Organisation du document :

- Rappels de cours
- Méthodes pratiques
- Exercices résolus
- Exercices d'approfondissement
- Correction d'exercice
- Sujet type BAC entièrement corrigé

- **Rappel sur la résolution d'équations et inéquations trigonométriques**

  - Equation du type : $\cos x = a$, $a \in \mathbb{R}$
    - Si $|a| > 1$ (c'est-à-dire $a > 1$ ou $a < -1$) ; l'équation $\cos x = a$, $a \in \mathbb{R}$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ et l'ensemble des solutions réelles est $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$.
    - Si $|a| \leq 1$ (c'est-à-dire $-1 \leq a \leq 1$) alors $\exists\ \alpha \in \mathbb{R}/\cos\alpha = a$.

      L'équation devient : $\cos x = \cos\alpha \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha + 2k\pi \\ x = -\alpha + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$

      $$S_{\mathbb{R}} = \{-\alpha + 2k\pi;\ \alpha + 2k\pi \ /\ k \in \mathbb{Z}\}$$
  - Equation du type : $\sin x = b$, $b \in \mathbb{R}$
    - Si $|b| > 1$ (c'est-à-dire $b > 1$ ou $b < -1$) ; l'équation $\sin x = b$, $b \in \mathbb{R}$ n'a pas de solution dans $\mathbb{R}$ et l'ensemble des solutions réelles est $S_{\mathbb{R}} = \emptyset$.
    - Si $|b| \leq 1$ (c'est-à-dire $-1 \leq b \leq 1$) alors $\exists\ \alpha \in \mathbb{R}/\sin\beta = b$.

      L'équation devient : $\sin x = \sin\beta \Leftrightarrow \begin{cases} x = \beta + 2k\pi \\ x = \pi - \beta + 2k\pi \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}$

      $$S_{\mathbb{R}} = \{\beta + 2k\pi;\ \pi - \beta + 2k\pi \ /\ k \in \mathbb{Z}\}$$

      - Remarque :

      $$\cos x = 0 \ \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi;\ \ k \in \mathbb{Z}$$
      $$\sin x = 0 \ \Leftrightarrow x = k\pi \ \ ; k \in \mathbb{Z}$$

  - Equation du type : $\tan x = c$, $c \in \mathbb{R}, x \neq \frac{\pi}{2} \equiv [\pi]$

$\forall c \in \mathbb{R}, \exists \gamma \in \mathbb{R} / \tan\gamma = c$ et l'équation devient : $\tan x = \tan\gamma \Leftrightarrow x = \gamma + k\pi;\ \ k \in \mathbb{Z}$. $S_{\mathbb{R}} = \{\gamma + k\pi;\ \ k \in \mathbb{Z}\}$

- Equation du type : $a\cos x + b\sin x = c$, $(a;\ b) \neq (0;0)\ et\ c \in \mathbb{R}$.

$\forall (a;\ b) \neq (0;0)$, $a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos(x) + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin(x)\right)$. On vérifie que :

$\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)^2 = 1$. Donc il existe

$\varphi \in \mathbb{R}$, tel que : $\begin{cases} \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$

L' équation devient :

$\sqrt{a^2+b^2}(\cos\varphi\cos(x) + \sin\varphi\sin(x)) = c$

D'où : $\sqrt{a^2+b^2}\cos(x-\varphi) = c \quad \Leftrightarrow \cos(x-\varphi) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$.

En posant : $X = x - \varphi\ \ et\ A = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$,

on aura : $\cos X = A$ (voir 1er type équation).

- N B : on peut aussi trouver le 2éme type d'équation.

Nombres complexes

Forme algébrique d'un nombre complexe

- Forme algébrique : $z = x + iy$
  - Partie réelle : $Re(z) = x$
  - Partie imaginaire : $Im(z) = y$
- Conjugué : $\bar{z} = x - iy$
  - Propriétés :

    Soit $z\ et\ z'$ deux nombres complexes, on a :

    $\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z'}$; $\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z'}$

    $\overline{\frac{1}{z}} = \frac{1}{\bar{z}}$ si $z \neq 0$; $\overline{\frac{z'}{z}} = \frac{\bar{z'}}{\bar{z}}$ si $z \neq 0$

    $\begin{cases} Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2} \\ Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i} \end{cases}$; $\forall n \in \mathbb{N}, \overline{z^n} = \bar{z}^n$

- Module : $|z| = \sqrt{z.\bar{z}} = \sqrt{x^2+y^2}$
  - Propriétés :

    Pour tous nombres complexes $z\ et\ z'$:

    $|z| = |\bar{z}|$; $|z.z'| = |z|.|z'|$

Si $z' \neq 0$, $\left|\frac{1}{z'}\right| = \frac{1}{|z'|}$ et $\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$

$\forall n \in \mathbb{N}, |z^n| = |z|^n$.

- ✓ Affixe et module d'un vecteur

  $si A$ et B ont pour affixes respectives $z_A\ et\ z_B$ alors $\overrightarrow{AB}$ a pour affixe $z_A - z_B$et $AB = |z_B - z_A|$.

- **Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul**
  - ✓ Définition :

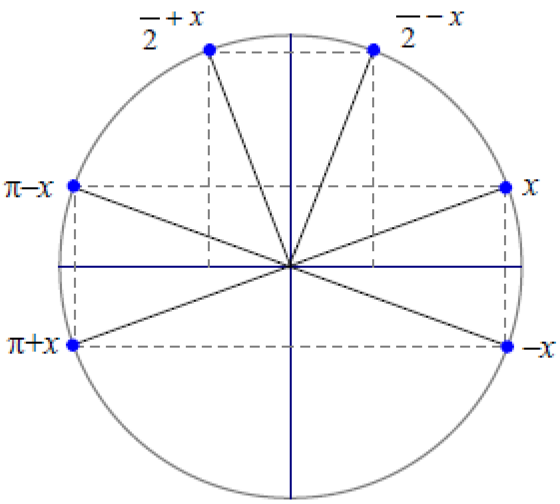
    Soit z un nombre complexe non nul de module r et d'argument α. On appelle forme trigonométrique de z l'écriture : $z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$

- **Méthode pratique : comment déterminer $\boldsymbol{\arg(z) = \alpha}$**

Soit $\alpha = \arg(z)\ / z = a + ib\ \ et\ |z| = r$

On a : $\begin{cases} \cos\alpha = \frac{a}{r} \\ \sin\alpha = \frac{b}{r} \end{cases}$

On cherche α' / $\begin{cases} \cos\alpha' = \frac{|a|}{r} \\ \sin\alpha' = \frac{|b|}{r} \end{cases}$ et on utilise le cercle trigonométrique des angles associés à savoir :



$$\begin{cases} \cos\alpha < 0 \\ \sin\alpha > 0 \end{cases} \quad alors\ \alpha = \pi - \alpha'$$

$$\begin{cases} \cos\alpha < 0 \\ \sin\alpha < 0 \end{cases} \quad alors\ \alpha = \pi + \alpha'$$

$\begin{cases} \cos\alpha > 0 \\ \sin\alpha < 0 \end{cases} \quad alors\ \alpha = -\alpha'$.

- Propriétés des arguments :

  Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}^* \ et \ \ k \in \mathbb{Z}$:

$$\arg(z.z') = \arg(z) + \arg(z') + 2k\pi$$

$$\arg\left(\frac{1}{z'}\right) = -\arg(z') + 2k\pi$$

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') + 2k\pi$$

$$\arg(\bar{z}) = -\arg(z) + 2k\pi$$

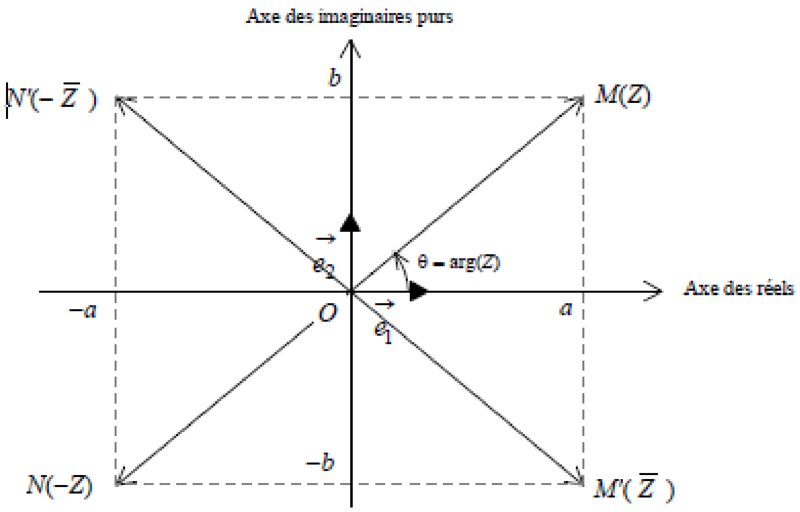
$$\arg(-z) = \pi + \arg(z) + 2k\pi$$

$$\arg(-\bar{z}) = \pi - \arg(z) + 2k\pi$$

  $\arg(z^n) = n\arg(z) + 2k\pi \ , n \in \mathbb{Z}$;

  Soient trois points distincts $A, B \ et \ C$ d'affixes respectives $a, b \ et \ c$. Alors on a :

$$Arg\left(\frac{c-b}{c-a}\right) = Mes(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})$$



- ✓ Formule de Moivre :

  Pour tout nombre réel α et pour tout entier relatif n, on a :

$$\boxed{(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)}$$

- **Notation exponentielle d'un nombre complexe**
  - ✓ Définition :

    Soit z un nombre complexe non nul de module r et d'argument α. On appelle forme exponentielle de zl'écriture $z = re^{i\alpha}$.

  - ✓ Formule d'Euler

    Pour tout nombre réel α, on a : $\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}$ et $\sin\alpha = \frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}$

- ✓ Expression de $\cos nx$ et $\sin nx$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$ $(n \in \mathbb{N})$
  Méthode :
  Pour exprimer $\cos nx$ et $\sin nx$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$ $(n \in \mathbb{N})$, on peut utiliser la formule de Moivre :
  $\cos nx + i \sin nx = (\cos x + i \sin x)^n$. $\cos nx$etsin nx sont alors respectivement les parties réelle et imaginaire du développement de $(\cos x + i \sin x)^n$ à l'aide de la formule du binôme de Newton.

- ✓ Formule du binôme de Newton :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_k^n a^k b^{n-k}$$

$$(a-b)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_k^n a^k b^{n-k}$$

- ✓ Linéarisation de $cos^n x$ et $sin^n x$ $(n \in \mathbb{N})$
  Méthode :
  Pour linéariser $cos^n x$ et $sin^n x$ $(n \in \mathbb{N})$ on peut utiliser le procédé suivant, mettant en jeu les formules d'Euler et du binôme de Newton :
  - Développer et réduire $cos^n x = (\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2})^n$et $sin^n x = (\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i})^n$;
  - Regrouper deux à deux les termes d'exposants opposés et exprimer chacun d'eux en fonction de termes de la forme $\cos kx$ou $\sin kx$.

- **Résolution des équations dans $\mathbb{C}$:**
  Soit $z, z' \in \mathbb{C}$:
  $z.z' = 0 \Leftrightarrow z = 0 \; ou \; z' = 0$.
  $z.z' \neq 0 \Leftrightarrow z \neq 0 \; et \; z' \neq 0$.

- **Equation du second degré dans $\mathbb{C}$**
  - ✓ 1er cas : $a, b \; et \; c$ trois nombres réels $(a \neq 0)$.
    $\Delta = b^2 - 4ac$. L'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet :
    - Si $\Delta > 0$, 2 solutions réels $z_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$; $z_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
    - Si $\Delta = 0$, une solution réel $z_0 = \frac{-b}{2a}$.
    - Si $\Delta < 0$, 2 solutions complexes : $z_1 = \frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$; $z_2 = \frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a}$.
  - ✓ 2ème cas : $a, b \; et \; c$ sont des nombres complexes $(a \neq 0)$.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- Si $\Delta \in \mathbb{R}$, voir 1er cas.
- Si $\Delta \in \mathbb{C}$

  Soit $\delta = x + iy$ tel que $\delta^2 = \Delta$.

  Alors on a : $\begin{cases} x^2 - y^2 = Re(\Delta) \\ 2xy = Im(\Delta) \\ x^2 + y^2 = |\Delta| \end{cases}$. la résolution de ce système permet de déterminer δ. Ainsi l'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet dans ces conditions les deux solutions suivantes :

  $z_1 = \frac{-b-\delta}{2a}$; $z_2 = \frac{-b+\delta}{2a}$.

- **Racines nième d'un nombre complexe :**

  Déterminons z tel que $z^n = \delta$

  On pose $\begin{cases} z = re^{i\theta} \\ \delta = \rho e^{i\alpha} \end{cases}$

$$z^n = \delta \Leftrightarrow r^n e^{in\theta} = \rho e^{i\alpha} \Leftrightarrow \begin{cases} r^n = \rho \\ n\theta_k = \alpha + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \sqrt[n]{\rho} \\ \theta_k = \frac{\alpha}{n} + \frac{2k\pi}{n} \end{cases}$$

Les solutions : $z_k = \sqrt[n]{\rho}.e^{i\theta_k}, \quad k \in \{0; 1; \dots ; n-1\}$.

- **Géométrie et nombres complexes :**

  Le plan est muni du repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$. $M(z)$et$M'(z')$ désignent un point et son image, ainsi que leurs affixes, par chacune de ces transformations.

transformation	Image M' d'un point M	Définition géométrique	Ecriture complexe
Translation de vecteur $\vec{u}(a)$		$\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$	$z' = z + a$
Symétrie de centre $\Omega(\omega)$		$\overrightarrow{\Omega M'} = -\overrightarrow{\Omega M}$	$z' - \omega = -(z - \omega)$
Symétrie par rapport à l'axe réel		$\begin{cases} OM' = OM \\ (\overrightarrow{e_1}, \widehat{\overrightarrow{OM'}}) = -(\overrightarrow{e_1}, \widehat{\overrightarrow{OM}}) \end{cases}$	$z' = \bar{z}$
Symétrie par rapport à l'axe imaginaire		$\begin{cases} OM' = OM \\ (\overrightarrow{e_1}, \widehat{\overrightarrow{OM'}}) = \pi - (\overrightarrow{e_1}, \widehat{\overrightarrow{OM}}) \end{cases}$	$z' = -\bar{z}$
Homothétie de centre $\Omega(\omega)$ et de rapport k		$\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$	$z' - \omega = k(z - \omega)$

Rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle α		$\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ (\widehat{\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}}) \equiv \alpha[2\pi] \end{cases}$	$z' - \omega = e^{i\alpha}(z - \omega)$

Configurations du plan et nombres complexes

Configuration	**Caractérisation géométrique**	**Caractérisationcomplexe**
Triangle ABC isocèle en A	AB=AC et mes Â=α $(0 < \alpha < \pi)$	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\alpha}$ ou $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{-i\alpha}$ $\alpha \neq k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$
Triangle ABC équilatéral	AB=AC et mes Â=$\frac{\pi}{3}$	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{i\frac{\pi}{3}}$ ou $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$
Triangle ABC rectangle et isocèle en A	AB=AC et mes Â=$\frac{\pi}{2}$	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = i$ ou $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = -i$
Triangle ABC rectangle en A	mes Â=$\frac{\pi}{2}$	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = bi(b \in \mathbb{R}^*)$
Points A, B, C alignés	Mes$(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) = k\pi$	$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \in \mathbb{R}^*$
Points A, B, C et D cocycliques (sur un même cercle)	$(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}}) = (\widehat{\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DB}}) + k\pi$	$\frac{\frac{z_A - z_B}{z_A - z_C}}{\frac{z_D - z_B}{z_D - z_C}} \in \mathbb{R}^*$

- Comment déterminer le centre et le rayon du cercle passant par les points A, B, C et D ?
  - On considère un des triangles formés par trois points
  - On détermine l'équation de la médiatrice de deux des côtés du triangle
  - On détermine le point d'intersection des deux droites qui n'est rien d'autre que le centre du cercle.
  - On obtient ainsi le rayon en calculant la distance du centre à un point des quatre points.

Ensemble des points $M(z)$:

Configurations	**Caractérisationgéométrique**	**Caractérisationcomplexe**
$M \in (\Delta)$ /(Δ) est la médiatrice de $[AB]$	$AM = BM$	$\|z - z_A\| = \|z - z_B\|$

$M \in (C)$ / (C) est le cercle de centre A et de rayon r $(r > 0)$.	$AM = r$	$\lvert z - z_A \rvert = r$
$M \in (\Gamma)$ / (Γ) est le cercle de diamètre [AB] privé des points A et B	$\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$	$\frac{z - z_B}{z - z_A} = bi(b \in \mathbb{R}^*)$
$M \in (\Gamma)$ / (Γ) est le demi-cercle de diamètre [AB] privé des points A et B tels que MAB soit direct.	$\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$	$\frac{z - z_B}{z - z_A} = bi(b \in \mathbb{R}^*{}_+)$
$M \in (\Gamma)$ / (Γ) est le demi-cercle de diamètre [AB] privé des points A et B tel que MAB soit indirect.	$\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}\right) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$	$\frac{z-z_B}{z-z_A} = bi(\ b \in \mathbb{R}^*{}_-)$
La droite (AB) privé des points $A\ et\ B$.	$\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}\right) = k\pi$	$\frac{z - z_B}{z - z_A} = a\ , a \in \mathbb{R}^*$
La droite (AB) privé du segment $[AB]$	$\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}\right) = 2k\pi$	$\frac{z - z_B}{z - z_A} = a\ , a \in \mathbb{R}^*{}_+$
Le segment $[AB]$ privé des points $A\ et\ B$.	$\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{MA};\overrightarrow{MB}}\right) = \pi + 2k\pi$	$\frac{z - z_B}{z - z_A} = a\ , a \in \mathbb{R}^*{}_-$
La droite parallèle à (AB) passant par C privé du point C	$\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CM}}\right) = k\pi$	$\frac{z - z_C}{z_B - z_A} = a\ , a \in \mathbb{R}^*$
La droite perpendiculaire à (AB) passant par C privé du point C	$\text{mes}\left(\widehat{\overrightarrow{AB};\overrightarrow{CM}}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$	$\frac{z - z_C}{z_B - z_A} = ai\ , a \in \mathbb{R}^*$

La demi-droite partant de A, privée de A et dirigé par le vecteur $\vec{w}$ tel que $(\vec{u}, \vec{w}) = \theta$	mes$\left(\widehat{\vec{u}; \overrightarrow{AM}}\right) = \theta + 2k\pi$	$z - z_A \in \mathbb{C}^*$
$M \in$ au disque de centre A et de rayon r.	$AM \leq r$	$\|z - z_A\| \leq r$
$M \in$ à la couronne de rayon $r$et R.	$r \leq AM \leq R$	$r \leq \|z - z_A\| \leq R$

- **Quadrilatère**

  Soit $A(z_A), B(z_B), C(z_C)\ et\ D(z_D)$.
  - $ABCD$ est un parallélogramme $\Leftrightarrow$ $z_B - z_A = z_C - z_D$.
  - $ABCD$ est un losange ⇔ $ABCD$ est un parallélogramme qui à deux côtés consécutifs égaux.
  - $ABCD$ est un rectangle ⇔ $ABCD$ est un parallélogramme et à un angle droit.
  - $ABCD$ est un carré ⇔ $ABCD$ est un rectangle qui à deux côtés consécutifs égaux.
  - $ABCD$ est un trapèze ⇔ $(AB)//\ (DC)$ et $(AD)et\ (BC)$ non parallèle.
  - $ABCD$ est un trapèze isocèle ⇔$(AB)//\ (DC)$et $(AD) = (BC)$.
  - $ABCD$ est un trapèze rectangle ⇔$(AB)//\ (DC)$, $(AD)\perp(AB)et\ (AD)non\ \perp(BC)$.

Exercices

Exercice 1 :

1) Déterminer la forme algébrique de :

$Z_1 = (1 - 2i)(4 + 5i)$; $Z_2 = \frac{3-5i}{4+2i}$; $Z_3 = (1+i)^{30}$; $Z_5 = Z_1 \times Z_3$; $Z_6 = \frac{1}{Z_2}$

2) a. Calculer $i^3, i^4\ et\ i^5$. En déduire i^{18} et i^{19}

   b. Calculer $1 + i + i^2 + i^3$, puis en déduire $i^{199} + i^{200} + i^{201} + i^{202}$

Exercice 2:

Soit les nombres complexes : $Z_1 = 1 + i$, $Z_2 = 2i$, $Z_3 = 5\ et\ Z_4 = 1 - i\sqrt{3}$

1. Déterminer le module et un argument des nombres complexes ci-dessus.

2. En déduire leur forme trigonométrique puis leur forme exponentielle.
3. En déduire le module et un argument des nombres complexes suivants :

$$Z_5 = (1+i)(1+i\sqrt{3}), \qquad Z_6 = \frac{2i}{1-i\sqrt{3}}, Z_7 = (1+i)^7$$

Exercice 3 :

Calculer $Z_1 = (\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)^{2001}$

Exercice 4:

Soit les nombres complexes : $Z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ et $Z_2 = \frac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{2}$

1. Ecrire $Z = \frac{Z_1}{Z_2}$ sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique.
2. En déduire les valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

Exercice 5:

On donne $z = -1 + i\sqrt{3}$ et $z' = 1 + i$

1. Calculer le module puis un argument de z et z'.
2. Ecrire $\frac{z}{z'}$ sous forme trigonométrique puis sous forme algébrique.
3. En déduire les valeurs de $\sin\frac{5\pi}{12}$ et $\cos\frac{5\pi}{12}$.

Exercice 6:

On considère les points E(i), F($3-i$) et G($1+2i$).

1. Placer ces points dans le plan muni d'un repère orthonormé (unité : 1 cm)
2. Déterminer et construire :
   a. L'ensemble (B) des points M (z) tels que : $|z-i| = 3$
   b. L'ensemble (H) des points M (z) tels que : $|z-i| = |z-3+i|$
   c. L'ensemble (R) des points M (z) tels que : $\arg(z-i) = \arg(z_G - z_E)$

Exercice 7 :

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Au point M d'affixe $z = x + iy$, avec $z \neq i$, on associe le point M' d'affixe $z' = \frac{z+3}{z-i}$

1. Exprimer les coordonnées X et Y de M' en fonction des coordonnées x et y de M.
2. Déterminer l'ensemble des points M tels que :
   a. z' soit un réel.
   b. z' soit imaginaire pur.

Exercice 8 :

1. Déterminer $\sin 3\theta$ et $\cos 3\theta$ en fonction de $\sin\theta$ et $\cos\theta$.
2. Linéariser les expressions suivantes :
   cos^3x , cos^4x , sin^4x , sin^6x , $cos^3x\,.sin^2x$

Exercice 9:

On donne, pour tout nombre complexe z : $P(z) = z^3 + (2+i)z^2 + (-3+4i)z - 10 + 5i$

1. Démontrer que le polynôme P possède un seul zéro réel z_0 que l'on déterminera.
2. En déduire une factorisation de $P(z)$ sous forme $P(z) = (z - z_0)Q(z)$ où Q est un polynôme de degré 2.

3. Vérifier que $Q(i) = 0$ et en déduire les solutions de l'équation $P(z) = 0$.

Exercice 10:

On pose $P(z) = z^4 - 3z^3 + \frac{9}{2}z^2 - 3z + 1$. α désigne un complexe quelconque.

1. Montrer que α est solution de l'équation $P(z) = 0$, il en est de même de $\bar{\alpha}$ et de $\frac{1}{\alpha}$.
2. a. Calculer $P(1+i)$
   b. En déduire la résolution de l'équation $P(z) = 0$
3. Ecrire sous la forme d'un produit de deux polynômes du second degré.

Exercice 11:

1. calculer $(1-i)^2$ et $(1+i)^2$
2. soit (E) : $z^4 + 8iz^2 + 48 = 0$.
   Montrer que si α est solution de (E), $-\alpha$ l'est également.
3. Développer le produit $(z^2 + 12i)(z^2 - 4i)$
4. Résoudre (E)

Exercice 12:

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$. Unité graphique 2cm.

On considère dans $\mathbb{C}$ le polynôme P définie par :

$P(z) = z^3 + 4(1-i)z^2 - 2(2+7i)z - 16 + 8i$.

1.a)Démontrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une unique solution réelle r.

b) Déterminer les nombres complexes a et b tels que : $\forall\, z \in \mathbb{C}$,$P(z) = (z - r)(z^2 + az + b)$.

c)Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.

2. A, B et C sont les points d'affixes respectives $-1 + 3i, 1 + i$ et -4.

a) Quel est la nature du triangle ABC ? Justifier.

b) Déterminer l'affixe z_G du barycentre G des points pondérés (A ; 4), (B ; 3) et (C ; 5).

c)En déduire les affixes des vecteurs $\overrightarrow{GA}, \overrightarrow{GB}$ et $\overrightarrow{GC}$.

Exercice 13:

Soit A, B et C trois points d'affixes respectives Z_A, Z_B et Z_C / $Z_A = 2 + 6i$, $Z_B = 4 + 2i$ et $Z_C = 6i$.

1) Placer les points A, B et C dans le plan.

2) a. Déterminer la forme algébrique de $Z = \frac{Z_O - Z_A}{Z_B - Z_A}$ où Z_O est l'affixe de l'origine du repère.

b) Ecrire Z sous forme trigonométrique.

c)déterminer une mesure de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AO}})$.

3) Soit r la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

a)Déterminer l'écriture complexe de r.
b) Déterminer l'image de O par r.
c)En déduire que le triangle OAB est rectangle isocèle en B.
4) a. Déterminer le centre et le rayon du cercle circonscrit au triangle OAB. Construire (Γ).
b) Démontrer que les O, A, B et C appartiennent à un même cercle.

Exercice 14

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O ;$\vec{u}$; $\vec{v}$) on prendra 2 cm pour unité graphique.

Soit A le point d'affixe i et B le point d'affixe 2.

1) A) déterminer l'affixe du point B_1 image de B par l'homothétie de centre A et de rapport $\sqrt{2}$.
   a) Déterminer l'affixe du point B' image de B_1 par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
   b) Placer les points $A, B\ et\ B'$.
2) On appelle f la transformation du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = (1 + i)z + 1$.
   a) Montrer que B est l'image de B'par f.
   b) Montrer que A est le seul point invariant par f.
   c) Etablir que pour tout nombre complexe z distinct de : $\frac{z'-z}{i-z} = -i$.
   Interpréter ce résultat en termes de distances puis en termes d'angles. En déduire une méthode de construction de M' à partir de M, pour M distinct de A.
3) –
   a) Donner la nature et préciser les éléments caractéristiques de l'ensemble Σ_1 des points M du plan dont l'affixe z vérifie : $|z - 2| = \sqrt{2}$.
   b) Démontrer que : $z' - 3 - 2i = (1 + i)(z - 2)$.
   En déduire que si le point M appartient à Σ_1 alors son image M'appartient à un cercle Σ_2 dont précisera le rayon et le centre.
   c) Tracer Σ_1 et Σ_2 sur la même figure que A, B et B'.

Exercice 15

1) On donne le nombre complexe $a = \frac{\sqrt{2}-1+i(1+\sqrt{2})}{2+i\sqrt{2}}$
   a) Ecrire a sous la forme algébrique et sous la forme exponentielle.
   b) Déterminer l'ensemble I des entiers naturels n tels que a^n soit un réel.

c) Déterminer l'ensemble J des entiers naturels p tels que a^p soit de la forme $\beta i, \beta \in \mathbb{R}^*{}_+$.

d) 2004 est il élément de I, justifier la réponse.

2) On désigne par T la transformation du plan complexe dans lui-même qui a tout point M d'affixe z associe le point M'd'affixe $z' = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)z$.

a) Préciser la nature de T.

b) Soit A le point d'affixe $z_A = 1 - i\frac{\sqrt{3}}{3}$, et A' son image par T.

Ecrire z_A sous forme exponentielle. En déduire l'affixe de A'.

En déduire que $\begin{cases} \cos\frac{\pi}{12} = \frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2}) \\ \sin\frac{\pi}{12} = \frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2}) \end{cases}$

Donner alors une forme très simple de $\tan\frac{\pi}{12}$.

c) Résoudre dans $]-\pi;\ \pi]$, l'équation :

$$(2-\sqrt{3})\cos(2x) + \sin(2x) = \sqrt{3} - 1$$

Compléments sur les fonctions

- **Rappels sur les équations et inéquations irrationnelles**

  - Equation du type :

    - $\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)}$ où $f(x) et\ g(x)$ sont des polynômes de degré ≤ 2.

      $$\sqrt{f(x)} = \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 & (S_1) \\ g(x) \geq 0 & (S_2) \\ f(x) = g(x) & (S_3) \end{cases}$$

      $$S_{\mathbb{R}} = S_1 \cap S_2 \cap S_3$$

    - $$\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 & (S_1) \\ g(x) \geq 0 & (S_2) \\ f(x) = g^2(x) & (S_3) \end{cases}$$

      $$S_{\mathbb{R}} = S_1 \cap S_2 \cap S_3$$

    - $\sqrt{f(x)} = k, k \in \mathbb{R}$

      Si $k < 0, S_{\mathbb{R}} = \emptyset$

      Si $k > 0, \sqrt{f(x)} = k \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) = k^2 \end{cases}$

      Si $k = 0, \sqrt{f(x)} = k \Leftrightarrow \sqrt{f(x)} = 0$

      $$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) = 0 \end{cases}$$

      $$\Leftrightarrow f(x) = 0$$

- Inéquation du type :
  - $\sqrt{f(x)} \leq \sqrt{g(x)}$
    $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 & (S_1) \\ g(x) \geq 0 & (S_2) \\ f(x) \leq g(x)(S_3) & (3) \end{cases}$ idem pour < où on remplace dans (3)seulement .
    $$S_{\mathbb{R}} = S_1 \cap S_2 \cap S_3$$
    $\sqrt{f(x)} \leq g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 & (S_1) \\ g(x) \geq 0 & (S_2) \\ f(x) \leq (g(x))^2(S_3) & (3) \end{cases}$ idem pour < où on remplace dans (3)seulement .
    $$S_{\mathbb{R}} = S_1 \cap S_2 \cap S_3$$
  - $\sqrt{f(x)} \geq g(x) \Leftrightarrow$
    $\begin{cases} g(x) < 0\ (S_1) \\ f(x) \geq 0\ (S_2) \end{cases}$ ou $\begin{cases} f(x) \geq 0 & (S'_1) \\ g(x) \geq 0 & (S'_2) \\ f(x) \geq (g(x))^2(S'_3) \end{cases}$

  Soit $s_1 = S_1 \cap S_2$ et $s_2 = S'_1 \cap S'_2 \cap S'_3$
  $$S_{\mathbb{R}} = s_1 \cup s_2$$
  - $\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow$
    $\begin{cases} g(x) < 0\ (S_1) \\ f(x) \geq 0\ (S_2) \end{cases}$ ou $\begin{cases} f(x) \geq 0 & (S'_1) \\ g(x) \geq 0 & (S'_2) \\ f(x) \geq (g(x))^2(S'_3) \end{cases}$

  Soit $s_1 = S_1 \cap S_2$ et $s_2 = S'_1 \cap S'_2 \cap S'_3$
  $$S_{\mathbb{R}} = s_1 \cup s_2$$

- **Détermination de l'ensemble de définition d'une fonction**
  - Définition :
    Soit f une fonction d'un ensemble A vers un ensemble B. on appelle ensemble de définition de f l'ensemble des éléments de A qui ont une image par f.
    On note généralement D_f ou D
  - Condition de détermination de l'ensemble de définition d'une fonction f

- $f(x) = \sqrt{A(x)}$ existe si et seulement $A(x) \geq 0$ ou encore $D_f = \{x \in \mathbb{R}/\ A(x) \geq 0\}$.
- $f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$ existe si et seulement si $N(x)$ existe, $D(x)$ existe et $(x) \neq 0$.
  - Remarque : les fonctions polynômes, valeurs absolues , cosinus et sinus sont définies sur $\mathbb{R}$.

