text{"}Y = k\text{"})$

Or, on sait que $X \leq 2$ et $Y \leq 4$ par définitions de leurs lois respectives.

Par indépendance, $P(X+Y=5) = \sum_{k=0}^{4} P(X=5-k)P(Y=k)$

$$\begin{aligned}
&= \textstyle\sum_{k=3}^{4} P(X=5-k)P(Y=k) \\
&= P(X=2)P(Y=3) + P(X=1)P(Y=4) \\
&= \frac{11}{1728} \simeq 0.006
\end{aligned}$$

2. Échantillonnage

1)

a. On a,

x	0	2
$P(X=x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

b. On a,

x	0	1	2
$P(X'=x)$	$1/4$	$1/2$	$1/4$

c. On a, par linéarité, $E(X_1-2X_3)=E(X_1)-2E(X_3)=-1/2$
par indépendance, $V(X_1-2X_3)=V(X_1)+4V(X_3)=5/4$

d. On a, par linéarité, $E(3X_2)=3E(X_2)=3/2$
par propriété, $\sigma(3X_2)=\sqrt{V(3X_2)}=\sqrt{9V(X_2)}=3\sqrt{V(X_2)}=3/2$

2)

a. L'expérience consiste à tirer au hasard, de manière indépendante et identique, 100 patients. Ce schéma de Bernoulli nous permet d'identifier la loi de X comme la loi binomiale de paramètres $n=100$ et $p=0.99$.

b. On a, $P(X=100)=\binom{100}{100}\cdot 0.99^{100}\cdot 0.01^{0}\simeq 0.37$

c. On a, $P(X=100)=0.01 \Leftrightarrow \binom{100}{100}\cdot p^{100}\cdot(1-p)^{0}=0.01$
$\Leftrightarrow p^{100}=0.01$
$\Leftrightarrow p=0.01^{1/100}\simeq 0.955$
Si le taux d'efficacité était de 95.5%, alors la probabilité que l'étude sur les 100 patients résulte en une parfaite satisfaction serait de 1%.

3)

a. X est la succession de schémas de Bernoulli de paramètre $p = 2\%$, on répète l'expérience $n = 7$ fois, on a donc $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(7, \frac{2}{100}\right)$

b. On a, $P(X = 0) = \binom{7}{0} \cdot \left(\frac{1}{50}\right)^0 \cdot \left(1 - \frac{1}{50}\right)^7 \simeq 0.87$

c. L'expérience peut être remise en question car on sélectionne les véhicules sur une journée, or il se peut que la productivité des employés ou des machines ne soit pas représentative d'une réelle « journée moyenne ». De plus on cherche généralement à avoir 30 ou plus échantillons.

4)

a. $X \hookrightarrow \mathcal{B}(30, 0.8)$

b. On a, $P(X \geq 25) = 1 - P(X \leq 24) \simeq 0.428$

c. À l'aide d'un algorithme on retrouve $m = 24$.

5)

a. We have few reasons to believe that the weather this year will be any different from last year. X is thus the sum of 30 independent Bernoulli variables of probability $p = 2/3$. By definition, X follows $\mathcal{B}\left(30, \frac{2}{3}\right)$.

b. We have, $P(X = 30) = \binom{30}{30} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{30} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0$
$$\simeq 5 \cdot 10^{-6}$$

c. We have, $P(X = 20) = \binom{30}{20} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{20} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{10}$
$$\simeq 0.153$$

d. We know that the distribution is symmetric around its mean $E(X) = 20$.
Moreover, $P(X = k) > 0.1 \Leftrightarrow k \in \{18, 19, 20, 21, 22\}$
Thus, the farmer should invest around 3600 and 4400 rice grains.

3. La maison est toujours gagnante

1)

a. Soit X le gain obtenu après avoir parier m€. On rappelle que regagner sa mise de départ signifie un gain nul.
$E(X) = 35m \cdot \frac{1}{37} - m \cdot \frac{36}{37} = \frac{-m}{37} < 0$
Le joueur perd en moyenne quelle que soit sa mise, cependant il est attendu à ce qu'il perde plus en moyenne plus sa mise est importante.

b. On a,
$E(X) = m \cdot \frac{18}{37} - m \cdot \frac{18}{37} - m \cdot \frac{1}{37} = -\frac{m}{37} < 0$
De nouveau, le joueur est perdant quelle que soit sa mise.

c. On s'attend à ce que le village perde 1000 fois leur mise en supposant qu'elles soient égales. Autrement si (m_i) est la mise du i-ème habitant du village, alors le village perd $-\frac{\sum m_i}{37}$ en moyenne.

2)

a. Soit X_n l'événement « au moins un jackpot est arrivé après n-essais. »
On a, $P\left(X_{n+1}|\overline{X}_n\right) = \frac{P\left(X_{n+1} \cap \overline{X}_n\right)}{P\left(\overline{X}_n\right)}$
Par indépendance, $\frac{P\left(X_{n+1} \cap \overline{X}_n\right)}{P\left(\overline{X}_n\right)} = \frac{P(X_{n+1})P\left(\overline{X}_n\right)}{P\left(\overline{X}_n\right)}$

$$= P(X_{n+1})$$

Ainsi, la probabilité d'obtenir un jackpot est bien indépendante des éventuels résultats passés.

b. On modélise l'expérience suivante : on lance 100 000 fois une pièce équilibrée et on relève par « P » ou « F » le résultat du lancer. On ajoute tous les résultats dans une liste dans l'ordre d'apparition. On parcourt la liste. Si trois éléments successifs sont tous des « P » ou tous des « F », on incrémente un compteur S, sinon on incrémente un autre compteur D. Finalement, on compare la fréquence de ces événements.

```python
import random

resultats = []
similaires = 0
differents = 0

for i in range(100000) :
    if random.randint(1, 2) == 1 :
        resultats.append("P")
    else :
        resultats.append("F")

for i in range(len(resultats)) :
    if i < len(resultats) - 4 :
        if resultats[i] == resultats[i+1] == resultats[i+2] :
            if resultats[i] == resultats[i+3] :
                similaires += 1
            else :
                differents += 1

print(similaires)
print(differents)
```

On remarque des résultats similaires, laissant à croire qu'en effet le quatrième résultat (ou le second, troisième, cinquième etc.) est indépendant des résultats précédents. Bien sûr, la réalisation est aléatoire. Il existe donc une séquence telle que même après une infinité de tentatives, on n'obtienne uniquement des piles ! Mais en attendant qu'un tel résultat se manifeste, tenons-nous à cette conclusion. Le chemin qui mène à ce résultat extraordinaire devrait suffire à nous prouver l'impossibilité de ce dernier.

3) Le nombre de mains possibles est $\binom{52}{2} = 1326$. Effectivement l'ordre de tirage ne compte pas on utilise donc une combinaison. Parmi ces combinaisons, $\binom{16}{1}\binom{4}{1}$ combinaisons d'un 10 (ou d'une face) et d'un as offrent la possibilité d'un blackjack. La probabilité que la maison perde est donc de 4.8%. Ainsi en moyenne la maison gagne $(0.952 - 0.048)m = 0.904m$, or $m > 0$, donc la maison est toujours gagnante quelle que soit la mise.

4. Combinaisons non linéaires de variables aléatoires

1)

a. On a,

x	-3	-2	1	4
$P(X = x)$	$1/4$	$1/4$	$1/4$	$1/4$

b. On a,

$$\begin{aligned} X \in \{-3,-2,1,4\} &\iff X+1 \in \{-2,-1,2,5\} \\ &\iff (X+1)^2 \in \{4,1,4,25\} \\ &\iff Y \in \{1,4,25\} \end{aligned}$$

On remarque $P(Y = 4) = P(X \in \{-2,2\}) = P(X = -2) + P(X = 2)$

y	1	4	25
$P(Y = y)$	$1/4$	$2/4$	$1/4$

c. On a,

$$\begin{aligned} X \in \{-3,-2,1,4\} &\iff -2X+1 \in \{7,5,-1,-7\} \\ &\iff Z \in \{e^7, e^5, e^{-1}, e^{-7}\} \end{aligned}$$

z	e^{-7}	e^{-1}	e^5	e^7
$P(Z = z)$	$1/4$	$1/4$	$1/4$	$1/4$

2)

a. On a, $P(M=0) = P(X_1 = \cdots = X_n = 0)$
$= P("X_1 = 0" \cap \dots \cap "X_n = 0")$
Par indépendance, $P(X_1 = \cdots = X_n = 0) = P(X_1 = 0) \dots P(X_n = 0)$
$= (1-p)^n$

b. On a, $\forall x \in \mathbb{R}, P(\max(X_1, \dots, X_n) \leq x) = P("X_1 \leq x" \cap \dots \cap "X_n \leq x")$
Par indépendance, $P(\max(X_1, \dots, X_n) \leq x) = P(X_1 \leq x) \dots P(X_n \leq x)$
$= P(X \leq x) \dots P(X \leq x)$
$= P(X \leq x)^n$

5. Lois marginales

On a, d'après les probabilités totales, $P(X = x) = \sum_{y=0}^{3} P(X = x|Y = y)$
$P(Y = y) = \sum_{x=0}^{3} P(Y = y|X = x)$

Ainsi, on en déduit les lois de X et Y :

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	$84/220$	$108/220$	$27/220$	$1/220$

y	0	1	2	3
$P(Y = y)$	$56/220$	$112/220$	$48/220$	$4/220$

6. Variable aléatoire continue

1)

a. Soit $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $x \leq y$.

On a, $F_X(y) = P(X \leq y) = \int_{-\infty}^{y} f_X(t)dt$

$= \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt + \int_{x}^{y} f_X(t)dt$ par Chasles

Par positivité de l'intégrale,

$\forall t \in \mathbb{R}, f_X(t) \geq 0 \Longrightarrow \int_{x}^{y} f_X(t)dt \geq 0$

$\Longleftrightarrow \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt + \int_{x}^{y} f_X(t)dt \geq \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$

$\Longleftrightarrow P(X \leq y) \geq P(X \leq x)$

$\Longleftrightarrow F_X(y) \geq F_X(x)$

Par définition, F_X est croissante sur $\mathbb{R}$.

b. Soit $x \in \mathbb{R}$, $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt = [F_X(t)]_{-\infty}^{x} = F_X(x) - \lim\limits_{t \to -\infty} F_X(t)$

On en déduit que $\lim\limits_{t \to -\infty} F_X(t) = 0$.

Par probabilités totales, $P(X \in \mathbb{R}) = 1 = \lim\limits_{t \to +\infty} F_X(t) - \lim\limits_{t \to -\infty} F_X(t)$

On en déduit que $\lim\limits_{t \to +\infty} F_X(t) = 1$.

c. $\forall a, b \in \mathbb{R}, P(a \leq X \leq b) = \int_{a}^{b} f_X(x)dx$

$= \int_{-\infty}^{b} f_X(x)dx + \int_{a}^{-\infty} f_X(x)dx$ par Chasles

$= \int_{-\infty}^{b} f_X(x)dx - \int_{-\infty}^{a} f_X(x)dx$

$= F_X(b) - F_X(a)$

2)

a. On a, par propriété, $\lim_{x\to+\infty} F_X(x) = 1 \Leftrightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)dx = 1$

$$\Leftrightarrow \int_{x\notin[0,4]} f_X(x)dx + \int_0^4 \alpha x dx = 1$$

$$\Leftrightarrow \int_0^4 \alpha x dx = 1$$

$$\Leftrightarrow \left[\alpha \frac{x^2}{2}\right]_0^4 = 1$$

$$\Leftrightarrow 8\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = 1/8.$$

b. On a, $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \alpha \frac{x^2}{2} & \text{si } 0 \leq x \leq 4 \\ 1 & \text{si } 4 < x \end{cases}$

c. On a, $\forall x \in \mathbb{R}, F_Y(x) = P(Y \leq x)$

$$= P(2X + 1 \leq x)$$

$$= P\left(X \leq \frac{x-1}{2}\right)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } \frac{x-1}{2} < 0 \\ \alpha \frac{\left(\frac{x-1}{2}\right)^2}{2} & \text{si } 0 \leq \frac{x-1}{2} \leq 4 \\ 1 & \text{si } 4 < \frac{x-1}{2} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \alpha \frac{(x-1)^2}{8} & \text{si } 1 \leq x \leq 9 \\ 1 & \text{si } 9 < x \end{cases}$$

De même, $\forall x \in \mathbb{R}, F_Z(x) = P(Z \leq x)$

$$= P(e^X \leq x)$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ P(X \leq \ln(x)) & \text{si } 0 < x \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } \ln(x) < 0 \\ \frac{\alpha \ln(x)^2}{2} & \text{si } 0 \leq \ln(x) \leq 4 \\ 1 & \text{si } 4 < \ln(x) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{\alpha \ln^2(x)}{2} & \text{si } 1 \leq x \leq e^4 \\ 1 & \text{si } e^4 < x \end{cases}$$

3)

a. On a, par définition, $\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)dx$

$$= \begin{cases} \int_{-\infty}^{x} 0dx & \text{si } x < 0 \\ \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_0^x \lambda e^{-\lambda x}dx & \text{si } 0 \leq x \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \int_0^x \lambda e^{-\lambda x}dx & \text{si } 0 \leq x \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^x & \text{si } 0 \leq x \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } 0 \leq x \end{cases}$$

b. On a, $\forall x, t \in \mathbb{R}_+, P(X > x + t | X > t) = \frac{P(X > x+t \cap X > t)}{P(X>t)}$

$$= \frac{P(X>x+t)}{P(X>t)}$$

$$= \frac{1-P(X \leq x+t)}{1-P(X \leq t)}$$

$$= \frac{1-\left(1-e^{-\lambda(x+t)}\right)}{1-\left(1-e^{-\lambda t}\right)}$$

$$= \frac{e^{-\lambda(x+t)}}{e^{-\lambda t}}$$

$$= e^{-\lambda(x+t)} \cdot e^{\lambda t}$$

$$= e^{-\lambda x}$$

$$= 1 - \left(1 - e^{-\lambda x}\right)$$

$$= 1 - P(X \leq x)$$

$$= 1 - \left(1 - P(X > x)\right)$$

$$= P(X > x)$$

La loi exponentielle est bien sans mémoire.

c. On a, $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx$

$$= \int_0^{+\infty} x\lambda e^{-\lambda x}dx$$

Par intégration par parties, on a,

$$E(X) = \left[-xe^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\left(-e^{-\lambda x}\right)dx$$

$$= \left[-xe^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} - \left[\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty}$$

Or, par croissances comparées, $\lim_{x \to +\infty} xe^{-x} = 0$ et $\lim_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$, d'où,

$E(X) = 0 - 0 - \left(0 - \frac{1}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda}$

d. On a, par théorème de transfert,

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)dx$$
$$= \int_0^{+\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx$$

Par intégration par parties successives, on a,

$$E(X^2) = \left[-x^2 e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} 2x\left(-e^{-\lambda x}\right)dx$$
$$= \left[-x^2 e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} dx$$
$$= \left[-x^2 e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + 2\left(\left[-x\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty}\left(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right)dx\right)$$
$$= \left[-x^2 e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + 2\left[-x\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty} + 2\int_0^{+\infty}\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}dx$$

Par croissances comparées, on retrouve,

$$E(X^2) = 0 - 0 + 2 \times (0 - 0) + 2 \times \left[-\frac{1}{\lambda^2}e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty}$$
$$= 2\left[-\frac{1}{\lambda^2}e^{-\lambda x}\right]_0^{+\infty}$$
$$= \frac{2}{\lambda^2}$$

Donc,

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$
$$= \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

7. Covariance

We have,

$$E(XY) = \sum_{x,y \in X(\Omega)\times Y(\Omega)} xyP(X = x, Y = y)$$
$$= 0 \times 0 \times \frac{10}{220} + 0 \times 1 \times \frac{40}{220} + \cdots + 3 \times 3 \times \frac{0}{220}$$
$$= 1 \times 1 \times \frac{60}{220} + 1 \times 2 \times \frac{18}{220} + 2 \times 1 \times \frac{12}{220}$$
$$= \frac{6}{11}$$

Moreover,

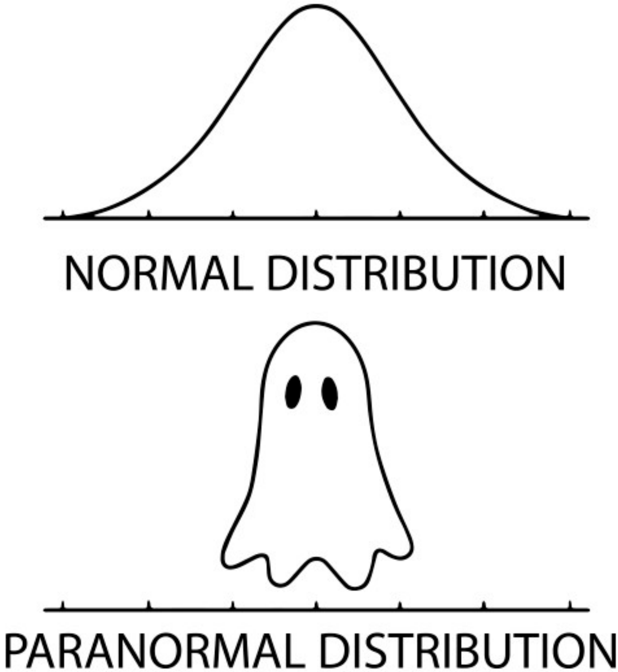
$$E(X) = \sum_{x \in X(\Omega)} xP(X = x) = 0 \times \frac{84}{220} + 1 \times \frac{108}{220} + 2 \times \frac{27}{220} + 3 \times \frac{1}{220} = \frac{3}{4}$$
$$E(Y) = \sum_{y \in Y(\Omega)} yP(Y = y) = 0 \times \frac{56}{220} + 1 \times \frac{112}{220} + 2 \times \frac{48}{220} + 3 \times \frac{4}{220} = 1$$

Thus,

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{6}{11} - \frac{3}{4} = -\frac{9}{44}$$

We can interpret Cov < 0 by indicating that when one variable increases in value, the other decreases, thus the two values are correlated, but negatively.

Concentration, loi des grands nombres



« Only small minds are impressed by large numbers. »

Arthur C. Clarke

Nous approfondirons les notions fondamentales de moyenne et variance d'un échantillon ainsi qu'établirons différentes inégalités probabilistes. La loi des grands nombres permet d'assurer la convergence de la moyenne d'un échantillon vers sa valeur théorique, quelle que soit la loi.

Sommaire

Cours

Exercices d'application

Exercices d'approfondissement

Correction des exercices

COURS

I. Moyenne empirique

1. Définition et propriétés

Soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ un échantillon de taille $n \in \mathbb{N}^*$ de variables aléatoires identiques et indépendantes.

Définition (Moyenne empirique)

La **moyenne empirique** M_n, ou **variable aléatoire moyenne**, est une variable aléatoire définie par :

$$M_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$$

Propriétés (Moyenne empirique)

On a les propriétés suivantes :

$$E(M_n) = E(X), V(M_n) = \frac{1}{n}V(X) \text{ et } \sigma(M_n) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sigma(X)$$

2. Loi des grands nombres

Soit M_n la moyenne empirique d'un échantillon de taille $n \in \mathbb{N}^*$ suivant la loi de la variable aléatoire X.

Théorème (Loi des grands nombres)

Pour tout $\delta > 0$, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} P(|M_n - E(X)| \geq \delta) = 0$$

Remarque

La **loi des grands nombres**, comme la **loi des petits nombres** ou encore le **théorème central limite**, repose sur un principe de convergence de la moyenne d'un échantillon qui convergera toujours vers l'espérance théorique pour une taille croissante. C'est une conséquence de l'inégalité de concentration elle-même conséquence de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

II. Inégalités

1. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

Soit X une variable aléatoire réelle.

Propriété (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)

Pour tout $\delta > 0$, on a :

$$P(|X - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{\delta^2}$$

2. Inégalité de concentration

Soit M_n la moyenne empirique d'un échantillon de taille $n \in \mathbb{N}^*$ suivant la loi de la variable aléatoire X.

Propriété (Inégalité de concentration)

Pour tout $\delta > 0$, on a :

$$\lim_{n \to +\infty} P(|M_n - E(X)| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{n\delta^2}$$

Exercices d'application

1. Application des inégalités

Soit X une variable aléatoire réelle et M_n la moyenne empirique d'un n-échantillon suivant la loi de X.

a. Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{4}{10}\right)$, déterminer n sachant que $P(0.2 < M_n < 0.6) \leq 0.95$.

b. Si $X \hookrightarrow \mathcal{B}\left(\frac{1}{10}\right)$, déterminer n sachant que $P(0.05 < M_n < 0.15) \leq 0.99$.

c. Montrer que $E((X-a)^2)$ est minimisé en $a = E(X)$.

d. Si $E(X) = \mu$ et $V(X) = \sigma^2$, déterminer k tel que $P(|X-\mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{10}$.

2. Espérance d'un échantillon

Soit X une variable aléatoire suivant la loi binomiale $\mathcal{B}\left(100, \frac{1}{3}\right)$ et M_n la moyenne empirique d'un n-échantillon suivant la loi de X. A l'aide d'un programme Python, déterminez la plus petite taille d'échantillon telle que la distance entre M_n et l'espérance théorique soit inférieure à 10^{-2}.

Exercices d'approfondissement

3. Estimation ponctuelle

L'**estimation ponctuelle** d'un paramètre θ d'une variable aléatoire X correspond à la recherche de la vraie valeur de θ à partir d'un échantillon supposé de cette loi. Parmi les méthodes d'estimation, le **maximum de vraisemblance** cherche à maximiser la probabilité que la valeur estimée de θ, notée θ_n, soit la vraie valeur. On utilise pour cela la fonction de vraisemblance $\mathcal{L}$ définie par :

$$\mathcal{L}_{(\theta,x_1,\dots,x_n)} = \prod_{i=1}^{n} P(X = x_i) = P(X = x_1) \times \dots \times P(X = x_n)$$

1) Supposons que X suive une loi binomiale $\mathcal{B}(15, p)$ où p est à estimer. La seule observation fournie par l'échantillon est $X_1 = 5$.
   a. Rappeler l'expression de $P(X = 5)$.
   b. Calculer $P(X = 5)$ pour des valeurs de p dans $\{0.0, 0.1, 0.2, \dots, 0.9, 1.0\}$.
   c. On admet que la fonction de vraisemblance $\mathcal{L}$ admet un maximum atteint au même point que le maximum du logarithme de la fonction de vraisemblance $\log \mathcal{L}$. Déterminer alors la meilleure estimation de p.
   d. Discuter des différents problèmes qu'une telle méthode peut poser.

2) Supposons que X suive une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ où p est à estimer. Pour rappel, la loi géométrique correspond au nombre de répétitions d'un schéma de Bernoulli jusqu'au premier succès.
   a. Déterminer l'expression de $P(X = k)$ où le domaine de k est à préciser.
   b. Soit $(X_1, \dots, X_n)$ un n-échantillon de la loi de X. Déterminer par la méthode du maximum de vraisemblance une estimation de p.

4. Intervalle de confiance

Un **intervalle de confiance** permet d'estimer de manière vaste un paramètre, à l'inverse de sa version ponctuelle étudiée à l'exercice 3. On définit le **niveau de confiance** d'un intervalle par $1-\alpha$ avec $\alpha \in [0,1]$ dit **risque** et on interprète le niveau de confiance comme la probabilité que le paramètre estimé appartienne à l'intervalle de confiance, c'est-à-dire, on construit I_p l'intervalle de confiance d'un paramètre p tel que $P(p \in I_p) = 1-\alpha$. On cherche à estimer la probabilité d'obtenir « pile » par un lancer de pièce non équilibrée. Soit $(P_i)_{1\leq i\leq n}$ un $n \in \mathbb{N}^*$ échantillon de variables aléatoires ayant pour loi P qui renvoie 1 si on obtient pile et 0 sinon après le lancer de la dite pièce.

a. Déterminer la loi de P.

b. Montrer que la moyenne empirique P_n de l'échantillon est un estimateur **sans biais** de p, c'est-à-dire que $E(P_n) = p$.

c. Interpréter $V(P_n)$.

d. Sur 100 essais, on remarque que 74 renvoie pile, estimer ponctuellement une valeur pour p.

e. D'après le **théorème central-limite**, on retrouve que $P(p \in I_p) = 95\%$ revient à établir $\left|\frac{P_n-p}{1/\sqrt{n}}\right| \leq 1.96$, déterminer I_p.

Correction des exercices

1. Application des inégalités

1)

a. On cherche à centrer les inégalités avant d'appliquer le théorème d'inégalité de concentration.

On a, $P(0.2 < M_n < 0.6) \leq 0.95 \Leftrightarrow P(-0.2 < M_n - 0.4 < 0.2) \leq 0.95$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow P(|M_n - 0.4| < 0.2) \leq 0.95 \\
&\Leftrightarrow 1 - P(|M_n - 0.4| \geq 0.2) \leq 0.95 \\
&\Leftrightarrow P(|M_n - 0.4| \geq 0.2) \geq 0.05 \\
&\Leftrightarrow P(|M_n - E(X)| \geq \delta) \geq 0.05 = \tfrac{V(X)}{n\delta^2} \\
&\Longrightarrow 0.05 = \tfrac{V(X)}{n\delta^2} \\
&\Leftrightarrow n = \tfrac{V(X)}{0.05\delta^2} = \tfrac{0.4 \cdot 0.6}{0.05 \cdot (0.2)^2} = 120
\end{aligned}$$

b. On cherche à centrer les inégalités avant d'appliquer le théorème d'inégalité de concentration.

On a, $P(0.05 < M_n < 0.15) \leq 0.99 \Leftrightarrow P(-0.05 < M_n - 0.1 < 0.05) \leq 0.99$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow P(|M_n - 0.1| < 0.05) \leq 0.99 \\
&\Leftrightarrow 1 - P(|M_n - 0.1| \geq 0.05) \leq 0.99 \\
&\Leftrightarrow P(|M_n - 0.1| \geq 0.05) \geq 0.01 \\
&\Leftrightarrow P(|M_n - E(X)| \geq \delta) \geq \tfrac{V(X)}{n\delta^2} \\
&\Longrightarrow 0.01 = \tfrac{V(X)}{n\delta^2} \\
&\Leftrightarrow n = \tfrac{V(X)}{0.01\delta^2} = \tfrac{0.1 \cdot 0.9}{0.01 \cdot (0.05)^2} = 3600
\end{aligned}$$

c. La fonction $E : a \mapsto E((X-a)^2) = E(X^2) - 2aE(X) + a^2$ est un polynôme du second degré en a, donc par théorème dérivable sur $\mathbb{R}$.

On a, $\forall a \in \mathbb{R}, E'(a) = 2\big(a - E(X)\big)$, or $E'(a)$ s'annule en $a = E(X)$.

E étant un polynôme du second degré au coefficient dominant positif, E admet un minimum en $a = E(X)$.

d. D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, on a,

$$P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{10} \Leftrightarrow \begin{cases} \delta = k\sigma \\ \frac{\sigma^2}{\delta^2} = \frac{1}{10} \end{cases} \Longrightarrow k = \sqrt{10}$$

2. Espérance d'un échantillon

On a,

```
import random

n = 100
p = 1/3
mu = n * p
sigma = n * p * (1 - p)

Mn = 0
nech = 0

def binom(n, p) :
    Mi = 0
    for i in range(n) :
        if random.randint(1, 3) <= 1 :
            Mi += 1
        else :
            Mi += 0
    return Mi

while abs(Mn - mu) > 10 ** (-2) :
    nech = nech + 1
    Mn = 0
    for k in range(nech) :
        Mn += binom(n, p)
    Mn = Mn / nech

print(Mn, nech)
```

On retrouve en moyenne une taille d'échantillon environnant les 100. Bien sûr, il se peut par chance qu'un échantillon plus court suffisse. Toutefois, en répétant l'expérience plusieurs fois et en faisant la moyenne des tailles moyennes, on obtient un résultat environnant les 100 échantillons.

3. Estimation ponctuelle

1)

a. On a, $P(X=5)=\binom{15}{5}p^5(1-p)^{10}$

b. On a,

p	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$P(X=5)$	0.00	0.01	0.10	0.20	0.19	0.10
p	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0	
$P(X=5)$	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00	

On remarque qu'à 10^{-1}, $\widehat{p_n}=0.30$ est la meilleure estimation de p.

c. On a, $\mathcal{L}_{\theta,x_1}=P(X=5)=\binom{15}{5}p^5(1-p)^{10}$

Donc, $\ln\left(\mathcal{L}_{\theta,x_1}\right)=\ln\binom{15}{5}+5\ln(p)+10\ln(1-p)$

Par somme de fonctions dérivables sur $]0,1[$, $\ln\mathcal{L}$ est dérivable sur $]0,1[$ telle que pour tout $p\in]0,1[, \ln'\left(\mathcal{L}_{\theta,x_1}\right)=\frac{5}{p}+\frac{-10}{1-p}=\frac{5(1-p)-10p}{p(1-p)}=\frac{5-15p}{p(1-p)}$

Donc, le maximum de vraisemblance est maximisé pour $p=1/3$.

d. Lorsque plusieurs paramètres sont présents, on doit dériver la fonction suivant chaque paramètre, la notion de **différentielle** n'étant pas au programme, on ne pourrait pas appliquer cette méthode à une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$. De plus, la méthode cherche à trouver les paramètres tels que les observations font sens. Or, on suppose une loi dont l'hypothèse n'est aucunement validée et on estime des paramètres à partir d'observations qui pourraient être **aberrantes**, c'est-à-dire non représentatives de la réelle population. Par exemple, supposons une loi de Bernoulli de probabilité 0.1, si l'on observe par chance 3 valeurs qui sont $\{1,\ 0,\ 0\}$, alors p est estimé à 0.333, ce qui est très loin de la réalité. La méthode est donc sensible aux valeurs aberrantes et dépend indéniablement de la taille de l'échantillon.

2)

a. Une loi géométrique est comparable à une loi binomiale à 1 réussite qui apparaît au dernier essai. On a, $\forall k \in \mathbb{N}, P(X=k) = p(1-p)^k$

b. On a, $\mathcal{L}_{p,x_1,\ldots,x_n} = \prod_{i=1}^{n} P(X = x_i)$
$= \prod_{i=1}^{n} p(1-p)^{x_i}$
$= p^n(1-p)^{\sum_{i=1}^{n} x_i}$
$= p^n(1-p)^{\sum_{i=1}^{n} x_i}$

Donc, $\ln\left(\mathcal{L}_{p,x_1,\ldots,x_n}\right) = n\ln(p) + \sum_{i=1}^{n} x_i \ln(1-p)$

Par somme de fonctions dérivables sur $]0,1[$, $\ln(\mathcal{L})$ est dérivable sur $]0,1[$ telle que pour tout $p \in]0,1[$, on a, $\ln'\left(\mathcal{L}_{p,x_1,\ldots,x_n}\right) = \frac{n}{p} - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{1-p}$

Donc, $ln'(\mathcal{L}) = 0 \Leftrightarrow \frac{n}{p} - \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{1-p} = 0$
$\Leftrightarrow n(1-p) = p\sum_{i=1}^{n} x_i$
$\Leftrightarrow \frac{1-p}{p} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$
$\Leftrightarrow \frac{1}{p} = 1 + \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = 1 + M_n$
$\Leftrightarrow p = \frac{1}{1+M_n}$

Un estimateur de p est $\widehat{P_n} = \frac{1}{1+M_n}$.

4. Intervalle de confiance

a. P suit une loi de Bernoulli de paramètre p où p est la probabilité d'obtenir pile après lancer de la pièce.

b. Soit $P_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} P_i$, on a,

$$\begin{aligned} E(P_n) &= E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} P_i\right) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(P_i) && \text{linéarité} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(P) \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} p \\ &= p \end{aligned}$$

Ainsi, P_n est bien un estimateur sans biais de p.

c. Par théorème, $V(P_n) = \frac{V(P)}{n} = \frac{p(1-p)}{n}$

Quant il s'agit d'estimateur, la variance prend un tout autre sens que celui habituel, il s'agit de l'erreur quadratique moyenne de la valeur à prédire. Ainsi, plus n est élevé, c'est-à-dire, plus on a de réalisations de la loi pour estimer $E(P_n) = p$, plus est précise l'estimation.

d. Par estimation, on retrouve $p = 74/100$.

e. On a,

$$\begin{aligned} \left|\frac{P_n-p}{1/\sqrt{n}}\right| \leq 1.96 &\Leftrightarrow -1.96 \leq \frac{P_n-p}{1/\sqrt{n}} \leq 1.96 \\ &\Leftrightarrow -\frac{1.96}{\sqrt{n}} \leq P_n - p \leq \frac{1.96}{\sqrt{n}} \\ &\Leftrightarrow \frac{1.96}{\sqrt{n}} \geq p - P_n \geq -\frac{1.96}{\sqrt{n}} \\ &\Leftrightarrow P_n + \frac{1.96}{\sqrt{n}} \geq p \geq P_n - \frac{1.96}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

Finalement, $I_p = \left[P_n \pm 1.96\frac{1}{\sqrt{n}}\right] = [0.544, 0.936]$

Programmation

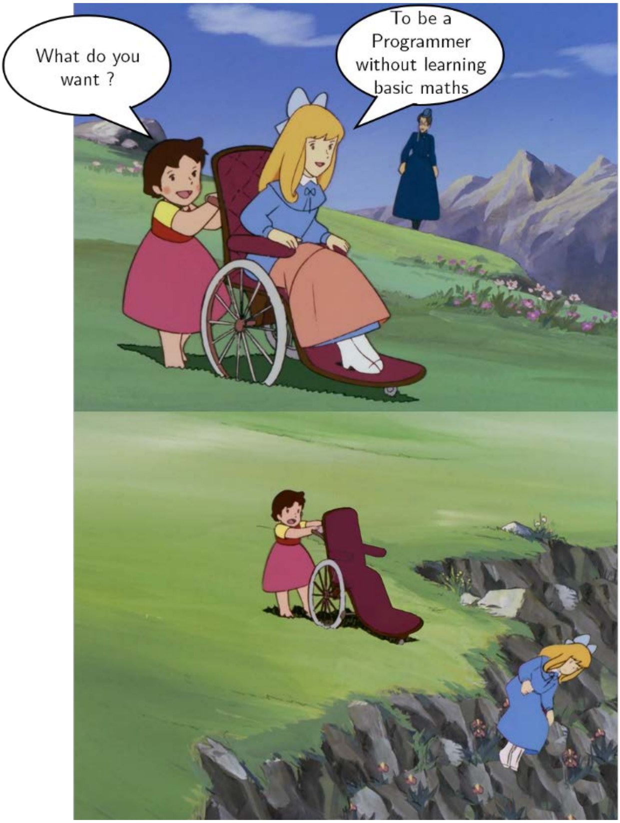
« Hello world. »

Probablement vous lors de votre première séance informatique.

La programmation, du grec antique *programma* (πρόγραμμα) « ordre du jour », correspond à l'élaboration numérique d'algorithmes suivant une syntaxe spécifique au langage.

La programmation ne cesse de croître en importance du fait de notre dépendance croissante sur l'informatique et sa capacité de résoudre en une seconde ce qu'un humain n'arriverait pas en un siècle, on retrouve des applications du calcul automatisé à tous les domaines, il n'est donc pas étonnant que la programmation soit inclus dans des formations moins scientifiques que d'autres.

Dans cette partie, nous approfondirons nos connaissances du langage Python.



« Everyone knows that any scripting language shootout that doesn't show Python as the best language is faulty by design. »

Max M

Python est un langage de programmation reconnu pour sa simplicité d'utilisation ainsi que ses performances optimales, donnant aux novices et expérimentés une raison d'opter pour ce langage. Nous approfondirons les notions de la programmation étudiées les années précédentes ainsi qu'appliquerons ces outils dans la résolution de multiples problèmes concrets.

Sommaire

Cours

Exercices d'application

Exercices d'approfondissement

Correction des exercices

COURS

I. Généralités

1. Variables

Définition (Variable)

Une **variable** correspond à un objet informatique, c'est-à-dire un paquet de données stockées par la machine, qui possède un type. En Python, on ne précise pas le type, il est implicite. Les différents types sont : int (entier), float (réel), str (chaîne de caractères), bool (booléen), list (liste d'objets) et tuple (n-uplet).

2. Instructions conditionnelles

Définition (Boucle for)

La boucle "for k in range(a, b)" permet de répéter une suite de commandes $b-a-1$ fois. La variable k prend les valeurs comprises entre a et $b-1$. L'écriture "for k in range(b)" admet par défaut $a=1$ et l'écriture "for k in range(a, b, c)" permet de modifier le pas par défaut de $c=1$.

Définition (Boucle while)

La boucle "while condition" permet de répéter une suite de commandes tant que condition n'est pas True.

Définition (Boucle in)

La boucle "for x in X" permet de répéter une suite de commandes avec x qui prend toutes les valeurs de la liste X.

Définition (Condition if)

La commande "if condition" permet d'effectuer une suite de commandes si la condition est True, on peut rajouter la commande "elif condition2" pour effectuer une suite de commandes si condition1 est False et condition2 est True ou encore "else" pour effectuer une suite de commandes si condition est False.

II. Fonctions et modules

1. Fonctions intégrées à Python

Propriété (Fonctions natives)

Les fonctions suivantes sont intégrées à Python :

- **print(x)** : On affiche dans la console l'élément x.
- **input(str)** : On affiche la chaîne de caractères str et on demande à l'utilisateur de rentrer des données, input renvoie la réponse.
- **float(x), int(x), str(x) :** On convertit x au type souhaité.
- **x**n, a//b, a%b :** On renvoie x^n, le quotient de a par b et le reste de la division euclidienne de a par b.
- **x = y** : On affecte à x la valeur y.

2. Modules essentiels

Module (import math)

La commande "import math" permet d'accéder à différentes méthodes issues du monde mathématique, notamment math.factorial(x), math.exp(x), math.cos(x), math.sin(x), math.sqrt(x), math.log(x), math.pi et bien d'autres.

Module (import numpy)

La commande "import numpy" permet d'accéder à différentes méthodes simplifiant les constructions de listes, notamment numpy.array(liste), numpy.arange(n, m, p), numpy.linspace(a, b, h) et bien d'autres.

Remarque

Pour simplifier l'appel de ces modules, on peut écrire "import numpy as np", ainsi, on remplace le « numpy » par « np » à chaque fois qu'on souhaite appeler une de ses méthodes.

Exercices d'application

1. Applications du langage Python

Résoudre sur Python les problèmes suivants :

1) Indiquer si les commandes suivantes sont valides :

a.

```
a = 10
b = a
b = c
5 = a
1 + 2 = a
y = 3 + 3
b = a + 5
a = a + 5
```

b.

```
i = 0
while i < 10 :
    print(i)
```

c.

```
a = "True"
b = 3
c = False
d = 1.7
e = 'r'
f = 1,2
```

2) Étudions le module random.

a. Commenter les méthodes random.random() et random.randint().

b. Générer un réel aléatoire compris entre 100 et 200.

c. Générer un entier compris entre 1 et 6.

