OBJECTIF BAC

Nouveau Format BAC

Annales

HABILETÉS - CONSEILS - EXERCICES - CORRIGÉS

MATHS

TLE D

- Connaître
- Comprendre
- Appliquer
- Traiter une situation

L'ÉDITION AUTREMENT
JD Editions

OBJECTIF BAC

Annales
Mathématiques
Baccalauréat, série D

GUEPIE Maho Théodore
Inspecteur Général de l'Éducation Nationale

TANOH Kouacou
Inspecteur Général de l'Éducation Nationale

GAHIE Douabou
Inspecteur de l'Enseignement secondaire

KADIO Komenan Pierre
Encadreur Pédagogique
Coordonnateur National de Mathématique

JD Editions
04 B.P. 206 Abidjan 04
Côte d'Ivoire

Annales
Mathématiques
Baccalauréat, série D

© JD Editions, Abidjan 2017
ISBN : 979-10-91832-36-6
Toute reproduction, quel que soit le procédé, est interdite sous peine de poursuites judiciaires.

Avant-propos

Cet ouvrage a pour objectif de mettre à la disposition des candidats au baccalauréat série D et des enseignants des sujets corrigés des sessions normales de baccalauréats antérieurs. Il propose des corrigés détaillés en mettant un accent particulier sur la rédaction.

Les candidats et les n y trouveront les habiletés testés, des conseils et des démarches structurées de raisonnement ainsi que des modèles de rédaction. Les enseignants doivent s'en servir pour une formation rigoureuse de leurs élèves.

Ces annales sont constituées de trois parties :
Les sujets, les habiletés et les conseils aux utilisateurs et des corrigés intégraux

- *Les sujets : ils couvrent les Bac de 2006 à 2016.*

- *Les habiletés testées et les conseils : avant le corrigé de chaque exercice, ces annales présentent les habiletés/contenus testés ainsi que des conseils pour orienter le lecteur dans sa recherche de solution.*

- *Les corrigés : un corrigé détaillé par sujet est proposé.*

Sommaire

Sujets *Pages*

Sujet Bac D 2006 ---------- *11*
Sujet Bac D 2007 ---------- *15*
Sujet Bac D 2008 ---------- *19*
Sujet Bac D 2009 ---------- *22*
Sujet Bac D 2010 ---------- *25*
Sujet Bac D 2011 ---------- *28*
Sujet Bac D 2012 ---------- *32*
Sujet Bac D 2013 ---------- *36*
Sujet Bac D 2014 ---------- *39*
Sujet Bac D 2015 ---------- *43*
Sujet Bac D 2016 ---------- *47*

Corrigés

Corrigé Bac D 2006 ---------- *53*
Corrigé Bac D 2007 ---------- *72*
Corrigé Bac D 2008 ---------- *93*
Corrigé Bac D 2009 ---------- *113*
Corrigé Bac D 2010 ---------- *131*
Corrigé Bac D 2011 ---------- *148*
Corrigé Bac D 2012 ---------- *164*
Corrigé Bac D 2013 ---------- *182*
Corrigé Bac D 2014 ---------- *198*
Corrigé Bac D 2015 ---------- *216*
Corrigé Bac D 2016 ---------- *235*

Sujets

Exercice 1

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité est le centimètre. Soit A, B et C trois points d'affixes respectives Z_A, Z_B et Z_C telles que : $Z_A = 2 + 6i$; $Z_B = 4 + 2i$ et $Z_C = 6i$.

1- Place les points A, B et C dans le plan.

2- *a*) Détermine la forme algébrique de Z telle que $Z = \frac{Z_A - Z_B}{Z_A - Z_O}$, où Z_O est l'affixe de l'origine du repère.

b) Écris Z sous forme trigonométrique.

c) Détermine une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AB})$.

3- Soit *r* la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

a) Détermine l'écriture complexe de *r*.

b) Détermine l'image de O par *r*.

c) Déduis-en que le triangle OAB est rectangle et isocèle en B.

4- *a*) Détermine le centre et le rayon du cercle (C) circonscrit au triangle OAB. Construis (C).

b) Démontre que les points O, A, B, et C appartiennent à un même cercle.

Exercice 2

Une banque dispose de guichets automatiques où certains clients peuvent faire des retraits d'argent à l'aide d'une carte magnétique. Chaque carte magnétique a un code secret connu seulement du titulaire de la carte. Ce code secret est une suite de quatre chiffres du système décimal.

Exemples de codes : 0375 ; 9918 ; 2400.

Les deux parties A) et B) de l'exercice sont indépendantes.

Partie A

1- Combien de cartes magnétiques la banque peut-elle distribuer à ses clients ?

2- Démontre que la probabilité que le code d'une carte magnétique commence par 0 est égale à $\frac{1}{10}$.

3- Calcule la probabilité pour que le code d'une carte magnétique soit composé des chiffres 2 ; 4 ; 5 ; 7.

Partie B

Monsieur Koné, un client de la banque, titulaire d'une carte magnétique a oublié son code.
Son épouse lui rappelle que celui-ci comporte les chiffres 2 ; 4 ; 5 ; 7. Il décide alors de tenter sa chance au guichet automatique.
Les guichets automatiques sont équipés de mémoires leur permettant de confisquer une carte après trois essais infructueux successifs. Monsieur Koné joue la prudence et s'impose deux essais au maximum.

1- Calcule la probabilité de chacun des évènements suivants :
a) E : « Monsieur Koné réussit à retirer de l'argent au premier essai »
b) F : « Monsieur Koné échoue au premier essai et réussit au deuxième essai ».

2- Soit G l'évènement « Monsieur Koné retire de l'argent ».
Démontre que la probabilité de G est égale à $\frac{1}{12}$.

3- De retour à la maison, Monsieur Koné annonce fièrement à son épouse qu'il a pu retirer de l'argent au guichet automatique.
Calcule la probabilité qu'il ait effectué le retrait au premier essai.

4- La banque prélève une taxe pour chaque essai de retrait au guichet automatique. Cette taxe s'élève à 30 francs par essai fructueux et à 60 francs par essai infructueux. X désigne la variable aléatoire qui détermine la taxe totale à payer sur l'ensemble des essais faits par Monsieur Koné.
a) Détermine la loi de probabilité de X.
b) Démontre que l'espérance mathématique de X est égale à 115 francs.

Problème

Partie A :

Soit la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $g(x) = x^2 - 1 - \ln x$.

1- Calcule les limites de g en 0 et en $+\infty$.

2- On suppose que g est dérivable sur $]0 ; +\infty[$.

Démontre que pour tout nombre réel strictement positif x, $g'(x) = \frac{2x^2-1}{x}$.

3- Étudie les variations de g et dresse son tableau de variation.

4- *a*) Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions sur $]0; +\infty[$.
On désigne par α la plus petite des solutions.

b) Démontre que : $0{,}4 < \alpha < 0{,}5$.

c) Calcule $g(1)$.

d) Déduis-en que, pour tout nombre réel strictement positif x :
si $x \in]0 ; \alpha[\cup]1 ; +\infty[$, alors $g(x) > 0$.
si $x \in]\alpha ; 1[$, alors $g(x) < 0$.

Partie B :

Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = x + \frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x}$.
On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J). *L'unité est 4 cm sur (OI) et 2 cm sur (OJ).*

1- *a*) Détermine la limite de f en 0.

b) Donne une interprétation graphique du résultat.

c) Détermine la limite de f en $+\infty$.

2- On suppose que f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$.

Démontre que, pour tout nombre réel strictement positif x, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

3- *a*) Démontre que $f(\alpha) = 2\alpha + \frac{1}{\alpha}$.

b) Étudie les variations de f et dresse son tableau de variation.

4- *a*) Démontre que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

b) Étudie la position de (D) par rapport à (C).

c) Trace (D) et (C).
On prendra $\alpha = 0{,}45$ *et* $f(\alpha) = 3{,}1$.

5- Soit A l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par (C), (D) et les droites d'équations respectives $x = e^{-2}$ et $x = 1$.
Calcule A.

Exercice 1

On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 4$ et $v_0 = 9$ et pour tout nombre entier naturel n : $u_{n+1} = \dfrac{2u_n v_n}{u_n + v_n}$ et $v_{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_n + v_n)$.

1- Démontre par récurrence que pour tout nombre entier naturel n, $u_n > 0$ et $v_n > 0$.

2- *a*) Démontre que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{(v_n - u_n)^2}{2(u_n + u_n)}$.

b) Déduis-en que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$ et que $v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{2}(v_n - u_n)$.

c) Déduis-en par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_n - u_n \leqslant \dfrac{5}{2^n}$.

3- *a*) Démontre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

b) Déduis-en que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.

c) Démontre que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont la même limite l.

4- *a*) Démontre que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \times v_{n+1} = u_n \times v_n$.

b) Déduis-en la valeur exacte de l.

Exercice 2

Une population d'élèves comportant 40 % de bacheliers a subi un test de recrutement en première année d'une grande école.
Ce test a donné les résultats suivants :

- 75% des bacheliers sont admis ;
- 52 % des non bacheliers sont admis.

Partie A

On choisit au hasard un élève de la population. On note :
B l'évènement : « L'élève choisi est bachelier » ;
T l'évènement : « L'élève choisi est admis au test » ;
A l'évènement : « L'élève choisi est bachelier et est admis au test ».

1- Précise chacune des probabilités suivantes :

a) La probabilité P(B) de l'évènement B.

b) La probabilité $P_B(T)$ de T sachant que B est réalisé.
c) La probabilité $P_{\bar{B}}(T)$ de T sachant que B n'est pas réalisé.

2- Démontre que la probabilité de l'évènement A est égale à 0,3.

3- Calcule la probabilité de l'évènement T.

4- Déduis des questions précédentes que les évènements B et T ne sont pas indépendants.

5- Démontre que la probabilité pour qu'un élève admis au test soit bachelier est égal à $\frac{25}{51}$.

Partie B

On choisit au hasard 5 élèves de la population étudiée.
On note X la variable aléatoire égale au nombre d'élèves bacheliers et admis au test parmi les 5 choisis.

1- Démontre que la probabilité pour que 3 seulement des 5 élèves choisis soient bacheliers et admis au test est égale à 0,1323.

2- Calcule l'espérance mathématique de X.

Problème

L'objet de ce problème est l'étude de chacune des fonctions f, g et h ci-dessous.

- f est la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ par : $f(x) = \dfrac{x-3}{x+1}$;
- g est la fonction définie sur Dg par :

  $g(0) = 1$ et $\forall x \in]0 ; \dfrac{1}{e}[\cup]\dfrac{1}{e} ; +\infty[$, $g(x) = f(\ln x)$,

  où $Dg = [0 ; \dfrac{1}{e}[\cup]\dfrac{1}{e} ; +\infty[$;
- h est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = f(e^x)$.

Partie A

1- Démontre que :

a) $\forall x \in D_g$ et $x \neq 0$, $g(x) = 1 - \dfrac{4}{\ln x + 1}$.

b) $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = 1 - \dfrac{4}{e^x + 1}$.

2- *a*) Détermine $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

b) Détermine $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x)$.

3- On suppose que f est dérivable sur $\mathbb{R}-\{1\}$.
Étudie les variations de f puis dresse son tableau de variation.

Partie B

On note (C_g) la représentation graphique de g dans le plan muni du repère orthogonal R_1 tel que $R_1 = (O, I, J)$.
L'unité sur (OI) est 1 cm et sur (OJ) est 4 cm.

1- *a*) Démontre que g est continue en 0.
b) Démontre que (C_g) admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 0.

2- *a*) Détermine $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ puis donne une interprétation graphique du résultat.

b) Détermine $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{e}\\ <}} g(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{e}\\ >}} g(x)$ puis donne une interprétation graphique du résultat.

3- On suppose que g est dérivable sur Dg.

a) Démontre que : $\forall x\in\ ]0\ ;\ \frac{1}{e}[\cup]\frac{1}{e}\ ;\ +\infty[,\ g'(x) = \frac{4}{x(\ln x+1)^2}$.

b) Démontre que g est strictement croissante puis dresse son tableau de variation.

4- Trace (C_g) et ses asymptotes dans le repère R_1.

Partie C

On note (C_h) la représentation graphique de *h* dans le plan muni du repère orthonormé R_2 tel que $R_2 = (O, I, J)$. L'unité graphique est 1 cm.

1- Détermine $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ puis interprète graphiquement les résultats. *On pourra utiliser la question A-1-b)*

2- On suppose que *h* est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Démontre que, pour tout nombre réel *x*, $h'(x) = \frac{4e^x}{(1+e^x)^2}$.

3- Déduis-en les variations de *h* puis dresse son tableau de variation.

4- On note A et B les points d'intersection respectifs de (C_g) avec les droites (OI) et (OJ).

a) Détermine les coordonnées de chacun des points A et B.

b) Démontre qu'une équation de la tangente (T) à (C_h) en B est $y = x - 1$.

c) Démontre que B est un centre de symétrie de (C_h).

5- *a*) Démontre que *h* réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle que l'on précisera.

b) Détermine l'expression explicite de la bijection réciproque h^{-1} de *h*.

6- *a*) Trace (T), (C_h) et ses asymptotes dans le repère R_2.

b) Déduis-en la représentation graphique (Γ) de la fonction réciproque h^{-1} dans le repère R_2.

Exercice 1

Le plan complexe est muni du repère orthonormé $(O, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.
On considère l'équation (E) : $z \in \mathbb{C}$, $z^3 + (6 - 5i)z^2 + (1-20i)z - 14 - 5i = 0$.

1- *a*) Vérifie que i est une solution de l'équation (E).
b) Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation (F) : $z^2 + (6 - 4i)z + 5 - 14i = 0$.
c) Résous à l'aide des questions qui précèdent l'équation (E).

2- On considère les points A, B et D d'affixes respectives u, v et t telles que : $u = i$; $v = -2 + 3i$ et $t = -4 + i$.
a) Place les points A, B et D dans le repère.
b) Écris sous forme trigonométrique, le nombre complexe Z tel que : $Z = \frac{u-v}{t-v}$.
c) Déduis-en que le triangle ABD est rectangle et isocèle en B.

3- Soit S la similitude directe de centre A qui transforme D en B. B' est l'image de B par S
a) Justifie que le triangle ABB' est rectangle et isocèle en B'.
b) Déduis-en la construction du point B'.

4- *a*) Détermine l'écriture complexe de S.
b) Calcule l'affixe de B'.

Exercice 2

Le tableau ci-dessous donne les notes sur 20 obtenues en mathématiques et en Physique-Chimie par huit candidats de la série D au baccalauréat 2005. X est la note en mathématiques et Y la note en Physique-Chimie.

X_i	4	6	7	9	11	12	14	17
Y_i	3	4	6	8	10	9	12	14

1- Représente graphiquement le nuage de points associé à cette série statistique dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
L'unité graphique est 1 cm.

2- Calcule les coordonnées du point moyen G du nuage puis place-le dans le repère.

3- *a*) Vérifie que la covariance cov(X, Y) de la série statistique est égale à $\frac{57}{4}$.

b) Calcule la variance de X et celle de Y. On donnera les résultats arrondis à l'ordre 2

c) Calcule le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y. On donnera le résultat arrondi à l'ordre 2.

4- Démontre qu'une équation de la droite (D) de régression de Y en fonction de X par la méthode des moindres carrés est : $y = \frac{19}{22}x - \frac{17}{44}$.

5- Sur la base de l'ajustement linéaire ainsi réalisé, donne une estimation de la note en mathématiques d'un candidat qui a obtenu 15 sur 20 en Physique-Chimie. On donnera l'arrondi d'ordre zéro du résultat.

Problème

L'objet de ce problème est l'étude de la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$, par : $f(x) = 2x - 3 + \frac{\ln x}{x}$.

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est 2 cm.

Partie A.

Soit g la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $g(x) = 2x^2 + 1 - \ln x$.

1- On suppose que g est dérivable sur $]0 ; +\infty[$.
Étudie les variations de g puis dresse son tableau de variation.
On ne demande pas de calculer les limites.

2- Justifie que : $\forall x \in]0 ; +\infty[$, $g(x) > 0$.

Partie B

1- *a*) Calcule la limite de f en $+\infty$.

b) Détermine $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$ puis interprète graphiquement le résultat.

2- *a*) Démontre que la droite (D) d'équation $y = 2x - 3$ est une asymptote à (C) en $+\infty$.

b) Précise la position de (C) par rapport à (D).

3- On suppose que f est dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

a) Démontre que pour tout nombre réel strictement positif x, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

b) Étudie les variations de f puis dresse son tableau de variation.

c) Démontre qu'une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1 est : $y = 3x - 4$.

4-*a*) Démontre que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α.

b) Justifie que : $1,3 < \alpha < 1,4$.

Partie C

Pour tout nombre réel x strictement positif, on pose :

$\varphi(x) = f(x) - (3x - 4)$ et $h(x) = -x^2 + 1 - \ln x$.

1- On suppose que h est dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

a) Détermine le sens de variation de h sur $]0 ; +\infty[$.

b) Calcule $h(1)$ puis justifie que :

$\forall x \in]0 ; 1[, h(x) > 0$;

$\forall x \in]1 ; +\infty[, h(x) < 0$.

2- On suppose que φ est dérivable sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$.

a) Démontre que : $\forall x \in]0 ; +\infty[, \varphi'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$.

b) Étudie les variations de φ.

c) Déduis-en le signe de $\varphi(x)$ suivant les valeurs de x.

d) Détermine la position de (C) par rapport à la tangente (T).

Partie D

1- Trace la droite (D), la tangente (T) et la courbe (C).

On prendra $\alpha = 1,35$.

2- Calcule en cm^2, l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

Exercice 1

L'entreprise Ivoirbois, spécialisée dans l'industrie du bois, envisage de faire des prévisions pour l'année 2007 du coût de production de feuilles de contre-plaquées en fonction du chiffre d'affaires. Elle dispose à cet effet des statistiques résumées dans le tableau ci-dessous.

Années	2000	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Chiffres d'affaires X (en millions de francs)	350	380	500	450	580	650	700
Coûts de production Y (en millions de francs)	40	45	50	55	60	65	70

1- Représente graphiquement le nuage de points associé à la série statistique double (X ; Y) dans le plan rapporté à un repère orthogonal (O, I, J).
On prendra 1 cm pour 50 millions de francs en abscisses et 1 cm pour 5 millions de francs en ordonnées.

2- *a*) Calcule le chiffre d'affaires moyen $\overline{X}$.

b) Calcule le coût moyen de production $\overline{Y}$.

3-*a*) Vérifie que l'arrondi à l'entier de la covariance Cov (X, Y) de la série statistique est égale à 1193.

b) Justifie l'existence d'un ajustement linéaire entre X et Y par la méthode des moindres carrés.

4-*a*) Détermine une équation de la droite (D) d'ajustement de Y en fonction de X par la méthode des moindres carrés.

b) Construis (D) dans le repère (O, I, J).

5- Utilise l'ajustement précédent pour prévoir le coût de production de l'entreprise Ivoirbois de l'année 2007 si le chiffre d'affaires de l'année 2007 est de 800 millions de francs.

Exercice 2

Soit la suite $(U_n)_{n\in N}$ définie par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{3}{5} U_n + 1 \end{cases}$.

1- Dans le plan rapporté à un repère orthonormé (O, I, J), représente sur l'axe des abscisses les termes U_0, U_1, U_2 et U_3 de la suite $(U_n)_{n\in N}$.
L'unité graphique est 2 cm.

2- *a*) Démontre par récurrence que la suite $(U_n)_{n\in N}$ est majorée par $\frac{5}{2}$.
b) Démontre que la suite $(U_n)_{n\in N}$ converge.

3- Soit la suite $(V_n)_{n\in N}$ définie par : $\forall n\in \mathbb{N}$, $V_n = U_n - \frac{5}{2}$.
a) Démontre que la suite $(V_n)_{n\in N}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
b) Pour tout entier naturel n, exprime V_n puis U_n en fonction de n.
c) Détermine la limite de $(U_n)_{n\in N}$.

Problème

Partie A

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (1 - x)e^{1-x} - 1$

1- *a*) Justifie que la limite de g en $+\infty$ est -1.
b) Détermine la limite de g en $-\infty$.

2- On suppose que g est dérivable sur $\mathbb{R}$.
a) Démontre que pour tout x élément de $\mathbb{R}$, $g'(x) = (x - 2)e^{1-x}$.
b) Étudie les variations de g et dresse son tableau de variation.

3- *a*) Démontre que l'équation $x\in\mathbb{R}$, $g(x) = 0$ admet une solution unique α
b) Justifie que ; $0,4 < \alpha < 0,5$.
c) Déduis-en que :
$\forall x\in]-\infty ; \alpha[$, $g(x) > 0$;
$\forall x\in]\alpha ; +\infty[$, $g(x) < 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = xe^{1-x} - x + 2$.
On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). *L'unité graphique est 2 cm.*

1- Détermine les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

2- On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
a) Démontre que f est une primitive de g sur $\mathbb{R}$.
b) Etudie les variations de f puis dresse son tableau de variation.

3- *a*) Démontre que la droite (D) d'équation $y = -x + 2$ est une asymptote oblique à (C) en $+\infty$.
b) Étudie la position relative de (D) et (C).

4- Démontre que (C) admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction (OJ).

5- Détermine une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.

6- Démontre que : $f(\alpha) = 1 - \alpha + \dfrac{1}{1-\alpha}$.

7- Justifie que pour tout nombre réel x, $f(-x+2) = e^{x-1} f(x)$.

8- On suppose que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions.
On appelle β l'une de ces solutions.
Démontre que $-\beta + 2$ est l'autre solution.

9- Trace (D), (T) et (C). *On prendra : $\alpha = 0{,}4$ et $\beta = 2{,}5$.*

Partie C

Soit λ un nombre réel strictement positif et $A(\lambda)$ l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par (C), la droite (D) d'équation $y = -x + 2$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = \lambda$.

1- Calcule $A(\lambda)$ à l'aide d'une intégration par parties.

2- Détermine la limite de $A(\lambda)$ lorsque λ tend vers $+\infty$.

Exercice 1

Partie A

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) :
$4z^3 - 6i\sqrt{3}\,z^2 - 3(3 + i\sqrt{3})z - 4 = 0$.

1- Détermine les racines carrées de $6 + 6i\sqrt{3}$.

2- Résous dans $\mathbb{C}$ l'équation : $2z^2 - (1 + 3i\sqrt{3})z - 4 = 0$.

3- *a*) Développe, réduis et ordonne $(2z + 1)(2z^2 - (1 + 3i\sqrt{3})z - 4)$.
b) Déduis-en les solutions de (E).

4- Soit $z_0 = -\frac{1}{2}$; $z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ et $z_2 = 1 + \sqrt{3}\,i$.

Exprime chacun des nombres complexes z_0, z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

Partie B

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ où l'unité est le centimètre, on considère les points M_0, M_1 et M_2 d'affixes respectives z_0, z_1 et z_2.

S est la similitude directe de centre O, d'angle $-\frac{\pi}{3}$ et de rapport 2.

1-*a*) Détermine l'écriture complexe de S.
b) Justifie que $S(M_0) = M_1$ et $S(M_1) = M_2$.

2- Soit M_n un point du plan d'affixe z_n, où n est un entier naturel.
On pose pour tout nombre entier naturel n, $M_{n+1} = S(M_n)$.
Justifie que $z_{n+1} = (1 - \sqrt{3}\,i)z_n$, où z_{n+1} est l'affixe de M_{n+1}.

3- On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par $u_n = |z_n|$.
a) Démontre que (u_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.
b) Justifie que la distance $OM_{12} = 2048$.

Exercice 2

On teste un médicament sur un ensemble d'individus ayant un taux de glycémie anormalement élevé.
Pour cela, 60% des individus prennent le médicament, les autres reçoivent une substance neutre. On étudie à l'aide d'un test la baisse du taux de glycémie chez tous les individus.
Chez tout individu ayant pris le médicament, on constate une baisse de ce taux avec une probabilité de 0,8. On ne constate aucune baisse de ce taux pour 90% des personnes ayant reçu la substance neutre.
On désigne par M l'évènement « l'individu prend le médicament » et par B l'évènement « l'individu a une baisse du taux de glycémie »
On donnera les résultats arrondis à l'ordre 2.

1- Détermine la probabilité d'avoir une baisse du taux de glycémie chez un individu sachant qu'il a pris le médicament.

2- Démontre que la probabilité d'avoir une baisse du taux de glycémie chez un individu est 0,52.

3- On soumet au test un individu pris au hasard dans l'ensemble des individus ayant un taux de glycémie anormalement élevé.
Quelle est la probabilité qu'il ait pris le médicament sachant que l'on constate une baisse de son taux de glycémie ?

4- On contrôle 5 individus pris au hasard dans l'ensemble des individus ayant un taux de glycémie anormalement élevé.
a) Quelle est la probabilité d'avoir exactement deux individus dont le taux de glycémie a baissé ?
b) Quelle est la probabilité d'avoir au moins un individu dont le taux de glycémie a baissé ?

5- On contrôle n individus pris au hasard dans l'ensemble des individus ayant un taux de glycémie anormalement élevé, n étant un entier naturel non nul.
Détermine n pour que la probabilité d'avoir au moins un individu dont le taux de glycémie a baissé soit supérieure à 0,98.

Problème

Partie A

Soit la fonction g définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $g(x) = 1 + x\ln x$.

1- On suppose que g est dérivable sur $]0 ; +\infty[$

a) Justifie que : $\forall x \in]0 ; +\infty[$, $g'(x) = 1 + \ln x$.

b) Etudie les variations de g puis dresse son tableau de variation.
On ne calculera pas les limites de g.

2- Déduis-en que : $\forall x \in]0 ; +\infty[$, $g(x) > 0$.

Partie B

Soit f la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ f(x) = \dfrac{x}{1 + x\ln x}, \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J). L'unité graphique est 4 cm.

1- *a*) Étudie la continuité de f en 0.

b) Étudie la dérivabilité de f en 0.

c) Démontre qu'une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point O est : $y = x$.

d) Démontre que :
(C) est au-dessus de (T) sur $]0; 1[$.
(C) est au-dessous de (T) sur $]1; +\infty[$.

2- Démontre que la droite (OI) est une asymptote à (C) en $+\infty$.

3- On suppose que f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$.

a) Démontre que : $\forall x \in]0; +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1 - x}{(1 + x\ln x)^2}$

b) Déduis-en les variations de f et dresse son tableau de variation.

4- Construis la droite (T) et la courbe (C) dans le repère (O, I, J).

Partie C

1- *a*) Justifie que : $\forall x \in]0 ; +\infty[$, $f(x) \leq 1$.

b) Démontre que : $\forall x \in [1 ; e]$, $1 - \dfrac{1}{1 + x} \leq f(x)$.

2- Soit A l'aire en cm² de la partie du plan limitée par (C), (OI) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

Démontre que : $16(e - 1) + 16\ln\left(\dfrac{2}{1 + e}\right) \leq A \leq 16(e - 1)$.

Exercice 1

On considère la suite numérique (v_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $v_n = \dfrac{n^2 + 2n}{(n+1)^2}$.

1-*a*) Démontre que la suite (v_n) est convergente après avoir déterminé sa limite.

b) Démontre que la suite (v_n) est croissante.

c) Démontre que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ \dfrac{3}{4} \leqslant v_n \leqslant 1$.

2- On pose pour tout entier naturel non nul n, $a_n = v_1 \times v_2 \times \ldots \times v_n$.

a) Démontre par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ a_n = \dfrac{n+2}{2(n+1)}$.

b) Déduis-en la limite de la suite (a_n).

3- Pour tout entier naturel n, on pose : $b_n = \ln(v_1) + \ln(v_2) + \ldots + \ln(v_n)$.

a) Démontre que (b_n) est une suite à termes négatifs.

b) Calcule la limite de la suite (b_n).

Exercice 2

La société « Gnamienlait » de Gnamien produit des sachets de lait caillé. Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque sachet de lait caillé produit, sa masse en gramme (g). La loi de probabilité de X est définie par le tableau ci-dessous.

x(g)	220	230	240	250	260	270	280
P(x)	0,08	0,10	a	b	0,16	0,15	0,04

a et b sont deux nombres réels.
x représente la masse du sachet de lait caillé ;
P(x) la probabilité qu'un sachet de lait ait la masse x.

1-*a*) Calcule E(X) l'espérance mathématique de X en fonction de a et b.

b) Sachant que E(X) = 250, justifie que $a = 0{,}14$ et $b = 0{,}33$.
Dans la suite de l'exercice, on conservera les valeurs de a et b données ci-dessus.

2- *a*) Gnamien prend au hasard un sachet de lait caillé de sa société.

Calcule la probabilité pour que la masse de ce sachet de lait caillé soit au moins de 250 g.

b) Tiéplé, la fille de Gnamien, prend au hasard de façon indépendante cinq sachets de lait caillé.

Calcule la probabilité qu'elle ait choisi exactement trois sachets de lait caillé de 220 g.

On donnera le résultat arrondi à l'ordre 3.

3- Les sachets de lait caillé sont contrôlés par une machine.

Cette machine est réglée pour éliminer en principe les sachets de lait de masse inférieure à 250 g.

- Si un sachet de lait caillé a 240 g, la probabilité qu'il soit éliminé est de 0,7.
- Si un sachet de lait caillé a 230 g, la probabilité qu'il soit éliminé est de 0,8.
- Si un sachet de lait caillé a 220 g, il est systématiquement éliminé.
- Si un sachet de lait caillé a une masse supérieure ou égale à 250 g, il est systématiquement accepté.

On désignera par :

* G l'évènement : « le sachet de lait contrôlé est de 240 g »
* F l'évènement : « le sachet de lait contrôlé est de 230 g »
* H l'évènement : « le sachet de lait contrôlé est de 220 g »
* E l'évènement : « le sachet de lait contrôlé est éliminé ».

a). Justifie que la probabilité qu'un sachet de lait caillé de 240 g soit éliminé est de 0,098.

b). Calcule la probabilité pour qu'un sachet de lait caillé de cette société soit éliminé.

Problème

Parie A

Soit la fonction numérique g définie sur $]0; +\infty[$ par : $g(x) = -\frac{2x+1}{x^2} + \ln x$.

1-*a*) Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

b) Calcule $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x)$.

2- On suppose que g est dérivable sur $]0 ; +\infty[$.

a) Démontre que : $\forall x \in]0 ; +\infty[$, $g'(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x^3}$.

b) Déduis-en le sens de variation de g.

c) Dresse le tableau de variation de g.

3-*a*) Démontre que l'équation $x \in]0 ; +\infty[$, $g(x) = 0$ admet une solution unique α.

b) Justifie que : $2{,}55 < \alpha < 2{,}56$.

c) Démontre que : $\begin{cases} \forall\, x \in]0\,,\, \alpha[,\ g(x) < 0 \\ \forall\, x \in]\alpha\,,\, +\infty[,\ g(x) > 0 \end{cases}$

Partie B

On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = (\frac{1}{x} - \ln x)e^{-x}$.

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J).

On prendra pour unités graphiques : OI = 2 cm et OJ = 10 cm.

1-*a*) Calcule $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$, puis donne une interprétation graphique du résultat.

b) Calcule $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, puis donne une interprétation graphique du résultat.

2- Démontre que : $f(\alpha) = -\frac{1+\alpha}{\alpha^2} e^{-\alpha}$.

3- On suppose que f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$.

a) Démontre que : $\forall x \in]0 ; +\infty[$, $f'(x) = e^{-x} g(x)$.

b) En utilisant la partie A, détermine les variations de f.

c) Dresse le tableau de variation de f.

4- Démontre qu'une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1 est $y = -\frac{3}{e}x + \frac{4}{e}$.

5- Construis la droite (T) et la courbe (C) dans le repère (O, I, J).
On prendra $\alpha = 2{,}6$.

Partie C

1- Soit h la fonction définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $h(x) = e^{-x} \ln x$.
On suppose que h est dérivable sur $]0 ; +\infty[$.
Démontre que h est une primitive de f sur $]0 ; +\infty[$.

2- Soit λ un nombre réel tel que $\lambda > 3$.
a) Calcule, en cm² et en fonction de λ, l'aire $A(\lambda)$ de la partie du plan comprise entre (C), (OI) et les droites d'équation : $x = 3$ et $x = \lambda$.
b) Calcule $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A(\lambda)$.

Exercice 1

Madame Kouamé, statisticienne à la retraite, a créé une petite entreprise de fabrication de colliers traditionnels. Dans l'intention de faire des prévisions pour la production de colliers de l'année 2011, elle a fait l'état des ventes des huit types de colliers fabriqués en 2010.

Types de colliers	1	2	3	4	5	6	7	8
Prix x_i de vente en centaines de francs CFA du collier de type i	54	60	66	72	84	90	96	102
Nombre y_i en dizaines de colliers vendus au prix x_i	18	16	15	13	10	9	8	7

On désigne par :
X le caractère « prix de vente du collier » ;
Y le caractère « nombre de colliers vendus au prix X ».

1- Représente graphiquement le nuage de points associé à la série statistique double de caractère (X ; Y) dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J). On prendra 2 cm pour 10 centaines de francs sur (OI) et 2 cm pour 2 dizaines de colliers sur (OJ).

2- Calcule les coordonnées du point moyen G du nuage.

3-*a*) Calcule la variance V(X) de X.
b) Calcule la covariance Cov(X ; Y) de la série statistique double de caractère (X ; Y).
c) On admet que V(Y) = 14,50. Démontre que l'arrondi d'ordre 2 du coefficient de corrélation linéaire est égal à - 0,99.

4- Soit (D) la droite de régression de Y en X par la méthode des moindres carrés.
a) Démontre que l'arrondi d'ordre 2 du coefficient directeur de (D) est égal à - 0,23.
b) Démontre qu'une équation de la droite (D) est :
$y = - 0{,}23x + 29{,}94$.

5- Pour l'année 2011, Madame Kouamé souhaite fabriquer un nouveau type de colliers qu'elle vendrait à 11 500 francs CFA l'unité. Combien de colliers de ce type pourrait-elle vendre selon l'ajustement linéaire réalisé ?

Exercice 2

On considère la suite numérique u définie sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{4}{u_n}\right) \end{cases}$$

1- On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{4}{x}\right)$.

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) où les unités respectives sur (OI) et (OJ) sont 4 cm et 2 cm.
La courbe (C) et la droite (D) d'équation $y = x$ sont tracées sur une feuille annexe à rendre avec la copie.

a) Représente sur l'axe des abscisses (OI) les termes u_1, u_2 et u_3 de la suite u en utilisant la courbe (C) et la droite (D).
b) Quelle conjecture peut-on faire quant à la convergence de la suite u ?

2- On admet que f est continue et strictement croissante sur $[2 ; 3]$.
a) Démontre que $f([2 ; 3]) \subset [2 ; 3]$.
b) En utilisant un raisonnement par récurrence, démontre que pour tout entier $n \geqslant 1$, $2 \leqslant u_n \leqslant 3$.

3- *a*) Démontre que la suite u est décroissante.
b) Déduis-en que la suite u est convergente.

4- On considère la suite v définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 2}$

a) Démontre que pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_{n+1} = (v_n)^2$.
b) Démontre par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 1$, $v_n = v_1^{2^{n-1}}$.
c) Calcule v_1 puis exprime v_n en fonction de n.
d) Exprime u_n en fonction de n.
e) Démontre que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$. En déduire la limite de u.

Problème

Partie A

On considère la fonction g définie sur $]0 ; + \infty[$ par : $g(x) = e^x + 2\ln x$.

1- *a*) Détermine $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

b) On suppose que g est dérivable sur $]0 ; + \infty[$. Calcule $g'(x)$.

c) Étudie le sens de variation de g puis dresse son tableau de variation.

2- *a*) Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]0 ; +\infty[$.

b) Vérifie que $0{,}4 < \alpha < 0{,}5$.

c) Démontre que :

$\forall x \in]0 ; \alpha[, g(x) < 0$;

$\forall x \in]\alpha ; +\infty[, g(x) > 0$.

Partie B

On considère la fonction *f* définie sur $[0 ; +\infty[$ par :

$\begin{cases} f(x) = e^x + 2x\ln x - 2x \text{ si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$

On note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

L'unité graphique est 4 cm.

1-*a*) Détermine $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

b) Interprète graphiquement les résultats.

2-*a*) Démontre que *f* est continue en 0.

b) Démontre que : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = -\infty$.

c) La fonction *f* est-elle dérivable en 0 ? Justifie la réponse.

d) Interprète graphiquement le résultat de la question 2.b).

3- On admet que *f* est dérivable sur $]0 ; +\infty[$.

a) Démontre que : $\forall x \in]0 ; +\infty[$, $f'(x) = g(x)$.
b) Étudie les variations de f puis dresse son tableau de variation.

4- Trace la courbe (C) sur l'intervalle [0 ; 2]. *On prendra $\alpha = 0{,}45$ et on admettra que la courbe (C) coupe la droite (OI) en deux points d'abscisses respectives 0,3 et 0,6.*

5-*a*) On pose : $K = \int_1^2 x \ln x \, dx$. A l'aide d'une intégration par parties, démontre que : $K = 2\ln 2 - \frac{3}{4}$.

b) Soit A l'aire en cm² de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite (OI) et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = 2$. Calcule A puis donne l'arrondi d'ordre 2 du résultat.

Exercice 1

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J), on désigne par K, A et B les points d'affixes respectives z_1, z_2 et z_3 telles que $z_1 = 2$, $z_2 = 4 + 2i$ et $z_3 = 2 + 4i$. *L'unité graphique est 2 cm.*

1-*a*) Place les points K, A et B dans ce repère.

b) Détermine la forme algébrique du nombre complexe $\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$.

2- On note S la similitude directe de centre K qui transforme A en B.

a) Démontre que l'écriture complexe de S est : $z' = (1 + i)z - 2i$.

b) Détermine les affixes respectives des points I' et J', images respectives des points I et J par S puis place I' et J'.

3- Détermine le rapport et une mesure de l'angle orienté de la similitude directe S.

4- Soit (C) le cercle de centre $\Omega(1 ; 1)$ et de rayon 2.

a) Trace (C).

b) Détermine le centre et le rayon de (C'), image de (C) par S.

c) Construis (C').

5-*a*) Détermine puis construis l'image par S de la droite (IJ).

b) On désigne par E le point d'intersection de (C) et de la droite (IJ) d'abscisse négative. Place E.

c) Soit E' l'image de E par S.
Justifie la position du point E' puis place E'.

Exercice 2

On considère la suite numérique (u) définie par :

$u_0 = \sqrt{2}$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 2 + \frac{1}{2}u_n$.

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
L'unité graphique est 2 cm.

1- Détermine les valeurs exactes de u_1 et u_2.

2- Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$ et de représentation graphique (D).

a) Trace (D) et la droite (Δ) d'équation y = x.

b) Place u_0 sur l'axe (OI).

c) A l'aide de (D) et (Δ), place les termes u_1, u_2 et u_3 de la suite (u) sur l'axe (OI).

3-*a*) Démontre par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant 4$.

b) Démontre que la suite (u) est croissante.

c) Déduis-en que la suite (u) est convergente.

4- On considère la suite (v) définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 4$. Démontre que la suite (v) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

5- Pour tout nombre entier naturel n, on pose :
$T_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$ la somme des $n+1$ premiers termes de la suite (v) ;
$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ la somme des $n+1$ premiers termes de la suite (u).

a) Détermine une expression de T_n en fonction de n.

b) Justifie que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $S_n = 2(\sqrt{2} - 4)(1 - \frac{1}{2^{n+1}}) + 4(n + 1)$.

c) Détermine la limite de la suite (S_n).

Problème

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I ; J).
L'unité graphique est 2 cm.
On considère la fonction f définie sur $]-\infty ; 1[$, par : $f(x) = x^2 - 1 + \ln(1 - x)$.
On note (C) la courbe représentative de f dans le repère (O, I, J).

1-*a*) Calcule $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

b) Calcule $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$ puis donne une interprétation graphique du résultat.

c) Calcule la limite de f à gauche en 1 puis donne une interprétation graphique du résultat.

2-*a*) On suppose que f est dérivable sur $]-\infty ; 1[$.
Pour tout nombre réel x de l'intervalle $]-\infty ; 1[$, calcule $f'(x)$.
b) Démontre que f est strictement décroissante sur $]-\infty ; 1[$.
c) Dresse le tableau de variation de f.

3-*a*) Démontre que f est une bijection de $]-\infty ; 1[$ sur un intervalle K que l'on précisera.
b) Déduis-en que l'équation (E) : $x \in]-\infty ; 1[$, $f(x) = 0$ admet une solution unique α.
c) Justifie que : $-0,7 < \alpha < -0,6$.

4-*a*) Démontre qu'une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0 est : $y = -x - 1$
b) On donne le tableau de valeurs suivant :

x	-2	-1,5	-1	-0,75	-0,5	-0,25	0,25	0,5	0,75
Arrondi d'ordre 1 de $f(x)$	4,1	2,2	0,7	0,1	-0,3	-0,7	-1,2	-1,4	-1,8

Trace (T) et (C).
On pourra faire la figure dans la partie du plan caractérisée par $\begin{cases} -3 \leq x \leq 5 \\ -4 \leq y \leq 6 \end{cases}$.

5- On désigne par A l'aire de la partie du plan limitée par (C), la droite (OI) et les droites d'équations respectives $x = \alpha$ et $x = 0$.
a) Calcule $\int_{\alpha}^{0} ln(1-x)dx$ à l'aide d'une intégration par parties.
b) Démontre que la valeur de A en unités d'aire est :
$A = \frac{\alpha^3}{3} - 2\alpha - (1 - \alpha)ln(1 - \alpha)$.
c) Détermine en cm² l'arrondi d'ordre 2 de la valeur de A pour $\alpha = -0,65$.

6- Soit f^{-1} la bijection réciproque de f et (C') la courbe représentative de f^{-1} dans le plan muni du repère (O, I, J).

a) Calcule $f(-1)$.
b) Démontre que le nombre dérivé de f^{-1} en $ln2$ existe puis calcule-le.
c) Construis la courbe (C') et sa tangente (Δ) au point d'abscisse $ln2$ sur la figure de la question 4-*b*).

Exercice 1

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$
On note B et C les points du plan d'affixes respectives $3 - 2i$ et $5 + i$.
On désigne par S la similitude directe de centre O qui transforme C en B.

1-*a*) Démontre que l'écriture complexe de S est : $z' = \frac{1}{2}(1-i)z$.

b) Détermine les éléments caractéristiques de S.

c) Détermine l'affixe du point D qui a pour image le point C par S.

2-*a*) Justifie que l'affixe z_1 du point B_1, image de B par S, est $\frac{1}{2}(1 - 5i)$.

b) Justifie que le triangle OBB_1 est rectangle et isocèle en B_1.

3- On définit les points suivants : $B_0 = B$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $B_{n+1} = S(B_n)$.
On note : z_n l'affixe de B_n.

a) Démontre par récurrence que :

$\forall n \in \mathbb{N}$, $z_n = (\frac{1}{2})^n (1-i)^n z_0$.

b) Calcule la distance OB_n en fonction de n.

c) Calcule $\lim\limits_{n \to +\infty} OB_n$.

Exercice 2

Pour étudier l'évolution du nombre de bacheliers accédant aux études supérieures, le Ministère du Plan d'un pays a diligenté une enquête depuis l'an 2003. Les résultats de cette enquête sont consignés dans le tableau ci-dessous.

Années	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011
Rang X de l'année	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nombre Y de diplômés (en milliers)	25	27	30	33	34	35	38	41	43

1- Représente le nuage de points associé à la série statistique double (X ; Y) dans le plan muni d'un repère orthonormé.

L'unité graphique est le centimètre.
On prendra pour origine du graphique le point Ω (0;24).

2- Détermine les coordonnées du point moyen G de la série statistique (X ; Y).

3- Justifie que :

a) La variance de X est $\frac{20}{3}$;

b) La covariance de X et Y est $\frac{44}{3}$.

4-*a*) Sachant que la variance de Y est égale à $\frac{98}{3}$, détermine la valeur du coefficient de corrélation linéaire. On donnera l'arrondi d'ordre 2 du résultat.

b) Justifie que le résultat précédent permet d'envisager un ajustement linéaire par la méthode des moindres carrés.

5- Soit (D) la droite d'ajustement de Y en X obtenu par la méthode des moindres carrés.

a) Détermine une équation de (D).

b) Trace (D).

6- On suppose que l'évolution se poursuit de la même manière au cours des années suivantes. Donne une estimation du nombre de bacheliers qui accèderont aux études supérieures en 2020.

Problème

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
L'unité graphique est le centimètre.

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = x + (ax+b)e^{-x}$ où a et b sont des nombres réels. Dans le plan muni du repère (O, I, J), on désigne par (C) la courbe représentative de g et par (D) la droite d'équation $y = x$.

1-*a*) On donne : g(0) = 1. Détermine la valeur de *b*.

b) On suppose que g(0) = 1, g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on admet que la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0 est parallèle à la droite (D).

Détermine la valeur de *a*.

2- Soit *h* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = e^x - x$.

a) On suppose que *h* est dérivable sur $\mathbb{R}$. Calcule $h'(x)$ pour tout x élément de $\mathbb{R}$.

b) Dresse le tableau de variation de *h*.

On ne calculera pas les limites de h en $-\infty$ et en $+\infty$.

c) Déduis-en que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) > 0$.

Partie B

Soit *f* la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + (x+1)e^{-x}$.

1-*a*) Calcule la limite de *f* en $-\infty$.

b) Justifie que : $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$.

c) Donne une interprétation graphique de ces résultats.

2-*a*) Calcule la limite de *f* en $+\infty$.

b) Démontre que (D) est asymptote à (C) en $+\infty$.

c) Étudie les positions relatives de (C) et (D).

3-*a*) On suppose que *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Démontre que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^{-x}h(x)$.

b) Détermine le sens de variation de *f*.

c) Dresse le tableau de variation de *f*.

4- Construis dans le même repère (T), (D) et (C).

5-*a*) Démontre que *f* est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

b) On note f^{-1} la bijection réciproque de *f*.

Calcule $(f^{-1})'(1)$.

c) Construis (Γ), la courbe représentative de f^{-1} dans le même repère que la courbe (C).