➢ **<u>Etude graphique</u>**

- <u>Notation et vocabulaire</u>

  On note $(C_f)\ ou\ (C)$ la représentation graphique de f et on a : $M(x;y) \in (C_f) \Leftrightarrow x \in D_f\ \ et\ y = f(x)$.
- <u>Image et antécédent d'un nombre</u>
  - L'image de $a\ par\ f$ est l'ordonnée du point d'intersection de la droite (D) d'équation $x = a$ et de (C_f).
  - Les antécédents de b par f sont les abscisses des points d'intersection de la droite (D) d'équation $y = b$ et de (C_f).
- <u>Restriction d'une fonction</u>

  Soit f une fonction de A vers B et E une partie de A.
  - On appelle restriction de f à E, la fonction $g: E \rightarrow B$, $a \mapsto f(a)$
  - f est alors appelé prolongement de g à A.
    - Exemple :

      On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
      $\begin{cases} f(x) = (3-x)\sqrt{x} & si\ x \geq 0 \\ f(x) = x - 1 + \frac{1}{x+1} & si\ \ x < 0 \end{cases}$
      La restriction de f à $[0;+\infty[$ est la fonction h telle que : $h(x) = (3-x)\sqrt{x}$ définie sur $[0;+\infty[$.

➢ **<u>Déterminer de la limite des fonctions</u>**

- <u>Quelques propriétés sur les limites</u>

  Propriété 1 :

  $\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty, \forall\ n \in \mathbb{N}^*$;

  $\lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & si\ n\ pair, n \neq 0 \\ -\infty & si\ n\ impair \end{cases}$

  $$\lim_{x\to+\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

  Propriété 2 :

  $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0\ , \forall\ n \in \mathbb{N}^*$; $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

Propriété 3 :

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^n} = +\infty \text{ , } \forall\, n \in \mathbb{N}^*, avec\ n\ pair$$

Si n impair, on a : $\lim_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{1}{x^n} = +\infty\ \ et\ \ \lim_{\substack{x\to 0\\ <}} \frac{1}{x^n} = -\infty$

- <u>Opérations sur les limites</u>
  - Somme

f	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
g	l'	$+\infty$ ou $-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$f+g$	$l+l'$	$+\infty$, $-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I

  - Produit

f	l	$l \neq 0$	0	∞
g	l'	∞	∞	∞
$f \times g$	$l \times l'$	∞ Règle des signes	F.I	∞ règle des signes

  - Quotient

f	l	$l \neq 0$	0	$l \neq 0$	∞	∞
g	$l' \neq 0$	0	0	∞	l'	∞
$\frac{f}{g}$	$\frac{l}{l'}$	∞	F.I	0	∞	$F.I$

- <u>Limite à l'infini d'une fonction polynôme :</u>
  La limite d'une fonction polynôme en $+\infty\ ou\ en - \infty$ est égale à la limite de son terme de plus haut degré.
- <u>Limite à l'infini d'une fonction rationnelle :</u>
  La limite d'une fonction rationnelle en $+\infty\ ou\ et\ -\infty$ est égale à la limite du quotient des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

  <u>Remarque</u> :
  La propriété sur les limites de fonctions polynômes et de fonctions rationnelles ne peut être utilisée qu'en $+\infty$ et en $-\infty$. En aucun cas, elle ne peut être utilisée lorsque x tend vers un nombre réel.
- <u>Quelques méthodes pratiques :</u>

- Comment calculer des limites aux points qui annulent le dénominateur ?
  Calculer la valeur prise par le numérateur.
  - Si elle est différente de 0, la limite est infini ; étudier le signe du dénominateur.
  - Si elle est égale à 0, factoriser le numérateur et le dénominateur puis simplifier.
  - Si une fonction irrationnelle s'y trouve on multiplie et on divise par l'expression conjuguée.
- Comment calculer des limites à l'infini ?
  Si les théorèmes des opérations sur les limites ne s'appliquent pas, lorsque la fonction f est une fonction irrationnelle : multiplier et diviser par l'expression conjuguée.
  - Remarque : cas de forme indéterminée
    $+\infty - \infty$: factoriser le terme dominant
    $\frac{\infty}{\infty}$: factoriser le terme dominant au numérateur et au dénominateur puis simplifier.
    $\frac{0}{0}$: factoriser le terme tendant vers 0 au numérateur et au dénominateur puis simplifier.
    $0 \times \infty$: se ramener en général à l'une des formes $\frac{\infty}{\infty}$ ou $\frac{0}{0}$.
- **<u>N'oublier pas</u> :**
  - $IRI \;\; ORO \;\; ROI \;\; de \;\; RIO$
  - IOI(Infini sur 0 égal à Infini) car $\frac{\infty}{0} = \infty \times \frac{1}{0} = \infty \times \infty$.
  - OIO(0 sur infini égal à 0) car $\frac{0}{\infty} = 0 \times \frac{1}{\infty} = 0 \times 0$.
- Limite de la composée de deux fonctions (**très importante pour la suite**)

  soit la fonction fog définie sur un intervalle I contenant a ou dont a est une borne.
  Si $\lim_{x \to a} g(x) = l$ et si $\lim_{x \to l} f(x) = l'$ alors
  $\lim_{x \to a} fo\, g(x) = l'$
  On pose souvent :
  $\lim_{x \to a} fo\, g(x) = l'car\begin{cases} \lim_{x \to a} g(x) = l \\ \lim_{x \to l} f(x) = l' \end{cases}$

- **Continuité**
  - Continuité en un point x_0 :
    Soit f définie sur Iet $x_0 \in I$.
    $f$est continue en x_0 si et seulement si $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
    - Si $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = f(x_0)$, on dit que f est continue à gauche de x_0.
    - Si $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = f(x_0)$, on dit que f est continue à droite de x_0.
    - Remarque :

      Si f est telle que : $\begin{cases} f(x) = \cdots ; x \neq x_0 \\ f(x_0) = y_0 \end{cases}$ alors f est continue en x_0 si et seulement si $\lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f(x) = y_0$.
  - Continuité sur un intervalle
    Une fonction f est continue sur I si elle est continue en tout point I.
  - Proposition **importante** :
    - Toute fonction constante, polynomiale, rationnelle, irrationnelle, trigonométrique, comportant des valeurs absolues sont continue sur leurs ensembles de définition.
    - Si f est continue sur I alors elle est continue sur tout intervalle $J \subset I$.
  - Image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone
    Proposition :
    - L'image d'un intervalle par une fonction continue et strictement monotone(i.e strictement décroissante ou(exclusif) strictement croissante) est un intervalle de même nature.

- **Dérivabilité**
  - Nombre dérivée en x_0
    - Définition :
      Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert contenant x_0 .

On dit que f est dérivable en x_0 si la quantité $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ admet une limite finie quand x tend vers x_0. Cette limite est appelée nombre dérivé en x_0 et notée $f'(x_0)$.

- Remarque :
  Il est équivalent de dire que f est dérivable en x_0 si la quantité $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ admet une limite finie quand h tend vers 0.

- Lien avec la continuité
  Si f est dérivable en x_0, alors elle est continue en x_0.
  ATTENTION : la réciproque n'est pas vérifiée.
- Nombre dérivé à droite, nombre dérivé à gauche
  Si $\lim_{\substack{x\to x_0 \\ >}} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ existe et est finie, on dit que f est dérivable à droite en x_0.
  On note $f'_d(x_0)$ cette limite, appelée » nombre dérivé à droite » en x_0.
  On définit de façon similaire le nombre dérivé à gauche $f'_g(x_0)$.
  - Théorème **important** :
    f est dérivable en x_0 si et seulement si $f'_d(x_0)$ et $f'_g(x_0)$ existent et sont égaux.
- Interprétation graphique :
  - Propriété :
    S'il existe, le nombre dérivé x_0 est le coefficient directeur de la tangente à la courbe représentative de f au point $M_0(x_0; y_0)$ ou encore au point d'abscisse $x = x_0$.
    Si $f'(x_0) = 0$, on a une tangente horizontale.
  - L'équation de la tangente (T) au point d'abscisse x_0 à (C_f) est : $(T): y = f'(x_0)(x-x_0) + f(x_0)$
  - **Remarques :**
    - Si $f'_d(x_0) = a$ et $f'_d(x_0) = b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ $(a \neq b)$: on dit f n'est pas dérivable en x_0.
      Interprétation : la courbe représentative de f admet deux demi-tangentes de pentes respectives a et b respectivement à droite et à gauche de x_0.
      On dit que le point d'abscisse $x = x_0$ est un point anguleux.

- Si $f'_d(x_0) = \infty$(resp. $f'_g(x_0) = \infty$) , on dit f n'est pas dérivable en x_0.
  Interprétation graphique : la courbe représentative de f admet une tangente verticale à droite(resp. à gauche) de x_0.

- **<u>Fonction dérivée</u>**
  - <u>Définition</u> :
    La fonction dérivée est la fonction : $f': x \mapsto f'(x)$
  - <u>L'ensemble de dérivabilité</u>
    Les fonctions polynômes, rationnelles, trigonométriques, comportant la valeur absolue sont dérivables sur leurs ensembles de définition.
    Mais pour la fonction irrationnelle si elle est définie par exemple sur $[x_0; +\infty[\ ou\ sur\ ]-\infty; x_0]$, alors elle est dérivable sur $]x_0; +\infty[\ ou\ sur\ ]-\infty; x_0[$.

- **<u>Formule sur les dérivées</u>**
  - Dérivées usuelles

$f(x)$	$f'(x)$	$D_{f'}$
a	0	$\mathbb{R}$
$ax + b$	a	$\mathbb{R}$
$x^n (n \in \mathbb{N}^*)$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{x^n} (n \in \mathbb{N}^*)$	$\frac{-n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\mathbb{R}_+^*$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$

  - Opérations sur les fonctions

$f(x)$	$f'(x)$
$k.U$	$k.U'$
$U + V$	$U' + V'$
$U.V$	$U'.V + U.V'$
$\frac{1}{V}$	$\frac{-V'}{V^2}$
$\frac{U}{V}$	$\frac{U'.V - V'.U}{V^2}$
$\sqrt{U}$	$\frac{U'}{2\sqrt{U}}$

$U^n\ (n \in \mathbb{N}^*)$	$n.U'.U^{n-1}$
$\frac{1}{U^n}$	$\frac{-n.U'}{U^{n+1}}$
$(goh)'(x)$	$h'(x).g'(h(x))$
$\cos(U)$	$-U'.\sin(U)$
$\sin(U)$	$U'.\cos(U)$

- **les primitives**
  - définition :
    soit f une définie sur un intervalle I.
    On appelle primitive de f toute fonction F définie sur I telle que $F' = f$.
  - Propriété :
    - Toute fonction définie et continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.
    - Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I, F une primitive de f sur I et $k \in \mathbb{R}$.
      La fonction G définie sur I par $G(x) = F(x) + k$ est encore une primitive de f $sur\ I$.
    - Parmi toutes les primitives d'une fonction sur un intervalle I, il existe une et une seule prenant une valeur donnée y_0 pour une valeur x_0 de la variable.
  - Formules sur les primitives
    - Primitives de fonctions usuelles

$f(x)$	$F(x)$
0	$k, k \in \mathbb{R}$
1	$x + k$
a	$ax + k$
x	$\frac{x^2}{2} + k$
x^2	$\frac{x^3}{3} + k$
x^r	$\frac{x^{r+1}}{r+1} + k$
$\frac{1}{x^2}$	$\frac{-1}{x} + k$
$\frac{1}{x^n}$	$\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + k\ , n \neq 1$

$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + k$
$\cos x$	$\sin x + k$
$\sin x$	$-\cos x + k$
$\frac{1}{(\cos x)^2} = 1 + (\tan x)^2$	$\tan x + k$
$\cos(ax + b)$	$\frac{1}{a}\sin(ax + b) + k$
$\sin(ax + b)$	$-\frac{1}{a}\cos(ax + b) + k$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + k$
e^x	$e^x + k$
e^{ax+b}	$\frac{1}{a}e^{ax+b} + k$

- Opérations et compositions

  F et G sont des primitives respectives de f et g ;

  a, b et k sont 3 réels quelconques.

$f + g$	$F + G$
af	$aF + k$
$f(ax + b)$	$\frac{1}{a}F(ax + b) + k$
$f'.\cos f$	$\sin f + k$
$f'.\sin f$	$-\cos f + k$
$\frac{f'}{f^2}$	$\frac{-1}{f} + k$
$\frac{f'}{\sqrt{f}}$	$2\sqrt{f} + k$
$f'.f^n$	$\frac{f^{n+1}}{n+1} + k$
$\frac{f'}{f^n}$	$\frac{-1}{(n-1)f^{n-1}} + k$
$\frac{f'}{f}$	$\ln\lvert f\rvert + k$
$f'.e^f$	$e^f + k$
$u'.[1 + (\tan u)^2]$ ou $\frac{u'}{cos^2 u}$	$\tan u + k$

- **<u>Complément sur les études de Fonctions</u>**

Soit f une fonction numérique d'ensemble de définition D.

(C) la représentation graphique de f(d'équation $y = f(x)$) dans le plan P muni d'un repère.
Soit $M(x;y)$ un point quelconque de P ; $M(x;y) \in (C) \Leftrightarrow x \in D et\ y = f(x)$

ETUDE DES BRANCHES INFINIES DE LA COURBE (C)

- Définition : on dit (C) possède une branche infinie chaque fois que l'une au moins des coordonnées $x\ ou\ y$ d'un point de (C) tend vers l'infini.
- Divers cas :
  1) Si $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ $(a \in \mathbb{R})$ alors la droite d'équation : $x = a$ est une asymptote verticale à (C).
  2) Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$ $(b \in \mathbb{R})$ alors la droite d'équation : $y = b$ est une asymptote horizontale à (C)en $(+\infty\ ou -\infty)$.
  3) Si $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ alors on calcule $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}$
     a) Si $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$ alors (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées (OJ).
     b) Si $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ alors (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses (OI).
     c) Si $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ $(a \in \mathbb{R}^*)$ alors on calcule : $\lim_{x\to\infty}(f(x) - ax)$.
        - Si $\lim_{x\to\infty}(f(x) - ax) = b$ $(b \in \mathbb{R})$, alors la droite d'équation : $y = ax + b$ est une asymptote oblique à (C)(en $+\infty\ ou\ en -\infty$).
        - Si $\lim_{x\to\infty}(f(x) - ax) = \infty$, alors (C) admet une branche parabolique de direction la droite $y = ax$.
        - Si $(f(x) - ax)$ n'admet pas de limite en l'infini, alors (C) n'admet pas d'asymptote oblique, ni de branche parabolique.

        Remarques :
        1) Cas d'une asymptote oblique :
           - La droite d'équation $(y = ax + b)$ est une asymptote à (C) en $+\infty$ $(ou\ en -\infty)$
             Si et seulement si $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - (ax + b)) = 0$ $(ou\ \lim_{x\to-\infty}(f(x) - (ax + b)) = 0)$.
             C'est-à-dire si et seulement si $f(x)$ peut s'écrire sous la forme : $f(x) = ax + b + \varepsilon(x) avec\ \lim_{x\to\infty} \varepsilon(x) = 0$.

  - La position de (C) par rapport à son asymptote est donnée par le signe de $(f(x) - (ax + b))$.

2) Deux courbes $(C) et\ (C')$ représentatives respectivement des fonctions f et g dans le même repère sont dites asymptotes en $+\infty\ (ou\ en - \infty)$ si et seulement si $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - g(x)) = 0(\lim_{x\to-\infty}(f(x) - g(x)) = 0)$.

ELEMENTS DE SYMETRIE POUR LA COURBE (C)

- f**paire** ⇔ $\forall\ \boldsymbol{x \in D, -x \in D\ et\ f(-x) = f(x)}$; dans ce cas (C) admet en repère orthogonal, l'axe (Oy) pour **axe de symétrie**.
- f**impaire** ⇔ $\forall\ \boldsymbol{x \in D, -x \in D\ et\ f(-x) = -f(x)}$;dans ce cas ,(C) admet dans n'importe quel repère, l'origine O du repère pour **centre de symétrie.**
- **Axe de symétrie :** en repère orthogonal la droite d'équation : $x = a$ est axe de symétrie pour (C) ssi l'une des trois conditions suivantes est vérifiée :
  - La fonction : $g: x \mapsto f(x + a)$ est une fonction **paire.**
  - $\forall\ \boldsymbol{x \in D, 2a - x \in D\ et\ f(2a - x) = f(x)}$
  - Soit $x \in \mathbb{R}\ tel\ que\ \boldsymbol{a - x \in D, on\ a : a + x \in D\ et\ f(a - x) = f(a + x)}$ **.**
- **Centre de symétrie :** en repère quelconque le point $\Omega(a; b)$ est un centre de symétrie pour (C) ssi l'une des trois conditions suivantes est vérifiée :
  - La fonction : $g: x \mapsto f(x + a) - b$ est une fonction **impaire.**
  - $\forall\ \boldsymbol{x \in D, 2a - x \in D\ et\ f(2a - x) + f(x) = 2b}$
  - Soit $x \in \mathbb{R}\ tel\ que\ \boldsymbol{a - x \in D, a + x \in D\ et\ f(a - x) + f(a + x) = 2b}$ **.**
- **Périodicité** (utile pour l'étude des fonctions trigonométriques)
  - Définition :

    Soit f une fonction d'ensemble de définition D et T un nombre réel non nul.

    On dit que f est périodique, de période T(ou T-périodique), si pour tout $x \in D, x - T\ et\ x + T$ appartiennent à $D\ et\ f(x + T) = f(x)$.
  - Exemples :
    - Les fonctions cosinus et sinus sont périodiques, de période 2π.

      En général, les fonctions : $x \to \cos(ax + b) et\ x \to \sin(ax + b)$, $a \neq 0$ sont périodiques de période $\frac{2\pi}{|a|}$.

- La fonction tangente est périodique de période π.
  En général, la fonction :$x \to \tan(ax+b)$, $a \neq 0$ est périodique de période $\frac{\pi}{|a|}$.
- Si f est une somme de fonction périodique, la période de la fonction f n'est rien d'autre que la période **commune** à la période de ces termes. Pour le trouver on cherche le ≪ $P.P.C.M$ ≫ de ces périodes.

- **Intervalle d'étude** :
  Si f est une fonction périodique de période T, l'intervalle d'étude ou domaine d'étude noté souvent D_E est de la forme :
  $]0;T[\ ou\ [0;T]\ ou\ \left[-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right]\ ou\ \left]-\frac{T}{2};\frac{T}{2}\right[$, c'est-à-dire un intervalle « de longueur ou d'amplitude T«.
  Si de plus la fonction est paire ou impaire, on réduit le domaine d'étude à un intervalle de la forme : $\left[0;\frac{T}{2}\right]\ ou\ \left]0;\frac{T}{2}\right[$.

- **Plan d'étude d'une fonction**
  - Ensemble de définition
    - Périodicité
    - Parité
      (éléments de symétrie)
  - Limites aux bornes de D
    - Asymptotes (verticale ou horizontale)
  - Dérivée
    - Continuité et dérivabilité puis calcul de la dérivée.
    - Signe de la dérivée ⇒ sens de variation
  - Tableau de variation
  - Branches infinies
  - Valeurs particulières :
    - Point d'intersection avec l'axe des abscisses : on résout l'équation $f(x) = 0$ ($A(x;0)$)
    - Point d'intersection avec l'axe des ordonnées : on calcul $f(0)$ ($B(0;f(0))$).
    - Tangente horizontale : on résout l'équation $f'(x) = 0$
    - Tangente parallèle à $(D): y = ax + b$, on pose $f'(x_0) = a$ et on détermine x_0.
    - Tangente perpendiculaire à $(D): y = ax + b$, on pose $f'(x_0) \times a = -1$ et on détermine x_0.

- **Tracer de courbe de fonctions associées**

$x \mapsto f(-x)$; $x \mapsto -f(x)$; $x \mapsto f(|x|)$; $x \mapsto |f(x)|$; $x \mapsto f(x-a)$; $x \mapsto f(x)+b$ *et* $x \mapsto f(x-a)+b$.

Connaissant la courbe (C) de la fonction , on en déduit celle de :

- $\boldsymbol{x \mapsto f(-x)}$en construisant le symétrie de (C) par rapport à l'axe des **ordonnées.**

C'est-à-dire , si on pose $h(x) = f(-x)$ alors $(C_h) = S_{(OJ)}((C))$

- $\boldsymbol{x \mapsto -f(x)}$en construisant le symétrie de (C) par rapport à l'axe des **abscisses.**

  C'est-à-dire , si on pose $g(x) = -f(x)$ alors $(C_g) = S_{(OI)}((C))$.
- $\boldsymbol{x \mapsto f(|x|)}$ **.** on définit ainsi respectivement C_+, C_- la partie (C) tel que resp. $x > 0$; $x < 0$. La courbe de la fonction : $\boldsymbol{x \mapsto f(|x|)}$s'obtient en faisant la réunion de C_+ et sa symétrie par rapport à l'axe des **ordonnées**.

  C'est-à-dire , si on pose $k(x) = f(|\boldsymbol{x}|)$ alors $(C_k) = S_{(OJ)}((C_+)) \cup C_+$.
- $\boldsymbol{x \mapsto |f(x)|}$ **.** on définit ainsi respectivement C^+, C^- la partie (C) tel que resp. $f(x) > 0$; $f(x) < 0$. La courbe de la fonction : $\boldsymbol{x \mapsto |f(x)|}$s'obtient en faisant la réunion de C^+ et de la symétrie de C^- par rapport à l'axe des **abscisses**.

  C'est-à-dire , si on pose $P(x) = |f(x)|$ alors $(C_P) = S_{(OI)}((C^-)) \cup C^+$.
- $\boldsymbol{x \mapsto f(x-a)}$en construisant l'image (C) par la **translation** de vecteur $\vec{u}\binom{a}{0}$.

  C'est-à-dire , si on pose $q(x) = f(x-a)$ alors $(C_q) = t_{\vec{u}}((C))$.
- $\boldsymbol{x \mapsto f(x)+b}$en construisant l'image (C) par la **translation** de vecteur $\vec{v}\binom{0}{b}$.

  C'est-à-dire , si on pose $R(x) = f(x)+b$ alors $(C_R) = t_{\vec{v}}((C))$.
- $\boldsymbol{x \mapsto f(x-a)+b}$en construisant l'image (C) par la **translation** de vecteur $\vec{w}\binom{a}{b}$.

  C'est-à-dire , si on pose $S(x) = f(x-a)+b$ alors $(C_S) = t_{\vec{w}}((C))$.

➢ Bijection (**important**)

  - Si f est une fonction continue et strictement monotone(croissante ou décroissante) de I dans $f(I)$ alors f réalise une bijection de I dans $f(I)$ et par suite l'équation $f(x) = \beta$ avec $\beta \in f(I)$ admet de façon unique une solution unique α dans I.
  - **<u>Théorème des valeurs intermédiaires(utilisé pour encadrer α)</u>** :

Soit I un intervalle et f une fonction continue sur I. Soit $a, b \in I$ tel que $a < b$. Si $f(a) \times f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet une solution dans $[a; b] ou\ ]a; b[$

Et si de plus, f réalise une bijection sur I alors cette solution est unique.

- Pour l'équation $\boldsymbol{f(x) = \beta}$ même procédure :
  - On calcule $f(a)$ et $f(b)$ et on vérifie si $f(a) < \beta < f(b)$ou $f(b) < \beta < f(a)$.

Si l'un des deux cas est vérifié alors l'équation $f(x) = \beta$ admet une solution dans $[a; b] ou\ ]a; b[$

Et si de plus, f réalise une bijection sur I alors cette solution est unique.

- **Théorème et inégalités des accroissements finis**
  - Théorème des accroissements finis

    Soit f une fonction continue sur un intervalle $\tilde{I} = [a; b]$ et dérivable sur $I =]a; b[$, alors $\exists\ c \in I$ tel que : $f(b) - f(a) = (b - a)f'(c)$.
  - <u>Inégalités des accroissements finis</u>(**important**)
    - P_1 : soit f une fonction dérivable sur K ouvert :
      Si $\exists\ M > 0$, tel que $\forall\ x \in K, |f'(x)| \leq M$ alors $\forall (a; b) \in K^2$ tel que $a < b, |f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$
    - P_2 : soit f une fonction dérivable sur K ouvert. soit $(a; b) \in K^2$ tel que $a < b$.
      Si $\exists (M, N) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall\ x \in [a; b], N \leq f'(x) \leq M$ alors

    $N(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a$

- <u>**ETUDES DES FONCTIONS USUELLES**</u>
- <u>**Fonctions Logarithme népérien**</u>
  - <u>**Définition**</u>

    On appelle fonction logarithme népérien notée ln, la primitive sur $]0; +\infty[$ prenant la valeur 0 en 1 de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$.
  - <u>**Conséquence**</u> :
    - $\ln 1 = 0$
    - $\ln x$ existe ssi $x \in]0; +\infty[$
  - <u>**Variation et conséquence**</u>

    Soit f la fonction définie par : $f(x) = \ln x$

$$\forall x \in]0;+\infty[,\ f'(x) = \frac{1}{x}$$

f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

- Signe de $f(x)$

$$\forall x \in]0;1[,\ \ln x < 0$$
$$\forall x \in]1;+\infty[,\ \ln x > 0$$

- Comme ln est continue sur $]0;+\infty[$(car dérivable) et strictement monotone(car strictement croissante) sur $]0;+\infty[$, alors elle réalise une bijection sur $]0;+\infty[$ et par suite $\forall(a;b) \in (\mathbb{R}*_+)^2, \ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$ et $\forall(a;b) \in (\mathbb{R}*_+)^2, \ln a \leq \ln b \Leftrightarrow a \leq b$.

- **<u>Propriété fondamentale</u>**:

  Pour tous réels a, b dans $\mathbb{R}*_+$:

$$\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$$

- **<u>Autres propriétés</u>** :

  $\forall(a;b) \in (\mathbb{R}*_+)^2$,on a :

$$\ln\frac{1}{a} = -\ln a$$
$$\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

  $\ln a^n = n \ln a$.

- Le nombre e

  L'équation $\ln x = 1$ admet une solution unique dans $\mathbb{R}*_+$, et cet réel est noté e et donné par $e \cong 2{,}7182818$ ...

  Ainsi $\ln e = 1$.

- <u>Limites</u>

$$\lim_{x\to+\infty} \ln x = +\infty \quad et \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

  $\lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} \ln x = -\infty \ \ et \ \ \lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} x \ln x = 0$.

- L'équation de la tangente au point d'abscisse 1 :

$$(T): y = x - 1$$

- <u>Dérivées</u>

  Soit U une fonction.

  Si U est dérivable et strictement sur un intervalle $I\ de\ \mathbb{R}$, la fonction $\ln U$ est dérivable sur Iet : $(\ln U(x))' = \frac{U\prime(x)}{U(x)}$.

- **<u>Observation</u>** :

  Si U est une fonction dérivable et non nul, $(\ln|U(x)|)' = \frac{U\prime(x)}{U(x)}$.

- <u>Limites usuelles :</u>

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{\alpha}} = 0 \quad et\ \lim_{\substack{x\to 0\\ >}} x^{\alpha}\ln x = 0 \quad (\alpha > 0)$$

$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-\ln 1}{x} = 1$; en général : $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(a+x)-\ln a}{x} = \frac{1}{a}$, $a \in \mathbb{R}^* +$.

- **Les primitives** :

  Si U est une fonction dérivable et non nulle alors la fonction : $x \mapsto \frac{U\prime(x)}{U(x)}$ admet pour primitive toute fonction $F/\ F(x) = \ln|U(x)| + k,\ \ k \in \mathbb{R}$.

- **Logarithme de base a** :
  - Définition :

    On appelle logarithme de base a, la fonction définie de $\mathbb{R}*_+$ dans $\mathbb{R}$, qui à tout x, on associe $\log_a x$ où $a \in \mathbb{R}*_+ - \{1\}$ telle que : $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$.

- **Logarithme décimal** :
  - Définition :

    On appelle logarithme décimal, la fonction *logarithme* de base 10.

$$\log_{10} x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

$\log_{10} x$ se note aussi $\log x$.

- **Fonction exponentielle de base e** :
  - Définition et conséquences
    - Définition

      On appelle fonction exponentielle de base e notée exp la bijection réciproque de la fonction logarithme népérien.
    - Conséquences immédiates :

      Comme la fonction ln est une bijection de $\mathbb{R}*_+$ dans $\mathbb{R}$, alors la fonction exp est définie de $\mathbb{R}$dans $\mathbb{R}*_+$.

      Ainsi :

      $\exp(x)$existe$\forall\ x \in \mathbb{R}$

$$\exp(x) > 0, \forall\ x \in \mathbb{R}$$
$$\exp(0) = 1\ \ car\ \ \ln 1 = 0$$
$$\exp(1) = e\ \ car\ \ \ln e = 1$$

  - **Représentation graphique , variations**
    - Représentation graphique

  La représentation graphique de la fonction exp est le symétrique par rapport à la 1ère bissectrice des axes de coordonnées de la courbe de la fonction logarithme népérien dans un repère orthonormal du plan.

- Variation
  Etant donnée qu'une bijection et sa bijection réciproque ont le même sens de variation alors la fonction exp (x) est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Elle est une bijection de $\mathbb{R}$dans $\mathbb{R}*_+$.