3) Étudions la méthode input().

a. Associez à input() la variable a. Déterminer son type à l'aide de type()

b. Que faire si l'on souhaite transformer cette variable saisie par l'utilisateur en un entier ?

4) On souhaite évaluer la supériorité d'un réel à un autre.

a. Écrire une méthode qui prend en argument deux réels a et b et renvoie True si $a > b$ et False sinon.

b. Modifier la méthode de telle sorte à renvoyer le plus grand des nombres.

5) On souhaite déterminer les racines d'un polynôme de degré $n \leq 2$.
   a. Écrire une méthode qui demande à l'utilisateur trois réels a, b et c et renvoie les racines du polynôme $ax^2 + bx + c$. On distinguera les cas.
   b. Écrire une méthode qui demande à l'utilisateur quatre réels a, b, c et α et renvoie True si α est solution de $ax^2 + bx + c = 0$ et False sinon.

6) On souhaite simuler un jet de dé.
   a. Écrire un algorithme où l'on lance un dé équilibré à six faces jusqu'à ce qu'on obtienne un six, on affichera chaque résultat de lancer.
   b. Modifier l'algorithme de sorte à ce qu'il affiche le nombre d'étapes nécessaire avant d'obtenir un six à la place de chaque résultat de lancer.
   c. Modifier l'algorithme de sorte à ce qu'il affiche le nombre d'étapes nécessaires pour obtenir deux six.
   d. Modifier l'algorithme de sorte à ce qu'il affiche le nombre d'étapes nécessaires pour obtenir deux six successifs.

7) On souhaite étudier le climat tropical de la capitale Phnom Penh au Cambodge. On a regroupé ces dix dernières années les températures maximales moyennes en °C suivantes :

Jan.	Fév.	Mars	Avril	Mai	Juin	Jui.	Août	Sep.	Oct.	Nov.	Déc.
31	33	34	35	34	33	32	32	31	31	30	30

   a. Construire une liste mois et températures qui reprend ces valeurs.
   b. Écrire un algorithme qui calcule la température moyenne annuelle.
   c. Écrire un algorithme qui renvoie la température la plus élevée ainsi que son mois d'apparition.

8) Un palindrome est un mot qui peut se lire de la même façon quel que soit le sens de lecture. Écrire une méthode qui prend en argument une chaîne de caractères et renvoie True s'il s'agit d'un palindrome et False sinon.

2. Algorithmes de tri et de recherche

Les algorithmes de tri et de recherche permettent d'ordonner une liste d'après une relation donnée ainsi que d'optimiser la recherche d'un élément dans une liste suivant un critère donné. Soit $L = [1, 3, 4, 1, 2, 6, 9]$ une liste à implémenter sur Python.

1) Le **tri à bulles** est un tri qui permute deux à deux les éléments d'une liste en ordre croissant. On fait donc translater chaque élément de la liste vers la fin jusqu'à trouver plus grand que ce dernier.
   a. Écrire une méthode qui prend en argument une liste et la renvoie triée.
   b. Tester la méthode sur la liste L.

2) Le **tri fusion** est un tri défini par le code suivant :

```
def tri_fusion(L) :
    if len(L) <= 1 :
        return L
    else :
        L1 = [L[x] for x in range(len(L)//2)]
        L2 = [L[x] for x in range(len(L)//2, len(L))]
        return fusion(L1, L2)

def fusion(L1, L2) :
    if L1 == [] :
        return L2
    elif L2 == [] :
        return L1
    else :
        if L1[0] < L2[0] :
            return [L1[0]] + fusion(L1[1:], L2)
        else :
            return [L2[0]] + fusion(L1, L2[1:])
```

   a. Sur quel concept repose ce tri ?
   b. Tester la méthode sur la liste L.

3) Le **recherche par balayage** est un algorithme qui parcourt linéairement de gauche à droite tous les éléments d'une liste à la recherche d'une variable.
   a. Écrire une méthode qui prend en argument une liste et une variable et renvoie True si la variable est contenue dans la liste et False sinon.
   b. Modifier la méthode de sorte à ce qu'elle renvoie l'index de la première apparition de la variable dans la liste. On renverra -1 si la variable n'apparaît pas.

3. Complexité en temps et en espace

L'analyse de **complexité en temps** et **en espace** consiste à évaluer le temps d'exécution d'un algorithme ainsi que la mémoire occupée pendant son exécution. Nous étudierons la complexité en temps dans le pire cas tout au long de l'exercice. Les opérations élémentaires comme l'affectation "x=1", le produit, la somme ainsi que la vérification "x==y" et le retour "return x" ont une complexité 1. La complexité d'un algorithme correspond à la somme des complexités des opérations qui la constituent. Lorsque le nombre de répétitions est inconnu, on notera la complexité en fonction de n, par exemple, une boucle "for i in range(n)" s'effectue n fois, la complexité est donc n. Par exemple :

```
x = 1                                       #affectation : 1
n = int(input("Veuillez entrer un seuil"))  #affectation : 1
while x <= n :                              #vérification : 1 * n
    x += 1                                      #affectation+somme : (1 + 1) * n
print(x)                                    #affichage : 1
                                            #complexité : C(n) = 1+1+n+2n+1 = 3(n+1)
```

1) Après avoir les avoir décrits, déterminez la complexité des codes suivants :

a.

```
def complexiteA(n) :
    somme = 0
    for i in range(n) :
        somme += i
    return somme
```

b.

```
def complexiteB(L) :
    maximum = L[0]
    for i in range(1, len(L)) :
        if maximum < L[i] :
            maximum = L[i]
    return maximum
```

c.

```
def complexiteC(L) :
    doublons = 0
    for i in range(len(L)) :
        for j in range(len(L)) :
            if L[i] == L[j] :
                doublons += 1
    return doublons
```

d.

```
def complexiteD(n) :
    multiples = 0
    for i in range(n) :
        if (n % 3 == 0) :
            multiples += 1
    return multiples
```

2) On cherche à comparer expérimentalement le tri à bulles du tri fusion.

   a. Importer le module time et matplotlib.pyplot. La méthode time.time() renvoie un float correspondant au temps actuel. La méthode pyplot.plot(X, Y) permet d'ajouter une courbe Y = f(X) à un graphique et pyplot.show() permet d'afficher toutes les courbes du graphique. Consulter la documentation pour mieux comprendre l'utilisation et la personnalisation de ces deux méthodes.

b. Effectuer différents tests sur des listes de tailles croissantes pour comparer l'évolution du temps de calcul des tris de l'exercice 2. Afficher les temps de calcul. Que conclure ?

c. Conjecturer la complexité asymptotique de chaque méthode.

4. Récursivité d'algorithmes

La rédaction d'algorithmes en **récursivité** est similaire à la notion de suite récurrente, où l'on appelle le terme précédent de la suite pour calculer le suivant. La récursivité remplace la présence d'une boucle par l'appel de la fonction elle-même. Elle contient de plus une condition d'arrêt pour prévenir l'apparition d'une récursivité infinie. Par exemple, la somme des n premiers entiers naturels non nuls donne en récursif :

```
def Somme(n) :
    if n <= 0 :
        return 0
    else :
        return n + Somme(n-1)
```

On remarque que quelle que soit l'entier n, la fonction respecte bien la définition de $\sum_{k=1}^{n} k = \begin{cases} 1+2+\cdots+n & \text{si } n > 0 \\ 0 & \text{si } n \leq 0 \end{cases}$

Écrire sur Python la version itérative (avec boucles) et récursive (sans boucles) des fonctions suivantes :

a. $f(n) = n!$

b. $f(n) = \sum_{k=1}^{n} k^2$

c. f renvoie la somme des éléments d'une liste d'entiers.

5. A la recherche de la combinaison secrète

Vous voilà devant la dernière épreuve d'un escape game consistant à déterminer une combinaison à quatre chiffres. On vous indique que la combinaison est le résultat de la somme de deux entiers naturels non nuls n_1 et n_2, tous deux inférieurs à 1000, tels que n_1 et n_2 sont les sommes de trois cubes, des nombres triangulaires et parfaits. Une **somme de trois cubes** est un entier naturel n qui peut sécrire comme la somme de trois cubes tel qu'il existe $n_1, n_2, n_3 \in \mathbb{N}, n = n_1^3 + n_2^3 + n_3^3$. Un **nombre triangulaire** est un entier naturel n tel qu'il existe $k \in \mathbb{N}, n = \frac{k(k+1)}{2}$. Un **nombre parfait** est un entier naturel n tel que la somme de ses diviseurs (n exclu) est égale à n. Conclure quant à la combinaison secrète.

Exercices d'approfondissement

6. Introduction à la Data Science

La **Data Science** correspond à l'étude de données ainsi que leur représentation adéquate à travers l'utilisation des mathématiques, de l'informatique et des statistiques. La maîtrise de ce domaine particulier permet le traitement le plus souvent automatique de masses de données. Cette fouille permet de discuter de nombreuses hypothèses comme la corrélation entre deux variables ou encore l'approximation d'une donnée incomplète. On segmente un quartier en une grille de 8 colonnes et 8 lignes telle que chaque zone contienne le nombre d'interventions effectués par les pompiers :

3	4	8	6	1	1	4	2
2	4	9	7	1	6	3	7
8	1	2	3	5	1	8	5
4	5	6	1	9	4	9	6
8	5	6	8	3	5	8	1
9	5	7	7	1	6	2	8
9	5	7	5	7	3	9	1
8	1	1	3	2	4	5	7

a. L'objectif consiste à déterminer la position optimale pour une caserne de pompiers. Suivant quels facteurs devrait-on choisir cet emplacement ?

b. La seule contrainte qu'on retiendra est celle de minimiser les distances entre la caserne et les zones. Supposons que chaque case contienne la valeur 1, quelle est la position optimale de la caserne ?

c. La **fonction objective**, correspond ici à la distance entre la case de la caserne (x_c, y_c) et les autres cases (x, y) de la grille coefficientées par le nombre d'interventions effectués n_{xy}, le problème revient alors à :

$$(x_c, y_c) := \min_{(x,y)\in\{1,\dots,8\}^2} \sum\nolimits_{(x,y)\in\{1,\dots,8\}^2} n_{xy} \cdot \sqrt{(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2}$$

A l'aide de Python, déterminez la position optimale pour la nouvelle caserne du quartier.

d. Supposons que le nombre d'interventions d'une case soit inconnu et qu'on souhaite l'approximer par la **moyenne arithmétique** et **moyenne géométrique**. A l'aide de Python, déterminez le nouveau tableau des interventions estimées. On rappelle que les moyennes arithmétique et géométrique sont définies par :

	a	
b	n	d
	c	

$$n_{\text{approximé arithmétiquement}} = \frac{a+b+c+d}{4}$$

$$n_{\text{approximé géométriquement}} = \sqrt[4]{a \times b \times c \times d}$$

On conservera les valeurs déjà présentes aux coins et bords du quartier dans un soucis de standardisation du programme.

e. Modifiez les tableaux obtenus à la question d. pour remplacer les approximations arithmétiques et géométriques du nombre d'interventions par les **résidus standardisés** carrés définis par :

$$r^2 = \frac{\left(n_{\text{réel}} - n_{\text{approximé}}\right)^2}{n_{\text{réel}}}$$

f. Les résidus sont une forme d'évaluation d'erreur de notre modélisation. Faites la somme de tous les résidus pour chaque tableau trouvé à la question e. et déterminez l'approximation qui minimise les erreurs.

g. Discutez des causes qui pourraient amener notre approximation à être insuffisante.

Correction des exercices

1. Applications du langage Python

1)

a. La troisième ligne est invalide. On affecte à b une valeur non définie.
La quatrième ligne est invalide. On affecte à une constante une valeur.
La cinquième ligne est invalide. On affecte à une constante une valeur.
Le reste des lignes sont valides.

b. La commande est valide, mais incomplète. Une boucle « while » contient obligatoirement une consigne permettant son arrêt, autrement on l'effectue une infinité de fois, comme c'est le cas ici. Il faudrait rajouter une ligne indentée dans le « while » comme « i = i + 1 » de sorte à sortir à un moment de la boucle.

c. Toutes les commandes sont valides.

2)

a. La méthode « random.random() » semble renvoyer un réel entre 0 et 1 tandis que la méthode « random.randint() » nécessite deux arguments a et b tels que la méthode renvoie un entier compris entre a et b.

b. Soit $X = \text{random.random}(\,)$
Or, $X \in [0,1] \Leftrightarrow 100X \in [0,100] \Leftrightarrow 100X + 100 \in [100,200]$
Ainsi, la commande est « 100 * random.random() + 100 ».

c. La commande est « random.randint(1, 6) ».

3)

a. La variable a est un string.

b. On doit utiliser la méthode int(a) pour convertir une entrée comme « 2 » en 2.

4)

a.

```
def superieur(a, b) :
    if a > b :
        return True
    else :
        return False
```

b.

```
def superieur(a, b) :
    if a > b :
        return a
    else :
        return b
```

5)

a. On doit distinguer trois formes du polynôme : parabole ($a \neq 0$), droite affine ($b \neq 0$) et droite verticale ($c \neq 0$).

```
def racine(a, b, c) :
    if a == 0 :
        if b == 0 :
            if c == 0 :
                return "tous les réels"
            else :
                return None
        else :
            return - c / b
    else :
        delta = b**2 - 4 * a * c
        if delta < 0 :
            return None
        elif delta == 0 :
            x0 = -b / (2 * a)
            return x0

        else :
            x1 = (-b + delta**(0.5)) / (2 * a)
            x2 = (-b - delta**(0.5)) / (2 * a)
            return (x1, x2)
```

b.

```
def racine(a, b, c, alpha) :
    if a * alpha**2 + b * alpha + c == 0 :
        return True
    else :
        return False
```

6)

a.

```python
import random

de = 0
while de != 6 :
    de = random.randint(1, 6)
    print(de)
```

b.

```python
import random

de = 0
etape = 0
while de != 6 :
    de = random.randint(1, 6)
    etape = etape + 1
print(etape)
```

c.

```python
import random

de1 = 0
etape = 0
while de1 != 6 :
    de1 = random.randint(1, 6)
    etape = etape + 1

de2 = 0
while de2 != 6 :
    de2 = random.randint(1, 6)
    etape = etape + 1

print(etape)
```

d.

```python
import random

de1 = 0
etape = 0
while de1 != 6 :
    de1 = random.randint(1, 6)
    etape = etape + 1
    if de1 == 6 :
        de2 = random.randint(1, 6)
        if de2 == 6 :
            print(etape)
        else :
            de1 = 0
```

7)

a.

```
mois = ["jan", "fev", "mars", "avril",
        "mai", "juin", "jui", "aout",
        "sept", "oct", "nov", "dec"]

temp = [31, 33, 34, 35,
        34, 33, 32, 32,
        31, 31, 30, 30]
```

b.

```
moytemp = 0
for t in temp :
    moytemp = moytemp + t
print(moytemp / len(temp))
```

La température moyenne est 32.2°C

c.

```
maxtemp = ("jan", temp[0])
for i in range(len(temp)) :
    if maxtemp[1] < temp[i] :
        maxtemp = (mois[i], temp[i])
print(maxtemp)
```

La température maximale est 35.0°C en avril.

8) Les options sont diverses, voici deux codes répondant à la question,

```
def palindrome(mot) :
    if mot == mot[::-1] :
        return True
    else :
        return False

def palindrome(mot) :
    for i in range(len(mot)) :
        if mot[i] != mot[len(mot) - 1 - i] :
            return False
    return True
```

2. Algorithmes de tri et de recherche

1)

a.

```
L = [1, 3, 4, 1, 2, 6, 9]

def tri_bulles(L) :
    for i in range(len(L)) :
        for j in range(len(L) - 1) :
            if L[j] > L[j+1] :
                L[j], L[j+1] = L[j+1], L[j]
```

b. On retrouve, $L = [1, 1, 2, 3, 4, 6, 9]$

2)

a. Le tri repose sur le principe de **diviser pour régner**, on segmente le problème en sous-problèmes identiques, ici trier une liste, et on réassemble le tout une fois fait.

b. On retrouve, $L = [1, 1, 2, 3, 4, 6, 9]$

3)

a.

```
def balayage(L, var) :
    for l in L :
        if l == var :
            return True
    return False
```

b.

```
def balayage(L, var) :
    for i in range(len(L)) :
        if L[i] == var :
            return i
    return -1
```

3. Complexité en temps et en espace

1) On considèrera la complexité dans le pire des cas, à savoir on rentrera dans toutes les boucles possibles et conditions vérifiées, peu importe que cela soit possible en actualité ou non.

   a. L'algorithme réalise la somme des n premiers entiers.

$$C_A(n) = \underbrace{1}_{\substack{\text{affectation}\\ \text{somme=0}}} + \underbrace{n}_{\substack{\text{boucle}\\ \text{for}}} \times \left(\underbrace{1}_{\substack{\text{calcul}\\ \text{somme+1}}} + \underbrace{1}_{\substack{\text{affectation}\\ \text{somme=somme+1}}} \right) + \underbrace{1}_{\substack{\text{retour}\\ \text{somme}}}$$
$$= 2(n+1)$$

   b. L'algorithme renvoie le maximum d'une liste. Soit $n = len(L)$
   $C_B(n) = 1 + (n-1) \times (1+1) + 1 = 2n$

   c. L'algorithme renvoie le nombre de doublons, en comptant de plus chaque valeur déjà présente, car on ne fait pas la distinction « i != j », d'une liste.
   $C_C(n) = 1 + n \times n \times (1+2) + 1 = 3n^2 + 2$

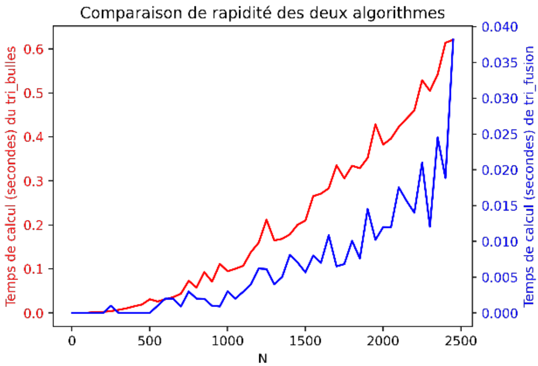
   d. L'énoncé contient une erreur, on devrait avoir « i%3 » au lieu de « n%3 », de plus on sait que cela n'arrive que tous les 3 tours, on considèrera tout de même que cela arrive tout le temps dans le pire des cas.
   $C_D(n) = 1 + n \times (2+2) + 1 = 4n + 2$

2)

a.

b. et c.

```
N = [i for i in range(1, 1000, 100)]
TB = []
TF = []

import random
import time
import matplotlib.pyplot as plt

# On teste pour différentes complexité d'espaces n
for n in N :
    L = []
    for i in range(n) :
        L.append(random.randint(1, 1000))
    # On construit aléatoirement une liste L de taille n

    # On teste le tri à bulles
    # On réalise des copies afin de ne pas écraser la liste originelle
    l = L.copy()
    t = time.time()
    tri_bulles(l)
    TB.append(time.time() - t)

    l = L.copy()
    t = time.time()
    tri_fusion(l)
    TF.append(time.time() - t)

plt.plot(N, TB)
plt.plot(N, TF)
plt.show()

linear = []
log = []

import math

for n in N :
    linear.append(n)
    log.append(math.log(n))

plt.plot(N, linear)
plt.plot(N, log)
```



On remarque que le tri à bulle à une complexité linéaire $C(n)$ tandis que le tri fusion à une complexité logarithmique $C(\log(n))$. Cela s'explique par le fait que la segmentation en deux de chaque liste en 2^m étapes à l'inverse du tri à bulle qui se fait en n étapes.

4. Récursivité d'algorithmes

a.

```python
def factorialiter(n) :
    N = 1
    for i in range(1, n+1) :
        N = N * i
    return N

def factorialrec(n) :
    if n == 0 :
        return 1
    else :
        return n * factorialrec(n-1)
```

b.

```python
def sumsquareiter(n) :
    N = 0
    for i in range(n+1) :
        N = N + i**2
    return N

def sumsquarerec(n) :
    if n == 0 :
        return 0
    else :
        return n**2 + sumsquarerec(n-1)
```

c.

```python
def sumlistiter(L) :
    N = 0
    for l in L :
        N = N + l
    return N

def sumlistrec(L) :
    if len(L) == 0 :
        return 0
    else :
        return L.pop() + sumlistrec(L)
```

5. A la recherche de la combinaison secrète

```
somme_trois_cubes = []
parfaits = []
triangulaires = []

for n in range(0, 1000) :
    #somme_trois_cubes
    for c1 in range(0, int(n**(1/3)) + 1) :
        for c2 in range(0, int(n**(1/3)) + 1) :
            for c3 in range(0, int(n**(1/3)) + 1) :
                if c1**3 + c2**3 + c3**3 == n :
                    somme_trois_cubes.append(n)
                    break
            if c1**3 + c2**3 + c3**3 == n :
                break
        if c1**3 + c2**3 + c3**3 == n :
            break

    #parfaits
    P = 0
    for p in range(1, n) :
        if n%p == 0 :
            P += p
    if P == n :
        parfaits.append(n)

    #triangulaires
    for k in range(n) :
        if k * (k+1) / 2 == n :
            triangulaires.append(n)
            break

for x in somme_trois_cubes :
    if x in triangulaires :
        if x in parfaits :
            print(x)
```

On obtient 496 et 28, soit 0524.

Remarque (Nombres narcissiques)

Les entiers naturels possèdent de nombreuses autres propriétés intéressantes tant pour leur beauté que leurs applications. Par exemple, les nombres **narcissiques** sont des entiers tels que la somme de chaque chiffre le composant, élevé à la puissance du nombre de chiffres, égale à lui-même. $153 = 1^3 + 5^3 + 3^3$ est un exemple, $1634 = 1^4 + 6^4 + 3^4 + 4^4$ en est un autre.

6. Introduction à la Data Science

a. Indéniablement, le nombre d'incidents d'une zone est à prendre en compte. Une zone souvent sujet à des incendies est susceptible d'en connaître à nouveau. Cependant, la mairie devrait aussi prendre en compte le type de la zone : résidentielle, commerciale ou industrielle. Finalement, l'accessibilité à la zone est facteur déterminant pour optimiser les interventions.

b. On s'attend à ce que le centre de gravité des interventions se situe sur une des quatre cases au centre, sans distinction.

c.

```
import math

quartier = [[3, 4, 8, 6, 1, 1, 4, 2],
            [2, 4, 9, 7, 1, 6, 3, 7],
            [8, 1, 2, 3, 5, 1, 8, 5],
            [4, 5, 6, 1, 9, 4, 9, 6],
            [8, 5, 6, 8, 3, 5, 8, 1],
            [9, 5, 7, 7, 1, 6, 2, 8],
            [9, 5, 7, 5, 7, 3, 9, 1],
            [8, 1, 1, 3, 2, 4, 5, 7]]

for x in range(len(quartier)) :
    for y in range(len(quartier[x])) :
        D = 0
        for i in range(len(quartier)) :
            for j in range(len(quartier)) :
                if (x, y) != (i, j) :
                    D += quartier[i][j] * math.sqrt((x - i)**2 + (y - j)**2)
        if (x, y) == (0, 0) :
            Dmin = D
            optimum = (x, y)
        else :
            if D < Dmin :
                Dmin = D
                optimum = (x, y)

print(x, y)
```

On retrouve $(7, 7)$ comme position optimale de la caserne.

d.

```
Arith = [[0 for i in range(8)] for j in range(8)]
Geom = [[0 for i in range(8)] for j in range(8)]

for x in range(len(quartier)) :
    for y in range(len(quartier[x])) :
        if x in [0, len(quartier) - 1] or y in [0, len(quartier[x]) - 1] :
            Arith[x][y] = quartier[x][y]
            Geom[x][y] = quartier[x][y]
        else :
            Arith[x][y] = (quartier[x-1][y] + quartier[x][y-1] +
                           quartier[x+1][y] + quartier[x][y+1]) / 4
            Geom[x][y] = (quartier[x-1][y] * quartier[x][y-1] *
                          quartier[x+1][y] * quartier[x][y+1])**(1/4)
```

e.

```
for x in range(len(quartier)) :
    for y in range(len(quartier[x])) :
        Arith[x][y] = (Arith[x][y] - quartier[x][y])**2 / quartier[x][y]
        Geom[x][y] = (Geom[x][y] - quartier[x][y])**2 / quartier[x][y]
```

f.

```
ra = 0
rg = 0

for x in range(len(quartier)) :
    for y in range(len(quartier[x])) :
        ra += Arith[x][y]
        rg += Geom[x][y]

print(ra, rg)
```

L'approximation arithmétique admet une plus grande erreur que celle géométrique. Ce sera toujours le cas. Bien que plus facile à manipuler, la moyenne arithmétique est fortement pénalisée par des valeurs aberrantes $\frac{1000+1+2+3}{4} = 251.5$ contre $\sqrt[4]{1000 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} \simeq 8.80$.

g. On sélectionne les quatre plus proches voisins d'une zone sur l'unique critère de distance. Il serait intéressant d'estimer le nombre d'interventions d'une zone en fonction d'un autre critère, par exemple à partir des autres zones possédant le même type (résidentielle, …) :

$$n \simeq \sqrt[p]{\frac{n_1}{d_1} \times \frac{n_2}{d_2} \times \ldots \times \frac{n_p}{d_p}}$$

Où p est le nombre de zones, exceptée celle estimée, qui ont le même type que la zone estimée, n_p est le nombre d'intervention de cette zone et d_p la distance séparant les deux zones. Cette distance peut-être estimée en vol d'oiseau, à savoir en ligne droite, ou en itinéraire routier, à travers l'utilisation des routes construites.

Nombres complexes

(Mathématiques expertes)

« Le chemin le plus rapide entre deux vérités du domaine réel passe par le domaine complexe. »

Jacques Hadamard, *The Mathematical Intelligencer 13* (1991).

Le domaine des nombres complexes, du latin *complexus* « embrassement », regroupe l'ensemble des nombres se plaçant au-delà de la droite des réels, mais bien dans le plan complexe formé par deux droites réelles.

La notion d'une solution à l'équation $x^2 = -1$ a depuis la Renaissance été envisagée par de nombreux mathématiciens et a su apporter des solutions à des problèmes réels à travers des moyens dits imaginaires.

Dans cette partie, nous introduirons la notion de nombre complexe et formaliserons toutes les propriétés, caractéristiques et applications algébriques du nouvel ensemble qu'est celui des nombres complexes.

« I tell you, with complex numbers you can do anything. »

John Derbyshire

Nous introduirons et étudierons les aspects algébriques du domaine complexe.

Sommaire

Cours

Exercices d'application

Exercices d'approfondissement

Correction des exercices

Cours

I. Ensemble des nombres complexes

1. Définitions et propriétés

Définition (Ensemble $\mathbb{C}$)

L'**ensemble des nombres complexes**, noté $\mathbb{C}$, possède les propriétés suivantes :

- $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- **Addition et multiplication** : les règles des nombres réels sont conservées.
- **Nombre imaginaire** : Il existe un nombre complexe i tel que $i^2 = -1$.
- **Forme algébrique** : Tout nombre complexe z, il existe deux réels a, b uniques tels que $z = a + ib$, on appelle a la **partie réelle de z** et b la **partie imaginaire de z**.

Remarque

Si $a = 0$, alors z est dit **imaginaire pur**, si $b = 0$, alors z est dit **réel pur**.

Propriétés (Ensemble $\mathbb{C}$)

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement s'ils ont la même partie réelle et la même partie imaginaire.

De plus, un nombre complexe est nul si est seulement si sa partie réelle et sa partie imaginaire sont nulles.

Définition (Conjugué d'un nombre complexe)

Le **nombre complexe conjugué de $z = a + ib$**, noté $\overline{z}$, est défini par tel que $\overline{z} = a - ib$.

Propriétés (Conjugué d'un nombre complexe)

Soit z, z' deux nombres complexes et $n \in \mathbb{N}^*$, on a les propriétés suivantes :

- **Involution** : $\overline{(\overline{z})} = z$.
- $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$
- $\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'} \Longrightarrow \overline{z^n} = \overline{z}^n$
- $\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)} = \frac{1}{\overline{z'}}$ et $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ où $z' \neq 0 + 0i$

Démonstrations (Conjugué d'un nombre complexe)

Soit $z = a + ib$, $z' = x + iy$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a,

Premièrement, $\overline{\overline{z}} = \overline{\overline{a+ib}} = \overline{a - ib} = a + ib$.

Deuxièmement, $\overline{z + z'} = \overline{a + ib + x + iy} = \overline{(a+x) + i(b+y)}$

$= (a + x) - i(b + y)$

$= (a - ib) + (x - iy)$

$= \overline{a + ib} + \overline{x + iy} = \overline{z} + \overline{z'}$

Troisièmement, $\overline{z \times z'} = \overline{(a + ib)(x + iy)} = \overline{ax + i^2by + ayi + bxi}$

$= \overline{ax - by + ayi + bxi}$

$= (ax - by) - i(ay + bx)$

Or, $\overline{z} \times \overline{z'} = \overline{(a + ib)} \times \overline{(x + iy)} = (a - ib)(x - iy)$

$= ax + i^2by - ibx - iay$

$= (ax - by) - i(ay + bx)$

$= \overline{z \times z'}$

Quatrièmement, par récurrence, $n = 1$, $\overline{z^n} = \overline{z} = \overline{z}^n$, l'initialisation est vraie

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\overline{z^n} = \overline{z}^n$, on a, $\overline{z^{n+1}} = \overline{z^n} \times \overline{z} = \overline{z}^n \times \overline{z} = \overline{z}^{n+1}$

Par principe de récurrence, $\overline{z^n} = \overline{z}^n$.

Finalement, $\frac{1}{\overline{z}} = \frac{1}{a-ib} = \frac{1}{a-ib} \cdot \frac{a+ib}{a+ib} = \frac{a+ib}{a^2+b^2}$

Or, $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \overline{\frac{1}{a+ib}} = \overline{\frac{a-ib}{a^2+b^2}} = \overline{\frac{a}{a^2+b^2} - i\frac{b}{a^2+b^2}} = \frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{b}{a^2+b^2} = \frac{a+ib}{a^2+b^2} = \frac{1}{\overline{z}}$.

Propriétés (Caractérisation des réels purs et imaginaires purs)

Soit $z = a + ib$ un nombre complexe, on a,

$$z \text{ est réel} \Leftrightarrow z = \overline{z}$$

$$z \text{ est imaginaire pur} \Leftrightarrow z = -\overline{z}$$

$$z\overline{z} = a^2 + b^2$$

2. Formule de binôme de Newton

Théorème (Binôme de Newton)

Pour tous nombres complexes a, b et entier naturel n, on a,

$$(a+b)^n = \binom{n}{0} a^n b^0 + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \cdots + \binom{n}{n} a^0 b^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Démonstration (Binôme de Newton)

Démontrons par récurrence $\forall a, b \in \mathbb{C}, \forall n \geq 0, (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

On a, au rang $n = 0$, $(a+b)^0 = 1 = \binom{0}{0} a^0 b^0$.

L'initialisation est vérifiée.

Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

On a, $(a+b)^{n+1} = (a+b)^n (a+b)$

$$= (a+b)\left(\binom{0}{0} a^n + \cdots + \binom{n}{n} b^n\right) \qquad \text{(hdr.)}$$

$$= \left(\binom{n}{0} a^{n+1} + \binom{n}{1} a^n + \cdots + \binom{n}{n-1} b^{n-1} a^2 + \binom{n}{n} b^n a\right)$$

$$+ \left(\binom{n}{0} a^n b + \binom{n}{1} a^{n-1} b^2 + \cdots + \binom{n}{n-1} b^n a + \binom{n}{n} b^{n+1}\right)$$

Par Triangle de Pascal et en remarquant $\binom{n}{n} = 1 = \binom{n+1}{n+1}$, on a,

$$= \left(\binom{n+1}{0} a^{n+1} + \cdots + \binom{n+1}{n+1} b^{n+1}\right)$$

L'hérédité est vérifiée.

Par principe de récurrence, $\forall a, b \in \mathbb{C}, \forall n \geq 0, (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

II. Équations polynômiales complexes

1. Équations du second degré dans $\mathbb{C}$

Soit $az^2 + bz + c$ un trinôme où $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$ de variable $z \in \mathbb{C}$.

Définition (Discriminant)

Le **discriminant** associé au trinôme $az^2 + bz + c$, noté Δ, est défini par :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Propriété (Solutions de l'équation)

On a les propriétés suivantes :

- $\Delta > 0$: il existe deux solutions réelles distinctes $z_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$
- $\Delta = 0$: il existe une unique solution réelle $z_0 = -\frac{b}{2a}$
- $\Delta < 0$: il existe deux solutions complexes conjuguées $z_1 = \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \overline{z_1}$

Propriété (Relation Coefficients - Racines)

Soit z_1 et z_2 les racines du trinôme $az^2 + bz + c$, on a alors :

$$z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \text{ et } z_1 z_2 = \frac{c}{a}$$

2. Équations de degré supérieur dans $\mathbb{C}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_k)_{0 \leq k \leq n}$ une suite d'éléments réels.

Définition (Polynôme de degré n)

Un **polynôme P de degré n** est une fonction de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ de la forme :

$$P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$$

Définition (Racine)

Une **racine** de P est un nombre complexe solution de l'équation $P(z) = 0$.

Théorème (Factorisation)

Soit un polynôme P définie sur $\mathbb{C}$ par $P(z) = z^n - a^n$ où $n \geq 2$ et $a \in \mathbb{C}$.
Il existe un polynôme Q de degré $n - 1$ définie tel que $P(z) = (z - a)Q(z)$.

Démonstration (Factorisation)

Si $a = 0$, c'est évident.

Sinon, $\frac{z}{a}\left(\left(\frac{z}{a}\right)^{n-1} + \left(\frac{z}{a}\right)^{n-2} + \dots + \frac{z}{a} + 1\right) = \left(\frac{z}{a}\right)^{n} + \left(\frac{z}{a}\right)^{n-1} + \dots + \left(\frac{z}{a}\right)^{2} + \frac{z}{a}$

$$\left(\left(\frac{z}{a}\right)^{n-1} + \left(\frac{z}{a}\right)^{n-2} + \dots + \frac{z}{a} + 1\right) = \left(\frac{z}{a}\right)^{n-1} + \left(\frac{z}{a}\right)^{n-2} + \dots + \left(\frac{z}{a}\right) + 1$$

Donc, $\left(\frac{z}{a} - 1\right)\left(\left(\frac{z}{a}\right)^{n-1} + \left(\frac{z}{a}\right)^{n-2} + \dots + \frac{z}{a} + 1\right) = \left(\frac{z}{a}\right)^{n} - 1$

$$(z-a)(z^{n-1} + z^{n-2}a + \dots + za^{n-2} + a^{n-1}) = z^n - a^n$$

D'où, $Q(z)(z-a) = P(z)$ où $P(z) = z^n - a^n$ et $Q(z) = z^{n-1} + \dots + a^{n-1}$

Corollaire (Factorisation)

Soit un polynôme P de degré n, si a est une racine complexe de P, alors il existe un polynôme Q de degré $n-1$ tel que $P(z) = (z-a)Q(z)$

Démonstration (Factorisation)

Par définition, $P(a) = 0$.

Donc,
$$\begin{aligned} P(z) &= a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n - P(a) \\ &= a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n - (a_0 + a_1 a + \dots + a_n a^n) \\ &= a_1(z-a) + \dots + a_n(z^n - a^n) \\ &= a_1(z-a)Q_1(z) + \dots + a_n(z-a)Q_n(z) \\ &= (z-a)\big(aQ_1(z) + \dots + a_n Q_n(z)\big) \\ &= (z-a)Q(z) \end{aligned}$$

Corollaire (Nombre de racines)

Soit un polynôme P de degré n, il existe au plus n racines distinctes.

Démonstration (Factorisation)

Soit $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p$ des racines distinctes de P de degré n avec $p > n$.

Par théorème il existe un polynôme Q_1, $P(z) = (z - \alpha_1)Q_1(z)$

Or, $P(\alpha_2) = 0$ par définition, comme $\alpha_2 \neq \alpha_1$ par hypothèse, α_2 est racine de Q_1, donc il existe Q_2, $P(z) = (z - \alpha_1)(z - \alpha_2)Q_2(z)$.

En répétant le procédé, on retrouve que P est de degré $p + \deg(Q_p) > n$, ce qui est impossible.

Exercices d'application

1. Détermination de formes complexes

Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants :

a. $z = 3$

b. z admet pour partie réelle 2 et pour partie imaginaire 4.

c. z est le conjugué de $z' = -3i + 1$

d. $z = (2 + 3i)(3 + 4i)$

e. $z = \frac{2+i}{1-2i}$

f. z est un imaginaire pur.

g. $z = (2 + 3i) + (3 + 2i)$

h. $z = |1 + 2i|$

i. $z = \frac{1+i}{1-i}$

j. $z = \frac{1+i}{1-i} + \frac{1-i}{1+i}$

k. $z = z' + \overline{z'}$ où z' est un complexe quelconque.

l. $z = \frac{2i+1}{(1+i)(2-3i)}$

m. $z = i\sqrt{2} + 3i^2 - 1$

n. $z = (1 + i)^2$

o. $z = (1 + i)^7$

2. Résolutions d'équations

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a. $z^2 + 1 = 0$

b. $z^2 - \sqrt{2}z + 1 = 0$

c. $z^4 - 1 = 0$

d. $(3 + i)z + (2 - 3i)\overline{z} = 2i$

e. $4z^2 + 8|z|^2 - 3 = 0$

f. $z^2 = 2$

g. $z^3 + z^2 - 3z + 1 = 0$

h. $z^3 - 1 = 0$

i. $z^2 + 2z + 1 = 0$

j. $2iz^2 + i2\sqrt{2}z + i = 0$

k. $z^2 \cdot \overline{z} = z$

l. Trouver $n \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{z}{z+n} = 4i$ avec $z \in \mathbb{C}$ de partie imaginaire 2020.

3. Polynômes complexes

Soit $\mathbb{C}[X]$ l'ensemble des polynômes dans $\mathbb{C}$. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$. On supposera que les coefficients sont réels mais que la variable est complexe. Ainsi, P est défini sur $\mathbb{C}$ par la suite réelle $(a_k)_{0 \leq k \leq n}$ telle que $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. On admettra que X est assimilable à une variable $z \in \mathbb{C}$.