Partie C

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_{-1}^{n} (t+1)e^{-t}\, dt$.

1- A l'aide d'une intégration par parties, démontre que :
$\forall n \in \mathbb{N}, I_n = (-2-n)e^{-n} + e$.

2- Calcule, en cm^2 et en fonction de n, l'aire A_n de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équation $x = -1$ et $x = n$.

3- Calcule $\lim\limits_{n \to +\infty} A_n$.

Exercice 1

Partie I

On considère la fonction p définie sur $\mathbb{C}$ par :
$p(z) = z^3 - (3 + 2i)z^2 + (1 + 5i)z + 2 - 2i$.

1-*a*) Calcule $p(i)$.

b) Détermine deux nombres complexes a et b tels que :
$p(z) = (z - i)(z^2 + az + b)$.

2- Résous dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 - (3 + i)z + 2 + 2i = 0$.

3- Déduis-en les solutions dans $\mathbb{C}$, de l'équation $p(z) = 0$.

Partie II

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, d'unité 5 cm.

On pose : $z_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = \frac{1 + i}{2} z_n$.

On note A_n le point d'affixe z_n.

1-*a*) Calcule z_1 et z_2.

b) Place les point A_0, A_1 et A_2 dans le plan complexe.

2- On considère la suite U définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_n = |z_{n+1} - z_n|$.

a) Justifie que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = \frac{\sqrt{2}}{2} |z_n|$.

b) Démontre que U est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et de premier terme $\sqrt{2}$.

c) Exprime U_n en fonction de n.

3- On désigne par $A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n$, la longueur de la ligne brisée $A_0A_1A_2 \ldots A_{n-1}A_n$, $(n \in \mathbb{N}^*)$.

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $l_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n$.

a) Justifie que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $l_n = U_0 + U_1 + \ldots + U_{n-1}$.

b) Calcule l_n.

c) Déduis-en $\lim\limits_{n \to +\infty} l_n$.

Exercice 2

Mariam, une jeune diplômée sans emploi, a reçu un fonds et décide d'ouvrir un restaurant. Après un mois d'activité elle constate que :

- pour un jour donné, la probabilité qu'il y ait une affluence de clients est 0,6 ;
- lorsqu'il y a une affluence de clients, la probabilité qu'elle réalise un bénéfice est 0,7 ;
- lorsqu'il n'y a pas d'affluence de clients, la probabilité qu'elle réalise un bénéfice est 0,4.

On désigne par A l'évènement « Il y a une affluence de clients » et par B l'évènement « Mariam réalise un bénéfice »

1- On choisit un jour au hasard.

a) Calcule la probabilité de l'évènement E suivant : « Il y a une affluence de clients et Mariam réalise un bénéfice ».

b) Démontre que la probabilité p(B) de l'évènement B est égale à 0,58.

c) Mariam a réalisé un bénéfice.
Calcule la probabilité qu'il y ait eu une affluence de clients ce jour-là.
On donnera l'arrondi d'ordre 2 du résultat.

2- Mariam veut faire des prévisions pour trois jours successifs donnés. La réalisation de bénéfice se fait de façon indépendante.
On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de jours où elle réalise un bénéfice sur les trois jours successifs.

a) Détermine les valeurs prises par X.

b) Détermine la loi de probabilité de X. On donnera l'arrondi d'ordre 2 de chaque probabilité.

c) Calcule l'espérance mathématique E(X) de X.

3- Soit n un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2. On note p_n la probabilité que Mariam réalise au moins une fois un bénéfice pendant n

jours successifs sur une période de n jours. La réalisation de bénéfice se fait de façon indépendante.

a) Justifie que pour tout nombre entier naturel n supérieur ou égal à 2 : $p_n = 1 - (0{,}42)^n$.

b) Détermine la valeur minimale de n pour qu'on ait $p_n \geq 0{,}9999$.

Problème

Partie A

Soit r la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $r(x) = xe^{-x}$.

On considère l'équation différentielle (E) : $y' + y = r$.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \frac{1}{2}x^2e^{-x}$.

1- On suppose que g est dérivable sur $\mathbb{R}$. Démontre que g est une solution de l'équation (E).

2- Soit l'équation différentielle (F) : $y' + y = 0$.

a) Démontre qu'une fonction $\varphi - g$ est solution de (F) si et seulement si φ est une solution de (E).

b) Résous l'équation différentielle (F).

c) Déduis-en la solution φ de (E) qui vérifie $\varphi(0) = -\frac{3}{2}$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$f(x) = \frac{x^2 - 3}{2}e^{-x}$.

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J), d'unités graphiques : OI = 2 cm ; OJ = 4 cm.

1-*a*) Calcule $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

b) Démontre que la courbe (C) admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction celle de (OJ).

2- Calcule la limite de f en $+\infty$ et interprète graphiquement ce résultat.
3- On admet que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

a) Démontre que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{-x^2 + 2x + 3}{2}\ e^{-x}$.

b) Étudie les variations de f.
c) Dresse le tableau de variations de f.

4- Démontre qu'une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0 est : $y = \dfrac{3}{2}x - \dfrac{3}{2}$.

5- Étudie la position de (C) par rapport à l'axe des abscisses.

6- Représente graphiquement (T) et (C).

Partie C

1- À l'aide d'une intégration par parties, calcule : $\int_0^1 xe^{-x}dx$.

2- Justifie que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -f'(x) + xe^{-x}$.
3- En utilisant la question précédente, calcule en cm² l'aire A de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite (OI) et les droites d'équations : $x = 0$ et $x = 1$.

Exercice 1

1- On considère la fonction h définie sur l'intervalle [0 ; 1] par : $h(x) = 2x - x^2$. On suppose que h est dérivable sur [0 ; 1].

a) Démontre que h est strictement croissante sur l'intervalle [0; 1].

b) Déduis-en que l'image de l'intervalle [0; 1] par h est l'intervalle [0; 1].

2- Soit u la suite définie par : $u_0 = \frac{3}{7}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = h(u_n)$.

a) Démontre par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < 1$.

b) Démontre que la suite u est croissante.

c) Justifie que la suite u est convergente.

3- On considère la suite v définie par : $v_n = ln(1-u_n)$, $(n \in \mathbb{N})$.

a) Démontre que v est une suite géométrique de raison 2.

b) Exprime v_n en fonction de n.

c) Calcule la limite de la suite v.

d) Déduis-en la limite de la suite u.

Exercice 2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$, (unité graphique : 2 cm).

On considère la transformation φ du plan qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que :

$z' = (1 - i\frac{\sqrt{3}}{3})z + 2i\frac{\sqrt{3}}{3}$

1- *a*) Soit Ω le point d'affixe 2. Vérifie que : $\varphi(\Omega) = \Omega$

b) Justifie que φ est une similitude directe dont on précisera les éléments caractéristiques.

2- *a*) Démontre que : $\forall z \neq 2, \frac{z'-z}{2-z} = i\frac{\sqrt{3}}{3}$.

b) Déduis-en que le triangle $M\Omega M'$ est rectangle en M.

c) Donne un programme de construction de l'image M' par φ d'un point M donné, puis justifie ce programme.

3-*a*) Place les points A et B d'affixes respectives $-1 + i$ et $5 - i$ dans le plan muni du repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

b) Construis les images respectives A' et B' de A et B par φ.

c) On note z_A, z_B, $z_{A'}$ et $z_{B'}$ les affixes respectives des points A, B, A' et B'.

Démontre que : $z_{A'} - z_A = z_B - z_{B'}$

d) Déduis-en la nature du quadrilatère AA'B'B.

Problème

Partie A

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = -1 + (2 - 2x)e^{-2x+3}$.

1- Calcule les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$

2- *a*) On suppose que g est dérivable sur $\mathbb{R}$

Justifie que : $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = (4x - 6)e^{-2x+3}$

b) Etudie le signe de $g'(x)$ suivant les valeurs de x.

c) Justifie que $g'\left(\frac{3}{2}\right) = -2$.

d) Dresse le tableau de variation de g.

3- *a*) Démontre que l'équation : $g(x) = 0$ admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique notée α.

b) Vérifie que : $0{,}86 < \alpha < 0{,}87$.

c) Justifie que : $\forall x \in]-\infty ; \alpha[, g(x) > 0$ et $\forall x \in]\alpha ; +\infty[, g(x) > 0$

Partie B

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J), (Unité graphique : 2 cm).

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -x + (x - \frac{1}{2})e^{-2x+3}$.

On note (C) la courbe représentative de f.

1- *a*) Calcule $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$.

b) Déduis-en que (C) admet une branche parabolique de direction celle de (OJ) en $-\infty$.

2- *a*) Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Démontre que la droite (D) d'équation y = -*x* est asymptote à (C) en $+\infty$.

c) Étudie la position de (C) par rapport à (D)

3- *a*) On suppose que *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Démontre que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = g(x)$.

b) Déduis-en les variations de *f*.

c) Dresse le tableau de variation de. *On ne calculera pas* $f(\alpha)$.

4- Construis (D) et (C) sur le même graphique.

On précisera les points de (C) d'abscisses 0 ; $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$; 4.

On prendra : $\alpha = 0{,}865$ *et* $f(\alpha) = 0{,}4$.

5- Soit *t* un nombre réel strictement supérieur à $\frac{3}{2}$. On désigne par $A(t)$ l'aire en cm^2 de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équation $x = \frac{3}{2}$ et $x = t$.

On pose : $I_t = \int_{\frac{3}{2}}^{t} \left(x - \frac{1}{2}\right) e^{-2x+3}\, dx$.

a) À l'aide d'une intégration par parties, justifie que :

$$I_t = \frac{3}{4} - \frac{t}{2} e^{-2t+3}.$$

b) Déduis-en $A(t)$.

c) Calcule $\lim\limits_{t\to+\infty} A(t)$.

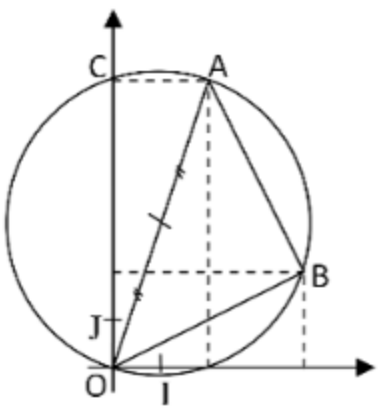
CORRIGÉS

Habiletés et conseils pour la résolution de l'exercice 1

	HABILETÉS	CONSEILS
1	Représenter un nombre complexe par un point	Tu placeras le point en prenant pour abscisse la partie réelle et pour ordonnée la partie imaginaire du nombre complexe donné.
2-a)	Déterminer la forme algébrique d'un nombre complexe	Tu rendras le dénominateur réel en utilisant le conjugué du dénominateur
b)	Ecrire un nombre complexe sous forme trigonométrique	Tu détermineras le module et un argument de $\frac{Z_A-Z_B}{Z_A-Z_O}$ en utilisant sa forme algébrique
c)	Déterminer une mesure d'un angle orienté	Tu dois utiliser la formule : mes $(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AB}) = \arg \frac{Z_B-Z_A}{Z_O-Z_A} + 2k\pi, k \in$
3-a)	Déterminer l'écriture complexe associée à une rotation	Tu utiliseras l'écriture complexe d'une rotation d'angle θ qui est de la forme $z' = (\cos\theta + i\sin\theta)z + b$. Tu détermineras b en utilisant le point invariant B.
b)	Déterminer l'image d'un point par une rotation	Tu remplaceras z par l'affixe de O dans l'écriture complexe de la rotation r. Tu remarqueras que $r_B(O) = A$
c)	Démontrer qu'un triangle est rectangle et isocèle	Tu utiliseras le résultat précédent $r_B(O) = A$ et la définition d'une rotation
4-a)	Déterminer le centre et le rayon d'un cercle circonscrit à un triangle rectangle	Tu utiliseras la propriété suivante : Tout triangle rectangle est inscrit dans un cercle dont le diamètre est l'hypoténuse. Cette propriété suggère la construction du cercle.
b)	Démontrer que quatre points sont cocycliques	Tu remarqueras que : $\arg\left(\frac{Z_O-Z_B}{Z_A-Z_B}\right) = \arg \frac{Z_O-Z_C}{Z_A-Z_C} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Corrigé Exercice 1

1- ***Plaçons les points A, B et C dans le plan.***



2- ***a) Déterminons la forme algébrique de Z.***

$$Z = \frac{Z_A - Z_B}{Z_A - Z_O}$$
$$= \frac{2 + 6i - 4 - 2i}{2 + 6i - 0}$$
$$= \frac{-1 + 2i}{1+3i}$$
$$= \frac{(-1 + 2i)(1 - 3i)}{(1+3i)(1-3i)}$$

La forme algébrique de Z est : $\frac{1}{2} + \frac{i}{2}$.

b) ***Écrivons Z sous forme trigonométrique.***

D'après la question précédente, $Z = \frac{1+i}{2}$.

$$|Z| = \frac{\sqrt{1^2+1^2}}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Soit θ un argument de Z.

$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Donc : $\theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

Par conséquent : $Z = \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$.

c) ***Déterminons une mesure de l'angle orienté*** $(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AB})$.

Mes $(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AB}) = \text{Arg}\frac{Z_B - Z_A}{Z_O - Z_A}$

$= \text{Arg } Z$

$= \text{Arg}(\frac{1+i}{2})$ d'après 2-a).

$= \frac{\pi}{4}$.

Une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AB})$ est $\frac{\pi}{4}$.

3-*a*) ***Déterminons l'écriture complexe de r.***

r est la rotation de centre B et d'angle $-\frac{\pi}{2}$. L'écriture complexe de *r* est par conséquent de la forme $z' = (\cos(\frac{-\pi}{2}) + i\sin(\frac{-\pi}{2}))z + b$.

On a : $z' = -iz + b$

B est invariant par *r* donc : $Z_B = -iZ_B + b$.

En remplaçant Z_B par sa valeur on a : $4 + 2i = -i(4 + 2i) + b$

$b = 4 + 2i + 4i - 2$

$= 2 + 6i$.

D'où l'écriture complexe de *r* est : $z' = -iz + 2 + 6i$.

b) ***Déterminons l'image de O par r.***

Soit O' l'image de O par *r*. On a :

$z_{O'} = -iz_o + 2 + 6i$

$z_{O'} = 2 + 6i$

$= z_A$

Donc : $r(O) = A$, c'est-à-dire l'image de O par *r* est A

c) ***Déduisons que le triangle OAB est rectangle et isocèle en B.***

r est la rotation de centre B, d'angle $-\frac{\pi}{2}$ qui transforme O en A.

Par conséquent : Mes$(\overrightarrow{BO}, \overrightarrow{BA}) = -\frac{\pi}{2}$ et BO = BA

Donc le triangle OAB est rectangle et isocèle en B.

4- ***a*) Déterminons le centre et le rayon du cercle (C) circonscrit au triangle OAB puis construisons (C).***

• ***Déterminons le centre et le rayon du cercle (C) circonscrit au triangle OAB.***

Le triangle OAB étant rectangle en B, son hypoténuse [OA] est le diamètre du cercle (C) circonscrit au triangle.

Le centre du cercle (C) est donc le milieu de [OA].

Soit Ω le centre du cercle (C) et Z_Ω son affixe. On a :

$$Z_\Omega = \frac{Z_O + Z_A}{2}$$
$$= \frac{0+2+6i}{2}$$
$$= 1+3i.$$

Soit R le rayon de (C). $R = \frac{OA}{2}$, car [OA] est le diamètre de (C).

$$R = \frac{|z_A - z_O|}{2}$$
$$= \frac{|2+6i|}{2}$$
$$= \sqrt{10}.$$

Donc le cercle (C) a pour centre le point Ω d'affixe $1+3i$ et pour rayon $\sqrt{10}$.

• ***Construisons (C)***

Voir la figure de la question 1-).

b) ***Démontrons que les points O, A, B et C appartiennent à un même un cercle.***

Cela revient à démontrer que $\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_O - z_A}\right) = \arg\frac{z_B - z_C}{z_O - z_C} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

D'après la question 2-c), une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AO}, \overrightarrow{AB})$ est $\frac{\pi}{4}$.

Or : $\frac{z_B - z_C}{z_O - z_C} = \frac{4 + 2i - 6i}{0 - 6i}$

$= \frac{4 - 4i}{-6i}$

$= \frac{2 - 2i}{-3i}$

$= \frac{2i + 2}{3}$

$= \frac{2}{3}(1 + i)$

et : $\text{Arg}(1 + i) = \frac{\pi}{4}$, donc : $\arg\left(\frac{z_B - z_A}{z_O - z_A}\right) = \arg\left(\frac{z_B - z_C}{z_O - z_C}\right)$.

De plus, les points O, A et B ne sont alignés, d'après la question 3-c).
Par conséquent les points O, A, B et C appartiennent à un même cercle.

Autre méthode

On démontre que le point C appartient également au cercle (C) circonscrit au triangle OAB.

Vérifions pour cela que la distance ΩC est égale à $\sqrt{10}$.

$\Omega C = |z_c - z_\Omega|$

$= |(6i) - (1+3i)|$

$= \sqrt{10}$.

Le point C appartient au cercle (C) circonscrit au triangle OAB.
Donc les points O, A, B et C appartiennent à un même cercle.

Habiletés et conseils pour la résolution de l'exercice 2

	HABILETÉS	CONSEILS
Partie *A*		
1-	Dénombrer, dans le cas d'une expérience conduisant à un nombre fini d'éventualités, les cas possibles d'une expérience	Tu remarqueras que les chiffres d'un code peuvent être distincts ou non. Tu utiliseras alors les p-listes.
2-	Calculer la probabilité d'un évènement.	Tu utiliseras la formule $P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$
3-	Calculer la probabilité d'un évènement	Tu remarqueras qu'un code est formé de quatre chiffres et qu'ici ces chiffres sont distincts. Tu utiliseras donc les permutations
Partie *B*		
1-a)	Calculer la probabilité d'un évènement	Tu remarqueras que l'univers est l'ensemble des permutations des quatre chiffres 2 ; 4 ; 5 et 7 (question A-3).
b)	Calculer la probabilité d'un évènement	Tu utiliseras la propriété $P(\overline{E}) \neq 0$. $P(\overline{E} \cap R) = P_{\overline{E}}(R) \times P(\overline{E})$ Où R est l'évènement « Monsieur Koné réussit au deuxième essai »
2-	Calculer la probabilité d'un évènement	Tu utiliseras la propriété : $G = E \cup F$ et $E \cap F = \varnothing$ $P(G) = P(E) + P(F)$
3-	Calculer la probabilité conditionnelle d'un évènement	Tu utiliseras la propriété : $P_G(E) = \frac{P(E \cap G)}{P(G)}$ Tu remarqueras que $E \subset G$.
4-a)	Déterminer la loi de probabilité d'une variable aléatoire donnée	Tu trouveras d'abord les valeurs prises par X. Tu te référeras ensuite aux questions précédentes pour avoir les probabilités. Tu
		vérifieras enfin que la somme des probabilités est égale à 1.
b)	Calculer l'espérance mathématique d'une variable aléatoire donnée	Tu appliqueras la formule $E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n$. où $p_i = P(X = x_i)$

Corrigé Exercice 2

Partie A

1- ***Déterminons le nombre de cartes magnétiques que la banque peut distribuer à ses clients.***

Les quatre chiffres d'un code peuvent être distincts ou non. Chaque code est donc une 4-liste d'éléments d'un ensemble à 10 éléments.
Ainsi le nombre de cartes est : 10^4.
La banque peut distribuer 10 000 cartes magnétiques.

2- ***Démontrons que la probabilité pour que le code d'une carte magnétique commence par 0 est*** $\frac{1}{10}$.

Soit A l'évènement « le code commence par 0 »
Card(A) = 10^3.

Donc : $P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)}$

$= \frac{1}{10}$.

D'où la probabilité de A est : $\frac{1}{10}$.

Autre méthode

Un code peut commencer par un des 10 chiffres du système décimal.
Le tirage étant équiprobable, il y'a une chance sur 10 que le code commence par 0.

D'où la probabilité est : $\frac{1}{10}$.

3. ***Calculons la probabilité pour que le code d'une carte magnétique soit composée des chiffres 2 ; 4 ; 5 ; 7.***

Soit B l'évènement « Le code est composé des chiffres 2, 4, 5 et 7 ».
Un tel code secret est une permutation des chiffres 2, 4, 5 et 7.
D'où Card(B) = 4 !
Par conséquent la probabilité est :

$$P(B) = \frac{Card(B)}{Card(\Omega)}$$
$$= \frac{4!}{10^4}$$
$$= \frac{3}{1250}.$$

La probabilité de B est donc : $\frac{3}{1250}$.

Partie B

1-*a*) *Calculons la probabilité de l'évènement E.*

Les 4 chiffres sont connus, le nombre de codes possibles est Card(B).

Card(B) = 4! = 24 et Card(E) = 1.

La probabilité de retirer de l'argent au premier essai est donc :

$$P(E) = \frac{Card\ (E)}{Card\ (B)}$$
$$= \frac{1}{24}.$$

Par conséquent, la probabilité de l'évènement E est : $\frac{1}{24}$.

b*) *Calculons la probabilité de l'évènement F .

Monsieur Koné échoue au premier essai avec une probabilité $P(\overline{E})$.

$$P(\overline{E}) = 1 - P(E)$$
$$= \frac{23}{24}.$$

Soit R l'évènement « Monsieur Koné réussit au deuxième essai »

Au second essai, il réussit avec une probabilité $P_{\overline{E}}(R)$.

$$P_{\overline{E}}(R) = \frac{1}{23}.$$

On a :

$$P(F) = P(\overline{E} \cap R)$$
$$= P_{\overline{E}}(R) \times P(\overline{E})$$
$$= \frac{23}{24} \times \frac{1}{23}$$
$$= \frac{1}{24}.$$

Donc la probabilité de l'évènement F est : $\frac{1}{24}$.

2- *Démontrons que la probabilité de G est égale à $\frac{1}{12}$*

Monsieur Koné réussit à retirer de l'argent s'il réussit à le retirer au premier essai ou au deuxième essai.

On en déduit que : $G = E \cup F$ et $E \cap F = \varnothing$

Par suite : $P(G) = P(E) + P(F)$.

$P(G) = \frac{1}{24} + \frac{1}{24}$, d'après les questions B-1-*a*) et B-1-*b*).

$= \frac{1}{12}$.

Donc la probabilité de l'évènement G est : $\frac{1}{12}$.

3- *Calculons la probabilité pour que Monsieur Koné ait effectué le retrait au premier essai.*

La probabilité pour que Monsieur Koné ait retiré l'argent au premier essai sachant qu'il a retiré de l'argent est $P_G(E)$.

$$P_G(E) = \frac{P(E \cap G)}{P(G)}$$

$= \frac{P(E)}{P(G)}$, car $E \subset G$.

$= \frac{1}{24} \times 12$

$= \frac{1}{2}$.

4-*a*) ***Déterminons la loi de probabilité de X.***

Étant donné que Monsieur Koné n'effectue que 2 opérations, on a :

$X(\Omega) = \{30 ; 90 ; 120\}$.

$P(X=30) = P(E)$

$= \frac{1}{24}$;

$P(X = 90) = P(F)$

$P(\overline{E}) = \frac{23}{24}$

La probabilité qu'il échoue au premier essai et au deuxième essai est $\frac{22}{23}$. D'où :

$$P(X= 120) = \frac{23}{24} \times \frac{22}{23}$$

$$= \frac{11}{12}.$$

Loi de probabilité de X

x_i	30	90	120
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{11}{12}$

b) Démontrons que l'espérance mathématique est 115 F

$$E(X) = 30 \times \frac{1}{24} + 90 \times \frac{1}{24} + 120 \times \frac{11}{12}$$

$$= \frac{2760}{24}$$

$$= 115.$$

En moyenne, Monsieur Koné paye une taxe de 115 F.

Habiletés et conseils pour la résolution du problème

PARTIE A

	HABILETÉS	CONSEILS
1	Déterminer les limites en un point et à l'infini d'une fonction faisant intervenir la fonction	• Tu détermineras la limite de chaque terme pour la limite en 0. •Tu mettras x^2 en facteur pour la limite en $+\infty$
2	Déterminer la dérivée d'une fonction	Tu calculeras la dérivée de chaque terme.
3	Étudier les variations d'une fonction et dresser son tableau de variation.	x étant positif ; tu feras l'étude du signe de la dérivé de g sur $]0 ; +\infty[$
4-a)	Prouver l'existence d'une unique solution de l'équation $f(x) = 0$ sur un intervalle I, f étant continue et strictement monotone sur I.	Tu appliqueras la propriété : Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors f est une bijection de I sur $f(I)$. De plus, si $0 \in f(I)$, alors l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution dans I.
b)	Encadrer une solution $\propto$ de l'équation $f(x) = 0$, f étant une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I.	Pour justifier que $0,4 < \propto < 0,5$ tu vérifieras que $g(0,4) \times g(0,5) < 0$.
c)	Calculer l'image d'un nombre réel par une fonction	Tu remplaceras ce réel dans l'expression de la fonction.
d)	Déterminer le signe d'une fonction sur un intervalle	Tu utiliseras le sens de variation et les zéros de la fonction g.

PARTIE B

	HABILETÉS	CONSEILS
1-a)	Déterminer la limite d'une fonction en un point	Tu mettras $\frac{1}{x}$ en facteur dans $\frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x}$. Tu utiliseras les résultats de cours sur les asymptotes.
b)	Interpréter graphiquement $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$ ou $(+\infty)$	Tu interpréteras la limite de la question précédente.
c)	Déterminer la limite d'une fonction en $+\infty$ ou $-\infty$.	Tu calculeras la limite de chaque terme en $+\infty$.
2-	Déterminer la dérivée d'une fonction sur un intervalle	Tu calculeras $f'(x)$ et tu le mettras sous la forme $\frac{g(x)}{x^2}$

Habiletés et conseils pour la résolution du problème

	HABILETÉS	CONSEILS
3-a)	Calculer l'image d'un nombre réel par une fonction	Tu remarqueras que : $g(\alpha) = 0 \leftrightarrow \ln(\alpha) = \alpha - 1^{2}$ Puis tu remplaceras $\ln(\alpha)$ par α^2-1 dans l'expression de $f(\alpha)$.
b)	Etudier les variations d'une fonction et dresser son tableau de variation.	Tu utiliseras le signe de la fonction g trouvé dans la partie A.
4-a)	Démontrer qu'une droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à une courbe.	Tu vérifieras que : $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$;
b)	Étudier la position relative de deux courbes représentatives de fonctions	Tu étudieras le signe de $f(x) - x$ et tu interpréteras les résultats
c)	Tracer la courbe représentative d'une fonction	Tu suivras les étapes suivantes : • Faire une mise en page et tenir compte des unités ; • Tracer les asymptotes et les tangentes ; • S'aider d'un tableau de valeurs. • Vérifier les points d'intersection avec les axes du repère ; • Comparer l'allure de la courbe et le tableau de variation ; • Faire une figure soignée.
5)	Calculer l'aire de la partie du plan limitée par les courbes représentatives de deux fonctions et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$	•Tu utiliseras les résultats de la question 4-b) pour avoir le signe de $f(x)-x$. •Tu calculeras l'aire A en unités d'aire en utilisant une primitive de $x \longmapsto \frac{1}{x}$ et $x \longmapsto \frac{1}{x} \times \ln(x)$ sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$. Tu remarqueras que $x \longmapsto \frac{1}{x} \times \ln(x)$ est de la forme $x \longmapsto u'(x) \times u(x)$ •Tu exprimeras A en cm2

Corrigé du Problème

Partie A

1- ***Calculons les limites de g en 0 et en +∞.***

• ***Calculons les limites de g en 0.***

$\forall x \in]0;+\infty[$, $g(x) = (x^2-1) - \ln x$.

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} (x^2-1) = -1$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \ln x = -\infty$.

Donc : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x) = +\infty$.

• ***Calculons les limites de g en +∞.***

$\forall x \in]0;+\infty[$, $g(x) = x^2 - 1 - \ln x$

$= x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2}\right)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1-\frac{1}{x^2}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^2} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \frac{1}{x^2} - \frac{\ln x}{x^2}\right) = 1$

De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$, par conséquent : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

2- ***Démontrons que :*** $\forall x \in \mathbb{R}^*_+$, $g'(x) = \frac{2x^2-1}{x}$.

D'après l'énoncé, g est dérivable sur $\mathbb{R}^*_+$.

$\forall x \in \mathbb{R}^*_+$, $g'(x) = 2x - \frac{1}{x}$

$= \frac{2x^2-1}{x}$.

3- ***Étudions les variations de g et dressons son tableau de variation.***

• ***Étudions les variations de g.***

$\forall x \in \mathbb{R}^*_+$, $g'(x) = \frac{2x^2-1}{x}$ d'après la question précédente.

Puisque $x > 0$, le signe de $g'(x)$ est celui de $2x^2-1$.

$2x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ou $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

L'équation $x \in]0 ; +\infty[$, $2x^2 - 1 = 0$, admet une seule solution qui est : $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Tableau de signes

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$2x^2 - 1$	‖	-	0	+	
$g'(x)$	‖	-	0	+	

$\forall x \in]0 ; \frac{\sqrt{2}}{2}[$, $g'(x) < 0$, donc g est strictement décroissante sur $]0; \frac{\sqrt{2}}{2}[$.

$\forall x \in]\frac{\sqrt{2}}{2} ; +\infty[$, $g'(x) > 0$, donc g est strictement croissante sur $]\frac{\sqrt{2}}{2} ; +\infty[$.

• ***Dressons le tableau de variation de g.***

x	0		$\frac{\sqrt{2}}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$	‖	–	0	+	
$g(x)$	‖	$+\infty$ ↘	$-\frac{1}{2} - \ln(\frac{\sqrt{2}}{2})$	↗	$+\infty$

4- *a) Démontrons que l'équation g(x) = 0 admet deux solutions sur]0 ; +∞[.*

- g est continue et strictement décroissante sur $]0 ; \frac{\sqrt{2}}{2}[$

  et $g(]0 ; \frac{\sqrt{2}}{2}[) =]-\frac{1}{2} - \ln(\frac{\sqrt{2}}{2}) ; +\infty[$.

  Or $0 \in]-\frac{1}{2} - \ln(\frac{\sqrt{2}}{2}) ; +\infty[$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α sur $]0 ; \frac{\sqrt{2}}{2}[$.

- g est continue et strictement croissante sur $]\frac{\sqrt{2}}{2} ; +\infty[$

  et $g(]\frac{\sqrt{2}}{2} ; +\infty[) =]-\frac{1}{2} - \ln(\frac{\sqrt{2}}{2}) ; +\infty[$.

Or $0 \in]-\frac{1}{2} - \ln(\frac{\sqrt{2}}{2}); +\infty[$ donc l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique β sur $]\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty[$.

Conclusion : l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions α et β sur $]0 ; +\infty[$ et $\alpha < \beta$.

b) Démontrons que $0,4 < \alpha < 0,5$.

$g(0,4) = 0,0762$
$g(0,5) = -0,0568$
$g(0,4) \times g(0,5) < 0$, donc $0,4 < \alpha < 0,5$

c) Calculons g(1).

$g(1) = 1^2 - 1 - \ln 1$
$= 0$.

d) Déduisons-en le Signe de g(x).

- g est décroissante sur $]0 ; \frac{\sqrt{2}}{2}[$, $\alpha \in]0 ; \frac{\sqrt{2}}{2}[$, et $g(\alpha)=0$.

  On a : $0 < x < \alpha$, donc : $g(x) > g(\alpha)$.par suite : $g(x) > 0$.
  On en déduit que : si $x \in]0 ; \alpha[$, alors $g(x) > 0$.

- De même si $\alpha < x < \frac{\sqrt{2}}{2}$ alors $g(\alpha) > g(x)$.

  On en déduit que : si $x \in]\alpha ; \frac{\sqrt{2}}{2}[$, alors $g(x) < 0$.

- g est strictement croissante sur $[\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty[$.

  On a : $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq x < 1$, par suite $g(x) < g(1)$.

  Or $g(1) = 0$

  On en déduit que : si $\in [\frac{\sqrt{2}}{2}, 1[$, alors $g(x) < 0$.

- De même si $1 < x$, $g(x) > g(1)$.
  Or : $g(1) = 0$.
  On en déduit que si $x \in]1 ; +\infty[$, alors $g(x) > 0$.

En conclusion :
Si $x \in]0 ; \alpha[\cup]1 ; +\infty[$, alors $g(x) > 0$.

Si $x \in]\alpha ; 1[$, alors $g(x) < 0$.

Partie B

1-*a) Déterminons la limite de f en 0.*

On a :

$\forall x \in \mathbb{R}^*_+,\ f(x) = x + \frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x}$;

$= x + \frac{1}{x}(2+\ln x)$.

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} (2+\ln x) = -\infty$ d'où : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{1}{x}(2+\ln x) = -\infty$.

De plus : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x = 0$. Donc : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\infty$

b) Donnons une interprétation graphique du résultat.

D'après la question précédente, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = -\infty$.

Donc la droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale à (C).

c) Calculons $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

$\forall x \in \mathbb{R}^*_-,\ f(x) = x + \frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x}$;

$\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

Donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

2 - ***Démontrons que : $\forall x \in \mathbb{R}^*_+, f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.***

D'après l'énoncé, g est dérivable sur $\mathbb{R}^*_+$.

$\forall x \in \mathbb{R}^*_-,\ f'(x) = 1 - \frac{2}{x^2} + \frac{1 - \ln x}{x^2}$

$= \frac{x^2 - 1 - \ln x}{x^2}$

$= \frac{g(x)}{x^2}$.

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}^*_+, f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

3- ***a) Démontrons que*** $f(\alpha) = 2\alpha + \frac{1}{\alpha}$

On sait que $g(\alpha) = 0$ d'après A-4-a)
$g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha^2 - \ln\alpha - 1 = 0$.
D'où : $\ln\alpha = \alpha^2 - 1$.

On a :

$$f(\alpha) = \alpha + \frac{2}{\alpha} + \frac{\ln\alpha}{\alpha}$$
$$= \alpha + \frac{2}{\alpha} + \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha}$$
$$= \alpha + \frac{2}{\alpha} + \alpha - \frac{1}{\alpha}$$
$$= 2\alpha + \frac{1}{\alpha}.$$

Par conséquent : $f(\alpha) = 2\alpha + \frac{1}{\alpha}$.

b) Étudions les variations de f et dressons son tableau de variation.

• ***Étudions les variations de f.***

On sait que : $\forall x \in \mathbb{R}^*_+$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$, d'après la question B-2).
Puisque $x^2 > 0$ alors le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$.
D'après la question A- 4-*d*), on en déduit :
$\forall x \in]0 ; \alpha[\cup]1 ; +\infty[$, $f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $]0 ; \alpha[$ et sur $]1 ; +\infty[$.
$\forall x \in]\alpha ; 1[$, $f'(x) < 0$, donc f est strictement décroissante sur $]\alpha ; 1[$.
De plus, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \alpha$ ou $x = 1$.

• ***Dressons le tableau de variations de f.***

x	0		α		1		$+\infty$
$f'(x)$	|	+	0	-	0	+	
$f(x)$	|	$-\infty$ ↗	$2\alpha+\frac{1}{\alpha}$	↘	3	↗	$+\infty$

4- a) Démontrons que la droite (D) d'équation $y = x$ ***est asymptote à (C) en*** $+\infty$.

$\forall x \in \mathbb{R}^*_+,\ f(x) - x = x + \frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x} - x$

$= \frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x}$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$. Par conséquent : $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x) = 0$.

On en déduit que la droite (D) d'équation $y = x$ est asymptote oblique à (C) en $+\infty$.

b) Étudions la position de (D) par rapport à (C).

$\forall x \in \mathbb{R}^*_+,\ f(x) - x = \frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x}$

$= \frac{2 + \ln x}{x}$.

Or $x > 0$ donc le signe de $f(x) - x$ est celui de $2 + \ln x$.

$2 + \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x > -2$

$\Leftrightarrow x > e^{-2}$

Ainsi on a :

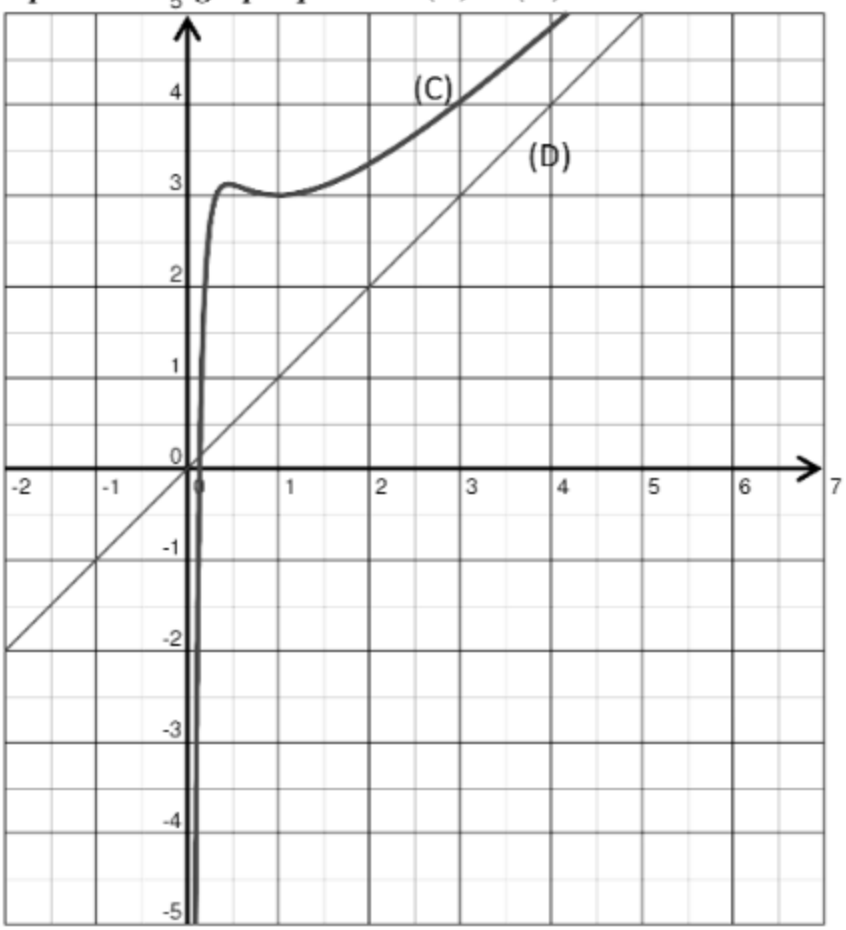
Si $x \in]0 ; e^{-2}[$ alors $f(x) - x < 0$.

Par suite, (C) est en dessous de (D) sur $]0 ; e^{-2}[$.

Si $x \in]e^{-2} ; +\infty[$ alors $f(x) - x > 0$,

Par conséquent, (C) est au-dessus de (D) sur $]e^{-2}; +\infty[$.

c) ***Représentons graphiquement (C) et (D).***



5- ***Calculons l'aire A.***

• ***Calculons A en unités d'aire.***

La fonction $x \mapsto (f(x) - x)$ est continue et positive sur $[1, e^{-2}]$.

Par suite : $A = \int_{e^{-2}}^{1} (f(x) - x)\,dx$

$$\int_{e^{-2}}^{1} \left(\frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x}\right)dx = \int_{e^{-2}}^{1} \left(2 \times \frac{1}{x} + \ln x \times \frac{1}{x}\right)dx$$

$$= [2\ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2]_{e^{-2}}^{1}$$

$$= 2.$$

• ***Calculons A en cm².***

L'unité d'aire est 8 cm², donc :

$A = 2 \times 8$ cm²

$= 16$ cm².

Habiletés et conseils pour la résolution de l'exercice 1

	HABILETÉS	CONSEILS
1-	Démontrer une propriété par récurrence	Tu suivras les étapes suivantes : * Justifie que la propriété est vraie pour le premier terme de la suite ; * Démontre que la propriété est vraie au rang n+1 en supposant qu'elle est vraie au rang n ; * Conclus que la propriété est vraie pout tout n.
2-*a*)	Démontrer une propriété de suites	* Remplace v_{n+1} et u_{n+1} par leurs expressions ; * Tu retrouveras une égalité remarquable en développant le numérateur.
b)	Démontrer une propriété de suites	* Tu justifieras que $v_{n+1} - u_{n+1} > 0$, en utilisant les résultats des questions 1-) et 2-*a*). * Tu justifieras que : $v_{n+1} - u_{n+1} - \frac{1}{2}(v_n - u_n) \leqslant 0$ en utilisant les résultats des questions 1-) et 2-*a*). Autre méthode : on pourrait aussi majorer $v_{n+1} - u_{n+1}$ en utilisant la question 2-*a*).
c)	Démontrer une propriété des suites par récurrence	Tu suivras les étapes d'une démonstration par réccurrence
3-*a*)	Démontrer qu'une suite est monotone	Tu justifieras que $u_{n+1} - u_n > 0$ *et* $v_{n+1} - v_n < 0$ en utilisant les résultats des questions 1-) et 2-*b*)
b)	Démontrer qu'une suite est convergente.	Tu utiliseras pour la suite (u_n) la propriété « Toute suite croissante et majorée converge » et pour la suite (v_n) la propriété « Toute suite décroissante et minorée converge »
c)	Déterminer la limite d'une suite convergente	Tu utiliseras la question 2-c)
4-*a*)	Démontrer une propriété de suites	Tu remplaceras u_{n+1} et v_{n+1}par leurs expressions puis tu simplifieras
b)	Déterminer la limite d'une suite	Tu utiliseras la question 4-a) pour justifier que $u_n v_n = u_0 v_0 = 36$

Corrigé Exercice 1

1- *Démontrons par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n>0$ et $v_n>0$*

* $u_0= 4$ et $v_0= 9$ donc la propriété est vraie au rang 0.

* Supposons la propriété vraie au rang n et démontrons qu'elle est vraie au rang $n+1$.

Soit n un entier naturel tel que $u_n>0$ et $v_n>0$ par hypothèse.

Donc $u_nv_n>0$ et $u_n+v_n>0$.

Par suite $\dfrac{2u_nv_n}{u_n+v_n}>0$. Par conséquent $u_{n+1}>0$ et $v_{n+1}>0$.

La propriété est donc vraie au rang $n+1$

Conclusion : $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n>0$ et $v_n>0$.

2- a)*Démontrons que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_{n+1}-u_{n+1}=\dfrac{(v_n-u_n)^2}{2(u_n+v_n)}$*

Pour tout entier naturel n, on a :

$$v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{1}{2}(u_n+v_n)-\frac{2u_nv_n}{u_n+v_n}$$

$$=\frac{(u_n+v_n)^2-4u_nv_n}{2(u_n+v_n)}$$

$$=\frac{u_n^2+v_n^2-2u_nv_n}{2(u_n+v_n)}$$

$$v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{(u_n-v_n)^2}{2(u_n+v_n)}$$

b) Démontrons que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n\leqslant v_n$ et $v_{n+1}-u_{n+1}\leqslant\dfrac{1}{2}(v_n-u_n)$.

**** Démontrons que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n\leqslant v_n$***

D'après la question précédente : $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_{n+1}-u_{n+1}=\dfrac{(u_n-v_n)^2}{2(u_n+v_n)}$

Or d'après la question 1), $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n>0$ et $v_n>0$.

Par suite $u_n+v_n>0$. De plus, $\forall n\in\mathbb{N}$, $(u_n-v_n)^2\geqslant 0$.

Donc : $\forall n\in\mathbb{N}$, $v_{n+1}-u_{n+1}\geqslant 0$.

Par conséquent : $\forall n\in\mathbb{N}^*$, $v_n-u_n\geqslant 0$.

Et comme $v_0-u_0\geqslant 0$ par hypothèse, on conclut que :

$\forall n\in\mathbb{N}$, $u_n\leqslant v_n$.

* ***Démontrons que :*** $\forall n\in\mathbb{N},\ v_{n+1}-u_{n+1}\leq\frac{1}{2}(v_n-u_n)$.

Pour tout entier naturel n, *on a :*

$$v_{n+1}-u_{n+1}-\frac{1}{2}(v_n-u_n)=\frac{(u_n-v_n)^2}{2(u_n+v_n)}-\frac{1}{2}(v_n-u_n)$$

$$=\frac{1}{2}(v_n-u_n)\left(\frac{v_n-u_n}{u_n+v_n}-1\right)$$

$$=\frac{1}{2}\frac{(v_n-u_n)(-2u_n)}{u_n+v_n}$$

$$=-\frac{u_n(v_n-u_n)}{u_n+v_n}$$

Or : $\forall n\in\mathbb{N},\ v_n-u_n\geqslant 0$ d'après la démonstration précédente ;
de plus : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n>0$ et $v_n>0$ d'après la question 1.

D'où : $\forall n\in\mathbb{N},\ -\frac{u_n(v_n-u_n)}{u_n+v_n}\leq 0$.

Par suite : $\forall n\in\mathbb{N},\ v_{n+1}-u_{n+1}-\frac{1}{2}(v_n-u_n)<0$.

Donc : $\forall n\in\mathbb{N},\ v_{n+1}-u_{n+1}\leq\frac{1}{2}(v_n-u_n)$.

<u>Autre méthode</u> :

Pour tout entier naturel n, *on a :*

$$v_{n+1}-u_{n+1}=\frac{(u_n-v_n)^2}{2(u_n+v_n)}$$

$$=\frac{1}{2}(v_n-u_n)\times\frac{v_n-u_n}{v_n+u_n}$$

$\forall n\in\mathbb{N},\ v_n-u_n\leqslant v_n+u_n$, d'après la question 1-).

Par conséquent : $\forall n\in\mathbb{N},\ \frac{v_n-u_n}{v_n+u_n}\leqslant 1$.

Par suite : $\forall n\in\mathbb{N},\ v_{n+1}-u_{n+1}\leqslant\frac{1}{2}(v_n-u_n)$

c) Déduisons par récurrence que : $\forall n\in\mathbb{N},\ v_n-u_n\leq\frac{5}{2^n}$

* $v_0-u_0=9-4=5$, donc $v_0-u_0\leq\frac{5}{2^0}$. D'où la propriété est vraie au rang 0.

