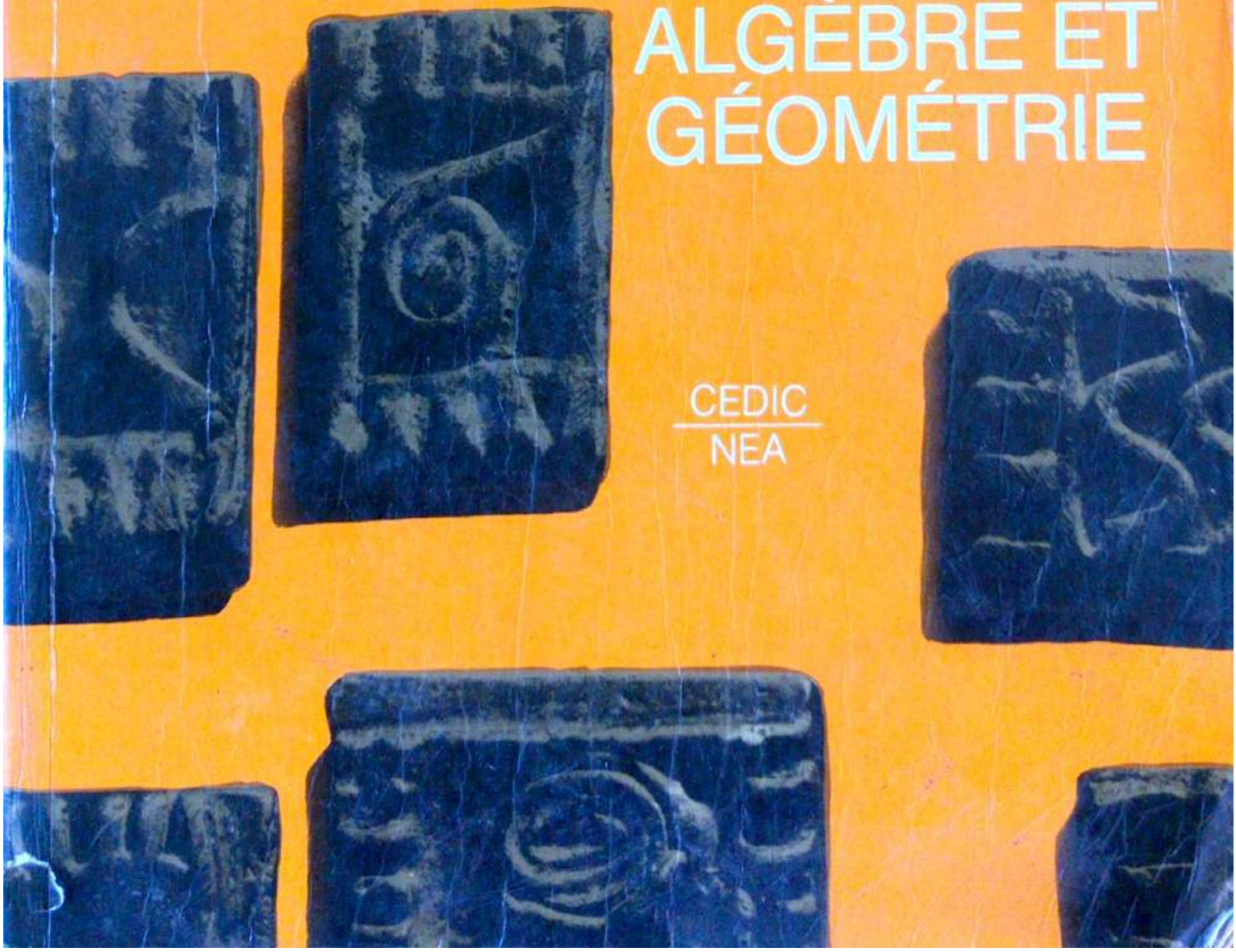
collection
IRMA

Fomesoutra.com
ça soutra!

MATHEMATIQUES
TERMINALE
D.

ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE



CEDIC
NEA

Scanned by CamScanner

Collection IRMA

ous la direction de Saliou TOURÉ
directeur de l'Institut de Recherches Mathématiques)

SARRÉ
MOUHAMAD
Tle
TS

Mathématiques

en classe de Terminale D

TOME 2

ALGÈBRE ET GÉOMÉTRIE

Georgette OUEDRAOGO-HADDAD
Yves CANAZZI

Scanned by CamScanner

ISBN : 2-7124-0330-4
2-7236-1411-5

© Cedic/Nathan — Les Nouvelles Editions Africaines — Abidjan 1987

Toute reproduction, même partielle, de cet ouvrage est interdite. Une copie ou reproduction par quelque procédé que ce soit, photographie, photocopie, microfilm, bande magnétique, disque ou autre, constitue une contrefaçon passible des peines prévues par la loi du 11 mars 1957 sur la protection des droits d'auteur.

N° d'éditeur : 603

Scanned by CamScanner

PRÉFACE

Le présent manuel est le résultat d'un travail collectif réalisé par les enseignants-chercheurs de l'Institut de Recherches Mathématiques (IRMA). Il répond au souci du Ministère de l'Éducation Nationale et de la Recherche Scientifique de Côte-d'Ivoire de mettre à la disposition des enseignants et des élèves un outil de travail fonctionnel et adapté au contexte socio-culturel ivoirien et africain. Son élaboration repose sur de nombreuses expérimentations réalisées dans des classes témoins réparties sur l'ensemble du territoire afin de tenir compte des variantes socio-culturelles et des modes de perception et de compréhension des concepts fondamentaux. Par ailleurs, des comparaisons enrichissantes ont été également réalisées avec d'autres pays africains francophones et anglophones engagés dans des recherches similaires.
À travers son contenu, son support didactique, ses illustrations et sa présentation, ce manuel, destiné aux classes de Terminale D, se propose d'atteindre trois objectifs essentiels :

- Le premier consiste, compte tenu de l'hétérogénéité du niveau et de la formation des élèves accédant aux classes de Terminale D, à mettre l'accent sur les notions de base indispensables pour une bonne assimilation des programmes de mathématiques et de sciences physiques du second cycle.

- Le second vise à rendre moins abstrait et par conséquent plus vivant l'enseignement des mathématiques en établissant dans la mesure du possible une relation permanente entre les concepts, les méthodes de démonstration et leurs applications dans le vécu quotidien des élèves.

- Le troisième objectif est d'offrir aux élèves et aux maîtres un instrument qui permette, d'une part, la transmission et l'acquisition graduelles du contenu du programme et, d'autre part, l'auto-entraînement des élèves grâce à des exercices progressifs et des problèmes variés capables de tester en permanence le niveau de compréhension et de maîtrise des notions fondamentales.

Nous sommes conscients que malgré l'importance de l'effort consenti par les auteurs de ce manuel des imperfections demeurent que nous demandons à tous les utilisateurs de nous signaler afin de pouvoir y apporter les améliorations qui s'imposent à l'occasion des prochaines éditions.
L'IRMA est ouvert à toute contribution susceptible d'enrichir le contenu et la forme des manuels de sa collection.

Saliou TOURÉ

Scanned by CamScanner

PLAN DE L'OUVRAGE

ANALYSE

- Complément sur les fonctions numériques
- Calcul intégral
- Fonctions logarithmes
- Fonction exponentielle népérienne
- Fonctions exponentielles
  Fonctions puissances
- Exemples d'études de fonctions
- Suites numériques
- Equations différentielles

ALGEBRE ET GEOMETRIE

- Les vecteurs de l'espace
- Exemples de résolution de systèmes d'équations linéaires. Programmation linéaire.
- Les nombres complexes
- Nombres complexes et transformations du plan
- Les coniques
- Dénombrement
- Statistique
- Probabilités

Scanned by CamScanner

REMERCIEMENTS

Nous remercions les personnes qui ont participé à l'expérimentation du contenu de cet ouvrage.

Madame : GUYON Inspecteur de Mathématiques de l'Enseignement Secondaire.
Messieurs : BEGHAIN chercheur à l'IRMA,
BOURY professeur au L.G. de Bingerville,
CANAZZI chercheur à l'IRMA,
SOULIE professeur au L.G. de Bingerville.

Nous remercions également les personnes suivantes qui ont bien voulu lire notre manuscrit et nous faire profiter de leurs remarques pertinentes :

Mesdames : BRETON chercheur à l'IRMA,
VALETTE animatrice pédagogique à la S.D.E.A.C.P.
Messieurs : BOUTTE Inspecteur Pédagogique Régional de Mathématiques,
CARPENTIER chercheur à l'IRMA,
CONDAMINE chercheur à l'IRMA,
DOAN animateur pédagogique à la S.D.E.A.C.P.
DUHOUX chercheur à l'IRMA,
PROCACCINI chercheur à l'IRMA

Les auteurs

Scanned by CamScanner

SOMMAIRE

1. Les vecteurs de l'espace 1
1) L'espace vectoriel $(W, t, .)$ 1
2) Bilan de la structure d'espace vectoriel 14
3) Le produit scalaire dans W 18
4) Le produit vectoriel dans W 22

2. Exemples de résolution de systèmes d'équations linéaires Programmation linéaire 32
1) Exemples de résolution de systèmes d'équations linéaires par une méthode systématique 32
2) Problèmes pratiques utilisant la résolution de systèmes d'équations linéaires 43
3) Programmation linéaire-optimisation 47

3. Les nombres complexes 58
1) Le corps des nombres complexes (Forme algébrique) 58
2) Représentation géométrique d'un nombre complexe (Forme trigonométrique) 72
3) Équation du second degré dans C 95

4. Nombres complexes et transformations du plan 106
1) Transformation de C associée à une transformation du plan 106
2) Quelques transformations élémentaires du plan 108
3) Les similitudes du plan 119
4) Utilisation des similitudes dans des activités géométriques 131

5. Les coniques 138
1) L'ellipse 138
2) L'hyperbole 154
3) La parabole 170

6. Le dénombrement 191
1) Application d'un ensemble fini dans un ensemble fini 191
2) Injections d'un ensemble fini dans un ensemble fini 195
3) Bijection entre deux ensembles finis 200
4) Sous-ensemble d'un ensemble fini 204
5) Calculs avec les nombres A_n^p, n'., C_n^p 209

7. Statistique 217
1) Série statistique double 217
2) Nuage de points 223
3) Ajustement et corrélation linéaire 226

8. Probabilités 242
1) Expériences et événements 242
2) Probabilité d'un événement 249
3) Variables aléatoires 266

Problèmes de synthèse 287

Scanned by CamScanner

PROGRAMME DE TERMINALE D

ANALYSE

On insistera davantage sur les applications pratiques et l'utilisation de ces notions, plutôt que sur leur aspect théorique et l'on développera les techniques de calcul.

I. LIMITES, CONTINUITÉ, DÉRIVÉES, PRIMITIVES

— Composition d'une fonction de limite ℓ par une fonction continue en ℓ.
— Continuité de la composée de deux fonctions continues.
— Continuité sur un intervalle (on admettra les propriétés d'une fonction continue sur un intervalle).
— Fonction réciproque d'une fonction continue strictement monotone sur un intervalle (on admettra la continuité).
— Fonction dérivée de la composée, de deux fonctions dérivables.
— Fonction dérivée de la réciproque d'une fonction dérivable strictement monotone sur un intervalle.
— Exemple de dérivées de fonctions du type :

$$f^m, \quad m \in Q.$$

— Fonction dérivée seconde d'une fonction.
— Dérivées successives.
— Compléments sur les primitives de fonctions des types :

$$f' f^m; \quad (g' \circ f) f' \quad m \in Q - \{-1\}.$$

II. INTÉGRALE

— Intégrale d'une fonction continue sur $[a, b]$.
— Calcul d'aire.
— Intégration par parties.
— Calcul approché d'une intégrale.

III. EXEMPLES D'ÉTUDE DE FONCTIONS

La recherche des asymptotes obliques et de points d'inflexion ne sera pas à faire de façon systématique.
— Fonctions polynômes.
— Fonctions rationnelles.
— Fonctions des types :

$$x \longmapsto f(\cos x, \sin x)$$
$$x \longmapsto f(\tan x).$$

Scanned by CamScanner

— Asymptotes obliques : la recherche ne sera pas à faire de façon systématique.
— Fonctions logarithme népérien et exponentielle :
  - Fonction logarithme népérien.
  - Fonction exponentielle népérienne.
  - Activités numériques :
    — logarithme décimal ;
    — fonctions puissance : application aux problèmes économiques, biologiques.
  - Introduction à la notion d'équation différentielle à l'aide de la résolution d'équation des types :

$$f' + kf = 0$$
$$f'' + kf = 0.$$

IV. SUITES NUMÉRIQUES

— Étude de quelques suites récurrentes. Cas particuliers des suites arithmétiques et des suites géométriques. Applications pratiques.
— Convergence de telles suites sur quelques exemples.
— Théorèmes complémentaires (majoration, minoration, limite infinie d'une suite),

ALGÈBRE

I. EXEMPLES DE RÉSOLUTION DE SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES

Utilisation d'un tableau triangulaire pour résolution.

II. DÉNOMBREMENT

— Nombre d'applications d'un ensemble fini dans un autre ensemble fini ; arrangements ; combinaisons ; permutations dans un ensemble fini.

III. STATISTIQUE

— Série statistique à deux caractères :
  - représentation d'un nuage de points (cas des points pondérés, point moyen) ;
  - ajustement linéaire par la méthode des moindres carrés ;
  - corrélation linéaire.

IV. PROBABILITÉS

On veillera à faire ressortir le lien naturel entre les statistiques et les probabilités.
— Espace probabilisé fini.
— Probabilité conditionnelle, événements indépendants.
— Variable aléatoire. Espérance, variance d'une variable aléatoire.
— Loi binômiale.

V. ENSEMBLE $\mathbb{C}$ DES NOMBRES COMPLEXES

— Bijection de $\mathbb{R}^2$ sur C affixe d'un point, d'un vecteur.
— Somme, produit, quotient de deux complexes. Conjugué d'un complexe. Interprétation géométrique de ces notions. Application à l'étude des similitudes directes ou indirectes.
— Formule de Moivre. Racines $n^{\text{ième}}$ d'un complexe.
— Résolution d'équations du second degré. Exemple de factorisation de polynômes.

Scanned by CamScanner

GÉOMÉTRIE

I. LES VECTEURS DE L'ESPACE

Définition - Opérations - Base - Coordonnées - Produit scalaire - Norme d'un vecteur - Traduction analytique dans une base orthonormée.
Orientation de l'espace.
Produit vectoriel - Traduction analytique dans une base orthonormée directe.

II. CONIQUES

— Définition bifocale des coniques à centre ; propriétés géométriques.
— Définition de la parabole par foyer et directrice ; propriétés géométriques.
— Équation réduite d'une conique ; étude analytique d'une conique.
— Régionnement du plan par une conique.

Scanned by CamScanner

1 Les vecteurs de l'espace

Leçon 1 : L'ESPACE VECTORIEL $(\mathcal{W}, +, \cdot)$

Leçon 2 : BILAN DE LA STRUCTURE D'ESPACE VECTORIEL

Leçon 3 : LE PRODUIT SCALAIRE DANS $\mathcal{W}$

Leçon 4 : LE PRODUIT VECTORIEL DANS $\mathcal{W}$

1 L'espace vectoriel $(\mathcal{W}, +, \cdot)$

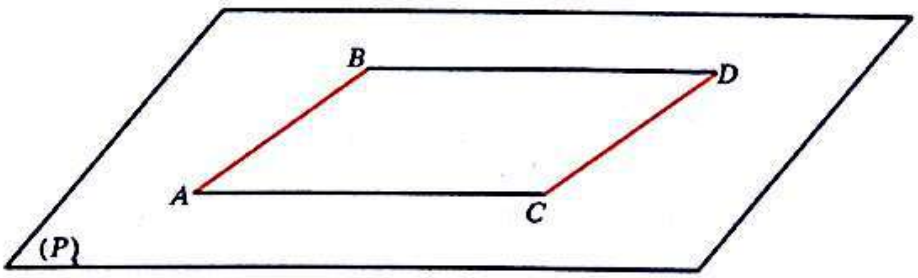
1) Les vecteurs de l'espace $\mathcal{E}$

a) **Définition**

• *Bipoints équipollents de $\mathcal{E}$*

— Considérons quatre points coplanaires de $\mathcal{E}$: A, B, C et D;
c'est-à-dire quatre points appartenant à un même plan (P) de $\mathcal{E}$.

Si les bipoints (A, B) et (C, D) sont équipollents dans le plan (P) qui les contient, on dit qu'ils sont équipollents dans l'espace $\mathcal{E}$.



Définition

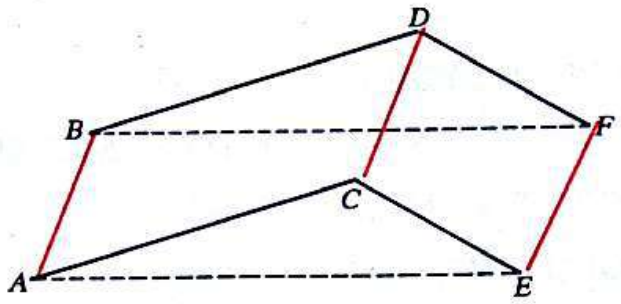
On dit que deux bipoints (A, B) et (C, D) de l'espace $\mathcal{E}$, sont équipollents, lorsque (A, D) et (B, C) ont le même milieu.

Remarque

— Si les bipoints (A, B) et (C, D) sont équipollents, alors les points A, B, C, D sont coplanaires.

Scanned by CamScanner

— La relation d'équipollence définie dans l'ensemble des bipoints de $\mathcal{E}$ est une relation *d'équivalence.*



• *Vecteurs de l'espace* $\mathcal{E}$

Définition

On appelle **vecteur de l'espace** $\mathcal{E}$, de représentant (A, B), l'ensemble des bipoints de l'espace $\mathcal{E}$, équipollents à (A, B).

On le note : $\overrightarrow{AB}$, ou tout simplement : $\vec{u}$.

On désigne par $\mathcal{W}$ l'ensemble des vecteurs de $\mathcal{E}$.

Conséquence immédiate de la définition

Étant donné un point A de $\mathcal{E}$ et un vecteur $\vec{u}$ de $\mathcal{W}$, il existe un unique point M de $\mathcal{E}$ tel que :

$$\overrightarrow{AM} = \vec{u}.$$

Égalité de Chasles

Puisque trois points de l'espace appartiennent nécessairement à un même plan, on a :

$$\forall (O, A, B) \in \mathcal{E}^3 \quad \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}.$$

b) **Addition dans** $\mathcal{W}$

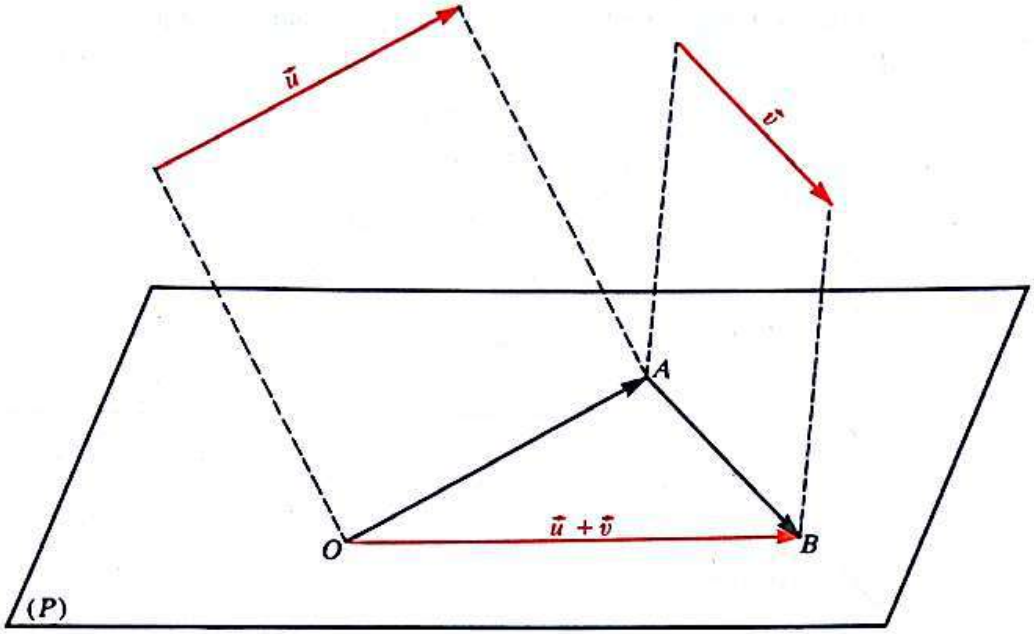
• Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathcal{W}$ et O un point de $\mathcal{E}$.

Il existe un unique point A tel que : $\overrightarrow{OA} = \vec{u}$

et un unique point B tel que : $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$.

Les points O, A, B appartiennent à un même plan (P).

Scanned by CamScanner



On montre alors que le vecteur $\overrightarrow{OB}$ est indépendant du choix du point O; c'est la somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathcal{W}$.

On a : $$\vec{u}+\vec{v}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}.$$

• On a ainsi défini l'*addition dans* $\mathcal{W}$, c'est l'application :

$$\mathcal{W}\times\mathcal{W}\longrightarrow\mathcal{W}$$
$$(\vec{u},\vec{v})\longmapsto\vec{u}+\vec{v}.$$

Elle possède les mêmes propriétés que l'addition dans $\mathcal{V}$. D'où :

Théorème

$(\mathcal{W},+)$ est un groupe commutatif.

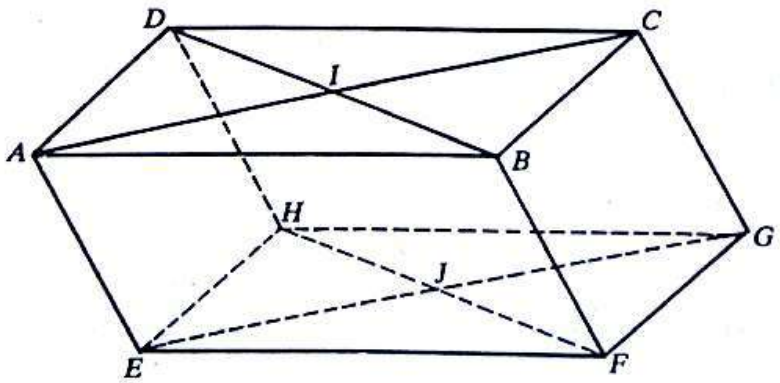
Exercice

1) On considère le parallélépipède $ABCDEFGH$.
Soit I le centre de $ABCD$ et J celui de $EFGH$.

— Trouver quatre représentants du vecteur $\vec{IJ}$.

— Montrer que le quadrilatère $AIGJ$ est un parallélogramme.

— Construire un représentant d'origine C de chacun des vecteurs :
$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{EH};\quad \overrightarrow{GI}+\overrightarrow{HJ};\quad \overrightarrow{BF}+\overrightarrow{AI}.$$



Scanned by CamScanner

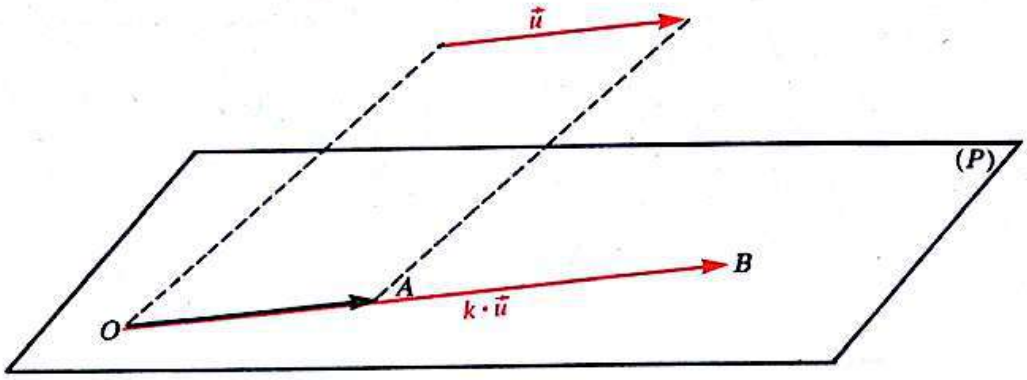
c) Multiplication d'un vecteur de $\mathcal{W}$ par un nombre réel

• Soit k un nombre réel et $\vec{u}$ un vecteur de $\mathcal{W}$ de représentant (O, A).

Il existe un plan (P) qui contient les points O et A.

Désignons par B le point du plan (P) tel que :

$$\overrightarrow{OB} = k \cdot \overrightarrow{OA}.$$



On montre alors que le vecteur $\overrightarrow{OB}$ est indépendant du choix du point O et du plan (P); c'est le produit du vecteur $\vec{u}$ de $\mathcal{W}$ par le nombre réel k.

On a : $$k \cdot \vec{u} = k \cdot \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}.$$

• On a ainsi défini la *multiplication d'un vecteur de $\mathcal{W}$ par un nombre réel;* c'est l'application :

$$\mathbb{R} \times \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{W}$$
$$(k, \vec{u}) \longmapsto k \cdot \vec{u}.$$

Elle possède les mêmes propriétés que la multiplication d'un vecteur de $\mathcal{V}$ par un nombre réel.

On résume les propriétés de l'addition des vecteurs de $\mathcal{W}$ et celles de la multiplication d'un vecteur de $\mathcal{W}$ par un nombre réel en disant que :

Théorème

$(\mathcal{W}, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

En déduire des règles permettant de calculer dans l'espace vectoriel $(\mathcal{W}, +, \cdot)$.

2) Combinaison linéaire de vecteurs de l'espace $\mathcal{E}$

a) Définition

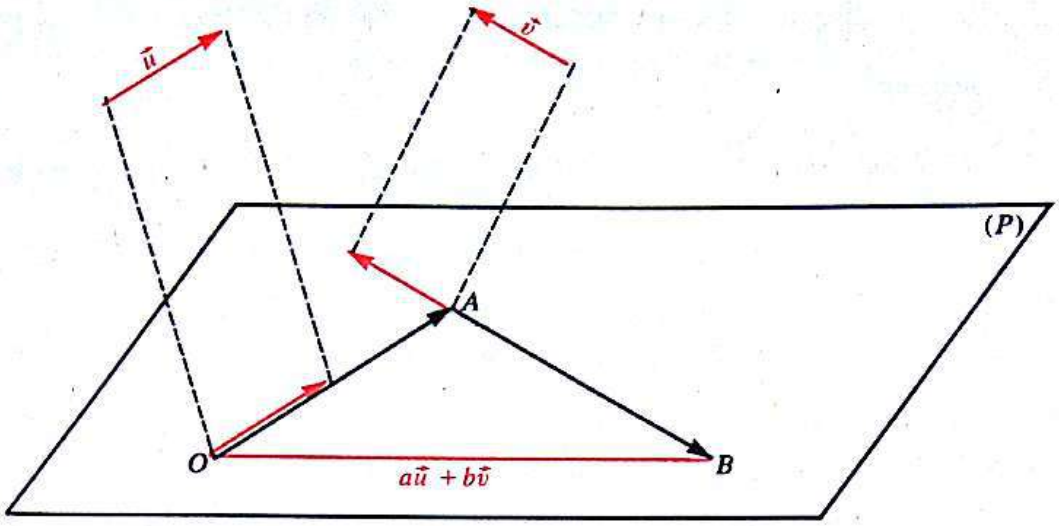
Soit | $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathcal{W}$
| a et b deux nombres réels.

Le vecteur $\vec{w}$ tel que :

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$$

est appelé **combinaison linéaire** des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Scanned by CamScanner



$$\overrightarrow{OA} = a\vec{u}\,; \quad \overrightarrow{AB} = b\vec{v}\,; \quad \overrightarrow{OB} = a\vec{u} + b\vec{v}.$$

De même on peut définir une combinaison linéaire de 3, 4, ... n vecteurs de $\mathcal{W}$.

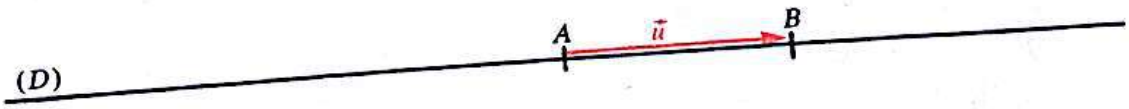
b) Vecteurs colinéaires

• *Vecteur directeur d'une droite de l'espace $\mathcal{E}$*

On a vu en classe de Seconde, qu'une droite (D) de l'espace $\mathcal{E}$ est déterminée par deux de ses points distincts A et B.

On dit que le vecteur $\vec{u}$ de représentant (A, B) est un *vecteur directeur* de la droite (D).

(Tout vecteur directeur d'une droite est donc non nul.)



On dit que des vecteurs non nuls de $\mathcal{W}$ ont *même direction* lorsque ce sont des vecteurs directeurs d'une même droite.

Ainsi, deux vecteurs non nuls de $\mathcal{W}$, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont même direction si et seulement si, il existe un nombre réel non nul k tel que :

$$\vec{u} = k\vec{v}.$$

— Si : $k > 0$, on dit que : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de *même sens*.

— Si : $k < 0$, on dit que : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont de *sens contraires*.

• *Vecteurs colinéaires*

Deux vecteurs de $\mathcal{W}$ sont dits *colinéaires* si :

ou bien
- l'un au moins est le vecteur nul
- ces vecteurs ont même direction.

Scanned by CamScanner

Comme dans le plan, on montre que :

Théorème

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathcal{W}$ sont colinéaires si et seulement si, il existe deux nombres réels a et b tels que :

$$(a, b) \neq (0, 0) \quad \boxed{\text{et}} \quad a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{0}.$$

Donner une condition pour que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathcal{W}$ soient non colinéaires.

• **Activité :** *Droite vectorielle*

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul de $\mathcal{W}$.

Montrer que, l'ensemble (Δ) des vecteurs colinéaires à $\vec{u}$ est une partie de $\mathcal{W}$, stable par combinaison linéaire, c'est-à-dire que toute combinaison linéaire de deux vecteurs de (Δ) est un vecteur de (Δ).

On dit que (Δ) est *la droite vectorielle engendrée par* le vecteur $\vec{u}$.

$$\forall \vec{v} \in \mathcal{W} \quad [\vec{v} \in (\Delta)] \iff [\exists k \in \mathbb{R} \quad \vec{v} = k\vec{u}\,].$$

Montrer que :

— La droite vectorielle (Δ) est engendrée par tout vecteur non nul qu'elle contient.

— Le vecteur nul appartient à toute droite vectorielle de $\mathcal{W}$.

c) **Vecteurs coplanaires**

• **Activité :** *Plan vectoriel*

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non coplanaires de $\mathcal{W}$.

Montrer que, l'ensemble (π) des combinaisons linéaires de $\vec{u}$ et $\vec{v}$ est une partie de $\mathcal{W}$, stable par combinaison linéaire.

On dit que (π) est *le plan vectoriel engendré par* $(\vec{u}, \vec{v}\,)$.

$$\forall \vec{w} \in \mathcal{W} \quad [\vec{w} \in (\pi)] \iff [\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2 \quad \vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}\,].$$

Montrer que :

— Le plan vectoriel (π) est engendré par tout couple de vecteurs non colinéaires qu'il contient.

— Le vecteur nul appartient à tout plan vectoriel de $\mathcal{W}$.

• *Vecteurs coplanaires*

Des vecteurs de $\mathcal{W}$ sont dits *coplanaires* s'ils appartiennent à un même plan vectoriel.

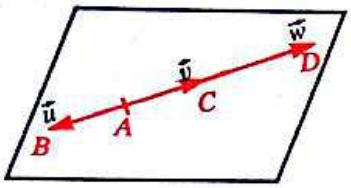
• Montrer que :

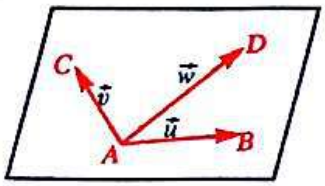
Deux vecteurs quelconques de $\mathcal{W}$ sont coplanaires.

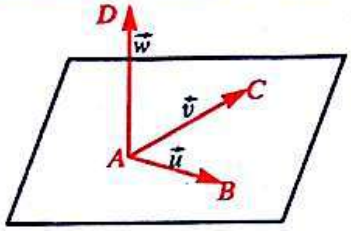
Scanned by CamScanner

• *Étude de trois vecteurs de $\mathcal{W}$*

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ trois vecteurs de $\mathcal{W}$ de représentants respectifs : (A, B); (A, C); (A, D).

<table>
<tr><td colspan="2">$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont colinéaires
A, B, C, D sont alignés</td><td colspan="2">$\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires
A, B, C ne sont pas alignés</td></tr>
<tr><td colspan="2">

Tout plan vectoriel qui contient un vecteur, contient les deux autres</td><td>

$\vec{w}$ appartient au plan vectoriel engendré par $(\vec{u}, \vec{v})$
$D \in (ABC)$</td><td>

$\vec{w}$ n'appartient pas au plan vectoriel engendré par $(\vec{u}, \vec{v})$.
$D \notin (ABC)$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires
A, B, C, D sont coplanaires</td><td>$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont non coplanaires
A, B, C, D sont non coplanaires</td></tr>
</table>

Ainsi, trois vecteurs quelconques de $\mathcal{W}$ sont :

ou bien — coplanaires
ou bien — non coplanaires

[Les vecteurs : $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$ sont coplanaires dans $\mathcal{W}$] $\Leftrightarrow$ [Les points : A, B, C, D sont coplanaires dans $\mathcal{E}$.]

Montrer que :

Théorème

Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ de $\mathcal{W}$ sont coplanaires si et seulement si, il existe trois nombres réels a, b, c tels que :

$$(a, b, c) \neq (0, 0, 0) \quad \text{et} \quad a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}.$$

Donner une condition pour que trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ de $\mathcal{W}$ soient non coplanaires.

d) **Activité :** *Combinaison linéaire de trois vecteurs non coplanaires de $\mathcal{W}$*

Nous savons construire une combinaison linéaire de deux vecteurs de $\mathcal{W}$, il suffit de considérer des représentants dans un même plan de $\mathcal{E}$. Nous savons aussi décomposer un vecteur de $\mathcal{W}$ suivant deux vecteurs de $\mathcal{W}$.

Scanned by CamScanner

• *Somme de trois vecteurs non coplanaires de $\mathcal{W}$*

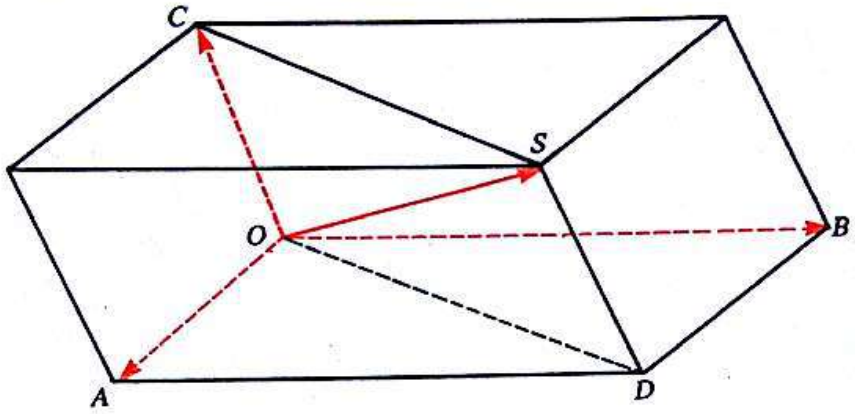
On donne trois vecteurs non coplanaires de $\mathcal{W}$: $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.

Soit les points O, A, B et C tels que :

$$\overrightarrow{OA} = \vec{u} \; ; \quad \overrightarrow{OB} = \vec{v} \; ; \quad \overrightarrow{OC} = \vec{w}.$$

On en déduit le point D tel que : $\overrightarrow{OD} = \vec{u} + \vec{v}$

puis le point S tel que : $\overrightarrow{OS} = \vec{s} = \vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$



Donner un programme de construction d'un représentant de la somme de trois vecteurs non coplanaires de $\mathcal{W}$.

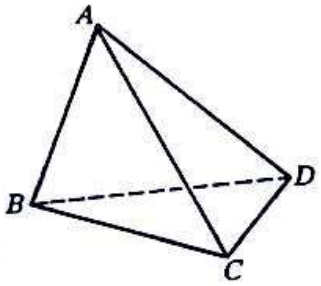
Exercice

Considérons le tétraèdre $ABCD$.

Donner un représentant du vecteur $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DC}$?

Construire le représentant d'origine A du vecteur :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}.$$

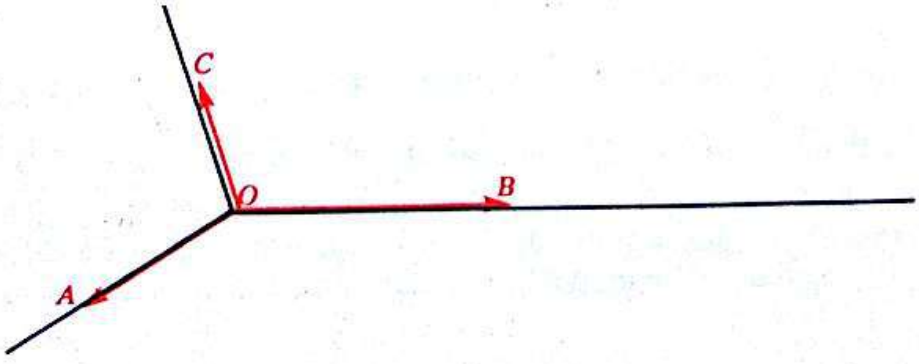


• *Combinaison linéaire de trois vecteurs non coplanaires de $\mathcal{W}$*

On donne les trois vecteurs non coplanaires de $\mathcal{W}$: $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, par leurs représentants respectifs :

(O, A), (O, B) et (O, C).

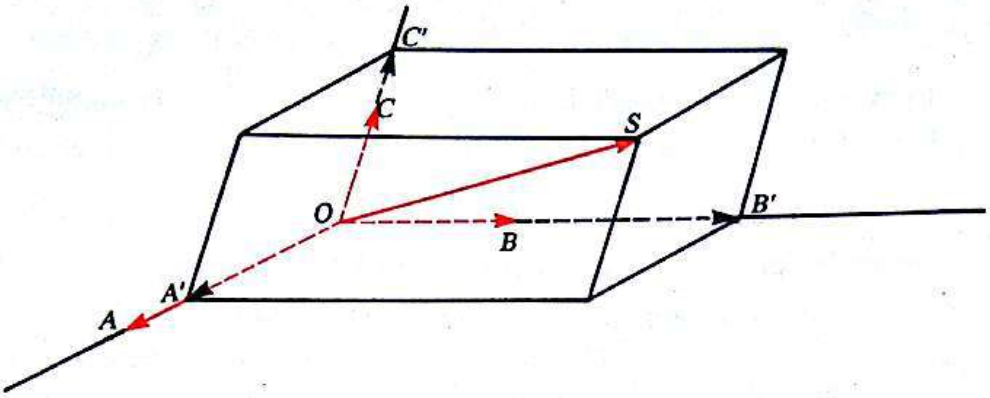
Construire un représentant de chacun des vecteurs : $2\vec{u} + \vec{v} + 3\vec{w}$ et $\vec{u} - 2\vec{v} + 3\vec{w}$.



Scanned by CamScanner

• *Décomposition d'un vecteur de $\mathcal{W}$ suivant trois vecteurs non coplanaires de $\mathcal{W}$*

On donne trois vecteurs non coplanaires $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et un vecteur $\vec{s}$ par leurs représentants respectifs : (O, A), (O, B), (O, C) et (O, S).



Construire un représentant de chacun des vecteurs $\vec{u}'$, $\vec{v}'$, $\vec{w}'$, respectivement colinéaires aux vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ et tels que :

$$\vec{u}' + \vec{v}' + \vec{w}' = \vec{s}.$$

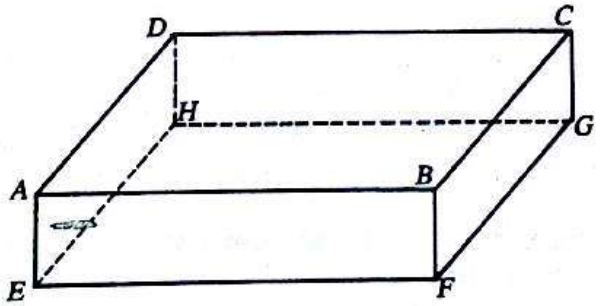
On dit que le vecteur $\vec{s}$ est *décomposé* suivant les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$.

Donner un procédé pratique permettant de décomposer un vecteur quelconque de $\mathcal{W}$ suivant trois vecteurs non coplanaires de $\mathcal{W}$.

Exercice

Considérons le parallélépipède $ABCDEFGH$.

Décomposer le vecteur $\overrightarrow{BH}$ suivant les vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$.

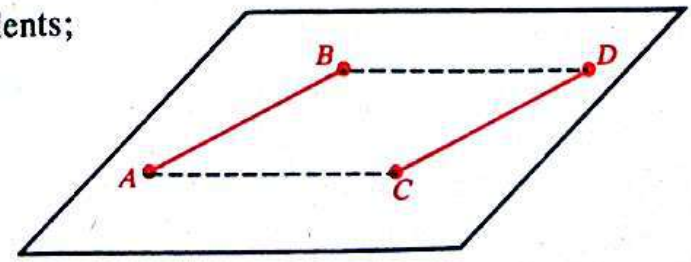


3) Norme d'un vecteur de $\mathcal{W}$

Vérifier que :

Si : (A, B) et (C, D) sont équipollents;

alors : $d(A, B) = d(C, D)$.



Scanned by CamScanner

Ainsi :

$\vec{u}$ étant un vecteur de $\mathcal{W}$, (A, B) un de ses représentants,

$d(A, B)$ est donc indépendant du choix du représentant de $\vec{u}$.

Définition

Étant donné un vecteur $\vec{u}$ de représentant (A, B), on appelle **norme** de $\vec{u}$, le nombre réel noté $\|\vec{u}\|$, tel que :

$$\|\vec{u}\| = d(A, B).$$

Donner les propriétés de la norme d'un vecteur de $\mathcal{W}$.

Comme pour les vecteurs de $\mathcal{V}$, on montre que :

Un vecteur de $\mathcal{W}$ est entièrement déterminé par :

sa norme
sa direction
son sens.

Exercice Étant donné un vecteur non nul $\vec{u}$ de $\mathcal{W}$, montrer qu'il existe exactement deux vecteurs colinéaires à $\vec{u}$ et de norme 1.

4) Base de $\mathcal{W}$; coordonnées d'un vecteur de $\mathcal{W}$

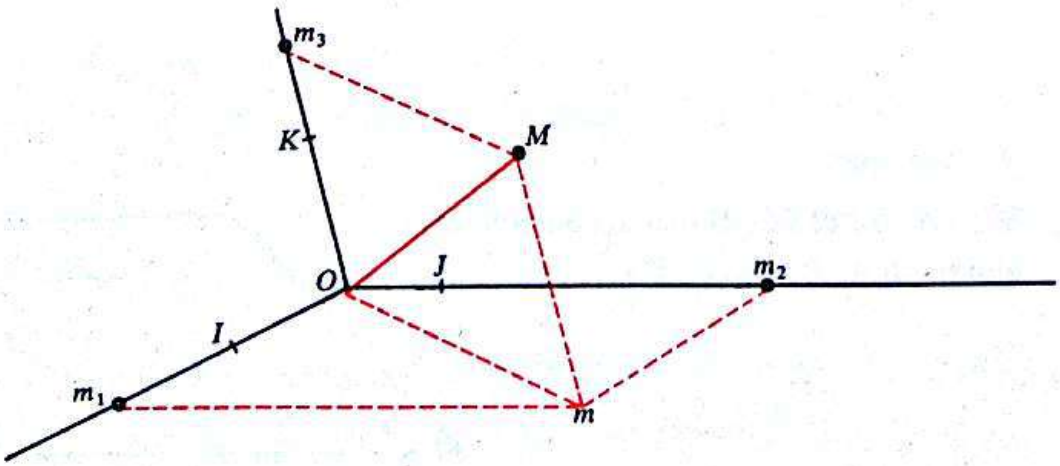
Définition

On appelle **base** de $\mathcal{W}$, tout triplet de vecteurs non coplanaires de $\mathcal{W}$.

On donne un triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de vecteurs non coplanaires de $\mathcal{W}$.
Soit O un point de $\mathcal{E}$.
On désigne par I, J, K les points de $\mathcal{E}$ tels que :

$$\overrightarrow{OI} = \vec{i}\ ;\quad \overrightarrow{OJ} = \vec{j}\ ;\quad \overrightarrow{OK} = \vec{k}.$$

Les points O, I, J, K ne sont pas coplanaires dans $\mathcal{E}$.
Soit donc le repère (O, I, J, K) de l'espace $\mathcal{E}$.



Scanned by CamScanner

Soit $\vec{u}$ un vecteur de $\mathcal{W}$; il existe un unique point M de $\mathcal{E}$ tel que :

$$\overrightarrow{OM} = \vec{u}.$$

Soit (x, y, z) les coordonnées de M dans le repère (O, I, J, K) de $\mathcal{E}$.

Les plans passant par M et parallèles aux plans (OJK), (OKI) et (OIJ) coupent respectivement les droites (OI), (OJ) et (OK) aux points m_1, m_2 et m_3.

Il en résulte que :

$$\overline{Om_1} = x; \qquad \overline{Om_2} = y; \qquad \overline{Om_3} = z$$

$$\overrightarrow{Om_1} = x\vec{i}; \qquad \overrightarrow{Om_2} = y\vec{j}; \qquad \overrightarrow{Om_3} = z\vec{k}$$

et :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om_1} + \overrightarrow{Om_2} + \overrightarrow{Om_3}.$$

Il existe donc un unique triplet de nombres réels (x, y, z) tel que :

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Théorème

Étant donné une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\mathcal{W}$, tout vecteur de $\mathcal{W}$ se décompose de manière unique suivant les trois vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ de cette base.

Définition

Soit | $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base de $\mathcal{W}$
| $\vec{u}$ un vecteur de $\mathcal{W}$

l'unique triplet de nombres réels (x, y, z) tel que :

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

est appelé **le triplet de coordonnées de $\vec{u}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.**

On note : $\vec{u}(x, y, z)$, ou : $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Justifier le tableau suivant :

Dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\mathcal{W}$					
$\mathcal{W}$	$\vec{u}$	$\vec{v}$	$\vec{u} + \vec{v}$	$\lambda \cdot \vec{u}$	$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$
$\mathbb{R}^3$	$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x+x' \\ y+z' \\ z+z' \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \alpha x + \beta x' \\ \alpha y + \beta y' \\ \alpha z + \beta z' \end{pmatrix}$

λ, α, β sont des nombres réels quelconques.

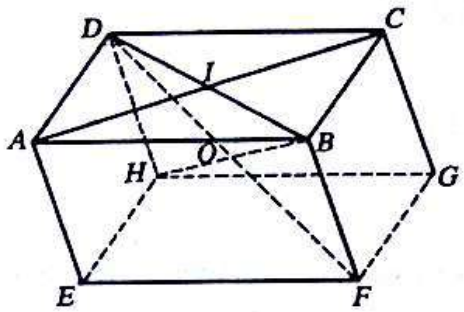
Scanned by CamScanner

Exercice

On donne le parallélépipède $ABCDEFGH$.
Soit O son centre et I le centre de $ABCD$.

— Montrer que $(\vec{IB}, \vec{AI}, \vec{OI})$ est une base de $\mathcal{W}$.

— Trouver dans cette base les coordonnées des vecteurs $\vec{AB}$, $\vec{AD}$, $\vec{AE}$, $\vec{AC}$, $\vec{AF}$, $\vec{AH}$, $\vec{AG}$.



5) Vecteurs et points de l'espace

a) **Bijection entre $\mathcal{E}$ et $\mathcal{W}$**

Soit O un point de $\mathcal{E}$.

On a vu que, étant donné un vecteur $\vec{u}$ de $\mathcal{W}$, il existe un unique point M de $\mathcal{E}$ tel que :

$$\vec{u} = \vec{OM}.$$

Il en résulte que l'application :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{W} & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ \vec{u} & \longmapsto & M \quad \text{tel que : } \vec{OM} = \vec{u} \end{array}$$

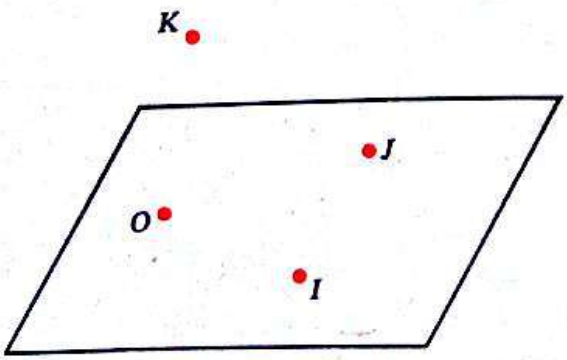
est bijective.

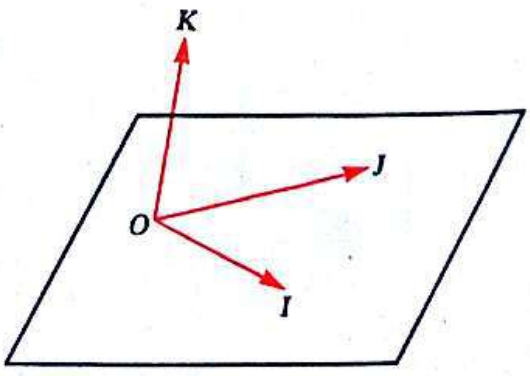
b) **Base de $\mathcal{W}$ associée à un repère de $\mathcal{E}$**

• On donne dans l'espace $\mathcal{E}$ quatre points non coplanaires : O, I, J, K.

On sait que :

(O, I, J, K) est un repère de $\mathcal{E}$ | $(\vec{OI}, \vec{OJ}, \vec{OK})$ est une base de $\mathcal{W}$





Scanned by CamScanner

(O, I, J, K) étant un repère de $\mathcal{E}$, $(\vec{OI}, \vec{OJ}, \vec{OK})$ est une base de $\mathcal{W}$.
On dit que $(\vec{OI}, \vec{OJ}, \vec{OK})$ est la *base de $\mathcal{W}$ associée au repère (O, I, J, K) de $\mathcal{E}$.*

• $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ étant une base de $\mathcal{W}$ et O un point de $\mathcal{E}$, le quadriplet de points (O, I, J, K) tel que :

$$\vec{OI} = \vec{i}; \quad \vec{OJ} = \vec{j}; \quad \vec{OK} = \vec{k}$$

est un repère de $\mathcal{E}$. On dit que (O, I, J, K) est un *repère de $\mathcal{E}$ associé à la base* $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\mathcal{W}$.

Théorème

Soit (O, I, J, K) un repère de $\mathcal{E}$ associé à la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\mathcal{W}$.
Soit M un point de $\mathcal{E}$, et (x, y, z) un triplet de $\mathbb{R}^3$, alors :

Le point M a pour coordonnées (x, y, z) dans le repère (O, I, J, K) $\Longleftrightarrow$ Le vecteur $\vec{OM}$ a pour coordonnées (x, y, z) dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$

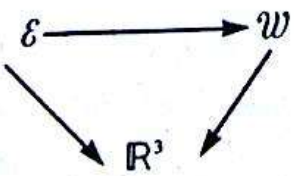
c) Coordonnées d'un vecteur défini par un de ses représentants

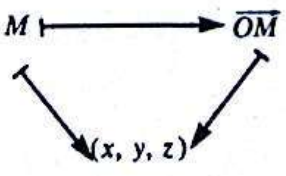
Justifier le tableau suivant :

(O, I, J, K) repère de $\mathcal{E}$	$(\vec{OI}, \vec{OJ}, \vec{OK})$ base de $\mathcal{W}$
$M(x, y, z)$	$\vec{OM}\ (x, y, z)$
$A(x_A, y_A, z_A)$; $B(x_B, y_B, z_B)$	$\vec{AB}\ (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$

d) Vecteurs et points

L'espace $\mathcal{E}$ étant muni d'un repère d'origine O, l'ensemble $\mathcal{W}$ étant muni de la base associée, les applications suivantes sont bijectives :





Scanned by CamScanner

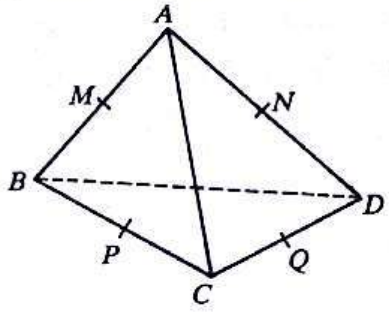
Comme dans le plan, ces bijections montrent qu'on peut résoudre certains problèmes de géométrie de l'espace en utilisant :

ou
- l'espace vectoriel $(\mathcal{W}, +, \cdot)$
- l'ensemble $\mathbb{R}^3$
- les propriétés géométriques de $\mathcal{E}$.

Il est donc nécessaire de savoir choisir l'outil le mieux adapté à un problème posé.

Exercice

On considère un tétraèdre $ABCD$.
Soit M, N, P, Q les milieux respectifs de $[AB]$, $[AD]$, $[B, C]$ et de $[CD]$.
Montrer que $MNQP$ est un parallélogramme.



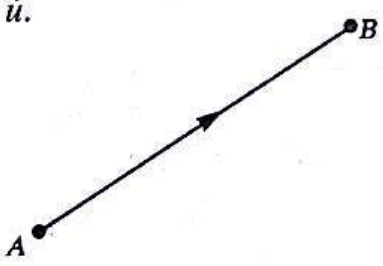
2 Bilan de la structure d'espace vectoriel

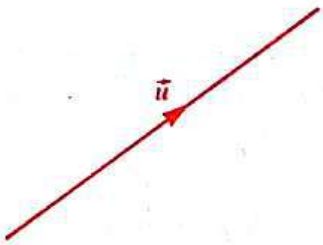
1) Synthèse sur les ensembles $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$

Nous avons étudié l'ensemble $\mathcal{V}$ des vecteurs du plan $\mathcal{P}$ et l'ensemble $\mathcal{W}$ des vecteurs de l'espace $\mathcal{E}$.

a) Définition d'un vecteur de $\mathcal{V}$ (resp. de $\mathcal{W}$)

Tout élément de $\mathcal{V}$ (resp. de $\mathcal{W}$) est appelé *vecteur;* c'est une classe d'équivalence d'un bipoint (A, B) de $\mathcal{P} \times \mathcal{P}$ (resp. de $\mathcal{E} \times \mathcal{E}$). Il est alors noté $\overrightarrow{AB}$ ou tout simplement $\vec{u}$.





b) Structure sur $\mathcal{V}$ (resp. sur $\mathcal{W}$)

On a défini sur $\mathcal{V}$ (resp. sur $\mathcal{W}$) :

— *une loi interne* appelée addition des vecteurs; c'est l'application :

$$\mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}; \qquad \text{resp.} \quad \mathcal{W} \times \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{W}$$
$$(\vec{u}, \vec{v}) \longmapsto \vec{u} + \vec{v} \qquad (\vec{u}, \vec{v}) \longmapsto \vec{u} + \vec{v}$$

Scanned by CamScanner

— *une loi externe* appelée multiplication d'un vecteur par un nombre réel; c'est l'application :

$$\mathbb{R}\times\mathcal{V}\longmapsto\mathcal{V};\qquad (\lambda,\vec{u})\longrightarrow\lambda\cdot\vec{u}$$

resp.

$$\mathbb{R}\times\mathcal{W}\longmapsto\mathcal{W}\qquad (\lambda,\vec{u})\longmapsto\lambda\cdot\vec{u}.$$

• *L'addition des vecteurs* possède les mêmes propriétés dans $\mathcal{V}$ et dans $\mathcal{W}$.

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ de $\mathcal{V}$ (resp. de $\mathcal{W}$)

$$\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$$
$$\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$$
$$\vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$$
$$\vec{u}+(-\vec{u})=\vec{0}.$$

Nous avons résumé ces propriétés en disant que :

$(\mathcal{V},+)$ et $(\mathcal{W},+)$ sont des groupes commutatifs.

• *La multiplication d'un vecteur par un nombre réel possède les mêmes propriétés dans $\mathcal{V}$ et dans $\mathcal{W}$*

Quels que soient les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ de $\mathcal{V}$ (resp. de $\mathcal{W}$).
Quels que soient les nombres réels α et β :

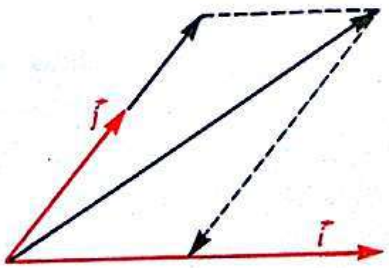
$$1\cdot\vec{u}=\vec{u}$$
$$\alpha\cdot(\vec{u}+\vec{v})=\alpha\cdot\vec{u}+\alpha\cdot\vec{v}$$
$$(\alpha+\beta)\cdot\vec{u}=\alpha\cdot\vec{u}+\beta\cdot\vec{u}$$
$$\alpha\cdot(\beta\cdot\vec{u})=(\alpha\beta)\cdot\vec{u}.$$

Nous avons résumé les propriétés de l'addition des vecteurs et celles de la multiplication d'un vecteur par un nombre réel, en disant que :

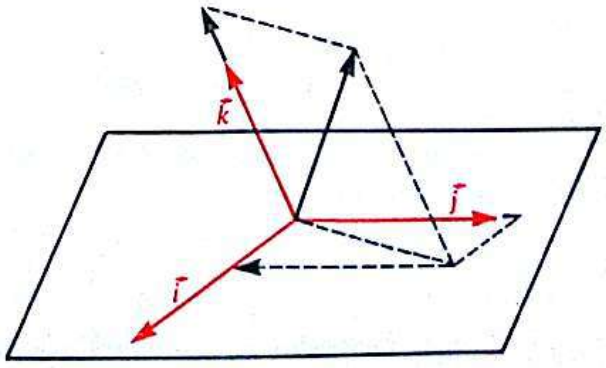
$(\mathcal{V},+,\cdot)$ et $(\mathcal{W},+,\cdot)$ sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.

c) Base dans $\mathcal{V}$ et dans $\mathcal{W}$

— Une base de $\mathcal{V}$ est un couple de vecteurs non colinéaires de $\mathcal{V}$.



— Une base de $\mathcal{W}$ est un triplet de vecteurs non coplanaires de $\mathcal{W}$.



Scanned by CamScanner

— Tout vecteur de $\mathcal{V}$ (resp. de $\mathcal{W}$) se décompose de manière unique suivant les vecteurs d'une base de $\mathcal{V}$ (resp. de $\mathcal{W}$).

— On démontre et nous admettrons que :

Théorème

Un couple $(\vec{i}, \vec{j})$ de vecteurs de $\mathcal{V}$ (resp. un triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de vecteurs de $\mathcal{W}$) est une base de $\mathcal{V}$ (resp. de $\mathcal{W}$) si et seulement si tout vecteur de $\mathcal{V}$ (resp. de $\mathcal{W}$) se décompose, de manière unique, suivant $\vec{i}$ et $\vec{j}$ (resp. $\vec{i}, \vec{j}$ et $\vec{k}$).

2) Autres exemples d'espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$

a) Vecteurs du plan, vecteurs de l'espace et nombres réels

• O étant un point de $\mathcal{P}$ (resp. de $\mathcal{E}$), on sait que les applications ci-dessous sont des bijections :

$$\begin{array}{c} \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ \overrightarrow{OM} \longmapsto (x, y) \end{array}$$

où (x, y) est le couple de coordonnées de $\overrightarrow{OM}$ dans une base $(\vec{i}, \vec{j})$ de $\mathcal{V}$.

$$\begin{array}{c} \mathcal{W} \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ \overrightarrow{OM} \longmapsto (x, y, z) \end{array}$$

où (x, y, z) est le triplet de coordonnées de $\overrightarrow{OM}$ dans une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\mathcal{W}$.

• On a d'autre part les tableaux suivants :

$\mathcal{V}$	$\vec{u}$	$\vec{v}$	$\vec{u}+\vec{v}$	$\lambda\vec{u}$
$\mathbb{R}^2$	$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}$

$\mathcal{W}$	$\vec{u}$	$\vec{v}$	$\vec{u}+\vec{v}$	$\lambda\vec{u}$
$\mathbb{R}^3$	$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x+x' \\ y+y' \\ z+z' \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix}$

Comme on va le voir ci-dessous, il en résulte, qu'il est possible de définir sur $\mathbb{R}^2$ (resp. sur $\mathbb{R}^3$) une structure d'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

b) Étude de $\mathbb{R}^2$ $(\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R})$

• Un élément de $\mathbb{R}^2$ est noté : (x, y), ou : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Soit | (x, y) et (x', y') deux éléments de $\mathbb{R}^2$.
λ un nombre réel.

• Vu les résultats observés sur les coordonnées de la somme de deux vecteurs de $\mathcal{V}$, on pose :

$$(x, y)+(x', y')=(x+x', y+y').$$

ce qui permet de définir l'*addition dans* $\mathbb{R}^2$.

Scanned by CamScanner

• Vu les résultats observés sur les coordonnées du produit d'un vecteur de $\mathcal{V}$ par un nombre réel, on pose :

$$\lambda \cdot (x, y) = (\lambda x, \lambda y).$$

ce qui permet de définir *la multiplication d'un élément de* $\mathbb{R}^2$ *par un nombre réel.*

• Montrer que :

$(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

• *Base canonique de* $\mathbb{R}^2$

Soit (x, y) un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^2$.

On a : $(x, y) = (x, 0) + (0, y)$

$(x, y) = x \cdot (1, 0) + y \cdot (0,1).$

Supposons qu'il existe deux nombres réels x', y' tels que :

$$(x, y) = x' \cdot (1, 0) + y' \cdot (0, 1).$$

On a alors :

$$x \cdot (1, 0) + y \cdot (0, 1) = x' \cdot (1, 0) + y' \cdot (0, 1)$$

$$(x, y) = (x', y').$$

Donc : $x' = x$ et $y' = y$.

Par conséquent, tout vecteur de $\mathbb{R}^2$ se décompose, de manière unique, suivant les vecteurs (1, 0) et (0, 1).

Les vecteurs (1, 0) et (0, 1) constituent donc une base de $\mathbb{R}^2$.

On pose : $a = (1, 0)$ et $b = (0, 1)$.

La base (a, b) est la base la plus « naturelle » de $\mathbb{R}^2$ car les coordonnées d'un vecteur (x, y) dans cette base sont x et y.

On l'appelle alors la *base canonique* de $\mathbb{R}^2$.

Exercice Calculer :

$$(5,1) + (2-3); \quad (-7,0) + (4,5)$$

$$2 \cdot (5-2); \quad -4 \cdot (0,3).$$

Quelles sont les coordonnées des vecteurs : (2,3); (−1,4); (0,7); (−3,0); (0,0) dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$?

c) **Activité :** *Étude de* $\mathbb{R}^3$ $(\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R})$

• Un élément de $\mathbb{R}^3$ est noté : (x, y, z), ou : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Scanned by CamScanner

• Définir comme précédemment l'addition dans $\mathbb{R}^3$ et la multiplication d'un élément de $\mathbb{R}^3$ par un nombre réel. On les note respectivement + et ·.

Calculer :

$$(2; -5; 1) + (-3; 4; 2)$$
$$-3 \cdot (7; -1; 0)$$
$$5 \cdot (4; 9; -2).$$

Montrer que $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$.

• Donner la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

• Que peut-on dire de $\mathbb{R}^4$, de $\mathbb{R}^5$, ...

3 Le produit scalaire dans $\mathcal{W}$

Dans la leçon précédente, nous avons fait le bilan des propriétés de l'addition des vecteurs et de la multiplication d'un vecteur par un nombre réel, propriétés qui font de $\mathcal{V}$ et de $\mathcal{W}$ des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.

Par ailleurs, nous avions en classe de Seconde, défini dans $\mathcal{V}$ le produit scalaire.

Sachant que deux vecteurs de $\mathcal{W}$ sont coplanaires, nous pouvons étendre à $\mathcal{W}$ la définition du produit scalaire dans $\mathcal{V}$ ainsi que toutes ses propriétés qui ne font intervenir qu'un ou deux vecteurs. Nous examinerons en particulier les propriétés qui font intervenir trois vecteurs, car ceux-ci peuvent être non coplanaires.

1) Définition, propriétés

a) Définition

• Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathcal{W}$, de représentants respectifs (O, A) et (O, B).

Les points O, A et B appartiennent à un même plan (P).

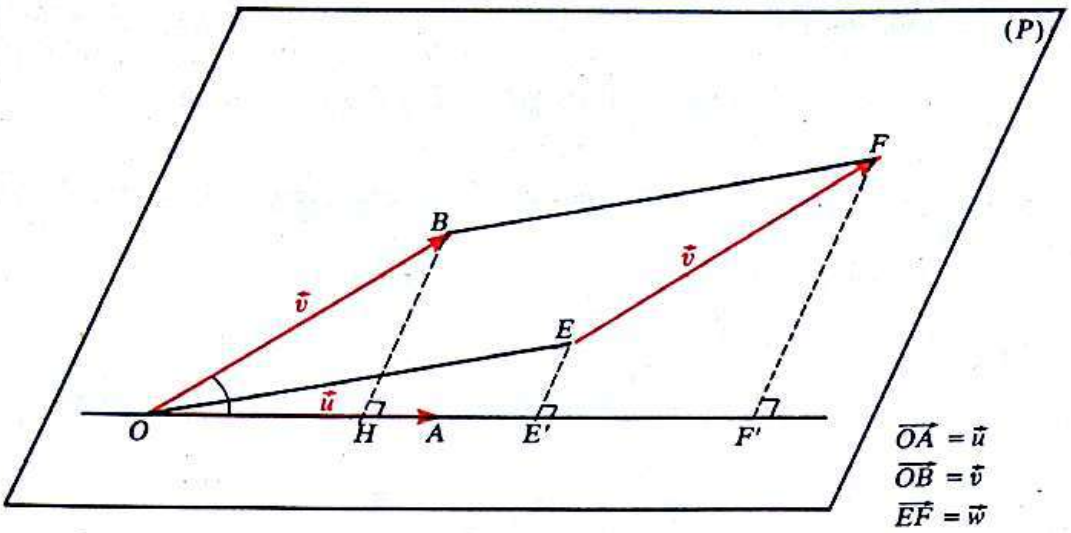
Par conséquent, H étant le projeté orthogonal de B sur une droite support de (O, A), le nombre réel :

$$\overline{OA} \times \overline{OH}$$

ne dépend pas du choix de O, c'est le *produit scalaire* de $\vec{u}$ par $\vec{v}$.

On note : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overline{OA} \times \overline{OH}$.

Scanned by CamScanner



• Montrer que :

si (E, F) est un représentant quelconque de $\vec{v}$ dans le plan (P), E' et F' les projetés orthogonaux respectifs des points E et F sur une droite support de (O, A),

alors : $\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = \overline{OA} \times \overline{E'F'}.}$

• Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont des vecteurs non nuls on utilise alors un résultat connu du produit scalaire dans le plan :

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = OA \times OB \times \cos \widehat{AOB}.}$$

Conclusion

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant deux vecteurs de $\mathcal{W}$, de représentants respectifs (O, A) et (O, B),

— si : $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$, alors : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

— si : $\vec{u} \neq 0$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$, alors : $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overline{OA} \times \overline{OH}$
$= OA \times OB \times \cos \widehat{AOB}$

H étant le projeté orthogonal de B sur la droite (OA).

On a ainsi défini le *produit scalaire dans* $\mathcal{W}$, c'est l'application :

$$\mathcal{W} \times \mathcal{W} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(\vec{u}, \vec{v}) \longmapsto \vec{u} \cdot \vec{v}.$$

b) **Propriétés**

• On démontre comme dans le plan, les propriétés relatives au produit scalaire de deux vecteurs quelconques de $\mathcal{W}$:

$$\boxed{\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \mathcal{W}^2 \quad \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}.}$$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \quad \forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \mathcal{W}^2 \quad (x\vec{u}) \cdot \vec{v} = x(\vec{u} \cdot \vec{v}).}$$

Scanned by CamScanner

• Montrons que :

$$\forall(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in \mathcal{W}^3 \quad \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}.$$

Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ trois vecteurs de $\mathcal{W}$ de représentants respectifs (O, A), (O, B) et (B, C).

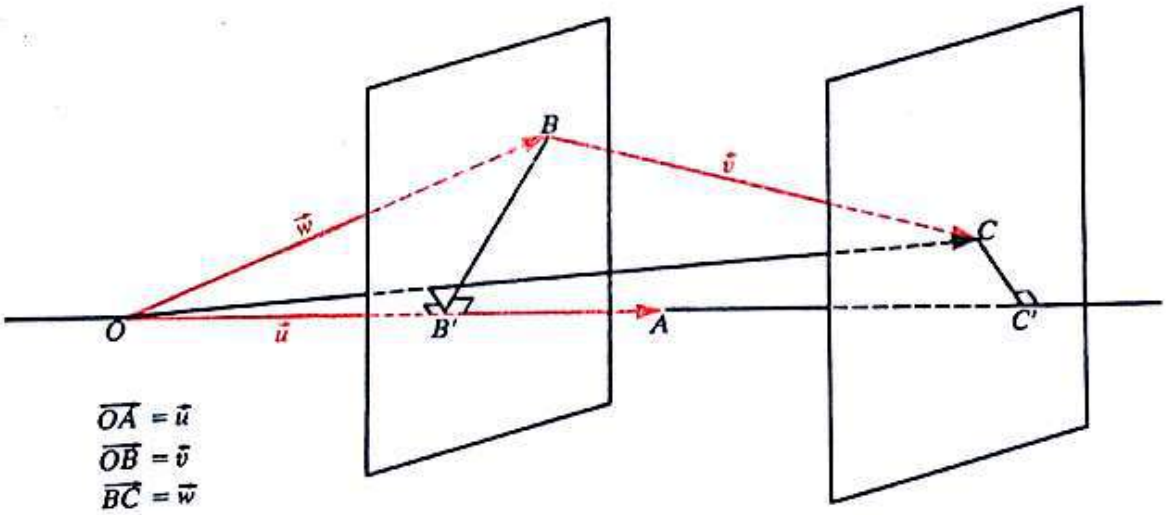
— Examiner le cas : $\vec{u} = \vec{0}$.

— Supposons alors : $\vec{u} \neq \vec{0}$.

Soit B' et C' les projetés orthogonaux respectifs des points B et C sur la droite (OA).

On a alors :

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) &= \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} \\ &= \overline{OA} \times \overline{OC'} \\ \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w} &= \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{BC} \\ &= \overline{OA} \times \overline{OB'} + \overline{OA} \times \overline{B'C'} \\ &= \overline{OA}(\overline{OB'} + \overline{B'C'}) \\ &= \overline{OA} \times \overline{OC'}. \end{aligned}$$



2) Carré scalaire et norme d'un vecteur de $\mathcal{W}$

• Soit $\vec{u}$ un vecteur de $\mathcal{W}$ de représentant (A, B).

On a vu que :

$$\|\vec{u}\| = AB.$$

Comme dans $\mathcal{V}$, $\vec{u} \cdot \vec{u}$ est le *carré scalaire* de $\vec{u}$ que l'on note $\vec{u}^2$ et :

$$\vec{u}^2 \geqslant 0$$
$$[\vec{u}^2 = 0] \iff [\vec{u} = 0]$$
$$\|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u}^2}.$$

Scanned by CamScanner

• $\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant deux vecteurs quelconques de $\mathcal{W}$ on a :

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leqslant \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|.$$

• On dit que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathcal{W}$ sont *orthogonaux* lorsque leur produit scalaire est nul.

$$[\vec{u} \perp \vec{v}] \iff [\vec{u} \cdot \vec{v} = 0].$$

3) Étude analytique du produit scalaire dans $\mathcal{W}$

a) Base orthonormé de $\mathcal{W}$

• Montrer que trois vecteurs non nuls, deux à deux orthogonaux, sont non coplanaires.

On appelle base *orthogonale*, de $\mathcal{W}$, tout triplet de vecteurs non nuls, deux à deux orthogonaux.

• Un vecteur de norme 1 est dit *unitaire*.

Définition

On appelle **base orthonormée** de $\mathcal{W}$, tout triplet de vecteurs unitaires, deux à deux orthogonaux.

Il en résulte que :

Théorème

Une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de $\mathcal{W}$ est orthonormée si et seulement si :

$$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$$

et

$$\vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = \vec{i} \cdot \vec{j} = 0.$$

Exercice

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthogonale de $\mathcal{W}$ telle que :

$$\vec{i}^2 = 2; \quad \vec{j}^2 = 1; \quad \vec{k}^2 = 3.$$

Soit : $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j}$; $\vec{v} = \vec{i} - 4\vec{j}$; $\vec{w} = 5\vec{k}$.

$(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est-elle une base de $\mathcal{W}$?

Cette base est-elle orthogonale?

b) Traduction analytique dans une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

• *des coordonnées d'un vecteur*

$\vec{u}$ étant un vecteur de $\mathcal{W}$ de coordonnées (x, y, z), montrer que :

$$x = \vec{u} \cdot \vec{i}; \quad y = \vec{u} \cdot \vec{j}; \quad z = \vec{u} \cdot \vec{k}$$

Scanned by CamScanner

• *du produit scalaire de deux vecteurs*

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant deux vecteurs de $\mathcal{W}$ de coordonnées respectives (x, y, z) et (x', y', z'), montrer que :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$$

• *de la norme d'un vecteur*

$\vec{u}$ étant un vecteur de $\mathcal{W}$ de coordonnées (x, y, z), on a alors :

$$\| \vec{u} \| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

• *de l'orthogonalité de deux vecteurs*

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ étant deux vecteurs de $\mathcal{W}$ de coordonnées respectives (x, y, z) et (x', y', z') on a alors :

$$\vec{u} \perp \vec{v} \iff xx' + yy' + zz' = 0.$$

Exercice

L'espace vectoriel $(\mathcal{W}, +, \cdot)$ est muni d'une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ de coordonnées respectives :

$(1; -2; 3)$; $(5; 0; a)$.

— Quelle est la norme du vecteur $\vec{u}$?

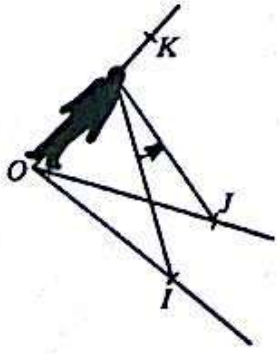
— Trouver a pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.

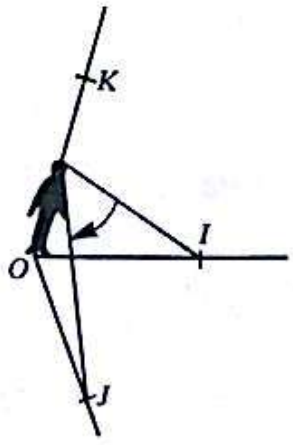
4 Le produit vectoriel dans $\mathcal{W}$

1) Orientation de l'espace

a) Soit (O, I, J, K) un repère de l'espace $\mathcal{E}$.

Imaginons un observateur appelé *«Bohomme d'Ampère»* sur $[OK)$ les pieds en O, qui regarde la demi-droite $[OI)$.
La demi-droite $[OJ)$ est soit sur sa gauche, soit sur sa droite.





Scanned by CamScanner

Ce qui permet de partager l'ensemble des repères de l'espace en deux classes.

Deux repères sont dits de *même sens,* s'ils appartiennent à une même classe, dans le cas contraire, ils sont dits de *sens contraires.*

Orienter l'espace, c'est choisir une des deux classes et convenir que les repères de cette classe sont *directs,* tandis que ceux de l'autre classe sont *indirects.*

Il est d'usage de choisir pour repères directs de $\mathcal{E}$, les repères (O, I, J, K) pour lesquels l'observateur d'Ampère voit la demi-droite $[OJ)$ à sa gauche.

Remarque

La règle dite *des trois doigts de la main droite* conduit à la même orientation de l'espace. Elle consiste, dans un repère direct (O, I, J, K) de $\mathcal{E}$, à faire correspondre :

— le pouce à la demi-droite $[OI)$
— l'index à la demi-droite $[OJ)$
— le majeur à la demi-droite $[OK)$.

Exercice

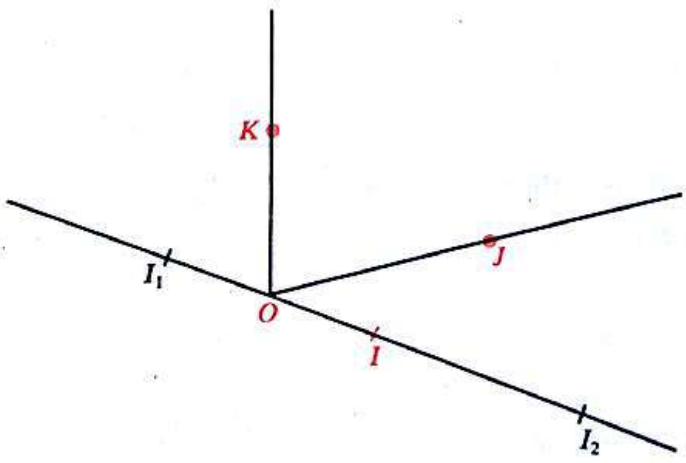
On donne un repère direct (O, I, J, K).

Soit I_1 le symétrique de I par rapport à O, I_2 le point tel que :

$$\overrightarrow{OI_2} = 3\overrightarrow{OI}.$$

Donner le sens de chacun des repères :

(O, J, I, K); (O, J, K, I);
(O, I_1, J, K); (O, I_2, J, K).

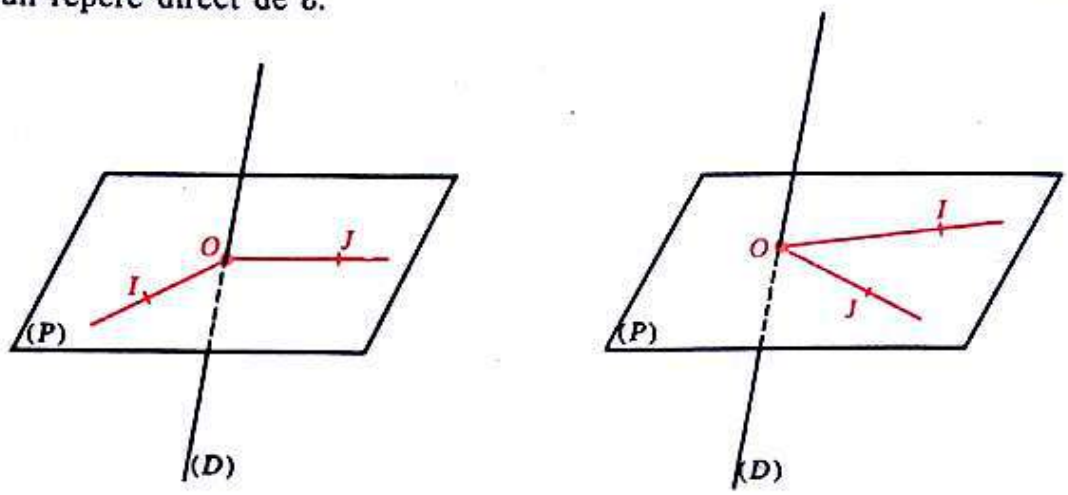


b) **Activités**

• On donne un plan (P) de l'espace $\mathcal{E}$, un repère (O, I, J) du plan (P), et une droite (D) de $\mathcal{E}$ passant par O et non contenue dans (P).

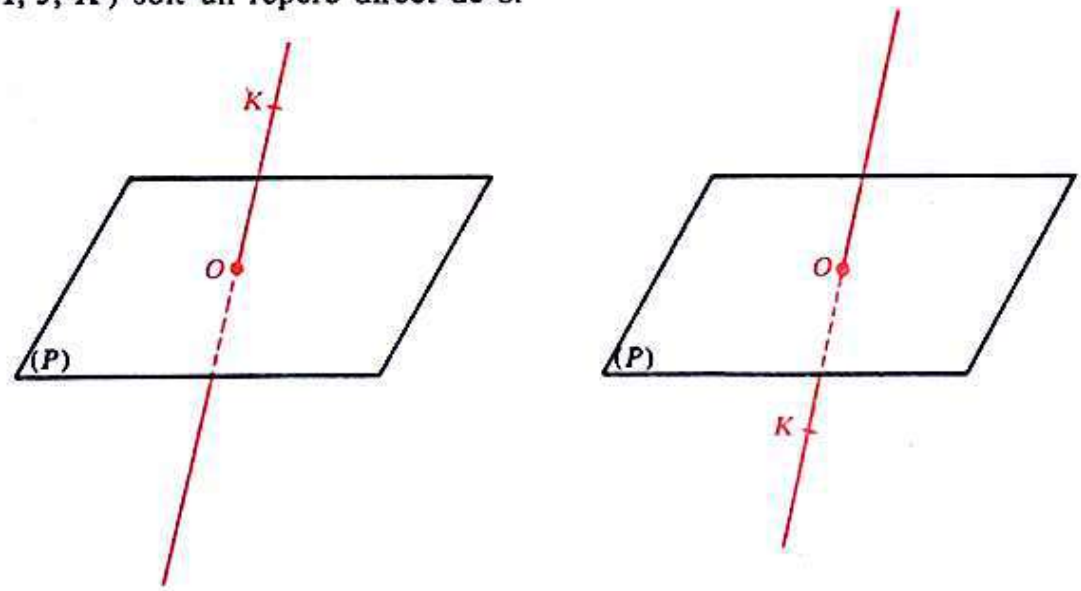
Scanned by CamScanner

Dans chacun des cas ci-dessous, trouver un point K de (D) tel que (O, I, J, K) soit un repère direct de $\mathcal{E}$.