1) Soit $a \in \mathbb{C}$ une racine d'un polynôme non nul P, la **multiplicité** de a est le plus grand entier m tel que $\exists Q \in \mathbb{C}[X]$, $P(z) = (z-a)^m Q(z)$.
   a. Montrer que si a est racine de P alors a est racine de $\overline{P}$.
   b. Montrer que si a est racine double de P, i.e. $m = 2$, alors a est racine simple de P', i.e. $m = 1$, on suppose que les propriétés de dérivation dans $\mathbb{C}$ sont similaires à celles dans $\mathbb{R}$.
   c. Soit $(a_k)_{1 \leq k \leq p}$ la suite des racines de P de multiplicités $(m_k)_{1 \leq k \leq p}$ avec $p \leq n$, montrer que $\sum_{k=1}^{p} m_k = n$.
   d. Factoriser le polynôme complexe $Z^2 - 2Z\cos(\theta) + 1$ où $\theta \in \mathbb{R}$.
   e. Déterminer $a \in \mathbb{R}$ tel que le polynôme $P(z) = z^3 - z^2 + z + 1 + a$ admette pour racine $z = -i$.
   f. Calculer la somme des coefficients **réels** de $P(z) = z^4 + az^3 + bz^2 + cz + d$ sachant que $P(i) = P(1+i) = 0$.

2) Soit $Q \in \mathbb{C}[X]$, Q est **divise** P s'il existe $A \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = AQ$, on note alors $Q|P$.
   a. Montrer que $(X - i)$ divise $(X^2 + 1)$
   b. Montrer que $\forall A, B, C \in \mathbb{C}[X], A|B$ et $B|C \Longrightarrow A|C$.
   c. Montrer que $\forall A, B, C \in \mathbb{C}[X], A|B$ et $A|C \Longrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R}, A|(\lambda B + C)$
   d. Montrer que $\forall a, b \in \mathbb{N}^*, a|b \Leftrightarrow (X^a - 1)|(X^b - 1)$.
   e. La **division euclidienne polynomiale** de A par B est défini par l'existence d'un couple $(Q, R) \in \mathbb{C}[X]^2$ tel que $A = BQ + R$ et $\deg(\mathrm{R}) < \deg(\mathrm{B})$ où $\deg P$ renvoie le degré du polynôme P. Déterminer le reste de la division euclidienne de $(X^3 - 4X + 5)$ par $(X^2 - 3X + 2)$, on pensera à chercher les racines du diviseur.

Exercices d'approfondissement

3. Équations différentielles d'ordre 2

On reprend la notion **d'équation caractéristique** introduite de l'exercice 4 du chapitre « Primitives et équations différentielles ». On rajoutera que si le discriminant du polynôme caractéristique est strictement négatif de racines conjuguées $\alpha \pm i\omega$, alors les solutions sont de la forme $y : x \mapsto (\lambda \cos(\omega x) + \mu \sin(\omega x))e^{\alpha x}$ où λ, μ sont des réels.

1) Résoudre les équations différentielles homogènes suivantes :
   a. $y'' + 2y' + 2y = 0$ où $y(0) = 0$ et $y'(0) = 1$.
   b. $y'' + y = 0$ où $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$.

2) Déterminer une solution particulière aux équations différentielles suivantes :
   a. $y'' + 2y' + 2y = \sin(x)$ avec pour solution particulière une fonction de la forme $y : x \mapsto A\cos(x) + B\sin(x)$ où $A, B \in \mathbb{R}$.
   b. $y'' + y = 2\cos^2(x)$ avec pour solution particulière une fonction de la forme $y : x \mapsto A\cos(2x) + 1$ où $A \in \mathbb{R}$

3) On établit l'équation d'**oscillateur harmonique** par l'équation différentielle $x'' + \omega_0^2 x = 0$ qui correspond au mouvement par rapport au temps d'un ressort fixé à une surface d'une part et soumis à la gravité d'autre part. Initialement, $x(0) = 1$ et $x'(0) = 0$ avec $\omega_0 > 0$.
   a. Établir la solution générale de l'équation différentielle.
   b. On suppose que $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ avec k la tension du ressort et m la masse du ressort, interprétez.

4. Bounded complex function

Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Show that if f is $T-$periodic and continuous on $[0, T]$, then f is bounded, i.e., there exists $m, M \in \mathbb{C}$ such that $\forall x \in \mathbb{R}, |m| \leq |f(x)| \leq |M|$.

Correction des exercices

1. Détermination de formes complexes

a. Le nombre complexe est déjà sous forme algébrique $z = 3 + 0i$.

b. On a, par définition, $z = \mathcal{R}e(z) + i \cdot \mathcal{I}m(z) = 2 + 4i$.

c. On a, $z = \overline{z'} = \overline{-3i + 1} = 3i + 1 = 1 + 3i$.

d. On a, $z = (2 + 3i)(3 + 4i) = 6 + 8i + 9i + 12i^2 = -6 + 17i$.

e. On a, $z = \frac{2+i}{1-2i} = \frac{2+i}{1-2i} \cdot \frac{1+2i}{1+2i} = \frac{2+4i+i+2i^2}{1+3} = \frac{5}{4}i$.

f. On a, par définition, $\exists k \in \mathbb{R}, z = 0 + ki$ avec k la partie imaginaire de z

g. On a, $z = (2 + 3i) + (3 + 2i) = 5 + 5i$.

h. On a, $z = |1 + 2i| = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} + 0i$.

i. On a, $z = \frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = 0 + i$.

j. On a, $z = \frac{1+i}{1-i} + \frac{1-i}{1+i} = \frac{(1+i)(1+i)+(1-i)(1-i)}{(1-i)(1+i)} = 0 + 0i$.

k. Soit $z' = a + ib$, on a, $z = z' + \overline{z'} = a + ib + a - ib = 2a$.

l. On a, $z = \frac{2i+1}{(1+i)(2-3i)} = \frac{2i+1}{2-3i+2i-3i^2} = \frac{2i+1}{5-i} = \frac{2i+1}{5-i} \cdot \frac{5+i}{5+i} = \frac{3}{26} + \frac{11}{26}i$.

m. On a, $z = i\sqrt{2} + 3i^2 - 1 = -4 + \sqrt{2} \cdot i$.

n. On a, $z = (1 + i)^2 = 1 + 2i + i^2 = 2i$.

o. On a, $z = (1 + i)^7 = (1 + i) \cdot (1 + i)^6 = (1 + i) \cdot ((1 + i)^2)^3$
$= (1 + i) \cdot (2i)^3 = 8 - 8i$.

2. Résolutions d'équations

a. On a, $z^2+1=0 \Leftrightarrow z^2=-1$

On sait que cette équation admet deux solutions complexes. Or, on remarque facilement que $z=i$ et $z=-i$ sont deux solutions à l'équation.

Donc, $\mathcal{S}=\{-i,i\}$

b. On a, $z^2-\sqrt{2}z+1=0$

L'équation admet pour discriminant $\Delta=2-4=-2<0$

Par théorème, l'équation admet deux solutions complexes conjuguées $z=\frac{\sqrt{2}\pm i\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\pm\frac{1}{\sqrt{2}}i$

Donc, $\mathcal{S}=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}i,\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}i\right\}$

c. On a, $z^4-1=0 \Leftrightarrow (z^2-1)(z^2+1)=0$

$$\Leftrightarrow (z-1)(z+1)(z^2+1)=0$$

D'après la question a., $\mathcal{S}=\{1,-1,i,-i\}$.

d. Soit $z=a+ib\in\mathbb{C}$ solution de l'équation $(3+i)z+(2-3i)\overline{z}=2i$

On a, $(3+i)z+(2-3i)\overline{z}=2i \Leftrightarrow (3+i)(a+ib)+(2-3i)(a-ib)=2i$

$$\Leftrightarrow (5a-4b)+(-2a+b)i=2i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}5a-4b=0\\-2a+b=2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow_{L_1+4L_2\to L_1} \begin{cases}-3a=8\\-2a+b=2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a=-8/3\\-2a+b=2\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}a=-8/3\\b=-10/3\end{cases}$$

e. Soit $z=a+ib\in\mathbb{C}$ solution de l'équation $4z^2+8|z|^2-3=0$

On a, $4z^2+8|z|^2-3=0 \Leftrightarrow 4(a^2+2abi-b^2)+8(a^2+b^2)-3=0$

$$\Leftrightarrow (12a^2+4b^2-3)+8abi=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}12a^2+4b^2=3\\8ab=0\end{cases}$$

Si $a=0$, alors $b=\pm\sqrt{3/4}$, si $b=0$, alors $a=\pm\sqrt{3/12}$

Donc, $\mathcal{S}=\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}i,-\frac{\sqrt{3}}{2}i,\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right\}$

f. On a, $z^2 = 2$

On sait que cette équation admet deux solutions complexes. Or, on remarque facilement que $z = \sqrt{2}$ et $z = -\sqrt{2}$ sont deux solutions à l'équation, qui sont des complexes à parties imaginaires nulles.

Donc, $\mathcal{S} = \{\sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$

g. On a, $z^3 + z^2 - 3z + 1 = 0$

On remarque facilement que $z = 1$ est solution de l'équation.

Par théorème, on sait que $z^3 + z^2 - 3z + 1 = (z - 1)Q(z)$ où Q est un polynôme complexe de degré 2. On pose $Q(z) = az^2 + bz + c$

On a, $(z-1)Q(z) = (z-1)(az^2 + bz + c)$
$$= az^3 + (b-a)z^2 + (c-b)z - c$$

Or, $(z-1)Q(z) = z^3 + z^2 - 3z + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b - a = 1 \\ c - b = -3 \\ -c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = -1 \end{cases}$

Ainsi, $z^2 + 2z - 1$ admet pour discriminant $\Delta = 4 + 4 = 8 > 0$.

Par propriété, il existe deux solutions réelles $z = \frac{-2 \pm \sqrt{8}}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$.

Donc, $\mathcal{S} = \{1, -1 + \sqrt{2}, -1 - \sqrt{2}\}$

h. On a, $z^3 - 1 = 0$.

On remarque facilement que $z = 1$ est solution de l'équation.

Par théorème, on sait que $z^3 - 1 = (z-1)Q(z)$ où Q est un polynôme complexe de degré 2. On pose $Q(z) = az^2 + bz + c$

On a, $(z-1)Q(z) = (z-1)(az^2 + bz + c)$
$$= az^3 + (b-a)z^2 + (c-b)z - c$$

Or, $(z-1)Q(z) = z^3 - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b - a = 0 \\ c - b = 0 \\ -c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 1 \end{cases}$

Ainsi, $z^2 + z + 1$ admet pour discriminant $\Delta = 1 - 4 = -3$.

Par propriété, il existe deux solutions complexes conjuguées $z = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$

Donc, $\mathcal{S} = \left\{1, -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right\}$

i. On a, $z^2 + 2z + 1 = 0 \Leftrightarrow (z+1)^2 = 0 \Leftrightarrow z + 1 = 0 \Leftrightarrow z = -1$

j. Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$ solution de l'équation $2iz^2 + i2\sqrt{2}z + i = 0$.

On a, $2iz^2 + i2\sqrt{2}z + i = 0 \Leftrightarrow 2z^2 + 2\sqrt{2}z + 1 = 0$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{2}z + 1\right)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}z + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow z = -\tfrac{1}{\sqrt{2}}$$

Donc, $\mathcal{S} = \left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$

k. On a, $z^2 \cdot \overline{z} = z \cdot (z\overline{z}) = z \cdot |z|^2$

Si $z = 0$, alors $z \cdot |z|^2 = 0 = z$.

Si $z \neq 0$, alors $z \cdot |z|^2 = z \Leftrightarrow |z|^2 = 1$

Ainsi, $\mathcal{S} = \{0\} \cup \{z \in \mathbb{C}, |z| = 1\}$

l. On a d'après l'énoncé $z \neq 0$, d'où,

$$\frac{z}{z+n} = 4i \Leftrightarrow 1 - \frac{n}{z+n} = 4i$$

$$\Leftrightarrow \frac{n}{z+n} = 1 - 4i$$

$$\Leftrightarrow \frac{z+n}{n} = \frac{1}{1-4i}$$

$$\Leftrightarrow 1 + \frac{z}{n} = \frac{1+4i}{17}$$

$$\Rightarrow \frac{2020}{n} = \frac{4}{17}$$

$$\Leftrightarrow n = 8585$$

En posant $z = a + 2020i$, on retrouve une partie réelle $a = -8080$.

3. Polynômes complexes

1)

a. Par théorème, on peut factoriser le polynôme P par $(z-a)^m$ où $m \in \mathbb{N}^*$ est la multiplicité de a, $\exists Q \in \mathbb{C}[X], \forall z \in \mathbb{C}, P(z) = (z-a)^m Q(z)$.

Donc, $\forall z \in \mathbb{C}, \overline{P(z)} = \overline{(z-a)^m Q(z)}$

$$= \overline{(z-a)^m} \times \overline{Q(z)}$$

$$= (\overline{z-a})^m \times \overline{Q(z)}$$

$$= (\overline{z} - \overline{a})^m \times \overline{Q(z)}$$

D'où, $\overline{P(a)} = (\overline{a} - \overline{a})^m \times \overline{Q(\overline{a})} = 0$.

b. Par théorème, soit $a \in \mathbb{C}$ tel que,

$\exists Q \in \mathbb{C}[X], \forall z \in \mathbb{C}, P(z) = (z-a)^2 Q(z)$

Par produit de polynômes, donc dérivables, P est dérivable sur $\mathbb{C}$.

On a, $\forall z \in \mathbb{C}, P'(z) = 2(z-a)Q(z) + (z-a)^2 Q(z)$

$$= (z-a)[2 + (z-a)]Q(z)$$

Or, $2 + z - a$ admet pour unique racine $a - 2$ et par propriété de la multiplicité, Q est défini tel que $Q(a) \neq 0$.

Ainsi, P' admet bien pour racine simple a.

c. Par factorisation répétée par les racines de P, on retrouve l'expression du théorème fondamental de l'algèbre dans $\mathbb{C}$, à savoir que pour tout $z \in \mathbb{C}, P(z) = a \prod_{k=1}^{n} (X - a_k)^{m_k} = a(X-a_1)^{m_1} \dots \left(X - a_p\right)^{m_p}$ avec a le coefficient dominant de P. Si l'on développe le premier terme on retrouve $X^{m_1} \times \dots \times X^{m_p} = X^{\sum_{k=1}^{p} m_k}$, or par définition le degré de P est n donc $X^{\sum_{k=1}^{p} m_k} = X^n$, d'où, $\sum_{k=1}^{p} m_k = n$.

d. Soit $\theta \in \mathbb{R}$, $\forall z \in \mathbb{C}, z^2 - 2z\cos(\theta) + 1 = z^2 - 2z\frac{(e^{i\theta} + e^{-i\theta})}{2} + e^{i\theta}e^{-i\theta}$

$$= \left(z - e^{i\theta}\right)\left(z - e^{-i\theta}\right)$$

e. On a,

$$\begin{aligned} P(-i) = 0 &\Leftrightarrow (-i)^3 - (-i)^2 + (-i) + 1 + a = 0 \\ &\Leftrightarrow i + 1 - i + 1 + a = 0 \\ &\Leftrightarrow a = -2 \end{aligned}$$

f. Par théorème, on sait que si a est une racine complexe de P, alors son conjugué $\overline{a}$ l'est aussi. Or i et $1+i$ sont des racines de P.
Donc, $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = (z-i)(z+i)\big(z-(1+i)\big)\big(z-(1-i)\big)$
$= z^4 - 2z^3 + 3z^2 - 2z + 2$
Donc, $a+b+c+d = -2+3-2+2 = 5$.

2)

a. On a, $X^2+1 = X^2 - i^2 = (X-i)(X+i)$
Par définition, $(X-i)|(X^2+1)$.

b. Soit $A, B, C \in \mathbb{C}[X]$, tels que $A|B \Leftrightarrow \exists Q \in \mathbb{C}[X], B = AQ$ et $B|C \Leftrightarrow \exists P \in \mathbb{C}[X], C = BP = AQP$.
Or, le produit de deux polynômes reste un polynôme, ainsi A divise C et l'on a bien montré la transitivité de la divisibilité polynômiale.

c. Soit $A, B, C \in \mathbb{C}[X]$ tels que $A|B$ et $A|C$,
Donc $\exists Q, P \in \mathbb{C}[X], B = AQ$ et $C = AP$, d'où,
$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda B + C = \lambda AQ + AP = A(\lambda Q + P)$
Par combinaison linéaire de polynômes, $\lambda Q + P$ est un polynôme et donc A divise bien toute combinaison linéaire de ses multiples B et C.

d. Soit $a, b \in \mathbb{N}^*, a|b \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}^*, b = ka$
$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}^*, X^b = X^{ka}$
$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}^*, X^b - 1 = X^{ka} - 1 = (X^a)^k - (1)^k$
Par théorème, il existe $Q \in \mathbb{C}[X], (X^a)^k - (1)^k = (X^a - 1)Q(X)$
D'où, $a\big|b \Leftrightarrow X^b - 1 = (X^a-1)Q(X) \Leftrightarrow (X^a-1)\big|(X^b-1)$.

e. Par théorème, il existe $Q, R \in \mathbb{C}[X]$,
$X^3 - 4X + 5 = (X^2 - 3X + 2)Q(X) + R(X)$ avec $\deg R < 2$.
Ainsi, $\deg R < 2 \Leftrightarrow \deg R \leq 1 \Leftrightarrow \exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}, R(X) = \alpha X + \beta$.
De plus, $X^2 - 3X + 2$ admet pour racines 1 et 2.
D'où, en évaluant la division euclidienne en $X = 1$ et $X = 2$.
$1^3 - 4 + 5 = R(1) \Leftrightarrow 2 = \alpha + \beta$ et $2\alpha + \beta = 5$
Donc, $\begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ 2\alpha + \beta = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -1 \\ \alpha = 3 \end{cases} \Leftrightarrow R(X) = 3X - 1$

4. Équations différentielles d'ordre 2

1)

a. L'équation caractéristique est $r^2 + 2r + 2 = 0$.
Or, le polynôme $r^2 + 2r + 2$ admet un discriminant $\Delta = -4 = (2i)^2$
Ainsi, le polynôme admet deux racines conjuguées $\frac{-2\pm 2i}{2} = -1 \pm i$.
Par théorème, les solutions de l'équation différentielle sont de la forme $y : x \mapsto (\lambda\cos(x) + \mu\sin(x))e^{-x}$ avec λ, μ deux réels.
Or, $\begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu - \lambda = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = 1 \end{cases}$
Finalement, $\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = \sin(x)\, e^{-x}$ est l'unique solution du problème.

b. L'équation caractéristique est $r^2 + 1 = 0$.
Or le polynôme $r^2 + 1$ admet un discriminant $\Delta = -4 = (2i)^2$
Ainsi, le polynôme admet deux racines conjuguées $\pm i$.
Par théorème, les solutions de l'équation différentielle sont de la forme $y : x \mapsto \lambda\cos(x) + \mu\sin(x)$ avec λ, μ deux réels.
Or, $\begin{cases} y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \mu = 0 \end{cases}$
Finalement, $\forall x \in \mathbb{R}, y(x) = \cos(x)$ est l'unique solution du problème.

2)

a. On cherche $y : x \mapsto A\cos(x) + B\sin(x)$ où $A, B \in \mathbb{R}$ solution particulière de $y'' + 2y' + 2 = \sin(x)$.
Tout d'abord, y est dérivable successivement deux fois telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $y'(x) = -A\sin(x) + B\cos(x)$ et $y''(x) = -A\cos(x) - B\sin(x)$.
D'où, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} y'' + 2y' + 2y = \sin(x) &\Leftrightarrow \cos(x)\,[A + 2B] + \sin(x)\,[B - 2A] = \sin(x) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} A + 2B = 0 \\ B - 2A = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{2}B = \frac{1}{2} \\ B - 2A = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} B = 1/5 \\ A = 2/5 \end{cases} \end{aligned}$$

Finalement, $y : x \mapsto \frac{2}{5}\cos(x) + \frac{1}{5}\sin(x)$ est solution particulière du problème.

b. On cherche $y : x \mapsto A\cos(2x) + 1$ où $A \in \mathbb{R}$ solution particulière de $y'' + y = 2\cos^2(x)$.
Tout d'abord, y est dérivable successivement deux fois telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $y''(x) = -4A\cos(2x)$.
D'où, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} y''(x) + y(x) = 2\cos^2(x) &\Leftrightarrow 1 - 3A\cos(2x) = 2\cos^2(x) \\ &\Leftrightarrow 1 - 3A\cos(2x) = \cos(2x) + 1 \\ &\Leftrightarrow \cos(2x)\,[1 - 3A] = 0 \\ &\Leftrightarrow_{x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}} 1 - 3A = 0 \\ &\Leftrightarrow A = 1/3 \end{aligned}$$

Finalement, $y : x \mapsto \frac{1}{3}\cos(2x) + 1$ est solution particulière du problème.

3)

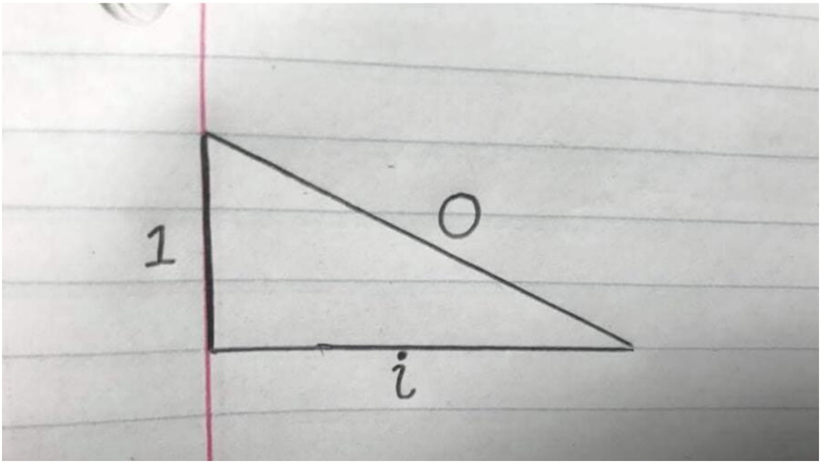
a. On a, par théorème, $\forall t \geq 0, x(t) = \cos(\omega_0 t)$.

b. ω_0 correspond à la fréquence, donc l'inverse de la période, du mouvement sinusoïdal. Ainsi, lorsque ω_0 augmente, le signal se répète plus rapidement. D'où, lorsque la tension du ressort augmente, sa rigidité aussi et donc il dévie le moins possible de sa position d'équilibre, donc l'alternation entre mouvement montant et descendant est très rapide, d'où la fréquence élevée. Finalement, lorsque la masse du ressort augmente, on a un ralentissement naturel car les mouvements demandent plus d'énergie, et donc sont moins importants que ceux d'objets plus légers sur un même intervalle de temps.

5. Bounded complex function

Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ a continuous and T-periodic function.
By definition, $\forall x \in \mathbb{R}, f(x + T) = f(x)$.
Thus, we can deduce that f is continuous on $\mathbb{R}$, thus f is finite on $\mathbb{R}$.
Finally, since f is finite, it admits a minimum and maximum m and M such that $\forall x \in \mathbb{R}, \exists m, M \in \mathbb{C}, |m| \leq f(x) \leq |M|$.

Don't let the Pythagoreans see this :



« The scientist needs an artistically creative imagination. »

Max Planck

Nous introduirons et étudierons les aspects géométriques du domaine complexe.

Sommaire

Cours

Exercices d'application

Exercices d'approfondissement

Correction des exercices

Cours

I. Représentation dans le plan complexe

1. Définitions et propriétés

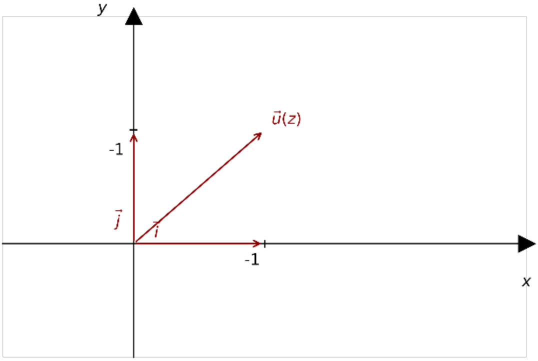
On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.

Définitions (Image et affixe)

On appelle **image** par un nombre complexe $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, le point M de coordonnées (a, b) ou le vecteur $\vec{u} = (a, b)$.

On appelle **affixe** d'un point M de coordonnées (a, b) ou vecteur $\vec{u} = (a, b)$, le nombre complexe $z = a + ib$.

On note alors $M(z)$ et $\vec{u}(z)$



Propriétés (Image et affixe)

Pour tous points $M(z), N(z')$ et vecteurs $\vec{u}(z)$ et $\vec{v}(z')$, on a :

- $\overrightarrow{MN}$ admet pour affixe $z' - z$.
- Le milieu I du segment $[MN]$ admet pour affixe $z_I = \frac{z+z'}{2}$
- $\vec{u} + \vec{v}$ admet pour affixe $z + z'$.
- $\forall k \in \mathbb{R}, k\vec{u}$ admet pour affixe kz.

2. Module et argument

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$. Soit $M(z)$ où $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Définition (Module d'un nombre complexe)

On appelle **module** de z, le réel positif noté $|z|$, défini par $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Propriétés (Module d'un nombre complexe)

On a, les propriétés suivantes :

$$|z|^2 = z\overline{z},$$
$$|\overline{z}| = |z|$$
$$|-z| = |z|$$

Démonstration (Module d'un nombre complexe)

Premièrement, $z\overline{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 - (ib)^2 = a^2 + b^2$

Deuxièmement, $|\overline{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$

Troisièmement, $|-z| = \sqrt{(-a)^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$

Définition (Argument d'un nombre complexe)

On appelle **argument** de $z(\neq 0)$, noté $\arg(z)$ exprimé en radians, la mesure de l'angle $\left(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM}\right)$.

Propriétés (Argument d'un nombre complexe)

On a, $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)$ et $\arg(-z) = \arg(z) + \pi$, de plus :

$$z \text{ est réel} \Leftrightarrow \arg(z) = 0[\pi], z \text{ est imaginaire pur} \Leftrightarrow \arg(z) = \frac{\pi}{2}[\pi]$$

II. Forme exponentielle et trigonométrique

1. Forme trigonométrique et rappels

On se place dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$. Soit A, B et C trois points distincts deux à deux d'affixes a, b et c respectivement.

Définition (Forme trigonométrique)

On appelle **forme trigonométrique** de z d'argument θ l'écriture :

$$z = |z|(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$$

Propriétés (Arguments)

On a les propriétés suivantes :

- $\left(\vec{\imath}, \overrightarrow{AB}\right) = \arg(b-a)$
- $AB = |b-a|$
- $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right)$

Propriétés (Arguments)

Pour tous nombres complexes z, z' non nuls et entier naturel n, on a :

- $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$
- $\arg(z^n) = n\arg(z)$
- $\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)$
- $\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$

Propriétés (Formules d'addition)

Pour tous réels x, y, on a :

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$$

$$\sin(x-y) = \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y)$$

Démonstrations (Formules d'addition)

$$\cos(x-y) = \begin{pmatrix}\cos x\\ \sin x\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\cos y\\ \sin y\end{pmatrix} = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$$

$$\begin{aligned}\sin(x-y) &= \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + y\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\cos(y) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\sin(y)\\ &= \sin(x)\cos(y) - \cos(x)\sin(y)\end{aligned}$$

$\cos(x+y) = \cos\big(x - (-y)\big)$ et $\sin(x+y) = \sin\big(x - (-y)\big)$

Propriétés (Formules de duplication)

Pour tous réels x, y, on a :

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$$

$$\sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x)$$

2. Forme exponentielle et formules

Soit $z = a + ib$ non nul d'argument θ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Définition (Forme exponentielle)

On appelle **forme exponentielle** de z l'écriture :

$$z = |z|e^{i\theta}$$

Propriété (Relation d'Euler)

On a,

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Propriétés (Forme exponentielle)

Pour tous réels x, y, on a,

$$e^{ix}e^{iy} = e^{i(x+y)}$$

$$\frac{1}{e^{ix}} = e^{-ix}$$

$$\frac{e^{ix}}{e^{iy}} = e^{i(x-y)}$$

$$\overline{e^{ix}} = e^{-ix}$$

Théorème (Formule de Moivre)

On a, pour tout entier naturel n :

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta} \iff (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Théorème (Formule d'Euler)

On a,

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \text{ et } \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

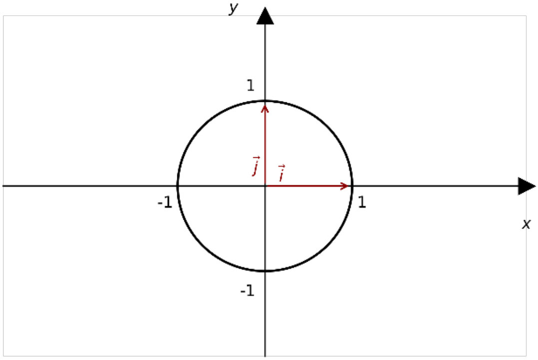
III. Applications géométriques

1. Ensemble $\mathbb{U}$

Soit $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Définition (Ensemble $\mathbb{U}$)

L'ensemble des points appartenant au cercle trigonométrique est noté $\mathbb{U}$, ses points sont caractérisés par $z \in \mathbb{U} \Longleftrightarrow |z| = 1$.



Remarque

L'ensemble $\mathbb{U}$ est stable par produit et passage à l'inverse.

2. Racine n-ème de l'unité

Soit n un entier naturel non nul.

Définition (Racine n-ème de l'unité)

On appelle **racine n-ème de l'unité** une solution à l'équation $z^n = 1$.

Théorème (Racines de $\mathbb{U}_n$)

L'ensemble $\mathbb{U}_n$ possède n racines de la forme $(w_k)_{1 \leq k \leq n}$ telle que :

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, w_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$$

Démonstration (Racine n-ème de l'unité)

Premièrement, si $z^n = 1 \Longrightarrow |z^n| = |1| \Leftrightarrow |z|^n = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$.

On sait donc que la solution, si elle existe, est sous la forme $z = e^{i\theta}$, on restreint θ à $[0, 2\pi[$.

Donc, $z^n = 1 \Leftrightarrow e^{in\theta} = 1 \Leftrightarrow n\theta = 0[2\pi] \Leftrightarrow n\theta = 2k\pi \Leftrightarrow \theta = \frac{2k\pi}{n}, k \in \mathbb{Z}$

On remarque que pour $k > n$ et $k < 1$, les solutions se répètent.

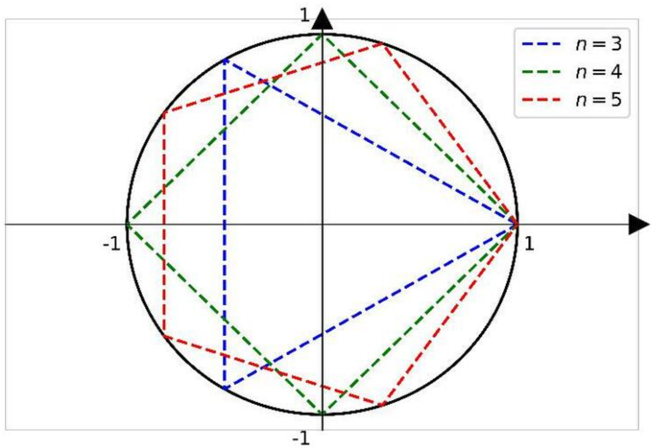
Les solutions existent et sont de la forme $w_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ avec $k \in \{1, \dots, n\}$

Finalement, soit $k, k' \in \{1, \dots, n\}$ tels que $w_k = w_{k'}$

On a, $e^{i\frac{2k\pi}{n}} = e^{i\frac{2k'\pi}{n}} \Leftrightarrow 2k\pi = 2k'\pi + 2k''\pi, k'' \in \mathbb{Z}$

$$\Leftrightarrow (k - k') = nk'', k'' \in \mathbb{Z}$$

Donc, $k - k'$ est multiple de n, ce qui n'est pas possible par hypothèse, d'où $k'' = 0$, d'où $k = k'$, en voici des représentations :



Exercices d'application

1. Représentation d'affixes

Déterminer les coordonnées dans le plan complexe affixes suivantes :

a. $M(z)$ avec $z = 3$

b. $M(z)$ avec $z = 1 + i$

c. $M(z)$ avec $z = e^{2i\pi}$

d. $M(z)$ avec $z = \cos(\pi) + i\sin(\pi)$

e. $M(z)$ avec $z = (1 + i)^7$

2. Détermination de formes complexes

1) Déterminer la forme trigonométrique des nombres complexes suivants :

a. $z = 3$

b. $z = 1 + i$

c. $z = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

d. $z = (1 + i)^5$

e. $z = 4i$

f. $z = 1 + i\sqrt{3}$

g. $z = \frac{\sqrt{3}+i}{-1+i\sqrt{3}}$

h. $z = e^{i\pi/2}$

i. $z = \frac{1+i}{1-i}$

j. $z = \frac{e^{i\pi/4}}{e^{i\pi/3}}$

2) Déterminer la forme exponentielle des nombres complexes suivants :

a. $z = 3e^{i\pi/4}$

b. $z = (1 + i)^2$

c. $z = \frac{e^{i\pi/2}}{e^{i\pi}}$

d. $z = \cos(3\theta) - i\sin(3\theta)$ où $\theta \in \mathbb{R}$

e. $z = i\sqrt{2}$

3. Calcul de cosinus particuliers

A l'aide des formules d'addition et de duplication, déterminez le cosinus pour les angles x suivantes :

a. $x = \frac{\pi}{12}$

b. $x = \frac{5\pi}{12}$

c. $x = \frac{7\pi}{8}$

4. Résolution d'équations

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a. $z^2 - 2z\cos(\alpha) + 1 = 0$

b. $z^3 = 1$

c. $z^2 + 4z + 9 = 0$

d. $(z-1)^2 = 1$

e. $z^n = 1$

f. $z^4 - 3z^2 + 2 = 0$

g. $4z^2 + 8|z|^2 - 3 = 0$

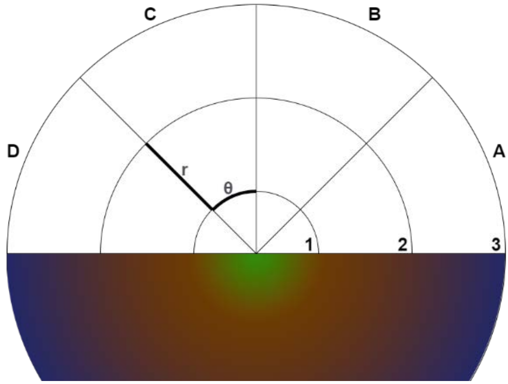
h. $(3+i)z + (2-3i)\overline{z} = 2i$

i. $\frac{|z-i|}{|z|} = 2$

Exercices d'approfondissement

5. Localisation d'un radar

On étudie le rôle de la région de Guyane dans la surveillance d'astéroïdes. On découpe l'atmosphère couverte par la parabole guyanaise de la façon suivante :



Chaque zone est identifiée par une paire lettre-numéro et représente une section angulaire d'angle et rayon θ et r identique à chaque zone. On suppose que le radar couvre 180° et 600km d'altitude au total.

a. A l'aide d'un tableau, encadrer l'appartenance d'un nombre complexe $z = re^{i\theta}$ à une des zones en fonction de sa profondeur r et son angle θ.

b. Un astéroïde est relevé par la position $z = 240e^{\frac{3i\pi}{5}}$, identifiez sa zone.

c. On souhaite étudier la dangerosité d'un objet volant non identifié, on estime sa trajectoire par $z = r(t)e^{i\theta(t)}$ où $r(t) = 200(t-1)^2 + 200$ et $\theta(t) = \frac{\pi}{4}(1+t)$ avec $t \in [0,2]$ heures. Étudier la trajectoire de l'objet.

d. On signale l'objet comme dangereux s'il pénètre dans la zone de profondeur 1, déterminer s'il existe l'instant où sera déclenché l'alarme.

6. All for one and Euler's formula for all !

Let $\theta \in \mathbb{R}^*$ and $n \in \mathbb{N}$. We further add that differentiating or integrating complex functions is similar to real-valued functions in that i is seen as a constant.

1) Let's demonstrate the following properties :
   a. Euler's formula : $\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$ and $\sin(\theta) = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$
   b. $\forall z, z' \in \mathbb{C}, \mathcal{Re}(z+z') = \mathcal{Re}(z) + \mathcal{Re}(z')$, $\mathcal{Im}(z+z') = \mathcal{Im}(z) + \mathcal{Im}(z')$ where $\mathcal{Re}$ and $\mathcal{Im}$ return the real and imaginary part.
   c. $\forall z, z' \in \mathbb{C}, \mathcal{Re}(zz') = \mathcal{Re}(z)\mathcal{Re}(z') - \mathcal{Im}(z)\mathcal{Im}(z')$ and $\mathcal{Im}(zz') = \mathcal{Re}(z)\mathcal{Im}(z') + \mathcal{Im}(z)\mathcal{Re}(z')$ where $\mathcal{Re}$ and $\mathcal{Im}$ return the real and imaginary part.

2) Using the properties demonstrated at question 1), solve the following :
   a. Simplify the expression of $\sum_{k=0}^{n} \cos(k\theta)$ where $\theta \neq 0$
   b. Calculate $\int_0^1 e^x \cos(\theta x)\, dx$, we'll extend the linearity of $\mathcal{Re}$ and $\mathcal{Im}$ from sums to integrals, i.e. $\int \mathrm{Re(z)} = \mathrm{Re}\left(\int \mathrm{z}\right)$.

