

PROBABILITE

- DÉNOMBREMENT D'ENSEMBLES FINIS

EXERCICE 1 :

Dans un club de sport, les adhérents paient leur carte du club puis une cotisation pour chaque sport auxquels ils s'inscrivent.

A/ La première année le club propose deux sports : le football et le tennis. Le Trésorier du club constate très vite qu'il a vendu 58 cartes d'adhérents au club, mais qu'il n'a que 35 cotisations au football et 25 au tennis. Parmi ceux-ci 10 adhérents se sont inscrits dans les deux disciplines. Combien d'adhérents n'ont pas encore cotisé ni au football ni au tennis ?

B/ La deuxième année, le club dispose en plus, d'une piscine. Cette fois-ci le Trésorier note 172 adhérents, 78 cotisations au football ; 55 au tennis et 60 à la piscine et remarque que 5 adhérents sont inscrits dans les trois (3) disciplines, 15 sont inscrits au tennis et à la piscine (et peut-être au football) de même 11 font football et piscine et 12 football et tennis.

Combien d'adhérents :

- a- Ne font que du football ?
- b- Ne font que du tennis ?
- c- Ne font que de la natation ?
- d- Ne se sont pas encore inscrits dans aucune discipline ?

EXERCICE 2 :

Dans une boîte contenant 4 boules blanches, 2 noires et 1 rouge toutes indiscernables au toucher.

On tire au hasard et simultanément 3 boules. Quelle est la probabilité des événements suivants :

“A” : Avoir deux boules blanches au moins

“B” : Avoir deux boules de même couleur

“C” : Avoir deux boules de même couleur au moins.

“D” : Avoir une boule de chaque couleur

“E” : Avoir deux couleurs différentes

EXERCICE 3 :

On lance 2 dés parfaitement équilibrés numérotés de 1 à 6 puis on note la somme de chiffres apparus sur les faces supérieures.

Calcule la probabilité d'avoir :

1- La somme 5 ; la somme 7 ; la somme 10.

2- Une somme inférieure à 8 ; une somme supérieure à 10.

EXERCICE 4 :

Dans une urne contenant dix jetons dont n sont blancs ($n \leq 6$) et les autres noirs, on tire simultanément 4 jetons. Quelle est la probabilité d'avoir :

1- Un jeton noir et un seul.

2- Quatre jetons noirs.

EXERCICE 5 :

Sur 5 jetons on marque les lettres du mot MARIE. Puis on les met dans un sac et on tire successivement sans remise 3 lettres.

- 1- Quelle est la probabilité d'avoir :
- a- Un mot commençant par A
 - b- Un mot contenant E
 - c- Un mot commençant par R et se terminant par E
- 2- On tire maintenant successivement avec remise 3 lettres. Quelle est la probabilité d'avoir :
- a- Un mot se terminant par M
 - b- Le mot ARE

3- On remplace la lettre E par une autre lettre A et on tire successivement et sans remise 3 lettres.

Calcule la probabilité des événements a) ; b) du 1.

EXERCICE 6 :

Vingt chevaux numérotés de 1 à 20 participent à une course. Être dans le trio final signifie qu'on a gagné. Les chevaux numérotés de 1 à 10 ont une probabilité individuelle de victoire égale à 0,05. Les chevaux numérotés de 11 à 14 ont une probabilité individuelle de gagner de 0,08.

Les chevaux numérotés de 15 à 20 ont une probabilité chacune égale de vaincre.

- 1- Quelle est la probabilité de voir les numéros 10 ; 11 et 12 occuper les trois premières places.
- 2- Quelle est la probabilité d'obtenir les numéros 4 ; 11 et 18 dans cet ordre occuper les trois première places.

EXERCICE 7 :

On dispose de 3 dés cubiques A ; B et C. le dé A est équilibré et numéroté de 1 à 6.

Le dé B est équilibré porte sur deux faces le nombre 6 et sur les quatre autres le nombre 1.

Le dé C est pipé de façon que la probabilité d'apparition de chaque face est proportionnelle au nombre marqué sur la face. Les faces sont numérotées de 1 à 6.

- 1- On lance une fois chacun des 3 dés.
- a- Quelle est la probabilité d'avoir le chiffre 6 pour le dé A.
 - b- Quelle est la probabilité d'avoir le chiffre 6 pour le dé B
 - c- Quelle est la probabilité d'avoir le chiffre 6 pour le dé C

2- On lance les 3 dés simultanément. Quelle est la probabilité d'obtenir

- a- 3 fois le chiffre 6
- b- 3 chiffres égaux
- c- les chiffres 1 ; 3 et 5.

EXERCICE 8 :

Le sang de chaque être humain possède une caractéristique appelé facteur Rhésus. Il y a 2 formes R^+ et R^- .

La probabilité qu'un ivoirien soit R^+ est 0,76 et la probabilité qu'il soit R^- est 0,24. La formation d'un couple est indépendante du facteur Rhésus.

Un couple étant pris au hasard. Calcule les probabilités suivantes :

- a- le mari est R^+ et la femme R^-
- b- le mari est R^- et la femme R^+
- c- Le mari est R^- et la femme R^-
- d- Le mari est R^+ et la femme R^+ .

- PROBABILITÉ CONDITIONNELLE

EXERCICE 1 :

Dans la boîte à jouets de Mlle Alexandra, il y a 16 boules indiscernables au toucher. 7 sont rouges parmi lesquelles 3 sont unies et les autres tachetées. 9 sont bleues parmi lesquelles 6 sont tachetées et 3 sont unies. Alexandra tire une boule de sa boîte.

1- Quelle est la probabilité qu'elle tire une boule rouge sachant qu'elle est tachetée ?

2- Elle tire simultanément 2 boules de sa boîte. Quelle est la probabilité d'avoir une boule bleue exactement sachant qu'une des deux (au moins) est tachetée ?

EXERCICE 2 :

On dispose d'un dé parfaitement équilibré numéroté de 1 à 6 et de trois sacs contenant des draps blancs et des draps jaunes.

Le sac 1 noté S1 contient 3 draps blancs et 2 jaunes.

Le sac 2 noté S2 contient 1 drap blanc et 1 drap jaune

Le sac 3 noté S3 contient 1 drap blanc et 4 draps jaunes

Chaque soir avant de se coucher Mlle KATE jette le dé cubique. Si le numéro qui apparaît sur la face supérieure est inférieur à 3, elle tire le drap dans S1.

Si le numéro est 4, elle le prend dans S2. Dans les autres cas elle le prend dans S3.

1- Quelle est la probabilité pour qu'elle prenne un drap blanc.

2- On suppose que le drap pris est blanc, quelle est la probabilité pour qu'il provienne de S2.

3- Sachant qu'il vient de S2, quelle est la probabilité pour qu'il soit jaune.

EXERCICE 3 :

Le lycée Moderne de Bondoukou organise des cours de renforcement avec l'aide de trois professeurs de MATHS que sont :

Mr. G ; Mr. Y et Mr. K. D'une part dans le groupe des élèves inscrits la répartition est la suivante:

42,5% suivent le cours de Mr. Y.

34% suivent les cours de Mr. G.

Et les autres les cours de Mr. K.

D'autre part 65% des élèves inscrits, sont du lycée parmi lesquels :

40% suivent les cours de Mr. G.

20% suivent les cours de Mr. K.

Les autres suivent les cours de Mr. Y.

1- Recopie puis complète le tableau ci-dessous.

	Mr. G	Mr. Y	Mr. K	TOT.
Élèves du lycée				
Autres				
TOT.				100%

On définit les événements suivants :

“A” l’élève inscrit est du LYCEE
 “B” l’élève inscrit suit les cours de Mr. Y.

On notera $\bar{A}$ et $\bar{B}$ les événements contraires de A et B.

- Calcule $P(A \setminus B)$ et $P(B \setminus A)$
- Montre que $P(\bar{A} \setminus B) = 0,388$ après l’avoir défini par une phrase.
- Calcule la probabilité de l’événement C « l’élève inscrit n’est pas du lycée et suit les cours de Mr. K ou de Mr. G. »

EXERCICE 4



On considère une cible de tir à l’arc de diamètre 1.60 m comme indiqué ci-dessus. Un tireur atteint en moyenne cette cible huit fois sur dix tirs consécutifs, la largeur de chaque couronne est de 0.2 m.

Lorsque la flèche atteint la cible, la probabilité d’atteindre une couronne est proportionnelle à l’aire de cette couronne et le tireur note alors le nombre de points inscrits dans la couronne où se trouve la flèche.

- Quelle la probabilité pour que le tireur atteigne la cible ?
- Quelle la probabilité pour qu’il atteigne
 - la couronne numérotée 4
 - la couronne numérotée 6
 - la couronne numérotée 8
 - la couronne numérotée 10

EXERCICE 5

Une entreprise dispose de deux types de machines, appelées machines « a » et

machine « b », pour fabriquer le même type de pièces. Certaines des pièces produites sont écartées comme étant défectueuses.

- *Pour la machine « a » la probabilité d’obtenir une pièce sans défaut est 0.9
- *Pour la machine « b » cette probabilité est 0.95

La machine « a » fournit les deux tiers de la production, la machine « b » le tiers restant.

On notera $p(E)$ la probabilité d’un événement E, $p(E/F)$ la probabilité de E sachant que F est réalisé.

1) On choisit une pièce au hasard, avec équiprobabilité des choix.

a) Calculer la probabilité des événements suivants :

A : “ la pièce provient de la machine « a » ”

B : “ la pièce provient de la machine « b » ”

b) Soit S l’événement « la pièce est sans défaut »

Calculer $p(S/A)$ et $p(S/B)$. En déduire que $p(S) = \frac{11}{12}$.

2) On considère un échantillon de 7 pièces produites par l’entreprise et on admet que le choix des 7 pièces suit une loi binomiale.

a) Calculer la probabilité que l’échantillon ne comporte que des pièces sans défaut.

b) Calculer la probabilité que l’échantillon ne comporte

exactement que 6 pièces sans défaut

c) En déduire la probabilité d’avoir au moins 2 pièces défectueuses dans l’échantillon

- VARIABLES ALÉATOIRES

EXERCICE 1 :

Un paquet de 10 cartes à jouer comprend 5 AS ; 3 Rois et 2 DAMES. Le tirage d'un AS rapporte 5 points, celui d'un Roi 2 points et celui d'une DAME coûte 1 point.

1- On tire simultanément et au hasard 2 cartes du paquet. Calcule les probabilités des événements suivants :

“A” : tirer deux cartes de même nature.

“B” : tirer deux cartes de nature différente.

“C” : tirer au moins une DAME.

2- On définit la variable aléatoire X qui à chaque tirage de 2 cartes associe la somme de points obtenus.

a- Etablir la loi de la probabilité de X .

b- Quelle est la probabilité d'avoir au moins 7 points ?

c- Calcule l'espérance mathématique, la variance et l'écart type.

EXERCICE 2 :

Une machine remplit automatiquement des sachets en mélangeant deux produits A et B. Dans chaque sachet pour le produit A, la machine introduit 50 grammes avec une probabilité de 0,8 ou 51 grammes avec une probabilité de 0,2 et indépendamment pour le produit B elle introduit 50 grammes avec une probabilité de 0,6 ou 51 grammes avec une probabilité de 0,4.

1- Quelles sont les masses possibles X d'un sachet. Établir la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

2- Quelle est la probabilité pour qu'un sachet contienne au plus 101 grammes.

3- Calculer l'espérance mathématique

4- Représenter la fonction de répartition de X .

EXERCICE 3 :

Un dé cubique parfaitement équilibré a quatre faces noires et deux faces blanches (les faces ont la même probabilité d'apparition).

On lance ce dé cinq (5) fois de suite.

1- Quelle est la probabilité pour qu'une face blanche apparaisse pour la première fois au cinquième lancer.

2- Quelle est la probabilité pour qu'une face blanche apparaisse une fois.

3- Quelle est la probabilité pour qu'une face blanche apparaisse au moins une fois.

4- On appelle X la variable aléatoire qui à chaque épreuve associe le nombre de faces noires obtenues.

a- Établir la loi de probabilité de X

b- Calculer son espérance mathématique et sa variance.

EXERCICE 4 :

1- Soit X_1 une variable aléatoire dont la loi de probabilité est

$$X_1 = \{P(X_1 = 1) = p ; P(X_1 = -1) = q ; P(X_1 = 0) = 1 - p - q\}$$

Soient X_2 et X_3 deux autres variables aléatoires ayant la même loi de probabilité que X_1 . On suppose que les variables X_1 , X_2 et X_3 sont indépendantes.

Soit S la variable aléatoire tel que $S = X_1 + X_2 + X_3$.

- a- Quelle est l'espérance mathématique de S et sa variance.
- b- Montrer que $S = \{-3 ; -2 ; -1, 0 ; 1 ; 2 ; 3\}$ puis détermine la loi de probabilité de S .
- c- Calculer $P(\{S > 0\})$; $P(\{S = 0\})$ et $P(\{S < 0\})$.

2- AXEL (X) et AMAEL (M) jouent 3 parties d'un jeu de ludo à chaque partie, X a une probabilité de 0,4 de gagner. M a une probabilité de 0,5 de gagner et il y a une probabilité de 0,1 pour qu'il ait match nul.

Le vainqueur est celui qui a gagné plus de parties.

Calculer les probabilités des événements suivants :

- "AXEL est vainqueur"
- "AMAEL est vainqueur"
- Il n'y a pas de vainqueur.

EXERCICE 5

On considère un dé hendécagonique (11 faces) numérotée de 1 à 11 .Ce dé est pipé(truqué) de la façon suivante $p(1)=p(2)=p(5)=p(8)$ $p(4)=p(6)=p(7)=3p(8)$, $p(3)= 2p(2)$ et $p(9)=p(10)=p(11)= \frac{1}{2} p(3)$

1)Montre que $p(4) = \frac{1}{6}$ et $p(9)=\frac{1}{18}$

2)Calcule la probabilité d'avoir un résultat pair après un lancer .

3)On lance maintenant trois(3) fois de suite ce dé et on désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de résultats pairs obtenus .

a)Justifie que les valeurs prises par X sont 0 ;1 ;2 et 3

b)Détermine la loi de probabilité de X

c)Calcule $E(X)$, $V(X)$ et $\sigma(X)$

EXERCICE 6

Un test consiste à répondre à 5 questions par oui ou par non. Chaque réponse juste est notée 4 points et chaque réponse fausse est notée – 2 points. Un candidat répond au hasard à chacune de ces questions , c-à-d que la réponse « oui » et la réponse « non » ont la même probabilité . Soient X et Y les variables aléatoires suivantes :
 X : nombre de réponses exactes
 Y : note obtenue c-à-d le plus grand des deux nombres 0 et S , S désignant la somme des 5 notes obtenues par le candidat.

1)a)Donner la loi de probabilité de X .Calculer son espérance mathématique et sa variance .

b)Calculer $p(X \geq 4)$

2)a)Justifier que les valeurs prises par Y sont 0 ; 2 ; 8 ; 14 et 20

- b) Déterminer sa loi de probabilité .
c) Calculer son espérance mathématique et sa variance .

NOMBRES COMPLEXES

EXERCICE 1 :

Dans chacun des cas ci-dessous donne la forme algébrique, la forme trigonométrique et la forme exponentielle.

1/ DONNE LA FORME ALGEBRIQUE

$$A_1 = 4 + i + \frac{6}{4 - i}$$

$$A_2 = \frac{2 + 3i}{5 + 3i} (2 - 3i)$$

$$A_3 = \frac{1 + \cos \vartheta + i \sin \vartheta}{1 + \cos \vartheta - i \sin \vartheta} ; \quad \vartheta \in \mathbb{R}$$

$$A_4 = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$$

2/ DONNE LA FORME TRIGONOMETRIQUE

$$T_1 = \frac{\sqrt{6} + i\sqrt{2}}{2} ; \quad T_2 = 1 - i$$

$$T_3 = 32 (i - \sqrt{3})(1 + i)$$

$$T_4 = 1 + \sqrt{3} + i(1 - \sqrt{3})$$

3/ DONNE LA FORME EXPONENTIELLE

$$E_1 = T_2 ; \quad E_2 = T_2^2 ; \quad E_3 = A_4 \quad E_4 = \frac{A_2}{A_4}$$

On pose $Z = \sqrt{3} - i$
Détermine les formes suivantes :
 $E_1 = Z ; \quad E_2 = 2i - Z ; \quad E_3 = Z^3$

$$E_4 = \frac{T_1}{T_2} ; \quad E_6 = A_4$$

EXERCICE 2 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations ci-dessous.

$$(E_1): (1 + 4i)Z + 3 + 2i\sqrt{2} = 0$$

$$(E_2): |Z - 2 - i| = |Z - 1|$$

$$(E_3): (3 + i)Z + (1 - 2i)\bar{Z} + 2 - 3i = 0$$

$$(E_4): |3 + i - Z| = 2$$

$$(E_5): Z^2 = -3 + 4i$$

$$(E_6): Z^2 + 6Z - 6 - 8i = 0$$

$$(E_7): (1 + i)Z^2 - (7 + 13i)Z + 2 + 60i = 0$$

$$(E_8)P(Z) = Z^3 - (2i + 4)Z^2 + (3i + 8)Z - (5 + i)$$

1- Détermine la solution réelle de $P(Z)$, puis écris $P(Z)$ sous forme de produit de 2 facteurs.

2- Calcule $(1 + 4i)^2$

3- Résoudre dans $\mathbb{C}$ $P(Z) = 0$

$$(E_9) \text{ On donne } Z = \frac{z+1}{z-2i} \text{ avec}$$

$$z = x + iy \text{ et } Z = X + iY$$

1- Détermine l'ensemble des points $M(z)$ tel que $Z \in \mathbb{R}$.

2- Détermine l'ensemble des points $M(z)$ tel que $Z \in i\mathbb{R}$.

EXERCICE 3 :

1- Racine $n^{\text{ième}}$: Résoudre dans $\mathbb{C}$, puis représenter les solutions dans le cercle trigonométrique.

$$Z^3 = 4\sqrt{2}(1 + i)$$

$$2- Z^5 = 32i$$

$$3- \text{ On donne } z = 2 - 2i\sqrt{3}$$

3-1- Mettre z sous forme trigonométrique, en déduire tous les nombres complexes Z tel que $Z^4 = z$.

3-2- Détermine par la méthode algébrique, les nombres complexes X tel que $X^2 = z$, puis les nombres complexes Z tel que $Z^4 = z$.

3-3- En déduire les expressions de $\sin \frac{11\pi}{12}$ et $\cos \frac{11\pi}{12}$ sous formes de radicaux simples.

EXERCICE 7

Soit f l'application de $E = \mathbb{C} \setminus \{-i\}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $z \mapsto f(z) = \frac{iz}{z+i}$

Dans le plan complexe rapporté au repère ortho normal $(O; \vec{u}; \vec{v})$ on note M le point d'affixe z .

1) Déterminer les coordonnées du point B dont z_0 est telle que $f(z_0) = 1 + 2i$.

2) Soit z un élément de E . On note r le module de $z + i$ et α une mesure de son argument.

Exprimer la forme trigonométrique de $f(z) - i$ en fonction de r et de α .

3) Soit A le point d'affixe $-i$
a) Déterminer l'ensemble (C) des points M vérifiant $|f(z) - i| = \sqrt{2}$ et l'ensemble (D) des points M tels que $\frac{\pi}{4}$

soit une mesure principale de l'argument de $f(z) - i$.

b) Montrer que $B \in (C)$ et (D) et les construire

NOMBRES COMPLEXES ET GEOMETRIE

EXERCICE 4 :

1- On donne :
 $Z_A = 2 - i$; $Z_B = -1 + 2i$; $Z_C = -1 - i$
dans un repère orthonormé $(O; I; J)$

unité (2cm). Justifie que le triangle ABC est rectangle isocèle en C et que les points A ; B et J sont alignés.

2- Place le point D d'affixe : $2 + 2i$, puis justifier par calcul que A ; B ; C et D sont cocycliques.

(2 méthodes) - Le quotient
- Argument

EXERCICES DE SYNTHESE

EXERCICE 5 :

$$P(Z) = aZ^3 + bZ^2 + cZ.$$

a ; b et c sont des nombres complexes.

1- Sachant que $P(1) = -3 + 4i$;

$$P(i) = -4 - 3i ; P(-i) = 10 + 5i$$

Détermine a ; b et c .

2- Résoudre $P(Z) = 0$

EXERCICE 6 :

1- Détermine les racines quatrièmes de l'unité puis représente les sur le cercle trigonométrique.

2- Pour tout $Z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$

Démontre que :

$$\frac{Z^4 - 1}{Z - 1} = Z^3 + Z^2 + Z + 1.$$

3- On veut résoudre $P(Z) = 0$; avec

$$P(Z) = Z^4 + Z^3(1 - 2i) + Z^2(1 - 2i) + Z(1 - 2i) - 2i$$

a- Montrer que $P(2i) = 0$

b- Ecris $P(Z)$ sous la forme :

$$P(Z) = (Z - 2i)Q(Z)$$

c- Termine la résolution de $P(Z) = 0$.

NOMBRES COMPLEXES ET TRANSFORMATION

EXERCICE 1 :

Détermine la bijection complexe f associée à l'homothétie h de rapport -2 et de centre $\Omega(2+i)$.

EXERCICE 2 :

Détermine la bijection complexe f associée à la rotation de centre $\Omega(4+i)$ et d'angle $\theta = -\frac{\pi}{3}$

EXERCICE 3 :

$Z_A = 1+2i$; $Z_B = 3+i$. Détermine la bijection complexe f associée à la translation qui transforme B en A .

EXERCICE 4 :

ABC est un triangle et Ω un point extérieur au triangle.

Construis l'image de ce triangle par la similitude directe de centre Ω de rapport -2 et d'angle orienté $\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

EXERCICE 5 :

Trouve le centre, l'angle orienté et le rapport de la similitude directe associée à la bijection complexe.
 $f(Z) = (1+i)Z - i$

EXERCICE 6 :

Détermine la transformation de $\mathcal{C}$ associée à la similitude directe de centre $\Omega(2-3i)$ de rapport 3 et d'angle orienté $\frac{\pi}{6}$.

EXERCICE 7 :

$A(1+i)$; $B(-i)$ Sont deux points du plan.

1- Détermine le rapport et l'angle orienté de la similitude directe S

qui laisse le point O invariant et applique A sur B .

2- Donne l'écriture complexe de S .

EXERCICE 8 :

$$(E): Z^2 + (2+3i)Z - 2(1-2i) = 0$$

1- Résoudre (E) . soit Z_1 la solution imaginaire pure et Z_2 l'autre solution.

2- On donne $A(Z_1)$ et $B(Z_2)$, montre qu'il existe une similitude directe

S de rapport $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ et d'angle

orienté $\frac{29\pi}{45}$ telle que $S(B) = A$ et

$S(A) = O$

EXERCICE 9

Dans le plan complexe, on considère la transformation du plan qui à point $M(x;y)$ associe le point $M'(x';y')$ tel que

$$\begin{cases} x' = x - y + 2 \\ y' = x + y - 3 \end{cases}$$

Soit $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$, en exprimant z' en fonction de z

Détermine la nature de cette transformation et les éléments caractéristiques.

EXERCICE 10

Dans le plan complexe, on considère la transformation qui à tout point $M(z)$, on associe $M'(z')$ tel que $z' = (1-i)z - 2$.

1) Donner la nature et les éléments caractéristiques de z' (soit S cette transformation)

2) Déterminer les images par S des points O et $A(1+3i)$

- 3) On pose $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$
calculer x' et y' en fonction de x et y
4) Déterminer l'image du cercle (C)
d'équation $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 8 = 0$
Par S
5) Déterminer l'image de la droite
(Δ) d'équation $x + 2y + 3 = 0$ par S
6) Déterminer , la nature et les
éléments caractéristiques de
l'application réciproque de S .

CALCUL DE LIMITE

• UTILISATION D'UNE FACTORISATION

$$f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1} - 3x \quad \text{en } +\infty$$

$$1) g(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 2x - 2}}{x} \quad \text{en } -\infty$$

$$h(x) = \frac{\sqrt{x^2 + x - 2}}{x + 1 + \sqrt{x^2 + x - 2}} \quad \text{en } +\infty$$

• UTILISATION DE L'EXPRESSION CONJUGUÉE

$$f(x) = \sqrt{x(x+1)} - x \quad \text{en } +\infty$$

$$2) g(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 2}{x^2 - 1} \quad \text{en } -1$$

$$h(x) = \frac{\sqrt{x+4} - \sqrt{3x+4}}{\sqrt{x+1} - 1} \quad \text{en } 0$$

• UTILISATION DU TAUX DE VARIATION

$$f(x) = \frac{\sqrt{x+5} - 3}{x - 4} \quad \text{en } 4$$

$$3) g(x) = \frac{\sqrt{x+3} - 2}{x - 1} \quad \text{en } 1$$

$$h(x) = \frac{2 \cos x - 1}{3x - \pi} \quad \text{en } \frac{\pi}{3}$$

• UTILISATION DU CHANGEMENT DE VARIABLE OU D'ECRITURE

$$f(x) = \frac{\sin x}{x^2} \quad \text{en } 0$$

$$4) g(x) = \frac{\tan x}{x} \quad \text{en } 0$$

$$h(x) = \frac{\sin 5x}{3x} \quad \text{en } 0$$

• UTILISATION DES ENCADREMENTS

$$f(x) = \frac{-3 \sin 2x}{x} \quad \text{en } +\infty \text{ et } -\infty$$

$$5. g(x) = \frac{E(x)}{x^2} \quad \text{en } +\infty$$

$$h(x) = \frac{x}{3 - \cos x} \quad \text{en } +\infty \text{ et } -\infty$$

• CALCULE LES LIMITES SUIVANTES

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - \sqrt{x^2 + 2x} \quad \text{en } +\infty$$

$$g(x) = \frac{\sin x + x}{\cos x - x} \quad \text{en } 0$$

$$6) h(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 5} - x + 1 \quad \text{en } +\infty$$

$$k(x) = \frac{2 \tan x + \sin x}{x} \quad \text{en } 0$$

$$m(x) = \sqrt{x} + \cos^2 x \quad \text{en } +\infty$$

ETUDE DE LA CONTINUITE

EXERCICE 1 :

Soit f la fonction définie par

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty ; 2[\quad f(x) = \frac{3x^2 - 5x - 2}{x - 2} \\ \forall x \in]2 ; +\infty[\quad f(x) = 3 - \frac{x}{3} \end{cases}$$

f est-elle prolongeable par continuité ? Justifie ta réponse.

EXERCICE 2 :

Etudie la continuité en 0 de la fonction suivante : $f(x) = \frac{3+x}{1+|x|}$

Etudie la continuité en 4 de la fonction suivante : $g(x) = \frac{|x-4|}{x^2-2}$

EXERCICE 3 :

Etudie la continuité en 1 de la fonction suivante :

$$f(x) = \frac{\sqrt{3x^2+1}-2}{x-1}, \quad f(1) = 1$$

EXERCICE 4 :

$$g(x) = -2x^3 - 4x + 3$$

- 1- Montre que g réalise une bijection de $] -\infty ; 1[$ sur l'intervalle que l'on précisera.
- 2- Démontre que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique $\alpha \in]0 ; 1[$.
- 3- Donne un encadrement de α par deux nombres décimaux consécutifs d'ordre 1 par les méthodes suivantes :

- Balayage
- Dichotomie

ETUDE DE FONCTION

- FONCTION RATIONNELLE AVEC VALEUR ABSOLUE

EXERCICE 1 :

$$f(x) = \frac{|x+2|}{x} - 1$$

- 1- Détermine D_f sous forme de réunion d'intervalles.
- 2- Ecris f sans le symbole de la valeur absolue.
- 3- Calcule les limites de f en $-\infty$; $+\infty$ et en 0 puis donne les interprétations graphiques éventuelles
- 4- Etudie la dérivabilité de f en -2 ; puis donne une interprétation graphique.
- 5- Détermine les dérivées de f ; puis étudie les variations de f sur D_f .
- 6- Etudie la position de (C_f) par rapport aux droites $(D_1) : y = -2$ $(D_2) : y = 0$
- 7- Représente dans le même repère (C_f) ; (D_1) et (D_2) .

EXERCICE 2 :

On fera la même étude avec les fonctions suivantes :

$$g(x) = \frac{1}{x} - |x-1|$$

$$h(x) = \frac{3+x}{1-|x|}$$

- FONCTION IRRATIONNELLE

EXERCICE 1 :

A : $f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$

1- Montre que

$$D_f =]-\infty; -3] \cup [1; +\infty[$$

2- Calcule les limites aux bornes de D_f .

3- Etudie la dérivabilité de f en -3 et en 1 ; puis donne les conséquences graphiques.

4- Montre que $f'(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}$

5- Donne les variations de f ; puis dresse son tableau de variation.

6- Montre que la droite $(\Delta) : x = -1$ est axe de symétrie de (C_f) .

7- Justifie que les droites $(D_1) : y = x+1$ et $(D_2) : y = -x-1$ sont asymptotes à (C_f) en $+\infty$ et $-\infty$ respectivement.

8- Etudie la position de (C_f) ; par rapport à (D_1) et (D_2) .

9- Représente (C_f) ; (Δ) ; (D_1) et (D_2) dans un même repère (unité : le cm).

B Construire dans le même repère :
 $g(x) = \sqrt{|x^2 + 2x - 3|}$ après l'avoir étudiée.

- FONCTIONS TRIGONOMETRIQUES

EXERCICE 1 :

$$f(x) = \sin^2 x - \sin x + 2.$$

1- Détermine D_f

2- Justifie que f est périodique de période 2π .

3- Montre que la droite (D) d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ est axe de symétrie.

4- Dédus de 2) et 3) que l'intervalle d'étude est d'amplitude π .

5- Dans cette partie d'étude de f se fera sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

a- Montrer que $f'(x) = \cos x (2 \sin x - 1)$

b- Etudie le signe de f' ; puis donne les variations de f .

6- Représente (C_f) et (D) dans le même repère.

EXERCICE 2 :

On considère la fonction f définie par $f(x) = \frac{\sin x}{1 + \sin x}$

1) Montre que f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ et que sa période est 2π .

2) Compare $f(\pi - x)$ et $f(x)$ en déduire que la droite d'équation $x = \frac{\pi}{2}$ est un

axe de symétrie de (Cf)

3)a) Etudier les variations de f sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ (on pourra considérer les la

fonction : $x \mapsto \sin x$ et $y \mapsto \frac{y}{y+1}$)

b) Détermine la limite de f en $-\frac{\pi}{2}$

4) Construis (Γ) à l'aide des renseignements précédents.

FONCTION $\ln$

EXERCICE 1 :

Résoudre les équations, inéquations et systèmes ci-dessous.

$$(E_1): \ln(x+3) + \ln(x+2) = \ln(x+11)$$

$$(E_2): \ln[(x+3)(x+2)] = \ln(x+11)$$

$$(E_3): \ln|x+3| + \ln|x+2| = \ln|x+11|$$

$$(I_1): \ln(3x+4) > \ln(2x+6)$$

$$(I_2): \ln|2x+6| \leq \ln 10$$

$$(I_3): [\ln(x+2)]^2 \leq 4(\ln 2)^2$$

$$(S_1): \begin{cases} 3x + 2y = 23 \\ \ln x - \ln y = \ln 7 \end{cases}$$

$$(S_2): \begin{cases} \ln x + \ln y = \ln 3 - 4 \ln 2 \\ \ln(x+y) = 0 \end{cases}$$

EXERCICE 2 :

On donne le polynôme suivant :

$$P(X) = -X^2 + X + 12.$$

1- Résoudre $P(X) = 0$; puis écrire $P(X)$ comme produit de facteur du 1^{er} degré.

2- Soit l'équation :

$$-(\ln x)^2 + \ln x + 12 = 0.$$

Résoudre cette équation de 3.

3- Résoudre l'inéquation suivante :

$$-(\ln x)^2 + \ln x + 12 \geq 0$$

EXERCICE 3

PARTIE A

On donne la fonction définie par

$$f(x) = 1 - \frac{x^3}{3} - 2 \ln x$$

1- Détermine D_f ; calcule $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$;

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Puis

donne les interprétations graphiques éventuelles.

2- Montre que pour tout $x \in D_f$;

$$f'(x) = \frac{-x^3 - 2}{x}.$$

Puis étudie son signe.

3- Dresse le tableau de variation de f , puis montre qu'il existe un nombre réel unique $\alpha \in]1; \sqrt{2}[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

4- Donne un encadrement de α par deux décimaux consécutifs d'ordre 1.

PARTIE B :

Soit la fonction g définie par :

$$g(x) = \frac{\ln x}{x^2} - \frac{x}{3}$$

1- Calcule la limite de g en 0 et en $+\infty$.

2- Montrer que la droite (D) d'équation $y = -\frac{x}{3}$ est asymptote à (Cg).

3- Montrer que sur $]0; 1[$ $\frac{\ln x}{x^2} < 0$ et sur $]1; +\infty[$ $\frac{\ln x}{x^2} > 0$. En déduire la

position de (Cg) par rapport à (D).

4- Justifie que pour tout

$$x \in Dg ; g'(x) = \frac{f(x)}{x^3}.$$

En déduire les variations de g.

5- Calcule g(x) sans qu'il n'y ait ln α dans l'écriture.

6- Représente (Cg) dans un repère orthonormé.

7- Détermine le point A de la courbe où la tangente a pour coefficient directeur $-\frac{1}{3}$.

8- Calcule l'aire de la partie du plan définie par :

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ \frac{x}{3} \leq y \leq g(x) \end{cases} \quad (\text{On utilisera une intégration par parties})$$

FONCTION EXP - PUISSANCE

EXERCICE 1 :

Résoudre dans 3 les équations ; inéquations et systèmes ci-dessous.

- EQUATIONS

$$(E_1): e^{x^2} = e^{3x-2}$$

$$(E_2): e^{2x} - 3e^x - 4 = 0$$

$$(E_3): e^{3x+1} + e^{x+1} = 2e$$

$$(E_4): e^x - 6 = -8e^{-x}$$

$$(E_5): 2^x = 3^{x+1}$$

$$(E_6): 3^{x+2} + 9^{x+1} = 1458$$

- INEQUATIONS

$$(I_1): e^{-x+1} \leq 4$$

$$(I_2): e^x + 6 - 7e^{-x} > 0$$

$$(I_3): 5^x > 6^{x+2}$$

- SYSTEMES

$$(S_1): \begin{cases} e^x + e^y = 5 \\ 2e^x + 3e^y = 11 \end{cases}$$

$$(S_2): \begin{cases} 3^x = y^3 \\ 3^{x+2} = y^4 \end{cases}$$

EXERCICE 2 :

On donne le polynôme :

$$P(X) = X^2 - X - 2$$

1- Montrer que $P(X) = (X+1)(X-2)$

2- Soit l'équation (E) : $e^x - 2e^{-x} = 1$ en posant $e^x = X$, résous (E).

3- Résous l'inéquation $e^x - 2e^{-x} - 1 < 0$.

EXERCICE 3 :

$g(x) = xe^{\frac{1}{x}}$ et (Cg) sa courbe représentative.

1- Détermine Dg

2- Calcule les limites de g en $-\infty$; $+\infty$.

Puis donne les interprétations graphiques éventuelles.

3- Justifie que (Cg) admet la droite (Δ) d'équation $y = x+1$ comme asymptote oblique.

4- Etudie la continuité de g en 0. Est-elle prolongeable par continuité ?

5- Montre que $g'(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}$

6- Etudie les variations de g sur Dg.

7- Interprète graphiquement les résultats suivants :

$$\text{Pour tout } x \in]-\infty ; 0[\quad g(x) - y < 0$$

$$\text{Pour tout } x \in]0 ; +\infty[\quad g(x) - y > 0$$

8- Représente avec soin (Cg) et les asymptotes.

EXERCICE 4 :

On donne la fonction de

$$f(x) = x \left(\frac{1}{2} \right)^x \text{ sur } \mathbb{R}.$$

- 1- Calcule les limites f en $-\infty$ et en $+\infty$. Puis limite de $f(x)/x$ en $-\infty$ et donne les interprétations graphiques éventuelles.
- 2- Montre que pour tout $x \in Df$; $f'(x) = (1 - x \ln 2) e^{-x \ln 2}$.
- 3- Etudie les variations de f .
- 4- Représente avec soin (Cf).

CALCUL INTEGRAL

EXERCICE 1 :

Calcule les primitives suivantes :

$$I_1 = \frac{-2}{(2x+3)^2}$$

$$I_2 = \cos 4x + 3 \sin 3x$$

$$I_3 = \frac{2x \cos x + (x^2 + 1) \sin x}{\cos^2 x}$$

$$I_4 = |x-1| + 2|x-2|$$

EXERCICE 2 :

Calcule les intégrales suivantes :
(utiliser une intégration par parties)

$$I_1 = \int_{-2}^{-1} x^2 \ln|x| dx$$

$$I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \ln(1 + \cos x) dx$$

$$I_3 = \int_0^1 (x+1)^2 e^x dx$$

$$I_4 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos 2x dx$$

$$I_5 = \int_0^{\pi} \cos^5 x dx$$

$$I_6 = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} 3 \sin x \cos x dx$$

EXERCICE 3 :

Soit $f(x) = \ln(\cos x + \sin x)$

- 1- Détermine la dérivée de f .
- 2- On considère les intégrales ci-dessous :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx$$

$$\text{et } J = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx$$

Calcule $I+J$ et $I-J$; puis en déduire les valeurs de I et J .

- 3- Donne les valeurs approchées à 10^{-2} près de I et de J .

EXERCICE 4 :

On donne $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x dx$;

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x dx \quad \text{et} \quad K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2 \sin^2 x \cos^2 x dx$$

- 1- Calcule $I-J$ et $I+J+K$
- 2- Exprime $\cos 4x$ en fonction de $\cos x$ et de $\sin x$ puis déduis la valeur de $I+J-3K$.
- 3- En déduire les valeurs de I ; J et K .

EXERCICE 5 :

Soit

$$I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} dx \quad (n \in \mathbb{N}) \quad \text{et}$$

$$I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x} dx$$

- 1- Calcule I_0
- 2- Calcule I_1 par une intégration par parties.
- 3- Par une intégration par parties, montrer que $(2n+3)I_n = 2nI_{n-1}$.
(On remarquera que)
$$\sqrt[3]{1-x} = (\sqrt{1-x})^2 (\sqrt{1-x})$$

EXERCICE 6 :

On donne $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 7}{(x-2)^2}$

- 1- Détermine les nombres réels a ; b ; c et d tel que :

$$f(x) = ax + b + \frac{cx + d}{(x-2)^2}$$

- 2- Calcule l'aire $A(\lambda)$ de la partie du plan délimitée par :

$$\begin{cases} 3 \leq x \leq \lambda & ; \quad \lambda > 2 \\ x-1 \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

- 3- Calcule $\lim_{\lambda \rightarrow 2} A(\lambda)$ et $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda)$

EXERCICE 8 :

On donne $f(x) = 2x \ln x + x$

- 1- Calcule $\int_1^2 2x \ln x \, dx$

- 2- Donne une interprétation graphique de cette intégration puis calcule une valeur approchée à 10^{-2} près.

SUITE NUMERIQUE

EXERCICE 1 :

Un planteur place à la banque pendant 10 ans un capital de 100.000F au taux d'intérêt de 4%.

- 1- Calcule l'avoir du planteur au bout d'un an ; deux ans et trois ans.
- 2- Soit C_0 le capital initial et C_n le capital au bout de n année. Les capitaux successifs déterminent une suite.
- a- Définie cette suite par la formule de récurrence
- b- Exprime (C_n) en fonction de C_0 et n .

- 3- A la fin de la dixième année, la banque lui accorde une prime égale à la somme des intérêts produits en 10 ans. Quel est le capital du planteur après la dixième année ?

- 4- Une autre banque lui propose un taux d'intérêt de 8%, mais n'accorde pas de prime à la fin de la dixième année.

Laquelle des deux banques est avantageuse pour le planteur ? Justifie ta réponse.

EXERCICE 2 :

Soit la suite (U_n) $n \in \mathbb{N}$ définie par :

$$\begin{cases} U_0 = \alpha & \alpha \in \mathbb{R}_*^+ \\ U_{n+1} = U_n + \frac{1}{3} \end{cases}$$

- 1- A l'aide des représentations graphiques des droites d'équations respectives $y = x$ et $y = x + \frac{1}{3}$.

Dans un repère orthonormé $(O ; I ; I)$ représente sur la droite (OI) les sept premiers termes de la suite (U_n) . Sans les calculer.

- 2- Montrer que la suite (U_n) est strictement croissante et strictement positive.

