collection dirigée par Xavier MERLIN

METHOD'

spécialité mathématiques

Terminale

NOUVEAUX PROGRAMMES !

130 méthodes

140 exercices corrigés

80 algorithmes et 70 questions pour le Grand Oral

ellipses

Bruno CLÉMENT

collection dirigée par Xavier MERLIN

METHOD'

spécialité mathématiques

Terminale

NOUVEAUX PROGRAMMES

130 méthodes

140 exercices corrigés

80 algorithmes et 70 questions pour le Grand Oral

Bruno CLÉMENT

ellipses

Avant-propos

« De tous nos actes, seuls ceux que
nous accomplissons pour les autres
en valent vraiment la peine ».

Lewis Carroll (1832-1898)

Cette citation de l'auteur d'*Alice au pays des merveilles*, qui avant d'être romancier fut professeur de mathématiques à l'université d'Oxford, illustre parfaitement ce qui a motivé la conception de ce livre, en particulier, mais aussi de tous les manuels de la collection METHOD', à laquelle il vient dès lors s'ajouter.

Dans la citation, les autres, c'est vous, élèves, parents, collègues, ... Bref, tous ceux qui veulent à travers 130 méthodes, 140 exercices corrigés, plus de 80 algorithmes et près de 70 questions ouvertes pour le Grand Oral, comprendre et approfondir ce nouveau programme d'enseignement de spécialité mathématiques en voie générale de la classe Terminale.

La méthode, c'est le fondement de cet ouvrage, et de tous les manuels de cette collection. Ils sont conçus autour de méthodes destinées à éclaircir votre esprit mathématique.

En effet, les 130 méthodes très complètes présentées dans ce livre sont systématiquement illustrées d'exemples corrigés en détail, afin de vous permettre d'acquérir les notions mathématiques relatives à ce nouveau programme de Terminale.

Ce dernier insiste sur l'acquisition des compétences mentionnées dans son contenu, à savoir : CHERCHER, MODELISER, REPRESENTER, RAISONNER, CALCULER, COMMUNIQUER. Dans ce cadre, les méthodes, exercices et rubriques (réflexes, astuces, erreurs classiques, le jour de l'épreuve, le jour du Grand Oral) illustrés d'algorithmes, en rapport direct avec lui, vous sont proposés.

Si vous connaissez la collection, vous pouvez constater que nous avons enrichi cet ouvrage de la rubrique : le jour du Grand Oral. Elle est fondamentale dans la mesure où ce Grand Oral à un coefficient 10.

Dans cette dernière, nous avons proposé, par chapitre, des questions qui pour la plupart font référence à des exercices eux-mêmes en lien avec des méthodes illustrées d'exemples.

La liste de ces questions ouvertes relatives à des sujets purement mathématiques ou transversaux n'est pas exhaustive, mais une piste pour trouver deux questions intéressantes et originales, à élaborer avec vos professeurs, afin qu'elles soient présentées au jury le jour du Grand Oral.

Il ne s'agit pas de refaire dans son intégralité un exercice auquel il est fait référence dans la plupart des questions que nous avons proposées, car vous n'avez que 5 minutes pour présenter votre sujet, mais d'en donner les résultats essentiels, puis ensuite de les développer en répondant aux questions que l'on vous posera pendant une dizaine de minutes.

Feuilletez ce livre, et vous constaterez qu'il y en a d'une part pour tous les goûts, et d'autre part pour tous les niveaux, donc choisissez deux questions bien maîtrisées qui sont en adéquation avec votre personnalité et le projet auquel vous vous destinez, dont il sera d'ailleurs question pendant les 5 dernières minutes du Grand Oral.

Des futurs mathématiciens aux futurs physiciens, en passant par ceux qui se destinent à la médecine et autre, vous avez tout ce qu'il faut pour acquérir les bases qui vous mèneront à la réussite.

Quant aux « fans » d'algorithmes et de raisonnements « tendus » qui veulent aller plus loin, rendez-vous aux derniers exercices des chapitres. Nous pensons que vous allez être « servis » !

Tous les exercices font référence à des méthodes, afin de vous aider à les résoudre, avant de vous « jeter » sur leurs corrections. Pour les algorithmes nous ne nous sommes pas étendus sur des explications à n'en plus finir, SAUF, pour ceux qui font intervenir des subtilités qui parfois peuvent vous bloquer.

De même que l'on n'apprend pas à jouer au tennis assis sur son canapé, en lisant un manuel théorique ou en regardant jouer un grand champion, l'apprentissage des mathématiques nécessite d'aller sur le « terrain » ! Il faut pratiquer, c'est-à-dire prendre une feuille blanche, sa calculatrice, son ordinateur et son crayon pour résoudre un problème posé dans un énoncé et ne pas se contenter de reproduire une solution sans la comprendre.

Les solutions des problèmes posés dans cet ouvrage sont détaillées et rédigées par rapport aux réactions de nos anciens élèves que nous remercions au passage pour leur collaboration.

Alors bon courage, au travail, mais surtout n'oubliez pas que la meilleure solution d'un problème quel qu'il soit (mathématique ou non) : c'est la vôtre !

Bruno CLEMENT Xavier MERLIN

Sommaire

Chapitre 1. **Méthodes sur les suites** 1

Chapitre 2. **Méthodes sur des fonctions de Première** 27

Chapitre 3. **Méthodes sur les fonctions exponentielles, logarithmes et puissances réelles** 61

Chapitre 4. **Méthodes sur le calcul intégral et les équations différentielles** 81

Chapitre 5. **Méthodes de géométrie dans l'espace** 121

Chapitre 6. **Méthodes sur la combinatoire et le dénombrement** 155

Chapitre 7. **Méthodes sur les probabilités** 179

EXERCICES ET CORRIGÉS

Chapitre 1 223

Chapitre 2 265

Chapitre 3 307

Chapitre 4 355

Chapitre 5 403

Chapitre 6 449

Chapitre 7 475

Chapitre 1
METHODES SUR LES SUITES

Nous allons voir comment :

1) Conjecturer le comportement d'une suite

2) Raisonner par récurrence

3) Utiliser les suites arithmétiques et géométriques

4) Etudier le comportement global d'une suite

5) Etudier le comportement asymptotique d'une suite

6) Déterminer des résultats empiriques

1. Comment conjecturer le comportement d'une suite

On va vous expliquer comment vous pouvez étudier expérimentalement les bornes, la monotonie et la convergence d'une suite.

Cela repose sur l'utilisation de la calculatrice, de graphiques, de tableurs ou d'algorithmes.

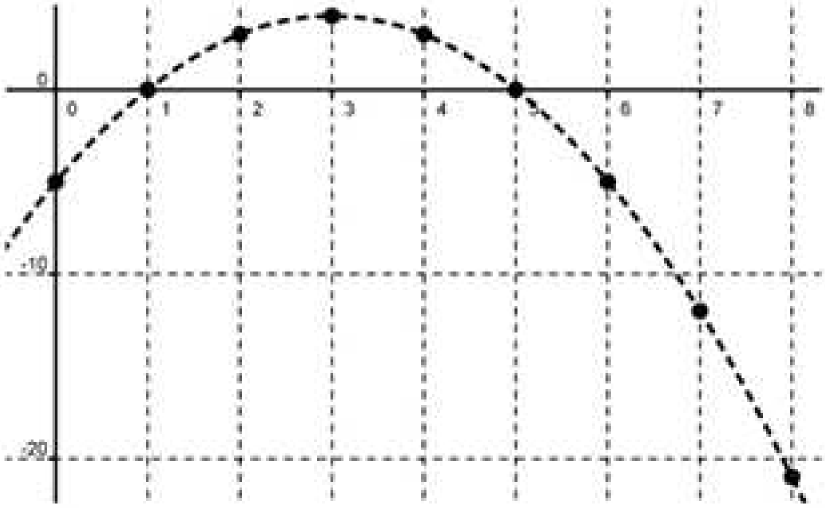
METHODE 1 : Comment conjecturer le comportement d'une suite à partir du graphe (n, U_n) pour $n \geq n_0$

■ **Cas d'application**
Lorsque la suite est de la forme $U_n = f(n)$ et que la courbe représentative de f s'obtient facilement sur $[n_0 ; +\infty[$.

■ **Principe**
On conjecture le comportement de la suite à partir de la courbe représentative de f.

■ **Exemple :** *Conjecturez le comportement de (U_n) telle que $U_n = -n^2 + 6n - 5$.*

Sur le graphique suivant, la courbe représente la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ et les points ont pour coordonnées (n, U_n).



Conjectures

On peut conjecturer que (U_n) n'est pas monotone mais décroît à partir de $n = 3$, n'est pas minorée mais majorée par $U_3 = 4$ et enfin qu'elle n'est pas convergente puisqu'il semble qu'elle tende vers $-\infty$.

METHODE 2 : Comment conjecturer le comportement d'une suite à partir du graphe « WEB »

■ Principe

On construit l'escalier ou l'escargot de convergence à partir de la courbe représentative de f et la droite d'équation y = x.
Les conjectures sont émises à partir des premières valeurs de la suite représentées sur l'axe des abscisses.

■ Cas d'application

Lorsque la suite est de la forme $U_{n+1} = f(U_n)$ et que la courbe représentative de f s'obtient facilement là où varie la suite.

■ **Exemple :** *On considère la suite (U_n) définie par* $\begin{cases} U_{n+1} = \dfrac{3U_n + 4}{-2U_n + 9} \\ U_0 = 0 \end{cases}$.

1) Dressez le tableau de variations de f définie sur $\lfloor 0\ ;\ 1 \rfloor$ par $f(x) = \dfrac{3x+4}{-2x+9}$.
2) Tracez la droite (D) d'équation y = x et la courbe représentative de f sur $\lfloor 0\ ;\ 1 \rfloor$, puis représentez les premiers termes de la suite (U_n) sur l'axe des abscisses en laissant apparaître les traits de constructions (graphe « Web »).
3) Que peut-on conjecturer sur le comportement de (U_n) ?

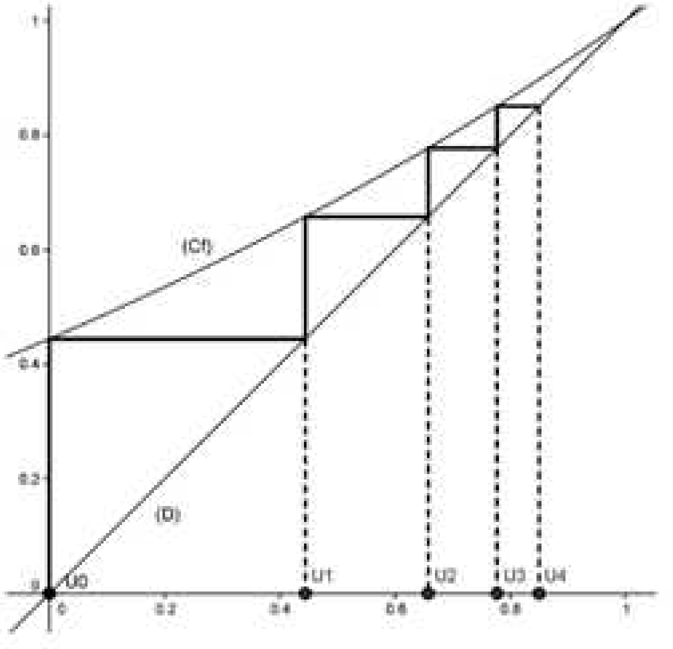
1) f est une fonction définie et dérivable sur $\lfloor 0\ ;\ 1 \rfloor$ et l'on a :

$$f'(x) = \frac{3(-2x+9)-(-2)(3x+4)}{(-2x+9)^2} = \frac{35}{(-2x+9)^2} > 0 \ .$$

On a donc le tableau de variations suivant :

x	0		1
f'(x)		+	
f	4/9	↗	1

2) On obtient le graphe « WEB » suivant :



3) Ce graphique permet de conjecturer que la suite (U_n) est croissante, que $U_n \in [0;1[$ et qu'elle converge vers 1.

METHODE 3 : Comment conjecturer le comportement d'une suite avec un algorithme

■ Principe

On crée une boucle de longueur finie qui permet de calculer les termes de la suite.

■ Cas d'application

Toujours, mais plus spécifiquement quand les méthodes 1 et 2 ne peuvent s'appliquer.

■ **Exemple :** *Conjecturez le comportement de* (U_n) *telle que :*

$$U_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n} \quad (n \geq 1).$$

Dans la mesure où U_n est la somme des inverses des entiers allant de n à 2n, il ne va pas être facile de trouver une fonction simple de la variable réelle telle que $U_n = f(n)$.

On peut toujours calculer « à la main » les premiers termes de la suite pour avoir une idée de sa monotonie, mais ce sera vite lassant et insuffisant pour étudier son éventuelle convergence.

On vous propose l'algorithme suivant pour mieux cerner ce dernier problème :

```
def u(n):
    u=(1/n)
    for i in range(n):
        u=u+(1/(n+i+1))
    return u
```

En mode « Run » on obtient par exemple :

```
>>> u(1)
1.5
>>> u(2)
1.0833333333333333
>>> u(3)
0.9499999999999998
>>> u(4)
0.8845238095238095
>>> u(100)
0.7006534304818
24
>>> u(1000)
0.6938972430599375
>>> u(10000)
0.6932221811849485
```

On conjecture que la suite est décroissante, majorée par son premier terme, $U_1 = 1{,}5$, clairement minorée par 0 et semble converger vers un nombre peu différent de 0,6932.

METHODE 4 : Comment conjecturer le comportement d'une suite avec un tableur

■ Principe

On entre la formule qui va bien et « l'éternel » copier-coller fait le reste.
On peut éventuellement insérer un graphique (n, U_n) pour visualiser.

■ Cas d'application

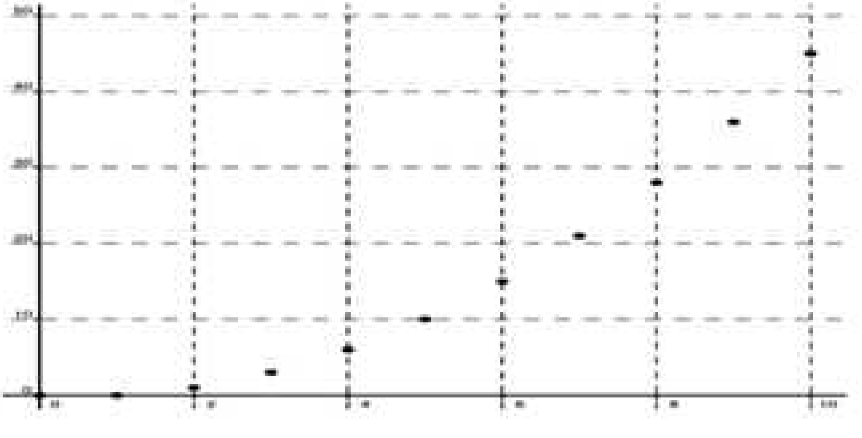
Toujours, mais plus spécifiquement quand les méthodes 1 et 2 ne peuvent s'appliquer.

■ **Exemple :** *Conjecturez le comportement de* (U_n) *définie par* $\begin{cases} U_{n+1} = U_n + n \\ U_0 = 0 \end{cases}$.

On entre en B3 la formule : « =B2+A2 », on copie, on colle de B4 à B12 et l'on obtient :

	A	B
1	n	Un
2	0	0
3	1	0
4	2	1
5	3	3
6	4	6
7	5	10
8	6	15
9	7	21
10	8	28
11	9	36
12	10	45

Le nuage de points correspondant est :



On conjecture que (U_n) est croissante minorée par 0, non majorée, qu'elle est croissante et qu'elle ne converge pas puisqu'il semble que $\lim U_n = +\infty$.

2. Le raisonnement par récurrence

METHODE 5 : Comment raisonner par récurrence

■ **Cas d'application**

On doit prouver qu'une propriété (P_n) est vraie pour $n \geq n_0$ avec n et n_0 entiers naturels, n_0 étant fixé.

■ **Principe**

On vous conseille les trois étapes suivantes pour rédiger votre démonstration par récurrence.

1) Initialisation : Montrer que (P_{n_0}) est vraie.

2) Hérédité : Montrer que pour $n \geq n_0$ quelconque, on a :

$$(P_n) \text{ vraie} \Rightarrow (P_{n+1}) \text{ vraie}.$$

3) Conclusion : Conclure par récurrence que (P_n) est vraie pour tout $n \geq n_0$.

■ **Exemple :** On a conjecturé dans la méthode 2 que la suite (U_n) définie par $\begin{cases} U_{n+1} = \dfrac{3U_n + 4}{-2U_n + 9} \\ U_0 = 0 \end{cases}$ était croissante et que $U_n \in [0;1[$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, on considère (P_n) : « $0 \leq U_n \leq U_{n+1} < 1$ ».

Montrez par récurrence que la propriété (P_n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Que pouvez-vous en déduire ?

Initialisation : (P_0) est-elle vraie ?

$U_0 = 0$ et $U_1 = f(U_0) = f(0) = \dfrac{4}{9}$, donc $0 \leq U_0 \leq U_1 < 1$ et (P_0) est vraie.

Hérédité : Pour $n \geq n_0$ quelconque (ici $n_0 = 0$), est-ce que l'on a :

$$(P_n) \text{ vraie} \Rightarrow (P_{n+1}) \text{ vraie ?}$$

– Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que (P_n) est vraie. (Ceci est ce que l'on appelle l'hypothèse de récurrence (HR), qui, ici est : $0 \leq U_n \leq U_{n+1} < 1$).

– On doit montrer sous cette hypothèse que (P_{n+1}) est vraie c'est-à-dire que $0 \leq U_{n+1} \leq U_{n+2} < 1$.

– Comme f est strictement croissante sur $[0;1]$

$$0 \leq U_n \leq U_{n+1} < 1 \Rightarrow f(0) \leq f(U_n) \leq f(U_{n+1}) < f(1) \Rightarrow \frac{4}{9} \leq U_{n+1} \leq U_{n+2} < 1.$$

– Finalement $0 \leq U_{n+1} \leq U_{n+2} < 1$ et (P_{n+1}) est vraie.

– Conséquence : pour tout $n \in \mathbb{N}$, (P_n) vraie $\Rightarrow (P_{n+1})$ vraie.

Conclusion : Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, (P_n) est vraie.

On en déduit d'une part que $U_n \neq \frac{9}{2}$ ($U_n \in [0;1[$) et donc que U_n est définie pour tout n, puis d'autre part que les conjectures émises à la méthode 2 concernant le comportement global de (U_n) sont vraies.
En effet on a bien $U_n \in [0;1[$ et comme $U_n \leq U_{n+1}$ la suite (U_n) est croissante.

3. Suites arithmétiques et géométriques

Les méthodes sont simples mais les calculs souvent lourds… Entraînez-vous !

METHODE 6 : Comment utiliser les formules

■ **Rappel des formules**

	Suites arithmétiques $U_{n+1} = U_n + r$	**Suites géométriques** $U_{n+1} = qU_n$ où $q \neq 1$
Expression de U_n	$U_n = U_p + (n-p)r$	$U_n = q^{(n-p)}U_p$
Somme de termes consécutifs	$(\text{Nb de T})\left(\frac{1^{\text{er}}\text{T} + \text{DT}}{2}\right)$	$(1^{\text{er}}\text{T})\left(\frac{1-q^{(\text{Nb de T})}}{1-q}\right)$
Apprendre par cœur	$1+2+\cdots+k = \frac{k(k+1)}{2}$	$1+q+q^2+\cdots+q^k = \frac{1-q^{k+1}}{1-q}$

1^{er} T : premier terme ; DT : dernier terme ; Nb de T : nombre de termes.

■ **Principe**
Comme dans toutes les formules on identifie ce que l'on connaît et l'on remplace dans la formule pour trouver l'inconnue.

■ **Exemple :** *On considère la suite (U_n) définie par* $\begin{cases} U_{n+1} = U_n + 2 \\ U_3 = 0 \end{cases}$.
Déterminez U_n en fonction de n, puis $S = U_4 + U_5 + \cdots + U_{20}$ de deux façons.

La suite (U_n) est une suite arithmétique de raison 2 de terme connu $U_3 = 0$.
On a donc : $U_n = U_3 + (n-3)\times 2 = 0 + 2n - 6 = 2n - 6$.

$$S = (\text{Nb de T})\left(\frac{1^{\text{er}}\text{T} + \text{DT}}{2}\right) = 17\left(\frac{U_4 + U_{20}}{2}\right) = 17\left(\frac{2+34}{2}\right) = 306.$$

Pour calculer cette somme on pouvait aussi appliquer la formule de gauche à apprendre par coeur, en effet :

$S = 2+4+\cdots+34 = 2(1+2+\cdots+17) = 2\times\dfrac{17\times 18}{2} = 306$.

METHODE 7 : Comment montrer qu'une suite est arithmétique ou géométrique et l'exploiter

■ Cas d'application

Lorsqu'une suite (U_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique, il se peut qu'une suite auxiliaire (V_n) construite à partir d'elle le soit.

On applique alors à (V_n) les formules de la méthode 6, puis on revient à (U_n).

■ Astuce

Dans la situation qui vient d'être décrite, il peut être intéressant d'exprimer U_n en fonction de V_n en début d'exercice et d'annoter « * » cette dernière égalité.

■ Principe

On peut montrer que (V_n) est arithmétique en prouvant que $V_{n+1} - V_n$ est constant.

On peut montrer que (V_n) est géométrique en justifiant que $V_n = 0$ puis en prouvant que $\dfrac{V_{n+1}}{V_n}$ est constant.

D'une façon générale, on peut aussi chercher à exprimer V_{n+1} en fonction de V_n en utilisant l'astuce.

REMARQUE : Cette dernière technique est très efficace pour les suites auxiliaires définies à partir de suites (U_n) définies par une relation de récurrence de la forme $U_{n+1} = aU_n + b$ (suites arithmético-géométriques) : ***Il faut utiliser l'étoile*** *(cf. exercice 8) !*

■ **Exemple :** *On considère (U_n) et (V_n) telles que :*

$$\begin{cases} U_{n+1} = \dfrac{3U_n + 4}{-2U_n + 9} \\ U_0 = 0 \end{cases} \text{ et } V_n = \dfrac{U_n - 1}{U_n - 2}.$$

On a montré dans la méthode 5 que (U_n) est définie et que $U_n \in [0;1[$.

Justifiez alors que la suite (V_n) existe et ne s'annule pas, puis montrez qu'elle est géométrique.

Exprimez ensuite V_n en fonction de n, puis U_n en fonction de n.

Comme $U_n \in [0;1[$ on a $U_n \neq 2$ et $U_n \neq 1$ donc (V_n) existe et ne s'annule pas.

$$\frac{V_{n+1}}{V_n}=\frac{\dfrac{U_{n+1}-1}{U_{n+1}-2}}{\dfrac{U_n-1}{U_n-2}}=\frac{U_{n+1}-1}{U_{n+1}-2}\times\frac{U_n-2}{U_n-1}=\frac{\dfrac{3U_n+4}{-2U_n+9}-1}{\dfrac{3U_n+4}{-2U_n+9}-2}\times\frac{U_n-2}{U_n-1}=\frac{5U_n-5}{7U_n-14}\times\frac{U_n-2}{U_n-1}.$$

Finalement $\dfrac{V_{n+1}}{V_n}=\dfrac{5(U_n-1)}{7(U_n-2)}\times\dfrac{U_n-2}{U_n-1}=\dfrac{5}{7}$ et (V_n) est géométrique de raison $\dfrac{5}{7}$.

Comme le premier terme de (V_n) est $V_0=\dfrac{U_0-1}{U_0-2}=\dfrac{1}{2}$, on en déduit que :

$$V_n=q^nV_0=\left(\frac{5}{7}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right).$$

Nous allons exprimer U_n en fonction de V_n à partir de la formule $V_n=\dfrac{U_n-1}{U_n-2}$,

puis remplacer V_n par ce que nous venons de trouver.

$$V_n=\frac{U_n-1}{U_n-2}\Rightarrow V_n(U_n-2)=U_n-1\Rightarrow V_nU_n-U_n=2V_n-1\Rightarrow U_n(V_n-1)=2V_n-1.$$

Finalement on obtient : $U_n=\dfrac{2V_n-1}{V_n-1}=\dfrac{2\left(\frac{5}{7}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)-1}{\left(\frac{5}{7}\right)^n\left(\frac{1}{2}\right)-1}.$

4. Comment étudier le comportement global d'une suite

Etudier le comportement global d'une suite consiste à démontrer les conjectures émises concernant ses bornes et sa monotonie.

METHODE 8 : Comment procéder quand $U_n=f(n)$, $(n\geq n_0)$ et que l'on peut étudier f

■ Principe

On dresse le tableau de variations de la fonction f sur un intervalle inclus dans $[0,+\infty[$, puis on en déduit le comportement de la suite.

■ Astuce

Si une suite est croissante, elle est minorée par son premier terme et si elle est décroissante, elle est majorée par son premier terme, donc il vaut mieux commencer par l'étude de la monotonie.

■ **Exemple :** *On a conjecturé dans la méthode 1 que la suite (U_n) telle que $U_n = -n^2 + 6n - 5$ n'est pas monotone mais décroît à partir de n = 3, n'est pas minorée mais majorée par 4 et enfin qu'elle n'est pas convergente puisqu'elle tend vers $-\infty$.*
Démontrer ces conjectures.

Démonstration de ces conjectures
La fonction f définie par $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ est définie et dérivable sur $[0;+\infty[$ et l'on a $f'(x) = -2x + 6$ d'où le tableau de variation suivant :

x	0		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	−	
f	-5	↗	4	↘	$-\infty$

REMARQUE : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2\left(-1+\dfrac{6}{x}-\dfrac{5}{x^2}\right)$.

On déduit de ce tableau que (U_n) est majorée par 4, mais qu'elle n'est pas minorée $\left(\lim\limits_{+\infty} f = -\infty\right)$, donc qu'elle n'est pas bornée.

De plus, pour $n \geq 3$, $n \leq n+1 \Rightarrow f(n+1) \leq f(n) \Rightarrow U_{n+1} \leq U_n$, donc (U_n) décroît à partir du rang 3, mais n'est pas monotone.

METHODE 9 : Comment procéder quand $U_n = f(n)$, $(n \geq n_0)$ et que l'on ne peut pas étudier f

■ Principe
On étudie le signe de $U_{n+1} - U_n$ pour la monotonie, et l'on procède par encadrements successifs pour déterminer des bornes éventuelles.

■ **Exemple :** *On a conjecturé dans la méthode 3 que (U_n) telle que :*

$$U_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} \quad (n \geq 1)$$

était décroissante, majorée par son premier terme $U_1 = 1{,}5$ et minorée par 0.
Démontrer que (U_n) est décroissante, puis que $\frac{1}{2} \leq U_n \leq \frac{3}{2}$.

$$U_{n+1} - U_n = \left(\frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}\right) - \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}\right)$$

Finalement pour tout $n \geq 1$: $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n} = \frac{-3n-2}{(2n+2)(2n+1)(n)} < 0$.

$U_{n+1} - U_n \leq 0 \Rightarrow U_{n+1} \leq U_n \Rightarrow$ La suite (U_n) est décroissante.

(U_n) est décroissante donc majorée par son premier terme $U_1 = 1{,}5$.

Le terme U_n est la somme de (n + 1) termes tous supérieurs ou égaux à $\frac{1}{2n}$

donc : $(n+1) \times \frac{1}{2n} \leq U_n \Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{2n} \leq U_n \Rightarrow \frac{1}{2} \leq U_n$.

On en déduit que $\frac{1}{2} \leq U_n \leq \frac{3}{2}$ et donc que la suite (U_n) est bornée.

METHODE 10 : Comment faire quand $U_{n+1} = f(U_n)$ avec f dérivable, croissante sur I et $U_n \in I$ pour tout n (I étant un intervalle)

■ **Principe**

On montre par récurrence que la suite est monotone et éventuellement bornée après avoir étudié la fonction f sur l'intervalle I.

■ **Exemple :** *Montrez par récurrence que la suite (U_n) définie par* $\begin{cases} U_{n+1} = \dfrac{3U_n + 4}{-2U_n + 9} \\ U_0 = 0 \end{cases}$ *vérifie pour tout $n \in \mathbb{N}$, la propriété (P_n) : "$0 \leq U_n \leq U_{n+1} < 1$".*

Déduisez-en le comportement global de la suite.

C'est « texto » l'exemple de la méthode 5, ce qui nous invite à vous renvoyer à sa correction.

5. Comment étudier le comportement asymptotique d'une suite

Etudier le comportement asymptotique d'une suite consiste essentiellement à déterminer son éventuelle limite.

METHODE 11 : Comment utiliser les définitions des limites

■ **Rappels**

1) On dit qu'une suite (U_n) converge lorsqu'il existe un nombre réel L tel que tout intervalle ouvert de centre L contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, ce qui s'écrit aussi :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{R} \,/\, \forall n \geq n_0,\ |U_n - L| < \varepsilon \text{ (i)}.$$

2) On dit qu'une suite tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) si tout intervalle du type $[A,+\infty[$ (respectivement $]-\infty,A]$) contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang, ce qui s'écrit aussi :

a) $\forall A > 0,\ \exists n_0 \,/\, \forall n \geq n_0,\ U_n \geq A$ lorsque $\lim U_n = +\infty$ (ii)

b) $\forall A < 0,\ \exists n_0 \,/\, \forall n \geq n_0,\ U_n \leq A$ lorsque $\lim U_n = -\infty$ (iii).

■ Cas d'application

On utilise ces rappels pour démontrer les théorèmes du cours relatifs aux limites (comparaison, convergence monotone, suites adjacentes) que l'on préférera généralement aux définitions pour étudier le comportement asymptotique des suites.

Cependant, dans les exercices théoriques relatifs aux limites, on peut avoir à utiliser les définitions relatives au comportement asymptotique des suites pour démontrer des propriétés.

■ Principe

Pour montrer qu'une suite converge vers L, on se donne un $\varepsilon > 0$ et l'on cherche à prouver (i).

Pour montrer qu'une suite tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, on se donne A et l'on essaie de prouver (ii) ou (iii).

REMARQUE : Il est fréquent que l'on ait à raisonner par l'absurde.

■ Astuce

Quand on travaille sur les inégalités, il est très fréquent d'avoir à utiliser la propriété suivante : $\forall a \in \mathbb{R}, \forall b \in \mathbb{R}\ |a+b| \leq |a| + |b|$.

Exemple : *On admet que toute partie non vide A et majorée de $\mathbb{R}$, admet une borne supérieure notée supA qui est le plus petit de ses majorants.*

On considère une suite (U_n) croissante majorée.

1) Montrez qu'elle converge vers supA où $A = \{U_n,\ n \in \mathbb{N}\}$.

2) Montrez alors par l'absurde que tous les termes de (U_n) sont inférieurs ou égaux à la limite de (U_n).

1) Soit $\varepsilon > 0$.

Comme supA est le plus petit des majorants de (U_n) on peut affirmer que $\alpha = \sup A - \varepsilon$ n'est pas un majorant de (U_n) donc il existe un rang n_0 pour lequel $\alpha < U_{n_0}$.

Comme (U_n) est croissante, $\forall n \geq n_0,\ \alpha < U_{n_0} \leq U_n \leq \sup A$.

On a les implications suivantes :
$\forall n \geq n_0,\ \alpha < U_{n_0} \leq U_n \leq \sup A$
$\Rightarrow \forall n \geq n_0,\ \sup A - \varepsilon < U_n \leq \sup A \Rightarrow \forall n \geq n_0,\ -\varepsilon < U_n - \sup A \leq 0$
$\Rightarrow \forall n \geq n_0,\ |U_n - \sup A| < \varepsilon$.

Finalement $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{R} / \forall n \geq n_0, |U_n - \sup A| < \varepsilon$ et donc (U_n) converge vers supA.

2) S'il existe un terme n_0 tel que $U_{n_0} > L = \lim U_n$, comme $L = \sup A$, supA n'est pas un majorant de la suite (U_n) ce qui est absurde compte tenu de la définition de supA.

Finalement, tous les termes de (U_n) sont inférieurs ou égaux à la limite de (U_n).

REMARQUE : On démontre de même que tous les termes d'une suite (U_n) décroissante convergente sont supérieurs ou égaux à la limite de (U_n).

METHODE 12 : Comment procéder quand $U_n = f(n)$, $(n \geq n_0)$ et que l'on peut étudier le comportement asymptotique de f

■ Rappels

1) Théorèmes de comparaison
a) Si au voisinage de $+\infty$, on a $V_n \leq U_n$ avec $\lim V_n = +\infty$ alors $\lim U_n = +\infty$.
b) Si au voisinage de $+\infty$, on a $U_n \leq V_n$ avec $\lim V_n = -\infty$ alors $\lim U_n = -\infty$.
c) Si au voisinage de $+\infty$, on a $|U_n - L| \leq V_n$ avec $\lim V_n = 0$ alors $\lim U_n = L$.
d) Si au voisinage de $+\infty$, on a $V_n \leq U_n \leq W_n$ avec $\lim V_n = \lim W_n = L$ alors $\lim U_n = L$ (théorème des gendarmes).

2) Théorème donnant $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n$ (si q = 1, la limite est 1)

Si $q \in \cdots$	$]-\infty;-1]$	$]-1;1[$	$]1;+\infty[$
alors $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n$	n'existe pas	$= 0$	$= +\infty$

■ Principe

On s'y prend comme avec les fonctions en utilisant éventuellement les rappels.

■ Attention

Il se peut que la suite ait une limite sans que la fonction en ait une.

Exemple : La fonction $x \mapsto \sin\left(2\pi x + \frac{1}{x}\right)$ n'a pas de limite en $+\infty$, mais la suite $n \mapsto \sin\left(2n\pi + \frac{1}{n}\right) = \sin\left(\frac{1}{n}\right)$ converge vers 0.

■ **Exemple :** *Etudiez le comportement asymptotique de la suite (U_n) définie par $U_n = \frac{2n^2-3}{n^2+1} + \left(\frac{3}{4}\right)^n$.*

$-1 < \frac{3}{4} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ et $\lim \frac{2n^2-3}{n^2+1} = \lim \frac{n^2\left(2-\frac{3}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = \lim \frac{\left(2-\frac{3}{n^2}\right)}{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)} = 2$

donc $\lim U_n = 2$.

METHODE 13 : Comment utiliser les théorèmes de convergence monotone

■ Principe

Après avoir étudié le comportement global d'une suite, on peut appliquer le théorème suivant si elle vérifie ses hypothèses.

Théorèmes de convergence monotone

1) Toute suite croissante majorée converge (propriété démontrée dans l'exemple de la méthode 11).
2) Toute suite décroissante minorée converge.
3) Toute suite croissante, non majorée, tend vers $+\infty$.
4) Toute suite décroissante, non minorée, tend vers $-\infty$.

■ Cas d'application

Quand la méthode précédente ne peut pas s'appliquer.

■ Inconvénient

Comme le montre l'exemple, ces théorèmes ne permettent pas, dans un cas de convergence, de déterminer la limite.

■ **Exemple :** *On a vu dans la méthode 9 que la suite (U_n) définie par $U_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{2n}$ $(n \geq 1)$ est décroissante, puis que $\frac{1}{2} \leq U_n \leq \frac{3}{2}$.*
Montrez qu'elle converge.

La suite est décroissante minorée, donc d'après un des théorèmes de convergence monotone elle converge.

Quant à savoir quelle est sa limite, c'est plus difficile.

METHODE 14 : Comment déterminer la limite d'une suite telle que $U_{n+1} = f(U_n)$ lorsque la fonction f est continue

■ **Principe**

On montre que la suite converge avec le théorème de convergence monotone puis on passe à la limite dans $U_{n+1} = f(U_n)$.

En notant L sa limite, cela donne $L = f(L)$, ce qui prouve que L est solution de $x = f(x)$.

On résout $x = f(x)$, puis on élimine les solutions qui ne conviennent pas pour trouver L.

■ **Exemple :** *On a vu que la suite (U_n) définie par $\begin{cases} U_{n+1} = \dfrac{3U_n + 4}{-2U_n + 9} \\ U_0 = 0 \end{cases}$ est croissante et que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \in \lfloor 0;1 \lfloor$ (méthode 10).*

Montrez qu'elle converge et déterminez sa limite.

Notons dans un premier temps que la suite est dans l'intervalle fermé $\lfloor 0;1 \rfloor$.

Dans un second temps, la suite est croissante majorée par 1 donc d'après un des théorèmes de convergence monotone, elle converge vers une limite L de l'intervalle $\lfloor 0;1 \rfloor$.

En passant à la limite dans $U_{n+1} = \dfrac{3U_n + 4}{-2U_n + 9}$, on obtient $L = \dfrac{3L + 4}{-2L + 9}$ donc L est solution de $x = \dfrac{3x + 4}{-2x + 9}$.

$$x = \frac{3x + 4}{-2x + 9} \Leftrightarrow x(-2x + 9) = 3x + 4 \Leftrightarrow 0 = 2x^2 - 6x + 4 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = 2$$

On a $L \in \lfloor 0;1 \rfloor$ donc L = 1.

METHODE 15 : Comment procéder avec deux suites adjacentes – Approfondissement

■ **Principe**

On applique le théorème des suites adjacentes.

Théorème des suites adjacentes

Si une suite est croissante, une autre décroissante et que la limite de leur différence est nulle alors elles sont dites adjacentes et convergent vers la même limite (démontré dans l'exemple).

■ Cas d'application

Quand on cherche un encadrement d'amplitude connue d'un réel quelconque (la racine d'un entier par exemple).
En effet, si (U_n) et (V_n) sont deux suites adjacentes de limite commune L, avec (U_n) croissante et (V_n) décroissante, d'après la propriété prouvée dans l'exemple de la méthode 11, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n \leq L \leq V_n$.
Cela donne un encadrement de L dont l'amplitude $a_n = V_n - U_n$ peut être aussi proche de 0 que l'on veut puisque $\lim a_n = 0$.

■ **Exemple :** *On considère deux suites adjacentes (U_n) et (V_n) où (U_n) est la suite croissante et (V_n) la suite décroissante.*
1) Montrez par l'absurde que pour tout n, $U_n \leq V_n$.
2) Démontrez alors le théorème des suites adjacentes en utilisant les théorèmes de convergence monotone.
3)Pour $n \geq 2$ on considère les suites (U_n) et (V_n) définies par :
$U_n = 5{,}33\cdots3$ (n décimales) et $V_n = 5{,}33\cdots4$ (n décimales).
Montrez que ces deux suites sont adjacentes et déterminer leur limite.

1) Supposons qu'il existe N tel que $V_N < U_N$.
Notons $\varepsilon = \dfrac{U_N - V_N}{2}$.
Comme (U_n) est croissante, et (V_n) est décroissante, pour tout $n \geq N$, on a $V_n \leq V_N < U_N \leq U_n$, ce qui entraîne que $U_n - V_n \geq U_N - V_N = 2\varepsilon > \varepsilon$.
Cela signifie, qu'à partir d'un certain rang, $U_n - V_n > \varepsilon$, et contredit le fait que $\lim\limits_{n\to+\infty}(U_n - V_n) = 0$.
Par l'absurde, pour tout n, $U_n \leq V_n$.

2) D'une part, (V_n) qui est décroissante est majorée par son premier terme, et d'autre part d'après 1) $U_n \leq V_n$.
La suite (U_n)est donc croissante, majorée par le premier terme de (V_n), donc d'après les théorèmes de convergence monotone, elle converge vers une limite L'.
De même la suite (V_n) converge vers une limite L".
Comme les deux suites sont **convergentes**, $\lim(U_n - V_n) = \lim U_n - \lim V_n = L' - L''$.
Finalement, on a : $0 = \lim(U_n - V_n) \Rightarrow 0 = L' - L'' \Rightarrow L' = L''$, ce qui démontre le théorème des suites adjacentes.

3) $U_{n+1} - U_n = 5{,}33...33 - 5{,}33...30 = 0{,}0...03$ ((n+1) décimales) $\Rightarrow U_{n+1} \geq U_n$
$\Rightarrow (U_n)$est croissante.
$V_n - V_{n+1} = 5{,}33...40 - 5{,}33...34 = 0{,}0...06$ ((n+1) décimales) $\Rightarrow V_n \geq V_{n+1}$
$\Rightarrow (V_n)$ est décroissante.

$V_n - U_n = 0,0\cdots1 = 10^{-n} = \left(\frac{1}{10}\right)^n \Rightarrow \lim(V_n - U_n) = \lim\left(\frac{1}{10}\right)^n = 0$ car $-1 < \frac{1}{10} < 1$.

D'après le théorème des suites adjacentes, les suites (U_n) et (V_n) convergent vers la même limite L = 5,3333…33…

Comme $10L - L = 53,33\cdots - 5,33\cdots$, on a $9L = 48$ et donc $L = \frac{48}{9} = \frac{16}{3}$.

6. Comment déterminer expérimentalement des résultats

Nous allons voir comment déterminer expérimentalement une rapidité de convergence, puis comment on peut utiliser les suites et un algorithme pour obtenir une valeur approchée de la solution d'une équation ou d'une aire.

METHODE 16 : Détermination d'un seuil pour conjecturer une vitesse de convergence

■ Principe

Avec un tableur, on fait afficher les 50 ou 100 ou … premières valeurs des suites et l'on donne le premier indice à partir duquel les termes de la suite sont inférieurs ou égaux à une distance fixée de sa limite.

Avec un algorithme, on utilise une boucle conditionnelle qui donne le premier indice à partir duquel les termes de la suite sont inférieurs ou égaux à une distance fixée de sa limite.

■ Cas d'application

Lorsque l'on a démontré que deux suites monotones convergent vers la même limite, on peut se demander celle qui tend le plus vite vers cette limite commune.

■ **Exemple :** *On considère les suites (U_n) et (V_n) définies par :*

$$\begin{cases} U_{n+1} = \dfrac{3U_n + 4}{-2U_n + 9} \\ U_0 = 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} V_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(V_n + \dfrac{1}{V_n}\right) \\ V_0 = 2 \end{cases}.$$

On a vu dans la méthode 14 que la suite (U_n) est monotone et converge vers 1. On admet que la suite (V_n) est également monotone et converge vers 1.

1) Sur la page d'Excel suivante, quelle formule faut-il entrer dans les cellules B3 et C3 pour qu'un « copier-coller » vers le bas permette d'obtenir les termes de (U_n) et (V_n) ?

	A	B	C
1	*n*	U_n	V_n
2	*0*	*0*	*2*
3	*1*		

Quelle suite tend le plus vite vers sa limite ?
Déterminez l'indice minimum à partir duquel les termes des suites sont à une distance inférieure ou égale à 10^{-6} de leur limite L = 1.
2) Répondez à cette dernière question avec un algorithme.

1) On entre en B3 : « = (3*B2+4)/(-2*B2+9) » et en C3 : « =(1/2)*(C2+1/C2).

On obtient alors :

	A	B	C
1	**n**	U_n	V_n
2	**0**	**0**	**2**
3	**1**	**0,444444**	**1,25**
4	**2**	**0,657534**	**1,025**
5	**3**	**0,777184**	**1,000305**
6	**4**	**0,850371**	**1**
...	...	...	...
40	**38**	**0,999998**	**1**
41	**39**	**0,999999**	**1**

C'est la suite (V_n) qui tend le plus vite vers 1.

En effet, dès l'indice n = 4, la distance entre V_n et L = 1 est inférieure à 10^{-6}, alors qu'il faut « attendre » l'indice 39 pour que la distance entre U_n et L = 1 soit inférieure à 10^{-6}.

2) Dans l'algorithme suivant, n est le seuil à partir duquel $|1-U_n| \leq b$ où b désigne la distance maximale souhaitée entre les termes de la suite et sa limite, dont on a décidé dans cette question qu'elle soit $10^{-6} = 0{,}000001$.

```
def f(x):
    return (3*x+4)/(-2*x+9)
def s(b,L):
    u=0
    n=0
    while abs(L-u)>b:
        n=n+1
        u=f(u)
    return(n)
```

En mode « Run » on obtient :

```
>>> s(0.000001)
39
```

Pour la suite (V_n) on modifie l'algorithme précédent de la façon suivante :

```
def f(x):
    return 0.5*(x+(1/x))
def s(b,L):
    v=2
    n=0
    while abs(L-v)>b:
        n=n+1
        v=f(v)
    return(n)
```

En mode « Run » on obtient :

```
>>> s(0.000001,1)
4
```

On retrouve les résultats obtenus avec le tableur, heureusement pour nous !

METHODE 17 : Comment encadrer par dichotomie une solution de l'équation f(x) = k sur un intervalle I où f est monotone

■ Principe

On a vu dans la méthode 13 que la résolution d'une équation pouvait permettre de déterminer la limite d'une suite, il va s'agir ici du problème inverse.

En effet, étant donné une fonction f continue strictement monotone de $[a_0;b_0]$ vers $f([a_0;b_0])$ et un réel k de $f([a_0;b_0])$, nous savons d'après le théorème des valeurs intermédiaires que l'équation f(x) = k admet une solution unique x_0 sur $[a_0;b_0]$.

Pour déterminer une approximation par dichotomie de x_0, on commence par construire deux suites adjacentes qui convergent vers x_0 de la façon suivante.

Les premiers termes des suites sont a_0 et b_0.

Ensuite, si $f\left(\dfrac{a_n+b_n}{2}\right)$ est entre $f(a_n)$ et k on prend $a_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}$ et $b_{n+1}=b_n$, sinon on prend $a_{n+1}=a_n$ et $b_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}$.

Enfin, on réalise un algorithme pour calculer les termes de ces suites, ce qui permet d'obtenir un encadrement ou une approximation de x_0.

■ Cas d'application

L'énoncé fait étudier une fonction pour montrer qu'une équation qu'on ne sait pas résoudre exactement admet une solution unique, puis demande une approximation ou un encadrement d'amplitude donnée de cette solution.

■ **Exemple :** *Montrez que l'équation* $x^3+x+\sin x=4$ *admet une solution unique* x_0 *sur* $\lfloor 0,2 \rfloor$ *et donnez un encadrement d'amplitude égale à* 10^{-6} *de cette solution.*

La fonction f est définie par $f(x)=x^3+x+\sin x$ est dérivable sur $\lfloor 0,2 \rfloor$ et l'on a $f'(x)=3x^2+1+\cos x>0$, car pour tout $x\neq 0$, $f'(x)>1+\cos x$, donc $f'(x)>0$ et $f'(0)=2>0$.

La fonction f est donc continue et strictement croissante de $\lfloor 0,2 \rfloor$ sur $f([0,2])=[f(0),f(2)]=[0,10+\sin(2)]$.

Comme $4\in\lfloor 0,10+\sin(2) \rfloor$ puisque $10+\sin(2)=10{,}9$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires pour les fonctions strictement monotones, on en déduit que l'équation $f(x)=4$ admet une solution unique sur $\lfloor 0,2 \rfloor$.

L'algorithme suivant va donner l'encadrement demandé.

```
from math import sin
def f(x):
    return x**3+x+sin(x)
def dicho(a,b,i,k):
    c=f(a)
    while((b-a)>i):
        d=(a+b)/2
        e=f(d)
        if(((k-e)*(k-c))<0):
            b=d
        else:
            a=d
    return(a,b)
```

En mode « Run » avec a=0, b=2, i=0,0000001 (**on entre une amplitude plus fine que celle demandée pour « assurer »**) et k=4, ce qui donne :

```
>>> dicho(0,2,0.0000001,4)
(1.2243026494979858, 1.2243027091026306)
```

Le couple que l'on vient d'obtenir donne l'encadrement :

$$1{,}224302<x_0<1{,}224303.$$

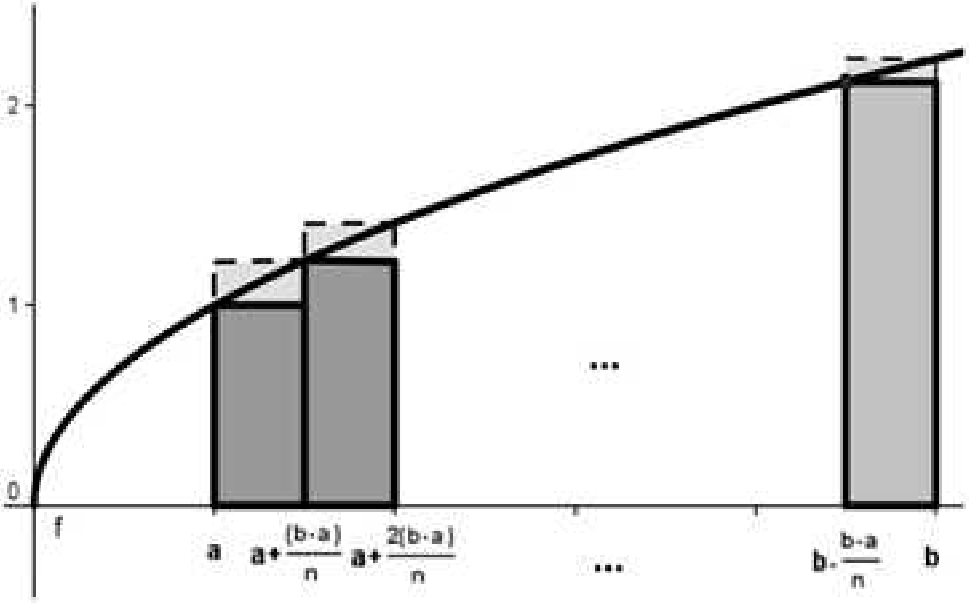
METHODE 18 : Comment encadrer une aire comprise entre (Ox) et (Cf) pour une fonction f continue, monotone positive sur un intervalle I – Méthode des rectangles

■ **Principe**

On construit deux suites égales à des sommes de rectangles qui encadrent l'aire cherchée. On va vous illustrer cela pour vous aider à bien comprendre.

Sur la figure suivante l'aire des rectangles en pointillés majore l'aire délimitée par x = a, x = b, (Ox) et (Cf), et l'aire des rectangles en traits pleins la minore.

Si l'on note (V_n) l'aire en pointillé et (U_n) l'aire en traits pleins des rectangles, les deux suites convergent vers l'aire cherchée.



D'autre part on a :

$$V_n = \sum_{i=0}^{n-1} f\left(b - i\frac{b-a}{n}\right)\left(\frac{b-a}{n}\right) \text{ et } U_n = \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)\left(\frac{b-a}{n}\right).$$

Ensuite, à l'aide des formules précédentes, on réalise un algorithme avec une boucle de longueur finie pour encadrer l'aire cherchée et afficher l'amplitude $V_n - U_n$ de l'encadrement.

■ **Exemple :** *Sur la figure précédente la fonction f est définie par* $f(x) = \sqrt{x}$, $a = 1$ *et* $b = 5$.

Ecrire un algorithme qui permet d'encadrer l'aire délimitée par $x = a$, $x = b$, *(Ox) et (Cf) pour n quelconque.*

Donner le résultat trouvé pour n = 100.

L'algorithme déduit du principe pour cet exemple est le suivant :

```
from math import sqrt
def f(x):
    return sqrt(x)
def aire(a,b,n):
    s=f(a)
    t=f(b)
    for i in range(1,n):
        s=s+f(a+i*((b-a)/n))
        t=t+f(b-i*((b-a)/n))
        u=s*((b-a)/n)
        v=t*((b-a)/n)
        d=abs(u-v)
    return(u,v,d)
```

En mode « Run » avec a=1, b=5 et n=100 on obtient :

```
>>> aire(1,5,100)
(6.762135047664706, 6.8115777667647, 0.04944271909999465)
```

Le triplet que l'on vient d'obtenir donne les deux bornes de l'encadrement et son amplitude.

Réflexes

	SITUATIONS	REFLEXES
1.	**On doit conjecturer le comportement d'une suite.**	▪ On détermine les premiers termes de la suite et des termes de rang plus élevé avec une calculatrice, un graphique, un tableur ou un algorithme.
2.	**On doit montrer qu'une propriété est vraie pour tous les entiers n à partir d'un certain rang.**	▪ On fait une démonstration par récurrence.
3.	**On doit montrer qu'une suite (V_n) est arithmétique.**	▪ $V_{n+1} - V_n = \cdots = a$.
4.	**On doit montrer qu'une suite (V_n) jamais nulle est géométrique.**	▪ $\frac{V_{n+1}}{V_n} = \cdots = b$ ou bien on exprime V_{n+1} en fonction de V_n.

5.	**On doit utiliser une formule relative aux suites arithmétiques ou géométriques.**	▪ Il faut les apprendre par coeur.
6.	**On doit montrer qu'une suite est bornée.**	▪ On utilise une fonction ou on procède par encadrements successifs.
7.	**On doit étudier la monotonie d'une suite (U_n).**	▪ On utilise une fonction. ▪ On détermine le signe de $U_{n+1} - U_n$. ▪ On fait une démonstration par récurrence.
8.	**On doit étudier le comportement asymptotique d'une suite.**	▪ On procède comme avec les fonctions. ▪ Théorème de convergence monotone. ▪ Théorème des suites adjacentes.
9.	**On demande un résultat expérimental concernant une suite.**	▪ On utilise un algorithme.

Astuces

■ Quand vous devez prouver qu'une suite (V_n) définie à partir d'une suite (U_n) est géométrique, vous pouvez avoir la chance de tomber sur :

$\dfrac{V_{n+1}}{V_n} = \dfrac{3U_n - 1}{2U_n - \frac{2}{3}}$ après avoir montré que $V_n \neq 0$ et $U_n \neq \dfrac{1}{3}$.

Il faut alors penser à mettre le coefficient de U_n en facteur au numérateur et au dénominateur.

Cela donne : $\dfrac{V_{n+1}}{V_n} = \dfrac{3\left(U_n - \frac{1}{3}\right)}{2\left(U_n - \frac{1}{3}\right)} = \dfrac{3}{2}$.

■ Pour montrer qu'une suite n'est pas monotone, il suffit de trouver p tel que $U_p \leq U_{p+1}$ et k tel que $U_k > U_{k+1}$.

Par exemple, la suite (U_n) définie par $U_n = (-1)^n$ n'est pas monotone car $1 = U_0 \geq U_1 = -1$ et $-1 = U_1 < U_2 = 1$.

■ Une somme de n termes est minorée par n fois le plus petit, et majorée par n fois le plus grand.

■ Si l'on sait qu'une suite définie par une relation de récurrence est convergente on peut faire tendre n vers $+\infty$ dans la relation de récurrence pour avoir une idée de ce que peut être la limite.

■ Pour les algorithmes où intervient une fonction f, il faut mieux la définir « d'entrée » comme on l'a fait dans les algorithmes des méthodes 16, 17 et 18 car dans la suite on n'est pas obligé de retaper toute la fonction en utilisant f. En plus, pour une même méthode correspondant à une autre fonction, il suffit de changer la fonction (et éventuellement quelques autres paramètres) pour s'adapter à l'énoncé.

Erreurs

■ Si vous devez démontrer par récurrence qu'une propriété est vraie pour tout $n \geq n_0$ et que vous ne vérifiez pas que la propriété est effectivement vraie pour n_0, votre démonstration **ne vaudra RIEN**.

■ Evitez d'appliquer les formules des suites arithmétiques et géométriques avec des suites qui ne le sont pas.

■ $U_{n+1} = f(U_n)$ avec $U_n \in I$ pour tout n, et f croissante sur I, entraîne que (U_n) **est monotone mais n'entraîne pas nécessairement que (U_n) est croissante.**

Le jour de l'épreuve

■ Rédigez vos démonstrations par récurrence en trois temps :
1) Initialisation
2) Hérédité
3) Conclusion

■ Il est quasiment certain que l'on vous demande de compléter un algorithme. C'est vrai, en particulier pour ce chapitre, mais aussi pour tous les autres.

■ Si vous avez à déterminer la limite d'une suite non classique, la seule méthode consiste à prouver une inégalité, puis à appliquer un des théorèmes de comparaison.

■ Si vous avez à étudier une suite (U_n) telle que $U_{n+1} = f(U_n)$, pensez à utiliser votre calculatrice, un graphique ou un algorithme pour conjecturer le comportement global et asymptotique de la suite.

Le jour du Grand Oral

Sujets mathématiques

■ ***Question 1 : Pour $a > 0$, approximation de $\sqrt{a}$ par la méthode de Héron***
Cette question abordée à l'exercice 6 revêt un intérêt historique dans la mesure où elle fait intervenir les nombres irrationnels et permet à l'aide des suites de déterminer une approximation de la racine de n'importe quel nombre positif.
En effet, les Pythagoriciens avaient découvert l'existence de ces nombres car la diagonale d'un carré de côté 1, qui vaut $\sqrt{2}$ est un nombre irrationnel ce qui fut démontré par Euclide quatre siècles plus tard.
Ils avaient d'ailleurs décidé de tenir secrète l'existence de ces nombres jusqu'à ce qu'un dénommé Hippase de Metaponte trahisse le secret.
Au Ier siècle ap. J.-C., Héron d'Alexandrie a proposé la méthode qui est à l'origine de l'exercice 6 qui propose, en dernière question, un algorithme qui peut être intéressant de présenter avec le sujet.

■ ***Question 2 : Conjecture et démonstration par récurrence relative à une suite***
Cette question est souvent abordée dans le livre mais l'exercice 4 nous paraît intéressant. En effet, il fait intervenir une suite ni arithmétique, ni géométrique, définie par une relation de récurrence dont on émet une conjecture relative à son expression explicite grâce à sa représentation graphique, puis que l'on démontre par récurrence.

■ ***Question 3 : Etude de la convergence d'une série***
Cette question abordée à l'exercice 12 est intéressante pour ceux qui envisagent des études supérieures en mathématiques dans la mesure où elle met en œuvre des notions fondamentales qu'ils peuvent rencontrer : majoration, utilisation de la définition théorique de la limite d'une suite, raisonnement par l'absurde avec utilisation de l'inégalité triangulaire $|a+b| \leq |a| + |b|$.

■ ***Question 4 : Détermination d'une approximation de la solution d'une équation***
Cette question est abordée dans les exercices 13 et 14. Après avoir donné une équation dont on ne sait pas déterminer une solution exacte, il nous semble intéressant de présenter une méthode utilisant les suites (dichotomie, méthode de Newton-Raphson, méthode de la sécante) pour en trouver une approximation et de l'appliquer au travers d'un algorithme.

■ ***Question 5 : Encadrement du nombre d'or par deux rationnels***
Cette question abordée à l'exercice 16 a l'avantage de présenter un nombre que l'on retrouve dans les arts et la nature, mais aussi dans la vie courante : les cartes que vous avez dans vos portefeuilles sont des rectangles d'or, c'est-à-dire que le rapport entre leur longueur et leur largeur est égal au nombre d'or dont une approximation est 1,618. La résolution de cet exercice montrera au jury vos compétences de calcul et de raisonnement, ainsi que celles relatives aux algorithmes.

Sujets transversaux

■ ***Question 6 : Modélisation de l'évolution d'une population d'oiseaux d'effectif constant entre deux îles à l'aide de suites arithmético-géométriques***

Cette question qui peut être conjuguée avec la spécialité SVT est abordée à l'exercice 11. Il permet de modéliser les effectifs d'oiseaux présents sur chaque île au cours du temps à l'aide de suites arithmético-géométriques. La résolution du problème suppose l'introduction de suites géométriques auxiliaires et donc de connaître parfaitement les formules qu'elles vérifient. En dernière question, il est proposé de déterminer un seuil avec un algorithme, ce qui, en outre, peut également s'obtenir avec la calculatrice.

■ ***Question 7 : Modélisation de l'évolution d'une part de marché à l'aide d'une suite arithmético-géométrique***

Cette question qui peut être conjuguée avec la spécialité SES est abordée à l'exercice 8. Il permet de modéliser une part de marché pour un opérateur téléphonique à l'aide d'une suite arithmético-géométrique et se termine par un algorithme pour la détermination d'un seuil.

Chapitre 2
METHODES SUR DES FONCTIONS DE PREMIERE

Les fonctions étudiées dans ce chapitre sont au programme de Première mais la plupart des méthodes font intervenir des résultats de Terminale.

Dans ce chapitre, nous ne ferons pas intervenir la fonction exponentielle car le prochain chapitre est entièrement consacré à elle et sa réciproque.

Nous allons voir comment :

1) Etudier le comportement global d'une fonction

2) Etudier le comportement asymptotique d'une fonction

3) Etudier le comportement ponctuel d'une fonction

4) Procéder avec des fonctions spécifiques

5) Utiliser la méthode d'Euler

1. Comportement global d'une fonction

On va vous expliquer comment vous pouvez étudier, les variations, les bornes, la parité et la convexité d'une fonction.

METHODE 1 : Comment déterminer une dérivée avec les formules de base et l'exploiter

■ Rappels

1) Si f a une dérivée positive sur un intervalle I alors elle est croissante sur I.
2) Si f a une dérivée négative sur un intervalle I alors elle est décroissante sur I.

REMARQUE : On vous rappelle qu'un intervalle I de $\mathbb{R}$ est un sous ensemble de $\mathbb{R}$ tel que si a et b sont dans I alors l'intervalle fermé de bornes a et b est inclus dans I.

■ Erreur classique

En général, une réunion d'intervalle n'est pas un intervalle !

2) Les formules de base concernant les dérivées sont rappelées dans le tableau suivant :

Fonction	**Dérivée**	**Ensemble où l'on peut appliquer la formule**
k avec $k \in \mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
x^n pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^n}$ pour $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	Tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}_-^*$ ou inclus dans $\mathbb{R}_+^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	Tout intervalle inclus dans $]0;+\infty[$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$	Tout intervalle ne contenant pas de nombre de la forme $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ avec $k \in \mathbb{Z}$
$U(x) + V(x)$	$U'(x) + V'(x)$	Tout intervalle où U et V sont dérivables
$k\,U(x)$ avec $k \in \mathbb{R}$	$k\,U'(x)$	Tout intervalle où U est dérivable
$U(x)\,V(x)$	$U'(x)\,V(x) + U(x)\,V'(x)$	Tout intervalle où U et V sont dérivables
$\frac{U(x)}{V(x)}$	$\frac{U'(x)V(x) - U(x)V'(x)}{V^2(x)}$	Tout intervalle où U et V sont dérivables et où V ne s'annule pas

■ Principe

Pour étudier les variations d'une fonction, on calcule sa dérivée avec le tableau précédent, on étudie son signe, on applique le théorème du premier rappel et on résume dans un tableau.

■ **Exemple :** *Etudiez les variations de f définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$. *La fonction f est-elle bornée sur* $[1;+\infty[$ *?*

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = 3x^2 + 2x - 5$.

La fonction dérivée est un trinôme du second degré de discriminant $64 > 0$, donc f' est du signe de $-a = -3$, c'est-à-dire négative entre ses racines qui valent $-\frac{5}{3}$ et 1, et positive ailleurs.

En anticipant sur les méthodes suivantes, nous allons étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition, c'est-à-dire en $-\infty$ et $+\infty$.

Ainsi, on a $\lim\limits_{x\to\infty} x^3+x^2-5x+3=\lim\limits_{x\to\infty} x^3\left(1+\frac{1}{x}-\frac{5}{x^2}+\frac{3}{x^3}\right)=\lim\limits_{x\to\infty} x^3$ et l'on en déduit que $\lim\limits_{x\to-\infty} f=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f=+\infty$.

Le tableau de variations de f est donc le suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{5}{3}$		1		$+\infty$
f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{256}{27}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction f n'est pas bornée sur $\left[1;+\infty\right[$. Cependant, elle y est minorée par 0.

METHODE 2 : Comment déterminer une dérivée avec la formule $(VoU)'=(V'oU)\times U'$ et l'exploiter

■ Principe

Pour appliquer cette formule, il suffit de remplacer « x » par « U(x) » dans les formules du tableau de la méthode précédente **ET de multiplier les dérivées par « U'(x) ».**

Ainsi, si U est une fonction : $\left(U^n\right)'=nU^{n-1}U'$; $\left(\sqrt{U}\right)'=\frac{U'}{2\sqrt{U}}$; $(\sin U)'=U'\cos U$ ...

L'exploitation de cette dérivée est la même que dans la méthode précédente.

■ Astuce

Pour dériver une fonction qui s'écrit comme une fonction usuelle en « u » où u est fonction usuelle en « x », on vous conseille de rédiger de la façon suivante :

1) On écrit f en fonction de u sans faire intervenir la variable x, en précisant tout de même u(x) et $u'(x)$.

2) On applique la formule de cette méthode en écrivant f' en fonction de u et u'.

3) On donne finalement $f'(x)$.

Pour que tout soit bien clair, on va vous dériver la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sin\left(x^2\right)$ (qui ne peut pas se dériver par application du tableau de la méthode 1, et nécessite donc la formule de cette méthode).

1) On a $f=\sin u$ avec $u(x)=x^2$ et $u'(x)=2x$.

2) L'application du principe donne $f' = (\cos u) \times u'$ **(ne surtout pas oublier u' !).**

3) Finalement, on obtient $f'(x) = (\cos x^2) \times 2x$.

■ **Exemple :** *On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + \sin(x^2)$. Etudiez les variations de f et prouvez que f est positive.*

La fonction est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables et l'on a : $f'(x) = 4x + 2x\cos(x^2) = 2x(2 + \cos(x^2))$.

$-1 \le \cos(x^2) \Rightarrow 1 \le 2 + \cos(x^2)$ donc la dérivée est du signe de 2x.

On en déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		−	0	+	
f		↘	0	↗	

D'après ce tableau la fonction est bien positive sur $\mathbb{R}$.

METHODE 3 : Comment encadrer une fonction

■ Principe

On encadre la fonction à partir de son tableau de variations.

■ **Exemple :** *On a vu dans la méthode 1 que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + x^2 - 5x + 3$ avait le tableau de variations suivant :*

x	$-\infty$		$-\frac{5}{3}$		1		$+\infty$
f'		+	0	−	0	+	
f	$-\infty$	↗	$\frac{256}{27}$	↘	0	↗	$+\infty$

En déduire un encadrement de f sur $[0;2]$.

D'après le tableau de variations précédent le minimum de f sur $[0;2]$ est 0 et dans la mesure où f(0) = 3 et f(2) = 5 donc, on en déduit que sur $[0;2]$ on a :

$$0 \le f(x) \le 5.$$

Astuce : Si vous imaginez que vous vous déplacez sur les « flèches », de l'image par f de 0 (ici 3), à l'image par f de 2 (ici 5), l'altitude minimale et l'altitude maximale atteintes au cours du déplacement donnent respectivement la borne inférieure et la borne supérieure de f sur $[0,2]$.

METHODE 4 : Comment étudier la parité d'une fonction

■ Principe

On vérifie que l'ensemble de définition de la fonction est symétrique par rapport à 0 et l'on calcule f(–x).
Si pour tout x de cet ensemble f(–x) = f(x) alors la fonction est paire, si pour tout x de cet ensemble f(–x) = –f(x) alors la fonction est impaire, sinon elle n'est ni l'un, ni l'autre.

■ Conséquence graphique

La courbe représentative d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées et celle d'une fonction impaire par rapport à O.

■ **Exemple :** *On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 5x - \sin x$. Etudiez la parité de f. Quelle conséquence graphique peut-on en déduire ?*

L'ensemble de définition $\mathbb{R}$ de f est symétrique par rapport à zéro et l'on a $f(-x) = (-x)^3 + 5(-x) - \sin(-x) = -x^3 - 5x + \sin x = -f(x)$ donc f est impaire et sa courbe représentative est symétrique par rapport à O.

METHODE 5 : Comment étudier la convexité d'une fonction et l'exploiter

■ Rappels

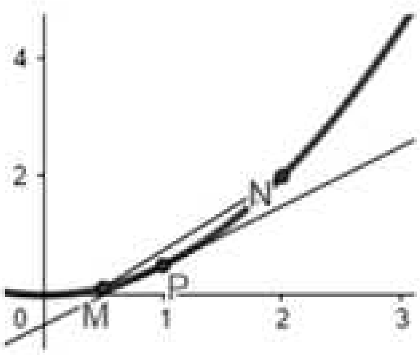
1) Définition de la dérivée seconde et généralisation

La dérivée seconde d'une fonction f, deux fois dérivable sur un intervalle I, est la fonction notée f" qui est égale à la dérivée de la dérivée de f.

REMARQUE : Pour n entier naturel quelconque, on généralise à la fonction $f^{(n)}$ qui est la dérivée $n^{ième}$ d'une fonction f n fois dérivable sur un intervalle I.

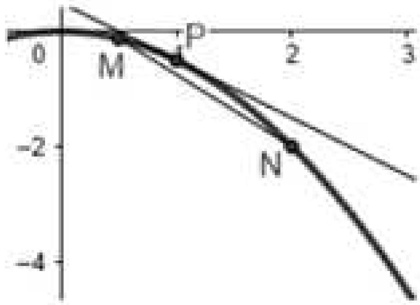
2) Définition d'une fonction convexe sur un intervalle I

Une fonction f définie sur un intervalle I, de courbe représentative C_f, est convexe sur I lorsque tout segment $[MN]$ sécant à C_f en M et N est au-dessus de C_f.



3) Définition d'une fonction concave sur un intervalle I

Une fonction f définie sur un intervalle I, de courbe représentative C_f, est concave sur I lorsque tout segment $[MN]$ sécant à C_f en M et N est en dessous de C_f.



4) Propriétés équivalentes

Pour une fonction f deux fois dérivable sur un intervalle I, de courbe représentative C_f, les propriétés suivantes sont équivalentes.

Propriété 1 : La fonction f est convexe sur I.
Propriété 2 : Toute tangente à C_f est en dessous de C_f (voir graphique du 2)).
Propriété 3 : La fonction f' est croissante sur I.
Propriété 4 : La fonction f'' est positive sur I.

5) Propriétés équivalentes

Pour une fonction f deux fois dérivable sur un intervalle I, de courbe représentative C_f, les propriétés suivantes sont équivalentes.

Propriété 1 : La fonction f est concave sur I.
Propriété 2 : Toute tangente à C_f est au-dessus de C_f (voir graphique du 3)).
Propriété 3 : La fonction f' est décroissante sur I.
Propriété 4 : La fonction f'' est négative sur I.

■ Principe

On utilise une des propriétés précédentes pour en déduire une autre.

■ Cas d'application

Lorsque l'on donne la courbe représentative d'une fonction f sans donner son expression $f(x)$ il faut utiliser la propriété 1 ou 2 pour justifier une convexité.

Lorsque l'on donne la courbe représentative d'une fonction f' sans donner son expression et sans rien préciser d'autre sur la fonction f, il faut utiliser la propriété 3 pour prouver une convexité.

Lorsque l'on donne l'expression $f(x)$ d'une fonction f deux fois dérivable, que l'on sait dériver deux fois, on détermine $f''(x)$ et l'on étudie son signe pour étudier la convexité de f.

■ Astuce

Lorsque l'on cherche la convexité d'une fonction f en étudiant le signe de $f''(x)$ on vous conseille de présenter le résultat à l'aide d'un tableau.

■ **Exemple :** *Etudiez la convexité de la fonction f définie sur* $\lfloor 0,1 \rfloor$ *par* $f(x)=\frac{1}{2}(x^4+x)$ *puis déterminez la position relative de sa courbe représentative* C_f *et de la droite (D) d'équation* $y=x=g(x)$ *lorsque* $x\in\lfloor 0,1 \rfloor$.

La fonction f est deux fois dérivable sur $\lfloor 0,1 \rfloor$ avec $f'(x)=\frac{1}{2}(4x^3+1)$ et $f''(x)=6x^2\geq 0$ donc f est convexe sur $\lfloor 0,1 \rfloor$ (propriété 4).

On constate que $f(0)=g(0)=0$ et $f(1)=g(1)=1$ donc la courbe C_f et la droite(D) sont sécantes en $O(0,0)$ et $A(1,1)$.

Comme la fonction f est convexe sur $\lfloor 0,1 \rfloor$, la sécante $\lfloor OA \rfloor$ est au-dessus de C_f (propriété 1).

METHODE 6 : Comment démontrer une inégalité en utilisant la convexité

■ Principe

On utilise une des quatre inégalités de convexité en précisant f et sa convexité.

Inégalité 1 : Si une fonction f est convexe sur un intervalle I alors pour tous réels a et b de I et tout réel λ de l'intervalle $\lfloor 0,1 \rfloor$ on a :

$$f(\lambda a+(1-\lambda)b)\leq \lambda f(a)+(1-\lambda)f(b).$$

Inégalité 2 : Si une fonction f est concave sur un intervalle I alors pour tous réels a et b de I et tout réel λ de l'intervalle $\lfloor 0,1 \rfloor$ on a :

$$\lambda f(a)+(1-\lambda)f(b)\leq f(\lambda a+(1-\lambda)b).$$

Inégalité 3 : Pour n entier supérieur ou égal à 1, si une fonction f est convexe sur un intervalle I alors pour tous réels $x_1, \cdots, x_n$ de I et tous réels strictement positifs $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ tels que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$ on a :

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n).$$

Inégalité 4 : Pour n entier supérieur ou égal à 1, si une fonction f est concave sur un intervalle I alors pour tous réels $x_1, \cdots, x_n$ de I et tous réels strictement positifs $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ tels que $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$ on a :

$$\lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n) \leq f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n).$$

REMARQUE : Ces inégalités sont démontrées aux exercices 13 et 20.

■ Cas d'application

Il faut penser à cette méthode quand on vous demande d'étudier la convexité d'une fonction, puis de démontrer une inégalité avec des sommes de coefficients qui font 1.

■ **Exemple :** *On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^4$.*

1) Etudiez la convexité de f.

2) Montrez que pour tout x réel, $3\left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\right)^4 - 2 \leq x^4$.

3) Montrez que pour tout entier naturel n non nul et pour tout x réel :

$$n\left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}\right)^4 \leq x_1^4 + \cdots + x_n^4.$$

1) La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x) = 4x^3$ et $f''(x) = 12x^2 \geq 0$ donc f est convexe sur $\mathbb{R}$.

2) Pour tout x réel on a : $3\left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\right)^4 - 2 \leq x^4 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}\right)^4 \leq \frac{x^4 + 2}{3} = \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{3}$.

Cette inégalité peut s'écrire $f\left(\frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \times 1\right) \leq \frac{1}{3}f(x) + \frac{2}{3}f(1)$, c'est donc un cas particulier de l'inégalité de convexité 1, qui est bien sûr vraie puisque f est convexe sur $\mathbb{R}$.

3) Pour tout entier naturel n non nul et pour tout x réel :

$$n\left(\frac{x_1 + \cdots x_n}{n}\right)^4 \leq x_1^4 + \cdots + x_n^4 \Leftrightarrow \left(\frac{x_1 + \cdots x_n}{n}\right)^4 \leq \frac{x_1^4 + \cdots + x_n^4}{n} = \frac{1}{n}x_1^4 + \cdots + \frac{1}{n}x_n^4.$$

Cette inégalité peut s'écrire $f\left(\frac{1}{n}x_1 + \cdots + \frac{1}{n}x_n\right) \leq \frac{1}{n}f(x_1) + \cdots + \frac{1}{n}f(x_n)$, c'est donc un cas particulier de l'inégalité de convexité 3, qui bien sûr est vraie puisque f est convexe sur $\mathbb{R}$.

2. Comportement asymptotique d'une fonction

Etudier le comportement asymptotique d'une fonction consiste à se demander comment elle se comporte au voisinage de $\pm\infty$ (limites, asymptotes,...).

On commence par regarder si la limite de la fonction se « voit » en utilisant des opérations du style aux suivantes $(-2)(-\infty)=+\infty$ ou $(-\infty)^2=+\infty$ ou $(-\infty)+(-\infty)=-\infty$ ou $\sqrt{+\infty}=+\infty$...

Malheureusement on se retrouve souvent face à des opérations illicites que l'on appelle formes indéterminées (FI) dont les principales en Terminale sont les suivantes : $\frac{0}{0}$; $\frac{a}{0}$ avec $a\neq 0$; $(+\infty)+(-\infty)$; $\frac{\infty}{\infty}$; $0\times(\infty)$.

Il se peut aussi qu'une fonction n'ait pas de limite en $\pm\infty$, mais que l'expression dans laquelle elle figure en ait une (par exemple, $f(x)=\sin x$ n'a pas de limite en $+\infty$, mais $g(x)=x+\sin x$ en a une (méthode 7)).

Nous allons vous donner des méthodes pour lever ces cas indéterminés.

METHODE 7 : Comment lever une forme indéterminée en l'infini en factorisant par le terme dominant

■ Principe

On met les termes de plus haut degré en facteurs, on simplifie et on tombe la plupart du temps sur une forme qui n'est plus indéterminée.

■ Cas d'application

Cette méthode « marche » toujours avec les fonctions rationnelles.

■ **Exemple :** *On considère la fonction f définie par* $f(x)=\frac{x^2-3x}{x+1}$.

Etudiez le comportement de f au voisinage de $\pm\infty$.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{3}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to\pm\infty} x \text{ car } \lim_{x\to\pm\infty}\frac{3}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0.$$

Finalement $\lim_{-\infty} f=-\infty$ et $\lim_{+\infty} f=+\infty$.

METHODE 8 : Comment lever une forme indéterminée en l'infini par comparaison

■ Rappels

On rappelle les 4 théorèmes de comparaison ($a = \pm\infty$ ou a est un réel).

Si pour tout x d'un intervalle de borne a ou contenant a :

1) $u(x) \leq f(x)$ et si $\lim\limits_{x \to a} u(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.

2) $f(x) \leq v(x)$ et si $\lim\limits_{x \to a} v(x) = -\infty$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

3) $|f(x) - L| \leq u(x)$ et $\lim\limits_{x \to a} u(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$.

4) $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$ et $\lim\limits_{x \to a} u(x) = \lim\limits_{x \to a} v(x) = L$ alors $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$.

■ Principe

On montre une inégalité et l'on applique le théorème « qui va bien ».

■ Cas d'application

Cette méthode « marche » souvent lorsque la fonction comporte des sinus ou des cosinus car ces deux fonctions sont à valeurs dans $[-1;1]$, donc bornées.

■ **Exemple :** *Etudiez le comportement en l'infini de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x + \sin x$.*

On a : $-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow x - 1 \leq x + \sin x \leq x + 1$.

Comme $f(x) \leq x + 1$ avec $\lim\limits_{x \to -\infty} x + 1 = -\infty$, par comparaison (théorème 2) :

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

Comme $x - 1 \leq f(x)$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} x - 1 = +\infty$, par comparaison (théorème 1) :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

METHODE 9 : Comment lever une forme indéterminée par changement de variable pour se ramener à une limite connue

■ Principe

L'objectif est de se ramener à une limite connue en posant u égal à une expression dépendant de x.

■ Cas d'application

On se ramène à $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin u}{u}=1$ qui est pour l'instant la seule limite connue.

■ **Exemple :** *Etudiez le comportement en l'infini de f définie sur* $\mathbb{R}^*$ *par* $f(x)=x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

On pose $u=\dfrac{1}{x}$.

Si $x\to\pm\infty$ alors $u\to 0$ donc $\lim\limits_{x\to\pm\infty}x\sin\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=\underbrace{\dfrac{\sin 0}{0}}_{\text{Ecriture interdite à remplacer par la limite qui suit.}}=\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\sin u}{u}=1$.

REMARQUE : ***Il ne faut surtout pas écrire sur la feuille*** $\dfrac{\sin 0}{0}$, *mais rien ne vous empêche de le faire au brouillon pour vous faciliter l'écriture de la limite correspondante et c'est même fortement conseillé dans le cadre de cette méthode !*

METHODE 10 : Comment lever une forme indéterminée en l'infini en utilisant une expression conjuguée

■ Rappel

Les expressions $a(x)\sqrt{u(x)}+b(x)\sqrt{v(x)}$ et $a(x)\sqrt{u(x)}-b(x)\sqrt{v(x)}$ sont dites conjuguées et leur produit vaut $a^2u(x)-b^2v(x)$, donc s'exprime sans les radicaux initiaux.

■ Principe

On multiplie le numérateur et le dénominateur d'une forme indéterminée par l'expression conjuguée, pour lever l'indétermination.

■ Cas d'application

Lorsqu'une fonction comporte un (des) terme(s) irrationnel(s).

■ **Exemple :** *Etudiez le comportement en* $+\infty$ *de la fonction f définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$.

Comme l'expression $x+\sqrt{x^2+1}$ n'est jamais nulle, on peut écrire :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 0.$$

METHODE 11 : Comment montrer qu'une droite est asymptote à une courbe en l'infini et étudier leurs positions relatives

■ Rappels

Si $\lim_{x\to+\infty} f = b$ alors la droite d'équation $y = b$ est asymptote à (C_f) en $+\infty$.

Si $\lim_{x\to-\infty} f = b$ alors la droite d'équation $y = b$ est asymptote à (C_f) en $-\infty$.

Si $\lim_{x\to+\infty} f(x)-(ax+b) = 0$ alors la droite d'équation $y = ax+b$ est asymptote à (C_f) en $+\infty$ (approfondissement).

Si $\lim_{x\to-\infty} f(x)-(ax+b) = 0$ alors la droite d'équation $y = ax+b$ est asymptote à (C_f) en $-\infty$ (approfondissement).

■ Principe

On applique une des propriétés précédentes pour prouver qu'une droite est asymptote.

On étudie enfin le signe de $f(x)-y$ (prendre $y = b$ ou $y = ax+b$) pour déterminer la position relative de la courbe et de son asymptote puis on présente le tout dans un tableau pour faciliter le travail du correcteur.

■ **Exemple :** *On considère la fonction f définie par* $f(x) = \frac{x^2-3x}{x+1}$.
Montrez que la droite (Δ) *d'équation* $y = x-4$ *est asymptote oblique à la courbe représentative* (C_f) *de f en* $\pm\infty$ *et étudiez la position relative de* (C_f) *et de* (Δ).

$$f(x)-(x-4) = \frac{x^2-3x}{x+1}-(x-4) = \frac{x^2-3x-(x-4)(x+1)}{x+1} = \frac{4}{x+1}.$$

On a $\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-(x-4)\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{4}{x+1} = 0$ donc (Δ) est asymptote à (C_f) en $\pm\infty$.

L'expression $f(x)-(x-4) = \frac{4}{x+1}$ est du signe de $(x+1)$ donc on a :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)-(x-4)$	$-$	‖	$+$
Position relative	(C_f) en dessous de (Δ)	‖	(C_f) au-dessus de (Δ)

3. Comportement en un point d'une fonction

Etudier le comportement local d'une fonction consiste à se demander comment elle se comporte au voisinage d'une valeur réelle α (limite, continuité, dérivabilité, tangente, approximation affine, point d'inflexion, solution de f(x) = k).

Pour cela on remplace x par α dans l'expression de la fonction.

Certaines opérations sont connues du style $(-2)(-\infty)=+\infty$ ou $(-\infty)^2=+\infty$ ou $(-\infty)+(-\infty)=-\infty$ ou $\sqrt{+\infty}=+\infty$...

D'autres ne sont pas connues et dépendent de la fonction et on les appelle des formes indéterminées (FI).

Les FI essentielles sont les mêmes que dans le paragraphe précédent, c'est-à-dire :

$$\frac{0}{0}\ ;\ \frac{a}{0} \text{ avec } a\neq 0;\ \ (+\infty)+(-\infty)\ ;\ \frac{\infty}{\infty}\ ;\ 0\times(\infty).$$

Il se peut aussi qu'une fonction n'ait pas de limite en α, mais que l'expression dans laquelle elle figure en ait une (par exemple, $f(x)=\sin\frac{1}{x}$ n'a pas de limite en 0, mais $g(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$ en a une (méthode 17)).

Nous allons donner des méthodes pour lever ces cas indéterminés.

METHODE 12 : Comment lever une forme indéterminée du type $\frac{a}{0}$ avec $a\neq 0$ ou $\frac{\infty}{0}$ en $\alpha\in\mathbb{R}$

■ Principe

1) Cette forme est « semi » indéterminée car on sait que la limite est infinie.
2) Pour choisir entre $+\infty$ et $-\infty$, on applique la règle des signes, après s'être demandé si le dénominateur tend vers 0^+ ou 0^-.

Souvent, il faudra étudier $\lim\limits_{\substack{x\to\alpha\\x<\alpha}}$ et $\lim\limits_{\substack{x\to\alpha\\x>\alpha}}$.

■ Interprétation géométrique

Lorsque $\lim\limits_{\substack{x\to\alpha\\x<\alpha}} f(x)=\pm\infty$ et (ou) $\lim\limits_{\substack{x\to\alpha\\x>\alpha}} f(x)=\pm\infty$ la droite d'équation $x=\alpha$ est asymptote verticale à (C_f).

■ **Exemple :** *Etudiez le comportement de f définie par $f(x)=\frac{x-5}{x^2-4}$ au voisinage de –2. Que peut-on en déduire ?*

Le tableau suivant donne le signe de x^2-4 :

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
x^2-4		+	0	–	0	+	

On déduit de cela :

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to -2^-} x-5=-3\\ \lim\limits_{x\to -2^-} x^2-4=0^+\end{cases} \Rightarrow \lim_{-2^-} f=-\infty \text{ et } \begin{cases}\lim\limits_{x\to -2^+} x-5=-3\\ \lim\limits_{x\to -2^+} x^2-4=0^-\end{cases} \Rightarrow \lim_{-2^+} f=+\infty .$$

On déduit de cela que la droite d'équation $x=-2$ est asymptote verticale à la courbe représentative de (C_f).

METHODE 13 : Comment lever une forme indéterminée $\frac{0}{0}$ en $\alpha\in\mathbb{R}$ avec une simplification

■ **Principe**

On simplifie l'expression, puis on remplace x par α dans l'expression simplifiée pour trouver la limite cherchée.

■ **Cas d'application**

Lorsque la fonction est rationnelle.

■ **Exemple :** *Etudiez le comportement de la fonction f définie par $f(x)=\frac{2x^2+x-21}{x^2-9}$ au voisinage de 3.*

$$\lim_{x\to 3} f(x)=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(2x+7)}{(x-3)(x+3)}=\lim_{x\to 3}\frac{2x+7}{x+3}=\frac{13}{6} .$$

REMARQUE (approfondissement) : Dans le cas de cet exercice, on dit que la fonction g définie sur $\mathbb{R}/\{3\}$ par $g(x)=f(x)$ telle que $g(3)=\frac{13}{6}$ est le prolongement par continuité de f en 3.

METHODE 14 : Comment lever une forme indéterminée en $\alpha \in \mathbb{R}$ avec une expression conjuguée et une simplification

■ **Principe**

On multiplie par l'expression conjuguée pour faire apparaître la simplification.

■ **Cas d'application**

Lorsqu'une fonction comporte des termes irrationnels.

■ **Exemple :** *Etudiez le comportement de la fonction* f *définie par* $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$ *au voisinage de 1.*

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=\lim_{x\to1}\frac{((x+3)-4)}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}$$

$$=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=\lim_{x\to1}\frac{1}{\left(\sqrt{x+3}+2\right)}=\frac{1}{4}.$$

METHODE 15 : Comment lever une forme indéterminée $\frac{0}{0}$ en $\alpha \in \mathbb{R}$ avec un taux d'accroissement

■ **Principe**

On interprète la limite comme celle d'un taux d'accroissement d'une fonction dérivable en α. Ainsi, la limite cherchée est $f'(\alpha)$.

■ **Cas d'application**

Lorsque le dénominateur est de la forme $ax+b$ (mettre a en facteur s'il est non nul différent de 1).

■ **Exemple :** *Reprenez l'exemple de la méthode précédente avec cette méthode.*

Posons $g(x)=\sqrt{x+3}$.

Comme g est dérivable sur $]-3;+\infty[$ (donc en 1) avec $g'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+3}}$, on a :

$$\lim_{x\to1}\frac{g(x)-g(1)}{x-1}=g'(1)=\frac{1}{2\sqrt{1+3}}=\frac{1}{4}.$$

METHODE 16 : Comment lever une forme indéterminée en $\alpha \in \mathbb{R}$ en se ramenant à une limite connue

■ **Principe**

On se ramène à une limite connue par changement de variable.

■ **Cas d'application**

Pour, l'instant, on se ramène à $\lim\limits_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}=1$ qui est la seule limite connue.

■ **Exemple :** *Etudiez le comportement de la fonction f définie par* $f(x)=\frac{\sin(2(x-1))}{x-1}$ *au voisinage de 1.*

On pose $u=2(x-1)$ $\left(\text{ce qui donne } \frac{u}{2}=x-1\right)$ car quand $x\to 1$, $u\to 0$.

De là, $\lim\limits_{x\to 1}\frac{\sin(2(x-1))}{x-1}=\lim\limits_{u\to 0}\frac{\sin u}{\frac{u}{2}}=\lim\limits_{u\to 0}2\frac{\sin u}{u}=2$. (Car $\lim\limits_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}=1$).

Astuce : Au brouillon, on peut aussi travailler avec l'écriture interdite pour que tout soit plus clair et plus rapide, ce qui donne :

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sin 2(x-1)}{x-1}==\lim_{x\to 1}2\frac{\sin 2(x-1)}{2(x-1)}=2\times\underbrace{\frac{\sin 0}{0}}_{\substack{\text{Ecriture interdite}\\ \text{à remplacer par}\\ \text{la limite qui suit}}}=\lim_{u\to 0}2\frac{\sin u}{u}=2.$$

Au niveau de la rédaction, on enlève l'écriture interdite et c'est correct.

METHODE 17 : Comment lever une forme indéterminée en $\alpha \in \mathbb{R}$ en utilisant un théorème de comparaison

■ **Principe**

On utilise les théorèmes de la méthode 7 car ils sont aussi valables au voisinage d'un point.

■ **Cas d'application**

Cette méthode « marche » souvent lorsque la fonction comporte des sinus ou des cosinus car ces deux fonctions sont à valeurs dans $[-1;1]$, donc bornées.

■ **Exemple :** *Etudiez le comportement de la fonction f définie par* $f(x)=x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ *au voisinage de 0.*

Sur $]-\infty;0[$ et sur $]0;+\infty[$ on a $-1 \leq \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$ donc en multipliant membre à membre par x^2 positif ou nul, on obtient $-x^2 \leq x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leq x^2$.

Finalement comme $-x^2 \leq f(x) \leq x^2$ avec $\lim\limits_{x\to 0} -x^2 = \lim\limits_{x\to 0} x^2 = 0$, par comparaison (théorème des gendarmes), on a $\lim\limits_{0} f = 0$.

METHODE 18 : Comment étudier la continuité et la dérivabilité d'une fonction en $\alpha \in \mathbb{R}$

■ Rappels

Si $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = f(\alpha)$ alors f est continue en α.

Si $\lim\limits_{x\to\alpha} \frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} = \beta$ avec $\beta \in \mathbb{R}$ (limite finie) alors f est dérivable en α et l'on a $f'(\alpha) = \beta$.

Si f est dérivable en α alors elle est continue en α.

■ Principe

On applique les résultats précédents.

■ Cas d'application

Lorsqu'une fonction est définie par morceaux, il y a toujours des problèmes de continuité et de dérivabilité aux valeurs « charnières ».

■ **Exemple :** *On considère la fonction f définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$\begin{cases} f(x) = -x^2 + 1 & \text{si } x \in [-1;1] \\ f(x) = x^2 - 1 & \text{si } x \in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[\end{cases}$$

Etudier la continuité et la dérivabilité de la fonction en $x = 1$.

On a $\lim\limits_{1^-} f = \lim\limits_{x\to 1^-} -x^2 + 1 = 0$ et $\lim\limits_{1^+} f = \lim\limits_{x\to 1^+} x^2 - 1 = 0$.

Donc $\lim\limits_{1} f = 0 = f(1)$ et f est continue en 1.

On a $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{f(x)-f(1)}{(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{-x^2+1}{(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{(x-1)(-x-1)}{(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1^-} (-x-1) = -2$.

On a $\lim\limits_{x\to 1^+} \frac{f(x)-f(1)}{(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{x^2-1}{(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1^+} (x+1) = 2$.

La limite à gauche est différente de la limite à droite donc le taux d'accroissement de f n'a pas de limite en 1 et la fonction n'y est pas dérivable.

REMARQUE : Comme nous le verrons dans la méthode suivante (C_f) n'a pas de tangente au point d'abscisse 1, mais deux demi-tangentes. Celle de gauche a pour coefficient directeur –2 et celle de droite a pour coefficient directeur 2. On dit que le point d'abscisse 1 est un point anguleux.

METHODE 19 : Comment déterminer la tangente à (C_f) en un point d'abscisse $\alpha \in \mathbb{R}$

■ Rappels

Si f est dérivable en α alors la tangente à (C_f) au point d'abscisse α a pour équation réduite : $y = f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)$.

Si $\lim\limits_{x\to\alpha}\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha} = \infty$ alors f n'est pas dérivable en α mais (C_f) admet une tangente verticale au point d'abscisse α.

Si le taux d'accroissement admet une limite à gauche, différente de la limite à droite, alors le point d'abscisse α de (C_f) est un point anguleux ayant deux demi-tangentes (voir exemple de la méthode 18 - Approfondissement).

■ Principe

On applique les théorèmes précédents.

■ **Exemple :** *Etudiez la tangente à (C_f) aux points d'abscisses 0 et 1 pour la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{x}$.*

La fonction f est définie sur $[0;+\infty[$ **mais n'est pas dérivable en 0.**

Cependant $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x}}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ donc (C_f) admet une tangente verticale (d'équation x = 0) au point d'abscisse 0.

D'autre part, pour $x > 0$ on a $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$.

On en déduit que $f'(1)=\dfrac{1}{2}$ et donc que (C_f) admet une tangente d'équation $y=\dfrac{1}{2}(x-1)+1=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2}$ au point d'abscisse 1.

METHODE 20 : Comment déterminer l'approximation affine d'une fonction en $\alpha \in \mathbb{R}$

■ Rappels

Si f est dérivable en α alors l'approximation affine de f en α est la fonction g définie par $g(x)=f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha)$.

■ Interprétation graphique

Considérer que numériquement, on a $f(x)=g(x)$ pour x voisin de α, revient à considérer que sur le plan graphique, la courbe représentative de f et sa tangente au point d'abscisse α sont proches.

■ Principe

On applique la formule « texto ».

■ **Exemple :** *Donnez une approximation affine de la fonction f définie par $f(x)=x^3+2x^2+1$ en 2. En déduire une valeur approchée de $f(2{,}001)$ sans utiliser la calculatrice puis la comparer à la valeur exacte de $f(2{,}001)$ que donne votre calculatrice.*

L'approximation demandée est $g(x)=f'(2)(x-2)+f(2)$. Comme $f(2)=17$ et $f'(2)=20$ puisque $f'(x)=3x^2+4x$, on a $g(x)=20x-23$.
La valeur approchée de $f(2{,}001)$ demandée est $g(2{,}001)=40{,}02-23=17{,}02$ et la calculatrice donne $f(2{,}001)=17{,}020008001$, ce qui prouve que la valeur approchée donnée par l'approximation affine est excellente.

METHODE 21 : Comment déterminer un point d'inflexion

■ Rappels

Définition : Un point d'inflexion de la courbe représentative d'une fonction f est un point où la tangente traverse la courbe.

Propriété : Si une fonction f est deux fois dérivable sur un intervalle $]a;b[$ et que pour $c \in]a;b[$ f" s'annule en changeant de signe alors le point $I(c,f(c))$ est un point d'inflexion de la courbe représentative de f.

■ Principe

Si on donne la représentation graphique d'une fonction f sans donner $f(x)$, on applique la définition pour déterminer le(s) point(s) d'inflexion, sinon on détermine $f''(x)$ lorsqu'elle est deux fois dérivable et on applique la propriété.

■ **Exemple :** *Déterminez le(s) point(s) d'inflexion de la courbe représentative (C_f) de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 3x^2$.*

La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x) = 3x^2 + 6x$ et $f''(x) = 6x + 6$.
Par conséquent la fonction f" s'annule en -1 en changeant de signe donc $I(-1, f(-1) = 2)$ est le seul point d'inflexion de (C_f).

METHODE 22 : Comment montrer qu'une équation $f(x) = k$ où $k \in \mathbb{R}$ admet une solution unique et en donner une valeur approchée

■ Rappel

Théorème des valeurs intermédiaires pour les fonctions strictement monotones
Si f est ***continue*** et ***strictement monotone*** d'un intervalle I sur un intervalle $J = f(I)$ alors l'équation $f(x) = k$ où $k \in J$ admet une solution unique sur I.

REMARQUE : Si une fonction dérivable sur un intervalle I a une dérivée de signe constant qui ne s'annule pas sur un intervalle de I, alors elle est strictement monotone sur I.

■ Principe

On applique le théorème précédent pour montrer que l'équation admet une solution unique et l'on en donne une valeur approchée à la calculatrice.

■ Cas d'application

Lorsque l'on vous demande de montrer qu'une équation admet une solution unique, puis que l'on vous en demande une approximation, c'est que l'on ne sait pas la résoudre et donc qu'il faut appliquer cette méthode.

■ **Exemple :** *Montrez que l'équation $x^3 + x = 4$ admet une solution unique α sur l'intervalle $\lfloor 1;2 \rfloor$. Donnez une valeur approchée de α à 0,00001 près.*

Posons $f(x) = x^3 + x$.
Résoudre $x^3 + x = 4$ sur $\lfloor 1;2 \rfloor$ revient à résoudre $f(x) = 4$ sur $\lfloor 1;2 \rfloor$.
La fonction f est dérivable sur $\lfloor 1;2 \rfloor$ et $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$, donc f est strictement croissante de $I = \lfloor 1;2 \rfloor$ sur $J = \lfloor 2;10 \rfloor$.
La fonction f est continue et strictement monotone de I sur J.
Comme $4 \in J$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires pour les fonctions strictement monotones, l'équation $f(x) = 4$ admet une solution unique α sur I.

Avec la calculatrice, on obtient $\alpha = 1{,}37879$.

4. Comment procéder avec des fonctions spécifiques

En général, vous n'aimez pas les fonctions de ce paragraphe car vous manquez de méthodes pour les étudier.
C'est bien pour cela que l'on va vous en donner.

METHODE 23 : Comment étudier une fonction définie par morceaux

■ **Principe**
On étudie le comportement global de la fonction sur chaque morceau et son comportement local au voisinage des valeurs « charnières ».

■ **Exemple :** *On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :*

$$\begin{cases} f(x)=-x^2+1 & \text{si } x\in[-1;1] \\ f(x)=x^2-1 & \text{si } x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[\end{cases}$$

1) Montrez que f est paire, puis étudiez sa continuité et sa dérivabilité.
2) Dressez le tableau de variations de f sur $[0;+\infty[$.
3) Tracez la courbe représentative de f.

1) L'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$ qui est symétrique par rapport à 0.
D'autre part :
- Si $x\in[-1;1]$, $-x\in[-1;1]$ et $f(-x)=-(-x)^2+1=-x^2+1=f(x)$
- Si $x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$, $-x\in]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ et $f(-x)=(-x)^2-1=x^2-1=f(x)$

Finalement, f est paire et donc (C_f) est symétrique par rapport à (Oy).

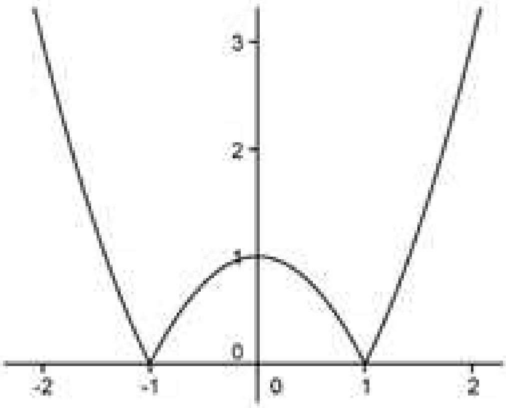
On a vu dans l'exemple de la méthode 18 que f est continue, non dérivable en 1 et que le point d'abscisse 1 de (C_f) est un point anguleux, donc comme f est paire, elle est continue non dérivable en -1 et le point d'abscisse -1 de (C_f) est également un point anguleux.

2) Si $x\in[0;1[$ alors $f'(x)=-2x<0$ sur $[0;1[$.
Si $x\in]1;+\infty[$ alors $f'(x)=2x>0$ sur $]1;+\infty[$.

On en déduit le tableau de variation suivant sur $[0;+\infty[$:

x	0		1		$+\infty$
f'		$-$	$\|\|$	$+$	
f	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3) On trace la courbe sur $\left[0;+\infty\right[$, puis on complète par symétrie par rapport à l'axe des ordonnées puisque f est paire et l'on obtient :



METHODE 24 : Comment étudier une fonction avec valeur(s) absolue(s)

■ Principe

Aucun théorème ne permet de dériver directement la fonction.
Cela conduit à la définir par morceaux en utilisant la propriété suivante :

$$\text{si } U(x) \geq 0 \text{ alors } |U(x)| = U(x)$$

$$\text{si } U(x) \leq 0 \text{ alors } |U(x)| = -U(x).$$

On se ramène ainsi au cas précédent, ce qui permet l'étude de la fonction.

■ **Exemple :** *Etudiez la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = |x^2 - 1|$.

On applique la propriété rappelée ce qui amène à étudier la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = -x^2 + 1 & \text{si } x \in [-1;1] \\ f(x) = x^2 - 1 & \text{si } x \in \left]-\infty;-1\right[\cup \left]1;+\infty\right[\end{cases}$.

Vous avez tous reconnu la fonction que l'on a étudiée dans l'exemple de la méthode précédente... On vous renvoie donc à sa résolution.

METHODE 25 : Comment s'y prendre avec une fonction trigonométrique

■ Rappels

1) On appelle période d'une fonction f, tout réel T>0 tel que pour tout x de l'ensemble de définition de f : $f(x+T)=f(x)$.

Quand elle existe, la période la plus intéressante est la plus petite.

REMARQUE : Les fonctions constantes n'ont pas de plus petite période.

2) Pour tracer la courbe représentative d'une fonction f, périodique de période T, il suffit de la tracer sur un intervalle de longueur la période T, et de compléter par des translations de vecteurs $k\vec{Ti}$, où $k \in \mathbb{Z}$.
Pratiquement, cela revient à répéter à gauche et à droite le motif correspondant au tracé de la courbe sur un intervalle de longueur T.

3) Les fonctions $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$ sont définies sur $\mathbb{R}$ et périodiques de période 2π, alors que $x \mapsto \tan x$ est définie sur $\mathbb{R}-\left\{(2k+1)\frac{\pi}{2} \text{ où } k \in \mathbb{Z}\right\}$ avec une période égale à π.

■ Principe d'étude

1) On réduit l'intervalle d'étude en interprétant graphiquement les propriétés algébriques de la fonction qui mettent en évidence une période et des symétries.

2) On étudie la fonction sur cet intervalle réduit.

3) On trace la courbe de la fonction sur cet intervalle puis on la complète avec ses propriétés géométriques (mises en évidence au 1).

■ **Exemple :** *Etudiez la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=2\cos x-\cos 2x$.*

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

a) $f(x+2\pi)=2\cos(x+2\pi)-\cos(2x+4\pi)=2\cos x-\cos 2x=f(x)$.

On en déduit que 2π est une période de f.

b) $f(-x)=2\cos(-x)-\cos(-2x)=2\cos x-\cos 2x=f(x)$ donc f est paire.

Ainsi, si la courbe représentative (C_f) de f est tracée sur $[0;\pi]$, on l'obtient sur $[-\pi;\pi]$ par symétrie par rapport à (O_y) (f est paire), puis sur $\mathbb{R}$ par translations de vecteurs $2k\pi\vec{i}$, où $k \in \mathbb{Z}$ (f est périodique de période 2π).

On commence donc par étudier la fonction f sur $[0;\pi]$.

La fonction f est dérivable sur $[0;\pi]$ et :

$$f'(x) = -2\sin x + 2\sin 2x = -2\sin x + 4\sin x\cos x = 2\sin x(2\cos x - 1).$$

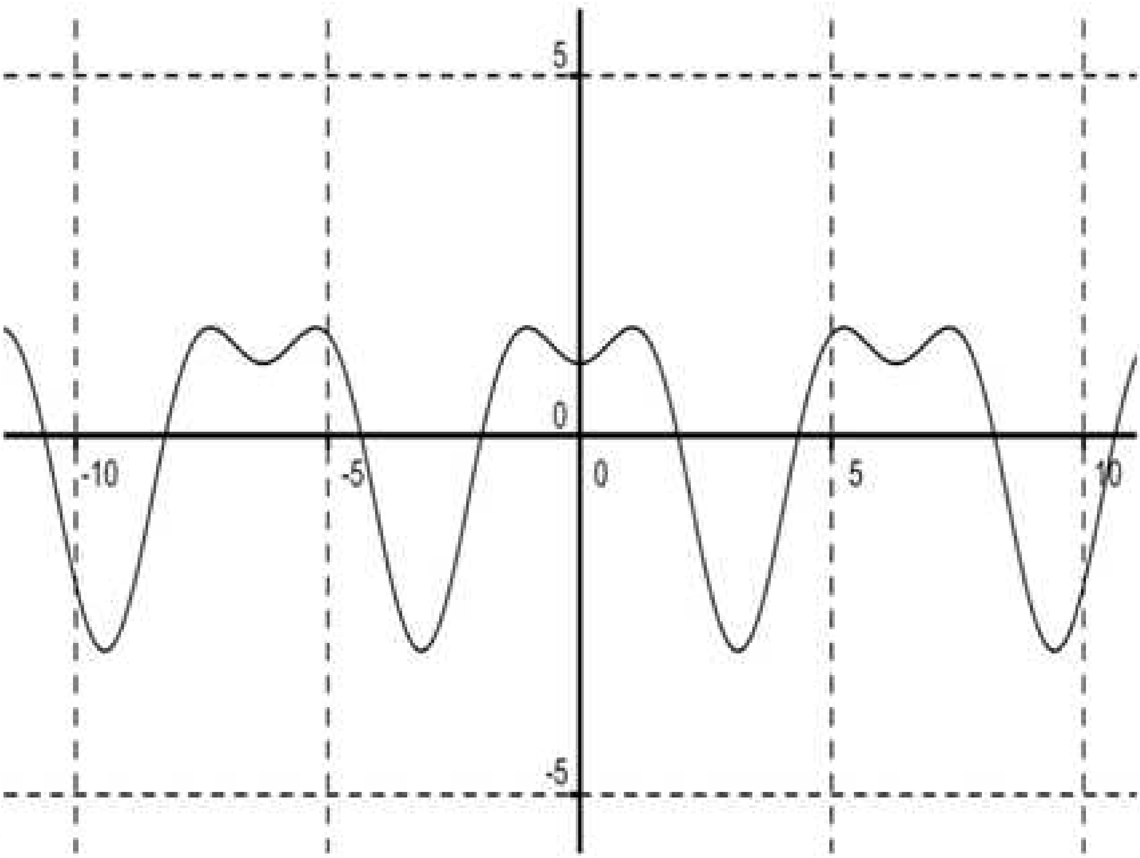
Sur $[0;\pi]$, $2\sin x \geq 0$, donc sur cet intervalle $f'(x)$ est du signe de $2\cos x - 1$.

On a $2\cos x - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \cos x \leq \frac{1}{2}$, donc si $x \in \left[0;\frac{\pi}{3}\right]$ alors $f'(x) \geq 0$ et si $x \in \left[\frac{\pi}{3};\pi\right]$ alors $f'(x) \leq 0$ (ce qui justifie le signe de $f'(x)$ dans le tableau de variations).

On en déduit le tableau de variation suivant :

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	
f	1	↗	$\frac{3}{2}$	↘	-3

Compte tenu des propriétés géométriques de (C_f), on obtient :



METHODE 26 : Comment étudier une fonction irrationnelle

■ Principe

Lorsque l'on est gêné par une étude de signe (dérivée, position relative), ou le calcul d'une limite, il faut penser à l'expression conjuguée.

■ **Exemple :** *Dressez le tableau de variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par* $f(x)=x+\sqrt{x^2+4}$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+4}}=\dfrac{\sqrt{x^2+4}+x}{\sqrt{x^2+4}}$, qui est du signe du numérateur car le dénominateur est toujours strictement positif.

Sur $[0;+\infty[$, on a $\sqrt{x^2+4}+x>0$, donc $f'>0$ sur cet intervalle.

Sur $]-\infty;0]$, on a $\sqrt{x^2+4}-x>0$, $\sqrt{x^2+4}+x$ est du signe donc du produit suivant :

$$\left(\sqrt{x^2+4}-x\right)\left(\sqrt{x^2+4}+x\right)=x^2+4-x^2=4.$$

On en déduit que $f'>0$ sur l'intervalle $]-\infty;0]$.

Finalement, $f'>0$ sur $\mathbb{R}$ et f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

D'autre part $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ sans aucun problème car il n'y a pas de forme indéterminée.

En $-\infty$, on a une forme indéterminée du type $(-\infty)+(+\infty)$.
Il suffit d'utiliser l'expression conjuguée de f pour s'en sortir, en effet :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(x+\sqrt{x^2+4}\right)\left(x-\sqrt{x^2+4}\right)}{\left(x-\sqrt{x^2+4}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-4}{\left(x-\sqrt{x^2+4}\right)}=0.$$

Finalement, on obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	0	$\nearrow$	$+\infty$

5. Comment utiliser la méthode d'Euler

La méthode d'Euler permet d'obtenir des valeurs approchées d'images de réels par une fonction f inconnue à partir de renseignements connus sur sa valeur en un point $(y_0 = f(x_0))$ et sur certaines propriétés de sa fonction dérivée ($f'(x)$ connue, $f'(x) = kf(x)$ avec $k \in \mathbb{R}$ ...).

Les approximations successives reposent sur le fait que pour h positif ou négatif voisin de 0 on a :

$$f(\alpha + h) \approx f'(\alpha)h + f(\alpha) \text{ (approximation affine de f en } \alpha\text{) (i).}$$

Les étapes permettant d'obtenir ces approximations sur $[x_0, b]$ sont les suivantes :

1) On « découpe » l'intervalle $[x_0, b]$ en n morceaux de même longueur, ce qui revient par exemple à prendre un pas $h = \frac{b - x_0}{n} > 0$ (de toute façon positif).

2) On utilise (i) avec $\alpha = x_0$ ce qui permet d'obtenir l'approximation :

$$f(x_0 + h) \approx f'(x_0)h + f(x_0) = f'(x_0)h + y_0.$$

En posant $x_1 = x_0 + h$, on obtient $f(x_1) \approx f'(x_0)h + y_0$ et à l'étape suivante on remplace $f(x_1)$ par son approximation $y_1 = f'(x_0)h + y_0$.

3) Cela étant, en posant $x_2 = x_1 + h$, en réutilisant (i) et en notant y_2 l'approximation de $f(x_2)$ obtenue il vient :

$$f(x_2) = f(x_1 + h) \approx f'(x_1)h + f(x_1) \approx f'(x_1)h + y_1 = y_2.$$

4) En généralisant le procédé, pour k entier de l'intervalle $[0, n-1]$ on obtient :

$$\begin{cases} x_0 \text{ valeur connue} \\ y_0 = f(x_0) \text{ valeur connue} \\ x_{k+1} = x_k + h \\ y_{k+1} = f'(x_k)h + y_k \end{cases}.$$

REMARQUES : 1) Théoriquement, les approximations sont d'autant plus précises que h est petit et donc que n est grand, mais pratiquement plus n est grand, plus les machines accumulent les erreurs d'arrondi, donc il ne faut pas prendre n trop grand.

2) Pour obtenir des approximations des images sur l'intervalle $[a, x_0]$ on prend par exemple le pas $h = \frac{a - x_0}{n} < 0$ (de toute façon négatif) et on applique le procédé.

3) Pour obtenir des approximations de part et d'autre de x_0, c'est-à-dire sur un intervalle $\lfloor a,b \rfloor$ le contenant, on peut construire une suite d'images avec un pas h positif pour « aller » jusqu'à « b », puis prendre le pas –h pour aller jusqu'à « a » comme on l'a fait dans l'algorithme de l'exemple de la méthode 27.

4) Lorsque l'on relie les points $M_k(x_k, y_k)$ on obtient une courbe « approchée » de la courbe représentative de f.

METHODE 27 : Comment utiliser la méthode d'Euler avec le tableur Excel

■ Principe

Pour que tout soit bien clair on va vous expliquer comment on complète la feuille d'Excel suivante :

	A	B	C	D
1	**Pas**	**Dérivée de f**	**x**	**f(x)**
2				
3				
4				
5				
6				

On entre :
1) Le pas h en A2.
2) La dérivée en B2, puis on copie et on colle vers le bas.
3) Le nombre dont on connaît l'image en C2, et son image en D2.
4) La formule « =C2+$A$2 » en C3, puis on copie et on colle vers le bas.
5) La formule « =B2*$A$2+D2 » en D3, puis on copie et on colle vers le bas.

■ **Exemple :** *On considère la fonction f telle que $f(0)=1$ et $f'(x)=2x$.*

1) Adaptez la feuille d'Excel précédente à cet exemple pour dresser le tableau de valeurs de f sur $\lfloor 0{:}1 \rfloor$ avec un pas de 0,1.

2) Montrez que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2+1$.

3) Comparez les valeurs exactes et les valeurs approchées et tracez les courbes correspondantes.

1) On entre :
a) Le pas h = 0,1 en A2.
b) La dérivée c'est-à-dire « =2*C2 » en B2, puis on copie et on colle vers le bas pour obtenir cette dérivée sur 11 cellules.
c) 0 en C2 et 1 en D2.
d) La formule « =C2+$A$2 » en C3, puis on copie et on colle vers le bas pour obtenir les nombres allant de 0 à 1 avec un pas de 0,1.
e) La formule « =B2*$A$2+D2 » en D3, puis on copie et on colle vers le bas pour obtenir les valeurs demandées.

On obtient alors :

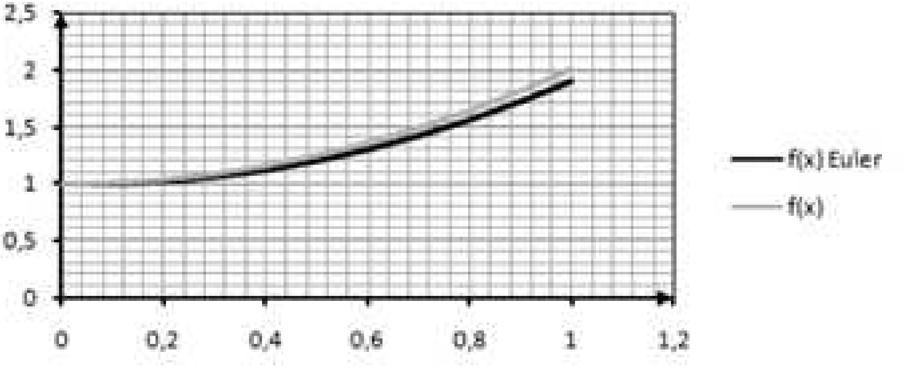
	A	B	C	D
1	Pas	Dérivée de f	x	f(x) (Euler)
2	0,1	0	0	1
3		0,2	0,1	1
4		0,4	0,2	1,02
5		0,6	0,3	1,06
6		0,8	0,4	1,12
7		1	0,5	1,2
8		1,2	0,6	1,3
9		1,4	0,7	1,42
10		1,6	0,8	1,56
11		1,8	0,9	1,72
12		2	1	1,9

2) On a bien $f'(x) = 2x$ et $f(0) = 1$ donc f est la fonction de l'énoncé.

3) On complète le tableau du 1) avec la colonne E en entrant en E1 la formule « =C2^2+1 », qui copiée et collée vers le bas permet d'obtenir les valeurs exactes de f.
On obtient :

	A	B	C	D	E
1	Pas	Dérivée de f	x	f(x) (Euler)	f(x)
2	0,1	0	0	1	1
3		0,2	0,1	1	1,01
4		0,4	0,2	1,02	1,04
5		0,6	0,3	1,06	1,09
6		0,8	0,4	1,12	1,16
7		1	0,5	1,2	1,25
8		1,2	0,6	1,3	1,36
9		1,4	0,7	1,42	1,49
10		1,6	0,8	1,56	1,64
11		1,8	0,9	1,72	1,81
12		2	1	1,9	2

On constate que les approximations sont relativement bonnes.
En sélectionnant la plage (C2 :E12) et en insérant un nuage de point on obtient les courbes suivantes :



METHODE 28 : Comment utiliser la méthode d'Euler avec un algorithme

■ Principe

On trace la courbe point par point sur un intervalle en utilisant un pas à choisir et la formule qui caractérise la méthode d'Euler : $f(\alpha+h)=f'(\alpha)\times h+f(\alpha)$.

■ **Exemple :** *On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ telle que $f'(x)=\dfrac{1}{x}$ et $f(1)=0$.*

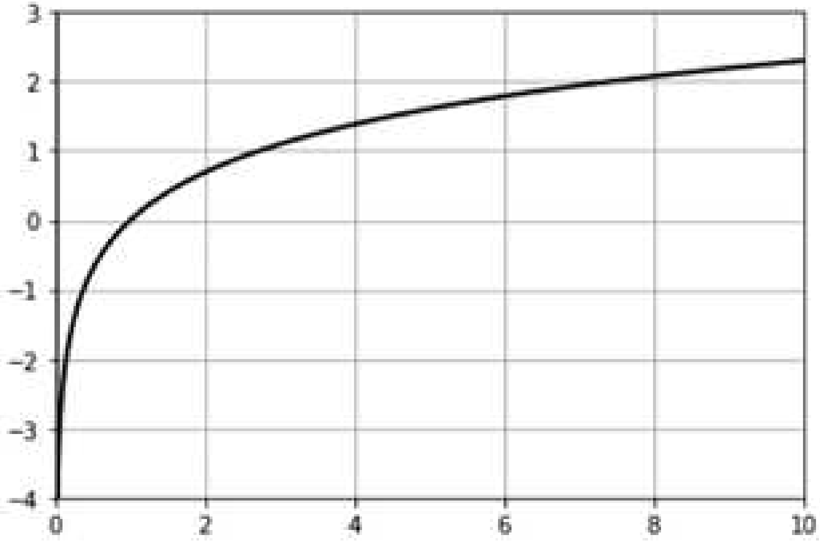
Construire un algorithme en langage Python qui permet d'obtenir la courbe « approchée » de la fonction f sur $]0;10]$.

On peut utiliser l'algorithme suivant :

```
def deriv_f(x):
    return 1/x

import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
plt.axis ([0,10,-4,3])
plt.grid
x=1
y=0
x1=1
y1=0
h=0.01
absc=[]
ordo=[]
for i in range(0,1001):
    x=x+h
    y=y+h*deriv_f(x)
    absc.append(x)
    ordo.append(y)
absc1=[]
ordo1=[]
for i in range(0,101):
    x1=x1-h
    y1=y1-h*deriv_f(x1)
    absc1.append(x1)
    ordo1.append(y1)
plt.grid()
plt.plot(absc,ordo,color="black",linewidth=2.0,linestyle="-")
plt.plot(absc1,ordo1,color="black",linewidth=2.0,linestyle="-")
plt.show()
```

REMARQUE : On a construit deux listes pour avoir des approximations des images de part et d'autre de 1, et donc des points d'abscisses comprises entre 0 et 10 (remarque 3 de l'introduction de cette partie).

On lance l'algorithme et l'on obtient :



Réflexes

	SITUATIONS	REFLEXES
1.	**Convexité d'une fonction**	▪ Caractérisation géométrique ▪ Signe de $f''(x)$
2.	**Forme indéterminée en l' ∞**	▪ Factorisation du terme dominant ▪ Expression conjuguée ▪ Comparaison ▪ Se ramener à $\lim\limits_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}=1$
3.	$\lim\limits_{a} f=\frac{0}{0}$	▪ Simplification ▪ Taux d'accroissement ▪ Comparaison ▪ Se ramener à $\lim\limits_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}=1$
4.	$\lim\limits_{a} f=\frac{\alpha}{0}$ $(\alpha\neq 0)$	▪ La limite de la valeur absolue de f est infinie. ▪ 0^{+} ou 0^{-} au dénominateur ?
5.	**Détermination d'asymptotes**	▪ Verticale : $\lim\limits_{a} f=\pm\infty$ ▪ Horizontale : $\lim\limits_{\pm\infty} f=b$ ▪ Oblique : $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-(ax+b)\right)=0$

6.	**Tangente(s) en a**	▪ Non verticale : $y-f(a)=f'(a)(x-a)$. ▪ Verticale : $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\pm\infty$ et f continue en a ▪ Point anguleux
7.	**Positions relatives des courbes (C_f) et (C_g)**	▪ Etude du signe de $f(x)-g(x)$.
8.	**Montrer qu'une équation admet une solution unique et en donner une approximation**	▪ On utilise le théorème des valeurs intermédiaires pour les fonctions strictement monotones et la dichotomie
9.	**Utiliser la méthode d'Euler**	▪ $f(a+h)=f'(a)\times h+f(a)$

Astuces

■ Tracez la courbe représentative de la fonction que vous étudiez à la calculatrice pour vérifier la cohérence de vos résultats.

■ Si $\lim\limits_{a} f$ est de la forme « $\frac{0}{0}$ » lorsque f est une fraction rationnelle, alors a est racine du numérateur et du dénominateur.

■ $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\times\frac{x-a}{g(x)-g(a)}=\frac{f'(a)}{g'(a)}$ quand f et g sont dérivables en a et que $g'(a)\neq 0$.

■ Pour tracer la tangente à C_f au point d'abscisse a, avec f dérivable en a, on utilise le fait qu'elle passe par $A(a,f(a))$ et que $\vec{v}\left|\begin{matrix}1\\f'(a)\end{matrix}\right.$ en est un vecteur directeur.

■ Les solutions de $f(x)=x$, sont les solutions de $g(x)=0$, avec $g(x)=f(x)-x$.

Erreurs

■ Trop d'élèves ne précisent pas l'ensemble de dérivabilité.

■ « $0\times\infty$ » est une forme indéterminée et **ne vaut pas** 0.

■ Oublier de justifier la **stricte** monotonie quand on veut montrer qu'une équation admet une **solution unique**.

■ Il est **faux** d'écrire que $f(c) = 0{,}1$ à 10^{-1} près entraîne $f(c) > 0$. On peut juste en déduire $f(c) \geq 0$.

■ Trop d'entre vous croient à tort qu'ils savent tracer une courbe et l'exploiter. En cours d'année, faites-le toujours avec soin dès que vous en avez l'opportunité.

Le jour de l'épreuve

■ Vérifiez la cohérence de votre tableau de variations.
Par exemple, une fonction ne peut pas être croissante de 0 à $-\infty$.
Cette vérification est très importante car elle permet d'éviter des erreurs de calculs fatales en début d'exercice.

■ On vous conseille de présenter toute étude de variations dans un tableau.

■ Rédiger une étude de limite consiste à identifier la forme indéterminée et à montrer au correcteur comment vous la levez.

■ Sachez appliquer la méthode 22 en long, en large, et en travers.

■ Prenez la peine de tracer les courbes, car une belle courbe peut mettre l'examinateur dans des dispositions favorables. On vous rappelle qu'au BAC vous aurez une note **entière**, donc que vous avez tout intérêt à rendre une copie qui plaît, puisque le correcteur est obligé d'arrondir.

Le jour du Grand Oral

Sujets mathématiques

■ ***Question 1 : Etude de la continuité et de la dérivabilité d'une fonction trigonométrique***
Cette question est abordée plusieurs fois dans les exercices, mais nous vous conseillons l'exercice 18 car il fait intervenir les fonctions sinus et cosinus sur lesquelles vous ne serez pas interrogés à l'écrit, ce qui par conséquent peut être valorisant pour ce Grand Oral. Cet exercice est d'autant plus intéressant qu'il permet d'obtenir des inégalités successives à partir d'étude de fonctions pour finir par démontrer la dérivabilité en un point d'une fonction trigonométrique définie par morceaux.

■ ***Question 2 : Utilisation de l'approximation affine d'une fonction***
Cette question est abordée à l'exercice 8 permet de donner des approximations d'images de réels par une fonction sans utiliser la calculatrice. C'est l'occasion de montrer au jury vos capacités à dériver une fonction, à appliquer la formule d'approximation et à calculer mentalement, ce qui devient de plus en plus rare pour la plupart des élèves.

■ ***Question 3 : Utilisation de la convexité pour démontrer une inégalité***
Cette question abordée aux exercices 13 et 20 est assez délicate (surtout à l'exercice 20) mais peut être très valorisante si vous avez bien compris comment montrer les inégalités de convexité et les appliquer dans des cas particuliers.

■ ***Question 4 : Etude d'une fonction trigonométrique***
Comme nous l'avons évoqué à la question 1, vous ne serez pas interrogés à l'écrit sur les fonctions sinus et cosinus d'où l'intérêt de présenter l'étude de l'une d'entre elles au Grand Oral. Pour cela, au niveau de ce sujet, on vous propose de présenter celle de l'exercice 11.

■ ***Question 5 : Etude d'une fonction avec une fonction auxiliaire***
Ce n'est pas vraiment original, mais l'exercice 16 en propose une bonne illustration. C'est vrai, pour toutes les questions, mais en particulier pour celle-là car l'exercice est long : donnez les résultats essentiels des différentes parties sans détailler les calculs puis laissez le jury vous poser les questions qui vous ont permis de les déterminer. La notion d'asymptotique oblique fait l'objet d'un approfondissement du programme, ce qui en sera d'autant plus valorisant pour vous si vous la maîtrisez.

■ ***Question 6 : Lecture graphique et utilisation de la méthode d'Euler***
Cette question est abordée à l'exercice 14 qui fait intervenir une lecture graphique et la méthode d'Euler ensuite appliquée avec un tableur et un algorithme.

■ ***Question 7 : Détermination de la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'une fonction***
Cette question est traitée à l'exercice 15 et fait l'objet d'un approfondissement dans le programme, d'où son intérêt pour le Grand Oral. En plus, il fait intervenir « l'enchaînement » : conjecture – démonstration, qui est fondamental au niveau des mathématiques.

Sujets transversaux

■ ***Question 8 : Problème d'optimisation***
Cette question peut être conjuguée avec les spécialités SVT, Physique-Chimie ou SES car étant donnée une fonction qui modélise une situation concrète on peut avoir à déterminer une valeur pour laquelle elle admet un extremum local (instant d'efficacité maximale d'un médicament, vitesse maximale pour aborder un virage sans déraper, bénéfice maximal d'une production...).

■ ***Question 9 : Comportement d'un phénomène local ou à long terme***
On est dans le même cas que dans la question précédente mais l'on s'intéresse au comportement de la fonction qui modélise la situation concrète au voisinage d'un point ou lorsqu'elle tend vers $+\infty$ (vitesse limite, évolution d'une maladie...).

Chapitre 3
METHODES SUR LES FONCTIONS EXPONENTIELLES, LOGARITHMES ET PUISSANCES RÉELLES

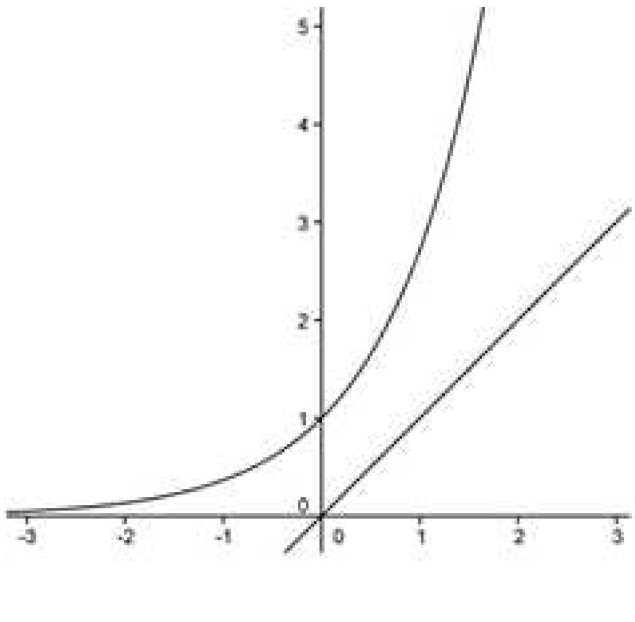
Ce chapitre reprend certaines méthodes que l'on a vues dans le chapitre précédent en les adaptant aux fonctions exponentielles, logarithmes et puissances réelles.

Pour ce dernier type de fonctions nous donneront un sens aux fonctions puissances de la forme $x \mapsto x^{\alpha}$ pour α **réel** et x strictement positif, ce qui généralise l'étude des fonctions de la forme $x \mapsto x^{p}$ avec p entier relatif vues dans les classes antérieures.

1. Fonctions exponentielles

On vous rappelle que la fonction exponentielle est l'unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $f(0) = 1$ et $f'(x) = f(x)$ pour tout x réel.

Sans trop anticiper sur la suite, on vous conseille vivement de mémoriser sa courbe représentative et ce que l'on peut en déduire.



On « déduit » de cette courbe que :

$x \mapsto e^{x}$ est croissante et convexe ; $e^{x} > 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^{x}}{x} = +\infty$

En outre, les règles qui s'appliquent aux puissances entières relatives s'appliquent aux exponentielles c'est-à-dire que pour tous a et b on a :

1) $e^a e^b = e^{a+b}$

2) $\dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$

3) $\left(e^a\right)^b = e^{ab}$ avec en particulier $\left(e^a\right)^p = e^{pa}$ pour $p \in \mathbb{Z}$

METHODE 1 : Comment étudier le comportement global d'une fonction exponentielle

■ Rappels

Pour tout x réel : $\exp'(x) = \exp(x)$.

Pour tout x où u(x) est dérivable : $\exp'(u(x)) = u'(x) \times \exp(u(x))$.

■ Principe

Pour dériver, on applique les deux formules précédentes.

Pour l'étude de signe il faut factoriser par les termes exponentiels car ils sont positifs.

Si l'on ne peut pas étudier le signe avec un théorème de seconde (signe de ax + b) ou de première (signe de $ax^2 + bx + c$), **il faut résoudre une inéquation**.

Pour justifier le signe de la dérivée après la résolution d'une inéquation on vous conseille de **faire une phrase justificative** (cf. exemple).

■ Cas d'application

Lorsque l'on peut étudier le signe de la dérivée assez facilement.

■ **Exemple :** *Etudiez les variations de f définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = \dfrac{2}{3}e^{3x+1} - 2e^x$.

On a $f'(x) = \dfrac{2}{3} \times 3e^{3x+1} - 2e^x = 2e^x\left(e^{2x+1} - 1\right)$ qui est du signe de $e^{2x+1} - 1$ car $2e^x > 0$.

Cela nous amène à résoudre par exemple $f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^{2x+1} - 1 \geq 0$.

$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^{2x+1} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow e^{2x+1} \geq 1 \Leftrightarrow 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -\dfrac{1}{2}$.

Phrase justificative du signe de $f'(x)$: Si $x \geq -\dfrac{1}{2}$ alors $f'(x) \geq 0$, sinon $f'(x) < 0$.

Finalement f est croissante sur $\left[-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$ et décroissante sur $\left]-\infty;-\dfrac{1}{2}\right]$.

METHODE 2 : Comment étudier le comportement global d'une fonction exponentielle avec une fonction auxiliaire

■ Cas d'application

Quand le signe de la dérivée n'est pas évident à déterminer a priori, ce qui est souvent le cas lorsque la dérivée comporte des termes « hybrides » (termes trigonométriques et polynomiaux, termes exponentiels et polynomiaux ou termes logarithmiques et polynomiaux ...).

■ Principe

On déduit le signe de la dérivée à partir de son tableau de variations ou de celui d'une fonction auxiliaire dont elle dépend.
REMARQUE : On peut avoir à utiliser le théorème des valeurs intermédiaires.

■ **Exemple :** *Etudiez les variations de f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2e^x + x^2 + 1$.*

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x) = 2e^x + 2x$.

La fonction dérivée comporte deux termes hybrides (e^x et x) donc déterminer son signe n'est pas évident à priori. On va donc étudier ses variations pour en déduire son signe.

La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f''(x) = 2e^x + 2 > 0$, donc la fonction f' est croissante sur $\mathbb{R}$.

D'autre part, sans trop anticiper sur les méthodes suivantes, on a :

$$\lim_{x\to-\infty} 2e^x + 2x = -\infty \text{ car } \lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \text{, et } \lim_{x\to+\infty} 2e^x + 2x = +\infty \text{ car } \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty.$$

Posons I = $\mathbb{R}$ et J = $\mathbb{R}$ pour appliquer le théorème des valeurs intermédiaires.
La fonction f' est continue et strictement monotone (f'' > 0) de I sur J.
Comme $0 \in J$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires pour les fonctions strictement monotones, l'équation $f'(x) = 0$ admet une solution unique a sur I.

A l'aide de la calculatrice $a = -0{,}567$ arrondie à 3 décimales.

On en déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$		a		$+\infty$
Variations de f'	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$
Signe de f'		−	0	+	
Variations de f	$+\infty$	↘	$2e^a + a^2 + 1$	↗	$+\infty$

METHODE 3 : Comment écrire une expression de f(a) sans l'écriture e^a lorsque le nombre a est solution d'une équation exponentielle

■ Principe

On détermine « e^a » en fonction de « a » grâce à l'équation dont « a » est solution.

■ Cas d'application

Lorsque l'on est dans la situation de l'exemple de la méthode précédente et que l'on demande une expression de f(a) sans terme exponentiel.

■ **Exemple :** *On reprend l'exemple de la méthode 2 et l'on demande de montrer que* $f(a)=a^2-2a+1$.

$f'(a)=0 \Rightarrow 2e^a+2a=0 \Rightarrow e^a=-a$.

On en déduit que $f(a)=2(e^a)+a^2+1=2(-a)+a^2+1=a^2-2a+1$.

METHODE 4 : Comment étudier le comportement asymptotique ou local d'une fonction exponentielle

■ Principe

Il faut se ramener à une des 5 limites suivantes par des transformations d'écriture (développement et factorisation) ou des changements de variable.

$\lim\limits_{u\to-\infty} e^u=0$; $\lim\limits_{u\to+\infty} e^u=+\infty$; Pour $n\in\mathbb{N}$, $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{e^u}{u^n}=+\infty$ et $\lim\limits_{u\to-\infty} u^n e^u=0$; $\lim\limits_{u\to0}\dfrac{e^u-1}{u}=1$

Pour ces limites, u désigne la variable ou une fonction de la variable x qui tend vers l' ∞ ou 0 lorsque x tend vers a avec a réel ou ∞ (composition des limites).

REMARQUE : Pour $n\in\mathbb{N}$, $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{u^n}{e^u}=\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{1}{\dfrac{e^u}{u^n}}=0$ car $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{e^u}{u^n}=+\infty$.

Ce résultat peut s'appliquer sans passer à l'inverse et utiliser la troisième limite en évoquant dans la rédaction les croissances comparées de $u\mapsto e^u$ *et* $u\mapsto u^n$ *en* $+\infty$ *(la première l'emportant sur la seconde).*

L'important est de bien montrer au correcteur comment vous levez les formes indéterminées par transformation d'écriture et de lui préciser laquelle de ces cinq limites à connaître par cœur vous utilisez.

■ Cas d'application

Dès qu'un cas indéterminé se présente avec une fonction exponentielle, il faut « taper » dans une de ces 5 limites avec **une rédaction appropriée** comme nous l'avons fait dans l'exemple **avec les parenthèses**.

■ **Exemple :** *Etudiez les limites suivantes :*

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x+2}\ ;\ \lim_{x\to+\infty} e^{x^2-x};\ \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+1}{x^3-x}\ ;\ \lim_{x\to-\infty}\left(x^2+x\right)e^x\ ;\ \lim_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{2}{x}}-1\right).$$

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x+2}=\lim\limits_{u\to-\infty} e^u=0$ (inutile de préciser u lorsque c'est évident).

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x^2-x}=\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{u\to+\infty} e^u=+\infty$ (Il faut bien lever la FI au niveau de x^2-x, après c'est une « histoire » de composition de limite et de rédaction comme dans le cas précédent).

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x+1}{x^3-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^3}\times\dfrac{\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}{\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^3}=+\infty$ (croissances comparées de $x\mapsto e^x$ et $x\mapsto x^3$ en $+\infty$).

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2+x\right)e^x=\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x+xe^x=0$ (limites de la forme $\lim\limits_{x\to-\infty} x^ne^x=0$ avec $n=2$ et $n=1$).

Pour la dernière limite on pose $u=\dfrac{2}{x}$ (changement de variable).

Si x tend vers $+\infty$ alors u tend vers 0 donc on a :

$\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(e^{\frac{2}{x}}-1\right)=\lim\limits_{u\to0}\dfrac{2}{u}\times\left(e^u-1\right)=\lim\limits_{u\to0}2\times\dfrac{e^u-1}{u}=2$ car $\lim\limits_{u\to0}\dfrac{e^u-1}{u}=1$ (limite usuelle).

METHODE 5 : Comment résoudre une équation fonctionnelle faisant intervenir une fonction exponentielle

■ Principe

On se laisse guider par l'énoncé qui nous amène à établir une équation entre la fonction cherchée et sa dérivée.

On utilise alors le fait que la fonction exponentielle est l'unique fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $f(0)=1$ et $f'(x)=f(x)$ pour tout x réel.

■ Cas d'application

Lorsque la fonction cherchée vérifie entre autre que pour tous réels x et y on a f(x + y) = f(x)f(y) il faut penser à cette méthode.

■ **Exemple :** *On cherche l'ensemble des fonctions f, définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que pour tous x et y réels, f(x + y) = f(x)f(y) (i) avec f'(0) = 2.*

REMARQUE : On va raisonner par analyse et synthèse.

Analyse : *On suppose qu'une fonction f est solution du problème posé.*
1) Montrez par l'absurde que f ne s'annule pas, puis que $f(0)=1$.

2) Pour a fixé, en dérivant membre à membre $f(a+x)=f(a)f(x)$, puis en donnant une valeur particulière à x, déterminez une relation entre f' et f.

3) On considère la fonction k définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x)=f\left(\dfrac{x}{2}\right)$.

Calculez k(0), déterminez une relation entre k' et k, identifiez k et finalement donnez la seule fonction f qui peut être solution du problème posé.

Synthèse : *Vérifiez que f est effectivement solution du problème posé puis répondez à la question initiale.*

Analyse : On suppose qu'une fonction f est solution du problème posé.
1) Supposons qu'il existe α tel que $f(\alpha)=0$.

Sous cette hypothèse, pour tout x réel, $f(x)=f((x-\alpha)+\alpha)=f(x-\alpha)f(\alpha)=0$, ce qui est absurde puisque f n'est pas la fonction nulle car sinon on aurait $f'(0)=0$, ce qui n'est pas le cas.
Par conséquent, par l'absurde, f ne s'annule pas.

En remplaçant x et y par 0 dans (i), $f(0)=f(0)\times f(0)$ donc comme $f(0)\neq 0$ d'après ce qui vient d'être démontré, on a $f(0)=\dfrac{f(0)}{f(0)}=1$.

2) Pour a fixé, en dérivant membre à membre l'égalité $f(a+x)=f(a)f(x)$, il vient $f'(a+x)=f(a)f'(x)$.
En prenant $x=0$, il vient $f'(a)=f(a)\times f'(0)=2f(a)$ car $f'(0)=2$.
Pour tout a réel fixé, $f'(a)=2f(a)$ donc comme la variable a est une variable muette, pour tout x réel $f'(x)=2f(x)$.

3) $k(0)=f\left(\dfrac{0}{2}\right)=f(0)=1$.

D'autre part, $k'(x)=\left(f\left(\dfrac{x}{2}\right)\right)'=\dfrac{1}{2}f'\left(\dfrac{x}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\times 2f\left(\dfrac{x}{2}\right)=f\left(\dfrac{x}{2}\right)=k(x)$

Comme la fonction k vérifie $k'(x)=k(x)$ et $k(0)=1$ et que la seule fonction qui vérifie cela est la fonction exponentielle on a $k(x)=e^x$.