3) After reviewing the values taken by the sequence $(i^m)_{m\in\mathbb{N}}$, use Moivre's property to solve the following :
   a. Show that $\frac{e^{in\theta}-e^{-in\theta}}{2} = \sum_{k\le n, k\equiv 1[2]} (-1)^{\frac{k-1}{2}} \binom{n}{k} \cos^{\mathrm{n-k}}(\theta) \sin^{\mathrm{k}}(\theta)$
   b. Supposing that $\cos(n\theta) = \sum_{k\le n, k\equiv 0[2]} (-1)^{\frac{k}{2}} \binom{n}{k} \cos^{\mathrm{n-k}}(\theta) \sin^{\mathrm{k}}(\theta)$, deduce that $\tan(n\theta) = \frac{\sum_{k\le n,k\equiv 1[2]}(-1)^{\frac{k-1}{2}}\binom{n}{k}\tan^{\mathrm{k}}(\theta)}{\sum_{k\le n,k\equiv 0[2]}(-1)^{\frac{k}{2}}\binom{n}{k}\tan^{\mathrm{k}}(\theta)}$

Correction des exercices

1. Représentation d'affixes

a. On a, $z = (3, 0)$

b. On a, $z = (1, 1)$

c. On a, $z = e^{2i\pi} = \cos(2\pi) + i\sin(2\pi) = (1, 0)$

d. On a, $z = \cos(\pi) + i\sin(\pi) = (-1, 0)$

e. On a, $z = (1+i)^7 = \left(\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\right)^7$

$$\begin{aligned}
&= \left(\sqrt{2}\right)^7 \left(\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)i\right)\right)^7 \\
&= \left(\sqrt{2}\right)^7 \left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)i\right) \\
&= \left(\sqrt{2}\right)^7 \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)i\right) \\
&= \left(\sqrt{2}\right)^7 \left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)i\right) = (8, -8)
\end{aligned}$$

2. Détermination de formes complexes

1)

a. On a, $z = 3 = 3(1 + 0i) = 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$

b. On a, $z = 1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

c. On a, $z = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$

d. On a, $z = (1+i)^5 = \left(\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right)\right)^5$

$$\begin{aligned}
&= 4\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)^5 \\
&= 4\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)\right)
\end{aligned}$$

e. On a, $z = 4i = 4(0 + 1i) = 4\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)$

f. On a, $z = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$

g. On a, $|z| = \frac{|\sqrt{3}+i|}{|-1+i\sqrt{3}|} = 1$ et $\arg(z) = \arg(\sqrt{3} + i) - \arg(-1 + i\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{2}$
Donc, $z = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

h. On a, $|z| = \left|e^{i\pi/2}\right| = 1$ et $\arg(z) = \arg\left(e^{i\pi/2}\right) = \frac{\pi}{2}$
Donc, $z = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

i. On a, $|z| = \frac{|1+i|}{|1-i|} = 1$ et $\arg(z) = \arg(1 + i) - \arg(1 - i) = \frac{\pi}{2}$
Donc, $z = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$

j. On a, $|z| = \frac{|e^{i\pi/4}|}{|e^{i\pi/3}|} = 1$ et $\arg(z) = \arg(e^{i\pi/4}) - \arg\left(e^{\frac{i\pi}{3}}\right) = -\frac{\pi}{12}$
Donc, $z = \cos\left(-\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)$

2)

a. On a, $z = 3e^{i\pi/4}$

b. On a, $z = (1 + i)^2 = \left(\sqrt{2}e^{i\pi/4}\right)^2$
$= 2e^{i\pi/2}$

c. On a, $z = \frac{e^{i\pi/2}}{e^{i\pi}} = e^{-i\pi/2}$

d. On a, $z = \cos(3\theta) - i\sin(3\theta)$
$= \cos(-3\theta) + i\sin(-3\theta)$
$= e^{-3i\theta}$

e. On a, $z = i\sqrt{2} = \sqrt{2}e^{i\pi/2}$

3. Calcul de cosinus et sinus particuliers

a. On a, $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)$

$$\begin{aligned}
&= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\\
&= \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

b. On a, $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right)$

$$\begin{aligned}
&= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\\
&= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\\
&= \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{2\sqrt{2}}
\end{aligned}$$

c. On a, $\cos\left(2\frac{7\pi}{8}\right) = 2\cos^2\left(\frac{7\pi}{8}\right) - 1$

$$= 2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) - 1$$

Or, $\frac{\pi}{8} \in \left]-\pi/2, \pi/2\right[$, donc, $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) > 0$

Finalement, on a, $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{7\pi}{4}\right)}{2}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{2\sqrt{2}}}$

4. Résolution d'équations

a. On a, $z^2 - 2z\cos(\alpha) + 1 = 0$

Supposons qu'il existe deux racines complexes conjuguées $z_1 = \rho e^{i\theta}$ et $z_2 = \rho e^{-i\theta}$, on a, par théorème, $z_1 z_2 = 2\cos(\alpha)$ et $z_1 + z_2 = 1$.

Or,

$$\begin{cases}\rho^2 = 2\cos(\alpha)\\ \rho\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right) = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\rho^2 = 2\cos(\alpha)\\ \rho \cdot 2\cos(\theta) = 1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\rho = \sqrt{2\cos(\alpha)}\\ \cos(\theta) = \frac{1}{2\sqrt{2\cos(\alpha)}}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\rho = \sqrt{2\cos(\alpha)}\\ \theta = \pm\frac{1}{2\sqrt{2\cos(\alpha)}}\end{cases}$$

On aurait très bien pu utiliser la formule quadratique.

b. On a, par théorème de la racine 3ème,
$z^3 = 1 \Leftrightarrow z \in \left\{1, e^{2i\pi/3}, e^{4i\pi/3}\right\}$

c. On a, $z^2 + 4z + 9 = 0$

Le polynôme complexe $z^2 + 4z + 9$ admet pour discriminant $-20 < 0$.

Par théorème, il existe deux solutions complexes conjuguées z_1, z_2 telles que $z_1 = \frac{-4+i\sqrt{20}}{2}$ et $z_2 = \frac{-4-i\sqrt{20}}{2}$.

d. On a, $(z-1)^2 = 1 \Leftrightarrow z - 1 \in \left\{1, e^{i\pi}\right\} \Leftrightarrow z \in \left\{2, 1 + e^{i\pi}\right\} = \{2, 0\}$

e. Soit $n \in \mathbb{N}$, on a, par théorème, $z^n = 1 \Leftrightarrow z \in \left\{1, e^{\frac{2i\pi}{n}}, e^{\frac{4i\pi}{n}}, \dots, e^{\frac{2(n-1)i\pi}{n}}\right\}$

f. On a, $z^4 - 3z^2 + 2 = 0$.

Soit $Z = z^2$, on a, $z^4 - 3z^2 + 2 = 0 \Longrightarrow Z^2 - 3Z + 2 = 0$

Le polynôme complexe $Z^2 - 3Z + 2$ admet pour discriminant $1 > 0$.

Par théorème, il existe deux solutions réelles à l'équation Z_1, Z_2 telles que $Z_1 = \frac{3+1}{2} = 2$ et $Z_2 = \frac{3-1}{2} = 1$.

Or, $Z = z_1^2 \Leftrightarrow z_1 \in \left\{\sqrt{2}, \sqrt{2}e^{i\pi}\right\}$ et $Z = z_2^2 \Leftrightarrow z_2 \in \left\{1, e^{i\pi}\right\}$

Finalement, $\mathcal{S} = \left\{1, \sqrt{2}, e^{i\pi}, \sqrt{2}e^{i\pi}\right\} = \left\{-\sqrt{2}, -1, 1, \sqrt{2}\right\}$

g. Soit $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, on a,

$$\begin{aligned} 4z^2 + 8|z|^2 - 3 = 0 &\Leftrightarrow 4(a+ib)^2 + 8(a^2+b^2) - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow 4(a^2 - b^2 + 2abi) + 8(a^2+b^2) - 3 = 0 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 12a^2 + 4b^2 - 3 = 0 \\ 8ab = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Si $a = 0$, on a,

$$\begin{aligned} \begin{cases} 12a^2 + 4b^2 - 3 = 0 \\ a = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 4b^2 - 3 = 0 \\ a = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b^2 = 3/4 \\ a = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} b = \pm\frac{\sqrt{3}}{2} \\ a = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Si $b = 0$, on a,

$$\begin{aligned} \begin{cases} 12a^2 + 4b^2 - 3 = 0 \\ b = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 12a^2 - 3 = 0 \\ a = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 3/12 \\ b = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm\frac{1}{2} \\ b = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Si $a = 0 = b$, on a,

$12a^2 + 4b^2 - 3 = -3 \neq 0$, ce qui n'est pas possible.

De même, on a contradiction si $a \neq 0 \neq b$ avec $8ab \neq 0$.

Finalement, $\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{i\sqrt{3}}{2}, -\frac{i\sqrt{3}}{2}\right\}$

h. Soit $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, on a,

$$\begin{aligned} (3+i)z + (2-3i)\overline{z} = 2i &\Leftrightarrow (3+i)(a+ib) + (2-3i)(a-ib) = 2i \\ &\Leftrightarrow (5a - 4b) + i(b - 2a) = 2i \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 5a - 4b = 0 \\ b - 2a = 2 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = -\frac{8}{3} \\ b = -\frac{10}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

i. Soit $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, on a,

$$\begin{aligned} \frac{|z-i|}{|z|} = 2 &\Leftrightarrow \sqrt{a^2 + (b-1)^2} = 2\sqrt{a^2+b^2} \\ &\Leftrightarrow a^2 + (b-1)^2 = 4(a^2+b^2) \\ &\Leftrightarrow 3a^2 + 3b^2 + 2b - 1 = 0 \end{aligned}$$

Donc, $\mathcal{S} = \{z = a + ib \text{ tel que } 3a^2 + 3b^2 + 2b - 1 = 0\}$

5. Localisation d'un radar

a. Chaque zone couvre le même angle θ et la même profondeur r.

Ainsi, comme la profondeur est découpée en 3 zones, on a,

$r + r + r = 600 \Leftrightarrow r = 200$ km

De même,

$\theta + \theta + \theta + \theta = 180° \Leftrightarrow \theta = \pi/4$.

Finalement, à l'aide de la figure, on a,

	A	B	C	D
1	$0 < r < 200$ $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$	$0 < r < 200$ $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$	$0 < r < 200$ $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{4}$	$0 < r < 200$ $\frac{3\pi}{4} < \theta < \pi$
2	$200 < r < 400$ $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$	$200 < r < 400$ $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$	$200 < r < 400$ $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{4}$	$200 < r < 400$ $\frac{3\pi}{4} < \theta < \pi$
3	$400 < r < 600$ $0 < \theta < \frac{\pi}{4}$	$400 < r < 600$ $\frac{\pi}{4} < \theta < \frac{\pi}{2}$	$400 < r < 600$ $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{4}$	$400 < r < 600$ $\frac{3\pi}{4} < \theta < \pi$

b. On a, $|z| = 240 \in \ ]200, 400[$ et $\arg(z) = \frac{3\pi}{5} \in \left]\frac{2.5\pi}{5}, \frac{3\pi}{4}\right[= \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right[$

Donc, l'astéroïde se situe en $C2$.

c. Étudions l'évolution en profondeur et angle de l'objet volant.

Le polynôme r est de second degré avec pour axe de symétrie 1 et hauteur minimale $r(1) = 200$km et $r(0) = r(2) = 400$km.

De plus, on a $\theta(0) = \frac{\pi}{4}$, $\theta(1) = \frac{\pi}{2}$ et $\theta(2) = \frac{3\pi}{4}$.

Donc, à l'aide des variations on en déduit le trajet $B2 \to B1 \cap C1 \to C2$, effectivement, l'objet est à la frontière de $B1$ et $C1$ à l'instant $t = 1$.

d. Si la configuration prend en compte le cas limite $r = 200$, alors l'alarme retentira à l'instant $t = 1$, autrement on ne peut pas considérer que l'objet pénètre dans la zone $B1$ ou $C1$.

6. All for one and Euler's formula for all !

1)

a. We have,

$$\begin{aligned}\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} &= \frac{\cos(\theta)+i\sin(\theta)+\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)}{2}\\ &= \frac{\cos(\theta)+i\sin(\theta)+\cos(\theta)-i\sin(\theta)}{2}\\ &= \frac{2\cos(\theta)}{2} = \cos(\theta)\end{aligned}$$

Moreover,

$$\begin{aligned}\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i} &= \frac{\cos(\theta)+i\sin(\theta)-\cos(-\theta)-i\sin(-\theta)}{2i}\\ &= \frac{\cos(\theta)+i\sin(\theta)-\cos(\theta)+i\sin(\theta)}{2i}\\ &= \frac{2i\sin(\theta)}{2i} = \sin(\theta)\end{aligned}$$

b. We know that, $\forall z, z' \in \mathbb{C}, \exists a, x, b, y \in \mathbb{R}, z = a + ib$ and $z' = x + iy$,

$$\begin{aligned}\mathcal{Re}(z+z') &= \mathcal{Re}(a+ib+x+iy)\\ &= \mathcal{Re}\big((a+x)+i(b+y)\big)\\ &= a+x\\ &= \mathcal{Re}(z)+\mathcal{Re}(z')\end{aligned}$$

Similarly, we obtain $\mathcal{Im}(z+z') = \mathcal{Im}(z) + \mathcal{Im}(z')$

c. We know that, $\forall z, z' \in \mathbb{C}, \exists a, x, b, y \in \mathbb{R}, z = a + ib$ and $z' = x + iy$,

$$\begin{aligned}\mathcal{Re}(zz') &= \mathcal{Re}\big((a+ib)(x+iy)\big)\\ &= \mathcal{Re}\big((ax-by)+i(ay+bx)\big)\\ &= ax-by\\ &= \mathcal{Re}(z)\mathcal{Re}(z') - \mathcal{Im}(z)\mathcal{Im}(z')\end{aligned}$$

Similarly, we obtain $\mathcal{Im}(zz') = \mathcal{Re}(z)\mathcal{Im}(z') + \mathcal{Im}(z)\mathcal{Re}(z')$.

2)

a. We have,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta) &= \sum_{k=0}^{n}\mathcal{R}e(\cos(k\theta)+i\sin(k\theta))\\ &= \sum_{k=0}^{n}\mathcal{R}e\left(e^{ik\theta}\right)\end{aligned}$$

By induction from 1) b., we can deduce that,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\cos(k\theta) &= \mathcal{R}e\left(\sum_{k=0}^{n}e^{ik\theta}\right)\\ &= \mathcal{R}e\left(\frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}\right) \qquad \text{geom. sum where } \theta\neq 0 \Leftrightarrow e^{i\theta}\neq 1\\ &= \mathcal{R}e\left(\frac{e^{\frac{i(n+1)\theta}{2}}\left(e^{-\frac{i(n+1)\theta}{2}}-e^{\frac{i(n+1)\theta}{2}}\right)}{e^{\frac{i\theta}{2}}\left(e^{-\frac{i\theta}{2}}-e^{\frac{i\theta}{2}}\right)}\right)\\ &= \mathcal{R}e\left(\frac{e^{\frac{i(n+1)\theta}{2}}2i\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{e^{\frac{i\theta}{2}}2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right) \qquad (\,1)\text{ a. })\\ &= \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\cdot\mathcal{R}e\left(\frac{e^{\frac{i(n+1)\theta}{2}}}{e^{\frac{i\theta}{2}}}\right)\\ &= \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\cdot\mathcal{R}e\left(e^{\frac{in\theta}{2}}\right)\\ &= \frac{\sin\left(\frac{(n+1)\theta}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}\cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)\end{aligned}$$

b. We have,

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^x\cos(\theta x)\,dx &= \int_0^1 e^x\mathcal{R}e\left(e^{i\theta x}\right)dx\\ &= \int_0^1 \mathcal{R}e\left(e^x e^{i\theta x}\right)dx\\ &= \int_0^1 \mathcal{R}e\left(e^{x(1+i\theta)}\right)dx\end{aligned}$$

We supposed that $\int\mathcal{R}e(z)=\mathcal{R}e(\int z)$ and $\int\mathcal{I}m(z)=\mathcal{I}m(\int z)$, thus,

$$\begin{aligned}\int_0^1 e^x\cos(\theta x)\,dx &= \mathcal{R}e\left(\int_0^1 e^{x(1+i\theta)}dx\right)\\ &= \mathcal{R}e\left(\left[\frac{1}{1+i\theta}e^{x(1+i\theta)}\right]_0^1\right)\\ &= \mathcal{R}e\left(\frac{1}{1+i\theta}\left(e^{1+i\theta}-1\right)\right)\\ &= \mathcal{R}e\left(\frac{1-i\theta}{1+\theta^2}\left(e^{1+i\theta}-1\right)\right)\\ &= \mathcal{R}e\left(\frac{1-i\theta}{1+\theta^2}e^{1+i\theta}\right)-\mathcal{R}e\left(\frac{1-i\theta}{1+\theta^2}\right)\\ &= \frac{e}{1+\theta^2}\mathcal{R}e\left((1-i\theta)e^{i\theta}\right)-\frac{1}{1+\theta^2}\\ &= \frac{e}{1+\theta^2}\left(\mathcal{R}e(1-i\theta)\mathcal{R}e\left(e^{i\theta}\right)-\mathcal{I}m(1-i\theta)\mathcal{I}m\left(e^{i\theta}\right)\right)-\frac{1}{1+\theta^2}\\ &= \frac{1}{1+\theta^2}\left(e(\cos(\theta)+\theta\sin(\theta))-1\right)\end{aligned}$$

3) $\forall m \in \mathbb{N}, i^m = \begin{cases} i & \text{si } m \equiv 1[4] \\ -1 & \text{si } m \equiv 2[4] \\ -i & \text{si } m \equiv 3[4] \\ 1 & \text{si } m \equiv 0[4] \end{cases}$

a. First of, according to Euler's formula,
$\sin(n\theta) = \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2i} \Leftrightarrow i\sin(n\theta) = \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2}$

Second of, according to Moivre's formula,
$\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n$

Thus, we have,

$$\begin{aligned}
\frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2} &= \mathcal{Im}((\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n - \cos(n\theta)) \\
&= \mathcal{Im}((\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n) - \mathcal{Im}(\cos(n\theta)) \\
&= \mathcal{Im}((\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n) \\
&= \mathcal{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos^{\mathrm{n-k}}(\theta)\, (i\sin)^{\mathrm{k}}(\theta)\right) \\
&= \mathcal{Im}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i^k \cos^{\mathrm{n-k}}(\theta) \sin^{\mathrm{k}}(\theta)\right)
\end{aligned}$$

However, $\forall k \leq n$, $\binom{n}{k} i^k \cos^{\mathrm{n-k}}(\theta) \sin^{\mathrm{k}}(\theta)$ is either real or purely imaginary, it is purely imaginary when i^k is purely imaginary, i.e., when k is odd, such that k odd $\Longrightarrow \mathcal{Im}(i^k) = \begin{cases} 1 & \text{if } k \equiv 1[4] \\ -1 & \text{if } k \equiv 3[4] \end{cases}$

$$\begin{aligned}
&= \begin{cases} 1 & \text{if } (k-1) \equiv 0[4] \\ -1 & \text{if } (k-1) \equiv 2[4] \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1 & \text{if } \frac{k-1}{2} \equiv 0[2] \\ -1 & \text{if } \frac{k-1}{2} \equiv 1[2] \end{cases} \\
&= (-1)^{\frac{k-1}{2}}
\end{aligned}$$

So,

$$\begin{aligned}
\frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{2} &= \mathcal{Im}\left(\sum_{k \leq n, k \text{ odd}} \binom{n}{k} i^k \cos^{\mathrm{n-k}}(\theta) \sin^{\mathrm{k}}(\theta)\right) \\
&= \mathcal{Im}\left(\sum_{k \leq n, k \text{ odd}} \binom{n}{k} (-1)^{\frac{k-1}{2}} \cos^{\mathrm{n-k}}(\theta) \sin^{\mathrm{k}}(\theta)\right) \\
&= \sum_{k \leq n, k \equiv 1[2]} \binom{n}{k} (-1)^{\frac{k-1}{2}} \cos^{\mathrm{n-k}}(\theta) \sin^{\mathrm{k}}(\theta)
\end{aligned}$$

b. We have,

$$\begin{aligned}
\tan(n\theta) &= \frac{\sin(n\theta)}{\cos(n\theta)} \\
&= \frac{\sum_{k\leq n, k\equiv 1[2]} \binom{n}{k} (-1)^{\frac{k-1}{2}} \cos^{\mathrm{n-k}}(\theta)\sin^{\mathrm{k}}(\theta)}{\sum_{k\leq n, k\equiv 0[2]} (-1)^{\frac{k}{2}} \binom{n}{k} \cos^{\mathrm{n-k}}(\theta)\sin^{\mathrm{k}}(\theta)} \\
&= \frac{\cos^{\mathrm{n}}(\theta)\sum_{k\leq n, k\equiv 1[2]} \binom{n}{k} (-1)^{\frac{k-1}{2}} \cos^{\mathrm{-k}}(\theta)\sin^{\mathrm{k}}(\theta)}{\cos^{\mathrm{n}}(\theta)\sum_{k\leq n, k\equiv 0[2]} (-1)^{\frac{k}{2}} \binom{n}{k} \cos^{\mathrm{-k}}(\theta)\sin^{\mathrm{k}}(\theta)} \\
&= \frac{\sum_{k\leq n, k\equiv 1[2]} \binom{n}{k} (-1)^{\frac{k-1}{2}} \left(\frac{\sin}{\cos}\right)^{\mathrm{k}}(\theta)}{\sum_{k\leq n, k\equiv 0[2]} (-1)^{\frac{k}{2}} \binom{n}{k} \left(\frac{\sin}{\cos}\right)^{\mathrm{k}}(\theta)} \\
&= \frac{\sum_{k\leq n, k\equiv 1[2]} \binom{n}{k} (-1)^{\frac{k-1}{2}} \tan^{\mathrm{k}}(\theta)}{\sum_{k\leq n, k\equiv 0[2]} (-1)^{\frac{k}{2}} \binom{n}{k} \tan^{\mathrm{k}}(\theta)}
\end{aligned}$$

Arithmétique

(Mathématiques expertes)

« Quelle est l'arithmétique du sentiment ? Un et un font un. »

Diane de Beausacq, *Livre d'or de la comtesse Diane* (1886).

L'arithmétique, du grec antique *arithmos* « nombre », regroupe l'ensemble des relations entre les nombres entiers, qui est naturellement plus complexe que celles entre les nombres réels.

La théorie des nombres est majoritairement délaissée dans le secondaire du fait de leur application très spécifique et scientifique.

Dans cette partie, nous réintroduirons les notions de divisibilité ainsi qu'étudierons les théorèmes et propriétés qui facilitent la résolution de problèmes de divisibilité.

2 THANK	3 YOU	4 ALL
5 FOR	6 HAVING	7 NOT YOU
8 EASY	9 DIVISIBILITY	10 RULES

« Mathematicians have tried in vain to this day to discover some order in the sequence of prime numbers, and we have reason to believe that it is a mystery into which the human mind will never penetrate. »

Leonhard Euler

Les nombres premiers, du fait de leur simplicité à être manipuler mais difficiles à être déterminer, trouvent une multitude d'applications en cryptographie et dans le pseudo-aléatoire. Dans ce chapitre, nous réintroduirons des notions vues au collège.

Sommaire

Cours

Exercices d'application

Exercices d'approfondissement

Correction des exercices

COURS

I. Divisibilité dans $\mathbb{Z}$

1. Définitions et propriétés

Soit a, b et c trois entiers.

Définitions (Divisibilité)

On dit que a **divise** b, noté $a|b$, lorsqu'il existe un entier k tel que $b = ka$. De plus, on dit que a est un **diviseur** de b tandis que b est un **multiple** de a.

Propriété (Transitivité)

Si a divise b et b divise c, alors a divise c.

Propriété (Stabilité par combinaison linéaire)

Si c divise a et b, alors c divise $ma + nb$ pour tous entiers m, n.

2. Division euclidienne

Soit a un entier naturel et b un entier naturel non nul.

Définition (Division euclidienne)

Il existe un unique couple d'entiers (q, r) tel que $a = bq + r$ où $0 \leq r < b$. On appelle q le **quotient** et r le **reste** de la **division euclidienne de a par b**.

Propriété (Division euclidienne)

On peut étendre la notion de division euclidienne aux entiers relatifs.

II. Congruence dans $\mathbb{Z}$

1. Définition et propriétés

Soit a, b deux entiers et n un entier non nul.

Définition (Congruence)

On dit que a **congrus** à b **modulo** n, noté $a \equiv b\ [n]$, si n divise $a - b$.

Propriété (Congruence)

a et b sont congrus modulo n, si et seulement si, la division euclidienne de a par n admet le même reste que la division euclidienne de b par n.

Propriété (Transitivité de la congruence)

a congrus toujours à a module n. De plus, si a congrus à b modulo n et b congrus à c modulo n, alors a congrus à c modulo n.

Propriétés (Opérations sur la congruence)

Si $a \equiv b\ [n]$ et $a' \equiv b'\ [n]$ avec a', b' deux entiers, on a :

- $a + a' \equiv b + b'\ [n]$
- $a - a' \equiv b - b'\ [n]$
- $a \times a' \equiv b \times b'\ [n]$
- $a^p \equiv b^p\ [n]$ où $p \in \mathbb{N}$.

2. Plus Grand Commun Diviseur

Soit a, b deux entiers non nuls et r, q le reste et quotient de la division euclidienne de a par b.

Définition (Plus Grand Commun Diviseur)

On appelle **Plus Grand Commun Diviseur (PGCD)** de a et b le plus grand diviseur que a et b ont en commun.

Propriétés (PGCD)

On a, les propriétés suivantes :

$$PGCD(a, 0) = a, PGCD(a, 1) = 1 \text{ et si } b \text{ divise } a, \text{alors } PGCD(a, b) = b$$

Propriétés (PGCD)

Soit $k \in \mathbb{Z}$, on a, les propriétés suivantes :

$$PGCD(a, b) = PGCD(b, r) \text{ et } PGCD(ka, kb) = kPGCD(a, b)$$

Propriété (PGCD)

L'ensemble des diviseurs communs à a et b est l'ensemble des diviseurs de leur $PGCD$.

Exercices d'application

1. Algorithme d'Euclide

L'Algorithme d'Euclide permet de déterminer le PGCD entre deux entiers. On pose le quotient q et le reste r de la division euclidienne de a par b, on remplace le multiple a par b et le reste r par $a\%b$, on réitère jusqu'à obtenir $r = 0$, le PGCD devenant le quotient q.

1) Écrire sur Python un programme déterminant le PGCD de deux entiers a et b par l'algorithme d'Euclide.
2) Déterminer le PGCD des dix premiers entiers non nuls entre eux.
3) Déterminer le PGCD entre 212 et 123.

2. Congruences et divisibilités

1) Répondre les questions suivantes :
   a. Quelle heure sera-t-il 6 heures après 20h00 ?
   b. Quel jour sera-t-il 3 jours après samedi ?
   c. Si n est pair, quelle est la parité de n^2 ?
   d. Si n est impair, quelle est la parité de n^2 ?
   e. Si a, b sont deux entiers, quelle est la parité de $a + b$?
   f. Si n est un entier, $3n^4 + 5n + 13$ est-il impair ?

2) Démontrer les propositions suivantes :
   a. Pour tout entier naturel n, $4^n - 1$ est divisible par 3.
   b. Pour tout entier naturel n, $n^4 - 1$ est divisible par $n - 1$ et $n + 1$.
   c. Pour tout entier naturel non nul, $9n - 8$ n'est pas divisible par $3n + 1$.
   d. Le reste de la division euclidienne de la somme des n premiers entiers par n ne dépend pas de la parité de n.
   e. La somme de cinq entiers consécutifs est un multiple de 5.
   f. Pour tout entier naturel $n, n^5 - n$ est divisible par 5.
   g. $35 \equiv 2\ [3]$

3. Résolution d'équations

1) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les problèmes de divisibilités et congruences suivants :
   a. $(n+1)|(n^2+1)$
   b. $(n+4)|(2n+1)$
   c. $(2n-3)|(3n+5)$
   d. $(n^2+11)|(n+11)$
   e. $6+n \equiv 2\ [7]$
   f. $4n \equiv 1\ [5]$, on appellera n **inverse** de 4 **modulo 5**.
   g. $3 \equiv 1\ [n]$
   h. $7 \equiv 4\ [n^2+n]$
   i. Déterminer n tel que $\begin{cases} n \equiv 1\ [3] \\ n \equiv 4\ [5] \end{cases}$
   j. Reste de la division euclidienne de 10^n par 9.

2) Résoudre dans $\mathbb{N}$ les équations suivantes :
   a. $\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 2020$
   b. $10^{2n} - 2 \cdot 10^n + 2 \cdot 10^2 = 10^4$

4. Règles de division

On s'intéresse aux différentes règles de division par les premiers entiers.

1) Rappeler le critère de divisibilité d'un entier par 1, par 2, par 5 et 10.
2) A l'aide de la décomposition décimale d'un entier $a = 10^n a_n + \cdots + a_0$ où (a_k) correspond au $(k+1)$-ème chiffre composant a, montrez qu'un entier est divisible par 3 si et seulement si la somme des chiffres qui le composent est divisible par 3.
3) Soit "$a_3a_2a_1$" l'écriture d'un entier où $a_3, a_2, a_1 \in \mathbb{N}$, montrez que cet entier est divisible par 11 si et seulement si la somme alternée $a_3 - a_2 + a_1$ est divisible par 11.

5. Cryptographie

1) On souhaite étudier la composition du code de sécurité sociale. Le premier chiffre correspond au sexe de l'individu, 1 pour homme et 2 pour femme, les deux chiffres suivants correspondent à l'année de naissance, les deux chiffres suivants correspondent au mois de naissance, les deux chiffres suivants correspondent au département de naissance, les trois chiffres suivants correspondent à la commune de naissance, les trois chiffres suivants correspondent au numéro d'inscription sur le registre d'état civil et les deux derniers chiffres correspondent à un identificateur d'erreur calculé par 97 soustrait au reste de la division euclidienne de l'ensemble des chiffres précédent par 97.
   a. Combien de codes sont possibles ?
   b. Quel est le code d'identificateur d'erreur calculé d'une femme née le 14 Mars 1999 à Lyon 69000, dont le numéro d'inscription dans le registre d'état civil est 212 ?
   c. Vérifier l'exactitude de votre clé personnelle.

2) On reçoit le message « JXQEP », on sait que le message a été codé en prenant la position $x \in \{1, \dots, 26\}$ d'une lettre dans l'ordre alphabétique et en renvoyant la lettre dont la position correspond au reste de la division euclidienne de $(x + 23)$ par 26.
   a. Comment peut-on simplifier le décodage d'une lettre ?
   b. Décoder le message reçu.
   c. Coder le message « AMOUR » à partir de la méthode décrite.

Exercices d'approfondissement

6. Nombres hautement composés

Un **nombre hautement composé** est défini comme un entier strictement positif contenant plus de diviseurs que tous les entiers précédents.

1) Déterminer si les cinq premiers nombres hautement composés (NHC)
2) Écrire sur Python un programme renvoyant le nombre de diviseurs et déterminer la liste des 10 premiers nombres hautement composés.

7. Égalité de Sophie Germain

Marie-Sophie Germain, mathématicienne française et symbole de la réussite féminine parmi ses illustres contemporains masculins de la Révolution Française, a su établir un théorème amenant à la conclusion que pour tout entier $n > 1$, $n^4 + 4$ n'est pas premier. Soit n, m deux entiers naturels.

1) Montrer que $(n^2 + 2m^2 + 2mn)(n^2 + 2m^2 - 2mn) = n^4 + 4m^4$.
2) En supposant que $m = 1$, déterminer pour quelles valeurs de n le nombre $n^4 + 4$ est premier.
3) On considère un entier p comme **nombre premier de Sophie Germain** si p et $2p + 1$ sont premiers. A l'aide d'un programme Python, déterminez les cinq nombres premiers de Sophie Germain.

8. Swedish Mathematical Olympiad

Let $n \in \mathbb{N}$ such that $n \geq 8$, for which values is $n^{\frac{1}{n-7}} \in \mathbb{N}$?

Correction des exercices

1. Algorithme d'Euclide

1)

```
def euclide(a, b) :
    if b == 0 :
        return a
    else :
        a, b = b, a%b
        return euclide(a, b)
```

2) On a,

PGCD	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
3	1	1	3	1	1	3	1	1	3	1
4	1	2	1	4	1	2	1	4	1	2
5	1	1	1	1	5	1	1	1	1	5
6	1	2	3	2	1	6	1	2	3	2
7	1	1	1	1	1	1	7	1	1	1
8	1	2	1	4	1	2	1	8	1	2
9	1	1	3	1	1	3	1	1	9	1
10	1	2	1	2	5	2	1	2	1	10

3) On a, d'après l'algorithme d'Euclide, $\text{PGCD}(212, 123) = 1$.

2. Congruences et divisibilités

1)

a. Le système horaire est en base 24.
Ainsi, $20 + 6 = 24 + 2 = 0 + 2 = 2$ heures.

b. Le système semainier est en base 7. Samedi est le 6$^{\text{ème}}$ élément
Ainsi, $6 + 3 = 7 + 2 = 0 + 2 = 2^{\text{ème}}$ jour à savoir mardi.

c. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k$.
On a, $n^2 = (2k)^2 = 4k^2 = 2 \times (2k^2)$
Or, $2 \times k \times k$ est un produit d'entiers, il s'agit donc d'un entier.
Comme n^2 est un multiple de 2 (et $2k^2$), il s'agit d'un entier pair.

d. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$.
On a, $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2 \times (2k^2 + 2k) + 1$
Or, $2 \times k \times k$ et $2 \times k$ sont des produits d'entiers, ce sont des entiers.
Comme n^2 n'est pas multiple de 2, il s'agit d'un entier impair.

e. Soit $a, b \in \mathbb{N}$.
Si a, b sont pairs, on pose $a = 2k$ et $b = 2k'$, on a,
$a + b = 2k + 2k' = 2(k + k')$, $a + b$ est donc pair.
Si a est pair et b impair, on pose $a = 2k$ et $b = 2k' + 1$, on a,
$a + b = 2(k + k') + 1$, $a + b$ est donc impair.
Sans perte de généralité, le résultat est similaire si a est impair et b pair.
Finalement, si a, b sont impairs, on pose $a = 2k + 1$ et $b = 2k' + 1$, et,
$a + b = 2(k + k' + 1)$, $a + b$ est donc pair.
Comme la règle des signes, l'addition de deux entiers de même parité conserve la parité et deux entiers de parité différente est impaire.

f. Vrai. Si n est pair, on pose $n = 2k$, on a,
$$\begin{aligned} 3n^4 + 5n + 13 &= 3 \times 16 \times k^4 + 5 \times 2 \times k + 13 \\ &= 48k^4 + 10k + 13 \end{aligned}$$
Ainsi, $48k^4$ est pair, $10k$ est pair, 13 est impair.
Donc, $48k^4 + 10k$ est pair et $48k^4 + 10k + 13$ est impair.

Si n est impair, on pose $n = 2k + 1$, on a,
$3n^4 + 5n + 13 = 3 \times (2k+1)^4 + 5 \times (2k+1) + 13$
Or, $(2k+1)^2$ est impair donc $(2k+1)^4 = ((2k+1)^2)^2$ est impair.
Ainsi, $3(2k+1)^4 + 5(2k+1) + 13$ est impair.

2)

a. On a, pour tout entier naturel n,
$4 \equiv 1\ [3] \Leftrightarrow 4^n \equiv 1^n\ [3] \Leftrightarrow 4^n \equiv 1\ [3] \Leftrightarrow 4^n - 1 \equiv 0\ [3]$

b. On a, pour tout entier naturel n,
$n^4 - 1 = (n^2)^2 - 1^2 = (n^2 - 1)(n^2 + 1) = (n-1)(n+1)(n^2+1)$
$n^4 - 1$ est bien multiple de $n - 1$ et $n + 1$

c. Supposons pour tout entier naturel non nul n que $3n+1$ divise $9n-8$, or $3n+1$ divise $3n+1$, donc par stabilité de la divisibilité,
$\forall n \in \mathbb{N}^*, 3n+1$ divise $(9n-8)-3(3n+1)=-12=-4\times 3$
Cependant, $3 \equiv 0[3]$, d'où, $\forall n \in \mathbb{N}^*, 3n \equiv 0\ [3] \Longrightarrow 3n+1 \equiv 1\ [3]$, par l'absurde, $\forall n \in \mathbb{N}^*, 3n+1$ ne divise pas $9n-8$.

d. On sait que, pour tout entier naturel n, $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$
Or, n divise $\frac{n(n+1)}{2}$ quel que soit n, donc le reste de la division euclidienne de $\frac{n(n+1)}{2}$ par n est nul.

e. Soit n la somme de cinq entiers consécutifs, on pose $k \in \mathbb{N}$ tel que,
$n = k+(k+1)+(k+2)+(k+3)+(k+4) = 5k+10 = 5(k+2)$
Par définition, n est un multiple de 5.

f. On a, $\forall n \in \mathbb{N}, n^5 - n = n(n^4-1) = n(n-1)(n+1)(n^2+1)$
Construisons la table de congruence modulo 5 :

n	0	1	2	3	4	5
$n \equiv$	0	1	2	3	4	0
$n-1 \equiv$	4	0	1	2	3	4
$n+1 \equiv$	1	2	3	4	0	1
$n^2+1 \equiv$	1	2	0	0	2	1

$\forall n \in \mathbb{N}$, 5 divise un des facteurs de n^5-n et donc divise n^5-n.

g. On a, $35-2=33=3\times 11$.
En effet, 35 congrus à 2 modulo 3.

3. Résolution d'équations

1)

a. Soit $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n+1$ divise n^2+1 et $n+1$, par stabilité, $n+1$ divise $(n^2+1)-(n-1)(n+1)=2$
Ainsi, $n+1$ divise 2 si $n+1 \in \{-2,-1,1,2\}$
Finalement, $n \in \{-3,-2,0,1\}$

b. Soit $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n+4$ divise $2n+1$ et $n+4$, par stabilité, $n+4$ divise $2(n+4)-(2n+1)=7$.
Ainsi, $n+4$ divise 7 si $n+4 \in \{-7,-1,1,7\}$.
Donc, $\mathcal{S}=\{-11,-5,-3,3\}$

c. Soit $n \in \mathbb{Z}$ tel que $2n-3$ divise $3n+5$ et $2n-3$, par stabilité, $2n-3$ divise $3(2n-3)-2(3n+5)=-19$.
Ainsi, $2n-3$ divise -19 si $2n-3 \in \{-19,-1,1,19\}$
Donc, $\mathcal{S}=\{-8,1,2,11\}$

d. Soit $n \in \mathbb{Z}$, on sait que n^2+11 est supérieur ou égal à $n+11$, et donc susceptible de le diviser sur un intervalle restreint, déterminons-le.
On a, $n^2+11 \leq n+11 \Leftrightarrow n(n-1) \leq 0 \Leftrightarrow n \in [0,1] \Leftrightarrow n \in \{0,1\}$
En effet, $0^2+11=1\times(0+11)$ et $1^2+11=1\times(1+11)$.
Donc, $\mathcal{S}=\{0,1\}$.

e. Soit $n \in \mathbb{Z}, 6+n \equiv 2\ [7] \Leftrightarrow n \equiv -4\ [7]$
$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, n=-4+7k$$

f. Soit $n \in \mathbb{Z}, 4n \equiv 1\ [5] \Rightarrow n \equiv 1\ [5]$
$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, n=1+5k$$

g. Soit $n \in \mathbb{Z}, 3 \equiv 1\ [n] \Leftrightarrow n$ divise 2
$$\Leftrightarrow n \in \{-2,-1,1,2\}$$

h. Soit $n \in \mathbb{Z}, 7 \equiv 4\ [n^2+n] \Leftrightarrow n^2+n$ divise 3

$$\Leftrightarrow n^2+n \in \{-3,-1,1,3\}$$

$$\Leftrightarrow n \in \begin{cases} n^2+n+3=0 \\ n^2+n+1=0 \\ n^2+n-1=0 \\ n^2+n-3=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{S} = \emptyset$$

i. Soit $n \in \mathbb{Z}, \begin{cases} n \equiv 1\ [3] \\ n \equiv 4\ [5] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z}, n = 1+3k \\ 1+3k \equiv 4\ [5] \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z}, n = 1+3k \\ 3k \equiv 3\ [5] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z}, n = 1+3k \\ k \equiv 1\ [5] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \exists k \in \mathbb{Z}, n = 1+3k \\ \exists k' \in \mathbb{Z}, k' = 1+5k' \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \exists k' \in \mathbb{Z}, n = 1+3(1+5k')$$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, n = 4+15k$$

j. Soit $n \in \mathbb{N}$, déterminons le plus petit k tel que $10^k \equiv 1\ [9] \Rightarrow k = 1$.