- 3- Justifie que $\forall n \in \mathbb{N}$;

$$U_n = \alpha + \frac{1}{3}n. \text{ puis en déduire que}$$

la suite (U_n) est divergente.

- 4- Soit la suite (V_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N} ; V_n = \frac{1}{U_n}$

a- Démontre que la suite (V_n) est strictement décroissante.

b- Exprimer V_n en fonction de n et α puis montre qu'elle converge vers 0.

5- On donne maintenant la suite

$$(W_n) \text{ définie par : } W_n = \frac{1 - U_n^2}{U_n^2}$$

a- Exprime W_n en fonction de n et α

b- Montre que W_n converge vers -1 .

EXERCICE 3 :

Une suite de nombre réel (U_n) est définie par $\forall n \in \mathbb{N}$;

1- Calcule U_1 ; U_2 et U_3 pour $U_0 = 3$.
Que peut-on conjecturer pour cette suite ?

2- On suppose maintenant que $U_0 \neq 3$. Et on donne la suite (V_n) définie par : $V_n = U_n + \alpha$;
 $\alpha \in \mathbb{R}$.

a- Détermine α pour que (V_n) soit une suite géométrique de raison $1/3$.

b- Exprime (V_n) en fonction de n .

c- En déduire l'écriture de (U_n) en fonction de n et U_0 .

3- Justifie que (U_n) est convergente.

EXERCICE 3

Soient les suites numériques (V_n) et (W_n) définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} V_0 = -\frac{3}{2} \\ V_{n+1} = \frac{2}{3}V_n - 1 \quad \text{et} \quad W_n = 2V_n + 6 \end{cases}$$

1) Démontrer que la suite (W_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme et la raison.

2) Donner les expressions de W_n et V_n en fonction de n . En déduire la limite de V_n .

3) Calculer $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} W_k$, en déduire $\lim S_n$

EXERCICE 5

Soit P la fonction polynôme définie sur $\mathbb{C}$ par

$$P(z) = z^3 - (3 + 4i)z - 2 + 8i$$

1) Soit $x \in \mathbb{R}$. Déterminer $A(x)$ et $B(x)$ tels que

$$P(x) = A(x) + i B(x).$$

En déduire que l'équation $P(z) = 0$

admet un zéro réel z_0 que l'on

calculera puis déterminer les nombres complexes non réels z_1 et z_2 tels que

pour tout $z \in \mathbb{C}$ $P(z) = (z - z_0)(z - z_1)(z - z_2)$ sachant que la partie imaginaire de z_1 est > 0

2) Dans le plan affine Euclidien muni d'un repère orthonormé, on considère points G_0 , A et B d'affixes respectives z_0 , z_1 et z_2 . Pour tout n de $\mathbb{N}$, on appelle G_n l'isobarycentre de A , B et G_{n-1}

a) Détermine l'afixe de G_1

b) Soit z_n l'afixe de G_n ; exprimer z_n en fonction de z_{n-1} ; en déduire que si z_{n-1} est réel, z_n l'est aussi.

c) On pose $U_n = z_n + 1$. Montre que U est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$,

préciser le 1^{er} terme.

d) Exprimer U_n en fonction de n puis en déduire qu'elle est convergente.

e) Calculer la $\lim z_n$.

STATISTIQUE

(Tous les calculs seront faits à l'ordre 3 par défaut).

EXERCICE 1 :

On a noté pour huit personnes, l'intensité du travail fourni (X_i) exprimée en Kilojoules par minute et la fréquence cardiaque (Y_i) ; c'est à dire le nombre de battements par minute.

X_i	9,6	12,8	18,4	31,2	36,8	47,2	49,6	56,8
Y_i	70	86	90	104	120	128	144	154

- 1- Représenter le nuage de points de cette série statistique.
- 2- Calcule les coordonnées du point moyen G et place-le dans le repère.
- 3- Détermine a et a' les coefficients directeurs respectifs des droites de régression de y en x et de x en y .
- 4- Calcule le coefficient de corrélation linéaire, puis dire s'il est bon ou pas.
- 5- Détermine l'équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés et trace-la.
- 6- Estime la fréquence cardiaque lorsque l'intensité du travail fourni est 65KJ/mn.

EXERCICE 2 :

Pour les emplois analogues, cinq entreprises proposent les salaires notés X_1 ; X_2 ; X_3 ; X_4 ; X_5 . On a vu se présenter pour ses emplois respectivement le nombre de

candidats Y_1 ; Y_2 ; Y_3 ; Y_4 ; Y_5 . Les résultats sont consignés dans le tableau ci-dessous.

X_i	220 000	225 000	230 000	235 000	240 000
Y_i	10	13	17	19	21

- 1- Représente graphiquement cette série statistique par un nuage de points ; puis détermine $\bar{X}$ et $\bar{Y}$.
- 2- Recherche une équation de la droite de régression de x en y par la méthode de moindres carrés. Représente cette droite sur le graphique précédent.
- 3- Calcule le coefficient de corrélation. Un ajustement linéaire semble t-il acceptable ?
- 4- Pour 11 personnes quel salaire proposerait-on ?

EXERCICE 3 :

Le tableau suivant donne la consommation de "NESCAFE" par les élèves en classe de Terminale observée à l'approche des examens de fin d'année.

X_i désigne le rang de la semaine et Y_i le nombre de sachets de "NESCAFE" achetés chez le boutiquier

Nbre. De semaine avant l'examen	A 8 sem.	A 7 sem.	A 6 sem.	A 5 sem.	A 4 sem.	A 3 sem.
Rang de semaine X_i	1	2	3	4	5	6
Nbre. de sachets achetés Y_i	200	250	275	290	315	350

- 1- Représente dans un repère le nuage de points (X_i ; Y_i)

Unité graphique : 1cm par semaine sur l'axe des abscisses.
2cm par 30 sachets sur l'axe des ordonnées (origine 170)

2- Calcule les coordonnées du point moyen G.

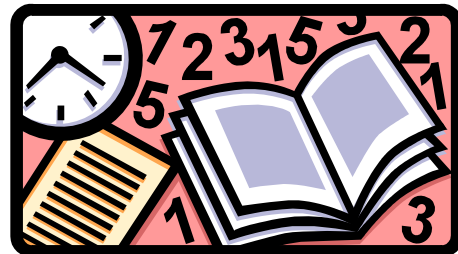
3- a- Montre que le coefficient de corrélation $r = 0,98$.

b- Détermine l'équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés.

c- Trace cette droite dans le repère.

4- On suppose que la tendance se poursuit. Montre par calcul que le nombre de sachets achetés à une (1) semaine des examens est à peu près égal à 403 (arrondi)

NB : On vérifiera ce résultat sur le graphique



QUESTIONS- REPONSES

Q1 : f est une fonction dérivable et strictement monotone sur un intervalle K et a un nombre réel .
Rappeler les différentes étapes du calcul de $(f^{-1})'(a)$.

Q2 : On suppose que la fonction f admet une primitive dans chacun des cas suivants Déterminer les primitives :

$$f(x) = u'u^r : f(x) = u'\cos u : f(x) = \frac{u'}{u^r}$$

$$f(x) = u' e^u : f(x) = \frac{u'}{u} : f(x) = -\frac{u'}{u}$$

Q3 : Rappeler les formules suivantes en probabilité : A et b sont deux événements
 $p(A \cup B) = \dots$; $p(A \setminus B) = \dots$; Si A et B sont indépendants $p(A \setminus B) = \dots$;
Si A et B sont contraires $p(A) = \dots$
 $E(X)$, $V(X)$, $\sigma(X)$, la loi binomiale

Q4 : Rappeler les formules suivantes en statistique :
 $\bar{x}$; $\bar{y}$; $V(x)$; $V(y)$; $Cov(x, y)$ puis dans le cas d'un regroupement en classes (existence d'effectif pour chaque couple)

Q5 : $y = ax+b$, équation de la droite de régression de y en x : $a = \dots$ et $b = \dots$
 $x = a'y+b'$, équation de la droite de régression de x en y : $a' = \dots$ et $b' = \dots$
r est le coefficient de corrélation $r = \dots$
r est bon $\Leftrightarrow \dots$

Q6 : (U_n) est une suite arithmétique de 1^{er} terme U_k et de raison r ,
rappeler :

Formule de récurrence , formule explicite , somme de p termes consécutifs , les variations en fonction de r et la convergence

Q7 : (U_n) est une suite géométrique de 1^{er} terme U_k et de raison q ,
rappeler :

Formule de récurrence , formule explicite , somme de p termes consécutifs , les variations en fonction de q et la convergence

Q8 : Limites de référence de la fonction ln
(il y en a six)

Q9 : limites de référence de la fonction exponentielle (il y en a cinq)

Q10 : Propriétés algébriques de ln

Q11 : Propriétés algébriques de e^x

Q12 : Compléter les égalités suivantes , $\alpha > 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^\alpha} = ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^\alpha}{e^x} = ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{e^x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^\alpha \ln x = ; \lim_{x \rightarrow -\infty} |x|^\alpha e^x =$$

Q13 : Rappeler la propriété de l'intégration par parties

Q14 : (Cf) la courbe d'une fonction f . Le point A(a ; b) est centre de symétrie (Cf) .

La droite (D) d'équation $x = a$ est axe de symétrie de (Cf) . Rappeler la méthode de justification .

Q15 : Continuité et dérivabilité d'une fonction en un point d'abscisse a ,

puis interprétations et équation de la tangente à la courbe en a

Q16 : Branches paraboliques

.....

Q17 : Z est un nombre complexe

Z est un réel $\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \text{Arg}(Z) = \dots$

Z est un imaginaire pur

$\Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \text{Arg}(Z) = \dots$

Rappeler la formule de Moivre et d'Euler

.....

Q18 : Rappeler la formule trigo d'un nombre complexe Z puis la détermination du module et de l'angle orienté

.....

Q19 : Z et Z' des nombres complexes

$\text{Arg}(ZZ') = \dots; \text{Arg}(Z^n) = \dots; \text{Arg}\left(\frac{Z}{Z'}\right) = \dots$

.....

Q20 : Rappeler la méthode de détermination des coefficients de $(a+b)^n$

*Binôme de NEWTON

*Triangle de PASCAL

.....

Q 21: A , B ,C et D sont des points du plan

Traduire par des relations complexes les affirmations suivantes :

$AB = CD$; A , B et C sont alignés ;

$(AB) \perp (CD)$; $\vec{AB} = \vec{CD}$ et A, B , C

et D sont cocycliques (appartiennent à un même cercle)

.....

Q22 : Z' est l'image de Z par une transformation du plan : laquelle ?

$Z' = -Z$; $Z' = Z + b$; $Z' = e^{i\theta} Z$

et $Z' = \alpha Z$

.....

Q23 : Que signifient pour vous ces termes : arrangement , combinaison , permutation et p- uplet

.....

Q24: Donner les expressions des bijections complexes associées aux transformations suivantes :

*Rotation de centre quelconque

*Homothétie de centre quelconque

Préciser l'expression du centre

.....

Q25 :Rappeler l'expression de la bijection complexe associée à une similitude directe puis en préciser l'expression du rapport , du centre et de l'argument

.....

Q26 :Citer les transformations du plan qui sont des similitudes directes

.....

Q27 : Donner la décomposition canonique d'une similitude directe qui n'est pas une translation

.....

Q28 : Soit l'équation $aZ^2 + bZ + c = 0$

Donner les solutions dans chacun des suivants .

(Z est un complexe et $a \neq 0$)

- $\Delta = 0$
- $\Delta > 0$
- $\Delta < 0$

$\Delta \in \mathbb{R}$

- $\Delta \neq 0$ $\Delta \notin \mathbb{R}$

.....

Q29 : Asymptotes

.....

Q30 : f est une fonction telle que

*f est impaire

*f est paire

traduire de façon mathématique ces notions puis en donner les conséquences graphiques

SUTET 1

EXERCICE 1 :

Le tableau ci-dessous retrace le coût total de production Y_i d'une entreprise de fabrication de chaussures (en milliers de francs) pour certaines quantités X_i de chaussures fabriquées (en centaines).

X_i	1	2	3	4	5	6	7
Y_i	6	11	13	16	13	15	17

- 1- Représente dans un repère orthonormé $(O; I; J)$ le nuage de points de cette série statistique.
- 2- Calcule $\bar{x}$ et $\bar{y}$, puis place le point moyen $G(\bar{x}, \bar{y})$ dans le repère.
- 3- Un ajustement linéaire est-il justifié ?
- 4- Détermine l'équation de la droite de régression de y en x par la méthode de moindres carrés. Puis trace-la..

EXERCICE 2:

$P(Z) = Z^3 - 2(2 + i)Z^2 + (5 + 8i)Z - 10i$
 $Z \in \mathbb{C}$. On désigne par (E) l'équation $P(Z)=0$

- 1- Trouve la solution imaginaire pure de (E)
- 2- Termine la résolution de l'équation (E)
- 3- Soit $A(0; 2)$; $B(2; -1)$ et $C(2; 1)$.
 - a- Détermine les réels α et β pour que A soit barycentre des points pondérés $(O; 1)$; $(B; \alpha)$ et $(C; \beta)$.
 O est l'origine du repère.

PROBLEME :

PARTIE A

On considère la fonction numérique que g définie par :

$$g(x) = \ln|x+1| - \ln|x| - \frac{1}{x+1}$$

- 1- a- Détermine D_g ensemble de définition de g .
- b- Etudie le sens de variation de g .
- c- Calcule $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$
- d- Dresse le tableau de variation de g . On complètera les autres limites après les avoir calculées.
- e- Justifie clairement que pour tout x de $] -\infty; -1[\cup] 0; +\infty[$; $g(x) > 0$.
 Pour tout x de $] a, 0[$; a étant un nombre réel dont on justifiera l'existence et dont on donnera un encadrement d'amplitude 10^{-1} .

PARTIE B

Soit f la fonction numérique définie

par $f(x) = x \ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right|$ pour $x \neq 0$ et

$f(0) = 0$.

- 1- Précise l'ensemble de définition de f , D_f
- 2- Etudie la continuité de f en 0.
- 3- Détermine les limites de f aux bornes des intervalles de D_f .
- 4- Etudie la dérivabilité de f en 0. Donne une conséquence graphique de ce résultat.
- 5- Justifie l'existence des asymptotes à (C_f) courbe représentative de f .

- 6- Etudie les variations de f
- 7- Trace (Cf) avec beaucoup de soins dans un repère orthonormé (O ; I ; J).

PARTIE C

Soit $0 < \alpha < 1$.

- 1- Calcule $A(\alpha) = \int_{\alpha}^1 (1 - f(x))dx$
- 2- Calcule $A = \lim_{\alpha \rightarrow 0} A(\alpha)$. Donne une interprétation géométrique de A.

SUJET 2

EXERCICE 1 :

Deux tireurs A, B visent une même cible. Soit Ω l'univers tel que lorsque la cible est atteinte on note (+), si non on note (-). Des résultats sont donnés sous forme de couple dont le 1^{er} élément est de A et le 2^{ème} résultat de B.

- 1- Donne toutes les possibilités des éléments de Ω en justifiant.
- 2- On suppose que les probabilités $P(-;-) = \frac{7}{18}$; $P(-;+) = \frac{2}{9}$; $P(+;-) = \frac{5}{18}$ calculer la probabilité de $P(+; +)$
- 3- Détermine la probabilité pour que "A" atteigne la cible(A) puis celle pour que "B » » atteigne la cible (B).
- 4- Les événements "A atteint la cible" et "B atteint la cible" sont-ils indépendants ? justifie ta réponse.
- 5- "A" tire 5 fois de suite (les tirs sont indépendants les uns des autres).

Quelle est la probabilité qu'il atteigne exactement 3 fois la cible ?

EXERCICE 2 :

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes. La suite de terme général Z_n définie par :

$$\begin{cases} Z_0 = 1 \\ 2Z_{n+1} = Z_n + i \end{cases}$$

- 1- Détermine que pour tout entier naturel n non nul. Le module r_n de z_n est inférieur à 1
- 2- On pose $z_n = x_n + iy_n$ ou x_n et y_n sont des réels et $u_n = z_n - i$.
 - a- Exprime U_{n+1} en fonction de U_n .
 - b- Justifie que la suite x_n est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$
 - c- Calcule la limite de x_n .
- 3- Montrer que la suite y_n et r_n s'écrivent de la façon suivante :

$$y_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1 \text{ et } r_n = \sqrt{\frac{1}{2^{2n-1}} - \frac{1}{2^{n-1}}} + 1, \text{ puis calcule leur limite.}$$

PROBLEME

PARTIE A

On donne la fonction f définie par : $f(x) = -x + (2x+1)e^{-x}$ de représentation graphique (Cf).

- 1- Montrer que pour tout x, on a $f'(x) = (1-2x)e^{-x} - 1$.

x	$-\infty$	1,5	$+\infty$
$f'(x)$	$+\infty$	$(-2e^{-1,5}-1)$	-1

Le tableau ci-dessus est celui de la variation de f' .

a- Calcule $f'(0)$ puis donne le signe de f' sur $\mathbb{R}$.

b- En déduire les variations de f sur $\mathbb{R}$.

2- a- Montrer que pour tout $x \neq 0$

$$f(x) = x \left[-1 + \left(2 + \frac{1}{x} \right) e^{-x} \right]$$

b- Calcule la limite de f en $-\infty$ et en $+\infty$ et

limite de $\frac{f(x)}{x}$ puis

interprète

graphiquement ce résultat.

c- Dresse le tableau de variation de f .

PARTIE B :

soit $h(x) = f(x) + x$

1- Calcule la limite de h en $+\infty$

2- Soit (L) la droite d'équation $y = -x$. interprète graphiquement le résultat de (1).

3- Etudie la position de (C_f) et (D) , puis détermine les coordonnées de leur point d'intersection A .

4- Représente dans un repère $(O ; I ; J)$ (D) ; (C_f) et A (unité de cm)

PARTIE C :

Soit G la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $G(x) = (\alpha x + \beta)e^{-x}$ où α et β désignent des nombres réels.

1- a- Détermine α et β pour que G soit une primitive de la fonction g définie par $g(x) = (2x+1)e^{-x}$.

b- En déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

2- a- Montrer que

$$\int_{-\frac{1}{2}}^0 f(x) dx = 2e^{\frac{1}{2}} - \frac{23}{8}$$

b- En déduire l'aire S de la partie

du plan défini par : $\begin{cases} -\frac{1}{2} \leq x \leq 0 \\ -x \leq y \leq f(x) \end{cases}$

On indiquera cette aire par des hachures sur le graphique.

SUJET 3

EXERCICE 1 :

$$(E) : 4Z^3 + 2(i-4)Z^2 + 3(3-2i)Z - 9 + \frac{9}{2}i = 0$$

1- Sachant que (E) possède un zéro (Z_0) réel détermine-le.

2- Détermine les solutions Z_1 et Z_2 de l'équation :

$$4Z^2 - 2(1-i)Z + 6 - 3i = 0$$

3- Justifie que les solutions de (E) sont Z_0 ; Z_1 et Z_2 .

4- Soit

$$A\left(\frac{3}{2}; 0\right) ; M\left(0; -\frac{3}{2}\right) \text{ et } M'\left(\frac{1}{2}; 1\right)$$

a- Montre que AMM' est un triangle rectangle en A .

b- Soit S la similitude $S(A) = A$ et $S(M) = M'$.

Détermine des caractéristiques de cette similitude.

5- Calcule l'affixe du point M_1 dont O est l'image par S .

6- Construis l'image du cercle (β) circonscrit au triangle ABC par S puis calcule son aire

EXERCICE 2 :

(U_n) et (V_n) sont des suites définies par

$$U_{n+1} = \frac{U_n + 5}{3}$$

$$V_n = \frac{U_{n+1} - U_n}{3}$$

- 1- Montre que (V_n) est une suite géométrique.
- 2- Soit (S) la suite dont le terme général S_n est la somme de n premiers termes de la suite (V_n) .
 - a- Montre que (S) est convergente
 - b- En déduire que U_n est convergente.

PROBLEME PARTIE A :

I/ : Soit la fonction g de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $g(t) = \frac{2t}{1+t} - \ln(1+t)$

- 1- Montrer que $Dg =]-1 ; +\infty[$
- 2- Calcule les limites aux bornes de Dg . Puis limite de $\frac{g(t)}{t}$ quand t tend vers $+\infty$. En déduire les interprétations graphiques éventuelles.
- 3- a- Montre que pour tout $t \in Dg$.

$$g'(t) = \frac{1-t}{(1+t)^2}$$
 - b- Détermine le signe de g' , puis les variations de g
 - c- dresse le tableau de variation de g .

- 4- a- Montre que g réalise une bijection sur $[1 ; +\infty[$ vers un intervalle qu'on précisera. Puis qu'il existe un unique nombre réel $\alpha \in [3 ; 4]$ tel que $g(\alpha) = 0$

b- Trouve un encadrement de α par deux nombres décimaux consécutifs d'ordre 1 par la méthode de balayage.

- 5- Dédus de tout ce qui précède le signe de g sur $[0 ; +\infty[$.
- 6- Représente (Cg) dans un repère orthonormé $(O ; I ; J)$ (unité 2cm)

II/ :

- 1- Ecris la fonction rationnelle $\frac{3t}{1+t}$ sous la forme $a + \frac{b}{1+t}$ a et b étant des nombres réels.
- 2- En utilisant une intégration par partie, montre que :

$$\int_0^x \ln(1+t) dt = [t \ln(1+t)]_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t} dt$$

- 3- Dédus des questions précédentes $\int_0^x g(t) dt$
- 4- Montre que l'aire S du plan est délimité par :

$$\begin{cases} 0 \leq t \leq \alpha \\ 0 \leq y \leq g(t) \end{cases} \quad \text{est} \quad S = \frac{\alpha(\alpha-3)}{\alpha+1}$$

Détermine alors un encadrement de S à partir des valeurs de α trouvées dans le (I).

PARTIE B :

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = e^{-x} \ln(1+e^{2x}).$$

- 1- Montre que $f'(x)$ a le même signe que $g(e^{2x})$. puis en déduire le sens de variation de f .

- 2- On pose $u = e^{2x}$
- Exprime $f(x)$ en fonction de u uniquement.
 - En déduire que la limite de f quand x tend vers $-\infty = 0$. En utilisant l'égalité : $1 + e^{2x} = e^{2x} \left(\frac{1}{e^{2x}} + 1 \right)$ trouve la limite de f en $+\infty$.
- 3- a- Détermine la valeur de x pour laquelle f présente un maximum et la valeur de ce maximum.
- b- Donne un encadrement de ce maximum en utilisant les valeurs approchées de α .
(Encadrement de α).

SUJET 4

EXERCICE 1

Pour participer à un tournoi de maracana, on a relevé la taille (X_i) en (Cm) et le poids Y_i en Kg des adolescent

X_i	161	168	163	165	162	167	165	166	164	166
Y_i	48	51	49	53	49	48	50	49	52	51

Par la méthode des moindres carrées, on a déterminé l'équation de la droite de régression de y en x suivante : $y = 0,185x + 19,475$.

- Sachant que le coefficient directeur de la droite de régression de x en y est $a' = 5,087$. calcule le coefficient de corrélation linéaire.
- Calcule les coordonnées du point moyen G puis représente le nuage de point de cette série statistique et place G .

- Détermine l'équation de la droite de régression de x en y .
- Estime la taille en cm d'un enfant ayant un poids de 47Kg.
- Représente les deux droites de régression de y en x (D_1) et x en y (D_2)

EXERCICE 2 :

Soit l'application S du plan dans lui-même qui au point $M(Z)$ associe le point $M'(Z')$ tel que : $Z' = (1 + i\sqrt{3})Z$

- Détermine cette transformation du plan et précise ses éléments caractéristiques.
- Soit h l'homothétie de centre O et de rapport 2.
 - Donne la nature de h^{-1}
 - Montrer que $h^{-1} \circ S$ est une rotation que l'on précisera.
 - En déduire que S est composé de deux applications simples.
- Soit $A(1)$; $B(1+2i)$ et $C(2+2i)$. Calcule les affixes des points A' , B' et C' images respectives de A ; B et C par S .
- Sans utiliser les affixes des points A' ; B' et C' ; construis-les dans un repère $(O; I; J)$ à partir des points A ; B ; et C . (on laissera les traits de construction)

PROBLEME :

$f(x) = 1 - x + \sqrt{x^2 + 4}$, d'ensemble de définition $D_f = \mathbb{R}$.

- Calcule les limites aux bornes de D_f . Précise l'asymptote éventuelle.
- Montre que la droite (D) d'équation $y = -2x + 1$ est asymptote en $-\infty$.
- a- Calcule la dérivée f' de f .

b- Montre que pour tout $x \in Df$;
 $f' < 0$.

c- En déduire les variations de f
 puis son tableau de variation.

4- a- Justifie que f admet une
 fonction

réciroque qu'on notera g .

b- Détermine Dg . Puis son
 tableau

de variation et les équation
 des

asymptotes de (Cg) .

c- Montre que pour tout $x \in Dg$

$$g(x) = \frac{4 - (x-1)^2}{2(x-1)}$$

5- Trace les courbes (Cg) et (Cf)
 dans le même repère.

6- a- Calcule $\int_2^{1+\sqrt{5}} g(x) dx$

b- En déduire $\int_{\frac{-2}{\sqrt{5}}}^{\frac{3}{\sqrt{5}}} f(x) dx$; puis

$$A = \int_{\frac{-2}{\sqrt{5}}}^{\frac{3}{\sqrt{5}}} \sqrt{x^2 + 4} dx \quad \text{On donnera}$$

une valeur approchée de A à 10^{-3} .

7- Interpréter graphiquement A , puis
 hachurer sur le graphique l'aire
 A .

$$\text{On prendra } -\frac{\sqrt{5}}{10} \approx -0,223$$

SUJET 5

EXERCICE 1

On considère la suite des nombres
 complexes définie par :

$$\begin{cases} Z_0 = 0 \\ Z_1 = i \\ Z_n - Z_{n-1} = i(Z_{n-1} - Z_{n-2}) \end{cases}$$

1- Montre que : $Z_n - Z_{n-1} = i^n$

2- Etablir à partir de (1) que :

$$Z_n = \frac{1-i}{2}(i^n - 1)$$

3- On rappelle que

$$i^{4n} = 1 \quad ; \quad i^{4n+2} = -1$$

$$i^{4n+1} = i \quad ; \quad i^{4n+3} = -i$$

$n \in \mathbb{N}$, calcule Z_{100} ; Z_{101} ; Z_{102} ;
 Z_{104} .

4- Représente leurs images M_{100} ;
 M_{101} ; M_{102} ; M_{103} dans le plan
 complexe.

EXERCICE 2 :

Une urne contient des boules
 blanches et des boules noires avec
 des proportions suivantes : $\frac{1}{3}$ de

noires et $\frac{2}{3}$ blanches.

On tire une boule, si elle est blanche
 le jeu est terminé. Si elle est noire on
 la remet dans l'urne et on procède à
 un nouveau tirage. Le jeu est terminé
 si la boule est blanche, la boule est
 remise dans l'urne si elle est noire.
 Et on procède à un nouveau tirage et
 ainsi de suite. Le nombre de tirage à
 pratiquer pour avoir le jeu se
 terminer est une variable aléatoire X .

1- Détermine la loi de probabilité de
 X en justifiant la réponse.

2- Vérifie que la somme des

probabilités est égal $\frac{2}{3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)}{1 - \frac{1}{3}}$

Justifie que cette somme converge vers 1

- 3- Calcule les probabilités suivantes : $P(X < 5)$; $P(4 < x \leq 7)$ et $P(x > 3)$.

PROBLEME :

PARTIE A :

On considère la fonction f définie par $f(x) = (ax+b)e^x$.

- 1- Détermine a et b pour que la courbe de f passe par les points $A(0 ; 4)$; $B(1 ; 3e)$.
- 2- On suppose $a = -1$ et $b = 4$ et on appelle f_0 cette fonction.
 - a- Calcule limite de $f_0(x)$ en $+\infty$ et $-\infty$
 - b- Justifie que $f'_0(x) = (3-x)e^x$; puis étudie les variations de f .
 - c- Dresse le tableau de variation de f_0 .
- 3- Détermine le point d'intersection de (Cf_0) avec l'axe (OI) .
- 4- Construis la courbe (Cf_0) (unité le cm)

PARTIE B :

On donne maintenant la fonction g définie par $g(x) = (x^2 + \alpha x + \beta)e^x$.

- 1- Montrer que $g(x) = (x-2)^2 e^x$ si (Cg) passe par $D(2 ; 0)$ et admet en ce point une tangente horizontale.
On appelle $g_0(x) = (x-2)^2 e^x$.
- 2- Calcule les limites de g_0 en $-\infty$ et $+\infty$. Puis justifie l'existence des branches infinies.
- 3- Sachant que $g'_0(x) = x(x-2)e^x$. Etudie les variations de g_0 puis dresse son tableau de variation.
- 4- Détermine les coordonnées des points communs à (Cf_0) et (Cg_0) .

- 5- Représente (Cg_0) dans le même repère que (Cf_0) .

- 6- a- Calcule $g''(x)$ puis montre que $g_0(x) = 2e^x - g''_0(x) + 2g'_0(x)$.

- b- En déduire une primitive de $g_0(x)$

- 7- a- Calcule $S(\lambda) = \int_{\lambda}^0 g_0(x) dx \quad \lambda < 0$

- b- Calcule $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} S(\lambda)$

SUTET 6

EXERCICE 1 :

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 4. une urne contenant n boules blanches et n boules noires. On tire simultanément quatre (4) boules (les tirages de 4 boules est équiprobables.)

- 1- Calcule la probabilité des événements :
 - A. "avoir 1 boule blanche"
 - B. "avoir 2 boules noires"
- 2- Soit x la variable aléatoire qui à chaque tirage de 4 boules associe le nombre de boules blanches.
 - a- Donne les valeurs prises par X en justifiant.
 - b- Etablis la loi de probabilité de X
 - c- Pour $n \geq 4$ on pose
 - d- $U_n = P(x=2)$.
Calcule la limite de U_n .

EXERCICE 2 :

Soit $M(z)$ un point du plan complexe et $M'(Z')$ son image par une application f du plan.

$$Z = f(z) = \frac{z+1}{z-1} \quad \text{avec} \quad Z = X + iY$$

$$z = x + iy$$

- 1- Montre que $f(z) = f^{-1}(z)$.
- 2- Détermine l'ensemble des points $M(z)$ du plan tel que $|Z| = \sqrt{2}$
- 3- Calcule X et Y en fonction de x et y puis x et y en fonction de X et Y
- 4- a- Détermine l'ensemble de points $M(Z)$ tel que Z soit réel.
b- Détermine l'ensemble des points $M(Z)$ tel que Z soit imaginaire pur.
c- Représente ces deux ensembles puis détermine leur intersection

PROBLEME:

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty ; 0[f(x) = x^2 \ln|x| \\ \forall x \in]0 ; +\infty[f(x) = \ln(e^x - x) \end{cases}$$

- 1- Etudie la continuité et la dérivabilité de f en 0 et donne les interprétations graphiques éventuelles.
- 2- Calcule les limites de f aux bornes de D_f . Préciser les asymptotes puis montre que $y = x$ et (OJ) sont des branches paraboliques respectivement en $+\infty$ et en $-\infty$
- 3- Vérifie que pour tout $x \in]-\infty ; 0[$
 $f'(x) = x[2\ln(-x) + 1]$ et sur $]0 ; +\infty[$
$$f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$$
- 4- Etudie les variations de f sur D_f .
- 5- Construis (C_f) dans un repère orthonormé $(O ; I ; J)$.

- 6- a- Calcule $\int_{-3}^{-1} f(x) dx$ (on utilisera une intégration par parties)
b- En déduire l'aire de la partie du plan délimitée par les droites d'équation
 $x = -3$ et $x = -1$ et l'axe des abscisses.
On donnera une valeur approchée à 10^{-1} près.

Sujet 7

EXERCICE 1 :

Soit la fonction f définie par :

$$F(x) = e^{-x} \sin x.$$

- 1- Calcule $f'(x)$
- 2- Démontre que les solutions de l'équation $f'(x) = 0$, sont les termes d'une suite arithmétique X_n .
- 3- Justifie que
$$f(X_n) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-X_n} (\cos n\pi + \sin n\pi)$$
- 4- On considère la suite (Y_n) définie par $Y_n = f(X_n)$.
a- Montre que la suite (Y_n) est géométrique de raison $-e^{-\frac{\pi}{2}}$.
b- Exprime (Y_n) en fonction de n et Y_0 .
- 5- Calcule limite Y_n en $+\infty$.

EXERCICE 2 :

Dans un jeu de 32 cartes, deux joueurs A et B sont opposés. Le principe est le suivant :

A tire deux cartes successivement sans remise. Si elle sont des cœurs, le joueur emporte sa mise et celle de B.

B emporte sa mise et celle de A, si les cartes ne sont pas des cœurs.

A mise 50F et B mise 500F.

- 1- Calcule la probabilité de chacun des joueurs de gagner.
- 2- Détermine les espérances de gain des deux joueurs. Le jeu est-il équitable ? Lequel est avantagé ?
- 3- On suppose maintenant que B mise x francs. Calcule x pour que le jeu soit équitable.

PROBLEME :

PARTIE A

On considère la fonction f définie de la façon suivante :

$$f(x) = \frac{e^x}{1+e^x} - \ln(1+e^x) \quad \text{puis (Cf) sa}$$

courbe représentative.

- 1- a- Détermine Df, puis calcule limites en $+\infty$ et $-\infty$.
b- Justifie que (Cf) admet $y = -x + 1$ comme asymptote.
- 2- a- Montre que pour tout $x \in Df$

$$f'(x) = -\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)^2$$
 b- Etudie les variations de f.
c- Détermine le signe de f sur Df.
- 3- Construis (Cf) dans un repère orthonormé (O ; I ; J).

PARTIE B :

Soit $g(x) = -e^{-x}\ln(1+e^x)$

- 1- Calcule les limites de g aux bornes de Dg.
- 2- Trouve une relation entre f et g'
- 3- Etudie les variations de g.
- 4- Construis (Cg) dans le même repère.

SUJET 8

EXERCICE 1 :

Un dé parfaitement équilibré a 4 faces blanches et 2 faces noires. Un jeu consistant à lancer le dé et observer la couleur de la face supérieure. Deux personnes AFFOUA (A) et BOURAHIMA (B) sont opposés. Le principe suivant est arrêté ; si AFFOUA lance le dé et une face blanche apparaît, elle gagne sa mise et celle de BOURAHIMA. Si BOURAHIMA lance le dé et une des faces noires apparaît, il emporte sa mise et celle d'AFFOUA.

- 1- Quelle est la probabilité de voir apparaître :
a- Une face noire
b- Une face blanche
- 2- A mise 50F et B mise 20F. le jeu est-il équitable ? Justifie ta réponse.
- 3- On lance maintenant deux fois de suite le dé. A gagne si elle obtient 2 fois la face blanche. Quelle situation doit-on envisager pour B sur les dés pour avoir :
a- le joueur A soit avantagé.
b- le joueur B soit avantagé .

EXERCICE 2 :

Soit la suite (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{2U_n + 3}{U_n + 4} ; \quad n \geq 0 \end{cases}$$

- 1- Calcule U_1 et U_2 .
- 2- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* ; 0 < U_n < 1$.
- 3- Soit la fonction $f(x) = \frac{2x+3}{x+4}$

Etudie les variations de f. (on ne demande pas de calculer les limites)

- 4- Justifie que (U_n) est convergente .
- 5- Trace (Cf) et la droite (D) d'équation $y = x$ dans le repère (O ; I ; J) ; puis représente sur l'axe des abscisses les termes U_0 ; U_1 ; U_2 .
- 6- On donne la suite (V_n) définie par :

$$V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 3}$$
 - a- Montrer que (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le 1^{er} terme.
 - b- Justifie que (V_n) est convergente.
- 7- Exprime (U_n) en fonction de n, puis vérifie la conjecture de la question 4.

PROBLEME :

On donne des fonctions f et g définie par : pour tout

$$x \in \mathbb{R}_+^* \quad f(x) = e^{-x} \ln x \quad \text{et} \quad g(x) = -\ln x + \frac{1}{x}$$

PARTIE A :

- 1- a- Calcule les limites de g en 0 et $+\infty$ puis $\frac{g(x)}{x}$ en $+\infty$.
 b- Donne les interprétation graphiques.
- 2- a- Détermine la dérivée g' de g.
 b- Etudie les variations de g sur Dg.
- 3- a- Justifie que g réalise une bijection. On
 prendra soin de préciser les intervalles

b- En déduire l'existence d'un nombre

$$\text{réel } \alpha \in \left[\frac{3}{2} ; 2 \right] \text{ tel que } g(\alpha) = 0$$

c- Donne un encadrement de α d'ordre 1 par la méthode de balayage.

- 4- Calcule $\lim [g(x) + \ln x]$ en $+\infty$ et interpréter ce résultat.

PARTIE B :

- 1- a- Montrer que $f(\alpha) = \frac{e^{-\alpha}}{\alpha}$
 b- Déduire un encadrement de $f(\alpha)$ à partir de $\frac{3}{2} \leq \alpha \leq 2$
- 2- a- Montre que $f'(x) = e^{-x}g(x)$ puis étudie les variations de f.
 b- Dresse le tableau de variation de f en y mettant toutes les limites après les avoir calculées. Puis préciser les interprétations graphiques.
 Représente la courbe (Cf) dans un repère orthonormé (O ; I ; J).
 (L'unité est le cm).

SUJET 9

EXERCICE 1 :

On donne l'équation (E) :

$$Z^2 - pZ + q = 0$$

Soit Z_1 et Z_2 les solutions de (E), telles que $p = Z_1 + Z_2$ et $q = Z_1 \times Z_2$.

- 1- On pose $U = \frac{Z_1}{Z_2}$; $U \in \mathbb{C}$. Montre
 que : $q(U + 1)^2 = p^2 U$.

- 2- Soit un nombre réel $\theta \in \left] -\frac{\pi}{2} ; 0 \right]$

$$\text{On pose } p^2 = 4q \cos^2 \theta$$

- a- Justifie que : $q(U+1)^2 = p^2 U$ équivaut à $U^2 + (2-4\cos^2\theta)U + 1 = 0$
- b- En déduire que les solutions de l'équation précédente de la questions a) sont :
- $$U_1 = \cos 2\theta + i \sin 2\theta$$
- $$U_2 = \cos 2\theta - i \sin 2\theta$$
- 3- On suppose que $p = -2i$ et $Z_1 = 1-i$
- a- Détermine q ; Z_2 et donne l'expression de (E) .
- b- Trouve U_1 et U_2 sous forme algébrique en utilisant $p^2 = 4q\cos^2\theta$.

EXERCICE 2 :

On donne la fonction f définie par

$$f(x) = \frac{1}{x(x+1)}$$

- 1) a- Trouve les réels a et b tels que

$$f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$$

- b- Déduire une primitive F de f .

c- Calcule $F(x) = \int_1^x f(t) dt$

2) On considère la suite (S) définie par : $n \neq 0$

$$S(n) = F(1) + F(2) + \dots + F(n)$$

- a- Donne une écriture simplifiée de $S(n)$

b- Calcule $\lim_{n \rightarrow +\infty} S(n)$

PROBLEME :

Une urne contient 5 boules vertes, 3 boules rouges et 5 boules bleues toutes indiscernables au toucher.

PARTIE A :

- 1- On tire simultanément au hasard 2 boules. Calcule les probabilités des événements suivants :

a- A « tirer 2 boules de même couleur »

b- B « tirer 2 boules de couleurs différentes ».

c- $A \cup B$.

PARTIE B :

- 1- On donne à chaque couleur de boules un chiffre.

Une boule bleue donne (-1) point

Une boule rouge donne $(+1)$ point

Une boule verte donne (0) point

Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage de 2 boules associe la somme totale de points donnés par chaque boule.

a- Justifie que $X = \{-2 ; -1, 0 ; 1 ; 2\}$

b- Recopie puis complète le tableau suivant en justifiant les cases à compléter.

X_i	-2	-1	0	1	2
$P(X=x_i)$		$\frac{25}{78}$		$\frac{15}{78}$	

c) Calcule l'espérance mathématique $E(X)$, puis montre que l'écart type $\sigma = 1,03$

2- Soit la fonction de répartition de F de cette variable aléatoire.

Construis la représentation graphique de F sur $\mathbb{R}$.

PARTIE C :

Cette urne est utilisée par le comité des délégués du LYCEE pour organiser un jeu pendant la kermesse. L'organisation définit le jeu de la façon suivante :

La mise est de 200F. Si le tirage des boules donne un total de 1 point tu gagnes 500F sinon tu perds ta mise.