• On donne un plan (P) de $\mathcal{E}$, un point O de (P) et un point K de $\mathcal{E}$ n'appartenant pas à (P).

Dans chacun des cas ci-dessous, trouver un repère (O, I, J) de (P) tel que (O, I, J, K) soit un repère direct de $\mathcal{E}$.



c) **Base orthonormée directe de $\mathcal{W}$**

Une base de $\mathcal{W}$ associée à un repère orthonormé direct de $\mathcal{E}$ est appelée base *orthonormée directe* de $\mathcal{W}$.

2) Produit vectoriel

a) **Définition**

— Nous avons vu que le produit scalaire dans $\mathcal{W}$ est une application qui à tout couple de vecteurs de l'espace associe un nombre réel.

On se propose de définir une application qui, à tout couple de vecteurs de l'espace associe un vecteur de l'espace.

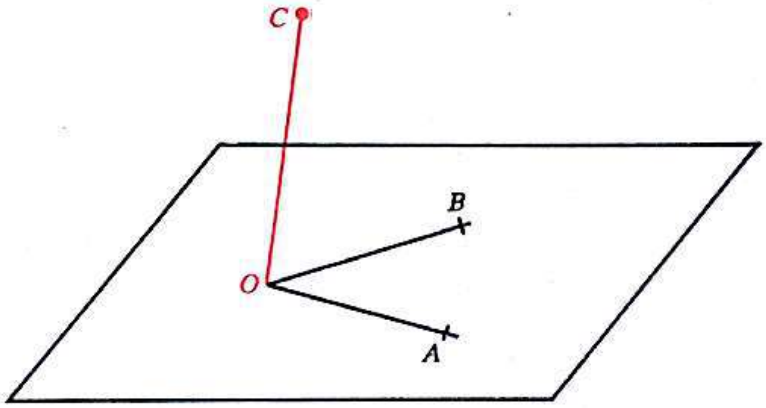
Scanned by CamScanner

— Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs non colinéaires de représentants respectifs (O, A) et (O, B).

Considérons le vecteur non nul $\vec{w}$ de représentant (O, C) tel que :

- la droite (OC) soit perpendiculaire au plan (OAB)
- le repère (O, A, B, C) de $\mathcal{E}$ soit direct
- et : $OC = OA \times OB \times \sin \widehat{AOB}$.

Le vecteur $\vec{w}$ est un vecteur non nul défini par sa direction, son sens et sa norme.
On démontre et nous admettrons qu'il est indépendant du choix du point O.
Le vecteur $\vec{w}$ est appelé le *produit vectoriel* de $\vec{u}$ par $\vec{v}$.



Le produit vectoriel de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ se note : $\vec{u} \wedge \vec{v}$
se lit : $\vec{u}$ vectoriel $\vec{v}$.

Définition

Étant donné dans $\mathcal{W}$, un vecteur $\vec{u}$ de représentant (O, A) et un vecteur $\vec{v}$ de représentant (O, B), on appelle **produit vectoriel** de $\vec{u}$ par $\vec{v}$ le vecteur $\vec{w}$ noté $\vec{u} \wedge \vec{v}$ et tel que :

— Si : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires; alors : $\vec{w} = \vec{0}$.

— Si : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires; alors : $\vec{w}$ est le vecteur de représentant (O, C) tel que :

- La droite (OC) soit perpendiculaire au plan (OAB).
- Le repère (O, A, B, C) de $\mathcal{E}$ soit direct,
- et : $OC = OA \times OB \times \sin \widehat{AOB}$.

On a ainsi défini le *produit vectoriel dans* $\mathcal{W}$, c'est l'application :

$$\mathcal{W} \times \mathcal{W} \longrightarrow \mathcal{W}$$
$$(\vec{u}, \vec{v}) \longmapsto \vec{u} \wedge \vec{v}.$$

Scanned by CamScanner

Exercices

1) $\mathcal{W}$ étant muni de la base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ vérifiant :

$$\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}; \quad \vec{v} = \vec{i} - \vec{j}.$$

— Quelle est la norme de $\vec{u}$ et celle de $\vec{v}$?

— Montrer que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{k})$ est une base orthogonale. Quel est son sens?

— Exprimer $\vec{u} \wedge \vec{v}$ en fonction de $\vec{k}$.

2) $\mathcal{E}$ étant muni du repère orthonormé (O, I, J, K) associé à la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, dessiner le représentant d'origine O de chacun des vecteurs :

$$\vec{u}, \quad \vec{v} \quad \text{et} \quad \vec{u} \wedge \vec{v}.$$

b) **Propriétés**

— Montrer que :

$$\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \mathcal{W}^2 \quad [\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}] \iff [\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires}]$$
$$\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \mathcal{W}^2 \qquad \vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}.$$

— On démontre et nous admettrons que :

$$\forall (\vec{u}, \vec{v}) \in \mathcal{W}^2 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad (x \cdot \vec{u}) \wedge \vec{v} = x \cdot (\vec{u} \wedge \vec{v})$$
$$\forall (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in \mathcal{W}^3 \qquad \vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}.$$

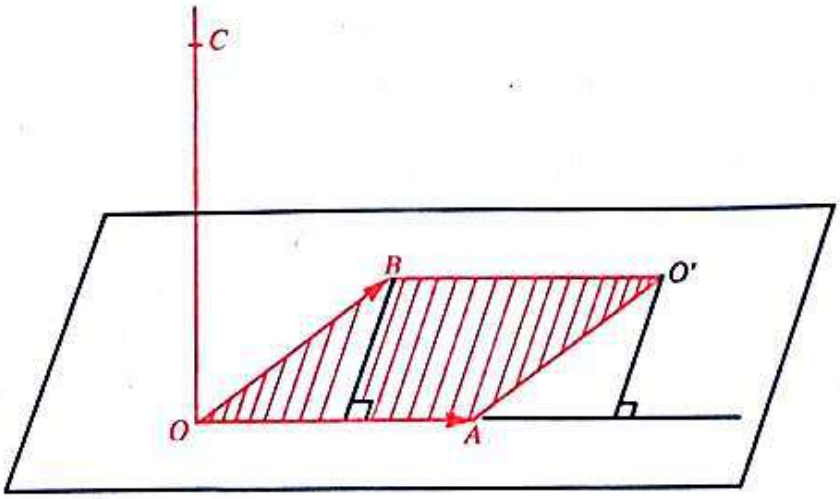
— *Interprétation géométrique de la norme du produit vectoriel de deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$, $\vec{v}$, de représentants respectifs (O, A) et (O, B).*

On sait que : $\| \vec{u} \wedge \vec{v} \| = OA \times OB \times \sin \widehat{AOB}$.

Soit O' le point du plan (AOB) tel que : $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$.

Montrer que :

$\| \overrightarrow{OA} \wedge \overrightarrow{OB} \|$ est l'aire du parallélogramme $OAO'B$.



Scanned by CamScanner

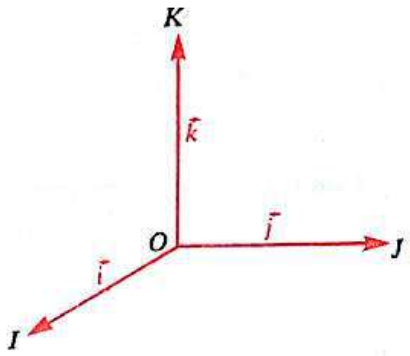
Exercice Soit $\vec{u}$, $\vec{u}'$, $\vec{v}$, $\vec{v}'$, $\vec{w}$ des vecteurs de $\mathcal{W}$.
Développer : $(\vec{u}+\vec{u}')\wedge(\vec{v}+\vec{v}')$ et $(a\vec{u}+b\vec{v})\wedge\vec{w}$, avec : $(a, b)\in\mathbb{R}^2$.

3) Étude analytique du produit vectoriel

Dans tout ce paragraphe, $\mathcal{W}$ est muni d'une base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ associée au repère orthonormé direct (O, I, J, K) de l'espace $\mathcal{E}$.

a) Traduction analytique du produit vectoriel dans la base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

• Vérifier que l'on a : $\vec{i}\wedge\vec{j}=\vec{k}$.



Compléter le tableau suivant :

$\wedge$	$\vec{i}$	$\vec{j}$	$\vec{k}$
$\vec{i}$		$\vec{k}$	
$\vec{j}$			
$\vec{k}$			

• Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs quelconques de $\mathcal{W}$ de coordonnées respectives : (x, y, z) et (x', y', z').

On a : $\vec{u}=x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}$; $\vec{v}=x'\vec{i}+y'\vec{j}+z'\vec{k}$.

Montrer alors que :

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=D_1\vec{i}+D_2\vec{j}+D_3\vec{k}$$

avec : $D_1=\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}$; $D_2=\begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix}$; $D_3=\begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix}$.

Exercice On donne les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de coordonnées respectives :
$(2; -3; 0)$ et $(-1; 4; 2)$.
Trouver les coordonnées des vecteurs :
$\vec{u}\wedge\vec{v}$; $\vec{v}\wedge\vec{u}$; $(3\vec{u})\wedge\vec{v}$; $\vec{u}\wedge(-2\vec{v})$.

b) Condition pour que deux vecteurs de $\mathcal{W}$ soient colinéaires

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathcal{W}$ de coordonnées respectives (x, y, z) et (x', y', z').
On sait que :

$$[\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont colinéaires}] \iff [\vec{u}\wedge\vec{v}=\vec{0}].$$

Scanned by CamScanner

Il en résulte que :

$\vec{u}\,(x, y, z)$ et $\vec{v}\,(x', y', z')$ sont colinéaires si et seulement si :

$$\begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} = 0 \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix} = 0 \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = 0.$$

En déduire une condition pour que $\vec{u}\,(x, y, z)$ et $\vec{v}\,(x', y', z')$ soient non colinéaires.

Exercice On donne les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ de coordonnées respectives :

$(2; 0; -3)$; $(1; -5; 4)$; $(\alpha; \beta; -2)$.

— Montrer que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

— Trouver α et β pour que $\vec{u}$ et $\vec{w}$ soient colinéaires.

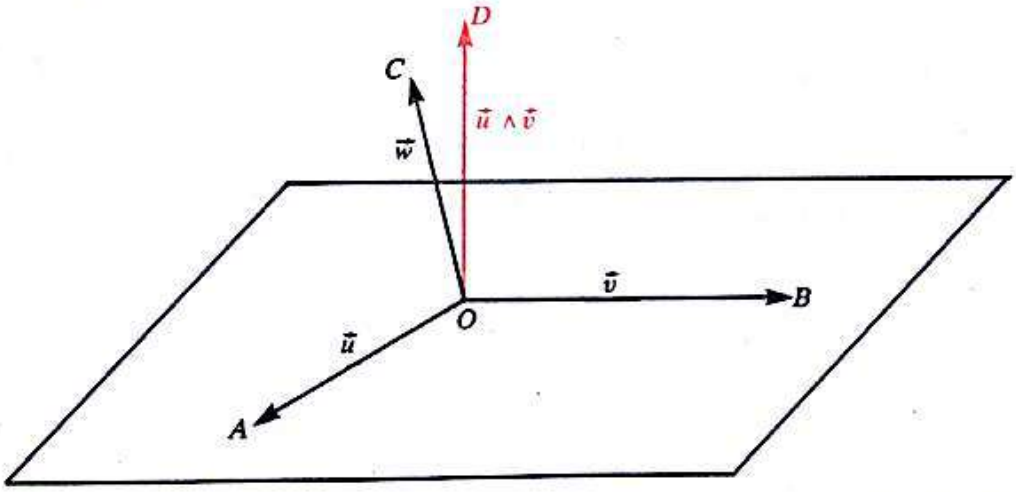
c) Condition pour que trois vecteurs de $\mathcal{W}$ soient coplanaires

• Soit $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ trois vecteurs de $\mathcal{W}$, de représentants respectifs (O, A), (O, B) et (O, C).

— Supposons $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ non coplanaires.

Alors $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires. Les points O, A, B déterminent donc un plan.

De plus le point C n'appartient pas au plan (OAB).



Il en résulte que le vecteur $\vec{w}$ n'est pas orthogonal au vecteur $\vec{u} \wedge \vec{v}$. (Justifier.)

Par conséquent : $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} \neq 0$.

— Réciproquement, supposons : $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} \neq 0$.

Montrer que :

Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires.

Les points O, A, B déterminent un plan qui ne contient pas le point C. (Justifier.)

En déduire que :

$\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont non coplanaires.

Scanned by CamScanner

$$\forall (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in \mathcal{W}^3 \quad \left[\begin{matrix}\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \text{ sont} \\ \text{coplanaires}\end{matrix}\right] \iff [(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = 0].$$

- Donner une traduction analytique de cette condition.
- Montrer que :

$$\forall (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in \mathcal{W}^3 \quad (\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = (\vec{v} \wedge \vec{w}) \cdot \vec{u} = (\vec{w} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{v}.$$

Le nombre réel $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w}$ est appelé *produit mixte* des vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$.

Exercice

a) On donne les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ de coordonnées respectives :

$(0; 3; -2)$; $(2; 0; 4)$; $(1; -5; 0)$.

Montrer que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ constituent une base de $\mathcal{W}$.

b) Soit $\vec{r}$ le vecteur de coordonnées $(-3; 1; a)$.
Trouver a pour que les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{r}$ soient coplanaires.

Scanned by CamScanner

Exercices

1 (1). Donner une condition pour que deux vecteurs de $\mathcal{W}$ engendrent la même droite vectorielle.

2 (1). Soit (Δ) et (Δ') deux droites vectorielles de $\mathcal{W}$.
Montrer qu'il existe un unique plan vectoriel (π) qui contient (Δ) et (Δ').

3 (1). L'ensemble $\mathcal{W}$ est muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1) Montrer que les vecteurs :

$$\frac{5}{2}\vec{i} - 6\vec{j} + 3\vec{k} \quad \text{et} \quad -\frac{5}{3}\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$$

engendrent la même droite vectorielle.

2) Existe-t-il un nombre réel λ tel que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ci-dessous engendrent la même droite vectorielle? Dans le cas affirmatif donner cette valeur.

a) $\vec{u}(1; 2; 3)$ et $\vec{v}(\lambda; 5; o)$.

b) $\vec{u}(1; 5; 3)$ et $\vec{v}(2+\lambda; 2\lambda+1; \lambda)$.

c) $\vec{u}(2\lambda-5; 19-4\lambda; -3)$ et $\vec{v}\left(6; 15; -6\left(\frac{\lambda}{7}+1\right)\right)$.

4 (1). Soit (π) un plan vectoriel de $\mathcal{W}$ engendré par les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.
Donner une condition pour que deux vecteurs $\vec{u}'$ et $\vec{v}'$ engendrent le même plan (π).

5 (1). L'ensemble $\mathcal{W}$ est muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Soit (π) le plan vectoriel de $\mathcal{W}$ engendré par les vecteurs :

$$2\vec{i} - 3\vec{j} \quad \text{et} \quad \vec{j} + 6\vec{k}.$$

1) Montrer que les vecteurs :

$$\vec{i} - \vec{j} + 3\vec{k} \quad \text{et} \quad \vec{i} - 2\vec{j} - 3\vec{k}$$

engendrent le plan vectoriel (π).

2) Existe-t-il deux nombres réels λ et μ tels que les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ci-dessous engendrent le plan vectoriel (π)? Dans le cas affirmatif donner ces valeurs.

a) $\vec{u}(\lambda+10; -9; 3\lambda)$ et $\vec{v}(2; u-3; 6\mu)$.

b) $\vec{u}(\lambda; 1; 9\lambda)$ et $\vec{v}(1-\mu; 4; 2(\mu+10))$.

6 (1). On donne un triangle ABC.
On désigne par A', B', C', les milieux respectifs des segments

$$[BC], \quad [CA] \quad \text{et} \quad [AB].$$

Soit M un point quelconque de l'espace $\mathcal{E}$.
Montrer que :

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MA'} + \overrightarrow{MB'} + \overrightarrow{MC'}.$$

7 (3). On considère deux vecteurs $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ et un vecteur non nul $\vec{u}$ tels que :

$$\vec{u} \cdot \vec{u}_1 = \vec{u} \cdot \vec{u}_2.$$

Peut-on en déduire :

$$\vec{u}_1 = \vec{u}_2 ?$$

Justifier la réponse.

8 (3). L'ensemble $\mathcal{W}$ est muni d'une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On considère les vecteurs :

$$\vec{u}(10; 11; -2) \quad \text{et} \quad \vec{v}(1; 3; 4).$$

Soit A et B deux points de l'espace $\mathcal{E}$ définis par :

$$\overrightarrow{OA} = \vec{u} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{OB} = \vec{v}.$$

Trouver les coordonnées du vecteur $\vec{w}$ de représentant (O, H), H étant le projeté orthogonal de B sur la droite (OA).

9 (3). L'ensemble $\mathcal{W}$ est muni d'une base. Dans chacun des cas suivants trouver les nombres réels λ et μ pour lesquels les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient colinéaires.

a) $\vec{u}(-3; 2; \lambda)$ et $\vec{v}(1; \mu; 1)$.

b) $\vec{u}(\lambda; (\lambda-1); \mu)$ et $\vec{v}(-2; -3; 1)$.

10 (3). L'ensemble $\mathcal{W}$ est muni d'une base orthonormée $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On donne quatre points de l'espace $\mathcal{E}$, O, A, B et C tels que :

$$\overrightarrow{OA} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k};$$
$$\overrightarrow{OB} = 2\vec{i} + 3\vec{j} - \vec{k};$$
$$\overrightarrow{OC} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}.$$

Trouver les points P tels que $\overrightarrow{OP}$ soit un vecteur unitaire orthogonal à $\overrightarrow{OC}$ et que le point P appartienne au plan (OAB).

11 (2). Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de $\mathcal{W}$. Donner une expression plus simple de chacun des nombres réels suivants :

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2$$
$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v}$$
$$\|u\|^2 - 6\vec{u} \cdot \vec{v} + 9\|v\|^2$$
$$\|\vec{u} + 2\vec{v}\|^2 - \|v\|^2.$$

Scanned by CamScanner

12 (3). L'ensemble $\mathcal{W}$ est muni d'une base orthonormée.
On donne le vecteur $\vec{n}$ (1; −2; 3).

1) Trouver deux vecteurs non colinéaires $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de $\mathcal{W}$ qui soient orthogonaux à $\vec{n}$.

2) Montrer qu'un vecteur $\vec{w}$ de $\mathcal{W}$ est orthogonal à $\vec{n}$ si et seulement si, il appartient au plan vectoriel engendré par $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

13 (3). (4). L'ensemble $\mathcal{W}$ est muni d'une base orthonormé.
On donne les vecteurs

$$\vec{u}\,(0; -2; 1) \quad \text{et} \quad \vec{v}\,(3; 0; -5).$$

1) Vérifier que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires.

2) Trouver un vecteur non nul $\vec{n}$ qui soit orthogonal aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

3) Montrer qu'un vecteur $\vec{w}$ de $\mathcal{W}$ est orthogonal aux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ si et seulement si, il appartient à la droite vectorielle engendrée par $\vec{n}$.

14 (3). (4). L'ensemble $\mathcal{W}$ est muni d'une base.
Dans chacun des cas suivants, trouver le nombre réel λ pour lequel les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ soient coplanaires.

a) $\vec{u}$ (−1; −1; 1), $\vec{v}$ (1; −1; 1), $\vec{w}$ (−1; 0; λ).

b) $\vec{u}$ (1; −1; 1); $\vec{v}$ (1; 1; −1); $\vec{w}$ (2; 1 + λ; −3).

15 (4). On considère le parallélépipède *ABCDEFGH* tel que :

$$AB = a; \quad BC = b; \quad CD = c.$$

Exprimer en fonction de *a*, *b* et *c* les nombres réels :

$$\|\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{EA}\| \quad \text{et} \quad (\overrightarrow{EF} \wedge \overrightarrow{EH}) \cdot \overrightarrow{EA}.$$

Donner une interprétation géométrique de chacun de ces nombres réels.

16 (4). L'ensemble $\mathcal{W}$ est muni de la base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
Trouver un vecteur unitaire orthogonal aux vecteurs $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ et $\vec{i} + \vec{j}$.

17 (4). Dans un espace $\mathcal{E}$, on donne deux parallélogrammes *PQRS* et *P'Q'R'S'* tels que les droites (*PP'*), (*QQ'*), (*RR'*) et (*SS'*) soient parallèles.

On désigne par $\vec{n}$ un vecteur directeur unitaire de la droite (*PP'*).

On pose : $\vec{u} = \overrightarrow{PQ}$; $\vec{v} = \overrightarrow{PS}$; $\vec{u}' = \overrightarrow{P'Q'}$; $\vec{v}' = \overrightarrow{P'S'}$.

1) Montrer que :

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{n} = (\vec{u}' \wedge \vec{v}') \cdot \vec{n}.$$

2) Donner une interprétation géométrique de l'égalité précédente.

18 (4). L'ensemble $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormé direct.
On donne trois points *P*(1; 2; −1), *Q*(3; −1; 4) et *R*(2; 6; 2).
Soit un point *S* de $\mathcal{E}$ tel que *PQRS* soit un parallélogramme.

1) Construire le parallélogramme *PQRS*.

2) Trouver les coordonnées du point *S*.

3) Trouver l'aire du parallélogramme *PQRS*.

19 (4). L'ensemble $\mathcal{W}$ est muni d'une base orthonormée directe $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.
On donne les vecteurs $\vec{u}$ (4; −8; 1), $\vec{v}$ (2; 1; −2) et $\vec{w}$ (3; −4; 12).

1) Calculer $(\vec{u} \cdot \vec{v})\,\vec{w}$ et $(\vec{v} \cdot \vec{w})\,\vec{u}$.

2) Calculer $\vec{u} \wedge \vec{v}$ puis $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$.

3) Calculer $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$.

Comparer $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$ et $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$.

20 (4). L'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormé direct.

— Trouver un vecteur directeur d'une droite perpendiculaire au plan déterminé par les points :

$$A(1; -1; 2); \quad B(2; 0; -1); \quad C(0; 2; 1).$$

— Trouver l'aire du triangle *ABC*.

21 (4). L'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère orthonormé direct (*O*, *I*, *J*, *K*).
On considère les points :

$$A(1; 2; 1), \quad B(2; 3; 2), \quad (2; 0; 2).$$

Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux.

2) Trouver les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ tels que :

- $\vec{u}$ soit unitaire, colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ et de même sens que $\overrightarrow{AB}$.
- $\vec{v}$ soit unitaire, colinéaire à $\overrightarrow{AC}$ et de même sens que $\overrightarrow{AC}$.

3) Trouver le vecteur unitaire $\vec{w}$ tel que $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ soit une base orthonormée directe.
Quel est l'extrémité du représentant d'origine *A* du vecteur $\vec{w}$.
Placer dans l'espace $\mathcal{E}$, les points *A*, *B*, *C* et le repère d'origine *A* associé à la base orthonormée $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$.

Scanned by CamScanner

2 Exemples de résolution de systèmes d'équations linéaires Programmation linéaire

Leçon 1 : EXEMPLES DE RÉSOLUTION DE SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES PAR UNE MÉTHODE SYSTÉMATIQUE

Leçon 2 : PROBLÈMES PRATIQUES UTILISANT LA RÉSOLUTION DE SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES

Leçon 3 : PROGRAMMATION LINÉAIRE. OPTIMISATION

1 Exemples de résolution de systèmes d'équations linéaires par une méthode systématique

1) Exemple introductif : système de trois équations du premier degré dans $\mathbb{R}^3$

a) **Résolution par substitution (rappel)**

Résoudre le système d'équations :

$$(1) \qquad (x, y, z)\in\mathbb{R}^3, \begin{cases} 2x+y-z=4 \\ x-5y-4z=0 \\ 3x+3y+5z=1. \end{cases}$$

Désignons par

- (E_1), (E_2), (E_3), respectivement la première, deuxième et troisième équation de ce système.
- $k(E_i)$ $(k\in\mathbb{R}^*; i\in\{1, 2, 3\})$ la nouvelle équation obtenue en multipliant les deux membres de l'équation (E_i) par le nombre réel k.
- $(E_i)+(E_j)$ $((i, j)\in\{1, 2, 3\}\times\{1, 2, 3\})$ la nouvelle équation obtenue en ajoutant membre à membre les équations (E_i) et (E_j).

— En utilisant (E_1), exprimons x en fonction de y et z.

On obtient : $$x=\frac{-y+z+4}{2}.$$

Scanned by CamScanner

Remplaçons cette expression de x dans (E_2) et (E_3).

(E_2) devient : $11y+7z=4.$

(E_3) devient : $3y+13z=-10.$

Désignons par (E_2') et (E_3') ces deux nouvelles équations.

Le système (1) est équivalent au système :

$$(II) \qquad (x, y, z)\in\mathbb{R}^3, \begin{cases} 2x+ \ y- \ z=4 & (E_1) \\ \quad 11y+ \ 7z=4 & (E_2') \\ \quad 3y+13z=-10 & (E_3') \end{cases}$$

(Justifier!)

Remarquons de plus que :

$$(E_2')=(E_1)-2(E_2)$$
$$(E_3')=2(E_3)-3(E_1).$$

— En utilisant (E_2') exprimons y en fonction de z.

On obtient : $y=\dfrac{-7z+4}{11}.$

Remplaçons cette expression de y dans (E_3').

On obtient : $z=-1.$

Désignons par (E_3'') cette nouvelle équation.

Le système (II) est équivalent au système triangulaire :

$$(III) \qquad (x, y, z)\in\mathbb{R}^3, \begin{cases} 2x+ \ y- \ z=4 & (E_1) \\ \quad 11y+7z=4 & (E_2') \\ \quad z=-1 & (E_3'') \end{cases}$$

(Justifier!)

Remarquons que : $(E_3'')=11(E_3')-3(E_2').$

Résoudre le système (III) et conclure quant à l'ensemble des solutions du système (1).

b) **Matrice complète associée au système (1)**

Considérons le système (1) :

$$(x, y, z)\in\mathbb{R}^3, \begin{cases} 2x+ \ y- \ z=4 \\ \ x-5y-4z=0 \\ 3x+3y+5z=1. \end{cases}$$

• Le tableau $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & -5 & -4 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ obtenu en relevant les coefficicents des inconnues de ce système est appelé *matrice des coefficients du système* (1).

• Le tableau $\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ obtenu en relevant les coefficients du deuxième membre de chaque équation est appelé *matrice du second membre du système* (1).

Scanned by CamScanner

• Le tableau $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -5 & -4 & 0 \\ 3 & 3 & 5 & 1 \end{array}\right)$ est appelé *matrice complète* associée au système (1).

Système	Matrice complète
$\begin{cases} 2x + y - z = 4 \\ x - 5y - 4z = 0 \\ 3x + 3y + 5z = 1 \end{cases}$	$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -5 & -4 & 0 \\ 3 & 3 & 5 & 1 \end{array}\right)$.

Notations :
(2; 1; −1; 4), (1; −5; −4; 0), (3; 3; 5; 1) sont appelées respectivement première, deuxième et troisième lignes de la matrice complète et notées (L_1), (L_2), (L_3).

c) **Systèmes équivalents et règles de transformation d'une matrice complète**

Le système (1) : $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\begin{cases} 2x + y - z = 4 \\ x - 5y - 4z = 0 \\ 3x + 3y + 5z = 1 \end{cases}$

est équivalent au système (2) : $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\begin{cases} x - 5y + 4z = 0 \\ 3x + 3y + 5z = 1 \\ 2x + y - z = 4. \end{cases}$

(Justifier!)

Les matrices complètes $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -5 & -4 & 0 \\ 3 & 3 & 5 & 1 \end{array}\right)$ et $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & -4 & 0 \\ 3 & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right)$ sont donc associées respectivement à deux systèmes équivalents.

Règle 1

On peut intervertir les lignes de la matrice complète associée à un système; la matrice obtenue est alors associée à un système équivalent au système initial.

• Le système (1) : $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\begin{cases} 2x + y - z = 4 \\ x - 5y - 4z = 0 \\ 3x + 3y + 5z = 1 \end{cases}$

est équivalent au système (3) : $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, $\begin{cases} x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z = 2 \\ x - 5y - 4z = 0 \\ 3x + 3y + 5z = 1. \end{cases}$

(Justifier!)

Scanned by CamScanner

Les matrices complètes : $\left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -5 & -4 & 0 \\ 3 & 3 & 5 & 1 \end{array}\right)$ et $\left(\begin{array}{ccc:c} 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \\ 1 & -5 & -4 & 0 \\ 3 & 3 & 5 & 1 \end{array}\right)$

sont donc associées respectivement à deux systèmes équivalents.

Règle 2

On peut multiplier chaque coefficient d'une ligne de la matrice complète associée à un système par un même nombre réel k différent de 0, la matrice complète obtenue est alors associée à un système équivalent au système initial.

Notation.
La ligne obtenue en multipliant les coefficients de la ligne (L_i) $(i \in \{1, 2, 3\})$ par le nombre réel k, sera notée $k(L_i)$.

- Le système (1) : $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} 2x + y - z = 4 \\ x - 5y + 4z = 0 \\ 3x + 3y + 5z = 1 \end{cases}$

est équivalent au système (4) : $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \begin{cases} 2x + y - z = 4 \\ -\frac{11}{2}y - \frac{7}{2}z = -2 \\ 3x + 3y + 5z = 1 \end{cases}$

en effet, on a remplacé x dans la deuxième équation par son expression, en fonction de y et z, calculée à partir de la première équation.

Remarquons que ceci revient à remplacer (E_2) par $(E_2) + \left(-\frac{1}{2}\right)(E_1)$.

Les matrices complètes :

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -5 & -4 & 0 \\ 3 & 3 & 5 & 1 \end{array}\right) \quad \text{et} \quad \left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -\frac{11}{2} & -\frac{7}{2} & -2 \\ 3 & 3 & 5 & 1 \end{array}\right)$$

sont donc associées à deux systèmes équivalents.

Règle 3

Pour tout couple (i, j) élément de $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$, on peut remplacer, dans la matrice complète associée à un système, la ligne (L_i) par la ligne $(L_i) + k(L_j)$ $(k \in \mathbb{R})$. La matrice complète obtenue est alors associée à un système équivalent au système initial.

Scanned by CamScanner

Activité

En utilisant les règles 1, 2, 3 permettant de transformer une matrice complète associée à un système d'équations linéaires en une autre matrice complète associée à un système équivalent, trouver comment obtenir la matrice complète associée au système :

$$(III)\quad (x, y, z)\in\mathbb{R}^3,\ \begin{cases} 2x + y - z = 4 \\ 11y + 7z = 4 \\ z = -1 \end{cases}$$

à partir de la matrice complète associée au système initial :

$$(1)\quad (x, y, z)\in\mathbb{R}^3,\ \begin{cases} 2x + y - z = 4 \\ x - 5y - 4z = 0 \\ 3x + 3y + 5z = 1. \end{cases}$$

Matrice complète associée au système (1) :

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -5 & -4 & 0 \\ 3 & 3 & 5 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} (L_1) \\ (L_2) \\ (L_3) \end{matrix}$$

↓ règle 3 on remplace $\left|\begin{array}{l} (L_2) \text{ par } (L_2) - \frac{1}{2}(L_1) \\ (L_3) \text{ par } (L_3) - \frac{3}{2}(L_1) \end{array}\right.$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & -\frac{11}{2} & -\frac{7}{2} & -2 \\ 0 & \frac{3}{2} & \frac{13}{2} & -5 \end{array}\right) \begin{matrix} (L_1) \\ (L_2') \\ (L_3') \end{matrix}$$

↓ règle 2 on multiplie $\left|\begin{array}{ll} (L_2') & \text{par } -2 \\ (L_3') & \text{par } 2 \end{array}\right.$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 11 & 7 & 4 \\ 0 & 3 & 13 & -10 \end{array}\right) \begin{matrix} (L_1) \\ (L_2'') \\ (L_3'') \end{matrix}$$

↓ règle 3 on remplace (L_3'') par $(L_3'') - \frac{3}{11}(L_2'')$

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 2 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 11 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & \frac{122}{11} & -\frac{122}{11} \end{array}\right) \begin{matrix} (L_1) \\ (L_2'') \\ (L_3''') \end{matrix}$$

Scanned by CamScanner

règle 2 on multiplie (L_3''') par $\frac{11}{122}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 11 & 7 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

c'est la matrice complète associée au système triangulaire :

$$(III) \quad (x, y, z)\in\mathbb{R}^3, \begin{cases} 2x+y-z=4 \\ 11y+7z=4 \\ z=-1. \end{cases}$$

Ce système est équivalent au système :

$$(1) \quad (x, y, z)\in\mathbb{R}^3, \begin{cases} 2x+y-z=4 \\ x-5y-4z=0 \\ 3x+3y+5z=1. \end{cases}$$

Résolution

La troisième équation du système (III) donne :

$z=-1$; d'où : $11y=11$; c'est-à-dire : $y=1$

et : $2x+1+1=4$

donne : $x=1$.

Conclusion

L'ensemble des solutions du système :

$$(x, y, z)\in\mathbb{R}^3, \begin{cases} 2x+y-z=4 \\ x-5y-4z=0 \\ 3x+3y+5z=1 \end{cases}$$

est : $\{(1; 1; -1)\}$.

2) Méthode de Gauss et transformation d'une matrice complète

a) Exemple de résolution d'un système de n équations du premier degré dans $\mathbb{R}^n$ $(n\in N-\{0, 1\})$

Exemple : système de 4 équations linéaires dans $\mathbb{R}^4$

Résoudre le système (Σ) :

$$(x, y, z, t)\in\mathbb{R}^4, \begin{cases} 2x-y+z-t=-1 \\ 2x-y-3t=2 \\ 3x-z+t=-3 \\ 2x+2y-2z+5t=-6. \end{cases}$$

On se propose d'utiliser les matrices complètes et les règles de transformation pour obtenir une matrice complète associée à un système triangulaire équivalent au système initial.

Scanned by CamScanner

Matrice complète associée au système (Σ) :

$$\left(\begin{array}{cccc:c} \textcircled{2} & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -2 & 5 & -6 \end{array}\right) \begin{array}{l} (L_1) \\ (L_2) \\ (L_3) \\ (L_4). \end{array}$$

Le premier coefficient de la première ligne (ligne (L_1)) n'est pas nul. Remplaçons les lignes (L_2), (L_3), (L_4) respectivement par les lignes

$$(L_2)-\frac{2}{\textcircled{2}}(L_1), \quad (L_3)-\frac{3}{\textcircled{2}}(L_1), \quad (L_4)-\frac{2}{\textcircled{2}}(L_1) \quad \text{(règle 3)}$$

de façon à obtenir des coefficients nuls dans la première colonne au-dessous du premier coefficient de la ligne (L_1) qui, elle, reste inchangée.

On obtient la matrice complète :

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 2 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 3 & -3 & 6 & -5 \end{array}\right)$$

que l'on transforme en utilisant la *règle 2* (on multiplie les coefficients de la troisième ligne par 2).

On obtient la matrice complète :

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 2 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & \textcircled{0} & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -5 & 5 & -3 \\ 0 & 3 & -3 & 6 & -5 \end{array}\right)$$

Le deuxième coefficient de la deuxième ligne est nul.

Utilisons la *règle 1* pour obtenir une matrice complète où le deuxième coefficient de la deuxième ligne ne soit pas nul. (On intervertit par exemple la troisième ligne et la deuxième ligne.)
On obtient la matrice complète :

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 2 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & \textcircled{3} & -5 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 3 & -3 & 6 & -5 \end{array}\right) \begin{array}{l} (L_1) \\ (L_2') \\ (L_3') \\ (L_4') \end{array}$$

Le deuxième coefficient de la deuxième ligne n'est pas nul, remplaçons les lignes (L_3') et (L_4') respectivement par les lignes :

$$(L_3')-\frac{0}{\textcircled{3}}(L_2') \text{ (donc } (L_3') \text{ reste inchangée)}$$

et :

$$(L_4')-\frac{3}{\textcircled{3}}(L_2')$$

de façon à obtenir des coefficients nuls dans la deuxième colonne au-dessous du deuxième coefficient de la ligne (L_2') qui, elle, reste inchangée.

Scanned by CamScanner

On obtient la matrice complète :

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 2 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -5 & 5 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 4 \end{array}\right)$$

associée au système triangulaire (Σ') :

$$(x, y, z)\in\mathbb{R}^4,\ \begin{cases} 2x - y + z - t = -1 & (E_1) \\ 3y - 5z + 5t = -3 & (E_2') \\ -z - 2t = 3 & (E_3') \\ -3t = 4 & (E_4') \end{cases}$$

équivalent au système (Σ).

Résolvons le système (Σ') :

L'équation (E_4') donne : $t = -\frac{4}{3}$.

L'équation (E_3') donne alors : $-z + \frac{8}{3} = 3$; c'est-à-dire : $z = -\frac{1}{3}$.

L'équation (E_2') donne alors : $3y + \frac{5}{3} - \frac{20}{3} = -3$; c'est-à-dire : $y = \frac{2}{3}$.

L'équation (E_1) donne alors : $2x - \frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{4}{3} = -1$; c'est-à-dire : $x = -\frac{2}{3}$.

Conclusion

L'ensemble des solutions du système (Σ) :

$$(x, y, z, t)\in\mathbb{R}^4,\ \begin{cases} 2x - y + z - t = -1 \\ 2x - y - 3t = 2 \\ 3x - z + t = -3 \\ 2x + 2y - 2z + 5t = -6 \end{cases}$$

est : $\left\{\left(-\frac{2}{3}; \frac{2}{3}; -\frac{1}{3}; -\frac{4}{3}\right)\right\}$.

Cette méthode systématique pour résoudre un système d'équations linéaires est appelée **méthode de Gauss.**

Exercices

En utilisant la méthode de Gauss et les règles de transformations d'une matrice complète, résoudre les systèmes d'équations linéaires suivants :

1) $(x, y, z)\in\mathbb{R}^3,\ \begin{cases} x + 2y = 1 \\ y + 2z = 3 \\ z + 2x = -1. \end{cases}$

2) $(x, y, z, t)\in\mathbb{R}^4,\ \begin{cases} 2x - y - z - t = -1 \\ x - 3y + z + t = -2 \\ x + y - 2z + 4t = 4 \\ x - y + z - 2t = -8 \end{cases}$

Scanned by CamScanner

b) Utilisation de la méthode de Gauss pour la résolution d'un système de p équations dans $\mathbb{R}^n$ (avec : $p < n$)

Exemple. Système de 4 équations linéaires dans $\mathbb{R}^5$.

Résoudre le système :

$$(x, y, z, t, u) \in \mathbb{R}^5, \quad \begin{cases} 2x - 14y + 7z - 7t + 11u = -1 \\ 4x - 10y + 5z - 5t + 7u = 1 \\ x + 2y - z + t - 2u = 1 \\ 2x - 2y + z - t + u = 1. \end{cases}$$

- La matrice complète associée à ce système est :

$$\left(\begin{array}{ccccc:c} 2 & -14 & 7 & -7 & 11 & -1 \\ 4 & -10 & 5 & -5 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} (L_1) \\ (L_2) \\ (L_3) \\ (L_4) \end{matrix}$$

↓ règle 3 on remplace (L_2) par $(L_2) - 2(L_1)$; (L_3) par $(L_3) - \frac{1}{2}(L_1)$; (L_4) par $(L_4) - (L_1)$

$$\left(\begin{array}{ccccc:c} 2 & -14 & 7 & -7 & 11 & -1 \\ 0 & 18 & -9 & 9 & -15 & 3 \\ 0 & 9 & -\frac{9}{2} & \frac{9}{2} & -\frac{15}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 12 & -6 & 6 & -10 & 2 \end{array}\right) \begin{matrix} (L_1) \\ (L_2') \\ (L_3') \\ (L_4') \end{matrix}$$

↓ règle 2 on multiplie (L_2') par $\frac{1}{3}$; (L_3') par $\frac{2}{3}$; (L_4') par $\frac{1}{2}$

$$\left(\begin{array}{ccccc:c} 2 & -14 & 7 & -7 & 11 & -1 \\ 0 & 6 & -3 & 3 & -5 & 1 \\ 0 & 6 & -3 & 3 & -5 & 1 \\ 0 & 6 & -3 & 3 & -5 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} (L_1) \\ (L_2'') \\ (L_3'') \\ (L_4'') \end{matrix}$$

↓ règle 3 on remplace (L_3'') par $(L_3'') - (L_2'')$; (L_4'') par $(L_4'') - (L_2'')$

$$\left(\begin{array}{ccccc:c} 2 & -14 & 7 & -7 & 11 & -1 \\ 0 & 6 & -3 & 3 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Scanned by CamScanner

Cette matrice complète est associée au système :

$$(x,\ y,\ z,\ t,\ u)\in\mathbb{R}^5,\quad \begin{cases} 2x-14y+7z-7t+11u=-1 \\ \quad\ 6y-3z+3t-\ 5u=\ \ 1 \end{cases}$$

équivalent au système initial.

• Observons qu'en écrivant ce système sous la forme :

$$(x,\ y,\ z,\ t,\ u)\in\mathbb{R}^5,\quad \begin{cases} 2x-14y=-7z+7t-11u-1 \\ \quad\ 6y=\ \ 3z-3t+\ 5u+1 \end{cases}$$

on obtient un système triangulaire, chaque fois que l'on attribue à z, t, u des valeurs réelles. Ce système admet donc une infinité de solutions, ensemble des quintuplets de la forme :

$$\left(\frac{1}{3}u+\frac{2}{3};\ \frac{1}{2}z-\frac{1}{2}t+\frac{5}{6}u+\frac{1}{6};\ z;\ t;\ u\right)$$

où z, t, u sont des nombres réels quelconques.

On écrira :

$$\mathcal{S}=\left\{(x,\ y,\ z,\ t,\ u)\in\mathbb{R}^5\ \middle|\ x=\frac{1}{2}u+\frac{2}{3},\ y=\frac{1}{2}z-\frac{1}{2}t+\frac{5}{6}u+\frac{1}{6}\right\}$$

ou encore :

$$\mathcal{S}=\left\{\left(\frac{1}{2}u+\frac{2}{3};\ \frac{1}{2}z-\frac{1}{2}t+\frac{5}{6}u+\frac{1}{6};\ z;\ t;\ u\right)\ \middle|\ (z,\ t,\ u)\in\mathbb{R}^3\right\}$$

Exercices

1) Résoudre le système :

$$(x,\ y,\ z)\in\mathbb{R}^3,\quad \begin{cases} x-y+2z=-1 \\ 2x+y-\ z=\ \ 0. \end{cases}$$

2) Résoudre le système :

$$(x,\ y,\ z,\ t)\in\mathbb{R}^4,\quad \begin{cases} x-\ y+2z-t=2 \\ 2x-2y+\ z+t=1 \\ x-\ y+\ z-t=0. \end{cases}$$

c) Utilisation de la méthode de Gauss pour la résolution d'un système de p équations linéaires dans $\mathbb{R}^n$ (avec : $p>n$)

Exemple. Système de 5 équations dans $\mathbb{R}^4$.

On considère le système d'équations linéaires :

$$(x,\ y,\ z,\ t)\in\mathbb{R}^4,\quad \begin{cases} 2x+\ 2y-2z+5t=-6 \\ 3x\quad\ -\ z+\ t=-3 \\ 2x-\ \ y\quad\ -3t=\ \ 2 \\ 2x-\ \ y+\ z-\ \ t=\ \ 1 \\ \ x-my-\ z+2t=\ \ m \end{cases}$$

où m est un nombre réel (paramètre). Pour quelle(s) valeur(s) de m, ce système a-t-il au moins une solution?

Scanned by CamScanner

• Considérons la matrice complète associée à ce système :

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 2 & 2 & -2 & 5 & -6 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -m & -1 & 2 & m \end{array}\right)$$

En transformant cette matrice complète par les règles habituelles, on obtient la matrice complète :

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 2 & 2 & -2 & 5 & -6 \\ 0 & -3 & 2 & -\frac{13}{2} & 6 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 2 \\ 0 & 0 & \frac{-1-2m}{3} & \frac{13m+8}{6} & -m+2 \end{array}\right)$$

Remarquons que de cette matrice complète l'on peut extraire une matrice complète associée à un système triangulaire.

En effet, la matrice complète :

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 2 & 2 & -2 & 5 & -6 \\ 0 & -3 & 2 & -\frac{13}{2} & 6 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} & 2 \end{array}\right)$$

est associée au système triangulaire :

$$(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, \begin{cases} 2x + 2y - 2z + 5t = -6 \\ -3y + 2z - \frac{13}{2}t = 6 \\ z + \frac{1}{2}t = 1 \\ -\frac{3}{2}t = 2 \end{cases}$$

Ce système a pour solution le quadruplet :

$$\left(0; 2; \frac{5}{3}; -\frac{4}{3}\right).$$

Scanned by CamScanner

• Le système initial, équivalent au système :

$$(x, y, z, t)\in\mathbb{R}^4,\ \begin{cases} 2x+2y-2z+\ \ 5t=-6 \\ \quad -3y+2z-\dfrac{13}{2}t=\ \ 6 \\ \qquad\qquad z+\ \dfrac{1}{2}t=\ \ 1 \\ \qquad\qquad\quad -\ \dfrac{3}{2}t=\ \ 2 \\ \dfrac{-1-2m}{3}z+\dfrac{13m+8}{6}t=-m+2 \end{cases}$$

n'aura donc des solutions que si, et seulement si, le quadruplet $\left(0; 2; \frac{5}{3}; -\frac{4}{3}\right)$ vérifie la dernière équation, c'est-à-dire si et seulement si :

$$\frac{-1-2m}{3}\left(\frac{5}{3}\right)+\left(\frac{13m+8}{6}\right)\left(\frac{-4}{3}\right)=-m+2$$

c'est-à-dire, si et seulement si : $m=-\frac{13}{9}$.

L'unique solution du système est alors :

$$\left(0; 2; \frac{5}{3}; -\frac{4}{3}\right).$$

Exercices

1) Résoudre le système :

$$(x, y, z)\in\mathbb{R}^3,\ \begin{cases} 2x-\ \ y+3z=1 \\ -\ 4x+2y+\ \ z=3 \\ -\ 2x+\ \ y+4z=4 \\ 10x-5y-6z=-10. \end{cases}$$

2) Résoudre le système :

$$(x, y)\in\mathbb{R}^2,\ \begin{cases} x+\ \ y=1 \\ 2x-3y=-1 \\ 4x+3y=0 \\ \dfrac{1}{2}x-\ \ y=5. \end{cases}$$

2 Problèmes pratiques utilisant la résolution de systèmes d'équations linéaires

1) Recherche de fonctions numériques

Trouver la fonction polynôme f de degré 3, dont la représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) passe par les points dont les coordonnées respectives sont $(1; -4)$, $(-1; 4)$, $(2; 1)$ et admette un extremum relatif au point d'abscisse 1.

Scanned by CamScanner

Montrer que la recherche de cette fonction polynôme revient à résoudre le système de quatre équations linéaires dans $\mathbb{R}^4$:

$$(a, b, c, d)\in\mathbb{R}^4,\ \begin{cases} a+b+c+d=-4 \\ -a+b-c+d=4 \\ 8a+4b+2c+d=1 \\ 3a+2b+c=0. \end{cases}$$

La matrice complète associée à ce système est :

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & -4 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

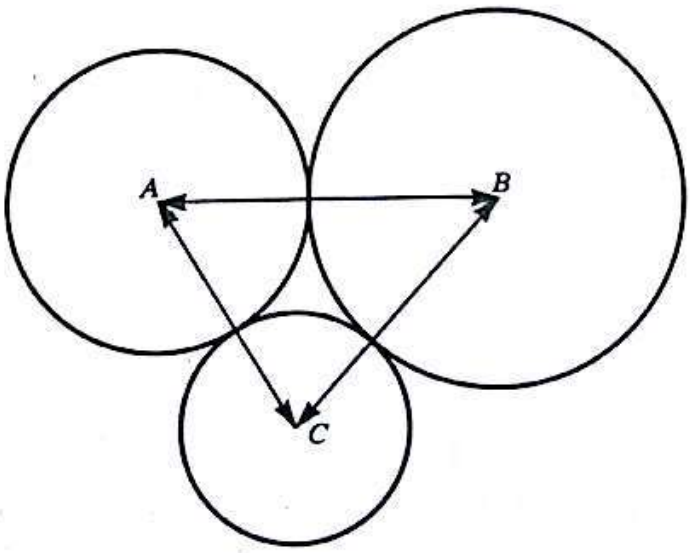
Transformer cette matrice complète en utilisant les règles habituelles vues dans la leçon 1, en une matrice complète associée à un système triangulaire équivalent au système initial.

Résoudre le système triangulaire et en déduire la fonction f.

On trouve : $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto x^3+x^2-5x-1$.

Représenter graphiquement cette fonction numérique.

2) Problème de géométrie



On considère trois cercles de centres respectifs A, B, C tangents deux à deux, et tels que :

$$AB = 34{,}5 \text{ mm},\quad AC = 27 \text{ mm},\quad BC = 31{,}5 \text{ mm}$$

comme l'indique la figure ci-dessus.

Trouver le rayon de chaque cercle.

Scanned by CamScanner

Montrer que ce problème revient à résoudre un système de trois équations linéaires dans $\mathbb{R}^3$, dont une matrice complète est :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 34{,}5 \\ 0 & 1 & 1 & 31{,}5 \\ 1 & 0 & 1 & 27 \end{array}\right).$$

Transformer cette matrice complète en une matrice complète associée à un système triangulaire équivalent au système initial et répondre à la question posée dans le problème.

3) Problème vétérinaire

Les aliments de base d'un cheval sont :

le mil, le maïs, l'avoine et le son.

Un groupement de propriétaires de chevaux demande à un vétérinaire de leur indiquer pour chacun de ces aliments, les quantités quotidiennes nécessaires à donner à un cheval, ayant eux-mêmes fixé à 600 francs par jour le prix pour l'alimentation d'un cheval.

Le vétérinaire répond qu'un cheval a besoin quotidiennement :

1) d'une quantité totale de 8 kg de ces aliments;

2) de 7 unités fourragères (calories nécessaires à ses dépenses d'énergie, qu'il trouve dans ces aliments);

3) d'un complément de 34 g de calcium par jour;

4) d'un rapport entre la quantité de calcium et de phosphore absorbé par jour, égal à 1,8 (rapport phosphocalcique)

et il joint le tableau suivant :

	Calcium en g/kg	Phosphore en g/kg	Nombre d'unités fourragères par kg	Prix en francs/kg
Mil	0,28	1,89	1	120
Maïs	0,20	2,80	1,20	85
Avoine	0,54	4,04	0,80	170
Son	0,19	2,23	0,60	20

Trouver les quantités quotidiennes à donner à un cheval pour respecter toutes les conditions.

Soit x : la quantité de mil exprimée en kilogrammes, pour un cheval et par jour,
y : la quantité de maïs exprimée en kilogrammes, pour un cheval et par jour,
z : la quantité d'avoine exprimée en kilogrammes, pour un cheval et par jour,
t : la quantité de son exprimée en kilogrammes, pour un cheval et par jour,

Scanned by CamScanner

• La quantité totale des aliments consommés quotidiennement par un cheval est 8 kg,

on a donc : $x+y+z+t=8.$

• Exprimer en fonction de x, y, z, t le prix de l'alimentation quotidienne d'un cheval.

• Exprimer en fonction de x, y, z, t le nombre d'unités fourragères quotidiennes nécessaires.

• Exprimer en fonction de x, y, z, t :

— la quantité de calcium consommée par jour (en grammes);

— la quantité de phosphore consommée par jour (en grammes);

— le quotient de la quantité de calcium par la quantité de phosphore absorbées par jour (rapport phosphocalcique);

— en déduire que x, y, z, t vérifient l'équation :

$$3{,}122x+4{,}84y+6{,}732z+3{,}824t=34.$$

• Montrer qu'une matrice complète associée au système d'équations linéaires permettant de calculer x, y, z, t est :

$$\left(\begin{array}{cccc:c} 1 & 1 & 1 & 1 & 8 \\ 12 & 8{,}5 & 17 & 2 & 60 \\ 1 & 1{,}2 & 0{,}8 & 0{,}6 & 7 \\ 3{,}122 & 4{,}84 & 6{,}732 & 3{,}824 & 34 \end{array}\right)$$

• Transformer cette matrice complète par la méthode de Gauss et trouver un système triangulaire équivalent au système initial.
Résoudre ce système et répondre à la question posée dans le problème.

• On trouve qu'un cheval, dans les conditions posées par les propriétaires et le vétérinaire, doit consommer quotidiennement (à peu près...) :

1,7 kg de mil,
2,2 kg de maïs,
0,8 kg d'avoine,
3,2 kg de son.

4) Qui a perdu? Qui a gagné?

Trois joueurs conviennent que le perdant d'une partie doublera la mise des deux autres.
Ils jouent trois parties et perdent chacun une partie.
Ils se séparent en ayant chacun 160 francs.
Combien chaque joueur avait-il misé en commençant le jeu?
Qui a perdu de l'argent?
Qui en a gagné?

Scanned by CamScanner

Soit | x la mise qu'avait le joueur qui a perdu en premier (on l'appellera « joueur 1 »)
y la mise qu'avait le joueur qui a perdu en second (on l'appellera « joueur 2 »)
z la mise qu'avait le joueur qui a perdu en troisième (on l'appellera « joueur 3 »).

• Après la première partie, vérifier que les nouvelles mises de chacun des joueurs sont :

$$\begin{aligned} x-y-z &\text{ pour le joueur 1} \\ 2y &\text{ pour le joueur 2} \\ 2z &\text{ pour le joueur 3.} \end{aligned}$$

• Exprimer en fonction de x, y, z, les nouvelles mises des joueurs après la deuxième partie.

• Même question après la troisième partie.

• Sachant qu'après la troisième partie chaque joueur à 160 francs, montrer qu'une matrice complète associée au système d'équations linéaires permettant de calculer x, y, z est :

$$\left(\begin{array}{ccc:c} 4 & -4 & -4 & 160 \\ -2 & 6 & -2 & 160 \\ -1 & -1 & 7 & 160 \end{array}\right)$$

• Résoudre le système et répondre aux questions posées dans le problème.

Réponse. On trouve : $x = 260$
$y = 140$
$z = 80$.

3 Programmation linéaire. Optimisation

1) Recherche graphique d'un extremum sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$

a) Exemple de recherche d'un minimum

Soit la fonction

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto 3x - 2y. \end{aligned}$$

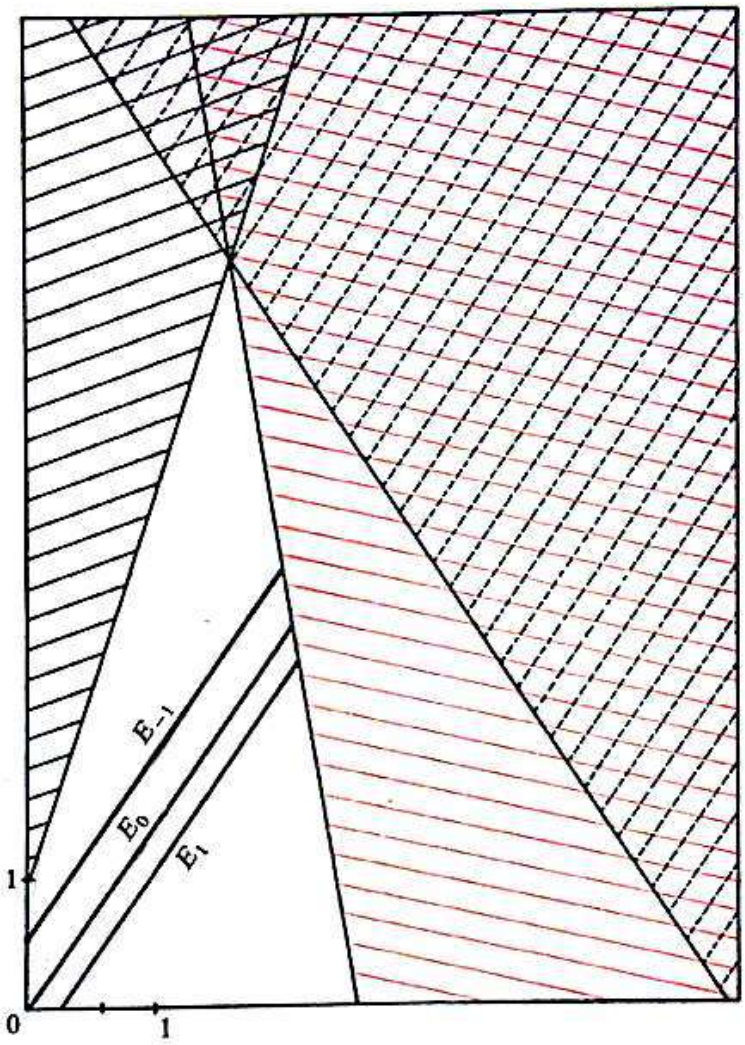
1) Trouver graphiquement le minimum de la fonction f, sur le sous-ensemble E de $\mathbb{R}^2$ des solutions du système de contraintes :

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ y - 3x \leqslant 1 \\ 2y + 3x \leqslant 16 \\ 6x + y \leqslant 15. \end{cases}$$

2) Donner un couple de E, en lequel ce minimum est atteint.

Scanned by CamScanner

• Représentons dans le plan muni d'un repère (O, I, J), le sous-ensemble E : c'est la partie non hachurée du dessin ci-dessous (justifier!) :



• Soit E_k le sous-ensemble de E, ensemble des antécédents du nombre réel k par la fonction f.
On a représenté sur le dessin ci-dessus les ensembles E_1, E_0, E_{-1}.

• Représenter les ensembles E_{-4}, E_{-6}, E_{-7}.

• Trouver graphiquement le minimum m de la fonction f sur l'ensemble E et répondre à la deuxième question posée.

Remarque pratique

Soit | k un nombre réel
D_k l'ensemble tel que : $D_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 3x - 2y = k\}$
K l'ensemble tel que : $K = \{k \in \mathbb{R} \mid D_k \cap E \neq \varnothing\}$.

Remarquons que la représentation graphique de l'ensemble D_k est la droite (d_k) d'équation $3x - 2y = k$.

Soit | k_1 et k_2 deux éléments de K tels que : $k_1 < k_2$
y_1, y_2 les ordonnées respectives des points d'intersection des droites (d_{k_1}) et (d_{k_2}) avec la droite (OJ).

Scanned by CamScanner

Montrer que : $k_1 < k_2 \implies y_1 > y_2$.

Ainsi, le minimum m de la fonction f sur l'ensemble E est la valeur de k pour laquelle l'ordonnée du point d'intersection de la droite (d_k) $(k \in K)$, avec la droite (OJ) est maximale.

b) **Exemple de recherche d'un maximum**

Soit la fonction

$$g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto 11x + 8{,}5y.$$

1) Trouver graphiquement le maximum de la fonction g sur le sous-ensemble F de $\mathbb{R}^2$, des solutions du système de contraintes :

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \\ 5x + 3y \leqslant 360 \\ 3x + y \leqslant 180 \\ x + y \leqslant 100. \end{cases}$$

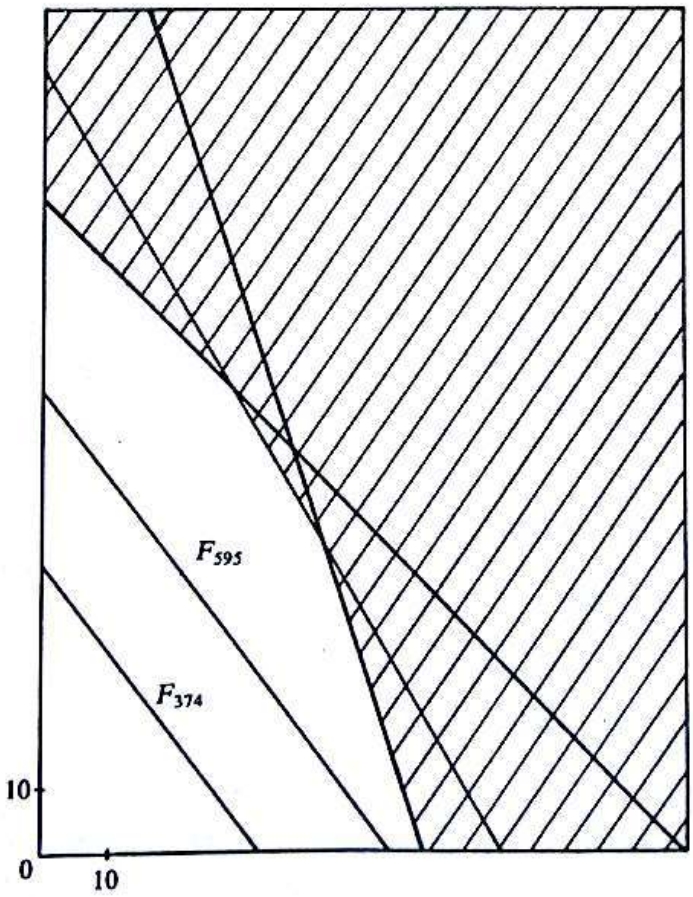
2) Donner un couple de F en lequel ce maximum est atteint.

• Utiliser une méthode analogue au *a*) pour trouver graphiquement le maximum de g sur F.

Sur le dessin ci-dessous, on a représenté :

— L'ensemble F (partie non hachurée).

— Les sous-ensembles F_{374} et F_{595} de l'ensemble F, ensembles respectifs des antécédents des nombres réels 374 et 595 par la fonction g.



Scanned by CamScanner

• *Remarque pratique*

Soit | k un nombre réel
D_k l'ensemble tel que : $D_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 11x + 8{,}5y = k\}$
L l'ensemble tel que : $L = \{k \in \mathbb{R} \mid D_k \cap F \neq \varnothing\}$.

La représentation graphique de l'ensemble D_k est la droite (d_k) d'équation :

$$11x + 8{,}5y = k.$$

Soit | k_1, k_2 deux éléments de L tels que : $k_1 < k_2$
y_1, y_2 les ordonnées respectives des points d'intersection des droites (d_{k_1}) et (d_{k_2}) avec la droite (OJ).

Montrer que : $\quad k_1 < k_2 \implies y_1 < y_2$.

Ainsi, le maximum M de la fonction g sur l'ensemble F est la valeur de k pour laquelle l'ordonnée du point d'intersection de la droite (d_k) $(k \in L)$ avec la droite (OJ) est maximale.

2) Exemples de programmation linéaire

a) Maximisation d'un bénéfice

Deux artisans A et B décident de s'associer en travaillant chacun un maximum de 42 heures par semaine pour fabriquer des couteaux et des paires de ciseaux.

Un couteau rapporte un bénéfice de 200 francs. Une paire de ciseaux rapporte un bénéfice de 300 francs.

La fabrication d'un couteau nécessite 2 heures de travail de l'artisan A puis une heure de travail de l'artisan B.

La fabrication d'une paire de ciseaux nécessite 2 heures de travail de l'artisan A et 3 heures de travail de l'artisan B.

Combien faut-il fabriquer de couteaux et de paires de ciseaux par semaine pour réaliser un bénéfice maximum?
Quelle est la valeur de ce bénéfice hebdomadaire?

Désignons par x et y respectivement le nombre de couteaux et de ciseaux fabriqués par semaine.

• Exprimer en fonction de x et y :

— le nombre d'heures de travail hebdomadaire de l'artisan A;

— le nombre d'heures de travail hebdomadaire de l'artisan B.

• Exprimer en fonction de x et y le bénéfice réalisé par semaine.

• Montrer alors que la réponse au problème posé revient à trouver le maximum de la fonction :

$$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto 300y + 200x.$$

Scanned by CamScanner

Sur le sous-ensemble E de $\mathbb{R}^2$ défini par l'ensemble des solutions du système de contraintes :

$$(x, y)\in\mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} x\geqslant 0 \\ y\geqslant 0 \\ x+y\leqslant 21 \\ x+3y\leqslant 42. \end{cases}$$

• Résoudre le problème posé.

b) Minimisation d'un prix

Un élevage d'animaux nécessite un apport journalier minimal de 120 kg de protides, 90 kg de lipides et 60 kg de glucides.

Deux aliments A et B ont les caractéristiques suivantes :

	quantité de protides par sac	quantité de lipides par sac	quantité de glucides par sac
A	3 kg	3 kg	1 kg
B	2 kg	1 kg	2 kg

Un sac d'aliment A coûte 1 000 francs.
Un sac d'aliment B coûte 500 francs.

Combien de sacs d'aliment A et d'aliment B doit-on utiliser chaque jour pour nourrir ces animaux à un prix de revient minimal?
Quel est ce prix de revient?

Soit x et y les nombres respectifs de sacs d'aliment A et d'aliment B.

Définir la fonction P qui à chaque couple (x, y) associe le prix de revient de l'alimentation quotidienne, et le système de contraintes permettant de trouver le minimum de la fonction P sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ que l'on représentera graphiquement.

Répondre alors aux questions posées.

c) Activité : Retour au problème vétérinaire posé dans la leçon 2, paragraphe 3)

Le groupement de propriétaires ne fixe pas le prix par jour pour l'alimentation d'un cheval et le vétérinaire indique alors que :

1) La quantité minimale de nourriture à donner par jour à un cheval est de 8 kg.

2) Le nombre d'unités fourragères par jour doit être égal à 7.

3) Un apport supplémentaire de calcium par jour doit être égal à 34 grammes.

Scanned by CamScanner

4) Le rapport phosphocalcique doit être égal à 1,8.

Quel est le prix minimal qu'il faut payer dans ces conditions pour nourrir un cheval?

Quelles sont alors les quantités de mil, de maïs, d'avoine et de son nécessaires par jour?

Indication. Les conditions 2) et 4) permettent d'exprimer x et y en fonction de z et t.

Scanned by CamScanner

Exercices

1 (1). Systèmes de n équations linéaires dans $\mathbb{R}^n$.

En utilisant la méthode de Gauss et les règles de transformations d'une matrice complète, résoudre les systèmes d'équations linéaires suivants :

1) $(x, y, z)\in\mathbb{R}^3$, $\begin{cases} 3x+y-3z=6 \\ 3x-2y+2z=3 \\ 4x-3y+z=7. \end{cases}$

2) $(x, y, z)\in\mathbb{R}^3$, $\begin{cases} x+y+z=1 \\ y+z=0 \\ x+y=0. \end{cases}$

3) $(u, v, w)\in\mathbb{R}^3$, $\begin{cases} u+2v+3w=0 \\ u+2v-4w=1 \\ 2u-v+w=1. \end{cases}$

4) $(x, y, z)\in\mathbb{R}^3$, $\begin{cases} 2x+2y+2z=3 \\ x+y+z=1 \\ x-y+z=-1. \end{cases}$

5) $(x, y, z, t)\in\mathbb{R}^4$, $\begin{cases} 2x-y+z-t=-1 \\ 2x-y-3t=2 \\ 3x-z+t=-3 \\ 2x+2y-2z+5t=-6. \end{cases}$

6) $(x, y, z, t)\in\mathbb{R}^4$, $\begin{cases} x-2y+3z-t=0 \\ 2x-y+z-2t=1 \\ -x+y-2z+t=2 \\ 3x-4y+z-3t=3. \end{cases}$

7) $(x, y, z, t)\in\mathbb{R}^4$, $\begin{cases} 2x-y-z-t=-1 \\ x-2y+z+t=-2 \\ x+y-2z+t=4 \\ x+y+z-2t=-8. \end{cases}$

8) $(x, y, z, t)\in\mathbb{R}^4$, $\begin{cases} x+3y-2z+t=1 \\ -x+2y+z-3t=-0,5 \\ 2x-y+3z+t=4 \\ 2x-4y-2z+6t=1. \end{cases}$

9) $(x, y, z, t, u, v)\in\mathbb{R}^6$

$$\begin{cases} x+2y+3z+4t+5u+6v=1 \\ 2x+3y+4z+5t+6u+v=2 \\ 3x+4y+5z+6t+u+2v=3 \\ 4x+5y+6z+t+2u+3v=4 \\ 5x+6y+z+2t+3u+4v=5 \\ 6x+y+2z+3t+4u+5v=6. \end{cases}$$

2 (1). Systèmes de p équations linéaires dans $\mathbb{R}^n$ avec : $p<n$.

1) On considère le système :

$$(x, y, z)\in\mathbb{R}^3,\ \begin{cases} x-y+z=4 \\ 2x+y-2z=1. \end{cases}$$

Dans l'ensemble des solutions de ce système existe-t-il :

a) des solutions dont les deux premières composantes soient égales?

b) des solutions dont la première composante soit égale à la troisième?

c) des solutions rendant minimal le produit des deux premières composantes?

d) des solutions dont les trois composantes soient strictement positives?

e) des solutions dont la troisième composante soit le triple de la première?

2) En utilisant la méthode de Gauss et les règles de transformations d'une matrice complète, résoudre le système :

$$(x, y, z, t)\in\mathbb{R}^4,\ \begin{cases} x+5y+4z-13t=3 \\ 4x+4y+6z-8t=5 \\ 2x+2y+3z-4t=1. \end{cases}$$

3) On considère le système d'équations linéaires :

$$(x, y, z, t)\in\mathbb{R}^4,\ \begin{cases} 2x+y+z-4t=-2 \\ x-y+z-t=5 \\ 3x+y-2z-2t=-12. \end{cases}$$

a) En utilisant la méthode de Gauss et les règles de transformations d'une matrice complète, résoudre ce système.

b) Quelle est la solution de ce système pour laquelle le nombre réel x^2+yz soit minimal? Quelle est alors la valeur de ce minimum?

(D'après Baccalauréat.)

4) En utilisant la méthode de Gauss et les règles de transformations d'une matrice complète, résoudre le système d'équations linéaires :

$$(x, y, z, t, u)\in\mathbb{R}^5,\ \begin{cases} x+2y+3z+4t+u=1 \\ x+2z+2u=2 \\ x+4y+z+2t+u=a \\ 2x+3y+4z+3t+3u=b. \end{cases}$$

Discuter suivant les valeurs des nombres réels a et b.

(D'après Baccalauréat.)

Scanned by CamScanner

3 (1). Systèmes de p-équations linéaires dans $\mathbb{R}^n$ avec : $p > n$.

1) En utilisant la méthode de Gauss et les règles de transformations d'une matrice complète, résoudre le système d'équations linéaires :

$$(x, y, z)\in\mathbb{R}^3,\ \begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ -4x + 2y + z = 3 \\ -2x + y + 4z = 4 \\ 10x - 5y - 6z = -10. \end{cases}$$

2) Le système d'équations linéaires

$$(x, y, z)\in\mathbb{R}^4,\ \begin{cases} x - y + z - t = 0 \\ 2x + y + t = 1 \\ x + 2y - z - t = 2 \\ 3x + 4y - z + t = 3 \\ x + y + z + t = 0 \end{cases}$$

a-t-il des solutions?

3) Résoudre le système d'équations linéaires :

$$(x, y)\in\mathbb{R}^2,\ \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - 3y = -1 \\ 4x + 3y = 0 \\ \frac{1}{2}x - y = 5. \end{cases}$$

4) Résoudre successivement chacun des deux systèmes d'équations linéaires suivants :

$$(\Sigma_1) : (x, y, z)\in\mathbb{R}^3,\ \begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ 3x - 2y + z = 15 \\ 5x + 3y + 4z = 25 \\ 10x + 3y - 50z = 10. \end{cases}$$

$$(\Sigma_2) : (x, y, z)\in\mathbb{R}^3,\ \begin{cases} x + y + 2z = 5 \\ 3x - 2y + z = 15 \\ 5x + 3y + 4z = 25 \\ 10x + 3y - 50z = 11. \end{cases}$$

5) A quelle conditions portant sur les nombres réels a, b, c, d, le système d'équations linéaires :

$$(x, y, z)\in\mathbb{R}^3,\ \begin{cases} 2x - y + z = a \\ x + y - z = b \\ y - z = c \\ x + 3y - 3z = d \end{cases}$$

a-t-il des solutions?
Achever ensuite la résolution.

6) Pour quelle(s) valeur(s) de m le système d'équations linéaires :

$$(x, y, z)\in\mathbb{R}^3,\ \begin{cases} 2x + 3y - 3z = m \\ x + y + 5z = -7 \\ x + 3y + z = 5 \\ 2x + y + z = 2 \end{cases}$$

a-t-il des solutions?
Achever ensuite la résolution.

4 (1). 1) Résoudre le système d'équations linéaires :

$$(x, y, z)\in\mathbb{R}^3,\ \begin{cases} -3x + 4y - z = 0 \\ -2x + 2z = 0 \\ 3x - 12y + 9z = 0. \end{cases}$$

2) a, b, c désignant trois nombres réels non nuls, discuter l'existence de solutions pour le système d'équations linéaires :

$$(x, y, z)\in\mathbb{R}^3,\ \begin{cases} -3x + 4y - z = a \\ -2x + 2z = b \\ -3x - 12y + 9z = c. \end{cases}$$

(D'après Baccalauréat.)

5 (1). Discuter suivant les valeurs du nombre réel m, l'existence de solutions pour le système :

$$(x, y, z)\in\mathbb{R},\ \begin{cases} mx + y + z = m + 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = m - 1. \end{cases}$$

(D'après Baccalauréat.)

6 (2). *a*) Trouver la fonction polynôme de degré 3 dont la représentation graphique dans le plan muni d'un repère (O, I, J) orthogonal passe par les points dont les coordonnées respectives sont $(1, 0)$, $(-1, -6)$, $(2, 12)$ et admette au point d'abscisse 1, une tangente dont le coefficient directeur est égal à 5.

b) Représenter graphiquement cette fonction.

7 (2). On considère le carré suivant :

x	y	z
t	11	u
v	w	r

Déterminer des nombres entiers naturels deux à deux distincts tel que la somme des termes de chaque ligne, de chaque colonne, de chaque diagonale soit égale à 33.

8 (2). Soit un quadrilatère $ABCD$ et x, y, z, t les mesures en centimètres respectivement des côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[AD]$.
Sachant que :

— le périmètre du quadrilatère a pour mesure 10 cm;

— la somme des mesures des côtés $[AB]$ et $[AD]$ est égale à la somme des mesures des côtés $[CB]$ et $[CD]$;

Scanned by CamScanner

— la somme des mesures des côtés $[AB]$ et $[CD]$ est égale à la mesure du côté $[AD]$;

— la mesure du côté $[AD]$ est égale au double de la mesure du côté $[BC]$.
Calculer la mesure de chaque côté de ce quadrilatère et construire le quadrilatère $ABCD$.

9 (2). On considère un triangle ABC tel que :

$$AB = 5, \quad BC = 6, \quad AC = 7$$

(l'unité étant le centimètre).
Soit (C) le cercle inscrit dans ce triangle (on rappelle que (C) est tangent à chacun des trois côtés).
Déterminer la distance de chacun des trois points de tangence aux sommets du triangle situés sur le même côté.

10 (2). Un père, son fils et sa fille comparent leurs âges : l'âge du père, du fils, et de la fille sont respectivement proportionnels aux nombres 9, 4 et 3 et la somme des âges de ces trois personnes est égale à quatre fois l'âge du garçon. Quels sont les âges du père, du fils et de la fille?

11 (2). Trois fontaines A, B, C coulent dans un bassin.

— Si A et B coulaient seules, elles rempliraient la bassin en 1 h 10 min.

— Si A et C coulaient seules, elles rempliraient le bassin en 84 min.

— Si B et C coulaient seules, elles rempliraient le bassin en 2 h 20 min.

Pour remplir le bassin, quel temps faut-il :

a) à chacune de trois fontaines (si elles coulaient seules);

b) aux trois fontaines (lorsqu'elles coulent ensemble).

12 (2). Trois employés ont respectivement 18, 12 et 9 années de service.
Leurs salaires hebdomadaires respectifs sont 21 600 francs, 14 400 francs, 9 600 francs.
Ils doivent se partager une somme de 1 440 francs proportionnellement à leurs années de service et proportionnellement aux inverses de leurs salaires.
Trouver les trois parts.

13 (3). 1) Représenter graphiquement dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J), l'ensemble des solutions de chacun des systèmes de contraintes suivants (on utilisera deux dessins différents) :

a) $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\begin{cases} x + 2 > 0 \\ y \leqslant 1 \\ x - y - 1 < 0 \\ y + x < 0. \end{cases}$

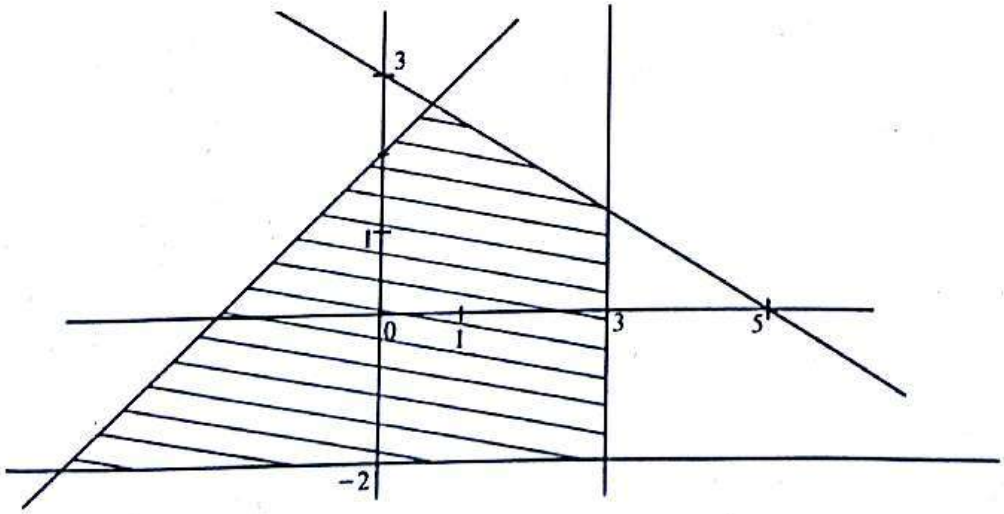
b) $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\begin{cases} y - x - 1 \leqslant 0 \\ y - x + 1 \geqslant 0 \\ x + y + 2 \geqslant 0 \\ x + y + 1 \geqslant 0. \end{cases}$

2) On désigne par E_1 et E_2 l'ensemble des solutions de chacun des deux systèmes proposés respectivement au 1) *a*) et *b*).
Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = 2x + y.$$

d admet-elle un ou des extremums sur chacun des sous-ensembles E_1 et E_2?
Dans l'affirmative, préciser la nature de l'extremum, sa valeur numérique, et un couple de E_1 (resp. E_2) pour lequel cet extremum est atteint (on précisera en outre, s'il existe plusieurs couples, permettant d'atteindre l'extremum éventuel).

14 (3)



Scanned by CamScanner

1) Déterminer le système de contraintes dont l'ensemble E des solutions est représenté dans le plan muni d'un repère orthonormé par la partie hachurée du dessin ci-dessus.

2) Trouver deux nombres réels a et b pour que la fonction f, de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$, définie par :

$$f((x, y)) = ax + by$$

admette un maximum sur E, tel que ce maximum soit atteint pour plusieurs couples de E.

3) Même question qu'au 2), f devant admettre un minimum sur E, tel que ce minimum soit atteint pour plusieurs couples de E.

15 (3). Soit f la fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f((x, y)) = 2x - \frac{1}{2}y;$$

f admet-elle un ou des extremums sur le sous-ensemble E de $\mathbb{R}^2$ des solutions du système de contraintes :

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} x + y - 1 \leqslant 0 \\ x - y + 1 \geqslant 0 \end{cases} ?$$

Dans l'affirmative, préciser la nature de l'extremum, sa valeur numérique et un couple de E pour lequel il est atteint.

16 (3). Parmi les couples de nombres réels vérifiant le système de contraintes :

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} 4x + 3y \geqslant 4\,500 \\ x + 2y \geqslant 2\,000 \\ 0 \leqslant x \leqslant 1\,600 \\ 0 \leqslant y \leqslant 1\,100 \end{cases}$$

en existe-t-il qui rendent maximal ou minimal la fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x, y) \longmapsto 0{,}04x + 0{,}032y ?$$

(D'après Baccalauréat.)

Programmation linéaire

17 (3). Un boulanger fabrique des pains sucrés longs et des pains sucrés ronds.
Il vend au maximum par jour 60 pains sucrés longs et 80 pains sucrés ronds.
Il a quotidiennement 150 œufs et 6 kg de sucre.
Pour un pain sucré long, il a besoin d'un œuf et de 50 g de sucre.
Pour un pain sucré rond, il a besoin d'un œuf et demi, et de 50 g de sucre.
Il réalise un bénéfice de 20 francs par pain sucré long et de 50 francs par pain sucré rond.
Combien faut-il qu'il fabrique de pains sucrés longs et de pains sucrés ronds pour réaliser un bénéfice maximal?