On pose $n = 1q + r$, tel que $q \equiv 0\ [9] \Rightarrow 10^q \equiv 10^0\ [9]$

$$\Leftrightarrow 10^q \equiv 1[9]$$

$$\Rightarrow 10^{q+r} \equiv 10^r\ [9]$$

Si $n \equiv 0\ [1]$, ce qui est toujours le cas, alors $10^n \equiv 1\ [9]$.

Donc $10^r \equiv 1\ [9]$ et le reste de 10^n par 9 est 1.

2)

a. Soit $n \in \mathbb{N}, \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 2020 \Leftrightarrow \prod_{k=1}^{n}\left(\frac{n+1}{n}\right) = 2020$

$$\Leftrightarrow \frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \times \ldots \times \frac{n+1}{n} = 2020$$

$$\Leftrightarrow n+1 = 2020$$

$$\Leftrightarrow n = 2019$$

b. Soit $Z = 10^n$, $Z^2 - 2Z + 200 = 10000 \Leftrightarrow Z^2 - 2Z - 9800 = 0$

$$\Leftrightarrow Z(Z-2) = 9800$$

$$\Leftrightarrow Z \in \{100, -98\} \Rightarrow n = 2$$

4. Règles de division

1) Tout entier est divisible par 1

   Tout entier pair est divisible par 2

   Tout entier dont le chiffre des unités est 0 ou 5 est divisible par 5

   Tout entier dont le chiffre des unités est 0 est divisible par 10, c'est une conséquence directe de la divisibilité par 2 et par 5.

2) Soit $a = \sum 10^k a_k$, on a,

   $a = \sum_{k=0}^{n} a_k 10^k = \sum_{k=0}^{n} a_k (10^k - 1 + 1)$

   $= \sum_{k=0}^{n} a_k (10^k - 1) + \sum_{k=0}^{n} a_k$

   Or, on remarque aisément que les nombres sous la forme $10^k - 1$ sont uniquement composés de 9, $10 - 1 = 9$, $100 - 1 = 99$, etc…

   Ainsi, on peut factoriser $(10^k - 1)$ par 9, qui est un multiple de 3.

   Donc, $\sum_{k=0}^{n} a_k (10^k - 1) \equiv 0\ [3] \Longrightarrow a \equiv \sum_{k=0}^{n} a_k\ [3]$.

   a est multiple de 3 si et seulement si la somme de ses chiffres l'est aussi.

3) Soit $a = \overline{a_3 a_2 a_1} = 100a_3 + 10a_2 + a_1$

   $= 99a_3 + a_3 + 11a_2 - a_2 + 0a_1 + a_1$

   $= (99a_3 + 11a_2 + 0a_1) + a_3 - a_2 + a_1$

   $= 11(9a_3 + a_2 + 0a_1) + a_3 - a_2 + a_1$

   De manière similaire à la question 2), a est divisible par 11 si et seulement si la somme alternée $a_3 - a_2 + a_1$ l'est aussi.

5. Cryptographie

1)

a. Etablissons les différents cardinaux des ensembles :

Sexe $= \{1, 2\}$, cardinal 2

Année $= [\![00, 99]\!]$, cardinal 100

Mois $= [\![01, 12]\!]$, cardinal 12

Département $= [\![01, 95]\!] \cup \{2A, 2B\} \cup \{97, 98, 99\}$, cardinal 100, certains codes correspondent à la Corse, outre-mer et l'étranger.

Commune $= [\![000, 999]\!]$, cardinal 1000, en réalité cela dépend du département, on considèrera le pire cas par simplicité.

Inscription $= [\![000, 999]\!]$, cardinal 1000.

Identificateur est unique, cardinal 1.

Ainsi, il existe $2 \times 100 \times 12 \times 100 \times 1000 \times 1000 \times 1 = 24 \cdot 10^{10}$ codes possibles en théorie.

b. Etablissons l'identité sociale de la femme :

Sexe $= 2$, Année $= 99$, Mois $= 03$

Département $= 69$, Commune $= 000$, Inscription $= 212$

On a, $\mathrm{id.erreur} = 97 - \mathrm{reste}(2990369000212/97) = 6$.

Le code de la femme doit être 2 99 03 69 000 212 06

c. Le code d'identification d'erreur est correct chez moi !

2)

a. Étant donné qu'on est modulo 26, on peut établir le reste de la division euclidienne de $x - 3$ par 26.

b. On a la table de décryptage suivante :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
X	Y	Z	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W

Ainsi, « JXQEP » devient décrypté « MATHS », quel beau message !

c. On a, d'après la table question 2) b., « AMOUR » devient « XJLRO »

6. Nombres hautement composés

1) 1 est évidement le premier nombre hautement composé (NHC).

   2 possède 2 diviseurs, c'est un NHC.

   3 possède 2 diviseurs.

   4 possède 3 diviseurs, c'est un NHC.

   5 possède 2 diviseurs.

   6 possède 4 diviseurs, c'est un NHC.

   7 possède 2 diviseurs.

   8 possède 4 diviseurs.

   9 possède 2 diviseurs.

   10 possède 4 diviseurs.

   11 possède 2 diviseurs.

   12 possède 6 diviseurs, c'est un NHC.

2)

```
NHC = []
diviseursmax = 0
n = 1

while len(NHC) < 10 :
    div = 0
    for k in range(1, n) :
        if n % k == 0 :
            div += 1
    if diviseursmax < div :
        diviseursmax = div
        NHC.append(n)
    n += 1

print(NHC)
```

7. Égalité de Sophie Germain

1) $\forall n, m \in \mathbb{N}$, on a,
$(n^2 + 2m^2 + 2mn)(n^2 + 2m^2 - 2mn) = n^4 + 2(nm)^2 - 2mn^3 + 2(nm)^2 + 4m^4 - 2m^3n + 2mn^3 + 4m^3n - 4(nm)^2 = n^4 + 4m^4$

2) On a, $\forall n \in \mathbb{N}, n^4 + 4 = (n^2 + 2n + 2)(n^2 - 2n + 2)$
Afin que $n^4 + 4$ soit premier, il doit avoir pour diviseurs 1 et $n^4 + 4$.
Or, on remarque $\forall n \in \mathbb{N}, n^2 + 2n + 2 \geq n^2 - 2n + 2$

$$\begin{aligned}
\text{Donc, } n^4 + 4 \text{ premier} &\Leftrightarrow \begin{cases} n^2 + 2n + 2 = n^4 + 4 \\ n^2 - 2n + 2 = 1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow_{(L_1 + L_2 \to L_2)} \begin{cases} 2n^2 + 4 = n^4 + 5 \\ n^2 - 2n + 2 = 1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} n^4 - 2n^2 + 1 = 0 \\ n^2 - 2n + 1 = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} (n^2 - 1)^2 = 0 \\ (n - 1)^2 = 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow n \in \{-1, 1\} \Leftrightarrow n = 1
\end{aligned}$$

Par contraposée, $n^4 + 4$ n'est pas premier pour $n > 1$.

3)

```python
SG = []
n = 2

while len(SG) < 5 :
    premier = True
    for k in range(2, n) :
        if n % k == 0 :
            premier = False
            break
    if premier :
        for k in range(2, 2 * n + 1) :
            if (2 * n + 1) % k == 0 :
                premier = False
                break
    if premier :
        SG.append(n)
    n += 1

print(SG)
```

2, 3, 5, 11 et 23 sont les premiers nombres de Sophie Germain.

8. Swedish Mathematical Olympiad

By checking different values, we can hypothesize that for $n > 10$, $n^{\frac{1}{n-7}}$ is not a natural number that is to say, $1 < n^{\frac{1}{n-7}} < 2$, we have,

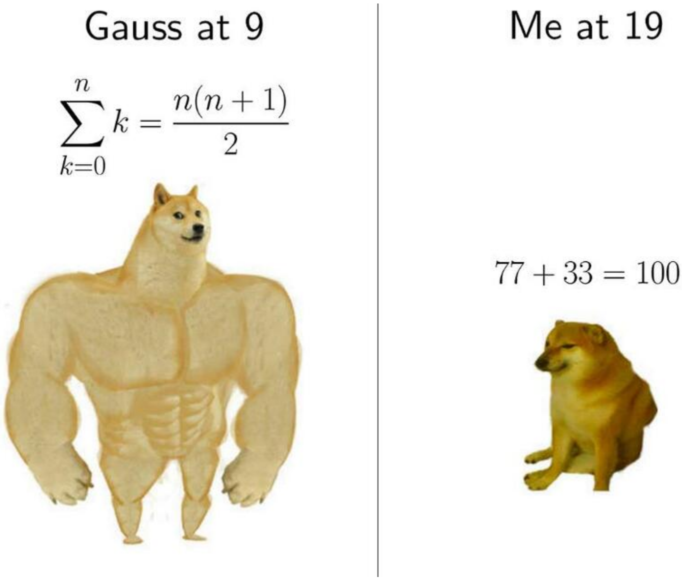
$$\begin{aligned} n^{\frac{1}{n-7}} < 2 &\Leftrightarrow n < 2^{n-7} \\ &\Leftrightarrow 2^7 n < 2^n \\ &\Leftrightarrow 2^n - 128n > 0 \end{aligned}$$

However, the function $f : x \mapsto 2^x - 128x$ is differentiable on $\mathbb{R}_+^*$ such that for all $x > 0, f'(x) = \ln(2)\, 2^x - 128$

Thus, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\ln\left(\frac{128}{\ln(2)}\right)}{\ln(2)} \simeq 7.53$

Finally, by theorem, we conclude that f is strictly positive on $[10, +\infty[$.

Thus, $\forall n > 10, 2^n - 128n > 0$ and so $n^{\frac{1}{n-7}} \in]1,2[$ that does not contain any natural number.



« God does arithmetic. »

Carl Friedrich Gauss

Les théorèmes de Bézout et Gauss permettent la simplification dans la recherche de nombres premiers. Dans ce chapitre, nous réintroduirons la notion de nombre premier vu au collège et étudierons les théorèmes qui l'accompagnent.

Sommaire

Cours

Exercices d'application

Correction des exercices

Cours

I. Nombres premiers

1. Définitions et propriétés

Définitions (Nombre premier)

Un entier naturel n est dit **premier** s'il possède deux diviseurs positifs distincts : 1 et n.

Remarque

2 est le premier nombre premier. Deux nombres sont dits premiers entre eux si leur pgcd est égal à 1.

Propriété (Cardinal infini de l'ensemble des nombres premiers)

Il existe une infinité de nombres premiers.

Démonstration (Cardinal infini de l'ensemble des nombres premiers)

Soit n le plus grand nombre premier existant.
On pose P le produit des nombres premiers inférieurs à n.
Si $P+1=(2\times 3\times \ldots \times n)+1$ est premier, alors on a contradiction.
Sinon, $P+1$ admet un diviseur premier p.
Si $p\geq n$, alors on a une contradiction.
Sinon, p divise $P+1$ et P (par définition de p et par hypothèse sur p), donc p divise $(P+1)-P=1$, ce qui est contradictoire à sa définition.
Finalement, P ou p s'avère plus grand que n.

Propriété (Nombre premier)

Tout entier naturel $n>1$ non premier admet un diviseur premier $p\leq\sqrt{n}$.

Théorème (Théorème fondamental de l'arithmétique)

Tout entier naturel $n>1$ se décompose en un produit unique de facteurs premiers tel que :

$$n=p_1^{\alpha_1}\times p_2^{\alpha_2}\times \ldots \times p_r^{\alpha_r}$$

où (p_k) sont les diviseurs premiers distincts de n et (α_k) le nombre de fois que les (p_k) le composent.

2. Petit Théorème de Fermat

Soit p un nombre premier et a un entier non divisible par p.

Théorème (Petit Théorème de Fermat)

$a^{p-1} - 1$ est divisible par p.

Corollaire (Petit Théorème de Fermat)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^p - n$ est divisible par p.

II. Théorèmes de Bézout et Gauss

1. Théorème de Bézout

Soit a, b deux entiers non nuls et $d = PGCD(a, b)$.

Propriété (Identité de Bézout)

Il existe deux entiers u et v tels que :

$$au + bv = d$$

Démonstration (Identité de Bézout)

a et b sont congrus modulo n, si et seulement si, la division euclidienne de a par n admet le même reste que la division euclidienne de b par n.

Théorème (Théorème de Bézout)

a et b sont premiers entre eux, si et seulement si, il existe u, v tels que :

$$au + bv = 1$$

Propriété (Inverse modulo)

Si a est premier avec un entier n, alors a admet un inverse modulo n.

2. Théorème de Gauss

Soit a, b et c trois entiers naturels non nuls.

Théorème (Théorème de Gauss)

Si a divise bc et que a et b sont premiers entre eux, alors a divise c.

Démonstration (Théorème de Gauss)

Par définition, il existe un entier k tel que $bc = ka$.
D'après le théorème de Bézout, il existe u, v entiers tels que $au + bv = 1$.
Donc, $acu + bcv = c \Leftrightarrow acu + kav = c \Leftrightarrow a(cu + kv) = c$
Finalement, a divise c.

Corollaire (Théorème de Gauss)

Si a et b divisent c et si a et b sont premiers entre eux, alors ab divise c.

Exercices d'application

1. Applications des théorèmes d'arithmétique

Résoudre les équations et problèmes suivants :

a. $4x + 3y = 1$

b. $2x + 3y = 2020$

c. $1010x + 1010y = 2020$

d. $29x + 5y = 1$

e. $3x + 4y = 7$

f. $\begin{cases} 2x + 3y + 4z = 5 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$

g. $\begin{cases} 2x + 3y = 3 \\ x + 2y = 1 \end{cases}$

h. $5x + 25y = 200$

i. $7x - 9y = 3$

j. $23x = 12y$

k. $5(x - 1) = 2(y + 3)$

l. $\frac{1}{120} = \frac{x}{8} + \frac{y}{15}$

m. $\begin{cases} x + y = 1000 \\ \mathrm{PGCD}(x, y) = 500 \end{cases}$

n. Un ticket de caisse lit 8.39€ le prix total d'une commande de clémentines coûtant 0.25€ le kilo et de bananes coûtant 0.18€ le kilo. Quel est le nombre de kilos de pommes et bananes achetés ?

o. Est-il possible de remplir une fiole de volume 5.00L avec deux béchers de volumes 104cL et 78cL respectivement ?

p. Peut-on calculer 12 minutes avec un sablier dont le sable prend 2 minutes 13 secondes à s'effondre et un autre qui prend 1 minute et 4 secondes ?

q. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ n^{13} - n \equiv 0\ [13]$.

r. Montrer que $\forall n \in \mathbb{Z}, (n + 2)^2$ et $(n + 1)(n + 3)$ sont premiers entre eux.

s. Montrer que si a et b^2 sont premiers entre eux, alors a et b le sont aussi.

t. Montrer que $\forall n \in \mathbb{Z}, (2n + 1)$ et $(3n + 2)$ sont premiers entre eux.

u. Calculer $\mathrm{PGCD}(700, 1200)$.

v. Calculer $\mathrm{PGCD}(200, 500)$.

w. Calculer $\mathrm{PGCD}(11, 2020)$.

x. Montrer que $\forall n > 1, \left(1 + \frac{1}{2}\right)\left(1 + \frac{1}{3}\right) \dots \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{n+1}{2}$

y. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 3^{6n} - 1$ est divisible par 7.

z. $x^2 - 4y^2 = 8633$

2. Open Problems

Using the fundamental theorems seen in this lecture but also including your never-ending curiosity as mathematicians, solve the following problems in $\mathbb{N}$:

a. Let $n \in \mathbb{N}$ such that $n > 1$, show that $\gcd(n, n-1) = 1$ where gcd is the **greatest common divisor** of n and $n-1$.

b. Find x and y such that $x^2 - y^2 = 14$

c. Find x, y, z s.t. $(x + y - z)^2 + (2x + z - 5)^2 + (x + y + z - 6)^2 = 0$

d. Find $n \in \mathbb{N}$ such that the equation $x^2 - 2020x + n = 0$ has at least one real root.

Correction des exercices

1. Applications des théorèmes d'arithmétique

a. On sait que 3 et 4 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Bézout, l'équation $4x + 3y = 1$ admet au moins un couple d'entiers solution. On remarque que $(x, y) = (1, -1)$ est une solution à l'équation.

Déterminons toutes les solutions possibles à l'équation, on a,

$$\begin{cases} 4x + 3y = 1 \\ 4 \times 1 + 3 \times (-1) = 1 \end{cases} \Longrightarrow 4x - 4 + 3y + 3 = 1 - 1$$
$$\Longleftrightarrow 4(x-1) + 3(y+1) = 0$$
$$\Longleftrightarrow 4(x-1) = -3(y+1)$$

Ainsi, 4 divise $-3(y+1)$, or, 4 et -3 sont premiers entre eux, par théorème de Gauss, 4 divise $(y+1)$.

C'est-à-dire, il existe k tel que $y + 1 = 4k \Leftrightarrow y = 4k - 1$.

De façon analogue, on a, $x = 1 - 3k$.

Finalement, $\mathcal{S} = \{(1 - 3k, 4k - 1), k \in \mathbb{Z}\}$

b. On remarque que $(x, y) = (1010, 0)$ est une solution à l'équation.

Déterminons toutes les solutions possibles à l'équation, on a,

$$\begin{cases} 2x + 3y = 2020 \\ 2 \times 1010 + 3 \times 0 = 2020 \end{cases} \Longrightarrow 2x - 2020 + 3y - 0 = 2020 - 2020$$
$$\Longleftrightarrow 2(x - 1010) + 3y = 0$$
$$\Longleftrightarrow 2(x - 1010) = -3y$$

Ainsi, 2 divise $-3y$, or, 2 et -3 sont premiers entre eux, par théorème de Gauss, 2 divise y.

C'est-à-dire, il existe k tel que $y = 2k$.

De façon analogue, on a, $x = 1010 - 3k$.

Finalement, $\mathcal{S} = \{(1010 - 3k, 2k), k \in \mathbb{Z}\}$

c. On remarque que $(x, y) = (1, 1)$ est une solution à l'équation.

Déterminons toutes les solutions possibles à l'équation, on a,

$$\begin{cases} 1010x + 1010y = 2020 \\ 1010 \times 1 + 1010 \times 1 = 2020 \end{cases} \Longrightarrow 1010(x-1) + 1010(y-1) = 0$$
$$\Longleftrightarrow 1010(x-1) = -1010(y-1)$$
$$\Longleftrightarrow x - 1 = 1 - y$$
$$\Longleftrightarrow x = 2 - y$$

Finalement, $\mathcal{S} = \{(k, 2 - k), k \in \mathbb{Z}\}$

d. De manière similaire à la question a., $\mathcal{S} = \{(-1-5k, 6+29k), k \in \mathbb{Z}\}$

e. De manière similaire à la question b., $\mathcal{S} = \{(1-4k, 3k+1), k \in \mathbb{Z}\}$

f. On a,

$$\begin{cases} 2x+3y+4z=5 \\ x+y+z=2 \end{cases} \Leftrightarrow_{(L_1)-2(L_2)\to(L_1)} \begin{cases} y+2z=1 \\ x+y+z=2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=1-2k \\ z=k \\ x+y+z=2 \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=1-2k \\ z=k \\ x=1+k \end{cases}, k \in \mathbb{Z}$$

Finalement, $\mathcal{S} = \{(1+k, 1-2k, k), k \in \mathbb{Z}\}$

g. On a,

$$\begin{cases} 2x+3y=3 \\ x+2y=1 \end{cases} \Leftrightarrow_{(L_1)-2(L_2)\to(L_1)} \begin{cases} -y=1 \\ x+2y=1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ x=3 \end{cases}$$

Finalement, $\mathcal{S} = \{(3, -1)\}$

h. Afin de simplifier les calculs, on remarque,

$5x+25y=200 \Leftrightarrow x+5y=40$

De manière similaire à la question b., $\mathcal{S} = \{(5k, 8-k), k \in \mathbb{Z}\}$

i. De manière similaire à la question b., $\mathcal{S} = \{(9k+3, 7k+2), k \in \mathbb{Z}\}$

j. De manière similaire à la question b., $\mathcal{S} = \{(12k, 23k), k \in \mathbb{Z}\}$

k. De manière similaire à la question b., $\mathcal{S} = \{(2k+1, 5k-3), k \in \mathbb{Z}\}$

l. Afin de simplifier les calculs, on remarque,

$\frac{1}{120} = \frac{x}{8} + \frac{y}{15} \Leftrightarrow 15x+8y=1$

De manière similaire à la question b., $\mathcal{S} = \{(-1-8k, 15k+2), k \in \mathbb{Z}\}$

m. Afin de simplifier les calculs, on remarque,
$\mathrm{PGCD}(x, y) = 500 \Leftrightarrow \exists p_x, p_y \in \mathbb{Z}, p_x \neq p_y, x = 500p_x, y = 500p_y$
Donc, $x + y = 1000 \Leftrightarrow p_x + p_y = 2 \Leftrightarrow p_y = 2 - p_x$
De manière similaire à la question b., $\exists k \in \mathbb{Z}, p_x = k$ et $p_y = 2 - k$
Donc, $\mathcal{S} = \{(500k, 500(2-k)), k \in \mathbb{Z}\}$

n. Afin de simplifier les calculs, on remarque,
$0.25\mathrm{c} + 0.18\mathrm{b} = 8.39 \Leftrightarrow 25c + 18b = 839$
Démontrons rapidement que 25 et 18 sont premiers entre eux.
25 est un carré parfait, il admet pour unique diviseur (différent de 1 et lui-même) le chiffre 5, or 18 n'est pas divisible par 5, ainsi les deux nombres sont premiers entre eux.
$(c, b) = (17, 23)$ est solution de l'équation. Vérifions qu'elle est unique.
On a, $25(c - 17) + 18(b - 23) = 0 \Leftrightarrow 25(c - 17) = -18(b - 23)$
Or, 25 et 18 sont premiers entre eux, donc 25 divise $b - 23$, alors,
$\exists k \in \mathbb{Z}, b - 23 = 25k \Leftrightarrow b = 25k + 23$
$\Leftrightarrow c = 17 - 18k$
Or, la seule paire de solutions positives est pour $k = 0$.
Donc, $\mathcal{S} = \{(17, 23)\}$

o. Afin de simplifier les calculs, on remarque,
$1.04\mathrm{b}_1 + 0.78\mathrm{b}_2 = 5.00 \Leftrightarrow 104b_1 + 78b_2 = 500$
Or, $\mathrm{PGCD}(104, 78) = 26$ qui ne divise pas 500.
Il est impossible de trouver une combinaison linéaire répondant au problème. $\mathcal{S} = \emptyset$.

p. Afin de simplifier les calculs, on remarque,
$(2 \times 60 + 13)\mathrm{s}_1 + (1 \times 60 + 4)\mathrm{s}_2 = 12 \times 60 \Leftrightarrow 133s_1 + 64s_2 = 720$
Une solution serait $(s_1, s_2) = (16, -22)$, de cela on en déduit la forme des solutions, similairement à la question b., $s_1 = 16 + 64k$ et $s_2 = -22 - 133k$ où $k \in \mathbb{Z}$. Ainsi, il devient évident qu'il n'existe aucune paire de solutions positives à notre problème. $\mathcal{S} = \emptyset$.

q. D'après le corollaire du théorème de Fermat, $\forall n \in \mathbb{N}, 13$ divise $n^{13} - n$

r. Soit $n \in \mathbb{Z}$, supposons qu'il existe un diviseur positif p commun à $(n+2)^2$ et $(n+1)(n+3)$ différent de 1.
Par stabilité, p divise $(n+2)^2 - (n+1)(n+3) = 1$.
Or, il n'existe pas de diviseur à 1, autre que lui-même, donc $p = 1$.
Par absurde, $(n+2)^2$ et $(n+1)(n+3)$ sont premiers entre eux.

s. Soit $a, b \in \mathbb{Z}$ tels que a et b^2 sont premiers entre eux. Supposons qu'il existe un diviseur positif p commun à a et b différent de 1.
Par théorème fondamental de l'arithmétique, on sait qu'il existe $q \in \mathbb{Z}$ tel que $b = p \times q$, ainsi, il existe $q' \in \mathbb{Z}, b^2 = p^2 \times q^2 = p \times q'$.
Or, on remarque que a et b^2 ont pour facteur commun $p > 1$.
Par absurde, a et b sont premiers entre eux.

t. Soit $n \in \mathbb{Z}$, supposons qu'il existe un diviseur positif p commun à $(2n+1)$ et $(3n+2)$ différent de 1.
Par stabilité, p divise $3(2n+1) - 2(3n+2) = 1$.
Or, il n'existe pas de diviseur à 1, autre que lui-même, donc $p = 1$.
Par absurde, $2n+1$ et $3n+2$ sont premiers entre eux.

u. Par algorithme d'Euclide, $\text{PGCD}(700, 1200) = 100$.

v. Par algorithme d'Euclide, $\text{PGCD}(200, 500) = 100$.

w. On sait que 11 est premier, donc $\text{PGCD}(11, 2020) = 1$.

x. $\forall n > 1, \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\dots\left(1+\frac{1}{n}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{4}{3}\right)\dots\left(\frac{n+1}{n}\right) = \frac{n+1}{2}$.

y. $\forall n \in \mathbb{N}, 3^{6n} = 3^{3\times 2n} = (3^3)^{2n} = 27^{2n}$
Or, $27 \equiv 1\ [7] \Leftrightarrow 27^{2n} \equiv 1^{2n}\ [7] \Leftrightarrow 3^{6n} \equiv 1\ [7] \Leftrightarrow 7$ divise $3^{6n} - 1$.
On retrouve le même résultat à l'aide du théorème de Fermat pour $p = 6n+1$ qui est un multiple de 7.

z. On a, $x^2 - 4y^2 = 8633 \Leftrightarrow (x-2y)(x+2y) = 89 \times 97$

$$\Leftrightarrow (x, y) = (93, 2)$$

2. Open Problems

a. Let $n \in \mathbb{N}, n > 1$,

Suppose that $\gcd(n, n-1) = k > 1$.

Thus, by definition, there is a, b such that $n = ka$ and $n - 1 = kb$.

So, by linear combination, we have,

$n - (n-1) = ka - kb \Leftrightarrow k(a-b) = 1$

Finally, k is a divisor of 1, which means that $k = 1$.

By contradiction, we conclude that $\gcd(n, n-1)$ cannot be greater than 1, that is, it can only be equal to 1.

b. Let $x, y \in \mathbb{N}$ such that,

$x^2 - y^2 = 14 \Leftrightarrow (x-y)(x+y) = 14$

Since $x - y < x + y$, we deduce two possible solutions :

$$(x-y)(x+y) = 14 \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 1 \text{ and } x + y = 14 \\ x - y = 2 \text{ and } x + y = 7 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 15 \text{ and } 2y = 13 \\ 2x = 9 \text{ and } 2y = 5 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \mathcal{S} = \emptyset$$

There are no solutions.

c. Let $x, y, z \in \mathbb{N}$ such that,

$(x + y - z)^2 + (2x + z - 5)^2 + (x + y + z - 6)^2 = 0$

Since all squares are positive, we deduce the following,

$$\begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + z - 5 = 0 \\ x + y + z - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow_{(L_3)-(L_1)\to(L_3)} \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + z - 5 = 0 \\ 2z - 6 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + z - 5 = 0 \\ z = 3 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 1 \\ z = 3 \end{cases}$$

d. Let $n \in \mathbb{N}$ such that $x^2 - 2020x + n = 0$ has at least one root, by theorem, this means that the polynomial discriminant is non-negative, i.e. $(-2020)^2 - 4n \geq 0 \Leftrightarrow n \leq 1020100$

Matrices

(Mathématiques expertes)

« Nous venons tous de la même source. Nous sortons tous de la même matrice. Nous sommes tous des Africains modifiés par le temps. »

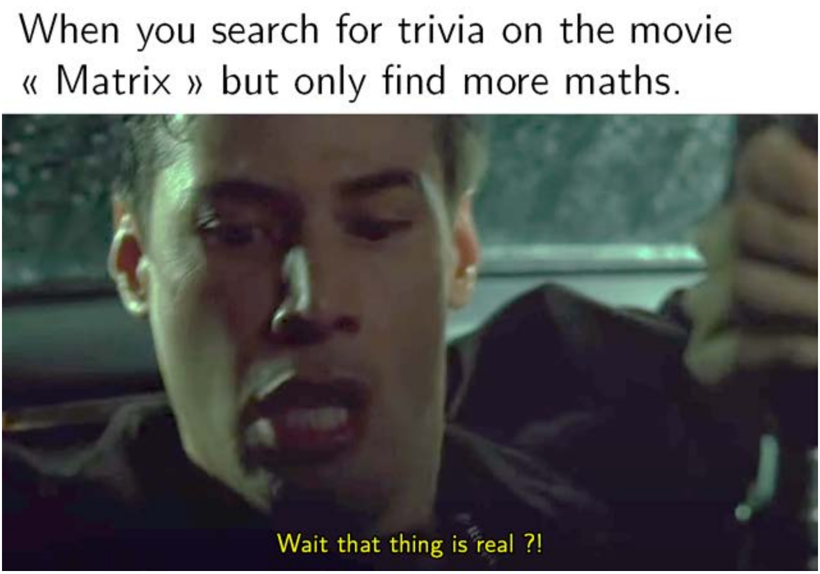
Jean d'Ormesson, *C'est une chose étrange à la fin que le monde* (2010).

Les matrices, du latin *matrix* « mère », sont des tableaux d'éléments qui permettent de modéliser à grande échelle des problèmes de l'algèbre linéaire.

Le principe des matrices trouve ses origines aussitôt qu'au second siècle avant J.-C. dans les textes chinois *Les Neufs Chapitres*, sa généralisation et l'apparition de méthodes de résolutions devra attendre néanmoins l'époque moderne.

Dans cette partie, nous introduirons la notion de matrices ainsi que la représentation de graphiques.

Matrices



« Remember, all I'm offering is the truth. Nothing more »

Morpheus, *The Matrix* (1999)

Les matrices forment un outil fondamental de l'algèbre linéaire. De la biologie à l'économie en passant par la mécanique, la plupart des problèmes peuvent être modélisés sous un format matriciel, plus aisé à résoudre du fait des nombreuses propriétés que nous étudierons dans ce chapitre.

Sommaire

Cours

Exercices d'application

Exercices d'approfondissement

Correction des exercices

Cours

I. Matrices

1. Définitions et propriétés

Soit n, m deux entiers non nuls.

Définition (Matrice)

Une **matrice** de taille $n \times m$ est un tableau de n lignes et m colonnes :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

où $\left(a_{ij}\right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m}}$ sont les **coefficients** réels de la matrice.

Définition (Matrice carrée)

Une **matrice carrée** est une matrice de taille $n \times n$, aussi dit de taille n.

Définitions (Matrice colonne et ligne)

Une **matrice colonne** est une matrice de taille $n \times 1$ tandis qu'une **matrice ligne** est une matrice de taille $1 \times n$.

Remarque

Les vecteurs d'un plan ou l'espace sont des vecteurs colonnes tandis que les coordonnées des points d'un plan ou l'espace sont des vecteurs lignes.

Propriété (Caractérisation des matrices)

Deux matrices sont égales si et seulement si elles ont même taille et mêmes coefficients.

2. Opérations sur les matrices

Soit A, B et C trois matrices de même taille et k, k' deux réels.

Définition (Somme de matrices)

La somme de A et B est la matrice $A + B$, dont les coefficients correspondent à la somme des coefficients de A et B pour une même position.

Propriétés (Somme de matrices)

On a les propriétés suivantes :

- **Commutativité** : $A + B = B + A$
- **Associativité** : $(A + B) + C = A + (B + C)$

Définition (Produit d'une matrice par un scalaire)

Le produit de A par k est la matrice kA, dont les coefficients correspondent aux coefficients de A multiplié par k.

Propriétés (Produit d'une matrice par un scalaire)

On a les propriétés suivantes :

- **Distributivité du scalaire** : $(k + k')A = kA + k'A$
- **Distributivité de la matrice** : $k(A + B) = kA + kB$
- **Associativité** : $(kk')A = k(k'A)$

Définition (Produit d'une matrice carrée avec une matrice colonne)

On a, pour toute matrice carrée M de taille $n \in \mathbb{N}^*$ et matrice colonne N de taille $n \times 1$:

$$M \times N = \begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n1} & \cdots & m_{nm} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} n_1 \\ \vdots \\ n_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} \times n_1 + \cdots + m_{1m} \times n_n \\ \vdots \\ m_{n1} \times n_1 + \cdots + m_{nm} \times n_n \end{pmatrix}$$

Définition (Produit de matrices carrées)

La produit de A et B est la matrice $A \times B$, dont les colonnes correspondent au produit de la matrice A avec chaque colonne de la matrice B.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & \vdots \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & \ddots & \vdots \\ \dots & \dots & \ddots \end{pmatrix}$$

Propriétés (Produit de matrices carrées)

On a les propriétés suivantes :

- **Associativité** : $(A \times B) \times C = A \times (B \times C) = A \times B \times C$
- **Distributivité** : $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$ et $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$
- **Commutativité du scalaire** : $(kA)B = A(kB) = k(AB)$

Définition (Puissance d'une matrice carrée)

On note, pour tout n entier naturel, A^n correspond à n facteurs de A avec pour convention $A^0 = I_n$ la matrice unité d'ordre n décrite ci-dessous.

3. Inverse d'une matrice

Soit n un entier naturel non nul.

Définition (Matrice unité ou identité)

La **matrice identité ou unité de taille ou ordre n**, notée I_n, est définie par :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Remarque

La matrice identité est remplie de 0 sauf sur sa diagonale nord-ouest, dite **diagonale principale**, est remplie de 1.

Propriété (Élément neutre du produit matriciel)

Pour tout matrice carrée A de taille n, on a,

$$A \times I_n = I_n \times A = A$$

Définition (Matrice inverse d'une matrice carrée)

Une matrice carrée A de taille n est dite **inversible** s'il existe une matrice carrée B de taille n, aussi notée A^{-1}, telle que :

$$A \times B = B \times A = I_n$$

Propriété (Inversibilité d'une matrice carrée)

La matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$.

Propriété (Inverse d'une matrice carrée)

Soit A une matrice carrée inversible et M, N deux matrices carrées de même taille que A. Le produit $A \times M = N$ existe si et seulement si $M = A^{-1} \times N$.

II. Systèmes linéaires

1. Écriture matricielle de systèmes linéaires

Soit A une matrice carrée inversible de taille $n \in \mathbb{N}^*$ et B une matrice colonne à n lignes.

Propriété (Système linéaire)

Le système linéaire d'écriture matricielle $AX = B$ admet une unique solution donnée par la matrice colonne $X = A^{-1}B$.

Remarque

Si A n'est pas inversible, le nombre de solutions peut être infini ou nul.

2. Suites de matrices

Soit (U_n) une suite de matrices colonnes de taille $p \times 1$ définie telle que pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = AU_n$ où A est une matrice carrée de taille p.

Théorème (Terme général d'une suite de matrices)

On a, pour tout entier naturel n :

$$U_n = A^n U_0$$

Définitions (Convergence d'une suite de matrices)

La suite (U_n) est dite **convergente** si tous les coefficients de la matrice U_n convergent. La **limite** est donc la matrice dont les coefficients sont les limites des coefficients de U_n. Autrement, (U_n) est **divergente**.

Propriété (Suite arithmético-géométrique matricielle)

Soit (U_n) définie telle que pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = AU_n + B$ avec B une matrice colonne de taille $p \times 1$. Si (U_n) est convergente vers U, alors :

$$U = AU + B$$

Exercices d'application

1. Calcul de matrices

1) Après avoir déterminé si elle est possible, calculez la somme $M + N$ avec :

a. $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

b. $M = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} -2 & 7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

c. $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

d. $M = (4)$ et $N = (1)$.

e. $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

f. $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

g. $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

h. $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

i. $M = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & 2ab & a^2+b^2 \\ 2ab & a^2+b^2 & 2ab \\ a^2+b^2 & 2ab & a^2+b^2 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 2ab & a^2+b^2 & 2ab \\ a^2+b^2 & 2ab & a^2+b^2 \\ 2ab & a^2+b^2 & 2ab \end{pmatrix}$.

j. $M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$ et $N = M$.

2) Après avoir déterminé s'il est possible, calculez le produit MN et NM avec :

a. $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

b. $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

c. $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

d. $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.

e. $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

f. $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Systèmes linéaires

1) On considère le système linéaire $(\mathcal{S})$: $\begin{cases} 2x + y = 10 \\ -x + 3y = -3 \end{cases}$

   a. Écrire le système $(\mathcal{S})$ sous équation matricielle $AX = B$ où l'on précisera les coefficients des matrices A, X et B.

   b. Après avoir établi que A est inversible, déterminez à l'aide de la calculatrice la matrice A^{-1}. En déduire les solutions de $(\mathcal{S})$.

   c. Résoudre le système $(\mathcal{S}')$: $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 3y = 5 \end{cases}$

   d. Résoudre le système $(\mathcal{S}'')$: $\begin{cases} 2x + y = 10 \\ -3x + 2z = 5 \\ x + y + z = 10 \end{cases}$, on suppose A inversible.

2) On considère le système linéaire $\left(S_{a,b}\right)$: $\begin{cases} 2x + y = a \\ ax + 3y = b \end{cases}$:

   a. Écrire le système $(\mathcal{S})$ sous équation matricielle.

   b. A quelle condition le système $\left(S_{a,b}\right)$ peut-il être résolu ?

   c. En réalisant des combinaisons linéaires d'une égalité avec l'autre, déterminez les solutions sans résolution matricielle. On pourra commencer par remplacer L_2 par $L_2 - 3L_1$.

3. Équations matricielles

Résoudre les équations suivantes :

a. Soit X une matrice de taille 2 tel que $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, déterminer X.

b. Soit X une matrice de taille 2 tel que $X^2 = I_2$, déterminer X.

c. Soit X une matrice de taille $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $X^2 + 2X - 3I_n = 0$, démontrer que X est inversible et déterminer son inverse.