Finalement, on en déduit que la seule fonction f qui peut être solution du problème posé est $f(x)=f\left(\frac{2x}{2}\right)=k(2x)=e^{2x}$ dont la dérivée est $f'(x)=2e^{2x}$.

Synthèse : On a bien $f(x+y)=e^{2(x+y)}=e^{2x+2y}=e^{2x}e^{2y}=f(x)f(y)$ et $f'(0)=2$ donc la fonction f telle que $f(x)=e^{2x}$ est l'unique fonction qui est solution du problème posé.

2. Fonctions logarithmes

On vous rappelle que la fonction logarithme népérien est la bijection réciproque de la fonction exponentielle.

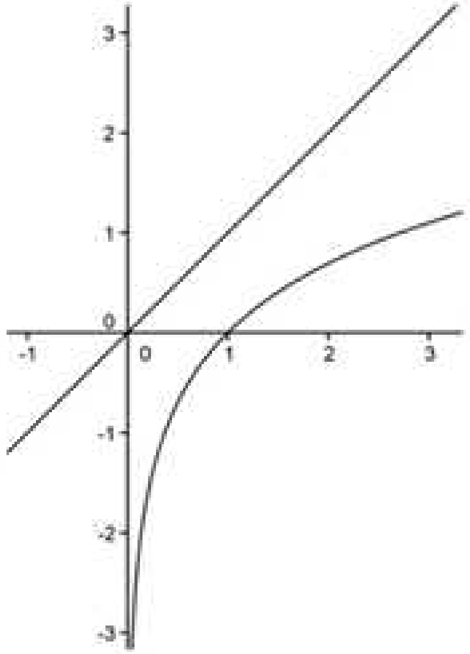
Cela permet d'en déduire les propriétés suivantes :

Propriété 1 : l'ensemble de définition de $x \mapsto \ln x$ est $]0;+\infty[$.

Propriété 2 : pour tout x réel $\ln(e^x)=x$, et pour tout $x>0$, $e^{\ln x}=x$.

Propriété 3 : les courbes représentatives de $x \mapsto \ln x$ et $x \mapsto e^x$ sont symétriques par rapport à la droite d'équation y = x.

D'après la propriété 3) la courbe représentative de $x \mapsto \ln x$ est donc :



On déduit de cette courbe que :

La fonction logarithme népérien est croissante et concave ;

$\ln 1=0$; si $0<x<1$ $\ln x<0$; si $1<x$ $\ln x>0$; $\lim\limits_{x\to 0}\ln x=-\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

Enfin, les propriétés algébriques des exponentielles et la propriété 2 permettent de montrer que pour a et b strictement positifs :

1) $\ln(ab) = \ln a + \ln b$.

2) $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$.

3) Pour $p \in \mathbb{Z}$, $\ln a^p = p\ln a$ avec en particulier $\ln\frac{1}{a} = -\ln a$.

4) $\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$.

METHODE 6 : Comment étudier le comportement global d'une fonction logarithme

■ Rappels

Pour tout $x > 0$: $\ln'(x) = \frac{1}{x}$.

Pour tout x réel où u(x) est dérivable avec $u(x) > 0$, la fonction $x \to \ln(u(x))$ est dérivable et : $\ln'(u(x)) = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

■ Principe

Pour dériver, on applique les deux formules précédentes.

Pour l'étude de signe on procède comme avec les exponentielles, qu'il y ait une fonction auxiliaire ou non.

■ **Exemple :** *Etudiez les variations de f définie par* $f(x) = -3(x+1)\ln(x+1) + 7x$.

L'ensemble de définition de f est $]-1;+\infty[$.

La fonction f est dérivable sur $]-1;+\infty[$ et sur cet intervalle on a :

$f'(x) = -3\left(\ln(x+1) + (x+1)\times\frac{1}{(x+1)}\right) + 7 = -3\ln(x+1) - 3 + 7 = -3\ln(x+1) + 4$.

Pour étudier le signe de la dérivée on résout par exemple $f'(x) \geq 0$.

$-3\ln(x+1) + 4 \geq 0 \Leftrightarrow 4 \geq 3\ln(x+1) \Leftrightarrow \frac{4}{3} \geq \ln(x+1) \Leftrightarrow e^{\frac{4}{3}} \geq e^{\ln(x+1)} \Leftrightarrow e^{\frac{4}{3}} \geq x+1$

$\Leftrightarrow e^{\frac{4}{3}} - 1 \geq x$.

Ainsi, si $-1 < x \leq e^{\frac{4}{3}} - 1$ alors $f'(x) \geq 0$ et sinon $f'(x) < 0$. La fonction f est donc croissante sur l'intervalle $\left]-1;-1+e^{\frac{4}{3}}\right]$ et décroissante sur l'intervalle $\left]-1+e^{\frac{4}{3}};+\infty\right[$.

METHODE 7 : Comment étudier le comportement asymptotique ou local d'une fonction logarithme

■ Principe

Il faut se ramener à une des 5 limites suivantes par des transformations d'écriture (développement et factorisation) ou des changements de variable.

$\lim\limits_{u\to 0}\ln u=-\infty$; $\lim\limits_{u\to+\infty}\ln u=+\infty$; pour $n\in\mathbb{N}$, $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\ln u}{u^n}=0$ et $\lim\limits_{u\to 0}u^n\ln u=0$; $\lim\limits_{u\to 0}\dfrac{\ln(u+1)}{u}=1$.

Pour ces limites, u désigne la variable ou une fonction de la variable x qui tend vers l' ∞ ou 0 lorsque x tend vers a avec a réel ou ∞ (composition des limites).

REMARQUE : Pour $n\in\mathbb{N}$, $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{u^n}{\ln u}=\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{1}{\dfrac{\ln u}{u^n}}=+\infty$ *car* $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\ln u}{u^n}=0^+$.

Ce résultat peut s'appliquer sans passer à l'inverse et utiliser la troisième limite en évoquant dans la rédaction les croissances comparées de $u\mapsto u^n$ *et* $u\mapsto \ln u$ *en* $+\infty$ *(la première l'emportant sur la seconde).*

L'important est de bien montrer au correcteur comment vous levez les formes indéterminées par transformation d'écriture et de lui préciser laquelle de ces cinq limites à connaître par cœur vous utilisez.

■ Cas d'application

Dés qu'un cas indéterminé se présente avec une fonction logarithme, il faut « taper » dans une de ces 5 limites avec **une rédaction appropriée** comme nous l'avons fait dans l'exemple **avec les parenthèses**.

■ **Exemple :** *Etudier les limites suivantes :*

$$\lim_{x\to 3}\ln(x-3)\ ;\ \lim_{x\to+\infty}\ln(x^2-x)\ ;\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^3-x}\ ;\ \lim_{x\to 0}(x^2+x)\ln x\ ;\ \lim_{x\to+\infty}x\ln\left(\frac{1}{x}+1\right)$$

$\lim\limits_{x\to 3}\ln(x-3)=\lim\limits_{u\to 0}\ln u=-\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x^2-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(x^2\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)\right)=\lim\limits_{u\to+\infty}\ln u=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^3-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^3}\times\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^3}=0$ (croissances comparées de $x\mapsto\ln x$ et $x\mapsto x^3$ en $+\infty$).

$\lim\limits_{x\to 0}(x^2+x)\ln x=\lim\limits_{x\to 0}x^2\ln x+x\ln x=0$ (limites de la forme $\lim\limits_{x\to 0}x^n\ln x=0$ avec $n=2$ et $n=1$).

Pour la dernière limite on pose $u=\frac{1}{x}$ (changement de variable).
Si x tend vers $+\infty$ alors u tend vers 0 donc on a :
$\lim\limits_{x\to+\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim\limits_{u\to 0}\frac{1}{u}\ln(1+u)=\lim\limits_{u\to 0}\frac{\ln(1+u)}{u}=1$ (limite usuelle).

METHODE 8 : Comment résoudre une équation ou une inéquation avec « ln » ou « exp » ou montrer qu'une équation en « ln » se ramène à une équation en « exp » et réciproquement

■ Principe

On part d'une équation ou d'une inéquation, puis en raisonnant par équivalence, on se ramène à une autre.

Pour cela la règle consiste à utiliser d'une part les propriétés algébriques de fonctions de définitions et d'autre part leur réciprocité, en isolant le terme en « ln » (ou en « exp », selon l'équation de départ), puis en prenant l'exponentielle membre à membre (ou le logarithme, selon le terme que l'on a isolé).

■ Cas d'application

On demande de résoudre une équation ou une inéquation avec « ln » ou « exp », ou bien de prouver que résoudre f(x) = k revient à résoudre g(x) = x.

■ Astuce

Dans ce dernier cas, si vous « pataugez » en partant de f(x) = k vous pouvez toujours partir de l'équation g(x) = x comme dans l'exemple.

■ ***Exemple :*** *Montrez que résoudre* $\frac{1}{2}\ln(1+e^{-x})=x$ *revient à résoudre* $e^{3x}-e^{x}=1$.
Donnez le nombre de solutions de ces équations ainsi qu'une valeur approchée de chacune à 10^{-6} *près en étudiant la fonction f définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(x)=e^{3x}-e^{x}$.

On applique l'astuce :

$$\frac{1}{2}\ln\left(1+e^{-x}\right)=x\Leftrightarrow\ln\left(1+e^{-x}\right)=2x\Leftrightarrow e^{\ln(1+e^{-x})}=e^{2x}\Leftrightarrow 1+e^{-x}=e^{2x}$$
$$\Leftrightarrow e^{x}\left(1+e^{-x}\right)=e^{3x}\Leftrightarrow e^{x}+1=e^{3x}\Leftrightarrow 1=e^{3x}-e^{x}.$$

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{3x}-e^{x}$.

On a $f'(x)=3e^{3x}-e^{x}=e^{x}\left(3e^{2x}-1\right)$ qui est du signe de $3e^{2x}-1$ car $e^{x}>0$.

On résout par exemple $3e^{2x}-1\geq 0$ pour trouver le signe de $f'(x)$.

$$f'(x)\geq 0\Leftrightarrow 3e^{2x}-1\geq 0\Leftrightarrow e^{2x}\geq\frac{1}{3}\Leftrightarrow\ln e^{2x}\geq\ln\frac{1}{3}\Leftrightarrow 2x\geq-\ln 3\Leftrightarrow x\geq-\frac{1}{2}\ln 3.$$

Ainsi, si $x \geq -\frac{1}{2}\ln 3$ alors $f'(x) \geq 0$, sinon $f'(x) < 0$.

D'autre part on a $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{3x} = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{3x} - e^{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}\left(e^{2x} - 1\right) = +\infty$ et $f\left(-\frac{1}{2}\ln 3\right) = e^{-\frac{3}{2}\ln 3} - e^{-\frac{1}{2}\ln 3} = e^{\ln 3^{-\frac{3}{2}}} - e^{\ln 3^{-\frac{1}{2}}} = 3^{-\frac{3}{2}} - 3^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{2}{3\sqrt{3}} = -\frac{2\sqrt{3}}{9}$.

On en déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}\ln 3$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$-\frac{2\sqrt{3}}{9}$	$\nearrow$	$+\infty$

Sur $\left]-\infty, -\frac{1}{2}\ln 3\right]$ $f(x) < 0$ donc sur cet intervalle $f(x) = 1$ n'a pas de solution.

Posons $I = \left]-\frac{1}{2}\ln 3, +\infty\right[$ et $J = \left]-\frac{2\sqrt{3}}{9}, +\infty\right[$.

La fonction f est continue et strictement monotone de I sur J = f(I) (f' > 0 sur I). Comme $1 \in J$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires pour les fonctions strictement monotones l'équation $f(x) = 1$ admet une solution unique α sur I, donc sur $\mathbb{R}$.

A l'aide de la calculatrice on obtient : $\alpha = 0,281200$ à 10^{-6} près.

METHODE 9 : Comment déterminer le plus petit entier n tel que $k^n \leq 10^{-p}$ avec $0 < k < 1$ et $p \in \mathbb{N}$

■ Principe

1) On écrit : $k^n \leq 10^{-p} \Leftrightarrow \ln k^n \leq \ln 10^{-p} \Leftrightarrow n\ln k \leq -p\ln 10 \Leftrightarrow n \geq \frac{-p\ln 10}{\ln k}$.

2) On calcule une valeur approchée de $\frac{-p\ln 10}{\ln k}$ et en général l'entier cherché est $\mathrm{ENT}\left(\frac{-p\ln 10}{\ln k}\right) + 1$ (Attention quand la valeur approchée est proche de l'entier).

■ **Erreur classique**

Attention ! Il faut changer de sens l'inégalité quand on divise par lnk car lnk est strictement négatif.

■ **Exemple :** *Construisez un algorithme en langage Python qui permet de trouver le plus petit entier n tel que $(0,8)^n \leq 10^{-9}$.*

Vérifiez que votre algorithme est correct en résolvant l'inéquation.

L'algorithme peut être le suivant :

```
def f(x):
    return 0.8*x
def s(b,L):
    u=1
    n=0
    while abs(L-u)>b:
        n=n+1
        u=f(u)
    return(n)
```

En mode « Run » on obtient :

```
>>> s(0.000000001,0)
93
```

Résolution de l'inéquation :

$(0,8)^n \leq 10^{-9} \Leftrightarrow \ln(0,8)^n \leq \ln 10^{-9} \Leftrightarrow n\ln(0,8) \leq -9\ln 10 \Leftrightarrow n \geq \dfrac{-9\ln 10}{\ln 0,8} \simeq 92,8$. Bingo !

On retrouve bien que l'entier cherché est 93.

METHODE 10 : Comment résoudre une équation fonctionnelle faisant intervenir une fonction logarithme

■ **Principe**

Comme dans la méthode 5 de ce chapitre, l'énoncé nous amène à établir une équation entre la fonction cherchée et sa dérivée.

On utilise alors le fait que la fonction logarithme est l'unique fonction définie et dérivable sur $]0;+\infty[$ qui vérifie $f(1)=0$ et $f'(x)=\dfrac{1}{x}$ pour tout $x>0$.

■ **Cas d'application**

Lorsque la fonction cherchée vérifie entre autre que pour tous réels strictement positifs x et y on a f(x y) = f(x) + f(y), il faut penser à cette méthode.

■ **Exemple :** *On cherche l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}_+^*$ telles que pour tous x et y réels strictement positifs, f(x y) = f(x) + f(y) avec f'(1) = 3.*

REMARQUE : On va raisonner par analyse et synthèse.

Analyse : *On suppose qu'une fonction f est solution du problème posé.*
1) Montrer que f(1) = 0.
2) Pour a fixé, en dérivant membre à membre $f(ax)=f(a)+f(x)$, puis en donnant une valeur particulière à x, déterminez f'.
3) On considère la fonction k définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x)=\frac{1}{3}f(x)$.
Calculez k(1), déterminez k', identifiez k et finalement donnez la seule fonction f qui peut être solution du problème posé.

Synthèse : *Vérifiez que f est effectivement solution du problème posé et répondez à la question initiale.*

Analyse : On suppose qu'une fonction f est solution du problème posé.
1) $f(1)=f(1\times 1)=f(1)+f(1) \Rightarrow f(1)=f(1)+f(1) \Rightarrow f(1)=0$.

2) Pour a fixé, en dérivant membre à membre l'égalité $f(ax)=f(a)+f(x)$, il vient $af'(ax)=f'(x)$.

En prenant $x=1$, il vient $af'(a)=f'(1)$, puis $f'(a)=\frac{f'(1)}{a}=\frac{3}{a}$ car $f'(1)=3$.

Pour tout a réel fixé, $f'(a)=\frac{3}{a}$ donc comme la variable a est une variable muette, pour tout x réel $f'(x)=\frac{3}{x}$.

3) $k(1)=\frac{1}{3}f(1)=0$.

D'autre part, $k'(x)=\left(\frac{1}{3}f(x)\right)'=\frac{1}{3}f'(x)=\frac{1}{3}\times\frac{3}{x}=\frac{1}{x}$.

Comme la fonction k vérifie $k'(x)=\frac{1}{x}$ avec $k(1)=0$ et que la seule fonction qui vérifie cela est la fonction logarithme népérien on a $k(x)=\ln x$.

Finalement, on en déduit que la seule fonction f qui peut être solution du problème posé est $f(x)=3k(x)=3\ln x$ dont la dérivée est $f'(x)=\frac{3}{x}$.

Synthèse : On a bien $f(xy)=3\ln xy=3(\ln x+\ln y)=3\ln x+3\ln y=f(x)+f(y)$ et $f'(1)=3$ donc la fonction f telle que $f(x)=3\ln x$ est l'unique fonction qui est solution du problème posé.

3. Fonctions puissances réelles

Définition : Par définition, pour $x > 0$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, $x^{\alpha} = e^{\alpha \ln x}$.

Propriété : Cette définition généralise celle relative aux puissances entières vues dans les classes antérieures et donc étend les propriétés de ces dernières aux puissances réelles.

Cas particulier : Pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, le nombre $x^{\frac{1}{n}}$ s'appelle racine $n^{\text{ième}}$ de x dans la mesure où $\left(x^{\frac{1}{n}}\right)^n = x^{n \times \frac{1}{n}} = x$.

REMARQUES : 1) Concrètement, c'est le nombre qui multiplié n fois par lui-même donne x, ce qui généralise la racine carrée ($\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$) *d'un nombre strictement positif.*

2) Pour x strictement positif on note aussi $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$.

Cette définition n'est pas si anodine car pour x strictement positif, elle induit l'existence de fonctions tout à fait nouvelles : $x \mapsto x^{\pi}$, $x \mapsto x^{\sqrt{x}}$, $x \mapsto x^{\ln x}$...

L'objet de cette partie est de donner des méthodes permettant d'étudier les propriétés globales, asymptotiques et locales de ces fonctions éventuellement composées avec les fonctions usuelles déjà rencontrées.

Règle d'or : Si une fonction f est telle que $f(x) = u(x)^{v(x)}$, cela suppose que $u(x) > 0$ et il faut systématiquement écrire que $f(x) = e^{v(x)\ln u(x)}$ pour toute étude.

METHODE 11 : Comment étudier le comportement global d'une fonction puissance réelle

■ Principe

On applique la règle d'or et les propriétés relatives au comportement global des fonctions exponentielles et logarithme népérien.

■ **Exemple :** *Etudiez les variations des fonctions f suivantes sur* $]0,+\infty[$.

1) f définie par $f(x) = x^{\sqrt{2}}$

2) f définie par $f(x) = x^{\ln x}$.

1) On applique la règle d'or, ce qui donne : $f(x) = e^{\sqrt{2}\ln x}$.

La fonction f est donc dérivable sur $]0,+\infty[$ avec $f'(x)=\frac{\sqrt{2}}{x}e^{\sqrt{2}\ln x}>0$ sur $]0,+\infty[$ donc f est croissante.

2) On applique la règle d'or, ce qui donne : $f(x)=e^{(\ln x)(\ln x)}=e^{(\ln x)^2}$.

La fonction f est donc dérivable sur $]0,+\infty[$ avec $f'(x)=2(\ln x)\times\frac{1}{x}\times e^{(\ln x)^2}$ qui est du signe de lnx sur $]0,+\infty[$ donc f est décroissante sur $]0,1]$ et croissante sur $[1,+\infty[$.

METHODE 12 : Comment étudier le comportement asymptotique ou local d'une fonction puissance réelle

■ Principe

On applique la règle d'or et les propriétés relatives au comportement asymptotique et local des fonctions exponentielles et logarithme népérien.

Généralisation : Au niveau des limites, on généralise trois limites comportant u^n pour $n\in\mathbb{N}$, aux limites comportant u^r pour r réel positif, ce qui donne :

$$\text{Pour } r\in\mathbb{R}_+,\ \lim_{u\to+\infty}\frac{e^u}{u^r}=+\infty,\ \lim_{u\to+\infty}\frac{\ln u}{u^r}=0 \text{ et } \lim_{u\to 0}u^r\ln u=0$$

Pour ces limites, u désigne la variable ou une fonction de la variable x qui tend vers l'∞ ou 0 lorsque x tend vers a avec a réel ou ∞ (composition des limites).

REMARQUE : Pour $r\in\mathbb{R}_+$,

$$\lim_{u\to+\infty}\frac{u^r}{e^u}=\lim_{u\to+\infty}\frac{1}{\frac{e^u}{u^r}}=0 \text{ car } \lim_{u\to+\infty}\frac{e^u}{u^r}=+\infty \text{ et } \lim_{u\to+\infty}\frac{u^r}{\ln u}=\lim_{u\to+\infty}\frac{1}{\frac{\ln u}{u^r}}=+\infty \text{ car } \lim_{u\to+\infty}\frac{\ln u}{u^r}=0^+$$

Ce résultat peut s'appliquer sans passer à l'inverse et utiliser les trois limites de cette méthode, en évoquant dans la rédaction les croissances comparées de $u\mapsto e^u$, $u\mapsto u^r$ *et* $u\mapsto \ln u$ *en* $+\infty$ *(la première l'emportant sur la seconde qui l'emporte sur la troisième).*

■ Cas d'application

Dés qu'un cas indéterminé se présente avec une fonction puissance réelle, il faut « taper » dans une de ces 3 limites avec **une rédaction appropriée**, comme nous l'avons fait dans l'exemple **avec les parenthèses**.

■ **Exemple :** *Etudiez les limites suivantes :*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\ ;\ \lim_{x\to 0}x^x\ ;\ \lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\sqrt{2}}}{\ln(x^2-x)}\ ;\ \lim_{x\to 0}\frac{x^x-1}{x}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^{\frac{1}{2}}}=0$ (croissances comparées de $x\mapsto \ln x$ et $x\mapsto x^{\frac{1}{2}}$ en $+\infty$).

$\lim\limits_{x\to0}x^x=\lim\limits_{x\to0}e^{x\ln x}=e^0=1$ car $\lim\limits_{x\to0}x\ln x=0$ (limite de la forme $\lim\limits_{x\to0}x^n\ln x=0$ avec $n=1$).

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\sqrt{2}}}{\ln\left(x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\sqrt{2}}}{\ln x^2+\ln\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\sqrt{2}}}{\ln x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{\sqrt{2}}}{2\ln x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}\times\frac{x^{\sqrt{2}}}{\ln x}=+\infty$$

car $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\sqrt{2}}}{\ln x}=+\infty$ (croissances comparées de $x\mapsto x^{\sqrt{2}}$ et $x\mapsto \ln x$ en $+\infty$).

$$\lim_{x\to0}\frac{x^x-1}{x}=\lim_{x\to0}\frac{e^{x\ln x}-1}{x}=\lim_{x\to0}\ln x\times\frac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x}.$$

Comme $\lim\limits_{x\to0}x\ln x=0$ (limite de la forme $\lim\limits_{x\to0}x^n\ln x=0$ avec $n=1$), on en déduit que $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x\ln x}-1}{x\ln x}=\lim\limits_{u\to0}\dfrac{e^u-1}{u}=1$ (limite usuelle).

D'autre part, comme $\lim\limits_{x\to0}\ln x=-\infty$, la limite cherchée est $-\infty$.

Réflexes

	SITUATIONS	REFLEXES
1.	**Signe de la dérivée d'une fonction exponentielle**	▪ On factorise au maximum par les termes exponentiels ▪ On étudie le signe de ce qui reste en résolvant une inéquation
2.	**Signe de la dérivée d'une fonction logarithme**	▪ Attention à l'ensemble de définition ▪ Quand l'expression est factorisée, on écarte les termes positifs ▪ On étudie le signe de ce qui reste en résolvant une inéquation
3.	**Limite d'une fonction exponentielle**	▪ On se ramène à une des cinq limites du cours par : transformation d'écriture (développement ou factorisation) et (ou) changement de variable
4.	**Limite d'une fonction logarithme**	▪ On se ramène à une des cinq limites du cours par : transformation d'écriture (développement ou factorisation) et (ou) changement de variable

5.	**Equations fonctionnelles**	▪ Pour calculer une valeur prise par la fonction on donne des valeurs à x et y dans l'équation fonctionnelle. ▪ Pensez à raisonner par l'absurde. ▪ Se rappeler que : $(f\circ u)'(x)=f'(u(x))\times u'(x)$.
6.	**Fonctions puissances réelles**	▪ Il faut appliquer **la règle d'or** donnée dans l'introduction du paragraphe 3, c'est-à-dire $u(x)^{v(x)}=e^{v(x)\ln u(x)}$.

Astuces

■ Le terme $e^{u(x)}$ est toujours positif sur l'ensemble de définition de u, ce qui permet de ne pas s'en occuper quand on étudie le signe d'une expression dont il est facteur.

Exemple : $e^{-\frac{1}{x}}\left(x^2+2x-3\right)$ est du signe de $\left(x^2+2x-3\right)$ sur $\mathbb{R}-\{0\}$.

■ Penser que $e^{px}=\left(e^x\right)^p$, car cela vous servira pour factoriser une expression dont vous cherchez le signe.

Exemple : $e^{2x}+2e^x-3=\left(e^x\right)^2+2e^x-3=\left(e^x-1\right)\left(e^x+3\right)$.

■ Quand on résout $k^n\leq 10^{-p}$ avec $k\in\left]0;1\right[$, on tombe toujours sur $n\geq\cdots$ Si ce n'est pas le cas, vous avez oublié que $\ln k<0$ et donc de changer le signe de l'inégalité... C'est mal !

Erreurs

■ Quand on étudie le signe d'une expression avec des « ln », il ne faut surtout pas oublier de préciser les valeurs pour lesquelles l'expression existe.

■ Dans les calculs de limites, les rédactions sont souvent imparfaites, ce qui peut amener l'examinateur à vous sanctionner. Il faut toujours montrer que par une transformation d'écriture, vous vous ramenez à une limite connue.

Exemple : Ecrire directement que $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}=0$ peut être considéré comme insuffisant.

En effet, l'examinateur peut penser que vous utilisez le fait que « $+\infty\times 0=0$ », ce qui est **complètement faux** puisque « $\infty\times 0$ » est une forme indéterminée.

Il faut écrire $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x}} = 0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ ou évoquer les croissances comparées pour justifier que $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$.

Le jour de l'épreuve

■ Avant de dériver, justifiez que la fonction est dérivable **sur** son ensemble de définition.

■ Pour étudier le signe d'une expression en « exp » ou en « ln », il faut résoudre une inéquation, **et non** une équation.

■ Sachez dériver $\ln(u(x))$ et $e^{u(x)}$ en une fraction de seconde.

Le jour du Grand Oral

Sujets mathématiques

■ ***Question 1 : Etude d'une fonction exponentielle ou logarithme népérien avec une fonction auxiliaire***
Cette question classique est abordée à maintes reprises dans le livre mais en particulier aux exercices 9, 12 et 15 (ce dernier exercice est intéressant dans la mesure où il fait intervenir une fonction définie par morceaux avec une étude ponctuelle de dérivabilité). Il est très fréquent que l'étude du signe de la dérivée d'une fonction exponentielle ou logarithme népérien ne soit pas évidente par la résolution d'une inéquation ; d'où l'intérêt d'une fonction auxiliaire pour s'en sortir. Si vous prenez ce genre de sujet classique, il vous faut absolument connaître les formules relatives aux fonctions exponentielles et logarithmes népérien (dérivées, limites, propriétés algébriques).

■ ***Question 2 : Etude de tangentes particulières d'une fonction exponentielle ou logarithme népérien***
Cette question abordée en particulier aux exercices 11 et 14 consiste à déterminer une ou des tangentes particulières d'une fonction exponentielle ou logarithme népérien, ce qui peut éventuellement passer par l'application du théorème des valeurs intermédiaires.

■ ***Question 3 : Etude d'une suite définie par une relation de récurrence où intervient une fonction exponentielle ou logarithme népérien***
Cette question abordée à l'exercice 13 suppose la maîtrise des méthodes relatives aux suites définies par une relation de récurrence de la forme $U_{n+1} = f(U_n)$ (conjectures, principe de récurrence, théorèmes de convergence monotone).

■ ***Question 4 : Lecture graphique faisant intervenir une fonction exponentielle ou logarithme népérien***
Cette question consiste à utiliser une représentation graphique pour trouver l'expression analytique d'une fonction. C'est classique, mais la partie A de l'exercice 10 présente un énoncé relativement original de ce sujet avec en plus l'intervention de la notion d'asymptote oblique qui est un approfondissement du programme.

■ ***Question 5 : Résolution d'une équation fonctionnelle***
Cette question traitée aux exercices 17 et 18 consiste à trouver une ou plusieurs fonctions qui vérifient une propriété algébrique particulière. Ce sujet peut être très valorisant compte tenu de son originalité.

■ ***Question 6 : Résolution approchée d'une équation différentielle par la méthode d'Euler***
Cette question abordée à l'exercice 19 donne l'occasion de présenter au jury la méthode d'Euler et de l'utiliser au sein d'un algorithme en langage Python, ce qui est très à la « mode » dans le nouveau programme.

■ ***Question 7 : Détermination de ln2 par la méthode de Briggs***
Cette question abordée par Briggs (1561-1630) est reprise dans le livre à l'exercice 20. Ce sujet relativement difficile sera très « payant » si vous en maîtrisez les grandes lignes. A l'origine, l'algorithme de Briggs était destiné à déterminer une valeur approchée du logarithme décimal de 2 et non de son logarithme népérien, ce qui peut amener le jury à vous demander la différence entre les deux (on vous rappelle que si l'on note « log » la fonction logarithme décimal, pour tout $x>0$, $\log x=\dfrac{\ln x}{\ln 10}$ et pour tout x réel $\log 10^x = x$.

Sujets transversaux

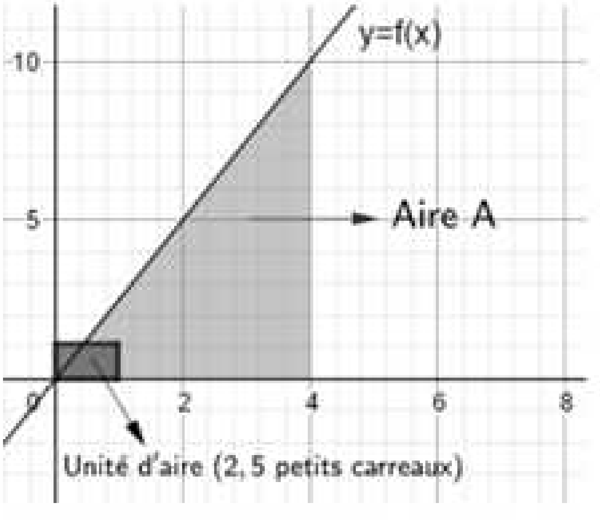
■ ***Question 8 : Problème d'optimisation***
Cette question peut être conjuguée avec les spécialités SVT, Physique-Chimie ou SES car étant donnée une fonction exponentielle ou logarithme népérien qui modélise une situation concrète on peut avoir à déterminer une valeur pour laquelle elle admet un extremum local (instant d'efficacité maximale d'un médicament, coût minimal d'une production...).

■ ***Question 9 : Comportement d'un phénomène local ou à long terme***
On est dans le même cas que dans l'exercice précédent, mais l'on s'intéresse au comportement de la fonction au voisinage d'un point ou lorsqu'elle tend vers $+\infty$ (tension aux bornes d'un circuit RC, évolution d'une température, demi-vie d'un atome radioactif, évolution d'une maladie, évolution d'une part de marché...).

Chapitre 4
METHODES SUR LE CALCUL INTEGRAL ET LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES

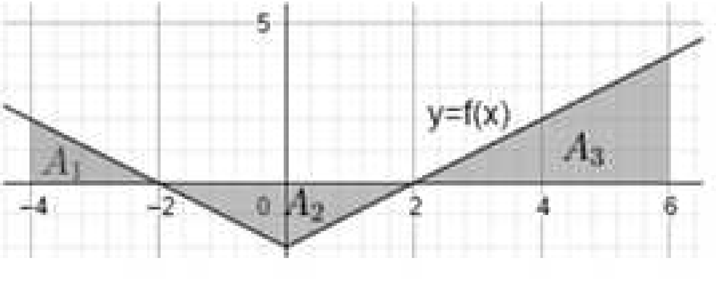
Il va être question dans ce chapitre de calcul intégral et d'équations différentielles dont nous allons donner en introduction quelques notions pour que tout soit bien clair par la suite.

Pour une fonction f continue positive sur un intervalle I, le nombre noté $\int_a^b f(x)dx$ est l'aire en unité d'aire définie par l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $\begin{cases} a \le x \le b \\ 0 \le y \le f(x) \end{cases}$ comme l'illustre l'exemple suivant :



Sur cet exemple le nombre $\int_0^4 f(x)dx$ est l'aire A en unité d'aire, c'est-à-dire le nombre de rectangles foncés que contient l'aire A ce qui donne $\int_0^4 f(x)dx = \frac{50}{2,5} = 20$ car l'aire A contient 50 petits carreaux.

On généralise cette définition de l'intégrale aux fonctions qui ne sont pas forcément positives sur un intervalle I de la même façon que dans l'exemple suivant :



Sur cet exemple le nombre $\int_{-4}^{6} f(x)dx$ est $A_1 - A_2 + A_3$ où les aires A_1, A_2 et A_3 sont exprimées en unité d'aires.
Comme l'unité d'aire est la même que dans l'exemple précédent, on obtient $A_1 = \frac{5}{2,5} = 2$, $A_2 = \frac{10}{2,5} = 4$ et $A_3 = \frac{20}{2,5} = 8$ exprimées en unité d'aire, ce qui donne finalement $\int_{-4}^{6} f(x)dx = 2 - 4 + 8 = 6$.
REMARQUE : Il existe des fonctions non continues pour lesquelles les définitions précédentes se généralisent (les fonctions en escalier par exemple).

Théorème fondamental du calcul intégral : Pour une fonction f définie et continue sur $\lfloor a,b \rfloor$, $\int_a^b f(x)dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a)$ où F désigne une primitive de f sur $\lfloor a,b \rfloor$, c'est-à-dire une fonction telle que $F'(x) = f(x)$ sur $\lfloor a,b \rfloor$.

L'application de ce théorème suppose qu'il va falloir faire l'inverse de ce que l'on fait lorsque l'on dérive une fonction, ce qui s'appelle l'intégrer et fera l'objet de la **première partie**, dans laquelle nous donnerons en outre deux applications de la détermination exacte d'une intégrale (valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle et calcul de la valeur exacte d'une aire entre deux courbes).

La continuité d'une fonction f définie sur $\lfloor a,b \rfloor$ lui assure l'existence d'une primitive F sur $\lfloor a,b \rfloor$, mais F n'est pas toujours exprimable avec les fonctions usuelles, ce qui ne permet pas d'appliquer le théorème fondamental et nécessite donc de dégager des méthodes relatives à d'autres propriétés des intégrales pour les étudier, ce qui fera l'objet de la **seconde partie**.

Dans une **troisième partie** nous étudierons comment donner des approximations d'intégrales en utilisant fréquemment des algorithmes en langage Python.

Enfin, dans une **quatrième partie**, nous verrons des méthodes relatives aux équations différentielles pour lesquelles l'inconnue est par exemple une fonction y de la variable x qui vérifie $y' = 2x$ (1), $y' = y^2$ (2), $y'' + 4y = 0$ (3)...

Comme vous êtes tous des très bons élèves, vous avez tous compris pourquoi cette quatrième partie succède aux précédentes avec l'équation (1) puisqu'il suffit d'intégrer $x \mapsto 2x$ pour trouver une de ses solutions qui est par exemple la fonction y définie sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = x^2$.

Quant aux équations (2) et (3), les meilleurs d'entre vous ont déjà déterminé une de leurs solutions, mais comme on est bien gentil on propose pour les élèves moins brillants la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $y(x) = -\frac{1}{x}$ pour l'équation (2) et la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = \sin 2x$ pour l'équation (3).

Quant à trouver toutes les solutions de ces équations et donc de les résoudre, c'est une problématique à laquelle se propose de répondre la quatrième partie dans le cas d'équations différentielles particulières.

1. Méthodes de calcul d'une intégrale avec les tableaux

Les méthodes de ce chapitre font intervenir des tableaux de primitives à connaître par cœur au même titre que les tableaux de dérivées.

METHODE 1 : Comment utiliser le tableau des primitives en « x »

■ Rappel

La dérivation étant linéaire, l'intégration l'est aussi.
Ainsi, pour tous réels a et b, et toutes fonctions f et g intégrables sur un intervalle I on a : $\int_I (af(x)+bg(x))dx = a\int_I f(x)dx + b\int_I g(x)dx$.

■ Principe

On applique les formules du tableau suivant :

Fonction	Une primitive	Ensemble sur lequel on peut appliquer la formule
x^p $(p \in \mathbb{Z} - \{-1\})$	$\frac{x^{p+1}}{p+1}$	Si $p \in \mathbb{N}$, sur $\mathbb{R}$, sinon sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	Sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$

■ **Exemple :** *Déterminez* $\int_1^2 \left(x^2 - 4x + 2 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx$.

Avant d'appliquer les formules du tableau, pour intégrer, on vous conseille d'écrire que $\frac{3}{x^2} = 3x^{-2}$.

Cela donne :

$$\int_1^2 \left(x^2 - 4x + 2 - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx = \int_1^2 \left(x^2 - 4x + 2 - 3x^{-2} + \frac{2}{\sqrt{x}}\right)dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - 4\frac{x^2}{2} + 2x - 3\frac{x^{-1}}{-1} + 2\times 2\sqrt{x}\right]_1^2 = \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 2x + \frac{3}{x} + 4\sqrt{x}\right]_1^2 = -\frac{43}{6} + 4\sqrt{2}.$$

METHODE 2 : Comment utiliser le tableau des primitives en « u(x) »

■ Principe

On pose u(x) égale à une expression pour se ramener à utiliser une des formules du tableau suivant :

Fonction	Une primitive	Ensemble sur lequel on peut appliquer la formule
$U(x)^p U'(x)$ $(p \in \mathbb{Z} - \{-1\})$	$\dfrac{U(x)^{p+1}}{p+1}$	Si $p \in \mathbb{N}$, sur tout intervalle où U est dérivable, sinon sur tout intervalle où U est dérivable et ne s'annule pas.
$\dfrac{U'(x)}{U(x)}$	$\ln\lvert U(x)\rvert$	Sur tout intervalle où U est dérivable et ne s'annule pas.
$\dfrac{U'(x)}{\sqrt{U(x)}}$	$2\sqrt{U(x)}$	Sur tout intervalle où U est dérivable et strictement positive.
$U'(x)\sin U(x)$	$-\cos U(x)$	Sur tout intervalle où U est dérivable.
$U'(x)\cos U(x)$	$\sin U(x)$	Sur tout intervalle où U est dérivable.
$U'(x)e^{U(x)}$	$e^{U(x)}$	Sur tout intervalle où U est dérivable.

■ **Exemple :** *Déterminez* $I = \int_{-1}^{1} (4x+2)(x^2+x+1)^3 \, dx$.

Posons, $U(x) = x^2 + x + 1$.

Aïe ! $U'(x) = 2x + 1$, et ce n'est pas tout à fait $(4x+2)$.

En fait, on a $2U'(x) = 4x + 2$ et ce n'était pas si difficile...

Finalement, $I = \int_{-1}^{1} 2U'(x)U^3(x)dx = 2\left[\dfrac{U^4(x)}{4}\right]_{-1}^{1} = \dfrac{1}{2}\left(U^4(1) - U^4(-1)\right) = 40$.

METHODE 3 : Comment appliquer plus vite la méthode 2 lorsque $U(x) = ax + b$ $(a \in \mathbb{R}^* \text{ et } b \in \mathbb{R})$

■ Principe

On applique le résultat suivant : Si F est une primitive de f sur un intervalle I alors pour tous a et b réels tels que $ax + b \in I$ on a $\int f(ax+b)dx = \dfrac{1}{a}F(ax+b)$.

■ **Exemple :** *Déterminez* $\int_{-2}^{-1} \dfrac{1}{2x+1} dx$.

Ici, f est la fonction inverse de $x \mapsto 2x + 1$ (qui ne s'annule pas sur $[-2, -1]$).

On a donc $F(x)=\frac{1}{2}\ln|2x+1|$ et donc que $\int_{-2}^{-1}\frac{1}{2x+1}dx=\left[\frac{1}{2}\ln|2x+1|\right]_{-2}^{-1}=-\frac{1}{2}\ln 3$.

METHODE 4 : Comment déterminer la valeur moyenne exacte d'une fonction continue sur $[a;b]$ ou en donner une valeur approchée

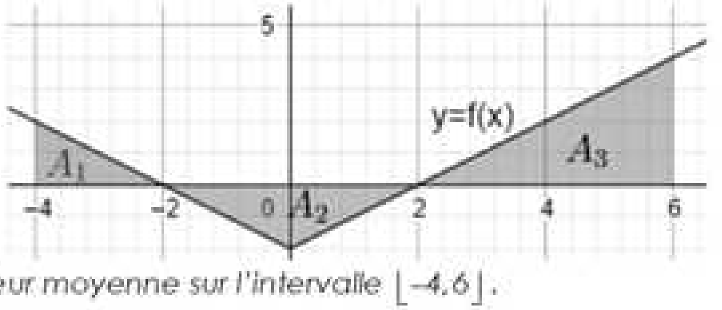
■ Rappel

Pour une fonction f continue sur $[a;b]$, sa valeur moyenne μ sur $[a;b]$ est donnée par la formule : $\mu=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$.

■ Principe

1) Si on sait intégrer f sur $[a,b]$, on applique la formule précédente et elle donne la valeur exacte de la valeur moyenne μ.
2) Si on ne sait pas intégrer f, mais que l'on connaît son expression on peut construire un algorithme qui donne une valeur approchée de $\int_a^b f(x)dx$ par une des méthode de la partie 3 puis diviser par $b-a$, **ou bien**, comme on l'a fait dans l'exemple construire un algorithme qui permet de prendre un grand nombre d'images par f de réels différents de l'intervalle $[a,b]$ et en faire la moyenne.
3) Enfin, si l'on dispose d'un graphique sans connaître l'expression de f, on détermine $\int_a^b f(x)dx$ en l'interprétant comme une aire et on divise par $b-a$.

■ **Exemple :** *On considère la fonction f définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(x)=x^2$.
1) Calculez la valeur moyenne de f sur $[0;2]$.
2) Retrouvez cette valeur avec un algorithme en langage Python.
3) On considère la fonction f dont la représentation graphique est la suivante :



Donnez sa valeur moyenne sur l'intervalle $[-4,6]$.

1) $\mu=\frac{1}{2-0}\int_0^2 f(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^2 x^2dx=\frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2=\frac{4}{3}$.

2) L'idée est de calculer un grand nombre de valeurs prises sur $[0;2]$ et d'en faire la moyenne.

Pour cela, on vous propose l'algorithme suivant :

```
def f(x):
    return x**2
def moyenne(a,b,n):
    s=f(a)
    for i in range(1,n):
        s=s+f(a+i*((b-a)/n))
        u=s/n
    return(u)
```

En mode « Run » on obtient :

```
>>> moyenne(0,2,200000)
1.3333233333500334
```

On obtient une valeur approchée de μ très proche de sa valeur exacte qui est $\frac{4}{3}$ (d'après 1)).

3) On a vu en introduction de ce chapitre que $\int_{-4}^{6} f(x)dx = 2-4+8=6$ donc la valeur moyenne μ' demandée est $\mu' = \frac{6}{6-(-4)} = \frac{6}{10} = 0{,}6$.

REMARQUE : Dans cet exemple on obtient la valeur exacte de μ' car le calcul d'aires donne la valeur exacte de l'intégrale.

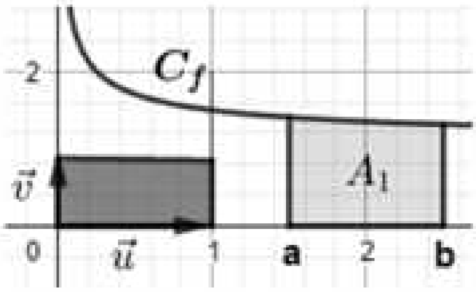
METHODE 5 : Comment calculer une aire

■ Rappels

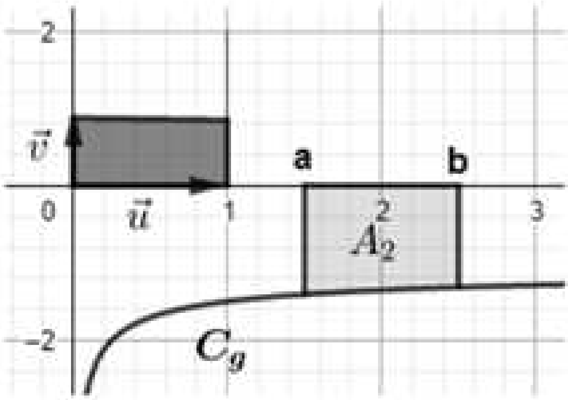
Pour les cas qui vont suivre, on vous rappelle que les aires A1, A2 et A3 sont données en unités d'aires.

Une unité d'aire est l'aire en cm^2 du rectangle de dimensions $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$ (gris foncé sur les figures).

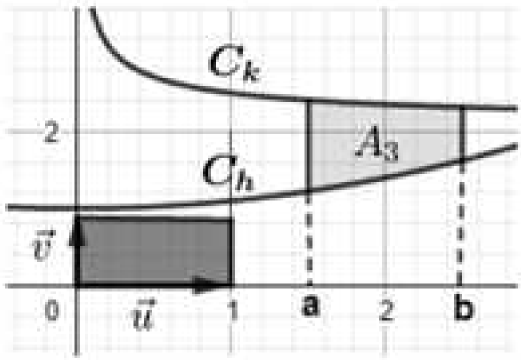
Il suffit de multiplier par l'aire en cm^2 du rectangle de dimensions $\|\vec{u}\|$ et $\|\vec{v}\|$ pour avoir les aires A1, A2, ou A3 en cm^2 .



$$A_1 = \int_a^b f(t)dt$$



$$A_2 = -\int_a^b g(t)dt$$



$$A_3 = \int_a^b (k(t) - h(t))dt$$

■ Principe

On applique l'une des trois formules précédentes **sans oublier** de multiplier par l'unité d'aire, si on demande l'aire en cm^2 .

■ Astuce

Quand on vous demande une aire en cm^2, multipliez dés le départ par l'unité d'aire comme cela vous ne l'oublierez pas à la fin !

■ **Exemple :** *Donnez la valeur exacte des aires A1, A2 et A3 précédentes en cm^2 sachant que :*

$\|\vec{u}\| = 2\text{ cm}$; $\|\vec{v}\| = 1\text{ cm}$; $a = 1{,}5$; $b = 2{,}5$; $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 1$; $g(x) = -\frac{1}{2\sqrt{x}} - 1$; $k(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 2$; $h(x) = 0{,}1x^2 + 2$.

L'unité d'aire est de **2 cm^2** donc on a :

$$A_1 = 2\int_{1,5}^{2,5}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 1\right)dx = 2\left[\sqrt{x} + x\right]_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}} = 2\left(\sqrt{\frac{5}{2}} + \frac{5}{2} - \sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{3}{2}\right) = \sqrt{10} - \sqrt{6} + 2\ \text{cm}^2.$$

Il est clair que $A_2 = A_1$ puisque $g(x) = -f(x)$.

$$A_3 = 2\int_{1,5}^{2,5}\left(\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} + 2\right) - \left(0{,}1x^2 + 2\right)\right)dx = 2\int_{1,5}^{2,5}\left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{10}x^2\right)dx = 2\left[\sqrt{x} - \frac{x^3}{30}\right]_{\frac{3}{2}}^{\frac{5}{2}}$$

$$2\left(\sqrt{\frac{5}{2}} - \frac{125}{240} - \sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{27}{240}\right) = \sqrt{10} - \sqrt{6} - \frac{49}{60}\ \text{cm}^2.$$

2. Autres méthodes de détermination d'intégrales

Les méthodes de ce chapitre font intervenir des propriétés des intégrales qui permettent de les déterminer quand les méthodes 1, 2 et 3 ne suffisent pas.

Cependant, elles finissent souvent par se ramener à l'une d'entre elles, mais parfois non, comme le montre les exemples des méthodes 7 et 10.

METHODE 6 : Utiliser une intégration par parties

■ Rappel

Si u et v sont dérivables à **dérivées continues** sur $[a,b]$ alors :

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = \left[u(x)v(x)\right]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx.$$

REMARQUE : Très souvent u et v sont deux fois dérivables, ce qui assure que les hypothèses du théorème sont satisfaites, puisque si u' et v' sont dérivables elles sont forcément continues. Quand ce sera le cas, on dira que u et v sont deux fois dérivables, donc que l'on peut intégrer par parties.

■ Principe

Le principe consiste à ramener le calcul de $\int_a^b u(x)v'(x)dx$, que l'on ne sait pas calculer avec les méthodes 1, 2 ou 3, au calcul de $\int_a^b u'(x)v(x)dx$ que l'on peut déterminer avec elles.

Il faut parfois faire plusieurs intégrations par parties successives pour s'en sortir, mais **attention** ! Si vous commencez à dériver u, il faut dériver sa dérivée et ainsi de suite sans quoi vous allez faire une page de calcul pour finalement « retomber » sur $\int_a^b u(x)v'(x)dx = \int_a^b u(x)v'(x)dx$: c'est inutile !

Vous avez compris que l'important est de choisir les bonnes fonctions u et v'.

■ Cas d'application

En général, quand vous aurez à faire une ou plusieurs intégrations par parties, l'énoncé vous le précisera .

Pour des intégrales du style $\int x^n \sin(ax+b)dx$, $\int x^n \cos(ax+b)dx$, $\int x^n e^{ax+b}dx$ ou $\int x^n \ln(ax+b)dx$ avec n entier naturel non nul.

Pour les trois premières, on dérive $x \mapsto x^n$ (éventuellement plusieurs fois) et pour la dernière on dérive $x \mapsto \ln(ax+b)$ que l'on ne sait de toute façon pas intégrer (dans ce dernier cas « n » peut être nul auquel cas on pose $v'(x)=1$).

Il peut arriver que vous ayez à faire une ou deux intégrations par parties pour trouver une relation de récurrence concernant une suite dont le terme général est défini à partir d'une intégrale.

■ Erreur classique

Il est assez rare de lire des copies où il est précisé que l'on peut intégrer par parties. C'est généralement possible car les fonctions sont deux fois dérivables et c'est bien de le préciser !

■ Astuces

Quand vous avez une expression de la forme $\int_a^b (\alpha x^2+\beta x+\gamma)g(x)dx$ **avec g qui n'est pas une fonction logarithme népérien**, il est souvent intéressant de dériver $x \mapsto \alpha x^2+\beta x+\gamma$, car on diminue la puissance de 1. Il ne reste plus que $x \mapsto 2\alpha x+\beta$, mais si on fait une autre intégration par partie en dérivant cette dernière fonction, il ne reste plus qu'une constante et... c'est gagné !

Quand vous avez une expression de la forme $\int_a^b (\alpha x^2+\beta x+\gamma)g(x)dx$ **avec g qui est une fonction logarithme népérien**, il faut dériver g.

Quand vous intégrez $v'(x)$ et que vous trouvez une primitive $v(x)$, pensez que $v(x)+k$ avec k bien choisi en est également une, sans quoi vous risquez de « patauger » avec $\int_a^b u'(x)v(x)dx$ (cf. exemple).

■ **Exemple :** *Déterminez* $\int_0^1 \ln(x+3)dx$.

Si vous avez bien lu les lignes précédentes vous savez qu'il faut dériver le logarithme népérien donc poser $u(x) = \ln(x+3)$ et $v'(x) = 1$ (on n'a pas le choix).

Cela donne par exemple $u'(x) = \dfrac{1}{x+3}$ et $v(x) = x$ **MAIS** il est beaucoup plus judicieux de prendre $v(x) = x+3$ sinon vous risquez d'avoir des soucis avec $\int_0^1 u'(x)v(x)dx$.

Cela étant, comme u et v sont deux fois dérivables sur $[0,1]$, par intégration par parties on obtient :

$$\int_0^1 \ln(x+3)dx = \left[(x+3)\ln(x+3)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x+3}{x+3}dx = \left[(x+3)\ln(x+3)\right]_0^1 - \int_0^1 1dx$$

$$= \left[(x+3)\ln(x+3)\right]_0^1 - \left[x\right]_0^1 = \left[(x+3)\ln(x+3) - x\right]_0^1 = (4\ln 4 - 1) - 3\ln 3 = 4\ln 4 - 3\ln 3 - 1.$$

METHODE 7 : Utiliser la définition

■ Rappel

On vous a rappelé en introduction que l'intégrale d'une fonction f peut se définir à partir d'une aire en unité d'aire.

■ Principe

On calcule l'aire pour déterminer l'intégrale.

■ Cas d'application

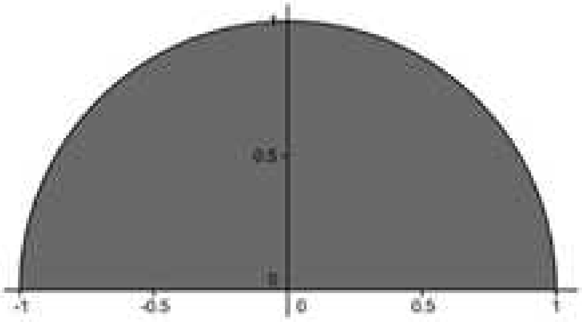
Quand la fonction f n'est pas donnée (cas des exemples de l'introduction) ou que l'on ne peut pas intégrer f avec les méthodes 1, 2 ou 3, mais que sa représentation graphique correspond à des aires calculables (triangles, rectangles, trapèzes, portions de disques (cf. exemple))

On peut remarquer dès à présent que la méthode 18 du chapitre relatif aux suites permet de déterminer une valeur approchée d'une aire et donc de donner celle d'une intégrale. Cette valeur approchée peut parfois même permettre d'émettre une conjecture qui donne sa valeur exacte.

L'idéal étant bien sûr de démontrer la conjecture dans ce dernier cas, mais ce n'est malheureusement pas toujours possible.

■ **Exemple :** *Déterminez* $\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}dx$ *après avoir conjecturé à quelle figure géométrique correspond la représentation graphique* (C_f) *de la fonction f définie sur* $[-1,1]$ *par* $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

Traçons la courbe (C_1) pour émettre les conjectures demandées :



On peut conjecturer que (C_1) est un demi-cercle de centre O et de rayon 1 et donc que l'intégrale est égale à l'aire du demi-disque de centre O de rayon 1 qui vaut $\frac{\pi}{2}$. Démontrons cela !

L'équation du cercle de centre O est de rayon 1 est $x^2+y^2=1$.
Or $x^2+y^2=1 \Rightarrow y^2=1-x^2 \Rightarrow y=\pm\sqrt{1-x^2}$.

Par conséquent, comme le demi-cercle de centre O et de rayon 1 correspondant aux y positifs, il a pour équation $y=\sqrt{1-x^2}$.

On en déduit que l'aire grisée est $\frac{\pi}{2}$ et finalement que $\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}$.

METHODE 8 : Utiliser la linéarité

■ Rappel

On a déjà vu que pour tous réels a et b et toutes fonctions f et g intégrables sur un intervalle I on a : $\int_I (af(x)+bg(x))dx = a\int_I f(x)dx + b\int_I g(x)dx$.

■ Principe

On calcule deux combinaisons linéaires de deux intégrales I et J que l'on peut déterminer avec le théorème fondamental (expressions de la forme aI + bJ) puis on résout le système obtenu pour les trouver.

■ **Exemple :** *On donne* $I=\int_0^{\pi}\cos^2 x\,dx$ *et* $J=\int_0^{\pi}\sin^2 x\,dx$.

Calculez I + J et I – J et en déduire I et J.

$I+J=\int_0^{\pi}(\cos^2 x+\sin^2 x)dx=\int_0^{\pi}1dx=[x]_0^{\pi}=\pi$.

$I - J = \int_0^{\pi}(\cos^2 x - \sin^2 x)dx = \int_0^{\pi}\cos 2x\, dx = \left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\pi} = 0$ (pour une primitive de $x \mapsto \cos 2x$ on applique la méthode 3).

Ainsi $\begin{cases} I + J = \pi \\ I - J = 0 \end{cases}$ et donc $I = J = \frac{\pi}{2}$.

METHODE 9 : Utiliser la relation de Chasles

■ Rappel

Etant donné trois réels a, b, et c d'un intervalle I, si f est une fonction continue sur I, alors $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.

■ Cas d'application

Quand f(x) comporte des valeurs absolues et que l'on veut appliquer le théorème fondamental.

■ **Exemple :** *Déterminez* $I = \int_{-1}^{3}|x^2 - 1|\, dx$.

On ne connaît pas de primitive de f définie par $f(x) = |x^2 - 1|$ sur $[-1 ; 3]$, mais on en connaît une sur $[-1 ; 1]$ et sur $[1 ; 3]$.

En effet, sur $[-1 ; 1]$, $x^2 - 1 \le 0$ et donc $f(x) = -x^2 + 1$.

De même, sur $[1 ; 3]$, $x^2 - 1 \ge 0$ et donc $f(x) = x^2 - 1$.

Finalement $I = \int_{-1}^{1} f(x)dx + \int_1^3 f(x)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x\right]_{-1}^{1} + \left[\frac{x^3}{3} - x\right]_1^3 = \frac{4}{3} + \frac{20}{3} = 8$.

METHODE 10 : Utiliser F définie par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$

■ Rappels

Propriété 1 : Si F est une primitive d'une fonction f définie et continue sur un intervalle I alors l'ensemble des primitives de f sur I est la famille de fonctions F_k définies sur I par $F_k(x) = F(x) + k$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Propriété 2 : Si une fonction f est continue sur un intervalle I contenant le réel a alors la fonction F définie sur I par $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ est la primitive de f qui s'annule en a.

REMARQUE : Avec cette deuxième propriété, on a $F'(x) = f(x)$ même si on ne sait pas exprimer $F(x)$ avec les fonctions usuelles ou leurs composées.

■ Principe

L'énoncé donne la marche à suivre en proposant d'utiliser les deux propriétés précédentes.

■ Cas d'application

Lorsque f n'admet pas une primitive parmi les fonctions usuelles.

■ **Exemple :** *On considère l'intégrale* $I=\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt$, *la fonction F définie sur* $[0;1]$ *par* $F(x)=\int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,dt$ *ainsi que la fonction G définie sur* $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ *par* $G(x)=F(\tan x)$.

Déterminez G', G puis I.

Coup de pouce : $1=\tan\frac{\pi}{4}$.

On a $G'(x)=F'(\tan x)\times \tan' x=f(\tan x)\times\left(1+\tan^2 x\right)=\frac{1}{\left(1+\tan^2 x\right)}\times\left(1+\tan^2 x\right)=1$

car d'après la propriété 2 on a $F'(x)=f(x)=\frac{1}{1+x^2}$.

Comme $G'(x)=1$ on en déduit que $G(x)=x+k\ (k\in\mathbb{R})$ d'après la propriété 1.

Or, $G(0)=F(\tan 0)=F(0)=\int_0^0 \frac{1}{1+t^2}\,dt=0$, d'où $0=G(0)=0+k$, ce qui permet d'en déduire que $G(x)=x$.

Finalement, on obtient $I=F(1)=F\left(\tan\frac{\pi}{4}\right)=G\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}$.

3. Approximations d'intégrales

Quand les méthodes précédentes sont épuisées, il ne reste plus qu'une solution pour avoir une idée de la valeur d'une intégrale : en déterminer une valeur approchée.

C'est ce que nous vous proposons avec les méthodes suivantes.

Il va être question d'algorithmes, n'hésitez pas à les programmer pour bien vous imprégner des notions qu'ils mettent en œuvre.

METHODE 11 : Comment donner une valeur approchée d'une intégrale à partir d'un encadrement

■ Rappel

Si $g \le f \le h$ sur $[a\,;b]$ avec $a \le b$ alors $\int_a^b g(t)dt \le \int_a^b f(t)dt \le \int_a^b h(t)dt$ lorsque les trois fonctions sont continues sur $[a,b]$.

Cas particulier : si $f \ge 0$ sur $[a\,;b]$ avec $a \le b$ alors $\int_a^b f(t)dt \ge 0$ (positivité de l'intégrale).

■ Principe

On encadre f sur $[a\,;b]$, par deux fonctions dont on connaît une primitive.

■ **Exemple :** *On considère I définie par $I = \int_0^1 e^{-t^2}dt$, ainsi que les fonctions h et g définies sur $[-1\,;0]$ par $h(u) = e^u - 1 - u$ et $g(u) = h(u) - \frac{1}{2}u^2$.*

1) Montrez que $0 \le h(u)$ en dressant le tableau de variations de h.

2) Montrez que $g(u) \le 0$ en dressant le tableau de variations de g.

3) Déduisez de 1) et 2) que $1+u \le e^u \le 1+u+\frac{u^2}{2}$ pour $u \in [-1\,;0]$.

4) En déduire que $1-x^2 \le e^{-x^2} \le 1-x^2+\frac{x^4}{2}$ pour $x \in [0\,;1]$.

5) En déduire une valeur approchée de I à 0,1 près par défaut.

1) La fonction h est dérivable sur $[-1\,;0]$ et l'on a $h'(u) = e^u - 1$.
$e^u - 1 \le 0 \Leftrightarrow e^u \le 1 \Leftrightarrow u \le 0$ donc h' est négative sur $[-1\,;0]$.

On en déduit que la fonction h est décroissante sur l'intervalle $[-1,0]$.

Le tableau de variations de h sur $[-1,0]$ est donc le suivant :

u	-1		0
$h'(u)$		$-$	
h	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

On peut donc affirmer que $h(u)=e^u-1-u\geq 0$ et donc que $e^u\geq 1+u$ sur l'intervalle $[-1;0]$.

2) La fonction g est dérivable sur l'intervalle $[-1;0]$ et l'on a $g'(u)=h'(u)-u=e^u-1-u=h(u)\geq 0$ d'après la question précédente.

On a donc le tableau suivant :

u	-1		0
$g'(u)$		$+$	
g	$\frac{1}{e}-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	0

On peut donc affirmer que $g(u)=e^u-1-u-\frac{u^2}{2}\leq 0$ et donc que $e^u\leq 1+u+\frac{u^2}{2}$ sur $[-1;0]$.

3) D'après 1) et 2) pour tout u de $[-1;0]$ on a $1+u\leq e^u\leq 1+u+\frac{u^2}{2}$.

4) Si $x\in[0;1]$ alors $-x^2\in[-1;0]$ et donc on peut remplacer la variable u de l'inégalité précédente par $-x^2$ ce qui donne $1-x^2\leq e^{-x^2}\leq 1-x^2+\frac{x^4}{2}$ sur $[0;1]$.

5) On intègre membre à membre l'inégalité précédente sur $[0;1]$ et l'on obtient :

$$\int_0^1(1-x^2)dx\leq\int_0^1 e^{-x^2}dx\leq\int_0^1\left(1-x^2+\frac{x^4}{2}\right)dx\Leftrightarrow\left[x-\frac{x^3}{3}\right]_0^1\leq I\leq\left[x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{10}\right]_0^1.$$

On en déduit que $\frac{2}{3}\leq I\leq\frac{2}{3}+\frac{1}{10}$.

Finalement, on peut affirmer que $I=\frac{2}{3}$ à 0,1 près par défaut.

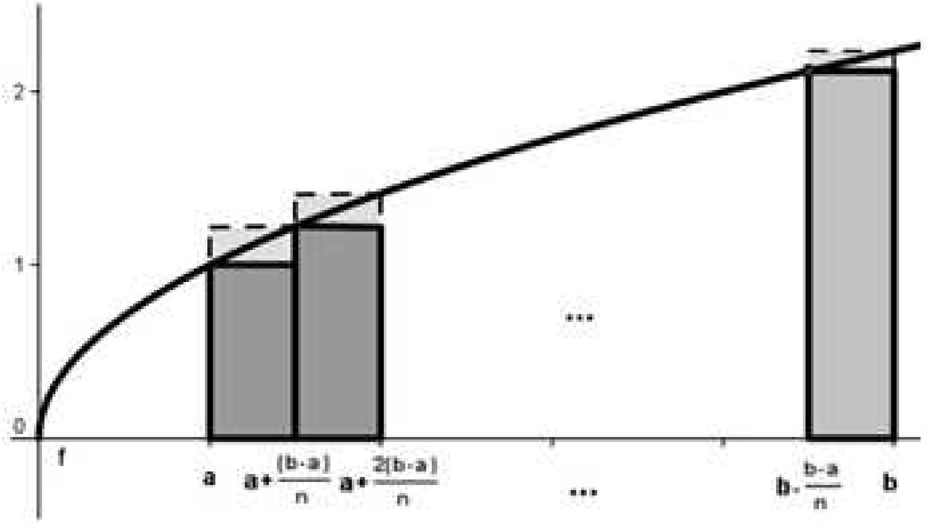
METHODE 12 : Comment encadrer l'intégrale d'une fonction continue, monotone et positive par la méthode des rectangles

■ Cas d'application

Lorsque f est continue, monotone et positive.

■ Principe

On utilise la définition de l'intégrale et la méthode 18 du chapitre sur les suites qui repose sur un algorithme dont on vous rappelle le principe :



Dans la mesure où $\int_a^b f(x)dx$ est en unité d'aire, l'aire comprise entre (Ox), (Cf), et les droites d'équation x = a et x = b, cette intégrale est encadrée par les suites $U_n = \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + i\frac{b-a}{n}\right)\left(\frac{b-a}{n}\right)$ et $V_n = \sum_{i=0}^{n-1} f\left(b - i\frac{b-a}{n}\right)\left(\frac{b-a}{n}\right)$.

L'algorithme de la méthode 18 rappelé ci-après exploite ce découpage de $[a;b]$ en n parties, permet d'encadrer une intégrale et de donner une amplitude de cet encadrement.

Si vous voulez un encadrement d'amplitude 10^{-p} donnée, il faut résoudre l'inéquation d'inconnue n suivante : $V_n - U_n = \frac{b-a}{n} \times |f(b) - f(a)| \leq 10^{-p}$.

En outre, si vous cherchez une valeur approchée à 10^{-p} près de l'intégrale il suffit de prendre la troncature à p décimales de la **borne supérieure** de l'encadrement.

■ Astuce

Si l'énoncé ne demande pas la plus petite valeur de n qui donne la valeur approchée demandée à 10^{-p} près, alors vous prenez une grande valeur de n que peut supporter l'algorithme afin d'obtenir les mêmes p premières décimales du minorant et du majorant et c'est réglé !

REMARQUE : Si la fonction est monotone négative, l'algorithme suivant reste valable car il renvoie les aires des rectangles multipliées par –1 (les nombres $f\left(a+i\frac{b-a}{n}\right)$ et $f\left(b-i\frac{b-a}{n}\right)$ étant négatifs), ce qui correspond bien à la définition de l'intégrale pour les fonctions négatives.

En langage Python, l'algorithme qui permet d'encadrer $\int_1^5 \sqrt{x}dx$ (qui correspond à l'illustration du principe avec $a=1$, $b=5$ et $f(x)=\sqrt{x}$) est le suivant :

```
from math import sqrt
def f(x):
    return sqrt(x)
def aire(a,b,n):
    s=f(a)
    t=f(b)
    for i in range(1,n):
        s=s+f(a+i*((b-a)/n))
        t=t+f(b-i*((b-a)/n))
        u=s*((b-a)/n)
        v=t*((b-a)/n)
        d=abs(u-v)
    return(u,v,d)
```

Si l'on veut par exemple une valeur approchée à 10^{-3} près de l'intégrale, on passe en mode « Run » en appliquant l'astuce avec une assez grande valeur de n et l'on obtient :

```
>>> aire(1,5,50000)
(6.786843815466159, 6.786942700904273, 9.88854381143156e-05)
```

Finalement $\int_1^5 \sqrt{x}dx = 6{,}786$ à 10^{-3} près.

■ **Exemple :** *On reprend l'intégrale de l'exemple de la méthode précédente, c'est-à-dire l'intégrale I définie par $I=\int_0^1 e^{-t^2}dt$.*

1) Donner la valeur minimale de N qui permet d'obtenir un encadrement d'amplitude 10^{-3}.

2) Vérifier avec l'algorithme que la valeur de N est bien la bonne.

3) Donner une valeur approchée de I à 10^{-3} près.

1) Résolvons $|f(1)-f(0)|\times\frac{1-0}{n}\leq 10^{-3} \Rightarrow n\geq\frac{|e^{-1}-1|}{10^{-3}} \Rightarrow n\geq 10^3\times|e^{-1}-1| \Rightarrow n\geq 632{,}12$.

La valeur N cherchée est N = 633.

2) On prend l'algorithme suivant pour répondre à la question :

```
from math import exp
def f(x):
    return exp(-x**2)
def aire(a,b,n):
    s=f(a)
    t=f(b)
    for i in range(1,n):
        s=s+f(a+i*((b-a)/n))
        t=t+f(b-i*((b-a)/n))
        u=s*((b-a)/n)
        v=t*((b-a)/n)
        d=abs(u-v)
    return(u,v,d)
```

En mode « Run », on obtient :

```
>>> aire(0,1,632)
(0.7473240746870875, 0.7463238839294468, 0.0010001907576406843)
>>> aire(0,1,633)
(0.7473232851316177, 0.7463246744541636, 0.0009986106774541037)
```

Bingo ! C'est bien N = 633 qui convient.

3) On en déduit que I = 0,747 à 10^{-3} près. C'est plus précis que dans l'exemple de la méthode précédente, mais il a fallu la « force » de l'informatique pour obtenir ce résultat.

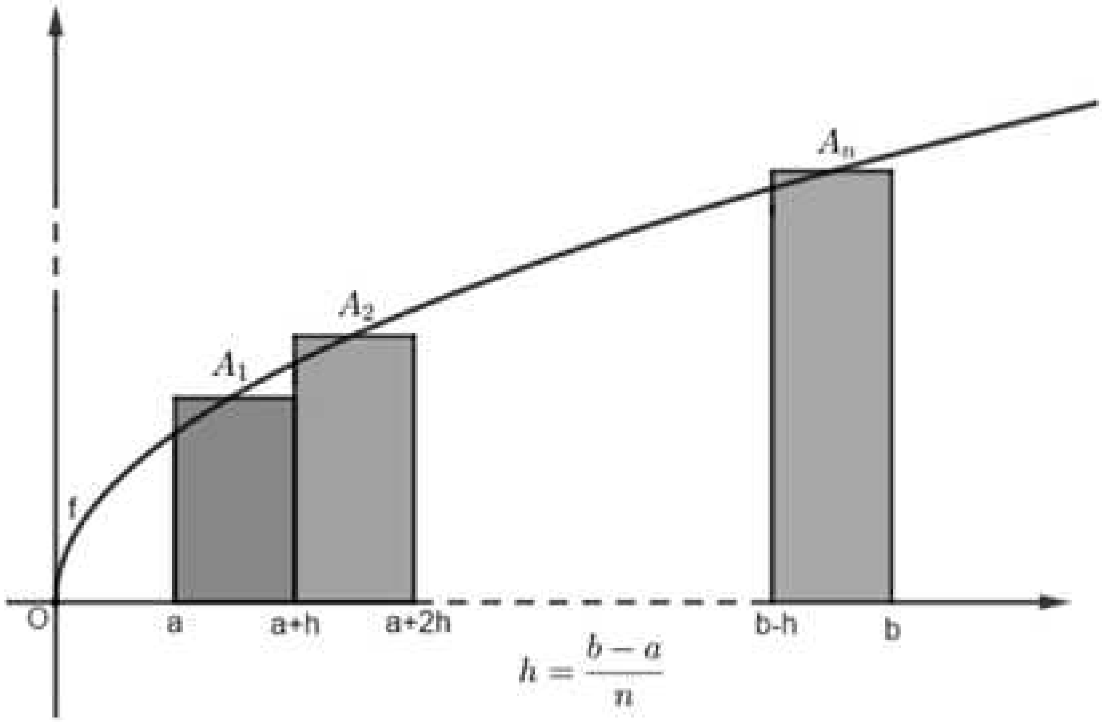
METHODE 13 : Comment donner l'approximation d'une intégrale d'une fonction continue et positive par la méthode des milieux

■ Cas d'application

Lorsque f est continue et positive même si elle n'est pas monotone.

■ Principe

On utilise la définition de l'intégrale et le principe illustré par la figure suivante puis on construit un algorithme qui permet de donner l'approximation demandée.



Comme nous sommes bien gentils nous allons vous expliquer ce principe en détail, puis prendre l'exemple de l'approximation de $\int_1^5 \sqrt{x}dx$ vu dans la méthode précédente.

Sur cette figure, pour k entier compris entre 1 et n, les points A_k sont les points de la courbe d'abscisses respectives $a+(2k-1)\times\frac{h}{2}=a+(2k-1)\times\frac{b-a}{2n}$.

La somme des aires des rectangles donne une approximation de l'aire comprise entre les droites d'équations $x=a$, $x=b$, l'axe de abscisses et la courbe représentative de f.

En terme de suites cette approximation est donnée par :

$$U_n=\sum_{k=1}^{n} h\times f\left(a+(2k-1)\times\frac{h}{2}\right).$$

REMARQUES : 1) Cette méthode ne donne pas un encadrement comme la précédente mais elle n'oblige pas la fonction à être monotone.

2) Pour être sûr d'avoir une valeur approchée pertinente, il suffit de prendre des valeurs de n suffisament grandes qui stabilisent les premières décimales de U_n comme nous le feront dans les exemples.

3) Pour les fonctions négatives la remarque de l'exercice précédent reste valable.

En langage Python, l'algorithme qui permet de donner une approximation de $\int_1^5 \sqrt{x}dx$ par le principe que l'on vient de décrire est le suivant :

```
from math import sqrt
def f(x):
    return sqrt(x)
def aire(a,b,n):
    s=f(a)
    h=(b-a)/n
    for i in range(2,n+1):
        s=s+f(a+(2*i-1)*(h/2))
        u=s*h
    return(u)
```

En mode « Run », on obtient :

```
>>> aire(1,5,50000)
6.786893256806446
>>> aire(1,5,100000)
6.7868932579510375
```

On retrouve bien la valeur approchée 6,786 à 10^{-3} près obtenue avec la méthode précédente, mais on fait même mieux puisque 6,78689325 en est une à 10^{-8} près.

■ **Exemple :** *On reprend l'intégrale de l'exemple de la méthode précédente, c'est-à-dire l'intégrale I définie par* $I=\int_0^1 e^{-t^2}dt$.

Donner une valeur approchée de I à 10^{-3} près par la méthode des milieux à l'aide d'un algorithme en langage Python.

On prend l'algorithme suivant pour répondre à la question :

```
from math import exp
def f(x):
    return exp(-x**2)
def aire(a,b,n):
    s=f(a)
    h=(b-a)/n
    for i in range(2,n+1):
        s=s+f(a+(2*i-1)*(h/2))
        u=s*h
    return(u)
```

En mode « Run », on obtient :

```
>>> aire(0,1,10000)
0.746824133119241
>>> aire(0,1,100000)
0.7468241328154889
>>> aire(0,1,10000000)
0.7468241328123898
```

C'est assez puissant : on obtient 0,74682413281 à 10^{-11} près, ce qui bien sûr est cohérent avec les résultats trouvés dans les exemples des deux méthodes précédentes.

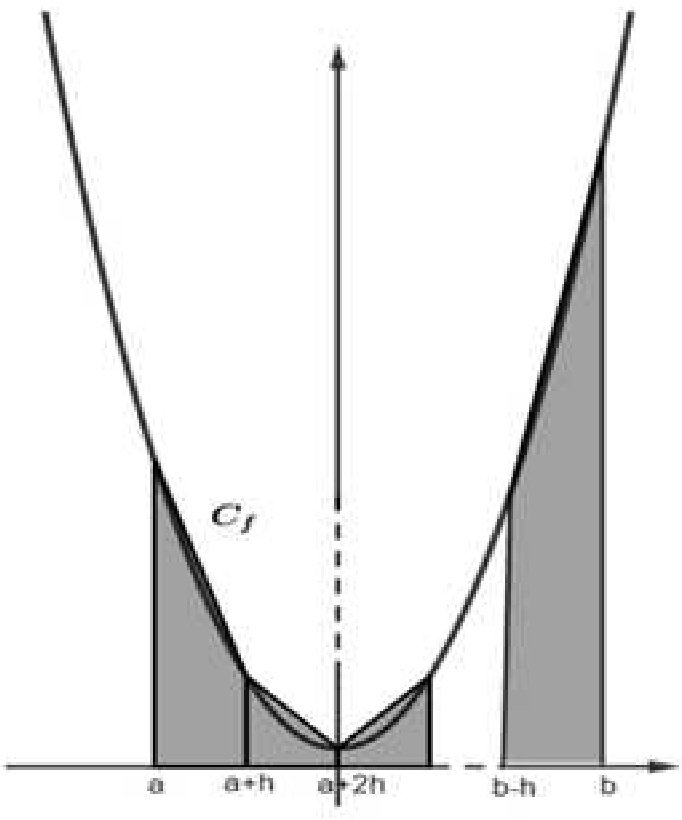
METHODE 14 : Comment donner l'approximation d'une intégrale d'une fonction continue et positive par la méthode des trapèzes

■ Cas d'application

Lorsque f est continue et positive même si elle n'est pas monotone.

■ Principe

Comme pour les deux méthodes précédentes, on utilise la définition de l'intégrale et le principe illustré par la figure suivante puis on construit un algorithme qui permet de donner l'approximation demandée.



La somme des aires des trapèzes donne une approximation de l'aire comprise entre les droites d'équations $x = a$, $x = b$, l'axe de abscisses et la courbe représentative de f.

Le premier trapèze a pour hauteur h et des bases de longueurs $f(a)$ et $f(a+h)$ donc son aire est $A_1 = h \times \frac{f(a)+f(a+h)}{2}$.
Pour k entier naturel compris entre 1 et n, en raisonnant de même le $k^{ième}$ trapèze a pour aire $A_k = h \times \frac{f(a+(k-1)h)+f(a+kh)}{2}$.

En terme de suites cette approximation de l'aire par cette méthode est donnée par :

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} h \times \frac{f(a+(k-1)h)+f(a+kh)}{2}.$$

REMARQUE : Les trois remarques de la méthode précédentes restent valables.

En langage Python, l'algorithme qui permet de donner une approximation de $\int_1^5 \sqrt{x}dx$ par le principe que l'on vient de décrire est le suivant :

```
from math import sqrt
def f(x):
    return sqrt(x)
def aire(a,b,n):
    s=f(a)
    h=(b-a)/n
    for i in range(2,n+1):
        s=s+f(a+(2*i-1)*(h/2))
        u=s*h
    return(u)
```

En mode « Run », on obtient :

```
>>> aire(1,5,100)
6.786856407214705
>>> aire(1,5,1000)
6.786892889808498
>>> aire(1,5,10000)
6.786893254647382
>>> aire (1,5,50000)
6.78689325818521
>>> aire(1,5,100000)
6.786893258295709
```

On retrouve bien la valeur approchée 6,78689325 à 10^{-8} près obtenue à la méthode précédente.

■ **Exemple :** *On reprend l'intégrale de l'exemple de la méthode 10, c'est-à-dire l'intégrale I définie par* $I=\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt$ *dont il a fallu utiliser « l'artillerie » pour prouver que sa valeur exacte est* $\frac{\pi}{4}$.

Donner une valeur approchée de I à 10^{-4} *près par la méthode des trapèzes à l'aide d'un algorithme en langage Python.*

On prend l'algorithme suivant pour répondre à la question :

```
from math import sqrt
def f(x):
    return 1/(1+x**2)
def aire(a,b,n):
    s=0
    h=(b-a)/n
    for i in range(1,n+1):
        s=s+(f(a+(i-1)*h)+f(a+i*h))/2
        u=s*h
    return(u)
```

En mode « Run », on obtient :

```
>>> aire(0,1,50)
0.7853814967308138
>>> aire(0,1,100)
0.7853939967307819
```

Finalement, on obtient 0,7853 à 10^{-4} près pour d'assez petites valeurs de n ce qui prouve l'efficacité de cette méthode.

METHODE 15 : Comment donner l'approximation d'une intégrale d'une fonction qui est continue et positive par la méthode de Monte-Carlo

■ Cas d'application

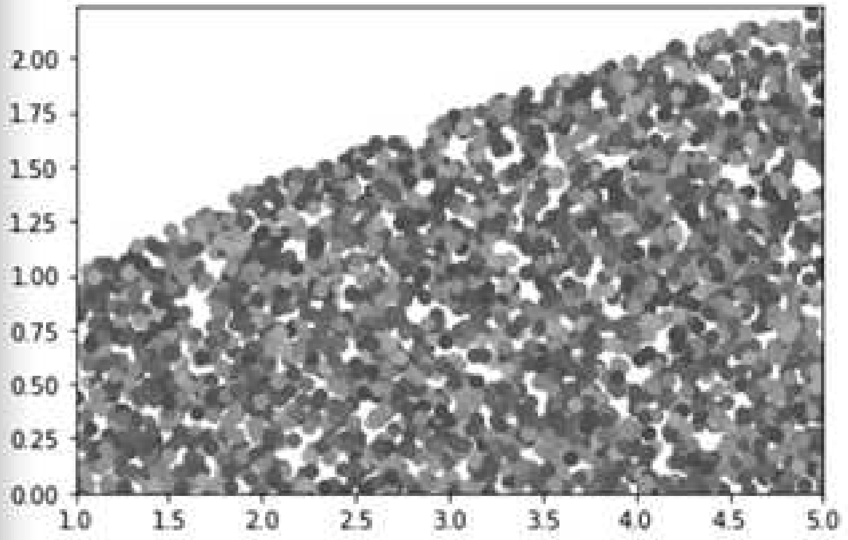
Lorsque f est continue et positive même si elle n'est pas monotone.

■ Principe

Cette méthode est radicalement différente des trois précédentes dans la mesure où elle consiste à déterminer une aire, donc une intégrale, sans utiliser des aires de rectangles ou de trapèzes dont la somme converge vers l'aire cherchée.

En effet, l'idée est de déterminer la valeur approchée d'une aire contenue dans un rectangle d'aire connue en utilisant des tirages de points aléatoires dans celui-ci, comme l'illustre la figure suivante, avec l'exemple qui nous a servi de fil rouge dans les trois méthodes précédentes.

```
In [24]: montecarlo(4000)
```




```
Out[24]: 0.76375
```

Avec un algorithme que bien sûr nous allons vous donner, on a généré 4000 points aléatoires dans le rectangle de dimensions 4 et $f(5)=\sqrt{5}=2,236$ et ceux représentés sur la figure sont dans l'aire comprise entre les droites d'équations $x=a=1$, $x=b=5$, l'axe de abscisses et la courbe représentative de f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}$.

La valeur 0,76375 que renvoie l'algorithme est la proportion des points représentés sur la figure.

Pour avoir une valeur approchée de l'aire cherchée il suffit de multiplier cette proportion par l'aire du rectangle de départ dont l'aire est $4\times\sqrt{5}=8,944$.

L'approximation de l'aire cherchée donc de $\int_1^5 \sqrt{x}dx$ avec cette méthode est donc $0,76375\times 8,944=6,83$ ce qui cohérent avec les approximations données par les autres méthodes.

Comme on vous sent impatients, on va vous donner l'algorithme en langage Python qui permet de générer ce beau nuage de points et leur proportion parmi les 4 000 points générés aléatoirement dans le rectangle initial.

```
from math import sqrt
def f(x):
    return sqrt(x)
import matplotlib.pyplot as plt
from random import uniform
def montecarlo(n):
    plt.axis ([1,5,0,f(5)])
    x=[uniform(1,5) for i in range(n)]
    y=[uniform(0,f(5)) for i in range(n)]
    z=[f(x[i]) for i in range(n)]
    nbre=0
    for i in range(n):
        if y[i]<z[i]:
            nbre=nbre+1
            plt.scatter(x[i],y[i])
    plt.show()
    return(nbre/n)
```

REMARQUES : 1) Cette méthode ne donne pas un encadrement mais elle n'oblige pas la fonction à être monotone.

2) Lorsque n est trop grand l'algorithme « rame » un peu donc l'ordinateur n'aime pas.

3) Pour avoir une valeur assez bonne de l'approximation vous pouvez appliquer l'algorithme plusieurs fois avec une même valeur de n et faire la moyenne des proportions obtenues.

■ **Exemple :** *On reprend l'intégrale de l'exemple de la méthode 7, c'est-à-dire l'intégrale I définie par* $I = \int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,dx$ *dont nous avons démontré qu'elle valait exactement* $\frac{\pi}{2}$.

Déterminez une valeur approchée de I avec la méthode de Monte-Carlo et vérifiez la cohérence de votre résultat à l'aide de la phrase suivante qui donnent les 10 premières décimales de π *:*

« Que j'aime à faire connaître ce nombre utile aux sages ».

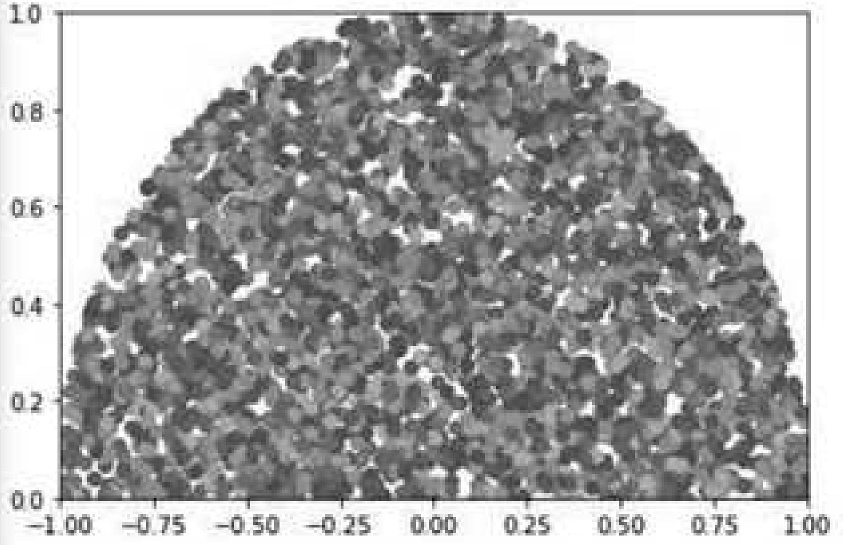
(3,1415926535 (il suffit de compter le nombre de lettres par mot...)).

On prend l'algorithme suivant pour répondre à la question :

```
from math import sqrt
def f(x):
    return sqrt(1-x**2)
import matplotlib.pyplot as plt
from random import uniform
def montecarlo(n):
    plt.axis ([-1,1,0,f(0)])
    x=[uniform(-1,1) for i in range(n)]
    y=[uniform(0,f(0)) for i in range(n)]
    z=[f(x[i]) for i in range(n)]
    nbre=0
    for i in range(n):
        if y[i]<z[i]:
            nbre=nbre+1
            plt.scatter(x[i],y[i])
    plt.show()
    return(nbre/n)
```

En mode « Run », on obtient :

```
In [32]: montecarlo(5000)
```




```
Out[32]: 0.7822
```

Comme l'aire du rectangle qui contient ce nuage de points vaut 2, une approximation de l'intégrale I par cette méthode est $2\times 0{,}7822 = 1{,}5644$.

Comme la valeur exacte de l'intégrale I est $\frac{\pi}{2}$, d'après ce que l'on vient de déterminer on en déduit $\pi \approx 2\times 1{,}5644 \approx 3{,}1288$.

C'est bien moins juste que la phrase, mais au fond, qui la connaît ?

On aurait pu reprendre l'algorithme pour obtenir une valeur plus précise mais cette méthode est aléatoire : il faut jouer le jeu !

4. Equations différentielles

On vous a proposé en introduction du chapitre trois équations différentielles dont on vous a donné une solution.

L'objectif de cette partie est de résoudre certaines équations différentielles c'est-à-dire d'en déterminer toutes les solutions définies **sur un intervalle I de longueur maximale** et éventuellement de donner certaines d'entre elles qui vérifie une condition particulière.

Enfin dans les cas plus compliqués, nous verrons comment utiliser la méthode d'Euler pour s'en sortir (approfondissement).

METHODE 16 : Comment montrer que f est solution particulière d'une équation différentielle

■ Principe

On remplace y par l'expression de f donnée et l'on se demande si « ça marche ».

■ Cas d'application

Il est très fréquent que l'on vous donne une famille de fonctions (par exemple on vous définit f par $f(x)=ax^2+bx+c$) et que vous ayez à trouver parmi ces fonctions, celle qui est solution.

Il faut alors appliquer le principe et procéder par identification.

■ **Exemple :** *Déterminez a et b de façon à ce que f définie sur* $\mathbb{R}$ *par* $f(x)=ae^x+b$ *soit solution de* $y'+2y=e^x+3$ (E).

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=ae^x$.

On en déduit que $f'(x)+2f(x)=ae^x+2(ae^x+b)=3ae^x+2b$.

La fonction f est donc solution de (E) lorsque $3ae^x+2b=e^x+3$.

Par identification, $\begin{cases}3a=1\\2b=3\end{cases}$ donc $\begin{cases}a=\dfrac{1}{3}\\[2mm]b=\dfrac{3}{2}\end{cases}$ et la solution particulière cherchée est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{1}{3}e^x+\dfrac{3}{2}$.

METHODE 17 : Comment résoudre $y'=f$ et l'exploiter

■ Principe

Résoudre l'équation différentielle $y'=f$ revient à déterminer l'ensemble des primitives de f sur un intervalle où elle est définie.

Pour cela, on applique les méthodes 1, 2, 3 ou 4 et la propriété 1 rappelée dans la méthode 10.

REMARQUE POUR TOUTES LES EQUATIONS DIFFERENTILLES
Chaque fois que l'on demande la résolution d'une équation différentielle, il est très fréquent qu'ensuite il soit question d'en donner une qui vérifie une condition.

■ Astuce

Lorsque l'on veut trouver la solution de l'équation différentielle $y' = f$ dont la courbe représentative passe par $A(a,b)$, c'est la fonction F définie par $F(x) = \int_a^x f(t)dt + b$ d'après la propriété 2 de la méthode 10, ce qui évite la résolution générale et permet un gain de temps (cf. exemple).

■ **Exemple :** *On considère l'équation différentielle (E) :* $y' = e^{2x+3} = f(x)$.
1) Résolvez (E), puis donnez la solution de (E) dont la courbe représentative passe par $A(1,2)$.
2) Donnez directement la solution de (E) dont la courbe représentative passe par $A(1,2)$ *sans résoudre (E).*

1) Par application de la méthode 3, une primitive de f est la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \frac{1}{2}e^{2x+3}$.
D'après la propriété 1 de la méthode 10 l'ensemble des solutions de (E) est donc la famille de fonctions F_k définies sur $\mathbb{R}$ par $F_k(x) = \frac{1}{2}e^{2x+3} + k$ avec k réel.
Pour trouver la solution particulière demandée, il suffit de trouver k tel que $F_k(1) = 2$, ce qui donne $F_k(1) = \frac{1}{2}e^5 + k = 2$, donc $k = 2 - \frac{1}{2}e^5$ et par conséquent la solution particulière demandée est la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \frac{1}{2}e^{2x+3} - \frac{1}{2}e^5 + 2$.

2) Pour répondre à la question on applique l'astuce, la solution cherchée est donc la fonction G définies sur $\mathbb{R}$ par :
$G(x) = \int_1^x e^{2t+3}dt + 2 = \left[\frac{1}{2}e^{2t+3}\right]_1^x + 2 = \frac{1}{2}e^{2x+3} - \frac{1}{2}e^5 + 2$.

METHODE 18 : Comment résoudre $y' = ay$ avec $a \neq 0$ et l'exploiter

REMARQUE : Dans cette méthode, comme dans la suivante, on a choisi le réel a non nul car sinon on se retrouve dans le cas de la méthode précédente, donc applique cette dernière et c'est plié !

■ Rappel

Propriété : Pour $a \in \mathbb{R}^*$, l'ensemble des solutions de $y' = ay$ est la famille de fonctions F_C définies sur $\mathbb{R}$ par $F_C(x) = Ce^{ax}$.

■ Principe

On applique la propriété précédente.

■ **Exemple :** *Résolvez l'équation $y' = -2y$ et en déduire la solution telle que $y(0) = 3$.*

L'ensemble des solutions de $y' = -2y$ est la familles de fonctions F_C définies sur $\mathbb{R}$ par $F_C(x) = Ce^{-2x}$.

Pour déterminer la solution particulière demandée, il reste à déterminer le réel C tel que $F_C(0) = 2$, ce qui donne $C \times e^0 = 3$, soit $C = 3$ et donc que la fonction cherchée est G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = 3e^{-2x}$.

METHODE 19 : Comment résoudre $y' = ay + f$: (E) avec $a \neq 0$ quand on connaît une solution particulière et l'exploiter

■ Principe

Etant donnée une solution particulière y_0 de l'équation (E), on pose $y = z + y_0$ où y est une solution de (E), puis en raisonnant par équivalence, on détermine z en utilisant la méthode précédente, puis on en déduit y.

Ce principe consiste à effectuer un changement de variable entre y et z pour obtenir une équation différentielle en z que l'on sait résoudre (à votre niveau, il n'y en a que 2 : celle des deux méthodes précédentes).

■ Astuce

Lorsque pour tout x réel, la fonction f est constante, c'est-à-dire quand par exemple $f(x) = b$, on vous conseille de retenir qu'une solution particulière de l'équation (E) est la fonction y_0 définie sur $\mathbb{R}$ par $y_0(x) = -\dfrac{b}{a}$.

■ Cas d'application

Quand on peut déterminer une solution particulière de (E).

■ **Exemple :** *Résolvez l'équation différentielle $y' = -2y + e^x + 3 = -2y + f(x)$ (E) en utilisant les solutions des exemples des méthodes 16 et 18.*
En déduire ensuite la solution de (E) qui vérifie $y(0) = 2$.

L'équation (E) peut s'écrire $y' + 2y = e^x + 3$ et l'on a vu dans l'exemple de la méthode 16 qu'une solution particulière de cette équation est la fonction y_0 définie sur $\mathbb{R}$ $y_0(x) = \dfrac{1}{3}e^x + \dfrac{3}{2}$.

Cela étant posons $y = z + y_0$ avec y solution de (E) et appliquons la méthode.

y solution de (E) $\Leftrightarrow y' = -2y + f \Leftrightarrow (z + y_0)' = -2(z + y_0) + f \Leftrightarrow z' + y_0' = -2z - 2y_0 + f$

$\Leftrightarrow z' = -2z$ (car $y_0' = -2y_0 + f$ puisque y_0 et solution de (E)) $\Leftrightarrow z = Ce^{-2x}$ (exemple de la méthode précédente) $\Leftrightarrow y(x) = z(x) + y_0(x) = Ce^{-2x} + \frac{1}{3}e^x + \frac{3}{2}$.
C'est gagné ! L'ensemble des solutions de (E) est la famille de fonctions F_C définies sur $\mathbb{R}$ par $F_C(x) = Ce^{-2x} + \frac{1}{3}e^x + \frac{3}{2}$.

Pour déterminer la solution particulière demandée, il reste à déterminer le réel C tel que $F_C(0) = 2$, ce qui donne $C + \frac{11}{6} = 2$, soit $C = \frac{1}{6}$ et donc que la fonction cherchée est G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = \frac{1}{6}e^{-2x} + \frac{1}{3}e^x + \frac{3}{2}$.

METHODE 20 : Comment résoudre une équation différentielle avec un changement de variable donné et l'exploiter – Approndissement

*REMARQUE : Dans cette méthode, on est un peu à la limite du programme, mais bon ! Puisque le changement de variable est donné cela revient à la méthode précédente (**Attention tout de même à l'ensemble de définition des solutions**).*

■ Principe

C'est comme dans la méthode précédente, mais le changement de variable peut être du style $y = \frac{1}{z}$, $y = \sqrt{z}$, $y = \ln z$, ce qui suppose une condition sur l'ensemble de définition de z et donc sur celui de y.

■ Astuce

Pour éviter les problèmes liés aux ensembles de définition des solutions évoqués dans la remarque, on vous conseille de **raisonner par analyse et synthèse**, c'est-à-dire à déterminer les fonctions qui peuvent être des solutions puis à vérifier qu'elles le sont, sur des intervalles à déterminer, en fonction de leurs expressions littérales.

■ **Exemple :** *Résoudre l'équation différentielle $y' = 3y^2$ (E) en raisonnant par analyse et synthèse et en utilisant le changement de variable $y = \frac{1}{z}$.*

En déduire ensuite les solutions de (E) qui vérifie $y(3) = 2$.

Analyse

Soit y une solution non nulle de (E) et z telle que $y = \frac{1}{z}$.

On a $y' = -\frac{z'}{z^2}$, donc l'équation (E) s'écrit $-\frac{z'}{z^2} = 3\times\frac{1}{z^2}$ en fonction de z, ce qui nous amène à $z' = -3$ pour $z \neq 0$.

Tiens, tiens ! On retombe sur la méthode 17 pour déterminer les solutions de cette dernière, qui est donc la famille de fonctions z_k définies sur $\mathbb{R}$ par $z_k(x) = -3x + k$ avec k réel.

On en déduit que l'ensemble des solutions de (E) ne peut être que la fonction nulle et la famille de fonctions y_k définies sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{k}{3}\right\}$ par $y_k(x) = \frac{1}{-3x+k}$ avec k réel.

Synthèse

Pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\left\{\frac{k}{3}\right\}$, $y_k{}'(x) = \frac{3}{(-3x+k)^2} = 3y_k^2(x)$ donc les fonctions y_k définies sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{k}{3}\right\}$ sont effectivement solutions ainsi que la fonction nulle.

Pour déterminer la ou les solutions particulières demandées, il reste à déterminer le réel k tel que $y_k(3) = 2$, ce qui donne $\frac{1}{-9+k} = 2$, soit $k = \frac{19}{2}$ et donc que les solutions cherchées sont les fonctions F et G définies respectivement sur $\left]-\infty;\frac{19}{6}\right[$ et $\left]\frac{19}{6};+\infty\right[$ par $F(x) = G(x) = \frac{1}{-3x+\frac{19}{2}}$.

METHODE 21 : Comment déterminer la courbe « approchée » d'une solution d'une équation différentielle avec la méthode d'Euler - Approfondissement

■ Rappel

Dans l'introduction de la partie 5 du chapitre sur les fonctions de première, on a montré que pour une fonction f dérivable, la courbe « lissée » de l'ensemble des points $M(x_n, y_n)$ tels que $\begin{cases} x_0 \text{ valeur connue} \\ y_0 = f(x_0) \text{ valeur connue} \\ x_{k+1} = x_k + h \\ y_{k+1} = f'(x_k)h + y_k \end{cases}$ avec un pas h donné, permet d'obtenir une courbe approchée de la courbe représentative de f d'autant plus proche de cette dernière que h est petit (méthode d'Euler).

REMARQUE : Nous avons appliqué cette méthode dans l'exercice 19 du chapitre précédent et dans l'exercice 14 du chapitre sur les fonctions de première mais contrairement à ce que nous allons voir dans cette méthode, $f'(x)$ était connue : il va donc falloir construire un algorithme différent !

■ Principe

L'idée est de remplacer $f'(x_k)$ en utilisant l'équation différentielle à résoudre, ce qui modifie l'algorithme que nous avons évoqué.

Pour que tout soit bien clair on va vous expliquer cela avec un exemple comme on l'a fait pour déterminer des valeurs approchées d'intégrales dans la partie précédente.

Prenons par exemple l'équation différentielle $y' = 2y + 3$ (E) dont on va déterminer une courbe approchée de la solution qui vérifie $y(0) = 1$ par la méthode d'Euler pour $x \in [-5,3]$.

Pour tester la validité de la méthode, nous comparerons la courbe approchée donnée par la méthode d'Euler à celle de la courbe de la solution exacte qui correspond à la fonction G définie par $G(x) = \frac{5}{2}e^{2x} - \frac{3}{2}$.

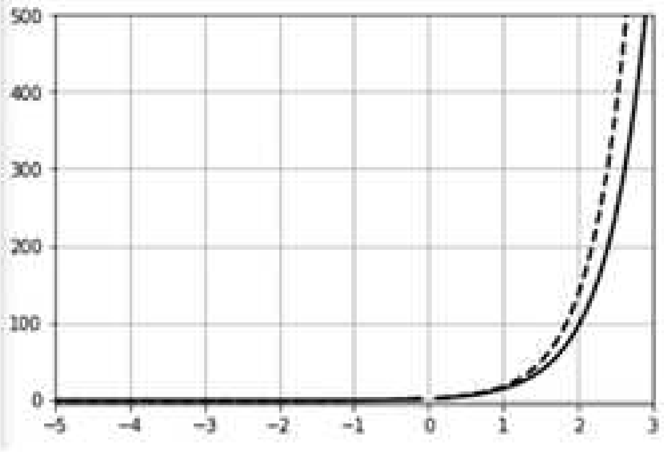
Si une fonction f est solution de l'équation différentielle (E) cherchée alors $f'(x_k) = 2f(x_k) + 3 = 2y_k + 3$ ce qui donne $y_{k+1} = (2y_k + 3)h + y_k$ en remplaçant dans la suite définie par récurrence donnée dans le rappel.

Il ne reste plus qu'à construire un algorithme en langage Python qui donne la courbe exacte et la courbe « lissée » de l'ensemble des points $M(x_n, y_n)$ tels que $\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = f(0) = 1 \\ x_{k+1} = x_k + h \\ y_{k+1} = (2y_k + 3)h + y_k \end{cases}$ avec un pas h donné pour mesurer la pertinence de la méthode d'Euler.

En langage Python, on peut prendre l'algorithme suivant :

```
import matplotlib.pyplot as plt
from math import exp
def f(x):
    return 2.5*exp(2*x)-1.5
plt.axis ([-5,3,-5,500])
plt.grid
x=0
y=1
x1=0
y1=1
x2=0
x3=0
h=0.1
absc=[]
ordo=[]
for i in range(0,51):
    x=x+h
    y=y+h*(2*y+3)
    absc.append(x)
    ordo.append(y)
absc1=[]
ordo1=[]
for i in range(0,51):
    x1=x1-h
    y1=y1-h*(2*y1+3)
    absc1.append(x1)
    ordo1.append(y1)
absc2=[]
ordo2=[]
for i in range(0,51):
    x2=x2+h
    y2=f(x2)
    absc2.append(x2)
    ordo2.append(y2)
absc3=[]
ordo3=[]
for i in range(0,51):
    x3=x3-h
    y3=f(x3)
    absc3.append(x3)
    ordo3.append(y3)
plt.grid()
plt.plot(absc,ordo,color="black",linewidth=2.0,linestyle="-")
plt.plot(absc1,ordo1,color="black",linewidth=2.0,linestyle="-")
plt.plot(absc2,ordo2,color="black",linewidth=2.0,linestyle="--")
plt.plot(absc3,ordo3,color="black",linewidth=2.0,linestyle="--")
plt.show()
```

Les courbes obtenues sont les suivantes :



REMARQUE : On constate une différence sensible à partir de x = 2, entre la courbe exacte en trait pointillé et la courbe approchée en trait plein, mais c'est volontaire de notre part : prenez par exemple un pas h = 0,01 (ligne 13) et des boucles de longueur 501 (en remplaçant 51 par 501 aux lignes 16, 23, 30 et 37) et vous ne visualiserez pas la différence entre les deux courbes.

■ Cas d'application

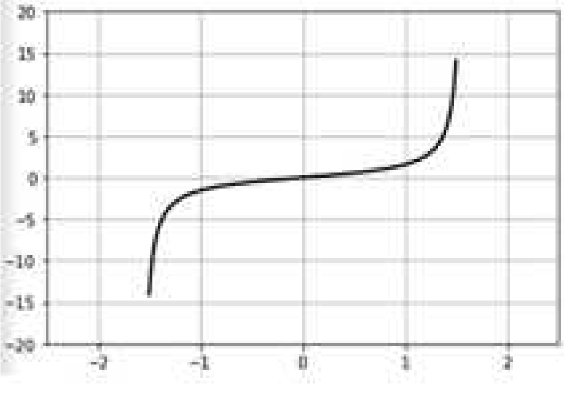
Lorsque l'on connait y' en fonction de y avec $y(x_0)=y_0$ mais que l'on ne sait pas trouver cette solution particulière de l'équation différentielle avec les méthodes des précédentes.

REMARQUE : Afin de vous montrer l'efficacité de la méthode, c'est par soucis pédagogique que nous l'avons illustrée par une équation que l'on sait résoudre.

■ **Exemple :** *On considère l'équation différentielle $y'=y^2+1$ (E).*
Tracer la courbe approchée de la solution de (E) définie sur $\left]-1{,}5;1{,}5\right[$ telle que $y(0)=0$.

Coup de pouce : *Régler les y entre –20 et 20, prendre un pas de 0,0001 et donc des boucles de longueur 15000.*

La courbe obtenue est la suivante :



L'algorithme en langage Python qui permet d'obtenir la courbe est le suivant :

```
import matplotlib.pyplot as plt
plt.axis ([-2.5,2.5,-20,20])
x=0
y=0
x1=0
y1=0
h=0.0001
absc=[]
ordo=[]
for i in range(0,15000):
    x=x+h
    y=y+h*(y**2+1)
    absc.append(x)
    ordo.append(y)
absc1=[]
ordo1=[]
for i in range(0,15000):
    x1=x1-h
    y1=y1-h*(y1**2+1)
    absc1.append(x1)
    ordo1.append(y1)
plt.grid()
plt.plot(absc,ordo,color="black",linewidth=2.0,linestyle="-")
plt.plot(absc1,ordo1,color="black",linewidth=2.0,linestyle="-")
plt.show()
```

Réflexes

	SITUATIONS	REFLEXES
1.	**On doit calculer une intégrale**	Dans l'ordre : ▪ On utilise le tableau des primitives en « x ». ▪ On utilise le tableau des primitives en « u(x) » en se demandant si l'on n'est pas dans le cas particulier où l'on a u(x) = ax+b. ▪ On tente une intégration par parties. ▪ On se laisse guider par l'énoncé qui peut nous inviter à utiliser la relation de Chasles, la définition ou bien la linéarité de l'intégrale.
2.	**L'énoncé fait intervenir une fonction $F(x)=\int_a^x f(t)dt$**	▪ On se rappelle que $F'(x)=f(x)$ et que $F(a)=0$.

3.	**On doit intégrer membre à membre une inégalité sur un intervalle $\lfloor a; b \rfloor$**	▪ On s'assure que l'inégalité est vraie sur $\lfloor a; b \rfloor$ avant d'intégrer.
4.	**On doit déterminer une valeur approchée d'une intégrale avec un algorithme**	▪ On encadre ou on utilise une des quatre autres méthodes (rectangles, milieux, trapèzes, Monte-Carlo).
5.	**Calcul d'une aire en cm^2**	▪ Dans l'ordre : - Bien « repérer » l'aire à calculer. - Former l'intégrale permettant de l'obtenir en unités d'aire. - Multiplier par le nombre de cm^2 de l'unité d'aire dès le début.
6.	**On doit trouver la solution particulière d'une équation différentielle**	▪ On détermine les constantes qui « vont bien » ou l'on applique la méthode d'Euler.
7.	**On doit résoudre une équation différentielle**	▪ On se ramène à l'une des deux que l'on sait résoudre : $y' = f$ ou $y' = ay$ avec $a \neq 0$.

Astuces

■ Il est souvent judicieux de multiplier et de diviser une expression par une même constante non nulle pour la mettre sous la forme $f(u(x)) \times u'(x)$ ce qui permet ensuite d'en donner une primitive si l'on connaît une primitive f.

Exemple : $\dfrac{x^2}{(-2x^3+1)^2} = -\dfrac{1}{6}\dfrac{-6x^2}{(-2x^3+1)^2} = -\dfrac{1}{6}\dfrac{u'(x)}{u^2(x)}$, dont une primitive est $\dfrac{1}{6u(x)}$.

■ Une aire est toujours positive, mais pas une intégrale.

■ Si vous devez déduire d'une inégalité comportant des ax, bx^2, cx^3, une inégalité comportant des $a\dfrac{x^2}{2}$, $b\dfrac{x^3}{3}$, $c\dfrac{x^4}{4}$, il faut sûrement intégrer membre à membre avec toutes les précautions que cela suppose.

■ Si vous devez étudier la parité de $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, vous pouvez écrire que $F(-x) = \int_0^{-x} f(t)dt = -\int_{-x}^0 f(t)dt$, puis en utilisant la parité de f, comparez $\int_0^x f(t)dt$ et $\int_{-x}^0 f(t)dt$ en les interprétant comme des aires.

Erreurs

■ Trop d'élèves oublient de multiplier par l'unité d'aire quand une aire n'est pas demandée en unité d'aire.

■ Ne pas tenir compte de l'intervalle d'intégration quand on intègre une fonction peut vous amener à donner une primitive fausse.

Exemple : Une primitive de f définie par $f(x)=\frac{1}{x}$ sur $]-\infty,0[$ est par exemple la fonction F définie sur cet intervalle par $F(x)=\ln|x|=\ln(-x)$ car $x<0$ **et non** $\mathbf{F(x)=\ln x}$ (dans ce cas il ne faut pas oublier la valeur absolue).

■ Quand vous déterminez l'aire A d'une fonction négative f sur un intervalle $[a,b]$ par la méthode de Monte-Carlo on a $\int_a^b f(t)dt=-A$ **et non** $\boldsymbol{\int_a^b f(t)dt=A}$ (il ne faut pas oublier de multiplier par -1).

■ Dans les algorithmes en langage Python, qui sont nombreux dans ce chapitre, l'instruction « for i in range (n) » renvoie une boucle de longueur n qui commence à 0 et se termine à n−1, **et non une boucle de 1 à n**.
Pour cette dernière l'instruction est : « for i in range (1,n+1) ».

Le jour de l'épreuve

■ Ce chapitre ne sera pas abordé lors de l'épreuve écrite, d'où l'intérêt de présenter une question qui le concerne le jour du Grand Oral.

■ Même si vous ne serez pas évalué à l'écrit sur le calcul intégral, si vous envisagé de faire des études supérieures scientifiques ou économiques on vous conseille de bien assimiler les méthodes qui le concerne.

Le jour du Grand Oral

Sujets mathématiques

■ ***Question 1 : Calculs d'intégrales par différentes méthodes***
Cette question classique est abordée en particulier à l'exercice 5 et repose, d'une part sur l'application du théorème fondamental du calcul intégral et les propriétés de l'intégrale, mais aussi sur la définition de l'intégrale en tant qu'aire.

■ ***Question 2 : Détermination de la moyenne d'une fonction sur un intervalle***
Cette question abordée à l'exercice 6 consiste à déterminer la valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle. Dans l'exercice que nous venons d'évoquer, nous vous avons donné un algorithme qui permet de mettre en

évidence cette notion de moyenne d'une fonction continue, avec celle plus intuitive de moyenne d'une série discrète (moyenne d'un nombre fini de valeurs comme celle que vous faites lors du calcul de votre moyenne trimestrielle de vos notes dans une matière). Il nous semble intéressant de mettre en évidence que le calcul théorique de la moyenne d'une fonction sur un intervalle est d'autant plus proche de la valeur renvoyée par l'algorithme que le nombre d'images déterminées est grand.

■ ***Question 3 : Etude d'une fonction définie par une intégrale***
Cette question abordée aux exercices 8 et 21 (ce dernier étant assez difficile) permet de montrer des propriétés exactes d'intégrales de fonctions dont on ne connaît pas de primitive parmi les fonctions usuelles, ce qui empêche l'application du théorème fondamental du calcul intégral. Il nous semble primordial d'évoquer que la primitive qui s'annule en « a » d'une fonction f définie sur un intervalle I, dont on ne connaît pas de primitive parmi les fonctions usuelles est la fonction F définie pour tout x de l'intervalle I par $F(x)=\int_a^x f(t)dt$. En outre, pour bien maîtriser ce sujet, il est évident que vous devez connaître parfaitement les propriétés de l'intégrale (définition comme une aire, linéarité, relation de Chasles, inversion des bornes, encadrement).

■ ***Question 4 : Détermination d'une approximation d'une intégrale par une ou plusieurs méthodes***
Pour cette question, il ne s'agit pas comme dans la question précédente de déterminer des propriétés exactes d'intégrales de fonctions dont on ne connaît pas de primitive, ce qui empêche l'application du théorème fondamental du calcul intégral, mais d'en déterminer des approximations par une méthode géométrique (rectangles, milieux, trapèzes) ou aléatoire (Monte-Carlo) comme nous l'avons fait dans l'exercice 9. Nous vous conseillons de présenter en détail l'une de ces méthodes en l'appliquant dans un algorithme et de laisser le jury vous interroger sur les autres s'il le souhaite.

■ ***Question 5 : Résolution exacte d'une équation différentielle***
Cette question est abordée dans les exercices 10, 11 et 12 (dans ce dernier on propose en plus de comparer une solution exacte à une solution approchée obtenue par la méthode d'Euler) consiste à déterminer l'ensemble des solutions d'une équation différentielle puis à en déterminer une solution particulière qui vérifie une condition donnée.

■ ***Question 6 : Etude de suites définies par des intégrales***
Cette question traitée aux exercices 14 et 18 fait appel aux propriétés de l'intégrale (linéarité, encadrement) car les fonctions qui dépendent de « n » ne permettent pas en général d'appliquer le théorème fondamental du calcul intégral dans la mesure où l'on n'en connaît pas de primitives. Cela suppose de bien connaître les méthodes relatives aux suites (monotonie, convergence...).

■ ***Question 7 : Algorithme de Brouncker***

Cette question assez difficile présentée à l'exercice 19 consiste à conjecturer et à montrer que la série $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)(2k+2)}$ converge vers ln2. Cela passe par l'utilisation de la constante d'Euler qui est la limite de la série $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)$, ce que nous avons conjecturé et démontré dans l'exercice (la convergence de cette dernière série vers la constante d'Euler peut faire l'objet d'une question en elle-même).

■ ***Question 8 : Intégrales de Wallis***

Cette question difficile, abordée à l'exercice 20, consiste à déterminer la valeur explicite des termes de la suite (I_n) définie par $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ et à en étudier le comportement asymptotique. Si vous maîtrisez bien les notions abordées dans cet exercice (intégration par parties, capacités de calculs, propriétés des suites) vous pouvez espérer une excellente note.

Sujets transversaux

■ ***Question 9 : Equations horaires d'un centre de gravité et application***

Cette question est plus relative à la spécialité Physique-Chimie qu'à la spécialité Mathématiques mais dans la mesure où elle fait intervenir la détermination de primitives et l'exploitation d'équations, c'est d'une certaine façon utiliser les Mathématiques au service de la Physique-Chimie, comme c'est toujours le cas dans l'enseignement supérieur.

■ ***Question 10 : Détermination d'un bénéfice ou d'un coût moyen***

C'est une autre façon d'aborder la question 2 pour ceux qui ont choisi la spécialité SES lorsqu'un bénéfice ou un coût est modélisé par une fonction continue sur un intervalle. On vous donne donc les mêmes conseils qu'à la question que nous venons d'évoquer.

Chapitre 5
METHODES DE GEOMETRIE DANS L'ESPACE

Nous allons voir :
1) Quatre méthodes fondamentales en géométrie vectorielle non repérée
2) Les méthodes précédentes en géométrie vectorielle repérée
3) Comment caractériser analytiquement les plans, droites et sphères
4) Comment déterminer des intersections avec les équations et les représentations paramétriques
5) Comment déterminer des distances avec les équations et les représentations paramétriques
6) Comment s'y prendre avec les barycentres

1. Méthodes en géométrie vectorielle non repérée

METHODE 1 : Comment utiliser la colinéarité et la coplanarité

■ **Rappels**

1) Toutes les règles du calcul vectoriel dans le plan se généralisent à l'espace.

2) Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont colinéaires s'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.

3) Toute colinéarité entre deux vecteurs faisant intervenir **3** points permet de démontrer un **alignement.**

4) Toute colinéarité entre deux vecteurs faisant intervenir **4** points permet de démontrer un **parallélisme entre deux droites**.

5) Si $\vec{w}$ est une combinaison linéaire de deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ($\vec{w}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ coplanaires) alors toute droite de vecteur directeur $\vec{w}$ est parallèle à tout plan dirigé par $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ce qui permet de démontrer **un parallélisme entre une droite et un plan.**

6) Si un vecteur normal à un plan est colinéaire à un vecteur normal à un autre plan alors les deux plans sont parallèles ce qui permet de démontrer un **parallélisme de plans**.

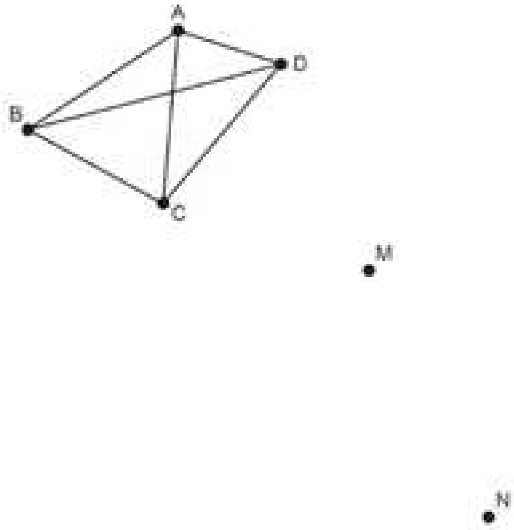
■ **Principe**

Toutes les démonstrations reposent sur l'utilisation de la relation de Chasles et les propriétés précédentes.

■ Cas d'application

Quand aucun repère n'est introduit pour effectuer les calculs.

■ **Exemple :** *On considère quatre points non coplanaires A, B, C, et D, ainsi que les points M et N tels que :* $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AD}$ *et* $\overrightarrow{BN}=2\overrightarrow{BD}+3\overrightarrow{AC}$.
Montrer que la droite (MN) est parallèle au plan (ABC) après avoir construit une figure.



On va utiliser la propriété 5 des rappels.
$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BN}=\overrightarrow{CA}+2\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BD}+3\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AC}+2\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DA}\right)+\overrightarrow{AB}$

$=2\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}=-\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{MN}$ est une combinaison linéaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ donc la droite (MN) est parallèle au plan (ABC).

METHODE 2 : Comment utiliser le produit scalaire pour montrer des orthogonalités

■ Rappels

1) Toutes les règles de calcul relatives au produit scalaire dans le plan se généralisent à l'espace.

2) $\forall$ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ colinéaires $\Leftrightarrow \vec{u}\bullet\vec{v}=\pm\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$.

3) $\forall$ $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ orthogonaux $\Leftrightarrow \vec{u}\bullet\vec{v}=0$ ce qui permet de démontrer **une orthogonalité droite-droite**.

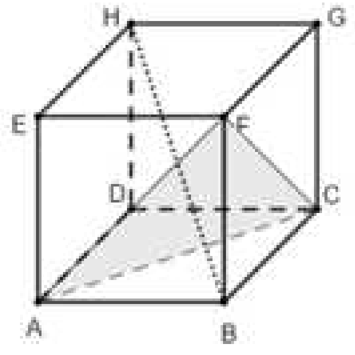
4) Une droite est orthogonale à un plan lorsque l'un de ses vecteurs directeurs est orthogonal à deux vecteurs ***non colinéaires*** du plan ce qui permet de démontrer **une orthogonalité droite-plan**.

5) Deux plans sont perpendiculaires lorsque deux de leurs vecteurs ***normaux*** sont orthogonaux ce qui permet de démontrer **une perpendicularité plan-plan.**

■ Principe

On fait apparaître des produits scalaires de vecteurs orthogonaux et colinéaires pour démontrer que ce produit scalaire est nul.

■ **Exemple :** *On considère le cube suivant :*



Montrer en utilisant le produit scalaire que (HB) est orthogonale à (FAC).

$\overrightarrow{HB} \bullet \overrightarrow{FA} = \left(\overrightarrow{HE} + \overrightarrow{EB}\right) \bullet \overrightarrow{FA} = \overrightarrow{HE} \bullet \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{EB} \bullet \overrightarrow{FA}$.

Le vecteur $\overrightarrow{HE}$ est normal au plan (ABF) contenant $\overrightarrow{FA}$ donc $\overrightarrow{HE} \bullet \overrightarrow{FA} = 0$.
Le quadrilatère ABFE est un carré donc ses diagonales sont perpendiculaires et $\overrightarrow{EB} \bullet \overrightarrow{AF} = 0$.
Finalement on en déduit que $\overrightarrow{HB} \bullet \overrightarrow{FA} = 0$.

On démontre de la même façon que :

$$\overrightarrow{HB} \bullet \overrightarrow{FC} = \left(\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GB}\right) \bullet \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{HG} \bullet \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{GB} \bullet \overrightarrow{FC} = 0.$$

Le vecteur $\overrightarrow{HB}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (FAC), donc il est normal au plan (FAC), et la droite (HB) est orthogonale au plan (FAC).

METHODE 3 : Comment utiliser le produit scalaire pour déterminer un angle géométrique

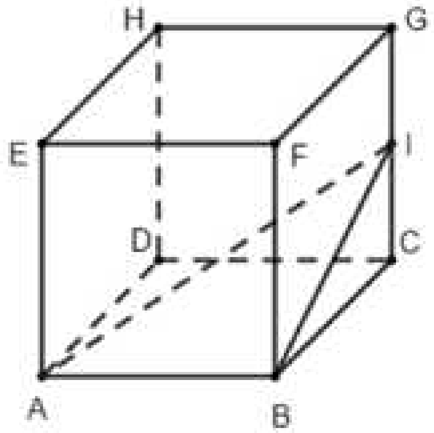
■ Rappel

Pour trois points distincts A, B et C on a : $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC} = AB \times AC \times \cos\widehat{BAC}$.

■ Principe

On détermine $\overrightarrow{AB} \bullet \overrightarrow{AC}$, AB et AC pour en déduire $\cos\widehat{BAC}$ avec la propriété rappelée ce qui donne finalement une valeur exacte ou approchée de $\widehat{BAC}$.

■ **Exemple :** *Pour le cube suivant de côté 1, I désigne le milieu de $[CG]$.*



Déterminez une valeur approchée au degré près de l'angle géométrique $\widehat{BIA}$.

$\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IB} \cdot \left(\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BA}\right) = \overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{BA} = IB^2$ car comme $\overrightarrow{BA}$ est normal au plan (BCG) qui contient $\overrightarrow{IB}$ ces deux vecteurs sont orthogonaux.

En remplaçant dans la formule $\overrightarrow{IB} \cdot \overrightarrow{IA} = IB \times IA \times \cos\widehat{BIA}$ on obtient l'égalité $IB^2 = IA \times IB \times \cos\widehat{BIA}$ et l'on en déduit que $\cos\widehat{BIA} = \dfrac{IB}{IA}$.

En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle ICB rectangle en C on obtient $IB^2 = IC^2 + CB^2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + 1^2 = \dfrac{5}{4}$ donc $IB = \sqrt{\dfrac{5}{4}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle ICA rectangle en C on obtient $IA^2 = IC^2 + CA^2 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + CA^2 = \dfrac{1}{4} + CA^2$.

En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle CBA rectangle en B on obtient $CA^2 = CB^2 + BA^2 = 1^2 + 1^2 = 2$, donc en remplaçant dans l'égalité précédente on a $IA^2 = \dfrac{1}{4} + 2 = \dfrac{9}{4}$, ce qui donne finalement $IA = \sqrt{\dfrac{9}{4}} = \dfrac{3}{2}$ et

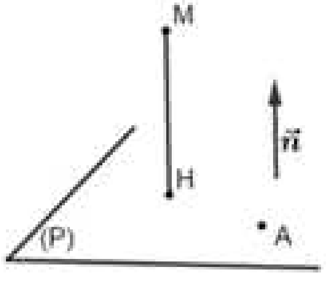
$$\cos\widehat{BIA} = \frac{IB}{IA} = \frac{\frac{\sqrt{5}}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

En utilisant « $\cos^{-1}$ » ou « Arccos » avec la caculatrice en mode degré on obtient $\widehat{BIA} = 42°$ arrondie au degré près.

METHODE 4 : Comment utiliser le produit scalaire pour déterminer la distance d'un point à un plan

■ Rappel

Considérons la figure suivante :



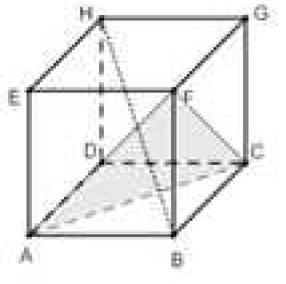
On a $\left|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}\right| = \left|\left(\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HM}\right) \cdot \vec{n}\right| = \left|\overrightarrow{AH} \cdot \vec{n}+\overrightarrow{HM} \cdot \vec{n}\right| = \left|0 \pm HM \times \left\|\vec{n}\right\|\right| = HM \times \left\|\vec{n}\right\|$ car d'une part $\overrightarrow{AH}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux et d'autre part $\overrightarrow{HM}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires.

Finalement la distance MH de M au plan (P) est donc $d(M,(P)) = \dfrac{\left|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}\right|}{\left\|\vec{n}\right\|}$.

■ Principe

On applique la formule précédente que l'on vous conseille de savoir redémontrer comme on l'a fait.

■ **Exemple :** *On considère le cube suivant de côté 1 :*



Déterminez la distance du point H au plan (FAC).

On a vu dans l'exemple de la méthode 2 que le vecteur $\overrightarrow{HB}$ est normal au plan (FAC).

Cela étant, puisque F est un point du plan, la distance du point H au plan (FAC) est donc par exemple $d(H,(FAC)) = \dfrac{\left|\overrightarrow{HF} \cdot \overrightarrow{HB}\right|}{\left\|\overrightarrow{HB}\right\|}$.

On a $\left|\overrightarrow{HF} \cdot \overrightarrow{HB}\right| = \left|\overrightarrow{HF} \cdot \left(\overrightarrow{HF}+\overrightarrow{FB}\right)\right| = \left|\overrightarrow{HF}^2 + \overrightarrow{HF} \cdot \overrightarrow{FB}\right| = \left|HF^2+0\right| = HF^2$ car comme $\overrightarrow{FB}$ est normal au plan (EHF) qui contient $\overrightarrow{HF}$ ces deux vecteurs sont orthogonaux.

En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle HEF rectangle en E on obtient $HF^2 = HE^2 + EF^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ donc $\left|\overrightarrow{HF} \cdot \overrightarrow{HB}\right| = 2$.

En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle HFB rectangle en F on obtient $HB^2 = HF^2 + FB^2 = 3$ donc $\left\|\overrightarrow{HB}\right\| = HB = \sqrt{3}$.

On obtient finalement $d(H,(FAC)) = \dfrac{\left|\overrightarrow{HF} \cdot \overrightarrow{HB}\right|}{\left\|\overrightarrow{HB}\right\|} = \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

2. Méthodes précédentes en géométrie vectorielle repérée

Quand l'énoncé introduit un repère on vous conseille de résoudre le problème géométrique analytiquement en utilisant les coordonnées des points et des vecteurs.

D'ailleurs, même s'il n'est pas question de repère dans l'énoncé il est souvent intéressant d'en introduire un pour se ramener à une méthode analytique.

METHODE 5 : Comment utiliser la colinéarité et la coplanarité avec les coordonnées

■ Rappels

Définition 1 : Une base de l'espace est formée de trois vecteurs non coplanaires.

Définition 2 : Dire que $\vec{k}$ a pour coordonnées (α, β, γ) dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ signifie que $\vec{k} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$.

Définition 3 : Un repère de l'espace est formé d'un point et d'une base.

Définition 4 : Dire que M a pour coordonnées (α, β, γ) par rapport au repère $(A, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ signifie que $\overrightarrow{AM} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w}$.

Propriété : Deux vecteurs non nuls de l'espace sont colinéaires quand leurs coordonnées sont proportionnelles.

■ Principe

On utilise les rappels de la méthode 1 avec les coordonnées.

Exemple : *On considère quatre points non coplanaires A, B, C, et D, et les points M et N tels que :* $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AD}$ *et* $\overrightarrow{BN}=2\overrightarrow{BD}+3\overrightarrow{AC}$.

Montrer que la droite (MN) est parallèle au plan (ABC) en introduisant le repère $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)$.

$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AD}$ donc $M(0,1,2)$.

$\overrightarrow{BN}=2\overrightarrow{BD}+3\overrightarrow{AC}\Rightarrow\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AN}=2\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{AD}+3\overrightarrow{AC}\Rightarrow\overrightarrow{AN}=-\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AD}$.
On en déduit que $N(-1,3,2)$.

Par conséquent $\overrightarrow{MN}\left|\begin{array}{l}x_N-x_M=-1\\y_N-y_M=2\\z_N-z_M=0\end{array}\right.$ ce qui permet de retrouver d'une autre façon qu'à la méthode 4 que $\overrightarrow{MN}=-\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AC}$, c'est-à-dire que les trois vecteurs sont colinéaires et donc que (MN) est parallèle à (ABC).

METHODE 6 : Comment utiliser le produit scalaire pour montrer des orthogonalités avec les coordonnées

■ Rappel

Dans un repère **orthonormé** si $\vec{u}\left|\begin{array}{l}x\\y\\z\end{array}\right.$ et $\vec{v}\left|\begin{array}{l}x'\\y'\\z'\end{array}\right.$ alors $\vec{u}\bullet\vec{v}=xx'+yy'+zz'$.

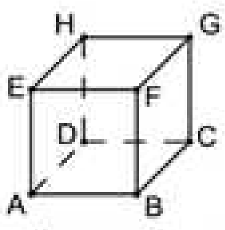
■ Principe

On utilise les rappels de la méthode 2 avec les coordonnées.

■ Cas d'application

Quand le repère introduit dans l'énoncé est orthonormé ou que l'on peut introduire un repère orthonormé.

■ **Exemple :** *On considère le cube suivant :*



Montrer que la droite (HB) est orthogonale au plan (FAC) en introduisant le repère orthonormé $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

On a $A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $H(0,1,1)$, $F(1,0,1)$ et $C(1,1,0)$.

On en déduit que $\overrightarrow{HB}\begin{vmatrix}1\\-1\\-1\end{vmatrix}$, que $\overrightarrow{FA}\begin{vmatrix}-1\\0\\-1\end{vmatrix}$ puis que $\overrightarrow{FC}\begin{vmatrix}0\\1\\-1\end{vmatrix}$.

Par conséquent on a alors $\overrightarrow{FA}\bullet\overrightarrow{HB}=(-1)(1)+(0)(-1)+(-1)(-1)=-1+1=0$ et $\overrightarrow{FC}\bullet\overrightarrow{HB}=(0)(1)+(1)(-1)+(-1)(-1)=-1+1=0$.

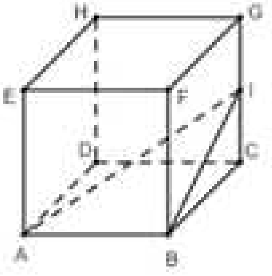
On en déduit que $\overrightarrow{HB}$ est normal au plan (FAC) et donc que la droite (HB) est orthogonale au plan (FAC).

METHODE 7 : Comment utiliser le produit scalaire pour déterminer un angle géométrique avec les coordonnées

■ Principe

On utilise la formule $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times\cos\widehat{BAC}$ de la méthode 3 en déterminant $\overrightarrow{AB}\bullet\overrightarrow{AC}$, AB et AC à partir des coordonnées en introduisant un repère si l'énoncé n'en propose pas un.

■ **Exemple :** *Pour le cube suivant de côté 1, I désigne le milieu de $[CG]$.*



Déterminez une valeur approchée au degré près de l'angle géométrique $\widehat{BIA}$ après avoir introduit le repère $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$.

Dans le repère $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$ on a $A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$ et $I\left(1,1,\frac{1}{2}\right)$ ce qui donne

$\overrightarrow{IA}\begin{vmatrix}-1\\-1\\-\frac{1}{2}\end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{IB}\begin{vmatrix}0\\-1\\-\frac{1}{2}\end{vmatrix}$.

On déduit de cela :

$\overrightarrow{IA} \bullet \overrightarrow{IB} = (-1)(0) + (-1)(-1) + \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$.

$IA = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{2 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$.

$IB = \sqrt{(0)^2 + (-1)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{5}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

En remplaçant dans la formule $\overrightarrow{IB} \bullet \overrightarrow{IA} = IB \times IA \times \cos\widehat{BIA}$ on obtient l'égalité $\frac{5}{4} = \frac{3}{2} \times \frac{\sqrt{5}}{2} \times \cos\widehat{BIA}$, et donc $\cos\widehat{BIA} = \frac{5}{3\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{5}}{3\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

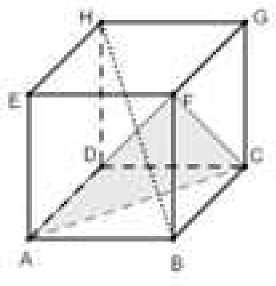
En utilisant « $\cos^{-1}$ » ou « Arccos » avec la calculatrice en mode degré on obtient $\widehat{BIA} = 42°$ arrondie au degré près.

METHODE 8 : Comment utiliser le produit scalaire pour déterminer la distance d'un point à un plan avec les coordonnées

■ Principe

On utilise la formule $d(M,(P)) = \frac{\left|\overrightarrow{AM} \bullet \vec{n}\right|}{\left\|\vec{n}\right\|}$ de la méthode 4 en déterminant $\left|\overrightarrow{AM} \bullet \vec{n}\right|$ et $\left\|\vec{n}\right\|$ à partir des coordonnées en introduisant un repère si l'énoncé n'en propose pas un.

■ **Exemple :** *On considère le cube suivant de côté 1 :*



Déterminez la distance du point H au plan (FAC) après avoir introduit le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

On a vu dans l'exemple de la méthode 2 que le vecteur $\overrightarrow{HB}$ est normal au plan (FAC).

Cela étant, puisque F est un point du plan la distance du point H au plan (FAC) est donc par exemple $d(H,(FAC)) = \frac{\left|\overrightarrow{HF} \bullet \overrightarrow{HB}\right|}{\left\|\overrightarrow{HB}\right\|}$.

Dans le repère $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE}\right)$ on a $H(0,1,1)$, $F(1,0,1)$ et $B(1,0,0)$ ce qui donne $\overrightarrow{HF}\begin{vmatrix}1\\-1\\0\end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{HB}\begin{vmatrix}1\\-1\\-1\end{vmatrix}$.

On en déduit que :

$$\left|\overrightarrow{HF}\cdot\overrightarrow{HB}\right|=\left|(1)(1)+(-1)(-1)+(0)(-1)\right|=|2|=2 \text{ et } \left\|\overrightarrow{HB}\right\|=\sqrt{(1)^2+(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{3}.$$

On obtient finalement $d(H,(FAC))=\dfrac{\left|\overrightarrow{HF}\cdot\overrightarrow{HB}\right|}{\left\|\overrightarrow{HB}\right\|}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

3. Méthodes sur les caractérisations analytiques des plans, droites et sphères

METHODE 9 : Comment déterminer une équation d'un plan et l'exploiter directement

- **Rappels**

1) **Du plan à une de ses équations** : Tout plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{vmatrix}a\\b\\c\end{vmatrix}$ a une équation de la forme $ax+by+cz+d=0$.

2) **D'une équation au plan** : L'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que $ax+by+cz+d=0$ avec a, b et c non tous nuls est un plan dont un vecteur normal est $\vec{n}\begin{vmatrix}a\\b\\c\end{vmatrix}$.

3) Si un point est sur un plan, ses coordonnées vérifient une quelconque de ses équations.
4) Si un triplet vérifient une équation d'un plan alors il correspond aux coordonnées d'un point du plan.

- **Principe**

Une équation d'un plan, dont on connaît un vecteur normal $\vec{n}\begin{vmatrix}a\\b\\c\end{vmatrix}$ et un point A, est de la forme $ax+by+cz+d=0$.

On détermine d en utilisant le fait que les coordonnées de A vérifient l'équation.

■ Cas d'application

Tous les cas : car lorsque le plan est défini d'une autre façon, on peut se ramener au principe précédent en déterminant un vecteur normal au plan (voir l'exemple - approfondissement) et en utilisant un de ses points.

■ **Exemple :** *Montrez que les points $A(1,0,-1)$, $B(0,2,-1)$ et $C(2,1,3)$ définissent un plan et donnez une équation de ce plan. Le point $D(1,0,-1)$ est-il un point du plan (ABC) ?*

$\overrightarrow{AB}\begin{vmatrix}-1\\2\\0\end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{vmatrix}1\\1\\4\end{vmatrix}$ n'ont pas leurs coordonnées proportionnelles donc ils ne sont pas colinéaires.

Donc les trois points A, B et C ne sont pas alignés et définissent un plan.

Cherchons $\vec{n}\begin{vmatrix}a\\b\\c\end{vmatrix}$ normal à (ABC) c'est-à-dire tel que $\vec{n}\bullet\overrightarrow{AB}=0$ et $\vec{n}\bullet\overrightarrow{AC}=0$.

Cela impose $\begin{cases}-a+2b=0\\a+b+4c=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=2b\\c=-\dfrac{3}{4}b\end{cases}$ (on exprime deux inconnues en fonction de l'autre).

En prenant $b=4$, on obtient $a=8$ et $c=-3$, et donc (ABC) a une équation de la forme $8x+4y-3z+d=0$.

$A(1,0,-1)\in(ABC)\Rightarrow 8(1)+4(0)-3(-1)+d=0\Rightarrow d=-11$.

Finalement $8x+4y-3z-11=0$ est une équation de (ABC).

Comme $8(1)+4(0)-3(-1)-11=0$, les coordonnées de D vérifient l'équation précédente donc D est un point du plan (ABC).

METHODE 10 : Comment déterminer une représentation paramétrique d'une droite et l'exploiter

■ Rappels

1) **De la droite à une de ses représentations paramétriques** : La droite (D) passant par le point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ et dirigée par le vecteur $\vec{v}\begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{vmatrix}$ a pour représentation paramétrique le système $\begin{cases} x = x_0 + v_1 t \\ y = y_0 + v_2 t \\ z = z_0 + v_3 t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

2) **D'une représentation paramétrique à la droite** : L'ensemble des points $M(x, y, z)$ tels que $\begin{cases} x = x_0 + v_1 t \\ y = y_0 + v_2 t \\ z = z_0 + v_3 t \end{cases}$ où t varie dans $\mathbb{R}$ est la droite passant par $M_0(x_0, y_0, z_0)$ dont un vecteur directeur est $\vec{v}\begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{vmatrix}$.

3) Si un point est sur la droite il correspond à une valeur de t dans l'une quelconque de ses représentations paramétriques.

4) Si un triplet (x, y, z) correspond à une unique valeur de t dans une représentation paramétrique d'une droite alors il correspond aux coordonnées d'un point de la droite.

■ Principe

On applique « direct » le premier rappel.

■ Cas d'application

Tous les cas, car si la droite est définie par deux points A et B, on peut se ramener au principe précédent en considérant que c'est la droite passant par A de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}$.

■ **Exemple :** *Déterminez une représentation paramétrique de la droite (AB) sachant que $A(1, -1, 2)$ et $B(0, 1, 3)$. Le point $C(4, 0, -2)$ est-il un point de (AB) ?*

(AB) est la droite passant par $A(1, -1, 2)$ de vecteur directeur $\overrightarrow{AB}\begin{vmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{vmatrix}$.

Une représentation paramétrique de (AB) est donc : $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = -1 + 2t \\ z = 2 + t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$.

Pour savoir si $C(4,0,-2)$ est un point de (AB), on remplace x, y et z par les coordonnées de C et l'on se demande si la valeur de t obtenue dans les trois équations est la même (4e rappel).
Si c'est le cas le point C est sur (AB), sinon C n'est pas un point de (AB).