- 1- Quelle est la probabilité pour le joueur de perdre ?
- 2- Montre que la probabilité de gagner 2 fois après six (6) tirage est $P = 0,23$.
- 3- Calcule dans ce cas (2) l'espérance mathématique puis la variance.

SUJET 10

EXERCICE 1 :

Le sang de chaque être humain possède une caractéristique appelé facteur Rhésus. Il y a 2 formes de R^+ et R^- .

La probabilité qu'un ivoirien soit R^+ est 0,76 et la probabilité qu'il soit R^- est 0,24. la formation d'un couple est indépendant du facteur Rhésus. Un couple étant pris au hasard.

Calcule les probabilités :

- 1- a- Pour que le mari soit R^+ et la femme R^-
 b- le mari R^- et la femme R^+
 c- le mari R^- et la femme R^-
 d- le mari R^+ et la femme R^+
- 2- Chez les couples où l'homme est R^+ et la femmes R^- (cas a) il se produit dans 8% des naissances, des accidents qui nécessitent un traitement spécial du nouveau-né.
 a- Détermine la probabilité $P(E_T)$ pour qu'un nouveau-né de parents ivoiriens dont on ne connaît pas la nature du facteur Rhésus puisse subir ce traitement.
 b- Montre que $P(\overline{E_T}) = 0,985408$
- 3- Dans une maternité il y a 8 naissance par semaine.

- a- Détermine la probabilité P pour que trois (3) nouveau-nés subissent ce traitement.
- b- Montre que la probabilité qu'il y ait au moins un cas de traitement pour un nouveau-né dans la même semaine est égale à 0,110944915.

- 4- Donne les cas dans lesquels il y a erreur ?

EXERCICE 2 :

Une enquête portant sur le chiffre d'affaire (X_i) et les frais de publicité (Y_i) annuels a donné le tableau suivant :

Y_i	1,8	2,4	2,5	3	3,2	3,5	3,8	4,6
X_i	24	38	39	42	40	45	44	52

- 1- Représente le nuage de points de cette série statistique.
- 2- Calcule les coordonnées du point moyen G , puis place-le dans le repère.
- 3- Justifie que le coefficient de corrélation est bon.
- 4- Détermine l'équation de la droite de régression de y en x .
- 5- Montre que pour un chiffre d'affaires de 56 millions les frais de publicité sont compris entre 4,6 millions et 4,7 millions.

PROBLEME :

PARTIE A :

On donne la fonction suivante :

$$g(x) = \frac{|x - \sqrt{2}|}{4 - x^2}$$

- 1- Détermine l'ensemble de définition D_g sous forme de réunion d'intervalle.

- 2- Ecris g sans le symbole de la valeur absolue.
- 3- Calcule les limites de g en $-\infty$; $+\infty$ en -2 et 2 puis en donner les interprétations graphiques éventuelles.

PARTIE B :

Soit la fonction h définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty ; \sqrt{2}[\setminus \{-2\} h(x) = \frac{-x + \sqrt{2}}{4 - x^2} \\ \forall x \in]\sqrt{2} ; +\infty[\setminus \{2\} h(x) = \frac{x - \sqrt{2}}{4 - x^2} \\ h(\sqrt{2}) = 0 \end{cases}$$

- 1- Etudie la dérivabilité de h en $\sqrt{2}$ puis donne une interprétation graphique des résultats.

- 2- Montre que sur $]-\infty ; \sqrt{2}[\setminus \{-2\}$

$$h'(x) = \frac{-x^2 + 2x\sqrt{2} - 4}{(4 - x^2)^2} \text{ et}$$

$$]\sqrt{2} ; +\infty[\setminus \{2\}$$

$$h'(x) = \frac{x^2 - 2x\sqrt{2} + 4}{(4 - x^2)^2} \text{ puis étudie}$$

leurs signes

- 3- Donne les variations de h et son tableau de variation après avoir calculé les limites de h sur D_h .

- 4- Justifie à partir du tableau de variation que sur $]-\infty ; -2[$ et $]2 ; +\infty[$ (Ch) est en dessous de la droite (D) d'équation $y = 0$.

Sur $]-2 ; 2[$ (Ch) est au dessus de (D)

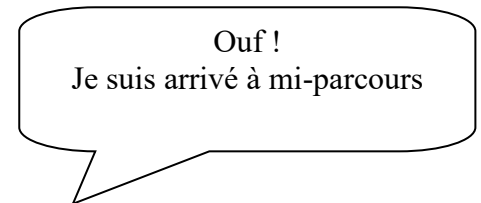
- 5- Représente (Ch) et les asymptotes dans un repère orthonormé (O ; I ; J). (unité 1cm).

Soit

$$f(\lambda) = \int_{\lambda}^0 \left(g(x) - \frac{\sqrt{2}}{4 - x^2} \right) dx \quad \lambda < 0$$

- 1- Calcule $f(\lambda)$

- 2- Calcule $\lim_{\lambda \rightarrow 4} f(\lambda)$ et $\lim_{\lambda \rightarrow 0} f(\lambda)$



PARTIE C :

SUJET N°1

EXERCICE 1 (BAC 2001 P49)

Le tableau suivant donne le PNB ainsi que le nombre d'hôpitaux pour 1 million d'habitants dans quelques pays Africains .

Pays	A	B	C	D
PNB, x en f CFA	5100	7800	11200	15800
Nbre y d'hôpitaux par million d'habts	620	1080	1550	2100

E	F	G	H
20100	26230	28910	31910
3000	3800	4200	4400

1) Représenter le nuage de points associé à la série (x ; y) . 1 cm pour 2000 f et en ordonnée 1 cm pour 400 hôpitaux . origine M_0 (5000 ; 600) .

2) Déterminer le coefficient de corrélation linéaire entre x et y (arrondi à 10^{-2} près)

On admet qu'un ajustement affine par la méthode des moindres carrés est justifié .

3) Donner une équation de la droite de régression de y en x.

4) Tracer (D) dans le repère précédent .

5) Calculer les coordonnées du point G et vérifier graphiquement qu'il appartient à (D) .

6) Un pays a un PNB de 234000 f . Quelle estimation peut-on faire du nombre d'hôpitaux dans ce pays ?

EXERCICE 2 (D,D')

NB : les résultats à 10^{-4} près

On se propose de tester l'efficacité d'une serrure à code et d'un système d'alarme . Une porte est munie d'un dispositif portant les touches : 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 et A , B , C , D .

La porte s'ouvre lorsqu'on frappe dans l'ordre trois chiffres et deux lettres qui forment un code . Les chiffres sont nécessairement distincts, les lettres non . Dans tout l'exercice on supposera que les manipulateurs connaissent le mode d'emploi du dispositif .

1) Quelle est la probabilité pour qu'une personne ouvre la porte au 1^{er} essai dans chacun des cas suivants :

- a) Elle ignore le code
- b) Elle se souvient seulement que les trois chiffres du code sont pairs .
- c) Elle se souvient , de plus que les deux lettres sont identiques .

2) La porte est équipée d'un système d'alarme se déclenchant lorsque aucun des trois chiffres frappés ne figure sur la liste des chiffres du code .

Un enfant ignorant le code tente de déclencher l'alarme .

- a) Quelle est la probabilité pour qu'il provoque le déclenchement de la sirène à l'issue d'un seul essai ?
- b) Il effectue quatre essais successifs et indépendants . Trouver quelle est la probabilité pour qu'il déclenche l'alarme au moins une fois au cours des quatre essais .

PROBLEME

PARTIE A

Soit g la fonction définie par

$$g(x) = e^x - 2x$$

- 1) Calculer la dérivée g' de g , en déduire les variations de g sur $\mathbb{R}$.
- 2) Etablir le tableau de variation de g
- 3) En déduire le signe de $g(x)$.

PARTIE B

On donne $f(x) = x - 2 + 2(x + 1)e^{-x}$

- 1) a) Détermine la limite de f en $+\infty$ et $-\infty$
b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = x - 2$ est asymptote à (Cf) en $+\infty$
- c) Préciser la position de (Cf) par rapport à (D).
- 2) a) Calcule $f'(x)$ et montre qu'il est du même signe que $g(x)$.
b) En déduire les variations de f et son tableau de variation
- 3) a) Montrer que la tangente (Δ) à (Cf) au point d'abscisse 0 est parallèle à (D)
b) Tracer (D); (Δ) et (Cf).

PARTIE C

- 1) Détermine les réels a et b pour que la fonction $H(x) = (ax + b)e^{-x}$ soit une primitive de la fonction $h(x) = (x + 1)e^{-x}$.
- 2) Soit λ un réel tel que $\lambda > 2$. On pose
$$I(\lambda) = \int_2^\lambda f(x) dx - \int_2^\lambda (x - 2) dx$$
 - a) Représenter $I(\lambda)$ sur la figure puis la calculer.
 - b) Déterminer $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} I(\lambda)$.

SUJET N° 2

EXERCICE 1 (BAC 2001 P62)

Une balle élastique est lâchée d'une hauteur de 100 cm au-dessus du sol. A chaque rebond, la balle remonte aux $\frac{9}{10}$ de la hauteur atteinte

précédemment. $h_0 = 100$. Pour n entier supérieur ou égal à 1 on désigne par h_n la hauteur en cm atteinte à l'issue du n -ième rebond.

- 1) Calculer h_1 et h_2 . Exprimer h_{n+1} en fonction de h_n et en déduire la nature de la suite (h_n) .
- 2) Exprimer h_n en fonction de n
- 3) a) Résoudre l'inéquation $100 \cdot 0.9^n \leq 30$

b) A partir de combien de rebonds la balle demeurera-t-elle à moins de 30 cm du sol ?

- 4) La balle rebondit trois fois sur le sol. Calculer la distance parcourue par la balle depuis le lâcher jusqu'au moment où elle touche pour la troisième fois le sol.

EXERCICE 2 (BAC 2001 P55)

Une enquête faite auprès d'une population comprenant 51% de femme montre que 20% des femmes et 15% des hommes de cette population ne vont pas au cinéma.

- 1) On choisit au hasard un individu de cette population. Les choix sont équiprobables.
On note les événements suivants :
F « l'individu choisi est une femme »
C « l'individu choisi fréquente les salles de cinéma »

- a) Déterminer la probabilité de l'évènement $F \cap C$.
- b) Montrer que la probabilité de l'évènement $\bar{C}$ est égale à 0 . 1755 .
- c) Déterminer la probabilité que la personne choisie soit une femme sachant qu'elle ne va jamais au cinéma . (arrondi à 10^{-4} près)
- 2) On choisit trois individus au hasard dans cette population . On suppose la population assez nombreuse pour pouvoir considérer que l'on répète alors trois fois de manière indépendante l'expérience « choisir au hasard un individu dans la population » dans des conditions identiques .
- a) Quelles est la probabilité qu'aucun des trois individus choisis ne fréquente les salles de cinéma ?
- b) En déduire la probabilité que l'un au moins des individus choisis fréquente les salles de cinéma .

PROBLEME (BAC 2001 P56)

PARTIE A

Une étude statistique portant sur la répartition des revenus d'une population a donné les résultats suivants . x représente un revenu annuel , exprimé en millions de f N représente le nombre , exprimé en milliers d'individus, dont le revenu est supérieur ou égal à x .

x_i	0.35	0.6	0.9	1.5	2	3
N_i	4.448	1.359	0.557	0.181	0.148	0.039

- 1) a) Après l'avoir reproduit , compléter le tableau suivant, où est l'arrondi à 10^{-2} près de $\ln(N_i)$.

x_i	0.35	0.6	0.9	1.5	2	3
z_i	1.49		-0.59		-1.91	

- b) Donner le coefficient de corrélation linéaire de la série $(x_i ; z_i)$
- 2) Donner une équation de la droite de régression de z en x , obtenue par la méthode des moindres carrés . (arr. 10^{-1})

PARTIE B

On considère la fonction f définie sur $[0 ; + \infty[$ par $f(x) = e^{-1.6x + 1.3}$

- 1) Étudier le sens de variation de f sur $[0 ; + \infty[$ après avoir déterminé sa limite en $+\infty$.

- 2) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormal (unité 4 cm). Donner

le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse 0 et tracer cette tangente.

- 3) Soit la fonction $g(x) = -xf(x)$ sur $[0 ; + \infty[$

- a) Vérifier que $g(x) = 1.6x e^{-1.6x + 1.3}$

- b) Montrer que la fonction G définie sur $[0 ; + \infty[$ par $G(x) =$

$(-x - \frac{5}{8})e^{-1.6x + 1.3}$ est une primitive de g .

PARTIE C

- 1) On admet que la fonction de la PARTIE B traduit la situation présentée la PARTIE A .

- a) Déterminer le nombre d'individus dont le revenu est ≥ 2 millions .

- b) Déterminer le nombre d'individus dont le revenu est ≥ 2 millions et < 2.5 millions

SUJET N° 3

EXERCICE 1 (IRMA TD. P 278)

Un parachutiste saute d'un avion et atterrit nécessairement sur un terrain déboisé de un hectare entouré d'une forêt. Dans ce terrain, il y a un espace cultivé rectangulaire ayant 50 mètres de longueur et 30 mètres de largeur, un plan d'eau formant un triangle rectangle isocèle de 100 mètres de côté et une cible circulaire de 20 mètres de diamètre qui représente son objectif.

1) Définir en extension l'ensemble E des éventualités liées à cette expérience.

2) On suppose que la probabilité pour qu'il tombe sur une partie donnée du terrain est proportionnelle à l'aire de cette partie.

a) Calculer la probabilité de chaque événement élémentaire.

b) Quelle est la probabilité pour qu'il rate la cible mais qu'il n'atterrisse ni dans l'espace cultivé ni dans le plan d'eau ?

c) Quelle est la probabilité pour qu'il atterrisse dans le plan d'eau ou dans l'espace cultivé ?

NB : 1ha = 10 000 m²

EXERCICE 2 (Didier BAC P63)

Soit U et V deux suites numériques

telles que $U_0 = 0$ et $U_{n+1} = \frac{1+U_n}{2}$

$$V_0 = 2 \text{ et } V_{n+1} = \frac{1+V_n}{2}$$

1) Calculer $U_1, U_2, U_3, V_1, V_2, V_3$

2) On définit deux nouvelles suites S et D par

$$S_n = U_n + V_n \text{ et } D_n = V_n - U_n$$

a) Vérifier que S est une suite constante. Puis calculer S_n

b) Démontrer que D est une suite géométrique. Exprimer D_n en fonction de n.

c) Déduire de a) et b) les expressions de U_n et V_n en fonction de n. Les suites U et V sont-elles convergentes ? Si oui, trouver leur limite.

PROBLEME (Didier BAC P227)

PARTIE A

Soit la fonction $g(x) = 4x^3 + x^2 + 1$

1) Étude des variations de g

a) Calculer les limites aux bornes de Dg

b) Déterminer la dérivée de g puis son sens de variation

c) Dresser son tableau de variation

2) En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet dans IR une solution unique négative. On la notera α .

3) Calculer $g(-\frac{3}{4})$ et $g(-\frac{1}{2})$

Montrer que α appartient à

$$\left] -\frac{3}{4}; -\frac{1}{2} \right[$$

(On ne cherchera pas à calculer α de façon plus précise)

4) En déduire le signe de $g(x)$

PARTIE B

soit f la fonction définie par

$$f(x) = 2 \ln(1 + x^2) - \frac{1}{x}$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f et les limites de f .

2) a) Calculer $f'(x)$ et montrer que le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$. En déduire que f admet un minimum relatif pour $x = \alpha$

c) Donner les variations de f puis dresser le tableau de variation de f (On notera $f(\alpha)$ l'image de α par f sans le calculer pour l'instant)

3) Soit (Γ) la courbe de f dans un repère orthonormé.

a) Montrer que (Γ) admet une asymptote parallèle à l'axe des ordonnées (On notera que (Γ) admet (OI) comme branche infinie.

b) Tracer (Γ) dans le repère. (unités 1 cm sur chaque axe) en admettant que $\alpha = -0.72$.

SUJET N° 4

EXERCICE 1 (MATH + P 21)

Dans le plan complexe muni du repère $(O; I; J)$ les points A et B ont pour affixes respectives $\sqrt{3} + i$ et $-\sqrt{3} + i$. On désigne par S la similitude directe d'écriture

$$\text{complexe } z' = \frac{3 - i\sqrt{3}}{2} z - \sqrt{3} + i$$

1) Déterminer les images par S des points O et A

2) Déterminer les éléments caractéristiques de S .

3) Soit (C) le cercle de centre O et de rayon 2 et (C') son image par S .

a) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de (C')

b) Construire (C') .

EXERCICE 2

Soit a un nombre réel strictement positif. On considère la suite géométrique (U_n) de raison q et de premier terme U_0 non nul telle que $27 U_6 = a^3 U_5$

1) Exprimer q en fonction de a

2) Pour quelles valeurs de a la suite U est-elle convergente ?

On pose, pour tout entier n :

$S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n$, exprimer S_n en fonction de a , de U_0 et n

4) Dans cette partie, a est tel que $0 < a < 3$

a) Calculer la limite de la suite U

b) Sachant que $U_0 = 81$ et

$\lim S_n = 243$ calculer a puis q

c) Calculer l'arrondi d'ordre 2 de S_9

PROBLEME

PARTIE A

Soit la fonction g définie sur $] -\infty ; 1[$ par $g(x) = x^2 - 2x + \ln(1 - x)$

1) Calcule $g(0)$

2) a) Calcule $g'(x)$ puis détermine son signe

b) Dresse le tableau de variation de g puis déduire le signe de g sur D_g

PARTIE B

On considère la fonction f définie

par $f(x) = x + 1 + \frac{\ln(1 - x)}{1 - x}$ sur $] -\infty ; 1[$

(Cf) sa courbe dans un repère orthonormé (unité : 2 cm)

1) Justifie que (Cf) admet une asymptote verticale en 1 et

$$\text{que } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

2) Démontrer que la droite (D) d'équation $y = x+1$ est asymptote à (Cf) en $-\infty$

3) Étudier la position de (Cf) par rapport à (D)

4) a) Justifie que sur $] -\infty ; 1[$

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(1-x)^2}$$

b) En déduire le signe de $f'(x)$ puis les variations de f et son tableau de variation

5) Soit h la restriction de f à $] -\infty ; 0[$

a) Démontrer que h est une bijection de $] -\infty ; 0[$ sur un intervalle que l'on précisera

b) Démontrer que l'équation (E) : $f(x) = 0$ admet exactement deux solutions α_1 et α_2 telles que

$$-1.37 < \alpha_1 < -1.36 \text{ et}$$

$$0.51 < \alpha_2 < 0.52$$

c) Vérifier que si un nombre réel α est une solution de (E) alors on a $\ln(1-\alpha) = \alpha^2 - 1$

d) Soit (Ch) la courbe de h , représente (Cf) et (Ch^{-1}) .

PARTIE C

1) En remarquant que $\forall x \in] -\infty ; 1[$ $\frac{\ln(1-x)}{1-x} = -\left(\frac{1}{x-1}\right) \ln(1-x)$, trouver

une primitive de la fonction

$$x \mapsto \frac{\ln(1-x)}{1-x}$$

2) Soit A l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe (Cf), la droite (OJ), la droite (D) et la droite d'équation $x = \alpha$

a) Calculer A et exprimer le résultat sans le symbole « $\ln$ »

b) Calculer une valeur approchée de A à 10^{-1} près.

SUJET N° 5

EXERCICE 1 (unité : 2 cm)

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J), on considère le point B d'affixe $2i$ et la transformation S du plan d'écriture complexe $Z' = (1-i)Z + 2i$

1) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de S

2) Calculer l'affixe du point N image de B par S .

3) Soit A le point d'affixe 2

a) Faire la figure

b) Démontrer que le triangle ABN est rectangle isocèle en B

c) Déterminer l'affixe du point K tel que BAKN est un carré.

EXERCICE 2 (IRMA TD P 284)

On considère un sac contenant quatre boules blanches et n boules noires (n étant un entier naturel supérieur ou égal à deux(2)). Elles sont toutes indiscernables au toucher. On tire au hasard et simultanément deux boules du sac et observe les couleurs obtenues. Pour chaque boule blanche tirée, on gage 3 points et pour chaque boule noire on perd 2 points. Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage simultanément de deux boules, associe le g algébrique du joueur.

1) Justifier que les valeurs prises par X sont : 6 ; -4 et 1

- 2) Etablir la loi de probabilité de X
- 3) Combien de boules noires faut-il placer dans le sac pour que le jeu soit équitable ?
- 3) En déduire dans ce cas $V(X)$
- 4) Construis la fonction de répartition de X et le diagramme en bâtons de X

PROBLEME

PARTIE A

On considère la fonction numérique g définie par :

$$g(x) = 1 + x(2\ln |x| + 1)$$

- 1) Déterminer Dg et les limites de g aux bornes des intervalles de Dg
- 2)a) Déterminer sa dérivée g' puis les variations de g
- b) Dresser le tableau de variation de g
- 3a) Calculer l'image de -1 par g
- b) Quelle est l'image J par g de l'intervalle I tel que $I =]-\infty ; -e^{-3/2}]$?
- c) Démontrer que l'application h définie sur I par $h(x) = g(x)$ est une bijection de I sur J
- d) En déduire l'ensemble des solutions de l'équation : $x \in \mathbb{R} ; g(x) = 0$
- 4) Déduire de tout ce qui précède que

$$\forall x \in]-\infty ; -1[, g(x) < 0 \text{ et}$$

$$\forall x \in]-1 ; 0[\cup]0 ; +\infty[, g(x) > 0$$

PARTIE B

On considère la fonction f de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ définie par

$$\begin{cases} f(x) = x(x \ln |x| + 1) \text{ si } x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

On désigne par (C) sa courbe dans le plan muni du repère orthonormé (O, I, J) : (unité 5cm) .

- 1) Démontrer que f est continue en 0
- 2a) Donner l'ensemble de définition de f
Préciser les limites de f aux bornes de son ensemble de définition
- b) Etudier la dérivabilité de f en 0 et préciser son ensemble de dérivabilité puis donner les interprétation graphique
- c) Expliciter la fonction dérivée et dresser le tableau de variation de f
- 3a) Trouver une équation de la tangente (D) à la courbe (C_f) au point 0
- b) Démontrer que (D) coupe (C_f) en deux autres points E et F dont on calculera les coordonnées
- c) Etudier la position de la courbe (C_f) par rapport à (D)
- 4) Démontrer que (C) coupe (OI) en un point K d'abscisse b tel que $-1,8 < b < -1,7$
- 5) Tracer avec précision la courbe (C_f)

On prendra : $\ln 2 = 0,7$; $\ln 3 = 1,1$

$$\ln 5 = 1,6 ; \ln 7 = 2,9 ; e = 2,7$$

$$\sqrt{e} = 1,6$$

SUJET N° 6

EXERCICE 1 (BAC 2001 P190 OM)

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$. Soit S l'application qui à tout point $M(x ; y)$ associe le point $M'(x' ; y')$

$$\text{tel que } \begin{cases} x' = -x - y + 2 \\ y' = x - y - 1 \end{cases}$$

- 1) Déterminer l'affixe Z' de M' en fonction de l'affixe Z de M

- 2) Démontrer que S est une similitude directe préciser son rapport, son centre I, son angle
- 3) Soit g l'application qui à tout point M associe l'isobarycentre G des points M, M' = S(M) et M'' = S(M')
- a) Calculer en fonction de l'affixe M, les affixes des points M'' et G
- b) Démontrer que g est une similitude directe Quel est son centre ?
- c) Déterminer l'affixe du point M₀(x₀; y₀) tel que g(M₀) soit le point O.
- d) Construire les points M₀; M₀' ; M₀'' et le point I centre de S.

EXERCICE 2 (BAC 2001 P 154 OM)

On tire trois(3) boules simultanément et au hasard d'une urne contenant trois boules blanches, trois noires, trois vertes et trois rouges. On suppose l'équiprobabilité des tirages. Tous les résultats seront sous forme de fractions irréductibles

1) X est la variable aléatoire qui, à chaque tirage associe le nombre de boules blanches obtenues

Déterminer la loi de probabilité

2) Pour gagner il faut tirer au moins deux boules blanches, mais on estime qu'un joueur sur dix est un tricheur et qu'un tricheur gagne avec une probabilité égale à $\frac{1}{2}$.

On note T l'évènement « être un tricheur »

$\bar{T}$ son contraire et G l'évènement « gagner au jeu »

- a) Calculer la probabilité $p(G/\bar{T})$ et en déduire $p(G \cap \bar{T})$
- b) Calculer $p(T \cap G)$
- c) Démontrer que $p(G) = \frac{181}{1100}$

- d) Calculer la probabilité qu'une personne qui a gagné soit un tricheur.

PROBLEME (BAC 2001 P 71 (OM))

PARTIE A

Soit $g(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 1} - \ln(x^2 + 1)$ définie

sur $[0; +\infty[$

- 1) a) Déterminer la limite de g en $+\infty$
- b) Calculer la dérivée de g et donner son tableau de variation
- 2) a) Montrer que sur $[1; +\infty[$ l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α
- b) Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près en la justifiant.
- 3) Préciser le signe de g sur $\mathbb{R}^+$.

PARTIE B

On donne $f(x) = \frac{\ln(x^2 + 1)}{x}$ si $x > 0$ et

$f(0) = 0$ sur $[0; +\infty[$ et (Cf) sa courbe

- 1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}$.

Déterminer une équation de la tangente à (Cf) au point d'abscisse 0.

- b) Montrer que

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ puis donner

les interprétations graphiques éventuelles

- 2) a) Calculer $f'(x)$ et donner une relation liant $f'(x)$ et $g(x)$ pour $x > 0$

- b) Etablir que $f(\alpha) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 1}$

- c) Donner le tableau de variation de f et tracer sa courbe.

PARTIE C

Soit $F(x) = \int_1^x f(t)dt$ définie sur $[1 ; +\infty[$

1) Montrer que pour $x \geq 1$, $\ln(x^2) < \ln(x^2+1)$

En déduire le réel A tel que pour

$$x > 1, A \cdot \frac{\ln x}{x} < \frac{\ln(x^2+1)}{x}$$

2) Calculer pour $x \geq 1$, $I(x) = \int_1^x \frac{\ln t}{t} dt$

3) a) A l'aide du 1) et 2) du C déterminer $h(x)$ telle que pour $x \geq 1$, $h(x) \leq F(x)$.

b) En déduire la limite de $F(x)$ en $+\infty$

4) Déterminer $F'(x)$ puis donner le tableau de variation de F.

SUJET N° 7

EXERCICE 1 (BAC 2001P156 (OM))

1) Une urne U_1 contient 2 jetons numérotés 1 et 2. Une urne U_2 contient 4 jetons numérotés 1, 2, 3 et 4. On choisit au hasard une urne puis un jeton dans cette urne (les choix sont équiprobables)

a) Quelle est la probabilité de tirer un jeton portant le numéro 1 ?

b) On a tiré un jeton portant le numéro 1 quelle est la probabilité qu'il provienne de l'urne U_1 ?

2) On rassemble les deux en une seule qui contient donc les 6 jetons précédents. On tire simultanément et au hasard 2 jetons de l'urne. Les tirages sont équiprobables.

a) calculer la probabilité de tirer 2 jetons identiques

b) Soit la variable aléatoire qui à chaque tirage associe la somme des

numéros des 2 jetons. Déterminer la loi de probabilité de S

2) Deux joueurs Lassane et Mohamed décident que si la somme des numéros est impaire, Lassane donne 1000 f à Mohamed et que dans le cas contraire Lassane reçoit α f de Mohamed. On note X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le gain algébrique de Lassane.

Calculer $E(X)$ en fonction de α ,

Déterminer α pour que :

a) le jeu soit équitable.

b) Mohamed soit avantagé

EXERCICE 2 (BAC 2001 P164 OM)

1) Résoudre l'équation

$$Z^2 - 2\sqrt{2}Z + 4 = 0$$

Soit Z_1 la solution dont la partie imaginaire est >0 et Z_2 l'autre solution.

1) Déterminer le module et un argument de Z_1 et Z_2 puis de $(\frac{Z_1}{Z_2})^2$

2) Dans le plan complexe orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ (unité 1 cm) on a M_1 d'affixe $\sqrt{2}(1+i)$, M_2 d'affixe $\sqrt{2}(1-i)$ et A $(\frac{\sqrt{2}}{2})$

a) Déterminer l'affixe de M_3 image de M_2 par l'homothétie h de centre A et de rapport -3

b) Déterminer l'affixe de M_4 image de M_2 par la rotation r de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

c) Placer dans le même repère les points A, M_1 , M_2 , M_3 et M_4 puis calculer $\frac{Z_3 - Z_1}{Z_4 - Z_1}$

d) Soient $I = \text{mil } [M_3 M_4]$ et M_5 le symétrique de M_1 par rapport à I . Montrer que $M_1 M_3 M_5 M_4$ est un carré.

PROBLEME

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\begin{cases} \forall x \in]-\infty ; 0[& f(x) = x^2 - 2 + \ln(-x) \\ \forall x \in]0 ; +\infty[& f(x) = e^{\frac{1}{x} \ln x} \end{cases}$$

PARTIE A

1) Etude de f au voisinage de 0

a) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ puis interpréter

graphiquement le résultat

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$, que peut-on en

déduire ?

2) Etude de f au voisinage des infinis

a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$,

interpréter graphiquement ce résultat

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis interpréter

On pose dans la suite du problème g la fonction qui coïncide avec f sur $] - \infty ; 0[\cup] 0 ; + \infty [$ et s'annule en 0

PARTIE B

Etude de la fonction g sur $] - \infty ; 0[$

1) Déterminer $g'(x)$ sur $] - \infty ; 0[$, étudier son signe puis donner le sens de variation de g sur $] - \infty ; 0[$

2) a) Justifier que g réalise une bijection de sur $] - \infty ; 0[$ dans un intervalle que l'on précisera

b) Dédurre l'unicité et l'existence d'un réel α tel que $g(\alpha) = 0$

Justifier que $\alpha \in] - 2 ; -1[$ puis donner un encadrement de α à 10^{-1} près

3) Dresser le tableau de variation de g sur $] - \infty ; 0[$

4) Construire avec beaucoup de soin (C_g) sur $] - \infty ; 0[$ dans un repère orthonormé (O, I, J) unité = 1 cm

PARTIE C

Etude de la fonction g sur $]0 ; +\infty[$

1) Etudier la continuité de g en 0

a) Justifier que $\forall x > 0$,

$$\frac{e^{\frac{1}{x} \ln x}}{x} = e^{\left(\frac{1}{x} - 1\right) \ln x}$$

b) Etudier alors la dérivabilité de g à droite en 0 puis interpréter graphiquement le résultat

3) a) Montrer que $\forall x \in]0 ; +\infty[$

$$g'(x) = \frac{1}{x^2} (1 - \ln x) e^{\frac{1}{x} \ln x}$$

b) Etudier le sens de variation de g sur $]0 ; +\infty[$

c) Dresser le tableau de variation de g sur $]0 ; +\infty[$

4) Déterminer les coordonnées de A point d'intersection de (C_g) et

$(\Delta) : y = 1$ sur $]0 ; +\infty[$ puis trouver une équation de la tangente (T) en A

5) Soit h la restriction de g à $[e ; +\infty[$

a) Justifier que h est une bijection de $[e ; +\infty[$ dans un intervalle J à déterminer

b) Justifier que h^{-1} , la bijection réciproque de h est dérivable en $\sqrt{2}$ et déterminer $(h^{-1})'(\sqrt{2})$ [on calculera $h(4)$]

- c) h^{-1} est-elle dérivable à droite en $e^{\frac{1}{e}}$? justifier votre réponse, déduire le comportement de (Ch^{-1}) en $x = e^{\frac{1}{e}}$
- d) Dresser le tableau de variation de h^{-1}
- 6) Construire avec beaucoup de soin dans un autre repère orthonormé sur $]0 ; +\infty[$ (Cg) , (Ch^{-1}) (T) et les asymptotes éventuelles.
unité = 1 cm

**Courage,
le succès
n'est pas loin !!!**

SUJET N° 8

EXERCICE 1

On dispose de 4 urnes contenant chacune 2 boules noires et une boule blanche indiscernables au toucher. Toutes les 12 boules ont la même probabilité d'être tirée. Le jeu consiste à tirer 4 boules mais le joueur ne peut tirer qu'une boule par

urne. Chaque boule blanche tirée donne 1000 f.

- 1) Démontrer qu'on a 81 possibilités de tirer 4 boules.
- 2) Justifier que le nombre de possibilités de tirer une seule boule blanche est 32
- 3) Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe la somme obtenue par le joueur
 - a) Calculer $p(X = 1000)$ et $p(X = 4000)$
 - b) Justifier que $p(X = 2000) = \frac{8}{27}$ et $p(X = 3000) = \frac{8}{81}$
- 4) a) Etablir la loi de probabilité
b) Calculer $E(X)$
- 5) Calculer la probabilité pour qu'un joueur gagne au moins 1000 f
- 6) Cinq personnes participent au jeu. On admet que les résultats obtenus par chacun des joueurs sont indépendants. Quelle est la probabilité qu'un joueur gagne au moins 1000 f ?

EXERCICE 2

I) On considère la fonction f telle que $f(Z) = Z^3 - 2(\sqrt{3} + i)Z^2 + 4(1 + i\sqrt{3})Z - 8i$

1) a) Démontrer que $f(Z) = 0$ admet une solution imaginaire pure dans $\mathbb{C}$ qu'on déterminera.

b) Vérifier que

$$f(Z) = (Z - 2i)(Z^2 - 2\sqrt{3}Z + 4)$$

2) Résoudre l'équation $f(Z) = 0$

II) Dans le repère orthonormé $(O ; I ; J)$ (unité : 2 cm) on considère $A ; B ; C$ et D d'affixes respectives $Z_1 = \sqrt{3} - i$, $Z_2 = 1 + i$; $Z_3 = \sqrt{3} + i$ et $Z_4 = 2i$

1) a) Déterminer le module et un argument de chacun des nombres Z_1 ; Z_2 ; Z_3 et Z_4

b) En déduire que 3 des 4 points appartiennent à un même cercle puis placer les 4 points.

2)a) Soit $U = \frac{Z_1}{Z_2}$ écrire U sous forme

algébrique

Déterminer le module et l'argument principal de U puis en déduire les valeurs exactes de $\cos \frac{5\pi}{12}$ et $\sin \frac{5\pi}{12}$

PROBLEME (unité : 5cm)

PARTIE A

A) Soit h définie sur $]0; +\infty[$ par $h(x) = 1 + e^x + \ln x$

1) Calculer les limites de h en 0 et en $+\infty$

2) Démontrer que h est croissante sur D_h

3) Démontrer que $h(x) = 0$ admet une unique solution $0.11 < \alpha < 0.12$

4) En déduire le signe h sur $]0; +\infty[$

PARTIE B

On donne g définie sur $]0; +\infty[$ par $g(x) = x \ln x + e^x - 1$

1) Calculer les limites de g en 0 et en $+\infty$

2)a) Justifier que $g(\alpha) = -2 - (1 - \alpha) \ln \alpha$

b) Déterminer à l'aide du A) 3) un encadrement de $g(\alpha)$ d'amplitude 10^{-1} puis en déduire que $g(\alpha) < 0$

3) Démontrer que $\forall x \in]0; +\infty[$ $g'(x) = h(x)$ puis donner ses variations et dresser son tableau de variation

4) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une sur $] \alpha ; +\infty[$ une solution unique β tel que $0.3 < \beta < 0.4$

5) En déduire que $\forall x \in] \alpha ; \beta[$ $g(x) < 0$ et $\forall x \in] \beta ; +\infty[$ $g(x) > 0$

PARTIE C

On considère la fonction f définie par

$$f(x) = (1 - e^{-x}) \ln x ; \text{ si } x > 0 \text{ et } f(0) = 0$$

1)a) justifier que $\forall x > 0$

$$f(x) = \frac{(e^{-x} - 1)}{-x} x \ln x$$

b) En déduire que f est continue en 0

c) Etudier la dérivabilité de f en 0 puis interpréter graphiquement le résultat

2) Calculer la limite de f(x) et celle de $\frac{f(x)}{x}$ en $+\infty$ puis donner l'

interprétation graphique

3)a) Démontrer que $\forall x \in]0; +\infty[$

$$f'(x) = \frac{e^{-x}}{x} g(x)$$

c) En déduire les variations de f et dresser son tableau de variation

4) Déterminer une équation de la tangente (T) à (Cf) au point d'abscisse 1

5) Tracer (T) et construire (Cf) :

On prendra : $\beta = 0.35$

SUJET N° 9

EXERCICE 1 (BAC 2001 P 85 TOM)

Au cours d'une séance d'essai, un pilote d'automobile doit, quand il reçoit un signal sonore dans son casque arrêter le plus rapidement possible son véhicule. Au moment du Top sonore, on mesure la vitesse de l'automobile puis le temps nécessaire pour arrêter le véhicule. Pour six expériences on a obtenu les résultats suivants

V_i (km/h)	27	43	62	80	98	115
Y_i distance d'arrêt(m)	6.8	20.5	35.9	67.8	101.2	135.8

On pose pour les six valeurs de V_i ,
 $x_i = V_i^2$ et on considère la série
 $(x_i ; y_i)$

1) Compléter le tableau suivant :

x_i						
y_i						

2) Dans un repère orthogonal ,
construire le nuage de points associé
à cette série double

*absc : 1 cm pour 1000 .ord : 1 cm
pour 10

3)a) Déterminer la droite de
régression de y en x puis la tracer .
(arrondis à 10^{-2} près)

b) Déterminer la valeur estimée de x
correspondant à une distance d'arrêt
de 180 m puis la vitesse
correspondante du véhicule.

c) Quelle est la distance d'arrêt
estimée correspondant à une vitesse
de 150 Km / h

d) Le manuel du code de la route
donne pour calculer la distance
d'arrêt (en m) la méthode suivante
« Prendre le carré de la vitesse
exprimé en dizaines de Km / h)
Comparer le résultat obtenu au c) à
celui que l'on obtiendrait par cette
méthode .

EXERCICE 2 (BAC 2001P33(TOM)

PARTIE A

On considère la suite (U_n) définie
par $U_0 = 900$ et pour $n \in \mathbb{N}$,
 $U_{n+1} = 0.6U_n + 200$

1) Calculer U_1 et U_2

2) On considère la suite (V_n)
définie pour $n \in \mathbb{N}$ par

$$V_n = U_n - 500$$

a) Démontrer que (V_n) est une suite
géométrique dont on donnera le
premier terme et la raison

b) Exprimer (V_n) en fonction de n
. En déduire que

$$U_n = 400 \times (0.6)^n + 500$$

c) Déterminer la limite de la suite
 (U_n)

PARTIE B

Dans un pays deux sociétés A et
B se partagent le marché des
télécommunication . Les clients
souscrivent le 1er Janvier soit
auprès de A soit auprès de B un
contrat d'un an au terme duquel
ils sont libres à nouveau de
choisir A ou B . Cette année
2000 la société A détient 90%
du marché et la société B qui
vient de se lancer 10% . On
estime que chaque année 20% de
la clientèle de A change pour B
et de même 20% de la clientèle
de B change pour A. On considère
une population représentative de
1000 clients de l'année 2000. Ainsi
900 sont clients de la société A et
100 sont clients de la société B .
On veut étudier l' évolution de
cette population les années
suivantes

1) a) Vérifier que la société A
compte 740 clients en 2001.
Calculer le nombre de clients de
A en 2002

b) On note a_n le nombre de clients
de A l'année $(2000 + n)$.

Etablir que

$$a_{n+1} = 0.8 a_n + 0.2 (1000 - a_n)$$

c) En déduire que
 $a_{n+1} = 0.6a_n + 200$

2) En utilisant le résultat de la **partie A** que peut-on prévoir pour l'évolution du marché des télécommunication dans ce pays ?

PROBLEME (BAC 2001 P 139)

PARTIE A

Soit g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$g(x) = x + e^x$$

- 1) Calculer la dérivée de g et étudier les variations de g . Déterminer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$ puis dresser son tableau de variation
- 2) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$ et justifier que $-0.57 < \alpha < -0.56$
- 3) En déduire le signe de $g(x)$

PARTIE B

On donne la fonction

$$f(x) = \frac{x+1}{e^x} - x \text{ et } (C_f) \text{ sa courbe}$$

- 1) Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
- 2) Montrer que $f'(x) = -\frac{g(x)}{e^x}$.

Déduire de la PARTIE A le sens et le tableau de variation de f

- 3) En utilisant la question 2) de la PARTIE A montrer que

$$f(\alpha) = -1 - \frac{1}{\alpha} - \alpha$$

- 4) a) Montrer que la droite (D) d'équation $y = -x$ est asymptote à (C_f) en $+\infty$.
- b) Étudier la position de (C_f) par rapport à (D) et préciser les

coordonnées de leurs points d'intersection.