* Supposons la propriété vraie au rang n et démontrons qu'elle

est vraie au rang $n+1$.
Par hypothèse de récurrence, on a :

Pour un entier naturel n : $v_n - u_n \leqslant \frac{5}{2^n}$.

Or : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}(v_n - u_n)$, d'après la question précédente.

D'où : $v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \frac{1}{2} \times \frac{5}{2^n}$ donc $v_{n+1} - u_{n+1} \leqslant \frac{5}{2^{n+1}}$

Par conséquent la propriété est vraie au rang $n+1$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n - u_n \leqslant \frac{5}{2^n}$.

3- *a)* ***Démontrons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.***

Démontrons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante
Pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2(u_n v_n)}{u_n + v_n} - u_n.$$

$$= u_n\left[\frac{2v_n}{u_n + v_n} - 1\right]$$

$$= \frac{u_n(v_n - u_n)}{u_n + v_n}.$$

Or : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$, $v_n > 0$ et $v_n - u_n \geqslant 0$.
Donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$.
Par conséquent, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Démontrons que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
Pour tout entier naturel n, on a :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{2}(v_n + u_n) - v_n.$$

$$= -\frac{v_n - u_n}{2}$$

Or : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n - u_n \geqslant 0$, donc : $-\frac{v_n - u_n}{2} \leqslant 0$.

D'où : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} - v_n \leqslant 0$.
Par conséquent, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

b) Démontrons que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent.

On sait d'après la question 3-*a*) que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. On en déduit que :
$\forall n\in\mathbb{N}$, $u_0 \leqslant u_n \leqslant v_n \leqslant v_0$. D'où :
* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par v_0. Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et minorée par u_0. Donc la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

c) *Démontrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont la même limite ℓ.*

On sait que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $0 \leqslant v_n - u_n \leqslant \dfrac{5}{2^n}$.

Or, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5}{2^n} = 0$. Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = 0$, d'après la propriété des comparaisons.

Comme les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent, on a :
$\lim\limits_{n\to+\infty} (v_n - u_n) = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n - \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$. Par suite, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$
Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ont la même limite ℓ.

4-a) Démontrons que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}v_{n+1} = u_nv_n$.

$$\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+1}v_{n+1} = \frac{2u_nv_n}{u_n + v_n}\times\frac{1}{2}(u_n+v_n)$$
$$= u_nv_n.$$

b) Déterminons la valeur exacte de ℓ.

$\forall n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}v_{n+1} = u_nv_n$. Donc la suite de terme général u_nv_n est constante. Par conséquent : $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_nv_n = u_0v_0$.
Par suite : $\forall n\in\mathbb{N}$, $u_nv_n = 36$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_nv_n = 36$.

Les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent. Par conséquent :
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_nv_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$
On a : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell^2$.
$= 36$
Par conséquent : $\ell = 6$, car $u_n > 0$ et $v_n > 0$.
Finalement, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 6$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 6$.

Habiletés et conseils pour la résolution de l'exercice 2

	HABILETÉS	CONSEILS
Partie A		
	Habiletés	**Conseils**
1-	Déterminer la probabilité d'un évènement	Tu utiliseras les données de l'énoncé pour trouver ces probabilités
2-	Calculer la probabilité d'un évènement	Tu remarqueras que $A=B\cap T$ et tu utiliseras la formule de la probabilité conditionnelle $P_B(T)=\frac{P(B\cap T)}{P(B)}$, où $P(B)\neq 0$.
3-	Calculer la probabilité d'un évènement	Tu remarqueras que $T=(T\cap B)\cup(T\cap\overline{B})$ et tu utiliseras la formule de la probabilité conditionnelle.
4-	Justifier que deux évènements ne sont pas indépendants	Tu vérifieras que : $P(B\cap T)\neq P(B)\times P(T)$.
5-	Calculer la probabilité conditionnelle d'un évènement	Tu utiliseras la formule de la probabilité conditionnelle.
Partie B		
	Habiletés	**Conseils**
1-	Calculer la probabilité d'obtenir k succès dans une suite de n épreuves de Bernoulli $(0 \leq k \leq n)$	Tu remarqueras les caractéristiques d'une loi binomiale de paramètres n et p tels que : $n=5$ et $p=0{,}3$. Tu appliqueras la formule : $P(x=k)=C_n^k p^k(1-p)^k$, où $k=3$.
2-	Calculer une espérance mathématique	Tu utiliseras la loi binomiale de paramètres n et p tels que $n=5$ et $p=0{,}3$ et la formule $E(X)=np$.

Corrigé Exercice 2

PARTIE A

1-***Précisons chacune des probabilités suivantes*** :

a) La probabilité P(B) de l'évènement B est :

$$P(B) = \frac{40}{100}$$

$$= 0,4.$$

b) La probabilité $P_B(T)$ de T sachant que B est réalisé est :

$$P_B(T) = \frac{75}{100}$$

$$= 0,75.$$

c) La probabilité $P_{\overline{B}}(T)$ de T sachant que $\overline{B}$ n'est pas réalisé est :

$$P_{\overline{B}}(T) = \frac{52}{100}$$

$$= 0,52.$$

2- ***Démontrons que P(A) = 0,3.***

On remarque que : $A = B \cap T$.

On a : $P_B(T) = \frac{P(B \cap T)}{P(B)}$).

$$P_B(T) = \frac{P(A)}{P(B)}$$

On en déduit que : $P(A) = P(B) \times P_B(T)$

$P(A) = 0,4 \times 0,75$

D'où : $P(A) = 0,3$.

3- ***Calculons la probabilité de l'évènement T.***

On a : $T = T \cap (B \cup \overline{B})$

$T = (T \cap B) \cup (T \cap \overline{B})$, $T \cap B$ et $T \cap \overline{B}$ sont incompatibles

D'où : $P(T) = P(T \cap B) + P(T \cap \overline{B})$

$P(T) = P(A) + P(T \cap \overline{B})$, car $A = T \cap B$.

$P(T) = P(A) + P_{\overline{B}}(T) \times P(\overline{B})$, car $P(T \cap \overline{B}) = P_{\overline{B}}(T) \times P(\overline{B})$.

$= 0,3+ 0,52\times0,6.$

Donc : $P(T) = 0,612$.

4-***Démontrons que B et T ne sont pas indépendants***

$P(B)\times P(T) = 0,4 \times 0,612$

$= 0,2448.$

$P(B\cap T) = 0,3$ et $P(B)\times P(T) = 0,2448$, d'où : $P(B\cap T) \neq P(B)\times P(T)$.

Donc B et T ne sont pas indépendants.

5- ***Démontrons que la probabilité pour qu'un élève admis au test soit bachelier est*** $\frac{25}{51}$.

La probabilité pour qu'un élève admis au test soit bachelier est $P_T(B)$. On a : $P_T(B) = \frac{P(B\cap T)}{P(T)}$.

Or, $P(B\cap T) = 0,3$ et $P(T) = 0,612$, donc : $P_T(B) = \frac{0,3}{0,612}$.

Par suite : $P_T(B) = \frac{25}{51}$.

PARTIE B

1- ***Démontrons que la probabilité pour que 3 seulement des 5 élèves choisis soient bacheliers et admis au test est 0,1323.***

On répète 5 fois de façon identique et indépendante le choix au hasard d'un élève et on s'intéresse au nombre de fois où l'élève choisi est un bachelier et admis au test.

La variable aléatoire X compte le nombre de succès, c'est-à-dire le nombre de fois où l'élève choisi est un bachelier et admis au test.

X suit une loi binomiale de paramètres n et p tels que :

$n = 5$ et $p = 0,3$.

$P(X=3) = c_5^3(0,3)^3\times(0,7)^2$

$= 0,1323.$

2- ***Calculons l'espérance mathématique de X.***

X suit la loi binomiale de paramètres n et p, donc $E(X) = np$.

Habiletés et conseils pour la résolution du problème

	HABILETÉS	CONSEILS
Partie A		
1-*a*)	Transformer une expression littérale	Tu remplaceras x par $\ln x$ dans l'expression de $f(x)$ pour trouver $g(x)$. Tu feras des transformations par la suite.
1-*b*)	Transformer une expression littérale	Tu remplaceras x par e^x dans l'expression de $f(x)$ pour trouver $g(x)$. Tu feras des transformations par la suite.
2-*a*)	Déterminer les limites d'une fonction en $-\infty$ et en $+\infty$	Tu utiliseras les propriétés de calcul de limites sur les fonctions rationnelles en $-\infty$ et en $+\infty$.
b)	Déterminer les limites à gauche et à droite d'une fonction en un point	Tu mettras l'expression de $f(x)$ sous la forme d'un produit. Tu calculeras la limite de chacun des facteurs $(x-3)$ et $\frac{1}{x+1}$
3-	Étudier les variations d'une fonction et dresser son tableau de variation	Tu suivras les étapes suivantes : - Calculer $f'(x)$ - Déterminer le signe de $f'(x)$ et donner le sens de variation de f - Dresser le tableau de variation de f.
Partie B		
1-*a*)	Démontrer qu'une fonction est continue en un point	Tu suivras les étapes suivantes : - Vérifier que g est définie en 0

Habiletés et conseils pour la résolution du problème

		- Justifier que $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x) = g(0)$
b)	Démontrer qu'une courbe admet une demi-tangente verticale en un point	Tu justifieras que : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{g(x)-g(0)}{x}$ est infinie.
2-a)	• Déterminer la limite d'une fonction en $+\infty$ • Interpréter graphiquement le résultat.	Tu utiliseras la transformation de $g(x)$ de la question A-1- *a)* pour calculer les limites. Pour l'interprétation graphique, tu utiliseras le résultat de cours sur les asymptotes.
b)	• Déterminer les limites d'une fonction à gauche et à droite en un point • Interpréter graphiquement les résultats.	Tu remarqueras que $g(x) = (\ln x - 3)\times\frac{1}{\ln x + 1}$. Pour l'interprétation graphique, tu utiliseras les résultat de cours sur les asymptotes.
3-a)	Calculer la dérivée d'une fonction sur un intervalle	Tu utiliseras la formule de dérivation d'un quotient.
b)	• Démontrer qu'une fonction est strictement monotone sur un intervalle • Dresser le tableau de variation d'une fonction sur un intervalle	Tu détermineras le signe de g'. Tu résumeras les résultats trouvé dans un tableau.
4-	Tracer la courbe représentative d'une fonction	Tu suivras les étapes suivantes : • Faire une mise en page et tenir compte des unités.

Habiletés et conseils pour la résolution du problème

		• Tracer les asymptotes et les tangentes • S'aider d'un tableau de valeurs. • Vérifier les points d'intersection avec les axes du repère. • Comparer l'allure de la courbe et le tableau de variation • Faire une figure soignée

Partie C

	Habiletés	Conseils
1-	• Déterminer les limites d'une fonction en $-\infty$ et en $+\infty$ • Interpréter graphiquement les résultats	Tu utiliseras la transformation de $h(x)$ de la question A-1-*b*) pour calculer les limites en $+\infty$ et $-\infty$. Pour l'interprétation graphique, tu utiliseras les résultats sur les asymptotes.
2-	Calculer la dérivée d'une fonction	Tu utiliseras la formule de dérivation d'un quotient. Tu pourras utiliser la transformation de $h(x)$ de la question A-1-*b*).
3-	• Déterminer le sens de variation d'une fonction sur un intervalle • Dresser le tableau de variation d'une fonction sur un intervalle	Tu détermineras le signe de h' et tu en déduiras le sens de variation de h. Tu résumeras les résultats trouvés dans un tableau.
4-a)	Déterminer les coordonnées des	Tu remarqueras que $A(a\,;0)$ c'est-à-dire $h(a) = 0$ et tu

Habiletés et conseils pour la résolution du problème

	points d'intersection avec les axes de coordonnées	résoudras alors l'équation $h(a) = 0$ pour trouver a. Tu remarqueras que B(0 ; b) c'est-à-dire $h(0) = b$ et Calculeras $h(0)$ pour trouver b.
b)	Déterminer une équation de la tangente à une courbe en un point donné.	Tu utiliseras la formule de l'équation de la tangente (T) c'est-à-dire : $y = h'(0)(x-0) + h(0)$
c)	Démontrer qu'un point est centre de symétrie d'une courbe donnée.	Tu vérifieras que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et $h(x) + h(-x) = -2$
5-a)	Démontrer qu'une fonction réalise une bijection d'un intervalle I sur un intervalle J.	Tu utiliseras la propriété : Si h est continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors h est une bijection de I sur h(I).
b)	Déterminer l'expression explicite de la bijection réciproque.	Tu choisiras y dans l'intervalle J. Tu résoudras l'équation $y = h(x)$ d'inconnue x (x pris dans I).
6-a)	Tracer la courbe représentative d'une fonction	Tu suivras les étapes du tracé d'une courbe représentative d'une fonction. (voir conseil B-4)
b)	Construire la courbe représentative de la réciproque d'une bijection dans le plan rapporté à un repère orthonormé	Tu construiras le symétrique de la courbe de h par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Corrigé du Problème

Partie A

1 – *a*) ***Démontrons que : $\forall x \in D_g$ et $x \neq 0$, $g(x) = 1 - \frac{4}{\ln x + 1}$.***

• *Déterminons g(x) en fonction x.*

$\forall x \in D_g$ et $x \neq 0$, $g(x) = f(\ln x)$

$$= \frac{\ln x - 3}{\ln x + 1}.$$

• ***Justifions que : $\forall x \in D_g$ et $x \neq 0$, $g(x) = 1 - \frac{4}{\ln x + 1}$.***

$\forall x \in D_g$ et $x \neq 0$, $g(x) = \frac{\ln x - 3}{\ln x + 1}$.

$$= \frac{\ln x + 1 - 1 - 3}{\ln x + 1}$$

D'où : $\forall x \in D_g$ et $x \neq 0$, $g(x) = 1 - \frac{4}{\ln x + 1}$.

Autre méthode

D'où : $\forall x \in D_g$ et $x \neq 0$, $1 - \frac{4}{\ln x + 1} = \frac{\ln x + 1 - 4}{\ln x + 1}$

$$= \frac{\ln x - 3}{\ln x + 1}$$

$$= g(x)$$

D'où : $\forall x \in D_g$ et $x \neq 0$, $g(x) = 1 - \frac{4}{\ln x + 1}$.

b) ***Démontrons que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = 1 - \frac{4}{e^x + 1}$.***

$\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $h(x) = f(e^x)$

$$= \frac{e^x - 3}{e^x + 1}$$

$$= \frac{e^x + 1 - 1 - 3}{e^x + 1}$$

$$= \frac{e^x + 1}{e^x + 1} - \frac{4}{e^x + 1}.$$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) = 1 - \dfrac{4}{e^x+1}$.

2-*a*) ***Déterminons*** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ***et*** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

On a :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-3}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x}$$
$$= 1$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x-3}{x+1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{x}$$
$$= 1.$$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$.

b) ***Déterminons*** $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}} f(x)$ ***et*** $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}} f(x)$.

On a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = (x-3)\times\dfrac{1}{x+1}$

$\lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}} \dfrac{1}{x+1} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}} (x-3) = -4$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\<}} f(x) = +\infty$.

$\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}} \dfrac{1}{x+1} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}} x-3 = -4$, donc $\lim\limits_{\substack{x\to-1\\>}} f(x) = -\infty$.

3. *Étudions les variations de f et dressons son tableau de variation.*

• ***Étudions les variations de f***

f est une fonction rationnelle donc dérivable sur son ensemble de définition, c'est-à-dire $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.

$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $f'(x) = \dfrac{1\times(x+1) - 1\times(x-3)}{(x+1)^2}$

$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $f'(x) = \dfrac{4}{(x+1)^2}$.

$\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $(x+1)^2 > 0$. Donc : $\forall x \in \mathbb{R}\setminus\{-1\}$, $f'(x) > 0$.

Par suite f est strictement croissante sur $]-\infty ; -1[$ et sur $]-1 ; +\infty[$.

• ***Dressons le tableau de variation de f***

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	
$f(x)$	1	↗ $+\infty$	‖	$-\infty$ ↗	1

Partie B

1-*a*) *Démontrons que g est continue en 0.*

$\forall x \in Dg$ et $x \neq 0$, $g(x) = 1 - \dfrac{4}{\ln x + 1}$, d'après la question 4-1-*a*).

Or : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{4}{\ln x + 1} = 0$, d'où : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x) = 1$

Par suite, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} g(x) = g(0)$, donc g est continue en 0.

b) ***Démontrons que (Cg) admet une demi-tangente verticale en 0.***

$\forall x \in Dg$ et $x \neq 0$, $\dfrac{g(x)-g(0)}{x} = \dfrac{\dfrac{\ln x - 3}{\ln x + 1} - 1}{x}$

$= \dfrac{\dfrac{\ln x - 3 - \ln x - 1}{\ln x + 1}}{x}$

$= \dfrac{-4}{x(\ln x + 1)}$

Or, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} (x \ln x + x) = 0$ et $\forall x \in]0 ; \dfrac{1}{e}[$, $x \ln x + x < 0$,

Donc : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \dfrac{-4}{x(\ln x + 1)} = +\infty$

On a $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{g(x)-g(0)}{x} = +\infty$. Donc (C_g) admet une demi-tangente verticale au point d'abscisse 0 de même direction que celle (OJ).

2- ***a) Déterminons*** $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ ***et interprétons graphiquement le résultat.***

$\forall x \in Dg$ et $x \neq 0$, $g(x) = 1 - \frac{4}{\ln x+1}$, d'après la question 4-1-*a*).

Or, $\lim\limits_{x\to +\infty} 1+\ln x = +\infty$, d'où $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{4}{\ln x+1} = 0$. Par suite : $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = 1$, donc la droite d'équation y = 1 est une asymptote horizontale à (C_g).

b) ***Déterminons*** $\lim\limits_{\substack{x\to \frac{1}{e}\\ <}} g(x)$ ***et*** $\lim\limits_{\substack{x\to \frac{1}{e}\\ >}} g(x)$ ***et interprétons graphiquement le résultat***

• ***Déterminons*** $\lim\limits_{\substack{x\to \frac{1}{e}\\ <}} g(x)$ ***et*** $\lim\limits_{\substack{x\to \frac{1}{e}\\ >}} g(x)$

$\forall x \in \left]0 ; \frac{1}{e}\right[$, $g(x) = (\ln x - 3)\times\frac{1}{\ln x + 1}$

Or d'une part, $\lim\limits_{\substack{x\to \frac{1}{e}\\ <}} (1 + \ln x) = 0$ et $\forall x \in \left]0 ; \frac{1}{e}\right[$, $\ln x+1 < 0$,

d'où : $\lim\limits_{\substack{x\to \frac{1}{e}\\ <}} \frac{1}{\ln x + 1} = -\infty$ et d'autre part, $\lim\limits_{\substack{x\to \frac{1}{e}\\ <}} (\ln x - 3) = -4$.

Donc : $\lim\limits_{\substack{x\to \frac{1}{e}\\ <}} g(x) = +\infty$.

De même, $\forall x \in \left]\frac{1}{e} ; +\infty\right[$, $g(x) = (\ln x - 3) \times \frac{1}{\ln x + 1}$

Or, d'une part, $\lim\limits_{\substack{x\to \frac{1}{e}\\ >}} (1 + \ln x) = 0$ et $\forall x \in \left]\frac{1}{e} ; +\infty\right[$, $\ln x+1 > 0$,

d'où $\lim\limits_{x \to \frac{1}{>e}} \frac{1}{\ln x + 1} = +\infty$ et d'autre part, $\lim\limits_{x \to \frac{1}{>e}} (\ln x - 3) = -4$.

Donc : $\lim\limits_{x \to \frac{1}{>e}} g(x) = -\infty$.

• ***Interprétons graphiquement le résultat***

De $\lim\limits_{x \to \frac{1}{>e}} g(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to \frac{1}{<e}} g(x) = +\infty$, on déduit que la droite

d'équation $x = \frac{1}{e}$ est une asymptote verticale à (C_g).

3 –*a*) ***Démontrons que :*** $\forall x \in Dg,\ g'(x) = \frac{4}{x(\ln x+1)^2}$.

D'après l'énoncé, g est dérivable sur $]0 ; \frac{1}{e}[\cup]\frac{1}{e} ; +\infty[$, on a :

$$\forall x \in]0 ; \tfrac{1}{e}[\cup]\tfrac{1}{e} ; +\infty[,\ g'(x) = \frac{\frac{1}{x}(\ln x + 1) - \frac{1}{x}(\ln x - 3)}{(\ln x+1)^2}$$

$$= \frac{4}{x(\ln x+1)^2}.$$

b) ***Démontrons que g est strictement croissante puis dressons son tableau de variation.***

• ***Démontrons que g est strictement croissante.***

$\forall x \in]0 ; \frac{1}{e}[\cup]\frac{1}{e} ; +\infty[,\ g'(x) = \frac{4}{x} \times \frac{1}{(\ln x + 1)^2}$.

$\forall x \in]0 ; \frac{1}{e}[\cup]\frac{1}{e} ; +\infty[,\ (\ln x + 1)^2 > 0$ et $\frac{4}{x} > 0$.

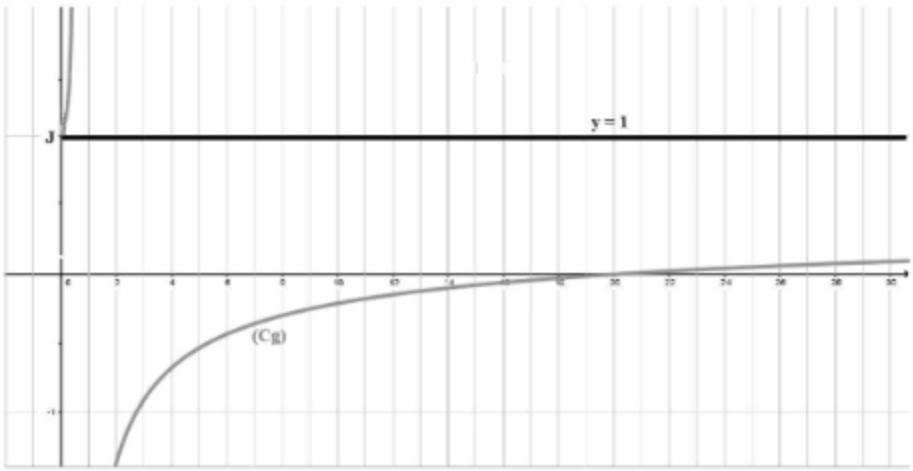
D'où : $\forall x \in]0 ; \frac{1}{e}[\cup]\frac{1}{e} ; +\infty[,\ g'(x) > 0$.

Par conséquent g est strictement croissante sur $[0; \frac{1}{e}[$ et sur $]\frac{1}{e}; +\infty[$.

• *Dressons le tableau de variation de g*

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$g'(x)$	||	+	||	+	
$g(x)$	1	↗ $+\infty$	||	↗ 1	
			|| $-\infty$		

4- ***Traçons* (Cg) *et ses asymptotes dans le repère*** R_1.



Partie C

1- ***Déterminons*** $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)$ ***et*** $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ ***puis interprétons graphiquement les résultats.***

• ***Déterminons*** $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x)$ ***puis interprétons graphiquement le résultat.***

On a : $\forall x\in\mathbb{R}, h(x) = 1 - \dfrac{4}{e^x+1}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$, d'où $\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = -3$.

Par conséquent la droite d'équation $y = -3$ est une asymptote horizontale à (C_h).

• ***Déterminons $\lim_{x\to+\infty} h(x)$ puis interprétons graphiquement le résultat.***

On a : $\forall x\in\mathbb{R}$, $h(x) = 1 - \dfrac{4}{e^x+1}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{e^x+1} = 0$, car $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$.

D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = 1$.

Par suite la droite d'équation $y = 1$ est une asymptote horizontale à (C_h).

2- ***Démontrons que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = \dfrac{4e^x}{(1+e)^2}$***

D'après l'énoncé, h est dérivable sur $\mathbb{R}$. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad h'(x) = \frac{e^x(e^x+1)-e^x(e^x-3)}{(e^x+1)^2}$$

$$= \frac{e^{2x} + e^x - e^{2x} + 3e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$= \frac{4e^x}{(1+e^x)^2}.$$

3-***Déduisons-en les variations de h puis dressons son tableau de variation.***

On a : $\forall x\in\mathbb{R}$, $h'(x) = \dfrac{4e^x}{(1+e^x)^2}$

Or : $\forall x\in\mathbb{R}$, $\dfrac{4e^x}{(1+e^x)^2} > 0$.

Donc *h* est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Dressons le tableau de variation de h

x	$-\infty$		$+\infty$
$h'(x)$		+	
$h(x)$	-3	↗	1

4- a) ***Déterminons les coordonnées de A et B, points d'intersection de (C_h) avec (OJ) et (OI).***

$A(x\,;y) \in (OI)\cap(C_h) \Leftrightarrow h(x) = 0$ et $y = 0$.

$\forall x\in\mathbb{R},\ h(x) = 0 \Leftrightarrow \dfrac{e^x-3}{e^x+1} = 0$

$\Leftrightarrow e^x-3 = 0$

$\Leftrightarrow e^x=3$

$\Leftrightarrow x = \ln 3.$

donc A(ln3;0).

$B(x\,;y) \in (OJ)\cap(C_h) \Leftrightarrow x = 0$ et $h(0) = y$.

$h(0) = \dfrac{e^0-3}{e^0+1}$

$= -1.$

Donc : B(0 ; -1).

b) ***Démontrons qu'une équation de la tangente (T) à (C_h) en B est : $y = x - 1$.***

$h(0) = -1$ et $h'(0) = 1$ d'où une équation de (T) est de la forme :

$y = h'(0)x + h(0)$

Par suite : $y = x - 1$, est une équation de (T).

c) ***Démontrons que B est un centre de symétrie de (C_h).***

Soit $\alpha\in\mathbb{R}$, on a : $-\alpha\in\mathbb{R}$.

$h(\alpha) = \dfrac{e^\alpha-3}{e^\alpha+1}$ et $h(-\alpha) = \dfrac{1-3e^\alpha}{1+e^\alpha}$.

$h(\alpha) + h(-\alpha) = \dfrac{e^\alpha-3}{e^\alpha+1} + \dfrac{1-3e^\alpha}{1+e^\alpha}$

$= \dfrac{e^\alpha - 3 + 1 - 3e^\alpha}{1+e^\alpha}$

$= \dfrac{-2\,(1+e^\alpha)}{1+e^\alpha}$

$= 2\times(-1).$

Donc B(0; -1) est un centre de symétrie de (C_h).

5- *a*) ***Démontrons que h réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à préciser***

h est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Donc *h* est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $h(\mathbb{R})$ et $h(\mathbb{R}) =]-3 ; 1[$.

b) Donnons l'expression explicite de h^{-1}.

$\forall y \in]-3 ; 1[\ ; \forall x \in \mathbb{R}, y = h(x) \Leftrightarrow y = \dfrac{e^x-3}{e^x+1}$

$\Leftrightarrow y(e^x+1) = e^x - 3$

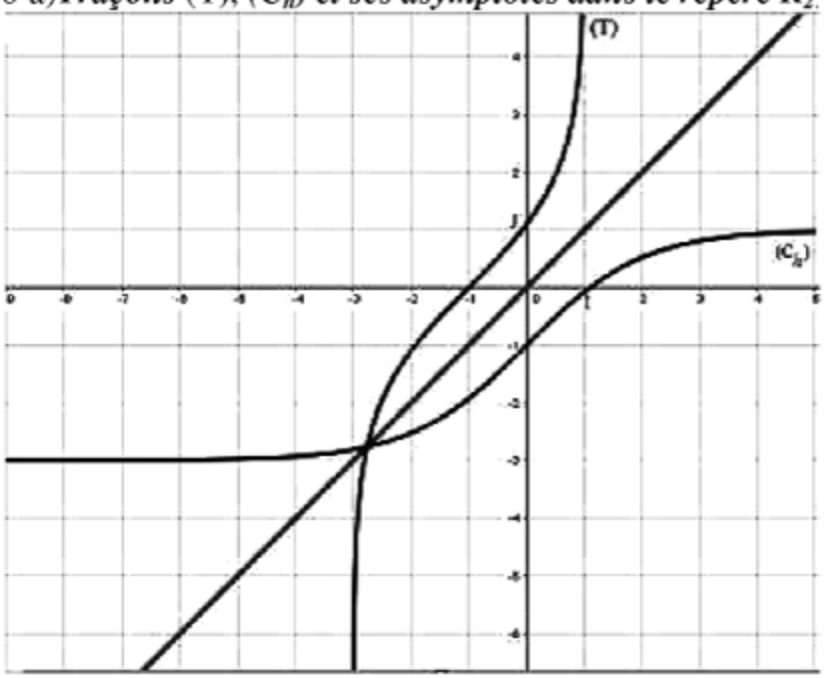
$\Leftrightarrow e^x(y-1) = -y - 3$

$\Leftrightarrow e^x = \dfrac{3+y}{1-y}$

$\Leftrightarrow x = \ln(\dfrac{3+y}{1-y})$

D'où : $\forall x \in]-3 ; 1[\ , h^{-1}(x) = \ln(\dfrac{3+x}{1-x})$.

6-a)***Traçons*** (T), ***(C_h) et ses asymptotes dans le repère R_2.***



b) Déduis-en la représentation graphique (Γ) de la fonction réciproque h^{-1} dans le repère R_2.

Voir question précédente.

Habiletés et conseils pour la résolution de l'exercice 1

	HABILETÉS	CONSEILS
1-a)	Vérifier qu'un nombre complexe est solution ou non d'une équation dans $\mathbb{C}$.	Tu remplaceras z par i dans l'équation.
b)	Résoudre une équation du second degré dans $\mathbb{C}$.	Tu suivras les étapes suivantes : - calcule le discriminant Δ de l'équation ; - détermine une racine carrée de Δ ; - écris les solutions de l'équation.
c)	Résoudre une équation de degré 3 dans $\mathbb{C}$.	Tu factoriseras le premier membre de l'équation (E) par z-i et tu remarqueras que le deuxième facteur trouvé est le premier membre de l'équation de la question 1-b)
2-a)	Représenter un nombre complexe par un point	Tu placeras le point en prenant pour abscisse la partie réelle et pour ordonnée la partie imaginaire du nombre complexe donné.
b)	Écrire un nombre complexe sous forme trigonométrique	Tu écriras Z sous forme algébrique et tu détermineras le module et un argument de Z.
c)	Justifier qu'un triangle est rectangle et isocèle	Tu remarqueras que $\text{Arg}(Z) = \text{Mes}\,(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA})$ et $\lvert Z\rvert = 1$.
3-a)	Déterminer la nature de l'image d'un triangle par une similitude directe	Tu remarqueras que le triangle ABB' est l'image du triangle ABD par la similitude directe S et tu utiliseras les propriétés de conservation d'angles et de rapports de distance.
b)	Elaborer un programme de construction d'un point	Tu utiliseras les propriétés du triangle rectangle et isocèle ABB' et la conservation de l'angle orienté par S

Habiletés et conseils pour la résolution de l'exercice 1

4-*a*)	Déterminer l'écriture complexe d'une similitude directe	Tu utiliseras l'écriture complexe d'une similitude directe qui est de la forme $z' = az + b$. Tu détermineras a et b en utilisant le point invariant A, le point D et son image B par S.
b)	Déterminer l'image d'un point par une similitude directe	Tu remplaceras z par l'affixe de B dans l'écriture complexe de S.

Corrigé Exercice 1

1-*a*) ***Vérifions que i est une solution de l'équation (E).***

$i^3 + (6-5i)i^2 + (1-20i)i - 14 - 5i = -i - 6 + 5i + 20 + i - 14 - 5i$

$= -i + 5i + i - 5i + 20 - 6 - 14$

$= 0$

Par suite, i est une solution de l'équation (E).

b) ***Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation : $Z^2 + (6-4i)Z + 5 - 14i = 0$***

Δ est le discriminant de l'équation du second degré. On a :

$\Delta = (6-4i)^2 - 4(5-14i)$

$= 36 - 16 - 48i - 20 + 56i$

$= 8i$.

• ***Recherchons une racine carrée de Δ.***

Soit $\delta = x + yi$ une racine carrée de Δ.

$$\delta^2 = \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2 = 8 \\ x^2-y^2 = 0 \\ 2xy = 8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 8 \\ 2y^2 = 8 \\ xy = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \text{ ou } x = -2 \\ y = 2 \text{ ou } y = 2 \\ xy > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -2 \\ y = -2 \end{cases}$$

$\delta = 2+2i$ ou $\delta = -2+-2i$

• ***Déterminons les solutions de l'équation (F).***

$$z_1 = \frac{-6+4i+2+2i}{2}$$

$$= -2+3i$$

$$z_2 = \frac{-6+4i-2-2i}{2}$$

$$= -4 + i.$$

Donc l'ensemble solution de cette équation est : $\{-2+3i, -4+i\}$.

c) ***Résolvons à l'aide des questions qui précèdent l'équation (E).***

D'après la question 1-a), pour tout nombre complexe Z, on a :
$Z^3 +(6-5i)Z^2 + (1-20i)Z - 14 - 5i = (Z-i)(aZ^2 + bZ +c)$ où a, b et c sont des nombres complexes à déterminer.

Pour tout nombre complexe Z, on a :
$(Z-i)(aZ^2 + bZ +c) = aZ^3+(b-ia)Z^2 + (c-ib)Z - ic$

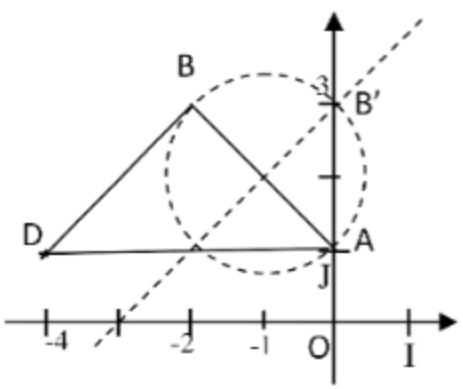
Donc, pour tout nombre complexe Z, on a :
$Z^3 +(6-5i)Z^2 + (1-20i)Z - 14 - 5i = aZ^3+(b-ia)Z^2 + (c-ib)Z - ic$

Ce qui conduit au système suivant :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b-ia = 6-5i \\ c-ib = 1-20i \\ -ic = -14-5i \end{cases}$$

Par suite : a = 1, b = 6 -4i, c =5 – 14i.
On en déduit que, pour tout nombre complexe Z :
$Z^3 + (6-5i)Z^2 + (1-20i)Z - 14 - 5i = (Z-i)[Z^2 + (6-4i)Z + 5-14i]$.
(E) $\Leftrightarrow Z \in \mathbb{C}, (Z-i)|Z^2 + (6-4i)Z + 5-14i| = 0$
$\Leftrightarrow Z \in \mathbb{C}, Z-i = 0$ ou $Z \in \mathbb{C}, Z^2 + (6-4i)Z + 5-14i = 0$
D'après les questions précédentes les solutions de (E) sont :
i, -2+3i et -4+i.

2-*a*) ***Plaçons les points A, B et D d'affixes respectives u, v et t telles que : u = i ; v = -2 + 3i et t = -4 + i dans le repère.***



b) Ecrivons sous forme trigonométrique le nombre complexe Z tel que : $Z = \frac{u-v}{t-v}$

On a :

$$Z = \frac{i-(-2+3i)}{-4+i-(-2+3i)}$$
$$= \frac{1-i}{-1-i}$$
$$= \frac{(1-i)(-1+i)}{(-1-i)(-1+i)}$$
$$= i.$$

On obtient : $Z = i$, d'où $|Z| = 1$ et $\text{Arg } Z = \frac{\pi}{2}$

Par suite : $Z = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}$.

c) ***Déduisons que le triangle ABD est rectangle et isocèle en B.***

On sait que : $Z = \frac{Z_A - Z_B}{Z_D - Z_B}$

$= i$.

On en déduit que Mes $(\overrightarrow{BD}, \overrightarrow{BA}) = \frac{\pi}{2}$. Par conséquent, le triangle ABD est rectangle en B.

De $|Z| = 1$, on déduit que BD = BA.

Par conséquent, le triangle ABD est isocèle en B.

Donc le triangle ABD est rectangle et isocèle en B.

3- ***a) Justifions que le triangle ABB' est rectangle et isocèle en B'.***

De S(A) = A ; S(D) = B ; S(B) = B', on déduit :

S(ADB) = ABB'.

Or le triangle ADB est rectangle et isocèle en B.

Donc ABB' est un triangle rectangle et isocèle en B', car la similitude directe conserve les angles et le rapport des distances.

b) ***Déduisons la construction du point B'.***

Programme de construction

- Construire le cercle de diamètre [AB]
- Construire la médiatrice du segment [AB]

Le point B' est le point d'intersection du cercle et de la médiatrice tel que Mes$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB'})$ = Mes$(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB})$

Justification

Le triangle ABB' étant rectangle en B', B' est situé sur le cercle de diamètre [AB]. De plus le triangle ABB' est isocèle en B'. B' est donc situé sur la médiatrice du segment [AB]. La médiatrice du segment [AB] coupe le cercle en deux points. L'angle $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB})$

est transformé en $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB'})$ par S. Cette égalité permet de déterminer B'

4-*a)* *Déterminons l'écriture complexe de S.*

L'écriture complexe de S est de la forme :

$z' = az + b$, où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$

- ***Déterminons a***

De $\begin{cases} Z(A)=A \\ Z(D)=B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_A = az_A + b \\ z_B = az_D + b \end{cases}$, on déduit que :

$z_A - z_B = az_A - az_D$

$= a(z_A - z_D)$

D'où : $a = \dfrac{z_A - z_B}{z_A - z_D}$

$= \dfrac{i-(-2+3i)}{i-(-4+i)}$

$= \dfrac{1}{2}(1-i)$

- ***Déterminons b.***

De $z_A = az_A + b$, *on déduit que :*

$b = z_A - az_A$

$= z_A(1-a)$

$= i\left(1-\dfrac{1}{2}(1-i)\right)$

$= \dfrac{1}{2}(-1+i)$.

Par suite : $z' = \dfrac{1}{2}(1-i)\,z + \dfrac{1}{2}(-1+i)$.

b) Calculons l'affixe de B'.

$B' = S(B) \Leftrightarrow Z_{B'} = \dfrac{1}{2}(1-i)Z_B + \dfrac{1}{2}(-1+i)$.

$z_{B'} = \dfrac{1}{2}(1-i)(-2+3i) + \dfrac{1}{2}(-1+i)$.

$= \dfrac{1}{2}(1+5i) - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}i$

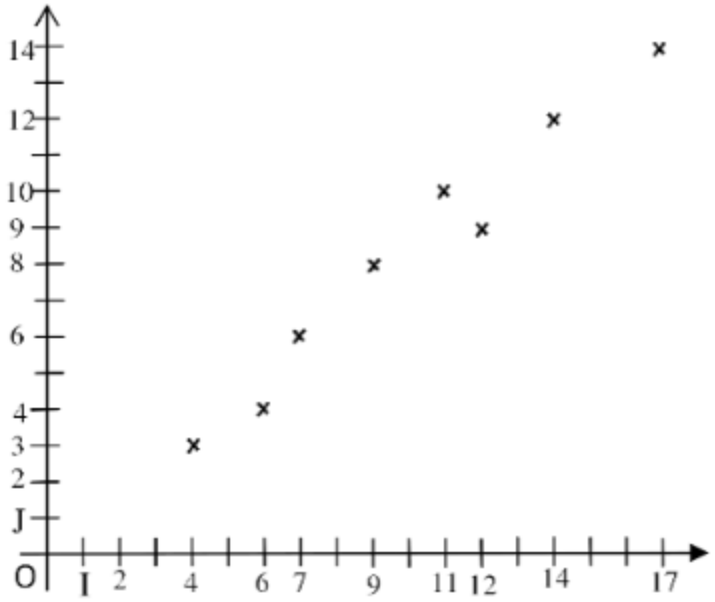
$= 3i$. L'affixe de B' est $3i$.

Habiletés et conseils pour la résolution de l'exercice 2

	HABILETÉS	CONSEILS
1-	Représenter graphiquement le nuage de points associé à une série statistique double.	Tu représenteras tous les points M_i de coordonnées $(x_i ; y_i)$.
2-	Calculer les coordonnées du point moyen.	Tu utiliseras les formules : $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ et $\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$, pour calculer les coordonnées $(\overline{x}, \overline{y})$ du point moyen G.
3-*a*)	Calculer la covariance d'une série statistique double	Tu utiliseras la formule : $\text{Cov}(x, y) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) - \overline{x}\,\overline{y}$.
b)	Calculer la variance d'une série statistique	Tu appliqueras la formule de la variance.
c)	Calculer le coefficient de corrélation linéaire	Tu utiliseras la formule : $r = \frac{\text{Cov}(x, y)}{\sqrt{v(x)} \times \sqrt{v(y)}}$, où $v(x)$ est la variance de x et $v(y)$ la variance de y.
4-	Déterminer une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrées.	Tu détermineras une équation de (D) de la forme : $y = ax + b$, où $a = \frac{\text{Cov}(x,y)}{V(x)}$ et $b = \overline{y} - a\,\overline{x}$.
5-	Estimer la valeur d'une variable connaissant une valeur de l'autre variable	Tu remplaceras y par 15 et tu résoudras l'équation $\frac{19}{22}x - \frac{17}{44} = 15$.

Corrigé Exercice 2

1- ***Représentons le nuage de points associé à la série statistique (X ;Y).***



2- ***Calculons les coordonnées du point moyen G du nuage.***

$(\overline{x}, \overline{y})$ est le couple de coordonnées du point moyen G.

$$\overline{x} = \frac{4+6+7+9+11+12+14+17}{8}$$

$$= \frac{80}{8}$$

$$= 10$$

$$\overline{y} = \frac{3+4+6+8+10+9+12+14}{8}$$

$$= \frac{66}{8}$$

$$= \frac{33}{4}$$

Donc le point moyen est $G(10 ; \frac{33}{4})$.

3-*a*) ***Vérifions que la covariance cov(X, Y) de la série statistique est égale à*** $\frac{57}{4}$

$$\text{cov}(X,Y) = \frac{4\times3 + 6\times4 + 7\times6 + 9\times8 + 11\times10 + 12\times9 + 14\times12 + 17\times14}{8} - 10\times\frac{33}{4}$$

$$= \frac{774}{8} - \frac{330}{4}$$

$$= \frac{387}{4} - \frac{330}{4}$$

$$= \frac{57}{4}.$$

On a donc : $\text{cov}(X,Y) = \frac{57}{4}$.

b) ***Calculons la variance de X et celle de Y.***

• ***Calculons la variance V(X) de X.***

$$V(X) = \frac{4^2+6^2+7^2+9^2+11^2+12^2+14^2+17^2}{8} - 10^2$$

$$= \frac{33}{2}$$

$$= 16{,}5.$$

• ***Calculons la variance V(Y) de Y.***

$$V(Y) = \frac{3^2+4^2+6^2+8^2+10^2+9^2+12^2+14^2}{8} - \left(\frac{33}{4}\right)^2$$

$$= \frac{203}{16}$$

$$= 12{,}69.$$

c) ***Calculons le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y.***

Soit r le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y, on a :

$$r = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}$$

$$= \frac{14{,}25}{\sqrt{16{,}5}\times\sqrt{12{,}69}}$$

$$= 0{,}98.$$

4- ***Déterminons une équation de la droite (D) de régression de Y en X.***

Une équation de (D) est de la forme : $y = ax + b$ où $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$.

- ***Calculons a***

$$a = \frac{\text{cov}(X,Y)}{V(X)}$$

$$= \frac{\frac{57}{4}}{\frac{33}{2}}$$

$$= \frac{19}{22}.$$

- ***Calculons b***

$$b = \overline{y} - a\overline{x}$$

$$= \frac{66}{8} - \frac{19}{22} \times 10$$

$= -\frac{17}{44}$. Par suite, une équation de (D) est : $y = \frac{19}{22}x - \frac{17}{44}$.

5- Donnons une estimation de la note en mathématiques d'un candidat qui a obtenu 15/20 en physiques-chimie.

Comme $r \geqslant 0{,}87$, alors on estime qu'il y a une bonne corrélation entre X et Y.

Résolvons l'équation : $\frac{19}{22}x - \frac{17}{44} = 15$

$$x = \frac{22}{19}(15 + \frac{17}{44}).$$

$$= \frac{677}{38}$$

$$= 17{,}81.$$

L'arrondi d'ordre zéro de x est 18.

Donc le candidat obtient probablement 18 sur 20 en mathématiques.

Habiletés et conseils pour la résolution du problème

PARTIE A

	HABILETÉS	CONSEILS
1)	Déterminer les variations d'une fonction sur un intervalle et dresser son tableau de variation	Tu calculeras la dérivée de g et tu détermineras le signe de g'. tu résumeras les résultats dans un tableau.
2)	Justifier qu'une fonction est positive sur un intervalle	Tu remarqueras que la dérivée s'annule en un point en changeant de signe. Il ne s'agit pas de lire le tableau de variation mais tu établiras que le minimum de la fonction g est un nombre réel positif.

