

### **Exercice n°1**

Dans une urne, il y a 18 boules blanches et 10 boules noires indiscernables au toucher. On considère l'épreuve qui consiste à extraire au hasard, l'une après l'autre et sans remise deux boules de l'urne. Ce tirage est équiprobable.

1-Déterminer la loi de probabilité «la 1<sup>ère</sup> boule tirée est blanche ».Qui est l'évènement E

2-On répète cinq fois de suite l'épreuve précédente ; après chaque tirage, les 2 boules sont remises dans l'urne les dix épreuves élémentaires sont donc indépendantes. On désigne par x la variable aléatoire qui à chaque partie de dix épreuves associe le nombre de fois que se produit l'évènement E.

a) Expliquer pourquoi x suit une loi binomiale préciser les paramètres de cette loi

b) Calculer la de probabilité de l'évènement F «E se produit exactement 10 fois»

### **Exercice n°2**

On dispose d'un dé cubique parfait dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On jette dé deux fois de suite et on note le nombre a et b obtenus on admet que les deux jets sont indépendants. On définit une variable aléatoire x de manière suivante :

• Si  $a = b$   $X(a, b) = a = b$

• Si  $a \neq b$ , avec a divisible par b ou inversement  $X(a, b) = \frac{a}{b}$  si  $a > b$  et  $X(a, b) = \frac{b}{a}$  si  $b > a$

• Dans les autres cas  $X(a, b) = a + b$ .

1-Déterminer la loi de probabilité de x.

2-Calculer son espérance mathématique et sa variance.

### **Exercice 3**

Un sac contient 18 boules indiscernables au toucher :

4 boules rouges numérotées de 1 à 4.

6 boules blanches numérotées de 1 à 6.

8 boules vertes numérotées de 1 à 8.

1)- On tire simultanément 3 boules au sac. Calculer la probabilité de chacun des évènements A, B, C, suivants

|     |                                                   |
|-----|---------------------------------------------------|
| A : | on obtient 3 numéros impairs.                     |
| B : | on obtient au moins une boule rouge.              |
| C : | on obtient une boule numérotée 4 et une seulement |

2)-Dans cette question, on procède au tirage suivant : on tire une boule, on note sa couleur et on le replace dans le sac.

Calculer la probabilité de chacun des évènements

D : la boule est blanche

E : on obtient au moins une fois, une boule blanche lors de n tirage. Soit  $P_n$  cette probabilité.

3)- Déterminer le plus petit entier  $n_0$  tel que, pour tout entier  $n \geq n_0$  on ait  $P_n \geq \frac{5}{6}$ .

On donne  $\log 2 = 0,301$  et  $\log 3 = 0,477$

#### **Exercice 4**

Sur un dé à 6 faces, l'une porte le chiffre 4, une autre le chiffre 3, deux autres le chiffre 2 et les deux dernières le chiffre 1. On suppose que chaque face apparaît avec la même probabilité

1)- On lance le dé. On désigne par  $X$  la variable aléatoire définie par la somme des chiffres sur les cinq faces visibles.

Quelles sont les valeurs prises par  $X$  ?

Donner la loi de probabilité de  $X$

2) On lance trois fois de suite le dé. On désigne par  $Y_3$  la variable aléatoire égale au nombre de fois où  $X$  est strictement inférieure à 10.

Quelles sont les valeurs prises par  $Y_3$  ?

Donner la loi de probabilité de  $Y_3$ .

Déterminer l'espérance mathématique et la variance de  $Y_3$ .

3) On lance  $n$  fois de suite le dé. On désigne par  $Y_n$  la variable aléatoire égale au nombre de fois où  $X$  est strictement inférieur à 10.

Déterminer le plus petit entier naturel tel que  $P(Y_n=n) \leq 10^{-3}$

#### **Exercice 5**

Dans le but de contrôler l'état d'ébriété du conducteur automobile, la police procède à un alcool-test.

On admet que 2% des personnes contrôlées sont en état d'ébriété. La police contrôle  $n$  personnes.

On considère la variable aléatoire  $X$  égale au nombre de personnes en état d'ébriété au cours de ce contrôle.

1) Exprimer en fonction de  $n$ , la probabilité de l'événement  $\{X = 0\}$

2) Exprimer en fonction de  $n$ , la probabilité pour qu'au cours de ce contrôle, il y ait au moins une personne en état d'ébriété.

3) Calculer le nombre minimum  $N$  de personnes à contrôler par la police pour que  $P(X=1) \geq 0.95$

#### **Exercice 6**

Un sac contient trois boules numérotées respectivement 0,1 et 2 incernables au toucher.

Un jeu consiste à opérer de la manière suivante :

- On tire une boule, on note son numéro " $a$ " et on la remet dans le sac.
- Puis on tire une deuxième boule, on note son numéro " $b$ " et on la remet dans le sac ;

La somme  $a^2+b^2$  est appelée le « score » obtenu.

1) Donner l'ensemble de scores possibles.

2) Soit  $X$  la variable aléatoire égale au score obtenu par un joueur .Donner la loi de probabilité, l'espérance mathématique, la variance et l'écart type de cette variable aléatoire  $X$ .

3) Calculer  $P(X>2)$ .

4) Cinq personnes jouent successivement au jeu précédent. Quelle est la probabilité pour que deux d'entre elles seulement obtiennent un score strictement inférieur à 2 ?

NB : toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées.

#### **Exercice 7**

Dans une boîte sont placés 5 jetons numérotés de 1 à 5.

On tire simultanément 2 jetons de la boîte, tous les tirages de deux jetons étant supposés équiprobables.

On désigne par  $X$  la variable aléatoire définie par la somme de points indiqués sur les 2 jetons tirés.

1) Déterminer la loi de probabilité de  $X$ . Calculer son espérance mathématique et sa variance.

2) On réalise successivement  $n$  fois le tirage de 2 jetons. Les jetons tirés étant remis dans la boîte après chaque tirage. Calculer en fonction de  $n$  la probabilité  $P$  d'obtenir au moins une fois une somme égale à 9.

### **Exercice 8**

Partie I :

On considère la suite numérique  $(U_n)$  définie par : 
$$\left\{ \begin{array}{l} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{2}{3}U_n + 1 \end{array} \right\}$$

On considère la suite  $(V_n)$  sur  $\mathbb{N}$  par  $V_n = U_n - 3$

Démontrer que  $(V_n)$  est une suite géométrique.

Exprimer  $(V_n)$  puis  $(U_n)$  en fonction de  $(n)$  et étudier la convergence de  $(U_n)$ .

#### **Partie II**

Une balle rebondit en avançant chaque fois d'une longueur égale à la moitié de la précédente. Sachant que le premier bond mesurait 1 mètre, quelle est la distance parcourue au bout de 10 bonds ?

### **Exercice 9**

On définit deux suites  $(U_n)$  et  $(V_n)$  par leurs premiers termes  $U_0$  et  $V_0$  et telles que  $0 < U_0 < V_0$  et les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{2U_n \cdot V_n}{U_n + V_n} \text{ et } V_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2}$$

Vérifier par récurrence que  $\forall U_n \in \mathbb{N}, (U_0 > 0 \text{ et } V_0 > 0)$  et que  $U_n < V_n$ .

1. Etudier le sens de variation des suites  $(U_n)$  et  $(V_n)$ . En déduire que  $(U_n)$  est majorée et que  $(V_n)$  est minorée.
2. montrer que  $(U_n)$  et  $(V_n)$  convergent vers la même limite  $l$ .
3. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , calculer  $U_{n+1} \cdot V_{n+1}$ . En déduire la valeur de  $l$ .

### **Exercice 10**

$(U_n)$  est la suite numérique définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} U_1 = 4 \\ U_{n+1} = \frac{5U_n + 3}{U_n + 3} \end{array} \right\} \quad n \in \mathbb{N}^*$$

1. Dans le plan muni d'un repère orthogonal  $(OIJ)$ , étudier graphiquement le sens de variation et la convergence de la suite  $(U_n)$ .

2. On considère la suite  $(W_n)$  numérique définie par :

$$\left\{ W_n = \frac{U_n - 3}{U_n + 1} \right\} \quad n \in \mathbb{N}^*$$

- a- Démontrer que pour tout  $n$  élément de  $\mathbb{N}^*$ ,  $U_n \neq -1$
- b- Démontrer que  $(W_n)$  est une suite géométrique dont on précisera le terme  $W_1$  et la raison.
- c- Exprimer  $(U_n)$  puis  $(W_n)$  en fonction de  $n$ .
- d- En déduire la limite de la suite  $(U_n)$ .

### Exercice 11

$(U_n)$  est la suite définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{2U_n - 1}{2U_n + 5} \end{cases} n \in \mathbb{N}$$

On se propose d'étudier la limite de  $(U_n)$  par 2 méthodes.

#### 1<sup>ère</sup> méthode

1. Justifier que pour tout nombre entier naturel  $n$ ,  $U_n \geq -\frac{1}{2}$
2. Etudier les variations de la suite  $(U_n)$ .
3. Dédire des questions précédentes que  $(U_n)$  est convergente.
4. Déterminer cette limite.

#### 2<sup>e</sup> méthode

$(V_n)$  est définie par  $\left\{ V_n = \frac{2U_n + 1}{U_n + 1} \right\} n \in \mathbb{N}$

1. Démontrer que  $(V_n)$  est une suite géométrique et exprimer  $(V_n)$  en fonction de  $n$ .
2. Exprimer  $(U_n)$  en fonction de  $n$  et étudier la convergence de la suite  $(U_n)$ .

### Exercice 12

Le tableau suivante donne l'âge  $X$  et la moyenne  $Y$  des maxima de tension artérielle en fonction de l'âge d'une population

|       |      |       |      |      |      |      |
|-------|------|-------|------|------|------|------|
| $Y_i$ | 11.8 | 14.00 | 12.6 | 15.0 | 15.5 | 15.1 |
| $X_i$ | 36   | 42    | 48   | 54   | 60   | 69   |

1. Représenter graphiquement le nuage de points dans le plan muni de repère orthogonal (0.5 cm pour les abscisses ( $x_n$ ) et 3cm pour les ordonnées (unité de tension artérielle)
2. Calculer la moyenne et la variante de séries statistiques associées aux variables  $X$  et  $Y$ .
3. a) Trouver une équation de la droite de régression  $y$  en fonction de  $x$ .  
b) Trouver une droite de régression  $x$  en fonction de  $y$   
c) Représenter graphiquement ces deux droites dans le même repère que celui utilisé pour le nuage de points.
- 4) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre les variables  $X$  et  $Y$ .
- 5) Une personne de 70 ans a une tension maximale de 16,2. Cela vous paraît-il normale ?

### Exercice 13

Dans 10 exploitations agricoles d'une même région, on a mesuré la taille de l'exploitation ( en dizaines d'hectares) et le bénéfice net ( en millions de F C FA)

|                    |      |      |      |      |      |      |      |      |      |     |
|--------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|-----|
| Taille ( $x_i$ )   | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    | 10  |
| Bénéfice ( $y_i$ ) | 1200 | 3000 | 4200 | -600 | 4800 | 5400 | 4200 | 1800 | 8100 | 960 |

- 1a) Représenter le nuage de points correspondants ainsi que le point moyen G du nuage.  
 b) Ecrire l'équation de la droite de mayer.
- 2a) Calculer le coefficient de corrélation linéaire,  
 b) Justifier l'existence d'un lien entre le bénéfice et la taille de l'exploitation.

### Exercice n°14

On considère la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par la loi de récurrence :

$$U_{n+1} = \frac{1}{3} U_n + 4 \text{ avec } U_0 = 3 \text{ et la suite } (V_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ définie par } v_n = U_n - 6.$$

- 1- Démontrer que la suite  $(V_n)$  est géométrique puis déterminer  $(v_n)$  en fonction de n.  
 2- Dédurre l'expression de  $(U_n)$  en fonction de n  
 3- A partir de quel entier  $n_0$ , le nombre  $U_n$  dépasse-t-il  $6 - 10^{-10}$  ?

### EXERCICE 15 : BARYCENTRE

Dans le plan affine, on considère ABC un triangle rectangle en A. I le milieu du segment  $[AB]$  et J le centre de gravité de ABC. Pour tout réel m, différent de  $-1/3$ , on note  $G_m$  le barycentre du système de points pondérés

$$Sm = \{(A;1), (B;m), (C;2m)\}$$

Pour tout point M du plan, on note

$$\vec{V}_M = 3\vec{MA} - \vec{MB} - 2\vec{MC}$$

Pour chacune des six affirmations suivantes, dire si elle est Vraie (V) ou Fausse (F)

| affirmation                                                                        | V ou F |
|------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| 1- $G_1$ est le milieu du segment $[CI]$                                           |        |
| 2- $G_1$ est le barycentre de $\{(J;2); (C;\frac{2}{3})\}$                         |        |
| 3- pour tout m, distinct de $-1/3$ , $\vec{AG}_m$ est colinéaire à $\vec{AG}_{-1}$ |        |
| 4- pour tout point M, $\vec{V}_M = \vec{AB} + 2\vec{AC}$                           |        |
| 5- $IBG_{-\frac{1}{2}}$ est un triangle rectangle                                  |        |
| 6- pour tout point P de $(AG_{-1})$ , il existe un réel m tel que $P = G_m$        |        |

### EXERCICE 16 : GEOMETRIE DE L'ESPACE

L'espace est rapporté à un repère orthonormal  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ ; on considère les points  $A(3;0;10)$ ,  $B(0;0;15)$ ,  $C(0;20;0)$ .

- 1a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).  
 b) Montrer que la droite (AB) coupe l'axe des abscisses au point E (9 ; 0 ; 0).  
 c) Justifier que les points A,B et C ne sont pas alignés.
- 2- Soit H le pied de la hauteur issue de O dans le triangle OBC.  
 a) Justifier que la droite (BC) est perpendiculaire au plan (OEH). En déduire que (EH) est la hauteur issue de E dans le triangle EBC.  
 b) Déterminer une équation cartésienne du plan (OEH).  
 c) Vérifier que le plan (ABC) admet pour équation cartésienne :  $20x + 9y + 12z - 180 = 0$ .

d) Montrer que le système :

$$\begin{cases} x = 0 \\ 4y - 3z = 0 \\ 20x + 9y + 12z - 180 = 0 \end{cases} \quad \text{a une solution unique. Que représente cette solution ?}$$

e) Calculer la distance OH, en déduire que EH = 15 et l'aire du triangle EBC.

3) Exprimer de deux façons le volume du tétraèdre OEBC, déterminer la distance du point O au plan (ABC). Pouvait-on prévoir le résultat à partir de l'équation obtenue en 2c ?

## **EXERCICE 17 ARITHMETIQUE**

### **PARTIE : A**

Soit x un nombre réel

Montrer que  $x^4 + 4 = (x^2 + 2)^2 - 4x^2$

En déduire que  $x^4 + 4$  peut s'écrire comme produit de deux trinômes à coefficients entiers.

### **PARTIE B**

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On considère les entiers  $A = n^2 - 2n + 2$  et  $B = n^2 + 2n + 2$  et d leur PGCD.

1) Montrer que,  $n^4 + 4$  n'est pas premier.

2) Montrer que, tout diviseur de A qui divise n, divise 2.

3) Montrer que pour tout diviseur commun de A et B divise 4n.

4) Dans cette question, on suppose que n est impair.

a) Montrer que A et B sont impairs. En déduire que d est impair.

b) Montrer que d divise n.

c) En déduire que d divise 2, puis que A et B sont premiers entre eux.

5) On suppose maintenant que n est pair.

a) Montrer que 4 ne divise pas  $n^2 - 2n + 2$ .

b) Montrer que d est de la forme  $d = 2p$  où p est impair.

c) Montrer que p divise n. En déduire que  $d = 2$  (on pourra s'inspirer de la démonstration utilisée à la question 4)

## **EXERCICE 18 : SIMILITUDE**

Dans le plan complexe P rapporté au repère ortho normal direct  $(A; \vec{u}; \vec{v})$ ,

Unité graphique 1 cm.

On considère les points B, D définis par :

$$\vec{AB} = 2\vec{u}; \vec{AD} = 3\vec{v} \text{ et C tel que ABCD soit un rectangle.}$$

NB : on fera une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice

1) Soit E l'image de B par la translation de vecteur  $\vec{DB}$ . Déterminer l'axe Z<sub>E</sub> de E.

- 2) Déterminer les nombres réels  $a, b$  tels que le point  $F$  d'affixe  $Z_F = 6 - i$  soit le barycentre des points  $A, B$  et  $C$  affectés des coefficients  $a, b$ , et  $1$
- 3) On considère la similitude  $S$  qui transforme  $A$  en  $E$  et  $B$  en  $F$ . A tout point  $M$  d'affixe  $Z$ , on associe le point  $M'$  d'affixe  $Z'$ , image de  $M$  par  $S$
- a) Exprimer  $Z'$  en fonction de  $Z$
- b) Déterminer le centre  $I$ , l'angle et le rapport de la similitude de  $S$ .
- c) Déterminer les images de  $C$  et  $D$  par  $S$ .
- d) Calculer l'aire de l'image par  $S$  du rectangle  $ABCD$ .
- 4) a) Déterminer l'ensemble  $\Omega$  des points  $M$  du plan tels que :  $\|6\vec{MA} - 10\vec{MB} + \vec{MC}\| = 9$
- b) Déterminer, en précisant les éléments caractéristiques, l'image de  $\Omega$  par  $S$ .

### **EXERCICE 19 : CONIQUE**

L'espace  $(E)$  est muni d'un repère orthonormal  $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ .

On considère les points  $A(0;5;5)$  et  $B(0;0;10)$

Dans cette question, on se place dans le plan  $P_0$  d'équation :  $x = 0$  rapporté au repère  $(O; \vec{j}; \vec{k})$  on note  $(C)$  le cercle de centre  $B$  passant par  $A$ .

Démontrer que la droite  $(OA)$  est tangente au cercle  $(C)$ .

2- On nomme  $\varphi$  la sphère engendrée par la rotation du cercle  $(C)$  autour de l'axe  $(Oz)$  et  $\Gamma$  le cône engendré par la rotation de la droite  $(OA)$  autour de l'axe  $(Oz)$ .

- a) Démontrer que le cône  $\Gamma$  admet pour équation  $x^2 + y^2 = z^2$ .
- b) Déterminer l'intersection du cône  $\Gamma$  et la sphère  $\varphi$ .
- c) Préciser la nature de cette intersection et ses éléments caractéristiques.
- d) Illustrer ces objets par un schéma dans l'espace.

3- On coupe le cône  $\Gamma$  par le plan  $P_1$  d'équation  $x = 1$ .

Dans  $P_1$ , l'une des trois figures ci-dessous représente cette intersection, Identifier cette figure en donnant les justifications nécessaires.

4- Soit  $M(x; y; z)$  est un point du cône  $\Gamma$  dont les coordonnées sont des entiers relatifs non nuls. Démontrer que  $x$  et  $y$  ne peuvent pas être simultanément impairs.

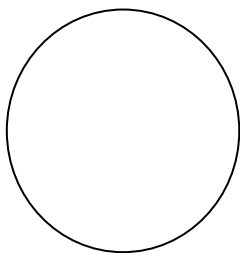


Figure 1

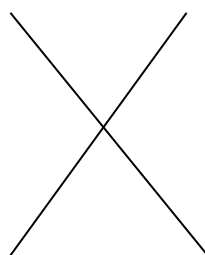


Figure 2

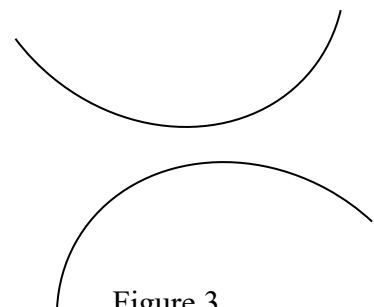


Figure 3

## **EXERCICE 20**

1- Soit  $U$  la suite définie par : 
$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{1}{2 - U_n} \end{cases}$$

a- Calculer  $U_1$ ,  $U_2$ . Et  $U_3$ . On exprimera chacun des termes sous formes de fractions irréductibles.

b- Comparer les quatre premiers termes de la suite  $U$  aux quatre premiers termes de la suite  $W$  définie sur

$\mathbb{N}$  par  $W_n = \frac{n}{n+1}$

c- A l'aide d'un raisonnement par récurrence, démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $U_n = W_n$

2- Soit  $V$  la suite de terme général  $V_n$  définie par  $V_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$  où  $\ln$  désigne la fonction logarithme népérien.

a- Montrer que  $V_1 + V_2 + V_3 = -\ln 4$

b- Soit  $S_n$  la somme définie pour tout entier naturel non nul  $n$  par :  $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$

Exprimer  $S_n$  en fonction de  $n$

Déterminer la limite de  $S_n$  lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$

## **EXERCICE 21**

Trouver dans  $\mathbb{C}$ , les racines de  $-3 - 4i$  et résoudre :  $z^2 - 2(2+i)z + 6 + 8i = 0$

## **EXERCICE 22**

Soit la fonction polynôme définie et à valeur dans  $\mathbb{C}$ .

$$P(z) = iz^3 - (1 + 3i)z^2 + (7i - 2)z + 5 - i$$

1- Calculer  $P(i)$ .

2- En déduire une factorisation de  $P(z)$  sous la forme :

$P(z) = (z-i)Q(z)$  ; avec  $Q(z)$  un polynôme du second degré

3- Résoudre dans  $\mathbb{C}$ , l'équation  $P(z) = 0$ .

## **EXERCICE 23**

On se propose de résoudre l'équation (E) sur le corps des complexes :

$$(E) : 4z^3 + 2(i-4)z^2 + 3(3-2i)z - 9 + \frac{9}{2}i = 0$$

1- Sachant que (E) possède une racine réelle  $a$ , déterminer celle-ci.

2- Déterminer les solutions  $z'$  et  $z''$  de l'équation du second degré en  $Z$  :  $4z^2 - 2(1-i)z + 6 - 3i = 0$

3-Montrer que les solutions de (E) sont :  $a, z', z''$ .

4-Les affixes des points  $A$ ,  $M'$  et  $M''$  étant respectivement  $a$ ,  $z'$ ,  $z''$ , montrer que le triangle  $AM'M''$  est rectangle.

## **EXERCICE 24**

1- Linéariser l'expression :  $f(x) = 8\cos^4 x + 6\sin^2 x - 4$ .

2- Calculer

$$I = \int_0^{\pi/2} f(x) dx$$

## EXERCICE 25

### PARTIE A

Soit la fonction polynôme définie et à valeur dans  $\mathbb{C}$ .

$$P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$z \mapsto z^3 - 2(\sqrt{3} + i)z^2 + 4(1 + i\sqrt{3})z - 8i$$

1- Montrer que  $P(z)$  admet une solution imaginaire pure.

2- Résoudre  $P(z) = 0$  et donner le résultat sous forme trigonométrique et sous forme exponentielle.

### PARTIE B

$$\text{On donne : } Z_A = \sqrt{3} - i ; Z_B = \sqrt{3} + i \text{ et } Z_C = 2i$$

1- Placer les points A, B et C dans un repère orthonormé (O, I, J).

2- Montrer que les points A, B, et C appartiennent à un même cercle de centre O.

3- Donner la nature du quadrilatère OABC.

## EXERCICE 26

Le plan complexe est muni du repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

On considère l'équation (E) :  $z \in \mathbb{C}$  telle que  $z^3 + (6 - 5i)z^2 + (1 - 20i)z - 14 - 5i = 0$

1-a) Vérifier que  $i$  est une solution de l'équation (E).

1-b) Déterminer les réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tel que : (E) :  $(z - i)(az^2 + bz + c)$

1-c) Résoudre l'équation (E).

2- On considère les points A, B et C d'affixes respectives  $i$ ,  $-2 + 3i$  et  $-4 + i$ .

a) Placer les points A, B et C dans le repère.

b) Ecrire le nombre complexe  $Z = \frac{Z_A - Z_B}{Z_C - Z_B}$  sous forme trigonométrique.

c) En déduire que le triangle ABC est rectangle et isocèle en B.

3- Soit  $S$  la similitude directe de centre A qui transforme C en B. Et  $B'$  est l'image de B par  $S$ .

a) Déterminer l'écriture complexe de  $S$ .

b) Calculer l'affixe de  $B'$ .

4- Justifier que le triangle  $ABB'$  est rectangle et isocèle en  $B'$ .

## EXERCICE 27

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2}$$

Cette étude consiste à déterminer les primitives de  $f$  de deux manières.

1-a- Montrer que  $f$  admet des primitives sur  $]-\infty; -1[$ ,  $] -1; 1[$  et  $]1; +\infty[$ .

1-b- Montrer que  $\forall x \in Df$ ,  $f(x) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x-1)^2} \right]$ ; en déduire la primitive de  $f$ .

2-a- Déterminer une primitive de  $g : x \mapsto \frac{2x}{(x^2 - 1)^2}$ .

2-b- Déterminer une primitive de  $f + g$ .

2-c- En déduire une primitive de  $f$ .

### EXERCICE 28: BARYCENTRE

Dans un plan, on considère un triangle rectangle en A tel que  $AB = 2a$  et  $AC = a$ , où  $a$  est un réel positif donné.

1- Déterminer et construire  $E_1$  des points M du plan tels que :

$$\left\| \vec{MA} + \vec{MB} - \vec{MC} \right\| = \left\| 2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC} \right\|$$

2- On désigne par H le point du plan tel que.  $\vec{AH} = \frac{1}{2} \vec{AB} + 2 \vec{AC}$ .

a) Démontrer que H est le barycentre des points A, B et C affectés de coefficients que l'on déterminera.

b) On considère l'ensemble des points M du plan tels que :  $-3MA^2 + MB^2 + 4MC^2 = k$ .

Pour quelle valeur du nombre réel k, cet ensemble contient-t-il le point A ?

Pour cette valeur, préciser l'ensemble obtenu noté  $E_2$  et le construire.

### EXERCICE 29 : BARYCENTRE

On donne dans le plan un triangle ABC rectangle en A tel que  $AB = 8$  et  $AC = 4$ .

1- construire le barycentre G des points A, B, C respectivement affectés des coefficients 3 ; -1 ; 2.

2- Déterminer et construire l'ensemble E des points M du plan vérifiant :  $3MA^2 - MB^2 + 2MC^2 = -32$

3- Déterminer et construire l'ensemble F des points M du plan vérifiant :

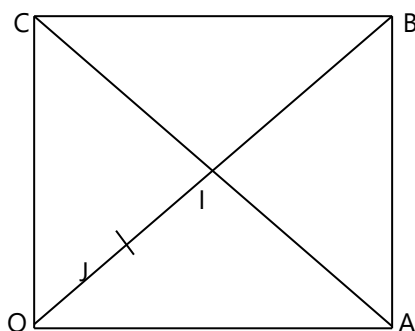
$$\left\| 3\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC} \right\| = \left\| \vec{MB} + \vec{MC} \right\|$$

### EXERCICE 30 : SIMILITUDE

Soit  $\alpha$  un réel strictement positif. Dans le plan orienté. On considère le carré OABC de centre I tel que :

$$\begin{cases} (\vec{OA}, \vec{OC}) = \frac{\pi}{2} \\ OA = d \end{cases}$$

Soit J le milieu du segment  $[OI]$



1- Soit  $f$  la similitude plane directe telle que :  $\begin{cases} f(O) = I \\ f(A) = J \end{cases}$

a) Déterminer l'angle et le rapport de  $f$ .

b) Construire  $C' = f(C)$ . déterminer  $f(B)$

c) Soit  $\Omega$  le centre de la similitude de  $f$ .

Montrer que les points  $(\Omega, O, I, C)$  d'une part et  $(\Omega, O, A, J)$  d'autre part sont cocycliques.

En déduire une construction de  $\Omega$ .

d) Montrer que les droites  $(\Omega O)$  et  $(C\Omega)$  sont orthogonales.

2-Le plan est rapporté au repère orthonormal  $(o, u, v)$  direct tel que A ait pour affixe d.

Déterminer la forme complexe de f

### **EXERCICE 31 : EQUATION DIFFERENTIELLE**

1- Résoudre l'équation différentielle :  $y'' - 3y' + \frac{5}{2}y = 0$  (1)

2- Soit l'équation différentielle :  $y'' - 3y' + \frac{5}{2}y = e^{3x}$  (E)

a) Montrer que la fonction h définie par  $h(x) = \frac{2}{5}e^{3x}$  est solution de (E).

b) On admettra qu'une fonction f est solution de (E) si et seulement si la fonction f - h est solution de (1).  
En déduire les solutions de (E)

3) Déterminer la solution de f de (E) dont la courbe représentative  $\odot$  dans un repère

$(O, \vec{i}, \vec{j})$  passe par A  $(0; \frac{2}{5})$  et dont la tangente en A à  $\odot$  a pour coefficient directeur 2.

### **EXERCICE 32.**

Ne connaissant pas de primitive de la fonction f définie sur  $[0; \frac{1}{2}]$  par :  $f(x) = \frac{e^{-x}}{1-x}$

On se propose de calculer une valeur approchée de l'intégrale :  $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-x}}{1-x} dx$

1- En étudiant les variations de la fonction f, démontrer pour tout nombre réel x de  $[0; \frac{1}{2}]$  l'encadrement :

$$1 \leq f(x) \leq \frac{2}{\sqrt{e}}$$

2- a) Démontrer que, pour tout x de  $[0; \frac{1}{2}]$  :  $\frac{1}{1-x} = 1+x + \frac{x^2}{1-x}$  .

b) En déduire que :  $I = \int_0^{\frac{1}{2}} (1+x)e^x dx + \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x) dx$

c) calculer  $J = \int_0^{\frac{1}{2}} (1+x)e^{-x} dx$

d) déduire de (1) que :  $\frac{1}{24} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x) dx \leq \frac{1}{12\sqrt{e}}$

e) Déduire des questions précédentes une valeur décimale approchée de I à la précision 0,01.

### **EXERCICE 33 : SIMILITUDE**

Dans le plan orienté, on considère un rectangle ABCD tel que AB = 1, BC = 2, et

$(\vec{AB}; \vec{BC}) = \frac{\pi}{2}$  (Modulo  $2\pi$ ). On appelle M le milieu du segment [BC].

1- soit  $S$  la similitude directe telle que  $S(A) = M$  et  $S(B) = D$ .

Déterminer le rapport et l'angle de  $S$ .

2- on se propose dans cette question de préciser la position du centre  $O$  de la similitude  $S$

c) Les droites  $(AB)$  et  $(DM)$  se coupent en  $I$ .

Démontrer que les points  $A, O, M, I$  sont cocycliques.

En déduire que  $BM = BO = BA$ .

b) Démontrer que  $DM = DO$ .

c) En déduire que  $O$  est le symétrique de  $M$  par rapport à la droite  $(BD)$

3- Le plan est muni d'un repère orthonormal direct tels que les affixes des points  $A, B$ , et  $D$  sont respectivement  $0, 1, 2i$ .

a) Déterminer l'expression complexe de  $S$  et l'affixe de  $O$ .

b) Vérifier que  $O$  est bien le symétrique de  $M$  par rapport à la droite  $(DB)$  en montrant que  $BM = BO$  et que les droites  $(OM)$  et  $(BD)$  sont orthogonales..

### **EXERCICE 34 : ROTATION**

Dans le plan orienté, soit  $ABC$  un triangle équilatéral tel que :  $(AB, AC) = \pi/3$  ( $2\pi$ )

$I$  est le milieu de  $[BC]$  et  $J$  le point tel que  $B$  soit le milieu de  $[JC]$ ,  $r_1$  est la rotation de centre  $A$  et d'angle  $\pi/3$  et  $r_2$  la rotation de centre  $B$  et d'angle  $(-2\pi/3)$

1- Soit  $A'$  et  $B'$  les images respectives des points  $A$  et  $B$  par l'application  $r_2 \circ r_1$ .

Démontrer que  $I$  est le milieu de  $[AA']$  et  $B$  le milieu de  $[AB']$  ; faire une figure.

2-En précisant la nature de  $r_2 \circ r_1^{-1}$ , démontrer que pour tout point  $M$  du plan,  $I$  est le milieu de  $[M_1M_2]$ ,  $M_1$  étant l'image de  $M$  par  $r_1$  et  $M_2$  l'image de  $M$  par  $r_2$ .

3- Démontrer que  $r_2 \circ r_1$  est une rotation dont on déterminera le centre et l'angle.

### **EXERCICE 35 : SIMILITUDE- ROTATION**

Dans le plan orienté, on considère un carré direct  $ABCD$  de centre  $O$  c'est-à-dire tel que

$$\text{Mes}(\widehat{OA; OB}) = \frac{\pi}{2}$$

Soit  $P$  un point du segment  $[BC]$  distinct de  $B$ . on note  $Q$  l'intersection de  $(AP)$  avec  $(CD)$

La perpendiculaire  $(\Delta)$  à  $(AP)$  passant par  $A$  coupe  $(BC)$  en  $R$  et  $(CD)$  en  $S$ .

1- Faire une figure (prendre  $BC = 3$  et  $BP = 1$  et placer  $(BC)$  horizontal sur la feuille).

2- Soit  $r$  la rotation de centre  $A$  et d'angle  $(-\pi/2)$

a) préciser l'image de la droite  $(BC)$  par  $r$

b) déterminer les images de  $R$  et  $P$  par  $r$

c) quelle est la nature des triangles  $RAQ$  et  $PAS$  ?

3- On note  $N$  le milieu du segment  $[PS]$  et  $M$  celui du segment  $[QR]$ . Soit  $S$  la similitude directe de centre  $A$ , d'angle  $\pi/4$  et de rapport  $1/\sqrt{2}$ .

a- Préciser les images de  $R$  et  $P$  par  $S$

b- Quel est le lieu géométrique du point  $N$  quand  $P$  décrit le segment  $[BC]$  privé de  $B$  ?

c- De ce qui précède, déduire que les points  $M, B, N$ , et  $D$  sont alignés.

### **EXERCICE 36 : ARITHMETIQUE**

Soit  $(E)$  l'ensemble des entiers naturels qui peuvent s'écrire sous la forme  $9 + a^2$  où  $a$  est un entier naturel non nul ; par exemple  $10 = 9 + 1$ ,  $13 = 9 + 2^2$ ,  $18 = 9 + 3^2$ , etc.....

On se propose d'étudier dans cet exercice l'existence d'élément de  $(E)$  qui sont des puissances de 2, 3 ou 5.

Etude de l'équation d'inconnue a :

$$a^2 + 9 = 2^n \text{ où } (a \in \mathbf{IN}, n \in \mathbf{IN}, n \geq 4)$$

- Montrer que si a existe, a est impair.
- En raisonnant modulo 4, montrer que l'équation proposée n'a pas de solution.

Etude de l'équation d'inconnue a :

$$a^2 + 9 = 3^n \text{ où } (a \in \mathbf{IN}, n \in \mathbf{IN}, n \geq 3)$$

- Montrer que si  $n \geq 3$ ,  $3^n$  est congru à 1 ou à 3 modulo 4.
- Montrer que si a existe, il est pair et en déduire que nécessairement n est pair.
- On pose  $n = 2p$  où p est un entier naturel,  $p \geq 2$ .  
Déduire d'une factorisation de  $3^n - a^2$ , que l'équation proposée n'a pas de solutions

(1) Etude de l'équation d'inconnue a :

$$a^2 + 9 = 5^n \text{ où } (a \in \mathbf{IN}, n \in \mathbf{IN}, n \geq 2)$$

- En raisonnant modulo 3, montrer que l'équation est impossible si n est impair.
- On pose  $n = 2p$ , en s'inspirant de la question 2c, démontrer qu'il existe un unique entier naturel a tel que  $a^2 + 9$  soit une puissance de 5.

### **EXERCICE 37 : ARITHMETIQUE**

On désigne par p un nombre entier naturel premier supérieur ou égal à 7.

Le but de l'exercice est de démontrer que l'entier naturel  $n = p^4 - 1$  est divisible par 240, puis d'appliquer ce résultat.

- Montrer que p est congru à -1 ou à 1 module 3. En déduire que n est divisible par 3.
- En remarquant que p est impair, prouver qu'il existe un entier naturel k tel que  $p^2 - 1 = 4k(k+1)$ , puis que n est divisible par 16.
- En considérant tous les restes possibles de la division euclidienne de p par 5, démontrer que 5 divise n.
- a) Soient a, b, c trois entiers naturels.  
Démontrer que si a divise c et b divise c avec a et b premiers entre eux, alors ab divise c.  
b) Déduire de ce qui précède que 240 divise n.
- Existe-t-il quinze nombres premiers  $P_1, P_2, \dots, P_{15}$  supérieurs ou égaux à 7 tels que l'entier  $A = P_1^4 + P_2^4 + \dots + P_{15}^4$  soit un nombre premier ?

### **EXERCICE 38**

#### **PARTIE A**

Dans une urne  $U_1$ , on place 4 jetons portant le nombre 100 et 3 jetons portant le nombre 200.

On extrait simultanément au hasard 3 jetons de  $U_1$  et on note la somme des nombres inscrits sur ces 3 jetons.

- Montrer que la probabilité d'obtenir une somme égale à 400 vaut  $18/35$
  - Soit X la variable aléatoire associant à chaque tirage de 3 jetons la somme obtenue.
- a) Quelles sont les valeurs prises par X ?  
b) Déterminer la loi de probabilité de X.
  - Calculer l'espérance mathématique de X

#### **PARTIE B**

On considère l'urne  $U_1$  de la première partie et une autre urne  $U_2$  contenant trois jetons marqués 100 et 2 jetons marqués 200. Un tirage consiste à extraire un jeton de  $U_1$  puis un jeton de  $U_2$ .

1. Calculer la probabilité d'obtenir 2 jetons portant le même nombre.
2. En déduire la probabilité pour que la somme des nombres tirés soit égale à 300.
3. Calculer la probabilité d'avoir extrait de  $U_1$  un jeton marqué 100 sachant qu'on a obtenu une somme égale à 300.

### **EXERCICE 39: BARYCENTRE**

- 1- A, B, et C sont les points du plan d'affixe respectives  $-1+3i$ ,  $1+i$  et  $-4$ .
  - a) Quelle est la nature du triangle ABC ? justifier.
  - b) Déterminer l'affixe  $Z_G$  du barycentre G des points pondérés (A ;4), (B ;3) et (C ;5).
  - c) En déduire les affixes des vecteurs  $\vec{GA}$ ,  $\vec{GB}$  et  $\vec{GC}$
  - d) Déterminer et construire l'ensemble ( C ) des points M vérifiant :

$$: \left\| 4\vec{MA} + 3\vec{MB} + 5\vec{MC} \right\| = \left\| 4\vec{MA} - 2\vec{MB} - 2\vec{MC} \right\|$$

- 2- On considère l'application h du plan P dans IR qui à tout point M du plan associe le nombre réel

$$h(M) = \vec{MA} \cdot \vec{MB} + 2\vec{MB} \cdot \vec{MC} + 3\vec{MC} \cdot \vec{MA}$$

- a. Calculer h ( C ) et h (G)
- b. Démontrer que  $h(M) = 6MG^2 + h(G)$
- c. Déterminer et construire l'ensemble (Γ) des points M du plan tel que  $h(M) = 18$

# **RESOLUTION**

# **EXERCICES**

### Exercice n°1

1- Déterminer la probabilité « la première boule tirée est blanche ». Soit E cet événement

Soit U l'univers tel que  $\text{Card.}(U) = A_{28}^2 = 756$

$$\text{Card.}(E) = A_{18}^1 \times A_{10}^1 + A_{18}^2$$

$$\text{Card.}(E) = 486$$

$$P(E) = \frac{\text{card}(E)}{\text{card}(U)} = \frac{486}{756}$$

$$\boxed{P(E)=0,64}$$

2- a) on répète 5 fois l'expérience de manière indépendante donc nous avons un schéma de bernoulli. La variable X aléatoire suit une loi binomiale puisqu'elle compte le nombre de succès et les paramètres sont (5 et 0,64).

b) la probabilité de l'événement F.