- 5) Montrer qu'il existe un point A de (C_f) tel que la tangente en ce point soit parallèle à (D). Déterminer l'équation de cette tangente (T)
- 6) Construire (C_f) , (D) et (T)
- 7) En observant la représentation graphique, indiquer quelles semblent être les valeurs de m pour lesquelles l'équation $f(x) = -x + m$ d'inconnue x admet une unique solution.

PARTIE C

On pose $J = \int_{-1}^0 f(x) dx$

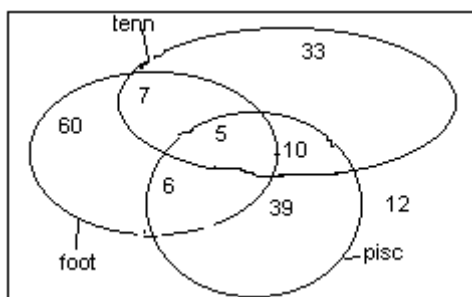
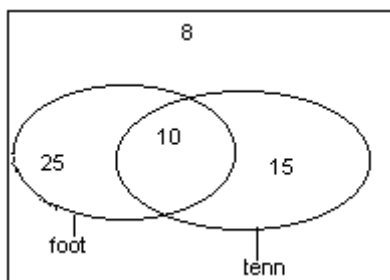
- 1) A l'aide d'une interprétation graphique, justifier l'encadrement $1 < J < 2$
- 2) a) Calculer la dérivée de la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (x+2)e^{-x}$
- b) En déduire une primitive de f sur $\mathbb{R}$
- c) Calculer la valeur exacte de J .

Haut les Coeurs !!!

On y va !!!

PROBABILITE

EXERCICE 1



EXERCICE 2

4 boules Blanches , 2 boules Noires
et 1 boule Rouge . Tirage simultané
⇒ combinaison

$$\text{Card} (\Omega) = C_7^3 = 35$$

$$P(A) = \frac{C_4^2 \cdot C_3^1 + C_4^3}{C_7^3} = \frac{22}{35}$$

$$P(B) = \frac{C_4^2 \cdot C_3^1 + C_2^2 \cdot C_5^1}{C_7^3} = \frac{23}{35}$$

$$P(C) = \frac{C_4^2 \cdot C_3^1 + C_2^2 \cdot C_5^1 + C_4^3}{C_7^3} = \frac{27}{35}$$

$$P(D) = \frac{C_4^1 \cdot C_2^2 \cdot C_1^1}{C_7^3} = \frac{8}{35}$$

$$P(E) = \frac{C_4^2 \cdot C_3^1 + C_2^2 \cdot C_4^1 + C_2^2 \cdot C_1^1}{C_7^3} = \frac{23}{35}$$

EXERCICE 3

Dé 1 \ Dé 2	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

$$1) P(S = 5) = \frac{1}{9}, P(S = 7) = \frac{1}{6},$$

$$P(S = 10) = \frac{1}{12}$$

$$2) P(S < 8) = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}, P(S > 10) = \frac{1}{12}$$

EXERCICE 4

On a n jetons Blancs ($n \leq 6$) et
($n - 10$) Noirs

$$\text{Card} (\Omega) = C_{10}^4 = 210$$

$$1) P(1.N) = \frac{C_n^3 \cdot C_{10-n}^1}{C_{10}^4}$$

$$= \frac{n!}{3!(n-3)!} \cdot \frac{(10-n)!}{(10-n+1)!} = \frac{n!}{3!(n-3)!} \cdot \frac{(10-n)!}{(10-n+1)!}$$

$$\frac{n!}{3!(n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

$$\frac{(10-n)!}{(10-n-1)!} = \frac{(10-n)(10-n-1)!}{(10-n-1)!} = 10 - n$$

$$P(1.N) = \frac{n(n-1)(n-2)(10-n)}{1260}$$

$$2) P(4.N) = \frac{C_{10-n}^4}{C_{10}^4}$$

$$= \frac{(10-n)(9-n)(8-n)(7-n)}{5040}$$

EXERCICE 5

Tirage sans remise ⇒ (arrangement)

$$\text{Card}(\Omega) = A_3^3 = 60$$

1)a	A		
1)b	E		
1)c	R		E
2)			
2)a			M
2)b	A	R	E

$$1)a) 1 \times 4 \times 3 ; P(a) = \frac{1 \cdot A_4^1 \cdot A_3^1}{A_5^3} = \frac{1}{5}$$

b)

$$1 \times 4 \times 3 \text{ ou } 4 \times 1 \times 3 \text{ ou } 4 \times 3 \times 1$$

$$P(b) = 3 \times P(a) = \frac{3}{5}$$

c)

$$1 \times 3 \times 1 \quad P(c) = \frac{3}{60} = \frac{1}{20}$$

2) Tirage avec remise (p-uplet ou p-liste)

$$\text{Card}(\Omega) = 5^3 = 125 \text{ car}$$

(Voir tableau 5x5x5)

$$a) P(a) = \frac{5^2}{5^3} = \frac{1}{5} \text{ car}$$

(Voir tableau 5x5x1)

$$b) P(b) = \frac{1}{5^3} \text{ car}$$

(Voir tableau 1x1x1)

3) Il y a maintenant 2 lettres A
(Toujours arrangement)

Déterminons Card(Ω)

$$\text{*Ecriture sans A : } A_3^3 = 6$$

*Avec 1 A :

A		
	A	
		A

$$1 \times 3 \times 2 \text{ ou } 3 \times 1 \times 2 \text{ ou } 3 \times 2 \times 1$$

On a donc $6 + 6 + 6 = 18$

*Avec 2 A :

1)

A	A	
	A	A
A		A

$$1 \times 1 \times 3 \text{ ou } 3 \times 1 \times 1 \text{ ou } 1 \times 3 \times 1$$

$$\text{On a donc } 3 + 3 + 3 = 9$$

$$\text{Card}(\Omega) = 6 + 18 + 9 = 33$$

$$1) \text{Card}(A) = 6 + 3 + 3 = 12 :$$

$$P(a) = \frac{12}{33} = \frac{4}{11}$$

2) L'évènement b) mot contenant E
est impossible car il n'y a pas de E.

$$P(b) = 0$$

EXERCICE 6

Soit p la probabilité de gagner de chaque cheval on a :

$$p_1 + p_2 + \dots + p_{20} = 1$$

$$p_1 + p_2 + \dots + p_{10} = 10 \times 0.05 = 0.5$$

$$p_{11} + \dots + p_{14} = 4 \times 0.08 = 0.32$$

$p_{15} + \dots + p_{20} = 6q$ avec q la probabilité de gagner des chevaux de 15 à 20, on a

$$q = \frac{1 - 0.5 - 0.32}{6} = 0.03$$

1)	10	11	12
2)	4	11	18

1)

$$p = (0.05 \times 0.08 \times 0.08) \times 6$$

$$p = 0.00192$$

2)

$$p = 0.05 \times 0.08 \times 0.03 = 0.00012$$

EXERCICE 7

$$\text{Dé A} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

équilibré

$$\text{Dé B} = \{1, 1, 1, 1, 6, 6\} \text{ équilibré}$$

Dé C = {1, 2, 3, 4, 5, 6} pipé
 Déterminons la probabilité
 d'apparition des faces du dé pipé.
 Soit p la probabilité d'apparition de
 la face (1).

$p(1) = p$, $p(2) = 2p$, $p(3) = 3p$,
 $p(4) = 4p$, $p(5) = 5p$ et $p(6) = 6p$,
 on a :

$$p + 2p + 3p + 4p + 5p + 6p = 1 ;$$

$$p = \frac{1}{21}$$

$$\text{d'où } p(1) = \frac{1}{21}, p(2) = \frac{2}{21},$$

$$p(3) = \frac{3}{21}$$

$$p(4) = \frac{4}{21}, p(5) = \frac{5}{21}, p(6) = \frac{6}{21}$$

$$1) \text{dé A : } p(6) = \frac{1}{6}, \text{ dé B :}$$

$$p(6) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\text{dé C : } p(6) = \frac{6}{21}$$

2) On lance les 3 dés simultanément

a) 3 fois le chiffres

$$p(a) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{21} = \frac{1}{63}$$

b) Trois chiffres égaux

• On a soit le chiffre 1

$$p_1(b) = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{21} = \frac{1}{189}$$

*On a soit le chiffre 6

$$p_2(b) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{6}{21} = \frac{6}{189} \text{ donc}$$

$$p(b) = p_1(b) + p_2(b) = \frac{4}{189}$$

c) les chiffres 1, 3 et 5

les différentes possibilités

1	3	5	Non car 3 ∉ au dé B
1	5	3	Non car 5 ∉ au dé B
3	1	5	Oui : p_2
3	5	1	Non car 5 ∉ au dé B
5	1	3	Oui : p_3
5	3	1	Non car 3 ∉ au dé B

$$p(c) = p_2 + p_3$$

$$p(c) = \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{21}\right) + \left(\frac{1}{6} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{21}\right) = \frac{8}{189}$$

EXERCICE 8

$$\begin{aligned} \text{a) } p(R_m^+; R_f^-) &= 0.76 \times 0.24 = \\ &= 0.1824 \end{aligned}$$

$$\text{b) } p(R_m^+; R_f^+) = (0.76)^2 = 0.5776$$

$$\begin{aligned} \text{c) } p(R_m^-; R_f^+) &= 0.24 \times .76 \\ &= 0.1824 \end{aligned}$$

$$\text{d) } p(R_m^-; R_f^-) = (0.24)^2 = 0.0576$$

PROBABILITE CONDITIONNELLE

EXERCICE 1

Obtient le tableau suivant

	tachetée	unie	total
bleue	6	3	9
Rouge	4	3	7
total	10	6	16

$$1 - p(R/T) = \frac{p(R \cap T)}{p(T)} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$$2\text{-Card } \Omega = C^2_{16} = 120$$

1 bleue et 1 rouge tachetée .

$$C^1_3 \times C^1_4 \text{ ou}$$

1 bleue tachetée et 1 rouge unie .
 $C^1_6 \times C^1_3$ ou 1 bleue tachetée et 1
rouge tachetée.

$$C^1_6 \times C^1_3 \Rightarrow p = \frac{9}{20}$$

EXERCICE 2

Dé équilibré { 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 }

$$S_1 = \{3B ; 2J\} ; p(B) = \frac{3}{5} \text{ et } p(J) = \frac{2}{5}$$

$$S_2 = \{1B ; 1J\} \quad p(B) = \frac{1}{2} ; p(J) = \frac{1}{2}$$

$$S_3 = \{1B ; 4J\} ; p(B) = \frac{1}{5} \text{ et } p(J) = \frac{4}{5}$$

Face {1; 2 } on tire dans S_1

$$p(1; 2) = \frac{1}{3}$$

Face {4} on tire dans S_2 $p(4) = \frac{1}{6}$

Face {3; 5; 6} on tire dans S_3

$$p(3; 5; 6) = \frac{1}{2}$$

1) Prendre un drap Blanc dans S_3

$$\text{Soit } \{1 ; 2\} \text{ et } S_1 \Rightarrow p_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{5} = \frac{1}{5}$$

$$\text{Soit } \{4\} \text{ et } S_2 \Rightarrow p_2 = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$$

Soit {3 ; 5 ; 6} et $S_3 \Rightarrow$

$$p_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{10}$$

$$\text{D'où } p(B) = \frac{1}{5} + \frac{1}{12} + \frac{1}{10} = \frac{23}{60}$$

$$2)p(S_2/B) = \frac{p(S_2 \cap B)}{p(B)} = \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{23}{60}} = \frac{5}{23}$$

$$3)p(J/S_2) = \frac{p(S_2 \cap J)}{p(S_2)} = \frac{\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{2}$$

EXERCICE 3

	Mr G	Mr Y	Mr K	Total
A	26	26	13	65
$\bar{A}$	8	16.5	10.5	35
total	34	42.5	23.5	100

40% de 65% donne

$$\frac{40 \cdot 65}{10000} = 0.26 = 26\%$$

20% de 65% donne

$$\frac{20 \cdot 65}{10000} = 0.13 = 13\% \text{ puis on}$$

termine le remplissage du tableau

$$a)p(A/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{26}{42.5} = 0.611$$

$$p(B/A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} = \frac{26}{65} = 0.4$$

$$b)p(\bar{A}/B) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{16.5}{42.5} = 0.388$$

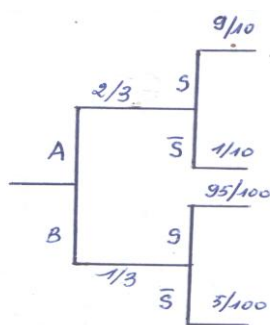
« l'élève n'est pas du lycée sachant
qu'il suit les cours de Mr Y »

$$c)p(\bar{A} / \text{Mr K}) = \frac{10.5}{100} ;$$

$$p(\bar{A} / \text{Mr G}) = \frac{8}{100} \text{ d'où}$$

$$p(\bar{A} / \text{Mr K}) + p(\bar{A} / \text{Mr G}) = \frac{18.5}{100} = 0.185$$

EXERCICE 4



a) $p(A) = \frac{2}{3}$, $p(B) = \frac{1}{3}$

b) $p(S/A) = \frac{p(S \cap A)}{p(A)} = \frac{9}{10}$;

$p(S/B) = \frac{p(S \cap B)}{p(B)} = \frac{95}{100}$

$p(S) = p(S \cap A) + p(S \cap B) = \frac{18}{30} + \frac{95}{300}$

$p(S) = \frac{11}{12}$

2) $n = 7$; $p = \frac{11}{12}$; $q = \frac{1}{12}$

a) $p_1 = C_7^{\frac{11}{12}} \left(\frac{11}{12}\right)^7 \left(\frac{1}{12}\right)^0$

b) $p_2 = C_7^{\frac{11}{12}} \left(\frac{11}{12}\right)^6 \left(\frac{1}{12}\right)^1$

c) $p = 1 - p_1 - p_2$

**VARIABLES
ALEATOIRES**

EXERCICE 1

5 AS(A) ; 3 ROIS(R) ; 2

DAMES(D)

1) $\text{Card}(\Omega) = C_{10}^2 = 45$

a) Soit 2R , soit 2D , soit 2A

$p(A) = \frac{C_5^2 + C_3^2 + C_2^2}{C_{10}^2} = \frac{14}{45}$

b) Soit 1A et 1R , soit 1A et 1D , soit 1R et 1D

$p(B) =$

$\frac{C_5^1 \cdot C_3^1 + C_5^1 \cdot C_2^1 + C_3^1 \cdot C_2^1}{C_{10}^2} = \frac{31}{45}$

b) « au moins une Dame(D) »

c) 1D : $C_2^1 \times C_8^1$ ou 2D : C_2^2

$p(c) = \frac{C_2^1 \cdot C_8^1 + C_2^2}{C_{10}^2} = \frac{17}{45}$

2)a) A (5 pts) , R (2 pts) et D (-1 pt)

2A : 10 pts ; $p = \frac{C_5^2}{C_{10}^2} = \frac{10}{45}$

2R: 4 pts ; $p = \frac{C_3^2}{C_{10}^2} = \frac{3}{45}$

2D: - 2 pts ; $p = \frac{C_2^2}{C_{10}^2} = \frac{1}{45}$

1R et 1A : 7 pts ; $p = \frac{C_5^1 \cdot C_3^1}{C_{10}^2} = \frac{15}{45}$

1A et 1D : 4 pts ; $p = \frac{C_5^1 \cdot C_3^1}{C_{10}^2} = \frac{10}{45}$

1R et 1D : 1 pt ; $p = \frac{C_3^1 \cdot C_2^1}{C_{10}^2} = \frac{6}{45}$

loi de probabilité

$X = x_i$	-2	1	4	7	10	Σp
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{45}$	$\frac{6}{45}$	$\frac{13}{45}$	$\frac{15}{45}$	$\frac{10}{45}$	1

b) $p(X \geq 7) = p(X=7) + p(X=10) = \frac{5}{9}$

$$d) E(X) = \sum x_i p_i = \frac{261}{45}$$

$$V(X) = \sum x_i^2 p_i - (E(X))^2 = 9.76$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 3.12$$

EXERCICE 2

Produit A : $p(50) = 0.8$; $p(51) = 0.2$

Produit B : $p(50) = 0.6$; $p(51) = 0.4$

1) Si on effectue les mélanges suivants

(A) + (B)

$50 + 50 = 100$ donc $X = 100$

$50 + 51 = 101$ donc $X = 101$

$51 + 50 = 101$ donc $X = 101$

$51 + 51 = 102$ donc $X = 102$

$X = \{ 100 ; 101 ; 102 \}$

$p(X = 100) = 0.8 \times 0.6 = 0.48$

$p(X = 101) = 0.8 \times 0.4 + 0.2 \times 0.6 = 0.44$

$p(X = 102) = 0.2 \times 0.4 = 0.08$

$X=x_i$	100	101	102	$\sum p$
$P(X=x_i)$	0.48	0.44	0.08	1

2) $p(X \leq 101) = p(X = 100) +$

$p(X = 101) = 0.92$

3) $E(X) = \sum x_i p_i = 100.6$

4) $F: \mathbb{R} \rightarrow [0;1]$

$x \rightarrow p(X < x)$

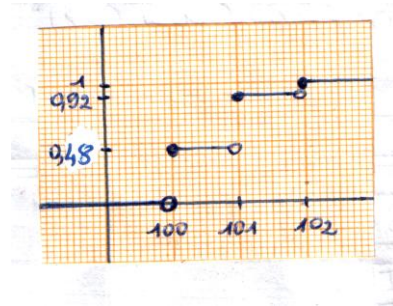
$x \in]-\infty; 100]$ $F(X) = 0$

$x \in]100; 101]$ $F(X) = 0.48$

$x \in]101; 102]$ $F(X) = 0.92$

$x \in]102; +\infty]$ $F(X) = 1$

Représentation graphique



EXERCICE 3

Sur le dé $p(N) = \frac{2}{3}$ et $p(B) = \frac{1}{3}$,

c'est un schéma de Bernoulli avec $k = 5$

N	N	N	N	B
---	---	---	---	---

$$p = \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 = \frac{16}{243} = 0.065$$

$$2) p = C^1_5 \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4$$

$$p = 5 \cdot 0.065 = 0.325$$

car on peut avoir les différents cas suivants

B				
	B			
		B		
			B	
				B

3) A: « au moins une fois » son contraire ; $(\bar{A})$: « aucune fois »

$$p(\bar{A}) = C^0_5 \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^5 = \frac{32}{243} \text{ d'où}$$

$$p(A) = 1 - p(\bar{A}) = \frac{211}{243}$$

4) aucune face noire donc $X = 0$

$$p_0 = C^0_5 \left(\frac{2}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 = \frac{1}{243}$$

une(1) face noire donc $X = 1$

$$p_1 = \frac{10}{243}$$

deux faces noires donc $X = 2$

$$p_2 = \frac{40}{243}$$

trois faces noires donc $X = 3$

$$p_3 = \frac{80}{243}$$

quatre faces noires donc $X = 4$

$$p_4 = \frac{80}{243}$$

cinq faces noires donc $X = 5$

$$p_5 = \frac{32}{243}$$

$X=x_i$	0	1	2	3	4	5
p	$\frac{1}{243}$	$\frac{10}{243}$	$\frac{40}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{80}{243}$	$\frac{32}{243}$

$$5) E(X) = \sum x_i p_i = \frac{810}{243} = 3.33$$

$$V(X) = \sum x_i^2 p_i - (E(X))^2 = 1.17$$

EXERCICE 4

$$S = X_1 + X_2 + X_3$$

$$a) E(S) = E(X_1) + E(X_2) + E(X_3)$$

$$E(X_1) = 1 \cdot k + (-1)q + 0 \cdot (1-k-q) = k-q$$

$$E(X_2) = k-q ; E(X_3) = k-q \text{ d'où}$$

$$E(S) = 3(k-q)$$

$$V(S) = V(X_1) + V(X_2) + V(X_3)$$

$$V(X_1) = 1^2 \cdot k + (-1)^2 \cdot q + 0^2 \cdot (1-k-q)$$

$$V(X_1) = k+q$$

$$V(X_2) = k+q ; V(X_3) = k+q \text{ d'où}$$

$$V(S) = 3(k+q)$$

b)

$$X_1 + X_2 + X_3$$

1	1	1	$S=3$
1	1	0	$S=2$
1	0	0	$S=1$
0	0	0	$S=0$
-1	0	0	$S=-1$
-1	-1	0	$S=-2$
-1	-1	-1	$S=-3$

on a donc $S = \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$

$$c) p(S>0) = p(S=1) + p(S=2) + p(S=3)$$

$$\underline{S=1}$$

1	1	-1
---	---	----

$$3 \text{ fois ; } p(S=1) = 3k^2q + 3k(1-k-q)^2$$

$$\underline{S=2}$$

1	1	0
---	---	---

$$3 \text{ fois ; } p(S=2) = 3k^2(1-k-q)$$

$$\underline{S=3}$$

1	1	1
---	---	---

$$1 \text{ fois ; } p(S=3) = k^3, \text{ on a donc}$$

$$p(S>0) = 3k^2q + 3k(1-k-q)^2 +$$

$$3k^2(1-k-q) + k^3$$

$$p(S=0)$$

S=0

0	0	0
---	---	---

1 fois

-1	1	0
----	---	---

6 fois

$$p(S=0) = (1-k-q)^3 + 6kq(1-k-q)$$

$$p(S<0) = p(S=-1) + p(S=-2) + p(S=-3)$$

S=-1

-1	0	0
----	---	---

3 fois

-1	-1	1
----	----	---

3 fois

$$p(S=-1) = 3k(1-k-q)^2 + 3kq^2$$

S=-2

-1	0	-1
----	---	----

$$3 \text{ fois ; } p(S=-2) = 3q^2(1-k-q)$$

S=-3

-1	-1	-1
----	----	----

$$1 \text{ fois ; } p(S=-3) = q^3 : \text{ on a donc}$$

$$p(S<0) = 3q^2k + 3q(1-k-q)^2 +$$

$$3q^2(1-k-q) + q^3$$

$$2) \text{ AXEL : } \{V = 0.4 ; D = 0.5 ; N = 0.1\}$$

$$\text{AMAEL : } \{V = 0.5 ; D = 0.4 ; N = 0.1\}$$

a) X vainqueur c- à - d $p(S>0)$

$$p(X) = 3(0.4)^2 0.5 + 3(0.4)^2 0.1 + (0.4)^3 + 3(0.4)(0.1)^2 = 0.364$$

b) M vainqueur c- à - d $p(S>0)$

$$p(M) = 3(0.5)^2 0.4 + 3(0.4)(0.1)^2 + (0.5)^3 + 3(0.5)^2 0.1 = 0.515$$

c) Match nul $p(S=0)$

$$p(N) = 6(0.5)(0.4)(0.1) + (0.1)^3 = 0.121$$

$$\text{ou encore } p(N) = 1 - (p(X) + p(M))$$

EXERCICE 5

$$1) a) p(O) = \frac{1}{2} ; p(N) = \frac{1}{2}$$

$$X = \{0, 1; 2; 3; 4; 5\}$$

$$p(X=0) = C_5^0 \left(\frac{1}{2}\right)^0 \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

$$p(X=1) = C_5^1 \left(\frac{1}{2}\right)^1 \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

.....

$$p(X=5) = C_5^5 \left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(\frac{1}{2}\right)^0$$

$$E(X) = np = \frac{5}{2} \text{ et } V(X) = npq = \frac{5}{4}$$

$$b) p(X \geq 4) = p(X=4) + p(X=5) = \frac{6}{32}$$

2)a) réponse Exacte (E) $\Rightarrow$ 4 points

réponse Fausse (F) $\Rightarrow$ - 2 points

- 0 E et 5 F $\Rightarrow$ - 10 pts $\Rightarrow$ 0 pt
- 1 E et 4 F $\Rightarrow$ - 4 pts $\Rightarrow$ 0 pt
- 2 E et 3 F $\Rightarrow$ 2 pts
- 3 E et 2 F $\Rightarrow$ 8 pts
- 4 E et 1 F $\Rightarrow$ 14 pts
- 5 E et 0 F $\Rightarrow$ 20 pts

b)

k	0	2	8	14	20
P(Y=k)	$\frac{3}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$

$$E(Y) = \frac{190}{32} = \frac{95}{16} \text{ et } V(Y) = \frac{7455}{256}$$

NOMBRES COMPLEXES

EXERCICE 1

$$1) A_1 = 4 + i + \frac{6}{4-i}$$

$$= 4 + i + \frac{6(4+i)}{4^2 + 1}$$

$$A_1 = \frac{92}{17} + \frac{23i}{17}$$

$$A_2 = \frac{(2+3i)(2-3i)}{5+3i} = \frac{65}{34} - \frac{39i}{34}$$

$$A_3 = \frac{1+\cos(\varphi)+i\sin(\varphi)}{1+\cos(\varphi)-i\sin(\varphi)}$$

=

$$\frac{[1+\cos(\varphi)+i\sin(\varphi)][1+\cos(\varphi)-i\sin(\varphi)]}{[(1+\cos(\varphi))^2 + \sin^2(\varphi)]}$$

=

$$\frac{1+2\cos(\varphi)+\cos^2(\varphi)}{2+2\cos(\varphi)} + \frac{2i\sin(\varphi)[1+\cos(\varphi)]}{2+2\cos(\varphi)}$$

$$A_4 = 2(\cos \frac{2\pi}{3} + i\sin \frac{2\pi}{3}) \text{ on sait}$$

que

$$\cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} \text{ et } \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$A_4 = 2(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$3) T_1 = \frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2} ;$$

$$|T_1| = \sqrt{(\frac{\sqrt{6}}{2})^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = \sqrt{2}$$

$$\cos \theta = \frac{\frac{\sqrt{6}}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \sin \theta = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$$

d'où $\theta = \frac{\pi}{6}$ par conséquent

$$T_1 = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{6} + i\sin \frac{\pi}{6})$$

$$T_2 = 1 - i \quad |T_2| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\cos \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et}$$

$$\sin \alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

D'où $\alpha = -\frac{\pi}{4}$ par conséquent

$$T_2 = \sqrt{2}[\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4})]$$

$$\frac{T_1}{T_2} : \left| \frac{T_1}{T_2} \right| = \frac{|T_1|}{|T_2|} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 1$$

$$\text{Arg} \left(\frac{T_1}{T_2} \right) = \text{Arg}(T_1) - \text{Arg}(T_2) =$$

$$\frac{\pi}{6} - (-\frac{\pi}{4}) = \frac{5\pi}{12}$$

$$\frac{T_1}{T_2} = \cos \frac{5\pi}{12} + i\sin \frac{5\pi}{12}$$

$$T_2^5 = [\sqrt{2}(\cos(-\frac{\pi}{4}) + i\sin(-\frac{\pi}{4}))]^5$$

$$= (\sqrt{2})^5 [\cos(-\frac{5\pi}{4}) + i\sin(-\frac{5\pi}{4})]$$

la mesure principale de -

$$\frac{5\pi}{4} \text{ est } \frac{3\pi}{4}$$

$$T_2^5 = 4 \sqrt{2}(\cos \frac{3\pi}{4} + i\sin \frac{3\pi}{4})$$

$$T_4 = 1 + \sqrt{3} + i(1 - \sqrt{3}) ; |T_4| = 2\sqrt{2}$$

$$\cos \theta = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \text{ et } \sin \theta = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \text{ d'où}$$

$$\theta = -0.26 \text{ rad}$$

$$T_4 = 2\sqrt{2}[\cos(-0.26) + i\sin(-0.26)]$$

$$3) E_1 = Z = \sqrt{3} - i ; |E_1| = \sqrt{3+1} = 2$$

$$\cos = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \sin = -\frac{1}{2} \text{ d'où } \theta = -\frac{\pi}{6}$$

$$E_1 = 2[\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6})]$$

$$E_2 = 2i - Z = -\sqrt{3} + 3i ; |E_2| = 2\sqrt{3}$$

$$\cos \alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = -\frac{1}{2} \text{ et } \sin \alpha =$$

$$\frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ d'où } \alpha = \frac{3\pi}{4} \text{ par conséquent}$$

$$E_2 = 2\sqrt{3} e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

$$E_3 = Z^3 = (2 e^{-i\frac{\pi}{6}})^3 = 8 e^{-i\frac{\pi}{2}}$$

$$E_4 = \frac{T_1}{T_2} = e^{i\frac{5\pi}{12}}$$

$$E_5 = A_4 = 2 e^{i\frac{2\pi}{3}}$$

EXERCICE 2

$$(E_1) : (1 + 4i)Z + 3 + 2i\sqrt{2} = 0$$

$$Z = \frac{-3-2i\sqrt{2}}{1+4i} ; Z = \frac{-3-8\sqrt{2}+i(12-2\sqrt{2})}{17}$$

$$(E_2) : (3 + i)Z + (1 - 2i)Z + 2 - 3i = 0$$

$$\text{posons } Z = x + iy ; x \in \mathbb{R} \text{ et}$$

$$y \in \mathbb{R}$$

$$(3 + i)(x + iy) + (1 - 2i)(x - iy) + 2 - 3i = 0$$

$$\begin{cases} 4x - 3y + 2 = 0 \\ x - 2y - 3 = 0 \end{cases} \text{ on a } x = 1 \text{ et } y = 2$$

$$\text{d'où } S = \{1 + 2i\}$$

$$(E_3) : |Z - 2 - i| = |Z - 1|$$

1ere méthode

$$\text{soit } A(2+i) \text{ et } B(1)$$

$$|Z - Z_A| = |Z - Z_B| \Leftrightarrow AM = BM \text{ d'où } M$$

$$\text{appartient à la médiatrice de } [AB]$$

2eme méthode

$$(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = (x - 1)^2 + y^2$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 2x + 1 + y^2$$

$$x + 3y - 2 = 0 \text{ est la solution de } (E_3)$$

$$(E_4) : |3 + i - Z| = 2$$

1ere méthode

$$\text{soit } A(3 + i) \quad |Z_A - Z| = 2 \Leftrightarrow MA = 2$$

$$M \in C(A ; 2)$$

2eme méthode

$$(3 + x)^2 + (1 - y)^2 = 4 \Leftrightarrow M \in C(A ;$$

$$2) A(3 ; 1)$$

$$(E_5) : Z^2 = -3 + 4i ; \text{ posons}$$

$$\delta = x + iy \text{ avec}$$

$$\delta^2 = Z^2 \text{ ce qui conduit à}$$

$$x^2 - y^2 + 2ixy = -3 + 4i$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = -3 & (e_1) \\ x^2 + y^2 = 5 & (e_2) \\ xy = 2 \end{cases}$$

$$(e_1) + (e_2) \Rightarrow 2x^2 = 2 \Rightarrow x = 1 \text{ ou } x = -1$$

$$(e_2) - (e_1) \Rightarrow 2y^2 = 8 \Rightarrow y = 2 \text{ ou } y = -2$$

comme $xy = 2$ et 2 est positif on a

$$S = \{Z_1 = 1 + 2i ; Z_2 = -1 - 2i\}$$

$$(E_6) : Z^2 + 6Z - 6 = 0$$

$$\Delta = 60 + 32i ; \text{ posons } \delta^2 = \Delta \text{ avec}$$

$$\delta = a + ib$$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 60 & (e_1) \ a = 8 \text{ ou } a = -8 \\ a^2 + b^2 = 68 & (e_2) \Rightarrow b = 2 \text{ ou } b = -2 \\ ab = 16 \end{cases}$$

ab positif on a

$$\delta_1 = -8 - 2i \text{ et } \delta_2 = 8 + 2i, \text{ en}$$

prenant δ_2

$$Z_1 = \frac{-6+8+2i}{2} = 1+i$$

$$Z_2 = \frac{-6-(8+2i)}{2} = -7-i$$

$$S = \{Z_1 = 1 + i ; Z_2 = -7-i\}$$

$$(E_7) : (1 + i) Z^2 - (7 + 13i) Z + 2 + 60i = 0$$

$$\Delta = 112 - 66i \Rightarrow \delta_1 = 11 - 3i \ \delta_2 = -11 + 3i$$

$$Z_1 = 7 - 2i ; Z_2 = 3 + 5i$$

$$S = \{Z_1 = 7 - 2i ; Z_2 = 3 + 5i\}$$

$$(E_8) : P(Z) = Z^3 - (4 + 2i)Z^2 +$$

$$(6 + 8i)Z - (5 + i)$$

$$1) \text{ Posons } Z = a ; a \in \mathbb{R} / \{0\}$$

$$a^3 - (2i+4)a^2 + (3i+8)a - (5+i) = 0$$

$$a^3 - 2ia^2 - 4a^2 + 3ia + 8a - 5 - i = 0$$

$$a^3 - 4a^2 + 8a - 5 = 0 \quad (e_1)$$

$$-2a^2 + 3a - 1 = 0 \quad (e_2)$$

$$(e_2) \Rightarrow \Delta = 1, \text{ on a } a_1 = 1 \text{ et } a_2 = \frac{1}{2}$$

$$a_1 = 1 \text{ vérifie } (e_1) \text{ donc } Z = 1$$

$$P(Z) = (Z - 1)Q(Z)$$

$$\begin{array}{c|c} P(Z) & Z - 1 \\ \hline & Q(Z) \end{array}$$

$$Q(Z) = Z^2 + (-2i - 3)Z + 5 + i$$

$$2) (1 + 4i)^2 = -15 + 8i$$

$$3) Z^2 + (-2i - 3)Z + 5 + i ;$$

$$\Delta = -15 + 8i$$

$$\text{Posons } \delta^2 = \Delta \text{ d'après 2)}$$

$$\delta = 1 + 4i$$

$$Z_1 = 2 + 3i ; Z_2 = 1 - i$$

$$S = \{Z_1 = 2 + 3i ; Z_2 = 1 - i\}$$

$$(E_9) : Z = \frac{z+1}{z-2i}, \text{ posons } z = x + iy$$

$$1) Z =$$

$$\frac{x+1+iy}{x+i(y-2)} = \frac{[x+1+iy][x-i(y-2)]}{[x+i(y-2)][x-i(y-2)]}$$

$$Z =$$

$$\frac{x(x+1) + y(y-2)}{x^2 + (y-2)^2} + i \frac{2x - y + 2}{x^2 + (y-2)^2}$$

$$Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \text{Im}(Z) = 0 \Rightarrow 2x - y + 2 = 0$$

$$2) Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \text{Re}(Z) = 0 \Rightarrow$$

$$x^2 + x + y^2 - 2y = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + \frac{1}{2})^2 + (y-1)^2 = \frac{5}{4} \text{ d'où la}$$

solution est

$$C(A ; \frac{\sqrt{5}}{2}) \text{ avec } A(-\frac{1}{2} ; 1)$$

EXERCICE 3

$$(E) : Z^3 = 4 \sqrt{2} (1 + i) , \text{ soit}$$

$$Z = \rho(\cos\alpha + i\sin\alpha) \text{ et } z = 4 \sqrt{2} (1 + i)$$

$$|z|=8 \text{ soit } z = r (\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ d'où}$$

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

$$z = 8 (\cos \frac{\pi}{4} + i\sin \frac{\pi}{4})$$

$$Z^3 = z \Leftrightarrow \rho^3 = 8 \text{ et } 3\alpha = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$$

$$\begin{cases} \rho = 2 \\ \alpha = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} \text{ avec } k \in \{0; 1; 2\} \end{cases}$$

$$k=0, \alpha = \frac{\pi}{12} \Rightarrow$$

$$Z_0 = 2(\cos \frac{\pi}{12} + i\sin \frac{\pi}{12})$$

$$k=1, \alpha = \frac{\pi}{12} + \frac{2\pi}{3} = \frac{3\pi}{4} \Rightarrow$$

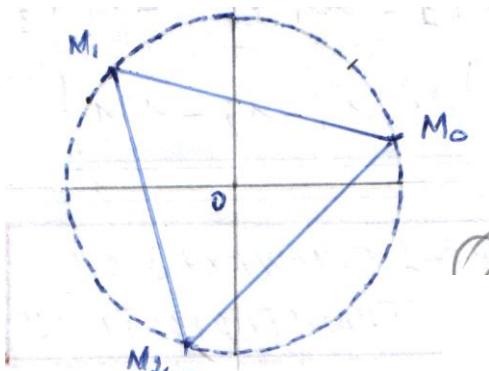
$$Z_1 = 2(\cos \frac{3\pi}{4} + i\sin \frac{3\pi}{4})$$

$$k=2, \alpha = \frac{\pi}{12} + \frac{4\pi}{3} = -\frac{7\pi}{12} \Rightarrow$$

$$Z_2 = 2 [\cos(-\frac{7\pi}{12}) + i\sin(-\frac{7\pi}{12})]$$

$$M_0(Z_0), M_1(Z_1) \text{ et } M_2(Z_2)$$

Représentation graphique



$$(E_2) : z = 2 - 2i \sqrt{3}$$

$$1) |z|=4, \theta = -\frac{\pi}{3}$$

$$z = 4[\cos(-\frac{\pi}{3}) + i\sin(-\frac{\pi}{3})]$$

$$Z^4 = r^4(\cos\alpha + i\sin\alpha)^4$$

$$Z^4 = z \Leftrightarrow r^4 = 4 \text{ et}$$

$$4\alpha = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k \text{ avec}$$

$$k \in \{0; 1; 2; 3\}$$

$$k=0, \Rightarrow$$

$$Z_0 = \sqrt{2} [\cos(-\frac{\pi}{12}) + i\sin(-\frac{\pi}{12})]$$

$$k=1, \Rightarrow$$

$$Z_1 = \sqrt{2} [\cos(\frac{5\pi}{12}) + i\sin(\frac{5\pi}{12})]$$

$$k=2, \Rightarrow$$

$$Z_2 = \sqrt{2} [\cos(\frac{11\pi}{12}) + i\sin(\frac{11\pi}{12})]$$

$$k=3, \Rightarrow$$

$$Z_3 = \sqrt{2} [\cos(-\frac{7\pi}{12}) + i\sin(-\frac{7\pi}{12})]$$

$$2) X^2 = z, \text{ posons } X^2 = \delta^2 \text{ avec}$$

$$\delta = a + ib$$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = 2 \\ a^2 + b^2 = 4 \\ ab = -\sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{3} \text{ ou } b = -\sqrt{3} \\ b = 1 \text{ ou } b = -1 \end{cases}$$

$$X_1 = \sqrt{3} - i \text{ et } X_2 = -\sqrt{3} + i$$

$$Z^4 = z \Leftrightarrow Z^4 = X^2 \text{ or}$$

$$X_1^2 = \sqrt{3} - i \quad X^2 = -\sqrt{3} + i$$

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = \sqrt{3} \\ \alpha^2 + \beta^2 = 2 \\ \alpha\beta = -\frac{1}{2} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = -\sqrt{3} \\ \alpha^2 + \beta^2 = 2 \\ \alpha\beta = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{3}+2}{2}} \text{ ou } \alpha = -\sqrt{\frac{\sqrt{3}+2}{2}} \text{ et}$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} \text{ ou } \alpha = -\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}$$

on a donc

$$\beta = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} \text{ ou } \beta = -\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} \text{ et}$$

$$\beta = \sqrt{\frac{\sqrt{3}+2}{2}} \text{ ou } \beta = -\sqrt{\frac{\sqrt{3}+2}{2}}$$

$$\alpha\beta = -\frac{1}{2} \text{ d'où } Z_1 \text{ et } Z_2$$

$$\alpha\beta = -\frac{1}{2} \text{ d'où } Z_3 \text{ et } Z_4$$

$$Z_1 = \sqrt{\frac{\sqrt{3}+2}{2}} - i \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}$$

$$Z_2 = -\sqrt{\frac{\sqrt{3}+2}{2}} + i \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}$$

$$Z_3 = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} - i \sqrt{\frac{\sqrt{3}+2}{2}}$$

$$Z_4 = -\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} + i \sqrt{\frac{\sqrt{3}+2}{2}}$$

$$3) \frac{11\pi}{12} \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi \right] \text{ où } \cos < 0 \text{ et } \sin > 0 \text{ et}$$

$$\left| \cos \frac{11\pi}{12} \right| > \left| \sin \frac{11\pi}{12} \right| \Rightarrow$$

$$\sin \frac{11\pi}{12} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}$$

$$\cos \frac{11\pi}{12} = -\sqrt{\frac{\sqrt{3}+2}{2}}$$

EXERCICE 4

1)a) Triangle isocèle en C ,

$$|Z_{AC}| = |Z_{BC}|$$

$|Z_C - Z_A| = 3$; $|Z_C - Z_B| = 3 \Rightarrow$ ABC est triangle isocèle en C

Triangle rectangle en C ,

$$\frac{Z_{AC}}{Z_{BC}} \in i \mathbb{R}^*$$

$$\frac{Z_{AC}}{Z_{BC}} = \frac{-3}{-3i} = -i \in i \mathbb{R}^* \Rightarrow$$

(AC) $\perp$ (BC)