PARTIE B

1-a)	Déterminer les limites à l'infini d'une fonction	Tu calculeras la limite de chaque terme.
b)	Déterminer la limite en un point d'une fonction faisant intervenir la fonction logarithme népérien Interpréter graphiquement une limite.	Tu écriras $\frac{\ln(x)}{x}$ sous la forme $\frac{1}{x} \times \ln(x)$. Pour l'interprétation graphique, tu utiliseras les résultats sur de cours sur les asymptotes.
2-a)	Démontrer que la droite d'équation y = ax + b est asymptote oblique à la courbe représentative d'une fonction	Tu vérifieras que la limite en $+\infty$ de la fonction $x \longmapsto f(x) - (2x-3)$ est nulle.
b)	Étudier la position relative de deux courbes représentatives de fonctions.	Tu étudieras le signe de $f(x) - (2x-3)$ et tu interpréteras les résultats obtenus
3-a)	Calculer la dérivée d'une fonction sur un intervalle	Tu calculeras la dérivée de chaque terme. Tu réduiras l'expression trouvée au même dénominateur.
b)	Déterminer les variations d'une fonction et dresser son tableau de variation.	Tu déduiras le signe de f ' de celui de g. Tu résumeras les résultats dans un tableau.
c)	Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative d'une fonction en un point.	Tu utiliseras la formule de l'équation d'une tangente.
4-a)	Prouver l'existence d'une unique solution de l'équation $f(x) = 0$ sur un intervalle I.	Tu justifieras que la fonction f est continue et strictement monotone sur $]0 ; +\infty[$. Tu remarqueras que $0 \in f(]0 ; +\infty[)$
b)	Encadrer une solution de l'équation $f(x) = 0$, f étant continue et monotone sur un intervalle [a ; b]	Tu vérifieras que $f(1,3) \times f(1,4) < 0$

Habiletés et conseils pour la résolution du problème

PARTIE C

	HABILETÉS	CONSEILS
1-a)	Déterminer le sens de variations d'une fonction sur un intervalle	Tu calculeras la dérivée de h puis tu étudieras le signe de la dérivée.
b)	Déterminer le signe d'une fonction sur un intervalle	Tu vérifieras que $h(1) = 0$ puis tu utiliseras le sens de variation de h.
2-a)	Déterminer la dérivée d'une fonction sur intervalle	Tu utiliseras la dérivée de f pour déterminer la dérivée de φ.
b)	Déterminer les variations d'une fonction sur un intervalle	Tu utiliseras le signe de h pour déterminer celui de φ'.
c)	Étudier le signe d'une fonction sur un intervalle	Tu remarqueras que $\varphi(1) = 0$ et tu utiliseras le sens de variation de φ pour déterminer son signe.
d)	Étudier la position relative de deux courbes représentatives de fonctions.	Tu étudieras le signe de $f(x) - (3x\text{-}4)$ et tu interpréteras le résultat obtenu.

PARTIE D

1)	Tracer la courbe représentative d'une fonction dans le plan rapporté à un repère.	Tu suivras les étapes suivantes : • Faire une mise en page et tenir compte des unités. • Tracer les asymptotes et les tangentes • S'aider d'un tableau de valeurs. • Vérifier les points d'intersection avec les axes du repère. • Comparer l'allure de la courbe au tableau de variation • Faire une figure soignée
2)	Calculer l'aire de la partie du plan limitée par les courbes représentatives de deux fonctions et les droites d'équations x = a et x = b.	•Tu utiliseras le signe de $f(x) - (2x\text{-}3)$. • Tu calculeras l'aire A en unités d'aire en utilisant une primitive de $x \longmapsto \frac{1}{x} \times \ln(x)$ sur l'intervalle [1 ; e]. Tu remarqueras que $x \longmapsto \frac{1}{x} \times \ln(x)$ et de la forme $x \longmapsto u'(x) \times u(x)$ • Tu exprimeras A en cm^2.

Corrigé du Problème

Partie A

1- ***Étudions les variations de g et dressons son tableau de variation.***

- ***Calculons la dérivée de g.***

Pour tout nombre réel x strictement positif, on a : $g'(x) = 4x - \frac{1}{x}$.

- ***Étudions le signe de g'.***

Pour tout nombre réel x strictement positif, on a :

$$g'(x) = 4x - \frac{1}{x}$$
$$= \frac{4x^2-1}{x}$$
$$= \frac{(2x+1)(2x-1)}{x}$$

Pour tout x élément de $]0 ; +\infty[$, x est positif, donc le signe de $g'(x)$est celui de $(2x+1)(2x-1)$.

Pour tout x élément de $]0 ; +\infty[$, $(2x+1)(2x-1) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$

pour tout x élément de $]0 ; +\infty[$, $(2x+1)(2x-1) > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$

Pour tout x élément de $]0 ; +\infty[$, $(2x+1)(2x-1) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{2}$.

On en déduit que :

Sur $]0 ; \frac{1}{2}]$, g' est négatif. D'où, g est strictement décroissante sur $]0 ; \frac{1}{2}]$.

Sur $[\frac{1}{2} ; +\infty[$, g' est positif. D'où, g est strictement croissante sur $[\frac{1}{2} ; +\infty[$.

• ***Dressons le tableau de variation de g***

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$	‖	-	0	+	
$g(x)$	‖	↘	$\frac{3}{2}+\ln 2$	↗	

2- *Justifions que : $\forall\, x \in]0\,;+\infty[$, $g(x) > 0$.*

g est décroissante sur $]0\,;\frac{1}{2}]$ et croissante sur $[\frac{1}{2}\,;+\infty[$. Par conséquent, g admet un minimum qui est atteint en $\frac{1}{2}$.

$g(\frac{1}{2})$ est positif car $\frac{3}{2}+\ln 2$ est positif.

Finalement : $\forall x \in]0\,;+\infty[$, $g(x) > 0$.

Partie B

1-*a*) ***Calculons la limite de f en $+\infty$.***

De $\lim\limits_{x\to+\infty} 2x-3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$, on déduit que : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

b) Déterminons $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ puis interprétons graphiquement le résultat.

• ***Déterminons $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$***

Pour tout nombre réel x strictement positif, on a :

$f(x) = 2x - 3 + \frac{1}{x}\times\ln x$.

Or : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} (2x-3) = -3$; $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} (\frac{1}{x}) = +\infty$; et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} (\ln x) = -\infty$

Donc : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = -\infty$.

• ***Interprétons graphiquement le résultat.***

De $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = -\infty$, on déduit que la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à la courbe (C).

2-*a*) ***Démontrons que la droite (D) d'équation y = 2x – 3 est une asymptote à (C) en +∞***

Pour tout nombre réel x strictement positif, on a :

$f(x) - (2x-3) = \dfrac{\ln x}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (2x-3)] = 0$.

Par conséquent la droite (D) d'équation $y = 2x - 3$ est asymptote oblique à la courbe (C) en $+\infty$.

b) ***Précisons la position de (C) par rapport à (D).***

Pour tout nombre réel x strictement positif, on a :

$f(x) - (2x-3) = \dfrac{1}{x} \times \ln x$.

Pour tout nombre réel x élément de l'intervalle $]0 ; +\infty[$,

$\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$;

$\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$;

$\ln x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$.

On en déduit que :

(C) et (D) se coupent au point d'abscisse 1.

Sur $]1; +\infty[$ $x \mapsto f(x) - (2x-3)$ est positive. D'où, (C) est au-dessus de (D) sur $[1; +\infty[$.

Sur $]0 ; 1[$, $x \mapsto f(x) - (2x-3)$ est négative. D'où, (C) est en dessous de (D) sur $]0 ; 1]$.

3-*a)* ***Démontrons que pour tout nombre réel x strictement positif,***

$$f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}.$$

Pour tout nombre réel x strictement positif, on a :

$$f'(x) = 2 + \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln x}{x^2}$$

$$= \frac{2x^2 + 1 - \ln x}{x^2}$$

$$= \frac{g(x)}{x^2}.$$

Donc : $\forall x \in]0 ; +\infty[, \ f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

b) ***Étudions les variations de f et dressons son tableau de variation.***

• ***Étudions les variations de g.***

Pour tout nombre réel x strictement positif, on a : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

Pour tout nombre réel x strictement positif, x^2 est positif, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$.

Or : $\forall x \in]0 ; +\infty[, \ g(x) > 0$. Donc : $\forall x \in]0 ; +\infty[, \ f'(x) > 0$.

Par conséquent, f est strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$.

• ***Dressons le tableau de variation de f.***

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	
$f(x)$	‖	↗	$+\infty$
	‖	$-\infty$	

c) Démontrons qu'équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1 est : y = 3x - 4.

Une équation de (T) est de la forme : $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$.

Or : $f'(1) = 3$ et $f(1) = -1$

D'où : $y = 3(x-1) + (-1)$

$= 3x - 4$.

Donc : $y = 3x - 4$ est une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.

4- *a*) ***Démontrons que l'équation f(x) = 0 admet une solution unique α.***

f est continue et strictement croissante sur $]0 ;+\infty[$.
De plus : $f(]0 ;+\infty[) =]-\infty ;+\infty[$.
Donc, f est une bijection de $]0 ;+\infty[$ sur $]-\infty ;+\infty[$.
Or : $0 \in]-\infty ;+\infty[$. Donc, l'équation : $x \in]0 ;+\infty[$, $f(x) = 0$ admet une solution unique α.

b) ***Justifions que : 1,3 < α < 1,4.***
$f(1,3) = -0,208$ et $f(1,4) = 0,014$. D'où : $f(1,3) \times f(1,4) < 0$.
Par conséquent, $1,3 < \alpha < 1,4$.

Partie C

1-***a) Déterminons le sens de variations de h sur]0 ;+∞[.***

$$\forall x \in]0 ; +\infty[,\ h'(x) = -2x - \frac{1}{x}$$
$$= -\frac{2x^2+1}{x}.$$

Or : $\forall x \in]0 ;+\infty[, \frac{2x^2+1}{x} > 0$. Donc : $\forall x \in]0 ; +\infty[, h'(x) < 0$.

Par conséquent, h est strictement décroissante sur $]0 ;+\infty[$.

b) Calculons h(1) puis justifions que : ∀ x ∈]0 ; 1[, h(x) > 0 ; ∀ x ∈]1 ; +∞[, h(x) < 0.

- ***Calculons h(1)***

$h(1) = -1^2+1-\ln 1$
$= 0.$

• ***Justifions que : $\forall x \in]0\,;\,1[$, $h(x) > 0$; $\forall x \in]1\,;\,+\infty[$, $h(x) < 0$.***

$\forall x \in]0\,;\,1[$, $h(x) > h(1)$, car h est décroissante.
Or : $h(1) = 0$. Donc : $\forall x \in]0\,;\,1[$, $h(x) > 0$.

$\forall x \in]1\,;\,+\infty[$, $h(x) < h(1)$, car h est décroissante.
Or : $h(1) = 0$. Donc : $\forall x \in]1\,;\,+\infty[$, $h(x) < 0$.

On conclut que :
$\forall x \in]0\,;\,1[$, $h(x) > 0$;
$\forall x \in]1\,;\,+\infty[$, $h(x) < 0$.

2-*a*) ***Démontrons que $\forall x \in]0\,;+\infty[$, $\varphi'(x) = \dfrac{h(x)}{x^2}$.***

Pour tout nombre réel x strictement positif, On a :

$$\varphi'(x) = \frac{2x^2+1-\ln x}{x^2} - 3$$
$$= \frac{-x^2 + 1 - \ln x}{x^2}$$
$$= \frac{h(x)}{x^2}.$$

Donc : $\forall x \in]0\,;\,+\infty[$, $\varphi'(x) = \dfrac{h(x)}{x^2}$.

b) ***Étudions les variations de φ***

Pour tout nombre réel x strictement positif, on a : $\varphi'(x) = \dfrac{h(x)}{x^2}$.

Pour tout nombre réel x strictement positif, x^2 est positif, donc le signe de $\varphi'(x)$ est celui de $h(x)$.
Or : $\forall x \in]0\,;1[$, $h(x) > 0$. Donc : $\forall x \in]0\,;\,1[$, $\varphi'(x) > 0$.
Par conséquent φ est strictement croissante sur $]0\,;1[$.
$\forall x \in]1\,;\,+\infty[$, $h(x) < 0$. D'où : $\forall x \in]1\,;\,+\infty[$, $\varphi'(x) < 0$.
Par conséquent φ est strictement décroissante sur $]1\,;+\infty[$.
En conclusion
φ est strictement croissante sur $]0\,;1[$ et strictement décroissante sur $]1\,;+\infty[$.

c) ***Déduisons-en le signe de φ(x) suivant les valeurs de x.***

Pour tout nombre réel x strictement positif, on a : $\varphi(x) = f(x)-(3x-4)$.

$\varphi(1) = f(1) - (3\times 1 - 4)$

$= 0.$

$\forall x \in]0\ ;\ 1[,\ \varphi(x) < \varphi(1)$, car φ est croissante.

Or : $\varphi(1) = 0$. Donc : $\forall x \in]0\ ;\ 1[,\ \varphi(x) < 0$.

$\forall x \in]1\ ;\ +\infty[,\ \varphi(x) < \varphi(1)$, car φ est décroissante.

Or : $\varphi(1) = 0$. Donc : $\forall x \in]1\ ;\ +\infty[,\ \varphi(x) < 0$.

On conclut que : $\forall x \in]0\ ;\ +\infty[,\ \varphi(x) \leq 0$.

d) ***Déterminons la position de (C) par rapport à la tangente (T).***

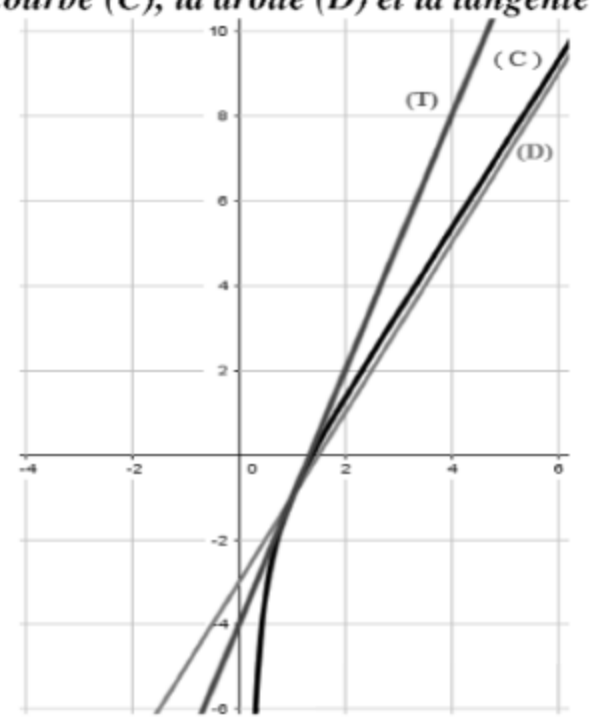
Pour tout nombre réel x strictement positif, on a : $\varphi(x) = f(x)-(3x-4)$.

Or : $\forall x \in]0\ ;\ +\infty[,\ \varphi(x) \leq 0$. Donc : $\forall x \in]0\ ;\ +\infty[,\ f(x) - (3x-4) \leq 0$.

Par conséquent, sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$, (C) est en dessous de sa tangente (T).

Partie D

1- ***Traçons la courbe (C), la droite (D) et la tangente (T).***



2- *Calculons en cm² l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations x = 1 et x = e.*

Sur l'intervalle]1 ; +∞[, la courbe (C) est au-dessus de la droite (D), d'après la question B-2-b).

D'où : $\forall x \in]1 ; +\infty[,\ f(x) - (2x-3) > 0$.

Or la fonction $x \mapsto f(x) - (2x-3)$ est continue sur]1 ; +∞[.

Soit B l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite (D) et les droites $x=1$ et $x=e$. On a :

$$B = \int_1^e (f(x) - (2x-3))dx.$$

$$= \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx.$$

$$= \int_1^e \frac{1}{x} \ln x dx$$

$$= [\frac{(\ln x)^2}{2}]_1^e$$

$$= \frac{1}{2}.$$

L'unité d'aire étant 4 cm².

Donc, B = 2 cm².

$$= \int_1^e \frac{1}{x} \ln x dx$$

$$= [\frac{(\ln x)^2}{2}]_1^e$$

$$= \frac{1}{2}.$$

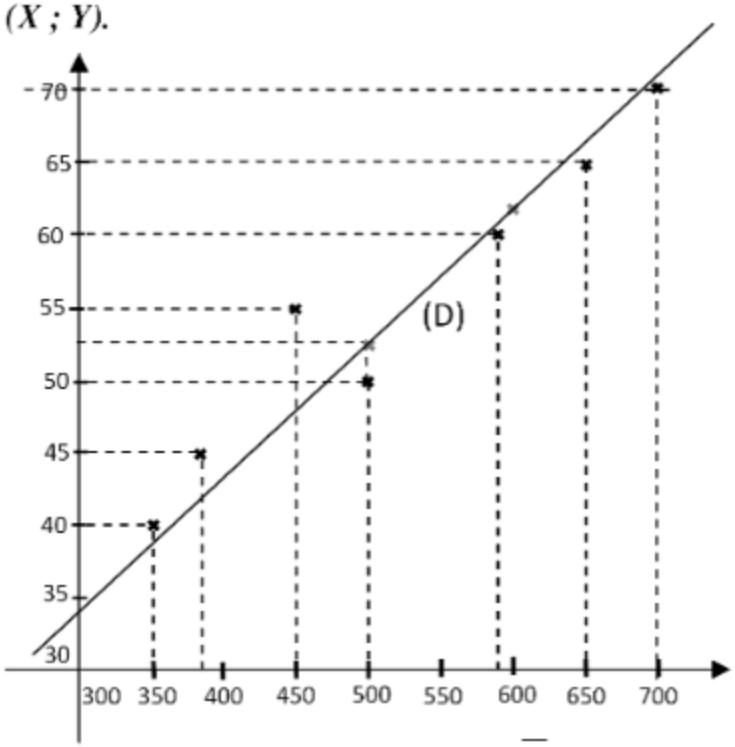
L'unité d'aire étant 4 cm², donc, $\mathcal{A}$ = 2 cm².

Habiletés et conseils pour la résolution de l'exercice 1

	HABILETÉS	CONSEILS
1-	Représenter graphiquement un nuage de points associé à une série statistique double.	Tu représenteras tous les points M_i de coordonnées $(x_i ; y_i)$.
2-a)	Calculer la moyenne d'une série statistique	Il s'agit de trouver $\overline{x}$ où $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$
b)	Calculer la moyenne d'une série statistique	Il s'agit de trouver $\overline{y}$ où $\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$
3-a)	Calculer la covariance d'une série statistique double	Tu utiliseras la formule : $\text{Cov}(x, y) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) - \overline{x}\,\overline{y}$
b)	Justifier l'existence d'un ajustement linéaire d'une série statistique double	Tu rechercheras le coefficient de corrélation linéaire r entre x et y On a : $r = \frac{\text{Cov}(x, y)}{\sqrt{v(x)} \times \sqrt{v(y)}}$, où V(x) est la variance de x et V(y) la variance de y. Tu remarqueras que $r > 0,87$
4-a)	Déterminer une équation de la droite d'ajustement linaire de y en x par la méthode des moindres carrés.	Tu détermineras une équation de (D) de la forme : $y = ax + b$, où $a = \frac{\text{Cov}(x,y)}{V(x)}$ et $b = \overline{y} - a\,\overline{x}$
b)	Construire la droite d'ajustement linaire dont une équation est donnée	Tu trouveras deux points de la droite d'ajustement linéaire.
5-	Estimer la valeur d'une variable connaissant une valeur de l'autre variable	Tu remplaceras x par 800 et tu détermineras y dans l'équation de (D)

Corrigé Exercice 1

1-*Représentons graphiquement le nuage des points associé à la série double (X ; Y).*



2- a) ***Calculons le chiffre d'affaires moyen $\overline{X}$.***

On a :

$$\overline{X} = \frac{350+380+500+450+580+650+700}{7}$$

$$= 515{,}71.$$

D'où : $\overline{X} = 515\,710\,000$ francs.

Le chiffre d'affaires moyen de l'entreprise Ivoirbois est 515 710 000 francs.

b) Calculons le coût moyen de production $\overline{Y}$

On a :

$$\overline{Y} = \frac{40+45+50+55+60+65+70}{7}$$

$$= 55.$$

D'où : $\overline{Y}$ = 55 000 000 francs.

Le coût moyen de production de l'entreprise Ivoirbois est 55 000 000 francs.

3- a) ***Vérifions que l'arrondi à l'entier de Cov(X ,Y) est 1193.***

On a :

$$\text{Cov}(X,Y) = \frac{350\times40+380\times45+500\times50+450\times55+580\times60+650\times65+700\times70}{7} - 55\times 515{,}71$$

$$= 29557{,}14 - 55\times 515{,}71$$

$$= 1193{,}09.$$

D'où : Cov(X ,Y)=1193,09.

Donc l'arrondi à l'entier de la covariance Cov(X ,Y) de la série statistique double est égal à 1193.

b) Justifions l'existence d'un ajustement linéaire entre X et Y .

- ***Calculons la variance V(X) de X et la variance V(Y) de Y .***

On a :

$$V(X) = \frac{350^2 + 380^2+500^2 + 450^2 + 580^2 + 650^2 + 700^2}{7} - 515{,}71^2$$

$$= 15224{,}48.$$

$$V(Y) = \frac{40^2 + 45^2 + 50^2 + 55^2 + 60^2 + 65^2 + 70}{7} - 55^2$$

$$= 100$$

- ***Calculons le coefficient de corrélation linéaire r.***

$$r = \frac{\text{cov}(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$$

$$= \frac{1193}{\sqrt{15224{,}48\times 100}}$$

$r = 0{,}97.$

Conclusion : r est supérieur à 0,87. Donc, il existe un ajustement linéaire entre X et Y par la méthode des moindres carrés.

4-a) Déterminons une équation de la droite (D) d'ajustement linéaire de Y en fonction de X.

Une équation de (D) est de la forme : $y = ax + b$, où $a \in \mathbb{R}^*$ et $b \in \mathbb{R}$.

• ***Calculons a***

$$a = \frac{\text{Cov}(X,Y)}{V(X)}$$

$$= \frac{1193}{15224,48}$$

$$= 0,08.$$

• ***Calculons b***

$$b = \bar{Y} - a\bar{X}$$

$$= 55 - 0,08 \times 515,71$$

$$= 13,74.$$

Donc une équation de (D) est : $y = 0,08x + 13,74$.

b) Construisons (D).

Voir la figure de la question 1.

5- Estimons le coût de production en 2007 pour un chiffre d'affaires de 800 millions de francs.

Sur la base de l'ajustement linéaire de la question 4-*a*), on a : $y = 0,08x + 13,74$.

Pour $x = 800$, on obtient : $y = 0,08 \times 800 + 13,74$

C'est-à-dire : $y = 77,74$.

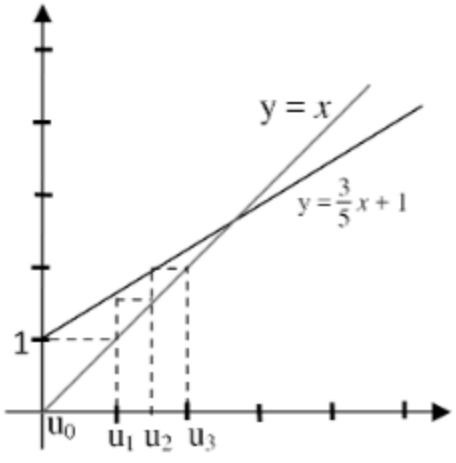
Donc, le coût prévisionnel de production de l'année 2007 est de 77,74 millions de francs.

Habiletés et conseils pour la résolution de l'exercice 2

	HABILETÉS	CONSEILS
1	Représenter graphiquement les premiers termes d'une suite numérique.	Tu utiliseras $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour trouver les images des termes de la suite et la droite d'équation $y = x$ pour placer ces termes sur l'axe des absisces. Ici, $f : x \mapsto \frac{3}{5}x + 1$.
2-a)	Démontrer qu'une suite numérique est majorée en utilisant un raisonnement par récurrence.	Tu suivras les étapes suivantes : * Justifie que la propriété est vraie pour le premier terme de la suite ; * Démontre que la propriété est vraie au rang $n+1$ en supposant qu'elle est vraie au rang n ; * Conclus que la propriété est vraie pout tout n.
b)	Démontrer qu'une suite numérique est convergente.	Tu remarqueras que la suite est croissante et majorée.
3-a)	Démontrer qu'une suite numérique est géométrique.	Tu écriras le terme général de la suite (v_n) sous la forme $v_{n+1} = qv_n$ où q est un nombre réel indépendant de n.
b)	Déterminer la formule explicite d'une suite géométrique.	* Pour l'expression de v_n en fonction de n, tu utiliseras la formule explicite d'une suite géométrique. * Pour l'expression de u_n en fonction de n, tu utiliseras la formule de un en fonction de vn et la formule explicite de v_n
c)	Déterminer la limite d'une suite numérique	Tu remarqueras que $\|q\| < 1$.

Corrigé Exercice 2

1- ***Représentons u_0, u_1, u_2 et u_3 sur l'axe des abscisses.***



2- a) Démontrons par récurrence que $(u_n)_{n\in N}$ est majorée par $\frac{5}{2}$.

Soit la propriété P_n : $\forall\, n\in\mathbb{N}$, $u_n \leq \frac{5}{2}$.

On a : $u_0 = 0$. Donc : $u_0 \leq \frac{5}{2}$.

Ainsi la propriété est vraie au rang 0.
Supposons la propriété P_n vraie au rang n et démontrons qu'elle reste vraie au rang $n+1$, c'est-à-dire : $u_{n+1} \leq \frac{5}{2}$.

On a : $u_n \leq \frac{5}{2}$, d'après l'hypothèse de récurrence.

Ce qui implique que : $\frac{3}{5}u_n \leq \frac{3}{5}\times\frac{5}{2}$.

C'est-à-dire : $\frac{3}{5}u_n \leq \frac{3}{2}$

Par suite : $\frac{3}{5}u_n + 1 \leq \frac{3}{2} + 1$

D'où : $u_{n+1} \leq \frac{5}{2}$, car $u_{n+1} = \frac{3}{5}u_n + 1$.

Ainsi la propriété est vérifiée au rang $n+1$.

On conclut que :
$\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \frac{5}{2}$, c'est-à-dire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par $\frac{5}{2}$.

b) ***Démontrons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.***
Pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3}{5}u_n + 1 - u_n$$

$$= \frac{-2u_n}{5} + 1.$$

Or : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq \frac{5}{2}$, d'après la question précédente.

D'où : $\forall n \in \mathbb{N}$, $-\frac{2}{5}u_n \geq -\frac{2}{5} \times \frac{5}{2}$

Ce qui implique que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $-\frac{2}{5}u_n + 1 \geq -1 + 1$

C'est-à-dire : $\forall n \in \mathbb{N}$, $-\frac{2}{5}u_n + 1 \geq 0$.

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$.
Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée par $\frac{5}{2}$ d'après la question 2-*a*). Elle est donc convergente.

3- a) ***Démontrons que $(v_n)_{n\in N}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.***
• ***Démontrons que $(v_n)_{n\in N}$ est une suite géométrique.***
Pour tout entier naturel n, on a :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{5}{2}$$

$$= (\frac{3}{5}u_n + 1) - \frac{5}{2}, \text{ car : } u_{n+1} = \frac{3}{5}u_n + 1$$

$$= \frac{3}{5}(u_n - \frac{5}{2})$$

$= \frac{3}{5} v_n$, car : $v_n = u_n - \frac{5}{2}$

D'où : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{3}{5} v_n$.

Donc $(v_n)_{n\in N}$ est une suite géométrique de raison $\frac{3}{5}$.

• ***Calculons le premier terme v_0.***

On a :

$v_0 = u_0 - \frac{5}{2}$

$= -\frac{5}{2}$.

On conclut que $(v_n)_{n\in N}$ est la suite géométrique de raison $\frac{3}{5}$ et de premier terme $-\frac{5}{2}$.

b) ***Exprimons v_n puis u_n en fonction de n.***

• ***Exprimons v_n en fonction de n.***

Pour tout entier naturel n, on a :

$v_n = v_0 q^n$, où v_0 est le premier terme et q la raison de la suite (v_n).

$= -\frac{5}{2}(\frac{3}{5})^n$, d'après la question précédente.

• ***Exprimons u_n en fonction de n.***

Pour tout entier naturel n, on a : $v_n = u_n - \frac{5}{2}$.

De l'expression de v_n on déduit que : $u_n = v_n + \frac{5}{2}$.

D'où : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = -\frac{5}{2}(\frac{3}{5})^n + \frac{5}{2}$.

c) ***Déterminons la limite de la suite $(u_n)_{n\in N}$***

$\lim\limits_{n\to+\infty} (\frac{3}{5})^n = 0$, car $0 < \frac{3}{5} < 1$

Par conséquent : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \frac{5}{2}$.

Habiletés et conseils pour la résolution du problème

	HABILETÉS	CONSEILS
Partie A		
A-1-*a*)	Calculer la limite d'une fonction en $+\infty$	Tu transformeras g en somme de fonctions de référence.
b)	Calculer la limite d'une fonction en $-\infty$	Tu remarqueras que le calcul de la limite de g en $-\infty$ se ramène à la limite de $x \mapsto (1-x)e^{1-x}$ en $-\infty$. Tu calculeras la limite de chaque facteur.
2-*a*)	Déterminer la dérivée d'une fonction sur un intervalle	Tu remarqueras que la calcul de la dérivée de g se ramène au calcul de la dérivée de $x \mapsto (1-x)e^{1-x}$. Tu appliqueras la formule de dérivation du produit.
b)	Déterminer les variations d'une fonction sur un intervalle	Tu remarqueras que le signe de $g'(x)$ est celui de $x-2$ sur $\mathbb{R}$.
3-*a*)	Prouver l'existence d'une unique solution de l'équation $g(x) = 0$ sur un intervalle I.	Tu rechercheras un zéro de g sur $]-\infty ; 2]$ et sur $[2 ; +\infty[$, après avoir justifié que g est continue et monotone strictement sur chaque intervalle.
b)	Encadrer une solution de l'équation $g(x) = 0$, g étant continue et monotone sur un intervalle [a ; b]	Tu vérifieras que $g(0,4) \times g(0,5) < 0$.
c)	Etudier le signe d'une fonction sur un intervalle.	Tu utiliseras les variations de la fonction dans l'intervalle d'étude.

Habiletés et conseils pour la résolution du problème

	HABILETÉS	CONSEILS
Partie B		
1-	Calculer la limite d'une fonction en $+\infty$ et en $-\infty$.	Tu mettras x en facteur dans l'expression $xe^{1-x} - x$.
2-a)	Démontrer qu'une fonction f dérivable sur un intervalle est une primitive d'une fonction g sur cet intervalle.	Tu dois justifier que $f' = g$ sur $\mathbb{R}$.
b)	Etudier le sens de variation d'une fonction sur un intervalle et dresser un tableau de variation.	Tu utiliseras la question A-3c) pour étudier les variations et tu résumeras toutes les informations dans un tableau.
3-a)	Démontrer qu'une droite est asymptote oblique à la courbe représentative d'une fonction.	Tu justifieras que $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - (-x + 2)) = 0$.
b)	Étudier la position de la courbe représentative d'une fonction par rapport à une droite d'équation donnée.	Tu étudieras le signe de la fonction : $x \mapsto f(x) - (-x + 2)$ sur $\mathbb{R}$.
4-	Démontrer qu'une courbe représentative d'une fonction admet une branche parabolique de direction (OJ) en $-\infty$	Tu remarqueras que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et tu justifieras que $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ est infinie.
5	Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative d'une fonction	Tu utiliseras la formule : $y = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$.
6	Transformer une expression	Tu utiliseras $g(\alpha) = 0$ pour écrire $e^{1-\alpha}$ comme une fonction rationnelle de α.
7	Justifier une égalité entre deux expressions	Tu remplaceras x par $-x + 2$ dans l'expression de f.
8	Justifier une relation entre	Tu utiliseras la question 7.

Habiletés et conseils pour la résolution du problème

	les zéros d'une fonction.	
9	Tracer la courbe représentative d'une fonction	Tu suivras les étapes suivantes : • Faire une mise en page et tenir compte des unités. • Tracer les asymptotes et les tangentes • S'aider d'un tableau de valeurs. • Vérifier les points d'intersection avec les axes du repère. • Comparer l'allure de la courbe et le tableau de variation • Faire une figure soignée.

Partie C

	Habiletés	Conseils
1	Calculer l'aire de la partie du plan limitée par les courbes représentatives de deux fonctions et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$	• Tu utiliseras les résultats de la question B-3-*b*) pour avoir le signe de $x \mapsto f(x)-(-x+2)$ sur $[0 ; \lambda]$. • Pour l'intégration par parties, tu feras attention au choix des fonctions u et v'. Tu pourras choisir $u(x) = x$ et $v'(x) = e^{1-x}$. •Tu calculeras l'aire $A(\lambda)$ en unités d'aires puis en cm^2
2	Calculer la limite d'une fonction en $+\infty$	Tu décomposeras $A(\lambda)$ pour faire apparaître les limites usuelles.

Corrigé du Problème

Partie A

1-*a*) ***Justifions que la limite de la suite de g en +∞ est -1.***

Pour tout nombre réel x, on a :

$g(x) = (1-x)e^{1-x} - 1$

$= e \times e^{-x} - e \times (xe^{-x}) - 1.$

Or : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{-x} = 0.$

Donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -1.$

b) ***Déterminons la limite de g en -∞.***

Pour tout nombre réel x, on a :

$g(x) = (1-x)e^{1-x} - 1.$

Or : $\lim\limits_{x \to -\infty} (1-x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{1-x} = +\infty.$

Donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = +\infty.$

2-*a*) ***Démontrons que pour tout x élément de ℝ, g'(x) = (x-2)e^{1-x}.***

Pour tout nombre réel x, on a :

$g'(x) = -e^{1-x} + (1-x)(-e^{1-x})$

$= (x-2)e^{1-x}.$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = (x-2)e^{1-x}.$

b) ***Étudions les variations de g et dressons son tableau de variation.***

• ***Étudions les variations de g***

Pour tout nombre réel x, e^{1-x} est positif, donc le signe de $g'(x)$ est celui de $x-2$.

Or : $x-2 > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty ; 2[$

et $x-2 < 0 \Leftrightarrow x \in]2 ; +\infty[$.

On en déduit que :

$\forall x \in]-\infty ; 2[$, $g'(x) < 0$. Donc g est strictement décroissante sur $]-\infty ; 2[$

$\forall x \in]2 ; +\infty[$, $g'(x) > 0$. Donc g est strictement croissante sur $]2 ; +\infty[$.

• ***Dressons le tableau de variation g***

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$-1-\frac{1}{e}$	↗	-1

3- *a*) ***Démontrons que l'équation $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = 0$ admet une unique solution α.***

g est continue et strictement décroissante sur $]-\infty ; 2[$

De plus : $g(]-\infty ; 2[) =]-e^{-1}-1 ; +\infty[$.

Donc, g réalise une bijection de $]-\infty ; 2[$ sur $]-e^{-1}-1 ; +\infty[$.

Or : $0 \in]-e^{-1}-1 ; +\infty[$, donc, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $]-\infty ; 2[$.

g est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[2;+\infty[$, réalise donc une bijection de $[2;+\infty[$ sur $g([2;+\infty[)$. De plus, $g([2;+\infty[) =]-e^{-1}-1 ; -1[$. Or, zéro n'appartient pas à $]-e^{-1}-1 ; -1[$, donc l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution dans $[2;+\infty[$.

En conclusion : l'équation $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = 0$ admet une unique solution α.

b) ***Justifions que : $0,4 < \alpha < 0,5$.***

On a : $g(0,4) = 0,04$ et $g(0,5) = -0,1$. D'où : $g(0,4) \times g(0,5) < 0$.

Par conséquent : $0,4 < \alpha < 0,5$.

c) Déduisons que : $\forall x \in]-\infty ; \alpha[$, $g(x) > 0$ et $\forall x \in]\alpha ; +\infty[$, $g(x) < 0$.

$\forall x \in]-\infty ; \alpha[$, $g(x) > g(\alpha)$, car g est décroissante sur $]-\infty ; \alpha[$.

Or : $g(\alpha) = 0$. Par conséquent : $\forall x \in]-\infty ; \alpha[$, $g(x) > 0$.

$\forall x \in]\alpha ; 2[$, $g(x) < g(\alpha)$, car g est décroissante sur $]\alpha ; 2[$.

Or : $g(\alpha) = 0$. Par conséquent : $\forall x \in]\alpha ; 2[$, $g(x) < 0$.

Sur $]2 ; +\infty[$, g est croissante et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -1$, d'après la question 1-a).

Par conséquent : $\forall x \in]2 ; +\infty[$, $g(x) < -1$.

On conclut que :

$\forall x \in]-\infty ; \alpha[$, $g(x) > 0$;

$\forall x \in]\alpha ; +\infty[$, $g(x) < 0$.

Partie B

1- *Déterminons les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.*

• ***Déterminons la limite de f en $+\infty$.***

Pour tout nombre réel x, $f(x) = x(e \times e^{-x} - 1) + 2$.

On a : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$. Par suite : $\lim\limits_{x \to +\infty} (e \times e^{-x} - 1) = -1$

Or : $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} x(e^{1-x} - 1) = -\infty$.

Finalement : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$.

• ***Déterminons les limites de f en $-\infty$.***

Pour tout nombre réel x, $f(x) = x(e \times e^{-x} - 1) + 2$.

On a : $\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e \times e^{-x} = +\infty$.

Par conséquent : $\lim\limits_{x \to -\infty} x(e \times e^{-x} - 1) = -\infty$

Donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

2- a) Démontrons que f est une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^{1-x} + x(-e^{1-x}) - 1$

$= (1-x)e^{1-x} - 1$

Par suite : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = g(x)$. f est donc une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

b) ***Étudions les variations de f et dressons son tableau de variation.***

• ***Étudions les variations de f***

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = g(x)$. Donc le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$.

D'après les questions A-3a) et A-3c), on a :

Pour $x = \alpha$; $f'(\alpha) = 0$.

$\forall x \in]-\infty ; \alpha[$, $f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $]-\infty ; \alpha[$

$\forall x \in]\alpha ; +\infty[$, $f'(x) < 0$, donc f est strictement décroissante sur $]\alpha ; +\infty[$.

• ***Dressons son tableau de variation de f.***

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	$-\infty$

3- a) ***Démontrons que la droite (D) d'équation y = - x +2 est asymptote oblique à (C) en +∞***

Pour tout nombre réel x, on a :

$f(x) - (-x+2) = (xe^{1-x} - x + 2) - (-x + 2)$

$= xe^{1-x}$.

$= e.\frac{x}{e^x}$

Par suite : $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - (-x+2)) = \lim\limits_{x \to +\infty} e.\frac{x}{e^x}$

$= 0$, car $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$.

Donc la droite (D) d'équation $y = -x + 2$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

b) ***Etudions la position relative de (D) et (C).***

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) - (-x+2) = xe^{1-x}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{1-x} > 0$, donc le signe de $f(x) - (-x+2)$ est celui de x.

$f(x) - (-x+2) > 0$ lorsque $x > 0$, donc (C) est au-dessus de (D) sur $]0 ; +\infty[$.

$f(x) - (-x+2) < 0$ lorsque $x < 0$, donc (C) est en dessous de (D) sur $]-\infty ; 0[$.

$f(x) - (-x+2) = 0$ lorsque $x = 0$, donc (C) et (D) se coupent au point d'abscisse 0.

4- ***Démontrons que (C) admet en -∞ une branche parabolique de direction (OJ).***

Pour tout nombre réel x strictement négatif, on a : $\frac{f(x)}{x} = e^{1-x} - 1 + \frac{2}{x}$.

Et puisque : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{1-x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2}{x} = 0$, on obtient : $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.

La courbe (C) admet donc une branche parabolique de direction celle de la droite (OJ) en -∞.

5- ***Déterminons une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1.***

Une équation de la tangente (T) est de la forme : $y = f'(1)(x-1) + f(1)$.

Or, $f'(1) = -1$ et $f(1) = 2$. Donc : $y = -x + 3$.

Par conséquent, une équation de (T) est : $y = -x + 3$.

6. ***Démontrons que $f(\alpha) = 1 - \alpha + \frac{1}{1-\alpha}$.***

D'après la question A-3-a), on a : $g(\alpha) = 0$.

$g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow (1-\alpha)e^{1-\alpha} - 1 = 0$

$\Leftrightarrow e^{1-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}$

D'où : $f(\alpha) = \alpha e^{1-\alpha} - \alpha + 2$

$= \alpha \times \frac{1}{1-\alpha} - \alpha + 2$

$= \frac{\alpha + (1-\alpha)(-\alpha+2)}{1-\alpha}$

Donc : $f(\alpha) = 1 - \alpha + \frac{1}{1-\alpha}$.

7- *Justifions que pour tout nombre réel x, $f(-x+2) = e^{x-1}f(x)$.*

Pour tout nombre réel x, on a :

$f(-x+2) = (-x+2)e^{1-(-x+2)} - (-x+2) + 2$

$= (-x+2)e^{x-1} + x$.

$= e^{x-1}[(-x+2) + xe^{1-x}]$

$= e^{x-1}f(x)$.

8- ***Démontrons que si β est l'une des solutions de l'équation $f(x) = 0$ alors $-\beta + 2$ est l'autre solution.***

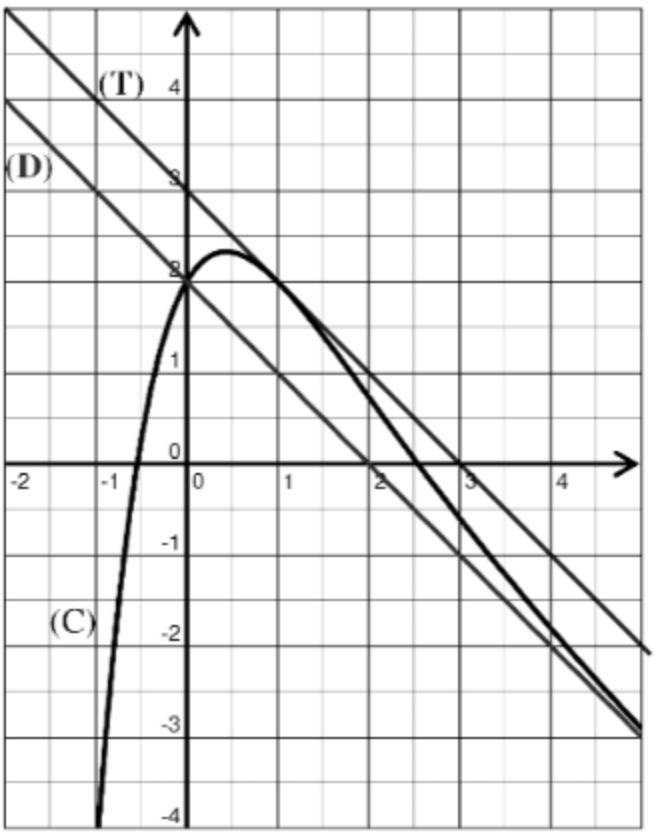
Supposons que β est solution de $f(x) = 0$. On a : $f(\beta) = 0$.

Par suite : $e^{\beta-1} f(\beta) = 0$

On obtient : $f(-\beta+2) = 0$, car $f(-x+2) = e^{x-1} f(x)$ d'après la question précédente.

En définitive : $-\beta + 2$ est solution de l'équation $f(x) = 0$.

9- *Construisons (D), (T) et (C) .*



Partie C

1- ***Calculons l'aire A(λ) en unité d'aire à l'aide d'une intégration par parties.***

• ***Calculons A(λ) en unité d'aire.***

(C) est au-dessus de (D) sur]0 ;+∞[, par conséquent :

$$A(\lambda) = \int_0^{\lambda} (f(x) - (-x+2))\,dx$$

$$= \int_0^{\lambda} xe^{1-x}\,dx$$

On pose : $u(x) = x$ et $v'(x) = e^{1-x}$.

On a : $u'(x) = 1$, $v(x) = -e^{1-x}$.

$$\int_0^{\lambda} (xe^{1-x})\,dx = [-xe^{1-x}]_0^{\lambda} - \int_0^{\lambda} (-e^{1-x})dx$$

$$= [-xe^{1-x}]_0^{\lambda} - [e^{1-x}]_0^{\lambda}$$

$$= (-\lambda-1)e^{1-\lambda} + e$$

Finalement, on a : $A(\lambda) = (-\lambda-1)e^{1-\lambda} + e$

• ***Calculons A(λ) en cm²***

L'unité d'aire est 4 cm^2

$A(\lambda) = 4[(-\lambda-1)e^{1-\lambda} + e]$ cm^2.

2- ***Déterminons la limite de A(λ) en cm² lorsque λ tend vers*** **+∞.**

$\forall x \in]0 ; +\infty[$, $(-\lambda-1)e^{1-\lambda} = -e\times(\lambda e^{-\lambda} + e^{-\lambda})$

Or : $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \lambda e^{-\lambda} = 0$ et $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} e^{-\lambda} = 0$. Donc : $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} (-\lambda-1)e^{1-\lambda} = 0$.

Par conséquent : $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A(\lambda) = 4e$ cm^2.

Habiletés et conseils pour la résolution de l'exercice 1

	HABILETÉS	CONSEILS
Partie A		
1-	Déterminer les racines carrées d'un nombre complexe donné sous forme algébrique.	Tu suivras les étapes suivantes pour déterminer les racines carrées de u : **1.** Appelle δ une racine carrée de u. tu as $\delta^2 = u$ **2.** Pose $\delta = x + iy$, où x et y sont des nombres réels. Tu as : $\delta^2 = x^2-y^2+2xyi$; $\lvert\delta^2\rvert = x^2 + y^2$. 3. Tu résoudras le système d'inconnues x et y. $\delta^2 = u \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=\text{Re}(u) \\ x^2+y^2=\lvert u\rvert \\ 2xy=\text{Im}(u) \end{cases}$
2-	Résoudre une équation du second degré dans $\mathbb{C}$.	Tu vérifieras remarqueras que le discriminant de cette équation est $6 + 6i\sqrt{3}$.
3-a)	Développer, réduire et ordonner un produit de nombres complexes	Tu vérifieras que le développement donne $4z^3 - 6i\sqrt{3}z^2 - 3(3+i\sqrt{3})z - 4$
b)	Résoudre dans $\mathbb{C}$, une équation de degré 3.	Tu utiliseras les résultats des questions 2) et 3-a).
4-	Ecrire un nombre complexe sous forme trigonométrique	Tu chercheras le module et un argument de chacun des nombres complexes donnés.