18 (3). Un exploitant agricole se livre à deux types A et B de culture. Il dispose de 120 hectares de terre, de 300 journées de main-d'œuvre et de 2 000 000 de francs au maximum à investir. Voici les données concernant les deux types de culture, par hectare exploité :

type de culture	A	B
mise de fond	20 000 francs	30 000 francs
main-d'œuvre	2 jours	7 jours
rendement	100 000 francs	300 000 francs

Quel est le type de culture qui donnera le meilleur rendement global?

19 (3). Une entreprise industrielle de boulangerie dispose de 20 tonnes de farine.

12 tonnes sont dans l'entrepôt A.

8 tonnes sont dans l'entrepôt B.

Elle a trois ateliers de cuisson : X, Y, Z.

X nécessite 8 tonnes de farine.

Y nécessite 6 tonnes de farine.

Z nécessite 6 tonnes de farine.

Les coûts du transport en francs par tonne sont les suivants :

	vers X	vers Y	vers Z
de A	700	300	200
de B	300	100	200

Quelle est la façon la plus économique d'approvisionner les ateliers?

N. B. — On désignera par :

x le nombre de tonnes qui vont de A à X;
y le nombre de tonnes qui vont de A à Y.

— On exprimera toutes les données en fonction de x et y.

— Noter que les 20 tonnes sont à distribuer entièrement.

Scanned by CamScanner

20 (3). Un fabricant de glace alimentaire a un dispositif lui permettant de fabriquer des simples barres de glace et des doubles barres de glace.
Pour une simple barre de glace vendue, il réalise un bénéfice de 100 francs.
Pour une double barre vendue, il réalise un bénéfice de 250 francs.
Il dispose de 60 moules lui permettant de faire des simples barres et de 60 moules lui permettant de faire des doubles barres.
Il vend au maximum 100 barres de glace par jour.

Enfin, il dispose d'une quantité d'eau potable qui lui permettrait de fabriquer 150 simples barres (une double barre lui demande le double de quantité d'eau que pour une simple barre).

Combien doit-il fabriquer de simples barres et de doubles barres pour réaliser un bénéfice maximum?

Scanned by CamScanner

3 Les nombres complexes

Leçon 1 : LE CORPS DES NOMBRES COMPLEXES (FORME ALGÉBRIQUE)

Leçon 2 : REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE D'UN NOMBRE COMPLEXE (FORME TRIGONOMÉTRIQUE)

Leçon 3 : ÉQUATIONS DU SECOND DEGRÉ DANS $\mathbb{C}$

1 Le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes (Forme algébrique)

1) Le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes

a) **Insuffisance du corps des nombres réels**

A partir de l'ensemble $\mathbb{N}$ des nombres entiers naturels, on a construit successivement les ensembles $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}$, afin de résoudre certains problèmes. Par exemple :

Les équations ci-dessous n'ont pas de solution	Tandis que les équations ci-dessous ont au moins une solution
$x \in \mathbb{N},\ x+1=0$	$x \in \mathbb{Z},\ x+1=0$
$x \in \mathbb{Z},\ 2x-1=0$	$x \in \mathbb{Q},\ 2x-1=0$
$x \in \mathbb{Q},\ x^2-2=0$	$x \in \mathbb{R},\ x^2-2=0$
$x \in \mathbb{R},\ x^2+1=0$	

b) **Activité : Introduction historique des nombres complexes**

Problème posé :

> Existe-t-il un ensemble de nombres qui contient $\mathbb{R}$, dont certains éléments ont pour carrés des nombres réels strictement négatifs?

Divers problèmes qui se sont posés au XVI^e siècle, tels que la résolution d'équations du 3^e dégré, ont conduit les mathématiciens de l'époque à porter leur attention sur les racines carrées des nombres réels négatifs.

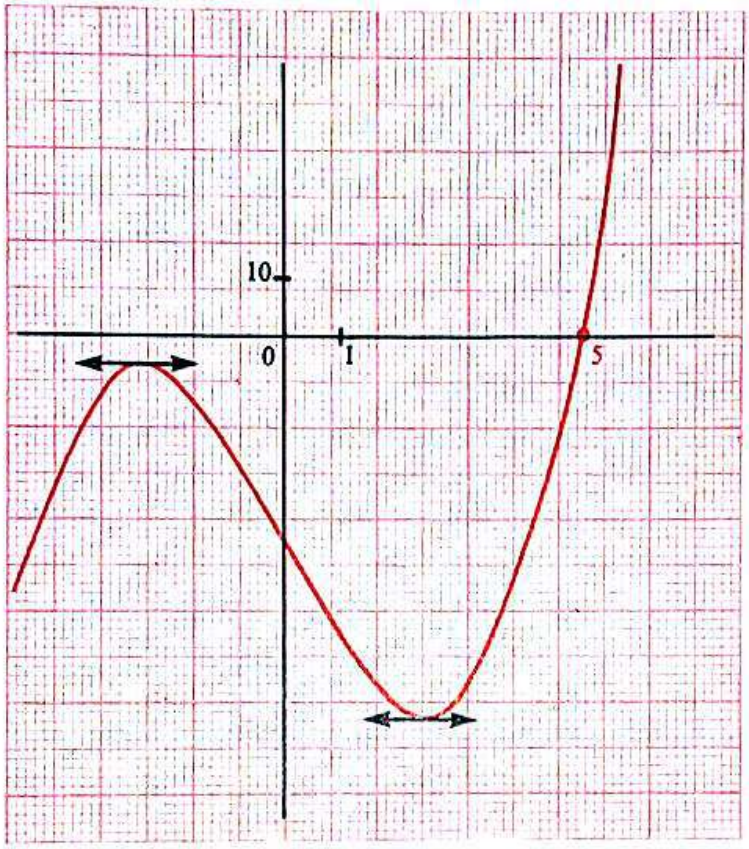
Scanned by CamScanner

Exemple 1

Résoudre l'équation :

$$(E) \quad x \in \mathbb{R},\ x^3 - 18x - 35 = 0.$$

• *La résolution graphique* de cette équation montre l'existence d'une solution unique : 5.



• *Résolution algébrique de* (E)

Posons : $x = a + b$

l'égalité : $(1) \quad x^3 - 18x - 35 = 0$

devient : $a^3 + b^3 + 3(ab - 6)(a + b) - 35 = 0.$

Puis en posant : $ab = 6$

l'égalité (1) dévient : $a^3 + b^3 = 35.$

La résolution du système ci-dessous :

$$(I) \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} a^3 + b^3 = 35 \\ ab = 6 \end{cases}$$

devrait permettre de trouver des solutions de l'équation (E).

Considérons le système :

$$(I') \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} a^3 + b^3 = 35 \\ a^3 b^3 = 216. \end{cases}$$

Vérifier qu'il est équivalent au système (I).

Scanned by CamScanner

Si le système (I') admet une solution (a, b), alors a^3 et b^3 sont solutions de l'équation :

$$(E') \quad X \in \mathbb{R}, \quad X^2 - 35X + 216 = 0.$$

Vérifier que 27 et 8 sont les deux solutions de l'équation (E').

Posons : $a^3 = 27$ et $b^3 = 8$

d'où : $a = 3$ et $b = 2$

et : $a + b = 5$.

5 est alors solution de l'équation :

$$(E) \quad x \in \mathbb{R}, \quad x^3 - 18x - 35 = 0.$$

On a : $x^3 - 18x - 35 = (x - 5)(x^2 + 5x + 7)$.

Vérifier que l'équation :

$$x \in \mathbb{R}, \quad x^2 + 5x + 7 = 0$$

n'admet pas de solution.

On a donc montré par le calcul, que 5 est l'unique solution de l'équation :

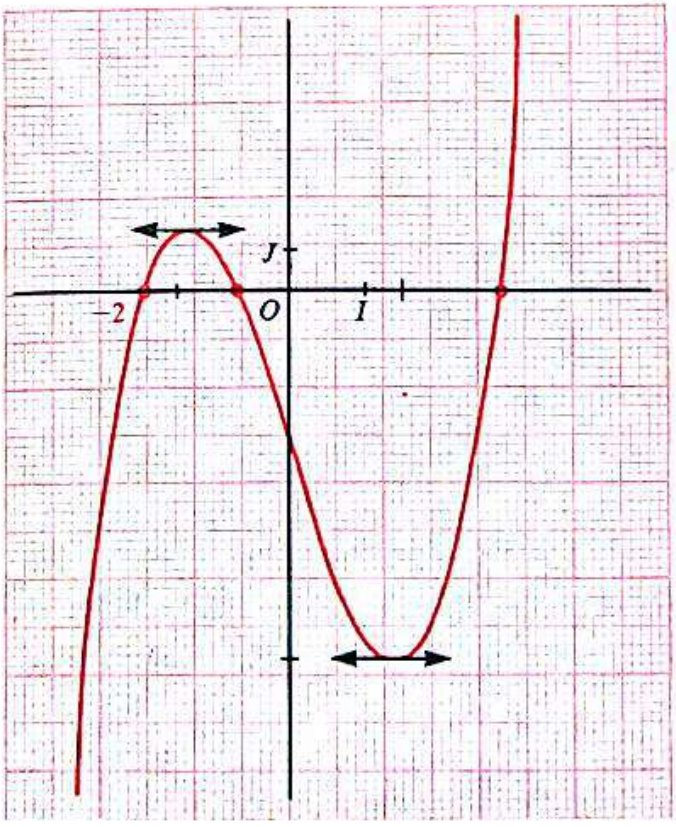
$$(E) \quad x \in \mathbb{R}, \quad x^3 - 18x - 35 = 0.$$

Exemple 2

Résoudre l'équation :

$$(F) \quad x \in \mathbb{R}, \quad x^3 - 6x - 4 = 0.$$

- *La résolution graphique* de cette équation montre l'existence de trois solutions.



Scanned by CamScanner

• *Résolution algébrique de* (F)

Utilisons la méthode précédente.

Posons : $x = a + b.$

Nous sommes donc conduit à résoudre le système suivant :

$$(II) \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} a^3 + b^3 = 4 \\ ab = 2 \end{cases}$$

ou encore le système (II') équivalent à (II) :

$$(II') \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2, \begin{cases} a^3 + b^3 = 4 \\ a^3 b^3 = 8. \end{cases}$$

Ce qui conduit à l'équation :

$$(F') \quad X \in \mathbb{R}, \quad X^2 - 4X + 8 = 0.$$

Cette équation du second degré n'admet pas de solution dans $\mathbb{R}$ car par la forme canonique on obtient :

$$(F') \quad X \in \mathbb{R}, \quad (x-2)^2 + 4 = 0.$$

Cependant, nous savons par la résolution graphique que l'équation (F) admet trois solutions!

La *résolution dans* $\mathbb{R}$ de l'équation (F') ne permet pas de résoudre l'équation (F).

Considérons un nombre « imaginaire » noté i dont le carré est -1.
Imaginons un ensemble contenant $\mathbb{R} \cup \{i\}$ dans lequel nous pouvons appliquer les règles de calcul de l'addition et de la multiplication des nombres réels.
Désignons cet ensemble par $\mathbb{C}$.

L'équation (F') devient :

$$(F') \quad X \in \mathbb{R}, \quad (X-2)^2 - (2i)^2 = 0$$

ou encore $$(F') \quad X \in \mathbb{R}, \quad (X - 2 - 2i)(X - 2 + 2i) = 0.$$

L'équation (F') admet donc deux solutions :

$$2 + 2i \quad \text{et} \quad 2 - 2i.$$

Vérifier que :

$$(-1 + i)^3 = 2 + 2i$$
$$(-1 - i)^3 = 2 - 2i.$$

Ainsi $(-1 + i)$ et $(-1 - i)$ sont les solutions du système :

$$(a, b) \in \mathbb{C}^2, \quad \begin{cases} a^3 + b^3 = 4 \\ ab = 2. \end{cases}$$

Posons : $a = -1 + i \quad \text{et} \quad b = -1 - i.$

Par suite : $a + b = -2.$

-2 étant un nombre réel, -2 est donc une solution de l'équation :

$$(F) \quad x \in \mathbb{R}, \quad x^3 - 6x - 4 = 0.$$

Achever la résolution de cette équation.

Remarques

— Toute équation du 3^e degré :

$$x \in \mathbb{R}, \quad x^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$$

Scanned by CamScanner

peut se ramener à l'équation :

$$X \in \mathbb{R}, \quad X^3 + mX + p = 0.$$

$\left(\text{Il suffit pour cela de poser } x = X - \frac{\alpha}{3}.\right)$

— Toute équation du 3e degré dans $\mathbb{R}$, admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.
(Il suffit pour s'en persuader d'étudier la variation d'une fonction polynôme du 3e degré.)

Conclusion

L'activité précédente montre la nécessité de définir un ensemble :

— qui contient $\mathbb{R}$ et un nombre noté i tel que :

$$i^2 = -1,$$

— dans lequel on puisse étendre l'addition et la multiplication des nombres réels avec conservation des propriétés de ces opérations.

Nous avons résumé ces propriétés de l'addition et de la multiplication des nombres réels en disant que :

$(\mathbb{R}, +, \times)$ est un corps commutatif.

c'est-à-dire que :

- $(\mathbb{R}, +)$ et $(\mathbb{R}^*, \times)$ sont des groupes commutatifs.
- La multiplication est distributive par rapport à l'addition.

c) Le corps des nombres complexes

Nous admettons que :

Il existe un ensemble $\mathbb{C}$ contenant $\mathbb{R}$ et un nombre noté i, tel que :

1) $i^2 = -1.$

2) $\mathbb{C}$ est muni de deux lois de composition internes.

L'addition : $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $(z, z') \longmapsto z + z'$.

La multiplication : $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $(z, z') \longmapsto z \times z'$

dont les restrictions à $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ sont respectivement, l'addition et la multiplication des nombres réels; l'addition et la multiplication dans $\mathbb{C}$ possèdent les mêmes propriétés que celles dans $\mathbb{R}$, c'est-à-dire :

$(\mathbb{C}, +, \times)$ est un corps commutatif.

3) Pour tout élément z de $\mathbb{C}$, il existe deux nombres réels a et b tels que :

$z = a + ib.$

Les éléments de cet ensemble $\mathbb{C}$ sont appelés **nombres complexes.**

Scanned by CamScanner

2) Forme algébrique d'un nombre complexe. Calculs dans $\mathbb{C}$

a) Somme et produit de deux nombres complexes

Pour calculer la somme et le produit des deux nombres complexes suivants :

$$(a+ib) \quad \text{et} \quad (a'+ib')$$

a, b, a', b' étant des nombres réels, il suffit d'utiliser les règles de calcul de l'addition et de la multiplication dans $\mathbb{R}$ et de tenir compte de l'égalité :

$$i^2=-1.$$

Ainsi :

> Quels que soient les nombres réels a, b, a', b', on a :
> $$(a+ib)+(a'+ib')=(a+a')+i(b+b')$$
> $$(a+ib)\times(a'+ib')=(aa'-bb')+i(ab'+a'b).$$

Exemples

$$(2+3i)+(3-7i)=5-4i$$
$$2(5-3i)=10-6i$$
$$3i(7+5i)=3\times5(i^2)+3\times7i$$
$$=-15+21i$$
$$(2+3i)(5-4i)=2\times5-3\times4(i^2)+(3\times5-2\times4)i$$
$$=22-7i.$$

b) Forme algébrique d'un nombre complexe

• Montrons que :

> Quels que soient les nombres réels a, b, a', b' :
> $$[a+ib=a'+ib'] \iff [a=a' \ \boxed{\text{et}} \ b=b'].$$

Soit deux couples de nombres réels (a, b) et (a', b').

— Si : $(a, b)=(a', b')$

alors : $a+ib=a'+ib'.$

— Supposons : $a+ib=a'+ib'$

on a alors : $i(b-b')=a'-a.$

Scanned by CamScanner

Si $(b-b')$ est non nul, il admet alors dans $\mathbb{R}$ un inverse et :

$$i(b-b')\times\frac{1}{b-b'}=(a'-a)\times\frac{1}{b-b'}$$

$$i=\frac{a'-a}{b-b'}$$

d'où : $i\in\mathbb{R}$ (ce qui est faux)

donc : $b-b'=0$; c'est-à-dire : $b'=b$

par suite : $a'-a=0$; c'est-à-dire : $a'=a$.

En particulier :

$$\forall(a,b)\in\mathbb{R}^2 \quad [a+ib=0] \iff [a=0 \ \boxed{\text{et}} \ b=0].$$

On désigne par $\mathbb{C}^*$ l'ensemble des nombres complexes non nuls.

- **Théorème et définition**

Tout nombre complexe z s'écrit de manière unique, sous la forme :

$$z=a+ib$$

a et b étant des nombres réels, appelés respectivement **partie réelle** et **partie imaginaire** de z.

L'écriture $(a+ib)$ est appelée la **forme algébrique** du nombre complexe z.

On note : $a=\mathcal{R}(z)$; $b=\mathcal{I}(z)$.

D'où :

Quels que soient les nombres complexes z et z' :

$$[z=z'] \iff [\mathcal{R}(z)=\mathcal{R}(z') \ \boxed{\text{et}} \ \mathcal{I}(z)=\mathcal{I}(z')].$$

- **Exemples d'écritures simplifiées**

a et b étant des nombres réels quelconques :

$$a+i(o)=a; \qquad o+i(o)=o$$
$$o+ib=ib; \qquad a+i(-b)=a-ib.$$

- **Nombres réels, nombres imaginaires purs**

— Un nombre complexe dont la partie réelle est nulle est appelé *nombre imaginaire pur.*

L'ensemble des nombres imaginaires purs est noté : $i\mathbb{R}$.

Scanned by CamScanner

— Un nombre complexe dont la partie imaginaire est nulle est un *nombre réel.*

Soit z un nombre complexe quelconque :

$$[z \in i\mathbb{R}] \iff [\mathcal{R}(z) = o]$$
$$[z \in \mathbb{R}] \iff [\mathcal{I}(z) = o].$$

Exercices

1) Donner la forme algébrique de chacun des nombres complexes suivants :

$$5+3i-4i-7+2i; \quad -2-i+3-7i+3i;$$
$$i(3-2i); \quad (2+3i)(\sqrt{3}+5i);$$
$$(1+i)(1-i); \quad i(2-i)(4+3i).$$

2) Donner la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants :

$$i; \quad -3i; \quad o; \quad 2; \quad \sqrt{5}+7i; \quad -4+2i; \quad 3-i\sqrt{2}.$$

3) Trouver les nombres réels x et y pour que :

$$1+x+i(y-2)=3i-5.$$

4) Trouver le nombre réel x pour que le nombre complexe $(1-x)+i(3-2x)$ soit :

a) un nombre réel,

b) un nombre imaginaire pur.

c) **Forme algébrique de l'opposé et de l'inverse d'un nombre complexe**

• Soit les nombres complexes :

$$a+ib; \quad \text{avec :} \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2$$
$$x+iy; \quad \text{avec :} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

— On sait que $(x+iy)$ est l'opposé de $(a+ib)$ si et seulement si :

$$(a+ib)+(x+iy)=0.$$

L'opposé de $(a+ib)$ est noté $-(a+ib)$. On a donc :

$$\boxed{-(a+ib)=-a-ib.}$$

— On sait que $(x+iy)$ est l'inverse de $(a+ib)$ si et seulement si :

$$(a+ib)\times(x+iy)=1$$

c'est-à-dire si et seulement si :

$$(ax-by)+i(ay+bx)=1.$$

Résoudre donc le système :

$$(x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} ax-by=1 \\ bx+ay=0 \end{cases}$$

ce système n'a de solution que si : $a^2+b^2 \neq 0$

c'est-à-dire que si : $a+ib \neq 0$.

Scanned by CamScanner

L'inverse du nombre complexe non nul $(a+ib)$ est noté $\frac{1}{(a+ib)}$ ou $(a+ib)^{-1}$.

On a donc :

$$\frac{1}{a+ib}=\frac{a}{a^2+b^2}+i\frac{-b}{a^2+b^2}.$$

• Montrons que :

$$\forall z\in\mathbb{C} \quad z\times 0=0$$

$$\forall (z, z')\in\mathbb{C}^2 \quad .[zz'=0] \iff [z=0 \text{ ou } z'=0].$$

Soit z et z' deux nombres complexes.

On a :

$$zz'=z\times(z'+0)$$
$$zz'=zz'+z\times 0$$

— d'où : $z\times 0=0.$

— Supposons : $zz'=0.$

Si : $z=0$, la propriété est vérifiée.

Si : $z\neq 0$, $\frac{1}{z}$ existe et : $\frac{1}{z}(zz')=\frac{1}{z}\times 0$

d'où : $z'=0.$

• z et z' étant des nombres complexes, on pose :

$$z+(-z')=z-z'.$$

• z étant un nombre complexe quelconque et z' un nombre complexe non nul, on pose :

$$z\times\frac{1}{z'}=\frac{z}{z'}.$$

d) **Puissance à exposant entier, d'un nombre complexe**

• **Définition**

Comme pour les nombres réels, on définit les puissances à exposant entier, d'un nombre complexe par :

$$\forall z\in\mathbb{C}^* \quad z^0=1$$
$$\forall n\in\mathbb{N}^* \quad 0^n=0$$
$$\forall z\in\mathbb{C}^* \quad \forall n\in\mathbb{N} \quad z^{n+1}=z^n\times z$$
$$\forall z\in\mathbb{C}^* \quad \forall n\in\mathbb{Z}^* \quad z^n=\frac{1}{z^{-n}}.$$

Scanned by CamScanner

• **Puissances entières du nombres complexe i**

— Calculer : i^3; i^4; i^5; i^6; i^7; i^8.

— Plus généralement, montrer que :

Quel que soit le nombre entier naturel n,

$$i^{4n} = 1; \quad i^{4n+1} = i$$
$$i^{4n+2} = -1; \quad i^{4n+3} = -i.$$

• **Formule du binôme de Newton**

Les règles de calcul sur les puissances à exposants entiers des nombres complexes non nuls sont les mêmes que celles sur les puissances à exposants entiers des nombres réels non nuls, d'où :

Quels que soient les nombres complexes non nuls u et v.
Quel que soit le nombre entier non nul n,

$$(u+v)^n = C_n^0 u^n + C_n^1 u^{n-1} v + \ldots + C_n^k u^{n-k} v^k + \ldots + C_n^n v^n$$
$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{n-k} v^k.$$

• **Exercice**

z et z' étant deux nombres complexes quelconques,

— Calculer :

$$(z+z')^2; \quad (z-z')^2; \quad (1+i)^2$$
$$(z+z')^3; \quad (z-z')^3; \quad (1-i)^3.$$

— Factoriser :

$$z^2 - z'^2; \quad z^3 - z'^3; \quad z^3 + z'^3;$$
$$z^3 + 1; \quad z^3 - i; \quad 1+i; \quad 1-i.$$

— Calculer par la formule du binôme de Newton :

$$(1+i)^4; \quad (1-i)^6.$$

e) **Activité :** *Un exemple d'espace vectoriel sur* $\mathbb{R}$

• On sait que $(\mathbb{C}, +)$ est un groupe commutatif.

• L'application :

$$\mathbb{R} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$(\alpha, z) \longmapsto \alpha \cdot z$$

telle que, $(a+ib)$ étant la forme algébrique de z :

$$\alpha \cdot (a+ib) = (\alpha a + i\alpha b),$$

est une loi de composition externe.

— Montrer que $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ (voir ch. 1).

— Vérifier que $(1, i)$ est une base de $(\mathbb{C}, +, \cdot)$; elle est appelée base canonique.

— Quelles sont les coordonnées dans la base canonique, d'un nombre complexe de forme algébrique $(a+ib)$?

Scanned by CamScanner

3) Conjugué d'un nombre complexe

Pour mettre l'inverse d'un nombre complexe non nul $(a+ib)$ sous forme algébrique nous aurons recours au nombre complexe $(a-ib)$, c'est le *conjugué* de $(a+ib)$.

a) Définition

On appelle **conjugué** d'un nombre complexe z, le nombre complexe noté $\bar{z}$ tel que :

$$\mathcal{R}(\bar{z})=\mathcal{R}(z) \quad \text{et} \quad \mathcal{J}(\bar{z})=-\mathcal{J}(z).$$

z étant un nombre complexe de forme algébrique $(a+ib)$:

$$\bar{z}=a-ib.$$

Exemples

$2+3i$ a pour conjugué : $2-3i$
$-5-i$ a pour conjugué : $-5+i$
$7i$ a pour conjugué : $-7i$
4 a pour conjugué : 4.

b) Propriétés

- Montrer que :

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \bar{\bar{z}}=z.$$

On dit que les nombres complexes z et $\bar{z}$ sont *conjugués*.

- Montrons que :

quel que soit le nombre complexe z :

$$z+\bar{z}=2\mathcal{R}(z)$$
$$z-\bar{z}=2i\mathcal{J}(z)$$
$$z\bar{z}=(\mathcal{R}(z))^2+(\mathcal{J}(z))^2.$$

Soit z un nombre complexe de forme algébrique $(a+ib)$. On a alors :

$$z=a+ib$$
$$\bar{z}=a-ib$$
$$z+\bar{z}=2a$$
$$z-\bar{z}=2ib$$
$$z\bar{z}=a^2+b^2.$$

- Il en résulte que :

Quel que soit le nombre complexe z

[z est un nombre réel] $\iff$ [$\bar{z}=z$]
[z est un nombre imaginaire pur] $\iff$ [$\bar{z}=-z$].

Scanned by CamScanner

• Montrons que :

Quels que soient les nombres complexes z et z' :

$$\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z}'$$
$$\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \bar{z}'.$$

Soit deux nombres complexes z et z' de formes algébriques respectives $(a+ib)$ et $(a'+ib')$.
On a :

$$z = a + ib; \quad z' = a' + ib'$$
$$\bar{z} = a - ib; \quad \bar{z}' = a' - ib'.$$

Calculer et comparer :

$$\overline{z+z'} \text{ et } \bar{z}+\bar{z}'; \quad \overline{z \times z'} \text{ et } \bar{z} \times \bar{z}'.$$

• Montrons que :

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \forall z' \in \mathbb{C}^* \quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}.$$

Soit z un nombre complexe quelconque et z' un nombre complexe non nul.

Puisque : $\left(\frac{z}{z'}\right) \times z' = z.$

On a : $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} \times \bar{z}' = \bar{z}$

d'où : $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}.$

Exercices

1) Quel est le conjugué de chacun des nombres complexes suivants :

$$5+3i; \quad 1-2i; \quad 2i(3-i)$$
$$(2+3i)(7-4i); \quad \frac{1}{1-i}; \quad \frac{2+i}{3i-1}$$
$$\frac{4-3i}{i}; \quad \frac{3+2i}{7+i}?$$

2) Soit z un nombre complexe.
On désigne par Z le nombre complexe $\frac{z-i}{z+i}$.

a) A quelle condition Z existe-t-il?

b) Trouver l'ensemble des nombres complexes z tels que Z soit un nombre réel.

Scanned by CamScanner

1re méthode : utiliser la propriété :

$$Z \in \mathbb{R} \iff Z = \overline{Z}.$$

2e méthode : écrire z sous sa forme algébrique $(x+iy)$.
Exprimer $J(Z)$ en fonction de x et y puis utiliser la propriété :

$$Z \in \mathbb{R} \iff J(Z) = 0.$$

3) Considérons la fonction

$$\begin{aligned} \bar{c} : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \bar{z}. \end{aligned}$$

— Montrer que $\bar{c}$ est une application bijective.
— Trouver $\bar{c}^{-1}$. Que peut-on en déduire?
— Exprimer $\bar{c}(z+z')$ et $\bar{c}(zz')$ en fonction de $\bar{c}(z)$ et $\bar{c}(z')$.

c) Utilisation du conjugué d'un nombre complexe dans le calcul dans $\mathbb{C}$

Soit z un nombre complexe de forme algébrique $(a+ib)$.

On a alors : $z = a+ib$; $\bar{z} = a-ib$

d'où : $z\bar{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2+b^2$.

$z\bar{z}$ est un nombre réel, d'où l'utilisation de $\bar{z}$ pour écrire $\frac{1}{z}$ sous forme algébrique en effet :

$$\forall z \in \mathbb{C}^* \quad \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}}$$

Exemple 1

Trouver la forme algébrique du nombre complexe $\frac{1}{5+2i}$

$$\begin{aligned} \frac{1}{5+2i} &= \frac{5-2i}{(5+2i)(5-2i)} \\ &= \frac{5-2i}{25+4} \\ &= \frac{5}{29} - \frac{2}{29}\,i. \end{aligned}$$

Exemple 2

Trouver la forme algébrique du nombre complexe $\frac{2+3i}{1-4i}$

$$\begin{aligned} \frac{2+3i}{1-4i} &= \frac{(2+3i)(1+4i)}{(1-4i)(1+4i)} \\ &= \frac{-10+11i}{17} \\ &= -\frac{10}{17} + \frac{11}{17}\,i. \end{aligned}$$

Scanned by CamScanner

Exercices

1) Donner la forme algébrique de chacun des nombres complexes suivants :

$$\frac{1}{7+2i};\ \frac{1}{3i-1};\ \frac{1}{i};\ \frac{1}{-4i};\ \frac{4-3i}{2+i};\ \frac{-5+2i}{3-2i};\ \frac{2-3i}{5i}.$$

2) Résoudre les équations suivantes :

$$z\in\mathbb{C},\quad (1-i)z+2-3i=0$$
$$z\in\mathbb{C},\quad (2i+3i-1)(2-5i-i\bar{z})=0.$$

Tableau récapitulatif

z étant un nombre complexe de forme algébrique $a+ib$

$$\bar{z}=a-ib.$$

Quel que soit le nombre complexe z

$$\bar{\bar{z}}=z$$
$$z\bar{z}=(\mathcal{R}(z))^2+(\mathcal{I}(z))^2$$
$$[z \text{ est un nombre réel}] \iff [\bar{z}=z]$$
$$[z \text{ est un nombre imaginaire pur}] \iff [\bar{z}=-z].$$

Quels que soient les nombres complexes z et z' :

$$\overline{z+z'}=\bar{z}+\bar{z}'$$
$$\overline{zz'}=\bar{z}\bar{z}'.$$

Quel que soit le nombre complexe z
quel que soit le nombre complexe non nul z'

$$\overline{\left(\frac{1}{z'}\right)}=\frac{1}{\bar{z}'}$$
$$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)}=\frac{\bar{z}}{\bar{z}'}.$$

Scanned by CamScanner

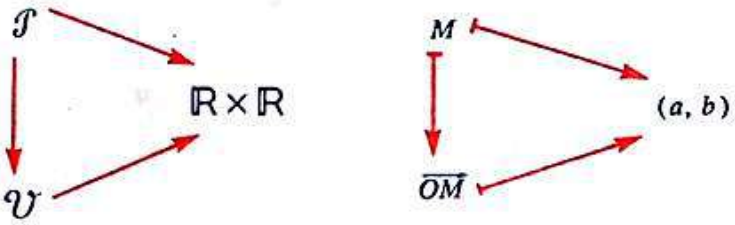
2 Représentation géométrique d'un nombre complexe (Forme trigonométrique)

1) Représentation géométrique d'un nombre complexe

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère (O, I, J) et l'ensemble $\mathcal{V}$ des vecteurs du plan est muni de la base associée $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.

a) Point-image et vecteur-image d'un nombre complexe

• Rappelons que les trois applications suivantes sont bijectives :



(a, b) étant le couple de coordonnées de M dans le repère (O, I, J) ou de $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.

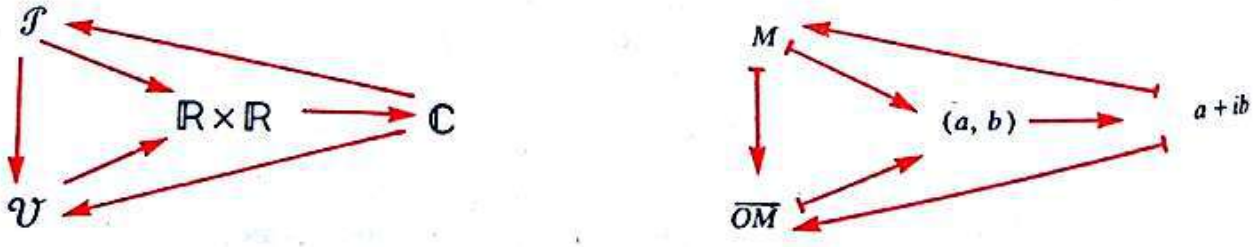
De plus, on a vu que tout nombre complexe z s'écrit, de manière unique, sous la forme :

$$z = a + ib; \quad \text{avec :} \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2.$$

L'application suivante est donc bijective :

$$\begin{aligned} \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (a, b) &\longmapsto a + ib. \end{aligned}$$

Il en résulte que les six applications suivantes sont bijectives :



Conclusion

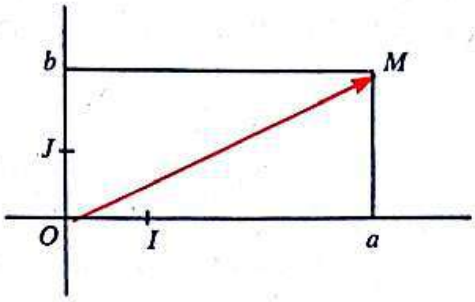
• Tout nombre complexe de forme algébrique $(a + ib)$ est représenté :

— dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère (O, I, J), par le point M de couple de coordonnées (a, b),

— dans l'ensemble $\mathcal{V}$ muni de la base associée $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$, par le vecteur $\overrightarrow{OM}$ de couple de coordonnées (a, b).

Scanned by CamScanner

• M est appelé le *point-image* du nombre complexe $(a+ib)$.
$\overrightarrow{OM}$ est appelé le *vecteur-image* du nombre complexe $(a+ib)$.
$(a+ib)$ est appelé l'*affixe* du point M ou du vecteur $\overrightarrow{OM}$.





Exercices

1) Quelle est l'affixe de chacun des points suivants :

$O,\ I,\ J$?

Quelle est l'affixe de chacun des vecteurs suivants :

$\overrightarrow{OI},\ \overrightarrow{OJ},\ \overrightarrow{IJ}$?

2) Placer le point-image de chacun des nombres complexes suivants :

$1+i;\ 2+3i;\ -1+2i;\ -2+i;\ 3;\ -i;\ 2.$

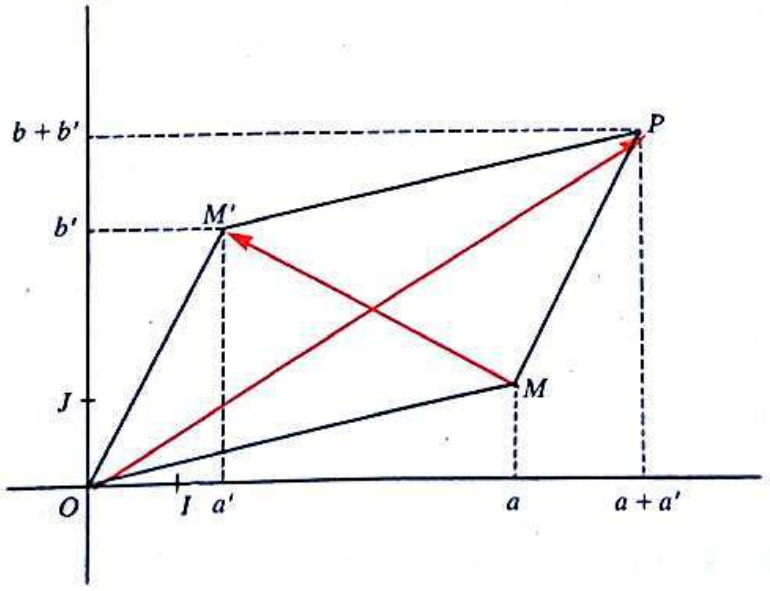
3) Quel est l'ensemble des points-images des nombres complexes z tels que :

a) $z \in \mathbb{R}_+$
b) $z \in \mathbb{R}_-$
c) $z \in i\mathbb{R}$
d) $\mathcal{R}(z) = \mathcal{J}(z)$?

4) Soit z un nombre complexe quelconque et M son point-image. Placer les points-images M_1, M_2, M_3 respectifs des nombres complexes :

$\bar{z};\ -z;\ -\bar{z}.$

b) Représentation géométrique de la somme et de la différence de deux nombres complexes



Scanned by CamScanner

Soit z et z' deux nombres complexes quelconques de formes algébriques respectives :

$$a+ib;\quad a'+ib'.$$

Soit M et M' les points-images respectifs de z et z'.

$\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{OM}'$ sont donc les vecteurs-images respectifs de z et z'.

Soit P le point du plan tel que :

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM}'.$$

— Le point P a pour couple de coordonnées $(a+a',\ b+b')$

donc : | P est le point-image de $z+z'$. |

— Le vecteur $\overrightarrow{MM}'$ a pour couple de coordonnées $(a'-a,\ b'-b)$ car :

$$\overrightarrow{MM}' = \overrightarrow{OM}' - \overrightarrow{OM}$$

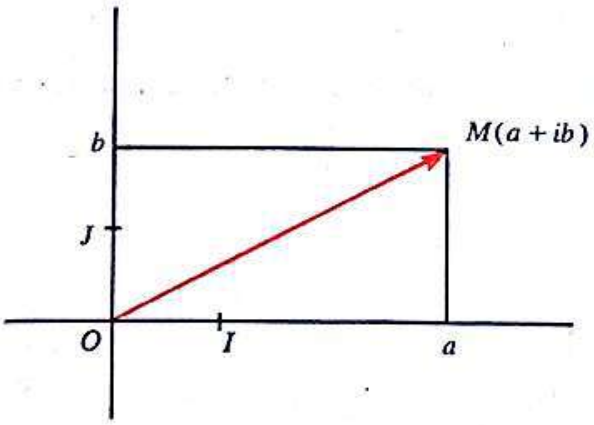
donc : | $\overrightarrow{MM}'$ est le vecteur-image de $z'-z$. |

2) Module d'un nombre complexe

Le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé (O, I, J) et l'ensemble $\mathcal{V}$ des vecteurs du plan est muni de la base orthonormée associée $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.

a) Définition

Soit | z un nombre complexe quelconque,
M son point image,
$(a+ib)$ sa forme algébrique.



$M(a, b)$; $\overrightarrow{OM}\ (a, b)$

On a : $$OM^2 = a^2 + b^2 = z\bar{z}$$ (justifier)

d'où : $$\| \overrightarrow{OM} \| = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{z\bar{z}}.$$

Le nombre réel positif $\sqrt{z\bar{z}}$ est la norme du vecteur-image $\overrightarrow{OM}$. On dit aussi que $\sqrt{z\bar{z}}$ est le module du nombre complexe z, affixe de $\overrightarrow{OM}$ (et de M).

Scanned by CamScanner

Définition

Le nombre réel positif $\sqrt{z\bar{z}}$ est appelé **module** du nombre complexe z.
On le note $|z|$.

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad |z| = \sqrt{z\bar{z}}.$$

z étant un nombre complexe de forme algébrique $(a+ib)$:

$$|z| = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Le module d'un nombre réel est égal à sa valeur absolue.

Exercice Calculer le module de chacun des nombres complexes suivants :
$2+3i$; $-1+i\sqrt{3}$; $5-2i$; $-1-i$; i; $-5i$; 3; -4.

b) **Propriétés**

• **Conséquences immédiates de la définition**

A titre d'exercice montrer que :

quel que soit le nombre complexe z

$$|\bar{z}| = |z|$$
$$[z=0] \iff [|z|=0]$$
$$|\mathcal{R}(z)| \leqslant |z|; \qquad |\mathcal{I}(z)| \leqslant |z|.$$

• **Module du produit de deux nombres complexes**

Soit z et z' deux nombres complexes :

Alors :

$$\begin{aligned} |zz'|^2 &= (zz')(\bar{z}\bar{z}'), \\ &= (z\bar{z})(z'\bar{z}') \\ &= |z|^2 \times |z'|^2 \\ &= (|z| \times |z'|)^2 \end{aligned}$$

$$|zz'| = |z| \times |z'| \qquad \text{(justifier).}$$

Donc :

$$\forall z \in \mathbb{C} \quad \forall z' \in \mathbb{C} \quad |zz'| = |z| \times |z'|.$$

• **Module du quotient d'un nombre complexe par un nombre complexe non nul**

Soit z un nombre complexe et z' un nombre complexe non nul.

On a alors :

$$z' \times \frac{1}{z'} = 1$$

Scanned by CamScanner

d'où : $\left|z' \times \frac{1}{z'}\right| = 1$

c'est-à-dire : $|z'| \times \left|\frac{1}{z'}\right| = 1$

par suite : $\forall z' \in \mathbb{C}^* \quad \left|\frac{1}{z'}\right| = \frac{1}{|z'|}$.

Puisque $\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}$,

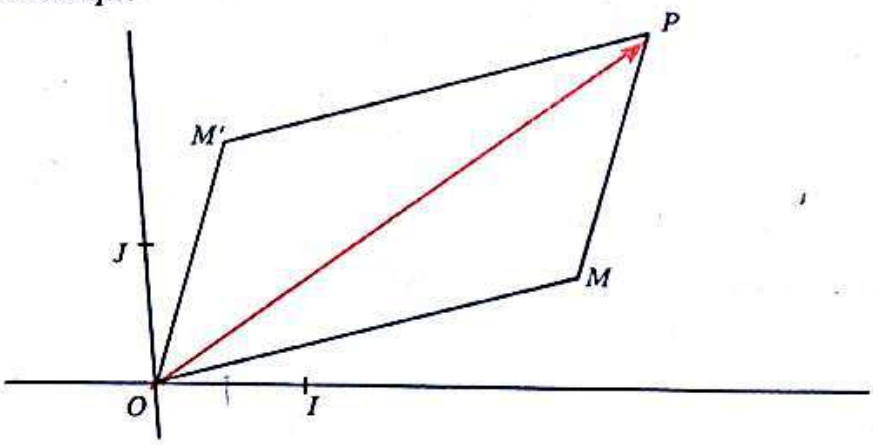
on a : $\left|\frac{z}{z'}\right| = |z| \times \left|\frac{1}{z'}\right|$.

Donc $\forall z \in \mathbb{C} \quad \forall z' \in \mathbb{C}^* \quad \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$.

• **Module de la somme de deux nombres complexes (inégalité triangulaire)**

Soit z et z' deux nombres complexes,
M et M' les points-images respectifs de z et z',
P le point-image de $(z + z')$.

Méthode géométrique



On a : $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OM'}$

Or : $OP \leqslant OM + OM'$

d'où : $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$.

$\forall (z, z') \in \mathbb{C}^2 \quad |z + z'| \leqslant |z| + |z'|$.

Activité : Méthode algébrique

Soit z et z' deux nombres complexes.
Montrer que :

$$|z + z'|^2 = |z^2| + |z'|^2 + 2\mathcal{R}(z\bar{z}').$$

En déduire que :

$$|z + z'| \leqslant |z| + |z'|.$$

Scanned by CamScanner

Exercices

1) Soit α un nombre réel positif.
Quel est l'ensemble des points-images des nombres complexes de module α.

2) Soit z un nombre complexe non nul.

— Montrer que $\frac{z}{|z|}$ est un nombre complexe de module 1.

— En déduire que tout nombre complexe est le produit d'un nombre complexe de module 1 par un nombre réel positif. En donner une illustration graphique.

c) **Activité :** *Ensemble U_1 des nombres complexes de module 1*

— Montrer que : $(U_1, \times)$ est un groupe commutatif.

— Montrer qu'un nombre complexe est de module 1 si et seulement si son inverse est égal à son conjugué.

— Résoudre chacune des équations suivantes, et en donner une illustration graphique :

$z \in U_1, \quad \mathcal{R}(z) = \frac{1}{2}$	$z \in U_1, \quad \mathcal{I}(z) = \frac{1}{2}$.
$z \in U_1, \quad \mathcal{R}(z) = -\frac{1}{2}$	$z \in U_1, \quad \mathcal{I}(z) = -\frac{1}{2}$
$z \in U_1, \quad \mathcal{R}(z) = -\mathcal{I}(z)$	$z \in U_1, \quad \mathcal{R}(z) = \mathcal{I}(z)$.

Tableau récapitulatif

Quel que soit le nombre complexe z :

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}}$$
$$|\bar{z}| = |z|$$
$$[z = 0] \iff [|z| = 0]$$
$$|\mathcal{R}(z)| \leqslant |z|; \qquad |\mathcal{I}(z)| \leqslant |z|.$$

Quels que soient les nombres complexes z et z' :

$$|zz'| = |z| \times |z'|$$
$$|z + z'| \leqslant |z| + |z'|.$$

Quel que soit le nombre complexe z
quel que soit le nombre complexe non nul z' :

$$\left|\frac{1}{z'}\right| = \frac{1}{|z'|}; \qquad \left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}.$$

Scanned by CamScanner

3) Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

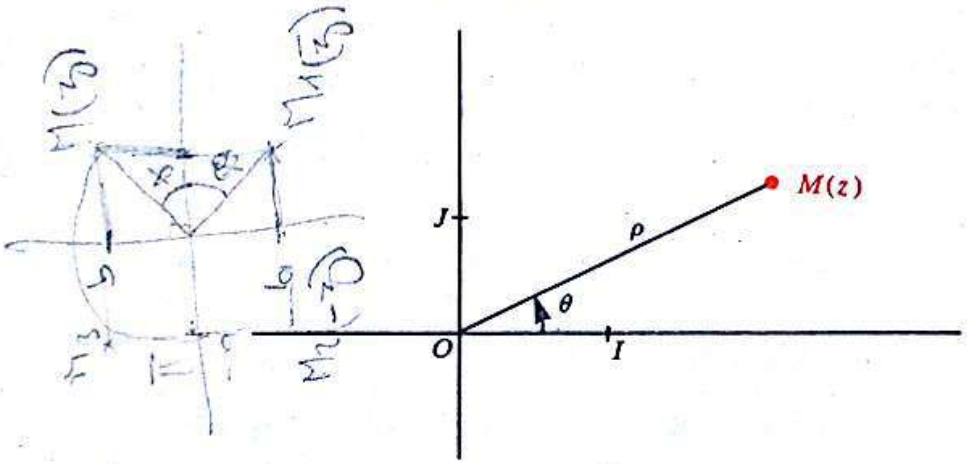
Le plan $\mathcal{P}$ est orienté. Il est muni d'un repère orthonormé directe (O, I, J).

a) Argument d'un nombre complexe non nul

• Soit z un nombre complexe non nul.

Le nombre complexe z étant non nul, son point-image M est distinct de O.
Par conséquent, au nombre complexe z on peut associer de manière unique le couple (ρ, θ),

ρ étant le module de z,
θ la mesure principale de l'angle orienté $\widehat{(OI, OM)}$.



• Soit : | ρ un nombre réel strictement positif.
| $(\widehat{\theta})$ un angle orienté de mesure principale θ.

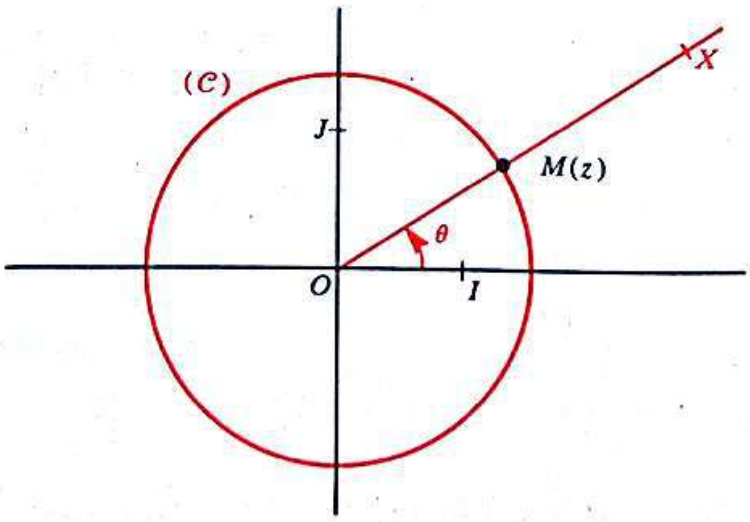
Il existe un unique point M du plan tel que :

$$[OM = \rho] \quad \boxed{\text{et}} \quad [\widehat{(OI, OM)} = (\widehat{\theta})]$$

M est le point d'intersection du cercle $(\mathcal{C})$ de centre O et de rayon ρ, avec la demi-droite $[OX)$ telle que :

$$\widehat{(OI, OX)} = (\widehat{\theta}).$$

Ainsi, au couple (ρ, θ) on a associé de manière unique le nombre complexe z, affixe du point M.



Scanned by CamScanner

• Il en résulte que :
Tout nombre complexe non nul z, affixe d'un point M du plan muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J), est déterminé par le couple (ρ, θ) où :

ρ est un nombre réel strictement positif : son module
θ est un élément de $]-\pi, \pi]$: la mesure principale de l'angle orienté $\widehat{(OI, OM)}$.

Définition

Soit : | z un nombre complexe non nul,
M son point-image dans le plan muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J).

— La mesure principale de l'angle orienté $\widehat{(OI, OM)}$ est appelée **l'argument principal** de z et noté : ARG(z).

— Toute mesure de l'angle orienté $\widehat{(OI, OM)}$ est **un argument** de z et noté : arg(z).

Ainsi : $\text{ARG}(i) = \frac{\pi}{2}$; $\text{ARG}(-i) = -\frac{\pi}{2}$
$\text{ARG}(1) = 0$; $\text{ARG}(-1) = \pi$.

Remarque

On n'attribue pas d'argument au nombre complexe O.

Exercices

1) Trouver l'ensemble des nombres complexes
a) d'argument principal : O
b) d'argument principal : π
c) d'argument principal : $\frac{\pi}{2}$
d) d'argument principal : $-\frac{\pi}{2}$.

2) Soit | z un nombre complexe non nul d'argument principal θ.
M son point-image.

— Placer les points-images des nombres complexes :

$$\bar{z};\ -z;\ -\bar{z}.$$

— Exprimer en fonction de θ, l'argument principal de chacun des nombres complexes suivants :

$$\bar{z};\ -\bar{z};\ -\bar{z}.$$

b) **Égalité de deux nombres complexes non nuls**

On sait qu'un nombre complexe non nul est déterminé par :

— son module et son argument principal
donc aussi par :

— son module et un de ses arguments.

Scanned by CamScanner

Il en résulte que :

Quels que soient les nombres complexes non nuls z et z'

$$[z = z'] \iff \begin{cases} |z| = |z'| \\ \boxed{\text{et}} \\ \text{ARG}(z) = \text{ARG}(z') \end{cases}$$

Ou encore :

Quels que soient les nombres complexes non nuls z et z' :

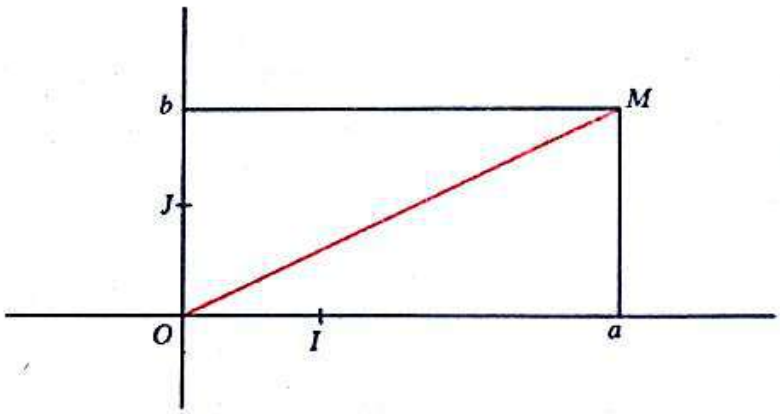
$$[z = z'] \iff \begin{cases} |z| = |z'| \\ \boxed{\text{et}} \\ \exists k \in \mathbb{Z} \quad \arg(z) = \arg(z') + k(2\pi) \end{cases}$$

c) **Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul**

Soit z un nombre complexe non nul de forme algébrique $(a + ib)$

$$z = a + ib; \text{ avec : } (a, b) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$$

Soit M le point-image de z. Il a pour couple de coordonnées (a, b).



Posons : $|z| = \rho; \quad \text{ARG}(z) = \theta.$

On a : $a = \rho \cos \theta; \quad b = \rho \sin \theta$

d'où : $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta); \quad \text{avec : } (\rho, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}.$

Théorème et définition

Tout nombre complexe non nul z peut s'écrire :

$$\rho(\cos \theta + i \sin \theta); \quad \text{avec : } (\rho, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$$

ρ est $\boxed{\text{le}}$ module de z

θ est $\boxed{\text{un}}$ argument de z.

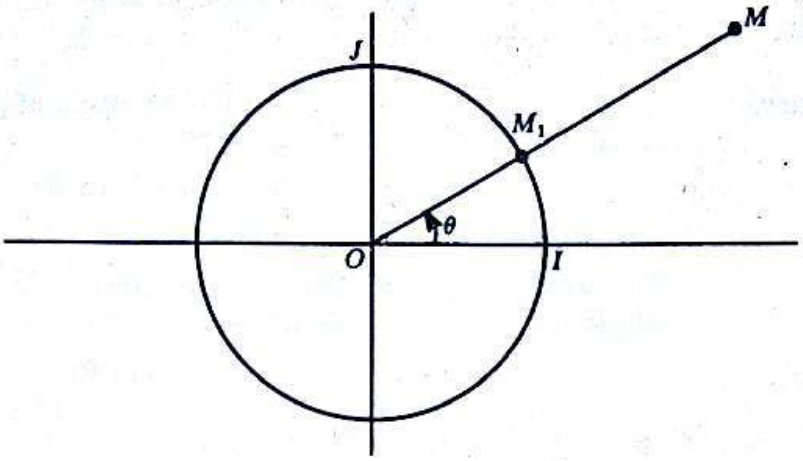
On dit que le nombre complexe non nul z est écrit sous **forme trigonométrique.**

Scanned by CamScanner

Remarques

- $\forall \theta \in \mathbb{R} \quad |\cos\theta + i \sin\theta| = 1$

$(\cos\theta + i \sin\theta)$ est un nombre complexe de module 1, écrit sous forme trigonométrique.



- $\forall z \in \mathbb{C}^* \quad z = |z| \times \frac{z}{|z|}$

$\frac{z}{|z|}$ est un nombre complexe de module 1. Il en résulte que :

Quel que soit le nombre complexe non nul z, il existe un unique nombre complexe z_1 de module 1 tel que z et z_1 aient le même argument principal.

***d*) Comment reconnaître qu'un nombre complexe non nul est écrit sous forme trigonométrique?**

Exemple

On donne le nombre complexe z tel que :

$$z = -2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3}\right).$$

Quels sont le module et l'argument principal de z?

On obtient : $|z| = 2$

d'où : $$z = 2\left(-\cos\frac{\pi}{3} - i \sin\frac{\pi}{3}\right)$$
$$= 2\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right).$$

Par conséquent : $|z| = 2; \quad \text{ARG}(z) = -\frac{2\pi}{3}.$

Scanned by CamScanner

Plus généralement :

ρ et θ étant des nombres réels, le nombre complexe :

$$\rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

est écrit sous forme trigonométrique si et seulement si :

ρ est strictement positif.

Exercices

1) ρ et θ étant deux nombres réels quelconques, trouver le module et un argument du nombre complexe :

$$\rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

(discuter suivant le signe de ρ).

2) θ étant un nombre réel quelconque, écrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

$$\sin\theta + i\cos\theta; \quad \cos\theta - i\sin\theta; \quad -\cos\theta - i\sin\theta;$$

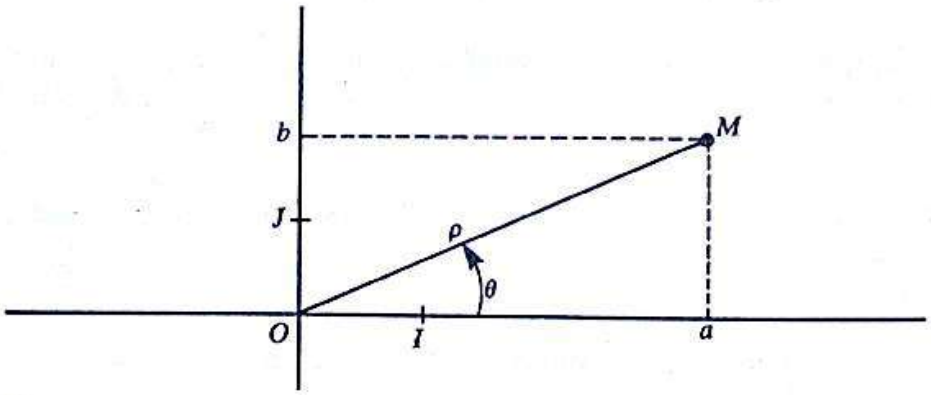
e) **Comment passer d'une forme à l'autre?**

On considère un nombre complexe non nul

— de forme algébrique : $a + ib$

— de forme trigonométrique : $\rho(\cos\theta + i\sin\theta)$.

Désignons par M le point-image de ce nombre complexe.

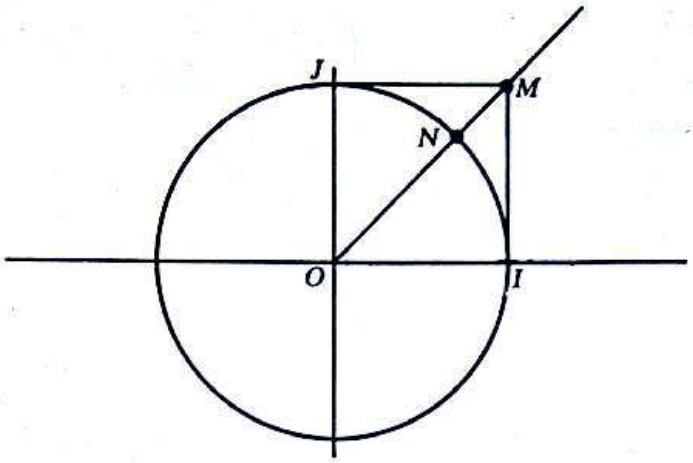


On a alors :

Forme algébrique		Forme trigonométrique
$a + ib$		$\rho(\cos\theta + i\sin\theta)$
avec : $(a, b) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$		avec : $(\rho, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$
$a = \rho\cos\theta$ $b = \rho\sin\theta$		$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ $\cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ $\sin\theta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Scanned by CamScanner

• Notons que dans certains cas la représentation géométrique d'un nombre complexe permet de l'écrire sous forme algébrique ou sous forme trigonométrique.



Ainsi les points M et N représentés sur le dessin ci-dessus ont respectivement pour affixe :

$$(1+i) \text{ et } \left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

• DANS LA PRATIQUE, pour écrire sous forme trigonométrique un nombre complexe non nul de forme algébrique $(a+ib)$, on procède comme suit :

1) Trouver le module de $(a+ib)$.

2) Mettre ce module en facteur dans $(a+ib)$:

$$a+ib=\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+i\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$$

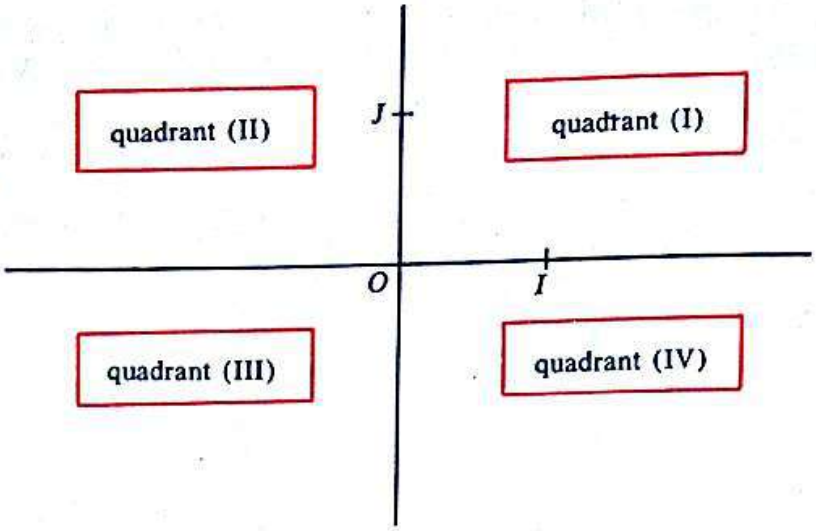
3) Résoudre le système :

$$(S)\ \theta\in]-\pi,\pi],\ \begin{cases}\cos\theta=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\\ \sin\theta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\end{cases}$$

• MÉTHODE PRATIQUE de résolution du système (S).

* Reconnaître le quadrant dans lequel est situé le point-image M_1 du nombre complexe de module 1 : $\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+i\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$.

Scanned by CamScanner

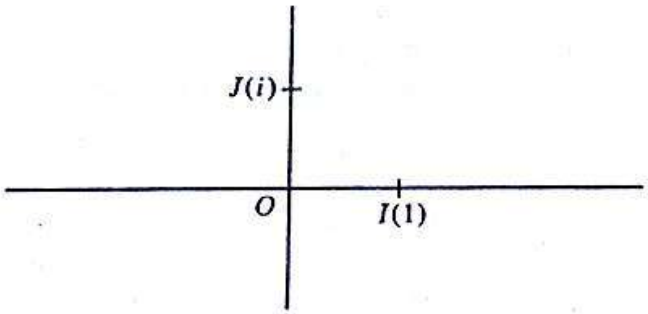


* Dans certains cas, l'argument principal de $(a+ib)$ est particulier.

— Si : $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ou $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ a l'une des valeurs suivantes : 0; 1; -1.

L'argument principal de $(a+ib)$ est immédiat.

Ainsi : $\begin{cases}\cos\theta = 1\\ \sin\theta = 0\end{cases}$ donne : $M = I$; d'où $\theta = 0$.



— Si : $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ ou $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ a l'une des valeurs suivantes :

$$\frac{1}{2};\quad -\frac{1}{2};\quad \frac{\sqrt{2}}{2};\quad -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

le point M coïncide avec l'un des points M_1, M_2, M_3, M_4 dans l'un des dessins ci-dessous.

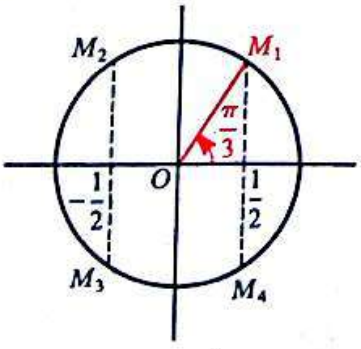


Fig. 1

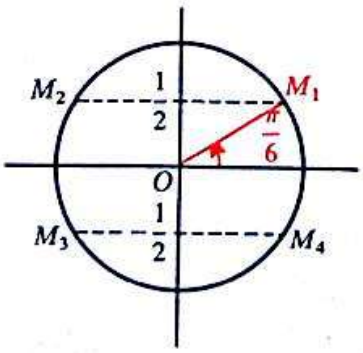


Fig. 2

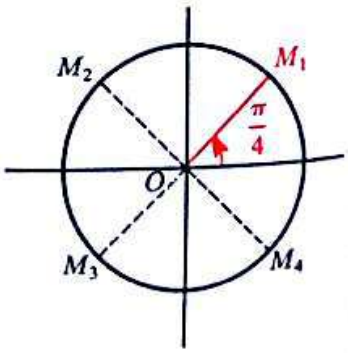


Fig. 3

Scanned by CamScanner

Ainsi :

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{1}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$ donne : $M = M_1$; d'où : $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ (figure 1)

$$\begin{cases} \cos\theta = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$ donne : $M = M_3$; d'où : $\theta = -\dfrac{5\pi}{6}$ (figure 2)

$$\begin{cases} \cos\theta = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$ donne : $M = M_2$; d'où : $\theta = \dfrac{3\pi}{4}$ (figure 3).

* Dans les autres cas, utiliser une table trigonométrique ou une calculatrice pour trouver une valeur approchée de l'argument principal de $(a + ib)$.

Exercices

1) Placer dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J) le point-image de chacun des nombres complexes suivants :

$$-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}; \quad \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(On vérifiera au préalable qu'ils sont de module 1.)

Donner l'argument principal de chacun de ces nombres.

2) Écrire sous forme trigonométrique le nombre complexe $(-\sqrt{3} + i)$.

Donner une représentation géométrique de ce nombre.

4) Forme trigonométrique et calculs dans $\mathbb{C}$

a) Produit de deux nombres complexes non nuls

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls tels que :

$$z = \rho(\cos\theta + \sin\theta); \quad \text{avec :} \quad (\rho, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$$
$$z' = \rho'(\cos\theta' + \sin\theta'); \quad \text{avec :} \quad (\rho', \theta') \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}.$$

On a alors :

$$zz' = \rho\rho'[\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta' + i(\cos\theta\sin\theta' + \sin\theta\cos\theta')]$$
$$zz' = \rho\rho'(\cos(\theta+\theta') + i\sin(\theta+\theta')); \quad \text{avec :} \quad (\rho\rho', \theta+\theta') \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}.$$

On retrouve : $|zz'| = \rho\rho' = |z| \times |z'|$

et : $\theta + \theta'$ est un argument de zz'.

Scanned by CamScanner

D'où :

Quels que soient les nombres complexes non nuls z et z' :

$$|zz'| = |z| \times |z'|$$

et

$$\exists k \in \mathbb{Z} \quad \arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') + k(2\pi).$$

Exercice

— Écrire sous forme trigonométrique les nombres complexes :

$$1-i; \quad -\sqrt{3}-i; \quad (1-i)(-\sqrt{3}-i).$$

— Soit M le point-image de $(1-i)$ et N celui de $(-\sqrt{3}-i)$. En déduire un programme de construction du point-image de $(1-i)(-\sqrt{3}-i)$.

b) **Inverse d'un nombre complexe non nul**

Soit z un nombre complexe non nul.

Puisque :

$$z \times \frac{1}{z} = 1$$

$$= \cos o + i \sin o,$$

on en déduit que :

Quel que soit le nombre complexe non nul z :

$$\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}$$

et

$$\exists k \in \mathbb{Z} \quad \arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z) + k(2\pi).$$

Exercices

1) Montrer que :

$$\frac{1}{\cos\theta + i \sin\theta} = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta).$$

2) Écrire sous forme trigonométrique le nombre complexe $\frac{i}{1-i}$.

Construire son point-image.

c) **Quotient de deux nombres complexes non nuls**

Soit z et z' deux nombres complexes non nuls.

Scanned by CamScanner

Puisque : $\frac{z}{z'} = z \times \frac{1}{z'}$

on en déduit que :

Quels que soient les nombres complexes non nuls z et z' :

$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}$$

et

$$\exists k \in \mathbb{Z} \quad \arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z') + k(2\pi).$$

Exercice

a) Écrire sous forme trigonométrique le nombre complexe :

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}.$$

— Donner un programme de construction de son point-image.

b) Écrire ce nombre complexe sous la forme algébrique.

— En déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et de $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

d) **Puissance à exposant entier d'un nombre complexe non nul. Formule de Moivre**

• Soit z un nombre complexe non nul tel que :

$$z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta); \quad \text{avec :} \quad (\rho, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$$

Puisque : $z^2 = z \times z$

on a alors : $z^2 = \rho^2(\cos(2\theta) + i\sin(2\theta))$.

Et puisque : $z^3 = z^2 \times z$

montrer que : $z^3 = \rho^3(\cos(3\theta) + i\sin(3\theta))$.

— Montrer par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad (\rho(\cos\theta + i\sin\theta))^n = \rho^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)).$$

— D'autre part, n étant un nombre entier naturel non nul, montrer que :

$$(\rho(\cos\theta + i\sin\theta))^{-n} = \frac{\rho^{-n}}{(\cos\theta + i\sin\theta)^n}$$

$$= \frac{\rho^{-n}}{\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)}$$

$$= \rho^{-n}(\cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta)).$$

Scanned by CamScanner

Par conséquent :

Quel que soit le nombre entier relatif n,
quel que soit le nombre réel strictement positif ρ,
quel que soit le nombre réel θ,

$$(\rho(\cos\theta + i\sin\theta))^n = \rho^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)).$$

• *Cas particulier :* formule de Moivre

Quel que soit le nombre entier relatif n,
quel que soit le nombre réel θ,

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Exercice Écrire sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

$$(1 - i\sqrt{3})^{25}; \quad \left(\frac{\sqrt{3}+i}{1-i}\right)^{18}$$

$$(1+i)^9(\sqrt{3}-i)^{12}.$$

Remarque

D'une manière générale, il est plus intéressant de considérer les nombres complexes :

— sous forme algébrique,
si l'on effectue des sommes ou des différences;

— sous forme trigonométrique,
si l'on effectue des produits ou des quotients.

5) Racines $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe non nul

a) Exemples introductifs

Exemple 1

Résoudre l'équation :

$$(E) \quad z \in \mathbb{C}, \quad z^2 = -1 + i\sqrt{3}.$$

On a :

$$-1 + i\sqrt{3} = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$= 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right).$$

Posons : $z = u(\cos x + i\sin x)$; avec : $(u, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

Scanned by CamScanner

On obtient alors successivement :

$$[z^2 = -1 + i\sqrt{3}] \iff \left[u^2(\cos(2x) + i\sin(2x)) = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\right]$$

$$\iff \begin{cases} u^2 = 2 \\ \boxed{\text{et}} \\ \exists k \in \mathbb{Z} \quad 2x = \dfrac{2\pi}{3} + k(2\pi) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} u = \sqrt{2} \\ \boxed{\text{et}} \\ \exists k \in \mathbb{Z} \quad x = \dfrac{\pi}{3} + k\pi. \end{cases} \qquad \text{(justifier)}$$

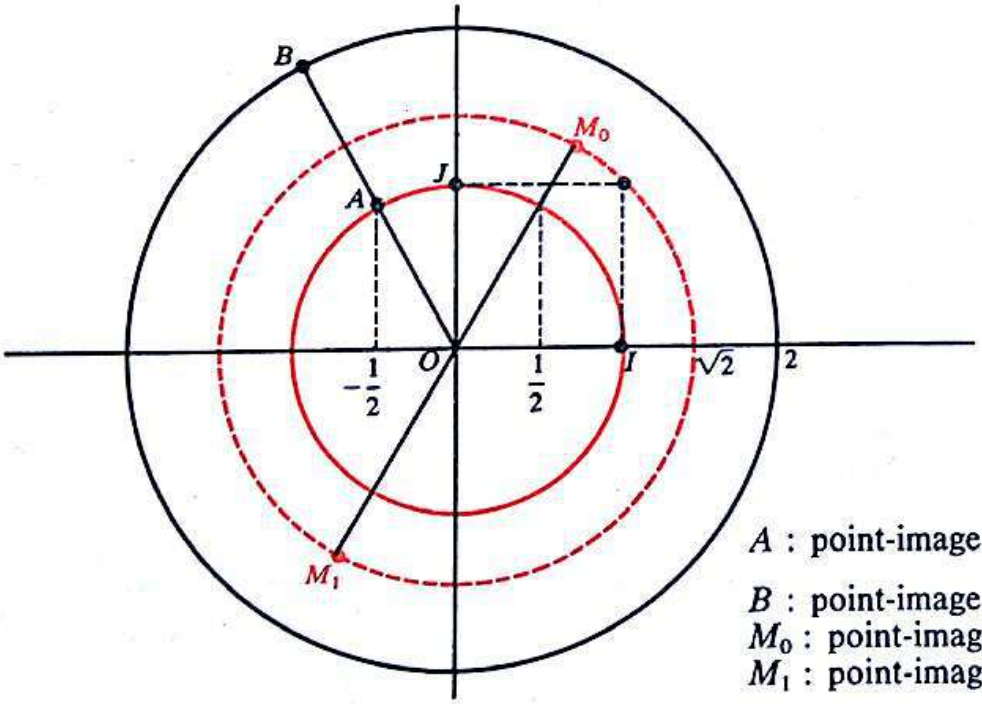
Vérifier que l'équation (E) admet exactement deux solutions z_0 et z_1 correspondantes respectivement aux valeurs 0 et 1 de k.

$$z_0 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$$

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

z_0 et z_1 sont appelés les *racines carrées* de $(-1 + i\sqrt{3})$.

Représentations géométriques



A : point-image de $\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
B : point-image de $(-1 + i\sqrt{3})$.
M_0 : point-image de z_0.
M_1 : point-image de z_1.

$$\text{MES}(\widehat{OI, OM_0}) = \frac{\pi}{3}$$

$$\text{MES}(\widehat{OM_0, OM_1}) = \pi.$$

Les points-images M_0 et M_1 respectifs de z_0 et z_1 sont diamétralement opposés sur le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$.

$$z_1 = -z_0.$$

Scanned by CamScanner

Exemples 2

Résoudre l'équation :

$$(E) \quad z \in \mathbb{C}, \quad z^6 = 1 + i.$$

— Montrer que :

$$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Posons :

$$z = u(\cos x + i \sin x); \quad \text{avec :} \quad (u, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}.$$

On obtient successivement :

$$[z^6 = 1 + i] \iff \left[u^6(\cos(6x) + i \sin(6x)) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$\iff \begin{cases} u^6 = \sqrt{2} \\ \boxed{\text{et}} \\ \exists k \in \mathbb{Z} \quad 6x = \dfrac{\pi}{4} + k(2\pi) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} u = \sqrt[12]{2} \\ \boxed{\text{et}} \\ \exists k \in \mathbb{Z} \quad x = \dfrac{\pi}{24} + k\left(\dfrac{2\pi}{6}\right). \end{cases}$$

Vérifier que l'équation (E) admet exactement six solutions :

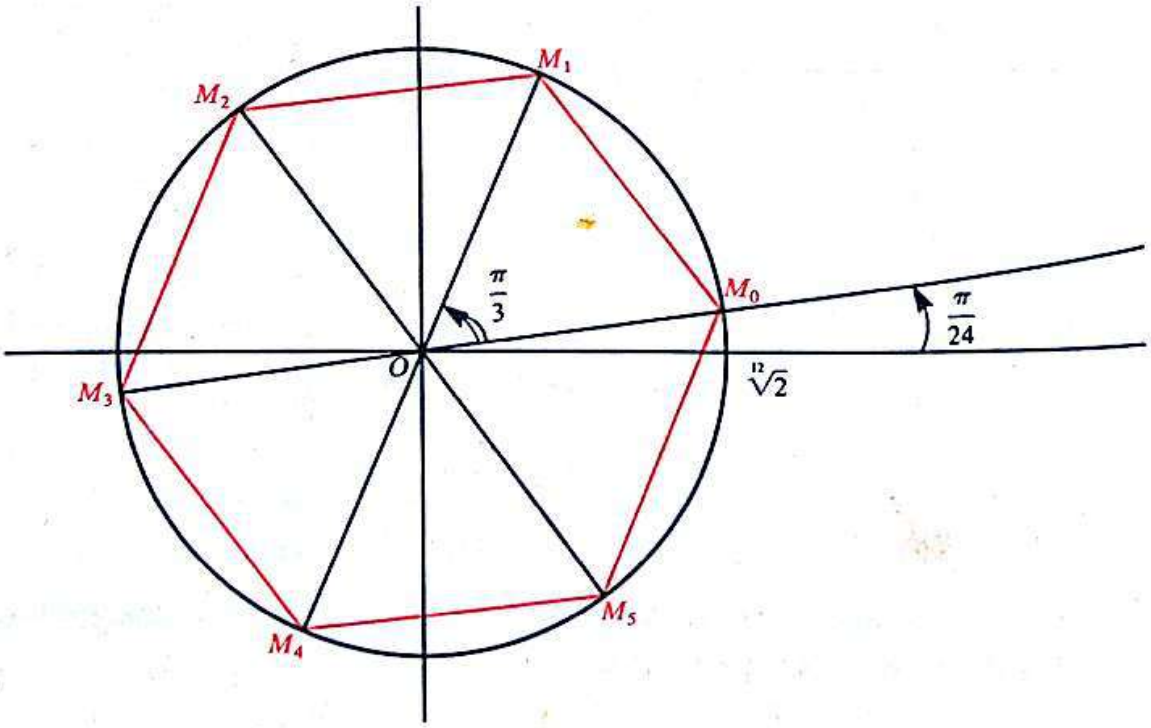
$$z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5$$

correspondantes respectivements aux valeurs suivantes de k :

$$0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

Ces six solutions sont appelées les *racines sixièmes* de $(1 + i)$.

Représentation géométrique



Scanned by CamScanner

Les points-images M_0, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 respectifs des nombres complexes z_0, z_1, z_2, z_3, z_4, z_5 sont les sommets d'un hexagone régulier inscrit dans le cercle de centre O et de rayon $\sqrt[12]{2}$.

b) Définition

Soit | n un nombre entier naturel non nul,
Z un nombre complexe.

On appelle **racine $n^{\text{ième}}$** de Z, toute solution de l'équation :

$$z \in \mathbb{C}, \quad z^n = Z.$$

Remarque

On ne peut utiliser le symbole $\sqrt[n]{\ }$ que pour des nombres réels strictement positifs.

c) Recherche des racines $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe

Rechercher les racines n-ième d'un nombre complexe Z, revient à résoudre l'équation :

$$(E) \quad z \in \mathbb{C}, \quad z^n = Z.$$

— Si : $Z = 0$, alors : 0 est l'unique solution de (E).

— Supposons : $Z \neq 0$.

Toute solution de (E) est non nulle. (Justifier.)

Posons :

$$Z = \rho(\cos\theta + i\sin\theta); \quad \text{avec :} \quad (\rho, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$$
$$z = u(\cos x + i\sin x); \quad \text{avec :} \quad (u, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}.$$

On obtient successivement :

$$[z^n = Z] \iff [u^n(\cos(nx) + i\sin(nx)) = \rho(\cos\theta + i\sin\theta)]$$

$$\iff \begin{cases} u^n = \rho \\ \boxed{\text{et}} \\ \exists k \in \mathbb{Z} \quad nx = \theta + k(2\pi) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} u = \sqrt[n]{\rho} \\ \boxed{\text{et}} \\ \exists k \in \mathbb{Z} \quad x = \dfrac{\theta}{n} + k\left(\dfrac{2\pi}{n}\right). \end{cases}$$

Vérifier que l'équation (E) admet exactement n solutions distinctes obtenues en donnant à k les valeurs : 0, 1, 2, ... $(n-1)$.

Scanned by CamScanner

Théorème

n étant un nombre entier naturel non nul,

- 0 est la seule racine $n^{\text{ième}}$ de 0.
- Tout nombre complexe non nul de forme trigonométrique :

$$\rho(\cos\theta + i\sin\theta)$$

admet exactement n racines $n^{\text{ième}}$ qui sont les n différentes valeurs de :

$$\sqrt[n]{\rho}\left(\cos\left(\frac{\theta}{n}+k\frac{2\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{n}+k\frac{2\pi}{n}\right)\right)$$

correspondantes aux valeurs suivantes de k :

$$0;\ 1;\ \ldots\ (n-1).$$

— Lorsque : $n=2$,
les deux racines carrées sont opposées.
— Lorsque : $n>2$,
les points-images des n racines $n^{\text{ième}}$ sont les sommets d'un polygone régulier de n côtés, inscrit dans un cercle de centre O et de rayon $\sqrt[n]{\rho}$.

d) **Exemple :** *racine cubique de 1*

Calculer et représenter géométriquement les racines cubiques de 1.
En déduire les racines cubiques de 8.

— *Racine cubique de 1*

On sait que 1 admet trois racines cubiques qui sont les solutions de l'équation :

$$z\in\mathbb{C},\quad z^3=1.$$

Elles ont pour module 1.

Or : $1=\cos(0)+i\sin(0).$

Posons : $z=\cos x+i\sin x.$

On a alors : $[z^3=1] \iff [\cos(3x)+i\sin(3x)=\cos(0)+i\sin(0)]$

$$\iff [\exists k\in\mathbb{Z}\quad 3x=k(2\pi)]$$

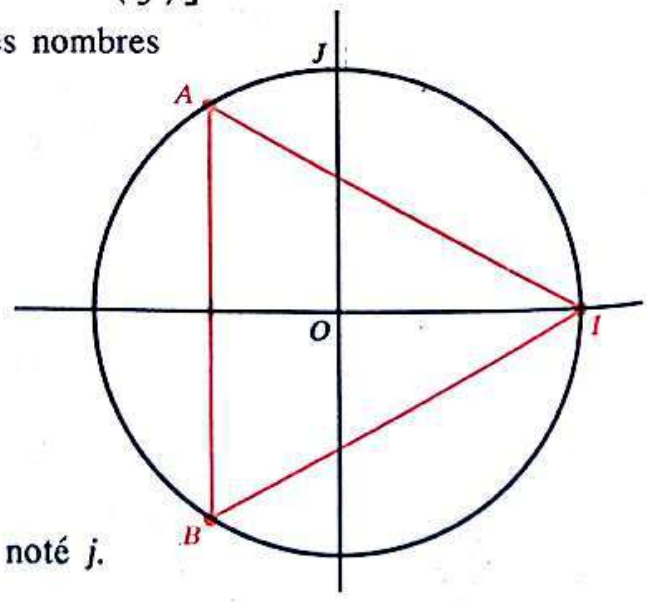
$$\iff \left[\exists k\in\mathbb{Z}\quad x=k\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right].$$

Les trois racines cubiques de 1 sont les nombres complexes z_0, z_1, z_2 tels que :

$z_0=\cos(0)+i\sin(0)=1$

$$z_1=\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_2=\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$



Montrer que :
$$\begin{cases} z_2=\bar{z}_1=z_1^2 \\ z_1=\bar{z}_2=z_2^2 \\ z_0+z_1+z_2=0. \end{cases}$$

Le nombre complexe $\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ est noté j.