$\Rightarrow$ ABC est triangle rectangle isocèle en C

b) A , B et J sont alignés $\Leftrightarrow$

$$\frac{Z_{AB}}{Z_{AJ}} \in \mathbb{R}^*$$

$$\frac{Z_B - Z_A}{Z_J - Z_A} = \frac{-3i + 3i}{-2 + 2i} = \frac{3}{2} \in \mathbb{R}^* \text{ donc A ,}$$

B et sont alignés

2)a) Cocyclicité : Utilisation du Quotient

$$\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A} \cdot \frac{Z_B - Z_D}{Z_C - Z_D} \in \mathbb{R}^*$$

$$\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A} \cdot \frac{Z_B - Z_D}{Z_C - Z_D} = 2 \in \mathbb{R}^* \text{ donc les}$$

points

A , B , C et D sont cocycliques

b) Cocyclicité : Utilisation de l'Argument

$$\text{Arg} \left(\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A} \right) = \text{Arg} \left(\frac{Z_B - Z_D}{Z_C - Z_D} \right) + 2k\pi$$

$$\text{Arg} \left(\frac{Z_B - Z_A}{Z_C - Z_A} \right) = \text{Arg} \left(\frac{-3 + 3i}{-3} \right) = -\frac{\pi}{4}$$

$$\text{Arg}\left(\frac{Z_B - Z_D}{Z_C - Z_D}\right) = \text{Arg}\left(\frac{-3}{-3-3i}\right) = -\frac{\pi}{4}$$

les points A , B ,C et D sont alignés

EXERCICE 5

$$P(Z) = aZ^3 + bZ^2 + cZ ; a, b \text{ et } c$$

sont des nombres complexes

$$P(1) = -3 + 4i \Leftrightarrow a + b + c = -3 + 4i$$

$$P(i) = -4 - 3i \Leftrightarrow -a - b + ci = -4 - 3i$$

$$P(-i) = 10 + 5i \Leftrightarrow a - b - ci = 10 + 5i$$

Résolution du système

$$\begin{cases} a + b + c = -3 + 4i & a = -2 + 6i \\ -a - b + ci = -4 - 3i & \Rightarrow b = 2 - i \\ a - b - ci = 10 + 5i & c = -3 - i \end{cases}$$

$$2) P(Z) = 0 \Leftrightarrow Z = 0 ; aZ^2 + bZ + c = 0$$

$$(2 - i)Z^2 + (-3 - i)Z - 2 + 6i = 0$$

$$\Delta = -50i, \delta = 5 - 5i \text{ ou } \delta = -5 - 5i$$

$$Z_1 = -1 + i \text{ et } Z_2 = 4$$

$$S = \{ 0 ; -1 + i ; 4 \}$$

EXERCICE 6

$$1) Z^4 = 1 \text{ (même méthode que}$$

l'EXERCICE 3)

$$Z_0 = \cos 0 + i \sin 0 = 1$$

$$Z_1 = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i$$

$$Z_2 = \cos \pi + i \sin \pi = -1$$

$$Z_3 = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -i$$

$$\begin{array}{r|l} 2) Z^4 - 1 & Z - 1 \\ \hline & Z^3 + Z^2 + Z + 1 \end{array}$$

$$3) P(Z) = Z^4 + (1-2i)Z^3 + (1-2i)Z^2 + (1-2i)Z - 2i$$

$$a) P(2i) = 0$$

$$b) P(Z) = (Z - 2i)(Z^3 + Z^2 + Z + 1)$$

avec la division Euclidienne ou les coefficient indéterminés

$$c) P(Z) = 0 \Leftrightarrow Z = 2i \text{ ou}$$

$$Z^3 + Z^2 + Z + 1 = 0$$

d'après 1) on a les autres solutions

$$S = \{ 2i ; 1 ; -1 ; i ; -i \}$$

EXERCICE 7

$$f(z) = \frac{iz}{z+i}$$

$$1) f(z_0) = 1 + 2i \Leftrightarrow \frac{iz_0}{z_0 + i} = 1 + 2i$$

$$z_0 = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$$

$$2) f(z) - i = \frac{iz}{z+i} - i$$

$$f(z) - i = \frac{1}{z+i}$$

$$|f(z) - i| = \left| \frac{1}{z+i} \right| = \frac{1}{r}$$

un argument de $f(z) - i$

$$\arg(f(z) - i) = \arg\left(\frac{1}{z+i}\right)$$

$$= -\arg(z+i) = -\alpha$$

$$\arg(f(z) - i) = \frac{1}{r}(\cos \alpha - i \sin \alpha)$$

$$3) a) |f(z) - i| = \sqrt{2} \Leftrightarrow \left| \frac{1}{z+i} \right| = \sqrt{2}$$

$|z+i| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (C) est le cercle de

centre A(-i) et de rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$f(z) - i = \frac{1}{z+i} = \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow$$

$$\text{Arg}(z+i) = -\frac{\pi}{4}$$

(D) est la demi-droite d'origine A incluse dans la parallèle à la seconde bissectrice privée du point A.

$$\text{b) } |z_{AB}| = \left| \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i + i \right| = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ donc } B \in (C)$$

$$\text{Arg}(z_{AB}) = -\frac{\pi}{4} \Rightarrow B \in (D)$$

$$\text{Ou } f(z) - i = 1+i \Rightarrow f(z_0) - i = 1+i \\ \Rightarrow f(z_0) - i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \Rightarrow B \in (D) \text{ et } (C)$$

TRANSFORMATIONS DU PLAN

EXERCICE 1

$$h(\Omega; -2) \Omega(2+i), Z' = \alpha Z + \beta$$

$$\alpha = -2, \beta = w(1-\alpha) = (2+i)(1+2) = 3(2+i)$$

EXERCICE 2

$$r(\Omega; -\frac{\pi}{3}); \Omega(4+i), Z' = e^{i\theta} Z + \beta$$

$$\beta = w(1 - e^{i\theta}) = (4+i)[1 - (\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})]$$

$$Z' = (\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2})Z + 2 - \frac{\sqrt{3}}{2} + i(2\sqrt{3} + \frac{1}{2})$$

EXERCICE 3

$$T_u; \vec{u} = \overrightarrow{BA}; Z_{BA} = -2+i;$$

$$Z' = Z + \beta$$

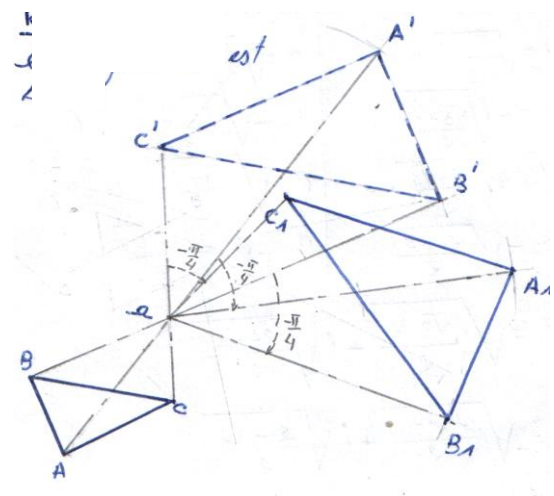
$$\beta = Z_{BA}, Z' = Z - 2 + i$$

EXERCICE 4

$$S = h \circ r = r \circ h, \theta = -\frac{\pi}{4}; k = -2$$

Représentation graphique

L'image de ABC est A'B'C'



EXERCICE 5

$F(z) = (1+i)z - i$, le rapport

$$k = |1+i| = \sqrt{2}$$

L'angle orienté $\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et

$$\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}, \text{ soit } \Omega(w)$$

$$\text{le centre on a } w = \frac{\theta}{1-a} = \frac{-i}{1-(1+i)} = 1,$$

$$\Omega(1)$$

EXERCICE 6

$$Z' = aZ + b, a \in \mathbb{C}^*, b \in \mathbb{C};$$

$$S = r \circ h$$

$$h(M) = M_1 \Rightarrow Z_1 = \alpha Z \Rightarrow Z_1 = 3Z$$

$$r(M_1) = M' \Rightarrow Z' = e^{i\theta} Z_1 + \beta \\ = e^{i\theta} (3Z) + \beta$$

$$\beta = w(1 - e^{i\theta}) = (2-3i)[1-3(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)]$$

$$Z' = 3(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i)Z + \beta$$

EXERCICE 7

$$1) Z' = aZ + b, S(O) = O \text{ et}$$

$$S(A) = B$$

$$|a| = \frac{OB}{OA} = \frac{Z_{OB}}{Z_{OA}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\arg(a) = \text{Mes}(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) \text{ or}$$

$$(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) = (\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OB}) - (\overrightarrow{OI}; \overrightarrow{OA}) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4}$$

S est la similitude directe de centre

O, de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et

d'angle orienté $-\frac{3\pi}{4}$

$$2) Z' = aZ + b, S(O) = O \text{ et } S(A) = B$$

$\Leftrightarrow$

$$Z' = (\frac{-1-i}{2})Z \text{ car } b = 0 \text{ ou encore}$$

$$S(O) = O \Leftrightarrow 0 = a \cdot 0 + b$$

$$S(A) = B \Leftrightarrow -i = a(1+i) \Rightarrow a = \frac{-i}{1+i}$$

$$a = (\frac{-1-i}{2})$$

$$D' \text{ où } Z' = (\frac{-1-i}{2})Z$$

EXERCICE 8

$$(E) : Z^2 + (2 + 3i)Z - 2(1 - 2i) = 0$$

$$1) \Delta = 3 - 4i; \delta^2 = \Delta; \delta = a + ib$$

$$\delta = 2 - i \text{ ou } \delta = -2 + i$$

$$Z_1 = \frac{-2-3i+2-i}{2} = -2i$$

$$Z_2 = \frac{-2-3i-2+i}{2} = -2-i$$

$$2) S(B) = A \text{ et } S(A) = O, A \neq O \text{ et } B$$

$\neq A$ donc il existe une seule

similitude directe

$$S(B) = A \Leftrightarrow (-2-i)a + b = -2i$$

$$S(A) = O \Leftrightarrow -2ia + b = 0$$

$$D' \text{ où } a = \frac{-2+4i}{5} \text{ et } b = \frac{-8+4i}{5}$$

$$Z' = \frac{-2+4i}{5} Z + \frac{-8+4i}{5}$$

$$|a| = \left| \frac{-2+4i}{5} \right| = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos \theta = -\frac{\sqrt{5}}{5} \text{ et } \sin \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5};$$

$$\theta \cong 116^\circ = \frac{29\pi}{45}$$

le centre $\Omega(w)$ avec

$$w = \frac{\beta}{1-a} = \frac{-88-36i}{113}$$

EXERCICE 9

$$\begin{cases} x' = x - y + 2 \\ y' = x + y - 3 \end{cases}$$

$$x' + iy' = x - y + 2 + i(x + y - 3)$$

$$x' + iy' = x - iy + i(x + iy) + 2 - 3i$$

$$z' = (1 + i)z + 2 - 3i$$

C'est une similitude directe

Son rapport : $\alpha = |1 + i| = \sqrt{2}$

Son angle :

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}$$

Son centre : $\Omega (\omega = \frac{2-3i}{1-(1+i)} = 3+2i)$

EXERCICE 10

1) $z' = (1-i)z - 2$: c'est une similitude directe

Son rapport : $\alpha = |1-i| = \sqrt{2}$

Son angle : $\theta = -\frac{\pi}{4}$

Son centre : $\Omega (\omega = 2i)$

2) $S(O) = O'$ avec $O' (-2)$

$S(A) = A'$ avec $A' (2+2i)$

3) $x' + iy' = x + iy - i(x + iy) - 2$

$$\begin{cases} x' = x + y - 2 \\ y' = -x + y \end{cases}$$

4) (C) : $x^2 + y^2 - 2x - 6y + 8 = 0$

Caractéristiques de (C) : Soit A(a ;

b) le centre de ce cercle et de rayon r , on a :

$$\begin{aligned} -2ax &= -2x \Rightarrow a = 1; -2by = -6y \Rightarrow \\ b &= 3 \end{aligned}$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2 - c} \Rightarrow r = \sqrt{2} \text{ avec } c = 8$$

c'est donc C (A ; $\sqrt{2}$)

L'image de (C) par S est (C')

$S(A) = A'$ et $r' = \alpha r \Rightarrow r' = 2$

donc C' (A' ; 2)

5) $\begin{cases} x' = x + y - 2 \\ y' = -x + y \end{cases}$ et (D) : $x + 2y + 3 = 0$

(D) : $x = -2y - 3$

$$\begin{cases} x' = -2y - 3 + y - 2 \\ y' = -(-2y - 3) + y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x' = -y - 5 \\ y' = 3y + 3 \end{cases}$$

$$y' = 3(-x' - 5) + 3 \Rightarrow 3x' - y' - 12 = 0$$

donc (D') : $3x - y - 12 = 0$

6) Soit S^{-1} la bijection réciproque de S

Son rapport : $\alpha' = \frac{1}{\alpha}$

Son angle : $\theta' = -\theta$

Son centre : Ω

LIMITES

EXERCICE 1

*f(x) = $\sqrt{x^2 - x + 1} - 3x$ en $+\infty$

$$f(x) = \sqrt{x^2(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})} - 3x$$

$$= |x| \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 3x, \text{ comme } x > 0$$

en $+\infty$

f(x) = $x(\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 3)$ donc

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

*g(x) = $\frac{\sqrt{x^2 + 2x} - 2}{x}$ en $-\infty$

$$g(x) = |x| \cdot \frac{\sqrt{1 - \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}}}{x} \text{ en } -\infty \quad x < 0$$

$$g(x) = -\sqrt{1 + \frac{2}{x} - \frac{2}{x^2}}; \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -1$$

*h(x) = $\frac{\sqrt{x^2 + x} - 2}{(x+1) + \sqrt{x^2 + x} - 2}$ en $+\infty$

$$h(x) = \frac{|x| \sqrt{x^2 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}}{x+1 + |x| \sqrt{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}}$$

en $+\infty$ $x > 0$, on déduit que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \frac{1}{2}$$

EXERCICE 2

$$*f(x) = \sqrt{x^2 + x} - x \text{ en } +\infty$$

$$f(x) = \frac{(\sqrt{x^2 + x})^2 - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + 1} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2}$$

$$*g(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 2}{x^2 - 1} \text{ en } -1$$

$$g(x) =$$

$$\frac{(\sqrt{x^2 + 3})^2 - 2}{(x^2 - 1)\sqrt{x^2 + 3} + 2} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 3} + 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = \frac{1}{4}$$

$$*h(x) = \frac{\sqrt{x+4} - \sqrt{3x+4}}{\sqrt{x+1} - 1} \text{ en } 0$$

$$h(x) = \frac{(\sqrt{x+4})^2 - (\sqrt{3x+4})^2}{(\sqrt{x+1} - 1)(\sqrt{x+4} + \sqrt{3x+4})}$$

$$h(x) = \frac{-2x(\sqrt{x+1} + 1)}{[(\sqrt{x+1})^2 - 1][\sqrt{x+4} + \sqrt{3x+4}]}$$

$$h(x) = \frac{-2x(\sqrt{x+1} + 1)}{x(\sqrt{x+4} + \sqrt{3x+4})} \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = -1$$

EXERCICE 3

$$*f(x) = \frac{\sqrt{x+5} - 3}{x - 4} \text{ en } 4$$

$$\text{posons } l(x) = \sqrt{x+5}, l(4) = 3$$

$$f(x) = \frac{l(x) - l(4)}{x - 4}, D_l = [-5; +\infty[$$

$$l \text{ est dérivable en } 4 \text{ et } l'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+5}}$$

$$\text{en } 4, \lim_{x \rightarrow 4} f(x) = l'(4) = \frac{1}{6}$$

$$*h(x) = \frac{2\cos x - 1}{3x - \pi} \text{ en } \frac{\pi}{3}$$

$$h(x) = \frac{2(\cos x - \frac{1}{2})}{3(x - \frac{\pi}{3})} = \frac{2}{3} \frac{\cos x - \frac{1}{2}}{x - \frac{\pi}{3}}$$

$$\text{posons } k(x) = \cos x, k(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$$

$$D_k = \mathbb{R}$$

$$h(x) = \frac{k(x) - k(\frac{\pi}{3})}{x - \frac{\pi}{3}} \cdot \frac{2}{3}, k \text{ est dérivable}$$

$$\text{en } \frac{\pi}{3} \text{ et}$$

$$k'(x) = -\sin x \text{ donc en } \frac{\pi}{3},$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} h(x) = \frac{2}{3} k'(\frac{\pi}{3}) = \frac{-\sqrt{3}}{3}$$

EXERCICE 4

$$*f(x) = \frac{\sin x}{x^2} \text{ en } 0$$

$$\text{On sait que en } 0 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$f(x) = \frac{1}{x} \frac{\sin x}{x} \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$$

$$*g(x) = \frac{\tan x}{x} \text{ en } 0$$

$$g(x) = \frac{\sin x}{x} \frac{1}{\cos x} \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1$$

$$*h(x) = \frac{\sin 5x}{3x} \text{ en } 0$$

$$h(x) = \frac{\sin 5x}{5x} \frac{5x}{3x}$$

pour $\frac{\sin 5x}{5x}$ on pose $X = 5x$ d'où

$$\frac{\sin 5x}{5x} = \frac{\sin X}{X} ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{3x} = \frac{5}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \frac{5}{3}$$

EXERCICE 5

$$*f(x) = \frac{-3\sin 2x}{x} \text{ en } +\infty \text{ et en } -\infty$$

$$-1 \leq \sin 2x \leq 1, -3 \leq 3\sin 2x \leq 3$$

$$\text{en } +\infty, \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow -\frac{3}{x} \leq \frac{-3\sin 2x}{x} \leq \frac{3}{x},$$

$$\text{en } -\infty \text{ et } +\infty ; \lim \left(-\frac{3}{x}\right) = \lim \frac{3}{x} =$$

$$0 \text{ donc en } +\infty \text{ et } -\infty \lim f(x) = 0$$

$$*h(x) = \frac{x}{3-\cos x} \text{ en } +\infty \text{ et en } -\infty$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1 ; 2 \leq 3 - \cos x \leq 4$$

$$\frac{1}{4} \leq \frac{1}{3-\cos x} \leq \frac{1}{2}$$

en $+\infty$, $x > 0$

$$\frac{x}{4} \leq \frac{x}{3-\cos x} \leq \frac{x}{2} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{4} = +\infty \text{ or } h(x) > \frac{x}{4}$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$$

en $-\infty$, $x < 0$

$$\frac{x}{2} \leq \frac{x}{3-\cos x} \leq \frac{x}{4}, \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{4} = -\infty \text{ or } h(x) < \frac{x}{4}$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$$

$$*g(x) = \frac{E(x)}{x^2} \text{ en } +\infty$$

$$E(x) = n \text{ pour } n \leq x < n+1$$

$$\frac{E(x)}{x^2} \leq \frac{x}{x^2} < \frac{E(x)+1}{x^2} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\frac{E(x)-1}{x^2} \leq \frac{x-1}{x^2} < \frac{E(x)}{x^2} ;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x^2} = 0 \text{ en } +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{E(x)}{x^2} > 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{E(x)}{x^2} \leq 0 \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{E(x)}{x^2} = 0$$

$$*h(x) = \frac{\sin 5x}{3x} \text{ en } 0$$

$$h(x) = \frac{\sin 5x}{5x} \frac{5x}{3x}$$

pour $\frac{\sin 5x}{5x}$ on pose $X = 5x$ d'où

$$\frac{\sin 5x}{5x} = \frac{\sin X}{X} ; \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{3x} = \frac{5}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = \frac{5}{3}$$

EXERCICE 5

$$*f(x) = \frac{-3\sin 2x}{x} \text{ en } +\infty \text{ et en } -\infty$$

$$-1 \leq \sin 2x \leq 1, -3 \leq 3\sin 2x \leq 3$$

$$\text{en } +\infty, \frac{1}{x} > 0 \Rightarrow -\frac{3}{x} \leq \frac{-3\sin 2x}{x} \leq \frac{3}{x} ;$$

$$\text{en } -\infty \text{ et } +\infty \lim \left(-\frac{3}{x}\right) = \lim \frac{3}{x} = 0$$

$$\text{donc en } +\infty \text{ et } -\infty \lim f(x) = 0$$

$$*h(x) = \frac{x}{3-\cos x} \text{ en } +\infty \text{ et en } -\infty$$

$$-1 \leq \cos x \leq 1 ; 2 \leq 3 - \cos x \leq 4$$

$$\frac{1}{4} \leq \frac{1}{3-\cos x} \leq \frac{1}{2}$$

en $+\infty$, $x > 0$

$$\frac{x}{4} \leq \frac{x}{3-\cos x} \leq \frac{x}{2}; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{4} = +\infty \text{ or } h(x) > \frac{x}{4}$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = +\infty$$

en $-\infty$, $x < 0$

$$\frac{x}{2} \leq \frac{x}{3-\cos x} \leq \frac{x}{4}, \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{4} = -\infty \text{ or } h(x) < \frac{x}{4}$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = -\infty$$

$$*g(x) = \frac{E(x)}{x} \text{ en } +\infty$$

$$E(x) = n \text{ pour } n \leq x < n+1$$

$$\frac{E(x)}{x^2} \leq \frac{x}{x^2} < \frac{E(x)+1}{x^2}; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\frac{E(x)-1}{x^2} \leq \frac{x-1}{x^2} < \frac{E(x)}{x^2};$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x^2} = 0 \text{ en } +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{E(x)}{x^2} > 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{E(x)}{x^2} \leq 0 \text{ donc}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{E(x)}{x^2} = 0$$

CONTINUITE EN UN POINT

EXERCICE 1

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} 3 - \frac{x}{3} = \frac{7}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2}$$

$$\frac{3x^2 - 5x - 2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(x+\frac{1}{3})(x-2)}{x-2} = 3(x+\frac{1}{3}) = 7$$

$$7 \neq \frac{7}{3} \text{ donc } f \text{ n'est pas prolongeable}$$

par continuité en 2

EXERCICE 2

$$\text{Si } x > 0, |x| = x \Rightarrow]0; +\infty[$$

$$f(x) = \frac{3+x}{1+x}$$

$$\text{Si } x < 0, |x| = -x \Rightarrow]-\infty; 0[$$

$$f(x) = \frac{3+x}{1-x} \text{ et } f(0) = 3$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 3$$

puis $f(0) = 3$ donc f est continue en 0

EXERCICE 3

$$f(x) = \frac{\sqrt{3x^2+1}-2}{x-1}, D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

$$f(x) = \frac{(\sqrt{3x^2+1})^2 - 4}{(x-1)(\sqrt{3x^2+1}+2)} = \frac{3(x+1)}{\sqrt{3x^2+1}+2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \frac{3}{2} \neq f(1) = 1 \text{ donc } f \text{ n'est}$$

pas continue en 1, mais est continue à gauche et à droite de 1.

EXERCICE 4

$$g(x) = -2x - 4x + 3, D_g = \mathbb{R}$$

$$1) g'(x) = -(6x^2 + 4), g'(x) < 0 \Rightarrow$$

g est continue et strictement décroissante
sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$	-	
g	$+\infty$	$-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty \text{ et } g(1) = -3, g \text{ est}$$

continue strictement décroissante
sur $\mathbb{R}$ or $] -\infty; 1[\subset \mathbb{R}$ donc g
est continue et strictement

décroissante sur $] -\infty; 1[$ et réalise
une bijection de $] -\infty; 1[$ sur
 $] 3; +\infty[$

$$2)] 0; 1[\subset] -\infty; 1[\text{ et } g(0) = 3$$

$$\text{Et } 3 > 0, g(1) = -3$$

$$g(0) \cdot g(1) < 0 \Rightarrow \text{il existe un réel}$$

$$\text{unique } \alpha \in] 0; 1[\text{ tel que } g(\alpha) = 0$$

2) Méthode de Balayage

x	0	0.1		0.4	0.5	0.6
$g(x)$	+	+	+	+	+	-

$$0.5 < \alpha < 0.6$$

Méthode de Dichotomie

x	0	1	0.5	0.75	0.625	0.5625	0.59375
$g(x)$	+	-	+	-	-	+	-

$$0.5 < \alpha < 0.6$$

ETUDE DE FONCTION

EXERCICE 1

$$f(x) = \frac{|x+2|}{x} - 1; x \neq 0$$

$$1) D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} =] -\infty; 0[$$

$$] 0; +\infty[$$

$$4) \text{ Si } x+2 \geq 0, |x+2| = x+2$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x+2}{x} - 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Si } x+2 \leq 0, |x+2| = -x-2 \Rightarrow \\ f(x) = \frac{-x-2}{x} - 1 \\ f(-2) = -1 \end{array} \right.$$

$$3) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2 \Rightarrow y = -2 \text{ est}$$

asymptote horizontale en $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ est}$$

asymptote horizontale en $+\infty$

*Etude du signe de x

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	+	0	-

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x+2| = 2 > 0 \text{ et } \forall x \in$$

$$] -\infty; 0[\quad x < 0 \text{ donc en } 0 \text{ à}$$

$$\text{gauche } \lim f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x+2| = 2 > 0 \text{ et}$$

$\forall x \in]0; +\infty[\quad x > 0$ donc en 0 à

droite $\lim f(x) = +\infty$

la droite d'équation $x = 0$ est

asymptote verticale

4) Dérivabilité en -2

*à gauche

$$T = \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} = \frac{\frac{-x-2}{x} - 1 + 1}{x+2} = \frac{-x-2}{x(x+2)}$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} T = \frac{1}{2}$$

*à droite

$$T = \frac{f(x) - f(-2)}{x - (-2)} = \frac{\frac{x+2}{x} - 1 + 1}{x+2} = \frac{x+2}{x(x+2)}$$

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
x(x+2)	+	0	-	0	+

$\forall x \in]-2; 0[\quad x(x+2) < 0$,

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x+2| = 2, \quad \lim_{x \rightarrow -2^+} T = -\frac{1}{2}$$

la fonction n'est donc pas

dérivable en -2 car les limites

sont différentes (Cf) admet deux

demis tangentes en -2

5) Dérivées

$\forall x \in]-\infty; -2[\quad f'(x) = \frac{2}{x^2}$ et

$f'(x) > 0$

$\forall x \in]-2; +\infty[\setminus \{0\}$

$$f'(x) = -\frac{2}{x^2}, \text{ et } f'(x) < 0$$

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
f'	+	0	-	0	+

$\forall x \in]-\infty; -2[\quad f'(x) > 0$ donc f

est strictement croissante sur

$]-\infty; -2[$

$\forall x \in]-2; 0[\cup]0; +\infty[$

$f'(x) < 0$ donc f est strictement

décroissante sur $]-2; 0[$ et $]0; +\infty[$

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
f'	+	0	-	0	+
f	$\begin{array}{c} \nearrow 0 \\ -2 \end{array}$			$-\infty$	$\begin{array}{c} +\infty \\ \searrow 0 \end{array}$

6) Positions relatives

$$(D_1) : y = -2, \quad f(x) + 2 = \frac{x-2}{x}$$

sur $]-\infty; -2[$

$$(D_2) : y = 0, \quad f(x) - 0 = \frac{2}{x}$$

sur $]-2; +\infty[$

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$	
f(x)-y	+	0	-	0	+

$\forall x \in]-\infty; -2[\quad f(x) - y > 0$ donc

(Cf) est au dessus de (D₁)

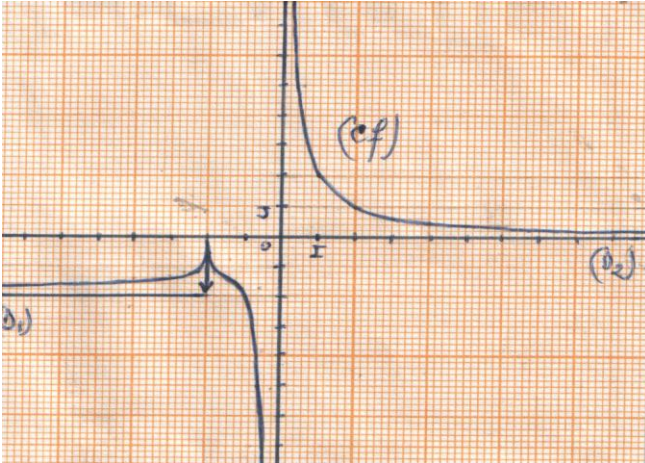
$\forall x \in]-2; 0[\quad f(x) - y < 0$ donc

(Cf) est en dessous de (D₂)

$\forall x \in]0; +\infty[f(x) - y > 0$ donc

(Cf) est au dessus de (D₂)

7) Représentation graphique



EXERCICE 2

PARTIE A

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3}$$

1) $x^2 + 2x - 3$, $\Delta = 4$, $x_1 = -3$ et

$x_2 = 1$

$$x^2 + 2x - 3 = (x + 3)(x - 1)$$

x	$-\infty$	-3	-1	$+\infty$	
x^2+2x-3	+	0	-	0	+

$$Df =]-\infty; -3[\cup]1; +\infty[$$

2) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} |x| \sqrt{1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}}$$

$= +\infty$ car en $-\infty$ $|x| = -x$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \sqrt{1 + \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2}} = +\infty$$

3) Dérivabilité en -3

$$T =$$

$$\frac{f(x) - f(-3)}{x + 3} = \frac{(\sqrt{x^2 + 2x - 3})^2}{(x + 3)\sqrt{x^2 + 2x - 3}} = \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}$$

$$\sqrt{x^2 + 2x - 3} > 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -3} x - 1 = -4$$

$$-4 < 0 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -3} T = -\infty \Rightarrow f$$

n'est pas dérivable en -3 et (Cf)

admet une tangente verticale

Dérivabilité en 1

$$T = \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{x + 3}{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}$$

$$\sqrt{x^2 + 2x - 3} > 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 1} x + 3 = 4 \text{ et}$$

$$4 > 0; \text{ en } 1 \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 1} T = +\infty \Rightarrow$$

f n'est pas dérivable en 1 et (Cf)

admet une tangente verticale

4) Pour tout $x \in Df$

$$f'(x) = \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 + 2x - 3}}$$

le dénominateur est > 0 sur Df ,

$$x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1 \Rightarrow \forall x \in$$

$$]-\infty; -3] f'(x) < 0 \text{ et } f \text{ est}$$

strictement décroissante sur

$$]-\infty; -3]$$

$$\forall x \in [1; +\infty[f'(x) > 0 \text{ et } f \text{ est}$$

strictement

croissante sur $[1 ; +\infty[$

x	$-\infty$	-3	-1	$+\infty$
f'	-		+	
f	$+\infty$ ↘ 0		0 ↗ $+\infty$	

6)(Δ) $x = -1$ est axe de symétrie ?

$$-1-x \in Df \Leftrightarrow -1-x \leq -3 \text{ ou } -1-x \geq 1$$

$$\text{on a } -1+x \geq 1 \text{ ou } -1+x \leq -3$$

$$f(-1-x) =$$

$$= \sqrt{(-1-x)^2 + 2(-1-x) - 3} = \sqrt{x^2 - 4}$$

$$f(-1+x) =$$

$$\sqrt{(-1+x)^2 + 2(-1+x) - 3} = \sqrt{x^2 - 4}$$

$$f(-1-x) = f(-1+x)$$

donc (Δ) $x = -1$ est axe de

symétrie

$$7) (\Delta_1) y = x+1 ; (\Delta_2) y = -x-1$$

$$*f(x) - y =$$

$$\sqrt{x^2 + 2x - 3} - (x+1) = \frac{-4}{\sqrt{x^2 + 2x - 3} + (x+1)}$$

(utiliser l'expression conjuguée)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = 0 \Rightarrow (\Delta_1) \text{ est}$$

asymptote oblique en $+\infty$

$$*f(x) - y =$$

$$\sqrt{x^2 + 2x - 3} - (-x-1) = \frac{-4}{\sqrt{x^2 + 2x - 3} - (-x-1)}$$

(utiliser l'expression conjuguée)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - y] = 0 \Rightarrow (\Delta_2) \text{ est}$$

asymptote oblique en $-\infty$

$$8) f(x) - (x+1) = \frac{-4}{\sqrt{x^2 + 2x - 3} + (x+1)}$$

$-4 < 0$ et le dénominateur est > 0

donc sur $[1 ; +\infty[$ (Cf) est en

dessous de (Δ_1)

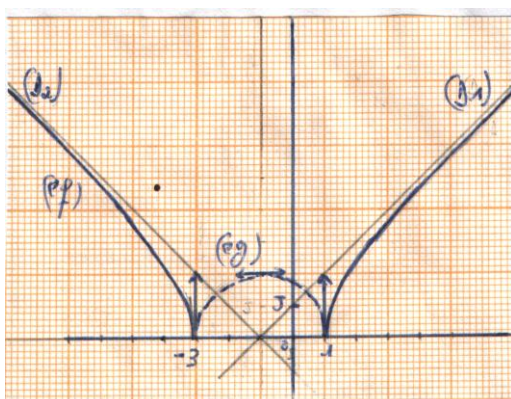
$$*f(x) - (-x-1) = \frac{-4}{\sqrt{x^2 + 2x - 3} + (-x-1)}$$

$-4 < 0$ et le dénominateur est > 0

donc sur $] -\infty ; -3]$ (Cf) est au

dessus de (Δ_2).

Représentation graphique



PARTIE B

$$g(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3} \quad Dg = \mathbb{R}$$

$$\forall x \in]-\infty ; -3] \cup [1 ; +\infty[$$

$$g(x) = f(x)$$

$$\forall x \in]-3 ; 1[\quad g(x) = \sqrt{-x^2 - 2x + 3}$$

en -3 et en 1 $\lim g(x) = 0$

$$\forall x \in]-3 ; 1[,$$

$$g'(x) = \frac{-x-1}{\sqrt{-x^2 - 2x + 3}}$$

$$\forall x \in]-3 ; 1[, \sqrt{-x^2 - 2x + 3} > 0 ,$$

$$-x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -1$$

$$\forall x \in]-3 ; -1[, g'(x) > 0 \text{ et } g \text{ est}$$

strictement croissante sur

$$]-3 ; -1[\text{ et } \forall x \in]-1 ; 1[$$

$$g'(x) < 0 \text{ et } g \text{ est strictement}$$

décroissante sur $] -1 ; 1[$

x	-3	-1	1
f'	+	0	-
f	0	2	0

Représentation graphique

Voir la représentation graphique

précédente ((Cg) est la réunion de la figure en pointillé et (Cf))

EXERCICE 3

$$f(x) = \sin^2 x - \sin x + 2$$

$$1) D_f = \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} 2) f(x+2\pi) &= \sin^2(x+2\pi) - \sin(x+2\pi) + 2 \\ &= \sin^2 x - \sin x + 2 = f(x) \end{aligned}$$

$f(x+2\pi) = f(x) \Rightarrow f$ est périodique de période 2π

$$2) (\Delta) : x = \frac{\pi}{2}$$

$$f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$\sin^2\left(x + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + 2$$

$$f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos^2 x - \cos x + 2$$

$$f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) =$$

$$\sin^2\left(x - \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 2$$

$$f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos^2 x - \cos x + 2$$

$$f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \text{ donc } (\Delta) :$$

$$x = \frac{\pi}{2} \text{ est axe de symétrie}$$

4) f est périodique de période 2π

$$\text{et } x = \frac{\pi}{2}$$

est axe de symétrie , l'intervalle d'étude sera d'amplitude π

$$5) D_E = \left[-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right]$$

$$a) f'(x) = \cos x (2\sin x - 1)$$

$$b) f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = 0$$

$$\text{ou } 2\sin x - 1 = 0$$

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{2} \Rightarrow$$

$$x = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow$$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

on travaille sur $[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}]$ on

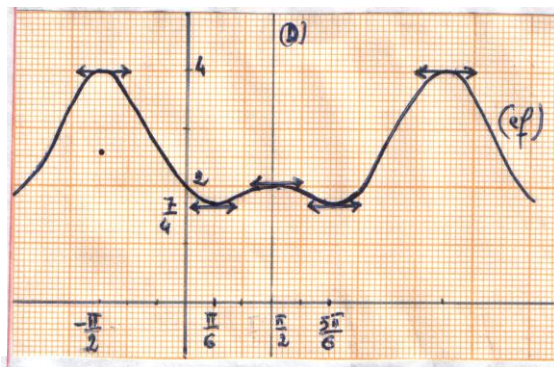
prendra $x = \frac{\pi}{2}$

$$x = -\frac{\pi}{2} \text{ et } x = \frac{\pi}{6}$$

x	$-\pi/2$	$\pi/6$	$\pi/2$
f'	-	0	+

x	$-\pi/2$	$\pi/6$	$\pi/2$
f'	-	0	+
f	4	$7/4$	2

Représentation graphique



FONCTION LN

EXERCICE 1

$$(E_1) : \ln(x+3) + \ln(x+2) = \ln(x+11)$$

$$D_V = \{x+3 > 0 \text{ et } x+2 > 0 \text{ et } x+11 > 0\}$$

$$D_V =]-2; +\infty[$$

$$(E_1) : \ln[(x+3)(x+2)] = \ln(x+11)$$

$$(x+3)(x+2) = x+11$$

$$x^2 + 4x - 5 = 0, \sqrt{\Delta} = 56 \Rightarrow$$

$$x_1 = 1 \in D_V, x_2 = -5 \notin D_V \Rightarrow$$

$$S = \{1\}$$

$$(E_2) : \ln[(x+3)(x+2)] = \ln(x+11)$$

$$D_V = \{(x+2)(x+3) > 0 \text{ et } x+11 > 0\}$$

$$(x+2)(x+3) > 0 \text{ et } x > 0 \text{ on a donc}$$

x	$-\infty$	-3	1	$+\infty$	
(x+2)(x+3)	+	0	-	0	+

$$D_V =]-11; -3[\cup]-2; +\infty[$$

même résolution que (E_1) ;

$$x_1 = 1 \in D_V; x_2 = -5 \in D_V \Rightarrow$$

$$S = \{1; -5\}$$

$$(E_3) : \ln|x+3| + \ln|x+2| = \ln|x+11|$$

$$D_V = \{x+3 \neq 0, x+2 \neq 0 \text{ et } x+11 \neq 0\}$$

$$D_V = \mathbb{R} \setminus \{-11; -3; -2\}$$

$$\ln[|x+2||x+3|] = \ln|x+11| \Leftrightarrow$$

$$|x+2||x+3| = |x+11|$$

$$|(x+2)(x+3)| = |x+11|$$

$$\begin{cases} (x+2)(x+3) = x+11 & (1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x+2)(x+3) = -x-11 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow x_1 = 1 \text{ et } x_2 = -5$$

(2) $\Rightarrow \Delta < 0 \Rightarrow$ pas de solution
dans IR

$$S_{IR} = \{-5; 1\}$$

$$(I_1) : \ln(3x-4) > \ln(2x+6)$$

$$D_V = \{3x-4 > 0 \text{ et } 2x+6 > 0\}$$

$$, D_V =] \frac{4}{3}; +\infty[$$

$$3x-4 > 2x+6 \Rightarrow x > 10, x \in]10; +\infty[$$

$$\text{d'où } S_{IR} =]10; +\infty[$$

$$(I_2) : \ln|2x+6| \leq \ln 10; D_V = \mathbb{R} \setminus \{-3\}$$

$$|2x+6| \leq 10 \Leftrightarrow -10 \leq 2x+6 \leq 10$$

$\Rightarrow$

$$x \in [-8; 2] \text{ et } S_{IR} = [-8; 2] \cap D_V$$

donc

$$S_{IR} = [-8; 2] \setminus \{-3\}$$

$$(I_3) : \ln^2(x+2) \leq 4 \ln^2 2;$$

$$D_V =]-2; +\infty[$$

$$[\ln(x+2)]^2 - (2\ln 2)^2 \leq 0$$

$$[\ln(x+2) - \ln 4][\ln(x+2) + \ln 4] \leq 0$$

$$x+2 = 4 \Rightarrow x = 2$$

$$x+2 = \frac{1}{4} \Rightarrow x = -\frac{7}{4}$$

x	-2	-7/4	2	$+\infty$		
I ₃		+	0	-	0	+

$$S_{IR} = [-7/4; 2]$$

$$S_1: \begin{cases} \ln x + \ln y = \ln 3 - 4\ln 2 \\ \ln(x+y) = 0 \end{cases}$$

$$D_V = \{x > 0; y > 0 \text{ et } x+y > 0\}$$

$$D_V = \mathbb{R}^*_+ \cdot \mathbb{R}^*_+$$

$$\begin{cases} \ln(xy) = \ln \frac{3}{16} \\ \ln(x+y) = \ln 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy = \frac{3}{16} \\ x+y = 1 \end{cases}$$

$$y = 1-x$$

$$x(1-x) = \frac{3}{16} \Rightarrow 16x^2 - 16x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{\Delta} = 8$$

$$x_1 = \frac{1}{4}; x_2 = \frac{3}{4}$$

$$\text{Si } x = \frac{1}{4} \Rightarrow y = \frac{3}{4} \Rightarrow (\frac{1}{4}; \frac{3}{4})$$

$$\text{Si } x = \frac{3}{4} \Rightarrow y = \frac{1}{4} \Rightarrow (\frac{3}{4}; \frac{1}{4})$$