Propriétés :

$\forall x, y \in \mathbb{R}$:

$$P_1 : \exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$$

$$P_2 : \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$$

$$P_3 : \exp(xy) = (\exp(x))^y$$

D'où $\forall\, x \in \mathbb{R}, \exp(x) = e^x$

$$P_2 : \exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)}$$

Notation :

La fonction exponentielle est notée e c'est-à-dire $\forall\, x \in \mathbb{R}, \exp(x) = e^x$.

Equation et inéquation

- $e^x = e^y \Leftrightarrow x = y$
- $e^x = a$, $a \in \mathbb{R}$ n'a de solution que si $a > 0$ et si $a > 0$, $e^x = a \Leftrightarrow \ln e^x = \ln a \Leftrightarrow x = \ln a$.
- $e^x < e^y \Leftrightarrow x < y$

Dérivées-primitives-limites usuelles

- Dérivée
  - $\forall\, x \in \mathbb{R}, (e^x)' = e^x$
  - Soit U une fonction dérivable sur un intervalle $I \subseteq \mathbb{R}$, alors la fonction $x \mapsto e^{U(x)}$ est dérivable sur I et $\forall\, x \in I, \forall\, x \in \mathbb{R}, \left(e^{U(x)}\right)' = U'(x).e^{U(x)}$.
- Primitive
  Si U est dérivable alors, $x \mapsto U'(x).e^{U(x)}$ est continue et admet comme primitive toute fonction F définie par : $F(x) = e^{U(x)} + \mathrm{k}, \mathrm{k} \in \mathbb{R}$.

Limites usuelles

- $\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ car $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$
- $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$ car $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \ln x = -\infty$

- $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$
- $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$
- $\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x}$

- Exponentielle de base a
  - ✓ Définition

  On appelle fonction exponentielle de base $a, a \in \mathbb{R}*_+ - \{1\}$, la bijection réciproque de la fonction logarithme de base a notée $x \mapsto a^x$.
- Fonction puissance
  - ✓ Définition

    On appelle fonction puissance toute fonction notée f_α où $\alpha \in \mathbb{R}*_+$ définie par :

$$f_\alpha : \mathbb{R}*_+ \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto x^\alpha$$

- Croissances comparées $(x \to e^x; x \to x^\alpha ; x \to \ln x)$

$$\alpha > 0, \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0} x^\alpha \ln x = 0 \end{cases}$$

On dit que les fonctions puissances l'emportent (dominent) sur les fonctions logarithmes népériens.

$$\alpha > 0, \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x^\alpha e^x = 0 \end{cases}$$

On dit que les fonctions exponentielles l'emportent sur les fonctions puissances.

➢ **CALCUL INTEGRAL**

- Intégrale d'une fonction continue
  - Définition et notation

    Soit f une fonction continue sur un intervalle I, $(a; b)$ un couple d'élément de I. On appelle intégrale de f entre a et b le nombre réel $F(b) - F(a)$ où F est une primitive de $f$sur I. Elle est notée :

    $\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$, se lit intégrale de a à b de $f(x)$sur dx.

- Remarque :
  - Dans la notation $\int_a^b f(x)\,dx$, x peut être remplacé par $t, y, u, v, w\ etc$ (toute lettre).

  On dit que x est une variable muette.

  $a\ et\ b$sont des valeurs finies parlantes.
  - On peut aussi définir une fonction $h: x \to \int_a^x f(t)\,dt$ ou f est continue sur .
    Donc $\forall\ x \in I, h(x) = [F(t)]_a^x = F(x) - F(a)$où F est une primitive de $f\ sur\ I$.

    $$\forall\ x \in I, (h(x))' = (F(x))' - \big(F(a)\big)' = f(x) - 0 = f(x)$$

- Lien entre intégrale et primitive

  Soit f une fonction continue sur un intervalle Iet $a \in I$.

  L'unique primitive de f sur I prenant la valeur 0 $en\ a$ est la fonction F définie par, $\forall\ x \in I, F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$.

- Intégrale et Aire
  - Définition : l'aire d'un domaine

    Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a; b](a < b)$.

    Soit D le domaine plan défini par :

    $$D = \begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

    $$D = \{M(x; y)/a \leq x \leq b\ et\ 0 \leq y \leq f(x)\}$$

    (espace pour une figure)

    L'aire du domaine D est

    $A_D = \int_a^b f(x)dx\ u.a$ où $u.a$ = unité d'aire par définition.
  - NB :

De façon générale lorsque f garde le même signe sur un intervalle $[a; b]$, l'aire du domaine D delimité par la courbe de f, les droites d'équations $x = a; x = b$, la courbe de f et la droite d'équation $y = 0$ est :

$$A_D = \int_a^b |f(x)|dx\, u.a = \left|\int_a^b f(x)dx\right| u.a$$

- Remarque :

Si $f(x) \leq 0$ sur $[a; b]$, $|f(x)| =$

$-f(x) sur\ [a; b]$

Si de plus f est continue sur $[a; b]$ alors :

$A_D = -\int_a^b f(x)dx\, u.a$.

- Si f est telle que $f(x) = u(x) - v(x)$. f étant continue sur $[a; b]$. C_u la courbe de u et C_v celle de v.

(espace pour la courbe)

Soit $D_1 = \begin{cases} a \leq x \leq c \\ 0 \leq v(x) \leq y \leq u(x) \end{cases}$

$A_{D_1} = \int_a^c (u(x) - v(x))\, u.a$et

$D_1 = \begin{cases} c \leq x \leq b \\ 0 \leq u(x) \leq y \leq v(x) \end{cases}$

$A_{D_2} = \int_c^b (v(x) - u(x))\, u.a$alors

$A_D = A_{D_1} \cup A_{D_2} = A_{D_1} + A_{D_2}$

- Interprétation graphique de l'intégrale

Si f est une fonction continue et positive sur $[a; b](a < b)$ alors $\int_a^b f(x)dx$ est interprété dans le plan comme étant en unités d'aire l'aire du domaine plan délimité par les droites d'équations $x = a; x = b$, la courbe de f et la droite d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses).

- Propriétés de l'intégrale

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a;b](a < b)$

P_1: $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$

$$P_2: \forall\alpha \in \mathbb{R}, \int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha\int_a^b f(x)\,dx$$

P_3: $\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$

P_2 et P_3 traduisent la linéarité de l'intégrale.

P_4 Soit $c \in [a;b]$, $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

C'est la relation de Chasles.

P_5 : si $\forall x \in [a;b], f(x) \geq 0$ $alors$ $\int_a^b f(x)\,dx \geq 0.$

P_6 : $\forall x \in [a\,;b], f(x) \leq g(x)$ $alors$ $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$

- ✓ Inégalité de la moyenne

Soit f une fonction continue sur $[a;b](a < b)$. S'il existe $(m;M) \in \mathbb{R}^2$ tels que $m \leq f(x) \leq M$ alors

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$$

Autrement , $b - a > 0$

$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M$ est appelé inégalité de la moyenne. De même si $|f(x)| \leq M$ $(M > 0)$ alors

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq M|b-a|$$

- Valeur moyenne d'une fonction

- o Définition

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b](a < b)$. On appelle valeur moyenne de f sur $[a;b]$ le nombre réel M_f donnée par : $M_f = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$

- Techniques de calcul intégrale
  - Lecture inverse des formules de dérivation (les formules sur les primitives)
  - Utilisation de la parité
    a) Intégrale d'une fonction continue et paire sur $[-a; a], a > 0$:
    $\int_{-a}^{a} f(t)\, dt = 2\int_{0}^{a} f(t)dt$.
    b) Intégrale d'une fonction continue et impaire sur $[-a; a], a > 0$:
    $$\int_{-a}^{a} f(t)\, dt = 0$$
  - Intégrale d'une fonction continue et

périodique

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$, périodique de période P alors $\int_{a}^{a+P} f(t)dt = \int_{0}^{P} f(t)dt$
  - Intégrale des fonctions trigonométriques
    Pour les fonctions $x \mapsto (\cos x)^n \ ou\ x \mapsto (\sin x)^n$, on la linéarise.
- Intégration par parties
  Soit $I = [a; b] \subseteq \mathbb{R}$ et soient $u\ et\ v$ deux fonctions dérivables sur $I\ et\ (u.v)' = u'.v + v'.u$
  Si de plus, $u, v, u'et\ v'$ sont dérivables sur I, on aura :
  $u.v' = (u.v)' - u'.v \Leftrightarrow \int_{a}^{b} u(x).v'(x)\, dx = \int_{a}^{b}(u(x).v(x))'dx - \int_{a}^{b} u'(x).v(x)\, dx.$
  $$\int_{a}^{b} u(x).v'(x)dx$$
  $$= [u(x).v(x)]_{a}^{b} - \int_{a}^{b} u'(x).v(x)dx \; *$$
  Cette formule (*) est la formule de l'intégration par parties.
  - Méthodes pratiques de l'intégration par parties $\int_{a}^{b} f(x)g(x)dx$

- Si $f(x) = x^n \ et \ g(x) = \sin ax \ ou \ \cos ax$ alors on pose $\begin{cases} u(x) = f(x) \\ v'(x) = g(x) \end{cases}$
- Si $f(x) = x^n \ et \ g(x) = e^x$ Alors on pose $\begin{cases} u(x) = f(x) \\ v'(x) = g(x) \end{cases}$
- Si $f(x) = x^n \ et \ g(x) = \ln x$ alors on pose

$$\begin{cases} u(x) = g(x) \\ v'(x) = f(x) \end{cases}$$

- Pour la double intégration par parties, on effectue l'intégration par parties de fois de suite.
  - Pour le cas $e^{bx} \sin ax \ \ ou \ e^{bx} \cos ax$, on pose :

$$\begin{cases} u(x) = e^{bx} \\ v'(x) = \sin ax \end{cases} \ ou \ \begin{cases} u(x) = \sin ax \\ v'(x) = e^{bx} \end{cases}$$

- Volume de révolution
  - Volume de révolution

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \ \vec{\jmath}, \vec{k})$. f une fonction dans le plan $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère le domaine $D = \{M(x; y) / \ a \leq x \leq b \ ; 0 \leq y \leq f(x)\}$ défini voir figure.

La rotation de D autour de l'axe (Ox) engendre un solide révolutionnaire de volume V.

$x \mapsto (f(x))^2$est continue donc intégrale entre a et $b(a < b)$ le volume V est : $V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx. u. v$ avec

$$u. v = ||\vec{\imath}||. ||\vec{\jmath}||. \|\vec{k}\| = (u. l)^3$$

EXERCICE 1:

Dans chacun des cas suivants :

a) Déterminer D_f l'ensemble de définition de f.
b) Calculer les limites de f aux bornes de D_f.
c) En déduire l'existence d'asymptotes à la courbe de f, parallèles aux axes des coordonnées, et indiquer leurs équations.

1. $f(x) = \frac{-3x+2}{2x-3}$ 2. $f(x) = \frac{4x^2-2x-1}{x^2-x-12}$ 3. $f(x) = \frac{2x^3-3x}{x^3-x^2}$ 4. $f(x) = \frac{x^2-x+3}{x^2+x+1}$

EXERCICE 2:

Soit les fonctions f et g définies respectivement par :

$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}-\{2\}\ f(x) = \frac{x^2-4}{x-2} \\ f(2) = 4 \end{cases}$; $\begin{cases} \forall x \in]-\infty\,;2[\quad g(x) = x-1 \\ \forall x \in [2;+\infty[\quad g(x) = 2 \end{cases}$

Etudier la continuité de f et g en 2.

EXERCICE 3:

Etudier la dérivabilité f en a dans chacun des cas suivants :

a. $f(x) = x^2 + 1 \qquad a = 1$
b. $f(x) = |x| \quad a = 0$
c. $\begin{cases} f(x) = 2x + 1 \ \ si\ \ x \leq 0 \\ f(x) = x^2 + 1 \ \ si\ \ x \geq 0 \end{cases} a = 0$
d. $\sqrt{x-2} \qquad a = 2$

EXERCICE 4:

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = x^2 - 1, si\ x \leq 1 \\ f(x) = \frac{x-1}{x+1},\ si\ x > 1 \end{cases}$

1. Démontrer que f est continue en 1.
2. Etudier la dérivabilité de f en 1.
3. Interpréter graphiquement le résultat.

EXERCICE 5:

On considère la fonction φ définie par $\varphi(x) = \frac{x^3}{x^2-x-2}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction φ.
2) Montrer que le point Ω (2 ; 3) est un centre de symétrie pour la courbe représentative deφ.
3) Justifier que la droite (D) d'équation $y = x + 1$ est asymptote oblique à la courbe de φ à l'infini.

Problèmes :

PROBLEME 1 :

1. On considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = -\frac{1}{2}x + 1 + \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}$

   On désigne par $\boldsymbol{(C_f)}$ la représentation graphique de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

a. Calculer les limites de f en $+\infty$ $et - \infty$.

b. Etudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

2. Montrer que les droites (D) et (D') d'équations respectives $y = 1$ et $y = -x + 1$ sont asymptotes à $\boldsymbol{(C_f)}$.
3. Construire $\boldsymbol{(C_f)}$.
4. a. Montrer que f est une bijection de □ sur un ensemble K que l'on précisera.

   b. Donner les caractéristiques de la bijection réciproque f^{-1} de f.

   c. Calculer $f(0)$ et en déduire $(f^{-1})'(\frac{3}{2})$

   d. Représenter graphiquement f^{-1}

PROBLEME 2 :

Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}$ vers $[0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$

1. Trouver l'intervalle J tel que : $J = f([0; +\infty[)$.
2. Montrer que f est une bijection de $[0; +\infty[$ sur J.
3. a. Étudier le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

   b. Représenter graphiquement (C_f) la courbe de f dans le plan muni d'un repère orthonormé.

4. sans expliciter l'application réciproque f^{-1}

   a. Représenter graphiquement $(C_{f^{-1}})$ la courbe de f^{-1}.

   b. Calculer $(f^{-1})'(\frac{3}{4})$.

PROBLEME 3 :

Soit h la fonction définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par $h(x) = \frac{|x^2+x|+1}{|x|+1}$. Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (o ;$\vec{i}$;$\vec{j}$).

1) Déterminer le domaine de définition de h.
2) Ecrire h(x) sans le symbole de la valeur absolue.
3) Calculer les limites aux bornes du domaine de définition de h.
4) Etudier la dérivabilité de h en 0 et en -1.
5) a)Montrer que la droite (D_1) d'équation y=x est asymptote à (C) en$+\infty$.

   Etudier la position de (D_1) par rapport à (C).

   b) Montrer que la droite (D_2) d'équation y=-x-2 est asymptote à (C) en -∞.

   Etudier la position de (C) par rapport à (D_2).

6) Etudier les variations de h puis dresser le tableau de variation de h.

7) Tracer (C), (D_1), (D_2) et les demi-tangentes dans un repère orthonormé.

PROBLEME 4 :

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{2x^2-x-1}{x^2+x+1}$. On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (o ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$) unité graphique 1 cm.

1) Quel est l'ensemble de définition D de la fonction f.
2) Calculer les limites de f aux bornes de D. en déduire que (C) admet une asymptote (Δ) et étudier la position de (C) par rapport à (Δ).
3) Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
4) Déterminer les points d'intersection de (C) avec les axes du repère.
5) Construire la courbe (C) ainsi que l'asymptote (Δ).
6) Déterminer graphiquement suivants les valeurs du réel m, le nombre de solution de l'équation $(2-m)x^2-(1+m)x-1+m = 0$.

PROBLEME 5 :

Le plan est muni d'un repère orthonormé (o ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$). On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{-x}{2x+1} & si\ x \geq 0 \\ f(x) = -x + \sqrt{x^2-x} & si\ x < 0 \end{cases}$

1) a. Étudier la continuité de f en 0.

Étudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter le résultat graphiquement.

2) calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) + 2x - \frac{1}{2}$. Interpréter les résultats graphiquement.

3) a)Montrer que, pour tout > 0; $f'(x) = \frac{-1}{(2x+1)^2}$.

b) Montrer que, pour tout $x < 0$; $f'(x) = -1 + \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x}}$, déduire le signe$f'(x)$ sur $]-\infty; 0[$

c)Dresser le tableau de variation de f.

4) Montrer que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution $\alpha \epsilon]-\infty; 0[$.

5) Tracer (C_f) dans le repère (o ;$\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).

6) Montrer que pour tout $x \in [-2; -1]$ on a $|f'(x)| \leq 1$.

PROBLEME 6:

Le plan est muni d'un repère orthonormé (o ; $\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$). On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = (3-x)\sqrt{x} & si\ x \geq 0 \\ f(x) = x - 1 + \frac{1}{x+1} & si\ x < 0 \end{cases}$

On désigne par (C) la courbe représentative de f.(unité 2 cm).

A /1.a) Etudier la continuité de f en 0.

b) Etudier la dérivabilité de f en 0. Quelle interprétation géométrique peut-on en tirer ?

c)Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.

2.a) Montrer que la droite (Δ) d'équation : $y = x - 1$ est asymptote à (C) en $-\infty$. Préciser la position de (C) par rapport à (Δ) pour $x < 0$.

b) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \epsilon]2; 4[$ puis déterminer α.

3.a) Ecrire une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 3.

b) Construire la courbe (C), la tangente (T) et la droite (Δ).

B /1.Soit g la restriction de f à l'intervalle $]-\infty; -2[$

a)Montrer que g réalise une bijection de $]-\infty; -2[$ sur un intervalle que l'on déterminera.

b) Tracer la courbe (Γ) de la bijection réciproque g^{-1} de g dans le même repère que (C). On

Justifiera la construction .

c)On considère la fonction h définie par $h(x) = -|f(x)|$

Sans étudier les variations de h représenter graphiquement h dans le même repère que (C).

On justifiera la construction. On notera (C') la courbe représentative de h.

2. On considère la fonction K définie par : $K(x) = f(|x|)$ et (Ψ) la courbe de K dans le plan.

a) Etudier la parité de K.

b) Tracer la courbe (Ψ) de K dans le plan avec soin.

PROBLEME 7 :

A. soit g la fonction définie $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} - 1\right)$.
   1. Calculer les limites de g aux bornes de son ensemble de définition.
   2. Etudier les variations de g sur $\mathbb{R}$, puis dresser son tableau de variation.
   3. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) < 0$.

B. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par$f(x) = -\frac{x}{2} + 1 + \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 1}$. (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé (O, I, J) unité 2 cm.
   1. Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ (interpréter le résultat) et $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.
   2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = g(x)$.
   3. Déterminer le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.
   4. a)Montrer que (C) admet une asymptote oblique (D) :$y = -x + 1$à $-\infty$.
      b)Etudier les positions relatives de (C) par rapport à (D).

5. Ecrire une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.
6. Tracer (D), (T), l'autre asymptote et (C).
7. a)Montrer que f détermine une bijection de $\mathbb{R}$ dans un intervalle K à préciser.

b) Sans expliciter f^{-1} , donner le sens de variation de f^{-1} puis dresser son tableau de Variation.

d) Calculer$(f^{-1})'(\frac{3}{2})$.

e) Expliciter f^{-1} puis $(f^{-1})'\left(\frac{3}{2}\right)$.

f) Représenter (C') la courbe de f^{-1} dans le même repère.

PROBLEME 8:

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x + 2 + \dfrac{4}{x-3} & si\ x \leq 2 \\ f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2} & si\ x > 2 \end{cases}$$

On désigne par (C) la courbe de f dans un repère orthonormal (O, I, J) unité : 2 cm.

1)a)Etudier la continuité de f en 2.

b) Etudier la dérivabilité de f en 2 puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2) Calculer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

3)a)Montrer que la droite (D_1) d'équation $y = x + 2$ est asymptote à (C) en $-\infty$.Préciser la position relative de (C) et de (D_1).

b) Montrer que la droite (D_2) d'équation $y = x - \frac{3}{2}$ est asymptote à (C) en $+\infty$.Préciser la position de (C) et de (D_2).

4)a)Etudier les variations de f sur $]-\infty; 2]$ et sur$]2; +\infty[$.

b) Dresser le tableau de variation de f

5) Tracer (D_1) (D_2) et (C).

6) a) Soit h, la restriction de f à l'intervalle $]-\infty; 1]$.Montrer que h réalise une bijection de $]-\infty; 1]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Construire la courbe (Γ) de h^{-1} dans le même repère que (C).

c)Construire la courbe de $|f(x)|$ dans le même repère que (C). On la notera (C_1).

Fonctions trigonométriques

EXERCICE 1 :

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \cos(4x) + 2\sin(2x)$.

1. Justifier le choix de l'intervalle $I = [0;\pi]$ comme intervalle d'étude.
2. Démontrer que $\forall\, x \in \mathbb{R}, g'(x) = 4\cos(2x)(1-2\sin(2x))$.
   Résoudre dans$I$, l'équation $g'(x) = 0$ puis étudié les variations de g. Dresser le tableau de variation de g.
3. Démontrer que la courbe de g admet pour axe de symétrie la droite (D) d'équation $= \frac{\pi}{4}$.
4. Tracer la courbe de g dans un plan muni d'un repère orthogonal.

<u>EXERCICE 2</u> :

Soit $f(x) = \cos(3x)\ (\cos x)^3$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

1. Montrer que f est périodique de période π et étudier la parité de f. en déduire que l'on peut étudier f sur$D_E = \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.
2. Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation sur$\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$.
3. Construire (C) sur$\left[\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

<u>EXERCICE 3</u> :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal.

(O ;$\vec{\imath}\,;\vec{\jmath}$).(unité 2 cm)

1. Justifier pourquoi on peut choisir $[0\ ;\ \pi]$ pour étudier f.
2. Etudier les variations de f sur $[0\ ;\ \pi]$ et dresser son tableau de variation sur $[0\ ;\ \pi]$.
   (On rappelle quecos p +cos $q = 2\cos(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2})$)
3. Etudier f et la représenter sur $[-\pi\ ;\ \pi]$.

<u>EXERCICE 4</u>

On désigne par f la fonction définie par : $f(x) = \frac{\sin x}{\sin x+\cos x}$

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :$\sin x + \cos x = 0$. En déduire l'ensemble de définition de f.
2. Montrer que f admet pour période π.On appelle (C_f) la représentation graphique dans un repère $(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ de la restriction de f à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right[$. Montrer que (C_f) admet le point A de coordonnées $(\frac{\pi}{4};\frac{1}{2})$ pour centre de symétrie.
3. Faire l'étude de f sur $\left]-\frac{\pi}{4};\frac{3\pi}{4}\right[$ et tracer (C_f), ainsi que la tangente à (C_f) en A.

<u>EXERCICE 6</u>

Soit f la fonction définie de $\mathbb{R}$ par $f(x) = \cos(2x) - 2\cos(x) + 1$

1) Justifier pourquoi il est suffisant d'étudier $f \ \ sur\ I = [0;\ \pi]$.
2) .a) Calculer $f'(x)$ puis résoudre dans $[0;\ \pi]$ l'inéquation $f'(x) > 0$
   b) Déduisez-en le signe de $f'(x)$ puis dresser le tableau de variation de $f$sur I.
   3) on veut tracer la courbe représentative (Γ) de f avec précision.
   a) Résoudre l'équation $f(x) = 0$dans I.
   Quels sont les points communs à la courbe (Γ) restreinte à $[-\pi;\ \pi]$ et à l'axe des abscisses ?
   Préciser les coefficients directeurs des tangentes à (Γ) en chacun de ces points.
   b) Tracer la courbe (Γ) restreinte à $[-\pi;\ \pi]$. compléter pour obtenir la courbe sur $[-3\pi;\ 3\pi]$.

EXERCICE 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = (\sin x)^2 + \cos x$.

1. En étudiant la périodicité et la parité de la fonction f, justifier le choix de l'intervalle $I = [0; \pi]$ comme intervalle d'étude.
2. Etudier les variations de $f$sur I.
   Tracer la courbe représentative de la restriction de fà $[-\pi; \pi]$.
3. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$a ,dans$I$, une unique solution α.

EXERCICE 8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = \frac{1}{3}\sin(3x) - \sin x$.

1. Justifier le choix de l'intervalle $[0; \pi]$ comme intervalle d'étude.
2. Démontrer que, pour tout nombre réel x : $f'(x) = -4(\sin x)^2 \cos x$.
   Déduisez-en le tableau de variations de f. Tracez la courbe (C_f) représentative de la fonction f dans un plan muni d'un repère orthogonal.

EXERCICE 9

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{3}\cos 3x$$

1. Justifier le choix de l'intervalle $[0; \pi]$ comme intervalle d'étude.
2. Démontrer que, quel que soit x réel :
   $f'(x) = -\sin 2x\,(1 + 2\cos x)$. Résolvez dans $[0; \pi]$, l'équation $f'(x) = 0$.

Déduisez-en le tableau de variations de f, pour tout x élément de $[0; \pi]$.

3. Construire la représentation de la restriction de fà $[-\pi; \pi]$.

Primitives & Intégral

Exercice 1 :

1. Déterminer des primitives sur $\mathbb{R}$ des fonctions suivantes :
   $f: x \mapsto 0$; $g: x \mapsto x^2$; $h: x \mapsto -3x^2$; $j: x \mapsto 8x^3 - 2x^2$; $k: x \mapsto -7$
2. Déterminer toutes les primitives sur $]0\,;+\infty[$ de chacune des fonctions suivantes: $f: x \mapsto \frac{3}{x^2} + \frac{1}{3}x^2$; $g: x \mapsto \frac{2}{\sqrt{x}} - x\sqrt{2}$;$h: x \mapsto \frac{12}{x^2}$
3. Déterminer deux primitives sur $]0\,;+\infty[$ de la fonction :
   $$k: x \mapsto \frac{3x^3 + 2x^2 + 1}{x^2}$$
   Déterminer deux primitives sur $\mathbb{R}$ de $f: x \mapsto 5(4x-1)^6$ et deux primitives sur $]1;+\infty[$de $g: x \mapsto \frac{7}{(3x+2)^5}$.

4. Déterminer une primitive sur $]-1;+\infty[$ de $f: x \mapsto \frac{1}{\sqrt{3x+5}}$, et une primitive sur $]2;+\infty[$ de$g: x \mapsto \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x-8}}$.
5. Déterminer une primitive de f :
   a.$f(x) = 2x(x^2+3)^4$ b. $f(x) = 18(3x-2)^5$c. $f(x) = (x+1)(x-3)^4$
   d. $f(x) = 3(3x^2-6)(x^3-6x)^2$ e. $f(x) = (x-3)^{\frac{2}{3}}$g. $f(x) = \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$
   h. $f(x) = \frac{3x+1}{x^3}$ i. $f(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2}$ j. $f(x) = \frac{\frac{3}{2}x^2+1}{(x^3+2x)^3}$ k. $f(x) = \sqrt{3-2x}$
   l. $f(x) = (x-1)\sqrt{x^2-2x-3}$ o. $f(x) = x\sqrt{(x^2-1)^5}$ p. $f(x) = \frac{-4x+6}{\sqrt{-x^2+3x+1}}$
   q. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1-x}}$ r. $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{(x^3-1)^3}}$ s. $f(x) = cos^3(x)$ t. $f(x) = sin^4(x)$

Exercice 2 :

Déterminer la primitive F de la fonction f vérifiant la condition indiquée :

1. $f(x) = x^3 - x^2 - 1$ $\quad I = \mathbb{R}\ et\ \ F(0) = 7$
2. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}$ $\quad I =]0;+\infty[\ et\ F(1) = 0$
3. $f(x) = (2x-3)(x^2-3x-6)^2$ $\quad I = \mathbb{R}\ et\ F(-1) = 9$
4. $f(x) = \frac{3x}{(x^2+1)^2}$ $\quad I = \mathbb{R}\ et\ \ F\left(\sqrt{2}\right) = -2$
5. $f(x) = x^3 - x^2 - 1$ $\quad I = \mathbb{R}\ et\ \ F(0) = 7$
6. $f(x) = \frac{3}{(3-x)^3}$ $\quad I =]-\infty;3[\ et\ F(0) = 0$
7. $f(x) = \frac{x-3}{\sqrt{x^2-6x+5}}$ $\quad I =]-\infty;1[\ et\ F(0) = \sqrt{5}$
8. $f(x) = \sin(3x + \frac{\pi}{2})$ $\quad I = \mathbb{R}\ et\ F(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{6}$
9. $f(x) = \sin x\, cos^4(x)$ $\quad I = \mathbb{R}\ \ et\ F(\pi) = 0$

10. $f(x) = \frac{\sin x}{cos^3(x)}$ $I = \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$ et $F(\frac{\pi}{3}) = 7$
11. $f(x) = \frac{\sin x - x\cos x}{x^2}$ $I =]0; +\infty[$ et $F(\frac{\pi}{4}) = 1$

Exercice 3 :

1. Soit g la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x\sqrt{x}$.

Calculer la dérivée de sur $]0; +\infty[$.

2. soit f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \sqrt{x}$.
   En déduire de la première question une primitive de f sur $]0; +\infty[$.

Exercice 4 :

Soit f la fonction définie sur $]-3; +\infty[$ par $f(x) = \frac{x}{x+3}$ et F la primitive de f sur $]-3; +\infty[$ qui s'annule en zéro.

1. Etudier les variations de la fonction F sur $]-3; +\infty[$.
2. Etudier le signe $F(x)$sur $]-3; +\infty[$.
3. Soit g la fonction définie sur $]-3; +\infty[g(x) = F(x) - x$.
   a) Démontrer que g est décroissante sur $]-3; +\infty[$.
   b) En déduire que : si$x > 0$, alors $F(x) < x$.

Exercice 5:

Soit $f(x) = \frac{3x^3-7x^2+5x+1}{(x-1)^2}$ sur $]1; +\infty[$

1. Déterminer a, b et c réels tels que $f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-1)^2}$.
2. En déduire une primitive de f sur $]1; +\infty[$

Exercice 6 :

Soit $g(x) = (x + 2)\sqrt{x + 2}$ sur$]-2; +\infty[$.

1. Calculer $g'(x)$.
2. En déduire une primitive de $f(x) = \sqrt{x + 2}$ sur$]-2; +\infty[$.

Exercice7 On pose $I =]0; +\infty[$.

Pour tout entier naturel n, on désigne par f_n la fonction définie Ipar $x \mapsto x^n\sqrt{x}$.

1) a. Montrer que f_1 et f_2 sont dérivables sur I.
   b. Calculer $f'_1(x) et\ f'_2(x)$.
   c. Déduire de 1) une primitive sur I :
   $x \mapsto \sqrt{x}$et $x \mapsto x\sqrt{x}$.
   d. a. Calculer $f'_{n+1}(x)$.
   a. Déduisez-en une primitive de $f_n$sur I.