Habiletés et conseils pour la résolution de l'exercice 1

	HABILETÉS	CONSEILS
Partie B		
	Habiletés	**Conseils**
1-	Déterminer l'écriture complexe d'une similitude directe	Tu dois utiliser le fait que l'écriture complexe d'une similitude directe de centre O, d'angle θ et de rapport k est de la forme $z' = ke^{i\theta}z$.
b)	Déterminer l'image d'un point par une similitude directe.	Tu remplaceras z par l'affixe du point donné dans l'écriture complexe de la similitude directe S.
2-	Déterminer l'image d'un point par une similitude directe.	Tu remplaceras z par l'affixe z_n du point M_n dans l'écriture complexe de la similitude directe S.
3-a)	Démontrer qu'une suite numérique est géométrique	Tu écriras le terme général de la suite (u_n) sous la forme $u_{n+1}=qu_n$ où q est un nombre réel indépendant de n.
b)	Déterminer le module d'un nombre complexe	Tu utiliseras la suite géométrique de la question précédente.

La capture d'écran a été enregistrée dans/Pictures/

Corrigé Exercice 1

Partie A

1- *Déterminons les racines carrées de $6 + 6i\sqrt{3}$.*

Soit δ une racine carrée de $6 + 6i\sqrt{3}$. On a : $\delta^2 = 6 + 6i\sqrt{3}$.

Posons : $\delta = x + iy$, où x et y sont des nombres réels.

On a : $\delta^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$; $|\delta^2| = x^2 + y^2$ et $|6 + 6i\sqrt{3}| = 12$.

$\delta^2 = 6 + 6i\sqrt{3} \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 6$ et $2xy = 6\sqrt{3}$.

$|\delta^2| = |6 + 6i\sqrt{3}| \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 12$.

Des équivalences précédentes, on a : $\delta^2 = 6+6i\sqrt{3} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 6 \\ x^2 + y^2 = 12 \\ xy = 3\sqrt{3} \end{cases}$

$\begin{cases} x^2 - y^2 = 6 \\ x^2 + y^2 = 12 \\ xy = 3\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 9 \\ y^2 = 3 \\ xy = 3\sqrt{3} \end{cases}$

Comme : $xy > 0$, x et y ont le même signe.

Par suite, pour $x = 3$, $y = \sqrt{3}$

Et pour $x = -3$, $y = -\sqrt{3}$

Les racines carrées de $6 + 6i\sqrt{3}$ sont $3 + i\sqrt{3}$ et $-3 - i\sqrt{3}$.

2- Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $2z^2 - (1+3i\sqrt{3})z - 4 = 0$.

Soit Δ le discriminant de l'équation : $2z^2 - (1+3i\sqrt{3})z - 4=0$

On a : $\Delta = (1 + 3i\sqrt{3})^2 - 4\times2\times(-4)$

$= 6 + 6i\sqrt{3}$

Or les racines carrées de $6 + 6i\sqrt{3}$ sont $3 + \sqrt{3}i$ et $-3 - \sqrt{3}i$, d'après la question précédente. Donc les solutions de l'équation sont :

$z_0 = \dfrac{1 + 3i\sqrt{3} + 3 + \sqrt{3}\,i}{4}$ et $z_1 = \dfrac{1 + 3i\sqrt{3} - 3 - \sqrt{3}\,i}{4}$

c'est-à-dire $z_0 = 1 + i\sqrt{3}$ et $z_1 = \dfrac{-1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

Les solutions de l'équation sont : $1 + i\sqrt{3}$ et $-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$.

3-a) Développons, réduisons et ordonnons
$(2z + 1)[2z^2 - (1 + 3i\sqrt{3})z - 4]$.

Pour tout nombre complexe z, on a :

$(2z + 1)[2z^2-(1 + 3i\sqrt{3})z-4] =$

$2z[2z^2 - (1 + 3i\sqrt{3})z - 4] + 2z^2 - (1 + 3i\sqrt{3})z - 4.$

$= 4z^3 - 2z^2 - 6i\sqrt{3}z^2 - 8z + 2z^2 - z - 3i\sqrt{3}z - 4.$

$= 4z^3 - 6i\sqrt{3}z^2 - 3(3 + i\sqrt{3})z - 4.$

b) Déduisons les solutions de (E).

D'après la question précédente:

$[(2z + 1)(2z^2-(1+3i\sqrt{3})z - 4] = 4z^3 - 6i\sqrt{3}z^2 - 3(3 + i\sqrt{3})z - 4$

$(E) \Leftrightarrow z\in\mathbb{C}, (2z + 1)(2z^2-(1+3i\sqrt{3})z - 4) = 0$

$\Leftrightarrow z\in\mathbb{C}, 2z + 1 = 0$ ou $z\in\mathbb{C}, 2z^2 - (1 + 3i\sqrt{3})z - 4 = 0.$

$\Leftrightarrow z = -\frac{1}{2}$ ou $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ou $z = 1 + i\sqrt{3}.$

L'ensemble solution de (E) est : $\{ -\frac{1}{2} ; -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i ; 1 + i\sqrt{3} \}$.

4. Exprimons z_0, z_1 et z_2 sous forme trigonométrique

- $|z_0| = \frac{1}{2}$ et $\text{Arg}z_0 = \pi$ car z_0 est un nombre réel négatif.

  $z_0 = \frac{1}{2}(\cos(\pi) + i\sin(\pi))$.

- $|z_1| = 1$ et $\text{Arg}z_1 = \frac{2\pi}{3}$

  $z_1 = \cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3})$.

- $|z_2| = 2$, $z_2 = 2(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$ et $\text{Arg}z_2 = \frac{\pi}{3}$.

  On a : $z_2 = 2(\cos(\frac{\pi}{3}) + i\sin(\frac{\pi}{3}))$.

Partie B

1-*a) Déterminons l'écriture complexe de S.*

Par hypothèse, S est une similitude directe de centre O, d'angle $-\frac{\pi}{3}$ et de rapport 2. Donc l'écriture complexe de S est de la forme : $z' = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}z$

C'est-à-dire $z' = (1-i\sqrt{3})z$.

b) Justifions que : $S(M_0) = M_1$ et $S(M_1) = M_2$.

• ***Justifions que : $S(M_0) = M_1$***

$z_0' = (1 - i\sqrt{3})z_0$

$= -\frac{1}{2}(1-i\sqrt{3})$

$= -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3}$

$= z_1$.

Donc : $S(M_0) = M_1$

• ***Justifions que $S(M_1) = M_2$***

$z_1' = (1 - i\sqrt{3})z_1$

$= (1 - i\sqrt{3})(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\sqrt{3})$

$= 1 + i\sqrt{3}$

$= z_2$

Donc : $S(M_1) = M_2$.

2- ***Justifions que $z_{n+1} = (1 - i\sqrt{3})z_n$.***

S est une similitude directe d'écriture complexe $z' = (1 - i\sqrt{3})z$ et $M_{n+1} = S(M_n)$. On en déduit que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = (1 - i\sqrt{3})z_n$.

3-*a*) ***Démontrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.***

Pour tout entier naturel n, on a :

$u_{n+1} = |z_{n+1}|$

$= |(1 - i\sqrt{3})z_n|$

$= |1 - i\sqrt{3}| \times |z_n|$

$= 2|z_n|$, car $|1 - i\sqrt{3}| = 2$

$= 2u_n$.

D'où : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n$.

Par suite, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 2

De plus : $u_0 = |z_0|$

$= \frac{1}{2}$.

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $\frac{1}{2}$

b) Justifions que $OM_{12} = 2048$

$OM_{12} = |z_{12}|$

$= u_{12}$

$= \frac{1}{2} \times 2^{12}$, car u_n est une suite géométrique de raison 2 et de premier terme $\frac{1}{2}$.

Donc : $OM_{12} = 2048$.

Habiletés et conseils pour la résolution de l'exercice 2

	HABILETÉS	CONSEILS
1	Déterminer la probabilité conditionnelle d'un évènement par rapport à un évènement de probabilité non nulle.	Tu identifiéras le résultat dans l'énoncé.
2	Calculer la probabilité d'un évènement	Tu utiliseras le résultat suivant : $B = (B \cap M) \cup (B \cap \overline{M})$, où $(B \cap M)$ et $(B \cap \overline{M})$ sont incompatibles. Tu pourras utiliser d'un arbre de probabilité.
3)	Calculer la probabilité conditionnelle d'un évènement par rapport à un évènement de probabilité non nulle.	Tu utiliseras la formule : $P_B(M) = \frac{P(B \cap M)}{P(B)}$
4-a)	Calculer la probabilité d'obtenir k succès dans une suite de n épreuves de Bernoulli.	Tu remarqueras les caractéristiques d'une loi binomiale de paramètres n et p. Tu appliqueras ensuite la formule $P(x = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$
b)	Calculer la probabilité d'un évènement	Tu utiliseras l'évènement contraire de l'évènement donné.
5)	Traiter une situation en utilisant les probabilités.	Tu généraliseras le résultat de la question 4-b) et tu résoudras l'inéquation $1 - p^n \geq 0{,}98$.

Corrigé Exercice 2

1- ***Déterminons la probabilité d'avoir une baisse du taux de glycémie chez un individu sachant qu'il a pris le médicament.***

La probabilité de l'évènement « l'individu a une baisse du taux de glycémie sachant qu'il a pris le médicament » est $P_M(B)$.

Donc $P_M(B) = 0,8$ d'après l'énoncé.

2- ***Démontrons que la probabilité d'avoir une baisse du taux de glycémie est de 0,52.***

L'évènement B « avoir une baisse du taux de glycémie » signifie « avoir pris le médicament et avoir une baisse » ou « n'avoir pas pris le médicament et avoir une baisse ».

On a : $B = (B \cap M) \cup (B \cap \overline{M})$, où $(B \cap M)$ et $(B \cap \overline{M})$ sont incompatibles.

Par suite :

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B \cap M) + P(B \cap \overline{M}) \\ &= P_M(B) \times P(M) + P_{\overline{M}}(B) \times P(\overline{M}) \\ &= 0,8 \times 0,6 + 0,1 \times 0,4 \\ &= 0,52 \end{aligned}$$

D'où : $P(B) = 0,52$.

3- ***Calculons la Probabilité pour que l'individu pris au hasard ait pris le médicament sachant que l'on constate une baisse de son taux de glycémie.***

La probabilité recherchée est $P_B(M)$.

$$\begin{aligned} P_B(M) &= \frac{P(B \cap M)}{P(B)} \\ &= \frac{P(M) \times P_M(B)}{P(B)} \\ &= \frac{0,6 \times 0,8}{0,52} \\ &= 0,92. \end{aligned}$$

4- *a) Calculons la probabilité d'avoir exactement deux personnes dont le taux de glycémie a baissé.*

Le contrôle de 5 individus pris au hasard revient à répéter 5 fois de façon identique et indépendante le contrôle au hasard d'un individu. On s'intéresse au nombre de fois où l'individu contrôlé a une baisse de son taux de glycémie. La variable aléatoire X compte le nombre de succès, c'est-à-dire le nombre de fois où l'individu contrôlé a une baisse de son taux de glycémie.

X suit donc une loi binomiale de paramètres n et p tels que :

$n = 5$ et $p = 0{,}52$.

$P(X = 2) = c_5^2(0{,}52)^2 \times (0{,}48)^3$

$= 0{,}3$.

b) Calculons la probabilité d'avoir au moins un individu dont le taux de glycémie a baissé.

L'évènement $(X \geqslant 1)$: « avoir au moins un individu dont le taux de glycémie a baissé » est l'évènement contraire de l'évènement $(X = 0)$: «avoir aucun individu dont le taux de glycémie a baissé».

On a : $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X=0)$.

Or : $P(X = 0) = (0{,}48)^5$.

Donc : $P(X \geqslant 1) = 1 - (0{,}48)^5$

Par suite $P(X \geqslant 1) = 0{,}98$.

La probabilité d'avoir au moins un individu dont le taux de glycémie a baissé est donc 0,98.

5- ***Déterminons n pour que la probabilité d'avoir au moins un individu dont le taux de glycémie a baissé soit supérieure à 0,98.***

Soit P_n cette probabilité.

On a : $P_n = 1 - (0{,}48)^n$.

$P_n \geq 0{,}98 \Leftrightarrow 1 - (0{,}48)^n \geq 0{,}98$

$\Leftrightarrow - (0{,}48)^n \geq - 0{,}02$

$\Leftrightarrow (0{,}48)^n \leq 0{,}02$

$\Leftrightarrow n\ln(0{,}48) \leq \ln(0{,}02)$, car la fonction $x \mapsto \ln x$ est une bijection croissante.

$\Leftrightarrow n \geq \dfrac{\ln(0{,}02)}{\ln(0{,}48)}$, car $\ln(0{,}48) < 0$.

Or : $\dfrac{\ln(0{,}02)}{\ln(0{,}48)} \approx 5{,}329$.

Donc le nombre minimum d'individus cherché est 6.

Habiletés et conseils pour la résolution du problème

Partie A

	Habiletés	Conseils
1-*a*)	Calculer la dérivée d'une fonction sur un intervalle	La dérivée $x \mapsto 1$ étant la fonction nulle, tu utiliseras la dérivée du produit $x \mapsto x\ln x$.
b)	Étudier les variations d'une fonction sur un intervalle et dresser son tableau de variation	Tu chercheras le signe de la dérivée pour déterminer le sens de variation. Tu résumeras les résultats dans un tableau.
2-*a*)	Déterminer le signe d'une fonction sur un intervalle	Tu utiliseras le sens de variation de g et non l'observation du tableau de variation.

Partie B

	Habiletés	Conseils
1-*a*)	Étudier la continuité d'une fonction en un point	Tu vérifieras que : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ > }} f(x) = f(0)$.
b)	Étudier la dérivabilité d'une fonction en un point	Tu vérifieras que : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ > }} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$, est un nombre réel.
c)	Déterminer une équation de la tangente en un point à une courbe.	Tu appliqueras la formule : $y = f'(a)(x - a) + f(a)$
d)	Étudier la position relative de deux courbes	Tu étudieras le signe de la fonction $x \mapsto f(x) - x$ sur $[0 ; +\infty[$.
2)	Démontrer que la courbe représentative d'une fonction admet une asymptote horizontale.	Tu calculeras la limite de f en $+\infty$ puis tu interpréteras le résultat en utilisant les résultats de cours sur les asymptotes. Pour le calcul de limite, tu mettras x en facteur au dénominateur et au numérateur.
3-*a*)	Calculer la dérivée d'une fonction sur un intervalle	Tu utiliseras la dérivée d'un quotient.
b)	Étudier les variations d'une fonction sur un intervalle et dresser son tableau de variation	Tu chercheras le signe de la dérivée pour déterminer le sens de variation. Tu résumeras les résultats dans un tableau
4)	Construire la courbe représentative d'une fonction	Tu suivras les étapes de la construction de la courbe représentative d'une fonction.

Habiletés et conseils pour la résolution du problème

Partie C

	Habiletés	Conseils
1-*a*)	Justifier qu'une fonction est majorée sur un intervalle	Tu vérifieras que f admet un maximum absolu.
b)	Comparer deux fonctions sur un intervalle	Tu étudieras le signe de la différence des deux fonctions sur cet intervalle.
2-	Connaissant un encadrement d'une fonction f sur un intervalle [a ; b], trouver un encadrement de $\int_a^b f(x)dx$	Tu utiliseras les deux dernières questions puis la propriété : Si $f \leq g$ sur [a ; b], alors $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

Corrigé du Problème

Partie A

1-*a*) ***Justifions que : $\forall x \in]0;+\infty[$, $g'(x) = 1 + \ln x$.***

$\forall x \in]0;+\infty[$, $g'(x) = 1 \times \ln x + x \times \frac{1}{x}$

$= 1 + \ln x$. Donc : $\forall x \in]0;+\infty[$, $g'(x) = 1 + \ln x$.

b) ***Étudions les variations de g puis dressons son tableau de variation.***

• ***Étudions les variations de g.***

$\forall x \in]0;+\infty[$, $g'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1$

$\Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$

$\forall x \in]0;+\infty[$, $g'(x) < 0 \Leftrightarrow \ln x < -1$

$\Leftrightarrow x < \frac{1}{e}$

$\forall x \in]0;+\infty[$, $g'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x > -1$

$\Leftrightarrow x > \frac{1}{e}$

Ainsi on a :

Pour $x \in]0;\frac{1}{e}[$, $g'(x) < 0$ donc g est strictement décroissante sur $]0;\frac{1}{e}[$.

Pour $x \in]\frac{1}{e};+\infty[$, $g'(x) > 0$ donc g est strictement croissante sur $[\frac{1}{e};+\infty[$.

•***Dressons le tableau de variation de g.***

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
$g'(x)$	‖	-	0	+	
$g(x)$	‖	↘	$1-\frac{1}{e}$	↗	

2- Démontrons que : $\forall x \in]0;+\infty[$, $g(x) > 0$.

D'après la question précédente, g est décroissante sur $]0;\frac{1}{e}[$ et

croissante sur $]\frac{1}{e};+\infty[$. Donc g admet un minimum absolu en $\frac{1}{e}$.

Ce minimum $g(\frac{1}{e})$ est $1-\frac{1}{e}$.

Or ce minimum $1-\frac{1}{e}$ est positif.

Donc : $\forall x \in]0;+\infty[$, $g(x) > 0$.

Partie B

1-*a) Étudions la continuité de f en 0.*

$\forall x \in]0;+\infty[$, $f(x) = x \times \frac{1}{1+x\ln x}$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x\ln x = 0$, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} 1+x\ln x = 1$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x = 0$,

D'où : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = 0$.

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = f(0)$, donc f est continue en 0.

b) Étudions la dérivabilité de f en 0.

$\forall x \in]0;+\infty[$, $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{1}{(1+x\ln x)}$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} x\ln x = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} 1+x\ln x = 1$

D'où : $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1$

f est donc dérivable en 0 et $f'(0) = 1$.

c) *Démontrons qu'une équation de la tangente (T) à (C) en O est : y = x.*

Une équation de la tangente (T) en O à (C) est : $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$.

Or : $f'(0) = 1$ et $f(0) = 0$.

Donc : $y = x$ est une équation de la tangente (T).

d) ***Démontrons que (C) est au-dessus de (T) sur]0 ;1[et en dessous de (T) sur]1 ;+∞[.***

$\forall x \in]0; +\infty[,\ f(x) - x = \dfrac{x}{1+x\ln x} - x$

$= \dfrac{x - x(1+x\ln x)}{1 + x\ln x}$

$= \dfrac{-x^2\ln x}{1+x\ln x}.$

$= \dfrac{x^2(-\ln x)}{g(x)}.$

D'après la question A-2) : $\forall x \in]0 ;+\infty[,\ g(x) > 0$ et comme x^2 est positif, donc le signe de $f(x) - x$ est celui de $-\ln x$.

Ainsi on a :

- (C) et (T) se coupent au point d'abscisse 1.
- Pour $x \in]0;1[,\ f(x) - x > 0$, donc (C) est au-dessus de (T) sur $]0;1[$.
- Pour $x \in]1;+\infty[,\ f(x) - x < 0$, donc (C) est en dessous de (T) sur $]1; +\infty[$.

2-*Démontrons que la droite (OI) est une asymptote à (C) en $+\infty$.*

$\forall x \in]0;+\infty[,\ f(x) = \dfrac{x \times 1}{x(\frac{1}{x} + \ln x)}$

$= \dfrac{1}{\frac{1}{x} + \ln x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = 0$. D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

Ainsi la droite (OI) est asymptote horizontale à (C) en $+\infty$.

3-a) ***Démontrons que : $\forall x \in]0 ;+\infty[, f'(x) = \dfrac{1-x}{(1+x\ln x)^2}$***

$\forall x \in]0 ; +\infty[,\ f'(x) = \dfrac{1+x\ln x - x(1+\ln x)}{(1+x\ln x)^2}$

$\forall x \in]0 ; +\infty[,\ f'(x) = \dfrac{1-x}{(1+x\ln x)^2}.$

b) ***Étudions les variations de f et dressons son tableau variation.***

• ***Étudions les variations de f***

$\forall x \in]0;+\infty[$, $(1+x\ln x)^2 > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $1-x$.

$\forall x \in]0;+\infty[$, $1-x=0 \Leftrightarrow x=1$;

$\forall x \in]0;+\infty[$, $1-x>0 \Leftrightarrow 0<x<1$;

$\forall x \in]0;+\infty[$, $1-x<0 \Leftrightarrow x>1$.

Ainsi on a :

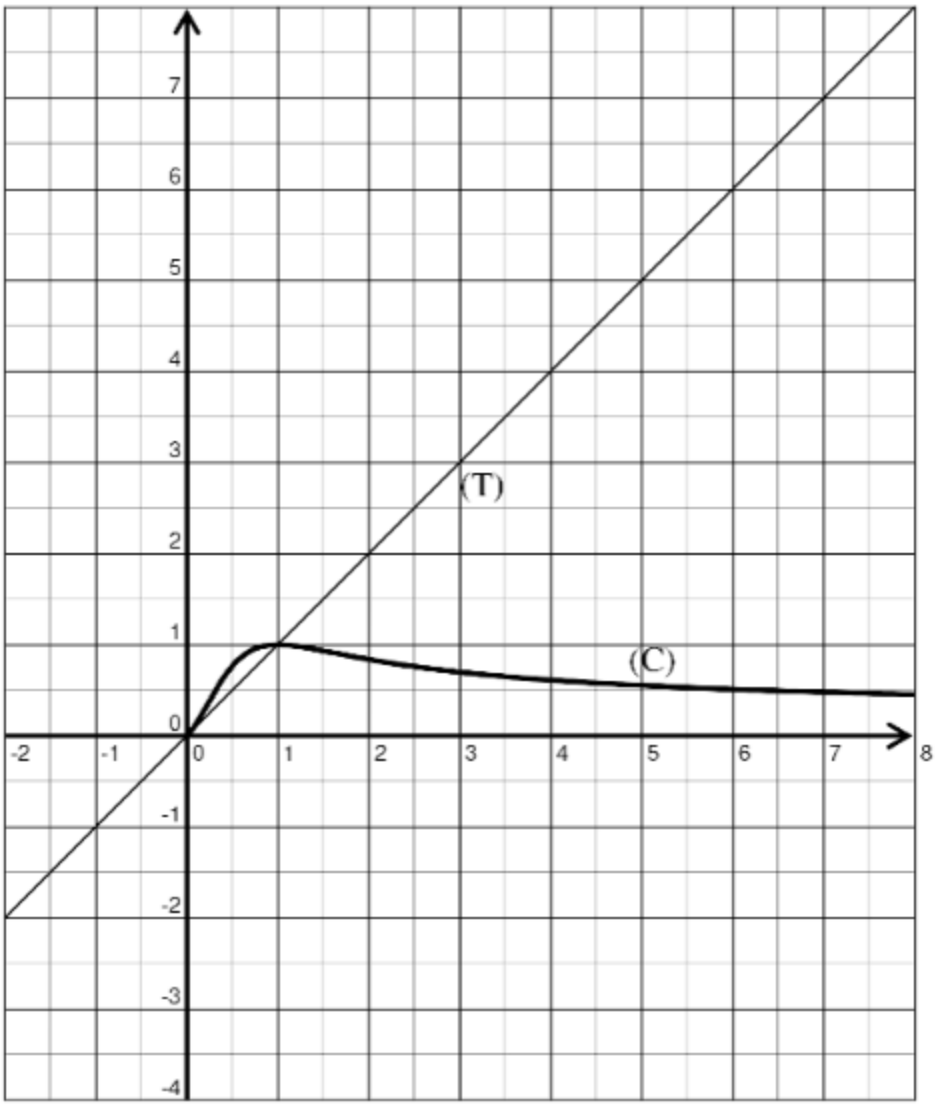
• f est strictement croissante sur $]0;1]$.

• f est strictement décroissante sur $[1;+\infty[$.

Dressons le tableau de variation de f.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	1	+	0	-	
$f(x)$	0	↗	1	↘	0

4- ***Construisons la droite (T) et la courbe (C) dans le plan muni du repère (O, I, J).***



Partie C

1-*a*) ***Justifions que : $\forall x \in]0;+\infty[$, $f(x) \leq 1$.***

D'après la question B-3-b), f est croissante sur $[0;1]$ et décroissante sur $[1;+\infty[$. Donc f admet un maximum absolu en 1. Ce maximum $f(1)$ est 1.

Donc : $\forall x \in]0;+\infty[$, $f(x) \leq 1$.

b) ***Démontrons que :*** $\forall x \in [1\,;e],\ 1 - \frac{1}{1+x} \leq f(x)$.

Pour cela démontrons que : $\forall x \in [1;e],\ f(x) - 1 + \frac{1}{1+x} \geq 0$.

$$\forall x \in [1;e],\ f(x) - 1 + \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x\ln x} - 1 + \frac{1}{1+x}$$

$$= \frac{x^2 + x - (1+x)(1+x\ln x) + 1 + x\ln x}{(1+x)(1+x\ln x)}$$

$$= \frac{x^2(1-\ln x)}{(1+x)(1+x\ln x)}$$

Or : $\forall x \in]0\,;+\infty[,\ 1 + x\ln x > 0$ d'après A-2), $x + 1 > 0$ et $x^2 > 0$.

Donc le signe de $f(x) - 1 + \frac{1}{1+x}$ est celui de $1 - \ln x$.

$\forall x \in]0\,;+\infty[,\ 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow x = e$;
$\forall x \in]0\,;+\infty[,\ 1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow 0 < x < e$;
$\forall x \in]0\,;+\infty[,\ 1 - \ln x < 0 \Leftrightarrow x > e$.

Ainsi on a : $\forall x \in [0\,;e],\ f(x) - 1 + \frac{1}{1+x} \geq 0$.

En particulier : $\forall x \in [1;e],\ f(x) \geq 1 - \frac{1}{1+x}$.

2-Démontrons que : $16(e-1) + 16\ln\left(\frac{2}{1+e}\right) \leq A \leq 16(e-1)$.

D'après les questions C-1-a) et C-1-b), on a :

$\forall x \in [1;e],\ 1 - \frac{1}{1+x} \leq f(x) \leq 1$.

Calculons en unité d'aire :

$$\int_1^e \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) dx \leq \int_1^e f(x)dx \leq \int_1^e 1 \times dx$$

$$[x - \ln(1+x)]_1^e \leq \int_1^e f(x)dx \leq [x]_1^e$$

$$(e-1) + \ln\left(\frac{2}{1+e}\right) \leq \int_1^e f(x)dx \leq (e-1).$$

L'unité d'aire étant 16 cm², on a :

$$16(e-1) + 16\ln\left(\frac{2}{1+e}\right) \leq A \leq 16(e-1).$$

Habiletés et conseils pour la résolution de l'exercice 1

	Habiletés	Conseils
1-*a*)	Calculer la limite d'une suite numérique	Tu calculeras la limite de la fonction associée en $+\infty$
b)	Démontrer qu'une suite numérique est croissante	Tu justifieras que $v_{n+1} - v_n$ est positif
c)	Démontrer qu'une suite numérique est bornée	Tu utiliseras le sens de variation de la suite (v_n) d'une part et la comparaison de v_n et 1 d'autre part.
2-a)	Démontrer par récurrence une propriété P_n pour tout entier naturel n non nul.	Tu suivras les étapes suivantes : * Justifier que la propriété est vraie pour le premier terme de la suite. * On supposant que la propriété est vraie au rang k et on démontre qu'elle reste vraie au rang $k+1$ * On conclut que la propriété est vraie pour tout entier naturel n non nul.
b)	Calculer la limite d'une suite numérique	Tu calculeras la limite de la fonction associée en $+\infty$
3-a)	Démontrer une propriété de suite numérique	Tu utiliseras la question 1-c)
b)	Calculer la limite d'une suite numérique	Tu remarqueras que $b_n = \ln(a_n)$ et tu utiliseras la fonction associée à a_n et la fonction ln.

Corrigé Exercice 1

1-*a*) ***Démontrons que la suite (v_n) converge.***

Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$v_n = \frac{n^2 + 2n}{(n+1)^2}$$

$$= \frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}$$

Par suite :

$$\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n^2}$$

$$= 1$$

La suite (v_n) admet une limite finie donc converge.

b) ***Démontrons que la suite (v_n) est croissante.***

Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$v_{n+1} - v_n = \frac{(n+1)^2 +2(n+1)}{(n+2)^2} - \frac{n^2+2n}{(n+1)^2}$$

$$= \frac{(n+2)^4 +2(n+1)^3 - n(n+2)^3}{(n+2)^2(n+1)^2}$$

$$= \frac{n^4+6n^3+12n^2+10n+3 - (n^4+6n^3+12n^2+8n)}{(n+2)^2(n+1)^2}$$

$$= \frac{2n+3}{(n+2)^2(n+1)^2}.$$

Pour tout entier naturel n non nul, $2n+3$, $(n+1)^2$ et $(n+2)^2$ étant positifs, on a : $v_{n+1} - v_n > 0$. Donc la suite (v_n) est croissante.

c) Démontrons que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{3}{4} \leq v_n \leq 1$.

D'une part, d'après la question précédente, la suite (v_n) est croissante. Par suite, son terme le plus petit est le premier terme v_1.

Or : $v_1 = \frac{3}{4}$, donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{3}{4} \leq v_n$.

D'autre part,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n - 1 = \frac{n^2 + 2n}{(n+1)^2} - 1$$

$$= \frac{n^2+2n-(n+1)^2}{(n+1)^2}$$

$$= \frac{n^2+2n - (n^2+2n+1)}{(n+1)^2}$$

$$= \frac{-1}{(n+1)^2}$$

Ce nombre étant négatif : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n \leq 1$.

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\frac{3}{4} \leq v_n \leq 1$.

2-a) ***Démontrons par récurrence que :*** $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{n+2}{2(n+1)}$.

$a_1 = v_1$

$= \frac{3}{4}$

$= \frac{1+2}{2(1+1)}$

La propriété est donc vraie à l'ordre 1.

Supposons la propriété vraie à l'ordre k, c'est-à-dire $a_k = \frac{k+2}{2(k+1)}$, et

démontrons qu'elle reste vraie à l'ordre $k+1$, c'est à dire : $a_{k+1} = \frac{k+3}{2(k+2)}$.

On a :

$a_{k+1} = (v_1 \times v_2 \times \ldots \times v_k) \times v_{k+1}$

$= a_k \times v_{k+1}$

$= \frac{k+2}{2(k+1)} \times \frac{(k+1)^2+2(k+1)}{(k+2)^2}$

$= \frac{k+3}{2(k+2)}$

La propriété est donc vraie à l'ordre $k+1$.

Par conséquent : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{n+2}{2(n+1)}$.

2-*b*) ***Déduisons-en la limite de la suite*** (a_n).

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \frac{n+2}{2(n+1)}$.

$= \frac{n+2}{2n+2}$

Par suite :

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2n}$$
$$= \frac{1}{2}.$$

3-a) Démontrons que (b_n) est une suite à termes négatifs.

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \{1,\ldots, n\}$, $\frac{3}{4} \leq v_k \leq 1$.

D'où : $\forall k \in \{1,\ldots, n\}$, $\ln v_k \leq 0$.
Or : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = \ln(v_1) + \ln(v_2) + \ldots + \ln(v_n)$.
b_n est une somme de nombres négatifs, donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $b_n \leq 0$.
Par suite (b_n) est une suite à termes négatifs.

3-b) Calculons la limite de (b_n).
Pour tout entier naturel n non nul, on a :
$b_n = \ln(v_1) + \ln(v_2) + \ldots + \ln(v_n)$
$= \ln(v_1 \times v_2 \times \ldots \times v_n)$
$= \ln(a_n)$.
$= \ln(\frac{n+2}{2(n+1)})$

Or : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x+2}{2(x+1)} = \frac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} \ln(x) = \ln(\frac{1}{2})$

Donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \ln(\frac{1}{2})$.

Habiletés et conseils pour la résolution de l'exercice 2

	Habiletés	Conseils
1-*a*)	Calculer l'espérance mathématique d'une variable aléatoire	Tu appliqueras la formule de l'espérance mathématique d'une variable aléatoire.
b)	Résoudre un système linéaire dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$	Tu remarqueras que la somme des probabilités est égale à 1 et tu utiliseras le résultat de la question précédente.
2-*a*)	Calculer la probabilité d'un évènement	Il s'agit de calculer $P(X\geqslant 250)$.
b)	Calculer la probabilité d'obtenir k succès dans une suite de n épreuves de Bernoulli.	Tu remarqueras les caractéristiques d'une loi binomiale de paramètres n et p. Tu appliqueras ensuite la formule $P(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$
3-*a*)	Calculer la probabilité d'un évènement	Tu utiliseras la relation : $P(G\cap E) = P(G)\times P_G(E)$
b)	Calculer la probabilité d'un évènement	Tu utiliseras la décomposition : $E = (G\cap E)\cup(F\cap E)\cup(H\cap E)$

Corrigé Exercice 2

1-a) Calculons E(X) en fonction de a et b.

On a :

$E(X) = (220 \times 0{,}08) + (230 \times 0{,}1) + (240 \times a) + (250 \times b) + (260 \times 0{,}16)$
$+ (270 \times 0{,}15) + (280 \times 0{,}04)$
$= 17{,}6 + 23 + 240a + 250b + 41{,}6 + 40{,}5 + 11{,}2$
$E(X) = 133.9 + 240a + 250b.$

b) ***Justifions que a = 0,14 et b = 0,33.***

- $E(X) = 250 \Leftrightarrow 133{,}9 + 240a + 250b = 250.$
- La somme des probabilités est égale à 1, par suite :
  $0{,}08 + 0{,}1 + a + b + 0{,}16 + 0{,}15 + 0{,}04 = 1$
  C'est-à-dire : $0{,}53 + a + b = 1.$
- Pour déterminer a et b, on résout le système suivant :

$$\begin{cases} 133{,}9 + 240a + 250b = 250 \\ 0{,}53 + a + b = 1 \end{cases}$$

On obtient : $\begin{cases} b = 0{,}33 \\ a = 0{,}14 \end{cases}$.

2-*a*) ***Calculons la probabilité pour que la masse du sachet de lait soit au moins de 250g.***

Il s'agit de calculer $P(X \geqslant 250)$.

$P(X \geqslant 250) = P(X=250) + P(X=260) + P(X=270) + P(X=280)$
$= 0{,}33 + 0{,}16 + 0{,}15 + 0{,}04$
$= 0{,}68.$

b) ***Calculons la probabilité que Tieplé, la fille de Gnamien, ait choisit exactement 3 sachets de lait de 220 g.***

Le choix de 5 sachets pris au hasard revient à répéter 5 fois de façon identique et indépendante le choix au hasard d'un sachet. On s'intéresse au nombre de fois où le sachet choisi a une masse de 220 g. Soit Y la variable aléatoire qui compte le nombre de succès, c'est-à-dire le nombre de fois où le sachet choisi a une masse de 220 g.

Y suit donc une loi binomiale de paramètres n et p tels que :

$n = 5$ et $p = 0{,}08$.

$P(Y = 3) = c_5^3(0{,}08)^3 \times (0{,}92)^2$

$= 0{,}004$.

La probabilité que Tieplé, la fille de Gnamien, ait choisit exactement 3 sachets de lait de 220 g est 0,004.

3-*a*) ***Justifions que la probabilité qu'un sachet de lait de 240g soit éliminé est de 0,098.***

Cette probabilité recherchée est $P(G \cap E)$.

La probabilité pour que le sachet de lait contrôlé soit éliminé sachant qu'il a une masse de 240 g est $P_G(E)$, c'est-à-dire 0,7.

On a :

$P(G \cap E) = P(G) \times P_G(E)$

$= 0{,}14 \times 0{,}7$

$= 0{,}098$.

b) Calculons la probabilité qu'un sachet de cette société soit éliminé.

L'évènement E « le sachet de lait contrôlé est éliminé » signifie « le sachet de lait contrôlé est de 240 g et est éliminé » ou « le sachet de lait contrôlé est de 230 g et est éliminé » ou « le sachet de lait contrôlé est de 220 g et est éliminé », car le sachet de lait de masse supérieur ou égale à 250 g est systématiquement accepté.

On a : $E = (G \cap E) \cup (F \cap E) \cup (H \cap E)$ où $(G \cap E)$, $(F \cap E)$ et $(H \cap E)$ sont incompatibles deux à deux.

D'où :

$P(E) = P(G \cap E) + P(F \cap E) + P(H \cap E)$

$= P(G) \times P_G(E) + P(F) \times P_F(E) + P(H) \times P_H(E)$

La probabilité pour que le sachet de lait contrôlé soit éliminé sachant qu'il a une masse de 230 g est $P_F(E)$, c'est-à-dire 0,8.

La probabilité pour que le sachet de lait contrôlé soit éliminé sachant qu'il a une masse de 220 g est $P_H(E)$, c'est-à-dire 1.

Pa suite :

$P(E) = 0{,}14 \times 0{,}7 + 0{,}10 \times 0{,}8 + 0{,}08 \times 1$

$= 0{,}258$.

La probabilité qu'un sachet de cette société soit éliminé est de 0,258.

Habiletés et conseils pour la résolution du problème

	HABILETÉS	CONSEILS
Partie A		
	Habiletés	**Conseils**
1-*a*)	Calculer la limite d'une fonction en $+\infty$	Tu calculeras la limite en $+\infty$ de chacun des termes
b)	Calculer la limite d'une fonction en un point	Tu calculeras la limite en 0 de chacun des termes
2-*a*)	Déterminer la dérivée d'une fonction sur un intervalle	Tu dériveras chaque terme de la fonction g
b)	Déterminer le sens de variation d'une fonction sur un intervalle	Tu étudieras le signe de la dérivée sur $]0 ; +\infty[$
c)	Dresser le tableau de variation d'une fonction sur un intervalle	Tu résumeras les informations précédentes dans un tableau.
3-*a*)	Prouver l'existence d'une unique solution de l'équation $g(x) = 0$ sur un intervalle I.	Tu rechercheras un zéro de g sur $]0 ; +\infty[$.
b)	Encadrer une solution de l'équation $g(x) = 0$, g étant continue et monotone sur un intervalle [a ; b]	Tu vérifieras que $g(2,55) \times g(2,56) < 0$.
c)	Etudier le signe d'une fonction sur un intervalle.	Tu utiliseras les variations de la fonction dans l'intervalle d'étude.

Habiletés et conseils pour la résolution du problème

	HABILETÉS	CONSEILS
Partie B		
	Habiletés	**Conseils**
1-a)	Calculer la limite d'une fonction en un point puis interpréter le résultat	Tu calculeras la limite en 0 de chacun des facteurs. Tu interpréteras graphiquement la limite en utilisant les résultats de cours sur les asymptotes.
b)	Calculer la limite d'une fonction en $+\infty$ puis interpréter le résultat	Tu décomposeras $f(x)$ en une somme et tu calculeras la limite en $+\infty$ de chacun des termes. Pour l'interprétation graphique, tu utiliseras les résultats de cours sur les asymptotes.
2-	Transformer une expression	Tu utiliseras $g(\alpha) = 0$ pour écrire $\ln(\alpha)$ comme une fonction rationnelle de α.
3-a)	Calculer la dérivée d'une fonction sur un intervalle	Tu calculeras $f'(x)$ et tu l'exprimeras en fonction de $g(x)$
b)	Etudier le sens de variation d'une fonction sur un intervalle	Tu utiliseras la question A-3-c) pour trouver le signe de $f'(x)$.
c)	Dresser le tableau de variation d'une fonction	Tu résumeras les informations précédentes dans un tableau.
4-	Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative d'une fonction en un point.	Tu utiliseras l'équation de la forme : $y = (x - x_0)f'(x_0) + f(x_0)$
5-	Tracer la courbe représentative d'une fonction	Tu suivras les étapes suivantes : • Faire une mise en page en tenant compte des unités. • Tracer les asymptotes et les tangentes • S'aider d'un tableau de valeurs. • Vérifier les points d'intersection avec les axes du repère. • Comparer l'allure de la courbe et le tableau de variation • Faire une figure soignée.

Habiletés et conseils pour la résolution du problème

PARTIE C

	HABILETÉS	CONSEILS
1	Démontrer qu'une fonction est une primitive d'une autre fonction sur un intervalle	Tu justifieras que $h' = f$ sur l'intervalle $]0 ; +\infty [$.
2-a)	Calculer l'aire d'une partie du plan limitée par la courbe représentative d'une fonction, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.	• Tu détermineras le signe de f sur l'intervalle $[3 ; \lambda]$. • Tu calculeras l'aire A en unités d'aire en utilisant la primitive h de f sur l'intervalle $[3 ; \lambda]$ •Tu exprimeras A en cm^2.
b)	Calculer la limite d'une fonction en $+\infty$	Tu écriras $A(\lambda)$ comme produit de fonctions de référence.

Corrigé du Problème

Partie A

1- *a*) ***Calculons*** $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{2x+1}{x^2} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

b) ***Calculons*** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x)$.

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} -\frac{2x+1}{x^2} = -\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \ln x = -\infty$

Donc : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x) = -\infty$.

2-*a*) ***Démontrons que :*** $\forall x \in]0\,;+\infty[,\ g'(x) = \frac{x^2+2x+2}{x^3}$

$\forall x\in]0\,;+\infty[,\ g'(x) = -\frac{2x^2-2x(2x+1)}{x^4} + \frac{1}{x}$

$= \frac{x^2+2x+2}{x^3}$.

b) ***Déduisons-en les variations de g.***

Pour tout élément x de l'intervalle $]0\,;+\infty[$, $x^3 > 0$.

Par conséquent, le signe de $g'(x)$ est celui de $x^2 + 2x + 2$.

Déterminons le signe de $x^2 + 2x + 2$.

$\Delta = 2^2 - 4 \times 1 \times 2$

$= -4$.

$\Delta < 0$, par suite : $\forall x\in]0\,;+\infty[, x^2+2x+2 > 0$.

On conclut que : $\forall x\in]0\,;+\infty[, g'(x) > 0$.

Donc g est strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$.

2- c) ***Dressons le tableau de variation de g.***

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	+	
$g(x)$	‖	$-\infty$ ↗	$+\infty$

3-*a*) ***Démontrons que l'équation g(x) = 0 admet une unique solution α sur $]0 ; +\infty[$.***

g est continue et strictement croissante sur $]0 ; +\infty[$. Donc :

$g(]0 ; +\infty[) =]\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} g(x) ; \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)[$.

$=]-\infty ; +\infty[$.

Or : $0 \in]-\infty ; +\infty[$, donc l'équation $x \in]0 ; +\infty[$, $g(x) = 0$ admet une solution unique α.

b) ***Justifions que $2,55 < \alpha < 2,56$.***

$g(2,55) = -0,002$ et $g(2,56) = 0,006$. D'où : $g(2,55) \times g(2,56) < 0$.

Par conséquent : $2,55 < \alpha < 2,56$.

c) Démontrons que : $\forall x \in]0 ; \alpha[$, $g(x) < 0$ et $\forall x \in]\alpha ; +\infty[$, $g(x) > 0$.

• ***Démontrons que : $\forall x \in]0 ; \alpha[$, $g(x) < 0$.***

g est strictement croissante sur $]0 ; \alpha[$. Donc pour tout nombre réel x de $]0 ; \alpha[$, on a : $g(x) < g(\alpha)$.

Or : $g(\alpha) = 0$. Donc : $\forall x \in]0 ; \alpha[$, $g(x) < 0$.

•***Démontrons que : $\forall x \in]\alpha ; +\infty[$, $g(x) > 0$***

g est strictement croissante sur $]\alpha ; +\infty[$. Donc pour tout nombre réel x de $]\alpha ; +\infty[$, on a : $g(\alpha) < g(x)$.

Or : $g(\alpha) = 0$, donc : $\forall x \in]\alpha ; +\infty[$, $g(x) > 0$.

Partie B

1-*a*) ***Calculons*** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ ***puis interprétons graphiquement le résultat.***

• ***Calculons*** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$

On a d'une part :

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \frac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} \ln x = -\infty$ donc $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} (\frac{1}{x} - \ln x) = +\infty$.

Et d'autre part $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} e^{-x} = 1$

On conclut que : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = +\infty$.

• ***Interprétons graphiquement le résultat***

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x) = +\infty$, donc la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à la courbe (C).

b) ***Calculons*** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ***puis donnons une interprétation graphique.***

• ***Calculons*** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Pour tout nombre réel x strictement positif, on a :

$f(x) = (\frac{1}{x} - \ln x)e^{-x}$

$= \frac{1}{xe^x} - \frac{\ln x}{e^x}$

Or : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{xe^x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{e^x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

• ***Interprétons graphiquement le résultat***

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, donc la droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale à la courbe (C) en $+\infty$.

2) ***Démontrons que*** $f(\alpha) = -\frac{1+\alpha}{\alpha^2}e^{-\alpha}$.

D'après la question A-3-*a*), $g(\alpha) = 0$

C'est-à-dire $-\frac{2\alpha+1}{\alpha^2} + \ln\alpha = 0$

D'où : $\ln\alpha = \frac{2\alpha+1}{\alpha^2}$

On a :

$f(\alpha) = (\frac{1}{\alpha} - \ln\alpha)e^{-\alpha}$

$= (\frac{1}{\alpha} - \frac{2\alpha+1}{\alpha^2})e^{-\alpha}$, car $\ln\alpha = \frac{2\alpha+1}{\alpha^2}$

$= -\frac{1+\alpha}{\alpha^2}e^{-\alpha}$.

3-*a*) ***Démontrons que :*** $\forall x \in]0;+\infty[,\ f'(x) = g(x)e^{-x}$.

Pour tout nombre réel x strictement positif, on a :

$f'(x) = (-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x})e^{-x} + (\frac{1}{x} - \ln x)(-e^{-x})$

$= (-\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} - \frac{1}{x} + \ln x)e^{-x}$

$= (-\frac{1+2x}{x^2} + \ln x)e^{-x}$

$= g(x)e^{-x}$.

b) ***Déterminons le sens de variations de f.***

Pour tout nombre réel x strictement positif, $e^{-x} > 0$. Par conséquent le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$.

D'après A-3-c),

$\forall x \in]0;\alpha[,\ f'(x) < 0$, donc f est strictement décroissante sur $]0;\alpha[$.