Et on a $x > -y$ d'où

$$S_{IR \times IR} = \{(\frac{1}{4}; \frac{3}{4}); (\frac{3}{4}; \frac{1}{4})\}$$

$$(S_2): \begin{cases} 3x + 2y = 23 \\ \ln x - \ln y = \ln 7 \end{cases}$$

$$D_V = \mathbb{R}^*_+ \cdot \mathbb{R}^*_+ \text{ et } \begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ \ln(\frac{x}{y}) = \ln 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 2y = 23 \\ \frac{x}{y} = 7 \end{cases}$$

$$x = 7 \text{ et } y = 1$$

$$S_{IR \times IR} = \{(7; 1)\}$$

EXERCICE 2

$$P(X) = -X^2 + X + 12; P(X) = 0$$

$\Leftrightarrow$

$$1) X_1 = -3; X_2 = 4;$$

$$P(X) = -(X+3)(X-4)$$

$$2) -(\ln x)^2 + \ln x + 12 = 0;$$

$$D_V = \mathbb{R}^*_+$$

posons $X = \ln x$ d'après 1) on a

$$X = -3 \text{ et } X = 4 \Rightarrow$$

$$\ln x = -3 \text{ et } \ln x = 4$$

$$\ln x = -3 \ln e \text{ et } \ln x = 4 \ln e$$

$$\ln x = \ln e^{-3} \text{ et } \ln x = \ln e^4 \Rightarrow x = e^{-3}$$

$$\text{et } x = e^4$$

$$S_{\mathbb{R}} = \{ e^{-3} ; e^4 \}$$

$$3) -(\ln x)^2 + \ln x + 12 \geq 0$$

$$- (\ln x + 3)(\ln x - 4) \geq 0$$

x	0	e^{-3}	e^4	$+\infty$	
I	-	0	+	0	-

$$S_{\mathbb{R}} = [e^{-3} ; e^4]$$

EXERCICE 3

PARTIE A

$$f(x) = 1 - \frac{x^3}{3} - 2 \ln x$$

$$1) Df =] 0 ; +\infty [$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty \left(\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \text{ car}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{3} = +\infty$$

la droite $x = 0$ est asymptote

verticale

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \Rightarrow (Cf) \text{ admet une}$$

branche parabolique de direction

(OJ) à $+\infty$

$$2) f'(x) = -\frac{3x^2}{3} - 2 \cdot \frac{1}{x} = \frac{-x^3 - 2}{x}$$

$$\forall x \in Df, f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-x^3 - 2}{x} \geq 0$$

on a $x > 0$ sur $]0 ; +\infty[$ et

$$-(x^3 + 2) < 0 \text{ donc}$$

$$f'(x) < 0 \Rightarrow f \text{ est strictement}$$

décroissante sur Df

x	0	$+\infty$
f'	-	
f	$+\infty$	$-\infty$

f est continue et strictement

décroissante sur $\mathbb{R}^*_+$ donc réalise

une bijection ,

$]1; \sqrt{2}[\subset]0; +\infty[$ donc f est continue et

strictement décroissante sur $]1; \sqrt{2}[$ et

$$f(1) = \frac{2}{3}, f(\sqrt{2}) = -1.3, f(1) \text{ et}$$

$f(\sqrt{2})$ sont de signes contraires d'où

il existe un unique réel $\alpha \in]1; \sqrt{2}[$

tel que $f(\alpha) = 0$

4)

x	1.1	1.2	1.3
f(x)	+	+	-

$$1.2 < \alpha < 1.3$$

PARTIE B

$$g(x) = \frac{\ln x}{x^2} - \frac{x}{3}$$

1)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty \text{ car } \left[\frac{1}{x^2} (\ln x - \frac{x^2}{3}) \right]$$

la droite $x = 0$ est asymptote

verticale $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$

$$2) y = -\frac{x}{3}; \lim [f(x) - y] = 0 \text{ car}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \frac{\ln x}{x} = 0 \Rightarrow \text{la droite (D) :}$$

$y = -\frac{x}{3}$ est asymptote oblique à (Cf) à $+\infty$

$$3) \forall x \in]0; 1[\quad x^2 > 0, 0 < x < 1 \Rightarrow$$

$$\ln x < \ln 1$$

$$\ln x < 0 \text{ d'où } \frac{\ln x}{x^2} < 0, \text{ (Cf) est sous}$$

de (D)

$$\forall x \in]1; +\infty[\quad x^2 > 0, x > 1 \Rightarrow \ln x > \ln 1$$

$$\ln x > 0 \text{ d'où } \frac{\ln x}{x^2} > 0 \text{ et (Cf) est sur}$$

de (D)

$$4) \forall x \in Df, g'(x) = \frac{f(x)}{x^3} \text{ car}$$

$$g'(x) = \frac{1 - 2 \ln x}{x^3} - \frac{1}{3} = \frac{1 - 2 \ln x - \frac{x^3}{3}}{x^3}$$

$x^3 > 0$ sur Dg , le signe de $g'(x)$ est celui de $f(x)$ d'où $\forall x \in]0; \alpha[$

$f(x) > 0$ car f décroît de $+\infty$ à 0 ,

$g'(x) > 0$ donc g y est strictement croissante

$\forall x \in]\alpha; +\infty[\quad f(x) < 0$ car f décroît de 0 à $-\infty$, $g'(x) < 0$ donc g y est strictement décroissante

x	0	α	$+\infty$
g'	+	0	-
g	$-\infty$	$g(\alpha)$	$-\infty$

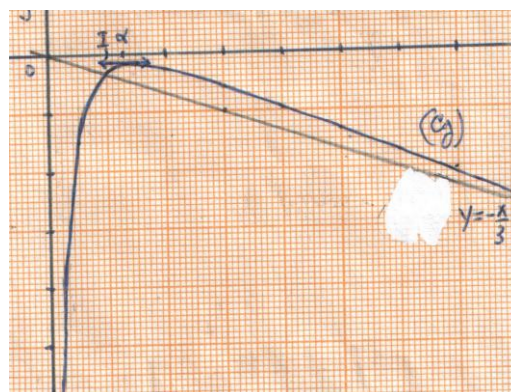
$$g(\alpha) = \frac{\ln \alpha}{\alpha^2} - \frac{\alpha}{3} \text{ or } f(\alpha) = 0 \Rightarrow$$

5)

$$1 - \frac{\alpha^3}{3} - 2 \ln \alpha = 0 \Rightarrow$$

$$\ln \alpha = \frac{1}{2} - \frac{\alpha^3}{6} \Rightarrow g(\alpha) = \frac{1 - \alpha^3}{2\alpha^2}$$

Représentation graphique



$$7) \int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 1 \leq x \leq 2 \\ -\frac{x}{3} \leq y \leq g(x) \end{cases}$$

posons $u = \ln x$, $u' = \frac{1}{x}$

$$v' = \frac{1}{x^2} , v = -\frac{1}{x}$$

$$\int_1^2 \frac{\ln x}{x^2} dx = \frac{1}{2}(1 - \ln 2)$$

8)(Δ) est la tangente à (Cg) , (Δ) :

$$y = ax + b$$

$$a = g'(x) = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1-2\ln x}{x^3} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{3}$$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{1-2\ln x}{x^3} = 0 \Rightarrow x = e^{(1/2)} \text{ et}$$

$$g(e^{(1/2)}) = \frac{1}{2e} - \frac{\sqrt{e}}{3} \text{ d'où}$$

$$A(e^{(1/2)}; \frac{1}{2e} - \frac{\sqrt{e}}{3})$$

FONCTION EXPONENTIELLE ET FONCTION PUISSANCE

EXERCICE 1

$$(E_1) : e^{x^2} = e^{3x-2} \Leftrightarrow x^2 = 3x - 2$$

$$x^2 - 3x + 2 = 0 , \sqrt{\Delta} = 1 ; x_1 = 1 , x_2 = 2$$

$$S_{\mathbb{R}} = \{ 1 ; 2 \}$$

$$(E_2) : e^{2x} - 3e^x - 4 = 0 , \text{ posons } X = e^x$$

on a

$$X^2 - 3X - 4 = 0 ; \sqrt{\Delta} = 5 , X_1 = -1 ,$$

$$X_2 = 4$$

$$e^x = -1 \text{ impossible car } e^x > 0$$

$$e^x = 4 \Rightarrow x = \ln 4 \text{ d'où } S_{\mathbb{R}} = \{ \ln 4 \}$$

$$(E_3) : e^{3x+1} + e^{x+1} = 2e \Leftrightarrow e^{3x} + e^x = 2$$

$$\text{posons } X = e^x \Rightarrow X^3 + X - 2 = 0 ,$$

$X = 1$ est solution évidente puis

$$1)(X^2 + X + 2) = 0$$

$$X^2 + X - 2 = 0 \text{ n'a pas de zéro d'où}$$

$$e^x = 1 \Rightarrow x = 0 ; \text{ on a donc } S_{\mathbb{R}} = \{ 0 \}$$

$$(E_4) : e^x - 6 = -8e^{-x} \Leftrightarrow e^{2x} + 6e^x + 8 = 0$$

(on multiplie le tout par e^x) . En

$$\text{posant } X = e^x \Rightarrow$$

$$X^2 - 6X + 8 = 0 \text{ on a donc}$$

$$S_{\mathbb{R}} = \{ \ln 2 ; \ln 4 \}$$

$$(E_5) : 2^x = 3^{x+1} \Leftrightarrow \ln 2^x = \ln 3^{x+1} \Leftrightarrow$$

$$x \ln 2 = (x+1) \ln 3 \Rightarrow x = \frac{\ln 3}{\ln \frac{2}{3}} ;$$

$$S_{\mathbb{R}} = \left\{ \frac{\ln 3}{\ln \frac{2}{3}} \right\}$$

$$(E_6) : 3^{x+2} + 9^{x+1} = 1458 \Leftrightarrow$$

$$e^{(x+2)\ln 3} + e^{(x+1)\ln 9} = e^{\ln 1458}$$

$$(x+2)\ln 3 + (x+1)\ln 9 = \ln 1458$$

$$(x+2)\ln 3 + 2(x+1)\ln 3 = \ln(3^6 \cdot 2)$$

$$3x \ln 3 = 2\ln 3 + \ln 2 \Rightarrow$$

$$S_{IR} = \left\{ \frac{2}{3} + \frac{\ln 2}{3 \ln 3} \right\}$$

$$*(I_1): e^{-x+1} \leq 4 \Leftrightarrow e^{-x+1} \leq e^{\ln 4} \Leftrightarrow$$

$$-x + 1 \leq \ln 4$$

$$x \geq 1 - \ln 4 \text{ d'où } S_{IR} = [1 - \ln 4 ; +\infty[$$

$$*(I_2): e^x + 6 - 7e^{-x} > 0 \Leftrightarrow$$

$$e^{2x} + 6e^x - 7 > 0$$

$$\text{posons } X = e^x; X^2 + 6X - 7 > 0$$

$$\sqrt{\Delta} = 8; X_1 = -7; X_2 = 1$$

$$e^x = -7 \text{ impossible, } e^x = 1 \Rightarrow x = 0;$$

$$S_{IR} =]0; +\infty[$$

$$*(I_3): 5^x \geq 6^{x+2} \Leftrightarrow e^{x \ln 5} \geq e^{(x+2) \ln 6} \Leftrightarrow$$

$$x \ln 5 \geq (x+2) \ln 6 \Rightarrow x \geq \frac{2 \ln 6}{\ln 5 - \ln 6}$$

$$S_{IR} = \left[\frac{2 \ln 6}{\ln 5 - \ln 6}; +\infty[\right]$$

$$*(S_1): e^x + e^y = 5 \Rightarrow e^x = 5 - e^y$$

$$2e^x + 3e^y = 11$$

$$2(5 - e^y) + 3e^y = 11 \Rightarrow e^y = 1 \Rightarrow y = 0$$

$$e^x = 5 - e^0 = 4 \Rightarrow x = \ln 4; S_{IR, IR} =$$

$$\{(\ln 4; 0)\}$$

$$*(S_2): \begin{cases} 3^x = y^3 \\ 3^{x+2} = y^4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} e^{x \ln 3} = e^{3 \ln y} \\ e^{(x+2) \ln 3} = e^{4 \ln y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \ln 3 = 3 \ln y \\ (x+2) \ln 3 = 4 \ln y \end{cases} \Rightarrow$$

$$x \ln 3 + 2 \ln 3 = 4 \ln y$$

$$\ln y = 2 \ln 3 \Rightarrow y = 9, x \ln 3 = 3 \ln 9$$

$$\Rightarrow x = 6; S_{IR, IR} = \{(6; 9)\}$$

EXERCICE 2

$$1) P(X) = X^2 - X - 2, \sqrt{\Delta} = 3;$$

$$X_1 = 2; X_2 = -1$$

$$P(X) = (X-2)(X+1)$$

$$2) e^x - 2e^{-x} - 1 = 0, \text{ posons } X = e^x$$

$$\text{on a } X^2 - X - 2 = 0, \text{ d'après 1)}$$

$$e^x = -1 \text{ impossible, } e^x = 2 \Rightarrow x = \ln 2$$

$$S_{IR} = \{\ln 2\}$$

$$4) e^x - 2e^{-x} - 1 < 0 \Rightarrow x < \ln 2,$$

$$S_{IR} =]-\infty; \ln 2[$$

EXERCICE 3

$$g(x) = xe^{(1/2)}$$

$$1) Dg = \mathbb{R} \setminus \{0\} =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$$

$$2) * \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty \text{ car } g(x) = \frac{e^x}{\frac{1}{x}} \text{ en}$$

$$\text{posant } X = \frac{1}{x} \text{ on a}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X} = 0$$

la droite $x = 0$ est asymptote verticale

*

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} x = 0$$

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1$$

*

$$\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0 \text{ car } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$3) [g(x) - (x+1)] = xe^{(1/x)} - x - 1 \\ = x(e^{(1/x)} - 1) - 1 \Rightarrow$$

$$\frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} \text{ posons } X = \frac{1}{x} \text{ on a}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^X - 1}{X} = 1 \text{ d'où}$$

(Δ): $y = x+1$ est asymptote oblique à $+\infty$

$$4) \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty \text{ les deux}$$

limites étant différentes, g n'est pas continue en 0 et donc n'est pas prolongeable par continuité en 0 mais elle est continue à gauche en 0.

$$5) g'(x) = e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} x = (1 - \frac{1}{x}) e^{\frac{1}{x}}$$

$$6) e^{\frac{1}{x}} > 0 \Rightarrow \text{le signe de } g' \text{ est celui de } 1 - \frac{1}{x},$$

$$1 - \frac{1}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} \geq 0$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
g'	+		-	+

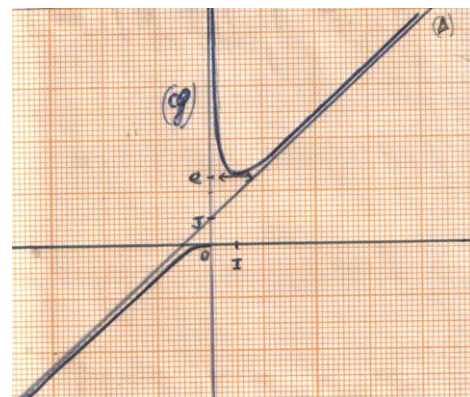
$\forall x \in]-\infty ; 0[\cup]0 ; +\infty[g'(x) > 0$
donc g est strictement croissante sur
 $]-\infty ; 0[$ et $]0 ; +\infty[$

$\forall x \in]0 ; 1[g'(x) < 0$ donc g est strictement décroissante sur $]0 ; 1[$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
g'	+		-	+
g	$-\infty$	$+\infty$	e	$+\infty$

3) $g(x) - y > 0$ sur $]0 ; +\infty[\Rightarrow (Cg)$ est au dessus de (D) et $g(x) - y < 0$ sur $]-\infty ; 0[\Rightarrow (Cg)$ est en dessous de (D)

Représentation graphique



$$1) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow -\infty} -x \ln 2 = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \text{ car } xe^{-x \ln 2} = -\frac{1}{\ln 2} (-x \ln 2 \cdot e^{-x \ln 2})$$

posons $X = -x \ln 2$, qd $x \rightarrow +\infty$, $X \rightarrow -\infty$

$$\text{d'où } \lim_{x \rightarrow -\infty} Xe^X = 0$$

$y = 0$ est asymptote horizontale à $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x \ln 2} = +\infty ;$$

(Cf) admet une branche parabolique de direction (OJ)

$$2) \forall x \in \text{Df} ,$$

$$f'(x) = e^{-x \ln 2} - x \ln 2 \cdot e^{-x \ln 2}$$

$$f'(x) = (1 - x \ln 2) e^{-x \ln 2}$$

$$3) f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 1 - x \ln 2 \geq 0 \text{ car } e^{-x \ln 2} > 0$$

$$\text{d'où } x \leq \frac{1}{\ln 2}$$

$$\forall x \in] \frac{1}{\ln 2} ; +\infty [, f'(x) < 0 \text{ donc } f \text{ est}$$

$$\text{strictement décroissante sur }] \frac{1}{\ln 2} ; +\infty [$$

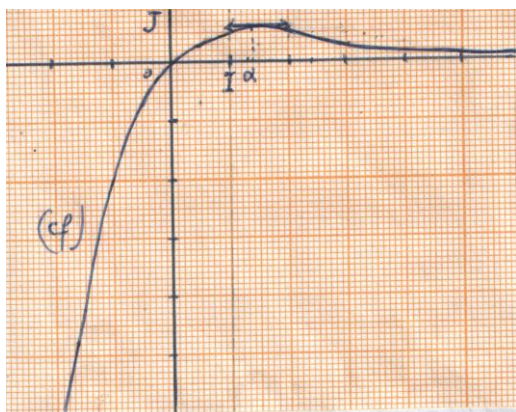
$$\forall x \in]-\infty ; \frac{1}{\ln 2} [, f'(x) > 0 \text{ donc } f \text{ est}$$

$$\text{strictement croissante sur }]-\infty ; \frac{1}{\ln 2} [$$

x	$-\infty$	$1/\ln 2$	$+\infty$
f'	+	0	-
f	$\begin{array}{c} \nearrow e^{-1/\ln 2} \\ \searrow 0 \end{array}$		

Représentation graphique

$$\alpha = \frac{1}{\ln 2}$$



CALCUL INTEGRAL

PRIMITIVES

EXERCICE 1

$$*I_1 = \frac{-2}{(2x+3)^2}$$

posons $u = 2x+3$ et $u' = 2$

$$I_1 = - \frac{u'}{u^2} \Rightarrow P(I_1) = \frac{1}{2x+3} + k$$

$$*I_2 = \cos 4x + 3 \sin 3x$$

$$I_2 = \frac{1}{4}(4 \cos 4x) + \frac{1}{3}(-3 \sin 3x)$$

$$I_2 = \frac{1}{4} u' \cos u + \frac{1}{3} v' \sin v$$

$$P(I_2) = \frac{1}{4} \sin 4x - \cos 3x + k$$

$$*I_3 = \frac{2x \cos x + (x^2 + 1) \sin x}{\cos^2 x} = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$P(I_3) = \frac{x^2 + 1}{\cos x} + k$$

$$*I_4 = |x-1| + 2|x-2|$$

x	$-\infty$	1	2	$+\infty$
I	-3x+5	-x+3	3x-5	

$$\forall x \in]-\infty ; 1[P_4 = -\frac{3}{2}x^2 + 5x + k$$

$$\forall x \in]1 ; 2[P_4 = -\frac{1}{2}x^2 + 3x + k$$

$$\forall x \in]2 ; +\infty [P_4 = \frac{3}{2}x^2 - 5x + k$$

CALCUL INTEGRAL

EXERCICE 2

$$*I_1 = \int_{-2}^{-1} x^2 \ln |x| \, dx ; u = \ln |x| ;$$

$$u' = \frac{1}{x} ; v' = x^2 ; v = \frac{1}{3} x^3$$

$$I_1 = \left[\frac{1}{3} x^3 \ln |x| \right] - \frac{1}{3} \int_{-2}^{-1} x^2 \, dx$$

$$I_1 = \left[\frac{1}{3} x^3 \ln |x| \right] - \frac{1}{3} \left[\frac{1}{3} x^3 \right] = \dots$$

(à trouver)

$$*I_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \cdot \ln(1 + \cos x) \, dx$$

$$u = \ln(1 + \cos x) ; u' = \frac{-\sin x}{1 + \cos x}$$

$$v' = \cos x ; v = \sin x$$

$$I_2 = [\sin x \ln(1 + \cos x)] - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\sin^2 x}{1 + \cos x} \, dx$$

$$\frac{\sin^2 x}{1 + \cos x} \, dx = \frac{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}{1 + \cos x} = 1 - \cos x$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1 + \cos x} \, dx = [x - \sin x]$$

$$I_2 = [\sin x \ln(1 + \cos x)] + [x - \sin x]$$

=

$$*I_3 = \int_0^1 (x+1)^2 e^x \, dx ; \text{(on fait$$

deux(2) intégrations par parties et

on obtient)

$$I_3 = [(x+1)^2 e^x] - 2[(x+1) e^x] + 2[e^x]$$

=

$$*I_4 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^2 \cos 2x \, dx$$

(même méthode que I_3)

$$I_4 = \left[\frac{1}{2} x^2 \sin 2x \right] - \left[-\frac{1}{2} x \cos 2x \right]$$

$$+ \frac{1}{4} [\sin 2x] = \dots$$

$$*I_5 = \int_0^{\pi} \cos^5 x \, dx \text{ (on linéarise)}$$

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \Rightarrow \cos^5 x =$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^5 (e^{ix} + e^{-ix})^5$$

(utilisation du triangle de pascal)

$$(e^{ix} + e^{-ix})^5 = e^{5ix} + 5 e^{4ix} \cdot e^{-ix} +$$

$$10 e^{3ix} \cdot e^{-2ix} + 10 e^{2ix} \cdot e^{-3ix} + 5 e^{ix} \cdot e^{-4ix} + e^{-5ix}$$

$$= e^{5ix} + e^{-5ix} + 10(e^{ix} + e^{-ix}) + 5(e^{3ix} + e^{-3ix})$$

$$\left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right)^5 = \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$\cdot \left[\frac{e^{5ix} + e^{-5ix}}{2} + 5 \frac{e^{3ix} + e^{-3ix}}{2} + 10 \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right]$$

$$\text{d'où}$$

$$\cos^5 x = \frac{1}{16} (\cos 5x + 5 \cos 3x + 10 \cos x)$$

$$I_5 = \frac{1}{16} \left(\frac{1}{5} \sin 5x + \frac{5}{3} \sin 3x + 10 \sin x \right)$$

$$I_6 = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{1}{2}} 3 \sin x \cos x \, dx ; u = \sin x$$

$$\sin x \cos x = u' u^r$$

$$I_6 = 3 \left[\frac{1}{2} \sin^2 x \right] = \dots$$

EXERCICE 3

$$f(x) = \ln(\cos x + \sin x)$$

$$1) f'(x) = \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x}$$

$$2) I = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\cos x + \sin x} dx;$$

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x + \sin x} dx$$

$$I+J = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x + \sin x}{\cos x + \sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} dx$$

$$[x] = \frac{\pi}{3}$$

$$I-J = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x - \sin x}{\cos x + \sin x} dx$$

$$= [\ln(\cos x + \sin x)]$$

$$I-J = \ln\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ d'où}$$

$$\begin{cases} I+J = \frac{\pi}{3} & I = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \\ \ln\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cong 0.679 \end{cases}$$

$$I-J = \ln\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$I = \frac{\pi}{6} + \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cong 0.679 \text{ et}$$

$$J = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \cong 0.367$$

EXERCICE 4

$$1) I-J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(\cos^2 x)^2 - (\sin^2 x)^2] dx$$

$$I-J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 x + \sin^2 x)(\cos^2 x - \sin^2 x)$$

$$dx$$

$$I-J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx = \left[\frac{1}{2} \sin 2x \right] = 0$$

$$I+J+K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^4 x + \sin^4 x + 2\cos^2 x \sin^2 x) dx$$

$$I+J+K = [x] = \frac{\pi}{2}$$

$$2) (\cos x + i \sin x)^4 = \cos 4x + i \sin 4x \text{ (formule de Moivre et utilisation du triangle de Pascal)}$$

$$(\cos x + i \sin x)^4 = \cos^4 x -$$

$$6\cos^2 x \sin^2 x + 4i \cos x \sin^3 x$$

$$+ 4i \cos^3 x \sin x + \sin^4 x$$

$$\Rightarrow \cos 4x = \cos^4 x + \sin^4 x - 6\cos^2 x \sin^2 x$$

$$I+J-3K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 4x dx = \left[\frac{1}{4} \sin 4x \right] = 0$$

$$3)$$

$$\begin{cases} I-J = 0 & I = \frac{3\pi}{16} \\ I+J+K = \frac{\pi}{2} \Rightarrow J = \frac{3\pi}{16} \text{ et } K = \frac{\pi}{8} \\ I+J-3K = 0 \end{cases}$$

EXERCICE 5

$$I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} dx$$

$$1) I_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x} dx$$

$$= - \int_0^1 -(1-x)^{1/2} dx$$

$$- (1-x)^{1/2} \Rightarrow u' u^r ;$$

$$I_0 = - \left[\frac{2}{3} (1-x)^{1/2} \right] = \frac{2}{3}$$

$$2) I_1 = \int_0^1 x(1-x)^{1/2} dx ; u = x ; u' = 1$$

$$v' = (1-x)^{1/2} ; v = \frac{2}{3} (1-x)^{3/2}$$

$$I_1 = \left[\frac{2}{3} (1-x)^{3/2} x \right] - \int_0^1 \frac{2}{3} (1-x)^{3/2} dx$$

(deuxième intégration par parties) et on a $I_1 = - \frac{2}{5}$

$$3) I_n = \int_0^1 x^n (1-x)^{1/2} dx$$

$$u = x^n ; u' = n x^{n-1}$$

$$v' = (1-x)^{1/2} ; v = - \frac{2}{3} (1-x)^{3/2}$$

$$I_n = \left[x^n \left(- \frac{2}{3} \right) (1-x)^{3/2} \right] -$$

$$\int_0^1 - \frac{2}{3} n x^{n-1} (1-x)^{1/2} dx$$

$$I_n = 0 + \frac{2}{3} n \int_0^1 (1-x)(1-x)^{1/2} x^{n-1} dx$$

$$I_n = \frac{2}{3} n \int_0^1 x^{n-1} (1-x)^{1/2} dx -$$

$$\frac{2}{3} n \int_0^1 x^n (1-x)^{1/2} dx$$

$$I_n = \frac{2}{3} n I_{n-1} - \frac{2}{3} n I_n \Rightarrow$$

$$(2n+3)I_n = 2nI_{n-1}$$

EXERCICE 6

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 7}{(x-2)^2}$$

$$1) f(x) = x - 1 + \frac{11-6x}{(x-2)^2}$$

$$a = 1, b = -1 ; c = -6 \text{ et } d = 11$$

$$2) A(\lambda) = \int_3^\lambda [f(x) - (x-1)] dx$$

$$= \int_3^\lambda \frac{11-6x}{(x-2)^2} dx$$

$$A(\lambda) = \int_3^\lambda \frac{-6x+12-1}{(x-2)^2} dx$$

$$A(\lambda) = -3 \int_3^\lambda \frac{2x-4}{(x-2)^2} dx - \int_3^\lambda \frac{1}{(x-2)^2} dx$$

$$A(\lambda) = 3[2\ln(x-2)] + \left[\frac{1}{x-2} \right]$$

$$A(\lambda) = -6 \ln(\lambda-2) + \frac{1}{\lambda-2} - 1$$

$$3) \lim_{\lambda \rightarrow 2} A(\lambda) = +\infty \text{ et } \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} A(\lambda) = -\infty$$

EXERCICE 7

$$f(x) = 2x \ln x + x$$

$$1) \int_1^2 2x \ln x dx, u = \ln x ; u' = \frac{1}{x}$$

$$v' = 2x ; v = x^2$$

$$\int_1^2 2x \ln x dx = 4 \ln 2 - \frac{3}{2}$$

$$2) \int_1^2 2x \ln x dx = \int_1^2 [f(x) - x] dx, c' \text{ est le domaine du limité par les droites d'équation}$$

$$x = 1, x = 2, y = x \text{ et la courbe (Cf)}$$

$$\int_1^2 2x \ln x dx \cong 1.27$$

SUITE NUMERIQUE

EXERCICE 1

$$1) 1^{\text{ère}} \text{ année : } 100000 + \frac{4}{100} \cdot 100000$$

$$= 104000$$

$$2^{\text{e}} \text{ année : } 104000 + \frac{4}{100} 104000 =$$

$$108000$$

$$3^{\text{e}} \text{ année : } 108000 + \frac{4}{100} 108000 =$$

$$112486.4$$

$$2) a) C_0 = 100000$$

$$C_{n+1} = C_n + \frac{4}{100} C_n = \frac{104}{100} C_n = 1.04$$

$$C_n$$

$$b) C' \text{ est une suite géométrique de raison } 1.04$$

$$C_n = (1.04)^n C_0$$

c) A la dixième année, $n = 10$

$$C_{10} = (1.04)^{10} 100000 =$$

$$148024.4285$$

3) la somme des intérêts en 10 ans est

$$148024.4285 - 100000 = 48024.4285,$$

son nouveau capital est 196048.857

$$4) C_n = (1.08)^n C_0$$

$$C_{10} = (1.08)^{10} 100000 =$$

$$215892.4997$$

$$C_{(10/1B)} - C_{(10/2B)} = 19843.64273$$

La proposition de la deuxième

banque est plus avantageuse car elle

permet au planteur de gagner

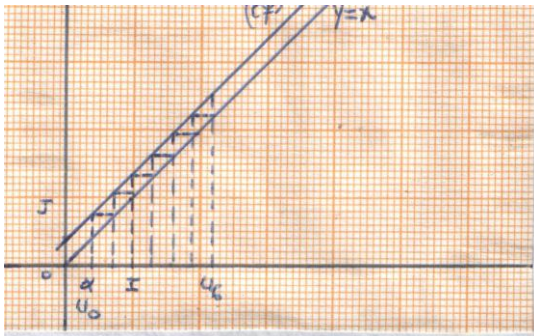
19843.64273^f de plus que la

première banque.

EXERCICE 2

$$\begin{cases} U_0 = \alpha \\ U_{n+1} = U_n + \frac{1}{3} \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}^*_{+}$$

1) Représentation graphique



$$2) U_{n+1} = U_n + \frac{1}{3}$$

$$U_{n+1} - U_n = U_n + \frac{1}{3} - U_n = \frac{1}{3} > 0$$

donc la suite (U_n) est croissante

$U_0 = \alpha > 0$, supposons que $U_n > 0$

Montrons que $U_{n+1} > 0$

$$\text{On a } U_{n+1} = U_n + \frac{1}{3} \text{ or } U_n > 0 \Rightarrow$$

$$U_n + \frac{1}{3} > \frac{1}{3} \text{ et } \frac{1}{3} > 0 \Rightarrow U_n + \frac{1}{3} > 0 \Rightarrow$$

$U_{n+1} > 0$, la suite est donc positive.

3) (U_n) s'écrit sous la forme $U_n + r$

c'est donc une suite arithmétique de

raison $\frac{1}{3}$ et premier terme α d'où

$$U_n = \alpha + \frac{1}{3}n$$

$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$ donc la suite (U_n) est

divergente

$$4) V_n = \frac{1}{U_n}, \quad V_{n+1} = \frac{1}{U_{n+1}}$$

$$a) V_{n+1} - V_n =$$

$$\frac{1}{3U_n + 1} - \frac{1}{U_n} = \frac{-1}{U_n(3U_n + 1)}$$

$$U_n > 0, U_n(3U_n + 1) > 0 \text{ et } -1 < 0 \Rightarrow$$

$$V_{n+1} - V_n < 0 \Rightarrow (V_n) \text{ est}$$

décroissante

$$b) V_n = \frac{1}{U_n} \Rightarrow V_n = \frac{3}{3\alpha + n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0 \text{ d'où } (V_n) \text{ converge vers } 0$$

$$5) W_n = \frac{1 - U_n^2}{U_n^2}$$

$$a) W_n = \frac{9}{(3\alpha + n)} - 1$$

$$b) \lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = -1, (W_n) \text{ est convergente}$$

EXERCICE 3

$$U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + 2$$

1) $U_0 = 3, U_1 = 3; U_2 = 3$ la suite est stationnaire (constante)

$$2) U_0 \neq 3; V_n = U_n + \alpha$$

a) (V_n) est une suite géométrique de

$$\text{raison } \frac{1}{3} \Rightarrow V_{n+1} = \frac{1}{3}V_n \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{3}U_{n+1} + 2 + \alpha = \frac{1}{3}(U_n + \alpha)$$

$$\text{on a } \alpha = -3$$

$$b) V_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n V_0 \Rightarrow V_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n (U_0 - 3)$$

$$c) V_n = U_n - 3 ; V_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n U_0 - \left(\frac{1}{3}\right)^n 3 - 3$$

$$d'o\grave{u} U_n = \frac{U_0 - 3}{3^n} - 3$$

3) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_0 - 3}{3^n} - 3 = -3$ donc (U_n) est convergente .

EXERCICE 4

$$\begin{cases} V_0 = -\frac{3}{2} \\ V_{n+1} = \frac{2}{3}V_n - 1 \end{cases} \text{ et } W_n = 2V_n + 6$$

$$1) W_{n+1} = 2V_{n+1} + 6$$

$$\frac{W_{n+1}}{W_n} = \frac{2\left(\frac{2}{3}V_n - 1\right) + 6}{2V_n + 6} = \frac{\frac{4}{3}V_n + 4}{2V_n + 6} = \frac{2}{3}$$

C'est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et de premier terme $W_0 = 3$

$$2) W_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \text{ et } V_n = \frac{1}{2}(W_n - 6) \text{ donc}$$

$$V_n = \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n - 3$$

$$3) S_n = W_0 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} = 3 \cdot \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}}$$

$$\lim S_n = 9$$

STATISTIQUE

EXERCICE 1

1) Représentation graphique (voir plus bas)

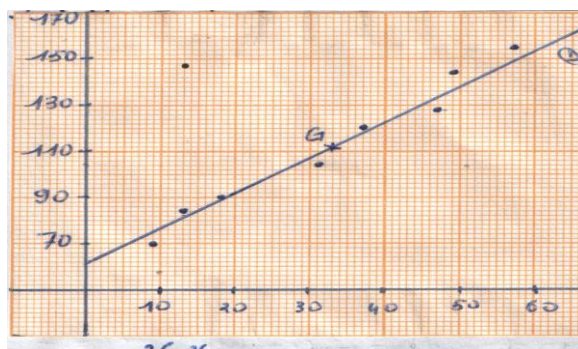
$$2) \bar{x} = \frac{262.4}{8} = 32.8 \text{ et } \bar{y} = \frac{896}{8} = 112$$

$$G(32.8 ; 112)$$

3)

	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2	y_i^2
Σ	262.4	896	33020.8	10836.48	106448

Représentation graphique



$$3) \text{Cov}(x; y) =$$

$$V(x) = \frac{10836.48}{8} - (32.8)^2 = 278.72$$

$$V(y) = \frac{106448}{8} - (112)^2 = 762$$

$$a = \frac{\text{cov}(x; y)}{V(x)} = 1.628$$

$$a' = \frac{\text{cov}(x; y)}{V(y)} = 0.595$$

$$4) r = \sqrt{aa'} = \sqrt{1.628 \cdot 0.595} = 0.98$$

$$0.87 \leq |r| \leq 1 \text{ donc } r \text{ est bon}$$

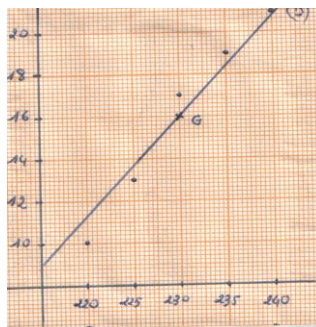
$$5) b = \bar{y} - a\bar{x} \Rightarrow b = 58.601$$

$$y = 1.62x + 58.601$$

$$6) \text{ si } x = 65 \text{ alors } y = 164.421$$

EXERCICE 2

1) Représentation graphique



$$x = 230000 \text{ et } y = 16 ; G(230000 ; 16)$$

2)

	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2	y_i^2
Σ	$115 \cdot 10^4$	80	$1854 \cdot 10^4$	$26.475 \cdot 10^{10}$	1360

SUJET 1

$$\text{Cov}(x;y) = 28000 ; V(x) = 5 \cdot 10^7 ;$$

$$V(y) = 16 ; a' = 1750 ;$$

$$b' = \bar{x} - a'y = 202000$$

$$x = 1750y + 202000$$

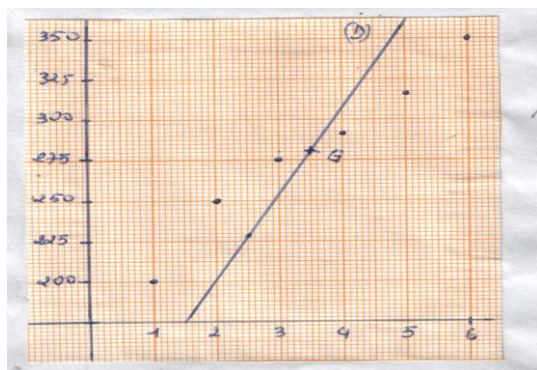
$$3) r = \frac{\text{cov}(x;y)}{\sqrt{V(x) \cdot V(y)}} = 0.98, \text{ oui un}$$

ajustement linéaire est acceptable car r est bon

$$4) \text{ si } y = 11 \text{ alors } x = 221250$$

EXERCICE 3

1) Représentation graphique



$$2^\circ) \bar{x} = 3.5 \text{ et } \bar{y} = 280 ; G(3.5 ; 280)$$

3)a)