Exercice8

Déterminer les intervalles de $\mathbb{R}$ sur lesquels la fonction f admet des primitives , et déterminer les primitives de f sur chacun de ces intervalles.

a. $f(x) = \frac{-3x}{\sqrt{x^2+9}}$; $b. f(x) = \frac{1}{(2x+1)\sqrt{2x+1}}$; $c. f(x) = \frac{\sin 2x}{\sqrt{(\sin x)^2+1}}$

Exercice9

On considère $I =]2; +\infty[$ et f définie I par : $f(x) = \frac{x^2-4x+2}{(x-2)^2}$.

1) Déterminer les nombres a et b tels que :
   $f(x) = a + \frac{b}{(x-2)^2}$, pour tout $x$dans I.
2) Déduisez- en l'ensemble des primitives de f sur I.

Exercice10

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + 1$

1) Déterminer les primitives de f sur $\mathbb{R}$.
2) Déterminer la primitive dont la courbe représentative admet pour asymptote en $+\infty$ la droite d'équation $y = 2x + 1$.

Exercice 11

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}*_+$ par $f(x) = x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}$

Déterminer la primitive de f sur $\mathbb{R}*_+$ dont la courbe représentative admet au point d'abscisse 1 une tangente passant par le point $A(2; 3)$.

Exercice12

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$-{1} par : $f(x) = \frac{2x+3}{(x-1)^3}$

1) Déterminer deux réels a et b tels que : $f(x) = \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{(x-1)^3}$
2) En déduire une primitive de f sur $]1; +\infty[$.

Exercice13 Soit les fonctions F et G définies par : $F(x) = \sqrt{x^2-1}$ et $G(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}$ sur $I =]1; +\infty[$.

1) Calculer les fonctions dérivées $F'et$ $G'sur$ I.
2) Que peut-on en déduire pour les fonctions F et G ?

Exercice14 : Calculer les intégrales suivants :

a.$\int_0^3 (x^3 - x^2 - 1)dx$ b.$\int_0^3 (x + 4)dx$ c. $\int_{-1}^1 (2x^2 - 1)dx$ d.$\int_0^1 x(x^2 - 3)^7$

e.$\int_{\frac{1}{2}}^2 (2x - 1 + \frac{1}{x^2})dx$ f.$\int_0^1 (2x + 3)(x^2 + 3x - 5)dx$ g.$\int_2^1 (\frac{1}{x^6})\, dx$

h.$\int_1^2 (\frac{3}{\sqrt{x}})dx$ i.$\int_2^3 \frac{1}{(1-x)^3} dx$ j.$\int_0^2 (\frac{x}{\sqrt{x^2+1}})dx$ k.$\int_2^3 \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2} dx$ l.$\int_1^2 (\frac{3-x}{x^2-6x+1})dx$

m. $\int_1^2 \left(\frac{1}{x^2}\right) e^{\frac{1}{x}}.dx$ n. $\int_{-1}^0 \left(\frac{e^x}{e^x+2}\right).dx$p.$\int_0^{\frac{\pi}{3}} cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right).dx$ q.$\int_0^{\pi} sin^2x\, dx$

r.$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)^2$ s.$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos x} dx$t.$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{(1+\cos x)^3} dx$

Exercice 3

Soit $f(x) = x\sin x$

1. Calculer $f'(x)$
2. En déduire valeurs de :
   a. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x + x\cos x)dx$
   b. $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(x\cos x)dx$

Exercice 4

Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties :

a. $\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$ b. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\,dx$ c. $\int_1^2 x\ln x\,dx$ d. $\int_1^2 \ln x\,dx$ e. $\int_1^2 xe^{2x}dx$
f. $\int_0^1 (2x+1)e^x dx$ g. $\int_3^5 (x^3+1)\ln x\,dx$ h. $\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2}dx$ i. $\int_1^2 x\sqrt{1-x}\,dx$
j. $\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx$

Exercice 5

Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une de deux intégrations par parties :

a. $\int_0^{\pi} x^2\sin x\,dx$ b. $\int_0^1 (x+1)^2e^x dx$ c. $\int_0^{\pi} e^x\sin x\,dx$ d. $\int_{-\pi}^0 x^2\sin x\,dx$
e. $\int_{-\pi}^0 e^{2x}\sin x\,dx$ f. $\int_0^1 (x+1)^2e^{-x}dx$ g. $\int_0^1 x^2\sqrt{1-x}\,dx$

Exercice 6

1. Soit l'intégrale $K = \int_0^{\pi} e^x\cos 2x\,dx$
   A l'aide de deux intégrations par parties, montrer que : $K = \frac{e^{\pi}-1}{5}$
2. Soit $A = \int_0^{\pi} e^x cos^2 x dx$ et $B = \int_0^{\pi} e^x sin^2 x dx$.
   a. Calculer $A + B$ et $A - B$
   b. En déduire les valeurs de A et B.

Exercice 7

L'objectif de cet exercice est de calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}dx \;;\; J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx \quad et \quad K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}\,dx$$

1. Calculer .
   Soit la fonction f définie sur $[0;1]$ par $f(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+2})$
   a. Calculer la dérivée de la fonction $x \to \sqrt{x^2+2}$
   b. En déduire la dérivée f' de f.
   c. Calculer la valeur de I.
2. Calcule de J et de K.
   a. Vérifier que : $2I + J = K$.
   b. A l'aide d'une intégration par parties portant sur l'intégrale K, démontrer que : $K = \sqrt{3} - J$
   c. En déduire les valeurs de J et de K.

Exercice 8 :

1. Calculer les intégrales suivantes : $I_1 = \int_1^e x(\ln x)dx \quad et \quad I_2 = \int_1^e x(\ln x)^2$
2. Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n dx$.

   Démontrer , pour tout entier $n \geq 2$, $I_n = \frac{e^2}{2} - \frac{nI_{n-1}}{2}$.
3. Calculer I_4.

<u>FICHE D'EXERCICES n°5</u> : Fonctions Ln et Expo

<u>EXERCICE 1</u> :

a. Exprimer, en fonction de $\ln 2$ et $\ln 3$:

A= $\ln 36$; B= $\ln\frac{9}{8}$; C= $\ln\frac{2}{27}$; D= $\ln\sqrt{6}$.

b. Simplifier :

E= $\ln(\sqrt{3}+1) + \ln(\sqrt{3}-1)$; F =$\ln(\sqrt{5}+1) - \ln(\sqrt{5}-1)$

<u>EXERCICE 2</u> :

Déterminer Df puis calculer $f'(x)$ la dérivée de $f(x)$:

1. $f(x) = \ln(2x+5)$ 2. $f(x) = \ln(-3x+4)$ 3. $f(x) = \ln|x^2+x-2|$
2. 4. $f(x) = x\ln(x)$ 5. $f(x) = \ln(-x)$ 6. $f(x) = \ln(\frac{x+1}{x-1})$ 7. $f(x) = \ln(\sqrt{x})$
3. 8. $f(x) = \ln(\frac{1}{x^2})$ 9. $f(x) = \frac{1+\ln x}{1-\ln x}$ 10. $f(x) = \frac{1}{\ln(1-x)}$

<u>EXERCICE 3</u> :

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to+\infty}\frac{1+\ln x}{2-\ln x}$ 2. $\lim_{x\to 0} x^3\ln x$ 3. $\lim_{x\to 1}\ln(1-x)$ 4. $\lim_{x\to+\infty} x-\ln x$

5. $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x-1}$ 6. $\lim_{x\to-\infty}\ln(1+x^2)$ 7. $\lim_{x\to+\infty}\ln(1+\frac{1}{x^2})$ 8. $\lim_{x\to-\infty}\ln(\frac{2x+3}{x+1})$

9. $\lim_{x\to+\infty}\ln(\ln x)$ 10. $\lim_{x\to 1}\ln(\ln x)$ 11. $\lim_{x\to+\infty} x\ln(1+\frac{1}{x})$ 12. $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

13. $\lim_{x\to+\infty}(1-x)\ln(1-x)$ 14. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\ln(\cos x)$ 15. $\lim_{x\to-3}\ln(x^2+x+1)$

<u>EXERCICE 4</u> :

A) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1.$(x-2)\ln(x-2) = 0$ 2. $\ln(x^2-x-1) = 0$ 3. $\ln(x+3) + \ln(x+5) = \ln 15$
4.$\ln(x-2) + \ln(x+2) = \ln(5x-4)$ 5. $\ln|x+1| + \ln|x+5| = \ln 15$ 6. $\ln|2x-5| - \ln|3x+2| = \ln|x+1|$ 7. $\ln(-x-2) = \ln\frac{-x-11}{x+3}$ 8.$3(\ln x)^2 - 5\ln x + 2 = 0$
9.$2(\ln(x+1))^3 - 9(\ln(x+1))^2 - 2\ln(x+1) + 9 = 0$ 10.$\ln(2-3x) \geq 0$
11.$\ln(2-x) + \ln(x+4) > ln(3x+2)$ 12.$|\ln x| \leq 2$ 13.$\ln(x+2) \leq \ln(x^2-4)$
14.$(1-\ln x)(2+\ln x) \geq 0$ 15.$\frac{-2+\ln x}{1+\ln x} \leq 0$16 .$\frac{1+\ln x}{1-\ln x} > \frac{1-\ln x}{1+\ln x}$

B) Résoudre les systèmes suivants :

1. $\begin{cases} x + y = 25 \\ \ln x + \ln y = 2\ln 12 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} \ln x + 3\ln y = 1 \\ 3\ln x - 2\ln y = \frac{20}{3} \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x^2 - y^2 = 700 \\ \ln x - \ln y = 2\ln\frac{4}{3} \end{cases}$

EXERCICE 5 :

a. Exprimer plus simplement possible les expressions suivantes :
A=$e^{2\ln 5}$; $B = 3\ln(\ln e) + e^{\ln 3}$C=$(e^x + 1).(e^x - 1)$; $D = e^{2x} \times e^{1-2x}$; $E = \frac{e^{2x}}{e^x}$

b. Vérifier les égalités suivantes :
A. $(\frac{e^x+e^{-x}}{2})^2 - \left(\frac{e^x-e^{-x}}{2}\right)^2 = 1$; $B. \frac{e^x-1}{e^x+1} = \frac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}}$

c. Factoriser et simplifier les expressions suivantes : $A = \frac{e^{x+y}-e^{2y}}{e^x}$; $B = \frac{e^{2x+2y}}{e^x \times e^{2y}}$

d. Démontrer pour tout réel x, les relations suivantes :

$$\ln(e^x + e^{-x}) = x + \ln(1 + e^{-2x})\,;\, x + \ln(1 + e^{-x}) = \ln(e^x + 1)\,;$$

$$e^{-x} - e^{-2x} = \frac{e^x - 1}{e^{2x}} \quad ; \quad \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$$

e. Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} (x - e^x)\,;\, \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x-1}\,;\, \lim_{x\to1} \frac{e^x - e}{x-1}\,;\, \lim_{x\to\infty+} \frac{e^x - 1}{3e^x + 2}\,;\, \lim_{x\to+\infty} e^{x^2+1}\,;\, \lim_{x\to-\infty} e^{\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} e^{-x\ln x}\,;\, \lim_{x\to0} e^{-x\ln x}\,;\, \lim_{x\to+\infty} e^{2x} - e^x\,;\, \lim_{x\to-\infty} e^{2x} - e^x$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)e^x}{x}\,;\, \lim_{x\to-\infty} \frac{xe^x}{x+1}\,;\, \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{x}\,;\, \lim_{x\to+\infty} xe^{-x}\,;$$

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(1 + e^x)\,;\, \lim_{x\to-\infty} \ln(1 + e^x)\,;\, \lim_{x\to+\infty} x - 2 + e^x$$

f. calculer les limites en $-\infty$ $et + \infty$:

$$f(x) = 2x + 1 - xe^x \,;\, f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \,;\, f(x) = (-2x^2 + 3x)e^x; f(x) = x.(e^{-x} + 1)$$

EXERCICE 6

1. Déterminer D_f puis $f'(x)$ dans chacun des cas suivants :

$f(x) = (x^2 + 5x)e^x$; $f(x) = e^x \ln x$; $f(x) = \frac{e^x}{e^x - x^2}$; $f(x) =$; $f(x) = \sin x . e^x$
$f(x) = \frac{1}{x^2}.e^{\frac{1}{x}}$; $f(x) = e^{\sqrt{x}}$; $f(x) = e^{\cos x}$; $f(x) = \ln(\frac{e^{-x}+1}{e^x+1})$; $f(x) = e^{\frac{x}{3}} - e^{-3x}$

2. Déterminer sur $]0; +\infty[$, une primitive de f :

$f(x) = 3xe^{x^2}$; $f(x) = \sin x \,.\, e^{\cos x}$; $f(x) = e^{-2x} + e^{-x} + 1$; $f(x) = \dfrac{e^x}{1+e^x}$; $f(x) = \dfrac{e^x+2}{1+e^x}$

EXERCICE 7

Résoudre dans ℝ chacune des équations et inéquations suivantes :

$e^{2x-1} = e^{3-2x}$; $e^{7+x^2} = e^{-3x+5}$; $e^{x+1} = e^{2x}$; $e^x = 3$; $e^{-x} = -5$; $e^x - e^{-x} = 0$

$e^{|2x-1|} = 5$; $e^{3x+2} = 4$; $e^{3x-1} \leq e^{2x+4}$; $e^{\frac{1}{x}} > e^{x-2}$; $e^{-x} \leq 0$; $e^{|3x-1|} \geq$

Problèmes

Problème 1

Partie A

Soit g la fonction définie sur ℝ par : $g(x) = (x-1)^2 - 1 + \ln|x-1|$

1. Déterminer D_g.
2. Etudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.
3. Calculer $g(0) et\ g(2)$ et en déduire le signe de $(x)\forall\, x \in D_g$.

Partie B

Soit la fonction f définie sur ℝ par : $f(x) = x - \frac{\ln|x-1|}{x-1}$ de courbe (C) dans un repère orthonormé (O, I, J).(unité :1,5 cm).

1. a. Déterminer D_f et calculer les limites à gauche et à droite de 1 de f. Interpréter graphiquement les résultats.
   b. Ecrire $f(x)$ sans le symbole de la valeur absolue.
   c. Déterminer les limites de $f$en $-\infty\ et\ en\ +\infty$.
2. a. Démontrer que $\forall\, x \in D_f,\ f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^2}$
   b. En déduire le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.
3. a. Justifier que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à (C).
   b. Etudier la position relative de (C) par rapport à (D).
   c. Démontrer que A(1 ;1) est un centre de symétrie de (C).
4. Construire (C) et (D).

Problème 2:

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{1}{2}\ln(\frac{x+1}{x-1})$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

I) Etude de f

1. Donner l'ensemble de définition de $D_f\ de\ f$.

2.Montrer que f est impaire. Que peut-on en déduire pour sa courbe représentative ?

3.Etudier les variations de f et donner son tableau de variation en précisant ses limites aux bornes de D_f .

II) <u>Tracé de (C_f)</u>

1. on rappelle que la courbe représentative de la fonction $x \to f(x-a)$ se déduit de celle de la fonction f par la translation de vecteur $a\vec{\imath}$. On considère sur l'intervalle $]1;+\infty[$ les fonctions $f_1(x) = \frac{1}{x+1}$et $f_2(x) = \frac{1}{x-1}$. Tracer leurs courbes $C_1 \ et \ C_2$ dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
2. Démontrer que $\forall x \in]1;+\infty[$, $\frac{1}{x+1} \leq \frac{1}{2}\ln(x+1) - \frac{1}{2}\ln(x-1) \leq \frac{1}{x-1}$
3. En déduire que (C_f) est comprise entre $C_1 \ et \ C_2$ sur l'intervalle $]1;+\infty[$
4. A l'aide de la question I.2 tracer (C_f) sur son ensemble de définition.

III)<u>Etude de la fonction réciproque de f</u>

1. Etablir que f est une bijection de $]1;+\infty[\quad vers \ ]0;+\infty[$.
2. En déduire que f admet une bijection réciproque $f^{-1} \ de \ ]0;+\infty[\quad vers \ \ ]1;+\infty[$.
3. Expliciter $f^{-1}(x)$
4. Dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$, tracer C' courbe représentative de la fonction réciproque de f.

<u>Problème 3 :</u>

<u>Partie A</u>

Soit la fonction g définie par :$g(x) = \ln\left|\frac{x+2}{x}\right| - \frac{2}{x+2}$

1. Déterminer D_g.
2. Calculer les limites aux bornes de D_g.
3. a. Calculer $g'(x)$ et justifier que $\forall \ x \in D_g, g'(x) = \frac{-4}{x(x+2)^2}$

   b. Etudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation.

   4. a. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution γ dans $]-2;0[$ et que $-0{,}44 < \gamma < -0{,}43$.

   b. Déterminer que :

   $\forall \ x \in]-2;\gamma[, g(x) < 0$; $\forall \ x \in]\gamma;0[\cup]0;+\infty[, g(x) > 0$.

<u>Partie B</u>

Soit la fonction f sur $]-2;+\infty[$ de représentation (C)

Par : $\begin{cases} f(x) = x\ln\left|\frac{x+2}{x}\right| & si \ x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1. a. Démontrer que $\forall \ x \in]-2;+\infty[- \{0\}, f(x) = x\ln|x+2| - x\ln|x|$, en déduire que f est continue en 0.

b. Etudier la dérivabilité de f en 0. interpréter graphiquement le résultat.

2. a. Calculer la limite de f à droite de -2. Interpréter graphiquement le résultat.

b. Justifier que $\forall\, x \in]0;+\infty[,\ f(x) = x\ln(1+\frac{2}{x})$. en déduire la limite de f en $+\infty$. Interpréter le résultat.

3. a. Calculer $f'(x)$ et justifier que $\forall\, x \in]-2;+\infty[- \{0\}, f'(x) = g(x)$.

b. En déduire en utilisant la question 3 de la partie A, le sens de variation de f et dresser son tableau de variation.

c. Démontrer que $(\gamma) = \frac{2\gamma}{\gamma+2}$.

4. a. Soit A le point d'intersection de (C) avec l'axe des abscisses dont l'abscisse est non nulle.

Déterminer les coordonnées de A.

b. Ecrire une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse -1.

5. Construire (C) avec ses asymptotes et sa tangente (T).

<u>Problème 4</u>

<u>PARTIE A</u>:

Soit g la fonction numérique dérivable sur]0; +∞[et définie par :

$g(x) = -\frac{2x+1}{x^2} + \ln x$.

1. –

a. Calculer $\lim_{x\to+\infty} g(x)$

b. Calculer $\lim_{\substack{x\to 0 \\ >}} g(x)$.

2. –

a. Démontrer que $\forall\, x \in]0;+\infty[,\quad g'(x) = \frac{x^2+2x+2}{x^3}$

b. En déduire le sens de variation de g.

c. Dresser le tableau de variation de g.

3. –

a. Démontrer que $\forall\, x \in]0;+\infty[$, l'équation $g(x) = 0$, admet une solution unique α.

b. Justifier que $2{,}55 < \alpha < 2{,}56$.

c. Démontrer que $\begin{cases} \forall\, x \in\ ]0;\alpha[, & g(x) < 0 \\ \forall\, x \in\ ]\alpha;+\infty[, & g(x) > 0 \end{cases}$

<u>PARTIE B</u>:

On considère la fonction f dérivable sur $]0;+\infty[\ \ et\ définie\ par: f(x) = (\frac{1}{x} - \ln x)e^{-x}$.

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormal (O, I, J).

(unité : OI= 2 cm et OJ= 10 cm).

1. –

a. Calculer la limite de $f \ en + \infty$, puis interpréter graphique le résultat.
b. Calculer $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$ puis donner une interprétation graphique du résultat.

2. Démontrer que $f(\alpha) = -(\frac{1+\alpha}{\alpha^2})e^{-\alpha}$
3. –
   a. Démontrer que pour tout nombre réel positif x, $f'(x) = e^{-x}g(x)$.
   b. En utilisant la partie A, déterminer les variations de f.
   c. Dresser le tableau de variation de f.
4. Démontrer qu'une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1 est :

$$y = -\frac{3}{e} + \frac{4}{e}$$

5. Construire (T) et (C) dans le plan muni du repère (O, I, J). on prendra $\alpha = 2{,}6$.

PARTIE C

1. Soit h la fonction dérivable sur $]0;+\infty[$ et définie par : $h(x) = e^{-x}\ln x$. Démontrer que h est une primitive de $f \ sur\ ]0;+\infty[$
2. Soit $\boldsymbol{\lambda}$ un nombre réel tel que $\lambda > 3$.
   a. Calculer en cm^2 et en fonction de $\boldsymbol{\lambda}$, l'aire A($\boldsymbol{\lambda}$) de la partie du plan comprise entre (C) et (OI) et les droites d'équation $x = 3 \ \ et \ \ x = \boldsymbol{\lambda}$.
   b. Calculer $\lim_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)$

Problème 5

Partie A

Soit la fonction g définie par $g(x) = -x|x| + 1 - \ln|x|$.

1a) Déterminer D_g.

b) Etudier le sens de variation de g et dresser son tableau de variation. On ne demande pas de déterminer les limites aux bornes de D_g.

2a) Déterminer le signe de $g(x)$ sur $]-\infty;0[$

b) Calculer $g(1)$

c) Déterminer le signe de $g(x)\ sur\ ]0;+\infty[$

Partie B

Soit la fonction f définie de $\mathbb{R}^*$ vers $\mathbb{R}$ par $f(x) = -|x| + \frac{\ln|x|}{x}$. Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, I, J). Unité 1 cm

1.a) en utilisant les résultats de la partie A, étudier le sens de variation de f.

b) Calculer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

c) Dresser le tableau de variation de f.

2) Déterminer le signe de $f(x)$sur $]0;+\infty[$.

3) Démontrer que les droites (Δ) et (Δ') d'équations respectives $y = x$ et $y = -x$ sont asymptotes à (C) respectivement en $-\infty$ et en $+\infty$.
4) a) Déterminer l'intersection de (C) et (Δ') sur $]0;+\infty[$
   b) Etudier la position relative de (C) et (Δ') sur $]0;+\infty[$
5) a) Déterminer l'intersection de (C) et (Δ) sur $]-\infty;0[$
   b) Etudier la position relative de $(C) et$ (Δ) sur $]-\infty;0[$
6) Tracer la courbe (C) ainsi les droites (Δ) et (Δ') .

Partie C

On propose de déterminer l'intersection de (C) et (Δ')sur $]-\infty;0[$.
Soit la fonction h définie sur $]-\infty;0[$ par $h(x) = f(x) + x$.
1a) Calculer les limites de h en $-\infty$ et en 0 à gauche.
b) Etudier le sens de variation de la fonction h.
c) Dresser son tableau de variation
2a) Démontrer que l'équation $\forall x < 0, f(x) = -x$ admet une solution unique α.
b) Démontrer que $-1 < \alpha < -\frac{1}{2}$.

Problème 6

On désigne par (C) la courbe de la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$-{0; 1} dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique : 2cm

Partie A

On considère la fonction f définie par $f(x) = x - 1 - \frac{2}{x} - \ln\left|1 - \frac{1}{x}\right|$

1) Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$-{0; 1}.
2) Montrer que :
   - Pour tout $x \in]-\infty;0[\cup]1;+\infty[, f(x) = x - 1 - \frac{2}{x} - \ln(1 - \frac{1}{x})$
   - Pour tout $x \in]0;1[, f(x) = x - 1 - \frac{2}{x} - \ln(\frac{1}{x} - 1)$
3) Déterminer les limites de $f$en $-\infty$ et $+\infty$.
4) Calculer la limite de f en 1. Interpréter graphiquement ce résultat.
5) a)Calculer les limites à gauche en 0 et à droite en 0.
   b) Interpréter graphiquement ces résultats.

Partie B

Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^3 - x^2 + x - 2$

1) Calculer $g'(x)$.
2) Déterminer le sens de variation de g.
3) A) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution α dans $\mathbb{R}$ et que $1 < \alpha < 1{,}5$.
   b)En déduire un encadrement de α par deux décimaux consécutifs d'ordre 1.
   4) déterminer le signe de $g(x)$.

5) montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} - \{0; 1\}$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2(x-1)}$

6)a) déterminer le signe de $f'(x)$ et le sens de variation de f.

b) Dresser le tableau de variation de f.

Partie C

1) Soit (D) la droite d'équation $y = x - 1$. Montrer que cette droite est asymptote à $(C) en - \infty\ et + \infty$.
2) Calculer $f(-2); f\left(-\frac{1}{2}\right) et\ f(\frac{1}{2})$.
3) Construire (D) et la courbe (C). On prendra $\alpha = 1{,}3$.

Partie D

Soit h la fonction définie sur $]1; +\infty[\ par\ h(x) = (x-1)\ln(x-1) - x\ln x$.

1) Calculer $h'(x)$
2) En déduire une primitive $F\ de\ f\ sur$ $]1; +\infty[$
3) Déterminer la primitive $G\ de\ f\ sur$ $]1; +\infty[$ qui s'annule en 2.

Problème 7

On considère la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ $et\ (C)$sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé

(O,I , J)(unité graphique : 4 cm)

Partie A : Etude et représentation graphique de f

1. Déterminer D_f l'ensemble de définition de la fonction f.
2. Calculer les limites aux bornes de D_f.
3. On suppose que f est dérivable sur D_f.
   a. Calculer $f'(x), \forall x \in D_f$.
   b. Dresser le tableau de variation de f.
4. –
   a. Démontrer que le point $A(0; \frac{1}{2})$ est un centre de symétrie de (C).
   b. Trouver une équation de la tangente (T)à(C) au point A.
5. Soit g la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$g(x) = f(x) - (\frac{1}{4}x + \frac{1}{2})$$

   a. Démontrer que $g'(x) = -\frac{(e^x-1)^2}{4(e^x+1)^2}$
   b. En déduire le sens de variation de g.
   c. Calculer $g(0)$ et en déduire le signe de $g(x)$.
   d. Préciser alors la position de (C) par rapport à (T).
6. Construire (C) et (T) dans le même repère (O, I, J).

Partie B : Etude de la bijection réciproque de f.

1. Démontrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle K à préciser.
2. –
   a. Résoudre l'équation : $f(x) = \frac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}$.
   b. Calculer la valeur exacte de $(f^{-1})'(\frac{1}{2})$ où f^{-1} désigne la bijection réciproque de f.
3. Construire (C') la représentation graphique de f^{-1} dans le même repère que (C).
4. –
   a. Vérifier que pour tout nombre réel x, $f'(x) = f(x)(1 - f(x))$.
   b. Calculer pour tout $x \in]0;1[$, $f'(f^{-1}(x))$.
   c. En déduire que : $\forall\, x \in]0;1[, (f^{-1})'(x) = \frac{1}{x(1-x)}$
5. –
   a. Déterminer deux réels $a\ et\ b\ \ tels\ que$: $\forall x \in]0;1[, \frac{1}{x(1-x)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{1-x}$.
   b. En déduire l'expression de $(f^{-1})(x)$ pour tout x élément de $]0;1[$.

Problème 8

Partie A

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{2e^{2(x-1)}}{e^{2(x-1)}-1}$ **.**On désigne par (C) sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

1. –
   a. Déterminer D_f l'ensemble de définition de f.
   b. Calculer les limites de f aux bornes de D_f.
      Interpréter les résultats graphiquement si possible.
   c. On suppose que f est dérivable sur D_f, calculer la fonction dérivée $f'(x)$.
      Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
   d. En déduire que : $\begin{cases} \forall\, x \in]-\infty;1[, f(x) < 0 \\ \forall\, x \in]1;+\infty[, f(x) > 0 \end{cases}$
2. –
   a. Démontrer que le point $\Omega(1\ ;1)$ est un centre de symétrie de (C).

b. Préciser la tangente à (C) au point A de (C) d'ordonnée 4.

3. –

a. Démontrer que la restriction g de f à l'intervalle $]1;+\infty[$ est une bijection de $]1;+\infty[$ sur un intervalle K que l'on précisera.

b. Trouver une expression explicite de sa bijection réciproque g^{-1}.

c. On désigne par (C') la représentation graphique de g^{-1} dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Calculer de deux manières différentes $(g^{-1})'(4)$.
On donnera l'équation de la tangente à (C') au point B d'abscisse 4.

4. Construire (C) puis (C') dans le même repère.

Partie B

On considère la fonction h par : $h(x) = \ln\left|e^{2(x-1)} - 1\right|$. On désigne par (Γ) la représentation graphique h dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

1. –
   a. Déterminer l'ensemble de définition de h.
   b. Calculer les limites de h aux bornes de D_h et interpréter si possible les résultats obtenus.
   c. Montrer que : $\forall\, x \in D_{h,}$, $h'(x) = f(x)$.
   En déduire le sens de variation de h et dresser son tableau de variation.
2. –
   a. Démontrer que $\forall\, x \in D_{h,}$, $h(x) = 2x - 2 + \ln|1 - e^{-2x+2}|$
   b. En déduire que la droite (D) d'équation $y = 2x - 2$ est une asymptote à (Γ) en $+\infty$.
   c. Etudier les positions relatives de (Γ) et de (D).
3. –
   a. Préciser le point d'intersection de (Γ) avec (OI).
   b. Construire (Γ).
   (***réaliser des dessins différents pour chacune des parties A et B***).

Problème 9

L'objectif de ce problème est l'étude de la fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = e^{-x}\ln(1 + e^{x})$

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).(unités : 2cm sur l'axe des abscisses et 5cm sur l'axe des ordonnées).

Partie A

Soit g la fonction dérivable et défini sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \frac{e^x}{1+e^x} - \ln(1 + e^x)$

1. Etudier les limites de $g\ en - \infty\ et\ en + \infty$.
2. Etudier le sens de variation de g, puis dresser son tableau de variation.
3. a.Montrer que g est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle K que l'on déterminera.
   b.En déduire le signe de $g(x)$.

Partie B

1.a. Calculer la limite de f en $-\infty$.
   b. Donner une interprétation graphique du résultat.
2.a. Montrer $\forall x \in \ \mathbb{R}, on$ a : $f(x) = (1 + e^{-x})\frac{\ln(1+e^x)}{1+e^x}$
   b. En déduire le calcul de la limite de $f$en $+\infty$. Donner une interprétation graphique du résultat.
3. a. Montrer que $\forall x \in \ \mathbb{R}$, on a $f'(x) = e^{-x}g(x)$.
   b. En déduire le sens de variation de f, puis dresser son tableau de variation.
4. Construire la courbe (C) dans le repère (O, I, J).

Partie C

Soit la fonction h dérivable et définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \frac{1}{1+e^x}$

1.a. Déterminer les nombres réels $a\ et\ b$ tels que $h(x) = a + \frac{be^x}{1+e^x}$
 b. En déduire une primitive $H\ de\ h\ sur\ \mathbb{R}$.
2. Calculer à l'aide d'une intégration par parties, l'intégral. $\int_0^{\ln 2} e^{-x} \ln(1 + e^x)dx$
3. Calculer l'aire A en cm^2 de la partie du plan limité par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0\ et\ x = \ln 2$.