4. Matrices triangulaires

Une **matrice triangulaire** d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$ est une matrice dont les coefficients d'un côté de la diagonale principale sont tous nuls. On appelle matrice triangulaire supérieure (respectivement inférieure) lorsque les coefficients sous (respectivement au-dessus de) la diagonale principale sont nuls. Les matrices identités et nulles en sont des exemples. Montrer que le produit de deux matrices triangulaires supérieures d'ordre 3 est une matrice triangulaire d'ordre 3.

5. Suites de matrices

1) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$.

   a. Calculer A^2 et A^3.

   b. Démontrer que pour tout entier naturel non nul n, $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$

   c. Déduire que pour tout entier naturel non nul n, A^n est inversible.

   d. Déterminer de manière similaire l'expression de B^n.

2) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   a. Montrer qu'il existe une matrice N telle que $A = I_3 + N$.

   b. Montrer que $\forall n \geq 3$, $N^n = 0_3$ où 0_3 est la matrice nulle d'ordre 3.

   c. En supposant que le binôme de Newton s'applique aux matrices, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, A^n = I_3 + nN + \frac{n(n-1)}{2}N^2$.

   d. Déterminer de manière similaire l'expression de B^n.

3) Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et la suite de matrice (U_n) définie par $U_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = AU_n$.

   a. Déterminer U_1 et U_2.

   b. Déterminer l'expression de (U_n).

   c. Quelle est la nature de la suite (U_n) ? Qu'en est-il si $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{pmatrix}$

4) Une mère décide de répartir ses virements aux livrets jeunes de ses deux filles de la manière suivante : chaque mois, l'aînée se voit augmenter de 5% son argent de livret, la cadette étant encore loin des études supérieures se voit augmenter de 50 euros son livret. Au mois de septembre, l'aînée compte 300 euros dans son compte tandis que la cadette 500 euros. On note (L_n) la matrice correspondant à la somme d'argent épargné sur les deux livrets n-mois après septembre.
   a. En supposant une modélisation de la forme $\forall n \in \mathbb{N}, L_{n+1} = AL_n + B$ avec $L_0 = \begin{pmatrix} 300 \\ 500 \end{pmatrix}$, déterminer les expressions des matrices A et B.
   b. Déterminer l'expression de (L_n).
   c. Quelle sont les sommes épargnées au mois de janvier ?
   d. Quelle est la nature de la suite (L_n) ?

5) Un restaurant fait le compte des habitudes de ses clients premium. Ils remarquent que si le client a la fois précédente acheté un plat peu épicé, il a une chance sur deux de commander un plat peu épicé et une chance sur deux de commander un plat épicé. S'il a commandé un plat épicé, il a une chance sur deux de commander un plat peu épicé et une chance sur deux de commander un plat très épicé. Finalement, si le client a commandé un plat très épicé, on est certain qu'il commandera un plat peu épicé. Initialement, le client a commandé un plat très épicé.
   a. Justifier que la matrice (P_n) des probabilités de choisir un plat après n commandes soit $P_{n+1} = AP_n$ où $P_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$
   b. On retire un plat et on suppose désormais que $P_{n+1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{10} & \frac{7}{10} \end{pmatrix} P_n$ et $P_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. A l'aide de la calculatrice, conjecturez puis vérifiez l'état stable vers lequel tend la suite (P_n).

Exercices d'approfondissement

6. Matrices nilpotentes

Soit A une matrice carrée de taille 3 **nilpotente d'ordre p**, c'est-à-dire telle que $A^p = 0_3$ où 0_3 est la matrice nulle de taille 3.

1) Démontrer les propriétés suivantes :
   a. Montrer que pour tout $n \geq p, A^n = 0_3$.
   b. Soit B une matrice carrée de taille 3 nilpotente d'ordre p qui commute avec A, c'est-à-dire telle que $AB = BA$, montrez que toute combinaison linéaire de A et B est nilpotente d'ordre $2p$.

2) Soit $E(t)$ la matrice telle que pour tout $t \in \mathbb{R}, E(t) = I_3 + tA + \frac{t^2}{2}A^2$. On suppose que A est nilpotente d'ordre 3.
   a. Montrer que pour tous $s, t \in \mathbb{R}, E(s+t) = E(s)E(t)$.
   b. Déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}, t \in \mathbb{R}, E(nt) = E(t)^n$.
   c. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}, E(t)$ est inversible et donner son inverse.
   d. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer l'expression de $E(t)$.

7. Trace et transposée d'une matrice

On appelle **trace d'une matrice carrée A**, notée $\mathrm{tr}(A)$, la somme des éléments de la diagonale principale d'une matrice. On appelle **transposée d'une matrice carrée A**, notée A^T, la matrice dont la i-ème ligne de A correspond à la i-ème colonne de A^T.

1) Calculer les transposées et traces des matrices suivantes :
   a. $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
   b. $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.
   c. $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$.
   d. $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

2) Soit A, B deux matrices carrées de taille p. Démontrer les propositions suivantes :
   a. Montrer que $\mathrm{tr}(AA^T) \geq 0$.
   b. Montrer que $\mathrm{tr}(AA^T) = 0 \Leftrightarrow A$ admet des coefficients diagonaux nuls.
   c. Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}, \mathrm{tr}(\lambda A + B) = \lambda \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(\mathrm{B})$.

8. Inversion et diagonalisation d'une matrice

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Inversons la matrice A de deux méthodes :

   a. Déterminer A^{-1} à l'aide de la calculatrice.

   b. En posant d'un côté la matrice A et de l'autre la matrice identité I_3. Effectuer des opérations linéaires sur les lignes de la matrice A, par exemple $L_1 = 4L_1 + 2L_2 - 3L_3$, de sorte à transformer A en I_3. Toutes les opérations effectuées du côté de A seront appliquées et adaptées du côté de I_3 et donneront finalement la matrice A^{-1}. Déterminer A^{-1}.

2) Diagonalisons la matrice A :

   a. Construire la matrice P dont les colonnes sont $\begin{pmatrix} 1 \\ 3/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

   b. Déterminer à la calculatrice P^{-1}.

   c. Montrer que $A = PDP^{-1}$ où $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

   d. Déduire l'expression de A^n pour tout n entier naturel.

9. The exception that proves the rule

Let A, B be two matrices of size $n \in \mathbb{N}^*$, show that

$$AB = A + B \Longrightarrow A \text{ and } B \text{ are commutative} \Longleftrightarrow AB = BA$$

Correction des exercices

1. Calcul de matrices

1) On rappelle que deux matrices sont sommables si et seulement si elles ont même taille.

a. On a, $M+N=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1-1 & 0+0\\ 0+0 & 1-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

b. On a, $M+N=\begin{pmatrix}0 & 10\\ 1 & 4\end{pmatrix}$

c. Les deux matrices n'ont pas les mêmes dimensions, on ne peut les additionner.

d. On a, $M+N=(5)=5$, en réalité une matrice de taille 1 est considérée comme un réel.

e. Les deux matrices n'ont pas les mêmes dimensions, on ne peut les additionner.

f. On a, $M+N=\begin{pmatrix}2 & 2 & 3\\ 4 & 6 & 6\\ 7 & 8 & 10\end{pmatrix}$

g. On a, $M+N=\begin{pmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 3 & 0\\ -1 & 0 & 2\end{pmatrix}$

h. On a, $M+N=N=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\\ 7 & 8 & 9\end{pmatrix}$

i. On a, $\forall a,b\in\mathbb{R}, M+N=\begin{pmatrix}(a+b)^2 & (a+b)^2 & (a+b)^2\\ (a+b)^2 & (a+b)^2 & (a+b)^2\\ (a+b)^2 & (a+b)^2 & (a+b)^2\end{pmatrix}$
$=(a+b)^2\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

j. On a, $M+N=M+M=2M=\begin{pmatrix}2\cos(\theta) & 2\sin(\theta)\\ 2\sin(\theta) & -2\cos(\theta)\end{pmatrix}$

2) On rappelle que deux matrices sont multipliables si le facteur gauche possède le même nombre de colonne que le nombre de ligne du facteur droit.

a. On a, $MN = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1(-1)+0 & 0+0 \\ 0+0 & 0+1(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

De plus, $NM = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = MN$, le produit est commutatif.

b. On a, $MN = \begin{pmatrix} 1+2\times 4 & 2+2\times 5 & 3+2\times 6 \\ 3+4\times 4 & 3\times 2+4\times 5 & 3\times 3+4\times 6 \\ 5+6\times 4 & 5\times 2+6\times 5 & 5\times 3+6\times 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 12 & 15 \\ 19 & 26 & 33 \\ 29 & 40 & 51 \end{pmatrix}$

De plus, $NM = \begin{pmatrix} 1+2\times 3+3\times 5 & 2+2\times 4+3\times 6 \\ 4+5\times 3+6\times 5 & 4\times 2+5\times 4+6\times 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 28 \\ 49 & 64 \end{pmatrix}$

c. On a, $MN = M \times I_2 = M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Toutefois, le nombre de colonnes de N, à savoir 2, n'est pas égal au nombre de lignes de M, à savoir 3, le produit NM n'est pas possible.

d. On a, $MN = I_3N = NI_3 = NM = N = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

e. On a, $MN = MM = NM = N^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

f. On a, $MN = \begin{pmatrix} -3 & -2 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

De plus, $NM = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$

2. Systèmes linéaires

1)

a. On a, $(\mathcal{S}) : AX = B$ où $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ le vecteur solution de $(\mathcal{S})$.

De plus, $B = \begin{pmatrix} 10 \\ -3 \end{pmatrix}$ est le vecteur résultat du système $(\mathcal{S})$.

Finalement, $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ est la matrice des coefficients du système $(\mathcal{S})$

b. On remarque que le déterminant de A $\det(A) = 2 \times 3 - (-1) \times 1 \neq 0$.

Par propriété, la matrice A est inversible d'inverse $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3/7 & -1/7 \\ 1/7 & 2/7 \end{pmatrix}$

Ainsi, $AX = B \Leftrightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Leftrightarrow X = A^{-1}B$

$$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} 3/7 & -1/7 \\ 1/7 & 2/7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 10 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} \frac{33}{7} \\ \frac{4}{7} \end{pmatrix}$$

c. On a, de manière équivalente aux questions précédentes.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$

Ainsi, les solutions sont $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

d. On a, de manière équivalente aux questions précédentes.

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \\ 10 \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} & 0 \\ \frac{3}{7} & \frac{2}{7} & 0 \\ -\frac{5}{7} & -\frac{1}{7} & 1 \end{pmatrix}$

Ainsi, les solutions sont $X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} \frac{15}{7} \\ \frac{40}{7} \\ \frac{15}{7} \end{pmatrix}$

2)

a. Soit $a, b \in \mathbb{R}$, on a, $(\mathcal{S}) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ a & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

b. Par propriété,

$(\mathcal{S})$ solvable si et seulement si $2 \times 3 - a \times 1 \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 6$.

c. On a, $(\mathcal{S}) : \begin{cases} 2x + y = a \\ ax + 3y = b \end{cases} \Leftrightarrow_{L_2 = L_2 - 3L_1} \begin{cases} 2x + y = a \\ ax + 3y - 3(2x + y) = b - 3a \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = a \\ (a - 6)x = b - 3a \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = a \\ x = \frac{b-3a}{a-6} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\left(\frac{b-3a}{a-6}\right) + y = a \\ x = \frac{b-3a}{a-6} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{a^2-2b}{a-6} \\ x = \frac{b-3a}{a-6} \end{cases}$$

3. Équations matricielles

a. Soit $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

On a, $X^2 = XX = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ca + dc & cb + d^2 \end{pmatrix}$

Or, $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + bc = 1 \\ ab + bd = 0 \\ ca + dc = 1 \\ cb + d^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + bc = 1 \\ b(a + d) = 0 \\ c(a + d) = 1 \\ cb + d^2 = 1 \end{cases}$

Il est évident que $b = 0$, autrement si $a + d = 0 \Longrightarrow c(a + d) \neq 1$.

Donc, $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + bc = 1 \\ b = 0 \\ c(a + d) = 1 \\ cb + d^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ b = 0 \\ c = \frac{1}{a+d} \\ d^2 = 1 \end{cases}$

Les potentielles solutions sont $a \in \{-1, 1\}$ et $d \in \{-1, 1\}$.

Cependant on sait d'après $a + d \neq 0$ que a et d doivent être égaux, autrement leur somme est nulle. Ainsi, $a = d \in \{-1, 1\}$.

Finalement, les matrices solutions sont : $\mathcal{S} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -1/2 & -1 \end{pmatrix} \right\}$

b. Soit $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ telle que $X^2 = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On a, $X^2 = XX = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^2 \end{pmatrix}$

Or, $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+bc=1 \\ ab+bd=0 \\ ca+dc=1 \\ cb+d^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+bc=1 \\ b(a+d)=0 \\ c(a+d)=0 \\ cb+d^2=1 \end{cases}$

Supposons $a+d \neq 0$, alors $b=0$ et $c=0$.

Donc, $X^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+bc=1 \\ b=0 \\ c=0 \\ cb+d^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2=1 \\ b=0 \\ c=0 \\ d^2=1 \end{cases}$

Les potentielles solutions sont $a \in \{-1,1\}$ et $d \in \{-1,1\}$.

Finalement, $\mathcal{S} = \left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right\}$

c. On a,
$$\begin{aligned} X^2+2X-3I_n=0 &\Leftrightarrow X^2+2X=3I_n \\ &\Leftrightarrow X(X+2I_n)=3I_n \\ &\Leftrightarrow X \times \frac{1}{3}(X+2I_n)=I_n \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{3}(X+2I_n)=X^{-1} \end{aligned}$$

4. Matrices triangulaires

Soit $X = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ 0 & d' & e' \\ 0 & 0 & f' \end{pmatrix}$

On a, $XY = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' & b' & c' \\ 0 & d' & e' \\ 0 & 0 & f' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & ab'+bd' & ac'+be'+cf' \\ 0 & dd' & de'+ef' \\ 0 & 0 & ff' \end{pmatrix}$

De plus, $YX = \begin{pmatrix} a'a & a'b+b'd & a'c+b'e+c'f \\ 0 & d'd & d'e+e'f \\ 0 & 0 & f'f \end{pmatrix}$

On observe que l'ensemble des matrices triangulaires supérieures d'ordre 3 est stable par produit matriciel. Evidemment, il en est de même pour l'addition de matrices triangulaires supérieures d'ordre 3.

5. Suites de matrices

1)

a. On a, $A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

De plus, $A^3 = A^2A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}$

b. Démontrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$

On a, au rang $n = 0$, $A^n = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2^0 - 1 \\ 0 & 2^0 \end{pmatrix}$

L'initialisation est vérifiée.

Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \text{On a, } A^{n+1} &= A^nA \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{(hdr.)} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \times 1 + (2^n - 1) \times 0 & 1 \times 1 + (2^n - 1) \times 2 \\ 0 \times 1 + 2^n \times 0 & 0 \times 1 + 2^n \times 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2^{n+1} - 2 + 1 \\ 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2^{n+1} - 1 \\ 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

L'hérédité est vérifiée.

Par principe de récurrence, on a, $\forall n \in \mathbb{N}, A^n = \begin{pmatrix} 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$

c. On a, $\forall n \in \mathbb{N}, A^n$ inversible $\Leftrightarrow 1 \times 2^n - 0 \times (2^n - 1) \neq 0$

$$\Leftrightarrow 2^n \neq 0$$

Cependant, la proposition est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, A^n$ est inversible.

d. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{On a, } B^2 = BB &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) & -2\sin(\theta)\cos(\theta) \\ 2\sin(\theta)\cos(\theta) & \cos^2(\theta) - \sin^2(\theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos(2\theta) & -\sin(2\theta) \\ \sin(2\theta) & \cos(2\theta) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On conjecture, $\forall n \in \mathbb{N}, B^n = \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix}$

Démontrons-le par récurrence.

On a, au rang $n=0$, $B^n = I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(0) & -\sin(0) \\ \sin(0) & \cos(0) \end{pmatrix}$

L'initialisation est vérifiée.

Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $B^n = \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix}$

On a, $B^{n+1} = B^n B$

$$= \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad \text{(hdr.)}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(n\theta)\cos(\theta) - \sin(n\theta)\sin(\theta) & -\cos(n\theta)\sin(\theta) - \sin(\theta)\cos(\theta) \\ \cos(n\theta)\sin(\theta) + \sin(\theta)\cos(\theta) & -\sin(n\theta)\sin(\theta) + \cos(n\theta)\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(n\theta+\theta) & -\sin(n\theta+\theta) \\ \sin(n\theta+\theta) & \cos(n\theta+\theta) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\big((n+1)\theta\big) & -\sin\big((n+1)\theta\big) \\ \sin\big((n+1)\theta\big) & \cos\big((n+1)\theta\big) \end{pmatrix}$$

L'hérédité est vérifiée.

Par principe de récurrence, on a, $\forall n \in \mathbb{N}, B^n = \begin{pmatrix} \cos(n\theta) & -\sin(n\theta) \\ \sin(n\theta) & \cos(n\theta) \end{pmatrix}$

2)

a. Soit N une matrice telle que $A = I_3 + N$

Il devient évident pour que N ait un sens qu'elle soit d'ordre 3.

Par propriété d'égalité entre deux matrices, $N = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

b. On a, $N^2 = NN = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

De plus, $N^3 = N^2 N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3$

Finalement, $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3, N^n = N^3 N^{n-3} = 0_3 \times N^{n-3} = 0_3$.

c. On a, d'après la question 2) a., $\forall n \in \mathbb{N}^*, A^n = (I_3 + N)^n$

Or, $\forall a, b \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$

En supposant la relation extensible aux matrices, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$(I_3 + N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k I_3^{n-k} = \binom{n}{0} I_3 + \binom{n}{1} N + \binom{n}{2} N^2 + \sum_{k=3}^{n} \binom{n}{k} N^k I_3^{n-k}$

Or, d'après la question 2) b., $\forall n \geq 3, N^n = 0_3$.

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}^*, (I_3 + N)^n = I_3 + nN + \frac{n(n-1)}{2} N^2$.

d. On pose $B = I_3 + M$ où $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

On remarque pour $n \geq 3, M^n = 0_3$.

Donc, $B^n = (I_3 + M)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k I_3^{n-k} = I_3 + nM + \frac{n(n-1)}{2} M^2$

3)

a. On a, $U_1 = AU_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$

$U_2 = AU_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}$

b. Par théorème, $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = A^n U_0$.

On pourrait déterminer l'expression de A^n en la conjecturant et la démontrant par récurrence.

Toutefois, on va directement démontrer par récurrence que $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ où (a_n) et (b_n) sont des suites telles que $a_n = 2^{n+1}$ et $b_n = 3^n$.

On a, au rang $n = 0$, $U_n = U_0 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{0+1} \\ 3^0 \end{pmatrix}$

L'initialisation est vérifiée.

Supposons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $U_n = \begin{pmatrix} 2^{n+1} \\ 3^n \end{pmatrix}$

On a, $U_{n+1} = AU_n$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{n+1} \\ 3^n \end{pmatrix} \qquad \text{(hdr.)}$$

$$= \begin{pmatrix} 2^{n+2} \\ 3^{n+1} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}$$

L'hérédité est vérifiée.

Par principe de récurrence, on a, $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \begin{pmatrix} 2^{n+1} \\ 3^n \end{pmatrix}$

c. Les deux suites (a_n) et (b_n) divergent vers $+\infty$ lorsque n tend vers $+\infty$. (U_n) est donc divergente. Dans le cas supposé, les suites deviennent des suites convergentes toutes deux vers 0 et (U_n) converge vers $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

4)

a. On a, $A = \begin{pmatrix} 1.05 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 50 \end{pmatrix}$.

b. On a, $\forall n \in \mathbb{N}, L_{n+1} = AL_n + B$

$$= \begin{pmatrix} 1.05 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_n \\ c_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 50 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1.05a_n \\ c_n + 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix}$$

Ainsi, la somme épargnée par l'aînée (a_n) est une suite géométrique de raison $q = 105\%$ et celle de la cadette (c_n) est une suite arithmétique de raison $r = 50$.

Par théorème, on a, $\forall n \in \mathbb{N}, L_n = \begin{pmatrix} 1.05^n a_0 \\ 50n + c_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \times 1.05^n \\ 50n + 500 \end{pmatrix}$

c. On a, $L_4 = \begin{pmatrix} 300 \times 1.05^4 \\ 50 \times 4 + 500 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 364.65 \\ 700 \end{pmatrix}$

d. La suite (L_n) est composée de deux suites divergentes vers $+\infty$, elle est donc divergente.

5)

a. Indéniablement, le client a commencé par un plat très épicé.
Ainsi, c'est le troisième choix qu'est celui initialement choisi.
De plus, la matrice $A = (a_{ij})$ compte les probabilités de se déplacer d'un plat j à un plat i. Effectivement, si le dernier plat commandé est peu épicé (première colonne donc $j = 1$), alors on a une chance sur deux de recommander un plat peu épicé (première ligne donc $i = 1$) et une chance sur deux de commander un plat épicé (seconde ligne donc $i = 2$) et ainsi de suite.

b. On remarque que P_n converge vers $\begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$

En effet, $\begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{10} & \frac{7}{10} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

6. Matrices nilpotentes

1)

a. On a, $\forall n \geq p, A^n = A^{n-p}A^p = A^{n-p} \times 0_3 = 0_3$

b. On a, $\forall a, b \in \mathbb{R}, (aA + bB)^{2p} = (aA + bB)(aA + bB) \dots (aA + bB)$
Cependant, on sait que la distribution des produits contiendra $k \in \{0, \dots, 2p\}$ fois la matrice A et $2p - k$ fois la matrice B. Ainsi, pour chaque facteur est présent soit A^n ou B^n tel que $n \geq p$, c'est-à-dire, $A^n = 0_3$ ou $B^n = 0_3$, le produit est donc nul.

2)

a. On a, $\forall s, t \in \mathbb{R}, E(s + t) = I_3 + (s + t)A + \frac{(s+t)^2}{2}A^2$
De plus, $E(s)E(t) = \left(I_3 + sA + \frac{s^2}{2}A^2\right)\left(I_3 + tA + \frac{t^2}{2}A^2\right)$

$$\begin{aligned}
&= I_3 + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + sA + stA^2 + \frac{st^2}{2}A^3 + \frac{s^2}{2}A^2 + \frac{ts^2}{2}A^3 + \frac{(st)^2}{2}A^4 \\
&= I_3 + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + sA + stA^2 + \frac{s^2}{2}A^2 \\
&= I_3 + (s + t)A + \frac{s^2+2st+t^2}{2}A^2 \\
&= I_3 + (s + t)A + \frac{(s+t)^2}{2}A^2 = E(s + t)
\end{aligned}$$

b. On a, par récurrence simple, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, E(nt) = E\big((n - 1)t + t\big)$

$$\begin{aligned}
&= E\big((n - 1)t\big)E(t) \\
&= E\big((n - 2)t\big)E^2(t) \\
&= E(0)E^n(t) \\
&= I_3E^n(t) \\
&= E^n(t)
\end{aligned}$$

c. On a, $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}, E(0) = E(t - t) \Leftrightarrow I_3 = E(t)E(-t)$
Par définition, $E(t)$ admet pour inverse $E^{-1}(t) = E(-t)$.

d. On a, $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
Donc, $\forall t \in \mathbb{R}, E(t) = \begin{pmatrix} 1 & t & t^2/2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

7. Trace et transposée d'une matrice

1)

a. On a, $M^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{tr}(M) = 1 - 1 = 0$

b. On a, $M^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ et sa trace n'est pas définie car M n'est pas carrée.

c. On a, $M^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{tr}(M) = 1 + 5 + 9 = 15$

d. On a, $M^T = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{tr}(M) = -1 - 1 - 1 = -3$

2)

a. Les éléments de la diagonale principale d'une matrice restent inchangés lors de la transposition de cette même matrice. Ainsi,
$\mathrm{tr}(AA^T) = \sum_{k=1}^{p} a_{kk}^2 \geq 0$

b. On a, $\mathrm{tr}(AA^T) = \sum_{k=1}^{p} a_{kk}^2 \geq 0$ d'après la question 2) a.
Donc, $\mathrm{tr}(AA^T) = 0 \Leftrightarrow \sum_{k=1}^{p} a_{kk}^2 = 0 \Leftrightarrow \forall k \in \{1, \dots, p\}, a_{kk}^2 = 0$

c. La trace est une opération linéaire du fait que l'addition et le produit par un scalaire de matrices soient linéaires. Soit $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ donc $\lambda A + B = (\lambda a_{ij} + b_{ij})$, d'où le résultat :
$\mathrm{tr}(\lambda A + B) = \sum_{k=1}^{p} \lambda a_{kk}^2 + b_{kk}^2 = \lambda \sum_{k=1}^{p} a_{kk}^2 + \sum_{k=1}^{p} b_{kk}^2 = \lambda \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$

8. Inversion et diagonalisation d'une matrice

1)

a. On a, $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/3 & -2/3 \end{pmatrix}$

b. On a, d'après le pivot de Gauss,

$$A|I_3 \Leftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow_{\substack{L_2=L_3 \\ L_3=L_2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow_{\substack{L_1=L_1-L_2 \\ L_3=L_3-2L_2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\Leftrightarrow_{\substack{L_3=\frac{1}{3}L_3 \\ L_1=L_1-L_3}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/3 & -2/3 \end{array}\right)$$

2)

a. On a, $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Remarque (Vecteur propre)

Chaque colonne correspond à un **vecteur propre** de A, c'est-à-dire, un vecteur x tel que $Ax = \lambda x$ où λ est une **valeur propre** de A. Les valeurs propres sont déterminées à partir du **polynôme caractéristique** de A. Ces étapes sont ici omises mais demeurent cruciales dans la diagonalisation d'une matrice, permettant la simplification de nombreux calculs ainsi que des méthodes statistiques avancées.

b. On a, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & -3/4 \\ 1 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$

c. On a,

$$PDP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3/2 & 1 & 0 \\ 1/2 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & -3/4 \\ 1 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & -3/4 \\ 1 & -1/2 & -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = A$$

d. On a,

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}, A^n = (PDP^{-1})^n &= (PDP^{-1})(PDP^{-1}) \dots (PDP^{-1}) \\ &= PD^nP^{-1} \\ &= P\begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}P^{-1}\end{aligned}$$

9. The exception that proves the rule

Let A, B be two matrices of order $n \in \mathbb{N}^*$ such that $AB = A + B$, we have,

$$\begin{aligned}(I_n - A)(I_n - B) &= I_n^2 - (A + B)I_n + AB \\ &= I_n - (A + B) + (A + B) \\ &= I_n\end{aligned}$$

Thus, $I_n - A$ is inversible such that $(I_n - A)^{-1} = (I_n - B)$

So, we know that,

$$\begin{aligned}(I_n - A)(I_n - B) &= (I_n - B)(I_n - A) \\ &= I_n - (B + A)I_n + BA \\ &= I_n - (A + B)I_n + BA\end{aligned}$$

Finally, we have,

$I_n^2 - (A + B)I_n + AB = I_n - (A + B)I_n + BA \Leftrightarrow AB = BA.$

The two matrices are commutative by product.

Témoignages d'anciens bacheliers

« You're only given a little spark of madness. You mustn't lose it. »

Robin Williams

Dans cette section, vous retrouverez des témoignages personnels de mes proches les plus estimés ainsi que des exercices adaptés de leurs filières. Suivez votre cœur et voyez l'adversité et la difficulté comme une opportunité de vous élever en tant que personne.

Témoignages

I. Formations à fortes composantes scientifiques

1. Classes préparatoires scientifiques (CPGE)

Les **classes préparatoires scientifiques** sont des filières préparatrices, pour une durée de 1 à 3 années, aux concours et examens d'admission des grandes écoles, qu'elles soient d'ingénierie, de chimie ou encore de vétérinaire.

Selon moi, le profil d'un étudiant en CPGE correspond à celui d'un étudiant à l'aise avec la théorie et indécis sur quelle carrière entreprendre, aspirant donc à de longues études le temps de se découvrir.

Pour les concours d'ingénierie, il existe plusieurs filières parmi lesquelles on compte la MP, très axé sur les mathématiques abstraites avec possibilité de se spécialiser en informatique ou sciences de l'ingénieur, la PC, très généraliste au point même d'introduire la chimie comme matière distincte à la physique, la PSI, aussi généraliste que la PC mais pour des profils plus intéressés par l'expérimentation à l'échelle macroscopique, contrairement à l'expérimentation à échelle microscopique chez les PC ou encore la PT, fortement axé sur les sciences d'ingénieur et la conception de pièces industrielles, exclusive à la PT.

a. MP - Mathématiques et Physique

Qu'est-ce qui a motivé votre choix d'orientation ?

« La passion pour les mathématiques, je trouve une grande satisfaction dans la démonstration à travers le maniement d'objets mathématiques complexes. »

Quelle fut la plus grande difficulté rencontrée lors de votre arrivée dans le supérieur ?

« L'intensité du programme qui, malgré le plaisir d'apprendre et travailler les mathématiques, demande un investissement important et systématique. »

Quelle part d'importance prend les mathématiques dans votre cursus ?

« Les mathématiques sont évidemment au cœur de mon cursus, on les étudie individuellement mais on les retrouve dans la majeure partie des sciences. »

Léa P., apprentie ingénieur financière et ancienne étudiante en CPGE MP.

b. PC - Physique et Chimie

Qu'est-ce qui a motivé votre choix d'orientation ?

« Après une première année validée en PACES, j'ai décidé de me réorienter en classes préparatoires pour poursuivre un cursus plus généraliste, ce qui à l'époque correspondait à mon profil d'étudiant. »

Quelle fut la plus grande difficulté rencontrée lors de votre arrivée dans le supérieur ?

« Changer sa méthode d'apprentissage, celle du lycée étant abrutissante et dénuée de réflexion personnelle, il n'est plus possible de suivre et manier les notions en classes préparatoires avec une telle philosophie. Bien que le contenu soit dense, si on y accorde le temps suffisant, il devient rapidement maîtrisé. »

Quelle part d'importance prend les mathématiques dans votre cursus ?

« Les mathématiques est la discipline fondamentale, triompher de cette bête noire vous ouvrira toutes les portes que vous souhaitez. »

Zakaria Z., apprenti ingénieur d'études et ancien étudiant en CPGE PC.

Quelle fut la plus grande difficulté rencontrée lors de votre arrivée dans le supérieur ?

« La charge de travail quotidienne est complètement différente. Chaque semaine nous sommes interrogés de différentes façons (devoirs surveillés, devoirs maisons, oraux) sur différentes matières. Il est impératif de ne jamais avoir du retard sur les chapitres actuels, ce qui demande un travail intense et régulier. »

Lina B., apprentie ingénieure data et ancienne étudiante en CPGE PC.

c. PSI - Physique et Science de l'Ingénieur

Qu'est-ce qui a motivé votre choix d'orientation ?

« J'ai toujours eu une appétence pour les sciences en général et peu de préférence pour une carrière en particulier lors de mon choix en Terminale, pour ne pas restreindre mes possibilités futures j'ai opté pour la prépa PCSI-PSI. »

Quelle fut la plus grande difficulté rencontrée lors de votre arrivée dans le supérieur ?

« La quantité de travaux fournis est intense et s'enchaîne à une rapidité déstabilisante. En moyenne, on passe une semaine sur un chapitre entier pour chaque matière scientifique sur lequel on est hebdomadairement interrogé. »

Quelle part d'importance prend les mathématiques dans votre cursus ?

« Si je devais l'estimer, les mathématiques correspondent à 60% de ma prépa. »

Benjamin J., apprenti ingénieur chef de projet et ancien étudiant en CPGE PSI.

Qu'est-ce qui a motivé votre choix d'orientation ?

« Je souhaite devenir professeur de mathématiques, le meilleur moyen d'acquérir les compétences nécessaires tout en gardant le plus d'opportunités de mon côté semblait correspondre aux classes prépas. »

Que retenez-vous de vos années en classes préparatoires ?

« La prépa m'a fait mûrir. Les méthodes de travail ou encore la réflexion que j'applique dans mes raisonnements, même dans des discussions ordinaires, se reflètent encore aujourd'hui et me sert grandement en école d'ingénieur. »

Wissal B., apprentie ingénieure data et ancienne étudiante en CPGE PSI.

d. PT - Physique et Technologie

Qu'est-ce qui a motivé votre choix d'orientation ?

« Je souhaite travailler dans le domaine de l'informatique. Cependant, j'avais peur d'être restreint au statut de développeur, je me suis donc orienté vers une prépa car le diplôme d'ingénieur donne accès à une plus grande diversité de métiers informatiques. »

Quelle fut la plus grande difficulté rencontrée lors de votre arrivée dans le supérieur ?

« La prépa a complètement transformé mon rythme de vie, alors que les devoirs au lycée ne me contraignaient pas énormément, la prépa a réduit considérablement mes heures de sommeil. »

Quelle part d'importance prend les mathématiques dans votre cursus ?

« Actuellement en Master d'Informatique et Objets connectés, les mathématiques passent au second plan, même si ce qu'elles m'ont apprises resteront encrés en moi, car on ne fait rien sans. »

Yannis M., apprenti ingénieur développeur et ancien étudiant en CPGE PT.

Quelle part d'importance prend les mathématiques dans votre cursus ?

« Les mathématiques occupent une place très importante dans le cursus, elles permettent la modélisation et résolution de problèmes en physique, sciences-industrielles et informatique, bien qu'elles soient plus perçues comme un outil. »

Jean-Baptiste G., apprenti ingénieur chargé d'affaires et ancien étudiant en CPGE PT.

2. Diplôme national de licence générale (Université)

La **licence générale** est une formation diplômante Bac+3 accueillie par les universités publics ou privés.

Selon moi, le profil d'un étudiant en université est généralement celui d'une personne autonome, du fait de l'environnement moins encadré et intime que l'on pouvait retrouver au lycée, les évaluations y sont aussi plus parcimonieuses que dans d'autres types de formations.

Toutefois, les opportunités d'études à l'étranger, de stages ou encore d'orientation vers la recherche et l'enseignement sont fortement promues par les universités.

Finalement, la licence générale est souvent suivie par un master général, diplômant Bac+5, permettant de se spécialiser dans un des domaines étudiés.

a. Biologie

Qu'est-ce qui a motivé votre choix d'orientation ?

« J'ai toujours été passionnée par la médecine ainsi que les sciences naturelles et de la vie. Toutefois, la pression et l'esprit de compétition qu'on associe aux écoles de médecine m'a rebutée et donc j'ai décidé de m'orienter vers un domaine qui en était proche. »

Quelle fut la plus grande difficulté rencontrée lors de votre arrivée dans le supérieur ?

« Le laque d'encadrement et l'autonomie générale requis de l'étudiant est une difficulté qui reste néanmoins fortement murissante. »

Quelle part d'importance prend les mathématiques dans votre cursus ?

« Les mathématiques sont importantes en biologie, principalement les probabilités et statistiques, qui permettent d'étudier et valider différentes hypothèses sur des données scientifiques. »

Sabrina A., étudiante en licence de biologie.

3. Diplôme universitaire de technologie (DUT)

Le **diplôme universitaire de technologie** est un diplôme Bac+2 accueilli par les universités publics ou privés.

Selon moi, le profil d'un étudiant en DUT est souvent associé à une personne souhaitant se spécialiser dans un domaine technique.

Cependant, à l'inverse du Brevet de Technicien Supérieur (BTS), les formations gardent une grande part de théorie et abouti le plus souvent à une poursuite d'études en écoles d'ingénieurs, de commerce ou encore en licence professionnelle à l'université. Le BTS quant à lui cherche à professionnaliser dès la fin du cycle de 2 ans.

a. GMP - Génie mécanique et productique

Qu'est-ce qui a motivé votre choix d'orientation ?

« L'envie de découvrir le monde professionnel, particulièrement celui de l'automobile, m'a fait m'orienter vers ce DUT en alternance. »

Quelle fut la plus grande difficulté rencontrée lors de votre arrivée dans le supérieur ?

« Je dirais que l'organisation demandée aux étudiants est la chose qui m'a le plus surpris en arrivant en DUT, que ce soit gérer le volume horaire ou les nombreux devoirs. »

Quelle part d'importance prend les mathématiques dans votre cursus ?

« Les mathématiques sont indépendamment étudiées mais on les retrouve aussi un peu partout dans le cursus. »

Timothée A., apprenti ingénieur méthodes d'industrialisation et ancien étudiant en DUT.

4. École d'Informatique

Les **écoles d'informatique** sont des écoles Bac+5.

Selon moi, le profil d'un étudiant en informatique est bien entendu celui d'une personne passionnée par le développement de programmes informatiques, qu'il s'agisse de développement web, d'intelligence artificielle ou encore de sécurité.

a. Expert informatique

Qu'est-ce qui a motivé votre choix d'orientation ?

« J'ignorais vers quoi exactement me diriger, mais ayant déjà pratiqué de l'informatique au lycée et durant mon temps libre, j'ai décidé de m'orienter vers ce domaine qui me plaisait particulièrement. »

Quelle fut la plus grande difficulté rencontrée lors de votre arrivée dans le supérieur ?

« Mon école, comme de nombreuses écoles d'informatique, implique l'étudiant dans le processus d'apprentissage, c'est donc à l'étudiant de laisser sa curiosité le déborder pour rechercher et apprendre ce dont il a besoin.

L'étudiant doit « s'auto-discipliner » rapidement car la majeure partie des travaux consiste en la résolution de problèmes et le développement de projets, il n'y a ni restitution de connaissances ni interrogations au format scolaire. »

Quelle part d'importance prend les mathématiques dans votre cursus ?

« Il existe des enseignements facultatifs en mathématiques. Cependant, il n'est pas anodin de voire un projet sur deux se fonder sur une notion mathématique comme la divisibilité en cryptographie ou encore les graphes en design. »

Tony Z., étudiant en école d'informatique.

II. Formations à fortes composantes économiques

1. Diplôme universitaire de technologie (DUT)

Le **diplôme universitaire de technologie** est un diplôme Bac+2 accueilli par les universités publics ou privés.

Selon moi, le profil d'un étudiant en DUT est souvent associé à une personne souhaitant se spécialiser dans un domaine technique.

Cependant, à l'inverse du Brevet de Technicien Supérieur (BTS), les formations gardent une grande part de théorie et abouti le plus souvent à une poursuite d'études en écoles d'ingénieurs, de commerce ou encore en licence professionnelle à l'université. Le BTS quant à lui cherche à professionnaliser dès la fin du cycle de 2 ans.

a. GEA - Gestion des entreprises et des administrations

Qu'est-ce qui a motivé votre choix d'orientation ?

« La comptabilité et gestion m'ont toujours intéressé, même si j'ignorais les spécificités des débouchés ou des matières, car elles restaient encore survolées en terminale générale. »

Quelle fut la plus grande difficulté rencontrée lors de votre arrivée dans le supérieur ?

« La fiscalité est une matière qui m'a marquée, plus généralement s'adapter à un rythme intense contrairement au lycée. »

Quelle part d'importance prend les mathématiques dans votre cursus ?