	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2	y_i^2
Σ	21	168	6360	61	483950

$$\text{Cov}(x;y) = 80 ; V(x) = 2.196 ; V(y) = 2258.333$$

$$r = \frac{\text{cov}(x;y)}{\sqrt{V(x) \cdot V(y)}} = 0.98$$

$$b) a = \frac{\text{cov}(x;y)}{V(x)} = 27.434$$

$$b' = \bar{y} - a\bar{x} \Rightarrow b' = 183.981$$

$$y = 27.434x + 183.981$$

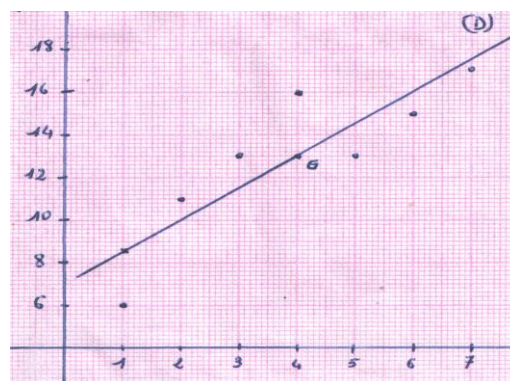
4) A une semaine de l'examen

$x = 8$ et donc

$$y = 403.453 \text{ c-à-d ; } y = 40$$

EXERCICE 1

1) Représentation graphique



$$2) \bar{x} = \frac{28}{7} = 4 ; \bar{y} = \frac{91}{7} = 13 ; G(4;13)$$

$$3) r = \frac{\text{cov}(X;Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}} = 0.85 \text{ car}$$

$$\Sigma x_i y_i = 405 ; \Sigma x_i^2 = 140 ; \Sigma y_i^2 = 1265$$

$$\text{cov}(X;Y) = \frac{\Sigma x_i y_i}{N} - \bar{x}\bar{y} = 5.857$$

$$V(X) = \frac{\Sigma x_i^2}{N} - \bar{x}^2 = 4$$

$$V(Y) = \frac{\Sigma y_i^2}{N} - \bar{y}^2 = 11.714$$

$r = 0.85 \notin [0.87 ; 1]$ donc la corrélation entre les deux variables n'est pas bonne

$$4) y = ax + b$$

$$a = \frac{\text{cov}(X;Y)}{V(X)} = 1.464 ; b = \bar{y} - a\bar{x} = 7.144$$

$$y = 1.464x + 7.144$$

EXERCICE 2

$$P(Z) = Z^3 + 2(2+i)Z^2 + (5+8i)Z - 10i$$

$$1) P(Z) = 0 ; \text{ posons } Z = \alpha i ,$$

$$\alpha \in \mathbb{R}^*$$

$(i\alpha)^3 + 2(2+i)(i\alpha)^2 + (5+8i)(i\alpha) - 10i = 0$
 $\begin{cases} -\alpha^3 - 4\alpha^2 + 5\alpha - 10 = 0 \\ 4\alpha^2 - 8\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 2 \text{ ou } \alpha = 0 \end{cases}$
 $\alpha = 2$ vérifie l'autre équation
donc $Z = 2i$
2) $P(Z) = (Z-2i)(Z^2 + aZ + b)$;
 $a \in \mathbb{C}$, $b \in \mathbb{C}$
après résolution on a
 $P(Z) = (Z-2i)(Z^2 - 4Z + 5)$
 $Q(Z) = Z^2 - 4Z + 5$; $\Delta = -4 = 4i^2$;
 $\delta = 2i$ ou $\delta = -2i$ avec $\delta^2 = \Delta$ on a
 $Z_2 = 2-i$ et $Z_3 = 2+i$
 $S_C = \{ 2i ; 2-i ; 2+i \}$
3) $A(0 ; 2)$, $B(2 ; -1)$, $C(2 ; 1)$
 $A = \overrightarrow{AO} + \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AC} = \vec{0}$
 $\overrightarrow{OA}(-1 - \alpha - \beta) + \alpha \overrightarrow{OA} + \beta \overrightarrow{OB} = \vec{0}$
 $\begin{cases} 2\alpha + 2\beta = 0 \\ -3\alpha - \beta = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 1 \end{cases}$
 $A = \text{bar} \{ (O;1) , (B;-1) , (C;1) \}$

PROBLEME

PARTIE A

1)a) $Dg = \mathbb{R} \setminus \{-1 ; 0\}$

b)

$\forall x \in Dg$

$$g'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} - \frac{1}{(x+1)^2} = -\frac{1}{x(x+1)^2}$$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
g'	+		+	-

$\forall x \in]-\infty ; -1[\cup]-1 ; 0[$ $g'(x) > 0$
donc g est strictement croissante sur
 $]-\infty ; -1[$ et $]-1 ; 0[$
 $\forall x \in]0 ; +\infty[$ $g'(x) < 0$ donc g est
strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$
c)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0 \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left| \frac{x+1}{x} \right| = 0 \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0 \text{ (meme justification)}$$

d)

$$g(x) = \frac{1}{x+1} [(x+1) \ln(x+1) - 1] - \ln x$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \ln|x| = 0 ; \text{ posons } X = x+1$$

$$g(X) = \frac{1}{X} (X \ln X - 1) - \ln|X-1|$$

$$\lim_{X \rightarrow 0} g(X) = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -1} g(x) = +\infty$$

$$\lim_{X \rightarrow 0} g(X) = -\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -1} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left| 1 + \frac{1}{x} \right| = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{x+1} = -1$$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
g'	+		+	-
g	0	$+\infty$	$+\infty$	0

c) De l'étude de g on a :

$\forall x \in]-\infty ; -1[$ g croît de 0 à $+\infty$ et
 $\forall x \in]0 ; +\infty[$ g décroît de $+\infty$ à 0
donc sur ces intervalles g est positive
 $\forall x \in]-1 ; 0[$ g est continue et
strictement croissante donc est
bijective de $]-1 ; 0[$ dans $\mathbb{R}$, il
existe donc un unique réel $a \in]-1 ; 0[$
tel que $g(a) = 0$ d'où sur $]-1 ; a[$
 $g(x) < 0$ et sur $]a ; 0[$ $g(x) > 0$;
Méthode de Balayage
 $-0.3 < a < -0.2$

PARTIE B

$$f(x) = x \ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right| ; x \neq 0 ; f(0) = 0$$

$$1) Df = \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

2)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 \text{ car : posons } X = \frac{1}{x}$$

qd $x \rightarrow +\infty$ ou $-\infty$; $X \rightarrow 0$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right|}{\frac{1}{x}} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty ; \lim_{x \rightarrow -1} x \ln|x| = 0 \text{ et avec } X = x \cdot$$

$$\lim_{X \rightarrow 0} \ln|X| = -\infty ; \lim_{X \rightarrow 0} X - 1 = -1$$

$$\lim_{X \rightarrow 0} (X-1) \ln|X| = +\infty$$

$$4) T = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \frac{f(x)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln \left| 1 + \frac{1}{x} \right| = +\infty, \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = +\infty \text{ donc } f$$

n'est pas dérivable en 0 et (Cf)

admet une tangente verticale en 0

$$5) \forall x \in Df, f'(x) = \ln \left| \frac{x+1}{x} \right| - \frac{1}{x^2} \cdot \frac{x}{x+1}$$

$$g'(x) = f'(x)$$

$$\forall x \in]-\infty ; -1[\cup]a ; 0[\cup]0 ; +\infty[$$

$g(x) > 0$ donc $f'(x) > 0$ d'où f est

strictement croissante sur $]-\infty ; -1[$

et $]a ; +\infty[$

$$\forall x \in]-1 ; a[\quad g(x) < 0 \text{ donc } f'(x) < 0$$

d'où f est strictement décroissante

$$\text{sur }]-1 ; a[\quad f'(a) = g(a) = 0$$

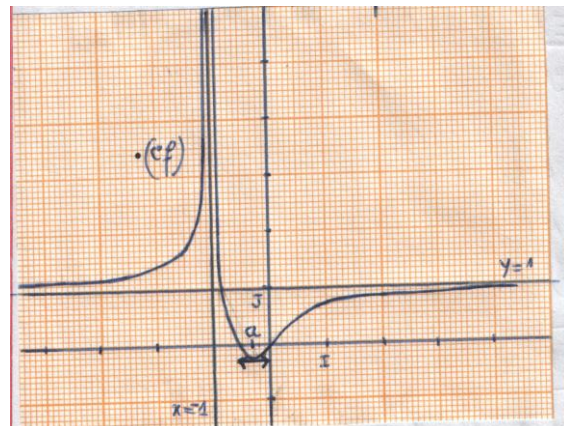
6)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \Rightarrow y = 1 \text{ est asymptote}$$

horizontale à $+\infty$ et à $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty \Rightarrow x = -1 \text{ est asymptote verticale}$$

7) Représentation graphique



PARTIE C

$$1) A(\alpha) = \int_{\alpha}^1 (1 - f(x)) dx ; \alpha > 0$$

$$1 - f(x) = 1 - x \ln|x+1| + x \ln|x|$$

$$\alpha > 0 \text{ et sur }]0 ; 1[\quad x > 0 \text{ et } x+1 > 0 \Rightarrow$$

$f(x) = x \ln(x+1) + x \ln(x)$ (intégration par parties)

$$\int_{\alpha}^1 x \ln x dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \ln x \right]_{\alpha}^1 - \left[\frac{1}{4} x^2 \right]_{\alpha}^1$$

$$\int_{\alpha}^1 x \ln(x+1) dx = \left[\frac{1}{2} x^2 \ln(x+1) \right]_{\alpha}^1 - \frac{1}{2} \int_{\alpha}^1 \frac{x^2}{x+1} dx$$

$$\int_{\alpha}^1 \frac{x^2}{x+1} dx = \int_{\alpha}^1 \left(x - 1 + \frac{1}{x+1} \right) dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2} - x + \ln(x+1) \right]_{\alpha}^1 \text{ et } \int_{\alpha}^1 dx = [x]_{\alpha}^1$$

$$A(\alpha) = \frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2} \alpha^2 \ln\left(\frac{\alpha+1}{\alpha}\right) - \frac{1}{2} \ln(\alpha+1)$$

$$2) \lim_{\alpha \rightarrow 0} A(\alpha) = \frac{1}{2} ; A(\lambda) \text{ représente à}$$

l'unité près l'aire de la partie du plan

limitée par (Cf) les droites

d'équation $y = 1$; $x = 0$ et $x = 1$



x	$-\infty$	-1	a	0	$+\infty$
f'	+		- 0 +		+
f	$\nearrow$ 1	$\nearrow$ $+\infty$	$\searrow$ $f(a)$	$\nearrow$ 0	$\nearrow$

SUJET 2

EXERCICE 1

1) A atteint ; B atteint $\rightarrow (+ ; +)$

A atteint , B n'atteint pas $\rightarrow (+ ; -)$

A n'atteint pas , B atteint $\rightarrow (- ; +)$

A n'atteint pas , B n'atteint pas $\rightarrow (- ; -)$

2) $p(+ ; +) + p(+ ; -) + p(- ; +) + p(- ; -) = 1$

$$p(+ ; +) = \frac{1}{9}$$

3) A atteint la cible

$$p(A) = p(+ ; +) + p(+ ; -) = \frac{5}{18} + \frac{2}{18} = \frac{7}{18}$$

b n'atteint pas la cible ($\bar{B}$)

$$p(\bar{B}) = p(+ ; -) + p(- ; -) = \frac{2}{18} + \frac{7}{18} = \frac{1}{2}$$

4) B atteint la cible $p(B) = \frac{1}{2}$

$$p(A) \cdot p(B) = \frac{7}{18} \cdot \frac{1}{2} = \frac{7}{36}$$

$$p(A \cap B) = \frac{1}{9} = \frac{4}{36} = p(+ ; +)$$

$p(A) \cdot p(B) \neq p(A \cap B)$ donc les événements A et B ne sont pas indépendants

5) On a une situation qui conduit à deux possibilités : « atteindre » ou « manquer »

$$p(A) = \frac{7}{18} ; q(A) = 1 - \frac{7}{18} = \frac{11}{18}$$

$$p = C_5^3 \left(\frac{7}{18}\right)^3 \left(\frac{11}{18}\right)^2 = 0.219$$

EXERCICE 2

$$\begin{cases} Z_0 = 1 \\ Z_{n+1} = Z_n + i \end{cases}$$

$$1) Z_{n+1} = \frac{1}{2}(Z_n + i) ; r_n = |Z_n|$$

$$n = 1 ; |Z_1| = \frac{\sqrt{2}}{4} ; 0 < Z_n < 1$$

Supposons que $0 < Z_n < 1$

Montrons que $0 < Z_{n+1} < 1$

$$|Z_{n+1}| = \left| \frac{1}{2}(Z_n + i) \right| = \frac{1}{2}|Z_n + i| \text{ or}$$

$$|Z_n + i| \leq |Z_n| + |i| \Leftrightarrow |Z_n + i| \leq |Z_n| + 1$$

$$\frac{1}{2}|Z_n + i| \leq \frac{1}{2}|Z_n| + \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}|Z_n| + \frac{1}{2} < \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}|Z_n| + \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow |Z_{n+1}| < 1 \text{ donc}$$

$$r_n = |Z_n| < 1$$

$$2) Z_n = X_n + iY_n ; U_n = Z_n - i$$

$$a) U_{n+1} = Z_{n+1} - i = \frac{1}{2}(Z_n + i) - i$$

$$U_{n+1} = \frac{1}{2}Z_n - \frac{1}{2}i = \frac{1}{2}(Z_n - i) \Rightarrow U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n$$

$$b) Z_{n+1} = \frac{1}{2}(Z_n - i)$$

$$X_{n+1} + iY_{n+1} = \frac{1}{2}X_n + \frac{1}{2}i(Y_n - 1)$$

$$\begin{cases} X_{n+1} = \frac{1}{2}X_n \Rightarrow \\ Y_{n+1} = \frac{1}{2}(Y_n - 1) \end{cases}$$

$$X_{n+1} = \frac{1}{2}X_n \Rightarrow (X_n) \text{ est suite géométrique}$$

$$\text{de raison } \frac{1}{2}$$

$$X_0 = 1 \text{ et } X_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n X_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} X_n = 0$$

3) (U_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$

$$U_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n U_0 ; U_0 = 1 - i$$

$$U_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{2}\right)i \text{ et } U_n = X_n + i(Y_n - 1)$$

$$\begin{cases} X_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ Y_n - 1 = -\left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow Y_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1 \end{cases}$$

$$r_n = \sqrt{X_n^2 + Y_n^2}$$

$$Y_n^2 = \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]^2 = 1 - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n}$$

$$r_n = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{2n} + \left(\frac{1}{2}\right)^{2n} - 2\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1}$$

$$r_n = \sqrt{\frac{1}{2^{2n-1}} - \frac{1}{2^{n-1}} + 1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Y_n = 1 \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = 1$$

PROBLEME

PARTIE A

$$f(x) = -x + (2x + 1)e^{-x}$$

$$1) f'(x) = -1 + 2e^{-x} - (2x + 1)e^{-x} = (1 - 2x)e^{-x} - 1$$

$$2)a) f'(0) = 0$$

$\forall x \in]-\infty ; 0]$ 0 est le minimum de $f'(x)$ donc $f'(x) > 0$ et $\forall x \in]0 ; +\infty]$ 0 est le maximum de $f'(x)$ donc $f'(x) < 0$

b) $\forall x \in]-\infty ; 0]$ $f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $]-\infty ; 0]$
 $\forall x \in]0 ; +\infty]$ $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $]0 ; +\infty]$

$$3)a) x \neq 0,$$

$$f(x) = -x + x\left(2 + \frac{1}{x}\right)e^{-x}$$

$$x\left[-1 + \left(2 + \frac{1}{x}\right)e^{-x}\right]$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(2 + \frac{1}{x}\right)e^{-x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{1}{x}\right)e^{-x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \Rightarrow (Cf) \text{ admet une}$$

branche parabolique de direction (OJ)

c) tableau de variation

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'	+	0	-
f	$-\infty$	1	$-\infty$

PARTIE B

$$h(x) = f(x) + x = (2x + 1)e^{-x}$$

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = 0$$

$$2)(D): y = -x ; h(x) = f(x) - y = f(x) + x, \text{ la droite}$$

(D) $y = -x$ est asymptote à (Cf)

$$3) f(x) - y = (2x + 1)e^{-x} ; e^{-x} > 0$$

x	$-\infty$	-1/2	$+\infty$
$f(x) - y$	-	0	+

$$\forall x \in \left]-\infty ; -\frac{1}{2}\right] f(x) - y < 0 \text{ donc}$$

(Cf) est en dessous de (D)

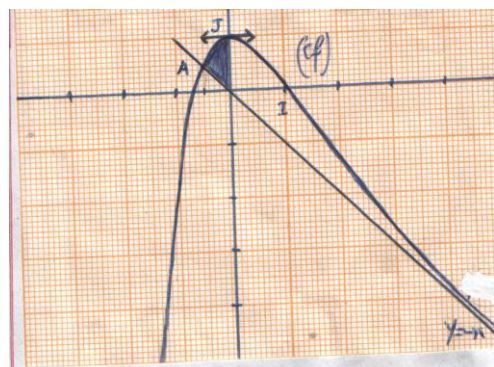
$$\forall x \in \left[-\frac{1}{2} ; +\infty\right[f(x) - y > 0 \text{ donc}$$

(Cf) est au dessus de (D)

$$(Cf) \cap (D) = \{A\} \Leftrightarrow f(x) = y \Rightarrow$$

$$A\left(-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$$

Représentaion graphique



PARTIE C

$$G(x) = (\alpha x + \beta) e^{-x}$$

$$a) G'(x) = e^{-x} (\alpha - \beta - \alpha x) = g(x) \\ = (2x + 1) e^{-x}$$

$$\alpha - \beta = 1 \text{ et } -\alpha = 2 \text{ d'où } \alpha = -2 \text{ et } \beta = -3$$

$$G(x) = (-2x - 3) e^{-x}$$

b) une primitive de f est

$$F(x) = -\frac{x^2}{2} + (-2x - 3)e^{-x} + k$$

$$2)a) \int_{-\frac{1}{2}}^0 f(x) dx = 2e^{\frac{1}{2}} + \frac{23}{8}$$

$$b) \begin{cases} -\frac{1}{2} \leq x \leq 0 \\ -x \leq y \leq f(x) \end{cases} \Rightarrow \int_{-\frac{1}{2}}^0 (f(x) + x) dx = S$$

$$\int_{-\frac{1}{2}}^0 (2x + 1) e^{-x} dx = [(-2x - 3)e^{-x}]_{-\frac{1}{2}}^0 \Rightarrow$$

$$S = 0.297$$



SUJET 3

EXERCICE 1

$$(E) 4Z^3 + 2(i-4)Z^2 + (3-2i)Z - 9 + \frac{9}{2}i = 0$$

1) posons $Z = a$; $a \in \mathbb{R}$

$$4a^3 + 2(i-4)a^2 + (3-2i)a - 9 + \frac{9}{2}i = 0$$

$$\begin{cases} 4a^3 - 8a^2 + 9a + 9 = 0 \\ 2a^2 - 6a + \frac{9}{2} = 0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{3}{2} \text{ d'où}$$

$$Z_0 = \frac{3}{2}$$

$$2) 4Z^2 - 2(1-i)Z + 6 - 3i = 0 ;$$

$$\Delta = -96 + 40i$$

$$\delta = 2 + 10i \text{ ou } \delta = -2 - 10i$$

$$Z_1 = \frac{1}{2} + i ; Z_2 = -\frac{3}{2}i ,$$

$$S_C = \left\{ \frac{1}{2} + i ; -\frac{3}{2}i \right\}$$

$$3) (Z - \frac{3}{2})(Z + \frac{3}{2}i)(Z - \frac{1}{2} - i) = 0 \Leftrightarrow$$

(E) donc Z_0, Z_1 et Z_2 sont les solutions de (E)

$$4) A \left(\frac{3}{2} ; 0 \right) M \left(0 ; -\frac{3}{2} \right) M' \left(\frac{1}{2} ; 1 \right)$$

$$a) \frac{Z_{\overline{AM}}}{Z_{\overline{AM'}}} = \frac{3}{2}i \in i\mathbb{R}^* \text{ donc } (AM) \perp$$

(AM') le triangle est rectangle en A

$$b) S : Z' = aZ + b ; a \in \mathbb{C}^* , b \in \mathbb{C}$$

$$\begin{cases} S(A) = A \Leftrightarrow \frac{3}{2}a + b = \frac{3}{2} \\ S(M) = M' \Leftrightarrow -\frac{3}{2}ia + b = \frac{1}{2} + i \end{cases}$$

$$a = \frac{2}{3}i \text{ et } b = \frac{3}{2} - i$$

$$Z' = \frac{2}{3}i Z + \frac{3}{2} - i , \text{ les caractéristiques}$$

sont

$$\text{rapport est } \frac{2}{3}, \text{ le centre est A et}$$

$$\text{l'angle est } \frac{\pi}{2}$$

$$5) S(M_1) = O ; O(0 ; 0) \Rightarrow$$

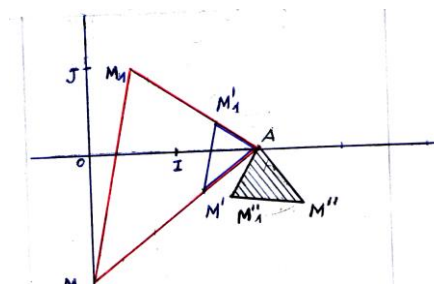
$$\frac{2}{3}i Z_{M_1} + \frac{3}{2} - i = 0$$

$$Z_{M_1} = 1 + \frac{3}{2}i$$

6) Soit A_1 l'aire du triangle ABC et A_2 l'aire de son image par S :

$$A_2 = |a|^2 \cdot A_1 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cdot \frac{3}{2} = \frac{2}{3} \text{ cm}^2$$

Représentation graphique



EXERCICE 2

$$U_{n+1} = \frac{U_n + 5}{3}; V_n = \frac{U_{n+1} - U_n}{3}$$

$$1) \frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{\frac{U_{n+1} + 5}{3} - \frac{U_n + 5}{3}}{U_{n+1} - U_n} = \frac{1}{3}$$

(V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et premier terme $V_0 = \frac{1}{3}$

$$S_n = V_0 + V_1 + \dots + V_n = V_0 \cdot \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$S_n = S_n = \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - (\frac{1}{3})^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}}; \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{2}$$

donc la suite (S) est convergente

$$S_n = \frac{U_1 - U_0}{3} + \frac{U_2 - U_1}{3} + \dots + \frac{U_n - U_{n-1}}{3}$$

$$S_n = \frac{1}{3}(U_1 - U_0 + U_2 - U_1 + \dots + U_n - U_{n-1})$$

$$S_n = \frac{1}{3}(U_n - U_0) \Rightarrow U_n = 3S_n + 1$$

$$U_n = 3 \cdot \frac{1 - (\frac{1}{3})^{n+1}}{1 - \frac{1}{3}} + 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \frac{5}{2}$$

la suite (U_n) est convergente

PROBLEME

PARTIE A

$$1) g(t) = \frac{2t}{1+t} - \ln(1+t)$$

$$1) Dg =]-1; +\infty[$$

$$2) \lim_{t \rightarrow +\infty} g(t) = -\infty \text{ car } \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{2}{1+t} = 0 \text{ et}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \ln(1+t) = +\infty$$

$$\lim_{t \rightarrow -1} g(t) = -\infty \text{ en posant } X = 1+t$$

$$\frac{2t}{1+t} - \ln(1+t) = \frac{2X - 2 - X \ln X}{X} \text{ et}$$

$$\lim_{X \rightarrow 0} \frac{2X - 2 - X \ln X}{X} = -\infty$$

$t = -1$ est asymptote verticale

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{g(t)}{t} = 0, (Cg) \text{ admet une branche}$$

parabolique de direction (OI)

3)a)

$$\forall t \in Dg, g'(t) = \frac{2}{(1+t)^2} - \frac{1+t}{(1+t)^2} = \frac{1-t}{(1+t)^2}$$

$$b) \forall x \in Dg, (1+t)^2 > 0, 1-t > 0 \Rightarrow t < 1$$

$\forall x \in]-1; 1[g'(t) > 0$ donc g est strictement croissante sur $]-1; 1[$

$\forall x \in]1; +\infty[g'(t) < 0$ donc g est strictement décroissante sur $]1; +\infty[$

c)

x	-1	1	$+\infty$
g'	+	0	-
g	$-\infty$	$1 - \ln 2$	$-\infty$

4) $\forall x \in]1; +\infty[g$ est continue et strictement décroissante donc est une bijection de $]1; +\infty[$

sur $]-\infty; 1 - \ln 2]$, $-\infty < 0$ et $1 - \ln 2 > 0$

donc il existe un unique réel

$\alpha \in]1; +\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$;

$g(3) \cong 0.11 > 0$ et $g(4) \cong -0.009 < 0$

et $[3; 4] \subset]1; +\infty[$ donc $\alpha \in [3; 4]$

b) Encadrement par balayage

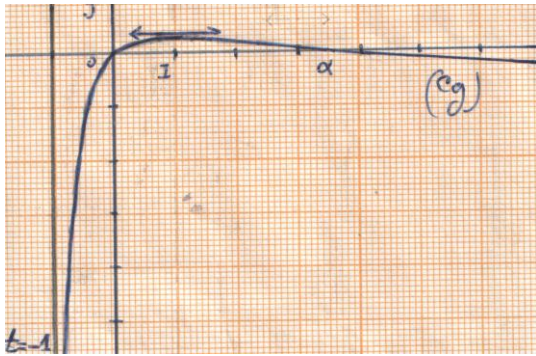
$$3.9 < \alpha < 4$$

5) $g(0) = 0$; $\alpha \in [3; 4]$ et $g(\alpha) = 0$

$\forall x \in]0; \alpha[g(x) > 0$ et

$\forall x \in]\alpha; +\infty[g(x) < 0$

6) Représentation graphique



$$\text{II) 1) } \frac{3t}{1+t} = 3 - \frac{3}{1+t}$$

$$2) \int_0^x \ln(1+t) dt = [t \ln(1+t)]_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t} dt$$

(intégration par parties)

$$3) \int_0^x g(t) dt = \int_0^x \frac{2t}{1+t} dt - \int_0^x \ln(1+t) dt$$

$$\int_0^x \frac{3t}{1+t} dt - [t \ln(1+t)]_0^x$$

d'après 1)

$$\int_0^x g(t) dt = 3x - (3 + x \ln(1+x))$$

$$4) \begin{cases} 0 \leq t \leq \alpha \\ 0 \leq y \leq g(t) \end{cases}$$

$$S = \int_0^\alpha g(t) dt = 3\alpha - (3 - \alpha) \ln(1 + \alpha)$$

$$g(\alpha) = 0 \Rightarrow \ln(1 + \alpha) = \frac{2\alpha}{1 + \alpha}$$

$$S = 3\alpha - (3 - \alpha) \frac{2\alpha}{1 + \alpha} \Rightarrow S = \frac{\alpha(\alpha - 3)}{1 + \alpha}$$

$$3.9 < \alpha < 4$$

$$\frac{1}{5} < \frac{1}{1 + \alpha} < \frac{1}{4.9} \text{ et } 3.51 < \alpha(\alpha - 3) < 4$$

$$0.702 < S < 0.816$$

PARTIE B

$$f(x) = e^{-x} \ln(1 + e^{2x})$$

$$1) \forall x \in Df,$$

$$f'(x) = -e^{-x} \ln(1 + e^{2x}) + e^{-x} \cdot \frac{2e^{2x}}{1 + e^{2x}}$$

$$f'(x) = e^{-x} g(e^{2x}), e^{-x} > 0, \text{ le signe de } f' \text{ est celui de } g(e^{2x}).$$

$$g(0) = 0, \forall x \in [0; \alpha] \text{ et}$$

$]-\infty; 0[g(e^{2x}) > 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f$ est strictement croissante sur ces intervalles

$$\forall x \in]\alpha; +\infty[g(e^{2x}) < 0 \Rightarrow$$

$f'(x) < 0 \Rightarrow f$ est strictement décroissante

$$2) \text{a) posons } u = e^{2x},$$

$$f(x) = (e^{2x})^{(-1/2)} \ln(1 + e^{2x})$$

$$f(u) = u^{(-1/2)} \ln(1 + u)$$

$$\text{b) quand } x \rightarrow -\infty; u \rightarrow 0$$

$$\lim_{u \rightarrow 0} f(u) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$1 + e^{2x} = e^{2x} \cdot \left(\frac{1}{e^{2x}} + 1 \right)$$

$$f(x) = e^{-x} \ln \left[e^{2x} \left(\frac{1}{e^{2x}} + 1 \right) \right]$$

$$f(x) = e^{-x} \ln e^{2x} + e^{-x} \ln \left(1 + \frac{1}{e^{2x}} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{e^{2x}} \right) = 0$$

3) $f'(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0 \Rightarrow x = \alpha$ ce maximum est $f(\alpha)$ avec

$$f(\alpha) = \frac{\ln(1 + e^{2\alpha})}{e^\alpha}$$

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
f'		+	0	+
f	0	$\ln 2$	$f(\alpha)$	0

$$7.8 < \ln(1 + e^{2\alpha}) < 8$$

$$\text{b) } \frac{1}{54.59} < \frac{1}{e^\alpha} < \frac{1}{29.96}$$

$$0.142 < f(\alpha) < 0.267$$



SUJET 4

EXERCICE 1

$$y = 0.185x + 19.45 (D_1)$$

$$1) a' = 5.087 ; a = 0.185$$

$$r = \sqrt{aa'} = 0.97$$

$$2) \bar{x} = \frac{1650}{10} = 165 ; \bar{y} = \frac{500}{10} = 50$$

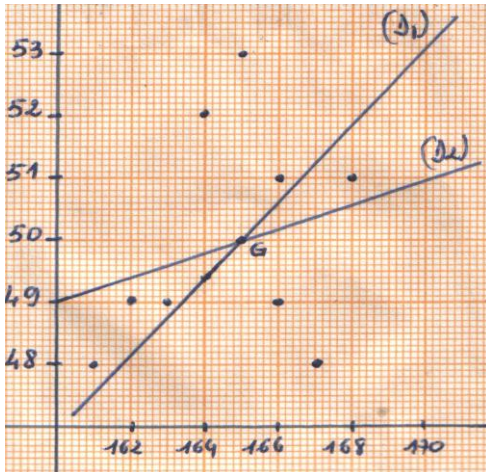
$$G(165 ; 50) \text{ on a } x = a'y + b'$$

$$b' = \bar{x} - a'\bar{y} = -89.33$$

$$x = 5.087 y - 89.33$$

$$3) \text{Pour } y = 47 \text{ Kg on a } x = 148 \text{ cm}$$

4) Représentation graphique



EXERCICE 2

$$Z' = (1 + i\sqrt{3})Z$$

1) L'application est une similitude directe de rapport $|1 + i\sqrt{3}| = 2$, de centre O et d'angle orienté $\frac{\pi}{3}$

$$2) h(O ; 2)$$

a) $h^{-1}(O ; \frac{1}{2})$ est une homothétie de

centre O et de rapport $\frac{1}{2}$

b) la forme complexe de h^{-1} :

$$Z_1 = \frac{1}{2}Z$$

$$h^{-1} \circ S \Rightarrow Z' = \frac{1}{2} (1 + i\sqrt{3})Z, \text{ le rapport}$$

est 1, le centre est le point O et

d'angle $\frac{\pi}{3}$; c'est donc une rotation (r)

$$c) h^{-1} \circ S = r \Leftrightarrow h \circ h^{-1} \circ S = h \circ S \Rightarrow$$

$$S = h \circ r$$

S est la composée de l'homothétie

$h(O ; 2)$ et la rotation $(r ; \frac{\pi}{3})$

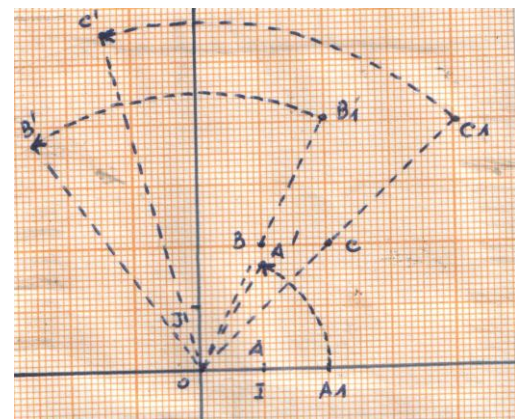
$$3) A(1), B(1+2i) \text{ et } C(2+2i)$$

$$S(A) = A' \Rightarrow A' (1+i\sqrt{3})$$

$$S(B) = B' \Rightarrow B' (1-2\sqrt{3}+i(2+\sqrt{3}))$$

$$S(C) = C' \Rightarrow C' (2-2\sqrt{3}+i(2+2\sqrt{3}))$$

4) Représentation graphique



PROBLEME

$$f(x) = 1 - x + \sqrt{x^2 + 4}$$

1)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \text{ car } f(x) = \frac{(1-x^2) - \sqrt{x^2+4}}{(1-x) - \sqrt{x^2+4}}$$

$$f(x) = \frac{-\frac{3}{x} - 2}{\frac{1}{x} - 1 - \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{-2} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \text{ car } f(x) = x(\frac{1}{x} - 1 - \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}})$$

$$2) y = -2x + 1 ; f(x) - y = \sqrt{x^2 + 4} + x$$

$$= \frac{4}{\sqrt{x^2 + 4} - x}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - y] = 0 \Rightarrow (D):$$

$y = -2x + 1$ est asymptote oblique à (Cf) à $-\infty$

2) a) $\forall x \in Df$,

$$f'(x) = -1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

$$b) f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{-\sqrt{x^2 + 4} + x}{\sqrt{x^2 + 4}} \geq 0$$

$\sqrt{x^2 + 4} > 0$, f' a le signe de -

$$\sqrt{x^2 + 4} + x$$

$$\sqrt{x^2 + 4} \leq x \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ x^2 + 4 \leq x^2 \Rightarrow 4 \leq 0 \end{cases}$$

impossible donc $-\sqrt{x^2 + 4} + x \leq 0 \Rightarrow f'(x) < 0$ sur $\mathbb{R}$, $f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	$+\infty$
f'	-	
f	$+\infty$	1

4)a) la fonction est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ donc réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]1; +\infty[$; d'où f admet une fonction réciproque

b) Soit g cette fonction réciproque, $Dg =]1; +\infty[$

x	1	$+\infty$
g'	-	
g	$+\infty$	$-\infty$

(D) $y = -2x + 1$ est asymptote à (Cf) sa réciproque est asymptote à (Cg),

$$(D') y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

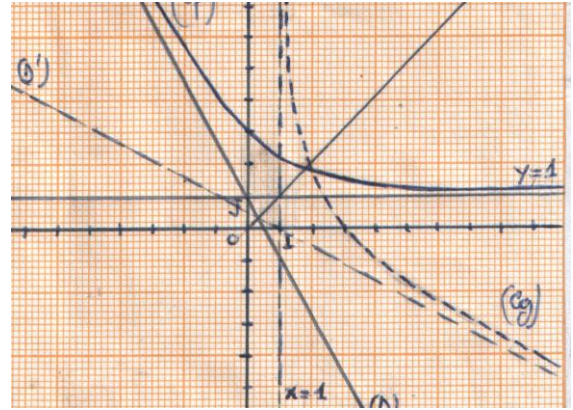
$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = +\infty \Rightarrow x = 1$ est asymptote verticale

$$c) f(x) = y \Leftrightarrow 1 - x + \sqrt{x^2 + 4} = y \\ \sqrt{x^2 + 4} = [y + (x-1)]^2 \Rightarrow$$

$$x = \frac{4 - (y-1)^2}{2(y-1)}$$

$$d'où g(x) = \frac{4 - (x-1)^2}{2(x-1)}$$

5) Représentation graphique



$$6)a) \int_2^{1+\sqrt{5}} g(x) dx = \int_2^{1+\sqrt{5}} \frac{4 - (x-1)^2}{2(x-1)} dx$$

$$\int_2^{1+\sqrt{5}} \frac{4}{2(x-1)} dx - \int_2^{1+\sqrt{5}} \frac{(x-1)^2}{2(x-1)} dx =$$

$$2[\ln(x-1)]_2^{1+\sqrt{5}} - \frac{1}{2}[\frac{1}{2}x^2 - x]_2^{1+\sqrt{5}} = \ln 5 - 1$$

b) f et g étant réciproque,

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = 2 \text{ et } f\left(-\frac{\sqrt{5}}{10}\right) = 1 + \sqrt{5}; g(2) = \frac{3}{2}$$

et

$$g(1 + \sqrt{5}) = -\frac{\sqrt{5}}{10} \text{ on peut déduire que}$$

$$\int_{-\frac{\sqrt{5}}{10}}^{\frac{3}{2}} f(x) dx = \int_2^{1+\sqrt{5}} g(x) dx \Rightarrow \int_{-\frac{\sqrt{5}}{10}}^{\frac{3}{2}} f(x) dx = \ln 5 - 1$$

A =

$$\int_{-\frac{\sqrt{5}}{10}}^{\frac{3}{2}} \sqrt{x^2 + 4} dx = \int_{-\frac{\sqrt{5}}{10}}^{\frac{3}{2}} [f(x) - (1-x)] dx$$

$$A = \ln 5 - 1 - \frac{4 + \sqrt{5}}{10} \Rightarrow A \approx -0.014$$

7) C'est le plan délimité par $x = \frac{3}{2}$,

$$x = -\frac{\sqrt{5}}{10}, y = 1-x \text{ et (Cf).}$$



SUJET 5

EXERCICE 1

$$Z_0 = 0; Z_1 = i$$

$$Z_n - Z_{n-1} = i (Z_{n-1} - Z_{n-2})$$

$$\left. \begin{array}{l} 1) Z_n - Z_{n-1} = i (Z_{n-1} - Z_{n-2}) \\ Z_{n-1} - Z_{n-2} = i (Z_{n-2} - Z_{n-3}) \\ \cdot \\ Z_2 - Z_1 = i (Z_1 - Z_0) \end{array} \right\} \text{produit}$$

$Z_n - Z_{n-1} = i^{n-1} (i - 0)$ après simplification

$$Z_n - Z_{n-1} = i^n$$

$$2) Z_n = i^n + Z_{n-1}$$

$$\left. \begin{array}{l} Z_n = i^n + Z_{n-1} \\ Z_{n-1} = i^{n-1} + Z_{n-2} \\ \cdot \\ \cdot \\ Z_1 = i^1 + Z_0 \end{array} \right\} \text{somme}$$

$Z_n = i^n + i^{n-1} + \dots + i^1; Z_0 = 0$, c'est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison i et de premier terme i

$$Z_n = i \frac{1-i^n}{1-i} = \frac{1-i}{2} (i^n - 1)$$

3)

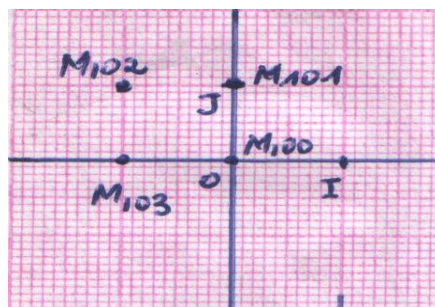
$$Z_{100} = \frac{1-i}{2} (i^{100} - 1) = 0$$

$$Z_{101} = \frac{1-i}{2} (i^{101} - 1) = i$$

$$Z_{102} = \frac{1-i}{2} (i^{102} - 1) = -1 + i$$

$$Z_{103} = \frac{1-i}{2} (i^{103} - 1) = -1$$

4) Représentation graphique



EXERCICE 2

$$p(N) = \frac{1}{3}; p(B) = \frac{2}{3}$$

$$1) \text{aucune N et 1B} \rightarrow X = 1$$

$$1N \text{ et 1B} \rightarrow X = 2$$

$$2N \text{ et 1B} \rightarrow X = 3$$

$$\begin{array}{l} \cdot \\ \cdot \\ N-N-N\dots N \text{ et 1B} \rightarrow X = n \\ (n-1) N \end{array}$$

$$p_1(X=1) = \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{2}{3}$$

$$p_2(X=2) = \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{2}{9}$$

$$p_3(X=3) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{2}{27}$$

$$p_n(X=n) = \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{2}{3^n}$$

$X=x_i$	1	2		n
$p(X=x_i)$	p_1	p_2		p_n

$$2) p_1 + p_2 + \dots + p_n = \sum_{n=1}^n p_n$$

$$\sum_{n=1}^n p_n = \frac{2}{3} \left[\left(\frac{1}{3}\right)^0 + \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \right]$$

$\left(\frac{1}{3}\right)^0 + \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \dots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$ est la somme des n premiers termes d'une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme 1

$$\sum_{n=1}^n p_n = \frac{2}{3} \cdot \frac{1 - (\frac{1}{3})^n}{1 - \frac{1}{3}}$$

$$3) \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum p = 1 \text{ car } \lim_{n \rightarrow +\infty} (\frac{1}{3})^n = 0$$

$$4) p(X < 5) =$$

$$p(X=1) + p(X=2) + p(X=3) + p(X=4)$$

$$p(X < 5) = \frac{80}{81}$$

$$p(4 < X \leq 7) = p(X=5) + p(X=6) + p(X=7)$$

$$p(4 < X \leq 7) = \frac{26}{2187}$$

$$p(X > 3) = 1 - p(X \leq 3)$$

$$p(X > 3) = 1 -$$

$$[p(X=1) + p(X=2) + p(X=3)] = \frac{1}{27}$$

PROBLEME

PARTIE A

$$f(x) = (ax + b) e^x$$

$$1) A(0; 4) \in (Cf) \Leftrightarrow f(0) = 4 \Rightarrow$$

$$b = 4$$

$$B(1; 3e) \in (Cf) \Leftrightarrow f(1) = 3e \Rightarrow$$

$$a = -1$$

$$f(x) = (-x + 4) e^x$$

$$2) f_0(x) = (-x + 4) e^x$$

a)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_0(x) = 0 \text{ car } \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x e^x + 4 e^x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_0(x) = -\infty$$