Problème 10

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O;\ \vec{i};\ \vec{j})$; on considère la fonction numérique f définie par : $\begin{cases} f(x) = xe^x - x, & si\ x \leq 0 \\ f(x) = 2x(-1 + \ln x) & si\ \ x > 0 \end{cases}$

Partie A

Soit g la fonction définie sur $]-\infty; 0]\ \ par\ g(x) = xe^x - x$

1. Calculer $\lim_{x\to-\infty} g(x)$.
2. –

a. Pour tout $x \in]-\infty; 0]$, calculer $g'(x)$ et $g''(x)$ (g' et g'' sont respectivement les fonctions dérivées première et seconde de g).
b. Démontrer que la courbe représentative (C_g) de g admet un point d'inflexion I dont on précisera les coordonnées.
c. Dresser le tableau de variation de g' ; en déduire le signe de $g'(x)$.

Partie B

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Déterminer que f est continue en 0.
3. –
   a. Etudier la dérivabilité de f en 0. En déduire une interprétation géométrique.
   b. Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in]0; +\infty[$ et étudier son signe.
4. Dresser le tableau de variation de f.
5. Soit φ l'application définie par :
   $\varphi : J \to f(J)$, où $J = [1; +\infty[$

$x \to \varphi(x) = f(x)$,

   a. Démontrer que φ est une bijection(soit φ^{-1} la bijection réciproque de φ).
   b. Prouver que la fonction dérivée première $(\varphi^{-1})'$ de (φ^{-1}) est positive sur $f(J)$.

Partie C

(C_f) est la courbe représentative de la fonction f, dans le repère R.

1. Justifier que la droite (Δ) d'équation $y = -x$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $-\infty$.
2. Calculer $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et conclure.
3. (C_h) désigne la courbe représentative de la fonction h définie par : $h(x) = -f(x)$. Construire les courbes (C_f) et (C_h) et les tangentes en 0 sur une même figure.
4. Soit $H(x) = \int_1^x h(t)dt$, $\forall x \in J$.
   a. Démontrer que la fonction H est définie et continue sur J.
   b. Calculer $H(e)$. En donner une interprétation géométrique.
   c. Calculer en cm^2, l'aire A du domaine du plan délimité par (C_f), (C_h) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

Problème 11

on considère la fonction numérique f définie par : $f(x) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$ et on désigne par (C)sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O; \vec{i}; \vec{j})$ unité : 4 cm.

1.a. Justifier que f est définie sur $\mathbb{R}$.
b. Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$.
2.a Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer pour tout réel x l'expression de $f'(x)$.
b. Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variations.
3.a Montrer que la fonction f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on précisera.Expliciter la bijection réciproque f^{-1}.
b. Construire dans le même repère la courbe (C) et la courbe (Γ) de f^{-1}. On justifiera le tracé de (Γ) sans étudier les variations de f^{-1}.
4.a. Soit $\lambda > 0$, calculer en cm^2, l'aire $A(\lambda)$ de la partie du plan limitée par la courbe (C) et les droites d'équations $x = 0, x = \boldsymbol{\lambda}$ ***et*** y = 0.
b. Calculer $\lim_{\lambda\to+\infty} A(\lambda)$.

<u>FICHE D'EXERCICES n°5</u>: Calcul Intégrale et Primitive

<u>Exercice 1</u>

Déterminer une primitive de f

1.$f(x) = \sin x + \cos x$ 2. $f(x) = 2\sin x . \cos x$ 3. $f(x) = \cos(2x + 3)$

3. $f(x) = \cos 2x . \cos 3x$ 5.$f(x) = \cos x\,(\sin x - 2)$ 6.$f(x) = \cos 2x - 2\cos x$

7.$f(x) = \sin x\, cos^2 x$ 8.$f(x) = sin^4 x. \cos x$ 9.$f(x) = cos^2 x\, . sin^3 x$

10.$f(x) = cos^5 x$ 11. $f(x) = sin^6 x$ 12. $f(x) = \cos x + \frac{1}{cos^2 x}$

13.$f(x) = \frac{1}{3}(5x^4 + 1)\sin(x^5 + x)$ 14.$f(x) = \frac{\sin x}{cos^2 x}$

<u>Exercice 2</u>

Calculer les intégrales suivants :

a.$\int_0^3 (x^3 - x^2 - 1)dx$ b.$\int_0^3 (x + 4)dx$ c. $\int_{-1}^1 (2x^2 - 1)dx$ d.$\int_0^1 x(x^2 - 3)^7$
e.$\int_{\frac{1}{2}}^2 (2x - 1 + \frac{1}{x^2})dx$ f.$\int_0^1 (2x + 3)(x^2 + 3x - 5)dx$ g.$\int_2^1 (\frac{1}{x^6})\, dx$
h.$\int_1^2 (\frac{3}{\sqrt{x}})dx$ i.$\int_2^3 \frac{1}{(1-x)^3}dx$ j.$\int_0^2 (\frac{x}{\sqrt{x^2+1}})dx$ k.$\int_2^3 \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}dx$ l.$\int_1^2 (\frac{3-x}{x^2-6x+1})dx$

m. $\int_1^2 \left(\frac{1}{x^2}\right) e^{\frac{1}{x}}.dx$ n. $\int_{-1}^0 \left(\frac{e^x}{e^x+2}\right).dx$p.$\int_0^{\frac{\pi}{3}} cos\left(2x-\frac{\pi}{3}\right).dx$ q.$\int_0^{\pi} sin^2x\,dx$
r.$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)^2$ s.$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\cos x} dx$t.$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{(1+\cos x)^3} dx$

Exercice 3ok

Soit $f(x) = x\sin x$

3. Calculer $f'(x)$
4. En déduire valeurs de :
   c. $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + x\cos x) dx$
   d. $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x\cos x) dx$

Exercice 4ok

Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une intégration par parties :

a.$\int_0^{\pi} x\sin x\,dx$ b. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos x\ \ dx$ c.$\int_1^2 x\,\mathrm{ln}\,x\ \ dx$ d.$\int_1^2 \mathrm{ln}\,x\ \ dx$ e.$\int_1^2\ xe^{2x}dx$

f.$\int_0^1 (2x+1)e^x dx$ g. $\int_3^5 (x^3+1)\ \mathrm{ln}\,x\,dx$ h.$\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx$ i.$\int_1^2 x\sqrt{1-x}dx$
j.$\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx$

Exercice 5ok

Calculer les intégrales suivantes à l'aide d'une de deux intégrations par parties :

a.$\int_0^{\pi} x^2\sin x\,dx$ b.$\int_0^1 (x+1)^2 e^x dx$ c.$\int_0^{\pi} e^x\sin x\,dx$ d.$\int_{-\pi}^0 x^2\sin x\,dx$

e. $\int_{-\pi}^0 e^{2x}\sin x\,dx$ f.$\int_0^1 (x+1)^2 e^{-x} dx$g.$\int_0^1 x^2\sqrt{1-x}\,dx$

Exercice 6ok

3. Soit l'intégrale $K = \int_0^{\pi} e^x \cos 2x\,dx$
   A l'aide de deux intégrations par parties, montrer que : $K = \frac{e^{\pi}-1}{5}$
4. Soit $A = \int_0^{\pi} e^x cos^2 x dx$et $B = \int_0^{\pi} e^x sin^2 x dx$.
   c. Calculer $A + B\ et\ A - B$
   d. En déduire les valeurs de $A\ et\ B$.

Exercice 7ok

L'objectif de cet exercice est de calculer les intégrales suivantes :

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+2}}dx \;\; ; \;\; J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx \quad et \;\; K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2}\,dx$$

3. Calculer .
   Soit la fonction f définie sur $[0;1]$ par $f(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+2})$
   d. Calculer la dérivée de la fonction $x \to \sqrt{x^2+2}$
   e. En déduire la dérivée f' de f.
   f. Calculer la valeur de I.
4. Calcule de J et de K.
   d. Vérifier que : $2I + J = K$.
   e. A l'aide d'une intégration par parties portant sur l'intégrale K, démontrer que : $K = \sqrt{3} - J$
   f. En déduire les valeurs de J et de K.

Exercice 8 :ok

4. Calculer les intégrales suivantes :
$$I_1 = \int_1^e x(\ln x)dx \quad et \quad I_2 = \int_1^e x(\ln x)^2$$
5. Pour tout entier naturel n, on pose $I_n = \int_1^e x(\ln x)^n dx$.
   Démontrer , pour tout entier $n \geq 2$, $I_n = \frac{e^2}{2} - \frac{nI_{n-1}}{2}$.
6. Calculer I_4

Exercice 9 :

Soit $f\ et\ g$ deux fonctions définies sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]\ par$: $f(x) = \frac{\sin x}{(\cos x)^3}\ \ et\ g(x) = \frac{1}{(\cos x)^4}$.

1. Vérifier que $\forall\ x \in \left[0;\frac{\pi}{4}\right]$, $f'(x) = \frac{3}{(\cos x)^4} - 2\frac{1}{(\cos x)^2}$.
2. En déduire la primitive de $g\ sur\ \left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ qui s'annule en 0.

Exercice 10:

On se propose de trouver une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :$f(x) = e^{2x}\cos x$.

1. Calculer $f'(x) et\ f''(x), \forall x \in \mathbb{R}$.
2. Trouver les deux réels $a\ et\ b$ tels que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = af''(x) + bf'(x)$.
3. En déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11 :

On considère les intégrales suivantes : $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos x)^4 dx$, $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin x)^4 dx$, et

$$K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2(\sin x)^2(\cos x)^2 dx$$

1. Calculer $I - J$ et $I + J + K$
2. a. Exprimer $\cos 4x$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.
   b. En déduire la valeur de $I + J - 3K$, puis celle de I, J et K.

Exercice 12 :

Soit la fonction f définie sur $[0;1]$ par : $f(x) = \frac{x^2}{4-x^2}$ et $g(x) = \ln(4 - x^2)$.

1. Soit $I = \int_0^1 f(x)dx$
   a. Quel est le signe de I ?
   b. Démontrer que pour tout $x \in [0;1]$, $f(x) = -1 + \frac{1}{2-x} + \frac{1}{2+x}$
   c. Calculer I.
2. En utilisant une intégration par parties, démontrer $\int_0^1 g(x)dx = \ln 3 + 2I$. En déduire sa valeur exacte.

Exercice 13 : R5

1. Soient f et g les fonctions définies sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = x\sin(\ln x)$ et $g(x) = x\cos(\ln x)$.
   a. Vérifier que f et g sont dérivables sur $]0; +\infty[$ et calculer leurs fonctions dérivées.
   b. En déduire une primitive de la fonction $x \to \cos(\ln x)$ sur $]0; +\infty[$.
2. Calculer les intégrales suivantes :
   $I = \int_1^{e^\pi} cos^2(\frac{\ln x}{2})dx$ et $J = \int_1^{e^\pi} sin^2(\frac{\ln x}{2})dx$

Exercice 14 :

On pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+2\sin x}\,dx$, $A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+2\sin x}\,dx$ et $J = A + I$

1. Calculer J puis I.
2. En déduire A.

Exercice 15 :

1.

a. Montrer que pour tout nombre réel x, on a: $\frac{1}{(1+e^x)^2} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x} - \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$

b. Calculer $I = \int_0^1 \frac{1}{(1+e^x)^2}dx$

2. a. Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $f(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^3}$

b. Calculer à l'aide d'une intégration par parties, $J = \int_0^1 \frac{xe^x}{(1+e^x)^3}dx$.

Exercice 16 :

1. Soit g la fonction définie sur $]1; +\infty[$ $par \ \ g(x) = \frac{1}{x(x^2-1)^2}$.
   b. Déterminer les nombres réels $a, b\ et\ c$ tels que l'on ait, pour tout $x > 1$:
   $g(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{x-1}$.
   c. Trouver une primitive $G\ de\ g$sur $]1; +\infty[$.
2. Soit la fonction f définie sur $]1; +\infty[$ par :
   $f(x) = \frac{2x}{(x^2-1)^2}$.
   Trouver une primitive F de f sur $]1; +\infty[$.
3. En les résultats obtenus précédemment, calculer :
   $I = \int_2^3 \frac{2x}{(x^2-1)^2} \ln x\, dx$.
   On donnera le résultat exact sous la forme $p \ln 2 + q \ln 3$, avec $p\ et\ q$ rationnels.

Exercice 17

1) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$; par :$g(x) = \frac{1}{e^x+1}$
   a) Montrer que $g(x) = 1 - \frac{e^x}{e^x+1}$; b) En déduire $\int_0^1 g(x)dx$
2) Soit g la fonction définie sur $]1 ; +\infty[$; par :$f(x) = \frac{x^2+3x-1}{x-1}$
   a) Montrer que pour tout $x > 1$, $f(x)$ peut s'écrire sous la forme
   $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$ Où a ; b et c sont des réels à déterminer ;
   b) Déduire $\int_4^2 f(x)dx$.
3) Calculer les intégrales suivantes en utilisant la formule d'intégration par parties .
   $\int_{-1}^0 xe^x dx$; $\int_0^1 (x^2 + x)e^{2x} dx$; $\int_0^1 \frac{x}{cos^2 x} dx$;
4) On pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x cos^2 x\ dx\ I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x sin^2 x\ dx$
   Calculer I+J et I-J puis déduire I et J

Exercice 18

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par
$f(x) = \frac{x^2}{2}(lnx - \frac{3}{2})six > 0\ \ et\ f(0) = 0$

1) Etudier le sens de variations de f et étudier la limite de f +∞. Tracer la courbe représentative C dans un repère orthonormé .
2) Soit $\alpha \in]0 ; e[$ on pose $I(\alpha) = -\int_\alpha^e f(x)\, dx$

a) Donner une interprétation géométrique de $I(\alpha)$.
b) Calculer $I(\alpha)$
c) Calculer la limite de $I(\alpha)$; lorsque α tend vers zéro.
d) En déduire l'aire de la partie du plan délimité par la courbe C l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $(x = 0)$ et $(x = e)$

Exercice 19(OK)

Soit la suite $(I_n)_{n} \in \mathbb{N}$définie par : $I_n = \int_0^1 x^n\sqrt{1-x}\ dx$

a) A l'aide d'une intégration par parties trouver une relation de récurrence entre $I_n$et I_{n+1}.
b) Calculer I_0
c) En déduire I_n

Exercice 20

Soit (C) la courbe de $f(x) = sin^2x$

a) Calculer l'aire du domaine D, l'ensemble des points $M(x;y)$ tels que : $\begin{cases} 0 \leq x \leq \pi \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$
b) Linéariser sin^4x et calculer $\int_0^{\pi} sin^4x\,dx$
c) En faisant tourner (C) autour de (ox), on obtient un disque (C'). calculer son volume en cm^3.

Exercice 21

Soit la fonction numérique définie sur $[0;\pi]$ par $f(x) = -1 + \frac{1}{2}sin^2x$ et (C) sa courbe (unité : 3 cm).

a) Etudier les variations de f et construire(C).
b) Calculer, l'aire limitée par (C), les deux axes de coordonnées et la droite d'équation $x = \pi$.

Exercice 22

Soit I un intervalle symétrique par rapport à 0 et f une fonction continue sur I. Soit φ la fonction définie par : $\varphi(x) = \int_{-x}^{x} f(t)dt$

a) Montrer que φ est dérivable sur I et que : $\varphi'(x) = f(x) + f(-x)$
b) On suppose que f est impaire sur I. Montrer que $\varphi(x) = 0\ \forall\ x \in I$.
c) Montrer que si f est impaire alors φ est la primitive qui s'annule en 0 de la fonction : $x \to 2f(x)$ sur I.

Exercice 23

Soit $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos x} dx$

Déterminer $a\ et\ b$ tels que $\frac{1}{\cos x} = \frac{a \cos x}{1-\sin x} + \frac{b \cos x}{1+\sin x}$ et calculer I.

Exercice 24

On considère la fonction $f\ définie\ sur\ [0;\pi]\ par\ f(x) = \cos(\frac{x}{2})$

On appelle (C) sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O;\vec{\imath};\ \vec{\jmath})$ unité 2 cm.

1. Donner l'équation de la tangente (Δ) à (C) au point d'abscisse $x = \pi$
2. Tracer (C) et (Δ).
3. Soit A le domaine plan compris entre les droites d'équation $x = 0\ et\ x = \pi$, l'axe (Ox) et la courbe (C). calculer le volume V en cm^3 engendré par la rotation de A autour de (Ox).

Exercice 25

On pose $I =]0; +\infty[$.

Pour tout entier naturel n, on désigne par f_n la fonction définie Ipar $x \mapsto x^n\sqrt{x}$.

2) A. Montrer que $f_1\ et\ f_2$ sont dérivables sur I.
   d. Calculer $f'_1(x) et\ f'_2(x)$.
3) Déduire de 1) une primitive sur I :
   $x \mapsto \sqrt{x}$et $x \mapsto x\sqrt{x}$.
4) a. calculer $f'_{n+1}(x)$.
   b. Déduisez-en une primitive de $f_n$sur I.

Exercice 26

Déterminer les intervalles de $\mathbb{R}$ sur lesquels la fonction f admet des primitives , et déterminer les primitives de f sur chacun de ces intervalles.

b. $f(x) = \frac{-3x}{\sqrt{x^2+9}}$; $b. f(x) = \frac{1}{(2x+1)\sqrt{2x+1}}$; $c. f(x) = \frac{\sin 2x}{\sqrt{(\sin x)^2+1}}$

Exercice 27

On considère $I =]2; +\infty[\ et\ f$ définie I par : $f(x) = \frac{x^2-4x+2}{(x-2)^2}$.

3) Déterminer les nombres a et b tels que :

$f(x) = a + \frac{b}{(x-2)^2}$, pour tout $x$dans I.

4) Déduisez- en l'ensemble des primitives de $f\ sur\ I$.

Exercice 28ok

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + 1$

3) Déterminer les primitives de $f\ sur\ \mathbb{R}$.
4) Déterminer la primitive dont la courbe représentative admet pour asymptote en $+\infty$ la droite d'équation $y = 2x + 1$.

Exercice 29ok

Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}*_+$ par $f(x) = x^2 + \frac{1}{\sqrt{x}}$

Déterminer la primitive de f sur $\mathbb{R}*_+$ dont la courbe représentative admet au point d'abscisse 1 une tangente passant par le point $A(2;3)$.

Exercice 30ok

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$-{1} par : $f(x) = \frac{2x+3}{(x-1)^3}$

3) Déterminer deux réels a et b tels que : $f(x) = \frac{a}{(x-1)^2} + \frac{b}{(x-1)^3}$
4) En déduire une primitive de $f\ sur\ ]1;+\infty[$.

Exercice 31ok

Soit les fonctions $F\ et\ G$ définies par : $F(x) = \sqrt{x^2-1}\ \ et\ G(x) = \frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}\ \ sur\ I\ =]1;+\infty[$.

3) Calculer les fonctions dérivées $F'et\ G'sur\ I$.
4) Que peut-on en déduire pour les fonctions $F\ et\ G$?

Exercice 32

On pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{cos^2x}{e^x} dx$, $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin^2x}{e^x} dx$, $K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-x} \cos 2x\, dx$.

1) Calculer $I + J$.
2) A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que $K = \frac{1+e^{-\frac{\pi}{2}}}{5}$.
3) En déduire la valeur de $I - J$.
4) Calculer Iet J.

Exercice 33

Pour tout entier naturel n, on considère les intégrales : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \sin x \, dx \quad et \, J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-nx} \cos x \, dx$

1) Calculer $I_0 \; et \; J_0$.
2) On suppose $n \geq 1$
   a) En intégrant par parties I_n, puis J_n, montrer que :
   $$\begin{cases} I_n + nJ_n = 1 \\ -nI_n + J_n = e^{n\frac{\pi}{2}} \end{cases}$$
   b) En déduire les expressions de I_n et J_n en fonction de n.
3) Déterminer $\lim_{n \to +\infty} I_n$et $\lim_{n \to +\infty} J_n$.

<u>Exercice 34</u>

A) On considère les intégrales $I = \int_0^{\pi} cos^4 x dx$et $J = \int_0^{\pi} sin^4 x dx$.
   1. A. Montrer que l'intégrale I peut s'écrire $I = \int_0^{\pi} \cos x \, (\cos x - \cos x \, sin^2 x) \, dx$.
      b.A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $I = \int_0^{\pi} sin^2 x \, dx - \frac{1}{3} J$.
      c.Montrer de même que $J = \int_0^{\pi} cos^2 x \, dx - \frac{1}{3} I$.

   2. A.Montrer que $I + J = \frac{3\pi}{4}$
      b.montrer que $J - I = 0$
      c.En déduire les intégrales Iet J.

B) On pose pour tout entier naturel n; $U_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x} \sin x \, dx$
1. A)A l'aide d'une intégration par parties calculer U_n.
   b)Montrer que (U_n) est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme et la raison.

2. A.Calculer$S_n = \int_0^{n\pi} e^{-x} \sin x \, dx$
   b.Calculer$\lim_{n \to +\infty} S_n$.

- **<u>EQUATIONS DIFFERENTIELLES</u>**
- ✓ **<u>Equation différentielle linéaires et homogènes</u>**
  - Définition

On appelle équation différentielle linéaire homogène d'ordre $n (n \in \mathbb{N})$ toute équation de la forme :$a_0 y + a_1 y' + \cdots + a_n y^n = 0, a_n \neq 0$ où y est une fonction au moins n fois dérivable sur $I \subseteq \mathbb{R}\ et\ n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{R}\ (i = 0,\ 1,\ 2, \dots, n)$.

- Exemple :

  $2y''$-y'+y=0 et $y'' - y = 0$sont des équations $d.l.h$ d'ordre 2.

  $\frac{1}{2}y' + y = 0$est une équation $d.l.h$ d'ordre 1.

- **<u>Equation différentielle linéaire homogène d'ordre 1</u>**

  - Définition :

    On appelle $e.d.l.h$ sans 2^nde^ membre toute équation différentielle du type : $y' + ay = 0, a \in \mathbb{R}$ où y est une fonction au moins une fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

    - Exemple

    $$(E): 2y' - y = 0 \Leftrightarrow y' - \frac{1}{2}y = 0$$

  - Théorèmes :

    Th1 : l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 : $y' + ay = 0, a \in \mathbb{R}$ a pour solution générale toute fonction $y/$ $y(x) = ke^{-ax}, k \in \mathbb{R}$ (ensemble des solutions).

    La solution particulière vérifiant $y(x_0) = y_0$ est donnée par : $y(x) = y_0 e^{-a(x-x_0)}$.

    - Application : $(E) : -y' + \frac{1}{2}y = 0$.

- **<u>Equation différentielle linéaire d'ordre 2 sans 2^nde^ membre</u>**

  - Définition

    On appelle $e.d.l.h$ d'ordre 2 toute équation différentielle d'ordre 2 du type : $(E): ay'' + by' + cy = 0, a, b\ et\ c \in \mathbb{R}, a \neq 0\ \ et\ y$ une fonction au moins deux fois dérivable sur $I \subseteq \mathbb{R}$. L'équation

caractéristique de (E) est : $ar^2 + br + c = 0$.

- **Th2** :
  Soit $(E): ay'' + by' + cy = 0$ une équation différentielle linéaire du 2nde ordre. Si les fonctions : $x \mapsto f_1(x) et\ x \mapsto f_2(x)$ sont solutions de (E), alors la fonction $f: x \mapsto C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x), (C_1, C_2) \in \mathbb{R}^2$ est aussi solution de (E).
  La réciproque est aussi vraie.
- **Méthode de résolution des $\boldsymbol{e.d.l.h}$ du 2nde ordre**

  - Théorème 3
    Soit $(E): ay'' + by' + cy = 0$ une équation différentielle linéaire du 2nde ordre.
    $(E_C): ar^2 + br + c = 0$est son équation caractéristique.
    Soit $P(r) = ar^2 + br + c$
    $\Delta = b^2 - 4ac$
    - Si $\Delta > 0$, l'équation caractéristique (E_C) admet deux solutions réels distinctes $r_1\ et\ r_2$ et la solution générale de (E) est donnée par : $y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$, $(c_1, c_2) \in \mathbb{R}^2$.
    - Si $\Delta = 0$, (E_C) admet une solution double réel r_0 et la solution générale de (E) est donnée par : $y(x) = (Cx + D)e^{r_0 x}$, $(C, D) \in \mathbb{R}^2$.
    - Si $\Delta < 0(E_C)$ admet deux solutions complexes conjuguées :

$$r_1 = \alpha + \beta i$$
$$r_2 = \alpha - \beta i$$

Et la solution générale de de (E) est donnée par :

$$y(x) = e^{\alpha x}(K_1 \cos(\beta x) + K_2 \sin(\beta x))$$

$(K_1, K_2) \in \mathbb{R}^2$.

- **Equations différentielles du 2nde ordre aux conditions initiales**
  - **Th** :
    l'équation différentielle du 2nde ordre du type $(a \neq 0)$ aux conditions initiales :
    $$\begin{cases} ay'' + by' + cy = 0 \\ y(x_0) = y_0 \\ y'(x_1) = y_1 \end{cases}$$
    admet une solution **unique**.
    - Application
    $$\begin{cases} y'' + 2y' - 3y = 0 \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = 7 \end{cases}$$

- **Equation différentielle du 2nde ordre du type $\boldsymbol{y'' + \omega^2 y = 0}$ $(\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^*)$**

(E_C) est donnée par : $r^2 + \omega^2 = 0$.(E_C) admet deux solutions complexes conjuguées : $r_1 = i\omega \; et \; r_2 = -i\omega$. Et la solution générale est donnée par :

$$y(x) = e^{0x}(A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x))$$
$$y(x) = 1(A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x))$$

$y(x) = A\cos(\omega x) + B\sin(\omega x)$, $(A, B) \in \mathbb{R}^2$. la solution peut être donnée sous la forme :

$y(x) = A_0 \cos(\omega x - \varphi)$où$A_0 \; et \; \varphi$ sont fixés par les conditions initiales.

- Démonstration :
  On pose : $A_0 = \sqrt{A^2 + B^2}$

On aura :
$y(x) = \sqrt{A^2 + B^2}(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\cos(\omega x) + \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\sin(\omega x))$. On vérifie que : $(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}})^2 + (\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}})^2 = 1$. donc il existe $\varphi \in \mathbb{R}$, tel que : $\begin{cases} \cos\varphi = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} \\ \sin\varphi = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}} \end{cases}$

$y(x) = A_0(\cos\varphi\cos(\omega x) + \sin\varphi\sin(\omega x))$

D'où : $y(x) = A_0\cos(\omega x - \varphi)$.

<u>FICHE D'EXERCICES n°4</u> : Equations Différentielle

<u>Exercice 1</u> :

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :

a. $y'' - 2y' - 2y = 0 \ avec \ y(0) = 1 \ et \ y'(0) = 0$
b. $2y'' - y = 0 \ avec \ y(0) = y'(0) = 1$
c. $y'' + 4y' + 5y = 0 \ avec \ y(0) = 1 \ et \ y'(0) = 1$
d. $9y'' + 4y = 0 \quad avec \ y(\pi) = y'(\pi) = 0$
e. $y' - 3y = 0 \ avec \ y(0) = 2$
f. $y' + y\ln 2 = 0 \ avec \ y(0) = 1$

<u>Exercice 2 :</u>

1. Déterminer la solution particulière f de l'équation différentielle : $y'' + y = 0$ vérifiant $f(0) = 1 \ et \ f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$.
2. Etudier les variations de la fonction f ainsi obtenue et représentation (C) sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. (unité graphique 2 cm).
3. Soit (D) le domaine du plan limité par (C), les axes de coordonnées et la droite d'équation $\frac{\pi}{2}$.
   Calculer le volume V du solide de révolution engendré par la rotation de (D) autour de l'axe des abscisses.
   On donnera la valeur exacte de V en cm^3 puis une valeur approchée à 10^{-3} près.

<u>Exercice 3 :</u>

On se propose de résoudre l'équation différentielle avec second membre :
$y'' - 4y = 12x^2 - 8x + 2$ (E)

1. Résoudre $y'' - 4y = 0 \quad (E')$

2. déterminer une fonction polynôme du second degré P solution de (E).
3. a) supposons que f_1 et f_2 sont deux solutions de (E), montrer que $f_1 - f_2$ est solution de (E').
   b. Réciproquement, montrer que si f est une solution particulière de (E) et φ la solution générale de (E'), alors $f + \varphi$ est solution de (E).
   c. Déduire l'ensemble des solutions de (E).
   d. Déterminer la solution g de (E) vérifiant les conditions initiales $g'(0) = g(0) = 0$.

Exercice 4:

Soit (E) l'équation différentielle : $y'' - 3y' + 2y = -x^2 + x + 2$.

1. Trouver un polynôme de degré 2 solution de (E).
2. On pose $f(x) = g(x) - \frac{1}{2}x^2 - x$.
   Montrer que f est solution de (E) si et seulement si g est solution de (E') :
   $$y'' - 3y' + 2y = 0$$
3. Déterminer la solution générale de (E) dont la courbe représentative dans un repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ passe par le point de coordonnées (0 ;2) et admettant ce point une tangente perpendiculaire à la droite (D) d'équation : (D) :$y = x + 3$

Exercice 5

Soit l'équation différentielle (1) : $y' - 2y = xe^x$

1. Résoudre l'équation différentielle (2) : $y' - 2y = 0$, où y désigne une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Soient a et b deux réels et soit u la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = (ax + b)e^x$.
   a. Déterminer a et b pour que u soit solution de l'équation (1).
   b. Montrer que v est une solution de l'équation (2) si et seulement si $u + v$ est solution de (1).
   c. En déduire l'ensemble des solutions de (1).
3. Déterminer la solution de l'équation (1) qui s'annule en 0.

Exercice 6

On considère l'équation différentielle : $9y'' + 4y = 4\sqrt{3}$ (E).

1. Résoudre l'équation différentielle sans second membre (E') : $9y'' + 4y = 0$.
2. Déterminer la fonction constante y_1 solution particulière de (E).
3. Montrer que y est solution de (E) si et seulement si $y - y_1$est solution de (E').
4. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E). donner parmi ces solutions la fonction h telle que : $h'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{4}{3}$ et $h''\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{4}{9}$.

5. a. Ecrire $h(x)$ sous la forme : $A + B\cos(\omega x + \varphi)$ $où\ A, B, \omega\ et\ \varphi$ sont quatre réels que l'on précisera.
   b. Résoudre l'équation $h(x) = 0\ dans\ \mathbb{R}$.