Ainsi $\begin{cases} 4 = 1 - t \\ 0 = -1 + 2t \\ -2 = 2 + t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -3 \\ t = \dfrac{1}{2} \\ t = -4 \end{cases}$ donc $C \notin (AB)$.

METHODE 11 : Comment déterminer une équation d'une sphère et l'exploiter – Approfondissement

■ Rappels

1) Une équation de la sphère de centre $\Omega(x_\Omega, y_\Omega, z_\Omega)$ et de rayon R est $(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 + (z - z_\Omega)^2 = R^2$.

2) Si un point est sur une sphère ses coordonnées vérifient une quelconque de ses équations.

3) Si un triplet vérifient une équation d'une sphère alors il correspond aux coordonnées d'un point de la sphère.

4) L'écriture canonique de l'expression $t^2 + at$ de la variable t est $\left(t + \dfrac{a}{2}\right)^2 - \dfrac{a^2}{4}$.

5) Il existe une unique sphère circonscrite à un tétraèdre (propriété démontrée à l'exercice 17 - Approfondissement).

■ Principe

On applique la formule précédente quand on peut trouver le centre et le rayon d'une sphère définie géométriquement (ce peut être par son diamètre).

Quant au problème inverse, c'est-à-dire la détermination du centre et du rayon d'une sphère dont on a une équation (voir l'exemple). Il faut mettre les parties en « x », « y » et « z » sous forme canonique pour s'en sortir.

■ **Exemple :** *Montrez que l'équation* $x^2 - 4x + y^2 + 2y + z^2 + 10z + 21 = 0$ *(E) est celle d'une sphère dont vous donnerez le centre et le rayon.*
Le point $A(2,2,-5)$ *est-il un point de cette sphère ?*

Les mises sous forme canonique sont $x^2-4x=(x-2)^2-4$, $y^2+2y=(y+1)^2-1$ et $z^2+10z=(z+5)^2-25$.

En remplaçant dans l'équation (E) on obtient :

$(x-2)^2-4+(y+1)^2-1+(z+5)^2-25+21=0 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y-(-1))^2+(z-(-5))^2=9=3^2$.

L'équation (E) est donc celle de la sphère de centre $\Omega(2,-1,-5)$ et de rayon 3.

On a $(2-2)^2+(2-(-1))^2+(-5-(-5))^2=0^2+3^2+0^2=3^2$ donc les coordonnées de A vérifient l'équation de la sphère ce qui prouve que le point A est sur la sphère.

4. Méthodes sur les déterminations d'intersections avec les équations et les représentations paramétriques

Dans toutes les méthodes, sauf la dernière, il faut résoudre un système et interpréter géométriquement l'ensemble de ses solutions que l'on notera (S).

METHODE 12 : Comment déterminer une intersection plan-plan – Approfondissement

■ **Principe**

Le système à résoudre est formé par deux équations des deux plans.

Il est donc de la forme $\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}$.

Interprétation géométrique de solutions

1) Si $S=\varnothing$ alors les plans sont strictement parallèles.

2) Si $S=\{(a+k\alpha,\ b+k\beta,\ c+k\gamma),\ k\in\mathbb{R}\}$ alors les plans sont sécants selon la droite passant $A(a,b,c)$ de vecteur directeur $\vec{u}\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{vmatrix}$.

3) Si le système se ramène à une équation alors on a deux équations différentes du même plan.

■ **Exemple :** *On considère les points $A(1,3,0)$, $B(-1,1,1)$, $C(0,1,0)$ et le plan (P) d'équation $x+y-2z+1=0$. Déterminez $(P)\cap(ABC)$.*

En utilisant la méthode 9 on montre que le plan (ABC) a pour équation $2x-y+2z+1=0$.

On doit donc résoudre $\begin{cases} x+y-2z+1=0 \\ 2x-y+2z+1=0 \end{cases}$.

En sommant membre à membre on obtient $3x+2=0$ et donc $x=-\frac{2}{3}$.

En remplaçant dans la première équation on a : $y=-\frac{1}{3}+2z$.

Finalement les solutions du système sont les triplets de la forme :

$$\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3}+2z,z\right)=\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},0\right)+z(0,2,1).$$

$(P)\cap(ABC)$ est donc la droite passant par $F\left(-\frac{2}{3},-\frac{1}{3},0\right)$ dirigée par $\vec{v}\begin{vmatrix}0\\2\\1\end{vmatrix}$.

METHODE 13 : Comment déterminer une intersection droite-plan

■ Principe

Le système à résoudre est fomé d'une équation du plan et d'une représentation paramétrique de la droite.

Il est donc de la forme $\begin{cases}ax+by+cz+d=0\\x=x_0+\lambda t\\y=y_0+\mu t\\z=z_0+\nu t\end{cases}$.

Interprétation géométrique de solutions

1) Si $S=\varnothing$ alors la droite est strictement parallèle au plan.

2) Si le système a une solution unique alors la droite coupe le plan en point dont les coordonnées correspondent à la solution du système.

3) Si le système a une infinité de solutions alors la droite est incluse dans le plan.

■ **Exemple :** *On considère les points $A(1,3,0)$, $B(-1,1,1)$ et le plan (P) d'équation $x+y-2z+1=0$. Déterminez $(P)\cap(AB)$.*

En utilisant la méthode 10 on montre qu'une représentation paramétrique de la droite (AB) est $\begin{cases}x=1-2k\\y=3-2k\\z=k\end{cases}$.

On doit donc résoudre $\begin{cases}x=1-2k\\y=3-2k\\z=k\\x+y-2z+1=0\end{cases}$.

En remplaçant dans la dernière équation on obtient :

$$(1-2k)+(3-2k)-2(k)+1=0\Rightarrow k=\frac{5}{6}\Rightarrow(x,y,z)=\left(-\frac{2}{3},\frac{4}{3},\frac{5}{6}\right).$$

Finalement $(P)\cap(AB)$ est le point $K\left(-\frac{2}{3},\frac{4}{3},\frac{5}{6}\right)$.

METHODE 14 : Comment déterminer une intersection droite-droite – Approfondissement

■ Principe

Le système à résoudre est formé par deux représentations paramétriques des deux droites.

Il est donc de la forme $\begin{cases} x = x_0 + \lambda t \\ y = y_0 + \mu t \\ z = z_0 + \gamma t \\ x = x'_0 + \lambda' t' \\ y = y'_0 + \mu' t' \\ z = z'_0 + \gamma' t' \end{cases}$.

Interprétation géométrique de solutions

1) Si $S = \varnothing$ alors les droites ne sont pas sécantes.

2) Si le système a une solution unique alors les droites sont sécantes en point dont les coordonnées correspondent à la solution du système.

3) Si le système admet une infinité de solutions alors on a deux représentations paramétriques différentes de la même droite.

■ **Exemple :** *On considère les points $A(1,3,0)$, $B(-1,1,1)$ et la droite (D) passant par $E(1,-1,0)$ de vecteur directeur $\vec{u}(2,1,1)$. Déterminez $(D)\cap(AB)$.*

On doit résoudre $\begin{cases} x = 1+2t \\ y = -1+t \\ z = t \\ x = 1-2k \\ y = 3-2k \\ z = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1+2t = 1-2k \\ -1+t = 3-2k \\ t = k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = k \\ 1+2t = 1-2t \\ -1+t = 3-2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} t = k \\ t = 0 \\ t = \frac{4}{3} \end{cases}$ ce qui est absurde donc $(D)\cap(AB) = \varnothing$.

METHODE 15 : Comment donner une intersection droite-sphère – Approfondissement

■ Principe

Le système à résoudre est formé par une représentation paramétrique de la droite et une équation de la sphère.

Il est donc de la forme $\begin{cases} x = x_0 + \lambda t \\ y = y_0 + \mu t \\ z = z_0 + \gamma t \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = R^2 \end{cases}$.

Interprétation géométrique de solutions

1) Si $S = \varnothing$ alors la droite ne coupe pas la sphère.

2) Si $S =$ 1 triplet (x_0, y_0, z_0) alors la droite et la sphère sont tangentes au point $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

3) Si $S =$ 2 triplets (x_1, y_1, z_1) et (x_2, y_2, z_2) alors la droite coupe la sphère aux points $M_1(x_1, y_1, z_1)$ et $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

■ **Exemple :** *On considère la droite (D) passant par $E(1,-1,0)$ de vecteur directeur $\vec{u}(2,1,1)$ et la sphère (S) de centre $\Omega(1,-1,0)$ de rayon $R = \sqrt{6}$.*
Déterminez $(D) \cap (S)$.

On a : $\begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 0 + t \\ (x-1)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 0 + t \\ (2t)^2 + (t)^2 + t^2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 0 + t \\ 6t^2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + t \\ z = 0 + t \\ t = \pm 1 \end{cases}$.

La droite (D) coupe la sphère (S) en $A(3,0,1)$ qui correspond à $t = 1$ et $B(-1,-2,-1)$ qui correspond à $t = -1$.

METHODE 16 : Comment donner une intersection plan-sphère – Approfondissement

■ Principe

Il faut déterminer la distance du centre Ω de la sphère (S) au plan (P) en utilisant une des méthodes 4, 8 ou 17 puis comparer cette distance $d(\Omega,(P))$ au rayon R de la sphère.

Interprétation géométrique de la comparaison de $d(\Omega,(P))$ et R

1) Si $d(\Omega,(P)) < R$ alors $(S)\cap(P)$ est le cercle du plan (P) de centre le projeté orthogonal de Ω sur (P) et de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2(\Omega,(P))}$.

2) Si $d(\Omega,(P)) = R$ alors $(S)\cap(P)$ est le projeté orthogonal de Ω sur (P).

3) Si $d(\Omega,(P)) > R$ alors $(S)\cap(P) = \varnothing$.

REMARQUE : Dans cette interprétation il est question du projeté orthogonal d'un point sur un plan c'est pourquoi on vous renvoie à la méthode 17 pour le déterminer.

■ **Exemple :** *On considère le plan (P) d'équation $x - 2y + 2z + 15 = 0$ et la sphère (S) de centre $\Omega(1,-1,0)$ de rayon $R = 1$.*

Déterminez $(P)\cap(S)$.

Le vecteur $\vec{n}\begin{vmatrix}1\\-2\\2\end{vmatrix}$ est normal au plan (P) et le point $A(-15,0,0)$ (par exemple) est un point du plan donc on peut déterminer $\left|\overrightarrow{A\Omega}\cdot\vec{n}\right|$ et $\left\|\vec{n}\right\|$ puis appliquer la formule $d(\Omega,(P)) = \dfrac{\left|\overrightarrow{A\Omega}\cdot\vec{n}\right|}{\left\|\vec{n}\right\|}$ de la méthode 8 pour déterminer la distance de Ω à (P).

Comme $\overrightarrow{A\Omega}\begin{vmatrix}1-(-15)=16\\-1-0=-1\\0-0=0\end{vmatrix}$ on obtient $\left|\overrightarrow{A\Omega}\cdot\vec{n}\right| = \left|(16)(1)+(-1)(-2)+(0)(2)\right| = 18$ et

$\left\|\vec{n}\right\| = \sqrt{1^2+(-2)^2+2^2} = \sqrt{9} = 3$ ce qui donne $d(\Omega,(P)) = \dfrac{\left|\overrightarrow{A\Omega}\cdot\vec{n}\right|}{\left\|\vec{n}\right\|} = \dfrac{18}{3} = 6 > 1 = R$.

On en déduit que $(P)\cap(S) = \varnothing$.

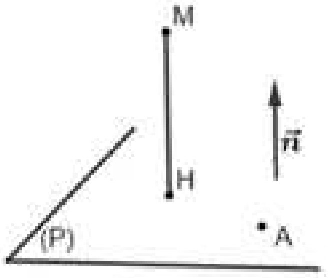
5. Méthodes sur les déterminations de distances avec les équations et les représentations paramétriques

METHODE 17 : Comment déterminer la distance d'un point à un plan

■ **Rappels**

Définition 1 : Le projeté orthogonal d'un point M sur un plan (P) est le point d'intersection entre (P) et la droite passant par M orthogonal à (P) (point H sur la figure).

Définition 2 : La distance de M à (P) est $d(M,(P)) = MH$.



Propriété : On a vu que $MH = d(M,(P)) = \dfrac{|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$ donc si $ax+by+cz+d=0$ est une équation de (P) on a :

$$\begin{cases} \vec{n}\begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix} \\ ax_A+by_A+cz_A+d=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \|\vec{n}\| = \sqrt{a^2+b^2+c^2} \\ -ax_A-by_A-cz_A=d \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}| &= |a(x_M-x_A)+b(y_M-y_A)+c(z_M-z_A)| \\ &= |ax_M+by_M+cz_M-ax_A-by_A-cz_A| \\ &= |ax_M+by_M+cz_M+d| \end{aligned}$$

Finalement on obtient : $MH = d(M,(P)) = \dfrac{|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \dfrac{|ax_M+by_M+cz_M+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

■ Principe

Comme cette dernière formule n'est pas explicitement au programme on vous conseille de savoir la redémontrer (ça peut tomber...) et de l'utiliser pour vérifier vos calculs après avoir déterminé la distance d'un point à un plan par la détermination du projeté orthogonal (H sur la figure).

Pour déterminer les coordonnées du projeté orthogonal $H(x_H, y_H, z_H)$ d'un point $M(x_M, y_M, z_M)$ sur un plan (P) d'équation $ax+by+cz+d=0$ il faut l'interpréter comme l'intersection entre (P) et la droite (D) passant par M orthogonale à (P) donc de vecteur directeur $\vec{n}\begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix}$.

Par application de la méthode 13 le triplet solution de $(S) : \begin{cases} x = x_M + a \times k \\ y = y_M + b \times k \\ z = z_M + c \times k \\ ax+by+cz+d=0 \end{cases}$

correspond aux coordonnées de H.

La distance cherchée est alors $MH=\sqrt{(x_H-x_M)^2+(y_H-y_M)^2+(z_H-z_M)^2}$.

■ Cas d'application

Quand on peut déterminer une représentation paramétrique de (D) et une équation de (P) où qu'elles sont données.

■ **Exemple :** *Déterminez la distance entre le point M(1,1,1) et le plan (P) d'équation x − 2y + 2z + 15 = 0 après avoir déterminez les coordonnées du projeté orthogonal de M sur le plan (P).*

Le plan (P) admet $\vec{n}\begin{vmatrix}1\\-2\\2\end{vmatrix}$ comme vecteur normal donc la droite (D) passant par M orthogonale à (P) admet $\vec{n}$ comme vecteur directeur.

Une représentation paramétrique de (D) est donc : $\begin{cases}x=1+k\\y=1-2k\\z=1+2k\end{cases}$.

La solution du système $\begin{cases}x=1+k\\y=1-2k\\z=1+2k\\x-2y+2z+15=0\end{cases}$ donne donc les coordonnées du projeté orthogonal du point M sur le plan (P).

Comme $\begin{cases}x=1+k\\y=1-2k\\z=1+2k\\x-2y+2z+15=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1+k\\y=1-2k\\z=1+2k\\1+k-2(1-2k)+2(1+2k)+15=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=-\dfrac{16}{9}\\x=-\dfrac{7}{9}\\y=\dfrac{41}{9}\\z=-\dfrac{23}{9}\end{cases}$, on obtient $H\left(-\frac{7}{9},\frac{41}{9},-\frac{23}{9}\right)$ et donc $\overrightarrow{MH}\begin{vmatrix}-\dfrac{7}{9}-1=-\dfrac{16}{9}\\\dfrac{41}{9}-1=\dfrac{32}{9}\\-\dfrac{23}{9}-1=-\dfrac{32}{9}\end{vmatrix}$.

Par conséquent on a : $d(M,(P))=MH=\sqrt{\left(-\frac{16}{9}\right)^2+\left(\frac{32}{9}\right)^2+\left(-\frac{32}{9}\right)^2}=\frac{16}{3}$.

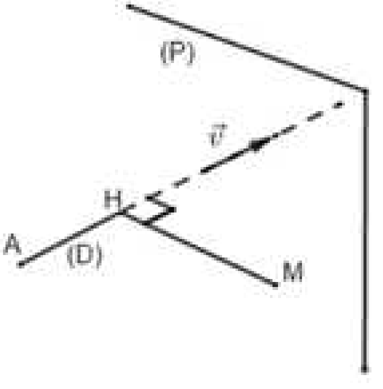
Vérification : L'application de la formule démontrée dans les rappels redonne bien $d(M,(P))=\dfrac{|1-2+2+15|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}}=\dfrac{16}{3}$.

METHODE 18 : Comment déterminer la distance d'un point à une droite

■ Rappels

Définition 1 : Le projeté orthogonal d'un point M sur une droite (D) est le point H d'intersection entre (D) et le plan (P) passant par M orthogonal à (D).

Définition 2 : La distance de M à (P) est $d(M,(P)) = MH$.



■ Principe

Pour déterminer les coordonnées du projeté orthogonal $H(x_H, y_H, z_H)$ d'un point $M(x_M, y_M, z_M)$ sur une droite (D) de vecteur directeur $\vec{v}\begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix}$ passant par $A(x_A, y_A, z_A)$ il faut l'interpréter comme l'intersection entre (D) et le plan (P) passant par M orthogonale à (D) donc de vecteur normal $\vec{v}\begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix}$.

Par application de la méthode 13 le triplet solution de $(S): \begin{cases} x = x_A + a \times k \\ y = y_A + b \times k \\ z = z_A + c \times k \\ ax + by + cz + d = 0 \end{cases}$

avec d tel que $ax_M + by_M + cz_M + d = 0$ correspond aux coordonnées de H.

■ Cas d'application

Quand on peut déterminer une représentation paramétrique de (D) et une équation de (P) où qu'elles sont données.

■ **Exemple :** *Déterminez la distance entre le point $M(1,1,1)$ et la droite (D) passant par $A(1,2,3)$ de vecteur directeur $\vec{V}\begin{vmatrix}1\\-1\\0\end{vmatrix}$.*

Le plan (P) orthogonal à (D) passant par M admet $\vec{v}\begin{vmatrix}1\\-1\\0\end{vmatrix}$ comme vecteur normal donc il a une équation de la forme $x-y+d=0$.

Comme $M(1,1,1)$ est un point de (P) on a $1-1+d=0$ ce qui donne $d=0$.

On en déduit qu'une équation de (P) est $x-y=0$.

Une représentation paramétrique de (D) est $\begin{cases}x=1+k\\y=2-k\\z=3\end{cases}$.

La solution du système $\begin{cases}x=1+k\\y=2-k\\z=3\\x-y=0\end{cases}$ donne donc les coordonnées du projeté orthogonal du point M sur le plan (P).

Comme $\begin{cases}x=1+k\\y=2-k\\z=3\\x-y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1+k\\y=2-k\\z=3\\1+k-(2-k)=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k=\frac{1}{2}\\x=\frac{3}{2}\\y=\frac{3}{2}\\z=3\end{cases}$, on obtient $H\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2},3\right)$ et donc

$\overrightarrow{MH}\begin{vmatrix}\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}\\\frac{3}{2}-1=\frac{1}{2}\\3-1=2\end{vmatrix}$.

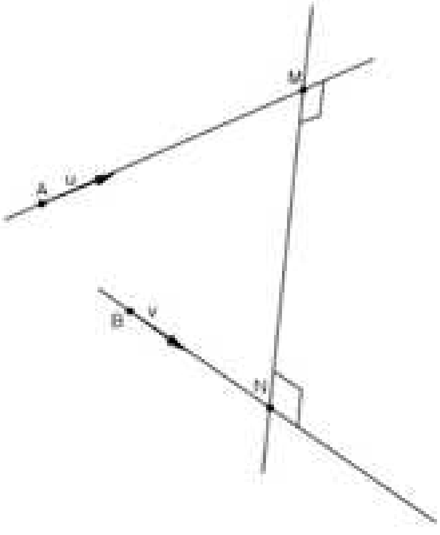
Par conséquent on a : $d(M,(D))=MH=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2+(2)^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$.

METHODE 19 : Comment déterminer la distance entre deux droites – Approfondissement

■ **Rappels**

1) Deux droites non coplanaires admettent une unique perpendiculaire commune (propriété démontrée à l'exercice 16).

2) La distance entre deux droites (D) et (D') est $d = \min_{P \in (D) \text{ et } Q \in (D')} PQ$ (sur la figure suivante $P = M$ et $Q = N$).



■ Principe

On traduit en terme de coordonnées le fait que $M \in \left(A,\vec{u}\right)$, que $N \in \left(B,\vec{v}\right)$, et que $\overrightarrow{MN}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires pour tomber sur un système de 9 équations à 9 inconnues !
Rien que ça... mais rassurez-vous, dans ce cas c'est facile à résoudre.

La résolution de ce système donne les coordonnées de M et N donc la droite (MN) et la distance MN.

REMARQUE : Si l'on veut juste la perpendiculaire commune il est plus rapide de l'interpréter comme l'intersection des plans $\left(A,\vec{u},\vec{n}\right)$ et $\left(B,\vec{v},\vec{n}\right)$ où $\vec{n}$ désigne un vecteur orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

■ **Exemple :** *On considère la droite (D) passant par $A(1,1,-1)$ de vecteur directeur $\vec{u}(-1,-1,0)$) et la droite (D') passant par $B(-1,-1,2)$ de vecteur directeur $\vec{v}(-1,0,1)$ (voir figure du principe).*
Déterminez la perpendiculaire commune aux droites (D) et (D') ainsi que la distance entre ces deux droites.

$$M(x_M, y_M, z_M) \in (D) \Rightarrow \begin{cases} x_M = 1 - \lambda_M \\ y_M = 1 - \lambda_M \\ z_M = -1 \end{cases}.$$

$$N(x_N, y_N, z_N) \in (D') \Rightarrow \begin{cases} x_N = -1 - \lambda_N \\ y_N = -1 \\ z_N = 2 + \lambda_N \end{cases}.$$

Cherchons un vecteur $\vec{n}(a,b,c)$ qui est orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

$\vec{n}\bullet\vec{u}=0 \Rightarrow -a-b=0 \Rightarrow b=-a$.

$\vec{n}\bullet\vec{v}=0 \Rightarrow -a+c=0 \Rightarrow c=a$.

En prenant a = 1, on obtient $\vec{n}(1,-1,1)$.

$$\overrightarrow{MN}=k\vec{n} \Rightarrow \begin{cases} x_N-x_M=k \\ y_N-y_M=-k \\ z_N-z_M=k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1-\lambda_N-(1-\lambda_M)=k \\ -1-(1-\lambda_M)=-k \\ 2+\lambda_N-(-1)=k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_M-\lambda_N-k=2 & (L_1) \\ \lambda_M+k=2 & (L_2) \\ \lambda_N-k=-3 & (L_3) \end{cases}.$$

$$(L_1)-(L_2)+(L_3) \Rightarrow -3k=-3 \Rightarrow k=1 \Rightarrow \begin{cases} \lambda_M=1 \\ \lambda_N=-2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_M=0 \\ y_M=0 \\ z_M=-1 \\ x_N=1 \\ y_N=-1 \\ z_N=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M(0,0,-1) \\ \text{et} \\ N(1,-1,0) \end{cases}.$$

La perpendiculaire commune à (D) et (D') est (MN).

La distance entre (D) et (D') est $MN=\sqrt{3}$.

6. Comment s'y prendre avec les barycentres – Approfondissement

METHODE 20 : Comment utiliser la définition du barycentre

■ Rappels

1) G est barycentre de $\{(A_1,a_1),\ldots,(A_n,a_n)\}$ (où $a_1+\cdots+a_n \neq 0$) si et seulement si $a_1\overrightarrow{GA_1}+\cdots+a_n\overrightarrow{GA_n}=\vec{0}$.

REMARQUE : Si $a_1=\cdots=a_n$ on parle d'isobarycentre.

2) Le barycentre est invariant quand on multiplie les coefficients $a_1,\cdots,a_n$ par un même nombre **non nul**.

■ Principe

On utilise cette définition quand un point est barycentre d'un système de n points pondérés ou pour prouver qu'il en est barycentre.

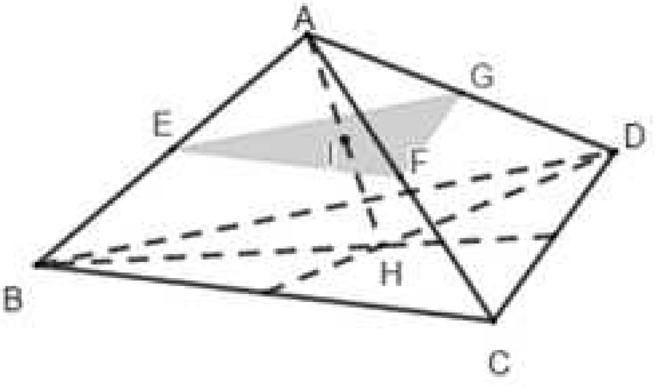
Dans ce dernier cas on part de $a_1\overrightarrow{GA_1}+\cdots+a_n\overrightarrow{GA_n}$ et l'on prouve que ce vecteur est le vecteur nul par utilisation de la relation de Chasles et de l'énoncé.

■ **Erreur classique**

Quand $\alpha_1+\cdots+\alpha_n=0$ le barycentre **n'existe pas**... Alors évitez d'en parler !

■ **Exemple :** *On considère un tétraèdre ABCD, les points E, F, G milieux respectifs des segments $[AB]$, $[AC]$ et $[AD]$, l'isobarycentre H de BCD, et le milieu I de $[AH]$.*

Faire une figure et montrer que I est l'isobarycentre de EFG.



$$\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{IF}+\overrightarrow{IG}=\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AG}=\frac{1}{2}\overrightarrow{HA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{HA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{HA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

$$=\frac{1}{2}\overrightarrow{HB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{HC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{HD}=\frac{1}{2}\Big(\underbrace{\overrightarrow{HB}+\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{HD}}_{\vec{0}}\Big)=\vec{0}.$$

On en déduit que I est l'isobarycentre de EFG.

METHODE 21 : Comment réduire la fonction $\overrightarrow{f(M)}=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\overrightarrow{MA_k}$ (fonction vectorielle de Leibniz) et utiliser cette réduction

■ **Rappels**

1) Deux cas peuvent se présenter :

Cas 1 : $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k=\alpha_1+\cdots+\alpha_n=0$ et le vecteur $\overrightarrow{f(M)}$ ne dépend que des points $A_1,\ldots,A_n$ et ne dépend pas du point M bien qu'au départ il soit écrit en fonction de lui.

Cas 2 : $\sum_{k=1}^{n}\alpha_k=\alpha_1+\cdots+\alpha_n\neq 0$, et si l'on note $G=\mathrm{Bar}\{(A_1,\alpha_1),\cdots,(A_n,\alpha_n)\}$, alors :

$$\overrightarrow{f(M)}=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\overrightarrow{MA_k}=\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\right)\overrightarrow{MG}=(\alpha_1+\cdots+\alpha_k)\overrightarrow{MG}.$$

2) En géométrie analytique, si O est le centre du repère, en remplaçant M par O dans la formule précédente, on obtient :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k \overrightarrow{OA_k}}{\sum_{k=1}^{n} a_k}.$$

Par conséquent si $A_1(x_1,y_1,z_1),\ldots, A_n(x_n,y_n,z_n)$ alors $\begin{cases} x_G = \dfrac{a_1x_1+\cdots+a_nx_n}{a_1+\cdots+a_n} \\ y_G = \dfrac{a_1y_1+\cdots+a_ny_n}{a_1+\cdots+a_n} \\ z_G = \dfrac{a_1z_1+\cdots+a_nz_n}{a_1+\cdots+a_n} \end{cases}.$

■ Principe

Pour utiliser ces formules on procède selon le cas :

Cas 1 : On écrit par exemple que le vecteur $\overrightarrow{f(M)}$ est :

$\overrightarrow{f(M)} = a_1\overrightarrow{MA_1} + a_2\left(\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{A_1A_2}\right) + \cdots + a_n\left(\overrightarrow{MA_1} + \overrightarrow{A_1A_n}\right)$

$= \left(\underbrace{a_1+\cdots+a_n}_{0}\right)\overrightarrow{MA_1} + \underbrace{a_2\overrightarrow{A_1A_2} + \cdots + a_n\overrightarrow{A_1A_n}}_{\text{indépendant de M}} = a_2\overrightarrow{A_1A_2} + \cdots + a_n\overrightarrow{A_1A_n} = \overrightarrow{f(A_1)}.$

Cas 2 : On introduit le barycentre $G = \mathrm{Bar}\{(A_1,a_1),\cdots,(A_n,a_n)\}$ et l'on applique la formule qui permet de réduire le vecteur.

■ Cas d'application

L'énoncé permet de se ramener à déterminer l'ensemble des points M tels que $\left\|\overrightarrow{f(M)}\right\| = k \geq 0$ (souvent une sphère) ou tels que $\left\|\overrightarrow{f(M)}\right\| = \left\|\overrightarrow{g(M)}\right\|$ (souvent un plan médiateur).

■ **Exemple :** *On considère un triangle équilatéral de l'espace de côté a.*

Déterminez dans chaque cas l'ensemble des points M de l'espace tels que :

1) $\left\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB}\right\|.$

2) $\left\|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\right\| = \left\|2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB}\right\|.$

1) On introduit le barycentre $G = \mathrm{Bar}\{(A,2),(B,1),(C,1)\}$ et l'on obtient $\overrightarrow{f(M)} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = (2+1+1)\overrightarrow{MG} = 4\overrightarrow{MG}.$

D'autre part on a : $\overrightarrow{g(M)} = \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{g(B)} = \overrightarrow{BA}$.

Finalement $\left\|\overrightarrow{f(M)}\right\| = \left\|\overrightarrow{g(M)}\right\| \Leftrightarrow \left\|4\overrightarrow{MG}\right\| = \left\|\overrightarrow{BA}\right\| \Leftrightarrow 4MG = a \Leftrightarrow MG = \dfrac{a}{4}$ et l'ensemble des points cherchés et la sphère de centre G de rayon $\dfrac{a}{4}$.

2) D'après 1) on a : $\overrightarrow{f(M)} = 2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{MG}$.

D'autre part en introduisant l'isobarycentre $I = \text{Bar}\{(A,2),(B,2)\}$ qui est milieu de $[AB]$ on obtient $\overrightarrow{h(M)} = 2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = (2+2)\overrightarrow{MI} = 4\overrightarrow{MI}$.

Finalement $\|\overrightarrow{f(M)}\| = \|\overrightarrow{h(M)}\| \Leftrightarrow \|4\overrightarrow{MG}\| = \|4\overrightarrow{MI}\| \Leftrightarrow MG = MI$ avec $G \neq I$, donc l'ensemble des points cherchés et le plan médiateur du segment $[IG]$.

METHODE 22 : Comment déterminer un lieu de barycentres

■ Principe

Pour que tout soit bien clair on va vous expliquer ce principe en s'appuyant sur un exemple.

Ainsi nous allons expliquer comment déterminer l'ensemble des barycentres G_k du système de points pondérés $\{(A,k),(B,k+2),(C,2k+3),(D,-4k-2)\}$ lorsque k décrit $\mathbb{R}$.

Pour cela il faut :

1) déterminer les valeurs de k pour lesquelles G_k existe.

2) écrire la relation vectorielle que vérifie G_k.

3) mettre k en facteur ce qui donne une équation de la forme $k\vec{V} = \vec{W}$, où $\vec{V}$ et $\vec{W}$ sont des vecteurs qui dépendent de G_k.

4) réduire les vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{W}$ en utilisant la méthode précédente.

■ **Exemple :** *On va résoudre l'exemple du principe.*

1) Comme la somme des coefficients est 3, G_k existe toujours.

2) Les points G_k vérifient : $k\overrightarrow{G_kA} + (k+2)\overrightarrow{G_kB} + (2k+3)\overrightarrow{G_kC} + (-4k-2)\overrightarrow{G_kD} = \vec{0}$.

3) On en déduit : $k\left(\overrightarrow{G_kA} + \overrightarrow{G_kB} + 2\overrightarrow{G_kC} - 4\overrightarrow{G_kD}\right) = -2\overrightarrow{G_kB} - 3\overrightarrow{G_kC} + 2\overrightarrow{G_kD}$.

4) Par application de la méthode précédente :

a) $\overrightarrow{f(G_k)} = \overrightarrow{G_kA} + \overrightarrow{G_kB} + 2\overrightarrow{G_kC} - 4\overrightarrow{G_kD} = \overrightarrow{f(A)} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{AD} = \vec{u}$ et

b) $\overrightarrow{g(G_k)} = -2\overrightarrow{G_kB} - 3\overrightarrow{G_kC} + 2\overrightarrow{G_kD} = -3\overrightarrow{G_kE}$ avec $E = \text{Bar}\{(B,-2),(C,-3),(D,2)\}$.

Finalement on a $k\vec{u} = -3\overrightarrow{G_kE}$ et donc $\overrightarrow{EG_k} = \frac{k}{3}\vec{u}$.

Lorsque le réel k décrit $\mathbb{R}$, le réel $\frac{k}{3}$ décrit également $\mathbb{R}$ donc l'ensemble des points cherchés est la droite passant par E de vecteur directeur $\vec{u}$.

METHODE 23 : Comment utiliser la propriété d'associativité

■ Rappel : propriété d'associativité

Propriété avec 4 points (admis)

$$\text{Si } G = \text{Bar}\{(A_1,a_1);(A_2,a_2);(A_3,a_3);(A_4,a_4)\}$$

alors

$$G = \text{Bar}\{(A_1,a_1);(G_1,a_2+a_3+a_4)\} \text{ avec } G_1 = \text{Bar}\{(A_2,a_2);(A_3,a_3);(A_4,a_4)\}$$

à condition que $a_2 + a_3 + a_4 \neq 0$;

ou bien

$$G = \text{Bar}\{(G_2,a_1+a_2);(G_3,a_3+a_4)\} \text{ avec } G_2 = \text{Bar}\{(A_1,a_1);(A_2,a_2)\} \text{ et}$$

$G_3 = \text{Bar}\{(A_3,a_3);(A_4,a_4)\}$ **à condition que** $a_1 + a_2 \neq 0$ et $a_3 + a_4 \neq 0$;

ou bien...

tout autre regroupement à condition que les barycentres partiels $(G_1, G_2, G_3, \cdots)$ existent.

Généralisation

On généralise à n points pour tout n entier supérieur ou égal à 3.

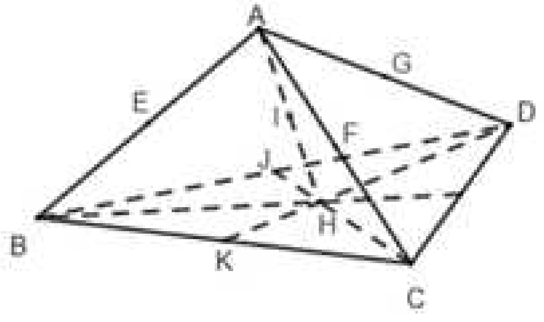
■ Cas d'application

1) Pour montrer que trois points sont **alignés**, il suffit de montrer que l'un d'entre eux est barycentre des deux autres.
2) Pour montrer que quatre points sont **coplanaires**, il suffit de montrer que l'un d'entre eux est barycentre des trois autres.
3) Il est fréquent qu'un barycentre soit commun à plusieurs droites de l'espace, ce qui permet de prouver que les droites sont **sécantes** dans le cas de deux droites et **concourantes** dans le cas de plus de deux droites.

■ Principe

Dans chaque cas, on part d'un barycentre de trois points ou plus et l'on applique la propriété d'associativité pour écrire ce barycentre comme barycentre de deux points (ou trois points pour montrer une coplanarité).

■ **Exemple :** *On reprend la figure de l'exemple de la méthode 20 et l'on introduit les points J et K, milieux respectifs de* $[BD]$ *et* $[BC]$.



On note L le barycentre du quadrilatère ABCD.
Montrez en utilisant la propriété d'associativité que :
1) les points G, L et K sont alignés,
2) les droites (FJ) et (GK) sont sécantes,
3) les points I, E, G et F sont coplanaires.

1) On a $L = \mathrm{Bar}\{(A,1),(B,1),(C,1),(D,1)\}$, donc en regroupant A et D d'une part, puis B et C d'autre part, comme $G = \mathrm{Bar}\{(A,1),(D,1)\}$ (G milieu de $[AD]$) et $K = \mathrm{Bar}\{(B,1),(C,1)\}$ (K milieu de $[BC]$), en appliquant la propriété d'associativité on obtient : $L = \mathrm{Bar}\{(G,2),(K,2)\}$ ce qui prouve que L, G et K sont alignés.

2) On a $L = \mathrm{Bar}\{(A,1),(B,1),(C,1),(D,1)\}$, donc en regroupant A et C d'une part, puis B et D d'autre part, comme $F = \mathrm{Bar}\{(A,1),(C,1)\}$ (F milieu de $[AC]$) et $J = \mathrm{Bar}\{(B,1),(D,1)\}$ (J milieu de $[BD]$), en appliquant la propriété d'associativité on obtient : $L = \mathrm{Bar}\{(F,2),(J,2)\}$ ce qui prouve que L, F et J sont alignés et donc que (FJ) et (GK) sont sécantes en L.

3) Comme I est le milieu de $[AH]$ on a : $I = \mathrm{Bar}\{(A,1),(H,1)\}$.

Là c'est un peu moins immédiat que dans les deux questions précédentes dans la mesure où il faut interpréter I comme un barycentre des trois points E, F et G.

Il suffit d'appliquer la propriété d'associativité « à l'envers » après avoir multiplié les coefficients par 3.

Ainsi, $I = \mathrm{Bar}\{(A,3),(H,3)\}$ avec $H = \mathrm{Bar}\{(B,1),(C,1),(D,1)\}$ ce qui amène à :

$$I = \mathrm{Bar}\{(A,3),(B,1),(C,1),(D,1)\} = \mathrm{Bar}\{(A,1),(B,1),(A,1),(C,1),(A,1),(D,1)\}.$$

En regroupant A et B, puis A et C et enfin A et D, comme $E = \mathrm{Bar}\{(A,1),(B,1)\}$, $F = \mathrm{Bar}\{(A,1),(C,1)\}$ et $G = \mathrm{Bar}\{(A,1),(D,1)\}$, en appliquant la propriété d'associativité on obtient : $I = \mathrm{Bar}\{(E,2),(F,2),(G,2)\}$ ce qui prouve que les points I, E, F et G sont coplanaires.

REMARQUE : On retrouve le résultat démontré dans l'exemple de la méthode 20, c'est-à-dire que I est l'isobarycentre du triangle EFG.

Réflexes

	SITUATIONS	REFLEXES
1.	**On doit montrer un parallélisme.**	▪ On utilise les vecteurs directeurs des droites et les vecteurs normaux des plans.
2.	**On doit montrer une orthogonalité.**	▪ On calcul des produits scalaires avec les vecteurs directeurs des droites et les vecteurs normaux des plans.
3.	**On doit déterminer un angle géométrique.**	▪ On utilise la formule du produit scalaire avec cosinus.
4.	**On doit déterminer une distance.**	▪ On raisonne avec le projeté orthogonal et la formule adéquate.
5.	**On demande une équation d'un plan.**	▪ On cherche un vecteur normal du plan.
6.	**On demande une représentation paramétrique d'une droite.**	▪ Il faut un point et un vecteur directeur de la droite.
7.	**On doit déterminer une intersection.**	▪ Il faut résoudre un système et interpréter géométriquement la solution.
8.	**On doit montrer qu'un point est barycentre.**	▪ On utilise la définition vectorielle ou la propriété d'associativité.
9.	**On doit réduire la fonction vectorielle de Leibniz.**	▪ On se demande si la somme des coefficients est nulle ou non.
10.	**On doit déterminer un lieu de barycentres ou un ensemble de points.**	▪ On réduit les fonctions vectorielles de Leibniz qui interviennent.

Astuces

■ Pour calculer un produit scalaire défini à partir d'un polyèdre, il est judicieux de « suivre » les arêtes pour faire apparaître des produits scalaires de vecteurs colinéaires ou orthogonaux.

■ Dans les configurations de l'espace faisant intervenir des distances il est souvent judicieux de faire intervenir des plans médiateurs (exercices 4 et 10).

■ Un exercice en géométrie non repérée peut devenir un exercice en géométrie repérée en introduisant un repère (orthonormé pour calculer des produits scalaires).

■ Pour gagner du temps, on peut éviter d'appliquer le théorème de Pythagore en apprenant par coeur que la hauteur d'un triangle équilatéral de côté « a » est $h = a\frac{\sqrt{3}}{2}$, et que la diagonale d'un carré de côté « a » est $d = a\sqrt{2}$.

Erreurs

■ Parler du barycentre d'un système de points pondérés dont la somme des coefficients est nulle est une **grosse erreur**, car dans ce cas, le barycentre n'existe pas.

■ Il est **faux** d'appliquer la formule donnant le produit scalaire de deux vecteurs dont on connaît les coordonnées $\left(\vec{u}\bullet\vec{v} = xx' + yy' + zz'\right)$ **quand le repère n'est pas orthonormé.**

■ Dans l'espace :
1) L'ensemble des points M tels que **MA = MB** est le plan médiateur de $[AB]$, et **non** la médiatrice de $[AB]$, **et encore moins** le milieu de $[AB]$!
2) L'ensemble des points M tels que **AM = R > 0** est la sphère de centre A et de rayon R, et **non** le cercle de centre A et de rayon R.

Le jour de l'épreuve

■ Faites de belles figures : cela vous aidera à mieux raisonner et valorisera votre copie.

■ La géométrie dans l'espace se prête bien aux QCM : il faut vous entraîner en vous rappelant que dans un QCM, il ne s'agit pas de chercher une solution mais de trouver les bonnes réponses parmi celles qui vous sont proposées.

Le jour du Grand Oral

Sujets mathématiques

■ ***Question 1 : Propriétés d'un cube***
Cette question abordée aux exercices 1, 2, 12 et 13 fait intervenir des propriétés de parallélisme et d'orthogonalité dans un cube. Les démonstrations de ces propriétés peuvent être réalisées en géométrie repérée ou non. A cet égard, il peut être intéressant de proposer deux démonstrations d'une même propriété. Cette dualité vous est d'ailleurs proposée dans les deux premières parties du chapitre, au sein desquelles nous vous proposons des démonstrations différentes de la même propriété.

■ ***Question 2 : Propriétés d'un tétraèdre régulier***
Cette question abordée dans l'exercice 3 consiste à utiliser, entre autre, le produit scalaire pour déterminer des distances et des angles au sein d'un tétraèdre régulier. La dualité évoquée dans la question précédente reste d'actualité pour celle-ci.

■ ***Question 3 : Propriétés d'une pyramide***
Cette question abordée à l'exercice 4 propose de démontrer le même genre de propriétés qu'à la question précédente, au sein d'une pyramide régulière et non d'un tétraèdre. Sur le plan historique, il peut être intéressant d'enrichir cette question avec une référence aux pyramides d'Egypte.

■ ***Question 4 : Intersections de droites et de plans en géométrie repérée***
Cette question abordée en particulier dans les exercices 5 et 6 consiste à interpréter la résolution de systèmes faisant intervenir des équations de plans et des représentations paramétriques de droites pour déterminer les intersections demandées.

■ ***Question 5 : Distance d'un point à un plan ou une droite***
Cette question est abordée aux exercices 7 et 9 dans lesquels elle fait intervenir la notion de projeté orthogonal. Cependant, il n'est pas toujours nécessaire de faire intervenir cette notion pour déterminer la distance d'un point à un plan. En effet, il suffit d'appliquer les formules des méthodes 4, 8 et 17 pour s'en convaincre (on vous conseille de savoir redémontrer ces formules si vous choisissez cette question).

■ ***Question 6 : Perpendiculaire commune – Distance entre deux droites***
Cette question relativement difficile est abordée à l'exercice 16 et repose sur des notions qui seront très valorisantes si vous les maîtrisez.

■ ***Question 7 : Intersections de droites et de plans avec une sphère***
Comme tous les problèmes d'intersections, cette question fait intervenir la résolution de systèmes mais aussi celle de distance d'un point à un plan (pour l'intersection d'un plan avec une sphère). Ce sujet abordé à l'exercice 8 n'est pas si difficile même s'il fait l'objet d'un approfondissement.

■ ***Question 8 : Utilisation de la fonction vectorielle de Leibniz***
Cette fonction utilisée dans les exercices 10 et 14 permet de réduire des vecteurs dépendant d'un point M. La réduction que l'on vient d'évoquer fait intervenir la définition vectorielle du barycentre d'un système de points pondérés. Elle a pour but de d'obtenir une égalité simple faisant intervenir un ensemble de points M à déterminer (sphère ou plan médiateur).

■ ***Question 9 : Utilisation de la propriété d'associativité du barycentre***
Cette propriété est utilisée en long, en large et en travers à la deuxième question de l'exercice 14. D'une façon générale, elle permet de démontrer que trois points sont alignés, quatre sont coplanaires ou enfin que des droites sont sécantes ou concourantes (quand elles sont au moins au nombre de trois).

■ ***Question 10 : Lieux de barycentres***
Cette question abordée à l'exercice 15 consiste à déterminer le lieu d'une famille de barycentres de systèmes de points pondérés dont les poids dépendent d'un paramètre réel.

■ ***Question 11 : Sphère circonscrite à un tétraèdre***
Cette question, comme les deux précédentes, est assez simple quand on a bien compris la méthode qui amène à la résoudre. Il vous suffit de reprendre l'exercice 17 pour la comprendre. Elle consiste d'abord à démontrer que la sphère existe en raisonnant par l'absurde à partir de plans médiateurs, puis à la déterminer.

Sujets transversaux

■ ***Question 12 : Structure de la molécule de méthane***
Cette question qui peut être conjuguée avec la spécialité Physique-Chimie correspond à la question 2 car une molécule de méthane de formule CH_4 se modélise dans l'espace par un tétraèdre régulier dont les sommets sont les atomes d'hydrogène et le centre de gravité l'atome de carbone.

Chapitre 6
METHODES SUR LA COMBINATOIRE ET LE DENOMBREMENT

Nous allons voir comment :

1) Dénombrer des situations avec « peu » d'issues

2) Dénombrer des situations avec « beaucoup » d'issues

3) Utiliser les formules relatives aux coefficients binomiaux

4) Produire des algorithmes relatifs au dénombrement.

Dans l'intégralité du chapitre, pour un ensemble fini Ω, la notation $\text{card}\Omega$ désigne son nombre d'éléments.

Pour dénombrer avec des ensembles finis il est parfois astucieux de retenir les deux propriétés suivantes :
1) Si $A \subset \Omega$ et $\overline{A}$ désigne le complémentaire de A dans Ω alors $\text{card}A = \text{card}\Omega - \text{card}\overline{A}$.
2) Pour deux ensembles A et B, $\text{card}(A \cup B) = \text{card}A + \text{card}B - \text{card}(A \cap B)$.

Enfin quand il y a équiprobabilité, si l'on note Ω l'univers d'une expérience aléatoire et A un événement de cette dernière, sa probabilité est $P(A) = \dfrac{\text{card}A}{\text{card}\Omega}$.

1. Comment dénombrer avec « peu » d'issues

On modélise le dénombrement par l'outil le plus approprié correspondant aux quatre méthodes de cette partie.
On applique ces méthodes quand il y a moins d'une cinquantaine d'issues possibles.

METHODE 1 : Donner une liste d'ensembles

■ **Principe**
On procède par étapes successives comme dans l'exemple de cette méthode.

■ Cas d'application

Quand il n'y a pas trop d'issues (moins de 20).

■ **Exemple :** *On extrait simultanément deux boules d'une urne U contenant 5 boules numérotées 3 ; 5 ; 6 ; 8 ; 9.*
1) Par quel objet mathématique peut se modéliser ce tirage.
2) Donnez le nombre de tirages pour lesquels le produit des numéros est divisible par 12.

1) Un tirage se modélise par un sous-ensemble à deux éléments des cinq boules de l'urne.
2) Pour répondre à cette question on dresse la liste des sous-ensembles de l'urne à deux éléments contenant 3, puis ceux contenant 5 mais ne contenant pas 3, puis ceux contenant 6 mais ne contenant pas 3 et 5, et ainsi de suite…
Il faut **tous** les donner mais **une seule fois** !
On obtient : $\{3;5\};\{3;6\};\{3;8\};\{3;9\};\{5;6\};\{5;8\};\{5;9\};\{6;8\};\{6;9\};\{8;9\}$.
Les issues favorables sont : $\{3;8\};\{6;8\};\{8;9\}$.
Il y a donc trois tirages pour lesquels le produit des numéros est divisible par 12.

METHODE 2 : Construire un tableau

■ Principe

On construit un tableau à double entrée pour lister tous les cas.

■ Cas d'application

Quand le dénombrement se modélise par un couple et qu'il n'y a pas trop d'issues (moins de 50).
REMARQUE : L'exemple de cette méthode montre que plusieurs méthodes peuvent intervenir pour dénombrer une situation.

■ **Exemple :** *On extrait simultanément deux boules d'une urne U contenant 5 boules numérotées 3 ; 5 ; 6 ; 8 ; 9 et une boule d'une urne V contenant cinq boules numérotées de 9 à 13.*
1) Par quel objet mathématique peut se modéliser ce tirage ?
2) Donnez un tableau qui permet de lister les issues possibles.
3) Donnez le nombre de tirages pour lesquels la somme des numéros est divisible par 7.

1) Un tirage se modélise par un couple contenant un sous-ensemble à deux éléments des cinq boules de l'urne U et une boule de V (ex. $(\{3;8\},11)$, d'où l'idée de construire un tableau à double entrée afin de donner la somme demandée pour chaque issue.

2) En utilisant la solution de l'exemple de la méthode précédente on peut construire le tableau suivant pour dresser la listes des issues possibles :

U \ V	9	10	11	12	13
{3;5}	17	18	19	20	21
{3;6}	18	19	20	21	22
{3;8}	20	21	22	23	24
{3;9}	21	22	23	24	25
{5;6}	20	21	22	23	24
{5;8}	22	23	24	25	26
{5;9}	23	24	25	26	27
{6;8}	23	24	25	26	27
{6;9}	24	25	26	27	28
{8;9}	26	27	28	29	30

3) On dénombre donc sept tirages pour lesquels la somme des numéros est divisible par 7 (cases grisées).

METHODE 3 : Construire ou imaginer un arbre

■ Principe

Chaque chemin suivi sur l'arbre représente une issue.

■ Cas d'application

On applique cette méthode quand on ne peut pas appliquer les deux précédentes et qu'il y a une notion d'ordre, ce qui par exemple est le cas des tirages successifs.

REMARQUE : Cette méthode peut s'appliquer quand il y a un grand nombre d'issues comme le montre l'exemple de cette méthode.

■ **Exemple :** *On extrait successivement* ***sans remise*** *3 boules d'une urne contenant neuf boules numérotées de 1 à 9.*
1) Par quel objet mathématique peut se modéliser ce tirage ?
2) Déterminez le nombre de tirages pour lesquels la première boule tirée est paire.
3) Répondez aux mêmes questions si le tirage est ***avec remise.***

1) Un tirage se modélise par un triplet **sans répétition** des 9 boules de l'urne, par exemple (B_7, B_1, B_5), d'où l'idée d'imaginer un arbre (il y a trop de cas pour le construire entièrement) pour dénombrer, car il y a trop de cas pour appliquer la méthode 1 et comme le modèle n'est pas un couple la méthode 2 est également inapplicable.

2) L'arbre qui modélise la situation possède 4 branches de rang 1 (il y a 4 boules paires), 8 branches de rang 2 (une boule ayant été tirée, il ne reste plus que 8 boules possibles) et 7 branches de rang 3 (deux boules ayant été tirées, il ne reste plus que 7 boules possibles).
Cela donne 4 x 8 x 7 = 224 tirages pour lesquels la première boule tirée est paire.

3) Un tirage se modélise par un triplet **avec répétition** des 9 boules de l'urne, par exemple (B_7, B_1, B_7).
L'arbre qui modélise la situation de la deuxième question possède 4 branches de rang 1 (il y a 4 boules paires), 9 branches de rang 2 (puisqu'il y a répétition 9 boules restent possibles) et 9 branches de rang 3.
Cela donne 4 x 9 x 9 = 324 tirages pour lesquels la première boule tirée est paire.

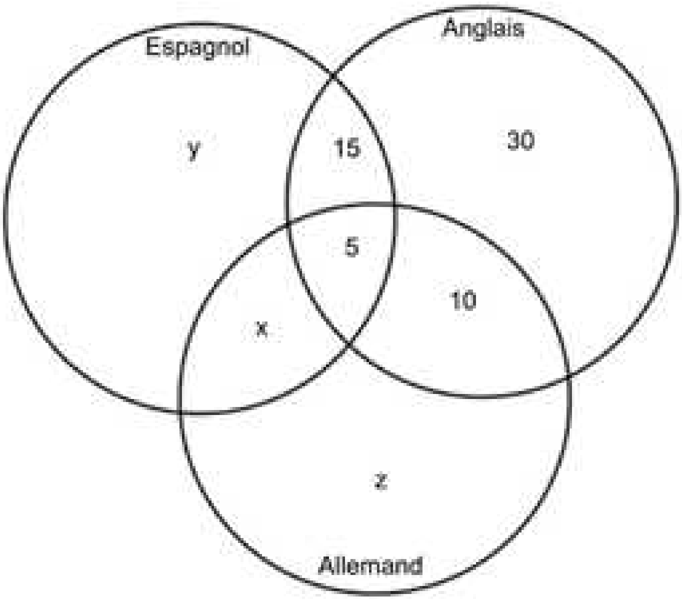
METHODE 4 : Construire un diagramme

■ Cas d'application
Quand un énoncé introduit une population vérifiant trois critères (ou plus) dont certains individus en vérifient un, deux ou trois (ou plus).

■ Principe
On construit un diagramme et l'on détermine le cardinal de chaque partie en commençant par la partie correspondant au plus grand nombre de critères, puis celles qui correspondent à un critère de moins et ainsi de suite (voir exemple).
Comme le montre l'exemple, il se peut que l'on soit amené à résoudre un système.

■ **Exemple :** *On considère un groupe de 140 individus qui parlent au moins l'anglais, l'espagnol ou l'allemand.*
Parmi eux :
70 parlent au moins l'espagnol (a)
60 parlent au moins anglais (b)
35 parlent au moins l'allemand (c)
20 parlent au moins l'espagnol et l'anglais (d)
15 parlent au moins l'anglais et l'allemand (e)
5 parlent les trois langues (f).
Combien d'individus parlent l'espagnol et l'allemand mais ne parlent pas l'anglais ?

Pour répondre à la question on commence par utiliser les données (f), (e), (d) et (b) pour construire le diagramme suivant :



On cherche x, ce qui nous amène à considérer le système suivant en utilisant les autres données :

$$\begin{cases} x+y+z+60=140 \\ x+y+20=70 \\ x+z+15=35 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=80 \ (L_1) \\ x+y=50 \ (L_2) \\ x+z=20 \ (L_3) \end{cases}.$$

$(L_1)-(L_2)-(L_2)$ donne x = 10, qui est le nombre cherché.

2. Comment dénombrer avec « beaucoup » d'issues

On a déjà effleuré la question dans l'exemple de la méthode 3 dans la mesure où il y avait un grand nombre d'issues, ce qui rendait la construction effective de l'arbre impossible.
Il s'agit dans cette partie de vous présenter deux nouveaux « outils » pour modéliser ce genre de situations à dénombrer.

METHODE 5 : Utiliser les principes multiplicatif et additif avec des k-uplets

■ Rappels

1) Cardinal d'une réunion d'ensembles deux à deux disjoints – Principe additif : c'est la somme des cardinaux des ensembles, soit :

$$\text{card}(A_1 \cup \cdots \cup A_k) = \text{card}A_1 + \cdots + \text{card}A_k.$$

2) Définition d'un k-uplet : pour k entier supérieur ou égal à 1, un k-uplet est une suite **ordonnée** de k éléments d'un ou plusieurs ensembles.

3) Définition d'un produit cartésien : pour k entier supérieur ou égal à 1, on appelle produit cartésien des ensembles $A_1, \cdots, A_k$ l'ensemble noté $A_1 \times \cdots \times A_k$ des k-uplets de la forme $(a_1, \cdots, a_k)$ avec $a_1 \in A_1, \cdots, a_k \in A_k$.

4) Cardinal d'un produit cartésien – Principe multiplicatif : c'est le produit des cardinaux des ensembles, soit $\text{card}(A_1 \times \cdots \times A_k) = \text{card}A_1 \times \cdots \times \text{card}A_k$.

5) Cas particulier des k-uplets d'un ensemble A tel que cardA = n :

a) Dans ce cas $A_1 = \cdots = A_k = A$ donc $\text{card}(A \times \cdots \times A) = (\text{card}A)^k = n^k$, ce qui correspond au nombre de k-uplets de A.

b) Quant au nombre de k-uplets **d'éléments distincts** de A, c'est $N = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

REMARQUE PRATIQUE : On peut retenir ces formules mais dans les cas où n n'est pas trop grand (inférieur ou égal à 10), on vous conseille de présenter les résultats comme dans la présentation 2 de l'exemple.

■ Principe

On modélise une issue favorable comme un k-uplet d'un ou plusieurs ensembles.
On procède par étapes successives en appliquant les principes multiplicatif et additif.

■ Cas d'application

Lorsque **la notion d'ordre intervient** dans une situation à dénombrer (tirages successifs ou qui s'y ramènent).

■ **Exemple :** *On extrait* ***successivement avec remise*** *5 boules d'une urne contenant 7 boules rouges numérotées de 1 à 7, et 10 boules vertes numérotées de 1 à 10.*
On note Ω l'univers de cette expérience aléatoire, c'est-à-dire l'ensemble des issues possibles et l'on considère les événements suivants :
A : obtenir un tirage unicolore
B : obtenir un tirage bicolore
C : obtenir 4 boules rouges et une boule verte.
1) Déterminez les cardinaux de Ω, A, B et C.
2) Déterminez les probabilités de A, B et C.
3) Répondez aux questions précédentes dans le cadre d'un tirage ***successif sans remise***.

1) Pour répondre à cette question nous allons vous proposer deux présentations différentes, après avoir cependant remarqué, qu'une issue se modélise par un 5-uplet des 17 boules de l'urne.

Déterminons les probabilités demandées avec deux rédactions différentes.

Présentation 1 : on rédige avec les ensembles et leurs cardinaux

Détermination de cardΩ
Comme l'urne contient 17 boules on a $\text{card}\Omega = 17^5 = 1\,419\,857$.

Détermination de cardA
On applique le principe additif en additionnant les tirages unicolores rouges (ensemble R_5) et unicolores verts (ensemble V_5).

Comme il y a 7 boules rouges on a $\text{card}R_5 = 7^5 = 16\,807$, et en raisonnant de même avec les boules vertes on obtient $\text{card}V_5 = 10^5 = 100\,000$ ce qui donne finalement :

$$\text{card}A = \text{card}R_5 + \text{card}V_5 = 7^5 + 10^5 = 116\,807.$$

Détermination de cardB
Vous pouvez additionner les tirages avec exactement une boule rouge, puis ceux avec exactement deux boules rouges et ainsi de suite jusqu'à exactement quatre boules rouges : bon courage ! Nous, on préfère remarquer que B est l'événement contraire de A ce qui donne :

$$\text{card}B = \text{card}\overline{A} = \text{card}\Omega - \text{card}A = 1\,303\,050.$$

Détermination de cardC
a) Les cas favorables à C avec 4 boules rouges et une boule verte **dans cet ordre** sont les éléments du produit cartésien $E = R_4 \times V_1$ où R_4 désigne l'ensemble des 4-uplets de boules rouges et V_1 l'ensemble des 1-uplets de boules vertes.

Par application du principe multiplicatif :

$$\text{card}E = \text{card}R_4 \times \text{card}V_1 = 7^4 \times 10^1 = 24\,010.$$

b) Le raisonnement précédent peut être effectué autant de fois que l'on peut placer une boule verte dans un 5-uplet c'est-à-dire 5 fois.
À chaque fois on trouve $\text{card}E = 24\,010$ issues favorables.

Finalement, par application du principe additif :

$$\text{card}C = 5 \times \text{card}E = 5 \times 24010 = 120\,050.$$

2) En utilisant la formule rappelée en introduction du chapitre on obtient :

$P(A) = \dfrac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \dfrac{116807}{1419857} = \dfrac{6871}{83521} = 0{,}082$ arrondie à 3 décimales.

$P(B) = \dfrac{\text{card}B}{\text{card}\Omega} = \dfrac{1303050}{1419857} = \dfrac{76650}{83521} = 0{,}918$ arrondie à 3 décimales.

$P(C) = \dfrac{\text{card}C}{\text{card}\Omega} = \dfrac{120050}{1419857} = 0{,}085$ arrondie à 3 décimales.

Présentation 2 : on rédige directement avec les p-uplets et les principes multiplicatif et additif

1) ***Détermination de cardΩ***
Un tirage se modélise par le 5-uplet : (; ; ; ;).
On a donc :

$$\text{card}\,\Omega = 17 \times 17 \times 17 \times 17 \times 17 = 17^5 = 1\,419\,857.$$

Détermination de cardA
On applique le principe additif en additionnant les tirages unicolores rouges (ensemble R_5) et unicolores verts (ensemble V_5).

Cas favorables à R_5 : (R ; R ; R ; R ; R).

On a donc : card $R_5 = 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 7 = 7^5 = 16\,807$ (principe multiplicatif).

Cas favorables à V_5 : (V ; V ; V ; V ; V).

On a donc : card $V_5 = 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^5 = 100\,000$ (principe multiplicatif).
Finalement $\text{cardA} = \text{cardR}_5 + \text{cardV}_5 = 7^5 + 10^5 = 116\,807$ (principe additif).

Détermination de cardB (même réponse qu'avec la présentation précédente)
Vous pouvez additionner les tirages avec exactement une boule rouge, puis ceux avec exactement deux boules rouges et ainsi de suite jusqu'à exactement quatre boules rouges : bon courage ! Nous, on préfère remarquer que B est l'événement contraire de A ce qui donne :

$$\text{cardB} = \text{card}\overline{\text{A}} = \text{card}\Omega - \text{cardA} = 1\,303\,050.$$

Détermination de cardC
a) Les cas favorables à C avec 4 boules rouges et une boule verte **dans cet ordre** se modélisent par les 5-uplets de la forme : (R ; R ; R ; R ; V) dont le nombre est $N = 7 \times 7 \times 7 \times 7 \times 10 = 24\,010$ en appliquant le principe multiplicatif.

b) Le raisonnement précédent peut être effectué autant de fois que l'on peut placer une boule verte dans un 5-uplet c'est-à-dire 5 fois.
À chaque fois on trouve $N = 24\,010$ issues favorables.
Finalement, par application du principe additif :

$$\text{cardC} = 5 \times N = 5 \times 24\,010 = 120\,050.$$

2) En utilisant la formule rappelée en introduction du chapitre on obtient :

$P(A) = \dfrac{\text{cardA}}{\text{card}\Omega} = \dfrac{116807}{1419857} = \dfrac{6871}{83521} = 0{,}082$ arrondie à 3 décimales.

$P(B) = \dfrac{\text{cardB}}{\text{card}\Omega} = \dfrac{1303050}{1419857} = \dfrac{76650}{83521} = 0{,}918$ arrondie à 3 décimales.

$P(C) = \dfrac{\text{cardC}}{\text{card}\Omega} = \dfrac{120050}{1419857} = 0{,}085$ arrondie à 3 décimales.

3) Puisque le tirage est **successif sans remise** il se modélise par un 5-uplet **d'éléments distincts** des 17 boules de l'urne.
Par la suite on privilégiera la **présentation 2** ce qui évite une rédaction avec les produits cartésiens et une justification des formules qui lui sont propres.

Question 1 : ***Détermination de cardΩ***
Par application du principe multiplicatif $\text{card}\Omega = 17 \times 16 \times 15 \times 14 \times 13 = 742\,560$.

Détermination de cardA
On applique le principe additif en additionnant les tirages unicolores rouges (ensemble R_5) et unicolores verts (ensemble V_5).
Par application du principe multiplicatif comme il y a 7 boules rouges et 10 boules vertes on a :

$$\text{card}R_5 = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 = 2520 \text{ et } \text{card}V_5 = 10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6 = 30\,240\,.$$

Finalement on obtient :

$$\text{card}A = \text{card}R_5 + \text{card}V_5 = 2520 + 30240 = 32\,760\,.$$

Détermination de cardB
Vous pouvez additionner les tirages avec exactement une boule rouge, puis ceux avec exactement deux boules rouges et ainsi de suite jusqu'à exactement quatre boules rouges : bon courage !!!
Nous, on préfère remarquer que B est l'événement contraire de A ce qui donne $\text{card}B = \text{card}\overline{A} = \text{card}\Omega - \text{card}A = 742560 - 32760 = 709\,800$.

Détermination de cardC
a) Les cas favorables à C avec 4 boules rouges et une boule verte **dans cet ordre** se modélisent par les 5-uplets de la forme : $(\,R\ ;\ R\ ;\ R\ ;\ R\ ;\ V\,)$ dont le nombre est $N = 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 10 = 8\,400$ en appliquant le principe multiplicatif.

b) Le raisonnement précédent peut être effectué autant de fois que l'on peut placer une boule verte dans un 5-uplet c'est-à-dire 5 fois.
À chaque fois on trouve $N = 8\,400$ issues favorables.
Finalement, par application du principe additif $\text{card}C = 5 \times N = 5 \times 8400 = 42\,000$.

Question 2 : En utilisant la formule rappelée en introduction du chapitre on obtient :

$$P(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{32760}{742560} = \frac{3}{68} = 0{,}044 \text{ arrondie à 3 décimales,}$$

$$P(B) = \frac{\text{card}B}{\text{card}\Omega} = \frac{709800}{742560} = \frac{65}{68} = 0{,}956 \text{ arrondie à 3 décimales,}$$

$$P(C) = \frac{\text{card}C}{\text{card}\Omega} = \frac{42000}{742560} = \frac{25}{442} = 0{,}057 \text{ arrondie à 3 décimales.}$$

METHODE 6 : Utiliser les combinaisons et les principes précédents

■ Rappels

1) Définition d'une combinaison : pour k et n entiers naturels avec $k \leq n$, on appelle combinaison à k éléments d'un ensemble E à n éléments, toute partie de E à k éléments (la partie de E à 0 éléments est l'ensemble vide).

2) Nombre de combinaisons d'un ensemble à n éléments : le nombre de combinaisons à k éléments d'un ensemble à n éléments est $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

REMARQUES :1) On obtient facilement ce nombre avec la calculatrice.

2) Lorsque k est entier qui n'appartient pas à $\lfloor 0;n \rfloor$, on convient que $\binom{n}{k} = 0$.

■ Principe

On modélise la situation par une combinaison et l'on applique les principes additif et multiplicatif en étant très prudent dans l'application de ce dernier comme dans l'exemple (il ne s'agit pas de mettre des signes « x » sous tous les points virgules comme avec les p-uplets).

■ Cas d'application

Lorsque **la notion d'ordre n'intervient pas** dans une situation à dénombrer (tirages simultanés ou qui s'y ramènent).

■ **Exemple :** *On extrait* ***simultanément*** *5 boules d'une urne contenant 7 boules rouges numérotées de 1 à 7, et 10 boules vertes numérotées de 1 à 10 (même urne que dans l'exemple de la méthode précédente).*
On note Ω l'univers de cette expérience aléatoire, c'est-à-dire l'ensemble des issues possibles et l'on considère les événements suivants :
A : obtenir un tirage unicolore
B : obtenir un tirage bicolore
C : obtenir 4 boules rouges et une boule verte
1) Déterminez les cardinaux de Ω, A, B et C.
2) Déterminez les probabilités de A, B et C.

1) Dans la mesure où **le tirage est simultané** une issue se modélise comme une combinaison à 5 éléments de l'ensemble des 5 boules de l'urne car **la notion d'ordre n'intervient pas**.

Détermination de cardΩ
Comme l'urne contient 17 boules et que l'on tire 5 boules on a : $\text{card}\Omega = \binom{17}{5} = 6\,188$.

Détermination de cardA
On applique le principe additif en additionnant les tirages unicolores rouges (ensemble R_5) et unicolores verts (ensemble V_5).

Comme il y a 7 boules rouges et 10 boules vertes on a $\text{card}R_5 = \binom{7}{5} = 21$ et $\text{card}V_5 = \binom{10}{5} = 252$ ce qui donne finalement :

$$\text{card}A = \text{card}R_5 + \text{card}V_5 = 21 + 252 = 273.$$

Détermination de cardB

Vous pouvez additionner les tirages avec exactement une boule rouge, puis ceux avec exactement deux boules rouges et ainsi de suite jusqu'à exactement quatre boules rouges : bon courage !!! Nous, on préfère remarquer que B est l'événement contraire de A ce qui donne $\text{card}B = \text{card}\overline{A} = \text{card}\Omega - \text{card}A = 6188 - 273 = 5915$.

Détermination de cardC

Les cas favorables à C sont de la forme $\{R;R;R;R;V\}$ et **le seul « ; » sous lequel on peut mettre un signe « x » est le 4e lorsque l'on applique le principe multiplicatif car il n'y a pas de notion d'ordre**.

En effet, il faut raisonner globalement sur les 4 boules rouges puis sur la boule verte car elles correspondent à des boules de couleurs différentes donc appartenant à **des ensembles disjoints**.

Cela donne $\text{card}C = \binom{7}{4} \times \binom{10}{1} = 35 \times 10 = 350$.

2) En utilisant la formule rappelée en introduction du chapitre on obtient :

$$P(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega} = \frac{273}{6188} = \frac{3}{68} = 0{,}044 \text{ arrondie à 3 décimales.}$$

$$P(B) = \frac{\text{card}B}{\text{card}\Omega} = \frac{5915}{6188} = \frac{65}{68} = 0{,}956 \text{ arrondie à 3 décimales.}$$

$$P(C) = \frac{\text{card}C}{\text{card}\Omega} = \frac{350}{6188} = \frac{25}{442} = 0{,}057 \text{ arrondie à 3 décimales.}$$

METHODE 7 : Utiliser les combinaisons avec répétitions – Approfondissement

■ Propriété

Pour p et n entiers naturels avec p non nul, le nombre de solution(s) de l'équation $x_1+\cdots+x_p=n$ d'inconnu le p-uplet d'entiers naturels $(x_1,\cdots,x_p)$ est $\binom{n+p-1}{p-1}$ (démontrée à l'exercice 22).

■ Principe

On modélise une issue favorable comme une solution de l'équation énoncée dans la propriété précédente et on l'applique. On peut éventuellement avoir à utiliser le principe additif.

■ Erreurs classiques

1) Certaines solutions ne correspondent pas toujours à une issue. Il faut donc les soustraire.
2) En général les situations qui entrent dans le cadre de cette méthode ne correspondent pas à des cas d'équiprobabilité, **il ne faut donc pas appliquer la formule** $P(A)=\dfrac{\text{card}A}{\text{card}\Omega}$ pour déterminer la probabilité d'un événement A.
Pour s'en sortir on se ramène à un cas d'équiprobabilité comme dans l'exemple (numérotage ou coloriage).

■ Cas d'application

Lorsque la notion d'ordre n'intervient pas dans une situation et que des objets identiques interviennent dans la combinaison qui la modélise (lancer de dés identiques, tirages simultanés de boules de couleurs différentes mais non numérotées, ...).

■ **Exemple :** *On extrait* ***simultanément****, au hasard, 7 boules d'une urne contenant 8 boules blanches, 12 boules noires, 6 boules rouges et 5 boules bleues.*
On note Ω l'univers de cette expérience aléatoire, c'est-à-dire l'ensemble des issues possibles et l'on considère les événements suivants :
A : obtenir un tirage unicolore
B : obtenir un tirage avec exactement 2 boules blanches
1) Déterminer les cardinaux de Ω, A et B.
2) Déterminez les probabilités de A et B.

1) Si l'on note x_1, x_2, x_3 et x_4 les nombres respectifs de boules banches, noires, rouges et bleues extraites lors d'un tirage des 7 boules, une issue peut s'interpréter comme une solution de l'équation $x_1+x_2+x_3+x_4=7$ (E) d'inconnues **les entiers naturels** x_1, x_2, x_3 et x_4 **avec comme condition** $x_3\le 6$ et $x_4\le 5$ car il n'y a que 6 boules rouges et 5 boules bleues.

Détermination de cardΩ
CardΩ est donc le nombre de solutions de l'équation (E) **correspondant à la condition**.

Le nombre de solutions de l'équation (E) est $N = \binom{7+4-1}{4-1} = \binom{10}{3} = 120$.

Si $x_3 = 7$ (événement impossible puisqu'il n'y a que 6 boules rouges), l'équation (E) devient $x_1 + x_2 + 7 + x_4 = 7$ soit $x_1 + x_2 + x_4 = 0$ dont le nombre de solutions est 1.
Si $x_4 = 7$ l'équation (E) (événement impossible puisqu'il n'y a que 5 boules bleues), l'équation (E) devient $x_1 + x_2 + x_3 + 7 = 7$ soit $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ dont le nombre de solutions est 1.
Si $x_4 = 6$ (événement impossible puisqu'il n'y a que 5 boules bleues) l'équation (E) devient $x_1 + x_2 + x_3 + 6 = 7$ soit $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ dont le nombre de solutions est $N_1 = \binom{1+3-1}{3-1} = \binom{3}{2} = 3$.
Finalement, $\text{card}\Omega = N - 5 = 115$.

Détermination de cardA
Rien de plus facile ! C'est soit tout blanc, soit tout noir (il n'y a pas assez de boules des deux autres couleurs pour obtenir un tirage unicolore rouge ou bleu) donc $\text{card}A = 2$.

Détermination de cardB
CardB est le nombre de solutions de l'équation (E) correspondant à $x_1 = 2$ qui devient donc $2 + x_2 + x_3 + x_4 = 7$ soit $x_2 + x_3 + x_4 = 5$ (il n'y a aucune solution à soustraire car toutes les solutions correspondent à des tirages possibles).
Finalement $\text{card}B = \binom{5+3-1}{3-1} = \binom{7}{2} = 21$.

2) **ATTENTION** : les tirages ne sont pas équiprobables !
Pour vous en convaincre, il suffit par exemple de considérer les tirages unicolores blanc et noir. Puisqu'il y a plus de boules noires que de boules blanches la probabilité d'obtenir un tirage noir est plus probable que celle d'en obtenir un blanc.

Pour se ramener à l'hypothèse d'équiprobabilité il suffit de numérotées de 1 à 8 les boules blanches, de 1 à 12 les boules noires et ainsi de suite.

Une issue devient alors une combinaison à 7 éléments de l'ensemble des 31 boules de l'urne donc $\text{card}\Omega = \binom{31}{7} = 2\,629\,575$.

Détermination de cardA et $P(A)$ lorsqu'il y a numérotage
Comme il y a 8 boules blanches et 12 boules noires, par application du principe additif on obtient :

$\text{card}A = \binom{8}{7} + \binom{12}{7} = 800$ et $P(A) = \frac{800}{2629575} = \frac{32}{105183} = 0{,}0003$ arrondie à 10^{-4}.

Détermination de cardB et $P(B)$ lorsqu'il y a numérotage

Comme on veut exactement 2 boules blanches parmi 8 et 5 boules d'une autre couleur parmi 23, en appliquant le principe multiplicatif $\text{card}B = \binom{8}{2} \times \binom{23}{5} = 942172$.

Cela donne $P(B) = \frac{942172}{2629575} = 0{,}358$ arrondie à 3 décimales.

3. Comment utiliser les formules des nombres $\binom{n}{k}$

On a vu dans la partie précédente que le nombre $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ désignait le nombre de combinaisons à k éléments d'un ensemble à n éléments et l'on vous a conseillé de le déterminer à la calculatrice.
En fait ce nombre peut se déterminer sans calculatrice en procédant comme avec l'exemple suivant.

Pour déterminer par exemple $\binom{10}{3}$ il suffit de déterminer $\frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2} = 10 \times 3 \times 4 = 120$ (au numérateur on multiplie les 3 entiers immédiatement inférieurs ou égaux à 10 et au dénominateur on prend 3!).

Les méthodes de cette partie proposent des propriétés permettant de déterminer les nombres $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ sans nécessairement avoir à utiliser la calculatrice car parfois le calcul n'est pas aussi simple que dans l'exemple précédent.

METHODE 8 : Utiliser la formule $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

■ Principe

On applique la formule « texto ».

■ Cas d'application

Quand on doit déterminer $\binom{n}{k}$ sans calculatrice avec k supérieur à $\frac{n}{2}$.

■ **Exemple :** *Déterminez* $\binom{10}{7}$.

Si l'on applique la formule donnée en introduction il faut déterminer $\binom{10}{7} = \frac{10\times 9\times 8\times\cdots\times 4}{7\times 6\times\cdots\times 1}$.

Comme $7 \geq \frac{10}{2} = 5$, on applique la formule ce qui donne :

$\binom{10}{7} = \binom{10}{10-7} = \binom{10}{3} = \frac{10\times 9\times 8}{3\times 2} = 120$.

METHODE 9 : Savoir utiliser $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}y^k$ pour $k \leq n$ entiers naturels (formule du binôme démontrée à l'exercice 21)

REMARQUE : Comme les nombres $\binom{n}{k}$ interviennent dans le développement de puissances du binôme (x+y) on les appelle coefficients binomiaux.

■ Principe

On applique la formule de $(x+y)^n$ en donnant des valeurs particulières à x et y pour démontrer une formule, ou tout simplement pour obtenir le développement de $(x+y)^n$ (dans ce dernier cas lorsque n est un entier inférieur ou égal à 6 on vous conseille de vous aider de la méthode suivante).

■ Cas d'application

Quand on demande de démontrer une formule de somme relative aux coefficients binomiaux.

■ **Exemple :** *Déterminez* $N = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$ *puis déduisez-en le nombre de parties d'un ensemble à n éléments.*

La somme demandée correspond à $x = y = 1$ dans la formule du binôme ce qui donne $N = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\times 1^{n-k}\times 1^k = (1+1)^n = 2^n$.

Pour un ensemble à n éléments il y a une partie à 0 élément (l'ensemble vide), des parties à un élément, des parties à deux éléments et ainsi de suite jusqu'à la partie à n éléments qui est l'ensemble lui-même.

Et compte tenu de la définition de $\binom{n}{k}$ qui est le nombre de partie(s) à k élément(s) d'un ensemble à n élément(s), d'après ce qui vient d'être vu la somme de tout ce petit monde (qui correspond au nombre de partie(s) de l'ensemble à n éléments) est $N = 2^n$.

METHODE 10 : Utiliser la formule et le triangle de Pascal

■ Rappels

Pour k et n entiers naturels non nuls tels que $k \leq n$, $\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k}$ (relation de Pascal démontrée à l'exercice 20).

■ Principe

La formule précédente permet d'obtenir les coefficients binomiaux par le triangle de Pascal comme le décrit le schéma suivant (les coefficients sont en gras et on les obtient ligne après ligne en appliquant la formules de Pascal pour les coefficients non extrêmes (les coefficients extrêmes valent 1) :

Puissance 1 : **1** ; **1**
Puissance 2 : **1** ; 1+1 = **2** ; **1**
Puissance 3 : **1** ; 1+2 = **3** ; 2+1 = **3** ; **1**
Puissance 4 : **1** ; 1+3 = **4** ; 3+3 = **6** ; 3+1 = **4** ; **1**
Puissance 5 : **1** ; 1+4 = **5** ; 4+6 = **10** ; 6+4 = **10** ; 4+1 = **5** ; **1**

■ Cas d'application

Développement de $(x \pm y)^n$ pour n « pas trop grand » ($n \leq 6$).

■ **Exemple :** *Développer* $(x \pm y)^6$

1) On écrit la ligne donnant les coefficients de la puissance 6 du binôme à partir des coefficients de la puissance 5 :
Puissance 5 : **1** ; 1+4 = **5** ; 4+6 = **10** ; 6+4 = **10** ; 4+1 = **5** ; **1**
Puissance 6 : **1** ; 1+5 = **6** ; 5+10 = **15** ; 10+10 = **20** ; 10+5 = **15** ; 5+1 = **6** ; **1**

2) On affecte le premier coefficient à x^6, le second à x^5y et ainsi de suite en diminuant de 1 la puissance de x et en augmentant de 1 celle de y.
Cela donne $(x+y)^6 = x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6$, puis en alternant « + » et « − », $(x-y)^6 = x^6 - 6x^5y + 15x^4y^2 - 20x^3y^3 + 15x^2y^4 - 6xy^5 + y^6$.

4. Algorithmes relatifs au dénombrement

Dans ce paragraphe, comme dans tous les précédents relatifs aux algorithmes, nous vous donnerons ces derniers en langage Python conformément au programme de mathématiques en vigueur, comme nous l'avons toujours fait dans ce livre.

Nous détaillerons les éléments de langage de l'algorithme de la méthode 11, en vous invitant à vous y reporter pour bien comprendre ceux que l'on construira dans la suite de ce chapitre.

METHODE 11 : Coefficients binomiaux du triangle de Pascal

■ Principe

On s'inspire de la construction ligne par ligne du triangle de Pascal pour imaginer un algorithme qui donne un coefficient binomial impossible à obtenir exactement à la calculatrice alors que la puissance du langage Python le permet.

■ Cas d'application

Lorsque l'on veut obtenir les coefficients d'une puissance du binôme supérieure ou égal à 7, ou quand la calculatrice ne permet pas d'obtenir exactement un grand coefficient binomial.
En effet, c'est la puissance du langage Python qui permet par exemple d'obtenir $\binom{880}{150}$ comme le montre l'algorithme du paragraphe suivant.

■ L'algorithme en langage Python

```
def ligne_suivante (L):
    LL=[]
    LL.append(1)
    n=len(L)
    for k in range (1,n):
        LL.append(L[k-1]+L[k])
    LL.append(1)
    return LL
def pascal_it(n,p):
    L=[1,1]
    for i in range (0,n-1):
        LL=ligne_suivante (L)
        L=LL
    return L[p]
```

On passe en mode « run » et l'on obtient :

```
>>> pascal_it(880,150)
1144377639102678194568030995411715358066181782953847385568824668787819718903066З
1419944356224700202452057315815981951978569782020880733793016669877640485501308
7
33243178916960
```

■ Compréhension de l'algorithme

La partie **ligne_suivante (L)** permet de passer d'une ligne du triangle de Pascal à la suivante. Pour cela :

1) on commence par créer une ligne vide (LL=[])

2) on la fait se terminer par 1 (LL.append(1)) donc à ce stade LL=[1]

3) on définit n pour la boucle finie qui suit (au départ n est la longueur de L=[1,1] donnée dans la partie suivante donc n=2)

4) on crée une boucle finie en déterminant les termes de LL qui suivent 1 au niveau du triangle de Pascal en utilisant sa formule (au départ k ne prend que la valeur 1 donc en fin de boucle LL=[1,2])

5) on termine la ligne du triangle de Pascal par 1 (au départ LL=[1,2,1] ce qui correspond bien aux coefficients binomiaux du carré)

6) on renvoie LL pour la mettre à la place de L dans la partie suivante (au départ dans la partie suivante la ligne L=[1,1] devient L=[1,2,1]).

La partie **pascal_it (n,p)** permet d'obtenir le coefficient binomial $\binom{n}{p}$.

Pour cela :

1) on commence par créer L=[1,1] (coefficients binomiaux de la puissance 1 du binôme)

2) on crée une boucle finie pour i allant de 0 à n – 2 (attention c'est bien n – 2, et non n – 1) avec comme instruction de remplacer L par LL à chaque étape. Pour i = 0 on obtient les coefficients binomiaux de la puissance 2 = 2 + i, puis pour i = 1 ceux de la puissance 3 = 2 + i et ainsi de suite jusqu'à i = n – 2 qui donne ceux de la puissance n = 2 + i.

3) on renvoie le terme de rang p de la liste, c'est-à-dire le (p+1)[ième] car on commence au terme de rang 0.

Cela donne donc bien $\binom{n}{p}$.

■ **Exemple :** *Modifiez l'algorithme précédent pour obtenir directement les coefficients binomiaux de la puissance 10 du binôme.*

Il suffit de supprimer la variable p et de renvoyer L, ce qui donne :

```
def ligne_suivante (L):
    LL=[]
    LL.append(1)
    n=len(L)
    for k in range (1,n):
        LL.append(L[k-1]+L[k])
    LL.append(1)
    return LL
def pascal_it(n):
    L=[1,1]
    for i in range (0,n-1):
        LL=ligne_suivante (L)
        L=LL
    return L
```

On obtient :

```
>>> pascal_it(10)
[1, 10, 45, 120, 210, 252, 210, 120, 45, 10, 1]
```

METHODE 12 : Génération de combinaisons ou de p-uplets

■ Principe

On construit des listes à p éléments **distincts** d'un ensemble à n éléments ce qui suppose donc que $p \leq n$.

Pour cela il faut par exemple utiliser les instructions « a=randint(1,n) » et « b=randint(1,n) » qui renvoient deux entiers aléatoires entre 1 et n.

Cependant, les deux entiers devant être distincts, si a = b, il faut redonner ces deux instructions jusqu'à les obtenir différents.

■ Cas d'application

Lorsque l'on veut simuler une situation aléatoire modélisée par une combinaison ou un k-uplet.

■ **Exemple :** *Dans une classe de 36 élèves on veut choisir trois représentants de manière aléatoire. Donnez un algorithme en langage Python qui permet ce choix.*

Il faut déterminer 3 entiers distincts de l'ensemble des entiers compris entre 1 et 36.

Pour résoudre ce problème on peut utiliser l'algorithme suivant :

```
def groupe(n):
    from random import randint
    a,b,c=0,0,0
    while a==b or a==c or b==c:
        a=randint(1,n)
        b=randint(1,n)
        c=randint(1,n)
    L=[a,b,c]
    return L
```

On obtient par exemple :

```
>>> groupe(36)
[26, 22, 3]
```

REMARQUES : 1) L'instruction « while » assure l'obtention d'entiers distincts.
2) Cet algorithme permet également d'obtenir un p-uplet d'éléments distincts (il suffit de considérer les éléments générés aléatoirement dans l'ordre de leur sortie).
3) Pour obtenir un p-uplet quelconque, il suffit de supprimer l'instruction « while ».

Réflexes

	SITUATIONS	REFLEXES
1.	**On doit dénombrer une situation avec peu d'issues.**	▪ Les 4 outils sont : 1) Les listes des éléments 2) Les tableaux 3) Les arbres 4) Les diagrammes
2.	**On doit dénombrer une situation avec beaucoup d'issues.**	▪ On utilise les principes additif et multiplicatif avec : 1) Les p-uplets (ordre) 2) Les combinaisons (pas d'ordre) 3) Les combinaisons avec répétition (pas d'ordre mais répétition)
3.	**On doit démontrer une formule littérale faisant intervenir les coefficients binomiaux.**	▪ On utilise la formule théorique de $\binom{n}{p}$ et les propriétés de ces nombres avec éventuellement la formule du binôme.
4.	**On doit développer le binôme à une puissance numérique n (de 1 à 10).**	▪ On utilise : 1) Le triangle de Pascal 2) L'algorithme de l'exemple de la méthode 11.
5.	**On doit simuler une situation.**	▪ On construit un algorithme en s'inspirant de celui de la méthode 12. ▪ Si la notion d'ordre sans répétition intervient l'algorithme reste valable. ▪ Si la notion d'ordre avec répétition intervient on supprime la condition « while ... ».

6.	**On doit déterminer une probabilité**	▪ S'il y a équiprobabilité on utilise la formule $P(A)=\dfrac{\text{card}A}{\text{card}\Omega}$. ▪ S'il n'y a pas équiprobabilité, on s'y ramène en procédant à une différentiation fictive (coloriage ou numérotage) . ▪ S'il y a « au moins » dans l'expression d'un événement A, il est souvent plus facile de déterminer la probabilité $P(\overline{A})$ puis d'appliquer $P(A)=1-P(\overline{A})$.

Astuces

■ Quand le nombre total d'issues n'est pas trop grand (moins d'une cinquantaine), n'hésitez pas à lister tout les cas pour dénombrer.

■ Pour déterminer sans calculatrice un coefficient binomial n'hésitez pas à utiliser la formule $\binom{n}{p}=\binom{n}{n-p}$ (ex. $\binom{25}{23}=\binom{25}{2}=\dfrac{25\times 24}{2}=25\times 12=300$).

■ Pensez à introduire 1^{n-k} dans une somme faisant intervenir les coefficients binomiaux pour faire apparaître la formule du binôme avec des valeurs particulières données à x et y.

Exemple : $\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n} 1^{n-k}\times 2^k\times\binom{n}{k}=(1+2)^n=3^n$.

■ Lorsqu'une situation de dénombrement a beaucoup d'issues et que vous avez du mal pour trouver le modèle du dénombrement, il suffit de se poser les deux questions Q_1 et Q_2 suivantes et de choisir le modèle selon les réponses pour s'en sortir.

Q_1 : Y a-t-il une notion d'ordre ?

Q_2 : Y a-t-il répétition ?

1) Si la réponse est oui à Q_1 et Q_2 le modèle est un p-uplet.

2) Si la réponse est oui à Q_1 mais non à Q_2 le modèle est un p-uplet d'éléments distincts.

3) Si la réponse est non à Q_1 et Q_2 le modèle est une combinaison.

4) Si la réponse est non à Q_1 mais oui à Q_2 le modèle est une combinaison avec répétition.

■ On vous conseille d'apprendre par cœur que le nombre de façons de ranger p objets identiques dans un n-uplet avec $p\le n$ (au plus un objet par

« case ») est $\binom{n}{p}$ et que si les objets sont différents ce nombre est $\frac{n!}{(n-p)!}$ car c'est très utile quand on applique le principe additif.

Erreurs

■ Quelque soit le modèle choisi, **il faut tout compter, mais une seule fois** !
Par exemple, quand vous appliquez le principe multiplicatif avec les combinaisons **on ne peut pas placer de signes « x » sous tous les points virgules** de $\{\ ;\ ;\ \cdots\ ;\ \}$.
On peut uniquement les placer sous les « ; » séparant des sous-ensembles disjoints d'éléments (intersection vide).

Exemple : Une urne contient 27 boules dont 9 boules blanches numérotées de 1 à 9, 7 boules noires numérotées de 1 à 7, 6 boules jaunes numérotées de 1 à 6 et 5 boules vertes numérotées de 1 à 5.
On extrait simultanément 6 boules de cette urne et l'on se demande quelle est le nombre de tirages avec exactement 3 boules blanches, 2 boules noires et 1 boule jaune (événement A).
Un tirage favorable à A est de la forme $\{B;B;B;N;N;J\}$ et pour ne pas compter plusieurs fois les combinaisons de cette forme on ne peut placer de signe « x » que sous les 3ᵉ et 5ᵉ « ; » en raisonnant globalement sur les ensembles de boules blanches, noires puis jaunes.
On obtient $\text{card}A = \binom{9}{3} \times \binom{7}{2} \times 6 = 10\,584$.

■ Lorsque le modèle du dénombrement est une combinaison avec répétition il se peut que **certaines solutions** de l'équation envisagée dans le cadre de cette méthode (méthode 7) **ne correspondent pas à des tirages possibles**. Si c'est le cas, il faut donc **les soustraire** pour obtenir le nombre de tirages correspondant à une situation.

Exemple : On reprend l'expérience aléatoire de l'exemple précédent, mais **sans numéroter les boules**, et l'on se demande quel est son nombre d'issues.
Si l'on note x_1, x_2, x_3 et x_4 les nombres respectifs de boules banches, noires, jaunes et vertes extraites lors d'un tirage des 6 boules, une issue peut s'interpréter comme une solution de l'équation $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 6$ (E) d'inconnues les entiers naturels x_1, x_2, x_3 et x_4 **avec comme condition** $x_4 \leq 5$ car il n'y a que 5 boules vertes.
La condition impose de soustraire la solution $(0;0;0;6)$ qui correspond à $x_4 = 6$.
Finalement, il y a $\binom{6+4-1}{4-1} - 1 = \binom{9}{3} - 1 = 84 - 1 = 83$ solutions donc 83 tirages possibles.

■ Quand on crée une boucle finie en langage Python l'instruction « for i in range (1,n+1) » donne un nombre de n **et non de** n+1 itération(s) dans la mesure où **i varie de 1 à n**.
Quant à l'instruction « for i in range(n+1) », elle donne un nombre de n+1 itérations dans la mesure où **i varie de 0 à n**.

Le jour de l'épreuve

■ Prenez le temps de choisir l'outil de dénombrement adapté à la situation car sinon vous risquez d'avoir tout votre exercice faux. Tous les mots de l'énoncé ont leur importance (ex. un tirage successif avec remise est différent d'un tirage successif sans remise, lui-même différent d'un tirage simultané…).

■ Vous ne perdrez pas de points si vous listez tous les cas d'une situation pour les compter.

Le jour du Grand Oral

Sujets mathématiques

■ ***Question 1 : Dénombrement d'une situation avec un diagramme***
Cette question abordée à l'exercice 4 permet de dénombrer des situations dans le cadre d'une population d'individus qui peuvent présenter une ou plusieurs caractéristiques. Dans la mesure où le sujet est relativement simple, il faut vous attendre à de nombreuses questions posées par le jury.

■ ***Question 2 : Les problèmes de tirages***
Cette question abordée aux exercices 5, 6 et 7 est primordiale car elle fait intervenir les modèles fondamentaux de dénombrement (p-uplets, p-uplets d'éléments distincts, combinaisons). Lors de votre présentation, insistez bien sur le fait que le choix du bon modèle de dénombrement dépend des notions d'ordre et de répétition.

■ ***Question 3 : Etude de situations modélisées par des combinaisons avec répétitions***
Cette question est un approfondissement que nous avons abordé aux exercices 8 et 22. Pour p et n entiers naturels généralement non nuls, elle fait intervenir le nombre de solution d'une équation $x_1+\cdots+x_p=n$ d'inconnue le p-uplet d'entiers naturels $(x_1,\dots,x_p)$. Nous avons proposé à la question 4 de l'exercice 22 une démonstration « élégante » qui prouve que ce nombre est $\binom{n+p-1}{p-1}$. Si vous choisissez cette question, il faut vous méfier des questions du jury. En effet, en général il n'y a pas équiprobabilité donc il est hors de

question d'appliquer la formule $P(A)=\frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega}$ et parfois, il est possible que certaines solutions de l'équation ne correspondent pas à un événement de la situation aléatoire envisagée (comme c'est le cas dans certaines questions des exercices mentionnés).

■ ***Question 4 : Autour de la formule du binôme***

Cette question est abordée dans les exercices 9, 10 et 21. Le premier est un exercice théorique qui fait intervenir la formule $(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k y^{n-k}$, le second permet de développer une puissance raisonnable du binôme en utilisant le triangle de Pascal (1623-1662) et le troisième démontre la formule du binôme en utilisant la formule de Pascal : $\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k}$. Si vous choisissez ce sujet, nous vous conseillons d'une part de savoir démontrer cette formule et, d'autre part de pouvoir justifier pourquoi elle permet de construire le triangle de Pascal.

■ ***Question 5 : Algorithme donnant les coefficients binomiaux à partir de la formule de Pascal***

Cet algorithme est non seulement donné, mais aussi détaillé à la méthode 11. Il est basé sur la formule de Pascal que nous avons évoqué à la question précédente. D'ailleurs, les commentaires relatifs à cette dernière restent d'actualité pour celle-ci.

■ ***Question 6 : Génération de groupes aléatoires***

Cette question traitée aux exercices 11 et 12 consiste à générer une liste aléatoire (p-uplet ou combinaison) après avoir, éventuellement, effectué un dénombrement comme nous l'avons fait dans les exercices que l'on vient d'évoquer.

■ ***Question 7 : Dénombrement et jeux contemporains***

La plupart des jeux populaires sont traités dans les exercices 15, 16, 17, 18 et 19. Si vous présentez ce sujet vous pouvez enrichir les exercices en proposant des calculs de probabilités de gagner. On vous conseille de choisir deux jeux parmi ceux que l'on vous propose, en détaillant bien comment vous modélisez les dénombrements qui les caractérisent et de laisser le jury vous interroger sur les autres, s'il le souhaite.

Sujets transversaux

■ ***Question 8 : Preuve irréfutable à l'aide de la molécule d'ADN***

Cette question peut être conjuguée avec la spécialité SVT. Il s'agit de montrer que la probabilité que deux personnes différentes aient le même ADN est quasiment nulle en utilisant le dénombrement.

Chapitre 7
METHODES SUR LES PROBABILITES

De nombreuses notions de ce chapitre trouvent des applications dans beaucoup de domaines (Economie, SVT, Physique…).

Nous nous efforcerons d'utiliser les TICE aussi souvent que possible pour vous familiariser avec les possibilités des tableurs et de l'algorithmique.

On vous conseille de bien travailler les exemples pour assimiler une théorie parfois formellement compliquée.

Quand il y a équiprobabilité, la probabilité d'un événement A est donnée par la formule $P(A)=\frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega}$, ce qui implique de savoir dénombrer et donc de connaître les méthodes relatives au chapitre sur la combinatoire et le dénombrement, dans lequel nous avons par ailleurs proposé de nombreux calculs de probabilités.

Ainsi, nous allons donner des méthodes relatives à des notions de Première et à la loi binomiale, puis approfondir ce qui à été vu sur les variables aléatoires en nous intéressant à des opérations les concernant ainsi qu'à leur concentration autour de leur espérance pour démontrer des résultats jusqu'alors intuitifs.

1. Méthodes sur des notions de Première

L'objet de cette partie est de rappeler des notions essentielles de Première que l'on retrouvera dans les autres méthodes du chapitre et dans les exercices.

METHODE 1 : Comment déterminer les paramètres fondamentaux d'une variable aléatoire à partir d'un tableau donnant sa loi

■ Rappels

Si la loi de probabilité d'une variable aléatoire X qui prend un nombre « raisonnable » de valeurs x_i (environ une dizaine) de probabilités $p_i = P(X = x_i)$ est donnée par un tableau comme dans l'exemple alors :

1) L'espérance mathématique de X est $E(X)=\sum p_i x_i = \bar{x}$

2) La variance de X est $V(X)=\sum p_i\left(x_i-\bar{x}\right)^2=\sum p_i x_i^2-E(X)^2=E(X^2)-E(X)^2$

3) L'écart type de X est $\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

■ Principe

On applique les formules précédentes « texto ».

■ Astuce

Quand vous donnez la loi de probabilité d'une variable aléatoire la somme des p_i doit être égale à 1 : sinon, c'est faux !

Exemple : *On lance un dé pipé dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et pour lequel la probabilité de sortie p_i d'une face est proportionnelle au numéro « i » qu'elle porte.*
On mise 182 € et on lance le dé.
Si l'on sort un numéro inférieur ou égal à 2, on perd la mise (Aie !), si l'on sort un numéro supérieur ou égal à 5, on gagne 224 € et sinon on gagne 203 €.
On note G la variable aléatoire qui correspond au gain algébrique du jeu.

1) Déterminez p_i en utilisant l'énoncé et le fait que la somme des p_i vaut 1.
2) Déterminez la loi de probabilité de G après avoir déterminé les valeurs qu'elle prend (univers image de G).
3) Donnez alors l'espérance, la variance et l'écart type de G puis commentez.

1) Comme la probabilité de sortie p_i d'une face est proportionnelle au numéro « i » qu'elle porte, on a : $\frac{p_1}{1}=\frac{p_2}{2}=\frac{p_3}{3}=\frac{p_4}{4}=\frac{p_5}{5}=\frac{p_6}{6}$.
On en déduit que $p_2=2p_1$, $p_3=3p_1$, $p_4=4p_1$, $p_5=5p_1$, $p_6=6p_1$.
Comme on a $p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6=1$, il vient $21\,p_1=1$ et donc $p_1=\frac{1}{21}$.
Finalement, on a $p_1=\frac{1}{21}$, $p_2=\frac{2}{21}$, $p_3=\frac{3}{21}$, $p_4=\frac{4}{21}$, $p_5=\frac{5}{21}$ et $p_6=\frac{6}{21}$.

2) Le gain algébrique correspond à la perte ou au bénéfice que réalise le joueur.

La variable aléatoire G prend donc les valeurs -182, $203-182=21$ et $224-182=42$ et sa loi de probabilité est la suivante :

g_i	-182	21	42
$p_i=P(G=g_i)$	$\frac{3}{21}$	$\frac{7}{21}$	$\frac{11}{21}$

3) On a $E(G)=(-182)\times\frac{3}{21}+21\times\frac{7}{21}+42\times\frac{11}{21}=3$.
On en déduit que $V(G)=(-182)^2\times\frac{3}{21}+21^2\times\frac{7}{21}+42^2\times\frac{11}{21}-3^2=5\,794$ et donc que $\sigma(G)=\sqrt{V(G)}=\sqrt{5794}\approx 76$ arrondie à l'unité.

Dans la mesure où l'espérance est strictement positive, le jeu est **favorable** au joueur, **MAIS** l'écart type est énorme, ce qui signifie que le jeu est hyper risqué et qu'il faut s'abstenir d'y tenter sa chance !

METHODE 2 : Comment utiliser les formules sur les probabilités conditionnelles

■ Rappels

Soit A et B deux événements non certains de probabilités non nulles.

1) Définition

$$P_A(B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)} \text{ et bien sûr } P(A\cap B)=P(A)\times P_A(B)=P(B)\times P_B(A).$$

2) Propriétés

Toutes les propriétés vraies pour les probabilités non conditionnelles le restent pour les probabilités conditionnelles.

Exemples : $P_A(B)+P_A(\overline{B})=1$ et $P_A(B\cup C)+P_A(B\cap C)=P_A(B)+P_A(C)$.

3) Formule des probabilités totales

Si $A_1, A_2, ..., A_n$ est une famille de sous ensembles non vides d'un univers Ω telle que $\bigcup_{i=1}^{n} A_i=\Omega$ et si pour $i\neq j$, $A_i\cap A_j=\varnothing$ (partition de Ω) alors :

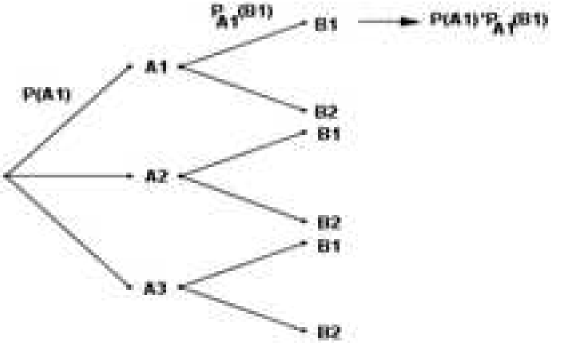
$$P(B)=P(B\cap A_1)+\cdots+P(B\cap A_n)=P(A_1)\times P_{A_1}(B)+\cdots+P(A_n)\times P_{A_n}(B).$$

En particulier : $P(B)=P(A\cap B)+P(\overline{A}\cap B)=P(A)\times P_A(B)+P(\overline{A})\times P_{\overline{A}}(B)$.

■ Principe

En général, les exercices de probabilités conditionnelles sont structurés de la façon suivante :

1) On vous demande de construire un arbre pondéré du style au suivant :



2) On vous demande d'en déduire des probabilités.
Pour cela :
a) la somme des probabilités des branches issues de la même origine vaut 1 ;

b) les multiplications intuitives pour obtenir au bout des dernières branches les probabilités des intersections correspondent à l'application de la formule de la définition (sur la figure on a représenté $P(A_1 \cap B_1)$) ;

c) la somme des probabilités d'intersection faisant intervenir B1 donne P(B1), ce qui correspond à l'application de la formule des probabilités totales.

3) On vous demande d'en déduire une probabilité conditionnelle sachant que B1 est connu.
Si l'on vous demande par exemple $P_{B_1}(A_3)$, il faut appliquer la définition en écrivant que $P_{B_1}(A_3) = \dfrac{P(A_3 \cap B_1)}{P(B_1)}$ (P(B1) est obtenue au 2)).

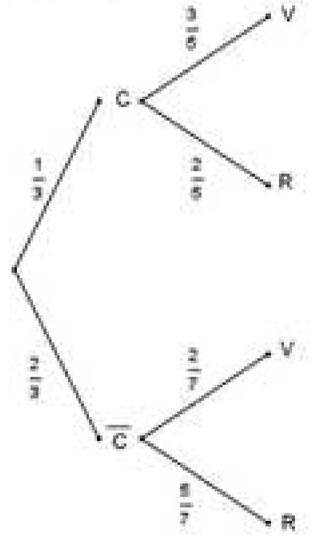
REMARQUE : Lorsque l'on ne peut pas affecter de probabilités à certaines branches en début d'exercice, il faut se laisser guider par l'énoncé, qui propose inévitablement une démarche pour les obtenir.

Exemple : *On lance un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Si le numéro obtenu est inférieur où égal à 2, on tire une boule dans une urne A, sinon on tire une boule dans une urne B.*

L'urne A contient 2 boules rouges et 3 boules vertes.
L'urne B contient 5 boules rouges et 2 boules vertes.

On considère alors les événements suivants :
A : « Tirer une boule dans l'urne A »,
B : « Tirer une boule dans l'urne B »,
C : « Sortir le numéro du dé inférieur où égal à 2 »,
R : « Tirer une boule rouge »,
V : « Tirer une boule verte ».
1) Construisez un arbre pour illustrer la situation.
2) Déterminez la probabilité de tirer une boule rouge.
3) Une personne effectue l'expérience, à la fin de laquelle, elle tient une boule rouge.
Quelle est la probabilité que la boule qu'elle tient vienne de l'urne A ?

1) L'arbre suivant modélise la situation :



2) L'énoncé demande $P(R)=P(C\cap R)+P(\overline{C}\cap R)=\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}+\frac{2}{3}\times\frac{5}{7}=\frac{2}{15}+\frac{10}{21}=\frac{64}{105}$.

3) L'énoncé demande $P_R(A)=P_R(C)=\dfrac{P(C\cap R)}{P(R)}=\dfrac{\frac{1}{3}\times\frac{2}{5}}{\frac{64}{105}}=\dfrac{7}{32}$.

METHODE 3 : Comment montrer que deux événements sont indépendants

■ Rappels

A et B sont indépendants si et seulement si $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$.

■ Principe

Quand l'indépendance de deux événements n'est pas physiquement évidente (lancers de pièces ou de dés, tirages avec remise), il faut déterminer $P(A\cap B)$ et $P(A)\times P(B)$ séparément, puis les comparer pour le savoir.

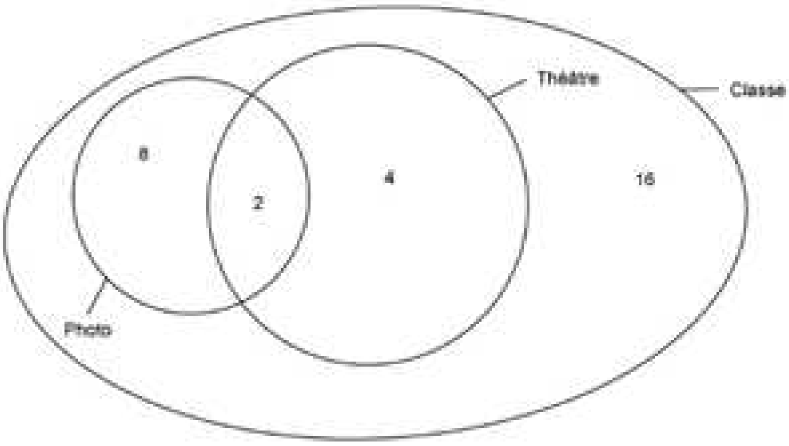
■ **Exemple :** *Dans une classe de 30 élèves, 10 font au moins de la photo, 6 au moins du théâtre et 2 font les deux.*

On choisit un élève de la classe au hasard.

On considère alors les événements suivants :
A : « L'élève fait de la photo ».
B : « L'élève fait du théâtre ».

1) Construisez un diagramme pour modéliser la situation
2) Les événements A et B sont-ils indépendants ?

1) On peut modéliser la situation de la façon suivante :



2) $P(A)=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$, et $P(B)=\frac{6}{30}=\frac{1}{5}$ donc $P(A)\times P(B)=\frac{1}{15}$.

$P(A\cap B)=\frac{2}{30}=\frac{1}{15}$ donc $P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$ et les deux événements A et B sont indépendants.

METHODE 4 : Comment simuler une situation et confronter les résultats empiriques et théoriques pour une marche aléatoire

■ Principe

Avec Excel, la fonction « =ENT(m*ALEA())+1 » avec $m\in\mathbb{N}$ permet de sortir un entier aléatoire entre 1 et m, ce qui est très utile pour les simulations.

Dans les algorithmes, on peut avoir à imbriquer des boucles de longueur finies les unes dans les autres pour réaliser les simulations demandées (attention aux retraits en langage Python).

Ensuite, on compare les fréquences expérimentales aux probabilités afin de mesurer la pertinence des simulations.

■ Cas d'application

Lorsque l'on connaît la résolution du problème en termes de probabilités, sinon il va être difficile de mesurer la pertinence de la simulation.

En revanche, une fois que l'on a mesuré la validité du modèle expérimental, cette simulation peut permettre de répondre de façon empirique à des problèmes où la théorie des probabilités est plus difficile à mettre en œuvre, voire impossible.

Comme nous sommes bienveillants, nous vous avons illustré ce que l'on vient de développer dans la question 4 de l'exemple de cette méthode.

■ **Exemple :** *On place un pion sur la case 0 ci-dessous :*

– 4	*– 3*	*– 2*	*– 1*	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*

On lance 4 fois une pièce de monnaie parfaitement équilibrée.
Si elle tombe sur Pile, on déplace le pion d'une case vers la droite, sinon on déplace le pion vers la gauche.

On se demande quelle est la probabilité de terminer le parcours sur la case 0.

1) Simulez 1000 parcours avec Excel, et donner 5 fréquences expérimentales des fins de parcours sur la case 0.
2) Construisez un algorithme en langage Python pour obtenir d'une autre façon les fréquences expérimentales précédentes.
3) Donnez la probabilité de terminer le parcours sur 0 en construisant un arbre, puis comparez la aux fréquences obtenues avec les simulations.
4) On reprend cet exemple, mais au lieu de lancer 4 fois la pièce, on la lance 100 fois.
a) Pourquoi l'arbre est-il plus problématique à construire ?
b) Donnez un algorithme qui permet de répondre empiriquement à la question.

1) L'idée est de compter +1, un déplacement vers la droite et –1, un déplacement vers la gauche, d'additionner les 4 déplacements et de compter le nombre de fois où le total fait 0.

Considérons la page d'Excel suivante :

	A	B	C	D	E	F
1						
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1000						

On entre en A1 : «= SI(ENT(2*ALEA())=1 ;1 ;–1) », ce qui permet de sortir un « 1 » ou un « -1 » avec une probabilité de 0,5 pour chacun.

On copie, et on colle en ligne jusqu'à D1, puis on entre en E1 la somme de A1 à D1 (« =A1+B1+C1+D1 »).

On copie la ligne A1 :E1, et on colle 1 000 fois vers le bas.

Ensuite, il suffit d'obtenir la fréquence des 0 dans la colonne E. On l'obtient en entrant en F1 : « =NB.SI(E1 ;E1000 ;0)/1000 ».

La touche « F9 » permet d'obtenir d'autres simulations de parcours.

On a obtenu les fréquences suivantes : 0,357 ; 0,387 ; 0,372 ; 0,347 ; 0,369.

2) L'idée est de construire une boucle de longueur N (ici 1000), dans laquelle on inclut une boucle de longueur n (ici 4).

Ainsi la boucle de longueur 4 va être réalisée 1 000 fois.

L'algorithme suivant simule la situation :

```
1 from random import random
2 def pion1(N):
3     s=[0,0,0,0,0,0,0,0,0]
4     for i in range (N):
5         c=4
6         for j in range(4):
7             x=random()
8             if x<0.5:
9                 c=c-1
10            else:
11                c=c+1
12        s[c]=s[c]+1
13    for i in range(9):
14        s[i]=(s[i])/N
15    return(s[4])
```

En ligne 3, on crée une liste avec 9 termes nuls.
En ligne 4, on commence les $N = 1\,000$ simulations.
En ligne 5, on entre la position du pion au départ (attention le numérotage commence à 0).
En ligne 6, on commence les $n = 4$ lancers de pièces.
En ligne 12, on ajoute 1 dans la liste s, selon la position du pion.
En ligne 14, on détermine les fréquences des 1 000 simulations.
En ligne 15, on sort la fréquence de position finale du pion sur la case 0.

En mode « Run » on obtient :

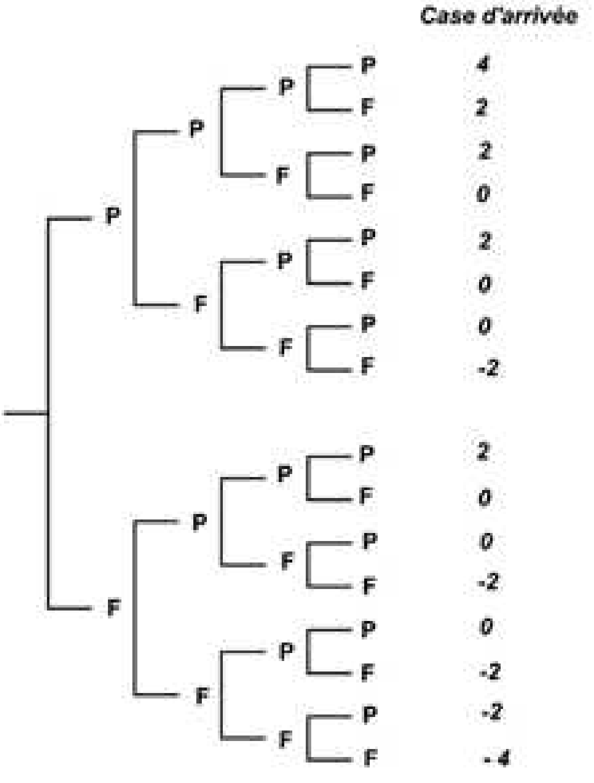
```
In [54]: pion1(1000)
Out[54]: 0.361

In [55]: pion1(1000)
Out[55]: 0.368

In [56]: pion1(1000)
Out[56]: 0.362

In [57]: pion1(1000)
Out[57]: 0.37

In [58]: pion1(1000)
Out[58]: 0.359
```

3) Avec l'arbre donné en annexe, on obtient six fois « 0 » sur 16 cas possibles. Comme il y a équiprobabilité, la probabilité cherchée est donc $\frac{6}{16} = 0{,}375$.

On constate que les fréquences empiriques obtenues sont proches de cette probabilité.

Il suffit d'augmenter le nombre de simulations (10 000 par exemple) pour obtenir souvent des fréquences expérimentales plus proches de la probabilité 0,375.

Annexe :



4) a) Pour cette question, l'arbre va être difficile à construire dans la mesure où il a 2^{100} branches quand il se termine.

b) Puisque l'algorithme donné à la question 2 est un modèle pertinent de la marche aléatoire, il suffit de l'adapter pour répondre à cette question.

Ainsi on peut prendre :

```
from random import random
def pion(N):
    s=101*[0]
    for i in range (N):
        c=50
        for j in range(100):
            x=random()
            if x<0.5:
                c=c-1
            else:
                c=c+1
        s[c]=s[c]+1
    for i in range(101):
        s[i]=(s[i])/N
    return(s[50])
```

En mode « Run », on obtient :

```
In [2]: pion(100000)
Out[2]: 0.08082
```

METHODE 5 : Comment simuler N échantillons de n épreuves indépendantes avec un algorithme et l'exploiter

■ Cas d'application

On est exactement dans la situation de l'exemple de la méthode précédente, mais on va aller plus loin (dans le cas de 4 lancers uniquement).

En effet, on va vous expliquer comment construire et exploiter un algorithme qui permet de donner les fréquences expérimentales donnant la position du pion sur chaque case à la fin de N marches aléatoires de 4 déplacements.

■ Principe

Comme dans l'algorithme de l'exemple de la méthode précédente, il faut « imbriquer » deux boucles finies pour finir par déterminer les fréquences expérimentales de terminer sur chaque case.

Pour que tout soit bien clair, il suffit de commenter pourquoi l'algorithme suivant permet de répondre à la question dans le cadre de cet exemple.

```python
from random import random
def pion(N):
    s=[0,0,0,0,0,0,0,0,0]
    for i in range (N):
        c=4
        for j in range(4):
            x=random()
            if x<0.5:
                c=c-1
            else:
                c=c+1
        s[c]=s[c]+1
    for i in range(9):
        s[i]=(s[i])/N
    return(s)
```

Voilà ! C'est tout simple ! Il suffit de demander la liste « intégrale » en fin d'algorithme ce qui donne par exemple :

```
In [59]: pion(100000)
Out[59]: [0.0639, 0.0, 0.25183, 0.0, 0.37299, 0.0, 0.25002, 0.0, 0.06126]
```

SAUF que ! Si c'était aussi simple, on n'aurait pas consacré une méthode pour cela...

En effet, dans le cadre de cet exemple, tout va bien car il n'y a que 9 issues possibles et donc on peut afficher l'intégralité de la liste, ce qui vous avez deviné va être beaucoup plus problématique s'il y a 41 issues comme dans l'exemple de cette méthode.

Alors, que faire ? Tout simplement, travailler sur l'algorithme précédent pour répondre aux questions posées.

Cela consiste à exploiter la liste s[] créée même si l'on ne peut pas afficher son intégralité.

Pour que tout soit bien clair, nous allons vous illustrer cela dans l'exemple.

■ **Exemple :** *On jette 40 fois un dé cubique dont 2 faces sont rouges, et 4 faces sont jaunes et l'on compte le nombre de lancers où les 4 faces jaunes sont visibles (succès de probabilité p).*

On note X la variable aléatoire, qui a cette expérience, associe le nombre de succès.

L'idée est de construire des algorithmes, qui donnent des approximations de probabilités prises par X, à partir de par exemple N=100 000 simulations de 40 lancers, qui donnent les fréquences expérimentales de sorties des nombre de succès envisagés.

1) Déterminez p et expliquez pourquoi X prend 41 valeurs.

2) Donnez un algorithme qui permet d'obtenir une approximation de P(X=17).

3) Modifiez cet algorithme pour obtenir une approximation de $P(X \leq 17)$.

4) Enfin, modifiez ce dernier algorithme pour obtenir une approximation de $P(10 \leq X \leq 20)$, puis expliquez pourquoi il permet de répondre aux deux questions précédentes (d'où l'intérêt de ***le garder au « chaud »****).*

1) On obtient un succès lorsque l'une des deux faces rouges est cachée, ce qui permet de déduire que $p = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.
On peut avoir de 0 à 40 succès ce qui justifie que la variable aléatoire X prend 41 valeurs.

2) L'algorithme suivant répond à la question :

```
from random import random
def dep(N,n,p):
    s=(n+1)*[0]
    for i in range (N):
        c=0
        for j in range(n):
            x=random()
            if x<p:
                c=c+1
        s[c]=s[c]+1
    for i in range(n+1):
        s[i]=(s[i])/N
    return(s[17])
```

En mode « Run » on obtient :

```
In [67]: dep(100000,40,1/3)
    ...:
Out[67]: 0.06052
```

On a donc $P(X = 17) = 0{,}061$ à 0,001 près.

3) Pour répondre à la question, on peut modifier l'algorithme précédent de la façon suivante :

```
from random import random
def de(N,n,p):
    s=(n+1)*[0]
    for i in range (N):
        c=0
        for j in range(n):
            x=random()
            if x<p:
                c=c+1
        s[c]=s[c]+1
    for i in range(n+1):
        s[i]=(s[i])/N
    for i in range(1,n+1):
        s[i]=s[i]+s[i-1]
    return(s[17])
```

Il suffisait de rajouter les lignes 13 et 14 pour s'en sortir (travail sur la liste s[]).

En mode « Run », on obtient :

```
In [68]: de(100000,40,1/3)
Out[68]: 0.91633
```

On a donc $P(X \leq 17) = 0{,}916$ à 0,001 près.

4) Pour répondre à la question, on peut modifier l'algorithme précédent de la façon suivante :

```
1 from random import random
2 def de1(N,n,p,a,b):
3     s=(n+1)*[0]
4     for i in range (N):
5         c=0
6         for j in range(n):
7             x=random()
8             if x<p:
9                 c=c+1
10        s[c]=s[c]+1
11    for i in range(n+1):
12        s[i]=(s[i])/N
13    for i in range(1,n+1):
14        s[i]=s[i]+s[i-1]
15    return(s[b]-s[a])
```

Il suffisait de modifier la ligne 2, en introduisant deux bornes a et b et de renvoyer s[b] – s[a] pour s'en sortir (travail sur la liste s[]).

ATTENTION ! *Pour obtenir $P(10 \leq X \leq 20) = P(X \leq 20) - P(X \leq 9)$, il faut bien entrer $b = 9$* ***et NON*** *$b = 10$!*

En mode « Run », on obtient :

```
In [73]: de1(100000,40,1/3,9,20)
Out[73]: 0.8936400000000001
```

On a donc $P(10 \leq X \leq 20) = 0{,}894$ à 0,001 près.

Comme $P(X = 17) = P(X \leq 17) - P(X \leq 16)$, pour déterminer une approximation de $P(X = 17)$ il suffit de prendre cet algorithme avec $b = 17$ et $a = 16$ ce qui donne en mode « Run » :

```
In [74]: de1(100000,40,1/3,16,17)
Out[74]: 0.06059000000000003
```

C'est moins immédiat pour $P(X \leq 17)$ car avec l'algorithme il faut prendre $a = 0$ donc il retourne $P(X \leq 17) - P(X \leq 0) = P(X \leq 17) - P(X = 0) \neq P(X \leq 17)$ car $P(X = 0) > 0$. **MAIS comme dans ce cas** $P(X = 0)$ est négligeable par rapport à $P(X \leq 17)$, on n'est pas loin de la vérité.

En effet, en mode « Run », on obtient :

```
In [75]: de1(100000,40,1/3,0,17)
Out[75]: 0.91633
```

REMARQUE : Pour éviter de négliger P(X = 0), on peut penser à l'événement contraire car $P(X \leq 17) = 1 - P\left(\overline{X \leq 17}\right) = 1 - P(18 \leq X \leq 40)$.

2. Comment s'y prendre avec une loi binomiale

On vous rappelle d'abord qu'une épreuve de Bernoulli est une expérience aléatoire qui a deux issues possibles, l'une considérée comme un succès et l'autre comme un échec, dont les probabilités respectives sont souvent notées p et $q = 1 - p$.

REMARQUE IMPORTANTE *: Si l'on note X la variable aléatoire qui associe le nombre de succès à une* ***épreuve*** *de Bernoulli, elle ne prend que les valeurs 0 et 1 avec d'autre part* $E(X) = p$, $V(X) = p(1-p)$ *et* $\sigma(X) = \sqrt{p(1-p)}$.

Ensuite, la répétition de façon indépendante d'une même épreuve de Bernoulli s'appelle un schéma de Bernoulli.

Enfin, si un schéma de Bernoulli comporte n répétitions indépendantes et que l'on note p la probabilité d'obtenir un succès à l'épreuve de Bernoulli qui lui correspond, alors on dit que la variable aléatoire X, qui à ce schéma associe le nombre de succès suit la loi binomiale de paramètres n et p.

REMARQUE : Lorsque X suit une loi binomiale, on peut noter $X \sim B(n,p)$.

METHODE 6 : Comment reconnaître une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale et l'exploiter

■ Cas d'application

Quand un énoncé commence à vous présenter une expérience aléatoire qui consiste en une répétition : il faut tout de suite vous demander si ce n'est pas un schéma de Bernoulli et s'il y a moyen de répondre aux questions en utilisant une variable aléatoire qui suit une loi binomiale.

■ Principe

Si tel est le cas, il faut rédiger en précisant le schéma de Bernoulli et éventuellement définir la variable aléatoire $X \sim B(n,p)$ si l'énoncé ne l'a pas fait (cf. exemple).

Ensuite, si $X \sim B(n,p)$, on utilise les propriétés suivantes pour répondre aux questions $(q = 1-p)$.

Loi de probabilité de X : Pour k entier compris entre 0 et n, $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$.

Espérance de X : $E(X) = np$

Variance et écart type de X : $V(X) = npq$ et par suite $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{npq}$.

REMARQUES : 1) Pour k entier compris entre 0 et n, $P(X = k) = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ *et* $P(X \le k) = \sum_{i=0}^{k} P(X = i)$ *s'obtiennent directement avec une calculatrice sans avoir besoin d'entrer les formules.*

2) Pour k non nul, il est fort possible que votre calculatrice ne renvoie pas $P(k \le X)$*, il faut alors penser à la formule relative à l'événement contraire puisque d'une part,* $P(k \le X) = 1 - P(\overline{k \le X}) = 1 - P(X < k) = 1 - P(X \le k-1)$ *et que d'autre part, la calculatrice renvoie* $P(X \le k-1)$*.*

3) Pour a et b entiers compris entre 0 et n avec a < b, il est fort possible que votre calculatrice ne renvoie pas $P(a \le X \le b)$*, auquel cas il faut penser que* $P(a \le X \le b) = P(X \le b) - P(X \le a-1)$ ***(Attention ! C'est bien a – 1 et non a).***

■ Exemple : *Pour se rendre au Lycée, Patricia rencontre sur sa route 10 feux tricolores indépendants deux à deux.*

Chaque feu a une probabilité p = 0,4 d'être vert lors de son passage.

On donnera une valeur arrondie à 3 décimales des probabilités demandées.
1) Quelle est la probabilité qu'elle rencontre exactement 3 feux verts ?
2) Quelle est la probabilité qu'elle rencontre moins de 2 feux verts ?
3) Quelle est la probabilité qu'elle rencontre plus de 5 feux verts ?
4) Quelle est la probabilité qu'elle rencontre entre 3 et 7 feux verts ?
5) Déterminez les valeurs arrondies à deux décimales de $\mu = E(X)$ *et* $\sigma(X)$ *puis donnez les valeurs arrondies à trois décimales des probabilités* $P(\mu - \sigma \le X \le \mu + \sigma)$, $P(\mu - 2\sigma \le X \le \mu + 2\sigma)$ *et* $P(\mu - 3\sigma \le X \le \mu + 3\sigma)$.
Qu'en pensez-vous ?

Un trajet peut se modéliser par un schéma de Bernoulli.
En effet, un trajet peut s'interpréter comme $n = 10$ répétitions indépendantes d'une même épreuve de Bernoulli, qui consiste à se présenter à un feu en espérant qu'il soit vert (succès de probabilité $p = 0,4$).

Si l'on note X la variable aléatoire qui à un trajet associe le nombre de succès, elle suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,4$.
Cela étant, il suffit d'interpréter les questions avec X et d'utiliser la calculatrice pour y répondre.

1) On nous demande $P(X = 3) = 0,215$.

2) On nous demande $P(X < 2) = P(X \leq 1) = 0,046$.

3) On nous demande $P(5 < X) = 1 - P\left(\overline{5 < X}\right) = 1 - P(X \leq 5) = 0,166$.

4) On nous demande $P(3 \leq X \leq 7) = 0,820$.

5) On a $\mu = E(X) = np = 10 \times 0,4 = 4$ et $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{4 \times 0,6} = \sqrt{2,4} = 1,55$ arrondie à deux décimales.

$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) = P(2,45 \leq X \leq 5,55) = P(3 \leq X \leq 5) = 0,666$.
$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = P(0,9 \leq X \leq 7,1) = P(1 \leq X \leq 7) = 0,982$.
$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) = P(-0,65 \leq X \leq 8,65) = P(0 \leq X \leq 8) = 0,998$.

Intuitivement, le nombre moyen de feux verts que Patricia aura rencontré par trajet, après un assez grand nombre de trajets, peut être évalué à 4.

On constate que lorsque l'on s'écarte de μ d'une distance inférieure ou égale à 2σ la probabilité d'y trouver X devient très proche de 1 dans la mesure où elle est minorée par $P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) = 0,982$.

METHODE 7 : Comment simuler une situation et confronter les résultats empiriques et théoriques pour une loi binomiale

■ Principe :

Nous savons qu'il ne vous a pas échappé que nous avons déjà effectué la simulation dont il est question dans cette méthode pour traiter l'exemple de la méthode 5, puisqu'il correspond à $X \sim B\left(40, \frac{1}{3}\right)$.

Il suffit donc d'adapter et de compléter les algorithmes donnés dans cette méthode 5, pour répondre à la problématique posée par celle-ci, comme nous allons le faire dans l'exemple.

Pour les calculs théoriques, en langage Python, il faut importer la fonction « binom » qui retourne $\binom{n}{k}$.

REMARQUES : 1) Quand on ne peut pas afficher la liste complète des fréquences expérimentales et des probabilités théoriques, il faut adapter les algorithmes qui les déterminent en travaillant sur les listes retournées, comme nous l'avons expliqué et illustré dans la méthode 5.

2) Comme nous l'avons vu dans la méthode 4, l'intérêt d'un modèle expérimental qui « fonctionne » et de l'appliquer à une situation où l'on n'a pas de théorie (cf. Exemples des méthodes 11 et 12) !

■ **Exemple :** *On reprend l'exemple de la méthode précédente, et l'on vous demande, dans chacune des questions de celui-ci, de proposer un algorithme en langage Python qui permet de comparer les résultats théoriques aux résultats empiriques issus d'une simulation de 100 000 trajets.*

1) Comparez la loi de probabilité de X et la liste des fréquences empiriques ponctuelles à l'aide d'un algorithme en langage Python.
2) Comparez la loi de probabilité cumulée de X et la liste des fréquences empiriques cumulées à l'aide d'un algorithme en langage Python.
3) Donnez un algorithme qui permet de renvoyer des valeurs approchées de E(X) et $\sigma(X)$ et de les comparer aux valeurs théoriques.

1) On peut utiliser l'algorithme suivant pour répondre à la question :

```
from random import random
from scipy.special import binom
def binomial(N,n,p):
    s=(n+1)*[0]
    e=(n+1)*[0]
    for i in range (N):
        c=0
        for j in range(n):
            x=random()
            if x<p:
                c=c+1
        s[c]=s[c]+1
    for i in range(n+1):
        s[i]=(s[i])/N
    for i in range(n+1):
        e[i]=binom(n,i)*(p**i)*(1-p)**(n-i)
    return(s,e)
```

En mode « Run », il renvoie :

```
In [77]: binomial(100000,10,0.4)
Out[77]:
([0.00612,
  0.04003,
  0.12108,
  0.21524,
  0.2507,
  0.20214,
  0.11047,
  0.04191,
  0.01068,
  0.00152,
  0.00011],
 [0.006046617599999997,
  0.04031078399999999,
  0.12093235199999998,
  0.21499084799999998,
  0.250822656,
  0.2006581248,
  0.11147673600000005,
  0.04246732800000006,
  0.010616832000000005,
  0.0015728640000000009,
  0.00010485760000000006])
```

On constate que les listes sont sensiblement les mêmes !

2) On peut utiliser l'algorithme suivant pour répondre à la question :

```
from random import random
from scipy.special import binom
def binomialcum(N,n,p):
    s=(n+1)*[0]
    e=(n+1)*[0]
    for i in range (N):
        c=0
        for j in range(n):
            x=random()
            if x<p:
                c=c+1
        s[c]=s[c]+1
    for i in range(n+1):
        s[i]=(s[i])/N
    for i in range(n+1):
        e[i]=binom(n,i)*(p**i)*(1-p)**(n-i)
    for i in range(1,n+1):
        s[i]=s[i]+s[i-1]
    for i in range(1,n+1):
        e[i]=e[i]+e[i-1]
    return(s,e)
```

En mode « Run », il renvoie :

```
In [79]: binomialcum(100000,10,0.4)
Out[79]:
([0.00599,
  0.04685,
  0.16636,
  0.38147,
  0.63297,
  0.8352,
  0.94567,
  0.9882,
  0.99832,
  0.99992,
  1.0],
 [0.006046617599999997,
  0.04635740159999999,
  0.16728975359999998,
  0.3822806016,
  0.6331032576,
  0.8337613824,
  0.9452381184,
  0.9877054464,
  0.9983222784,
  0.9998951424,
  1.0])
```

Comme dans la question précédente, on constate que les listes sont sensiblement les mêmes !

3) Là, pour l'instant, on n'a pas encore d'algorithme !

On va donc en construire un, en déterminant la moyenne pondérée du nombre de succès par les fréquences de sortie et l'écart type correspondant pour s'en sortir.

Cet algorithme peut être le suivant :

```
from random import random
from math import sqrt
def binomialesp(N,n,p):
    s=(n+1)*[0]
    m1=n*p
    e1=sqrt(n*p*(1-p))
    for i in range (N):
        c=0
        for j in range(n):
            x=random()
            if x<p:
                c=c+1
        s[c]=s[c]+1
    for i in range(n+1):
        s[i]=(s[i])/N
    m=0
    l=0
    for i in range(n+1):
        m=m+i*s[i]
        l=l+i**2*(s[i])
    e=sqrt(l-m**2)
    return(m,m1,e,e1)
```

En mode « Run », il renvoie :

```
In [5]: binomialesp(100000,10,0.4)
Out[5]: (4.006210000000001, 4.0, 1.5506487145385297, 1.5491933384829668)
```

Encore une fois, on constate que les valeurs approchées de m et e demandées sont sensiblement les mêmes que les valeurs théoriques m1 et e1 !

METHODE 8 : Comment déterminer un intervalle de fluctuation empirique et théorique en fréquence à un seuil donné

■ Rappels

Pour $\alpha \in]0;1[$, l'intervalle de fluctuation en fréquence d'une variable aléatoire $X \sim B(n,p)$ au seuil de α est l'intervalle $\left[\frac{a}{n};\frac{b}{n}\right]$ où a et b sont les plus petits entiers compris entre 0 et n tels que $\frac{1-\alpha}{2} < P(X \le a)$ et $\frac{1+\alpha}{2} < P(X \le b)$.

La détermination de cet intervalle permet de savoir si une expérience à priori aléatoire l'est vraiment à un seuil donné (cf. exemple : soupçon de triche !).

REMARQUE *: Lorsque vous donnez un intervalle approché de l'intervalle exact choisissez une valeur par défaut de la borne inférieure et par excès de la borne supérieure.*

■ Cas d'application

En général, on demande ces intervalles aux seuils de 95 % $(\alpha = 0{,}95)$ ou (et) 99 % $(\alpha = 0{,}99)$.

■ Principe

L'idée est d'utiliser la calculatrice ou de construire un algorithme.

Avec la calculatrice, on peut procéder par étapes successives en déterminant des probabilités cumulées de valeurs **judicieusement** choisies.
Comme vous êtes tous de bons élèves, vous avez deviné que les probabilités les plus grandes prises par X correspondent aux valeurs qu'elle prend autour de son espérance $\mu = E(X)$ dans des intervalles de rayons σ, 2σ voir 3σ.

C'est pourquoi, on peut commencer par chercher $P(X \le \mu - \sigma)$, $P(X \le \mu + \sigma)$, $P(X \le \mu - 2\sigma)$, $P(X \le \mu + 2\sigma)$ puis « affiner ».

Une autre façon de procéder consiste dresser la table des probabilités cumulées, de la même façon que l'on dresse la table des valeurs prises par une fonction, ce qui est plus rapide (avec les dernières calculatrices on peut utiliser la fonction qui inverse la loi binomiale).

Enfin, on peut construire un algorithme en langage Python qui permet non seulement de donner l'intervalle de fluctuation théorique en fréquence, mais aussi un intervalle de fluctuation empirique en fréquence à partir d'une simulation.

■ Astuce

Pour un schéma de Bernoulli donné, il est plus astucieux de donner l'intervalle de fluctuation en fréquence $\left\lfloor \frac{a}{n};\frac{b}{n} \right\rfloor$ plutôt que l'intervalle $\lfloor a;b \rfloor$ car si on change le nombre de répétitions sans changer l'épreuve de Bernoulli, l'intervalle en fréquence ne change pas, alors que l'autre change.

■ **Exemple :** *On reprend l'exemple de la méthode 5 où l'on est sûr que le dé est parfaitement équilibré.*
Ainsi, on jette 40 fois un dé cubique dont 2 faces sont rouges, et 4 faces sont jaunes et l'on compte le nombre de lancers où les 4 faces jaunes sont visibles (succès de probabilité p).
On note X la variable aléatoire, qui a cette expérience, associe le nombre de succès.

1) Justifiez que X suit une loi binomiale dont vous préciserez les paramètres.
2) Avec un algorithme, donnez un intervalle empirique de fluctuation en fréquence de X au seuil de 95 % et comparez le à l'intervalle théorique au même seuil.
3) Répondez à la question précédente au seuil de 99 %.
4) Un joueur arrive avec son dé rouge et jaune, le lance 60 fois et obtient 30 succès. Qu'en pensez-vous ?

1) L'expérience peut se modéliser par un schéma de Bernoulli.
En effet, elle peut s'interpréter comme $n = 40$ répétitions indépendantes d'une même épreuve de Bernoulli, qui consiste à jeter le dé et à se demander si l'on obtient un succès, dont la probabilité est $p = \frac{1}{3}$.

Ainsi, X suit la loi binomiale de paramètres $n = 40$ et $p = \frac{1}{3}$.

2) Il suffit de modifier l'un des algorithmes de la méthode 5 pour répondre à la question.

On peut prendre par exemple :

```
from random import random
from scipy.special import binom
def fluctuation(N,n,p,c1):
    s=(n+1)*[0]
    e=(n+1)*[0]
    for i in range (N):
        c=0
        for j in range(n):
            x=random()
            if x<p:
                c=c+1
        s[c]=s[c]+1
    for i in range(n+1):
        s[i]=(s[i])/N
    for i in range(n+1):
        e[i]=binom(n,i)*(p**i)*(1-p)**(n-i)
    for i in range(1,n+1):
        s[i]=s[i]+s[i-1]
    for i in range(1,n+1):
        e[i]=e[i]+e[i-1]
    a=0
    for i in range(n+1):
        if (s[i])<(1-c1)/2:
            a=a+1
    b=0
    for i in range(n+1):
        if (s[i])<(1+c1)/2:
            b=b+1
    a1=0
    for i in range(n+1):
        if (e[i])<(1-c1)/2:
            a1=a1+1
    b1=0
    for i in range(n+1):
        if (e[i])<(1+c1)/2:
            b1=b1+1
    a=a/n
    b=b/n
    a1=a1/n
    b1=b1/n
    return(a,b,a1,b1)
```

En mode « Run », on obtient :

```
In [7]: fluctuation(100000,40,1/3,0.95)
Out[7]: (0.2, 0.475, 0.2, 0.475)
```

Là, on obtient carrément les mêmes bornes !

Pour la suite, nous noterons cet intervalle : $I_{0{,}95} = \left[\, 0{,}2 ; 0{,}475 \,\right]$.

3) Avec le même algorithme on entre $c1 = 0,99$ et l'on obtient :

```
In [8]: fluctuation(100000,40,1/3,0.99)
Out[8]: (0.15, 0.525, 0.15, 0.525)
```

On obtient encore les mêmes bornes !

Pour la suite, nous noterons cet intervalle : $I_{0,99} = [0,15;0,525]$.

4) La fréquence de réussite f du joueur n'appartient pas à l'intervalle $I_{0,95}$ mais appartient à l'intervalle $I_{0,99}$.

Par conséquent, au seuil de 95 % on peut affirmer que le joueur triche, en revanche, on ne peut pas l'affirmer au seuil de 99 %.