Scanned by CamScanner

Conclusion

Les racines cubiques de 1 sont les nombres complexes 1, j et $\bar{J}$ avec :

$$j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Elles vérifient :

$$1 + j + \bar{J} = 0; \quad \bar{J} = j^2.$$

— *Racine cubique de 8*

Notons que 2 est une racine cubique de 8.
Soit z un nombre complexe quelconque.
On obtient successivement :

$$\left[\begin{array}{l} z \text{ est une racine} \\ \text{cubique de } 8 \end{array}\right] \iff [z^3 = 8]$$

$$\iff [z^3 = 2^3]$$

$$\iff \left[\left(\frac{z}{2}\right)^3 = 1\right]$$

$$\iff \left[\frac{z}{2} \text{ est une racine cubique de } 1\right].$$

Les racines cubiques de 8 sont donc : 2; $2j$; $2\bar{J}$.

Remarque

En Physique le nombre complexe i est noté j car i désigne en général une intensité. Ne pas confondre les notations utilisées en Mathématique et celles utilisées en Physique!

Exercices

1) Calculer et représenter géométriquement les racines quatrièmes de 1.
En déduire les racines quatrièmes de 81.

2) Plus généralement, montrer qu'on obtient toutes les racines $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe non nul en multipliant l'une quelconque d'entre elles, successivement par les racines $n^{\text{ième}}$ de 1.

6) Activité

Exemples d'utilisation des nombres complexes en trigonométrie.

a) **Exemple 1**

Expression de $\cos(3\theta)$ et $\sin(3\theta)$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

On sait que :

$$\cos(3\theta) + i\sin(3\theta) = (\cos\theta + i\sin\theta)^3.$$

Par la formule du binôme de Newton, calculer :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^3.$$

Scanned by CamScanner

En déduire que :

$$\cos(3\theta) = \cos\theta(\cos^2\theta - 3\sin^2\theta)$$
$$\sin(3\theta) = \sin\theta(3\cos^2\theta - \sin^2\theta).$$

Exprimer : $\cos(3\theta)$ en fonction de $\cos\theta$
$\sin(3\theta)$ en fonction de $\sin\theta$.

Exercice Exprimer $\cos(4\theta)$ et $\sin(4\theta)$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

b) **Exemple 2**

Linéarisation de $\cos^4\theta$ et de $\sin^4\theta$.

Considérons le nombre complexe z de module 1 et d'argument θ.

$$z = \cos\theta + i\sin\theta$$
$$\bar{z} = \cos\theta - i\sin\theta$$

d'où :

$$z + \bar{z} = 2\cos\theta$$
$$z - \bar{z} = 2i\sin\theta.$$

Quelque soit le nombre entier naturel n :

$$z^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$
$$\bar{z}^n = \cos(n\theta) - i\sin(n\theta)$$

d'où :

$$z^n + \bar{z}^n = 2\cos(n\theta)$$
$$z^n - \bar{z}^n = 2i\sin(n\theta).$$

— Il en résulte que :

$$\cos^4\theta = \frac{1}{2^4}(z+\bar{z})^4$$
$$= \frac{1}{16}(z^4 + 4z^3\bar{z} + 6z^2\bar{z}^2 + 4z\bar{z}^3 + \bar{z}^4)$$
$$= \frac{1}{16}((z^4 + \bar{z}^4) + 4z\bar{z}(z^2 + \bar{z}^2) + 6z^2\bar{z}^2)$$
$$= \frac{1}{16}(2\cos(4\theta) + 4\cos(2\theta) + 6); \quad \text{car :} \quad z\bar{z} = 1$$
$$\cos^4\theta = \frac{1}{8}(\cos(4\theta) + 2\cos(2\theta) + 3).$$

On dit que l'on a linéarisé $\cos^4\theta$.

— Linéariser de même $\sin^4\theta$.

Remarque

La linéarisation est utilisée dans la recherche de primitives de certaines fonctions. Ainsi, pour rechercher une primitive de la fonction numérique f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \cos^4(x)$$

on écrit :

$$f(x) = \frac{1}{8}(\cos(4x) + 2\sin(2x) + 3).$$

La fonction numérique F définie par :

$$F(x) = \frac{1}{8}\left(\frac{1}{4}\sin(4x) - \cos(2x) + 3x\right)$$

est donc une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction f. (Justifier.)

Scanned by CamScanner

Exercice

Linéariser $\cos^3\theta$ et $\sin^3\theta$.

En déduire une primitive sur $\mathbb{R}$ de chacune des fonctions numériques f et g définies respectivement par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \cos^3(x);$$
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = \sin^3(x).$$

3 Équation du second degré dans $\mathbb{C}$

1) Résolution d'une équation du second degré dans $\mathbb{C}$

• Nous avons vu que l'équation :

$$x \in \mathbb{R}, \quad x^2 + 1 = 0$$

n'admet pas de solution, tandis que l'équation :

$$x \in \mathbb{C}, \quad x^2 + 1 = 0$$

admet exactement deux solutions : i et $-i$.

• Plus généralement, étant donné un nombre complexe non nul a, deux nombres complexes quelconques b et c, on se propose de résoudre l'équation dite du *second degré :*

(E) $$z \in \mathbb{C}, \quad az^2 + bz + c = 0.$$

On peut lui associer la fonction polynôme

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto az^2 + bz + c.$$

Les solutions de (E) sont les zéros de f.

Écrivons $f(z)$ sous forme canonique :

$$f(z) = a\left[\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right].$$

Posons : $$\Delta = b^2 - 4ac.$$

Δ est le *discriminant* de l'équation (E) ou de la fonction f.

On a : $$f(z) = a\left[\left(z + \frac{b}{4a^2}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right].$$

Pour l'étude des solutions de l'équation (E) on distingue deux cas :

1er cas : $\Delta = 0$.

On a : $$f(z) = a\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2.$$

(E) possède une solution double z' :

$$z' = -\frac{b}{2a}.$$

$f(z)$ se factorise comme suit :

$$f(z) = a(z - z')^2.$$

Scanned by CamScanner

2e cas : $\Delta \neq 0$.

Δ admet donc deux racines carrées opposées : δ et $-\delta$:

$$f(z)=a\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)+\frac{\delta}{2a}\right]\left[\left(z+\frac{b}{2a}\right)-\frac{\delta}{2a}\right]$$

ou encore :

$$f(z)=a\left(z-\frac{-b-\delta}{2a}\right)\left(z-\frac{-b+\delta}{2a}\right).$$

(E) possède deux solutions distinctes z' et z'' :

$$z'=\frac{-b-\delta}{2a}; \quad z''=\frac{-b+\delta}{2a}.$$

$f(z)$ se factorise comme suit :

$$f(z)=a(z-z')(z-z'').$$

Tableau récapitulatif

Équation (E) : $z\in\mathbb{C}$, $az^2+bz+c=0$; $(a, b, c)\in\mathbb{C}^*\times\mathbb{C}\times\mathbb{C}$
Fonction polynôme $f : z \longmapsto az^2+bz+c$
Discriminant Δ : $\Delta=b^2-4ac$

Discriminant	Solutions de (E) ou zéros de f	Forme factorisée de $f(z)$
$\Delta=0$	$z'=-\frac{b}{2a}$	$f(z)=a(z-z')^2$
$\Delta\neq 0$	$z'=\frac{-b-\delta}{2a}$; $z''=\frac{-b+\delta}{2a}$ avec : $\delta^2=\Delta$	$f(z)=a(z-z')(z-z'')$

Pour résoudre une équation du second degré dans $\mathbb{C}$, il est donc nécessaire au préalable, de savoir trouver sous forme algébrique, les racines carrées d'un nombre complexe non nul.

2) Racines carrées d'un nombre complexe non nul écrit sous sa forme algébrique

a) Exemple introductif

Trouver les racines carrées du nombre complexe $(-8+6i)$.

Résolvons l'équation :

$$(E) \quad z\in\mathbb{C}, \quad z^2=-8+6i.$$

Posons : $z=x+iy$; avec : $(x, y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

Scanned by CamScanner

On a :

$$[z^2 = -8+6i] \iff [x^2 - y^2 + 2xyi = -8+6i].$$

Résoudre l'équation (E) revient donc à résoudre le système :

$$(S) \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = -8 \\ 2xy = 6. \end{cases}$$

On sait que l'équation (E) admet exactement deux solutions; il en est donc de même du système (S).

De plus, toute solution de (E) vérifie :

$$|z|^2 = |-8+6i|; \quad \text{c'est-à-dire :} \quad x^2 + y^2 = 10.$$

Donc toute solution du système (S) est aussi solution du système :

$$(S') \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x^2 - y^2 = -8 \\ xy = 3. \end{cases}$$

Or :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x^2 - y^2 = -8 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 9 \end{cases}$$

d'où :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \\ x^2 - y^2 = -8 \\ xy = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} (x, y) = (1; 3) \\ \boxed{\text{ou}} \\ (x, y) = (-1; -3). \end{cases}$$

Le système (S') admet exactement deux solutions. Ces solutions sont celles du système (S); les systèmes (S) et (S') sont donc équivalents.

Les deux solutions de (E) sont donc :

$$(1+3i) \quad \text{et} \quad (-1-3i).$$

b) **Cas général**

Soit $(a+ib)$ un nombre complexe non nul écrit sous sa forme algébrique.

Résolvons l'équation :

$$(E) \quad z \in \mathbb{C}, \quad z^2 = a + ib.$$

Supposons : $b \neq 0$.

Posons : $z = x + iy$.

On a : $[z^2 = a+ib] \iff [x^2 - y^2 + 2xyi = a+ib]$.

De plus : $|z|^2 = |a+ib|$.

C'est-à-dire : $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2+b^2}$.

On montre, comme dans l'exemple introductif que résoudre l'équation :

$$(x+iy) \in \mathbb{C}, \quad (x+iy)^2 = a+ib; \quad \text{avec :} \quad b \neq 0$$

Scanned by CamScanner

revient à résoudre le système :

$$(x, y)\in\mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2} \\ x^2-y^2=a \\ 2xy=b. \end{cases}$$

Or :

$$\begin{cases} x^2+y^2=\sqrt{a^2+b^2} \\ x^2-y^2=a \end{cases} \iff \begin{array}{l} x^2=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right) \\ y^2=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right) \end{array}$$

a et b étant des nombres réels, on a :

$$a\leqslant|a|\leqslant\sqrt{a^2+b^2}.$$

Par conséquent :

$$\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right) \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)$$

sont des nombres réels positifs. Ils admettent donc chacun deux racines carrées réelles.

Ainsi, $(x+iy)$ est une racine carrée de $(a+ib)$ si et seulement si :

x est une racine carrée de : $\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}+a\right)$;

y est une racine carrée de : $\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}-a\right)$;

$2xy=b$.

Supposons : $b=0$.

L'équation (E) devient :

$$z\in\mathbb{C}, \quad z^2=a; \quad \text{avec :} \quad a\in\mathbb{R}.$$

— Si : $a\geqslant 0$.

On sait que (E) admet deux solutions réelles :

$$\sqrt{a} \quad \text{et} \quad -\sqrt{a}.$$

— Si : $a<0$.

On écrit : $a=i^2(-a)$; avec : $-a\in\mathbb{R}_+^*$.

L'équation (E) admet deux solutions imaginaires pures :

$$i\sqrt{-a} \quad \text{et} \quad -i\sqrt{-a}.$$

Remarque

Tout nombre complexe non nul admet exactement deux racines carrées. Ces racines carrées étant opposées, il suffit d'en connaître une.

Exercice Donner les racines carrées de chacun des nombres complexes suivants :

1; -1; 4; -4; 3; -3.

Scanned by CamScanner

c) Exemple

Résoudre l'équation :

$$z \in \mathbb{C}; \quad z^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}.$$

— En utilisant les formes algébriques.

— En utilisant les formes trigonométriques.

Représenter géométriquement les deux racines carrées de $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$.

En déduire la valeur exacte de $\cos \frac{\pi}{12}$ et de $\sin \frac{\pi}{12}$.

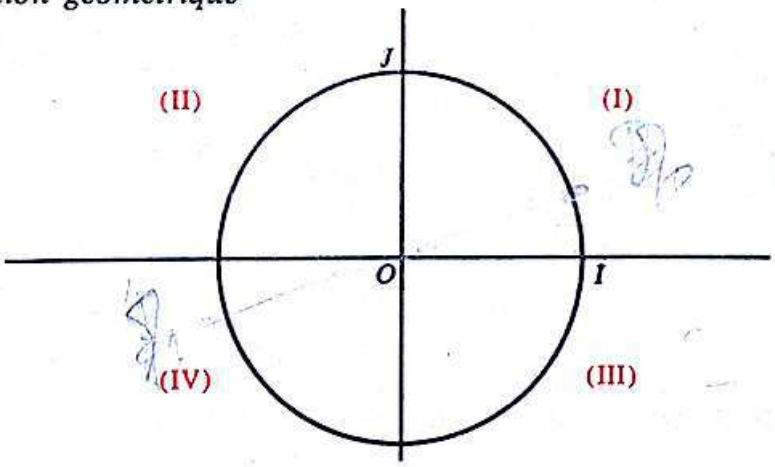
— *En utilisant les formes algébriques,* montrer que les deux racines carrées de $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$ sont :

$$\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}} + \frac{i}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad -\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}} - \frac{i}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

— *En utilisant les formes trigonométriques,* montrer que les deux racines carrées de $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$ sont :

$$\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \quad \text{et} \quad \cos\left(13 \frac{\pi}{12}\right) + i \sin\left(13 \frac{\pi}{12}\right).$$

— *Représentation géométrique*



En déterminant le quadrant du plan dans lequel est situé le point-image de chacune des racines carrées de $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}\right)$, on en déduit que :

$$\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}} + \frac{i}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

d'où :

$$\cos \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

$$\sin \frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}.$$

Scanned by CamScanner

Exercice Trouver les racines carrées de chacun des nombres complexes suivants :

$$i;\ -i;\ 2-5i;\ 5+6i.$$

3) Exemple de résolution d'équations du second degré dans $\mathbb{C}$ ou d'équations s'y ramenant

Exemple 1

Résoudre l'équation :

(E) $\qquad z\in\mathbb{C},\ z^2+(2+3i)z-2(1-2i)=0.$

— *Racines carrées du discriminant* Δ

$$\Delta=3-4i.$$

Le discriminant Δ est un nombre complexe non nul.
Il admet deux racines carrées, solutions de l'équation :

$$\delta\in\mathbb{C},\quad \delta^2=3-4i.$$

On pose : $\qquad \delta=u+iv$; avec : $(u, v)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

On a :

$$[\delta^2=3-4i] \iff [u^2-v^2+2uvi=3-4i]$$

d'autre part : $\qquad |\delta|^2=|3-4i|$.

Considérons donc le système :

$$(u, v)\in\mathbb{R}^2,\ \begin{cases} u^2+v^2=5\\ u^2-v^2=3\\ uv=-2.\end{cases}$$

Il est équivalent au système :

$$(u, v)\in\mathbb{R}^2,\ \begin{cases} u^2=4\\ v^2=1\\ uv=-2\end{cases}$$

d'où :

$$\left[\begin{array}{c}(u, v)=(2;\ -1)\\ \boxed{\text{ou}}\\ (u, v)=(-2;\ 1)\end{array}\right]$$

Les deux racines carrées du discriminant Δ sont :

$$(2-i) \quad \text{et} \quad -(2-i).$$

— *Solutions de l'équation* (E)

Les solutions z et z' de l'équation (E) vérifient :

$$z'=\frac{-(2+3i)+(2-i)}{2};\quad z''=\frac{-(2+3i)-(2-i)}{2}.$$

D'où :

$$z'=-2i;\quad z''=-2-i.$$

Exercice Résoudre l'équation :

$$z\in\mathbb{C},\quad 2iz^2+(1+6i)z-3+i=0.$$

Scanned by CamScanner

Exemple 2

Résoudre l'équation :

(E) $\quad z\in\mathbb{C},\ z^3-(6+i)z^2+(13+7i)z-10(1+i)=0$

sachant qu'elle admet une solution réelle.

• Soit a un nombre réel quelconque :

$$\begin{bmatrix}a \text{ est une solution}\\ \text{de } (E)\end{bmatrix} \iff \left[a^3-(6+i)a^2+(13+7i)a-10(1+i)=0\right]$$
$$\iff \left[(a^3-6a^2+13a-10)+i(-a^2+7a-10)=0\right]$$
$$\iff \begin{cases} a^3-6a^2+13a-10=0 \\ \boxed{\text{et}} \\ -a^2+7a-10=0. \end{cases}$$

Montrer que l'équation : $\quad a\in\mathbb{R},\quad -a^2+7a-10=0$

admet pour solutions 2 et 5. Néanmoins seul, 2 est aussi solution de l'équation :

$$a\in\mathbb{R};\quad a^3-6a^2+13a-10=0.$$

Par conséquent le nombre réel 2 est l'unique solution réelle de l'équation (E). Il en résulte que 2 est un zéro de la fonction polynôme du 3e degré f, définie par :

(1) $\qquad f(z)=z^3-(6+i)z^2+(13+7i)z-10(1+i).$

• *Mise en facteur de* $(z-2)$ *dans* $f(z)$

Nous admettrons qu'il est possible d'étendre à $\mathbb{C}$ les théorèmes et les techniques utilisés pour la factorisation dans $\mathbb{R}$.

On veut trouver un nombre complexe α tel que :

(2) $\qquad f(z)=(z-2)\left(z^2+\alpha z+5(1+i)\right).$

Les coefficients de z^2 dans les expressions de $f(z)$ définies respectivement en (2) et en (1) sont :

$$(\alpha-2) \quad \text{et} \quad -(6+i)$$

d'où : $\qquad \alpha-2=-6-i.$

Par suite : $\qquad \alpha=-(4+i)$

$$f(z)=(z-2)\left(z^2-(4+i)z+5(1+i)\right).$$

• Les autres solutions de (E) sont donc celles de l'équation :

$$z\in\mathbb{C},\quad z^2-(4+i)z+(5(1+i)=0.$$

Résoudre cette équation.

Exercice Résoudre l'équation :

$$z\in\mathbb{C},\quad (1+i)z^3+(6-i)z^2+(4-9i)z-2(1+2i)=0$$

sachant qu'elle admet une solution imaginaire pure.

Remarque

Toute équation de degré n $(n\in\mathbb{N}^*)$ dans $\mathbb{C}$, admet une, ou deux, ... ou n solutions.

Scanned by CamScanner

Exercices

1 (1). Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

(1) $(2-i)(3+i)$

(2) $3i(5-2i)$

(3) $(4+3i)(2-5i)$

(4) $(2+i)^2$

(5) $\dfrac{1+i}{1-i}$

(6) $\dfrac{12}{3i-4}$

(7) $\dfrac{2+3i}{5+3i}(2-3i)$

(8) $\dfrac{(1+i)(4+3i)}{(5-i)(2+i)}$.

2 (1). Quel est le nombre complexe dont le carré est égal à son inverse?

3 (1). On pose :

$$z=2-5i; \quad z'=-3+4i.$$

Donner la forme algébrique de chacun des nombres suivants :

$$z+z'; \quad z-z'; \quad 4z-3z'; \quad zz'.$$

4 (1). Donner la forme algébrique du nombre complexe :

$$i^{25}+i^{26}+i^{27}+i^{28}.$$

5 (1). Résoudre les équations suivantes :

$z\in\mathbb{C}$, $3iz+2i-(1-i)z=0$

$z\in\mathbb{C}$, $2z-1+iz=5+3i+(1+2i)z$

$z\in\mathbb{C}$, $(1-3i)z+4-7i=0$

$z\in\mathbb{C}$, $(1+2i)z-5+3i=0$.

6 (1). Résoudre les équations suivantes :

$z\in\mathbb{C}$, $2z-5\bar{z}+1=0$

$z\in\mathbb{C}$, $z^2-2\bar{z}+1=0$

$z\in\mathbb{C}$, $z^2+2i\bar{z}-2i+1=0$.

7 (2). Le plan étant muni d'un repère orthonormé, trouver l'ensemble des points M d'affixe z, tels que les points images des nombres complexes 1, z et $1+z^2$ soient alignés.

8 (2). Le plan étant muni d'un repère orthonormé, trouver l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points images des nombres complexes i, z et iz soient les sommets d'un triangle équilatéral.

9 (2). Le plan étant muni d'un repère orthonormé d'origine O, on désigne par M le point d'affixe z et par M' le point d'affixe Z tel que :

$$Z=\frac{z+1}{z-1}.$$

1) Trouver l'ensemble (D) des points M tels que Z soit un nombre réel.

2) Trouver l'ensemble (C) des points M tels que Z soit un nombre imaginaire pur.

3) Trouver l'ensemble (Γ) des points M tels que les points O, M et M' soient alignés.

10 (2). Le plan est muni d'un repère orthonormé.
On donne le nombre complexe z.
Soit A, B et C les points d'affixes respectives z, z^2, z^3.
Quel est l'ensemble des points A tels que le triangle ABC soit rectangle en A.

11 (2). Le plan étant muni d'un repère orthonormé, soit t un nombre réel quelconque. Trouver l'ensemble des points M, images des nombres complexes

$$\frac{1+t}{1+i+2t}.$$

12 (2). Le plan étant muni d'un repère orthonormé, on pose :

$$Z=\frac{1-iz}{1+iz}.$$

1) Quel est l'ensemble des points M d'affixe z tels que Z soit un nombre réel?

2) Quel est l'ensemble des points M d'affixe z tels que Z soit un nombre imaginaire pur?

13 (2). Trouver le module de chacun des nombres complexes ci-dessous.

$$2-3i; \quad 5+4i; \quad (2-3i)(5+4i)$$

$$(1+i)^4; \quad \frac{2-3i}{5+4i}.$$

14 (2). Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

1) Quel est l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie :

$$|z|=2.$$

Scanned by CamScanner

2) Quel est l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie :

$$|z-i|=2.$$

15 (2). On considère les points A et B d'affixes respectives $1+i$ et $2-3i$. Quel est l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie :

$$|z-(1+i)|=|z-(2-3i)|.$$

16 (2). Le plan est muni d'un repère orthonormé.
Quel est l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie :

$$z+\bar{z}-|z|=0.$$

Construire cet ensemble.

17 (2). Calculer :

$$(1+i)(1-i\sqrt{3}).$$

Écrire sous forme trigonométrique chacun des nombres complexes suivants :

$$1+\sqrt{3}+i(1-\sqrt{3}); \quad \frac{1-i\sqrt{3}}{1-i}.$$

18 (2). Soit :

$$z_1=\frac{\sqrt{6}+i\sqrt{2}}{2} \quad \text{et} \quad z_2=1-i.$$

Écrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.
En déduire le module et l'argument principal de $\frac{z_1}{z_2}$, puis les valeurs exactes de $\cos\frac{\pi}{12}$ et de $\sin\frac{\pi}{12}$.

19 (2). n étant un nombre entier naturel écrire sous forme trigonométrique chacun des nombres complexes suivants :

$$i^n; \quad (1+i)^n.$$

20 (2). Le plan étant muni d'un repère orthonormé direct, on pose :

$$z=\sqrt{3}+i.$$

Trouver le module et l'argument principal des nombres complexes suivants :

$$z; \quad 2i-z; \quad 2i+z.$$

21 (2). Le plan étant muni d'un repère orthonormé direct, on pose :

$$z=1+i\sqrt{3}.$$

Mettre z sous forme trigonométrique.
Calculer z^{10}.

22 (2). Le plan étant muni d'un repère orthonormé direct, on pose :

$$z=\frac{9\sqrt{3}}{2}(1-i\sqrt{3}).$$

Mettre z sous forme trigonométrique.
Calculer les racines cinquièmes de z.

23 (2). résoudre l'équation :

(1) $\qquad z\in\mathbb{C}, \quad z^3=i.$

— Mettre les solutions de l'équation (1) sous forme trigonométrique.

— Soit p un nombre entier naturel non nul. Résoudre l'équation :

(2) $\qquad z\in\mathbb{C}, \quad z^p=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i).$

— Les équations (1) et (2) peuvent-elles avoir des solutions communes?

24 (2). Quel est l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie :

$$ARG(z)=\frac{\pi}{3}.$$

25 (2). a étant un nombre réel, mettre sous forme trigonométrique le nombre complexe :

$$\frac{1+ai}{1-ai}.$$

$\left(\text{On pourra poser: } a=\tan\frac{\theta}{2}.\right)$

Application : mettre sous forme trigonométrique le nombre complexe :

$$\frac{3+i\sqrt{3}}{3-i\sqrt{3}}.$$

26 (2). Soit z un nombre complexe de module 1 et d'argument θ.
Mettre sous forme trigonométrique le nombre complexe $1+z+z^2$.

27 (2). θ étant un nombre réel, mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants :

$$1+\cos\theta-i\sin\theta; \quad \frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta};$$

$$\frac{1-\cos\theta-i\sin\theta}{1+\cos\theta+i\sin\theta}; \quad \frac{1}{1+i\tan\theta};$$

$$\frac{\cos\theta-i\sin\theta}{\sin\theta-i\cos\theta}.$$

28 (2). Le plan étant muni d'un repère orthonormé direct, on pose :

$$z=1+i\sqrt{3}.$$

Scanned by CamScanner

— Écrire z sous forme trigonométrique.
— Montrer que, les points images des nombres complexes z, $-z$, z^2 et $\frac{2}{z}$ appartiennent à un même cercle.

29 (2). 1) Linéariser : $\sin^2 3\theta \cos^2 \theta$.

2) Calculer : $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin^2 3\theta \cos^2 \theta \, d\theta$.

(D'après Baccalauréat)

30 (3). On donne les nombres complexes z et u.

$$z = -8\sqrt{3} + 8i$$

$$u = (\sqrt{6} - \sqrt{2}) + i(\sqrt{6} + \sqrt{2}).$$

a) Mettre z sous forme trigonométrique.
Trouver sous forme trigonométrique, les racines carrées de z.

b) Calculer u^2.
Utiliser ce résultat pour exprimer les racines carrées de z sous leur forme algébrique.

En déduire la valeur exacte de $\cos \frac{5\pi}{12}$ et de $\sin \frac{5\pi}{12}$.

31 (3). Trouver les racines carrées des nombres complexes suivants :

(1) $1 + i$
(2) $-4i$
(3) $1 - i\sqrt{3}$
(4) $7 + 24i$.

32 (3). Résoudre les équations suivantes :

(1) $z \in \mathbb{C}$, $z^2 + iz + 1 + 3i = 0$
(2) $z \in \mathbb{C}$, $z^2 + 2(1+i)z + 4i = 0$
(3) $z \in \mathbb{C}$, $iz^2 + (4i - 3)z + i - 5 = 0$
(4) $z \in \mathbb{C}$, $z^4 + z^2 + 1 = 0$.

33 (3). On considère l'équation :

(E) $z \in \mathbb{C}$, $(6 + 3i)z^2 + (21 + 19i)z - 26(1 + i) = 0$.

Montrer que l'équation (E) admet une unique solution réelle. Trouver cette solution.
Résoudre ensuite l'équation (E).

34 (3). Soit φ un nombre réel tel que :

$$\varphi \in [-\pi, \pi[.$$

Résoudre l'équation :

$$z \in \mathbb{C}, \quad z^2 - 2(\cos \varphi)z + 1 = 0.$$

35 (3). ω étant un nombre complexe, on considère l'équation :

(E) $z^2 - (2 + i\omega)z + i\omega + 2 - \omega = 0$.

— Montrer qu'il existe une valeur de ω pour laquelle l'équation (E) admet deux solutions complexes conjuguées.
— Calculer ces solutions.

36 (3). Soit P la fonction polynôme de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$p(z) = z^4 - 4z^3 + 9z^2 - 4z + 8.$$

1) Comparer $P(\bar{z})$ et $\overline{P(z)}$, $\bar{z}$ étant le conjugué de z et $\overline{P(z)}$ le conjugué $P(z)$.

Calculer $P(i)$.
En déduire une, puis deux solutions de l'équation :

(E) $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = 0$.

2) Mettre $P(z)$ sous la forme d'un produit de deux polynômes du second degré à coefficients réels.

Résoudre l'équation (E).

Calculer la somme et le produit des solutions de l'équation (E).
(D'après Baccalauréat.)

37 (3). On considère l'équation :

(E) $z \in \mathbb{C}$, $z^3 - 4iz^2 - (6 + i)z + 3i - 1$.

1) Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure. Soit z_0 cette solution.

— Trouver les deux autres solutions de (E). On désigne par z_1 la solution ayant une partie réelle négative et par z_2 l'autre solution.

38 (3). Résoudre l'équation :

$$z \in \mathbb{C}, \quad (1 + i)z^6 - (2 - i)z^3 - i = 0.$$

39 (3). Résoudre l'équation :

(1) $z \in \mathbb{C}$, $z^4 = 1$.

On considère l'équation :

(E) $x \in \mathbb{C}$, $x^4 + (1 + x)^4 = 0$.

Vérifier que 0 n'est pas solution de (E).
utiliser (1) pour résoudre (E).
Vérifier que les solutions de (E) sont des nombres complexes deux à deux conjugués.

Scanned by CamScanner

Problème

40 On pose : $a = \frac{1}{2}(1+i)$.

1) Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes a et $a-1$.

2) On pose : $z_0 = 1$.

Pour tout nombre entier naturel non nul on pose :

$$z_n = a^n.$$

Soit M_n le point d'affixe z_n.

Placer dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, les points M_0, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, M_7 (unité graphique : 4 cm).

3) Pour tout nombre entier naturel non nul on pose :

$$u_n = |z_n - z_{n-1}|.$$

Vérifier que : $u_n = |a|^{n-1} \times |a-1|$.

Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique dont on précisera le premier terme u_1 et la raison.

4) *a*) On pose :

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n.$$

Calculer S_n.

b) Calculer, si elle existe, la limite de (S_n).

Scanned by CamScanner

4 Nombres complexes et transformations du plan

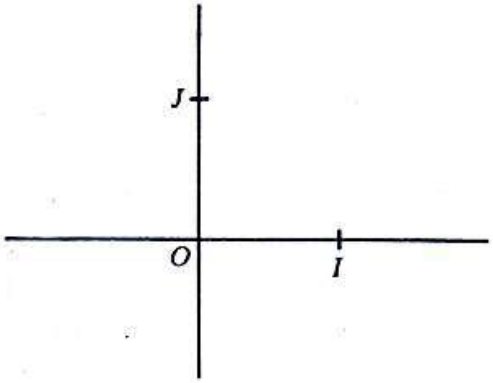
Leçon 1 : TRANSFORMATION DE $\mathbb{C}$ ASSOCIÉE A UNE TRANSFORMATION DU PLAN

Leçon 2 : QUELQUES TRANSFORMATIONS ÉLÉMENTAIRES DU PLAN

Leçon 3 : LES SIMILITUDES DU PLAN

Leçon 4 : UTILISATION DES SIMILITUDES DANS DES ACTIVITÉS GÉOMÉTRIQUES

Dans tout ce chapitre, le plan $\mathcal{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J) et l'ensemble $\mathcal{V}$ des vecteurs du plan est muni de la base orthonormée associée $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ})$.

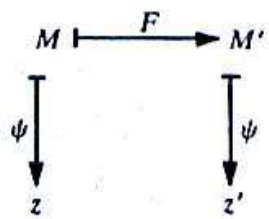


1 Transformation de $\mathbb{C}$ associée à une transformation du plan

• Rappelons que l'application ci-dessous est bijective :

$$\psi : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$M \longmapsto z; \quad \text{avec } z \text{ affixe de } M.$$

• Soit F une transformation du plan $\mathcal{P}$.
A tout point M d'affixe z, F fait correspondre un point M' d'affixe z'.

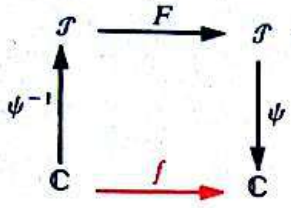


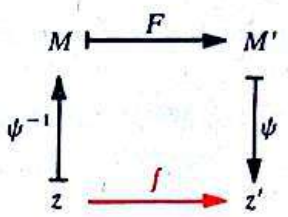
Scanned by CamScanner

Puisque ψ est une bijection de $\mathcal{P}$ sur $\mathbb{C}$, on montre que :

$$\psi \circ F \circ \psi^{-1} \text{ est une bijection de } \mathbb{C} \text{ sur } \mathbb{C}$$

qui à tout nombre complexe z, affixe d'un point M, fait correspondre le nombre complexe z', affixe de l'image de M par F.

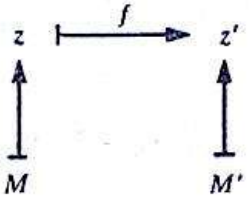




$$f = \psi \circ F \circ \psi^{-1}.$$

On dit que f *est* **la transformation de $\mathbb{C}$ associée à** F.

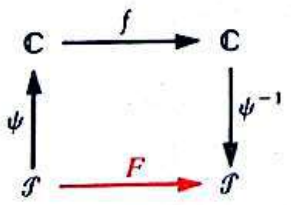
• Réciproquement, soit f une transformation de $\mathbb{C}$. A tout nombre complexe z affixe d'un point M, f fait correspondre le nombre z' affixe d'un point M'

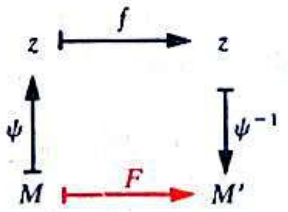


On montre que :

$$\psi^{-1} \circ f \circ \psi \text{ est une bijection de } \mathcal{P} \text{ sur } \mathcal{P},$$

qui à tout point M d'affixe z fait correspondre le point M' d'affixe z', image de z par f.





$$F = \psi^{-1} \circ f \circ \psi.$$

On dit que F est la **transformation de $\mathcal{P}$ *associée à* f.**

Scanned by CamScanner

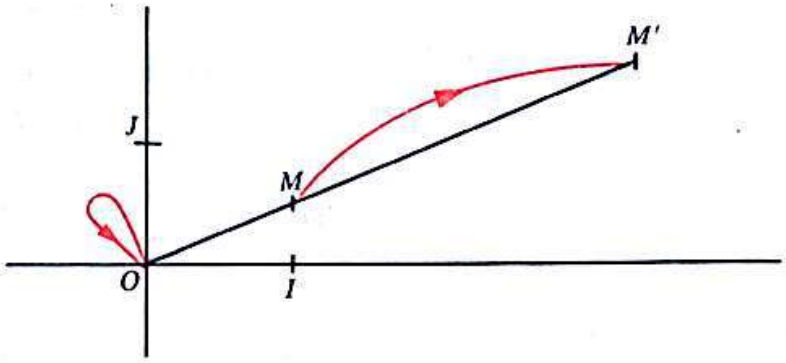
2 Quelques transformations élémentaires du plan

1) Homothétie de centre O

- Soit α un nombre réel non nul.

On considère l'homothétie h de centre O et de rapport α.

Soit | M et M' deux points quelconques du plan,
z et z' leurs affixes respectives.



$$[M' = h(M)] \iff [\overrightarrow{OM'} = \alpha \cdot \overrightarrow{OM}] \iff [z' = \alpha z].$$

Conclusion

Soit α un nombre réel non nul.

La transformation de $\mathbb{C}$ associée à l'homothétie h de centre O et de rapport α est la bijection

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto \alpha z.$$

- *Réciproque*

On montre que :

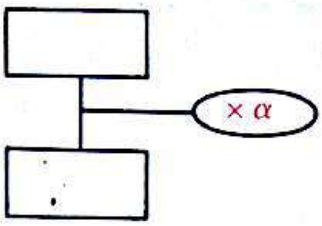
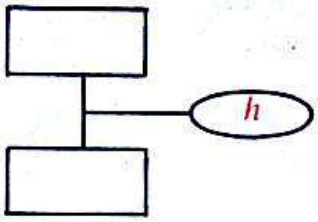
α étant un nombre réel non nul, l'homothétie h de centre O et de rapport α est la transformation du plan $\mathcal{P}$, associée à la bijection

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto \alpha z.$$

- Examiner le cas : $\alpha = 1$.

Scanned by CamScanner

• Nous pouvons traduire ces résultats par les schémas ci-dessous :

$\alpha \in \mathbb{R}^*$	
Schéma de calcul associé à f	Schéma de la transformation du plan associée à f
	
Transformation de $\mathbb{C}$ $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ $z \longmapsto \alpha z$	Homothétie de centre O de rapport α $h : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ $M \longmapsto M'$ tel que : $\overrightarrow{OM'} = \alpha \cdot \overrightarrow{OM}$.

Exercice

Soit A le point du plan d'affixe $(-1+2i)$ et M un point quelconque du plan d'affixe z.

a) Construire les points I', J', A' et M', images respectives des points I, J, A et M par l'homothétie h de centre O et de rapport $-\frac{3}{2}$.

b) Trouver par le calcul, l'affixe de chacun des points I', J', A', M'.

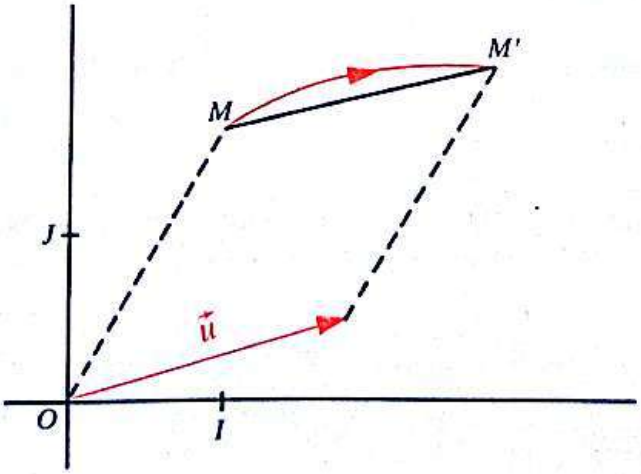
c) Vérifier sur le dessin les résultats obtenus.

2) Translation

• Soit b un nombre complexe quelconque et $\vec{u}$ le vecteur d'affixe b.

On considère la translation t de vecteur $\vec{u}$.

Soit | M et M' deux points quelconques du plan,
z et z' leurs affixes respectives.



Scanned by CamScanner

$$[M' = t(M)] \iff [\overrightarrow{MM'} = \vec{u}\,] \iff [\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OM} + \vec{u}\,] \iff [z' = z + b]$$

Conclusion

Soit b un nombre complexe et $\vec{u}$ le vecteur d'affixe b.
La transformation de $\mathbb{C}$ associée à la translation t de vecteur $\vec{u}$ est la bijection

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto z + b.$$

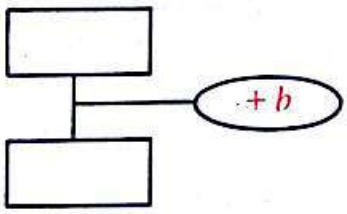
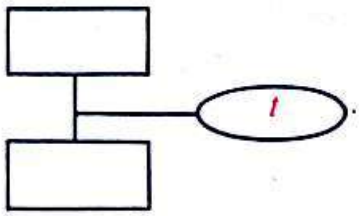
- *Réciproque.*

On montre que :

b étant un nombre complexe quelconque et $\vec{u}$ le vecteur d'affixe b, la translation t de vecteur $\vec{u}$ est la transformation du plan associée à la bijection

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto z + b.$$

- Examiner le cas : $b = 0$.
- Nous pouvons traduire ces résultats par les schémas ci-dessous :

$b \in \mathbb{C}$; $\vec{u}$ vecteur d'affixe b.	
Schéma de calcul associé à f 	Schéma de la transformation du plan associée à f. 
Transformation de $\mathbb{C}$. $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \longmapsto z + b$	Translation de vecteur $\vec{u}$ $t : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$, $M \longmapsto M'$ tel que : $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

Exercice

Soit $\vec{u}$ le vecteur d'affixe $\left(1 + \frac{i}{2}\right)$.
Soit A le point du plan d'affixe $(2 - 3i)$ et M un point quelconque du plan d'affixe z.

Scanned by CamScanner

a) Construire les points I', J', A' et M' images respectives des points I, J, A et M par la translation t de vecteur $\vec{u}$.

b) Trouver par le calcul l'affixe de chacun des points I', J', A' et M'.

c) Vérifier sur le dessin, les résultats obtenus.

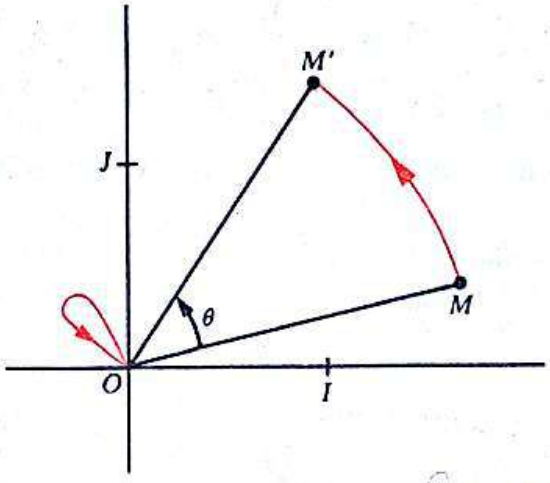
3) Rotation de centre *O*

• Soit $(\widehat{\theta})$ un angle orienté de mesure principale θ.

On considère la rotation r de centre O et d'angle orienté θ.

On sait que O est l'unique point du plan qui a pour image O par la rotation r.

Soit | M et M' deux points quelconques du plan distincts de O,
z et z' leurs affixes respectives.



$$[M' = r(M)] \iff \begin{cases} OM' = OM \\ \boxed{\text{et}} \\ (\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}}) = (\widehat{\theta}) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} OM' = OM \\ \boxed{\text{et}} \\ (\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM'}}) - (\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OM}}) = (\widehat{\theta}) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} |z'| = |z| \\ \boxed{\text{et}} \\ \exists k \in \mathbb{Z} \quad \arg(z') - \arg(z) = \theta + k(2\pi) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} |z'| = |z| \\ \boxed{\text{et}} \\ \exists k \in \mathbb{Z} \quad \arg(z') = \theta + \arg(z) + k(2\pi) \end{cases}$$

$$\iff [z' = (\cos\theta + i \sin\theta) z] \quad \text{(Justifier.)}$$

Scanned by CamScanner

Conclusion

Soit $(\widehat{\theta})$ un angle orienté de mesure principale θ.
La transformation de $\mathbb{C}$ associée à la rotation r de centre O et d'angle orienté θ est la bijection

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto (\cos\theta + i \sin\theta)z.$$

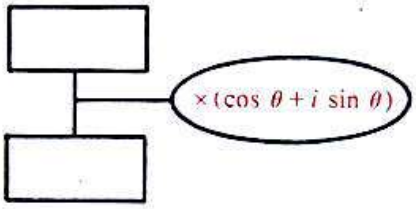
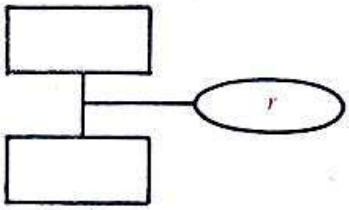
- *Réciproque.*

On montre que :

$(\widehat{\theta})$ étant un angle orienté de mesure principale θ, la rotation de centre O et d'angle orienté θ est la transformation du plan associée à la bijection

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto (\cos\theta + i \sin\theta)z.$$

- Examiner le cas particulier : $\theta = 0$.
- Nous pouvons traduire ces résultats par les schémas ci-dessous :

Schéma de calcul associé à f	Schéma de la transformation du plan associée à f
	
Transformation de $\mathbb{C}$ $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ $z \longmapsto (\cos\theta + i \sin\theta)z$	Rotation de centre O, d'angle orienté θ $r : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ $M \longmapsto M'$ tel que : si : $M = 0$; alors : $M' = 0$ si : $M \neq 0$; alors : $\begin{cases} OM' = OM \\ \text{MES}(\widehat{OM, OM'}) = \theta \end{cases}$

Remarque

$(\widehat{\theta})$ étant un angle orienté de mesure principale θ,
soit θ' une mesure de $(\widehat{\theta})$
on a : $\cos\theta' + i \sin\theta' = \cos\theta + i \sin\theta$.
La bijection : $\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$

$$z \longmapsto (\cos\theta' + \sin\theta')z$$

est donc associée à la rotation de centre O et d'angle orienté θ.

Scanned by CamScanner

Exercices

1) Soit A le point du plan d'affixe $(-3-i)$ et M un point quelconque du plan d'affixe z.

a) Construire les points I', J', A' et M' images respectives de I, J, A et M par la rotation r de centre O et d'angle orienté $-\frac{\pi}{3}$.

b) Trouver par le calcul l'affixe de chacun des points I', J', A' et M'.

c) Vérifier sur le dessin, les résultats obtenus.

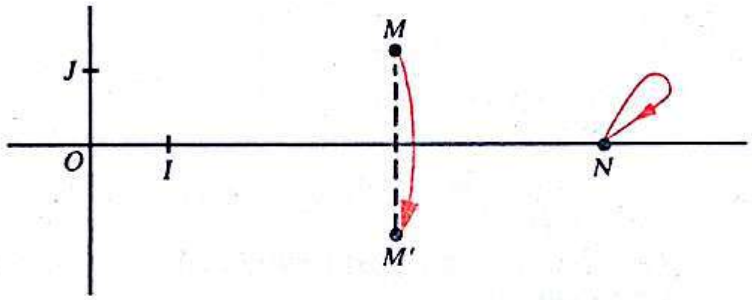
2) Quelle est la rotation associée à la bijection :

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto \left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)z ?$$

4) Symétrie orthogonale d'axe (OI)

• On considère la symétrie orthogonale s d'axe (OI).

Soit | M et M' deux points quelconques du plan,
z et z' leurs affixes respectives.



$$[M' = s(M)] \iff \begin{cases} \text{si : } M \in (OI), \text{ alors : } M' = M \\ \text{si : } M \notin (OI), \text{ alors : } (OI) \text{ est la médiatrice de } [MM'] \end{cases}$$
$$\iff [z' = \bar{z}].$$

Conclusion

La transformation de $\mathbb{C}$ associée à la symétrie orthogonale s d'axe (OI) est la bijection

$$\bar{c} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto \bar{z}.$$

• *Réciproque.*

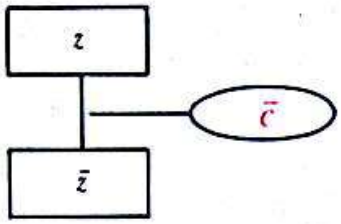
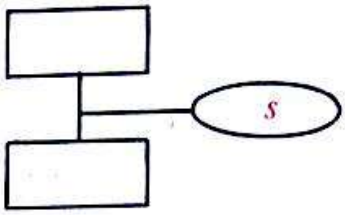
On montre que :

La symétrie orthogonale s d'axe (OI) est la transformation du plan associée à la bijection

$$\bar{c} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto \bar{z}.$$

Scanned by CamScanner

• Nous pouvons traduire ces résultats par les schémas ci-dessous :

Schéma de calcul associé à $\bar{c}$	Schéma de la transformation du plan associée à $\bar{c}$
	
Transformation de $\mathbb{C}$ $\bar{c} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ $z \longmapsto \bar{z}$	Symétrie orthogonale d'axe (OI) $s : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$ $M \longmapsto M'$ tel que : — si : $M \in (OI)$, alors : $M' = M$ — si : $M \notin (OI)$, alors : (OI) est la médiatrice de $[MM']$.

Exercice

— Trouver la transformation dc $\mathbb{C}$ associée à la symétrie orthogonale d'axe (OJ).

— Trouver la transformation de $\mathbb{C}$ associée à la symétrie centrale de centre O.

5) Activités. Exemples de transformations du plan

a) Homothétie de centre quelconque et de rapport différent de 1

Rappels

— Toute composée d'une translation et d'une homothétie de rapport α est une homothétie de rapport α.

— Toute homothétie de rapport α est une composée d'une translation et d'une homothétie de centre O et de rapport α.

Exemple 1

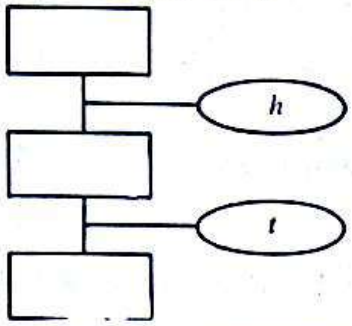
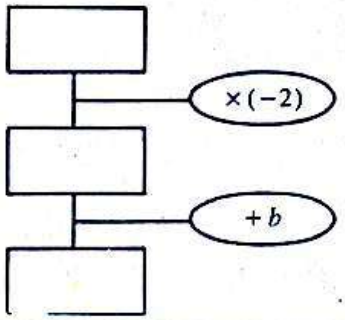
Trouver la transformation f de $\mathbb{C}$ associée à l'homothétie h' de rapport -2 et de centre le point Ω d'affixe $(3 - i)$.

Scanned by CamScanner

• Soit h l'homothétie de centre O et de rapport -2.
Il existe alors une transformation t telle que :

$$h' = t \circ h.$$

Soit b l'affixe du vecteur de la translation t.
On a alors :

Schéma de h'	Schéma de calcul associé à f
	
$h' = t \circ h$	$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ $z \longmapsto -2z + b$

• *Détermination de b* $\quad [h'(\Omega) = \Omega] \iff [f(3-i) = 3-i]$

$$\iff [-2(3-i) + b = 3-i]$$

$$\iff [b = 3(3-i)].$$

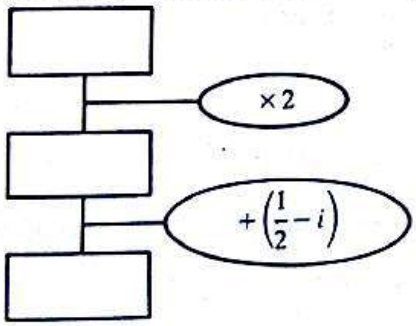
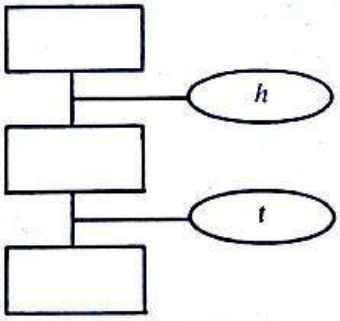
Par conséquent : $\quad f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$
$z \longmapsto -2z + 3(3-i).$

Exemple 2

Trouver la transformation T du plan associée à la bijection

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto 2z + \frac{1}{2} - i.$$

On obtient :

Schéma de calcul associé à f	Schéma de T
	
$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ $z \longmapsto 2z + \frac{1}{2} - i$	h : homothétie de centre O de rapport 2 t : translation dont le vecteur a pour affixe $\left(\frac{1}{2} - i\right)$ $T = t \circ h$

Scanned by CamScanner

La transformation T est donc l'homothétie de rapport 2 et de centre le point Ω dont l'affixe ω est la solution de l'équation :

$$z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = z$$

c'est-à-dire de :

$$z \in \mathbb{C}, \quad 2z + \frac{1}{2} - i = z$$

d'où :

$$\omega = -\frac{1}{2} + i.$$

T est l'homothétie de rapport 2 et de centre le point Ω d'affixe $\left(-\frac{1}{2} + i\right)$.

Exercices

1) Soit α un nombre réel non nul différent de 1, Ω un point du plan d'affixe ω.
Trouver la transformation de $\mathbb{C}$ associée à l'homothétie de centre Ω et de rapport α.

2) Soit α un nombre réel non nul différent de 1, b un nombre complexe quelconque.
Trouver la transformation du plan associée à la bijection :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & \alpha z + b. \end{array}$$

b) Rotation de centre quelconque et d'angle orienté non nul

Rappels

— Toute composée d'une translation et d'une rotation d'angle orienté θ est une rotation d'angle orienté θ.

— Toute rotation d'angle orienté θ est une composée d'une translation et d'une rotation de centre O et d'angle orienté θ.

Exemple 1

Trouver la transformation f de $\mathbb{C}$ associée à la rotation r' d'angle orienté $\frac{\pi}{3}$ et de centre le point Ω d'affixe $i\sqrt{3}$.

• On a :

$$\cos\frac{\pi}{3} + i \sin\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i.$$

Soit r la rotation de centre O et d'angle orienté $\frac{\pi}{3}$.

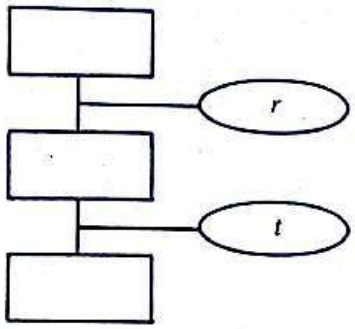
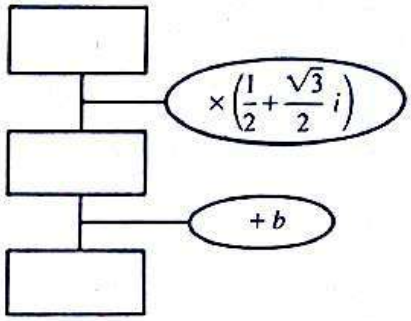
Scanned by CamScanner

Il existe alors une translation t telle que :

$$r' = t \circ r.$$

Soit b l'affixe du vecteur de la translation t.

On a alors :

Schéma de r'	Schéma de calcul de f
	
$r' = t \circ r$	$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ $z \longmapsto \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z + b.$

- *Détermination de b*

$$[r'(\Omega)=\Omega] \iff [f(i\sqrt{3})=i\sqrt{3}]$$

$$\iff \left[\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)i\sqrt{3}+b=i\sqrt{3}\right]$$

$$\iff \left[b=\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right].$$

Par conséquent :

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto \frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})z+\frac{1}{2}(3+i\sqrt{3}).$$

Exemple 2

Trouver la transformation T du plan associée à la bijection

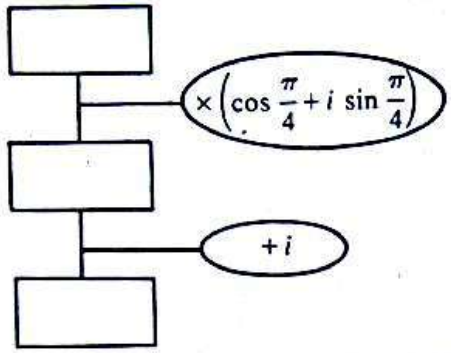
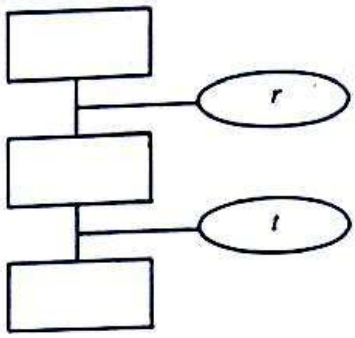
$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)z+i.$$

On a :

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)=\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}.$$

Scanned by CamScanner

On obtient :

Schéma de calcul associé à f	Schéma de T
	
$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ $z \longmapsto \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)z+i$	r : rotation de centre O et d'angle orienté $\frac{\pi}{4}$ t : translation dont le vecteur a pour affixe i $T = t \circ r$

La transformation T est donc la rotation d'angle orienté $\frac{\pi}{4}$ et de centre le point Ω dont l'affixe ω est la solution de l'équation :

$$z \in \mathbb{C}, \quad f(z) = z$$

c'est-à-dire :

$$z \in \mathbb{C}, \quad \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)z+i = z$$

d'où : $\omega = -\frac{1+\sqrt{2}}{2}+\frac{i}{2}$. Justifier.

Exercices

1) Soit Ω un point quelconque du plan d'affixe ω, $(\widehat{\theta})$ un angle orienté non nul de mesure principale θ.

Trouver la transformation $\mathbb{C}$ associée à la rotation de centre Ω et d'angle orienté θ.

2) Soit a un nombre complexe de module 1 et d'argument principal θ, b un nombre complexe quelconque.

Trouver la transformation du plan associée à la bijection :

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto az+b.$$

Scanned by CamScanner

3 Les similitudes du plan

1) Les similitudes du plan (rappels)

Définition

Soit α un nombre réel strictement positif.

On appelle similitude du plan, de rapport α, toute bijection du plan sur lui-même telle que :

quels que soient les points M et N d'images respectives M' et N' :

$$d(M', N') = \alpha d(M, N).$$

Exemples

— Toute isométrie est une similitude de rapport 1.

— Toute homothétie de rapport α est une similitude de rapport $|\alpha|$.

Théorème

Toute composée d'une isométrie et d'une homothétie de rapport α est une similitude de rapport $|\alpha|$.

Propriété fondamentale

Soit S une similitude de rapport α.

Quel que soit l'homothétie de rapport α, il existe deux isométries i et i' telles que :

$$S = i \circ h \quad \text{et} \quad S = h \circ i'.$$

Exercices

1) Donner les autres propriétés d'une similitude.

2) On donne le triangle ABC.

Soit h l'homothétie de centre A et de rapport 3

h' l'homothétie de centre C et de rapport -2

t la translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$

r la rotation de centre B et d'angle orienté $\frac{\pi}{3}$

s la symétrie orthogonale d'axe (BC).

Construire l'image de ABC par chacune des similitudes :

$$h \circ t,\ r \circ h',\ s \circ t \circ h,\ h' \circ s.$$

Scanned by CamScanner

2) Les similitudes directes du plan

a) Rappels

Toute composée d'une homothétie de rapport α et d'un déplacement est une *similitude directe* de rapport $|\alpha|$.

Exemple

Toute homothétie de rapport α est une similitude directe de rapport $|\alpha|$.

Décomposition d'une similitude directe de rapport différent de 1

Toute similitude directe de rapport α différent de 1 est une composée d'une rotation et d'une homothétie de rapport α.

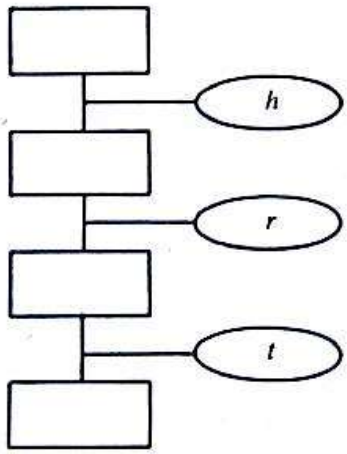
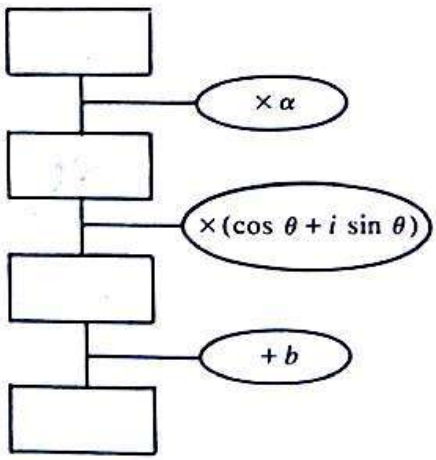
b) Similitude directe et transformation de $\mathbb{C}$

On montre que :

Toute similitude directe de rapport α est une composée de l'homothétie de centre O de rapport α, d'une rotation de centre O et d'une translation.

Soit f la transformation de $\mathbb{C}$ associée à la similitude directe S.

Nous pouvons alors traduire le résultat précédent par les schémas ci-dessous :

Schéma de S	Schéma de calcul associé à f
	
$S = t \circ r \circ h$ h : homothétie de centre O et de rapport α r : rotation de centre O d'angle orienté θ t : translation dont le vecteur a pour affixe b	$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ $z \longmapsto az + b$; avec : $a = \alpha(\cos\theta + i \sin\theta)$

Scanned by CamScanner

Conclusion

La transformation de $\mathbb{C}$ associée à une similitude directe de rapport α est du type :

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto az+b; \quad \text{avec : } |a|=\alpha. \end{aligned}$$

Réciproque

on montre que :

a étant un nombre complexe non nul,
b un nombre complexe quelconque,
la transformation f de $\mathbb{C}$ définie par :

$$f(z)=az+b$$

est associée à une similitude directe de rapport $|a|$.

c) Exemples

Exemple 1

Soit r la rotation d'angle orienté $\frac{\pi}{4}$ et de centre le point A d'affixe i, h l'homothétie de rapport 3 et de centre le point B d'affixe $(1-i)$. Trouver la transformation de $\mathbb{C}$ associée à la similitude directe $r \circ h$.

- La transformation f_1 de $\mathbb{C}$ associée à la rotation r vérifie :

$$f_1(z)=\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)z+b \quad \boxed{\text{et}} \quad f_1(i)=i,$$

et par conséquent,

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)z+\frac{\sqrt{2}}{2}+i\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right). \end{aligned}$$

- La transformation f_2 de $\mathbb{C}$ associée à l'homothétie h vérifie :

$$f_2(z)=3z+b \quad \boxed{\text{et}} \quad f_2(1-i)=1-i,$$

et par conséquent,

$$\begin{aligned} f_2 : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto 3z+2(-1+i). \end{aligned}$$

- Vérifier que la transformation de $\mathbb{C}$ associée à la similitude directe $r \circ h$ est donc,

$$\begin{aligned} f_1 \circ f_2 : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \frac{3\sqrt{2}}{2}(1+i)z-\frac{3\sqrt{2}}{2}+\left(i-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)i. \end{aligned}$$

Scanned by CamScanner

Exemple 2

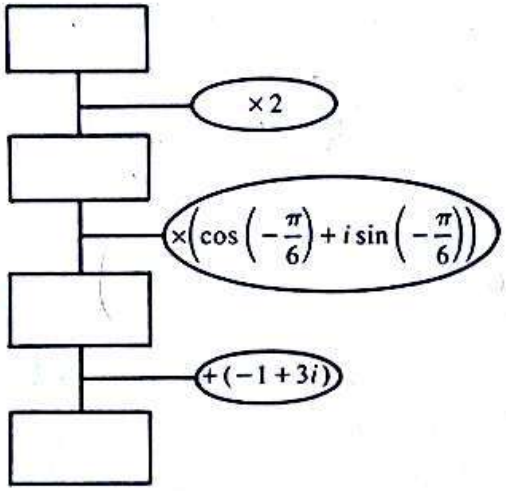
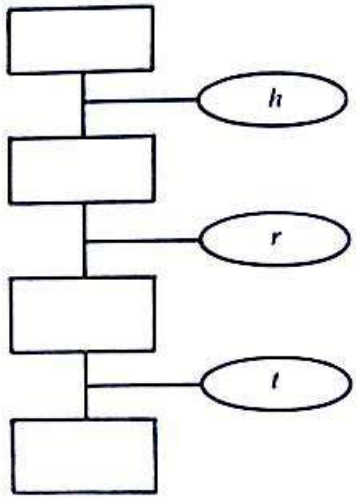
Trouver la similitude directe S associée à la bijection

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto (\sqrt{3}-i)z-1+3i.$$

Vérifier que :

$$f(z)=2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)z+(-1+3i).$$

On a alors :

Schéma de calcul associée à f	Schéma de S
	
$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ $z \longmapsto 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)+(-1+3i)$	h : homothétie de centre O et de rapport 2, r : rotation de centre O et d'angle orienté $\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ t : translation dont le vecteur a pour affixe $(-1+3i)$

Par conséquent :

$$S = t \circ r \circ h.$$

3) Nouvelles caractérisations d'une similitude directe du plan

a) Ensemble des points invariants

Considérons la similitude directe S associée à la transformation f de $\mathbb{C}$ définie par :

$$f(z)=az+b; \quad \text{avec :} \quad a\in\mathbb{C}^* \quad \text{et} \quad b\in\mathbb{C}.$$

Scanned by CamScanner

Soit M un point quelconque du plan, z son affixe.

$$[S(M)=M] \iff [f(z)=z]$$
$$\iff [(1-a)z=b].$$

Si : $a \neq 1$, alors : S admet un unique point invariant Ω d'affixe $\dfrac{b}{1-a}$.

Notons que

si : $a=1$, alors : S est une translation.

Conclusion

Translate

Toute similitude directe qui n'est pas une transformation admet un unique point invariant.

b) **Décomposition canonique d'une similitude directe**

Considérons une similitude directe S de rapport α différent de 1.

On sait qu'il existe une homothétie h_1 de rapport α et une rotation r_1 telle que :

$$S = h_1 \circ r_1.$$

On sait d'autre part que S admet un unique point invariant Ω.

Soit h l'homothétie de centre Ω et de rapport α.

Il existe alors une translation t_1 telle que :

$$h_1 = h \circ t_1$$

d'où : $S = h \circ t_1 \circ r_1$

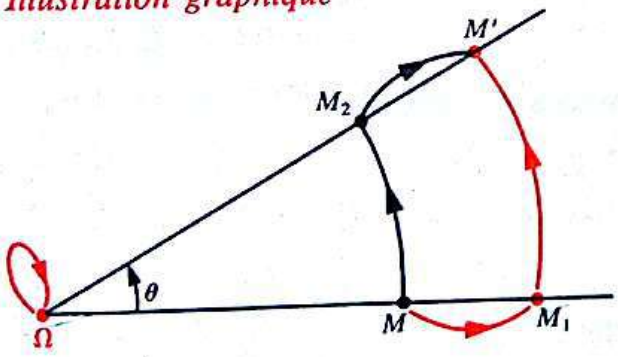
et : $t_1 \circ r_1 = h^{-1} \circ S.$

$(t_1 \circ r_1)$ est une rotation r de centre Ω. (Justifier.)

Par conséquent : $S = h \circ r.$

Montrer que : $S = r \circ h.$

Illustration graphique



Soit θ l'angle orienté de la rotation r.

$$\theta = \text{MES}(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}}).$$

Théorème

Toute similitude directe S de rapport α différent de 1, admet un unique point invariant Ω et on a :

$$S = h \circ r = r \circ h$$

où h est l'homothétie de centre Ω et de rapport α et r une rotation de centre Ω.

Scanned by CamScanner

— Cette décomposition de la similitude S est dite *canonique.*

— Le point Ω est appelé le *centre* de S.

— L'angle orienté $(\widehat{\theta})$ de r est appelé *l'angle orienté* de S.

c) Caractérisation d'une similitude directe

Une similitude directe de rapport α différent de 1 est donc caractérisée par :

son centre Ω
son angle orienté $(\widehat{\theta})$
son rapport α.

θ étant la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{\theta})$, par souci d'alléger le langage, on dira que S est la similitude directe de *centre* Ω, d'*angle orienté* θ et de *rapport* α. S se note aussi : $S_{(\Omega,\,\theta,\,\alpha)}$.

On a alors : $S_{(\Omega,\,\theta,\,\alpha)} = h_{(\Omega,\,\alpha)} \circ r_{(\Omega,\,\theta)} = r_{(\Omega,\,\theta)} \circ h_{(\Omega,\,\alpha)}$.

Remarque

Soit t une translation
r une rotation d'angle orienté θ
h une homothétie de rapport $\alpha\,(|\alpha| \neq 1)$.

On sait que $t \circ r \circ h$ est une similitude directe de rapport $|\alpha|$. Il admet donc un unique point invariant Ω.

On a alors : $t \circ r \circ h = h' \circ r' = r' \circ h'$

où h' est l'homothétie de centre Ω et de rapport $|\alpha|$
r' est la rotation de centre Ω et d'angle orienté θ.

Il en résulte que $t \circ r \circ h$ est la similitude directe

de centre Ω
d'angle orienté θ
de rapport $|\alpha|$.

Nous obtenons un résultat analogue pour toute composée de t, r et h.

Résultats récapitulatifs

Soit S la similitude directe
de centre le point Ω d'affixe ω
d'angle orienté θ
de rapport α.

Soit f la transformation de $\mathbb{C}$ définie par :

$$f(z) = az + b; \quad \text{avec :} \quad a \in \mathbb{C}^*; \quad b \in \mathbb{C}.$$

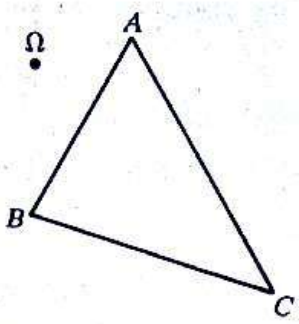
S et f sont associées si et seulement si :

- $f(\omega) = \omega$
- $\theta = \mathrm{ARG}(a)$
- $\alpha = |a|$.

Scanned by CamScanner

Exercices

1) On donne un point Ω et un triangle ABC.
Construire l'image du triangle ABC par la similitude de centre Ω, d'angle orienté $\left(-\frac{\pi}{4}\right)$ et de rapport 2.



2) Trouver le centre, l'angle orienté et le rapport de la similitude directe associée à la bijection :

$$\mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto (1+i)z - i.$$

3) Quelle est la transformation de $\mathbb{C}$ associée à la similitude directe d'angle orienté $\left(-\frac{\pi}{6}\right)$, de rapport 3 et de centre le point Ω d'affixe $(2-3i)$?

d) Autre détermination d'une similitude directe

• **Théorème**

Étant donnés quatre points du plan : A, B, A', B' tels que :

$$A \neq B \quad \text{et} \quad A' \neq B'.$$

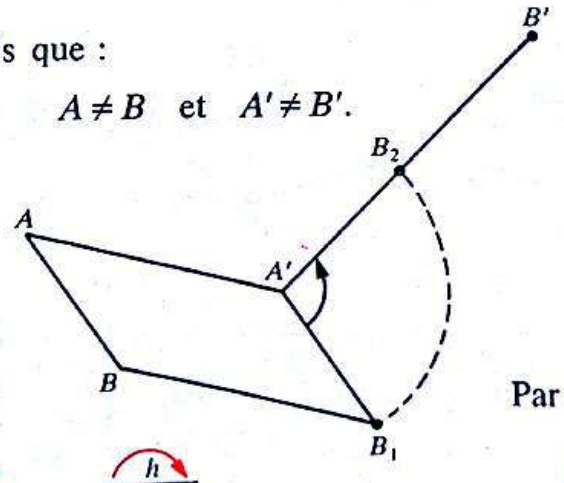
Il existe une unique similitude directe S telle que :

$$A' = S(A) \quad \boxed{\text{et}} \quad B' = S(B).$$

Existence

— Soit A, A', B, B' tels que :

$$A \neq B \quad \text{et} \quad A' \neq B'.$$



On a :

t	
A	A'
B	B_1

r	
A'	A'
B_1	B_2

h	
A'	A'
B_2	B'

Par conséquent :

$h \circ r \circ t$	
A	A'
B	B'

Scanned by CamScanner

On a désigné par :

t : la translation de vecteur $\overrightarrow{AA'}$

r : la rotation de centre A' et d'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$

h : l'homothétie de centre A' et de rapport $\frac{A'B'}{AB}$.

— La transformation $horot$ est une similitude directe de rapport $\frac{A'B'}{AB}$ qui applique A sur A' et B sur B'.

Unicité

— Si : $A'B' = AB$, alors : $horot$ est une isométrie,
et nous savons qu'une isométrie est déterminée par deux points distincts et leurs images.

— Si : $A'B' \neq AB$, alors : la similitude directe $horot$ admet un unique point invariant Ω (Justifier.)

$horot$ est donc la similitude directe

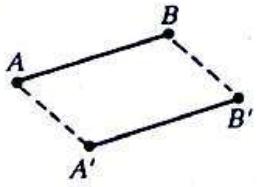
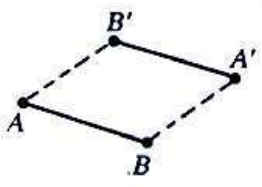
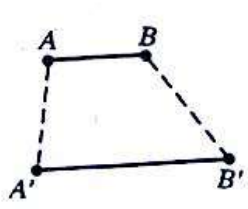
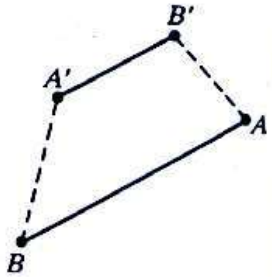
de centre Ω
d'angle orienté $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'})$
de rapport $\frac{A'B'}{AB}$.

• Il en résulte que :

Une similitude directe est déterminée par la donnée de deux points distincts et leurs images.

Activités

1) Caractériser la similitude directe qui applique A sur A' et B sur B' dans les cas particuliers ci-dessous (construire éventuellement le centre de cette similitude).

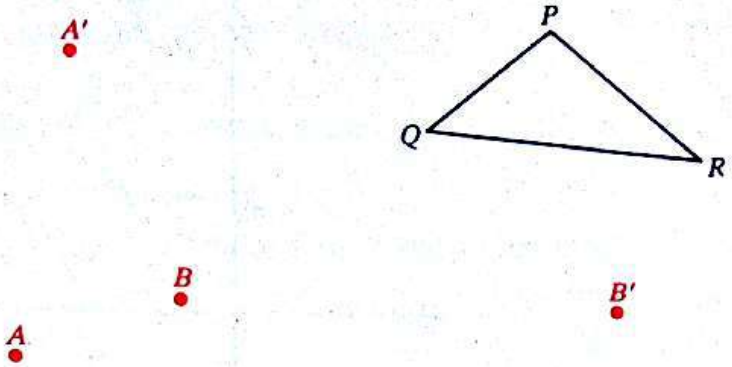
			
$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{A'B'} = -\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{A'B'} = 2\overrightarrow{AB}$	$\overrightarrow{A'B'} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

2) Soit A, B, A', B' quatre points tels que :

$$A \neq B \quad \boxed{\text{et}} \quad A' \neq B'.$$

Scanned by CamScanner

Considérons la similitude directe S qui applique A sur A' et B sur B'. Construire l'image par S du triangle PQR dans le cas de la figure ci-dessous.



Exemple

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J) on donne les points : A, B, A', B', d'affixes respectives : $-2-i$; $2i$; $2-2i$; $1+3i$.

Quels sont le centre, l'angle orienté et le rapport de la similitude S qui applique :

$$A \text{ sur } A' \boxed{\text{et}} B \text{ sur } B' ?$$

• Soit f la transformation de $\mathbb{C}$ associée à S.

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto az+b; \text{ avec : } (a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}. \end{aligned}$$

On a alors :

S	
A	A'
B	B'

ce qui se traduit par : $\begin{cases} f(-2-i)=2-2i \\ f(2i)=1+3i; \end{cases}$

c'est-à-dire par : $\begin{cases} (-2-i)\,a+b=2-2i \\ 2ia+b=1+3i. \end{cases}$

On en déduit :

$$a=1+i \quad \boxed{\text{et}} \quad b=3+i$$

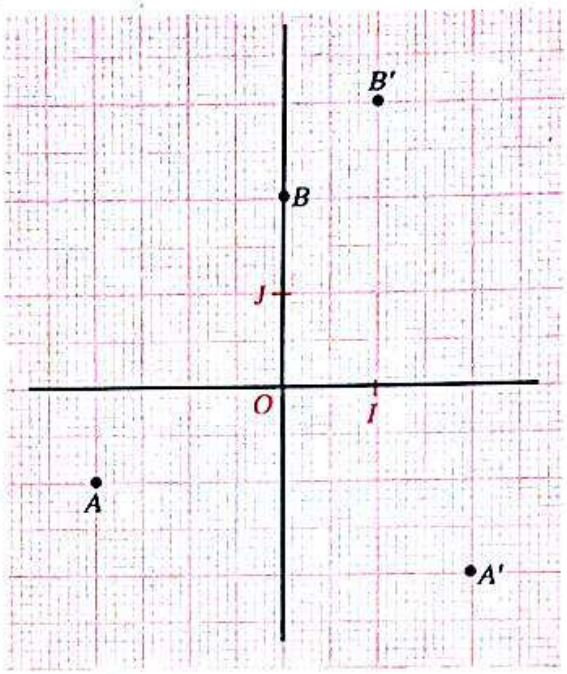
d'où :

$$f(z)=(1+i)\,z+3+i.$$

• Trouver le centre, l'angle orienté et le rapport de la similitude S en utilisant la bijection f.

Scanned by CamScanner

• Vérifier sur le dessin, les résultats obtenus.



4) Les similitudes indirectes du plan

a) Rappels

Toute composée d'une homothétie de rapport α et d'un retournement est une *similitude indirecte* de rapport $|\alpha|$.

Décomposition d'une similitude indirecte de rapport différent de 1.

Toute similitude indirecte de rapport α différent de 1 est une composée d'une symétrie orthogonale et d'une homothétie de rapport α.

b) Similitude indirecte et transformation de $\mathbb{C}$

On montre que :

Toute similitude indirecte de rapport α est une composée d'une similitude directe de rapport α et de la symétrie orthogonale d'axe (OI).

Soit S' une similitude indirecte de rapport α définie par :

$$S' = S \circ s$$

où s est la symétrie orthogonale d'axe (OI).
S une similitude directe de rapport α.

Soit $\bar{c}$ et f les transformations de $\mathbb{C}$ respectivement associées à s et à S

$$\bar{c} : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}; \quad z \longmapsto \bar{z} \qquad f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \longrightarrow az + b; \text{ avec : } |a| = \alpha.$$

Scanned by CamScanner

La transformation de $\mathbb{C}$ associée à S' est donc la bijection f' définie par :

$$f' = f \circ \bar{c}$$

c'est-à-dire par : $f'(z) = a\bar{z} + b.$

Conclusion

La transformation de $\mathbb{C}$ associée à une similitude indirecte de rapport α est du type :

$$\begin{aligned} \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto a\bar{z} + b; \quad \text{avec :} \quad |a| = \alpha. \end{aligned}$$

Réciproque

on montre que :

a étant un nombre complexe non nul, et b un nombre complexe quelconque. La transformation f' de $\mathbb{C}$ définie par :

$$f'(z) = a\bar{z} + b$$

est associée à une similitude indirecte de rapport $|a|$.

Exemple

Trouver la similitude indirecte S' associée à la bijection

$$\begin{aligned} f' : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto (1+i)\bar{z} + 1 - i. \end{aligned}$$

On a : $$1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right).$$

Soit : $$\begin{aligned} f : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto (1+i)z + 1 - i \end{aligned} \quad ; \quad \begin{aligned} \bar{c} : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ z &\longmapsto \bar{z}. \end{aligned}$$

f est la transformation de $\mathbb{C}$ associée à la similitude directe S

de rapport : $\sqrt{2}$

d'angle orienté : $\frac{\pi}{4}$

de centre : le point Ω d'affixe ω tel que :

$$f(\omega) = \omega.$$

Vérifier que : $$\omega = 1 + i.$$

$\bar{c}$ est la transformation de $\mathbb{C}$ associée à la symétrie orthogonale s d'axe (OI).

Par conséquent : $S' = S \circ s.$

5) Représentation analytique d'une similitude

• M et M' étant deux points du plan $\mathcal{P}$, désignons respectivement par (x, y) et (x', y') leurs couples de coordonnées.

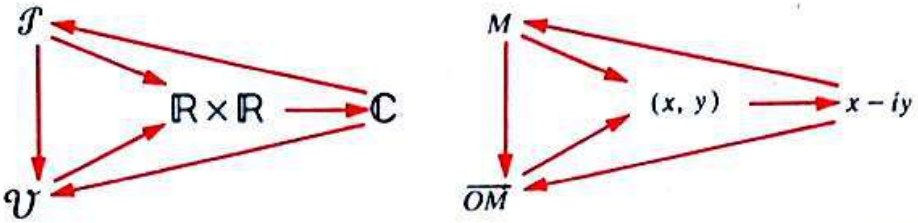
Scanned by CamScanner

Considérons l'application $F : \mathcal{P} \longrightarrow \mathcal{P}$, $M \longmapsto M'$

$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $x+iy \longmapsto x'+iy'$ est l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ associée à F

$\varphi : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\times\mathbb{R}$, $(x, y) \longmapsto (x', y')$ est la représentation analytique de F.

• Rappelons que les six applications ci-dessous :



où (x, y) est le couple de coordonnées du point M (et du vecteur $\overrightarrow{OM}$), sont des bijections.

a) Ces bijections permettent de trouver, pour chaque transformation du plan $\mathcal{P}$, sa représentation analytique φ, à partir de la transformation f de $\mathbb{C}$ associée à F.

Exemple : Représentation analytique d'une rotation r de centre O et d'angle orienté θ.

Soit | M et M' deux points quelconques du plan,
(x, y) et (x', y') leurs couples de coordonnées respectifs.

$$[M' = r(M)] \iff [x' + iy' = (\cos\theta + i\sin\theta)(x + iy)]$$

il en résulte que :

La représentation analytique de la rotation de centre O et d'angle orienté θ est la bijection

$$\varphi : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\times\mathbb{R}, \quad (x, y) \longmapsto (x', y')$$

telle que : $\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$

Exercice

Soit r la rotation d'angle orienté $\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ et de centre le point d'affixe $2(1-i)$.

— Trouver la transformation de $\mathbb{C}$ associée à r.