$\forall x \in]\alpha;+\infty[,\ f'(x) > 0$, donc f est strictement croissante sur $]\alpha;+\infty[$.

c) ***Dressons le tableau de variation de f.***

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	‖	-	0	+	
$f(x)$	‖ $+\infty$	↘	$-\frac{\alpha+1}{\alpha^2}e^{-\alpha}$	↗	0

4- ***Démontrons qu'une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1 est*** $y = -\frac{3}{e}x + \frac{4}{e}$.

Une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 1 est :
$y = f'(1)(x-1) + f(1)$.

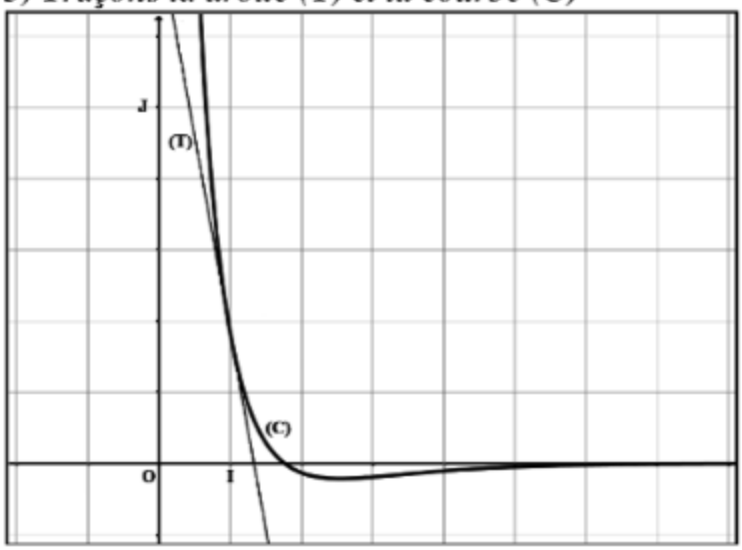
Or : $f'(1) = -\frac{3}{e}$ et $f(1) = \frac{1}{e}$.

Donc : $y = -\frac{3}{e}(x-1) + \frac{1}{e}$

Par suite : $y = -\frac{3}{e}x + \frac{4}{e}$

Par conséquent, une équation de la tangente (T) est : $y = -\frac{3}{e}x + \frac{4}{e}$.

5) Traçons la droite (T) et la courbe (C)



Partie C :

1- *Démontrons que h est une primitive de f sur]0 ;+∞[.*

Pour tout nombre réel x strictement positif, on a :

$h'(x) = (-e^{-x}) \ln x + e^{-x} \times \frac{1}{x}$.

$= (\frac{1}{x} - \ln x)e^{-x}$

$= f(x)$.

On en déduit que h est une primitive de f *sur* $]0 ;+\infty[$.

2.*a*) ***Calculons en cm² et en fonction de λ l'aire A(λ).***

• ***Calculons A(λ) en unité d'aire.***

Sur l'intervalle $]3 ; +\infty[$, (C) est en dessous de (OI).

Par conséquent :

$$A(\lambda) = -\int_3^{\lambda} (f(x) - 0)\,dx$$

$$= -\int_3^{\lambda} f(x)dx$$

$$= -[h(x)]_3^{\lambda}$$

$$= h(3) - h(\lambda)$$

$$= \frac{1}{e^3}\ln 3 - \frac{1}{e^{\lambda}}\ln \lambda$$

• ***Calculons A(λ) en cm².***

L'unité d'aire étant 20 cm², on a :

$A(\lambda) = (\frac{20\ln 3}{e^3} - \frac{20\ln\lambda}{e^{\lambda}})$ cm².

b) ***Calculons*** $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A(\lambda)$ *en cm².*

Pour tout λ strictement supérieur à 3, on a :

$\frac{\ln\lambda}{e^{\lambda}} = \frac{\ln\lambda}{\lambda} \times \frac{\lambda}{e^{\lambda}}$. Or : $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \frac{\ln\lambda}{\lambda} = 0$ et $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \frac{\lambda}{e^{\lambda}} = 0$.

Donc : $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} \frac{20\ln\lambda}{e^{\lambda}} = 0$.

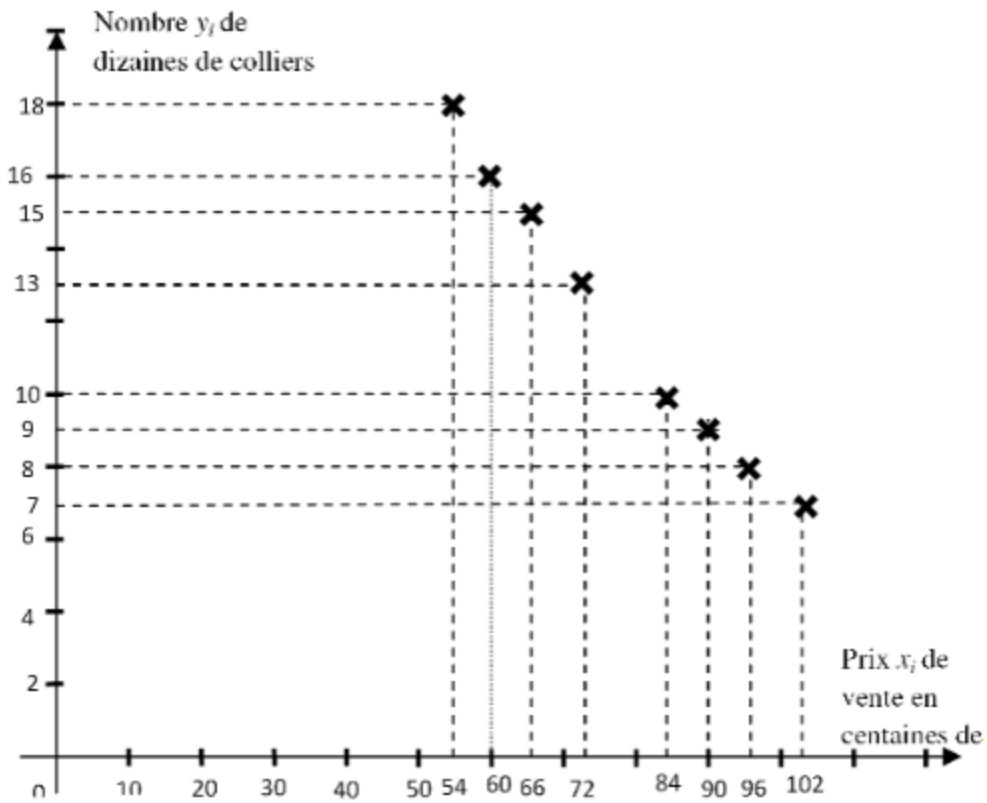
Par suite : $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} A(\lambda) = \frac{20\ln 3}{e^3}$ *cm².*

Habiletés et conseils pour la résolution de l'exercice 1

	Habiletés	Conseils
1-	Représenter graphiquement le nuage de points associé à une série statistique double.	Tu représenteras tous les points M_i de coordonnées $(x_i ; y_i)$.
2-	Calculer les coordonnées du point moyen.	Tu utiliseras les formules : $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ et $\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$, pour calculer les coordonnées $(\overline{x}, \overline{y})$ du point moyen G.
3-a)	Calculer la variance d'une série statistique	Tu appliqueras la formule de la variance.
b)	Calculer la covariance d'une série statistique double	Tu utiliseras la formule : $\text{Cov}(x, y) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) - \overline{x}\,\overline{y}$
c)	Calculer le coefficient de corrélation linéaire	Tu utiliseras la formule : $r = \frac{\text{Cov}(x, y)}{\sqrt{v(x)} \times \sqrt{v(y)}}$ où V(X) est la variance de X et V(Y) la variance de Y.
4-a)	Déterminer le coefficient directeur de la droite de régression par la méthode des moindres carrées.	Tu utiliseras la formule du coefficient a : $a = \frac{\text{Cov}(x,y)}{V(x)}$
b)	Déterminer une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés.	Tu utiliseras une équation de la forme : $y = ax + b$ où $a = \frac{\text{Cov}(x,y)}{V(x)}$ et $b = \overline{y} - a\overline{x}$.
	Estimer la valeur d'une	Tu remplaceras x par 115 et tu
	variable connaissant une valeur de l'autre variable	détermineras y.

Corrigé Exercice 1

1- ***Représentons graphiquement le nuage de points associé à la série double.***



2- ***Calculons les coordonnées du point moyen G.***

$(\overline{X}\ ;\overline{Y})$ est le couple de coordonnées du point moyen G.

$$\overline{X} = \frac{54 + 60 + 66 + 72 + 84 + 90 + 96 + 102}{8}$$

$$= 78.$$

$$\overline{Y} = \frac{18 + 16 + 15 + 13 + 10 + 9 + 8 + 7}{8}$$

$$= 12.$$

D'où : G(78 ; 12).

3-a) ***Calculons la variance V(X) de X.***

$$V(X) = \frac{54^2 + 60^2 + 66^2 + 72^2 + 84^2 + 90^2 + 96^2 + 102^2}{8} - 78^2$$

$$= 270$$

b) ***Calculons la covariance COV(X ;Y) de la série statistique double de caractère (X ;Y).***

$$COV(X ;Y) = \frac{54\times18 + 60\times16 + 66\times15 + 72\times13 + 84\times10 + 90\times9 + 96\times8 + 102\times7}{8} - 78\times12$$

$$= -62,25$$

c) ***Démontrons que l'arrondi d'ordre 2 du coefficient de corrélation linéaire est égale à -0,99.***

$$r = \frac{COV(X ; Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$$

$$= \frac{-62,25}{\sqrt{270\times14,5}}$$

$$= -0,99.$$

4-a) Démontrons que l'arrondi d'ordre 2 du coefficient directeur de (D) est égal à -0,23.

Le coefficient directeur de (D) est : $a = \frac{COV(X ;Y)}{V(X)}$.

$$a = \frac{-62,25}{270}$$

D'où : $a = -0,23$.

b) Démontrons qu'une équation de (D) est : y = -0,23x + 29,94.

Une équation de la droite (D) est : $y = ax + b$ où $a = \frac{COV(X ;Y)}{V(X)}$ et

$b = \overline{Y} - a\overline{X}$.

D'après la question précédente, $a = -0,23$.

On a :

$$b = \overline{Y} + 0,23\overline{X}$$

$$= 12 + 0,23\times78$$

$$= 29,94.$$

Finalement la droite (D) a pour équation $y = -0{,}23x + 29{,}94$.

5- ***Déterminons le nombre de colliers que pourrait vendre Mme Kouamé en 2011.***

11500 F correspondent à 115 centaines de francs.

Pour $x = 115$, on a :

$y = -0{,}23 \times 115 + 29{,}94$

$= 3{,}49$ dizaines de colliers.

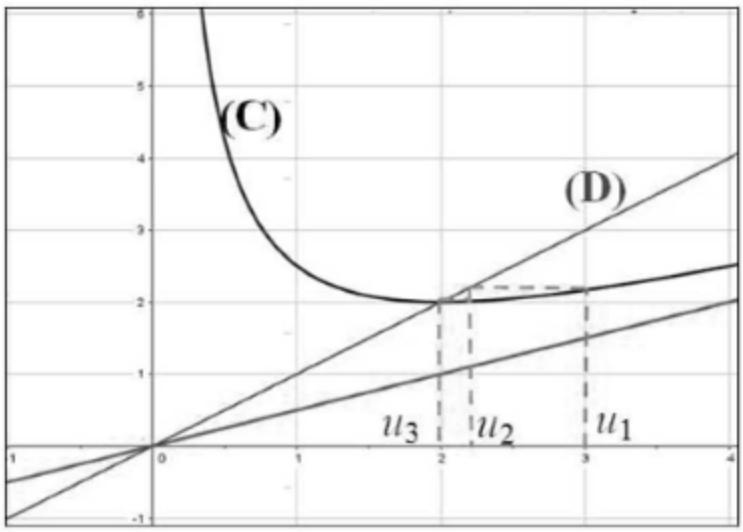
Madame Kouamé pourrait vendre 35 colliers en 2011.

Habiletés et conseils pour la résolution de l'exercice 2

	Habiletés	Conseils
1-a)	Représenter graphiquement les premiers termes d'une suite numérique.	Tu utiliseras $u_1=3$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour trouver les images des termes de la suite par f et la droite d'équation $y = x$ pour placer les points sur l'axe des abscisses.
b)	Conjecturer le comportement d'une suite numérique.	Tu observeras que les termes u_1, u_2 et u_3 se rapprochent de plus en plus de l'abscisse du point d'intersection de la courbe (C) et la droite (D).
2-a)	Déterminer l'image d'un intervalle par une fonction continue.	Tu utiliseras la monotonie et la continuité de la fonction f.
b)	Démontrer par récurrence une propriété P_n pour tout entier naturel n supérieur ou égal à un entier naturel n_0 donné.	Tu suivras les étapes suivantes : * Justifier que la propriété est vraie au rang n_0. * En supposant que la propriété est vraie au rang $n \geq n_0$, démontrer qu'elle reste vraie au rang $n + 1$. * Conclure que la propriété est vraie pour tout $n \geq n_0$.
3-a)	Démontrer qu'une suite numérique est décroissante	Tu vérifieras que $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$
b)	Démontrer qu'une suite numérique est convergente	Tu utiliseras le résultat de 2-b) et 3-a)
4-a)	Démontrer une propriété de suites numériques.	Dans l'écriture de v_{n+1}, tu remplaceras u_{n+1} par son expression.
b)	Démontrer par récurrence une propriété P_n pour tout entier naturel n supérieur ou égal à un entier naturel n_0 donné.	Tu dois exécuter toutes les étapes du raisonnement par récurrence.
c)	Déterminer la formule explicite d'une suite numérique	Tu calculeras v_1 et tu utiliseras le résultat de la question précédente.
d)	Déterminer la formule explicite d'une suite numérique	Tu exprimeras u_n en fonction de v_n puis tu remplaceras v_n par sa formule explicite trouvée précédemment.
e)	Calculer la limite d'une suite numérique.	Tu utiliseras le fait que $\lim_{n\to+\infty} 2^{n-1} = +\infty$ et que $0 < \frac{1}{5} < 1$

Corrigé Exercice 2

1- *a*) ***Représentons sur l'axe des abscisses (OI) les termes u_1, u_2 et u_3 de la suite u en utilisant la courbe (C) et la droite (D).***
Voir feuille annexe.



b) Conjecturons la convergence de la suite u.
La suite *u* converge vers 2.

2-*a*) ***Démontrons que*** $f([2\ ;3]) \subset [2\ ;3]$.
f est continue et strictement croissante sur [2 ;3], par conséquent :
$f([2\ ;3]) = [f(2)\ ;\ f(3)]$

$= [2\ ;\ \frac{13}{6}]$, car : $f(2) = 2$ et $f(3) = \frac{13}{6}$.

Or : $\frac{13}{6} < 3$, donc : $f([2\ ;3]) \subset [2\ ;3]$.

b) ***Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $2 \leqslant u_n \leqslant 3$.***

On a : $u_1 = 3$, d'où : $2 \leqslant u_1 \leqslant 3$. La propriété est donc vraie à l'ordre 1.
Supposons que, pour un entier naturel n supérieur ou égal à 1,
$2 \leqslant u_n \leqslant 3$ et démontrons que $2 \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$.
D'après l'hypothèse de récurrence, $2 \leqslant u_n \leqslant 3$.
Par suite : $2 \leqslant f(u_n) \leqslant 3$ d'après la question 2-*a*).
Or : $f(u_n) = u_{n+1}$, donc : $2 \leqslant u_{n+1} \leqslant 3$.
La propriété est donc vraie à l'ordre $n+1$.
Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $2 \leqslant u_n \leqslant 3$.

3-*a*) ***Démontrons que la suite u est décroissante.***
Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{4}{u_n}\right) - u_n.$$
$$= -\frac{1}{2}u_n + \frac{2}{u_n}$$
$$= \frac{1}{2} \times \frac{(2-u_n)(2+u_n)}{u_n}$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \geq 2$, par conséquent : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $2 - u_n \leq 0$ et $2 + u_n \geq 0$.
Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n < 0$.
La suite u est donc décroissante.

b) ***Déduisons-en que la suite u est convergente.***
La suite u est décroissante d'après la question précédente et minorée par 2 d'après 2-*b*) donc converge.

4-*a*) ***Démontrons que :*** $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} = (v_n)^2$.

Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 2}{u_{n+1} + 2}$$

$$= \frac{\frac{1}{2}(u_n + \frac{4}{u_n}) - 2}{\frac{1}{2}(u_n + \frac{4}{u_n}) + 2}$$

$$= \frac{u_n^2 - 4u_n + 4}{u_n^2 + 4u_n + 4}$$

$$= (\frac{u_n - 2}{u_n + 2})^2$$

$= (v_n)^2$, car $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 2}$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} = (v_n)^2$.

b) Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = (v_1)^{2^{n-1}}$.

On a :

$(v_1)^{2^{1-1}} = (v_1)^{2^0}$

$= (v_1)^1$

$= v_1$

La propriété est donc vraie à l'ordre 1.

Supposons la propriété vraie pour un entier naturel n non nul, c'est-à-dire $v_n = (v_1)^{2^{n-1}}$ et démontrons que $v_{n+1} = (v_1)^{2^n}$.

D'après la question précédente, on a :

$v_{n+1} = (v_n)^2$.

$= ((v_1)^{2^{n-1}})^2$, d'après l'hypothèse de récurrence.

$= (v_1)^{2 \times 2^{n-1}}$

$= (v_1)^{2^n}$

La propriété est donc vraie à l'ordre $n + 1$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, v_n = (v_1)^{2^{n-1}}$

c) ***Calculons*** v_1 ***puis exprimons*** v_n ***en fonction de n.***

• $v_1 = \frac{u_1 - 2}{u_1 + 2}$

$= \frac{1}{5}$, car $u_1 = 3$.

• Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$v_n = (v_1)^{2^{n-1}}$, d'après question 4-*b*)

$= (\frac{1}{5})^{2^{n-1}}$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = (\frac{1}{5})^{2^{n-1}}$.

d) ***Exprimons u_n en fonction de n.***

• ***Exprimons u_n en fonction de v_n.***

Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 2}$

D'où : $(u_n+2)v_n = u_n - 2$.

Par suite : $u_n = \frac{2(1+v_n)}{1-v_n}$

• ***Exprimons u_n en fonction de n.***

Pour tout entier naturel n non nul, on a :

$u_n = 2 \times \frac{1+(\frac{1}{5})^{2^{n-1}}}{1-(\frac{1}{5})^{2^{n-1}}}$, d'après la question précédente.

e) Démontrons que $\lim_{n \to +\infty} v_n = 0$ et déduisons la limite de u.

• $\lim_{n \to +\infty} 2^{n-1} = +\infty$ et $\lim_{m \to +\infty} (\frac{1}{5})^m = 0$, car $0 < \frac{1}{5} < 1$.

Par conséquent : $\lim_{n \to +\infty} v_n = 0$.

• $\lim_{n \to +\infty} u_n = 2$, car $\lim_{n \to +\infty} v_n = 0$.

Habiletés et conseils pour la résolution du problème

Partie A

	Habiletés	Conseils
1-a)	Déterminer les limites en un point et en $+\infty$ d'une fonction.	Tu calculeras la limite de chaque terme en 0 et en $+\infty$
b)	Déterminer la dérivée d'une fonction sur un intervalle	Tu dériveras chaque terme de la fonction g.
c)	Déterminer le sens de variation d'une fonction sur un intervalle et dresser son tableau de variation	Tu étudieras le signe de la dérivée sur $]0 ; +\infty[$. Puis tu résumeras les informations précédentes dans un tableau
2-a)	Prouver l'existence d'une unique solution de l'équation $g(x) = 0$ sur un intervalle I.	Tu appliqueras la propriété : Si g est continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors g est une bijection de I sur g(I). De plus, si $0 \in g(I)$, alors l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution dans I.
b)	Encadrer une solution de l'équation $g(x) = 0$ sur un intervalle [a ; b]	Tu vérifieras que : $g(0,4)\times g(0,5)< 0$
c)	Etudier le signe d'une fonction sur un intervalle.	Tu utiliseras les variations de la fonction dans l'intervalle d'étude.

Partie B

	Habiletés	Conseils
1-a)	Déterminer la limite d'une fonction en $+\infty$	Tu calculeras la limite de chaque terme. Pour $x \mapsto f(x)$, tu mettras x en facteur.
b)	Interpréter graphiquement $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$	Tu utiliseras les résultats de cours sur les branches paraboliques.
2- a)	Etudier la continuité d'une fonction en un point	Tu vérifieras que $\lim\limits_{x\to0} f(0) = f(0)$.
b)	Déterminer la limite d'une fonction en un point	Tu écriras $\frac{f(x)-f(0)}{x}$ sous la forme $\frac{e^x-1}{x} + 2\ln x - 2$.
c)	Justifier la dérivabilité ou non d'une fonction en un point.	Tu utiliseras la limite de la question précédente.
d)	Interpréter graphiquement $\lim\limits_{x\to0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -\infty$	Tu utiliseras les résultats de cours sur les tangentes.

Habiletés et conseils pour la résolution du problème

3-a)	Déterminer la dérivée d'une fonction sur un intervalle.	Tu calculeras la dérivée de chaque terme.
b)	Etudier les variations d'une fonction sur un intervalle et dresser son tableau de variation.	Tu utiliseras la question A-2-c) pour trouver le signe de $f'(x)$. Tu résumeras les résultats précédents dans un tableau.
4-	Tracer la courbe représentative d'une fonction	Tu suivras les étapes de tracé d'une courbe représentative d'une fonction.
5-a)	Calculer une intégrale à l'aide d'une intégration par parties	Tu exécuteras les étapes de l'intégration par parties.
b)	Calculer l'aire d'une partie du plan limitée par la courbe représentative d'une fonction, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=a$ et $x=b$.	• Tu détermineras le signe de f sur l'intervalle [1 ; 2]. • Tu calculeras l'aire A en unité d'aire. • Tu exprimeras A en cm^2.

Corrigé du Problème

Partie A

1-a) Déterminons $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ ***et*** $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

- ***Déterminons*** $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$.

$\lim\limits_{x\to 0} e^x = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$.

Donc : $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -\infty$.

- ***Déterminons*** $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$.

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

b) ***Calculons g'(x).***

$\forall x \in]0;+\infty[,\ g'(x) = e^x + \frac{2}{x}$.

c) ***Étudions le sens de variation de g et dressons son tableau de variation.***

- ***Étudions le sens de variation de g.***

$\forall x \in]0;+\infty[, e^x > 0$ et $\frac{2}{x} > 0$.

Donc : $\forall x \in]0;+\infty[,\ g'(x) > 0$.

On en déduit que g est strictement croissante sur $]0;+\infty[$.

- ***Dressons le tableau de variation de g.***

x	0		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	
$g(x)$	‖	$-\infty$ ↗	$+\infty$

2-a) Démontrons que l'équation g(x) = 0 admet une solution unique α sur]0 ;+∞[.

g étant dérivable sur]0 ; +∞[, est continue sur cet intervalle.
De plus g étant strictement croissante sur]0 ; +∞[, on a :
$g(]0 ; +\infty[) =]\lim\limits_{x\to 0} g(x); \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)[$, c'est-à-dire :
$g(]0 ; +\infty[) =]-\infty ; +\infty[$, d'après A-1-a).
Or, 0 appartient à l'intervalle $]-\infty ; +\infty[$, donc l'équation $x\in]0 ; +\infty[$, $g(x) = 0$ admet une solution unique α.

b) ***Vérifions que 0,4<α<0,5.***
g(0,4) = - 0,34 et g(0,5) = 0,26, d'où : g(0,4) ×g(0,5) < 0.
par conséquent : $0,4 < \alpha < 0,5$.

c) Démontrons que : ∀x ∈]0 ;α[, g(x) <0 et ∀x ∈]α ; +∞[, g(x)>0.
•Démontrons que : ∀x ∈]0 ;α[, g(x) <0
g est strictement croissante sur]0 ; α[. Donc pour tout nombre réel x de]0 ;α[, on a : $g(x) < g(\alpha)$.
Or : $g(\alpha) = 0$. Donc : $\forall x\in]0 ; \alpha[, g(x) < 0$.

• Démontrons que : ∀x∈]α ; +∞[, g(x) >0
g est strictement croissante sur]α ; +∞[. Donc pour tout nombre réel x de]α ; +∞[, on a : $g(\alpha) < g(x)$
Or : $g(\alpha) = 0$. Donc : $\forall x\in]\alpha ; +\infty[, g(x) > 0$.

Partie B

1- ***a) Déterminons*** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ***et*** $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.

• Déterminons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Pour tout nombre réel x strictement positif, on a :
$f(x) = e^x + 2x\ln x - 2x$
$= x(\frac{e^x}{x} + 2\ln x - 2)$.

D'une part : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} + 2\ln x - 2 = +\infty$

D'autre part : $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$.

Finalement : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

• ***Déterminons*** $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.

$\forall x \in]0;+\infty[$, $\frac{f(x)}{x} = \frac{e^x}{x} + 2\ln x - 2$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$.

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.

b) ***Interprétation graphique les résultats.***

De $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, on déduit que (C) admet une branche parabolique de direction (OJ) en $+\infty$.

2-*a*) ***Démontrons que f est continue en 0.***

On a, d'une part, f est définie en 0 et $f(0) = 1$.

Et d'autre part :

$\lim\limits_{x\to0} e^x = 1$, $\lim\limits_{x\to0} x\ln x = 0$ et $\lim\limits_{x\to0} 2x = 0$

D'où : $\lim\limits_{x\to0} f(x) = 1$.

Par conséquent : $\lim\limits_{x\to0} f(x) = f(0)$. Donc f est continue en 0.

b) Démontrons que $\lim\limits_{x\to0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -\infty$.

Pour tout nombre réel x strictement positif, on a :

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{e^x + 2x\ln x - 2x - 1}{x}$$

$$= \frac{e^x-1}{x} + \frac{2(x\ln x - x)}{x}$$

$$= \frac{e^x-1}{x} + 2\ln x - 2.$$

Or : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$.

Donc : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -\infty$.

c) ***Étude de la dérivabilité de f en 0.***

Pour tout nombre réel x strictement positif, on a :

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(x)-f(0)}{x}$$

Donc : $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = -\infty$, d'après la question précédente.

Par conséquent f n'est pas dérivable en 0.

d) ***Interprétations graphiquement de*** $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -\infty$.

De $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = -\infty$,on déduit que (C) admet une tangente verticale au point d'abscisse 0.

3-a) Démontrons que : $\forall x \in]0 ; +\infty[$, $f'(x) = g(x)$.

Pour tout nombre réel x strictement positif, on a :

Pour tout nombre réel x strictement positif, on a :

$$f'(x) = e^x + 2\ln x - \frac{2x}{x} + 2$$

$$= e^x + 2\ln x$$

$$= g(x).$$

On conclut que : $\forall x \in]0 ; +\infty[, f'(x) = g(x)$.

b) Étudions les variations de f et dressons son tableau de variation.

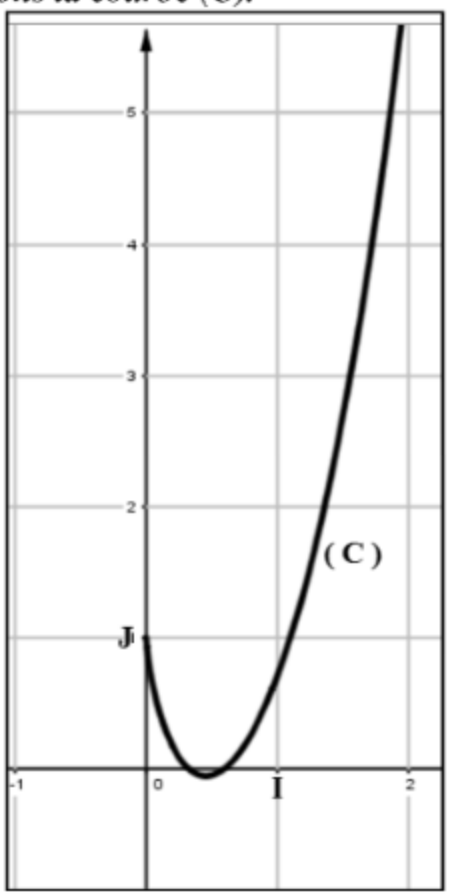
• ***Étudions les variations de f.***

D'après la question précédente, le signe de f' est celui de g sur $]0 ; +\infty[$.
On en déduit d'après la question A-2-c) que :
$\forall x \in]0 ; \alpha[, \ f'(x) < 0$;
$\forall x \in]\alpha ; +\infty[, \ f'(x) > 0$.
Par suite :
f est strictement décroissante sur $]0 ; \alpha[$ et f est strictement croissante sur $]\alpha ; +\infty[$.

• ***Dressons le tableau de variation de f.***

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	||	-	0	+	
	1	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

4- Traçons la courbe (C).



5-*a*) ***Démontrons à l'aide d'une intégration par parties que :***

$\boldsymbol{K = 2\ln 2 - \frac{3}{4}}$.

Posons : $u(x) = \ln x$ et $v'(x) = x$.

$u'(x) = \frac{1}{x}$ et $v(x) = \frac{1}{2}x^2$

$K = [\frac{x^2}{2}\ln x]_1^2 - \int_1^2 \frac{x}{2}\,dx$

$= [\frac{x^2}{2}\ln x]_1^2 - [\frac{x^2}{4}]_1^2$

$= 2\ln 2 - \frac{3}{4}$.

b) ***Calculons l'aire A en cm²***.

• ***Calculons l'aire A en unité d'aire.***

f est continue et positive sur [1 ;2].

Donc :

$$A = \int_1^2 f(x)\,dx$$

$$= \int_1^2 (e^x - 2x)dx + 2\int_1^2 x\ln x dx.$$

$$= [e^x - x^2]_1^2 + 2K$$

$$= e^2 - e + 4\ln 2 - \frac{9}{2}.$$

• ***Calculons l'aire A en cm².***

L'unité est 16 cm².

Donc :

$$A = 16(e^2 - e + 4\ln 2 - \frac{9}{2})\ cm^2.$$

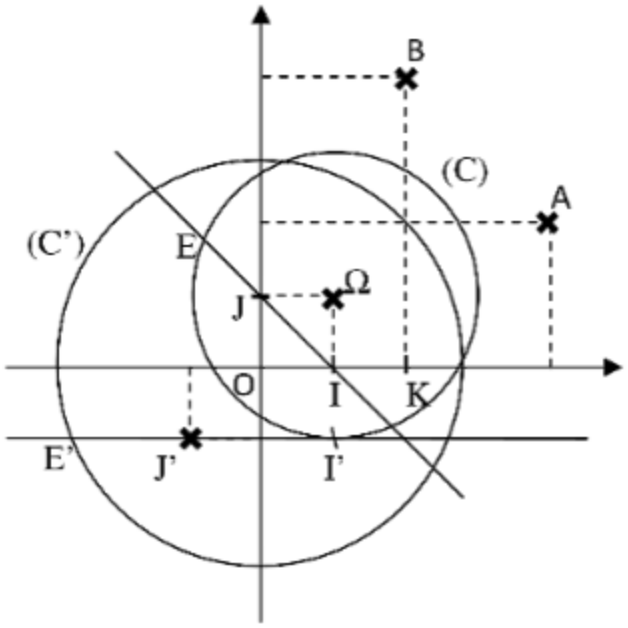
L'arrondi d'ordre 2 de A est 47,09 cm².

Habiletés et conseils pour la résolution de l'exercice 1

	Habiletés	Conseils
1-a)	Représenter un nombre complexe par un point.	Tu placeras le point en prenant pour abscisse la partie réelle et pour ordonnée la partie imaginaire du nombre complexe donné.
b)	Déterminer la forme algébrique d'un nombre complexe.	Tu rendras le dénominateur réel en utilisant le conjugué du dénominateur
2-*a)*	Déterminer l'écriture complexe d'une similitude directe	Tu utiliseras l'écriture complexe d'une similitude directe qui est de la forme $z' = az + b$, où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$. Tu détermineras a et b en utilisant le point invariant K, le point A et son image B par S.
b)	Déterminer l'affixe de l'image d'un point par une similitude directe	Tu remplaceras dans l'écriture complexe de S, z par 1 pour I' et par *i* pour J'.
3-	Déterminer le rapport et une mesure de l'angle orienté d'une similitude directe.	Tu détermineras le module et un argument du nombre complexe *a* dans l'écriture $z' = az + b$. Le rapport de S est $\|a\|$; une mesure de l'angle orienté de S est un argument de a.
4-a)	Tracer un cercle	Tu utiliseras le centre et le rayon de (C).
b)	Déterminer l'image d'un cercle par une similitude directe	Tu détermineras l'image du centre du cercle (C) par S. Le rayon de (C') est $r\sqrt{2}$.
c)	Construire l'image d'un cercle par une similitude.	Tu construiras (C') à partir du centre et du rayon de (C'). Tu
		remarqueras que $2\sqrt{2}$ est la longueur de la diagonale d'un carré de côté 2.
5-a)	Déterminer et construire l'image d'une droite par une similitude directe.	Tu appliqueras la propriété de l'image d'une droite par une similitude directe puis tu construiras la droite (I'J').
b)	Construire un point	Tu placeras le point intersection de la demi-droite [IJ) et du cercle (C).
c)	Déterminer l'image d'un point par une similitude directe.	Tu justifieras que E' est le point d'intersection du cercle (C') et de la demi-droite [I'J').

Corrigé Exercice 1

1-a) Plaçons les points K, A et B.



b) Déterminons la forme algébrique du nombre complexe $\frac{Z_3-Z_1}{Z_2-Z_1}$.

On a :

$$\frac{Z_3-Z_1}{Z_2-Z_1}=\frac{2+4i-2}{4+2i-2}$$

$$=\frac{4i}{2+2i}$$

$$=\frac{4i(2-2i)}{(2+2i)(2-2i)}$$

$$=1+i.$$

La forme algébrique du nombre complexe $\frac{Z_3-Z_1}{Z_2-Z_1}$, est $1+i$.

2-a) Démontrons que l'écriture complexe de S est : z'= (1+i)z -2i.

L'écriture complexe d'une similitude directe est de la forme $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

On a : $\begin{cases} S(K) = K \\ S(A) = B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_1 = az_1 + b \\ z_3 = az_2 + b \end{cases}$

En faisant la différence membre à membre des deux équations précédentes, on a :

$$a = \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}$$

$= 1 + i$ d'après la question précédente.

$b = 2 - 2(1+i)$, car $z_1 = a z_1 + b$.

$= -2i$.

Donc, l'écriture complexe de S est : $z' = (1+i)z - 2i$.

b) Déterminons les affixes des points I' et J'.

On a :

$Z_{I'} = (1 + i) \times 1 - 2i$.

$= 1 - i$.

$Z_{J'} = (1 + i)i - 2i$.

$= -1 - i$.

3- Déterminons le rapport et une mesure de l'angle orienté de S.

• Le rapport de S est $|a|$.

$|a| = \sqrt{2}$

• Une mesure de l'angle orienté de S est θ.

On a :

$$\cos\theta = \frac{Re(a)}{|a|}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et}$$

$$\sin\theta = \frac{Im(a)}{|a|}$$

$= \frac{\sqrt{2}}{2}$

Par suite, une mesure de l'angle orienté de S est $\frac{\pi}{4}$.

4- a)Traçons (C).
Voir question 1-*a*).

b) Déterminons le centre et le rayon de (C').
(C') a pour centre Ω', image de Ω par S et pour rayon $2|a|$.
On a :
$z_{\Omega'} = (1 + i)(1+i) - 2i$, car Ω(1 ; 1).
$= 0$, et $2|a| = 2\sqrt{2}$.
(C') est donc le cercle de centre O et de rayon $2\sqrt{2}$.

5- *a*) ***Déterminons et construisons l'image de la droite (IJ) par S.***
L'image de la droite (IJ) par S est la droite (I'J').
Pour la construction, voir question 1-*a*).

b) ***Plaçons E.***
Voir question 1-*a*).
c) ***Justifions la position de E' puis plaçons E'.***
• ***Justifions la position de E'.***
E∈ [IJ)∩(C), donc : E'∈ [I'J')∩(C').
• ***Plaçons E'***
Voir question 1-*a*).

Habiletés et conseils pour la résolution de l'exercice 2

	Habiletés	Conseils
1	Calculer des termes d'une suite numérique	Pour les expressions de $u_1$et u_2, tu remplaceras n respectivement par 0 et 1 dans la formule de récurrence.
2-a)	Tracer une droite	Tu remarqueras que (D) est une droite dont une équation est :
		$y = \frac{1}{2}x + 2$.
b)	Placer un terme de la suite sur une droite	Tu placeras sur (OI) le point d'abscisse $\sqrt{2}$.
c)	Représenter graphiquement les premiers termes d'une suite numérique.	Tu utiliseras $u_0=\sqrt{2}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ pour trouver les images des termes de la suite par f et la droite d'équation $y = x$ pour placer les points sur l'axe des abscisses.
3-a)	Démontrer par récurrence une propriété P_n pour tout entier naturel n supérieur ou égal à un entier naturel n_0 donné.	Tu suivras les étapes suivantes : * Justifier que la propriété est vraie au rang n_0. * Supposer la propriété vraie au rang $n \geq n_0$, démontrer qu'elle reste vraie au rang $n+1$. * Conclure que la propriété est vraie pout tout $n \geq n_0$.
b)	Démontrer qu'une suite numérique est croissante	Tu justifieras que $u_{n+1} - u_n \geq 0$
c)	Démontrer qu'une suite est convergente	Tu utiliseras les résultats des questions 3-a) et 3-b).
4-	Démontrer qu'une suite numérique est géométrique	Tu écriras le terme général de la suite (V_n) sous la forme $V_{n+1}=qV_n$ où q est un nombre réel indépendant de n.
5-a)	Déterminer la somme des $n$premiers termes d'une suite géométrique	Tu appliqueras la formule de la somme des n premiers termes d'une suite géométrique.
b)	Démontrer une propriété de suites.	Tu écriras S_n en fonction de T_n et tu remplaceras T_n par sa valeur trouvée précédemment.
e)	Calculer la limite d'une suite numérique	Tu calculeras la limite de chacun des termes de la suite (S_n).

Corrigé Exercice 2

1-***Déterminons les valeurs exactes de u_1 et u_2.***

On a :

$$u_1 = 2+\frac{1}{2}\times u_0$$

$$= 2+\frac{1}{2}\times\sqrt{2}$$

$$= \frac{4+\sqrt{2}}{2}$$

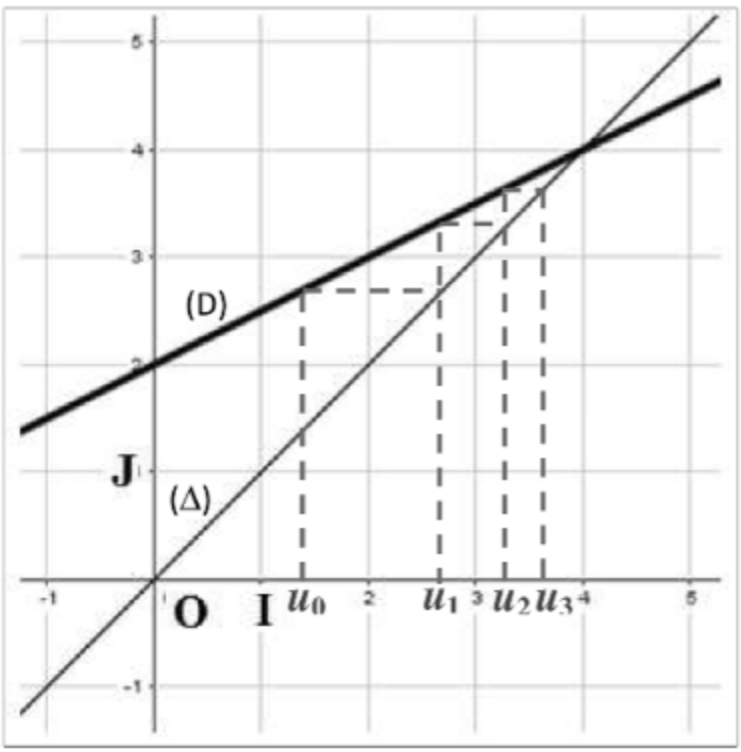
$$u_2 = 2+\frac{1}{2}\times u_1$$

$$= 2+\frac{1}{2}\times\frac{4+\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{12+\sqrt{2}}{4}$$

2-a) Traçons les droites (D) et (Δ).

La représentation graphique (D) de f est la droite d'équation $y = \frac{1}{2}x+2$.



b) Plaçons u_0.

Voir 2-*a*).

c) *Plaçons u_1, u_2 et u_3.*

Voir 2-*a*).

3-a) Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 4$.

On a : $u_0 = \sqrt{2}$, donc : $u_0 \leq 4$.

Par conséquent, la propriété est vraie au rang 0.

Supposons la propriété vraie au rang k, c'est-à-dire $u_k \leq 4$ et démontrons qu'elle reste vraie au rang $k+1$, c'est-à-dire $u_{k+1} \leq 4$.

On a : $u_k \leq 4$, d'après l'hypothèse de récurrence.

$\frac{1}{2} u_k \leq 2$.

$2 + \frac{1}{2} u_k \leq 2 + 2$.

$2 + \frac{1}{2} u_k \leq 4$.

Or : $u_{k+1} = 2 + \frac{1}{2} u_k$. Donc : $u_{k+1} \leq 4$.

La propriété est vraie au rang $k+1$.

En conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 4$.

b) Démontrons que la suite (u) est croissante

Pour tout entier naturel n, on a :

$$u_{n+1} - u_n = 2 + \frac{1}{2} u_n - u_n.$$

$$= 2 - \frac{1}{2} u_n$$

$$= \frac{1}{2}(4 - u_n).$$

D'après la question 3-*a*), $4 - u_n$ est positif.

Par conséquent, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$.

On conclut que la suite (u) est croissante.

c) Déduisons que la suite (u) est convergente.

La suite (u) est croissante, d'après la question précédente et est majorée, d'après la question 3-*a*). Par conséquent, elle est convergente.

4- *Démontrons que la suite(v) définie par : $v_n = u_n - 4$ est une suite géométrique et précisons la raison et le premier terme.*

• ***Démontrons que la suite (v) est géométrique.***

Pour tout entier naturel n, on a :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 4$$
$$= 2 + \frac{1}{2}u_n - 4$$
$$= \frac{1}{2}u_n - 2$$
$$= \frac{1}{2}(u_n - 4)$$
$$= \frac{1}{2}v_n, \text{ car } v_n = u_n - 4.$$

La suite (v) est donc une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

• ***Calculons le premier terme v_0.***

$$v_0 = u_0 - 4$$
$$= \sqrt{2} - 4$$

En conclusion, la suite (v) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $\sqrt{2}$ - 4.

5-*a) Déterminons T_n en fonction de n.*

T_n est la somme des $n + 1$ premiers termes de la suite géométrique de premier terme v_0 et de raison $\frac{1}{2}$. Par conséquent, pour tout entier naturel n, on a :

$$T_n = v_0 \frac{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}$$

$$T_n = 2(\sqrt{2} - 4)\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right).$$

b) ***Justifions que :*** $S_n = 2(\sqrt{2} - 4)\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) + 4(n+1)$.

Pour tout entier naturel n, on a :

$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

$= (v_0 + 4) + (v_1 + 4) + \ldots + (v_n + 4)$, car $u_n = v_n + 4$.

$= T_n + 4(n+1)$

$= 2(\sqrt{2} - 4)\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) + 4(n+1)$, d'après la question précédente.

c) ***Déterminons*** $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} 4(n+1) = +\infty$.

D'où : $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = +\infty$.

Habiletés et conseils pour la résolution du problème

	Habiletés	Conseils
1-a)	Déterminer la limite d'une fonction en $-\infty$	Tu calculeras la limite de chaque terme.
b)	Déterminer la limite d'une fonction en $-\infty$ puis interpréter le résultat	Tu remarqueras que $\frac{ln(1-x)}{x} = \frac{\ln(1-x)}{1-x} \times \frac{1-x}{x}$ pour calculer la limite $\frac{f(x)}{x}$ en $-\infty$ Pour l'interprétation tu utiliseras la question 1-a), la limite trouvée précédemment et les résultats de cours sur branches paraboliques.
c)	Déterminer la limite de f à gauche en un point puis interpréter le résultat	Pour la limite de f, tu calculeras la limite de chaque terme. Pour l'interprétation tu utiliseras les résultats de cours sur les asymptotes.
2-a)	Déterminer la dérivée d'une fonction sur un intervalle.	Tu calculeras la dérivée de chaque terme.
b)	Démontrer qu'une	Tu étudieras le signe de la
	fonction est strictement monotone un intervalle	dérivée sur$]-\infty ; 1]$.
c)	Dresser le tableau de variation d'une fonction.	Tu résumeras les résultats obtenus précédemment dans un tableau
3-a)	Démontrer que f réalise une bijection d'un intervalle I sur un intervalle J.	Tu utiliseras la propriété : Si f est continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors f est une bijection de I sur $f(I)$
b)	Prouver l'existence d'une unique solution de l'équation $f(x) = 0$ sur un intervalle.	Tu remarqueras que $0 \in f(I)$ et tu utiliseras le résultat de la question précédente.
c)	Encadrer une solution de l'équation $f(x) = 0$ sur un intervalle [a ; b]	Tu vérifieras que : $f(-0,7) \times f(-0,6) < 0$.
4-a)	Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative d'une fonction en un point	Tu utiliseras la formule : $y = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$.