Soit  $\bar{E}$  l'échec d'où  $P(\bar{E}) = 1 - P(E) = 0,36$

$$P(F) = C_5^2 (0,64)^2 (0,36)^3$$

$$\boxed{P(F)=0,19}$$

### Exercice n°2

1. Il s'agit de déterminer les valeurs que peut prendre la variable aléatoire X. le tableau suivant permet d'obtenir ce résultat.

| b \ a | 1 | 2 | 3 | 4  | 5  | 6  |
|-------|---|---|---|----|----|----|
| 1     | 1 | 2 | 3 | 4  | 5  | 6  |
| 2     | 2 | 2 | 5 | 2  | 7  | 3  |
| 3     | 3 | 5 | 3 | 7  | 8  | 2. |
| 4     | 4 | 2 | 7 | 4  | 9  | 10 |
| 5     | 5 | 7 | 8 | 9  | 5  | 11 |
| 6     | 6 | 3 | 2 | 10 | 11 | 6  |

Les différentes valeurs étant équiprobables, nous avons pour  $\text{Card}(U) = 6^2$ . D'où la loi de probabilité suivante

| $X_i$      | 1              | 2              | 3              | 4.             | 5              | 6              | 7              | 8              | 9              | 10             | 11             | total |
|------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|-------|
| $P(X=X_i)$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{7}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{4}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | $\frac{2}{36}$ | 1     |

2. calculons l'espérance mathématique et la variance

$$E(x) = \frac{1}{36} + \frac{14}{36} + \frac{15}{36} + \frac{12}{36} + \frac{25}{36} + \frac{18}{36} + \frac{28}{36} + \frac{16}{36} + \frac{18}{36} + \frac{20}{36} + \frac{22}{36}$$

$$E(x) = \frac{189}{36} = \frac{21}{4} \Leftrightarrow \boxed{E(x)=5,25}$$

$$V(x) = E((x(x))^2) = E(x^2) - E(x)^2$$

$$V(x) = \frac{1}{36} + \frac{28}{36} + \frac{45}{36} + \frac{48}{36} + \frac{125}{36} + \frac{108}{36} + \frac{196}{36} + \frac{128}{36} + \frac{162}{36} + \frac{200}{36} + \frac{200}{36} + \frac{242}{36} - \left(\frac{189}{36}\right)^2$$

$$V(x) = \frac{1283}{36} - \left(\frac{189}{36}\right)^2 = \frac{10467}{1296}$$

$$V(x) = \frac{1163}{144} \Leftrightarrow \boxed{V(x)=8.07}$$

### **Exercice n°3**

Soit U l'univers des possibles

$$\text{Card. (U)} = C_{18}^3 = \frac{1}{3!}(18 \times 17 \times 16)$$

$$\text{Card. (U)} = 816$$

1. Calcul de probabilité

Appliquons la formule suivante  $P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(U)}$  puisqu'il y'a équiprobabilité.

$$\text{Card. (A)} = C_9^3 = 844$$

$$P(A) = \frac{84}{816} \Rightarrow \boxed{P(A)=0.103}$$

La probabilité de l'événement  $\bar{B}$  contraire de B. on n'obtient aucune boule rouge ; ce dernier est constitué des parties à trois éléments d'un ensemble de  $18-4=14$  objet et il possède  $C_{14}^3$  éléments ; en conséquence

$$P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \frac{C_{14}^3}{C_{18}^3} = 1 - \frac{14 \times 13 \times 12}{18 \times 17 \times 16} = \frac{204 - 91}{204}$$

$$\boxed{P(B) = \frac{113}{204} \approx 0.554}$$

2. le sac contient exactement trois boules blanches numérotées 4 : une rouge, une blanche, une verte donc  $\text{card}(C) = 3 C_{15}^2$

$$\text{D'où } P(C) = \frac{C_{15}^2}{C_{18}^3} = \frac{9 \times 15 \times 18}{18 \times 17 \times 16} = \frac{105}{172}$$

$$\boxed{P(C) = 0.39}$$

3. Ici, l'expérience consiste en la répétition de n fois le tirage d'une seule boule parmi 18.

L'événement D correspond à n=1 et il est clair que

$$P(D) = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{P(D)=0.33}$$

Le moyen le plus simple pour calculer le probabilité E est de considérer l'événement contraire  $\bar{E}$  : ne tirer aucune boule blanche lors des n tirages. L'événement  $\bar{E}$  est l'intersection de n événements indépendants  $\bar{D}_i$  où  $\bar{D}_i$  est défini par : ne pas tirer de boule blanche lors du n<sup>ième</sup> tirage.

$$P(\bar{D}_i) = P(\bar{D}) = 1 - P(D) = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow P(E) = P_n = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \text{ car } P(\bar{D}_i) = P(\bar{D}_1, n...n \bar{D}_n) = P(\bar{D}_1) \times P(\bar{D}_2) \dots P(\bar{D}_n)$$

$$\boxed{P(E) = \left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

4. Déterminons  $n_0$  tel que  $P_n$  soit  $\geq \frac{5}{6}$

$$\text{L'inégalité } 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \geq \frac{5}{6} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^n \leq \frac{1}{6}$$

$$\text{Ou encore } \log\left(\frac{2}{3}\right)^n \leq \log \frac{1}{6}$$

$$n \geq \frac{\ln 2 + \ln 3}{\ln 3 - \ln 2} \approx 4.4$$

Donc  $n_0 = 5$

Puisque  $n_0 \geq \frac{\ln 6}{\ln \frac{3}{2}}$  entraîne que  $n \geq n_0$

#### **Exercice n°4**

1) Les valeurs prises sont :

Comme il y a six éventualités possibles équiprobables pour lesquelles la face cachée porte respectivement 4 ; 3 ; 2 ; 2 ; 1 ; 1. Le total de tous les chiffres portés par six faces étant égal à 13, les valeurs de X sont 9 ; 10 ; 11 ; 11 ; 12 ; 12. D'où l'ensemble des valeurs de X :  $\{9, 10, 11, 12\}$  et la loi de probabilité est :

| $X_i$      | 9             | 10            | 11            | 12            | total |
|------------|---------------|---------------|---------------|---------------|-------|
| $P(X=X_i)$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{1}{6}$ | $\frac{2}{6}$ | $\frac{2}{3}$ | 1     |

2) la variable aléatoire  $Y_3$  peut prendre les valeurs 0, 1, 2, 3. elle suit une loi binominale avec  $N=3$  et

$$P = P(X < 10) = P(X=9) = \frac{1}{6}$$

Avec  $0 \leq k \leq 3$  on a  $P(X=k) = C_3^k P^k (1-P)^{n-k}$

$$\text{Avec } P = \frac{1}{6} \text{ et } Q = 1-P = \frac{5}{6}$$

$$\Leftrightarrow P(X=0) = \left(\frac{5}{6}\right)^3 = \frac{125}{216}$$

$$P(X=1) = 3 \left(\frac{1}{6}\right) \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{75}{216}$$

$$P(X=2) = 3 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(\frac{5}{6}\right) = \frac{15}{216}$$

$$P(X=3) = \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \frac{1}{216}$$

Vérification  $P(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) = 1$

3) De même  $Y_n$  suit une loi binominale  $B\left(n; \frac{1}{6}\right)$

$$\text{d'où } P(Y_n = n) = \left(\frac{1}{6}\right)^n$$

L'affirmation  $P(y_n = n) \leq 10^{-3}$  conduit à  $\left(\frac{1}{6}\right)^n \leq 10^{-3}$

$$\Leftrightarrow 6^n \geq 10^3 \Leftrightarrow n \log 6 \geq 3$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{3}{\log 6} = \frac{3}{0,77815}$$

$$\Leftrightarrow n \geq 3,7$$

Donc  $n = 4$

**Conseil :** Nous avons vu que  $6^3 = 216$ , et par suite  $6^4 = 1296$ . On voit que  $6^3 < 10^3 < 6^4$  d'où  $n=4$

## EXERCICE 5

1- La probabilité qu'une personne contrôlée soit sobre est de  $1 - \frac{2}{100}$

L'évènement  $\{X = 0\}$  est la conjonction de  $n$  évènements indépendants. On obtient

$$P(X = 0) = \left(1 - \frac{2}{100}\right)^n = \left(\frac{98}{100}\right)^n$$

2- Cet évènement est le complémentaire de celui envisagé au 1. Il vient donc

$$P(X \geq 1) = 1 - \left(\frac{98}{100}\right)^n = \left(1 - \frac{98}{100}\right) \left(1 + \frac{98}{100} + \dots + \frac{98^{n-1}}{100^{n-1}}\right)$$

$$\left(\frac{98}{100}\right)^n = \frac{2}{100} + \frac{2}{100} \times \frac{98}{100} + \dots + \frac{2}{100} \left(\frac{98}{100}\right)^{n-1}$$

On sait que 1-

3- Déterminons le plus petit  $n_0$  tel que pour tout  $n \geq n_0$

$$\text{On ait } P_n \geq \frac{5}{6}$$

$$\text{De l'égalité au 2, l'inégalité } P(X \geq 1) \geq 0,95 \Leftrightarrow \left(\frac{98}{100}\right)^n \leq \frac{5}{100}$$

$$\Leftrightarrow n \log \frac{98}{100} \leq \log \frac{5}{100}$$

Comme  $\frac{98}{100} < 1$ ,  $\log \frac{98}{100} < 0$  donc l'inégalité devient :

$$n \geq \frac{\log\left(\frac{5}{100}\right)}{\log\left(\frac{98}{100}\right)} \Rightarrow n \geq \frac{\log 5 - \log 100}{\log 98 - \log 100}$$

Avec  $\log 100 = 2$   $\log 98 = 2 \log 7 + \log 2$ .

$$n \geq \frac{2 - 0,69897}{2 - 1,6902 - 0,30103} \quad \text{le résultat est } N=149$$

## Exercice 6

Dans le tirage il y a remise donc le tableau

des scores possibles  $a^2 + b^2$  sont:

|       |   |   |   |
|-------|---|---|---|
| a \ b | 0 | 1 | 2 |
|       | 0 | 1 | 4 |

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 5 |
| 2 | 4 | 5 | 8 |

Donc l'ensemble des scores possible est  $\{0,1,2,4,5,8\}$

Les valeurs 0, 1, et 8 sont possible parce qu'on remet la première boule dans le sac avant le second tirage

2/ La loi de probabilité est :

L'ensemble de ces couples est l'ensemble des 9 éventualités possibles, équiprobables. Chacune a pour probabilité  $1/9$ . D'où la loi de X est :

|              |               |               |               |               |               |               |       |
|--------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|-------|
| $x_i$        | 0             | 1             | 2             | 4             | 5             | 8             | Total |
| $p(X = x_i)$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{2}{9}$ | $\frac{1}{9}$ | $\frac{2}{9}$ | $\frac{2}{9}$ | $\frac{1}{9}$ | 1     |

L'espérance mathématique est :

$$E(x) = (0 \times \frac{1}{9}) + (1 \times \frac{2}{9}) + (2 \times \frac{1}{9}) + (4 \times \frac{2}{9}) + (5 \times \frac{2}{9}) + (8 \times \frac{1}{9})$$

$$E(x) = \frac{30}{9} \Leftrightarrow E(x) = \frac{10}{3}$$

- la variable est  $v(x)$  :

$$E(x^2) = (0 \times \frac{1}{9}) + (1 \times \frac{2}{9}) + (4 \times \frac{1}{9}) + (16 \times \frac{2}{9}) + (25 \times \frac{2}{9}) + (64 \times \frac{1}{9})$$

$$E(x^2) = \frac{152}{9}$$

$$\text{Puis } v(x) = E(x^2) - (E(x))^2 = \frac{52}{9} \Leftrightarrow \boxed{v(x) = \frac{52}{9}}$$

• L'écart type est tel que  $\delta(x) = \sqrt{v(x)}$

$$\Rightarrow \delta(x) = \sqrt{\frac{52}{9}} = \frac{2\sqrt{13}}{3}$$

3/ Calculons  $p(X > 4)$  c'est-à-dire  $X = \{4, 5, 8\}$

$$p(X > 2) = p(X = 4) + p(X = 5) + p(X = 8)$$

$$\boxed{p(X > 2) = \frac{5}{9}}$$

4/ Dans cette question, on réalise cinq fois de manière indépendante et on peut appeler y le nombre de fois ou

$X > 2$ . C'est-à-dire ou se réalise l'évènement «  $x > 2$  » li à cette expérience et dont la probabilité est  $\frac{5}{9}$ . La

variable aléatoire y suit une loi binomiale

$$B\left(5, \frac{5}{9}\right) \text{ d'ou } P(Y = 2) = C_5^2 \left(\frac{5}{9}\right)^2 \left(\frac{4}{9}\right)^3$$

$$P(Y = 2) = \frac{16000}{59049}$$

$$P(Y = 2) = 0,27$$

### Exercice n°7

Les valeurs que peut prendre X sont en quantité finie d'où le tableau

| X | Tirage de deux jetons |
|---|-----------------------|
| 3 | {1,2}                 |
| 4 | {1,3}                 |
| 5 | {1,4} ; {2,3}         |
| 6 | {1,5} ; {2,4}         |
| 7 | {2,5} ; {3,4}         |
| 8 | {3,5}                 |
| 9 | {4,5}                 |

1- la loi de probabilité est :

| $x_i$        | 3              | 4              | 5              | 6              | 7              | 8              | 9              |
|--------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| $P(X = x_i)$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{2}{10}$ | $\frac{2}{10}$ | $\frac{2}{10}$ | $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{10}$ |

Par définition, l'espérance mathématique est donnée par

$$E(x) = \sum_{k=3}^9 k.P(X = k)$$

$$\text{Soit } E(x) = 3 \times \frac{1}{10} + 4 \times \frac{1}{10} + 5 \times \frac{2}{10} + 6 \times \frac{2}{10} + 7 \times \frac{2}{10} + 8 \times \frac{1}{10} + 9 \times \frac{1}{10}$$

$$E(x) = 6$$

- la variante  $v(x)$  est :

$$v(x) = E(x - E(x))^2 = E(x^2) - (E(x))^2$$

$$v(x) = \left( 9 \times \frac{1}{10} + 16 \times \frac{1}{10} + 25 \times \frac{2}{10} + 36 \times \frac{2}{10} + 49 \times \frac{2}{10} + 64 \times \frac{1}{10} + 81 \times \frac{1}{10} \right) - 6^2$$

$$v(x) = 3$$

• l'écart type est  $\sigma(x) = \sqrt{v(x)}$  d'où  $\sigma(x) = \sqrt{3}$

• La probabilité de réalisation de l'événement A : « X prend au moins une fois les valeurs 9 » est égale à 1.  
Au moins la probabilité de l'événement complémentaire à savoir « X ne prend jamais la valeur 9 »

2- Le tirage de deux jetons étant indépendants, ce dernier événement a pour probabilité le produit des probabilités de réalisation de l'événement ( $x \neq 9$ ).

$$\text{Ce dernier a pour probabilité } P(x \neq 9) = 1 - P(x = 9)$$

$$\text{D'où il vient } P(A) = 1 - (1 - P(x = 9))^n$$

$$P(A) = 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^n$$

## Exercice n°8

### PARTIE I

Démontrons que  $(\mathcal{G}_n)$  est géométrique.

$$\mathcal{G}_n = \nu_n - 3 \Rightarrow \mathcal{G}_{n+1} = \nu_{n+1} - 3$$

$$\mathcal{G}_{n+1} = \left(\frac{2}{3}\nu_n + 1\right) - 3 = \frac{2}{3}(\nu_n - 3) = \frac{2}{3}\mathcal{G}_n$$

Donc la suite  $(\mathcal{G}_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{2}{3}$

Son premier terme est :  $\mathcal{G}_0 = \nu_0 - 3$  or  $\nu_0 = 2$

$$\text{Donc } \mathcal{G}_0 = -1$$

D'où l'expression de  $\mathcal{G}_n$  puis  $\nu_n$  en fonction de n est :

$$\mathcal{G}_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \mathcal{G}_0 = -\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\mathcal{G}_n = -\left(\frac{2}{3}\right)^n \quad \text{Comme } \mathcal{G}_n = \nu_n - 3 \Rightarrow \nu_n = \mathcal{G}_n + 3 \text{ donc } \nu_n = 3 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$(\mathcal{G}_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{2}{3}$  or  $0 < \frac{2}{3} < 1$

Donc  $\lim(\mathcal{G}_n) = 0$  et par conséquent  $\lim(\nu_n) = 3$

### PARTIE II

Recherche d'une suite permettant de décrire la situation

Soit  $(\mathcal{G}_n)$  la longueur au  $n^{\text{ième}}$  bond

$$\text{Donc } \mathcal{G}_{n+1} = \frac{1}{2}\mathcal{G}_n$$

$\mathcal{G}_n$  étant géométrique de raison  $\frac{1}{2}$ , on aura

$$S = \mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2 + \mathcal{G}_3 + \mathcal{G}_4 + \mathcal{G}_5 + \mathcal{G}_6 + \mathcal{G}_7 + \mathcal{G}_8 + \mathcal{G}_9 + \mathcal{G}_{10} = \frac{q^n - 1}{q - 1} \mathcal{G}_1$$

$$S = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{10} - 1}{\frac{1}{2} - 1} \mathcal{G}_1 \text{ avec } \mathcal{G}_1 = 1 \Rightarrow S = 1.998$$

Au bout de 10 bonds, la balle aura parcouru une distance de 2m

## Exercice n°9

1- Vérifions par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}, \nu_0 > 0$  et  $\mathcal{G}_0 > 0$  et que  $\nu_n < \mathcal{G}_n$

On a :  $v_0 > 0$  et  $g_0 > 0$  et  $v_0 < g_0$

$$v_1 = \frac{2v_0g_0}{v_0 + g_0} > 0, \quad g_1 = \frac{v_0 + g_0}{2} > 0$$

$$v_1 - g_1 = \frac{2v_0g_0}{v_0 + g_0} - \frac{v_0 + g_0}{2} \Leftrightarrow v_1 - g_1 = -\frac{(v_0 - g_0)^2}{2(v_0 + g_0)} < 0 \Rightarrow \boxed{v_1 < g_1}$$

Supposons que n donne  $0 < v_n < g_n$

Vérifions au rang n+1

$$v_{n+1} = \frac{2v_n \cdot g_n}{v_n + g_n} > 0 \text{ et } g_{n+1} = \frac{v_n + g_n}{2} \Rightarrow v_{n+1} - g_{n+1} = -\frac{(v_n - g_n)^2}{2(v_n + g_n)} < 0$$

Donc  $v_{n+1} - g_{n+1} < 0 \Rightarrow v_{n+1} < g_{n+1}$

Conclusion

$\forall n \in \mathbb{N}, v_n > 0 \quad g_n > 0$  donc  $\boxed{v_n < g_n}$

2- Etudions le sens de variation des suites

$$\text{On a : } v_{n+1} - v_n = \frac{2v_n \cdot g_n}{v_n + g_n} - v_n \Leftrightarrow v_{n+1} - v_n = \frac{v_n(g_n - v_n)}{v_n + g_n} \text{ or } g_n - v_n > 0$$

Donc  $v_{n+1} - v_n > 0 \Rightarrow v_{n+1} > v_n$  donc  $(v_n)$  est croissante

$$\text{On a : } g_{n+1} - g_n = \frac{v_n + g_n}{2} - g_n \Rightarrow g_{n+1} - g_n = \frac{v_n - g_n}{2} < 0 \quad \text{car } v_n - g_n < 0$$

Donc  $g_{n+1} - g_n < 0 \Rightarrow g_{n+1} < g_n$  d'où  $(g_n)$  est décroissante

Conclusion

Comme  $v_0 < v_n < g_n < g_0$  donc  $(v_n)$  est majorée par  $g_0$ . De même  $(g_n)$  est minorée par  $v_0$ .

3- Montrons que  $(g_n)$  et  $(v_n)$  converge

On sait que  $(v_n)$  est majorée et croissante, elle converge et  $(g_n)$  est décroissante et minorée, donc elle converge.

Posons  $l_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n)$  et  $l_2 = \lim_{n \rightarrow \infty} (g_n)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (v_{n+1}) = l_1 \text{ donc } l_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2v_n \cdot g_n}{v_n + g_n}$$

$$l_1 = \frac{2l_1 \cdot l_2}{l_1 + l_2} \Rightarrow 1 = \frac{2l_2}{l_1 + l_2} \Rightarrow l_1 + l_2 = 2l_2 \Rightarrow \boxed{l_1 = l_2 = l}$$

Les deux (2) suites ont une même limite  $l$  car ce sont tous deux des suites adjacentes.

4- Calculons  $v_{n+1} \cdot g_{n+1}$

$$\text{Soit } v_{n+1} \cdot g_{n+1} = \frac{2v_n \cdot g_n}{v_n + g_n} \cdot \frac{v_n + g_n}{2} \Leftrightarrow \boxed{v_{n+1} \cdot g_{n+1} = v_n \cdot g_n} \quad (1)$$

Considérons la suite  $(w_n)$  définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = v_n \cdot g_n \text{ donc : } w_{n+1} = v_{n+1} \cdot g_{n+1} \text{ d'où } w_{n+1} - w_n = v_{n+1} \cdot g_{n+1} - v_n \cdot g_n$$

$$w_{n+1} - w_n = v_n \cdot g_n - v_n \cdot g_n \text{ d'après (1), on a : } w_{n+1} - w_n = 0 \Rightarrow \boxed{w_{n+1} = w_n}$$

Par conséquent la suite  $(w_n)$  est constante

Calculons sa limite :

$$\forall n \in \mathbb{N}, w_n = w_0 \text{ C'est-à-dire ; } \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = w_0 = v_0 \cdot g_0 \text{ Or } \lim_{n \rightarrow \infty} w_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n \cdot g_n) = l^2$$

$$\Rightarrow l^2 = v_0 \cdot g_0 \text{ d'où } l = \sqrt{v_0 \cdot g_0}$$

La suite  $(w_n)$  a pour limite  $\boxed{l = \sqrt{v_0 \cdot g_0}}$

### Exercice n°10

$(v_n)$  définie par la suite numérique

$$\begin{cases} u_1 = 4 \\ u_{n+1} = \frac{5u_n + 3}{u_n + 3} \quad (n \in \mathbb{N}^*) \end{cases}$$

1. Dans le plan muni de repère orthogonal  $(O, i, j)$ , étudions graphiquement le sens de variation et la convergence de la suite  $(v_n)$ .

$$\text{Soit } v_{n+1} = g(v_n) \text{ tel que } g(x) = \frac{5x + 3}{x + 3}$$

$\forall x \in \mathbb{R} - \{-3\}$ ,  $g$  est dérivable d'où

$$g'(x) = \frac{5(x-1) - 5x - 3}{(x+3)^2} \Rightarrow g'(x) = \frac{2}{(x+3)^2} > 0$$

Tableau de variation

| x       | $-\infty$ | -3 | $+\infty$ |
|---------|-----------|----|-----------|
| $g'(x)$ | +         |    | +         |
| $g(x)$  | 5         |    | 5         |

$\forall x \in Dg, g'(x) > 0$  donc  $g(x)$  est croissante

$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 5$  la suite  $(v_n)$  est convergente de limite  $l = 5$

2. On considère la suite  $(w_n)$  numérique définie par :

$$w_n = \frac{v_n - 3}{v_n + 1} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

a- Démontrons que  $\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n \neq -1$

$w_n$  existe si et seulement si  $v_n + 1 \neq 0 \Rightarrow v_n \neq -1$

Donc  $\boxed{Dw = \mathbb{R} - \{-1\}}$

b- Démontrons que  $(w_n)$  est géométrique

$$w_n = \frac{v_n - 3}{v_n + 1}$$

$$w_{n+1} = \frac{v_{n+1}-3}{v_{n+1}+1} \Leftrightarrow w_{n+1} = \frac{v_n-3}{3(v_n+1)} \Leftrightarrow w_{n+1} = \frac{1}{3} w_n$$

$(w_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{1}{3}$  et de premier terme  $w_1 = \frac{v_1-3}{v_1+1} = \frac{4-3}{4+1} \Rightarrow w_1 = \frac{1}{5}$

c- Exprimons  $(w_n)$  en fonction de  $n$

étant une suite géométrique  $w_n = \frac{1}{5} \left(\frac{1}{3}\right)^n$

$$w_n = \frac{v_n-3}{v_n+1}$$

$$v_n-3 = w_n(v_n+1) \Rightarrow v_n-3 = w_n \cdot v_n + w_n$$

$$v_n - w_n v_n = w_n + 3 \Rightarrow v_n(1 - w_n) = w_n + 3$$

$$\boxed{v_n = \frac{w_n + 3}{1 - w_n}}$$

Exprimons  $v_n$  en fonction de  $n$

$$v_n = \frac{\frac{1}{5} \left(\frac{1}{3}\right)^n + 3}{1 - \frac{1}{5} \left(\frac{1}{3}\right)^n}$$

d -Dédudisons la limite de  $(v_n)$

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n) = 3} \text{ car } \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$$

### **Exercice n°11**

$$(v_n) \text{ est définie par } \begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \frac{2v_n - 1}{2v_n + 5} \end{cases} \quad n \in \mathbb{N}$$

1<sup>ère</sup> méthode

1-Justifions que  $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \geq -\frac{1}{2}$

$$u_0 = 1 > -\frac{1}{2} \quad \text{Vrai au premier rang}$$

$$u_1 = \frac{2u_0 - 1}{2u_0 + 5} = \frac{1}{7} > -\frac{1}{2} \text{ Vraie}$$

Supposons qu'elle est vraie au rang  $n$

$$u_n \geq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2u_n \geq -1$$

$$\Leftrightarrow 2u_n - 1 \geq -2 \text{ et } \Leftrightarrow 2u_n + 5 \geq 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{2u_n - 1}{2u_n + 5} \geq \frac{-2}{4}$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} \geq -\frac{1}{2}, \text{ donc l'hypothèse est vérifiée au rang } n+1$$

$$\forall n \in N, u_{n+1} \geq -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \boxed{u_n \geq -\frac{1}{2}}$$

2-Etudions les variations de la suite (u<sub>n</sub>)

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n - 1}{2u_n + 5} - u_n \Rightarrow u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n - 1 - u_n(2u_n + 5)}{2u_n + 5}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-(2u_n^2 + 3u_n + 1)}{2u_n + 5}$$

$$\text{Soit } N = 2u_n^2 + 3u_n + 1$$

$$\Delta(N) = 9 - 8 > 1 \Rightarrow \begin{cases} u_1 = -\frac{1}{2} \\ u_2 = -1 \end{cases}$$

Tableau de signe de  $u_{n+1} - u_n$

Comme a < 0 on a :

| n                   | $-\infty$ | $-5/2$ | $-1$ | $-1/2$ | $+\infty$ |
|---------------------|-----------|--------|------|--------|-----------|
| $2u_n + 5$          | -         | +      | +    | +      |           |
| $u_n + 1$           | -         | -      | +    | +      |           |
| $u_n + \frac{1}{2}$ | -         | -      | -    | +      |           |
| $u_{n+1} - u_n$     | +         | -      | +    | -      |           |

$$\forall n \in ]-5/2; -1[ \cup ]-1/2; +\infty[, u_{n+1} - u_n < 0 \Rightarrow u_{n+1} < u_n$$

Donc la suite (u<sub>n</sub>) est décroissante.

$$\forall n \in ]-\infty; -5/2[ \cup ]-1; -1/2[, u_{n+1} - u_n > 0 \Leftrightarrow u_{n+1} > u_n \text{ donc la suite (u}_n\text{) est croissante}$$

Pour  $n \in \{-5/2; -1; -1/2\}$ ,  $u_{n+1} - u_n = 0 \Leftrightarrow u_{n+1} = u_n$  donc la suite (u<sub>n</sub>) est constante

3. Sur  $] -1/2; +\infty[$ ,  $u_n \geq -1/2$  (u<sub>n</sub> est minorée par -1/2) et décroissante donc elle est convergente.

4. Déterminons la limite

Soit  $u_{n+1} = g(u_n)$  et  $l \in [-1/2; +\infty[$

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n = 0 &\Leftrightarrow g(x) - x = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{2x-1}{2x+5} - x = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (x+1)(2x+1) = 0$$

On a :  $x_1 = -1$  et  $x_2 = -1/2$

$$x_1 \in [-1/2, +\infty[ \text{ et } x_2 = -1/2 \in [-1/2; +\infty[ \text{ Donc } \boxed{l = -1/2}$$

2<sup>e</sup> méthode

$$(g_n) \text{ est définie par : } g_n = \frac{2v_n + 1}{v_n + 1} \quad (n \in N)$$

1- Démontrons que  $(g_n)$  est une suite géométrique

$$g_{n+1} = \frac{2v_{n+1} + 1}{v_{n+1} + 1} \Rightarrow g_{n+1} = \frac{2\left(\frac{2v_n - 1}{2v_n + 5}\right) + 1}{\frac{2v_n - 1}{2v_n + 5} + 1} \Rightarrow g_{n+1} = \frac{3(2v_n + 1)}{4(v_n + 1)}$$

$$g_{n+1} = \frac{6v_n + 3}{4v_n + 4} \Rightarrow \boxed{g_{n+1} = \frac{3}{4}g_n}$$

$(g_n)$  est une suite géométrique de raison  $\frac{3}{4}$  de premier terme  $g_1 = \frac{2v_0 + 1}{v_0 + 1} = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}$

Exprimons  $(g_n)$  en fonction de  $n$  :  $\boxed{g_n = \frac{3}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n}$

2- exprimons  $(v_n)$  en fonction de  $n$

$$g_n = \frac{2v_n + 1}{v_n + 1} \Rightarrow 2v_n + 1 = g_n(v_n + 1) \Rightarrow 2v_n + 1 = g_n.v_n + g_n \Rightarrow v_n(2 - g_n) = g_n - 1$$

$$\Rightarrow \boxed{v_n = \frac{g_n - 1}{2 - g_n}}$$

Exprimons  $(v_n)$  en fonction de  $n$

$$v_n = \frac{g_n - 1}{2 - g_n} \Rightarrow \boxed{v_n = \frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n - 1}{2 - \frac{3}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n}}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{\frac{3}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n - 1}{2 - \frac{3}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^n} \right) \quad \frac{3}{4} < 1 \quad \text{ou encore} \quad \frac{3}{4} \in ]-1; 1[$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n \rightarrow 0 \quad \text{Donc} \quad \boxed{\lim_{n \rightarrow \infty} (v_n) = -\frac{1}{2}} \quad \text{la suite est donc convergente.}$$

### Exercice n°12

| $x_i$ | $y_i$ | $(x_i - \bar{x})$ | $(y_i - \bar{y})$ | $(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$ | $(x_i - \bar{x})^2$ | $(y_i - \bar{y})^2$ |
|-------|-------|-------------------|-------------------|----------------------------------|---------------------|---------------------|
| 36    | 11.8  | -15.5             | -2.2              | 34.1                             | 240.25              | 4.84                |
| 42    | 14.0  | -9.5              | 0                 | 0                                | 90.25               | 0                   |
| 48    | 12.6  | -3.5              | -1.4              | 4.9                              | 12.25               | 1.96                |
| 54    | 15.0  | 2.5               | -1                | -2.5                             | 6.25                | 1                   |
| 60    | 15.5  | 8.5               | 1.5               | 12.75                            | 72.25               | 2.25                |
| 69    | 15.1  | 17.5              | 1.1               | 19.25                            | 228.01              | 1.21                |
|       |       |                   |                   | 73.5                             | 649.26              | 11.26               |

1- Représentons graphiquement le nuage des points ainsi que le point moyen G.

2- calculons la moyenne des X et Y ainsi que la variance

### Longueur des $x$

$$x_G = \bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

$$x_G = \frac{1}{6}(36 + 42 + 48 + 54 + 60 + 69)$$

$$\boxed{x_G = 51,5}$$

**Longueur des  $y$**

$$y_G = \bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$$

$$y_G = \frac{1}{6}(11.8 + 14.0 + 12.6 + 15.0 + 15.5 + 15.1)$$

$$\boxed{y_G = 14} \quad \text{donc} \quad \boxed{G(51,5;14)}$$

**Représentation graphique des nuages de points (en annexe)**

**La variance de  $x$  est**

$$g(x) = \frac{1}{N} \sum n_i (x_i - \bar{x})^2$$

$$\boxed{g(x) = 421.22}$$

**La variance de  $y$  est**

$$g(y) = \frac{1}{N} \sum n_j (y_j - \bar{y})^2$$

$$\boxed{g(y) = 1.87}$$

3-a) Trouvons une équation de la droite de régression de  $y$  en fonction de  $x$ .

$$y = ax + b \quad \text{et} \quad a = \frac{\text{Cov}(x, y)}{v(x)} \quad \text{et} \quad b = \bar{y} - a \bar{x}$$

$$a = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2} = \frac{73.5}{649.26} \Rightarrow a = 0.10$$

$$b = \bar{y} - a \bar{x} = 14 - (0.11 \times 51.5) \Rightarrow b = 0.80$$

$$\boxed{y = 0.10x + 8.80}$$

3-b) Trouvons une équation de la droite de régression de  $x$  en fonction de  $y$ .

$$a = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum (y_j - \bar{y})^2} = \frac{73.5}{11.26} \Rightarrow a = 6.52$$

$$b = \bar{x} - a \bar{y} = 51.5 - 14 \times 6.52 \Rightarrow b = -39.78$$

$$x = 6,52y - 39,78$$

3-c) Voir repère au 1-a( en annexe)

4) Calcul du coefficient de corrélation linéaire

$$Cov(x, y) = \frac{1}{N} \sum n_{ij} (x_i - \bar{x}) (y_j - \bar{y}) \Rightarrow \boxed{Cov(x, y) = 12.19}$$

$$r = \frac{Cov(x, y)}{\sqrt{g(x) \cdot g(y)}} \quad \boxed{r = 0,81} \quad \text{il y'a une forte corrélation entre } y \text{ et } x$$

5) Calcul la tension maximale pour 70 ans

$$y = 0,1 \times 70 + 8.8 \quad \Rightarrow \boxed{y = 15.8}$$

Ce n'est pas normal car  $y = 15,8 < 16,2$

### **Exercice n°13**

| $x_i$       | $y_j$ | $(x_i - \bar{x})$ | $(y_j - \bar{y})$ | $(x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y})$ | $(x_i - \bar{x})^2$ | $(y_j - \bar{y})^2$ |
|-------------|-------|-------------------|-------------------|----------------------------------|---------------------|---------------------|
| 1           | 1200  | -4.5              | -2106             | 9477                             | 20.25               | 4435236             |
| 2           | 3000  | -3.5              | -306              | 1071                             | 12.25               | 93636               |
| 3           | 4200  | -2.5              | 894               | -2235                            | 6.25                | 799236              |
| 4           | -600  | -1.5              | 3906              | 5859                             | 2.25                | 15256836            |
| 5           | 4800  | -0.5              | 1494              | -747                             | 0.25                | 2232036             |
| 6           | 5400  | 0.5               | 2094              | 1047                             | 0.25                | 4384836             |
| 7           | 4200  | 1.5               | 894               | 1341                             | 2.25                | 799236              |
| 8           | 1800  | 2.5               | -1506             | 3765                             | 6.25                | 2268036             |
| 9           | 8100  | 3.5               | 4794              | 16779                            | 12.25               | 22982436            |
| 10          | 960   | 4.5               | -2346             | -10557                           | 20.5                | 5503716             |
| Total<br>55 | 33060 |                   |                   | 18270                            | 82.5                | 58755240            |

Représentation du nuage de points ( en annexe)

1-b) Ecrivons l'équation de la droite de Mayer

$$y = ax + b \text{ avec } a = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y})}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \text{ et } b = \bar{y} - a\bar{x}$$

$$a = \frac{18270}{82.5} \Rightarrow a = 221.45$$

$$b = 3306 - 5.5 \times 221.45 \Rightarrow b = 2088.03$$

$$y = 221.45x + 2088.03$$

2-a) Calculons la corrélation linéaire  $r$

On sait que parfois  $r = \sqrt{a \cdot a'}$  où  $(a')$  est le coefficient de la droite de régression de  $x$  en fonction de  $y$

$$\gamma = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y})}{\sum (y_j - \bar{y})^2} = \frac{18270}{58755240} \Rightarrow \boxed{\gamma = 0.00031 = a'}$$

$$b = \bar{x} - \gamma \bar{y} = 5.5 - 3306(0.00031) \Rightarrow \boxed{b = 4.47}$$

$$\text{Par la suite } r = \sqrt{\gamma \cdot a} = \sqrt{0.00031 \times 221.45}$$

$$\boxed{r = 0.26}$$

2-b) Justification de lien

Comme  $r \notin ]0,87;1]$  le lien qui existe entre les  $x$  et  $y$  n'est pas fort

### Exercice n°14

$$1) \quad \mathcal{G}_n = v_n - 6 \Rightarrow \mathcal{G}_{n+1} = v_{n+1} - 6 \Rightarrow \mathcal{G}_{n+1} = \frac{1}{3}v_n + 4 - 6 = \frac{1}{3}v_n - 2 \Rightarrow \mathcal{G}_{n+1} = \frac{1}{3}(v_n - 6)$$

$$\Rightarrow \mathcal{G}_{n+1} = \frac{1}{3}\mathcal{G}_n \quad \text{Donc } \mathcal{G}_n \text{ est une suite géométrique de raison } \frac{1}{3}$$

1- Exprimons  $\mathcal{G}_n$  en fonction de  $n$  puis  $v_n$  en fonction de  $n$

$$\mathcal{G}_n = v_0 q^n \text{ or } \mathcal{G}_0 = v_0 - 6 \Rightarrow \mathcal{G}_0 = 3 - 6 \Rightarrow \mathcal{G}_0 = -3$$

$$\mathcal{G}_n = -3 \left( \frac{1}{3} \right)^n \Rightarrow \mathcal{G}_n = -\frac{1}{3^{n-1}}$$

$$\mathcal{G}_n = v_n - 6 \Leftrightarrow v_n = \mathcal{G}_n + 6 \Leftrightarrow \boxed{v_n = -\frac{1}{3^{n-1}} + 6}$$

2- Déterminons  $n_0$

$$v_n > 6 - 10^{-10} \Rightarrow -\frac{1}{3^{n-1}} + 6 > 6 - 10^{-10}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3^{n-1}} > -10^{-10} \Rightarrow 3^{n-1} > 10^{10}$$

$$\Rightarrow \log(3^{n-1}) > \log(10^{10}) \Rightarrow (n-1)\log(3) > 10$$

$$n-1 > \frac{10}{\log 3} \Rightarrow n > \frac{10}{\log 3} + 1 \text{ avec } \log 3 = 0.47712 \Leftrightarrow \boxed{n_0 = 22}$$

## EXERCICE 15

| affirmation                                                                        | V ou F |
|------------------------------------------------------------------------------------|--------|
| 1-G1 est le milieu du segment $[CI]$                                               | V      |
| 2-G1 est le barycentre de $\left\{(J;2);(C;\frac{2}{3})\right\}$                   | V      |
| 3- pour tout m, distinct de $-1/3$ , $\vec{AG}_m$ est colinéaire à $\vec{AG}_{-1}$ | V      |
| 4-pour tout point M, $\vec{V}_M = \vec{AB} + 2\vec{AC}$                            | F      |
| 5- $IBG_{-\frac{1}{2}}$ est un triangle rectangle                                  | V      |
| 6- pour tout point P de $(AG_{-1})$ , il existe un réel m tel que $P = G_m$        | F      |

1- On utilise la propriété d'associativité du barycentre,  
On obtient :

G1 barycentre de  $\{(A;1);(B;1);(C;2)\}$

G1 barycentre de  $\{(I;2);(C;2)\}$

C'est-à-dire G1 est milieu du segment  $[CI]$

2- On a par définition du barycentre :

$$\vec{G_1A} + \vec{G_1B} + 2\vec{G_1C} = \vec{0}$$

Comme J est le centre de gravité du triangle ABC, on a :

$$\vec{G_1A} + \vec{G_1B} + \vec{G_1C} = 3\vec{G_1J}$$

On en déduit que  $3\vec{G_1J} + \vec{G_1C} = \vec{0}$  et en multipliant par  $\frac{2}{3}$  :  $2\vec{G_1J} + \frac{2}{3}\vec{G_1C} = \vec{0}$ . cela montre que

G1 est le barycentre de  $\left\{(J;2);(C;\frac{2}{3})\right\}$

3- Si  $m \neq -\frac{1}{3}$ , la somme des coefficients  $1 + m + 2m$  n'est pas nulle donc  $G_m$  existe et :

$$\vec{AG}_m = \frac{1}{1+3m}(m\vec{AB} + 2m\vec{AC}) = \frac{m}{1+3m}(\vec{AB} + 2\vec{AC})$$

On obtient plus particulièrement dans notre cas,

$$\vec{AG}_{-1} = \frac{-1}{1-3}(\vec{AB} + 2\vec{AC}) = \frac{1}{2}(\vec{AB} + 2\vec{AC})$$

Ce qui donne en remplaçant dans l'expression

$$\vec{AG}_m = \frac{2m}{1+3m}\vec{AG}_{-1}$$

de  $\vec{AG}_m$ .

Les vecteurs  $\vec{AG}_m$  et  $\vec{AG}_{-1}$  sont donc colinéaires.

4- Pour tout point M du plan, on obtient :  $\vec{V}_M = 3\vec{MA} - \vec{MA} - \vec{AB} - 2\vec{MA} - 2\vec{AC}$

$$\vec{V}_M = -\vec{AB} - 2\vec{AC}$$

5- Par définition  $G_{-\frac{1}{2}}$  est le barycentre de

$$\left\{ (A;1); (B;-\frac{1}{2}); (C;-1) \right\}$$

On en déduit que :

$$\vec{BG}_{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} (\vec{BA} - \vec{BC}) = -2\vec{CA} = 2\vec{AC}$$

La droite  $(BG_{-\frac{1}{2}})$  est parallèle à (AC) et donc orthogonale à (AB) car le triangle ABC est rectangle en A.

comme I est le milieu du segment [AB], la droite  $(BG_{-\frac{1}{2}})$  est donc orthogonale à (BI) et le triangle  $IBG_{-\frac{1}{2}}$  est rectangle en B

6- Pour tout point P de  $(AG_{-1})$ , il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$ , tel que :  $\vec{AP} = \lambda \vec{AG}_{-1}$

D'après 3.  $P = G_m$  si et seulement si  $\lambda = \frac{2m}{1+3m}$

Cela équivaut à  $\lambda + 3\lambda m = 2m$  soit  $m(3\lambda - 2) = -\lambda$

- si  $\lambda \neq \frac{2}{3}$ , on trouve une solution m unique et il existe  $m \neq -\frac{1}{3}$  tel que  $P = G_m$
- si  $\lambda = \frac{2}{3}$ , cette équation  $0 \times m = -\frac{2}{3}$  n'a pas de solutions

le point P de  $(AG_{-1})$  défini par  $\vec{AP} = \frac{2}{3} \vec{AG}_{-1}$ , n'est pas un point  $G_m$

## EXERCICE 16

1a- déterminons une représentation paramétrique de la droite (AB)

Le vecteur  $\vec{AB}$  pour coordonnées (-3 ; 0 ; 5). Pour tout M(x ; y ; z) de l'espace,  $M \in (AB)$  si et seulement si il existe un réel t tel que  $\vec{AM} = t \vec{AB}$  soit

$$\begin{cases} x-3 = -3t \\ y = 0 \\ z-10 = 5t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3-3t \\ y = 0 \\ z = 10+5t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

1b- Montrons que la droite (AB) coupe l'axe des abscisses au point E (9 ; 0 ; 0).

On sait que l'axe des abscisses a pour équation :

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \text{ Soit } t = -2 \text{ donc } x = 9 \text{ la droite (AB) coupe l'axe des abscisses en E (9 ; 0 ; 0).}$$

1c- Justifions que les points A, B et C ne sont pas alignés.

La droite (AB) est incluse dans le plan  $(0; i; k)$  d'équation  $y = 0$  dont le point C ne fait pas partie. Ces points ne peuvent donc être alignés car le système : 
$$\begin{cases} 3-3t = 0 \\ 0 = 20 \\ 10+5t = 0 \end{cases} \text{ n'a pas de solution.}$$

- H est le pied de la hauteur issue de O dans le triangle OBC.

a- Justifions que  $(BC) \perp (OEH)$

La droite (BC) est incluse dans  $(0; \vec{j}; \vec{k})$  donc elle est orthogonale à (OE) qui a pour vecteur directeur  $\vec{i}$ .

(OH) est une hauteur du triangle OBC donc (BC) est orthogonale à (OH).

La droite (BC) étant orthogonale à (OE) et (OH), elle est orthogonale à deux droites sécantes du plan (OEH) elle est donc orthogonale au plan (OEH).

On en déduit qu'elle est perpendiculaire à toute droite du plan (OEH), en particulier à (EH).

La droite (EH) est la hauteur issue de E dans le triangle EBC.

b- Déterminons une équation cartésienne du plan (OEH)

Le plan (OEH) est orthogonal à (BC) et passant par O.

Le plan (OEH) est donc l'ensemble des points M de l'espace tels

$\vec{BC} \cdot \vec{OM} = 0$  soit  $0x + 20y - 15z = 0 \Leftrightarrow 4y - 3z = 0$ . une équation du plan (OEH) est :  $4y - 3z = 0$

c- Vérifions que le plan (ABC) admet pour équation cartésienne :  $20x + 9y + 12z - 180 = 0$

Les points A, B et C n'étant pas alignés ils définissent un plan et un seul. Il suffit donc de vérifier que leurs coordonnées vérifient l'équation proposée :

$$\begin{cases} 20 \times 3 + 12 \times 10 - 180 = 0 \\ 12 \times 15 - 180 = 0 \\ 9 \times 20 - 180 = 0 \end{cases} \text{ (Vraie)}$$

d- Montrons que le système  $\begin{cases} x = 0 \\ 4y - 3z = 0 \\ 20x + 9y + 12z - 180 = 0 \end{cases}$  a une solution unique.

Une équation de la droite (OH) est  $\begin{cases} x = 0 \\ 4y - 3z = 0 \end{cases}$  car la droite (OH) appartient au plan (yoz) d'équation :  $x = 0$  et au plan (OEH) d'équation:  $4y - 3z = 0$ , ces deux plans sont non parallèles, ils définissent donc la droite (OH).

La dernière équation  $3y + 4z - 60 = 0$  est une équation du plan (ABC). On résout ce système en cherchant les points d'intersections de (OH) avec le plan (ABC).