— En déduire la représentation analytique de r.

b) Les bijections précédentes montrent d'autre part qu'on peut résoudre certains problèmes de géométrie du plan en utilisant :

ou
- l'espace vectoriel $(\mathcal{V}, +, \cdot)$
- l'ensemble $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$
- l'ensemble $\mathbb{C}$
- les propriétés géométriques du plan $\mathcal{P}$.

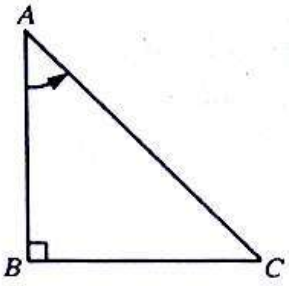
Scanned by CamScanner

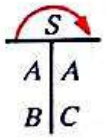
On prendra soin, pour chaque problème, de choisir l'outil le mieux adapté. Aussi, il n'est pas conseillé d'utiliser systématiquement les nombres complexes pour étudier une similitude plane.

Exemple

On donne un triangle ABC, isocèle, rectangle en B et tel que le triplet (A, B, C) soit direct.
Caractériser par son centre, son angle et son rapport la similitude S qui applique :

A sur A et B sur C.





Les propriétés géométriques du triangle rectangle isocèle donnent :

$$AC = AB\sqrt{2} \text{ et } \text{MES}\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) = \frac{\pi}{4}.$$

S est donc la similitude de centre A, d'angle orienté $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\sqrt{2}$.

4) Exemples d'utilisation des similitudes dans des activités géométriques

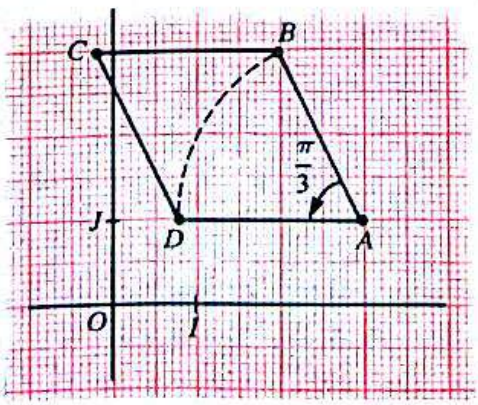
1) Utiliser les similitudes pour construire une figure

Exemple

On donne les points A et B d'affixes respectives $(3+i)$ et $(2+3i)$.
On considère le losange $ABCD$ dont les sommets C et D vérifient :

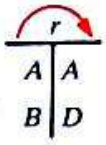
$$\text{MES}\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

— Construire $ABCD$.
— Trouver les coordonnées des sommets C et D.
— Vérifier sur le dessin les résultats trouvés.



Scanned by CamScanner

Soit r la rotation de centre A et d'angle orienté $\frac{\pi}{3}$.



Montrer que la transformation f de $\mathbb{C}$ associée à la rotation r est définie par :

$$f(z)=\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})z+\frac{1}{2}(3+\sqrt{3})+i(1-3\sqrt{3}).$$

Le point D a donc pour affixe $f(2+3i)$.

En déduire les coordonnées du point D.

Puisque : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$.

Trouver les coordonnées de C.

2) Utiliser les similitudes pour démontrer une propriété

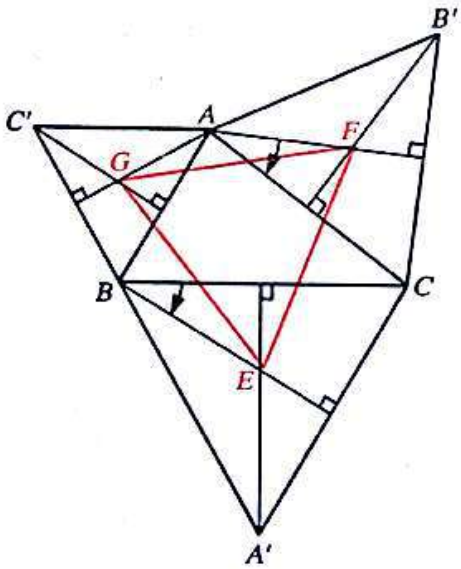
Exemple

On donne un triangle ABC.

Soit A', B', C' les points du plan $\mathcal{P}$ tels que les triangles $A'BC$, $B'CA$ et $C'AB$ soient équilatéraux, les triplets (A', B, C), (B', C, A) et (C', A, B) étant de sens contraire au triplet (A, B, C).

Soit E, F, G les centres de gravité respectifs des triangles $A'BC$, $B'CA$ et $C'AB$.

Montrer que le triangle EFG est équilatéral.



— Le plan étant orienté, supposons le triplet (A, B, C) direct.

Soit S la similitude directe qui applique :

A sur A et F sur C.

Scanned by CamScanner

Soit S' la similitude directe qui applique :

B sur B et C sur E.

— Montrer que :

S est la similitude directe
de centre A
de rapport $\sqrt{3}$
d'angle orienté $\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

S' est la similitude directe
de centre B
de rapport $\frac{1}{\sqrt{3}}$
d'angle orienté $\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

— On a alors :

S	
A	A
F	C
G	C'

S'	
B	B
C	E
C'	G

$S' \circ S$	
F	E
G	G

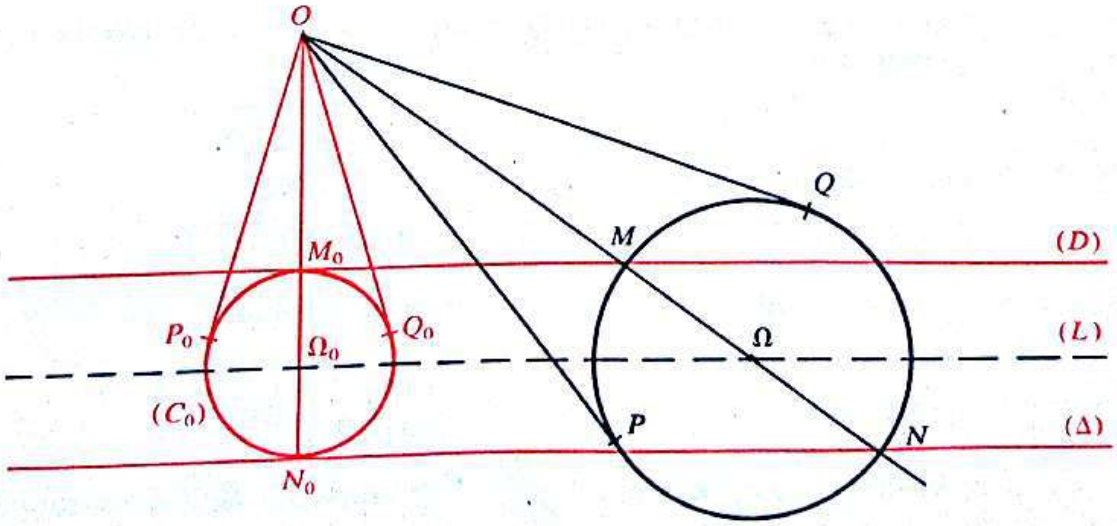
$S' \circ S$ est donc une rotation de centre G et d'angle orienté $-\frac{\pi}{3}$.

3) Utiliser les similitudes pour rechercher un ensemble de points

Exemple

On donne deux droites parallèles (D) et (Δ) et un point O extérieur à la bande de bords (D) et (Δ).
Soit M un point quelconque de (D). La droite (OM) coupe (Δ) en N. Soit (C) le cercle de diamètre $[MN]$, P et Q les points de contact des tangentes à (C) issues de O.

Trouver l'ensemble décrit par chacun des points P et Q, lorsque le point M décrit la droite (D).



Scanned by CamScanner

Désignons respectivement par M_0 et N_0 les projetés orthogonaux du point O sur les droites (D) et (Δ).

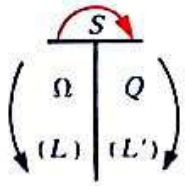
Soit Ω le centre du cercle (C),

(C_0) le cercle de diamètre $[M_0N_0]$,

P_0 et Q_0 les points de contact des tangentes à (C) issues de O et tels que (O, P_0, Q_0) et (O, P, Q) soient des triplets de même sens.

Objectif : Montrer que le point Q est l'image du point Ω par une similitude S.

On pourra alors conclure que, lorsque Ω décrit l'axe médian (L) des droites parallèles (D) et (Δ), Q, son image, décrit l'image (L') de cette droite.



Pour construire l'ensemble (L') recherché, il suffira de construire l'image de la droite (L) par la similitude S.

Démonstration

• L'axe médian (L) des droites parallèles (D) et (Δ) est l'ensemble des centres des cercles considérés.

(Justifier).

Nous avons : $(D)//(L)//(\Delta)$.

• D'après Thalès : $$\frac{O\Omega_0}{\Omega_0N_0}=\frac{O\Omega}{\Omega N}$$

ou : $$\frac{O\Omega_0}{O\Omega}=\frac{\Omega_0N_0}{\Omega N}.$$

Or : $$\Omega_0N_0=\Omega_0Q_0 \quad \text{et} \quad \Omega N=\Omega Q.$$

Donc : $$\frac{O\Omega_0}{O\Omega}=\frac{\Omega_0Q_0}{\Omega Q}.$$

Les triangles $O\Omega_0Q_0$ et $O\Omega Q$, étant rectangles respectivement en Q_0 et en Q, on montre que : $$\frac{O\Omega_0}{O\Omega}=\frac{\Omega_0Q_0}{\Omega Q}=\frac{OQ_0}{OQ}.$$

On en déduit que ces triangles sont semblables.

— Dès lors : $$\widehat{(O\Omega, OQ)}=\widehat{(O\Omega_0, OQ_0)}$$

c'est-à-dire que, l'angle $\widehat{(O\Omega, OQ)}$ reste constant.
Soit $(\widehat{a})$ cet angle.

— De plus : $$\frac{OQ}{O\Omega}=\frac{OQ_0}{O\Omega_0}.$$

c'est-à-dire que, le rapport $\frac{OQ}{O\Omega}$ reste constant. Soit k ce rapport.

Scanned by CamScanner

• Ainsi lorsque le point M décrit la droite (D) :
Q est l'image de Ω par la similitude directe S de centre O de rapport k tels que :

$$k = \frac{OQ_0}{O\Omega_0}$$

et d'angle orienté $(\widehat{a})$ tel que :

$$(\widehat{a}) = (\widehat{O\Omega_0, OQ_0}).$$

Lorsque Ω décrit l'axe médian (L), Q décrit l'image (L') par S de l'axe médian. (Toute similitude directe étant bijective, à chaque point Ω de (L) correspond un point Q de (L') et à chaque point Q de (L') correspond un point Ω de (L).

Scanned by CamScanner

Exercices

1 (2). Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Quelle est la transformation F du plan associée à la bijection

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto z + 2 - 3i.$$

Quelle est l'image par F de la droite d'équation :

$$y = x + 1.$$

2 (2). Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Quelle est la transformation f de $\mathbb{C}$ associée à la translation de vecteur $\vec{IJ}$.

3 (2). Le plan est muni d'un repère orthonormé direct.
Soit $A(1-2i)$ et $B(2+3i)$, deux points du plan.
Quelle est la translation t qui applique A sur B.
Quelle est la transformation de $\mathbb{C}$ associée à t?

4 (2). Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Quelle est la transformation F du plan associée à la bijection

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$$
$$z \longmapsto \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3})z.$$

Quelle est l'image par F de la droite (OJ)?

5 (2). Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Quelle est la transformation f de $\mathbb{C}$ associée à la rotation de centre O et l'angle orienté $-\frac{\pi}{6}$?

6 (2). Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J).
Soit $A(1+i)$ et $B(-1+i\sqrt{3})$ deux points du plan.

1) Existe-t-il une rotation de centre O qui applique A sur B?

2) *a*) Vérifier que les points O, A, B ne sont pas alignés.

b) Quels sont le rapport et l'angle orienté de la similitude directe S de centre O qui applique A sur B.

c) Quelle est la transformation de $\mathbb{C}$ associée à S?

7 (2). Le plan est muni d'un repère othonormé direct.
On considère trois points A, B, C d'affixes respectives a, b, c.
On désigne par j le nombre complexe

$$\cos\frac{2\pi}{3} + i \sin\frac{2\pi}{3}.$$

1) Vérifier que : $J^3 = 1$ et $1 + J + J^2 = 0$.

2) Montrer que :

a) ABC est un triangle équilatéral avec (A, B, C) direct si et seulement si :

$$a + bj + cj^2 = 0.$$

b) ABC est un triangle équilatéral avec (A, B, C) indirect si et seulement si :

$$a + bj^2 + cj = 0.$$

(D'après Baccalauréat)

8 (2). Le plan est orienté.
On considère le triangle ABC tel que le triplet (A, B, C) soit direct. On désigne par B' l'image de B par la rotation de centre A et d'angle orienté $-\frac{\pi}{2}$ et par C' l'image de C par la rotation de centre A et d'angle orienté $\frac{\pi}{2}$.
Soit M le milieu de $[BC]$.
Le but de l'exercice est de montrer que les droites (AM) et $(B'C')$ sont perpendiculaires et que :

$$B'C' = 2AM.$$

1) *Méthode géométrique*

a) Soit h l'homothétie de centre B et de rapport 2.
Trouver les images par h des points A et M.
Trouver une rotation r telle que $r \circ h$ applique :

A sur B' et M sur C'.

b) En déduire que les droites (AM) et $(B'C')$ sont perpendiculaires et que :

$$B'C' = 2AM.$$

2) *Utilisation des nombres complexes*
Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct d'origine A dans lequel B et C ont pour affixes respectives b et c.

a) Quelle sont les affixes m, b', c' des points M, B' et C'?

b) Retrouver alors les résultats du 1) *b*).

9 (3). Le plan est orienté :
On donne un cercle (C) de centre O et quatre points A, B, C, D sur (C).
Soit A', B', C', D' les images respectives de A, B, C, D par la rotation de centre O et d'angle orienté $\frac{\pi}{2}$.

Scanned by CamScanner

On désigne par M, N, P, Q les milieux respectifs des segments

$[AB']$, $[CB']$, $[DC']$ et $[AD']$.

1) Montrer que :

$$MP = NQ \quad \text{et} \quad (MP) \perp (NQ).$$

2) On désigne par R, T, U, V, les milieux respectifs des segments

$[MN]$, $[NP]$, $[PQ]$ et $[QM]$.

Quel est la nature du quadrilatère $RTUV$?

10 (3). Le plan est muni d'un repère orthonormé direct.
On considère les points A et B d'affixes respectives :

$$1+2i \quad \text{et} \quad 4+5i.$$

1) Construire le triangle isocèle ABC tel que (A, B, C) soit un triplet direct et ayant pour angle à la base $\frac{\pi}{6}$.

Donner une valeur approchée des coordonnées de C.

2) Trouver par le calcul les coordonnées de C. Comparer ce résultat à celui trouvé à la question 1).

11 (3). Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J).
On considère la similitude directe S de centre $\Omega(2; -1)$, d'angle orienté $\frac{\pi}{3}$ et de rapport 3.

1) Construire les images O', I', A' par S, respectivement des points O, I et $A(-2; 1)$.
Donner une valeur approchée de chacune des coordonnées des points O', I' et A'.

2) Trouver la représentation analytique de S. En déduire les coordonnées des points O', I' et A'. Comparer ces résultats avec ceux obtenus dans la question 1).

2) Le plan étant muni d'un repère orthonormé direct, on considère les points M_0, M_1, M_2 d'affixes respectives z_0, z_1, z_2.

— Donner l'angle orienté et le rapport de la similitude directe de centre M_0 qui applique M_1 sur M_2.

— Soit (C) l'ensemble des points M du plan, centres des similitudes directes de rapport $\sqrt{2}$ qui appliquent M_1 sur M_2.

— Trouver une équation de (C) et la construire.

12 (4). Le plan $\mathcal{P}$ est orienté.
On donne deux droites parallèles (D) et (Δ) et un point O extérieur à la bande de bord (D) et (Δ).

Soit M un point quelconque de (D). La droite (OM) coupe (Δ) en N.
On place les points P et Q sur la droite passant par M et perpendiculaire à (AM), tels que :

$$MP = MQ = AN.$$

Trouver l'ensemble décrit par chacun des points P et Q, lorsque le point M décrit la droite (D).
(Voir exemple d'utilisation des similitudes pour rechercher un ensemble de points p. 133.)

13 (4). 1) Soit u le nombre complexe de module 1 et d'argument principal $\frac{\pi}{3}$.

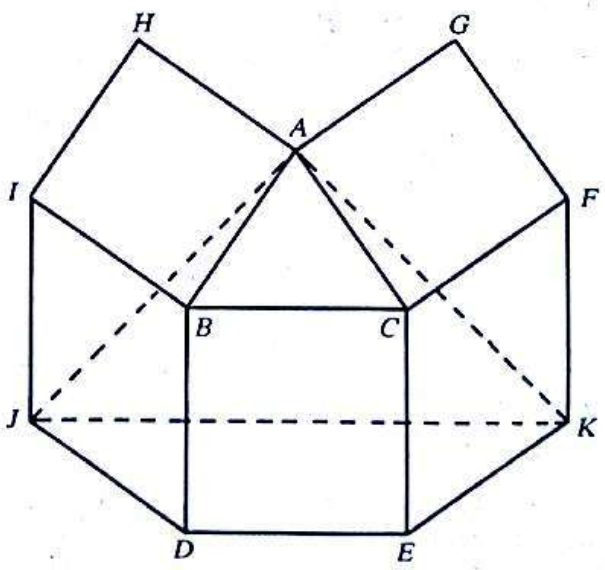
Montrer que u est une racine cubique de -1.
En déduire que :

$$u^2 - u + 1 = 0.$$

2) Le plan $\mathcal{P}$ étant orienté, on considère un triangle ABC tel que le triplet (A, B, C) soit direct.
On construit les triangles équilatéraux AEB et ACF tels que les triplets (A, E, B) et (A, C, F) soient de sens direct.
Montrer que :

$$BF = CE \quad \text{et} \quad MES(\widehat{\overrightarrow{BF}, \overrightarrow{CE}}) = \frac{2\pi}{3}.$$

14 (4). Le plan $\mathcal{P}$ est orienté.
On donne un triangle ABC tel que le triplet (A, B, C) soit direct.
Soit $CBDE$, $ACFG$, $BAHI$ trois carrés tels que les triplets (C, B, D), (A, C, F) et (B, A, H) soient directs.
Soit $DBIJ$ et $CEKF$ deux parallélogrammes tels que les triplets (D, B, I) et (C, E, K) soient directs.
Montrer que le triangle AJK est isocèle et rectangle en A.



Scanned by CamScanner

5 Les coniques

Leçon 1 : L'ELLIPSE

Leçon 2 : L'HYPERBOLE

Leçon 3 : LA PARABOLE

Appolonius de Perga (environ de -250 à -170 de notre ère) obtint, en étudiant l'intersection d'un cône à deux nappes et à base circulaire, avec un plan (P), différentes courbes représentées sur le dessin suivant.

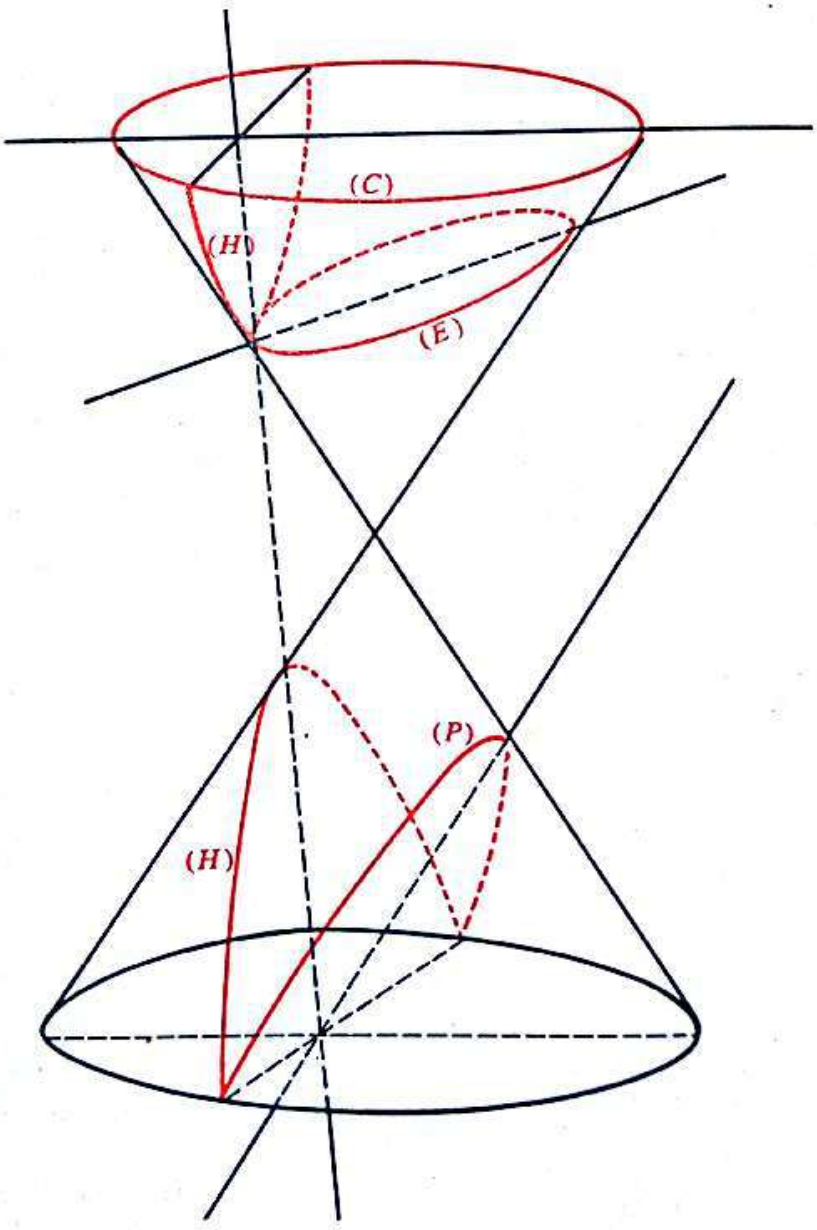
Observer ce dessin et donner la position relative du cône et du plan (P) qui a permis d'obtenir :

— le cercle (C),

— l'ellipse (E),

— l'hyperbole (H),

— la parabole (P).



Scanned by CamScanner

1 L'ellipse

1) Étude géométrique

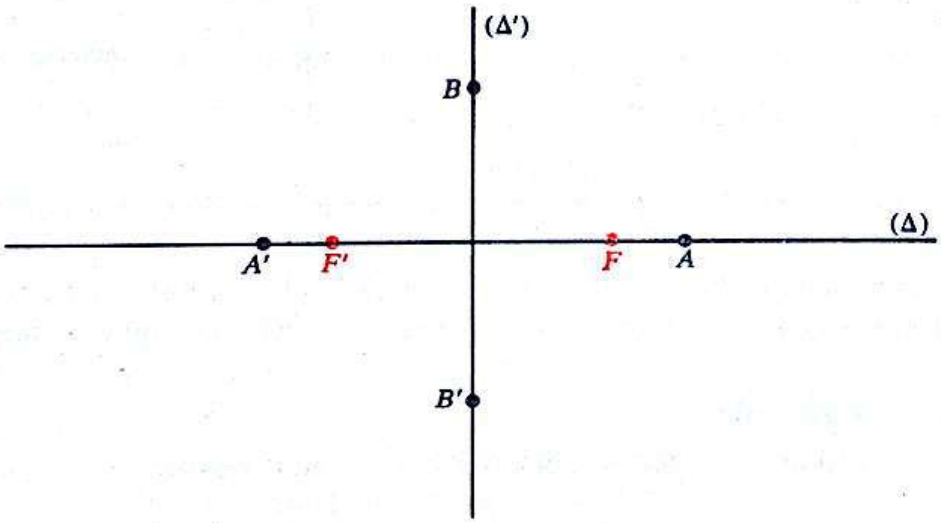
a) Exemple introductif

Soit F et F' deux points du plan $\mathcal{P}$ tels que :

$$FF' = 4.$$

Rechercher l'ensemble (E) des solutions de l'équation :

$$M \in \mathcal{P}, \quad MF + MF' = 6.$$



— Soit P un point de l'ensemble (E) tel que :

$$PF = 3{,}5 \quad \boxed{\text{et}} \quad PF' = 2{,}5.$$

Donner un programme de construction de P.

— Montrer qu'il existe :
deux points A et A' de (E) situés sur la droite (FF'),
deux points B et B' de (E) situés sur la médiatrice (Δ') de $[FF']$.

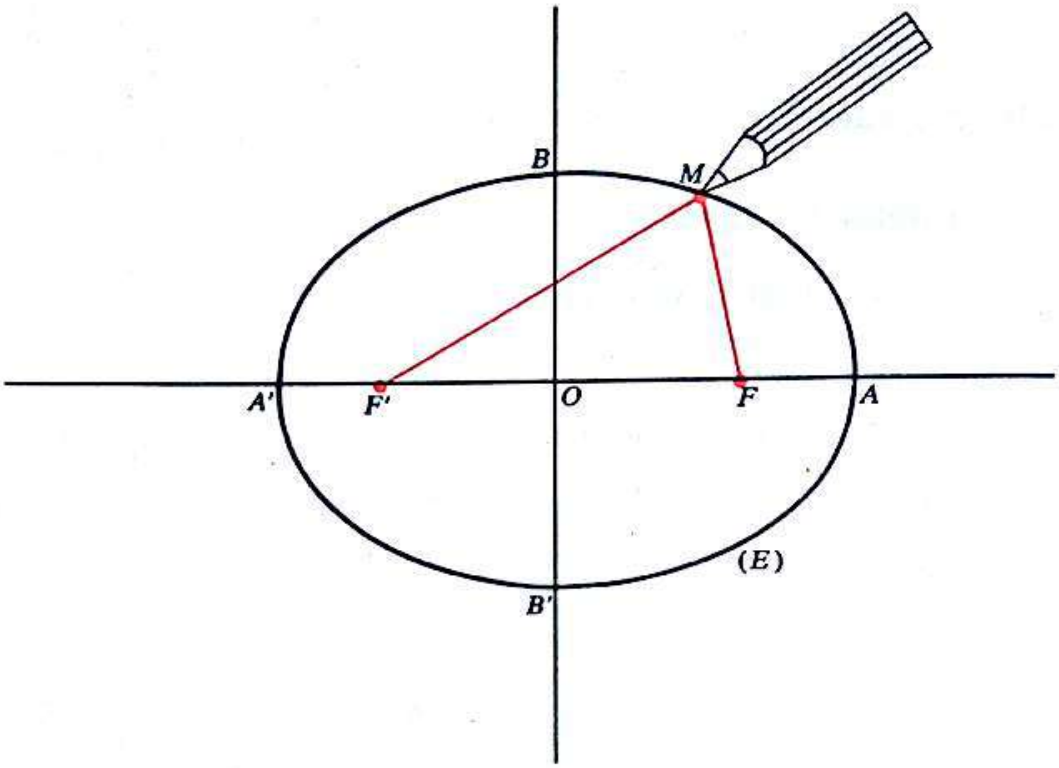
— Calculer les distances :

$$AF; \quad AF'; \quad BF; \quad BF'; \quad AA'; \quad AB.$$

— Montrer que (E) admet deux axes de symétrie et un centre de symétrie.

Scanned by CamScanner

Manipulation : Comment obtenir le dessin de (E)



— Fixons en F et F', à l'aide d'épingles, les deux extrémités d'une ficelle de longueur 6.

Puis à l'aide d'un crayon qui maintient la ficelle tendue, on trace d'un trait continue la courbe (E) (voir figure ci-dessus). Justifier cette manipulation.

b) **Cas général**

Soit a un nombre réel strictement positif,
F et F' deux points du plan.

Rechercher l'ensemble des solutions de l'équation :

(I) $M \in \mathcal{S}$, $MF + MF' = 2a$.

• Notons que dans le cas où les points F et F' sont confondus l'équation (I) devient :

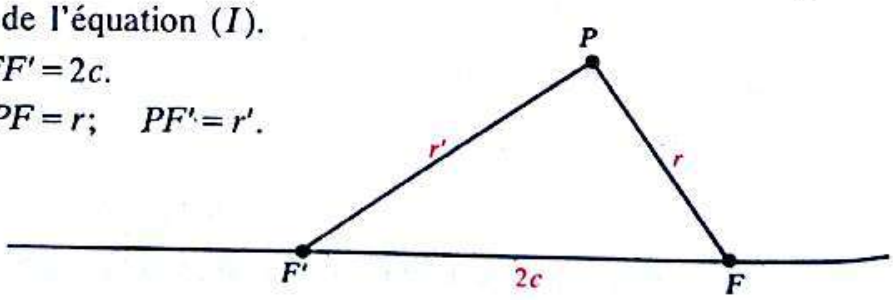
$$M \in \mathcal{S}, \quad MF = a.$$

Elle admet donc pour ensemble de solutions le cercle de centre F et de rayon a.

• Soit P une solution de l'équation (I).

On pose : $FF' = 2c$.

$PF = r$; $PF' = r'$.



Scanned by CamScanner

On a alors :

$$\begin{aligned} |PF - PF'| &\leqslant FF' \leqslant PF + PF' \\ |r - r'| &\leqslant 2c \leqslant 2a \\ |2a - 2r| &\leqslant 2c \leqslant 2a \\ |a - r| &\leqslant c \leqslant a. \end{aligned}$$

car : $r' = 2a - r$

Il en résulte :

— une condition sur a et c :

$$a \geqslant c$$

— une condition sur r et r' :

$$a - c \leqslant r \leqslant a + c \quad \boxed{\text{et}} \quad r' = 2a - r \qquad \text{(justifier).}$$

• Si : $a = c$, alors : $[FF']$ est l'ensemble des solutions de l'équation (I).



$$\forall M \in \mathcal{P} \quad M \in [FF'] \iff [MF + MF' = FF'].$$

• Nous supposons donc dans la suite : $\boxed{a > c.}$

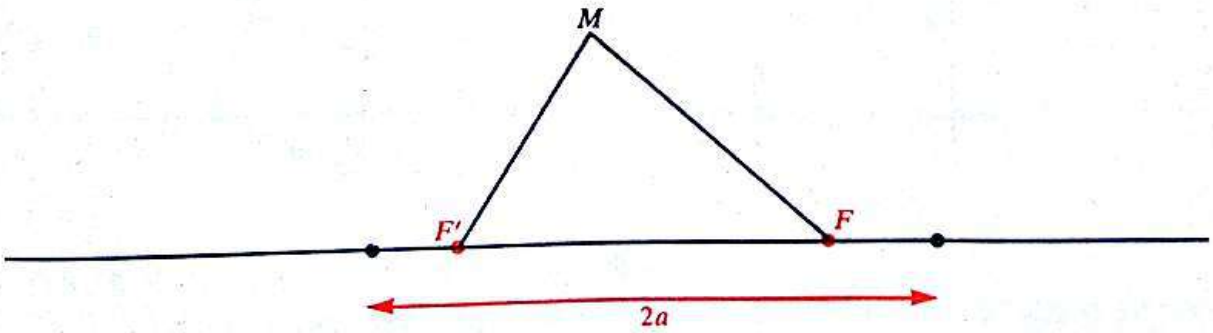
Définition

Soit | a un nombre réel strictement positif,
F et F' deux points du plan tels que :
$$FF' < 2a.$$

L'ensemble (E) des points du plan tels que la somme de leurs distances aux points F et F' ait une valeur constante $2a$ est appelé **ellipse.**

$$\forall M \in \mathcal{P} \quad M \in (E) \iff [MF + MF' = 2a].$$

c) Éléments caractéristiques d'une ellipse



• On considère l'ellipse (E), ensemble des points M du plan tels que :

$$MF + MF' = 2a; \quad \text{avec :} \quad FF' < 2a.$$

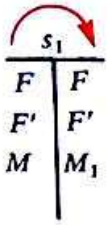
Scanned by CamScanner

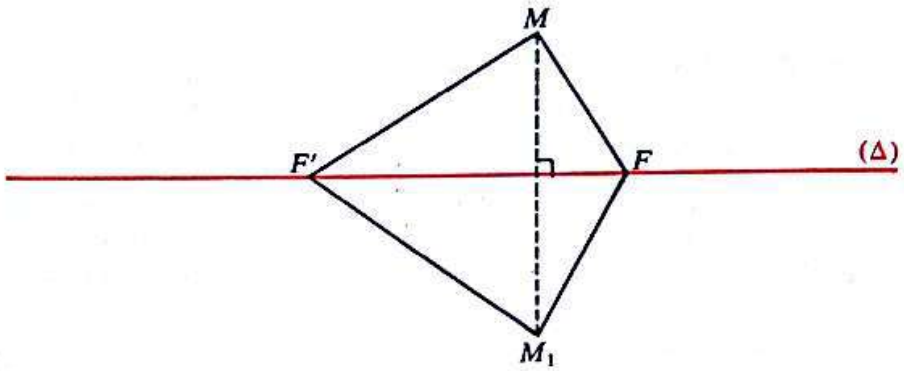
— Les points F et F' sont appelés les *foyers* de (E), FF' est sa *distance focale.*

— Montrons que la droite (FF') est un axe de symétrie de (E). (FF') est appelé *l'axe focal* de (E).

Soit s_1 la symétrie orthogonale d'axe (FF').
Soit M un point quelconque du plan et M_1 son symétrique par rapport à (FF').

On a :

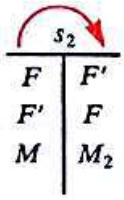


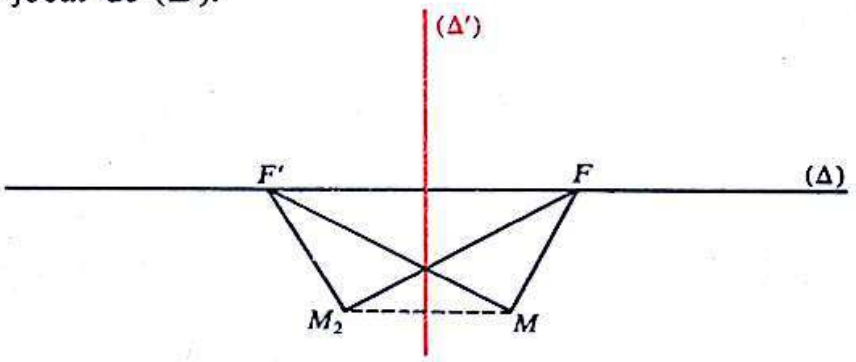


D'où :

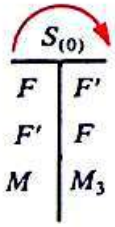
$$[MF + MF' = 2a] \iff [M_1F + M_1F' = 2a]$$
$$M \in (E) \iff M_1 \in (E).$$

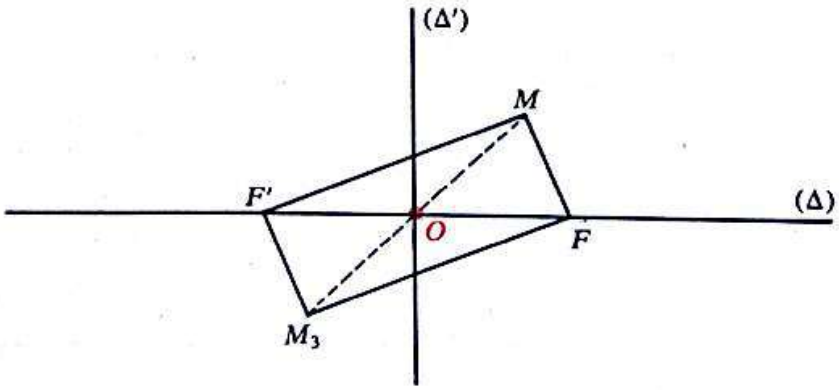
— Montrer que la médiatrice (Δ') de $[FF']$ est un axe de symétrie de (E). (Δ') est appelé *l'axe non focal* de (E).





— On en déduit que le milieu O de $[FF']$ est un centre de symétrie de (E). O est appelé le *centre* de l'ellipse (E).





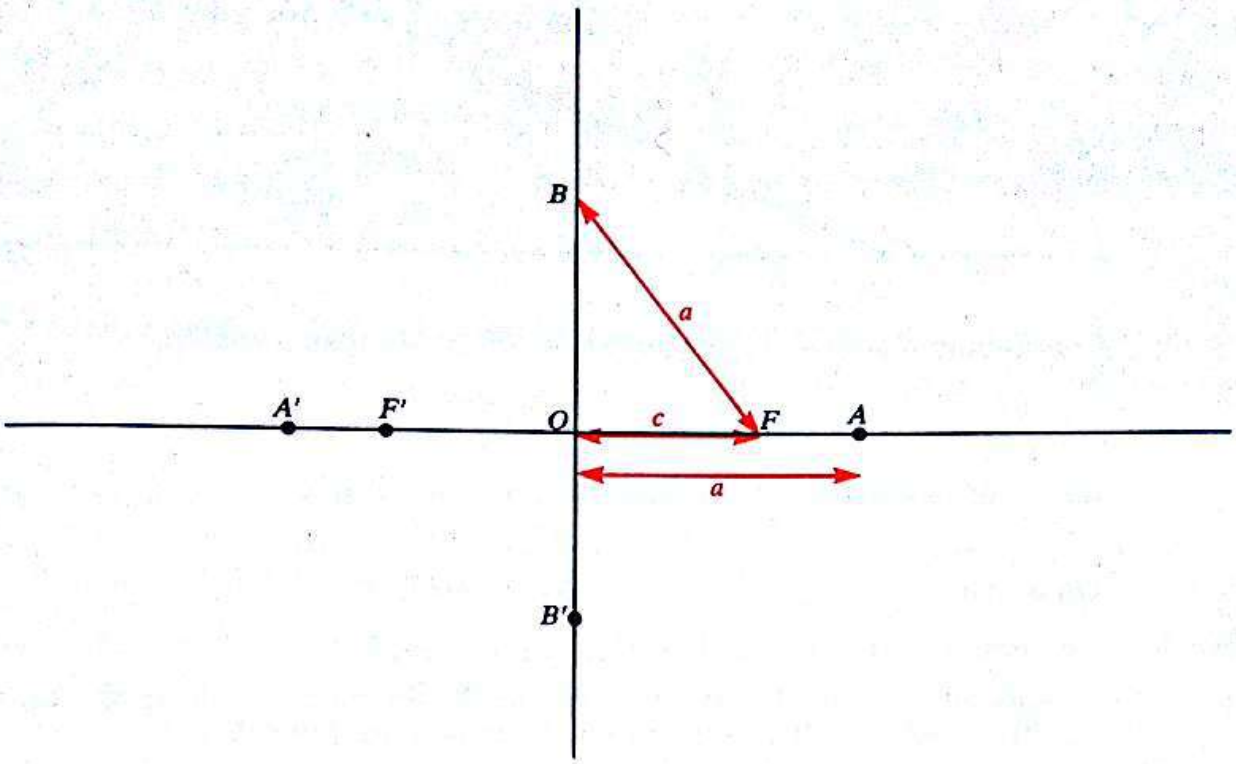
— Montrer que l'ellipse (E) coupe :

l'axe focal (FF') en deux points A et A';

l'axe non focal (Δ') en deux points B et B'.

Scanned by CamScanner

Les points A, A' B, B' sont appelés *les sommets* de (E).



On pose : $OF = c$.

Montrer que :

$$OA = a; \quad BF = a; \quad OB = \sqrt{a^2 - c^2}.$$

On pose : $b^2 = a^2 - c^2$; avec : $b > 0$.

Vérifier que : $AA' > BB'$.

— Il est d'usage d'appeler :

AA' le *grand axe* de (E)
BB' le *petit axe* de (E).

• Une ellipse est entièrement déterminée par ses foyers et son grand axe.

Exercice

On donne deux points F et F' tels que :

$$FF' = 4.$$

Donner tous les éléments caractéristiques de l'ellipse (E) de foyers F, F' et de grand axe 7.

d) **Construction point par point d'une ellipse**

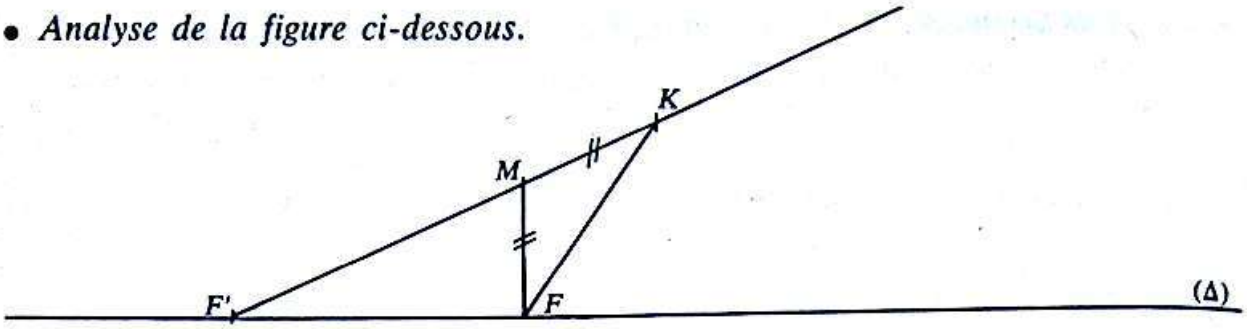
On donne deux points F, F' et un nombre réel strictement positif a tel que :

$$FF' < 2a.$$

On se propose de construire, point par point, l'ellipse (E) de foyer F, F' et de grand axe $2a$.

Scanned by CamScanner

• *Analyse de la figure ci-dessous.*



Considérons l'ellipse (E) de foyers F, F' et de grand axe $2a$.
Soit M un point de (E).

On a : $$MF + MF' = 2a.$$

Sur la demi-droite $[F'M)$ plaçons le point K tel que :

$$F'K = 2a.$$

On a alors : $$MK = MF.$$

Le point M est donc sur la médiatrice de $[FK]$.

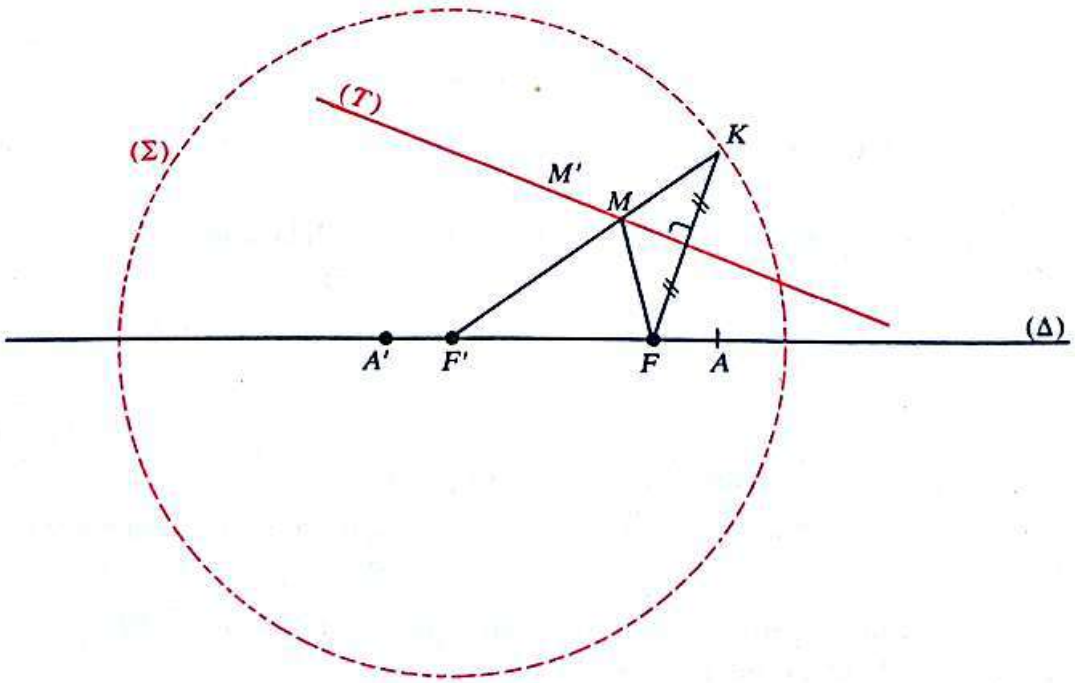
Notons que le point K est sur le cercle (Σ) de centre F' de rayon $2a$. Ce cercle (Σ) est appelé *cercle directeur de* (E) *associé au foyer* F'.

• *Une méthode de construction de l'ellipse* (E)

Considérons (Σ) le cercle directeur de (E) associé à F'.
Soit K un point quelconque du cercle (Σ).
La médiatrice (T) de $[KF]$ coupe la demi-droite $[F'K)$ en un point unique. (Justifier.) Soit M ce point.

Vérifier alors que M est un point de l'ellipse (E); c'est-à-dire que :

$$MF + MF' = 2a.$$



Scanned by CamScanner

Remarque

— Soit M' un point de (T) autre que M.

On a alors :

$$\left.\begin{array}{l} M'F' + M'F = M'F' + M'K \\ M'F' + M'F > F'K \\ M'F' + M'F > 2a \end{array}\right| \quad \text{car : } M'F = M'K \text{ dans le triangle } M'F'K$$

donc : $M' \notin (E)$

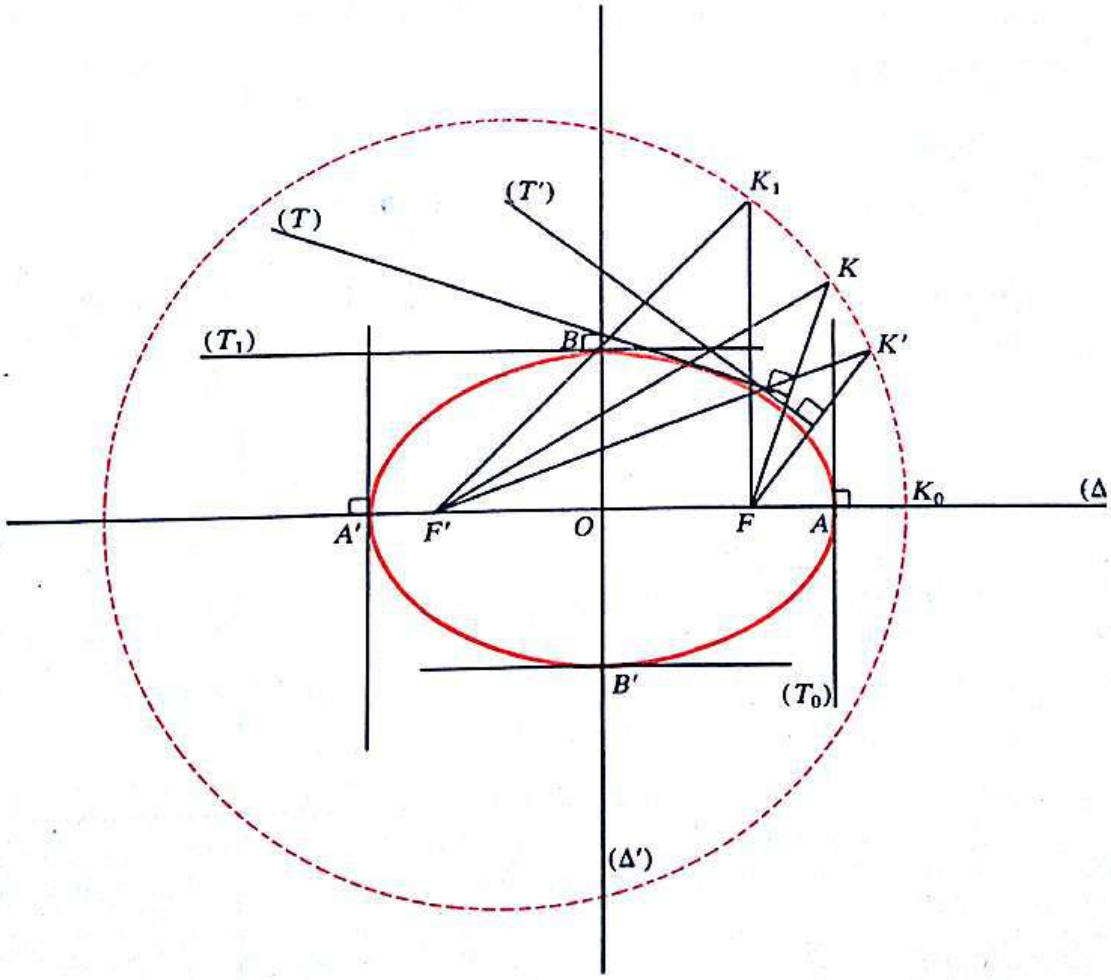
(T) n'a pas de point commun, autre que M, avec (E).

— On verra ultérieurement que (T) est la tangente en M à (E).

• *Tracé de* (E)

— Nous verrons, par une étude analytique, qu'une ellipse est une courbe « fermée » qui admet en chacun de ses points une tangente.

— Cette méthode de construction permet d'obtenir, point par point, le tracé de (E).



Donner une autre méthode de construction d'une ellipse.

Scanned by CamScanner

2) Activité

Image d'une ellipse par une transformation du plan

On donne une ellipse (E) de foyers F, F' et de grand axe $2a$.

Soit | i une isométrie et S une similitude de rapport k,
M une point quelconque de (E).

— On obtient :

$$MF + MF' = 2a \qquad \begin{matrix} F & F_1 \\ F' & F'_1 \\ M & M_1 \end{matrix}\ (i) \qquad M_1F_1 + M_1F'_1 = 2a$$

$$MF + MF' = 2a \qquad \begin{matrix} F & F_2 \\ F' & F'_2 \\ M & M_2 \end{matrix}\ (S) \qquad M_2F_2 + M_2F'_2 = 2ka.$$

— Caractériser $i(E)$ et $S(E)$.

3) Étude analytique

a) Équation d'une ellipse

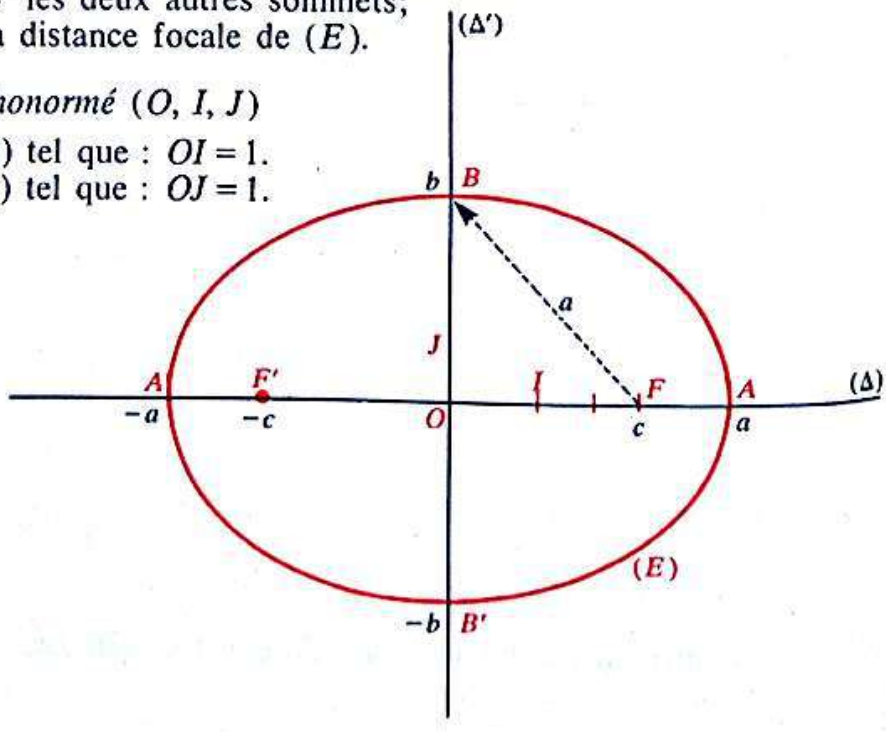
• Soit | a un nombre réel strictement positif;
F et F' deux points du plan tels que : $FF' < 2a$.

On considère l'ellipse (E) de foyers F, F' et de grand axe $2a$.

On désigne par : O le centre de (E);
A, A' les sommets situés sur l'axe focal;
B, B' les deux autres sommets;
$2c$ la distance focale de (E).

Choix d'un repère orthonormé (O, I, J)

I est le point de $[OF)$ tel que : $OI = 1$.
J est le point de $[OB)$ tel que : $OJ = 1$.



Scanned by CamScanner

On obtient alors :

$F(c, 0)$; $F'(-c, 0)$; $A(a, 0)$; $A'(-a, 0)$; $B(0; b)$; $B'(0, -b)$

avec : $b^2 = a^2 - c^2 \quad (b > 0)$.

On sait que pour tout point $M(x, y)$ du plan, on a :

$$\begin{cases} MF'^2 = (x + c)^2 + y^2 \\ MF^2 = (x - c)^2 + y^2 \end{cases}$$

d'où : $MF'^2 - MF^2 = 4cx.$

— Supposons que le point $M(x, y)$ appartienne à (E).

On a alors :

(1) $MF' + MF = 2a.$

D'où : $MF' - MF = \dfrac{2c}{a}\, x$ | car : $\underbrace{(MF' + MF)}_{2a}(MF' - MF) = 4cx.$

Il en résulte que :

Quel que soit le point $M(x, y)$ de (E) :

(2) $$\begin{cases} MF' = a + \dfrac{c}{a}\, x \\ MF = a - \dfrac{c}{a}\, x. \end{cases}$$

En comparant les deux expressions de MF'^2 par exemple, on obtient :

$$(x + c)^2 + y^2 = \left(a + \frac{c}{a}\right)^2$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

D'où :

(3) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$; avec : $b^2 = a^2 - c^2 \quad (b > 0)$.

— Réciproquement, tout point $M(x, y)$ vérifiant (3), vérifie (2) donc (1).

Conclusion

Le plan étant muni du repère orthonormé (O, I, J), l'ellipse (E) de centre O, d'axe focal (OI), de grand axe $2a$ et de distance focale $2c$ a pour équation :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad \text{avec :} \quad b^2 = a^2 - c^2 \quad (b > 0)$$

cette équation est appelée **l'équation réduite** de (E).

Scanned by CamScanner

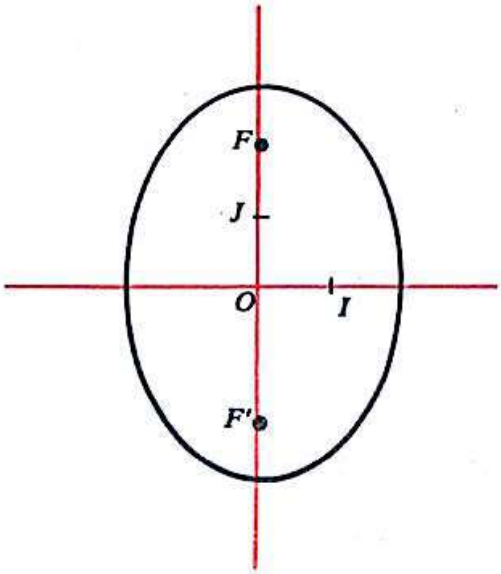
Remarque

Si le repère (O, I, J) avait été choisi tel que :

$$J \in [OF)$$

alors, l'ellipse de centre O, d'axe focal (OJ), de grand axe $2a$ et de distance focale $2c$ aurait eu pour équation réduite :

$$\frac{x^2}{b^2}+\frac{y^2}{a^2}=1; \quad \text{avec :} \quad b^2=a^2-c^2 \quad (b>0).$$



Exercices

1) On donne deux points du plan F et F' tels que :

$$FF'=4.$$

On considère l'ellipse (E) de foyers F, F' et de grand axe 6. Préciser le repère orthonormé choisi et donner l'équation réduite de (E) dans ce repère.

2) Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

a) On considère l'ellipse (E) d'équation réduite :

$$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1.$$

— Préciser les éléments caractéristiques de (E) : foyers, sommets, grand axe, petit axe.

— Construire (E).

b) Mêmes questions pour l'ellipse (E') d'équation réduite :

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1.$$

b) Étude d'une ellipse définie par son équation réduite

• Le plan étant muni d'un repère orthonormé (O, I, J), considérons l'ellipse (E) d'équation réduite :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1; \quad \text{avec :} \quad a>b>0.$$

Scanned by CamScanner

Quel que soit le couple de nombres réels (x, y) on obtient successivement :

$$\left[\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\right] \iff \left[y^2=\frac{b^2}{a^2}(a^2-x^2)\right]$$

$$\iff \left[\left(y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right) \boxed{\text{ou}} \left(y=-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right)\right].$$

Désignons respectivement par (Γ_1) et (Γ_2) les courbes d'équations :

$$y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}; \quad y=-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

(Γ_1) et (Γ_2) sont symétriques par rapport à la droite (OI) et :

$$(\Gamma_1)\cup(\Gamma_2)=(E).$$

• Étude de la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}.$$

— *Montrer que :*

L'ensemble de définition de f est $[-a; a]$.

La fonction f est paire.

La fonction f est continue sur $[-a; a]$; dérivable sur $]-a; a[$ et :

$$\forall x \in]-a; a[, \quad f'(x)=-\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}.$$

La fonction f n'est pas dérivable en a, en effet :

$$\forall x \in]-a, a[\quad \frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\frac{b\sqrt{a^2-x^2}}{a(x-a)}$$

$$=-\frac{b}{a}\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$$

et :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=-\infty.$$

Justifier ces égalités.

Montrer de même que f n'est pas dérivable en $-a$.

— *Tableau de variation*

x	$-a$		0		a
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	‖
$f(x)$	0	↗	b	↘	0

Scanned by CamScanner

— *Tangentes*

La courbe (Γ_1) admet :
une tangente verticale en $A(a, 0)$ et en $A'(-a, 0)$,
une tangente horizontale en $B(0, b)$.

Soit $M_0(x_0, y_0)$ un point de (Γ_1) distinct de A et de A'.

On a : $f'(x_0) = -\frac{b}{a} \times \frac{x_0}{\sqrt{a^2 - x_0^2}}$

$= -\frac{b^2}{a^2} \times \frac{x_0}{y_0}$ | car : $y_0 = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x_0^2}$.

La tangente à (Γ_1) en M_0 a donc pour équation :

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$$

$$y - y_0 = -\frac{b^2}{a^2} \times \frac{x_0}{y_0}(x - x_0).$$

En multipliant chacun des deux membres de cette égalité par $\frac{y_0}{b^2}$ on obtient :

$$\frac{y_0 y}{b^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = -\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{x_0^2}{a^2}$$

d'où : $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = \frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2}$

et : $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$ | car : $\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1$.

La courbe (Γ_1) admet en chacun de ses points $M_0(x_0, y_0)$ distincts de A et A' une tangente d'équation :

$$(1) \quad \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1.$$

Vérifier que :
si : $(x_0, y_0) = (a, 0)$; alors : (1) devient $x = a$;
si : $(x_0, y_0) = (-a, 0)$; alors : (1) devient $x = -a$.

Il en résulte que :

L'ellipse (E) admet en chacun de ses points $M_0(x_0, y_0)$ une tangente d'équation :

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1.$$

Scanned by CamScanner

— *Tracé de la courbe*

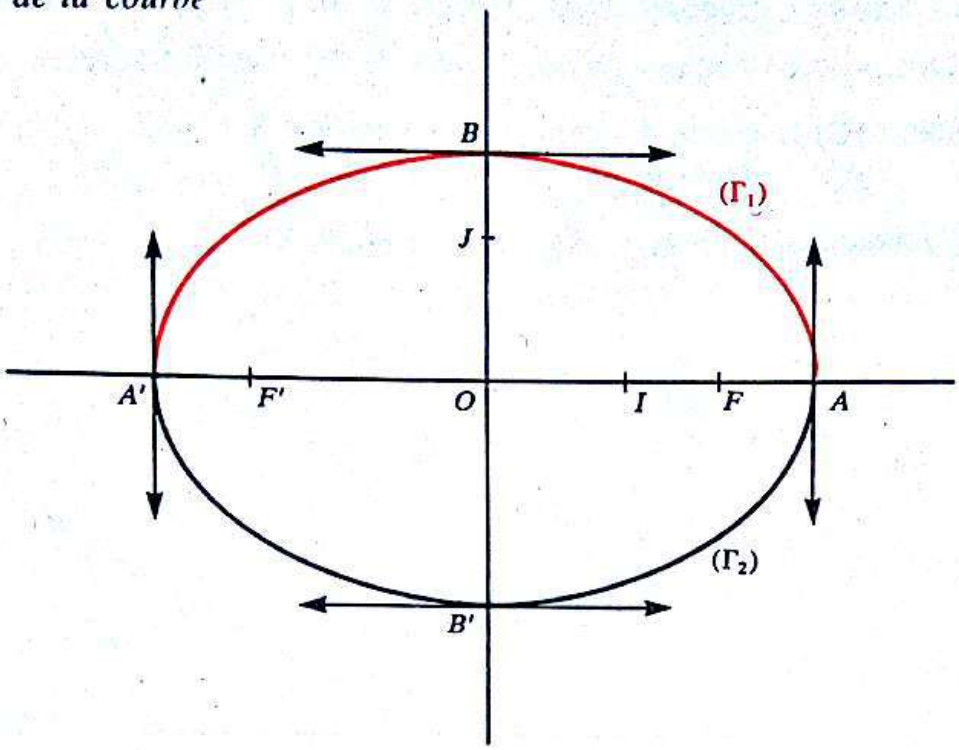
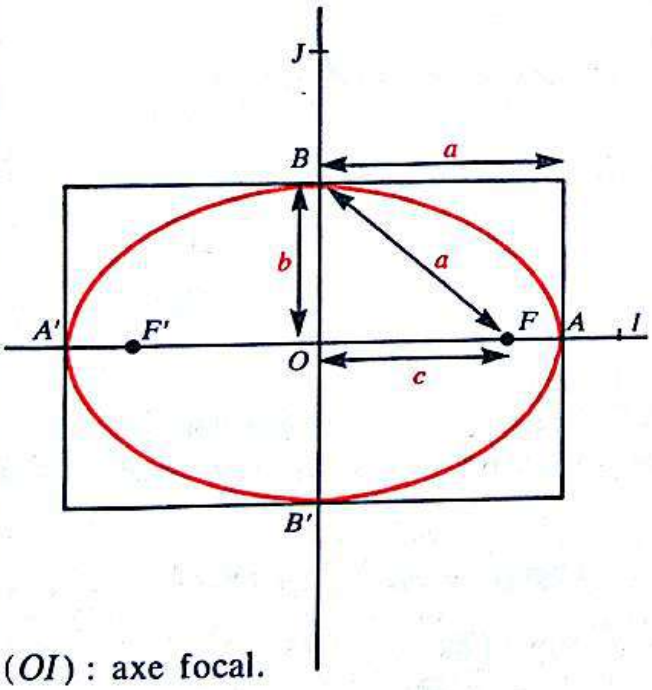


Tableau récapitulatif sur l'ellipse

Éléments caractéristiques de l'ellipse (E)

(O, I, J) est un repère orthonormé



(OI) : axe focal.

$a > c$

$b = \sqrt{a^2 - c^2}$

— Les deux foyers : F et F'
— Les quatre sommets :

A, A', B, B'

— Les deux axes de symétrie :
l'axe focal : (FF')
l'axe non focal : (BB')
— Le centre de symétrie : O
— La distance focale : FF'
— Le grand axe : AA'
— Le petit axe : BB'
— L'équation réduite :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

— Une équation de la tangente à (E) en un point $M_0(x_0, y_0)$:

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

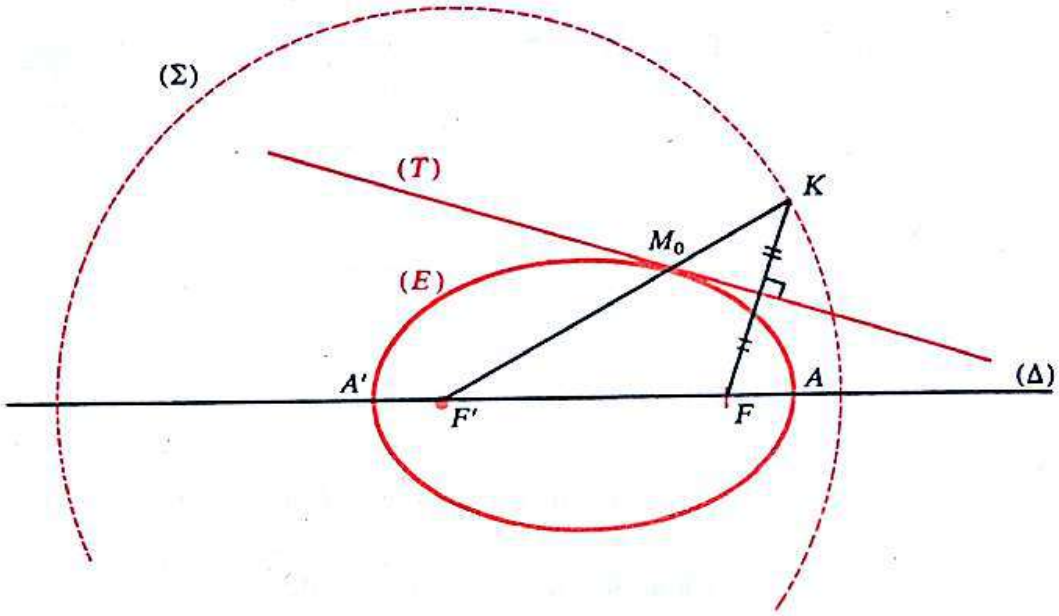
Scanned by CamScanner

c) **Activité :** *Propriété de la tangente en un point, à une ellipse*

On considère l'ellipse (E) de foyers F, F' et de distance focale $2a$.

Soit | (Σ) le cercle directeur de (E) associé à F'
M_0 un point de (E) distinct de A et A'.

La demi-droite $[F'M_0)$ coupe (Σ) au point K.



— Par une étude analytique, on peut montrer que :

la médiatrice (T) de $[FK]$ est la tangente en M_0 à (E)

— En déduire un programme de construction de la tangente en un point, à une ellipse.

4) Régionnement du plan par une ellipse

On considère l'ellipse (E) de foyers F, F' et de grand axe $2a$.

Le plan étant muni du repère orthonormé (O, I, J) (voir page 146) l'ellipse (E) a pour équation réduite :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1; \quad \text{avec :} \quad b^2=a^2-c^2 \quad (b>0)$$

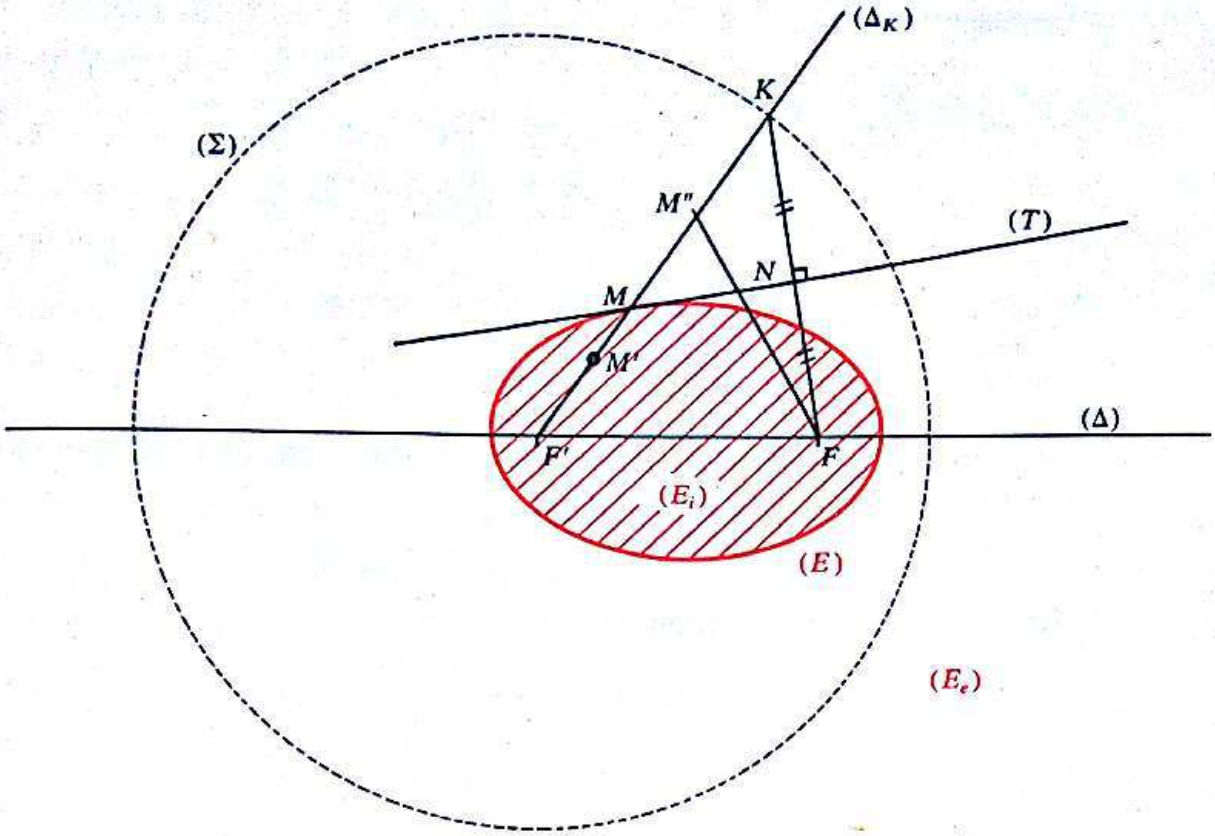
$2c$ étant la distance focale de l'ellipse (E).

L'ellipse (E) partage le plan en deux régions :

— l'une, contenant les foyers F, F' est appelée *intérieur* de (E) et est notée (E_i)

— l'autre, est appelée *extérieure* de (E) et est noté (E_e).

Scanned by CamScanner



On sait que, K étant un point du cercle directeur de (E) associé au foyer F', la demi-droite $[F'K)$ coupe l'ellipse (E) en un point unique M situé sur la médiatrice (T) de $[KF]$.

• Soit M' un point de $[F'K)$ appartenant à (E_i).

On a : $M'F < M'M + MF$ — dans le triangle $M'MF$
$< M'M + MK$ — car : $MK = MF$
$< M'K$ — car : $M \in [M'K]$

D'où : $M'F + M'F' < KM' + M'F'$
$< KF'$ — car : $M' \in [KF']$
$< 2a$

Donc : $\forall M' \in (E_i) \quad M'F + M'F' < 2a.$

• Soit M'' un point de $[F'K)$ appartenant à (E_e).
Désignons par N le point d'intersection de (FM'') avec (T).

On a : $M''F = M''N + NF$ — car : $N \in [M''F]$
$= M''N + NK$ — car : $NK = NF$

Or $M''N + NK > M''K$ — dans le triangle $M''NK$

donc : $M''F > M''K$

et : $M''F' + M''F > F'M'' + M''K$
$> F'K$ — car : $M'' \in [F'K]$
$> 2a$

Donc : $\forall M'' \in (E_e) \quad M''F' + M''F > 2a.$

Scanned by CamScanner

Conclusion

Quel que soit le point M du plan :

$$M \in (E) \iff MF + MF' = 2a$$
$$M \in (E_i) \iff MF + MF' < 2a$$
$$M \in (E_e) \iff MF + MF' > 2a$$

De cette conclusion, on déduit le théorème suivant :

Théorème

Le plan étant muni d'un repère orthonormé, soit (E) l'ellipse d'équation réduite :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Alors, quel que soit le point $M(x, y)$:

$$M \in (E_i) \iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1$$
$$M \in (E_e) \iff \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} > 1.$$

2 L'hyperbole

1) Étude géométrique

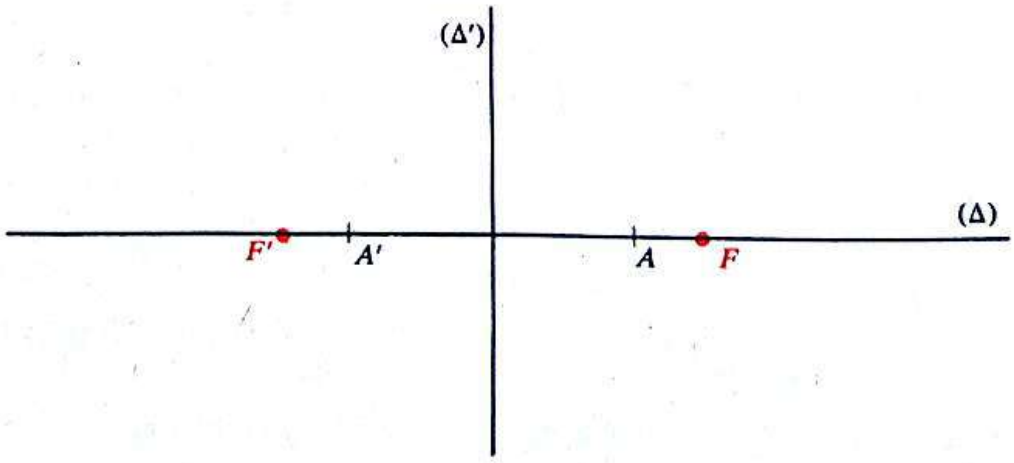
a) Exemple introductif

Soit F et F' deux points du plan $\mathcal{P}$ tels que :

$$FF' = 6.$$

Rechercher l'ensemble (H) des solutions de l'équation :

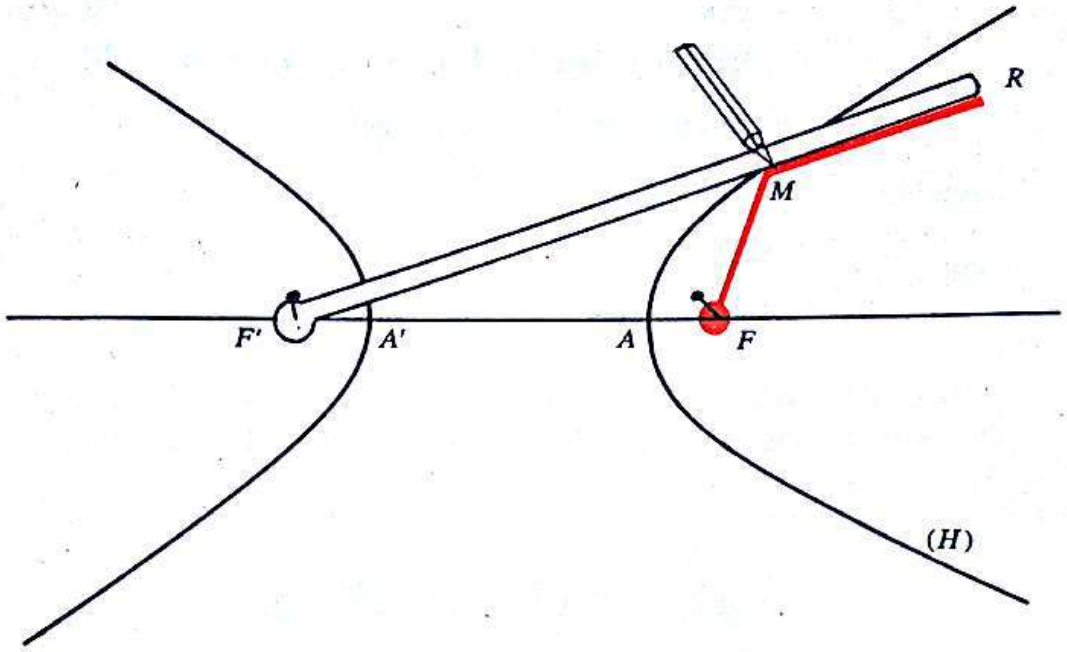
$$M \in \mathcal{P}, \quad |MF - MF'| = 4.$$



Scanned by CamScanner

— Montrer qu'il existe deux points A et A' de (H) situés sur la droite (FF').
— Calculer les distances : AF; AF'; AA'.
— Montrer que (H) admet deux axes de symétrie et un centre de symétrie.

Manipulation : Comment obtenir le dessin de (H).



La règle peut pivoter autour de F'.
La ficelle rouge qui a pour longueur $(F'R - 4)$, est fixée en F' et à l'extrémité R de la règle.
Décrire la manipulation représentée par le dessin ci-dessus. La justifier.

b) **Cas général**

Soit a un nombre réel strictement positif
F et F' deux points du plan.

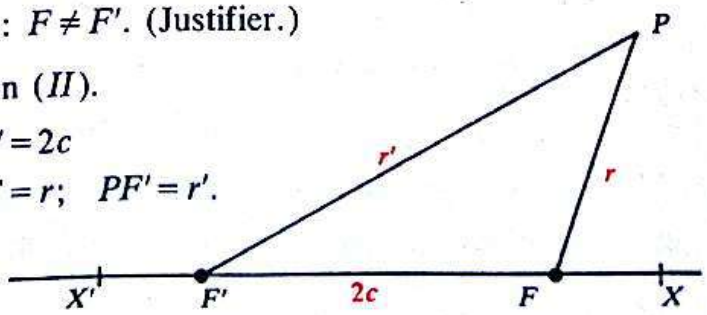
Rechercher l'ensemble des solutions de l'équation :

(II) $\quad M \in \mathcal{J}, \quad |MF - MF'| = 2a.$

- Notons qu'on a nécessairement : $F \neq F'$. (Justifier.)
- Soit P une solution de l'équation (II).

On pose :

$$FF' = 2c$$
$$PF = r; \quad PF' = r'.$$



On a alors :

$$|PF - PF'| \leqslant FF'$$
$$2a \leqslant 2c$$
$$a \leqslant c.$$

Scanned by CamScanner

• Si : $a = c$, alors : $[FX) \cup [F'X')$ est l'ensemble des solutions de l'équation (II) (voir figure).



$$\forall M \in \mathcal{S} \quad M \in [FX) \iff [PF' - PF = 2a]$$
$$\forall M \in \mathcal{S} \quad M \in [F'X') \iff [PF - PF' = 2a].$$

• Nous supposons donc dans la suite : $\boxed{a < c.}$

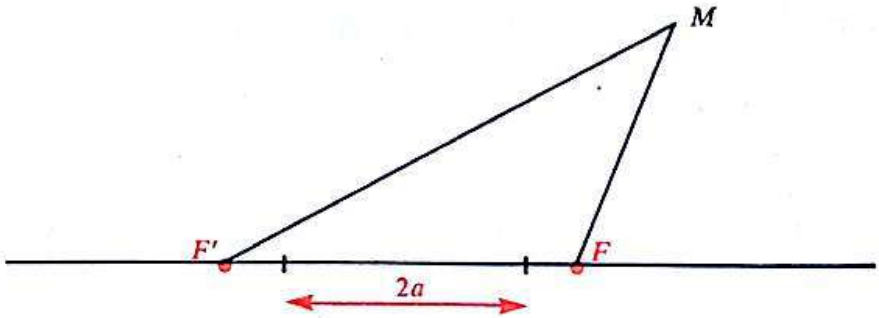
Définition

Soit | a un nombre réel strictement positif,
F et F' deux points du plan tels que :
$$FF' > 2a.$$

L'ensemble (H) des points du plan tels que la valeur absolue de la différence de leurs distances aux points F et F' ait une valeur constante $2a$ est appelé **hyperbole.**

$$\forall M \in \mathcal{S} \quad M \in (H) \iff |MF - MF'| = 2a.$$

c) **Éléments caractéristiques d'une hyperbole**



• On considère l'hyperbole (H), ensemble des points M du plan tels que :

$$|MF - MF'| = 2a; \quad \text{avec :} \quad FF' > 2a.$$

— Les points F et F' sont appelés les *foyers* de (H); FF' est sa *distance focale.*

— Montrer que la droite (FF') et la médiatrice (Δ') de $[FF']$ sont des axes de symétrie de (H).

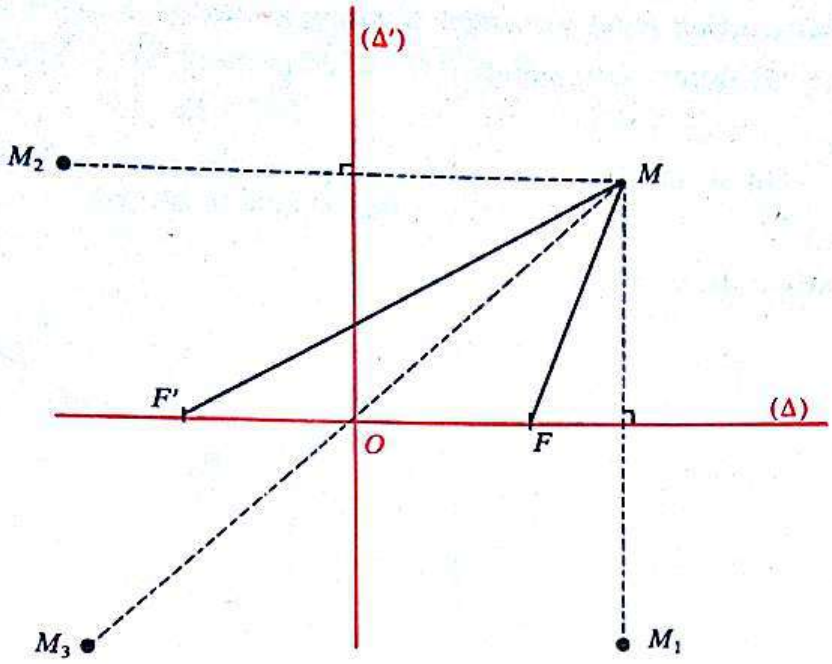
En déduire que le milieu O de $[FF']$ est un centre de symétrie de (H).