Habiletés et conseils pour la résolution du problème

b)	Tracer la courbe représentative d'une fonction	Tu suivras les étapes de tracé d'une courbe représentative d'une fonction.
5-a)	Calculer une intégrale en utilisant une intégration par parties	Tu exécuteras les étapes de l'intégration par parties. Tu feras attention au choix des fonctions u et v'.
b)	Calculer l'aire d'une partie du plan limitée par la courbe représentative d'une fonction, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.	• Tu détermineras le signe de f sur l'intervalle $[\alpha ; 0]$.. • Tu calculeras l'aire A en unité d'aire. •Tu exprimeras A en cm^2.
6-a)	Calculer l'image d'un nombre réel par une fonction.	Tu remplaceras x par -1 dans l'expression de $f(x)$.
b)	Déterminer le nombre	Tu vérifieras que $f'(f^{-1}(\ln 2)) \neq 0$
	dérivé de la bijection réciproque en un point x_0.	Puis tu utiliseras la formule du cours.
c)	La représentation graphique d'une bijection étant donnée, construire la représentation graphique de sa bijection réciproque dans le plan rapporté à un repère orthonormé.	Tu utiliseras la droite d'équation $y = x$. Tu remarqueras que les deux représentations graphiques sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

Corrigé du Problème

1-*a*) ***Calculons*** $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$**.**

$\lim\limits_{x\to-\infty} (x^2-1) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \ln(1-x) = +\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

b) ***Calculons*** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ ***et interprétons graphiquement le résultat.***

• ***Calculons*** $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

Pour tout nombre réel x élément de l'intervalle $]-\infty : 0[$, on a :

$$\frac{f(x)}{x} = x - \frac{1}{x} + \frac{\ln(1-x)}{x}$$

$$= x - \frac{1}{x} + \frac{\ln(1-x)}{1-x} \times \frac{1-x}{x}$$

$\lim\limits_{x\to-\infty} (x - \dfrac{1}{x}) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\ln(1-x)}{1-x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1-x}{x} = -1$.

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$

• ***Interprétons graphiquement le résultat***

De : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$, on déduit que la courbe (C) admet une branche parabolique de direction (OJ) en $-\infty$.

c) ***Calculons la limite de f à gauche en 1et interprétons graphiquement le résultat.***

• ***Calculons la limite de f à gauche en 1***

On a :

$\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} (x^2-1) = 0$ et $\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} \ln(1-x) = -\infty$

Donc : $\lim\limits_{\substack{x\to1\\<}} f(x) = -\infty$.

• ***Interprétons graphiquement le résultat.***

De $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x) = -\infty$, on déduit que la courbe (C) admet une asymptote verticale d'équation $x = 1$.

2-*a*) ***Calculons f '(x).***

Pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]-\infty ; 1[$, on a :

$f'(x) = 2x - \dfrac{1}{1-x}$

b) ***Démontrons que f est strictement décroissante.***

Pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $]-\infty ; 1[$,on a :

$f'(x) = \dfrac{-2x^2 + 2x - 1}{1-x}$.

$\forall x \in]-\infty ; 1[$, $1- x > 0$ alors le signe de $f'(x)$ est celui de $-2x^2 + 2x - 1$.

$\Delta = 4 - 8$, ainsi : $\Delta = -4$

Δ étant négatif, le signe de $f'(x)$ est celui de -2.

Par conséquent : $\forall x \in]-\infty ; 1[, f'(x) < 0$.

Donc f est strictement décroissante sur $]-\infty ; 1[$.

c) Dressons le tableau de variation de f.

x	$-\infty$		1
$f'(x)$		-	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$

3-*a*) ***Démontrons que f est une bijection de $]-\infty ; 1[$ sur un intervalle K.***

f étant dérivable sur $]-\infty ; 1[$, est continue sur cet intervalle.

De plus f étant strictement décroissante sur $]-\infty ; 1[$,on a :

$f(]-\infty ; 1[) =]\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x); \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)[$, c'est-à-dire :

$f(]-\infty ; 1[) =]-\infty ; +\infty[$.

Donc f est une bijection de $]-\infty ; 1[$ sur $\mathbb{R}$. Par suite K = $\mathbb{R}$

b) Déduisons-en que l'équation (E) admet une unique solution α.

f est une bijection de $]-\infty ; 1[$ sur $]-\infty ; +\infty[$, d'après la question précédente.

Or : $0 \in]-\infty ; +\infty[$, donc l'équation $x \in]-\infty ; 1[$, $f(x) = 0$ admet une solution unique α.

c) ***Justifions que : $-0,7 < \alpha < -0,6$.***

$f(-0,7) = 0,02$ et $f(-0,6) = -0,16$, d'où : $f(-0,7) \times f(-0,6) < 0$.

Par conséquent : $-0,7 < \alpha < -0,6$.

4-*a*) ***Démontrons que l'équation de la tangente (T) au point d'abscisse 0 est y = - x - 1.***

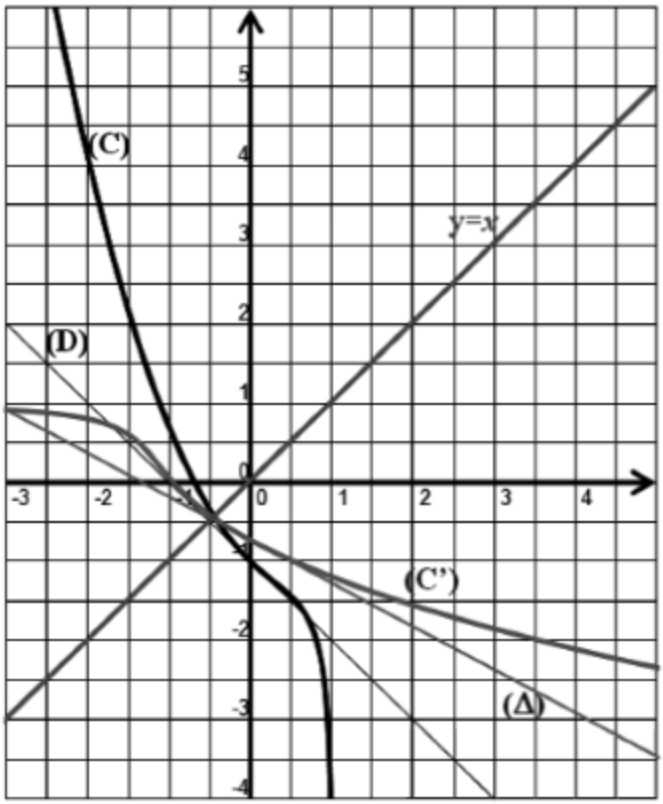
Une équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0 est :

$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$.

Or : $f'(0) = -1$ et $f(0) = -1$.

Une équation de la tangente (T) est donc : $y = -x - 1$.

b) ***Traçons (C) et (T).***



5-a) Calculons $\int_{\alpha}^{0} ln(1-x)dx$ ***à l'aide d'une intégration par parties.***

Posons : $u(x) = \ln(1-x)$; $v'(x) = 1$.

$u'(x) = \frac{-1}{1-x}$; $v(x) = x-1$.

On a :

$$\int_{\alpha}^{0} \ln(1-x)dx = [(x-1)\ln(1-x)]_{\alpha}^{0} - \int_{\alpha}^{0} 1\times dx$$

$$= [(x-1)\ln(1-x) - x]_{\alpha}^{0}$$

$$= (1-\alpha)\ln(1-\alpha) + \alpha.$$

5-*b*) ***Démontrons que*** $A = \frac{\alpha^3}{3} - 2\alpha - (1-\alpha)\ln(1-\alpha)$ ***en unité d'aire.***

Sur l'intervalle $[\alpha; 0]$, f est continue et négative.

Donc : $A = \int_{\alpha}^{0} -f(x)dx$.

$$A = \int_{\alpha}^{0} (-(x^2-1) - \ln(1-x))dx$$

$$= \int_{\alpha}^{0} -(x^2-1)dx - \int_{\alpha}^{0} \ln(1-x)\,dx$$

$$= [-\frac{x^3}{3} + x]_{\alpha}^{0} - (1-\alpha)\ln(1-\alpha) - \alpha.$$

$$= \frac{\alpha^3}{3} - 2\alpha - (1-\alpha)\ln(1-\alpha).$$

c) ***Déterminons la valeur de A en cm² pour*** $\alpha = -0{,}65$.

L'unité d'aire est 4 cm².

$A = 4(\frac{\alpha^3}{3} - 2\alpha - (1-\alpha)\ln(1-\alpha))$ cm².

Pour $\alpha = -0{,}65$, $A = 1{,}53$ cm²

6-a) Calculons f(-1).

$f(-1) = (-1)^2 - 1 + \ln(1+1)$

$= \ln 2$.

b) Démontrons que $(f^{-1})'(\ln 2)$ existe et calculons sa valeur.

$f(-1) = \ln 2$, donc $f^{-1}(\ln 2) = -1$, car f est bijective.

$f'(f^{-1}(\ln 2)) = f'(-1)$

$$= -\frac{5}{2}.$$

$f'(-1) \neq 0$, donc f^{-1} est dérivable en $\ln 2$ et on a :

$$(f^{-1})'(\ln 2) = \frac{1}{f'(f^{-1}(\ln 2))}$$

$$= -\frac{2}{5}.$$

c) ***Construisons (C') et sa tangente (Δ).***

Voir question 4-b)

Habiletés et conseils pour la résolution de l'exercice 1

	Habiletés	Conseils
1-*a*)	Déterminer l'écriture complexe d'une similitude directe	Tu utiliseras l'écriture complexe d'une similitude directe qui est de la forme $z' = az + b$. Tu détermineras a et b en utilisant le point invariant O, le point C et son image B par S.
b)	Déterminer les éléments caractéristiques d'une similitude directe	Le centre est connu, tu détermineras le module et l'argument principal du nombre complexe a dans $z' = az + b$.
c)	Déterminer l'antécédent d'un point par une similitude directe	Tu résoudras l'équation $z_C = a\,z_D + b$, d'inconnue z_D
2-*a*)	Déterminer l'image d'un point par une similitude directe	Tu remplaceras z par l'affixe de B dans l'écriture complexe de la similitude S.
b)	Justifier qu'un triangle est rectangle et isocèle	Tu vérifieras que le complexe $\frac{z_B - z_I}{z_O - z_I}$ a pour argument principal $\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$ et pour module 1.
3-*a*)	Démontrer par récurrence une propriété P_n pour tout entier naturel n supérieur ou égal à un entier naturel n_0 donné.	Tu suivras les étapes suivantes : * Justifier que la propriété est vraie au rang n0. * Supposer la propriété vraie au rang $n \geq n_0$, démontrer qu'elle reste vraie au rang $n+1$ * Conclure que la propriété est vraie pout tout $n \geq n_0$.
b)	Déterminer le module d'un nombre complexe	Tu détermineras le module du nombre complexe z_n.
c)	Déterminer la limite d'une suite	Tu appliqueras le cours sur la limite d'une suite géométrique pour laquelle la raison r vérifie $-1 < r < 1$

Corrigé Exercice 1

1- a) Démontrons que l'écriture complexe de S est $z' = \frac{1}{2}(1 - i)z$.

L'écriture complexe d'une similitude directe est de la forme $z' = az + b$ où $a \in \mathbb{C}^*$ et $b \in \mathbb{C}$.

$$\begin{cases} S(O) = O \\ S(C) = B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = a \times 0 + b \\ 3 - 2i = a(5 + i) + b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{3 - 2i}{5 + i} \\ b = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1 - i}{2} \\ b = 0 \end{cases}$$

Donc : $z' = \dfrac{1 - i}{2} z$.

b) Déterminons les éléments caractéristiques de la similitude directe S.

Les éléments caractéristiques de S sont : le centre, le rapport et l'angle.

- Le centre est O, d'après l'énoncé.
- Le rapport est $|a|$.

$$|a| = \frac{|1 - i|}{2}.$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

- L'angle θ est un argument de a.

$\cos\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et $\sin\theta = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

D'où : $\theta = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

Une mesure de l'angle de S est $-\frac{\pi}{4}$.

S est la similitude directe de centre O, de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$

c) Calculons l'affixe du point D.

On a : $z_C = \frac{1-i}{2} z_D$.

Exprimons z_D en fonction de z_C.

$z_D = \frac{2z_C}{1-i}$

$= \frac{10+2i}{1-i}$, car $z_C = 5 + i$.

$= 4 + 6i$.

L'affixe du point D est $4 + 6i$.

2-a) Justifions que l'affixe z_1 de B_1 est $\frac{1}{2}(1 - 5i)$.

On a :

$z_{B1} = \frac{1-i}{2} z_B$

$= \frac{1-i}{2}(3 - 2i)$, car $z_B = 3 - 2i$

$= \frac{1}{2}(1 - 5i)$

L'affixe du point B_1 est $\frac{1}{2}(1 - 5i)$.

b) Justifions que le triangle OBB_1 est rectangle et isocèle en B_1.

• Démontrons que le triangle OBB_1 est rectangle en B_1

Pour cela, justifions que l'angle $(\overrightarrow{B_1O}; \overrightarrow{B_1B})$ est droit.

On a :

$$\frac{z_B - z_1}{z_O - z_1} = \frac{(3-2i) - \frac{(1-5i)}{2}}{0 - \frac{1}{2}(1-5i)}$$

$$= \frac{-5-i}{1-5i}$$

$$= -i.$$

Or : $\text{Arg}(-i) = -\frac{\pi}{2}$ et $\text{Arg}\frac{z_B - z_1}{z_O - z_1} = \text{Mes}\,(\widehat{\overrightarrow{B_1O}; \overrightarrow{B_1B}})$

Donc la mesure principale de $(\widehat{\overrightarrow{B_1O}; \overrightarrow{B_1B}})$ est $-\frac{\pi}{2}$.

Par conséquent le triangle OBB_1 est rectangle en B_1.

• ***Démontrons que le triangle OBB_1 est isocèle en B_1.***

Pour cela, justifions que $B_1O = B_1B$.

$\frac{z_B - z_1}{z_O - z_1} = -i$ implique $\left|\frac{z_B - z_1}{z_O - z_1}\right| = 1$, d'où $|z_B - z_1| = |z_O - z_1|$.

C'est-à-dire $B_1B = B_1O$. Le triangle OBB_1 est donc isocèle en B_1.

Par suite, le triangle OBB_1 est rectangle et isocèle en B_1.

3-a) Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $z_n = (\frac{1}{2})^n(1-i)^n z_0$.

On a :

$(\frac{1}{2})^0(1-i)^0 z_0 = 1 \times 1 \times z_0$

$= z_0$

La propriété est donc vraie à l'ordre 0.

Supposons la propriété vraie à l'ordre k, c'est-à-dire

$z_k = (\frac{1}{2})^k(1-i)^k z_0$ et démontrons qu'elle reste vraie à l'ordre $k+1$,

c'est-à-dire : $z_{k+1} = (\frac{1}{2})^{k+1}(1-i)^{k+1} z_0$.

On a :

$z_{k+1} = \frac{1}{2}(1-i)z_k$, car $B_{k+1} = S(B_k)$

$= \frac{1}{2}(1-i) \times (\frac{1}{2})^k (1-i)^k z_0$, d'après l'hypothèse de récurrence.

$= (\frac{1}{2})^{k+1}(1-i)^{k+1} z_0$.

La propriété est donc vraie à l'ordre k+1.

Par conséquent : $\forall\ n \in \mathbb{N}$, $z_n = (\frac{1}{2})^n (1-i)^n z_0$.

b) Calculons la distance OB_n en fonction de n.

Pour tout entier naturel n, on a :

$OB_n = |z_n|$, par définition.

$OB_n = |(\frac{1}{2})^n (1-i)^n z_0|$, d'après la question précédente.

$= \sqrt{13}\,(\frac{\sqrt{2}}{2})^n$, car $|1-i| = \sqrt{2}$ et $|z_0| = \sqrt{13}$

c) Calculons $\lim\limits_{n \to +\infty} OB_n$.

$\sqrt{13}\,(\frac{\sqrt{2}}{2})^n$ est le terme général d'une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Or : $0 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$.

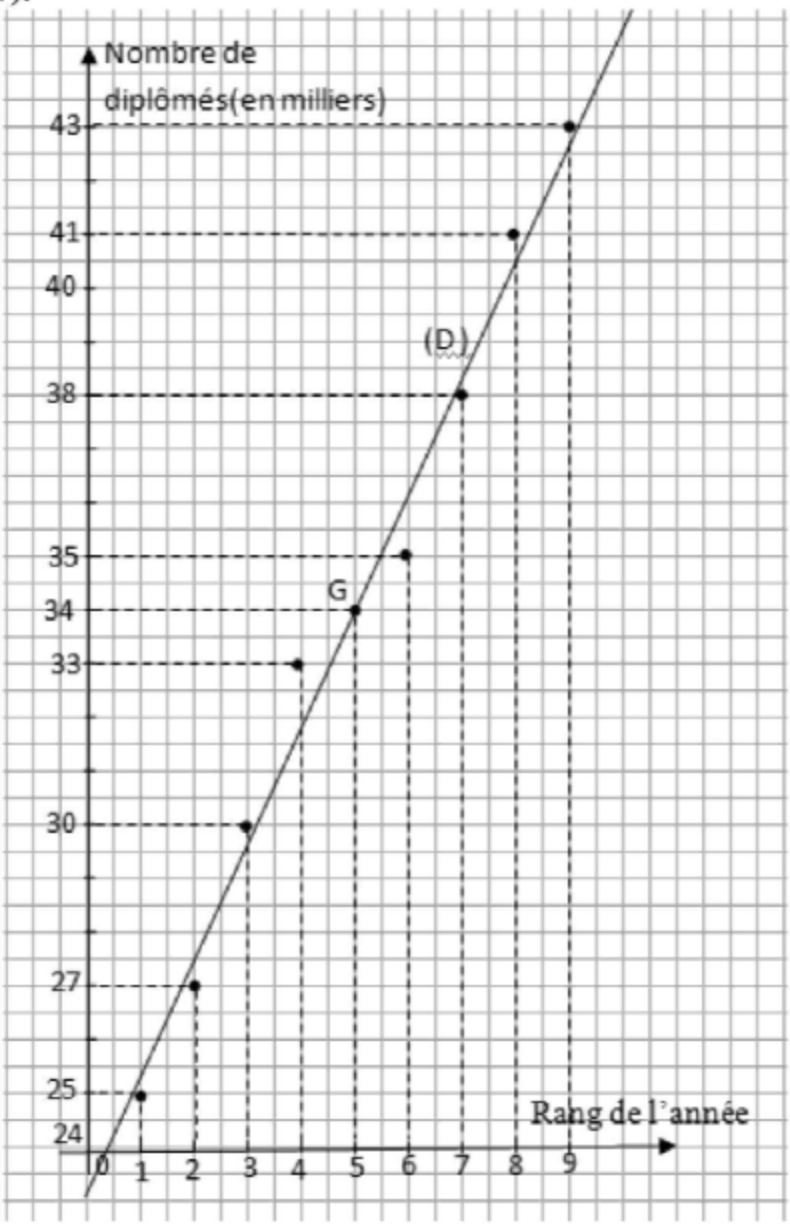
Donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} OB_n = 0$.

Habiletés et conseils pour la résolution de l'exercice 2

	Habiletés	Conseils
1-	Représenter graphiquement le nuage de points associé à une série statistique double.	Tu représenteras tous les points M_i de coordonnées $(x_i ; y_i)$.
2-	Calculer les coordonnées du point moyen.	Tu utiliseras les formules : $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ et $\overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$, pour calculer les coordonnées $(\overline{x}, \overline{y})$ du point moyen G.
3-a)	Calculer la variance d'une série statistique	Tu appliqueras la formule de la variance.
b)	Calculer la covariance d'une série statistique double	Tu utiliseras la formule : $\text{COV}(x, y) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right) - \overline{x}\,\overline{y}$
4-a)	Calculer le coefficient de corrélation linéaire	Tu utiliseras la formule : $r = \frac{\text{COV}(X, Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}$ où V(X) est la variance de X et V(Y) la variance de Y.
b)	Interpréter le coefficient de corrélation linéaire	Tu dois comparer r à 0,87. Si $\lvert r\rvert \geq 0{,}87$, alors il y a une forte corrélation linéaire.
5-a)	Déterminer une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés.	Tu utiliseras une équation de la forme : $y = ax + b$ où $a = \frac{\text{COV}(X ; Y)}{V(X)}$ et $b = \overline{Y} - a\overline{X}$.
b)	Tracer une droite	Tu placeras le point moyen G par lequel passe la droite (D). Tu chercheras un deuxième point pour tracer (D).
6-	Estimer la valeur d'une variable connaissant une valeur de l'autre variable	Tu remplaceras x par le rang qui correspond à l'année 2020 et tu détermineras y.

Corrigé Exercice 2

1-Représentons le nuage de points associé à la série statistique (X ;Y).



2- Déterminons les coordonnées du point moyen G.

$(\overline{X} ; \overline{Y})$ est le couple de coordonnées du point moyen G.

$$\overline{X} = \frac{1+2+3+4+5+6+7+8+9}{9}$$

$$= \frac{45}{9}$$

$$= 5$$

$$\overline{Y} = \frac{25+27+30+33+34+35+38+41+43}{9}$$

$$= \frac{306}{9}$$

$= 34$. D'où : G(5 ; 34).

3- a) Justifions que la variance de X est $\frac{20}{3}$.

$$V(X) = \frac{1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+8^2+9^2}{9} - 5^2$$

$$= \frac{285-25\times 9}{9}$$

$$= \frac{20}{3}.$$

b) Justifions que la covariance de X et Y est $\frac{44}{3}$.

$$COV(X, Y) = \frac{1\times 25+2\times 27+3\times 30+4\times 33+5\times 34+6\times 35+7\times 38+8\times 41+9\times 43}{9} - 5\times 34$$

$$= \frac{1662-1530}{9}$$

$$= \frac{44}{3}.$$

4-a) Déterminons la valeur du coefficient de corrélation linéaire.

$$r = \frac{COV(X, Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}$$

$= \frac{22}{7\sqrt{10}}$

$= 0{,}99$; car $V(X) = \frac{20}{3}$, $V(Y) = \frac{98}{3}$ et $COV(X, Y) = \frac{44}{3}$.

b) Justifions que le résultat précédent permet d'envisager un ajustement linéaire par la méthode des moindres carrés.

D'après la question précédente, r est supérieur ou égal à 0,87.
Par conséquent, il y a une forte corrélation linéaire entre X et Y.
Ce qui permet d'envisager un ajustement linéaire entre X et Y par la méthode des moindres carrés.

5-a) Déterminons une équation de la droite d'ajustement linéaire (D) par la méthode des moindres carrés.

Une équation de la droite (D) est de la forme : $y = ax + b$.

- ***Calculons a.***

$a = \frac{COV(X ; Y)}{V(X)}$

$= \frac{44}{20}$, car $V(X) = \frac{20}{3}$ et $COV(X, Y) = \frac{44}{3}$

$= \frac{11}{5}$

- ***Calculons b.***

Le point moyen G appartient à la droite (D) et $a = \frac{11}{5}$.

D'où : $b = \overline{Y} - \frac{11}{5}\overline{X}$

$= 34 - \frac{11}{5} \times 5$

$= 23.$

Finalement la droite (D) a pour équation : $y = \frac{11}{5}x + 23$.

b) ***Traçons (D).***
Voir question 1).

6- Donnons une estimation du nombre de bacheliers qui accèderont aux études supérieures en 2020.
Le rang de 2020 est 18.
Pour $x = 18$, on a :

$$y = \frac{11}{5} \times 18 + 23$$

$$= 62{,}6$$

Le nombre de bacheliers qui accèderont aux études supérieures en 2020 est estimé à 62 600.

Habiletés et conseils pour la résolution du problème

Partie A

	Habiletés	Conseils
1-a)	Résoudre une équation du premier degré dans $\mathbb{R}$	Tu remplaceras x par 0 dans l'expression de g puis tu résoudras l'équation obtenue
b)	Résoudre une équation du premier degré dans $\mathbb{R}$	Tu calculeras $g'(x)$. Tu remplaceras x par 0 dans l'expression de g' puis tu résoudras l'équation obtenue.
2-a)	Calculer la dérivée d'une fonction sur un intervalle	Tu utiliseras la formule de la dérivée d'une somme
b)	Dresser le tableau de variation d'une fonction	Tu étudieras le sens de variation de h puis tu résumeras les résultats dans un tableau
c)	Déterminer le signe d'une fonction sur un intervalle	Tu utiliseras le sens de variation de h sur $]-\infty ; 0]$, sur $[0 ; +\infty[$ et l'image de 0 pour trouver le signe de $h(x)$.

Partie B

	Habiletés	Conseils
1-a)	Calculer la limite d'une fonction en $-\infty$	Tu calculeras la limite de chaque terme
b)	Calculer la limite d'une fonction en $-\infty$	Tu te focaliseras sur le produit. Tu calculeras la limite de chaque facteur.
c)	Interpréter graphiquement des limites	Tu appliqueras les résultats de cours sur les branches paraboliques.
2-a)	Calculer la limite d'une fonction en $+\infty$	Tu mettras $f(x)$ sous la forme développée et tu calculeras la limite de chaque terme.
b)	Démontrer que la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à la courbe représentative d'une fonction	Tu vérifieras que : $\lim_{x \to +\infty} f(x) - (ax + b) = 0$
c)	Etudier la position relative des courbes représentatives de deux fonctions	Tu étudieras le signe de la fonction $x \mapsto f(x) - x$ sur $\mathbb{R}$
3-a)	Calculer la dérivée d'une fonction sur un intervalle	Tu dériveras chaque terme de la fonction f.
b)	Déterminer le sens de variation d'une fonction sur un intervalle	Tu utiliseras le signe de $h(x)$ trouvé dans la question A-2-c).
c)	Dresser le tableau de variation d'une fonction.	Tu résumeras les résultats précédents dans un tableau.
4-	Construire la courbe représentative d'une fonction.	Tu suivras les étapes de tracé d'une courbe représentative d'une fonction.

Habiletés et conseils pour la résolution du problème

5-a)	Démontrer que f est une bijection d'un intervalle I sur un intervalle J	Tu vérifieras que f est continue et strictement monotone sur $\mathbb{R}$.
b)	Déterminer le nombre dérivé de la bijection réciproque en un point x_0.	Tu vérifieras que $f'(f^{-1}(1)) \neq 0$ Puis tu utiliseras la formule du cours.
c)	Construire la courbe de la bijection réciproque d'une bijection dans le plan rapporté à un repère orthonormé.	Tu construiras le symétrique de (C) par rapport à la première bissectrice.

Partie C

	Habiletés	Conseils
1-	Calculer une intégrale en utilisant une intégration par	Tu exécuteras les étapes de l'intégration par parties.
	parties	Tu feras attention au choix des fonctions u et v'.
2-	Calculer l'aire d'une partie du plan limitée par les courbes représentatives de deux fonctions et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$.	Tu feras attention à la position relative des courbes et tu utiliseras le résultat précédent. Tu prendras soin de calculer l'aire en unité d'aire.
3-	Calculer la limite d'une suite numérique	Tu développeras le terme général de la suite et tu calculeras les limites de chaque terme.

Corrigé du Problème

Partie A

1-a) Déterminons la valeur de b.

$g(0) = 1 \Leftrightarrow 0 + (0 + b) = 1.$

Donc $b = 1$

b) Déterminons la valeur de a.

La tangente au point d'abscisse 0 est parallèle à la droite d'équation $y = x$, donc $g'(0) = 1$.

Calculons g'(x).

D'après la question précédente, pour tout nombre réel x, on a :

$g(x) = x + (ax + 1)e^{-x}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 1 + (-ax - 1 + a)\, e^{-x}$

$g'(0) = 1 \Leftrightarrow 1 - 1 + a = 1.$

Ce qui donne $a = 1$.

2- a) Calculons h'(x).

$\forall x \in \mathbb{R}$, $h'(x) = e^x - 1$.

b) Dressons le tableau de variation de h.

• Étudions les variations de h.

Pour tout nombre réel x, on a :

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow x = 0$

$h'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x - 1 > 0$

$\Leftrightarrow x > 0$

$h'(x) < 0 \Leftrightarrow e^x - 1 < 0$

$\Leftrightarrow x < 0$

Donc h est strictement croissante sur $[0 ; +\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty ; 0]$.

• ***Dressons le tableau de variation de h.***

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	↘		1	↗	

c) Déduisons-en que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) > 0$.

D'après la question précédente, h est décroissante sur $]-\infty ; 0]$ et croissante sur $[0;+\infty[$. Donc h admet un minimum absolu en 0. Ce minimum $h(0)$ est 1. Or ce minimum 1 est positif.

Donc : $\forall x \in]0;+\infty[$, $h(x) > 0$.

Partie B

1- a) Calculons la limite de f en $-\infty$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} (x+1)\,e^{-x} = -\infty$.

Donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

b) Justifions que : $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$.

$\forall x \in \mathbb{R}^*, \dfrac{f(x)}{x} = 1 + (1+\dfrac{1}{x})e^{-x}$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (1+\dfrac{1}{x}) = 1$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$

Donc : $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$.

c) Interprétons graphiquement les résultats

De $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$, on déduit que la courbe (C) admet une branche parabolique de direction celle de (OJ).

2. a) Calculons la limite de f en +∞.

$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x + (x+1)\,e^{-x}$

$= x + xe^{-x} + e^{-x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty,\ \lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0.$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$

b) Démontrons que la droite (D) est asymptote à la courbe (C) en + ∞.

$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) - x = (x+1)\,e^{-x}$, car une équation de (D) est : $y = x$

$= xe^{-x} + e^{-x}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0.$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x) = 0.$

Par suite, la droite (D) est une asymptote oblique à la courbe (C) en +∞.

c) Étudions la position relative de (C) et (D).

$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) - x = (x+1)\,e^{-x}$;

$\forall x \in \mathbb{R}, e^{-x} > 0$, donc le signe de $f(x) - x$ est celui de $x + 1$.

Sur l'intervalle $]-\infty ; -1[$; (C) est en dessous de (D).

Sur l'intervalle $]-1 ; +\infty]$; (C) est au-dessus de (D).

(C) et (D) se coupent au point d'abscisse – 1.

3-a) Démontrons que : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^{-x}h(x)$

$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 1 + e^{-x} + (x+1)(-e^{-x})$

$= 1 + e^{-x}(1 - x - 1)$

$= 1 - xe^{-x}$

$= e^{-x}(e^{x} - x)$

$= e^{-x}h(x).$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = e^{-x}h(x).$

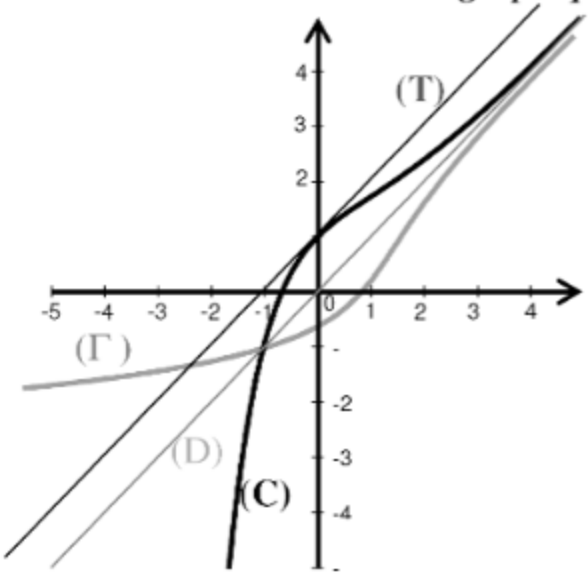
b) Déterminons le sens de variation de f.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = e^{-x}h(x)$ d'après la question précédente.
Or : $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$. Donc, le signe de f' est celui de h.
D'après la question A-2-c), $\forall x \in \mathbb{R}$, $h(x) > 0$.
Par conséquent : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$.
Par suite f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

c) ***Dressons le tableau de variation de f.***

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

4- Construisons sur le même graphique (T), (D) et (C).



5- a) Démontrons que f est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

f est continue est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
De plus, $f(\mathbb{R}) =]\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) ; \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)[$, c'est-à-dire $]-\infty ; +\infty[$, car

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Donc f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

b) Calculons $(f^{-1})'(1)$.

$f(0) = 1$ donc $f^{-1}(1) = 0$, car f est bijective d'après la question précédente.

$f'(f^{-1}(1)) = f'(0)$

$= 1$, d'après les questions B-3-a) et A-2)

$f'(f^{-1}(1)) \neq 0$, donc f^{-1} est dérivable en 1 et on a :

$$(f^{-1})'(1) = \frac{1}{f'(f^{-1}(1))}$$

$= 1$.

c) Construisons (Γ) la courbe représentative de f^{-1}.

Le repère (O, I, J) étant orthonormé, (Γ) et (C) sont symétriques par rapport à la première bissectrice (D).

Voir question B-4).

Partie C

1- ***Démontrons que $I_n = (-2-n)e^{-n} + e$.***

$I_n = \int_{-1}^{n} (t+1)e^{-t}dt$. Posons $u(t) = t + 1$ et $v'(t) = e^{-t}$.

$u'(t) = 1$ et $v(t) = -e^{-t}$

$$I_n = [-(t+1)e^{-t}]_{-1}^{n} - \int_{-1}^{n} (-e^{-t})dt$$

$= [-(t+1)e^{-t}]_{-1}^{n} - [e^{-t}]_{-1}^{n}$

$= (-2 - n)e^{-n} + e$.

2- Calculons, en cm^2 et en fonction de n, l'aire A_n de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équations $x = -1$ et $x = n$.

• ***Calculons A_n en unité d'aire.***

D'après la question B-2-c), (C) est au-dessus de (D) sur $[-1 ; n]$.

Par conséquent $x \mapsto f(x) - x$ est positive sur $[-1 ; n]$.

De plus $x \mapsto f(x) - x$ est dérivable donc continue sur $[-1 ; n]$

Donc : $A_n = \int_{-1}^{n} (f(t) - t)\, dt$

$A_n = \int_{-1}^{n} (t+1)e^{-t} dt$

$= (-2-n)e^{-n} + e$, d'après la question précédente.

• ***Calculons l'aire A_n en cm².***

L'unité d'aire est 1cm²

Par conséquent : $A_n = [e - (2+n)e^{-n}]$ cm²

3- Calculons la limite de A_n.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $e - (2+n)e^{-n} = e - 2e^{-n} - ne^{-n}$.

$\lim\limits_{n \to +\infty} 2e^{-n} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} ne^{-n} = 0$

Donc : $\lim\limits_{n \to +\infty} A_n = e$ cm².

Habiletés et conseils pour la résolution de l'exercice 1

Partie I

	Habiletés	Conseils
1-*a*)	Calculer l'image d'un nombre complexe par une fonction polynôme	Tu remplaceras z par i dans $p(z)$
b)	Factoriser un polynôme du troisième degré	Tu appliqueras la méthode d'identification ou la division euclidienne.
2	Résoudre une équation du second degré dans $\mathbb{C}$	Tu suivras les étapes suivantes : - calculer le discriminant Δ de l'équation ; - déterminer une racine carrée de Δ ; - écrire les solutions de l'équation.
3	Résoudre une équation de degré 3 dans $\mathbb{C}$.	Tu utiliseras les questions précédentes

Partie II

1-a)	Calculer des sommes et des produits de nombres complexes	Tu calculeras z_1 et z_2 en utilisant la formule donnée
…b)	Représenter un nombre complexe par un point.	Tu placeras le point en prenant pour abscisse la partie réelle et pour ordonnée la partie imaginaire du nombre complexe donné.
2- a)	Démontrer une propriété de suites.	Tu remplaceras z_{n+1} par son expression dans l'écriture de U_n.
…b)	Démontrer qu'une suite numérique est géométrique	Tu écriras le terme général de la suite U sous la forme $U_{n+1}=qU_n$ où q est un nombre réel indépendant de n.
c)	Déterminer la formule explicite d'une suite	Tu utiliseras la formule explicite d'une suite géométrique. Elle lie U_n
	géométrique	q et U_0.
3- a)	Démontrer une propriété de suites.	Tu remarqueras que $A_kA_{k+1} = \lvert z_{k+1} - z_k \rvert$
b)	Calculer la somme des n premiers termes d'une suite géométrique.	Tu utiliseras la formule donnant la somme des n premiers termes d'une suite géométrique.
c)	Déterminer la limite d'une suite numérique	Tu remarqueras que $\lvert q \rvert < 1$

Corrigé Exercice 1

Partie I

1-*a*) ***Calculons p(i)***

On a :

$p(i) = i^3 - (3 + 2i)i^2 + (1 + 5i)i + 2 - 2i$

$= -i + 3 + 2i + i - 5 + 2 - 2i.$

$= 0$

b) ***Déterminons deux nombres complexes a et b tels que :***

$\forall\ z \in \mathbb{C}$, $p(z) = (z - i)(z^2 + az + b)$.

Pour tout nombre complexe z, on a :

$p(z) = (z - i)(z^2 + az + b)$

$= z^3 + az^2 + bz - iz^2 - aiz - bi$

$= z^3 + (a - i)z^2 + (b - ai)z - bi$

$= z^3 - (3 + 2i)z^2 + (1 + 5i)z + 2 + 2i$

Par identification, on a :

$a - i = -3 - 2i$; $b - ai = 1 + 5i$ et $-ib = 2 - 2i$.

Par suite : $a = -3 - i$ et $b = 2 + 2i$.

On obtient donc : $\forall z \in \mathbb{C}$, $p(z) = (z - i)(z^2 + (-3 - i)z + 2 + 2i)$

2- Résolvons dans $\mathbb{C}$, l'équation : $z^2 - (3 + i)z + 2 + 2i = 0$.

• ***Calculons le discriminant Δ.***

$\Delta = (3 + i)^2 - 4(2 + 2i)$

$= 9 - 1 + 6i - 8 - 8i.$

$= -2i.$

• ***Déterminons les racines carrées de Δ.***

Soit δ une racine carrée de Δ. On a : $\delta^2 = \Delta$

Posons : $\delta = x + yi$, où x et y sont des nombres réels.

On a : $\delta^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ et $|\delta|^2 = x^2 + y^2$

Par identification, on a :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ x^2 - y^2 = 0 \\ 2xy = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 = 2 \\ 2y^2 = 2 \\ 2xy = -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \text{ ou } x = -1 \\ y = 1 \text{ ou } y = -1 \\ xy < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}$$

Par suite $\delta_1 = 1 - i$ et $\delta_2 = -1 + i$.
Les racines carrées de Δ sont donc $1 - i$ et $-1 + i$.

• ***Déterminons les solutions de l'équation***
On a :

$z_1 = \dfrac{-b + \delta}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b - \delta}{2a}$,

c'est-à-dire :

$z_1 = \dfrac{3 + i + 1 - i}{2}$ et $z_2 = \dfrac{3 + i - 1 + i}{2}$

Par suite : $z_1 = 2$ et $z_2 = 1 + i$.

Donc les solutions de l'équation sont : 2 et $1 + i$.

3- ***Déduisons les solutions dans $\mathbb{C}$, de l'équation $p(z) = 0$.***
D'après la question 1-b), pour tout nombre complexe z, on a :
$p(z) = (z - i)(z^2 + (-3 - i)z + 2 + 2i)$
$p(z) = 0 \Leftrightarrow z - i = 0$ ou $z^2 - (3 + i)z + 2 + 2i = 0$
D'après les questions 1-*a*) et 2-, les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $p(z) = 0$ *sont :* i ; 2 et $1 + i$.

Partie II
1-*a*) ***Calculons z_1 et z_2.***
On a :

$z_1 = \dfrac{1 + i}{2} z_0$

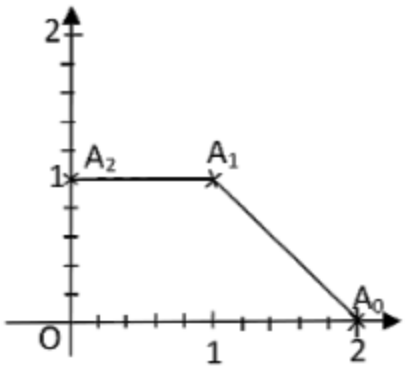
$= 1 + i$.

$z_2 = \dfrac{1 + i}{2} z_1$

$= \dfrac{(1 + i)^2}{2}$

$= i$.

b) Plaçons les points A_0, A_1, et A_2 dans le plan complexe.



2- a) Justifions que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \frac{\sqrt{2}}{2}|z_n|$

Pour tout entier naturel n, on a :

$$U_n = \left|\frac{1+i}{2} z_n - z_n\right|$$

$$= \left|\frac{1+i}{2} - 1\right| |z_n|$$

$$= \left|\frac{-1+i}{2}\right| \times |z_n|$$

$$= \frac{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}}{2} |z_n|$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} |z_n|.$$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n = \frac{\sqrt{2}}{2}|z_n|$.

b) Démontrons que U est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et de premier terme $\sqrt{2}$

- ***Démontrons que U est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$***

Pour tout entier naturel n, on a :

$$U_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}|z_{n+1}|$$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} |\frac{1+i}{2} z_n|$, par définition de la suite (z_n).

$= \frac{\sqrt{2}}{2} |\frac{1+i}{2}| |z_n|$

$= |\frac{1+i}{2}| \times \frac{\sqrt{2}}{2} |z_n|$

$= |\frac{1+i}{2}| \times U_n$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} U_n$.

U est donc une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

• ***Déterminons le premier terme U_0.***

On a :

$U_0 = |z_1 - z_0|$

$= |1 + i - 2|$

$= |-1 + i|$

$= \sqrt{2}$.

Le premier terme de la suite U est donc $\sqrt{2}$.

En conclusion, U est la suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et de premier terme $\sqrt{2}$.

c) ***Exprimons U_n en fonction de n.***

D'après la question précédente, U est la suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et de premier terme $\sqrt{2}$. Par suite, pour tout entier naturel n, on a :

$U_n = \sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2})^n$.

3-a) Justifions que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $l_n = U_0 + U_1 + ... + U_{n-1}$.

D'après l'énoncé de la question 2, on a : $\forall k \in \mathbb{N}^*, U_k = |z_{k+1} - z_k|$.

Or : $|z_{k+1} - z_k| = A_k A_{k+1}$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}^*, l_n = : |z_1 - z_0| + |z_2 - z_1| + \ldots + |z_n - z_{n-1}|$

C'est à dire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, l_n = U_0 + U_1 + ... + U_{n-1}$.

b) Calculons l_n.

l_n est la somme des n premiers termes de la suite géométrique U de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et de premier terme $\sqrt{2}$. Par suite, pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$l_n = U_0 \times \frac{1-(\frac{\sqrt{2}}{2})^n}{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}(1-(\frac{\sqrt{2}}{2})^n))$$

$$= 2(\sqrt{2}+1)(1-(\frac{\sqrt{2}}{2})^n)).$$

*c) **Déduisons - en que : $\lim_{n\to+\infty} l_n$.***

On a : $\lim_{n\to+\infty} (\frac{\sqrt{2}}{2})^n = 0$, car $|\frac{\sqrt{2}}{2}| < 1$.

Par suite :

$$\lim_{n\to+\infty} l_n = \lim_{n\to+\infty} (2\sqrt{2}+2)(1-(\frac{\sqrt{2}}{2})^n)$$

$$= 2\sqrt{2}+2.$$

Habiletés et conseils pour la résolution de l'exercice 2

	Habiletés	Conseils
1-*a*)	Calculer la probabilité d'un évènement	Tu remarqueras que E est l'événement (A et B) et tu appliqueras la formule de la probabilité conditionnelle. Tu peux te faire aider d'un arbre de probabilité.
b)	Calculer la probabilité d'un évènement	Tu remarqueras que : $B = (B \cap A) \cup (B \cap \overline{A})$ où $B \cap A$ et $B \cap \overline{A}$ sont incompatibles
c)	Calculer la probabilité conditionnelle d'un évènement par rapport à un évènement de probabilité non nulle.	Tu remarqueras que l'évènement B est déjà réalisé puisque Mariam a fait un bénéfice. Sous cette condition, il s'agit de déterminer la probabilité que A se réalise, c'est à dire $P_B(A)$. Tu utiliseras la formule : $P_B(A) = \frac{P(B \cap A)}{P(B)}$
2-*a*)	Déterminer les valeurs prises par une variable aléatoire	Tu exploiteras l'information « Mariam veut faire des prévisions pour trois jours successifs donnés ».
b)	Déterminer la loi de probabilité d'une	Tu détermineras les probabilités P(X=k) où k est une valeur prise par
	variable aléatoire	X et tu résumeras les informations obtenues dans un tableau.
c)	Calculer l'espérance mathématique de X	X suivant une loi binomiale, tu appliqueras la formule de l'espérance mathématique dans ce cas.
3-*a*)	Déterminer la probabilité d'un évènement dans le cas d'un schéma de Bernoulli.	Tu calculeras la probabilité que Mariam ne réalise aucun bénéfice pendant ces n jours successifs.
b)	Traiter une situation en utilisant les probabilités.	Tu résoudras l'inéquation : $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 2$, $1-(0{,}42)^n \geq 0{,}9999$.

Corrigé Exercice 2

1-a) Calculons la probabilité de l'évènement E : « il y'a une affluence de clients et Mariam réalise un bénéfice »

E est égal A∩B, par suite on a :

$P(E) = P(A \cap B)$

$= P(A) \times P_A(B)$

$= 0{,}6 \times 0{,}7$; car $P(A) = 0{,}6$ et $P_A(B) = 0{,}7$.

$= 0{,}42$.

b) Démontrons que la probabilité de l'évènement B est égale à 0,58.

L'évènement B se traduit par : « Il y a une affluence et Mariam réalise un bénéfice » ou « Il n'y a pas d'affluence et Mariam réalise un bénéfice ».

On a : $B = (B \cap A) \cup (B \cap \overline{A})$ où $B \cap A$ et $B \cap \overline{A}$ sont deux évènements incompatibles. Par suite :

$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \overline{A})$

$= P(E) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B)$

$= 0{,}42 + 0{,}4 \times 0{,}4$, car $P(\overline{A}) = 0{,}4$ et $P_{\overline{A}}(B) = 0{,}4$

$= 0{,}58$.

c) Calculons la probabilité qu'il y ait eu une affluence de clients ce jour-là sachant que Mariam a réalisé un bénéfice

Sachant qu'elle a réalisé un bénéfice, la probabilité qu'il y ait eu une affluence de clients ce jour-là est : $P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$

$P_B(A) = \dfrac{0{,}42}{0{,}58}$, car $P(A \cap B) = 0{,}42$ et $P(B) = 0{,}58$ d'après 1-*a*) et 1-*b*).

$= 0{,}72$.

