Exercice 1

ABC est un triangle les points A' , B' et C' sont les milieux respectifs des $[B,C]$ $[A,C]$ et $[A,B]$ et E le point tel que $\overrightarrow{AE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

1. Faire une figure
2. Montrer que les droites (AA') , $(B'C')$ et (AE)

Exercice 2

ABC est un triangle les points F et G sont les milieux respectifs des $[A,C]$ et $[A,B]$ L es points D et E sont tels que :

$\overrightarrow{BD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{BE}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$

Soit H le point d'intersection des droites (FD) et (GE).

1. Faire une figure
2. Déterminer le nombre réel α tel que $\overrightarrow{GH}=\alpha\,\overrightarrow{GE}$

Exercice 3

ABCD est un quadrilatère . On appelle G le centre de gravité du triangle ABC . I et J les milieux respectifs des $[A,B]$ et $[B,C]$.

K le point définie par $\overrightarrow{CK}=\frac{3}{4}\overrightarrow{CD}$ et L le point définie par $\overrightarrow{DL}=\frac{1}{4}\overrightarrow{DA}$

1. Faire une figure
2. Montrer que les droites (IK) , (JL) et (DG) Sont concourantes
3. Déterminer puis construire les ensembles

a) Γ_1 des points M du plan tel que

Exercice 4

ABC est un triangle équilatéral de centre O et I le milieu de $[A,B]$ et J celui de $[O,I]$ les droites (OA) et (OC) coupent le cercle circonscrit au triangle ABC respectivement en D et E.

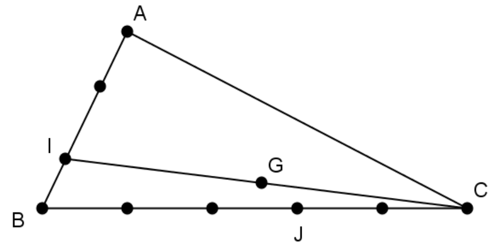
1. Faire une figure. On prendra $OA=4cm$
2. Soit G l'isobarycentre de A , B , C , D et E

a) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{OG}$ en fonction de $\overrightarrow{OB}$

b) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{OG}$ en fonction de $\overrightarrow{OJ}$ et $\overrightarrow{OB}$

c) En déduire que les droites (OB) et (DJ) se coupe en G puis représenter G

Exercice 5



G les milieux r de $[I,C]$

1. Exprimer I et J comme barycentre de A et B respectivement B et C
2. Soit K le point définie par

$K=bar$

A	B	C
1	2	3

a) Montrer que $K=G$

b) En déduire que A , G et J sont alignés

3. Déterminer puis construire l'ensemble des points M tels que :

Γ_1 $5\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\|=3\|2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\|$

Γ_2 $\|\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}\|=6GI$

Exercice 6

ABC est un triangle

1. Construire $D=bar\{(A,3),(B,-2)\}$
2. Soit $G=bar\{(A,3),(B,-2),\ (C,5;)\}$

a) Construire G.

b) Démontrer que Construire G est le barycentre de D et C affectés à des coefficients que l'on déterminera .

c) En déduire que G , D et C sont alignés.

3) On désigne par I et J les milieux respectifs des $[A,B]$ et $[A,C]$.

Montrer que $G=bar\{(I,-2),(J,5)\}$.

Soit $K=bar\{(B,-2),(C,5)\}$

a) Montrer que G est le milieu de $[A,K]$

b) En déduire que les droites (AK) , (IJ) et (AE) sont concourantes

5) Déterminer l'ensemble des points M tels que :

Γ_1 $\|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}\|=\frac{1}{6}\|\overrightarrow{MD}+5\overrightarrow{MC}\|$

Γ_2 $\|3\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{MB}+5\overrightarrow{MC}\|=6$

Exercice $\boxed{7}$

ABC est un triangle isocèle en A les points P , Q , et R sont tels que : $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{CR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$

les points I , J , et K sont tels que :

$I = (AQ) \cap (CP)$, $J = (AQ) \cap (BR)$

$K = (BR) \cap (CP)$

1. Exprimer les points I , J , et K comme barycentre des A , B et C

2. Montrer que $I = A * J$, $J = B * K$ et $K = C * I$

3 . En utilisant le faites qu'une médiane divise un triangle en 2 triangles ayant la même aire montrer que : $Aire(IJK) = \frac{1}{7}\ Aire(ABC)$

4.a) Déterminer puis construire l'ensemble des points M tels que :

Γ_1 $\|\overrightarrow{MA} + 4\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}\|$

Γ_2 $\|4\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\| = 7IA$

b) vérifier que $J \in \Gamma_2$

Exercice $\boxed{8}$

Soit ABC un triangle

L'objectif de cette exercice est d'écrire un point à l'intérieur du triangle comme barycentre des points A , B et C affectés à des aires .