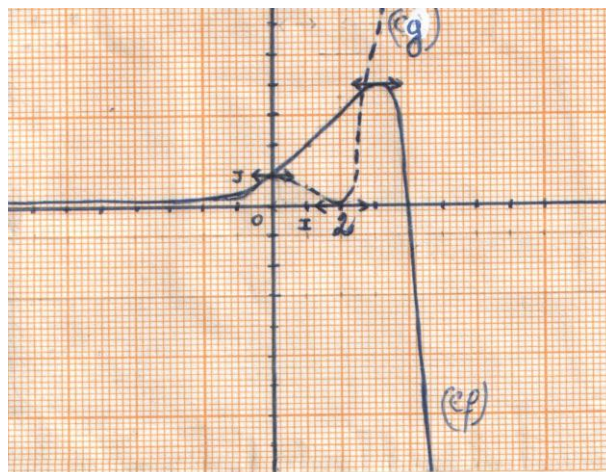
$$b) \forall x \in \mathbb{R}, f_0'(x) = -e^x + (-x + 4)e^x = (3 - x)e^x$$

$$f_0'(x) \geq 0 \Leftrightarrow 3 - x \geq 0 \text{ car } e^x > 0$$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
f_0'	+	0	-
f_0	0	e^3	$-\infty$

$\forall x \in]-\infty; 3[f_0'(x) > 0$ donc f_0 est strictement croissante sur $]-\infty; 3[$
 $\forall x \in]3; +\infty[f_0'(x) < 0$ donc f_0 est strictement décroissante sur $]3; +\infty[$
 $3)(Cf_0) \cap (OI) = \{E\}, f_0(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4, E(4; 0)$

4) Représentation graphique



PARTIE B

$$g(x) = (x^2 + \alpha x + \beta) e^x$$

$$1) D(2; 0) \in (Cg) \Leftrightarrow e^x(4 + 2\alpha + \beta) = 0$$

(Cg) admet en D une tangente

horizontale ; sa dérivée s'annule en 2

$$g'(2) = 0 \Leftrightarrow e^2(3\alpha + \beta + 8) = 0$$

$$\begin{cases} 4 + 2\alpha + \beta = 0 \\ 3\alpha + \beta + 8 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \alpha = -4 \\ \beta = 4 \end{cases}$$

$$g(x) = (x^2 - 4x + 4)e^x \Rightarrow$$

$$g(x) = (x - 2)^2 e^x$$

$$\text{Soit } g_0(x) = (x - 2)^2 e^x$$

$$2) \lim_{x \rightarrow +\infty} g_0(x) = +\infty ; \lim_{x \rightarrow -\infty} g_0(x) = 0$$

$y = 0$ est asymptote horizontale à $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g_0(x)}{x} = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

(Cg₀) admet une branche parabolique de direction (OJ)

$$3) g_0'(x) = 2(x - 2)e^x + (x - 2)^2 e^x ; e^x > 0 ;$$

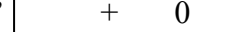
$$g_0'(x) = x(x-2)e^x$$

$$g_0'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x(x-2) \geq 0$$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
g_0'	+	0	-	0	+

$\forall x \in]-\infty ; 0[\cup]2 ; +\infty[$ $g_0'(x) > 0$
donc g_0 est strictement croissante
sur $]-\infty ; 0[$ et $]2 ; +\infty[$

$\forall x \in]0 ; 2[$ $g_0'(x) < 0$ donc g_0 est
strictement décroissante sur $]0 ; 2[$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
g_0'	+	0	-	0	+
g_0					

$$4)f_0(x) = g_0(x) \Leftrightarrow (-x+4)e^x = (x-2)^2 e^x \Rightarrow x=0 \text{ ou } x=3$$

$$g_0(0) = f_0(0) = 4 \text{ et } g_0(3) = f_0(3) = e^3$$

$$A(0 ; 4) \text{ et } B(3 ; e^3)$$

5) Voir 4) PARTIE A

$$6)a) g_0''(x) = (2x-2)e^x + (x^2-2x)e^x$$

$$g_0'''(x) = (x^2-2)e^x$$

$$2e^x - g_0''(x) + 2g_0'(x) = (2-x+2+2x^2+x) = g_0(x)$$

donc $g_0(x) = 2e^x - g_0''(x) + 2g_0'(x)$

$$b) G_0(x) = 2e^x - g_0''(x) + 2g_0'(x)$$

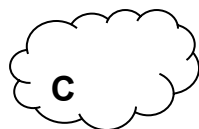
$$G_0(x) = (x^2 - 6x + 10)e^x$$

$$7)a) \int_{\lambda}^0 g_0(x) dx ; \lambda < 0$$

$$S(\lambda) = [e^x(x^2 - 6x + 10)]_{\lambda}^0$$

$$S(\lambda) = 10 - e^{\lambda}(\lambda^2 - 6\lambda + 10)$$

$$b) \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} S(\lambda) = 10$$



SUJET 6

EXERCICE 1

Il a au total $2n$ boules

$$\text{Card}(\Omega) =$$

$$C_{2n}^4 = \frac{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)}{4!}$$

$$1)p(A) = \frac{C_n^1 \cdot C_n^3}{C_{2n}^4} = \frac{n(n-2)}{(2n-1)(2n-3)}$$

$$p(B) = \frac{C_n^2 \cdot C_n^2}{C_{2n}^4} = \frac{3n}{2(2n-1)(2n-3)}$$

$$2)a) \text{Tirer 0 B et 4N} \rightarrow X = 0$$

$$1B \text{ et } 3N \rightarrow X = 1$$

$$2B \text{ et } 2N \rightarrow X = 2$$

$$3B \text{ et } 1N \rightarrow X = 3$$

$$4B \text{ et } 0N \rightarrow X = 4$$

$$X = \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4\}$$

$$b)p_0(X=0) = \frac{C_n^4}{C_{2n}^4} = \frac{(n-2)(n-3)}{4(2n-1)(2n-3)}$$

$$p_1(X=1) = \frac{C_n^1 \cdot C_n^3}{C_{2n}^4} = \frac{n(n-2)}{(2n-1)(2n-3)}$$

$$p_2(X=2) = \frac{C_n^2 \cdot C_n^2}{C_{2n}^4} = \frac{3n(n-1)}{2(2n-1)(2n-3)}$$

$$p_3(X=3) = \frac{C_n^3 \cdot C_n^1}{C_{2n}^4} = \frac{n(n-2)}{(2n-1)(2n-3)}$$

$$p_4(X=4) = \frac{C_n^4}{C_{2n}^4} = \frac{(n-2)(n-3)}{4(2n-1)(2n-3)}$$

$$p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = \frac{8n^2 - 16n + 6}{2(2n-1)(2n-3)}$$

or

$$2(2n-1)(2n-3) = 8n^2 - 16n + 6 \Rightarrow$$

$$p_0 + p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1$$

	0	1	2	3	4	Σp
$P(X=x_i)$	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	1

$$c) E(X) = \Sigma x_i p_i = 2$$

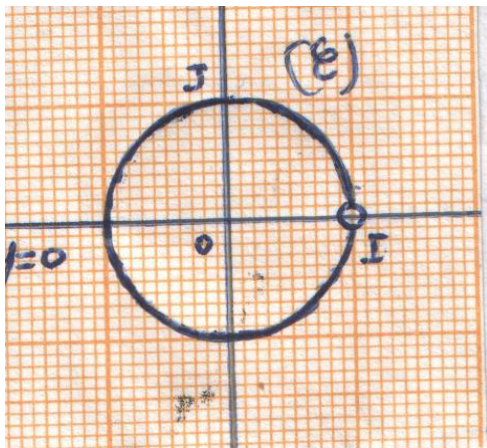
$$3)U_n = p(X=2) = \frac{3n(n-1)}{2(2n-1)(2n-3)}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \frac{3}{8}$$

EXERCICE 2

$$Z = \frac{z+1}{z-1} ; z \neq 1$$

1) soit $\alpha \in \mathbb{C}$, $f(z) = \alpha \Leftrightarrow z+1 = \alpha$
 $(z-1) \Rightarrow z = \frac{\alpha+1}{\alpha-1} \Rightarrow f(z) = f^{-1}(z)$
 2) $|z| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |z+1| = \sqrt{2}|z-1|$ posons
 $z = x + iy$; x et y sont des nombres réels
 $(x-3)^2 + (y-0)^2 = 2[(x-1)^2 + y^2]$
 $(x-3)^2 + (y-0)^2 = 8$, soit $A(3; 0)$ la solution est le cercle de centre A et de rayon $r = 2\sqrt{2}$
 3) $Z = \frac{x+1+iy}{x-1+iy} = \frac{[x+1+iy][x-1-iy]}{(x-1)^2 + y^2}$
 $X = \frac{x^2 + y^2 - 1}{(x-1)^2 + y^2}$ et $Y = \frac{-2y}{(x-1)^2 + y^2}$
 d'après 1) $f(z) = f^{-1}(z)$ donc $z = \frac{Z+1}{Z-1}$
 $x = \frac{X^2 + Y^2 - 1}{(X-1)^2 + Y^2}$ et $y = \frac{-2Y}{(X-1)^2 + Y^2}$
 4)a) $Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \text{Im}(Z) = 0 \Rightarrow -2y = 0 \Rightarrow y = 0$ c'est la droite (OI) privée du point $I(1; 0)$
 b) $Z \in i\mathbb{R} \Leftrightarrow \text{Re}(Z) = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 - 1 = 0$, c'est le cercle de centre O de rayon 1 privé du point $I(1; 0)$
 c) Représentation graphique
 le point d'intersection est $K(-1; 0)$



PROBLEME

$\forall x \in]-\infty; 0[f(x) = x^2 \ln(-x)$

1) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ car $f(x) = (-x)(-x)\ln(-x)$

x), si on pose $-x = X$ d'où

$f(X) = X \ln X$

$\lim_{x \rightarrow 0} \ln(e^x - x) = 0$,

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ donc f est

continue en 0

Dérivabilité en 0

A gauche

$T = \frac{x^2 \ln(-x)}{x}$ et $\lim_{x \rightarrow 0} T = 0$, f est

dérivable à gauche en 0.

A droite

$T = \frac{\ln(e^x - x)}{x} = 1 + \frac{\ln(1 - xe^{-x})}{xe^{-x}} \bullet e^{-x}$,

posons

$xe^{-x} = u$; $\frac{\ln(1 - xe^{-x})}{xe^{-x}} = \frac{\ln(1 - u)}{u}$ et

$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - u)}{u} = -1$ d'où $\lim_{x \rightarrow 0} T = 0$ et f est

dérivable à droite en 0. Par

conséquent f est dérivable en 0

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^x - x) = +\infty$ car

$\ln(e^x - x) = x \ln e + \ln(1 - \frac{x}{e^x})$

3) $\forall x \in]-\infty; 0[f'(x) = x[2\ln(-x)+1]$
 $, f'(x) \geq 0$

$\Leftrightarrow x[2\ln(-x)+1] \geq 0$

x	$-\infty$	$-e^{-1/2}$	0
f'	-	0	+

$\forall x \in]0; +\infty[f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}; e^x > x$

$\Rightarrow e^x - x > 0$ et $e^x - 1 \geq 0 \Rightarrow x > 0$

x	$-\infty$	$+\infty$
f'	-	-

$\forall x \in]-\infty ; -e^{-1/2}[\quad f'(x) < 0$ donc f est strictement décroissante sur

$]-\infty ; -e^{-1/2}[$

$\forall x \in]-e^{-1/2} ; 0[\cup [0 ; +\infty[\quad f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur

$] -e^{-1/2} ; +\infty [$

x	$-\infty$	$-e^{-(1/2)}$	0	$+\infty$
f'	-	+	+	
f	$+\infty$	$-(1/2e)$	0	$+\infty$

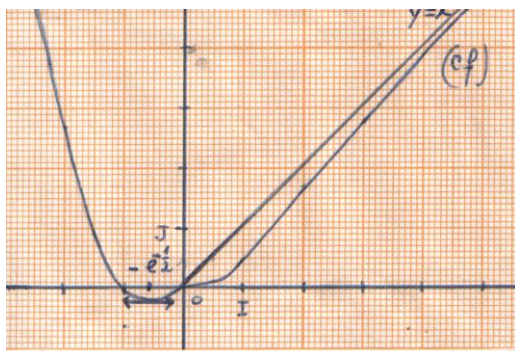
$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \ln(-x)}{x} = -\infty \Rightarrow (Cf)$ admet une

branche parabolique de direction

(OJ) et $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(e^x - x) - x] = 0 \Rightarrow y = x$

est asymptote oblique à $+\infty$

Représentation graphique



5)a) $\int_{-3}^{-1} x^2 \ln|x| dx$ (intégration par parties)

$$\int_{-3}^{-1} x^2 \ln|x| dx = 9 \ln 3 - \frac{26}{9}$$

b) L'aire est $\cong 6.9$

SUJET 7



EXERCICE 1

$$f(x) = e^{-x} \sin x$$

$$1) f'(x) = e^{-x} \cos x - e^{-x} \sin x \Rightarrow$$

$$f'(x) = e^{-x} (\cos x - \sin x)$$

$$2) f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos x = \sin x \text{ car}$$

$$e^{-x} > 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + n\pi \Rightarrow \text{soit } n \in \mathbb{N}$$

$$\text{posons } X_n = \frac{\pi}{4} + n \Rightarrow (X_n) \text{ est une}$$

suite arithmétique de premier terme

$$\frac{\pi}{4} \text{ et de raison } \pi$$

$$3) f(X_n) = e^{-\left(\frac{\pi}{4} + n\pi\right)} \sin\left(\frac{\pi}{4} + n\pi\right)$$

$$f(X_n) = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-X_n} (\cos n\pi + \sin n\pi)$$

$$4) a) Y_n = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-X_n} (\cos n\pi + \sin n\pi)$$

$$Y_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-X_{n+1}} [\cos(n+1)\pi + \sin(n+1)\pi]$$

$$\frac{Y_{n+1}}{Y_n} = -e^{-\pi}, (Y_n) \text{ est donc une suite}$$

géométrique de raison $-e^{-\pi}$ et de

$$\text{premier terme } Y_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\pi}{4}}$$

$$Y_n = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\pi}{4}} (-e^{-\pi})^n$$

$$5) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^{n\pi}} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} Y_n = 0$$

EXERCICE 2

Il y a 8 cœurs, c'est un tirage sans remise

$$\text{Card}(\Omega) = A_{32}^2$$

$$1) \text{Card}(\Omega) = A_8^2 ; p(A) = \frac{7}{124}$$

$$p(B) = p(\overline{A}) = 1 - p(A) \Rightarrow p(B) = \frac{117}{124}$$

2) Soit G l'espérance de gain et M la mise

$$G(A) = p(A) \cdot M(B) = \frac{3500}{124}$$

$$G(B) = p(B) \cdot M(A) = \frac{5850}{124}$$

$G(A) \neq G(B)$ donc le jeu n'est pas équitable. C'est B qui est le plus avantage car $G(A) < G(B)$.

B mise x francs, pour que le jeu soit équitable il faut que $G(A) = G(B)$

$$\text{c-à-d } M(B) = \frac{p(B) \cdot M(A)}{p(A)} = 835.7$$

PROBLEME

PARTIE A

$$f(x) = \frac{e^x}{1+e^x} - \ln(1+e^x)$$

$$1) a) D_f = \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \Rightarrow y = 0 \text{ est asymptote}$$

horizontale à $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1+e^x) = +\infty \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1+e^x} = 1$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) + x - 1] = 0 ; \text{ donc}$$

$y = -x + 1$ est asymptote oblique à $+\infty$

2) a)

$$\forall x \in D_f; f'(x) = \frac{e^x(1+e^x) - e^x \cdot e^x}{(1+e^x)^2} - \frac{e^x}{1+e^x}$$

$$f'(x) = -\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)^2$$

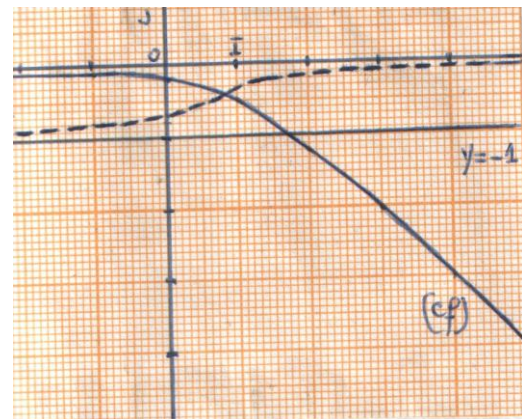
$$b) \left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)^2 > 0 \text{ donc } f''(x) < 0 \Rightarrow f \text{ est}$$

strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	$+\infty$
f'	-	
f	0	$-\infty$

Sur $\mathbb{R}$ f décroît de 0 à $-\infty$ donc $f(x) < 0$

Représentation graphique



PARTIE B

$$g(x) = -e^{-x} \ln(1+e^x)$$

$$1) \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -1 \text{ car } g(x) = -\frac{\ln(1+e^x)}{e^x}$$

$$\text{en posant } e^x = X \text{ on a } \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0 \text{ car en osant } e^x = X-1$$

on a

$$\frac{\ln(1+e^x)}{e^x} = \frac{\ln(X)}{X-1} \text{ et } \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln X}{X} \cdot \frac{X}{X-1} = 0$$

d'où les droites $y = -1$ et $y = 0$ sont des asymptotes horizontales.

$$2) g'(x) = -e^{-x} \ln(1+e^x) - e^x \frac{e^x}{1+e^x}$$

$$g'(x) = -e^{-x} f(x)$$

$$3) -e^{-x} < 0 \text{ et } f(x) < 0 \text{ donc } g'(x) > 0$$

d'où g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	$+\infty$
g'	+	
g	-1	$+\infty$

4) Représentation graphique

voir 3) PARTIE A

SUJET 8

EXERCICE 1

$$p(B_1) = \frac{2}{3} ; p(N) = \frac{1}{3}$$

2) les espérances de gain des joueurs

$$G(A) = p(A)M(B) = \frac{40}{3}$$

$$G(B) = p(B)M(A) = \frac{50}{3}$$

$G(A) \neq G(B) \Rightarrow$ le jeu n'est pas équitable

3) On effectue 2 lancers

$$p(A) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} ; M(A) = 50^f$$

a) A est avantage si $G(A) > G(B)$ c-à-d

$$p(B) < \frac{p(A)M(B)}{M(A)} \Rightarrow p(B) < \frac{4}{15} \cong 0.266$$

les différentes possibilités d'apparition des faces du dé sont :

$$p(B_1 ; B_1) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \cong 0.444$$

$$p(B_1 ; N) = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} \cong 0.22$$

$$p(N ; N) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 0.11$$

Pour que le joueur A soit avantage il faut qu'on demande à B d'obtenir les faces .

$$N - B_1 \Rightarrow p(B) = 0.22 \text{ ou } N - N$$

$$\Rightarrow p(B) = 0.11$$

b) B est avantage si $G(B) > G(A) \Rightarrow$

$$p(B) > \frac{4}{15}$$

c-à-d le joueur B doit obtenir les faces $B_1, B_1 \Rightarrow p(B) = 0.44$

EXERCICE 2

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = \frac{2U_n + 3}{U_n + 4} \end{cases}$$

$$1) U_1 = \frac{3}{4} ; U_2 = \frac{18}{19}$$

$$2) U_{n+1} = 2 - \frac{5}{U_n + 4} ; U_1 = \frac{3}{4} ; 0 < U_1 < 1$$

Supposons que $0 < U_n < 1$

Montrons que $0 < U_{n+1} < 1$

$$\frac{1}{5} < \frac{1}{U_n + 4} < \frac{1}{4} \Rightarrow \frac{-5}{4} < \frac{-5}{U_n + 4} < \frac{-5}{5}$$

$$\frac{3}{4} < 2 - \frac{5}{U_n + 4} < 1 \text{ et } \frac{3}{4} > 0$$

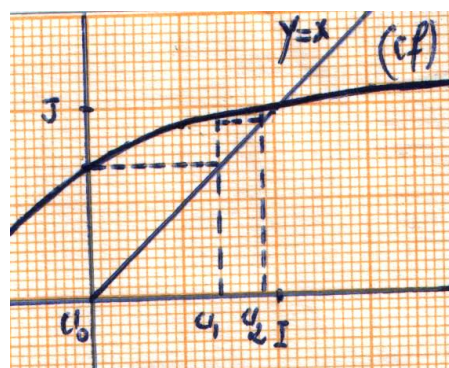
$$0 < U_{n+1} < 1 \Rightarrow 0 < U_n < 1$$

$$3) f(x) = \frac{2x+3}{x+4}, Df = \mathbb{R} \setminus \{-4\}$$

$$\forall x \in Df ; f'(x) = \frac{5}{(x+4)^2} ; f'(x) \geq 0$$

donc f est strictement croissante et est majorée par 1 d'où elle converge .

5) Représentation graphique



$$6) a) V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 3} ; V_{n+1} = \frac{U_{n+1} - 1}{U_{n+1} + 3}$$

$$V_{n+1} = \frac{\frac{2U_n + 3}{U_n + 4} - 1}{\frac{2U_n + 3}{U_n + 4} + 3} = \frac{1}{5} \left(\frac{U_n - 1}{U_n + 3} \right) = \frac{1}{5} V_n$$

d'où (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme

$$V_0 = -\frac{1}{3}$$

b)

$$V_n = -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{5} \right)^n ; \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{5^n} = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0$$

donc la suite (V_n) est convergente

$$7) V_n = \frac{U_n - 1}{U_n + 3} \Rightarrow U_n = \frac{-3V_n - 1}{V_n - 1}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 1 \text{ car } \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0$$

donc la suite (U_n) converge vers 1.

PROBLEME

$X \in \mathbb{R}^*_+$, $f(x) = e^{-x} \ln x$;

$$g(x) = -\ln x + \frac{1}{x}$$

PARTIE A

$$1)a) \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow 0} (-\ln x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = 0 \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{\ln x}{x} = 0$$

b) la droite $x=0$ est asymptote verticale et (C_g) admet une branche parabolique de direction (OI) .

$$2)a) \forall x \in \mathbb{R}^*_+ g'(x) = \frac{-x-1}{x^2}$$

b) $x^2 > 0$ et $-(x+1) < 0$ donc $g'(x) < 0$
 $\Rightarrow g$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^*_+$

x	0	$+\infty$
g'		-
g	$+\infty$	$-\infty$

3)a) g est continue et strictement décroissante donc réalise une bijection de $\mathbb{R}^*_+$ sur $\mathbb{R}$

$$b) \left[\frac{3}{2}; 2 \right] \subset]0; +\infty[\text{ donc } g \text{ est continue}$$

et strictement décroissante sur $\left[\frac{3}{2}; 2 \right]$

$$g\left(\frac{3}{2}\right) \cong 0.26 > 0 \text{ et } g(2) \cong -0.19 < 0$$

donc il existe un unique réel

$$\alpha \in \left[\frac{3}{2}; 2 \right] \text{ tel que } g(\alpha) = 0$$

$$c) 1.5 < \alpha < 1.6$$

$$4) \lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) + \ln x] = 0 \Rightarrow \text{la courbe}$$

$$y = -\ln x$$

est asymptote à (C_g) à $+\infty$

PARTIE B

$$1)a) f(\alpha) =$$

$$e^{-\alpha} \ln \alpha \text{ or } g(\alpha) = 0 \Rightarrow \ln \alpha = \frac{1}{\alpha}$$

$$f(\alpha) = \frac{e^{-\alpha}}{\alpha}$$

$$b) \frac{3}{2} \leq \alpha \leq 2 ; e^{-2} \leq e^{-\alpha} \leq e^{-3/2} \text{ et}$$

$$\frac{1}{2} < \frac{1}{\alpha} < \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{e^{-2}}{2} \leq \frac{e^{-\alpha}}{\alpha} \leq \frac{2e^{-3/2}}{3} \Rightarrow$$

$$0.06 \leq f(x) \leq 0.148$$

$$2)a) \forall x \in \mathbb{R}^*_+ f'(x) = e^{-x} \left(-\ln x + \frac{1}{x} \right)$$

$f'(x) = e^{-x} g(x)$, $e^{-x} > 0$ le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$. $g(\alpha) = 0$

$\forall x \in]0; \alpha[$ $g(x) > 0$ car 0 est le minimum donc $f'(x) > 0$ et f est strictement croissante sur $]0; \alpha[$

$\forall x \in]\alpha; +\infty[$ $g(x) < 0$ car 0 est le maximum donc $f'(x) < 0$ et f est strictement décroissante sur

$\forall x \in]\alpha; +\infty[$

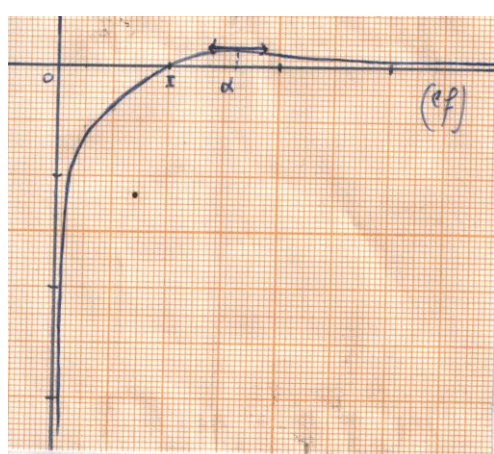
b)	x	0	α	$+\infty$
	f'	+	0	-
	f		$f(\alpha)$	

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ car $\lim_{x \rightarrow 0} e^{-x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{e^x} = 0$

$x = 0$ et $y = 0$ sont des asymptotes à (Cf)

3) Représentation graphique



SUJET 9



EXERCICE 1

(E) : $Z^2 - pZ + q = 0$; $p \in \mathbb{C}$, $q \in \mathbb{C}$
 $p = Z_1 + Z_2$; $q = Z_1 Z_2$

1) $U \in \mathbb{C}$; $U = \frac{Z_1}{Z_2}$; $q(U+1)^2 = p^2 U$

$$q(U+1)^2 = Z_1 Z_2 (U^2 + 2U + 1) \\ = \frac{1}{Z_2} (Z_1^3 + 2Z_1^2 Z_2 + Z_1 Z_2^2)$$

$$p^2 U = (Z_1 + Z_2)^2 \left(\frac{Z_1}{Z_2} \right)$$

$$= \frac{1}{Z_2} (Z_1^3 + 2Z_1^2 Z_2 + Z_1 Z_2^2)$$

donc $q(U+1)^2 = p^2 U$

$$2) \theta \in \left] -\frac{\pi}{2}; 0 \right] \quad p^2 = 4q \cos^2 \theta$$

$$a) q(U+1)^2 = p^2 U \Rightarrow (U+1)^2 = 4 \cos^2 \theta \cdot U$$

$$U^2 + (2 - 4 \cos^2 \theta) U + 1 = 0$$

$$b) U^2 + (2 - 4 \cos^2 \theta) U + 1 = 0$$

$$\Delta = 16 \cos^4 \theta - 16 \cos^2 \theta$$

$$\delta = 4i \cos \theta \sin \theta \text{ ou } \delta = -4i \cos \theta \sin \theta$$

$$U_1 = \frac{4 \cos^2 \theta - 2 + 4i \cos \theta \sin \theta}{2}$$

$$* U_1 = \cos 2\theta + i \sin 2\theta$$

$$U_2 = \frac{4 \cos^2 \theta - 2 - 4i \cos \theta \sin \theta}{2}$$

$$* U_2 = \cos 2\theta - i \sin 2\theta$$

$$3) p = -2i \text{ et } Z_1 = 1-i ; p = Z_1 + Z_2 \Rightarrow Z_2 = -1-i$$

$$q = Z_1 Z_2 \Rightarrow q = -2 ; \text{ on a (E) : } Z^2 + 2iZ - 2 = 0$$

$$b) p^2 = 4 \cos^2 \theta \Rightarrow \cos^2 \theta \Rightarrow \frac{1}{2}$$

$$\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } \cos \theta = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ comme}$$

$$\theta \in \left] -\frac{\pi}{2}; 0 \right] \text{ on a } \theta = -\frac{\pi}{4} \text{ d'où } U_1 = -i$$

$$U_2 = i$$

EXERCICE 2

$$F(x) = \frac{1}{x(x+1)} ; x > 0$$

$$1) f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1} \Rightarrow f(x) = \frac{(a+b)x + a}{x(x+1)}$$

$a+b = 0$ et $a = 1$ donc $a = 1$ et $b = -1$

$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$, soit H une primitive de f ,

$$H(x) = \ln x - \ln(x+1) + k ; k \in \mathbb{R}$$

$$c) F(x) = \int_1^x f(t) dt = [\ln t - \ln(t+1)]$$

$$F(x) = x - \ln(x+1) + \ln 2$$

$$2)n \neq 0; S(n) = F(1) + F(2) + \dots + F(n)$$

$$\left. \begin{array}{l} F(1) = -\ln 2 + \ln 2 \\ F(2) = \ln 2 - \ln 3 + \ln 2 \\ \cdot \\ \cdot \\ F(n) = \ln(n) - \ln(n+1) + \ln 2 \end{array} \right\} \text{somme}$$

$$S(n) = n \ln 2 - \ln(n+1)$$

$$S(n) = (n+1) \left[\frac{n \ln 2}{n+1} - \frac{\ln(n+1)}{n+1} \right]_1^x$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} S(n) = +\infty$$

PROBLEME

PARTIE A

$$1)a) p(A) = \frac{C_5^2 + C_5^2 + C_3^2}{C_{13}^2} = \frac{23}{78}$$

$$b) p(B) = \frac{C_5^1 \cdot C_5^1 + C_5^1 \cdot C_3^1 + C_5^1 \cdot C_3^1}{C_{13}^2} = \frac{55}{78}$$

$$c) p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

$$p(A \cap B) = 0 \text{ car } A \cap B = \emptyset$$

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) = 1$$

PARTIE B

1)a) on peut tirer

$$2B \rightarrow (-1 + (-1)) = -2 \text{ points}$$

$$2R \rightarrow (1+1) = 2 \text{ points}$$

$$2V \rightarrow (0+0) = 0 \text{ point}$$

$$1B ; 1R \rightarrow (-1+1) = 0 \text{ point}$$

$$1B ; 1V \rightarrow (-1+0) = -1 \text{ point}$$

$$1R ; 1V \rightarrow (1+0) = 1 \text{ point}$$

$$X = \{-2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2\}$$

$$b) p(X = -2) = \frac{C_5^2}{C_{13}^2} = \frac{10}{78}$$

$$p(X = 0) = \frac{C_5^2 + C_5^1 \cdot C_3^1}{C_{13}^2} = \frac{25}{78}$$

$$p(X = 2) = \frac{C_3^1}{C_{13}^2} = \frac{3}{78}$$

$X=x_i$	-2	-1	0	1	2	Σp
$P(X=x_i)$	$\frac{10}{78}$	$\frac{25}{78}$	$\frac{25}{78}$	$\frac{15}{78}$	$\frac{3}{78}$	1

$$c) E(X) = \Sigma x_i p_i = -0.3$$

$$V(X) = \Sigma x_i^2 p_i - [E(X)]^2 = 1.08$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 1.03$$

$$2) F: \mathbb{R} \rightarrow [0; 1]$$

$$x \mapsto p(X \leq x)$$

$$x < -2 \quad F(x) = 0$$

$$-2 \leq x < -1 \quad F(x) = \frac{10}{78}$$

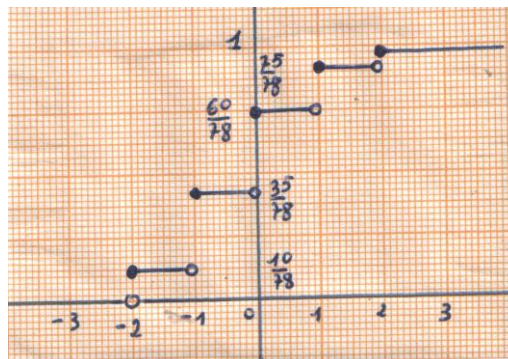
$$-1 \leq x < 0 \quad F(x) = \frac{35}{78}$$

$$0 \leq x < 1 \quad F(x) = \frac{60}{78}$$

$$1 \leq x < 2 \quad F(x) = \frac{75}{78}$$

$$x \geq 2 \quad F(x) = \frac{78}{78} = 1$$

Représentation graphique



PARTIE C

1) "E" échec ; "S" succès

$$p(E) = p(X = -2) + p(X = -1) + p(X = 0)$$

$$+ p(X = 2) = \frac{63}{78} = 0.807$$

2) C'est une épreuve de Bernoulli

$$p = \frac{15}{78} \text{ et } q = \frac{63}{78}$$

$$p(2S) = C_6^2 \left(\frac{15}{78}\right)^2 \left(\frac{63}{78}\right)^4 = 0.23$$

3) Dans ce cas $n = 6$; $p = \frac{15}{78}$ et $q = \frac{63}{78}$
 $E(X) = np = 1.15$; $V(X) = npq = 0.93$



SUJET 10

EXERCICE 1

$p(R^+) = 0.76$; $p(R^-) = 0.24$

1) (Voir EXERCICE N° 8
 PROBABILITE)

2) Dans $(R_m^+ ; R_f^-)$ il y a 8 %
 d'accident

a) l'enfant subit le traitement donc
 ses parents sont $(R_m^+ ; R_f^-)$.
 Soit « E_T » l'événement l'enfant subit
 le traitement et « $\bar{E}_T$ » son contraire,

on a $p(E_T) = \frac{8}{100} \cdot 0.1824 = 0.014592$

$p(\bar{E}_T) = 1 - p(E_T) = 0.985408$

3) il y a 8 naissances par semaine

a) c'est une loi binomiale

$p = C_8^3 (0.0145292)^3 (0.985408)^5$

$p = 2.8868544 \cdot 10^{-6}$

b) « au moins un cas » son contraire
 « aucun cas » ($\bar{X}$). $p(\bar{X}) =$
 $(0.985408)^8$

$p(X) = 1 - p(\bar{X}) = 0.110944915$

4) il y a erreur dans les cas suivants

* Bébé est dans les cas (b, c d) du

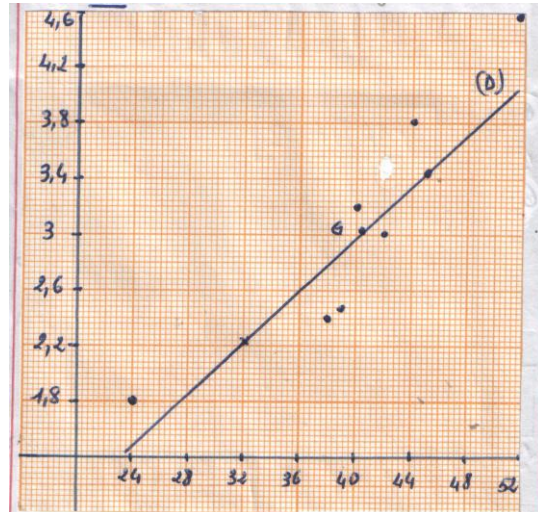
1) et est traité

* Bébé est dans le cas (a) du 1) et est
 dans les 92% puis est traité

* Bébé est dans (a) du 1) puis dans les
 8% et n'est pas traité.

EXERCICE 2

1) Représentation graphique



2) $\bar{x} = \frac{324}{8} = 40.5$ et $\bar{y} = \frac{24.8}{8} = 3.1$,

$G(40.5 ; 3.1)$

3) $\text{cov}(x ; y) = 5.725$, $V(X) = 56$; $V(X)$
 $= 0.682$

$r = 0.92$, le coefficient de corrélation
 est bon

4) $a = \frac{\text{cov}(x ; y)}{V(X)} = 0.102$

$b = \bar{y} - a\bar{x} \Rightarrow b = -1.031$

$y = 0.102x - 1.031$

pour $x = 56$ on a $y = 4.681$ qui est
 compris entre 4.6 millions et 4.7
 millions

PROBLEME

PARTIE A

1) $g(x) = \frac{|x - \sqrt{2}|}{4 - x^2}$

$Dg =]-\infty ; -2[\cup]-2 ; 2[\cup]2 ; +\infty [$

2)
$$\begin{cases} x \in]-\infty ; \sqrt{2}[\cup]2 ; +\infty[& g(x) = \frac{-x + \sqrt{2}}{4 - x^2} \\ x \in]\sqrt{2} ; 2[& g(x) = \frac{x - \sqrt{2}}{4 - x^2} \\ g(\sqrt{2}) = 0 \end{cases}$$

3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$, la droite $y = 0$ est asymptote horizontale à $-\infty$ et à $+\infty$
Etude du signe de $4 - x^2$

x	$-\infty$	-2	2	$+\infty$	
$4-x^2$	-	0	+	0	-

$\lim_{x \rightarrow -2} |x - \sqrt{2}| > 0$ et $\lim_{x \rightarrow 2} |x - \sqrt{2}| > 0$ donc

$\lim_{x \rightarrow -2} g(x) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = +\infty$

$\lim_{x \rightarrow 2} g(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -2} g(x) = -\infty$

(Δ) : $x = -2$ et (Δ_2) : $x = 2$ sont des asymptotes verticales

PARTIE B

1) Dérivabilité en $\sqrt{2}$

à gauche

$$T = \frac{-x + \sqrt{2}}{4 - x^2} = \frac{-1}{4 - x^2} \text{ et } \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} T = -\frac{1}{2}, h$$

est dérivable en $\sqrt{2}$ à gauche

à droite

$$T = \frac{x - \sqrt{2}}{4 - x^2} = \frac{1}{4 - x^2} \text{ et } \lim_{x \rightarrow \sqrt{2}} T = \frac{1}{2},$$

h est dérivable en $\sqrt{2}$ à droite
 $h_g(\sqrt{2}) \neq h_d(\sqrt{2})$ donc h n'est pas dérivable en $\sqrt{2}$. (Ch) admet deux demi tangentes de vecteurs

directeurs $\vec{U}_g\left(-1; \frac{1}{2}\right)$; $\vec{U}_d\left(1; \frac{1}{2}\right)$

2)

$$x \in]-\infty; \sqrt{2}[\cup]2; +\infty[, h'(x) = \frac{-x^2 + 2x\sqrt{2} - 4}{(4 - x^2)^2}$$

$$h'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -x^2 + 2x\sqrt{2} - 4 \geq 0$$

$\sqrt{\Delta} = -8 < 0 \Rightarrow h'(x) < 0$ d'où h est strictement décroissante sur $]-\infty; \sqrt{2}[\cup]2; +\infty[$

$$x \in]-\infty; \sqrt{2}[\cup]2; +\infty[, h'(x) = \frac{x^2 - 2x\sqrt{2} + 4}{(4 - x^2)^2}$$

$$h'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x\sqrt{2} + 4 \geq 0$$

$\sqrt{\Delta} = -8 < 0 \Rightarrow h'(x) > 0$ d'où h est strictement croissante sur $]\sqrt{2}; 2[$

2) voir 2)

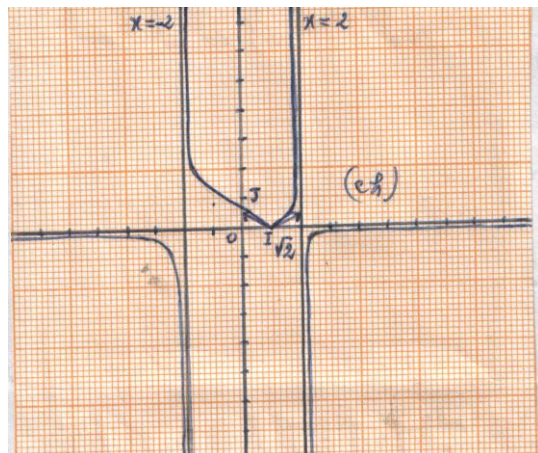
x	$-\infty$	-2	$\sqrt{2}$	2	$+\infty$
h'	-	-	+	+	+
h	$0 \searrow +\infty$	$+\infty \searrow 0$	$0 \nearrow +\infty$	$+\infty \nearrow 0$	$0 \nearrow -\infty$

les limites aux bornes de D_h sont celles aux bornes de D_g

4) Positions relatives

D'après le tableau on a $\forall x \in]-\infty; -2[$ et $]2; +\infty[, h(x) < 0$ donc (Ch) est en dessous de (D): $y = 0$ et $\forall x \in]-2; 2[, h(x) > 0$ donc (Ch) est au dessus de (D).

5) Représentation graphique



PARTIE C

$$1) \forall x \in]-\infty ; 0] ,$$

$$g(x) = \frac{-x + \sqrt{2}}{4 - x^2}$$

$$2) S = \int_{\lambda}^0 f(x) dx = \int_{\lambda}^0 \frac{-x}{4 - x^2} dx$$

$$S =$$

$$\frac{1}{2} [\ln(4 - x^2)]_{\lambda}^0 = \frac{1}{2} (\ln 4 - \ln(4 - \lambda^2))$$

$$2) \lim_{\lambda \rightarrow 4} S = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{\lambda \rightarrow 0} S = 0$$

FIN

COURAGE A TOI
COURAGE A TOI

Mr TOMETY ALAIN ODY

**Professeur de Mathématiques au
Lycée Moderne de Bondoukou**