« Les mathématiques sont présentes dans toutes les matières de gestion et sont même étudiées séparément. »

Fériel T., ancienne étudiante en DUT GEA.

2. Diplôme national de licence générale (Université)

La **licence générale** est une formation diplômante Bac+3 accueillie par les universités publics ou privés.

Selon moi, le profil d'un étudiant en université est généralement celui d'une personne autonome, du fait de l'environnement moins encadré et intime que l'on pouvait retrouver au lycée, les évaluations y sont aussi plus parcimonieuses que dans d'autres types de formations.

Toutefois, les opportunités d'études à l'étranger, de stages ou encore d'orientation vers la recherche et l'enseignement sont fortement promues par les universités.

Finalement, la licence générale est souvent suivie par un master général, diplômant Bac+5, permettant de se spécialiser dans un des domaines étudiés.

a. Économie-Gestion

Qu'est-ce qui a motivé votre choix d'orientation ?

« Les cours de sciences économiques et sociales au lycée ont motivé mon souhait d'étendre mes connaissances en économie. »

Quelle fut la plus grande difficulté rencontrée lors de votre arrivée dans le supérieur ?

« Le travail personnel à fournir à l'université est complètement différent du lycée. »

Quelle part d'importance prend les mathématiques dans votre cursus ?

« Que ce soit l'algèbre, l'analyse ou encore les probabilités et statistiques, la licence économie-gestion n'est pas inconnue aux mathématiques et s'en sert souvent dans son étude de la théorie économique. »

Albin S., ancien étudiant en licence économie-gestion.

III. Sciences Po Paris

L'**Institut des études politiques de Paris** est une école délivrant des diplômes Bac+3 et Bac+5. Un étudiant peut s'intéresser à Sciences Po pour diverses raisons : les affaires publiques et internationales, le droit ou encore la finance, Sciences Po allie ce de nombreuses forces retrouvées séparément dans les écoles et universités. Par conséquent, l'autonomie demandée en université et le rythme intense des classes préparatoires y sont aussi exigées.

Qu'est-ce qui a motivé votre choix d'orientation ?

« J'ai toujours eu un profil généraliste, en sciences, économie ou littérature. J'ai été vivement conseillé par mes professeurs de participer au concours d'admissibilité en convention avec mon lycée et les ateliers d'entraînement m'ont tellement plu qu'ils ont convaincu que c'était ce vers quoi je voulais m'orienter. Le fait qu'on ait trois années de tronc commun pour mieux explorer chaque spécialité est aussi une assurance dans ma décision. »

Quelle fut la plus grande difficulté rencontrée lors de votre arrivée dans le supérieur ?

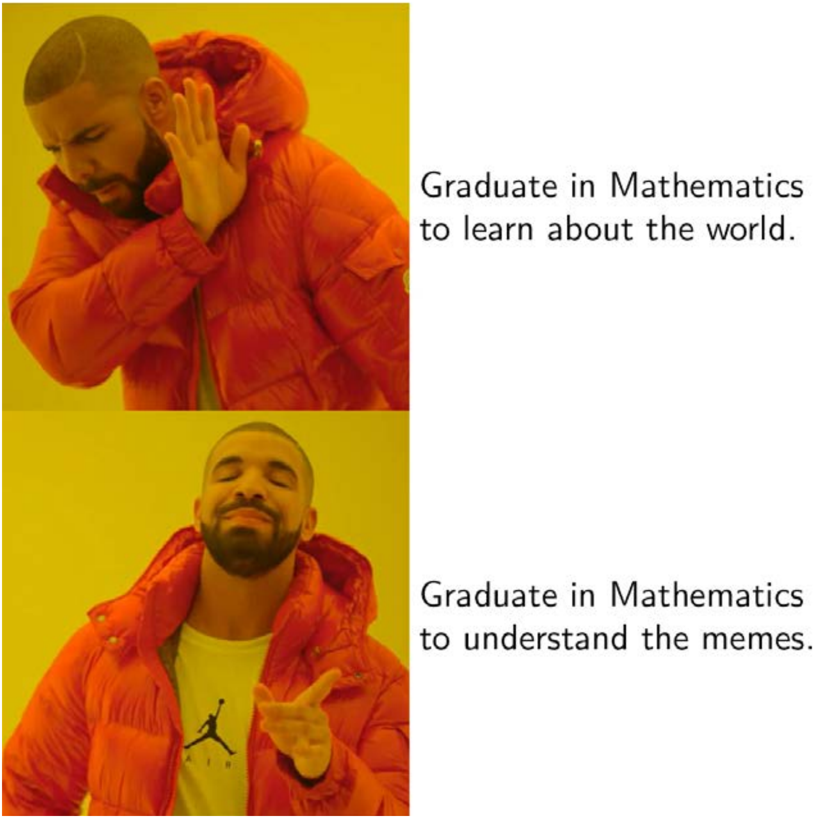
« L'intensité des semestres ainsi que l'élitisme et la pression qu'on peut ressentir au sein d'une école aussi prestigieuse et convoitée. Beaucoup de personnes admises à Sciences Po peuvent perdre confiance en eux, oubliant qu'ils ont pu arriver jusque-là pour une raison. »

Quelle part d'importance prend les mathématiques dans votre cursus ?

« Cela dépend des études envisagées, mais en moyenne elles demeurent peu présentes. »

Ramzi B., étudiant à Sciences Po Paris.

Extraits d'exercices post-bac



Il existe de nombreuses ressources en ligne pour continuer à apprendre, quel que soit le domaine d'études visé, voici certaines de mes recommandations, ainsi qu'inspirations :

Blackpenredpen (Youtube et https://www.blackpenredpen.com/)
Yvan Monka (Youtube et https://www.maths-et-tiques.fr/)
Numberphile (Youtube et https://www.numberphile.com/)
Professor Leonard (Youtube)
Michael Penn (Youtube)
TED-ED (Youtube)

Sommaire

Algèbre

Analyse

Probabilités

Programmation

Cours

I. Algèbre linéaire

1. Espaces vectoriels

inspiré d'un examen de CPGE S

Un **espace vectoriel**, abrévié ev., est un ensemble d'objets sur lesquels on peut effectuer des opérations d'addition et multiplication par scalaire. L'ensemble des réels $\mathbb{R}$, des complexes $\mathbb{C}$ ou encore des matrices réelles de taille n $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ en sont des exemples populaires.

Un **sous-espace vectoriel**, abrévié sev., est un espace vectoriel inclus à un autre espace vectoriel de référence, généralement on prendra pour référence ceux cités ci-dessus.

Soit E un espace vectoriel, F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si :

$$F \text{ sev de } E \Leftrightarrow \begin{cases} F \subset E \\ 0_E \in F \\ \forall x, y \in F, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda x + y \in F \end{cases}$$

où 0_E correspond à l'élément neutre par addition dans E. C'est-à-dire, l'élément de E tel que $\forall e \in E, 0_E + e = e$ et $0_E \times e = 0_E$.

Une famille de vecteurs $\{u_1, \dots, u_n\}$ est dite **libre** si $\forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$, on a :

$$\lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_n u_n = 0_n \Leftrightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$$

où $0_n = (0, \dots, 0)$ est le vecteur nul de taille n. Autrement, la famille sera dite **liée**.

Exercice

1) Soit $\mathbb{R}^2$ un espace vectoriel. Les ensembles suivants sont-ils sev de $\mathbb{R}^2$?
   a. $F = \{u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2, u_1 = u_2\}$
   b. $F = \{u = (u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{R}^3, u_1 + u_2 + u_3 \leq 0\}$
   c. $F = \{u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2, u_1^2 - u_2^2 = 0\}$
   d. $F = \{u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2, u_1 u_2 = 0\}$
   e. $F = \{u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2, u_1 + u_2 = 1\}$

2) Les familles suivantes sont-elles libres ou liées ? :
   a. $u_1 = (1,0,1), u_2 = (0,1,1)$ et $u_3 = (-1,-1,0)$.
   b. $u_1 = (1,0,0), u_2 = (0,0,1)$ et $u_3 = (0,1,0)$.
   c. $u_1 = (a,0,a), u_2 = (1+a, 2+a, 3+a)$ où $a \in \mathbb{R}$.
   d. $u_1 = (1,-1,1), u_2 = (0,-1,0)$ et $u_3 = (1,1,1)$.
   e. $u_1 = (1,0), u_2 = (0,2)$ et $u_3 = (1,-1)$.
   f. $u_1 = (0,0)$ et $u_2 = (1,1)$.
   g. Quelle hypothèse peut-on faire sur la liberté d'une famille lorsqu'elle contient le vecteur nul ? La démontrer.

3) On considère l'application $f : (x,y,z) \mapsto x + y + z$.
   a. Calculer $f(0_3)$ où 0_3 est le vecteur nul de $\mathbb{R}^3$.
   b. L'application est dite **linéaire** si pour tous vecteurs u, v de $\mathbb{R}^3$ et tout réel λ, $f(\lambda u + v) = \lambda f(u) + f(v)$, montrez que f est linéaire.
   c. Soit φ une application linéaire telle que $\varphi(1,0) = 2$ et $\varphi(1,1) = 5$. Donner pour tous réels x, y l'expression de $\varphi(x,y)$.

Correction

1)

a. Premièrement, F est défini comme un ensemble de vecteurs de dimension 2 respectant une condition particulière. Il s'agit donc d'un sous-ensemble de l'ensemble des vecteurs de dimension 2, à savoir $\mathbb{R}^2$.
Donc $F \subset \mathbb{R}^2$.
Autrement dit, $u \in F \Leftrightarrow \exists u_1, u_2 \in \mathbb{R}, u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ tel que…

$$\Rightarrow u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow F \subset \mathbb{R}^2$$

Deuxièmement, le vecteur nul $0_{\mathbb{R}^2} = (0,0)$ vérifie bien $0 = 0$.
Donc $0_{\mathbb{R}^2} \in F$.

Finalement, $\forall x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in F, \lambda \in \mathbb{R}$, on a,

$$\lambda x + y = (\lambda x_1 + y_1, \lambda x_2 + y_2)$$

Or, par définition, $x \in F$ et $y \in F$, on a donc,
$\begin{cases} x_1 = x_2 \Rightarrow \lambda x_1 = \lambda x_2 \\ y_1 = y_2 \end{cases} \Rightarrow \lambda x_1 + y_2 = \lambda x_2 + y_2.$
Donc $\forall x, y \in F, \forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda x + y \in F$.
F est bien un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

b. F est défini comme un ensemble de vecteurs de dimension 3 respectant une condition particulière. Il ne peut donc s'agir d'un sous-ensemble de vecteurs de dimension 2.
F n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

c. $\forall x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in F, \lambda \in \mathbb{R}$, on a,

$$\lambda x + y = (\lambda x_1 + y_1, \lambda x_2 + y_2)$$

Or,
$$\begin{aligned}(\lambda x_1 + y_1)^2 - (\lambda x_2 + y_2)^2 &= \lambda^2 x_1^2 + 2\lambda x_1 y_1 + y_1^2 - \lambda^2 x_2^2 - 2\lambda x_2 y_2 - y_2^2 \\ &= \lambda^2(x_1^2 - x_2^2) + 2\lambda(x_1 y_1 - x_2 y_2) + (y_1^2 - y_2^2) \\ &= 2\lambda(x_1 y_1 - x_2 y_2)\end{aligned}$$
Or, $x_1 y_1 - x_2 y_2 = 0$ n'est pas une vérité générale.
En effet, $x = (1,1)$ et $y = (-1,1)$ sont bien des vecteurs de F mais leur combinaison linéaire $\lambda x + y$ ne l'est pas.
F n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

d. $\forall x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in F, \lambda \in \mathbb{R}$, on a,

$$\lambda x + y = (\lambda x_1 + y_1, \lambda x_2 + y_2)$$

Or, $(\lambda x_1 + y_1)(\lambda x_2 + y_2) = \lambda^2 x_1 x_2 + \lambda(x_1 y_2 + y_1 x_2) + y_1 y_2$
$= \lambda(x_1 y_2 + y_1 x_2)$

Or, $x_1 y_2 + y_1 x_2 = 0$ n'est pas une vérité générale.

En effet, $x = (0, 1)$ et $y = (1, 0)$ sont bien des vecteurs de F mais leur combinaison linéaire $\lambda x + y$ ne l'est pas.

F n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

e. Le vecteur nul $0_{\mathbb{R}^2} = (0, 0)$ ne vérifie pas $0 + 0 = 0 \neq 1$.

F n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^2$.

2)

a. On a, $\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_3 &\Leftrightarrow \lambda_1 \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}-1\\-1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_1 - \lambda_3 = 0\\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0\\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0\end{cases} \\
&\Leftrightarrow_{(L_3)-(L_1)-(L_2)\to(L_3)} \begin{cases}\lambda_1 - \lambda_3 = 0\\ \lambda_2 - \lambda_3 = 0\\ \quad 2\lambda_3 = 0\end{cases} \\
&\Leftrightarrow_{\lambda_3 = 0} \begin{cases}\lambda_1 = 0\\ \lambda_2 = 0\\ \lambda_3 = 0\end{cases}
\end{aligned}$$

Donc, $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_3 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0_3$.

La famille est donc libre.

b. On a, $\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_3 &\Leftrightarrow \lambda_1 \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases}\lambda_1 = 0\\ \lambda_3 = 0\\ \lambda_2 = 0\end{cases}
\end{aligned}$$

Donc, $\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0_3 \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0_3$.

La famille est donc libre.

c. Soit $a \in \mathbb{R}$, on a, $\forall \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$,

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 0_3 \Leftrightarrow \lambda_1 \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ a \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1+a \\ 2+a \\ 3+a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 a + \lambda_2(1+a) = 0 \\ \lambda_2(2+a) = 0 \\ \lambda_1 a + \lambda_2(3+a) = 0 \end{cases}$$

Si $a = -2$, on a,

$$\begin{cases} \lambda_1 a + \lambda_2(1+a) = 0 \\ \lambda_2(2+a) = 0 \\ \lambda_1 a + \lambda_2(3+a) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ 2+a = 0 \\ -2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow_{(L_1)+(L_3)\to(L_1)} \begin{cases} -4\lambda_1 = 0 \\ 2+a = 0 \\ -2\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ 2+a = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

La famille est libre.

Si $a \neq -2$, on a,

$$\begin{cases} \lambda_1 a + \lambda_2(1+a) = 0 \\ \lambda_2(2+a) = 0 \\ \lambda_1 a + \lambda_2(3+a) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow_{2+a\neq 0} \begin{cases} \lambda_1 a + \lambda_2(1+a) = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 a + \lambda_2(3+a) = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow_{\lambda_2=0} \begin{cases} \lambda_1 a = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 a = 0 \end{cases}$$

Si $a = 0$, alors on ne peut rien dire sur λ_1, la famille peut éventuellement être libre. Si $a \notin \{0, -2\}$, alors $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, la famille est libre.

d. On remarque que $u_1 - 2u_2 = u_3 \Leftrightarrow u_1 - 2u_2 - u_3 = 0_3$.
La famille est donc liée.

e. On remarque que $u_1 - \frac{1}{2}u_2 = u_3 \Leftrightarrow u_1 - \frac{1}{2}u_2 - u_3 = 0_2$.
La famille est donc liée.

f. On remarque que $u_1 + 0u_2 = 0_2$.
La famille est donc liée.

g. On conjecture qu'une famille contenant le vecteur nul est liée.

Soit $\{u_1, \ldots, u_n\}$ une famille de vecteurs de dimension p tel qu'au moins un des vecteurs u_k soit le vecteur nul 0_p.

On a, $\forall \lambda_k \in \mathbb{R}$, $0u_1 + \cdots \lambda_k 0_p + \cdots + 0u_n = 0_p$.

La famille est donc liée.

3)

a. On a, $f(0,0,0) = 0 + 0 + 0 = 0$

b. On a, $\forall u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbb{R}^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f(\lambda u + v) &= f(\lambda u_1 + v_1, \lambda u_2 + v_2, \lambda u_3 + v_3) \\ &= (\lambda u_1 + v_1) + (\lambda u_2 + v_2) + (\lambda u_3 + v_3) \\ &= \lambda u_1 + \lambda u_2 + \lambda u_3 + v_1 + v_2 + v_3 \\ &= \lambda(u_1 + u_2 + u_3) + (v_1 + v_2 + v_3) \\ &= \lambda f(u) + f(v) \end{aligned}$$

c. On a, $\forall x, y \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \varphi(x,y) &= x\varphi(1,0) + y\varphi(0,1) && (\varphi \text{ linéaire}) \\ &= x\varphi(1,0) + y\big(\varphi(1,1) - \varphi(1,0)\big) \\ &= 2x + 3y \end{aligned}$$

Ouverture et orientation sur l'Algèbre linéaire

L'Algèbre linéaire est un domaine étudié dans l'ensemble des orientations mathématiques. Certains cursus s'intéressent à la théorie des ensembles et comment caractériser un ensemble E. C'est ainsi qu'on a pu définir des ensembles tels que $\mathbb{R}$ et toutes les opérations fondamentales dont $\mathbb{R}$ est composé. D'autres cursus s'intéressent aux applications des notions étudiées comme l'inversion d'une matrice ou encore la « recherche des zéros » d'une fonction, ces opérations permettent de résoudre des systèmes complexes comme l'estimation du trafic routier ou encore la prédiction de quantités à produire pour un commerce sous un équilibre économique particulier.

Cours

2. Espionnage industriel

inspiré d'un examen de CPGE S

L'**inversion** de matrices est une opération importante dans la résolution d'équations et systèmes linéaires ou non linéaires. Il existe une multitude de méthodes, par exemple on peut résoudre $MN = I_n$ en posant les coefficients $(n_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ et en résolvant les n^2 équations imposées. Une méthode moins fastidieuse consiste à poser la matrice identité I_n en parallèle de la matrice à inverser M et effectuer des opérations élémentaires ($+$, $\times$, $\leftrightarrow$) sur les lignes de la matrice M de sorte à la transformer en la matrice I_n. Les opérations effectuées sur la matrice M sont aussi effectuées sur posée en parallèle et prouve donner en fin de processus la matrice M^{-1}.

Par exemple, inversons la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ en posant en parallèle la matrice $\mathrm{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a :

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \left| \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \right. \qquad \begin{array}{r} (\mathrm{L}_1) + (\mathrm{L}_2) \to (\mathrm{L}_1) \\ \frac{1}{2}(\mathrm{L}_3) \to (\mathrm{L}_3) \end{array}$$

Ainsi, l'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$

La **diagonalisation** de matrices est une opération permettant de simplifier l'expression des matrices et objets algébriques qu'on peut lui associer. Principalement, on peut réécrire une matrice M diagonalisable sous la forme PDP^{-1} avec D une matrice diagonale où ses coefficients diagonaux sont dits **valeurs propres** λ_k de la matrice M, définis comme les racines du polynôme $\det(X - M)$, pour une matrice de taille 2, on a :

$$\det(X - M) = \begin{vmatrix} X - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & X - a_{22} \end{vmatrix} = (X - a_{11})(X - a_{22}) - (-a_{12})(-a_{21})$$

où $M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

Exercice

Tony est employé par l'Organisation afin de décrypter un message codé intercepté entre deux agents d'une société rivale, le message codé est présenté sous la forme suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 19 & 19 & 14 \\ 12 & 15 & 11 \\ 8 & 11 & 6 \end{pmatrix}$$

Tony fait la brillante déduction que le message M est le résultat d'un produit matriciel $M = TZ$ où T et Z sont deux matrices carrées de taille 3. De plus, il tient de son collègue Michel l'expression de la matrice T :

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

a. On suppose T inversible, déterminez T^{-1}.

b. Après plusieurs tests d'apprentissage supervisé, Tony parvient à établir la règle qui régit l'encodage d'un message. Chaque coefficient correspond à une lettre d'après la table suivante :

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
8	7	5	13	9	16	18	22	4	23	11	3	21	1	6	15	12	19	2	14	17	20	25	24	10	26

Déterminer le message décodé Z. Que serait-il arrivé si Tony avait oublié que le produit matriciel n'était pas commutatif ?

c. Alors que Tony et Michel célèbre leur victoire, ils sont interpellés par Chloé, l'avocate de l'Organisation, qui explique son problème. L'affaire sur laquelle elle travaille est verrouillée par un mot de passe à 4 chiffres contenant pour indication « les 4 chiffres sont les mêmes et correspondent tous à la somme des valeurs propres de la matrice F » telle que :

$$F = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Déterminer le mot de passe de Chloé.

d. Déterminer l'expression de F^n, on pourra poser $F = PDP^{-1}$.

Correction

a. Une première méthode consiste à poser T^{-1} telle que :

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$$

Ainsi, on a, $TT^{-1} = I_3 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2a+g & 2b+h & 2c+i \\ a+g & b+h & c+i \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a+g=1 \\ 2b+h=0 \\ 2c+i=0 \\ a+g=0 \\ b+h=1 \\ c+i=0 \\ d=0 \\ e=0 \\ f=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-1 \\ c=0 \\ d=0 \\ e=0 \\ f=1 \\ g=-1 \\ h=2 \\ i=0 \end{cases}$$

Une seconde méthode, comme indiquée dans l'énoncé, est la suivante :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right. \longleftrightarrow_{(L_1)-(L_2)\to(L_1)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\left|\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right.$$

$$\longleftrightarrow_{(L_2)-(L_1)\to(L_2)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\left|\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right.$$

$$\longleftrightarrow_{(L_2)\leftrightarrow(L_3)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\left|\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}\right.$$

Donc, $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

b. On a, $M = TZ \Leftrightarrow Z = T^{-1}M = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 3 \\ 8 & 11 & 6 \\ 5 & 11 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B & I & C \\ A & K & O \\ C & K & A \end{pmatrix}$

Si l'on oubliait le cas général où $AB \neq BA$. On aurait,

$Z = MT^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 9 & 19 \\ 1 & 10 & 15 \\ 2 & 4 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & E & R \\ N & Y & P \\ S & I & K \end{pmatrix}$

c. Déterminons les valeurs propres de F, on a,

$$\begin{aligned} \det(X - F) &= \begin{vmatrix} X - 0 & 1 \\ 1 & X - 0 \end{vmatrix} \\ &= X^2 - 1 \\ &= (X - 1)(X + 1) \end{aligned}$$

Les racines de ce polynôme sont -1 et 1.

Les valeurs propres sont donc -1 et 1.

Le chiffre répété du mot de passe est donc 0.

Le mot de passe est finalement 0000.

d. Par définition, on a diagonalisé la matrice F, il existe donc P inversible et D une matrice diagonale telle que $F = PDP^{-1}$.

Par récurrence facile, on a pour tout entier naturel n,

$$\begin{aligned} F^n &= (PDP^{-1})^n \\ &= (PDP^{-1})(PDP^{-1}) \dots (PDP^{-1}) \\ &= PDP^{-1}PDP^{-1} \dots PDP^{-1} \\ &= PD^nP^{-1} \end{aligned}$$

Exercice

II. Équations différentielles non ordinaires

1. Équations de la vie

adapté de licence bio.

Sabrina étudie le nombre de lapins et renards présents dans son jardin.

1) On considère que les lapins et renards ne se rencontrent jamais.
   a. On rappelle que la période de grossesse chez les lapins est d'un mois et que l'espérance de vie des lapins est de dix ans. De plus, on suppose que les lapins sont aptes à se reproduire dès la naissance sans l'aide d'aucun autre lapin, similaire au dédoublement d'une bactérie. Finalement, on estime les chances de reproduction d'un lapin de deux sur trois. Déterminer l'expression de (l_n) correspondant au nombre de lapins après n-mois passés dans le domaine, initialement on compte $l_0 = 10$ lapins.
   b. On considère que si un renard n'a pas mangé de lapin du mois il a une chance sur deux de survivre. Déterminer l'expression de (r_n) correspondant au nombre de renards après n-mois passés dans le domaine, initialement on compte $r_0 = 10$ renards.

2) Un jour, les intempéries font s'effondrer la barrière qui séparait jusqu'alors les deux espèces. Le taux de croissance des populations respecte la relation $\begin{cases} \frac{dL}{dt} = aL - bLR \\ \frac{dR}{dt} = -cR + dLR \end{cases}$ où L et R correspondent au nombre de lapins et renards.
   Toutefois, on ne résoudra pas ce système d'équations différentielles. On discrétise le problème par la relation $\begin{cases} L_{n+1} = L_n + h(aL_n - bL_nR_n) \\ R_{n+1} = R_n + h(-cR_n + dL_nR_n) \end{cases}$ avec $(L_n), (R_n)$ les suites correspondant aux nombres de lapins et renards n-mois après l'écroulement de la barrière, initialement on a $L_0 = 10$ lapins et $R_0 = 10$ renards. De plus, on a, $a = 2$, $b = 0.3$, $c = 0.3$, $d = 0.025$ et $h = 0.1$. Écrire un programme Python qui affiche, à l'aide du module « matplotlib.pyplot », l'évolution des populations sur les 250 premiers mois, les lapins sont en gris et les renards en rouge. Commenter la modélisation

Correction

1)

a. On a, $\forall n \in \mathbb{N}, l_{n+1} = l_n + \frac{2}{3} l_n - \frac{1}{120} l_n = \frac{199}{120} l_n$

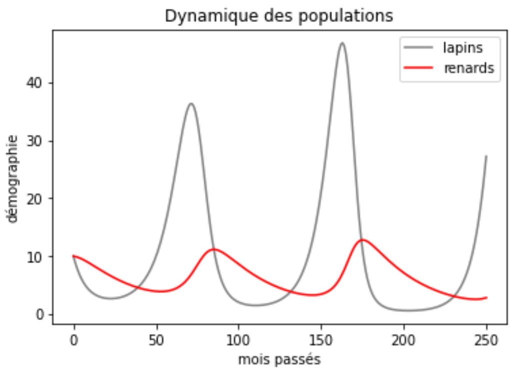
Donc, $\forall n \in \mathbb{N}, l_n = l_0 \left(\frac{199}{120}\right)^n = 10 \left(\frac{199}{120}\right)^n$

b. On a, $\forall n \in \mathbb{N}, r_{n+1} = r_n - \frac{1}{2} r_n = \frac{1}{2} r_n$

Donc, $\forall n \in \mathbb{N}, r_n = r_0 \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{10}{2^n}$

2)

```
for i in range(250) :
    x.append(x[i] + h * (a*x[i] - b * x[i] * y[i]))
    y.append(y[i] + h * (- g*y[i] + d * y[i] * x[i]))

plt.plot(range(len(x)), x, "gray", label="lapins")
plt.plot(range(len(x)), y, "red", label="renards")
plt.title("Dynamique des populations")
plt.xlabel("mois passés")
plt.ylabel("démographie")
plt.legend()
plt.show()
```



La modélisation est courante dans l'étude des populations suivant un modèle « proie-prédateur », la survie des renards dépend du nombre de lapins, néanmoins, leur activité réduit le nombre de lapins. Dans une modélisation plus complexe, la survie des lapins dépendrait aussi du nombre de renards. En effet, leur alimentation dépendant de la végétation fertilisée en partie par la décomposition de prédateurs tels que les renards. De plus, le modèle présente plusieurs états qui font diverger ou converger les différentes populations en fonction des paramètres et conditions initiales, il est donc à utiliser avec précaution.

Cours

2. Équations dans Laplace

adapté d'un exercice de CPGE S

On s'intéresse ici à la résolution d'équations différentielles à partir du **domaine de Laplace**. On introduit la notion de **transformée de Laplace $\mathcal{L}$**, de la fonction temporelle l, définie par :

$$\mathcal{L}(p) = \mathcal{L}[l(t)] = \int_0^{+\infty} e^{-pt} \cdot l(t)dt$$

On retiendra les propriétés suivantes :

$$\mathcal{L}[f'(t)] = pF(p) - f(0)$$

$$\mathcal{L}[f(t) + g(t)] = F(p) + G(p)$$

$$U(p) = \mathcal{L}\big(u(t)\big) = \frac{1}{p} \text{ dit l'échelon unitaire où } u(t) = 1 \text{ si t} > 0 \text{ et } 0 \text{ sinon}$$

La **transformation de Laplace** permet la résolution d'équations différentielles généralement d'origines mécaniques ou électriques.

Exercice

Timothée souhaite vérifier la température interne du moteur de sa moto. Il parvient à modéliser la température du moteur $T(t)$ en lien avec la température extérieure $T_e(t)$ telle que :

$$\frac{dT}{dt}(t) + RC \cdot T(t) = T_e(t)$$

avec $RC = 40°C^{-1}$.

a. Exprimer le rapport qu'est la fonction de transfert $H(p) = \frac{T(p)}{T_e(p)}$.

Initialement la température interne du moteur est nulle.

b. D'après le **théorème de la valeur finale**, $\lim\limits_{t \to +\infty} T(t) = \lim\limits_{p \to 0^+} pT(p)$. En considérant que $T_e(t)$ est un échelon unitaire, déterminez vers quelle température converge le moteur de Timothée.

c. On suppose que l'expression de T est $T(t) = \frac{1}{RC}(1 - e^{-RCt})$. Démontrer que T atteint 95% de sa limite approximativement en $t = 3\tau$ où $\tau = \frac{1}{RC}$.

Correction

a. On a, dans le domaine de Laplace,

$$\begin{aligned}\frac{dT}{dt}(t) + RC \cdot T(t) = T_e(t) &\Longrightarrow pT(p) - T(0) + RC \cdot T(p) = T_e(p)\\ &\Longleftrightarrow (RC + p)T(p) = T_e(p)\\ &\Longleftrightarrow H(p) = \frac{1}{RC+p}\end{aligned}$$

b. On a, d'après le théorème de la valeur finale,

$$\begin{aligned}\lim_{t\to+\infty} T(t) &= \lim_{p\to 0^+} pT(p)\\ &= \lim_{p\to 0^+} pH(p)T_e(p)\\ &= \lim_{p\to 0^+} \frac{pT_e(p)}{RC+p}\\ &=_{\left(T_e(p)=\frac{1}{p}\right)} \lim_{p\to 0^+} \frac{1}{RC+p}\\ &= \frac{1}{RC} = 40°\text{C}.\end{aligned}$$

Le moteur converge à 40°C.

c. On a,

$$\begin{aligned}T(t) = 0.95T_\infty &\Longleftrightarrow \frac{1}{RC}(1 - e^{-RCt}) = \frac{0.95}{RC}\\ &\Longleftrightarrow 1 - e^{-RCt} = 0.95\\ &\Longleftrightarrow e^{-RCt} = 0.05\\ &\Longleftrightarrow -RCt = \ln(0.05)\\ &\Longleftrightarrow t = -\frac{\ln(0.05)}{RC} \simeq \frac{2.99}{RC} \simeq 3\tau.\end{aligned}$$

Cours

III. Optimisation de fonctions

1. Matrice hessienne

inspiré d'un exercice de licence éco.

On invite à faire l'exercice « Fonction à plusieurs variables » du chapitre « Fonction réelles » avant de s'intéresser à celui-ci.

Soit f une fonction à deux variables $f(x,y)$. On définit un **point stationnaire** (x^*,y^*) de f comme une solution de $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases}$

La **matrice hessienne** $H(x,y)$ d'une fonction f est défini par :

$$H(x,y) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) & \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right) & \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right) \end{pmatrix}$$

où $\dfrac{\partial}{\partial x_0}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\right)$ correspond à la dérivée partielle par rapport à x_0 de la dérivée partielle de f par rapport à x_1, autrement appelé **dérivée partielle d'ordre 2** de f par rapport à x_1 puis x_0, notée $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_0 \partial x_1}$

Si la matrice hessienne évaluée au point stationnaire (x^*,y^*) admet un premier coefficient $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ positif et un déterminant $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} \times \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \times \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ positif, alors f admet un minimum global en (x^*,y^*). Si le premier coefficient est négatif et le déterminant positif, alors f admet un maximum global en (x^*,y^*).

Exercice

Albin organise un tournoi de rugby. Les mesures sanitaires actuelles l'obligent à adapter la répartition des places. On note $o(x,y) = x^3 - 12xy + 8y^3 + 10$ la **fonction objectif**, correspondant à la perte engendrée lorsqu'on fixe x places vides entre deux spectateurs au sein d'une même rangée et y places vides entre deux spectateurs au sein d'une même colonne, la législation impose $x > 0$ et $y > 0$. Déterminer pour quelles valeurs de x et y Albin minimisera ses pertes à l'aide de la matrice hessienne.

Correction

On a, pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$,
$\frac{\partial}{\partial x} o(x,y) = 3x^2 - 12y$
$\frac{\partial}{\partial y} = o(x,y) = -12x + 24y^2$

Déterminons les points stationnaires de o, on a,

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} o(x,y) = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} o(x,y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 - 12y = 0 \\ -12x + 24y^2 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{x^2}{4} \\ -12x + 24\left(\frac{x^2}{4}\right)^2 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{x^2}{4} \\ -12x + \frac{3x^4}{2} = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow_{x>0} \begin{cases} y = \frac{x^2}{4} \\ -12 + \frac{3x^3}{2} = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \left(\frac{24}{3}\right)^{1/3} = 2 \\ y = \frac{1}{4}\left(\frac{24}{3}\right)^{2/3} = 1 \end{cases}$$

Le point candidat est $(2, 1)$.

Déterminons la matrice hessienne de f, on a,
$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x} o(x,y)\right) = 6x$
$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x} o(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y} o(x,y)\right) = -12$
$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y} o(x,y)\right) = 48y$
Ainsi, la matrice $H(x^*, y^*) = \begin{pmatrix} 6x^* & -12 \\ -12 & 48y^* \end{pmatrix} =_{(x^*,y^*)=(2,1)} \begin{pmatrix} 12 & -12 \\ -12 & 48 \end{pmatrix}$
Le premier coefficient est $12 \geq 0$, le déterminant est $720 \geq 0$, par théorème, o admet un minimum global pour $x = 2$ places séparatrices en rangée et $y = 1$ place séparatrice en colonne.

Le coût minimal est $o(2, 1) = 2$ unités monétaires.

Cours

2. Graphique sous contraintes

adapté d'un exercice de DUT GEA.

La résolution de problèmes d'optimisation linéaire d'une fonction à plusieurs variables peut s'effectuer de manière graphique. On appelle **programme linéaire** l'intention vis-à-vis de la **fonction objectif** f, à savoir maximiser ou minimiser, ainsi que l'ensemble des contraintes auxquelles on soumet les variables de décision.

Soit le programme linéaire sous **forme canonique** suivant :

$$\max f(x,y) = ax + by + c$$

$$\text{sous contraintes } \alpha x + \beta y \leq \eta$$

$$\ldots$$

$$\delta x + \Delta y \leq \varphi$$

On résout le problème d'optimisation ci-dessus en construisant premièrement un polygone sur un plan, dit **zone de contraintes**, respectant toutes les contraintes citées ci-dessus. Deuxièmement, on trace la droite **d'iso-profit nul**, à savoir $ax + by + c = 0$. On remplace 0 par des valeurs plus grandes (ou plus petites pour une minimisation) jusqu'à la dernière intersection entre la droite d'iso-profit et la zone de contraintes, alors on a maximisé (ou minimisé) la valeur de $ax + by + c$.

Exercice

Mélaine souhaite synthétiser le plus de thé à l'occasion du nouvel an chinois. Elle parvient à estimer la production de thé traditionnel par la fonction suivante $p(a,b) = 0.8a + 0.2b$ où a correspond au gramme de molécule a et b au gramme de molécule b qu'elle utilisera pour son thé. Le quartier lui donne accès au laboratoire où l'inventaire indique 30 grammes de molécule a et 35 grammes de molécule b. Déterminer les quantités utilisées pour maximiser la production. Plus tard, on rajoute la contrainte $2a - b \leq 15$, déterminez alors les quantités utilisées sous ces nouvelles contraintes.

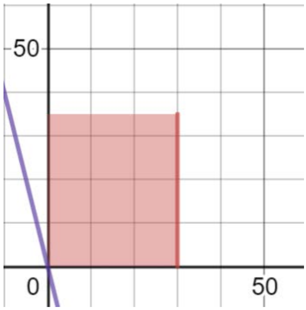
Correction

On a, le programme linéaire suivant :

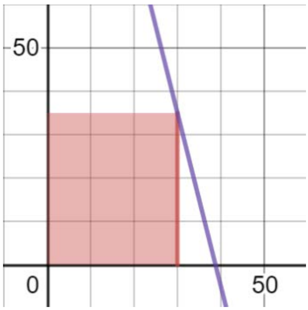
$\max p(a,b) = 0.8a + 0.2b$

sous contraintes $0 \leq a \leq 10$ et $0 \leq b \leq 35$

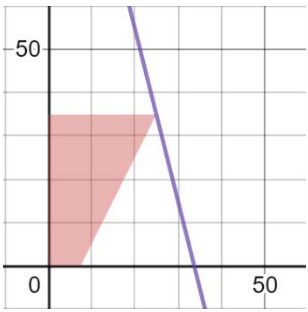
On a la zone de contrainte et droite d'iso profit nul $0.8a + 0.2b = 0$:



La production maximale est $0.8a + 0.2b = 31$ en $a = 30$g et $b = 35$g.



En rajoutant la contrainte $2a - b \leq 15$, la production maximale devient 27 en $a = 25$g et $b = 35$g :



COURS

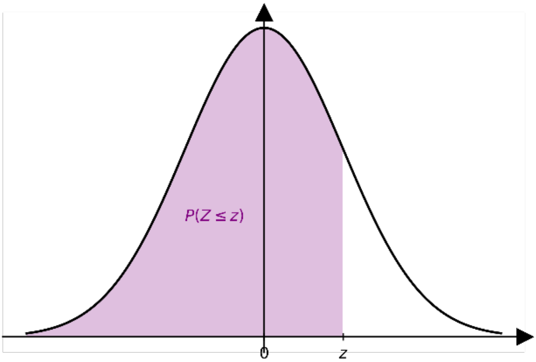
IV. Lois continues

1. Loi normale

inspiré d'un exercice de Tle S 2017

Une **loi normale**, notée $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, est une loi de probabilité admettant pour espérance μ et variance σ^2. Elle permet de décrire la majorité des distributions naturels ou humains dans le monde. On représente la répartition de la loi normale par une **courbe gaussienne** qui est symétrique par rapport à $x = \mu$.

On appelle **loi normale centrée réduite** la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$. On donne de plus la table suivante des valeurs $P(Z \leq z)$ où $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$:



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9913
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9986	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

Exercice

1) Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, démontrer les propriétés suivantes :
   a. La variable $\frac{X-\mu}{\sigma}$ suit une loi normale, montrez qu'il s'agit la loi normale centrée réduite.
   b. En supposant que Y suit une loi normale $\mathcal{N}(a, b^2)$ indépendante de X et que $Z = X + Y$ suit une loi normale. Déterminer ses paramètres.