La droite (FF') est appelée l'*axe focal* de (H).

La médiatrice (Δ') de $[FF']$ est appelé l'*axe non focal* de (H).

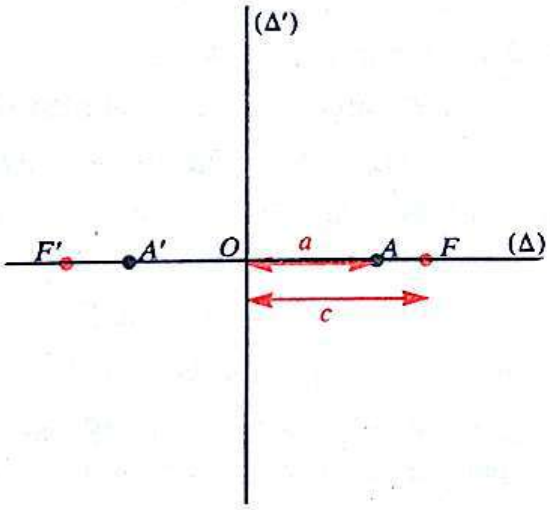
Le milieu O de $[FF']$ est appelé le *centre* de (H).

Scanned by CamScanner



— Montrer que l'hyperbole (H) coupe l'axe focal en deux points A et A'.

Les points A et A' sont appelés les *sommets* de (H).



On pose : $OF = c.$

Montrer que : $OA = a.$

• Une hyperbole est entièrement déterminée par ses foyers et la distance de ses sommets.

Exercice On donne les deux points F et F' tels que :

$$FF' = 7.$$

Donner tous les éléments caractéristiques de l'hyperbole (H) de foyers F, F' et dont la distance de ses sommets est 5.

Scanned by CamScanner

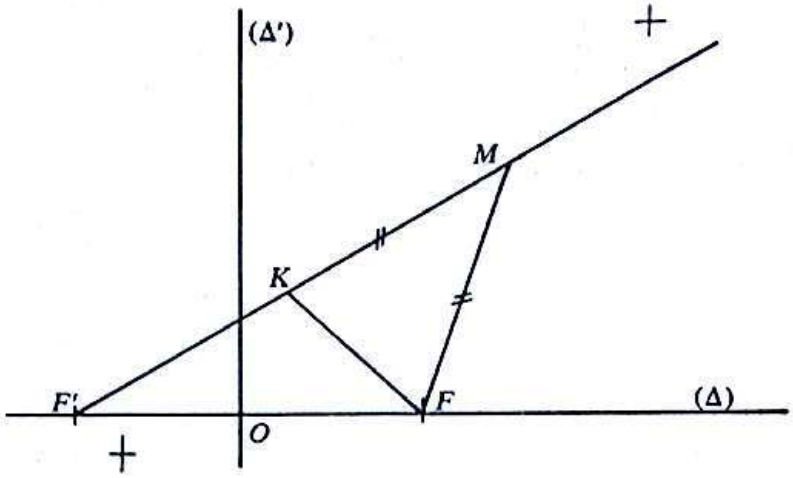
d) Construction point par point d'une hyperbole

On donne deux points F, F' et un nombre réel strictement positif a tel que :

$$FF' > 2a.$$

On se propose de construire, point par point, l'hyperbole (H) de foyers F, F' et dont la distance des sommets est $2a$.

• *Analyse de la figure ci-dessous*



Considérons l'hyperbole (H) de foyers F, F' et dont la distance des sommets est $2a$.

Désignons par (Δ') son axe non focal.

Soit M un point de (H) situé dans le demi-plan de bord (Δ') contenant F.

On a : $MF' - MF = 2a$ (car : $MF' > MF$).

Sur la demi-droite $[F'M)$ plaçons le point K tel que :

$$F'K = 2a.$$

On a alors : $MK = MF.$

Le point M est donc sur la médiatrice de $[FK]$.

Notons que le point K est sur le cercle (Σ) de centre F' et de rayon $2a$. Ce cercle (Σ) est appelé *cercle directeur de* (H) *associé au foyer* F'.

• *Une méthode de construction de l'hyperbole* (H)

Considérons (Σ) le cercle directeur de (H) associé à F' et (Δ') la médiatrice de $[FF']$.

Désignons par K_1 et K_2 les points de (Σ) tels que (FK_1) et (FK_2) soient tangents à (Σ).

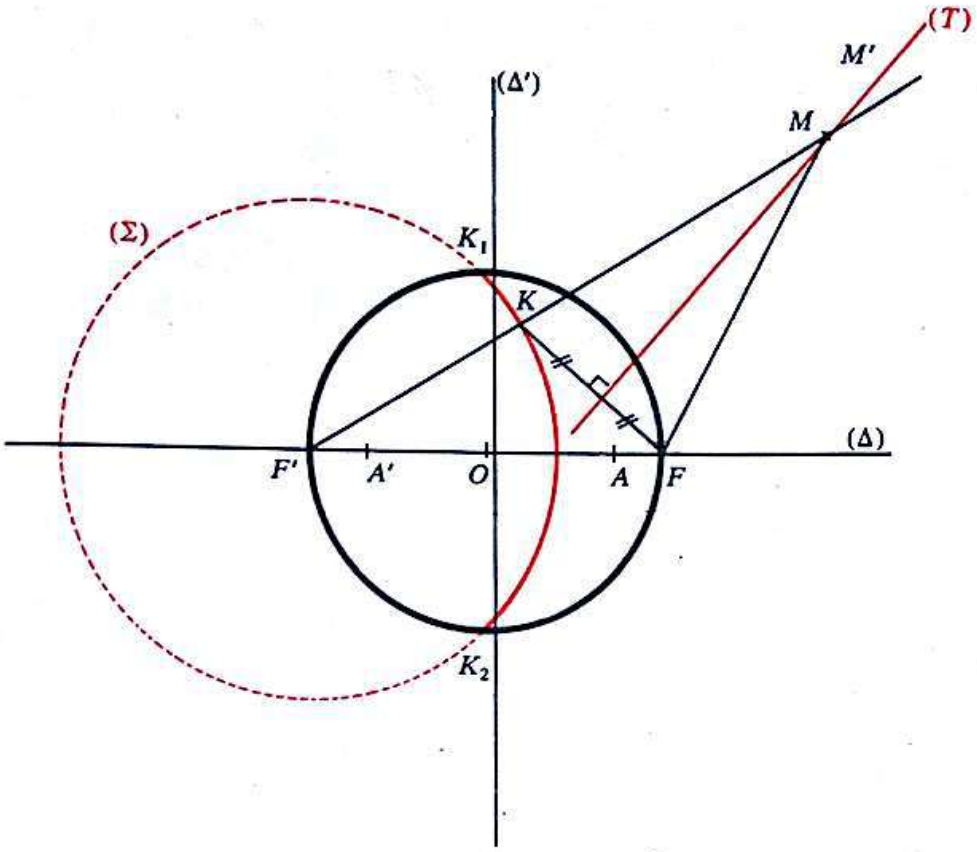
La médiatrice de $[FK_1]$ (resp. de $[FK_2]$) est donc parallèle à $(F'K_1)$ (resp. à $(F'K_2)$).

Soit K un point du crcle (Σ).

— Montrer que si K appartient au petit arc $\overset{\frown}{K_1K_2}$ (exclus les points K_1 et K_2), la médiatrice (T) de $[KF]$ coupe la demi-droite $[F'K)$ en un point unique. Soit M ce point.

Scanned by CamScanner

— Vérifier alors que M est un point de (H) situé dans le demi-plan de bord (Δ') contenant F; c'est-à-dire que : $MF' - MF = 2a$.



Remarque

— Soit M' un point de (T) autre que M.

On a alors :

$$|M'F' - M'F| = |M'F' - M'K| \quad \text{car : } M'F = M'K$$
$$|M'F' - M'F| < F'K \quad \text{dans le triangle } M'F'K$$
$$|M'F' - M'F| < 2a$$

donc : $M' \notin (H)$

(T) n'a pas de point commun autre que M avec (H).

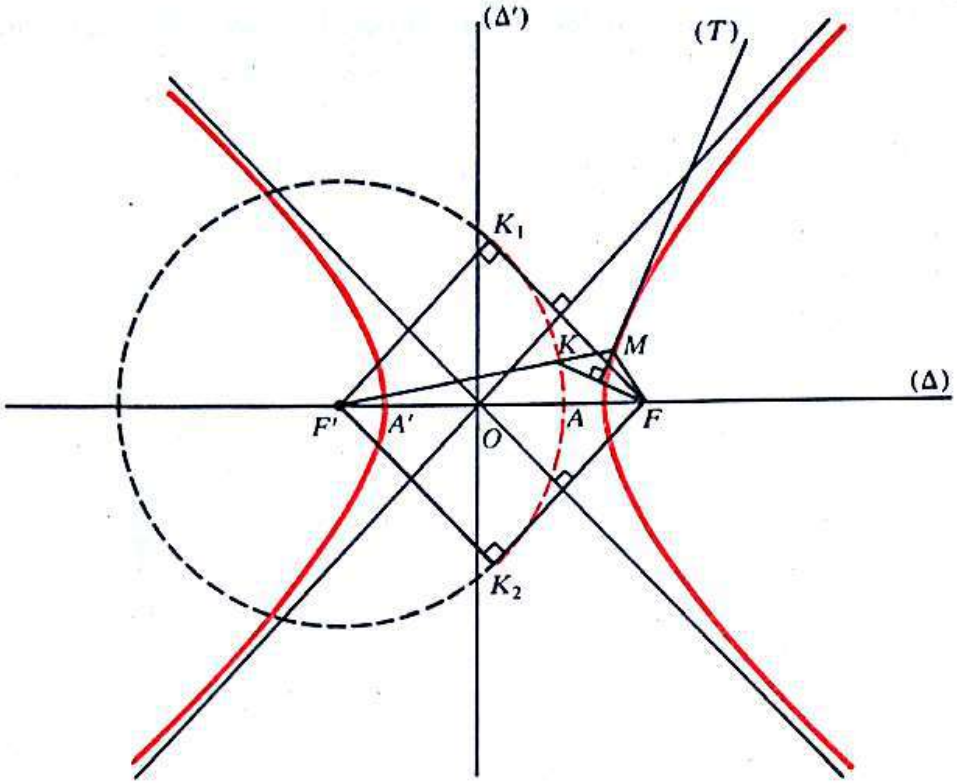
— On verra ultérieurement que (T) est la tangente en M à (H).

• *Tracé de* (H)

— Nous verrons par une étude analytique, qu'une hyperbole est constituée de deux branches disjointes qui admettent en chacun de leurs points une tangente.

— Cette méthode de construction permet d'obtenir point par point le tracé d'une des branches, l'autre étant obtenue par symétrie orthogonale d'axe (Δ').

Scanned by CamScanner



2) Activité

Image d'une hyperbole par une transformation du plan

On donne une hyperbole (H) de foyers F, F' et dont la distance des sommets est $2a$.

Soit i une isométrie et S une similitude de rapport k.

— Caractériser $i(E)$ et $S(E)$.

— Construire l'image de l'hyperbole (H) par la rotation ayant pour centre, le centre de (H) et pour angle orienté $\frac{\pi}{2}$.

3) Étude analytique

a) Équation d'une hyperbole

• Soit | a un nombre réel strictement positif,
| F et F' deux points du plan tels que : $FF' > 2a$.

On considère l'hyperbole (H) de foyers F, F' et dont la distance des sommets est $2a$.

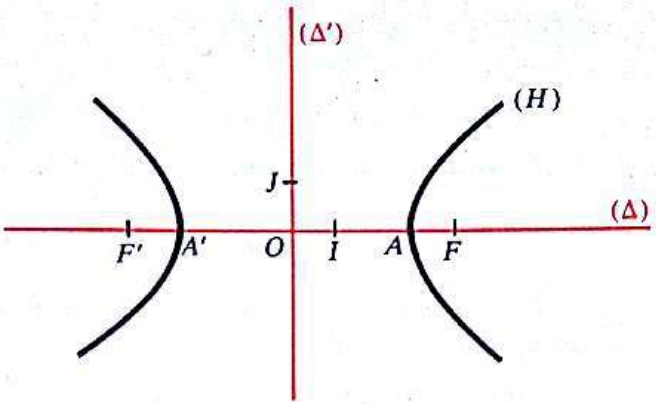
On désigne par : O le milieu de (H);
A, A' les sommets de (H);
$2c$ la distance focale de (H).

Scanned by CamScanner

Choix d'un repère orthonormé (O, I, J)

I est le point de $[OF)$ tel que : $OI = 1$;

J est un point de l'axe non focal tel que : $OJ = 1$.



On obtient alors :

$$F(c, 0); \quad F'(-c, 0); \quad A(a, 0); \quad A'(-a, 0).$$

En se situant dans chacun des demi-plans de bord (OJ), on démontre comme dans le cas de l'ellipse que :

Le plan étant muni d'un repère orthonormé (O, I, J) l'hyperbole (H) de centre O, d'axe focal (OI), dont la distance des sommets est $2a$ et de distance focale $2c$, a pour équation :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad \text{avec :} \quad b^2 = c^2 - a^2 \ (b > 0).$$

Cette équation est appelée l'**équation réduite** de (H).

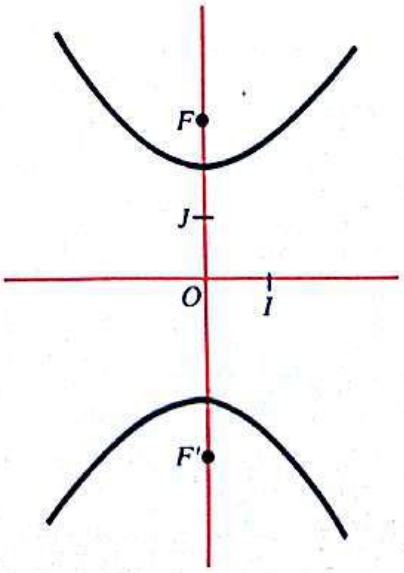
Remarque

Si le repère (O, I, J) avait été choisi tel que :

$$J \in [OF)$$

alors, l'hyperbole de centre O, d'axe focal (OJ), de distance focale $2c$ et dont la distance des sommets est $2a$ aurait eu pour équation réduite :

$$\frac{x^2}{b^2} - \frac{y^2}{a^2} = -1; \quad \text{avec :} \quad b^2 = c^2 - a \quad (b > 0).$$



Scanned by CamScanner

Exercices

1) On donne deux points du plan F et F' tels que :

$$FF' = 6.$$

On considère l'hyperbole (H) de foyers F, F' et dont la distance des sommets est 4.

Préciser le repère orthonormé choisi et donner l'équation réduite de (H) dans ce repère.

2) Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

On considère l'hyperbole (H) d'équation réduite :

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1.$$

— Préciser les éléments caractéristiques de (H) : foyers, sommets, distance des sommets.

— Construire (H).

b) Étude d'une hyperbole définie par son équation réduite

• Le plan étant muni d'un repère orthonormé (O, I, J), considérons l'hyperbole (H) d'équation réduite :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad \text{avec :} \quad a > 0 \quad \text{et} \quad b > 0.$$

Montrer que, quelque soit le couple de nombres réels (x, y) on a :

$$\left[\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\right] \iff \left[\left(y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\right) \boxed{\text{ou}} \left(y = -\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\right)\right].$$

Désignons respectivement par (Γ_1) et (Γ_2) les courbes d'équations :

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}; \quad y = -\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}.$$

(Γ_1) et (Γ_2) sont symétriques par rapport à la droite (OI) et :

$$(\Gamma_1) \cup (\Gamma_2) = (H).$$

• Étude de la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}. \end{aligned}$$

— Montrer que :

L'ensemble de définition de f est $]-\infty, -a] \cup [a, +\infty[$.

La fonction f est paire.

La fonction f est continue sur $]-\infty, -a]$ et sur $[a, +\infty[$; dérivable sur $]-\infty, -a[$ et sur $]a, +\infty[$ et :

$$\forall x \in]-\infty, -a[\cup]a, +\infty[\quad f'(x) = \frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Scanned by CamScanner

La fonction f n'est pas dérivable en a en effet :

$$\forall x \in]-\infty, -a[\cup]a, +\infty[\quad \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{b\sqrt{x^2-a^2}}{a(x-a)} = \frac{b}{a}\sqrt{\frac{x+a}{x-a}}$$

et :

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x>a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty.$$

Montrer de même que f n'est pas dérivable en $-a$.

— *Tableau de variation*

x	$-\infty$		$-a$		a		$+\infty$
$f'(x)$		$-$				$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0		0	↗	$+\infty$

— *Asymptotes*

Montrer que :

$$\lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - \frac{b}{a}x\right) = 0; \quad \lim_{x \to -\infty} \left(f(x) + \frac{b}{a}x\right) = 0.$$

En déduire que les droites (D_1) et (D_2) d'équations respectives :

$$y = \frac{b}{a}x; \quad y = -\frac{b}{a}x$$

sont asymptotes à (Γ_1) donc aussi à l'hyperbole (H).

— *Tangentes*

La courbe (Γ_1) admet en $A(a, 0)$ et en $A'(-a, 0)$ des tangentes verticales.

Montrer que (Γ_1) admet en chacun de ses points $M_0(x_0, y_0)$ distincts de A et A' une tangente d'équation :

$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{y^2} = 1.$$

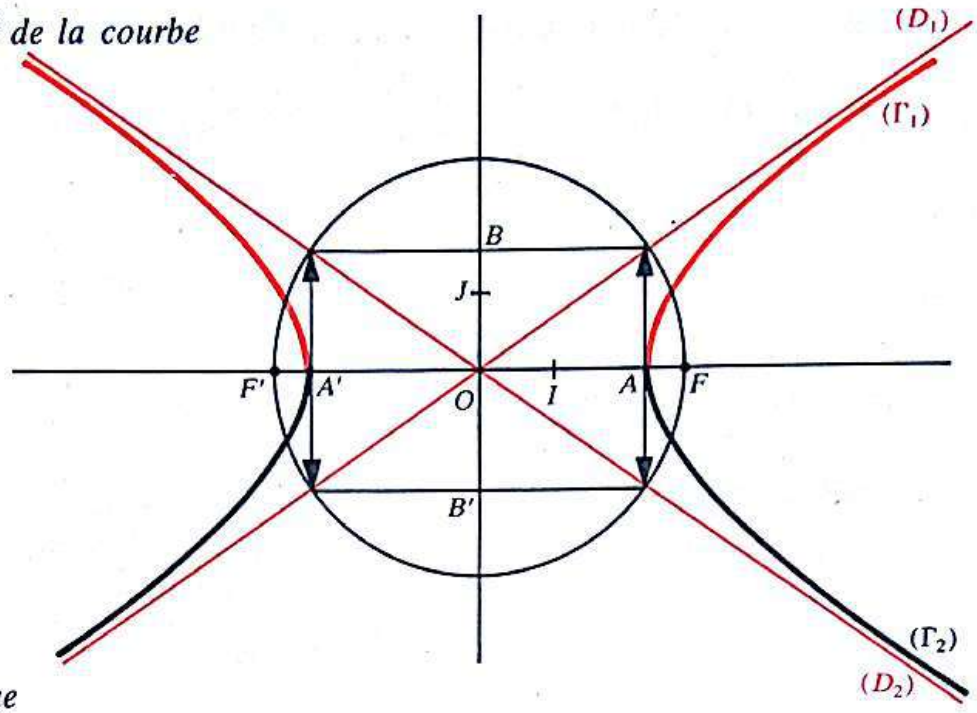
Vérifier que :

L'hyperbole (H) admet en chacun de ses points $M_0(x_0, y_0)$ une tangente d'équation :

$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1.$$

Scanned by CamScanner

— *Tracé de la courbe*



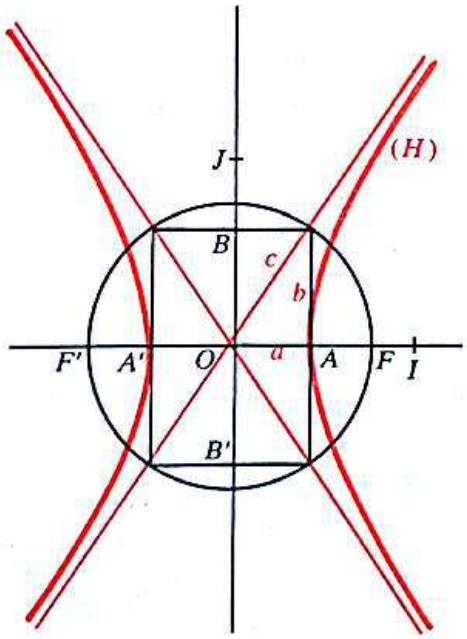
Remarque

On considère les points $B(0, b)$ et $B'(0, -b)$.
Les asymptotes de l'hyperbole (H) sont les supports des diagonales du rectangle dont les côtés passent par A, A', B, B' et ayant pour axe de symétrie ceux de (H).

Tableau récapitulatif sur l'hyperbole (H)

Éléments caractéristiques de l'hyperbole (H) :

(O, I, J) est un repère orthonormé



(OI) : axe focal
$a < c$

$b = \sqrt{c^2 - a^2}$

— les deux foyers : F et F';
— les deux sommets : A et A';
— les deux axes de symétrie :
l'axe focal : (FF'),
l'axe non focal : (Δ');
— le centre de symétrie : 0;
— la distance focale : FF';
— la distance des sommets : AA';
— l'équation réduite :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

— une équation de la tangente à (H) en un point $M_0(x_0, y_0)$:

$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1.$$

— Deux asymptotes d'équation :

$$y = \frac{b}{a}x; \quad y = -\frac{b}{a}x.$$

Scanned by CamScanner

Exercices

1) Montrer que la réunion des asymptotes à l'hyperbole (H) a pour équation :

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0.$$

2) Étudier l'hyperbole (H') définie par son équation réduite :

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1; \quad \text{avec} \quad a>0 \quad \text{et} \quad b>0.$$

c) Équation d'une hyperbole rapportée à ses asymptotes

• **Hyperbole équilatère**

— Une hyperbole (H) est dite *équilatère* si ses asymptotes sont perpendiculaires.

Montrer que :
Une hyperbole est équilatère si et seulement si, il existe un repère orthonormé dans lequel son équation réduite est du type :

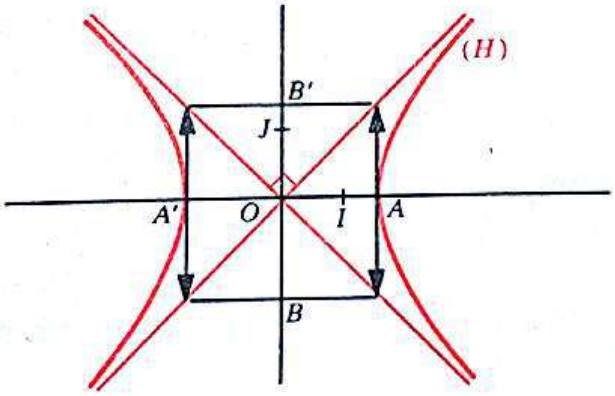
$$x^2-y^2=a^2.$$

— Le plan étant muni d'un repère orthonormé (O, I, J), soit (H) une hyperbole équilatère d'équation réduite :

$$x^2-y^2=a^2.$$

Vérifier que les asymptotes de (H) ont pour équations :

$$y=x; \quad y=-x.$$

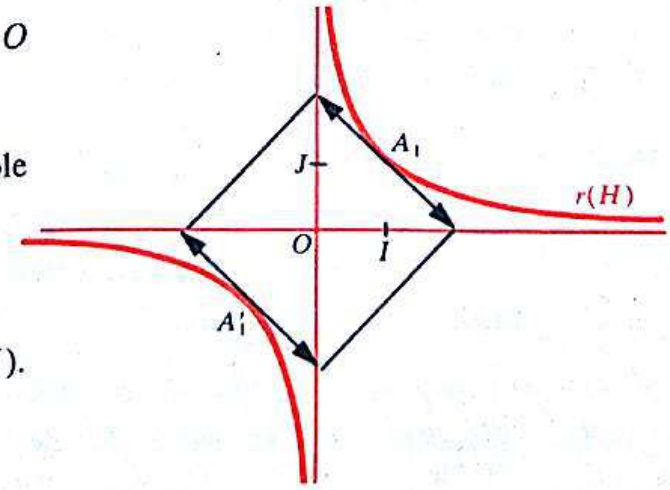


Considérons la rotation r de centre O et d'angle orienté $\frac{\pi}{4}$.

Montrer que $r(H)$ est une hyperbole équilatère d'équation :

$$xy=\frac{a^2}{2}.$$

$r(H)$ a pour asymptotes (OI) et (OJ).

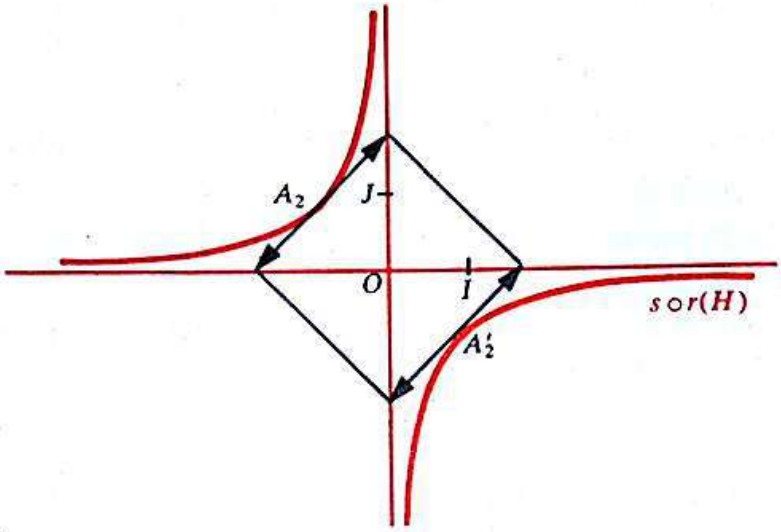


Scanned by CamScanner

Considérons la symétrie orthogonale s d'axe (OJ).
Montrer que $s \circ r(H)$ est une hyperbole équilatère d'équation :

$$xy = -\frac{a^2}{2}.$$

$s \circ r(H)$ a pour asymptotes (OI) et (OJ).



Conclusion

Une équation d'une hyperbole équilatère (H) relative à un repère orthonormé dont les axes ont pour support les asymptotes de (H) est du type :

$$xy = k; \quad \text{avec :} \quad k \in \mathbb{R}^*.$$

• Plus généralement, on montre et nous admettrons que :

Toute hyperbole (H) admet, relativement à un repère dont les axes ont pour supports les asymptotes de (H), une équation du type :

$$xy = k; \quad \text{avec :} \quad k \in \mathbb{R}^*.$$

Une telle équation est appelée **équation de l'hyperbole (H) rapportée à ses asymptotes.**

• *Remarque*

En classe de Première, nous avons appelé hyperbole la représentation graphique, des fonctions f et g des types :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{ax+b}{cx+d}; \quad \text{avec : } c \neq 0$$

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto ax + b + \frac{c}{dx+k}; \quad \text{avec : } d \neq 0.$$

Justifier ce vocabulaire.

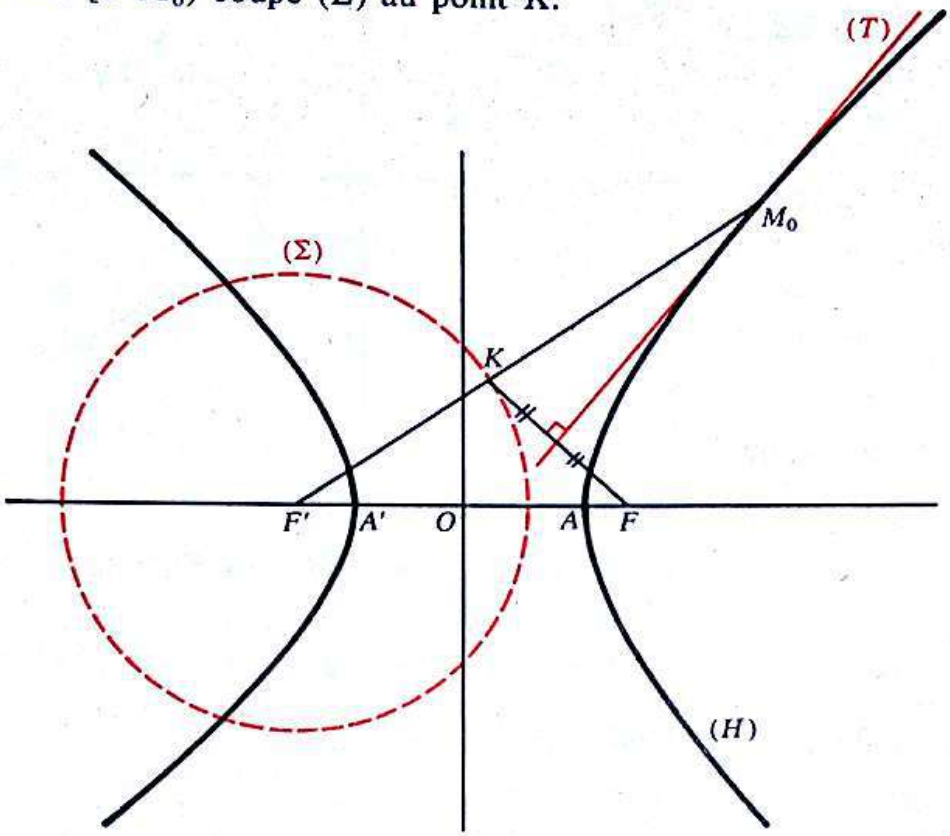
d) **Activité :** ***Propriété de la tangente en un point à une hyperbole***

On considère l'hyperbole (H) de foyers F, F' et dont la distance des sommets est $2a$.

Scanned by CamScanner

Soit | (Σ) le cercle directeur de (H) associé à F'.
M_0 un point de (H) distinct de A et A'.

La demi-droite $[F'M_0)$ coupe (Σ) au point K.



— Par une étude analytique, on peut montrer que :

> La médiatrice (T) de $[FK]$ est la tangente en M_0 à (H).

En déduire un programme de construction de la tangente en un point, à une hyperbole.

I) Régionnement du plan par une hyperbole

On considère l'hyperbole (H) de foyers F, F' et dont la distance des sommets est $2a$.

Le plan étant muni du repère orthonormé (O, I, J) (voir page 161) l'hyperbole (H) a pour équation réduite :

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1; \quad \text{avec :} \quad b^2=c^2-a^2 \quad (b>0).$$

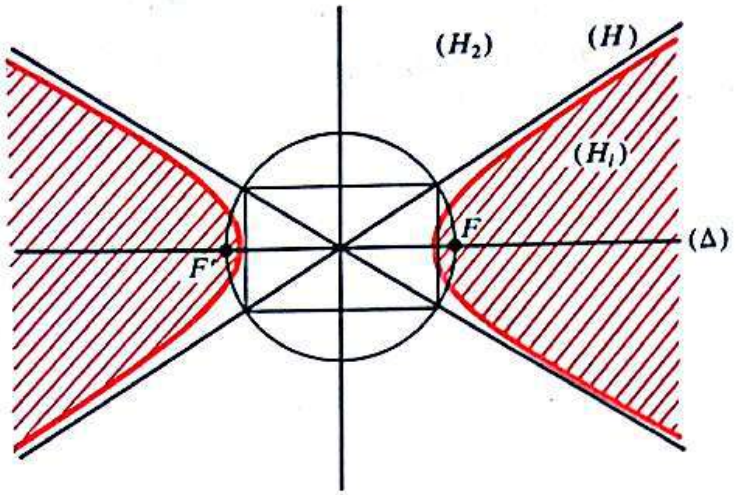
$2c$ étant la distance focale de l'hyperbole (H).

L'hyperbole (H) partage le plan en deux régions :

— l'une, constituée de deux parties disjointes du plan contenant chacune un foyer F ou F', est appelée *intérieur* de (H) et notée (H_i);

Scanned by CamScanner

— l'autre, est appelée *extérieure* de (H) et est notée (H_e).



On montre que :

Quel que soit le point M du plan :

$$M \in (H) \iff |MF - MF'| = 2a$$
$$M \in (H_i) \iff |MF - MF'| < 2a$$
$$M \in (H_e) \iff |MF - MF'| > 2a.$$

D'où l'on déduit le théorème suivant :

Théorème

Le plan étant muni d'un repère orthonormé, soit (H) l'hyperbole d'équation réduite :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Alors, quel que soit le point $M(x, y)$ on a :

$$M \in (H_i) \iff \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} < 1$$

$$M \in (H_e) \iff \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} > 1.$$

5) Synthèse sur les coniques à centre

a) Définition

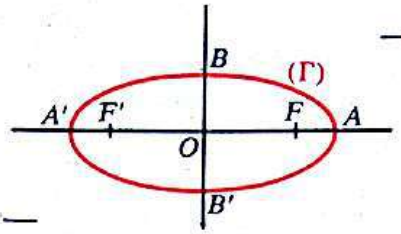
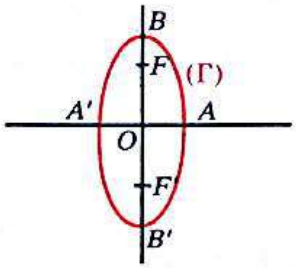
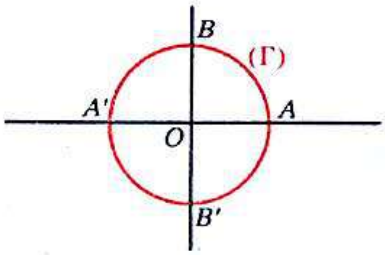
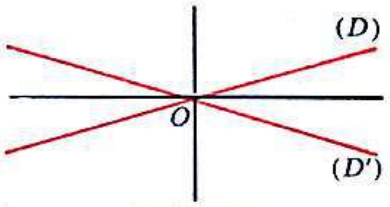
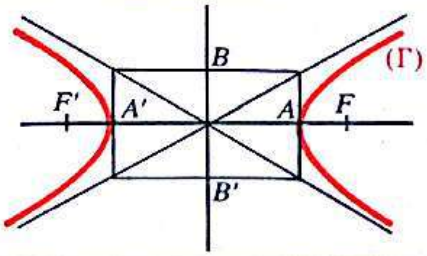
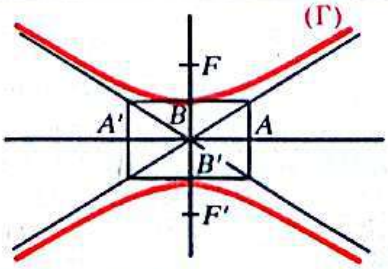
Nous avons vu que, l'ellipse et l'hyperbole admettent un centre de symétrie. On dit que l'ellipse et l'hyperbole sont des *coniques à centre.*

Une conique à centre est définie par :

— deux points : ses foyers;

— un nombre réel strictement positif : la distance de ses sommets situés sur son axe focal.

Scanned by CamScanner

$v>0$; $w>0$	$(\Gamma)=\varnothing$		
$v>0$; $w=0$	$(\Gamma)=\{0\}$		
$v>0$; $w<0$	(1) $u<v$ $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(0<b<a)$		(Γ) est une ellipse
	(1) $u>v$ $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(0<a<b)$		
	(1) $u=v$ $x^2+y^2=a^2$		
$v<0$; $w=0$	$(\Gamma)=(D)\cup(D')$		
$v<0$; $w<0$	(1) $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$		(Γ) est une hyperbole
$v<0$; $w>0$	(1) $-\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$		

Scanned by CamScanner

b) Équation

• Que ce soit une ellipse (E) ou une hyperbole (H), de centre O, d'axe focal (OI) ou (OJ), nous avons vu que l'équation réduite de (E) ou de (H), relativement à un repère orthonormé (O, I, J), est équivalente à une équation du type :

$$ux^2 + vy^2 + w = 0.$$

• D'où le problème :
Étant donné des nombres réels non nuls u, v et w, quel est l'ensemble (Γ) des points $M(x, y)$ du plan vérifiant l'équation :

$$ux^2 + vy^2 + w = 0?$$

Activité
En supposant u strictement positif, discuter la nature de (Γ) suivant le signe de v et w.

Vérifier que les résultats obtenus peuvent se résumer par les tableaux suivants :

(1) $ux^2 + vy^2 + w = 0$; avec : $u > 0$.

3 La parabole

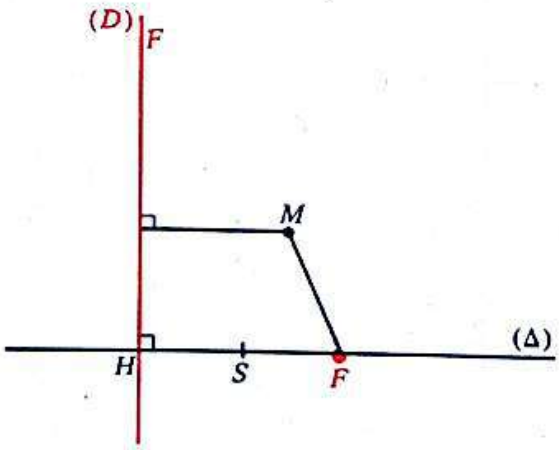
1) Étude géométrique

a) Exemple introductif

Soit | (D) une droite du plan
F un point situé à la distance 3 de (D).

Rechercher l'ensemble (P) des solutions de l'équation :

$$M \in \mathcal{P}, \quad d(M, F) = d\big(M, (D)\big).$$



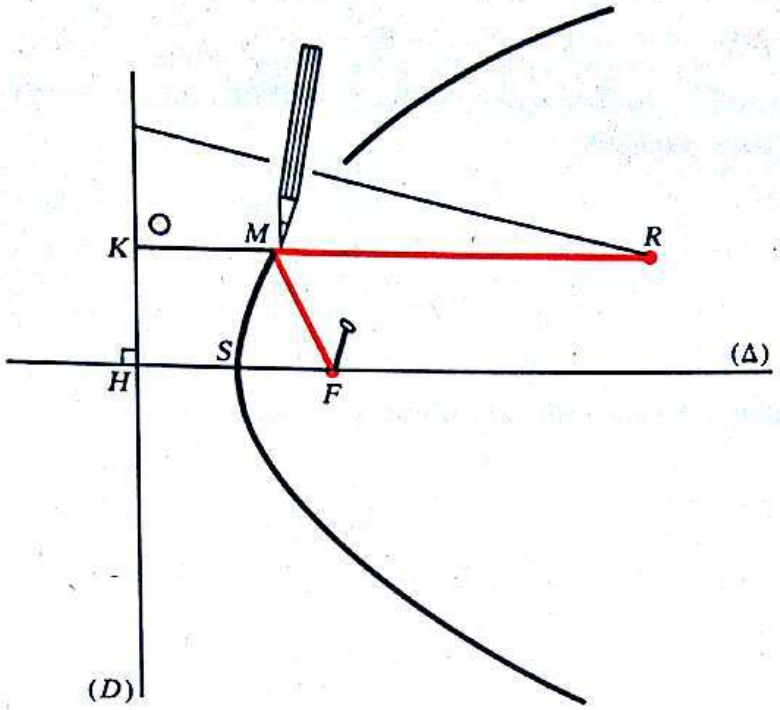
— Soit H le projeté orthogonal de F sur (D).

Le milieu S de $[FH]$ est un élément de (P).

— Montrer que (P) admet un axe de symétrie.

Scanned by CamScanner

Manipulation : Comment obtenir le dessin de (P)



En rouge on a représenté une ficelle de longueur KR, fixée en F et à la pointe R de l'équerre.
Décrire la manipulation représentée par le dessin ci-dessus. La justifier.

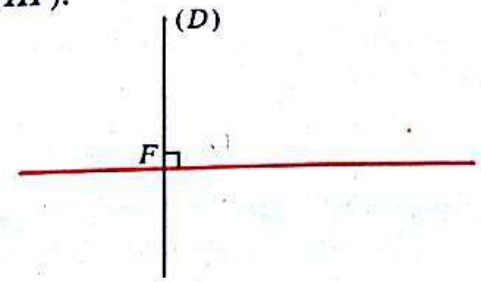
b) **Cas général**

Soit F un point du plan et (D) une droite.
Rechercher l'ensemble des solutions de l'équation :

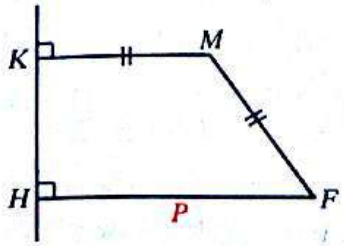
(III) $\qquad M \in \mathcal{I}, \quad d(M, F) = d\big(M, (D)\big).$

On pose : $\qquad d\big(F, (D)\big) = p.$

• Si : $p = 0$, alors : la droite perpendiculaire en F à (D) est l'ensemble des solutions de l'équation (III).



• Nous supposons dans la suite : $\boxed{p > 0}$



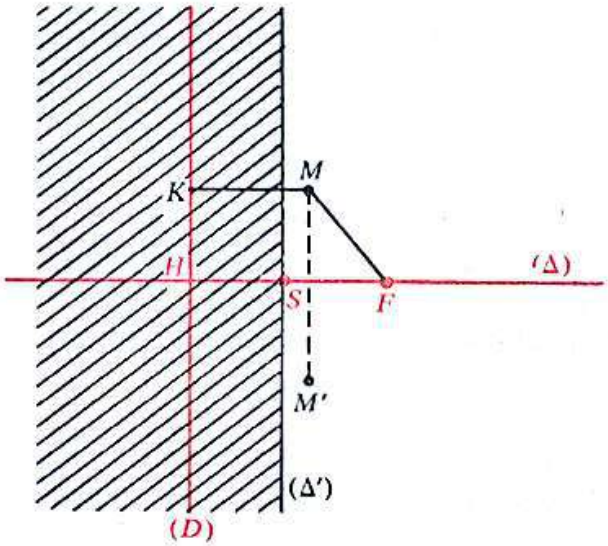
Scanned by CamScanner

Définition

Soit (D) une droite et F un point n'appartenant pas à (D).
L'ensemble (P) des points du plan équidistants du point F et de la droite (D) est appelé **parabole.**

$$\forall M \in \mathcal{S} \quad M \in (P) \iff \left[d(M, F) = d\left(M, (D)\right)\right].$$

c) Éléments caractéristiques d'une parabole



• On considère la parabole (P), ensemble des points M du plan tels que :

$$d(M, F) = d\left(M, (D)\right).$$

— Le point F est appelé le *foyer* de la parabole (P),
la droite (D) est sa *directrice,*

$d\left(F, (D)\right)$ est son *paramètre.*

— Montrer que la droite (Δ) passant par F et perpendiculaire à (D) est l'unique axe de symétrie de (P). Elle est appelée *l'axe* de (P).

— Montrer que la parabole (P) coupe son axe en un point unique S appelé *le sommet* de (P).

Soit H le projeté orthogonal de F sur (D). S est le milieu de $[HF]$.

— Montrer que la parabole (P) est contenue dans le demi-plan contenant F et de bord la droite (Δ') parallèle à (D) et passant par S.

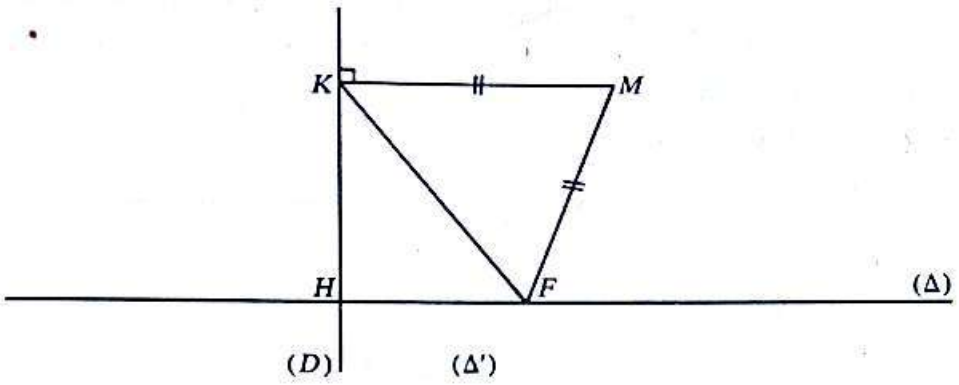
• Une parabole est entièrement déterminée par son foyer et sa directrice, donc aussi par son foyer et son sommet.

Scanned by CamScanner

d) Construction point par point d'une parabole

On donne un point F et une droite (D) ne passant pas par (D).
On se propose de construire, point par point, la parabole (P) de foyer F et de directrice (D).

• *Analyse de la figure ci-dessous*



Considérons la parabole (P) de foyer F et de direction (D).

Désignons par (Δ) son axe.

Soit M un point de (P) et K son projeté orthogonal sur (D).

On a alors : $MF = MK$.

Le point M est sur la médiatrice de $[FK]$ et sur la droite parallèle à (Δ) et passant par K.

• *Une méthode de construction de la parabole* (P)

Soit | K un point quelconque de la directrice (D).
| (Δ_k) la droite passant par K et parallèle à l'axe (Δ) de la parabole (P).

La médiatrice (T) de $[FK]$ coupe (Δ_K) en un point unique (Justifier).
Soit M ce point.

— Vérifier que M est un point de (P);

— Vérifier que le milieu U de $[KF]$ est sur la droite (Δ') parallèle à (D) et passant par le sommet S de la parabole (P).

Remarque

— Soit M' un point de (T) autre que M.

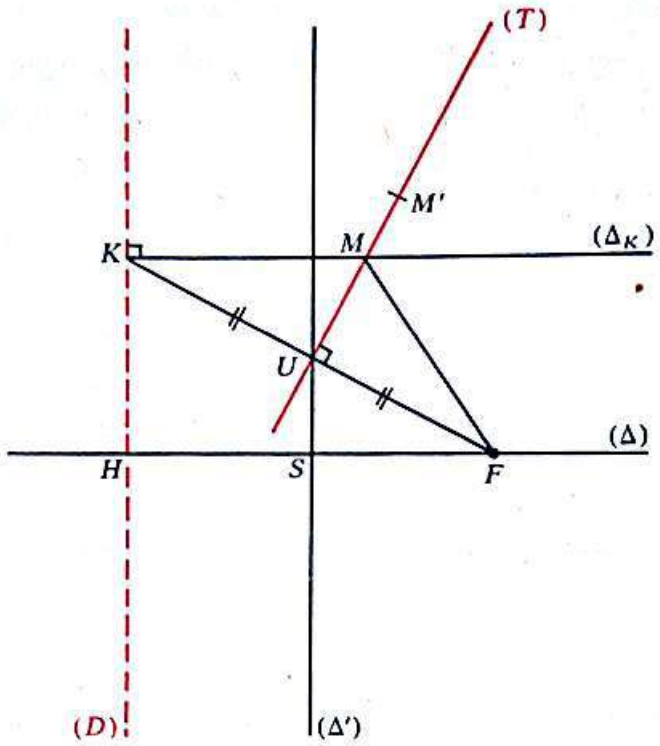
On a alors : $d(M', (D)) < d(M', K)$
$< d(M', F)$

donc : $M' \notin (P)$.

(T) n'a pas de point commun autre que M avec (P).

Scanned by CamScanner

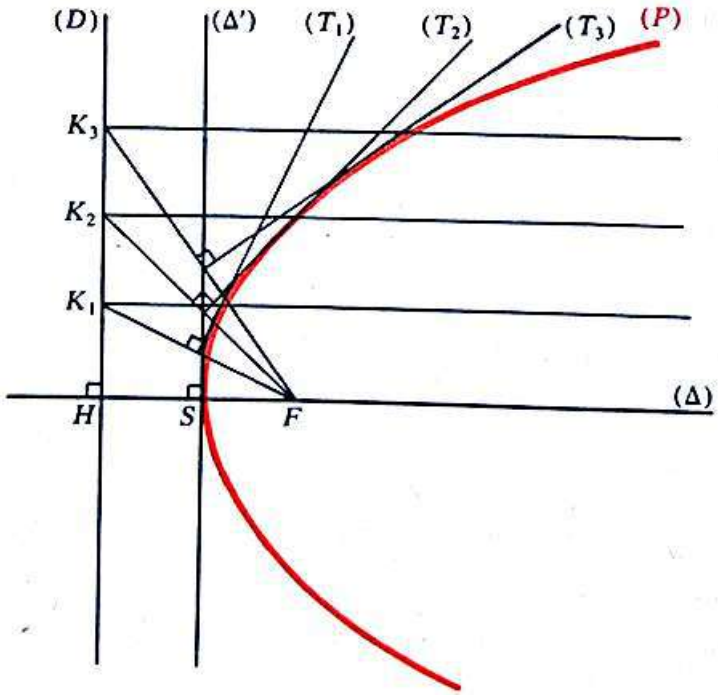
— On verra ultérieurement que (T) est la tangente en M à (P).



• *Tracé de* (P)

— Nous verrons par une étude analytique, que la parabole est une courbe qui admet en chacun de ses points une tangente.

— Cette méthode de construction permet d'obtenir, point par point, le tracé de (P).



Donner une autre méthode de construction d'une parabole.

Scanned by CamScanner

2) Activité

Image d'une parabole par une transformation du plan

• On donne une parabole (P) de foyer F et la directrice (D).

Soit | i une isométrie et S une similitude de rapport k,
M un point quelconque de (P).

— On obtient :

$d(F, (D)) = p$
$d(M, F) = d(M, (D))$

$\begin{bmatrix} M & M_1 \\ F & F_1 \\ (D) & (D_1) \end{bmatrix}$ (i)

$d(F_1, (D_1)) = p$
$d(M_1, F_1) = d(M_1, (D_1))$

$d(F, (D)) = p$
$d(M, F) = d(M, (D))$

$\begin{bmatrix} M & M_2 \\ F & F_2 \\ (D) & (D_2) \end{bmatrix}$ (S)

$d(F_2, (D_2)) = kp$
$d(M_2, F_2) = d(M_2, (D_2))$.

— Caractériser $i(P)$ et $S(P)$.

— Construire l'image de (P) :

par la rotation de centre, le sommet de (P) et d'angle $\frac{\pi}{2}$;

par la symétrie orthogonale d'axe, la droite passant par le sommet de (P) et perpendiculaire à son axe.

• Montrer que :

— Deux paraboles de même paramètre sont isométriques.

— Deux paraboles quelconques sont semblables.

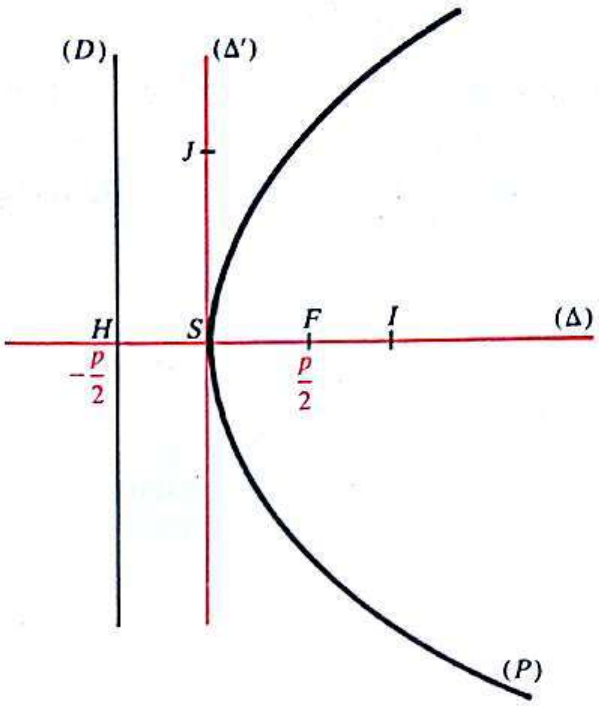
3) Étude analytique

a) Équation d'une parabole

• Soit (D) une droite et F un point n'appartenant pas à (D).
On considère la parabole (P) de foyer F et de directrice (D).
On désigne par S son sommet, p son paramètre et H le projeté de F sur (D).

Choix d'un repère orthonormé (S, I, J)
I est le point de $[SF)$ tel que : $SI = 1$.
J est un point de la droite (Δ') parallèle à la directrice (D) et passant par S.

Scanned by CamScanner



On obtient alors :

$$F\left(\frac{p}{2}, 0\right); \quad H\left(-\frac{p}{2}, 0\right)$$

(D) a pour équation : $x = -\frac{p}{2}$.

Soit M un point quelconque du plan, (x, y) son couple de coordonnées. Son projeté orthogonal K sur (D) a donc pour couple de coordonnées : $\left(\frac{p}{2}, y\right)$.

On obtient alors successivement :

$$\begin{aligned} M \in (P) &\iff [MF = MK] \\ &\iff [MF^2 = MK^2] \\ &\iff \left[\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2\right] \\ &\iff [y^2 = 2px]. \end{aligned}$$

Conclusion

Le plan étant muni du repère orthonormé (S, I, J), la parabole (P) de sommet S, de paramètre p et d'axe focal (SI) a pour équation :

$$y^2 = 2px.$$

Cette équation est appelée **l'équation réduite** de (P).

Remarques

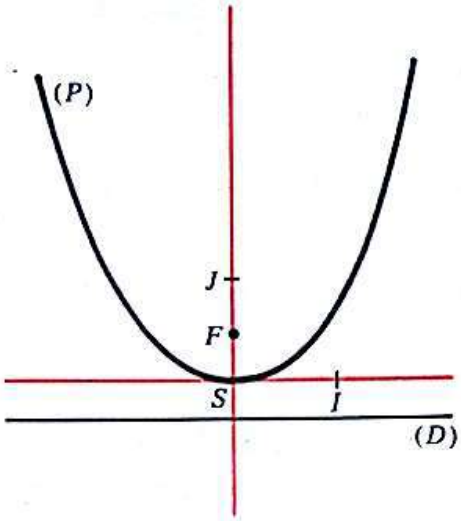
— Si le repère (S, I, J) avait été choisi tel que :

$$J \in [SF)$$

Scanned by CamScanner

alors la parabole (P) de sommet S, de paramètre p et d'axe focal (SJ) aurait eu pour équation réduite :

$$x^2 = 2py.$$



— En classe de Première, nous avons appelé parabole la représentation graphique d'une fonction polynôme du second degré.

Les courbes d'équation :

$$y = \sqrt{ax + b}; \quad \text{avec : } a \neq 0$$

sont aussi des paraboles.

Justifier ce vocabulaire.

Exercices

1) On donne une droite (D) et un point F situé à la distance 3 de (D).
On considère la parabole (P) de foyer F et de directrice (D).
Donner l'équation réduite de (P), préciser le repère orthonormé dont le plan est muni.

2) Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
On considère la parabole (P) d'équation :

$$y^2 = 8x.$$

— Préciser les éléments caractéristiques de (P) : foyer, directrice, sommet, paramètre.

— Construire (P).

3) Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
On considère la courbe (Γ) d'équation :

$$y^2 = -4x.$$

Soit s la symétrie orthogonale d'axe (OJ).

— Montrer que $s(\Gamma)$ est une parabole.
Préciser ses éléments caractéristiques.

— En déduire que (Γ) est une parabole.
Préciser ses éléments caractéristiques.

— Construire (Γ) et $s(\Gamma)$.

Scanned by CamScanner

b) Étude d'une parabole définie par son équation réduite

• Le plan étant muni d'un repère orthonormé (O, I, J), considérons la parabole (P) d'équation réduite :

$$y^2 = 2px; \quad \text{avec} : \quad p > 0.$$

Quel que soit le couple de nombres réels (x, y), on obtient :

$$[y^2 = 2px] \iff [(y = \sqrt{2px}) \boxed{\text{ou}} (y = -\sqrt{2px})].$$

Désignons respectivement par (Γ_1) et (Γ_2) les courbes d'équations :

$$y = \sqrt{2px}; \quad y = -\sqrt{2px}.$$

(Γ_1) et (Γ_2) sont symétriques par rapport à la droite (OI) et :

$$(\Gamma_1) \cup (\Gamma_2) = (P).$$

• Étude de la fonction

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \sqrt{2px}. \end{aligned}$$

— *Montrer que :*

L'ensemble de définition de f est $[0, +\infty[$.

La fonction f est continue sur $[0, +\infty[$; dérivable sur $]0, +\infty[$ et :

$$\forall x \in]0, +\infty[\quad f'(x) = \frac{p}{\sqrt{2px}}.$$

La fonction f n'est pas dérivable en 0, en effet :

$$\forall x \in]0, +\infty] \quad \frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\sqrt{2px}}{x} = \sqrt{\frac{2p}{x}}$$

et :

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = +\infty.$$

— *Tableau de variation*

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$
$f(x)$	0	$+\infty$

— *Tangentes*

La courbe (Γ_1) admet une tangente verticale en O.

Montrer que la courbe (Γ_1) admet en chacun de ses points $M_0(x_0, y_0)$ distinct de O, une tangente d'équation :

$$y_0 y = p(x_0 + x).$$

Scanned by CamScanner

Vérifier que :

La parabole (P) admet en chacun de ses points $M_0(x_0, y_0)$ une tangente d'équation :

$$y_0 y = p(x_0 + x).$$

— *Tracé de la courbe*

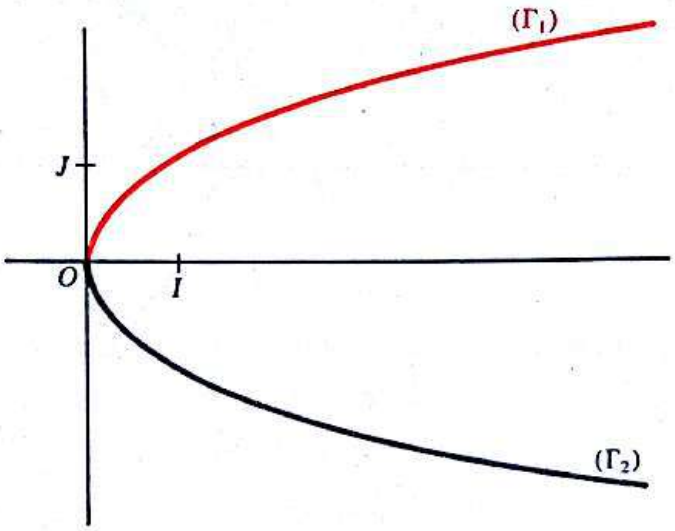
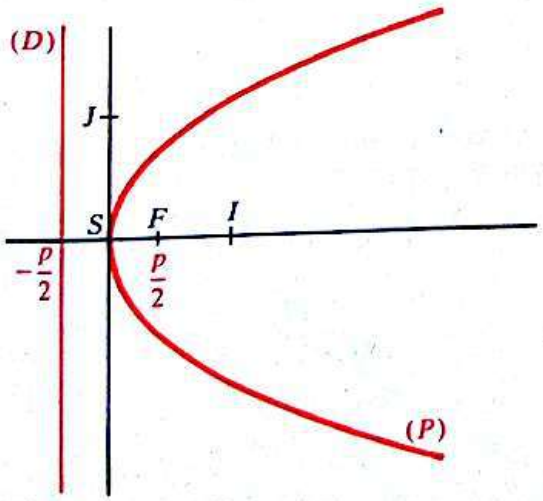


Tableau récapitulatif sur la parabole

Éléments caractéristiques de la parabole (P) :

(S, I, J) est un repère orthonormé



(SI) axe focal.

— Le foyer : F
— La directrice : (D)
— Le sommet : S
— L'axe de symétrie : (SF)
— Le paramètre : P
— L'équation réduite :

$$y^2 = 2px.$$

— Une équation de la tangente à (P) en un point $M_0(x_0, y_0)$:

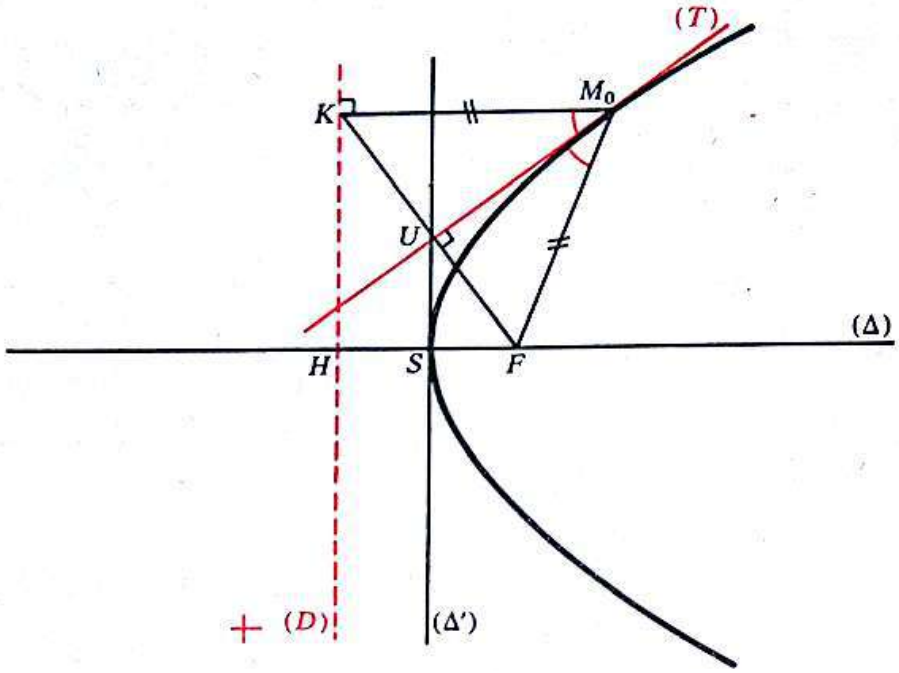
$$y_0 y = 2p(x + x_0).$$

Scanned by CamScanner

c) Activité

Propriété de la tangente en un point à une parabole

On considère la parabole (P) de foyer F, de directrice (D).



Soit M_0 un point quelconque de (P) distinct du sommet S de (P).
Soit K le projeté orthogonal de M_0 sur (D).

— Par une étude analytique, on peut montrer que :

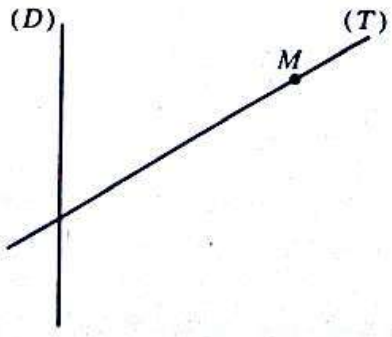
> la médiatrice (T) de $[FK]$ est la tangente en M_0 à (P).

— En déduire un programme de construction de la tangente en un point d'une parabole.

Exercices

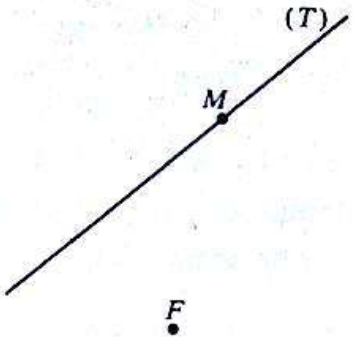
1) On donne un point M, une droite (T) passant par M et une droite (D) non perpendiculaire à (T).

Construire la parabole (P) de directrice (D) et tangente en M à (T).



Scanned by CamScanner

2) On donne un point M, une droite (T) passant par M et un point F n'appartenant pas à (T).
Construire la parabole (P) de foyer F et tangente en M à (T).



4) Régionnement du plan par une parabole

On considère la parabole (P) de sommet S et de directrice (D).

Le plan étant muni du repère (S, I, J) (défini à la page 175), la parabole (P) a pour équation réduite :

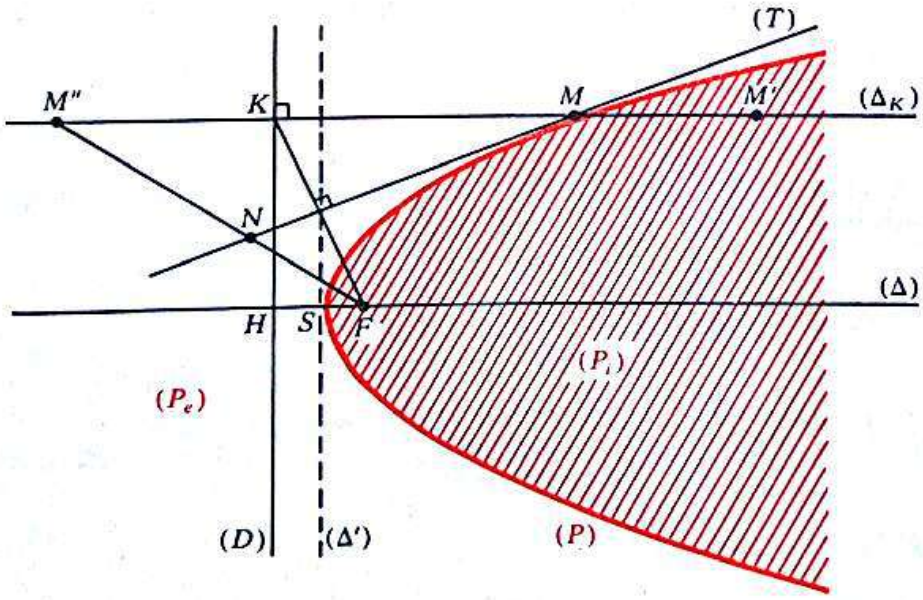
$$y^2 = 2px$$

p étant le paramètre de la parabole (P).

La parabole (P) partage le plan en deux régions :

— l'une contenant le foyer F est appelée *intérieur* de (P) et est notée (P_i);

— l'autre, est appelée *extérieur* de (P) et est notée (P_e).



Désignons par (Δ_K) la droite passant par un point K de la directrice (D) et parallèle à l'axe (Δ) de la parabole (P).

On sait que (Δ_K) coupe la parabole (P) en un point unique M situé sur la médiatrice (T) de $[KF]$.

Scanned by CamScanner

• Soit M' un point de (Δ_K) appartenant à (P_i).

On a :

$$\begin{aligned} M'F &< M'M + MF && \text{dans le triangle } M'MF \\ &< M'M + MK && \text{car : } MK = MF \\ &< M'K && \text{car : } M \in [M'K] \end{aligned}$$

Donc : $\forall M' \in (P_i) \quad d(M', F) < d\big(M'(D)\big)$.

• Soit M'' un point de (Δ_K) appartenant à (P_e).

Désignons par N le point d'intersection de (FM'') avec (T).

On a :

$$\begin{aligned} M''F &= M''N + NF && \text{car : } N \in [M''F] \\ &= M''N + NK && \text{car : } NK = NF \\ \text{Or :} \quad M''N + NK &> M''K && \text{dans le triangle } M''NK \\ M''F &> M''K \end{aligned}$$

Donc : $\forall M'' \in (P_e) \quad d(M'', F) > d\big(M'', (D)\big)$.

Conclusion

Quel que soit le point M du plan

$$\begin{aligned} M \in (P) &\iff d(M, F) = d\big(M, (D)\big) \\ M \in (P_i) &\iff d(M, F) < d\big(M, (D)\big) \\ M \in (P_e) &\iff d(M, F) > d\big(M, (D)\big) \end{aligned}$$

de cette conclusion on déduit le théorème suivant :

Théorème

Le plan étant muni d'un repère orthonormé, soit (P) la parabole d'équation réduite :

$$y^2 = 2px.$$

Alors, quel que soit le point $M(x, y)$, on a :

$$\begin{aligned} M \in (P_i) &\iff y^2 < 2px \\ M \in (P_e) &\iff y^2 > 2px. \end{aligned}$$

Scanned by CamScanner

Exercices

1 (1). Construire point par point une ellipse :

a) de grand axe 8 cm et de distance focale 4 cm.

b) de grand axe 10 cm et de petit axe 8 cm.

2 (1). Construire les sommets d'une ellipse (E) connaissant :

a) Les foyers et un point de (E).

b) Les foyers et le grand axe.

c) Les foyers et le petit axe.

3 (1). Construire une ellipse (E) dont on connaît :

a) Les foyers et un point non situé sur l'axe focal.

b) Les foyers et le petit axe.

c) Un foyer, un point de (E), le grand axe et le petit axe.

d) Un foyer, un sommet de l'axe non focal et un point de (E) autre que les sommets.

4 (1). Soit | un cercle (C) de centre O et de rayon R
un point A intérieur à (C) et distinct de O.

Trouver l'ensemble des centres des cercles tangents à (C) et passant par A.

5 (1). On considère un cercle (C) et un point A intérieur à (C).
Soit M un point de (C) et (Δ) la médiatrice de $[AM]$.
Montrer que, lorsque M décrit (C), la droite (Δ) est tangente à une ellipse. Préciser les foyers et le grand axe de cette ellipse.

6 (1). — Donner les éléments caractéristiques de l'ellipse (E) définie par son équation réduite :

$$\frac{x^2}{4}+y^2=1.$$

— Construire (E).

— Mêmes questions pour l'ellipse (E') d'équation réduite :

$$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{5}=1.$$

7 (1). Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Donner l'équation réduite de l'ellipse de centre O.

a) D'axe focal (OI), de grand axe 10 et de distance focale 6.

b) D'axe focal (OJ), de grand axe 8 et de distance focale 6.

8 (1). Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Donner l'équation réduite de l'ellipse (E) de centre O et dont deux sommets sont :

$$A(5; 0) \quad \text{et} \quad B(0; 3).$$

Trouver les autres sommets de cette ellipse ainsi que les foyers.

9 (1). Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
On considère les ellipses (E) et (E') d'équations respectives :

$$\frac{x^2}{4}+y^2=1 \quad \text{et} \quad x^2+\frac{y^2}{4}=1.$$

Trouver une isométrie qui transforme (E) en (E').
Construire (E) et (E') sur un même dessin et préciser leurs éléments caractéristiques respectifs.

10 (1). Construire une ellipse (E) connaissant :

a) Un foyer, une tangente et un sommet de l'axe non focal.

b) Un foyer, deux tangentes et le petit axe.

11 (1). Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
On considère l'ellipse (E) d'équation :

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1.$$

Soit $A(2, 0)$ et $B(0, 3)$ deux sommets de (E), M un point quelconque de (E) et G le centre de gravité du triangle ABM.
Quel est l'ensemble des points G, lorsque M décrit l'ellipse (E)?

12 (1). Le plan étant muni d'un repère orthonormé, on considère l'ellipse (E) d'équation réduite :

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1; \quad \text{avec :} \quad 0<b<a.$$

On désigne par F et F' les foyers de l'ellipse (E).

1) Soit $M(\alpha, \beta)$ un point de (E) non situé sur l'axe focal. La tangente (T) en M à l'ellipse

Scanned by CamScanner

(E) coupe l'axe focal de (E) au point V. La droite passant par M et orthogonale à (T), coupe l'axe focal en N.

a) Trouver une équation de la droite (MN).

b) Montrer que :

$$OF^2 = OF'^2 = \overrightarrow{OV} \cdot \overrightarrow{ON}.$$

2) On désigne par H et H' les projetés orthogonaux respectifs des points F et F' sur la tangente (T).

a) Quel est l'ensemble des points H et H' lorsque M décrit l'ellipse (E).

b) Montrer que le nombre réel :

$$\overrightarrow{FH} \cdot \overrightarrow{F'H'}$$

ne dépend pas de la position du point M sur (E).

13 (1). On donne deux nombres réels strictement positifs a, b et deux points distincts A, B tels que :

$$AB \neq b.$$

On considère deux points M et N tels que :

(1)
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{MN}$ aient même direction et même sens,
- $NA + MB = a$,
- $MN = b$.

1) Soit E et F des points définis par :

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{NM} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{MN}.$$

— Trouver l'ensemble (Γ_1) des points M et l'ensemble (Γ_2) des points N, lorsque les points M et N varient tels que les conditions (1) soient vérifiées.

— Montrer que (Γ_1) et (Γ_2) sont isométriques; donner une isométrie i qui applique (Γ_1) sur (Γ_2).

2) On désigne par I le point d'intersection des droites (AM) et (BN), et par J le point d'intersection des droites (AN) et (BM).

— Montrer que, lorsque M décrit l'ensemble (Γ_1), les points I et J décrivent respectivement les images (Γ_1') et (Γ_1'') de (Γ_1) par des transformations du plan. Caractériser ces transformations.

14 (1). Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J). On considère $\mathcal{S}_1$ le demi-plan de bord (OI) et contenant J.
On considère le cercle (C) de centre O et de rayon a, et l'ellipse (E) d'équation réduite :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad \text{avec :} \quad a > b > 0.$$

On pose : $(C_1) = (C) \cap \mathcal{S}_1$

$(E_1) = (E) \cap \mathcal{S}_1$.

Soit f et g deux fonctions de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ telles que (E_1) et (C_1) soient les représentations graphiques respectives de f et de g.

— Vérifier que : $f = \frac{b}{a} g$.

— Donner un programme de construction d'une ellipse dont on connaît le centre, le grand axe et le petit axe.

— Comparer :

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx \quad \text{et} \quad \int_{-a}^{a} g(x)\,dx.$$

— En déduire l'aire de l'intérieur de l'ellipse (E).

15 (2). Construire une hyperbole (H) dont on connaît :

a) Les sommets et un foyer.

b) Les sommets et un point de (H) autre que les sommets.

16 (2). Soit | un cercle (C) de centre O et de rayon R
un point A extérieur à (C).
Trouver l'ensemble des centres des cercles tangents à (C) et passant par A.

17 (2). Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Donner l'équation réduite de l'hyperbole (H) de centre O et dont un sommet et un foyer sont respectivement $S(3, 0)$ et $F(5, 0)$.

18 (2). Le plan étant muni d'un repère orthonormé, on désigne par (Γ) la représentation graphique de la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{3x+1}{2-x}.$$

On sait que (Γ) est une hyperbole. Donner tous ses éléments caractéristiques de (Γ).
Construire (Γ).

19 (2). Le plan étant muni d'un repère orthonormé, on désigne par (Γ) la représentation graphique de la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{2x^2 - x + 2}{x - 1}.$$

Montrer que (Γ) est une hyperbole.
Donner tous les éléments caractéristiques de (Γ).

Scanned by CamScanner

20 (2). Construire une hyperbole (H) connaissant :

a) Les foyers et un point de (H).

b) Les foyers et la distance des sommets.

c) Un foyer, une asymptote et un point (H).

21 (2). On considère un cercle (C) et un point A extérieur à (C).
Soit M un point de (C) et (Δ) la médiatrice de $[AM]$.
Montrer que, lorsque M décrit (C), la droite (Δ) est tangente à une hyperbole. Préciser les foyers et les sommets de cette hyperbole.

22 (2). Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J).
On considère les cercles (C) et (C') de centre O et respectivement de rayon a et b, tels que :

$$a > b > 0.$$

Soit N un point quelconque du cercle (C). La demi-droite $[OP)$ coupe le cercle (C') en un point N'.

On pose :

$$\text{MES}\,(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{ON}}) = \varphi.$$

Vérifier qu'il existe un unique point du plan ayant même abscisse que N et même ordonnée que N'. Soit M ce point.

— Exprimer les coordonnées (x, y) de M en fonction de φ, a et b.

— Trouver une égalité où ne figurent que x, y, a et b.

— Montrer que l'ensemble des points M, lorsque N décrit (C) est une ellipse (E).

Donner les éléments caractéristiques de (E).

— En déduire un programme de construction d'une ellipse dont on connaît le centre, le grand axe et le petit axe (ou les sommets).

CONIQUES A CENTRE

23 (2). Construire une conique à centre (Γ) connaissant :

a) Les foyers et une tangente.

b) Un foyer, deux tangentes et un point de contact de l'une de ces tangentes.

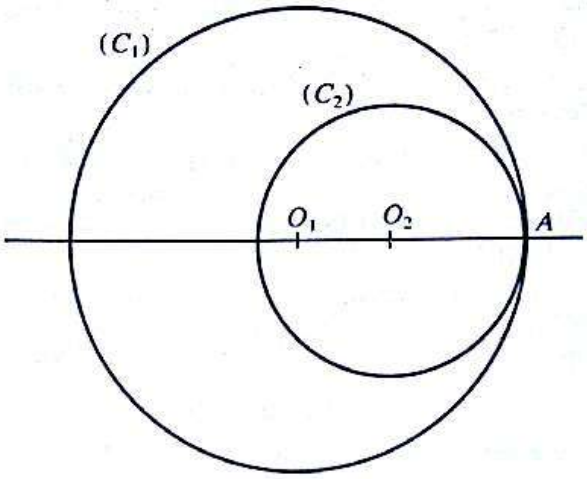
c) Les sommets de l'axe focal et une tangente.

d) Deux tangentes, le centre et la distance des sommets de l'axe focal.

e) Un foyer, deux tangentes et un point de (Γ).

f) Un foyer, une tangente et deux points de (Γ).

24 (2). On donne deux cercles (C_1) et (C_2) de centres respectifs O_1 et O_2 de rayons respectifs R_1 et R_2, tels que (C_2) soit tangent intérieurement à (C_1). Soit A leur point de contact.



1) Quel est l'ensemble des centres des cercles tangents en A aux cercles (C_1) et (C_2)?

2) Quel est l'ensemble des centres des cercles ne passant pas par A et tangents à (C_1) et à (C_2)?

25 (2). On donne un point F et deux droites (T) et (T').
Trouver l'ensemble des centres des coniques de foyer F et tangentes à (T) et (T').

26 (2). On considère deux points F et F' tels que :

$$FF' = 4.$$

Tracer en noir (resp. en rouge) des cercles de centre F et de rayons successifs :

$$1, 2, 3, \ldots 9.$$

— Examiner les intersections des cercles noirs avec les cercles rouges. En déduire la construction de coniques à centre ayant pour foyers F et F'.

— Donner la nature de chacune de ces coniques. Préciser pour chacune d'elle, la distance des sommets situés sur l'axe focal.

27 (3). On donne un cube A d'arête a.
On se propose de trouver l'arête x d'un cube X tel que le volume de X soit le double de celui de A, c'est-à-dire on se propose de résoudre l'équation :

$$(E) \qquad x \in \mathbb{R}_+, \quad x^3 = 2a^3.$$

— Montrer que le problème revient aussi à résoudre le système :

$$(S) \qquad (x, y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad \frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{2a}.$$

Scanned by CamScanner

— Montrer qu'une solution du problème peut s'obtenir par intersection de deux paraboles. Préciser les éléments caractéristiques de chacune de ces paraboles.

— Comparer les solutions trouvées dans le cas où : $a = 2$,

• en résolvant l'équation (E) (à l'aide d'une calculatrice);

• en résolvant graphiquement le système (S).

28 (3). Construire la directrice d'une parabole (P) dont on connaît :

a) le foyer et le sommet;

b) l'axe, le foyer et un point de (P).
(Combien a-t-on de possibilités?)

c) le foyer et deux points de (P);

d) le sommet, l'axe et un point de (P).

29 (3). Construire le foyer d'une parabole (P) dont on connaît :

a) la directrice, l'axe et un point de (P);

b) la directrice, l'axe et le paramètre.
(Combien a-t-on de possibilités?)

30 (3). Construire une parabole (P), connaissant :

a) le foyer et deux points de (P);

b) la directrice et deux points de (P);

c) l'axe, le sommet et un point de (P).

31 (3). On donne un point A et une droite (D) ne passant pas par A.
Trouver l'ensemble des centres des cercles tangents à (D) et passant par A.

32 (3). On donne une droite (D) et un point A non situé sur (D).
Construire un triangle isocèle AMN tel que :

$$N \in (D); \quad MA = MN; \quad (MN) \perp (D).$$

— Donner un programme de construction du triangle AMN.

— Quel est l'ensemble des points M, lorsque N décrit la droite (D).

33 (3). Le plan étant muni d'un repère orthonormé, on considère les courbes (C_1) et (C_2) d'équations respectives :

$$y = -3x^2; \quad y^2 = \frac{1}{3}x.$$

— Donner les éléments caractéristiques de la parabole (C_2).

— Montrer que (C_1) et (C_2) sont isométriques; préciser l'isométrie qui transforme (C_2) en (C_1).

— En déduire que (C_1) est une parabole; préciser ses éléments caractéristiques.

34 (3). Le plan est muni d'un repère orthonormé.
On considère la parabole (P) ayant pour foyer le point $F(2; 1)$ et pour directrice la droite (D) d'équation :

$$x + y + 1 = 0.$$

Donner une équation de (P).

35 (3). Le plan étant muni d'un repère orthonormé, on sait que la représentation graphique de toute fonction polynôme du second degré f défini par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c; \quad a \neq 0$$

est une parabole (P).
Exprimer le paramètre de (P) en fonction de a, b et c.
Quels sont, le sommet et la directrice de la parabole (P).

36 (3). Le plan étant muni d'un repère orthonormé, on considère la courbe (C) d'équation :

$$y = 3x^2.$$

— Montrer que l'image de (C) par la symétrie orthogonale s ayant pour axe la droite d'équation : $y = x$, est une parabole, préciser ses éléments caractéristiques.

— En déduire que (C) est une parabole; préciser ses éléments caractéristiques.

37 (3). **Position relative d'une droite et d'une parabole**
Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).