H  $\in$  (BC) donc il y aura donc qu'une seule solution au système, les coordonnées du point H

$$\begin{cases} x = 0 \\ 4y - 3z = 0 \\ 3y + 4z - 60 = 0 \end{cases} \text{ Soit } \begin{cases} x = 0 \\ 4y - 3z = 0 \\ 3y + 4z - 60 = 0 \end{cases} \text{ où } \begin{cases} x = 0 \\ 4y - 3z = 0 \\ 25y = 180 \end{cases}$$

Donc  $\begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{36}{5} \\ z = \frac{48}{5} \end{cases}$   $H(0; \frac{36}{5}; \frac{48}{5})$

e- Calcul de OH

$$OH^2 = (\frac{36}{5})^2 + (\frac{48}{5})^2 = 144 \text{ donc : } OH = 12.$$

Déduisons-en que EH = 15 et l'aire du triangle EBC

D'après le théorème de Pythagore ;

$$EH^2 = OE^2 + OH^2 = 81 + 144 = 225 \text{ donc } EH = 15.$$

Sachant que  $BC^2 = OB^2 + OC^2 = 15^2 + 20^2 = 625$   
soit  $BC = 25$ .

$$\text{Soit } A_{EBC} = \frac{1}{2} BC \times EH = \frac{1}{2} \times 25 \times 30 \Leftrightarrow A_{EBC} = \frac{375}{2} \text{ unité...d'aires}$$

- Exprimons de deux manières le volume du tétraèdre OEBC et déterminons la distance du point O au plan (ABC)

1<sup>ère</sup> méthode :

$$V = \frac{1}{3} A_{OBC} \times OE = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times OB \times OC \times OE = \frac{1}{2} \times 15 \times 20 \times 9 = 450$$

$$V = \frac{1}{3} A_{EBC} \times OH = \frac{1}{3} \times \frac{375}{2} \times d(O; (EBC)) = 450$$

Donc  $d(O; (EBC)) = 36/5$  or  $d(O; (ABC)) = d(O; (EBC))$  soit

$$d(O; (ABC)) = 36/5$$

2<sup>ème</sup> méthode

On peut également utiliser la formule donnant la distance d'un point à un plan

$$d(O; (ABC)) = \frac{|-180|}{\sqrt{20^2 + 9^2 + 12^2}} = \frac{180}{\sqrt{625}} = \frac{36}{5}$$

La distance du point O au plan (ABC) est 36/5 unités de longueur

## **EXERCICE 17**

### **PARTIE A**

1- Pour tout x réel, on a :

$$(x^2 + 2)^2 - 4x^2 = x^4 + 4 + 4x^2 - 4x^2 = x^4 + 4$$

2- On en déduit que, pour tout x réel,

$$x^4 + 4 = (x^2 + 2)^2 - (2x)^2 = (x^2 + 2 + 2x)(x^2 + 2 - 2x)$$

### **PARTIE B**

Soit n un entier,  $n \geq 2$  ; on considère  $A = n^2 - 2n + 2$  et  $B = n^2 + 2n + 2$ , d leur PGCD

1- D'après la partie A, on peut écrire :

$$n^4 + 4 = (n^2 + 2n + 2)(n^2 - 2n + 2), \text{ soit } n^4 + 4 = AB$$

Puisque  $n \geq 2$ , on a  $A = n(n - 2) + 2 \geq 2$  et  $B \geq 10$

Ainsi A et B sont des diviseurs de  $n^4 + 4$ , distincts de 1 et de produit  $n^4 + 4$ . donc  $n^4 + 4$  n'est pas premier

2- Soit m un diviseur de A qui divise n. on a donc m divise  $n^2 - 2n + 2$  et m divise  $n^2 - 2n$ , car m divise n. on en déduit que m divise la différence  $(n^2 - 2n + 2) - (n^2 - 2n) = 2$

3- Soit m diviseur commun à A et B puisque m divise A et B, il divise leur différence  $B - A = 4n$

4- On suppose que n est impair

a- n étant impair,  $n^2$  est impair ; par contre  $-2n + 2 = 2(-n+1)$  et  $2n + 2 = 2(n+1)$  sont pairs

On en déduit que A et B sont impairs, comme somme d'un nombre impair et d'un nombre pair. Si d était pair, 2 diviserait d et à fortiori 2 diviserait A et B, ce qui est impossible car ils sont impairs, d est donc impair  
 b- d'après la question 3, d qui est un diviseur commun à A et B divise 4n. comme d est impair, il est premier avec 4 (dont les seuls diviseurs sont 1, 2 et 4). D'après le théorème de GAUSS, d, qui divise 4n et est premier avec 4, divise n.

c- d'après la question 2, d qui divise A et n (d'après b) divise 2. Les seuls diviseurs de 2 sont 1 et 2 puisque d est impair,  $d = 1$

Conclusion : si n est impair, A et B sont premiers entre eux

5- on suppose que n est pair

a- on écrit  $A = n^2 - 2n + 2 = n(n-2) + 2$

les nombres n et n - 2 sont pairs, donc n(n-2) est divisible par 4. Le reste dans la division de A par 4 est 2. Donc A n'est pas divisible par 4.

b- A et B sont pairs car somme de trois nombres pairs ; d est donc pair. Il s'écrit alors  $d = 2p$  où  $p \in \mathbb{N}$

Mais d n'est pas divisible par 4, car sinon A le serait aussi, ce qui est faux, d'après a, l'entier p est donc impair.

c- d qui est un diviseur commun de A et B divise 4n, d'après la question 3, il existe donc  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $4n = kd = 2kp$  ; on en déduit que  $2n = kp$ , c'est-à-dire que p divise 2n.

Or p est impair donc premier avec 2. On en déduit, d'après la théorie de Gauss, que p divise n. Puisque  $d = 2p$ , p divise d et à fortiori p divise A. Or p divise n, donc d'après 2, p divise 2. Puisque p est impair on en déduit que  $p = 1$  et donc que  $d = 2$ .

Conclusion : si n est pair, le PGCD de A et B est 2.

## Exercice 18

1- Figure (voir feuille millimétrée)

A est l'origine du repère. A a pour affixe  $Z_A = 0$ ,  $\vec{AB} = 2\vec{u}$ , le point B a pour coordonnées (2 ; 0), pour affixe  $Z_B = 2$ .

$\vec{AD} = 3\vec{v}$ , le point D a pour coordonnées (0 ; 3), pour affixe  $Z_D = 3i$ .

ABCD est un rectangle. C a pour coordonnées (2 ; 3), pour affixe  $Z_C = 2 + 3i$ . La figure sera complétée au fur et à mesure.

Affixe du point E

Puisque E est l'image de B par la translation de vecteur  $\vec{DB}$ , on a  $\vec{BE} = \vec{DB}$

$\vec{BE}$  a pour affixe  $Z_B - Z_D = 2 - 3i$

$\vec{BE} = \vec{DB} \Leftrightarrow Z_E - 2 = 2 - 3i \Rightarrow Z_E = 4 - 3i$

2- Déterminons les réels a et b

F est le barycentre des points A, B et C affectés des coefficients a, b et 1 si et seulement si  $(a + b + 1) \neq 0$  et si on a :  $(a + b + 1)z_E = az_A + bz_B + cz_C$  soit  $(a + b + 1)(6 - i) = 2b + 2 + 3i$

Deux complexes sont égaux si et seulement si leurs parties réelles et imaginaires sont égales. On résoud dans  $\mathbb{R}^2$  le système  $\begin{cases} 6(a+b+1) = 2b+2(1) \\ -(a+b+1) = 3(2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6(a+b+1) = 2b+2(1) \\ -(a+b+1) = 3(2) \end{cases}$

En remplaçant  $(a+b+1)$  par  $(-3)$  dans (1) on a :

•  $9 = b + 1$  soit  $b = -10$ , on a alors dans (2)

•  $a = -3 - b - 1 = 6$ . Donc **a = 6 et b = -10**

3a- exprimons  $z'$  en fonction de  $z$

$S$  étant une similitude transformant le point  $M$  d'affixe  $Z$  en  $M'$  d'affixe  $z'$ , il existe deux nombres complexes  $c$  et  $d$  tels que l'on ait, pour tout complexe  $z$ ,  $Z' = Cz + d$

Puisque  $S$  transforme  $A$  en  $E$ , on a  $Z_E = CZ_A + d$  c'est-à-dire  $4 - 3i = d$

Puisque  $S$  transforme  $B$  en  $F$ , on a  $Z_F = CZ_B + d$  c'est-à-dire  $6 - i = 2c + d$

$$c = \frac{1}{2}(6 - i - d) = \frac{1}{2}(6 - i - 4 + 3i) = 1 + i$$

$Z' = (1+i)z + 4 - 3i$

b-centre de la similitude

Le centre  $I$  de la similitude est invariant  $S(I) = I$

Son affixe  $Z$  vérifie  $Z' = Z$

On résoud  $(1+i)Z + 4 - 3i = Z$

$(1+i)Z + 4 - 3i = Z$  équivaut à  $iz = -(4+3i)$

Et à  $Z = \frac{1}{i}(-4+3i) = -i(-4+3i)$  donc **I = (3 ; 4)**

$$Z = 3 + 4i$$

Rapport et angle de la similitude

La similitude a pour rapport le module du complexe  $C$  et pour angle l'argument de  $C$

$$C = 1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)i\right)$$

$$C = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \quad C \text{ a pour module } \sqrt{2} \text{ et pour argument } \frac{\pi}{4}$$

$S(I(3;4); \frac{\pi}{4}; \sqrt{2})$

c-Image de  $C$  et  $D$  par  $S$ , noté  $C'$  et  $D'$

$Z'_{C'} = (1+i)Z_C + 4 - 3i = (1+i)(2+3i) + 4 - 3i$

$$Z_{C'} = 2 + 5i + 4 - 3i - 3 \Rightarrow Z'_{C'} = 3 + 2i$$

$$Z_{D'} = (1+i)Z_D + 4 - 3i = (1+i)(3i) + 4 - 3i$$

$$Z_{D'} = 3i + 3i^2 + 4 - 3i = 1 \Rightarrow Z'_{D'} = 1$$

$C' = S(C) \text{ a pour affixe } (3+2i) \text{ et } D' = S(D) \text{ a pour affixe } 1$

d- L'aire de l'image par  $S$  du rectangle  $ABCD$

la similitude S transforme le rectangle ABCD en rectangle et les sommets du rectangle image sont les images des sommets du rectangle A, B, C et D, ce sont les points E, F, C' et D'.

la similitude, ayant pour rapport  $\sqrt{2}$ , multiplie les distances par  $\sqrt{2}$  et les aires par  $(\sqrt{2})^2 = 2$

le rectangle ABCD a pour aire  $AB \times AC = 2 \times 3 = 6$  et son image a pour aire  $6 \times 2 = 12$

**L'aire par S du rectangle ABCD est le rectangle EFC'D', d'aire 12**

#### 4a- Déterminons l'ensemble $\Omega$

F étant le barycentre des points A, B et C affectés des coefficients 6 ; - 10 et 1, on a pour tout point M du plan :  $6\vec{MA} - 10\vec{MB} + \vec{MC} = (6 - 10 + 1)\vec{MF} = -3\vec{MF}$

$$\|6\vec{MA} - 10\vec{MB} + \vec{MC}\| = \|-3\vec{MF}\| = 3\|\vec{MF}\| = 3MF$$

$\Omega$  est l'ensemble des points du plan vérifiant  $\|6\vec{MA} - 10\vec{MB} + \vec{MC}\| = 9$  ce qui équivaut à  $3MF = 9$

Soit MF =  $\Omega$  est le cercle de centre F et de rayon 3 3

#### b-Image de $\Omega$ par la similitude de S

la similitude S transforme le cercle de centre F' et de rayon 3 en un cercle de centre F' = S(F) et de rayon  $3\sqrt{2}$

$$Z_{F'} = (1+i)Z_F + 4-3i = (1+i)(6-i) + 4-3i$$

$$Z_{F'} = 6 + 5i - i^2 + 4 - 3i \Rightarrow Z'_{F'} = 11 + 2i$$

**$S(\Omega)$  est le cercle de centre F' de coordonnées (11 ; 2) et de rayon  $3\sqrt{2}$**

## EXERCICE 19

### 1- La Droite (OA) est tangente au cercle (C)

On se place dans le plan  $P_O$  d'équation  $x = 0$ , rapporté au repère  $(o; \vec{j}; \vec{k})$ . Les coordonnées de  $\vec{BA}$  sont

(+ 5 ; - 5) et les coordonnées de  $\vec{BA} \cdot \vec{OA} = 25 - 25 = 0$   $\vec{OA}$  sont (5 ; 5) donc :

La droite (OA) est orthogonale au rayon du cercle (C) passant par A donc c'est la tangente en A au cercle C. le triangle OAB est rectangle en A et on a :

$$OA = \sqrt{0^2 + 5^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

$$AB = \sqrt{(0-0)^2 + (0-5)^2 + (10-5)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$$

OA = AB le triangle OAB est un triangle rectangle isocèle en A, l'angle  $\hat{AOB}$  a pour mesure  $\frac{\pi}{4}$

### 2a- Démontrons que $\Gamma$ a pour équation $x^2 + y^2 = z^2$

Un cône de sommet O et d'axe (Oz) a pour équation  $x^2 + y^2 = z^2 \tan^2 \theta$  où  $\theta$  est l'angle que forme une génératrice avec l'axe (Oz). Comme ici l'angle  $\hat{AOB}$  formé est  $\frac{\pi}{4}$  donc  $x^2 + y^2 = z^2$   $\tan^2 \frac{\pi}{4} = 1$  d'où

une équation de  $\Gamma$  est :

b) Déterminons l'intersection du cône  $\Gamma$  et de la sphère  $\varphi$

la génératrice du cône étant tangente au cercle (C) qui génère la sphère  $\varphi$ . Le cône est tangent à cette sphère. Cette intersection est donc le cercle généré par la rotation de A autour de l'axe (Oz), c'est le cercle de centre D(0 ; 0 ; 5) passant par A. il a pour rayon 5.

c) Illustration (en annexe)

3-Intersection de  $\Gamma$  par le plan P1 d'équation  $x = 1$

Le plan P1 est parallèle à l'axe du cône  $\Gamma$  et ne contient pas cet axe, on sait que dans ce cas l'intersection est une hyperbole. (Figure 3)

4-Montrons que si  $M(x ; y ; z)$  un point du cône  $\Gamma$  dont les coordonnées sont des entiers relatifs non nuls, x et y ne peuvent pas être simultanément impairs

Raisonnons cela par l'absurde.

Supposons que x et y sont impairs. Il existe alors deux entiers m et n tels que  $x = 2m - 1$  et  $y = 2n - 1$

$$Z^2 = x^2 + y^2 = (2m - 1)^2 + (2n - 1)^2 = 2[2(m^2 + n^2 - m - n) + 1]$$

L'entier  $2(m^2 + n^2 - m - n) + 1$  est un nombre impair donc  $2[2(m^2 + n^2 - m - n) + 1]$  est un nombre pair divisible par 2 et non divisible par 4, ce qui est impossible dans le cas d'un carré. (x et y ne peuvent être simultanément impairs)

## EXERCICE 20

1- Soit U la suite définie par 
$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \frac{1}{2 - U_n} \end{cases}$$

a- Calculons  $U_1$ ,  $U_2$  et  $U_3$

$$U_1 = \frac{1}{2}; U_2 = \frac{1}{2 - \frac{1}{2}} = \frac{2}{3}; U_3 = \frac{1}{2 - \frac{2}{3}} = \frac{3}{4}$$

$$U_1 = \frac{1}{2}; U_2 = \frac{2}{3}; U_3 = \frac{3}{4}$$

b) Comparons les quatre premiers termes de la suite U aux quatre premiers termes de suite W

On a pour tout entier naturel n,  $U_n = W_n$

$$W_0 = 0 = U_0; W_1 = \frac{1}{2} = U_1; W_2 = \frac{2}{3} = U_2; W_3 = \frac{3}{4} = U_3$$

Pour tout entier naturel n,  $W_n = U_n$

On sait que  $U_0 = W_0$ , on suppose que pour un certain entier n,

$$U_{n+1} = \frac{1}{2 - U_n} = \frac{1}{2 - W_n} = \frac{1}{2 - \frac{n}{n+1}} = \frac{n+1}{n+2} = W_{n+1}$$

Par récurrence on a montré que pour tout entier  $\boxed{W_n = U_n}$  naturel  $n$ , on a

2- Soit la suite  $v$  de terme général  $v_n$  définie par  $v_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$

a- Montrons que  $v_1 + v_2 + v_3 = \ln \frac{1}{2} + \ln \frac{2}{3} + \ln \frac{3}{4} = \ln \frac{1 \times 2 \times 3}{2 \times 3 \times 4}$

Soit

$$\boxed{v_1 + v_2 + v_3 = -\ln 4}$$

b- Calcule en fonction de  $n$  de  $S_n = V_1 + V_2 + \dots + V_n$  et limite

Pour tout entier non nul  $n$ ,

$$S_n = V_1 + V_2 + \dots + V_n$$

$$S_n = \ln \frac{1}{2} + \ln \frac{2}{3} + \dots + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$$

$$S_n = \ln \frac{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n}{2 \times 3 \times 4 \times \dots \times (n+1)}$$

$$S_n = \ln \frac{1}{1+n} \text{ soit}$$

$$\boxed{S_n = -\ln(n+1)}$$

**Remarque** : on peut aussi utiliser une récurrence

Déterminons  $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} [-\ln(n+1)] \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = -\infty$$

## EXERCICE 21

Trouvons dans  $\mathbb{C}$ , les racines carrées de  $-3 - 4i$  et résolvons l'équation  $Z^2 - 2(2+i)Z + 6 + 8i = 0$

Soit  $Z = x + iy \Leftrightarrow Z^2 = (x + iy)^2 = x^2 + 2ixy - y^2$

$$(x + iy)^2 = -3 - 4i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -3(1) \\ xy = -2(2) \quad (xy < 0) \\ x^2 + y^2 = 5(3) \end{cases}$$

$$(1) + (3) \Rightarrow 2x^2 = 2 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1$$

Pour  $x = 1$  on a  $y = -2$  et  $x = -1, y = 2$  d'où les racines carrées de  $-3 - 4i$  sont  $1 - 2i$  et  $-1 + 2i$

Résolvons dans  $\mathbb{C}$ , l'équation  $z^2 - 2(2+i)z + 6 + 8i = 0$

$$\Delta' = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac = (2+i)^2 - (6+8i) \quad \boxed{\Delta' = -3 - 4i}$$

Comme les racines carrées de  $-3 - 4i$  sont :

$\delta 1 = 1 - 2i$  et  $\delta 2 = -1 + 2i$  on a :

$Z1 = b' + \delta 1$  et  $Z2 = b' + \delta 2$  avec  $b' = -b/2 = 2 + i$

$$Z_1 = 2 + i + 1 - 2i \quad \text{et} \quad Z_2 = 2 + i - 1 + 2i$$

$$Z_1 = 3 - i \quad \text{et} \quad Z_2 = 1 + 3i$$

$$S_c = \{ 3 - i ; 1 + 3i \}$$

## EXERCICE 22

Soit  $P(z) = iz^3 - (1 + 3i)z^2 + (7i - 2)z + 5 - i$

1- Calculons  $P(i)$

$$P(i) = i(i)^3 - (1 + 3i)i^2 + (7i - 2)i + 5 - i \Rightarrow P(i) = 1 + 1 + 3i - 7 - 2i + 5 - i$$

$$P(i) = 7 - 7 + 3i - 2i - i \Rightarrow P(i) = 0$$

2- Déduisons une factorisation de  $P(z)$  telle que :  $P(z) = (z - i)Q(z)$

Déterminons  $Q(z)$

$$d^0Q + d^0(z - i) = d^0P \quad \text{or} \quad d^0P = 3 \quad \text{et} \quad d^0(z - i) = 1$$

$$\text{donc } d^0P = 2 \quad \text{on aura } Q(z) \text{ sous la forme } Q(z) = Az^2 + Bz + C$$

$A, B$  et  $C$  sont à déterminer par la méthode des coefficients indéterminés

$$P(z) = (z - i)(Az^2 + Bz + C)$$

$$P(z) = Az^3 + Bz^2 + Cz - Aiz^2 - Biz - iC$$

$$P(z) = Az^3 + (B - Ai)z^2 + (C - iB)z - iC$$

Par identification :

$$\begin{cases} A = i \\ B - Ai = -1 - 3i \\ -iC = 5 - i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = i \\ B = -(2 + 3i) \\ C = 1 + 5i \end{cases}$$

Donc  $Q(z) = iz^2 - (2 + 3i)z + 1 + 5i$

3- Résolvons dans  $\mathbb{C}$  l'équation  $P(z) = 0$  sur le corps des complexes.

Les racines de  $P(z) = 0$  sont  $z = i$  et les racines de  $Q(z)$  telle que  $Q(z) = iz^2 - (2 + 3i)z + 1 + 5i = 0$

$$\Delta = (2 + 3i)^2 - 4i(1 + 5i)$$

$$\Delta = 15 + 8i$$

Les racines de  $Q$  sont  $z' = \frac{2 + 3i + \delta_1}{2i}$  et  $z'' = \frac{2 + 3i + \delta_2}{2i}$

Cherchons les racines carrées de  $15 + 8i$

Soit  $z = x + iy \Rightarrow z^2 = (x + iy)^2 = 15 + 8i$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 15(1) \\ xy = 4(2) \\ x^2 + y^2 = 17(3) \end{cases} \quad \text{et } (xy > 0)$$

$$(1) + (3) \Rightarrow 2x^2 = 32$$

$$\Rightarrow x^2 = 16$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -4 \\ y = -1 \end{cases}$$

Donc  $\delta_1 = 4 + i$  et  $\delta_2 = -4 - i$

Par conséquent  $z' = \frac{2+3i+4+i}{2i} = 2-3i$

$$z'' = \frac{2+3i-4-i}{2i} = 1+i$$

Les racines de  $P(z) = 0$  sont donc  $i$ ,  $2-3i$  et  $1$

$$S_c = \{ i ; 2-3i ; 1+i \}$$

+ i. Alors

### EXERCICE 23

Soit  $(E) = 4z^3 + 2(i-4)z^2 + 3(3-2i)z - 9 + \frac{9}{2}i = 0$

1- Montrons que le réel a est une racine de (E) si et seulement si :

$$4a^3 + 2(i-4)a^2 + 3(3-2i)a - 9 + \frac{9}{2}i = 0$$

C'est-à-dire si et seulement si la partie réelle et la partie imaginaire du premier membre sont nulles :

$$\begin{cases} 4a^3 - 8a^2 + 9a - 9 = 0 \\ 2a^2 - 6a + \frac{9}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a^3 - 8a^2 + 9a - 9 = 0 \\ 4a^2 - 12a + 9 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4a^3 - 8a^2 + 9a - 9 = 0 \\ (2a-3)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a = \frac{3}{2}}$$

2- Déterminons les solutions  $Z'$  et  $Z''$  de l'équation du second degré en  $Z$  :

$$4z^2 - 2(1-i)z + 6-3i = 0$$

$$\Delta = 4(1-i)^2 - 16(6-3i) \Rightarrow \Delta = 4(1-2i-1) - 96 + 48i \Rightarrow$$

$$\Delta = -96 + 40i$$

$\Leftrightarrow$

$$\Delta = 8(-12+5i)$$

$$\delta = x+iy \Leftrightarrow \delta^2 = (x+iy)^2 = -12+5i$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -12(1) \\ xy = 5/2(2) \\ x^2 + y^2 = 13(3) \end{cases}$$

$$(1) + (3) \Rightarrow 2x^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ y = \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ ou } y = -\frac{5\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\delta_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+5i) \text{ et } \delta_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}(1+5i)$$

Comme  $\delta^2 = -12+5i \rightarrow \Delta = 8\delta^2$  donc

$$z' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

D'où :

$$z' = \frac{2-2i+2(1+5i)}{8} = \frac{4+8i}{8} = \frac{1}{2} + i$$

$$z'' = \frac{2-2i-2(1+5i)}{8} = \frac{2-2i-2-10i}{8} = -\frac{3}{2}i$$

3- Montrons que les solutions de (E) sont a,  $z'$  et  $z''$ .

On a :  $\left[4z^3 - 2(1-i)z + 6 - 3i\right]\left(z - \frac{3}{2}\right) = 4z^3 + 2(i-4)z^2 + 3(3-2i)z - 9 + \frac{9}{2}i$

donc les racines de (E) sont les valeurs de Z qui annulent le premier membre précédent c'est-à-dire :  $\frac{3}{2}; \frac{1}{2} + i; -\frac{3}{2}i$

4- Montrons que le triangle AM'M'' est rectangle.

Les coordonnées de A, M' et M'' sont :

$A(3/2; 0); M'(1/2; 1); M''(0; -3/2)$

Prouvons que  $\vec{AM'} \cdot \vec{AM''} = 0$

$\vec{AM'}(-1; 1)$  et  $\vec{AM''}(-\frac{3}{2}; -\frac{3}{2})$

$$\vec{AM'} \cdot \vec{AM''} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} = \frac{3}{2} - \frac{3}{2} = 0$$

On a  $\vec{AM'} \cdot \vec{AM''} = 0$  donc le triangle AM'M'' est rectangle en A.

## EXERCICE 24

1- Linéarisons l'expression  $f(x) = 8 \cos^4 x + 6 \sin^2 x - 4$

On sait que  $\cos x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)$  et  $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$

Donc  $\cos^4 x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^4$  et  $\sin^2 x = \frac{(e^{ix} - e^{-ix})^2}{(2i)^2}$

$$\cos^4 x = \frac{1}{16}(e^{4ix} + 4e^{3ix}e^{-ix} + 6e^{2ix}e^{-2ix} + 4e^{ix}e^{-3ix} + e^{-4ix})$$

$$\cos^4 x = \frac{1}{16}(e^{4ix} + e^{-4ix} + 4e^{2ix} + 4e^{-2ix} + 6)$$

$$\cos^4 x = \frac{e^{4ix} + e^{-4ix}}{16} + \frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{4} + \frac{3}{8} \Rightarrow \cos^4 x = \frac{\cos 4x}{8} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{3}{8} (A)$$

$$\sin^2 x = \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right)^2 \Rightarrow \sin^2 x = -\frac{1}{4}(e^{2ix} + e^{-2ix} - 2) \Leftrightarrow \sin^2 x = -\frac{\cos 2x}{2} + \frac{1}{2} (B)$$

$$8(A) + 4(B) - 4 \Rightarrow f(x) = \cos 4x + 4 \cos 2x + 3 + 3 - 3 \cos 2x - 4$$

$f(x) = \cos 4x + \cos 2x + 2$

$$I = \int_0^{\pi/2} f(x) dx$$

Calculons

$$I = \int_0^{\pi/2} f(x) dx = \int_0^{\pi/2} (\cos 4x + \cos 2x + 2) dx$$

$$I = \left[ \frac{1}{4} \sin 4x + \frac{1}{2} \sin 2x + 2x \right]_0^{\pi/2}$$

$$I = \left(\frac{1}{4} \sin\left(4 \times \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2} \sin\left(2 \times \frac{\pi}{2}\right) + 2 \times \frac{\pi}{2}\right)$$

$$I = \pi$$

## EXERCICE 25

### PARTIE I

$$P(z) = z^3 - 2(\sqrt{3} + i)z^2 + 4(1 + i\sqrt{3})z - 8i$$

1- Montrons que P(z) admet une solution imaginaire pure.

Soit  $Z_0 = ib$

$$P(ib) = (ib)^3 - 2(\sqrt{3} + i)(ib)^2 + 4(1 + i\sqrt{3})ib - 8i$$

$$P(ib) = -ib^3 + 2\sqrt{3}b^2 + 2ib^2 + 4ib - 4\sqrt{3}b - 8i$$

Par identification on a :

$$\begin{cases} i(-b^3 + 2b^2 + 4b - 8) = 0 \\ 2\sqrt{3}b^2 - 4\sqrt{3}b = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -b^3 + 2b^2 + 4b - 8 = 0 \\ 2\sqrt{3}b(b - 2) = 0 \end{cases}$$

$$b \neq 0; b - 2 = 0 \Rightarrow b = 2 \text{ donc } Z_0 = 2$$

2- Réolvons l'équation  $P(z) = 0$  telle que  $P(z) = (z - 2i)Q(z)$

Déterminons Q(z) par division Euclidienne

|                                                     |                        |
|-----------------------------------------------------|------------------------|
| $Z^3 - 2(\sqrt{3} + i)Z^2 + 4(1 + i\sqrt{3})Z - 8i$ | $Z - 2i$               |
| $-(Z^3 - 2iZ^2)$                                    |                        |
| $0 \quad -2\sqrt{3}Z^2 + (4 + 4i\sqrt{3})Z - 8i$    |                        |
| $-(-2\sqrt{3}Z^2 + 4i\sqrt{3}Z)$                    | $Z^2 - \sqrt{3}2Z + 4$ |
| $0 \quad 4Z - 8i$                                   |                        |
| $-(4Z - 8i)$                                        |                        |
| $0$                                                 |                        |

$$\text{Soit } Q(z) = z^2 - 2\sqrt{3}z + 4$$

$$\Delta = (2\sqrt{3})^2 - 4^2 = 12 - 16$$

$$\Delta = -4 = (2i)^2 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \pm 2i$$

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$z_1 = \sqrt{3} - i \text{ et } z_2 = \sqrt{3} + i$$

Sous forme trigonométrique et exponentielle

$$z_0 = 2i \quad |z_0| = 2$$

$$\theta \begin{cases} \cos \theta = 0 \\ \sin \theta = 1 \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$Z_0 = 2(\cos \pi/2 + i \sin \pi/2) \dots \text{et} \dots Z_0 = 2e^{i\pi/2}$$

$$z_1 = \sqrt{3} - i$$

$$\theta \begin{cases} \cos \theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta_1 = -\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{6} \dots \text{et } \Omega = 2$$

$$Z_1 = 2(\cos(-\pi/6) + i \sin(-\pi/6)) = 2e^{-i\pi/6}$$

$$z_2 = \sqrt{3} + i \Rightarrow |z_2| = 2$$

$$\theta_2 \begin{cases} \cos \theta_2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta_2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_2 = \frac{\pi}{6}$$

$$Z_2 = 2(\cos(\pi/6) + i \sin(\pi/6)) = 2e^{i\pi/6}$$

## PARTIE II

1) Plaçons les points dans le repère orthonormé (en annexe)

2) Montrons que A, B et C sont sur le cercle de centre O

$$|OB| = |\sqrt{3} + i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1} = 2$$

$$|OA| = |\sqrt{3} - i| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1} = 2$$

$$|OC| = |2i| = \sqrt{2^2} = 2$$

$$OB = OA = OC = \text{rayon} = 2$$

3) La nature du quadrilatère OABC

OABC est un losange car  $OA = AB = BC = OC$  et  $\vec{OA} \cdot \vec{OC} \neq 0$  ( $\vec{BC} \cdot \vec{BA} \neq 0$  pas nécessaire)

$$\vec{OA} \cdot \vec{OC} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 - 2$$

$$\vec{OA} \cdot \vec{OC} = -2.$$

## **EXERCICE 26**

Soit (E) :  $z \in \mathbb{C}, z^3 + (6 - 5i)z^2 + (1 - 20i)z - 14 - 5i = 0$

1-a) Vérifions que i est une solution de (E) .

$$i^3 + (6 - 5i)i^2 + (1 - 20i)i - 14 - 5i = -i - 6 + 5i + i + 20 - 14 - 5i = 0$$

Il s'ensuit alors que i est une solution de (E).

1-b) Déterminons les réels a, b et c telle que (E) :  $(z - i)(az^2 + bz + c)$

$$(E) : az^3 + bz^2 + cz - iaz^2 - ibz - ic \Rightarrow (E) : az^3 + (b - ia)z^2 + (c - ib)z - ic$$

Par identification on a : 
$$\begin{cases} a = 1 \\ b - ia = 6 - 5i \\ c - ib = 1 - 20i \\ ic = 14 + 5i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 6 - 4i \\ c = 5 - 14i \end{cases}$$

Donc (E) :  $z \in \mathbb{C}, (z - i)[z^2 + (6 - 4i)z + 5 - 14i]$

1-c) Résolvons dans  $\mathbb{C}$ , l'équation (E') :  $z^2 + (6 - 4i)z + 5 - 14i = 0$

$$\Delta = (6 - 4i)^2 - 4(5 - 14i)$$

$$\Delta = 8i$$

$$\text{Posons : } z = x + iy \Rightarrow z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 8(1) \\ xy = 4(2) \\ x^2 - y^2 = 0(3) \end{cases}$$

$$\text{On a : } (1) + (3) = 2x^2 = 8 \Rightarrow x = -2 \dots \text{ou} \dots x = 2$$

$$(2) \Rightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

$$\text{Donc nous avons } \delta_1 = -2 - 2i \dots \text{et} \delta_2 = 2 + 2i$$

$$z_1 = \frac{-b + \delta_1}{2a} \dots \text{et} \dots z_2 = \frac{-b + \delta_2}{2a}$$

$$z_1 = \frac{4i - 6 - 2 - 2i}{2} = -4 + i \quad \Rightarrow S_C = \{i; -4 + i; -2 + 3i\}$$

$$z_2 = \frac{4i - 6 + 2 + 2i}{2} = -2 + 3i$$

2- ) Soient les points A , B , et C d'affixes respectives  $i, -2 + 3i \dots \text{et} \dots -4 + i$

a ) Voir feuille millimétrée

b) Ecrivons le nombre complexe  $Z = \frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$

$$Z = \frac{i - 2 - 3i}{-4 + i + 2 - 3i} = \frac{2 - 2i}{-2 - 2i} \Leftrightarrow Z = i$$

Sous forme trigonométrique, on a :  $|Z| = 1$  et  $\theta = \begin{cases} \cos \theta = 0 \\ \sin \theta = 1 \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$  alors  $Z = i \sin \frac{\pi}{2}$

c) Déduisons que le triangle ABC est rectangle et isocèle en B.

$$\begin{aligned} |z_A - z_B| &= |2 - 3i + i| = 2\sqrt{2} \\ |z_C - z_B| &= |-4 + i + 2 - 3i| = 2\sqrt{2} \Rightarrow |z_A - z_B| = |z_C - z_B| \end{aligned}$$

Alors le triangle ABC est rectangle et isocèle en B.

3-) Soit S la similitude directe de centre A qui transforme C en B

a) Déterminons l'écriture complexe de S.

$$S(A) \rightarrow A$$

$$S(C) \rightarrow B$$

$$\text{Soit } z' = az + b$$

$$\begin{cases} az_A + b = z_A \\ az_C + b = z_B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(i) + b = i \\ a(-4 + i) + b = -2 + 3i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ai + b = i \dots (1) \\ -4a + ai + b = -2 + 3i \dots (2) \end{cases}$$

$$(2) - (1) \Rightarrow -4a = -2 + 2i \Leftrightarrow a = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$$

$$(1) \Rightarrow b = i - ai \Leftrightarrow b = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

Donc  $z' = \frac{1}{2}[(1-i)z - 1 + i]$

3-b) Calculons l'affixe de B'

$$z_{B'} = \frac{1}{2}[(1-i)z_B - 1 + i]$$

$$z_{B'} = \frac{1}{2}[(1-i)(-2+3i) + i - 1]$$

$$z_{B'} = 3i$$

4-) Justifions que le ABB' est rectangle et isocèle en B.

$$Z' = \frac{z_A - z_{B'}}{z_B - z_{B'}} = \frac{i - 3i}{-2 + 3i - 3i} \Leftrightarrow Z' = i$$

Calculons et vérifions que  $|z_A - z_{B'}| = |z_B - z_{B'}|$

$$|z_A - z_{B'}| = |-2i| = 2 \quad \text{et} \quad |z_B - z_{B'}| = |-2| = 2 \quad \text{d'où que} \quad |z_A - z_{B'}| = |z_B - z_{B'}|$$

Alors le triangle ABB' est rectangle et isocèle en B'.

## EXERCICE 27

Soit  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2}$

1-  $f$  existe si et seulement si  $x^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x+1) \neq 0$

$$\Leftrightarrow x \neq 1 \quad \text{et} \quad x \neq -1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{Df = ]-\infty; -1[ \cup ]-1; 1[ \cup ]1; +\infty[}$$

a-  $\forall x \in Df$ ,  $f$  est continue et dérivable donc  $f$  admet des primitives sur  $]-\infty; -1[$ ,  $]-1; 1[$  et  $]1; +\infty[$

b- montrons que  $\forall x \in Df$ ,  $f(x) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x-1)^2} \right]$

$$f(x) = \frac{1}{2} \left[ \frac{(x+1)^2 + (x-1)^2}{(x+1)^2(x-1)^2} \right] \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2} \left[ \frac{x^2 + 2x + 1 + x^2 - 2x + 1}{(x+1)^2(x-1)^2} \right]$$

$$f(x) = \frac{1}{2} \left[ \frac{2(x^2 + 1)}{(x+1)^2(x-1)^2} \right] \Rightarrow f(x) = \frac{x^2 + 1}{(x-1)^2(x+1)^2}$$

$$(x-1)^2(x+1)^2 = (x^2 + 2x + 1)(x^2 - 2x + 1) = x^4 - 2x^2 + 1 \quad (1)$$

$$(x^2 - 1)^2 = x^4 - 2x^2 + 1 \quad (2)$$

Donc d'après (1) et (2),  $f(x) = \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x-1)^2} \right]$

c- Dédudisons la primitive  $F(x)$  de  $f$

$$F(x) = -\frac{1}{2} \left[ \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1} \right] + c \Rightarrow F(x) = -\frac{1}{2} \left[ \frac{x+1+x-1}{(x+1)(x-1)} \right] + c \Rightarrow F(x) = -\frac{x}{x^2-1} + c$$

2-a- Déterminons une primitive de  $g$  avec  $g(x) = \frac{2x}{(x^2-1)^2}$

$$g(x) = \frac{(U)'}{U^2} \Rightarrow G(x) = -\frac{1}{U} + c \quad \text{avec } U = x^2 - 1$$

$$\boxed{G(x) = -\frac{1}{x^2 - 1} + c}$$

**2-b-** Déterminons une primitive de  $f + g$

$$f + g = \frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2} + \frac{2x}{(x^2 - 1)^2} \Rightarrow f + g = \frac{x^2 + 2x + 1}{(x^2 - 1)^2} \Rightarrow f + g = \frac{(x + 1)^2}{(x^2 - 1)^2}$$

$$f + g = \frac{(x + 1)^2}{[(x - 1)(x + 1)]^2} \Rightarrow f + g = \frac{(x + 1)^2}{(x + 1)^2(x - 1)^2} \Rightarrow f + g = \frac{1}{(x - 1)^2}$$

$$F + G = -\frac{1}{x - 1} + c$$

**2-c-** Dédudons une primitive  $F$  de  $f$

$$G(x) + F(x) = -\frac{1}{x - 1} \Rightarrow F(x) = -\frac{1}{x - 1} - G(x)$$

$$F(x) = -\frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x^2 - 1} \Rightarrow F(x) = \frac{x - 1 - (x^2 - 1)}{(x - 1)(x^2 - 1)} \Rightarrow F(x) = \frac{x - 1 - [(x - 1)(x + 1)]}{(x - 1)(x^2 - 1)}$$

$$F(x) = \frac{(x - 1)[1 - (x + 1)]}{(x - 1)(x^2 - 1)} \Leftrightarrow \boxed{F(x) = -\frac{x}{x^2 - 1} + c}$$

## EXERCICE 28 : BARYCENTRE

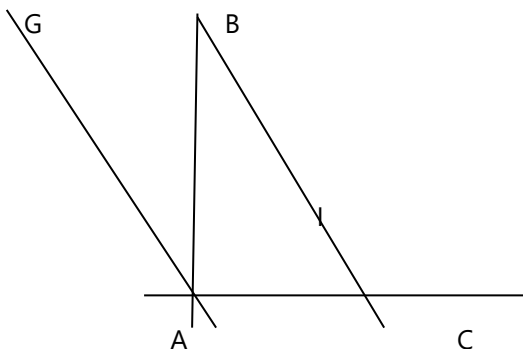
Soit  $G$  le barycentre des points  $A, B, C$  affectés respectivement des coefficients 1, 1, et -1.

La somme  $1 + 1 - 1 = 1$  est non nulle par suite,  $\vec{MA} + \vec{MB} - \vec{MC} = \vec{MG}$ .

Le barycentre des points  $A, B, C$  affecté respectivement des coefficients 2, -1, et 1 n'existe pas puisque la somme des coefficients est nulle.

Le vecteur  $2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}$  est un vecteur indépendant de  $M$ . puisque  $B$  et  $C$  ont le même coefficient, on fait intervenir l milieu de  $[BC]$  d'où  $2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC} = 2\vec{MI} + 2\vec{IA} - (\vec{MI} + \vec{IB} + \vec{MI} + \vec{IC})$

$$2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC} = 2\vec{IA}$$



$M$  appartient à  $E_1$  si et seulement si  $\|\vec{MG}\| = 2\|\vec{IA}\|$

Le triangle  $ABC$  étant rectangle en  $A$ , nous avons  $IA = IB = IC$  (propriété vue en classe de 5<sup>ème</sup>)  
De plus :  $BC^2 = 4a^2 + a^2$  soit  $BC = a\sqrt{5}$  et  $IA = a\sqrt{5}/2$

$M$  appartient à  $E_1$  si seulement si  $MG = a\sqrt{5}$

$E_1$  est donc le cercle de centre G et de rayon  $a\sqrt{5}$  passant par A

De plus  $\vec{GA} + \vec{GB} - \vec{GC} = \vec{0}$  d'où  $\vec{AG} = \vec{AB} - \vec{AC} \Rightarrow \vec{AG} = \vec{CB}$

2) Soit H le point tel que  $\vec{AH} = \frac{1}{2} \vec{AB} + 2 \vec{AC}$

$$a) \vec{AH} = \frac{1}{2} (\vec{AH} + \vec{HB}) + 2(\vec{AH} + \vec{HC})$$

$$\vec{0} = -3 \vec{HA} + \vec{HB} + 4 \vec{HC}$$

H est donc le barycentre des points A, B, C affectés des coefficients respectifs -3, 1, et 4 avec  $-3 + 1 + 4 \neq 0$

b) Soit F l'ensemble des points du plan tels que  $-3MA^2 + MB^2 + 4MC^2 = k$

A appartient à F si et seulement si :  $AB^2 + 4AC^2 = k$  or  $AB^2 = 4a^2$  et  $AC^2 = a^2$  donc k appartient à F si et seulement si  $k = 8a^2$ .

Déterminons l'ensemble  $E_2$  des points M tel que :  $-3MA^2 + MB^2 + 4MC^2 = 8a^2$ .

D'après la question nous savons déjà que  $A \in E_2$ .

Soit H le barycentre des points A, B, C affectés des coefficients -3, 1, 4. Nous avons :

- $3MA^2 + MB^2 + 4MC^2 = -3HA^2 + HB^2 + 4HC^2 + 2MH^2$
- $3HA^2 + HB^2 + 4HC^2 + 2MH^2 = 8a^2$  avec  $\vec{AH} = \frac{1}{2} \vec{AB} + 2 \vec{AC}$

$$\text{Or } \vec{AB} \perp \vec{AC} \text{ donc } AH^2 = \frac{1}{4} AB^2 + 4AC^2 = 5a^2$$

$$\vec{BH} = \vec{BA} + \vec{AH} \text{ soit } \vec{BH} = \frac{-1}{2} \vec{AB} + 2 \vec{AC} \Rightarrow BH^2 = \frac{1}{4} AB^2 + 4AC^2 = 5a^2$$

$$\vec{CH} = \vec{CA} + \vec{AH} \text{ soit } \vec{CH} = \frac{1}{2} \vec{AB} + \vec{AC} \Rightarrow CH^2 = \frac{1}{4} AB^2 + AC^2 = 2a^2$$

M appartient à  $E_2$  si et seulement si :

$$15a^2 + 5a^2 + 8a^2 + 2MH^2 = 8a^2$$

M appartient à  $E_2$  si et seulement si :  $MH^2 = 5a^2$  soit  $MH = a\sqrt{5}$

$E_2$  est donc le cercle de centre H et de rayon  $a\sqrt{5}$  (il passe par A et B). (Figure illustrative en annexe)

## EXERCICE29 : BARYCENTRE

1) Construction du point G.