2) Calculer les probabilités suivantes à l'aide de la table fournie :
   a. $P(X < 1)$ où $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$
   b. $P(|X| < 1)$ où $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$
   c. $P(X < 2)$ où $X \hookrightarrow \mathcal{N}(1, 1)$
   d. $P(X < 25)$ où $X \hookrightarrow \mathcal{N}(30, 4)$
   e. $P(X > 10)$ où $X \hookrightarrow \mathcal{N}(10, 10)$

3) On étudie les erreurs de fabrication des diamètres de cylindres. On suppose que la taille du diamètre suit une loi normale $\mathcal{N}(1\text{mm}, (0.02\text{mm})^2)$. Quelle est la proportion de cylindres de l'usine concernée par une erreur de plus de 0.03mm ?

Correction

1)

a. On a, $E\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}E(X-\mu) = \frac{1}{\sigma}(E(X)-\mu) = 0$

$V\left(\frac{X-\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2}V(X-\mu) = \frac{1}{\sigma^2}V(X) = 1$

b. On a, $E(Z) = E(X+Y) = E(X) + E(Y) = \mu + a$

$V(Z) = V(X+Y) =_{X,Y \text{ ndép.}} V(X) + V(Y) = \sigma^2 + b^2$

2)

a. On a, d'après la table de la loi normale centrée réduite,
$P(X < 1) = 0.84$

b. On a,
$P(|X| < 1) = P(-1 \leq X \leq 1)$
Or, par relation de Chasles,
$P(-1 \leq X \leq 1) = P(X \leq 1) - P(X \leq -1)$
$= 0.68$

c. On a, $X \hookrightarrow \mathcal{N}(1,1) \Longrightarrow X - 1 \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$
$P(X < 2) = P(X-1 < 1) = P(Z < 1) = 0.84$ où $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$

d. On a, $X \hookrightarrow \mathcal{N}(30,4) \Longrightarrow \frac{X-30}{2} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$
$P(X < 25) = P\left(\frac{X-30}{2} < -2.5\right) = P(Z < -2.5) = 0.0062$

e. On a, $X \hookrightarrow \mathcal{N}(10,10) \Longrightarrow \frac{X-10}{\sqrt{10}} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$
$P(X < 25) = P\left(\frac{X-10}{\sqrt{10}} < 0\right) = P(Z < 0) = 0.5$ par symétrie.

3) On a, $X \hookrightarrow \mathcal{N}(1,(0.02)^2) \Longrightarrow \frac{X-1}{0.02} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$

$$\begin{aligned}
P(|X-1| < 0.03) &= P(-0.03 < X - 1 < 0.03) \\
&= P\left(-\frac{0.03}{0.02} < \frac{X-1}{0.02} < \frac{0.03}{0.02}\right) \\
&= P(-1.5 < Z < 1.5) \\
&= P(Z < 1.5) - P(Z < -1.5) \\
&= 0.87
\end{aligned}$$

COURS

V. Tests statistiques

1. Conformité d'une usine textile

adapté d'un exercice d'école d'ingénieur

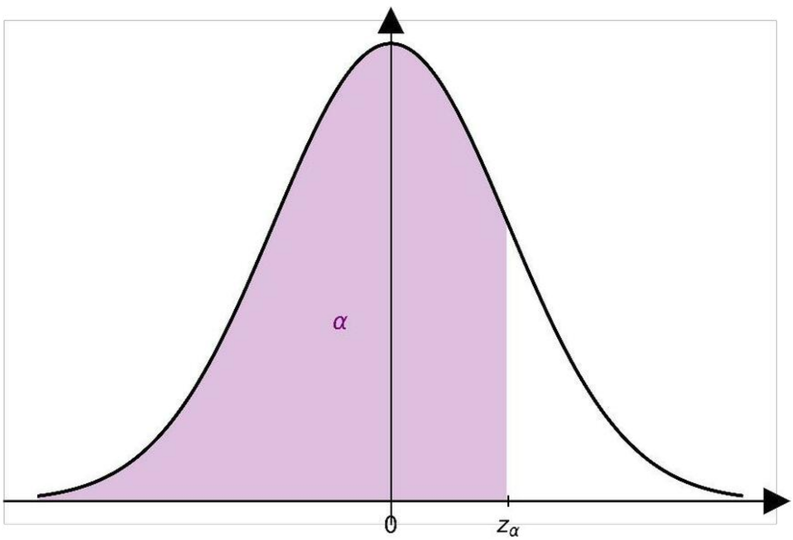
Un **test statistique** repose sur la validation ou l'invalidation d'une **hypothèse**, dit **hypothèse nulle**, concernant les paramètres d'une loi de probabilité.

Soit H_0 l'hypothèse nulle suivant laquelle $\mu = \mu_0$ où μ est l'espérance, inconnue pour nous, d'une loi normale et μ_0 la valeur qu'on conjecture comme la réelle espérance. L'**hypothèse alternative** H_1 indique que $\mu \neq \mu_0$. On note le **risque** α de se tromper dans notre conjecture, c'est-à-dire rejeter à tort l'hypothèse H_0, avec $\alpha \in]0,1[$.

Pour vérifier la validité du test on utilise la variable statistique $Z_0 = \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ où $\overline{X}_n$ est la moyenne empirique d'un n-échantillon indépendant de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Il vient du chapitre sur les lois continues ainsi que du chapitre loi et concentration des grands nombres que la variable Z_0 suit la loi normale centrée réduite. On remplace $\overline{X}_n$ par sa valeur $\overline{x}_n$ et μ par μ_0 sous l'hypothèse H_0 vraie.

Finalement, le test est dit valide, c'est-à-dire qu'on ne rejette pas H_0, si la valeur de la variable statistique est comprise dans l'intervalle $\left[z_{\alpha/2}, z_{1-\alpha/2}\right]$ où z_α est appelé **quantile** et défini tel que $P(Z \leq z_\alpha) = \alpha$ où $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. Autrement, on rejette H_0 au risque de se tromper de $\alpha\%$. On notera la symétrie des z_α :



Exercice

Benjamin décide d'effectuer un contrôle de qualité sur la production d'un nouveau produit de sa marque de vêtements. Il se rend un jour sur le site de production localisé à Gennevilliers et prend au hasard 35 hoodies d'une taille M. Il établit que la longueur moyenne de cet échantillon est 70.25cm. Une précédente étude à révéler que la distribution de la longueur des hoodies suit une loi normale de paramètres μ inconnu et $\sigma^2 = 2^2$.

a. Commenter l'expérience aléatoire menée par Benjamin, peut-on réellement la considérer comme un tirage aléatoire de la population considérée ?

b. On souhaite effectuer un test d'hypothèse sur la valeur de μ au risque $\alpha = 5\%$, à savoir $z_{1-\alpha/2} = 1.96$. En effet, le directeur de production affirme que les machines sont programmées de sorte à ce que $\mu_0 = 71\text{cm}$. Déterminer la validité de cette affirmation. Qu'en est-il pour $\alpha = 1\%$, à savoir $z_{1-\alpha/2} = 2.5758$?

c. Montrer que le critère de rejet de H_0 est équivalent à ce que l'espérance conjecturée μ_0 appartienne à l'intervalle $\left[\overline{x}_n \pm z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]$. Déterminer cet intervalle.

d. Quel doit être la taille de l'échantillon n afin que la longueur de l'intervalle de la question c. soit de longueur 4 ? On supposera $\alpha = 5\%$, $\overline{x}_n = 70\text{cm}$ et $\sigma = 2$.

Correction

a. L'expérience menée révèle de nombreux problèmes. Premièrement, l'échantillonnage prend lieu sur une seule journée dans un seul site de production. Cela rend l'hypothèse de « tirage au hasard » et la question de « représentabilité » de l'échantillon douteuse, ainsi on se soumet à de nombreux aléas et approximations car il n'est pas impossible que cette journée soit nettement moins ou plus productive qu'en moyenne.
L'indépendance et la représentativité sont des concepts fondamentaux en statistiques et permettent d'identifier si les expériences, et surtout les résultats et interprétations qui les accompagnent, sont fondées sur des bases intellectuellement honnêtes.

b. On réalise un test d'hypothèse nulle $H_0 : \mu = \mu_0 = 71\text{cm}$ avec $\alpha = 5\%$.
On utilise la variable $Z_0 = \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$ de valeur $z_0 = -2.219$.
Or, d'après la table de la loi normale centrée réduite,
$\alpha = 5\% \Longrightarrow z_{1-\alpha/2} = 1.96$ et par symétrie $z_{\alpha/2} = -1.96$.
Ainsi, $z_0 \notin \left[z_{\alpha/2}, z_{1-\alpha/2}\right]$, on rejette donc H_0 au risque $\alpha = 5\%$.

Si $\alpha = 1\% \Longrightarrow z_{1-\alpha/2} = 2.5758$, ainsi $z_0 \in \left[z_{\alpha/2}, z_{1-\alpha/2}\right]$, on ne rejette pas H_0 au risque $\alpha = 1\%$.
En fonction de α, on a réussi à donner tort ou raison au directeur de production. On remarque que plus le risque diminue, plus l'intervalle de validité grandit.

c. On a,
$$\begin{aligned}
z_0 \in \left[z_{\alpha/2}, z_{1-\alpha/2}\right] &\Longleftrightarrow z_{\alpha/2} \leq z_0 \leq z_{1-\alpha/2} \\
&\Longleftrightarrow z_{\alpha/2} \leq z_0 \leq -z_{\alpha/2} && \text{(par symétrie)} \\
&\Longleftrightarrow z_{\alpha/2} \leq \frac{\overline{x}_n - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} \leq -z_{\alpha/2} && (H_0 \text{ supposé vrai}) \\
&\Longleftrightarrow \overline{x}_n + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu_0 \leq \overline{x}_n - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \\
&\Longleftrightarrow \mu_0 \in \left[\overline{x}_n \pm z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = [69.587, 70.913]\text{cm}
\end{aligned}$$

d. On a,
$$\begin{aligned}
\text{len}\left(\left[\overline{x}_n \pm z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]\right) &= \left(\overline{x}_n - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) - \left(\overline{x}_n + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \\
&= -2z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}
\end{aligned}$$
Donc, $-2z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 4 \Longleftrightarrow n = \left(\frac{-\sigma \cdot z_{\alpha/2}}{2}\right)^2 = 3.84 = 4$.

Cours

2. Comparaison de produits

adapté d'un exercice d'école d'ingénieur

On reprend le principe du test statistique de l'exercice précédent qu'on adapte à deux échantillons représentatifs de deux lois normales $X_1 \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ et $X_2 \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$.

Exercice

Zakaria hésite entre deux marques haltères. La production des marques 1 et 2 d'haltères X_1 et X_2 suivent les lois normales $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ et $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ et $\sigma_1^2 = 1$ et $\sigma_2^2 = 1.5$. La marque 1 déclare fournir un haltère de masse 25kg tandis que l'haltère 2 déclare fournir un haltère de masse 30kg.

a. En supposant les déclarations vraies, quels sont les avantages de chaque pack ?

b. Zakaria achète dix haltères de chaque marque de façon aléatoire et indépendante. Il relève une moyenne empirique $\overline{x}_1 = 25.6$kg ainsi que les poids moyens suivants pour les haltères de la marque 2 en kg :

25	29.9	30.2	30.1	30.1
29.5	31.3	30.4	29.8	29.9

Déterminer la moyenne empirique $\overline{x}_2$.

c. On suppose que les moyennes empiriques $\overline{X}_1$ et $\overline{X}_2$ suivent des lois normales, en déterminer les paramètres.

d. A l'aide du chapitre sur la loi normale, déduire la loi normale que suit $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$.

e. On suppose μ_1, μ_2 inconnus. A l'aide de $Z = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - \left(E(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)\right)}{\sigma(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)}$ qui suit la loi normale centrée réduite, déterminez si l'on rejette ou non l'hypothèse nulle $H_0 : \mu_1 \geq \mu_2$ au risque $\alpha = 10\%$, à savoir $z_\alpha = -1.28$. On se placera dans le cas minimal $\mu_1 = \mu_2$ et on utilisera pour critère de rejet de H_0 le fait que $z_0 < z_\alpha$ où z_α est le quantile de la loi normale centrée réduite Z telle que $P(Z < z_\alpha) = \alpha$.

f. Redéfinir le plus petit σ_2 de sorte à ne pas rejeter l'hypothèse H_0.

Correction

a. La marque 1 montre une production de poids moyen plus faible que la marque 2 mais aussi une variabilité plus faible. Ainsi, on est plus assurés d'avoir des haltères respectant la moyenne indiquée avec la marque 1.

b. On a, $\overline{x}_2 = 29.62$ kg.

c. On a, par théorème,
$E(\overline{X_1}) = \mu_1$ et $V(\overline{X_1}) = \frac{\sigma_1^2}{10} = \frac{1}{10}$
$E(\overline{X_2}) = \mu_2$ et $V(\overline{X_2}) = \frac{\sigma_2^2}{10} = \frac{15}{100}$

d. Dans le chapitre de loi normale, on suppose que la somme de lois normales est une loi normale.
Ainsi, $\overline{X}_1 - \overline{X}_2 \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{10} + \frac{\sigma_2^2}{10}\right)$

e. Sous H_0, $\mu_1 = \mu_2$, donc $Z = \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - \left(E(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)\right)}{\sigma(\overline{X}_1 - \overline{X}_2)}$

$$= \frac{(\overline{X}_1 - \overline{X}_2) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{10} + \frac{\sigma_2^2}{10}}}$$

$$= \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{10} + \frac{\sigma_2^2}{10}}} \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 1)$$

La valeur statistique est $z_0 = -8.04$
Or, d'après la table de la loi normale centrée réduite, $z_\alpha = -1.28 > z_0$.
On rejette donc l'hypothèse suivant laquelle la marque 1 présente une espérance plus élevée que la marque 2.

f. On cherche σ_2 tel que $z_0 \geq z_\alpha \Leftrightarrow \frac{\overline{x}_1 - \overline{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{10} + \frac{\sigma_2^2}{10}}} \geq -1.28$

$$\Leftrightarrow \overline{x}_1 - \overline{x}_2 \geq -1.28\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{10} + \frac{\sigma_2^2}{10}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(\overline{x}_1 - \overline{x}_2)}{-1.28} \leq \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{10} + \frac{\sigma_2^2}{10}}$$

$$\Leftrightarrow 3.14 \leq \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{10} + \frac{\sigma_2^2}{10}}$$

$$\Leftrightarrow 98.6 \leq \sigma_1^2 + \sigma_2^2 \Leftrightarrow 97.6 \leq \sigma_2^2$$

$$\Leftrightarrow 9.88 \leq \sigma_2$$

Cours

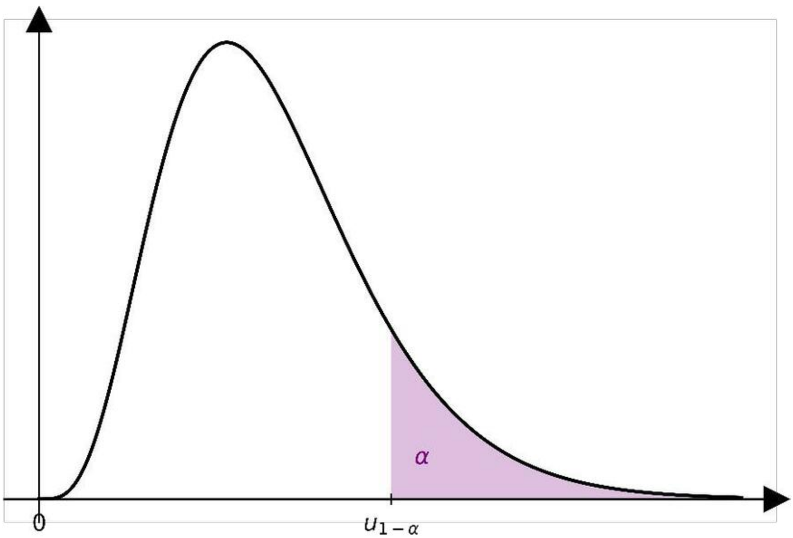
3. Procès mathématique

inspiré d'une histoire vraie

La justice est tranchée sur la culpabilité d'une infirmière soupçonnée d'une série d'homicides volontaires dans le cadre de son service hospitalier. Parmi les avocats, Maître Ramzi décide d'établir un **test d'indépendance de khi-deux** avec pour hypothèse nulle H_0 : « les accidents ayant lieu au sein du service sont indépendants de la présence de l'accusée. ». L'administration fournit, après pression des procureurs, le récapitulatif des incidents survenus durant leur service :

	Opérations réussies	Opérations ratées
Service sans l'accusée	109	38
Service avec l'accusée	98	52

On fournit pour le test la table de khi-deux les quantiles $u_{n,1-\alpha}$ telle que $P(U_n < u_{n,1-\alpha}) = 1 - \alpha$ où U_n suit une loi de khi-deux à n degrés de liberté.



$n\backslash\alpha$	0.995	0.99	0.9	0.8	0.7	0.3	0.2	0.1	0.05
1	0.000	0.000	0.016	0.064	0.148	1.070	1.640	2.710	3.840

Exercice

a. Importer sur Python les données fournies par l'administration sous la forme d'un tableau (une liste de sous-listes)

b. Construire sur Python une méthode qui, à partir d'un tableau, renvoie le **tableau de contingence**. Le tableau de contingence remplace tous les éléments n_{ij} d'un tableau par leurs **valeurs théoriques** e_{ij} définies par $e_{ij} = \frac{(\sum_{j=1}^{2} n_{ij}) \times (\sum_{i=1}^{2} n_{ij})}{n}$ où n correspond au nombre d'observations total. Déterminer le tableau de contingence de la question a.

c. On définit la **statistique Khi-deux** par $U_0 = \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \frac{(n_{ij} - e_{ij})^2}{e_{ij}}$, écrire sur Python une méthode qui prend en arguments un tableau T et son tableau de contingence C et renvoie sa statistique khi-deux.

d. Interpréter le tableau de contingence ainsi que la statistique khi-deux.

e. On suppose que U_0 suit une loi de khi deux de paramètre $n = 1$. Le critère de rejet de H_0 est $u_0 > u_{1-\alpha}$ où $u_{1-\alpha}$ correspond au quantile de la loi de khi-deux de paramètre $n = 1$ telle que $P(X < u_{1-\alpha}) = 1 - \alpha$. Conclure alors au test d'indépendance réalisé par Ramzi où $\alpha = 5\%$. Qu'en-est-il pour $\alpha = 10\%$?

f. De votre expérience avec ce chapitre sur les tests statistiques ainsi que votre brillant esprit scientifique, commentez le fait de laisser la décision de culpabilité à un calcul mathématique.

Correction

a.

```
data = [[109, 38], [98, 52]]
```

b.

```
def contingence(T) :
    # On commence par construire les effectifs marginaux sur la ligne
    lignes = []
    for i in range(len(T)) :
        I = 0
        for j in range(len(T[0])) :
            I += T[i][j]
        lignes.append(I)
    # On construit les effectifs marginaux sur la colonne
    colonnes = []
    for j in range(len(T[0])) :
        J = 0
        for i in range(len(T)) :
            J += T[i][j]
        colonnes.append(J)
    # On calcule n
    # n = sum(colonnes)
    n = sum(lignes)
    C = []
    for i in range(len(T)) :
        temp = []
        for j in range(len(T[0])) :
            temp.append(lignes[i] * colonnes[j] / n)
        C.append(temp)
    return C
```

c.

```
def khi2(T, C) :
    u0 = 0
    for i in range(len(T[0])) :
        for j in range(len(T)) :
            u0 += (T[i][j] - C[i][j])**2 / C[i][j]
    return u0
```

d. Le tableau de contingence correspond aux effectifs théoriques s'il existait une parfaite indépendance et répartition équiprobable entre les deux modalités. La valeur statistique calcule les écarts (réduits par la division) entre la théorie d'indépendance et la réalité.

e.

```
print(khi2(data, contingence(data)))
```

On a $u_0 = 2.73$. Or, d'après la table de khi-deux, $n = 1, \alpha = 5\% \Longrightarrow u_{1,1-\alpha} = 3.84$. Ainsi, on rejette l'hypothèse nulle au risque de se tromper de 5%. Si $n = 1, \alpha = 10\% \Longrightarrow u_{1-\alpha} = 2.71$, on ne rejette l'hypothèse nulle au risque de se tromper de 10%.

f. Les modèles sur lesquels se basent les tests statistiques ont démontré plus d'une fois leur aptitude à faire progresser la science.

Toutefois, pour deux valeurs fréquemment utilisées de risque α, on obtient deux résultats différents menant à la culpabilité ou non d'un être humain pour multiple homicide volontaire. Il est important de rappeler que ces tests sont à titre indicatifs et ne permettront jamais de valider ni de rejeter une hypothèse.

De plus, la sélection d'un échantillon aléatoire et de lois **identique** des données, restent à prouver. En effet, même s'il y avait une corrélation entre le nombre d'accidents et la présence de l'accusée, l'associer directement à un *mens rea* serait oublier les nombreux facteurs comme le stress ou l'ancienneté. Il se peut que son arrivée en service soit dû à une crise sanitaire incontrôlable ou encore à des restrictions budgétaires faisant appel à des étudiants stagiaires. Ainsi, comparer ses statistiques issus d'une loi de probabilité très peu efficace à ceux de vétérans issus d'une loi fondée dans de meilleures conditions semble peu raisonnable.

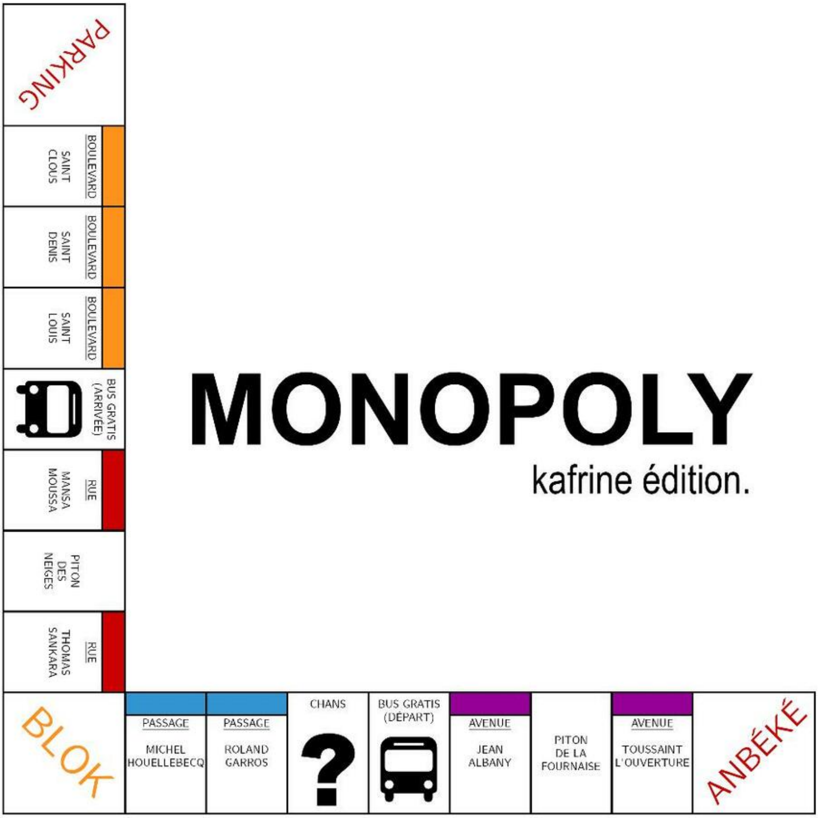
Les détails sont importants, et c'est à cet instant que l'humain doit intervenir, avec toutes les connaissances juridiques, statistiques et psychologiques en sa possession, pour décider et assumer un verdict basé sur ce que les mathématiques ne pourront jamais comprendre : les sentiments humains. Quant bien même ce modèle ait prouvé sa valeur par le passé, on se doit de rappeler la formule de Blackstone : « La loi commande qu'il est préférable que dix personnes coupables soit acquittées plutôt que de condamner un seul innocent. », dans quelle réalité souhaitez-vous donc vivre ?

EXERCICE

VI. Python

1. Gros poisson i bèk su le tar

Léa est déterminée à gagner tous les jeux de société. Elle s'intéresse à maximiser son départ à une version familiale du jeu Monopoly :



La notice indique que tous les joueurs démarrent à la case « Anbéké » et traverse la grille dans le sens horaire.

On jette deux dés à quatre faces équilibrées et on se déplace d'autant de cases que l'indique la somme des faces des dés.

Si l'on tombe sur la case « Bus gratis (départ) » on a une chance sur deux de se déplacer sans rejouer sur la case « Bus gratis (arrivée) », cependant on perd un dé au prochain tour.

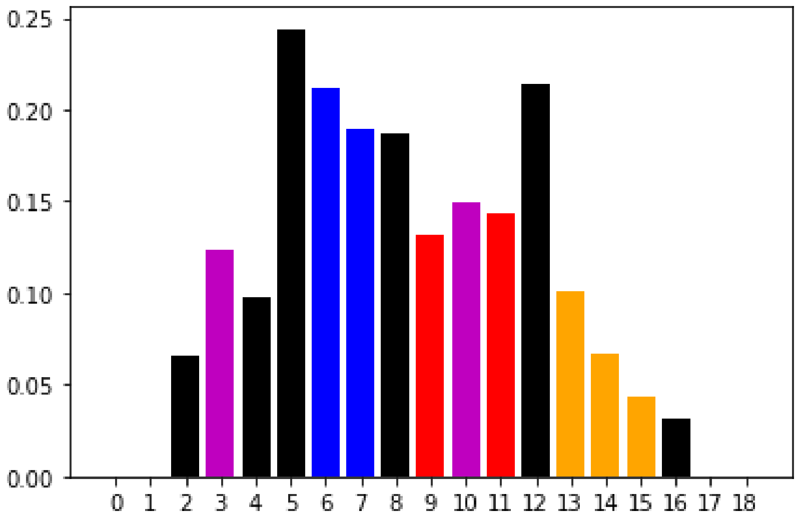
Si l'on tombe sur la case « Chans » on a une chance sur cinq de se déplacer sans rejouer sur la case « Blok ».

Léa a la possibilité d'acheter par avance une des propriétés correspondant aux cases colorisées, chaque fois qu'un individu passera par cette case elle gagnera de l'argent, cette somme sera considérée identique quelle que soit la case.

A l'aide d'un programme Python, simulez 100 parcours identiques et indépendants de la grille, on supposera qu'un parcours consiste à jouer 2 tours. Conclure quant à la case que Léa devrait investir avant le début de partie.

Correction

```python
import random as r
import matplotlib.pyplot as plt

visites = [0 for i in range(19)]

for parcours in range(100) :
    # On initialise un joueur à la case Anbéké
    x = 0

    # On réalise le premier tour
    d1 = r.randint(1, 4)
    d2 = r.randint(1, 4)
    x += d1 + d2

    # On vérifie si le joueur n'a pas attéri sur une case spéciale
    if x in [4, 5] :
        # Case "Bus gratis (départ)"
        if x == 4 :
            bus = r.randint(1, 2)
            if bus == 1 :
                x = 12
                d2 = 0

        # Case "Chans"
        # nb : deux joueurs peuvent piocher la même carte
        #      car les parcours sont identiques
        if x == 5 :
            chans = r.randint(1, 5)
            if chans == 1 :
                x = 8

    # Le premier tour est fini, on note le passage
    visites[x] += 1/100

    # On réalise le second tour
    d1 = r.randint(1, 4)
    if d2 != 0 :
        # Si l'on a pas perdu notre second dé
        d2 = r.randint(1, 4)
    x += d1 + d2

    # On vérifie si le joueur n'a pas attéri sur une case spéciale
    if x in [4, 5] :
        # Case "Bus gratis (départ)"
        if x == 4 :
            bus = r.randint(1, 2)
            if bus == 1 :
                x = 12
                #d2 = 0 on a déjà joué 2 tours, inutile d'annuler le dé

        # Case "Chans"
        if x == 5 :
            chans = r.randint(1, 5)
            if chans == 1 :
                x = 8

    # Le second tour est fini, on note le passage
    visites[x] += 1/100
```



On remarque que les maisons bleues sont les plus visitées en dépit de la très forte variance concernant leur passage. Cela est dû aux cases chances et bus qui peuvent aléatoirement faire sauter les cases bleues du parcours. En utilisant un plus grand échantillon comme 10000 on se rend compte que la fréquence de passage par les maisons bleues restent élevées. Il s'agit donc d'un investissement à très haut risque, à cause de la variance, si le nombre de joueurs est suffisamment grand, alors Léa devrait investir sur une des maison bleue.

Ouverture et orientation sur la Théorie des Jeux

La Théorie des Jeux regroupe l'ensemble des problèmes où deux ou plus individus sont en compétition et cherchent à maximiser leur gain, à l'inverse d'optimisation précédemment établies, le facteur humain est ici la pièce maîtresse à caractériser. On est parti du principe que Léa avait un coup d'avance et donc l'approche stochastique, consistant à estimer la probabilité de chaque case, était la plus appropriée. Toutefois, on pourrait étendre les prévisions à un cadre plus dynamique comme en plein milieu de la partie et prenant compte des événements passés (argent dépensé, propriétés possédées). Finalement, en supposant que chaque joueur est rationnel et vise à rentabiliser sa situation, on peut se retrouver, ou non, dans une situation d'équilibre, typiquement au Monopoly, deux joueurs peuvent échanger des propriétés afin de compléter leur famille de couleurs.

Exercice

2. Régression pédagogique

adapté d'un exercice de Sciences Po Paris

Wissal étudie les bulletins trimestriels de ses élèves et souhaite établir un lien entre les notes dans la matière qu'elle enseigne, les mathématiques, et les autres notes ainsi qu'absences des élèves. On lui rapporte le tableau de notes suivantes :

	Maths	Physique	Histoire	SES	Absences
Amine	15	17	10	10	2
Anas	7	11	11	10	7
Christian	18	17	16	16	0
Dalil	12	15	8	7	1
Ibtissam	12	6	15	16	1
Ilian	19	19	14	14	0
Jean-Baptiste	13	14	10	10	1
Killian	9	8	13	12	5
Michel	12	13	12	10	2
Oscar	6	6	10	12	5
Pol	15	15	9	8	5
Ryad	11	11	12	10	3
Sabah	5	6	18	16	9
Sonia	12	5	14	13	4
Tarek	10	13	9	11	6
Théo	10	10	14	11	6
Yassine	7	9	12	14	9
Zakaria	13	13	10	10	0

a. Importer les données sur Python.

b. Wissal tente d'établir un modèle linéaire $m = ap + b$ où m est la note en maths, p celle en physique et a et b sont deux coefficients définis par : $a = \frac{\text{cov}(m,p)}{V(p)}$ et $b = \overline{m} - a\overline{p}$ où $\text{cov(x, y)} = \frac{1}{n}(\sum x_i y_i) - \overline{x} \times \overline{y}$ et $V(x) = \frac{1}{n}\left(\sum x_i^2\right) - \overline{x}^2$ avec $\overline{x}, \overline{y}$ les moyennes de x et y respectivement. Déterminer les coefficients de la régression linéaire, dite **simple**.

c. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire $\rho = \frac{\text{cov(m,p)}}{\sigma(\text{m})\sigma(\text{p})}$. On interprète cette valeur comme le pourcentage de la variance de m expliqué par la variable p.

d. Insatisfaite de sa modélisation, Wissal décide d'utiliser toutes les variables à sa disposition pour expliquer m. Elle pose $m = \beta_0 + \beta_1 p + \beta_2 h + \beta_3 s + \beta_4 a$, dite **régression linéaire multiple**. Les coefficients sont déterminés de sorte à minimiser l'erreur quadratique moyenne $MSE = \frac{1}{n}\sum(y_{\text{réel}} - y_{\text{modèle}})^2$. A l'aide de Python, déterminez les coefficients qui minimisent les erreurs. On supposera que $\beta_0 = 4$ et que les autres coefficients sont situés dans l'intervalle $[-1, 1]$, on utilisera un pas de 10^{-1} pour éviter des calculs fastidieux.

e. Commenter sur la valeur des coefficients obtenus.

f. Comparer la MSE de la régression linéaire simple et multiple.

g. Déterminer, à l'aide du modèle multiple, la note en mathématiques de Jean-Baptiste sachant qu'on connait les autres données.

Correction

a.

```
L = [[15, 17, 10, 10, 2],
     [7, 11, 11, 10, 7],
     [18, 17, 16, 16, 0],
     [12, 15, 8, 7, 1],
     [12, 6, 15, 16, 1],
     [19, 19, 14, 14, 0],
     [13, 14, 10, 10, 1],
     [9, 8, 13, 12, 5],
     [12, 13, 12, 10, 2],
     [6, 6, 10, 12, 5],
     [15, 15, 9, 8, 5],
     [11, 11, 12, 10, 3],
     [5, 6, 18, 16, 9],
     [12, 5, 14, 13, 4],
     [10, 13, 9, 11, 6],
     [10, 10, 14, 11, 6],
     [7, 9, 12, 14, 9],
     [13, 13, 10, 10, 0]]
```

b. On a, $m = 0.85p + 1.62$

```
moy_math = 0
moy_phys = 0
for l in L :
    moy_math += l[0]
    moy_phys += l[1]
moy_math = moy_math / len(L)
moy_phys = moy_phys / len(L)

cov = 0
varX = 0
varY = 0
for l in L :
    cov += l[0]*l[1]
    varX += l[0]**2
    varY += l[1]**2
cov = cov / len(L) - moy_math*moy_phys
varX = varX / len(L) - moy_math**2
varY = varY / len(L) - moy_phys**2

a = cov / varX
b = moy_math - a * moy_phys
```

c. On a, $\rho = 0.77$, 77% de la distribution des notes en maths m sont expliquées à l'aide de la note en physique.

```
r = cov / ((varX * varY)**(0.5))
print(r)
```

d. On a, $\beta_0 = 4$, $\beta_1 = 0.5, \beta_2 = 0.3, \beta_3 = 0$ et $\beta_4 = -0.6$.

```
b0 = 4
MSE = -1
for b1 in range(10, -11, -1) :
    for b2 in range(10, -11, -1) :
        for b3 in range(10, -11, -1) :
            for b4 in range(-10, 11) :
                m = 0
                for l in L :
                    m += (l[0] - (b0 + b1/10*l[1] + b2/10*l[2] + b3/10*l[3] + b4/10*l[4]))**2
                if MSE == -1 : # on initialise MSE
                    MSE = m
                if m < MSE :
                    MSE = m
```

e. On interprète les coefficients négatifs comme les variables corrélées négativement à la note en mathématique. Ainsi, plus on a d'absences en cours, plus la note risque d'être mauvaise ! On interprète les coefficients nuls comme des coefficients si faibles qu'ils peuvent être considérés comme **non corrélés linéairement** à la variable expliquée, c'est-à-dire **insignifiants** dans notre modèle linéaire, ainsi on retrouve autant de bons mathématiciens qui réussissent, ou non, en SES.

f. La MSE pour le modèle simple est de 110 tandis que celle du modèle multiple est de 41, on a donc réduit de facteur trois l'erreur quadratique. Le modèle multiple explique donc mieux la distribution des valeurs de m. Ces interprétations sont généralement réalisées à partir du coefficient de régression linéaire R^2, déterminé en partie par la MSE.

g. On a, $m = 4 + 0.5 \times 14 + 0.3 \times 10 + 0 \times 10 - 0.6 \times 1 = 13.4$
L'approximation est correcte.

Remarque (Régression linéaire)

La régression linéaire est une méthode indémodable et universelle dans l'estimation de données. Elle est la plus intuitive et l'une des moins complexes à établir. On retrouve ses applications à n'importe quel domaine où l'on suspecte un lien de cause à effet.

Exercice

3. Intelligence artificielle

adapté d'un exercice d'école d'ingénieur

Yannis participe à un hackathon sur le thème de l'aventure. Il décide de construire un jeu de combat guerrier sous Python. On aura effectué l'exercice sur les Classes de la partie Programmation auparavant.

a. Construisez une classe « Personnage ». Cette dernière devra contenir six attributs : le **nom**, la **race**, définie par l'utilisateur lors de la création d'un personnage, on considèrera comme races les « humains » et les « orcs ». le **niveau**, démarrant à 1, ainsi que l'**attaque**, la **défense** et la **santé**. Lors de la génération d'un personnage, on associera un niveau d'attaque entre 13 et 15 pour les humains et 14 et 15 pour les orcs, un niveau de défense entre 9 et 12 pour les humains et 8 et 10 pour les orcs et un niveau de santé entre 48 et 52 pour les deux races. Finalement, augmenter un niveau fait augmenter entre 1 et 2 chacune des statistiques du personnage.

b. Écrire un programme Python qui prend en arguments deux personnages et décrit leur combat tour par tour en laissant le premier coup au personnage 1. On fera attention à construire une copie virtuelle des statistiques de chaque personnage de sorte à ne pas les modifier irréversiblement. Gagner un combat fait augmenter d'un niveau le gagnant. La santé perdue par le personnage 1 due à l'attaque du personnage 2 est $S_{\text{perdue}} = \frac{A_2^2}{D_1} + r$ où r est int aléatoire entre 0 et 5.

Correction

```
import random

class Personnage() :
    def __init__(self) :
        self.nom = input("Veuillez saisir le nom du personnage : ")
        race = input("Veuillez préciser la race (H pour Humain et O pour Orc) du pers
        while race not in ["O", "H"] :
            race = input("Erreur, veuillez préciser la race (H pour Humain et O pour
        if race == "H" :
            self.race = "Humain"
            self.niveau = 1
            self.attaque = random.randint(13, 15)
            self.defense = random.randint(9, 12)
            self.sante = random.randint(48, 52)
        else :
            self.race = "Orc"
            self.niveau = 1
            self.attaque = random.randint(14, 15)
            self.defense = random.randint(8, 10)
            self.sante = random.randint(48, 52)

    def levelup(self) :
        self.niveau += 1
        self.attaque += random.randint(1, 2)
        self.defense += random.randint(1, 2)
        self.sante += random.randint(1, 2)


def Combat(P1, P2) :
    print(P1.nom, "vs.", P2.nom)
    sante1 = P1.sante
    sante2 = P2.sante
    while (sante1 > 0) and (sante2 > 0) :
        degats1sur2 = P1.attaque**2 / P2.defense + random.randint(0, 5)
        sante2 -= degats1sur2
        print(P1.nom, "inflige", degats1sur2, "dégâts à", P2.nom, "!")
        if (sante2 <= 0) :
            print(P1.nom, "a gagné!")
            P1.levelup()
        else :
            degats2sur1 = P2.attaque**2 / P1.defense + random.randint(0, 5)
            sante1 -= degats2sur1
            print(P2.nom, "inflige", degats2sur1, "dégâts à", P1.nom, "!")
            if (sante1 <= 0) :
                print(P2.nom, "a gagné!")
                P2.levelup()

p1 = Personnage()
p2 = Personnage()
Combat(p1, p2)
```