3. Comment utiliser les propriétés relatives aux opérations sur les variables aléatoires

Dans cette partie, on va approfondir ce qui a été vu en Première sur les variables aléatoires, en étudiant les propriétés de certaines opérations qui leur sont appliquées.

Ces propriétés permettent, entre autre, de déduire les paramètres fondamentaux d'une variable aléatoire Y, à partir de ceux déterminés pour une variable aléatoire X sans avoir à déterminer la loi de Y, qui même parfois, est impossible à déterminer (cf. exemple de la méthode 11).

Avant de commencer, on vous rappelle qu'étant donnée une variable aléatoire X sur un univers Ω telle que pour tout i entier compris entre 1 et n, $X(\Omega) = \{x_i\}$, la variable aléatoire $Y = f(X)$ est définie par $Y(\Omega) = \{f(x_i)\}$.

METHODE 9 : Comment s'y prendre quand $Y = aX + b$

■ Principe

On montre qu'une variable aléatoire Y se déduit d'une variable aléatoire X par une transformation affine, c'est-à-dire qu'il existe a et b réels tels que $Y = aX + b$ et l'on applique les propriétés 1 et 2 rappelées dans ce principe.

Pour montrer cela, il se peut que vous ayez à introduire une variable aléatoire intermédiaire comme dans l'exemple.

Propriété 1 : $E(aX + b) = aE(X) + b$

Propriété 2 : $V(aX + b) = a^2V(X)$ et donc $\sigma(aX + b) = |a|\sigma(X)$.

■ Cas d'application

Dès que l'on vous demande de déterminer les paramètres fondamentaux d'une variable aléatoire Y, après vous avoir fait déterminer ceux d'une variable aléatoire X, il faut penser à cette méthode.

■ **Exemple :** *Dans l'exemple de la méthode 1, on vous a présenté un jeu. Celui, de miser 182 €, puis de lancer un dé pipé pour lequel les faces sont numérotées de 1 à 6 et dont la probabilité de sortie p_i d'une face est proportionnelle au numéro « i » qu'elle porte.*
Si l'on sortait un numéro inférieur ou égal à 2, on perdait la mise (Aie !), si l'on sortait un numéro supérieur ou égal à 5, on gagnait 224 € (Oups !) et sinon on gagnait 203 € (Bof !).
En notant G la variable aléatoire qui correspondait au gain algébrique du jeu, on a vu que E(G) = 3 et σ (G) = 76 à l'unité près.

L'organisateur du jeu constate que peu de joueurs s'y risquent et propose alors un autre mode de rétribution pour les attirer.
Pour cela, il propose une mise de 2 € et décide de diviser par 100 les gains non algébriques du jeu.
On note G' la variable aléatoire égale au gain algébrique d'un joueur par rapport à cette nouvelle rétribution.

1) En introduisant la variable aléatoire X qui à l'expérience associe le gain non algébrique d'un joueur, exprimez G et G' en fonction X.
2) Déduisez de la question précédente que G' se déduit de G par une transformation affine que vous déterminerez.
3) Déduisez de la question précédente l'espérance et l'écart type de G'. Que pensez-vous de ce nouveau jeu ?

1) Notons X la variable aléatoire égale au gain non algébrique du joueur pour le premier jeu.
Pour ce premier jeu, la mise était de 182 €, donc $G = X - 182$.
Pour le second jeu, compte tenu du mode de rémunération, il est clair que $G' = \frac{X}{100} - 2$.

2) D'après la question précédente on a $G + 182 = X$, donc il vient aisément que $G' = \frac{G+182}{100} - 2 = \frac{1}{100}G - 0{,}18$.

3) En appliquant les formules de cette méthode, on déduit de la question précédente ainsi que de l'énoncé que $E(G') = \frac{1}{100}E(G) - 0{,}18 = -0{,}15$ et $\sigma(G') = \frac{1}{100}\sigma(G) = 0{,}76$ arrondie à 2 décimales.

Tiens, tiens ! Le jeu est devenu défavorable au joueur (comme par hasard) et l'écart type est divisé par 100, ce qui le rend 100 fois moins risqué et donc plus tentant.

Il ne faut cependant **pas jouer à ce jeu**, pour lequel le gain moyen espéré sur un assez grand nombre de parties est de –0,15 €, ce qui signifie intuitivement que le gain le plus probable après 1000 parties est estimé à –150 €.

METHODE 10 : Comment s'y prendre si Y est une combinaison linéaire de variables aléatoires 2 à 2 indépendantes

■ Principe

On montre qu'une variable aléatoire Y se déduit de variables aléatoires $X_1,\cdots,X_n$, **deux à deux indépendantes**, par combinaison linéaire, c'est-à-dire qu'il existe $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ réels tels que $Y=\lambda_1X_1+\cdots+\lambda_nX_n$ et l'on applique les propriétés 1 et 2.

Propriété 1 : $E(\lambda_1X_1+\cdots+\lambda_nX_n)=\lambda_1E(X_1)+\cdots+\lambda_nE(X_n)$

Propriété 2 : $V(\lambda_1X_1+\cdots+\lambda_nX_n)=\lambda_1^2V(X_1)+\cdots+\lambda_n^2V(X_n)$ et par conséquent au niveau de l'écart type $\sigma(\lambda_1X_1+\cdots+\lambda_nX_n)=\sqrt{\lambda_1^2V(X_1)+\cdots+\lambda_n^2V(X_n)}$.

REMARQUES : 1) Ces deux propriétés permettent de démontrer des conclusions déjà données qui étaient jusqu'alors intuitives et de les affiner.

Pour illustrer ce propos, prenons l'exemple de la méthode précédente, dans lequel on a conclu intuitivement que si l'on jouait 1000 fois, on risquait de perdre –150 €.
Pour i entier compris entre 1 et n, si l'on note $Y_{1000}=G_1'+\cdots+G_{1000}'$ où G_i' désigne la variable aléatoire gain algébrique au $i^{ème}$ lancer, comme les lancers sont indépendants on a $E(Y_{1000})=1000\times E(G_1')=1000\times(-0{,}15)=-150$ €.

Ce qui est intéressant avec la propriété 2, c'est que l'on peut déterminer la variance de $Y_{1000}=G_1'+\cdots+G_{1000}'$ et donc son écart type.
Ainsi $V(Y_{1000})=1000V(G_1')=1000\times40\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{80000}{9}$ et $\sigma(Y_{1000})=\dfrac{200\sqrt{2}}{3}\approx94$.
Finalement, sur 1000 parties, ce n'est pas si « énorme » comme écart type, mais enfin, comme l'espérance est de –150€, avec un tel écart type, il est fort probable d'obtenir un gain algébrique négatif, c'est-à-dire de perdre !

2) Il est clair que ces deux propriétés généralisent celles vues à la méthode précédente dans la mesure où pour une variable aléatoire constante égale à 1, on a E(1) = 1.

■ Cas d'application

Lorsque les variables aléatoires $X_1,\cdots,X_n$ sont **deux à deux indépendantes**, ce qui est notamment le cas pour un schéma de Bernoulli et par ailleurs pour N répétitions de ce schéma.

■ **Erreur classique**

Il ne faut pas oublier les carrés dans la formule de la variance, ainsi on a par exemple $V(X-Y)=V(X)+V(Y)$ **et NON** : $V(X-Y)=V(X)-V(Y)$!

■ **Exemple :** *On reprend l'exemple de la méthode 5, mais au lieu de lancer le dé 40 fois, on décide de le lancer n fois pour n entier naturel non nul.*
Ainsi, on jette n fois un dé cubique dont 2 faces sont rouges, et 4 faces sont jaunes et l'on compte le nombre de lancers où les 4 faces jaunes sont visibles (succès de probabilité $p=\frac{1}{3}$*).*

D'autre part, on considère la variable aléatoire $M_n=\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$*, où pour i entier entre 1 et n,* X_i *désigne le nombre de succès obtenus au* $i^{\text{ème}}$ *tirage (c'est-à-dire 1 ou 0).*

1) Déterminez l'espérance et l'écart-type de M_n *en fonction de n.*
2) Déduisez-en la plus petite valeur de n pour laquelle la longueur de l'intervalle $I=\left[p-3\sigma(M_n);p+3\sigma(M_n)\right]$ *est inférieure ou égale à 0,01.*
3) En raisonnant avec l'intervalle $I=\left[p-3\sigma(M_n);p+3\sigma(M_n)\right]$*, que pouvez vous conclure de la question précédente ?*

1) L'application de la propriété 1 amène à :

$$E(M_n)=E\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\right)=\frac{1}{n}\times E(X_1+\cdots+X_n)=\frac{np}{n}=p=\frac{1}{3}.$$

L'application de la propriété 2 amène à :

$$V(M_n)=V\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}\right)=\frac{1}{n^2}\times V(X_1+\cdots+X_n)=\frac{np(1-p)}{n^2}=\frac{p(1-p)}{n}=\frac{2}{9n}.$$

On en déduit que $\sigma(M_n)=\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}}}{\sqrt{n}}=\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{n}}$.

2) On doit résoudre l'inéquation $6\times\sigma(M_n)\leq 0{,}01$:

$6\times\sigma(M_n)\leq 0{,}01 \Leftrightarrow 6\times\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{n}}\leq 0{,}01 \Leftrightarrow \frac{3\times\sqrt{2}}{0{,}01}\leq\sqrt{n} \Leftrightarrow 425\leq\sqrt{n} \Leftrightarrow 180625\leq n$, donc il faut au minimum 180 625 lancers pour que la longueur de l'intervalle $I=\left[p-3\sigma(M_n)\ ;\ p+3\sigma(M_n)\right]$ soit inférieure ou égale à $0{,}01=\frac{1}{100}$.

3) On a déjà vu, sans pour l'instant le démontrer, qu'il est quasiment certain que la variable aléatoire M_n soit dans l'intervalle I, ce qui permet d'en conclure qu'à partir de la valeur n = 180 625 lancers, on peut estimer que $P\left(|M_n-p|\leq\frac{1}{100}\right)=1$. Rendez-vous à la quatrième partie pour plus de rigueur !

METHODE 11 : Comment s'y prendre si Y est un produit de variables aléatoires deux à deux indépendantes

■ Principe

On montre qu'une variable aléatoire Y se déduit de variables aléatoires $X_1, \cdots, X_n$, **deux à deux indépendantes**, par produit, c'est-à-dire que $Y = X_1 \times \cdots \times X_n$ et l'on applique la propriété.

Propriété : Pour i entier compris entre 1 et n, si les variables aléatoires X_i sont indépendantes deux à deux alors $E(X_1 \times \cdots \times X_n) = E(X_1) \times \cdots \times E(X_n)$.

■ Cas d'application

Quand il y a indépendance physique évidente entre les variables aléatoires X_i prises deux à deux et que l'on demande l'espérance de Y sans demander sa loi de probabilité, qui d'ailleurs parfois est quasiment impossible à déterminer.

■ Erreur classique

N'inventez pas une formule sur la variance et donc l'écart type du produit car à votre niveau il n'y en a pas.

REMARQUE : Comme dans l'exemple, seul un algorithme peut permettre de déterminer une approximation de la variance et donc de l'écart type.

■ **Exemple :** *On jette cinq dés identiques parfaitement équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et l'on note P la variable aléatoire qui à l'expérience associe le produit des faces supérieures des dés.*

1) Déterminez l'espérance de P en expliquant votre démarche.
2) Pourquoi est-il problématique de donner la loi de probabilité de P et donc son écart type ?
3) Déterminez des valeurs approchées de l'espérance et de l'écart type de P avec un algorithme qui simule l'expérience aléatoire.

1) Si l'on numérote fictivement les dés, pour i entier compris entre 1 et 5, on peut considérer les variables aléatoires X_i qui à un lancer associe le numéro de la face supérieure du dé i.

Il est clair que la variable aléatoire P vérifie $P = X_1 \times \cdots \times X_5$ avec les variables aléatoires X_i égales et indépendantes deux à deux.

On a donc : $E(P) = E(X_1 \times \cdots \times X_5) = E(X_1) \times \cdots \times E(X_5) = (E(X_1))^5$.

Reste à déterminer $E(X_1)$ et c'est plié !

La variable aléatoire X_i prend les valeurs 1, 2, 3, 4, 5 et 6 avec la probabilité $\frac{1}{6}$ pour chacune donc $E(X_1)=\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}=\frac{21}{6}=\frac{7}{2}$.

On en déduit que $E(P)=\left(\frac{7}{2}\right)^5=\frac{16807}{32}=525.21875$.

2) Déterminer l'univers image $P(\Omega)$ est déjà un problème, alors donner les probabilités de chaque produit possible : Faut pas rêver !

Quand à l'écart type, là on est en plein délire !

En effet, on peut juste remarquer que les entiers de $P(\Omega)$ sont compris entre $1=1\times1\times1\times1\times1$ et $7776=6^5$, puis que par exemple 17 est impossible à obtenir puisqu'il n'est pas le produit de 5 entiers compris entre 1 et 6, et puis après ?

3) Pour répondre à cette question, l'idée est de simuler n fois l'expérience, de générer n valeurs prises par P, de les ranger dans une liste, puis de faire la moyenne et l'écart-type de la série statistique renvoyée par la liste.

L'algorithme suivant répond à la question :

```
from random import randint
from math import sqrt
def loiprobaprod(n):
    s=5*[0]
    L=[]
    for i in range(n):
        for i in range(5):
            s[i]=randint(1,6)
        p=1
        k=0
        for i in range(5):
            p=p*s[i]
        L.append(p)
        k=0
        for i in range(len(L)):
            k=k+L[i]
        m=k/n
        v=0
        for i in range(len(L)):
            v=v+((L[i]-m)**2)/n
        e=sqrt(v)
    return(m,e)
```

En mode « Run » on obtient :

```
In [11]: loiprobaprod(10000)
Out[11]: (529.2403, 731.8092186874468)

In [12]: loiprobaprod(20000)
Out[12]: (525.66955, 724.013139489061)

In [13]: loiprobaprod(30000)
    ...:
Out[13]: (522.2333, 712.3226889580446)
```

REMARQUES : 1) Ne prenez pas une trop grande valeur de n, sinon votre ordinateur ne va pas aimer !
2) On n'est pas si loin de la valeur 525 donnée par la théorie, quant à la valeur de l'écart type, elle est énorme par rapport à l'espérance.

4. Comment étudier la concentration d'une variable aléatoire X autour de son espérance $\mu = E(X)$

Sans vous le dire, d'une certaine façon, on a déjà abordé le problème dans certaines méthodes déjà vues dans ce chapitre.

En effet, dans la méthode 8, il a été question de déterminer un intervalle de fluctuation en fréquence $\left[\frac{a}{n};\frac{b}{n}\right]$ à un seuil $\alpha \in \left]0,1\right[$ donné pour une variable aléatoire $X \sim B(n,p)$, c'est-à-dire de trouver les plus petits entiers a et b compris entre 1 et n tels que $\frac{1-\alpha}{2} < P(X \leq a)$ et $\frac{1+\alpha}{2} < P(X \leq b)$ donc tels que $\alpha < P(a \leq X \leq b)$.

A cet effet, dans la méthode par étapes successives avec la calculatrice, nous vous avons conseillé de chercher a et b « autour » de $E(X) = \mu = np$ en déterminant $P(X \leq \mu - \sigma)$ et $P(X \leq \mu - 2\sigma)$ pour trouver a, puis $P(X \leq \mu + \sigma)$ et $P(X \leq \mu + 2\sigma)$ pour obtenir b.

C'est une façon de se demander comment est concentrée la variable aléatoire X autour de son espérance en utilisant son écart type, puis de formuler des conclusions relatives à l'expérience aléatoire qui lui correspond (soupçon de triche par exemple).

Dans cette partie, il va s'agir, entre autre, d'utiliser des propriétés théoriques pour établir des inégalités et les exploiter comme nous l'avons déjà fait dans la troisième question de l'exemple de la méthode 10, mais avec plus de rigueur.

METHODE 12 : Comment donner une inégalité de concentration avec un algorithme et l'exploiter

■ Principe

Avec un algorithme, on simule une expérience aléatoire relative à une variable aléatoire X d'espérance μ et d'écart-type σ, puis on détermine la fréquence des situations pour lesquelles la distance entre X et μ est supérieure (ou inférieure) à une valeur $c_i \in]0,1[$ que l'on se fixe (cf. exemple).

■ Cas d'application

Quand aucune théorie ne permet d'établir une inégalité de concentration parce que l'on ne connaît pas la variance (et parfois même pas l'espérance).

Cependant, dans le cas contraire, il peut être intéressant de comparer les résultats empiriques et théoriques pour mesurer la pertinence du modèle expérimental.

On vous a déjà expliqué cela 100 fois, en long, en large et en travers !

■ **Exemple :** *On reprend l'exemple de la méthode précédente.*
Ainsi, on jette cinq dés identiques parfaitement équilibrés dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et l'on note P la variable aléatoire qui à l'expérience associe le produit des faces supérieures des dés.
On a vu dans l'exemple de la méthode précédente qu'une valeur arrondie à l'unité de l'espérance de P est $\mu = E(P) = 525$.

1) A l'aide d'un algorithme, déterminez une approximation de $P_{200}(|P-\mu| \leq 200)$ et $P_{400}(|P-\mu| \leq 400)$ après avoir expliqué à quoi correspondent ces deux probabilités.

2) Que pensez vous de la concentration de P autour de son espérance ?

1) Expliquons à quoi correspondent P_{200} et P_{400}.

P_{200} est la probabilité que la variable aléatoire P soit à une distance inférieure ou égale à 200 de son espérance $\mu = E(P) = 525$, c'est-à-dire à la probabilité de l'événement : « $(325 \leq P \leq 725)$ ».

P_{400} est la probabilité que la variable aléatoire P soit à une distance inférieure ou égale à 400 de son espérance $\mu = E(P) = 525$, c'est-à-dire à la probabilité de l'événement : « $(125 \leq P \leq 925)$ ».

L'algorithme suivant répond à la question :

```
from random import randint
def loiprobaproda(n,m,c1):
    s=5*[0]
    L=[]
    for i in range(n):
        for i in range(5):
            s[i]=randint(1,6)
        p=1
        for i in range(5):
            p=p*s[i]
        L.append(p)
    k=0
    for i in range(len(L)):
        if abs(L[i]-m)<=c1:
                k=k+1
    m=k/n
    return(m)
```

En mode « Run », **au bout d'un certain temps**, cet algorithme renvoie :

```
In [119]: loiprobaproda(10000,525,200)
Out[119]: 0.2208

In [120]: loiprobaproda(20000,525,200)
Out[120]: 0.21525

In [121]: loiprobaproda(30000,525,200)
     ...:
Out[121]: 0.2193

In [122]: loiprobaproda(10000,525,400)
Out[122]: 0.5272

In [123]: loiprobaproda(20000,525,400)
Out[123]: 0.5279

In [124]: loiprobaproda(30000,525,400)
     ...:
Out[124]: 0.5209
```

2) Grace à cet algorithme, on peut affirmer que $P_{200} = 0{,}22$ et $P_{400} = 0{,}53$ à deux décimales près.

Ce n'est pas terrible au niveau concentration autour de l'espérance !

Compte tenu de ces résultats empiriques, on peut conjecturer que la variable aléatoire P a un écart type relativement grand, ce qui est confirmé par l'exemple de la méthode 11 puisque l'on a trouvé une approximation de l'écart type d'environ 720.

METHODE 13 : Comment appliquer et exploiter les inégalités de Bienaymé-Tchebychev et de concentration

■ Rappels

1) Pour une variable aléatoire X d'espérance μ de variance V et tout réel $\delta > 0$ on a :

$$P(|X-\mu| \geq \delta) \leq \frac{V(X)}{\delta^2}$$ ***(Inégalité de Bienaymé-Tchebychev)***.

2) En utilisant la formule relative à l'événement contraire, sous les mêmes hypothèses, il vient (on peut utiliser directement cette dernière inégalité) :

$$P(|X-\mu| < \delta) \geq 1 - \frac{V(X)}{\delta^2}$$ ***(Inégalité de concentration « autour » de μ)***.

■ Cas d'application

Il faut connaître V, ce qui n'est par exemple pas le cas de l'exemple de la méthode précédente !

■ Principe

On applique une des deux formules rappelées, puis comme dans l'exemple, on en déduit la réponse à la question posée.

REMARQUES : 1) L'inégalité est « large », c'est-à-dire que l'on peut faire beaucoup plus « fin » avec un algorithme ou encore avec la loi binomiale par exemple.
2) Cependant, elle revêt un intérêt considérable sur le plan théorique car on en déduit les principes propres aux deux méthodes suivantes (loi faible des grands nombres).

■ **Exemple :** *1) On considère une variable aléatoire X d'espérance $\mu = E(X)$, de variance V et d'écart-type $\sigma = \sqrt{V}$.*
a) Majorez les probabilités $P(|X-\mu| \geq 2\sigma)$ et $P(|X-\mu| \geq 3\sigma)$ en utilisant l'inégalité de Bienaymé Tchebychev.
b) Minorez les probabilités $P(|X-\mu| < 2\sigma)$ et $P(|X-\mu| < 3\sigma)$ en utilisant l'inégalité de concentration de X autour de μ.
2) On reprend l'exemple de la méthode 5.
Ainsi, on jette 40 fois un dé cubique dont 2 faces sont rouges, et 4 faces sont jaunes et l'on compte le nombre de lancers où les 4 faces jaunes sont visibles (succès de probabilité $p = \frac{1}{3}$).
Si l'on note X la variable aléatoire, qui a cette expérience, associe le nombre de succès, il est clair que X suit la loi binomiale de paramètres n = 40 et p = $\frac{1}{3}$
et donc que $\mu = E(X) = \frac{40}{3} = 13,33$ et $\sigma = \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{80}{9}} = \frac{4\sqrt{5}}{3} = 3$.

a) Déterminez $P(|X-\mu| \geq 2\sigma)$ et $P(|X-\mu| \geq 3\sigma)$ à l'aide de votre calculatrice puis commentez les résultats par rapport aux majorations de la question 1) a).
b) Déterminez $P(|X-\mu| < 2\sigma)$ et $P(|X-\mu| < 3\sigma)$ à l'aide de votre calculatrice puis commentez les résultats par rapport aux minorations de la question 1) b).

1) a) En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P(|X-\mu| \geq 2\sigma) \leq \frac{V}{(2\sigma)^2} = \frac{\sigma^2}{4\sigma^2} = \frac{1}{4} = 0,25 \text{ et } P(|X-\mu| \geq 3\sigma) \leq \frac{V}{(3\sigma)^2} = \frac{\sigma^2}{9\sigma^2} = \frac{1}{9} = 0,12.$$

b) En utilisant l'inégalité de concentration autour de μ :

$$P(|X-\mu| < 2\sigma) \geq 1 - \frac{V}{(2\sigma)^2} = 1 - \frac{\sigma^2}{4\sigma^2} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0,75 \text{ et}$$

$$P(|X-\mu| < 3\sigma) \geq 1 - \frac{V}{(3\sigma)^2} = 1 - \frac{\sigma^2}{9\sigma^2} = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9} = 0,88.$$

2) a) Les cas favorables à l'événement « $|X-\mu| \geq 2\sigma$ » correspondent aux valeurs de X dont la distance à μ est supérieure ou égale à 2σ c'est-à-dire à l'événement « $(X \leq \mu - 2\sigma) \cup (\mu + 2\sigma \leq X)$ ».
Comme $\mu = 13,33$ et $\sigma = 3$, cet événement est « $(X \leq 7,33) \cup (19,33 \leq X)$ » et par conséquent sa probabilité est $P(0 \leq X \leq 7) + P(20 \leq X \leq 40) = 0,043$.

Les cas favorables à l'événement « $|X-\mu| \geq 3\sigma$ » correspondent aux valeurs de X dont la distance à μ est supérieure ou égale à 3σ c'est-à-dire à l'événement « $(X \leq \mu - 3\sigma) \cup (\mu + 3\sigma \leq X)$ ».
Comme $\mu = 13,33$ et $\sigma = 3$, cet événement est « $(X \leq 4,33) \cup (22,33 \leq X)$ » et par conséquent sa probabilité est $P(0 \leq X \leq 4) + P(22 \leq X \leq 40) = 0,005$.

Il est clair que les majorations de la question 1)a) sont vraies, mais elles sont très « larges », ce qui n'enlève pas le caractère théorique fondamental de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

b) Les cas favorables à l'événement « $|X-\mu| < 2\sigma$ » correspondent aux valeurs de X dont la distance à μ est strictement inférieure à 2σ c'est-à-dire à l'événement « $\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma$ ».
Comme $\mu = 13,33$ et $\sigma = 3$, cet événement est « $(7,33 < X < 19,33)$ » et par conséquent sa probabilité est $P(8 \leq X \leq 19) = 0,957$.

Les cas favorables à l'événement « $|X-\mu| < 3\sigma$ » correspondent aux valeurs de X dont la distance à μ est strictement inférieure à 3σ c'est-à-dire à l'événement « $(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma)$ ».

Comme $\mu = 13{,}33$ et $\sigma = 3$, cet événement est « $(4{,}33 < X < 22{,}33)$ » et par conséquent sa probabilité est $P(5 \leq X \leq 22) = 0{,}997$.

Il est clair que les minorations de la question 1)b) sont vraies, mais elles sont très « larges », ce qui n'enlève pas le caractère théorique fondamental de l'inégalité de concentration.

METHODE 14 : Comment s'y prendre avec les inégalités précédentes avec une moyenne de variables aléatoires X_i indépendantes deux à deux de mêmes paramètres

■ Principe

On considère la variable aléatoire $M_n = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$ comme on l'a déjà fait dans l'exemple de la méthode 10, puis l'on applique les propriétés relatives à M_n en remplaçant dans les deux inégalités de la méthode précédente.

Pour i entier compris entre 1 et n, si l'on note $\mu = E(X_i)$ et $V = V(X_i)$ il vient alors aisément que pour tout $\delta > 0$:

$P(|M_n - \mu| \geq \delta) \leq \dfrac{V}{n\delta^2}$ ***(Inégalité de Bienaymé- Tchebychev pour une moyenne).***

$P(|M_n - \mu| < \delta) \geq 1 - \dfrac{V}{n\delta^2}$ ***(Inégalité de concentration pour une moyenne).***

REMARQUES : 1) On peut utiliser directement ces deux inégalités sans avoir à redémontrer que $E(M_n) = \mu$ et $V(M_n) = \dfrac{V}{n}$ et remplacer dans les inégalités de la méthode précédente pour les obtenir.

2) On a déjà « effleuré » l'application du principe de cette méthode dans l'exemple de la méthode 10, dans lequel il a été question de déterminer la valeur de n pour laquelle $P\left(|M_n - \mu| \leq \dfrac{1}{100}\right)$ soit proche de 1.

Cependant, en toute rigueur : proche de 1 ne veut rien dire !
Mais, en revanche, déterminez la plus petite valeur de n pour que par exemple $P\left(|M_n - \mu| \leq \dfrac{1}{100}\right) > 0{,}99$, là c'est rigoureux (cf. exemple) !

■ Rappel

Cette dernière inégalité permet de donner ***la loi faible des grands nombres*** par une application élémentaire du Théorème des gendarmes, à savoir :

$$\forall \delta > 0,\ \lim_{n \to +\infty} P(|M_n - \mu| < \delta) = 1.$$

REMARQUE : On a souvent utilisé cette loi intuitivement s'en vous en parler dans les algorithmes. En effet, elle explique pourquoi il suffit d'augmenter le nombre de simulations d'un algorithme pour obtenir des approximations plus proches des résultats théoriques. ***Au niveau des probabilités, sa portée est considérable !***

■ Cas d'application

Etant donné un réel $\delta > 0$, quand on vous demande la valeur minimum de n pour que $P(|M_n - \mu| \geq \delta) \leq \frac{V}{n\delta^2}$ ou que $P(|M_n - \mu| < \delta) \geq 1 - \frac{V}{n\delta^2}$, alors il faut penser à utiliser cette méthode.

■ **Exemple :** *On reprend l'exemple de la méthode 10 avec les mêmes notations.*

Ainsi, on jette n fois un dé cubique dont 2 faces sont rouges, et 4 faces sont jaunes et l'on compte le nombre de lancers où les 4 faces jaunes sont visibles (succès de probabilité $p = \frac{1}{3}$).

En outre, on considère la variable aléatoire $M_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$, où pour i entier entre 1 et n, X_i désigne le nombre de succès obtenus au $i^{ème}$ tirage (c'est-à-dire 1 ou 0) dont on sait que $\mu = E(M_n) = \frac{1}{3}$ avec d'autre part $V(X_1) = \cdots = V(X_n) = V = \frac{2}{9}$.

1) En utilisant l'inégalité de concentration de la moyenne, déterminez la valeur minimum de n pour laquelle $P\left(|M_n - \mu| \leq \frac{1}{100}\right) > 0{,}99$

2) En utilisant l'inégalité de concentration de la moyenne, déterminez la valeur minimum de n pour laquelle $P\left(|M_n - \mu| \leq \frac{1}{100}\right) > 0{,}9999$ et commentez.

1) On sait que $P(|M_n - \mu| < \delta) \geq 1 - \frac{V}{n\delta^2}$ donc en prenant $\mu = \frac{1}{3}$, $V = \frac{2}{9}$ et $\delta = \frac{1}{100}$,

il vient : $P\left(\left|M_n - \frac{1}{3}\right| < \frac{1}{100}\right) \geq 1 - \frac{\frac{2}{9}}{n\left(\frac{1}{100}\right)^2} = 1 - \frac{20000}{9n}$.

Cela amène à résoudre $1 - \frac{20000}{9n} \geq 0{,}99$ pour répondre à la question.

$$1 - \frac{20000}{9n} \geq 0{,}99 \Leftrightarrow 0{,}01 \geq \frac{20000}{9n} \Leftrightarrow n \geq \frac{20000}{0{,}09} \Leftrightarrow n \geq 222222{,}2 \Leftrightarrow n \geq 222223.$$

Le nombre n demandé est donc 222 223.

2) On adopte la même démarche, qui compte tenu de la nouvelle incertitude 0,9999 amène à :

$$1-\frac{20000}{9n}\geq 0{,}9999 \Leftrightarrow 0{,}0001\geq\frac{20000}{9n}\Leftrightarrow n\geq\frac{20000}{0{,}0009}\Leftrightarrow n\geq 22222222{,}2 \Leftrightarrow n\geq 22222223.$$

Le nombre demandé est donc 222 222 223.

Oups ! Ca fait beaucoup par rapport au nombre précédent, lui-même relativement grand par rapport au nombre 180 625 trouvé dans l'exemple de la méthode 10.

Oui, mais là, on s'est pas contenté de préciser que $P\left(|M_n-p|\leq\frac{1}{100}\right)=1$ puisque l'on a donné une précision de la « proximité » de la probabilité par rapport à 1 (plus grande que 0,99).

Réflexes

	SITUATIONS	REFLEXES
1.	**On demande des probabilités dans le cas d'une expérience aléatoire.**	▪ On se demande si l'on est dans un cas d'équiprobabilité ou si l'on peut s'y ramener. ▪ Sinon, on revient aux formules de base (exercice 1)
2.	**On demande de déterminer les paramètres d'une variable aléatoire.**	▪ On détermine sa loi de probabilité avec un tableau si c'est possible et on en déduit son espérance et son écart type. ▪ On se demande si elle ne vérifie pas une loi binomiale. ▪ On construit un algorithme.
3.	**On doit résoudre un exercice qui est relatif aux probabilités conditionnelles.**	▪ On construit un arbre pondéré et on applique la formule des probabilités totales et conditionnelles.
4.	**On se demande si A et B sont 2 événements indépendants.**	▪ S'il n'y a pas indépendance physique, on compare $P(A\cap B)$ et $P(A)\times P(B)$.
5.	**On veut déterminer des approximations pour une situation aléatoire impossible à modéliser théoriquement.**	▪ On construit un algorithme avec des boucles finies « imbriquées » pour s'en sortir.

6.	**On répète plusieurs fois de façon indépendante une même épreuve.**	▪ On se demande si l'on n'est pas « en face » d'un schéma de Bernoulli.
7.	**On doit émettre une décision pour une situation aléatoire qui correspond à un schéma de Bernoulli.**	▪ On détermine les intervalles de fluctuation aux seuils de 95 % et 99 %.
8.	**On connaît les paramètres d'une variable aléatoire X et l'on demande ceux d'une variable aléatoire Y.**	▪ On se demande si l'on peut écrire Y en fonction d'opérations faisant intervenir X.
9.	**On demande une majoration ou une minoration de la probabilité d'une variable aléatoire autour de son espérance.**	▪ Il faut penser aux inégalités de Bienaymé-Tchebychev et de concentration.

Astuces

■ La somme des probabilités des événements élémentaires d'une expérience aléatoire fait 1 : vérifiez vos calculs si ce n'est pas le cas.

■ Lister tous les cas d'une situation lorsqu'il y a peu de cas (arbres, tableaux à double entrée) ne fait pas perdre de points.

■ Il faut penser que $P(A\cup B)+P(A\cap B)=P(A)+P(B)$ lorsque l'on vous demande de déterminer $P(A\cup B)$, car en général, l'énoncé vous a fait calculer $P(A)$, $P(B)$, et $P(A\cap B)$.

■ Dès que l'expression « au moins » apparaît dans une question relative à une probabilité il faut penser à l'événement contraire et donc à la formule $P(A)+P(\overline{A})=1$.

■ Dés que vous connaissez l'espérance et l'écart type d'une variable aléatoire X et qu'on vous les demande pour une variable aléatoire Y, il faut se demander si $Y=aX+b$ en introduisant éventuellement une variable aléatoire auxiliaire comme dans l'exemple de la méthode 9.

■ C'est vrai pour tous les chapitres, mais notamment dans celui-ci, où les algorithmes sont nombreux et parfois compliqués. Quand un algorithme vous donne du « fil à retordre », prenez **peu de simulations** et utilisez des « print(s) » pour savoir où vous en êtes.

■ Dés que l'on vous demande un nombre minimal de répétitions pour minorer ou majorer une probabilité il faut penser aux inégalités de Bienaymé-Tchebychev et de concentration pour la moyenne.

Erreurs

■ Une probabilité est un nombre compris entre 0 et 1, donc si vous en trouvez une égale à 3, il y a un problème...

■ Il ne faut pas confondre $P_A(B)$ et $P(A \cap B)$.

Pour faire la différence, posez-vous la question : **Que sais-je ?** Si vous ne savez rien, c'est $P(A \cap B)$, sinon vous savez « A », et c'est $P_A(B)$.

■ Il ne faut pas confondre des événements incompatibles et des événements indépendants. On vous rappelle que deux événements A et B sont :
1) incompatibles lorsque $A \cap B = \varnothing$
2) indépendants lorsque $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

■ **Attention !** $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ **uniquement** lorsque A et B sont des événements **incompatibles**.

■ **Attention !** $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ **uniquement** lorsque A et B sont des événements **indépendants**.

■ Appliquer les formules qui donnent l'espérance et la variance d'une combinaison linéaire de variables aléatoires **qui ne sont pas indépendantes deux à deux, c'est FAUX !**

Le jour de l'épreuve

■ Sachez utiliser votre calculatrice pour déterminer des probabilités et des intervalles à des seuils donnés dans le cadre d'une loi binomiale.

■ Si vous devez faire un arbre, il faut commencer par le faire au « brouillon » puis prendre une règle pour qu'il soit présentable.

■ C'est vrai pour tous les chapitres, mais plus particulièrement dans les exercices de probabilités : il faut penser à utiliser les questions précédentes pour répondre à une nouvelle question.

■ Il est fort probable que l'on vous donne un algorithme à compléter le jour de l'épreuve, donc on vous conseille de bien reprendre ceux de ce chapitre car ils font intervenir quasiment toutes les notions vues dans les autres.

Le jour du Grand Oral

Sujets mathématiques

■ ***Question 1 : Espérance de gain à un jeu – La roue de la fortune***

Cette question abordée à l'exercice 1 revêt un intérêt historique car elle est à l'origine des probabilités (en pleine Renaissance). En effet, un jeu d'argent étant défini, il est légitime de se demander si l'on a une espérance de gain positive si l'on y joue et avec quel risque ? Le problème étant posé, il est intéressant de se demander comment évolue cette espérance et ce risque si l'on modifie le mode de rétribution du jeu (ce que propose l'exercice 1).

■ ***Question 2 : Probabilités conditionnelles – Problème de fiabilité***

Cette question qui est souvent abordée dans le livre, l'est plus particulièrement à l'exercice 4, dans lequel il est question de la fiabilité d'un lave-vaisselle. Si vous choisissez ce sujet, il nous paraît intéressant de mettre en évidence comment sont structurés les exercices de probabilités conditionnelles (ce que nous avons détaillé à la méthode 2 : arbre, formule des probabilités totales, application de la formule des probabilités conditionnelles).

■ ***Question 3 : Estimation à partir d'un intervalle à seuil donné pour une variable aléatoire qui suit la loi binomiale***

Cette question abordée à l'exercice 6 permet de savoir si le résultat d'une expérience à priori aléatoire est suspect à un seuil donné, c'est-à-dire par exemple si un joueur triche, comme dans le cas de l'exercice 6.

■ ***Question 4 : Comparaison des résultats théoriques d'une situation aléatoire à ceux renvoyés par plusieurs de ses simulations***

Cette question abordée dans les exercices 7 et 9 consiste à se demander si des algorithmes qui simulent une situation aléatoire sont pertinents, c'est-à-dire si les valeurs qu'ils renvoient sont en adéquation avec les résultats théoriques.

■ ***Question 5 : Détermination des propriétés d'une variable aléatoire qu'aucune théorie ne permet d'obtenir***

Cette question abordée aux exercices 8, 18 et 19 consiste à utiliser des algorithmes pour démontrer des propriétés (probabilités d'événements, espérance, écart type) vérifiées par une variable aléatoire dont il n'est pas évident de donner la loi de probabilité.

■ ***Question 6 : Etude d'une variable aléatoire qui suit la loi géométrique de paramètre p***

Cette question, traitée dans les exercices 15 et 16 peut être valorisante car elle fait l'objet d'un approfondissement du programme. Cependant, qu'il s'agisse de la démonstration de l'exercice 15 relative à l'espérance ou de l'algorithme de l'exercice 16 (qui l'un ou l'autre peuvent faire l'objet d'une question), nous vous conseillons de bien maîtriser les notions parfois délicates qu'ils mettent en œuvre si vous choisissez ce sujet. Si c'est le cas, il y a moyen d'avoir une excellente note.

■ ***Question 7 : Approximation d'une loi binomiale de paramètres n et p par une loi de Poisson de paramètre $\lambda = np$***
Comme la précédente, cette question difficile, abordée à l'exercice 17 fait l'objet d'un approfondissement du programme, d'où son intérêt. Attention malgré tout ; la démonstration n'est pas évidente.

Sujets transversaux

■ ***Question 8 : Rupture de stock et probabilités***
Cette question qui peut être conjuguée avec la spécialité SES est en rapport avec la question 7 et fait référence à l'application de la loi de Poisson proposée à la question 2 de l'exercice 17.

■ ***Question 9 : Application de la planche de Galton à la propagation d'un feu***
Cette question qui peut être conjuguée avec la spécialité SVT est une application écologique originale de la théorie et la simulation développées à l'exercice 11 concernant la planche de Galton.
En effet, imaginez un chemin qui traverse une forêt rectangulaire qui l'isole de villages que côtoie cette dernière. Dans la mesure où beaucoup d'incendies se sont produits dans la forêt suite à des négligences humaines, par soucis écologique, on désire protéger les villages sans détruire l'intégralité de la forêt. Il suffit de la « tailler » en triangles pour que les villages soient aux extrémités de leurs bases pour les préserver du feu.
Finalement la bille devient le feu, les clous, les arbres parmi lesquels il se propage de façon aléatoire et les villages quand elle est taillée, les bacs de réception situés aux extrémités dans lesquels la bille et donc le feu ont peu de chance de terminer.

■ ***Question 10 : Application des probabilités conditionnelles et des suites à l'aménagement d'un domaine skiable***
Cette question qui est illustrée à l'exercice 5 peut être conjuguée avec la spécialité SVT. En effet, suite à l'enquête, selon le modèle, au bout d'un assez grand nombre d'années, on démontre que 60 % des sportifs qui fréquentent la station vont pratiquer le ski, d'où l'intérêt de privilégier l'aménagement des pistes plutôt que les zones de Snowboard.

■ ***Question 11 : Datation au carbone 14 et simulation de décroissance radioactive***
Cette question illustrée à l'exercice 14 consiste à déterminer l'âge de vestiges découverts par les archéologues. Elle se conjugue évidemment avec la spécialité Physique-Chimie et les algorithmes proposés sont intéressants dans la mesure où il propose des boucles avec récursivité, ce qui est à la limite du programme donc valorisant si cette notion est maîtrisée.

■ ***Question 12 : Le problème de la surréservation dans les compagnies aériennes***

Cette question est abordée à l'exercice 12 et se conjugue naturellement avec la spécialité SES. Jusqu'à combien de billets peut-on proposer pour que la probabilité que plus de clients que de sièges disponibles se présentent à l'embarquement soit inférieure à une valeur donnée ? Telle est la question. Comme dans la question précédente, dans l'algorithme proposé il y a une boucle avec récursivité, ce qui peut être très valorisant si la notion est bien expliquée.

EXERCICES ET CORRIGÉS

Chapitre 1
METHODES SUR LES SUITES
EXERCICES & CORRIGES

Exercices

1 Etude de suite $U_n = f(n)$ – Méthodes 8 et 12

Etudiez le comportement des suites dans chaque cas.

1) (U_n) telle que $U_n = n^2 + n - 1$.

2) (V_n) telle que $V_n = (-1)^n$.

3) (W_n) telle que $W_n = \dfrac{1}{n+1}$.

2 Etude de séries – Méthodes 6 et 12

Etudiez le comportement des suites dans chaque cas.

1) (U_n) telle que $U_n = \sum_{k=1}^{n} k$.

2) (V_n) telle que $V_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\dfrac{1}{2}\right)^k$.

3) (W_n) telle que $W_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\left(\dfrac{1}{2}\right)^k + k\right)$.

3 Suites définies par une relation de récurrence d'ordre 1 – Méthodes 2, 3, 5, 10, 13 et 14

1) On considère la suite (U_n) telle que $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \dfrac{1}{2}U_n + 1 \end{cases}$.

a) Conjecturez le comportement de la suite (U_n) avec un algorithme en langage Python.

b) Démontrez ces conjectures.

2) On considère la suite (V_n) telle que $\begin{cases} V_0 = 1 \\ V_{n+1} = 2V_n + 1 \end{cases}$.

a) Conjecturez le comportement de la suite (V_n) avec graphe « WEB ».

b) Démontrez ces conjectures.

3) On considère la suite (W_n) telle que $\begin{cases} W_0 = 1 \\ W_{n+1} = 2W_n + n \end{cases}$.

a) Conjecturez intuitivement le comportement de la suite (W_n).

b) Démontrez ces conjectures.

4 Conjecture « moins classique » et récurrence – Méthodes 1 et 5

On considère la suite (U_n) définie par $\begin{cases} U_0 = 5 \\ U_{n+1} = U_n + 6n - 5 \end{cases}$.

1) Représentez graphiquement (n, U_n) pour $n \leq 5$.

2) Quelle conjecture peut-on émettre quant à l'expression de U_n en fonction de n ?

3) Donnez une expression possible pour U_n.

4) Démontrez par récurrence que l'expression de U_n donnée au 3) est exacte.

5 Le principe de récurrence – Cas différents des exercices 3 et 4 – Méthodes 5 et 12

Montrez par récurrence la propriété (P_n) dans chaque cas, puis répondez à la question posée.

1) On considère (P_n) : $\forall n \in \mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Déduisez-en le comportement asymptotique de $U_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n^3}$.

2) Pour $a > 0$, on considère (P_n) : $\forall n \in \mathbb{N},\ (1+na) \leq (1+a)^n$.

Démontrez alors que $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty$ pour q réel strictement supérieur à 1.

6 Pour $a > 0$, approximation de $\sqrt{a}$ par la méthode de Héron – Méthodes 5, 9, 13 et 14

On considère la suite (U_n) définie par son premier terme $U_0 > 0$ et la relation de récurrence $U_{n+1} = \frac{1}{2}\left(U_n + \frac{a}{U_n}\right)$ où a est un réel strictement positif.

1) Montrez par récurrence que la suite (U_n) est à termes strictement positifs.

2) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1}^2 - a = \frac{\left(U_n^2 - a\right)^2}{4U_n^2}$.

3) Déduisez de la question précédente que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n \geq \sqrt{a}$ puis que la suite (U_n) est décroissante à partir du rang 1.

4) Montrez alors que la suite (U_n) converge vers une limite L, puis que $L = \sqrt{a}$.

5) Construisez un algorithme en langage Python qui utilise cette méthode pour trouver une valeur arrondie à dix décimales de $\sqrt{17}$.

7 Suites arithmétiques et géométriques – Méthodes 6 et 7

On considère les suites (U_n) et (V_n) définies par :

$$\begin{cases} U_3 = 4 \\ U_{n+1} = U_n + 2 \end{cases} \text{et} \begin{cases} V_1 = 4 \\ V_{n+1} = 5V_n \end{cases}.$$

1) Exprimez U_n et V_n en fonction de n.

2) Déterminez $S = \sum_{k=4}^{20} U_k$ et $T = \sum_{k=0}^{10} V_k$.

8 Suite arithmético-géométrique – Méthodes 6, 7, 12 et 16

Un opérateur de téléphonie mobile constate que, chaque année, il perd 8 % de ses précédents abonnés et que par ailleurs, il gagne 3 millions de nouveaux abonnés.
En 2020, le nombre d'abonnés est de 20 millions.
On s'intéresse au nombre d'abonnés, en millions, pour l'année 2020+n.
En supposant que cette évolution se poursuit de la même façon, la situation peut être modélisée par une suite (U_n).

1) Justifiez que (U_n) est définie par $\begin{cases} U_0 = 20 \\ U_{n+1} = 0{,}92U_n + 3 \end{cases}$.

2) Montrez que la suite (V_n) définie par $V_n = U_n - 37{,}5$ est une suite géométrique dont vous donnerez le premier terme et la raison.

3) Exprimez V_n, puis U_n en fonction de n.

4) L'opérateur peut-il espérer dépasser 30 millions d'abonnés ? Si oui, en quelle année ? Justifiez par un algorithme en langage Python.

9 Suite définie par son premier terme et la relation de récurrence $U_{n+1} = f(U_n)$ avec f croissante et suite auxiliaire arithmétique – Méthodes 2, 5, 6, 7, 12 et 14

On considère les suites (U_n) et (V_n) telles que :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n - 4}{U_n + 5} \end{cases} \text{et } V_n = \frac{1}{U_n + 2}.$$

Partie A

1) Quelles conjectures peut-on émettre quant aux comportements global et asymptotique de la suite (U_n) à partir d'un graphe « WEB » ?

2) Montrez par récurrence les conjectures relatives au comportement global de la suite émises au 1) (bornes et monotonie).

3) Déduisez de la question précédente que (U_n) converge vers une limite L que vous déterminerez.

Partie B

1) Montrez en utilisant la partie précédente que U_n et V_n existent pour tout n.

2) Montrez que (V_n) est une suite arithmétique dont vous donnerez le premier terme et la raison.

3) Déduisez-en V_n, puis U_n en fonction n.

4) Redémontrez alors les conjectures relatives aux comportements global et asymptotique de la suite (U_n).

10 Suite définie par son premier terme et la relation de récurrence $U_{n+1} = f(U_n)$ avec f croissante et suite auxiliaire géométrique – Méthodes 3, 5, 6, 7, 12 et 14

On considère les suites (U_n) et (V_n) telles que :

$$\begin{cases} U_0 = 5 \\ U_{n+1} = \dfrac{2U_n + 2}{U_n + 3} \end{cases} \text{ et } V_n = \frac{U_n + 2}{U_n - 1}.$$

Partie A

1) Quelles conjectures peut-on émettre quant aux comportements global et asymptotique de la suite (U_n) à partir d'un algorithme en langage Python ?

2) Montrez par récurrence les conjectures relatives au comportement global de la suite émises au 1) (bornes et monotonie).

3) Déduisez de la question précédente que (U_n) converge vers une limite L que l'on déterminera.

Partie B

1) D'après la partie A montrez que U_n et V_n existent pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) Montrez que (V_n) est une suite géométrique dont vous donnerez le premier terme et la raison.

3) Déduisez-en V_n, puis U_n en fonction n.

4) Redémontrez que la suite (U_n) converge vers L.

11 Modèle d'évolution – Système de deux suites – Méthodes 3, 6, 7, 12 et 16

On observe une population de 50 millions d'oiseaux, **d'effectif constant au cours du temps**, qui vit sur l'île Maurice et l'île de la Réunion.

On note respectivement a_n et b_n, les effectifs respectifs en millions d'oiseaux sur l'île Maurice et l'île de la Réunion au 1er juillet de l'année 2014 + n et l'on donne $a_0 = b_0 = 25$.

D'autre part on constate qu'entre le 1er juillet de l'année 2014 + n et le 1er juillet de l'année 2014 + (n + 1), 30 % des oiseaux de l'île de la Réunion migrent vers l'île Maurice et 20 % des oiseaux de l'île Maurice migrent vers la Réunion.

1) Montrez que l'on a $\begin{cases} a_{n+1} = 0{,}5a_n + 15 \\ b_{n+1} = 0{,}5b_n + 10 \end{cases}$.

2) On considère d'autre part les deux suites auxiliaires (A_n) et (B_n) définies respectivement par $A_n = a_n - 30$ et $B_n = b_n - 20$.
Montrez que ces deux suites sont géométriques et donnez le premier terme et la raison de chacune d'elles.
3) Exprimez A_n et B_n, puis a_n et b_n en fonction de n.
4) Etudiez la monotonie des suites (a_n) et (b_n) puis interprétez ce résultat.
5) Etudiez la convergence des suites (a_n) et (b_n) puis interprétez ce résultat.
6) Construisez un algorithme en langage Python permettant de déterminer à partir de quelle date le nombre d'oiseaux sur l'île Maurice sera supérieur à 29 millions et donnez cette date.

12 Exercice théorique utilisant les définitions des limites – Méthode 11

1) Montrez qu'une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.
2) En déduire qu'une suite décroissante non minorée tend vers $-\infty$.
3) On considère la suite (U_n) telle que $U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrez que $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_{2n} - U_n \geq \frac{1}{2}$.

b) Montrez que (U_n) est croissante, puis en déduisez-en par l'absurde en utilisant la question a) que $\lim U_n = +\infty$.

13 Approximation par dichotomie de la solution d'une équation – Méthode 17

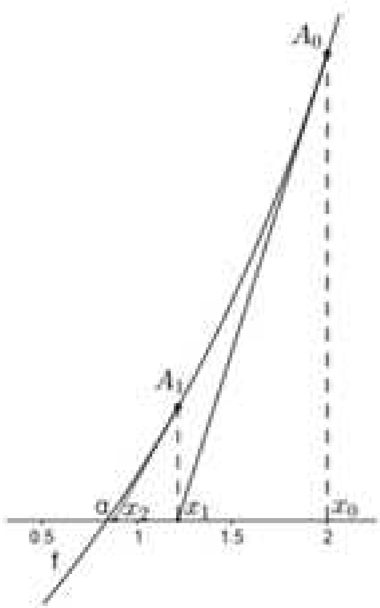
On considère la fonction f définie sur $[0;2]$ par $f(x) = e^x + 2x - 4$.

1) Etudiez les variations de f et précisez les images par f de 0 et 2.
2) Montrez que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α.
3) Donnez un encadrement d'amplitude égale à 10^{-6} de cette solution à l'aide d'un algorithme en langage Python que vous donnerez.

14 Approximation par la méthode de Newton – Raphson puis de la sécante de la solution d'une équation – Méthodes 3 et 14

Partie A – Algorithme de Newton – Raphson

On reprend les notations de l'exercice précédent et l'on considère la figure suivante :



Pour trouver une valeur approchée de α, on construit la suite (x_n) de la façon suivante (méthode de Newton-Raphson) :

a) On prend comme premier terme $x_0 = 2$.

b) Pour $n \geq 1$, x_n est la valeur pour laquelle la tangente à la courbe représentative de f au point A_{n-1} (cf. figure) coupe l'axe des abscisses.

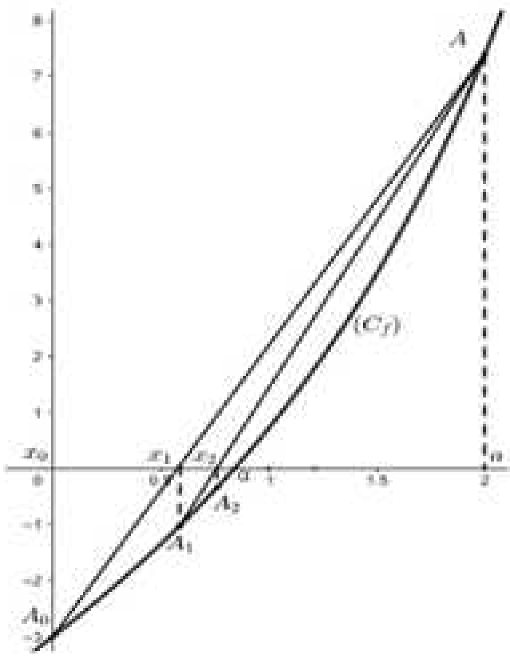
1) Exprimez x_1 en fonction de x_0, $f(x_0)$ et $f'(x_0)$.

2) Exprimez x_{n+1} en fonction de x_n, $f(x_n)$ et $f'(x_{n+1})$.

3) Construisez un algorithme en langage Python qui utilise cette méthode pour trouver une approximation de α à 10^{-4} près.

Partie B – Algorithme de la sécante

On reprend les notations de l'exercice précédent et l'on considère la figure suivante :

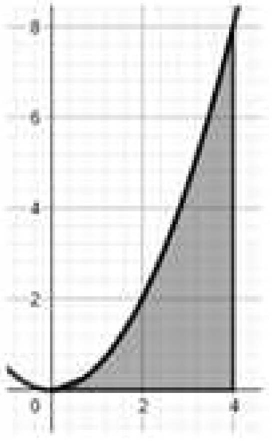


Pour trouver une valeur approchée de α, on construit la suite (x_n) de la façon suivante (méthode de la sécante) :
a) On prend comme premier terme $x_0 = 0$.
b) Pour $n \geq 1$, x_n est la valeur pour laquelle la sécante $(A_{n-1}A)$ coupe l'axe des abscisses.

1) Exprimez x_1 en fonction de x_0, a, $f(x_0)$ et $f(a)$.
2) Exprimez x_{n+1} en fonction de x_n, a, $f(x_n)$ et $f(a)$.
3) Construisez un algorithme en langage Python qui utilise cette méthode pour trouver une approximation de α à 10^{-4} près.

15 **Approximation d'une aire par la méthode des rectangles – Méthode 18**

On considère la fonction f définie par $f(x) = 0,5x^2$ et l'aire (A) grisée qui représente l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que : $\begin{cases} 0 \leq x \leq 4 \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$.



Déterminez un encadrement d'amplitude 10^{-4} de l'aire (A) avec la méthode des rectangles (méthode 18) en donnant un algorithme en langage Python.

16 **Suites adjacentes – Encadrement du nombre d'or $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ par deux rationnels – Méthodes 3, 5 et 13**

Propriété admise (démontrée à la méthode 11) **:** Tous les termes d'une suite croissante convergente sont inférieurs à sa limite et tous les termes d'une suite décroissante convergente sont supérieurs à sa limite.

On considère la fonction f définie sur $[1;2]$ par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+1}$.

1) Dressez le tableau de variations de f et en déduire que :
$$\forall x \in [1;2],\ f(x) \in [1;2].$$

2) Soit (U_n) et (V_n) telles que $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$ et $\begin{cases} V_0 = 2 \\ V_{n+1} = f(V_n) \end{cases}$.

a) Conjecturez le comportement global et asymptotique de chaque suite à l'aide d'un algorithme en langage Python.

b) Montrez par récurrence la propriété

$$(P_n) : \ \forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leq U_n \leq U_{n+1} \leq 2 \text{ et } 1 \leq V_{n+1} \leq V_n \leq 2.$$

c) Démontrez alors les conjectures émises au a).

3) Montrez la propriété :

$$(Q_n) : \ \forall n \in \mathbb{N},\ V_{n+1} - U_{n+1} = \frac{V_n - U_n}{(U_n+1)(V_n+1)} \leq \frac{1}{4}(V_n - U_n).$$

4) Déduisez-en par récurrence que la propriété $(R_n) : \ 0 \leq V_n - U_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5) Déduisez-en un encadrement d'amplitude strictement inférieure à 10^{-5} du nombre d'or $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ par deux rationnels.

17 Avec deux suites interactives – Encadrement de $\sqrt{14}$ par deux rationnels Méthodes 3, 5, 9, 12 et 15

Propriété admise (démontrée à la méthode 11) : Tous les termes d'une suite croissante convergente sont inférieurs à sa limite et tous les termes d'une suite décroissante convergente sont supérieurs à sa limite.

On considère les suites (U_n) et (V_n) telles que :

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \dfrac{2U_nV_n}{(U_n+V_n)} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} V_0 = 7 \\ V_{n+1} = \dfrac{U_n+V_n}{2} \end{cases}.$$

1) Conjecturez le comportement des deux suites avec un algorithme en langage Python.

2) Montrez par récurrence la propriété $(P_n) : \ \forall n \in \mathbb{N},\ U_n > 0$ et $V_n > 0$.

3) On considère la suite (W_n) telle que $W_n = V_n - U_n$.

a) Montrez que $0 \leq W_{n+1} \leq \frac{1}{2}W_n$.

b) Déduisez-en par récurrence la propriété $(Q_n) : \ \forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq W_n \leq \frac{5}{2^n}$.

c) Déduisez-en $\lim W_n$.

4) Montrez que (U_n) est croissante et (V_n) est décroissante.

5) Déduisez des questions précédentes que les suites (U_n) et (V_n) convergent vers la même limite L.

6) Déterminez L et donnez un encadrement à 10^{-3} près de L par deux rationnels (***coup de pouce*** : montrez que la suite (T_n) définie par $T_n = U_nV_n$ est constante).

18 **Récurrence double – Approfondissement – Méthodes 3, 6 et 7**

On considère la suite (U_n) définie par $\begin{cases} U_0 = 0 \ ; \ U_1 = 2 \\ U_{n+2} = 4U_{n+1} + 5U_n \end{cases}$.

1) Conjecturez le comportement de la suite (U_n) avec un algorithme en langage Python.

2) Montrez que la suite (S_n) définie par $S_n = U_{n+1} + U_n$ est géométrique, puis exprimez S_n en fonction de n.

3) On considère les suites (V_n) et (T_n) définies par $V_n = (-1)^n U_n$ et $T_n = V_{n+1} - V_n$.

a) Exprimez T_n en fonction de S_n, puis $\sum_{k=0}^{k=n-1} T_k$ en fonction de n en utilisant cette expression et la question précédente.

b) Calculez la somme $\sum_{k=0}^{k=n-1} T_k$ en fonction de n et U_n en utilisant la définition de (T_n) c'est-à-dire $T_n = V_{n+1} - V_n$, puis déduisez-en U_n en fonction de n en utilisant la question précédente.

Corrigés

1 Etude de suites $U_n = f(n)$ – Méthodes 8 et 12

1) En général quand $U_n = f(n)$ avec f « facile » à étudier sur $[0;+\infty[$, le tableau de variations de f permet de conclure mais ce n'est pas une règle générale (cf. (V_n)).

La suite (U_n) est telle que $U_n = n^2 + n - 1 = f(n)$ avec $f(x) = x^2 + x - 1$.

Il suffit de dresser le tableau de variations de f sur $[0;+\infty[$ pour répondre à la question.

La fonction f est dérivable sur $[0;+\infty[$ et $f'(x) = 2x + 1 > 0$ sur $[0;+\infty[$ d'où le tableau :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	-1	$\nearrow$	$+\infty$

Finalement la suite (U_n) est croissante, minorée par -1, non majorée et non convergente puisqu'elle tend vers $+\infty$.

2) La suite (V_n) est telle que $V_n = (-1)^n$ donc on a :

$V_0 = 1 ; V_1 = -1 ; V_2 = 1 ; V_3 = -1 \ldots$

Finalement la suite (V_n) est non monotone, bornée entre -1 et 1 et ne converge pas puisqu'elle prend successivement les valeurs 1 et -1.

3) La suite (W_n) est telle que $W_n = \dfrac{1}{n+1} = f(n)$ avec $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$.

Il suffit de dresser le tableau de variations de f sur $[0;+\infty[$ pour répondre à la question.

La fonction f est dérivable sur $[0;+\infty[$ et $f'(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2} < 0$ sur $[0;+\infty[$ d'où le tableau de variations suivant :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
f	1	$\searrow$	0

Finalement la suite (W_n) est décroissante, minorée par 0, majorée par 1 et converge vers 0.

2 Etude de séries – Méthodes 6 et 12

Dans l'enseignement supérieur ces suites définies par des sommes s'appellent des séries et font l'objet de nombreux théorèmes et interviennent dans de nombreuses épreuves.
Quand on travaille sur une série (S_n), en général on étudie sa monotonie par l'étude du signe de $S_{n+1} - S_n$.
Astuce : Pensez à calculer les sommes quand cela est possible.

1) La suite (U_n) est telle que $U_n = \sum_{k=1}^{n} k$, donc :

$$U_{n+1} - U_n = \sum_{k=1}^{n+1} k - \sum_{k=1}^{n} k = \sum_{k=1}^{n} k + (n+1) - \sum_{k=1}^{n} k = n+1 > 0.$$

Finalement $U_{n+1} > U_n$ et la suite (U_n) est croissante donc minorée par son premier terme $U_1 = 1$.
$\forall n \geq 2,\ U_n = U_{n-1} + n \geq 1+n$, car d'après la question précédente $U_{n-1} \geq 1$.

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 1+n = +\infty$, par comparaison, on déduit de l'inégalité précédente que $\lim U_n = +\infty$ et donc que (U_n) n'est pas majorée.

REMARQUE : On vous conseille d'apprendre par cœur que cette somme qui correspondant à la somme des n premiers entiers naturels est égal à $\frac{n(n+1)}{2}$.

2) La suite (V_n) est telle que $V_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k$ donc $V_{n+1} - V_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} > 0$, ce qui prouve que pour tout entier naturel n, $V_{n+1} > V_n$ et donc que (V_n) est croissante. Elle est donc minorée par son premier terme $V_0 = 1$.

Pour le majorant, c'est plus problématique si l'on ne pense pas que pour $q \neq 1$, $\sum_{k=0}^{k=n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

En prenant $q = \frac{1}{2}$, on obtient $V_n = \dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) \leq 2$, ce qui prouve que (V_n) est majorée par 2.

Comme $-1<\frac{1}{2}<1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$, on en déduit que $\lim V_n=2$ et donc que la suite (V_n) converge vers 2.

3) La suite (W_n) est telle que :

$$W_n=\sum_{k=0}^{n}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^k+k\right)=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k+\sum_{k=0}^{n}k=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k+\sum_{k=1}^{n}k=V_n+U_n.$$

Compte tenu des résultats précédents (W_n) est croissante, minorée par 2 et non majorée car elle tend vers $+\infty$ $\left(1+U_n\leq V_n+U_n \text{ et } \lim(1+U_n)=\lim U_n=+\infty\right)$.

Comme la limite de la suite (W_n) est $+\infty$, elle ne converge pas.

$\boxed{3}$ **Suites définies par une relation de récurrence d'ordre 1 – Méthodes 2, 3, 5, 10, 13 et 14**

Attention ! Contrairement aux suites de l'exercice 1, celles qui suivent **ne sont pas définies par une relation du type $U_n=f(n)$, mais par un de leur terme et une relation de récurrence du type $U_{n+1}=f(U_n)$** sauf pour la dernière.

Dans la plupart des cas, en Terminale, la fonction f est croissante et la suite est monotone (**mais pas forcément croissante : cf. la première suite**).

On peut conjecturer le comportement des suites grâce à des algorithmes (cf. la première suite) ou un graphe « WEB » (cf. la deuxième suite).

Ces conjectures ne constituent en rien des démonstrations, pour démontrer ces conjectures dans les cas suivants, il faut utiliser les méthodes 5, 13 et 14.

1) La suite (U_n) est telle que $\begin{cases}U_0=3\\ U_{n+1}=\frac{1}{2}U_n+1=f(U_n)\end{cases}$ avec $f(x)=\frac{1}{2}x+1$ qui est croissante sur $\mathbb{R}$.

a) L'algorithme suivant permet d'émettre des conjectures relatives au comportement de la suite (U_n) :

```
def f(x):
    return 0.5*x+1
def u(n):
    u=3
    for i in range(1,n+1):
        u=f(u)
    return(u)
```

REMARQUE : On constate ici l'intérêt de la dernière astuce donnée en fin de chapitre qui consiste à introduire f en début d'algorithme. En effet, si l'on doit émettre les conjectures avec une suite définie par une relation de récurrence d'ordre 1 faisant intervenir une autre fonction f : on change f et c'est plié !

En mode « Run » on obtient par exemple :

```
>>> u(1)
2.5
>>> u(2)
2.25
>>> u(3)
2.125
>>> u(50)
2.000000000000001
>>> u(100)
2.0
```

On conjecture que la suite (U_n) est décroissante, qu'elle est minorée par 2, majorée par 3 et qu'enfin elle converge vers 2.

b) Il reste à prouver ces conjectures en utilisant les méthodes 5, 13 et 14.

Montrons donc par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $(P_n) : 2 \leq U_{n+1} \leq U_n \leq 3$ est vraie.

Initialisation : (P_0) est-elle vraie ?
$U_0 = 3$ et $U_1 = 2{,}5$ donc (P_0) : $2 \leq U_1 \leq U_0 \leq 3$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que (P_n) est vraie.
D'après l'hypothèse de récurrence (P_n) : $2 \leq U_{n+1} \leq U_n \leq 3$ est vraie.
Comme f est croissante sur $[2;3]$,
$2 \leq U_{n+1} \leq U_n \leq 3 \Rightarrow f(2) \leq f(U_{n+1}) \leq f(U_n) \leq f(3)$.
Or $2 \leq f(2) = 2$, $f(U_{n+1}) = U_{n+2}$, $f(U_n) = U_{n+1}$ et $2{,}5 = f(3) \leq 3$, donc
(P_{n+1}) : $2 \leq U_{n+2} \leq U_{n+1} \leq 3$ est vraie.
Finalement (P_n) est vraie $\Rightarrow (P_{n+1})$ est vraie .

Conclusion : Par récurrence, (P_n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

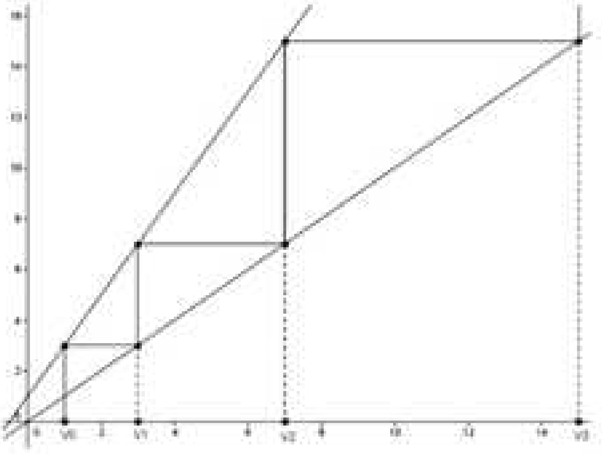
Cette démonstration par récurrence prouve que la suite (U_n) est décroissante, qu'elle est minorée par 2 et majorée par 3.

La suite (U_n) est décroissante minorée par 2 donc d'après l'un des théorèmes de convergence monotone elle converge vers une limite L.

Comme (U_n) converge, on peut passer à la limite dans la relation de récurrence ce qui donne $L = \frac{1}{2}L + 1$ et donc $L = 2$.

2) La suite (V_n) est telle que $\begin{cases} V_0 = 1 \\ V_{n+1} = 2V_n + 1 = f(V_n) \end{cases}$ avec la fonction f telle que $f(x) = 2x + 1$ qui est croissante sur $\mathbb{R}$.

a) Relativement à cette suite, on obtient le graphe « WEB » suivant qui permet de conjecturer que (V_n) est croissante, minorée par 1 et non majorée, et enfin qu'elle ne converge pas puisqu'elle tend vers $+\infty$.



b) Montrons donc par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, (P_n) : $1 \le V_n \le V_{n+1}$ est vraie.

Initialisation : (P_0) est-elle vraie ?

$V_0 = 1$ et $V_1 = 3$ donc (P_0) : $1 \le V_0 \le V_1$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que (P_n) est vraie.

D'aprés l'hypothèse de récurrence (P_n) : $1 \le V_n \le V_{n+1}$ est vraie.

Comme f est croissante sur $[1;+\infty[$, $1 \le V_n \le V_{n+1} \Rightarrow f(1) \le f(V_n) \le f(V_{n+1})$.

Or $1 \le f(1) = 3$, $f(V_{n+1}) = V_{n+2}$, $f(V_n) = V_{n+1}$, donc (P_{n+1}) : $1 \le V_{n+1} \le V_{n+2}$ est vraie.

Finalement (P_n) est vraie $\Rightarrow (P_{n+1})$ est vraie .

Conclusion : Par récurrence, (P_n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Cette démonstration par récurrence prouve que la suite (V_n) est croissante et qu'elle est minorée par 1.

Montrons par l'absurde que (V_n) est non majorée et tend vers $+\infty$.

Si l'on suppose que (V_n) est majorée, comme elle est croissante, d'aprés l'un des théorèmes de convergence monotone elle converge vers une limite L.

Alors, L est solution de $f(x)=x$, c'est-à-dire vers $L = -1$, ce qui est absurde puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n \geq 1$.

Par l'absurde, la suite (V_n) est croissante non majorée, donc d'après l'un des théorèmes de convergence monotone elle tend vers $+\infty$.

3) La suite (W_n) est telle que $\begin{cases} W_0 = 1 \\ W_{n+1} = 2W_n + n \end{cases}$ **et l'on n'a pas** $W_{n+1} = f(W_n)$ à cause du n qui « traîne ».

Il paraît assez évident que (W_n) est croissante, minorée par 1 et non majorée car elle tend vers $+\infty$: reste à le prouver !

Montrons d'abord par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, (P_n) : $1 \leq W_n$ est vraie.

Initialisation : (P_0) est-elle vraie ?
$W_0 = 1$ donc (P_0) : $1 \leq W_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que (P_n) est vraie.
D'après l'hypothèse de récurrence (P_n) : $1 \leq W_n$ est vraie.
$1 \leq W_n \Rightarrow 1 \leq 1+n \leq W_n + n = W_{n+1}$ donc (P_{n+1}) : $1 \leq W_{n+1}$ est vraie.
Finalement (P_n) est vraie $\Rightarrow (P_{n+1})$ est vraie.

Conclusion : Par récurrence, (P_n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La suite (W_n) est donc minorée par 1.

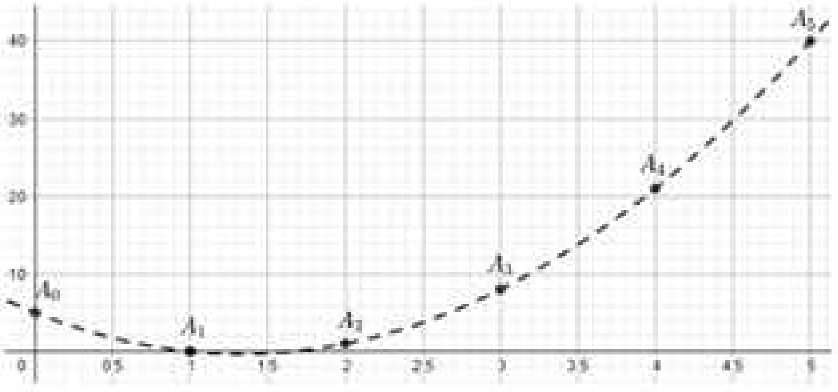
Comme $W_{n+1} - W_n = 2W_n + n - W_n = W_n + n > 0$ car $W_n \geq 1$, on a $W_{n+1} \geq W_n$ et donc la suite (W_n) est croissante.

Enfin pour $n \geq 1$, $1 \leq W_{n-1} \Rightarrow 2 + (n-1) \leq 2W_{n-1} + (n-1) \Rightarrow n+1 \leq W_n$.
Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} n+1 = +\infty$, d'après l'inégalité précédente, par comparaison, $\lim W_n = +\infty$ et donc la suite (W_n) n'est pas majorée et ne converge pas.

$\boxed{4}$ Conjecture « moins classique » et récurrence – Méthodes 1 et 5

On a la suite (U_n) telle que $\begin{cases} U_0 = 5 \\ U_{n+1} = U_n + 6n - 5 \end{cases}$.

1) Représentons graphiquement les points $A_n(n, U_n)$ pour $n \leq 5$.



La suite est représentée par les **points** et le lissage sert à répondre à la question suivante.

2) Compte tenu du lissage on peut conjecturer que la suite (U_n) a une expression de la forme $U_n = an^2 + bn + c$.

3) Si la suite (U_n) est effectivement telle que $U_n = an^2 + bn + c$ alors nécessairement $\begin{cases} U_0 = 5 \\ U_1 = 0 \\ U_2 = 1 \end{cases}$ impose :

$$\begin{cases} c = 5 \\ a + b + c = 0 \\ 4a + 2b + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 5 \\ a + b + 5 = 0 \\ 4a + 2b + 5 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 5 \\ a + b = -5 \\ 4a + 2b = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 5 \\ a + b = -5 \\ 2a + b = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c = 5 \\ a = 3 \\ b = -8 \end{cases}$$

Par conséquent la seule expression possible de U_n est $U_n = 3n^2 - 8n + 5$ si la conjecture est vraie.

4) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, (P_n) : $U_n = 3n^2 - 8n + 5$ est vraie.

Initialisation : (P_0) est-elle vraie ?

$U_0 = 5 = 3 \times 0^2 - 8 \times 0 + 5$ donc (P_0) est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que (P_n) est vraie.

D'après l'hypothèse de récurrence (P_n) : $U_n = 3n^2 - 8n + 5$ est vraie.

On doit montrer sous cette hypothèse que :

(P_{n+1}) : $U_{n+1} = 3(n+1)^2 - 8(n+1) + 5 = 3n^2 - 2n$ est vraie.

On sait que $U_{n+1} = U_n + 6n - 5$, donc d'après l'hypothèse de récurrence on en déduit que $U_{n+1} = 3n^2 - 8n + 5 + 6n - 5 = 3n^2 - 2n$.

Finalement (P_n) est vraie $\Rightarrow (P_{n+1})$ est vraie.

Conclusion : Par récurrence, (P_n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Finalement : $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n = 3n^2 - 8n + 5$.

5 Le principe de récurrence – Cas différents des exercices 3 et 4 – Méthodes 5 et 12

1) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$(P_n) : \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \text{ est vraie.}$$

Initialisation : (P_0) est-elle vraie ?

$\sum_{k=0}^{k=0} k^2 = 0^2 = 0 = \frac{0(0+1)(2\times 0+1)}{6}$ donc (P_0) est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que (P_n) est vraie.

D'après l'hypothèse de récurrence (P_n) : $\sum_{k=0}^{k=n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ est vraie.

On doit prouver sous cette hypothèse que

(P_{n+1}) : $\sum_{k=0}^{k=n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$ est vraie.

On a $\sum_{k=0}^{k=n+1} k^2 = \sum_{k=0}^{k=n} k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$ d'après l'hypothèse de récurrence.

En développant : $\sum_{k=0}^{k=n+1} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$

$$= \frac{(n+1)(n(2n+1)+6(n+1))}{6} = \frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

Finalement (P_n) est vraie $\Rightarrow (P_{n+1})$ est vraie.

Conclusion : Par récurrence, (P_n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On en déduit que :

$$U_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{k^2}{n^3} = \frac{1}{n^3} \times \sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{n \times n\left(1+\frac{1}{n}\right) \times n\left(2+\frac{1}{n}\right)}{6n^3} = \frac{\cancel{n^3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)}{6\cancel{n^3}}.$$

Finalement on obtient $\lim U_n = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

2) Prouvons que pour tout $a \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $n \in \mathbb{N}$ $(P_n) : (1+na) \leq (1+a)^n$ est vraie (inégalité de Bernoulli).

Initialisation : (P_0) est-elle vraie ?

On a : $1=(1+0\times a)\leq(1+a)^0=1$ donc (P_0) est vraie.

Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}$, supposons que (P_n) est vraie.

On a : $1+(n+1)a=(1+na)+a\leq(1+a)^n+a$ d'après l'hypothèse de récurrence.

Il reste à prouver que $(1+a)^n+a\leq(1+a)^{n+1}$ et c'est « gagné » !

Comme

$(1+a)^n+a-(1+a)^{n+1}$

$=(1+a)^n(1-(1+a))+a=(1+a)^n(-a)+a=a\left(1-(1+a)^n\right)<0$,

on en déduit que $(1+a)^n+a\leq(1+a)^{n+1}$, donc que $1+(n+1)a\leq(1+a)^{n+1}$ et par conséquent que (P_{n+1}) est vraie.

Finalement (P_n) est vraie $\Rightarrow(P_{n+1})$ est vraie .

Conclusion : Par récurrence, (P_n) est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Soit q un réel strictement supérieur à 1.
Comme q > 1, il existe a> 0 tel que $q=1+a$.

D'après ce que l'on vient de démontrer : $\forall n\in\mathbb{N}$, $(1+na)\leq(1+a)^n=q^n$, donc d'après cette inégalité, comme $\lim\limits_{n\to+\infty}(1+na)=+\infty$, par comparaison, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}q^n=+\infty$.

6 Pour a > 0 , approximation de $\sqrt{a}$ par la méthode de Héron – Méthodes 5, 9, 13 et 14 - Approfondissement

On a la suite (U_n) définie par son premier terme $U_0>0$ et la relation de récurrence $U_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(U_n+\dfrac{a}{U_n}\right)$ où a est un réel strictement positif.

1) Montrons par récurrence que la suite (U_n) est à termes strictement positifs en commençant par poser que pour $n\in\mathbb{N}$, (P_n) : $U_n>0$.

Initialisation : (P_0) est-elle vraie ?

On a $U_0>0$ donc (P_0) est vraie.

Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}$, supposons que (P_n) est vraie c'est-à-dire que $U_n>0$.

Comme $a>0$, d'après l'hypothèse de récurrence $U_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(U_n+\dfrac{a}{U_n}\right)>0$ donc (P_{n+1}) est vraie.

Finalement (P_n) est vraie $\Rightarrow (P_{n+1})$ est vraie .

Conclusion : Par récurrence, (P_n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc la suite (U_n) est à termes strictement positifs.

2) Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1}^2 - a = \dfrac{(U_n^2 - a)^2}{4U_n^2}$.

$$U_{n+1}^2 - a = \left(\frac{1}{2}\left(U_n + \frac{a}{U_n}\right)\right)^2 - a = \frac{1}{4}\left(U_n + \frac{a}{U_n}\right)^2 - a = \frac{\left(U_n + \dfrac{a}{U_n}\right)^2 - 4a}{4} = \frac{U_n^2 + 2a + \dfrac{a^2}{U_n^2} - 4a}{4}$$

$$= \frac{U_n^2 - 2a + \dfrac{a^2}{U_n^2}}{4} = \frac{U_n^4 - 2aU_n^2 + a^2}{4U_n^2} = \frac{(U_n^2 - a)^2}{4U_n^2}.$$

3) Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{(U_n^2 - a)^2}{4U_n^2} \geq 0$, on déduit de l'égalité précédente que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1}^2 - a \geq 0$ et donc que $U_{n+1}^2 \geq a$ (i).

Comme $U_{n+1} > 0$ d'après 1), en passant à la racine dans (i), on obtient $U_{n+1} \geq \sqrt{a}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ce qui prouve que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $U_n \geq \sqrt{a}$.

Comme, $U_{n+1} - U_n = \dfrac{1}{2}\left(U_n + \dfrac{a}{U_n}\right) - \dfrac{2}{2}U_n = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a}{U_n} - U_n\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a - U_n^2}{U_n}\right)$, que $U_n > 0$ et que pour $n \in \mathbb{N}^*$ $U_n \geq \sqrt{a} > 0 \Rightarrow U_n^2 \geq a \Rightarrow 0 \geq a - U_n^2$, on en déduit que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $U_{n+1} - U_n \leq 0$.

Cela prouve que pour $n \in \mathbb{N}^*, U_{n+1} \leq U_n$ et donc que la suite (U_n) est décroissante à partir du rang 1.

4) D'après la question précédente, la suite (U_n) est décroissante minorée (par $\sqrt{a}$) à partir du rang 1 donc d'après l'un des théorèmes de convergence monotone la suite (U_n) converge vers une limite L.

Comme (U_n) converge, on peut passer à la limite dans la relation de récurrence ce qui donne $L = \dfrac{1}{2}\left(L + \dfrac{a}{L}\right) \Leftrightarrow 2L = L + \dfrac{a}{L} \Leftrightarrow 2L = \dfrac{L^2 + a}{L} \Leftrightarrow L^2 = a$.

Comme $L \geq 0$ puisque $U_n > 0$ on en déduit que $L = \sqrt{a}$.

Finalement, (U_n) converge vers $\sqrt{a}$.

5) Pour l'algorithme en langage Python on prend par exemple $U_0 = 4$ (entier le plus proche de $\sqrt{17}$) et $a = 17$ ce qui donne :

```
def f(x):
    return 0.5*(x+(17/x))
def u(n):
    u=4
    for i in range(1,n+1):
        u=f(u)
    return(u)
```

En mode « Run », on les valeurs $n = 10$ et $n = 11$ (assez grandes pour assurer les dix premières décimales égales !) et l'on obtient :

```
>>> u(10)
4.123105625617661
>>> u(11)
4.123105625617661
```

On obtient 4,1231056256 comme valeur arrondie à dix décimales de $\sqrt{17}$.

7 Suites arithmétiques et géométriques – Méthodes 6 et 7

Les deux suites (U_n) et (V_n) définies par $\begin{cases} U_3 = 4 \\ U_{n+1} = U_n + 2 \end{cases}$ et $\begin{cases} V_1 = 4 \\ V_{n+1} = 5V_n \end{cases}$ sont respectivement arithmétique et géométrique donc on va appliquer les formules données dans le tableau de la méthode 6 (T signifie termes) :

	Suites arithmétiques $U_{n+1} = U_n + r$	**Suites géométriques** $U_{n+1} = qU_n$ **où** $q \neq 1$
Expression de U_n	$U_n = U_p + (n-p)r$	$U_n = q^{(n-p)}U_p$
Somme de termes consécutifs	$(\text{Nb de T})\left(\dfrac{1^{er}\,T + DT}{2}\right)$	$(1^{er}\,T)\left(\dfrac{1-q^{(\text{Nb de T})}}{1-q}\right)$

1) La suite (U_n) est arithmétique de raison 2 et l'on connaît U_3 donc en appliquant la formule on a : $U_n = U_3 + (n-3) \times 2 = 4 + 2n - 6 = 2n - 2$.

La suite (V_n) est géométrique de raison 5 et l'on connaît V_1 donc en appliquant la formule on obtient : $V_n = 5^{n-1}V_1 = 5^{n-1} \times 4$.

2) En appliquant la formule relative aux termes consécutifs de la suite arithmétique (U_n) on obtient :

$$S = \sum_{k=4}^{20} U_k = 17 \times \left(\frac{U_4 + U_{20}}{2}\right) = 17 \times \left(\frac{6+38}{2}\right) = 374.$$

En appliquant la formule relative aux termes consécutifs de la suite géométrique (V_n) on obtient :

$$T=\sum_{k=0}^{10}V_k=V_0\times\frac{1-5^{11}}{1-5}=\frac{4}{5}\times\frac{5^{11}-1}{5-1}=\frac{4}{5}\times\frac{5^{11}-1}{4}=\frac{5^{11}-1}{5}=\frac{48828124}{5}.$$

8 Suites arithmético-géométrique – Méthodes 6, 7, 12 et 16

1) En 2020, le nombre d'abonnés est de 20 millions donc $U_0=20$.

D'une année à l'autre, il reste $\left(1-\frac{8}{100}\right)U_n=0{,}92U_n$ abonnés et il y a 3 millions de nouveaux abonnés donc on a bien $U_{n+1}=0{,}92U_n+3$.

2) Comme $V_n=U_n-37{,}5$ on a : $V_n+37{,}5=U_n$ * (**c'est l'étoile qui consiste à exprimer U_n en fonction de V_n dont on a parlé à la méthode 7**).

On a :

$$V_{n+1}=U_{n+1}-37{,}5=0{,}92U_n+3-37{,}5=0{,}92U_n-34{,}5\overset{\text{d'après *}}{=}0{,}92(V_n+37{,}5)-34{,}5$$
$$=0{,}92U_n+34{,}5-34{,}5=0{,}92U_n$$

On en déduit que la suite (V_n) est géométrique de raison $q=0{,}92$ et de premier terme $V_0=U_0-37{,}5=20-37{,}5=-17{,}5$.

3) D'après la question précédente, $V_n=q^nV_0=-17{,}5\times(0{,}92)^n$, **donc en utilisant l'étoile une deuxième fois**, $U_n=V_n+37{,}5=37{,}5-17{,}5\times0{,}92^n$.

4) Comme $0\le0{,}92<1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}0{,}92^n=0$ donc $\lim U_n=37{,}5$ ce qui prouve qu'il existe un indice n_0 tel que $U_{n_0}\ge30$.

L'algorithme en langage Python qui donne le seuil n_0 cherché est le suivant :

```
def f(x):
    return 0.92*x+3
def s(b):
    u=20
    n=0
    while u<=b:
        n=n+1
        u=f(u)
    return(n)
```

En mode « Run » on obtient :

```
>>> s(30)
11
```

Finalement l'année cherchée est $2020+11=2031$.

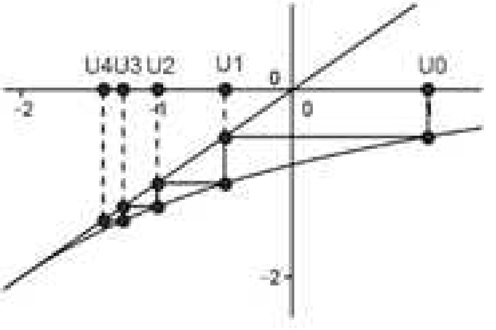
9 Suite définie par son premier terme et la relation de récurrence $U_{n+1} = f(U_n)$ avec f croissante et suite auxiliaire arithmétique – Méthodes 2, 5, 6, 7, 12 et 14

On a les suites (U_n) et (V_n) telles que :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n - 4}{U_n + 5} \end{cases} \text{ et } V_n = \frac{1}{U_n + 2}.$$

Partie A

1) Le graphe « WEB » relatif à la suite (U_n) est le suivant :



On peut conjecturer que (U_n) est décroissante, majorée par 1, minorée par −2 et convergente vers −2.

2) Pour montrer que (U_n) est décroissante, majorée par 1, minorée par −2, il suffit de prouver par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(P_n) : -2 < U_{n+1} \leq U_n \leq 1$ est vraie.

Avant de se « lancer » dans la récurrence, comme on aura à composer l'inégalité de réccurence par f définie par $f(x) = \dfrac{x-4}{x+5}$, nous allons dresser son tableau de variations de f sur $[-2;1]$.

La fonction f est dérivable sur $[-2;1]$ et $f'(x) = \dfrac{(x+5)-(x-4)}{(x+5)^2} = \dfrac{9}{(x+5)^2} > 0$ sur $[-2;1]$, donc f est strictement croissante sur $[-2;1]$.

Initialisation : (P_0) est-elle vraie ?

$U_0 = 1$ et $U_1 = -\dfrac{1}{2}$ donc (P_0) : $-2 < U_1 \leq U_0 \leq 1$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que (P_n) est vraie.

D'après l'hypothèse de récurrence (P_n) : $-2 < U_{n+1} \leq U_n \leq 1$ est vraie.

Comme f est strictement croissante sur $[-2;1]$:

$$-2 < U_{n+1} \leq U_n \leq 1 \Rightarrow f(-2) < f(U_{n+1}) \leq f(U_n) \leq f(1).$$

Or $-2 = f(-2)$, $f(U_{n+1}) = U_{n+2}$, $f(U_n) = U_{n+1}$ et $f(1) = -\frac{1}{2} \leq 1$, donc :

$$(P_{n+1}) : \ -2 < U_{n+2} \leq U_{n+1} \leq 1 \text{ est vraie.}$$

Finalement pour tout $n \in \mathbb{N}$, (P_n) est vraie $\Rightarrow (P_{n+1})$ est vraie.

Conclusion : Par récurrence, (P_n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) La suite (U_n) est décroissante minorée donc d'après un des théorèmes de convergence monotone on en déduit que (U_n) converge vers une limite L.

Comme (U_n) est **convergente**, on peut passer à la limite dans la relation de récurrence ce qui donne $L = f(L)$, donc L est solution de $f(x) = x$.
On a :

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{x-4}{x+5} = x$$

$$\Leftrightarrow x - 4 = x^2 + 5x \text{ et } x \neq -5 \Rightarrow x^2 + 4x + 4 = 0 \text{ et } x \neq -5 \ \Leftrightarrow x = -2$$

Finalement $L = -2$ et donc la suite (U_n) converge vers -2.

Partie B

1) D'après le 2) de la partie A :
$\forall n \in \mathbb{N}$, $-2 < U_n \leq 1$, donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \neq -5$ et $U_n \neq -2$ et par conséquent les suites (U_n) et (V_n) sont définies pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) $V_{n+1} - V_n = \dfrac{1}{U_{n+1}+2} - \dfrac{1}{U_n+2} = \dfrac{1}{\dfrac{U_n-4}{U_n+5}+2} - \dfrac{1}{U_n+2}$

$$= \frac{U_n+5}{3U_n+6} - \frac{1}{U_n+2} = \frac{U_n+5-3}{3(U_n+2)} = \frac{U_n+2}{3(U_n+2)} = \frac{1}{3}$$

Donc on en déduit que $V_{n+1} = V_n + \frac{1}{3}$.

Finalement (V_n) est arithmétique de raison $\frac{1}{3}$ de premier terme $V_0 = \dfrac{1}{U_0+2} = \dfrac{1}{3}$ (c'est une coïncidence que le premier terme et la raison soient identiques).

3) D'après la question précédente : $V_n = V_0 + n \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3} + \frac{n}{3} = \frac{n+1}{3}$.

Comme $V_n = \dfrac{1}{U_n+2}$, on a $\dfrac{1}{V_n} = U_n + 2$ donc :

$$U_n = \frac{1}{\frac{n+1}{3}} - 2 = \frac{3}{n+1} - 2 = \frac{-2n+1}{n+1}.$$

4) On a $U_n = f(n)$ avec f définie par $f(x) = \frac{-2x+1}{x+1}$.

La fonction f est définie, dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$ et l'on a $f'(x) = \frac{(-2)(x+1)-(-2x+1)(1)}{(x+1)^2} = \frac{-3}{(x+1)^2} < 0$ d'où le tableau de variations :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
f	1	$\searrow$	-2

On retrouve bien que (U_n) est décroissante, que $U_n \in \,]-2;1]$ et que $\lim U_n = -2$.

10 **Suite définie par son premier terme et la relation de récurrence $U_{n+1} = f(U_n)$ avec f croissante et suite auxiliaire géométrique – Méthodes 3, 5, 6, 7, 12 et 14**

On a les suites (U_n) et (V_n) telles que :

$$\begin{cases} U_0 = 5 \\ U_{n+1} = \frac{2U_n+2}{U_n+3} \end{cases} \text{ et } V_n = \frac{U_n+2}{U_n-1}.$$

Partie A

1) On utilise l'algorithme suivant pour émettre les conjectures relatives au comportement de la suite (U_n) :

```
def f(x):
    return (2*x+2)/(x+3)
def u(n):
    u=5
    for i in range(1,n+1):
        u=f(u)
    return(u)
```

En mode « Run », on obtient :

```
>>> u(1)
1.5
>>> u(2)
1.1111111111111112
>>> u(3)
1.0270270270270272
>>> u(50)
1.0
>>> u(100)
1.0
```

On peut conjecturer que (U_n) est décroissante, minorée par 1, majorée par 5 et converge vers 1.

2) Pour montrer que (U_n) est décroissante, majorée par 5, minorée par 1, il suffit de prouver par récurrence que la propriété suivante est vraie :

$$\text{Pour tout } n \in \mathbb{N},\ (P_n):\ 1 < U_{n+1} \le U_n \le 5.$$

Avant de se « lancer » dans la récurrence, comme on aura à composer l'inégalité de récurrence par f définie par $f(x) = \dfrac{2x+2}{x+3}$, nous allons étudier la monotonie de f sur $[1;5]$.

La fonction f est dérivable sur $[1;5]$ et l'on a :

$$f'(x) = \frac{(2)(x+3)-(2x+2)(1)}{(x+3)^2} = \frac{4}{(x+3)^2} > 0 \text{ sur } [1;5].$$

Finalement la fonction f est strictement croissante sur $[1;5]$.

Initialisation : (P_0) est-elle vraie ?

$U_0 = 5$ et $U_1 = \dfrac{3}{2}$ donc (P_0) : $1 < U_1 \le U_0 \le 5$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que (P_n) est vraie.

D'après l'hypothèse de récurrence (P_n) : $1 < U_{n+1} \le U_n \le 5$ est vraie.

Comme f est strictement croissante sur $[1;5]$:

$$1 < U_{n+1} \le U_n \le 5 \Rightarrow f(1) < f(U_{n+1}) \le f(U_n) \le f(5).$$

Or $1 = f(1)$, $f(U_{n+1}) = U_{n+2}$, $f(U_n) = U_{n+1}$, et $f(5) = \dfrac{3}{2} \le 5$, donc on a :

$$(P_{n+1}):\ 1 < U_{n+2} \le U_{n+1} \le 5 \text{ est vraie.}$$

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, (P_n) est vraie $\Rightarrow (P_{n+1})$ est vraie.

Conclusion : Par récurrence, (P_n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) La suite (U_n) est décroissante minorée donc d'après un des théorèmes de convergence monotone on en déduit que (U_n) converge vers une limite L.

Comme (U_n) est **convergente**, on peut passer à la limite dans la relation de récurrence ce qui donne $L = f(L)$, donc L est solution de $f(x) = x$.

On a :

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{2x+2}{x+3} = x$$

$$\Leftrightarrow 2x+2 = x^2+3x \text{ et } x \ne -3 \Rightarrow x^2+x-2=0 \text{ et } x \ne -3 \Leftrightarrow x=-2 \text{ ou } x=1$$

Finalement, comme $U_n > 1$, $L = 1$ et la suite (U_n) converge vers 1.

Partie B

1) D'après la deuxième question de la partie précédente $\forall n \in \mathbb{N},\ 1 < U_n \leq 5$, donc $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n \neq -3$ et $U_n \neq 1$ et par conséquent les suites (U_n) et (V_n) sont définies pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) Comme $V_{n+1} = \dfrac{U_{n+1}+2}{U_{n+1}-1} = \dfrac{\dfrac{2U_n+2}{U_n+3}+2}{\dfrac{2U_n+2}{U_n+3}-1} = \dfrac{\dfrac{4U_n+8}{U_n+3}}{\dfrac{U_n-1}{U_n+3}} = \dfrac{4U_n+8}{U_n-1} = 4\times\dfrac{U_n+2}{U_n-1} = 4V_n$ la suite (V_n) est donc géométrique de raison 4 et de premier terme $V_0 = \dfrac{U_0+2}{U_0-1} = \dfrac{7}{4}$.

3) D'après la question précédente : $V_n = 4^n V_0 = 4^n \times \dfrac{7}{4} = 4^{n-1}\times 7$.

Exprimons U_n en fonction de V_n, puis U_n en fonction n en utilisant l'expression précédente.

On a :

$$V_n = \frac{U_n+2}{U_n-1} \Leftrightarrow V_n(U_n-1) = U_n+2$$

$$\Leftrightarrow U_nV_n - U_n = V_n+2 \Leftrightarrow U_n(V_n-1) = V_n+2 \Leftrightarrow U_n = \frac{V_n+2}{V_n-1}$$

Finalement, on obtient : $U_n = \dfrac{4^{n-1}\times 7+2}{4^{n-1}\times 7-1}$.

4) On peut écrire $U_n = \dfrac{7+\dfrac{2}{4^{n-1}}}{7-\dfrac{1}{4^{n-1}}}$, donc comme $4>1$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} 4^{n-1} = +\infty$ et par conséquent $\lim U_n = 1$ (on doit savoir par coeur que pour $q>1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$).

11 Modèle d'évolution – Système de deux suites – Méthodes 3, 6, 7, 12 et 16

1) On a : $\begin{cases} a_{n+1} = 0{,}8a_n + 0{,}3b_n \\ b_{n+1} = 0{,}2a_n + 0{,}7b_n \end{cases}$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ a_n + b_n = 50$.

Par conséquent : $\begin{cases} a_{n+1} = 0{,}8a_n + 0{,}3\times(50-a_n) \\ b_{n+1} = 0{,}2(50-b_n) + 0{,}7b_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{n+1} = 0{,}5a_n + 15 \\ b_{n+1} = 0{,}5b_n + 10 \end{cases}$.

2) On a : $A_{n+1} = a_{n+1} - 30 = 0{,}5\times a_n + 15 - 30 = 0{,}5\times a_n - 15 = 0{,}5(a_n - 30) = 0{,}5\times A_n$, donc la suite (A_n) est géométrique de raison 0,5 et de premier terme $A_0 = -5$.

On a : $B_{n+1} = b_{n+1} - 20 = 0,5 \times b_n + 10 - 20 = 0,5 \times b_n - 10 = 0,5\ (b_n - 20\ ) = 0,5\ \times B_n$, donc la suite (B_n) est géométrique de raison 0.5 et de premier terme $B_0 = 5$.

3) On déduit de la question précédente que :

$$A_n = (0,5)^n A_0 = (0,5)^n \times (-5) \text{ et } B_n = (0,5)^n B_0 = (0,5)^n \times (5).$$

Finalement :

$(0,5)^n(-5) = A_n = a_n - 30 \Rightarrow a_n = (0,5)^n(-5) + 30$ et

$(0,5)^n(5) = B_n = b_n - 20 \Rightarrow b_n = (0,5)^n(5) + 20$.

4) On a :

$$a_{n+1} - a_n = (0,5)^{n+1}(-5) - (0,5)^n(-5) = (0,5)^n(-5)(0,5-1) = (0,5)^n(-5)(-0,5) > 0.$$

Finalement pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} > a_n$ et la suite (a_n) est croissante.

On a :

$$b_{n+1} - b_n = (0,5)^{n+1}(5) - (0,5)^n(5) = (0,5)^n(5)(0,5-1) = (0,5)^n(5)(-0,5) < 0.$$

Finalement pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} < b_n$ et la suite (b_n) est décroissante.

Interprétation : Le nombre d'oiseaux de l'île Maurice augmente et celui de l'île de la Réunion diminue.

5) Comme $-1 < 0,5 < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,5^n = 0$ et les suites (a_n) et (b_n) convergent respectivement vers 30 et 20.

Interprétation : Au bout d'un relativement grand nombre d'années le nombre d'oiseaux de l'île Maurice sera proche de 30 millions et celui de l'île de la Réunion proche de 20 millions.

6) L'algorithme suivant permet de répondre à la question :

```
def f(x):
    return 0.5*x+15
def s(b):
    u=25
    n=0
    while u<=b:
        n=n+1
        u=f(u)
    return(n)
```

En mode « Run » on obtient :

```
>>> s(29)
3
```

L'algorithme renvoie le seuil $n = 3$, ce qui correspond au 1er juillet 2017.

12 Exercice théorique utilisant les définitions des limites – Méthode 11

1) Soit (U_n) une suite croissante non majorée et $A > 0$.

La suite (U_n) n'est pas majorée donc il existe un rang n_0 tel que $A \le U_{n_0}$. Comme d'autre part la suite (U_n) est croissante : $\forall n \ge n_0,\ U_{n_0} \le U_n$ et donc $\forall n \ge n_0,\ A \le U_{n_0} \le U_n$, ce qui prouve qu'à partir du rang n_0 tous les termes de la suite sont dans l'intervalle $[A; +\infty[$ et donc que $\lim U_n = +\infty$.

2) Soit (V_n) une suite décroissante non minorée.

La suite (W_n) telle que $W_n = -V_n$ est croissante non majorée donc d'après la question précédente $\lim W_n = +\infty$, d'où $\lim(-V_n) = +\infty$ et par suite $\lim V_n = -\infty$.

3) On a la suite (U_n) telle que $U_n = \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

a) On a : $\forall n \in \mathbb{N}^*\ U_{2n} - U_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n}$.

Cette dernière somme de n termes a tous ses termes supérieurs ou égaux au dernier qui est $\frac{1}{2n}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}^*\ U_{2n} - U_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \ge n \times \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}$.

b) On a $U_{n+1} - U_n = \sum_{k=1}^{k=n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{k=n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} > 0$ donc la suite (U_n) est croissante.

Supposons que la suite (U_n) est majorée.

D'après un des théorèmes de convergence monotone comme la suite (U_n) est croissante majorée elle converge vers une limite L.

En prenant $\varepsilon = \frac{1}{10}$, comme la suite (U_n) converge vers L, en utilisant la définition de la convergence de (U_n) vers L, il existe un rang $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \ge n_0,\ |U_n - L| < \frac{1}{10}$ (i).

Comme on a $2n > n \ge n_0$, on en déduit que $\forall n \ge n_0,\ |U_{2n} - L| < \frac{1}{10}$ (ii).

Finalement, en utilisant a), (i) et (ii) : $\forall n \ge n_0,\ \frac{1}{2} \le |U_{2n} - U_n| \Rightarrow$

$$\frac{1}{2} \le |(U_{2n} - L) + (L - U_n)| \le |U_{2n} - L| + |L - U_n| = |U_{2n} - L| + |U_n - L| < \frac{1}{10} + \frac{1}{10} = \frac{1}{5}$$

Ainsi on obtient : $\frac{1}{2} < \frac{1}{5}$, ce qui est absurde.

Par l'absurde, la suite (U_n) est non majorée.

Finalement comme la suite (U_n) est croissante non majorée, d'après un des théorèmes de convergence monotone on en déduit que $\lim U_n = +\infty$.

13 Approximation par dichotomie de la solution d'une équation - Méthode 17

On a la fonction f définie sur $\lfloor 0;2 \rfloor$ par $f(x)=e^x+2x-4$.

1) La fonction f est dérivable sur $\lfloor 0;2 \rfloor$ et l'on a $f'(x)=e^x+2>0$ donc elle est strictement croissante sur $\lfloor 0;2 \rfloor$ avec $f(0)=-3<0$ et $f(2)=e^2>0$.

2) La fonction f est continue et strictement monotone de $I=\lfloor 0,2 \rfloor$ sur $J=\lfloor -3,e^2 \rfloor$.

Comme $0\in J$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires pour les fonctions strictement monotones l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α sur I.

3) L'algorithme en langage Python demandé est le suivant :

```
from math import exp
def f(x):
    return exp(x)+2*x-4
def dicho(a,b,i,k):
    c=f(a)
    while((b-a)>i):
        d=(a+b)/2
        e=f(d)
        if(((k-e)*(k-c))<0):
            b=d
        else:
            a=d
    return(a,b)
```

En mode « Run » on obtient :

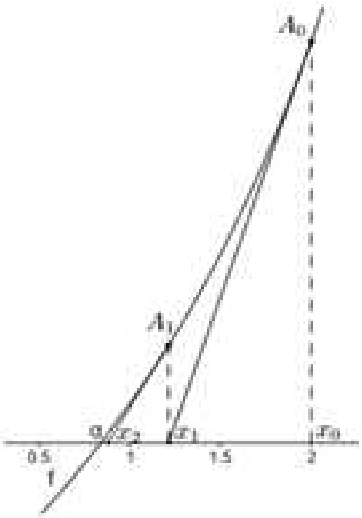
```
>>> dicho(0,2,0.000000001,0)
(0.840841494500637, 0.8408414954319596)
```

Le couple que l'on vient d'obtenir donne l'encadrement :

$$0{,}840841<\alpha<0{,}840842.$$

14 Approximation par la méthode de Newton-Raphson et de la sécante de la solution d'une équation – Méthodes 3 et 14

On a la figure suivante avec les notations de l'exercice précédent :



1) Exprimons x_1 en fonction de x_0, $f(x_0)$ et $f'(x_0)$.

L'équation de la tangente en A_0 est $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ et donc x_1 est solution de $0 = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ ce qui donne $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$.

2) Exprimons x_{n+1} en fonction de x_n, $f(x_n)$ et $f'(x_{n+1})$.

L'équation de la tangente en A_n est $y = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n)$ et donc x_{n+1} est solution de $0 = f'(x_n)(x - x_n) + f(x_n)$ ce qui donne $x_{n+1} = x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}$.

3) On peut répondre à la question avec l'algorithme suivant :

```
from math import exp
def f(x):
    return exp(x)+2*x-4
def deriv_f(x):
    return exp(x)+2
def u(n):
    u=3
    for i in range(1,n+1):
        u=u-(f(u))/(deriv_f(u))
    return(u)
```

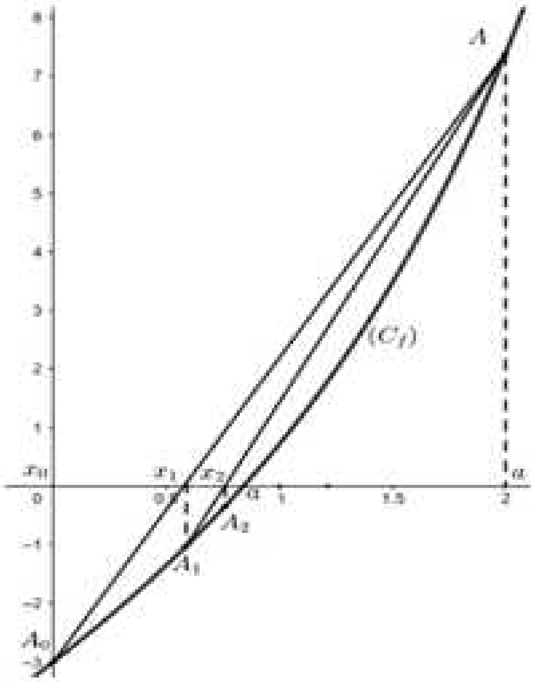
En mode « Run » on obtient :

```
>>> u(10)
0.8408414953783738
>>> u(11)
0.8408414953783738
```

Une approximation de α à 10^{-6} près est donc 0,840841.

Partie B – Algorithme de la sécante

On a la figure suivante avec les notations de l'exercice précédent :



1) Exprimons x_1 en fonction de x_0, a, $f(x_0)$ et $f(a)$.

L'équation réduite de (A_0A) est $y = mx + p$ avec $m = \dfrac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a}$ et p solution de $f(a) = m \times a + p$ ce qui donne $p = f(a) - m \times a$.

L'équation de (A_0A) est donc $y = m(x-a) + f(a) = \dfrac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a}(x-a) + f(a)$.

Comme x_1 est l'abscisse du point d'intersection entre (A_0A) et l'axe des abscisses on a : $0 = \dfrac{f(x_0) - f(a)}{x_0 - a}(x_1 - a) + f(a)$, donc $x_1 = a - \dfrac{x_0 - a}{f(x_0) - f(a)} f(a)$.

2) Exprimons x_{n+1} en fonction de x_n, a, $f(x_n)$ et $f(a)$.

L'équation réduite de $(A_{n-1}A)$ est $y = mx + p$ avec $m = \dfrac{f(x_{n-1}) - f(a)}{x_{n-1} - a}$ et p solution de $f(a) = m \times a + p$ ce qui donne $p = f(a) - m \times a$.

L'équation de $(A_{n-1}A)$ est donc $y = m(x-a) + f(a) = \dfrac{f(x_{n-1}) - f(a)}{x_{n-1} - a}(x-a) + f(a)$.

Comme x_n est l'abscisse du point d'intersection entre $(A_{n-1}A)$ et l'axe des abscisses on a : $0 = \dfrac{f(x_{n-1}) - f(a)}{x_{n-1} - a}(x_n - a) + f(a)$, donc $x_n = a - \dfrac{x_{n-1} - a}{f(x_{n-1}) - f(a)} f(a)$.

3) On peut répondre à la question avec l'algorithme suivant :

```
from math import exp
def f(x):
    return exp(x)+2*x-4
def u(n,a):
    u=0
    for i in range(1,n+1):
        u=a-((u-a)/(f(u)-f(a))*f(a))
    return(u)
```

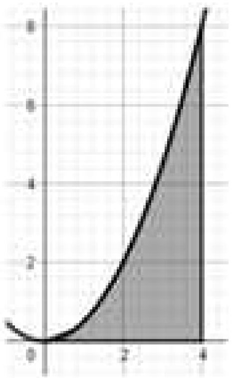
En mode « Run » on obtient :

```
>>> u(20,2)
0.8408414952581311
>>> u(21,2)
0.8408414953395877
```

Une approximation de α à 10^{-4} près est donc 0,840841.

15 Approximation d'une aire par la méthode des rectangles – Méthode 18

On a la fonction f définie par $f(x)=0{,}5x^2$ et l'aire (A) grisée qui représente l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que : $\begin{cases} 0\le x\le 4 \\ 0\le y\le f(x) \end{cases}$.



L'algorithme suivant répond à la question :

```
def f(x):
    return 0.5*x**2
def aire(a,b,n):
    from math import sqrt
    s=sqrt(a)
    t=sqrt(b)
    for i in range(1,n):
        s=s+f(a+i*((b-a)/n))
        t=t+f(b-i*((b-a)/n))
        u=s*((b-a)/n)
        v=t*((b-a)/n)
        d=abs(u-v)
    return(u,v,d)
```

En mode « Run » on obtient :

```
>>> aire(0,4,10000000)
(10.666665066667504, 10.666665866666067, 7.999985633944107e-07)
```

Un encadrement d'amplitude 10^{-6} de l'aire (A) donc :

$$10{,}666666665 < (A) < 10{,}666666.$$

$\boxed{16}$ Suites adjacentes – Encadrement du nombre d'or $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ par deux rationnels – Méthodes 3, 5 et 13

Propriété admise (démontrée à la méthode 11) : Tous les termes d'une suite croissante convergente sont inférieurs à sa limite et tous les termes d'une suite décroissante convergente sont supérieurs à sa limite.

La fonction f est définie sur $[1;2]$ par $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+1}$.

1) La fonction f est dérivable sur $[1;2]$ et

$f'(x)=\dfrac{2(x+1)-(2x+1)(1)}{(x+1)^2}=\dfrac{1}{(x+1)^2}>0$ sur $[1;2]$, donc la fonction f est strictement croissante sur $[1;2]$.

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	1		2
f	$\frac{3}{2}$	$\nearrow$	$\frac{5}{3}$

Comme $\left[\frac{3}{2};\frac{5}{3}\right]\subset[1;2]$, on déduit du tableau précédent que $\forall x\in[1;2], f(x)\in[1;2]$.

2) On a (U_n) et (V_n) telles que $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$ et $\begin{cases} V_0 = 2 \\ V_{n+1} = f(V_n) \end{cases}$.

a) Conjecturons le comportement de chaque suite avec l'algorithme suivant :

```
def f(x):
    return (2*x+1)/(x+1)
def c(n):
    u=1
    v=2
    for i in range(1,n+1):
        u,v=f(u),f(v)
    return(u,v)
```

En mode « Run » on obtient :

```
>>> c(1)
(1.5, 1.6666666666666667)
>>> c(2)
(1.6, 1.625)
>>> c(3)
(1.6153846153846154, 1.619047619047619)
>>> c(50)
(1.618033988749895, 1.618033988749895)
>>> c(100)
(1.618033988749895, 1.618033988749895)
```

On conjecture que la suite (U_n) est croissante, minorée par 1, majorée par 2 et converge vers une limite L dont une valeur approchée à 10^{-15} près est 1,618033988749895.
On conjecture que la suite (V_n) est décroissante, minorée par 1, majorée par 2 et converge vers une limite L dont une valeur approchée à 10^{-3} près est 1,618033988749895.

b) Montrons par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$
$(P_n) : 1 \le U_n \le U_{n+1} \le 2$ et $1 \le V_{n+1} \le V_n \le 2$ est vraie.

Initialisation : (P_0) est-elle vraie ?

$U_0 = 1$, $U_1 = \dfrac{3}{2}$, $V_0 = 2$ et $V_1 = \dfrac{5}{3}$ donc (P_0) : $1 \le U_0 \le U_1 \le 2$ et $1 \le V_1 \le V_0 \le 2$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que (P_n) est vraie.

D'après l'hypothèse de récurrence (P_n) : $1 \le U_n \le U_{n+1} \le 2$ et $1 \le V_{n+1} \le V_n \le 2$ est vraie.
Comme f est croissante sur $[1;2]$ et que pour tout x de $[1;2]$ on a $f(x) \in [1;2]$ d'après 1) on en déduit $1 \le f(U_n) \le f(U_{n+1}) \le 2$ et $1 \le f(V_{n+1}) \le f(V_n) \le 2$.

Comme $f(U_n) = U_{n+1}$, $f(U_{n+1}) = U_{n+2}$, $f(V_n) = V_{n+1}$ et $f(V_{n+1}) = V_{n+2}$ d'après l'inégalité précédente (P_{n+1}) : $1 \le U_n \le U_{n+1} \le 2$ et $1 \le V_{n+1} \le V_n \le 2$ est vraie.
Finalement pour tout $n \in \mathbb{N}$, (P_n) est vraie $\Rightarrow (P_{n+1})$ est vraie .

Conclusion : Par récurrence, (P_n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) On déduit de la question précédente que la suite (U_n) est croissante majorée (par 2).
D'après un des théorèmes de convergence monotone on en déduit que (U_n) converge vers une limite L.
Comme (U_n) converge, on peut passer à la limite dans la relation de récurrence ce qui donne $\frac{2L+1}{L+1} = L$.
Ainsi, L est une solution de l'équation $f(x) = x$.

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{2x+1}{x+1} = x \Leftrightarrow 2x+1 = x(x+1) \text{ et } x \ne -1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \text{ et } x \ne -1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0{,}618 \text{ ou } x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1{,}618.$$

Finalement, comme $L \in [1,2]$, on en déduit que $L = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

De même comme (V_n) est décroissante minorée (par 1), d'après un des théorèmes de convergence monotone on en déduit que (V_n) converge vers une limite L.
Comme (V_n) converge, on peut passer à la limite dans la relation de récurrence ce qui donne $\frac{2L+1}{L+1} = L$ et donc $L = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ comme dans la question précédente.

3) Montrons la propriété :

$$(Q_n) : \forall n \in \mathbb{N},\ V_{n+1} - U_{n+1} = \frac{V_n - U_n}{(U_n+1)(V_n+1)} \le \frac{1}{4}(V_n - U_n).$$

Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$V_{n+1} - U_{n+1} = \frac{2V_n+1}{V_n+1} - \frac{2U_n+1}{U_n+1} = \frac{(2V_n+1)(U_n+1) - (2U_n+1)(V_n+1)}{(U_n+1)(V_n+1)} = \frac{V_n - U_n}{(U_n+1)(V_n+1)}.$$

$\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \le U_n \le 2 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ 0 < 2 \le U_n + 1 \le 3 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ 0 < \frac{1}{U_n+1} \le \frac{1}{2}$ et de même on montre que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < \frac{1}{V_n+1} \le \frac{1}{2}$, ce qui permet de déduire que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < \frac{1}{U_n+1} \times \frac{1}{V_n+1} \le \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Comme $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < \frac{1}{(U_n+1)(V_n+1)} \leq \frac{1}{4}$ et que $V_n - U_n \geq 0$ (car d'après la propriété admise en introduction $U_n \leq L \leq V_n$), on en déduit finalement que $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 < \frac{V_n - U_n}{(U_n+1)(V_n+1)} \leq \frac{1}{4}(V_n - U_n)$, ce qui démontre que la propriété (Q_n) : $\forall n \in \mathbb{N},\ V_{n+1} - U_{n+1} = \frac{V_n - U_n}{(U_n+1)(V_n+1)} \leq \frac{1}{4}(V_n - U_n)$ est vraie.

4) Déduisons par récurrence de l'inégalité précédente que la propriété (R_n) : $0 \leq V_n - U_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Comme $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq V_n - U_n$, il suffit de prouver par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$ la propriété (T_n) : $V_n - U_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$ est vraie.

Initialisation : (T_0) est-elle vraie ?

$U_0 = 1$ et $V_0 = 2$ donc (T_0) : $1 = V_0 - U_0 \leq \left(\frac{1}{4}\right)^0 = 1$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que (P_n) est vraie.

D'après l'hypothèse de récurrence (T_n) : $V_n - U_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$ est vraie.

D'après la question précédente que $V_{n+1} - U_{n+1} \leq \frac{1}{4}(V_n - U_n)$.

En multipliant par $\frac{1}{4}$ l'hypothèse de récurrence : $\frac{1}{4}(V_n - U_n) \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$.

Par conséquent $V_{n+1} - U_{n+1} \leq \frac{1}{4}(V_n - U_n) \leq \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}$ et donc (T_{n+1}) est vraie

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, (T_n) vraie $\Rightarrow (T_{n+1})$ vraie.

Conclusion : Par récurrence, (T_n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On en déduit que (R_n) : $0 \leq V_n - U_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5) Dans un premier temps, comme les deux suites (U_n) et (V_n) converge vers le nombre d'or $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, d'après la propriété admise en introduction $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n \leq \frac{1+\sqrt{5}}{2} \leq V_n$.

Dans un second temps, $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \le V_n - U_n \le \left(\frac{1}{4}\right)^n$ donc il suffit de trouver n_0 tel que $\left(\frac{1}{4}\right)^{n_0} \le 10^{-5}$ pour répondre à la question car U_{n_0} et V_{n_0} seront les deux rationnels qui « donnent » l'encadrement.

On obtient à la calculatrice que le plus petit indice n tel que $\left(\frac{1}{4}\right)^n < 10^{-5}$ est $n = 9$.

Finalement les rationnels $U_9 = \frac{6765}{4181}$ et $V_9 = \frac{10946}{6765}$ sont tels que $U_9 < \frac{1+\sqrt{5}}{2} < V_9$ avec $V_9 - U_9 < 10^{-5}$ ce qui répond à la question.

17 Avec deux suites interactives – Encadrement de $\sqrt{14}$ par deux rationnels

Méthodes 3, 5, 9, 12 et 15

Propriété admise (démontrée à la méthode 11) : Tous les termes d'une suite croissante convergente sont inférieurs à sa limite et tous les termes d'une suite décroissante convergente sont supérieurs à sa limite.

On a les suites (U_n) et (V_n) telles que :

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \dfrac{2U_nV_n}{(U_n+V_n)} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} V_0 = 7 \\ V_{n+1} = \dfrac{U_n+V_n}{2} \end{cases}.$$

1) L'algorithme suivant permet de conjecturer le comportement des suites.

```
def c(n):
    u=2
    v=7
    for i in range(1,n+1):
        u,v=(2*u*v)/(u+v),(u+v)/2
    return(u,v)
```

En mode « Run », on obtient :

```
>>> c(0)
(2, 7)
>>> c(1)
(3.111111111111111, 4.5)
>>> c(2)
(3.6788321167883216, 3.8055555555555554)
>>> c(3)
(3.741121014276813, 3.7421938361719382)
>>> c(50)
(3.7416573867739413, 3.7416573867739413)
```

On conjecture que la suite (U_n) est croissante, minorée par 2, majorée par 7 et converge vers une limite L dont une valeur approchée à 10^{-5} près est 3,74165.

On conjecture que la suite (V_n) est décroissante, minorée par 2, majorée par 7 et converge vers une limite L dont une valeur approchée à 10^{-5} près est 3,74165.

2) Montrons par récurrence la propriété (P_n) : $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n > 0$ et $V_n > 0$.

Initialisation : (P_0) est-elle vraie ?
$U_0 = 2 > 0$ et $V_0 = 7 > 0$ donc (P_0) est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que (P_n) est vraie.
D'après l'hypothèse de récurrence (P_n) : $U_n > 0$ et $V_n > 0$ est vraie.
Sous cette hypothèse, il est trivial que $U_{n+1} = \dfrac{2U_nV_n}{U_n + V_n} > 0$ et $V_{n+1} = \dfrac{U_n + V_n}{2} > 0$ et donc que (P_{n+1}) est vraie.
Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, (P_n) vraie $\Rightarrow (P_{n+1})$ vraie.

Conclusion : Par récurrence, (P_n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) On a la suite (W_n) telle que $W_n = V_n - U_n$.
a) Déterminons dans un premier temps W_{n+1} en fonction de U_n et V_n.

$$W_{n+1} = V_{n+1} - U_{n+1} = \frac{V_n + U_n}{2} - \frac{2V_nU_n}{V_n + U_n}$$

$$= \frac{(V_n + U_n)^2 - 4V_nU_n}{2(V_n + U_n)} = \frac{V_n^2 - 2V_nU_n + U_n^2}{2(V_n + U_n)} = \frac{(V_n - U_n)^2}{2(V_n + U_n)}$$

Dans la mesure où $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n > 0$ et $V_n > 0$, il est évident que $0 \leq W_{n+1}$.

D'autre part, $\forall n \in \mathbb{N},\ U_n > 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ -U_n < U_n \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ V_n - U_n < V_n + U_n$
$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ \dfrac{V_n - U_n}{V_n + U_n} \leq 1$ (i).

En remarquant que $W_{n+1} = \dfrac{(V_n - U_n)^2}{2(V_n + U_n)} = \dfrac{1}{2}(V_n - U_n) \times \dfrac{V_n - U_n}{V_n + U_n} = \dfrac{1}{2}W_n \times \dfrac{V_n - U_n}{V_n + U_n}$ et en utilisant l'inégalité précédente (i), que l'on multiplie membre à membre par $\dfrac{1}{2}W_n \geq 0$, on obtient $W_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}W_n$.
Finalement, $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq W_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}W_n$.

b) Montrons par récurrence la propriété (Q_n) : $\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq W_n \leq \dfrac{5}{2^n}$.

On a vu dans la question précédente que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_{n+1} \geq 0$, donc en remarquant que $W_0 = 5 \geq 0$, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $W_n \geq 0$.

Pour prouver que (Q_n) est vraie il suffit donc de prouver par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N},\ W_n \leq \dfrac{5}{2^n}$.

Initialisation : (Q_0) est-elle vraie ?

$W_0 = V_0 - U_0 = 5 \leq \dfrac{5}{2^0} = 5$ donc (Q_0) est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que (Q_n) est vraie.

D'après l'hypothèse de récurrence (Q_n) : $W_n \leq \dfrac{5}{2^n}$ est vraie.

D'après la question précédente on a $W_{n+1} \leq \dfrac{1}{2} W_n$.

En multipliant l'hypothèse de récurrence par $\dfrac{1}{2}$, on obtient $\dfrac{1}{2} W_n \leq \dfrac{5}{2^{n+1}}$, donc on en déduit que $W_{n+1} \leq \dfrac{1}{2} W_n \leq \dfrac{5}{2^{n+1}}$ et par conséquent que (Q_{n+1}) est vraie.

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, (Q_n) vraie $\Rightarrow (Q_{n+1})$ vraie .

Conclusion : Par récurrence, (Q_n) est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) Comme $2 > 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{5}{2^n} = 0$.

Pour tout $n \in \mathbb{N},\ 0 \leq W_n \leq \dfrac{5}{2^n}$, avec $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{5}{2^n} = 0$ donc d'après le théorème des gendarmes comme on en déduit que $\lim W_n = 0$.

4) $U_{n+1} - U_n = \dfrac{2U_nV_n}{U_n + V_n} - U_n$

$$= \frac{2U_nV_n - U_n(U_n + V_n)}{U_n + V_n} = \frac{U_nV_n - U_n^2}{U_n + V_n} = \frac{U_n(V_n - U_n)}{U_n + V_n} = \frac{U_nW_n}{U_n + V_n} \geq 0$$

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} \geq U_n$ et donc que la suite (U_n) est croissante.

$V_{n+1} - V_n = \dfrac{V_n + U_n}{2} - V_n = -\dfrac{V_n - U_n}{2} = -\dfrac{W_n}{2} \leq 0$.

On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} \leq V_n$ et donc que la suite (V_n) est décroissante.

5) D'après les deux questions précédentes les suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes donc elles convergent vers une même limite L.

6) Dans un premier temps dans la mesure où les deux suites (U_n) et (V_n) convergent vers la même limite on peut penser à passer à la limite dans les relations de convergence mais malheureusement on obtient dans les deux cas $L = L$, d'où **l'idée d'utiliser le coup de pouce.**

Ainsi, dans un second temps, comme
$T_{n+1} = U_{n+1}V_{n+1} = \frac{2U_nV_n}{U_n + V_n} \times \frac{U_n + V_n}{2} = U_nV_n = T_n$, on en déduit que la suite (T_n) est constante et donc que $T_n = T_0 = U_0V_0 = 14$.

Enfin, comme les deux suites (U_n) et (V_n) **convergent** vers la même limite L, alors on en déduit que :

$$\lim T_n = 14 \Rightarrow \lim U_nV_n = 14 \Rightarrow \lim U_n \times \lim V_n = 14 \Rightarrow L^2 = 14 \Rightarrow L = \sqrt{14} \text{ car } L > 0.$$

En utilisant la propriété donnée en introduction on a $U_n \leq \sqrt{14} \leq V_n$ et en utilisant $W_n = V_n - U_n \leq \frac{5}{2^n}$, il suffit de trouver un rang n_0 tel que $\frac{5}{2^{n_0}} \leq 10^{-3}$ pour répondre à la question car U_{n_0} et V_{n_0} seront les deux rationnels qui « donnent » l'encadrement.
On obtient à la calculatrice que le plus petit indice n tel que $\frac{5}{2^n} < 10^{-3}$ est $n_0 = 13$.

Finalement les rationnels U_{13} et V_{13} répondent à la question.

18 Récurrence double – Méthodes 3, 6 et 7

On a la suite (U_n) définie par $\begin{cases} U_0 = 0 \; ; \; U_1 = 2 \\ U_{n+2} = 4U_{n+1} + 5U_n \end{cases}$.

1) L'algorithme suivant permet de répondre à la question (il faut penser à utiliser la variable auxiliaire t au départ de la boucle et changer u en v puis v en t **dans cet ordre** sans quoi vous n'allez pas obtenir la récurrence double)

```
def u(n):
    u=0
    v=2
    for i in range(1,n):
        t=4*u+5*v
        u=v
        v=t
    return(t)
```

En mode « Run » on obtient :

```
>>> u(2)
10
>>> u(3)
58
>>> u(50)
19693870789207285141986868818398670250
```

On conjecture que la suite (U_n) est croissante, minorée par son premier terme $U_0 = 0$, non majorée et non convergente puisqu'elle semble tendre vers $+\infty$.

2) On a : $S_{n+1} = U_{n+2} + U_{n+1} = 4U_{n+1} + 5U_n + U_{n+1} = 5(U_{n+1} + U_n) = 5S_n$, donc la suite (S_n) est géométrique de raison 5 de premier terme $S_0 = U_0 + U_1 = 2$.
On en déduit que : $S_n = 5^n S_0 = 5^n \times 2$.

3) On a les suites (V_n) et (T_n) définies par $V_n = (-1)^n U_n$ et $T_n = V_{n+1} - V_n$.
a) On a :
$T_n = V_{n+1} - V_n$
$= (-1)^{n+1} U_{n+1} - (-1)^n U_n = (-1)^{n+1} U_{n+1} + (-1)^{n+1} U_n = (-1)^{n+1} (U_{n+1} + U_n) = (-1)^{n+1} S_n$

On en déduit alors que :

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} T_k = \sum_{k=0}^{k=n-1} (-1)^{k+1} \times S_k = \sum_{k=0}^{k=n-1} (-1)^{k+1} \times 5^k \times 2 = 2\sum_{k=0}^{k=n-1} (-1)^{k+1} \times 5^k = -2\sum_{k=0}^{k=n-1} (-5)^k$$

$$= -2 \times \frac{1-(-5)^n}{1-(-5)} = -2 \times \frac{1-(-5)^n}{6} = -\frac{2}{6} \times \left(1-(-5)^n\right) = \frac{1}{3}\left((-5)^n - 1\right).$$

b) D'autre part comme $T_n = V_{n+1} - V_n$ on a :

$$\sum_{k=0}^{k=n-1} T_k = \sum_{k=0}^{k=n-1} (V_{k+1} - V_k) = \sum_{k=0}^{k=n-1} V_{k+1} - \sum_{k=0}^{k=n-1} V_{k+1} = \sum_{k=1}^{k=n} V_k - \sum_{k=0}^{k=n-1} V_k = V_n - V_0 = (-1)^n U_n.$$

On en déduit que :

$$(-1)^n U_n = \frac{1}{3}\left((-5)^n - 1\right) \Rightarrow (-1)^{2n} U_n = \frac{(-1)^n}{3}\left((-5)^n - 1\right) \Rightarrow U_n = \frac{1}{3}\left(5^n - (-1)^n\right).$$

Chapitre 2

METHODES SUR DES FONCTIONS DE PREMIERE

EXERCICES & CORRIGES

Exercices

1 Comportement global (étude des variations et des bornes) – Méthodes 1 et 3

Etudiez les variations et les bornes des fonctions f suivantes sur l'intervalle I où elles sont définies.

1) f définie par $f(x)=x^2+6x-1$ sur $I=[-5;0]$.

2) f définie par $f(x)=2x^3+3x^2-12x+10$ sur $I=[-3;3]$.

3) f définie par $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+3}$ sur $I=[0;5]$.

4) f définie par $f(x)=(x+1)\sqrt{x}$ sur $I=[1;4]$.

5) f définie par $f(x)=\tan x-x$ sur $I=\left[-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right]$.

2 Comportement global (étude des variations et des bornes) – Méthodes 2 et 3

Etudiez les variations et les bornes des fonctions f suivantes sur l'intervalle I où elles sont définies.

1) f définie par $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$ sur $I=[-1;2]$.

2) f définie par $f(x)=(\cos x-x+1)^3$ sur $I=[-3\pi;2\pi]$.

3 Convexité – Méthodes 1, 2, 5 et 21

Etudiez la convexité des fonctions f suivantes sur l'intervalle I où elles sont définies et l'existence d'éventuels points d'inflexion relatifs à la courbe représentative de f.

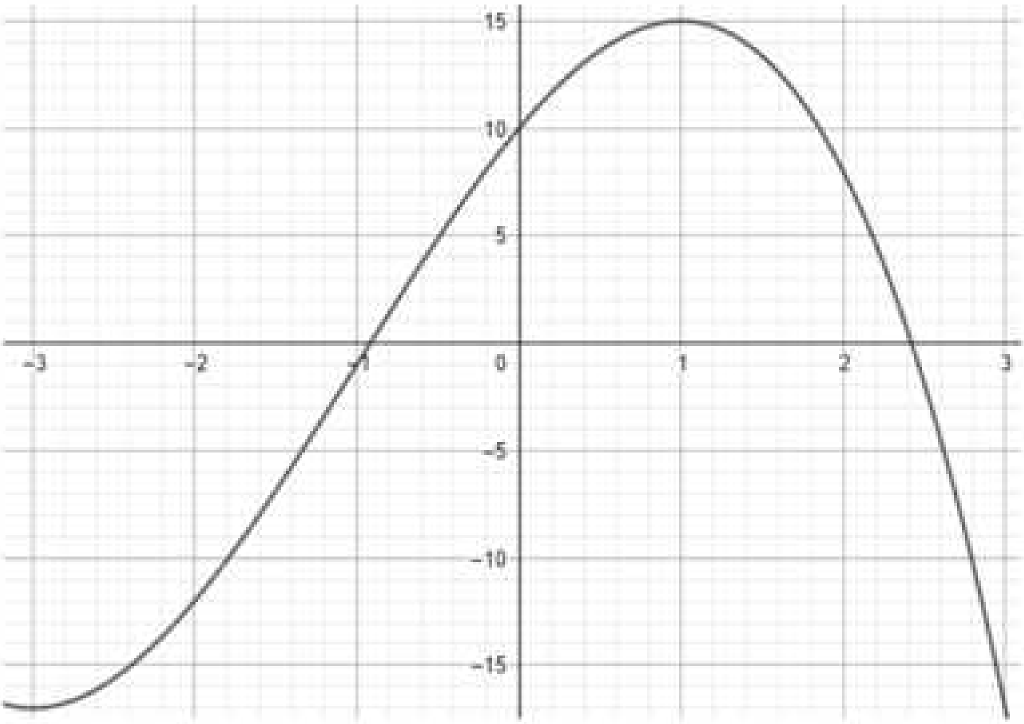
1) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3+3x^2-9x+6$.

2) f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2x+2}{x+3}$.

3) f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2}{(2x+3)^3}$.

4 Convexité – Méthodes 5 et 21

On considère la fonction f définie sur $[-3;3]$ dont la courbe représentative est la suivante :



1) Etudiez la convexité de f en précisant le ou les éventuels points d'inflexion.
2) Etudiez les variations de la fonction dérivée f' de f.

5 Comportement asymptotique et local – Méthodes 7, 11, 12 et 13

Etudiez le comportement des fonctions f suivantes aux bornes de leur ensemble de définition et donnez une équation des éventuelles asymptotes parallèles aux axes de leur courbe représentative.

1) f est définie par $f(x) = x^2 + 6x - 1$ sur $I = \mathbb{R}$.

2) f définie par $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 10$ sur $I = \mathbb{R}$.

3) f définie par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+3}$ sur $I = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

4) f définie par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2-1}$ sur $I = \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$.

5) f définie par $f(x) = \dfrac{2x^2 - x + 3}{x-1}$ sur $I = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

6) f définie par $f(x) = \dfrac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 1}$ sur $I = \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$.

6 Comportement asymptotique et local – Méthodes 8, 10, 14, 15, 16 et 17

Etudiez le comportement des fonctions f suivantes aux bornes de leur ensemble de définition.

1) f définie par $f(x) = x + \sin x$ sur $I = \mathbb{R}$.

2) f définie par $f(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ sur $I = \mathbb{R}^*$ (***coup de pouce*** : $\lim\limits_{u\to 0}\frac{\sin u}{u} = 1$).

3) f définie par $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} - x$ sur $\mathbb{R}$.

4) f définie par $f(x) = \dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{x-4}$ sur $[3,4[\cup]4,5]$ de deux façons.

5) f définie par $f(x) = \dfrac{\sin 5x}{x}$ sur $[-1,0[\cup]0,1]$.

7 Continuité et dérivabilité – Méthodes 15, 16 et 18

Etudiez la continuité et la dérivabilité des fonctions f suivantes au voisinage de a et donnez une interprétation graphique du résultat.

1) f définie par $\begin{cases} f(x) = -x^2 + 4 \text{ si } x \in [-2;2] \\ f(x) = x^2 - 4 \text{ si } x \in]-\infty;-2[\cup]2;+\infty[\end{cases}$ en $a = -2$ et $a = 2$.

2) f définie par $f(x) = |x^2 + x - 2|$ en $a = 1$.

3) f définie par $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sin 2x}{x} \\ f(0) = 1 \end{cases}$ en $a = 0$ (***coup de pouce*** : $\lim\limits_{u\to 0}\frac{\sin u}{u} = 1$).

4) f définie par en $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\cos x - 1}{x} \\ f(0) = 2 \end{cases}$ en $a = 0$ (***coup de pouce*** : utiliser un taux d'accroissement).

8 Approximation affine – Méthode 20

Donnez une approximation affine des fonctions f suivantes au voisinage de a, puis donnez sans calculatrice une approximation du nombre $f(b)$.

1) f définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $a = 1$ et $b = 1{,}01$.

2) f définie par $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$, $a = 1$ et $b = 0{,}98$.

3) f définie par $f(x) = (1+x)^3$, $a = 2$ et $b = 2{,}1$.

4) f définie par $f(x) = x^3 + x$, $a = 0$ et $b = -0{,}01$.

9 **Fonction trigonométrique – TVI – Méthodes 1 et 22**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^3+2x+\cos x$.

1) Dressez le tableau de variations de f.
2) Montrez que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α.
3) Donnez une valeur arrondie à trois décimales de α.

10 **Etude d'une fonction rationnelle – Méthodes 1, 7, 11 et 19**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par $f(x)=\dfrac{2x^2-x+1}{x-1}$.

1) Etudiez les limites de f aux bornes de son ensemble de définition et en déduire d'éventuelles asymptotes parallèles aux axes.
2) Déterminez la fonction dérivée f' de f.
3) Déduisez des questions précédentes le tableau de variations de f.
4) Donnez une équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point A d'abscisse 3.
5) Montrez que la droite (Δ) d'équation $y=2x+1$ est asymptote oblique et déterminez sa position relative par rapport à (C_f).
6) Tracez avec soin (C_f), (Δ) et (T).

11 **Etude d'une fonction trigonométrique : « ondulations » – Méthodes 1, 4 et 25**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sin 2x+2\sin x$ et l'on note (C_f) sa courbe représentative.

1) Expliquez pourquoi l'étude de f sur $[0;\pi]$ permet d'obtenir (C_f).
2) Dressez le tableau de variations de f sur $[0;\pi]$.
3) Tracez (C_f) et justifiez le titre de l'exercice.

12 **Etude d'une fonction irrationnelle définie par morceaux – Méthodes 2, 11, 18, 19, 23, 24 et 26**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sqrt{|x^2-4x+3|}$ et l'on note (C_f) sa courbe représentative.

On admet que la droite (D) d'équation $x=2$ est axe de symétrie de (C_f).

1) Définissez f par morceaux afin de l'exprimer sans le symbole de valeur absolue.
2) Etudiez la dérivabilité de f en 3. Que peut-on en déduire concernant (C_f) ?
3) Dressez le tableau de variations de f.

4) Montrez que la droite (Δ) d'équation $y = x - 2$ est asymptote oblique à (C_f) en $+\infty$.
5) Tracez (C_f), ses demi-tangentes et ses asymptotes.

13 **L'inégalité fondamentale de convexité avec deux réels a et b puis application – Méthode 6**

1) On considère une fonction f convexe sur un intervalle I, deux réels a et b de I, un réel λ de l'intervalle $[0,1]$ ainsi que les points $A(a,f(a))$, $B(b,f(b))$ et $M(\lambda a+(1-\lambda)b, \lambda f(a)+(1-\lambda)f(b))$.

a) Montrez que le point M est un point du segment $[AB]$.

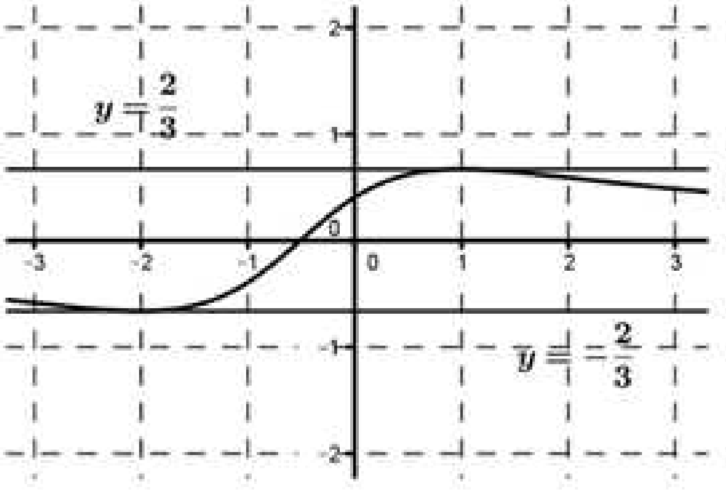
b) Déduisez de la question précédente : $f(\lambda a+(1-\lambda)b) \leq \lambda f(a)+(1-\lambda)f(b)$ (i).