2-a) Déterminons les valeurs prises par X

Mariam peut réaliser des bénéfices aucun jour, un seul jour, deux jours exactement ou les trois jours. Les valeurs prises par X sont : 0 ; 1 ; 2 ; 3.

b) Déterminons la loi de probabilité de X.

A chacun des trois jours, Mariam réalise un bénéfice ou non, c'est-à-dire à chacun des trois jours l'évènement B se réalise ou non. Cela se produit de façon indépendante pendant ces trois jours. La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres 3 et 0,58.

Par suite :

$P(X = 0) = C_3^0 \times (0{,}58)^0 \times (0{,}42)^3$
$= 0{,}07$

$P(X = 1) = C_3^1 \times (0{,}58)^1 \times (0{,}42)^2$
$= 0{,}31.$

$P(X = 2) = C_3^2 \times (0{,}58)^2 \times (0{,}42)^1$
$= 0{,}42.$

$P(X = 3) = C_3^3 \times (0{,}58)^3 \times (0{,}58)^0$
$= 0{,}2.$

Tableau résumant la loi de probabilité de X

k	0	1	2	3
P(X=k)	0,07	0,31	0,42	0,2

c) Calculons l'espérance mathématique E(X) de X

X suit une loi binomiale de paramètres 3 et 0,58. On en déduit que :

$E(X) = 3 \times 0{,}58$
$= 1{,}74.$

3-a) ***Justifions que pour tout nombre entier naturel n supérieur ou égal à 2 : $p_n = 1 - (0{,}42)^n$.***

Soit q_n la probabilité de l'évènement « Mariam ne réalise aucun bénéfice pendant n jours successifs sur une période de n jours ».

Ce qui veut dire que pendant ces n jours les réalisations de $\overline{B}$ se font de façon indépendante. On a :

$q_n = (1 - 0{,}58)^n$
$= (0{,}42)^n$

Donc :

$p_n = 1 - q^n$
$= 1 - (0{,}42)^n.$

b) Déterminons la valeur minimale n pour qu'on ait $p_n \geq 0{,}9999$

On a :

$1 - (0{,}42)^n \geq 0{,}9999$

D'où :

$(0{,}42)^n \leq 10^{-4}$

Par suite :

$n\ln(0{,}42) \leq \ln 10^{-4}$

Donc :

$$n \geq \frac{\ln 10^{-4}}{\ln (0{,}42)}$$

$n \geq 10{,}6$

$n \geq 11$

La valeur minimale de n est 11.

Habiletés et conseils pour la résolution du problème

PARTIE A

	HABILETÉS	CONSEILS
1	Vérifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle	Tu vérifieras que : $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) + g(x) = r(x)$
2-a)	Démontrer une propriété sur les équations différentielles.	Tu peux raisonner par équivalence ou par double implication.
b)	Résoudre une équation différentielle du type $f' = kf$, où k est un réel.	Tu donneras la forme générale des solutions de (F).
c)	Déterminer une solution particulière d'une équation différentielle	Tu utiliseras les questions 2-a) et 2-b) à cet effet.

PARTIE B

	Habiletés	Conseils
1-a)	Déterminer la limite d'une fonction en $-\infty$	Tu calculeras la limite de chaque facteur.
b)	Démontrer que la courbe représentative d'une fonction admet une branche parabolique de direction (OJ) en $-\infty$	Tu calculeras $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$ et tu Interpréteras $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$, et tu utiliseras les résultats de cours sur les branches paraboliques. Les deux limites doivent être infinies pour pouvoir conclure. Il en est de même si la branche parabolique est en $+\infty$.
2-	Calculer la limite d'une fonction en $+\infty$ et interpréter graphiquement le résultat	Tu développeras l'expression de $f(x)$ et tu calculeras la limite de chaque terme. La limite de f en $+\infty$ doit être finie pour que tu puisses en faire une interprétation graphique. Tu utiliseras les résultats de cours sur les asymptotes.

Habiletés et conseils pour la résolution du problème

3-a)	Déterminer la dérivée d'une fonction sur un intervalle.	Tu appliqueras la formule de dérivation du produit de deux fonctions.
b)	Etudier le sens de variation d'une fonction sur un intervalle	Tu étudieras le signe de la dérivée. Tu remarqueras que l'exponentielle est positive pour alléger l'étude du signe de la dérivée.
c)	Dresser le tableau de variation d'une fonction	Tu résumeras les résultats précédents dans un tableau. Tu n'oublieras pas de calculer les extremums de f et ensuite de vérifier la cohérence des éléments du tableau de variation pour limiter les erreurs.
4	Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative d'une fonction en un point.	Tu utiliseras la formule : $y = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0)$. Tu vérifieras que la tangente passe par le point donné pour réduire les erreurs.
5	Etudier la position relative de la courbe représentative d'une fonction et de l'axe des abscisses	Tu remarqueras que cela revient à étudier le signe de $f(x)$ sur l'intervalle d'étude.
6	Tracer la courbe représentative d'une fonction.	Tu suivras les étapes de tracé d'une courbe représentative d'une fonction.
Partie C		
1	Calculer une intégrale en utilisant une intégration par parties.	Tu exécuteras les étapes de l'intégration par parties. Tu feras attention au choix des fonctions u et v'. Ici, si tu choisis

Habiletés et conseils pour la résolution du problème

		$u(x) = e^{-x}$ et $v'(x) = x$, tu auras de la peine à poursuivre. Tu choisiras $u(x) = x$ et $v'(x) = e^{-x}$.
2-	Vérifier qu'une fonction est solution d'une équation différentielle	Tu remarqueras que f est la solution particulière de l'équation différentielle (E) obtenue dans la question A-2-c).
3-	Calculer l'aire d'une partie du plan limitée par la courbe représentative d'une fonction, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.	Tu détermineras le signe de f sur l'intervalle [0 ; 1]. • Tu calculeras l'aire A en unité d'aire. Tu utiliseras les deux questions précédentes. •Tu exprimeras A en cm^2.

Corrigé du Problème

Partie A

1-) Démontrons que g est une solution de l'équation (E).

On a : $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = \frac{1}{2}[2xe^{-x} + x^2(-e^{-x})]$

Pour tout nombre réel x, on a :

$$g'(x) + g(x) = \frac{1}{2}[2xe^{-x} + x^2(-e^{-x})] + \frac{1}{2}x^2e^{-x}$$

$$= xe^{-x} - \frac{1}{2}x^2e^{-x} + \frac{1}{2}x^2e^{-x}$$

$$= xe^{-x}$$

$$= r(x).$$

Donc g est solution de l'équation (E).

2-a) Démontrons qu'une fonction φ est solution de l'équation de (E) si et seulement si φ- g est solution de (F).

Soit x un nombre réel.

φ - g est solution de (F) $\Leftrightarrow (\varphi - g)'(x) + (\varphi - g)(x) = 0$

$\Leftrightarrow \varphi'(x) - g'(x) + \varphi(x) - g(x) = 0$

$\Leftrightarrow \varphi'(x) + \varphi(x) - g'(x) - g(x) = 0$

$\Leftrightarrow \varphi'(x) + \varphi(x) - r(x) = 0$, car $g'(x) + g(x) = r(x)$.

$\Leftrightarrow \varphi'(x) + \varphi(x) = r(x)$.

$\Leftrightarrow \varphi$ est solution de (E).

b) Résolvons l'équation différentielle (F)

Les solutions f de l'équation différentielle (F) sont sous la forme :

$f(x) = ke^{-x}$; $(k \in \mathbb{R})$

c) Déduisons -en la solution φ de (E) qui vérifie $\varphi(0) = -\frac{3}{2}$

D'après 2-*a*) et 2- *b*), les solutions de l'équation différentielle (E) sont sous la forme :

$\varphi(x) = \frac{1}{2}x^2e^{-x} + ke^{-x}$, $(k \in \mathbb{R})$

$\varphi(0) = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow k = -\frac{3}{2}$;

On conclut que la solution φ de (E) qui vérifie $\varphi(0) = -\frac{3}{2}$ est telle que :

$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \frac{x^2 - 3}{2} e^{-x}$.

Partie B

1-a) Calculons $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

On a :

$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 3}{2} = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$.

Donc : $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$

b) Démontrons que la courbe (C) admet une branche parabolique de direction celle de (OJ) en $-\infty$.

Pour tout nombre réel strictement négatif, on a :

$$\frac{f(x)}{x} = \frac{\frac{x^2 - 3}{2} e^{-x}}{x}$$

$$= \frac{x^2 - 3}{2x} e^{-x}$$

On a d'une part $\lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 - 3}{2x} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{2}$

$= -\infty$

Et d'autre part, $\lim_{x \to -\infty} e^{-x} = +\infty$

Donc : $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$

De $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$, on déduit que la courbe (C) admet une branche parabolique de direction celle de (OJ) en $-\infty$.

2- Calculons la limite de f en $+\infty$ et interprétons graphiquement le résultat.

• ***Calculons la limite de f en $+\infty$.***

Pour tout nombre réel x, on a :

$f(x) = \frac{x^2 - 3}{2} e^{-x}$

$= \frac{1}{2} x^2 e^{-x} - \frac{3}{2} e^{-x}$

On obtient : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{2} x^2 e^{-x} = 0$ *et* $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3}{2} e^{-x} = 0$

Donc : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

• ***Interprétons graphiquement le résultat.***

De $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$, on déduit que la droite d'équation y = 0 est asymptote horizontale à la courbe (C) en $+\infty$.

3-a) Calculons la dérivée de f

D'après l'énoncé *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a :

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = xe^{-x} + (-e^{-x})(\frac{x^2 - 3}{2})$

$= \frac{-x^2 + 2x + 3}{2} e^{-x}$.

b) Etudions les variations de f.

$\forall x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $-x^2+2x+3$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2+2x+3 = 0$

$\Delta = (2)^2 - 4\times(-1)\times(3)$

$= 16$

$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{16}}{-2}$

$= 3$

$x_2 = \frac{-2 + \sqrt{16}}{-2}$

$= -1$.

$\forall x \in]-\infty ; -1[\cup]3 ; +\infty[$, $f'(x) < 0$, donc *f* est strictement décroissante sur $]-\infty ; -1[$ et sur $]3 ; +\infty[$

$\forall x \in]-1 ; 3[$, $f'(x) > 0$, donc *f* est strictement croissante sur $]-1 ; 3[$.

c) Dressons le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-e$	↗	$3e^{-3}$	↘	0

4- Démontrons qu'une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0 est : $y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$

On a :

$y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$f'(0) = \frac{3}{2}$ et $f(0) = -\frac{3}{2}$

Donc : $y = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$.

5 - Étudions la position de (C) par rapport à l'axe des abscisses

Etudier la position de (C) par rapport à l'axe des abscisses revient à étudier le signe de f.

e^{-x} étant strictement positif, le signe de f est celui de $x \mapsto \frac{x^2-3}{2}$

Pour tout un nombre réel x, on a :

$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-3}{2} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{x^2-3}{2} = 0$

$\Leftrightarrow x = -\sqrt{3}$ ou $x = \sqrt{3}$

Donc la courbe (C) coupe la droite (OI) aux points d'abscisses $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$.

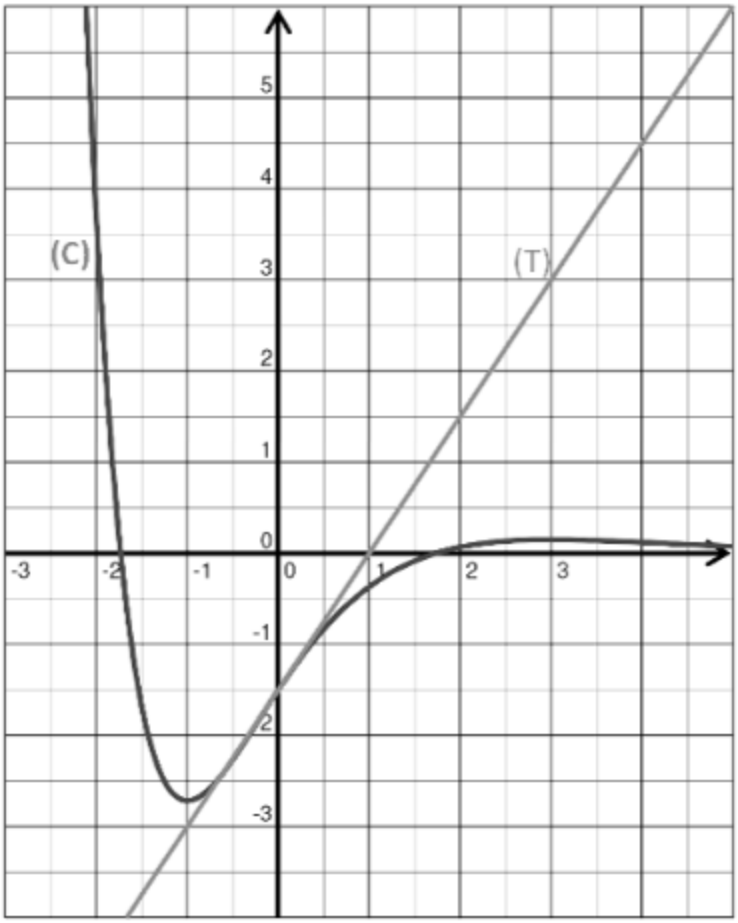
$f(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\sqrt{3}\,;\sqrt{3}[$

(C) est en dessous de la droite (OI) sur $]-\sqrt{3}\,;\sqrt{3}[$

$f(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty\,;-\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}\,;+\infty[$

(C) est au-dessus de la droite (OI) sur les intervalles $]-\infty\,;-\sqrt{3}[$ et $]\sqrt{3}\,;+\infty[$

6- Représentons graphiquement (T) et (C)



Partie C

1- A l'aide d'une intégration par partie calculons : $\int_0^1 xe^{-x}\,dx$

Posons : u(x) = x et v'(x) = e^{-x}

On a : u'(x) = 1 et v(x) = $-e^{-x}$

$$\int_0^1 xe^{-x}dx = \left[-xe^{-x}\right]_0^1 - \int_0^1 (-e^{-x})dx$$

$$= -e^{-1} + \left[-e^{-x}\right]_0^1$$

$$= 1 - \frac{2}{e}$$

2- Justifions que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -f'(x) + xe^{-x}$.

D'après la question A2-*c*) f est la solution de l'équation différentielle (E) qui prend la valeur $-\frac{3}{2}$ en 0.

Donc : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) + f'(x) = x\,e^{-x}$

Par suite : $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = -f'(x) + x\,e^{-x}$

3- Calculons l'aire A en cm^2.

• Calculons l'aire A en unité d'aire.

$[0 ; 1]$ est inclus dans $]-\sqrt{3} ; \sqrt{3}[$ et sur l'intervalle $]-\sqrt{3} ; \sqrt{3}[$, f est continue négative.

On a :

$$A = -\int_0^1 f(x)dx$$

$$= \int_0^1 (f'(x) - x\,e^{-x})dx, \text{ d'après la question précédente.}$$

$$= \int_0^1 f'(x)\,dx - \int_0^1 x\,e^{-x}\,dx$$

$$= [f(x)]_0^1 - (1 - \frac{2}{e}), \text{ car } \int_0^1 x\,e^{-x}\,dx = 1 - \frac{2}{e}, \text{ d'après la question C-1)}$$

$$= f(1) - f(0) - (1 - \frac{2}{e})$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{e}.$$

• Calculons l'aire A en cm^2.

L'unité d'aire valant 8 cm^2, on a :

$$A = 8(\frac{1}{2} + \frac{1}{e})cm^2.$$

Habiletés et conseils pour la résolution de l'exercice 1

	Habiletés	Conseils
1-*a*)	Démontrer qu'une fonction est strictement croissante sur un intervalle	Tu calculeras la dérivée de h et tu étudieras le signe de la dérivée de h.
b)	Déterminer l'image d'un intervalle par une fonction continue	Tu appliqueras la propriété suivante : Si h est une fonction continue et strictement croissante sur un intervalle $[a;b]$ alors $h([a\,;b]) = [h(a)\,;\, h(b)\,]$
2-*a*)	Démontrer par récurrence une propriété P_n pour tout entier naturel n supérieur ou égal à un entier naturel n_0 donné.	Tu suivras les différentes étapes d'un raisonnement par récurrence.
b)	Démontrer qu'une suite numérique est croissante	Tu vérifieras que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} - u_n \geq 0$.
c)	Démontrer qu'une suite numérique est convergente	Tu utiliseras le théorème sur les suites croissantes et majorées
3-*a*)	Démontrer qu'une suite numérique est géométrique	Tu écriras le terme général de la suite (v_n) sous la forme $v_{n+1}=qv_n$ où q est un nombre réel indépendant de n.
b)	Donner une formule explicite d'une suite numérique	Tu trouveras une relation qui lie q, v_n et v_0.
c)	Déterminer la limite d'une suite numérique	Tu remarqueras que : $q > 1$ et $v_0 < 0$.
d)	Déterminer la limite d'une suite numérique	Tu exprimeras u_n en fonction de v_n puis tu utiliseras la question précédente.

Corrigé Exercice 1

1-*a*) ***Démontrons que h est strictement croissante sur l'intervalle [0 ; 1].***

• ***Calculons la dérivée de h.***

h est dérivable sur [0 ; 1] et on a :

$\forall x \in [0 ; 1]$, $h'(x) = 2 - 2x$.

• ***Déterminons le signe de h' sur l'intervalle*** [0 ; 1].

Soit x un élément de $\mathbb{R}$.

$2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

$2 - 2x < 0 \Leftrightarrow x > 1$

$2 - 2x > 0 \Leftrightarrow x < 1$

$\forall x \in [0 ; 1]$, $h'(x) \geqslant 0$

h est donc strictement croissante sur l'intervalle [0 ; 1].

b) ***Déduisons –en que l'image de l'intervalle [0 ; 1] par h est [0 ; 1].***

h est continue et strictement croissante sur [0 ; 1].

Donc $h([0 ; 1]) = [h(0) ; h(1)]$

$= [0 ; 1]$, car $h(0) = 0$ et $h(1) = 1$.

2-*a*) ***Démontrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$***

La propriété est vraie au rang 0, car u_0 appartient à]0 ; 1[, en effet $u_0 = \frac{3}{7}$.

Supposons la propriété vraie au rang k, c'est à dire u_k appartient à]0 ; 1[et démontrons que u_{k+1} appartient à]0 ; 1[.

u_k appartient à]0 ; 1[, d'après l'hypothèse de récurrence.

Par conséquent $h(u_k)$ appartient à]0 ; 1[, d'après 1-*a*).

Or : u_{k+1} est égal à $h(u_k)$, donc u_{k+1} appartient à]0 ; 1[. Par suite la propriété est vraie au rang $k+1$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$.

b) ***Démontrons que u est croissante.***
Pour tout entier naturel n, on a :
$u_{n+1} - u_n = 2u_n - u_n^2 - u_n$
$= u_n - u_n^2$
$= u_n(1 - u_n)$
Par suite : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geq 0$, d'après la question précédente. La suite u est donc croissante.

c) ***Justifions que la suite u est convergente.***
La suite u est croissante d'après 2-*b*) et majorée par 1 d'après 2-*a*). Elle est donc convergente.

3- a) Démontrons que v est une suite géométrique de raison 2.
Pour tout entier naturel n, on a :
$v_{n+1} = ln(1 - u_{n+1})$, par définition de v.
$= ln(1 - 2u_n + u_n^2)$, par définition de u
$= ln(1-u_n)^2$
$= 2ln(1-u_n)$, car $1 - u_n > 0$ d'après 2-a).
$= 2v_n$, par définition de v.
Donc v est une suite géométrique de raison 2.

b) ***Exprimons v_n en fonction de n.***

D'après la question précédente, v est une suite géométrique de raison 2. Par conséquent, pour tout entier naturel n, $v_n = 2^n v_0$
Or : $v_0 = ln\frac{4}{7}$, donc : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = 2^n ln\frac{4}{7}$.

c) ***Calculons la limite de la suite v.***
On a : $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = -\infty$, car v_0 est négatif et la raison 2 est supérieur à 1.

d) ***Déduisons-en la limite de la suite u.***
• ***Exprimons u_n en fonction de v_n***
Pour tout entier naturel n, on a : $v_n = ln(1-u_n)$.
D'où : $\forall n \in \mathbb{N}$, $e^{v_n} = 1 - u_n$.
Par suite : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 1 - e^{v_n}$.

• ***Déterminons la limite de u_n***

De $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ d'après la question précédente

Et $\lim\limits_{m\to-\infty} e^m = 0$, on déduit que : $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{v_n} = 0$.

Par suite : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Habiletés et conseils pour la résolution de l'exercice 2

	Habiletés	Conseils
1-*a*)	Déterminer l'image d'un point par une transformation complexe	Tu remplaceras z par l'affixe de Ω, dans l'expression de la transformation complexe.
b)	Démontrer qu'une transformation du plan	Tu vérifieras que l'écriture complexe de φ est de la forme $z' = az + b$ où a est un
	dont on connaît l'écriture complexe est similitude directe et en préciser les éléments caractéristiques.	nombre complexe non nul et b un nombre complexe. Puis tu détermineras le centre, le rapport et l'angle de φ.
2-*a*)	Calculer la somme, le produit et le quotient de deux nombres complexes.	Tu dois remplacer z' par son expression et faire le calcul.
b)	Utiliser une caractérisation complexe pour justifier une propriété géométrique	Tu calculeras $\arg\left(\frac{z'-z}{2-z}\right)$ et tu utiliseras le fait que c'est une mesure de l'angle $(\overrightarrow{\Omega M}; \overrightarrow{M'M})$.
c)	Donner un programme de construction et le justifier	Tu utiliseras la question précédente pour le programme de construction. Pour la justification, tu établiras que $(\overrightarrow{\Omega M}; \overrightarrow{\Omega M'})$. est l'angle orienté de la similitude et que ΩM' = kΩM où k est le rapport de la similitude.
3-*a*)	Construire l'image d'un point par une similitude directe	Tu placeras les points A et B en utilisant leurs affixes. Pour la construction des points A' et B', tu utiliseras le programme de construction donné dans la question 2-c).
b)	Démontrer une égalité de deux nombres complexes.	Tu utiliseras les règles de calcul de somme et de produit de nombres complexes.
c)	Déterminer la nature d'un quadrilatère.	Tu exploiteras l'égalité de la question précédente pour trouver une égalité vectorielle.

Corrigé Exercice 2

1- *a) vérifions que : $\varphi(\Omega) = \Omega$.*

On a :

$$z' = (1 - i\frac{\sqrt{3}}{3})z_\Omega + 2i\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$= (1 - i\frac{\sqrt{3}}{3})\times 2 + 2i\frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ car } z_\Omega = 2$$

$$= 2 - 2i\frac{\sqrt{3}}{3} + 2i\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

$$= 2$$

Donc : $\varphi(\Omega) = \Omega$.

b) Justifions que φ est une similitude directe dont on précisera les éléments caractéristiques.

• ***Justifions que φ est une similitude directe***

L'écriture complexe de φ est de la forme :

$z' = az + b$ *où* $a = 1 - i\frac{\sqrt{3}}{3}$ et $b = 2i\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Or, a est un nombre complexe non nul et b un nombre complexe, donc φ est une similitude directe.

• ***Déterminons les éléments caractéristiques de φ.***

Soit k le rapport de cette similitude. On a : $k = |a|$.

$$k = \sqrt{1^2 + (\frac{\sqrt{3}}{3})^2}$$

$$= \sqrt{\frac{12}{9}}$$

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Soit θ un argument de a. On a :

$\cos\theta = \frac{\text{Re}(a)}{|a|}$ et $\sin\theta = \frac{\text{Im}(a)}{|a|}$, c'est à dire :

$\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\theta = -\frac{1}{2}$

Donc : $\theta = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$

φ est donc la similitude directe de centre Ω d'affixe 2, de rapport $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ et d'angle de mesure $-\frac{\pi}{6}$

2- a) Démontrons que : $\forall z \neq 2, \frac{z'-z}{2-z} = i\frac{\sqrt{3}}{3}$

Pour tout nombre complexe z différent de 2, on a :

$$\frac{z'-z}{2-z} = \frac{(1-i\frac{\sqrt{3}}{3})z + 2i\frac{\sqrt{3}}{3} - z}{2-z}$$

$$= \frac{i\frac{\sqrt{3}}{3}(2-z)}{2-z}$$

$$= i\frac{\sqrt{3}}{3}$$

b) Déduisons que le triangle MΩM' est rectangle en M.

On a :

$\text{Arg}\left(\frac{z'-z}{2-z}\right) = \text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{M\Omega}; \overrightarrow{MM'}})$.

Or : $\frac{z'-z}{2-z} = i\frac{\sqrt{3}}{3}$, donc : $\text{Arg}\left(\frac{z'-z}{2-z}\right) = \frac{\pi}{2}$

Par suite : Mes $(\widehat{\overrightarrow{M\Omega}; \overrightarrow{MM'}}) = \frac{\pi}{2}$. Par conséquent le triangle MΩM' est rectangle en M.

c) ***Donnons un programme de construction de l'image M' de M par φ.***

• ***Donnons un programme de construction de M'***

Soit M un point du plan, M' son image par S.

Premier cas : M = Ω

Le point M' est égal à Ω, car Ω est invariant par S.

Deuxième cas : M ≠ Ω

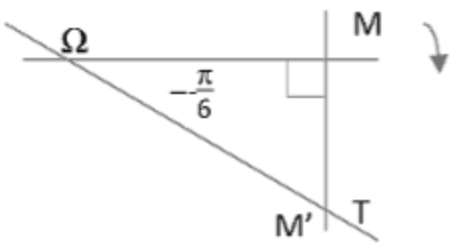
Placer les points Ω et M dans le plan.

Construire la droite (ΩM) et la perpendiculaire à (ΩM) passant par M.

Construire la demi-droite [ΩT) telle :

$\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}\,;\overrightarrow{\Omega T}}) = -\frac{\pi}{6}$

M' est le point d'intersection de la demi-droite [ΩT) et de la perpendiculaire à (ΩM) passant par M.



•***Justifions la construction de M'***

La droite (ΩT) n'est pas perpendiculaire à (ΩM) car $(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}\,;\overrightarrow{\Omega T}})$ n'est pas droit, elle est donc sécante à la perpendiculaire à (ΩM) passant par M en un point M'.

Par construction $\text{Mes}(\widehat{\overrightarrow{\Omega M}\,;\overrightarrow{\Omega M'}}) = -\frac{\pi}{6}$. On a :

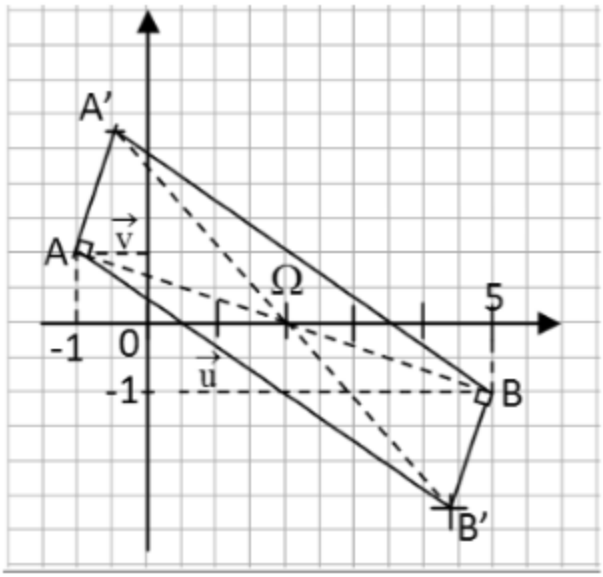
$\text{Cos}\ \widehat{M\Omega M'} = \frac{\Omega M}{\Omega M'}$, c'est-à-dire $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\Omega M}{\Omega M'}$

Par suite : $\Omega M' = \frac{2}{\sqrt{3}}\Omega M$.

Finalement : $\Omega M' = \frac{2\sqrt{3}}{3}\Omega M$.

Ce qui prouve que $M' = \varphi(M)$.

3. a) Plaçons les points A et B puis construisons leurs images respectives A' et B' par φ.



b) voir figure ci-dessus.

c) ***Démontrons que : $Z_{A'} - Z_A = Z_B - Z_{B'}$***
On a :

$$Z_{A'} - Z_A = (1 - i\frac{\sqrt{3}}{3})Z_A + 2i\frac{\sqrt{3}}{3} - Z_A$$

$$= (1 - 1 - i\frac{\sqrt{3}}{3})Z_A + 2i\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$= -i\frac{\sqrt{3}}{3}(-1 + i) + 2i\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$= i\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} + 2i\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$= (1 + 3i)\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$Z_B - Z_{B'} = Z_B - (1 - i\frac{\sqrt{3}}{3})Z_B - 2i\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$= (1 - 1 + i\frac{\sqrt{3}}{3})Z_B - 2i\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$= (i\frac{\sqrt{3}}{3})(5 - i) - 2i\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$= 5i\frac{\sqrt{3}}{3} + \frac{\sqrt{3}}{3} - 2i\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$= (1+3i)\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Les nombres complexes $Z_{A'} - Z_A$ et $Z_B - Z_{B'}$ étant égaux à $(1+3i)\frac{\sqrt{3}}{3}$ sont donc égaux.

d) Déduisons-en la nature du quadrilatère AA'BB'

On a :

$Z_{A'} - Z_A = Z_B - Z_{B'} \Leftrightarrow \overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{B'B}$

Donc le quadrilatère AA'BB' est un parallélogramme, car les points A, A', B et B' ne sont pas alignés.

Habiletés et conseils pour la résolution du problème

Partie A

	Habiletés	Conseils
1-	Déterminer la limite d'une fonction en - ∞ et en + ∞.	Pour la limite de g en $-\infty$, tu te focaliseras sur le produit et tu calculeras la limite de chaque facteur. Pour la limite de g en $+\infty$, tu
		utiliseras la forme développée de g et tu calculeras la limite de chaque terme.
2-a)	Calculer la dérivée d'une fonction sur un intervalle	Tu te focaliseras sur le produit et tu appliqueras la formule de dérivée du produit.
b)	Etudier le sens de variation d'une fonction sur un intervalle	Tu utiliseras le signe de la dérivée.
c)	Dresser le tableau de variation d'une fonction	Tu résumeras les résultats précédents dans un tableau en veillant à la cohérence des éléments du tableau.
3-a)	Prouver l'existence d'une unique solution de l'équation $g(x) = 0$ sur un intervalle.	Tu appliqueras la propriété : Si g est continue et strictement monotone sur un intervalle I, alors g est une bijection de I sur g(I). De plus, si $0 \in g(I)$, alors l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans I.
b)	Encadrer une solution de l'équation $g(x) = 0$ sur un intervalle [a ; b]	Tu vérifieras que : $g(0,86) \times g(0,87) < 0$
c)	Etudier le signe d'une fonction sur un intervalle.	Tu utiliseras les variations de la fonction dans l'intervalle d'étude.

Habiletés et conseils pour la résolution du problème

Partie B

	Habiletés	Conseils
1-*a*)	Déterminer la limite d'une fonction en $-\infty$	Pour le calcul de ces limites, tu mettras x en facteur dans l'expression de $f(x)$.
b)	Démontrer que la courbe représentative d'une fonction admet une branche parabolique de direction (OJ) en $-\infty$	Tu interpréteras $f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$, en utilisant les résultats de cours sur les branches paraboliques
2-*a*)	Déterminer la limite d'une fonction en $+\infty$	Pour le calcul de cette limite, tu mettras x en facteur dans l'expression de $f(x)$.
b)	Démontrer qu'une droite est asymptote à la courbe représentative d'une fonction.	Tu calculeras $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (-x))$ après avoir développé l'expression de $f(x) - (-x)$
c)	Etudier la position de la courbe représentative d'une fonction par rapport à une droite.	Tu étudieras le signe de $f(x) - (-x)$.
3-*a*)	Calculer la dérivée d'une fonction sur intervalle	En utilisant les opérations sur les dérivées, tu établiras cette égalité.
b)	Etudier le sens d'une fonction sur intervalle	Tu déduiras le sens de variation de f du signe de g établi dans la question A-3-*c*).
c)	Dresser le tableau de variation d'une fonction	Tu résumeras les résultats précédents dans un tableau.
4-	Tracer la courbe représentative d'une fonction	Tu suivras les étapes de tracé d'une courbe représentative d'une fonction.
5-*a*)	Calculer une intégrale	Tu exécuteras les étapes de

Habiletés et conseils pour la résolution du problème

	en utilisant une intégration par parties.	l'intégration par parties. Tu poseras : $u(x) = x - \frac{1}{2}$ et $v'(x) = e^{-2x+3}$
b)	Calculer l'aire de la partie du plan limitée par les courbes représentatives de deux fonctions et les droites d'équations x= a et x =b	•Tu utiliseras le signe de $f(x) + x$ sur $[\frac{3}{2}, t]$. •Tu utiliseras la question précédente pour calculer A(t) en unité d'aire. •Tu exprimeras A(t) en cm^2.
c)	Calculer la limite d'une fonction en $+\infty$.	Tu utiliseras une limite de référence pour calculer la limite demandée.

Corrigé du Problème

Partie A

1- Calculons les limites de g en -∞ et en +∞

• ***Calculons les limites de g en -∞***

On a : $\lim\limits_{x\to -\infty} (2-2x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} e^{-2x+3} = +\infty$

Donc : $\lim\limits_{x\to -\infty} g(x) = +\infty$

• ***Calculons les limites de g en +∞***

Pour tout nombre réel x, on a :

$g(x) = -1 + 2e^{-2x+3} - 2xe^{-2x+3}$

$= -1 + 2e^{-2x}\times e^{3} - 2xe^{-2x}\times e^{3}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} 2e^{-2x}\times e^{3} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} -2xe^{-2x}\times e^{3} = 0$

Donc : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -1$.

2- a) Justifions que : $\forall x\in\mathbb{R}, g'(x) = (4x-6)e^{-2x+3}$

Pour tout nombre réel x, on a :

$g'(x) = -2e^{-2x+3} + (2-2x)(-2e^{-2x+3})$

$= (-2-4+4x)e^{-2x+3}$

$= (4x-6)e^{-2x+3}$

2-b) Étudions le sens de variation de g.

• ***Étudions le signe de g'(x)***

Pour tout nombre réel x, e^{-2x+3} est positif, donc le signe $g'(x)$ est celui de $(4x-6)$.

Pour tout nombre réel x, on a :

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x - 6 = 0$

$\Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$

$\forall x\in\left]-\infty ; \frac{3}{2}\right[,\ g'(x) < 0$

$\forall x\in\left]\frac{3}{2} ; +\infty\right[,\ g'(x) > 0$

• ***Déduisons –en le sens de variation de g***

$\forall x \in]-\infty ; \frac{3}{2}[$, $g'(x) < 0$, donc g est strictement décroissante sur $]-\infty ; \frac{3}{2}[$

$\forall x \in]\frac{3}{2} ; +\infty[$, $g'(x) > 0$, donc g est strictement croissante

3

2-c) Dressons le tableau de variation de g

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$	–		0	+	
$g(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	-1

3-a) Démontrons que l'équation g(x) = 0 admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique α

g étant continue et strictement décroissante sur $]-\infty ; \frac{3}{2}]$ réalise une bijection de $]-\infty ; \frac{3}{2}]$ sur $]g(\frac{3}{2}) ; \lim\limits_{x \to -\infty} g(x)[$, c'est à dire une bijection de $]-\infty ; \frac{3}{2}]$ sur $]-2 ; +\infty[$.

De plus 0 appartient à $]-2 ; +\infty[$, donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]-\infty ; \frac{3}{2}]$.

De même g réalise une bijection de $[\frac{3}{2} ; +\infty[$ sur $[-2 ; -1[$. Mais $0 \notin [-2 ; -1[$. Donc l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution dans l'intervalle $]\frac{3}{2} ; +\infty[$.

Par suite, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

b) Vérifions que : $0,86 < \alpha < 0,87$

On a : $g(0,86) = 7.10^{-3}$ et $g(0,87) = -0,084$

Par suite : $g(0,86) \times g(0,87) < 0$.

Donc : $0,86 < \alpha < 0,87$.

c) Justifions que : $\forall x \in]-\infty ; \alpha[, g(x) > 0$ et $\forall x \in]\alpha : +\infty[, g(x) < 0$

• Pour $x \in]-\infty; \alpha[$

On a : $g(x) > g(\alpha)$, car g est strictement décroissante sur $]-\infty; \alpha[$.

Or : $g(\alpha) = 0$, donc : $\forall x \in]-\infty ; \alpha[, g(x) > 0$.

• Pour $x \in]\alpha; +\infty[$

Premier cas : $x \in]\alpha ; \frac{3}{2}[$

On a : $g(x) < g(\alpha)$, car g est strictement décroissante sur $]-\infty; \alpha[$.

Or : $g(\alpha) = 0$, donc : $\forall x \in]\alpha ; \frac{3}{2}[, g(x) < 0$.

Deuxième cas : $x \in [\frac{3}{2} ; +\infty[$

On a : $g(x) < -1$, car g est strictement croissante sur cet intervalle et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -1$.

Donc : $\forall x \in [\frac{3}{2} ; +\infty[, g(x) < 0$.

Par suite :

$\forall x \in]-\infty ; \alpha[, g(x) > 0$ et $\forall x \in]\alpha : +\infty[, g(x) < 0$

Partie B

1-a) Calculons $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ ***et*** $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

• ***Calculons*** $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

Pour tout nombre réel x strictement négatif, on a :

$f(x) = x(-1 + (1 - \dfrac{1}{2x})e^{-2x+3})$

On a d'une part : $\lim\limits_{x\to -\infty} (1-\dfrac{1}{2x}) = 1$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} e^{-2x+3} = +\infty$.

Donc : $\lim\limits_{x\to -\infty} (1 - \dfrac{1}{2x})e^{-2x+3} = +\infty$ et par suite :

$\lim\limits_{x\to -\infty} (-1+ (1 - \dfrac{1}{2x})e^{-2x+3} = +\infty$.

Et d'autre part : $\lim\limits_{x\to -\infty} x = -\infty$

Par conséquent : $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$.

• ***Calculons*** $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

Pour tout nombre réel x, $\dfrac{f(x)}{x} = -1 + (1 - \dfrac{1}{2x})e^{-2x+3}$

On a : $\lim\limits_{x\to -\infty} (1 - \dfrac{1}{2x})e^{-2x+3} = +\infty$, par suite :

$\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$

b) Déduisons que (C) admet une branche parabolique de direction celle de (OJ).

D'après la question précédente :

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$.

Donc (C) admet une branche parabolique de direction celle de (OJ) en $-\infty$.

2-a) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Pour tout nombre réel x strictement positif, on a :

$f(x) = x(-1 + (1 - \frac{1}{2x})e^{-2x+3})$

On a d'une part : $\lim\limits_{x\to -\infty} (1-\frac{1}{2x}) = 1$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} e^{-2x+3} = +\infty$.

Donc : $\lim\limits_{x\to -\infty} (1 - \frac{1}{2x})e^{-2x+3} = +\infty$ et par suite :

$\lim\limits_{x\to -\infty} (-1+ (1 - \frac{1}{2x})e^{-2x+3} = +\infty$.

Et d'autre part : $\lim\limits_{x\to -\infty} x = -\infty$

Par conséquent : $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$.

• ***Calculons*** $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x}$

Pour tout nombre réel x, $\frac{f(x)}{x} = -1 + (1 - \frac{1}{2x})e^{-2x+3}$

On a : $\lim\limits_{x\to -\infty} (1 - \frac{1}{2x})e^{-2x+3} = +\infty$, par suite :

$\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

b) Déduisons que (C) admet une branche parabolique de direction celle de (OJ).

D'après la question précédente :

$\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$.

Donc (C) admet une branche parabolique de direction celle de (OJ) en $-\infty$.

2-a) Calculons $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Pour tout nombre réel x strictement positif, on a :

$f(x) = x(-1 + (1 - \frac{1}{2x})e^{-2x+3})$

$\forall\, x\in\,]-\infty\,;\frac{1}{2}[,\ f(x) + x < 0$. Donc la courbe (C) est au-dessous de la droite (D) sur $]-\infty\,;\frac{1}{2}[$.

$\forall\, x\in\,]\frac{1}{2}\,;+\infty[\ ;f(x) + x > 0$. Donc la courbe (C) est au-dessus de la droite (D) sur $]\frac{1}{2}\,;+\infty[$.

La courbe (C) et la droite (D) se coupent au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.

3-a) Justifions que : $\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x) = g(x)$

$\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x) = -1 + e^{-2x+3} + (x - \frac{1}{2})(-2e^{-2x+3})$

$= -1 + (1 - 2x + 1)e^{-2x+3}$

$= -1 + (2 - 2x)e^{-2x+3}$

$= g(x)$.

b*) Déduisons-en les variations de *f

D'après les questions A-3-*c*) et B-3-*a*), on a :

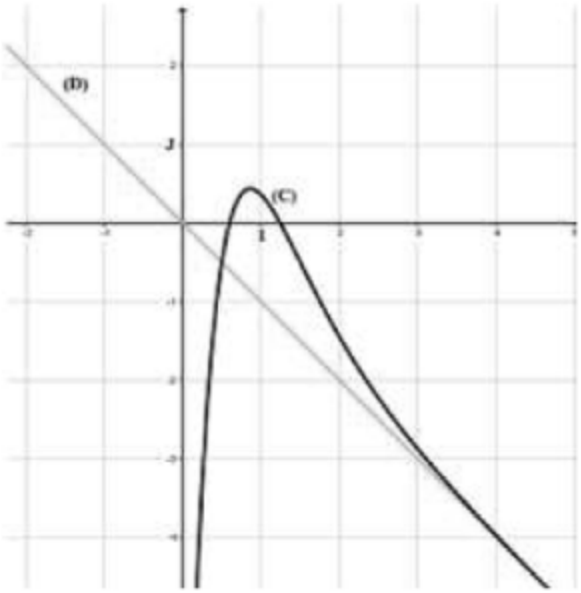
$\forall\, x\in\,]-\infty\,;\alpha[,\ f'(x) > 0$ et $\forall\, x\in\,]\alpha : +\infty\,[,\ f'(x) < 0$

Donc f est strictement croissante sur $]-\infty\,;\alpha[$ et strictement décroissante sur $]\alpha\,;+\infty[$.

c) Dressons le tableau de variations de f.

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	–
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$f(\alpha)$	↘ $-\infty$

4) Construisons (D) et (C).



5-a) A l'aide d'une intégration par parties, justifions que :
$\boldsymbol{I_t = \frac{3}{4} - \frac{t}{2}e^{-2t+3}}$.

Posons : $u(x) = x - \frac{1}{2}$ et $v'(x) = e^{-2x+3}$

On a : $u'(x) = 1$ et $v(x) = \frac{-1}{2}e^{-2x+3}$

$$I_t = \left[(x-\tfrac{1}{2})\times\frac{-1}{2}e^{-2x+3}\right]_{\frac{3}{2}}^{t} + \frac{1}{2}\int_{\frac{3}{2}}^{t} e^{-2x+3}dx$$

$$= \left[(x-\tfrac{1}{2})\times\frac{-1}{2}e^{-2x+3} - \frac{1}{4}e^{-2x+3}\right]_{\frac{3}{2}}^{t}$$

$$= \frac{3}{4} - \frac{t}{2}e^{-2t+3}$$

b) Déduisons –en l'aire A(t).

D'après la question B-2-c), (C) est dessus de (D) sur $]\frac{1}{2}; +\infty[$,

en particulier sur $[\frac{3}{2}; t]$. De plus la fonction $x \mapsto f(x) + x$ est

continue sur cet intervalle, on en déduit que :

$A(t) = \int_{\frac{3}{2}}^{t} \left(x - \frac{1}{2}\right) e^{-2x+3}\, dx$. Par suite : $A(t) = I_t$.

• **Calculons *A(t) en unité d'aire***

I_t est l'aire demandée en unité d'aire.

D'après la question précédente, $A(t) = \frac{3}{4} - \frac{t}{2} e^{-2t+3}$.

• **Calculons *A(t) en cm².***

L'unité d'aire est égale à 4 cm².

$A(t) = 4\times (\frac{3}{4} - \frac{t}{2} e^{-2t+3})$ cm². Soit :

$A(t) = (3 - 2te^{-2t+3})$ cm²

c) Calculons la limite de A(t) en cm² lorsque tend vers $+\infty$

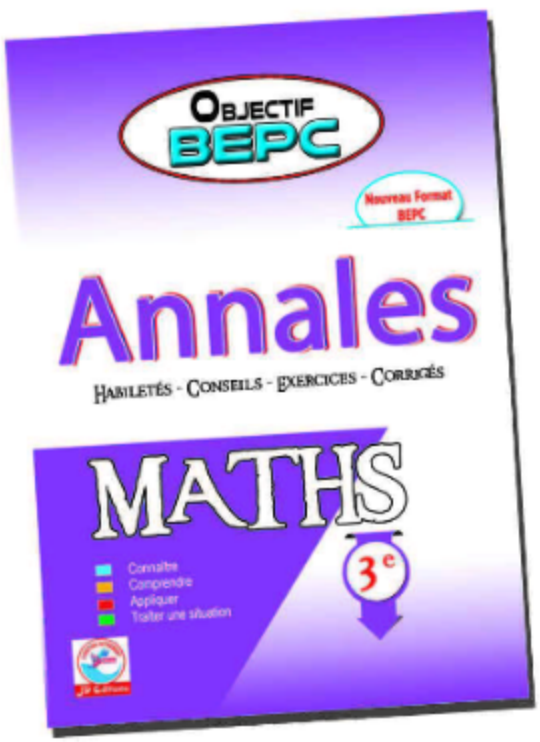
On a :

$\lim\limits_{t\to+\infty} -2te^{-2t} = 0$

Donc : $\lim\limits_{t\to+\infty} A(t) = 3$ cm².

Achevé d'imprimer sur les presses de : JD EDITIONS
Pour le compte de JD Editions.
Tél : 23 00 17 50
Mise en page : JD Editions
1er trimestre 2017
Dépôt Légal N° 13430

OBJECTIF BEPC



ISBN 979-10-91832-36-6