Soit $G = bar\{(A,\alpha), (B,\beta), (C,\gamma)\}$ tels que α , β et γ sont strictement positifs

1. a) Montrer que G est à l'intérieur du triangle ABC (on pourra utiliser $P = bar\{(B,\beta), (C,\gamma)\}$ et montrer que P est à l'intérieur du segment $]B,C[$ puis que G est à l'intérieur du triangle ABC)

b) Montrer que $\frac{PB}{PC} = \frac{\gamma}{\beta}$ puis

$P = bar\{(B, Aire(PAC)), (C, Aire(PAB))\}$

c) Soit B' la hauteur issue de P dans le triangle PAC et B'' la hauteur issue de G dans le triangle GAC.

Montrer que $Aire(GAC) = k\ Aire(PAC)$ tel que $k = \frac{AG}{AP}$

Et soit C' la hauteur issue de P dans le triangle PAB et C'' la hauteur issue de G dans le triangle GAB.

Montrer que $Aire(GAB) = k\ Aire(PAB)$ tel que $k = \frac{AG}{AP}$

En déduire que β et γ sont proportionnelles à $Aire(GAC)$ et $Aire(GAB)$ et donc

$P = bar\{(B, Aire(GAC)), (C, Aire(GAB))\}$

d) En déduire que

$G = bar$

A	B	C
$Aire(GBC)$	$Aire(GAC)$	$Aire(GAB)$

e) Que se passe-t-il si G est le centre de gravité du triangle ABC ?

2. <u>Autre méthode</u>

Soit ABC un triangle dont les angles sont aigus et soit A' , B' et C' les pieds des hauteurs issues respectivement de A , B et C et soit

$P = bar\{(B,\beta), (C,\gamma)\}$

Montrer que $P = bar\{(B, CC'), (C, BB')\}$

puis en déduire

$P = bar\{(B, Aire(GAC)), (C, Aire(GAB))\}$

Et que

$G = bar$

A	B	C
$Aire(GBC)$	$Aire(GAC)$	$Aire(GAB)$

3. Soit ABC un triangle dont les angles sont aigus et soit M un point à l'intérieur du triangle Montrer que

$M = bar$

A	B	C
$Aire(MBC)$	$Aire(MAC)$	$Aire(MAB)$

4. On pose $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$ et soit Ω le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC

a) Montrer que $\Omega = bar\{(A,a), (B,b), (C,c)\}$

On rappelle que Ω est l'intersection des bissectrices du triangle ABC c.-à-d.qu'il est équidistant des 3 cotés du triangle (les 3 hauteurs issues de Ω des 3 triangles ΩBC , ΩAC et ΩAB sont égales)

b) Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC dont les angles sont aigus. Montrer que

$O = bar$

A	B	C
$sin(2A)$	$sin(2B)$	$sin(2C)$

(On rappel cette formule donnant l'aire d'un triangle de cotés a , b et c

$Aire(ABC)\frac{1}{2}bc\sin(A)$ utiliser cette formule pour calculer les aires des 3 triangles OBC , OAC et OAB

5. Soit ABC un triangle dont les angles sont aigus et soit A' , B' et C' les pieds des hauteurs issues respectivement de A , B et C

a) Montrer que $\frac{A'B}{A'C} = \frac{tan(C)}{tan(B)}$

b) En déduire que

$A' = bar\{(B, tan(B)), (C, tan(C))\}$

c) En déduire que l'orthocentre

$H = bar\{(A, tan(A)) (B, tan(B)), (C, tan(C))\}$

Exercice $\boxed{9}$

Soit ABC un triangle

On pose $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$

On note Δ_1 la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{A}$ et Δ_2 sa bissectrice extérieure I et J les points d'intersections de (BC) respectivement avec Δ_1 et Δ_2

a) Calculer de deux manières différentes l'aire des triangles ABI et ACI

b) En déduire que I est le barycentre du système (B, b) et (C , c)

2) On désigne par $(\mathcal{C}_1)$ l'ensemble des points M du plan tels que $\frac{MB}{MC} = \frac{c}{b}$

a) Montrer que $(\mathcal{C}_1)$ est le cercle de diamètre $[I, J]$ et que $A \in \mathcal{C}_1$

b) Soit P le centre de $(\mathcal{C}_1)$. Montrer que P est le barycentre de (B, b^2) et $(C , -c^2)$