2) On reprend les hypothèses de la question précédente, MAIS on considère que la fonction f est concave.
Que devient l'inégalité (i) ?
3) Application – Montrez que pour tout x réel strictement positif on a :

$$2\sqrt{x} \leq 3\sqrt{\frac{2x+1}{3}} - 1.$$

14 **Lecture graphique – Méthode d'Euler – Méthodes 1, 27 et 28**

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, dont la dérivée f' est de la forme $f'(x) = \dfrac{2x+a}{x^2+bx+c}$ (où a, b, et c sont des réels), et dont la courbe représentative de cette dérivée est :



1) **Variations de f**

a) Donnez les variations de f à partir de la courbe représentative de sa fonction dérivée f'.

b) Déterminez $f'(x)$ par le calcul à partir de sa courbe représentative.

c) Retrouvez les variations de f par le calcul.

2) **Courbe « approchée » de la courbe représentative de f sur $[-1,0]$ avec la méthode d'Euler sachant que $f(-1)=1$.**

a) Expliquez pourquoi la suite de points $M_n(x_n,y_n)$ tels que $\begin{cases} x_0=-1 \\ y_0=1 \end{cases}$ et $\begin{cases} x_{n+1}=x_n+0{,}01 \\ y_{n+1}=y_n+f'(x_n)\times 0{,}01 \end{cases}$ avec n entier de l'intervalle $[0;100]$ permet de répondre à la question.

b) Expliquez comment compléter la page d'Excel suivante pour insérer un graphique qui permet de répondre à la question, et donnez ce graphique.

	A	B	C	D
1	Pas	Dérivée de f	x	f(x)
2				
3				
4				

c) Donnez un algorithme en langage Python qui permet d'obtenir le graphique précédent et donnez ce graphique.

15 Dérivée n^ième^ d'une fonction – Approfondissement – Méthode 1

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}$ et l'on note $f^{(n)}$ sa dérivée n^ième^ pour n entier non nul.

1) Déterminez $f^{(n)}$ pour $n\leq 5$.
2) Conjecturez une formule qui donne $f^{(n)}(x)$ en fonction de n.
3) Démontrez par récurrence la formule conjecturée.

16 Etude d'une fonction rationnelle avec une fonction auxiliaire – Méthodes 1, 3, 7, 11, 19 et 22

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{x^3+x^2-3}{x^2+1}$.

1) ***Etude d'une fonction auxiliaire***

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=x^3+3x+8$.

a) Dressez le tableau de variations de g.

b) Montrez que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α dont vous donnerez une valeur approchée à 10^{-2} près.

c) Déduisez des questions précédentes le signe de g en fonction de x.

2) ***Tableau de variations de f***

a) Etudiez le comportement de f aux bornes de son ensemble de définition.

b) Exprimez $f'(x)$ en fonction de $g(x)$.

c) Déduisez des deux questions précédentes le tableau de variations de f.

3) ***Asymptote oblique***

a) Montrez qu'il existe quatre réels a, b, c et d tels que $f(x)=ax+b+\frac{cx+d}{x^2+1}$.

b) En déduire que la courbe représentative (C_f) de la fonction f admet une asymptote oblique (Δ) dont vous donnerez une équation.

C)Etudiez la position relative de (C_f) et (Δ).

4) ***Courbe représentative***

a) Déterminez les abscisses des points I et J de (C_f) admettant une tangente parallèle à (Δ).

b) Montrez que $f(\alpha)=\frac{3\alpha+2}{2}$ et déduisez en une valeur approchée de $f(\alpha)$ à 10^{-2} près.

c) Tracez (C_f), (Δ).

17 **Détermination d'une fonction rationnelle puis étude de cette fonction et d'une fonction déduite – Méthodes 1, 4, 7 et 19**

1) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\frac{3x^2+ax+b}{x^2+1}$.

Déterminez les réels a et b pour que la courbe représentative de g ait pour tangente la droite (T) d'équation $y=4x+3$ au point $I(0;3)$.

2) On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\frac{3x^2+4x+3}{x^2+1}$ de courbe représentative (C_f).

a) Déterminez α et β tels que $f(x)=\alpha+\frac{\beta x}{x^2+1}$.

b) Dressez le tableau de variations de f.

c) Etudiez la position relative de (C_f) et de (T).

3) On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=\frac{3x^2+4|x|+3}{x^2+1}$ de courbe représentative (C_h).

a) Montrez que la fonction h est paire. Que peut-on en déduire pour (C_h) ?

b) Tracez (C_f), (T) et (C_h).

18 **Etude d'une fonction trigonométrique définie par morceaux – Méthodes 1, 3, 18, 23 et 25**

1) On considère la fonction g définie sur $[0;\pi]$ par $g(x)=x\cos x-\sin x$.

a) Dressez le tableau de variations de g.

b) Déduisez en le signe de g.

2) On considère la fonction f définie sur $[0;\pi]$ par $\begin{cases} f(0)=1 \\ f(x)=\dfrac{\sin x}{x} \text{ si } x\in]0;\pi] \end{cases}$.

a) Etudiez la continuité de f.
b) Dressez le tableau de variations de f.
c) Montrez en étudiant la fonction h définie par $h(x)=x-\sin x$ que pour tout réel $x\geq 0$ on a : $0\leq x-\sin x$.

d) Montrez en étudiant la fonction k définie par $k(x)=\sin x-x+\dfrac{x^3}{6}$ que pour tout réel $x\geq 0$ on a : $x-\sin x\leq \dfrac{x^3}{6}$ (**coup de pouce** : étudiez les variations de k' pour avoir le signe de $k'(x)$).
e) Déduisez des questions c) et d) que f est dérivable en 0.

19 **Fonction trigonométrique déduite d'une fonction rationnelle – Méthodes 1, 2, 7, 11 et 25**

Partie A

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ par $f(x)=\dfrac{1-x^2}{2+x}$ et l'on note (C_f) sa courbe représentative.

1) Etudiez les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2) Dressez le tableau de variations de f.
3) Déterminez les réels a, b et c tels que $f(x)=ax+b+\dfrac{c}{x+2}$.
4) Déduisez de la question précédente que (C_f) admet une asymptote oblique (Δ).
5) Etudiez la position relative de (C_f) et (Δ) et tracez-les.

Partie B

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\dfrac{1-\sin^2 x}{2+\sin x}$ et l'on note (C_g) sa courbe représentative.
(**Coup de pouce** : $g(x)=(f\circ u)(x)=f(u(x))$ avec $u(x)=\sin x$)

1) Montrez pour tout h réel, $g\left(\dfrac{\pi}{2}-h\right)=g\left(\dfrac{\pi}{2}+h\right)$.
Quelle est la conséquence graphique de cette égalité ?
2) Expliquez comment on peut obtenir (C_g) sur $\mathbb{R}$ à partir de sa construction sur $\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$.

3) En utilisant les définitions des fonctions croissantes et décroissantes (donc pas la dérivée de g), dressez le tableau de variations de g sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ en précisant la valeur exacte du maximum de g sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

(***Coup de pouce*** : Utilisez les variations de f sur $[-1;1]$ après avoir prouvé que l'équation $\sin x = -2+\sqrt{3}$ admet une solution unique α sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ dont vous donnerez une valeur approchée à 10^{-2} près.)

4) Construisez (C_g).

20 L'inégalité fondamentale de convexité avec n réels $x_1,\cdots,x_n$ puis application – Méthode 6

1) On considère une fonction f convexe sur un intervalle I, n réels $x_1,x_2,\cdots,x_n$ de I et n réels strictement positifs $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ tels que $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1$.

D'autre part, on note $(\mathbf{i_n})$ l'inégalité $f(\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_nx_n)\leq\lambda_1f(x_1)+\cdots+\lambda_nf(x_n)$.

a) Justifiez que $(\mathbf{i_1})$ et $(\mathbf{i_2})$ sont vraies (***coup de pouce*** : exercice 13).

b) Pour n entier supérieur ou égal à 2, justifiez que si $(\mathbf{i_n})$ est vraie alors $(\mathbf{i_{n+1}})$ est vraie (***coup de pouce*** : poser $\sum_{i=1}^{n}\lambda_ix_i=\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)y$ et $\lambda_0=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$).

c) Justifiez alors que $(\mathbf{i_n})$ est vraie pour tout n entier supérieur ou égal à 1.

2) Que devient l'inégalité $(\mathbf{i_n})$ lorsque f est concave sur I ?

3) On considère n réels $x_1,x_2,\cdots,x_n$ positifs et n réels strictement positifs $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ tels que $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1$.

Prouvez que $\sqrt{x_1}+\cdots+\sqrt{x_n}\leq n\sqrt{\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}}$.

Corrigés

1 Comportement global (étude des variations et des bornes) – Méthodes 1 et 3

1) f est définie par $f(x)=x^2+6x-1$ sur $I=\lfloor -5;0\rfloor$.

La fonction f est dérivable sur $I=\lfloor -5;0\rfloor$ et $f'(x)=2x+6$ d'où le tableau :

x	-5		-3		0
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	-6	$\searrow$	-10	$\nearrow$	-1

$\forall x\in I,\ f(x)\in[-10;-1]$.

2) f est définie par $f(x)=2x^3+3x^2-12x+10$ sur $I=\lfloor -3;3\rfloor$.

La fonction f est dérivable sur $I=\lfloor -3;3\rfloor$ et :

$f'(x)=6x^2+6x-12=6(x-1)(x+2)$ d'où le tableau :

x	-3		-2		1		3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	19	$\nearrow$	30	$\searrow$	3	$\nearrow$	55

$\forall x\in I,\ f(x)\in[3;55]$.

3) f est définie par $f(x)=\dfrac{2x+1}{x+3}$ sur $I=\lfloor 0;5\rfloor$.

La fonction f est dérivable sur $I=\lfloor 0;5\rfloor$ et $f'(x)=\dfrac{5}{(x+3)^2}>0$ sur I, d'où le tableau de variations suivant :

x	0		5
$f'(x)$		$+$	
f	$\frac{1}{3}$	$\nearrow$	$\frac{11}{8}$

$\forall x\in I,\ f(x)\in\left[\dfrac{1}{3};\dfrac{11}{8}\right]$.

4) f est définie par $f(x)=(x+1)\sqrt{x}$ sur $I=\left[1;4\right]$.

La fonction f est dérivable sur $I=\left[1;4\right]$ et $f'(x)=\sqrt{x}+(x+1)\times\dfrac{1}{2\sqrt{x}}>0$ sur I, d'où le tableau de variations suivant :

x	1	4
$f'(x)$	$+$	
f	2 ↗	10

$\forall x\in I,\ f(x)\in\left[2;10\right]$.

5) f est définie par $f(x)=\tan x-x$ sur $I=\left[-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right]$.

La fonction f est dérivable sur $I=\left[-\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{4}\right]$ et $f'(x)=1+\tan^2 x-1=\tan^2 x\geq 0$ sur I d'où le tableau de variations suivant :

x	$-\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{4}$
$f'(x)$	$+$	
f	$-1+\dfrac{\pi}{4}$ ↗	$1-\dfrac{\pi}{4}$

$\forall x\in I,\ f(x)\in\left[-1+\dfrac{\pi}{4};1-\dfrac{\pi}{4}\right]$.

$\boxed{2}$ Comportement global (étude des variations et des bornes) – Méthodes 2 et 3

1) f est définie par $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}$ sur $I=\left[-1;2\right]$.

Comme le discriminant de x^2+x+1 est $\Delta=-3<0$, l'expression x^2+x+1 est du signe de $a=1$ donc strictement positive.

On en déduit que La fonction f est dérivable sur $I=\left[-1;2\right]$ avec $f'(x)=\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}$ qui est du signe de $2x+1$ d'où le tableau de variations suivant :

x	-1		$-\frac{1}{2}$		2
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	$\sqrt{7}$

$\forall x \in I,\ f(x) \in \left[\frac{\sqrt{3}}{2};\sqrt{7}\right]$.

2) f est définie par $f(x) = (\cos x - x + 1)^3$ sur $I = [-3\pi;2\pi]$.

La fonction f est dérivable sur $I = [-3\pi;2\pi]$ et :

$f'(x) = 3(\cos x - x + 1)^2(-\sin x - 1) \leq 0$ car $-1 \leq \sin x$ d'où le tableau de variations suivant :

x	-3π		2π
$f'(x)$		$-$	
f	$27\pi^3$	$\searrow$	$(2-2\pi)^3$

$\forall x \in I,\ f(x) \in \left[(2-2\pi)^3;27\pi^3\right]$.

$\boxed{3}$ Convexité – Méthodes 1, 2, 5 et 21

1) f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 6$.

La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x) = 3x^2 + 6x - 9$ et donc $f''(x) = 6x + 6$.

On a donc le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	
Convexité de f		Concave		Convexe	

Le point $I(-1,17)$ est un point d'inflexion.

2) f est définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2x+2}{x+3}$.

La fonction f est deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$ avec $f'(x)=\dfrac{4}{(x+3)^2}$ et donc

$f''(x)=-\dfrac{8}{(x+3)^3}<0$ sur $]0;+\infty[$.

La fonction f est donc concave.

3) f est définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2}{(2x+3)^3}$.

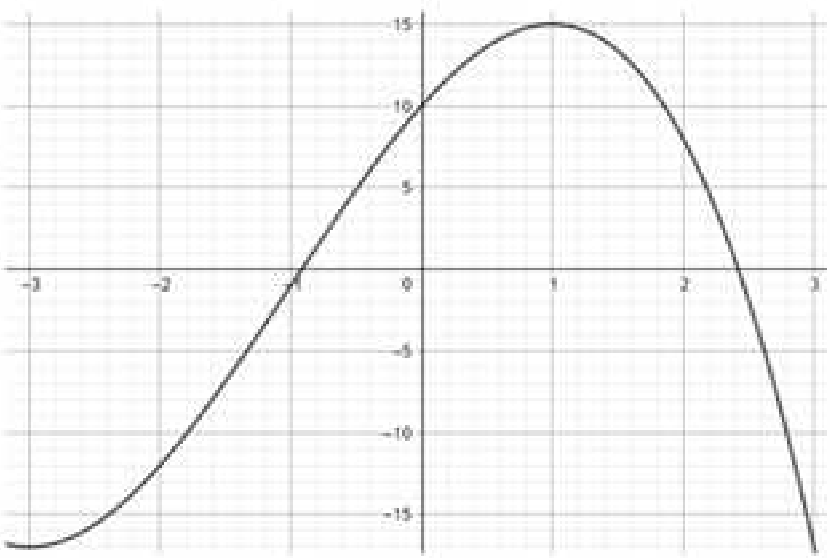
La fonction f est deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$ avec $f'(x)=-\dfrac{12}{(2x+3)^4}$ et donc

$f''(x)=\dfrac{96}{(2x+3)^5}>0$ sur $]0;+\infty[$.

La fonction f est donc convexe.

4 Convexité – Méthodes 5 et 21

On a la fonction f définie sur $[-3;3]$ par la courbe représentative suivante :



1) La fonction f est convexe sur $[-3;-1]$ et concave sur $[-1,3]$.

Le point $I(-1,-1)$ est le seul point d'inflexion.

2) On déduit de la question précédente que la fonction dérivée f' est croissante sur $[-3;-1]$ et décroissante sur $[-1,3]$.

5 Comportement asymptotique et local – Méthodes 7, 11, 12 et 13

1) f est définie par $f(x) = x^2 + 6x - 1$ sur $I = \mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x^2\left(1 + \frac{6}{x} - \frac{1}{x^2}\right) = +\infty.$$

2) f est définie par $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 10$ sur $I = \mathbb{R}$.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x^3\left(2 - \frac{3}{x} - \frac{12}{x^2} + \frac{10}{x^3}\right),\ \text{donc}\ \lim_{-\infty} f = -\infty\ \text{et}\ \lim_{+\infty} f = +\infty.$$

3) f est définie par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+3}$ sur $I = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x\left(2 + \frac{1}{x}\right)}{x\left(1 + \frac{3}{x}\right)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\left(2 + \frac{1}{x}\right)}{\left(1 + \frac{3}{x}\right)} = 2.$$

La droite d'équation $y = 2$ est asymptote horizontale en $-\infty$ et en $+\infty$.

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to-3\\x<-3}} 2x+1 = -5 \\ \lim\limits_{\substack{x\to-3\\x<-3}} x+3 = 0^- \end{cases} \Rightarrow \lim_{\substack{x\to-3\\x<-3}} f(x) = +\infty.$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x\to-3\\x>-3}} 2x+1 = -5 \\ \lim\limits_{\substack{x\to-3\\x>-3}} x+3 = 0^+ \end{cases} \Rightarrow \lim_{\substack{x\to-3\\x>-3}} f(x) = -\infty.$$

La droite d'équation $x = -3$ est asymptote verticale.

4) f est définie par $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2-1}$ sur $I = \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$.

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x\left(2 + \frac{1}{x}\right)}{x^2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{\left(2 + \frac{1}{x}\right)}{x\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} = 0.$$

La droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale en $-\infty$ et en $+\infty$.

On justifie les « 0^+ » et les « 0^- » avec le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} 2x+1 = -1 \\ \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} x^2 - 1 = 0^+ \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x) = -\infty$ et $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} 2x+1 = -1 \\ \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} x^2 - 1 = 0^- \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = +\infty$.

$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} 2x+1 = 3 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} x^2 - 1 = 0^- \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = -\infty$ et $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} 2x+1 = 3 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} x^2 - 1 = 0^+ \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty$.

Les droites d'équation $x = -1$ et $x = 1$ sont asymptotes verticales.

5) f est définie par $f(x) = \dfrac{2x^2 - x + 3}{x - 1}$ sur $I = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2\left(2 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}\right)}{x\left(1 - \frac{1}{x}\right)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x\left(2 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2}\right)}{\left(1 - \frac{1}{x}\right)}.$$

On en déduit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

D'autre part :

$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} 2x^2 - x + 3 = 4 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} x - 1 = 0^- \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = -\infty$

$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} 2x^2 - x + 3 = 4 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} x - 1 = 0^+ \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > 1}} f(x) = +\infty$.

La droite d'équation $x = 1$ est donc asymptote verticale.

6) f est définie par $f(x) = \dfrac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 1}$ sur $I = \mathbb{R} \setminus \{-1;1\}$.

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x^2 - x - 1}{x^2 - 1} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2\left(2 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)}{x^2\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\left(2 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right)}{\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} = 2.$$

La droite d'équation $y = 2$ est donc asymptote horizontale en $\pm\infty$.

Pour justifier « 0^+ » et les « 0^- » on a le même tableau de signe qu'au 4).

$\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} 2x^2 - x - 1 = 2 \\ \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} x^2 - 1 = 0^+ \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x < -1}} f(x) = +\infty$ et $\begin{cases} \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} 2x^2 - x - 1 = 2 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x > -1}} x - 1 = 0^+ \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = -\infty$.

La droite d'équation $x = -1$ est donc asymptote verticale.

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-x-1}{x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(2x+1)}{(x-1)(x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(2x+1)}{(x+1)}=\frac{3}{2}.$$

$\boxed{6}$ Comportement asymptotique et local – Méthodes 8, 10, 14, 15, 16 et 17

1) f est définie par $f(x)=x+\sin x$ sur $I=\mathbb{R}$.

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $\sin x\leq 1\Rightarrow x+\sin x\leq x+1$ donc par comparaison comme $\lim\limits_{x\to-\infty} x+1=-\infty$ on en déduit que $\lim\limits_{x\to-\infty} x+\sin x=-\infty$.

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $-1\leq\sin x\Rightarrow -1+x\leq\sin x+x$ donc par comparaison comme $\lim\limits_{x\to+\infty} -1+x=+\infty$ on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty} x+\sin x=+\infty$.

2) f définie par $f(x)=x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ sur $I=\mathbb{R}^*$ (**coup de pouce** : $\lim\limits_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}=1$).

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $0\leq\left|\sin\frac{1}{x}\right|\leq 1\Rightarrow 0\leq\left|x\sin\frac{1}{x}\right|\leq|x|$ donc d'après le théorème des gendarmes, comme $\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$ on en déduit que $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$.

Pour déterminer la limite en $\pm\infty$, il faut faire un changement de variable en posant $u=\frac{1}{x}$ car quand $x\to\pm\infty$ alors $u\to 0$ et l'on se ramène ainsi à $\lim\limits_{u\to 0}\frac{\sin u}{u}=1=\lim\limits_{x\to\pm\infty}x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

3) f est définie par $f(x)=\sqrt{x^2+x+1}-x$ sur $\mathbb{R}$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}-x=+\infty$.

Pour la limite en $+\infty$ il faut penser à l'expression conjuguée.
Ainsi pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a :

$$f(x)=\frac{\left(\sqrt{x^2+x+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x+1}+x\right)}{\sqrt{x^2+x+1}+x}=\frac{x^2+x+1-x^2}{\sqrt{x^2+x+1}+x}=\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}.$$

Par conséquent $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{|x|\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+x}$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x\left(\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+1\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\left(\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}+1\right)}=\frac{1}{2}.$$

4) f est définie par $f(x)=\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{x-4}$ sur $\left[3,4\right[\cup\left]4,5\right]$.

Méthode 1 : avec l'expression conjuguée.

$$\lim_{x\to4}f(x)=\lim_{x\to4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{x-4}\times\frac{\sqrt{2x+1}+3}{\sqrt{2x+1}+3}=\lim_{x\to4}\frac{2x+1-9}{x-4}\times\frac{1}{\sqrt{2x+1}+3}=\lim_{x\to4}\frac{2(x-4)}{x-4}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{3}.$$

Méthode 2 : avec le taux de variation de $x\overset{g}{\mapsto}\sqrt{2x+1}$.

$\lim\limits_{x\to4}f(x)=\lim\limits_{x\to4}\dfrac{g(x)-g(4)}{x-4}=g'(4)$ car g est dérivable en 4.

Comme $g'(x)=\dfrac{2}{2\sqrt{2x+1}}=\dfrac{1}{\sqrt{2x+1}}$, on en déduit que $g'(4)=\dfrac{1}{3}$ et l'on retrouve que la limite cherchée est bien $\dfrac{1}{3}$.

5) f est définie par $f(x)=\dfrac{\sin 5x}{x}$ sur $\left[-1,0\right[\cup\left]0,1\right]$.

$\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}5\times\dfrac{\sin 5x}{5x}=\lim\limits_{u\to0}5\times\dfrac{\sin u}{u}=5$ car $\lim\limits_{u\to0}\dfrac{\sin u}{u}=1$ (limite usuelle).

7 Continuité et dérivabilité – Méthodes 15, 16 et 18

1) f est définie par $\begin{cases}f(x)=-x^2+4 \text{ si } x\in[-2;2]\\ f(x)=x^2-4 \text{ si } x\in\left]-\infty;-2\right[\cup\left]2;+\infty\right[\end{cases}$ en $a=-2$ et $a=2$.

Continuité en –2 et 2

En $a=-2$: $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}}x^2-4=0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}}-x^2+4=0$ donc $\lim\limits_{-2}f=0=f(-2)$ et par conséquent la fonction f est continue en –2.

En $a=2$: $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to2\\x<2}}-x^2+4=0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to2\\x>2}}x^2-4=0$ donc $\lim\limits_{2}f=0=f(2)$ et par conséquent la fonction f est continue en 2.

Dérivabilité en –2 et 2

En $a=-2$: $\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}}\dfrac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}=\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}}\dfrac{x^2-4}{x+2}=\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}}\dfrac{(x-2)(x+2)}{x+2}=\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}}x-2=-4$ et

$\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}}\dfrac{f(x)-f(-2)}{x-(-2)}=\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}}\dfrac{-x^2+4}{x+2}=\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}}\dfrac{(-x+2)(x+2)}{x+2}=\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}}-x+2=4\neq-4$ donc on en déduit que la fonction f n'est pas dérivable en –2.

Cependant, au point d'abscisse –2, la courbe représentative de f admet une demi-tangente à gauche de coefficient directeur –4, et une demi-tangente à droite de coefficient directeur 4 (point anguleux).

En $a = 2$: $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \frac{f(x)-f(-2)}{x-2} = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \frac{-x^2+4}{x-2} = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \frac{(x-2)(-x-2)}{x-2} = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} -x-2 = -4$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \frac{f(x)-f(-2)}{x-2} = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} \frac{(x-2)(x+2)}{x-2} = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x>2}} x+2 = 4 \neq -4$ donc on en déduit que la fonction f n'est pas dérivable en 2.

Cependant, au point d'abscisse 2, la courbe représentative de f admet une demi-tangente à gauche de coefficient directeur –4 et une demi-tangente à droite de coefficient directeur 4 (point anguleux).

REMARQUE : On aurait pu limiter l'étude à –2 et utiliser la parité de la fonction.

2) f est définie par $f(x) = |x^2+x-2|$ en $a = 1$.

Continuité en 1

La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions continues donc en particulier en $a = 1$.

Dérivabilité en 1

En utilisant la propriété $|u(x)| = u(x)$ si $u(x) \geq 0$ et $|u(x)| = -u(x)$ si $u(x) \leq 0$, la fonction f peut se définir par morceaux de la façon suivante :

$$\begin{cases} f(x) = x^2+x-2 \text{ sur }]-\infty ; -2[\cup]1 ; +\infty[\\ f(x) = -x^2-x+2 \text{ sur } [-2 ; 1] \end{cases}$$

On a $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{-x^2-x+2}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{(x-1)(-x-2)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (-x-2) = -3$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{x^2+x-2}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{(x-1)(x+2)}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} (x+2) = 3 \neq -3$ donc on en déduit que la fonction f n'est pas dérivable en 1.

Cependant, au point d'abscisse 1, la courbe représentative de f admet une demi-tangente à gauche de coefficient directeur –3, et une demi-tangente à droite de coefficient directeur 3 (point anguleux).

3) f est définie par $\begin{cases} f(x) = \frac{\sin 2x}{x} \\ f(0) = 1 \end{cases}$ en $a = 0$ (***coup de pouce*** : $\lim\limits_{u\to 0} \frac{\sin u}{u} = 1$).

Continuité en 0

$\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} 2 \times \frac{\sin 2x}{2x} = \lim\limits_{u\to 0} 2 \times \frac{\sin u}{u} = 2 \neq f(0)$, donc f n'est pas continue en 0, et donc non dérivable en 0.

REMARQUE : Certains prétendent que lorsque l'on doit étudier la continuité et la dérivabilité en un point, il faut commencer par l'étude de la dérivabilité, car ***toute fonction dérivable en un point y est continue.*** *Cet exemple prouve que ce n'est pas forcément une bonne idée car la contraposée de la propriété "en* *gras" est vraie, à savoir :* ***toute fonction non continue en un point n'est pas dérivable en ce point.***

Graphiquement il y a un saut de discontinuité en 0.

4) f est définie par $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\cos x - 1}{x} \\ f(0) = 2 \end{cases}$ en $a = 0$ (***coup de pouce*** : utiliser un taux d'accroissement).

Continuité en 0

En posant $g(x) = \cos x$, on obtient :

$\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{g(x) - g(0)}{x - 0} = g'(0) = -\sin 0 = 0$ car d'une part g est dérivable en 0, et d'autre part $g'(x) = -\sin x$.

Finalement $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x} = 0 \neq f(0)$ et donc f n'est pas continue en 0, et donc non dérivable en 0.

Graphiquement il y a un saut de discontinuité en 0.

$\boxed{8}$ **Approximation affine – Méthode 20**

Dans les quatre réponses on utilise l'approximation affine de f en « a » :

$$f(x) = f'(a)(x - a) + f(a).$$

1) f est définie par $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $a = 1$ et $b = 1{,}01$.

Au voisinage de $a = 1$, on a $f(x) = f'(1)(x - 1) + f(1) = -(x - 1) + 1 = -x + 2$ car $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ et donc $f'(1) = -1$.

On a alors $f(b) = f(1{,}01) = -1{,}01 + 2 = 0{,}99$.

2) f est définie par $f(x) = \dfrac{1}{1 + x}$, $a = 1$ et $b = 0{,}98$.

Au voisinage de $a = 1$, on a $f(x) = f'(1)(x - 1) + f(1) = -\dfrac{1}{4}(x - 1) + \dfrac{1}{2} = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{3}{4}$ car $f'(x) = -\dfrac{1}{(1 + x)^2}$ et donc $f'(1) = -\dfrac{1}{4}$.

On a alors $f(b) = f(0{,}98) = -\dfrac{0{,}98}{4} + \dfrac{3}{4} = -0{,}245 + 0{,}75 = 0{,}505$.

3) f est définie par $f(x) = (1 + x)^3$, $a = 2$ et $b = 2{,}1$.

Au voisinage de $a = 2$, on a :

$f(x) = f'(2)(x - 2) + f(2) = 27(x - 2) + 27 = 27(x - 1)$ car $f'(x) = 3(1 + x)^2$ et donc $f'(2) = 27$.

On a alors $f(b) = f(2{,}1) = 27(2{,}1-1) = 27 \times 1{,}1 = 29{,}7$.

4) f est définie par $f(x) = x^3 + x$, $a = 0$ et $b = -0{,}01$.

Au voisinage de $a = 0$, on a $f(x) = f'(0)(x-0) + f(0) = x$ car $f'(x) = 3x^2 + 1$ et donc $f'(0) = 1$.

On a alors $f(b) = f(-0{,}01) = -0{,}01$.

$\boxed{9}$ Fonction trigonométrique – TVI – Méthodes 1 et 22

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 2x + \cos x$.

1) Dressons le tableau de variations de f.

Limites aux bornes

Pour tout x réel, $-1 \le \cos x \le 1 \Rightarrow x^3 + 2x - 1 \le x^3 + 2x + \cos x \le x^3 + 2x + 1$.

Au voisinage de $-\infty$, on a $f(x) \le x^3 + 2x + 1$ avec $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 + 2x + 1 = -\infty$ donc par comparaison $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$.

Au voisinage de $+\infty$, on a $x^3 + 2x - 1 \le f(x)$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 + 2x - 1 = +\infty$ donc par comparaison $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$.

Variations

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on a $f'(x) = 3x^2 + 2 - \sin x$.

Pour tout x réel, $2 - \sin x > 0$ car $\sin x \le 1$, donc $f'(x) > 0$ ce qui prouve que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Tableau de variations

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

2) Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α.

Posons $I = \mathbb{R}$ et $J = \mathbb{R}$.

La fonction f est continue et strictement monotone de I sur J.

Comme $0 \in J$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires pour les fonctions strictement monotones, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α sur I.

3) Avec la calculatrice $\alpha = -0{,}420$ arrondie à trois décimales.

10 Etude d'une fonction rationnelle – Méthodes 1, 7, 11 et 19

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ par $f(x)=\dfrac{2x^2-x+1}{x-1}$.

1) On a $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x^2\left(2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{x\left(2-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)}{\left(1-\frac{1}{x}\right)}$, d'où $\lim\limits_{-\infty} f=-\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f=+\infty$.

D'autre part :

$\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} 2x^2-x+1=2\\ \lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} x-1=0^-\end{cases}\Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x)=-\infty$ et $\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} 2x^2-x+1=2\\ \lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} x-1=0^+\end{cases}\Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)=+\infty$.

On en déduit que la droite d'équation $x=1$ est asymptote verticale.

2) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ et l'on a :

$$f'(x)=\frac{(4x-1)(x-1)-\left(2x^2-x+1\right)(1)}{(x-1)^2}=\cdots=\frac{2x^2-4x}{(x-1)^2}.$$

Comme $(x-1)^2>0$ sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, $f'(x)$ est du signe $2x^2-4x$ qui est une expression du second degré de racines 0 et 2.

3) On déduit des deux questions précédentes le tableau de variations de f suivant :

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	-1	↘ $-\infty$	‖	$+\infty$ ↘	7	↗	$+\infty$

4) La tangente (T) à la courbe (C_f) au point A d'abscisse 3 a pour équation $y=f'(3)(x-3)+f(3)=\dfrac{3}{2}(x-3)+8=\dfrac{3}{2}x+\dfrac{7}{2}$.

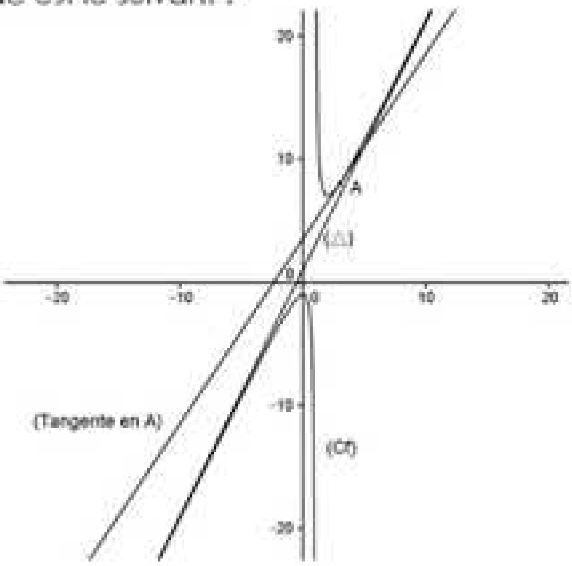
5) On a $f(x)-y=\dfrac{2x^2-x+1}{x-1}-(2x+1)=\dfrac{2x^2-x+1-(2x+1)(x-1)}{x-1}=\cdots=\dfrac{2}{x-1}$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-y)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2}{x-1}=0$, donc la droite (Δ) d'équation $y=2x+1$ est asymptote oblique à (C_f) en $\pm\infty$.

Pour étudier la position relative de (C_f) et (Δ) on étudie le signe de $f(x)-y=\dfrac{2}{x-1}$ qui est du signe de $x-1$ sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$\dfrac{2}{x-1}$	$-$	||	$+$
Position relative de (C_f) et (Δ)	(Δ) au-dessus de (C_f)	||	(C_f) au-dessus de (Δ)

6) Le tracé demandé est le suivant :



11 Etude d'une fonction trigonométrique : « ondulations » – Méthodes 1, 4 et 25

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\sin 2x+2\sin x$ et l'on note (C_f) sa courbe représentative.

1) On a $f(-x)=-\sin 2x-2\sin x$ (la fonction $x\mapsto \sin x$ est impaire), donc la fonction f est impaire et sa courbe représentative est symétrique par rapport à O.

D'autre part, $f(x+2\pi)=\sin(2x+4\pi)+2\sin(x+2\pi)=\sin 2x+2\sin x=f(x)$, donc f est périodique de période 2π.

En traçant (C_f) sur $[0;\pi]$, on l'obtient sur $[-\pi;\pi]$ par symétrie par rapport à O (car f est impaire) et donc sur un intervalle de longueur 2π.

Comme f est périodique de période 2π, on en déduit (C_f) sur $\mathbb{R}$ à partir de sa représentation sur $[-\pi;\pi]$ par translation de vecteurs $2k\pi\vec{i}$ avec $k\in\mathbb{Z}$.

2) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x) = 2\cos 2x + 2\cos x$.

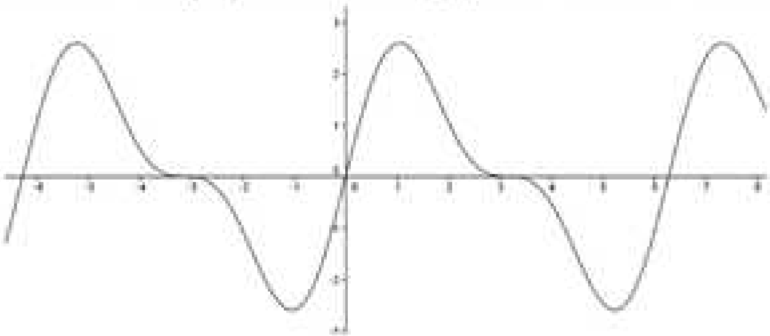
On en déduit que $f'(x) = 2(2\cos^2 x - 1 + \cos x) = 2(\cos x + 1)(2\cos x - 1)$ en appliquant la formule $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$.

Comme $2(\cos x + 1) \geq 0$ sur $\mathbb{R}$ ($\cos x \geq -1$ sur $\mathbb{R}$), $f'(x)$ est du signe de $2\cos x - 1$ dont on étudie le signe sur $[0;\pi]$ en résolvant par exemple l'inéquation $2\cos x - 1 \geq 0$.

$2\cos x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \cos x \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$, d'où le tableau de variations de f :

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$		+	0	−	
f	0	↗	$\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↘	0

3) On obtient le tracé de (C_f) suivant, ce qui justifie le titre de l'exercice.



12 Etude d'une fonction irrationnelle définie par morceaux – Méthodes 2, 11, 18, 19, 23, 24 et 26

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{|x^2 - 4x + 3|}$, et l'on note (C_f) sa courbe représentative.

On admet que la droite (D) d'équation $x = 2$ est axe de symétrie de (C_f).

1) On utilise le fait que si $u(x) \geq 0$ alors $|u(x)| = u(x)$, et que si $u(x) \leq 0$ alors $|u(x)| = -u(x)$.

Ainsi, on a le tableau suivant :

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
x^2-4x+3		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\lvert x^2-4x+3\rvert$		x^2-4x+3	0	$-x^2+4x-3$	0	x^2-4x+3	
$f(x)$		$\sqrt{x^2-4x+3}$	0	$\sqrt{-x^2+4x-3}$	0	$\sqrt{x^2-4x+3}$	

2) Dans la mesure où 3 est une valeur « charnière », il faut revenir à la définition pour étudier la dérivabilité en 3.

On est donc amené à étudier $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h<0}}\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}$ et $\lim\limits_{\substack{h\to 0\\ h>0}}\dfrac{f(3+h)-f(3)}{h}$.

$$\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}}\frac{\sqrt{-(h+3)^2+4(h+3)-3}}{h}=\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}}\frac{\sqrt{-h^2-6h}}{h}=\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}}\frac{\sqrt{-h(h+6)}}{h}$$

$$=\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}}\frac{\sqrt{-h}\sqrt{h+6}}{\sqrt{-h}\sqrt{-h}}=\lim_{\substack{h\to 0\\ h<0}}\frac{\sqrt{h+6}}{\sqrt{-h}}=+\infty.$$

On déduit de cela que f n'est pas dérivable en 3 et que sa courbe représentative y admet une demi-tangente verticale à droite de 3.

De même, la limite du taux d'accroissement en 3 pour $h>0$ est infinie donc la courbe représentative de f admet une demi-tangente verticale à gauche de 3, donc finalement une tangente verticale au point d'abscisse 3.

3) La fonction f est dérivable sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}\setminus\{1;3\}$ et :

$$f'\begin{cases} f'(x)=\dfrac{2x-4}{\sqrt{x^2-4x+3}} \text{ sur }]-\infty;1[\,\cup\,]3;+\infty[\\[2ex] f'(x)=\dfrac{-2x+4}{\sqrt{-x^2+4x-3}} \text{ sur }]1;3[\end{cases}.$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\sqrt{x^2\left|1-\frac{4}{x}+\frac{3}{x^2}\right|}=+\infty.$$

On a finalement le tableau de variations de f suivant :

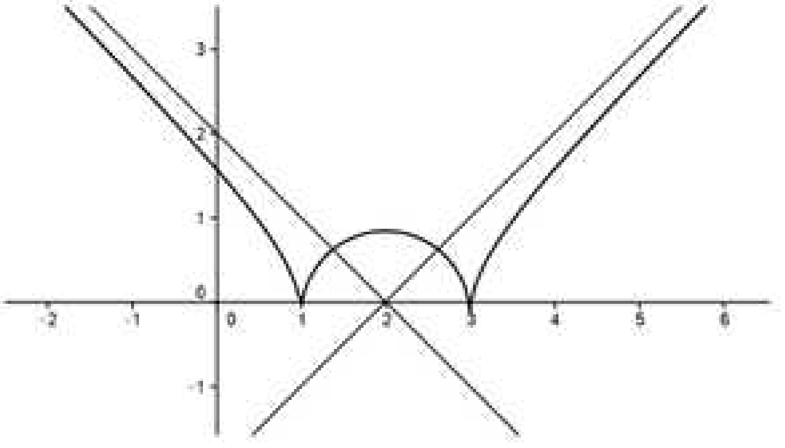
x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4) $$\lim_{x\to+\infty}f(x)-(x-2)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-4x+3}-(x-2)\right)\left(\sqrt{x^2-4x+3}+(x-2)\right)}{\left(\sqrt{x^2-4x+3}+(x-2)\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(x^2-4x+3\right)-\left(x-2\right)^2}{\sqrt{x^2-4x+3}+\left(x-2\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1}{\sqrt{x^2-4x+3}+\left(x-2\right)}=0\,.$$

On en déduit que la droite (Δ) d'équation $y=x-2$ est asymptote oblique à (C_f) en $+\infty$.

5) On obtient le tracé suivant compte tenu de la symétrie d'axe (D).



13 **L'inégalité fondamentale de convexité avec deux réels a et b puis application – Méthode 6**

1) Soit f une fonction convexe sur un intervalle I, deux réels a et b de I, un réel λ de l'intervalle $[0,1]$ ainsi que les points $A(a,f(a))$, $B(b,f(b))$ et $M(\lambda a+(1-\lambda)b,\lambda f(a)+(1-\lambda)f(b))$.

a) $\overrightarrow{BM}\left|\begin{array}{l}\lambda a+(1-\lambda)b-b=\lambda(a-b)\\ \lambda f(a)+(1-\lambda)f(b)-f(b)=\lambda(f(a)-f(b))\end{array}\right.=\lambda\overrightarrow{BA}$ avec $\lambda\in[0,1]$ donc le point M appartient au segment $[AB]$ ce qui prouve « au passage » que le réel $\lambda a+(1-\lambda)b$ appartient à l'intervalle fermé d'extrémités a et b.

b) Comme la fonction f est convexe sur l'intervalle d'extrémités a et b, le segment $[AB]$ est au-dessus de la courbe représentative de f sur l'intervalle d'extrémités a et b.

Le point $N\left(\lambda a+(1-\lambda)b,f\left(\lambda a+(1-\lambda)b\right)\right)$ de la courbe représentative de f est donc en dessous du point $M(\lambda a+(1-\lambda)b,\lambda f(a)+(1-\lambda)f(b))$ du segment $[AB]$ ce qui prouve que $f(\lambda a+(1-\lambda)b)\leq\lambda f(a)+(1-\lambda)f(b)$ (i).

2) Avec les notations précédentes, si la fonction est concave alors le point $N\left(\lambda a+(1-\lambda)b,f\left(\lambda a+(1-\lambda)b\right)\right)$ de la courbe représentative de f est au-dessus du point $M(\lambda a+(1-\lambda)b,\lambda f(a)+(1-\lambda)f(b))$ du segment $[AB]$ ce qui prouve que l'inégalité (i) devient $\lambda f(a)+(1-\lambda)f(b)\leq f(\lambda a+(1-\lambda)b)$ (ii).

3) Pour tout x réel strictement positif :

$$2\sqrt{x} \le 3\sqrt{\frac{2x+1}{3}} - 1 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{x}+1}{3} \le \sqrt{\frac{2x+1}{3}} \Leftrightarrow \frac{2}{3}\sqrt{x} + \frac{1}{3}\sqrt{1} \le \sqrt{\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\times 1}.$$

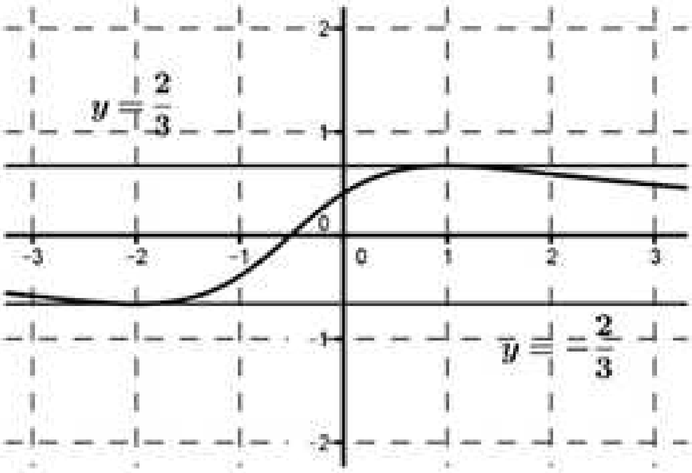
En posant $f(x) = \sqrt{x}$ cette dernière inégalité s'écrit :

$$\frac{2}{3}f(x) + \frac{1}{3}f(1) \le f\left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}\times 1\right).$$

On reconnaît l'inégalité de convexité (ii) avec $\lambda = \frac{2}{3}$, $a = x$ et $b = 1$ qui est vraie puisque f est concave sur $]0,+\infty[$ $\left(f''(x) = -\frac{1}{4x\sqrt{x}} < 0\right)$.

14 Lecture graphique – Méthode d'Euler – Méthodes 1, 27 et 28

La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée f' est d'une part de la forme $f'(x) = \frac{2x+a}{x^2+bx+c}$ (où a, b et c sont des réels), et d'autre part sa courbe représentative est la suivante :



1) **Variations de f**

a) Par lecture graphique, on détermine le signe de f', et on en déduit alors les variations de f :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$f\left(-\frac{1}{2}\right)$	$\nearrow$	

b) Déterminons $f'(x)$ par le calcul à partir de sa courbe.

On a $f'(-2)=-\frac{2}{3}$, $f'\left(-\frac{1}{2}\right)=0$ et $f'(1)=\frac{2}{3}$, ce qui permet de former le système suivant :

$$\begin{cases}\dfrac{-4+a}{4-2b+c}=-\dfrac{2}{3}\\ -1+a=0\\ \dfrac{2+a}{1+b+c}=\dfrac{2}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3(-4+a)=-2(4-2b+c)\\ a=1\\ 3(2+a)=2(1+b+c)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4b-2c=-1\\ a=1\\ 2b+2c=7\end{cases}.$$

On obtient alors $a=1$, $b=1$, $c=\frac{5}{2}$ et donc $f'(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{2}}$.

c) Le dénominateur étant strictement positif (discriminant strictement négatif et signe du coefficient de x^2 positif), $f'(x)$ est du signe de $2x+1$, ce qui permet de retrouver par le calcul les variations de la fonction f.

2) **Courbe « approchée » de la courbe représentative de f sur $[-1,0]$ avec la méthode d'Euler sachant que $f(-1)=1$.**

a) Expliquons pourquoi la suite de points $M_n(x_n,y_n)$ tels que $\begin{cases}x_0=-1\\ y_0=1\end{cases}$ et $\begin{cases}x_{n+1}=x_n+0{,}01\\ y_{n+1}=y_n+f'(x_n)\times 0{,}01\end{cases}$ avec n entier de l'intervalle $[0;100]$ permet de répondre à la question.

On vous rappelle que pour h « voisin » de 0, l'approximation d'Euler repose sur l'égalité $f(a+h)=f'(a)\times h+f(a)$, ce qui permet en réitérant d'obtenir $f(a+2h)=f'(a+h)\times h+f(a+h)$ une fois que $f(a+h)$ a été obtenu à la première étape et ainsi de suite...

Comme $f(-1)=1$, il est normal de partir de $M_0(-1;1)$.

Dans l'exercice pour passer de l'étape n à l'étape n + 1, il est proposé de prendre un pas de 0,01 pour obtenir 101 points qui « approchent » la courbe représentative de la fonction f par la méthode d'Euler.

Cela donne $y_{n+1}=f(x_{n+1})=f(x_n+h)=f'(x_n)\times 0{,}01+f(x_n)=y_n+f'(x_n)\times 0{,}01$ et bien sûr $x_{n+1}=x_n+0{,}01$.

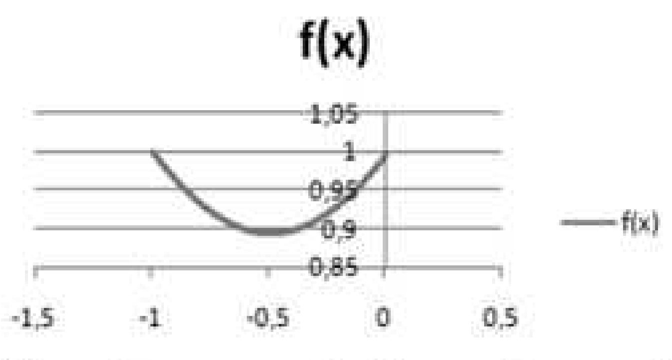
b) Expliquons comment compléter la page d'Excel suivante pour insérer un graphique qui permet de répondre à la question.

	A	B	C	D
1	**Pas**	**Dérivée de f**	**x**	**f(x)**
2				
3				
4				

En A2, on entre le pas c'est-à-dire 0,01.
En B2, on entre la dérivée c'est-à-dire « =(2*C2+1)/(C2^2+C2+5/2) », puis on copie et on colle jusqu'à la ligne 102.
En C2, on entre –1 puisque $M_0(-1;1)$.
En D2, on entre 1 puisque $M_0(-1;1)$.
En C3, on entre «= C2+$A$2 », puis on copie et on colle jusqu'à la ligne 102.
En D3, on entre l'approximation d'Euler : « =B2*($A$2)+D2 », puis on copie et on colle jusqu'à la ligne 102.

Ensuite on insère un graphique (insertion – nuage de points – courbe lissée), après avoir sélectionné les colonnes C et D.

On obtient la courbe suivante :

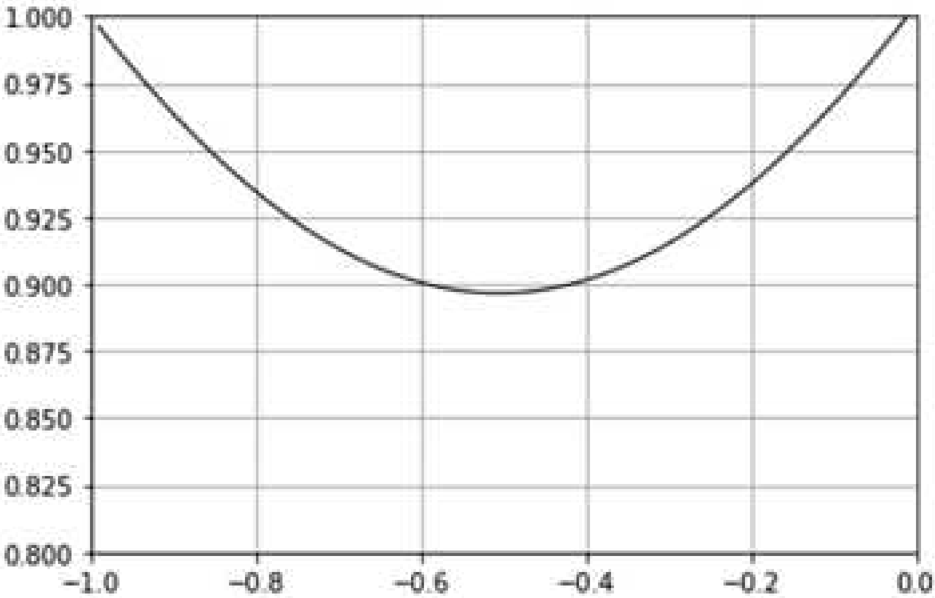


c) Retrouvons cette courbe avec un algorithme en langage Python.

On entre l'algorithme suivant :

```
def deriv_f(x):
    return (2*x+1)/(x**2+x+5/2)

import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
plt.axis ([-1,0,0.8,1])
plt.grid
x=-1
y=1
h=0.01
absc=[]
ordo=[]
for i in range(0,101):
    x=x+h
    y=y+h*deriv_f(x)
    absc.append(x)
    ordo.append(y)
plt.grid()
plt.plot(absc,ordo,color="black",linewidth=1.0,linestyle="-")
plt.show()
```

On lance l'algorithme et l'on obtient :



15 Dérivée n$^{\text{ième}}$ d'une fonction – Approfondissement – Méthode 1

La fonction f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1}{x}$ et l'on note $f^{(n)}$ sa dérivée n$^{\text{ième}}$ pour n entier non nul.

1) Déterminons $f^{(n)}$ pour $n \leq 5$.

On a : $f^{(1)}(x)=-\dfrac{1}{x^2}$, $f^{(2)}(x)=\dfrac{2}{x^3}$, $f^{(3)}(x)=-\dfrac{6}{x^4}$, $f^{(4)}(x)=\dfrac{24}{x^5}$, $f^{(5)}(x)=-\dfrac{120}{x^6}$.

2) On peut conjecturer que pour tout entier n non nul $f^{(n)}(x) = (-1)^n \dfrac{n!}{x^{n+1}}$.

3) Démontrons par récurrence la formule conjecturée.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, posons (P_n) : $f^{(n)}(x) = (-1)^n \dfrac{n!}{x^{n+1}}$

Initialisation : (P_1) est-elle vraie ?

$(-1)^1 \dfrac{1!}{x^{1+1}} = -\dfrac{1}{x^2} = f^{(1)}(x)$ donc (P_1) est vraie.

Hérédité : Pour $n \geq 1$ quelconque, est-ce que l'on a (P_n) vraie $\Rightarrow (P_{n+1})$ vraie ?

– Soit $n \in \mathbb{N}^*$, supposons que (P_n) est vraie c'est-à-dire que $f^{(n)}(x) = (-1)^n \dfrac{n!}{x^{n+1}}$.

On doit montrer sous cette hypothèse que (P_{n+1}) est vraie c'est-à-dire que $f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1} \dfrac{(n+1)!}{x^{n+2}}$.

En dérivant membre à membre $f^{(n)}(x) = (-1)^{n+2} \dfrac{n!}{x^{n+1}}$ on obtient :

$$f^{(n+1)}(x) = -(-1)^n \frac{n! \times (n+1)}{x^{(n+1)+1}} = (-1)^{n+1} \frac{(n+1)!}{x^{n+2}}.$$

– Conséquence : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, (P_n) vraie $\Rightarrow (P_{n+1})$ vraie.

Conclusion : Par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, (P_n) est vraie.

16 Etude d'une fonction rationnelle avec une fonction auxiliaire – Méthodes 1, 3, 7, 11, 19 et 22

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^3 + x^2 - 3}{x^2 + 1}$.

1) ***Etude d'une fonction auxiliaire***

La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 + 3x + 8$.

a) La fonction g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $g'(x) = 3x^2 + 3 > 0$ et $\lim\limits_{x \to \pm\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} x^3 \left(1 + \dfrac{3}{x^2} + \dfrac{8}{x^3}\right)$.

Par conséquent $\lim\limits_{-\infty} g = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} g = +\infty$ et l'on a le tableau suivant :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g'(x)$			$+$		
g	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

b) Posons $I = \mathbb{R}$ et $J = \mathbb{R}$.

La fonction g est continue et strictement croissante de I sur J ($g'(x) > 0$ sur I).

Comme $0 \in J$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires pour les fonctions strictement monotones l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur I.

Par dichotomie, $\alpha \approx -1{,}51$ à 10^{-2} près.

c) D'après les questions précédentes :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

2) ***Tableau de variations de f***

a) $$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^3}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x\left(1+\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^3}\right)}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}$$, donc $\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$

b) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$f'(x) = \frac{(3x^2+2x)(x^2+1)-(x^3+x^2-3x)(2x)}{(x^2+1)^2} = \cdots = \frac{x^4+3x^2+8x}{(x^2+1)^2} = \frac{xg(x)}{(x^2+1)^2}.$$

Comme $(x^2+1)^2 > 0$, $f'(x)$ est du signe de $xg(x)$ sur $\mathbb{R}$.

c) On déduit des deux questions précédentes le tableau suivant :

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

3) ***Asymptote oblique***

a) On a :

$$ax+b+\frac{cx+d}{x^2+1} = \frac{(ax+b)(x^2+1)+cx+d}{x^2+1} = \frac{ax^3+bx^2+(a+c)x+(b+d)}{x^2+1}.$$

Par identification, $\begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ a+c=0 \\ b+d=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=-1 \\ d=-4 \end{cases}$ et donc $f(x) = x+1-\dfrac{x+4}{x^2+1}$.

b) $$\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-(x+1)\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(-\frac{x+4}{x^2+1}\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(-\frac{x\left(1+\frac{4}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(-\frac{\left(1+\frac{4}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}\right) = 0.$$

On en déduit que la courbe représentative (C_f) de la fonction f admet la droite (Δ) d'équation $y = x+1$ comme asymptote oblique en $\pm\infty$.

c) Position relative de (C_f) et (Δ) :

x	$-\infty$ $\quad$ -4	$+\infty$
$f(x)-(x+1)$	$+$ $\quad$ 0	$-$
Position relative de (C_f) et (Δ)	(C_f) Au-dessus de (Δ)	(Δ) Au-dessus de (C_f)

4) ***Courbe représentative***

a) Dans la mesure où le nombre dérivé en a est le coefficient directeur de la tangente à (C_f) au point d'abscisse a, les abscisses de I et J sont solutions de $f'(x)=1$ ((Δ) a pour coefficient directeur 1).

$$f'(x)=1 \Leftrightarrow \frac{x^4+3x^2+8x}{\left(x^2+1\right)^2}=1 \Leftrightarrow x^4+3x^2+8x=x^4+2x^2+1 \Leftrightarrow x^2+8x-1=0$$

$$\Leftrightarrow S=\left\{-4-\sqrt{17};-4+\sqrt{17}\right\}.$$

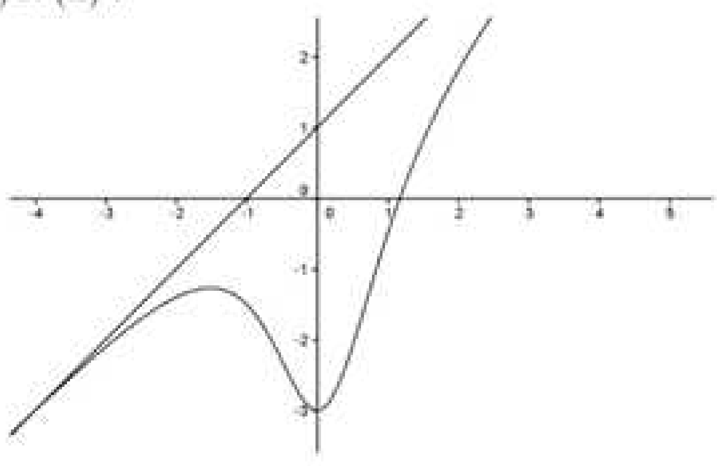
Les abscisses cherchées sont donc $-4-\sqrt{17}$ et $-4+\sqrt{17}$.

b) $$f(\alpha)-\frac{3\alpha+2}{2}=\frac{\alpha^3+\alpha^2-3}{\alpha^2+1}-\frac{3\alpha+2}{2}=\frac{2\left(\alpha^3+\alpha^2-3\right)-(3\alpha+2)\left(\alpha^2+1\right)}{2\left(\alpha^2+1\right)}$$

$$=\frac{2\alpha^3+2\alpha^2-6-\left(3\alpha^3+3\alpha+2\alpha^2+2\right)}{2\left(\alpha^2+1\right)}=\frac{-\alpha^3-3\alpha-8}{2\left(\alpha^2+1\right)}=-\frac{g(\alpha)}{2\left(\alpha^2+1\right)^2}=0.$$

On en déduit que $f(\alpha)=\frac{3\alpha+2}{2}=\frac{3\times(-1{,}51)+2}{2}=-1{,}26$ à 10^{-2} près.

c) Traçons (C_f) et (Δ) :



17 **Détermination d'une fonction rationnelle puis étude de cette fonction et d'une fonction déduite – Méthodes 1, 4, 7 et 19**

1) La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\dfrac{3x^2+ax+b}{x^2+1}$.

Puisque la courbe représentative (C_g) de g a pour tangente au point I(0;3) la droite (T) d'équation $y=4x+3$ cela impose $g(0)=3$ et $g'(0)=4$ ($g'(0)$ est le coefficient directeur de la tangente (T) à (C_g) au point d'abscisse 0 c'est-à-dire en I).

$$3=g(0)=b\Rightarrow g(x)=\frac{3x^2+ax+3}{(x^2+1)}\Rightarrow g'(x)=\frac{(6x+a)(x^2+1)-(3x^2+ax+3)(2x)}{(x^2+1)^2}.$$

$$4=g'(0)=a\Rightarrow g(x)=\frac{3x^2+4x+3}{x^2+1}.$$

2) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{3x^2+4x+3}{x^2+1}$ et sa courbe représentative est notée (C_f).

a) $\alpha+\dfrac{\beta x}{x^2+1}=\dfrac{\alpha(x^2+1)+\beta x}{x^2+1}=\dfrac{\alpha x^2+\beta x+\alpha}{x^2+1}$, donc par identification $\alpha=3$ et $\beta=4$ et donc $f(x)=3+\dfrac{4x}{x^2+1}$.

b) La fonction f et dérivable sur $\mathbb{R}$ et avec l'expression trouvée au a) on a $f'(x)=\dfrac{4(x^2+1)-(4x)(2x)}{(x^2+1)^2}=\dfrac{4}{(x^2+1)^2}\times(1-x^2)$ qui est du signe de $(1-x^2)$ car

$\dfrac{4}{(x^2+1)^2}>0$ sur $\mathbb{R}$.

D'autre part $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(3+\dfrac{4x}{x^2\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}\right)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(3+\dfrac{4}{x\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)}\right)=3$.

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$			0		0		
f	3	↘	1	↗	5	↘	3

c) Pour étudier la position relative de (C_f) et de (T) on étudie le signe de $f(x)-(4x+3)=\left(3+\frac{4x}{x^2+1}\right)-(4x+3)=\frac{4x-4x(x^2+1)}{x^2+1}=\frac{4x^2}{x^2+1}(-x)$ qui est du signe de $-x$ car $\frac{4x^2}{x^2+1}>0$ sur $\mathbb{R}$.

On en déduit le tableau suivant :

x	$-\infty$ $\qquad$ 0 $\qquad$ $+\infty$	
$f(x)-(4x+3)$	$+$ $\qquad$ 0	$-$
Position relative de (C_f) et (T)	(T) Au-dessous de (C_f)	(C_f) Au-dessous de (T)

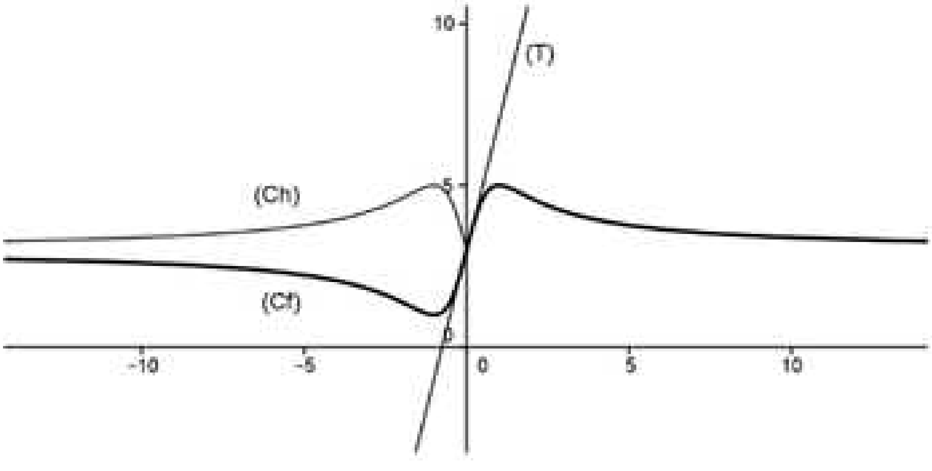
REMARQUE : Le point $I(0,3)$ est un point d'inflexion.

3) La fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x)=\frac{3x^2+4|x|+3}{x^2+1}$ et sa courbe représentative est notée (C_h).

a) $\forall x\in\mathbb{R},\ h(-x)=\frac{3(-x)^2+4|-x|+3}{(-x)^2+1}=\frac{3x^2+4|x|+3}{x^2+1}=h(x)$, donc on en déduit que la fonction h est paire.

La courbe (C_h) est donc symétrique par rapport à (Oy).

b) Traçons (C_f), (T) et (C_h) :



Sur $[0;+\infty[$, $|x|=x$ donc (C_f) et (C_h) coïncident. Ce n'est pas le cas sur $]-\infty;0[$ où (C_h) s'obtient par symétrie par rapport à (Oy) (d'après 3) a)).

18 **Etude d'une fonction trigonométrique définie par morceaux – Méthodes 1, 3, 18, 23 et 25**

1) La fonction g est définie sur $[0;\pi]$ par $g(x) = x\cos x - \sin x$.

a) On a $g'(x) = 1\times\cos x + x(-\sin x) - \cos x = -x\sin x \le 0$ car $-x \le 0$ et $\sin x \ge 0$ sur $[0;\pi]$.

Le tableau de variations de g est donc le suivant :

x	0	π
$g'(x)$	$-$	
g	0 ↘	$-\pi$

b) On déduit du tableau précédent que $g(x) \le 0$.

2) La fonction f est définie sur $[0;\pi]$ par $\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(x) = \dfrac{\sin x}{x} \text{ si } x \in \left]0;\pi\right] \end{cases}$.

a) Comme $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1 = f(0)$ la fonction f est continue en 0.

Finalement, comme $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$ est continue sur $\left]0;\pi\right]$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas, la fonction f est continue sur $[0;\pi]$.

b) La fonction f est dérivable sur $\left]0;\pi\right]$ et l'on a :

$$f'(x) = \frac{(\cos x)(x) - (\sin x)(1)}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2} \le 0 \text{ (d'après 1)).}$$

On en déduit le tableau de variations de f suivant :

x	0	π
$f'(x)$	$-$	
f	1 ↘	0

c) La fonction h définie sur $[0;+\infty[$ par $h(x) = x - \sin x$ est dérivable sur $[0;+\infty[$ et $h'(x) = 1 - \cos x \ge 0$ car $1 \ge \cos x$.

Comme $\forall x \ge 0,\ -1 \le -\sin x \le 1 \Rightarrow x - 1 \le x - \sin x = h(x)$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty} x - 1 = +\infty$ par comparaison $\lim\limits_{+\infty} h = +\infty$, d'où le tableau suivant :

x	0	$+\infty$
$h'(x)$	$+$	
h	0	$+\infty$

On en déduit que $\forall x \geq 0,\ h(x) = x - \sin x \geq 0$.

d) La fonction k définie sur $[0;+\infty[$ par $k(x) = \sin x - x + \dfrac{x^3}{6}$ est dérivable sur $[0;+\infty[$ et $k'(x) = \cos x - 1 + \dfrac{1}{2}x^2$ dont le signe n'est pas évident à déterminer, d'où l'idée d'étudier les variations de k' comme le suggère le « coup de pouce ».

La fonction k' définie sur $[0;+\infty[$ est dérivable sur $[0;+\infty[$ et l'on a $k''(x) = -\sin x + x = h(x) \geq 0$, d'où le tableau suivant :

x	0	$+\infty$
$k''(x)$	$+$	
k'	0	
$k'(x)$	$+$	
k	0	
$k(x)$	$+$	

Finalement pour tout $x \geq 0$ on a, $0 \leq k(x)$ et donc $x - \sin x \leq \dfrac{x^3}{6}$.

e) D'après c) et d) pour tout $x \geq 0$ on a : $0 \leq x - \sin x \leq \dfrac{x^3}{6}$ et par conséquent $\forall x \geq 0,\ -\dfrac{x^3}{6} \leq \sin x - x \leq 0$.

En multipliant l'inégalité précédente par $\dfrac{1}{x}$ pour $x > 0$ on obtient que pour tout $x > 0$ $-\dfrac{x^2}{6} \leq \dfrac{\sin x}{x} - 1 = f(x) - f(0) \leq 0$.

On recommence la même multiplication par $\dfrac{1}{x}$ pour $x > 0$ pour finalement obtenir que pour tout $x > 0$ $-\dfrac{x}{6} \leq \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} \leq 0$.

D'après cette dernière inégalité, en appliquant le théorème des gendarmes $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=0$, ce qui prouve que f est dérivable en 0 avec $f'(0)=0$.

$\boxed{19}$ Fonction trigonométrique déduite d'une fonction rationnelle – Méthodes 1, 2, 7, 11 et 25

Partie A

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ par $f(x)=\frac{1-x^2}{2+x}$ et l'on note (C_f) sa courbe représentative.

1) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x^2\left(1-\frac{1}{x^2}\right)}{x\left(1+\frac{2}{x}\right)}=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{1+\frac{2}{x}}$, donc $\lim\limits_{+\infty} f=-\infty$ et $\lim\limits_{-\infty} f=+\infty$.

$\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}}(1-x^2)=-3\\ \lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}}(2+x)=0^-\end{cases}\Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to-2\\x<-2}} f(x)=+\infty$ et $\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}}(1-x^2)=-3\\ \lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}}(2+x)=0^+\end{cases}\Rightarrow \lim\limits_{\substack{x\to-2\\x>-2}} f(x)=-\infty$.

2) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ et l'on a :

$f'(x)=\frac{(-2x)(2+x)-(1-x^2)(1)}{(2+x)^2}=\frac{-x^2-4x-1}{(2+x)^2}$ qui est une expression du signe de $-x^2-4x-1$ car $(2+x)^2>0$ sur $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

L'expression du second degré $-x^2-4x-1$ a pour racines $-2-\sqrt{3}$ et $-2+\sqrt{3}$ d'où le tableau de variations de f suivant :

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{3}$		-2		$-2+\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	↘	$4+2\sqrt{3}$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$4-2\sqrt{3}$	↘	$-\infty$

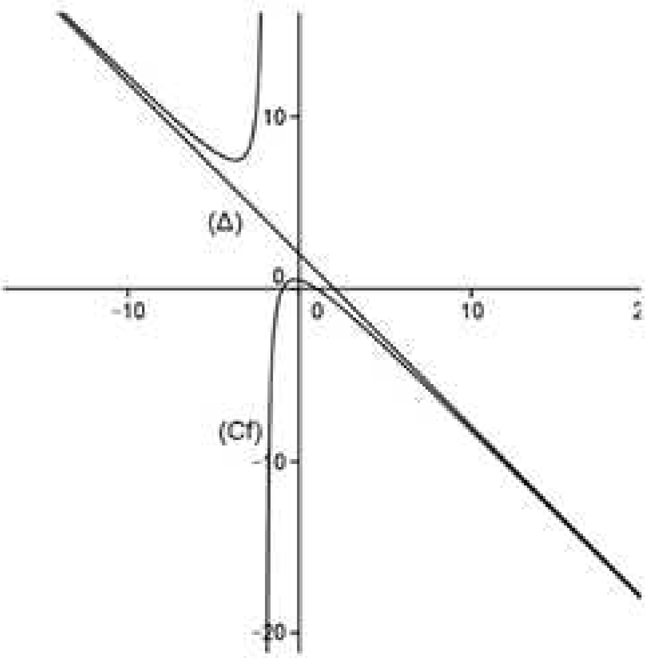
3) On a $ax+b+\frac{c}{x+2}=\frac{(ax+b)(x+2)+c}{x+2}=\frac{ax^2+(2a+b)x+2b+c}{x+2}$, donc par identification $\begin{cases}a=-1\\2a+b=0\\2b+c=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\b=2\\c=-3\end{cases}\Leftrightarrow f(x)=-x+2-\frac{3}{x+2}$.

4) On a $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-(-x+2))=\lim\limits_{x\to\pm\infty}-\dfrac{3}{x+2}=0$ donc (C_f) admet la droite (Δ) d'équation $y=-x+2$ comme asymptote oblique en $\pm\infty$.

5) Pour déterminer la position relative de (C_f) et (Δ), on étudie le signe de $f(x)-(-x+2)=-\dfrac{3}{x+2}$ sur $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$ et l'on résume dans le tableau suivant :

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x)-(-x+2)$	$+$	||	$-$
Position relative de (C_f) et (Δ)	(C_f) Au-dessus de (Δ)	||	(Δ) Au-dessus de (C_f)

Construisons (C_f) et (Δ) :



Partie B

La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=\dfrac{1-\sin^2 x}{2+\sin x}$ et l'on note (C_g) sa courbe représentative.
On remarque dans un premier temps en utilisant le « coup de pouce » que pour tout x réel $g(x)=(f\circ u)(x)=f(u(x))$ avec $u(x)=\sin x$.

1) Pour h réel, $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-h\right)=\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+h\right)=\cos h$ donc :

$g\left(\dfrac{\pi}{2}-h\right)=g\left(\dfrac{\pi}{2}+h\right)=f(\cos h)$.

On en déduit que (C_g) est symétrique par rapport à la droite (D) d'équation $x = \frac{\pi}{2}$.

2) Pour tout x réel $g(x+2\pi) = f(\sin(x+2\pi)) = f(\sin x) = g(x)$ car $x \mapsto \sin x$ est périodique de période 2π.

On peut obtenir (C_g) sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ à partir de sa construction sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ par symétrie par rapport à (D) (d'après 1)).

On complète ensuite par translations de vecteurs $2k\pi\vec{i}$ pour $k \in \mathbb{Z}$ pour obtenir (C_g) sur $\mathbb{R}$.

3) On remarque d'abord que $x \mapsto \sin x$ est continue et strictement croissante de $I = \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ sur $J = [-1;1]$.

Comme $-2+\sqrt{3} \in J$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires pour les fonctions strictement monotones l'équation $\sin x = -2+\sqrt{3}$ admet une solution unique α sur I.

Par dichotomie $\alpha = -0{,}27$ à 10^{-2} près.

On applique d'autre part la définition pour étudier les variations de g.

En effet, pour a et b réels :

$-\frac{\pi}{2} \leq a \leq b \leq \alpha \Rightarrow \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \leq \sin a \leq \sin b \leq \sin\alpha \Rightarrow -1 \leq \sin a \leq \sin b \leq -2+\sqrt{3}$ et donc

$-\frac{\pi}{2} \leq a \leq b \leq \alpha \Rightarrow f(-1) \leq f(\sin a) \leq f(\sin b) \leq f\left(-2+\sqrt{3}\right) = 4-2\sqrt{3}$.

(La fonction f est croissante sur $\left[-1;-2+\sqrt{3}\right]$.)

On en déduit que $-\frac{\pi}{2} \leq a \leq b \leq \alpha \Rightarrow 0 \leq g(a) \leq g(b) \leq 4-2\sqrt{3}$, et par conséquent que g est croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2};\alpha\right]$.

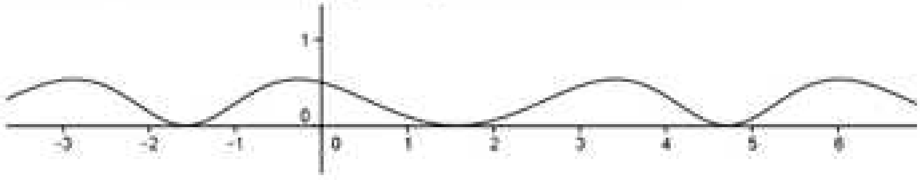
On démontre de même que pour a et b réels :

$\alpha \leq a \leq b \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow 4-2\sqrt{3} \geq g(a) \geq g(b) \geq 0$, et donc que g est décroissante sur $\left[\alpha;\frac{\pi}{2}\right]$.

Finalement, on obtient le tableau de variations suivant :

x	$-\frac{\pi}{2}$		α		$\frac{\pi}{2}$
g	0	$\nearrow$	$4-2\sqrt{3}$	$\searrow$	0

4) La courbe représentative (C_g) de g est la suivante :



20 L'inégalité fondamentale de convexité avec n réels $x_1,\cdots,x_n$ puis application – Méthode 6

1) Soit f une fonction f convexe sur un intervalle I, n réels $x_1,x_2,\cdots,x_n$ de I et n réels strictement positifs $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ tels que $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1$.
D'autre part, $(\mathbf{i_n})$ est l'inégalité $f(\lambda_1x_1+\cdots+\lambda_nx_n)\le\lambda_1f(x_1)+\cdots+\lambda_nf(x_n)$.

a) L'inégalité $(\mathbf{i_1})$ correspond à $\lambda_1=1$ et s'écrit donc $f(x_1)\le f(x_1)$ ce qui est vrai.
L'inégalité $(\mathbf{i_2})$ correspond à $\lambda_2=1-\lambda_1$ avec $\lambda_1\in\,]0;1[$ et s'écrit donc $f(\lambda_1x_1+(1-\lambda_1)x_2)\le\lambda_1f(x_1)+(1-\lambda_1)f(x_2)$ ce qui est vrai d'après l'exercice 13.

b) Soit n un entier supérieur ou égal à 2.
Supposons que $(\mathbf{i_n})$ est vraie.
Montrons sous cette hypothèse que $(\mathbf{i_{n+1}})$ est vraie.
Considérons $f\left(\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_ix_i\right)$ où $x_1,x_2,\cdots,x_{n+1}$ sont n+1 réels de I et $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_{n+1}$, n+1 réels strictement positifs tels que $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n+\lambda_{n+1}=1$.
En posant $\sum_{i=1}^{n}\lambda_ix_i=\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\right)y$ et $\lambda_0=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i$ on obtient :

$$f\left(\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_ix_i\right)=f\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_ix_i+\lambda_{n+1}x_{n+1}\right)=f(\lambda_0y+(1-\lambda_0)x_{n+1}).$$

Comme $(\mathbf{i_2})$ est vraie on a : $f(\lambda_0y+(1-\lambda_0)x_{n+1})\le\lambda_0f(y)+(1-\lambda_0)f(x_{n+1})$ **(ii)**.

Comme $f(y)=f\left(\frac{1}{\lambda_0}\sum_{i=1}^{n}\lambda_ix_i\right)=f\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{\lambda_0}x_i\right)$ avec $\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{\lambda_0}=1$ on peut appliquer $(\mathbf{i_n})$ à $f(y)$ ce qui donne $f(y)\le\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{\lambda_0}f(x_i)$.
On en déduit que :

$$\lambda_0f(y)+(1-\lambda_0)f(x_{n+1})\le\lambda_0\sum_{i=1}^{n}\frac{\lambda_i}{\lambda_0}f(x_i)+(1-\lambda_0)f(x_{n+1})=\sum_{i=1}^{n}\lambda_if(x_i)+\lambda_{n+1}f(x_{n+1})=\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_if(x_i).$$

D'après **(ii)** : $f\left(\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i f(x_i)$.

c) D'après a) et b), par récurrence, l'inégalité $(\mathbf{I_n})$ est vraie pour tout entier n supérieur ou égal à 1.

2) Lorsque f est concave sur I, l'inégalité $(\mathbf{I_n})$ devient $\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i f(x_i) \leq f\left(\sum_{i=1}^{n+1}\lambda_i x_i\right)$.

3) Soit n réels $x_1, x_2, \cdots, x_n$ positifs et n réels strictement positifs $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ tels que $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$.

On a $\sqrt{x_1} + \cdots + \sqrt{x_n} \leq n \times \sqrt{\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}} \Leftrightarrow \frac{1}{n}\sqrt{x_1} + \cdots + \frac{1}{n}\sqrt{x_n} \leq \sqrt{\frac{1}{n}x_1 + \cdots + \frac{1}{n}x_n}$.

On reconnaît l'inégalité de la deuxième question avec $f(x) = \sqrt{x}$ et pour tout i entier compris entre 1 et n, $\lambda_i = \frac{1}{n}$, qui bien sûr est vraie puisque la fonction $x \overset{f}{\mapsto} \sqrt{x}$ est concave sur $]0;+\infty[$ $\left(f''(x) = -\frac{1}{4x\sqrt{x}} < 0\right)$.

Chapitre 3
METHODES SUR LES FONCTIONS EXPONENTIELLES, LOGARITHMES ET PUISSANCES RÉELLES
EXERCICES & CORRIGES

Exercices

1 Etude de variations de fonctions exponentielles – Méthode 1

Etudiez les variations des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition :

1) f définie par $f(x)=e^{-x}+x-1$

2) f définie par $f(x)=e^{4x+1}-3x+1$

2 Etude de variations de fonctions logarithmes – Méthode 6

Etudiez les variations des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition :

1) f définie par $f(x)=x\ln x-x+3$

2) f définie par $f(x)=\ln\left(x^2+1\right)+x$

3 Etude de variations de fonctions puissances réelles – Méthode 11 – Approfondissement

Etudiez les variations des fonctions suivantes sur leur ensemble de définition :

1) f définie par $f(x)=\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{3}}$

2) f définie par $f(x)=x^{\sqrt{x}}$

4 Comportement local et asymptotique avec la fonction exponentielle Méthode 4

Etudiez le comportement des fonctions suivantes aux bornes de leur ensemble de définition :

1) f définie par $f(x)=e^{x}-x+1$

2) f définie par $f(x)=e^{x^2}-x^4-3$

3) f définie par $f(x)=x^2e^{x}+x-1$

4) f définie par $f(x)=x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$

5 **Comportement local et asymptotique avec la fonction logarithme népérien – Méthode 7**

Etudiez le comportement des fonctions suivantes aux bornes de leur ensemble de définition :

1) f définie par $f(x)=\ln x-x+1$

2) f définie par $f(x)=x^2\ln x-x\ln x+3$

3) f définie par $f(x)=x\ln\left(\frac{1}{x}+1\right)$

6 **Comportement local et asymptotique avec des fonctions puissances réelles – Méthode 12 – Approfondissement**

Etudiez le comportement des fonctions suivantes aux bornes de leur ensemble de définition :

1) f définie par $f(x)=\left(x^2+1\right)^{\frac{1}{3}}$

2) f définie par $f(x)=x^{\sqrt{x}}$

3) f définie par $f(x)=\left(e^x+1\right)^{\frac{1}{x}}$

7 **Résolution d'équations et d'inéquations – Méthode 8**

Résolvez les équations et inéquations suivantes :

1) $e^{-x+2}-3=0$

2) $e^{2x}-4e^x+3\leq 0$

3) $\ln(x-1)=4$

4) $\ln\left(x^2+4x+3\right)=\ln 3$

5) $\ln(x+1)+\ln(x+3)=\ln 3$

6) $\ln\left(x^2+x-2\right)\leq 0$

7) $x^{\frac{1}{4}}-2\leq 1$

8 **Inégalités de convexité avec les fonctions exponentielles et logarithme népérien – Méthode 6 du chapitre précédent**

On admet que la fonction exponentielle est convexe et que la fonction logarithme népérien est concave.

On rappelle que pour $a>0$ et $n\in\mathbb{N}^*$, $\sqrt[n]{a}=a^{\frac{1}{n}}$

1) Montrez que pour tout x réel, $e^x\geq 2e^{\frac{x}{2}}-1$.

2) Montrez que pour $n\in\mathbb{N}^*$ et n réels strictement positifs $x_1,\dots,x_n$:

$$\sqrt[n]{x_1\times\cdots\times x_n}\leq\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\text{ (Inégalité arithmético-géométrique).}$$

Coup de pouce : Pensez à utiliser la fonction logarithme népérien et sa concavité.

9 Etude d'une fonction exponentielle avec fonction auxiliaire – Méthodes 1, 2 et 4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{x}{e^x-x}$ et l'on note (C_f) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Partie A

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=e^x-x-1$.

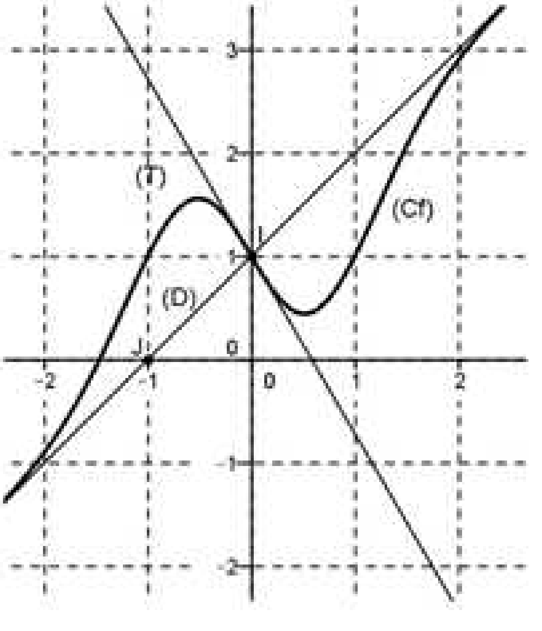
1) Dressez le tableau de variations de g.
2) Déduisez-en le signe de g, puis l'ensemble de définition de f.

Partie B

1) Déterminez les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2) Interprétez graphiquement les limites précédentes.
3) Dressez le tableau de variations de f.
4) Donnez une équation de la tangente (T) à (C_f) en O.
5) Donnez la position relative de (T) et (C_f).
6) Tracez soigneusement (C_f), (T) et ses éventuelles asymptotes.

10 Lecture graphique – Fonction exponentielle – Théorème des valeurs intermédiaires – Méthodes 1, 3 et 4

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative (C_f) dans un repère orthonormée $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ est la suivante :



- Le point $I(0,1)$ est centre de symétrie de (C_f).
- La droite (D) est asymptote à (C_f) en $\pm\infty$.
- La droite (T) d'équation $y=(1-e)x+1$ est la tangente à (C_f) en I.

Partie A – Expression de f

1) Montrez qu'il existe une fonction g, dérivable sur $\mathbb{R}$, admettant comme limite 0 en $\pm\infty$ telle que $f(x)=x+1+g(x)$.

2) Montrez que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)+f(-x)=2$.

3) Déduisez-en que la fonction dérivée f' de f est paire.

4) On admet qu'il existe a et b réels tels que $g(x)=(ax+b)e^{-x^2}$.

Déterminez a et b.

Partie B – Etude de f

1) Montrez que $f'(x)=1+\left(2x^2-1\right)e^{-x^2+1}$.

2) Dressez le tableau de variations de f' sur $\left[0;+\infty\right[$.

3) Montrez que l'équation $f'(x)=0$ admet une solution unique α sur $\left[0;+\infty\right[$ et donnez une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

4) Déduisez-en le tableau de variations de f sur $\left[0;+\infty\right[$.

5) Déterminez $f(\alpha)$ sous forme d'un quotient de deux polynômes en α.

$\boxed{11}$ Fonction exponentielle – Tangente particulière – Méthodes 1 et 4

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=xe^{x-1}+1$ et l'on note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

Partie A – Etude de la fonction

1) Déterminez $\lim\limits_{-\infty} f$. Que peut-on en déduire pour (C_f) ?

2) Déterminez $\lim\limits_{+\infty} f$.

3) Déterminez le tableau de variations de f.

Partie B – Etude d'une tangente particulière

Soit $a\in\mathbb{R}_+^*$, le but de cette partie est de chercher s'il existe une tangente (T_a) à (C_f) qui passe par O.

1) Pour $a\in\mathbb{R}_+^*$ quelconque, donnez une équation de (T_a).

2) Démontrez que (T_a) passe par O si et seulement si $1-a^2e^{a-1}=0$.

3) Démontrez que 1 est l'unique solution sur $\left]0;+\infty\right[$ de $1-x^2e^{x-1}=0$.

4) Répondez au problème posé dans cette partie.

$\boxed{12}$ Etude d'une fonction logarithme avec une fonction auxiliaire – Méthodes 6 et 7

Partie A – Etude d'une fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur $\left]0;+\infty\right[$ par $g(x)=2x^3-1+2\ln x$.

1) Dressez le tableau de variations de g.

2) Montrez que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α dont vous donnerez une valeur approchée à 10^{-2} près.
3) Déduisez-en le signe de g.

Partie B – Etude d'une fonction logarithme à l'aide de la partie A

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=2x-\frac{\ln x}{x^2}$ et l'on note (C_f) sa courbe représentative dans le repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Déterminez les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2) Dressez le tableau de variations de f (utilisez la partie A).
3) Montrez que la droite (Δ) d'équation $y=2x$ est asymptote oblique et étudiez la position relative de (Δ) et (C_f).
4) Tracez (C_f) et (Δ).

13 Etude d'une suite définie avec une fonction logarithme – Méthodes 6 et 7

Partie A – Etude d'une fonction logarithme

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\ln(x+1)+\frac{1}{2}x^2$.

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormée $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Dressez le tableau de variations de f.
2) Déterminez l'équation réduite de la tangente (T) à la courbe représentative (C_f) au point d'abscisse 0.
3) Tracez (C_f) et (T).

Partie B – Etude d'une suite définie avec la fonction f

On considère la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} U_0=1 \\ U_{n+1}=f(U_n) \end{cases}$.

1) Construisez le graphe « WEB » relatif à cette suite.
2) Quelles conjectures peut-on émettre relativement aux comportements global et asymptotique de cette suite ?
3) Montrez par récurrence que (U_n) est croissante minorée par 1.
4) Montrez par l'absurde que (U_n) n'est pas majorée.
5) Déduisez-en $\lim U_n$.

14 Etude d'une fonction logarithme – Tangente particulière – Méthodes 6, 7 et 8

Partie A – Etude d'une fonction logarithme

On considère la fonction f définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x)=\ln x-\dfrac{1}{\ln x}$ et l'on note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

D'autre part, on note (C_g) la courbe représentative de $x\overset{g}{\longmapsto}\ln x$ sur $]1;+\infty[$.

1) Dressez le tableau de variations de f.

2) Donnez une interprétation graphique de $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\ln x)$ après avoir déterminé cette limite.

3) Etudiez la position relative de (C_f) et (C_g).

4) Tracez (C_f) et (C_g).

Partie B – Etude de tangentes particulières

Dans cette partie, on cherche les tangentes à (C_f) passant par O.

1) Soient $a\in]1;+\infty[$ et (T_a) la tangente à (C_f) au point d'abscisse a.

Montrez que (T_a) passe par O si et seulement si $f(a)-af'(a)=0$.

2) Soit h la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par $h(x)=f(x)-xf'(x)$.

Montrez que résoudre $h(x)=0$ équivaut à résoudre sur $]1;+\infty[$ l'équation $(\ln x)^3-(\ln x)^2-\ln x-1=0$.

3) Soit k la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $k(t)=t^3-t^2-t-1$.

Montrez que l'équation $k(t)=0$ admet une solution unique α et donnez une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

4) Montrez alors qu'il existe une unique tangente à (C_f) passant par O et précisez la.

15 Etude d'une fonction logarithme – Fonction auxiliaire – Dérivabilité – Méthodes 6 et 7

Partie A – Fonction auxiliaire

On considère la fonction g définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{x}{x+1}-\ln(x+1)$.

1) Dressez le tableau de variations de g.

2) Déduisez-en le signe de g.

Partie B – Etude d'une fonction logarithme définie par morceaux

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x} \text{ si } x \in \left]0;+\infty\right[\\ f(0) = 1 \end{cases}.$$

1) Montrez que sur $\left]0;+\infty\right[$, on a $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

2) Dressez alors le tableau de variations de f.

3) On s'intéresse dans cette question, à la dérivabilité de f en 0.

a) Montrez que f est continue en 0.

b) Montrez en étudiant les variations sur $\left[0;+\infty\right[$ de la fonction h définie par $h(x) = \ln(1+x) - \left(x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}\right)$ et en calculant $h(0)$ que pour tout réel x positif on a $\ln(1+x) \leq x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3}$.

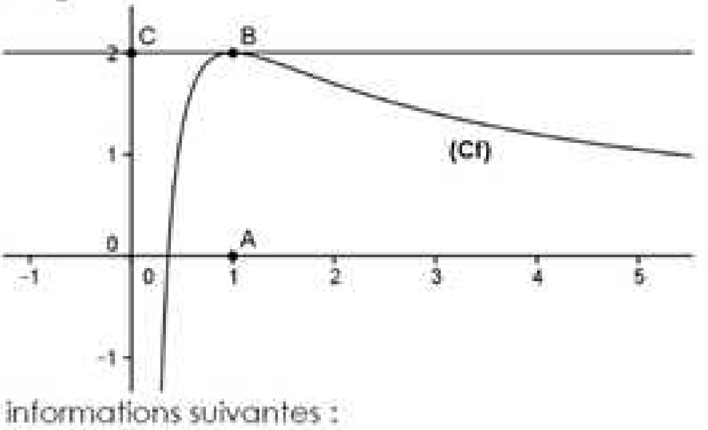
c) Montrez en raisonnant de même, que pour tout réel x positif on a $x - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x)$.

d) Déduisez de b) et c) que f est dérivable en 0, puis donnez une équation de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 0.

4) Tracez (T) et (C_f).

16 Fonction logarithme – Lecture graphique – Algorithme – Méthodes 6 et 7

Sur le graphique ci-dessous, on a tracé, dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, la courbe représentative (C_f) d'une fonction f définie et dérivable sur $\left]0;+\infty\right[$.



On dispose des informations suivantes :

– $A(1;0)$, $B(1;2)$, $C(0;2)$;

– (BC) est tangente à (C_f) en B ;

– $\exists a \in \left]0;+\infty\right[$ et $b \in \left]0;+\infty\right[$, $\forall x > 0$, $f(x) = \dfrac{a + b\ln x}{x}$

1) a) En utilisant le graphique donnez $f(1)$ et $f'(1)$.

b) Déterminez $f'(x)$ en fonction de a et b.

c) Déduisez-en les réels a et b et l'expression de $f(x)$.

2) a) Étudiez les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
b) Dressez le tableau de variation de f.
3) Montrez que l'équation $f(x)=1$ admet deux solutions α et β avec $\alpha<\beta$, que vous encadrerez entre deux entiers.

4) On considère l'algorithme suivant :

```
Variables : a, b, m sont des réels.
Initialisation : Affecter à a la valeur 0.
                 Affecter à b la valeur 1.
Traitement : Tant que |b − a| > 0,1
                 Affecter à « m » la valeur 1/2 (a+b).
                 Si f(m) < 1 alors Affecter à « a » la valeur « m ».
                 Sinon Affecter à b la valeur m.
                 Fin de Si.
             Fin tant que.
Sortie :     Afficher a.
             Afficher b.
```

a) **Compréhension de l'algorithme**
Expliquez à quoi correspondent les valeurs a et b que renvoie l'algorithme et justifiez pourquoi en complétant le tableau suivant on les obtient.

	Etape 1	*Etape 2*	*Etape 3*	*Etape 4*	*Etape 5*
a					
b					
b − a					
m					

b) Vérifiez que votre raisonnement est exacte en programmant l'algorithme en langage Python.

17 Résolution d'une équation fonctionnelle avec la fonction exponentielle – Méthode 5

On cherche l'ensemble des fonctions f, définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que pour tous x et y réels, $f(x+y)=\frac{1}{3}f(x)f(y)$ (i) avec $f'(0)=12$.

REMARQUE : On vous propose de raisonner par analyse et synthèse.

Analyse : On suppose qu'une fonction f est solution du problème posé.
1) Montrez par l'absurde que f ne s'annule pas, puis que $f(0)=3$.

2) Pour a fixé, en dérivant membre à membre $f(a+x)=\frac{1}{3}f(a)f(x)$, puis en donnant une valeur particulière à x, déterminez une relation entre f' et f.

3) On considère la fonction k définie sur $\mathbb{R}$ par $k(x)=\frac{1}{3}f\left(\frac{x}{4}\right)$.

Calculez k(0), déterminez une relation entre k' et k, identifiez k et finalement donnez la seule fonction f qui peut être solution du problème posé.

Synthèse : Vérifiez que f est effectivement solution du problème posé et répondez à la question initiale.

18 Résolution d'une équation fonctionnelle avec la fonction logarithme népérien – Méthode 10

On cherche l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}_+^*$ telles que pour tous x et y réels strictement positifs, $f(x\,y) = f(x) + f(y)$ avec $f'(1) = 5$.

REMARQUE : On vous propose de raisonner par analyse et synthèse.

Analyse : On suppose qu'une fonction f est solution du problème posé.
1) Montrer que $f(1) = 0$.
2) Pour a fixé, en dérivant membre à membre $f(ax)=f(a)+f(x)$, puis en donnant une valeur particulière à x, déterminez **f'**.
3) On considère la fonction k définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $k(x)=\frac{1}{5}f(x)$.

Calculez k(1), déterminez k', identifiez k et finalement donnez la seule fonction f qui peut être solution du problème posé.

Synthèse : Vérifiez que f est effectivement solution du problème posé et répondez à la question initiale.

19 Résolution approchée d'une équation différentielle par la méthode d'Euler – Méthode 28 du chapitre précédent

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x)=e^{-x^2}$ avec $f(0)=1$ et l'on cherche à déterminer une courbe approchée de la courbe représentative de la fonction f par la méthode d'Euler.

REMARQUE : Une autre façon de formuler l'énoncé consiste à demander quelle est la courbe approchée de la solution de l'équation différentielle d'inconnue la fonction y telle que $y'=e^{-x^2}$ avec $y(0)=1$.

1) Montrez que la courbe « lissée » de l'ensemble des points $M(x_n, y_n)$ tels que

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 1 \\ x_{n+1} = x_n + h \\ y_{n+1} = e^{-x_n^2} \times h + y_n \end{cases}$$

avec par exemple $h = \pm 0{,}01$ répond à la question.

2) Donnez cette courbe sur $[-5,5]$ à l'aide d'un algorithme en langage Python que vous préciserez.

20 **Algorithme de Briggs – Méthodes 5 et 15 du chapitre sur les suites**

Etant donnés trois réels strictement positifs a, b et x tels que $a < x < b$ dont on connaît les valeurs exactes de lna et lnb, l'algorithme de Briggs propose de donner une valeur approchée du logarithme népérien de x en utilisant la propriété $\ln\sqrt{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\ln\alpha\beta = \frac{\ln\alpha + \ln\beta}{2}$ (i) lorsque α et β sont des réels strictement positifs dont on connaît le logarithme népérien.

En langage Python, cet algorithme peut être le suivant où x est un réel tel que $1 < x < e^k$ avec k entier naturel (nécessairement non nul) :

```
from math import exp, sqrt
def briggs(x,k,i):
    a=1
    b=exp(k)
    la=0
    lb=k
    while((b-x)>i):
        if(sqrt(a*b)<=x):
            a=sqrt(a*b)
            la=(la+lb)/2
        else:
            b=sqrt(a*b)
            lb=(la+lb)/2
    return(la,lb)
```

Partie A : Compréhension et pertinence de l'algorithme

Dans cette partie on choisit de prendre $x = 29$, $k = 4$ et $i = 0,1$

1) Pourquoi le choix de $k = 4$ convient-il ?

2) Complétez le tableau suivant dans lequel la colonne « E_n » correspond à l'entrée « n » dans la boucle conditionnelle tant que l'on entre dans cette boucle.

	E_0	E_1	...	E_n
a	1		...	
b	$e^4 \approx 54,6$		...	
la	0		...	
lb	4		...	
$\sqrt{ab}$	$e^2 \approx 7,4 \leq 29$		...	
$b-29$	$54,6-29>0,1$		...	

3) Déterminez une valeur arrondie à 6 décimales de ln29 à la calculatrice, puis conjecturez les comportements globaux et asymptotique des suites de nombres a, b, la et lb.

Partie B : Démonstration des résultats donnés par l'algorithme
Dans cette partie, on se propose de démontrer les conjectures émises à la partie A dans le cas général.

On considère un réel x et un entier naturel k non nul tels que $1 < x < e^k$.
1) Définissez quatre suites (a_n), (b_n), (la_n) et (lb_n) qui donnent les réels a, b, la et lb de chaque colonne E_n du tableau demandé dans la question 2 de la partie A dans le cas où x est un réel quelconque de l'intervalle $\left]1, e^k\right[$.

2) a) Montrez que si $0 < u \leq v$ alors $0 < u \leq \sqrt{uv} \leq v$.
b) Montrez alors par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$1 \leq a_n \leq a_{n+1} \leq x \leq b_{n+1} \leq b_n \leq e^k.$$

Coup de pouce : Raisonnez par disjonction des cas et utilisez la question précédente.
3) Montrez par récurrence que $la_n = \ln a_n$ et $lb_n = \ln b_n$
Coup de pouce : Raisonnez par disjonction des cas et utilisez (i) pour démontrer l'hérédité.
4) a) Montrez en raisonnant par disjonction des cas que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$b_{n+1} - a_{n+1} \leq \frac{\sqrt{b_n}}{\sqrt{b_n} + \sqrt{a_n}}(b_n - a_n).$$

En déduire en utilisant 2) que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_{n+1} - a_{n+1} \leq \dfrac{\sqrt{b_n}}{\sqrt{b_n} + 1}(b_n - a_n)$.

b) En étudiant la fonction f définie sur $\left[x, e^k\right]$ par $f(t) = \dfrac{\sqrt{t}}{\sqrt{t} + 1}$, montrez alors qu'il existe un réel $\gamma \in \left]0, 1\right[$ tel que $b_{n+1} - a_{n+1} \leq \gamma(b_n - a_n)$, puis en déduire par étapes successives que $b_n - a_n \leq \gamma^n \times 9$.
c) Montrez alors que $\lim(b_n - a_n) = 0$.
5) Montrez alors que les suites (a_n) et (b_n) convergent vers x et donc que la_n et lb_n convergent vers lnx.

Corrigés

1 Etude de variations de fonctions exponentielles – Méthode 1

1) f est définie par $f(x)=e^{-x}+x-1$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=-e^{-x}+1$.

Pour étudier le signe de $f'(x)=-e^{-x}+1$, il faut par exemple résoudre $f'(x)\geq 0$ c'est-à-dire $-e^{-x}+1\geq 0$.

Comme, $-e^{-x}+1\geq 0 \Leftrightarrow 1\geq e^{-x} \Leftrightarrow \ln 1\geq \ln e^{-x} \Leftrightarrow 0\geq -x \Leftrightarrow 0\leq x$, on en déduit que si $x\geq 0$ $f'(x)\geq 0$, sinon $f'(x)<0$.

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	0	$\nearrow$	

2) f est définie par $f(x)=e^{4x-1}-3x+1$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=4e^{4x-1}-3$.

Pour étudier le signe de $f'(x)=4e^{4x-1}-3$, il faut par exemple résoudre $f'(x)\geq 0$ c'est-à-dire $4e^{4x-1}-3\geq 0$.

On a $4e^{4x-1}-3\geq 0 \Leftrightarrow e^{4x-1}\geq \frac{3}{4} \Leftrightarrow \ln e^{4x-1}\geq \ln\frac{3}{4} \Leftrightarrow 0\geq 4x-1\geq \ln\frac{3}{4} \Leftrightarrow x\geq \frac{1}{4}\left(1+\ln\frac{3}{4}\right)$

donc on en déduit que si $x\geq \frac{1}{4}\left(1+\ln\frac{3}{4}\right)$ alors $f'(x)\geq 0$, sinon $f'(x)<0$.

D'autre part, $f\left(\frac{1}{4}\left(1+\ln\frac{3}{4}\right)\right)=e^{1+\ln\frac{3}{4}-1}-\frac{3}{4}\left(1+\ln\frac{3}{4}\right)+1=\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\ln\frac{3}{4}-\frac{3}{4}+1=1-\frac{3}{4}\ln\frac{3}{4}$.

REMARQUE : Il faut toujours détailler ce genre de calcul pour un extrema local avec les fonctions exponentielles et logarithmes même si on ne l'a pas toujours fait par la suite. En revanche, à de rares exceptions près, on a toujours donné les valeurs exactes d'un maximum ou d'un minimum local.

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$\frac{1}{4}\left(1+\ln\frac{3}{4}\right)$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$1-\frac{3}{4}\ln\frac{3}{4}$	$\nearrow$	

2 Etude de variations de fonctions logarithmes – Méthode 6

1) f est définie par $f(x) = x\ln x - x + 3$.

La fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $f'(x) = 1\times\ln x + x\left(\frac{1}{x}\right) - 1 = \ln x$.

Pour étudier le signe de $f'(x) = \ln x$, il faut par exemple résoudre l'inéquation $f'(x) \geq 0$ c'est-à-dire $\ln x \geq 0$.

Comme $\ln x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$, on en déduit que si $x \geq 1$ $f'(x) \geq 0$, sinon $f'(x) < 0$.

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	2	$\nearrow$	

2) f est définie par $f(x) = \ln(x^2+1) + x$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et :

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} + 1 = \frac{2x + x^2 + 1}{x^2+1} = \frac{(x+1)^2}{x^2+1} \geq 0 \text{ sur } \mathbb{R}.$$

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f		$\nearrow$	

3 Etude de variations de fonctions puissances réelles – Méthode 11 – Approfondissement

1) Pour tout x réel, $x^2+1>0$ donc f est définie sur $\mathbb{R}$ et l'on a $f(x) = e^{\frac{1}{3}\ln(x^2+1)}$.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x) = \frac{1}{3}\times\frac{2x}{x^2+1}e^{\frac{1}{3}\ln(x^2+1)}$ qui est du signe de x ce qui donne le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	1	$\nearrow$	

2) La fonction f est définie sur $\left]0,+\infty\right[$ et l'on a $f(x)=e^{\sqrt{x}\ln x}$.

La fonction f est dérivable sur $\left]0,+\infty\right[$ avec $f'(x)=\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x+\sqrt{x}\times\frac{1}{x}\right)e^{\sqrt{x}\ln x}$ qui est du signe de $\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x+\sqrt{x}\times\frac{1}{x}=\frac{1}{2\sqrt{x}}\ln x+\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}}\left(\frac{1}{2}\ln x+1\right)$.

De là $f'(x)\geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln x+1\geq 0 \Leftrightarrow \ln x\geq -2 \Leftrightarrow x\geq e^{-2}$, donc si $x\geq e^{-2}$ alors $f'(x)\geq 0$, sinon $f'(x)<0$.

On en déduit le tableau suivant :

x	0		e^{-2}		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖	↘	$e^{-\frac{2}{e}}$	↗	

4 Comportement local et asymptotique avec la fonction exponentielle – Méthode 4

1) f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^x-x+1$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x+1)=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{e^x}{x}-1+\frac{1}{x}\right)=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ (croissances comparées de $x\mapsto e^x$ et $x\mapsto x$ en $+\infty$).

REMARQUE IMPORTANTE : Quand vous levez une forme indéterminée avec les fonctions exponentielles et logarithmes, il faut utiliser une des limites à apprendre par cœur dans votre cours (et bien la préciser dans votre rédaction), après éventuellement avoir transformé l'écriture de départ de la fonction (développement, factorisation…) pour la faire apparaître.

2) f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{x^2}-x^4-3$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^4\left(\frac{e^{x^2}}{x^4}-1-\frac{3}{x^4}\right)=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{e^{x^2}}{x^4}=\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{e^u}{u^2}=+\infty$ (croissances comparées de $u\mapsto e^u$ et $u\mapsto u^2$ en $+\infty$) et $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x^4=+\infty$.

3) f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x^2e^x+x-1$.

Il n'y a pas de forme indéterminée en $+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2e^x=+\infty$ puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$ (et $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$) et $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x + x - 1 = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x = 0$ (limite usuelle de la forme $\lim\limits_{x\to-\infty} x^ne^x = 0$ avec $n = 2$) et $\lim\limits_{x\to-\infty}(x-1) = -\infty$.

4) f est définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)$.

En posant $u = \frac{1}{x}$, quand x tend vers $\pm\infty$ alors u tend vers 0 et l'on a $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{u\to0} \frac{e^u - 1}{u} = 1$ (limite usuelle).

$\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) = 0$ car $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x<0}} e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{u\to-\infty} e^u = 0$.

En posant $u = \frac{1}{x}$, quand x tend vers 0^+ alors u tend vers $+\infty$ et l'on a $\lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to0\\x>0}} x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) = \lim\limits_{u\to+\infty} \frac{e^u - 1}{u} = \lim\limits_{u\to+\infty}\left(\frac{e^u}{u} - \frac{1}{u}\right) = +\infty$ puisque l'on a $\lim\limits_{u\to+\infty} \frac{e^u}{u} = +\infty$ (croissances comparées de $u \mapsto e^u$ et $u \mapsto u$ en $+\infty$).

5 Comportement local et asymptotique avec la fonction logarithme népérien – Méthode 7

1) f définie est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \ln x - x + 1$.

$\lim\limits_{x\to0} f(x) = \lim\limits_{x\to0} \ln x - x + 1 = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to0} \ln x = -\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{\ln x}{x} - 1 + \frac{1}{x}\right) = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ (croissances comparées de $x \mapsto \ln x$ et $x \mapsto x$ en $+\infty$).

2) f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = x^2\ln x - x\ln x + 3$.

$\lim\limits_{x\to0} f(x) = -3$ car $\lim\limits_{x\to0} x^2\ln x = \lim\limits_{x\to0} x\ln x$ (limites usuelles de la forme $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n\ln x = 0$ avec $n = 2$ et $n = 1$).

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2\ln x\left(1 - \frac{1}{x} + \frac{3}{x^2\ln x}\right) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$.

3) f est définie sur $]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$ par $f(x) = x\ln\left(\frac{1}{x} + 1\right)$.

En posant $u = \frac{1}{x}$, quand x tend vers $\pm\infty$ alors u tend vers 0 et l'on a $\lim\limits_{x\to\pm\infty} x\ln\left(\frac{1}{x} + 1\right) = \lim\limits_{u\to0} \frac{\ln(u+1)}{u} = 1$ (limite usuelle).

$\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} x\ln\left(\frac{1}{x} + 1\right) = +\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\x<-1}} \ln\left(\frac{1}{x} + 1\right) = \lim\limits_{u\to0} \ln u = -\infty$.

En posant $u=\frac{1}{x}$, quand x tend vers 0^+ alors u tend vers $+\infty$ et l'on a

$$\lim_{\substack{x\to 0\\x>0}} x\ln\left(\frac{1}{x}+1\right)=\lim_{u\to+\infty}\frac{\ln(u+1)}{u}=\lim_{u\to+\infty}\frac{\ln\left(u\left(1+\frac{1}{u}\right)\right)}{u}=\lim_{u\to+\infty}\frac{\ln u+\ln\left(1+\frac{1}{u}\right)}{u}$$

$=\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\ln u}{u}+\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{u}\right)}{u}=0$ car $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{\ln u}{u}=0$ (croissances comparées de $u\mapsto\ln u$ et $u\mapsto u$ en $+\infty$).

6 Comportement local et asymptotique avec des fonctions puissances réelles – Méthode 12 – Approfondissement

1) Pour tout x réel, $x^2+1>0$ donc f est définie sur $\mathbb{R}$ et l'on a $f(x)=e^{\frac{1}{3}\ln(x^2+1)}$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{\frac{1}{3}\ln(x^2+1)}=\lim\limits_{u\to+\infty} e^{u}=+\infty$ (composition des limites)

2) La fonction f est définie sur $]0,+\infty[$ et l'on a $f(x)=e^{\sqrt{x}\ln x}$.

$\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x}\ln x=\lim\limits_{x\to 0}x^{\frac{1}{2}}\ln x=0$ (limite de la forme $\lim\limits_{x\to 0}x^r\ln x=0$ avec $r=\frac{1}{2}$) donc $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{u\to 0}e^{u}=e^0=1$ (composition des limites).

$\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}\ln x=+\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{u\to+\infty}e^{u}=+\infty$ (composition des limites).

3) Pour tout x réel, $e^x+1>0$ donc f est définie sur $\mathbb{R}$ et l'on a $f(x)=e^{\frac{1}{x}\ln(e^x+1)}$.

Comme $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\ln(e^x+1)=\ln 1=0$, donc $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\ln(e^x+1)=0$ et par suite $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{u\to 0}e^{u}=e^0=1$ (composition des limites).

Au voisinage de $+\infty$:

$$\frac{1}{x}\ln(e^x+1)=\frac{1}{x}\ln\left(e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)\right)=\frac{1}{x}\left(\ln e^x+\ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right)\right)=\frac{1}{x}\left(x+\ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right)\right).$$

Comme $\dfrac{1}{x}\left(x+\ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right)\right)=1+\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}{x}$ avec $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}{x}=0$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\ln(e^x+1)=1$ et donc que $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{u\to 1}e^{u}=e$ (composition des limites).

7 Résolution d'équations et d'inéquations – Méthode 8

1) $e^{-x+2}-3=0\Leftrightarrow e^{-x+2}=3\Leftrightarrow\ln e^{-x+2}=\ln 3\Leftrightarrow -x+2=\ln 3\Leftrightarrow x=2-\ln 3$.

On a donc $S=\{2-\ln 3\}$.

2) Pour résoudre cette inéquation, il faut factoriser et faire un tableau.

En posant $X = e^x$, $e^{2x} - 4e^x + 3 = X^2 - 4X + 3 = (X-1)(X-3)$ et par conséquent $e^{2x} - 4e^x + 3 \le 0 \Leftrightarrow (e^x - 1)(e^x - 3) \le 0$.

D'autre part $e^x - 1 \le 0 \Leftrightarrow e^x \le 1 \Leftrightarrow x \le 0$ et $e^x - 3 \le 0 \Leftrightarrow e^x \le 3 \Leftrightarrow x \le \ln 3$, ce qui permet de construire le tableau suivant :

x	$-\infty$		0		$\ln 3$		$+\infty$
$e^x - 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$e^x - 3$		$-$		$-$	0	$+$	
$(e^x - 1)(e^x - 3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On a donc $S = [0;\ln 3]$.

3) ***REMARQUE : Attention ! Avec les équations et inéquations comportant des logarithmes népérien : il faut commencer par donner l'ensemble sur lequel on travaille.***

On doit avoir $x - 1 > 0$ et donc dans la suite on travaille sur $]1;+\infty[$.

Sur $]1;+\infty[$, $\ln(x-1) = 4 \Leftrightarrow e^{\ln(x-1)} = e^4 \Leftrightarrow x = 1 + e^4 \in]1;+\infty[$, donc $S = \{1 + e^4\}$.

4) On doit avoir $x^2 + 4x + 3 > 0 \Leftrightarrow (x+1)(x+3) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty;-3[\cup]-1;+\infty[$.

On travaille donc sur $]-\infty;-3[\cup]-1;+\infty[$.

Sur $]-\infty;-3[\cup]-1;+\infty[$:

$\ln(x^2 + 4x + 3) = \ln 3 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 = 3 \Leftrightarrow x^2 + 4x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = -4$.

On a donc $S = \{-4;0\}$ car -4 et 0 appartiennent à $]-\infty;-3[\cup]-1;+\infty[$.

5) On doit avoir $\begin{cases} x + 1 > 0 \\ x + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x > -3 \end{cases} \Leftrightarrow x > -1$.

On travaille donc sur $]-1;+\infty[$.

Sur $]-1;+\infty[$:

$\ln(x+1) + \ln(x+3) = \ln 3 \Leftrightarrow \ln(x+1)(x+3) = \ln 3 \Leftrightarrow \ln(x^2 + 4x + 3) = \ln 3$.

Tiens, tiens ! On retombe sur l'équation précédente !
Sauf que l'on ne travaille pas sur le même ensemble et que $-4 \notin]-1;+\infty[$ ce qui entraîne que $S = \{0\}$.

6) On doit avoir $x^2 + x - 2 > 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+2) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty;-2[\cup]1;+\infty[$.

On travaille donc sur $]-\infty;-2[\cup]1;+\infty[$.

Sur $]-\infty;-2[\cup]1;+\infty[$, $\ln(x^2 + x - 2) \le 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 \le 1 \Leftrightarrow x^2 + x - 3 \le 0$

$\Leftrightarrow x \in \left[\frac{-1-\sqrt{13}}{2};-2\right[\cup \left]1;\frac{-1+\sqrt{13}}{2}\right]$.

7) Pour cette équation on travaille sur $]0,+\infty[$ car sinon $x^{\frac{1}{4}}$ n'existe pas.

Comme $x^{\frac{1}{4}}-2 \leq 1 \Leftrightarrow x^{\frac{1}{4}} \leq 3 \Leftrightarrow \left(x^{\frac{1}{4}}\right)^4 \leq 3^4 \Leftrightarrow x \leq 81$, l'ensemble des solutions de l'équation est $S =]0,81]$.

8 **Inégalités de convexité avec les fonctions exponentielle et logarithme népérien – Méthode 6 du chapitre précédent**

Dans cet exercice il est admis que la fonction exponentielle est convexe et que la fonction logarithme népérien est concave.

D'autre part, pour $a > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$.

1) Montrons que pour tout x réel, $e^x \geq 2e^{\frac{x}{2}} - 1$.

On a : $e^x \geq 2e^{\frac{x}{2}} - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2} \geq e^{\frac{x}{2}} \Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\times 0} \leq \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{2}e^0$.

En posant $f(x) = e^x$, cette inégalité s'écrit $f\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}\times 0\right) \leq \frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}f(0)$ qui est une inégalité de convexité vraie car f est convexe, ce qui démontre l'inégalité de départ.

2) Montrons que pour $n \in \mathbb{N}^*$ et n réels strictement positifs $x_1,\ldots,x_n$:

$$\sqrt[n]{x_1 \times \cdots \times x_n} \leq \frac{x_1+\cdots+x_n}{n} \text{ (inégalité arithmético-géométrique).}$$

On a :

$$\sqrt[n]{x_1 \times \cdots \times x_n} \leq \frac{x_1+\cdots+x_n}{n} \Leftrightarrow (x_1 \times \cdots \times x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{x_1+\cdots+x_n}{n} \Leftrightarrow \ln(x_1 \times \cdots \times x_n)^{\frac{1}{n}} \leq \ln\left(\frac{x_1+\cdots+x_n}{n}\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n}\ln(x_1 \times \cdots \times x_n) \leq \ln\left(\frac{1}{n}x_1+\cdots+\frac{1}{n}x_n\right) \Leftrightarrow \frac{1}{n}(\ln x_1+\cdots+\ln x_n) \leq \ln\left(\frac{1}{n}x_1+\cdots+\frac{1}{n}x_n\right).$$

En posant $f(x) = \ln x$ (qui est une fonction concave), cette inégalité s'écrit :

$$\frac{1}{n}f(x_1)+\cdots+\frac{1}{n}f(x_n) \leq f\left(\frac{1}{n}x_1+\cdots+\frac{1}{n}x_n\right).$$

On reconnaît une inégalité de convexité qui est vraie puisque la fonction f est concave, ce qui prouve l'inégalité de départ.

9 Etude d'une fonction exponentielle avec fonction auxiliaire – Méthodes 1, 2 et 4

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{x}{e^x-x}$ et sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthogonal $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ est notée (C_f).

Partie A

La fonction g est définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=e^x-x-1$.

1) $\lim\limits_{-\infty} g=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} -x-1=+\infty$.

$\lim\limits_{+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{e^x}{x}-1-\dfrac{1}{x}\right)=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ (croissances comparées de $x\mapsto e^x$ et $x\mapsto x$ en $+\infty$).

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x)=e^x-1$.

Comme $g'(x)\le 0 \Leftrightarrow e^x-1\le 0 \Leftrightarrow e^x\le 1 \Leftrightarrow \ln e^x\le \ln 1 \Leftrightarrow x\le 0$, on en déduit que si $x\le 0$ alors $g'(x)\le 0$, sinon $g'(x)>0$, d'où le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2) D'après le tableau de variations précédent pour tout x réel la fonction g est positive ou nulle.

Par conséquent, $\forall x\in\mathbb{R},\ e^x-x\ge 1$ et donc $\forall x\in\mathbb{R},\ e^x-x\ne 0$, ce qui prouve que f est définie sur $\mathbb{R}$.

Partie B

1) $\lim\limits_{-\infty} f=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x\left(\dfrac{e^x}{x}-1\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{\dfrac{e^x}{x}-1}=-1$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$.

$\lim\limits_{+\infty} f=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}\times\dfrac{1}{\left(1-\dfrac{x}{e^x}\right)}=0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=0$ (croissances comparées de $x\mapsto e^x$ et $x\mapsto x$ en $+\infty$).

2) La courbe (C_f) admet deux asymptotes horizontales : la droite d'équation $y=-1$ en $-\infty$ et celle d'équation $y=0$ en $+\infty$.

3) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et l'on a :

$$f'(x)=\frac{(1)(e^x-x)-x(e^x-1)}{(e^x-x)^2}=\frac{(1-x)e^x}{(e^x-x)^2}.$$

Cette expression est du signe $(1-x)$ sur $\mathbb{R}$, d'où le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	-1	$\nearrow$	$\frac{1}{e-1}$	$\searrow$	0

4) L'équation réduite de la tangente (T) à (C_f) en O est :

$$y=f'(0)(x-0)+f(0)\Leftrightarrow y=x.$$

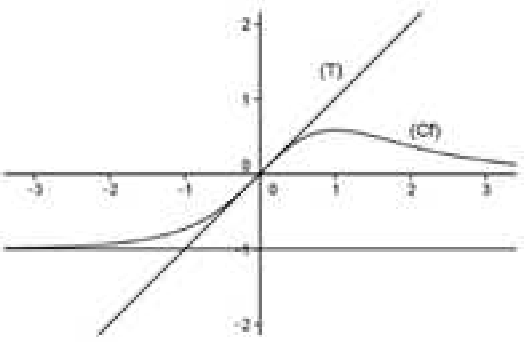
5) Pour donner la position relative de (T) et (C_f), il suffit d'étudier le signe de

$$f(x)-y=f(x)-x=\frac{x}{e^x-x}-x=\frac{x-x(e^x-x)}{(e^x-x)}=\frac{x(1-e^x+x)}{(e^x-x)}=\frac{-xg(x)}{(e^x-x)},$$ qui est du signe de $-x$ car $\frac{g(x)}{e^x-x}\geq 0$ sur $\mathbb{R}$.

On a finalement :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	
Position relative de (C_f) et (T)		(C_f) au-dessus de (T)		(T) au-dessus de (C_f)	

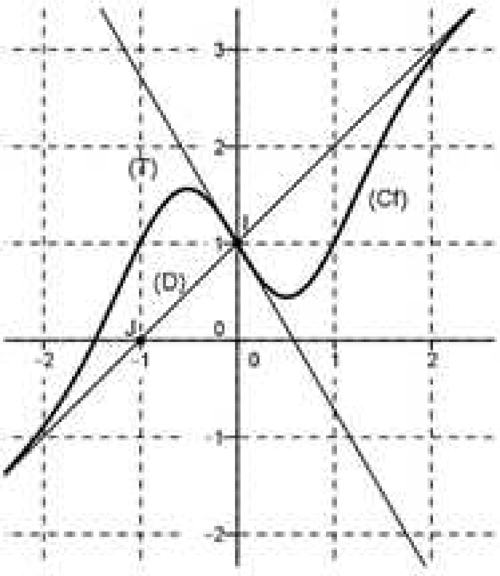
6) Traçons soigneusement (C_f), (T) et ses deux asymptotes horizontales :



REMARQUE : Le point $O(0,0)$ est un point d'inflexion.

10 **Lecture graphique – Fonction exponentielle – Théorème des valeurs intermédiaires – Méthodes 1, 3 et 4**

La fonction f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa courbe représentative (C_f) dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ est la suivante :



- Le point $I(0,1)$ est centre de symétrie de (C_f).
- La droite (D) est asymptote à (C_f) en $\pm\infty$.
- La droite (T) d'équation $y=(1-e)x+1$ est la tangente à (C_f) en I.

Partie A – Expression de f

1) Pour répondre à la question, on va raisonner par analyse et synthèse.

Analyse

S'il existe une fonction g, dérivable sur $\mathbb{R}$, admettant comme limite 0 en $\pm\infty$ telle que $f(x)=x+1+g(x)$ alors $g(x)=f(x)-(x+1)$.

Synthèse

- Comme f est dérivable sur $\mathbb{R}$, la fonction g l'est aussi.
- La droite (IJ) qui est asymptote oblique à (C_f) en $\pm\infty$ a pour équation réduite $y=mx+p$ avec $m=\dfrac{y_J-y_I}{x_J-x_I}=\dfrac{0-1}{-1-0}=1$ et donc $y=x+p$.

Comme $I(0,1)$ est un point de cette droite, ses coordonnées vérifient son équation réduite donc $1=p$ ce qui entraîne que l'équation réduite de (IJ) est $y=x+1$.

Comme (IJ) qui est asymptote oblique à (C_f) en $\pm\infty$, on en déduit que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-(x+1)\right)=0$.

- Finalement g existe et $g(x)=f(x)-(x+1)$.

2) Comme $I(0,1)$ est centre de symétrie pour tout $x \in \mathbb{R}$ les points $M(x,f(x))$ et $N(-x,f(-x))$ ont pour milieu I donc $\frac{y_M + y_N}{2} = Y_I$ c'est-à-dire :

$$\frac{f(x)+f(-x)}{2} = 1 \Leftrightarrow f(x)+f(-x) = 2.$$

3) En dérivant membre à membre l'égalité précédente on obtient l'égalité suivante $f'(x)-f'(-x)=0 \Leftrightarrow f'(x)=f'(-x)$, donc f' est paire.

4) On admet que $g(x)=(ax+b)e^{-x^2}$.

■ On a $f(0)=1$ et $f'(0)=1-e$ (coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse 0), d'où $g(0)=f(0)-1=0$ et $g'(0)=f'(0)-1=-e$.

■ Comme $g'(x)=ae^{-x^2}+(ax+b)\left(-2xe^{-x^2}\right) \Rightarrow g'(0)=a$ et $g(0)=b$, on en déduit que $a=-e$ et $b=0$.

■ Finalement $f(x)=x+1-(e\times x)e^{-x^2}=x+1-xe^{-x^2+1}$.

Partie B – Etude de f

1) Pour tout x réel, $f'(x)=1-\left(e^{-x^2+1}+x(-2x)e^{-x^2+1}\right)=1+\left(2x^2-1\right)e^{-x^2+1}$.

2) Pour tout x réel $f''(x)=4xe^{-x^2+1}+\left(2x^2-1\right)(-2x)e^{-x^2+1}=2xe^{-x^2+1}\left(3-2x^2\right)$.

Sur $[0;+\infty[$, $2xe^{-x^2+1} \geq 0$, donc $f''(x)$ est du signe de $3-2x^2$ dont la racine positive est $\frac{\sqrt{6}}{2}$.

D'autre part $f'(0)=1-e$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} 1+\left(2\times\frac{x^2}{e^{x^2}}-\frac{1}{e^{x^2}}\right)\times e=1$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^{x^2}}=\lim\limits_{u\to+\infty}\frac{u}{e^u}=0$ (croissances comparées de $u\mapsto u$ et $u\mapsto e^u$ en $+\infty$) et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x^2}}=0$ puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x^2}=\lim\limits_{u\to+\infty} e^u=+\infty$.

On en déduit le tableau de variations de f' suivant :

x	0		α		$\frac{\sqrt{6}}{2}$		$+\infty$
$f''(x)$			$+$		0	$-$	
f'	$1-e$	↗	0	↗	$2e^{-\frac{1}{2}}+1$	↘	1

3) Sur $\left[\dfrac{\sqrt{6}}{2};+\infty\right[$, $f'(x)>1$ donc l'équation $f'(x)=0$ n'admet pas de solution sur cet intervalle.

Posons $I=\left[0;\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right[$ et $J=\left[1-e;2e^{-\frac{1}{2}}+1\right[$.

La fonction f' est continue et strictement monotone de I sur J car $f''(x)>0$ sur l'intervalle I.

Comme $0\in J$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires pour les fonctions strictement monotones l'équation $f'(x)=0$ admet une solution unique α sur I.

Finalement l'équation $f'(x)=0$ admet une solution unique α sur $[0;+\infty[$.

A l'aide de la calculatrice, $\alpha=0{,}51$ à 10^{-2} près.

4) On en déduit le tableau de variations de f sur $[0;+\infty[$:

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	1	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

5) On a $f(\alpha)=\alpha+1-\alpha e^{-\alpha^2+1}$ et $f'(\alpha)=1+\left(2\alpha^2-1\right)e^{-\alpha^2+1}=0$, donc on en déduit que $e^{-\alpha^2+1}=-\dfrac{1}{2\alpha^2-1}$ et par suite que $f(\alpha)=\alpha+1+\dfrac{\alpha}{2\alpha^2-1}=\cdots=\dfrac{2\alpha^3+2\alpha^2-1}{2\alpha^2-1}$.

11 Fonction exponentielle – Tangente particulière – Méthodes 1 et 4

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=xe^{x-1}+1$.

Partie A – Etude de la fonction

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x}e^{-1}+1=1$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{x}=0$ (limite usuelle de la forme $\lim\limits_{x\to-\infty} x^{n}e^{x}=0$ avec $n=1$).

On en déduit que (C_f) admet comme asymptote horizontale la droite d'équation $y=1$ en $-\infty$.

2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{x}e^{-1}+1=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{x}=+\infty$.

3) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x)=e^{x-1}+xe^{x-1}=e^{x-1}(x+1)$ qui est du signe de $x+1$ car $e^{x-1}>0$ sur $\mathbb{R}$.

On en déduit le tableau de variations de f suivant :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	1	$\searrow$	$1-e^{-2}$	$\nearrow$	$+\infty$

Partie B – Etude d'une tangente particulière

1) La droite (T_a) a pour équation :

$$y=f'(a)(x-a)+f(a)=(a+1)e^{a-1}(x-a)+ae^{a-1}+1=(a+1)e^{a-1}x-a^2e^{a-1}+1.$$

2) (T_a) passe par O si et seulement si les coordonnées du point $O(0;0)$ vérifie l'équation précédente, c'est-à-dire si et seulement si $1-a^2e^{a-1}=0$.

3) Considérons la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=1-x^2e^{x-1}$.

On a $g(0)=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-x^2e^xe^{-1}=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$.

D'autre part g est dérivable sur $]0;+\infty[$ est $g'(x)=-2xe^{x-1}-x^2e^{x-1}<0$ car $e^{x-1}>0$ et $x>0$ sur $]0;+\infty[$.

La fonction g est donc strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

On applique le théorème des valeurs intermédiaires pour les fonctions strictement monotones à la fonction g pour répondre à cette question.

Posons $I=]0;+\infty[$ et $J=]-\infty;1[$.

La fonction g est continue et strictement décroissante de I sur J car $g'(x)<0$ sur l'intervalle I.

Comme $0\in J$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires pour les fonctions strictement monotones l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α sur I.

Comme $g(1)=0$ on en déduit que $\alpha=1$.

Finalement 1 est l'unique solution sur $]0;+\infty[$ de $1-x^2e^{x-1}=0$.

4) D'après 2) et 3) $a=1$ et donc la tangente cherchée a pour équation est (T_1) d'équation $y=2x$.

12 Etude d'une fonction logarithme avec une fonction auxiliaire – Méthodes 6 et 7

Partie A – Etude d'une fonction auxiliaire

La fonction g est définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=2x^3-1+2\ln x$.

1) D'une part $\lim\limits_{0^+} g=-\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x=-\infty$.

D'autre part, on a $\lim\limits_{+\infty} g=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x^3-1=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x=+\infty$.

Enfin, la fonction g est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $g'(x)=6x^2+\dfrac{2}{x}>0$ sur $]0;+\infty[$ ce qui permet de construire le tableau suivant :

x	0		α		$+\infty$
$g'(x)$			$+$		
g	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2) Posons $I=]0;+\infty[$ et $J=\mathbb{R}$.

La fonction g est continue et strictement croissante de I sur J car $g'(x)>0$.

Comme $0\in J$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires pour les fonctions strictement monotones l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α sur I.

A l'aide de la calculatrice, $\alpha=0{,}86$ à 10^{-2} près.

3) On déduit de la question précédente le signe de g :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

Partie B – Etude d'une fonction logarithme à l'aide de la partie A

La fonction f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=2x-\dfrac{\ln x}{x^2}$ et (C_f) désigne sa courbe représentative dans le repère orthogonal $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) $\lim\limits_{0^+} f=+\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{\ln x}{x^2}=-\infty$ puisque $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x=-\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^2=0^+$.

$\lim\limits_{+\infty} f=+\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^2}=0$ (croissances comparées des fonctions $x\longmapsto x^2$ et $x\longmapsto \ln x$ en $+\infty$).

2) La fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $f'(x)=2-\dfrac{\left(\dfrac{1}{x}\right)x^2-(\ln x)(2x)}{x^4}$, donc

$f'(x)=\dfrac{2x^4-x+2x\ln x}{x^4}=\dfrac{2x^3-1+2\ln x}{x^3}=\dfrac{g(x)}{x^3}$ qui est du signe de $g(x)$ sur $]0;+\infty[$ car sur cet intervalle $x^3>0$.

On en déduit le tableau de variations suivant :

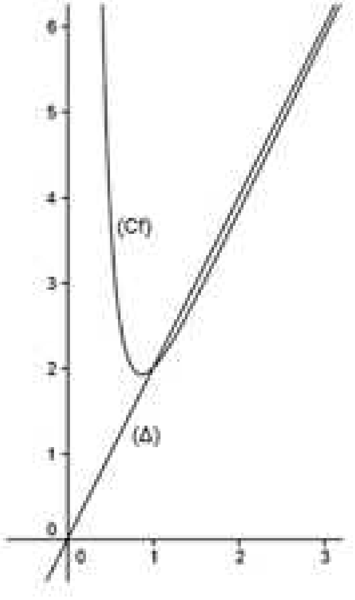
x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

3) Comme $f(x)-2x=-\dfrac{\ln x}{x^2}$ et que l'on a vu que $\lim\limits_{x\to+\infty}-\dfrac{\ln x}{x^2}=0$, on en déduit que la droite (Δ) d'équation $y=2x$ est asymptote oblique à (C_f) en $+\infty$.

Le tableau suivant donne la position relative (Δ) et (C_f) :

x	0		1		$+\infty$
Signe de $-\dfrac{\ln x}{x^2}$		$+$	0	$-$	
Position relative de (C_f) et (Δ)		(C_f) au-dessus de (Δ)		(Δ) au-dessus de (C_f)	

4) Traçons (C_f) et (Δ) :



13 Etude d'une suite définie avec une fonction logarithme – Méthodes 6 et 7

Partie A – Etude d'une fonction logarithme

La fonction f est définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\ln(x+1)+\frac{1}{2}x^2$.

Sa courbe représentative est notée (C_f) dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

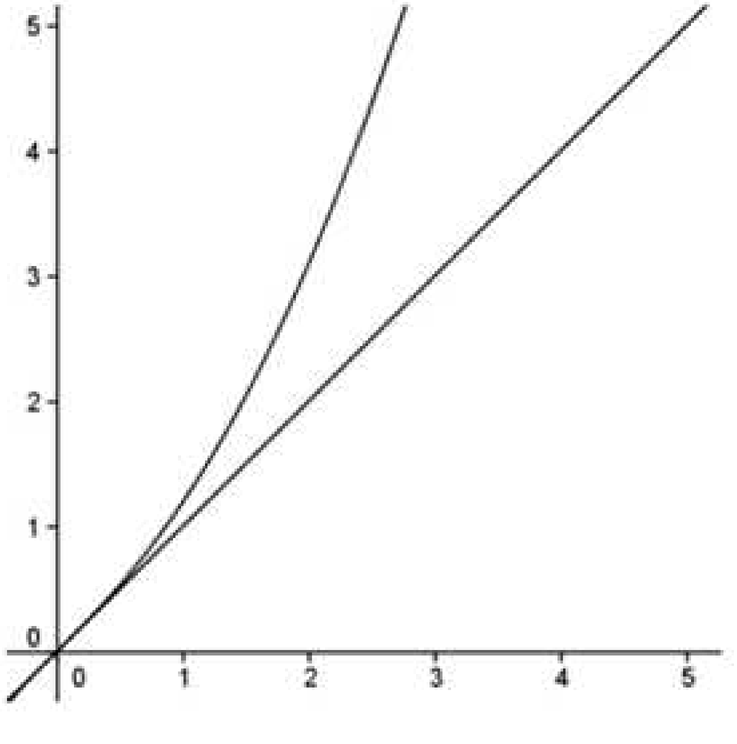
1) $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x+1)=\lim\limits_{u\to+\infty}\ln u=+\infty$ (composition des limites) donc $\lim\limits_{+\infty}f=+\infty$.

La fonction f est dérivable sur $[0;+\infty[$ et $f'(x)=\frac{1}{1+x}+x>0$ sur $[0;+\infty[$ d'où le tableau de variations suivant :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
f	0 ↗	$+\infty$

2) L'équation réduite de la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 0 est $y=f'(0)(x-0)+f(0)$, c'est-à-dire $y=x$.

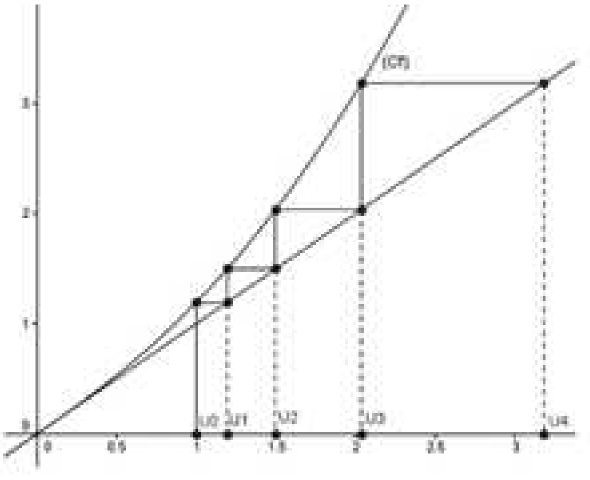
3) Traçons (C_f) et (T) :



Partie B – Etude d'une suite définie avec la fonction f

La suite (U_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$.

1) Le graphe « WEB » relatif à cette suite est le suivant :



2) On peut conjecturer que la suite (U_n) est croissante, minorée par 1, non majorée et que $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = +\infty$.

3) Pour $n \in \mathbb{N}$, posons (P_n) : $1 \leq U_n \leq U_{n+1}$.

Initialisation : (P_0) est-elle vraie ?

On a $U_0 = 1$ et $U_1 = \ln 2 + \dfrac{1}{2} = 1{,}19$ à 10^{-2} près donc (P_0) : $1 \leq U_0 \leq U_1$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que (P_n) est vraie.

D'après l'hypothèse de récurrence (P_n) : $1 \leq U_n \leq U_{n+1}$ est vraie.

Comme f est croissante sur $[1;+\infty[$, d'après l'hypothèse de récurrence on en déduit que $f(1) \leq f(U_n) \leq f(U_{n+1}) \Rightarrow 1 \leq \ln 2 + \dfrac{1}{2} \leq U_{n+1} \leq U_{n+2}$.

Par conséquent (P_{n+1}) est vraie.

Finalement (P_n) est vraie $\Rightarrow$ (P_{n+1}) est vraie.

Conclusion : Par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, (P_n) est vraie.

La suite (U_n) est donc croissante minorée par 1.

4) Supposons que (U_n) est majorée.

D'après l'un des théorèmes de convergence monotone, comme la suite (U_n) est croissante majorée, elle converge vers une limite L solution de $f(x) = x$.

Il faut donc résoudre cette dernière équation pour déterminer L.

Si $g(x) = f(x) - x$, résoudre $f(x) = x$ équivaut à résoudre $g(x) = 0$ sur $[0;+\infty[$.

La fonction g est dérivable sur $\left[0;+\infty\right[$ et :

$$g'(x) = f'(x) - 1 = \frac{1}{x+1} + x - 1 = \frac{1+(x-1)(x+1)}{x+1} = \frac{x^2}{x+1} \geq 0\,.$$

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
g	0 $\nearrow$	

D'après le tableau précédent la seule solution de $g(x)=0$ sur $\left[0;+\infty\right[$ est 0, donc $L=0$, ce qui est absurde car la suite (U_n) est minorée par 1.
Par l'absurde, (U_n) n'est pas majorée.

5) Comme (U_n) est croissante non majorée, d'après l'un des théorèmes de convergence monotone $\lim U_n = +\infty$.

$\boxed{14}$ Etude d'une fonction logarithme – Tangente particulière – Méthodes 6, 7 et 8

Partie A – Etude d'une fonction logarithme

La fonction f est définie sur $\left]1;+\infty\right[$ par $f(x) = \ln x - \dfrac{1}{\ln x}$ et sa courbe représentative est notée (C_f) dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

D'autre part, (C_g) est la courbe représentative de $x \overset{g}{\longmapsto} \ln x$.