G est le barycentre du système des points pondérés  $\{(A ; 3), (B ; -1), (C ; 2)\}$ ,

Donc :  $3\vec{GA} - \vec{GB} + 2\vec{GC} = \vec{0} \Rightarrow 4\vec{GA} - \vec{AB} + 2\vec{AC} = \vec{0}$  (après introduction de A entre les vecteurs GB et GC)

$$\Rightarrow \vec{AG} = \frac{-1}{4} \vec{AB} + \frac{1}{2} \vec{AC}$$

ainsi on a :  $3MA^2 - MB^2 + 2MC^2 = -32$

$$3(\vec{MG} + \vec{GA})^2 - (\vec{MG} + \vec{GB})^2 + 2(\vec{MG} + \vec{GC})^2 = -32$$

$$3MG^2 + 3GA^2 + 6\vec{MG} \cdot \vec{GA} - MG^2 - GB^2 - 2\vec{MG} \cdot \vec{GB} + 2MG^2 + 2GC^2 + 4\vec{MG} \cdot \vec{GC} = -32$$

$$4 MG^2 + 2 \vec{MG} (3 \vec{GA} - \vec{GB} + 2 \vec{GC}) + 3GA^2 - GB^2 + 2GC^2 = -32$$

$$4 MG^2 + 3 GA^2 - GB^2 + 2 GC^2 = -32$$

Cherchons les valeurs de  $AG^2$ ,  $GB^2$  et  $GC^2$

$$AG^2 = \left( \frac{1}{2} \vec{AC} - \frac{1}{4} \vec{AB} \right)^2$$

$$AG^2 = \frac{1}{4} AC^2 + \frac{1}{16} AB^2 - \frac{1}{4} \vec{AC} \cdot \vec{AB}$$

$$AG^2 = \frac{1}{4} AC^2 + \frac{1}{16} AB^2 \quad \text{car } (\vec{AB} \perp \vec{AC})$$

$$AG^2 = \frac{16}{4} + \frac{64}{16}$$

$$\mathbf{AG^2 = 8}$$

$$BG^2 = (\vec{BA} + \vec{AG})^2 \Rightarrow BG^2 = \left( \vec{BA} + \frac{1}{2} \vec{AC} - \frac{1}{4} \vec{AB} \right)^2$$

$$BG^2 = \left( \frac{1}{4} \vec{AC} - \frac{5}{4} \vec{AB} \right)^2 \Rightarrow BG^2 = \frac{1}{4} AC^2 + \frac{25}{16} AB^2 \Rightarrow BG^2 = 4 + 100 \Rightarrow \mathbf{BG^2 = 104}$$

$$CG^2 = (\vec{CA} + \vec{AG})^2 \Rightarrow CG^2 = \left( \vec{BA} + \frac{1}{2} \vec{AC} - \frac{1}{4} \vec{AB} \right)^2 \Rightarrow \mathbf{CG^2 = 8}$$

Le calcul de  $AG^2$ ,  $BG^2$  et  $CG^2$  conduit à :  $4 MG^2 + 24 - 104 + 16 = -32$  soit  $MG^2 = 8$

L'ensemble E des points M du plan vérifiant :  $3 MA^2 - MB^2 + 2 MC^2 = -32$  est donc le cercle de centre G et de rayon  $2\sqrt{2}$  passant par A et C.

2) soit I le milieu de [BD]

$$\|3\vec{MA} - \vec{MB} + 2\vec{MC}\| = \|\vec{MB} + \vec{MC}\|$$

$$\|4\vec{MG}\| = \|2\vec{MI}\| \quad (\text{Après introduction du point G entre les vecteurs } \vec{MA}, \vec{MB}, \text{ et } \vec{MC}) \text{ et } \vec{IB} + \vec{IC} = \vec{0}$$

$$\text{Nous avons } 4 MG^2 = MI^2 \text{ d'où } (2\vec{MG} - \vec{MI})(2\vec{MG} + \vec{MI}) = 0$$

Soit k le barycentre du système de points pondérés  $\{(G; 2), (I; -1)\}$  et L celui du système  $\{(G; 2), (I; 1)\}$ .

$$\text{On a alors } 3 \vec{MK} \cdot \vec{ML} = 0$$

L'ensemble F est donc le cercle de diamètre [KL].

Figure illustrative en annexe)

### **EXERCICE 30: SIMILITUDE**

- a) Nous avons

$$(\vec{OA}; \vec{IJ}) = (\vec{OA}; \vec{IO}) [2\pi]$$

$$(\vec{OA}; \vec{IJ}) = \frac{-3\pi}{4} [2\pi]$$

F est une similitude directe d'angle  $\frac{-3\pi}{4}$

$$\text{D'autre part, } IJ = \frac{OI}{2} \text{ et } OI = \frac{d}{\sqrt{2}} \text{ donc } \frac{IJ}{OA} = \frac{\frac{d}{2\sqrt{2}}}{d} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Le rapport de la similitude  $f$  est donc  $\frac{1}{2\sqrt{2}}$

b) l'image de la droite (AC),  $D'$ , par  $f$  est une droite passant par  $J$  et donc l'angle avec (AC) est égal à  $\pi/4$   $[2\pi]$ . La droite image de (AC) par  $f$  est donc la parallèle à (OA) passant par  $J$ . Comme une similitude directe conserve l'orthogonalité, donc la droite image de (OA) doit être orthogonale à  $D'$  et passer par  $I = f(O)$ . Le point image de  $C$  par  $f$  est donc le point d'intersection de ces deux droites d'où (OB) et (AC) sont orthogonales.

L'image de (OB) est donc la droite perpendiculaire à  $D'$  passant par  $J$ . L'image de (OC) par  $f$  est la droite (IC'). Or (OC) et (AB) sont parallèles. Donc l'image de la droite (AB) est parallèle à la droite (IC').

$B'$  est le point d'intersection des deux droites images.

c) Soit  $\Omega$  le centre de la similitude. Puisque  $f(O) = I$ , on a  $(\vec{\Omega O}; \vec{\Omega I}) = \frac{-3\pi}{4} [2\pi]$ . D'autre part  $(\vec{CO}; \vec{CI}) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$ . Donc nous avons  $(\vec{CO}; \vec{CI}) = (\vec{\Omega O}; \vec{\Omega I}) [\pi]$ , les points  $I, C$  et  $O$  n'étant pas alignés, les points  $\Omega, I, C$ , et  $O$  sont cocycliques.

De même  $(\vec{\Omega A}; \vec{\Omega J}) = \frac{-3\pi}{4} [2\pi]$  et  $(\vec{OA}; \vec{OJ}) = \frac{\pi}{4} [2\pi]$ . Donc  $(\vec{\Omega A}; \vec{\Omega J}) = (\vec{OA}; \vec{OJ}) [\pi]$ . Les points  $O, A$ , et  $J$  n'étant pas alignés donc  $\Omega, O, A$  et  $J$  sont cocycliques.

Déduisons une construction de  $\Omega$

$\Omega$  appartient donc aux cercles circonscrits aux triangles  $OAJ$  et  $OIC$ .  $\Omega$  est le point d'intersection de ces deux cercles distincts du point  $O$ .

d) le triangle  $OIC$  est rectangle isocèle en  $I$ , donc  $[OC]$  est un diamètre du cercle circonscrit au triangle  $OIC$ .  $\Omega$  appartient à ce cercle, donc la droite  $(\Omega O)$  est orthogonale à la droite  $(\Omega C)$ .

- Déterminons la forme complexe de  $f$

Le point  $I$  a pour affixe  $\frac{d}{2}(1+i)$  et le point  $J$  :  $\frac{d}{4}(1+i)$

L'expression complexe d'une similitude directe du plan est de la forme  $z' = az + b$  avec ( $a \in \mathbb{R}$  ou à  $\mathbb{C}$ ) et  $|a| \neq 1$  et  $b \in \mathbb{C}$ .

On sait que  $f(O) = I$  et  $f(A) = J$  donc on a :

$$\begin{cases} \frac{d}{2}(1+i) = a \cdot 0 + b \\ \frac{d}{4}(1+i) = a \cdot d + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = \frac{d}{2}(1+i) \\ a = \frac{1}{4} + \frac{i}{4} - \frac{1}{2}(1+i) \end{cases}$$

C'est-à-dire  $a = \frac{1}{4}(1+i)$  et  $b = \frac{d}{2}(1+i)$

Soit  $z' = -\frac{1}{4}(1+i)z + \frac{d}{2}(1+i)$

ou encore, comme  $a$  peut s'écrire sous la forme  $a = \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{\frac{-3i\pi}{4}}$ , on a l'expression complexe de  $f$  qui est

donc  $z' = \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{\frac{-3i\pi}{4}} z + \frac{d}{2}(1+i)$

## **EXERCICE 31: EQUATION DIFFERENTIELLE**

- Résolution de l'équation différentielle  $y'' - 3y' + \frac{5}{2}y = 0$  (1)

Comme c'est une équation différentielle de second degré à coefficients constants, sans second membre, on a comme équation caractéristique :

$$r^2 - 3r + \frac{5}{2} = 0$$

Calculons le discriminant  $\Delta$

$$\Delta = 9 - 10 = -1$$

$\Delta$  est négatif et  $-1 = i^2$  donc  $\sqrt{\Delta} = -i$  ou  $\sqrt{\Delta} = i$

$$\text{Donc } \left. \begin{aligned} r_1 &= \frac{3+i}{2} \text{ et } r_2 = \frac{3-i}{2} \\ \alpha &= \frac{3}{2} \text{ et } \beta = \frac{1}{2} \end{aligned} \right\} \text{ avec } \alpha \text{ la partie réelle et } \beta \text{ la partie imaginaire de } r_1.$$

Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , les solutions de (1) sont les fonctions  $f$  telles que

$$f(x) = \left( \lambda \cos \frac{1}{2}x + \mu \sin \frac{1}{2}x \right) e^{\frac{3x}{2}} \text{ où } \lambda \text{ et } \mu \text{ sont deux constantes.}$$

2- Résolution de l'équation différentielle  $y'' - 3y' + \frac{5}{2}y = e^{3x}$

a) Montrons que  $x \rightarrow \frac{2}{5}e^{3x}$  est une solution de (E).

$$\text{Nous avons } h(x) = \frac{2}{5}e^{3x} \text{ pour tout } x \text{ de } \mathbf{R}, \text{ donc } h'(x) = \frac{6}{5}e^{3x} \text{ et } h''(x) = \frac{18}{5}e^{3x},$$

ainsi  $h''(x) - 3h'(x) + \frac{5}{2}h(x) = e^{3x} \left( \frac{18}{5} - \frac{18}{5} + \frac{5}{2} \cdot \frac{2}{5} \right)$ . Par conséquent  $h''(x) - 3h'(x) + \frac{5}{2}h(x) = e^{3x}$ , donc  $h$  est une solution de (E)

b) Solution de (E).

On admet que  $f$  est la solution de (E) si et seulement si  $f - h$  est solution de (1). Or nous avons déterminé

les solutions de (1) ; ce sont les fonctions  $x \rightarrow \left( \lambda \cos \frac{1}{2}x + \mu \sin \frac{1}{2}x \right) e^{\frac{3x}{2}} + \frac{2}{5}e^{3x}$

Les fonctions de (E) sont les fonctions  $f$  telles que  $f(x) = \left( \lambda \cos \frac{x}{2} + \mu \sin \frac{x}{2} \right) e^{\frac{3x}{2}} + h(x)$  où  $\lambda$  et  $\mu$  sont des constantes. Les solutions de (E) sont donc les fonctions  $f$  telles que pour tout  $x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = \left( \lambda \cos \frac{1}{2}x + \mu \sin \frac{1}{2}x \right) e^{\frac{3x}{2}} + \frac{2}{5}e^{3x}$$

3- Déterminons la solution  $f$  de (E) dont la courbe passe par A  $(0; \frac{2}{5})$  et dont la tangente en a (C) a pour coefficient directeur 2

- Condition  $f(0) = \frac{2}{5}$  et  $f'(0) = 2$

Ici nous allons déterminer les valeurs de  $\lambda$  et  $\mu$ .

$$f'(x) = \left( -\frac{\lambda}{2} \sin \frac{x}{2} + \frac{\mu}{2} \cos \frac{x}{2} \right) e^{\frac{3x}{2}} + \frac{3}{2} \left( \lambda \cos \frac{x}{2} + \mu \sin \frac{x}{2} \right) e^{\frac{3x}{2}} + \frac{6}{5}e^{3x}$$

Cherchons  $f'(0)$ , nous avons alors 
$$\begin{cases} \sin o = o \\ \cos o = 1 \\ e^0 = 1 \end{cases} \Rightarrow \text{Alors } f'(0) = \frac{\mu}{2} + \frac{3}{2}\lambda \text{ et } f(0) = \lambda + \frac{2}{5}$$

Reprenons les conditions cherchées : pour que  $f$  réponde à la question, il faut et il suffit de résoudre le système

(1)

$$\begin{cases} f(0) = \frac{2}{5} \\ f'(0) = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda + \frac{2}{5} = \frac{2}{5} \\ \frac{\mu}{2} + \frac{3}{2}\lambda + \frac{6}{5} = 2 \end{cases} \quad (2)$$

(1)  $\Rightarrow \lambda = 0$  et  $\frac{\mu}{2} = \frac{4}{5}$  d'après (2) donc la résolution conduit à 
$$\begin{cases} \lambda = 0 \\ \mu = \frac{8}{5} \end{cases}$$

En conclusion, on a : la fonction est définie, pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = \left(\frac{8}{5} \sin \frac{x}{2}\right)e^{\frac{3x}{2}} + \frac{2}{5}e^{3x}$

### EXERCICE 32

Soit  $I = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{e^{-x}}{1-x} dx$

1) -  $f'(x) = \frac{-e^{-x}(1-x) - e^{-x}(-1)}{(1-x)^2}$  pour  $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$

$$f'(x) = \frac{-e^{-x} + xe^{-x} + e^{-x}}{(1-x)^2}$$

$f'(x) = \frac{xe^{-x}}{(1-x)^2}$  et  $f'(x) > 0$  pour tout  $x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$ , par suite,  $f$  est croissante sur l'intervalle  $[0; \frac{1}{2}]$

Tableau de variation de  $f$

|                  |   |                      |
|------------------|---|----------------------|
| $x$              | 0 | $\frac{1}{2}$        |
| Signe de $f'(x)$ | + |                      |
| $f(x)$           | 1 | $\frac{2}{\sqrt{e}}$ |

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{e}}$$

$$f(0) = \frac{e^0}{1} = 1 \quad \text{et}$$

$$\text{Par suite : } 1 \leq f(x) \leq \frac{2}{\sqrt{e}} \text{ pour tout } x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$$

$$1+x + \frac{x^2}{1-x} = \frac{(1+x)(1-x) + x^2}{(1-x)} \\ = \frac{1}{1-x}$$

$$\text{b- À l'aide du calcul précédent, nous avons pour tout } x \in \left[0; \frac{1}{2}\right], f(x) = e^{-x} \left(\frac{1}{1-x}\right)$$

$$f(x) = e^{-x} \left(1+x + \frac{x^2}{1-x}\right) \Rightarrow f(x) = e^{-x}(1+x) + \frac{x^2 e^{-x}}{1-x}$$

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} (1+x)e^{-x} dx + \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x) dx$$

c) Calcul de J

Utilisons une intégration par parties en posant :

$$u(x) = 1+x \Rightarrow u'(x) = 1$$

$$v'(x) = e^{-x} \Rightarrow v(x) = -e^{-x}$$

$$J = \left[-1(1+x)e^{-x}\right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}} -e^{-x} dx$$

$$J = \left(-\frac{3}{2}e^{-\frac{1}{2}}\right) + 1 - \left[e^{-x}\right]_0^{\frac{1}{2}} \Rightarrow J = -\frac{3}{2}e^{-\frac{1}{2}} + 1 + e^{-\frac{1}{2}} + 1 \Rightarrow J = 2 - \frac{5}{2}e^{-\frac{1}{2}}$$

d) D'après 1 :

$$1 \leq f(x) \leq \frac{2}{\sqrt{e}} \text{ Pour } x \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$$

$$x^2 \leq x^2 f(x) \leq \frac{2}{\sqrt{e}} x^2 \quad \text{Car } x^2 \geq 0$$

$$\text{D'où } \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 dx \leq \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x) dx \leq \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{\sqrt{e}} x^2 dx$$

$$\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{2}} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x) dx \leq \left[\frac{2}{\sqrt{e}} \frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{1}{24} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x) dx \leq \frac{1}{12\sqrt{e}}$$

e) Nous avons

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x) dx + J$$

$$I = \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x) dx + 2 - \frac{5}{2}e^{-\frac{1}{2}}$$

$$\text{Or } \frac{1}{24} \leq \int_0^{\frac{1}{2}} x^2 f(x) dx \leq \frac{1}{12\sqrt{e}}$$

$$\text{Par suite } \frac{1}{24} + 2 - \frac{5}{2} e^{-\frac{1}{2}} \leq I \leq \frac{1}{12\sqrt{e}} + 2 - \frac{5}{2} e^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{49}{24} - \frac{5}{2} e^{-\frac{1}{2}} \leq I \leq 2 - \frac{29}{12} e^{-\frac{1}{2}}$$

$$2 - \frac{29}{12} e^{-\frac{1}{2}} \approx 0,534 \quad \text{et} \quad \frac{49}{24} - \frac{5}{2} e^{-\frac{1}{2}} \approx 0,525$$

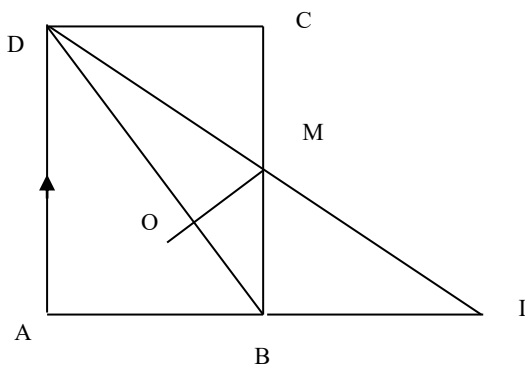
$$I = 0,53 \text{ à } 0,01 \text{ près}$$

### EXERCICE 33

1- S est la similitude directe du plan telle que  $S(A) = M$  et  $S(B) = D$ .

Les triangles ABM et MCD sont isocèles rectangles respectivement en B et C (puisque  $AB = BM$  et  $MC = CD$ ). Or on a aussi  $AB = CD$  et  $BM = MC$  donc

$$\underline{MD = \sqrt{2} \cdot AB}$$



S est une similitude directe de rapport  $\sqrt{2}$ .

De plus, nous avons  $(\vec{AB}; \vec{MD}) = (\vec{AB}; \vec{BM}) + (\vec{BM}; \vec{MD}) \quad [2\pi]$

$$(\vec{AB}; \vec{MD}) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \quad [2\pi]$$

$$(\vec{AB}; \vec{MD}) = \frac{3\pi}{4} \quad [2\pi]$$

S est une similitude directe d'angle  $3\pi/4$ .

2 a) Les points A, M et I ne sont pas alignés et nous avons :

$$(\vec{OA}; \vec{OM}) = \frac{3\pi}{4} \quad [2\pi] \quad (\text{puisque M est l'image de A par S})$$

$$(\vec{IA}; \vec{IM}) = -\frac{\pi}{4} \quad [2\pi] \quad \text{car IBM est un triangle rectangle isocèle en B. par conséquent on a :}$$

$$(\vec{OA}; \vec{OM}) = (\vec{IA}; \vec{IM}) [\pi]$$

Les points A, O, I et M sont donc cocycliques.

Déduisons que  $BM = BO = BA$

Le triangle AMI est rectangle en M car  $(AM) \perp (DM)$ . Le cercle circonscrit à ce triangle est donc le cercle de diamètre [AI].

Le point B est le milieu du segment [AI], donc A, O, M et I appartiennent au cercle de centre B et de rayon AB.

Ainsi, on a :  $BM = BO = BA$ .

b) on sait que  $DM = \sqrt{2} \cdot AB$

On a  $S(B) = D$ , donc  $OD = \sqrt{2} \cdot OB$ . Comme  $BO = BA$ , donc  $OD = \sqrt{2} \cdot AB$  et de ce fait on a  $DM = DO$ .

c)  $DM = DO$  par conséquent D appartient à la médiatrice [OM]. O est le symétrique de M par rapport à la droite (BD).

3a) Déterminons l'expression complexe de S et l'axe de O.

Les points A, B et D ont pour affixes respectives 0, 1 et  $2i$ .

Le point M admet pour affixe  $1 + i$ .

Toute similitude directe du plan peut s'écrire sous la forme  $z' = az + b$  (a et b étant deux éléments de  $\mathbb{C}$  avec  $a \neq 0$ ).

On sait que  $S(A) = M$  et  $S(B) = D$ , donc :

$$\begin{cases} 1+i = ax0 + b \\ 2i = ax1 + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1+i \\ b = -1+i \end{cases}$$

A tout point M d'affixe z, la similitude S fait correspondre le point M' d'affixe z' tel que  $z' = (-1+i)z + 1+i$ .

O d'affixe z est invariant par S, il vérifie l'équation  $z' = (-1+i)z + 1+i$ .

$$\text{Dans ce cas, on a } (2-i)z = 1+i \Rightarrow z = \frac{1+i}{2-i} \Rightarrow z = \frac{1+3i}{5}$$

$$\text{L'affixe de O est donc } \frac{1+3i}{5}$$

b- Calcul des distances BM et BO

$$BM = |1+i-1| = |i| \Leftrightarrow BM = 1.$$

$$BO = \left| \frac{1+3i}{5} - 1 \right| = \left| \frac{-4+3i}{5} \right|$$

$$BO = \sqrt{\frac{16+9}{25}} \Leftrightarrow BO = 1. \text{ Donc } \underline{BM = BO}$$

Vérifions que (OM)  $\perp$  (BD)

$$\frac{z_D - z_B}{z_M - z_O} = \frac{2i-1}{1+i-\frac{1+3i}{5}} \Rightarrow \frac{z_D - z_B}{z_M - z_O} = \frac{5i}{2} \in i\mathbb{R} : \text{ les vecteurs } \vec{OM} \text{ et } \vec{BD} \text{ sont donc orthogonaux,}$$

ce qui prouve que (OM)  $\perp$  (BD).

Sachant que (OM)  $\perp$  (BD) et que  $BM = BO$ , O est donc bien le symétrique de M par rapport à la droite (BD).

Figure (voir feuille millimétrée)

### **EXERCICE 34 : ROTATION**

1) Nous avons  $r_2 \circ r_1 (A) = r_2 (r_1 (A))$ .

$r_2 \circ r_1 (A) = r_2 (A)$ . Donc  $A' = r_2 (A)$ .

$AB = BA'$ , et les droites (IB) et (IA) sont orthogonales. Par conséquent, (IB) est médiatrice du segment [AA'] (le triangle ABA' est isocèle en B). I est le milieu du segment [AA'].

Nous avons  $(\vec{BA}; \vec{BB'}) = (\vec{BA}; \vec{BC}) + (\vec{BC}; \vec{BB'})[2\pi] \Leftrightarrow (\vec{BA}; \vec{BB'}) = -\frac{\pi}{3} - \frac{2\pi}{3}[2\pi]$

$(\vec{BA}; \vec{BB'}) = \pi[2\pi]$ . Les points A, B et B' sont donc alignés.

L'image du triangle équilatéral ABC par la rotation  $r_2$  est le triangle A'B'B. Par conséquent, on a  $B'B = B'A' = BA$  donc B est le milieu du segment [AB'].

2)  $r_1^{-1}$  est une rotation d'angle  $(-\pi/3)$ ;  $r_2 \circ r_1^{-1}$  est donc une rotation d'angle

- $\pi/3 - 2\pi/3$  c'est-à-dire un demi tour.

Nous avons  $r_2 \circ r_1^{-1}(C) = r_2(B) = B$ , or I est milieu du segment [BC], donc I est centre du demi tour  $r_2 \circ r_1^{-1}$ .

De plus  $r_2 \circ r_1^{-1}(M_1) = r_2(M) = M_2$ , I est donc milieu du segment  $[M_1M_2]$ .

$r_2 \circ r_1$  est la composée de deux rotations d'angles  $\pi/3$  et  $-2\pi/3$  et  $r_2 \circ r_1$  est une rotation d'angle  $-\pi/3$ .

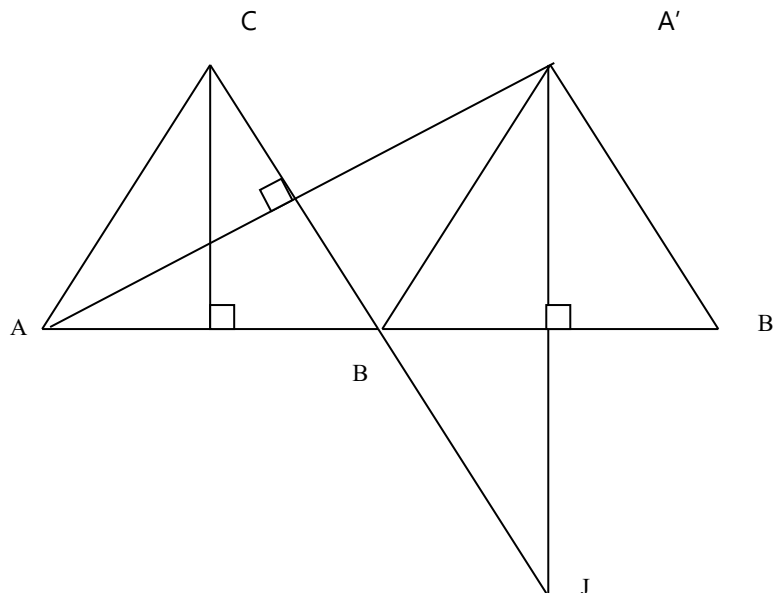
Le centre O de cette rotation est tel que  $OA = OA'$  et  $OB = OB'$ .

Par conséquent, O est le point d'intersection des médiatrices de [AA'].

$JB = BC = BA'$  donc JBA' est isocèle en B. Et  $A'B = A'B'$  donc A' appartient à la médiatrice de  $[BB']$

La médiatrice de  $[BB']$  est donc la droite (JA').

Le centre de  $r_2 \circ r_1$  est le point J



### **EXERCICE 35 : SIMILITUDE –ROTATION**

1) Figure (voir annexe)

ABCD est un carré direct de centre O.

2) Soit  $r$  la rotation de centre A et d'angle  $\pi/2$ .

a) L'image de la droite (BC) par  $r$

L'image de B par  $r$  est D (car  $AB = AD$  et  $\text{mes}(\vec{AB}; \vec{AD}) = \pi/2 [2\pi]$ ).

La droite image de (BC) est donc une droite orthogonale à (BC) passant par D c'est-à-dire (CD).

b) Déterminons les images par  $r$  de R et P

De plus  $(AR) \perp (AQ)$ . Donc l'image de (AR) par  $r$  est la droite (AQ).

$R \in (BC)$  donc  $r(R) \in (CD)$ .

$(AQ) \cap (CD) = \{Q\}$ , donc  $r(R) = Q$ .

De même,  $(AP) \perp (AS)$  et  $r(P) \in (CD)$  donc  $r(P) = S$ .

c) Nature des triangles RAQ et PAS

Comme  $AR = AQ$  et  $(AR) \perp (AQ)$ , le triangle RAQ est rectangle isocèle en A. De la même façon, on montre que APS est rectangle et isocèle en A.

3a) Précisons les images de R et P par r

Soit N le milieu du segment [PS] et M celui du segment [QR]. On considère la similitude directe S de centre A, d'angle  $\pi/4$  et de rapport  $\frac{1}{\sqrt{2}}$ .

(AM) est la médiatrice et la bissectrice dans le triangle isocèle rectangle AQR, donc :

$$(\vec{AR}; \vec{AM}) = \frac{\pi}{4} [2\pi] \text{ et } \frac{AM}{AR} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{Donc } \underline{S(R) = M.}$$

De même, en considérant le triangle isocèle rectangle APS on montre que  $S(P) = N$ .

b) L'image de b par la rotation de centre A et d'angle  $\pi/4$  est le point B' de [AC] tel que  $AB' = AB$ .

L'image de B' par l'homothétie de centre A et de rapport  $1/\sqrt{2}$  est le point B'' de [AC]

$$\text{tel que : } \frac{AB''}{AB'} = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{Donc } \underline{S(B) = O.}$$

$$\text{Nous avons également : } (\vec{BC}; \vec{OD}) = \frac{\pi}{4} [2\pi] \quad \text{et } \frac{OD}{BC} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

L'image du segment [BC] privé du point B est donc le segment [OD] privé du point O.

$$S(B) = O \text{ et } S(R) = M, \text{ donc } (\vec{BR}; \vec{OM}) = \frac{\pi}{4} [2\pi] \text{ et } M \in (OB).$$

Par conséquent, les points M, B, N et D sont alignés.

### EXERCICE 36 : ARITHMETIQUE

• Equation  $a^2 + 9 = 2^n$ , ( $a \in \mathbb{N}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  et  $n \geq 4$ )

1-a) a est impair

Soit  $a \in \mathbb{N}$ , pair, vérifiant  $a^2 + 9 = 2^n$ . On a alors  $9 = 2^n - a^2$ .

Puisque  $n \geq 1$ ,  $2^n$  est pair. Puisque a est pair,  $a^2$  est pair.

La somme (ou la différence) de deux entiers pair étant un entier pair,  $(2^n - a^2)$  est pair donc 9 est pair. Ceci est absurde, donc la proposition est fautive : il n'existe aucun entier a pair tel que  $a^2 + 9 = 2^n$ . Si a existe, a est impair.

b) Résolution de l'équation

On suppose qu'il existe un entier a impair tel que  $a^2 + 9 = 2^n$   $n \geq 4$ .  $2^n = 2^2 \times 2^{n-2}$ .

$2^{n-2}$  est un entier puisque  $n \geq 4$  donc  $n - 2 \geq 0$ .

$2^n$  est divisible par 4 et  $2^n \equiv 0 \pmod{4}$

Puisque  $a^2 + 9 = 2^n$ ,  $a^2 + 9 \equiv 0 \pmod{4}$

D'autre part  $9 = 4 \times 2 + 1$  donc  $9 \equiv 1 \pmod{4}$

a est impair, il existe un entier naturel k tel que  $a = 2k + 1$ . En conséquence :

$$a^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4(k^2 + k) + 1.$$

$$a^2 \equiv 1 \pmod{4} \text{ et } 9 \equiv 1 \pmod{4} \text{ donc } a^2 + 9 \equiv 2 \pmod{4}.$$

$(a^2 + 9)$  est congru à 0 et à 2, modulo 4, ce qui est absurde. Il n'existe donc aucun entier impair a tel que  $a^2 + 9 = 2^n$ .

Puisqu'il n'existe pas de pair non plus, il n'existe aucun entier a vérifiant  $a^2 + 9 = 2^n$  et l'équation proposée n'a aucune solution.

• Equation  $a^2 + 9 = 3^n$ , ( $a \in \mathbb{N}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  et  $n \geq 3$ )

2-a) si  $n \geq 3$ ,  $3^n$  est congru à 1 ou à 3 modulo 4.

Si n est pair, il existe  $p \in \mathbb{N}$  tel que  $n = 2p$ .

$$3^n = 3^{2p} = 9^p. \text{ Puisque } 9 \equiv 1 \pmod{4}, \text{ il existe } p \in \mathbb{N} \text{ tel que } n = 2p + 1.$$

$$3^n = 3^{2p+1} = 9^p \times 3.$$

$$9^p \equiv 1 \pmod{4} \text{ donc } 3^n \equiv 3 \pmod{4}.$$

Si  $n \geq 3$ ,  $3^n \equiv 1 \pmod{4}$  ou  $3^n \equiv 3 \pmod{4}$

b) Toute solution  $a$  est pair.

Dans la question 1b), on a montré que :

Si  $a$  est impair  $a^2 + 9 \equiv 2 \pmod{4}$ .

D'après le résultat précédent, s'il existe  $a \in \mathbf{IN}$  tel que  $a^2 + 9 = 3^n$ , alors  $(a^2 + 9)$  est congru à 1 ou à 3 modulo 4, ce qui est impossible lorsque  $a$  est impair. Si  $a$  existe,  $a$  est pair.

Si l'égalité  $a^2 + 9 = 3^n$  est vérifiée,  $n$  est pair.

Puisque  $a$  est pair, il existe un entier naturel  $k$  tel que  $a = 2k$ . En conséquence,  $a^2 = 4k^2$ .  $a^2$  est divisible par 4 et  $a^2 \equiv 0 \pmod{4}$ .

Alors  $a^2 + 9 \equiv 9 \equiv 1 \pmod{4}$ . L'égalité  $a^2 + 9 = 3^n$  n'est vérifiée que si  $3^n \equiv 1 \pmod{4}$ . Or  $3^n$  est congru à 1 modulo 4 si et seulement si  $n$  est pair.

Si  $a$  existe, nécessairement  $n$  est pair.

• l'équation n'a pas de solution

$n$  est pair et  $n \geq 3$ , il existe un entier naturel  $p$  tel que  $n = 2p$  et  $p \geq 2$ .

On a  $3^n = 3^{2p} = (3^p)^2$  donc  $a^2 + 9 = 3^n \Leftrightarrow (3^p)^2 - a^2 = 9$  et  $(3^p - a)(3^p + a) = 9$ .

9 et  $(3^p + a)$  sont diviseurs de l'entier 9.

De plus  $3^p - a \leq 3^p + a$  (car  $a \geq 0$ ).

Les diviseurs entiers naturels de 9 sont 1, 3, et 9.

$$(3^p - a)(3^p + a) = 9 \Leftrightarrow \begin{cases} 3^p - a = 1 \\ 3^p + a = 9 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} 3^p - a = 3 \\ 3^p + a = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3^p - a = 1 \\ 3^p + a = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^p = a + 1 \\ a + 1 + a = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^p = 5 \\ a = \frac{9-1}{2} = 4 \end{cases}$$

Ici, il n'existe aucune puissance de 3 égale à 5.

$$\begin{cases} 3^p - a = 3 \\ 3^p + a = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^p = a + 3 \\ a + 3 + a = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^p = 3 \\ a = 0 \end{cases}$$

$3^p = 3 \Leftrightarrow p = 1$ , mais on cherche  $p \geq 2$ , donc on ne trouve aucune solution.

Conclusion : lorsque  $n$  est un entier supérieur ou égal à 3, l'équation  $a^2 + 9 = 3^n$ , d'inconnue  $a$ , n'a pas de solution.

• Equation  $a^2 + 9 = 5^n$ , ( $a \in \mathbf{IN}$ ,  $n \in \mathbf{IN}$ ,  $n \geq 2$ )

3-) Si  $n$  est impair, l'équation n'a pas de solution.

Si  $n$  est impair, il existe un entier  $p$  tel que  $n = 2p + 1$ .

$$5^n = 5^{2p+1} = (5^2)^p \times 5.$$

$5 = 1 \times 3 + 2$  donc  $5 \equiv 2 \pmod{3}$  et  $5^2 \equiv 4 \equiv 1 \pmod{3}$ .

$5^n = 1^p \times 2 \equiv 2 \pmod{3}$ . Si  $a$  existe,  $a^2 + 9 \equiv 2 \pmod{3}$

Or 9, divisible par 3, est congru à 0 modulo 3.

Le reste de la division de  $a$  par 3 est 0, 1 ou 2 donc  $a$  est congru à 0, 1 ou 2 modulo 3.

$a^2$  est donc congru à 0, 1 ou 4 modulo 3 et 4 est congru à 1 modulo 3. Puisque 9 est congru à 0 modulo 3,

$(a^2 + 9)$  est congru à 0 ou 1 modulo 3 et ne peut pas être égal à  $5^n$  qui lui est congru à 2 modulo 3.

Si  $n$  est impair, l'équation n'a pas de solution

b) Résolution de l'équation.

Comme à la question 2-c), en supposant  $n$  pair, on pose  $n = 2p$ . Puisque  $n \geq 2$ ,  $p \geq 1$ , il suffit de remplacer, dans le raisonnement suivi  $3^p$  par  $5^p$  car  $a^2 + 9 = 5^n$  équivaut à

$$(5^p)^2 - a^2 = 9 \text{ et } (5^p - a)(5^p + a) = 9.$$

$(5^p - a)$  et  $(5^p + a)$  sont 2 diviseurs entiers naturels de 9 vérifiant

$1 \leq 5^p - a \leq 5^p + a \leq 9$  et il y a donc 2 possibilités.

$$\begin{cases} 5^p - a = 1 \\ 5^p + a = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5^p = a + 1 \\ a + 1 + a = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5^p = 5 \\ a = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 1 \\ a = 4 \end{cases}$$

$$\text{Ou } \begin{cases} 5^p - a = 3 \\ 5^p + a = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5^p = 3 \\ a = 0 \end{cases} \text{ sans solution.}$$

Conclusion : lorsque  $n \geq 2$ , l'équation  $a^2 + 9 = 5^n$  d'inconnue  $a$ , a une seule solution :  $a = 4$ .

### **EXERCICE 37 : ARITHMETIQUE**

#### 1) Divisibilité par 3

L'entier  $p$  est un nombre premier supérieur ou égal à 7, c'est donc un nombre impair, il n'est pas divisible par 3, donc le reste de  $p$  dans la division par 3 est 1 ou 2 ou encore -1.

Si  $p \equiv 1$  modulo 3, ou  $p \equiv -1$  modulo 3 que peut-on dire de  $p^4 - 1$  ?

Si  $p \equiv 1$  modulo 3 alors  $p^4 \equiv (1)^4$  modulo 3 et donc  $p^4 - 1 \equiv 0$  modulo 3, le nombre  $n = p^4 - 1$  est divisible par 3.

Si  $p \equiv -1$  modulo 3 alors  $p^4 \equiv (-1)^4$  modulo 3 et donc  $p^4 - 1 \equiv 0$  modulo 3, le nombre  $n = p^4 - 1$  est divisible par 3.

En conclusion dans les deux cas,  $n = p^4 - 1$  est divisible par 3.

Remarque

Une autre démonstration possible si  $p \equiv -1$  modulo 3 alors il existe un entier  $k$  tel que  $p = 3k - 1$ . On a alors en utilisant le binôme de Newton :

$$p^4 - 1 = (3k - 1)^4 = 81k^4 - 4 \times 27k^3 + 6 \times 9k^2 - 4 \times 3k + 1 - 1.$$

$$p^4 - 1 = 3(27k^4 - 36k^3 + 18k^2 - 4k).$$

Le nombre  $n$  est divisible par 3.

**NB** : on fera de même dans le cas de  $p \equiv 1$  (modulo 3)

#### 2) Divisibilité de $n$ par 16

L'entier  $p$  étant impair supérieur ou égal à 7, il existe un entier  $k \geq 3$  tel que  $p = 2k + 1$  on a alors :

$$p^2 - 1 = (2k + 1)^2 - 1 = 4k^2 + 4k + 1 - 1 = 4k(k + 1).$$

$$\text{De même } p^2 + 1 = (2k + 1)^2 + 1 = 4k^2 + 4k + 2 = 2(2k^2 + 2k + 1) \text{ d'où}$$

$$n = p^4 - 1 = 2(2k^2 + 2k + 1)4k(k + 1) = 8k(k + 1)(2k^2 + 2k + 1)$$

Le nombre  $n$  est divisible par 8, mais le produit  $k(k + 1)$  est le produit de deux entiers consécutifs, c'est donc un nombre pair, il existe donc un entier  $k$  tel que  $k(k + 1) = 2k$  d'où  $n = 16k(2k^2 + 2k + 1)$ . Le nombre  $n$  est divisible par 16.

#### 3) Reste de $p$ modulo 5

Le nombre  $p$  n'est pas divisible par 5 car  $p$  est un nombre premier donc les restes possibles sont 1, 2, 3, et 4.

Si  $p \equiv 1$  modulo 5 alors  $p^4 \equiv 1^4$  modulo 5. C'est-à-dire  $p^4 - 1 \equiv 0$  modulo 5 donc le nombre  $n$  est divisible par 5.

Si  $p \equiv 2$  modulo 5 alors  $p^4 \equiv 2^4$  modulo 5. C'est-à-dire  $p^4 \equiv 16$  modulo 5 ou encore

$p^4 - 1 \equiv 15$  modulo 5 mais  $15 \equiv 0$  modulo 5 donc le nombre  $n$  est divisible par 5.

Si  $p \equiv 4$  modulo 5 alors  $p^4 \equiv 4^4$  modulo 5. C'est-à-dire  $p^4 \equiv 256$  modulo 5 ou encore

$p^4 - 1 \equiv 255$  modulo 5 mais  $255 \equiv 0$  modulo 5 donc le nombre  $n$  est divisible par 5.

4a) Si  $a$  divise  $c$ , il existe un entier  $d$  tel que  $c = ad$ . Si  $b$  divise  $c$  il existe un entier  $d'$  tel que  $c = bd'$ . On a donc  $ad = bd'$ , l'entier  $a$  divise donc le produit  $bd'$ , mais  $a$  est premier avec  $b$  d'après le théorème de Gauss  $a$  divise  $d'$ , il existe donc un entier  $d'_1$  tel que  $d' = ad'_1$ . On a donc  $c = bad'_1$  l'entier  $ba$  divise  $c$ .

#### 4b) Montre que 240 divise $n$

Dans les questions 1, 2 et 3 on a montré que 3, 5 et 16 divisent  $n$  ; en utilisant la question précédente on a 3 divise  $n$ , 5 divise  $n$ , et 3 et 5 premiers entre eux. Donc 15 divise  $n$ . De même 15 divise  $n$  et 16 divise  $n$  et 15 et 16 premiers entre eux donc

$$15 \times 16 = 240 \text{ divise } n.$$

5) En utilisant le résultat précédent si les nombres  $P_1, \dots, P_{15}$  existent alors

$n_1 = P_1^4 - 1, n_2 = P_2^4 - 1, \dots, n_{15} = P_{15}^4 - 1$ , sont tous divisibles par 240 donc le nombre  $(P_1^4 - 1) + \dots + (P_{15}^4 - 1)$  est divisible par 240 donc le nombre  $A - 15$  est divisible par 240 donc il existe un entier B tel que  $A - 15 = 240B$ .

Soit  $A = 240B + 15 = 15(16B + 1)$ ; le nombre A est divisible par 15, il n'est pas premier.

### EXERCICE 38

#### PARTIE A

Notons  $E_1$  l'ensemble des 7 jetons de l'urne  $U_1$ . L'expérience consiste à tirer simultanément et au hasard trois jetons de l'urne. On suppose donc l'équiprobabilité des tirages et la probabilité d'un évènement est :

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(U_1)}$$

Trouvons  $\text{Card}(U_1)$

Puisqu'il n'y a pas d'ordre et pas de répétition possible d'un jeton lors du tirage, un tirage peut être considéré comme une combinaison de trois jetons de  $E_1$ . Donc  $\text{Card}(U_1) = C_7^3 = 35$

1- a) La probabilité d'obtenir une somme égale à 400 est :

Une somme égale à 400 ne peut être obtenue qu'en tirant 2 jetons marqués 100 parmi 4 de  $U_1$  et 1 jeton marqué 200 pris parmi les 3 de  $U_1$ .