Exercice 10

1. Donner la solution générale de l'équation différentielle : $y' + 2y = 0$.
2. On a constaté qu'après une injection intraveineuse de glucose, la glycémie décroît à partir d'un certain instant choisi comme origine des temps selon la loi : $g' + 2g = 0$ où g désigne la fonction glucémique dépendant du temps t et de k une constante positive appelée coefficient d'assimilation glucidique.
   a. Déterminer la fonction g telle que à l'instant $t = 0, g(0) = 2$.
   b. Sachant qu'à l'instant $t_1, g(t_1) = \delta_1$, exprimer k en fonction de δ_1, δ_1 étant le taux de glycémie à l'instant t_1.
   c. La valeur moyenne de k chez un sujet normal varie de $1{,}06.10^{-2}$à $2{,}42.10^{-2}$. Sachant qu'à l'instant $t_1 = 30$, le taux de glycémie de Samuel est de 1,20 et celui de Bintou est de 0,22 préciser si les résultats sur les deux sujets sont normaux ou non.

Exercice 11

Un bloc de céramique est posé dans un four, dont la température constante de $1000^{\circ}C$.

La température θ du bloc est une fonction du temps t(en heures) qui vérifie l'équation différentielle : $\theta'(t) = k(1000 - \theta(t))$ (E).

1. On pose $y = \theta - 1000$. Ecrire une équation différentielle (F) satisfaite par y. Résoudre (F), puis (E).
2. Le bloc initialement à $40^{\circ}C$ est déposé dans le four au temps $t = 0$. Si la température du bloc au temps $t = 1$est $160^{\circ}C$. Calculer sa température au temps $t = 3$.

Exercice 15

on considère l'équation différentielle : (E_L) : $y'' + 2Ly' + y = 0\ où\ L \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer la solution φ_0 de l'équation (E_0) vérifiant $\varphi_0(0) = -1\ et\ \varphi'_0(0) = \sqrt{3}$.
2. Soit f la fonction de la variable réelle x définie sur l'intervalle $[-\pi; \pi]$ par : $f(x) = \sqrt{3}\sin x - \cos x$.
   a. Etudier les variations de f et construire sa courbe représentative (C) dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$(unité 2 cm).

b. Soit g la restriction de f à l'intervalle $\left[-\frac{5\pi}{6};\frac{\pi}{6}\right]$ et (C') la courbe représentative de g dans le même repère. La révolution de (C') autour de l'axe des abscisses engendre un solide (S) de l'espace. Calculer le volume de (S).

- **SUITES NUMERIQUES**
- Rappels
  - Définition

    On appelle suite toute fonction

    $$u: I \subseteq \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
    $$n \mapsto u(n)$$
    $$avec\ D_u = I$$

    C'est donc une application d'une partie de $I\ de\ \mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. Sauf précision contraire I est infinies. La suite u est notée (u_n) ou encore $(u_n)_{n\in I}$, $I \subseteq \mathbb{N}$. Le terme général est noté u_n.
  - Suites explicites, suites récurrentes
    - Suite explicite

      On appelle suite explicite toute suite entièrement définie par la donnée d'une fonction f et de la relation : $u_n = f(n)$

      Exemple : $u_n = n^3 + 3n + 1$avec $f(x) = x^3 + 3x + 1$.
    - Suite récurrente

      On appelle suite récurrente toute suite u définie par la donnée de la relation : $u_{n+1} = f(u_n)$ où f fixée et d'un de ces 1^{er} terme.

      Observation : le terme d'un rang donné d'une suite récurrente dépend de celui qui le précède.
  - Suites particulières
    - Suite géométrique
      - Définition :

        On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in I}$, $I \subseteq \mathbb{N}$ est géométrique si $\forall\ n \in I, n + 1 \in I\ et\ u_{n+1} = qu_n$ où q est une constante réelle appelée **raison** de la suite $(u_n)_{n\in I}$.

- Terme général :
  $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de 1er terme u_0 et de raison q signifie que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = qu_n$. Ainsi
  $$u_1 = qu_0$$
  $$u_2 = qu_1$$
  $$\dots$$
  $$u_n = qu_{n-1}$$
  En multipliant membre à membre et après simplification, on obtient :
  $u_n = q^n u_0$ appelé **terme général** de la suite (u_n). En général pour tout $p \in \mathbb{N}$/ $0 \leq p < n$, on a : $u_n = q^{n-p}u_p$.
- Conséquences :
  1) Si $a; b\ et\ c$ sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique alors : $b^2 = ac$.
  2) Si (u_n) est géométrique alors $\forall n \geq 1$, $(u_n)^2 = u_{n-1} \times u_{n+1}$.
- Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique
  Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de 1er terme $u_p (0 \leq p < n)$
  $S_n = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = \sum_{i=p}^{n} u_i$.
  - Si $q \neq 1$, alors $S_n = u_p \frac{1-q^{(n-p+1)}}{1-q}$ où $(n - p + 1)$ est le nombre de terme de la somme et u_p le 1er terme de la somme.
  - Si $q = 1$, alors $S_n = (n - p + 1)u_p$.
- Sens de variation
  Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et 1erterme $u_p\ avec\ (0 \leq p < n)$.

- Si $u_p > 0$
  1) Si $q > 1$ alors (u_n) est croissante.
  2) Si $q = 1$ alors (u_n) est constante.
  3) Si $0 < q < 1$ alors (u_n) est décroissante.
  4) Si $q < 0$ alors on ne peut rien dire.
- Si $u_p < 0$
  1) Si $q > 1$ alors (u_n) est décroissante.
  2) Si $q = 1$ alors (u_n) est constante.
  3) Si $0 < q < 1$ alors (u_n) est croissante.
  4) Si $q < 0$, on ne peut rien dire.

❖ Convergence

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et 1[er]terme $u_p\ avec\ (0 \leq p < n)$.

- Si $-1 < q < 1$ c'est-à-dire $|q| < 1$, alors la suite converge vers 0.
- Si $q < -1$ou $q > 1$, c'est-à-dire $|q| > 1$ alors la suite diverge.
- Si $q = 1$, alors la suite converge.
- Si $q = -1$, alors la suite diverge.

Suite arithmétique

❖ Définition

On dit qu'une suite $(u_n)_{n\in I}$, $I \subseteq \mathbb{N}$ est arithmétique si $\forall\ n \in I, n + 1 \in I\ et\ u_{n+1} = u_n + r$ où r est une constante réelle appelée **raison** de la suite $(u_n)_{n\in I}$.

- Terme général

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de 1^er^ terme u_0 et de raison r signifie que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n + r$. Ainsi

$$u_1 = u_0 + r$$
$$u_2 = u_1 + r$$
$$\dots$$
$$u_n = u_{n-1} + r$$

En additionnant membre à membre et après simplification, on obtient : $u_n = u_0 + rn$ appelé **terme général** de la suite (u_n). En général pour tout $p \in \mathbb{N} / 0 \leq p < n$, on a : $u_n = u_p + (n-p)r$.

- Somme des termes consécutifs

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q et de 1^er^ terme $u_p (0 \leq p < n)$

$S_n = u_p + u_{p+1} + \cdots + u_n = \sum_{i=p}^{n} u_i$ est donnée par :

$S_n = \frac{(n-p+1)}{2}(u_p + u_n)$ où $(n-p+1)$ est le nombre de terme de la somme et u_p et u_n sont respectivement le 1^er^ et le dernier terme de la somme.

- Progression arithmétique

Trois réels a, b et c sont en progression arithmétique s'ils sont dans cet ordre 3 termes consécutifs d'une suite arithmétique.

  - Si a, b et c sont en progression arithmétique alors $a + c = 2b$.
  - Si (u_n) est une suite arithmétique alors $\forall n \geq 1, u_{n-1} + u_{n+1} = 2u_n$.

- Comportement local et global d'une suite
  - Convergence

    Une suite est dite convergente lorsque sa limite est finie. Elle est divergente dans le cas contraire.
  - Variation
  - Définition :
    1) Une suite $(u_n)_{n\in I}$ est dite croissante (resp.décroissante) ssi $\forall\, n \in I, n+1 \in I, u_{n+1} - u_n \geq 0$ $(resp. u_{n+1} - u_n \leq 0)$.

    NB : lorsque les inégalités ci-dessus sont remplacées par des inégalités strictes, on obtient strictement croissante (resp. décroissante).
    2) $(u_n)_{n\in I}$ est dite constante (stationnaire) ssi $u_{n+1} = u_n$ou $u_{n+1} - u_n = 0$.
    3) $(u_n)_{n\in I}$ est dite monotone (resp. strictement monotone) si elle est soit croissante, soit décroissante (resp. soit strictement croissante, soit strictement décroissante).
  - Remarques :
    1) Une suite géométrique n'est monotone que si sa raison est positive.
    2) Soit $(u_n)_{n\in I}$, si tous ses termes sont strictement positifs c'est-à-dire $\forall\, n \in I, u_n > 0$, on peut utiliser le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et le comparer à 1.

       Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ alors $(u_n)_{n\in I}$ est croissante(strictement croissante si $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$).

Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ alors $(u_n)_{n\in I}$ est décroissante(strictement décroissante si $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$).

- Suite périodique
  Soit $(u_n)_{n\in I}$ une suite. (u_n) est périodique de période $p \in \mathbb{N}^*$ signifie que $\forall\, n \in I, (n+p) \in I$ et $\forall\, n \in I, u_{n+p} = u_n$ (1) où p est le plus petit entier naturel non nul vérifiant (1). Si (u_n) est périodique de période p alors elle est périodique de période $kp, k \in \mathbb{N}^*$
- Suites majorées, suites minorées
  Une suite $(u_n)_{n\in I}$ est dite majorée (resp. minorée) s'il existe $M \in \mathbb{R}\ (resp.\, m \in \mathbb{R})$ tels que $\forall\, n \in I, u_n \leq M\ (resp.\ u_n \geq m)$.
  - Observation :
    1) Toute suite majorée et minorée est dite bornée.
    2) Toute suite croissante et majorée (resp. décroissante et minorée) est convergente.

- Enoncés admis sur les limites
  - Comparaison
    Soit $(u_n), (v_n) et\ (w_n)$ trois suites.
    1) Si à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$alors, $\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$. (Enoncé analogue, si $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$).
    2) Si à partir d'un certain rang, $|u_n - l| \leq v_n$et $et\ \lim_{n\to+\infty} v_n = 0\ alors\ \lim_{n\to+\infty} u_n = l$.

3) Si à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n \leq w_n$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} w_n = l$alors $\lim_{n\to+\infty} v_n = l$.

- Compatibilité avec l'ordre

  Si à partir d'un certain rang, $u_n \leq v_n$ et si $\lim_{n\to+\infty} u_n = l$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = l'$alors $l \leq l'$.

- Compléments
  - Suites adjacentes

    Soit (u_n) *et* (v_n) des suites respectivement décroissante et croissante, si $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} v_n = l$ (l finie) alors (u_n) *et* (v_n) sont dites adjacentes.
  - **Importante :**

    Soit (u_n) une suite et f une fonction. Si (u_n)**converge vers l**et f est **continue en l**et $u_{n+1} = f(u_n)$ alors $f(l) = l$ (pour retrouver , on résous l'équation $f(x) = x$).

- **Travaux Pratiques**
  - **TP1**

    Soit f/ $f(x) = x^2 + 1$ et la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n), \forall n \geq 0 \end{cases}$

    1) Représenter (C_f) *pour* $x \geq 0$.
    2) Représenter les trois premiers termes de (u_n) sur l'axe des abscisses.

  - **TP2**

    on pose $f(x) = \frac{2+x}{x}, \forall\, n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n) et\ u_0 = 1$.

    1) Etudier et représenter graphiquement $f$pour $x > 0$.
    2) Représenter les quatre premiers termes de (u_n) sur l'axe des abscisses.
    3) a)Montrer que $\forall\, x \in I = \left[\frac{3}{2}; 3\right]$, $|f'(x)| \leq \frac{8}{9}$

b)Montrer que $\forall\, x \in I, f(x) \in I$ et en déduire que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, u_n \in I$.
4) a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique $\alpha \in I$. Déterminer α.
b)Montrer que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{8}{9}|u_n - \alpha|$ et en déduire que $|u_n - \alpha| \leq (\frac{8}{9})^{n-1}|u_1 - \alpha|$ et que (u_n) converge vers α. c) A partir de quelle valeur de n a-t-on$|u_n - \alpha| \leq 10^{-4}$.

Exercice 1 :
Etudier la convergence de la suite (U_n) définie par :

1. $U_n = \frac{2n}{2+3n}$; 2. $U_n = -4n + 5$; 3. $U_n = \sqrt{\frac{3n}{n^2} + 16}$

Exercice 2 :
Soit la suite (U_n) définie par : $U_0 = 0$et $U_{n+1} = 2 + \frac{U_n}{2}$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout $n, n \geq 2$, on a : $2 < U_n < 4$.
2. Prouver que la suite (U_n) est strictement croissante.
3. En déduire que (U_n) est convergente.

Exercice 3 :
Soit la suite (U_n) définie par : $U_0 = 0$et $U_{n+1} = 1 + \frac{U_n}{2}$.

1. Représenter graphiquement sur la droite (OI) les 6 premiers termes de la suite(U_n).
2. Démontrer que pour tout entier$n$, (U_n) est bornée.
3. Démontrer que la suite (U_n) est croissante.
4. En déduire que (U_n) est convergente.

Exercice 4 :
Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}^*$par $U_n = \frac{n(n+2)}{(n+1)^2}$.

1. Démontrer que, pour tout entier naturel$n$, on a : $0 < U_n \leq 1$.
2. Etudier le sens de variation de la suite(U_n).
3. En déduire que (U_n) est convergente
4. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} U_n$

Exercice 5 :
Soit la suite arithmétique (U_n) telle que $U_{12} = 13$ *et* $U_{20} = 25$.

1. Calculer la raison r et le premier terme U_0
2. Calculer S_{10}la somme de ses premiers termes.

Exercice 6 :

On considère la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_n = \frac{2U_n+3}{4+U_n} \end{cases}$

1. On pose, pour tout entier n : $V_n = \frac{U_n-1}{U_n+3}$, montrer que (V_n) est une suite géométrique.
2. Exprimer V_n, puis U_n en fonction de n.

Exercice 7 :

Soit la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \sqrt{2 + {U_n}^2} \end{cases}$ pour $n \geq 0$.

1. Montrer que la suite (V_n), définie par : $V_n = (U_n)^2$ est une suite arithmétique.
2. Ecrire une expression de V_n en fonction de n.
3. En déduire une expression de U_n en fonction de n.

Exercice 8 :

Soit la suite géométrique (V_n) de raison $\frac{1}{2}$ et telle que $V_8 = \frac{3}{32}$.

Calculer V_{20} et S_{10} la somme de ses 10 premiers termes.

Exercice 9 :

Soient les suites (a_n) et (b_n) définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_{n+1} = \dfrac{2a_n + b_n}{3} \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} b_0 = 8 \\ b_{n+1} = \dfrac{a_n + 3b_n}{4} \end{cases}$$

1. Calculer a_1 et b_1.
2. Soit la suite (d_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $d_n = b_n - a_n$.
   a. Démontrer que (d_n) est une suite géométrique. Déterminer le premier terme d_0 et la raison q.
   b. En déduire une expression de d_n en fonction de n. puis en déduire que : $\forall\, n \in \mathbb{N}, d_n > 0$.
   c. Calculer la limite de la suite (d_n).

   3. a Démontrer que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} - a_n = \frac{d_n}{3}$ et $b_{n+1} - b_n = \frac{-d_n}{4}$. En déduire les variations des suites (a_n) et (b_n).

   b. Démontrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, a_0 < a_n < b_n < b_0$.

   c. Déduire des questions 3.a et 3.b que les suites (a_n) et (b_n) sont convergentes.

4 .a. déduire de la question 3.a que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*, a_n - a_0 = \frac{1}{3}(d_0 + d_1 + \cdots + d_{n-1})$.

b. Déduire la limite de la suite (a_n) $puis\ celle\ de\ la\ suite$ (b_n).

Exercice 10 :

Soit (U_n) la suite définie par : $U_1 = \frac{1}{3}$ et $U_{n+1} = (\frac{n+1}{3n})U_n$pour $n \geq 1$.

1. Calculer $U_2; U_3; U_4; U_5\ et\ U_6$
2. Montrer que la suite de terme général $V_n = \frac{U_n}{n}$ est géométrique.
3. En déduire les expressions des suites V_n et U_n en fonction de n.

Exercice 12 :

Soient (U_n)et (V_n) deux suites numériques définies par :

$$\begin{cases} U_1 = 12 \\ \forall\, n \geq 1, U_{n+1} = \dfrac{U_n + 2V_n}{3} \end{cases} \quad et \quad \begin{cases} V_1 = 1 \\ \forall\, n \geq 1, V_{n+1} = \dfrac{U_n + 3V_n}{4} \end{cases}$$

1. $\forall\, n \geq 1$, on pose $W_n = V_n - U_n$.
   a. Démontrer que (W_n) est une suite géométrique.
   b. Exprimer W_n en fonction de n.
   c. Démontrer que (W_n) est convergente et déterminer sa limite.
2. Démontrer que la suite (U_n) est décroissante et que la suite (V_n) est croissante.
3. Démontrer que $\forall\, n \geq 1$, on a : $V_n \leq U_n$; en déduire que $U_1 \geq U_n \geq V_n \geq V_1$.
4. Déduire que les suites (U_n)et (V_n) convergent vers la même limite.
5. $\forall\, n \geq 1$, on pose $t_n = 3U_n + 8V_n$.
   a. Démontrer que (t_n) est une suite stationnaire.
   b. en déduire la valeur de la limite commune des suites (U_n)et (V_n).

Exercice 13 :

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $U_0 = 0\ et\ U_{n+1} = U_n - n$.

On considère la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $V_n = U_{n+1} - U_n$ (1)

1. Exprimer V_n en fonction de n.
2. En déduire la somme $S_n = V_1 + V_2 + \cdots + V_n$.
3. a. Utiliser (1) pour trouver une autre expression de S_n.
   b. En déduire une expression de U_n en fonction de n.
4. Calculer $\lim_{n \to +\infty} U_n$.

Exercice 14 :

On considère la suite numérique U définie par : $U_0 = 7\ et\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{2U_n + 6}{5}$

1. calculer $U_1; U_2\ et\ U_3$
2. soit V la suite numérique définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = U_n - 2$.
   a. Démontrer que V est géométrique. Préciser la raison et le premier terme.
   b. Exprimer V_n en fonction de n.
   c. En déduire que $U_n = 5(\frac{2}{5})^n + 2$
   d. Quelle est la limite de la suite U ?

3. Soit f la fonction définie sur $[0; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{2x+6}{5}$. (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O,I,J).L'unité graphique est 2cm.
   a. Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variation.
   b. Tracer la courbe (C) et la droite d'équation : $y = x$.
   c. Utiliser (C) et (D) pour construire $U_0; U_1; U_2$ et U_3 sur l'axe (OI).
   d. Que peut-on conjecturer quant à la limite de la suite U.

<u>Exercice 15 :</u>

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O,I,J).

Soit f l'application définie par : $f(z) = \frac{1}{4}(3 + i\sqrt{3})z$.

1. On pose $z_0 = 1 - i$ et $z_1 = f(z_0)$.
   a. Ecrire z_0 sous sa forme trigonométrique.
   b. Calculer le module r_1 de z_1 et déterminer un argument θ_1 de z_1.
2. On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, z_n = r_n(\cos\theta_n + i\sin\theta_n)$ où $\theta_n$désigne un argument de z_n et $r_n$son module.

   On considère la suite (z_n), définie par :$z_0 = 1 - i$ et $z_{n+1} = \frac{1}{4}(3 + i\sqrt{3})z_n$.
   a. Préciser la nature de cette suite et en donner les caractéristiques.
   b. Calculer z_n en fonction de n.
   c. Calculer r_n $et\theta_n$ en fonction de n.
   d. Préciser la nature de chacune des suites (r_n) $et(\theta_n)$ et les caractériser.

<u>Exercice 16 :</u>

Soit (U_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} U_0 \in [0;1] \\ U_n = \sqrt{\frac{1+U_n}{2}} \end{cases}$

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N},\ 0 \le U_n \le 1$.
2. Démontrer que (U_n) est une suite croissante.
3. On pose $U_0 = \cos y$, $y \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.
   a. Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N},\ U_n = \cos(\frac{y}{2^n})$.
   b. Etudier la convergence de la suite (U_n).

<u>Exercice 17 :</u>

On considère l'application f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ qui à tout complexe z associe le complexez' tel que : $f(z) = z' = \frac{1+i}{3\sqrt{2}}z$.

On pose $z_0 = 1;\ z_1 = f(z_0);\ z_2 = f(z_1)$ et de façon générale, pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = f(z_n)$.

1. Calculer le module et un argument du complexe $Q = \frac{1+i}{3\sqrt{2}}$.
2. Calculer z_1; z_2 et z_3. On fournira les résultats sous forme algébrique et trigonométrique et on représentera leurs images dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé $(o; \vec{u}; \vec{v})$ (unité graphique 9cm).
3. Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel, on a : $z_n = (\frac{1+i}{3\sqrt{2}})^n$.
   En déduire le module et un argument de z_n .
4. Pour quelles valeurs de l'entier naturel n, z_n est-il :
   a. Réel ?
   b. Imaginaire pur ?
5. Calculer la limite quand n tend vers l'infini, du module de z_n . Interpréter graphiquement ce résultat.

<u>Exercice 18 :</u>

On définit $\forall n \in \mathbb{N}, n > 0$ la suite (U_n) de nombres réels strictement positifs par : $U_n = \frac{n^2}{2^n}$.

1. $\forall n > 0$, on pose : $V_n = \frac{U_{n+1}}{U_n}$.
   a. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} V_n = \frac{1}{2}$
   b. Montrer que $\forall n > 0, V_n > \frac{1}{2}$.
   c. Trouver le plus n_0 tel que si $n \geq n_0, V_n < \frac{3}{4}$
   d. En déduire que si $n \geq n_0$alors $U_{n+1} < \frac{3}{4} U_n$.
   On pose pour tout entier naturel $n \geq 5$, $S_n = U_5 + U_6 + \cdots + U_n$.
2. On se propose de montrer que $n \geq 5$, (S_n) est convergente.
   a. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 5$, $U_n \leq (\frac{3}{4})^{n-5} U_5$.
   b. Montrer que $n \geq 5, S_n \leq [1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 + \cdots + (\frac{3}{4})^{n-5}] U_5$
   c. En déduire que $n \geq 5$, $S_n \leq 4U_5$.
3. Montrer que $(S_n)_{n\geq5}$est croissante et en déduire qu'elle converge.

<u>Exercice 19</u>

Soit la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_{1=-1} \\ u_{n+1} = \frac{n}{2(n+1)} u_n + \frac{3(n+2)}{2(n+1)} \end{cases}$

1) Démontrer par récurrence, que la suite (u_n) est majorée par 3.
2) Etudier le sens de variation de la suite (u_n).
3) On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N} *$ par : $v_n = n(3 - u_n)$

a) Prouver que cette suite est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme
b) Exprimer v_n , puis u_n en fonction de n.
c) Calculer $\lim_{n\to+\infty} v_n$ et $\lim_{n\to+\infty} u_n$

<u>Exercice 20</u> : On définit la suite (u_n), $n \in \mathbb{N}$ par : $u_0 = 1$ et la relation

$$\begin{cases} u_{2n+1} = \dfrac{1}{2}u_{2n} \\ u_{2n+2} = 1 + u_{2n+1} \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$$

1. Calculer $u_1 \;\; et \; u_2$
2. Soit les (v_n) et (w_n) définies par les relations :
$$v_n = 2 - u_{2n} \quad et \; w_n = 1 - u_{2n+1} \;;\;\; n \in \mathbb{N}$$
   a. Montrer que les suites (v_n) et (w_n) sont deux suites géométriques de raison $\frac{1}{2}$.
   b. Exprimer u_{2n} et u_{2n+1} en fonction de n. La suite (u_n) est-elle convergente ?
3. On donne $S_n = \sum_{i=0}^{n} u_{2i}$; $S'_n = \sum_{i=0}^{n} u_{2i+1}$et $S''_n = \sum_{i=0}^{2n+1} u_i$.
   Déterminer S_n, S'_n et S''_n en fonction de n.

<u>Exercice 21</u>: Soit pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, la somme $S_n = \sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \cdots + \sin\frac{(n-1)\pi}{n}$.

1. Posons $z = \cos\frac{\pi}{n} + i\sin\frac{\pi}{n}$
   a. Donner une expression simple de la somme :$Z = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}$.
   b. Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de Z.
   c. En déduire l'expression de S_n en fonction de n.
2. Quelle est la limite de la suite $(\frac{S_n}{n})n \in \mathbb{N}^*$?

<u>Exercice 22</u> : Soit U une suite géométrique à termes positifs de premier terme U_1 telle que :

$$\begin{cases} U_1 . U_5 = 729 \\ U_2 . U_4 = 72 \end{cases}$$

1. Déterminer la raison q et le premier terme U_1.
2. Calculer $S_n = \sum_{i=1}^{n} U_i$ et étudier $\lim_{n\to+\infty} S_n$.
3. Déterminer le plus petit entier $n_0 \; tel \; que \; : \; \left|S_n - \frac{729}{2}\right| \leq 10^{-50}$
4. On pose $P_n = \prod_{i=1}^{n} U_i = U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$.
   a. Soit $V_n = \ln(U_n)$. Calculer V_1, V_2, V_3. Quelle est la nature de la suite (V_n).
   b. Calculer $S'_n = \sum_{i=1}^{n} V_i$. En déduire $P_n$et $\lim_{n\to+\infty} P_n$.

<u>Exercice 23</u> :

Soit une suite numérique définie par : $U_0 = 2$et $\forall \; n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{{U_n}^2}{2U_n - 1}$.

1. Démontrer, par récurrence que : $\forall\ n \in \mathbb{N}, U_n > 1$.
2. On considère les suites $(V_n)\ et\ (W_n)$ telles que : $\forall\ n \in \mathbb{N}, V_n = \frac{U_n - 1}{U_n}\ \ et\ W_n = \ln(V_n)$.
   a. Démontrer que $\forall\ n \in \mathbb{N}, V_n > 0$.
   b. Démontrer que (W_n) est géométrique. Préciser le premier terme W_0 et la raison q.
   c. Exprimer W_n puis $V_n$en fonction de n.
3. justifier que $U_n = \frac{1}{1-(\frac{1}{2})^{2n}}$.
   c. calculer la limite de la suite (U_n).

Exercice 24 :

On considère la suite définie par : $U_0 = e$ et $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \sqrt{U_n}$.

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = \ln(U_n)$.

1. a. Montrer $V_{n+1} = \frac{1}{2} V_n$

b. En déduire que (V_n) est une suite géométrique. Déterminer le premier terme et la raison.

c. Donner l'expression de V_n en fonction de n.

2. on pose : $\forall n \in \mathbb{N},\ \ S_n = V_0 + V_1 + V_2 + \cdots + V_n$et $P_n = U_0 \times U_1 \times U_2 \times \ldots \times U_n$.

a. montrer que : $P_n = e^{S_n}$.

b. Exprimer S_n en fonction de n et en déduire l'expression de P_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite de (S_n) puis en déduire la limite de la suite (P_n).

Exercice 25 :

Soit la suite (U_n) de terme général $U_n = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$

1. a. Montrer que la suite (U_n) est croissante.

b. Montrer par récurrence que, pour $U_n \leq 2 - \frac{1}{n}$.

c. En déduire que la suite (U_n) converge.

2. soit (V_n) la suite de terme général $V_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\ \ et\ f(x) = \ln x$.

a. montrer que sur l'intervalle $[k; k+1](k \geq 1)$, $f'(x) \leq \frac{1}{k}$

b. En appliquant l'inégalité des accroissements finis à f sur $[k; k+1]$, montrer que, pour $k \geq 1$: $\ln(k+1) - \ln(k) \leq \frac{1}{k}$.

3.a. Déduire de la question 2) que :$\ln(n+1) \leq V_n$.

b. Quel est le comportement de la suite (V_n)en $+\infty$.

➢ STATISTIQUES A DEUX VARIABLES

1. Tableau d'effectifs

Exemple

On relève la taille et le poids de chacun des 20 élèves d'un établissement et on note chaque relevé
sous la forme $(x_i; y_i)$où $x_i$et $y_i$représentent respectivement la taille et le poids du ième élève. On obtient la liste suivante :
(162; 55) ; (159; 58) ; (178; 74) ; (166; 62)
(158; 56) ; (163; 61) ; (171; 66) ; (178; 79)
(168; 64) ; (168; 62) ; (156; 58) ; (161; 68)
(172; 66) ; (166; 63) ; (185; 84) ; (179; 73)
(166; 64) ; (177; 72) ; (166; 63) ; (166; 62).
Ce relevé constitue une série statistique quantitative double c'est-à-dire d'une série statistique à deux caractères quantitatifs qui sont la taille et le poids.
Si on note $x$la variable "taille" et $y$la variable de "poids".
Les réels $x_i(resp\ y_i)$ des couples $(x_i;\ y_i)$sont les valeurs de la variable $x\ (resp\ y)$.

Remarque : Si les valeurs sont trop nombreuses, on peut les regrouper en classe de taille et de poids comme ceci :

Ce tableau est un tableau d'effectifs de la série dont les valeurs sont regroupées en classe. A
partir de ce tableau on peut obtenir un tableau d'effectifs d'une série à une variable à caractère quantitatif(taille ou poids). Une telle suite extraite s'appelle une distribution marginale. Les effectifs correspondants s'appellent les effectifs marginaux.

2. nuage de points, point moyen

Considérons une série statistique à deux variables quantitatives discrète $x$et y.
Soient $(x_1; y_1); (x_2; y_2); \dots; (x_n; y_n)$ les valeurs de cette série.

a) L'ensemble des points$M_i(x_i; y_i)$; $1 \leq i \leq n$placé dans un plan muni d'un repère orthogonal s'appelle **le nuage** de points associé à cette série.
b) Soit $\bar{x}$la moyenne des points $x_1;\ x_2; \dots; x_n$et $\bar{y}$celle des valeurs $y_1;\ y_2; \dots; y_n$.

Le point $G(\bar{x};\ \bar{y})$ s'appelle **le point moyen du nuage**.

<u>Exemple</u> 1

Soit la série statistique double définie par le tableau suivant :

3. <u>ajustement affine d'un nuage</u>

- **<u>Définition</u>**

Lorsque la forme du nuage de points d'une série statistique à deux variables laisse penser qu'il est possible de tracer une droite passant le plus près possible des points du nuage, on dit que l'on peut réaliser un ajustement affine ou ajustement linéaire de ce nuage. Une telle droite est appelée droite d'ajustement affine du nuage.