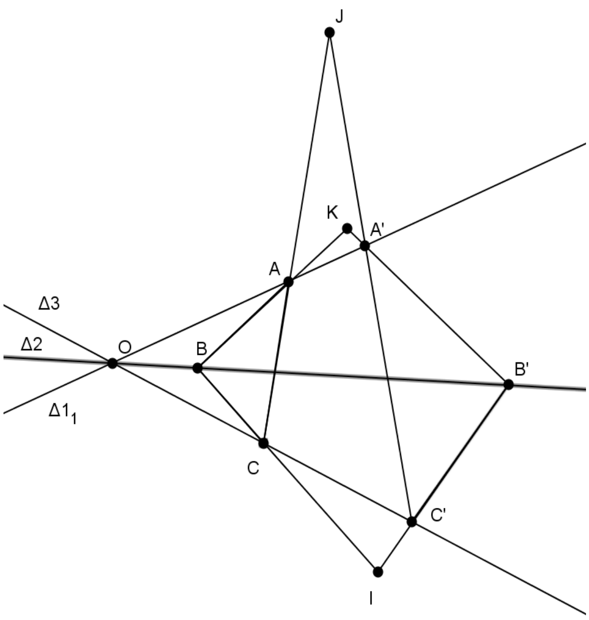
On définie de même l'ensemble $(\mathcal{C}_2)$ des points M du plan tels que $\frac{MC}{MA} = \frac{a}{c}$ de centre Q et l'ensemble $(\mathcal{C}_3)$ des points M du plan tels que $\frac{MA}{MB} = \frac{b}{a}$ de centre R

a) Montrer que :

$(b^2 - c^2)\overrightarrow{MP} + (c^2 - a^2)\overrightarrow{MQ} + (a^2 - b^2)\overrightarrow{MR} = \vec{0}$

b) En déduire que P , Q et R sont alignés .

Exercice $\boxed{10}$



Trois droites Δ_1 , Δ_2 et Δ_3 concourant en un point O. Deux triangles ABC et $A'B'C'$ on leur sommet chacune de ces trois droites

$(A$ et A' sur Δ_1 , B et B' sur Δ_2 , C et C' sur $\Delta_3)$

On suppose que $(BC) \cap (B'C') = \{I\}$

$(AC) \cap (A'C') = \{J\}$ et $(AB) \cap (A'B') = \{K\}$

1. Montrer que :

P , Q et R sont alignes

$\Leftrightarrow$ Il existe 3 réels p , q et r non tous nuls tel que

$\begin{cases} p + q + r = 0 \\ p\overrightarrow{OP} + q\overrightarrow{OQ} + r\overrightarrow{OR} = \vec{0} \end{cases}$

2. a) Justifier l'existence de 3 réels α , β et γ tels que ; $\alpha\overrightarrow{OA} + (1 - \alpha)\overrightarrow{OA'}$

$= \beta\overrightarrow{OB} + (1 - \beta)\overrightarrow{OB'} = \gamma\overrightarrow{OC} + (1 - \gamma)\overrightarrow{OC'} = \vec{0}$

b) Montrer que α , β et γ sont deux à deux distincts

3. Etablir que : $I = bar\{(B, \beta), (C, -\gamma)\}$

$J = bar\{(C, \gamma), (A, -\alpha)\}$

$K = bar\{(A, \alpha), (B, -\beta)\}$

Exercice $\boxed{12}$

Sur les cotés (BC) , (CA) et (AB) d'un triangle ABC on marque des points A' , B' et C' distincts des sommets les cercles circonscrits aux triangles $BA'C'$ et $CB'A'$ se recoupent en I.

1. Evaluer en fonction des angles du triangle ABC

$2\left(\widehat{\overrightarrow{IB'}, \overrightarrow{IA'}}\right)$, $2\left(\widehat{\overrightarrow{IA'}, \overrightarrow{IC'}}\right)$ et $2\left(\widehat{\overrightarrow{\imath B'}, \overrightarrow{IC'}}\right)$

2. En déduire que le cercle circonscrit au triangles $AB'C'$ passe également par I.

Exercice $\boxed{13}$

On considère deux cercles $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ tangents en I, une droite Δ passant par I coupe $\mathcal{C}$ en A et $\mathcal{C}'$ en A'.Montrer que pour un point M de $\mathcal{C}$ $(M \neq I)$ et $(M \neq A)$ et un point M' de $\mathcal{C}'$ $(M' \neq I)$ et $(M' \neq A')$ les propriétés suivantes sont équivalentes :

(1) *I , M et M' sont alignés.*

(1) $2\left(\widehat{\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AM}}\right) = 2\left(\widehat{\overrightarrow{A'I}, \overrightarrow{A'M'}}\right)$

Exercice $\boxed{14}$

Montrer que quatre points A , B , C et D d'un même cercle de centre O sont tels que :

$$\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right) = \left(\widehat{\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}}\right)$$

Si et seulement si $[A, D]$ et $[B, C]$ ont même médiatrice .

FIN