Soit A cet évènement « la somme est 400 ».

$$\text{Card}(A) = C_4^2 \times C_3^1 = 6 \times 3 \quad \text{donc} \quad P(A) = \frac{6 \times 3}{35} \quad \Rightarrow \quad P(A) = \frac{18}{35}$$

1- b) La loi de probabilité de X est :

En tirant 3 jetons dans  $U_1$ , on peut :

- Tirer 3 jetons marqués 100, alors la somme X est 300
- Tirer 2 jetons marqués 100 et 1 jeton marqué 200, alors X = 400
- Tirer 1 jeton marqué 100 et 2 jetons marqués 200, alors X = 500
- Tirer 3 jetons marqués 200, alors X = 600

$$X = \{300; 400; 500; 600\}$$

On connaît la probabilité de l'évènement « X = 400 », calculée dans la question précédente, on a de même :

$$P(X = 300) = \frac{C_4^3}{35} = \frac{4}{35}$$

$$P(X = 500) = \frac{C_4^1 \times C_3^2}{35} = \frac{4 \times 3}{35} \quad \Rightarrow \quad P(X = 500) = \frac{12}{35}$$

$$P(X = 600) = \frac{C_3^3}{35} = \frac{1}{35}$$

| $X_i$      | 300            | 400             | 500             | 600            | Total |
|------------|----------------|-----------------|-----------------|----------------|-------|
| $P(X=X_i)$ | $\frac{4}{35}$ | $\frac{18}{35}$ | $\frac{12}{35}$ | $\frac{1}{35}$ | 1     |

2) Espérance mathématique

$$E(X) = 300 \times \frac{4}{35} + 400 \times \frac{18}{35} + 500 \times \frac{12}{35} + 600 \times \frac{1}{35}$$

$$E(X) = \frac{15000}{35} = \frac{3000}{7} \Leftrightarrow E(X) \approx 428$$

### **PARTIE B**

Notons  $E_2$  l'ensemble des 5 jetons de l'urne  $U_2$ . L'expérience consiste à tirer 1 jeton de  $U_1$ , puis un jeton de  $U_2$ . On suppose là encore l'équiprobabilité des tirages.

Un tirage peut être décrit par un couple  $(x; y)$  de  $E_1 \times E_2$  :  $x$  est le jeton tiré de  $U_1$  et  $y$  est le jeton tiré de  $U_2$ .

$\text{Card}(E_1 \times E_2) = \text{Card}(E_1) \times \text{Card}(E_2) = 7 \times 5 = 35$ . Donc il y a 35 tirages possibles

1) Probabilité de B « les 2 jetons portent le même nombre »

B est la réunion de deux événements incompatibles :  $B_1$  « les 2 jetons portent le nombre 100 »,  $B_2$  : « les 2 jetons portent le nombre 200 ».

Un tirage favorable à  $B_1$  est un couple  $(x; y)$  dans lequel  $x$  est un des 4 jetons marqué 100 de  $U_1$  et  $y$  est un des 3 jetons marqué 200 de  $U_2$ . il y a  $4 \times 3$  tirages possibles de  $B_1$ .

Et  $P(B_1) = \frac{4 \times 3}{7 \times 5}$ . De même, puisqu'il y a 3 jetons marqués 200 dans  $U_1$  et 2 jetons marqués 200 dans  $U_2$ ,

$$P(B_2) = \frac{3 \times 2}{7 \times 5}$$

$$P(B) = P(B_1) + P(B_2) = \frac{12}{35} + \frac{6}{35} = \frac{18}{35} \Rightarrow P(B) = \frac{18}{35}$$

2- Probabilité de C : « obtenir une somme égale à 300 »

En tirant un jeton dans  $U_1$ , puis un jeton dans  $U_2$ , une somme égale à 300 ne peut être obtenue qu'en tirant 1 jeton marqué 100 et un jeton marqué 200 c'est-à-dire 2 jetons portant des nombres différents.

$$C \text{ est l'évènement contraire de } B \text{ et } P(C) = P(\bar{B}) = 1 - P(B) = 1 - \frac{18}{35} \Rightarrow P(C) = \frac{17}{35}$$

3- Probabilité d'avoir extrait de  $U_1$  un jeton 100 sachant qu'on a obtenu une somme égale à 300.

Soit D l'évènement : « le jeton extrait de  $U_1$  est marqué 100 ». On cherche la probabilité de l'évènement D sachant que C est réalisé.

$$P_C(D) = \frac{P(D \cap C)}{P(C)} ; D \cap C \text{ est l'évènement « le jeton extrait de } U_1 \text{ est marqué 100 et la somme est 300 ».$$

C'est-à-dire le jeton de  $U_1$  est marqué 100 et celui extrait de  $U_2$  est marqué 200. Il y a  $4 \times 2$  couples  $(x; y)$  tels que  $x = 100$  et  $y = 200$ .

$$P(D \cap C) = \frac{4 \times 2}{35} = \frac{8}{35} \text{ et } P_C(D) = \frac{\frac{8}{35}}{\frac{17}{35}} = \frac{8}{17} \Rightarrow P_C(D) = \frac{8}{17}$$

### **EXERCICE 39: BARYCENTRE**

1- a) ABC est un triangle rectangle en A. Car

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-4 + 1 - 3i}{1 + i + 1 - 3i} \Rightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-3 - 3i}{2 - 2i} \Rightarrow \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-3}{2}i \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow (AC) \perp (AB)$$

$$b) z_G = \frac{4z_A + 3z_B + 5z_C}{4 + 3 + 5}$$

$$z_G = \frac{-21 + 15i}{12} \Rightarrow z_G = \frac{-7}{4} + \frac{5}{4}i$$

$$c) \vec{z}_{GA} = z_A - z_G$$

$$\vec{z}_{GA} = -1 + 3i + \frac{7}{4} - \frac{5}{4}i \Rightarrow \vec{z}_{GA} = \frac{3}{4} + \frac{7}{4}i$$

De même,  $\vec{z}_{GB} = \frac{11}{4} - \frac{1}{4}i$  et  $\vec{z}_{GC} = -\frac{9}{4} - \frac{5}{4}i$

d)  $\|4\vec{MA} + 3\vec{MB} + 5\vec{MC}\| = \|4\vec{MA} - 2\vec{MB} - 2\vec{MC}\|$

$$\Rightarrow \|4\vec{MG} + 4\vec{GA} + 3\vec{MG} + 3\vec{GB} + 5\vec{MG} + 5\vec{GC}\| = \|4\vec{MA} - 2\vec{MA} - 2\vec{AB} - 2\vec{MA} - 2\vec{AC}\|$$

$$\Rightarrow \|12\vec{MG}\| = \|-2\vec{AB} - 2\vec{AC}\| \text{ car } 4\vec{GA} + 3\vec{GB} + 5\vec{GC} = \vec{0}$$

$$\|12\vec{MG}\| = 2\|\vec{AB} + \vec{AC}\| \Leftrightarrow \|12\vec{MG}\| = 2\|\vec{AI} + \vec{IB} + \vec{AI} + \vec{IC}\| \Leftrightarrow \|12\vec{MG}\| = 4\|\vec{AI}\| \text{ car } \vec{IB} + \vec{IC} = \vec{0}$$

$12MG = 4AI \Rightarrow MG = \frac{1}{3}AI$  Donc l'ensemble (C) des points M du plan est le cercle (C) de centre G et de rayon  $\frac{1}{3}AI$

2- a)  $h(C) = \vec{CA} \cdot \vec{CB} + 2\vec{CB} \cdot \vec{CC} + 3\vec{CC} \cdot \vec{CA} \Leftrightarrow h(C) = \vec{CA} \cdot \vec{CB}$  or A est le projeté de B sur (AC)  
Donc  $h(C) = CA^2 \Rightarrow h(C) = 18$

$$h(G) = \vec{GA} \cdot \vec{GB} + 2\vec{GB} \cdot \vec{GC} + 3\vec{GC} \cdot \vec{GA} \text{ Or } \vec{GA} \cdot \vec{GB} = \frac{3}{4}x\frac{11}{3} + \frac{7}{4}x(-\frac{1}{4}) \Leftrightarrow \vec{GA} \cdot \vec{GB} = \frac{13}{8}$$

$$\vec{GB} \cdot \vec{GC} = \frac{11}{4}x\frac{-9}{3} - \frac{1}{4}x(-\frac{5}{4}) \Leftrightarrow \vec{GB} \cdot \vec{GC} = -\frac{47}{8}$$

$$\vec{GC} \cdot \vec{GA} = \frac{-9}{4}x\frac{3}{4} - \frac{5}{4}x\frac{7}{4} \Leftrightarrow \vec{GC} \cdot \vec{GA} = -\frac{31}{8}$$

$$\text{Donc } h(G) = \frac{13}{8} - 2x\frac{47}{8} - 3x\frac{31}{8} \Leftrightarrow h(G) = -\frac{87}{4}$$

b)  $h(M) = (\vec{MG} + \vec{GA}) \cdot (\vec{MG} + \vec{GB}) + 2(\vec{MG} + \vec{GA}) \cdot (\vec{MG} + \vec{GC}) + 3(\vec{MG} + \vec{GC}) \cdot (\vec{MG} + \vec{GA})$

En développant chacun de ces termes, on a :

$$h(M) = 6MG^2 + \vec{MG} \cdot (4\vec{GA} + 3\vec{GB} + 5\vec{GC}) + \vec{GA} \cdot \vec{GB} + 2\vec{GB} \cdot \vec{GC} + 3\vec{GC} \cdot \vec{GA} \text{ or } 4\vec{GA} + 3\vec{GB} + 5\vec{GC} = \vec{0}$$

et  $h(G) = \vec{GA} \cdot \vec{GB} + 2\vec{GB} \cdot \vec{GC} + 3\vec{GC} \cdot \vec{GA}$  donc  $h(M) = 6MG^2 + h(G)$

$$\begin{aligned} \text{c) } h(M) = 18 &\Leftrightarrow 6MG^2 + h(G) = 18 \Leftrightarrow 6MG^2 = 18 - h(G) \Leftrightarrow MG^2 = \frac{18 - h(G)}{6} \Leftrightarrow MG \\ &= \frac{53}{8} \end{aligned}$$

Or  $h(C) = 18 \Rightarrow C \in (\Gamma)$ . Donc  $MG^2 = GC^2 \Rightarrow MG = GC = \sqrt{\frac{53}{8}}$  D' où l'ensemble (Γ) des points M du plan est le cercle (C) de centre G et de rayon  $\sqrt{\frac{53}{8}}$ .

# PARTIE

# PROBLEMES

## PROBLEME 1

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$   
 $x \mapsto \frac{x^2 + 1}{2x}$  et  $(Cf)$  sa courbe de variation  $(0, i, j)$ .

- 1- Etudier les variations de  $f$ .
- 2- Montrer que la droite d'équation  $(\Delta): y = \frac{1}{2}x$  et l'axe des ordonnées sont asymptotes à  $(Cf)$  et tracer-les.
- 3- Montrer que la restriction  $g$  de  $f$  à  $]0;1]$  est une bijection de  $]0;1]$  sur un intervalle  $K$  à préciser.
- 4- Déterminer la bijection réciproque  $g^{-1}$  de  $g$ .
- 5- Dresser le tableau de variation de  $g^{-1}$ .
- 6- Tracer la courbe  $(\tau)$  de  $g^{-1}$  dans le même repère.

## **PROBLEME 2**

Soit la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R} - \{1\}$  par  $f(x) = |x+1| + \frac{1}{x-1}$

- 1- On suppose que :  $x > -1$ , écrire l'expression correspondante de  $f(x)$ .
- 2- Montrer que lorsque  $x \rightarrow -1$ ,  $\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}$  tend vers une limite que l'on indiquera.
- 3- On suppose que :  $x < -1$ , écrire l'expression correspondante de  $f(x)$ . Chercher la limite quand  $x \rightarrow -1$  de  $\frac{f(x)-f(-1)}{x+1}$
- 4- La fonction est-elle dérivable au point  $x = -1$  ?
- 5- Exprimer  $f'(x)$  en tout point de  $x$  où  $f$  est dérivable. Etudier les variations de  $f$ .
- 6- Soit  $(Cf)$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé (unité de longueur=2cm) Montrer que  $(Cf)$  admet trois droites asymptotiques.
- 7- Tracer la courbe  $(Cf)$  (on soignera le tracé au voisinage du point  $A$  de  $(Cf)$  d'abscisse -1).
- 8- Calculer  $S_1 = \int_{-\sqrt{2}}^{-1} f(x)dx$  et  $S_2 = \int_{-1}^0 f(x)dx$

## **PROBLEME 3**

Soit  $f$  la fonction numérique de la variable réelle  $x$ , définie par  $f(x) = \frac{x^2 + |x|}{|x-1|}$

- 1- Déterminer le domaine de définition de  $f$ . En envisageant plusieurs cas, écrire  $f(x)$  sans utiliser les symboles de valeur absolue.

Montrer que dans chaque cas, il existe trois constantes  $a, b$  et  $c$  telle que  $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$

- 2-Démontrer que  $f$  est continue sur  $Df$  et dérivable sur ce domaine privé de 0.
- 3- Etudier les dérivées à gauche et à droite de 0.
- 4- Etudier le sens de variation de  $f$  et tracer sa courbe dans un repère orthonormé. En déduire la position relative de cette courbe  $(Cf)$  et ses asymptotes.

## **PROBLEME 4**

### **Partie A**

Soit  $f$  la fonction numérique de la variable réelle définie par : 
$$\begin{cases} f(x) = x \ln x & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

- 1-  $f$  est-elle continue sur son domaine de définition ?
- 2-  $f$  est-elle dérivable sur  $Df$  ?
- 3- Etudier la fonction  $f$  ; construire sa courbe représentative  $(C)$  dans un repère orthonormé unité : 3cm

On précisera les équations de tangente aux points d'intersection de  $(C)$  et de l'axe des abscisses ainsi que la position de la courbe par rapport à ces tangentes.

### **Partie B**

Soit  $g$  la fonction numérique de la variable réelle définie par : 
$$\begin{cases} g(x) = -x \ln x & \text{si } x > 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$$

Etudier la fonction  $g$  et construire sa courbe représentative  $(C')$  dans le même repère.

Que peut-on dire de  $(C)$  et  $(C')$  ?

### **Partie C**

Soit  $h$  la fonction numérique de la variable réelle définie par : 
$$\begin{cases} h(x) = -x |\ln x| & \text{si } x > 0 \\ h(0) = 0 \end{cases}$$

- 1-  $h$  est-elle continue à droite en  $x_0 = 0$  ?
- $h$  est-elle continue en  $x_1 = 1$  ?
- 2-  $h$  est-elle dérivable à droite en  $x_0 = 0$  ?
- $h$  est-elle dérivable en  $x_1 = 1$  ?
- 3- Etudier la fonction  $h$  et tracer sa courbe représentative  $(\Gamma)$  dans le même repère de la partie A
- 4- Déterminer l'aire de la portion de plan délimitée par la courbe, l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = e$

- 1- soit  $F : [1; +\infty[ \rightarrow [0; +\infty[$   
$$x \mapsto x |\ln x|$$

Démontrer que  $F$  admet une application réciproque.

(On ne demande pas de calculer  $F^{-1}(x)$ ).

Tracer sa courbe représentative dans le même repère.

## **PROBLEME 5**

### **Partie A**

Soit  $f$  la fonction de  $\mathbf{IR}$  vers  $\mathbf{IR}$  définie par :

$$f(x) = 2e^{-|x|} - x + 2.$$

On désigne par  $(\Gamma)$  sa courbe représentative.

- 1- Etudier la continuité de  $f$  sur  $\mathbf{IR}$ .
- 2- Montrer que :  $\forall x \in \mathbf{IR}^*, \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 2 \frac{e^{-|x|}}{x} - 1$

La fonction  $f$  est-elle dérivable en 0 ?

- 3.a) Etudier les variations de  $f$ .

b) Montrer que  $(\Gamma)$  admet une asymptote oblique.

Etudier la position de  $(\Gamma)$  par rapport à  $(D)$ .

4- Construire  $(\Gamma)$ . Unité graphique 1cm sur les axes y compris les demi tangentes au point 0.

5- Soit  $g$  la restriction de  $f$  à l'intervalle  $[0; +\infty[$ . On désignera par  $(C)$  sa représentation graphique.

On considère la portion du plan comprise entre la courbe  $(C)$ , asymptote  $(D)$  et les droites d'équations

$x = 0$  et  $x = t$  ( $t$  réel strictement positif)

Calculer l'aire  $A(t)$  de cette portion du plan et calculer  $\lim_{t \rightarrow +\infty} A(t)$

### **Partie B**

Soit :  $R_*^+ \rightarrow R$

$$x \rightarrow \ln x + x + 1$$

a) Etudier la fonction  $\phi$ . Construire sa courbe représentative dans le même repère.

b) Déterminer l'aire du domaine limité par  $(\Gamma')$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = 1$  et  $x = e$ .

### **Partie C**

On considère la transformation  $T$  du plan  $P$  dans lui-même qui à tout  $M$  de coordonnées  $(x, y)$  et d'affixes  $z = x + iy$  associe le point  $T(M) = M'$  de coordonnées  $(x', y')$ , d'affixe  $z' = x' + iy'$  telle

$$\text{que : } z' = \frac{1}{2}(1 - i)z - 1.$$

1- Préciser la nature de la transformation  $T$  ainsi que ses éléments.

2- Calculer  $x'$  et  $y'$  en fonction de  $x$  et  $y$ .

3- Montrer que l'image de  $(C)$  par  $T$  est une partie de la courbe  $(\Gamma')$ . Préciser cette partie.

## **PROBLEME 6**

### Partie I

On considère la fonction  $f$  de  $\mathbf{R}$  vers  $\mathbf{R}$  définie par :

$$\begin{cases} f(x) = 2x - x \ln|x| & \text{si } x \neq 0 \\ f(0) = a & \text{avec } a \in \mathbf{R} \end{cases}$$

1- Détermine  $a$  de telle sorte que la fonction  $f$  soit continue en  $x_0 = 0$ . Le nombre réel  $a$  étant ainsi déterminé, la fonction  $f$  est-elle dérivable en  $x_0 = 0$  ?

2- Détermine les limites de  $f$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ . Etudier les variations de  $f$ .

3- Détermine les points d'intersection de  $(C)$  avec l'axe des abscisses ainsi que les tangentes à  $(C)$  en ces points.

4- Construire  $(C)$  ainsi que les tangentes précédentes.

### Partie II

On appelle  $g$  la restriction de  $f$  à l'intervalle  $[0; e]$

1- Montrer que  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$ .

2- Donner son tableau de variation.

3- Construire  $(Cg^{-1})$  dans le même repère.

### Partie III

Dans cette partie on suppose que  $x \geq 0$ .

1- Détermine par une intégration par partie, une primitive de  $h$  définie par  $h(x) = x \ln x$ .

- 2- Pour  $0 < \lambda < e$ , détermine l'aire  $A(\lambda)$  du domaine limité par  $(C)$  et les droites d'équations  $x = \lambda$  et  $x = e$ ,  $y = 0$ .
- 3- Détermine en  $\text{cm}^2$  l'aire de la portion du plan comprise entre  $(C)$  et  $(\Gamma)$

### **PROBLEME 7**

- 1- Etudier les variations de la fonction :  $f : \begin{cases} [-\pi; \pi] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \cos 2x + 2 \cos x \end{cases}$
- 2- On donne  $D$ , l'ensemble de définition  $\left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$

Etudier les variations de la fonction  $g$  telle que :  $g : \begin{cases} D \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{1}{\cos x} \end{cases}$

- 3- On note  $(C)$  et  $(\Gamma)$  les courbes représentatives de  $f$  et  $g$  par rapport à un même repère orthonormal.
- 4- Calculer les coordonnées des points communs à  $(C)$  et  $(\Gamma)$  puis tracer  $(C)$  en trait plein et  $(\Gamma)$  en pointillé.
- 5- Pour préciser le tracé sur l'intervalle  $\left[\frac{2\pi}{3}; \pi\right]$ , on calculera une valeur approchée de  $f'\left(\frac{3\pi}{4}\right)$  et  $g'\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

### **PROBLEME 8**

Soit la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{3x-3}{x^2+3x}$

- I- 1) Etudier les variations de  $f$  et construire sa courbe.
- 2) Résoudre l'inéquation  $f(x) < 1$  (on pourra utiliser le tableau de  $f$ ).
- II- 1) Détermine deux constantes réelles  $a$  et  $b$  telles que  $f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+3}$
- 2) En déduire une primitive de  $f$ .
- 3)  $\alpha > 1$ , trouve l'aire  $A(\alpha)$  de la portion du plan comprise entre la courbe des abscisses, les courbes  $(C)$  et les équations  $x = 1$  et  $x = \alpha$ .
- 4) Donne une valeur approchée de  $A(3)$ , (on prendra  $\ln 2 = 0.693$  et  $\ln 3 = 1.098$ )
- III- Soit la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $g(x) = \ln\left(\frac{x^2+3}{x^2+3x}\right)$
- 1) Etudier les variations de  $g$
- 2) Construire sa courbe dans le même repère. On pourra remarquer  $\frac{x^2+3}{x^2+3x} = 1 - f(x)$
- 3) Démontrer que  $(C)$  et  $(\Gamma)$  ont un point commun  $A$  et un seul.
- 4) Donner l'équation de la tangente à  $(C)$  et celle de la tangente à  $(\Gamma)$  en  $A$ .
- 5) Construire ces tangentes.

## **Problème 9**

Soit  $f$  la fonction réelle de variable réelle définie par  $f(x) = \frac{|x|}{x^2 + 1}$

### **Partie A**

1- Détermine l'ensemble de définition de  $f$ .

Comparer  $f(x)$  et  $f(-x)$ . Etudier la continuité et la dérivabilité de  $f$  au point  $x = 0$ .

2- Etudier les variations de  $f$ .

3- Tracer la courbe  $(Cf)$  par rapport à un repère orthonormé d'axes  $(ox)$  et  $(oy)$  de longueur 2cm chacun.

4- Soit un nombre réel  $a > 0$ . soit  $\Delta$  l'ensemble des points M de coordonnées  $(x, y)$  tels que :

$$\begin{cases} 0 < x < a \\ 0 < y < f(x) \end{cases}$$

Calculer l'aire de  $\Delta$ . Exprimer celle-ci en  $\text{cm}^2$  dans le cas  $a = 1$ .

### **Partie B**

Soit  $g$  définie par  $g(x) = -\ln f(x)$

1- Déterminer l'ensemble de définition de  $g$ .

2- Etudier les variations de  $g$ .

3- Tracer la courbe représentative de  $(\Gamma)$  de  $g$  par rapport à un nouveau repère orthonormé d'axes  $(ox)$  et  $(oy)$ . l'unité est toujours 2cm.

## **PROBLEME 10**

### **Partie A**

1- Soit  $g$  la fonction définie par :  $\begin{cases} g(x) = -x \ln x & \text{pour } x > 0 \\ g(0) = 0 \end{cases}$

Cette fonction est-elle continue à droite pour  $x = 0$  ?

2- Soit  $f$  la restriction de  $g$  à l'intervalle  $\left[\frac{1}{e}; +\infty\right[$

Montrer que  $f$  admet une application réciproque  $f^{-1}$  définie sur  $\left]-\infty; \frac{1}{e}\right]$ .

Sur quel intervalle l'application  $f^{-1}$  est elle dérivable ? On énoncera les théorèmes vus au cours.

3- Calculer à  $10^{-2}$  près l'image par  $f$  des réels suivants :  $\frac{1}{e}$  ;  $1$  ;  $\sqrt{e}$  ;  $e$  et  $e\sqrt{e}$ .

Dans le repère orthonormé  $(o, \vec{i}, \vec{j})$  (unité=2cm), tracer les tangentes à la courbe représentative  $(Cf)$  aux points  $\frac{1}{e}$  et  $1$ .

Tracer également  $(Cf^{-1})$ .

### **Partie B**

1- Calculer  $\int_1^e f(x)dx$  ; on pourra utiliser une intégration par partie.

2- En déduire la mesure en  $\text{cm}^2$  de la région  $D_1 \cap D_2$  du plan où  $D_1$  est définie par 
$$\begin{cases} 0 \leq x \leq \frac{1}{e} \\ 0 \leq y \leq f^{-1}(x) \end{cases}$$

$D_2$  est définie par 
$$\begin{cases} \frac{1}{e} \leq x \leq 1 \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

### **PROBLEME 11**

Soit  $f$  la fonction de la variable réelle  $x$  définie par :  $f(x) = \ln(x\sqrt{3-2x})$

1- Quel est l'ensemble de définition de  $f$  ?

Montrer que  $f$  est continue et dérivable en tout point de son ensemble de définition.

2- Etudier et construire  $(Cf)$ . Unité graphique=4cm

Préciser le point  $A$  de  $(Cf)$  d'abscisse  $\frac{1}{2}$  ainsi que la tangente en ce point.

3- Soit  $\alpha$ , un nombre réel tel que  $1 \leq \alpha \leq \frac{3}{2}$

a- Par une intégration par partie, déterminer  $\int_1^\alpha \ln x \cdot dx$  et  $\int_1^\alpha \ln(3-2x) \cdot dx$

Pour la deuxième intégrale, on pourra écrire  $\frac{-2x}{3-2x}$  sous forme  $a + \frac{b}{3-2x}$  ;  $a$  et  $b$  étant des constantes

à déterminer et calculer  $\int_1^\alpha f(x)dx$ .

6- Exprimer en fonction de  $\alpha$  l'aire géométrique  $A(\alpha)$  du domaine plan limité par la courbe  $(Cf)$ , l'axe des abscisses et les droites d'équation  $x=1$  et  $x=\alpha$ .

Etudier la limite de  $A(\alpha)$  quand  $\alpha \rightarrow \frac{3}{2}$

### **PROBLEME 12**

Les deux parties I et II sont indépendantes.

#### **Partie I**

Soit la fonction  $f : \begin{cases} R \rightarrow R \\ x \mapsto 1 + \frac{1}{x} + \ln|x| \end{cases}$

1- Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .

2- Calculer  $f(e), f(-1), f\left(\frac{1}{e}\right), f\left(-\frac{1}{e}\right), f(-e)$ .

3- Etudier les limites de  $\phi = \frac{1+x\ln|x|}{x}$

a) Quand  $x$  tend vers 0 par valeurs négatives.

b) Quand  $x$  tend vers 0 par valeurs positives.

c) Etudier les variations de  $f$  puis dresser un tableau qui résume ces variations.

d) Construire la courbe  $(C)$  de  $f$ . Unité est 2cm

## **Partie II**

Soit la fonction  $g : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto (x+1)\ln|x| \end{cases}$

1-a- Quel est l'ensemble de définition de  $g$  ?

Calculer  $g(-e), g(-1), g\left(-\frac{1}{e}\right), g\left(\frac{1}{e}\right), g(1), g(e)$ .

1-b- Etudier les variations de  $g$  ; (on pourra utiliser le signe de  $f(x)$ ). Construire  $(C)$  de  $g$  dans un repère distinct du premier.

$$\text{On donne } I(x) = \int_1^x g(x)$$

2-a- En supposant  $x$  strictement positif, calculer  $I(x)$

Vérifier le résultat obtenu en calculant  $I(1)$ . Quel est le signe de  $I(x)$  ?

2-b- Si  $m$  est un réel de  $]0;1]$ , calculer en  $\text{cm}^2$  l'aire  $A(m)$  de l'ensemble des points  $M$  de  $P$  dont les coordonnées  $x$  et  $y$  dans  $(o_1, \vec{i}, \vec{j})$ . Vérifier que  $m \leq x \leq 1$  et  $g(x) \leq y \leq 0$ .

2-c- Etudier l'existence de la limite de  $A(m)$  lorsque  $m$  tend vers 0.

## **PROBLEME 13**

### **Partie A**

Soit la fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :  $f(x) = \frac{1}{x(1 - \ln x)}$  et  $(Cf)$  sa courbe représentative.

A/

1- Déterminer l'ensemble de définition de  $f$ .

2- Montrer que  $f$  est continue et dérivable sur  $Df$ .

3- Déterminer le sens de variation de  $f$ .

4- Etudier sur  $Df$  le signe de  $x(1 - \ln x)$ , puis déterminer les limites de  $f$  aux bornes des intervalles sur  $Df$ . (on rappelle que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) = 0$ ).

En déduire les droites asymptotes à  $(Cf)$ .

Dresser le tableau de variation de  $f$ .

B/

1- Démontrer en déterminant son équation que la tangente  $(\Gamma)$  à la courbe  $(Cf)$  au point d'abscisse  $\sqrt{e}$  passe par 0.

2- Calculer une valeur approchée de  $f(x)$  à  $10^{-2}$  près successivement pour  $x = 0,5 ; 1 ; \sqrt{e} ; 4,5 ; 5$  B-3- Construire  $(Cf)$  et la tangente  $(\Gamma)$  dans le plan  $P$ . (unité graphique est 2cm).

### **Partie B**

Soit  $G$  la fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par :  $G(x) = \ln|1 - \ln x|$

1-a – Déterminer l'ensemble de définition de  $G$  ( $D'g$ ).

1-b- Déterminer la fonction dérivée  $G'$  de  $G$ .

En déduire une primitive de  $f$ .

2- Soit  $\lambda$  un réel tel que  $1 \leq \lambda \leq e$ . On note  $A(\lambda)$  l'aire en  $\text{cm}^2$  de la région du plan limitée par la courbe  $(C_f)$  et les droites d'équation  $x = 1$ ;  $x = \lambda$  et  $y = 0$ .

a) Calculer  $A(\lambda)$ .

b) Déterminer  $\lambda$  ( $\lambda \in [1, e[$ ) tel que  $A(\lambda) = \ln 16$ .

## **PROBLEME 14**

### **Partie A**

Soit on se propose d'étudier la fonction  $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \frac{x^2 + |x - 2|}{|x + 1|} \end{cases}$

1- Déterminer le domaine de définition de  $f$ .

Etudier la continuité et la dérivabilité de  $f$  sur ce domaine de définition et en particulier au point  $x = 2$ .

2- Etudier les limites de  $f$  aux bornes de  $D_f$ .

3- Etudier les variations de  $f$ .

4- Construire  $(C_f)$  tout en précisant les asymptotes ainsi que la position de courbe par rapport à ces asymptotes.

### **Partie B**

Soit la fonction  $g$  définie par  $g : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \ln\left(\frac{x^2 + |x - 2|}{|x + 1|}\right) \end{cases}$

a- Etudier le domaine de définition de  $g$ .

b- Etudier la continuité et la dérivabilité de  $g$  sur ce domaine.

c- Etudier la variation de  $g$ .

d- Construire la courbe représentative de  $g$  dans le même repère.

## **PROBLEME 15**

### **PARTIE A : ETUDE PRELIMINAIRE D'UNE FONCTION $\varphi$ DEFINIE SUR $\mathbb{R}$ PAR :**

$$\varphi(x) = (2 - x)e^x - 1$$

1- Déterminer les limites de  $\varphi$  en  $-\infty$  et  $+\infty$ .

2- Montrer que  $\varphi$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$  et étudier le signe de sa dérivée.

En déduire les variations de  $\varphi$  et préciser les valeurs de  $\varphi(-2)$ ,  $\varphi(0)$ ,  $\varphi(1)$  et  $\varphi(2)$ .

3- Prouver que  $\varphi$  s'annule uniquement en deux valeurs que l'on nommera  $\alpha$  et  $\beta$ .

On prendra  $\alpha < \beta$ . Etudier alors le signe de la fonction  $\varphi$  sur  $\mathbb{R}$  et récapituler cette étude dans un tableau.

4- A l'aide de la calculatrice, fournir un encadrement d'amplitude de  $10^{-2}$  des valeurs  $\alpha$  et  $\beta$

5- Montrer que :  $e^\alpha = \frac{1}{2 - \alpha}$

### **PARTIE B : ETUDE D'UNE FONCTION $f$ DEFINIE PAR $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$ ET CALCUL INTEGRAL**

1- Montrer que  $e^x - x$  ne s'annule pas sur  $\mathbb{R}$ . en déduire que  $f$  est définie sur  $\mathbb{R}$ .

2- Déterminer les limites de  $f$  en  $-\infty$  et  $+\infty$ .

3- Calculer la dérivée  $f'$  de la fonction  $f$ , puis à l'aide des résultats de la partie A, construire le tableau de variations de  $f$ .

4- Montrer que  $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1}$ , le nombre  $\alpha$  étant la plus petit des deux valeurs pour lesquelles la fonction  $\varphi$  de la partie A s'annule.

5- Déterminer une primitive de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ , donner une valeur exacte puis une valeur approchée à  $10^{-2}$  près de l'intégrale  $\int_0^1 \frac{e^x - 1}{e^x - x} dx$ .

### **PARTIE C : ETUDE DE DEUX SUITES**

1- Préciser l'ensemble de définition  $D_g$  de la fonction  $g$  définie sur cet ensemble par  $g(x) = \ln\left(\frac{1}{2-x}\right)$ .

Prouver que la fonction  $g$  est croissante sur son ensemble de définition et que l'image par  $g$  de l'intervalle  $I = [-2; 0]$  est incluse dans cet intervalle.

2- a) Soit la suite  $(U_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par : 
$$\begin{cases} U_0 = -2 \\ U_{n+1} = g(U_n) \end{cases}$$

Montrer que  $U_1$  appartient à l'intervalle  $I = [-2; 0]$ .

Prouver par récurrence, à l'aide des variations de la fonction  $g$ , que la suite  $(U_n)$  à tous ses termes dans l'intervalle  $I$  et est croissante.

b) on considère la suite  $(V_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  par : 
$$\begin{cases} V_0 = 0 \\ V_{n+1} = g(V_n) \end{cases}$$

Calculer le terme  $V_1$  et montrer que  $-2 \leq U_1 \leq V_1 \leq V_0 \leq 0$ .

Etablir par récurrence, à l'aide de la croissance de la fonction  $g$  sur l'intervalle  $I = [-2; 0]$ , que pour tout entier naturel  $n$  strictement positif, on a :

$$-2 \leq U_n \leq V_n \leq V_{n-1} \leq 0$$

Préciser le sens de variation de la suite  $(V_n)$ .

3- Soit la fonction définie sur  $[0; +\infty[$  par  $m(x) = x - \ln(1+x)$ .

a) Montrons que  $m$  est croissante et calculer  $m(0)$ . en déduire que, pour tout  $x$  positif, on a  $\ln(1+x) \leq x$ .

b) Vérifié que pour tout entier  $n$ ,

$$V_{n+1} - U_{n+1} = \ln\left(1 + \frac{V_n - U_n}{2 - V_n}\right) \text{ en déduire que } V_{n+1} - U_{n+1} \leq \frac{V_n - U_n}{2 - V_n}$$

Sachant que, pour tout entier  $n$ , les termes de la suite  $(V_n)$  appartiennent à l'intervalle

$[-2, 0]$ , donner un encadrement de  $\frac{1}{2 - V_n}$  et établir que :

$$V_{N+1} - U_{n+1} \leq \frac{1}{2} (V_n - U_n)$$

Prouver alors que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $V_n - U_n \leq \frac{1}{2} (V_0 - U_0)$ .

Que peut-on en déduire pour la suite de terme général  $V_n - U_n$  et pour les suites  $(V_n)$  et  $(U_n)$  ?

c) Donner à l'aide de la machine à calculer, un encadrement d'amplitude  $10^{-4}$  de  $U_{10}$  et  $V_{10}$ .

## **PROBLEME 16**

### **PARTIE A**

Soit  $g$  la fonction numérique de la variable réelle définie par :

$$g(x) = -\ln x + \frac{1}{x}.$$

- 1- Calculer les limites aux bornes de  $D_g$ .
- 2- Etudier les variations de  $g$  puis dresser le tableau de variation.
- 3- Démontrer que  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha \in \left] \frac{3}{2}; 2 \right[$ .
- 4- Justifier que :  $\forall x \in ]0; \alpha[, g(x) > 0$  et  $\forall x \in ]\alpha; +\infty[, g(x) < 0$

### **PARTIE B**

Soit  $f$  la fonction numérique de la variable réelle définie par :  $f(x) = e^{-x} \ln x$  et  $(C_f)$  sa courbe représentative.

- 1- Déterminer la dérivée  $f'(x)$  de  $f(x)$ , puis exprimer  $f'(x)$  en fonction de  $g(x)$ .
- 2- Etudier les variations de  $f$  sur son ensemble de définition.
- 3- Démontrer que les droites  $(OI)$  et  $(OJ)$  sont asymptotes à  $(C_f)$ .
- 4- Démontrer que  $f(\alpha) = \frac{e^\alpha}{\alpha}$ .
- 5- Déterminer les coordonnées du point d'intersection de  $(C_f)$  avec l'axe des abscisses.
- 6- Tracer  $(C_f)$ .

### **PARTIE C**

Soit  $f^{-1}$  la bijection réciproque de  $f$ .

- 1- Démontrer que  $f^{-1}$  est dérivable en 0.
- 2- Déterminer son nombre dérivé en 0.
- 3- Dresser le tableau de variation de  $f^{-1}$ .
- 4- Tracer  $(C_{f^{-1}})$  dans le même repère que  $(C_f)$

## **PROBLEME 17**

### **PARTIE A**

On donne la fonction  $P$  définie de  $\mathbb{R}$  par :  $P(x) = e^{2x} - 5e^x + 4$ .

- 1) Résoudre l'équation :  $x \in \mathbb{R}, P(x) = 0$
- 2) Démontrer que :  
 $\forall x \in ]-\infty; 0[ \cup ]\ln 4; +\infty[, P(x) > 0$   
 $\forall x \in ]0; \ln 4[, P(x) < 0$

### **PARTIE B**

Soit la fonction  $f$  définie de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  par :  $f(x) = x - 1 + \frac{1}{e^x - 2}$ .

On désigne par  $(C)$  sa courbe représentative dans le plan muni du repère orthonormé  $(O, I, J)$ . (Unité : 2cm).

3- Démontrer l'ensemble de définition de  $f$ .

4- Calculer les limites de  $f$  en  $+\infty$ , en  $-\infty$ , à gauche et à droite en  $\ln 2$ .

5- On admet que  $f$  est dérivable en tout point de son ensemble de définition et on note  $f'$  sa dérivée.

a) Vérifier que :  $\forall x \in ]-\infty; \ln 2[ \cup ]\ln 2; +\infty[$ ,  $f'(x) = \frac{p(x)}{(e^x - 2)^2}$

b) Etudier le signe de  $f'(x)$  suivant les valeurs de  $x$

c) Dresser le tableau de variation de  $f$

6- Démontrer que la droite  $(D)$  d'équation  $y = x - 1$  est une asymptote oblique à  $(C)$  en  $+\infty$

7- Etudier la position de  $(C)$  par rapport à  $(D)$  sur l'intervalle  $] \ln 2; +\infty[$

8- Démontrer que :  $\forall x \in ]-\infty; \ln 2[ \cup ]\ln 2; +\infty[$ ,  $f(x) = x - \frac{3}{2} + \frac{e^x}{2(e^x - 2)}$

9- Démontrer que la droite  $(\Delta)$  d'équation  $y = x - \frac{3}{2}$  est une asymptote oblique à  $(C)$  en  $-\infty$

10- Etudier la position de  $(C)$  par rapport à  $(\Delta)$  sur l'intervalle  $] -\infty; \ln 2[$ .

11- Construire  $(C)$

### PARTIE C

Soit  $\lambda$  un nombre réel strictement négatif.

c) Exprimer en fonction de  $\lambda$  l'aire  $A(\lambda)$  en  $\text{cm}^2$  de la partie du plan comprise entre la courbe  $(C)$ , la droite  $(OJ)$ , la droite  $(\Delta)$  et la droite d'équation  $x = \lambda$ .

d) Calculer la limite de  $A(\lambda)$  lorsque  $\lambda$  tend vers  $-\infty$ .

### **PROBLEME 18**

Dans ce problème, le plan est rapporté au repère orthonormé  $(O, I, J)$  (unité = 4 cm)

Dans tout le problème,  $m$  est un nombre réel de l'intervalle  $[0 ; 1]$ .

#### PARTIE A

On considère la fonction  $f_m$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par  $f_m(x) = 1 - mx^3 - 2\ln x$

1-a) calculer les limites de  $f_m$  aux bornes de son ensemble de définition

b) Etudier les variations de  $f_m$ .

2-a) Montrer que, pour tout nombre réel  $m$  de  $[0 ; 1]$ , il existe un unique nombre réel  $a_m$  strictement positif, tel que  $f_m(a_m) = 0$

b) Montrer que  $1 \leq a_m \leq \sqrt{e}$

#### PARTIE B

Soit la fonction  $g_m$  de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$  définie par :  $g_m = \frac{\ln x}{x^2} - mx$  ( $C_m$ ) désigne la courbe représentative de  $g_m$  dans le plan rapporté à  $(O, I, J)$ .

1- a) Quel est l'ensemble de définition  $D$  de  $g_m$ ?

b) Déterminer suivant les valeurs de  $m$ , les limites de la fonction  $g_m$  aux bornes de  $D$ .

c) Préciser suivant les valeurs de  $m$ , les asymptotes à la courbe  $(C_m)$ .

2- Montrer que pour tout  $x \in D$ ,  $g'_m(x) = \frac{1}{x^3} f'_m(x)$ .

3-a) Dresser le tableau de variation de la fonction  $g_m$ .

b) Donner une expression de  $g_m(a_m)$  ne faisant pas intervenir la fonction  $\ln$ .

4-a) soit  $A_m$  le point de la courbe  $(C_m)$  d'abscisse 1.

Déterminer une équation de la droite  $(D_m)$  tangente en  $A_m$  à  $(C_m)$

b) Montrer qu'il existe un point commun à toutes les droites  $(D_m)$ .

5-a) Etudier la position relative de  $(C_m)$  et de la droite  $(\Delta_m)$ , d'équation :  $y = -mx$

b)  $m$  et  $m'$  étant deux nombres réels de  $[0 ; 1]$  tel que  $m > m'$ , étudier la position relative des courbes  $(C_m)$  et  $(C_{m'})$ .

6- Tracer les courbes  $(C_0)$ ,  $(C_{0,5})$  et  $(C_1)$ . (1,14 est une valeur approchée de  $a_{0,5}$  à  $10^{-2}$  près).

### PARTIE C

1-a) soit la fonction  $\varphi : [0 ; 1] \rightarrow [1 ; \sqrt{e}]$  et  $\Phi : [1 ; \sqrt{e}] \rightarrow [0 ; 1]$

$$m \mapsto a_m$$

$$a \mapsto \frac{1}{a^3} (1 - 2 \ln a)$$

Montrer que  $\Phi$  est une bijection

b) Dresser le tableau de variation de  $\Phi$

c) Donner le sens de variation de  $\Phi^{-1}$ .