- **<u>Méthode d'ajustement :</u>**

Soit une série statistique double $(x_1; y_1); (x_2; y_2); \ldots ; (x_n; y_n)$dont le nuage des points peut être ajusté. Il existe plusieurs manières de tracer la droite d'ajustement.

- **<u>Tracer au jugé</u>**

A l'aide d'une règle on trace au jugé une droite que l'on estime passer le plus près possible de
l'ensemble des points du nuage.

- **<u>Utilisation du point moyen</u>**

On place un point moyen Gdu nuage et on trace une droite qui passe par Get qui passe le plus
près possible des points du nuage.

- **<u>Méthode de fractionnement ou méthode de Mayer</u>**

On partage le nuage de points en deux sous nuages dont les effectifs ne diffèrent pas de plus
d'un. On place les points moyens G_1et G_2des deux nuages. La droite (G_1G_2) est alors la droite
d'ajustement affine.

<u>FICHE D'EXERCICES</u> : Statistique

<u>EXERCICE 1 :</u>

Le tableau suivant donne pour chaque année, le nombre de naissances enregistrées dans une marie.

Année	1988	1990	1992	1994	1996	1998
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6
Nombre de naissance y_i	374	a	334	312	b	266

Lors d'un déménagement de cette mairie, les registres de naissances des années 1990 et 1996 ont été égarés, de sorte que le nombre de naissances de ces années reste introuvable.

Mais un stagiaire qui y était affecté avant la perte des documents avait permis d'obtenir par la méthode de Mayer par regroupement des trois premiers points et des trois derniers points du nuage, la droite d'ajustement de $y\ en\ x$ d'équation :
$y = -22x + 397$.

1. A combien peut-on estimer le nombre de naissances lors de l'année 1995 ?
2. On suppose que l'évolution des naissances reste semblable au cours des années à venir.
   a. Quel sera le nombre de naissances au cours de l'année 2000 ?
   b. A partir de quelle année y aurait-il deux fois moins de naissances qu'en 1988 ?
3. Déterminer a et b.

<u>EXERCICE 2 :</u>

le tableau suivant donne les résultats d'une étude réalisée sur un produit P ;

$x$représente le prix de vente unitaire du produit exprimé en $FCFA$; y représente la quantité du produit P disponible sur le marché, exprimée en milliers.

x_i en $FCFA$	30	35	45	60	80	100
y_i en milliers	12,5	13	13	15	15,5	16

On considère l'ensemble des points M_i de coordonnées $(x_i; y_i)$, où $1 \leq i \leq 6$.

1)

a) Construire le nuage de points M_i (1,5 représenteront 10 $FCFA$ en abscisses et 1 cm représentera 1000 en ordonnées)

b) Un ajustement affine de ce nuage semble-t-il raisonnable ? Justifier la réponse.

2. a. Construire la droite (Δ) d'ajustement affine obtenue par la méthode de Mayer.

On prendra pour premier sous nuage les trois premiers points et pour deuxième les trois derniers.

c. Déterminer une équation de (Δ) sous la forme $y = ax + b$, a et b étant deux réels à préciser .

4. En utilisant l'équation de (Δ), estimer :
   - La quantité P disponible sur le marché pour un prix de vente de $150F$.
   - Le prix de vente si la quantité du produit P disponible sur le marché est de 20 000.

<u>EXERCICE 3 :</u>

I)Une entreprise veut prévoir le nombre d'articles qu'elle aurait en stock en l'an 2004. L'évolution du stock de ses articles au cours des sept dernières années 1990 est donnée par le tableau statistique ci-dessous :

Ordre X_i des années	1	2	3	4	5	6	7
Nombre Y_i d'articles en stock	3810	3860	3940	4020	4100	4180	4220

1. A partir de quelle année l'entreprise s'est –elle intéressée à ses stocks ?
2. Représenter graphiquement le nuage de points de la distribution statistique définie par le tableau précédent dans le plan muni du repère orthogonal (O, I, J).(*on prendra pour unité 2cm en abscisse et 200 articles pour 1 cm sur la droite des ordonnées*).

3. Calculer les coordonnées du point moyen G de ce nuage de points.
4. Déterminer par la méthode du ‘’ tracé au jugé’’ l’équation de la droite d’ajustement affine.(*on donnera l’arrondi d’ordre 1 du coefficient directeur de cette droite*)
5. Quel serait le nombre d’articles de l’entreprise en stock à l’année 2004.(*on donnera la valeur approchée d’ordre 1 par excès du résultat*).

II) Dans la série statistique double à quatre éléments suivante deux valeurs désignées par $a\ et\ b$ ont été perdues.

X	1	7	5	3
Y	a	6	b	4

On sait toutefois qu’on a obtenu la droite (G_1G_2) d’ajustement affine d’équation $y = \frac{2}{5}x + 3$ par la méthode de *Mayer*.

Déterminer $a\ et\ b$.

EXERCICE 4

Le tableau suivant donne l’évolution de 1985 à 1994 du prix moyen en francs d’un kilogramme d’un produit fabriqué par une entreprise.

Année	1985	1986	1987	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994
Rang de l’année x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Prix en francs y_i	12	17	18	22,5	26	27,5	32,5	33	36,5	37

1. a.Représenter graphiquement par un nuage de points $M_i(x_i,\ y_i), 0\ \leq i \leq 10$ cette série statistique dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$. on prendra pour unités graphiques :

1 cm pour 1 an en abscisses

1 cm pour 5 francs en ordonnées.

Peut-on réaliser un ajustement affine de ce nuage ?

b.Déterminer les coordonnées du point moyen G. placer G.

2. on donne les droites (D) et (D’) d’équations respectives :

(D) : $y = 2{,}8x + 10{,}8$

(D’) : $y = 6x - 6{,}8$

a. Déterminer l’intersection des droites (D) et (D’). Que remarque-t-on ?

b.Tracer (D) et (D’) dans le même repère que le nuage.

3.<u>Utilisation de l'ajustement précédent</u>

a. Les experts prévoient un prix supérieur à 47 F en 1996. Cette prévision vous paraît –elle justifiée ?

b. Estimer l'année à partir de laquelle la valeur y sera supérieure ou égale à 50 F.

<u>EXERCICE 5</u>

Une entreprise fabrique des vêtements. Dans le tableau suivant, on a indiqué pour les sept premiers mois de l'année 2008 la production journalière moyenne de pulls.

Mois	janvier	février	mars	avril	mai	juin	Juillet
Rang du mois x_i	1	2	3	4	5	6	7
Production journalière y_i	200	210	260	265	270	300	315

La direction devra fermer l'atelier de fabrication de pulls si la production moyenne journalière n'atteint pas 350 pulls à la fin de l'année 2008.

On considère le nuage de points $M_i(x_i;\ y_i)$ associé au tableau ci-dessus, relativement à un repère orthonormal (o ;$\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$) ; prendre pour unités : abscisse : 1 cm par rang de mois ; en ordonnée : 1 cm pour 20 pulls produits.

1. –
   a. Représenter le nuage de points le repère (o ;$\vec{\imath}$; $\vec{\jmath}$).
   b. Calculer les coordonnées du point moyen G et le placer.
2. –
   a. Calculer les coordonnées du point moyen G_1 associé aux quatre premiers points du tableau, puis celles du point moyen G_2 associé aux trois derniers points.
   b. Déterminer une équation de la droite (G_1G_2) et la tracer.
3. On admet que (G_1G_2) réalise un ajustement du nuage de points.
   a. Déterminer par le calcul la production journalière moyenne de pulls en décembre 2008.
   b. Comment peut-on retrouver graphiquement ce résultat ?
4. L'atelier de fabrication de pulls a-t-il été fermé en fin décembre 2008 ? justifier votre réponse.

Géométrie dans l'espace

- Produit scalaire dans l'espace
  On désigne par E l'ensemble des points de l'espace V, l'ensemble des vecteurs associés à E.
  - Def 1 : pour tout vecteur $\vec{u}$; $\vec{v} \in V$. On appelle produit scalaire de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ le réel noté $\vec{u}.\vec{v}$ et défini par : $\vec{u}.\vec{v} = 0$ si $\vec{u} = \vec{0}$ ou si $\vec{v} = \vec{0}$ et
    $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\| \cos(\vec{u};\vec{v})$ si $\vec{u} \neq \vec{0}$et $\vec{v} \neq \vec{0}$.
  - P_1 : pour tous vecteurs $\vec{u}$; $\vec{v}\ et\ \vec{w} \in V$ et tout α; $\beta \in \mathbb{R}$, on a :
    $\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}\ \ (commutativité)$.
    $$(\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}).\vec{w} = \alpha(\vec{u}.\vec{w}) + \beta(\vec{v}.\vec{w})(bilinéaire)$$
  - Rq :
    $\vec{u}.\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{0} ou \vec{v} = \vec{0}$
    Ou $\vec{u} \perp \vec{v}$.
  - Déf 2 :
    Soit $\vec{u} \in V$. Si V est muni d'un produit scalaire, la norme de $\vec{u}$ est notée $\|\vec{u}\|$définie par $\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}.\vec{u}}$.
  - Déf 3 :
    Pour tout point $A; B \in E$. On appelle distance de A à B le réel positif noté $AB\ ou\ d(A;B)$ définie par : $AB = \left\|\overrightarrow{AB}\right\|$.
- Repères ortho normaux directs de l'espace
  - Repère orthonormaux
    - Déf4 :
      On appelle base orthonormal de V le triplé $(\vec{\imath};\ \vec{\jmath};\ \vec{k})$ de vecteur tel que $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = \|\vec{k}\| = 1$et $\vec{\imath}.\vec{\jmath} = \vec{\jmath}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{\imath} = 0$.
    - Déf5 :
      On appelle repère orthonormal de l'espace E tout triplet $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath};\ \vec{k})$ où O est un point appelé point origine et

$(\vec{\imath};\ \vec{\jmath};\ \vec{k})$ est une base normale de V.

$\vec{u};\ \vec{v}\ \in V$ tels que : $\vec{u}\ =\ x\vec{\imath}\ +\ y\vec{\jmath}\ +\ z\vec{k}$

$\vec{v}\ =\ x'\vec{\imath}\ +\ y'\vec{\jmath}\ +$
$z'\vec{k}$

On a : $\vec{u}.\vec{v}\ =\ xx'\ +\ yy'\ +\ zz'$, donc :

$\|\vec{u}\|\ =\ \sqrt{\vec{u}.\vec{u}}\ =\ \sqrt{x^2\ +\ y^2\ +\ z^2}$.

- Orientation de l'espace

  Soit $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath};\ \vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace E. si nous appliquons la règle du bonhomme d'ampère 2 et 2 situations peuvent se produire.

  Le bonhomme est placé sur l'axe (Oz) regardant (Ox) voit (Oy) à sa gauche : le repère est directe.

  Le bonhomme est placé sur l'axe (Oz) regardant (Ox) voit (Oy) à sa droite : le repère est indirecte.

- Exemple

  Soit $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath};\ \vec{k})$ un repère orthonormé direct. on vérifie en utilisant la règle du bonhomme d'ampère :

  $(O;\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath};\ \vec{k})$, $(O;\ \vec{\jmath};\ \vec{k};\ \vec{\imath})$; $(O;\ \vec{k};\ \vec{\imath};\ \vec{\jmath})$ sont directs.

$(O;\ \vec{\imath};\ \vec{k};\ \vec{\jmath})$; $(O;\ \vec{k};\ \vec{\jmath};\ \vec{\imath})$; $(O;\ \vec{\jmath};\ \vec{\imath};\ \vec{k})$sont indirects.

- Produit vectoriel
  - Déf

    Soit $\vec{u}\ et\ \vec{v}$ deux vecteurs d'un même espace V. on appelle produit vectoriel de $\vec{u}\ par\ \vec{v}$, le vecteur noté $\vec{u}\wedge\vec{v}$ et défini par :
    - $\vec{u}\wedge\vec{v} = \vec{0}$ si $\vec{u}\ et\ \vec{v}$ sont colinéaires.
    - si $\vec{u}\ et\ \vec{v}$ ne sont pas colinéaires alors $\vec{u}\wedge\vec{v}$ est orthogonal à $\vec{u}\ et\ \vec{v}$ tel que $(\vec{u};\ \vec{v};\ \vec{u}\wedge\vec{v})$ soit directe et
      $$\|\vec{u}\wedge\vec{v}\| = \|\vec{u}\|.\|\vec{v}\|.|\sin(\vec{u};\ \vec{v})|$$

  - P_2: pour vecteurs $\vec{u};\ \vec{v}\ et\ \vec{w}$ de l'espace et pour tout réel α ; on a :

    $\vec{u}\wedge\vec{v} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u}\ et\ \vec{v}$sont colinéaires.
    $$\vec{u}\wedge\vec{v} = -(\vec{v}\wedge\vec{u})$$
    $$(\alpha\vec{u})\wedge\vec{v} = \alpha(\vec{u}\wedge\vec{v}) = \vec{u}\wedge(\alpha\vec{v})$$
    $$(\vec{u}+\vec{v})\wedge\vec{w} = \vec{u}\wedge\vec{w} + \vec{v}\wedge\vec{w}$$
    $$\vec{u}\wedge(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\wedge\vec{v} + \vec{u}\wedge\vec{w}$$

  - Expression analytique

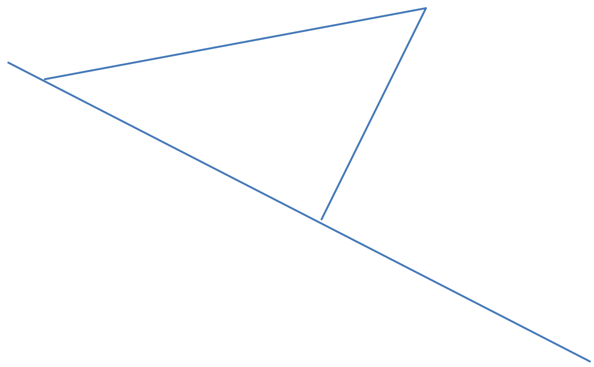
    P_4 : soit $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\ et\ \vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans une base orthonormale directe $(\vec{\imath};\ \vec{\jmath};\ \vec{k})$. Les coordonnées de $\vec{u}\wedge\vec{v}$ sont :
    $\left(\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix};\ \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}\right) = (yz' - zy'; zx' - xz'; xy' - yx')$.

- Aire d'un triangle, aire d'un parallélogramme

  P_5 : soitABC un triangle et $ABDC$ un parallélogramme. On a :
  $$A(ABC) = \frac{\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\|}{2}$$

$A(ABDC) = \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$

- TP_1 : distance d'un point à une droite
  Soit (AB) une droite, M un point du plan.
  Soit H le projeté orthogonal de Msur (AB).
  On note $d(M;(AB))$ la distance de
  M à (AB), la distance MH.



Après démonstration, on montre que :

$$d(M;(AB)) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{AB}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}$$

- TP_2 : distance d'un point à un plan.
  Soit $A, B\ et\ C$ trois points non alignés de l'espace. Soit M un point de l'espace. Considérons H le projeté orthogonal de M sur le plan (ABC). On appelle distance du point M au plan (ABC) le réel positif noté $d(M;(ABC))$ et défini par $d(M;(ABC)) = MH$

Après démonstration, on montre que :

$d(M;(ABC)) = \frac{\|\overrightarrow{AM}.(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})\|}{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|}$ou encore

$$d(M;(ABC)) = \frac{|\overrightarrow{AM}.(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})|}{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|}$$

- P_5 : pour tous points non alignés $A, B\ et\ C$.
  Si M est un point de l'espace alors la distance de M au plan (ABC)est $d\big(M; (ABC)\big) = \frac{|\overrightarrow{AM}.(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})|}{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|}$.
- Th : **distance d'un point à un plan**

Soit (P) le plan d'équation : $ax + by + cz + d = 0$et $M(x_0;\ y_0;\ z_0)$.

On a :$d\big(M; (P)\big) = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

- Calcul de volume

  - Volume d'un tétraèdre

$$V = \frac{1}{3} Surface\ de\ base \times Hauteur$$

    - Base triangulaire
      Soit le tétraèdre $ABCD$ de base ABC et de sommet D. On a :
      $V = aire(ABC) \times \frac{1}{3} h;$
      avec$aire(ABC) = \frac{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|}{2}$ et
      $h = d\big(D; (ABC)\big) = \frac{|\overrightarrow{AD}.(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})|}{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|}$
      D'où $V = \frac{1}{6} |\overrightarrow{AD}.(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})|$

    - Base : un parallélogramme
      Soit le tétraèdre $ABCDE$ de base $ABCD$ et de sommet E. On a :
      $V = aire(ABCD) \times \frac{1}{3} h;$
      avec$aire(ABCD) = \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$ et
      $h = d\big(E; (ABCD)\big) = \frac{|\overrightarrow{AE}.(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})|}{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|}$
      D'où $V = \frac{1}{3} |\overrightarrow{AE}.(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})|$

  - Volume un parallélépipède

Soit A, B, C et D 4 points non *coplanaires* (coplanaire veut dire appartiennent à un même plan). Considérons le parallélépipède $ABECFGKD$. Notons V son volume.

$$V = surface\ de\ base \times hauteur$$
$$surface\ de\ base = aire(ABEC)$$
$$hauteur = d\big(D; (ABEC)\big)$$
$$V = \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| \times \frac{|\overrightarrow{AD}.(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})|}{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|}$$

Donc : $V = |\overrightarrow{AD}.(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})|$.

- Complément
  - Comment montrer qu'un point appartient à un plan :
    - Connaissant l'équation du plan :
      On vérifie si les coordonnées du point vérifient l'équation du plan ;
    - Ne connaissant par l'équation du plan :
      On vérifie si la distance de ce point au plan est égale à 0.
      Dans le cas contraire ce point n'appartient au plan.
  - Comment déterminer l'équation du plan :
    On déterminer un vecteur normal au plan $\vec{n}$ (par exemple pour le plan (ABC), $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$).en suite soit $M(x; y; z) \in (P)$, on a :
    $\overrightarrow{AM} \perp \vec{n} \iff \overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$.
  - Comment montrer que des points sont coplanaires :
    Cela revient à montrer qu'il appartiennent à un même plan.

<u>FICHE D'EXERCICES n°8</u> : Géométrie dans l'espace

I) <u>APPLICATIONS</u>

Exercice 1 :

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $(O;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j};\vec{k})$. On donne $A(1;0;2); B(0;2;1); C(2;1;0); D(2;4;3)$.

Placer les points $A; B; C\ et\ D$.

1. A) déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{n}$; normal au plan (ABC).
   b)En déduire une équation du plan (ABC).
   c)Le vecteur $\vec{v}(1;-2;3)$ est-il normal au plan (ABC) ? justifier.
   2. soit $E(-1;1;2)$
   a. E est-il un point du plan (ABC) ?
   b. Calculer si possible la distance du point E au plan (ABC).
   3. a. Vérifier que ABCD est un tétraèdre.
   b. Calculer le volume du tétraèdre ABCD.
   c. Calculer l'aire de ABCD.

Exercice 2 :

L'espace est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j};\vec{k})$.
Calculer l'aire du triangle ABC dans les cas suivants :

a. A(2 ; -1 ; 1), B(0 ; -3 ; 2), C(6 ; 3 ; -1).
b. A(2 ; -1 ; 1), B(0 ; -3 ; 2), C(2 ; -3 ;4).

Exercice 3 :

1. Soit A, B, C trois points non alignés de l'espace.
   Déterminer l'ensemble des points M tels que : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.
2. Soient (Δ) et (Δ') deux droites de même vecteur directeur $\vec{u}\ et\ H$ un point de (Δ).
   On désigne par H' le projeté orthogonal de H sur (Δ').
   a. Démontrer que pour tout point A de (Δ) et tout point A' de (Δ')
   $\overrightarrow{AA'} \wedge \vec{u} = \overrightarrow{HH'} \wedge \vec{u}$.
   b. En déduire que : $HH' = \frac{\|\overrightarrow{AA'} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$
   c. Application numérique : soient $A(-1;2;5)et\ A'(4;\ -1;9)$; soient (Δ) et (Δ') les droites de vecteur directeur $\vec{u}(-2;2;1)$ contenant respectivement A et A'.
   Calculer la distance de (Δ) et (Δ').

Exercice 4

1. Soit ABC un triangle. On pose $AB = c \quad BC = a \quad et\ AC = b$.
   a. Démontrer que $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CA} \wedge \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BA}$ et que $\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}}$
   b. En utilisant l'égalité $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$ établir que $\cos \hat{A} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$. Donner des expressions
   Identiques pour $\cos \hat{B}$, $\cos \hat{C}$.
2. Soit (Δ) une droite de repère $(A, \vec{v})$. Soit M un point de l'espace E et K son projeté orthogonal sur (Δ).
   a. Démontrer que $MK = \frac{\|\overrightarrow{MA} \wedge \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}$
   b. Application : soit les points A(0 ; 3 ; -1), B(1 ; 4 ; 0) et M(1 ; -1 ; 1). Calculer la distance de M à la droite (AB).
3. Soit ABCD un tétraèdre et V son volume.
   a. Montrer que l'aire du triangle ABC est $A = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$
   b. Donner l'expression de $d(D; (ABC))$
   c. Etablir l'expression du volume V.
4. Dans l'espace E rapporté par le repère $(O; \vec{\imath}\ ; \vec{\jmath}; \vec{k})$. On considère les points M(m ;0 ; 0), N(0 ; n ; 0) et P(0 ; 0 ; p) avec m, n et p sont des réels positifs.
   a. Calculer le volume V de OMNP.
   b. Démontrer que si $d = d(O; (MNP))$ alors $\frac{1}{d^2} = \frac{1}{m^2} + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{p^2}$

<u>Exercice 5 (ok)</u>

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal direct $(O; \vec{\imath}\ ; \vec{\jmath}; \vec{k})$. On donne les points A(3 ; 2 ; -1) et H(1 ; -1 ; 3).

1. Calculer la longueur AH.
2. Déterminer une équation du plan (P) passant par H et orthogonal à la droite (AH).
3. On donne les points : $B(-6; 1; 1), C(4;\ -3; 3)\ et\ D(-1; -5; -1)$.
   a. Démontrer que les points B, C et D appartiennent au plan (P).
   b. Calculer les coordonnées du produit vectoriel $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}$.
   c. Démontrer que l'aire du triangle BCD est égale à $5\sqrt{29}$.
   d. Démontrer que le volume du tétraèdre ABCD est égal à $\frac{145}{3}$.
4. a. Calculer l'aire du triangle ABC.
   b.Calculer la distance du point D au plan (ABC).
   <u>Exercice 6</u> :

Dans le repère orthonormé $(O;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j};\vec{k})$ on considère les points :
$A(3;0;1)$, $B(0;\ -1;2)$, $C(1;\ -1;0)\ et\ \ D(1;1;\ -2)$

1. montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AC}\ et\ \overrightarrow{BC}$ sont orthogonaux. En déduire la nature du triangle ABC. Calculer l'aire du triangle ABC.
2. a. Vérifier que le vecteur $\vec{n}(2;\ -5;1)$ est un vecteur normal au plan (ABC).
   b. En déduire une équation du plan (ABC).
3. a. Déterminer la distance du point D au plan (ABC).
   b. Déterminer le volume du tétraèdre ABCD.

Exercice 7 :

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j};\vec{k})$, on considère les points A, B, C et D de coordonnées respectives :
$A(0;0;3)$, $B\left(2\sqrt{2};0;\ -1\right)$, $C\left(-\sqrt{2};\ -\sqrt{6};\ -1\right)\ et\ D(-\sqrt{2};\ \sqrt{6};\ -1)$.

1. Démontrer que ABCD est un tétraèdre régulier, c'est-à-dire un tétraèdre dont toutes les arêtes sont de même longueur. Calculer son volume en U.V
2. On note R, S, T et U les milieux respectifs des arêtes $[AC],\ [AD],\ [BD]\ et\ [BC]$; démontrer que RSTU est un parallélogramme de centre O.

Exercice 8 :

L 'espace rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j};\ \vec{k})$. On donne les points $A(2,\ 0;0)$; $B(0;3;0)\ et\ C(0;0;\ -2)$.

1. Déterminer les coordonnées du vecteur $\vec{u}$ défini par $\vec{u} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.
2. Soit $H(a;b;c)$ le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC).
   a. Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{AH}\ et\ \vec{u}$?
   En déduire que : $3a + 2b - 3c - 6 = 0$.
   b. Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{OH}\ et\ \vec{u}$?
   En déduire qu'il existe un réel tel que :
$$\begin{cases} a = -6t \\ b = -4t \\ c = 6t \end{cases}$$
   c. Déterminer la valeur de t puis donner les coordonnées de H.
   d. Calculer la distance du point O au plan (ABC).
3. Calculer le volume du tétraèdre de base ABC et de sommet O.

Exercice 9 :

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j};\vec{k})$, on donne les points $A(0;1;1)$, $B(1,0;0)$; $C(-1;2;1)\ et\ D(0;1;2)$.

1. Calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et en déduire que les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. Déterminer l'aire du triangle ABC.

3. a.Calculer$(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}).\overrightarrow{AD}$

   b.En déduire que les points A, B, C et D sont coplanaires.

4.Déterminer une équation cartésienne du plan ABC.

5. Soit $I(2; 1; 2)$ calculer la distance du point I au plan ABC.
6. En déduire en unités de volume, le volume du tétraèdre BACI.

Exercice 10 :

On considère l'espace muni du repère orthonormal direct $(O; \vec{\imath}\ ; \vec{\jmath}; \overrightarrow{k})$ où $\vec{k} = \vec{\imath} \wedge \vec{\jmath}$.
on considère les points $A(3; 1; 0), B(1; 2; 0)$, $C(3; 2; 1)et\ D(0; 0; d)$ où d désigne un réel positif non nul. On a ainsi un tétraèdre $ABCD$.

1. On pose $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$
   a. Calculer les coordonnées de $\vec{n}$.
   b. En déduire l'aire du triangle ABC.
2. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).
3. On note H le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC) :
   a. Expliquer pourquoi il existe un réel γ tel que $\overrightarrow{DH} = \gamma\overrightarrow{n}$.
   b. Calculer γ en fonction de d.
   c. En déduire l'expression de la distance DH.
   d. Montrer que le volume du tétraèdre ABCD est $V_d = \frac{2d+5}{6}$.
4. Déterminer pour quelle valeur de d la droite (DB) est perpendiculaire au plan (ABC).
5. On suppose que $d = 0$. Calculer la distance de A au plan (OBC).

Exercice 11 :OK

On considère l'espace muni du repère orthonormal direct $(O; \vec{\imath}\ ; \vec{\jmath}; \overrightarrow{k})$; les points $A(0; 2; 3); B(3; 3; 3); C(-3; 0; 1)$; $D(0; 1; 1); E(3; -1; 1)$.

1. Montrer que ABDC est un parallélogramme.
2. –
   a. Ecrire l'équation cartésienne du plan (ABC)
   b. E appartient- il au plan (ABC) ?
3. Calculer, en unité de volume, le volume de la pyramide de sommet E et de base ABDC.

Exercice 12 :

On considère l'espace muni du repère orthonormal direct $(O; \vec{\imath}\ ; \vec{\jmath}; \overrightarrow{k})$.

Soit les points $A, B\ et\ C$ tels que $\overrightarrow{OA} = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - \vec{k}$, $\overrightarrow{OB} = -\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} - 2\vec{k}$ et
$\overrightarrow{CO} = -2\vec{\imath} + \vec{\jmath} + \vec{k}$.

a) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).
b) Calculer la distance de $H(3;\ 1;\ 1)$au plan (ABC).

Courbes paramétrées planes

- Définition

soit P le plan muni d'un repère orthonormaldirect $(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$. Soit M le point de coordonnées $x = x(t)$ et $y = y(t)$ où $x\ et\ y$ sont des fonctions de la variable réelle t au moins une fois dérivable sur $I \subseteq \mathbb{R}$. On peut écrire $\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath}$.

le système : $\begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases}\ t \in I \subseteq \mathbb{R}$ est appelé représentation paramétrique ou système d'équations paramétriques de l'ensemble des positions du point M.

Soit (C) cet ensemble. On note (C) la courbe de représentation paramétrique

$$(C): \begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases}\ t \in I \subseteq \mathbb{R}$$

- <u>trajectoire de M</u>

considérons toujours le plan P. l'ensemble des positions successives du point M est appelé trajectoire de M.

On appelle équation cartésienne de la trajectoire de M, l'expression de x ou de $y$en fonction soit de y, soit de x indépendamment de t.

- <u>Vecteur vitesse</u>

Soit P le plan muni d'un repère orthonormaldirect $(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.

$M(x(t); y(t))$un point mobile de P. on appelle vecteur vitesse de M le vecteur

$$\boldsymbol{\vec{v}(t) = \frac{d\overrightarrow{OM}(t)}{dt}}$$

$$\boldsymbol{= \frac{d}{dt}(x(t)\vec{\imath} + y(t)\vec{\jmath})}$$

$$\boldsymbol{= x'(t)\vec{\imath} + y'(t)\vec{\jmath}}$$

$$\vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{t}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}'(\boldsymbol{t}) \\ \boldsymbol{y}'(\boldsymbol{t}) \end{pmatrix}$$

- <u>Théorème</u>
  Soit (C) la courbe de représentation paramétrique :
  $$(C) : \begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases} \quad t \in I \subseteq \mathbb{R}$$
  Et $M(t_0) \in (C_0)$. On appelle vecteur directeur de la tangente à la courbe au point $M(t_0)$ le vecteur non nul
  $$\vec{v}(t_0) = \boldsymbol{x}'(\boldsymbol{t_0})\vec{\boldsymbol{\imath}} + \boldsymbol{y}'(\boldsymbol{t_0})\vec{\boldsymbol{\jmath}}$$
  $$\vec{\boldsymbol{v}}(\boldsymbol{t_0}) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x}'(\boldsymbol{t_0}) \\ \boldsymbol{y}'(\boldsymbol{t_0}) \end{pmatrix}$$

- <u>Périodicité</u>
  le plan muni d'un repère orthonormaldirect $(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$. Soit (C) la courbe de représentation paramétrique :
  $$(C) : \begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases} \quad t \in I \subseteq \mathbb{R}$$
  - P_1 : si x a pour période T_1 et y a pour période T_2, alors x et y ont pour période commune $T = PPCM(T_1,\ T_2)$ strictement positif qui est la période du système : : $\begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases}$
    La courbe (C) est entière pour tout intervalle d'amplitude T (de largeur T).
  - P_2 : si $x\ et\ y$ vérifient l'un des éléments de symétrie et ont pour période commune T, alors on étudie $x\ et\ y$ sur $\left[0;\ \frac{T}{2}\right]$ et la courbe est entièrement obtenue en utilisant la symétrie.