1) On considère la parabole (P) d'équation réduite :

$$y^2 = 4x.$$

Soit (D) la droite d'équation :

$$x - 2y + 6 = 0.$$

a) Quel est l'ensemble des points d'intersection de la droite (D) avec la parabole (P).

b) Soit (D') la droite passant par I et parallèle à (D).
Quel est l'ensemble des points d'intersection de la droite (D') avec la parabole (P).

c) Montrer qu'il existe une droite et une seule parallèle à (D) et tangente à la parabole (P).

Scanned by CamScanner

d) Montrer que la droite (Δ) d'équation :

$$y = 12$$

coupe la parabole (P) en un point et un seul.

2) Plus généralement, soit (P) la parabole d'équation réduite :

$$y^2 = 2px; \quad \text{avec :} \quad p \in \mathbb{R}_+^*.$$

Soit (D) une droite d'équation :

$$y = ax + b.$$

a) Considérons le système :

$$(S) \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \begin{cases} y^2 = 2px \\ y = ax + b. \end{cases}$$

Pour chacun des deux cas suivants :

$$a \neq 0 \quad \text{et} \quad a = 0,$$

trouver le nombre de solutions du système (S), discuter suivant les valeurs de p, a et b. (Préciser les solutions doubles.)

b) Donner une interprétation géométrique des résultats de la question précédente.

38 (3). Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
On considère la parabole (P) d'équation réduite :

$$y^2 = 6x.$$

1) Construire la parabole (P).
Trouver le foyer F et la directrice (D) de la parabole (P).

2) Donner une équation de chacune des tangentes à (P) passant par le point $A(-2, 0)$.
Calculer les coordonnées des points de contact.

3) Vérifier que le point $B(2; 2\sqrt{3})$ appartient à (P).
Montrer qu'il existe un point C de (P) et un seul tel que les points B, C et F soient alignés.
Montrer que les tangentes à (P) aux points B et C sont perpendiculaires et se coupent sur la directrice (D).

39 (3). Le plan étant muni d'un repère orthonormé, donner une équation de la parabole (P) déterminé par son sommet O et son axe (OI) et tel que :

a) $A(4; 2\sqrt{2})$ soit un point de (P).

b) $B\left(-1; \frac{1}{2}\right)$ soit un point de (P).

c) La tangente en son point d'ordonnée $\frac{1}{2}$ ait pour coefficient directeur 2.

d) La tangente en son point d'abscisse 4 et d'ordonnée positive coupe (OJ) au point $E(0, 3)$.

40 (3). Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
On considère la parabole (P) d'équation réduite :

$$y^2 = 2px; \quad p \in \mathbb{R}_+^*.$$

1) Trouver la valeur de p, pour que la parabole (P) passe par le point $A(3; 2\sqrt{3})$.
Donner alors les coordonnées du foyer de (P).

2) Donner une équation de la droite (T) tangente en A à (P).
Donner une équation de la droite (N) perpendiculaire en A à (T). (La droite (N) est appelée *la normale* à (P) en A.)

3) Quels sont les points d'intersections des droites (T) et (N) avec les droites (OI) et (OJ)?
Vérifier que (T) et (N) coupent (OI) en deux points symétriques par rapport au foyer F.

4) Construire la parabole (P), tracer la tangente (T) et la normale (N). Vérifier les résultats de la question 3).

41 (3). Le plan étant muni d'un repère orthonormé, on considère la parabole (P) d'équation réduite :

$$y^2 = 2px; \quad \text{avec :} \quad P > 0.$$

1) Donner le foyer F, la directrice (D) et le sommet S de la parabole (P).

2) Soit $M(\alpha, \beta)$ un point de (P) distinct du sommet de (P). La tangente (T) en M à la parabole (P) coupe la directrice (D) au point V.
Montrer que les droites (FM) et (FV) sont orthogonales.
Vérifier que le projeté orthogonal U du point F sur la tangente (T) appartient à la tangente en S à la parabole (P).

3) Montrer que la droite passant par M et orthogonale à la tangente (T) coupe l'axe de la parabole en un point N.
Soit m le projeté orthogonal de M sur l'axe de la parabole.
Montrer que :

$$\overline{mN} = 0.$$

(La droite (MN) est appelée *la normale* en M à la parabole (P).)

42 (3). Soit | A et B deux points distincts.
(C) un cercle tangent en A à (AB)
E le point de (C) diamétralement opposé à A.

1) Vérifier que le centre O de (C) est sur la droite (Δ) passant par A et orthogonale à (AB).

2) Montrer que la tangente à (C) en E et la tangente à (C) passant par B se coupent en un point. Soit M ce point.

Scanned by CamScanner

3) On désigne par H le point tel que :

$$\overrightarrow{HE} = \overrightarrow{AB}.$$

Montrer que : $MH = MB$.

Quel est l'ensemble des points M, lorsque le point O décrit la droite (Δ)?

43 (3). 1) Montrer qu'une parabole ne peut avoir deux tangentes parallèles.

2) Soit | F un point du plan
(T) et (T') deux droites sécantes ne passant pas par F.

Construire une parabole (P) de foyer F et tangente à (T) et (T'); préciser les points de contact.

3) Soit | (D) une droite
(T) et (T') deux droites sécantes.

Construire une parabole (P) de directrice (D) et tangente à (T) et (T').

44 (3). Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
On considère la parabole (P) d'équation réduite :

$$y^2 = 2px; \quad p \in \mathbb{R}_+^*.$$

1) Trouver la valeur de p pour que la parabole (P) admette pour foyer le point $F(3, 0)$.

2) Soit A et A' les points de (P) d'abscisse 3, et soit (T) et (T') les tangentes à (P) respectivement aux points A et A'.
Quelle est l'ordonnée du point d'intersection des droites (T) et (T')?

3) Donner une équation de chacune des droites (T) et (T').
Trouver leur point d'intersection.

Scanned by CamScanner

Problèmes

45 Le plan est muni d'un repère orthonormé.

Soit | a un nombre complexe
| A son point image.

Trouver l'ensemble (Γ) des points du plan ayant pour affixe le nombre complexe z tels que :

$(z^2 - a^2)$ soit un nombre réel.

Le plan étant muni d'un repère orthonormé, on considère l'ensemble (Γ) des points $M(x, y)$ tel que :

$$4x|x| + 9y|y| = 36.$$

Construire l'ensemble (Γ).

46 1) On donne deux points distincts A et B. Un point C du segment $[AB]$ distinct de A et de B.

On considère un cercle (C), tangent en C à (AB).

Les secondes tangentes à (C) issues des points A et B se coupent au point M.

— Vérifier que le centre O du cercle (C) est sur la droite (Δ) passant par C et perpendiculaire à (AB).

— Trouver l'ensemble décrit par le point M lorsque le centre O du cercle (C) décrit la droite (Δ).

(On envisagera les trois cas suivants :

$CA = CB$; $CA < CB$; $CA > CB$.)

2) Mêmes questions lorsque le point C est sur la droite (AB) et extérieur au segment $[AB]$.

47 On donne deux cercles (C) et (C').
Trouver l'ensemble des centres des cercles tangents à (C) et (C'); envisager les cas suivants :

a) (C) et (C') sont extérieurs;

b) (C) et (C') sont sécants;

c) (C) et (C') sont intérieurs.

48 Soit | (C) un cercle de centre O et de rayon R
| A un point du plan.

Trouver l'ensemble (Γ) des centres des cercles tangents à (C) et passant par A. (On discutera de la nature de l'ensemble (Γ) suivant les positions relatives du point A et du cercle (C).)

49 Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, I, J).
On considère l'ellipse (E) d'équation réduite :

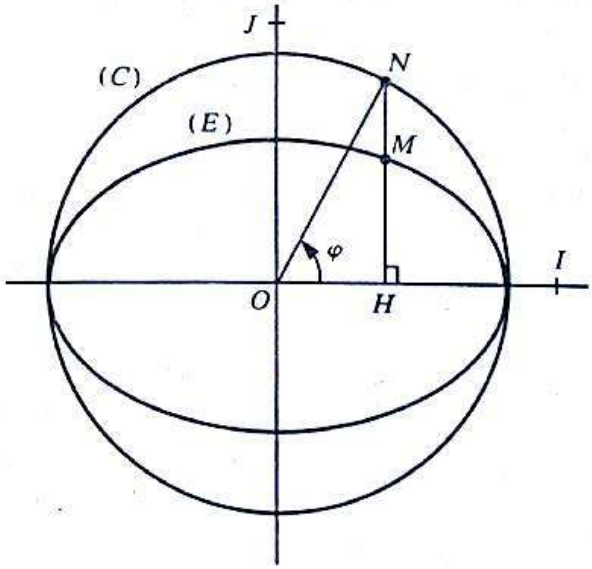
$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad \text{avec :} \quad 0 < b < a,$$

et le cercle (C) de centre O et de rayon a.
On désigne par F et F' les foyers de (E) et $2c$ sa distance focale.
On appelle *corde* d'une ellipse, tout segment dont les extrémités appartiennent à cette ellipse, et *diamètre*, toute corde passant par le centre de l'ellipse.

I 1) Soit $M(x, y)$ un point de l'ellipse (E) et N le point correspondant du cercle (C) de même abscisse que M et dont l'ordonnée a le même signe que celle de M.
Soit H le projeté orthogonal de M sur (OI).

On pose : $\overline{HM} = k \cdot \overline{HN}$.

Exprimer k en fonction de a et b.



2) On désigne par φ la mesure principale de l'angle orienté $(\widehat{\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{ON}})$.
Exprimer les coordonnées x, y du point M en fonction de a, b et φ.
(φ est appelé *anomalie excentrique* du point M.)

II 1) Trouver l'ensemble des milieux des cordes du cercle (C) parallèles à un diamètre donné de ce cercle.

Scanned by CamScanner

2) $[MM']$ étant un diamètre donné de l'ellipse (E).
Montrer que l'ensemble des milieux des cordes de (E), parallèles à (MM') est un diamètre $[M_1M_1']$ de (E).
On dit que $[M_1M_1']$ est *le diamètre conjugué* de $[MM']$.

3) Montrer que $[MM']$ est le diamètre conjugué de $[M_1M_1']$.
On dit alors que $[MM']$ et $[M_1M_1']$ sont des *diamètres conjugués* de (E).

4) Montrer que les tangentes à l'ellipse (E) en M_1 et M_1' sont parallèles à (MM').

III M étant le point de (E) d'anomalie excentrique φ (voir I), trouver les anomalies excentriques des points M', M_1 et M_1' tels que $[MM']$ et $[M_1M_1']$ soient des diamètres conjugués.

Exprimer en fonction de a et b le nombre réel :

$$OM^2 + OM_1^2.$$

Vérifier alors que ce nombre réel ne dépend pas de la position du point M sur (E).

(Cette propriété est connue sous le nom de théorème d'Apollonius pour l'ellipse.)

Scanned by CamScanner

6 Dénombrement

Leçon 1 : APPLICATIONS D'UN ENSEMBLE FINI DANS UN ENSEMBLE FINI

Leçon 2 : INJECTIONS D'UN ENSEMBLE FINI DANS UN ENSEMBLE FINI

Leçon 3 : BIJECTIONS ENTRE DEUX ENSEMBLES FINIS

Leçon 4 : SOUS ENSEMBLES D'UN ENSEMBLE FINI

Leçon 5 : CALCULS AVEC LES NOMBRES A_n^p, $n!$, C_n^p

1 Applications d'un ensemble fini dans un ensemble fini

1) Exemple 1 de situation concrète

a) **Énoncé**

> Une petite compagnie aérienne pour le transport de frêt à l'intérieur du pays, s'installe à Abidjan.
>
> Elle possède cinq avions, et compte, au début, desservir quotidiennement trois villes : Bouaké, Korhogo, Man. Chaque ville ne peut être desservie qu'une seule fois par jour mais il sera en outre possible, en fonction des quantités de marchandises à livrer, qu'un même avion puisse livrer dans une, deux ou trois villes la marchandise prévue.
>
> De combien de manières différentes l'organisation des voyages pourra-t-elle se faire?

On désignera les villes Bouaké, Korhogo, Man, par les lettres B, K, M.
Les cinq avions par les lettres A_1, A_2, A_3, A_4, A_5.

Voici, par exemple, un tableau d'utilisation pour les quatre premiers jours de fonctionnement de la compagnie :

jour \ villes	B	K	M
1	A_1	A_3	A_1
2	A_3	A_3	A_3
3	A_1	A_3	A_5
4	A_3	A_3	A_2

Scanned by CamScanner

Ce tableau peut être lu de différentes manières, suivant ce que l'on veut savoir :

— *Première ligne :*
« le premier jour, deux avions sur cinq ont été utilisés et l'avion A_1 a desservi Bouaké et Man ».

— *Deuxième colonne :*
« Korhogo a uniquement été désservie par l'avion A_3 ».

b) Élaboration d'un organigramme

• Pour la ville de Bouaké, chacun des cinq avions peut être choisi :
Il y a donc cinq choix possibles.

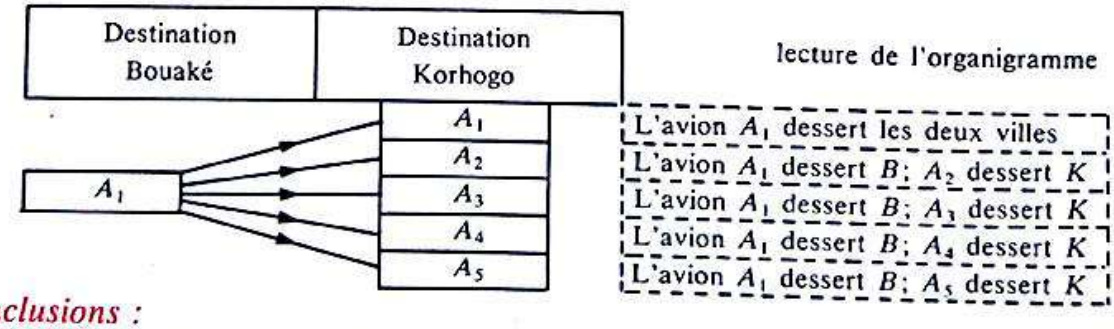
Notons ces cinq choix par le tableau :

destination Bouaké
A_1
A_2
A_3
A_4
A_5

• Supposons que l'avion A_1 ait été choisi pour Bouaké.

Il y a alors encore cinq choix possibles pour la destination Korhogo, puisqu'un même avion peut desservir plusieurs villes.

Complétons alors le tableau précédent :



Conclusions :

1) Lorsqu'un choix a été fait pour Bouaké, cinq choix peuvent alors être faits pour Korhogo.

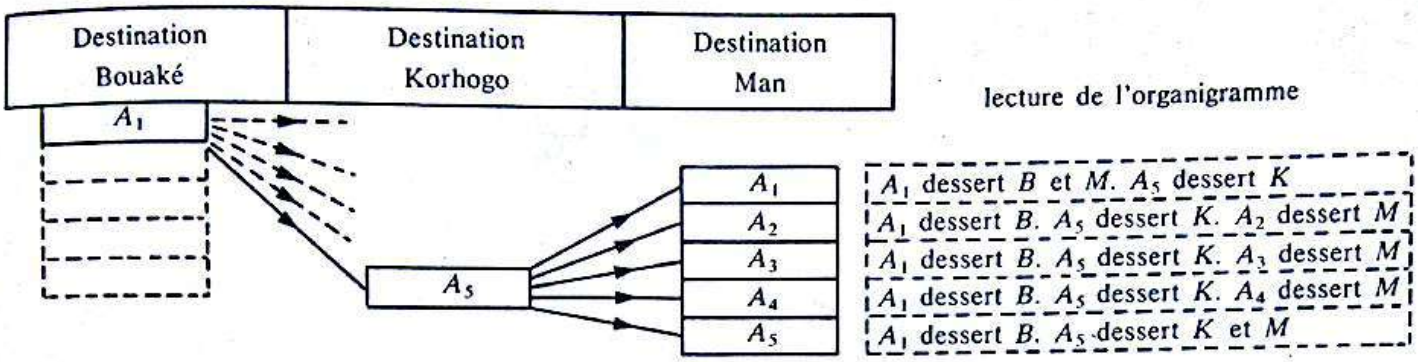
2) Pour Bouaké et Korhogo, 25 possibilités (5×5) s'offrent donc pour la repartition des voyages.

• Supposons que l'avion A_1 ait été choisi pour Bouaké et que l'avion A_5 ait été choisi pour Korhogo.

Scanned by CamScanner

Il y a encore cinq choix possibles pour la destination Man, puisqu'un même avion peut desservir plusieurs villes.

Complétons alors l'organigramme précédent :



Conclusions :

1) Lorsqu'un choix a été fait pour Bouaké et Korhogo; cinq choix peuvent alors être faits pour Man.

2) Pour Bouaké-Korhogo-Man, 125 possibilités (25×5) s'offrent donc pour la répartition des voyages.

2) Identification de chaque situation à un objet mathématique

Considérons le tableau d'utilisation pour les quatre premiers jours du fonctionnement de la compagnie (paragraphe 1) *a*)).

a) Le premier jour Bouaké et Man ont été desservies par A_1.
Korhogo a été desservie par A_3.

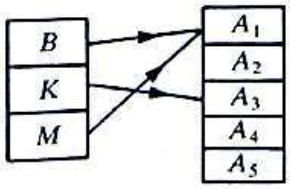
Soit E l'ensemble des trois villes desservies par la compagnie :

$$E = \{B, K, M\}.$$

Soit F l'ensemble des cinq avions assurant le service :

$$F = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}.$$

On peut définir une application de E dans F, illustrant la situation «le premier jour du fonctionnement», par le diagramme sagittal suivant :



b) **Activité**

Pour le deuxième, troisième et quatrième jour de fonctionnement de la compagnie, illustrer chaque situation par une application de E dans F.

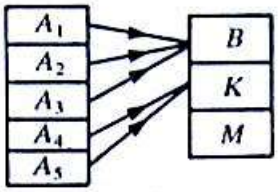
c) **Remarque importante**

La difficulté d'une telle illustration réside dans le choix de l'ensemble de départ et d'arrivée pour l'application.

Scanned by CamScanner

On serait tenté, puisque les avions « vont vers les villes », d'essayer d'illustrer ces situations par des applications de l'ensemble $\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$ dans l'ensemble $\{B, K, M\}$.

Par exemple, l'application suivante :



Signifierait que :

— tous les avions sont en service;

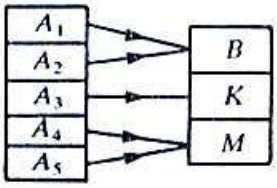
— les trois avions, A_1, A_2 et A_3 vont à Bouaké;

— les deux avions A_4 et A_5 vont à Korhogo;

— aucun avion ne va à Man.

Ceci ne correspond pas à l'organisation des voyages prévue par la compagnie.

De même, l'application :



Signifierait que plusieurs avions vont au même endroit le même jour, ce qui ne correspond pas non plus à l'organisation prévue par la compagnie.

Par contre, il s'agit de savoir pour chaque ville, quel est l'avion qui la dessert.

Conclusion.

Dans l'exemple choisi, chaque répartition des voyages à effectuer s'identifie à une application de l'ensemble $\{B, K, M\}$ dans l'ensemble $\{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}$.

3) Généralisation : Nombre d'applications d'un ensemble fini dans un ensemble fini

a) **Activités :**

1) Donner un exemple d'application de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ dans l'ensemble $\{O, N\}$.

2) A l'aide d'un organigramme, trouver le nombre d'applications que l'on peut définir de $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ dans $\{O, N\}$.

3) Mêmes questions avec les applications de l'ensemble $\{O, N\}$ dans l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Scanned by CamScanner

b) **D'une manière générale,** on admettra que :

1) Soit | p et n deux nombres entiers naturels (non nuls)
E un ensemble ayant p éléments
F un ensemble ayant n éléments.

Le nombre d'applications de E dans F est n^p.

2) Pour un ensemble de situations concrètes, si chaque situation peut être identifiée à une application d'un ensemble ayant p éléments, dans un ensemble ayant n éléments, le nombre de situations distinctes est n^p.

Exercices

1) Un court de tennis peut être éclairé par cinq projecteurs commandés séparément par cinq interrupteurs.

a) Trouver deux ensembles E et F, tels qu'un éclairage du court s'identifie à une application de E dans F.

b) En déduire le nombre d'éclairages différents que l'on peut produire. On admettra que « tous les projecteurs sont éteints » ne constitue pas un éclairage.

2) Un vendeur a en sa possession, cinq articles différents.
Au cours d'une journée, il essaie de les vendre, puis il fait le bilan à la fin de la journée.

a) Trouver deux ensembles E et F tels que chaque bilan s'identifie à une appliçation de E dans F.

b) Quel est le nombre de bilans différents qu'il peut faire à la fin d'une journée?

2 Injections d'un ensemble fini dans un ensemble fini

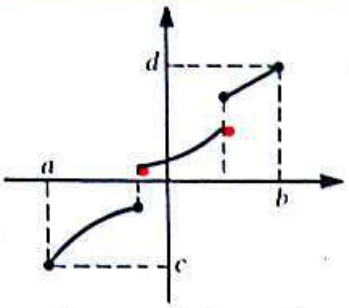
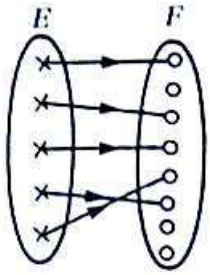
Rappel

Soit E et F deux ensembles.
On appelle application injective de E dans F, toute application de E dans F telle que tout élément de F ait au plus un antécédent dans E.

« au plus un » signifie « un ou aucun »

Scanned by CamScanner

Exemples

E et F sont deux sous-ensembles de $\mathbb{R}$	E et F sont deux ensembles finis
 Représentation graphique d'une application injective de l'intervalle $[a, b]$ dans l'intervalle $[c, d]$.	 Diagramme sagittal d'une application injective de E dans F.

Remarque

Pour pouvoir définir une application injective d'un ensemble fini E dans un ensemble fini F, il est nécessaire que le nombre d'éléments de F soit supérieur ou égal au nombre d'éléments de E.

1) Exemple 2 de situation concrète (suite de l'exemple 1)

a) **Énoncé**

> Le personnel volant de la compagnie aérienne proteste en disant que le nombre d'avions est suffisant pour qu'un même avion n'ait pas à desservir deux ou trois villes différentes dans la même journée.
>
> La direction de la compagnie accepte et doit donc changer la répartition des voyages pour qu'un avion n'ait à aller quotidiennement que dans une seule ville.
>
> De combien de manières différentes l'organisation des voyages pourra-t-elle se faire?

Le tableau d'utilisation des quatre premiers jours de fonctionnement de la compagnie en question dans l'exemple 1 n'est donc plus valable. Voici un nouveau tableau conforme aux nouvelles instructions :

Jour \ Villes	B	K	M
1	A_1	A_3	A_2
2	A_2	A_3	A_5
3	A_1	A_3	A_5
4	A_2	A_3	A_5

Scanned by CamScanner

Remarque

Les lettres rouges correspondent au changement par rapport au premier tableau (Exemple 1) :

Ligne 1 : L'avion A_1, initialement prévu pour desservir B et M est remplacé par A_2 qui desservira Man.

Ligne 2 : Seul l'avion A_3 devait voyager. Il ne doit plus maintenant desservir que Korhogo. Les avions A_2 et A_5 livreront respectivement Bouaké et Man.

Ligne 3 : elle reste inchangée.

Ligne 4 : L'avion A_3 initialement prévu pour desservir Bouaké est remplacé par l'avion A_2.

b) **Élaboration d'un organigramme**

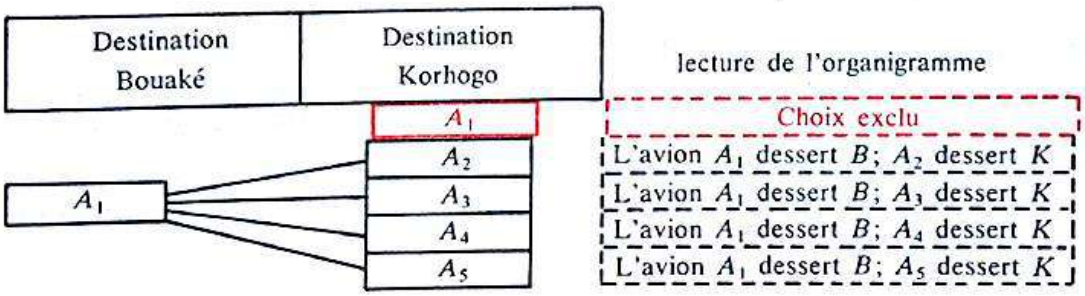
• Pour la ville de Bouaké, comme dans l'exemple 1, chacun des cinq avions peut être choisi.

Il y a donc cinq choix possibles.

• Supposons que l'avion A_1 ait été choisi pour Bouaké.

Il ne peut plus être utilisé pour aller dans une autre ville.

Il ne reste donc plus que quatre possibilités de choix pour l'avion qui desservira Korhogo.



Conclusions

1) Lorsqu'un choix a été fait pour Bouaké, quatre choix seulement peuvent être fait pour Korhogo.

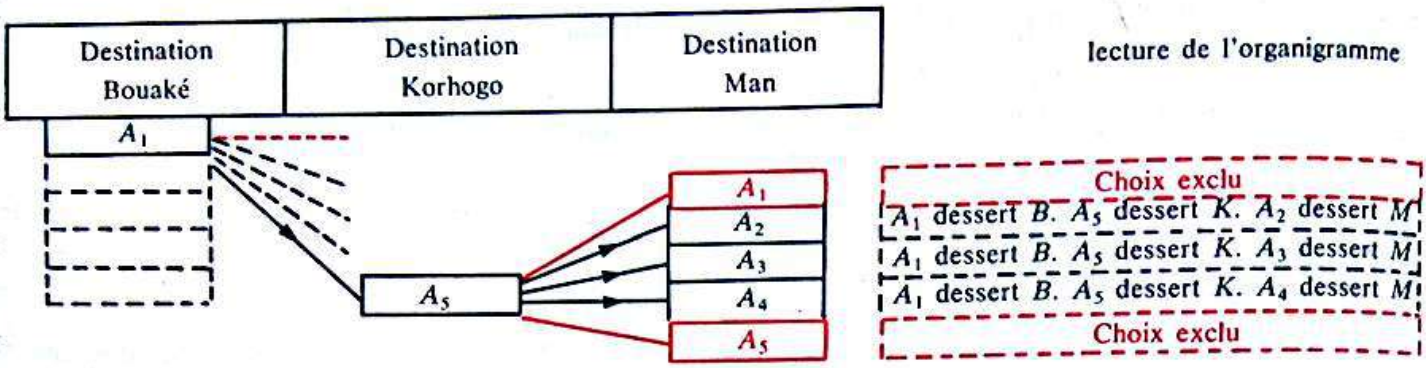
2) Pour Bouaké et Korhogo, 20 possibilités (5×4) s'offrent donc pour la répartition des voyages.

• Supposons que l'avion A_1 ait été choisi pour Bouaké et que l'avion A_5 ait été choisi pour Korhogo.

Il ne reste plus alors que trois possibilités de choix pour l'avion qui desservira Man puisqu'aucun des deux avions A_1 et A_5 ne peut être réutilisé dans la même journée.

Scanned by CamScanner

Complétons l'organigramme précédent



Conclusions

1) Lorsqu'un choix a été fait pour Bouaké et Korhogo, trois choix peuvent alors être fait pour Man.

2) Pour Bouaké, Korhogo, Man, 60 possibilités (20×3) s'offrent donc pour la répartition des voyages.

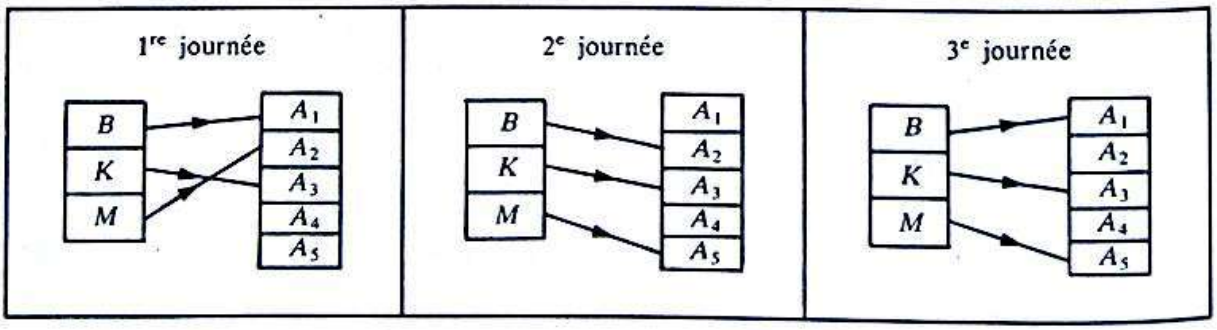
2) Identification de chaque situation à un objet mathématique

Considérons le tableau d'utilisation pour les quatre premiers jours de fonctionnement de la compagnie dans le cas ou un même avion ne peut être utilisé qu'une fois par jour.

Soit E et F les ensembles :

$$E = \{B, K, M\} \qquad F = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5\}.$$

De manière analogue au paragraphe 1, les applications suivantes de E dans F permettent d'illustrer les situations respectives des trois premières journées de fonctionnement. (Justifier!)



Un avion donné ne pouvant desservir plusieurs villes dans la même journée, chaque élément de l'ensemble F ne peut avoir qu'au plus un antécédent dans l'ensemble E.

Les applications illustrant la nouvelle manière de répartir les voyages sont donc des injections de E dans F.

Scanned by CamScanner

Remarque

Chaque application devant être injective, le choix des ensembles de départ et d'arrivée est alors simplifié par le fait que le nombre d'éléments de l'ensemble d'arrivée doit être plus grand que celui de l'ensemble de départ.

3) Généralisation : nombre d'applications injectives d'un ensemble fini dans un ensemble fini

a) **Activités**

1) Donner un exemple d'application injective de l'ensemble $\{a, b, c, d\}$ dans l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

2) A l'aide d'un organigramme, trouver le nombre d'applications injectives que l'on peut définir de l'ensemble $\{a, b, c, d\}$ dans l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

b) **D'une manière générale,** On admettra que :

1) Soit | p et n deux nombres entiers naturels tels que : $p \leqslant n$
E un ensemble ayant p éléments
F un ensemble ayant n éléments.

Le nombre d'applications injectives de E dans F est :

$$n(n-1)(n-2) \ldots \ldots [n-(p-1)].$$

2) Pour un ensemble de situations concrètes, si chaque situation peut être identifiée à une application injective d'un ensemble ayant p éléments dans un ensemble ayant n éléments, le nombre de situations différentes est :

$$n(n-1)(n-2) \ldots \ldots [n-(p-1)].$$

Remarque

Le nombre d'injections d'un ensemble ayant p éléments dans un ensemble ayant n éléments se calcule donc en faisant le produit de p nombres entiers naturels successifs, le plus grand étant n.

Notation. Ce nombre sera noté A_n^p.

Soit n et p deux nombres entiers naturels tels que : $p \leqslant n$

A_n^p = nombre d'applications injectives d'un ensemble ayant p éléments dans un ensemble ayant n éléments.

= produit de p nombres entiers naturels successifs, le plus grand étant n.

$= n(n-1)(n-2) \ldots \ldots [n-(p-1)].$

Scanned by CamScanner

Exercices

1) Calculer les nombres

$$A_5^3, \quad A_8^2, \quad A_7^1, \quad A_5^4, \quad A_5^5.$$

2) A la fin d'un repas, on présente à quatre personnes, six fruits différents.
Chacune des quatre personnes prend un seul fruit.

a) Trouver deux ensembles E et F tels qu'une distribution des fruits s'identifie à une application injective de E dans F.

b) Quel est le nombre de distributions différentes peut-on faire?

3 Bijections entre deux ensembles finis

1) Exemple 3 de situation concrète (suite de l'exemple 2)

a) Énoncé

Après avoir étudié la rentabilité des voyages, la direction de la compagnie aérienne décide que si la quantité de marchandises commandée dans chaque ville est insuffisante, exceptionnellement un seul avion fera la livraison des trois villes dans la journée.

Et c'est le cas du cinquième jour :

— Bouaké a commandé des colis de produits pharmaceutiques.

— Korhogo a commandé des barils d'essence pour l'aéroclub.

— Man a commandé des sacs de farine et des pièces de rechange pour automobiles.

De plus, comme l'ensemble de ces commandes n'excède pas la capacité d'un avion, l'avion A_1 a été choisi pour livrer les trois villes dans la journée.

Cependant, le responsable du chargement a oublié de préciser que :

1) les produits pharmaceutiques sont les plus urgents à livrer.

2) La farine et les pièces de rechange doivent aller à Man.

L'équipe technique qui doit charger l'avion ne sait donc pas dans quel ordre effectuer le chargement.
Des problèmes de manutention risquent donc d'apparaître au moment de la livraison :

Par exemple, si les sacs de farine sont chargés en dernier et que Bouaké est la première ville desservie, il sera nécessaire de décharger la farine à Bouaké pour livrer les produits pharmaceutiques puis de recharger cette farine pour continuer le voyage.

D'autre part, il serait préférable que la farine et les pièces de rechange soient chargées côte à côte puisqu'elles doivent aller à Man.
Cherchons toutes les possibilités de chargements qui poserons des problèmes de manutention lors de la livraison.

b) Organigramme

Scanned by CamScanner

Voici les différentes manières de charger l'avion :

Première marchandise chargée	Deuxième marchandise chargée	Troisième marchandise chargée	Quatrième marchandise chargée	Ordre du chargement dans l'avion
P	E	F	R	(P, E, F, R)
		R	F	(P, E, F, R)
	F	E	R	(P, F, E, R)
		R	E	(P, F, R, E)
	R	E	F	(P, R, E, F)
		F	E	(P, R, F, E)
E	P	F	R	(E, P, F, R)
		R	F	(E, P, R, F)
	F	P	R	(E, F, P, R)
		R	P	(E, F, R, P)
	R	P	F	(E, R, P, F)
		F	P	(E, R, F, P)
F	P	E	R	(F, P, E, R)
		R	E	(F, P, R, E)
	E	P	R	(F, E, P, R)
		R	P	(F, E, R, P)
	R	P	E	(F, R, P, E)
		E	P	(F, R, E, P)
R	P	E	F	(R, P, E, F)
		F	E	(R, P, F, E)
	E	P	F	(R, E, P, F)
		F	P	(R, E, F, P)
	F	P	E	(R, F, P, E)
		E	P	(R, F, E, P)

Scanned by CamScanner

Notons par P, le colis de produits pharmaceutiques
E, les barils d'essence
F, les sacs de farine
R, les pièces de rechange.

Observer l'organigramme précédent :

1) Combien y a-t-il de chargements différents?

2) Combien de chargements poserons des problèmes de manutention lors de la livraison?

c) **Remarque**

L'organigramme permet de *visualiser* toutes les situations possibles.

Le dénombrement de ces situations peut se faire de manière analogue aux paragraphes précédents.

Activité : Recherche directe du nombre de façons différentes de charger l'avion.

Compléter le raisonnement suivant :

— Pour la première marchandise à charger, il y a ... choix possibles.

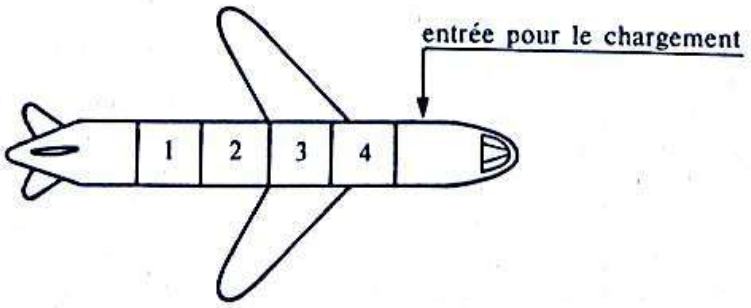
— Lorsque la première marchandise a été chargée, il reste pour la deuxième marchandise, ... choix possibles.

— Donc, pour les deux premières marchandises, il y a ... choix possibles.

— Poursuivre, ce raisonnement, en déduire le nombre de façons différentes de charger l'avion, et contrôler ce nombre à l'aide de l'organigramme.

2) Identification de chaque situation à un objet mathématique

a)

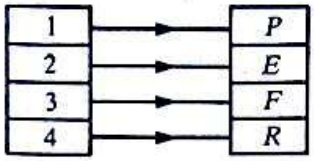


Scanned by CamScanner

On peut attribuer à chaque marchandise un numéro de place dans l'avion, comme l'indique la figure ci-dessus :

On pose : $A = \{1, 2, 3, 4\}$
$B = \{P, E, F, R\}$ (voir 1) b)).

La première ligne de l'organigramme peut être illustrée par l'application suivante :



Activité

De manière analogue, illustrer la cinquième, la douzième et la vingt-quatrième ligne de l'organigramme par des applications de l'ensemble A dans l'ensemble B.

Remarques

— chaque manière de charger l'avion est identifiable à une application de A dans B.

— Aucune des marchandises ne pouvant occuper deux places, les applications illustrant les différents chargements sont injectives.

— Toutes les marchandises devant être chargées, les applications sont surjectives.

Conclusion

Les applications illustrant les différentes manières de charger l'avion sont des applications bijectives de A sur B.

b) Comparaison avec l'exemple 2

Activités

1) Soit | E et F deux ensembles finis ayant le même nombre d'éléments.
f une application injective de E dans F.

Démontrer que f est une bijection de E sur F.

2) Soit | E et F deux ensembles finis.
f une bijection de E sur F.

Démontrer qu'alors E et F ont le même nombre d'éléments.

Conclusion

Chaque manière de charger l'avion est identifiable à une bijection de A sur B. C'est-à-dire à une injection de A dans B puisque A et B ont le même nombre d'éléments.
Le nombre de manières différentes de charger l'avion est donc égal au nombre d'applications injectives de l'ensemble A ayant quatre éléments, dans l'ensemble B ayant quatre éléments, c'est-à-dire A_4^4

et :
$$A_4^4 = 4 \times 3 \times 2 \times 1.$$

Notation particulière :

Le nombre réel A_4^4 est noté 4! et lu « factorielle 4 ».

Scanned by CamScanner

3) Généralisation

On admettra le résultat suivant :

1) Soit | n un nombre entier naturel différent de zéro
E et F deux ensembles ayant n éléments.

Le nombre de bijections de E sur F est A_n^n.

A_n^n = produit des n premiers nombres entiers naturels,
$= n(n-1)(n-2)\ldots 2\times 1$.

Le nombre réel A_n^n est noté $n!$ et lu « Factorielle n ».

2) Pour un ensemble de situations concrètes, si chaque situation peut être identifiée à une bijection entre deux ensembles finis ayant n éléments, le nombre de situations différentes est $n!$

Convention : $0! = 1$.

Exercices

1) On veut constituer un nombre de cinq chiffres en utilisant les chiffres 5, 6, 7, 8, 9 sans qu'il y ait deux ou plusieurs chiffres identiques.

a) Trouver deux ensembles E et F tels que la construction d'un nombre s'identifie à une application de E dans F. Cette application est-elle bijective?

b) Combien peut-on former de nombres différents.

c) Combien y en a-t-il qui ont le chiffre 9 en troisième position?

d) Combien y en a-t-il qui commencent par 56...

2) Dans l'exemple de la compagnie aérienne combien y a-t-il de chargements, qui se terminent par P et qui aient côte à côte R et F? (Vérifier sur l'organigramme.)

4 Sous-ensembles d'un ensemble fini

1) Exemple 4 de situation concrète (suite de l'exemple 3)

a) **Énoncé**

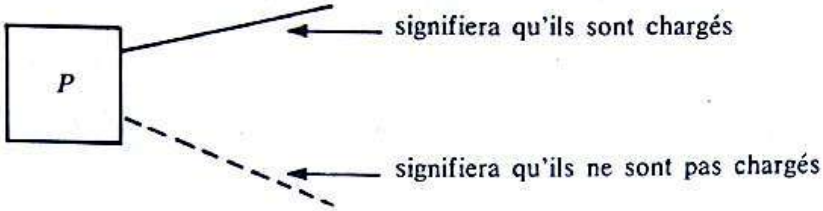
Le cinquième jour de fonctionnement de la compagnie aérienne, les conditions météorologiques sur l'ensemble du pays sont mauvaises. La compagnie ne sait pas si l'avion A_1, désigné pour desservir les trois villes, pourra effectuer le trajet complet.
L'équipe technique qui doit charger l'avion ne sait donc pas s'il faut tout charger, ou s'il faut attendre (ce qui risque de faire perdre du temps), ou bien encore s'il ne faut charger qu'une partie des marchandises (ce qui ferait avancer le travail).
Cherchons toutes les possibilités de chargement qui peuvent être faites avant qu'éventuellement un ordre de livraison partielle ou totale n'arrive.

Scanned by CamScanner

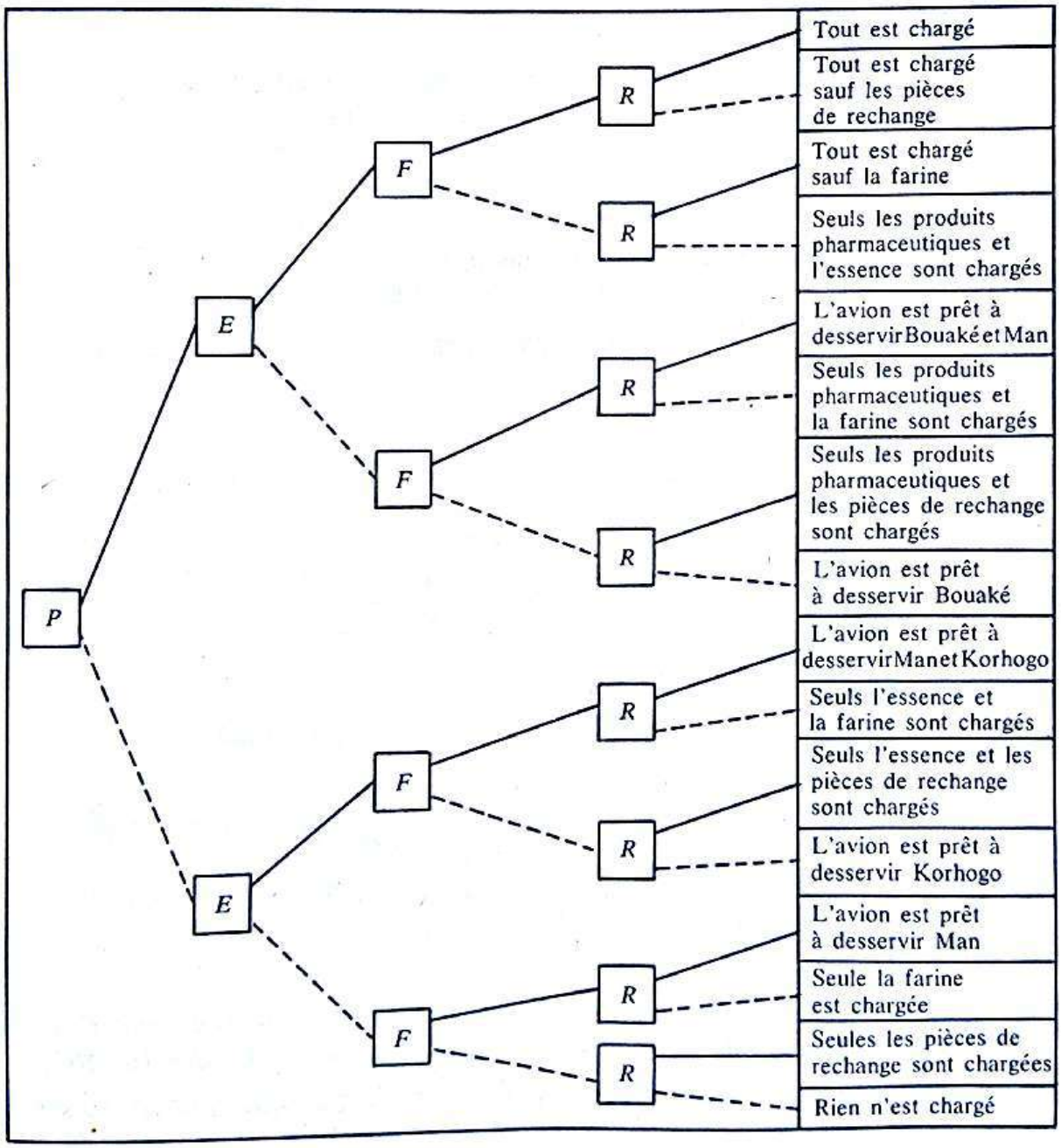
b) **Organigramme**

L'équipe technique se pose donc la question, pour chaque marchandise : « Charge-t-on cette marchandise, ou attend-on? »

Par exemple, pour les produits pharmaceutiques P, schématisons cette situation par :



et construisons l'organigramme correspondant à toutes les situations possibles :



Scanned by CamScanner

Remarque importante

Dans cet organigramme, on cherche donc à savoir uniquement quelles sont les marchandises chargées.
On ne s'intéresse pas à l'ordre du chargement.

Cet organigramme permet donc de constituer tous les sous-ensembles possibles de l'ensemble :

$$\{P, E, F, R\}.$$

Exemples

— La première ligne correspond à l'ensemble $\{P, E, F, R\}$.

— La dernière ligne correspond à l'ensemble vide $\varnothing$.

— La treizième ligne correspond au sous-ensemble $\{F, R\}$.

Conclusion. L'ensemble $\{P, E, F, R\}$ a donc 16 sous-ensembles distincts.

c) Identification de chaque situation à un objet mathématique

Pour chaque marchandise, il y a deux possibilités :

— elle est chargée;

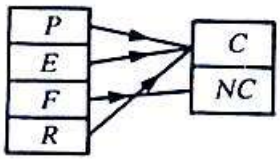
— elle n'est pas chargée.

Désignons | la phrase « elle est chargée » par la lettre C
la phrase « elle n'est pas chargée » par les lettres NC.

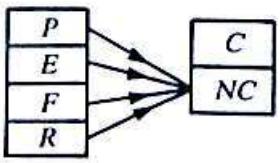
Chaque situation peut alors être identifiée à une application de l'ensemble $\{P, E, F, R\}$ dans l'ensemble $\{C, NC\}$.

Exemples

— Dans l'organigramme, la troisième ligne peut être illustrée par l'application :



— La dernière ligne peut être illustrée par l'application :



Conclusion

D'après le paragraphe 1 de ce chapitre, chaque situation peut être identifiée à une application de l'ensemble $\{P, E, F, R\}$ dans l'ensemble $\{C, NC\}$.

Il y aura donc 2^4 situations différentes; ce que l'on peut vérifier dans l'organigramme.

Scanned by CamScanner

d) **Généralisation**

Activité

Donner en extension, l'ensemble des parties de l'ensemble $\{B, A, C\}$ (on pourra utiliser un organigramme).

On démontre et nous admettrons le résultat suivant :

1) Soit n un nombre entier naturel non nul
E un ensemble ayant n éléments.

Le nombre de sous-ensembles distincts de E que l'on peut constituer est :

$$2^n.$$

2) Pour un ensemble de situations concrètes, si chaque situation peut être identifiée à un sous-ensemble d'un ensemble ayant n éléments, le nombre de situations différentes est 2^n.

2) Exemple 5 de situation concrète (suite de l'exemple 4)

a) **Énoncé**

L'équipe technique décide de commencer le chargement de l'avion.
Elle sait qu'il y a quatre marchandises à embarquer mais n'en connaît pas la nature.

Elle se rend donc à l'entrepôt et trouve :

— des produits pharmaceutiques;

— des barils d'essence;

— des sacs de farine;

— des pièces de rechange pour automobiles;

— des cartons d'insecticide;

— des barils d'huile de palme;

soit six marchandises différentes.

Cherchons combien l'équipe technique peut faire de chargements différents.

b) **Résolution du problème**

Notons I, les cartons d'insecticide
et H, les barils d'huile de palme.

Désignons par
— « disposition » : quatre marchandises chargées dans l'avion si l'on tient compte de l'ordre d'entrée.
— « chargement » : l'ensemble de quatre marchandises contenues dans l'avion sans tenir compte de l'ordre d'entrée.

Ainsi, deux chargements ne seront différents que si les marchandises sont différentes (voir exemples ci-dessous).

Scanned by CamScanner

Exemples



— sont deux « chargements » identiques;
— sont deux « dispositions » différentes;



— sont deux « chargements » différents;
— sont deux « dispositions » différentes.

Justifier les trois étapes du raisonnement suivant :

1) A un chargement donné correspond 4! dispositions différentes dans l'avion (voir paragraphe 3).

2) Chaque disposition peut être identifiée à une application injective de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$ dans l'ensemble $\{P, E, F, R, H, I\}$.
Il y a donc A_6^4 dispositions différentes.

3) Soit k le nombre entier naturel désignant le nombre de chargements différents.

On a : $k \times 4! = A_6^4$.

Le nombre de chargements différents est donc :

$$\frac{A_6^4}{4!} = \frac{6 \times 5 \times 4 \times 3}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$$
$$= 15.$$

c) Identification de chaque chargement à un objet mathématique - Généralisation

Soit l'ensemble $\{P, E, F, R, H, I\}$.
Dans l'exemple ci-dessus, chaque chargement peut être identifié à un sous-ensemble de $\{P, E, F, R, H, I\}$, ayant quatre éléments.

D'une manière générale, on démontre et nous admettrons le résultat suivant :

1) Soit | n et p deux nombres entiers naturels tels que : $p \leqslant n$
| E un ensemble ayant n éléments.

Le nombre de sous-ensembles de E, ayant p éléments est :

$$\frac{A_n^p}{p!}.$$

2) Pour un ensemble de situations concrètes, si chaque situation peut être identifiée à un sous-ensemble ayant p éléments, dans un ensemble ayant n éléments, le nombre de situations différentes est :

$$\frac{A_n^p}{p!}$$

Scanned by CamScanner

Notation : le nombre $\frac{A_n^p}{p!}$ est noté C_n^p.

Exercices

1) Calculer C_8^1, C_7^7, C_5^2, C_5^0, C_5^5.

2) Sur une table, il y a un ananas, une banane, une orange, un citron, une mangue, une papaye, une pomme.
Une personne désire manger trois de ces fruits.

a) Trouver un ensemble E tel que chaque situation s'identifie à un sous-ensemble de E.

b) Combien la personne aura-t-elle de choix différents?

3) Dans l'exemple des chargements de l'avion, combien de chargements permettront de desservir Korhogo?

5. Calculs avec les nombres A_n^p, $n!$, C_n^p

1) Expression de A_n^p et C_n^p à l'aide des factorielles

a) **Activités**

— Observer le calcul suivant :

$$A_6^4 = 6\times5\times4\times3 = \frac{6\times5\times4\times3\times2\times1}{2\times1} = \frac{6!}{2!}.$$

— Écrire de même A_5^2, A_8^2.

b) **Écriture de A_n^p à l'aide des factorielles**

Soit n et p deux nombres entiers naturels tels que : $p \leqslant n$.

On a : $A_n^p = n(n-1)\ldots[n-(p-1)] = n(n-1)\ldots(n-p+1)$

et : $(n-p)! = (n-p)(n-p-1)(n-p-2)\ldots\times2\times1.$

Donc : $A_n^p \times (n-p)! = n!$

Conclusion :
$$\boxed{A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}}$$

puisque :
$$C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}$$

On a :
$$\boxed{C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}.}$$

Scanned by CamScanner

2) Propriétés des nombres A_n^p et C_n^p

a) Soit n et p deux nombres entiers naturels tels que :

$$1 \leqslant p \leqslant n$$

on a : $\boxed{A_n^p = nA_{n-1}^{p-1}.}$

b) Soit n et p deux nombres entiers naturels tels que :

$$p \leqslant n$$

on a : $\boxed{C_n^p = C_n^{n-p}.}$

c) Soit n et p deux nombres entiers naturels tels que :

$$1 \leqslant p \leqslant n$$

on a : $\boxed{C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p.}$

Exercices

— Calculer C_5^3.
— En déduire C_5^2.
— Calculer C_8^1 puis C_8^2.
— En déduire C_9^2.
— Calculer A_7^3.
— En déduire A_8^4.

3) Calculs successifs des nombres C_n^p

a) Démontrer à l'aide des factorielles, que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad C_n^0 = C_n^n = 1.$$
$$\forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\} \quad C_n^1 = n.$$

b) Disposition pratique :

• L'égalité : $C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = C_n^p$

permet des calculs successifs des nombres C_n^p :

$C_{n-1}^{p-1} = a$	$C_{n-1}^p = b$
	$C_n^p = a + b$

Scanned by CamScanner

• En s'aidant de ce qui précède, compléter le tableau suivant :

n \ p	0	1	2	3	4	5
0	$C_0^0 = 1$					
1	$C_1^0 = 1$	$C_1^1 = 1$				
2	$C_2^0 = 1$	$C_2^1 = 2$	$C_2^2 = 1$			
3	$C_3^0 = 1$		$C_3^2 = 3$	$C_3^3 = 1$		
4	$C_4^0 = 1$				$C_4^4 = 1$	
5	$C_5^0 = 1$					$C_5^5 = 1$

Ce tableau peut être schématisé par :

1					
1	1				
1	2	1			
1	3	3	1		
1	4	6	4	1	
1	5	10	10	5	1

Exemple : le nombre C_5^3 se trouve
— sur la sixième ligne;
— dans la quatrième colonne.

Cette disposition est appelée **triangle de Pascal.**

4) Développement de $(a+b)^n$

a) Activité

Soit a et b deux nombres réels.

• *Montrer que :*

1) le développement de $(a+b)^2$ peut s'écrire :
$$C_2^2 a^2 b^0 + C_2^1 a^1 b^1 + C_2^0 a^0 b^2$$

2) le développement de $(a+b)^3$ peut s'écrire :
$$C_3^3 a^3 b^0 + C_3^2 a^2 b^1 + C_3^1 a^1 b^2 + C_3^0 a^0 b^3.$$

Scanned by CamScanner

• *Écrire de manière analogue :*
1) le développement de $(a+b)^4$;
2) le développement de $(a+b)^5$
et contrôler les résultats obtenus.

b) Généralisation

Soit a et b deux nombres réels et n un nombre entier naturel; on a alors :

$$(a+b)^n = C_n^n a^n + C_n^{n-1} a^{n-1} b + \ldots + C_n^k a^k b^{n-k} + \ldots + C_n^0 b^n$$

c'est-à-dire, en utilisant le symbole Σ :

$$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}.$$

A titre d'exercice, démontrons ce résultat par récurrence :

• l'égalité est vraie pour : $n = 1$,

• supposons que cette égalité soit vraie pour un nombre entier naturel n.

Alors l'égalité : $(a+b)^{n+1} = (a+b)^n (a+b)$

$$(a+b)^{n+1} = a(a+b)^n + b(a+b)^n$$

permet d'écrire :

$$(a+b)^{n+1} = C_n^n a^{n+1} + C_n^{n-1} a^n b + \ldots + C_n^k a^{k+1} b^{n-k} + C_n^{k-1} a^k b^{n-k+1} + \ldots + C_n^0 a b^n$$
$$+ C_n^n a^n b + \ldots + C_n^{k+1} a^{k+1} b^{n-k} + C_n^k a^k b^{n-k+1} + \ldots + c_n^0 b^{n+1}$$

or $\quad C_n^n + C_n^{n-1} = C_{n+1}^n \quad$ et $\quad C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$

et $\quad C_n^n = C_{n+1}^{n+1} = 1 \quad C_n^0 = C_{n+1}^0 = 1.$

Ainsi :

$$(a+b)^{n+1} = C_{n+1}^{n+1} a^{n+1} + C_{n+1}^n a^n b + \ldots + C_{n+1}^{k+1} a^{k+1} b^{n-k} + C_{n+1}^k a^k b^{n-k+1} + \ldots + C_{n+1}^0 b^{n+1}$$
$$= \sum_{k=0}^{n+1} C_n^k a^k b^{n-k}$$

ce qui établit le résultat.

Scanned by CamScanner

Exercices

1 On veut ranger sept objets O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6, O_7 dans trois tiroirs A, B, C.
Chaque tiroir peut contenir un ou plusieurs objets, ou peut être vide.
Combien de rangements différents peut-on réaliser?

2 On considère un groupe de 10 personnes. Chaque personne du groupe est soit sélectionnée, soit éliminée pour participer à un concours.
Combien y a-t-il de sélections différentes?

3 On tape au hasard sur une machine à écrire des mots de trois lettres (ayant un sens ou non).
Combien de mots différents peut-on taper?

4 On distribue au hasard 32 cartes à deux joueurs. En supposant qu'un joueur peut ne recevoir aucune carte, combien y a-t-il de distributions possibles?

5 Une personne entre dans une pâtisserie en ne sachant pas si les gâteaux qu'elle verra lui conviendront.
Elle observe 10 gâteaux.
Combien de choix différents peut-elle faire?

6 Combien peut-on composer de numéros de téléphone différents de six chiffres sur un cadran téléphonique?

7 1) Combien de nombres de trois chiffres peut-on former avec les chiffres 1, 2, 3, 4, 5?

2) Combien de nombres de sept chiffres peut-on former avec les chiffres 1, 2, 3?

8 Combien de nombres de trois chiffres peut-on former avec le système décimal.

Attention : un nombre de trois chiffres commençant par 0 n'est en fait qu'un nombre de deux chiffres au plus.

9 On lance en l'air trois pièces de monnaie :

— une pièce de 5 F;

— une pièce de 10 F;

— une pièce de 25 F.

Lorsqu'elles retombent, on observe pour chaque pièce, si elle est sur le côté « pile » ou le côté « face ».
Combien de résultats différents peut-on avoir?

10 On considère l'ensemble des nombres de trois chiffres du système décimal.
Combien y en a-t-il

1) qui sont pairs?

2) qui sont impairs?

3) qui s'écrivent sans le chiffre 1?

4) qui ont au moins une fois le chiffre 1?

11 On fait tomber trois billes numérotées 1, 2, 3 dans trois trous a, b, c.
Chaque trou peut contenir une ou plusieurs billes, ou être vide et chaque bille est dans un trou.
Quel est le nombre de possibilités pour que le trou a contienne deux billes exactement?

12 Combien peut-on former de systèmes linéaires de trois inéquations avec les expressions

« $(x-y+5)$ », « $(2x+3y-1)$ », « $(x+y)$ »

et les symboles « >0, « <0 », « $\geqslant 0$ », « $\leqslant 0$ »?

13 1) On distribue au hasard 32 cartes à deux joueurs. Chacun des deux joueurs doit recevoir au moins une carte. Combien peut-on faire de distributions différentes?

2) Même question lorsqu'on distribue 32 cartes à trois joueurs. Chacun des trois joueurs devant recevoir au moins une carte.

14 Combien peut-on former de nombres de trois chiffres avec les chiffres 1, 2, 3, 4, 5 sans qu'il y ait répétition d'un chiffre dans un nombre.

15 On dispose de sept cartons sur lesquels on a écrit les lettres A, B, C, D, E, F et G.
A l'aide de ces sept cartons :

1) Combien peut-on écrire de mots de sept lettres (ayant un sens ou non)?

2) Combien peut-on écrire de mots de quatre lettres?

3) Combien peut-on écrire de mots de quatre lettres comportant dans l'ordre, une consonne, une voyelle et deux consonnes?

16 Trois personnes veulent manger chacune un gâteau. Il y a cinq gâteaux.
Combien y a-t-il de choix possibles?

Scanned by CamScanner

17 De combien de manières trois personnes peuvent-elles prendre place dans une automobile de quatre places :

1) Pour s'abriter de la pluie, sans que la voiture ait à être déplacée?

2) Pour déplacer la voiture en supposant que chaque personne ait son permis de conduire...?

18 Combien d'équipes de football peut-on composer lorsqu'il faut choisir les joueurs parmi vingt personnes?

19 Un championnat comporte 13 équipes qui doivent se rencontrer par matchs « aller-retour ».
Combien y aura-t-il de matchs?

20 Dans une assemblée de douze personnes, on veut créer un comité de trois personnes avec les fonctions de président, secrétaire et trésorier.
Cette assemblée est composée de huit hommes et quatre femmes.

1) De combien de manières peut-on former ce comité, une même personne ne pouvant pas cumuler plusieurs fonctions?

2) De combien de manières peut-on former ce comité si on veut qu'une femme soit secrétaire?

21 1) Dix personnes vont s'asseoir à une table ronde. Les chaises sont numérotées.
De combien de manières peut-on faire asseoir ces dix personnes?

2) Les chaises ne sont pas numérotées. Combien y a-t-il alors de dispositions différentes?

22 1) Sur un bateau, on dispose de quatre pavillons :

— deux rouges identiques;

— un bleu;

— un vert.
Combien de signaux différents peut-on faire en alignant verticalement ces quatre pavillons?

2) Même question si l'on dispose de trois rouges identiques, un bleu, un vert? (on aligne quatre pavillons).

23 Dans une chaîne de fabrication, une pièce doit passer sur cinq machines A, B, C, D, E.

1) Combien y a-t-il de trajets possibles?

2) Combien y a-t-il de trajets possibles si la pièce doit d'abord passer sur la machine E?

3) Combien y a-t-il de trajets possibles si la pièce doit passer sur la machine B avant de passer sur la machine E?

4) Combien y a-t-il de trajets possibles si la pièce doit passer sur la machine B, avant de passer sur les machines E et D?

24 On considère le mot « théorème ».
On appelle anagramme de ce mot, tout autre mot composé avec les mêmes lettres.

1) Combien d'anagrammes (ayant un sens ou non) peut-on composer?

2) Combien d'anagrammes peut-on composer, si l'on supprime les accents?

25 Quatre garçons et deux filles viennent s'asseoir sur un banc de 6 places.
Combien ont-ils de manières différentes de le faire si les deux filles veulent rester l'une à côté de l'autre?

26 On considère l'ensemble E tel que :

$$E = \{5, 6, 7, 8, 9\}.$$

1) Combien de nombres de cinq chiffres peut-on former avec les éléments de E?

2) Combien peut-on former de nombres de cinq chiffres se terminant par 9?

3) Combien peut-on former de nombres de cinq chiffres commençant par 9?

4) Combien peut-on former de nombres de cinq chiffres commençant par 56?

27 On considère une classe de 30 élèves qui décide de désigner un chef de classe, deux adjoints, et deux responsables de l'entretien. Ces cinq élèves forment un comité.
Cette classe est composée de :

— 15 garçons internes,

— 12 garçons externes,

— 3 filles externes.

De combien de façons différentes peut-on composer le comité si l'on veut que

— le chef de classe soit interne?

— les adjoints soient de sexes différents?

28 On considère un jeu de 32 cartes.
De combien de manières différentes peut-on choisir cinq cartes :

1) Sans condition particulière?

2) Pour que toutes les cartes soient rouges?

3) Pour qu'il y ait l'as de trèfle?

Scanned by CamScanner

4) Pour qu'il n'y ait aucun cas?

5) Pour qu'il y ait exactement un as?

6) Pour qu'il y ait au moins un as?

7) Pour qu'il y ait 2 cartes rouges et 3 cartes noires?

8) Pour qu'il y ait exactement deux cœurs?

9) Pour qu'il y ait au plus une carte rouge?

10) Pour qu'il y ait au moins deux rois?

11) Pour qu'il y ait exactement une dame et exactement deux cœurs?

29 Dans un sac, il y a :

— quatre boules bleues,

— trois boules blanches,

— deux boules rouges,

— une boule verte.

On prend simultanément trois boules.
Quel est le nombre de possibilités d'avoir :

1) Trois boules de même couleur?

2) Trois boules de couleurs différentes?

3) Au moins deux boules de même couleur?

4) Exactement une boule blanche?

5) Aucune boule bleue?

6) Au moins une boule bleue?

30 Dans un sac il y a :

— trois boules rouges numérotées 1, 2, 3;

— quatre boules vertes numérotées 4, 5, 6, 7;

— deux boules blanches numérotées 8, 9.

On prend successivement trois boules que l'on pose côte à côte sur une table.
Quel est le nombre de possibilités d'avoir :

1) Trois boules rouges?

2) Trois boules de même couleur?

3) Trois boules de couleurs différentes?

4) Une boule blanche entre une rouge et une verte?

31 Dans un sac il y a :

— cinq boules vertes numérotées 1, 2, 3, 4, 5;

— trois boules noires numérotées 6, 7, 8;

— une boule rouge numérotée 0.

On prend une boule dans le sac, on note sa couleur et son numéro, on la remet dans le sac, puis on recommence deux fois encore cette même manipulation. Quel est le nombre de possibilités d'avoir :

1) Trois boules vertes?

2) Trois boules de même couleur?

3) Trois boules de couleurs différentes?

4) La boule rouge?

5) La somme des trois numéros inférieure strictement à 15?

32 On considère un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
On lance trois fois de suite ce dé et on note à chaque lancer le chiffre inscrit sur la face supérieure. On appelle résultat le triplet des trois chiffres obtenus.

1) Combien y a-t-il de résultats possibles?

2) Combien y a-t-il de résultats qui n'ont pas le chiffre 1?

3) Combien y a-t-il de résultats qui ont exactement deux fois le chiffre 1?

4) Combien y a-t-il de résultats qui ont au moins une fois le chiffre 6?

5) Combien y a-t-il de résultats dont la somme des trois chiffres est égale à 9?

6) Combien y a-t-il de résultats dont les trois chiffres forment une suite arithmétique?

33 On considère quatre paires de chaussettes. Les chaussettes d'une même paire sont de même couleur. Les paires sont de couleurs différentes.
On accroche ces chaussettes côte à côte sur un fil.
Combien d'assortiments de couleurs peut-on faire si on s'interdit de mettre côte à côte deux chaussettes de même couleur?

34 Combien y a-t-il de numéros de téléphone de 7 chiffres contenant exactement

— deux fois le chiffre 0?

— trois fois le chiffre 9?

35 Sur un cercle $\mathcal{C}$, on place cinq points.

1) Combien de pentagones ayant ces points pour sommets peut-on alors dessiner?

2) *a*) Combien obtient-on de droites en joignant ces points deux à deux?

b) Quel est le nombre de points d'intersection de ces droites, autres que les cinq points donnés?

Scanned by CamScanner

Calculs avec les nombres A_n^p, $n!$, C_n^p

36 Calculer les nombres réels suivants :

(1) $\dfrac{5! \times 12!}{10!}$ (4) $\dfrac{17!}{16!}$

(2) $\dfrac{1\,515! \times 7!}{1\,512! \times 5!}$ (5) $\dfrac{13!}{13 \times 12!}$

(3) $\dfrac{10!}{6!\,7!}$ (6) $\dfrac{7!}{10!}(10! - 7!)$.

37 Écrire à l'aide de la notation factorielle :

(1) $10 \times 9 \times 8$ (3) $7 \times 6 \times 5 \times 3 \times 2$

(2) $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3$ (4) $10 \times 9!$

38 Simplifier les expressions suivantes en ayant soin de préciser l'ensemble des valeurs de n (nombre entier naturel) pour lesquelles elles sont définies :

(1) $\dfrac{n!}{(n-2)!}$ (4) $\dfrac{n!}{(n+1)!} - \dfrac{(n-1)!}{n!}$

(2) $\dfrac{(n-1)!}{(n+2)!}$ (5) $\dfrac{(2n)!}{2n-2}$

(3) $\dfrac{n!}{(n+1)!}$ (6) $\dfrac{n!}{(n-5)! \times 5!}$.

39 Résoudre dans $\mathbb{N}$ les équations suivantes en ayant soin de préciser pour quelles valeurs de n, elles sont définies :

(1) $C_n^5 = 17C_n^4$ (3) $2A_n^2 + 50 = A_{2n}^2$

(2) $C_{2n+4}^{3n-1} = C_{2n+4}^{n}$ (4) $C_n^3 - C_n^2 = \dfrac{n^3 - 6n^2}{6} + 5$

(5) $\dfrac{C_n^4}{C_n^2} = 13$ (7) $C_n^2 = 55$

(6) $C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 = \dfrac{7n}{2}$ (8) $C_n^{n-2} = n$.

40 1) Développer $(a+b)^n$ (a et b sont des nombres réels et n un nombre entier naturel).

2) En donnant à a et b des valeurs convenablement choisies, calculer :

a) $2 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1}$.

b) $1 + (-1)^n - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + C_n^4 - \ldots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1}$.

c) $-C_7^1 + C_7^2 - C_7^3 + C_7^4 - C_7^5 + C_7^6$.

d) Déduire du *a*) et du *b*)

— lorsque n est un nombre entier naturel pair :

$$2 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots + C_n^{n-1}$$

— lorsque n est un nombre entier naturel impair :

$$1 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots + C_n^{n-1}.$$

e) $1 + 2C_n^1 + 4C_n^2 + 8C_n^3 + \ldots + 2^n$.

f) $2C_6^1 + 4C_6^2 + 8C_6^3 + 16C_6^4 + 32C_6^5 + 65$.

41 1) Soit E un ensemble fini ayant n éléments ($n \in \mathbb{N}^*$). Combien peut-on former de sous-ensembles de E distincts?

2) En déduire la valeur de

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n.$$

Scanned by CamScanner

7 Statistique

Leçon 1 : SÉRIES STATISTIQUES DOUBLES

Leçon 2 : NUAGES DE POINTS

Leçon 3 : AJUSTEMENT ET CORRÉLATION LINÉAIRE

1 Série statistique double

1) Exemple 1

a) **Le tableau suivant donne, pour douze dactylographes :**

— le nombre d'années d'expérience

— le nombre de mots tapés à la machine à écrire en une minute.

dactylographe	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
années d'expérience	4	7	8	1	6	3	5	2	9	6	7	10
nombre de mots tapés	28	45	49	20	44	30	38	22	50	35	42	53

Soit P la population étudiée :

$$P=\{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L\}.$$

Soit X le caractère « nombre d'années d'expérience ».

L'ensemble des modalités de X est l'ensemble M_X tel que :

$$M_X=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}.$$

Soit Y le caractère « nombre de mots tapés ».

L'ensemble des modalités de Y est l'ensemble M_Y tel que :

$$M_Y=\{20, 22, 28, 30, 35, 38, 42, 44, 45, 49, 50, 53\}.$$

Ainsi, par exemple :

$$X(D)=1, \quad Y(D)=20.$$

Scanned by CamScanner

Exercice Répondre aux questions suivantes (rappel des cours de seconde et première).

— Quel est l'effectif de la modalité 22 du caractère Y?

— Quel est l'effectif de la modalité 9 du caractère X?

— Quel est l'effectif de la modalité 6 du caractère X?

— Quelle est la distribution statistique associée au caractère X?

— Quelle est la distribution statistique associée au caractère Y?

b) **Activité**

Soit f l'application de P dans $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ définie par

$$f : P \longrightarrow \mathbb{R}\times\mathbb{R}$$
$$w \longmapsto (X(w),\ Y(w))$$

— Quelle est l'image par f de l'élément J?

— L'élément (9; 50) a-t-il un antécédent dans P? Combien a-t-il d'antécédants?

— Combien d'antécédants l'élément (2; 44) a-t-il dans l'ensemble P?

— Quel est l'ensemble des images par f des éléments de p?

c) **Tableau à double entrée**

M_Y \ M_X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
20	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
22	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
28	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0
30	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
35	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
38	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
42	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
44	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
45	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
49	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
50	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
53	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

Scanned by CamScanner

— Le tableau ci-dessus représente le produit cartésien $M_X \times M_Y$.

— Dans chaque case du tableau, on a inscrit le nombre d'antécédants du couple correspondant par l'application f.

— Ce nombre d'antécédants est appelé *effectif du couple* considéré.

Exemple :

— l'effectif du couple (4; 28) est 1;

— l'effectif du couple (2; 35) est 0.

Remarques

— La présentation des résultats par un tableau à double entrée supprime l'identité des éléments de la population étudiée.

— La présentation des résultats en un tableau dit « linéaire », comme dans le *a*) n'est facilement réalisable que si l'effectif de la population étudiée est faible.

2) Exemple 2

a) Énoncé

A l'oral d'un concours, deux examinateurs A et B s'entretiennent avec cent candidats, et attribuent chacun une note prise dans l'ensemble

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Soit X le caractère « note attribuée par l'examinateur A" et M_X l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ des modalités de X.

Soit Y le caractère « note attribuée par l'examinateur B" et M_Y l'ensemble $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ des modalités de Y.

Les résultats sont donnés par le tableau à double entrée ci-dessous :

MY \ MX	0	1	2	3	4	5
0	1	2	1	0	0	0
1	4	5	3	1	0	0
2	0	4	15	13	5	0
3	0	2	10	7	3	3
4	0	0	3	6	4	3
5	0	0	0	2	1	2

Désignons par « couple de notes », un élément de l'ensemble $M_X \times M_Y$.

Scanned by CamScanner

Le tableau permet alors de dire que :

— 13 candidats ont eu pour couple de notes (3; 2).

— Aucun candidat n'a eu pour couple de notes (5; 0).

On dit aussi que :

— 13 est l'effectif du couple (3; 2).

— 0 est l'effectif du couple (5; 0).

Exercice Dans le cas de l'exemple ci-dessus :

1) Quel est l'effectif du couple (1; 0)?
du couple (5; 2)?

2) Combien de fois l'examinateur A a-t-il attribué la note 2?

b) **Séries statistiques marginales**

A partir du tableau à double entrée, on peut obtenir :

— la série statistique associée au caractère X;

— la série statistique associée au caractère Y.

En effet :

— le nombre de couples ayant pour premier élément 1 est 13; signifie que l'effectif de la modalité 1 du caractère X est 13.

— De même, observer dans le tableau que l'effectif de la modalité 2 du caractère Y est 37.

Il est donc possible, à partir du tableau à double entrée, de reconstituer les séries associées respectivement aux caractères X et Y.
Ces résultats seront présentés de la manière suivante :

MY \ MX	0	1	2	3	4	5	
0	1	2	1	0	0	0	**4**
1	4	5	3	1	0	0	**13**
2	0	4	15	13	5	0	**37**
3	0	2	10	7	3	3	**25**
4	0	0	3	6	4	3	**16**
5	0	0	0	2	1	2	**5**
	5	**13**	**32**	**29**	**13**	**8**	

Exercice Présenter sous forme de tableaux linéaires les séries statistiques associées respectivement aux caractères X et Y.

Scanned by CamScanner

3) Exemple 3 : les modalités sont regroupées en classes

a) Énoncé

On considère une population de cent individus.
On relève pour chaque individu :
— son poids en kilogrammes,
— sa taille en centimètres.
Soit X le caractère « poids » et Y le caractère « taille ».
Les résultats sont regroupés
— en classes d'amplitude 5 kg pour le poids,
— en classes d'amplitude 5 cm pour la taille,
et présentés dans le tableau à double entrée ci-dessous :

MY \ MX	[40, 45[	[45, 50[	[50, 55[	[55, 60[
[150, 155[	20	9	1	0
[155, 160[	2	18	4	1
[160, 165[	0	5	12	6
[165, 170[	0	1	7	4

Où M_X et M_Y désignent les ensembles respectifs des classes de modalités des caractères X et Y.

b) Séries statistiques marginales

Ce tableau peut être complété :
— en indiquant par une colonne et une ligne supplémentaire le centre de chaque classe,
— en donnant les séries statistiques associées respectivement aux caractères X et Y.
On obtient :

centre de chaque classe →		**42,5**	**47,5**	**52,5**	**57,5**	
	MY \ MX	[40, 45[	[45, 50[	[50, 55[	[55, 60[	
152,5	[150, 155[	20	9	1	0	**30**
157,5	[155, 160[	2	18	4	1	**25**
162,5	[160, 165[	0	5	12	6	**23**
167,5	[165, 170[	0	1	7	14	**22**
		22	**33**	**24**	**21**	← séries statistiques marginales

Scanned by CamScanner

Exercice

Dans le cas de l'exemple 3 :

— Combien d'individus ont une taille inférieure à 160 cm?

— Combien d'individus ont un poids supérieur ou égal à 50 kg?

— Combien d'individus ont un poids supérieur ou égal à 50 kg pour une taille inférieure à 160 cm?

4) Définition et présentation d'une série statistique double

a) Définition

Soit P une population d'effectif N, sur laquelle sont définis deux caractères X et Y.

$\{x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_p\}$ l'ensemble des modalités du caractère X.

$\{y_1, y_2, \ldots, y_j, \ldots, y_m\}$ l'ensemble des modalités du caractère Y.

L'application

$$f : P \longrightarrow \mathbb{R}\times\mathbb{R}$$
$$\omega \longmapsto (X(\omega), Y(\omega)).$$

Soit x_i et y_j deux modalités respectives de X et Y.

- On appelle **effectif du couple** (x_i, y_j), le nombre d'antécédents de ce couple par l'application f. Cet effectif est noté n_{ij}.
- L'ensemble des triplets (x_i, y_j, n_{ij}) est appelé série statistique double de caractère (X, Y).

b) Présentation par un tableau à double entrée

Soit M_X l'ensemble des modalités du caractère X.
M_Y l'ensemble des modalités du caractère Y.

M_X / M_Y	x_1	x_2	---	x_i	---	x_p	
y_1	n_{11}	n_{21}	---	n_{i1}	---	n_{p1}	α_1
y_2	n_{12}	n_{22}	---	n_{i2}	---	n_{p2}	α_2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
y_j	n_{1j}	n_{2j}	---	n_{ij}	---	n_{pj}	α_j
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
y_m	n_{1m}	n_{2m}	---	n_{im}	---	n_{pm}	α_m
	β_1	β_2	---	β_i	---	β_p	

effectif des modalités du caractère Y

$\alpha_j = \sum_{k=1}^{p} n_{kj}$

effectif des modalités du caractère X

$\beta_i = \sum_{k=1}^{m} n_{ik}$

Scanned by CamScanner

Remarques

— Comme dans les exemples étudiés précédemment, les séries statistiques respectivement associées aux caractères X et Y sont obtenues à partir du tableau à double entrée donné pour la série statistique double.

— Il est prudent de vérifier après les calculs des effectifs des modalités des caractères X et Y que :

$$\sum_{i=1}^{p} \beta_i = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j.$$

Le nombre trouvé est l'effectif N de la population étudiée.

2 Nuage de points associé à une série statistique double

1) Exemple 1

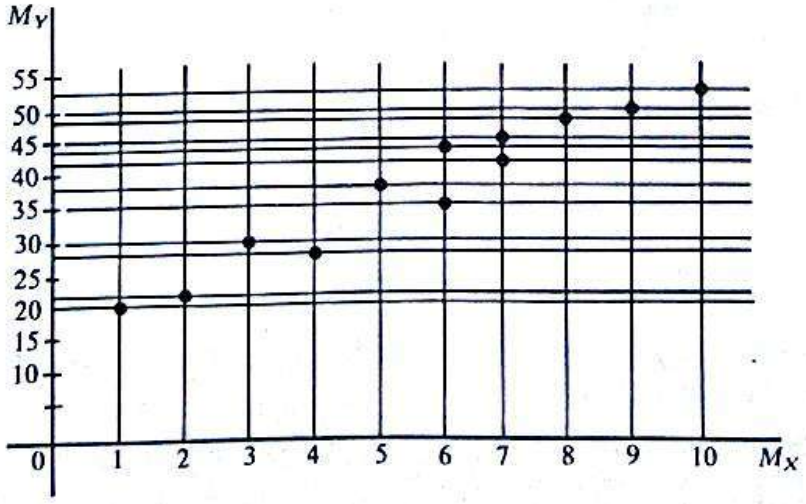
Considérons l'exemple 1 étudié au paragraphe 1.

Les ensembles M_X et M_Y des modalités des caractères respectifs X et Y sont tels que :

$$M_X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$
$$M_Y = \{20, 22, 28, 30, 35, 38, 42, 44, 45, 49, 50, 53\}.$$

Dans le plan muni d'un repère orthogonal, soit F la représentation graphique du produit cartésien $M_X \times M_Y$.
L'effectif d'un couple, élément du produit cartésien, est donné par le tableau à double entrée associé à la série (paragraphe 1-*c*)).

Convenons de ne représenter dans le plan que les points dont le couple de coordonnées a un effectif non nul.
On obtient la représentation graphique suivante :



L'ensemble des points obtenus est appelé *nuage de points* associé à la série statistique double de caractère (X, Y).

Scanned by CamScanner

Remarque

D'après le tableau à double entrée associé à cette série, le couple de coordonnées de chaque point représenté a pour effectif 1 (vérifier!)

2) Définition

Soit X et Y deux caractères définis sur une population P.

$\{x_1, x_2, ..., x_i, ..., x_p\}$ l'ensemble M_X des modalités de X.

$\{y_1, y_2, ..., y_j, ..., y_m\}$ l'ensemble M_Y des modalités de Y.

Le plan étant muni d'un repère orthogonal, soit F la représentation graphique du produit cartésien $M_X \times M_Y$.

On appelle **nuage de points** associé à la série statistique double de caractère (X, Y), le sous-ensemble de F, dont les points ont un couple de coordonnées (x_i, y_j) d'effectifs non nuls.