2-a) Déterminer l'application  $\Phi \circ \varphi$

b) en déduire que  $\varphi$  est une bijection décroissante de  $[0 ; 1]$  sur  $[1 ; \sqrt{e}]$

**RESOLUTION**

**PROBLEMES**

### PROBLEME 1

$$R \rightarrow R$$

$$f: x \mapsto \frac{x^2 + 1}{2x}$$

1-Etudions les variations de f

f existe si et seulement si  $x \neq 0$  donc  $Df = ]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2} = -\infty$$

Donc  $\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty}$  De même  $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2 + 1}{2x}$$

Quand  $x \rightarrow 0^-$ ,  $x^2 + 1 \rightarrow 1$  et  $2x \rightarrow 0^-$  Donc  $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty}$

Quand  $x \rightarrow 0^+$ ,  $x^2 + 1 \rightarrow 1$  et  $2x \rightarrow 0^+$  Donc  $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty}$

$\forall x \in Df$ , f est dérivable d'où

$$f'(x) = \frac{2x(2x) - 2(x^2 + 1)}{(2x)^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{4x^2 - 2x^2 - 2}{4x^2} \Rightarrow f'(x) = \frac{2(x^2 - 1)}{4x^2}$$

$$\boxed{f'(x) = \frac{x^2 - 1}{2x^2}}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (x+1)(x-1) = 0$$

$$\Rightarrow x+1=0 \text{ ou } x-1=0$$

$$\Rightarrow x=-1 \text{ ou } x=1$$

d'où le tableau de variation suivant :

| x       | $-\infty$ |  | $-1$      | $0$ | $1$       | $+\infty$ |
|---------|-----------|--|-----------|-----|-----------|-----------|
| $f'(x)$ | +         |  | 0         | -   | -         | +         |
| $f(x)$  | $-\infty$ |  | $-1$      |     | $+\infty$ | $+\infty$ |
|         | $-\infty$ |  | $-\infty$ |     | $1$       |           |

2-Montrons que (C) admet des asymptotes d'équation l'axe des ordonnées et la droite d'équation  $y = 1/2x$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x^2 + 1}{2x} - \frac{1}{2}x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2 - 2x + 2}{4x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x} = 0$$

$y = \frac{1}{2}x$  est une asymptote oblique à (C) en  $+\infty$  (respectivement en  $-\infty$ ).

$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$  donc  $x = 0$  est asymptote verticale à (Cf).

3- Montrons que  $f$  admet une bijection sur  $]0;1]$

Sur  $]0;1]$ ,  $f$  est continue et strictement décroissante donc  $f$  réalise une bijection de  $]0;1]$  sur  $f(]0;1])$ .

$$\text{Or } f(]0;1]) = \left[ \lim_{x \rightarrow 1} f(x); \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right] = ]1; +\infty[$$

$$\text{Donc } k = ]1; +\infty[$$

4- Déterminons la bijection réciproque  $g^{-1}$  de  $g$

$$f(x) = y \Rightarrow \frac{x^2 + 1}{2x} = y \Leftrightarrow x^2 + 1 = 2xy \Leftrightarrow x^2 - 2xy + 1 = 0$$

$$\Delta = 4y^2 - 4 \Rightarrow \Delta = 4(y^2 - 1)$$

$$x_1 = \frac{2y - 2\sqrt{y^2 - 1}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{2y + 2\sqrt{y^2 - 1}}{2} \Leftrightarrow x_1 = y - \sqrt{y^2 - 1} \text{ et } x_2 = y + \sqrt{y^2 - 1}$$

$$g^{-1} : \begin{cases} ]1; +\infty[ \rightarrow ]0;1] \\ x \mapsto x - \sqrt{x^2 - 1} \end{cases}$$

5- Dressons le tableau de variation de  $g^{-1}$

|             |   |           |
|-------------|---|-----------|
| x           | 1 | $+\infty$ |
| $g^{-1}(x)$ | - |           |
| $g^{-1}(x)$ | 1 | 0         |

6- Traçons ( $\Gamma$ ) la courbe représentative de  $g^{-1}$  dans le même repère. (en annexe)

## PROBLEME 2

$$\text{Soit } f(x) = |x+1| + \frac{1}{x-1}$$

1- Sur  $\mathbb{R} - \{-1\}$  on a  $|x+1| \neq 0 \Rightarrow x \neq -1$

|      |           |    |           |
|------|-----------|----|-----------|
| x    | $-\infty$ | -1 | $+\infty$ |
| f(x) | -         | 0  | +         |

**Donc écrivons f(x) pour  $x > -1$**

$$f(x) = x + 1 + \frac{1}{x-1}$$

2- Calculons  $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x+1}$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x + 1 + \frac{1}{x-1} - (\frac{1}{2})}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} 1 + \frac{x + 1}{2(x+1)(x-1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} -1 + \frac{1}{2(x-1)} \Leftrightarrow$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \frac{3}{4}$$

3- On suppose  $x < -1$  donc  $f(x) = -x - 1 + \frac{1}{x-1}$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \frac{-x - 1 + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2}}{x + 1} = -1 + \frac{x + 1}{2(x-1)(x+1)}$$

$$\frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = -1 + \frac{1}{2(x-1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} = \frac{-5}{4}$$

4- On a :  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f'_d(x) \neq \lim_{x \rightarrow -1^+} f'_g(x)$  Donc  $f$  n'est pas dérivable en  $-1$ .

5- Calcul de dérivée au point de  $D_f$  où  $f$  est dérivable

- si  $x < -1$ ,  $f'(x) = -1 - \frac{1}{(x-1)^2}$
- si  $x > -1$ ,  $f'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$

Etudions les variations de  $f$

$$x < -1, f'(x) = \frac{-(x-2)-1}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-x^2 + 2x - 2}{(x-1)^2}$$

$\Delta < 0$  donc le signe est celui de  $a$  or  $a < 0$

$\forall x < -1, f'(x) < 0$ , d'où  $f$  est décroissante

$$\forall x > -1, f'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 2$$

| X       | $-\infty$ | -1 | 0   | 1 | 2   | $+\infty$ |
|---------|-----------|----|-----|---|-----|-----------|
| $f'(x)$ | -         |    | +   | 0 | -   | +         |
| $f(x)$  | $+\infty$ |    | $0$ |   | $4$ | $+\infty$ |

Diagram illustrating the variation of  $f(x)$  based on the sign of  $f'(x)$ . The function decreases from  $+\infty$  at  $-\infty$  to a local minimum at  $x = -1$  (indicated by a downward arrow from  $+\infty$  to  $-1/2$ ). It then increases to a local maximum at  $x = 0$  (indicated by an upward arrow from  $-1/2$  to  $0$ ). It decreases again to a local minimum at  $x = 1$  (indicated by a downward arrow from  $0$  to  $-\infty$ ). Finally, it increases from  $x = 1$  to  $+\infty$  (indicated by an upward arrow from  $-\infty$  to  $4$ ).

|  |  |  |  |
|--|--|--|--|
|  |  |  |  |
|--|--|--|--|

Recherche d'asymptotes

$$\forall x \in \prec -1, f(x) = -x - 1 + \frac{1}{x-1} \quad \text{avec } (\Delta_1) : y_1 = -x - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - y_1] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{x-1} \right) = 0 \text{ donc } y_1 = -x - 1 \text{ est asymptote oblique à (cf) en } -\infty$$

$$\forall x \succ -1, f(x) = x + 1 + \frac{1}{x-1} \text{ avec } (\Delta_2) : y_2 = x + 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y_2] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x-1} \right) = 0 \text{ donc } (\Delta_2) : y_2 = x + 1 \text{ est asymptote oblique à (cf) en } +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty \text{ donc } x = 1 \text{ est asymptote verticale}$$

7-Tracé de courbe (voir annexe)

$$8- \text{ calculons } S_1 = \int_{-\sqrt{2}}^{-1} f(x) dx \text{ et } S_2 = \int_{-1}^0 f(x) dx$$

$$\forall x \in [-\sqrt{2}; -1], f(x) = -x - 1 + \frac{1}{x-1}$$

$$S_1 = \int_{-\sqrt{2}}^{-1} \left( -x - 1 + \frac{1}{x-1} \right) dx \text{ sur } [-\sqrt{2}; -1] \quad x-1 \prec 0,$$

$$\text{Donc } \ln|x-1| = \ln(1-x) \text{ d'où}$$

$$S_1 = \left[ -\frac{1}{2}x^2 - x + \ln(1-x) \right]_{-\sqrt{2}}^{-1}$$

$$S_1 = -\sqrt{2} + \frac{3}{2} + \ln 2 - \ln(1 + \sqrt{2})$$

$$S_1 = \frac{3}{2} - \sqrt{2} + \ln\left(\frac{2}{1 + \sqrt{2}}\right)$$

$$S_1 = \int_{-1}^0 f(x) dx$$

$$\forall x \in [-1; 0], f(x) = x + 1 + \frac{1}{x-1}$$

$$S_2 = \int_{-1}^0 \left( x + 1 + \frac{1}{x-1} \right) dx$$

$$S_2 = \left[ \frac{1}{2}x^2 + x + \ln|x-1| \right]_{-1}^0$$

$$\forall x \in [-1; 0], x-1 \prec 0 \Leftrightarrow \ln|x-1| = \ln(1-x)$$

$$S_2 = \left[ \frac{1}{2}x^2 + x + \ln(1-x) \right]_{-1}^0$$

$$S_2 = -\frac{1}{2} + 1 - \ln 2$$

|                             |
|-----------------------------|
| $S_2 = \frac{1}{2} - \ln 2$ |
|-----------------------------|

### PROBLEME 3

1- Déterminons le domaine de définition de f avec  $f(x) = \frac{x^2 + |x|}{|x-1|}$

f existe si et seulement si  $x-1 \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$  donc  $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$

$$\forall x \in ]-\infty; 0[, f(x) = \frac{x^2 - x}{-(x-1)}$$

$$\forall x \in ]0; 1[, f(x) = \frac{x^2 + x}{-(x-1)}$$

$$\forall x \in ]1; +\infty[, f(x) = \frac{x^2 + x}{x-1}$$

$$\text{Soit } f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$$

Déterminons a, b, c sur chaque intervalle

$$\forall x \in ]-\infty; 0[, f(x) = \frac{x^2 - x}{-(x-1)} = \frac{x(x-1)}{-(x-1)} = -x \Rightarrow \boxed{f(x) = -x} \quad (a=-1 ; b=c=0)$$

$$\forall x \in ]0; 1[, f(x) = \frac{x^2 + x}{-(x-1)} = \frac{x(x+1)}{-(x-1)} \Rightarrow f(x) = -x - 2 + \frac{2}{1-x} \Rightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = -2 \\ c = 2 \end{cases}$$

$$\forall x \in ]1; +\infty[, f(x) = \frac{x^2 + x}{x-1} = \frac{x(x+1)}{x-1} \Rightarrow \boxed{f(x) = x + 2 + \frac{2}{x-1}} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = 2 \end{cases}$$

2- Démontrons que f est continue en 0

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} (-x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x - 2 + \frac{2}{1-x}) = 0 \end{aligned} \right\} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \quad \text{donc f est continue en 0}$$

3- Etudions la dérivée à gauche et à droite de 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left( \frac{-x}{x} \right) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x - 2 + \frac{2}{1-x}}{x} = 1$$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f'(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x)$  donc f n'est pas dérivable en 0

4- Etudions les sens de variations de (cf)

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -1^-} (fx) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty}$$

$$\text{si } x \in ]0; 1[, f'(x) = 1 + \frac{2}{(1-x)^2} = \frac{(\sqrt{2} + 1 + x)(\sqrt{2} + 1 - x)}{(1-x)^2}$$

$$\text{si } x \in [0,1[, f'(x) > 0$$

$$\text{si } x \in [1, +\infty[, f'(x) = 1 - \frac{2}{(1-x)^2} = \frac{(x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})}{(1-x)^2}$$

D'où le tableau de variation suivant

| x     | - ∞ |  |  | 0 | 1 | 1 + √2 | + ∞ |  |
|-------|-----|--|--|---|---|--------|-----|--|
| f'(x) | -   |  |  | + |   | -      | +   |  |
| f(x)  | + ∞ |  |  | 0 |   | + ∞    | + ∞ |  |

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x+2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x-1} = 0$  donc  $y = x+2$  est asymptote oblique à (cf) en  $+\infty$ . Son signe est

$$f(x) - y = 0 \Rightarrow \frac{2}{x-1} > 0 \text{ sur } ]1, +\infty[ \text{ donc (cf) est au dessus de (D)}$$

Donc  $S(\lambda)$  n'admet pas de limite

## PROBLEME 4

### PARTIE A

1a) continuité

On a  $Df = [0; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) = 0 = f(0) \text{ donc } f \text{ est continue en } 0$$

1-b dérivabilité de f en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} [\ln x] = -\infty$$

Donc la fonction n'est pas dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$

1-C Etudions sa dérivée

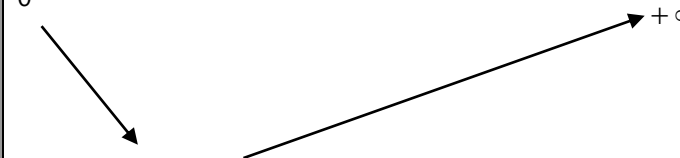
$$\forall x \in \mathbb{R}^*, f'(x) = x \frac{1}{x} + \ln x \Leftrightarrow \boxed{f'(x) = 1 + \ln x}$$

On a  $f'(x) > 0$

$$\text{Si } x < \frac{1}{e} \Leftrightarrow f'(x) < 0 \text{ si } \ln x < -1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{e}$$

$$\boxed{f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}} \quad \text{Si } x = \frac{1}{e} \Leftrightarrow f'(x) = 0$$

Le tableau de variation est :

|       |   |                                                                                    |   |           |
|-------|---|------------------------------------------------------------------------------------|---|-----------|
| x     | 0 | 1/e                                                                                |   | $+\infty$ |
| f'(x) |   | -                                                                                  | 0 | +         |
| f(x)  | 0 |  |   |           |

**Déterminons les points d'intersections de (cf) avec l'axe (ox)**

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = 1$$

Donc (cf) coupe (ox) en O et 1

Pour  $x = 1$  on a  $f'(1) = 1$  et l'équation de la tangente est  $y - f(1) = f'(1)(x - 1)$

Soit  $y = x - 1$  car  $f(1) = 0$

Étudions la position de (C) et cette tangente

$$f(x) - y = f(x) - (x - 1) = \phi$$

Pour cela étudions  $\phi$

D'où le tableau de variation suivant

|            |   |                                                                                     |   |              |                                                                                               |  |
|------------|---|-------------------------------------------------------------------------------------|---|--------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|--|
| x          | 0 |                                                                                     |   | 1            | $+\infty$                                                                                     |  |
| $\phi'(x)$ | - |                                                                                     | 0 | +            |                                                                                               |  |
| $\phi(x)$  | 1 |  |   | <div>0</div> |  $+\infty$ |  |

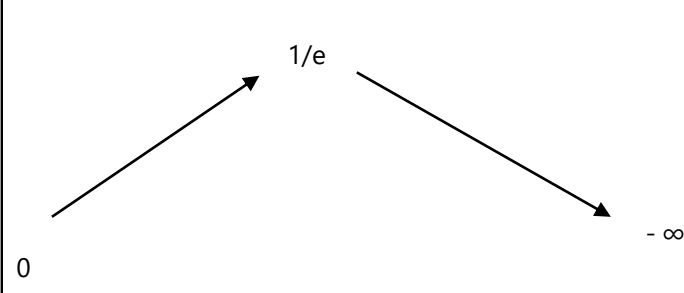
**On voit que pour  $x \in ]0;1[ \cup ]1;+\infty[$ ,  $\phi(x) > 0$  donc  $f(x) > (x-1)$  d'où (Cf) est au dessus de (T)**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x) = +\infty \text{ (Cf) présente une branche parabolique dans la direction (OJ)}$$

## PARTIE B

On voit que  $g(x) = -f(x) \Leftrightarrow g'(x) = -f'(x)$

D'où le tableau de variation suivant

| x       | 0                                                                                  | 1 | $+\infty$ |
|---------|------------------------------------------------------------------------------------|---|-----------|
| $g'(x)$ | -                                                                                  | 0 | +         |
| $g(x)$  |  |   |           |

Nous pouvons conclure que (Cg) et (Cf) sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses (ox)

## PARTIE C

### Continuité

Si  $\ln x \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$  alors  $h(x) = g(x)$

Par contre si  $0 < x < 1$  alors  $\ln x \leq 0$  et  $h(x) = -g(x)$

1)  $h(x) = -f(x)$ , lorsque  $0 < x \leq 1$  on a

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-f(x)) = -\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 = h(0)$$

D'où h est continue en  $x_0 = 0$

Puisque  $h(x) = f(x)$  si  $x > 1$  et que f est continue, on a

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = f(1) = 0$$

Nous avons montré que  $\lim_{x \rightarrow 1^+} h(x) = 0 = h(1)$  donc h est continue en  $x = 1$

2) Dérivabilité Puisque  $h(x) = -f(x)$  lorsque  $0 < x < 1$ , on a :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-f(x)}{x} = -\infty$$

Donc h n'est pas dérivable en  $x_0 = 0$

$$\text{De même } \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{h(x) - h(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-f(x)}{x - 1} = -\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x)}{x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{h(x) - h(1)}{x - 1} = -f'(1) = -1$$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{h(x) - h(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1) = 1$$

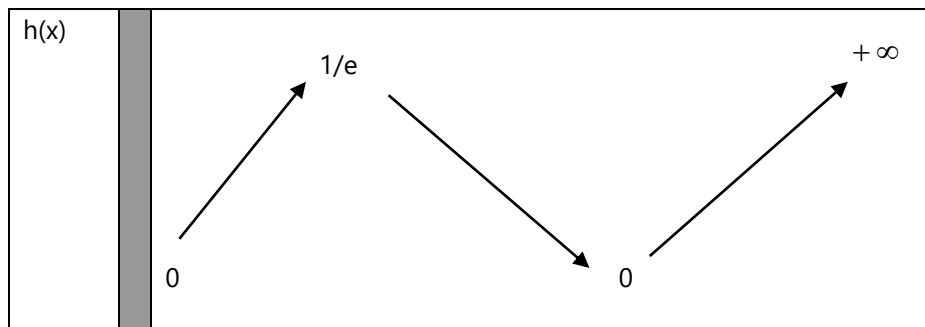
h n'est pas dérivable au point  $x = 1$  car  $h'_g(1) \neq h'_d(1)$

3) Etudions les variations de h

La définition par intervalle de h nous permet d'établir son tableau de variation

Cette fonction est continue sur  $\mathbb{R}^+$  et dérivable sur  $]0;1[ \cup ]1, +\infty[$  ; d'où le tableau de variation suivant

|       |   |   |     |   |   |   |           |  |
|-------|---|---|-----|---|---|---|-----------|--|
| x     | 0 |   | 1/e |   | 1 |   | $+\infty$ |  |
| h'(x) |   | + | 0   | - | 0 | + |           |  |



Sa courbe est(en annexe)

4) calcul d'aire

$$A = \int_1^e h(x) dx = \int_1^e f(x) dx = - \int_1^e g(x) dx = \int_1^e (x \ln x) dx$$

Si l'on intègre par parties, on trouve en posant

$$u = \ln x \Rightarrow u' = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad v' = x \Rightarrow v = \frac{1}{2} x^2$$

$$A = \left[ \frac{x^2}{2} \ln x \right]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \frac{dx}{x} \Leftrightarrow A = \frac{e^2}{2} \ln e - \frac{1}{2} \ln 1 - \frac{1}{2} \int_1^e x dx$$

$$A = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \left[ \frac{x^2}{2} \right]_1^e \Rightarrow A = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \left( \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \right) = \frac{e^2 + 1}{4} = 2,097$$

En tenant compte des unités graphiques, on a :

$$A = 9 \times 2,097 \text{ cm}^2$$

$$A = 18,875 \text{ cm}^2$$

5) Montrons que F admet une bijection réciproque sur  $[1; +\infty[$

F est continue et strictement croissante donc F réalise une bijection de  $[1; +\infty[$  et sur  $f([1; +\infty[)$

$$\text{Or } f([1; +\infty[) = [0; +\infty[ = J$$

Sa courbe est symétrique à celle de F par rapport à  $y = x$  (en annexe)

## PROBLEME 5

### PARTIE A

$$\text{Soit } f(x) = 2e^{-|x|} - x + 2$$

a- Etudions la continuité de  $f$  sur  $\mathbb{R}$

$f(x)$  est définie sur  $\mathbb{R}$  tout entier car  $2e^{-|x|}$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et  $-x + 2$  également

$$\text{Si } x > 0, f(x) = 2e^{-x} - x + 2$$

$$\text{Si } x < 0, f(x) = 2e^x - x + 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 2e^{\pm 0} - 0 + 2 = 4$$

Donc  $f$  est bel et bien continue sur  $\mathbb{R}$

$$\text{b- Montrons que } \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 2 \frac{e^{-|x|} - 1}{x} - 1$$

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}^*, f(x) - 4 = 2e^{-|x|} - x - 2$$

$$f(x) - f(0) = 2(e^{-|x|} - 1) - x$$

En conséquence, pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ ,

$$\frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 2 \frac{e^{-|x|} - 1}{x} - 1$$

Vérifions si  $f$  est dérivable en  $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2 \frac{e^{-|x|} - 1}{x} - 1 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 2(-1) - 1 = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2 \frac{e^{-|x|} - 1}{x} - 1$$

$$\text{Il en arrive que } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 2(1) - 1 = 1$$

En conclusion  $f$  n'est pas dérivable en  $x = 0$  car  $f'_d(0) = -3 \neq f'_g(0) = 1$

Il y'a la présence de deux demi tangentes

**3-a-** Etudions les variations de  $f$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \text{ car quand } x \rightarrow \pm\infty, e^{-|x|} \rightarrow 0$$

$$\text{Si } x > 0, f'(x) = 2e^{-x} - x + 2$$

$$f'(x) = -2e^{-x} - 1 < 0 \text{ donc } f \text{ est strictement décroissante sur } [0; +\infty[$$

$$\text{Si, } x < 0 \text{ } f'(x) = 2e^x - x + 2$$

$$f'(x) = 2e^x - 1. f'(x) > 0 \Leftrightarrow 2e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > \frac{1}{2} \Leftrightarrow x > -\ln 2$$

Pour cela  $f$  est croissante sur  $[-\ln 2; 0]$  et décroissante sur  $] -\infty; -\ln 2]$

D'où le tableau de variation suivant :

| $x$     | $-\infty$ | $-\ln 2$             |   |   | $0$               | $+\infty$               |
|---------|-----------|----------------------|---|---|-------------------|-------------------------|
| $f'(x)$ | -         | 0                    | + | 1 | -3                | -                       |
| $f(x)$  | $+\infty$ | $\swarrow$<br>$3,69$ |   |   | $\nearrow$<br>$4$ | $\searrow$<br>$-\infty$ |

**3-b-** Montrons qu'elle admet une asymptote oblique

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (-x + 2)] = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (2e^{-|x|}) = 0$$

Donc  $y = -x + 2$  est asymptote oblique à  $(Cf)$  en  $\pm\infty$

Position relative

$$f(x) - y = 2e^{-|x|} > 0, \text{ la courbe } (Cf) \text{ est au dessus de la droite } (D)$$

**3-c-** courbe (en annexe)

#### 4- calcul d'aire

Soit  $g(x) = 2e^{-x} - x + 2$  On a  $A(t) = \int_0^t g(x)dx - \int_0^t (-x + 2)dx = \int_0^t [g(x) - (-x + 2)]dx$

$$\int_0^t 2e^{-x}dx = [-2e^{-x}]_0^t \Leftrightarrow A(t) = -2e^{-t} + 2 \Rightarrow A(t) = 2(1 - e^{-t})$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} A(t) = 2 \quad \text{Car en } +\infty, e^{-t} \rightarrow 0$$

#### PARTIE B

Soit  $\phi : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \ln x + x + 1$$

Etudions la fonction  $\phi$

$$D\phi = ]0; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \phi(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = +\infty$$

$\forall x \in ]0; +\infty[, \phi$  est continue et dérivable donc  $\phi'(x) = \frac{1}{x} + 1 > 0$  Le tableau de variation

|            |           |           |
|------------|-----------|-----------|
| $x$        | 0         | $+\infty$ |
| $\phi'(x)$ |           | +         |
| $\phi(x)$  | $-\infty$ | $+\infty$ |

#### 1- Calcul d'aire

$$\phi(x) \geq 0$$

$$A = \int_1^e \phi(x)dx = \int_1^e (\ln x + x + 1) = \int_1^e \ln x dx + \int_1^e (1 + x)dx$$

$$A = B + \int_1^e (1 + x)dx \quad \text{avec} \quad B = \int_1^e \ln x dx$$

Par intégration par partie  $B = [x \ln x - x]_1^e$  car  $(x \ln x - x)' = \ln x$

$$A = \left[ \frac{x^2}{2} + x + x \ln x - x \right]_1^e \Rightarrow A = \frac{e^2}{2} + e + e \ln e - e - \frac{1}{2} + 1 + 0 - 1 \Leftrightarrow$$

$$A = \left( \frac{e^2}{2} + e - \frac{1}{2} \right) \text{cm}^2$$

#### Partie C

1- Cette transformation est une similitude directe :

$$z' = \frac{1}{2}(1 - i)z - 1$$

Ses éléments sont :

$$\text{Son rapport : } r = |z'| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Son angle est tel que } \begin{cases} \cos \phi = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \phi = \frac{-\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \phi = \frac{7\pi}{4}$$

$$\text{Son centre } I \text{ est tel que } z_i = \frac{b}{1-a}$$

$$z_i = \frac{-1}{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i} = \frac{-1}{\frac{1+i}{2}} = \frac{-2}{1+i} \Rightarrow z_i = \frac{-2(1-i)}{2} = -1+i \text{ d'où } I(-1;1)$$

$$\boxed{S\left(I(-1,1); \frac{7\pi}{4}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}$$

2- Calculons  $x'$  et  $y'$  en fonction de  $x$  et  $y$

$$x'+iy' = \frac{1}{2}(1-i)(x+iy) - 1 = \frac{1}{2}(x+iy-ix+y) - 1$$

$$f(z) = x'+iy' = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - 1\right) + i\left(\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}x\right) \text{ donc}$$

$$\text{Il vient } \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - 1 \\ y' = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y \end{cases}$$

3- Soit  $M(x; y)$  est sur la courbe  $(C)$  si et seulement si  $x \geq 0$  et  $y = 2e^{-x} - x + 2$ .

$$\text{Dans ce cas on a } \begin{cases} x' = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(2e^{-x} - x + 2) - 1 = e^{-x} \\ y' = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}(2e^{-x} - x + 2) = e^{-x} - x + 1 \end{cases}$$

Il résulte que  $x = -(\ln x)'$  d'où  $y' = x' + (\ln x) + 1$

Ce qui montre que  $M' \in (\Gamma')$ . Donc l'image  $c' = T(c)$  de  $C$  par  $T$  est une partie de  $(\Gamma')$

## PROBLEME 6

### PARTIE I

$$\begin{cases} R \rightarrow R \\ f(x) = 2x - x \ln|x| \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = a \end{cases}$$

1- Déterminons  $a$  pour que  $f$  soit continue en  $x_0 = 0$

$$\text{On calcule } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} (2x - x \ln x) = 0 \text{ car quand } x \rightarrow 0 \begin{cases} 2x \rightarrow 0 \\ x \ln x \rightarrow 0 \end{cases} \text{ donc } \boxed{a=0}$$

### Dérivabilité en $x_0 = 0$

Si  $a = 0$ , calculons  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \Delta(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \Delta(x) = 2 - \ln|x| = +\infty$$

Donc  $f$  n'est pas dérivable en 0 car la limite n'est pas finie.

2-Déterminons  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x \left( 1 - \frac{\ln|x|}{2} \right)$$

$$\text{Quand } x \rightarrow +\infty \begin{cases} 2x \rightarrow +\infty \\ 1 - \frac{\ln|x|}{2} \rightarrow -\infty \end{cases}$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \text{ car } (-\infty)(+\infty) = -\infty$$

Etudions les variations de  $f$

$$\text{Sur } ]-\infty; 0[, f(x) = 2x - x \ln(-x) \text{ d'où } f'(x) = 2 - \frac{x}{x} - \ln(-x) \Rightarrow$$

$$f'(x) = 1 - \ln(-x)$$

$$\text{Sur } ]0; +\infty[, f(x) = 2x - x \ln x \text{ d'où } f'(x) = 2 - \frac{x}{x} - \ln x \Rightarrow$$

$$f'(x) = 1 - \ln x$$

On en déduit le tableau de variation suivant :

| $x$     | $-\infty$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | $-e$ | 0 | $e$ | $+\infty$ |
|---------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|---|-----|-----------|
| $f'(x)$ | -                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 0    |   | 0   | -         |
| $f(x)$  | <p>The graph shows the function <math>f(x)</math> plotted against <math>x</math>. The function has a local maximum at <math>x=0</math> and a local minimum at <math>x=e</math>. The curve passes through the points <math>(-e, 0)</math> and <math>(e, 0)</math>. The function approaches <math>+\infty</math> as <math>x \rightarrow -\infty</math> and <math>-\infty</math> as <math>x \rightarrow +\infty</math>.</p> |      |   |     |           |

3) Déterminons les points d'intersection.

$$f(x) = 0 \Rightarrow 2x - x \ln|x| = 0 \text{ et } f(0) = 0$$

Les points cherchés ont pour abscisses vérifiant

$$2x = x \ln|x|. \text{ C'est-à-dire } 2 = \ln|x|$$

$$\ln|x| = 2 \Rightarrow |x| = e^2 \Rightarrow x = -e^2 \text{ ou } x = e^2$$

Donc les points sont  $A(e^2, 0)$   $B(0, 0)$

Leurs équations de tangentes sont pour A et C

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$f'(e^2) = f'(e^2) = -1 \quad \text{et} \quad f(e) = e \quad f(-e) = -e$$

Donc les deux équations sont parallèles à la deuxième bissectrice.

2- Construction de  $(Cf)_e$  en annexe.

## PARTIE II

Sur  $[0, e]$   $g$  est continue et strictement croissante. Car sa dérivée est positive sur  $]0, e[$ . Par conséquent,

elle réalise une bijection de  $[0, e]$  sur  $g([0, e])$

Or  $g(0) = 0$  et  $g(e) = e$

$\Rightarrow$

$$g([0, e]) = [0, e]$$

## Tableau de variation

|               |   |     |
|---------------|---|-----|
| $y$           | 0 | $e$ |
| $(g^{-1})(y)$ |   | +   |
| $(g^{-1})(y)$ | 0 | $e$ |

La bijection réciproque de  $g$  est :  $(g^{-1})(y) = \frac{1}{g'(x)} = \frac{1}{g' \circ g^{-1}(y)}$

Construction voir annexe

## PARTIE III

1) Déterminons par intégration par partie, une primitive de la fonction de  $h$  définie par  $h(x) = x \ln x$

Soient  $U$  et  $V$  deux fonctions continues sur  $[1, x]$  et  $U$  et  $V$  deux fonctions dérivables sur  $]1, x[$

$$U(x) = \ln u \Rightarrow U'(x) = \frac{1}{u} \quad \text{et} \quad V'(x) = u \Rightarrow V(x) = \frac{u^2}{2}$$

$$H(x) = \left( \left[ \frac{u^2}{2} \ln u \right]_1^x - \int_1^x \frac{u^2}{2} \frac{du}{u} \right) \Rightarrow H(x) = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{4} (x^2 - 1) \text{ car } \int_1^x \frac{u^2}{2} \frac{du}{u} = \left[ \frac{u^2}{4} \right]_1^x$$

2- Du calcul de  $H$ , on déduit celui de  $F$  de  $f$  sur  $]0, +\infty[$

$$F(x) = \frac{5}{4} x^2 - \frac{x^2}{2} \ln x \text{ sans la constante.}$$

La fonction  $f$  étant continue, on a :

$$A(\lambda) = F(e) - F(\lambda) = \frac{5}{4} (e^2 - \lambda^2) - \frac{e^2}{2} + \frac{\lambda^2}{2} \ln \lambda$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} A(\lambda) = \frac{5}{4}e^2 - \frac{e^2}{2} \Leftrightarrow \boxed{\lim_{\lambda \rightarrow 0} A(\lambda) = \frac{3}{4}e^2}$$

1- Déterminons en  $\text{cm}^2$  l'aire de la portion du plan comprise entre  $(C)$  et  $(\Gamma)$

Comme  $e^2 \approx 7,389$

$$A(\lambda) = \frac{3}{4} \times 7,389 \Leftrightarrow \boxed{A(\lambda) = 5,54 \text{ cm}^2}$$

### PROBLEME N° 7

1)  $f$  est définie sur  $[-\pi; \pi]$  par  $f(x) = \cos(2x) + 2\cos x$

$f$  étant paire, on étudiera  $f$  sur  $[0; \pi]$  uniquement

$$f'(x) = (\cos 2x)' + (2\cos x)'$$

$$f'(x) = -2\sin x(2\cos x + 1) \text{ car } \sin 2x = 2 \cos x \cdot \sin x$$

$$\forall x \in [0; \pi], f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2\cos x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x = -\frac{1}{2}, \quad \text{car } \sin x \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{2\pi}{3}$$

D'où le tableau de variation :

| x     | 0 | $2\pi/3$ | $\pi$ |
|-------|---|----------|-------|
| f'(x) | - | 0        | +     |
| f(x)  | 3 |          | -1    |

$$\forall x \in \left] 0; \frac{2\pi}{3} \right[, f'(x) < 0 \text{ donc } f \text{ est décroissante}$$

$$\forall x \in \left] \frac{2\pi}{3}; \pi \right[, f'(x) > 0 \text{ donc } f \text{ est croissante}$$

Pour tout  $x = \frac{2\pi}{3}$ ,  $f'(x) = 0$  d'où  $f$  est constante

NB : la droite d'équation  $x = 0$  est axe de symétrie, compte tenue de la parité

2) soit  $g(x) = \frac{1}{\cos x}$   $g$  existe si et seulement si  $\cos x \neq 0; \forall x \in [-\pi; \pi]$   $\cos x \neq \cos \frac{\pi}{2}$  ou  $x \neq -\frac{\pi}{2}$

$$Dg = \left[ -\pi; -\frac{\pi}{2} \right[ \cup \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[ \cup \left] \frac{\pi}{2}; \pi \right]$$

$$g(x) \neq \frac{1}{\cos x} \text{ est une fonction paire donc on se contentera d'étudier } g \text{ sur } \left[ 0; \frac{\pi}{2} \right[ \cup \left] \frac{\pi}{2}; \pi \right]$$

$$g(0) = 1 \quad g(x) = \frac{1}{\cos x} \text{ or } \cos \pi = -1 \text{ donc } g(\pi) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} g(x) = +\infty \text{ car } \cos \frac{\pi}{2} \rightarrow 0^- \text{ dans ce cas}$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} g(x) = -\infty \text{ car } \cos \frac{\pi}{2} \rightarrow 0^- \text{ dans ce cas et } \forall x \in [0; \pi] - \{\pi/2\}, g'(x) = \frac{-(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

Le tableau de variation suivant

| x       | 0 | $\pi/2$ | $\pi$ |
|---------|---|---------|-------|
| $g'(x)$ | + | 0       | +     |
| $g(x)$  | 1 |         | -1    |

Diagramme du tableau de variation :  
 - À  $x=0$ ,  $g(x)=1$ .  
 - À  $x=\pi/2$ ,  $g(x)$  tend vers  $+\infty$  (à gauche) et  $-\infty$  (à droite).  
 - À  $x=\pi$ ,  $g(x)=-1$ .  
 - La dérivée  $g'(x)$  est positive sur  $[0, \pi/2)$  et  $(\pi/2, \pi]$ , et nulle à  $x=\pi/2$ .

La droite  $x = \frac{\pi}{2}$  est une droite à (Cf)

NB : la droite d'équation  $x=0$  est axe de symétrie compte tenu de la parité

Et il s'en suit que  $x = -\frac{\pi}{2}$  est asymptote à (Cf).

3 a) calcul des points d'intersections

$$g(x) = f(x) \Leftrightarrow \frac{1}{\cos x} = 2 \cos x + \cos 2x \text{ (comme } \cos 2x = 2 \cos^2 x - 1)$$

$$\text{On a } 2 \cos^3 x + 2 \cos^2 x - \cos x - 1 = 0$$

$$\text{Posons } u = \cos x \Leftrightarrow 2u^3 + 2u^2 - u - 1 = 0 \Leftrightarrow (u+1)(2u^2-1) = 0$$

$$\text{Les solutions sont : } \begin{cases} \cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi \\ \cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4} \\ \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$g'(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x} \Leftrightarrow g'(\frac{3\pi}{4}) = \sqrt{2}$$

$$f'(x) = -2 \sin 2x - \sin x \Leftrightarrow f'(\frac{3\pi}{4}) = \sqrt{2}(\sqrt{2}-1)$$

**PROBLEME N°8**

$$\text{Soit } f(x) = \frac{3(x-1)}{x(x+3)} = \frac{3x-3}{x^2+3x}$$

$f$  existe si et seulement si  $x(x+3) \neq 0 \Rightarrow x \neq -3$  ou  $x \neq 0$

$$\overline{Df = ]-\infty; -3[ \cup ]-3; 0[ \cup ]0; +\infty[}$$

I. 1) Etudions les variations de  $f$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{3}{x} = 0$$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

et

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

De l'égalité  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{3(x-1)}{x} = 4$  découle  $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = +\infty \end{cases}$

De l'égalité  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3(x-1)}{x+3} = -1$  découle  $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \end{cases}$

$\forall x \in Df$ ,  $f$  est dérivable. Donc :

$$f'(x) = \frac{3[(x^2 + 3x) - (x - 1)(2x + 3)]}{(x^2 + 3x)^2} = \frac{-3x^2 + 6x + 9}{(x^2 + 3x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-3(x+1)(x-3)}{x^2(x+3)^2} \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -1 \\ x \neq -3 \end{cases}$$

Le tableau de variation s'en déduit

| $x$     | $-\infty$ | $-3$ | $-1$      | $0$       | $+\infty$ |               |   |
|---------|-----------|------|-----------|-----------|-----------|---------------|---|
| $f'(x)$ | -         |      | -         | +         |           | +             | - |
| $f(x)$  | 0         |      | $+\infty$ | $+\infty$ |           | $\frac{1}{3}$ | 0 |

**2) Résolvons  $f(x) < 1$**

## 1ère méthode

$$f(x) < 1 \Leftrightarrow x \in ]-\infty; -3[ \cup ]0; +\infty[ \text{ à travers le tableau}$$

## 2<sup>e</sup> méthode

$$f(x) < 1 \Leftrightarrow \frac{3x-3}{x^2+3x} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{-x^2-3}{x(x+3)} < 0 \Leftrightarrow x(x+3) > 0 \text{ et } x < -3 \text{ et } x > 0$$

**II. 1) Déterminons  $a$  et  $b$  pour que :**

$$f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+3} \Rightarrow f(x) = \frac{a(x+3)+bx}{x(x+3)} \Rightarrow f(x) = \frac{(a+b)x+3a}{x(x+3)}$$

Par identification on a  $\begin{cases} a+b=3 \\ 3a=-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=-1 \\ b=4 \end{cases}$

Finalement

$$f(x) = -\frac{1}{x} + \frac{4}{x+3}$$

## 2) Dédisons une primitive de $f$

Une primitive  $F$  de  $f$  est donnée par

$$F(x) = -\ln x + 4\ln(x+3)$$

## 3) Trouvons l'aire $A(\alpha)$

$$A(\alpha) = \int_1^\alpha f(x)dx = [-\ln x + 4\ln(x+3)]_1^\alpha$$

$$A(\alpha) = -\ln \alpha + 4\ln(\alpha+3) - 4\ln 4 \Leftrightarrow A(\alpha) = -\ln \alpha + 4\ln(\alpha+3) - 8\ln 2$$

## 4) Donnons une valeur approchée de $A(3)$

$$A(3) = -\ln 3 + 4\ln 6 - 8\ln 2 \Rightarrow A(3) = -\ln 3 + 4\ln 2 + 4\ln 3 - 8\ln 2 \quad (4\ln 6 = 4\ln 2 + 4\ln 3)$$

$$A(3) = 3 \times 1.098 - 4 \times 0.693 \Leftrightarrow A(3) = 0.522$$

On peut écrire  $A(\alpha)$  comme suit

$$A(\alpha) = 4\ln\left(1 + \frac{3}{\alpha}\right) + 3\ln \alpha - 8\ln 2$$

Quand  $\alpha \rightarrow +\infty$ ,  $1 + \frac{3}{\alpha} \rightarrow 1$  donc  $\ln\left(1 + \frac{3}{\alpha}\right) \rightarrow 0$

Et  $3\ln \alpha \rightarrow +\infty$  et  $-8\ln 2$  reste fixe

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} A(\alpha) = +\infty$$

III. Soit la fonction définie par  $g(x) = \ln\left(\frac{x^2+3}{x^2+3x}\right)$

On pourra utiliser donc  $g(x) = \ln[1 - f(x)]$

## 1) Etudions les variations de $g$

$$x \in Dg \Rightarrow x \in Df \text{ et } f(x) < 1$$

La résolution de  $1 - f(x)$  conduit à

$$1 - f(x) = \frac{x^2+3}{x^2+3x} = \frac{x^2+3}{x(x+3)}$$

$$1 - f(x) > 0 \Leftrightarrow x(x+3) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \text{et} \\ x < -3 \end{cases}$$

$$Dg = ]-\infty; -3[ \cup ]0; +\infty[$$

Le comportement de  $g$  aux bornes de  $Dg$  dépend de  $f(x)$ . Par conséquent,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (1 - f(x)) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \ln 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - f(x)) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \ln 1 = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -3^-} (1 - f(x)) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -3^-} g(x) = \ln 1 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - f(x)) = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \ln 1 = +\infty$$

$\forall x \in Dg$ ,  $g$  est dérivable donc  $g'(x) = \ln(1 - f(x))$

$$g'(x) = \frac{-f'(x)}{1 - f(x)}$$

Comme par définition,  $1 - f(x) > 0$ , le signe de  $g'$  est celui de l'opposé de  $f'$ .