- <u>Elément de symétrie</u>
  On considère le plan P muni d'un $ROND\ (O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$

Soit (C) la courbe de représentation paramétrique :

$$(C): \begin{cases} x(t) \\ y(t) \end{cases} \quad t \in I \subseteq \mathbb{R}$$

- Si $\underline{\boldsymbol{x\ est\ paire\ et\ y\ est\ impaire}}$
  Alors les points $M(t) et\ M(-t)$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

  L'axe des abscisses est donc un axe de symétrie de (C).

- Si $\underline{\boldsymbol{x\ est\ impaire\ et\ y\ est\ paire}}$
  Alors les points $M(t) et\ M(-t)$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

  L'axe des ordonnées est un axe de symétrie pour (C). On peut restreindre le domaine d'étude à $I \cap \mathbb{R}_+$.
- $\underline{\boldsymbol{x\ est\ paire\ et\ y\ est\ paire}}$

$$\begin{cases} x(t) = x(-t) \\ y(t) = y(-t) \end{cases}$$

  Alors $M(t) = M(-t)$, la courbe est entière dans $\cap\ \mathbb{R}_+$.

- ***x est impaire et y est impaire***

$$\begin{cases} x(-t) = -x(t) \\ y(-t) = -y(t) \end{cases}$$

Alors les points $M(t) et\ M(-t)$ sont symétriques par rapport à l'origine du repère.

L'origine du repère est un centre de symétrie à (C). On peut restreindre le domaine d'étude à $I \cap \mathbb{R}_+$.

Plan d'étude d'une courbe paramétrée

- Etudier la périodicité et la parité éventuelle des fonctions coordonnées permettant de réduire l'intervalle d'étude.
- Préciser les transformations géométriques qui conduisent à la courbe tout entière.

– Etude des variations simultanées des fonctions coordonnées.
  - Calculer les fonctions derivéesx'et y'.
  - Etudier les signes de $x'(t)$ et $y'(t)$ sur l'intervalle d'étude.
  - Dresser le tableau de variations conjointe (le plus complet possible).

❖ Formule importante :

$$\cos p + \cos q = 2\cos(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2})$$
$$\cos p - \cos q = -2\sin(\frac{p+q}{2})\sin(\frac{p-q}{2})$$
$$\sin p + \sin q = 2\sin(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2})$$
$$\sin p - \sin q = 2\cos(\frac{p+q}{2})\sin(\frac{p-q}{2})$$

- Tracer de la courbe
  - ❖ Dresser un tableau de coordonnées de points particuliers et des vecteurs directeurs des tangentes à ces points.
  - ❖ Placer ces points sur le graphique ; tracer les tangentes en ces points.
  - ❖ Tracer enfin la courbe sans oublier de la compléter par symétrie.

Complément

Equation de la tangente (T) en un point $A(x(t_0); y(t_0))$.

$\boldsymbol{\vec{v}(t_0)} = \begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix}$est un vecteur directeur de (T). Soit $M(x; y) \in (T)$, on a :

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-x(t_0) \\ y-y(t_0) \end{pmatrix}$ $colinéaire$ $\boldsymbol{\vec{v}(t_0)}\begin{pmatrix} x'(t_0) \\ y'(t_0) \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \boldsymbol{y'(t_0)\big(x - x(t_0)\big) - x'(t_0)\big(y - y(t_0)\big) = 0}$$

$\Leftrightarrow \boldsymbol{y = \frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}\big(x - x(t_0)\big) + y(t_0)}$avec $\boldsymbol{x'(t_0) \neq 0}$.

✓ <u>Applications :</u>

Exo1 : soit

$$(C) : \begin{cases} x(t) = \sin t \\ y(t) = \sin 3t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Comparer les positions de $M(-t) et\ M(t)$, puis $M(t+\pi) et\ M(t)$.

Exo2 :

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité : 3 cm

On considère le point $M(t)$ de coordonnées $(x(t); y(t))$ où

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{3}(\cos 2t + 2\cos t) \\ y(t) = \dfrac{1}{3}\sin 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

1. Pour tout réel t, étudier la position des points $M(t+2\pi)\ et\ M(t); puis\ M(-t)\ et\ M(t)$.
2. Etudier les variations des fonctions : $t \to x(t)\ et\ t \to y(t)$ sur l'intervalle $[0; \pi]$.
3. On appelle (C) l'ensemble des points $M(t)$ lorsque t décrit $\mathbb{R}$ et (C_1) la partie de la courbe (C) correspondant aux valeurs de t appartenant à l'intervalle $[0; \pi]$.
   Expliquer comment on peut obtenir (C) de (C_1).
   Tracer (C). préciser les points où la tangente est parallèle à l'un des axes de coordonnées.

FICHE D'EXERCICES n°7 : Courbe Paramétrée du plan

I) APPLICATIONS

Exercice 1 :

Dans un repère orthonormé, (C) est la courbe dont une représentation paramétrique est : $\begin{cases} x(t) = t - t^3 \\ y(t) = t^2 - t^4 \end{cases} \quad t \in [-1; 1]$

1. Comparer la position des points M(t) et M(-t).
   En déduire un élément de symétrie de (C).
2. Etudier les variations conjointes de x et y sur l'intervalle $[0; 1]$.
3. Déterminer les équations des tangentes aux points de paramètres $t = 0$; $t = 1$.
4. Tracer la courbe (C).

Exercice 2

Le plan est muni d'un repère orthonormal, l'unité graphique étant 1 cm.

1. Soit (C) la courbe dont une représentation paramétrique est :

$$\begin{cases} x(t) = \frac{1}{2}(t^2 + 2) \\ y(t) = \frac{1}{2}(t^3 + 2t) \end{cases} t \in \mathbb{R}$$

   a. Montrer que (C) est symétrique par rapport à l'axe des abscisses.
   b. Etudier conjointement les variations des fonctions $x\ et\ y$sur $[0; +\infty[$.
   c. Préciser la tangente au paramètre $t = 0$.
   d. Tracer (C).

2. Soit (P) la parabole d'équation : $y^2 = 4x$
   a. Tracer (P) dans le même repère que (C).
   b. Vérifier qu'une représentation paramétrique de (P) est :

$$\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = 2t \end{cases} t \in \mathbb{R}$$

Exercice 3

Soit la courbe (C) dont la représentation paramétrique est donnée par le système suivant :

$$\begin{cases} x = 3\cos t \\ y = 2\sin t \end{cases} \quad t \in [0; \pi]$$

1. Etudier les variations de $x\ et\ y$.
2. Montrer que la courbe est inscrit dans un rectangle de longueur 6 et de largeur 2.
3. Tracer la courbe ainsi que les tangentes aux points d'intersection de la courbe avec les axes du repère ; unité 4 cm.
4. Montrer que $x\ et\ y$ vérifient la relation : $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ et en déduire que l'équation cartésienne de la courbe est : $y = \frac{2}{3}\sqrt{9 - x^2}$
5. Soit (P) la plaque homogène, mince, limité par l'axe des abscisses et la courbe (C).
   Calculer le volume du solide engendré par la rotation de (P) au tour de l'axe des abscisses.

Exercice 4

Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité : 3 cm

On considère le point $M(t)$ de coordonnées $(x(t); y(t))$ où

$$\begin{cases} x(t) = \dfrac{1}{3}(\cos 2t + 2\cos t) \\ y(t) = \dfrac{1}{3}\sin 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

4. Pour tout réel t, étudier la position des points $M(t+2\pi)\ et\ M(t); puis\ M(-t)\ et\ M(t)$.
5. Etudier les variations des fonctions : $t \to x(t)\ et\ t \to y(t)$ sur l'intervalle $[0;\pi]$.
6. On appelle (C) l'ensemble des points $M(t)$ lorsque t décrit $\mathbb{R}$ et (C_1) la partie de la courbe (C) correspondant aux valeurs de t appartenant à l'intervalle $[0;\pi]$.
   Expliquer comment on peut obtenir (C) de (C_1).
   Tracer (C). préciser les points où la tangente est parallèle à l'un des axes de coordonnées.

Exercice 5

(C) la courbe dont la représentation paramétrique est : $\begin{cases} x(t) = \frac{(t+1)^2}{1+t^2} \\ y(t) = \frac{-2t^2}{1+t^2} \end{cases}$ $t \in [-1;1]$

1. etudier les variations des fonctions $t \to x(t)\ \ et\ \ \ t \to y(t)$. Consigner ces variations dans un même tableau.

2. Tracer (C)

3. Démontrer que (C) est un demi-cercle de centre A(1 ;-1).

Exercice 6

Considérons l'équation différentielle : $y'' + 4y = 0$.

1. Trouver les solutions $f\ et\ g$ de cette équation telles que :
   $f(0) = 5\ \ et\ f'(0) = 0$; $g(0) = 0\ \ et\ g'(0) = 8$
2. (C) est la courbe dont la représentation paramétrique est : $\begin{cases} x(t) = f(t) \\ y(t) = g(t) \end{cases}$ $t \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$
   Comparer la position des points de paramètres $t\ et\ \ (-t)$. En déduire un élément de symétrie de la courbe (C).
   Comparer la position des points de paramètres $t\ et\ \ (\frac{\pi}{2}-t)$. En déduire un élément de symétrie de la courbe (C).
3. Etudier les variations des fonctions $f\ et\ g\ \ sur\ \left[0;\frac{\pi}{4}\right]$
4. Tracer la courbe (C).

Exercice 7 (ok)

Le plan est muni d'un repère orthonormé , (C) est l'ensemble des points M(t) de coordonnées

$$\begin{cases} x(t) = 3\sin t + \sin(3t) \\ y(t) = 2\cos t + \cos(2t) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

1. Comparer M(t) et M(-t).
2. Comparer M(t+2π) et M(t)
3. Dresser le tableau de variation de $x(t)\ et\ \ y(t)\ \ sur\ [0;\pi]$
4. Construire la courbe (C).
5. Donner pour $t = 0\ \ et\ \ t = 3$, l'équation cartésienne de la tangente en M(t) à la courbe paramétrée dont les équations sont : $\begin{cases} x(t) = \ln(1+t) \\ \ \ y(t) = t^2 - t \end{cases}$

Exercice 8

Soit (C) la courbe définie dans un repère orthonormé par : $\begin{cases} x(t) = \sin(3t) \\ y(t) = \cos(t) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

1.a.Comparez M(t+2π) et M(t) ; M(-t) et M(t) ; M(t+π) et M(π-t). En déduire qu'il suffit d'étudier la courbe (C) pour $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$.

b. Etudier les variations des fonctions $x\ et\ y\ \ sur\ \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ puis dresser le tableau de variation conjoint.

2. placer les points de (C) correspondant aux valeurs 0; $\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{3}\ \ et\ \frac{\pi}{2}$ et les tangentes parallèles à ses points.

3. Tracer la partie de (C) correspondant à $t \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ puis achever la construction de (C) pour $t \in \mathbb{R}$.

Exercice 9 :

tracer dans le plan muni d'un repère orthonormal, l'ensemble (Γ) des points de coordonnées $(x(t); y(t))$ tels que :

$$\begin{cases} x(t) = \cos 3t \\ y(t) = \sin t + \cos t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

Exercice 10 :

1. Soients $a, b,$ et c les nombres définis pour tout réel t par :

$$\begin{cases} a = -\frac{1}{2}\sin 2t + \frac{2}{3}\cos t + \frac{2}{3} \\ b = \sin 2t - \frac{1}{3}\cos t + \frac{2}{3} \\ c = -\frac{1}{2}\sin 2t - \frac{1}{3}\cos t + \frac{2}{3} \end{cases}$$

a. Démontrer que pour tout réel t, il existe un barycentre, noté $G(t)$, du système de points pondérés $\{(A, a); (B, b); (C, c)\}$.

c. Montrer que, pour tout réel t, les coordonnées du point $G(t)$ sont :

d. $\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \frac{3}{2}\sin(2t) \end{cases}$

Lorsque le paramètre t varie, ce barycentre décrit une courbe Γ, que l'on se propose d'étudier.

2. Etude des symétries de la courbe Γ.
   a. Etudier les positions relatives des points $G(t)\ et\ G(t + 2\pi)$
   b. Etudier les positions relatives des points $G(t)\ et\ G(-t)$
   c. Etudier les positions relatives des points $G(t)\ et\ \ G(\pi - t)$.
   d. Déduire de ce qui précède, en justifiant la démarche, un intervalle d'étude approprié pour les fonctions $x$et y.

   3.a Etudier le sens de variation de chacune des fonctions $x\ et\ y$ sur l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ et les faire apparaître dans un même tableau.

   b. Placer les points de Γ correspondants aux valeurs du paramètre $0, \frac{\pi}{4}\ et\ \frac{\pi}{2}$ et tracer les tangentes à la courbe Γ en ces points.

   c. Tracer la partie de Γ obtenue lorsque t appartient à l'intervalle $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ puis tracer Γ.

<u>Exercice 11</u> :

soit (Γ) la courbe paramétrée définie par le système :

$$\begin{cases} x(t) = \cos(2t) - 2\cos(t) \\ y(t) = 3\sin(t) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

1) Etudier la parité et la périodicité de $x$et y.
2) En déduire qu'il suffit d'étudier la courbe (Γ) sur $I = [0; \pi]$ pour avoir toute la courbe.
3) Etudier les variations de x et y sur $I = [0; \pi]$ et étudier un tableau de variations conjoints.
4) Tracer la courbe (Γ) entièrement dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité graphique 1 cm.

Exercice 12

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on se propose de tracer la courbe (C), ensemble des points du plan de coordonnées :

$$\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \sin(\frac{t}{3}) \end{cases}$$

1) Etudier les positions relatives de $M(t), M(t + 6\pi), M(-t), M(3\pi - t)$. En déduire le domaine d'étude de (C).
2) Faire l'étude conjointe des variations de x et y.
3) Tracer (C) pour t élément de l'intervalle $\left[0; \frac{3\pi}{2}\right]$.

Exercice 13

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité 2cm). On désigne par (C) la courbe de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x(t) = \sin t\,(\cos t + 2\sqrt{2}) \\ y(t) = \sin(t)(\cos t - 2\sqrt{2}) \end{cases}$$

a. Calculer $x(t + 2\pi)$ et $y(t + 2\pi)$; $x(-t)$ et $y(-t)$; $x(\pi - t)$ et $y(\pi - t)$. En déduire que la courbe C admet un centre de symétrie et un axe de symétrie que l'on précisera.
b. Soit Γ l'arc de la courbe C correspondant à $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Montrer que l'on peut construire C à partir de Γ à l'aide de transformations géométriques simples.
c. Etudier les variations de x et y sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$. Tracer Γ, puis C. on précisera les tangentes à Γ aux points de paramètres respectifs $t = 0$ et $t = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 14

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ (unité 2cm). On désigne par (C) la courbe définie par ses équations paramétriques:

$$\begin{cases} x(t) = 2\cos t + \cos(2t) \\ y(t) = 2\sin t - \sin(2t) \end{cases} t \in \mathbb{R}.$$

a. Comparer les positions des points $M(t)$ et $M(t + 2\pi)$. Comparer les positions des points $M(t)$ et $M(-t)$. En déduire une symétrie de la courbe. En déduire un intervalle d'étude I.
b. Etudier les variations de x et y sur I.
c. Donner les coordonnées du point de la courbe pour $t = \frac{\pi}{2}$. Donner les coordonnées d'un vecteur directeur de la tangente en ce point.

Tracer la courbe C. on admettra qu'aux points de vecteur de dérivé nul, la tangente passe par O.

Exercice 1:

1. Un dé A, bien équilibré possède :
   Une face numérotée 1 ;
   Deux faces numérotées 2 ;
   Une face numérotée 4 ;
   Une face numérotée 5 ;
   Une face numérotée 6.
   a) On lance une fois le dé A et on lit le numéro inscrit sur la face supérieure. Quelle est la probabilité d'obtenir le numéro 2 ?
   b) On lance 3 fois de suite le dé et on note de la gauche vers la droite les chiffres obtenus successivement. On obtient ainsi un nombre de 3 chiffres. Quelle est la probabilité d'obtenir le nombre 421 ?
2. Un autre dé B, bien équilibré possède :
   Une face numérotée 1 ;
   Deux faces numérotées 2 ;
   Deux face numérotée 4 ;
   Une face numérotée 6.
   On lance 3 fois de suite le dé B comme la question 1.b).
   Vérifier que la probabilité d'obtenir le nombre 421 est égale à $\frac{1}{54}$.
3. Une urne contient 4 dés identiques au A et 6 dés identiques au dé B.
   Eloi tire au hasard un dé et le lance 3fois de suite pour obtenir un nombre de comme décrit précédemment.
   a) Démontrer que la probabilité d'obtenir 421 est égale $\frac{2}{135}$.

Exercice 2:

Un nouvel établissement scolaire a deux classes de terminales D : TD_1 et TD_2.
Ces deux classes contiennent respectivement 60% et 44% de filles.
La terminale TD_1 contient deux fois plus d'élèves que la terminale TD_2.
On choisit au hasard un élève de terminale D de cet établissement.
On désigne par D_1, D_2 et F les évènements suivants :
D_1 : «l'élève choisi est en TD_1»
D_2 : «l'élève choisi est en TD_2»
F : «l'élève choisi est une fille».

1)a) Démontrer que la probabilité de D_1est $\frac{2}{3}$.
b) Quelle est la probabilité de D_2 ?
2)a)Expliciter l'évènement $D_1 \cap F$ et démontrer que $P(D_1 \cap F) = \frac{6}{10} \times \frac{2}{3}$, puis simplifier le résultat.
b) Démontrer que la probabilité de F est $\frac{41}{75}$.
3) Sachant que l'élève choisi est une fille, quelle est la probabilité que cette fille soit en TD_1.

4) On suppose que la terminale D_1 contient 30 filles.
Déterminer l'effectif de chacune des deux classes.

Exercice 3:

Une urne U_1 contient 3 boules noires et une boule blanche.
Une urne U_2 contient 2 boules noires et 3 boules blanches. (Toutes les boules sont indiscernables au toucher).
On tire une boule dans une des 2 urnes. De plus, on suppose que l'on a deux fois plus de chance de tirer la boule dans urne U_1 que dans U_2.
1)a)Démontrer que la probabilité de choisir l'urne U_1 et de tirer une boule blanche est $\frac{1}{6}$.
b) Calculer la probabilité de choisir l'urne U_2 et de tirer une boule blanche.
c)En déduire que la probabilité de tirer une boule blanche est $\frac{11}{30}$.
2) Sachant que la boule est blanche, déterminer la probabilité :
a) Qu'elle provienne de l'urne U_1
b) Qu'elle provienne de l'urne U_2.

Exercice 4:

Un joueur débute un jeu au cours duquel il est amené à faire successivement plusieurs parties.
La probabilité que le joueur perde la première partie est de 0,2.
Le jeu se déroule ensuite de la manière suivante :

- S'il gagne une partie, alors il perd la partie suivante avec une probabilité de 0,05.
- S'il perd une partie, alors perd la partie suivante avec une probabilité de 0,1.

1. On appelle :

E_1 l'évènement '' le joueur perd la première partie'' ;
E_2 l'évènement '' le joueur perd la deuxième partie'' ;
E_3 l'évènement '' le joueur perd la troisième partie'' .
On appelle X la variable aléatoire qui donne le nombre de fois où le joueur perd lors des trois premières parties.
On pourra s'aider d'un arbre pondéré.

a) Quelles sont les valeurs prises par X ?
b) Montrer que la probabilité de l'évènement (X=2) est égale à 0,031 et que celle de l'évènement (X=3) est égale 0,002.
c) Déterminer la loi de probabilité de X.
d) Calculer l'espérance de X.

2. Pour tout entier naturel n non nul, on note E_2 l'évènement :'' le joueur perd la n-ième partie'', $\overline{E_n}$ l'évènement contraire, et on note p_n la probabilité de l'évènement E_n.
   a. Exprimer, pour tout entier naturel non nul, les probabilités des évènements $E_n \cap E_{n+1}$ et $\overline{E_n} \cap E_{n+1}$ en fonction de p_n.
   b.En déduire que $p_{n+1} = 0{,}05p_n + 0{,}05$ pour tout entier naturel non nul.
3. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul par :

$u_n = p_n - \frac{1}{19}$.

a. Montrer que (u_n) est une suite géométrique dont précisera la raison et le premier terme.

b. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, u_n puis p_n en fonction de n.

c. calculer la limite de p_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 5 :

1. On considère un dé cubique truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On note P_i la probabilité d'apparition de la face i. Les P_i vérifient :
   $P_1 = P_2$; $P_3 = P_4 = 2P_1$; $P_5 = P_6 = 3P_1$

a. Montrer que $P_1 = \frac{1}{12}$

b. Montrer que la probabilité de l'évènement A : '' obtenir 3 ou 6'' est égale à $\frac{5}{12}$.

2. Un jeu d'adresse consiste à lancer le dé décrit ci-dessus puis à lancer une fléchette sur une cible fixe.
   Si le joueur obtient 3 ou 6, il se place à 5 m de la cible et lance la fléchette ; à 5 m, la probabilité d'atteindre la cible est alors $\frac{3}{5}$.
   Si l'évènement A n'est pas réalisé, il se place à 7m de la cible et lance la fléchette ; à 7 m, la probabilité d'atteindre la cible est alors $\frac{2}{5}$.
   On note C l'évènement :'' la cible est atteinte''.
   a. Déterminer $P({}^{C}/_{A})$et $P(C/\bar{A})$. En déduire que $P(C) = \frac{29}{60}$.
   b. Déterminer $P(A/C)$.
3. Le joueur dispose de 10 fléchettes qu'il doit lancer une à une, de façon indépendante, dans les mêmes conditions que précédemment définies. Calculer la probabilité qu'il atteigne la cible exactement 4 fois.

Exercice 6:

1. soit la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{1}{6}u_n + \frac{1}{3} \end{cases}$
   a. soit la suite (v_n) définie pour $n \geq 1$ par $v_n = u_n - \frac{2}{5}$; motrer que (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
   b. En déduire l'expression de v_n en fonction de n, puis celle de u_n.
2. On considère deux dés, notés A et B. le dé A comporte 3 faces rouges et 3 faces blanches. Le dé B comporte 4 faces rouges et 2 blanches.
   On choisit un dé au hasard et on le lance : si on obtient rouge, on garde le même dé, si on obtient blanc, on change de dé. Puis on relance le dé et ainsi de suite.
   On désigne par :
   - A_n l'événement '' on utilise le dé A au n° lancer'' ;
   - $\overline{A_n}$ l'événement contraire de A_n ;
   - R_n l'événement '' on obtient rouge au n° lancer'' ;

- $\overline{R_n}$ l'événement contraire de R_n ;

a_n et $r_n$les probabilité respectives de A_n et R_n.

a. Déterminer a_1.

c. Déterminer r_1. Pour cela, on pourra s'aider d'un arbre.

d. En remarquant que, pour tout $n \geq 1$, $R_n = (R_n \cap A_n) \cup (R_n \cap \overline{A_n})$, montrer que :
$r_n = -\frac{1}{6}a_n + \frac{2}{3}$.

e. Montrer que, $\forall n \geq 1$, $A_{n+1} = (A_n \cap R_n) \cup (\overline{A_n} \cap \overline{R_n})$.

f. En déduire que, pour tout $n \geq 1$, $a_{n+1} = \frac{1}{6}a_n + \frac{1}{3}$, puis déterminer l'expression de a_n en fonction de n.

g. En déduire l'expression de r_n en fonction de n puis la limite de $r_n$quand $n\ tend\ vers + \infty$.

<u>Exercice 7</u>

Une urne contient n boules noires et $3n$ boules blanches.

1. On tire simultanément deux boules de l'urne. On suppose qu'il y a équiprobabilité des tirages possibles.
   Calculer la probabilité P_n de tirer une boule de chaque couleur.
2. On tire une boule de l'urne, l'on y replace ; puis on tire à nouveau une boule de l'urne ; on suppose qu'il y a équiprobabilité de tirages possibles.
   Calculer la probabilité de tirer une boule de chaque couleur.
3. Quelle est la limite de P_n lorsque n tend vers $+\infty$. A partir de valeur de n, $P_n - \frac{3}{8} < \frac{1}{100}$?

<u>Exercice 8</u>

on dispose d'une roue partagée en quatre secteurs de même dimension et de deux urnes A et B.

l'urne A contient une boule jaune et 3 boules noires et l'urne B contient 3 boules jaunes et une boule noire. Le jeu consiste : le candidat fait tourner la roue qui, étant lancé s'arrête de façon aléatoire, la flèche ne pouvant indiquer qu'un seul secteur (tous les secteurs ont donc la même chance de '' sortir''). La règle est la suivante :

- Si le candidat obtient la lettre P, il a perdu et le jeu est fini ;
- S'il obtient la lettre A, il tire une boule dans l'urne A.
- S'il obtient la lettre B, il tire une boule dans l'urne B.

On note P, A, B, J et N les évènement suivants :

- P :'' à l'issue du lancer de la roue, on a obtenu la lettre P''
- A :'' à l'issue du lancer de la roue on a obtenu la lettre A''
- B:'' à l'issue du lancer de la roue on a obtenu la lettre B''
- J :'' on a tiré une boule jaune''
- N :'' on a tiré une boule noire''

1. Déterminer la probabilité des évènements A, B et P.
2. Construire un arbre de probabilité illustrant la situation.

3. a. Sachant que, lors d'un lancer de la roue, on a obtenu la lettre A, quelle est la probabilité de tirer une boule jaune.
   b. En déduire la probabilité de l'évènement A∩J.
4. Un joueur fait une partie.
   a. Quelle est la probabilité qu'à l'issue du lancer de la roue il obtient la lettre B et qu'il tire une boule jaune.
b. Déterminer la probabilité que le joueur tire une boule jaune.
5. Un joueur fait deux partir consécutivement, les deux parties étant indépendants l'unes de l'autre. Quelle est la probabilité que ce joueur tire exactement deux boules jaunes.

Exercice 9

Tous les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.
Une urne contient 7 jetons indiscernables au toucher : 3 jetons blancs (un carré et 2 ronds) et 4 jetons noirs (3 carrés et un rond).
On tire simultanément et au hasard 3 jetons de l'urne.

1. pour $k \in \{0,1,2,3\}$ calculer la probabilité de l'évènement X_k :'' obtenir k boules jetons blancs''
2. lors d'un tirage on note A l'évènement '' avoir 3 jetons de la même forme'' et B '' avoir 3 jetons de même couleur''.
   a. Calculer la probabilité des évènements A, B et A∩B.
   b. Les évènements A et B sont-ils indépendants.

Exercice 10

Une urne contient trois boules : une rouge, une verte et une bleue. On tire au hasard et successivement deux boules de cette urne, en remettant dans l'urne la boule tirée.

1. Déterminer l'ensemble des tirages possibles.
2. On convient de la règle suivante : le tirage d'une boule rouge fait marquer 1 point, celui d'une boule verte fait marquer 2 points et celui d'une bleue fait marquer -3 points.
   Pour chaque tirage, on note X la somme des points marqués.
   a. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X.
   b. Déterminer la loi de probabilité de X.
3. Calculer l'espérance mathématiques de X.
4. Déterminer la fonction de répartition F de X et la représenter.

Exercice 11

Problème:

Pour réaliser une loterie, un organisateur dispose d'une part d'un sac contenant exactement un jeton blanc et 9 jetons noirs indiscernables au toucher et d'autre part d'un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
Il décide des règles suivantes pour le déroulement de la partie.

Le joueur doit tirer un jeton puis jeter le dé.

- Si le jeton est blanc, le joueur perd lorsque le jet du dé donne 6 ;
- Si le jeton est noir le joueur gagne lorsque le jet du dé donne 6. A la fin de la partie, le jeton est remis dans le sac.
  On note B l'évènement '' le jeton tiré est blanc'' et G l'évènement '' le joueur gagne le jeu''. L'évènement contraire d'un évènement E sera noté $\bar{E}$. La probabilité d'un évènement E sera notée $P(E)$.

PARTIE A

1. Montrer que $P(G) = \frac{7}{30}$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
2. Quelle est la probabilité que le joueur ait tiré le jeton blanc sachant qu'il a perdu.
3. Un joueur fait quatre parties de façon indépendante. Calculer la probabilité qu'il en gagne exactement deux et en donner une valeur approchée à 10^{-3} près.
4. Quel nombre minimal de parties un joueur va-t-il faire pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit supérieure à 0,99.

PARTIE B

L'organisateur décide de faire de sa loterie un jeu d'argent :

- Chaque joueur paye 1€ par partie ;
- Si le joueur gagne la partie, il reçoit 5€ ;
- Si le joueur perd la partie, il ne reçoit rien.
  1. On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique (positif ou négatif) du joueur à l'issue d'une partie ;
     a. Donner la loi de probabilité de X et son espérance E(X).
     b. On dit que le jeu est favorable à l'organisateur si E(X)<0.
        Le jeu est-il favorable à l'organisateur ?
  2. L'organisateur décide de modifier le nombre n de jetons noirs(n entier naturel non nul) tout en gardant un seul jeton blanc. Pour quelles valeurs de l'entier n le jeu est-il défavorable à l'organisateur ?

Exercice 12 :

Une population d'élèves comportant 40% de bacheliers a subi un test de recrutement en première année d'une grande école.
Ce test a donné les résultats suivants :

- 75% des bacheliers sont admis.
- 52% des non bacheliers sont admis.

  PARTIE A

  On choisit au hasard un élève de la population. On note :
  B l'évènement : ''l'élève est bachelier'' ;
  T l'évènement : ''l'élève est admis au test'' ;

A l'évènement : ''l'élève est bachelier et est admis au test''.

1. Préciser chacune des probabilités suivantes :
   a) La probabilité P(B) de l'évènement B ;
   b) La probabilité $P_B(T)$ de T sachant que B est réalisée ;
   c) La probabilité $P_{\bar{B}}(T)$ sachant que B n'est pas réalisée.
2. Démontrer que la probabilité de l'évènement A est à 0,3.
3. Calculer la probabilité de l'évènement T.
4. Déduire des questions précédentes que les évènements B et T ne sont pas indépendants.
5. Démontrer que la probabilité pour qu'un élève admis au test soit bachelier est égale à $\frac{25}{51}$.

   PARTIE B :

   On choisit au hasard 5 élèves de la population étudiée.

   On note X la variable aléatoire égale au nombre d'étudiants bacheliers et admis au test parmi les 5 choisis.

   1. Démontrer que la probabilité pour que 3 seulement des 5 élèves choisis soient bacheliers et admis au test est égale à 0,1323.
   2. Calculer l'espérance mathématique de X.