1) On a $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = -\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} \dfrac{1}{\ln x} = +\infty$ puisque $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} \ln x = 0^+$ et $\lim\limits_{+\infty} f = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$.

D'autre part f est dérivable sur $\left]1;+\infty\right[$ et :

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \left(-\frac{\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}\right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x(\ln x)^2} > 0 \text{ sur } \left]1;+\infty\right[\,.$$

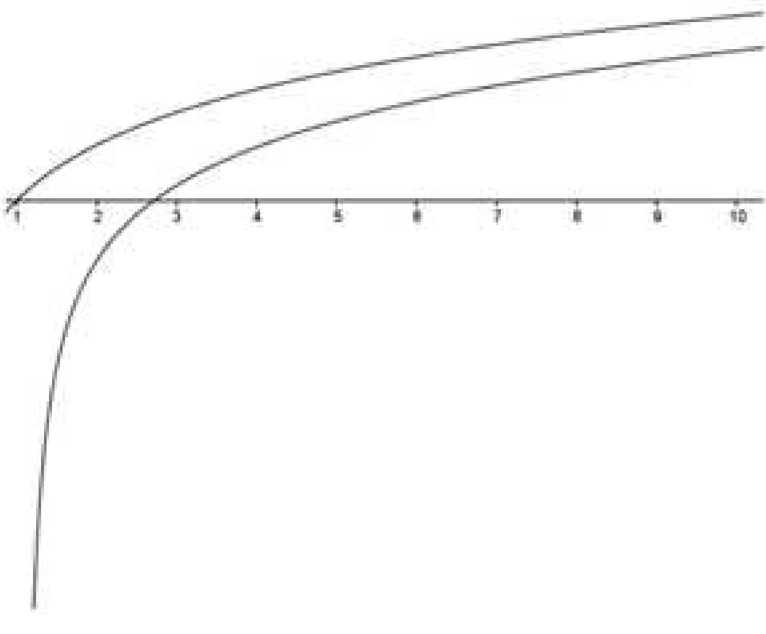
On en déduit le tableau de variations de f suivant :

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
f	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

2) On a $\lim\limits_{x \to +\infty}(f(x) - \ln x) = \lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{1}{\ln x} = 0$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.
On en déduit que (C_g) est asymptote à (C_f) en $+\infty$.

3) Comme $f(x) - \ln x = -\dfrac{1}{\ln x} < 0$ sur $]1;+\infty[$ car sur cet intervalle $\ln x > 0$, on en déduit que (C_f) est en dessous de (C_g) sur $]1;+\infty[$.

4) Traçons (C_f) et (C_g) :



Partie B – Etude de tangentes particulières
Dans cette partie, on cherche les tangentes à (C_f) passant par O.

1) Soient $a \in]1;+\infty[$ et (T_a) la tangente à (C_f) au point d'abscisse a.
L'équation réduite de (T_a) est $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ donc (T_a) passe par O si et seulement si les coordonnées de O vérifient cette équation c'est-à-dire si et seulement si $f(a) - af'(a) = 0$.

2) Soit h la fonction définie sur $]1;+\infty[$ par $h(x)=f(x)-xf'(x)$.

Sur $]1;+\infty[$, $h(x)=0 \Leftrightarrow \ln x-\frac{1}{\ln x}-x\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x(\ln x)^2}\right)=0$

$\Leftrightarrow \ln x-\frac{1}{\ln x}-1-\frac{1}{(\ln x)^2}=0 \Leftrightarrow \frac{(\ln x)^3-(\ln x)^2-\ln x-1}{(\ln x)^2}=0$

$\Leftrightarrow (\ln x)^3-(\ln x)^2-\ln x-1=0$.

3) La fonction k est dérivable sur $]0;+\infty[$ et :

$$k'(t)=3t^2-2t-1=(t-1)(3t+1)>0 \text{ sur }]1;+\infty[.$$

D'autre part $\lim\limits_{+\infty} k=\lim\limits_{t\to+\infty} t^3\left(1-\frac{1}{t}-\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^3}\right)=+\infty$, d'où le tableau de variations suivant :

t	0		α		$+\infty$
$k'(t)$			$+$		
k	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Posons $I=]0;+\infty[$ et $J=]-1;+\infty[$.

La fonction k est continue et strictement monotone de I sur J $(k'(t)>0$ sur I$)$.

Comme $0\in J$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires pour les fonctions strictement monotones l'équation $k(t)=0$ admet une solution unique α sur I.

A l'aide de la calculatrice, on obtient $\alpha=1{,}84$ à 10^{-2} près.

4) On déduit de la question précédente que sur $]1;+\infty[$ l'équation $(\ln x)^3-(\ln x)^2-(\ln x)-1=0$ admet pour unique solution la valeur « a » telle que $\ln a=\alpha$, c'est-à-dire $a=e^{\alpha}=6{,}29$ à 10^{-2} près.

La tangente au point d'abscisse $a=e^{\alpha}=6{,}29$ (à 10^{-2} près) est donc l'unique tangente à (C_f) passant par O.

$\boxed{15}$ Etude d'une fonction logarithme – Fonction auxiliaire – Dérivabilité – Méthodes 6 et 7

Partie A – Fonction auxiliaire

La fonction g est définie sur $[0;+\infty[$ par $g(x)=\dfrac{x}{x+1}-\ln(x+1)$.

1) $\displaystyle \lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{x}}=1$ et $\displaystyle \lim_{x\to+\infty}\ln(x+1)=\lim_{u\to+\infty}\ln u=+\infty$ donc $\displaystyle \lim_{+\infty} g=-\infty$.

D'autre part g est dérivable sur $[0;+\infty[$ et :

$$g'(x)=\frac{(1)(x+1)-x(1)}{(x+1)^2}-\frac{1}{x+1}=\frac{1}{(x+1)^2}-\frac{x+1}{(x+1)^2}=-\frac{x}{(x+1)^2}\le 0 \text{ sur } [0;+\infty[.$$

On en déduit le tableau de variations de g sur $[0;+\infty[$:

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	
g	0	$\searrow$	$-\infty$

2) On déduit du tableau précédent que pour tout x réel positif $g(x)\le 0$.

Partie B – Etude d'une fonction logarithme définie par morceaux

La fonction f est définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x} \text{ si } x\in\,]0;+\infty[\\ f(0)=1 \end{cases}.$$

1) Sur $]0;+\infty[$, on a $f'(x)=\dfrac{\left(\frac{1}{x+1}\right)(x)-(\ln(x+1))(1)}{x^2}=\dfrac{\frac{x}{x+1}-\ln(x+1)}{x^2}=\dfrac{g(x)}{x^2}$.

2) D'après la question précédente sur $]0;+\infty[$ $f'(x)$ est du signe de $g(x)$ donc négative.

D'autre part on a : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x}\right) = 0$ car

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ (croissances comparées de $x \mapsto \ln x$ et $x \mapsto x$ en $+\infty$) et $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln 1}{x} = 0$.

Comme on a $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, on obtient le tableau de variations de f suivant :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	?	$-$	
f	1	$\searrow$	0

3) On s'intéresse dans cette question, à la dérivabilité de f en 0.

a) Comme $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 = f(0)$, f est continue en 0, ce qui justifie l'étude de la dérivabilité.

b) La fonction h définie par $h(x) = \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}\right)$ est dérivable sur $[0;+\infty[$ et $h'(x) = \frac{1}{1+x} - (1 - x + x^2) = \cdots = -\frac{x^3}{1+x} \le 0$ sur $[0;+\infty[$.

Comme $h(0) = 0$, on en déduit le tableau suivant :

x	0		$+\infty$
$h'(x)$	0	$-$	
h	0	$\searrow$	

On déduit de ce tableau que pour tout réel x positif on a $h(x) \le 0$ et donc que pour tout réel x positif $\ln(1+x) \le x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.

c) La méthode utilisée dans la question précédente nous incite à étudier la fonction k définie sur $[0;+\infty[$ par $k(x) = \ln(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2}\right)$.

La fonction k est dérivable sur $\lfloor 0;+\infty\lfloor$ et $k'(x)=\frac{1}{1+x}-(1-x)=\cdots=\frac{x^2}{1+x}\geq 0$ sur $\lfloor 0;+\infty\lfloor$, d'où le tableau suivant :

x	0		+∞
k'(x)	0	+	
k	0	↗	

On déduit de ce tableau que pour tout réel x positif on a $k(x)\geq 0$ et donc que pour tout réel x positif on a $x-\frac{x^2}{2}\leq \ln(1+x)$.

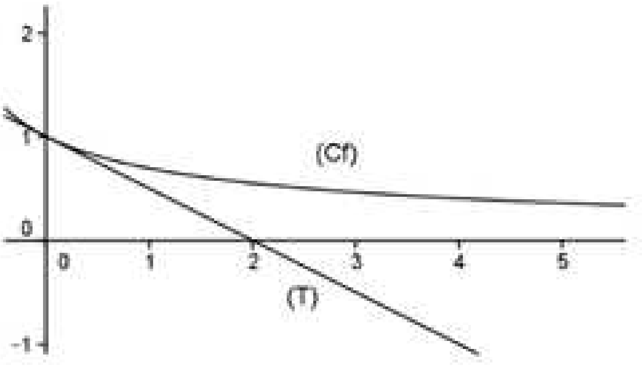
d) D'après b) et c) pour tout $x>0$, $x-\frac{x^2}{2}\leq \ln(1+x)\leq x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$.

On en déduit que pour tout $x>0$, $-\frac{x^2}{2}\leq \ln(1+x)-x\leq -\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$ et donc finalement que pour tout $x>0$, $-\frac{1}{2}\leq \frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\leq -\frac{1}{2}+\frac{x}{3}$ (i).

On a l'inégalité (i) avec $\lim\limits_{x\to 0} -\frac{1}{2}+\frac{x}{3}=0$ donc d'après le théorème des gendarmes, on en déduit que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=-\frac{1}{2}$ et par conséquent que f est dérivable en 0 avec $f'(0)=-\frac{1}{2}$.

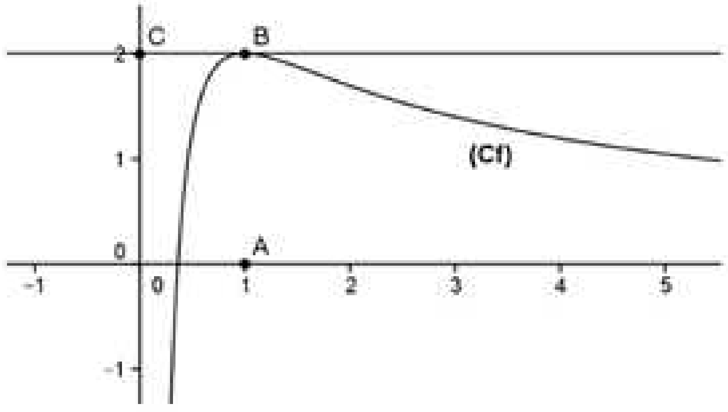
La tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 0 a donc pour équation réduite $y=f'(0)(x-0)+f(0)=-\frac{1}{2}x+1$.

4) Traçons (T) et (C_f) :



16 Fonction logarithme – Lecture graphique – Algorithme

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$, la courbe représentative (C_f) de f sur $]0;+\infty[$ est la suivante :



On dispose des informations suivantes :

- $A(1;0)$, $B(1;2)$, $C(0;2)$;
- (BC) est tangente à (C_f) en B ;
- $\exists a \in]0;+\infty[$ et $b \in]0;+\infty[$, $\forall x > 0$, $f(x) = \dfrac{a + b\ln x}{x}$

1) a) Comme $B(1;2) \in (C_f)$, on a $f(1) = 2$.
Comme la tangente en B d'abscisse 1 est horizontale on a $f'(1) = 0$.

b) La fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et l'on a :

$$f'(x) = \frac{\frac{b}{x}(x) - (a + b\ln x)}{x^2} = \frac{b - a - b\ln x}{x^2}.$$

c) D'après 1)a) comme $f(1) = 2$ et $f'(1) = 0$, on obtient :

$$\begin{cases} \dfrac{a + b\ln 1}{1} = 2 \\ \dfrac{b - a - b\ln 1}{1^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b - a = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = a = 2 \end{cases}.$$

Finalement f est définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2 + 2\ln x}{x}$

2) a) $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (2 + 2\ln x) = -\infty$ $\left(\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty \right)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x = 0^+$, donc $\lim\limits_{0^+} f = -\infty$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x} + 2\dfrac{\ln x}{x} = 0$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ (croissances comparées de $x \longmapsto \ln x$ et $x \longmapsto x$ en $+\infty$).

b) La fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $f'(x)=\frac{-2\ln x}{x^2}$ (remplacez les réels a et b dans l'expression obtenue au 1)b)).
On en déduit que $f'(x)$ est du signe de $-\ln x$ sur $]0;+\infty[$ et donc le tableau suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	0	−	
f	‖ $-\infty$	↗	2	↘	0

3) On applique le théorème des valeurs intermédiaires pour les fonctions strictement monotones à la fonction f pour répondre à cette question.

Posons $I=]0;1]$ et $J=]-\infty;2]$.
La fonction f est continue et strictement croissante de I sur J car $f'(x)>0$ sur I sauf en 1.
Comme $1\in J$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires pour les fonctions strictement monotones l'équation $f(x)=1$ admet une solution unique α sur I avec $0<\alpha<1$ $(f(1)=2\neq 1)$.
De même en posant $I=]1;+\infty[$ et $J=]0;2[$, on montre que l'équation $f(x)=1$ admet une solution unique β sur I.
Comme $f(5)=1{,}04$ à 10^{-2} près et $f(6)=0{,}93$ à 10^{-2} près, on a $f(5)>1$ et $f(6)<1$, ce qui prouve que $5<\beta<6$.
Finalement l'équation $f(x)=1$ admet deux solutions α et β telles que $\alpha<\beta$ avec $0<\alpha<1$ et $5<\beta<6$.

4) On a l'algorithme suivant :

```
Variables : a, b, m sont des réels.
Initialisation : Affecter à a la valeur 0.
                 Affecter à b la valeur 1.
Traitement : Tant que |b − a| > 0,1
                 | Affecter à « m » la valeur 1/2 (a+b).
                 | Si f(m) < 1 alors Affecter à « a » la valeur « m ».
                 | Sinon Affecter à b la valeur m.
                 | Fin de Si.
             Fin tant que.
Sortie :     Afficher a.
             Afficher b.
```

a) **Compréhension de l'algorithme**
L'algorithme consiste à procéder par dichotomie en testant à chaque étape si $f\left(\frac{a+b}{2}\right)<1$ tant que $|b-a|<0{,}1$.

Si c'est le cas, comme la fonction f est croissante on remplace la valeur de « a » de l'étape précédente par $m=\frac{a+b}{2}$, sinon on remplace la valeur « b » de l'étape précédente par $m=\frac{a+b}{2}$.

Ainsi à chaque étape, on réduit l'amplitude de l'encadrement de « moitié » jusqu'à obtenir les deux valeurs a et b que revoie l'algorithme car elles correspondent à un encadrement de α inférieure ou égal à 0,1.
Le premier encadrement étant d'amplitude 1, les autres seront d'amplitude 0,5 ; 0,25 ; 0,125 ; 0,0625.
Cela explique la nécessité des 5 étapes pour obtenir un encadrement de α d'amplitude inférieure à 0,1.

En comparant à chaque étape f(m) (déterminez à la calculatrice) à 1 on obtient :

	Etape 1	*Etape 2*	*Etape 3*	*Etape 4*	*Etape 5*
a	0	0	0,25	0,375	0,4375
b	1	0,5	0,5	0,5	0,5
b – a	1	0,5	0,25	0,125	0,0625
m	0,5	0,25	0,375	0,4375	STOP

L'algorithme revoie donc les valeurs $a=0{,}4375$ et $b=0{,}5$.

b) En langage Python, l'algorithme peut être le suivant :

```
from math import log
def f(x):
    return (2+2*log(x))/x
def dicho(a,b,i,k):
    while((b-a)>i):
        m=(a+b)/2
        if(f(m)<1):
            a=m
        else:
            b=m
    return(a,b)
```

En mode « Run », on obtient :

```
>>> dicho(0,1,0.1,1)
(0.4375, 0.5)
```

On retrouve les deux valeurs a et b données dans la question précédente ce qui confirme l'exactitude du raisonnement évoqué dans celle-ci.

17 **Résolution d'une équation fonctionnelle avec la fonction exponentielle – Méthode 5**

On cherche l'ensemble des fonctions f, définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que pour tous x et y réels, $f(x+y) = \frac{1}{3}f(x)f(y)$ (i) avec $f'(0) = 12$.

Analyse : On suppose qu'une fonction f est solution du problème posé.

1) Supposons qu'il existe α tel que $f(\alpha) = 0$.

Sous cette hypothèse, pour tout x réel, $f(x) = f((x-\alpha)+\alpha) = \frac{1}{3}f(x-\alpha)f(\alpha) = 0$ ce qui est absurde puisque f n'est pas la fonction nulle car sinon on aurait $f'(0) = 0$, ce qui n'est pas le cas.

Par conséquent, par l'absurde, f ne s'annule pas.

En remplaçant x et y par 0 dans (i), $f(0) = \frac{1}{3}f(0)\times f(0)$ donc comme $f(0) \neq 0$ d'après ce qui vient d'être démontré, on a $\frac{1}{3}f(0) = \frac{f(0)}{f(0)} = 1$ donc $f(0) = 3$.

2) Pour a fixé, en dérivant membre à membre $f(a+x) = \frac{1}{3}f(a)f(x)$, il vient $f'(a+x) = \frac{1}{3}f(a)f'(x)$.

En prenant $x = 0$, il vient $f'(a) = \frac{1}{3}f(a)\times f'(0) = 4f(a)$ car $f'(0) = 12$.

Pour tout a réel fixé, $f'(a) = 4f(a)$ donc la variable a est une variable muette et pour tout x réel $f'(x) = 4f(x)$.

3) $k(0) = \frac{1}{3}f\left(\frac{0}{4}\right) = \frac{1}{3}\times f(0) = 1$ car $f(0) = 3$.

D'autre part, $k'(x) = \left(\frac{1}{3}f\left(\frac{x}{4}\right)\right)' = \frac{1}{12}f'\left(\frac{x}{4}\right) = \frac{1}{12}\times 4f\left(\frac{x}{4}\right) = \frac{1}{3}f\left(\frac{x}{4}\right) = k(x)$.

Comme la fonction k vérifie $k'(x) = k(x)$ et $k(0) = 1$ et que la seule fonction qui vérifie cela est la fonction exponentielle on a $k(x) = e^x$.

Finalement, on en déduit que la seule fonction f qui peut être solution du problème posé est $f(x) = f\left(\frac{4x}{4}\right) = 3k(4x) = 3e^{4x}$ dont la dérivée est $f'(x) = 12e^{4x}$.

Synthèse

Comme $f(x+y)=3e^{4(x+y)}=3e^{4x+4y}=3e^{4x}e^{4y}=\frac{1}{3}\left(3e^{4x}\times 3e^{4y}\right)=\frac{1}{3}f(x)f(y)$ avec $f'(0)=12$ puisque $f'(x)=12e^{4x}$ on en déduit que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=3e^{4x}$ est l'unique fonction du problème posé.

18 Résolution d'une équation fonctionnelle avec la fonction logarithme népérien – Méthode 10

On cherche l'ensemble des fonctions f définies sur $\mathbb{R}_+^*$ telles que pour tous x et y réels strictement positifs, $f(x\,y) = f(x) + f(y)$ avec $f'(1) = 5$.

Analyse : On suppose qu'une fonction f est solution du problème posé.

1) $f(1)=f(1\times 1)=f(1)+f(1)=2f(1)$ donc $0=f(1)$.

2) Pour a fixé, en dérivant membre à membre $f(ax)=f(a)+f(x)$, il vient $af'(ax)=f'(x)$.

En prenant $x=1$, il vient $af'(a)=f'(1)$, puis $f'(a)=\frac{f'(1)}{a}=\frac{5}{a}$ car $f'(1)=5$.

Pour tout a réel fixé, $f'(a)=\frac{5}{a}$ donc la variable a est une variable muette et pour tout x réel $f'(x)=\frac{5}{x}$.

3) $k(1)=\frac{1}{5}f(1)=0$ car $f(1)=0$.

D'autre part, $k'(x)=\left(\frac{1}{5}f(x)\right)'=\frac{1}{5}f'(x)=\frac{1}{5}\times\frac{5}{x}=\frac{1}{x}$.

Comme la fonction k vérifie $k'(x)=\frac{1}{x}$ avec $k(1)=0$ et que la seule fonction qui vérifie cela est la fonction logarithme népérien on a $k(x)=\ln x$.

Finalement, on en déduit que la seule fonction f qui peut être solution du problème posé est $f(x)=5k(x)=5\ln x$ dont la dérivée est $f'(x)=\frac{5}{x}$.

Synthèse : On a bien $f(xy)=5\ln xy=5(\ln x+\ln y)=5\ln x+5\ln y=f(x)+f(y)$ et $f'(1)=5$ donc la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que $f(x)=5\ln x$ est l'unique fonction du problème posé.

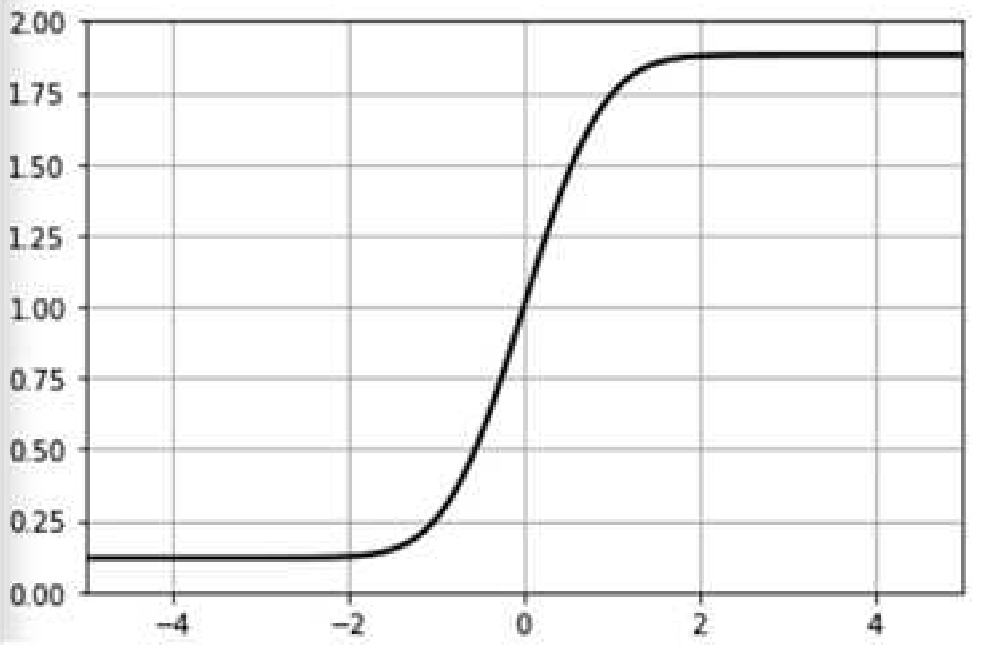
19 Résolution approchée d'une équation différentielle par la méthode d'Euler – Méthode 28 du chapitre précédent

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f'(x) = e^{-x^2}$ avec $f(0) = 1$ et l'on cherche à déterminer une courbe approchée de sa courbe représentative par la méthode d'Euler.

1) Dans l'introduction de la partie 5 du chapitre 2, on a montré que pour une fonction f dérivable, la courbe « lissée » de l'ensemble des points $M(x_n, y_n)$ tels que $\begin{cases} x_0 \text{ valeur connue} \\ y_0 = f(x_0) \text{ valeur connue} \\ x_{k+1} = x_k + h \\ y_{k+1} = f'(x_k)h + y_k \end{cases}$ avec un pas h donné, permet d'obtenir une courbe approchée de la courbe représentative de f d'autant plus proche de cette dernière que h est petit (méthode d'Euler).

Comme $f'(x_n) = e^{-x_n^2}$ et $f(0) = 1$ la courbe « lissée » de l'ensemble des points $M(x_n, y_n)$ tels que $\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 1 \\ x_{n+1} = x_n + h \\ y_{n+1} = e^{-x_n^2} \times h + y_n \end{cases}$ avec par exemple $h = 0{,}01$ puis $h = -0{,}01$ répond à la question.

2) La courbe approchée sur $[-5,5]$ avec les valeurs du pas proposées est la suivante :



L'algorithme en langage Python qui permet d'obtenir cette courbe est le suivant :

```
from math import exp
def deriv_f(x):
    return exp(-(x**2))
import matplotlib.pyplot as plt
plt.axis ([-5,5,0,2])
plt.grid
x=0
y=1
x1=0
y1=1
h=0.01
absc=[]
ordo=[]
for i in range(0,501):
    x=x+h
    y=y+h*deriv_f(x)
    absc.append(x)
    ordo.append(y)
absc1=[]
ordo1=[]
for i in range(0,501):
    x1=x1-h
    y1=y1-h*deriv_f(x1)
    absc1.append(x1)
    ordo1.append(y1)
plt.grid()
plt.plot(absc,ordo,color="black",linewidth=2.0,linestyle="-")
plt.plot(absc1,ordo1,color="black",linewidth=2.0,linestyle="-")
plt.show()
```

20 Algorithme de Briggs – Méthodes 5 et 15 du chapitre sur les suites

L'algorithme proposé par l'énoncé est le suivant:

```
from math import exp, sqrt
def briggs(x,k,i):
    a=1
    b=exp(k)
    la=0
    lb=k
    while((b-x)>i):
        if(sqrt(a*b)<=x):
            a=sqrt(a*b)
            la=(la+lb)/2
        else:
            b=sqrt(a*b)
            lb=(la+lb)/2
    return(la,lb)
```

Partie A : Compréhension et pertinence de l'algorithme
Dans cette partie on choisit de prendre $x = 29$, $k = 4$ et $i = 0{,}000001$.

1) Le choix de $k = 4$ convient, car comme $a = 1$ et $b = e^4 \approx 54{,}6$, on a d'une part l'inégalité $1 = a < 29 = x < e^4 = b$ et d'autre part les valeurs exactes des logarithmes népériens des réels a et b puisque $\ln a = 1$ et $\ln b = \ln e^4 = 4$.

2) Complétons le tableau demandé :

	E_0	E_1	E_2	E_3
a	1	$e^2 \approx 7{,}4$	$e^3 \approx 20{,}1$	$e^3 \approx 20{,}1$
b	$e^4 \approx 54{,}6$	$e^4 \approx 54{,}6$	$e^4 \approx 54{,}6$	$e^{3{,}5} \approx 33{,}1$
la	0	2	3	3
lb	4	4	4	3,5
$\sqrt{ab}$	$e^2 \approx 7{,}4 \leq 29$	$e^3 \approx 20{,}1 \leq 29$	$e^{3{,}5} \approx 33{,}1 > 29$	$e^{3{,}25} \approx 25{,}7 \leq 29$
$b - 29$	$54{,}6 - 29 > 0{,}1$	$54{,}6 - 29 > 0{,}1$	$54{,}6 - 29 > 0{,}1$	$33{,}1 - 29 > 0{,}1$

	E_4	E_5	E_6
a	$e^{3{,}25} \approx 25{,}7$	$e^{3{,}25} \approx 25{,}7$	$e^{3{,}3125} \approx 27{,}45 \leq 29$
b	$e^{3{,}5} \approx 33{,}1$	$e^{3{,}375} \approx 29{,}22$	$e^{3{,}375} \approx 29{,}22$
la	3,25	3,25	3,3125
lb	3,5	3,375	3,375
$\sqrt{ab}$	$e^{3{,}375} \approx 29{,}22 > 29$	$e^{3{,}3125} \approx 27{,}45 \leq 29$	$e^{3{,}34375} \approx 28{,}32 \leq 29$
$b - 29$	$33{,}1 - 29 > 0{,}1$	$29{,}22 - 29 > 0{,}1$	$29{,}22 - 29 > 0{,}1$

	E_7	E_8	E_9
a	$e^{3{,}34375} \approx 28{,}32$	$e^{3{,}359375} \approx 28{,}77$	$e^{3{,}3671875} \approx 28{,}99$
b	$e^{3{,}375} \approx 29{,}22$	$e^{3{,}375} \approx 29{,}22$	$e^{3{,}375} \approx 29{,}22$
la	3,34375	3,359375	3,3671875
lb	3,375	3,375	3,375
$\sqrt{ab}$	$e^{3{,}359375} \approx 28{,}77 \leq 29$	$e^{3{,}3671875} \approx 28{,}99 \leq 29$	$e^{3{,}37109375} \approx 29{,}11 > 29$
$b - 29$	$29{,}22 - 29 > 0{,}1$	$29{,}22 - 29 > 0{,}1$	$29{,}22 - 29 > 0{,}1$

	E_{10}	E_{11}
a	$e^{3{,}3671875} \approx 28{,}99$	$e^{3{,}3671875} \approx 28{,}99$
b	$e^{3{,}37109375} \approx 29{,}11$	$e^{3{,}369140625} \approx 29{,}05$
la	3,3671875	3,3671875
lb	3,37109375	3,369140625
$\sqrt{ab}$	$e^{3{,}369140625} \approx 29{,}05 > 29$	STOP à cause de la ligne suivante
$b - 29$	$29{,}11 - 29 > 0{,}1$	STOP car $29{,}05 - 29 \leq 0{,}1$

3) A la calculatrice, la valeur arrondie demandée est $\ln 29 = 3,367296$.

On conjecture que :
a) La suite des nombres a est croissante, converge vers 29 et bornée entre 1 et 29.
b) La suite des nombres b est décroissante, converge vers 29 et bornée entre 29 et e^4.
c) La suite des nombres la est croissante, converge vers ln29 et bornée entre 0 et ln29.
d) La suite des nombres lb est décroissante, converge vers ln29 et bornée entre ln29 et 4.

Partie B : Démonstration des résultats donnés par l'algorithme
Dans cette partie, on se propose de démontrer les conjectures émises à la partie A dans le cas général.

Soit un réel x et un entier naturel k tels que $1 < x < e^k$.
1) Les quatre suites (a_n), (b_n), (la_n) et (lb_n) demandées sont :

$$(a_n) \text{ et } (la_n) : \begin{cases} a_0 = 1 \\ la_0 = 0 \\ a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \text{ et } la_{n+1} = \dfrac{la_n + lb_n}{2} \text{ si } \sqrt{a_n b_n} \le x \\ a_{n+1} = a_n \text{ et } la_{n+1} = la_n \text{ sinon} \end{cases}$$

$$(b_n) \text{ et } (lb_n) : \begin{cases} b_0 = e^k \\ lb_0 = k \\ b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \text{ et } lb_{n+1} = \dfrac{la_n + lb_n}{2} \text{ si } \sqrt{a_n b_n} > x \\ b_{n+1} = b_n \text{ et } lb_{n+1} = lb_n \text{ sinon} \end{cases}$$

REMARQUE : La question suivante justifie l'existence de ces quatre suites.

2) a) Soit deux réels u et v tels que $0 < u \le v$ (ii).
En multipliant membre à membre l'égalité (ii) par u et v strictement positifs on obtient respectivement $0 < u^2 \le uv$ et $0 < uv \le v^2$ ce qui donne :

$$0 < u^2 \le uv \le v^2.$$

Comme u et v sont strictement positifs, par passage à la racine :

$$0 < u \le \sqrt{uv} \le v.$$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons (P_n) : $1 \le a_n \le a_{n+1} \le x \le b_{n+1} \le b_n \le e^k$.

Initialisation : (P_0) : $1 \le a_0 \le a_1 \le x \le b_1 \le b_0 \le e^k$ est-elle vraie ?

Remarque préliminaire : Comme $1 < x < e^k$, on a $0 < 1 = a_0 \le x \le e^k = b_0$ et donc $0 < a_0 \le b_0$ ce qui entraîne $a_0 \le \sqrt{a_0 b_0} \le b_0$ d'après la question précédente.

Deux cas peuvent se présenter :

Cas 1 : $\sqrt{a_0b_0} \le x$ et donc on a $a_1 = \sqrt{a_0b_0} \le x$ et $x \le b_1 = b_0 \le b_0$, ce qui entraîne dans un premier temps que $a_1 \le x \le b_1 \le b_0 \le e^x$.

D'après la remarque préliminaire, $a_0 \le \sqrt{a_0b_0} = a_1$, ce qui entraîne dans un second temps que $1 \le a_0 \le a_1 \le x \le b_1 \le b_0 \le e^x$ et donc que (P_0) est vraie dans ce cas.

Cas 2 : $\sqrt{a_0b_0} > x$ et donc on a : $a_0 = a_1 \le a_1 \le x$ et $x < \sqrt{a_0b_0} = b_1$, ce qui entraîne dans un premier temps que $1 \le a_0 \le a_1 \le x \le b_1$.

D'après la remarque préliminaire $b_1 = \sqrt{a_0b_0} \le b_0$ ce qui entraîne dans un second temps que $1 \le a_0 \le a_1 \le x \le b_1 \le b_0 \le e^x$ et donc que (P_0) est vraie dans ce cas.

Par disjonction des cas la propriété (P_0) est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que (P_n) est vraie, c'est-à-dire que :

$$1 \le a_n \le a_{n+1} \le x \le b_{n+1} \le b_n \le e^x.$$

On doit prouver sous cette hypothèse que (P_{n+1}) est vraie c'est-à-dire que :

$$1 \le a_{n+1} \le a_{n+2} \le x \le b_{n+2} \le b_{n+1} \le e^x.$$

Remarque préliminaire : D'après l'hypothèse de récurrence $0 < a_{n+1} \le b_{n+1}$, donc on en déduit que $a_{n+1} \le \sqrt{a_{n+1}b_{n+1}} \le b_{n+1}$ d'après la question 2)a).

Deux cas peuvent se présenter :

Cas 1 : $\sqrt{a_{n+1}b_{n+1}} \le x$ et donc on a : $a_{n+2} = \sqrt{a_{n+1}b_{n+1}} \le x$ et $x \le b_{n+1} = b_{n+2} \le b_{n+1}$ (hypothèse de récurrence pour $x \le b_{n+1}$) ce qui entraîne dans un premier temps que $a_{n+2} \le x \le b_{n+2} \le b_{n+1} \le e^x$ (hypothèse de récurrence pour $b_{n+1} \le e^x$).

D'après la remarque préliminaire, $a_{n+1} \le \sqrt{a_{n+1}b_{n+1}} = a_{n+2}$ ce qui entraîne dans un second temps que $1 \le a_{n+1} \le a_{n+2} \le x \le b_{n+2} \le b_{n+1} \le e^x$ (hypothèse de récurrence pour $1 \le a_{n+1}$) et donc que (P_{n+1}) est vraie dans ce cas.

Cas 2 : $\sqrt{a_{n+1}b_{n+1}} > x$ et donc on a : $a_{n+1} = a_{n+2} \le a_{n+2} \le x$ et $x < \sqrt{a_{n+1}b_{n+1}} = b_{n+2}$ (hypothèse de récurrence pour $a_{n+1} \le x$) ce qui entraîne dans un premier temps que $1 \le a_{n+1} \le a_{n+2} \le x \le b_{n+2}$ (hypothèse de récurrence pour $1 \le a_{n+1}$).

D'après la remarque préliminaire, $\sqrt{a_{n+1}b_{n+1}} = b_{n+2} \le b_{n+1}$ ce qui entraîne dans un second temps que $1 \le a_{n+1} \le a_{n+2} \le x \le b_{n+2} \le b_{n+1} \le e^x$ (hypothèse de récurrence pour $b_{n+1} \le e^x$) et donc que (P_{n+1}) est vraie dans ce cas.

Par disjonction des cas, la propriété (P_{n+1}) est vraie.

Finalement pour $n \in \mathbb{N}$, (P_n) est vraie $\Rightarrow$ (P_{n+1}) est vraie.

Conclusion : Par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, (P_n) est vraie.

3) Pour $n \in \mathbb{N}$, posons (P_n) : $la_n = \ln a_n$ et $lb_n = \ln b_n$.

Initialisation : (P_0) est-elle vraie ?

On a $\ln a_0 = \ln 1 = 0 = la_0$ et $\ln b_0 = \ln e^k = k = lb_0$ donc (P_0) est vraie.

Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que (P_n) est vraie, c'est-à-dire que $la_n = \ln a_n$ et $lb_n = \ln b_n$.

Deux cas peuvent se présenter :

Cas 1 : $\sqrt{a_n b_n} \leq x$ et donc on a : $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ et $b_{n+1} = b_n$.

Cas 2 : $\sqrt{a_n b_n} > x$ et donc on a : $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$.

Dans les deux cas, on utilise l'hypothèse de récurrence et l'égalité (i) pour démontrer les égalités.

Cas 1 : On a $\ln a_{n+1} = \ln\sqrt{a_n b_n} = \frac{1}{2}\ln(a_n b_n) = \frac{1}{2}(\ln a_n + \ln b_n) = \frac{1}{2}(la_n + lb_n) = la_{n+1}$ puis $\ln b_{n+1} = \ln b_n = lb_n = lb_{n+1}$.

Cas 2 : On a $\ln b_{n+1} = \ln\sqrt{a_n b_n} = \frac{1}{2}\ln(a_n b_n) = \frac{1}{2}(\ln a_n + \ln b_n) = \frac{1}{2}(la_n + lb_n) = lb_{n+1}$ puis $\ln a_{n+1} = \ln a_n = la_n = la_{n+1}$.

Par disjonction des cas, (P_{n+1}) est vraie.

Finalement pour $n \in \mathbb{N}$, (P_n) est vraie $\Rightarrow$ (P_{n+1}) est vraie.

Conclusion : Par récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, (P_n) est vraie.

4) a) Deux cas peuvent se présenter.

Cas 1 : $\sqrt{a_n b_n} \leq x$ et donc on a : $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ et $b_{n+1} = b_n$.

Dans ce cas :

$$b_{n+1} - a_{n+1} = b_n - \sqrt{a_n b_n} = \sqrt{b_n}\left(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n}\right) = \frac{\sqrt{b_n}}{\sqrt{b_n} + \sqrt{a_n}}\left(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n}\right) \times \left(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_n}\right).$$

ce qui donne finalement : $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{\sqrt{b_n}}{\sqrt{b_n} + \sqrt{a_n}}(b_n - a_n)$.

Cas 2 : $\sqrt{a_n b_n} > x$ et donc on a : $a_{n+1} = a_n$ et $b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$.

Dans ce cas :

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} - a_n = \sqrt{a_n}\left(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n}\right) = \frac{\sqrt{a_n}}{\sqrt{b_n}+\sqrt{a_n}}\left(\sqrt{b_n} - \sqrt{a_n}\right)\times\left(\sqrt{b_n} + \sqrt{a_n}\right),$$

ce qui donne finalement : $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{\sqrt{a_n}}{\sqrt{b_n}+\sqrt{a_n}}(b_n - a_n)$.

D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < a_n < b_n$ donc $\sqrt{a_n} \leq \sqrt{b_n}$ et par suite $\dfrac{\sqrt{a_n}}{\sqrt{b_n}+\sqrt{a_n}} \leq \dfrac{\sqrt{b_n}}{\sqrt{b_n}+\sqrt{a_n}}$.

On en déduit que quelque soit le cas : $b_{n+1} - a_{n+1} \leq \dfrac{\sqrt{b_n}}{\sqrt{b_n}+\sqrt{a_n}}(b_n - a_n)$ (iii).

D'après 2) on a $1 \leq a_n$ donc $1 \leq \sqrt{a_n}$, ce qui entraîne $0 < \sqrt{b_n} + 1 \leq \sqrt{b_n} + \sqrt{a_n}$ et par suite $\dfrac{1}{\sqrt{b_n}+\sqrt{a_n}} \leq \dfrac{1}{\sqrt{b_n}+1}$ en passant à l'inverse (ce qui est possible car les nombres sont de signe constant).

En multipliant membre à membre par $\sqrt{b_n}$ on obtient $\dfrac{\sqrt{b_n}}{\sqrt{b_n}+\sqrt{a_n}} \leq \dfrac{\sqrt{b_n}}{\sqrt{b_n}+1}$, ce qui permet de déduire de l'inégalité (iii) que $b_{n+1} - a_{n+1} \leq \dfrac{\sqrt{b_n}}{\sqrt{b_n}+1}(b_n - a_n)$ (iiii).

b) Dressons le tableau de variations de la fonction f définie sur $\left[x, e^k\right]$ par $f(t) = \dfrac{\sqrt{t}}{\sqrt{t}+1}$.

Comme $x \geq 1 > 0$ cette fonction est dérivable sur $\left[x, e^k\right]$ et l'on a :

$$f'(t) = \frac{\frac{1}{2\sqrt{t}}\left(\sqrt{t}+1\right) - \sqrt{t}\left(\frac{1}{2\sqrt{t}}\right)}{\left(\sqrt{t}+1\right)^2} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{t}} - \frac{1}{2}}{\left(\sqrt{t}+1\right)^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{t}}}{\left(\sqrt{t}+1\right)^2} > 0.$$

On a donc le tableau de variations suivant :

t	x	e^k
$f'(t)$	$+$	
f	$\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}$ $\nearrow$	$\dfrac{e^{\frac{k}{2}}}{e^{\frac{k}{2}}+1}$

D'après 2), pour tout $n\in\mathbb{N}$, $b_n\in\left[x,e^k\right]$ donc pour tout $n\in\mathbb{N}$ $f(b_n)\leq\dfrac{e^{\frac{k}{2}}}{e^{\frac{k}{2}}+1}$.

Comme l'inégalité (iiii) s'écrit $b_{n+1}-a_{n+1}\leq f(b_n)(b_n-a_n)$ on en déduit que $b_{n+1}-a_{n+1}\leq\dfrac{e^{\frac{k}{2}}}{e^{\frac{k}{2}}+1}(b_n-a_n)$.

Il est alors clair que le réel $\gamma=\dfrac{e^{\frac{k}{2}}}{e^{\frac{k}{2}}+1}\in\left]0,1\right[$ répond à la question, c'est-à-dire vérifie l'inégalité $b_{n+1}-a_{n+1}\leq\gamma(b_n-a_n)$.

Par étapes successives, on déduit de cette dernière inégalité que :

$$b_n-a_n\leq\gamma(b_{n-1}-a_{n-1})\leq\gamma^2(b_{n-2}-a_{n-2})\leq\gamma^3(b_{n-3}-a_{n-3})\leq\cdots\leq\gamma^n(b_0-a_0).$$

Comme on a $b_0-a_0=10-1=9$, il vient $b_n-a_n\leq\gamma^n\times 9$.

c) On a $0\leq b_n-a_n\leq 9\gamma^n$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty}9\gamma^n=\lim\limits_{n\to+\infty}\gamma^n=0$ puisque $-1<\gamma<1$ donc d'après le théorème des gendarmes on en déduit que $\lim(b_n-a_n)=0$.

5) D'après l'inégalité $1\leq a_n\leq a_{n+1}\leq x\leq b_{n+1}\leq b_n\leq e^k$ au 2)b) la suite (a_n) est croissante et la suite (b_n) est décroissante avec pour tout $n\in\mathbb{N}$ $a_n\leq x\leq b_n$.

D'après 4)c) $\lim(b_n-a_n)=0$ donc les deux suites sont adjacentes et convergent vers la même limite L.

Comme pour tout $n\in\mathbb{N}$ $a_n\leq x\leq b_n$ et que les deux suites (a_n) et (b_n) convergent vers L, par passage à la limite $L\leq x\leq L$ donc $L=x$.

D'après 3) $la_n=\ln a_n$ et $lb_n=\ln b_n$, donc comme les suites (a_n) et (b_n) convergent vers x et que la fonction logarithme népérien est continue on en déduit que $la_n=\ln a_n$ et $lb_n=\ln b_n$ converge vers $\ln x$.

Chapitre 4

METHODES SUR LE CALCUL INTEGRAL ET LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES

EXERCICES & CORRIGES

Exercices

1 Primitives avec le tableau des primitives en « x » – Méthode 1

Déterminez une primitive des fonctions f suivantes sur l'intervalle I :

1) $f(x)=x^2+5x+3$ sur $I=\mathbb{R}$

2) $f(x)=x^2-\dfrac{2}{x^3}$ sur $I=\mathbb{R}_+^*$

3) $f(x)=-\dfrac{3}{x^2}+3x-\dfrac{1}{\sqrt{x}}-5$ sur $I=\mathbb{R}_+^*$

4) $f(x)=\dfrac{-1}{x}+e^x$ sur $I=\mathbb{R}_-^*$

5) $f(x)=2\cos x-3\sin x-\dfrac{1}{x^2}$ sur $I=\mathbb{R}_+^*$

6) $f(x)=\dfrac{3}{\cos^2 x}-2e^x$ sur $I=\left]-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right[$

2 Primitives avec le tableau des primitives en « u(x) » – Méthode 2

Déterminez une primitive des fonctions f suivantes sur l'intervalle I :

1) $f(x)=(-2x+1)(-x^2+x+2)^3$ sur $I=\mathbb{R}$

2) $f(x)=(6x-3)(x^2-x+5)^2$ sur $I=\mathbb{R}$

3) $f(x)=\dfrac{-2x+2}{(-x^2+2x-5)^4}$ sur $I=\mathbb{R}$

4) $f(x)=(x+3)e^{x^2+6x+2}$ sur $I=\mathbb{R}$

5) $f(x)=(6x+3)\cos(x^2+x+2)$ sur $I=\mathbb{R}$

6) $f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$ sur $I=\mathbb{R}_+^*$

3 Primitives avec « u(x) = ax+b » – Méthode 3

Déterminez une primitive des fonctions f suivantes sur l'intervalle I :

1) $f(x)=\dfrac{5}{2x-1}$ sur $I=\left]-\infty;\dfrac{1}{2}\right[$

2) $f(x) = e^{-2x+5}$ sur $I = \mathbb{R}$

3) $f(x) = \sin(5x-1)$ sur $I = \mathbb{R}$

4 Primitives par intégration par parties – Méthode 4

Déterminez une primitive des fonctions f suivantes sur l'intervalle I :

1) $f(x) = \ln(x+5)$ sur $I = \left]-5;+\infty\right[$

2) $f(x) = xe^{-x}$ sur $I = \mathbb{R}$

3) $f(x) = x^2 \cos x$ sur $I = \mathbb{R}$

5 Calcul intégral – Méthodes 1, 2, 7 et 9

Calculez les intégrales suivantes :

1) $I = \int_0^1 (x^2 + x)dx$

2) $I = \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$

3) $I = \int_0^\pi \cos^2 x dx$

Coup de pouce : $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$.

4) $I = \int_0^2 |x-1| dx$

5) $I = \int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2} dx$

Coup de pouce : Interprétez cette intégrale comme une aire.

6 Valeur moyenne – Algorithme – Méthode 4

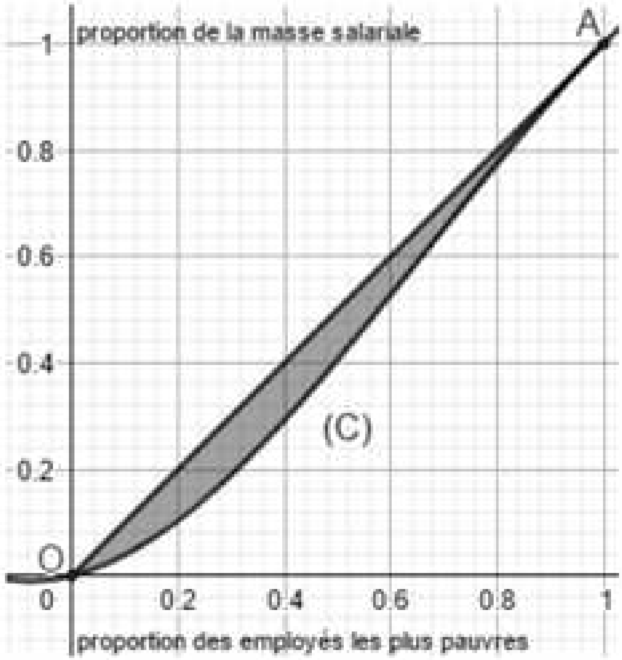
On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-x^2}$.

1) Déterminez la valeur moyenne μ de f sur $[0,2]$.

2) Donnez un algorithme en langage Python qui permet de trouver une valeur approchée de μ.

7 Courbe de Lorenz – Coefficient de Gini – Calcul d'aire – Méthodes 1, 5 et 9

Dans une entreprise (E_1) de N salariés, on s'intéresse à la répartition de la masse salariale M, en traçant la courbe « lissée » (C_1) sur $[0,1]$ de la proportion des salariés les plus pauvres en fonction de la proportion de la masse salariale.



Cette courbe (C_1) qui s'appelle **une courbe de Lorenz** à pour but de mesurer l'ampleur des inégalités salariales au sein de l'entreprise et permet entre autre de donner **le coefficient de Gini** γ_1 qui correspond à l'aire grise sur la figure.

1) ***Lecture graphique***

a) Quelle pourcentage de la masse salariale revient aux 40 % des employés les plus pauvres ?

b) A quelle pourcentage des salariés les plus riches correspond 40 % de la masse salariale ?

c) Donnez une approximation de γ_1.

2) ***Propriétés de la courbe*** (C_1) ***(vraies pour toutes les courbes de Lorenz)***

a) Pourquoi (C_1) passe par les points O et A ?

b) Pourquoi (C_1) est sous $[OA]$?

Coup de pouce : Pour x % des employés les plus pauvres se répartissant y % de la masse salariale la moyenne de leurs salaires est inférieure à celle des autres.

c) Pourquoi la fonction dont (C_1) est la courbe représentative est-elle croissante ?

d) Pourquoi $\gamma_1 \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$?

3) ***Comparaison de la répartition de la masse salariale de trois entreprises***

a) Déterminez γ_1 sachant que (C_1) est la courbe représentative de la fonction f_1 définie sur $[0,1]$ par $f_1(x) = -\frac{3}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}x$.

b) Pour deux autres entreprises (E_2) et (E_3), on note respectivement (C_2) et (C_3) leurs courbes de Lorenz, f_2 et f_3 les fonctions définies sur $[0,1]$ par

$f_2(x)=x^2$ et $f_3(x)=x^3$ qu'elles représentent et enfin γ_2 et γ_3 leurs coefficients de Gini.
c) Comparez la répartition de la masse salariale dans les trois entreprises en justifiant votre démarche.

8 Etude d'une primitive définie par une intégrale – Méthode 10

On considère la fonction f définie sur $]-1;1[$ par $f(x)=\int_0^x \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}dt$.

1) Montrez que f est dérivable et donnez sa fonction dérivée f'.
2) Montrez que f est impaire.
3) Déterminez la fonction dérivée de la fonction F définie sur $]0;\pi[$ par $F(x)=f(\cos x)$.
4) Déduisez de la question précédente l'expression de $F(x)$.
5) Déterminez alors $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} f(x)$, puis $f\left(-\frac{1}{2}\right)$, $f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} f(x)$ en utilisant 2).

9 Approximation d'une intégrale par des algorithmes – Méthodes 4, 12, 13, 14 et 15

On considère l'intégrale $I=\int_0^1 e^{x^2}dx$ dont on ne connaît pas la valeur exacte dans la mesure où la fonction f définie sur $[0;1]$ par $f(x)=e^{x^2}$ n'admet pas de primitive parmi les fonctions usuelles.

Partie A – Interprétation de I comme une aire

1) Montrez que f est croissante et positive sur $[0;1]$.
2) Interprétez I comme une aire que vous mettrez en évidence.

Partie B – Approximation de I

Déterminez une approximation de l'intégrale I à 10^{-4} près par des algorithmes en langage Python utilisant chacune des méthodes proposées.
1) Méthode des rectangles
2) Méthode des milieux
3) Méthode des trapèzes
4) Méthode de Monte-Carlo

10 Résolution d'une équation différentielle $y'=f$ – Méthodes 2, 10 et 17

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=xe^{-x^2}$ et l'équation différentielle (E) : $y'=f$.

1) Résoudre (E), puis déterminer la solution particulière qui vérifie $y(0)=3$.
2) Déterminez directement la solution particulière demandée à la question précédente sans passer par la résolution de (E).

11 Résolution d'une équation différentielle $y' = ay + f$ – Méthodes 16, 18 et 19

On considère les équations différentielles (E) : $y' = 2y + \sin x$ et (E') : $y' = 2y$.

1) Résoudre (E').

2) Déterminez une solution particulière y_0 de (E) définie sur $\mathbb{R}$ telle que $y_0(x) = a\sin x + b\cos x$.

3) Déduisez la résolution de (E) à l'aide des deux questions précédentes.

4) Déterminez la solution de (E) telle que $y(0) = 1$.

12 Résolution d'une équation différentielle par analyse et synthèse Méthode d'Euler – Méthode 20 et 21

On considère l'équation différentielle (E) : $y' = 2\sqrt{y}$.

1) Résoudre (E) en raisonnant par analyse et synthèse.

2) Déterminez les solutions de (E) telles que $y(0) = 1$.

3) Tracez la courbe approchée de la solution de (E) définie sur $[0,5]$ telle que $y(0) = 1$ avec la méthode d'Euler et comparez-la avec la courbe de la solution exacte en expliquant votre démarche.

13 Transformation d'écriture pour calculer une intégrale – Méthodes 3 et 8

On considère la fonction f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{2}{x^2+3x+2}$.

1) Dressez le tableau de variations de f.

2) Tracez sa courbe représentative (C_f) dans le plan rapporté à un repère orthonormée $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

3) Déterminez a et b tels que $f(x) = \dfrac{a}{x+1} + \dfrac{b}{x+2}$.

4) Pour $\alpha \in \mathbb{R}_+$ en déduire $I_\alpha = \int_0^\alpha f(x)dx$.

5) Déterminez $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} I_\alpha$ et interprétez cette limite géométriquement.

14 Suite définie par une intégrale – Méthodes 3, 8 et 11

On considère la suite (I_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $I_n = \int_0^1 \dfrac{x^n}{1+x}dx$.

1) Déterminez I_0.

2) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n + I_{n+1} = \dfrac{1}{n+1}$.

3) Déduisez-en I_1 et I_2.

4) Montrez que la suite (I_n) est décroissante à termes positifs.

5) Déduisez-en que (I_n) est convergente et déterminez sa limite.

15 Encadrement à l'aide du calcul intégral – Méthode 11

1) Montrez en intégrant membre à membre entre 0 et $x \in \mathbb{R}_+$ l'inéquation $\cos t \leq 1$ que $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\sin x \leq x$.

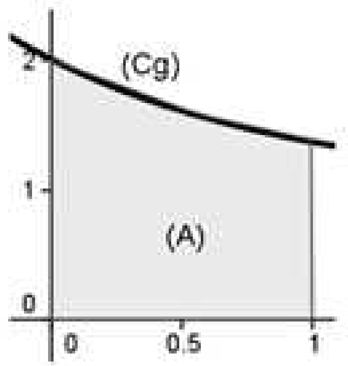
2) Réappliquez cette méthode trois fois à partir de cette dernière inégalité pour obtenir un encadrement de $\sin x$ par deux polynômes de degrés impairs et de $\cos x$ par deux polynômes de degrés pairs.

16 Aires et fonctions exponentielles – Méthodes 3 et 5

On considère la fonction g définie sur $[0;1]$ par $g(x) = 1 + e^{-x}$.

On note (C_g) sa courbe représentative dans un repère orthogonal et l'aire (A) définie par l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq g(x) \end{cases}$.

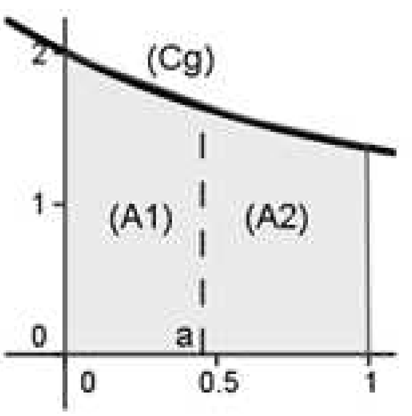
La courbe (C_g) et l'aire (A) sont représentées ci-dessous :



Le but de ce problème est de partager l'aire (A) en deux domaines de même aire, d'abord par une droite parallèle à l'axe des ordonnées (partie A), puis par une droite parallèle à l'axe des abscisses (partie B).

Partie A

Soit $a \in [0;1]$, (A_1) et (A_2) les aires en unités d'aire matérialisées sur la figure suivante :



1) a) Exprimez (A_1) en fonction de a.

b) Exprimez (A_2) en fonction de a.

2) On considère la fonction f définie sur $[0;1]$ par $f(x)=2x-2e^{-x}+\frac{1}{e}$.

a) Dressez le tableau de variations de f.

b) Montrez que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α.

c) Donnez une valeur approchée de α à 10^{-2} près.

3) En déduire une valeur approchée de « a » tel que $(A_1)=(A_2)$.

Partie B

On admet dans cette partie qu'il existe un seul réel b positif tel que la droite d'équation $y=b$ sépare l'aire (A) en deux domaines de même aire.

1) Justifiez que $b<1+\frac{1}{e}$.

2) Déterminez la valeur exacte de b.

17 Approximation d'une aire par la méthode des rectangles – Méthodes 5, 6 et 12

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x+2)e^{-x}$ et l'on note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

Partie A – Etude de f

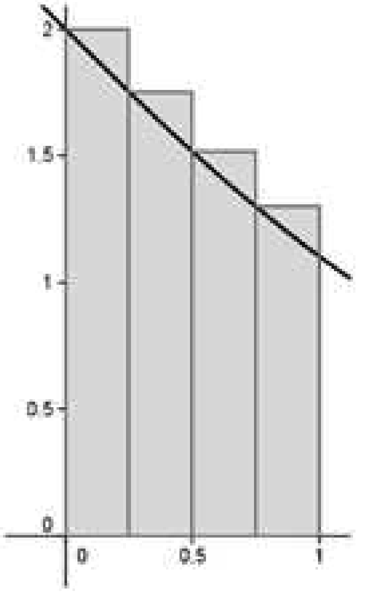
1) Déterminez les points d'intersection de (C_f) avec (Ox) et (Oy).

2) Déterminez les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

3) Dressez le tableau de variations de f.

Partie B – Approximation d'une aire par la méthode des rectangles

1) Dans cette question on « approche » l'aire (A) définie par l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $\begin{cases}0\le x\le 1\\0\le y\le f(x)\end{cases}$ par l'aire grisée suivante :



On considère l'algorithme suivant qui donne la valeur de l'aire grisée :

Variables	k est un nombre entier S est un nombre réel
Initialisation	Affecter à S la valeur 0
Traitement	Pour k allant de 0 à 3 Affecter à S la valeur $S+\frac{1}{4}f\left(\frac{k}{4}\right)$ Fin Pour
Sortie	Afficher S

Donnez une valeur approchée à 10^{-3} près de la valeur de S que donne cet algorithme.

2) Soit $N \in \mathbb{N}^*$.
Dans cette question on « découpe » l'intervalle $[0;1]$ en N intervalles de même longueur ce qui donne N rectangles au lieu de 4 comme au 1).
Quelle valeur de S renvoie l'algorithme en langage Python pour $N = 100$?

Partie C – Valeur exacte de (A) et « validité » des approximations
1) Déterminez la valeur exacte de (A) en unités d'aire par une intégration par parties.
2) Donnez des valeurs approchées à 10^{-3} près des erreurs commises par rapport aux valeurs renvoyées dans la partie B.

18 Suite d'intégrales – Algorithme – Méthodes 6 et 11

On considère la suite (I_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $I_n = \int_0^1 x^n e^{x^2} dx = \int_0^1 f_n(x)dx$ dont on a vu à l'exercice 9 que $I_0 = 1,4627$ à 10^{-4} près.

Partie A – Détermination de valeurs exactes de termes de (I_n)

1) Déterminez I_1.

2) Montrez en intégrant par parties que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+2} = \frac{1}{2}e - \frac{n+1}{2}I_n$.

3) Déterminez alors les valeurs exactes de I_3 et I_5.

Partie B – Etude d'un algorithme
On considère l'algorithme suivant en langage courant :

Initialisation	Affecter à n la valeur 1 Affecter à u la valeur $\frac{1}{2}e-\frac{1}{2}$
Traitement	Tant que $n < 21$ Affecter à u la valeur $\frac{1}{2}e-\frac{n+1}{2}u$ Affecter à n la valeur n+2 Fin tant que
Sortie	Afficher u

1) Quel terme de (I_n) renvoie cette algorithme ?

2) Donnez une valeur approchée de ce terme à 10^{-3} près en programmant cet algorithme en langage Python.

Partie C – Etude de la convergence de (I_n)

1) Montrez que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \geq 0$.

2) Montrez que (I_n) est décroissante.

3) Déduisez de 1) et 2) que (I_n) converge vers une limite L.

4) Déterminez L (***coup de pouce*** : encadrez $x^n e^{x^2}$ sur $[0;1]$).

19 **Fonction logarithme – Algorithme – Suites et intégration – Constante d'Euler – Algorithme de Brouncker – Méthodes 1, 7 et 11**

On considère la fonction f définie sur $[1;+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{x+1}+\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$.

Partie A – Etude de cette fonction logarithme

1) Déterminez $\lim_{+\infty} f$.

2) Dressez le tableau de variations de f.

3) En déduire le signe de f.

Partie B – Algorithmes permettant de conjecturer les comportements des deux suites

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les suites (U_n) et (V_n) suivantes :

$$U_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} \text{ et } V_n=U_n-\ln(n).$$

1) On considère l'algorithme suivant en langage courant :

Variables	i et n sont des entiers naturels u est un réel
Entrée	Demander n
Initialisation	Affecter à u la valeur 0
Traitement	Pour i allant de 1 à n Affecter à u la valeur $u+\frac{1}{i}$ Fin Pour
Sortie	Afficher u

a) Donner la valeur exacte renvoyée pour $n=3$.

b) Donnez les valeurs approchées renvoyées par l'algorithme pour $n=100$, $n=1000$ et n = 100 000 à 1 près en le programmant en langage Python.

c) Donnez 3 conjectures relatives à la monotonie, aux bornes et à la convergence de la suite (U_n).

2) a) Modifiez cet algorithme en langage Python afin de compléter la deuxième ligne du tableau suivant :

n	4	5	6	7	8	9	10	100	1000	1500	2000
V_n											

b) Donnez 3 conjectures relatives à la monotonie, aux bornes et à la convergence de la suite (V_n).

Partie C – Démonstrations des conjectures (constante d'Euler)

1) Montrez que la suite (U_n) est croissante, donc minorée.

2) Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $V_{n+1} - V_n = f(n)$.

3) Déduisez alors de la partie A que (V_n) est décroissante, donc majorée.

4) a) Montrez que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x} \right) dx \geq 0$.

b) Déduisez de la question précédente que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$, puis que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n+1) \leq U_n$.

c) Montrez alors les conjectures relatives à la convergence de chaque suite.

Partie D – Algorithme de Brouncker

Dans cette partie, pour tout $n \in \mathbb{N}$ on considère la suite (S_n) définie par $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)(2k+2)}$, la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \frac{1}{x}$ et l'intégrale $I = \int_1^2 \frac{1}{x} dx$.

1) Au niveau de la figure suivante, déterminez les aires des rectangles A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7 et A_8 en tenant compte des informations suivantes :

a) Le rectangle A_2 a pour longueur $\frac{1}{2}$.

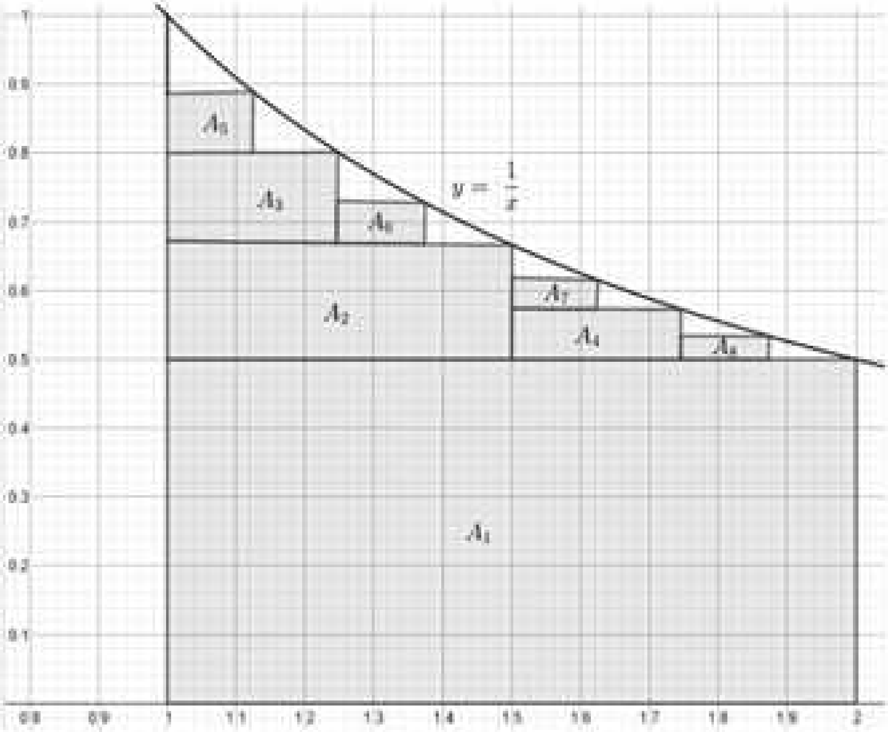
b) Les rectangles A_3 et A_4 ont pour longueur $\frac{1}{4}$.

c) Les rectangles A_5, A_6, A_7 et A_8 ont pour longueur $\frac{1}{8}$.

d) Compte tenu de la construction, on obtient par exemple, que le rectangle A_3 a pour hauteur $f\left(\frac{5}{4}\right) - f\left(\frac{3}{2}\right)$....

e) Exprimez chaque aire comme l'inverse du produit d'un nombre impair par le nombre pair qui lui succède (par exemple : $182 = 13 \times 14$) afin de trouver la question suivante.

REMARQUE : Après cela, vous ne pouvez pas dire qu'on n'est pas sympa avec vous.



2) Quelle conjecture peut on émettre quant à la convergence de (S_n).

3) Montrez que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{(2k+1)(2k+2)} = \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2}$ puis que :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}.$$

Coup de pouce : Développez les sommes pour y voir plus clair !

4) Montrez que $\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k+1} = U_n + \frac{1}{n+1}$, puis donnez S_n en fonction de n, U_{2n+1} et U_n.

5) Exprimez alors S_n en fonction den, V_{2n+1} et V_n, puis montrez en utilisant la partie précédente que (S_n) converge vers ln2.

20 Intégrales de Wallis – Méthodes 1, 2, 6 et 11

Pour n entier naturel, on considère la suite (I_n) telle que $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x dx$ (intégrales de Wallis).

Partie A – Calcul de I_n

1) Déterminez I_0 et I_1.

2) Pour $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$, exprimez I_n en fonction de I_{n-2} en intégrant par parties $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \sin^{n-1} x dx$.

3) En déduire que $I_{2n} = \frac{(2n)!}{\left(2^n (n!)\right)^2} \frac{\pi}{2}$ et que $I_{2n+1} = \frac{\left(2^n (n!)\right)^2}{(2n+1)!}$.

Partie B – Comportement global et asymptotique de I_n

1) Montrez que (I_n) est décroissante bornée.

2) Montrez que (I_n) converge vers une limite L.

3) Montrez que la suite (U_n) définie pour $n \in \mathbb{N}^*$ par $U_n = nI_nI_{n-1}$ est une suite constante que vous déterminerez et dont vous déduirez L.

4) Déterminez $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{I_{n+1}}{I_n}$, puis $\lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{n}I_n$.

21 Fonctions définies par des intégrales – Méthodes 6, 7, 8, 10 et 11

On considère les deux fonctions f et g définies par $f(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} dt$ et $g(x) = \int_1^x \frac{\cos t}{t} dt$.

1) Montrez que g est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et précisez g'.

2) a) Donnez une relation simple entre f et g sur $\mathbb{R}_+^*$.

b) En déduire que f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et précisez f'.

c) Montrez que f est définie sur $\mathbb{R}^*$ et précisez sa parité.

3) À l'aide d'une intégration par parties, déterminez $\lim\limits_{+\infty} f$.

4) On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $h(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos t - 1}{t} dt$.

a) Montrez que pour $t \geq 0$, $-\frac{t^2}{2} \leq \cos t - 1 \leq 0$.

b) En déduire $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} h(x)$, puis $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x)$ et enfin $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ en utilisant la parité de la fonction f.

Corrigés

1 Primitives avec le tableau des primitives en « x » – Méthode 1

On note F une primitive des fonctions f sur l'intervalle I.

1) $F(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{5}{2}x^2+3x$ sur $I=\mathbb{R}$.

2) $f(x)=x^2-2x^{-5}\Rightarrow F(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^{-4}=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2x^4}$ sur $I=\mathbb{R}_+^*$.

REMARQUE : N'hésitez pas à passer aux puissances négatives avant de déterminer une primitive.

3) On a $f(x)=-3x^{-3}+3x-\frac{1}{\sqrt{x}}-5\Rightarrow F(x)=\frac{3}{2}x^{-2}+\frac{3}{2}x^2-2\sqrt{x}-5x=$

$\frac{3}{2x^2}+\frac{3}{2}x^2-2\sqrt{x}-5x$ sur $I=\mathbb{R}_+^*$.

4) $F(x)=-\ln|x|+e^x=-\ln(-x)+e^x$ sur $I=\mathbb{R}_-^*$.

REMARQUE : Cet exemple montre l'importance de l'intervalle d'intégration car comme $x<0$ on a $|x|=-x$.

5) $f(x)=2\cos x-3\sin x-x^{-2}\Rightarrow F(x)=2\sin x+3\cos x+x^{-1}=2\sin x+3\cos x+\frac{1}{x}$ sur $I=\mathbb{R}_+^*$.

6) $F(x)=3\tan x-2e^x$ sur $I=\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

2 Primitives avec le tableau des primitives en « u(x) » – Méthode 2

Déterminons une primitive F des fonctions f sur l'intervalle I.

1) On a $f(x)=u'(x)u^3(x)$ avec $u(x)=-x^2+x+2$ donc $F(x)=\frac{u^4(x)}{4}$ et finalement $F(x)=\frac{(-x^2+x+2)^4}{4}$ sur $I=\mathbb{R}$.

2) $f(x)=3u'(x)u^2(x)$ avec $u(x)=x^2-x+5$ donc $F(x)=3\frac{u^3(x)}{3}=u^3(x)$ et finalement $F(x)=(x^2-x+5)^3$ sur $I=\mathbb{R}$.

3) Comme on a $f(x)=u'(x)u^{-4}(x)$ avec $u(x)=-x^2+2x-5$, on en déduit que $F(x)=\frac{u^{-3}(x)}{-3}=-\frac{1}{3u^3(x)}=-\frac{1}{3(-x^2+2x-5)^3}$ sur $I=\mathbb{R}$.

4) On a $f(x)=\frac{1}{2}u'(x)e^{u(x)}$ avec $u(x)=x^2+6x+2$ donc $F(x)=\frac{1}{2}e^{u(x)}$ et finalement $F(x)=\frac{1}{2}e^{x^2+6x+2}$ sur $I=\mathbb{R}$.

5) On a $f(x)=3u'(x)\cos u(x)$ avec $u(x)=x^2+x+1$ donc $F(x)=3\sin u(x)$ et finalement $F(x)=3\sin(x^2+x+2)$ sur $I=\mathbb{R}$.

6) $f(x)=u'(x)u(x)$ avec $u(x)=\ln x$ donc $F(x)=\frac{u^2(x)}{2}=\frac{1}{2}(\ln x)^2$ sur $I=\mathbb{R}_+^*$.

3 Primitives avec « u(x) = ax+b » – Méthode 3

Déterminons une primitive F des fonctions f sur l'intervalle I.

1) $f(x)=\frac{5}{2}\times\frac{2}{2x-1}=\frac{5}{2}\times\frac{u'(x)}{u(x)}$ avec $u(x)=2x-1<0$ sur $I=\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$.

On en déduit que $F(x)=\frac{5}{2}\ln|u(x)|=\frac{5}{2}\ln(-u(x))=\frac{5}{2}\ln(-2x+1)$ sur $I=\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$.

2) $f(x)=e^{ax+b}$ avec $a=-2$ et $b=5$ donc $F(x)=\frac{1}{a}e^{ax+b}=-\frac{1}{2}e^{-2x+5}$ sur $I=\mathbb{R}$.

3) $F(x)=-\frac{1}{5}\cos(5x-1)$ sur $I=\mathbb{R}$.

4 Primitives par intégration par parties – Méthode 4

Déterminons une primitive F des fonctions f suivantes sur l'intervalle I.

1) Il faut dériver le logarithme népérien donc poser $u(x)=\ln(x+5)$ et $v'(x)=1$ (on n'a pas le choix).

Cela donne par exemple $u'(x)=\frac{1}{x+5}$ et $v(x)=x$ MAIS il est beaucoup plus judicieux de prendre $v(x)=x+5$ sinon vous risquez d'avoir des soucis avec $\int u'(x)v(x)dx$.

Cela étant, comme u et v sont deux fois dérivables sur $]-5;+\infty[$, par intégration par parties on obtient :

$$\int\ln(x+5)dx=(x+5)\ln(x+5)-\int\frac{x+5}{x+5}dx=(x+5)\ln(x+5)-\int 1dx=(x+5)\ln(x+5)-x.$$

2) Il faut intégrer l'exponentielle donc poser $u(x)=x$ $v'(x)=e^{-x}$ (on n'a pas le choix).

Cela donne $u'(x)=1$ et $v(x)=-e^{-x}$ ce qui ne va poser de problème pour déterminer $\int u'(x)v(x)dx$.

Cela étant, comme u et v sont deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$, par intégration par parties on obtient :

$$\int xe^{-x}dx=-xe^{-x}-\int -e^{-x}dx=-xe^{-x}-e^{-x}=(-x-1)e^{-x}.$$

3) Là, il faut faire deux intégrations par parties successives pour s'en sortir ce qui suppose que lorsque l'on a posé u, il faut dériver u' à la seconde.
Il faut dériver le polynôme pour abaisser sa puissance, donc poser $u(x)=x^2$ et $v'(x)=\cos x$ (on n'a pas le choix).
Cela donne $u'(x)=2x$ et $v(x)=\sin x$ ce qui va poser un problème pour déterminer $\int u'(x)v(x)dx$, ce qui supposera une seconde intégration par partie après la première.
Cela étant, comme u et v sont deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$, par intégration par parties on obtient :

$$\int x^2\cos x dx = x^2\sin x - \int 2x\sin x dx \text{ (i)}.$$

Pour déterminer $\int 2x\sin x dx$, on réintègre par parties en posant $u(x)=2x$ et $v'(x)=\sin x$.
Cela donne $u'(x)=2$ et $v(x)=-\cos x$ ce qui ne va pas poser de problème pour déterminer $\int u'(x)v(x)dx$.
Cela étant, comme u et v sont deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$, par intégration par parties on obtient :

$$\int 2x\sin x dx = -2x\cos x - \int 2(-\cos x)dx = -2x\cos x + 2\int \cos x dx = -2x\cos x + 2\sin x.$$

En remplaçant dans (i), on obtient :

$$\int x^2\cos x dx = x^2\sin x - (-2x\cos x + 2\sin x) = 2x\cos x + (x^2-2)\sin x.$$

5 Calcul intégral – Méthodes 1, 2, 7 et 9

Calculons les intégrales demandées.

1) $I=\int_0^1 (x^2+x)dx = \left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{5}{6}$

2) On a vu dans la question 6 de l'exercice 2 qu'une primitive de la fonction $x \longmapsto \frac{\ln x}{x}$ est $x \longmapsto \frac{1}{2}(\ln x)^2$ donc $I=\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx = \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^e = \frac{1}{2}$.

3) Là c'est plus délicat car on ne connaît pas de primitive directe de la fonction $x \longmapsto \cos^2 x$ et l'on ne peut pas utiliser le tableau des primitives avec $u(x)$ et $u'(x)$.
La méthode dans ces situations de puissances de cosx ou de sinx consiste à les linéariser, c'est-à-dire à les exprimer comme combinaison linéaire de $\cos(kx)$ et de $\sin(kx)$ avec $k \in \mathbb{N}$ (c'est-à-dire dans ce cas particulier à **utiliser le coup de pouce**).

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \cos^2 x - (1-\cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1 \Rightarrow \cos^2 x = \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x.$$

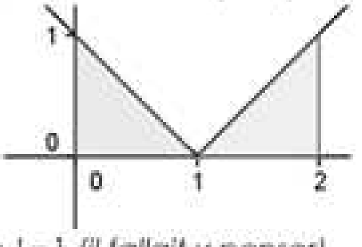
On a alors $I=\int_0^{\pi}\cos^2 x\,dx=\int_0^{\pi}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x\right)dx=\left[\frac{x}{2}+\frac{1}{4}\sin 2x\right]_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}$.

4) Comme on ne connaît pas de primitive de la fonction $x\mapsto|x-1|$ sur $[0,2]$ il faut penser à utiliser la relation de Chasles pour intégrer sur des intervalles où l'on peut supprimer le symbole de valeur absolue (on vous rappelle que si $u(x)\leq 0$, $|u(x)|=-u(x)$ et que si $u(x)\geq 0$, $|u(x)|=u(x)$).

Ainsi on a : $I=\int_0^2|x-1|dx=\int_0^1|x-1|dx+\int_1^2|x-1|dx=\int_0^1(-x+1)\,dx+\int_1^2(x-1)\,dx$.

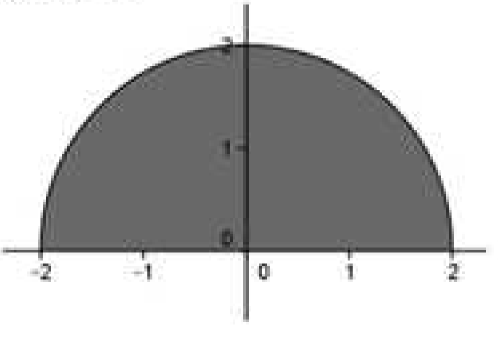
Finalement $I=\left[-\frac{x^2}{2}+x\right]_0^1+\left[\frac{x^2}{2}-x\right]_1^2=\cdots=1$.

REMARQUE : Il y a plus rapide. En utilisant la définition de l'intégrale comme une aire, l'intégrale cherchée est l'aire grisée sur la figure ci-dessous où l'on a tracé la représentation graphique de $x\mapsto|x-1|$.



Il vient immédiatement que $I=1$ *(il fallait y penser).*

5) Il faut **utiliser le coup de pouce** et raisonner comme on l'a fait dans la remarque de l'exercice précédent, mais c'est un peu moins évident.
Voyons donc de quelle aire il s'agit en la grisant après avoir tracé la courbe représentative de $x\mapsto\sqrt{4-x^2}$:



Ouf ! Cela ressemble bien au demi-cercle de centre O et de rayon 2. Voyons cela de plus près.
Le cercle de centre O et de rayon 2 a pour équation $x^2+y^2=4$, donc $y^2=4-x^2$.
On en déduit que pour $x\in[-2;2]$ et $y\geq 0$, on a $y=\sqrt{4-x^2}$ ce qui correspond à l'équation de la représentation de $x\mapsto\sqrt{4-x^2}$.
Finalement I est l'aire du demi-cercle, donc $I=\int_{-2}^2\sqrt{4-x^2}\,dx=\frac{\pi\times 2^2}{2}=2\pi$.

6 Valeur moyenne – Algorithme – Méthode 4

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-x^2}$.

1) On demande $\mu = \frac{1}{2-0}\int_0^2 xe^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\int_0^2 xe^{-x^2}dx$.

Il faut « taper » dans la méthode 2 pour intégrer !

En effet, $f(x) = -\frac{1}{2}(-2x)e^{-x^2} = -\frac{1}{2}u'(x)e^{u(x)}$ dont une primitive F sur $[0,2]$ est définie par $F(x) = -\frac{1}{2}e^{u(x)} = -\frac{1}{2}e^{-x^2}$.

On en déduit que :

$$\mu = \frac{1}{2}\int_0^2 xe^{-x^2}dx = \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\right]_0^2 = -\frac{1}{4}\left[e^{-x^2}\right]_0^2 = -\frac{1}{4}\left(e^{-4}-1\right) = \frac{1}{4}\left(1-e^{-4}\right) = 0,245421.$$

2) L'algorithme en langage Python qui permet de trouver une valeur approchée de μ peut être le suivant :

```
from math import exp
def f(x):
    return x*exp(-(x**2))
def moyenne(a,b,n):
    s=f(a)
    for i in range(1,n):
        s=s+f(a+i*((b-a)/n))
        u=s/n
    return(u)
```

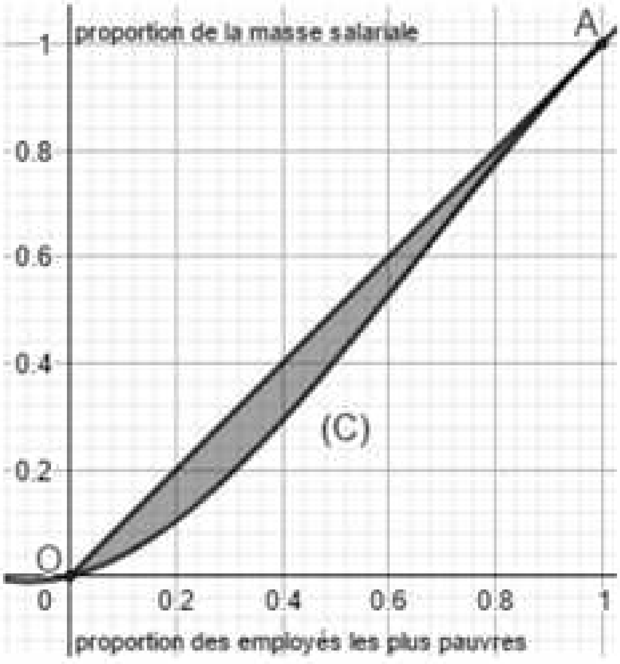
En mode « Run », on obtient :

```
>>> moyenne(0,2,1000000)
0.245421071961993
```

REMARQUE : C'est cohérent avec la valeur exacte !

7 Courbe de Lorenz – Coefficient de Gini – Calcul d'aire – Méthodes 1, 5 et 9

Dans une entreprise (E_1) de N salariés, l'énoncé donne la répartition de la masse salariale M, en traçant la courbe « lissée » (C_1) sur $[0,1]$ de la proportion des salariés les plus pauvres en fonction de la proportion de la masse salariale.



Cette courbe (C_1) qui s'appelle **une courbe de Lorenz** a pour but de mesurer l'ampleur des inégalités salariales au sein de l'entreprise et permet entre autre de donner **le coefficient de Gini** γ_1 qui correspond à l'aire grise sur la figure.

1) ***Lecture graphique***

a) Par lecture graphique l'image de 0,4 est 0,24 donc 24 % de la masse salariale revient aux 40 % des employés les plus pauvres.

b) Là, il faut bien lire l'énoncé, en fait il suffit de déterminer l'antécédent de 0,6 puis de rédiger la réponse par rapport à la question demandée.

L'antécédent de 0,6 est 0,63, ce qui signifie que 63 % de la masse salariale revient aux 60 % des employés les plus pauvres.

Par conséquent il y a 37 % des salariés les plus riches à qui revient 40 % de la masse salariale.

c) Il y a $25\times 20=500$ petits carreaux pour une unité d'aire, et l'aire grisée en contient environ 32 (ce n'est qu'une lecture approximative) donc $\gamma_1=\dfrac{32}{500}=0{,}064$.

2) ***Propriétés de la courbe*** (C_1) ***(vraies pour toutes les courbes de Lorenz)***

a) Comme 0 % des salariés les plus pauvres se partage 0 % de la masse salariale et 100 % des salariés les plus pauvres se partage 100 % de la masse salariale, il est normale que la courbe (C_1) passe par les points $O(0{,}0)$ et $A(1{,}1)$.

b) On utilise **le coup de pouce**, en notant M la masse salariale et N le nombre d'employés.

Si x % des employés les plus pauvres se répartissent y % de la masse salariale, (ce qui correspond au point $M(x,y)$ de la courbe de Lorenz) la moyenne de leurs salaires est $m = \frac{y \times M}{x \times N}$ et la moyenne des autres est $m' = \frac{(100-y) \times M}{(100-x) \times N}$ avec $m \le m'$.

On en déduit que $\frac{y \times M}{x \times N} \le \frac{(100-y) \times M}{(100-x) \times N}$, soit :

$$\frac{y}{x} \le \frac{100-y}{100-x} \Leftrightarrow (100-x)y \le (100-y)x \Leftrightarrow y \le x.$$

Comme ce qui est vrai pour les pourcentages, l'est aussi pour les proportions (il suffit de diviser par 100), on en déduit que (C_1) est sous $[OA]$.

c) Plus la proportion des salariés les plus pauvres augmente, plus la proportion de la masse salariale qu'ils se partagent augmente, ce qui explique que (C_1) est la courbe représentative d'une fonction croissante.

d) Dans un premier temps γ_1 est une aire donc $0 \le \gamma_1$.

Dans un second temps la courbe est dans le triangle OAB avec $O(0,0)$, $A(1,1)$ et $B(1,0)$ d'aire $\frac{1}{2}$, ce qui explique que $\gamma_1 \le \frac{1}{2}$ et montre finalement que :

$$\gamma_1 \in \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

3) ***Comparaison de la répartition de la masse salariale de trois entreprises***

a) Déterminons γ_1 sachant que (C_1) est la courbe représentative de la fonction f_1 définie sur $[0,1]$ par $f_1(x) = -\frac{3}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}x$.

Le segment $[OA]$ ayant pour équation $y = x$, on a $\gamma_1 = \int_0^1 (x - f_1(x))dx$.

Ainsi, $\gamma_1 = \int_0^1 \left(x - \left(-\frac{3}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}x\right)\right)dx = \int_0^1 \left(\frac{3}{4}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{4}x\right)dx$, ce qui donne en intégrant $\gamma_1 = \left[\frac{3}{16}x^4 - \frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{8}x^2\right]_0^1 = \frac{3}{16} - \frac{1}{2} + \frac{3}{8} = \frac{1}{16} = 0{,}0625$.

REMARQUE : Finalement notre lecture graphique n'était pas si mauvaise !

b) Pour deux autres entreprises (E_2) et (E_3), on a $\gamma_2 = \int_0^1 (x - f_2(x))dx$ et $\gamma_3 = \int_0^1 (x - f_3(x))dx$.

Ainsi $\gamma_2 = \int_0^1 (x - x^2)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} = 0{,}166$ pour l'entreprise (E_2) et

$\gamma_3 = \int_0^1 (x - x^5)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^6\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} = 0{,}333$ pour l'entreprise (E_3).

c) Plus le coefficient de Gini est grand moins la répartition des salaires est équitable, les cas extrêmes étant quand il vaut 0 et $\frac{1}{2}$.

Dans le premier cas, tous les salariés ont le même salaire et dans le second, tout le monde travaille gracieusement sauf un !

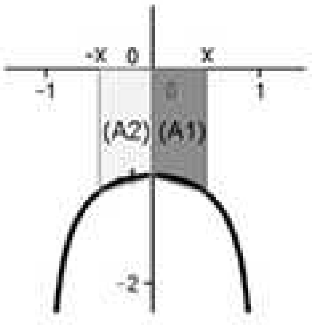
C'est pourquoi, les salaires sont mieux répartis dans (E_1) que dans (E_2) et finalement que dans (E_3).

8 Etude d'une primitive définie par une intégrale – Méthode 10

La fonction f est définie sur $]-1;1[$ par $f(x)=\int_0^x \frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}dt$.

1) Par définition, f est la primitive qui s'annule en 0 de la fonction définie sur $]-1;1[$ par $x \overset{g}{\mapsto} \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$, donc elle est dérivable et $f'(x)=g(x)=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$.

2) La représentation graphique de la fonction g définie sur $]-1;1[$ par $g(x)=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ est la suivante :



Pour $0 \le x < 1$, $f(x)=-(A1)$ donc $(A_1)=-f(x)$ où $(A1)$ représente l'aire foncée en unités d'aire.

D'autre part, $(A2)=-\int_{-x}^{0}\frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}dt=\int_0^{-x}\frac{-1}{\sqrt{1-t^2}}dt=f(-x)$ (inversion des bornes).

Comme g est paire, $(A2)=(A1)$ donc $f(-x)=-f(x)$.

On en déduit que pour tout x tel que $0 \le x < 1$, $f(-x)=-f(x)$.

Si $-1 < x \le 0$ alors $0 \le -x < 1$, donc on peut remplacer x par $-x$ dans l'égalité précédente ce qui donne $f(x)=-f(-x) \Leftrightarrow f(-x)=-f(x)$.

Finalement, $\forall x \in]-1;1[$, $f(-x)=-f(x)$ donc f est impaire.

3) Si $x \in]0;\pi[$ alors $\cos x \in]-1;1[$ donc F est définie et dérivable sur $]0;\pi[$ comme composée de fonctions dérivables et $F'(x)=f'(\cos x)\times(-\sin x)$.

On a finalement $F'(x)=\frac{-1}{\sqrt{1-\cos^2 x}}\times(-\sin x)=\frac{\sin x}{\sqrt{\sin^2 x}}=\frac{\sin x}{|\sin x|}=\frac{\sin x}{\sin x}=1$ puisque comme $x \in]0;\pi[$, $\sin x > 0$ et $|\sin x|=\sin x$.

4) D'après la question précédente, il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $F(x) = x + k$.

Comme $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(\cos\frac{\pi}{2}\right) = f(0) = 0$, on en déduit que $0 = \frac{\pi}{2} + k$, donc que $k = -\frac{\pi}{2}$ et finalement que $F(x) = x - \frac{\pi}{2}$.

5) $f\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\cos\frac{\pi}{3}\right) = F\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{6}$;

$f\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = f\left(\cos\frac{\pi}{6}\right) = F\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{3}$.

$\lim\limits_{\substack{x \to 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim\limits_{x \to 0} f(\cos x) = \lim\limits_{x \to 0} F(x) = F(0) = -\frac{\pi}{2}$.

En utilisant 2), c'est-à-dire que f est impaire on en déduit que $f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$, $f\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ x > -1}} f(x) = \frac{\pi}{2}$.

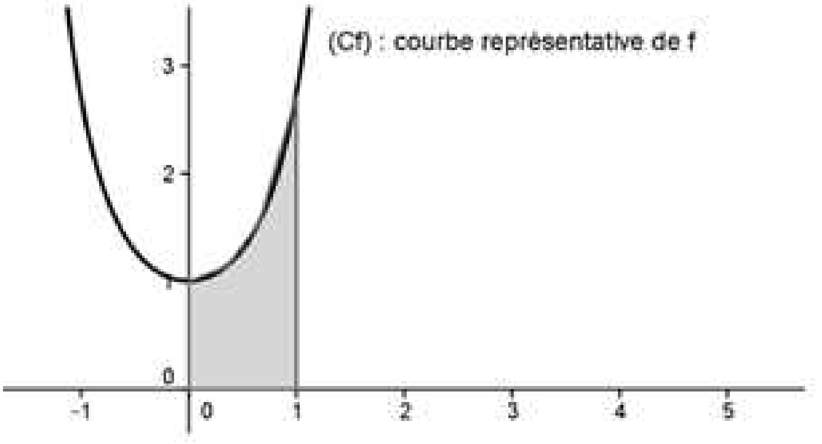
$\boxed{9}$ Approximation d'une intégrale par des algorithmes – Méthodes 4, 12, 13, 14 et 15

L'énoncé définit l'intégrale $I = \int_0^1 e^{x^2} dx$ dont on ne connaît pas la valeur exacte dans la mesure où la fonction f définie sur $[0;1]$ par $f(x) = e^{x^2}$ n'admet pas de primitive parmi les fonctions usuelles.

Partie A – Interprétation de I comme une aire

1) La fonction f définie par $f(x) = e^{x^2} > 0$ est dérivable sur $[0;1]$ et $f'(x) = 2xe^{x^2} \geq 0$ sur $[0;1]$ donc f est positive croissante sur $[0;1]$.

2) L'intégrale I est l'aire grisée suivante en unités d'aire :



Partie B – Approximation de I

Déterminons une approximation de l'intégrale I à 10^{-4} près par des algorithmes en langage Python en utilisant chacune des méthodes proposées.

1) Méthode des rectangles

On peut utiliser l'algorithme suivant :

```
from math import exp
def f(x):
    return exp(x**2)
def aire(a,b,n):
    s=f(a)
    t=f(b)
    for i in range(1,n):
        s=s+f(a+i*((b-a)/n))
        t=t+f(b-i*((b-a)/n))
        u=s*((b-a)/n)
        v=t*((b-a)/n)
        d=abs(u-v)
    return(u,v,d)
```

En mode « Run », on obtient :

```
>>> aire(0,1,20000)
(1.4626087899940872, 1.462694704085507, 8.59140914197809e-05)
```

2) Méthode des milieux

On peut utiliser l'algorithme suivant :

```
from math import exp
def f(x):
    return exp(x**2)
def aire(a,b,n):
    s=f(a)
    h=(b-a)/n
    for i in range(2,n+1):
        s=s+f(a+(2*i-1)*(h/2))
        u=s*h
    return(u)
```

En mode « Run », on obtient :

```
>>> aire(0,1,10000)
1.462651743641691
>>> aire(0,1,20000)
1.4626517453408447
```

3) Méthode des trapèzes
On peut utiliser l'algorithme suivant :

```
from math import exp
def f(x):
    return exp(x**2)
def aire(a,b,n):
    s=0
    h=(b-a)/n
    for i in range(1,n+1):
        s=s+(f(a+(i-1)*h)+f(a+i*h))/2
        u=s*h
    return(u)
```

En mode « Run », on obtient :

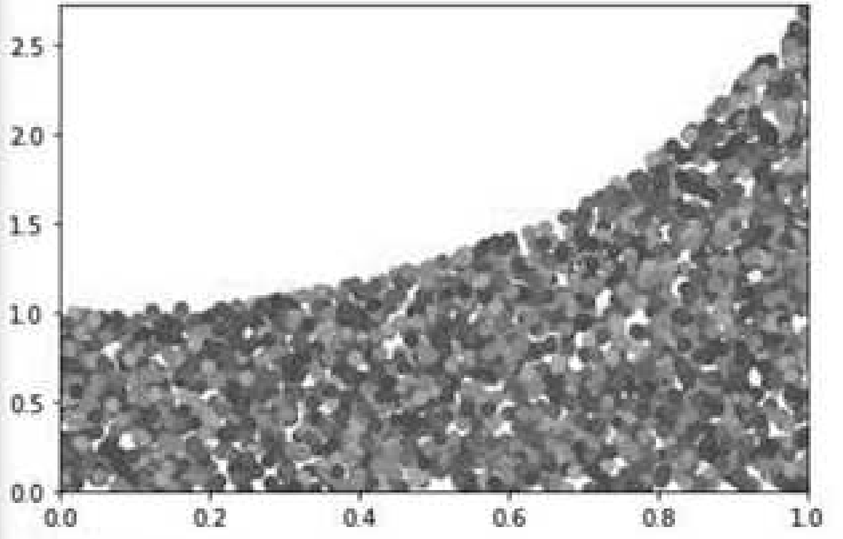
```
>>> aire(0,1,10000)
1.4626517504376502
>>> aire(0,1,20000)
1.462651747039802
```

4) Méthode de Monte-Carlo
On peut utiliser l'algorithme suivant :

```
from math import exp
def f(x):
    return exp(x**2)
import matplotlib.pyplot as plt
from random import uniform
def montecarlo(n):
    plt.axis ([0,1,0,f(1)])
    x=[uniform(0,1) for i in range(n)]
    y=[uniform(0,f(1)) for i in range(n)]
    z=[f(x[i]) for i in range(n)]
    nbre=0
    for i in range(n):
        if y[i]<z[i]:
            nbre=nbre+1
            plt.scatter(x[i],y[i])
    plt.show()
    return(nbre/n)
```

En mode « Run », on obtient :

```
In [98]: montecarlo(5000)
```




```
Out[98]: 0.5386
```

L'aire du rectangle de base étant $1\times e^1 = 2{,}718$, l'aire cherchée matérialisée par les points est donc $0{,}5386\times 2{,}718 = 1{,}4639$.

Conclusion : Dans les trois premières méthodes, on obtient 1,4627 comme valeur approchée de I à 10^{-4} près. Pour la méthode de Monte-Carlo la valeur est un peu différente, mais c'est normal : c'est une méthode dont le principe est aléatoire (en prenant plus de points, en recommençant et en effectuant les moyennes des valeurs renvoyées, on peut espérer une valeur plus proche de la valeur exacte).

$\boxed{10}$ Résolution d'une équation différentielle $y' = f$ – Méthodes 2, 10 et 17

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^{-x^2}$ et l'équation différentielle (E) est définie par $y' = f$.

1) Résoudre (E) consiste à trouver toutes les primitives de f définies sur $\mathbb{R}$.
On a vu dans l'exercice 6 qu'une primitive F de f sur $\mathbb{R}$ est définie par $F(x) = -\frac{1}{2}e^{-x^2}$, donc l'ensemble des solutions de (E) est la famille de fonctions F_k définies sur $\mathbb{R}$ par $F_k(x) = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + k$ avec k réel.
Pour déterminer la solution particulière qui vérifie $y(0) = 3$, il suffit de trouver le réel k tel que $F_k(0) = 3$, ce qui donne $-\frac{1}{2} + k = 3$ et donc $k = \frac{7}{2}$.
La solution particulière cherchée est donc la fonction G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + \frac{7}{2}$.

2) La solution particulière cherchée est $G(x)=\int_0^x te^{-t^2}dt+3=\left[-\frac{1}{2}e^{-t^2}\right]_0^x+3$,

c'est-à-dire $G(x)=-\frac{1}{2}e^{-x^2}+\frac{1}{2}+3=-\frac{1}{2}e^{-x^2}+\frac{7}{2}$.

11 **Résolution d' une équation différentielle $y'=ay+f$ – Méthodes 16, 18 et 19**

L'énoncé donne les équations différentielles (E) : $y'=2y+\sin x$ et (E') : $y'=2y$.

1) L'ensemble des solutions de (E') est la famille de fonctions F_C définies sur $\mathbb{R}$ par $F_C(x)=Ce^{2x}$ avec C réel.

2) Soit y_0 définie sur $\mathbb{R}$ par $y_0(x)=a\sin x+b\cos x$ une solution de (E).

On a $y_0'(x)=a\cos x-b\sin x$ donc y_0 est solution de (E) lorsque pour tout $x\in\mathbb{R}$ on a :

$$a\cos x-b\sin x=2(a\sin x+b\cos x)+\sin x\Leftrightarrow(a-2b)\cos x+(2a+b+1)\sin x=0.$$

Cela donne $\begin{cases}a-2b=0\\2a+b+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-\frac{2}{5}\\b=-\frac{1}{5}\end{cases}\Leftrightarrow y_0(x)=-\frac{2}{5}\sin x-\frac{1}{5}\cos x$.

3) Cela étant, posons $y=z+y_0$ avec y solution de (E).

y solution de (E) $\Leftrightarrow y'=2y+\sin x\Leftrightarrow(z+y_0)'=2(z+y_0)+\sin x$

$\Leftrightarrow z'+y_0'=2z+2y_0+\sin x$

$\Leftrightarrow z'=2z$ (car $y_0'=2y_0+\sin x$ puisque y_0 et solution de (E)) $\Leftrightarrow z(x)=Ce^{2x}$ (d'après 1)) $\Leftrightarrow y(x)=z(x)+y_0(x)=Ce^{2x}-\frac{2}{5}\sin x-\frac{1}{5}\cos x$.

C'est gagné ! L'ensemble des solutions de (E) est la famille de fonctions F_C définies sur $\mathbb{R}$ par $F_C(x)=Ce^{2x}-\frac{2}{5}\sin x-\frac{1}{5}\cos x$.

4) Pour déterminer la solution particulière demandée, il reste à déterminer le réel C tel que $F_C(0)=1$, ce qui donne $C-\frac{1}{5}=1$, soit $C=\frac{6}{5}$ et donc que la fonction cherchée est G définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x)=\frac{6}{5}e^{2x}-\frac{2}{5}\sin x-\frac{1}{5}\cos x$.

12 **Résolution d'une équation différentielle par analyse et synthèse – Méthode d'Euler – Méthodes 20 et 21**

L'équation différentielle (E) est définie par $y' = 2\sqrt{y}$.

1) ***Analyse***

On remarque d'abord que la fonction nulle est solution de l'équation (E).

Pour $y > 0$, l'équation (E) s'écrit $\frac{y'}{2\sqrt{y}} = 1$, c'est-à-dire $\left(\sqrt{y}\right)' = 1$ ce qui donne $\sqrt{y} = x + k$ en intégrant et donc $y = (x+k)^2$ avec k réel.

On en déduit que l'ensemble des solutions de (E) ne peut être que la famille de fonctions y_k qui sont définies sur tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}\setminus\{-k\}$ par $y_k(x) = (x+k)^2$ avec k réel et la fonction nulle.

Synthèse

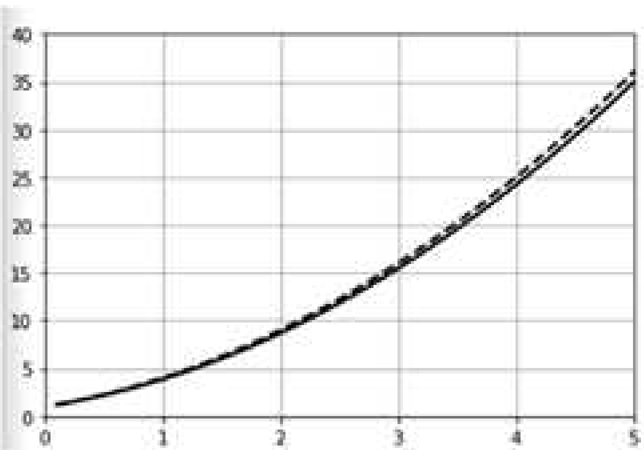
Pour tout $x \in \mathbb{R}\setminus\{-k\}$, $y_k'(x) = 2(x+k) = 2\sqrt{(x+k)^2} = 2\sqrt{y_k(x)}$ **lorsque** $x + k > 0$, ce qui prouve que l'ensemble des solutions de (E) est la famille de fonctions y_k définies sur $]-k;+\infty[$ par $y_k(x) = (x+k)^2$ et la fonction nulle.

2) Pour déterminer les solutions particulières demandées, il reste à déterminer les réels k tels que $y_k(0) = 1$, ce qui donne $(0+k)^2 = 1$, soit $k = \pm 1$ et donc que les solutions cherchées sont les fonctions F et G définies respectivement sur $]-1;+\infty[$ et $]1;+\infty[$ par $F(x) = (x+1)^2$ et $G(x) = (x-1)^2$.

3) Pour répondre à la question il suffit d'utiliser un algorithme en langage Python qui trace la courbe de la solution exacte et celle de la solution approchée et de comparer les deux courbes comme le suivant :

```
from math import sqrt
def deriv_f(x):
    return 2*sqrt(x)
def g(x):
    return (x+1)**2
import matplotlib.pyplot as plt
plt.axis ([0,5,0,40])
plt.grid
x=0
y=1
x1=0
y1=1
h=0.1
absc=[]
ordo=[]
for i in range(0,50):
    x=x+h
    y=y+h*deriv_f(y)
    absc.append(x)
    ordo.append(y)
absc1=[]
ordo1=[]
for i in range(0,501):
    x1=x1+h
    y1=g(x1)
    absc1.append(x1)
    ordo1.append(y1)
plt.grid()
plt.plot(absc,ordo,color="black",linewidth=2.0,linestyle="-")
plt.plot(absc1,ordo1,color="black",linewidth=2.0,linestyle="--")
plt.show()
```

En mode « Run » on obtient :



On constate que la courbe exacte en trait pointillé, qui représente la solution exacte F, est proche de celle en trait plein, que l'on obtient avec la méthode d'Euler.

REMARQUE : Il suffit de prendre un pas h plus petit pour ne plus observer de différence entre les deux courbes (n'oubliez pas de régler la longueur de la boucle finie pour les obtenir sur $[0,5]$*).*

13 Transformation d'écriture pour calculer une intégrale – Méthodes 3 et 8

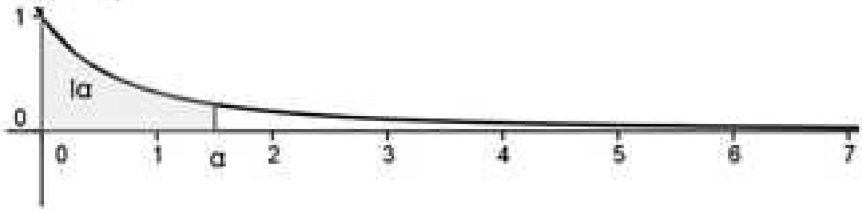
La fonction f est définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{2}{x^2+3x+2}$.

1) $\lim\limits_{+\infty} f=0$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2+3x+2=+\infty$.

La fonction f est dérivable sur $[0;+\infty[$ et $f'(x)=-\dfrac{2}{\left(x^2+3x+2\right)^2}(2x+3)<0$ sur $[0;+\infty[$ d'où le tableau de variations de f suivant :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
f	1 ↘	0

2) Traçons sa courbe représentative (C_f) dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.



3) $\dfrac{a}{x+1}+\dfrac{b}{x+2}=\dfrac{a(x+2)+b(x+1)}{(x+1)(x+2)}=\dfrac{(a+b)x+(2a+b)}{x^2+3x+2}$.

Par identification, $\begin{cases}a+b=0\\2a+b=2\end{cases}$, donc $a=2$ et $b=-2$.

4) Sans la question précédente, l'intégrale I_α n'est pas évidente à calculer car on ne peut pas déterminer de primitive de f en appliquant les formules des tableaux sans cette transformation d'écriture.

Pour $\alpha\in\mathbb{R}_+$, $I_\alpha=\int_0^\alpha f(x)dx=\int_0^\alpha\left(\dfrac{2}{x+1}-\dfrac{2}{x+2}\right)dx=2\left[\ln(x+1)-\ln(x+2)\right]_0^\alpha$, donc

$I_\alpha=2\left[\ln\dfrac{x+1}{x+2}\right]_0^\alpha=2\left(\ln\dfrac{\alpha+1}{\alpha+2}-\ln\dfrac{1}{2}\right)=2\left(\ln\dfrac{\alpha+1}{\alpha+2}+\ln 2\right)$.

5) $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\dfrac{\alpha+1}{\alpha+2}=\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\dfrac{\alpha\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}{\alpha\left(1+\frac{2}{\alpha}\right)}=\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\dfrac{\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)}{\left(1+\frac{2}{\alpha}\right)}=1\Rightarrow\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\ln\dfrac{\alpha+1}{\alpha+2}=\ln 1=0$

$\Rightarrow\lim\limits_{\alpha\to+\infty} I_\alpha=2\ln 2$.

Géométriquement, l'intégrale I_α correspond, en unités d'aires, à l'aire grisée au 2). Quand α tend vers $+\infty$, l'aire grisée tend vers 2 ln 2.

REMARQUE : Cela paraît paradoxal puisque la courbe ne rejoignant jamais l'asymptote on peut penser à priori que cette aire est infinie.
En fait, ***NON****, car plus α devient grand, plus l'aire devient petite et la définition mathématique de la limite nous amène 2 ln 2.*

14 Suite définie par une intégrale – Méthodes 3, 8 et 11

On a la suite (I_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx$.

1) $I_0 = \int_0^1 \frac{1}{1+x}dx = \left[\ln(1+x)\right]_0^1 = \ln 2$.

2) $\forall n \in \mathbb{N},\ I_n + I_{n+1} = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx + \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx = \int_0^1 \frac{x^n + x^{n+1}}{1+x}dx = \int_0^1 \frac{x^n(x+1)}{1+x}dx$

$= \int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$.

3) D'après la question précédente, $\forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} = \frac{1}{n+1} - I_n$ donc $I_1 = 1 - I_0 = 1 - \ln 2$

et $I_2 = \frac{1}{2} - I_1 = \frac{1}{2} - (1 - \ln 2) = -\frac{1}{2} + \ln 2$.

4) $\forall x \in [0;1],\ \frac{x^n}{1+x} \geq 0 \Rightarrow I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx \geq 0$ (positivité de l'intégrale).

$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x}dx - \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx = \int_0^1 \frac{x^{n+1} - x^n}{1+x}dx = \int_0^1 \frac{x^n(x-1)}{1+x}dx$.

Comme $\forall x \in [0;1],\ \frac{x^n(x-1)}{1+x} \leq 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} - I_n \leq 0 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ I_{n+1} \leq I_n$ on en déduit finalement que (I_n) est décroissante à termes positifs.

5) Puisque que (I_n) est décroissante minorée (par 0), d'après l'un des théorèmes de convergence monotone elle converge vers une limite L.
Comme (I_n) est **convergente**, on peut passer à la limite dans la relation de récurrence $I_{n+1} + I_n = \frac{1}{n+1}$, donc $2L = 0$ et finalement $L = 0$.

15 Encadrement à l'aide du calcul intégral – Méthode 11

1) Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$\forall t \in [0;x],\ \cos t \leq 1 \Rightarrow \int_0^x \cos t\,dt \leq \int_0^x 1dt \Rightarrow [\sin t]_0^x \leq [t]_0^x \Rightarrow \sin x \leq x$.

Finalement, $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \sin x \leq x$.

2) **Première application de la méthode du 1)** : Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$\forall t \in [0;x],\ \sin t \le t \Rightarrow \int_0^x \sin t\,dt \le \int_0^x t\,dt \Rightarrow [-\cos t]_0^x \le \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x \Rightarrow -\cos x + 1 \le \frac{x^2}{2}$.

Finalement, $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ 1-\frac{x^2}{2} \le \cos x$.

Deuxième application de la méthode du 1) : Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$\forall t \in [0;x],\ 1-\frac{t^2}{2} \le \cos t \Rightarrow \int_0^x \left(1-\frac{t^2}{2}\right)dt \le \int_0^x \cos t\,dt \Rightarrow \left[t-\frac{t^3}{6}\right]_0^x \le [\sin t]_0^x$

$\Rightarrow x-\frac{x^3}{6} \le \sin x$.

Finalement, $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ x-\frac{x^3}{6} \le \sin x$.

Troisième application de la méthode du 1) : Soit $x \in \mathbb{R}_+$.

$\forall t \in [0;x],\ t-\frac{t^3}{6} \le \sin t \Rightarrow \int_0^x \left(t-\frac{t^3}{6}\right)dt \le \int_0^x \sin t\,dt \Rightarrow \left[\frac{t^2}{2}-\frac{t^4}{24}\right]_0^x \le [-\cos t]_0^x$

$\Rightarrow \frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{24} \le -\cos x + 1 \Rightarrow \cos x \le 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$

Finalement, $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \cos x \le 1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$.

On déduit des résultats précédents que pour tout $x \ge 0$:

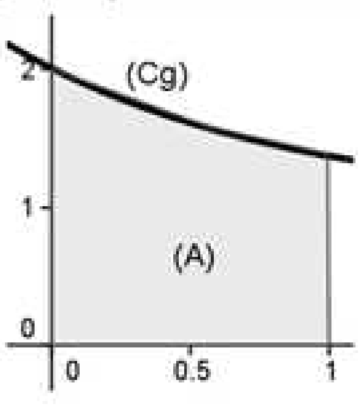
$$-\frac{x^3}{6}+x \le \sin x \le x \quad \text{et} \quad -\frac{x^2}{2}+1 \le \cos x \le \frac{x^4}{24}-\frac{x^2}{2}+1.$$

16 Aires et fonctions exponentielles – Méthodes 3 et 5

La fonction g est définie sur $[0;1]$ par $g(x)=1+e^{-x}$.

On note (C_g) sa courbe représentative dans un repère orthogonal et l'aire (A) est définie par l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $\begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le g(x) \end{cases}$.

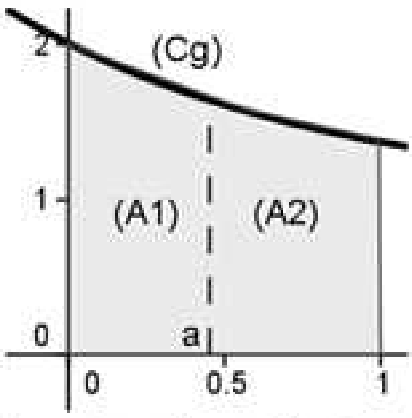
La courbe (C_g) et l'aire (A) sont représentées ci-dessous :



Le but de ce problème est de partager l'aire (A) en deux domaines de même aire, d'abord par une droite parallèle à l'axe des ordonnées (partie A), puis par une droite parallèle à l'axe des abscisses (partie B).

Partie A

On sait que $a \in [0;1]$, avec (A_1) et (A_2) les aires en unités d'aire matérialisées sur la figure suivante :



1) a) $(A_1)=\int_0^a g(x)dx=\int_0^a\left(1+e^{-x}\right)dx=\left[x-e^{-x}\right]_0^a=\left(a-e^{-a}\right)-(-1)=1+a-e^{-a}$.

b) $(A_2)=\int_a^1 g(x)dx=\left[x-e^{-x}\right]_a^1=\left(1-e^{-1}\right)-\left(a-e^{-a}\right)=1-a-\dfrac{1}{e}+e^{-a}$.

2) La fonction f est définie sur $[0;1]$ par $f(x)=2x-2e^{-x}+\dfrac{1}{e}$.

a) La fonction f est dérivable sur $[0;1]$ et $f'(x)=2+2e^{-x}>0$.

On en déduit le tableau de variations suivant :

x	0	α	1
$f'(x)$		$+$	
f	$-2+\dfrac{1}{e}$	0	$2-\dfrac{1}{e}$

b) Posons $I=[0;1]$ et $J=\left[-2+\dfrac{1}{e};2-\dfrac{1}{e}\right]$.

La fonction f est continue et strictement monotone de I sur J car $f'(x)>0$ sur I.

Comme $0\in J$, $\left(-2+\dfrac{1}{e}\simeq-1{,}63<0 \text{ et } 2-\dfrac{1}{e}\simeq 1{,}63>0\right)$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires pour les fonctions strictement monotones, l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α sur I.

c) A l'aide de la calculatrice $\alpha\simeq 0{,}45$ à 10^{-2} près.

3) D'après 1), $(A_1)=(A_2) \Leftrightarrow 1+a-e^{-a}=1-a-\dfrac{1}{e}+e^{-a} \Leftrightarrow 2a-2e^{-a}+\dfrac{1}{e}=0$

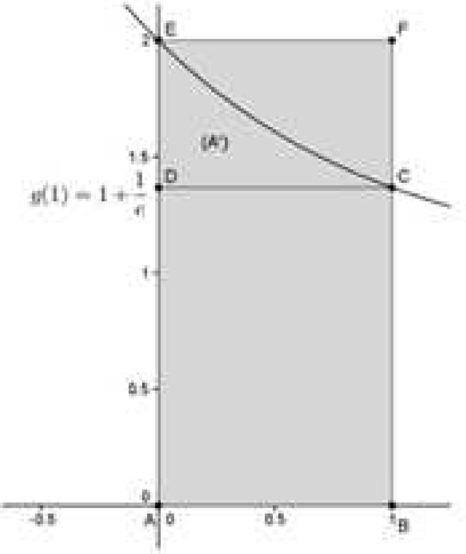
$\Leftrightarrow f(a)=0 \Leftrightarrow a=\alpha$.

Par conséquent $a=0{,}45$ à 10^{-2} près.

Partie B

On admet dans cette partie qu'il existe un seul réel b positif tel que la droite d'équation $y=b$ sépare l'aire (A) en deux domaines de même aire.

1) Il suffit de raisonner en termes d'aires pour justifier l'inégalité $b<1+\dfrac{1}{e}$.



L'aire du rectangle ABCD est $1+\dfrac{1}{e}$ et celle du rectangle DCFE est $1-\dfrac{1}{e}$.

Comme (A') (aire comprise entre la courbe et le segment [DC]) est inférieure l'aire du rectangle DCEF, elle-même inférieure à l'aire du rectangle ABCD $\left(1-\dfrac{1}{e}<1+\dfrac{1}{e}\right)$ on en déduit que l'aire (A') est inférieure à l'aire du rectangle ABCD.

La valeur b telle que la droite d'équation $y=b$ sépare l'aire (A) en deux aires égales est donc strictement inférieure à $1+\dfrac{1}{e}$.

2) D'après la question précédente il faut trouver la hauteur b du rectangle de base $[AB]$ de longueur 1 qui est égale à $\dfrac{(A)}{2}$ ce qui nous amène à :

$b=\dfrac{1}{2}\int_0^1 g(x)dx=\dfrac{1}{2}\left[x-e^{-x}\right]_0^1=\dfrac{1}{2}\left(\left(1-\dfrac{1}{e}\right)-(-1)\right)=\dfrac{1}{2}\left(2-\dfrac{1}{e}\right)=1-\dfrac{1}{2e}$.

17 Approximation d'une aire par la méthode des rectangles – Méthodes 5, 6 et 12

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x+2)e^{-x}$ et sa courbe représentative dans un repère orthogonal est notée (C_f).

Partie A – Étude de f

1) On a $f(0)=2$ et la solution de $f(x)=0$ est -2 donc les points d'intersection de (C_f) avec (Oy) et (Ox) sont respectivement $I(0,2)$ et $J(-2,0)$.

2) $\lim\limits_{-\infty} f=\lim\limits_{x\to-\infty}(x+2)e^{-x}=-\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}(x+2)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=\lim\limits_{u\to+\infty}e^{u}=+\infty$.

$\lim\limits_{+\infty} f=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^x}+\frac{2}{e^x}\right)=0$ (croissances comparées de $x\mapsto x$ et $x\mapsto e^x$ en $+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$).

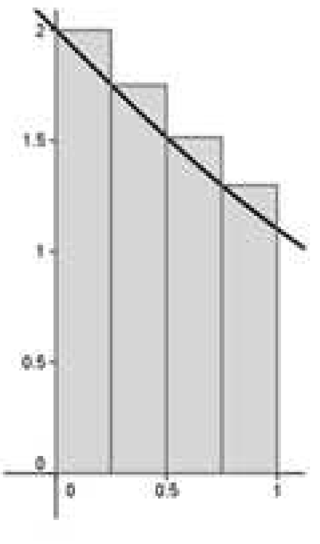
3) La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)=e^{-x}-(x+2)e^{-x}=(-x-1)e^{-x}$ qui est du signe de $-x-1$ car $e^{-x}>0$ sur $\mathbb{R}$.

On en déduit le tableau de variations de f suivant :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	–	
f	$-\infty$	↗	e	↘	0

Partie B – Approximation d'une aire par la méthode des rectangles

1) Dans cette question on « approche » l'aire (A) définie par l'ensemble des points $M(x,y)$ tels que $\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le y\le f(x)\end{cases}$ par l'aire grisée suivante :



On a l'algorithme suivant qui donne la valeur de l'aire grisée :

Variables	k est un nombre entier S est un nombre réel
Initialisation	Affecter à S la valeur 0
Traitement	Pour k allant de 0 à 3 Affecter à S la valeur $S+\frac{1}{4}f\left(\frac{k}{4}\right)$ Fin Pour
Sortie	Afficher S

Traduisons cet algorithme en langage Python pour donner la valeur approchée demandée :

```
from math import exp
def f(x):
    return (x+2)*exp(-x)
def aire(a,b,n):
    s=f(a)
    for i in range(1,n):
        s=s+f(a+i*((b-a)/n))
        u=s*((b-a)/n)
    return(u)
```

L'algorithme renvoie :

```
>>> aire(0,1,4)
1.6419091078075088
```

La valeur approchée à 10^{-3} est donc 1,642.

2) Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

Dans cette question on « découpe » l'intervalle $[0;1]$ en N intervalles de même longueur ce qui donne N rectangles au lieu de 4 comme au 1).

L'algorithme en langage Python est le même mais il faut entrer $n = 100$.

L'algorithme renvoie alors :

```
>>> aire(0,1,100)
1.5329662457198618
```

Partie C – Valeur exacte de (A) et « validité » des approximations

1) On doit intégrer par parties $A=\int_0^1 (x+2)e^{-x}dx$, donc il faut intégrer l'exponentielle, ce qui nous amène à poser $u(x)=x+2$ et $v'(x)=e^{-x}$.

Comme $u'(x)=1$ et que l'on peut prendre par exemple $v(x)=-e^{-x}$ avec u et v deux fois dérivables par intégration par parties :

$$A=\int_0^1 (x+2)e^{-x}dx=\left[(x+2)\left(-e^{-x}\right)\right]_0^1-\int_0^1 -e^{-x}dx=\left[(x+2)\left(-e^{-x}\right)\right]_0^1+\int_0^1 e^{-x}dx$$

$=\left[-(x+2)e^{-x}\right]_0^1+\left[-e^{-x}\right]_0^1=\left[-(x+3)e^{-x}\right]_0^1=-4e^{-1}+3=3-\dfrac{4}{e}=1{,}528$ à 10^{-3} près.

2) Les valeurs approchées à 10^{-3} près par excès des erreurs commises par rapport aux valeurs renvoyées dans la partie B sont 0,114 pour N = 4 et 0,005 pour N = 100.

18 Suite d'intégrales – Algorithme – Méthodes 6 et 11

La suite (I_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par $I_n=\int_0^1 x^n e^{x^2}dx$ dont on a vu à l'exercice 9 que $I_0=1{,}4627$ à 10^{-4} près.

Partie A – Détermination de valeurs exactes de termes de (I_n)

1) Déterminons $I_1=\int_0^1 xe^{x^2}dx=\int_0^1 f_1(x)dx$.

On a $f_1(x)=\dfrac{1}{2}(2x)e^{x^2}=\dfrac{1}{2}u'(x)e^{u(x)}$ en posant $u(x)=x^2$, donc une primitive F_1 de la fonction f_1 sur $[0,1]$ est par exemple définie par $F_1(x)=\dfrac{1}{2}e^{u(x)}=\dfrac{1}{2}e^{x^2}$.

On obtient alors $I_1=\left[\dfrac{1}{2}e^{x^2}\right]_0^1=\dfrac{1}{2}e-\dfrac{1}{2}$.

2) Montrons en intégrant par parties que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $I_{n+2}=\dfrac{1}{2}e-\dfrac{n+1}{2}I_n$.

$I_{n+2}=\int_0^1 x^{n+2}e^{x^2}dx=\int_0^1\left(x^{n+1}\times f_1(x)\right)dx$ donc comme on connaît une primitive de f_1 d'après la question précédente, pour l'intégration par parties, on va l'intégrer, ce qui nous amène à poser $u(x)=x^{n+1}$ et $v'(x)=f_1(x)$.

Comme $u'(x)=(n+1)x^n$ et que l'on peut prendre par exemple $v(x)=F_1(x)=\dfrac{1}{2}e^{x^2}$.

Comme u et v sont deux fois dérivables, par intégration par parties on a :

$$I_{n+2}=\int_0^1\left(x^{n+1}\times f_1(x)\right)dx=\left[x^{n+1}\times\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_0^1-\int_0^1\left((n+1)x^n\times\frac{1}{2}e^{x^2}\right)dx=\frac{1}{2}e-\frac{n+1}{2}\int_0^1 x^n e^{x^2}dx.$$

Finalement, on en déduit que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $I_{n+2}=\dfrac{1}{2}e-\dfrac{n+1}{2}I_n$.

3) D'après la question précédente, les valeurs exactes demandées sont $I_3=\dfrac{1}{2}e-I_1=\dfrac{1}{2}e-\left(\dfrac{1}{2}e-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{2}$ et $I_5=\dfrac{1}{2}e-2I_3=\dfrac{1}{2}e-1$.

Partie B – Etude de l'algorithme

L'algorithme en langage courant proposé est le suivant :

Initialisation	Affecter à n la valeur 1
	Affecter à u la valeur $\frac{1}{2}e-\frac{1}{2}$
Traitement	Tant que $n<21$
	Affecter à u la valeur $\frac{1}{2}e-\frac{n+1}{2}u$
	Affecter à n la valeur n+2
	Fin tant que
Sortie	Afficher u

1) L'algorithme renvoie I_{21} car quand $n=19$ l'algorithme calcule I_{21}, n prend la valeur 21 et s'arrête compte tenu de la condition $n<21$.

2) Traduisons cet algorithme en langage Python pour donner la valeur approchée demandée :

```
from math import exp
def f(x):
    return exp(x)
def I(m):
    n=1
    u=0.5*f(1)-0.5
    while n<m:
        u=0.5*f(1)-((n+1)/2)*u
        n=n+2
    return(u)
```

L'algorithme renvoie :

```
>>> I(21)
0.11400075764672679
```

Par conséquent $I_{21}=0{,}114$ à 10^{-3} près.

Partie C – Etude de la convergence de (I_n)

1) Sur $[0;1]$, $\forall n\in\mathbb{N}$, $x^n e^{x^2}\geq 0$, donc $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $I_n=\int_0^1 x^n e^{x^2}dx\geq 0$ (positivité de l'intégrale).

2) $I_{n+1}-I_n=\int_0^1 x^{n+1}e^{x^2}dx-\int_0^1 x^n e^{x^2}dx=\int_0^1 x^n e^{x^2}(x-1)dx$.

Sur $[0;1]$, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $x^n e^{x^2}\geq 0$ et $(x-1)\leq 0$ donc $x^n e^{x^2}(x-1)\leq 0$ ce qui implique que $I_{n+1}-I_n=\int_0^1 x^n e^{x^2}(x-1)dx\leq 0$, donc que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $I_{n+1}\leq I_n$ ce qui prouve que (I_n) est décroissante.

3) D'après 1) et 2) la suite (I_n) est décroissante minorée, donc d'après l'un des théorèmes de convergence monotone elle converge vers une limite L.

4) ***On utilise le coup de pouce !***

Comme on a $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq x^2 \leq 1 \Rightarrow 1 \leq e^{x^2} \leq e \overset{\times(x^n \geq 0)}{\Rightarrow} x^n \leq x^n e^{x^2} \leq e \times (x^n)$, en intégrant cette dernière inégalité membre à membre on obtient :

$$\int_0^1 x^n dx \leq I_n \leq e \int_0^1 x^n dx .$$

Puisque $\int_0^1 x^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$, on a finalement $\frac{1}{n+1} \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$ (i).

Comme on a l'inégalité (i) avec $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{n+1} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{e}{n+1} = 0$, d'après le théorème des gendarmes on en déduit que $L = \lim I_n = 0$.

$\boxed{19}$ Fonction logarithme – Algorithme – Suites et intégration – Constante d'Euler – Algorithme de Brouncker – Méthodes 1, 7 et 11

La fonction f définie sur $[1;+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$.

Partie A – Etude de cette fonction logarithme

1) $\lim\limits_{+\infty} f = 0$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{x}{x\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)}\right) = \ln 1 = 0$ puisque l'on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{x}} = 1$.

2) La fonction f est dérivable sur $[1;+\infty[$ et :

$$f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{\frac{(1)(x+1)-x(1)}{(x+1)^2}}{\frac{x}{x+1}} = \cdots = \frac{1}{x(x+1)^2} > 0 \text{ sur } [1;+\infty[.$$

On en déduit le tableau de variations de f suivant :

x	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
f	$\frac{1}{2} - \ln 2$ ↗	0

3) On en déduit que pour tout $x \in [1;+\infty[$, $f(x) < 0$.

Partie B – Algorithmes permettant de conjecturer les comportements des deux suites

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a les suites (U_n) et (V_n) suivantes :

$$U_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \text{ et } V_n = U_n - \ln(n).$$

1) On a l'algorithme suivant en langage courant :

Variables	i et n sont des entiers naturels u est un réel
Entrée	Demander n
Initialisation	Affecter à u la valeur 0
Traitement	Pour i allant de 1 à n Affecter à u la valeur $u + \frac{1}{i}$ Fin Pour
Sortie	Afficher u

a) Pour $n = 3$, l'algorithme renvoie $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$.

b) Traduisons l'algorithme en langage Python pour répondre à la question :

```
def s(n):
    s=0
    for i in range(1,n+1):
        s=s+1/i
    return(s)
```

Pour n = 100, n = 1 000 et n = 100 000 l'algorithme renvoie :

```
>>> s(100)
5.187377517639621
>>> s(1000)
7.485470860550343
>>> s(100000)
12.090146129863335
```

Les valeurs approchées renvoyées pour $n = 100$, $n = 1000$ et $n = 100\,000$ à 1 près sont donc respectivement 5, 7 et 12.

c) Donnons 3 conjectures relatives à la monotonie, aux bornes et à la convergence de la suite (U_n) :

Monotonie : (U_n) est croissante.

Bornes : (U_n) ne semble pas majorée (pas évident), mais minorée par son premier terme $U_1 = 1$.

Convergence : (U_n) ne semble pas converger mais ce n'est pas évident (affaire à suivre, mais déjà démontré dans l'exercice 12 du chapitre 1).

2) a) Modifions l'algorithme précédent en langage Python afin de compléter la deuxième ligne du tableau donné dans l'énoncé :

```
from math import log
def s(n):
    s=0
    for i in range(1,n+1):
        s=s+1/i
    return(s-log(n))
```

On entre successivement les valeurs de n du tableau et l'on obtient :

n	4	5	6	7	8	9	10	100	1000	1500	2000
V_n	0.697	0.674	0.658	0.645	0.638	0.632	0.626	0.582	0.578	0.578	0.577

b) Donnons 3 conjectures relatives à la monotonie, aux bornes et à la convergence de la suite (V_n) :

Monotonie : (V_n) est décroissante.

Bornes : (V_n) est majorée par son premier terme $V_1 = 1$ et minorée par 0.

Convergence : (V_n) semble converger vers une limite dont une valeur approchée est 0,577 (affaire à suivre !).

Partie C – Démonstrations des conjectures (constante d'Euler)

1) $U_{n+1} - U_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n+1} > 0$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$ $U_{n+1} > U_n$, ce qui prouve que la suite (U_n) est strictement croissante, donc minorée par son premier terme $U_1 = 1$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $V_{n+1} - V_n = U_{n+1} - \ln(n+1) - (U_n - \ln(n)) = \frac{1}{n+1} + \ln(n) - \ln(n+1)$.

Finalement $V_{n+1} - V_n = \frac{1}{n+1} + \ln(n) - \ln(n+1) = \frac{1}{n+1} + \ln\frac{n}{n+1} = f(n)$.

3) Lorsque $n \in \mathbb{N}^*$, $n \in [1;+\infty[$, donc d'après la partie A on a $f(n) < 0$.

D'après la question précédente $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $V_{n+1} - V_n < 0$ et donc $V_{n+1} < V_n$ ce qui prouve que (V_n) est décroissante majorée par son premier terme $V_1 = 1$.

4) a) On a $0 < k \leq x \leq k+1 \Rightarrow \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k} \Rightarrow 0 \leq \frac{1}{k} - \frac{1}{x}$, donc on en déduit que $\frac{1}{k} - \frac{1}{x} \geq 0$ sur $[k;k+1]$.

Par conséquent, par intégration membre à membre on obtient :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x}\right) dx \geq 0.$$

b) $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\int_k^{k+1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{x}\right)dx=\left[\frac{1}{k}x-\ln x\right]_k^{k+1}=\left(\frac{k+1}{k}-\ln(k+1)\right)-(1-\ln k)$

$=\frac{1}{k}-\ln(k+1)+\ln k \geq 0$ d'après la question précédente.

Finalement, $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\ln(k+1)-\ln k \leq \frac{1}{k}$.

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n}(\ln(k+1)-\ln k) \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=U_n$.

On a $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^{n}(\ln(k+1)-\ln k)=\sum_{k=1}^{n}\ln(k+1)-\sum_{k=1}^{n}\ln k=\ln(n+1)-\ln 1=\ln(n+1)$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n+1) \leq U_n$.

c) D'après la question précédente on sait que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n+1) \leq U_n$.
Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(n+1)=\lim\limits_{u\to+\infty}\ln u=+\infty$, par comparaison, on déduit de l'inégalité précédente que $\lim U_n=+\infty$ et donc qu'elle ne converge pas et n'est pas minorée puisqu'elle tend vers $+\infty$ (démontré d'une autre façon à l'exercice 12 du chapitre 1)

D'autre part on a vu que la suite (V_n) est décroissante, donc **si l'on montre qu'elle est minorée**, d'après l'un des théorèmes de convergence monotone on en déduira qu'elle converge.

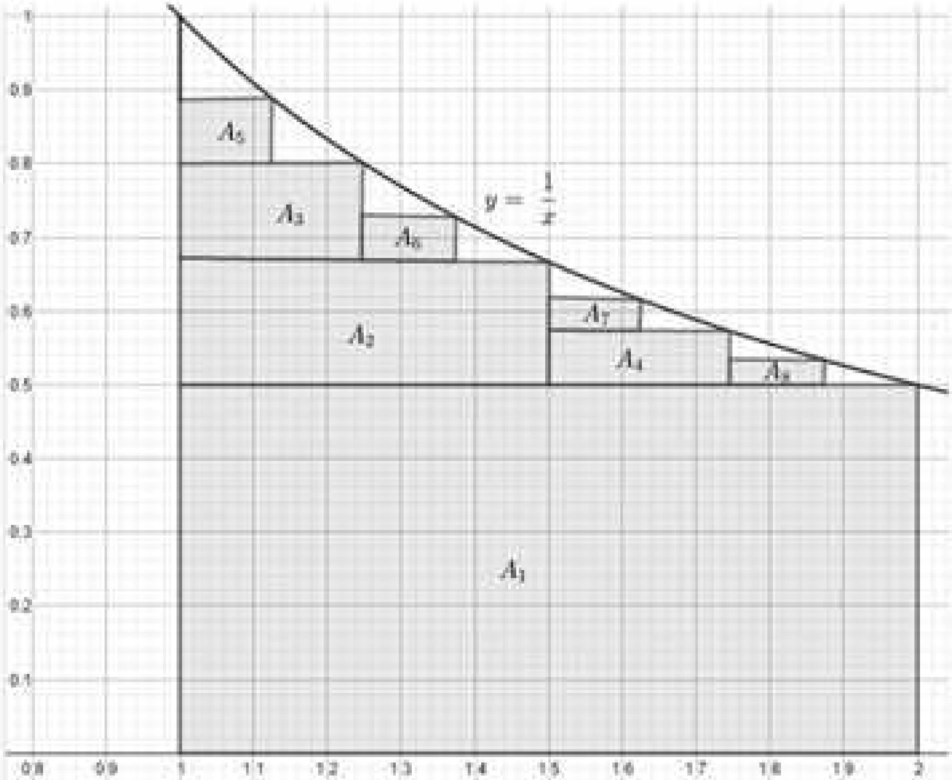
Et c'est le cas !
En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\ln(n+1) \leq U_n \Rightarrow \ln(n+1)-\ln n \leq U_n-\ln n=V_n$ donc comme $0 \leq \ln(n+1)-\ln n$, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq V_n$.
La suite (V_n) converge donc vers une limite γ.

REMARQUE : Cette limite γ dont une valeur approchée est 0,577 à 10^{-3} près (2)a) de la partie B) s'appelle ***constante d'Euler****.*

Partie D – Algorithme de Brouncker
Dans cette partie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite (S_n) est définie par $S_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(2k+1)(2k+2)}$, la fonction f est définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x)=\frac{1}{x}$ et l'intégrale $I=\int_1^2\frac{1}{x}dx$.

1) Au niveau de la figure suivante, il s'agit d'exprimer les aires des rectangles A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7 et A_8 comme des inverses d'un produit de deux entiers consécutifs dont le premier est impair.

Pour y parvenir, il faut absolument tenir compte des nombreuse indications données dans l'énoncé.



$A_1 = 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{1 \times 2}$.

$A_2 = \frac{1}{2} \times \left(f\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6} = \frac{1}{12} = \frac{1}{3 \times 4}$.

$A_3 = \frac{1}{4} \times \left(f\left(\frac{5}{4}\right) - f\left(\frac{3}{2}\right) \right) = \frac{1}{4} \times \left(\frac{4}{5} - \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{4} \times \frac{2}{15} = \frac{1}{30} = \frac{1}{5 \times 6}$.

$A_4 = \frac{1}{4} \times \left(f\left(\frac{7}{4}\right) - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4} \times \left(\frac{4}{7} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{14} = \frac{1}{56} = \frac{1}{7 \times 8}$.

$A_5 = \frac{1}{8} \times \left(f\left(\frac{9}{8}\right) - f\left(\frac{5}{4}\right) \right) = \frac{1}{8} \times \left(\frac{8}{9} - \frac{4}{5} \right) = \frac{1}{8} \times \frac{4}{45} = \frac{1}{90} = \frac{1}{9 \times 10}$.

$A_5 = \frac{1}{8} \times \left(f\left(\frac{9}{8}\right) - f\left(\frac{5}{4}\right) \right) = \frac{1}{8} \times \left(\frac{8}{9} - \frac{4}{5} \right) = \frac{1}{8} \times \frac{4}{45} = \frac{1}{90} = \frac{1}{9 \times 10}$.

$A_6 = \frac{1}{8} \times \left(f\left(\frac{11}{8}\right) - f\left(\frac{3}{2}\right) \right) = \frac{1}{8} \times \left(\frac{8}{11} - \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{8} \times \frac{2}{33} = \frac{1}{132} = \frac{1}{11 \times 12}$.

$A_7 = \frac{1}{8} \times \left(f\left(\frac{13}{8}\right) - f\left(\frac{7}{4}\right) \right) = \frac{1}{8} \times \left(\frac{8}{13} - \frac{4}{7} \right) = \frac{1}{8} \times \frac{4}{91} = \frac{1}{182} = \frac{1}{13 \times 14}$.

$A_8 = \frac{1}{8} \times \left(f\left(\frac{15}{8}\right) - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{8} \times \left(\frac{8}{15} - \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{8} \times \frac{1}{30} = \frac{1}{240} = \frac{1}{15 \times 16}$.

2) On constate que la somme des 8 aires et égale à S_7 donc on peut conjecturer que (S_n) converge vers l'aire correspondant à l'ensemble des points $M(x,y)$ telle que $\begin{cases} 1 \le x \le 2 \\ 0 \le y \le \dfrac{1}{x} \end{cases}$ c'est-à-dire $\int_1^2 \frac{1}{x}dx = [\ln x]_1^2 = \ln 2$.

3) Montrons que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{(2k+1)(2k+2)} = \dfrac{1}{2k+1} - \dfrac{1}{2k+2}$ puis que :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1} = \sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2} = \frac{2k+2}{(2k+1)(2k+2)} - \frac{2k+1}{(2k+1)(2k+2)} = \frac{1}{(2k+1)(2k+2)}.$$

On en déduit que :

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)(2k+2)} = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2k+2}\right) = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1} - \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+2} = \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}.$$

Pour plus de clarté nous noterons (i) l'égalité $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2k+1} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}$

Prouvons que $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1} = \sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k} = \sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ **en utilisant le coup de pouce.**

Comme $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1} = \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n+1}$, on constate que l'on fait la somme des inverses des nombres entiers **impairs** compris entre 1 et 2n+1.

Comme $\sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2n+1}$ donne la somme des inverses de **tous les nombres entiers** compris entre 1 et 2n+1 il est normal de **lui enlever la somme des entiers pairs compris entre 2 et 2n** pour obtenir la somme précédente.

Comme la somme des inverses des entiers pairs compris entre 2 et 2n est $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$, on obtient bien $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{2k+1} = \sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2k} = \sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

En reportant dans l'égalité (i) on obtient alors :

$$S_n = \sum_{k=1}^{2n+1}\frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1} \quad \text{(ii)}.$$

Oups !