D'où le tableau de variation suivant

| $x$     | $-\infty$ | $-3$      | $0$ | $3$               | $+\infty$ |
|---------|-----------|-----------|-----|-------------------|-----------|
| $g'(x)$ | +         |           |     | -                 | +         |
| $g(x)$  | 0         | $+\infty$ |     | $\ln \frac{2}{3}$ | 0         |

**3)** D'après  $g(1) = f(1) = 0 \Rightarrow A(1;0)$  est le point d'intersection à  $Cf$  et  $Cg$

**4)** L'équation de la tangente en  $A$  à  $Cf$  est donc  $y = \frac{3}{4}(x-1)$  car  $f'(1) = \frac{3}{4}$

L'équation de la tangente en  $A$  à  $Cg$  est donc  $y = -\frac{3}{4}(x-1)$  car  $g'(1) = \frac{f'(1)}{1-f(1)} = -f'(1) = -\frac{3}{4}$

Ces deux tangentes sont symétriques par rapport à  $(ox)$

**5)** Construction en annexe

## PROBLEME 9

$$\text{Soit } f(x) = \frac{|x|}{x^2 + 1}$$

### PARTIE A

**1-** Déterminons l'ensemble de définition de  $f$

$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$  et donc  $x^2 + 1 \geq 1$

$$\boxed{Df = \mathbb{R}}$$

Comparons  $f(x)$  et  $f(-x)$

$$f(-x) = \frac{|-x|}{(-x)^2 + 1} = \frac{|x|}{x^2 + 1} = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = f(-x) \text{ donc } f \text{ est paire}$$

Etudions la continuité en 0

Quand  $x \rightarrow 0$  ;  $|x| \rightarrow 0$  et  $x^2 + 1 \rightarrow 1$  donc  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0) = 0$

Par conséquent la fonction  $f$  est continue en 0

### Dérivabilité en 0

$$\text{Si } x \neq 0, \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x} = \frac{|x|}{x} \times \frac{1}{x^2 + 1}$$

Quand  $x \rightarrow 0$ ,  $\frac{1}{x^2 + 1} \rightarrow \pm 1$  (quand  $x \rightarrow 0^-$  et quand  $x \rightarrow 0^+$ )

$$\text{D'où } \boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = 1; \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)}{x} = -1 \Leftrightarrow f'_d(0) \neq f'_g(0)}$$

$f(x)$  n'est pas dérivable en  $x = 0$

Ses deux demi-tangentes sont  $y = -x$  et  $y = x$

Etude de la variation de  $f$

$$f(x) \text{ étant paire, on a } f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2 + 1) - x(2x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(1 + x^2)^2} = \frac{(1 + x)(1 - x)}{(1 + x^2)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow (1 - x)(1 + x) = 0 \Rightarrow 1 - x = 0 \text{ ou } 1 + x = 0 \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1$$

Pour tout  $x > 0$ , on s'intéresse au signe de  $1 - x$

Si  $x > 1$ ,  $f'(x) < 0$

Si  $0 < x < 1$ ,  $f'(x) > 0$

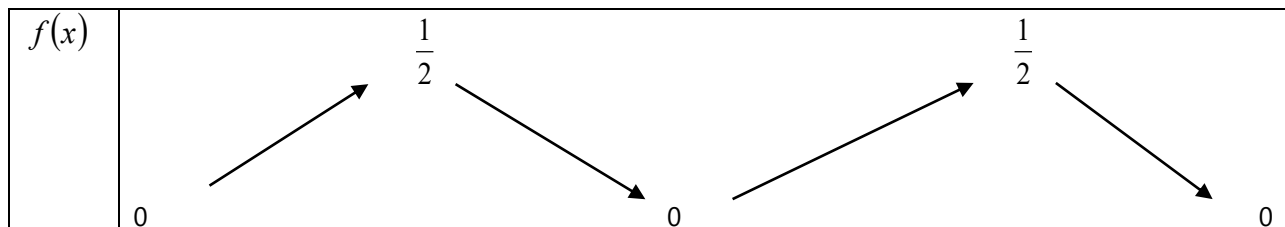
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{x} \right) = 0$$

Tout ceci nous permet de dresser le tableau partiel suivant

| $x$     | 0 | 1             | $+\infty$ |
|---------|---|---------------|-----------|
| $f'(x)$ |   | 0             |           |
| $f(x)$  | 0 | $\frac{1}{2}$ | 0         |

Et grâce à la parité, on a le tableau de variation suivant

| $x$     | $-\infty$ | -1 | 0 | 1 | $+\infty$ |
|---------|-----------|----|---|---|-----------|
| $f'(x)$ |           | 0  |   | 0 |           |
| $f(x)$  |           |    |   |   |           |



3-tracé de la courbe  $C_f$  (unité=2cm)

4- Calcul d'aire ( $\Delta$ ) :  $\begin{cases} 0 \leq x < a \\ 0 \leq y < f(x) \end{cases}$

L'aire  $\Delta$  est  $A = \int_0^a \frac{x}{x^2+1} dx$

On remarque  $\frac{U'(x)}{U(x)} = \frac{2x}{x^2+1} = 2f(x)$  si on pose  $U = x^2+1$

$$\text{Donc } A = \int_0^a \frac{x}{x^2+1} dx = \left[ \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \right]_0^a \Leftrightarrow \boxed{A = \frac{1}{2} \ln(1+a^2)}$$

Pour  $a=1$ , calculons  $A$

$$A = \frac{1}{2} \ln(1+1^2) = \frac{1}{2} \ln 2 \text{ or } \ln 2 = 0,693$$

$$\text{Donc } \boxed{A = 0,346}$$

$$\text{Avec les unités, on a } \boxed{A = 0,346 \times 2^2 = 1,3864 \text{ cm}^2}$$

## **PARTIE B**

Soit  $g$  définie par  $g(x) = -\ln f(x)$

1- Déterminons l'ensemble de définition de  $g$

Comme  $g$  est la composition d'une fonction définie en 0 alors que  $\ln 0$  n'existe pas, par conséquent

$$Dg = \mathbb{R}^* = ]-\infty; 0[ \cup ]0; +\infty[$$

2- Etudions les variations de  $g$

Comme  $f$  est paire, nous étudions  $g$  sur  $]0; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

Quand  $x \rightarrow 0$   $f(x) \rightarrow 0^+$  et  $\ln f(x) \rightarrow +\infty$  donc

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty}$$

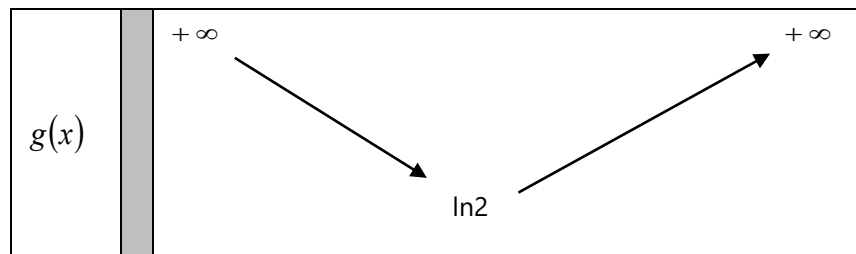
$$\text{Pour tout } x > 0, \quad g'(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)} = -\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \Leftrightarrow \boxed{g'(x) = -\frac{(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}} \text{ qui est du signe de } x-1$$

Par la suite, on a  $g'(x) > 0$  si  $x > 1$  et

$$g'(x) < 0 \text{ si } 0 < x < 1$$

Ce qui donne le tableau de variation partiel suivant :

| $x$     | 0 | 1 | $+\infty$ |
|---------|---|---|-----------|
| $g'(x)$ |   | 0 |           |
|         | - | + |           |



Comme  $f$  est paire, nous obtenons le tableau de variation suivant

| $x$     | $-\infty$ | $-1$ |     | $0$       | $1$       |  | $+\infty$ |           |
|---------|-----------|------|-----|-----------|-----------|--|-----------|-----------|
| $g'(x)$ | $-$       |      | $0$ | $+$       | $-$       |  | $0$       | $+$       |
| $g(x)$  | $+\infty$ |      |     | $+\infty$ | $+\infty$ |  |           | $+\infty$ |
|         |           |      |     |           |           |  |           |           |

### 3- Construction de $(Cg)$

Il est mieux de préciser l'allure de la courbe au voisinage de  $+\infty$

$$\text{Si } x > 0, \text{ on a } g(x) = \ln\left(\frac{1}{f(x)}\right) = \ln\frac{x^2+1}{x} \Leftrightarrow g(x) = \ln\left(x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right) = \ln x + \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$$

$$\text{Quand } x \rightarrow +\infty, \frac{\ln x}{x} \rightarrow 0 \text{ et } \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \rightarrow 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 0 \text{ donc } (Cg) \text{ admet l'axe des abscisses comme branche parabolique.}$$

## PROBLEME 10

### 2PARTIE I

- 1) Soit  $g$  la fonction définie par  $\begin{cases} g(x) = -x \ln x \\ g(0) = 0 \end{cases}$  pour  $x > 0$

### Etude de la continuité en $x = 0$

$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = g(0) = 0$  car  $\left( \lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0 \right)$  donc  $g$  est continue en 0 à droite

### Etablissons les variations de $g$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$$

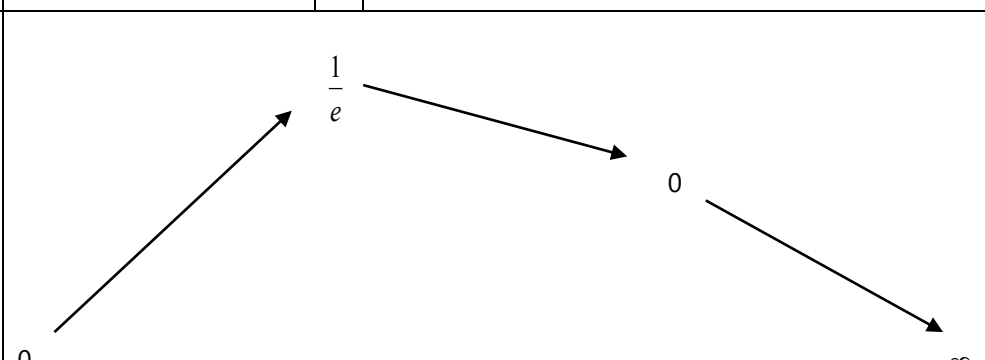
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty \text{ car quand } x \rightarrow +\infty \begin{cases} \ln x \rightarrow +\infty \\ -x \rightarrow -\infty \end{cases}$$

$$\forall x \in Dg, g'(x) = -x \left( \frac{1}{x} \right) - (\ln x) = -(1 + \ln x)$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow 1 + \ln x = 0$$

$$g'(x) = 0 \Rightarrow \ln x = -1 \Rightarrow x = \frac{1}{e}$$

Le tableau de variation est le suivant comme  $a < 0$

| $x$     | 0                                                                                                                                                                                                                                                                                  | $\frac{1}{e}$ | 1 | $+\infty$ |
|---------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------|---|-----------|
| $g'(x)$ | +                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 0             | - |           |
| $g(x)$  |  <p>The graph shows the function g(x) starting at (0,0), increasing to a local maximum at (1/e, 1/e), then decreasing through (1,0) to negative infinity as x approaches positive infinity.</p> |               |   |           |

2) Déterminons la bijection réciproque

Sur  $\left[ \frac{1}{e}; +\infty \right]$ ,  $g$  est continue et strictement décroissante ; donc  $g$  réalise une bijection de  $\left[ \frac{1}{e}; +\infty \right]$  sur

$$g\left(\left[\frac{1}{e}; +\infty\right]\right) = \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x); g\left(\frac{1}{e}\right)\right] = \left[-\infty; \frac{1}{e}\right]$$

Sur  $\left]-\infty; \frac{1}{e}\right[$   $g$  est continue et dérivable mais pas en  $\frac{1}{e}$  avec  $y = f(x)$  tel que  $f'(x) \neq 0$ ,

on a donc 
$$(f^{-1})(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

3) Calculons au  $10^{-2}$  près

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} \quad f(1) = 0 \quad f(\sqrt{e}) = -\frac{\sqrt{e}}{2} \quad f(e) = -e \quad f(e\sqrt{e}) = -\frac{3}{2}e\sqrt{e}$$

Tableau des valeurs

| $x$ | $\frac{1}{e}$ | $\sqrt{e}$ | $e$ | $e\sqrt{e}$ |
|-----|---------------|------------|-----|-------------|
|-----|---------------|------------|-----|-------------|

|                  |      |       |       |       |
|------------------|------|-------|-------|-------|
| Valeur approchée | 0.36 | 1.65  | 2.72  | 4.48  |
| $f(x)$           | 0.36 | -0.82 | -2.72 | -6.72 |

Tracé de  $(Cf)$  et  $(Cg)$  en annexe

## **PARTIE II**

1- Calculons  $\int_{\frac{1}{e}}^1 f(x)dx = \int_{\frac{1}{e}}^1 (-x \ln x)dx$

$$\int_{\frac{1}{e}}^1 f(x)dx = [u(x)v(x)]_{\frac{1}{e}}^1 - \int_{\frac{1}{e}}^1 u'(x)v(x)dx$$

Soit  $u'(x) = -x \Rightarrow u(x) = -\frac{x^2}{2}$

$$v(x) = \ln x \Rightarrow v'(x) = \frac{1}{x}$$

$$\int_{\frac{1}{e}}^1 f(x)dx = \left[ -\frac{x^2}{2} \ln x \right]_{\frac{1}{e}}^1 + \int_{\frac{1}{e}}^1 \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx \Leftrightarrow \int_{\frac{1}{e}}^1 f(x)dx = \left[ -\frac{x^2}{2} \ln x \right]_{\frac{1}{e}}^1 + \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{e}}^1 x dx$$

$$\int_{\frac{1}{e}}^1 f(x)dx = \left[ -\frac{x^2}{2} \ln x + \frac{1}{4} x^2 \right]_{\frac{1}{e}}^1 \Leftrightarrow \int_{\frac{1}{e}}^1 f(x)dx = \frac{1}{4e^2} + \frac{1}{4} \text{ ou } \boxed{\int_{\frac{1}{e}}^1 f(x)dx = \frac{1}{4} \left( \frac{1}{e^2} + 1 \right)}$$

2—Représentation graphique  $D1 \cup D2$  (voir feuilles annexes)

La région  $D1 \cup D2$  est symétrique par rapport à la droite d'équation  $y = x$

Les aires des deux régions sont égales à  $\int_{\frac{1}{e}}^1 f(x)dx$  et l'aire du carré est  $\frac{1}{e^2}$ .

L'aire cherchée est donc  $\frac{1}{2} \left( \frac{1}{e^2} + 1 \right) + \frac{1}{e^2} = \frac{3}{2e^2} + \frac{1}{2}$

## **PROBLEME 11**

Soit  $f(x) = \ln(x\sqrt{3-2x})$

1— l'ensemble de définition est :

$f$  existe si et seulement si  $x > 0$  et  $\sqrt{3-2x} \geq 0$

Montrons que  $f$  est continue et dérivable sur  $Df$

$$\boxed{Df = \left] 0; \frac{3}{2} \right[}$$

La fonction  $u : x \rightarrow \sqrt{3-2x}$  est continue et dérivable en tout point de  $Df$  et sa fonction dérivée est :

$$u' = \frac{-2}{2\sqrt{3-2x}}$$

**Remarque :**  $u$  est continue mais pas dérivable car  $\frac{3}{2} \notin Df$

Calculons  $g'(x)$  et  $f'(x)$  avec  $f = \ln g$

$$\forall x \in \left]0; \frac{3}{2}\right[ , g'(x) = \sqrt{3-2x} + x \cdot \frac{-2}{2\sqrt{3-2x}} = \frac{3-3x}{\sqrt{3-2x}}$$

$$\text{Donc } f'(x) = -\frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{3-3x}{x\sqrt{3-2x}}$$

## 2- Etudions la fonction $f$ et dressons son tableau de variation

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x\sqrt{3-2x}) = 0^+ \quad \text{donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^+} (x\sqrt{3-2x}) = 0^+ \quad \text{donc } \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^+} f(x) = -\infty$$

$\forall x \in Dg$ ,  $f'(x)$  est celui de  $3-3x$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow 3(1-x) = 0 \Rightarrow x = 1$$

$\forall x \in ]0,1[, f'(x) > 0$  donc  $f$  est croissante

$\forall x \in ]1, \frac{3}{2}[ , f'(x) < 0$  donc  $f$  est décroissante

D'où le tableau de variation suivant :

| $x$     | 0         | 1 | $\frac{3}{2}$ |
|---------|-----------|---|---------------|
| $f'(x)$ | +         | 0 | -             |
| $f(x)$  | $-\infty$ | 0 | $-\infty$     |

Soit le point  $c$  d'abscisse  $\frac{1}{2}$  ; son ordonnée est  $\ln\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}\right) = \ln \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2} \ln 2 = -0.35$

$$\text{De plus } f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

L'équation de la tangente au point  $A\left(\frac{1}{2}; -0.35\right)$  est

$$y + \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{3}{2} \left(x - \frac{1}{2}\right) \Leftrightarrow \boxed{y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2} \left(\frac{3}{2} + \ln 2\right)}$$

**3-a-** Par intégration par partie, calculons

$$I = \int_1^\alpha \ln x dx = [x \ln x]_1^\alpha - \int_1^\alpha x \cdot \frac{dx}{x}$$

$$I = [x \ln x]_1^\alpha - [x]_1^\alpha \Rightarrow I = \alpha \ln \alpha - \alpha + 1 \Rightarrow I = \alpha \ln \alpha - (\alpha - 1)$$

$$\boxed{I = \int_1^\alpha \ln x dx = \alpha \ln \alpha - \alpha + 1}$$

Pour la seconde intégrale

$$\text{Soit } u(x) = \ln(3-2x) \Rightarrow du = -\frac{2}{3-2x} dx \text{ et } dv = dx \Rightarrow v = x$$

En foi de quoi,

$$j = \int_1^{\alpha} \ln(3-2x) dx = [x \ln(3-2x)]_1^{\alpha} - \int_1^{\alpha} -\frac{2x}{3-2x} dx$$

Cherchons  $a$  et  $b$  pour que  $-\frac{2x}{3-2x} = a + \frac{b}{3-2x}$

$$-\frac{2x}{3-2x} = \frac{3-2x-3}{3-2x} = \frac{3-2x}{3-2x} - \frac{3}{3-2x} = 1 - \frac{3}{3-2x}$$

Par la suite,  $a = 1$  et  $b = -3$

$$j = \alpha \ln(3-2\alpha) - \int_1^{\alpha} \left(1 - \frac{3}{3-2x}\right) dx \Leftrightarrow j = \alpha \ln(3-2\alpha) - \left[x + \frac{3}{2} \ln(3-2x)\right]_1^{\alpha}$$

$$j = \alpha \ln(3-2\alpha) - \left[\left(\alpha + \frac{3}{2} \ln(3-2\alpha) - 1\right)\right] \Leftrightarrow$$

$$j = \int_1^{\alpha} \ln(3-2x) dx = \left(\alpha - \frac{3}{2}\right) \ln(3-2\alpha) - \alpha + 1$$

**3-b-** pour tout  $x \in Df$ , on a

$$f(x) = \ln x + \frac{1}{2} \ln(3-2x) = \ln(x\sqrt{3-2x})$$

D'où le calcul de l'aire de  $f$  est

$$\int_1^{\alpha} f(x) dx = I + \frac{1}{2} J = \alpha \ln \alpha - \frac{3-2\alpha}{4} \ln(3-2\alpha) + \frac{3}{2} (1-\alpha)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \frac{3}{2}} A(\alpha) = - \int_1^{\alpha} f(x) dx \quad \text{car } f(x) \leq 0$$

$$\text{Donc } \lim_{\alpha \rightarrow \frac{3}{2}^+} A(\alpha) = \lim_{\alpha \rightarrow \frac{3}{2}^+} \left( \frac{1}{4} (3-2\alpha) \ln(3-2\alpha) - \alpha \ln \alpha + \frac{3}{2} (\alpha - 1) \right)$$

$$\text{Quand } x \rightarrow \frac{3}{2}^+, (3-2\alpha) \ln(3-2\alpha) \rightarrow 0$$

$$\text{Par suite, } \lim_{\alpha \rightarrow \frac{3}{2}^+} A(\alpha) = -\frac{3}{2} \ln \frac{3}{2} + \frac{3}{2} \left( \frac{3}{2} - 1 \right)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \frac{3}{2}^+} A(\alpha) = -\frac{3}{2} (\ln 3 - \ln 2) + \frac{3}{4} \Leftrightarrow \lim_{\alpha \rightarrow \frac{3}{2}^+} A(\alpha) = \frac{3}{2} \left( \frac{1}{2} + \ln 2 - \ln 3 \right)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \frac{3}{2}^+} A(\alpha) = 1,5(0,5 + 0,69 - 1,1)$$

$$\lim_{\alpha \rightarrow \frac{3}{2}^+} A(\alpha) = 0,15$$

## PROBLEME 12

### PARTIE I

Soit la fonction  $f : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto 1 + \frac{1}{x} + \ln|x| \end{cases}$

$$Df = IR - \{0\}$$

### 2-Calculons les images de

$$f(-e) = 2 - \frac{1}{e} = 1,632 \quad ; \quad f(-1) = 0 \quad ; \quad f\left(-\frac{1}{e}\right) = -e = -2,718$$

$$f\left(\frac{1}{e}\right) = e = 2,718 \quad ; \quad f(e) = 2 + \frac{1}{e} = 2,368$$

3-Etudions la limite de  $\Phi(x) = \frac{1+x \ln|x|}{x}$

Soit  $\Phi(x) = \frac{1}{x} + \frac{x \ln|x|}{x}$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} x \ln|x| = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln|x| = 0$  D'après la limite des fonctions usuelles, on a

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \Phi(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \quad \text{Et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \Phi(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

4) Etude de variation de  $f$  et dressons un tableau de variation

De l'égalité  $f(x) = 1 + \Phi(x)$  on a

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \quad \textbf{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( 1 + \frac{1}{x} + \ln|x| \right) = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{x} + \ln|x| \right) = +\infty$$

$$\text{Quand } x \rightarrow \pm\infty \begin{cases} \frac{1}{x} \rightarrow 0 \\ \ln|x| \rightarrow +\infty \end{cases}$$

### Etude de variation de $f$

$\forall x \in Df, \ln|x|$  est dérivable donc  $(\ln|x|)' = (\ln|-x|)' = \frac{1}{x}$

Par la suite

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x^2}$$

On en déduit le tableau de variation suivant :

| x       | $-\infty$ |  | $-1$ | $0$ |  | $1$       | $+\infty$ |           |
|---------|-----------|--|------|-----|--|-----------|-----------|-----------|
| $f'(x)$ |           |  | -    |     |  | -         | 0         | +         |
| $f(x)$  | $+\infty$ |  |      |     |  | $+\infty$ |           | $+\infty$ |

Diagram illustrating the behavior of the function  $f(x)$  near the critical point  $x=0$ . The function decreases from  $+\infty$  at  $x=-\infty$  to a local minimum at  $x=0$  (indicated by a vertical grey bar), and then increases back to  $+\infty$  at  $x=+\infty$ . The derivative  $f'(x)$  is negative for  $x < 0$  and positive for  $x > 0$ .

Et la courbe (cf) qui admet pour asymptote la droite d'équation :  $x = 0$

$$\forall x \in ]-\infty; -1[ \cup ]0; +\infty[, f(x) > 0$$

$$\forall x \in ]-1; 0[, f(x) < 0$$

5) Tracé de (cf) en annexe

## **PARTIE II**

Soit la fonction  $g : \begin{cases} \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \rightarrow (x+1)\ln|x| \end{cases}$

1- L'ensemble de définition est  $\mathbb{R}^*$  car  $x+1$  est définie  $\forall x \in \mathbb{R}$  et  $\ln|x| \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$

2- Calculons les images de

**a-**  $g(-e) = 1 - e = -1,718$  et  $g(-1) = 0 = g(1)$

$$g\left(-\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e} - 1 = -0,632 \quad \text{et} \quad g\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e} - 1 = -1,368$$

$$g(e) = 1 + e = 3.718$$

**b-** Etudions les variations de  $g$

$g$  est dérivable pour tout  $x \neq 0$  et alors  $g'(x) = \frac{x+1}{x} + \ln|x|$

$$g'(x) = f(x)$$

$\forall x \in Dg$ , le signe de  $g'$  est celui de  $f$

$\forall x \in ]-\infty; -1[ \cup ]0; +\infty[, f(x) > 0$  donc  $g'(x) > 0$

$\forall x \in ]-1; 0[, f(x) < 0$  donc  $g'(x) < 0$

D'où le tableau de variation suivant

| $x$     | $-\infty$                                                                                                                                                            |  | $-1$ | $0$ | $1$ | $+\infty$                                                                                                                                                            |   |
|---------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--|------|-----|-----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|
| $g'(x)$ | +                                                                                                                                                                    |  | 0    | -   | +   | 0                                                                                                                                                                    | + |
| $g(x)$  | <div><math>-\infty</math><div><div></div><div></div><div></div></div><div><math>0</math></div><div><div></div><div></div><div></div></div><math>-\infty</math></div> |  |      |     |     | <div><math>-\infty</math><div><div></div><div></div><div></div></div><div><math>0</math></div><div><div></div><div></div><div></div></div><math>+\infty</math></div> |   |

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$$

**2-a** En supposant que  $I(x) = \int_1^x g(t)dt$

Par intégration par parties on a  $I(x) = \int_1^x (t+1)\ln t dt$

$$u(t) = \ln t \Rightarrow u'(t) = \frac{1}{t}$$

$$v'(t) = t+1 \Rightarrow v(t) = \frac{1}{2}t^2 + t$$

$$I(x) = \left[ \left( \frac{t^2}{2} + t \right) \ln t \right]_1^x - \int_1^x v(t)u'(t)dt$$

$$I(x) = \left[ \left( \frac{t^2}{2} + t \right) \ln t \right]_1^x - \left[ \frac{t^2}{4} + t \right]_1^x \Leftrightarrow \boxed{I(x) = \left( \frac{x^2}{2} + x \right) \ln x - \left( \frac{x^2}{4} + x \right) + \frac{5}{4}}$$

$$I(1) = \left( \frac{1}{2} + 1 \right) \ln 1 - \left( \frac{1}{4} + 1 \right) + \frac{5}{4} \Rightarrow I(1) = 0$$

Lorsque  $x > 1$ ,  $g$  est strictement croissante sur  $]1; x]$  et donc  $I(x) > 0$

Lorsque  $x < 1$ ,  $g$  est négative sur  $[x; 1[$  donc  $\int_1^x g(t)dt < 0$

$$\text{Alors } I(x) = -\int_1^x g(t)dt > 0$$

Ainsi pour tout  $x > 0$ ,  $I(x) > 0$

**2-b** L'aire  $A(m)$  vaut

$$\int_m^1 |g(t)|dt = \int_m^1 (-g(t))dt = -\int_m^1 g(t)dt \Leftrightarrow \int_m^1 |g(t)|dt = \int_1^m g(t)dt \Leftrightarrow \int_1^m g(t)dt = I(m)$$

L'aire  $\boxed{A(m) = 4I(m)}$  car unité 2cm sur les l'axes

**2-c** Comme  $A(m) = 4I(m)$  donc  $A(m) = 5 + (2m+4)(m \ln m) - (m^2 + 4m)$

$$\lim_{m \rightarrow 0^+} A(m) = 5 \text{ car } \lim_{m \rightarrow 0^+} m \ln m = 0 \text{ et } \lim_{m \rightarrow 0^+} (m^2 + 4m) = 0$$

## PROBLEME 13

### PARTIE A

Soit  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow \frac{1}{x(1 - \ln x)}$$

**1-** Déterminons l'ensemble de définition

$f$  existe si et seulement si  $x(1 - \ln x) \neq 0$  et  $x > 0$

$$x \neq 0 \text{ et } 1 \neq \ln x \Leftrightarrow x \neq 0 \quad x \neq e$$

Donc

$$\boxed{Df = ]0; e[ \cup ]e; +\infty[}$$

**2-** Montrons que  $f$  est continue et dérivable sur  $Df$ .

La fonction  $\phi(x) = x(1 - \ln x)$  est définie sur  $Df$ , qui ne s'annule pour aucune valeur de  $x$

Donc  $Df$  est dérivable pour chacun des intervalles ouverts  $]0; e[$  et  $]e; +\infty[$  puisqu'elle est le produit de deux telles fonctions.

Par conséquent  $f = \frac{1}{\phi}$  est dérivable (donc continue) en tout point de  $Df$ .

3- Déterminons le sens de variation de  $f$

$$\text{Si } x \in Df, f'(x) = -\frac{\phi'(x)}{[\phi(x)]^2} = \frac{\ln x}{[\phi(x)]^2} \text{ car } f = \frac{1}{\phi}$$

$$\text{Avec, } \phi'(x) = (x(1 - \ln x))' = x'(1 - \ln x) - \frac{1}{x}x = -\ln x$$

$x \in Df$ , le signe de  $f'(x)$  est celui de  $\ln x$

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$\forall x \in ]0; 1], f'(x) < 0$  donc  $f$  est décroissante

$\forall x \in ]1; e] \cup ]e; +\infty[, f'(x) > 0$  donc  $f$  est croissante

**4 -** Etudions sur  $Df$ , le signe de  $x(1 - \ln x)$

$\forall x \in Df, x > 0$  donc le signe est celui de  $1 - \ln x$

Donc  $\forall x \in ]0; e[, \phi(x) > 0$

$\forall x \in ]e; +\infty[, \phi(x) < 0$

Calculons les limites aux bornes de  $Df$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x(1 - \ln x)}$$

quand  $x \rightarrow 0^+$ ,  $x \ln x \rightarrow 0^+$  et  $x \rightarrow 0^+$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

$$\text{En outre } \lim_{x \rightarrow e^-} x(1 - \ln x) = 0^+ \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow e^-} f(x) = +\infty}$$

$$\lim_{x \rightarrow e^+} x(1 - \ln x) = 0^- \Rightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow e^+} f(x) = -\infty}$$

$$\text{Enfin } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x(1 - \ln x)}$$

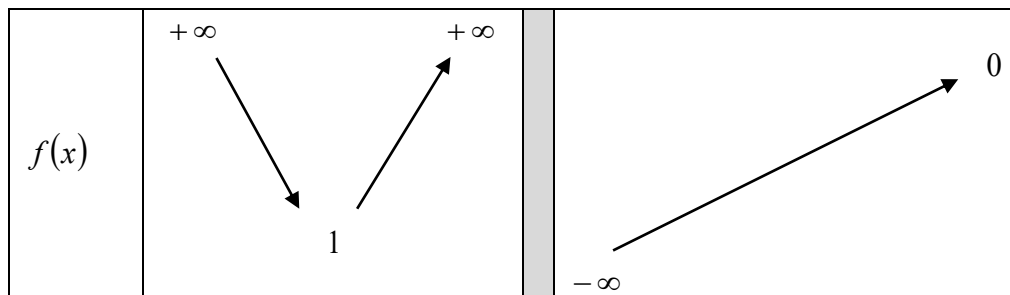
Transformons  $x(1 - \ln x)$  en  $x \ln x \left( \frac{1}{\ln x} - 1 \right)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{\ln x} - 1 \right) = -1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x = +\infty$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - \ln x) = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

D'où le tableau de variation suivant

| $x$     | 0 | 1 | e | $+\infty$ |
|---------|---|---|---|-----------|
| $f'(x)$ | - | 0 | + | +         |



En conclusion  $(Cf)$  admet deux asymptotes que sont :

- verticale en  $x = 0$
- horizontale en  $y = 0$

**B-1** Calculons  $f(\sqrt{e})$  et  $f'(\sqrt{e})$  pour déterminer l'équation de la tangente.

$$f(\sqrt{e}) = \frac{1}{\sqrt{e}\left(1 - \frac{1}{2}\right)} = \frac{2}{\sqrt{e}} \quad \text{et} \quad f'(\sqrt{e}) = \frac{\frac{1}{2}}{\left(\sqrt{e}\left(1 - \frac{1}{2}\right)\right)^2} = \frac{2}{e}$$

La tangente  $(T)$  à la courbe  $(C)$  au point  $\sqrt{e}$  a pour équation  $y - f(\sqrt{e}) = f'(\sqrt{e})(x - \sqrt{e})$

$$y = \frac{2}{\sqrt{e}} + \frac{2}{e}(x - \sqrt{e}) \quad \text{et} \quad y = \frac{2}{e}x$$

Le point  $A(0;0)$  appartient à  $(T)$

**2-** Calculons les images par  $f$  des valeurs suivantes

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{1 + \ln 2} \approx 1,18 \quad ; \quad f(4) = \frac{1}{4(1 - 2 \ln 2)} \approx -0,65 \quad ; \quad f(1) = 1 \quad f(5) = \frac{1}{1(1 - \ln 1)} \approx -0,33$$

$$f(\sqrt{e}) = \frac{2}{\sqrt{e}} \approx 1,21$$

**3-** Construction de  $(Cf)$  unité=2cm en annexe

## **PARTIE B**

Soit  $g$  définie de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  définie par

$$g(x) = \ln|1 - \ln x|$$

**1-** Déterminons l'ensemble de définition de  $f$

la fonction  $g$  est définie pour  $x > 0$  et telle que  $1 - \ln x \neq 0$

donc  $Dg = Df = ]0; e[ \cup ]e; +\infty[$

**2-** Déterminons la fonction dérivée de  $g$

$$g'(x) = \frac{1}{1 - \ln x} (1 - \ln x)' = \frac{-1}{x(1 - \ln x)} = -f(x)$$

Déduisons une primitive de  $f$

On voit que  $g'(x) = -f(x) \Rightarrow f(x) = -g'(x)$

$$F(x) = -\ln|1 - \ln x|$$

**2-a** Calculons l'aire  $A(\lambda)$

$$A(\lambda) = \int_1^{\lambda} f(x) dx \times 4 \text{ cm}^2 = 4 \int_1^{\lambda} f(x) dx \text{ cm}^2$$

$$A(\lambda) = -4[G(x)]_1^{\lambda}$$

$$A(\lambda) = +4[G(1) - G(\lambda)]$$

$$A(\lambda) = 4 \ln \left| \frac{1}{1 - \ln \lambda} \right| \text{ si } \lambda < e, 1 - \ln \lambda > 0$$

**2-b** Déterminons  $\lambda \in [1; e[$  tel que  $A(\lambda) = \ln 16$

Remarquons que  $16 = 4^2$ , donc que  $\ln 16 = 4 \ln 2$

L'équation  $A(\lambda) = \ln 16$  est alors équivalent à  $\frac{1}{1 - \ln \lambda} = 2$

$$\Rightarrow \ln \lambda = \frac{1}{2}$$

$$\lambda = \sqrt{e} = 1,64 \Rightarrow \sqrt{e} \in [1; e[$$

## PROBLEME 14

### PARTIE A

Soit  $f$  : la fonction suivante  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow \frac{x^2 + |x - 2|}{|x + 1|}$$

**Déterminons le domaine de définition de  $f$  :**

$f$  existe si et seulement si  $|x + 1| \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$

$$Df = ]-\infty; -1[ \cup ]-1; +\infty[$$

**1-** Donnons les trois valeurs de  $f(x)$  sur  $Df$

$$\bullet \text{ si } x < -1 \quad f(x) = \frac{x^2 - (x - 2)}{-(x + 1)} = \frac{-x^2 + x - 2}{x + 1}$$

$$\bullet \text{ si } -1 < x \leq 2 \quad f(x) = \frac{x^2 - (x - 2)}{x + 1} = \frac{x^2 - x + 2}{x + 1} = -\left(\frac{-x^2 + x - 2}{x + 1}\right)$$

$$\bullet \text{ si } x \geq 2 \quad f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x + 1}$$

Pour cela, on en déduit les dérivées suivantes

$$\bullet \text{ si } x < -1 \quad f'(x) = \frac{(x + 1)(-2x + 1) - (-x^2 + x - 2)}{(x + 1)^2} = \frac{-x^2 - 2x + 3}{(x + 1)^2}$$

$$\bullet \text{ si } -1 < x \leq 2 \quad f'(x) = -\left(\frac{-x^2 - 2x + 3}{(x + 1)^2}\right) = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x + 1)^2}$$

$$\bullet \text{ si } x < 2 \quad f'_g(2) = \frac{2^2 + 2 \cdot 2 - 3}{(2 + 1)^2} = \frac{5}{9}$$

$$\bullet \text{ si } x > 2 \quad f'_d(2) = \frac{2^2 - 2 \cdot 2 + 3}{(2 + 1)^2} = \frac{11}{9}$$

Et de plus  $f'_g(2) \neq f'_d(2)$  donc  $f$  n'est pas dérivable au point  $x = 2$

2- Etudions les limites aux bornes de  $Df$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2 + x - 2}{x + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^2}{x} \right) = +\infty \Leftrightarrow \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty}$$

De même  $\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty}$

Quand  $x \rightarrow -1$   $x^2 + |x + 2| \rightarrow 4$  par continuité

Quand  $x \rightarrow -1$   $|x + 1| \rightarrow 0^+$  par conséquent  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$

3- Etudions les variations de  $f(x)$

- si  $x < -1$   $f'(x) = \frac{-x^2 - 2x + 3}{(x+1)^2} = \frac{(1-x)(x+3)}{(x+1)^2}$  est du signe de  $x+3$
- si  $-1 < x \leq 2$   $f'(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$  est du signe de  $x-1$
- si  $x \geq 2$   $f'(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{(x+1)^2} > 0$  D'où le tableau de variations suivant :

| $x$     | $-\infty$ | $-3$ | $-1$      | $1$ | $2$           | $+\infty$ |
|---------|-----------|------|-----------|-----|---------------|-----------|
| $f'(x)$ | -         | 0    | +         | -   | 0             | +         |
| $f(x)$  | $+\infty$ | $7$  | $+\infty$ | $1$ | $\frac{4}{3}$ | $+\infty$ |

Pour trouver les asymptotes obliques, on calcule d'abord

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2 + x - 2}{x(x+1)} = -1$$

Puis, si  $x < -1$ ,  $f(x) + x = \frac{-x^2 + x - 2}{x+1} + x = \frac{2x-2}{x+1}$

qui tend vers 2 quand  $x$  tend vers  $-\infty$

donc  $y = -x + 1$  est asymptote oblique à  $(Cf)$  en  $-\infty$

Sa position avec  $(Cf)$

$$f(x) - y = f(x) + x - 2 = \frac{2x-2}{x-1} - 2 \Leftrightarrow f(x) - y = \frac{-4}{x+1} > 0 \text{ pour } x < -1$$

Donc  $(Cf)$  est au dessus de l'asymptote  $y = -x + 2$

1- quand  $x \rightarrow +\infty$ , c'est plus simple ; on remarque que

si  $x \geq 2$ ,  $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 2}{x+1} = x - \frac{2}{x+1}$

ce qui montre que  $y = x$  est asymptote à  $(Cf)$  en  $+\infty$

## **PARTIE B**

$$\text{Soit } g \begin{cases} R \rightarrow R \\ x \rightarrow \ln \frac{x^2 + |x - 2|}{|x + 1|} \end{cases}$$

**a-** Déterminons l'ensemble de définition de  $g$

On remarque que pour tout  $x \in Df$ ,  $f(x) > 0$

Donc  $g = \ln f \Rightarrow Df = Dg$  donc  $g$  est continue sur  $Dg$  et dérivable sur  $Dg - \{2\}$

Comme  $g$  est la composée de fonction dérivable et continue, puisque  $\boxed{g(x) = \ln f(x)}$

$$\text{On a } g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

Au point  $x = 2$ , la fonction admet une dérivée

- à droite  $\frac{f'_d(2)}{f(2)} = \frac{11}{12}$
- à gauche  $\frac{f'_g(2)}{f(2)} = \frac{5}{12}$

Comme  $g$  n'est pas dérivable en  $x = 2$ , elle admet par conséquent deux demi tangentes en ce point

**b-** Etude de limites

Le fait que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$  implique que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$

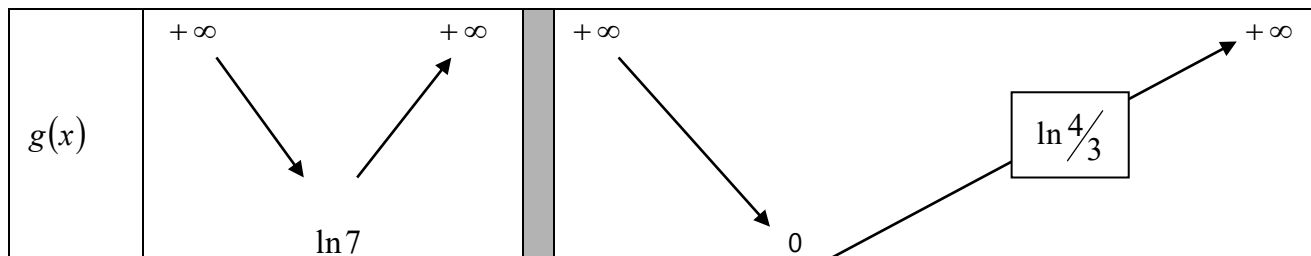
**c-** Etude de variation

Comme  $g(x) = \ln f(x) \Rightarrow g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$  et que  $f(x) > 0$

donc  $g$  a strictement le même sens de variation que  $f$  dans les mêmes intervalles puisque  $\ln x$  est croissante.

D'où le tableau de variation suivant :

| $x$     | $-\infty$ | -3 | -1 | 1 | 2              | $+\infty$       |
|---------|-----------|----|----|---|----------------|-----------------|
| $g'(x)$ | -         | 0  | +  | - | 0              | +               |
|         |           |    |    |   | $\frac{5}{12}$ | $\frac{11}{12}$ |



### Etudions les branches infinies

On a :

$$\text{Si } x \neq 0 \text{ et } x \neq -1 \quad f(x) = \frac{|x^2| + |x-2|}{|x+1|} = \frac{|x^2|}{|x|} \cdot \frac{(1 + \frac{|x-2|}{x^2})}{|1 + \frac{1}{x}|}$$

$$f(x) = |x| \cdot \frac{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}{|1 + \frac{1}{x}|}$$

Par suite  $g(x) = \ln f(x)$  est telle que  $\frac{g(x)}{x} = \frac{1}{x} \ln f(x)$

$$\frac{g(x)}{x} = \frac{1}{x} \ln|x| + \frac{1}{x} \ln\left(1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}\right) - \frac{1}{x} \ln\left|1 + \frac{1}{x}\right|$$

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{g(x)}{x} = 0$  donc l'axe des abscisses est branche parabolique de direction (OI)

Tracé de  $(Cg)$  en annexe

## PROBLEME 15

### PARTIE A

1- Calcul de limites de  $\varphi$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$

$$\varphi(x) = (2-x)e^x - 1$$

On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2-x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$  d'où  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = -\infty$

On a  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2-x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ ,

On est en présence d'une forme indéterminée ( $0 \times \infty$ )

Pour tout réel  $x$ ,  $\varphi(x) = (2-x)e^x - 1$ , on sait que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$  d'où

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = -1}$$

2- Etude de la fonction dérivée de  $\varphi$

$\varphi$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  car  $(2-x)$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $e^x$  aussi. Donc pour tout réel  $x$ , on a :

$$\varphi'(x) = -e^x + (2-x)e^x = (1-x)e^x$$

$\forall x \in \mathbb{R}, e^x > 0$  donc le signe est celui de  $1-x$  d'où le tableau de variation suivant :

|               |                                                   |   |   |
|---------------|---------------------------------------------------|---|---|
| X             | -∞                      1                      +∞ |   |   |
| $\varphi'(x)$ | +                                                 | 0 | - |
| $\varphi(x)$  |                                                   |   |   |

#### Calcul de valeurs

$$\varphi(1) = e - 1, \varphi(2) = -1, \varphi(0) = 1$$

$$\varphi(-2) = \frac{4}{e^2} - 1 \approx -0,45866$$

3- Prouvons que  $\varphi$  s'annule uniquement en deux valeurs  $\alpha$  et  $\beta$  telles que ( $\alpha < \beta$ )

La fonction  $\varphi$  est strictement croissante sur  $]-\infty; -2]$  on a  $\varphi(-2) < 0$ , donc  $\varphi$  est négative sur  $]-\infty; -2]$  donc  $\varphi$  ne s'annule pas sur  $]-\infty; -2]$

La fonction  $\varphi$  est strictement croissante et continue sur  $[-2; 0]$  elle réalise donc une bijection de  $[-2; 0]$  sur  $[\varphi(-2); \varphi(0)]$ . on a  $\varphi(-2) < 0$  et  $\varphi(0) > 0$  donc le réel 0 appartient à  $[\varphi(-2); \varphi(0)]$ ; il existe donc un unique réel  $\alpha$  appartenant à  $[-2; 0]$  tel que  $\varphi(\alpha) = 0$ .

La fonction  $\varphi$  est strictement croissante sur  $[0; 1]$   $\varphi(0) > 0$  donc la fonction  $\varphi$  est strictement positive et ne s'annule pas sur  $[0; 1]$

La fonction  $\varphi$  est strictement décroissante et continue sur  $[1; 2]$  elle réalise une bijection de  $[1; 2]$  sur  $[\varphi(2); \varphi(1)]$ , on a  $\varphi(2) < 0$  et  $\varphi(1) > 0$  donc le réel 0 appartient à  $[\varphi(2); \varphi(1)]$ . Il existe donc un réel unique  $\beta$  appartenant à  $[1; 2]$  tel que  $\varphi(\beta) = 0$

La fonction  $\varphi$  est strictement décroissante sur  $[2; +\infty[$ ,  $\varphi(2) < 0$  donc la fonction  $\varphi$  est strictement négative sur  $[2; +\infty[$  d'où :

|              |    |    |          |   |   |         |   |    |
|--------------|----|----|----------|---|---|---------|---|----|
| X            | -∞ | -2 | $\alpha$ | 0 | 1 | $\beta$ | 2 | +∞ |
| $\varphi(x)$ | -  | -  | 0        | + | + | 0       | - | -  |

4- A l'aide de la calculatrice  $\alpha \approx -1,1461932$  donc  $-1,15 \leq \alpha \leq -1,14$

De même  $\beta = 1,8414057$   $1,84 \leq \beta \leq 1,85$

5- Montrons que  $e^\alpha = \frac{1}{2-\alpha}$

On a  $\varphi(\alpha) = 0 \Leftrightarrow (2-\alpha)e^\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow (2-\alpha)e^\alpha = 1$

Le réel  $\alpha$  est différent de 2 car  $\varphi(2) < 0$  donc  $2-\alpha \neq 0$  et  $e^\alpha = \frac{1}{2-\alpha}$

### **PARTIE B**

Soit  $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$

1- Ensemble de définition de f

$\forall x \in \mathbb{R}$ , soit U la fonction définie par  $U(x) = e^x - x$

La fonction U est définie et dérivable sur  $\mathbb{R}$  (car somme de fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ ) et  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,

$U'(x) = e^x - 1$  d'où le tableau de variation de U

|       |                                                                                                                                                                     |   |   |
|-------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|
| X     | -∞                      0                      +∞                                                                                                                   |   |   |
| U'(x) | -                                                                                                                                                                   | 0 | + |
| U(x)  | <div style="display: flex; justify-content: space-between; align-items: center;"> <span>+∞</span> <span style="text-align: center;"> </span> <span>+∞</span> </div> |   |   |

$\forall x \in \mathbb{R}, u(x) \geq 1$  et  $\forall x \in \mathbb{R}, u(x) \neq 0$

La fonction f est le quotient de la fonction  $x \mapsto e^x - 1$  qui est définie sur  $\mathbb{R}$ , et de la fonction U qui est définie sur  $\mathbb{R}$  et non nulle sur  $\mathbb{R}$ , la fonction f est donc définie sur  $\mathbb{R}$

2- Calcul de limites de f en  $+\infty$  et en  $-\infty$

On a  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - 1) = -1$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - x) = +\infty$  donc

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

Théorème vu au cours

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty$  donc forme indéterminée  $(+\infty - \infty)$

Transformons f

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x} = \frac{e^x(1 - \frac{1}{e^x})}{e^x(1 - \frac{x}{e^x})} = \frac{1 - \frac{1}{e^x}}{1 - \frac{x}{e^x}}$$

Car  $e^x \neq 0; \forall x \in \mathbb{R}$

On a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \frac{1}{e^x}) = 1 \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \frac{x}{e^x}) = 1$  car d'après le cours  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

D'où

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$$

### 3) Etude des variations de f

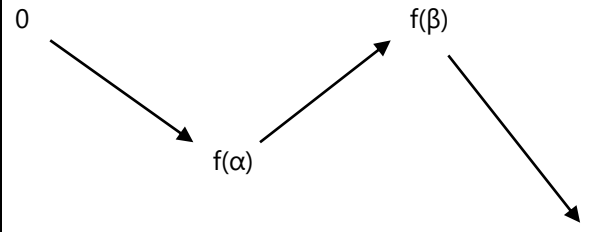
$\forall x \in \mathbb{R}$ , f est dérivable car quotient de deux fonctions dérivables sur  $\mathbb{R}$ , de plus  $e^x - x$  est non nul.

Pour tout réel x

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x - x) - (e^x - 1)(e^x - 1)}{(e^x - x)^2} \Leftrightarrow f'(x) = \frac{-e^x \cdot x + 2e^x - 1}{(e^x - x)^2} = \frac{(2 - x)e^x - 1}{(e^x - x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\varphi(x)}{(e^x - x)^2}$$

En utilisant le tableau de signe de la partie A-3, on obtient :

| x       | $\alpha$                                                                             |  |   | $\beta$ |   | $+\infty$ |
|---------|--------------------------------------------------------------------------------------|--|---|---------|---|-----------|
| $f'(x)$ | -                                                                                    |  | 0 | +       | 0 | -         |
| $f(x)$  |  |  |   |         |   |           |
|         |                                                                                      |  |   |         |   | 1         |

### 3- calcul de f(alpha)

On a d'après la question A-5  $e^x = \frac{1}{2 - \alpha}$  d'où  $f(\alpha) = \frac{e^\alpha - 1}{e^\alpha - \alpha}$

$$f(\alpha) = \frac{\frac{1}{2-\alpha} - 1}{\frac{1}{2-\alpha} - \alpha} = \frac{1 - (2-\alpha)}{1 - \alpha(2-\alpha)} \quad \Leftrightarrow \quad f(\alpha) = \frac{\alpha - 1}{\alpha^2 - 2\alpha + 1} = \frac{\alpha - 1}{(\alpha - 1)^2}$$

Comme  $\alpha \neq 1$ , on peut donc simplifier par  $\alpha - 1$ . D'où  $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha - 1}$

#### 4-Déterminons une primitive de f sur IR et calcul d'intégrale

On sait que f est continue et dérivable sur IR, donc elle y admet des primitives donc la fonction dérivée sur IR de la fonction  $U : x \rightarrow e^x - x$  est la fonction  $U' : x \rightarrow e^x - 1$ . On a donc  $f(x) = \frac{u'}{u}$ ,

On déduit donc une primitive de f sur IR qui est  $\ln|u|$

$$\int_0^1 \frac{e^x - 1}{e^x - x} dx = \left[ \ln|e^x - x| \right]_0^1 = \ln|e - 1| - \ln 1 \Leftrightarrow \boxed{\int_0^1 \frac{e^x - 1}{e^x - x} dx = \ln(e - 1) \approx 0,54}$$

### **PARTIE C**

1) Etude de la fonction g définie par  $g(x) = \ln\left(\frac{1}{2-x}\right)$

La fonction g est la composée de deux fonctions, donc :

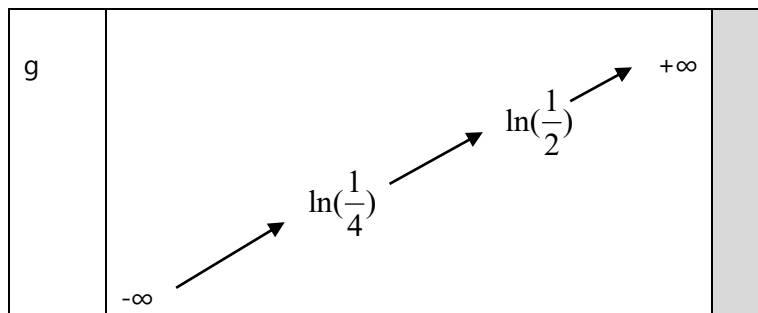
Soit  $g_1(x) = x \rightarrow \frac{1}{2-x}$  et de la fonction ln. La fonction g est définie sur  $IR - \{2\}$  et strictement positive sur  $] -\infty; 2[$ , la fonction ln est définie sur  $IR_+^*$  ? Donc la fonction g est donc définie sur  $] -\infty; 2[$ .

On a  $\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty}$  car  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2-x} = 0$  donc

On a  $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{1}{2-x} = +\infty$  donc  $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = +\infty$

D'où le tableau de variation de g dans lequel on a placé les réels - 2 et 0

|   |           |    |   |   |
|---|-----------|----|---|---|
| x | $-\infty$ | -2 | 0 | 2 |
|---|-----------|----|---|---|



**La fonction  $g$  est strictement croissante sur  $I = [-2; 0]$  donc pour tout  $x$  de  $I$  on a  $g(-2) \leq g(x) \leq g(0)$**

On a  $g(-2) = \ln\left(\frac{1}{4}\right) = -\ln 4 = -1,39$  et  $g(0) = \ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln 2 = -0,69$  donc pour tout  $x$  de  $I$  on a  $-2 \leq g(x) \leq 0$ , donc  $g(x) \in [-2; 0]$  et donc l'image de  $I$  est incluse dans  $I$

## 2a- Etudions la suite $(U_n)$

Soit  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , la suite définie pour tout entier  $n$  par :

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = g(u_n) \end{cases}$$

$$U_1 = g(-2) = -\ln 4 \in [-2; 0]$$

Raisonnement par récurrence :

- $U_0 = -2 \in [-2; 0]$
- Supposons qu'il existe un entier  $n$  tel que  $U_n \in [-2; 0]$
- D'après la question précédente si  $U_n \in [-2; 0]$  alors  $g(u_n) \in [-2; 0]$  donc  $u_{n+1} \in [-2; 0]$
- Donc d'après le principe de récurrence,  $\forall n \in \mathbb{N}$  on a  $U_n \in [-2; 0]$
- Montrons par récurrence que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante

$$u_1 - u_0 = -\ln 4 + 2 \approx 0.6 \text{ Donc } u_1 - u_0 > 0$$

- Supposons qu'il existe un entier  $n$  tel que  $u_{n+1} - u_n > 0 \Leftrightarrow u_{n+1} > u_n$
- La fonction  $g$  étant strictement croissante sur  $[-2; 0]$  et tous les  $U_n$  appartenant à cet intervalle  $g(u_{n+1}) > g(u_n)$  soit  $u_{n+2} > u_{n+1}$
- Donc d'après le principe de récurrence,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  on a  $U_{n+1} > U_n$ , la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement croissante.

## 2-b Etudions la suite $(V_n)$

Soit suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie pour tout entier  $n$  par :

$$\begin{cases} v_0 = 0 \\ v_{n+1} = g(v_n) \end{cases}$$

$$v_1 = g(0) = -\ln 2 = -0,69 \text{ D'où en utilisant les valeurs approchées } (u_1 = -1,39); -2 \leq u_1 \leq v_1 \leq v_0 \leq 0$$

Montrons par récurrence que  $\forall n \in \mathbb{N}^*$

$$-2 \leq u_n \leq v_n \leq v_{n-1} \leq 0$$

On a  $-2 \leq u_1 \leq v_1 \leq v_0 \leq 0$ , la propriété est vraie au rang 1

Supposons qu'il existe un entier non nul n tel que :

$$-2 \leq u_n \leq v_n \leq v_{n-1} \leq 0$$

La fonction g étant strictement croissante sur  $[-2; 0]$  on a :

$$g(-2) \leq g(u_n) \leq g(v_n) \leq g(v_{n-1}) \leq g(0)$$

Mais  $g(-2) \geq -2$  et  $g(0) \leq 0$  donc  $-2 \leq g(u_n) \leq g(v_n) \leq g(v_{n-1}) \leq 0$

Soit

$$-2 \leq u_{n+1} \leq v_{n+1} \leq v_n \leq 0$$

Donc d'après le principe de récurrence, pour tout entier naturel n non nul on a :

$$-2 \leq U_n \leq V_n \leq V_{n-1} \leq 0$$

D'après les inégalités précédentes, on a pour tout entier naturel n non nul :  $v_n \leq v_{n-1}$  donc la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante

3- a) montrons que sur  $R_+$  par  $\ln(1+x) \leq x$ .

Soit m la fonction définie sur  $IR_+$  par  $m(x) = x - \ln(1+x)$ . Elle est dérivable sur  $IR_+$ , d'où :

$$m'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$$

$\forall x \in R_+^*, m'(x) > 0 \Leftrightarrow m$  est donc strictement croissante sur  $IR_+^*$  donc sur  $IR_+$

Donc pour tout x de  $IR_+$ , on a  $m(x) \geq m(0) = 0$  donc pour tout x de  $IR_+$ ,  $x - \ln(1+x) \geq 0$  ou encore

$$\ln(1+x) \leq x$$

b) Montrons que  $\forall x \in \mathbb{N}, v_{n+1} - u_{n+1} = \ln\left(1 + \frac{v_n - u_n}{2 - v_n}\right)$

$\forall x \in \mathbb{N}, v_n \in [-2; 0]$  et  $u_n \in [-2; 0]$  donc les réels  $2 - v_n$  et  $2 - u_n$  sont strictement positifs d'où :

$$v_{n+1} - u_{n+1} = g(v_n) - g(u_n)$$

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \ln\left(\frac{\frac{1}{2-v_n}}{\frac{1}{2-u_n}}\right) = \ln\left(\frac{2-u_n}{2-v_n}\right)$$

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \ln\left(\frac{2-v_n + v_n - u_n}{2-v_n}\right)$$

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \ln\left(\frac{2-v_n}{2-v_n} + \frac{v_n - u_n}{2-v_n}\right)$$

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \ln\left(1 + \frac{v_n - u_n}{2 - v_n}\right)$$

Déduisons que  $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{v_n - u_n}{2 - v_n}$

On a montré à la question c2b que pour tout entier  $n$ ,  $u_n \leq v_n$  et que  $2 - v_n \geq 0$  donc pour tout entier naturel  $n$ , on a  $\frac{v_n - u_n}{2 - v_n} \geq 0$  donc d'après la question c 2a

$\ln(1 + \frac{v_n - u_n}{2 - v_n}) \leq \frac{v_n - u_n}{2 - v_n}$  et donc pour tout entier  $n$   $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{v_n - u_n}{2 - v_n}$  on a :

On a successivement entier  $n$ ,

$$-2 \leq v_n \leq 0$$

$$0 \leq -v_n \leq 2$$

$$2 \leq 2 - v_n \leq 4$$

$$\frac{1}{4} \leq \frac{1}{2 - v_n} \leq \frac{1}{2}$$

car ces trois membres sont strictement positifs

Le réel  $V_n - U_n$  est positif pour tout entier  $n$  donc en multipliant les trois membres par ce réel positif on a :

$$\frac{v_n - u_n}{4} \leq \frac{v_n - u_n}{2 - v_n} \leq \frac{v_n - u_n}{2} \text{ D'où pour tout entier } n :$$

$$\ln(1 + \frac{v_n - u_n}{2 - v_n}) \leq \frac{v_n - u_n}{2 - v_n} \leq \frac{v_n - u_n}{2}, \text{ il s'en suit : } \quad \text{(A)} \quad \text{span style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n)$$$

Montrons que pour tout entier  $n$ ,  $v_n - u_n \leq \frac{1}{2^n}(v_0 - u_0)$

### 1<sup>ère</sup> méthode

Si  $v_{n+1} - u_{n+1} \leq w_{n+1}$ . on a  $(w_n)$  est une suite géométrique d'après (A) de raison  $\frac{1}{2}$  d'où

$$w_{n+1} \leq \frac{1}{2} w_n \text{ donc } w_n = v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (v_0 - u_0) \Leftrightarrow \quad \text{span style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> $v_n - u_n \leq \frac{1}{2^n}(v_0 - u_0)$$$

2<sup>e</sup> méthode : par récurrence

On a  $v_0 - u_0 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 (v_0 - u_0)$  vraie au rang 0

Supposons qu'il existe un entier  $n$  tel que  $v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (v_0 - u_0)$

D'après la propriété démontrée précédemment on a :

$v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n)$  donc en utilisant l'hypothèse de récurrence

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(v_n - u_n) \leq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n (v_0 - u_0)$$

$$v_{n+1} - u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (v_0 - u_0)$$

La propriété est vraie au rang  $n + 1$

$$\text{1} \quad \text{span style="border: 1px solid black; padding: 5px; display: inline-block;"> $v_n - u_n \leq \frac{1}{2^n}(v_0 - u_0)$$$

D'après le principe de récurrence pour tout entier  $n$ , on a :

On a démontré que pour tout entier naturel  $n$ ,  $0 \leq v_n - u_n$

D'où

$$0 \leq v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (v_0 - u_0)$$

On a  $\frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = 0$

En résumé,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante,  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  décroissante et la suite  $(v_n - u_n)$  a pour limite 0, les suites  $(v_n)$  et  $(u_n)$  sont adjacentes, elles sont donc toutes deux convergentes et ont la même limite  $l = 0$

c) on obtient avec la machine  $U_{10} = -1,146200752$

$$-1,1463 \leq u_{10} \leq -1,1462$$

$$V_{10} = -1,146176412 \Rightarrow -1,1462 \leq V_{10} \leq -1,1461$$

## PROBLEME 16

1- Calculons les limites aux bornes de  $D_g$

$$g(x) = -\ln x + \frac{1}{x}$$

$$D_g = ]0; +\infty]$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(-\ln x + \frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} (-\ln x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x}\right) = +\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\ln x + \frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty \text{ car } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (-\ln x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0 \end{cases}$$

2- Etudions les variations de  $g$

$$g'(x) = \left(-\ln x + \frac{1}{x}\right)' \Leftrightarrow g'(x) = -\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$$

$$g'(x) = -\left(\frac{x+1}{x^2}\right)$$

Sens de variation

$\forall x \in D_g, \frac{x+1}{x^2} > 0$  Donc  $g$  est strictement décroissante sur  $]0; +\infty[$

Tableau de variation

|         |           |           |
|---------|-----------|-----------|
| $x$     | 0         | $+\infty$ |
| $g'(x)$ | -         |           |
| $g(x)$  | $+\infty$ |           |

|  |           |
|--|-----------|
|  |           |
|  | $-\infty$ |

3- Démontrons que  $g(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha \in \left] \frac{3}{2}; 2 \right[$

Sur  $]0; +\infty[$ ,  $g$  est continue et strictement décroissante.

Elle réalise donc une bijection de  $]0; +\infty[$  sur  $]-\infty; +\infty[$  ou  $\mathbb{R}$

Or  $\left] \frac{3}{2}; 2 \right[ \in ]0; +\infty[$  de plus  $0 \in ]-\infty; +\infty[$

$$\left. \begin{array}{l} g\left(\frac{3}{2}\right) = 0,26 \\ g(2) = -0,19 \end{array} \right\} g\left(\frac{3}{2}\right) \times g(2) < 0 \text{ D'où } g(x) = 0 \text{ admet solution unique } \alpha \in \left] \frac{3}{2}; 2 \right[$$

4- Justifions que :  $\forall x \in ]0; \alpha[, g(x) > 0$   
 $\forall x \in ]\alpha; +\infty[, g(x) < 0$

Sur  $]0; +\infty[$ , on a :  $g$  est strictement décroissante et  $g(\alpha) = 0$  d'où  $\forall x \in ]0; \alpha[, g(x) > 0$

et  $\forall x \in ]\alpha; +\infty[, g(x) < 0$

## **PARTIE B**

$$f(x) = e^{-x} \ln x, Df = ]0; +\infty[$$

1- Déterminons  $f'(x)$

$$\forall x \in Df, f'(x) = (e^{-x} \ln x)'$$

$$f'(x) = -e^{-x} \ln x + \frac{1}{x} e^{-x} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{f'(x) = e^{-x} g(x)}$$

$$f'(x) = e^{-x} \left( -\ln x + \frac{1}{x} \right)$$

2- Etudions les variations de  $f$

$\forall x \in ]0; +\infty[, e^{-x} > 0$  donc le signe de  $f'(x)$  dépend de  $g(x)$

Donc  $\forall x \in ]0; \alpha[, g(x) > 0 \Leftrightarrow f'(x) > 0$  alors  $f$  est strictement croissante

$\forall x \in ]\alpha; +\infty[, g(x) < 0 \Leftrightarrow f'(x) < 0$  Alors  $f$  est strictement décroissante

Tableau de variation

| x       | 0 | $\alpha$                                                                                                                                                                           |   |   | $+\infty$ |
|---------|---|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---|---|-----------|
| $f'(x)$ |   | +                                                                                                                                                                                  | 0 | - |           |
| $f(x)$  | 0 | <div style="display: flex; align-items: center; justify-content: center;"> <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; margin: 0 10px;"><math>f(\alpha)</math></div> </div> |   |   |           |
|         |   | <div style="display: flex; justify-content: space-between; align-items: center;"> <div style="text-align: center;">↗</div> <div style="text-align: center;">↘</div> </div>         |   |   |           |
|         |   | $-\infty$                                                                                                                                                                          |   |   |           |

3- démontrons que (OI) et (OJ) sont asymptotes à (Cf)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (e^{-x} \ln x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \quad \text{car} \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{-x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \end{cases}$$

D'où (OJ) est une asymptote verticale à (Cf)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^{-x} \ln x)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} \times \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \quad \text{car} \quad \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \end{cases}$$

D'où (OI) est asymptote horizontale à (Cf)

$$4- \text{ Démontrons que } f(\alpha) = \frac{e^{-\alpha}}{\alpha}$$

$$g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow -\ln \alpha + \frac{1}{\alpha} = 0 \Leftrightarrow \ln \alpha = \frac{1}{\alpha}$$

$$f(\alpha) = e^{-\alpha} \ln \alpha \Leftrightarrow f(\alpha) = e^{-\alpha} \times \frac{1}{\alpha} \quad \Leftrightarrow$$

$$f(\alpha) = \frac{e^{-\alpha}}{\alpha}$$

5- Déterminons les coordonnées du point d'intersection de (Cf) avec l'axe des abscisses

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow e^{-x} \ln x = 0$$

$$\text{Or } \forall x \in Df, e^{-x} > 0 \Leftrightarrow \ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\boxed{I(1; 0)}$$

Donc

6- Tracé de courbe en annexe

## **PARTIE C**

1- Démontrons que  $f^{-1}$  est dérivable en 0

$$f(x) = 0 \text{ donc, } x = 1 \Rightarrow f^{-1}(0) = 1$$

f est dérivable sur  $]0; +\infty[$  en particulier en 1

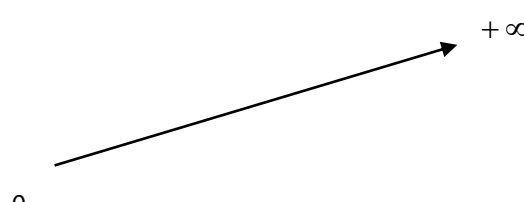
$$f'(1) = e^{-1} \neq 0 \text{ alors } f^{-1} \text{ est dérivable en } 0$$

2- Déterminons  $(f^{-1})'_{(0)}$

$$(f^{-1})'_{(0)} = \frac{1}{f'(1)} \Leftrightarrow (f^{-1})'_{(0)} = \frac{1}{e^{-1}} \quad \Leftrightarrow \quad (f^{-1})'_{(0)} = e$$

3- Dressons le tableau de variation de  $f^{-1}$

$f^{-1}$  étant la bijection réciproque de f, on a le tableau de variation suivant :

|                |                                                                                   |     |
|----------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----|
| x              | $-\infty$                                                                         | $0$ |
| $(f^{-1})'(x)$ | +                                                                                 |     |
| $(f^{-1})(x)$  |  |     |

D'où  $(Cf)$  et  $(C_{f^{-1}})$  sont symétriques par rapport à la droite d'équation :  $y = x$  (la première bissectrice)

4- tracé en annexe.

## PROBLEME 17

### PARTIE A

1) Résolvons l'équation  $p(x) = 0$ .

Posons  $X = e^x$  et l'équation devient  $x^2 - 5x + 4 = 0$

$$\Delta = 25 - 16 > 0 \Rightarrow \sqrt{\Delta} = 3$$

$$X_1 = \frac{5+3}{2} \Rightarrow X_1 = 4 \text{ et } X_2 = \frac{5-3}{2} \Rightarrow X_2 = 1$$

$$\text{Donc } e^x = 4 \Rightarrow x = \ln 4$$

$$e^x = 1 \Rightarrow x = 0$$

Donc l'ensemble de solution est  $S_{IR} = \{0; \ln 4\}$

e) Démontrons que :

Tableau de signe de  $p(x)$

|       |           |     |         |           |
|-------|-----------|-----|---------|-----------|
| x     | $-\infty$ | 0   | $\ln 4$ | $+\infty$ |
| x-ln4 | -         | -   | 0       | +         |
| x     | -         | 0 + |         | +         |
| P(x)  | +         | 0 - | 0       | +         |

Alors  $\forall x \in ]-\infty; 0[ \cup ]\ln 4; +\infty[, p(x) > 0$   
 $\forall x \in ]0; \ln 4[, p(x) < 0$

### PARTIE B

$$\text{Soit } f(x) = x - 1 + \frac{1}{e^x - 2}$$

4- Déterminons l'ensemble de définition de  $f$

$$Df = \{x \in IR / e^x - 2 \neq 0\} \Rightarrow Df = \{x \in IR / e^x \neq 2\} \Rightarrow Df = \{x \in IR / x \neq \ln 2\}$$

$$\Leftrightarrow Df = IR - \{\ln 2\}$$

5- Calculons les limites de  $f$  en  $+\infty$  et en  $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x - 1 + \frac{1}{e^x - 2} \right)$$

$$\text{Quand } x \rightarrow +\infty \begin{cases} x - 1 \rightarrow +\infty \\ \frac{1}{e^x - 2} \rightarrow 0 \end{cases} \quad \text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( x - 1 + \frac{1}{e^x - 2} \right)$$

$$\text{Quand } x \rightarrow -\infty \begin{cases} x - 1 \rightarrow -\infty \\ \frac{1}{e^x - 2} \rightarrow -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \xrightarrow{<} \ln 2} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{<} \ln 2} \left( x - 1 + \frac{1}{e^x - 2} \right)$$

$$\text{Quand } x \xrightarrow{<} \ln 2 \begin{cases} \frac{1}{e^x - 2} \rightarrow -\infty \end{cases} \quad \text{donc } \lim_{x \xrightarrow{<} \ln 2} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \xrightarrow{>} \ln 2} f(x) = \lim_{x \xrightarrow{>} \ln 2} \left( x - 1 + \frac{1}{e^x - 2} \right)$$

$$\text{Quand } x \xrightarrow{>} \ln 2 \begin{cases} \frac{1}{e^x - 2} \rightarrow +\infty \end{cases} \quad \text{donc } \lim_{x \xrightarrow{>} \ln 2} f(x) = +\infty$$

5- a)  $\forall x \in \mathbb{R} - \{\ln 2\}$   $f$  est dérivable car somme de fonctions dérivables

$$f'(x) = \left( x - 1 + \frac{1}{e^x - 2} \right)' \Rightarrow$$

$$f'(x) = 1 - \frac{e^x}{(e^x - 2)^2} = \frac{(e^x - 2)^2 - e^x}{(e^x - 2)^2} = \frac{e^{2x} - 4e^x + 4 - e^x}{(e^x - 2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{e^{2x} - 5e^x + 4}{(e^x - 2)^2} = \frac{p(x)}{(e^x - 2)^2}$$

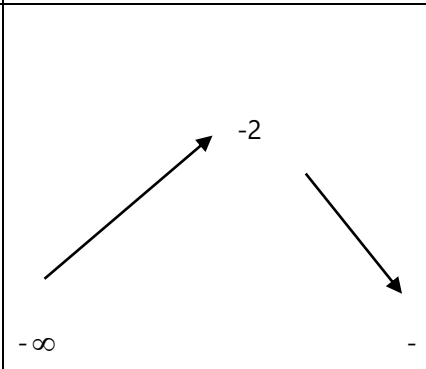
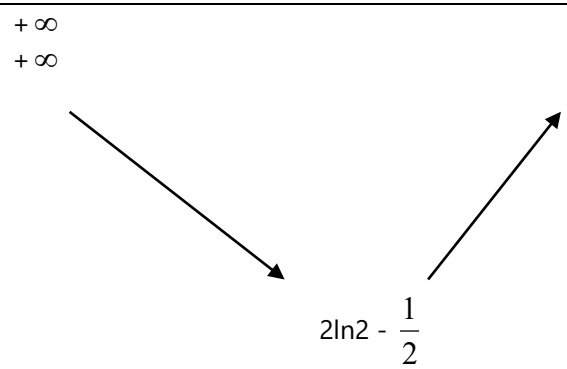
5- b) Etudions le signe de  $f'(x)$

$\forall x \in \mathbb{R}, (e^x - 2)^2 > 0$  donc le signe de  $f'(x)$  est celui de  $p(x)$  or

-  $\forall x \in ]-\infty; 0[ \cup ]\ln 4; +\infty[, p(x) > 0$ , donc  $f'(x) > 0$  d'où  $f$  est strictement croissante

-  $\forall x \in ]0; \ln 4[ - \{\ln 2\}, p(x) < 0$ , donc  $f'(x) < 0$  d'où  $f$  est strictement décroissante

Tableau de variation de  $f$

| $x$     | $-\infty$<br>$+\infty$ | 0                                                                                 |   |   | $\ln 2$ | $\ln 4$                                                                            |   |   |  |
|---------|------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|---|---|---------|------------------------------------------------------------------------------------|---|---|--|
| $f'(x)$ |                        | +                                                                                 | 0 | - |         | -                                                                                  | 0 | + |  |
| $f(x)$  |                        |  |   |   |         |  |   |   |  |

4) Démontrons que  $(D): y = x - 1$  est asymptote oblique à  $(Cf)$  en  $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{1}{e^x - 2} \right) = 0, \text{ donc } (D): y = x - 1 \text{ est bel et bien asymptote à } (Cf) \text{ en } +\infty$$

5) Position relative de  $(D)$  et  $(Cf)$

$$f(x) - y = \frac{1}{e^x - 2}$$

$\forall x \in ]\ln 2; +\infty[ f(x) - y \geq 0$ , donc  $(Cf)$  est au dessus de  $(D)$

4) Démontrons que  $f(x) = x - \frac{3}{2} + \frac{e^x}{2(e^x - 2)}$

$$f(x) = \frac{2x - 3}{2} + \frac{e^x}{2(e^x - 2)} = \frac{-4e^x - 8x + 12 + 4xe^x}{2(e^x - 2)}$$

$$f(x) = \frac{x(e^x - 2) + (3 - e^x)}{e^x - 2} = x - \frac{e^x - 3}{e^x - 2}$$

$$f(x) = x - 1 + \frac{1}{e^x - 2} \text{ donc } \forall x \in ]-\infty; \ln 2[ \cup ]\ln 2; +\infty[ \quad f(x) = x - \frac{3}{2} + \frac{e^x}{2(e^x - 2)}$$

7) Démontrons que  $(\Delta): f(x) = x - \frac{3}{2}$  est asymptote oblique à  $(Cf)$  en  $-\infty$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - y] &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{e^x}{2(e^x - 2)} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left( \frac{1}{2 - 4e^{-x}} \right) \end{aligned}$$

Quand  $x \rightarrow -\infty$ ,  $2 - 4e^{-x} \rightarrow +\infty$ , donc  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = 0$ , d'où  $y = x - \frac{3}{2}$  est asymptote à  $(Cf)$  en  $-\infty$

8) Etudions la position relative de  $(Cf)$ , et  $(\Delta)$

$$f(x) - y = \frac{e^x}{2(e^x - 2)}. \text{ Avec } \frac{e^x}{2(e^x - 2)} > 0, \text{ on a donc } (Cf) \text{ est au dessus de } (\Delta) \text{ sur } ]-\infty; \ln 2[$$

9) Voir papier millimétré

### PARTIE C

1) Exprimons l'aire  $A(\lambda)$  en fonction de  $\lambda$

L'aire est délimitée par la partie comprise entre  $(Cf)$  la droite  $(\Delta)$ , la droite  $(OJ)$ , et  $x = \lambda$

$$A(\lambda) = \int_{\lambda}^0 (y - f(x)) \times OI \times OJ \text{ cm}^2$$

$$A(\lambda) = -2 \int_{\lambda}^0 \frac{e^x}{e^x - 2} dx \text{ cm}^2 \Rightarrow A(\lambda) = -2 \ln |e^x - 2| \text{ cm}^2$$

$$\text{Sur } [\lambda; 0], e^x - 2 \text{ donc } A(\lambda) = [-2 \ln(2 - e^x)]_{\lambda}^0 \text{ cm}^2$$

$$A(\lambda) = 2 \ln(2 - e^{\lambda}) \text{ cm}^2$$

2) Calculons  $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} A(\lambda)$

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} A(\lambda) = 2 \ln 2 \text{ cm}^2 \text{ car } e^{\lambda} \rightarrow 0 \text{ en } -\infty.$$

## **PROBLEM 18**

### PARTIE A

Soit  $f_m(x) = 1 - mx^3 - 2 \ln x$ , la fonction  $f_m$  définie de  $\mathbb{R}$  vers  $\mathbb{R}$

1-a) Calcul des limites aux bornes de  $Df_m$

$Df_m = \{ \text{pour tout } x \in \mathbb{R}, x > 0 \}$  donc  $Df_m = ]0; +\infty[$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_m(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - mx^3 - 2 \ln x) = +\infty \text{ car en } 0, (-mx^3 \rightarrow 0 \text{ et } -2 \ln x \rightarrow -\infty)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_m(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - mx^3 - 2 \ln x) = -\infty \text{ car en } +\infty, (-mx^3 \rightarrow -\infty \text{ et } -2 \ln x \rightarrow -\infty)$$

1-b) Etude des variations de  $f_m$ .

Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$ ,  $f_m$  est dérivable car somme de deux fonctions dérivables donc :

$$f'_m(x) = (1 - mx^3 - 2 \ln x)' = -3mx^2 - \frac{2}{x}$$

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}_+^*, f'_m(x) = \frac{-(3mx^3 + 2)}{x}$$

Pour tout  $x \in \mathbb{R}_+^*$  et  $m \in [0; 1]$ ,  $f'_m(x) < 0$  donc  $f_m$  est strictement décroissante sur  $Df_m$ .

Tableau de variation de  $f_m$

| $x$       | 0         | $+\infty$ |
|-----------|-----------|-----------|
| $f'_m(x)$ |           | —         |
| $f_m(x)$  | $+\infty$ | $-\infty$ |

2-a) Pour tout  $x \in ]0 ; +\infty[$ ,  $f_m$  est strictement décroissante et continue donc elle réalise une bijection de  $]0 ; +\infty[$  dans  $\mathbb{R}$ . En effet, tout  $x$  de  $\mathbb{R}$  admet un et un seul antécédent dans  $]0 ; +\infty[$ . Or  $0 \in \mathbb{R}$  donc  $0$  admet un et unique antécédent dans

$]0 ; +\infty[$ . Par conséquent, il existe un unique nombre réel positif  $a_m$  tel que  $f_m(a_m) = 0$

b) Montrons que  $1 \leq a_m \leq \sqrt{e}$

$$\left. \begin{array}{l} f_m(1) = 1 - m \geq 0 \\ f_m(\sqrt{e}) = -me\sqrt{e} \leq 0 \end{array} \right\} f_m(\sqrt{e}) \leq 0 \leq f_m(1) \Leftrightarrow f_m(\sqrt{e}) \leq f_m(a_m) \leq f_m(1)$$

Donc  $1 \leq a_m \leq \sqrt{e}$  car  $f_m$  est strictement décroissante.

## PARTIE B

1-a) L'ensemble de définition  $D$  de la fonction  $g_m$  est :

$Dg_m = \{x \in \mathbb{R}, x > 0\}$  donc  $Dg_m = ]0 ; +\infty[$ .

1-b) Déterminons les limites de  $g_m$  suivant les valeurs de  $m$

•  $m = 0$

$$g_0(x) = \frac{\ln x}{x^2} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} g_0(x) = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} g_0(x) = -\infty \end{cases}$$

•  $m = 1$

$$g_1(x) = \frac{\ln x}{x^2} - x \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} g_1(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} g_1(x) = -\infty \end{cases} \quad \text{car} \quad \begin{cases} \frac{\ln x}{x^2} \rightarrow 0 \\ -x \rightarrow 0 \end{cases}$$

•  $m \in ]0;1[$

$$g_{]0;1[}(x) = \frac{\ln x}{x^2} - mx \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} g_{]0;1[}(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} g_{]0;1[}(x) = -\infty \end{cases}$$

1-c) Précisons les asymptotes de  $(C_m)$  suivant les valeurs de  $m$

$m=0$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g_0(x) = 0$ , donc  $(C_0)$  admet une asymptote horizontale d'équation :  $y=0$ .

$m \in ]0;1[$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g_m(x) = -\infty$  donc  $(C_m)$  admet une asymptote verticale d'équation :  $x=0$

$$m=1, \lim_{x \rightarrow +\infty} g_1(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g_1(x)}{x} = -1, \lim_{x \rightarrow +\infty} [g_1(x) + mx] = 0$$

donc  $(C_1)$  admet une asymptote oblique d'équation :  $y_1 = -x$

2- Montrons que pour tout  $x \in D$ ,  $g'_m(x) = \frac{1}{x^3} f_m(x)$

$$\forall x \in D, g'_m(x) = \left( \frac{\ln x}{x^2} - mx \right)' = \frac{x - 2x \ln x}{x^4} - m$$

$$, g'_m(x) = \frac{1 - 2 \ln x}{x^3} - m = \frac{1 - 2 \ln x - mx^3}{x^3} \Leftrightarrow , g'_m(x) = \frac{f_m(x)}{x^3}$$

3-a) Dressons le tableau de variation de  $g_m(x)$

Pour tout  $x \in ]0;+\infty[$ ,  $x^3 > 0$  donc le signe de  $g'_m(x)$  est celui de  $f_m(x)$  or sur  $]0, a_m[$   $f_m(x) > 0$  donc  $g_m$  est strictement croissante.

Pour tout  $x \in ]a_m; +\infty[$ ,  $f_m(x) < 0$  donc  $g_m$  est strictement décroissante.

Pour  $m=0$ , on obtient le tableau de variation suivant :

| $x$       | 0         | $\sqrt{e}$     | $+\infty$ |
|-----------|-----------|----------------|-----------|
| $g'_0(x)$ | +         | 0              | -         |
| $g_0(x)$  | $-\infty$ | $\frac{1}{2e}$ | 0         |

Pour  $m \neq 0$ , on obtient le tableau de variation suivant :

| $x$       | 0         | $a_m$      | $+\infty$ |
|-----------|-----------|------------|-----------|
| $g'_m(x)$ | +         | 0          | -         |
| $g_m(x)$  | $-\infty$ | $g_m(a_m)$ | $-\infty$ |

b- Donnons l'expression de  $g_m(a_m)$

$$f_m(a_m) = 0 \Leftrightarrow 1 - ma_m^3 - 2 \ln a_m = 0 \Leftrightarrow \ln a_m = \frac{1 - ma_m^3}{2}$$

$$\text{Donc } g_m(a_m) = \frac{1 - ma_m^3}{2a_m^2} - ma_m \Leftrightarrow g_m(a_m) = \frac{1 - 3ma_m^3}{2a_m^2}$$

4- a) Déterminons une équation de  $(D_m)$  tangente en  $A_m$  à  $(C_m)$

$$(D_m): y_m = g'_m(1)(x-1) + g_m(1)$$

$$y_m = (1-m)(x-1) - m \Rightarrow (D_m): y_m = (1-m)x - 1$$

4- b) Il existe un point commun qui est indépendant de  $m$ . Pour que cela soit indépendant de  $m$ , il faudrait  $x=0$ , d'où ce point commun à toutes droites  $(D_m)$  a pour coordonnées  $(0; -1)$ .

5- a) Etude des positions relatives de  $(C_m)$  et  $(\Delta): y = -mx$

$$g_m(x) - y = \frac{\ln x}{x^2} - mx - (-mx) \Leftrightarrow g_m(x) - y = \frac{\ln x}{x^2}$$

$$\forall x \in ]0;1[, \frac{\ln x}{x^2} < 0 \text{ donc } (C_m) \text{ est au-dessous de } (\Delta_m)$$

$$\forall x \in ]1;+\infty[, \frac{\ln x}{x^2} > 0 \text{ donc } (C_m) \text{ est au-dessus de } (\Delta_m)$$

5- b) Etude des positions relatives de  $(C_m)$  et  $(C_{m'})$

$$g_m(x) - g_{m'}(x) = -mx + m'x = x(m' - m) \text{ or } m' < m \text{ donc } g_m(x) - g_{m'}(x) \leq 0$$

D'où  $(C_m)$  est au-dessous de  $(C_{m'})$  sur  $]0;+\infty[$  avec  $g_{m'}(x) = \frac{\ln x}{x^2} - m'x$  et  $g_m(x) = \frac{\ln x}{x^2} - mx$

6- Tracé des courbes (en annexe)

## PARTIE C

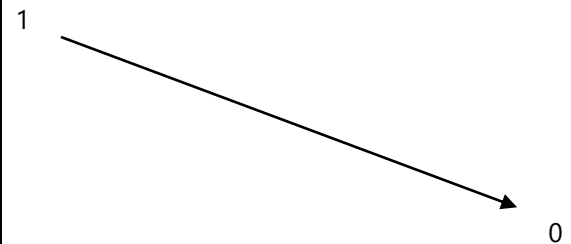
- a) Montrons que  $\Phi$  est une bijection

$$\Phi(a) = \frac{1}{a^3}(1 - 2 \ln a)$$

$$\forall a \in [1; \sqrt{e}] \text{ et } \Phi'(a) = \frac{1}{a^4}(6 \ln a - 5)$$

$\forall a \in [1; \sqrt{e}]$  et  $\Phi'(a) < 0$  donc  $\Phi$  est strictement décroissante et continue. D'où  $\Phi$  réalise une bijection de  $[1; \sqrt{e}]$  dans  $[0; 1]$ .

- b) Dressons le tableau de variation de  $\Phi$

| $a$        | 1                                                                                  | $\sqrt{e}$ |
|------------|------------------------------------------------------------------------------------|------------|
| $\Phi'(a)$ | —                                                                                  |            |
| $\Phi(a)$  |  |            |

- c) Donnons le sens de variation de  $\Phi^{-1}$

$\Phi^{-1}$  est la bijection réciproque de  $\Phi$ , donc le sens de variation de  $\Phi^{-1}$  est celui de  $\Phi$ . D'où  $\Phi^{-1}$  est décroissante de  $[0; 1]$  sur  $[1; \sqrt{e}]$

2. a) Déterminons l'application de  $\Phi \circ \varphi$

$$\Phi \circ \varphi(m) = \Phi(a_m) = \frac{1}{a_m^3}(1 - 2 \ln a_m) \text{ Or d'après la question 3-b) de la partie B, } 1 - 2 \ln a_m = m a_m^3.$$

$$\text{Donc } \Phi \circ \varphi(m) = \frac{1}{a_m^3} \times m a_m^3 \Leftrightarrow \Phi \circ \varphi(m) = m \text{ alors } \Phi \circ \varphi = Id$$

- b) Déduisons que  $\varphi$  est une bijection décroissante de  $[0; 1]$  sur  $[1; \sqrt{e}]$

$$\Phi \circ \varphi = Id \Rightarrow \varphi = \Phi^{-1} \text{ donc } \varphi \text{ est une bijection décroissante de } [0; 1] \text{ sur } [1; \sqrt{e}]$$