4) Montrons que $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}=U_n+\frac{1}{n+1}$, puis exprimons S_n en fonction de n, U_{2n+1} et U_n en utilisant l'égalité (ii) que l'on vient de démontrer.

C'est le même principe que dans la question précédente : il faut développer la somme pour y voir plus clair !

En effet, cela donne $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}+\frac{1}{n+1}=U_n+\frac{1}{n+1}$.

En remplaçant dans (ii), il vient :

$$S_n=U_{2n+1}-\frac{1}{2}U_n-\frac{1}{2}\left(U_n+\frac{1}{n+1}\right)=U_{2n+1}-U_n-\frac{1}{2(n+1)}.$$

5) Exprimons alors S_n en fonction de n, V_{2n+1} et V_n, puis montrons en utilisant la partie précédente, c'est-à-dire que la suite (V_n) converge vers la constante d'Euler γ, que finalement (S_n) converge vers ln2.

Comme pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $V_n=U_n-\ln(n)$ on a $V_n+\ln(n)=U_n$, d'où :

$$S_n=V_{2n+1}+\ln(2n+1)-\big(V_n+\ln(n)\big)-\frac{1}{2(n+1)}=V_{2n+1}-V_n-\frac{1}{2(n+1)}+\ln(2n+1)-\ln(n).$$

On en déduit que :

$$S_n=V_{2n+1}-V_n-\frac{1}{2(n+1)}+\ln\left(\frac{2n+1}{n}\right)=V_{2n+1}-V_n-\frac{1}{2(n+1)}+\ln\left(2+\frac{1}{n}\right).$$

Il n'y plus qu'à passer à la limite et c'est plié !

Cela donne $\lim S_n=\gamma-\gamma-0+\ln 2=\ln 2$, ce qui démontre la conjecture donnée à la question 2).

20 Intégrales de Wallis – Méthodes 1, 2, 6 et 11

Pour n entier naturel, on a la suite (I_n) telle que $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,dx$ (intégrales de Wallis).

Partie A – Calcul de I_n

1) $I_0=\int_0^{\frac{\pi}{2}}1dx=\left[x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$ et $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=\left[-\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$.

2) Pour $n\in\mathbb{N}^*\setminus\{1\}$, on a $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\sin^{n-1}x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}u(x)v'(x)dx$ en posant $u(x)=\sin^{n-1}x$ et $v'(x)=\sin x$.

Il vient alors $u'(x)=(n-1)\sin^{n-2}x\cos x$ et $v(x)=-\cos x$

Comme u et v sont deux fois dérivables sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, en intégrant par parties on obtient :

$$I_n=\left[u(x)v(x)\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}u'(x)v(x)dx=\left[-\sin^{n-1}x\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\cos^2 xdx$$

$$=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-2}x\left(1-\sin^2 x\right)dx=(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^{n-2}x-\sin^n x\right)dx=(n-1)(I_{n-2}-I_n).$$

Finalement, on a : $I_n=(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n\Rightarrow nI_n=(n-1)I_{n-2}\Rightarrow I_n=\frac{n-1}{n}I_{n-2}$.

3) D'après la question précédente, $I_{2n}=I_0\prod_{k=1}^{n}\frac{2k-1}{2k}=\frac{\pi}{2}\times\frac{\prod_{k=1}^{n}2k-1}{\prod_{k=1}^{n}2k}$.

Comme d'une part $\prod_{k=1}^{n}2k-1=(2n-1)\times(2n-3)\times\cdots\times1=\frac{(2n)!}{2n\times2(n-1)\times\cdots\times2}=\frac{(2n)!}{2^n(n!)}$

et d'autre part $\prod_{k=1}^{n}2k=2n\times2(n-1)\times\cdots\times2=2^n(n!)$, on en déduit que :

$$I_{2n}=\frac{(2n)!}{\left(2^n(n!)\right)^2}\frac{\pi}{2}.$$

D'après la question 2) et les calculs précédents :

$$I_{2n+1}=I_1\prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k+1}=\frac{\prod_{k=1}^{n}2k}{\prod_{k=1}^{n}2k+1}=\frac{2^n(n!)}{(2n+1)\prod_{k=1}^{n}2k-1}=\frac{2^n(n!)}{\frac{(2n+1)!}{2^n(n!)}}=\frac{\left(2^n(n!)\right)^2}{(2n+1)!}.$$

Partie B – Comportement global et asymptotique de I_n

1) On a $I_{n+1}-I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\sin^{n+1}x-\sin^n x\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x(\sin x-1)dx\le0$ car sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ $\sin^n x\ge0$ et $\sin x-1\le0\Rightarrow\sin^n x(\sin x-1)\le0$ (positivité de l'intégrale).

Finalement, $\forall n\in\mathbb{N}$, $I_{n+1}\le I_n$, donc la suite (I_n) est décroissante et par conséquent majorée par son premier terme $I_0=\frac{\pi}{2}$.

D'autre part, $\forall n\in\mathbb{N}$, $x\mapsto\sin^n x$ est positive non nulle sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$, donc $\forall n\in\mathbb{N}$, $I_n>0$.

2) La suite (I_n) est décroissante minorée (par 0), donc d'après l'un des théorèmes de convergence monotone, (I_n) converge vers une limite L.

3) $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$,

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2} \Rightarrow nI_n = (n-1)I_{n-2} \overset{\times I_{n-1}>0}{\Rightarrow} \forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\},\ nI_nI_{n-1} = (n-1)I_{n-1}I_{n-2}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\},\ U_n = U_{n-1} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\},\ U_n = U_1 = I_1I_0 = \frac{\pi}{2}.$$

On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_nI_{n-1} = \dfrac{\pi}{2n}$ et donc en passant à la limite (puisque (I_n) **converge** vers une limite L) que : $L^2 = 0$, ce qui implique que $L = 0$.

4) $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{I_{n-1}}{I_n}$ est une forme indéterminée de type « $\dfrac{0}{0}$ » ; voyons donc comment on peut s'en sortir !

Comme (I_n) est décroissante strictement positive :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\},\ I_n \le I_{n-1} \le I_{n-2} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\},\ 1 \le \frac{I_{n-1}}{I_n} \le \frac{I_{n-2}}{I_n} = \frac{n}{n-1} \quad (i).$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n-1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n}{n\left(1-\frac{1}{n}\right)} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)} = 1$, d'après l'inégalité (i), en appliquant le théorème des gendarmes, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{I_{n-1}}{I_n} = 1$.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ nI_nI_{n-1} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*,\ nI_n^2 = \frac{\pi}{2} \times \frac{I_n}{I_{n-1}} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}^*,\ \sqrt{n}I_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \times \sqrt{\frac{I_n}{I_{n-1}}}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{I_n}{I_{n-1}} = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{\dfrac{I_n}{I_{n-1}}} = 1$, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n}I_n = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$.

21 Fonctions définies par des intégrales – Méthodes 6, 7, 8, 10 et 11

Les deux fonctions f et g sont définies par $f(x) = \int_x^{3x} \dfrac{\cos t}{t}\,dt$ et $g(x) = \int_1^x \dfrac{\cos t}{t}\,dt$.

1) Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\cos t}{t}$ est définie et continue sur tout intervalle de bornes 1 et x, donc g est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.

Par définition, sur $\mathbb{R}_+^*$, g est la primitive de $x \mapsto \dfrac{\cos x}{x}$ qui s'annule en 1, donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $g'(x) = \dfrac{\cos x}{x}$.

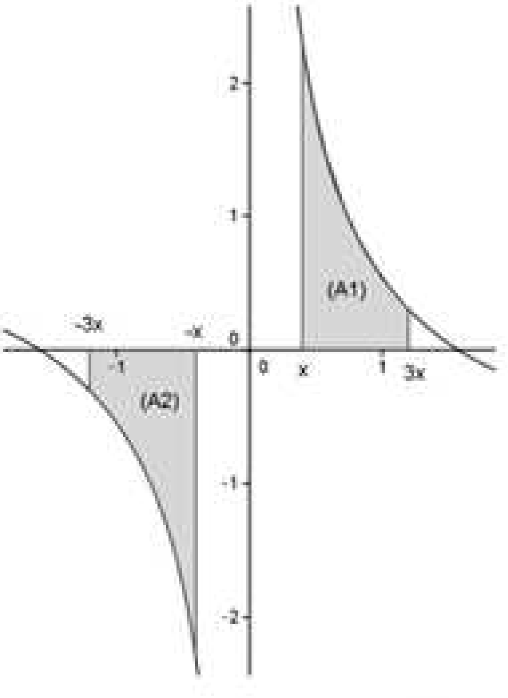
2) a) Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, il suffit d'appliquer la relation de Chasles à f pour répondre à la question.
En effet, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$f(x) = \int_x^1 \frac{\cos t}{t}dt + \int_1^{3x} \frac{\cos t}{t}dt = -\int_1^x \frac{\cos t}{t}dt + \int_1^{3x} \frac{\cos t}{t}dt = g(3x) - g(x).$$

b) Par composition, f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et la fonction f' est définie par $f'(x) = 3g'(3x) - g'(x) = \dfrac{\cos 3x}{x} - \dfrac{\cos x}{x}$.

c) Soit $x \in \mathbb{R}^*$.
La fonction $t \mapsto \dfrac{\cos t}{t}$ est définie et continue sur tout intervalle de bornes x et 3x, donc f est définie sur $\mathbb{R}^*$.

Il suffit d'utiliser la définition de l'intégrale en terme d'aires pour déterminer la parité de f.
Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.
Comme $t \mapsto \dfrac{\cos t}{t}$ est impaire, les aires (A_1) et (A_2) en unités d'aire représentées sur la figure suivante sont égales.



On en déduit que $(A_2) = -\int_{-3x}^{-x} \frac{\cos t}{t}dt = \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t}dt = (A_1)$ et donc que $\int_{-x}^{-3x} \frac{\cos t}{t}dt = \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t}dt$ (inversion des bornes), ce qui prouve que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f(-x) = f(x)$.

Si $x \in \mathbb{R}_-^*$ alors $-x \in \mathbb{R}_+^*$, donc en appliquant le résultat que l'on vient de démontrer $f(x) = f(-(-x)) = f(-x)$.

Finalement $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(-x) = f(x)$, donc f est une fonction paire.

3) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Posons $u(t) = \frac{1}{t}$ et $v'(t) = \cos t$, ce qui implique $u'(t) = -\frac{1}{t^2}$ et $v(t) = \sin t$.

Les fonctions u et v sont deux fois dérivables sur $[x;3x]$, donc en intégrant par parties $f(x)$ sur cet intervalle on obtient :

$$f(x) = [u(t)v(t)]_x^{3x} - \int_x^{3x} u'(t)v(t)dt = \left[\frac{\sin t}{t}\right]_x^{3x} + \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2}dt.$$

Dans un premier temps, $\left[\frac{\sin t}{t}\right]_x^{3x} = \frac{\sin 3x}{3x} - \frac{\sin x}{x}$ et donc comme pour $u = 3x$ ou $u = x$, $-1 \leq \sin u \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{u} \leq \frac{\sin u}{u} \leq \frac{1}{u}$ avec $\lim\limits_{u \to +\infty} -\frac{1}{u} = \lim\limits_{u \to +\infty} \frac{1}{u} = 0$, on en déduit d'après le théorème des gendarmes que $\lim\limits_{u \to +\infty} \frac{\sin u}{u} = 0$.

Dans un second temps sur $[x;3x]$, $-1 \leq \sin t \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{t^2} \leq \frac{\sin t}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}$, donc en intégrant membre à membre entre x et $3x > x$ $(x \in \mathbb{R}_+^*)$, on obtient :

$$\int_x^{3x} -\frac{1}{t^2}dt \leq \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2}dt \leq \int_x^{3x} \frac{1}{t^2}dt \Leftrightarrow \left[\frac{1}{t}\right]_x^{3x} \leq \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2}dt \leq \left[-\frac{1}{t}\right]_x^{3x} \text{ (i)}.$$

Finalement comme on a $\left[\frac{1}{t}\right]_x^{3x} = \frac{1}{3x} - \frac{1}{x}$ et $\left[-\frac{1}{t}\right]_x^{3x} = -\frac{1}{3x} + \frac{1}{x}$ avec $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{3x} - \frac{1}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{1}{3x} + \frac{1}{x} = 0$, en appliquant le théorème des gendarmes avec l'inégalité (i) on obtient $\lim\limits_{x \to +\infty} \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2}dt = 0$.

Par conséquent, $\lim\limits_{+\infty} f = 0$.

4) La fonction h est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $h(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos t - 1}{t}dt$.

a) On a démontré à l'exercice 15 de ce chapitre que pour $t \geq 0$, $-\frac{t^2}{2} \leq \cos t - 1 \leq 0$ (I).

b) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Pour $t \in [x;3x]$, $t > 0$, donc sur cet intervalle $-\frac{t}{2} \leq \frac{\cos t - 1}{t} \leq 0$ (on divise par $t > 0$ l'inégalité (i)).

En intégrant membre à membre l'inégalité précédente entre x et 3x > x $(x \in \mathbb{R}_+^*)$, on obtient :

$$\int_x^{3x} -\frac{t}{2}\,dt \leq h(x) \leq 0 \Leftrightarrow \left[-\frac{t^2}{4}\right]_x^{3x} \leq h(x) \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{9x^2}{4} + \frac{x^2}{4} = -2x^2 \leq h(x) \leq 0 \text{ (ii)}.$$

Comme $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} (-2x^2) = 0$, en appliquant le théorème des gendarmes avec l'inégalité (ii) on obtient $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} h(x) = 0$.

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$h(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t}\,dt - \int_x^{3x} \frac{1}{t}\,dt = f(x) - [\ln t]_x^{3x} = f(x) - (\ln 3x - \ln x) = f(x) - \ln 3.$$

Comme $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} h(x) = 0$, on en déduit que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = \ln 3$.

Comme f est paire, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{u \to 0 \\ u>0}} f(u) = \ln 3$ (on pose $u = -x$) et enfin $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = \ln 3$.

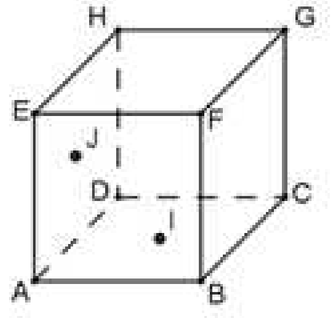
Chapitre 5
METHODES SUR LA GEOMETRIE DANS L'ESPACE
EXERCICES & CORRIGES

Exercices

1 Parallélisme – Méthodes 1 et 2

On vous demande de traiter cet exercice sans utiliser de repère.

On considère le cube suivant où I et J sont les milieux respectifs des segments $[DB]$ et $[AH]$:



1) Montrez que les vecteurs $\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{HF}$ et $\overrightarrow{IG}$ sont coplanaires. Que pouvez-vous en déduire relativement à la droite (IG) et au plan (AHF) ?

2) Montrez que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{CH}$ sont colinéaires. Que peut-on en déduire relativement aux droites (IJ) et (CH) ?

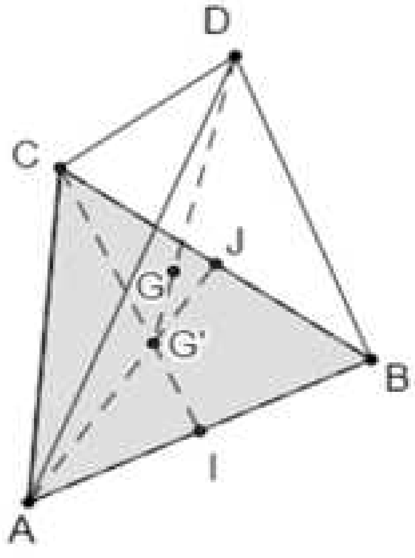
3) Montrez que le vecteur $\overrightarrow{HB}$ est normal aux plans (FAC) et (EGD). Que pouvez-vous en déduire relativement aux plans (FAC) et (EGD) ?

2 Parallélisme – Méthodes 5 et 6

On reprend l'énoncé de l'exercice précédent que l'on vous demande de traiter en géométrie repérée en introduisant le repère orthonormé $\left(D,\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DH}\right)$.

3 Distances et angles dans un tétraèdre régulier – Méthodes 3, 4, 20 et 23

On considère un tétraèdre régulier ABCD (les quatre faces sont des triangles équilatéraux de côté a) d'isobarycentre G et dont G' est l'isobarycentre du triangle ABC (les points I et J désignent les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[BC]$).



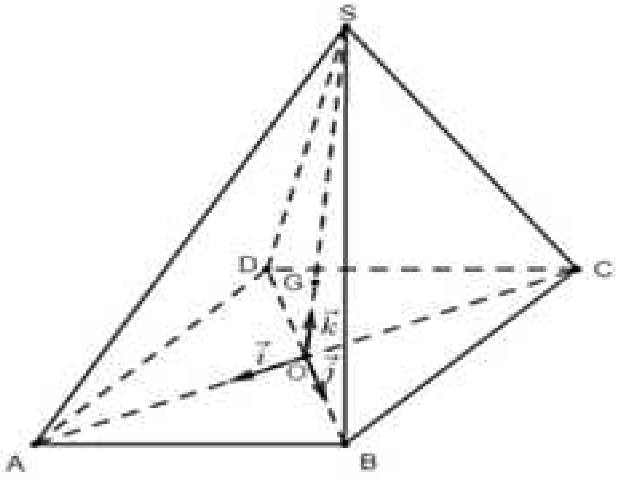
1) Montrez que la hauteur issue de D du tétraèdre est $\lfloor DG' \rfloor$.

2) Montrez que $G \in \lfloor DG' \rfloor$ et déterminez sa position sur le segment.

3) Expliquez pourquoi les quatre hauteurs du tétraèdre, les quatre distances de G aux faces, les quatre distances de G aux sommets et les quatre angles géométriques de sommet G et d'extrémités deux sommets quelconques sont quatre à quatre de même valeur.
Exprimez alors en fonction de a :
a) la hauteur,
b) la distance de G à une face,
c) la distance de G à un sommet,
d) une valeur arrondie au degré près de l'angle géométrique de sommet G et d'extrémités deux sommets quelconques.

4 Distances et angles dans une pyramide – Méthodes 5, 6, 7, 8, 20 et 23

On considère la pyramide SABCD de sommet S (donc de base ABCD) dont les faces sont des triangles équilatéraux de côté a.
On note G l'isobarycentre de la pyramide et O l'intersection des diagonales du quadrilatère ABCD.



1) Montrez que le quadrilatère ABCD est un losange, puis que la droite (SO) est la hauteur de la pyramide issue de S.
2) Montrez alors que le quadrilatère ABCD est finalement un carré, puis exprimez en fonction de « a » la hauteur $h = SO$ de la pyramide.
3) Montrez que G est un point de $[SO]$ et donnez sa position sur le segment.
4) Expliquez pourquoi les quatre distances de G aux sommets de la base, les quatre distances de G aux faces latérales et les quatre angles géométriques $\widehat{AGB}$, $\widehat{BGC}$, $\widehat{CGD}$ et $\widehat{DGA}$ sont quatre à quatre de même valeur.
5) On se propose de déterminer les valeurs précédentes à l'aide de coordonnées de points dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ de la figure.

a) Déterminez les coordonnées des points A, B, C, D, S et G.
b) Exprimez en fonction de a la distance de G aux sommets de la base.
c) Exprimez en fonction de a la distance de G aux faces latérales.
d) Donnez une valeur arrondie au degré près de l'angle géométrique $\widehat{AGB}$.

5 Caractérisation analytique de plan et de droites dans l'espace – Méthodes 9, 10 et 12

L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les points $A(1;2;7)$, $B(2;0;2)$, $C(3;1;3)$, $D(3;-6;1)$, $E(4;-8;-4)$ et la droite (D') dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = 3+2k \\ y = 5-4k \\ z = -1+2k \end{cases}$.

1) Montrez que A, B et C définissent un plan.
2) Donnez une équation du plan (ABC).
3) Le point D est-il un point du plan (ABC) ?
4) a) La droite (D') est-elle orthogonale à (ABC) ?

b) Déterminez l'intersection de (D') et (ABC).

5) Étudiez la position relative de la droite (DE) et du plan (ABC).

6 Caractérisation analytique de plan et de droites dans l'espace – Méthodes 9, 10, 12, 13 et 14

L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

1) Donnez une équation du plan (ABC) où $A(1;-1;2)$, $B(0;1;-3)$, $C(2;0;1)$ après avoir montré que ce plan existe.
2) Montrez que les deux plans (P) et (P') d'équations respectives $x+y+z-5=0$ et $2x+y-z+1=0$ sont sécants selon une droite (D) dont vous donnerez un point et un vecteur directeur.
3) Déterminez l'intersection de (D) et (ABC).
4) Déterminez l'intersection de (D) et (AB).

7 Caractérisations analytiques – Droites et plans de l'espace – Méthodes 9, 10, 12, 13 et 14

L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les points $A(0;0;2)$, $B(0;4;0)$ et $C(2;0;0)$.

1) Démontrez que $2x+y+2z=4$ est une équation du plan (ABC).

2) a) Déterminez une équation du plan (P) passant par A et orthogonal à la droite (BC).

b) Déterminez une représentation paramétrique de la droite (D) intersection des plans (P) et (ABC).

c) Quelle droite particulière est (D) pour le triangle ABC ?

3) On note (D') la médiane issue de B du triangle (ABC).

a) Montrez qu'une représentation paramétrique de (D') est $\begin{cases} x=k' \\ y=4-4k' \\ z=k' \end{cases}$ avec k' réel.

b) Montrez que ABC est un triangle isocèle de sommet B.

4) a) Montrez que $H=(D)\cap(D')$ a pour coordonnées $\left(\frac{8}{9};\frac{4}{9};\frac{8}{9}\right)$.

b) Quel point particulier est H pour le triangle ABC ?

5) Montrez que H est le projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC) et déterminez la distance du point O au plan (ABC).

8 Intersections d'une droite et d'un plan avec une sphère – Méthodes 10, 11, 12, 15, 16 et 17

L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère le plan (P) d'équation $x+y+z-4=0$, la sphère (S) de centre $\Omega(1,2,3)$ de rayon $R=\sqrt{5}$ ainsi que les points $A(-1,2,-1)$ et $B(0,0,3)$.

1) Déterminez une représentation paramétrique de la droite (AB).

2) Déterminez une équation de (S).

3) Déterminez l'intersection entre (AB) et (S).

4) Déterminez l'intersection entre (P) et (S).

9 Distance d'un point à une droite – Méthodes 9, 10, 13 et 18

L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les points $A(1,-1,3)$, $B(-1,2,0)$ et $C(0,-1,1)$.

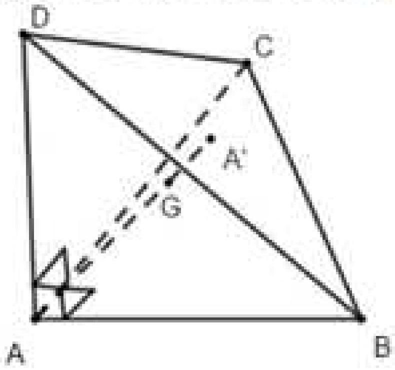
1) Déterminez une représentation paramétrique de la droite (AB).

2) Déterminez une équation cartésienne du plan (P) orthogonal à (AB) passant par C.

3) Déduisez-en les coordonnées du projeté orthogonal C_p du point C sur la droite (AB) puis la distance $d(C,(AB))$ du point C à la droite (AB).

10 **Ensemble de points avec un tétraèdre orthocentrique – Méthodes 2, 20, 21 et 23**

On considère le tétraèdre ABCD tel que ABC, ABD et ACD sont trois triangles isocèles rectangles en A avec $AB = AC = AD = a$ et l'isobarycentre A' de ABC.



1) Montrez que le triangle BCD est équilatéral puis que la droite (AA') est orthogonale au plan (BCD) en raisonnant avec les plans médiateurs de $[BC]$ et $[DC]$.

2) Déterminez AA' en fonction de a.

3) On note G l'isobarycentre du tétraèdre ABCD et I le milieu de $[BC]$.

a) Exprimez $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AA'}$, puis déduisez AG en fonction de a.

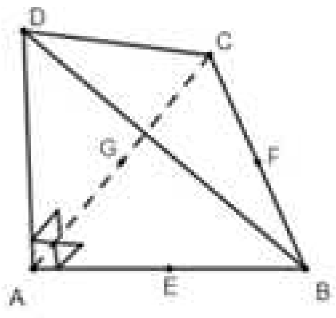
b) Déterminez l'ensemble des points M de l'espace tels que :

$$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}\right\| = 2\left\|\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}\right\|.$$

11 **Optimisation dans un tétraèdre orthocentrique – Méthodes 6, 9, 10 et 13**

On considère le tétraèdre ABCD tel que ABC, ABD et ACD sont trois triangles isocèles rectangles en A avec $AB = AC = AD = a$ (tétraèdre orthocentrique de la question précédente).

D'autre part on nomme E, F et G les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$ et l'on rapporte l'espace au repère orthonormé $\left(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}\right)$.



1) On considère le plan (P) passant par A orthogonal à (DF) et le point d'intersection H entre (P) et (DF).
a) Déterminez une représentation paramétrique de (DF).
b) Déterminez une équation cartésienne de (P).
c) Déterminez les coordonnées de H.
d) Montrez que (EH) et (HG) sont perpendiculaires.

2) On considère un point quelconque M de la droite (DF), ce qui suppose qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ vérifiant l'égalité $\overrightarrow{DM} = k\overrightarrow{DF}$.
Le but de cette question est de déterminer le point M pour lequel l'angle géométrique $\alpha = \widehat{EMG}$ est maximal.
a) Montrez que : $EM^2 = \frac{3}{2}k^2 - \frac{5}{2}k + \frac{5}{4}$.
b) Montrez que MEG est isocèle de sommet M, puis que :

$$EM \times \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

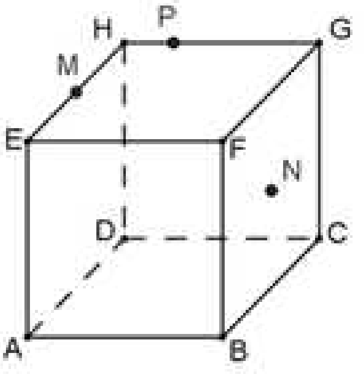
c) Montrez que pour α variable de $[0, \pi]$:

$$\alpha \text{ maximal} \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \text{ maximal.}$$

d) En déduire que α maximal $\Leftrightarrow$ EM minimale.
e) Déterminez finalement le point M pour lequel l'angle géométrique $\alpha = \widehat{EMG}$ est maximal, puis donnez une valeur arrondie au degré de cet angle maximal.

12 Intersections de droites avec un cube – Méthodes 6, 10 et 14

On considère le cube ABCDEFGH suivant où M et N sont les milieux respectifs de $[EH]$ et $[FC]$ et P le point tel que $\overrightarrow{HP} = \frac{1}{4}\overrightarrow{HG}$.

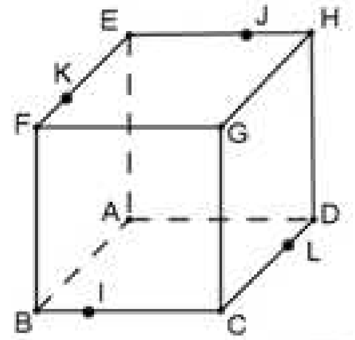


L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1) Déterminez les coordonnées des points M, P, F, G et N.
2) Déterminez une représentation paramétrique des droites (MP) et (FG) puis les coordonnées du point d'intersection L de ces deux droites.
3) Déterminez alors une représentation paramétrique des droites (LN) et (CG), puis les coordonnées du point d'intersection Q de ces deux droites.
4) Le triangle QPN est-il rectangle en Q ?

13 Section d'un cube – Méthodes 5, 6, 9, 10 et 13

On considère le cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1.



L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

Sur la figure, $I\left(1;\frac{1}{3};0\right)$, $J\left(0;\frac{2}{3};1\right)$, $K\left(\frac{3}{4};0;1\right)$ et $L(a;1;0)$ avec $a \in [0;1]$.

Partie A

1) Déterminez une représentation paramétrique de la droite (IJ).

2) Démontrez que la droite (KL) a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = \frac{3}{4} + \left(a - \frac{3}{4}\right)k' \\ y = k' \\ z = 1 - k' \end{cases} \quad \text{avec } k' \in \mathbb{R}.$$

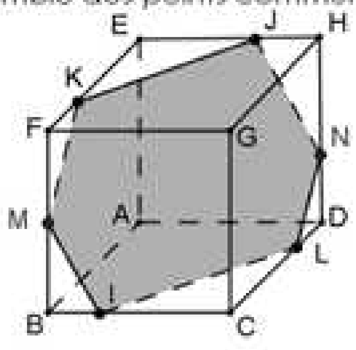
3) Montrez que les droites (IJ) et (KL) sont sécantes si et seulement si $a = \frac{1}{4}$.

Partie B

Dans cette partie on pose $a = \frac{1}{4}$ et donc $L\left(\frac{1}{4};1;0\right)$.

1) Démontrez que le quadrilatère IKJL est un parallélogramme.

2) Sur la figure suivante on a représenté la section du cube ABCDEFG par le plan (IJK) c'est-à-dire l'ensemble des points communs au cube et au plan.



a) Prouvez que $\vec{n}\begin{vmatrix} 8 \\ 9 \\ 5 \end{vmatrix}$ est normal au plan (IJK).

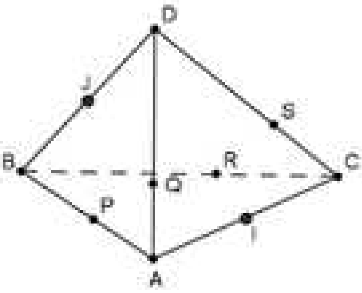
b) Déduisez-en que $8x + 9y + 5z - 11 = 0$ est une équation de (IJK).

c) Déduisez-en les coordonnées de M et N.

14 **Ensemble de points – Associativité du barycentre – Approfondissement – Méthodes 20, 21 et 23**

On considère le tétraèdre suivant où $\overline{AP}=\frac{1}{3}\overline{AB}$, $\overline{AQ}=\frac{1}{3}\overline{AD}$, $\overline{CR}=\frac{1}{3}\overline{CB}$ et $\overline{CS}=\frac{1}{3}\overline{CD}$.

Les points I et J sont les milieux respectifs des segments $[AC]$ et $[BD]$.



1) Déterminez l'ensemble des points M tels que :

a) $\left\|2\overline{MA}+\overline{MB}+\overline{MC}-\overline{MD}\right\|=\left\|\overline{MA}-\overline{MC}\right\|$;

b) $\left\|2\overline{MA}+\overline{MB}-\overline{MC}\right\|=\left\|\overline{MA}+\overline{MD}\right\|$.

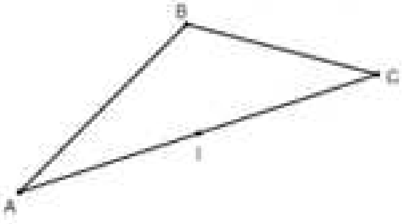
2) a) Interprétez P, Q, R, S, I et J comme des barycentres de deux des quatre points A, B, C et D.

b) Déduisez-en par application du théorème du barycentre partiel que les segments $[QR]$, $[PS]$ et $[IJ]$ sont concourants (***Coup de pouce** : montrez que ces segments sont concourants en un barycentre des quatre points A, B, C et D affectés de coefficients adéquats qui en fait est le milieu $[PS]$*).

15 **Lieux de barycentres – Approfondissement – Méthodes 20, 21 et 22**

On considère la famille de barycentres $G_k=\mathrm{Bar}\{(A,k),(B,-2k),(C,k+2)\}$ où k varie dans $\mathbb{R}$ et A, B et C sont trois points non alignés de l'espace.

D'autre part on note I le milieu du segment $[AC]$.



1) Montrez que G_k existe pour tout $k\in\mathbb{R}$.

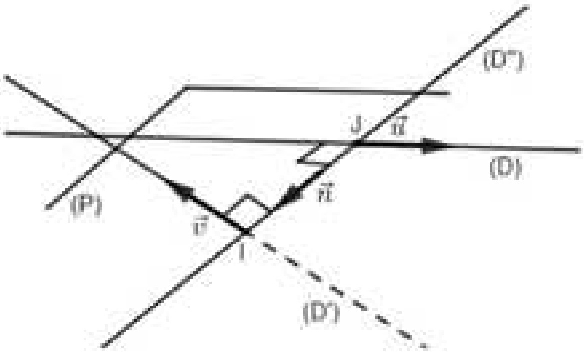
2) Déterminez et représentez le lieu décrit par la famille G_k lorsque k décrit $\mathbb{R}$.

3) Déterminez et représentez le lieu décrit par la famille G_k lorsque k décrit l'intervalle $[0,1]$.

4) Déterminez et représentez le lieu décrit par la famille G_{k^2} lorsque k décrit $\mathbb{R}$.

16 **Existence et unicité de la perpendiculaire commune à deux droites non coplanaires – Distance entre ces deux droites – Approfondissement – Méthodes 9, 14 et 19**

On considère deux droites (D) et (D') non coplanaires de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, un vecteur normal $\vec{n}$ orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$, ainsi que le plan (P) contenant (D) et dont $\vec{n}$ est un vecteur.



1) Montrez que (D') et (P) sont sécants en un point I.

2) Déduisez-en qu'il existe une seule perpendiculaire commune à (D) et (D').

3) La propriété est-elle vraie si les droites sont sécantes en un point I ?

4) Application : l'espace est rapporté au repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les points $A(1;1;0)$, $B(0;2;1)$, $C(0;0;1)$ et $D(0;0;-1)$.

a) Démontrez que les droites (AB) et (CD) ne sont pas coplanaires.

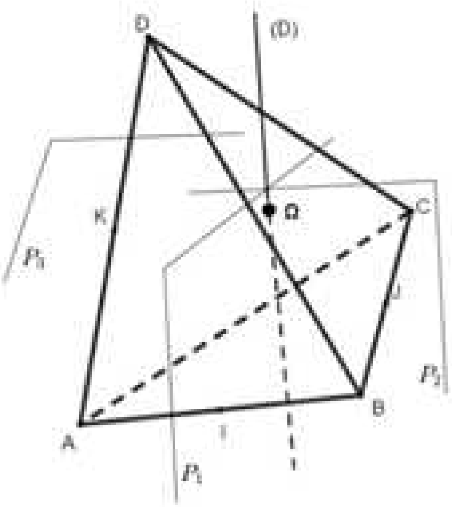
b) Donnez une représentation paramétrique de la perpendiculaire commune à (AB) et (CD) après avoir justifié son existence.

c) Déduisez-en la distance entre les deux droites.

17 **Existence et unicité d'une sphère circonscrite à un tétraèdre – Approfondissement – Méthodes 1, 9, 10, 11, 12 et 13**

On considère la figure suivante où ABCD est un tétraèdre, (P_1), (P_2) et (P_3) les plans médiateurs respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[DA]$, ainsi que la droite $(D)=(P_1)\cap(P_2)$ et le point $\Omega=(D)\cap(P_3)$.

Sur la figure les points I, J et K désignent les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[DA]$



1) Montrez par l'absurde que les plans (P_1) et (P_2) sont sécants selon une droite (D).

2) Montrez par l'absurde que (D) coupe (P_3) en un point Ω.

3) Déduisez-en qu'il existe une unique sphère circonscrite au tétraèdre ABCD.

4) Application : l'espace est rapporté au repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les points $A(1;1;0)$, $B(0;2;1)$, $C(0;0;1)$ et $D(0;0;-1)$ et l'on conserve les notations des questions précédentes.

a) Montrez que ABCD est un tétraèdre.

b) Déterminez une représentation paramétrique de la droite (D).

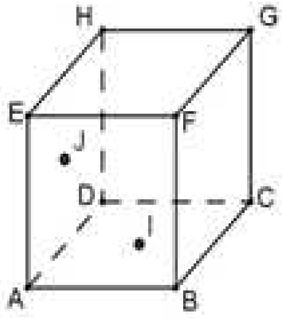
c) Déterminez les coordonnées de Ω.

d) Déduisez-en une équation de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD.

Corrigés

1 Parallélisme – Méthodes 1 et 2

On a la figure suivante :



1) On a : $\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{AH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{HF} + \overrightarrow{AH}$.

On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{HF}$ et $\overrightarrow{IG}$ sont coplanaires et donc que la droite (IG) est parallèle au plan (AHF).

2) En appliquant le théorème des milieux avec les vecteurs dans le triangle AHC il vient : $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CH}$. Cela prouve que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{CH}$ sont colinéaires et donc que les droites (IJ) et (CH) sont parallèles.

3) Montrons en utilisant le produit scalaire que $\overrightarrow{HB}$ est orthogonal à $\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{GD}$ (on a $\overrightarrow{FA} = \overrightarrow{GD}$ car AFGD est un parallélogramme).

On a : $\overrightarrow{HB} \bullet \overrightarrow{FA} = \left(\overrightarrow{HE} + \overrightarrow{EB}\right) \bullet \overrightarrow{FA} = \overrightarrow{HE} \bullet \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{EB} \bullet \overrightarrow{FA}$.

Le vecteur $\overrightarrow{HE}$ est normal au plan (ABF) contenant $\overrightarrow{FA}$ donc $\overrightarrow{HE} \bullet \overrightarrow{FA} = 0$.
Le quadrilatère ABFE est un carré donc ses diagonales sont perpendiculaires et $\overrightarrow{EB} \bullet \overrightarrow{AF} = 0$.
Finalement on en déduit que $\overrightarrow{HB} \bullet \overrightarrow{FA} = \overrightarrow{HB} \bullet \overrightarrow{GD} = 0$.

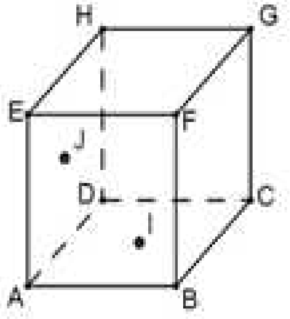
On démontre de la même façon que en $\overrightarrow{HB} \bullet \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{HB} \bullet \overrightarrow{ED} = 0$ en écrivant au départ que $\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HG} + \overrightarrow{GB}$ pour prouver que $\overrightarrow{HB} \bullet \overrightarrow{FC} = 0$.

Le vecteur $\overrightarrow{HB}$ est d'une part orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (FAC), et d'autre part orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (EGD), donc il est normal aux deux plans qui finalement sont parallèles.

2 Parallélisme – Méthodes 5 et 6

On introduit le repère orthonormé $\left(D, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH}\right)$ pour traiter les questions avec les coordonnées des points et celles des vecteurs dans la **base** orthonormée $\left(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DH}\right)$.

Avec la figure suivante on va pouvoir déterminer les coordonnées adéquates.



1) Dans le repère $\left(D,\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DH}\right)$ on a :

$$A(1,0,0),\ H(0,0,1),\ F(1,1,1),\ I\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right) \text{ et } G(0,1,1).$$

Dans la base $\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DH}\right)$ on en déduit que :

$$\overrightarrow{AH}\begin{vmatrix}-1\\0\\1\end{vmatrix},\ \overrightarrow{HF}\begin{vmatrix}1\\1\\0\end{vmatrix} \text{ et } \overrightarrow{IG}\begin{vmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\1\end{vmatrix}.$$

Cherchons s'il existe α et β réels tels que $\alpha\overrightarrow{AH}+\beta\overrightarrow{HF}=\overrightarrow{IG}$.

Cela amène à résoudre $\begin{cases}-\alpha+\beta=-\frac{1}{2}\\ \beta=\frac{1}{2}\\ \alpha=1\end{cases}$ de solution : $(\alpha,\beta)=\left(1,\frac{1}{2}\right)$.

On en déduit que $\overrightarrow{AH}+\frac{1}{2}\overrightarrow{HF}=\overrightarrow{IG}$, donc que les vecteurs $\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{HF}$ et $\overrightarrow{IG}$ sont coplanaires, et finalement que la droite (IG) est parallèle au plan (AHF).

2) Dans le repère $\left(D,\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DH}\right)$ on a :

$$C(0,1,0),\ H(0,0,1),\ I\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right) \text{ et } J\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right).$$

Dans la base $\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DH}\right)$ on en déduit que :

$$\overrightarrow{CH}\begin{vmatrix}0\\-1\\1\end{vmatrix},\ \text{et } \overrightarrow{IJ}\begin{vmatrix}0\\-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\end{vmatrix}.$$

Il est clair que $\frac{1}{2}\overrightarrow{CH}=\overrightarrow{IJ}$, ce qui prouve que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{CH}$ sont colinéaires, et donc que les droites (IJ) et (CH) sont parallèles.

3) Dans le repère $\left(D,\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DH}\right)$ on a :

$$A(1,0,0),\ C(0,1,0),\ F(1,1,1),\ H(0,0,1),\ B(1,1,0),\ G(0,1,1),\ D(0,0,0) \text{ et } E(1,0,1).$$

Dans la base $\left(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DH}\right)$ on en déduit que :

$$\overrightarrow{FA}=\overrightarrow{GD}\begin{vmatrix}0\\-1\\-1\end{vmatrix},\ \overrightarrow{FC}=\overrightarrow{ED}\begin{vmatrix}-1\\0\\-1\end{vmatrix} \text{ et } \overrightarrow{HB}\begin{vmatrix}1\\1\\-1\end{vmatrix}.$$

On obtient alors :

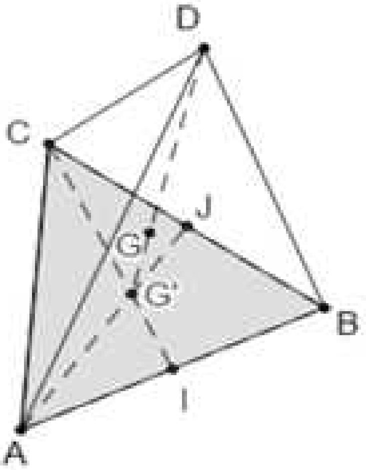
a) $\overrightarrow{HB}\bullet\overrightarrow{FA}=\overrightarrow{HB}\bullet\overrightarrow{GD}=(1)(0)+(1)(-1)+(-1)(-1)=0$

b) $\overrightarrow{HB}\bullet\overrightarrow{FC}=\overrightarrow{HB}\bullet\overrightarrow{ED}=(1)(-1)+(1)(0)+(-1)(-1)=0$.

Le vecteur $\overrightarrow{HB}$ est d'une part orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (FAC), et d'autre part orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (EGD), donc il est normal aux deux plans qui finalement sont parallèles.

$\boxed{3}$ Distances et angles dans un tétraèdre régulier – Méthodes 3, 4, 20 et 23

On a la figure suivante :



1) $\overrightarrow{DG'}\bullet\overrightarrow{AB}=\left(\overrightarrow{DI}+\overrightarrow{IG'}\right)\bullet\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DI}\bullet\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{IG'}\bullet\overrightarrow{AB}=0+0=0$ car les médianes (DI) et (IG') sont aussi des hauteurs puisque les triangles ABD et ABC sont équilatéraux.

De même on a : $\overrightarrow{DG'}\bullet\overrightarrow{BC}=\left(\overrightarrow{DJ}+\overrightarrow{JG'}\right)\bullet\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{DJ}\bullet\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{JG'}\bullet\overrightarrow{BC}=0+0=0$.

Comme $\overrightarrow{DG'}$ est orthogonal aux deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ du plan (ABC) il est normal au plan et donc $\lfloor DG'\rfloor$ est la hauteur du tétraèdre issue de D.

2) On a $G = \text{Bar}\{(A,1),(B,1),(C,1),(D,1)\}$, donc en regroupant A, B et C, comme $G' = \text{Bar}\{(A,1),(B,1),(C,1)\}$, en appliquant la propriété d'associativité on obtient $G = \text{Bar}\{(D,1),(G',3)\}$, ce qui prouve que $G \in [DG']$.
Comme $G = \text{Bar}\{(D,1),(G',3)\}$ on peut écrire que : $\overrightarrow{GD} + 3\overrightarrow{GG'} = \vec{0}$.
On a $\overrightarrow{GD} + 3\overrightarrow{GG'} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GD} + 3\left(\overrightarrow{GD} + \overrightarrow{DG'}\right) = \vec{0} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{GD} + 3\overrightarrow{DG'} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{DG'} = 4\overrightarrow{DG}$
$\Leftrightarrow \overrightarrow{DG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DG'}$ ce qui donne la position de G sur $[DG']$.

3) Compte tenu de la symétrie de la figure, les quatre hauteurs du tétraèdre, les quatre distances de G aux faces, les quatre distances de G aux sommets, et les quatre angles géométriques de sommet G et d'extrémités deux sommets quelconques sont quatre à quatre de même valeur.

Ainsi pour répondre aux questions a), b), c) et d) on va déterminer respectivement DG', GG', GA et $\widehat{AGB}$.

Pour gagner du temps on utilise la 4ᵉ astuce : la hauteur d'un triangle équilatéral de côté « a » est $h = a\frac{\sqrt{3}}{2}$.

a) En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle DG'I rectangle en G' on obtient : $DI^2 = DG'^2 + G'I^2$.

On a : $DI^2 = DG'^2 + G'I^2 \Leftrightarrow \left(a\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = DG'^2 + \left(\frac{1}{3} \times a\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \frac{3}{4}a^2 = DG'^2 + \frac{1}{12}a^2$

$\Leftrightarrow DG'^2 = \frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{12}a^2 = \frac{9}{12}a^2 - \frac{1}{12}a^2 = \frac{8}{12}a^2 = \frac{2}{3}a^2 \Leftrightarrow DG' = a\sqrt{\frac{2}{3}} = a\frac{\sqrt{6}}{3}$.

La hauteur d'un tétraèdre régulier d'arête a est donc $h = a\frac{\sqrt{6}}{3}$.

b) Comme $\overrightarrow{DG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{DG'}$, $\overrightarrow{GG'} = \frac{1}{4}\overrightarrow{DG'}$ et donc $GG' = \frac{1}{4}DG' = \frac{1}{4} \times a\frac{\sqrt{6}}{3} = a\frac{\sqrt{6}}{12}$.

Dans un tétraèdre régulier d'arête a, la distance de l'isobarycentre aux quatre faces est $d = a\frac{\sqrt{6}}{12}$.

c) On a $GD = G'D - G'G = a\frac{\sqrt{6}}{3} - a\frac{\sqrt{6}}{12} = a\frac{\sqrt{6}}{4}$.

Dans un tétraèdre régulier d'arête a, la distance de l'isobarycentre aux quatre sommets est $d' = a\frac{\sqrt{6}}{4}$.

REMARQUE : La molécule de méthane de formule CH_4 peut être modélisée par ce tétraèdre régulier dont l'atome de carbone est le centre de gravité G du tétraèdre et les atomes d'hydrogène ses sommets avec $d' = 108{,}7$ pm (1 pm est égale à 10^{-12} m).

d) En appliquant la formule du produit scalaire avec cosinus on peut écrire que : $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} = GA \times GB \times \cos\widehat{AGB} = d'^2 \cos\widehat{AGB} = \frac{3}{8}a^2 \cos\widehat{AGB}$ (E).

Il reste à déterminer $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB}$ pour déduire $\cos\widehat{AGB}$ de l'égalité précédente et ensuite la valeur arrondie demandée.

On a l'égalité (i) :

$$\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} = \left(\overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'A}\right) \cdot \left(\overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'B}\right) = GG'^2 + \overrightarrow{GG'} \cdot \overrightarrow{G'B} + \overrightarrow{G'A} \cdot \overrightarrow{GG'} + \overrightarrow{G'A} \cdot \overrightarrow{G'B}.$$

Comme $\overrightarrow{GG'}$ est normal au plan (ABC) qui contient les vecteurs $\overrightarrow{G'A}$ et $\overrightarrow{G'B}$ son produit scalaire avec ces deux vecteurs est nul.

D'autre part d'après b) on a : $GG'^2 = \left(a\frac{\sqrt{6}}{12}\right)^2 = \frac{1}{24}a^2$.

Enfin, $\overrightarrow{G'A} \cdot \overrightarrow{G'B} = G'A \times G'B \times \cos\widehat{AG'B} = G'A^2 \times \cos 120° = -\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} \times a\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = -\frac{1}{6}a^2$.

En remplaçant dans l'égalité (i) : $\overrightarrow{GA} \cdot \overrightarrow{GB} = \frac{1}{24}a^2 - \frac{1}{6}a^2 = -\frac{1}{8}a^2$.

En remplaçant dans l'égalité (E) :

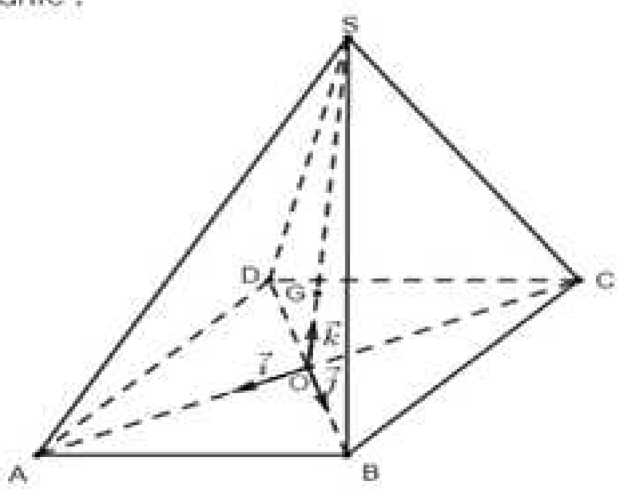
$$-\frac{1}{8}a^2 = \frac{3}{8}a^2 \cos\widehat{AGB} \Leftrightarrow \cos\widehat{AGB} = -\frac{1}{3}.$$

On en déduit que $\widehat{AGB} = 109°$ arrondie au degré près.

Dans un tétraèdre régulier les quatre angles géométriques de sommet G et d'extrémités deux sommets quelconques ont une valeur arrondie au degré près de 109°.

4 Distances et angles dans une pyramide – Méthodes 5, 6, 7, 8, 20 et 23

On a la figure suivante :



1) On a $AB = BC = CD = DA$ donc le quadrilatère ABCD est un losange et par conséquent $OA = OC$ et $OB = OD$.

On a $SA = SC$ et $OA = OC$ donc les points S et O et par conséquent le vecteur $\overrightarrow{SO}$ appartiennent au plan médiateur du segment $[AC]$.
Comme le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est normal à ce plan qui contient $\overrightarrow{SO}$ on a : $\overrightarrow{SO} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

On a $SB = SD$ et $OB = OD$ donc les points S et O et par conséquent le vecteur $\overrightarrow{SO}$ appartiennent au plan médiateur du segment $[BD]$.
Comme le vecteur $\overrightarrow{BD}$ est normal à ce plan qui contient $\overrightarrow{SO}$ on a : $\overrightarrow{SO} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$.

Le vecteur $\overrightarrow{SO}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de la face ABCD donc normal à cette face ce qui prouve que (SO) est la hauteur de la pyramide issue de S.

2) En appliquant le théorème de Pythagore dans les triangles SOA et SOB rectangles en O il vient $OA^2 = SA^2 - SO^2 = a^2 - h^2$ **(I)** et $OB^2 = SB^2 - SO^2 = a^2 - h^2$. On en déduit que $OA = OB$ et donc que les diagonales du losange ABCD sont de même longueur ce qui prouve que c'est un carré.

Comme ABCD est un carré de côté a, ses diagonales ont pour longueur $a\sqrt{2}$.
On en déduit que $OA = a\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, donc en remplaçant dans **(I)**, $\left(a\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = a^2 - h^2$

ce qui donne $h^2 = \dfrac{1}{2}a^2$ et finalement $h = a\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

3) On a $G = \text{Bar}\{(S,1),(A,1),(B,1),(C,1),(D,1)\}$, donc en regroupant A, B, C et D, comme l'isobarycentre du carré ABCD est $O = \text{Bar}\{(A,1),(B,1),(C,1),(D,1)\}$ en appliquant la propriété d'associativité on obtient $G = \text{Bar}\{(S,1),(O,4)\}$, ce qui prouve que $G \in [OS]$.
Comme $G = \text{Bar}\{(S,1),(O,4)\}$ on peut écrire que : $\overrightarrow{GS} + 4\overrightarrow{GO} = \vec{0}$.
On a $\overrightarrow{GS} + 4\overrightarrow{GO} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OS} + 4\overrightarrow{GO} = \vec{0} \Leftrightarrow 5\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OS} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OG} = \dfrac{1}{5}\overrightarrow{OS}$ ce qui donne la position de G sur $[OS]$.

4) Compte tenu de la symétrie de la figure, les quatre distances de G aux sommets de la base, les quatre distances de G aux faces latérales et les quatre angles géométriques $\widehat{AGB}$, $\widehat{BGC}$, $\widehat{CGD}$ et $\widehat{DGA}$ sont quatre à quatre de même valeur.

5) a) Donnons les coordonnées de points A, B, C, D, S et G dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On a vu que $OA = OB = OC = OD = a\frac{\sqrt{2}}{2}$ donc on a :

$$A\left(a\frac{\sqrt{2}}{2},0,0\right),\ B\left(0,a\frac{\sqrt{2}}{2},0\right),\ C\left(-a\frac{\sqrt{2}}{2},0,0\right),\ D\left(0,-a\frac{\sqrt{2}}{2},0\right).$$

On a vu que $OS = h = a\frac{\sqrt{2}}{2}$ et que $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{5}\overrightarrow{OS}$ donc on a :

$$S\left(0,0,a\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ et } G\left(0,0,a\frac{\sqrt{2}}{10}\right).$$

b) La distance de G aux sommets de la base est GA.

Comme $\overrightarrow{GA}\left|\begin{matrix} a\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ -a\frac{\sqrt{2}}{10} \end{matrix}\right.$ on a $GA = \sqrt{\left(a\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 0^2 + \left(-a\frac{\sqrt{2}}{10}\right)^2} = a\frac{\sqrt{13}}{5}$.

c) La distance de G aux faces latérales est par exemple $d(G,(SAB)) = \frac{\left|\overrightarrow{GA}\bullet\vec{n}\right|}{\left\|\vec{n}\right\|}$ où $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (SAB), ce qui nécessite la détermination de $\vec{n}$.

Notons $\vec{n}\left|\begin{matrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{matrix}\right.$ un vecteur normal au plan (SAB).

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}\left|\begin{matrix} -a\frac{\sqrt{2}}{2} \\ a\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{matrix}\right.$ et $\overrightarrow{SA}\left|\begin{matrix} a\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ -a\frac{\sqrt{2}}{2} \end{matrix}\right.$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan (SAB) donc on est amené à trouver α, β et γ tels que $\vec{n}\bullet\overrightarrow{AB} = 0$ et $\vec{n}\bullet\overrightarrow{SA} = 0$.

Pour cela : $\begin{cases} \vec{n}\bullet\overrightarrow{AB} = 0 \\ \vec{n}\bullet\overrightarrow{SA} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha\left(-a\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \beta\left(a\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0 \\ \alpha\left(a\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \gamma\left(-a\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha + \beta = 0 \\ \alpha - \gamma = 0 \end{cases}$ ce qui par exemple nous amène à prendre $(\alpha,\beta,\gamma) = (1,1,1)$ et donc $\vec{n}\left|\begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{matrix}\right.$.

De là, comme $\overrightarrow{GA}\begin{vmatrix} a\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ -a\frac{\sqrt{2}}{10} \end{vmatrix}$ on a :

$$d(G,(SAB)) = \frac{\left|\overrightarrow{GA}\cdot\vec{n}\right|}{\left\|\vec{n}\right\|} = \frac{\left|a\frac{\sqrt{2}}{2} - a\frac{\sqrt{2}}{10}\right|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{2\sqrt{6}}{15}a.$$

d) On va utiliser la formule **(i)** : $\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB} = GA\times GB\times\cos\widehat{AGB}$.

On a $\overrightarrow{GA}\begin{vmatrix} a\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ -a\frac{\sqrt{2}}{10} \end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{GB}\begin{vmatrix} 0 \\ a\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -a\frac{\sqrt{2}}{10} \end{vmatrix}$ donc $\overrightarrow{GA}\cdot\overrightarrow{GB} = 0+0+\left(-a\frac{\sqrt{2}}{10}\right)^2 = \frac{1}{50}a^2$ et

$$GA = \sqrt{\left(a\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 0^2 + \left(-a\frac{\sqrt{2}}{10}\right)^2} = a\frac{\sqrt{13}}{5} = GB \Rightarrow GA\times GB = \frac{13}{25}a^2.$$

En remplaçant dans la formule **(i)** : $\frac{1}{50}a^2 = \frac{13}{25}a^2\times\cos\widehat{AGB}$.

Finalement $\cos\widehat{AGB} = \frac{1}{26}$ et une valeur arrondie au degré près de l'angle géométrique $\widehat{AGB}$ est 88°.

5 Caractérisation analytique de plan et de droites dans l'espace – Méthodes 9,10, et 12

L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

On a les points $A(1;2;7)$, $B(2;0;2)$, $C(3;1;3)$, $D(3;-6;1)$, $E(4;-8;-4)$ et la droite (D') dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = 3+2k \\ y = 5-4k \\ z = -1+2k \end{cases}$.

1) Comme $\frac{1}{2} \neq \frac{-2}{-1}$ les coordonnées de $\overrightarrow{AB}\begin{vmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{vmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{vmatrix}$ ne sont pas proportionnelles, les deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les trois points A, B et C ne sont pas alignés et définissent un plan.

2) Déterminons $\vec{n}\begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix}$ normal à $\overrightarrow{AB}\begin{vmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{vmatrix} 2 \\ -1 \\ -4 \end{vmatrix}$.

Comme $\begin{cases} \vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0 \\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a-2b-5c=0 \\ 2a-b-4c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2b+5c=a \\ b+4c=2a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c=a \\ b=-2a \end{cases}$, on peut prendre par exemple $a=1$, ce qui donne $\vec{n}\begin{vmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{vmatrix}$.

Le plan (ABC) a donc une équation de la forme $x-2y+z+d=0$.
Comme $B(2;0;2)$ est un point de ce plan on a $2+2+d=0$ et donc $d=-4$ ce qui entraîne que $x-2y+z-4=0$ est une équation de (ABC).

3) Comme $3-2(-6)+1-4=12\neq 0$ le point D n'est pas un point du plan (ABC).

4) a) La droite (D') a pour vecteur directeur $\vec{v'}\begin{vmatrix} 2 \\ -4 \\ 2 \end{vmatrix}=2\vec{n}$, donc $\vec{v'}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires cette droite est orthogonale à (ABC).
b) Pour déterminer l'intersection de (D') et (ABC) il faut résoudre le système
$\begin{cases} x=3+2k \\ y=5-4k \\ z=-1+2k \\ x-2y+z-4=0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x=3+2k \\ y=5-4k \\ z=-1+2k \\ x-2y+z-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3+2k \\ y=5-4k \\ z=-1+2k \\ 3+2k-2(5-4k)-1+2k-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=1 \\ x=5 \\ y=1 \\ z=1 \end{cases}$$

donc l'intersection demandée est le point $I(5;1;1)$.

5) Comme $\overrightarrow{DE}\begin{vmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{vmatrix}$, une représentation paramétrique de (DE) est $\begin{cases} x=3+k \\ y=-6-2k \\ z=1-5k \end{cases}$ avec $k\in\mathbb{R}$.
Pour déterminer l'intersection de la droite (DE) et du plan (ABC) il faut résoudre le système (S) : $\begin{cases} x=3+k \\ y=-6-2k \\ z=1-5k \\ x-2y+z-4=0 \end{cases}$

$$\begin{cases} x=3+k \\ y=-6-2k \\ z=1-5k \\ x-2y+z-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3+k \\ y=-6-2k \\ z=1-5k \\ 3+k-2(-6-2k)+1-5k-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3+k \\ y=-6-2k \\ z=1-5k \\ 12=0 \end{cases}$$ donc le système (S) n'a pas de solution et la droite (DE) est strictement parallèle au plan (ABC).

6 Caractérisation analytique de plan et de droites dans l'espace – Méthodes 9, 10, 12, 13 et 14

L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

1) Comme $\frac{-1}{2} \neq \frac{1}{1}$ les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{vmatrix}-1\\2\\-5\end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{vmatrix}1\\1\\-1\end{vmatrix}$ ne sont pas proportionnelles, ils ne sont pas colinéaires et donc les trois points A, B et C ne sont pas alignés et définissent un plan.

REMARQUE : Dans la suite du livre, on n'écrira plus pourquoi deux vecteurs n'ont pas de coordonnées proportionnelles car c'est toujours trivial.

Soit $\vec{n}\begin{vmatrix}a\\b\\c\end{vmatrix}$ un vecteur normal au plan (ABC) donc orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$\begin{cases}\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0\\\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-a+2b-5c=0\\a+b-c=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-a+2b=5c\\a+b=c\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3b=6c\\a+b=c\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=2c\\a=-c\end{cases}$ donc en prenant $c=1$ on obtient $\vec{n}\begin{vmatrix}-1\\2\\1\end{vmatrix}$.

Une équation du plan (ABC) est donc de la forme $-x+2y+z+d=0$.

Comme $C(2;0;1)\in(ABC)$, $-2+1+d=0$ et donc $d=1$, ce qui implique qu'une équation du plan (ABC) est $-x+2y+z+1=0$.

2) Pour caractériser l'intersection des plans (P) et (P') d'équations respectives $x+y+z-5=0$ et $2x+y-z+1=0$ nous allons résoudre le système :

$$\begin{cases}x+y+z-5=0\\2x+y-z+1=0\end{cases}.$$

$\begin{cases}x+y+z-5=0\\2x+y-z+1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y+z=5-x\\y-z=-1-2x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2y=4-3x\\2z=6+x\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=2-\frac{3}{2}x\\z=3+\frac{1}{2}x\end{cases}.$

En prenant $x=2k$ l'ensemble des solutions $(x;y;z)$ du système est tel que $\begin{cases}x=2k\\y=2-3k\\z=3+k\end{cases}$ avec $k\in\mathbb{R}$.

La droite (D) passe donc par $E(0;2;3)$ et admet pour vecteur directeur $\vec{v}\begin{vmatrix}2\\-3\\1\end{vmatrix}$.

3) Pour déterminer l'intersection de (D) et (ABC) il faut résoudre le système :

$$\begin{cases} x = 2k \\ y = 2 - 3k \\ z = 3 + k \\ -x + 2y + z + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2k \\ y = 2 - 3k \\ z = 3 + k \\ -x + 2y + z + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2k \\ y = 2 - 3k \\ z = 3 + k \\ -2k + 2(2 - 3k) + 3 + k + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{8}{7} \\ x = \frac{16}{7} \\ y = -\frac{10}{7} \\ z = \frac{29}{7} \end{cases}$$ donc la droite (D) coupe (ABC) en $I\left(\frac{16}{7};-\frac{10}{7};\frac{29}{7}\right)$.

4) Comme $\overrightarrow{AB}\begin{vmatrix} -1 \\ 2 \\ -5 \end{vmatrix}$, une représentation paramétrique de (AB) est $\begin{cases} x = -k' \\ y = 1 + 2k' \\ z = -3 - 5k' \end{cases}$ avec $k' \in \mathbb{R}$.

Pour déterminer l'intersection de (D) et (AB) on peut résoudre le système :

$$\begin{cases} -k' = 2k \\ 1 + 2k' = 2 - 3k \\ -3 - 5k' = 3 + k \end{cases}.$$

$$\begin{cases} -k' = 2k \\ 1 + 2k' = 2 - 3k \\ -3 - 5k' = 3 + k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k' = -2k \\ 1 - 4k = 2 - 3k \\ -3 + 10k = 3 + k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k' = -2k \\ k = -3 \\ k = \frac{2}{3} \end{cases}$$ donc le système n'a pas de solution donc les deux droites ne sont pas sécantes et leur intersection est vide.

7 Caractérisations analytiques – Droites et plans de l'espace – Méthodes 9, 10, 12, 13 et 14

L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On a les points $A(0;0;2)$, $B(0;4;0)$ et $C(2;0;0)$.

1) Comme les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}\begin{vmatrix} 0 \\ 4 \\ -2 \end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{vmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{vmatrix}$ ne sont pas proportionnelles les deux vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les trois points A, B et C ne sont pas alignés et définissent un plan.

Puisque les coordonnées des points A, B et C vérifient l'équation $2x + y + 2z = 4$ c'est une équation du plan (ABC).

2) a) Comme $\overrightarrow{BC}\begin{vmatrix}2\\-4\\0\end{vmatrix}$ est colinéaire à $\vec{n}\begin{vmatrix}1\\-2\\0\end{vmatrix}$, $\vec{n}$ est un vecteur normal à (P), ce plan a une équation de la forme $x-2y+d=0$.
Puisque $A(0;0;2)$ est un point de (P) on a $d=0$ et une équation de (P) est $x-2y=0$.
b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (D) intersection des plans (P) et (ABC) amène à résoudre $\begin{cases}2x+y+2z=4\\x-2y=0\end{cases}$.

$\begin{cases}2x+y+2z=4\\x-2y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2y\\4y+y+2z=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2y\\z=2-\frac{5}{2}y\end{cases}$, donc en prenant $y=2k$ on obtient que $\begin{cases}x=4k\\y=2k\\z=2-5k\end{cases}$ avec $k\in\mathbb{R}$ est une représentation paramétrique de la droite (D).
c) Toute droite du plan (P) est orthogonale à (BC), donc en particulier la droite (D) qui est une droite du plan (ABC).
Comme cette droite passe par A puisque A est un point commun à (P) et (ABC), c'est la hauteur du triangle ABC issue de A.

3) La droite (D') est la médiane issue de B du triangle (ABC).
a) Le milieu I de $[AC]$ est tel que $I\left(\frac{x_A+x_C}{2};\frac{y_A+y_C}{2};\frac{z_A+z_C}{2}\right)$ ce qui donne $I(1;0;1)$.
Pour $k'=0$ et $k'=1$ on obtient respectivement les coordonnées des points B et I donc une représentation paramétrique de (D') est $\begin{cases}x=k'\\y=4-4k'\\z=k'\end{cases}$ avec k' réel.
b) Comme on a :
$BA=\sqrt{0^2+(0-4)^2+2^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$ et $BC=\sqrt{2^2+(0-4)^2+0^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$, on en déduit que ABC est un triangle isocèle de sommet B.

4) a) Déterminer $H=(D)\cap(D')$ revient à résoudre le système : $\begin{cases}4k=k'\\2k=4-4k'\\2-5k=k'\end{cases}$.

$\begin{cases}4k=k'\\2k=4-4k'\\2-5k=k'\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4k=k'\\2k-4=-16k\\2-5k=4k\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k=\frac{2}{9}\\k'=\frac{8}{9}\end{cases} \Leftrightarrow H\left(\frac{8}{9};\frac{4}{9};\frac{8}{9}\right)$.

REMARQUE : Pour obtenir les coordonnées de H, on remplace par exemple k par $\frac{2}{9}$ dans la représentation paramétrique de (D).

b) La médiane (D') issue du sommet du triangle isocèle ABC de sommet B est aussi la hauteur de ce triangle issue de B.
Le point H étant l'intersection des deux hauteurs (D) et (D') du triangle ABC c'est l'orthocentre du triangle (ABC).

5) Le vecteur $\overrightarrow{OH}\begin{vmatrix}\frac{8}{9}\\ \frac{4}{9}\\ \frac{8}{9}\end{vmatrix}$ est colinéaire au vecteur $\vec{n}\begin{vmatrix}2\\1\\2\end{vmatrix}$ normal au plan (ABC)

d'équation $2x+y+2z=4$ car $\overrightarrow{OH}=\frac{4}{9}\vec{n}$, donc la droite (OH) est orthogonale au plan (ABC) avec $H\in(ABC)$ et par conséquent le point H est bien le projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC).

La distance du point O au plan (ABC) est donc :

$$OH=\sqrt{\left(\frac{8}{9}\right)^2+\left(\frac{4}{9}\right)^2+\left(\frac{8}{9}\right)^2}=\frac{1}{9}\sqrt{144}=\frac{12}{9}=\frac{4}{3}.$$

8 Intersections avec une sphère – Approfondissement – Méthodes 10, 11, 12, 15, 16 et 17

L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On a le plan (P) d'équation $x+y+z-2=0$, la sphère (S) de centre $\Omega(1,2,3)$ de rayon $R=\sqrt{5}$ ainsi que les points $A(-1,2,-1)$ et $B(0,0,3)$.

1) La droite (AB) contient le point B et admet $\overrightarrow{AB}\begin{vmatrix}1\\-2\\4\end{vmatrix}$ comme vecteur directeur

donc une représentation paramétrique peut être : $\begin{cases}x=k\\ y=-2k\\ z=3+4k\end{cases}$ avec $k\in\mathbb{R}$.

2) Une équation de (S) est $(x-x_\Omega)^2+(y-y_\Omega)^2+(z-z_\Omega)^2=R^2$ donc avec $\Omega(1,2,3)$ et $R=\sqrt{5}$ on obtient : $(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=5$.

3) Pour déterminer l'intersection entre (AB) et (S) il faut résoudre le système :

$$\begin{cases} x = k \\ y = -2k \\ z = 3 + 4k \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 5 \end{cases}$$

On a : $\begin{cases} x = k \\ y = -2k \\ z = 3 + 4k \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k \\ y = -2k \\ z = 3 + 4k \\ (k-1)^2 + (-2k-2)^2 + (3+4k-3)^2 = 5 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = k \\ y = -2k \\ z = 3 + 4k \\ 21k^2 + 6k = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k \\ y = -2k \\ z = 3 + 4k \\ k = 0 \text{ ou } k = -\frac{2}{7} \end{cases}$$

Avec $k = 0$ et $k = -\frac{2}{7}$ on obtient respectivement $(x,y,z) = (0,0,3)$ et $(x,y,z) = \left(-\frac{2}{7}, \frac{4}{7}, \frac{13}{7}\right)$ donc la droite coupe la sphère en $M(0,0,3)$ et $N\left(-\frac{2}{7}, \frac{4}{7}, \frac{13}{7}\right)$.

4) Pour déterminer l'intersection entre (P) et (S) on commence par déterminer la distance $d(\Omega,(P))$ du point Ω au plan (P).

Comme $Q(0,0,4)$ est un point du plan (P) et $\vec{n}\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{vmatrix}$ un vecteur normal à ce plan

on a : $d(\Omega,(P)) = \dfrac{\left|\overrightarrow{Q\Omega} \cdot \vec{n}\right|}{\|\vec{n}\|} = \dfrac{|1+2-1|}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Puisque $d(\Omega,(P)) = 2\dfrac{\sqrt{3}}{3} < \sqrt{5} = R$ l'intersection entre (S) et (P) est le cercle (C) du plan (P) de centre le projeté orthogonal Ω_P du point Ω sur (P) et de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2(\Omega,(P))} = \sqrt{5 - \frac{4}{3}} = \dfrac{\sqrt{33}}{3}$.

Pour déterminer les coordonnées du centre Ω_P du cercle (C) il faut déterminer l'intersection entre le plan (P) et la droite (D) orthogonale à (P) passant par Ω dont une représentation paramétrique est $\begin{cases} x = 1 + k \\ y = 2 + k \\ z = 3 + k \end{cases}$ avec

$k \in \mathbb{R}$ dans la mesure où elle passe par Ω et dont $\vec{n}\begin{vmatrix}1\\1\\1\end{vmatrix}$ est un vecteur directeur puisqu'il est normal à (P).

Ainsi on doit résoudre le système : $\begin{cases} x = 1+k \\ y = 2+k \\ z = 3+k \\ x+y+z-4=0 \end{cases}$

On a : $\begin{cases} x = 1+k \\ y = 2+k \\ z = 3+k \\ x+y+z-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1+k \\ y = 2+k \\ z = 3+k \\ (1+k)+(2+k)+(3+k)-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1+k \\ y = 2+k \\ z = 3+k \\ k = -\dfrac{2}{3} \end{cases}$.

En prenant $k = -\dfrac{2}{3}$ on obtient $(x,y,z) = \left(\dfrac{1}{3},\dfrac{4}{3},\dfrac{7}{3}\right)$ donc le centre du cercle (C) est $\Omega_P\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{4}{3},\dfrac{7}{3}\right)$.

L'intersection entre (P) et (S) est donc le cercle du plan (P) de centre $\Omega_P\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{4}{3},\dfrac{7}{3}\right)$ et de rayon $r = \dfrac{\sqrt{33}}{3}$.

9 Distance d'un point à une droite – Méthodes 9, 10, 13 et 18

L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On a les points $A(1,-1,3)$, $B(-1,2,0)$ et $C(0,-1,1)$.

1) La droite (AB) passe par $B(-1,2,0)$ et admet pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}\begin{vmatrix}-2\\3\\-3\end{vmatrix}$ donc une représentation paramétrique de cette droite est : $\begin{cases} x = -1-2k \\ y = 2+3k \\ z = -3k \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

2) Le plan (P) orthogonal à (AB) donc $\overrightarrow{AB}\begin{vmatrix}-2\\3\\-3\end{vmatrix}$ est un vecteur normal à ce plan qui a donc une équation de la forme $-2x+3y-3z+d=0$.

Comme $C(0,-1,1)$ est un point de (P) en remplaçant dans l'équation précédente on a, $-3-3+d=0$ donc $d=6$ et finalement $-2x+3y-3z+6=0$ est une équation de (P).

3) Pour déterminer les coordonnées du projeté orthogonal C_p du point C sur la droite (AB) il faut résoudre le système : $\begin{cases} x=-1-2k \\ y=2+3k \\ z=-3k \\ -2x+3y-3z+6=0 \end{cases}$

On a :

$$\begin{cases} x=-1-2k \\ y=2+3k \\ z=-3k \\ -2x+3y-3z+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1-2k \\ y=2+3k \\ z=-3k \\ -2(-1-2k)+3(2+3k)-3(-3k)+6=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1-2k \\ y=2+3k \\ z=-3k \\ k=-\dfrac{7}{11} \end{cases}$$

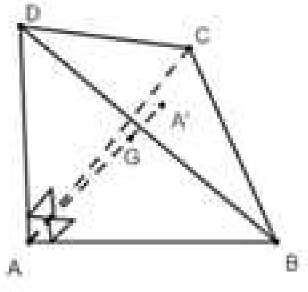
En prenant $k=-\dfrac{7}{11}$ on obtient $(x,y,z)=\left(\dfrac{3}{11},\dfrac{1}{11},\dfrac{21}{11}\right)$ donc le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB) est $C_p\left(\dfrac{3}{11},\dfrac{1}{11},\dfrac{21}{11}\right)$.

On en déduit que $\overrightarrow{CC_p}\begin{vmatrix} \dfrac{3}{11} \\ \dfrac{12}{11} \\ \dfrac{10}{11} \end{vmatrix}$ et donc que la distance $d(C,(AB))$ du point C à la droite (AB) est $d(C,(AB))=CC_p=\sqrt{\left(\dfrac{3}{11}\right)^2+\left(\dfrac{12}{11}\right)^2+\left(\dfrac{10}{11}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{253}}{11}$.

$\boxed{10}$ Ensemble de points avec un tétraèdre orthocentrique – Méthodes 2, 20, 21 et 23

On a le tétraèdre ABCD tel que ABC, ABD et ACD sont trois triangles isocèles rectangles en A avec $AB=AC=AD=a$.

Le point A' est le centre de gravité du triangle BCD, c'est-à-dire le point tel que $\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{A'C}+\overrightarrow{A'D}=\vec{0}$.



1) En appliquant le théorème de Pythagore dans les trois triangles ABC, ABD et ACD on obtient $DC = BC = BD = a\sqrt{2}$ donc le triangle BCD est équilatéral de côté $a\sqrt{2}$.

L'isobarycentre A' de ABC est donc également le centre de son cercle circonscrit donc $A'B = A'C$.
Comme d'autre part $AB = AC$ on en déduit que A et A' sont des points du plan médiateur de $\left[BC\right]$ et donc que $\overline{AA'}$ en est un vecteur.
Comme $\overline{BC}$ est normal au plan médiateur de $\left[BC\right]$ on en déduit que $\overline{AA'} \cdot \overline{BC} = 0$.

En raisonnant avec le plan médiateur de $\left[DC\right]$ on montre de même que $\overline{AA'} \cdot \overline{DC} = 0$.

Le vecteur $\overline{AA'}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BCD) donc il est normal à ce plan et la droite (AA') est orthogonale au plan (BCD).

2) Les hauteurs d'un triangle équilatéral de coté de longueur L ont pour longueur $L\frac{\sqrt{3}}{2}$ (4ᵉ astuce).

La hauteur issue de D du triangle DCB a donc pour longueur $a\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = a\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Comme A' est le centre de gravité de BCD, $A'I = \frac{1}{3} \times a\frac{\sqrt{6}}{2} = a\frac{\sqrt{6}}{6}$ et par conséquent $A'I^2 = \frac{a^2}{6}$.
D'autre part, la hauteur issue du sommet d'un triangle rectangle isocèle dont la longueur des cotés adjacents au sommet est L est égale à $L\frac{\sqrt{2}}{2}$ (4ᵉ astuce : demi-diagonale d'un carré de côté L) donc $AI = a\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $AI^2 = \frac{a^2}{2}$.

D'après la question précédente le triangle AA'I est rectangle en A' donc en appliquant le théorème de Pythagore il vient $AI^2 = AA'^2 + A'I^2$.

On en déduit que $AI^2 - A'I^2 = AA'^2 \Leftrightarrow AA'^2 = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{6} = \frac{2a^2}{6} = \frac{a^2}{3}$.
Finalement, $AA' = \frac{a}{\sqrt{3}} = a\frac{\sqrt{3}}{3}$.

3) a) On a $G = \text{Bar}\{(A,1),(B,1),(C,1),(D,1)\}$, donc en regroupant B, C et D, comme l'isobarycentre du triangle BCD est $A' = \text{Bar}\{(B,1),(C,1),(D,1)\}$ en

appliquant la propriété d'associativité on obtient $G = \text{Bar}\{(A,1),(A',3)\}$, ce qui prouve que $\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GA'} = \vec{0}$.

On a : $\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GA'} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + 3\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AA'}\right) = \vec{0} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{AA'} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AA'}$.

On en déduit que : $AG = \dfrac{3}{4}AA' = \dfrac{3}{4} \times a\dfrac{\sqrt{3}}{3} = a\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

b) Notons $\overrightarrow{f(M)} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}$ et $\overrightarrow{g(M)} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$ les deux fonctions vectorielles de Leibniz de cette question (approfondissement).

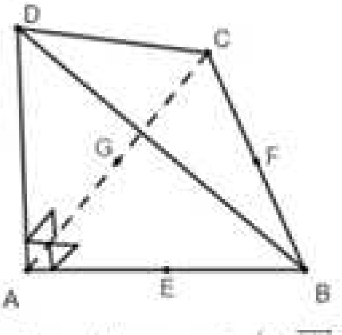
Comme $G = \text{Bar}\{(A,1),(B,1),(C,1),(D,1)\}$ et $I = \text{Bar}\{(B,1),(C,1)\}$ les fonctions vectorielles de Leibniz se simplifient en devenant $\overrightarrow{f(M)} = 4\overrightarrow{MG}$ et $\overrightarrow{g(M)} = 2\overrightarrow{MI}$.

Ainsi, on a $\left\|\overrightarrow{f(M)}\right\| = 2\left\|\overrightarrow{g(M)}\right\| \Leftrightarrow \left\|4\overrightarrow{MG}\right\| = 2\left\|2\overrightarrow{MI}\right\| \Leftrightarrow MG = MI$.

Finalement l'ensemble cherché est formé des points équidistants des points G et I, c'est-à-dire le plan médiateur du segment $[GI]$.

$\boxed{11}$ Optimisation dans un tétraèdre orthocentrique – Méthodes 6, 9, 10 et 13

On a la figure suivante où les faces ABC, ACD et ABD du tétraèdre ABCD sont des triangles isocèles de sommet A et où E, F, G sont les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[CA]$.



L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right)$.

1) a) Comme $D(0;0;1)$ et $F\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2};0\right)$ on en déduit que $\overrightarrow{DF}\begin{vmatrix}\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{1}{2}\\ -1\end{vmatrix}$ est colinéaire à

$\vec{n}\begin{vmatrix}1\\1\\-2\end{vmatrix}$ donc qu'une représentation paramétrique de (DF) est :

$$\begin{cases} x = k \\ y = k \\ z = 1 - 2k \end{cases} \quad \text{avec } k \in \mathbb{R}.$$

b) Comme le vecteur $\vec{n}\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{vmatrix}$ est normal à (P) une équation de (P) est de la forme $x + y - 2z + d = 0$.
Puisque $A(0;0,0) \in (P)$, en remplaçant dans l'équation précédente on obtient $d = 0$ et donc l'équation cherchée est $x + y - 2z = 0$.
c) Pour déterminer les coordonnées de H il faut résoudre le système :

$$\begin{cases} x = k \\ y = k \\ z = 1 - 2k \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}$$

On a donc $\begin{cases} x = k \\ y = k \\ z = 1 - 2k \\ x + y - 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = k \\ y = k \\ z = 1 - 2k \\ k + k - 2(1 - 2k) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{3} \\ x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3} \\ z = \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow H\left(\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$

d) Comme $E\left(\frac{1}{2};0;0\right)$ et $G\left(0;\frac{1}{2};0\right)$, $\overrightarrow{EH}\begin{vmatrix} \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{GH}\begin{vmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} \end{vmatrix}$ donc

$\overrightarrow{EH} \cdot \overrightarrow{GH} = \left(-\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{18} + \frac{1}{9} = 0$ et les droites sécantes (EH) et (HG) sont perpendiculaires en H.

2) Le point quelconque M appartient à la droite (DF), donc il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{DM} = k\overrightarrow{DF}$.
Le but de cette question est de déterminer le point M pour lequel l'angle géométrique $\alpha = \widehat{EMG}$ est maximal.

a) $\overline{DM} = k\overline{DF} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M - 0 = k\left(\frac{1}{2} - 0\right) \\ y_M - 0 = k\left(\frac{1}{2} - 0\right) \\ z_M - 1 = k(0-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_M = \frac{k}{2} \\ Y_M = \frac{k}{2} \\ z_M = 1-k \end{cases}$.

On en déduit que :

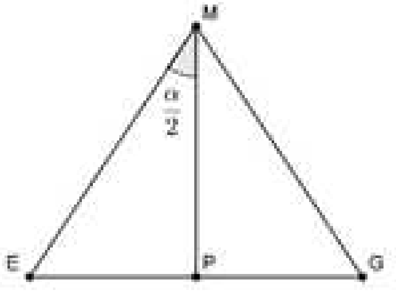
$$EM^2 = \left(\frac{k}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{k}{2}\right)^2 + (1-k)^2 = \frac{k^2}{4} - \frac{k}{2} + \frac{1}{4} + \frac{k^2}{4} + 1 - 2k + k^2 = \frac{3}{2}k^2 - \frac{5}{2}k + \frac{5}{4}.$$

b) En raisonnant comme dans la question précédente on a :

$$GM^2 = \left(\frac{k}{2}\right)^2 + \left(\frac{k}{2} - \frac{1}{2}\right)^2 + (1-k)^2 = EM^2.$$

Finalement $EM = GM$ et le triangle MEG est isocèle de sommet M.

Comme le triangle EMG est isocèle de sommet M on a la configuration suivante où P désigne le milieu de $[EG]$ (la médiane (MP) issue du sommet M est aussi la hauteur issue de M et la bissectrice de l'angle au sommet du triangle isocèle EMG) :



On en déduit que $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{EP}{EM}$ et donc que $EM \times \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = EP = \frac{EG}{2}$ **(a)**.

Comme $E\left(\frac{1}{2};0;0\right)$ et $G\left(0;\frac{1}{2};0\right)$, on en déduit que $\overline{EG}\begin{vmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{vmatrix}$ et donc que :

$$EG = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

En remplaçant dans la relation (a) on obtient : $EM \times \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ **(b)**.

c) Montrons que pour α variable de $[0,\pi]$:

$$\alpha \text{ maximal} \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \text{ maximal}$$ **(c)**.

Soit α est un réel variable tel que : $0 \le \alpha \le \alpha_{max} \le \pi$.

On a $0 \le \frac{\alpha}{2} \le \frac{\alpha_{max}}{2} \le \frac{\pi}{2}$, donc comme la fonction sinus est **strictement** croissante sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, en prenant le sinus membre à membre, cette inégalité équivaut à l'inégalité $0 \le \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \le \sin\left(\frac{\alpha_{max}}{2}\right) \le \sin\frac{\pi}{2} = 1$ ce qui prouve que $\left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)_{max} = \sin\left(\frac{\alpha_{max}}{2}\right)$.

On en déduit finalement que $\alpha = \alpha_{max} \Leftrightarrow \sin\frac{\alpha}{2} = \sin\frac{\alpha_{max}}{2} = \left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)_{max}$ c'est-à-dire l'équivalence **(c).**

d) Avant de montrer l'équivalence, on remarque que $EM > 0$ et donc $EM \neq 0$ ce qui entraîne que $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2} \times EM}$ **(d)** d'après **(b).**

D'après l'équivalence **(c)** et l'égalité **(d)** :

$$\alpha \text{ maximal} \Leftrightarrow \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2} \times EM} \text{ maximal} \Leftrightarrow EM \text{ minimale}.$$

e) D'après a), $EM^2 = \frac{3}{2}k^2 - \frac{5}{2}k + \frac{5}{4}$ donc $EM = \sqrt{\frac{3}{2}k^2 - \frac{5}{2}k + \frac{5}{4}} = f(k)$.

Il suffit donc d'étudier la fonction f sur $\mathbb{R}$ pour répondre à la question.

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(k) = \frac{3k - \frac{5}{2}}{2\sqrt{\frac{3}{2}k^2 - \frac{5}{2}k + \frac{5}{4}}}$ qui est du signe de $3k - \frac{5}{2}$ sur $\mathbb{R}$.

On a donc le tableau de variations suivant :

k	$-\infty$		$\frac{5}{6}$		$+\infty$
f'(k)		−	0	+	
f	$+\infty$	↘	$\frac{\sqrt{30}}{12}$	↗	$+\infty$

Le point M pour lequel l'angle géométrique $\alpha = \widehat{EMG}$ est maximal est tel que :

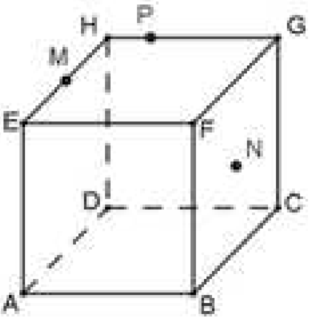
$$k = \frac{5}{6} \text{ et vérifie donc } \overline{DM} = \frac{5}{6}\overline{DF}.$$

D'après le tableau de variations précédent, la valeur $\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2} \times EM}$ est maximale pour $EM = \frac{\sqrt{30}}{12}$.

On en déduit que $\sin\left(\frac{\alpha_{max}}{2}\right) = \left(\sin\frac{\alpha}{2}\right)_{max} = \frac{1}{2\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{30}}{12}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$ et finalement que $\alpha_{max} = 102°$ au degré près.

12 Intersections de droites avec un cube – Méthodes 6, 10 et 14

On a le cube ABCDEFGH suivant où M et N sont les milieux respectifs de $[EH]$ et $[FC]$ et P le point tel que $\overline{HP} = \frac{1}{4}\overline{HG}$.



L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A, \overline{AB}, \overline{AD}, \overline{AE}\right)$.

1) On a : $M\left(0\,;\ \frac{1}{2}\,;\ 1\right)$, $P\left(\frac{1}{4}\,;\ 1\,;\ 1\right)$, $F(1\,;\ 0\,;\ 1)$, $G(1\,;\ 1\,;\ 1)$ et $N\left(1\,;\ \frac{1}{2}\,;\ \frac{1}{2}\right)$.

2) Comme $\overline{MP}\begin{vmatrix}\frac{1}{4}\\ \frac{1}{2}\\ 0\end{vmatrix}$ est colinéaire à $\vec{u}\begin{vmatrix}1\\ 2\\ 0\end{vmatrix}$, une représentation paramétrique de (MP) est $\begin{cases} x = k \\ y = \frac{1}{2} + 2k \\ z = 1 \end{cases}$ avec $k \in \mathbb{R}$.

Comme $\overrightarrow{FG}\begin{vmatrix}0\\1\\0\end{vmatrix}$, une représentation paramétrique de (FG) est $\begin{cases}x=1\\y=k'\\z=1\end{cases}$ avec $k'\in\mathbb{R}$.

Pour obtenir les coordonnées de L il suffit de résoudre $\begin{cases}k=1\\\frac{1}{2}+2k=k'\\1=1\end{cases}$.

On obtient $k=1$ et $k'=\frac{5}{2}$, ce qui donne $L\left(1\,;\,\frac{5}{2}\,;\,1\right)$.

3) Comme $\overrightarrow{LN}\begin{vmatrix}0\\-2\\-\frac{1}{2}\end{vmatrix}$ est colinéaire à $\vec{v}\begin{vmatrix}0\\4\\1\end{vmatrix}$, une représentation paramétrique de (LN) est $\begin{cases}x=1\\y=\frac{1}{2}+4k\\z=\frac{1}{2}+k\end{cases}$ avec $k\in\mathbb{R}$.

Comme $\overrightarrow{CG}\begin{vmatrix}0\\0\\1\end{vmatrix}$, une représentation paramétrique de (CG) est $\begin{cases}x=1\\y=1\\z=1+k'\end{cases}$ avec $k'\in\mathbb{R}$.

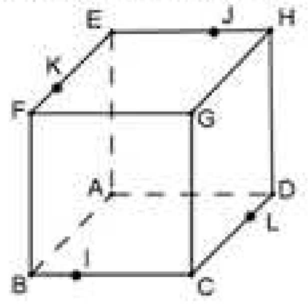
Pour obtenir les coordonnées de L il suffit de résoudre $\begin{cases}1=1\\\frac{1}{2}+4k=1\\\frac{1}{2}+k=1+k'\end{cases}$.

On obtient $k=\frac{1}{8}$ et $k'=-\frac{3}{8}$, ce qui donne $Q\left(1\,;\,1\,;\,\frac{5}{8}\right)$.

4) Comme $\overrightarrow{PQ}\begin{vmatrix}\frac{3}{4}\\0\\-\frac{3}{8}\end{vmatrix}$ et $\overrightarrow{NQ}\begin{vmatrix}0\\\frac{1}{2}\\\frac{1}{8}\end{vmatrix}$ on a $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{NQ}=-\frac{3}{64}\neq 0$, donc les vecteurs $\overrightarrow{PQ}$ et $\overrightarrow{NQ}$ ne sont pas orthogonaux ce qui prouve que le triangle QPN n'est pas rectangle en Q.

13 Section d'un cube – Méthodes 5, 6, 9, 10 et 19

On a le cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1.



L'espace est rapporté au repère orthonormé $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

Sur la figure, $I\left(1;\frac{1}{3};0\right)$, $J\left(0;\frac{2}{3};1\right)$, $K\left(\frac{3}{4};0;1\right)$ et $L(a;1;0)$ avec $a \in [0;1]$.

Partie A

1) Comme $\overrightarrow{IJ}\begin{vmatrix}-1\\ \frac{1}{3}\\ 1\end{vmatrix}$, une représentation paramétrique de la droite (IJ) est

$$\begin{cases} x = 1-k \\ y = \frac{1}{3}+\frac{1}{3}k \\ z = k \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

2) Comme $\overrightarrow{KL}\begin{vmatrix}a-\frac{3}{4}\\ 1\\ -1\end{vmatrix}$, une représentation paramétrique de la droite (KL) est

$$\begin{cases} x = \frac{3}{4}+\left(a-\frac{3}{4}\right)k' \\ y = k' \\ z = 1-k' \end{cases} \quad \text{avec } k' \in \mathbb{R}.$$

3) Les droites (IJ) et (KL) sont sécantes si et seulement si le système

$$\begin{cases} 1-k = \frac{3}{4}+\left(a-\frac{3}{4}\right)k' \\ \frac{1}{3}+\frac{1}{3}k = k' \\ k = 1-k' \end{cases} \quad \text{admet une solution unique.}$$

$$\begin{cases} 1-k=\frac{3}{4}+\left(a-\frac{3}{4}\right)k' \\ \frac{1}{3}+\frac{1}{3}k=k' \\ k=1-k' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}k-k'=-\frac{1}{3} \\ k+k'=1 \\ 1-k=\frac{3}{4}+\left(a-\frac{3}{4}\right)k' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=\frac{1}{2} \\ k'=\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}=\frac{3}{4}+\left(a-\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=\frac{1}{2} \\ k'=\frac{1}{2} \\ a=\frac{1}{4} \end{cases}.$$

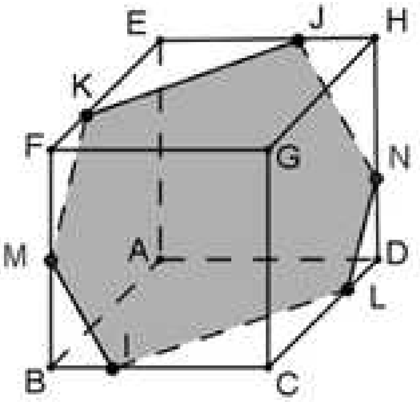
Ainsi les droites (IJ) et (KL) sont sécantes si et seulement si $a=\frac{1}{4}$.

Partie B

Dans cette partie on pose $a=\frac{1}{4}$ et donc $L\left(\frac{1}{4};1;0\right)$.

1) Comme $\overrightarrow{IK}\begin{vmatrix}-\frac{1}{4}\\-\frac{1}{3}\\1\end{vmatrix.$ et $\overrightarrow{LJ}\begin{vmatrix}-\frac{1}{4}\\-\frac{1}{3}\\1\end{vmatrix.$ on a $\overrightarrow{IK}=\overrightarrow{LJ}$ et le quadrilatère IKJL est un parallélogramme.

2) Sur la figure suivante on a représenté la section du cube ABCDEFG par le plan (IJK).



a) Comme $\overrightarrow{IJ}\begin{vmatrix}-1\\\frac{1}{3}\\1\end{vmatrix.$ et $\overrightarrow{IK}\begin{vmatrix}-\frac{1}{4}\\-\frac{1}{3}\\1\end{vmatrix.$ n'ont pas des coordonnées proportionnelles ils ne sont pas colinéaires donc les trois points I, J et K ne sont pas alignés et définissent un plan.

D'autre part on a d'abord $\vec{n}\cdot\overrightarrow{IJ}=(8)(-1)+(9)\left(\frac{1}{3}\right)+5=-8+3+5=0$ et ensuite

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{IK}=(8)\left(-\frac{1}{4}\right)+(9)\left(-\frac{1}{3}\right)+5=-2-3+5=0$, donc $\vec{n}\begin{vmatrix}8\\9\\4\end{vmatrix.$ est normal au plan (IJK).

b) On déduit de la question précédente qu'une équation du plan (IJK) est de la forme $8x+9y+5z+d=0$.

Comme I est un point de (IJK) $8(1)+9\left(\frac{1}{3}\right)+5(0)+d=0$ donc $d=-11$ et une équation de (IJK) est $8x+9y+5z-11=0$.

c) Comme $\overrightarrow{BF}\begin{vmatrix}0\\0\\1\end{vmatrix}$, une représentation paramétrique de la droite (BF) est $\begin{cases}x=1\\y=0\\z=k\end{cases}$ avec $k\in\mathbb{R}$.

Puisque M est le point d'intersection de (BF) et (IJK) la détermination de ses coordonnées amène à résoudre $\begin{cases}x=1\\y=0\\z=k\\8x+9y+5z-11=0\end{cases}$

$$\begin{cases}x=1\\y=0\\z=k\\8x+9y+5z-11=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=0\\z=k\\8+5k-11=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=\frac{5}{3}\\x=1\\y=0\\z=\frac{3}{5}\end{cases}\Leftrightarrow M\left(1;0;\frac{3}{5}\right).$$

Comme $\overrightarrow{DH}\begin{vmatrix}0\\0\\1\end{vmatrix}$, une représentation paramétrique de la droite (DH) est $\begin{cases}x=0\\y=1\\z=k\end{cases}$ avec $k\in\mathbb{R}$.

Puisque N est le point d'intersection de (DH) et (IJK) la détermination de ses coordonnées amène à résoudre $\begin{cases}x=0\\y=1\\z=k\\8x+9y+5z-11=0\end{cases}$

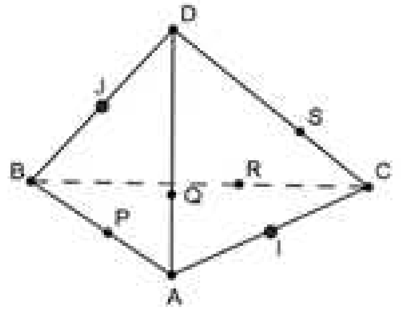
$$\begin{cases}x=0\\y=1\\z=k\\8x+9y+5z-11=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=0\\y=1\\z=k\\9+5k-11=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=\frac{2}{5}\\x=0\\y=1\\z=\frac{2}{5}\end{cases}\Leftrightarrow N\left(0;1;\frac{2}{5}\right).$$

14 Ensemble de points – Associativité du barycentre – Approfondissement

Méthodes 20, 21 et 23

On a le tétraèdre suivant où $\overline{AP}=\frac{1}{3}\overline{AB}$, $\overline{AQ}=\frac{1}{3}\overline{AD}$, $\overline{CR}=\frac{1}{3}\overline{CB}$ et $\overline{CS}=\frac{1}{3}\overline{CD}$.

Les points I et J sont les milieux respectifs des segments $\lfloor AC \rfloor$ et $\lfloor BD \rfloor$.



1) a) Notons $\overline{f(M)}=2\overline{MA}+\overline{MB}+\overline{MC}-\overline{MD}$ et $\overline{g(M)}=\overline{MA}-\overline{MC}$ les deux fonctions vectorielles de Leibniz de cette question.

Comme la somme des coefficients des vecteurs de $\overline{g(M)}=\overline{MA}-\overline{MC}$ est nulle c'est un vecteur constant donc de $\overline{g(M)}=\overline{g(C)}=\overline{CA}$.

D'autre part, en notant $G'=\mathrm{Bar}\{(A,2),(B,1),(C,1),(D,-1)\}$ on a : $\overline{f(M)}=3\overline{MG'}$.

Finalement on obtient :

$$\left\|2\overline{MA}+\overline{MB}+\overline{MC}-\overline{MD}\right\|=\left\|\overline{MA}-\overline{MC}\right\| \Leftrightarrow \left\|\overline{f(M)}\right\|=\left\|\overline{g(M)}\right\| \Leftrightarrow \left\|3\overline{MG'}\right\|=\left\|\overline{CA}\right\|$$

$$\Leftrightarrow G'M=\frac{1}{3}AC.$$

L'ensemble cherché est donc la sphère de centre G' et de rayon $\frac{1}{3}AC$.

b) En notant K le milieu de $\lfloor AD \rfloor$ on a : $\overline{h(M)}=\overline{MA}+\overline{MD}=2\overline{MK}$.

On en déduit :

$$\left\|2\overline{MA}+\overline{MB}-\overline{MC}\right\|=\left\|\overline{MA}+\overline{MD}\right\| \Leftrightarrow \left\|\overline{f(M)}\right\|=\left\|\overline{h(M)}\right\| \Leftrightarrow \left\|2\overline{MG'}\right\|=\left\|2\overline{MK}\right\|$$

$$\Leftrightarrow MG'=MK.$$

L'ensemble cherché est donc le plan médiateur du segment $\lfloor G'K \rfloor$.

2) a) $\overline{AP}=\frac{1}{3}\overline{AB} \Leftrightarrow 3\overline{AP}=\overline{AB} \Leftrightarrow 3\overline{AP}=\overline{AP}+\overline{PB} \Leftrightarrow \bar{0}=-2\overline{AP}+\overline{PB} \Leftrightarrow 2\overline{PA}+\overline{PB}=\bar{0}$

$\Leftrightarrow P=\mathrm{Bar}\{(A,2);(B,1)\}$.

De même :

$$Q=\mathrm{Bar}\{(A,2);(D,1)\},\ R=\mathrm{Bar}\{(C,2);(B,1)\} \text{ et } S=\mathrm{Bar}\{(C,2);(D,1)\}.$$

Comme I et J sont les milieux respectifs des segments $\lfloor AC \rfloor$ et $\lfloor BD \rfloor$:

$$I = \text{Bar}\{(A,1);(C,1)\} \text{ et } J = \text{Bar}\{(B,1);(D,1)\}.$$

b) On utilise le coup de pouce pour interpréter le milieu $[PS]$ comme un barycentre des quatre points A, B, C et D affectés de coefficients adéquats.
Le milieu G de $[PS]$ est tel que $G = \text{Bar}\{(P,1);(S,1)\} = \text{Bar}\{(P,3);(S,3)\}$.

Par conséquent en appliquant le théorème du barycentre partiel on a $\text{Bar}\{(A,2);(B,1);(C,2);(D,1)\} = \text{Bar}\{(P,3);(S,3)\} = G$ car $P = \text{Bar}\{(A,2);(B,1)\}$ et $S = \text{Bar}\{(C,2);(D,1)\}$.

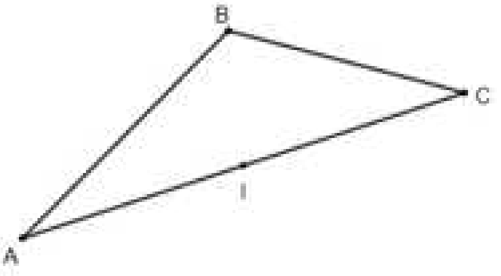
Comme $G = \text{Bar}\{(A,2);(B,1);(C,2);(D,1)\}$, puisque d'une part on a $Q = \text{Bar}\{(A,2);(D,1)\}$ et que d'autre part on a $R = \text{Bar}\{(C,2);(B,1)\}$, en appliquant le théorème du barycentre partiel au point G il vient $G = \text{Bar}\{(Q,3);(R,3)\} = \text{Bar}\{(Q,1);(R,1)\}$ ce qui prouve que G est le milieu du segment $[QR]$.

Comme $G = \text{Bar}\{(A,2);(B,1);(C,2);(D,1)\}$, puisque d'une part on a $I = \text{Bar}\{(A,2);(C,2)\}$ et que d'autre part on a $J = \text{Bar}\{(B,1);(D,1)\}$, en appliquant le théorème du barycentre partiel au point G il vient $G = \text{Bar}\{(I,4);(J,2)\} = \text{Bar}\{(I,2);(J,1)\}$ ce qui prouve que $G \in [IJ]$.

Finalement les trois segments $[QR]$, $[PS]$ et $[IJ]$ sont concourants en G.

$\boxed{15}$ **Lieux de barycentres – Approfondissement – Méthodes 20, 21 et 22**

On a la famille de barycentres $G_k = \text{Bar}\{(A,k),(B,-2k),(C,k+2)\}$ où k varie dans $\mathbb{R}$ et A, B et C sont trois points non alignés de l'espace.
D'autre part le point I est le milieu du segment $[AC]$.

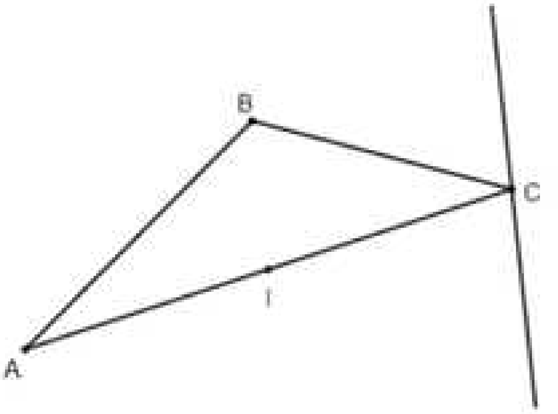


1) Pour tout $k \in \mathbb{R}$ la somme des coefficients des points dont G_k est le barycentre est égale à 2, donc elle est non nulle, ce qui assure l'existence de G_k pour tout $k \in \mathbb{R}$.

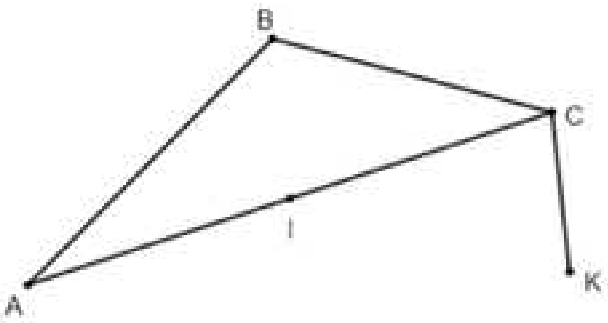
2) Comme $G_k = \text{Bar}\{(A,k),(B,-2k),(C,k+2)\}$ on a : $k\overrightarrow{G_kA} - 2k\overrightarrow{G_kB} + (k+2)\overrightarrow{G_kC} = \vec{0}$.

On en déduit que $k\left(\underbrace{\overrightarrow{G_kA} - 2\overrightarrow{G_kB} + \overrightarrow{G_kC}}_{\overrightarrow{f(G_k)}}\right) + 2\overrightarrow{G_kC} = \vec{0}$, donc comme la somme des coefficients de la fonction vectorielle de Leibniz $\overrightarrow{f(G_k)}$ est nulle, on a par exemple $\overrightarrow{f(G_k)} = \overrightarrow{f(B)} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BI}$, ce qui donne $2k\overrightarrow{BI} + 2\overrightarrow{G_kC} = \vec{0}$ et finalement $\overrightarrow{CG_k} = k\overrightarrow{BI}$.

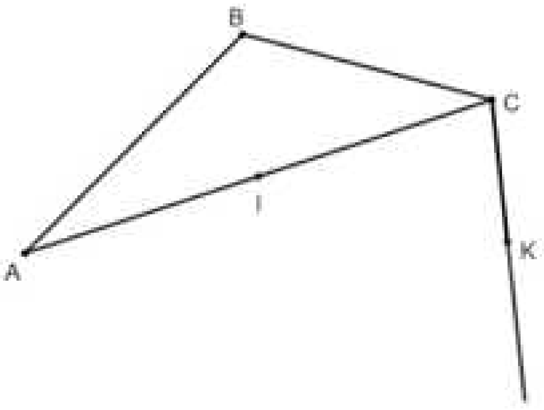
Le lieu décrit par la famille G_k lorsque k décrit $\mathbb{R}$ est donc la droite passant par C de vecteur directeur $\overrightarrow{BI}$.



3) Le lieu décrit par la famille G_k lorsque k décrit l'intervalle $[0,1]$ est le segment $[CK]$ où K est tel que $\overrightarrow{CK} = \overrightarrow{BI}$.

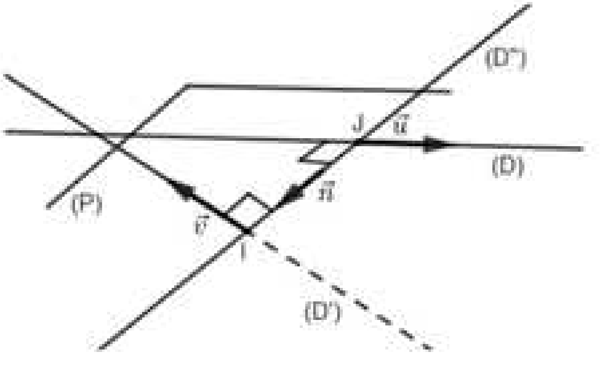


4) Le lieu décrit par la famille G_{k^2} lorsque k décrit $\mathbb{R}$ est la demi-droite $[CK)$ car $\overrightarrow{CG_{k^2}} = k^2\overrightarrow{BI}$.



16 **Existence et unicité de la perpendiculaire commune à deux droites non coplanaires – Approfondissement – Distance entre ces deux droites – Méthodes 9, 14 et 19**

On a deux droites (D) et (D') non coplanaires de vecteurs directeurs respectifs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, un vecteur normal $\vec{n}$ orthogonal à $\vec{u}$ et $\vec{v}$, ainsi que le plan (P) contenant (D) et dont $\vec{n}$ est un vecteur.



1) Supposons que (D') et (P) ne sont pas sécants en un point I.

Dans ce cas (D') est parallèle à (P) et donc le vecteur $\vec{v}$ est une combinaison linéaire de $\vec{u}$ et $\vec{n}$.

Il existe donc deux réels α et β tels que $\vec{v} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{n}$.

$$\vec{v} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{n} \Rightarrow \vec{v}\bullet\vec{n} = \left(\alpha\vec{u} + \beta\vec{n}\right)\bullet\vec{n} \Rightarrow 0 = \alpha\vec{u}\bullet\vec{n} + \beta\times\left\|\vec{n}\right\|^2 \Rightarrow 0 = \beta\times\left\|\vec{n}\right\|^2 \Rightarrow \beta = 0$$

$\vec{v} = \alpha\vec{u}$ et donc (D') parallèle à (D).

Ceci est absurde car comme les droites (D) et (D') ne sont pas coplanaires elles ne peuvent pas être parallèles.

Par l'absurde, (D') et (P) sont sécants en un point I.

2) La droite (D'') passant par I et de vecteur directeur $\vec{n}$ est une droite de (P) sécante à (D) en un point J.

D'une part $\overrightarrow{IJ} \cdot \vec{u} = \lambda \vec{n} \cdot \vec{u} = 0$ et $\overrightarrow{IJ} \cdot \vec{v} = \lambda \vec{n} \cdot \vec{v} = 0$, ce qui assure que (IJ) est une perpendiculaire commune à (D) et (D') et d'autre part l'unicité du point I assure l'unicité du point J et par conséquent l'unicité de la perpendiculaire commune (IJ) à (D) et (D').

3) Le résultat reste vrai car l'unique perpendiculaire commune aux deux droites est la droite passant par I et perpendiculaire au plan contenant les deux droites.

REMARQUE : Si les droites sont parallèles, il y a une infinité de perpendiculaires communes.

4) Application : L'espace est rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

On a les points $A(1\,;\,1\,;\,0)$, $B(0;2;1)$, $C(0;0;1)$ et $D(0;0;-1)$.

a) Comme $\overrightarrow{AB}\begin{vmatrix}-1\\1\\1\end{vmatrix}$, une représentation paramétrique de la droite (AB) est

$$\begin{cases} x = 1-k \\ y = 1+k \\ z = k \end{cases} \text{avec } k \in \mathbb{R}.$$

Comme $\overrightarrow{CD}\begin{vmatrix}0\\0\\-2\end{vmatrix}$, une représentation paramétrique de la droite (CD) est

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = -2k' \end{cases} \text{avec } k' \in \mathbb{R}.$$

Déterminer l'intersection des deux droites (AB) et (CD) amène à résoudre $\begin{cases} 1-k=0 \\ 1+k=0 \\ k=-2k' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=1 \\ k=-1 \\ k=-k' \end{cases}$ qui n'a pas de solution donc les deux droites (AB) et (CD) ne sont pas sécantes.

Comme $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ ont des coordonnées non proportionnelles, les deux vecteurs ne sont pas colinéaires et les deux droites non sécantes (AB) et (CD) ne sont pas parallèles et donc finalement elles ne sont pas coplanaires.

b) D'après la question précédente, elles admettent donc une perpendiculaire commune unique (IJ) avec $I \in (AB)$ et $J \in (CD)$.

Comme $I \in (AB)$, il existe $k_I \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} x_I = 1 - k_I \\ y_I = 1 + k_I \\ z_I = k_I \end{cases}$.

Comme $J \in (CD)$, il existe $k_J \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{cases} x_J = 0 \\ y_J = 0 \\ z_J = -2k_J \end{cases}$.

Déterminons un vecteur $\vec{n}\begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix}$ orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.

Comme $\begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{CD} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a + b + c = 0 \\ -2c = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c = 0 \\ a = b \end{cases}$, en prenant $a = 1$, $\vec{n}\begin{vmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix}$.

Comme $\overrightarrow{IJ}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{IJ} = \lambda\vec{n}$ ce qui entraîne $\begin{cases} x_J - x_I = \lambda \\ y_J - y_I = \lambda \\ z_J - z_I = 0 \end{cases}$.

Comme $\begin{cases} x_J - x_I = \lambda \\ y_J - y_I = \lambda \\ z_J - z_I = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -1 + k_I = \lambda \\ -1 - k_I = \lambda \\ -2k_J - k_I = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = -1 \\ k_I = 0 \\ k_J = 0 \end{cases}$, on en déduit que $I(1\,;1\,;0)$ et que $J(0;0;0)$.

REMARQUE : Le fait que $I = A$ est que J soit le centre du repère est une coïncidence propre à l'exercice.

Une représentation paramétrique de (IJ) est $\begin{cases} x = k \\ y = k \\ z = 0 \end{cases}$.

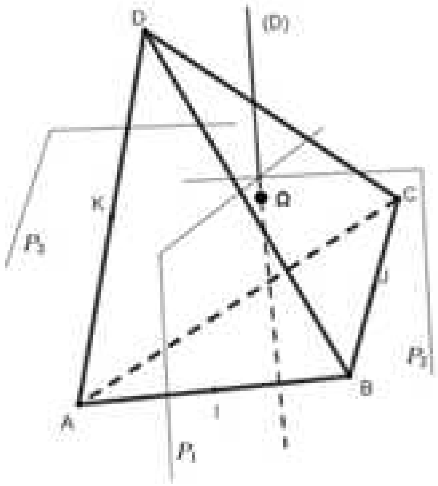
c) La distance entre les deux droites est $IJ = \sqrt{(0-1)^2 + (0-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}$.

$\boxed{17}$ Existence et unicité d'une sphère circonscrite à un tétraèdre – Approfondissement – Méthodes 1, 9, 10, 11, 12 et 13

On a la figure suivante où ABCD est un tétraèdre avec (P_1), (P_2) et (P_3) les plans médiateurs respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[DA]$.

On considère également la droite $(D) = (P_1) \cap (P_2)$ et le point $\Omega = (D) \cap (P_3)$.

Enfin les points I, J et K désignent les milieux respectifs des segments $[AB]$, $[BC]$ et $[DA]$.



1) Supposons que les plans (P_1) et (P_2) sont parallèles.

Comme les vecteurs $\overline{AB}$ et $\overline{BC}$ sont respectivement normaux aux plans (P_1) et (P_2) et que ces plans sont parallèles, les deux vecteurs sont colinéaires et par suite les points A, B et C sont alignés.

Cela est absurde puisque ABCD est un tétraèdre donc les plans (P_1) et (P_2) ne sont pas parallèles et par conséquent sécants selon une droite (D) dont un vecteur directeur $\vec{n}$ est normal au plan (ABC) (les vecteurs $\overline{AB}$ et $\overline{BC}$ non colinéaires du plan (ABC) sont orthogonaux à $\vec{n}$).

2) Supposons que (D) de vecteur directeur $\vec{n}$ et (P_3) sont parallèles.

Comme $\overline{DA}$ est normal à (P_3) et que (D) et (P_3) sont parallèles alors les vecteurs $\overline{DA}$ et $\vec{n}$ sont orthogonaux et donc $\overline{DA}$ est un vecteur du plan (ABC) puisque le vecteur $\vec{n}$ est normal à ce plan.

Cela induit que les vecteurs $\overline{DA}$, $\overline{AB}$ et $\overline{AC}$ sont coplanaires et donc que les points A, B, C et D le sont également.

C'est absurde puisque ABCD est un tétraèdre, ce qui prouve que (D) et (P_3) ne sont pas parallèles et par conséquent que la droite (D) coupe le plan (P_3) en un point Ω.

3) Comme $\Omega \in (P_1)$ on a : $\Omega A = \Omega B$.

Comme $\Omega \in (P_2)$ on a : $\Omega B = \Omega C$.

Comme $\Omega \in (P_3)$ on a : $\Omega A = \Omega D$.

Finalement on en déduit que $\Omega A = \Omega B = \Omega C = \Omega D$ ce qui démontre l'existence d'une sphère de centre Ω circonscrite au tétraèdre ABCD.
L'unicité de Ω comme intersection des plans (P_1), (P_2) et (P_3) assure l'unicité de la sphère.

4) Application : l'espace est rapporté au repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.
On a les points $A(1;1;0)$, $B(0;2;1)$, $C(0;0;1)$ et $D(0;0;-1)$ et l'on conserve les notations des questions précédentes.
a) Pour montrer que ABCD est un tétraèdre il suffit de prouver que les droites (AB) et (CD) ne sont pas coplanaires ce que l'on a fait à la question 4) a) de l'exercice précédent.

b) La droite (D) est l'intersection de (P_1) et (P_2) ce qui nous amène dans un premier temps à déterminer une équation de chacun de ces plans.

Le plan (P_1) admet $\overrightarrow{AB}\begin{vmatrix}-1\\1\\1\end{vmatrix}$ comme vecteur normal donc il a une équation de la forme $-x+y+z+d=0$.
Comme $I\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$ est un point de (P_1), $-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}+\frac{1}{2}+d=0$ donc $d=-\frac{3}{2}$ et finalement $-x+y+z-\frac{3}{2}=0$ est une équation de (P_1).

Le plan (P_2) admet $\overrightarrow{BC}\begin{vmatrix}0\\-2\\0\end{vmatrix}$ comme vecteur normal donc il a une équation de la forme $-2y+d=0$.
Comme $J(0,1,1)$ est un point de (P_2), $-2+d=0$ donc $d=2$ et finalement $-2y+2=0$ est une équation de (P_2).

Pour trouver une représentation paramétrique de (D), on est amené à considérer le système :

$$\begin{cases}-x+y+z-\frac{3}{2}=0\\-2y+2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2x+2y+2z-3=0\\y=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=1\\-2x+2+2z-3=0\end{cases}.$$

En prenant $z=k$ on obtient $\begin{cases} x=-\frac{1}{2}+k \\ y=1 \\ z=k \end{cases}$ avec $k\in\mathbb{R}$, comme représentation paramétrique de (D).

c) Pour déterminer les coordonnées de Ω il faut résoudre le système formé par une représentation paramétrique de (D) et une équation de (P_3).

Le plan (P_3) admet $\overrightarrow{DA}\begin{vmatrix}1\\1\\1\end{vmatrix}$ comme vecteur normal donc il a une équation de la forme $x+y+z+d=0$.

Comme $K\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$ est un point de (P_3), $\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+d=0$ donc $d=-\frac{1}{2}$ et finalement $x+y+z-\frac{1}{2}=0$ est une équation de (P_3).

Le système qui permet d'obtenir Ω est donc : $\begin{cases} x=-\frac{1}{2}+k \\ y=1 \\ z=k \\ x+y+z-\frac{1}{2}=0 \end{cases}$.

On a : $\begin{cases} x=-\frac{1}{2}+k \\ y=1 \\ z=k \\ x+y+z-\frac{1}{2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-\frac{1}{2}+k \\ y=1 \\ z=k \\ -\frac{1}{2}+k+1+k-\frac{1}{2}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=0 \\ x=-\frac{1}{2} \\ y=1 \\ z=0 \end{cases}$.

Le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD est donc $\Omega\left(-\frac{1}{2},1,0\right)$.

d) Pour déterminer une équation de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD il faut son rayon $R=\Omega A=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+0^2+0^2}=\frac{3}{2}$ car $\overrightarrow{\Omega A}\begin{vmatrix}\frac{3}{2}\\0\\0\end{vmatrix}$.

Une équation de la sphère est donc $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+(y-1)^2+z^2=\frac{9}{4}$.

Chapitre 6
METHODES SUR LA COMBINATOIRE ET LE DENOMBREMENT
EXERCICES & CORRIGES

Exercices

1 Liste d'ensemble – Méthode 1

On considère une urne contenant 4 boules blanches, 3 boules noires et 2 boules rouges.
On extrait au hasard simultanément 3 boules de cette urne et l'on considère les événements A, B, C et D suivants.
A : le tirage est unicolore,
B : le tirage comporte exactement 1 boule blanche et 2 boules noires,
C : le tirage ne comporte pas de boules blanches,
D : le tirage comporte au moins une boule blanche ou une boule rouge.

1) Déterminez le nombre d'issues possibles en les listant.
2) Déterminez les cardinaux de A, B, C et D.
3) Y a-t-il équiprobabilité ? Pourquoi ?

2 Tableau – Méthode 2

Un buffet propose un repas avec une entrée et un plat parmi trois entrées (E_1, E_2, E_3) et deux plats (P_1, P_2).

1) Donnez le nombre de repas possibles en construisant un tableau.
2) Déterminez le nombre de repas avec E_1 ou P_2.

3 Arbre – Méthodes 2 et 3

Suite à une demande de la clientèle le buffet précédent rajoute à son menu deux desserts (D_1, D_2) et propose un repas avec une entrée, un plat et un dessert.

1) Donnez le nombre de repas possibles en construisant un tableau.
2) Proposez une autre modélisation pour donner le nombre de repas possibles.
3) Déterminez le nombre de repas avec E_1 ou P_2.

4 **Diagramme – Méthode 4**

On considère un groupe de 140 musiciens qui pratiquent au moins le violon, la clarinette ou le piano.
Parmi eux :
75 pratiquent au moins le violon (a)
65 pratiquent au moins la clarinette (b)
45 pratiquent au moins le piano (c)
25 pratiquent au moins la clarinette et le piano (d)
15 pratiquent au moins le violon et le piano (e)
10 pratiquent les trois instruments (f).

1) Combien de musiciens ne pratiquent que le violon ?
2) Combien de musiciens pratiquent le violon et la clarinette mais ne pratiquent pas le piano ?
3) Combien de musiciens ne pratiquent que la clarinette ?

5 **Tirage successif avec remise – Méthode 5**

On considère une urne contenant 6 boules blanches numérotées de 1 à 6, 7 boules noires numérotées de 1 à 7 et 8 boules rouges numérotées de 1 à 8.
On extrait au hasard **successivement avec remise** 5 boules de cette urne et l'on considère les événements A, B, C et D suivants.
A : le tirage est unicolore,
B : le tirage comporte exactement 2 boules blanches et 3 boules noires,
C : le tirage ne comporte pas de boules blanches,
D : le tirage comporte au moins une boule blanche.

1) Déterminez le nombre d'issues possibles ($\text{card}\Omega$).
2) Déterminez les probabilités des événements A, B, C et D.

6 **Tirage successif sans remise – Méthode 5**

On reprend l'urne de l'exercice 5 mais on effectue un tirage **successif sans remise** de 5 boules.

Répondez aux mêmes questions que dans l'exercice 5 dans ce cas.

7 **Tirage simultané – Méthode 6**

On reprend l'urne de l'exercice 5 mais on effectue un **tirage simultané** de 5 boules.

Répondez aux mêmes questions que dans l'exercice 5 dans ce cas.

8 **Combinaison avec répétition – Méthode 7**

On reprend l'urne de l'exercice 5 mais **sans numéroter les boules** et en effectuant un tirage **simultané de sept boules**.

1) Déterminez le nombre de tirages possibles.
2) Déterminez le nombre de tirages avec exactement 4 boules blanches.

9 Formule du binôme – Méthode 9

Exprimez en fonction de n terminez les deux sommes $S=\sum_{k=0}^{n}5^k\binom{n}{k}$ et $S(x)=\sum_{k=0}^{n}x^k\binom{n}{k}$ et expliquez pourquoi $S(x)$ permet de retrouver S.

10 Développement du binôme – Méthodes 10 et 11

1) Développez $(1+2x)^5$ en utilisant le triangle de Pascal.

2) Pourquoi est-il plus problématique de développer $(1+2x)^8$ avec la méthode de la question précédente ? Comment résoudre le problème ?

11 Génération aléatoire d'une combinaison – Méthode 12

Suite à des suspicions de triche, juste avant le départ d'une course de F1 de 20 monoplaces, on désire contrôler la conformité d'un échantillon de quatre d'entre elles de façon aléatoire.

Donnez un algorithme en langage Python permettant de résoudre ce problème.

12 Représentation d'un groupe d'individus – Méthodes 5, 6 et 12

On considère un groupe de 50 personnes dont 30 femmes et 20 hommes.

1) Ce groupe souhaite désigner un bureau parmi ses membres avec un président, un vice-président, un trésorier et un secrétaire dans le cadre de la création d'une association.
Combien de bureaux sont-ils possibles ?
2) Combien de bureaux sont-ils possibles avec 2 hommes et 2 femmes ?
3) Pour les représenter à un congrès, le groupe souhaite désigner de façon aléatoire trois personnes parmi les membres non titulaires d'une fonction au bureau.
Combien de choix sont-ils possibles ?
4) Donnez un algorithme en langage Python qui permet de désigner trois personnes au hasard dans le cadre de la question 3.

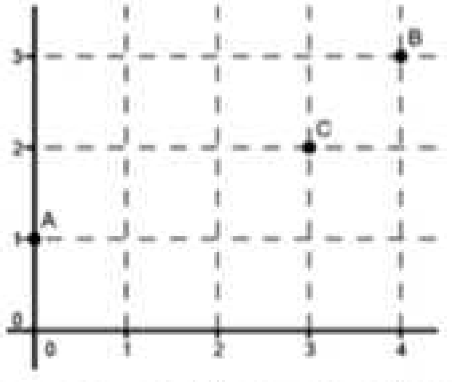
13 Mots multiples et variés – Méthodes 5 et 12

1) Le procédé ASCII propose de coder 128 caractères (lettres de l'alphabet européen en minuscule et majuscule, chiffres romains, ponctuation, retour à la ligne ...) en langage binaire (succession de 1 et de 0 de longueur donnée).
a) Quel doit être la longueur minimale des mots codés en binaire pour coder l'ensemble des 128 caractères ?
b) Sur le plan informatique, que vous rappelle le nombre trouvé à la question précédente ?
2) L'anagramme d'un mot est un mot formé à partir d'une permutation de ses lettres qu'il ait un sens ou non.
a) Déterminez le nombre d'anagrammes de JEAN.

b) Proposez une méthode permettant d'obtenir un anagramme aléatoire de JEAN à partir d'un programme en langage Python.
c) Pourquoi est-il moins simple de donner les anagrammes de ROBERT ?
En différenciant les deux lettres « R », puis en divisant par un nombre que vous déterminerez, donnez le nombre d'anagrammes de ROBERT.
d) En vous inspirant de la question précédente, déterminez le nombre d'anagrammes du mot ANAGRAMME.

14 L'incontournable fourmi – Méthodes 6 et 12

On considère le quadrillage suivant :



Une fourmi se déplace sur ce quadrillage en partant de A avec à chaque étape un déplacement d'une arête vers la droite ou vers le haut.

1) Déterminez le nombre de trajets amenant la fourmi au point B.
2) Proposez une méthode permettant d'obtenir un chemin aléatoire de A à B à partir d'un programme en langage Python.
3) Parmi ces trajets déterminez ceux qui passent par le point C.
4) Sachant que la fourmi se déplace sur 6 arêtes, quelle est la probabilité qu'elle atteigne le point B ?
5) Sachant que la fourmi se déplace sur 6 arêtes, quelle est la probabilité qu'elle atteigne le point B en passant par C ?
6) Sachant que la souris atteint le point B, quelle est la probabilité qu'elle passe par C ?

15 Le Loto – Méthode 6

Le Loto consiste à choisir 6 numéros au hasard parmi 49.

1) Combien de grilles sont-elles possibles ?
2) Combien y a-t-il de grilles avec exactement 4 bons numéros ?

16 L'Euro Million – Méthode 6

L'Euro Million consiste à choisir 5 numéros au hasard parmi 50 et deux étoiles parmi 12 numéros.

1) Combien de grilles sont-elles possibles ? Pourquoi ne pas s'être limité au territoire français ?
2) Combien y a-t-il de grilles avec exactement 4 bons numéros et une bonne étoile ?

17 Le Loto sportif – Méthode 5

Le loto sportif consiste par exemple à miser sur 10 matches en choisissant pour chaque match 1, N ou 2 selon respectivement que l'équipe qui reçoit gagne, fait match nul ou perd.

1) Combien de grilles sont-elles possibles ?
2) Combien de grilles sont-elles possibles avec exactement 8 bons pronostics ?

18 Le PMU – Méthodes 5, 6 et 12

Le PMU propose de miser par exemple sur les 5 premiers chevaux à l'arrivée (quintet) d'une course de 15 partants.

1) Combien de quintets dans l'ordre sont-ils possibles ?
2) Combien de quintets dans le désordre sont-ils possibles ?
3) Combien y a-t-il de quintets dans le désordre avec exactement 3 des 5 chevaux à l'arrivée ?
4) Simulez un quintet aléatoire en langage Python.

19 Le Poker – Méthode 6

Le Poker consiste par exemple à obtenir une main particulière de 5 cartes dans un jeu de 32 cartes (4 hauteurs du 7 au 10, puis valet, dame, roi et as, et 4 couleurs (trèfle, pique, carreau, cœur)).

1) Combien y a-t-il de carrés possibles (4 cartes de même hauteur) ?
2) Combien y a-t-il de fulls possibles (3 cartes de même hauteur associées à 2 cartes d'une autre hauteur) ?
3) Combien y a-t-il de doubles paires (2 cartes de même hauteur associés à 2 cartes d'une autre hauteur et une carte d'une hauteur différente des 2 déjà envisagées).

20 Démonstrations de la formule de Pascal – Méthodes 8 et 10

1) Pour k et n entiers naturels non nuls tels que $k \le n$, démontrez en utilisant la définition de $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ que $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$ (formule de Pascal).

2) Redémontrez cette formule par un raisonnement « ensembliste ».

3) Application : déterminez sans calculatrice $\binom{199}{197} + \binom{199}{198}$.

21 Démonstration et application de la formule du binôme – Méthode 9

1) Montrez par récurrence en utilisant la formule de Pascal que pour tous x et y réels $(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} x^{n-k} y^k \binom{n}{k}$ pour $k \le n$ entiers naturels (formule du binôme).

2) Déterminez $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$.

22 **Démonstration et application de la formule des combinaisons avec répétition – Méthode 7**

1) Déterminez le nombre de couples d'entiers naturels (x_1, x_2) tels que :

$$x_1 + x_2 = n \ (n \in \mathbb{N}).$$

2) En utilisant 1), déterminez le nombre de triplets d'entiers naturels tels que $x_1 + x_2 + x_3 = n \ (n \in \mathbb{N})$.

3) Plus généralement, pour $p \in \mathbb{N}^*$, on cherche à déterminer le nombre de p-uplets d'entiers naturels tels que $x_1 + x_2 + \cdots + x_p = n \ (n \in \mathbb{N})$.

a) Montrez en utilisant la formule de Pascal sous la forme :

$$\left(\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}\right) \text{ que } \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1} \text{ pour } 0 \leq p \leq n.$$

b) Montrez par récurrence que le nombre de p-uplets d'entiers naturels que l'on cherche est $\binom{n+p-1}{p-1}$ (formule des combinaisons avec répétition).

4) **Une idée géniale !** Pour $n \in \mathbb{N}$ et $p \in \mathbb{N}^*$, retrouvez le résultat précédent en quelques lignes, en pensant à utiliser des $(n+p-1)$-uplets formés de signes « + » et de nombres 1.

Coup de pouce : Le 4-uplet $(2,2,0,1)$, qui est solution de l'équation $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5$ d'inconnu le 4-uplet d'entiers (x_1, x_2, x_3, x_4), correspond au 8-uplet $(1,1,+,1,1,+,+,1)$.

5) On lance trois dés identiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Combien existe-t-il de lancers avec exactement une fois le numéro 2 ?

Corrigés

1 Liste d'ensembles – Méthode 1

1) On commence par lister l'issue à 3 boules blanches, puis celles à 2 boules blanches et ainsi de suite jusqu'à 0 boule blanche ce qui donne :

$$\{B;B;B\},\{B;B;N\},\{B;B;R\},\{B;N;N\},\{B;R;R\};\{B;N;R\};\{N;N;N\};\{N;N;R\};\{N;R;R\}.$$

Finalement si l'on note Ω l'ensemble des issues possibles on a $\text{card}\Omega = 9$.

2) Il suffit de compter les cas favorables aux événements parmi les neuf issues possibles pour répondre à la question.
On obtient : $\text{card}A = 2$, $\text{card}B = 1$, $\text{card}C = 3$, $\text{card}D = 8$.

REMARQUE : Pour obtenir $\text{card}D = 8$, il est judicieux d'utiliser la formule $\text{card}D = \text{card}\Omega - \text{card}\overline{D}$ car l'événement contraire $\overline{D}$ correspond à la seule issue $\{N;N;N\}$ (notez que le « ou » de cette question correspond la réalisation du premier événement, du deuxième ***ou des deux****).*

3) Il n'y a pas équiprobabilité car, par exemple, l'événement élémentaire $\{B;B;B\}$ est plus probable que l'événement élémentaire $\{N;N;N\}$ puisqu'il y a plus de boules blanches que de boules noires.

2 Tableau – Méthode 2

1) Il y a 6 repas possibles comme le montre le tableau demandé :

	P_1	P_2
E_1	(E_1,P_1) **X**	(E_1,P_2) **X**
E_2	(E_2,P_1)	(E_2,P_2) **X**
E_3	(E_3,P_1)	(E_3,P_2) **X**

2) Les cas favorables à la situation correspondent aux croix du tableau.
Il y a donc 4 repas avec E_1 ou P_2.

3 Arbre – Méthodes 2 et 3

1) C'est moins immédiat que dans l'exercice précédent.
En effet, si l'on veut modéliser la situation avec un tableau il faut par exemple commencer par lister tous les couples (plat, dessert) en utilisant la méthode 1, puis associer à chacun une des 3 entrées ce qui donne le tableau suivant :

	(P_1,D_1)	(P_1,D_2)	(P_2,D_1)	(P_2,D_2)
E_1	(E_1,P_1,D_1) **x**	(E_1,P_1,D_2) **x**	(E_1,P_2,D_1) **x**	(E_1,P_2,D_2) **x**
E_2	(E_2,P_1,D_1)	(E_2,P_1,D_2)	(E_2,P_2,D_1) **x**	(E_2,P_2,D_2) **x**
E_3	(E_3,P_1,D_1)	(E_3,P_1,D_2)	(E_3,P_2,D_1) **x**	(E_3,P_2,D_2) **x**

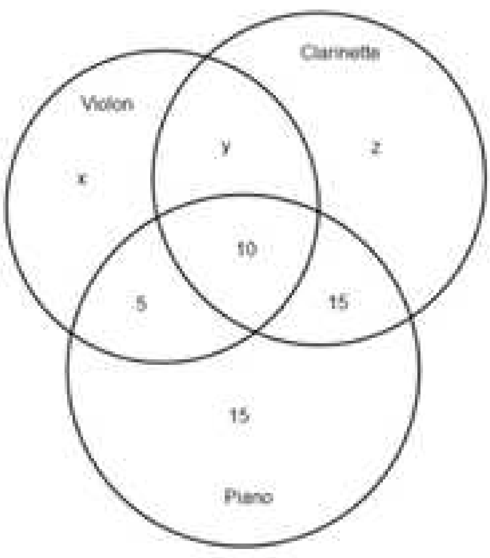
2) On peut modéliser la situation par un triplet de la forme (E,P,D) ou construire un arbre avec 3 branches de 1re espèce et 2 branches de 2e et 3e espèce ce qui donne $N = 3\times2\times2 = 12$ repas possibles en appliquant le principe multiplicatif.
3) Avec le tableau les cas favorables à la situation correspondent aux croix.
Il y a donc N = 8 repas avec E_1 ou P_2.

Avec l'autre modèle il faut additionner le nombre de triplets de la forme (E_1,P,D) et (E,P_2,D) **mais ne pas oublier de soustraire 2** car sinon on compte deux fois les triplets (E_1,P_2,D_1) et (E_1,P_2,D_2).
Par application des principes additif et multiplicatif, le nombre de cas favorables à la situation est $card(E_1 \cup P_2) = 1\times2\times2 + 3\times1\times2 - 2 = 8$.

REMARQUE : Comme il est toujours plus délicat de dénombrer des événements avec des « ou » qu'avec des « et » sous peine d'oublier la soustraction et donc de compter 2 fois le(s) même(s) événement(s) on vous conseille d'appliquer la formule $card(E_1 \cup P_2) = cardE_1 + cardP_2 - card(E_1 \cap P_2)$.
Avec l'exemple de cette question les cas favorables à $E_1 \cap P_2$ *sont de la forme* (E_1,P_2,D) *ce qui donne* $card(E_1 \cap P_2) = 1\times1\times2 = 2$ *en appliquant le principe multiplicatif.*
On retrouve bien $card(E_1 \cup P_2) = 4 + 6 - 2 = 8$.

4 Diagramme – Méthode 4

Commençons par représenter un diagramme pour modéliser la situation en utilisant dans l'ordre les informations (f), (e), (d) et (b)



x, y et z sont respectivement les réponses aux questions 1), 2) et 3).
Comme il y a 140 musiciens, en utilisant le diagramme et les informations (a) et (c) on peut construire le système suivant :

$$\begin{cases} x+y+z+45=140 \\ x+y+15=75 \\ y+z+25=65 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y+z=95 & (L_1) \\ x+y=60 & (L_2) \\ y+z=40 & (L_3) \end{cases}.$$

La résolution du système donne les réponses aux questions.
Question 3 – La soustraction membre à membre $(L_1)-(L_2)$ donne z = 35.

Question 2 – En remplaçant z par 35 dans (L_3) on obtient y = 5.

Question 1 – En remplaçant y par 5 dans (L_2) on obtient x = 55.

$\boxed{5}$ Tirage successif avec remise – Méthode 5

On peut modéliser le tirage par un **5-uplet** des 21 boules de l'urne.

1) Compte tenu de la modélisation, par application du principe multiplicatif on a $\text{card}\Omega = 21^5 = 4\ 084\ 101$.

2) **Détermination de P(A)**

Les cas favorables à l'événement A sont les suivants :

$$(B,B,B,B,B),\ (N,N,N,N,N)\ \text{et}\ (R,R,R,R,R).$$

Par application des principes additif et multiplicatif $\text{card}A = 6^5+7^5+8^5 = 57351$ et donc $P(A) = \dfrac{57351}{4084101} = \dfrac{2731}{194481} = 0{,}014$ arrondie à 3 décimales.

Détermination de P(B)

Les cas favorables à l'événement B avec les 2 boules blanches aux 2 premiers tirages sont de la forme (B,B,N,N,N).

Par application du principe multiplicatif le nombre de cas favorables à la situation qui vient d'être décrite est $6^2 \times 7^3 = 12\ 348$.

Pour répondre à la question il suffit d'appliquer le principe additif en remarquant que l'on peut effectuer le raisonnement précédent autant de fois que l'on peut placer les 2 boules blanches dans les 5 positions possibles c'est-à-dire $\binom{5}{2} = 10$ fois.

On obtient donc $\text{card}B = 10 \times 12348 = 123\ 480$.

Finalement $P(B) = \dfrac{123480}{4084101} = \dfrac{40}{1323} = 0{,}030$ arrondie à 3 décimales.

Détermination de P(C)

Les cas favorables à l'événement C sont de la forme $(\bar{B},\bar{B},\bar{B},\bar{B},\bar{B})$ donc comme il y a 15 boules qui ne sont pas blanches $\text{card}C = 15^5 = 759\ 375$.

Finalement $P(C) = \dfrac{759375}{4084101} = \dfrac{3125}{16807} = 0{,}186$ arrondie à 3 décimales.

Détermination de P(D)
Il suffit de remarquer que l'événement D est l'événement contraire de C et d'appliquer la formule adéquate pour répondre à la question.
Ainsi $P(D)=P(\overline{C})=1-P(C)=1-\frac{3125}{16807}=\frac{13682}{16807}=0{,}814$ arrondie à 3 décimales.

$\boxed{6}$ **Tirage successif sans remise – Méthode 5**
On peut modéliser le tirage par un **5-uplet d'éléments distincts** des 21 boules de l'urne.

1) Compte tenu de la modélisation, par application du principe multiplicatif on a $\text{card}\Omega=21\times20\times19\times18\times17=2\,441\,880$.

2) **Détermination de P(A)**
Les cas favorables à l'événement A sont les suivants :

$$(B,B,B,B,B),\ (N,N,N,N,N)\ \text{et}\ (R,R,R,R,R).$$

Par application des principes additif et multiplicatif on a :

$$\text{card}A=(6\times5\times4\times3\times2)+(7\times6\times5\times4\times3)+(8\times7\times6\times5\times4)=9\,960.$$

Finalement $P(A)=\frac{9960}{2441880}=\frac{83}{20349}=0{,}004$ arrondie à 3 décimales.

Détermination de P(B)
Les cas favorables à l'événement B avec les 2 boules blanches aux 2 premiers tirages sont de la forme (B,B,N,N,N).
Par application du principe multiplicatif le nombre de cas favorables à la situation qui vient d'être décrite est $6\times5\times7\times6\times5=6\,300$.
Pour répondre à la question il suffit d'appliquer le principe additif en remarquant que l'on peut effectuer le raisonnement précédent autant de fois que l'on peut placer les 2 boules blanches dans les 5 positions possibles c'est-à-dire $\binom{5}{2}=10$ fois.
On obtient donc $\text{card}B=10\times6300=63\,000$.
Finalement $P(B)=\frac{63000}{2441880}=\frac{25}{969}=0{,}026$ arrondie à 3 décimales.

Détermination de P(C)
Les cas favorables à l'événement C sont de la forme $(\overline{B},\overline{B},\overline{B},\overline{B},\overline{B})$ donc comme il y a 15 boules qui ne sont pas blanches $\text{card}C=15\times14\times13\times12\times11=360\,360$.
Finalement $P(C)=\frac{360360}{2441880}=\frac{143}{969}=0{,}148$ arrondie à 3 décimales.

Détermination de P(D)
Il suffit de remarquer que l'événement D est l'événement contraire de C et d'appliquer la formule adéquate pour répondre à la question.

Ainsi $P(D)=P\left(\overline{C}\right)=1-P(C)=1-\frac{143}{969}=\frac{826}{969}=0{,}852$ arrondie à 3 décimales.

7 Tirage simultané – Méthode 6

On peut modéliser le tirage par une **combinaison à 5 éléments** des 21 boules de l'urne.

1) Compte tenu de la modélisation on a $\text{card}\Omega=\binom{21}{5}=20\,349$.

2) **Détermination de P(A)**

Les cas favorables à l'événement A sont les suivants :

$\{B,B,B,B,B\}$, $\{N,N,N,N,N\}$ et $\{R,R,R,R,R\}$.

Par application du principe additif on a $\text{card}A=\binom{6}{5}+\binom{7}{5}+\binom{8}{5}=83$.

Finalement $P(A)=\frac{83}{20349}=0{,}004$ arrondie à 3 décimales.

Détermination de P(B)

Les cas favorables à l'événement B sont de la forme $\{B,B,N,N,N\}$.

Par application du principe multiplicatif le nombre de cas favorables à l'événement B $\text{card}B=\binom{6}{2}\times\binom{7}{3}=525$.

Finalement $P(B)=\frac{525}{20349}=\frac{25}{969}=0{,}026$ arrondie à 3 décimales.

Détermination de P(C)

Les cas favorables à l'événement C sont de la forme $\{\bar{B},\bar{B},\bar{B},\bar{B},\bar{B}\}$ donc comme il y a 15 boules qui ne sont pas blanches $\text{card}C=\binom{15}{5}=3\,003$.

Finalement $P(C)=\frac{3003}{20349}=\frac{143}{969}=0{,}148$ arrondie à 3 décimales.

Détermination de P(D)

Il suffit de remarquer que l'événement D est l'événement contraire de C et d'appliquer la formule adéquate pour répondre à la question.

Ainsi $P(D)=P\left(\overline{C}\right)=1-P(C)=1-\frac{143}{969}=\frac{826}{969}=0{,}852$ arrondie à 3 décimales.

8 Combinaison avec répétition – Méthode 7

Si l'on note x_1, x_2 et x_3 les nombres respectifs de boules blanches, noires et rouges tirées on peut modéliser le tirage par **un triplet (x_1,x_2,x_3) d'entiers naturels solution de l'équation $x_1+x_2+x_3=7$ avec $x_1\leq 6$.**

1) Compte tenu de la modélisation, par application de la formule des combinaisons avec répétition avec $p=3$ et $n=7$ on obtient finalement $\mathrm{card}\Omega = \binom{7+3-1}{3-1} - 1 = \binom{9}{2} - 1 = 36 - 1 = 35$ (il faut retirer la solution correspondant à $x_1 = 7$ car il n'y a que 6 boules blanches).

2) Pour répondre à la question, il suffit de déterminer le nombre d'issues possibles correspondant à $x_1 = 4$ ce qui conduit à déterminer le nombre de solutions de l'équation $4 + x_2 + x_3 = 7$, soit $x_2 + x_3 = 3$.
Par application de la formule des combinaisons avec répétition avec $p=2$ et $n=3$ le nombre cherché est $N = \binom{3+2-1}{2-1} = \binom{4}{1} = 4$.

9 Formule du binôme – Méthode 9

Détermination de S

La somme S peut s'écrire $S = \sum_{k=0}^{n} 1^{n-k} 5^k \binom{n}{k}$ ce qui est le développement de la puissance n du binôme avec x = 1 et y = 5 d'où $S = (1+5)^n = 6^n$.

Détermination de S(x)

De la même façon S(x) peut s'écrire $S(x) = \sum_{k=0}^{n} 1^{n-k} x^k \binom{n}{k}$ ce qui est le développement de la puissance n de (1+x) d'où $S(x) = (1+x)^n$.

La somme S est tout simplement S(5) ce qui permet de retrouver $S = S(5) = 6^n$.

10 Développement du binôme – Méthodes 10 et 11

1) Les coefficients de la puissance 5 du binôme s'obtiennent par le triangle de Pascal décrit à la méthode 10.
Coefficients de la puissance 5 **: 1** ; 1+4 **= 5** ; 4+6 **= 10** ; 6+4 **= 10** ; 4+1 **= 5** ; **1.**
Ainsi on a : $(1+2x)^5 = 1 + 5\times(2x) + 10\times(2x)^2 + 10\times(2x)^3 + 5\times(2x)^4 + (2x)^5$.

Finalement on obtient : $(1+2x)^5 = 32x^5 + 80x^4 + 80x^3 + 40x^2 + 10x + 1$.

2) Pour les puissances strictement supérieures à 6 l'obtention des coefficients binomiaux devient plus fastidieux avec le triangle de Pascal, d'où l'idée d'utiliser l'algorithme donné dans l'exemple de la méthode 8 pour les obtenir, à savoir :

```
def ligne_suivante (L):
    LL=[]
    LL.append(1)
    n=len(L)
    for k in range (1,n):
        LL.append(L[k-1]+L[k])
    LL.append(1)
    return LL
def pascal_it(n):
    L=[1,1]
    for i in range (0,n-1):
        LL=ligne_suivante (L)
        L=LL
    return L
```

En mode « run », on obtient :

```
>>> pascal_it(8)
[1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1]
```

Cela permet d'obtenir le développement de $(1+2x)^8$ qui est :

$$1+8\times 2x+28\times(2x)^2+56\times(2x)^3+70\times(2x)^4+56\times(2x)^5+28\times(2x)^6+8\times(2x)^7+(2x)^8$$
$$=256x^8+1024x^7+1792x^6+1792x^5+1120x^4+448x^3+112x^2+16x+1.$$

11 Génération aléatoire d'une combinaison – Méthode 12

On adapte l'algorithme de l'exemple de la méthode 12 à l'énoncé ce qui donne :

```
def groupe(n):
    from random import randint
    a,b,c,d=0,0,0,0
    while a==b or a==c or a==d or b==c or b==d or c==d:
        a=randint(1,n)
        b=randint(1,n)
        c=randint(1,n)
        d=randint(1,n)
    L=[a,b,c,d]
    return L
```

On passe en mode « run » et l'on obtient :

```
>>> groupe(20)
[1, 2, 10, 15]
```

12 Représentation d'un groupe d'individus – Méthodes 5, 6 et 12

1) On modélise un bureau par un **4-uplet d'éléments distincts** des 50 personnes du groupe où le premier élément est le président, le second est le vice président, le troisième le trésorier et le dernier le secrétaire.

Par application du principe multiplicatif il y a $N_1 = 50 \times 49 \times 48 \times 47 = 5527200$ bureaux possibles.

2) On modélise un bureau comme un **4-uplet d'éléments distincts contenant 2 femmes et 2 hommes** parmi les 50 personnes du groupe.
Par application du principe multiplicatif il y a $N_2 = 30 \times 29 \times 20 \times 19 = 330\,600$ bureaux possibles avec 2 femmes et 2 hommes **dans cet ordre** c'est-à-dire de la forme (F, F, H ,H).
Comme il y a $\binom{4}{2} = 6$ façons de placer 2 « F » et donc 2 « H » dans le 4-uplet, par application du principe additif le nombre total de bureaux respectant la parité est $N_3 = 6 \times N_2 = 1\,983\,600$.

3) On modélise les trois représentants par une combinaison à 3 éléments des 46 membres qui n'occupent pas une fonction au bureau.
Il y a donc $N_4 = \binom{46}{3} = 15\,180$ représentations de 3 personnes possibles.

4) On utilise l'algorithme de la méthode 12 avec n = 46 en notant de 1 à 46 l'ensemble des membres qui n'ont pas de fonction.

Algorithme :

```
def groupe(n):
    from random import randint
    a,b,c=0,0,0
    while a==b or a==c or b==c:
        a=randint(1,n)
        b=randint(1,n)
        c=randint(1,n)
    L=[a,b,c]
    return L
```

Echantillon aléatoire :

```
>>> groupe(46)
[2, 22, 7]
```

13 Mots multiples et variés – Méthodes 5 et 12

1) a) Un mot de longueur n formé avec des 1 et des 0 correspond à un **n-uplet de 1 et de 0**.
Il y a donc 2^n mots différents de longueur n formés avec 1 et 0, ce qui nous amène à résoudre l'inéquation $2^n \geq 128$ pour déterminer la longueur minimale demandée qui correspond donc à n = 7.

b) Pour avoir de la marge et traduire éventuellement plus de caractères on a choisi de prendre n = 8, ce qui permet de coder $2^8 = 256$ caractères et nous amène en informatique à la notion **d'octet**.

2) a) Il y a 4 lettres différentes donc les anagrammes de JEAN correspondent aux permutations de 4 lettres.
Il y a donc 4 ! = 24 anagrammes de JEAN.

b) Il suffit d'affecter à chaque lettre l'entier qui le positionne dans le mot JEAN et d'utiliser l'algorithme de l'exercice 11 avec n = 4.

Algorithme :

```
def groupe(n):
    from random import randint
    a,b,c,d=0,0,0,0
    while a==b or a==c or a==d or b==c or b==d or c==d:
        a=randint(1,n)
        b=randint(1,n)
        c=randint(1,n)
        d=randint(1,n)
    L=[a,b,c,d]
    return L
```

On passe en mode « run » et l'on obtient :

```
>>> groupe(4)
[4, 2, 3, 1]
```

Cela donne l'annagramme NEAJ.

c) Il est moins simple de déterminer les anagrammes de ROBERT car il y a 2 lettres « R » et si l'on affecte à chaque lettre l'entier qui le positionne dans le mot, deux permutations peuvent correspondre au même anagramme (ex. les permutations (1, 2, 3, 4, 5, 6) et (5, 2, 3, 4, 1, 6) correspondent toutes les deux au mot ROBERT).
En différenciant les lettres « R » (R_1 et R_2 par exemple) on obtient :
$6! = 720$ permutations.
Pour obtenir le nombre d'anagrammes il suffit de diviser par le nombre de façons de permuter R_1 et R_2 dans les permutations précédentes ce qui donne $\frac{720}{2!} = 360$ anagrammes de ROBERT.

d) En différenciant les 3 « A » et les 2 « M » on obtient $9! = 362\,880$ permutations.
Pour obtenir le nombre d'anagrammes il suffit de diviser par le nombre de façons de permuter les « A » et les « M » dans les permutations précédentes ce qui donne $\frac{362880}{3! \times 2!} = 30\,240$ anagrammes du mot ANAGRAMME.

14 L'incontournable fourmi – Méthodes 6 et 12

1) Si l'on note D un déplacement d'une arête vers la droite et H un déplacement d'une arête vers le haut, un trajet qui relie A à B peut se modéliser par un **6-uplet comportant 4 lettres « D » et deux lettres « H »**.

Le nombre de trajets demandés est donc le nombre de façons de placer 2 lettres « H » dans le 6-uplet, c'est-à-dire $\binom{6}{2}=15$.

2) Si l'on affecte à D le nombre 1 et à H le nombre 0, un trajet reliant A à B s'interprète comme un 6-uplet comportant quatre 1 et deux 0.
Il suffit donc de générer de façon aléatoire un tel 6-uplet en adaptant l'algorithme de l'exemple de la méthode 12 à cet énoncé.

Algorithme :

```
def chemin():
    from random import randint
    a,b,c,d,e,f=0,0,0,0,0,0
    while a+b+c+d+e+f!=4:
        a=randint(0,1)
        b=randint(0,1)
        c=randint(0,1)
        d=randint(0,1)
        e=randint(0,1)
        f=randint(0,1)
    L=[a,b,c,d,e,f]
    return L
```

Chemin aléatoire reliant A à B :

```
>>> chemin()
[1, 0, 1, 1, 1, 0]
```

3) Pour relier A à B en passant par C, il faut un seul « H » dans les 4 premiers éléments du 6-uplet et un seul dans les 2 derniers.
Par application du principe multiplicatif cela donne $\binom{4}{1}\times\binom{2}{1}=8$ trajets.

4) Un trajet se modélise par un 6-uplet des lettres « H » et « D » ce qui nous amène à dénombrer $2^6=64$ trajets possibles.
D'après 1) il y a 15 cas favorables donc la probabilité demandée est $P_1=\dfrac{15}{64}$.

5) L'univers est le même que dans la question 4) et d'après 3) le nombre de cas favorables est 8 donc la probabilité demandée est $P_2=\dfrac{8}{64}=\dfrac{1}{8}$.

6) Dans cette question on sait que la souris atteint le point B donc l'univers de cette situation aléatoire et l'ensemble des chemins qui relient A à B et son cardinal vaut 15 d'après 1).
D'après 3) le nombre de cas favorables est 8 donc la probabilité demandée est $P_3=\dfrac{8}{15}$.

15 Le Loto – Méthode 6

Une grille de Loto se modélise par une **combinaison à 6 éléments de l'ensemble des 49 numéros**.

1) Compte tenu de la modélisation il y a $\binom{49}{6} = 13\,983\,816$ grilles possibles.

2) Si l'on note B un bon numéro et $\bar{B}$ un mauvais, les cas favorables à la question sont de la forme $\{B;B;B;B;\bar{B};\bar{B}\}$.

Par application du principe multiplicatif, en raisonnant globalement sur les 4 bons numéros et sur les 2 mauvais, le nombre demandé est :
$\binom{6}{4} \times \binom{43}{2} = 13\,545$.

16 L'Euro Million – Méthode 6

Une grille de l'Euro Million peut s'interpréter comme **une combinaison de la forme $\{N;N;N;N;N;*;*\}$** où les « N » désigne un des 50 numéros et les « * » une des 12 étoiles.

1) Par application du principe multiplicatif, en raisonnant globalement sur les 5 numéros et sur les 12 étoiles, le nombre demandé est :
$\binom{50}{5} \times \binom{12}{2} = 1\,398\,388\,160$.
Oups ! Déjà qu'au Loto avec exactement 10 fois moins de grilles possibles il faut parfois attendre plusieurs tirages avant d'avoir un gagnant du gros lot, en se limitant au marché français, avec l'Euro Million, on aurait pu attendre longtemps pour avoir un gagnant du gros lot si l'on n'avait pas envisagé les paris à la zone Euro.

2) Les cas favorables à la situation sont de la forme $\{N;N;N;N;\bar{N};*;\bar{*}\}$ où N désigne un bon numéro, $\bar{N}$ un mauvais, $*$ une bonne étoile et $\bar{*}$ une mauvaise.
Par application du principe multiplicatif, en raisonnant globalement sur les bons numéros, les mauvais, la bonne et la mauvaise étoile, on obtient le nombre de $\binom{5}{4} \times \binom{45}{1} \times \binom{12}{1} \times \binom{10}{1} = 27\,000$ grilles avec exactement quatre bons numéros et une bonne étoile.

17 Le Loto sportif – Méthode 5

Une grille du Loto sportif se modélise par **un 10-uplet des éléments 1, N et 2**.

1) Compte tenu de la modélisation le nombre de grilles possibles est donc $N_1 = 3^{10} = 59\,049$.

2) Les cas favorables à la question avec les 8 premiers pronostics bons et les 2 derniers mauvais sont de la forme $(B;B;B;B;B;B;B;B;\bar{B};\bar{B})$ (B désigne un bon pronostic et $\bar{B}$ un mauvais).
Par application du principe multiplicatif le nombre de grilles que l'on vient d'évoquer est $N_2 = 1\times1\times1\times1\times1\times1\times1\times1\times2\times2 = 4$.

Dans la mesure où l'on a $\binom{10}{2} = 45$ façons de « ranger » les deux lettres $\bar{B}$ dans le 10-uplet, par application du principe additif le nombre de grilles avec exactement 8 bons pronostics est $N_3 = 45\times4 = 180$.

18 Le PMU – Méthodes 5, 6 et 12

1) Un quintet **dans l'ordre** peut s'interpréter comme un **5-uplet d'éléments distincts** de l'ensemble des 15 chevaux.
Par application du principe multiplicatif il y a donc :
$15\times14\times13\times12\times11 = 360\ 360$ quintets dans l'ordre possibles.

2) Un quintet **dans le désordre** peut s'interpréter comme une **combinaison à 5 éléments** de l'ensemble des 15 chevaux.
On en déduit qu'il y a $\binom{15}{5} = 3\ 003$ quintets dans le désordre possibles.

3) Les cas favorables à la situation sont de la forme $\{B;B;B;\bar{B};\bar{B}\}$ où B désigne un des chevaux du quintet à l'arrivée et $\bar{B}$ un cheval qui n'est pas dans les 5 premiers.
Par application du principe multiplicatif, en raisonnant globalement sur les 3 chevaux du quintet gagnant à l'arrivée et sur les 10 chevaux qui ne sont pas dans le quintet, le nombre demandé est $\binom{5}{3}\times\binom{10}{2} = 450$.

4) On adapte l'algorithme de la méthode 12 avec n = 12 pour obtenir un quintet aléatoire.
Algorithme :

```
def groupe(n):
    from random import randint
    a,b,c,d,e=0,0,0,0,0
    while a==b or a==c or a==d or a==e or b==c or b==d or b==e or c==d or c==e or d==e:
        a=randint(1,n)
        b=randint(1,n)
        c=randint(1,n)
        d=randint(1,n)
        e=randint(1,n)
    L=[a,b,c,d,e]
    return L
```

Quintet aléatoire :

```
>>> groupe(15)
[13, 2, 10, 14, 6]
```

19 **Le Poker – Méthode 6**

Une main de 5 cartes peut se modéliser par **une combinaison à 5 éléments de l'ensemble de 32 cartes**.

1) On va commencer par dénombrer le nombre de carrés d'as puis appliquer le principe additif pour répondre à la question.
Les cas favorables à un carré d'as sont de la forme $\{A;A;A;A;\overline{A}\}$ où A désigne un as et $\overline{A}$ une carte qui n'est pas un as.

Par application du principe multiplicatif, en raisonnant globalement sur les 4 as et sur la dernière carte le nombre demandé est $\binom{4}{4}\times\binom{28}{1}=28$.

On peut effectuer le raisonnement précédent autant de fois que l'on peut choisir une hauteur parmi 8 c'est-à-dire 8 fois.
Par application du principe additif le nombre de carrés possibles est $8\times 28=224$.

2) On va commencer par dénombrer le nombre de fulls aux as par les rois (3 as et 2 rois) puis appliquer le principe additif pour répondre à la question.
Les cas favorables aux fulls aux as par les rois sont de la forme $\{A;A;A;R;R\}$ où A désigne un as et R un roi.

Par application du principe multiplicatif, en raisonnant globalement sur les 3 as et les 2 rois, on dénombre $\binom{4}{3}\times\binom{4}{2}=24$ fulls aux as par les rois.

On peut effectuer le raisonnement précédent autant de fois que l'on peut choisir 2 hauteurs parmi 8 **en tenant compte de l'ordre** (par exemple, les fulls aux as par les rois sont **différents** des fulls aux rois par les as), c'est-à-dire $8\times 7=56$ fois.
Par application du principe additif le nombre de fulls possibles est donc $56\times 24=1\,344$.

3) On va commencer par dénombrer le nombre de doubles paires d'as et de rois (2 as et 2 rois avec une carte d'une autre hauteur) puis appliquer le principe additif pour répondre à la question.
Les cas favorables aux doubles paires d'as et de rois sont de la forme $\{A;A;R;R;E\}$ où A désigne un as, R un roi et E une carte d'une autre hauteur.
Par application du principe multiplicatif, en raisonnant globalement sur les 2 as, les 2 rois et la dernière carte on dénombre $\binom{4}{2}\times\binom{4}{2}\times\binom{24}{1}=864$ doubles paires d'as et de rois.

On peut effectuer le raisonnement précédent autant de fois que l'on peut choisir 2 hauteurs parmi 8 **sans tenir compte de l'ordre** (par exemple, les doubles paires d'as et de rois sont **les mêmes** que celles de rois et d'as), c'est-à-dire $\binom{8}{2} = 28$ fois.

Par application du principe additif le nombre de doubles paires possibles est donc $28 \times 864 = 24\,192$.

20 Démonstrations de la formule de Pascal – Méthodes 8 et 10

1) Soit k et n deux entiers naturels non nuls tels que $k \leq n$.

On a : $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \dfrac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!} + \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n!}{(k-1)!(n+1-k)!} + \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$.

On va réduire cette dernière expression au même dénominateur en multipliant par $\dfrac{k}{k}$ la première fraction et par $\dfrac{n+1-k}{n+1-k}$ la seconde.

Cela donne :

$$\frac{k}{k} \times \frac{n!}{(k-1)!(n+1-k)!} + \frac{n+1-k}{n+1-k} \times \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!(k+n+1-k)}{k!(n+1-k)!} = \frac{(n+1) \times n!}{k!(n+1-k)!} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}.$$

Cette dernière expression est bien $\binom{n+1}{k}$ ce qui démontre le résultat.

2) Soit k et n deux entiers naturels non nuls tels que $k \leq n$.

On va compter de 2 façons le nombre de parties à k éléments d'un ensemble à n+1 éléments que l'on peut noter par exemple $E = \{x_1, \cdots, x_{n+1}\}$.

Première façon : Par définition le nombre de parties à k éléments de E est $\binom{n+1}{k}$.

Deuxième façon : Pour compter le nombre de parties à k éléments de E, on compte celles qui contiennent par exemple x_1 et l'on ajoute celles qui ne le contiennent pas.

Les parties qui contiennent x_1 sont de la forme $\{x_1, \cdots\}$ avec $k-1$ élément à la place des pointillés choisis parmi les n qui restent (puisque x_1 est dans ces parties). Il y a donc $\binom{n}{k-1}$ parties à k éléments qui contiennent x_1.

Les parties qui ne contiennent pas x_1 sont au nombre de $\binom{n}{k}$ puisqu'il y a n éléments distincts de x_1.

Le nombre de parties de E à k éléments de E est donc $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k}$.

Par ce raisonnement « ensembliste » on redémontre que $\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k}$.

3) Application

On a $\binom{199}{197}+\binom{199}{198}=\binom{200}{198}=\binom{200}{200-198}=\binom{200}{2}=\dfrac{200\times 199}{2}=100\times 199=19\,900$.

21 **Démonstration et application de la formule du binôme – Méthode 9**

1) Montrons par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$(P_n):\ (x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}x^{n-k}y^k\binom{n}{k}\ \text{est vraie.}$$

Initialisation : (P_0) est-elle vraie ?

$\sum_{k=0}^{0}x^{n-k}y^k\binom{n}{k}=x^0y^0\binom{0}{0}=1=(x+y)^0$ donc (P_0) est vraie.

Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}$, supposons que (P_n) est vraie.

D'après l'hypothèse de récurrence (P_n): $(x+y)^n=\sum_{k=0}^{n}x^{n-k}y^k\binom{n}{k}$ est vraie.

On doit prouver sous cette hypothèse que (P_{n+1}): $(x+y)^{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}x^{n+1-k}y^k\binom{n+1}{k}$ est vraie.

On peut écrire que $(x+y)^{n+1}=(x+y)(x+y)^n=(x+y)\sum_{k=0}^{n}x^{n-k}y^k\binom{n}{k}$ d'après l'hypothèse de récurrence.

A ce stade développons $(x+y)\sum_{k=0}^{n}x^{n-k}y^k\binom{n}{k}$ et notons (d) ce développement :

$$(x+y)\sum_{k=0}^{n}x^{n-k}y^k\binom{n}{k}=x\sum_{k=0}^{n}x^{n-k}y^k\binom{n}{k}+y\sum_{k=0}^{n}x^{n-k}y^k\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}x^{n+1-k}y^k\binom{n}{k}+\sum_{k=0}^{n}x^{n-k}y^{k+1}\binom{n}{k}.$$

Attention, cela va devenir « technique » car nous allons travailler sur l'indice k de la deuxième somme en posant $k'=k+1$ ce qui suppose que $k=k'-1$.

Lorsque k varie de 0 à n, k' varie de 1 à n+1 ce qui nous amène à l'égalité suivante :

$$\sum_{k=0}^{n}x^{n-k}y^{k+1}\binom{n}{k}=\sum_{k'=1}^{n+1}x^{n-(k'-1)}y^{k'-1+1}\binom{n}{k'-1}=\sum_{k'=1}^{n+1}x^{n+1-k'}y^{k'}\binom{n}{k'-1}.$$

Dans cette dernière somme k' est un indice « muet » donc on peut le remplacer par k ce qui permet de revenir au développement (d) et donc d'écrire :

$$(x+y)^{n+1}=(x+y)\sum_{k=0}^{n}x^{n-k}y^k\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}x^{n+1-k}y^k\binom{n}{k}+\sum_{k=1}^{n+1}x^{n+1-k}y^k\binom{n}{k-1}.$$

Nous allons travailler sur cette dernière somme en commençant par isoler le premier terme de la première somme et le dernier de la deuxième afin de « réunir » sous le même signe somme les termes restant, ce qui donne :

$$\sum_{k=0}^{n} x^{n+1-k}y^k\binom{n}{k}+\sum_{k=1}^{n+1} x^{n+1-k}y^k\binom{n}{k-1}=x^{n+1}+\sum_{k=1}^{n} x^{n+1-k}y^k\binom{n}{k}+\sum_{k=1}^{n} x^{n+1-k}y^k\binom{n}{k-1}+y^{n+1}$$

$$=x^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}\left(x^{n+1-k}y^k\binom{n}{k}+x^{n+1-k}y^k\binom{n}{k-1}\right)+y^{n+1}=x^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}x^{n+1-k}y^k\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right)+y^{n+1}.$$

Or d'après la formule de Pascal $\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k}$ ce qui permet de simplifier cette dernière somme de la façon suivante :

$$x^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}x^{n+1-k}y^k\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right)+y^{n+1}=x^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}x^{n+1-k}y^k\binom{n+1}{k}+y^{n+1}.$$

Comme $\binom{n+1}{0}=1$ et $\binom{n+1}{n+1}=1$ on peut tout regrouper sous le signe somme de la façon suivante :

$$x^{n+1}+\sum_{k=1}^{n}x^{n+1-k}y^k\binom{n+1}{k}+y^{n+1}=x^{n+1}\binom{n+1}{0}+\sum_{k=1}^{n}x^{n+1-k}y^k\binom{n+1}{k}+y^{n+1}\binom{n+1}{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}x^{n+1-k}y^k\binom{n+1}{k}$$

Par conséquent (P_{n+1}) : $(x+y)^{n+1}=\sum_{k=0}^{n+1}x^{n+1-k}y^k\binom{n+1}{k}$ est vraie.

Finalement (P_n) est vraie $\Rightarrow (P_{n+1})$ est vraie .

Conclusion : Par récurrence, (P_n) est vraie pour tout $n\in\mathbb{N}$.

2) Application : $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=\sum_{k=0}^{n}(1)^{n-k}(-1)^k\binom{n}{k}$ correspond au développement de $(x+y)^n$ avec $x=1$ et $y=-1$ donc la somme est $(1-1)^n=0$.

22 Démonstration et application de la formule des combinaisons avec répétition – Méthode 7

1) Pour toute valeur de $x_2\in[0;n]$ (entiers entre 0 et n), les couples d'entiers naturels $(n-x_2,x_2)$ sont les solutions de l'équation $x_1+x_2=n$ $(n\in\mathbb{N})$.

Cette équation a donc $(n+1)=\binom{n+1}{1}$ solutions.

2) D'après 1), pour toute valeur de $x_3\in[0;n]$, l'équation $x_1+x_2=n-x_3$ $(n\in\mathbb{N})$ admet $(n-x_3+1)$ solutions.

L'équation $x_1+x_2+x_3=n$ $(n\in\mathbb{N})$ admet donc $\sum_{x_3=0}^{n}(n-x_3+1)$ solutions.

Comme $\sum_{x_3=0}^{n}(n-x_3+1)=(n+1)+n+(n-1)+\cdots+1=\dfrac{(n+2)(n+1)}{2}$, on en déduit que l'équation $x_1+x_2+x_3=n$ $(n\in\mathbb{N})$ admet $\dfrac{(n+2)(n+1)}{2}=\dbinom{n+2}{2}$ solutions.

3) Plus généralement, pour $p\in\mathbb{N}^*$, on cherche à déterminer le nombre de p-uplets d'entiers naturels tels que $x_1+x_2+\cdots+x_p=n$ $(n\in\mathbb{N})$.

a) Pour $p\in\mathbb{N}$ et $n\in\mathbb{N}$ tels que $p\leq n$, posons (P_n) : $\sum_{k=p}^{n}\dbinom{k}{p}=\dbinom{n+1}{p+1}$ et démontrons cette propriété par récurrence.

Initialisation : (P_0) est-elle vraie ?

$\sum_{k=0}^{0}\dbinom{0}{k}=\dbinom{0}{0}=1=\dbinom{1}{1}$ donc (P_0) est vraie.

Hérédité : Soit $n\in\mathbb{N}$, supposons que (P_n) est vraie, c'est-à-dire que $\sum_{k=p}^{n}\dbinom{k}{p}=\dbinom{n+1}{p+1}$ est vraie.

On doit prouver sous cette hypothèse que (P_{n+1}) est vraie c'est-à-dire que $\sum_{k=p}^{n+1}\dbinom{k}{p}=\dbinom{n+2}{p+1}$ est vraie.

$\sum_{k=p}^{n+1}\dbinom{k}{p}=\sum_{k=p}^{n}\dbinom{k}{p}+\dbinom{n+1}{p}$, donc comme on a $\sum_{k=p}^{n}\dbinom{k}{p}=\dbinom{n+1}{p+1}$ d'après l'hypothèse de récurrence, on en déduit que : $\sum_{k=p}^{n+1}\dbinom{k}{p}=\dbinom{n+1}{p+1}+\dbinom{n+1}{p}$.

D'après la formule de Pascal $\dbinom{n+1}{p+1}+\dbinom{n+1}{p}=\dbinom{n+2}{p+1}$ donc $\sum_{k=p}^{n+1}\dbinom{k}{p}=\dbinom{n+2}{p+1}$ ce qui prouve que (P_{n+1}) est vraie.

Par conséquent, (P_n) est vraie $\Rightarrow$ (P_{n+1}) est vraie.

Conclusion : Par récurrence, pour tout $n\in\mathbb{N}$, (P_n) est vraie.

b) Pour n entier fixé, montrons par récurrence sur $p \in \mathbb{N}^*$ que le nombre de p-uplets d'entiers naturels solution(s) de l'équation $x_1 + \cdots + x_p = n$ est $N_p = \binom{n+p-1}{p-1}$ (propriété (P_p)).

Initialisation : (P_1) est-elle vraie ?

L'équation $x_1 = n$ admet une seule solution $(x_1 = n)$ et $\binom{n+1-1}{1-1} = \binom{n}{0} = 1$, donc (P_1) est vraie.

Hérédité : Soit $p \in \mathbb{N}^*$, supposons que (P_p) est vraie, c'est-à-dire que le nombre de p-uplet(s) d'entier(s) naturel(s) solution(s) de l'équation $x_1 + \cdots + x_p = n$ est $N_p = \binom{n+p-1}{p-1}$.

On doit prouver sous cette hypothèse que (P_{p+1}) est vraie c'est-à-dire que le nombre de (p+1)-uplet(s) d'entier(s) naturel(s) solution(s) de l'équation $x_1 + \cdots + x_{p+1} = n$ est $N_{p+1} = \binom{n+p}{p}$.

L'équation $x_1 + x_2 + \cdots + x_p + x_{p+1} = n$ s'écrit $x_1 + x_2 + \cdots + x_p = n - x_{p+1}$, qui admet, pour x_{p+1} fixé de $[\![0;n]\!]$, exactement $\binom{n - x_{p+1} + p - 1}{p-1}$ solutions d'après l'hypothèse de récurrence.

L'équation $x_1 + x_2 + \cdots + x_p + x_{p+1} = n$ admet donc $\sum_{x_{p+1}=0}^{n} \binom{n - x_{p+1} + p - 1}{p-1}$ solutions.

Comme on a $\sum_{x_{p+1}=0}^{n} \binom{n - x_{p+1} + p - 1}{p-1} = \binom{n+p-1}{p-1} + \binom{n+p-2}{p-1} + \cdots + \binom{p}{p-1} + \binom{p-1}{p-1}$, le nombre de solutions de l'équation s'écrit $\sum_{k=p-1}^{n+p-1} \binom{k}{p-1} = \binom{n+p-1+1}{p} = \binom{n+p}{p}$ d'après la question précédente.

On en déduit que (P_{p+1}) est vraie.

Par conséquent, (P_p) est vraie $\Rightarrow (P_{p+1})$ est vraie.

Conclusion : Par récurrence, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, (P_p) est vraie.

4) On aurait pu commencer par là, mais on a pensé que les démonstrations précédentes étaient très formatrices sur le plan de l'apprentissage des compétences évoquées dans le programme.
Comme l'illustre le coup de pouce, une solution de l'équation $x_1 + \cdots + x_p = n$ d'inconnu le p-uplet $(x_1,\dots,x_p)$ correspond à un $(n+p-1)$ - uplet comportant n nombre « 1 » et $(p-1)$ signe « + » et réciproquement, c'est-à-dire que tout $(n+p-1)$ - uplet correspond à une solution.
Comme il y a $(p-1)$ façons de placer un signe « + » dans un $(n+p-1)$ - uplet on retrouve que le nombre de solutions de l'équation $x_1 + \cdots + x_p = n$ d'inconnu le p-uplet $(x_1,\dots,x_p)$ comporte $\binom{n+p-1}{p-1}$ solutions.
Pas mal… Mais, il fallait avoir l'idée de départ.

5) Si l'on note x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 et x_6 les nombres respectifs d'obtention des numéros 1, 2, 3, 4, 5 et 6 lors d'un lancer des 3 dés **identiques** on peut modéliser un lancer comme un **6-uplet d'entiers naturels solution de l'équation** $\mathbf{x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 3}$.

Les cas favorables à la situation correspondent aux solutions telles que $x_2 = 1$, ce qui nous amène à déterminer le nombre de solutions de l'équation $x_1 + 1 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 3$, soit $x_1 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = 2$.

On applique la formule des combinaisons avec répétition en prenant $n = 2$ et $p = 5$ ce qui nous donne $\binom{2+5-1}{5-1} = \binom{6}{4} = \binom{6}{6-4} = \binom{6}{2} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$ lancers avec exactement une fois le numéro 2.

Chapitre 7
METHODES SUR LES PROBABILITES
EXERCICES & CORRIGES

Exercices

1 La roue de la fortune – Méthodes 1 et 9

On mise 10 € et on lance un disque parfaitement circulaire divisé en 10 secteurs angulaires de même aire.
Parmi eux 1 est jaune, 2 sont verts, 3 sont rouges et 4 sont bleus.
Si l'on tombe sur le secteur jaune on gagne 16 €, sur un vert on gagne 14 €, sur un rouge 12 € et sinon on perd la mise.
On note G la variable aléatoire, qui associe à ce jeu, le gain algébrique du joueur.
1) Déterminez la loi de probabilité de G, son espérance et son écart type.
2) L'organisateur du jeu change son mode de rétribution en proposant une mise de 20 € et en multipliant les gains par 2.
On note G' le nouveau gain algébrique du jeu.
Déterminez l'espérance et l'écart type de G' et dites ce que vous en pensez.

2 Des jetons dans des urnes – Probabilités conditionnelles – Méthode 2

D'une part, une urne A contient trois jetons verts et deux jetons jaunes et d'autre part, une urne B contient cinq jetons verts et trois jetons jaunes.
On tire d'abord un jeton dans l'urne A. S'il est vert, on retire un jeton dans l'urne A, sinon, on tire un jeton dans l'urne B.
On considère alors les événements suivants :
V_1 : « Le premier jeton tiré est vert ».
V_2 : « Le deuxième jeton tiré est vert ».
1) Construisez un arbre pour illustrer l'expérience aléatoire.
2) Déterminez la probabilité $P(V_2)$.
3) Déterminez alors la probabilité $P_{V_2}\left(\overline{V_1}\right)$.

3 Italien ou espagnol ? Indépendance ? – Méthode 3

Dans une classe de 20 élèves, 8 parlent espagnol, 12 parlent anglais et 4 parlent les 2 langues.
On choisit un élève de la classe au hasard et l'on considère les événements suivants :
E : « il parle espagnol »
A : « il parle anglais »
1) Faites un diagramme pour illustrer la situation.
2) Les événements E et A sont-ils indépendants ?

4 **Panne d'un lave-vaisselle – Probabilités conditionnelles – Méthode 2**

Une entreprise produit un lave-vaisselle sur trois sites A, B et C dans les conditions suivantes :

60 % de la production est assurée par le site A,
30 % de la production est assurée par le site B.
Le reste est assuré par le site C.

L'entreprise constate qu'avant 5 ans d'utilisation les pourcentages qu'un lave-vaisselle tombe en panne selon le site où ils sont produits sont les suivants :

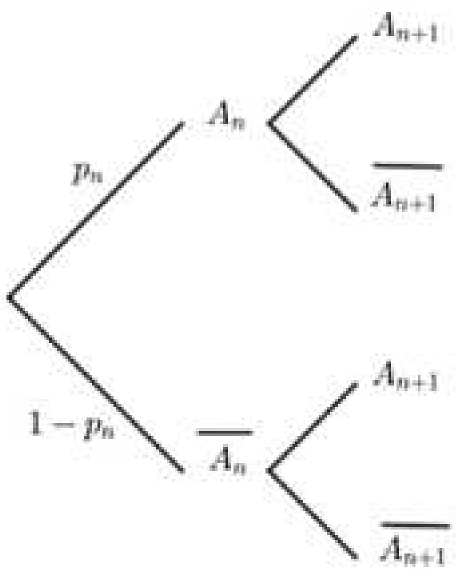
37 % pour le site A,
25 % pour le site B,
12 % pour le site C.

On choisit un lave-vaisselle au hasard parmi ceux produits par cette entreprise.
On note E l'événement : « le lave-vaisselle tombe en panne avant 5 ans ».
1) Construire un arbre pondéré pour illustrer la situation.
2) Déterminez la probabilité $P(E)$.
3) Le lave-vaisselle tombe en panne avant 5 ans.
Quelle est la probabilité que le lave-vaisselle provienne de C ?

5 **Ski ou snowboard – Probabilités conditionnelles et suites – Méthode 2**

Une enquête réalisée chaque hiver sur une population composée de sportifs qui peuvent pratiquer le ski ou le snowboard révèle que :
a) Si un sportif pratique le ski un hiver, alors la probabilité qu'il pratique le snowboard le suivant est égale à 0,2.
b) Si un sportif pratique le snowboard, alors la probabilité qu'il pratique le ski le suivant est égale à 0,3.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $p_n = P(A_n)$ la probabilité qu'un sportif, **qui au départ pratique le ski**, le pratique au $n^{\text{ième}}$ hiver suivant.

1) Complétez l'arbre suivant :



2) Montrez que $p_{n+1} = 0{,}5p_n + 0{,}3$.

3) Dans cette question, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = p_n - 0,6$.

a) Montrez que la suite (u_n) est une suite géométrique dont vous donnerez la raison et le premier terme.

b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, déduisez de la question précédente l'expression de u_n, puis celle de p_n en fonction de n.

c) Montrez que la suite (p_n) est convergente et interprétez sa limite dans le contexte de l'exercice.

6 Lancer de 2 dés – Loi binomiale – Méthodes 6 et 8

On lance n fois deux dés honnêtes et l'on note X le nombre de fois où l'on obtient un double 6.

1) Déterminez la loi de probabilité de X, son espérance et son écart type en fonction de n.
2) Dans cette question, $n = 180$ et l'on demande de déterminer :
a) L'espérance μ de X et son écart type σ.

b) Les valeurs arrondies à trois décimales des probabilités $P(X = \mu)$ et $P(\mu - k \times \sigma \leq X \leq \mu + k \times \sigma)$ pour k égal à 1, 2 et 3.

c) Les plus petites valeurs réelles a et b telles que $0,025 \leq P(a \leq X)$ et $0,975 \leq P(b \leq X)$ à l'aide de votre calculatrice.

d) Ce que représente l'intervalle $\left[\frac{a}{n};\frac{b}{n}\right]$.

3) Un joueur lance les dés 200 fois et obtient 13 fois un double 6.
Qu'en pensez-vous ?

7 Simulation de l'exercice précédent – Comparaison avec la théorie – Méthode 5, 6, 7 et 8

On veut confronter les résultats théoriques et empiriques dans la situation aléatoire de l'exercice précédent lorsque $n = 180$.
Donnez des algorithmes en langage Python qui permettent de comparer des approximations et les valeurs exactes :
1) De l'espérance μ et l'écart type σ.

2) Des probabilités $P(X = \mu)$ et $P(\mu - k \times \sigma \leq X \leq \mu + k \times \sigma)$ pour k égal à 1, 2 et 3.

3) De l'intervalle de fluctuation au seuil de 95 %.

8 Loi de probabilité difficile à déterminer – Méthodes 11 et 12

On considère une urne contenant 4 boules numérotées 2, 8 boules numérotées 3 et 12 boules numérotées 5.
On extrait simultanément 3 boules de l'urne et l'on note P la variable aléatoire, qui à l'expérience, associe le produit des numéros des boules.

1) Pourquoi la loi de probabilité de P n'est-elle pas évidente à déterminer ?
2) Construisez un algorithme en langage Python qui permet d'obtenir des approximations de l'espérance μ et de l'écart type σ de P, puis donnez-les.

3) Construisez un algorithme en langage Python qui donne des approximations de $P(\mu-20 \le P \le \mu+20)$ et $P(\mu-40 \le P \le \mu+40)$, puis donnez-les.

9 **Dé tétraédrique – Loi binomiale – Méthodes 6, 7, 8 et 10**

On lance 180 fois un dé tétraédrique parfait comportant 3 faces blanches et 1 face bleue.
On note X la variable aléatoire qui à cette expérience associe le nombre de fois où les trois faces blanches sont visibles.

PARTIE A : Résultats théoriques

1) Déterminez la loi de probabilité, l'espérance μ et l'écart type σ de X.

2) Déterminez les probabilités $P(X=\mu)$, $P(\mu-\sigma < X < \mu+\sigma)$, $P(\mu-2\sigma < X < \mu+2\sigma)$ et $P(\mu-3\sigma < X < \mu+3\sigma)$.

3) Déterminez les intervalles de fluctuation en fréquences aux seuils de 95 % et 99 % de la variable aléatoire X.

4) Un joueur vient avec son propre dé, le lance 100 fois et obtient 33 succès, pensez-vous que son dé est truqué ?

PARTIE B : Résultats empiriques à comparer avec les résultats de la partie A

1) Donnez un algorithme qui permet d'obtenir des approximations de l'espérance et de l'écart type de X, puis comparez les résultats obtenus à ceux de la partie précédente.

2) Donnez un algorithme qui permet d'obtenir des approximations des probabilités $P(\mu-\sigma < X < \mu+\sigma)$, $P(\mu-2\sigma < X < \mu+2\sigma)$ et $P(\mu-3\sigma < X < \mu+3\sigma)$, puis comparez les résultats obtenus à ceux de la partie précédente.

3) Donnez un algorithme qui permet d'obtenir des approximations des intervalles de fluctuation en fréquences aux seuils de 95 % et 99 % de la variable aléatoire X, puis comparez les résultats obtenus à ceux de la partie précédente.

PARTIE C : Résultats théoriques pour le lancer de 5 dés

Au lieu de lancer 180 fois un dé, on lance 180 fois 5 dés et l'on note Y la variable aléatoire qui à l'expérience, associe le nombre de succès obtenus.
Déterminez l'espérance et l'écart type de la variable aléatoire Y.

10 **Dé tétraédrique – Concentration d'une variable aléatoire autour de son espérance – Méthodes 13 et 14**

On reprend le dé tétraédrique de l'exercice précédent.

1) Dans cette question, comme dans l'exercice précédent, on lance ce dé 180 fois.

a) Déterminez des minorants de $P(\mu-2\sigma < X < \mu+2\sigma) = P(|X-\mu| < 2\sigma)$ et $P(\mu-3\sigma < X < \mu+3\sigma) = P(|X-\mu| < 3\sigma)$ en utilisant l'inégalité de concentration.

b) Qu'en pensez-vous par rapport aux résultats obtenus à la deuxième question de la partie A de l'exercice précédent ?

2) Dans cette question, on lance le dé n fois et l'on note $M_n = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$ où les variables aléatoires X_i, pour i entier compris entre 1 et n, désignent le nombre de succès obtenus au $i^{\text{ème}}$ tirage c'est-à-dire 0 ou 1.

a) Justifiez que pour tout i, $E(X_i) = p = \dfrac{1}{4}$ et $V(X_i) = V = \dfrac{3}{16}$.

b) Montrez en utilisant l'inégalité de concentration pour la moyenne que pour tout réel $\delta > 0$:

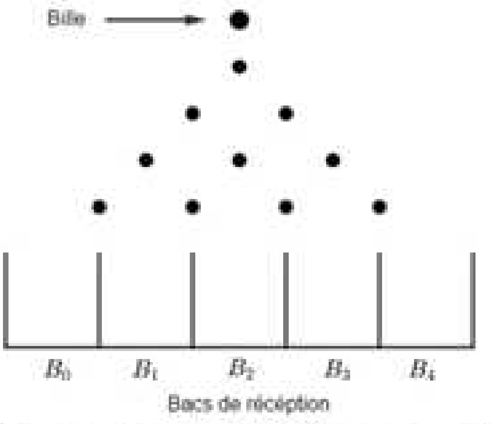
$$P\left(\left|M_n - \frac{1}{4}\right| < \delta\right) \geq 1 - \frac{3}{16n\delta^2}.$$

c) Déduisez-en alors le nombre de tirages minimal pour lequel :

$$P\left(\left|M_n - \frac{1}{4}\right| < \frac{1}{100}\right) \geq 0{,}99.$$

11 La planche de Galton – Loi binomiale – Méthodes 2, 5 et 6

Une planche de Galton à 4 rangées peut être schématisée de la façon suivante :



Au niveau de cette schématisation, les points sont parfaitement positionnés et représentent des clous parfaits.
Quand elle rencontre l'un d'eux, la bille se dirige avec une même probabilité vers la droite ou vers la gauche.
Pour nous, qui regardons l'expérience, la gauche sera lorsqu'elle se déplace vers B_0.
REMARQUE : Attention, les bacs sont numérotés ***à partir de 0 et non de 1*** *!*
On note X la variable aléatoire qui à l'expérience associe le numéro du bac dans lequel tombe la bille.

Partie A – Modélisation théorique de l'expérience aléatoire
Dans cette partie, on prend une planche de Galton à 10 rangées.
1) Justifiez que X suit une loi binomiale dont vous donnerez les paramètres
2) Déterminez la loi de probabilité, l'espérance μ et l'écart type σ de X.
3) Déterminez un majorant à deux décimales de $P(|X - \mu| \geq 2\sigma)$ et interprétez le résultat dans le contexte de l'exercice.

4) Comparez ce dernier résultat à celui obtenu en utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev et commentez.

Partie B – Modélisation et simulation de l'expérience aléatoire pour 5 lancers

Dans cette question, on prend une planche de Galton à 10 rangées, on lance 5 boules et pour k entier compris entre 0 et 10, on note N_k la variable aléatoire qui à l'expérience associe le nombre de boules obtenues dans le bac B_k.

REMARQUE : Attention ! Les variables N_k ne sont pas indépendantes deux à deux.

1) Déterminez $P(N_6 = 3)$ et $P(N_5 = 2)$.

2) Donnez $P((N_5 = 2) \cap (N_6 = 3))$ en utilisant les principes additif et multiplicatif évoqués dans le chapitre sur le dénombrement.

3) Déduisez des questions précédentes, la probabilité $P_{N_5=2}(N_6 = 3)$.

4) Déterminez des approximations des probabilités de la première et de la deuxième question par une simulation à l'aide d'algorithmes en langage Python qui ne font pas intervenir de résultats théoriques.

$\boxed{12}$ Le problème de la surréservation – Méthodes 5, 6 et 7

Une compagnie aérienne dispose d'une flotte d'A-340 et d'A-380.

Les avions A-340 et A-380 ont respectivement 239 et 516 sièges.

Comme toutes les compagnies, elle pratique la surréservation, qui consiste à vendre plus de billets que de places compte tenu des personnes qui ne se présentent pas lors de l'embarquement.

Une étude statistique l'a amenée à constater, qu'en considérant les désistements indépendants deux à deux, la probabilité qu'un client qui a réservé un vol ne se présente pas à l'embarquement est $p = \frac{1}{10}$.

Pour des vols de l'A-340 et l'A-380, on note respectivement X et Y les variables aléatoires qui correspondent aux nombre de désistements.

1) La compagnie décide de vendre jusqu'à 250 billets pour les vols de ses avions A-340.

Quelle est la probabilité que plus de clients que de places disponibles se présentent à l'embarquement pour un vol où tous les billets ont été réservés ?

2) Répondez à la même question si elle décide de vendre jusqu'à 550 billets pour les vols de ses A-380.

3) La compagnie constate que malgré cette surréservation, trop de places restent vides lors des vols de ses avions.

Elle cherche jusqu'à combien de billets elle peut mettre en vente sur chaque type d'avion afin que la probabilité, que plus de clients que de places disponibles se présentent à l'embarquement pour un vol où tous les billets ont été réservés soit inférieure à 0,01.

Dans cette question on suppose que le nombre de places réservées est supérieur aux nombres de places disponibles sur chaque type d'avions.
a) Expliquez pourquoi le problème n'est pas simple à résoudre théoriquement.
b) Construisez un algorithme en langage Python qui permet de résoudre le problème par une simulation.
Coup de pouce : On vous conseille d'utiliser une récursivité, c'est-à-dire une instruction qui utilise la définition de l'algorithme dans l'algorithme.
c) Vérifiez avec votre calculatrice que la simulation est pertinente.

13 Sondage – Méthodes 2, 5, 6 et 8

Lors du premier tour d'une élection municipale, il y a 3 candidats dont les prénoms sont Noël, Olivier et Patricia.
Parmi les suffrages exprimés au premier tour, Noël en obtient 40 %, Olivier 15 % et Patricia 45 %.
Noël et Patricia sont donc retenus pour le second tour, pour lesquels les votants du second tour restent fidèles.
En outre, pour ce second tour, Olivier s'exprime en faveur de Noël et parmi ceux qui ont voté pour lui, 80 % suivent sa consigne de vote.
On interroge une personne au hasard et l'on considère les événements suivants :
N_1 : « La personne a voté pour Noël au premier tour »,
O_1 : « La personne a voté pour Olivier au premier tour »,
P_1 : « La personne a voté pour Patricia au premier tour »,
N_2 : « La personne a voté pour Noël au deuxième tour »,
P_2 : « La personne a voté pour Noël au deuxième tour ».

Partie A – Etude théorique de la situation
1) Construisez un arbre pondéré pour modéliser la situation aléatoire.
2) Déterminez alors $P(N_2)$.
3) On interroge de façon indépendante 1000 administrés et l'on note X la variable aléatoire qui au sondage associe le nombre de personnes qui comptent voter pour Noël au second tour.
a) Déterminez la loi de probabilité de X, son espérance et son écart type.
b) Déterminez les intervalles de fluctuations en fréquence de X aux seuils de 95 % et 99 % et commentez.

Partie B – Simulation du sondage
Construisez un algorithme en langage Python qui permet de simuler le sondage et commentez.

14 Radioactivité – Datation au carbone 14 – Méthode 5

Les organismes vivants contiennent naturellement du carbone 14 $\left({}^{14}C\right)$ provenant de l'interaction des rayons cosmiques avec le carbone présent dans l'atmosphère.
La proportion de ${}^{14}C$ par rapport au carbone ${}^{12}C$ présent dans un organisme vivant est constante, égale à $1{,}3\times10^{-12}$.

A la mort d'un organisme, les échanges avec l'atmosphère cessent.
Le carbone 14 qu'il contient se désintègre à raison d'environ 12 pour 1000 tous les 100 ans, alors que le carbone 12 n'évolue pas.
On appelle demi-vie d'un nombre N d'atomes identiques le temps au bout duquel il n'en reste plus que $\frac{N}{2}$, ce qui correspond au temps au bout duquel un de ces atomes à une probabilité égale à 0,5 d'être désintégré si l'on considère les désintégrations indépendantes deux à deux.

Partie A – Etude théorique de la datation au carbone 14
Cette partie fait intervenir des méthodes du chapitre relatif aux fonctions exponentielles, logarithmes et puissances.

1) Déterminer la demi-vie du carbone 14.
2) Sur un site archéologique, il a été découvert des fragments d'os dans lesquels la proportion de carbone 14 par rapport au carbone 12 était égale à 5×10^{-13}. Déterminez une valeur arrondie à l'année près de l'âge de ces fragments.
3) Dans une grotte, il a été découvert un foyer contenant du charbon de bois. A quantité égale, un morceau de bois actuel contient 1,5 fois plus de carbone 14 que ce charbon de bois découvert. Déterminez une valeur arrondie à l'année près de l'âge d'occupation de la grotte.
4) Lorsque la teneur en carbone 14 d'un organisme mort devient inférieure à 0,3 % de sa valeur initiale, on ne peut plus effectuer une datation pertinente au carbone 14. Déterminez l'âge à partir duquel un organisme mort ne peut plus être daté au carbone 14.

Partie B – Etude algorithmique de la datation au carbone 14
Retrouvez les résultats précédents avec des algorithmes en langage Python relatifs à des simulations de situations aléatoires.

Coup de pouce : Il faut utiliser des boucles récursives qui reprennent la définition de l'algorithme de départ en incluant un compteur au sein de cette définition.

15 Loi géométrique – Méthode 1

On répète plusieurs fois une même épreuve de Bernoulli dont la probabilité d'obtenir un succès est p, jusqu'à obtenir un premier succès et l'on note X la variable aléatoire qui à l'expérience associe le nombre de répétitions qu'il faut pour obtenir ce premier succès.
REMARQUES : 1) On dit que X suit la loi géométrique de paramètre p.
2) Contrairement aux variables aléatoires vues jusqu'à présent cette loi discrète n'est pas finie car X peut prendre un nombre infini de valeurs.

1) Déterminez la loi de probabilité de X.
2) Détermination de l'espérance de X.

a) *Montrez que pour tout* $n\in\mathbb{N}^*$ *et* $x\in\,]0,1[$ *on a* $\ln(nx^n)=n\left(\frac{\ln n}{n}+\ln x\right)$, puis que $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln(nx^n)=-\infty$ et enfin que $\lim\limits_{n\to+\infty}nx^n=0$.

b) Pour $n \in \mathbb{N}$, prouvez que pour $x \in]0,1[$, $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} k \times x^{k-1} = \frac{1}{1-x}\left(\frac{1-x^n}{1-x} - nx^n\right)$,

puis que $S(x) = \lim_{n \to +\infty} S_n(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ en utilisant la question précédente.

Coup de pouce : Simplifiez $S_n(x) - x \times S_n(x)$, puis « sortez » $S_n(x)$.

c) Déduisez en l'espérance de X.

3) Dans cette question, on admet que la variance d'une variable aléatoire X qui suit une loi géométrique de paramètre p est $V(X) = \frac{1-p}{p^2}$.

Dans le cas d'une planche de Galton à 10 rangées, on a vu qu'en lançant 5 boules la probabilité d'obtenir 3 boules dans le bac B6 et 2 dans le bac B3 était $p = 0.001179$.

On décide d'effectuer plusieurs lancers de 5 boules jusqu'à obtenir pour la première fois cette dernière situation et l'on note X la variable aléatoire qui à l'expérience associe le nombre de lancers nécessaires.

a) Déterminez l'espérance μ et l'écart-type σ de X.

b) Déterminez alors $P(X = \mu)$ et $P(|X - \mu| < 2\sigma)$.

16 Simulation de la loi géométrique – Méthode 5

On reprend la planche de Galton à 10 rangées, sur laquelle on lance de manière répétitive 5 boules et l'on note X la variable aléatoire qui donne le nombre de lancers où l'on obtient pour la première fois 3 boules dans le bac B_6 et 2 dans le bac B_3, c'est-à-dire que l'on se place dans le contexte de la troisième question de l'exercice précédent.

Construisez un algorithme en langage Python qui permet de renvoyer des approximations de l'espérance μ et l'écart-type σ de X, ainsi que des probabilités $P(X = \mu)$ et $P(|X - \mu| < 2\sigma)$.

17 Loi de Poisson – Evénements rares – Approximation de la loi binomiale – Application – Méthode 6

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et p avec n « très grand » et p « proche » de 0 (pratiquement lorsque $n \geq 30$, $p \leq 0{,}1$ et $np < 15$).

1) Dans cette question on pose $m = E(X) = np$ et l'on se propose de montrer que lorsque n tend vers $+\infty$, p tend vers 0 et m tend vers une limite finie non nulle, alors on a $P(X = k) = \frac{m^k}{k!}e^{-m}$.

a) Montrez que :

$$\forall k \in [0;n],\ P(X = k) = \left[\frac{n}{n} \times \frac{n-1}{n} \times \cdots \times \frac{n-k+1}{n}\right] \times \frac{m^k}{k!} \times \left(1 - \frac{m}{n}\right)^{n-k}.$$

b) Montrez que $\lim_{n\to+\infty} \ln\left(1-\frac{m}{n}\right)^{n-k} = -m$ et en déduisez-en que $\lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{m}{n}\right)^{n-k}$.

c) Déduisez des 2 questions précédentes que lorsque n tend vers $+\infty$ on a :

$$P(X=k)=\frac{m^k}{k!}e^{-m} \text{ (loi de Poisson de paramètre m).}$$

2) Un article fait l'objet d'un réapprovisionnement hebdomadaire.
Chaque semaine, la probabilité qu'il soit en rupture de stock est de 1,25 %.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de ruptures de stock dans l'année, que l'on suppose en outre indépendantes.

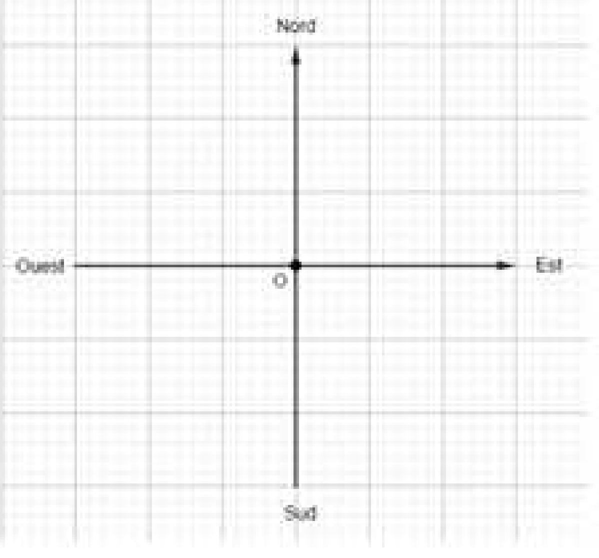
a) Quelle loi suit X ?

b) Justifiez que l'on peut faire une approximation de la loi que suit X par une loi de Poisson dont vous préciserez le paramètre $m \in \mathbb{R}_+^*$.

c) En utilisant cette approximation calculez $P(X=0)$ et $P(2<X)$.

18 Marche aléatoire selon les points cardinaux – Distance à l'origine – Méthode 5

On considère le quadrillage suivant :



Seule dans le désert, Patricia décide de partir du point O, en choisissant chaque seconde, de faire un pas d'un mètre vers une direction cardinale de façon aléatoire.
On note D_k la variable aléatoire qui à l'expérience associe la distance entre Patricia et le point O au bout de k heures de marche.

1) Pourquoi est-il impossible de donner la loi de probabilité de D_1 ?

2) Pourquoi est-il impossible d'exprimer D_1 par opérations sur des variables aléatoires indépendantes deux à deux et donc son espérance ?

3) Donnez un algorithme en langage Python qui permet d'obtenir une bonne approximation de l'espérance et de l'écart type de D_1.

4) En utilisant cet algorithme, donnez des approximations de l'espérance et de l'écart type de D_2, puis de D_4.

5) Que pensez-vous des résultats obtenus ?

19 Marche aléatoire dans n'importe quelle direction – Distance à l'origine – Méthode 5

Quelque temps plus tard, Patricia décide de recommencer l'expérience de l'exercice précédent, mais en choisissant à chaque pas une direction quelconque, si bien que si elle se trouve en M à l'instant t, une seconde plus tard elle est n'importe où sur le cercle de centre M et de rayon 1.

On note D'_k la variable aléatoire qui à l'expérience associe la distance entre Patricia et le point O.

Répondez aux mêmes questions que dans l'exercice précédent en remplaçant D_k par D'_k et commentez.

Corrigés

1 La roue de la fortune – Méthodes 1 et 9

1) Déterminons la loi de probabilité de G, son espérance et son écart type.
Le gain algébrique G prend les valeurs $16-10=6$ €, $14-10=4$ €, $12-10=2$ € et enfin -10 € avec des probabilités respectives $\frac{1}{10}$, $\frac{2}{10}$, $\frac{3}{10}$ et $\frac{4}{10}$ ce qui donne la loi de probabilités de G.

On en déduit que :

$$E(G)=6\times\frac{1}{10}+4\times\frac{2}{10}+2\times\frac{3}{10}-10\times\frac{4}{10}=-2\text{ €},$$

$$\sigma(G)=\sqrt{6^2\times\frac{1}{10}+4^2\times\frac{2}{10}+2^2\times\frac{3}{10}+(-10)^2\times\frac{4}{10}-(-2)^2}=2\sqrt{11}=6{,}63\,.$$

REMARQUE : Ce jeu est défavorable au joueur avec un écart type pas convaincant pour tenter sa chance !

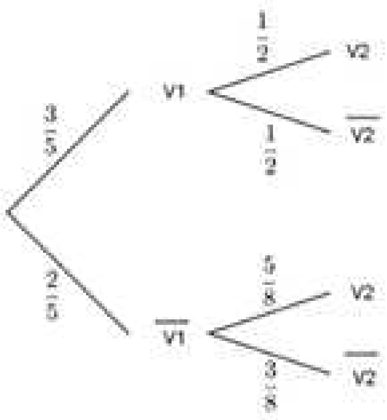
2) On va prendre une variable aléatoire auxiliaire pour répondre à la question.
Si l'on note X le gain non algébrique du joueur on a $G=X-12$ et $G'=2X-20$ ce qui donne $G+12=X$ et par conséquent $G'=2G+4$.
On en déduit :

$$E(G')=E(2G+4)=2E(G)+4=0 \quad \text{et} \quad \sigma(G')=\sigma(2G+4)=|2|\sigma(G)=4\sqrt{11}=13{,}27\,,$$

ce qui rend le jeu équitable mais plus risqué : il ne faut toujours pas jouer à ce nouveau jeu !

2 Des jetons dans des urnes – Probabilités conditionnelles – Méthode 2

1) L'arbre demandé est le suivant :



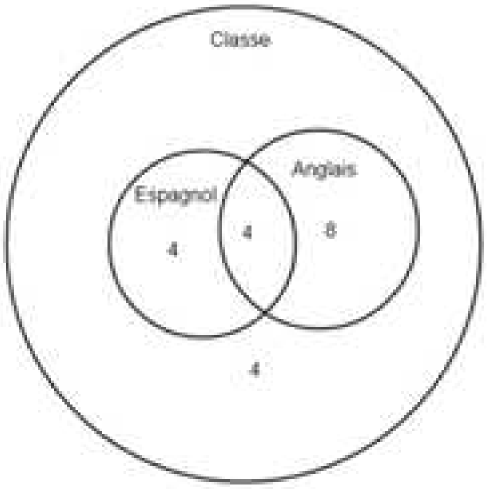
2) On a : $P(V_2)=P(V_1\cap V_2)+P(\overline{V_1}\cap V_2)=\frac{3}{5}\times\frac{1}{2}+\frac{2}{5}\times\frac{5}{8}=\frac{3}{10}+\frac{1}{4}=\frac{11}{20}$.

3) En utilisant la formule des probabilités conditionnelles, on obtient :

$$P_{V_2}\left(\overline{V_1}\right)=\frac{P\left(\overline{V_1}\cap V_2\right)}{P(V_2)}=\frac{\frac{2}{5}\times\frac{5}{8}}{\frac{11}{20}}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{11}{20}}=\frac{5}{11}.$$

3 Italien ou espagnol ? Indépendance ? – Méthode 3

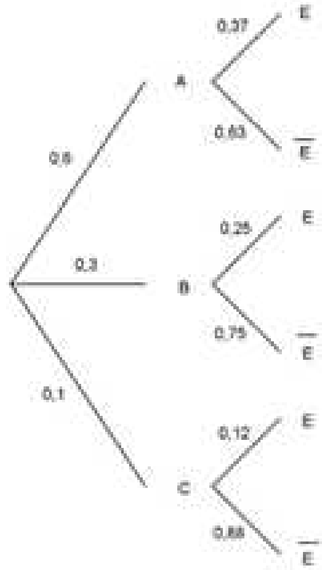
1) Le diagramme qui illustre la situation est le suivant :



2) D'une part $P(E\cap A)=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}$ et d'autre part $P(E)\times P(A)=\frac{8}{20}\times\frac{12}{20}=\frac{6}{25}$, donc on en déduit que $P(E\cap A)\neq P(E)\times P(A)$, ce qui prouvent que les événements E et A ne sont pas indépendants.

4 Panne d'un lave-vaisselle – Probabilités conditionnelles – Méthode 2

1) L'arbre pondéré qui illustre la situation est le suivant :

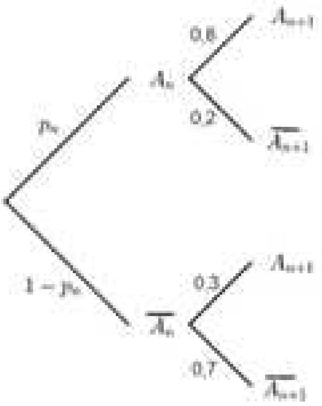


2) D'après l'arbre précédent et la formule des probabilités totales :
$$P(E) = P(A \cap E) + P(B \cap E) + P(C \cap E) = 0{,}6 \times 0{,}37 + 0{,}3 \times 0{,}25 + 0{,}1 \times 0{,}12 = 0{,}309 .$$

3) On a $P_E(C) = \dfrac{P(C \cap E)}{P(E)} = \dfrac{0{,}1 \times 0{,}12}{0{,}309} = 0{,}039$ qui est la probabilité demandée.

5 Ski ou snowboard – Probabilités conditionnelles et suites – Méthode 2

1) Complétons l'arbre demandé :



2) Montrons que $p_{n+1} = 0{,}5p_n + 0{,}3$.
$p_{n+1} = P(A_{n+1}) = 0{,}8 \times p_n + 0{,}3(1 - p_n) = 0{,}5 \times p_n + 0{,}3$.

3) Dans cette question, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n = p_n - 0{,}6$.

a) Comme pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = p_n - 0{,}6$, on en déduit que $u_n + 0{,}6 = p_n$ (*).

En utilisant **une première fois** (*) :

$u_{n+1} = p_{n+1} - 0{,}6 = 0{,}5 \times p_n + 0{,}3 - 0{,}6 = 0{,}5 \times p_n - 0{,}3 = 0{,}5(u_n + 0{,}6) - 0{,}3 = 0{,}5 \times u_n$.

On en déduit que la suite (u_n) est géométrique de raison $q = 0{,}5$ et de premier terme $u_1 = p_1 - 0{,}6 = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$.

b) D'après la question précédente $u_n = q^{n-1} \times u_1 = (0{,}5)^{n-1} \times 0{,}4$ donc on obtient en utilisant **une deuxième fois** (*) que : $p_n = (0{,}5)^{n-1} \times 0{,}4 + 0{,}6$.

c) Comme $-1 < 0{,}5 < 1$, $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}5^{n-1} = 0$ donc $\lim p_n = 0{,}6$.

Lorsqu'un sportif fait du ski au départ, la probabilité qu'il continue au bout d'un « assez grand nombre d'années » est égale à 0,6.

6 Lancer de 2 dés – Loi binomiale – Méthodes 6 et 8

1) L'expérience aléatoire est un schéma de Bernoulli.

En effet, on répète n fois de façon indépendante une même épreuve de Bernoulli qui consiste à jeter 2 dés et se demander si l'on obtient un double 6, ce qui constitue un succès de probabilité $p = \dfrac{1}{36}$.

On peut donc écrire que : $X \sim B\left(n, \frac{1}{36}\right)$.

Loi de probabilité de X : Pour k entier de $\llbracket 0;n \rrbracket$, $P(X=k)=\binom{n}{k}\times\left(\frac{1}{36}\right)^k\times\left(\frac{35}{36}\right)^{n-k}$.

Espérance et écart type : $\mu=E(X)=np=\frac{n}{36}$ et $\sigma=\sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}=\frac{\sqrt{35n}}{36}$.

2) a) Comme on a $n=180$: $\mu=\frac{180}{36}=5$ et $\sigma=\frac{5\sqrt{7}}{6}\approx 2,20$.

b) Avec la calculatrice, on obtient :
$P(X=\mu)=P(X=5)\approx 0,178$,

$P(\mu-\sigma\leq X\leq\mu+\sigma)=P(2,8\leq X\leq 7,2)=P(3\leq X\leq 7)\approx 0,748$,

$P(\mu-2\sigma\leq X\leq\mu+2\sigma)=P(0,6\leq X\leq 9,4)=P(1\leq X\leq 9)\approx 0,964$,

$P(\mu-3\sigma\leq X\leq\mu+3\sigma)=P(-1,6\leq X\leq 11,6)=P(0\leq X\leq 11)\approx 0,995$.

c) Avec la calculatrice, on obtient $a=1$ et $b=10$.

d) Par conséquent, $I_{0,95}=\left[\frac{1}{180};\frac{10}{180}\right]\approx[0,005;0,056]$ est l'intervalle de fluctuation en fréquence au seuil de 95% de la variable aléatoire X, c'est-à-dire l'intervalle dans lequel la fréquence de succès à une probabilité supérieure ou égale à 0,95.

3) La fréquence de succès du joueur est $f=\frac{13}{200}=0,065\in I_{0,95}$, donc au seuil de 95 %, on peut affirmer que les dés sont truqués !

7 Simulation – Comparaison avec la théorie – Méthode 5, 6, 7 et 8

1) On peut utiliser l'algorithme suivant en simulant N fois l'expérience aléatoire, puis en prenant par exemple la valeur N = 100 000 :

```
from random import random
from math import sqrt
def binomialesp(N,n,p):
    s=(n+1)*[0]
    m1=n*p
    e1=sqrt(n*p*(1-p))
    for i in range (N):
        c=0
        for j in range(n):
            x=random()
            if x<p:
                c=c+1
        s[c]=s[c]+1
    for i in range(n+1):
        s[i]=(s[i])/N
    m=0
    l=0
    for i in range(n+1):
        m=m+i*s[i]
        l=l+i**2*(s[i])
    e=sqrt(l-m**2)
    return(m,m1,e,e1)
```

En mode « Run », il renvoie :

```
In [6]: binomialesp(100000,180,1/36)
Out[6]: (4.993009999999999, 5.0, 2.2007592189742176, 2.204792759220492)

In [7]: binomialesp(100000,180,1/36)
Out[7]: (4.998740000000001, 5.0, 2.201144795873275, 2.204792759220492)

In [8]: binomialesp(100000,180,1/36)
Out[8]: (5.00422, 5.0, 2.2078320116349444, 2.204792759220492)
```

Bingo ! Les résultats théoriques et empiriques coïncident.

2) Pour déterminer $P(X=\mu)=P(X=5)$ on peut utiliser l'algorithme suivant en simulant N fois l'expérience aléatoire, puis en prenant par exemple la valeur N = 100 000 :

```
from random import random
from scipy.special import binom
def binomialponct(N,n,p,k):
    s=(n+1)*[0]
    e=(n+1)*[0]
    for i in range (N):
        c=0
        for j in range(n):
            x=random()
            if x<p:
                c=c+1
        s[c]=s[c]+1
    for i in range(n+1):
        s[i]=(s[i])/N
    for i in range(n+1):
        e[i]=binom(n,i)*(p**i)*(1-p)**(n-i)
    return(s[k],e[k])
```

En mode « Run », il renvoie :

```
In [11]: binomialponct(100000,180,1/36,5)
Out[11]: (0.17786, 0.1779540390528857)

In [12]: binomialponct(100000,180,1/36,5)
Out[12]: (0.17978, 0.1779540390528857)

In [13]: binomialponct(100000,180,1/36,5)
Out[13]: (0.17941, 0.1779540390528857)
```

Encore une fois, la simulation est convaincante !

Pour déterminer $P(\mu-k\times\sigma\leq X\leq\mu+k\times\sigma)$ pour k égal à 1 ou 2 on peut utiliser l'algorithme suivant en simulant N fois l'expérience aléatoire, puis en prenant par exemple la valeur N = 100 000 :

```python
from random import random
from scipy.special import binom
def binomialcum(N,n,p,a,b):
    s=(n+1)*[0]
    e=(n+1)*[0]
    for i in range (N):
        c=0
        for j in range(n):
            x=random()
            if x<p:
                c=c+1
        s[c]=s[c]+1
    for i in range(n+1):
        s[i]=(s[i])/N
    for i in range(n+1):
        e[i]=binom(n,i)*(p**i)*(1-p)**(n-i)
    for i in range(1,n+1):
        s[i]=s[i]+s[i-1]
        e[i]=e[i]+e[i-1]
    return(s[b]-s[a],e[b]-e[a])
```

En mode « Run », on obtient :

```
In [27]: binomialcum(100000,180,1/36,2,7)
Out[27]: (0.7469199999999999, 0.7484666106282062)

In [28]: binomialcum(100000,180,1/36,2,7)
Out[28]: (0.7501899999999999, 0.7484666106282062)

In [29]: binomialcum(100000,180,1/36,2,7)
Out[29]: (0.7484200000000001, 0.7484666106282062)

In [30]: binomialcum(100000,180,1/36,0,9)
Out[30]: (0.9639800000000001, 0.9639135996185889)

In [31]: binomialcum(100000,180,1/36,0,9)
Out[31]: (0.9639899999999999, 0.9639135996185889)

In [32]: binomialcum(100000,180,1/36,0,9)
Out[32]: (0.9643899999999999, 0.9639135996185889)
```

Les résultats restent probants avec cet algorithme !

Pour déterminer $P(\mu-3\times\sigma\leq X\leq\mu+3\times\sigma)$, il faut déterminer une approximation et la valeur de $P(0\leq X\leq 11)$, ce qui pose problème avec l'algorithme précédent car on ne peut pas prendre $a=-1$, et si l'on entre $a=0$, on détermine $P(1\leq X\leq 11)$ ce qui revient à négliger $P(X=0)$ comme on l'a expliqué en fin d'exemple de la méthode 5.

Contrairement à ce dernier exemple, dans la mesure où le nombre 0 est proche de 5, on risque d'écarter une valeur non négligeable, d'où l'idée d'utiliser l'événement contraire et d'appliquer l'algorithme précédent ou de le modifier en supprimant tout simplement a, s[a] et e[a], ce qui donne :

```
from random import random
from scipy.special import binom
def binomialcum(N,n,p,b):
    s=(n+1)*[0]
    e=(n+1)*[0]
    for i in range (N):
        c=0
        for j in range(n):
            x=random()
            if x<p:
                c=c+1
        s[c]=s[c]+1
    for i in range(n+1):
        s[i]=(s[i])/N
    for i in range(n+1):
        e[i]=binom(n,i)*(p**i)*(1-p)**(n-i)
    for i in range(1,n+1):
        s[i]=s[i]+s[i-1]
        e[i]=e[i]+e[i-1]
    return(s[b],e[b])
```

En mode « Run », on obtient :

```
In [39]: binomialcum(100000,180,1/36,11)
Out[39]: (0.9957599999999999, 0.9952163736905131)

In [40]: binomialcum(100000,180,1/36,11)
Out[40]: (0.99545, 0.9952163736905131)

In [41]: binomialcum(100000,180,1/36,11)
Out[41]: (0.99521, 0.9952163736905131)
```

Les résultats expérimentaux sont encore conformes à la théorie !

3) On peut utiliser l'algorithme suivant en simulant N fois l'expérience aléatoire, puis en prenant par exemple la valeur N = 100 000 pour répondre à la question :

```
from random import random
from scipy.special import binom
def fluctuation(N,n,p,c1):
    s=(n+1)*[0]
    e=(n+1)*[0]
    for i in range (N):
        c=0
        for j in range(n):
            x=random()
            if x<p:
                c=c+1
        s[c]=s[c]+1
    for i in range(n+1):
        s[i]=(s[i])/N
    for i in range(n+1):
        e[i]=binom(n,i)*(p**i)*(1-p)**(n-i)
    for i in range(1,n+1):
        s[i]=s[i]+s[i-1]
    for i in range(1,n+1):
        e[i]=e[i]+e[i-1]
    a=0
    for i in range(n+1):
        if (s[i])<(1-c1)/2:
            a=a+1
    b=0
    for i in range(n+1):
        if (s[i])<(1+c1)/2:
            b=b+1
    a1=0
    for i in range(n+1):
        if (e[i])<(1-c1)/2:
            a1=a1+1
    b1=0
    for i in range(n+1):
        if (e[i])<(1+c1)/2:
            b1=b1+1
    a=a/n
    b=b/n
    a1=a1/n
    b1=b1/n
    return(a,b,a1,b1)
```

En mode « Run », on obtient :

```
In [43]: fluctuation(100000,180,1/36,0.95)
Out[43]:
(0.005555555555555556,
 0.05555555555555555,
 0.005555555555555556,
 0.05555555555555555)

In [44]: fluctuation(100000,180,1/36,0.95)
Out[44]:
(0.005555555555555556,
 0.05555555555555555,
 0.005555555555555556,
 0.05555555555555555)

In [45]: fluctuation(100000,180,1/36,0.95)
Out[45]:
(0.005555555555555556,
 0.05555555555555555,
 0.005555555555555556,
 0.05555555555555555)
```

Dans les trois cas, on obtient exactement les mêmes bornes !

8 Loi de probabilité difficile à déterminer – Méthodes 11 et 12

1) A part remarquer que P prend des valeurs entre 8 et 125 avec certaines valeurs interdites du style 17, 19, 23, 69…
On a déjà du mal avec l'univers image de P, c'est-à-dire les valeurs que prend cette variable aléatoire alors si vous cherchez absolument à donner sa loi de probabilité et son écart type : bon courage !

REMARQUE : Ce n'est cependant pas impossible en utilisant les combinaisons avec répétitions puisqu'il n'y a que $\binom{5}{2}=10$ *produits possibles.*

2) L'algorithme suivant permet de répondre à la question en simulant N fois l'expérience aléatoire, puis en prenant par exemple N = 100 000 :

```
from random import random
from math import sqrt
def loiprobaprod(n):
    s=3*[0]
    L=[]
    for i in range(n):
        c=0
        d=0
        e=0
        for i in range(3):
            x=random()
            if x<=(1/6):
                c=c+1
            elif x<=(2/6):
                d=d+1
            else:
                e=e+1
            s=[2**c,3**d,5**e]
        p=1
        k=0
        for i in range(3):
            p=p*s[i]
        L.append(p)
    k=0
    for i in range(len(L)):
        k=k+L[i]
    m=k/n
    v=0
    for i in range(len(L)):
        v=v+((L[i]-m)**2)/n
    e=sqrt(v)
    return(m,e)
```

En mode « Run » on obtient :

```
In [2]: loiprobaprod(100000)
Out[2]: (72.32413, 37.975185973777755)

In [3]: loiprobaprod(100000)
Out[3]: (72.34702, 38.040284135629946)

In [4]: loiprobaprod(100000)
Out[4]: (72.27503, 38.02830457037474)
```

Finalement, on obtient $\mu = 72$ et $\sigma = 38$.

3) L'algorithme suivant permet de répondre à la question en simulant N fois l'expérience aléatoire, puis en prenant par exemple N = 100 000 :

```
from random import random
def loiprobaprod1(n,m,c1):
    s=3*[0]
    L=[]
    for i in range(n):
        c=0
        d=0
        e=0
        for i in range(3):
            x=random()
            if x<=(1/6):
                c=c+1
            elif x<=(2/6):
                d=d+1
            else:
                e=e+1
            s=[2**c,3**d,5**e]
        p=1
        for i in range(3):
            p=p*s[i]
        L.append(p)
    k=0
    for i in range(len(L)):
        if abs(L[i]-m)<=c1:
            k=k+1
    print(k)
    n=k/n
    return(n)
```

En mode « Run », on obtient :

```
In [8]: loiprobaprod1(100000,72,20)
22293
Out[8]: 0.22293

In [9]: loiprobaprod1(100000,72,20)
22084
Out[9]: 0.22084

In [10]: loiprobaprod1(100000,72,20)
22073
Out[10]: 0.22073
```

```
In [13]: loiprobaprod1(100000,72,40)
49919
Out[13]: 0.49919

In [14]: loiprobaprod1(100000,72,40)
50258
Out[14]: 0.50258

In [15]: loiprobaprod1(100000,72,40)
50331
Out[15]: 0.50331
```

Finalement, on a $P(\mu-20 \leq P \leq \mu+20)=0{,}22$ et $P(\mu-40 \leq P \leq \mu+40)=0{,}50$.

9 Dé tétraédrique – Loi binomiale – Méthodes 6, 7, 8 et 10

PARTIE A : Résultats théoriques

1) L'expérience est un schéma de Bernoulli.

En effet, on répète $n=180$ fois de façon indépendante une même épreuve de Bernoulli qui consiste à jeter un dé en se demandant si les trois faces blanches sont visibles, ce qui constitue un succès de probabilité $p=\frac{1}{4}$.

La variable aléatoire X suit donc la loi binomiale de paramètres $n=180$ et $p=\frac{1}{4}$, ce qui peut s'écrire $X \sim B\left(180,\frac{1}{4}\right)$.

Loi de probabilité de X : Pour k entier de $[\![0,180]\!]$, $P(X=k)=\binom{180}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{180-k}$.

Espérance et écart type : $\mu=180\times\frac{1}{4}=45$ et $\sigma=\sqrt{45\times\frac{3}{4}}=\frac{3\sqrt{15}}{2}=5{,}81$.

2) A la calculatrice on obtient :

$P(X=\mu)=P(X=45)=0{,}069$.

$P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)=P(39{,}19<X<50{,}81)=P(40 \leq X \leq 50)=0{,}656$.

$P(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma)=P(33{,}38<X<56{,}12)=P(34 \leq X \leq 56)=0{,}953$.

$P(\mu-3\sigma<X<\mu+3\sigma)=P(27{,}57<X<62{,}43)=P(28 \leq X \leq 62)=0{,}997$.

3) Toujours à la calculatrice, on obtient :

$$I_{0,95}=\left[\frac{34}{180};\frac{57}{180}\right]=[0{,}188;0{,}317] \text{ et } I_{0,99}=\left[\frac{31}{180};\frac{60}{180}\right]=[0{,}172;0{,}334].$$

4) La fréquence de succès du joueur est $f=\frac{33}{100}=0{,}33$ donc $f \notin I_{0,95}$ et $f \in I_{0,99}$.

Cela permet d'affirmer qu'au seuil de 95 % le dé est truqué, mais qu'au seuil de 99 %, il ne l'est pas.

PARTIE B : Résultats empiriques à comparer avec les résultats de la partie A

1) On peut utiliser l'algorithme suivant en simulant N fois l'expérience aléatoire, puis en prenant par exemple la valeur N = 100 000 :

```
from random import random
from math import sqrt
def binomialesp(N,n,p):
    s=(n+1)*[0]
    m1=n*p
    e1=sqrt(n*p*(1-p))
    for i in range (N):
        c=0
        for j in range(n):
            x=random()
            if x<p:
                c=c+1
        s[c]=s[c]+1
    for i in range(n+1):
        s[i]=(s[i])/N
    m=0
    l=0
    for i in range(n+1):
        m=m+i*s[i]
        l=l+i**2*(s[i])
    e=sqrt(l-m**2)
    return(m,m1,e,e1)
```

En mode « Run », on obtient :

```
In [20]: binomialesp(100000,180,0.25)
Out[20]: (45.005700000000004, 45.0, 5.804552309179342, 5.809475019311125)

In [21]: binomialesp(100000,180,0.25)
Out[21]: (44.95632999999998, 45.0, 5.821676986152818, 5.809475019311125)

In [22]: binomialesp(100000,180,0.25)
Out[22]: (44.97401, 45.0, 5.806490723311197, 5.809475019311125)
```

Compte tenu de ces résultats la simulation est très satisfaisante.

2) On peut utiliser les algorithmes suivants en simulant N fois l'expérience aléatoire, puis en prenant par exemple la valeur N = 100 000 :

Pour la probabilité $P(X = 45)$:

```
from random import random
from scipy.special import binom
def binomialponct(N,n,p,k):
    s=(n+1)*[0]
    e=(n+1)*[0]
    for i in range (N):
        c=0
        for j in range(n):
            x=random()
            if x<p:
                c=c+1
        s[c]=s[c]+1
    for i in range(n+1):
        s[i]=(s[i])/N
    for i in range(n+1):
        e[i]=binom(n,i)*(p**i)*(1-p)**(n-i)
    return(s[k],e[k])
```

En mode « Run », on obtient :

```
In [32]: binomialponct(100000,180,0.25,45)
Out[32]: (0.07041, 0.06853334364740707)

In [33]: binomialponct(100000,180,0.25,45)
Out[33]: (0.06737, 0.06853334364740707)

In [34]: binomialponct(100000,180,0.25,45)
Out[34]: (0.06897, 0.06853334364740707)
```

Pour les probabilités $P(40 \le X \le 50)$, $P(34 \le X \le 56)$ et $P(28 \le X \le 62)$:

```
from random import random
from scipy.special import binom
def binomialcum(N,n,p,a,b):
    s=(n+1)*[0]
    e=(n+1)*[0]
    for i in range (N):
        c=0
        for j in range(n):
            x=random()
            if x<p:
                c=c+1
        s[c]=s[c]+1
    for i in range(n+1):
        s[i]=(s[i])/N
    for i in range(n+1):
        e[i]=binom(n,i)*(p**i)*(1-p)**(n-i)
    for i in range(1,n+1):
        s[i]=s[i]+s[i-1]
        e[i]=e[i]+e[i-1]
    return(s[b]-s[a],e[b]-e[a])
```

En mode « Run », on obtient :

```
In [28]: binomialcum(100000,180,0.25,39,50)
Out[28]: (0.65689, 0.6563188163378262)

In [29]: binomialcum(100000,180,0.25,33,56)
Out[29]: (0.9518000000000001, 0.9527560057987956)

In [30]: binomialcum(100000,180,0.25,27,62)
Out[30]: (0.9975700000000001, 0.997443960318445)
```

La simulation reste pertinente par rapport au modèle théorique.

3) On peut utiliser l'algorithme suivant en simulant N fois l'expérience aléatoire, puis en prenant par exemple la valeur N = 100 000 :

```
from random import random
from scipy.special import binom
def fluctuation(N,n,p,c1):
    s=(n+1)*[0]
    e=(n+1)*[0]
    for i in range (N):
        c=0
        for j in range(n):
            x=random()
            if x<p:
                c=c+1
        s[c]=s[c]+1
    for i in range(n+1):
        s[i]=(s[i])/N
    for i in range(n+1):
        e[i]=binom(n,i)*(p**i)*(1-p)**(n-i)
    for i in range(1,n+1):
        s[i]=s[i]+s[i-1]
    for i in range(1,n+1):
        e[i]=e[i]+e[i-1]
    a=0
    for i in range(n+1):
        if (s[i])<(1-c1)/2:
            a=a+1
    b=0
    for i in range(n+1):
        if (s[i])<(1+c1)/2:
            b=b+1
    a1=0
    for i in range(n+1):
        if (e[i])<(1-c1)/2:
            a1=a1+1
    b1=0
    for i in range(n+1):
        if (e[i])<(1+c1)/2:
            b1=b1+1
    a=a/n
    b=b/n
    a1=a1/n
    b1=b1/n
    return(a,b,a1,b1)
```

En mode « Run », on obtient :

```
In [36]: fluctuation(100000,180,0.25,0.95)
Out[36]:
(0.18888888888888888,
 0.31666666666666665,
 0.18888888888888888,
 0.31666666666666665)

In [37]: fluctuation(100000,180,0.25,0.99)
Out[37]:
(0.17222222222222222,
 0.3333333333333333,
 0.17222222222222222,
 0.3333333333333333)
```

Une fois de plus, la simulation est excellente.

PARTIE C : Résultats théoriques pour le lancer de 5 dés
Déterminons l'espérance et l'écart type de la variable aléatoire Y.
Si l'on numérote les dés de 1 à 5 et que pour i entier compris entre 1 et 5, on note X_i la variable aléatoire qui au dé N° i associe le nombre de succès sur les 180 lancers, alors on a $Y = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5$ avec les variables X_i **indépendantes deux à deux** (indépendance physique).

Par conséquent $E(Y) = E(X_1 + \cdots + X_5) = E(X_1) + \cdots + E(X_5) = 5 \times E(X_1) = 5\mu = 225$ et comme la variance est $V(Y) = V(X_1 + \cdots + X_5) = V(X_1) + \cdots + V(X_5) = 5 \times V(X_1) = 5\sigma^2$, on en déduit que $\sigma(Y) = \sqrt{5}\sigma = \sqrt{5} \times \dfrac{3\sqrt{15}}{2} = \dfrac{15\sqrt{3}}{2} = 12.99$.

10 **Dé tétraédrique – Concentration d'une variable aléatoire autour de son espérance – Méthodes 13 et 14**
On reprend le dé tétraédrique de l'exercice précédent.

1) Dans cette question, comme dans l'exercice précédent, on lance ce dé 180 fois.
a) D'une façon générale, pour une variable aléatoire X d'espérance μ et de variance V, pour tout $\delta > 0$, on a : $P(|X - \mu| < \delta) \geq 1 - \dfrac{V}{\delta^2} = 1 - \dfrac{\sigma^2}{\delta^2}$.
En prenant $\delta = 2\sigma$, puis $\delta = 3\sigma$ on obtient de façon universelle, donc le cas de la variable aléatoire X de cet exercice que :
$P(|X - \mu| < 2\sigma) \geq 1 - \dfrac{\sigma^2}{4\sigma^2} = 1 - \dfrac{1}{4} = \dfrac{3}{4} = 0{,}75$; $P(|X - \mu| < 3\sigma) \geq 1 - \dfrac{\sigma^2}{9\sigma^2} = 1 - \dfrac{1}{9} = \dfrac{8}{9} = 0{,}89$.
b) Dans la deuxième question de la partie A de l'exercice précédent on a obtenu $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0{,}953$ et $P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 0{,}997$, ce qui nous donnait comme minorants respectifs 0,95 > 0,75 et 0,99 > 0,89.

C'est la contrepartie du caractère universel de l'inégalité de concentration, la minoration est bonne, mais souvent très « large », ce qu'illustre cet exemple.

2) a) Les variables aléatoires X_i correspondent au nombre de succès obtenus à une **épreuve** de Bernoulli (**et non à un schéma de Bernoulli !**), donc $E(X_i) = p = \frac{1}{4}$ et $V(X_i) = V = p(1-p) = \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{16}$ (cf. introduction de la partie 2 du chapitre 7).

b) Dans cette question comme $E(M_n) = \mu = p = \frac{1}{4}$ et $V = \frac{3}{16}$ en remplaçant dans l'inégalité de concentration pour la moyenne $P(|M_n - \mu| < \delta) \geq 1 - \frac{V}{n\delta^2}$, on obtient $P\left(\left|M_n - \frac{1}{4}\right| < \delta\right) \geq 1 - \frac{3}{16n\delta^2}$.

c) Si l'on prend $\delta = \frac{1}{100}$ dans l'inégalité précédente on obtient aisément que :

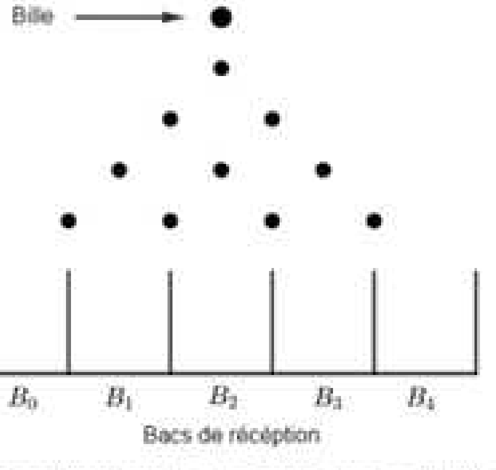
$$P\left(\left|M_n - \frac{1}{4}\right| < \frac{1}{100}\right) \geq 1 - \frac{30000}{16n}.$$

Il suffit donc de résoudre l'inégalité $1 - \frac{30000}{16n} \geq 0,99$ pour répondre à la question.

Comme $1 - \frac{30000}{16n} \geq 0,99 \Leftrightarrow 0,01 \geq \frac{30000}{16n} \Leftrightarrow n \geq \frac{30000}{16 \times 0,01} = 187\ 500$, le nombre de lancers minimal demandé est 187 500.

11 La planche de Galton – Loi binomiale – Méthodes 2, 5 et 6

Une planche de Galton à 4 rangées est schématisée de la façon suivante :



Au niveau de cette schématisation, les points sont parfaitement positionnés et représentent des clous parfaits.
Quand elle rencontre l'un d'eux, la bille se dirige avec une même probabilité vers la droite ou vers la gauche.
Pour nous, qui regardons l'expérience, la gauche sera lorsqu'elle se déplace vers B_0.

Les bacs sont numérotés à partir de 0 ***et non*** *de 1 !*
X est la variable aléatoire qui à l'expérience associe le numéro du bac dans lequel tombe la bille.

Partie A – Modélisation théorique de l'expérience aléatoire
Dans cette partie, la planche de Galton a 10 rangées.
1) L'expérience est un schéma de Bernoulli.
En effet, on répète $n = 10$ fois de façon indépendante une même épreuve de Bernoulli qui consiste à se demander si la bille se déplace vers la droite lorsqu'elle rencontre un clou, ce qui constitue un succès de probabilité $p = \frac{1}{2}$.
La variable aléatoire X qui à l'expérience associe le N° du bac dans lequel elle tombe est donc égale au nombre de succès relatifs au schéma que l'on vient de décrire.
Par conséquent la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{1}{2}$, ce qui peut s'écrire $X \sim B\left(10, \frac{1}{2}\right)$.

2) ***Loi de probabilité de X*** :

$$\text{Pour k entier de } \lfloor 0,10 \rfloor,\ P(X = k) = \binom{10}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{10-k} = \binom{10}{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}.$$

Espérance et écart type : $\mu = 10 \times \frac{1}{2} = 5$ et $\sigma = \sqrt{5 \times \frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{10}}{2} = 1{,}581$.

3) En utilisant la formule relative à l'événement contraire :

$$P(|X-\mu| \geq 2\sigma) = 1 - P\left(\overline{|X-\mu| \geq 2\sigma}\right) = 1 - P(|X-\mu| < 2\sigma) = 1 - P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma).$$

Comme $P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = P(1{,}84 < X < 9{,}16) = P(2 \leq X \leq 8) = 0{,}979$, on en déduit que $P(|X-\mu| \geq 2\sigma) = 1 - 0{,}979 = 0{,}021$ et donc que la valeur 0,03 est un majorant de cette dernière probabilité.

Concrètement, cela signifie que l'on a une probabilité inférieure à 0,03 de tomber dans l'un des bacs N° 0, 1, 9 et 10.

4) D'une façon générale, et donc dans le cas de cet exercice, pour une variable aléatoire X, d'espérance μ et de variance V, pour tout $\delta > 0$:

$$P(|X-\mu| \geq \delta) \leq \frac{V}{\delta^2} \text{ (Inégalité de Bienaymé – Tchebychev).}$$

En prenant $\delta = 2\sigma$, cela donne $P(|X-\mu| \geq 2\sigma) \leq \frac{\sigma^2}{4\sigma^2} = \frac{1}{4} = 0{,}25$.

Bien sûr que le majorant donné par l'inégalité de Bienaymé – Tchebychev est bon, mais par rapport à la valeur 0,03 trouvée à la question précédente : c'est tout de même très large !

Comme on l'a déjà fait remarquer, c'est la contrepartie du caractère universel de l'inégalité de Bienaymé – Tchebyvhev.

Partie B – Modélisation et simulation de l'expérience aléatoire pour 5 lancers
1) L'expérience qui consiste à se demander combien de billes « atterrissent » dans le bac B_6 est un schéma de Bernoulli.
En effet, on répète $n=5$ fois de façon indépendante une même épreuve de Bernoulli qui consiste à se demander si la bille finit dans le bac B_6 (succès de probabilité $p=P(X=6)=\binom{10}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=0{,}205$).
Par conséquent, N_6 suit la loi binomiale de paramètres $n=5$ et $p=0{,}205$, ce qui peut s'écrire $N_6=B(5;0{,}205)$.
Avec la calculatrice, on obtient $P(N_6=3)=0{,}054$.

En raisonnant de même N_3 suit la loi binomiale de paramètres $n=5$ et $p=0{,}117$.
Avec la calculatrice, on obtient $P(N_3=2)=0{,}094$.

2) Un cas favorable à l'événement « $(N_3=2)\cap(N_6=3)$ » est par exemple modélisé par le 5-uplet (B_3,B_3,B_6,B_6,B_6), donc par application du principe multiplicatif et les probabilités déterminées à la question précédente la probabilité de cet événement est $p=(0{,}117)^2\times(0{,}205)^3=0{,}0001179$.
On peut effectuer ce raisonnement autant de fois que l'on peut placer 2 fois B_3 dans le 5-uplet c'est-à-dire $\binom{5}{2}=10$ fois.
Finalement, par application du principe additif, on en déduit que $P((N_3=2)\cap(N_6=3))=10\times 0{,}0001179=0{,}001179$, ce qui finalement est un événement rare (cf. dernier exercice de ce chapitre sur la loi de Poisson !).

Il va falloir « charger » sur le nombre de simulations pour la question suivante !

3) Il faut tout simplement remplacer les probabilités déterminées dans les questions précédentes dans la formule qui donne une probabilité conditionnelle, ce qui donne :

$$P_{N_3=2}(N_6=3)=\frac{P((N_3=2)\cap(N_6=3))}{P(N_3=2)}=\frac{0{,}0001179}{0{,}094}=0{,}0013.$$

4) Là, les algorithmes sont moins évidents dans la mesure où il faut simuler N lancers (par exemple 100 000 ou 1 000 000) de 5 boules où chaque boule suit un schéma de Bernoulli de 10 répétitions.

Il faut donc « imbriquer » 3 boucles finies pour s'en sortir !

Pour déterminer des approximations des probabilités $P(N_6 = 3)$ et $P(N_3 = 2)$ on peut utiliser l'algorithme suivant :

```
from random import random
def Galton5(N,n,p,k,m):
    L=[]
    for i in range (N):
        l=(n+1)*[0]
        for i in range(5):
            c=0
            for i in range(n):
                x=random()
                if x<p:
                    c=c+1
            l[c]=l[c]+1
        L.append(l[k])
    d=0
    for i in range(len(L)):
        if L[i]==m:
            d=d+1
    return(d/N)
```

En mode « Run », on obtient :

```
In [254]: Galton5(100000,10,1/2,6,3)
Out[254]: 0.05561

In [255]: Galton5(100000,10,1/2,6,3)
Out[255]: 0.05471

In [256]: Galton5(100000,10,1/2,6,3)
Out[256]: 0.05347

In [261]: Galton5(100000,10,1/2,3,2)
Out[261]: 0.0945

In [262]: Galton5(100000,10,1/2,3,2)
Out[262]: 0.09481

In [263]: Galton5(100000,10,1/2,3,2)
Out[263]: 0.0953
```

C'est en parfaite adéquation avec les résultats théoriques !

Pour déterminer une approximation de la probabilité $P\big((N_6 = 3) \cap (N_3 = 2)\big)$, il faut transformer un peu le précédent en créant une autre liste et en changeant la condition.

Cela donne par exemple :

```
from random import random
def Galton5(N,n,p,k,k1,m,m1):
    L=[]
    M=[]
    for i in range (N):
        l=(n+1)*[0]
        for i in range(5):
            c=0
            for i in range(n):
                x=random()
                if x<p:
                    c=c+1
            l[c]=l[c]+1
        L.append(l[k])
        M.append(l[k1])
    d=0
    for i in range(len(L)):
        if (L[i]==m and M[i]==m1):
            d=d+1
    return(d/N)
```

En mode « Run », on obtient :

```
In [268]: Galton5(1000000,10,1/2,6,3,3,2)
Out[268]: 0.001232

In [269]: Galton5(1000000,10,1/2,6,3,3,2)
Out[269]: 0.001189

In [270]: Galton5(1000000,10,1/2,6,3,3,2)
Out[270]: 0.001235
```

C'est une fois de plus conforme à la probabilité déterminée à la question 2.

12 Le problème de la surréservation – Méthodes 5, 6 et 7

1) La situation est un schéma de Bernoulli.

En effet, on répète $n = 250$ fois une même épreuve de Bernoulli qui consiste à se demander si une personne qui a pris un billet ne se présente pas à l'embarquement, ce qui constitue un succès de probabilité $p = \frac{1}{10}$.

Ainsi X est la variable aléatoire qui à l'expérience associe le nombre de succès, elle suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 250$ et $p = \frac{1}{10}$, ce qui peut s'écrire $X \sim B\left(250, \frac{1}{10}\right)$.

En terme de probabilité, l'événement qui correspond au cas où plus de clients que de places disponibles se présentent à l'embarquement est $(X \leq 10)$.

En effet, si par exemple exactement 3 clients ne se présentent pas à l'embarquement, alors 247 s'y présentent et il va manquer 8 sièges, ce qui amène à justifier que la probabilité cherchée est $P(X \leq 10) = 0{,}00035$.

2) En raisonnant de la même façon avec l'A-380 et en notant Y la variable aléatoire qui est égale au nombre de clients qui ne se présentent pas à l'embarquement, on a $Y \sim B\left(516, \frac{1}{10}\right)$ et l'on demande $P(Y \leq 33) = 0{,}00057$.

3) a) En terme de probabilité, si n billets sont réservés, les événements qui correspondent au cas où plus de clients que de places disponibles se présentent à l'embarquement pour les avions A-340 et A-380 s'écrivent respectivement $(X < n-239) = (X \leq n-240)$ et $(Y < n-516) = (Y \leq n-517)$.

Il s'agit donc de trouver la valeur de n maximale pour que lorsque X et Y qui suivent la loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{1}{10}$ on ait $P(X \leq n-240) \leq 0{,}01$ et $P(Y \leq n-517) \leq 0{,}01$.

Et ça, ce n'est pas facile, puisque lorsque n varie les probabilités cumulées également, alors à moins d'utiliser une approximation de la loi binomiale par une autre loi (loi normale qui n'est plus au programme), qui permet de résoudre une équation donnant elle-même une approximation de n, puis de procéder par étapes successives en essayant « autour » de cette approximation, on risque de chercher un bon moment !

b) Pour l'algorithme que l'on vous propose, on a utilisé le coup de pouce à la ligne 16.

```
1 from random import random
2 def surres1(N,n,p,Ns):
3     s=(n+1)*[0]
4     for i in range (N):
5         c=0
6         for i in range(n):
7             x=random()
8             if x<p:
9                 c=c+1
10        s[c]=s[c]+1
11    for i in range(n+1):
12        s[i]=(s[i])/N
13    for i in range(1,n+1):
14        s[i]=s[i]+s[i-1]
15    if (s[n-(Ns+1)])<0.01:
16        return(surres1(N,n+1,p,Ns))
17    return(n-1)
```

Pour une fois, ce n'est pas forcément évident de savoir ce qu'il faut prendre comme valeur pour n et Ns lorsque l'on passe en mode « Run ».

Ainsi, « Ns » représente le nombre de sièges disponibles de chaque type d'avion et n le nombre de billets à mettre en vente pour finir par arriver à la valeur maximale demandée.

D'après les deux premières questions on sait que l'on peut « partir » de $n = 250$ pour l'A-340 et de $n = 550$ pour l'A-380.

En tenant compte de ces considérations, en mode « Run », on obtient :

```
In [51]: surres1(100000,250,0.1,239)
Out[51]: 254

In [52]: surres1(100000,550,0.1,516)
Out[52]: 556
```

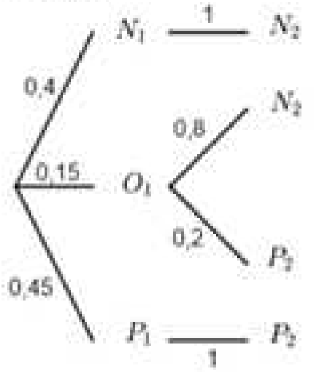
c) Lorsque l'on prend $X \sim B\left(254, \frac{1}{10}\right)$, $P(X \leq n-240) = P(X \leq 14) = 0{,}007 < 0{,}01$ et si $X \sim B\left(255, \frac{1}{10}\right)$, $P(X \leq n-240) = P(X \leq 15) = 0{,}013 > 0{,}01$, ce qui prouve la pertinence de la simulation.

Lorsque l'on prend $X \sim B\left(556, \frac{1}{10}\right)$, $P(X \leq n-517) = P(X \leq 39) = 0{,}009 < 0{,}01$ et si $X \sim B\left(557, \frac{1}{10}\right)$, $P(X \leq 557-517) = P(X \leq 40) = 0{,}013 > 0{,}01$, ce qui prouve encore la pertinence de la simulation.

13 Sondage – Méthodes 2, 5, 6 et 8

Partie A – Etude théorique de la situation

1) L'arbre demandé est le suivant :



2) D'après l'arbre et la formule des probabilités totales :

$$P(N_2) = 0{,}4 \times 1 + 0{,}15 \times 0{,}8 = 0{,}52.$$

3) a) L'expérience est un schéma de Bernoulli.
En effet, on répète $n = 1000$ fois une même épreuve de Bernoulli qui consiste à se demander si une personne va voter pour Noël, ce qui constitue un succès de probabilité $p = P(N_2) = 0,52$ d'après la question précédente.

Ainsi X est une variable aléatoire qui suit la loi binomiale de paramètres $n = 1000$ et $p = 0,52$, ce qui peut s'écrire $X \sim B(1000;0,52)$.

Loi de probabilité de X : Pour k entier de $[\![0,1000]\!]$,

$$P(X=k) = \binom{1000}{k}(0,52)^k(1-0,52)^{1000-k} = \binom{1000}{k}(0,52)^k(0,48)^{1000-k}.$$

Espérance et écart type :

$$E(X) = \mu = 1000 \times 0,52 = 520 \text{ et } \sigma(X) = \sigma = \sqrt{520 \times 0,48} = \sqrt{249,6} \approx 15,80.$$

b) Avec la calculatrice on obtient $I_{0,95} = [0,489;0,551]$ et $I_{0,99} = [0,479;0,561]$.

Au seuil de 95 % on ne peut pas affirmer que Noël sera élu car la borne inférieure de $I_{0,95}$ n'est pas supérieure à 0,5. Bien sûr, on en déduit que l'on ne peut donc pas l'affirmer au seuil de 99 %.

Partie B – Simulation du sondage

On peut simuler N sondages de 1 000 personnes et renvoyer les résultats pour se faire une idée de la réalité.

Pour cela, on peut utiliser l'algorithme suivant :

```
from random import random
def sondage(N,n,p):
    L=[]
    for i in range (N):
        c=0
        for j in range(n):
            x=random()
            if x<p:
                c=c+1
        s=[c,n-c]
        L.append(s)
    return(L)
```

En mode « Run », on obtient par exemple :

```
Out[72]:
[[505, 495],
 [524, 476],
 [546, 454],
 [502, 498],
 [520, 480],
 [496, 504],
 [499, 501],
 [503, 497],
 [531, 469],
 [499, 501]]
```

On constate que sur ces 10 simulations, il y en a trois où Noël n'est pas élu, ce qui confirme la conclusion théorique.

14 Radioactivité – Datation au carbone 14 – Méthode 5

Partie A – Etude théorique de la datation au carbone 14

1) Si l'on considère N atomes de carbone 14, il n'en reste plus que $\left(1-\frac{12}{1000}\right)\times N = 0{,}988\times N$ au bout d'un siècle, $0{,}988^2\times N$ de 2 siècles, et par suite $0{,}988^n\times N$ au bout de n siècles.

Compte tenu de la définition de la demi-vie, cela nous amène à résoudre l'équation $0{,}988^n\times N = 0{,}5\times N$ d'inconnue n.

On a :

$0{,}988^n\times N = 0{,}5\times N \Leftrightarrow 0{,}988^n = 0{,}5 \Leftrightarrow \ln 0{,}988^n = \ln 0{,}5 \Leftrightarrow n\times\ln 0{,}988 = \ln 0{,}5$

$\Leftrightarrow n = \frac{\ln 0{,}5}{\ln 0{,}988} = 57{,}41$ (siècles).

Par conséquent la demi-vie demandée est T = 5741 ans.

2) Si l'on note n le nombre de siècles des fragments d'os, il est solution de l'équation :

$0{,}988^n\times 1{,}3\times 10^{-12} = 5\times 10^{-13} \Leftrightarrow 0{,}988^n = \frac{5}{1{,}3}\times 10^{-1} = 0{,}384 \Leftrightarrow \ln 0{,}988^n = \ln 0{,}3\ 84$

$\Leftrightarrow n\times\ln 0{,}988 = \ln 0{,}384 \Leftrightarrow n = \frac{\ln 0{,}384}{\ln 0{,}988} = 79{,}28$ (siècles).

On obtient donc 7928 ans à l'année près, ce n'était pas hier !

3) Si l'on note n le nombre de siècles du charbon de bois, il est solution de l'équation : $0{,}988^n\times 1{,}5 = 1 \Leftrightarrow 0{,}988^n = \frac{1}{1{,}5} = \frac{2}{3} = 0{,}666 \Leftrightarrow \ln 0{,}988^n = \ln 0{,}666$

$\Leftrightarrow n\times\ln 0{,}988 = \ln 0{,}666 \Leftrightarrow n = \frac{\ln 0{,}666}{\ln 0{,}988} = 33{,}67$ (siècles).

On obtient donc 3367 ans à l'année près, c'est déjà moins longtemps qu'à la question précédente.

4) Si l'on note n le nombre de siècles pour lequel la datation devient impossible, il est solution de l'équation :

$$0{,}988^n = 0{,}03 \Leftrightarrow \ln 0{,}988^n = \ln 0{,}03 \Leftrightarrow n\ln 0{,}988 = \ln 0{,}03 \Leftrightarrow n = \frac{\ln 0{,}03}{\ln 0{,}988} = 290{,}45.$$

On obtient 290 siècles, il y a de la marge.

Partie B – Etude algorithmique de la datation au carbone 14

1) L'idée est de partir d'un grand nombre N d'atomes et de construire une boucle avec récursivité (**coup de pouce**) qui compte le nombre minimal d'itérations qui permet d'obtenir un nombre d'atomes restant inférieur à $\frac{N}{2}$.

L'algorithme suivant peut convenir :

```
from random import random
def demivie(N,k,p):
    for i in range(N):
        if random()<p:
            N=N-1
    if (N>(1000000/2)):
        return(demivie(N,k+1,p))
    return(k+1)
```

En mode « Run », on obtient :

```
In [172]: demivie(1000000,0,0.012)
Out[172]: 58
```

C'est bien conforme au calcul théorique qui donne une demi-vie entre 57 et 58 siècles.

2) Dans cette question, les proportions sont passées de $1{,}3\times10^{-12}$ à 5×10^{-13}, donc puisque le nombre d'atomes de carbone 12 n'évolue pas, il suffit de compter le nombre de siècles entre les deux proportions.

On peut multiplier ces proportions par n'importe quel nombre pour répondre à la question et ainsi travailler sur des nombres entiers. On va par exemple multiplier par 10^{18} ce qui nous amène à produire un algorithme qui compte le nombre de siècles pour que l'on passe d'un nombre de $1{,}3\times10^6 = 1300000$ à $5\times10^5 = 500000$ atomes de carbone 14.

On peut par exemple utiliser l'algorithme suivant pour répondre à la question :

```
from random import random
def age(N,k,p):
    for i in range(N):
        if random()<p:
            N=N-1
    if (N>(500000)):
        return(age(N,k+1,p))
    return(k+1)
```

En mode « Run », on obtient :

```
In [174]: age(1300000,0,0.012)
Out[174]: 80
```

C'est encore conforme au calcul théorique qui donne un âge entre 79 et 80 siècles.

3) On utilise l'algorithme précédent en multipliant par exemple par 1000000 les valeurs numériques dans cette question, ce qui nous amène à donner le nombre de siècles qu'il faut pour passer de 1500000 atomes à 1000000.

L'algorithme devient :

```
from random import random
def age(N,k,p):
    for i in range(N):
        if random()<p:
            N=N-1
    if (N>1000000):
        return(age(N,k+1,p))
    return(k+1)
```

En mode « Run », on obtient :

```
In [178]: age(1500000,0,0.012)
Out[178]: 34
```

C'est encore conforme au calcul théorique qui donne un âge entre 33 et 34 siècles.

4) On adopte la même méthode que dans les questions précédentes en multipliant les nombres par 1000000, ce qui amène à l'algorithme suivant pour répondre à la question :

```
from random import random
def age(N,k,p):
    for i in range(N):
        if random()<p:
            N=N-1
    if (N>30000):
        return(age(N,k+1,p))
    return(k+1)
```

En mode « Run », on obtient :

```
In [180]: age(1000000,0,0.012)
Out[180]: 290
```

C'est toujours conforme au calcul théorique.

15 **Loi géométrique – Méthode 1**

1) On peut obtenir un succès à la première épreuve ou **jamais**. La variable aléatoire X prend donc une infinité de valeurs entières à partir de 1.

Pour un entier k supérieur ou égale à 1, l'évènement $(X=k)$ correspond à l'obtention de $(k-1)$ échecs aux premières tentatives et d'un succès à la $k^{\text{ème}}$, donc comme les tentatives sont indépendantes deux à deux on obtient :

$$P(X=k)=(1-p)^{k}\times p\,.$$

2) a) Montrons que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ et $x\in\left]0,1\right[$ on a $\ln\left(nx^n\right)=n\left(\dfrac{\ln n}{n}+\ln x\right)$, puis que $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\left(nx^n\right)=-\infty$, et enfin que $\lim\limits_{n\to+\infty}nx^n=0$.

En utilisant les propriétés algébriques du logarithme népérien, il vient :

$$\ln\left(nx^n\right)=\ln n+\ln x^n=\ln n+n\ln x=n\left(\frac{\ln n}{n}+\ln x\right).$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln n}{n}=0$ (croissances comparées de $n\mapsto n$ et $n\mapsto\ln n$ en $+\infty$) et $\ln x<0$ car $x\in\left]0,1\right[$, il vient aisément $\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\left(nx^n\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}n\left(\dfrac{\ln n}{n}+\ln x\right)=-\infty$.

Comme on a $nx^n=e^{\ln(nx^n)}$, d'après la limite précédente, par composition des limites on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}nx^n=\lim\limits_{n\to+\infty}e^{\ln(nx^n)}=\lim\limits_{u\to-\infty}e^u=0$.

b) Pour $n\in\mathbb{N}$, prouvons que pour $x\in\left]0,1\right[$, $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}k\times x^{k-1}=\dfrac{1}{1-x}\left(\dfrac{1-x^n}{1-x}-nx^n\right)$.

On utilise le **coup de pouce** pour démontrer le résultat.

D'abord on a $S_n(x)-x\times S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}k\times x^{k-1}-x\sum\limits_{k=1}^{n}k\times x^{k-1}=\sum\limits_{k=1}^{n}k\times x^{k-1}-\sum\limits_{k=1}^{n}k\times x^{k}$.

En développant cette dernière différence de sommes, il vient :

$$S_n(x)-x\times S_n(x)=\left(1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}\right)-\left(x+2x^2+3x^3+\cdots+nx^n\right).$$

On déduit de cela que $S_n(x)-x\times S_n(x)=1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}-nx^n$, donc comme $1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}=\dfrac{1-x^n}{1-x}$, on obtient finalement $S_n(x)-x\times S_n(x)=\dfrac{1-x^n}{1-x}-nx^n$.

Finalement $(1-x)S_n(x)=\dfrac{1-x^n}{1-x}-nx^n$ et donc $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}k\times x^{k-1}=\dfrac{1}{1-x}\left(\dfrac{1-x^n}{1-x}-nx^n\right)$.

D'après la question précédente, $\lim\limits_{n\to+\infty}nx^n=0$, donc comme $\lim\limits_{n\to+\infty}x^n=0$ puisque $x\in\left]0,1\right[$, on en déduit finalement que $S(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}S_n(x)=\dfrac{1}{(1-x)^2}$.

c) D'après la question précédente l'espérance de X est :

$$E(X)=\sum_{k=1}^{+\infty}k(1-p)^{k-1}\times p=p\sum_{k=1}^{+\infty}k(1-p)^{k-1}=pS(1-p)=p\times\frac{1}{(1-(1-p))^2}=\frac{p}{p^2}=\frac{1}{p}.$$

3) Dans cette question, comme $p=0{,}001179$, on a $\mu=\frac{1}{p}=\frac{1}{0{,}001179}\approx 848$ et

$\sigma=\sqrt{\frac{1-p}{p^2}}=\sqrt{\frac{0{,}998821}{0{,}0000014}}\approx 845$.

$P(X=\mu)=P(X=848)=0{,}998821^{847}\times 0{,}001179\approx 0{,}000434$.

$P(|X-\mu|<2\sigma)=P(|X-848|<1690)=P(848-1690<X<848+1690)=P(1\le X\le 2537)$.

On doit donc déterminer :

$\sum_{k=1}^{2537}(1-p)^{k-1}p=p\times\sum_{k=1}^{2537}(1-p)^{k-1}=p\times\frac{1-(1-p)^{2537}}{1-(1-p)}=1-(1-p)^{2537}$ (somme des termes d'une suite géométrique pour le calcul de $\sum_{k=1}^{2537}(1-p)^{k-1}$) ce qui donne :

$$P(|X-\mu|<2\sigma)\approx 0{,}95.$$

16 Simulation de la loi géométrique – Méthode 5

Dans l'énoncé, on reprend la planche de Galton à 10 rangées, sur laquelle on lance de manière répétitive 5 boules et X est la variable aléatoire égale au nombre de lancers où l'on obtient pour la première fois 3 boules dans le bac B_6 et 2 dans le bac B_3 c'est-à-dire un succès.

L'algorithme que l'on donne répond à la question mais pour une fois il mérite quelques explications.
On simule N lancers de 5 boules et l'on range dans les listes L et M les nombres respectifs de boules que contiennent les bacs B_6 et B_3 à chaque lancer.

La liste Q donne les rangs des tentatives où l'on obtient un succès sur les N simulations, ce qui ne répond pas à notre question : pour nous, quand on en a un, il faut repartir à « zéro ».

Alors on a décidé de créer la liste R où le premier terme est 0 et les autres ceux de Q, dans l'ordre, excepté le dernier.

La liste renvoie alors les rangs où l'on obtient le succès espéré.

Ensuite, à partir de cette série statistique, on fait la moyenne, l'écart type puis on détermine expérimentalement des approximations des probabilités demandées.

L'algorithme est le suivant :

```
from random import random
from math import sqrt
def Galton5(N,n,p,k,k1,m,m1):
    L=[]
    M=[]
    Q=[]
    R=[0]
    for i in range (N):
        l=(n+1)*[0]
        for i in range(5):
            c=0
            for i in range(n):
                x=random()
                if x<p:
                    c=c+1
            l[c]=l[c]+1
        L.append(l[k])
        M.append(l[k1])
    for i in range(len(L)):
        if (L[i]==m and M[i]==m1):
            Q.append(i)
    for i in range(Q[-1]):
        if (L[i]==m and M[i]==m1):
            R.append(i)
    T=len(Q)*[0]
    for i in range(len(Q)):
        T[i]=Q[i]-R[i]
    d=0
    for i in range(len(T)):
        d=d+T[i]
    m=d/len(T)
    v=0
    for i in range(len(T)):
        v=v+((T[i]-m)**2)/len(T)
    e=sqrt(v)
    nbre1=0
    nbre2=0
    for i in range(len(T)):
        if T[i]==int(m):
            nbre1=nbre1+1
        if abs(T[i]-m)<2*e:
            nbre2=nbre2+1
    return(m,e,nbre1/len(T),nbre2/len(T))
```

En mode « Run », en prenant N = 10 000 000, **au bout d'une petite demi-heure**, il renvoie :

```
In [3]: Galton5(100000000,10,1/2,6,3,3,2)
Out[3]:
(844.421759286625,
 843.2081403999393,
 0.00043910389029158187,
 0.949469275394138)
```

REMARQUES : 1) Il faut « forcer » sur le nombre N, car sinon on risque d'avoir du mal à déterminer la fréquence expérimentale qui donne une approximation de $P(X=\mu)$.

2) Pour obtenir une approximation de cette dernière, il faut par exemple prendre la troncature de m (int (m)) car la liste T ne contient que des entiers, donc si vous ne faites pas cela vous obtiendrez 0.

Même avec 10 millions de simulations, on ne tombe pas tout à fait sur les valeurs théoriques de μ et σ, mais les fréquences expérimentales, elles, correspondent aux probabilités $P(X=\mu)$ et $P(|X-\mu|<2\sigma)$.

17 Loi de Poisson – Evénements rares – Approximation de la loi binomiale – Application – Méthode 6

Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres n et p avec n « très grand » et p « proche » de 0 (pratiquement lorsque $n \geq 30$, $p \leq 0{,}1$ et $np < 15$).

1) Dans cette question on pose $m = E(X) = np$ et l'on se propose de montrer que lorsque n tend vers $+\infty$, p tend vers 0 et m tend vers une limite finie non nulle, alors on a $P(X=k) = \frac{m^k}{k!}e^{-m}$.

a) Montrons que :

$$\forall k \in [\![0;n]\!],\ P(X=k) = \left[\frac{n}{n} \times \frac{n-1}{n} \times \cdots \times \frac{n-k+1}{n}\right] \times \frac{m^k}{k!} \times \left(1-\frac{m}{n}\right)^{n-k}.$$

Comme X suit la loi binomiale de paramètres n et p, pour tout $k \in [\![0;n]\!]$,

$$P(X=k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \left(\frac{m}{n}\right)^k \times \left(1-\frac{m}{n}\right)^{n-k}.$$

On en déduit que $P(X=k) = \frac{n!}{(n-k)!} \times \frac{1}{n^k} \times \frac{m^k}{k!} \times \left(1-\frac{m}{n}\right)^{n-k}$.

Finalement, comme $\frac{n!}{(n-k)!} = n \times (n-1) \times \cdots \times (n-k+1)$ qui est un produit de k termes, $\forall k \in [\![0;n]\!]$, $P(X=k) = \left[\frac{n}{n} \times \frac{n-1}{n} \times \cdots \times \frac{n-k+1}{n}\right] \times \frac{m^k}{k!} \times \left(1-\frac{m}{n}\right)^{n-k}$.

b) Montrons que $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(1-\frac{m}{n}\right)^{n-k} = -m$ et déduisons-en que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{m}{n}\right)^{n-k}$.

$$\ln\left(1-\frac{m}{n}\right)^{n-k} = (n-k)\times\ln\left(1-\frac{m}{n}\right) = (n-k)\times\left(-\frac{m}{n}\right)\times\frac{\ln\left(1-\frac{m}{n}\right)}{\left(-\frac{m}{n}\right)}.$$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln\left(1-\frac{m}{n}\right)}{\left(-\frac{m}{n}\right)} = \lim\limits_{u\to0}\dfrac{\ln(1+u)}{u} = 1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}(n-k)\left(-\frac{m}{n}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(-m+\frac{k\times m}{n}\right) = -m$, donc

$\lim\limits_{n\to+\infty}\ln\left(1-\frac{m}{n}\right)^{n-k} = -m$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{m}{n}\right)^{n-k} = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{\ln\left(1-\frac{m}{n}\right)^{n-k}} = e^{-m}$.

c) Déduisons des 2 questions précédentes que lorsque n tend vers $+\infty$ on a :

$$P(X=k) = \frac{m^k}{k!}e^{-m} \text{ (loi de Poisson de paramètre m).}$$

$\forall q \in [\![0;n-1]\!]$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n-q}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{n\left(1-\frac{q}{n}\right)}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-\frac{q}{n}\right) = 1$.

Cela implique $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{n}{n}\times\frac{n-1}{n}\times\cdots\times\frac{n-k+1}{n}\right) = 1$ et finalement que lorsque n tend vers $+\infty$ on a : $P(X=k) = \dfrac{m^k}{k!}e^{-m}$ (loi de Poisson de paramètre m).

REMARQUE PRATIQUE : la loi de Poisson de paramètre $m = np$ *est une bonne approximation de la loi binomiale de paramètres n et p lorsque* $n \geq 30$, $p \leq 0{,}1$ *et* $np < 15$.

2) L'article fait l'objet d'un réapprovisionnement hebdomadaire.
Chaque semaine, la probabilité qu'il soit en rupture de stock est de 1,25 %.
La variable aléatoire X est égale au nombre de ruptures de stock dans l'année, que l'on suppose en outre indépendantes.

a) Donnons la loi que suit X.

La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 52$ et $p = 0{,}0125$, ce qui peut s'écrire $X \sim B(52;0{,}0125)$

b) Justifions que l'on peut faire une approximation de la loi que suit X par une loi de Poisson dont nous allons vous préciser le paramètre $m \in \mathbb{R}_+^*$.

Comme on a $n = 52 \geq 30$, $p = 0{,}0125 \leq 0{,}1$ et $np = 0{,}65 < 15$ on peut faire une approximation de la loi que suit X par la loi de Poisson de paramètre $m = np = 0{,}65$.

c) En utilisant cette approximation calculons $P(X=0)$ et $P(2<X)$.

$P(X=0)=\frac{0{,}65^0}{0!}e^{-0{,}65}=e^{-0{,}65}\simeq 0{,}522$.

$P(2<X)=1-P\left(\overline{2<X}\right)=1-P(X\leq 2)=1-\left(P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)\right)\simeq 0{,}029$.

18 **Marche aléatoire selon les points cardinaux – Distance à l'origine – Méthode 5**

1) Expliquons pourquoi il est impossible de donner la loi de probabilité de D_1.

Comme à chaque seconde il y a 4 directions aléatoires possibles, en 1 heure donc 3600 secondes, ça donne 4^{3600} chemins possibles, dont, on vous l'accorde, plusieurs donnent une même valeur de D_1, mais il est évident qu'il est impossible de donner sa loi de probabilité.
A part dire qu'au bout d'une heure on se trouve sur un point de coordonnées entières du disque de centre O et de rayon 3600 m, on ne peut pas affirmer grand-chose.

2) Expliquons pourquoi il est impossible d'exprimer D_1 par opérations sur des variables aléatoires deux à deux indépendantes et donc de donner son espérance théorique.
La seule chose dont on est sûr, c'est qu'au premier déplacement, on se trouve à 1 m de O.
En effet, au deuxième, on se retrouve en O, à une distance de 2 m ou $\sqrt{2}$ m de O.
Et ensuite, cela se complique puisque la distance à O, après le troisième déplacement, dépend de celle après le second : un truc de fous !
Il est donc impossible d'exprimer D_1 par opérations sur des variables aléatoires indépendantes deux à deux.
3) Donnons un algorithme en langage Python qui permet d'obtenir une bonne approximation de l'espérance et de l'écart-type de D_1.
Comme on vous a expliqué aux deux questions précédentes, puisqu'aucune théorie ne permet d'obtenir D_1, il ne reste donc plus qu'à simuler N trajets d'une heure de Patricia (par exemple 1000), puis à déterminer la moyenne et l'écart type de cette série de distances « pour s'en sortir ».

On peut utiliser l'algorithme suivant :

```
from math import sqrt
def marche1m(N,n):
        s=[0,0]
        X=[]
        Y=[]
        L=(N)*[0]
        for i in range(N):
            x=0
            y=0
            for i in range(n):
                k=random()
                if k<=(1/4):
                    x=x+1
                    y=y
                elif k<=(1/2):
                    x=x-1
                    y=y
                elif k<=(3/4):
                    x=x
                    y=y+1
                else:
                    x=x
                    y=y-1
                s[0]=x
                s[1]=y
            X.append(s[0])
            Y.append(s[1])
        for i in range(N):
            L[i]=sqrt(X[i]**2+Y[i]**
        sc=0
        for i in range(N):
            sc=sc+L[i]
        m=sc/N
        v=0
        for i in range(N):
            v=v+(L[i]-m)**2/N
        e=sqrt(v)
        return(m,e)
```

En mode « Run », en simulant 1000 marches aléatoires de Patricia, on obtient :

```
In [9]: marche1m(1000,3600)
Out[9]: (53.699063578359535, 28.309407814493245)

In [10]: marche1m(1000,3600)
Out[10]: (52.74178250422132, 27.37667580765434)
```

On en déduit que $E(D_1) = 53$ m et $\sigma(D_1) = 28$, ce qui finalement n'est pas si loin du point de départ dans la mesure où l'on pourrait en être à jusqu'à 3,6 km.

4) Utilisons cet algorithme pour donner des approximations de l'espérance et de l'écart type de D_2, puis de D_4.

On utilise l'algorithme précédent, mais en prenant $n=7200$ et $n=14400$ pour simuler respectivement les marches de 2 et 4 heures.

En mode « Run », en simulant 1000 marches aléatoires de Patricia, on obtient :

```
In [11]: marche1m(1000,7200)
Out[11]: (76.80143797190615, 39.2223804153629)

In [12]: marche1m(1000,7200)
Out[12]: (74.55595252396496, 38.349419073100364)

In [13]: marche1m(1000,14400)
Out[13]: (109.36534196547461, 55.95071024370282)

In [14]: marche1m(1000,14400)
Out[14]: (106.31817594720358, 57.59699179001839)
```

On en déduit que $E(D_2)=75$ m avec $\sigma(D_2)=39$ et que $E(D_3)=108$ avec $\sigma(D_3)=56$ ce qui dans les deux cas n'est pas si loin du point de départ dans la mesure où l'on pourrait en être à jusqu'à 7,2 km pour le premier et 14,4 km pour le second.

5) Tiens, tiens ! Il semble que lorsque l'on multiplie le temps du trajet par 2, l'espérance et l'écart type soient multipliés par $\sqrt{2}$: c'est un problème ouvert que nous ne chercherons pas à démontrer.
Si vous avez une solution simple conforme au programme, envoyez-la nous, on est curieux !

19 Marche aléatoire dans n'importe quelle direction – Distance à l'origine – Méthode 5

1) 2) Là, c'est pire que dans la partie A car à chaque seconde, il y a une infinité de directions possibles.

3) Cependant, on peut modifier l'algorithme de l'exercice précédent pour obtenir une bonne approximation de l'espérance et de l'écart type de D'_1.
L'idée est d'envisager 4 cas avec un nombre aléatoire « l » compris entre 0 et 1 qui s'ajoute ou se soustrait à l'abscisse x_n précédente (ce qui donne $x_{n+1}=x_n\pm l$) et de prendre $y_{n+1}=y_n\pm\sqrt{1-l^2}$.
En effet, dans chaque cas on prend une direction aléatoire à partir de $M_n(x_n,y_n)$ vers $M_{n+1}(x_{n+1},y_{n+1})$ avec :

$$M_nM_{n+1}^2=(x_{n+1}-x_n)^2+(y_{n+1}-y_n)^2=(\pm l)^2+\left(\sqrt{1-l^2}\right)=l^2+1-l^2=1.$$

Comme on a $M_nM_{n+1}=1$, cela correspond bien à chaque seconde à un pas de longueur 1 dans n'importe quelle direction.

L'algorithme que l'on vous propose est le suivant :

```
from random import random
from math import sqrt
def marche2m(N,n):
    s=[0,0]
    X=[]
    Y=[]
    L=(N)*[0]
    for i in range(N):
        x=0
        y=0
        for i in range(n):
            k=random()
            l=random()
            if k<=(1/4):
                    x=x+l
                    y=y+sqrt(1-l**2)
            elif k<=(1/2):
                    x=x-l
                    y=y+sqrt(1-l**2)
            elif k<=(3/4):
                    x=x+l
                    y=y-sqrt(1-l**2)
            else:
                    x=x-l
                    y=y-sqrt(1-l**2)
        s[0]=x
        s[1]=y
        X.append(s[0])
        Y.append(s[1])
    for i in range(N):
        L[i]=sqrt(X[i]**2+Y[i]**2)
    sc=0
    for i in range(N):
        sc=sc+L[i]
    m=sc/N
    v=0
    for i in range(N):
        v=v+((L[i]-m)**2)/N
    e=sqrt(v)
    return(m,e)
```

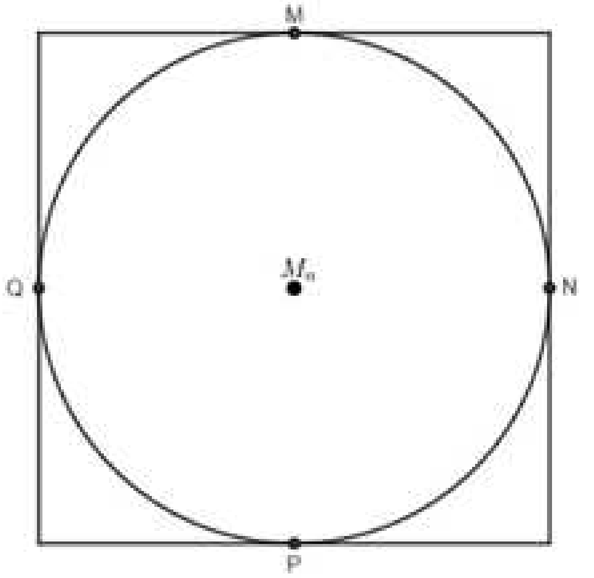
En mode « Run », en simulant 1000 marches aléatoires de Patricia, on obtient :

```
In [19]: marche2m(1000,3600)
Out[19]: (53.0536356322615, 28.301265106691215)

In [20]: marche2m(1000,3600)
Out[20]: (52.53605796810304, 28.237534995357905)
```

On en déduit que $E(D_i') = 53$ m et $\sigma(D_i') = 28$, ce qui correspond aux mêmes valeurs que celles obtenues pour la variable aléatoire D_i.

Etonnant, non ?

Pas tant que ça, car quand vous êtes sur un point M_n après n déplacements, avec le second modèle, vous vous retrouvez de façon aléatoire sur un point du cercle de centre M_n et de rayon 1, alors qu'avec le premier vous « atterrissez » sur un des quatre milieux M, N, P ou Q du carré de centre M_n de côté 2 comme l'illustre la figure suivante :



Comme finalement les points du cercle ne sont pas si loin de l'un des points M, N, P ou Q, avec un nombre conséquent de marches aléatoires (ici 3 600, répétées 1 000 fois), il n'est pas étonnant que l'on tombe sur la même espérance et le même écart type.

REMARQUE : Cette réflexion ne constitue pas une démonstration.

4) Compte tenu de ce que l'on vient d'évoquer, il est fort probable que l'espérance et l'écart-type de D'_2 et D'_4 soient respectivement les mêmes que ceux de D_2 et D_4, ce que nous allons vérifier avec l'algorithme précédent en prenant $n = 7\,200$ et $n = 14\,400$ pour simuler respectivement les marches de 2 et 4 heures.

On obtient :

```
In [25]: marche2m(1000,7200)
Out[25]: (75.96091233047846, 40.17277132127554)

In [26]: marche2m(1000,7200)
Out[26]: (76.38602373011928, 39.20777305500696)

In [27]: marche2m(1000,14400)
Out[27]: (104.79211232353069, 57.09868671367968)

In [28]: marche2m(1000,14400)
Out[28]: (105.95325623730895, 55.83525359622628)
```

Ces résultats sont conformes à ce que nous avons évoqué en début de question.

5) On peut donner la même conclusion que celle de la partie précédente.

QUIZ : **Méthod' Terminale Spé Maths** est-il le livre de **maths** dont vous avez besoin ? Pour le savoir, répondez vite aux questions suivantes :

Voulez-vous connaître toutes les méthodes d'études de suites ?	❑ OUI ❑ NON
Voulez-vous découvrir toutes les astuces pour « assurer » avec les fonctions et la géométrie dans l'espace ?	❑ OUI ❑ NON
Voulez-vous « assurer » avec la programmation, les algorithmes et Python ?	❑ OUI ❑ NON
Voulez-vous savoir quelles sont les erreurs les plus fréquemment commises en probas ?	❑ OUI ❑ NON
Voulez-vous visiter en avant-première les coulisses de la Terminale et profiter en exclusivité des conseils des professeurs pour votre Grand Oral ?	❑ OUI ❑ NON
Voulez-vous réussir en Maths cette année ?	❑ OUI ❑ NON
Voulez-vous dès à présent, commencer à vous préparer à l'après-bac ?	❑ OUI ❑ NON

SOLUTION : si vous avez répondu OUI au moins une fois, alors pas une seconde d'hésitation : c'est *Méthod' Terminale spé Maths* qu'il vous faut !

MéthodiX est la collection de référence d'ouvrages à l'usage des élèves de collège, lycée, des étudiants de licence et des classes préparatoires. Cet outil unique en son genre vous permettra de préparer efficacement vos examens ou les concours selon les cas... Chaque ouvrage de la collection contient :

- toutes les méthodes essentielles sur un sujet donné,
- les astuces à connaître et les erreurs à éviter,
- des conseils pour préparer les contrôles du jour J,
- les exercices incontournables et les corrigés détaillés.

NOUVEAUX PROGRAMMES

www.editions-ellipses.fr

9 782340 038349