3) Exemple 2

Considérons l'exemple 2 étudié au paragraphe 1 de ce chapitre.
Rappelons le tableau à double entrée associé à cette série statistique double :

M_Y \ M_X	0	1	2	3	4	5	
0	1	2	1	0	0	0	**4**
1	4	5	3	1	0	0	**13**
2	0	4	15	13	5	0	**37**
3	0	2	10	7	3	3	**25**
4	0	0	3	6	4	3	**16**
5	0	0	0	2	1	2	5
	5	**13**	**32**	**29**	**13**	**8**	

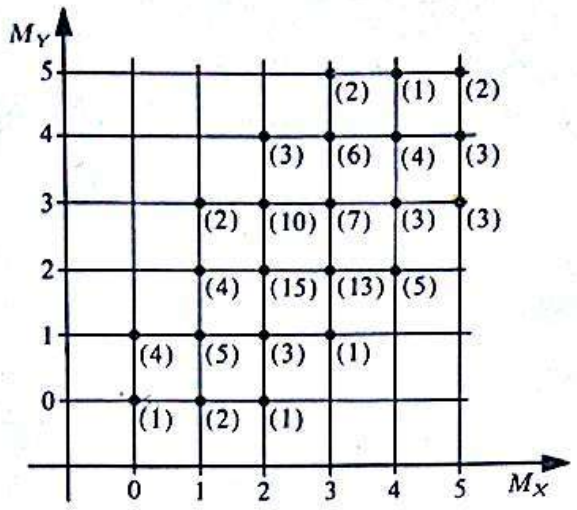
Contrairement à l'exemple précédent, certains couples de modalités ont des effectifs supérieurs à 1.

Un nuage de points analogue à celui de l'exemple 1 ne représentera pas la réalité de cette série statistique double.

Voici deux possibilités de représentation du nuage de points, pour qu'il soit représentatif de cette série.

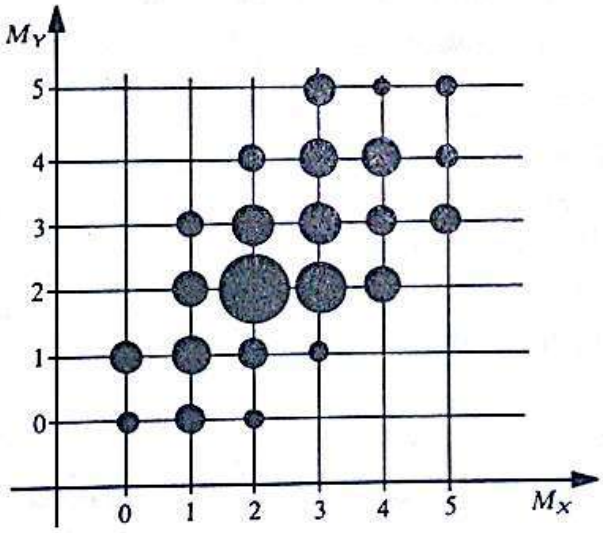
Scanned by CamScanner

a) **Ensemble de points pondérés**



Disposition pratique. On indique à droite de chaque point du nuage, l'effectif de son couple de coordonnées.

b) **Représentation par « tâches »**



Chaque point du nuage est le centre d'un disque dont l'aire est proportionnelle à l'effectif du couple de ses coordonnées.

Pratique du calcul du rayon de chaque disque

1) On choisit une longueur pour le rayon du disque centré au point dont le couple de coordonnées a l'effectif le plus élevé.
Dans l'exemple :

— l'effectif le plus élevé est 15;

— le couple dont l'effectif est 15 est (2; 2).

Pour le disque centré au point de coordonnées (2; 2), choisissons par exemple pour rayon 0,5 cm.

Scanned by CamScanner

2) Calcul des rayons de chaque disque centré sur les points du nuage.
Soit r le rayon du disque centré sur le point dont le couple de coordonnées a pour effectif n.

— L'aire de ce disque est πr^2.

— Les aires étant proportionnelles aux effectifs on a :

$$\frac{\pi(0,5)^2}{15} = \frac{\pi r^2}{n}.$$

On en déduit que $$r = 0,5\sqrt{\frac{n}{15}}.$$

D'où le tableau :

effectif	1	2	3	4	5	6	7	10	13	15
rayon du disque	0,13	0,18	0,22	0,26	0,29	0,32	0,34	0,41	0,47	0,5

Remarque

Le choix du rayon du disque centré au point dont le couple de coordonnées a l'effectif le plus élevé se fait en fonction de la répartition des points du nuage de façon que deux disques quelconques aient une intersection vide.

3) Activité

1) Reprendre l'exemple 3 du paragraphe 1.

2) Représenter le nuage de points associé à la série statistique double, en prenant pour couple de coordonnées les centres des classes :

— par un ensemble de points pondérés;

— par un ensemble de tâches.

3 Ajustement et corrélation linéaire

Le but de ce paragraphe est de déterminer une équation d'une droite qui passe « le plus près possible » de tous les points d'un nuage associé à une série statistique double.

1) Cas de l'exemple 1 et généralisation

a) Activité

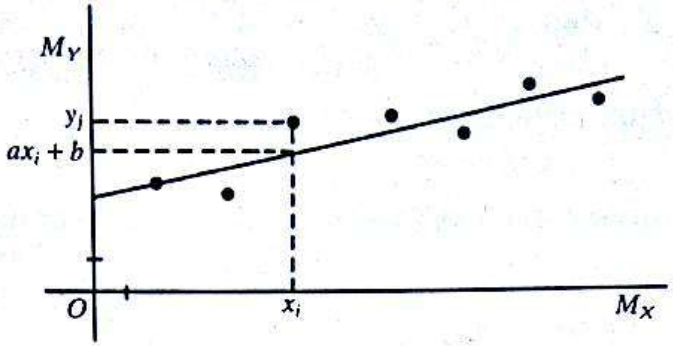
1) Reproduire le nuage de points.

2) Tracer la droite (D) qui paraît la plus représentative de ce nuage de points, et en déterminer une équation.

On dit que l'on a effectué un *ajustement linéaire* du nuage de points à la droite (D).

Scanned by CamScanner

Comment mesurer « l'efficacité » de l'ajustement?



La droite (D) a pour équation : $y = ax + b$.

A une modalité x_i du caractère X, correspond :

— une modalité y_j du caractère Y, telle que le point de coordonnées (x_i, y_j) soit un point du nuage;

— un point de la droite (D), de coordonnées $(x_i, ax_i + b)$.

Si le point du nuage n'est pas sur la droite, le nombre $[y_j - (ax_i + b)]$ n'est pas nul.

La somme de tous les nombres $n_{ij}[y_j - (ax_i + b)]^2$ où (x_i, y_j) est un couple de coordonnées d'un point du nuage et n_{ij} l'effectif du couple (x_i, y_j), est une mesure de « l'efficacité de l'ajustement ».

Exercice Comparer les mesures de l'efficacité de l'ajustement pour plusieurs droites.

On conviendra de la définition suivante

Parmi toutes ces droites, celle qui donne le meilleur ajustement est celle pour laquelle la somme des nombres $n_{ij}[y_j - (ax_i + b)]^2$ est minimale.

b) Droite des moindres carrés. Cas général

Nous allons démontrer qu'il existe une seule droite (Δ), pour laquelle la mesure ci-dessus de l'efficacité est minimale.

Soit (D) une droite d'ajustement d'équation : $y = ax + b$.

• Développons, et ordonnons suivant les puissances décroissantes de b le nombre :

$$n_{ij}[y_j - (ax_i + b)]^2.$$

On obtient :

$$\begin{aligned} & n_{ij}[(y_j - ax_i) - b]^2 \\ &= n_{ij}[b^2 - 2b(y_j - ax_i) + (y_j - ax_i)^2] \\ &= n_{ij}b^2 - 2bn_{ij}(y_j - ax_i) + n_{ij}(y_j - ax_i)^2. \end{aligned}$$

La somme de tous ces nombres pour tous les couples (x_i, y_i) d'effectifs non nuls est donc :

$$Nb^2 - 2b[\Sigma n_{ij}(y_j - ax_i)] + [\Sigma n_{ij}(y_j - ax_i)^2]$$

où le symbole Σ désigne la somme pour tous les n_{ij} non nuls et N l'effectif de la population étudiée (somme de tous les n_{ij}).

Scanned by CamScanner

• La fonction polynôme du second degré :

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ b &\longmapsto Nb^2 - 2b\left[\Sigma n_{ij}(y_j - ax_i)\right] + \left[\Sigma n_{ij}(y_j - ax_i)^2\right] \end{aligned}$$

admet un minimum pour : $b = \dfrac{\Sigma n_{ij}(y_j - ax_i)}{N}$.

• Désignons par $\bar{x}$ et $\bar{y}$ les moyennes respectives des séries statistiques de caractère X et Y; alors :

$$\begin{aligned} \frac{\Sigma n_{ij}(y_j - ax_i)}{N} &= \frac{\Sigma n_{ij} y_j}{N} - a\,\frac{\Sigma n_{ij} x_i}{N} \\ &= \bar{y} - a\bar{x}. \end{aligned}$$

Conclusion

Pour un nombre réel a donné, la mesure de l'efficacité de l'ajustement est minimale, lorsque le coefficient b de l'équation de la droite (D) est égal à $(\bar{y} - a\bar{x})$.

• Dans l'expression $n_{ij}\left[y_j - (ax_i + b)\right]^2$, remplaçons donc b par $(\bar{y} - a\bar{x})$; et développons l'expression ci-dessus suivant les puissances décroissantes de a. On obtient ainsi la mesure de l'efficacité de l'ajustement en fonction de a :

$$\begin{aligned} n_{ij}\left[y_j - (ax_i + b)\right]^2 &= n_{ij}\left[y_j - ax_i - \bar{y} - a\bar{x}\right]^2 \\ &= n_{ij}\left[(y_j - \bar{y}) - a(x_i - \bar{x})\right]^2 \\ &= a^2 n_{ij}(x_i - \bar{x})^2 - 2a n_{ij}(x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y}) + n_{ij}(y_j - \bar{y})^2. \end{aligned}$$

La somme de tous ces nombres pour tous les couples (x_i, y_i) d'effectifs non nuls est donc :

$$a^2\left[\Sigma n_{ij}(x_i - \bar{x})^2\right] - 2a\left[\Sigma n_{ij}(x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y})\right] + \Sigma n_{ij}(y_j - \bar{y})^2.$$

Cette fonction polynôme du second degré en a admet donc une valeur minimale lorsque :

$$a = \frac{\Sigma n_{ij}(x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y})}{\Sigma n_{ij}(x_i - \bar{x})^2}.$$

• Simplification d'écriture :

On a : $n_{ij}(x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y}) = n_{ij}x_i y_j - n_{ij}\bar{y}x_i - n_{ij}\bar{x}y_j + n_{ij}\bar{x}\,\bar{y}$

donc :

$$\begin{aligned} \frac{\Sigma n_{ij}(x_i - \bar{x})(y_j - \bar{y})}{N} &= \frac{\Sigma n_{ij}x_i y_y}{N} - \bar{y}\cdot\frac{\Sigma n_{ij}x_i}{N} - \bar{x}\cdot\frac{\Sigma n_{ij}y_j}{N} + \frac{\bar{x}\,\bar{y}\,\Sigma n_{ij}}{N} \\ &= \frac{\Sigma n_{ij}x_i y_j}{N} - \bar{y}\bar{x} - \bar{x}\,\bar{y} + \bar{x}\,\bar{y} \\ &= \frac{\Sigma n_{ij}x_i y_j}{N} - \bar{x}\,\bar{y}. \end{aligned}$$

De même on démontre que :

$$\frac{\Sigma n_{ij}(x_i - \bar{x})^2}{N} = \frac{\Sigma n_{ij}x_i^2}{N} - \bar{x}^2.$$

Ainsi :

$$a = \frac{\dfrac{\Sigma n_{ij}x_i y_j}{N} - \bar{x}\,\bar{y}}{\dfrac{\Sigma n_{ij}x_i^2}{N} - \bar{x}^2}.$$

Scanned by CamScanner

— On reconnaît au dénominateur la variance de la série statistique de caractère X.

— Le numérateur est appelé covariance de la série statistique double de caractères X et Y et noté $\text{Cov}(X, Y)$.

Définition

Soit | une population P d'effectif N
X et Y deux caractères étudiés sur la population P.
$\{x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n\}$ l'ensemble des modalités de X
$\{y_1, y_2, \ldots, y_j, \ldots, y_p\}$ l'ensemble des modalités de Y.
$\bar{x}$ la moyenne de la série de caractère X.
$\bar{y}$ la moyenne de la série de caractère Y.
n_{ij} l'effectif du couple de modalités (x_i, y_j).

On appelle **covariance** de la série statistique double de caractères X et Y, le nombre réel, noté $\text{Cov}(X, Y)$, égal à :

$$\frac{\Sigma n_{ij} x_i y_j}{N} - \bar{x}\,\bar{y}.$$

Conclusion

Soit :

Une population P d'effectif N.
X et Y deux caractères étudiés sur la population P.
$\{x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n\}$ l'ensemble M_X des modalités du caractère X.
$\{y_1, y_2, \ldots, y_j, \ldots, y_p\}$ l'ensemble M_Y des modalités du caractère Y.
$\bar{x}$ la moyenne de la série de caractère X.
$\bar{y}$ la moyenne de la série de caractère Y.
n_{ij} l'effectif du couple de modalités (x_i, y_j).
$V(X)$ la variance de la série de caractère X.
$\text{Cov}(X, Y)$ la covariance de la série double de caractère X et Y.

Considérons le nuage de points associé à la série statistique double où l'ensemble M_X est en abscisse et l'ensemble M_Y en ordonnée.

La forme du nuage de points permet de supposer que l'ensemble des points se situe autour d'une droite.

Alors la droite (Δ) permettant le meilleur ajustement de ce nuage, a pour équation :

$$y = ax + b$$

avec :

$$a = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{V(X)}$$

et :

$$b = \bar{y} - a\bar{x}.$$

Scanned by CamScanner

Cette droite est appelée **droite de régression,** ou droite **des moindres carrés,** de Y en fonction de X.

La méthode utilisée pour trouver l'équation de cette droite est appelée **méthode des moindres carrés.**

c) Disposition pratique des calculs

Dans le cas de l'exemple 1, les couples de modalités ont pour effectif 1.

x_i	y_j	$x_i y_j$	x_i^2
4	28	112	16
7	45	315	49
8	49	372	64
1	20	20	1
6	44	264	36
3	30	90	9
5	38	190	25
2	22	44	4
9	50	450	81
6	35	210	36
7	42	294	49
10	53	530	100
68	456	2891	470

$$\bar{x} = \frac{68}{12} = 5{,}66$$

$$\bar{y} = \frac{456}{12} = 38$$

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \frac{2891}{12} - (5{,}66)(38)$$

$$= 25{,}58$$

$$V(X) = \frac{470}{12} - (5{,}66)^2$$

$$= 7{,}05$$

$$a = \frac{25{,}58}{7{,}05} = 3{,}63$$

$$b = 38 - (3{,}63)(5{,}66)$$
$$= 17{,}45$$

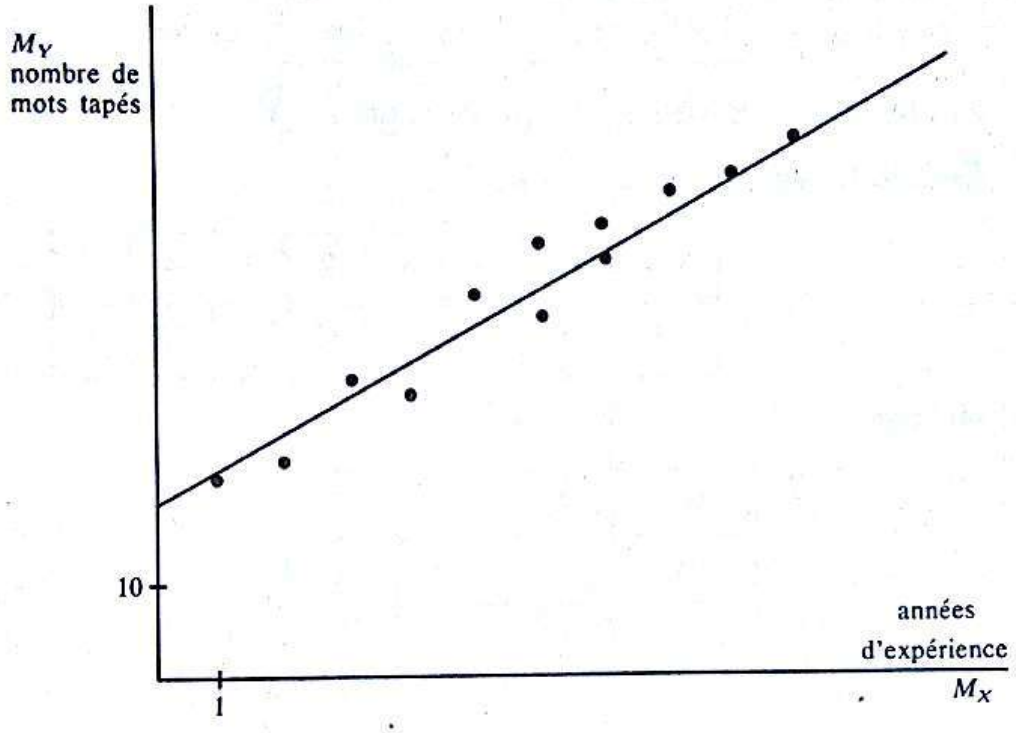
Scanned by CamScanner

Conclusion

La droite de régression de Y en fonction de X a donc pour équation :

$$y = 3{,}63x + 17{,}45.$$

d) Représentation graphique de la droite



Exercice Dans le cas de l'exemple ci-dessus, répondre aux questions suivantes :

1) Combien de mots une dactylographe ayant 11 ans d'expérience pourra-t-elle taper en une minute?

2) Même question pour une dactylographe débutante.

3) Combien d'années devra attendre une dactylographe pour pouvoir taper 80 mots à la minute?

2) Cas de l'exemple 2

Déterminons une équation de la droite de régression de Y en fonction de X.

a) Calcul de la variance de la série statistique de caractère X

Tableau linéaire des modalités de X :

modalités	0	1	2	3	4	5
effectifs	5	13	32	29	13	8

Scanned by CamScanner

Moyenne : $\bar{x} = \dfrac{(0\times 5)+(1\times 13)+(2\times 32)+(3\times 29)+(4\times 13)+(5\times 8)}{100}$

$= 2{,}56.$

Variance : $V(X) = \dfrac{5(0)^2+13(1)^2+32(2)^2+29(3)^2+13(4)^2+8(5)^2}{100}$

$= 1{,}546.$

b) **Moyenne de la série statistique de caractère *Y***

Tableau linéaire des modalités de Y :

modalités	0	1	2	3	4	5
effectifs	4	13	37	25	16	5

Moyenne : $\bar{y} = 2{,}51$ (vérifier!).

Scanned by CamScanner

c) Calcul de la covariance de la série statistique double

x_i	y_j	n_{ij}	$n_{ij}x_iy_j$
0	0	1	0
0	1	4	0
1	0	2	0
1	1	5	5
1	2	4	8
1	3	2	6
2	0	1	0
2	1	3	6
2	2	15	60
2	3	10	60
2	4	3	24
3	1	1	3
3	2	13	78
3	3	7	63
3	4	6	72
3	5	2	30
4	2	5	40
4	3	3	36
4	4	4	64
4	5	1	20
5	3	3	45
5	4	3	60
5	5	2	50
			$\overline{730}$

$$\text{Cov}(X, Y) = \frac{730}{100} - (2{,}51)(2{,}56)$$
$$= 0{,}87.$$

Scanned by CamScanner

d) **Équation de la droite de régression de Y en fonction de X**

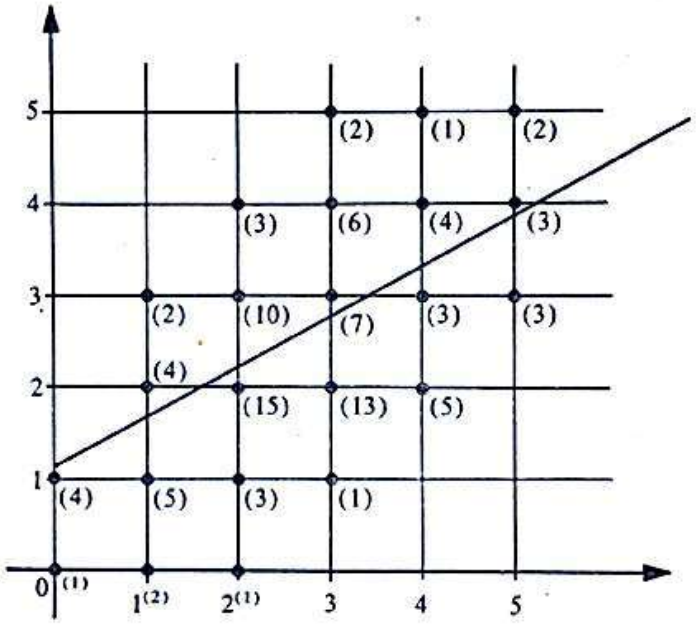
$$a = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{V(X)} = \frac{0{,}87}{1{,}546} = 0{,}56$$

$$b = \bar{y} - a\bar{x} = 2{,}51 - (0{,}56)(2{,}56) = 1{,}08.$$

La droite de régression de Y en fonction de X a donc pour équation :

$$y = 0{,}56x + 1{,}08.$$

Représentation graphique



3) Activité

— Reprendre l'exemple 3 du paragraphe 1.
— Déterminer l'équation de la droite de régression de Y en fonction de X.
— La représenter graphiquement.

4) Corrélation linéaire

Par la méthode des moindres carrés, nous avons déterminé une équation de la droite de régression de Y en fonction de X.

Par cette même méthode, nous pouvons déterminer une équation de la droite de régression de X en fonction de Y; et un calcul analogue à celui du paragraphe 1) *b*), conduit aux résultats suivants :

La droite (D') d'équation $(x = a'y + b')$ pour laquelle la mesure de l'efficacité de l'ajustement est minimale est déterminée par les coefficients :

$$a' = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{V(Y)} \quad \text{et} \quad b' = \bar{x} - a'\bar{y}.$$

Cette droite est appelée *droite de régression* de X en fonction de Y.

Scanned by CamScanner

a) Cas de l'exemple 1 et définition du coefficient de corrélation linéaire

On a : $\text{Cov}(X, Y) = 25{,}58$ et $V(Y) = 112$

d'où $a' = \dfrac{25{,}58}{112} = 0{,}23$ et $b' = 5{,}66 - (0{,}23)(38)$

$= -3{,}08.$

Une équation de la droite de régression (D') de X en fonction de Y est donc :

$$x = 0{,}23y - 3{,}08.$$

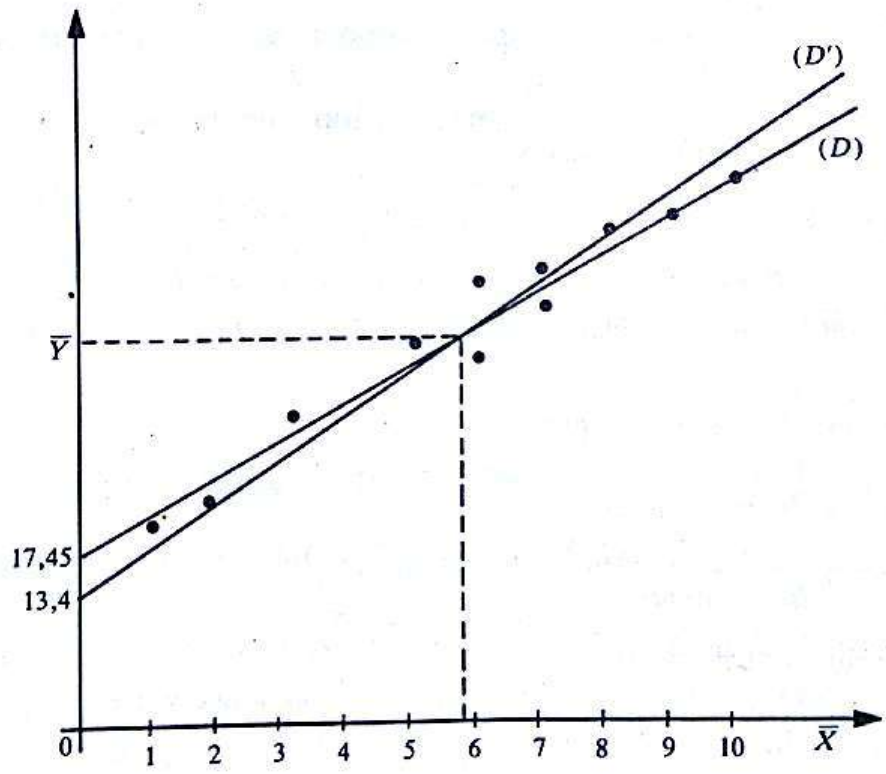
C'est-à-dire : $$y = \frac{1}{0{,}23}x + \frac{3{,}08}{0{,}23}.$$

Ou encore : $$y = 4{,}35x + 13{,}4.$$

Représentons les deux droites sur un même graphique :

(D) : $y = 3{,}63x + 17{,}45$

(D') : $y = 4{,}35x + 13{,}4.$



Le coefficient directeur de (D) et celui de (D') ne sont pas égaux.

La racine carrée du quotient du coefficient directeur de (D) par le coefficient directeur de (D') est appelée *valeur absolue du coefficient de corrélation linéaire.*

Elle est donc égale à $\sqrt{aa'}$ avec les notations ci-dessus.

Dans le cas de l'exemple, elle est égale à :

$$\sqrt{\frac{3{,}63}{4{,}35}} \quad \text{c'est-à-dire à :} \quad 0{,}91.$$

Scanned by CamScanner

On dira que la corrélation linéaire entre les caractères X et Y est d'*autant meilleure* que ce nombre réel est proche de 1.

En général, on dit qu'il y a *une forte corrélation linéaire,* si la valeur absolue du coefficient de corrélation est compris entre 0,87 et 1.

Définition

Soit une population P sur laquelle sont étudiés deux caractères X et Y
$V(X)$ la variance du caractère X
$V(Y)$ la variance du caractère Y
$\text{Cov}(X, Y)$ la covariance de la série statistique double.

On appelle **coefficient de corrélation linéaire** entre les caractères X et Y, le nombre réel r tel que :

$$r = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)}\sqrt{V(Y)}}.$$

Remarque

(1) Soit $y = ax + b$, une équation de la droite de régression de Y en fonction de X.
$x = a'y + b'$, une équation de la droite de régression de X en fonction de Y.

Alors : $|r| = \sqrt{aa'}$.

(2) Si : a et a' sont tous deux positifs; alors : $r = \sqrt{aa'}$.
Si : a et a' sont tous deux négatifs; alors : $r = -\sqrt{aa'}$.

b) **Activité :** *Cas de l'exemple 2*

1) Déterminer une équation de la droite de régression de X en fonction de Y.

2) Représenter les deux droites de régression sur le même graphique que le nuage de points.

3) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y.

4) *Existe-t-il une forte corrélation linéaire entre les caractères* X et Y?

Scanned by CamScanner

Exercices

AJUSTEMENTS LINÉAIRES

1 Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J).
Dans chacun des cas suivants :

— représenter le nuage de points;

— trouver une équation de la droite de régression de Y en fonction de X (X désignant l'abscisse et Y l'ordonnée d'un point);

— représenter cette droite.

1) $M_1(1; 2)$, $M_2(2; 2)$, $M_3(0; 2)$, $M_4(-1; 0)$, $M_5(3; 4)$, $M_6(4; 3)$, $M_7(-2; 1)$.

2) $M_1(0; 1)$, $M_2\left(1; \frac{5}{2}\right)$, $M_3(-1; 0)$, $M_4\left(3; \frac{7}{2}\right)$, $M_5\left(\frac{1}{2}; 2\right)$, $M_6\left(6; \frac{29}{4}\right)$, $M_7\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$.

3) $M_1(7\,421; 237\,300)$, $M_2(7\,436; 238\,400)$, $M_3(7\,451; 239\,400)$, $M_4(7\,466; 240\,700)$, $M_5(7\,481; 241\,800)$, $M_6(7\,496; 243\,000)$, $M_7(7\,511; 244\,000)$.

2 Dans une fabrique de briques, le comptable a noté dans le tableau ci-dessous le coût de fabrication en fonction du tonnage de briques produit.

Tonnage (x)	1	2
Coût (y) en francs CFA	40 000	57 500
Tonnage (x)	5	6
Coût (y)	99 600	115 000

Tonnage (x)	3	4
Coût (y) en francs CFA	71 500	84 800
Tonnage (x)	7	8
Coût (y)	129 000	145 000

1) Représenter dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J), le nuage de point associé à cette série statistique double :

— le tonnage figurant en abscisse;

— le coût figurant en ordonnée.

2) Trouver une équation de la droite de régression de y en fonction de x associée à ce nuage de points et représenter cette droite.

3) Une brique pèse approximativement 2 kg.

a) Trouver la série statistique double du prix de revient d'une brique, en fonction du tonnage.

b) Représenter le nuage de points associé à cette série statistique double :

— le tonnage (x) figurant en abscisse;

— le prix de revient d'une brique (Y) figurant en ordonnée.

c) Trouver une équation de la droite de régression de Y en fonction de x.

4) L'entreprise veut faire un bénéfice de 17 % sur le prix de fabrication.

a) Un client commande 350 briques. Combien devra-t-il payer?

b) Un client veut connaître le prix de revient d'une brique lorsqu'il a commandé 3,7 tonnes de briques.
Utiliser l'une des droites de régressions pour donner les réponses à ces deux questions.

3 Diverses sociétés de gardiennage pour des immeubles résidentiels proposent différents salaires.
Soit x le salaire proposé et y le nombre de candidats qui se sont présentés à l'embauche pour postuler une place.
Les observations sont données dans le tableau ci-dessous :

Société	Salaire	Nombre de candidats
1	44 000	10
2	45 000	13
4	46 000	17
5	47 000	19
6	48 000	21

Scanned by CamScanner

1) Représenter le nuage de points associé à cette série statistique double :

— le salaire (x) figurant en abscisse;

— le nombre de candidats (y) figurant en ordonnée.

2) Trouver une équation de la droite de régression de y en fonction de x et représenter cette droite sur le graphique précédent.

3) On a appris qu'une septième société de gardiennage s'était ouverte sur la place et que trente candidats s'y étaient présentés. A combien peut-on estimer le salaire que l'on a proposé dans cette nouvelle société?

3 On donne la série statistique double de quatre éléments :

X	a	1,3	b	1,6
Y	4	5	5	6

Trouver a et b sachant que la droite de régression de Y en fonction de X a pour équation :

$$Y = 5X - 2.$$

(D'après baccalauréat.)

4 Le tableau suivant donne le pourcentage de la consommation de produits pharmaceutiques par rapport à la consommation globale pour des familles, pendant les six années considérées.

Année	Pourcentage
1970	9,4
1975	10,9
1980	11,8
1981	12,1
1982	12,3
1983	12,5

1) En considérant que 1970 est l'origine des années pour l'étude de ce phénomène statistique, on appelle rang d'une année A par rapport à l'année d'origine, le nombre entier naturel n tel que :

$$A = 1970 + n.$$

Donner le tableau statistique du pourcentage de consommation de produits pharmaceutiques, en fonction du rang de l'année considérée.

2) Représenter dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J), avec pour unités graphiques 1 cm sur la droite (OI) et 2 cm sur la droite (OJ), le nuage de points :

— le rang (x) de l'année figurant en abscisse;

— le pourcentage (y) figurant en ordonnée.

3) Trouver une équation de la droite de régression de y en fonction de x et représenter cette droite sur le graphique précédent.
(Les résultats seront donnés avec des arrondis d'ordre 3.)

4) En supposant que cet ajustement linéaire reste valable au cours des prochaines années :

a) Quel sera le pourcentage de consommation en produits pharmaceutiques pour une famille en l'an 2000?

b) A partir de quelle année le pourcentage de consommation en produits pharmaceutiques dépassera-t-il 25 % de la consommation globale?

5) Cet ajustement linéaire peut-il rester valable 400 ans? (Calculer le pourcentage qui serait atteint à cette date.)

CORRÉLATION LINÉAIRE

5 On fait une enquête sur 100 familles portant sur :

— le nombre d'enfants par famille;

— le nombre de pièces d'habitation par famille.

Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous, où :

— X est le caractère « nombre d'enfants dans une famille »;

— Y est le caractère « nombre de pièces d'habitation d'une famille ».

Y \ X	0	1	2	3	4	5
1	6	4	1	0	0	0
2	3	11	10	5	1	0
3	1	3	16	13	4	1
4	0	1	3	5	8	4

1) *a*) A partir de ce tableau, reconstituer les séries statistiques associées respectivement aux caractères X et Y. (Séries statistiques marginales.)

Scanned by CamScanner

b) Calculer les moyennes m_X et m_Y de chacune des séries statistiques associées respectivement aux caractères X et Y.

c) Calculer les variances $V(X)$ et $V(Y)$ de chacune des séries statistiques associées respectivement aux caractères X et Y.

2) Représenter le nuage de points pondérés associé à cette série statistique double.

3) *a*) Trouver une équation de la droite de régression de Y en fonction de X.

b) Trouver une équation de la droite de régression de X en fonction de Y.

c) Représenter chacune de ces deux droites sur le même graphique que celui utilisé pour le nuage.

4) Calculer le coefficient de corrélation linéaire.

5) Peut-on prévoir le nombre d'enfants d'une famille vivant dans une villa de six pièces?

6 Dans le service maternité d'un hôpital, on a relevé, pour 200 naissances, l'âge X de la mère et le poids Y du nouveau-né (en kg).
Les résultats ont été regroupés en classes et figurent dans le tableau ci-dessous :

Y \ X	[16; 20[	[20; 24]	[24; 28[	[28; 32[
[2; 2,4[	2	1	3	1
[2,4; 2,8[	2	8	5	3
[2,8; 3,2[	5	17	10	8
[3,2; 36[	8	22	19	14
[3,6; 4[	1	7	7	4
[4; 4,4[	0	1	7	2

Y \ X	[32; 36[	[36; 40[	[40; 44[
[2; 2,4[	1	0	0
[2,4; 2,8[	3	1	0
[2,8; 3,2[	3	2	1
[3,2; 36[	5	7	2
[3,6; 4[	7	2	3
[4; 4,4[	3	3	0

1) Compléter ce tableau :

a) en indiquant par une colonne et une ligne supplémentaire le centre de chaque classe;

b) en donnant les séries statistiques marginales associées respectivement aux caractères X et Y.

2) Représenter le nuage de points pondérés associé à cette série statistique double.

3) Étudier la corrélation linéaire entre les séries statistiques associées aux caractères X et Y.

4) Peut-on utiliser cette corrélation pour prévoir le poids d'un nouveau-né dont la mère serait âgée de 47 ans?

7 Le tableau suivant donne l'âge X et la moyenne Y des maxima de tension artérielle en fonction de l'âge d'une population féminine.

X	36	42	48	54	60	66
Y	11,8	14,00	12,6	15,0	15,5	15,1

1) Représenter graphiquement le nuage de points dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J). (0,5 cm pour 1 an et 3 cm pour l'unité de tension artérielle.)

2) Calculer la moyenne et la variance des séries statistiques associées aux caractères X et Y.

3) *a*) Trouver une équation de la droite de régression de Y en fonction de X.

b) Trouver une équation de la droite de régression de X en fonction de Y.

c) Représenter ces deux droites sur le même graphique que celui utilisé pour le nuage de points.

4) Calculer le coefficient de corrélation linéaire.

5) Une personne de 70 ans a une tension maximale artérielle de 16,2. Cela vous paraît-il normal?

(D'après baccalauréat.)

8 On a effectué une recherche sur la vitesse de propagation de l'influx nerveux dans une fibre nerveuse en fonction du diamètre de la fibre.
On désigne par X le diamètre en microns de la fibre nerveuse et par Y la vitesse en mètres par seconde de l'influx nerveux dans la fibre de diamètre X.

Scanned by CamScanner

Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous :

X	2,3	3	3,6	4,3	5	5,7	6,7	6,8
Y	16	12	18	28	28	38	30	44

X	8	8,8	9,7	11	12,4	13,4	14,3	14,7
Y	50	54	54	72	56	76	72	76

1) Représenter le nuage de points associé à cette série statistique double.

On prendra 1 cm en abscisse pour 1 micron
1 cm en ordonnée pour 10 m/s.

2) *a*) Calculer les moyennes de chacunes des séries de caractère X et Y.

b) Calculer les variances $V(x)$, $V(Y)$ de chacune des séries de caractère X et Y.

3) *a*) Trouver des équations des droites de régression de Y en fonction de X et de X en fonction de Y.

b) Construire ces droites.

4) Utiliser ces droites pour conjecturer :

a) le diamètre d'une fibre nerveuse à travers laquelle, dans les mêmes conditions que l'expérience précédente, l'influx nerveux se propagerait à la vitesse de 100 m/s;

b) la vitesse de l'influx nerveux à travers une fibre nerveuse de diamètre 18 microns.

(D'après baccalauréat.)

UN AUTRE TYPE D'AJUSTEMENT : par une fonction exponentielle ou une fonction puissance

L'étude de certaines séries statistiques doubles et l'observation de leur nuage de points, ne conduisent pas naturellement à rechercher une corrélation linéaire entre les caractères étudiés sur la population.

9 On étudie la croissance d'une population bactérienne en fonction du temps.

Soit | X le caractère « temps » (exprimé en jours)
Y le caractère « nombre de bactéries » (exprimé en millions).

Les résultats sont donnés dans le tableau ci-dessous :

Initialement (temps 0), la population compte 3 millions de bactéries, l'étude se fait sur 14 jours.

X (jours)	1	2	3	4	5	6	7
Y (millions)	4	5	6,5	8,2	10,5	13,5	17,3

X (jours)	8	9	10	11	12	13	14
Y (millions)	22,2	28,5	36,5	43	60	77,5	100

1) *a*) Représenter dans le plan muni d'un repère orthogonal (en ayant soin de bien choisir les unités sur chaque axe), le nuage de points associé à cette série statistique double.

b) Un ajustement linéaire de ce nuage de points vous semble-t-il approprié?

2) Soit y le caractère « logarithme népérien du nombre de bactéries ».

a) Constituer alors la nouvelle série statistique double
où X est le caractère « temps »
y est le caractère « logarithme népérien du nombre de bactéries ».

X	1	2	3	4	5	6	7
y	1,39						

X	8	9	10	11	12	13	14
y							

b) Représenter dans le plan muni d'un repère orthogonal le nuage de points asocié à cette nouvelle série statistique double.

c) Un ajustement linéaire de ce nuage de points vous semble-t-il approprié?

d) Trouver une équation de la droite de régression de y en fonction de X.

e) En déduire une relation liant Y et X.

3) Représenter la courbe d'équation : $(y = f(X))$ déduite de la relation trouvée entre Y et X, sur le même graphique que celui utilisé dans le 1).

4) Utiliser cette courbe pour prévoir le nombre de bactéries au bout de trois semaines.
Ce type d'ajustement s'appelle un *ajustement exponentiel*, il illustre une *croissance exponentielle* d'une population.

Scanned by CamScanner

10 La troisième loi de Képler en astronomie. Le but est de trouver une relation entre la période t de révolution d'une planète autour du soleil et sa distance moyenne r au soleil. Les résultats des mesures faites, figurent dans le tableau ci-dessous

	Mercure	Vénus	Terre
r (exprimé en U.A)	0,387 1	0,723 3	1
t (exprimée en années terrestres	0,240 8	0,615 2	1

	Mars	Jupiter	Saturne
r (exprimé en U.A)	1,524	5,203	9,539
t (exprimée en années terrestres	1,881	11,86	29,46

1) *a*) Dans le plan muni d'un repère orthogonal représenter le nuage de points associé à cette série statistique double.

b) Un ajustement linéaire de ce nuage de points vous semble-t-il approprié?

2) Soit R le caractère « logarithme décimal de la distance moyenne de la planète au soleil » et T le caractère « logarithme décimal de la période de révolution de la planète autour du soleil ».

a) Constituer alors la nouvelle série statistique double de caractères R et T.

b) Représenter dans le plan muni d'un repère orthogonal, le nuage de points associé à cette nouvelle série.

c) Un ajustement linéaire vous semble-t-il approprié?

d) Trouver une équation de la droite de régression de T en fonction de R.

3) En déduire la relation existant entre r et t. (on trouve $t = \sqrt{r^3}$.)
Ce type d'ajustement s'appelle un *ajustement par une fonction puissance.*

Scanned by CamScanner

8 Probabilités

Leçon 1 : EXPÉRIENCES ET ÉVÉVEMENTS

Leçon 2 : PROBABILITÉ D'UN ÉVÉNEMENT

Leçon 3 : VARIABLES ALÉATOIRES

1 Expériences et événements

1) Étude d'un premier jeu

a) **Description**

On considère un dé cubique dont les six faces sont numérotées de 1 à 6. On a lancé ce dé cent fois de suite, et relevé à chaque lancer le chiffre inscrit sur la face supérieure.

On a obtenu les résultats suivants :

5	4	1	2	6	3	6	5	1	3
2	1	5	6	3	4	3	1	5	1
6	5	1	4	2	4	6	4	1	4
5	1	4	2	4	5	2	6	4	5
6	2	3	2	5	4	2	5	6	2
4	2	3	6	3	5	6	2	1	3
1	3	4	2	3	5	4	2	1	2
6	3	1	6	2	6	4	3	1	3
6	1	5	2	3	1	6	5	2	4
2	3	6	4	1	2	1	5	3	6

Étudions la série statistique associée à ce relevé.

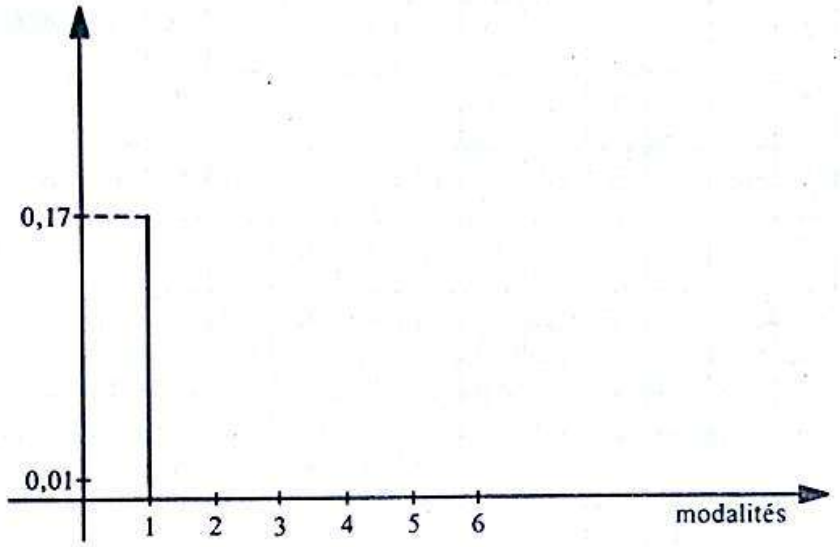
Scanned by CamScanner

b) **Activités**

— Compléter le tableau suivant :

modalités du caractère	1	2	4	5	6
effectifs	17				
fréquences	0,17				

— Compléter le diagramme en bâtons des fréquences :



c) **Commentaires**

— Les fréquences des différentes modalités sont sensiblement égales.

— Intuitivement, on peut dire qu'en lançant un dé, on a « autant de chances » de voir apparaître sur la face supérieure le 1, le 2, le 3, le 4, le 5 ou le 6.

— Calculons la moyenne des fréquences :

$$\frac{0,17+0,19+0,16+0,16+0,15+0,17}{6}=0,166...$$

— Remarquons que 0,1666... est une valeur approchée de $\frac{1}{6}$ c'est-à-dire « une chance sur six ».

2) Étude d'un deuxième jeu

a) **Description**

Deux personnes décident de jouer ensemble en lançant simultanément deux dés cubiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
Le joueur *A* propose au joueur *B* la règle suivante :

« si la somme des chiffres obtenus est égale à 7, tu me donnes 100 francs; si la somme des chiffres obtenus est égale à 9, je te donne 100 francs »

Scanned by CamScanner

Après 300 parties, le joueur A a gagné 2300 francs.
A savait-il qu'il avait de « fortes chances » de gagner?
Ce résultat était-il prévisible?

Un observateur a relevé toutes les sommes de chiffres obtenues pendant les 300 parties.

Il a obtenu le tableau suivant :

5	9	2	8	4	8	7	12	10	8	7	4	9	3	9	11	4	3	10	9
8	4	7	7	6	8	7	2	8	6	9	8	11	5	7	6	7	7	6	9
8	3	6	4	6	5	9	3	8	4	7	7	7	4	7	5	2	11	6	7
8	3	6	8	7	9	4	6	8	4	8	11	2	5	7	3	6	11	8	11
6	5	12	4	9	10	7	12	3	8	10	9	6	8	7	4	11	5	7	5
4	3	5	6	7	10	9	10	6	9	10	6	4	9	10	6	8	9	7	8
3	6	4	6	3	2	6	5	9	5	7	11	10	6	7	6	4	5	8	2
7	8	6	7	8	4	10	4	9	4	7	7	5	6	7	9	8	11	7	8
3	8	9	9	7	3	8	10	8	6	9	8	10	5	6	10	12	11	4	6
8	12	5	3	8	6	7	6	8	7	3	10	4	7	6	2	3	5	10	4
5	9	8	9	8	9	4	8	6	10	11	10	4	6	7	7	3	7	8	9
6	7	6	5	4	9	6	10	3	5	7	7	5	11	12	9	5	3	4	11
5	7	8	10	7	11	12	11	5	12	7	12	7	4	10	11	4	2	9	7
10	8	5	7	7	12	8	7	5	4	8	4	6	7	6	5	6	8	7	10
4	7	5	4	5	10	7	8	5	8	11	8	7	8	6	9	5	11	10	6

Étudions la série statistique associée à ce relevé :

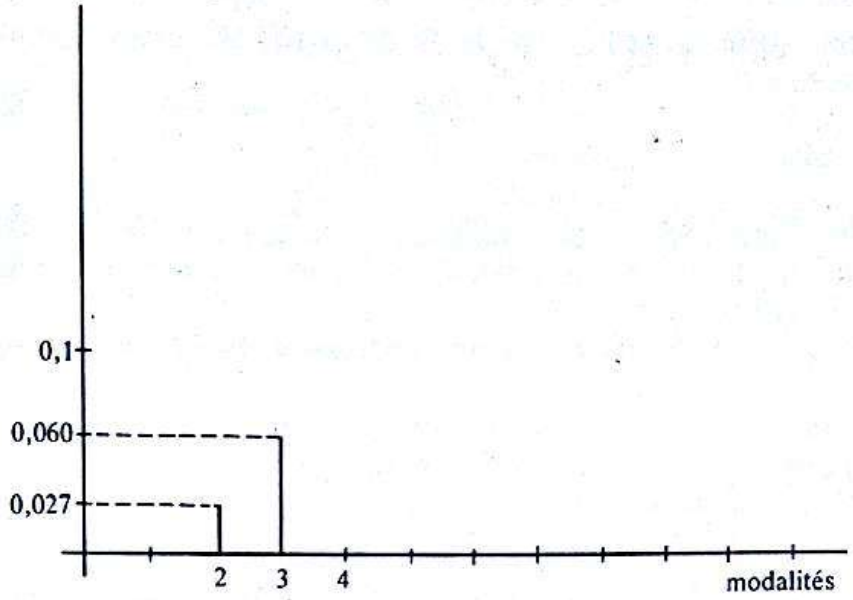
b) **Activités**

- Compléter le tableau suivant :

modalités du caractère	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
effectifs	8	18									
fréquences	0,027	0,060									

Scanned by CamScanner

• Compléter le diagramme en bâtons des fréquences :



c) **Commentaires**

La fréquence de la modalité 7 du caractère est, comme l'avait prévu le joueur *A*, supérieure à la fréquence de la modalité 9; **le joueur *A* savait donc qu'il y avait « plus de chances » d'obtenir un total 7 plutôt qu'un total 9.**

La réponse à ce problème sera donnée après la mise en place d'un vocabulaire spécifique.

3) Vocabulaire des probabilités

a) **Expériences et éventualités**

On considère un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6.

Soit | $\mathcal{E}_1$ l'expérience : « lancer le dé et lire le chiffre inscrit sur la face supérieure ».
$\mathcal{E}_2$ l'expérience : « lancer deux fois de suite le dé et lire successivement les deux chiffres obtenus sur sa face supérieure ».

Pour chacune de ces deux expériences, il n'est pas possible d'en prévoir les résultats (chiffres inscrits sur les faces supérieures).

Ces résultats sont dûs seulement au hasard.

On dit aussi que les résultats de ces expériences sont **aléatoires.**

Chacune de ces deux expériences conduit à un nombre fini de résultats possibles. Pour l'expérience $\mathcal{E}_1$, les différents résultats possibles sont les éléments de l'ensemble E_1, tel que :

$$E_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Pour l'expérience $\mathcal{E}_2$, les différents résultats possibles sont les éléments de l'ensemble E_2, tel que :

$E_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3),$

Scanned by CamScanner

(4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)}

chaque élément de l'ensemble E_1 (resp E_2) est appelé *éventualité* de l'expérience $\mathcal{E}_1$ (resp $\mathcal{E}_2$).

Définition

Soit $\mathcal{E}$ une expérience conduisant à un nombre fini de résultats aléatoires.
L'ensemble E de ces résultats aléatoires est appelé **ensemble des éventualités** de l'expérience $\mathcal{E}$.
Chaque élément de E est une **éventualité** de l'expérience $\mathcal{E}$.

Exercice

Pour chaque expérience, définir l'ensemble des éventualités, et le nombre de ses éléments :

a) On jette une pièce de monnaie et on observe le côté visible.

b) On tire simultanément deux cartes d'un jeu de 32 cartes et on lit les figures obtenues. On rappelle qu'un jeu de 32 cartes est constitué par :

— 16 cartes rouges subdivisées en deux familles :
les carreaux et les cœurs;

— 16 cartes noires subdivisées en deux familles :
les trèfles et les piques;

— chacune des quatre familles a huit « figures » :
le 7, le 8, le 9, le 10, le valet, la dame, le roi et l'as.

Par exemple, dans la famille des « cœurs », il y a le sept de cœur, le valet de cœur, etc.

b) **Événements**

Définition

Soit $\mathcal{E}$ une expérience conduisant à un nombre fini d'éventualités, et E l'ensemble de ces éventualités.
On appelle **événement**, tout sous-ensemble de E.

Si le sous-ensemble est un singleton, on l'appelle **événement élémentaire.**
Si le sous-ensemble est l'ensemble vide, on l'appelle **événement impossible.**

Notation
L'ensemble des événements de E est noté $\mathcal{P}(E)$.
C'est l'ensemble des parties de E.

Exemples

— Pour l'expérience $\mathcal{E}_1$, l'événement « obtenir un chiffre pair » est le sous-ensemble P de E_1 tel que :

$$P = \{2, 4, 6\}.$$

Scanned by CamScanner

— Pour l'expérience $\mathcal{E}_2$, l'événement « obtenir deux chiffres identiques » est le sous-ensemble I de E_2 tel que :

$$I = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6)\}.$$

— Définir en langage courant l'événement J tel que :

$$J = \{(2, 2), (4, 4), (6, 6)\}.$$

— Pour l'expérience $\mathcal{E}_1$ l'événement « obtenir le chiffre 7 » est un événement impossible.

c) Événements contraires

Soit E l'ensemble des éventualités d'une expérience $\mathcal{E}$ et A un événement de E.
On appelle **événement contraire** de l'événement A, le sous-ensemble complémentaire de A dans E.
On le note : $\overline{A}$.

Exemples

Pour l'expérience $\mathcal{E}_1$, l'événement contraire de l'événement P tel que :

$$P = \{2, 4, 6\},$$

est le sous-ensemble $\overline{P}$ tel que : $\overline{P} = \{1, 3, 5\}$.

Définir $\overline{P}$ en langage courant.

Exercices

1) Pour l'expérience $\mathcal{E}_2$, définir l'événement contraire de l'événement I : (voir b) *exemple*).

   a) par son écriture en extension;

   b) par une phrase en langage courant.

2) Pour l'expérience $\mathcal{E}_2$, définir l'événement contraire de l'événement « obtenir deux chiffres pairs » :

   a) par son écriture en extension;

   b) par une phrase en langage courant.

d) Réunion et intersection de deux événements

• *Réunion de deux événements, définition*

Soit E l'ensemble des éventualités d'une expérience $\mathcal{E}$.
A et B deux événements de E.
On appelle événement « A **ou** B » le sous-ensemble $(A \cup B)$.

• *Intersection de deux événements, définition*

Soit E l'ensemble des éventualités d'une expérience $\mathcal{E}$.
A et B deux événements de E.
On appelle événement « A **et** B » le sous-ensemble $(A \cap B)$.

Scanned by CamScanner

Exemple

Pour l'expérience $\mathcal{E}_1$,

soit | A l'événement « obtenir un chiffre pair »
| B l'événement « obtenir un multiple de 3 ».

On a : $A = \{2, 4, 6\}$; $B = \{3, 6\}$.

L'événement « A ou B », c'est-à-dire « obtenir un chiffre pair ou multiple de 3 » est le sous-ensemble $A \cup B$ tel que :

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}.$$

L'événement « A et B », c'est-à-dire « obtenir un chiffre pair et multiple de 3 » est le sous-ensemble $A \cap B$ tel que :

$$A \cap B = \{6\}.$$

Exercice

Pour l'expérience $\mathcal{E}_2$, définir les événements :

« A ou B »; « A et B »

a) en extension,

b) par une phrase en langage courant

dans chacun des cas ci-dessous :

a) A est l'événement « obtenir un total 8 ».
B est l'événement « obtenir deux chiffres distincts ».

b) A est l'événement « obtenir deux chiffres identiques ».
B est l'événement « obtenir un total supérieur à 10 ».

c) A est l'événement « le chiffre du premier lancer est inférieur ou égal à 3 ».
B est l'événement « le chiffre du deuxième lancer est inférieur ou égal à 2 ».

e) Événements incompatibles

Définition

Soit | E l'ensemble des éventualités d'une expérience $\mathcal{E}$.
| A, B deux événements de E.

On dit que les événements A, B sont **incompatibles** lorsque l'événement « A et B » est impossible; c'est-à-dire lorsque $A \cap B = \varnothing$.

Exemple

Pour l'expérience $\mathcal{E}_2$, les événements

A : « chacun des deux chiffres est strictement inférieur à 3 »
B : « le total obtenu est égal à 10 »

sont deux événements incompatibles. (Justifier!)

Système complet d'événements

On appelle **système complet d'événements** toute partition de l'ensemble des éventualités.

Scanned by CamScanner

2 Probabilité d'un événement

1) Exemples introductifs

a) Probabilité d'événements élémentaires

• *Considérons l'expérience* $\mathcal{E}_1$

L'ensemble E_1 de ses éventualités est tel que :

$$E_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Lorsqu'on lance le dé, il y a « autant de chances » d'obtenir chacune des ces éventualités (une chance sur six).
On dit aussi que *ces éventualités sont équiprobables,* et que la probabilité d'obtenir un de ces événements élémentaires est : $\frac{1}{6}$.

• *Considérons l'expérience* $\mathcal{E}_2$

L'ensemble E_2 de ses éventualités est tel que :

$E_2 = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$.

Pour chacun des deux lancers, il y a « autant de chances » de voir apparaître le 1, le 2, le 3, le 4, le 5 ou le 6.

Lorsqu'on lance deux fois le dé, chaque couple de nombres a la même chance d'apparaître (une chance sur trente-six).
Ces éventualités sont équiprobables, et la probabilité d'obtenir un de ces événements élémentaires est : $\frac{1}{36}$.

• *Considérons l'expérience* $\mathcal{E}_3$

Cette expérience consiste à lancer un dé à six faces telles que :

— trois faces soient numérotées 1;

— deux faces soient numérotées 2;

— une face soit numérotée 6;

et à observer le chiffre inscrit sur la face supérieure.
L'ensemble E_3 des éventualités relatives à cette expérience est tel que :

$$E_3 = \{1, 2, 6\}.$$

Ces éventualités ne sont pas équiprobables

En effet, chaque face du dé ayant la même chance d'apparaître (une chance sur six), il y a :

— trois possibilités sur six de voir apparaître une face numérotée 1;

— deux possibilités sur six de voir apparaître une face numérotée 2;

— une possibilité sur six de voir apparaître la face numérotée 6.

Scanned by CamScanner

On dira que :

la probabilité de l'événement élémentaire $\{1\}$ est : $\frac{3}{6}$,

la probabilité de l'événement élémentaire $\{2\}$ est : $\frac{2}{6}$,

la probabilité de l'événement élémentaire $\{6\}$ est : $\frac{1}{6}$.

Exercice

Pour les expériences décrites ci-dessous :

— définir l'ensemble des événements élémentaires;

— dire si les événements élémentaires sont équiprobables;

— calculer la probabilité d'obtenir chacun d'eux.

1) On tire simultanément deux cartes d'un jeu de 32 cartes et on note les figures obtenues.

2) Il y a, dans un sac, une boule rouge, une boule verte, une boule bleue, une boule jaune et une boule blanche indiscernables au toucher.

a) On tire simultanément trois boules du sac et on note les trois couleurs obtenues.

b) On tire successivement deux boules sans remettre la première boule tirée dans le sac et on note la couleur de la première puis celle de la seconde.

3) Il y a dans un sac, trois boules rouges, dix boules vertes, et deux boules jaunes. On tire une boule au hasard et on note sa couleur.

b) Probabilité d'un événement

• *Considérons l'expérience* $\mathcal{E}_1$

L'événement « obtenir un chiffre pair » est le sous ensemble P tel que :

$$P = \{2, 4, 6\}.$$

Lorsqu'on lance le dé, il y a donc trois possibilités sur six d'obtenir un chiffre pair.

On dira que la probabilîté de l'événement P est : $\frac{3}{6}$; c'est-à-dire à : $\frac{1}{2}$.

Remarque

La probabilité de l'événement P est égale à la somme des probabilités des événements élémentaires dont la réunion est égale à P.

• *Considérons l'expérience* $\mathcal{E}_2$

1) L'événement « obtenir un total des chiffres apparus égal à 9 » est le sous-ensemble S_9 tel que :

$$S_9 = \{(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)\}.$$

Lorsqu'on lance deux dés, il y a donc quatre possibilités sur trente-six d'obtenir un total égal à 9.

Scanned by CamScanner

On dira que la probabilité de cet événement est égale à : $\frac{4}{36}$; c'est-à-dire à : $\frac{1}{9}$.

Remarque

$\frac{1}{9}$ est la somme des probabilités des événements élémentaires dont la réunion est égale à S_9 (vérifier!).

2) L'événement « obtenir un total égal à 7 » est le sous-ensemble S_7 tel que :

$$S_7 = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}.$$

Lorsqu'on lance deux dés, il y a donc six possibilités sur trente-six d'obtenir un total égal à 7.

On dira que la probabilité de cet événement est égale à : $\frac{6}{36}$; c'est-à-dire à : $\frac{1}{6}$.

Remarquons que la probabilité de l'événement S_7 est supérieure à celle de l'événement S_9 et nous venons de donner la réponse au problème posé par le jeu de la leçon 1, paragraphe 2).

• *Considérons l'expérience* $\mathcal{E}_3$

L'événement « obtenir un chiffre pair » est le sous-ensemble Q tel que :

$$Q = \{2, 6\}.$$

Pour ce dé, il y a trois faces numérotées par un chiffre pair; il y a donc trois possibilités sur six d'obtenir un chiffre pair.

On dira que la probabilité de l'événement Q est égale à : $\frac{3}{6}$; c'est-à-dire à : $\frac{1}{2}$.

Remarque

La probabilité de l'événement Q est égale à la somme des probabilités des événements élémentaires dont la réunion est égale à Q (vérifier).

Exercices

1) On tire simultanément deux cartes d'un jeu de 32 cartes et on note les figures obtenues. Quelle est la probabilité d'obtenir :

a) deux rois;

b) deux cartes rouges;

c) deux cœurs.

2) Dans un sac, il y a trois boules rouges et une boule blanche. On tire simultanément deux boules et on note les couleurs obtenues.

Quelle est la probabilité d'obtenir :

a) deux boules rouges;

b) une boule rouge et une boule blanche.

Scanned by CamScanner

2) Probabilité : définition, propriétés

a) Définition

Soit | $\mathcal{E}$, une expérience conduisant à un nombre fini d'éventualités
E l'ensemble de ces éventualités
$\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des événements liés à l'expérience $\mathcal{E}$.

1) On appelle **probabilité** définie sur l'ensemble $\mathcal{P}(E)$ toute application p de $\mathcal{P}(E)$ dans l'intervalle [0, 1] vérifiant les conditions suivantes :

a) $p(E)=1$.

b) Pour tout couple (A, B) d'événements incompatibles :

$$p(A \cup B)=p(A)+p(B).$$

2) On appelle **probabilité d'un événement A**, l'image de A par l'application p.

Conséquences

— La somme des probabilités de tous les événements élémentaires est égale à 1 (puisque leur réunion est égale à E). Justifier.

— La probabilité d'un événement A est égale à la somme des probabilités des événements élémentaires dont la réunion est égale à A.

(On peut calculer la probabilité de tout événement, dès que l'on connaît la probabilité de chaque événement élémentaire.)

— Si les éventualités sont équiprobables, la probabilité d'un événement A est le quotient du nombre d'événements élémentaires dont la réunion est A, par le nombre d'événements élémentaires dont la réunion est E.

b) Propriétés

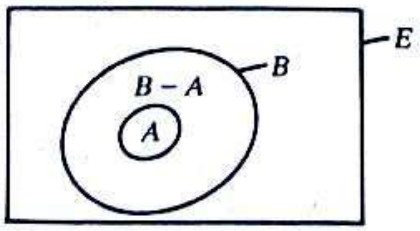
Soit | $\mathcal{E}$ une expérience conduisant à un nombre fini d'éventualités
E l'ensemble de ces éventualités
p une probabilité définie sur $\mathcal{P}(E)$.

Propriété 1

Soit A et B deux événements de E tels que A soit inclus dans B. Alors on a :

$$p(A) \leqslant p(B).$$

Utilisons un diagramme de Venn pour illustrer cette situation :



Scanned by CamScanner

On a : $B = A \cup (B - A)$ et $A \cap (B - A) = \varnothing$.

Les événements A et $(B - A)$ étant incompatibles, on peut donc écrire :

$$p(B) = p\left[A \cup (B - A)\right]$$
$$= p(A) + p(B - A).$$

Or, $p(B - A)$ est un nombre réel positif. On peut donc conclure que :

$$p(B) \geqslant p(A).$$

Propriété 2

Soit | A un événement de E
$\overline{A}$ l'événement contraire de A.

Alors on a : $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.

On a : $p(E) = 1$, $A \cup \overline{A} = E$ et $A \cap \overline{A} = \varnothing$

donc :
$$p(A) + p(\overline{A}) = p(A \cup \overline{A})$$
$$= p(E)$$

d'où la conclusion :
$$= 1$$

Propriété 3

$\varnothing$ désignant l'événement impossible, on a : $p(\varnothing) = 0$.

De même que précédemment on a :

$$E \cup \varnothing = E \quad \text{et} \quad E \cap \varnothing = \varnothing$$

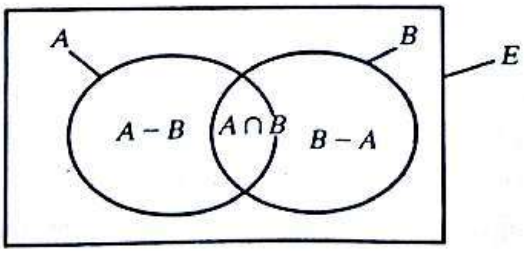
donc :
$$p(E) + p(\varnothing) = p(E \cup \varnothing)$$
$$= p(E).$$

D'où : $p(\varnothing) = 0$.

Propriété 4

A et B désignant deux événements quelconques de E, on a :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B).$$



On a : $A = (A - B) \cup (A \cap B)$

et : $(A - B) \cap (A \cap B) = \varnothing$

donc : $p(A) = p(A - B) + p(A \cap B)$. (1)

Scanned by CamScanner

De même : $A \cup B = B \cup (A - B)$

et : $B \cap (A - B) = \varnothing$

donc : $p(A \cup B) = p(B) + p(A - B).$ (2)

Les égalités (1) et (2) permettent donc d'écrire :

$$p(A) = [p(A \cup B) - p(B)] + p(A \cap B)$$

c'est-à-dire : $p(A) + p(B) = p(A \cup B) + p(A \cap B)$

d'où la propriété.

c) Exemples de construction d'une probabilité

Exemple 1

Dans un sac, il y a trois boules rouges et deux boules blanches, indiscernables au toucher. On considère les trois expériences suivantes :

Expérience $\mathcal{E}_4$: On tire simultanément deux boules du sac, on observe les couleurs des boules obtenues.
Soit E_4 l'ensemble des éventualités.

Expérience $\mathcal{E}_5$: On tire une boule du sac, on note sa couleur, on la remet dans le sac, puis on tire une deuxième boule et on note sa couleur.
Soit E_5 l'ensemble des éventualités.

Expérience $\mathcal{E}_6$: On tire une boule du sac, on note sa couleur, on ne la remet pas dans le sac, puis on tire une deuxième boule et on note sa couleur.
Soit E_6 l'ensemble des éventualités.

Pour chacune de ces trois expériences, déterminons l'ensemble des éventualités, et calculons la probabilité de chaque événement élémentaire.

Du fait que les boules soient indiscernables au toucher, on convient que pour chaque expérience, les événements élémentaires sont équiprobables.

Désignons par R_1, R_2, R_3 les trois boules rouges, et par B_1, B_2 les deux boules blanches.

• **Expérience** $\mathcal{E}_4$: Chaque éventualité est un sous-ensemble de deux éléments (les deux boules tirées) pris dans un ensemble de cinq éléments (les cinq boules du sac).

Par exemple $\{R_1, B_2\}$ est l'événement élémentaire «on a tiré simultanément la boule rouge R_1 et la boule blanche B_2».

D'après le chapitre sur le dénombrement, le nombre d'événements élémentaires est C_5^2 et :

$$C_5^2 = \frac{5!}{3!2!} = 10.$$

La probabilité de chaque événement élémentaire est donc : $\frac{1}{10}$.

Scanned by CamScanner

Exercice 1

Soit p_4 la probabilité définie sur $\mathcal{T}(E_4)$ relativement à l'expérience $\mathcal{E}_4$.

1) Quelle est la probabilité de l'événement A : «les deux boules sont de même couleur».

2) Quel est l'événement contraire de l'événement A? Soit $\overline{A}$ cet événement.
Quelle est sa probabilité?

3) Calculer la probabilité de l'événement B : «il y a au moins une boule rouge» :

— en utilisant la propriété de la probabilité de la réunion de deux événements incompatibles;

— en utilisant la probabilité de l'événement contraire de l'événement B.

• **Expérience $\mathcal{E}_5$:** On peut tirer deux fois la même boule.

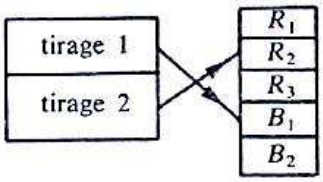
Chaque éventualité :

— est un couple du produit cartésien $E_5 \times E_5$

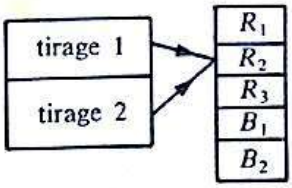
— est identifiable à une application d'un ensemble de deux éléments (les deux tirages) dans un ensemble de cinq éléments (les cinq boules du sac).

Exemple.

L'éventualité (B_1, R_2) est identifiable à l'application :



l'éventualité (R_2, R_2) est identifiable à l'application :



Le nombre d'éventualités est donc : 5^2, c'est-à-dire : 25.

La probabilité de chaque événement élémentaire est donc : $\frac{1}{25}$.

Exercice 2

1) Reprendre l'énoncé de l'exercice 1 en considérant la probabilité p_5 définie sur $\mathcal{T}(E_5)$ relativement à l'expérience $\mathcal{E}_5$.

2) Quelle est la probabilité de l'événement «la deuxième boule tirée est rouge»?

• **Expérience $\mathcal{E}_6$:** On ne peut pas tirer deux fois la même boule.

Chaque éventualité est identifiable à une application injective d'un ensemble de deux éléments (les deux tirages) dans un ensemble de cinq éléments (les cinq boules du sac).

Scanned by CamScanner

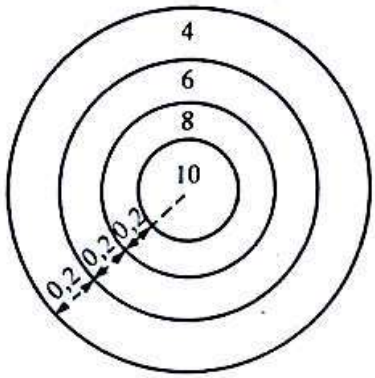
Nombre d'éventualités : $A_5^2 = \frac{5!}{3!} = 20.$

La probabilité de chaque événement élémentaire est donc : $\frac{1}{20}$.

Exercice 3 { Reprendre l'énoncé de l'exercice 2, en considérant la probabilité p_6 définie sur $\mathcal{P}(E_6)$ relativement à l'expérience $\mathcal{E}_6$.

Exemple 2

On considère une cible de tir à l'arc de diamètre 1,60 m comme indiqué ci-dessous.



Lorsque la flèche atteint la cible, le tireur note le nombre de points inscrits dans la couronne où se trouve la flèche.

Sachant que la probabilité d'atteindre une couronne est proportionnelle à l'aire de cette couronne, trouver la probabilité de chaque événement élémentaire.

L'ensemble E des éventualités est tel que :

$$E = \{4, 6, 8, 10\}.$$

i étant un élément de E, notons $p(i)$ la probabilité d'atteindre la couronne numérotée i.

- Aires des couronnes de la cible :

numéro	10	8	6	4
aire (m^2)	0,125	0,377	0,628	0,879

- Exprimons la proportionnalité entre la probabilité d'atteindre chaque couronne et l'aire de cette couronne :

$$\frac{p(10)}{0,125} = \frac{p(8)}{0,377} = \frac{p(6)}{0,628} = \frac{p(4)}{0,879}.$$

- La somme des probabilités des événements élémentaires est égale à 1 :

$$p(10) + p(8) + p(6) + p(4) = 1.$$

Scanned by CamScanner

• On obtient :

$$p(10)+\frac{0,377}{0,125}\,p(10)+\frac{0,628}{0,125}\,p(10)+\frac{0,879}{0,125}\,p(10)=1$$

c'est-à-dire : $16,07\times p(10)=1$

d'où : $p(10)=0,062.$

On en déduit alors que :

$$p(8)=0,188 \qquad p(6)=0,313 \qquad p(4)=0,437.$$

3) Probabilités conditionnelles Probabilités de l'intersection de deux événements

a) Exemple introductif

Reprenons l'expérience $\mathcal{E}_6$ du *c*) du paragraphe précédent.
Soit p_6 la probabilité définie sur $\mathcal{P}(E_6)$.

• Soit A l'événement « tirer deux boules de même couleur ».

Probabilité de l'événement A :

$$p_6(A)=\frac{A_3^2+A_2^2}{A_5^2}$$
$$=\frac{6+2}{20}$$
$$=\frac{2}{5}.$$

• **Supposons que l'on sache que la première boule tirée est rouge.**

Soit C cet événement, on a :

$$C=\{(R_1, R_2), (R_1, R_3), (R_1, B_1), (R_1, B_2), (R_2, R_1), (R_2, R_3), (R_2, B_1), (R_2, B_2)$$
$$(R_3, R_1), (R_3, R_2), (R_3, B_1), (R_3, B_2)\}.$$

Il reste alors dans le sac, deux boules rouges et deux boules blanches.

L'événement A « les deux boules tirées sont de même couleur » a donc une nouvelle probabilité égale à $\frac{2}{4}$ c'est-à-dire 0,5.

Ainsi :

— L'adjonction d'une nouvelle hypothèse définit donc une autre probabilité sur l'ensemble $\mathcal{P}(E_6)$.

— Pour cette nouvelle probabilité, l'événement C étant réalisé, sa probabilité sera égale à 1.

Notons p_C cette nouvelle probabilité :

On dit que p_C est une *probabilité conditionnelle sachant que l'événement C est réalisé.*

On a donc : $\quad p_6(A)=\frac{2}{5} \quad$ et $\quad p_C(A)=\frac{1}{2}.$

Scanned by CamScanner

Remarque

$p_C(A)$ se lit « probabilité de l'événement A sachant que l'événement C est réalisé ».

Exercices

1) On considère l'expérience $\mathcal{E}_6$ décrite ci-dessus :

Soit D l'événement « la première boule tirée est blanche » et F l'événement « tirer deux boules de couleurs différentes ».
Calculer $p_6(F)$ puis $p_D(F)$.
Calculer $p_D(A)$.

2) On considère deux dés cubiques, un rouge et un vert, dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On lance simultanément ces deux dés et on lit le chiffre inscrit sur le dé rouge puis celui inscrit sur le dé vert.

Soit A l'événement « la somme des points obtenus est strictement supérieure à 9 ».

Soit B l'événement « obtenir 4 avec le dé rouge ».
Soit p la probabilité définie relativement à cette expérience.
Calculer $p(A)$ puis $p_B(A)$.

b) Définition d'une probabilité conditionnelle

Activité

Reprenons l'exemple du *a*)

1) Calculer la probabilité $p_6(C)$ de l'événement C.

2) Définir l'événement $(A \cap C)$ puis calculer $p_6(A \cap C)$.

3) Comparer $p_C(A \cap C)$ avec le produit $p_6(C) \times p_C(A)$, puis avec le produit $p_6(A) \times p_6(C)$.

Définition et théorème

Soit $\mathcal{E}$ une expérience conduisant à un nombre fini d'éventualités
E l'ensemble de ces éventualités
p une probabilité définie sur $\mathcal{P}(E)$
C un événement de probabilité non nulle.

On suppose que l'événement C est réalisé.

L'application $P_C : \mathcal{P}(E) \longrightarrow [0, 1]$

$$A \longmapsto \frac{P(A \cap C)}{P(C)}$$

est une probabilité sur $\mathcal{P}(E)$.
Elle est appelée *probabilité conditionnelle sachant que C est réalisé.*

Conséquences

- $$p_C(C) = \frac{p(C \cap C)}{p(C)} = \frac{p(C)}{p(C)} = 1.$$

Scanned by CamScanner

• Pour tout événement A tel que C soit inclus dans A, on a :

$$p_C(A)=1 \qquad \text{(justifier!).}$$

• Pour tout événement B tel que B soit inclus dans C, on a :

$$p_C(B)=\frac{p(B)}{p(C)} \qquad \text{(justifier!)}$$

• Probabilité de l'intersection de deux événements.

Soit A et B deux événements de E, on a :

$$p(A\cap B)=p(A)\times p_A(B)$$

ou bien :

$$p(A\cap B)=p(B)\times p_B(A).$$

c) **Exemple**

On considère deux jetons indiscernables au toucher :

— le premier jeton a deux faces numérotées 1;

— le deuxième jeton a une face numérotée 1 et une face numérotée 2.

On place les jetons dans un sac, on tire au hasard un jeton et on lit le chiffre inscrit sur la première face visible puis le chiffre inscrit sur la deuxième face.

Sachant que le premier chiffre lu est 1, quelle est la probabilité pour que la deuxième face soit numérotée 1?

Désignons par 1_1, 1_2 les deux faces numérotées 1 du premier jeton; et par 1_3 et 2 les faces du deuxième jeton.

L'ensemble des éventualités liées à cette expérience est :

$$\{(1_1, 1_2), (1_2, 1_1), (2, 1_3), (1_3, 2)\}.$$

Les éventualités sont équiprobables, la probabilité de chacune d'elles est $\frac{1}{4}$.

Soit A l'événement «le premier chiffre lu est 1» :

$$p(A)=\frac{3}{4}.$$

Soit B l'événement «les deux chiffres lus sont 1»

$$p(B)=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

L'événement B est inclus dans l'événement A, on a donc :

$$p_A(B)=\frac{p(B)}{p(A)}=\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}=\frac{2}{3}.$$

Exercice On lance successivement deux dés cubiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6. Sachant que le chiffre lu sur le premier dé est 3, quelle est la probabilité pour que la somme des deux chiffres soit paire?

Scanned by CamScanner

d) Événements indépendants

Activité

On considère un jeu de 32 cartes. On tire une carte au hasard et on note la figure obtenue.

Soit A l'événement : « la carte tirée est un cœur ».

Soit B l'événement : « la carte tirée est un roi ».

Soit p la probabilité définie sur l'ensemble des événements liés à cette expérience.

Calculer $p(A)$ puis $p_B(A)$. Que constate-t-on?

Calculer $p(B)$ puis $p_A(B)$. Que constate-t-on?

Calculer $p(A \cap B)$ et comparer avec le produit $p(A) \times p(B)$.

Définition

Soit A et B deux événements liés à une expérience $\mathcal{E}$ conduisant à un ensemble fini E d'éventualités et soit p une probabilité définie sur $\mathcal{P}(E)$.

On suppose que $p(A)$ et $p(B)$ ne sont pas nuls.

Les événements A et B sont deux événements indépendants si :

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$$

c'est-à-dire : $p_A(B) = p(B)$

ou encore : $p_B(A) = p(A)$.

Remarques

1) Deux événements sont indépendants si la probabilité de l'un n'est pas modifiée par la réalisation de l'autre.

2) La probabilité de l'intersection de deux événements indépendants est égale au produit de leurs probabilités respectives.

Exercice

Un sac contient trois boules blanches et trois boules noires. On tire au hasard et simultanément trois boules. (Les boules sont indiscernables au toucher.)

Soit A l'événement :

« on obtient au moins une boule blanche ».

Soit B l'événement :

« on obtient au moins deux boules noires ».

Soit C l'événement :

« on obtient au moins une boule blanche et une boule noire ».

Dire quels sont les événements indépendants et justifier la réponse par un calcul.

Scanned by CamScanner

4) Expériences répétées. Schéma de Bernouilli

a) Expériences indépendantes

De manière intuitive, on dira que deux expériences $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ sont indépendantes, si les résultats de l'expérience $\mathcal{E}_1$ n'interviennent pas sur les résultats de l'expérience $\mathcal{E}_2$ et réciproquement.

Exemple 1

On considère une urne contenant un certain nombre de boules de couleur.
Expérience $\mathcal{E}_1$: « On tire une boule, on note sa couleur et on la remet dans le sac. »
Expérience $\mathcal{E}_2$: « On tire une boule, on note sa couleur et on la remet dans le sac. »
Les résultats de l'expérience $\mathcal{E}_1$ n'interviennent pas sur les résultats de l'expérience $\mathcal{E}_2$.

Exemple 2

On considère un problème de mathématique.
Expérience $\mathcal{E}_1$: « Un étudiant A fait le problème. »
Expérience $\mathcal{E}_2$: « Un étudiant B fait le problème sans avoir consulté l'étudiant A. »
Les résultats de l'expérience $\mathcal{E}_1$ n'interviennent pas sur les résultats de l'expérience $\mathcal{E}_2$.

Exemple 3

On considère un avion bimoteur en vol.
Expérience $\mathcal{E}_1$: « Le moteur numéro 1 tombe en panne. »
Expérience $\mathcal{E}_2$: « Le moteur numéro 2 tombe en panne. »
La panne du moteur 1 ne provoque pas nécessairement la panne du moteur 2.

Remarques

— Dans l'exemple 1, si pour l'expérience $\mathcal{E}_1$ on ne remettait pas la boule tirée dans le sac, les résultats de cette expérience interviendraient sur les résultats de l'expérience $\mathcal{E}_2$ puisque la composition du sac aurait changé.

— Dans l'exemple 2, si l'étudiant B consulte l'étudiant A, il est influencé pour résoudre le problème.

b) Définition d'une probabilité sur un produit cartésien

Soit | $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ deux expériences indépendantes conduisant à un nombre fini d'éventualités.
E_1 et E_2 les ensembles des éventualités liées respectivement aux expériences $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$.
p_1 et p_2 deux probabilités définies respectivement sur $\mathcal{P}(E_1)$ et $\mathcal{P}(E_2)$.

e_1 et e_2 étant respectivement deux éventalités de E_1 et E_2, on admettra que :

1) l'application : $E_1 \times E_2 \longrightarrow \mathbb{R}$, $(e_1, e_2) \longmapsto p_1(e_1) \times p_2(e_2)$

définit une probabilité p sur $\mathcal{P}(E_1 \times E_2)$.

2) A et B étant respectivement deux événements de E_1 et E_2, $A \times B$ est un élément de $\mathcal{P}(E_1 \times E_2)$ et :

$$p(A \times B) = p_1(A) \times p_2(B).$$

Scanned by CamScanner

Exemple 1

On lance deux fois de suite un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On lit sur la face supérieure du dé le chiffre obtenu au premier puis au deuxième lancer.
Quelle est la probabilité d'obtenir pour somme un nombre pair?

• Soit $\mathcal{E}_1$ l'expérience : « on lance le dé et on lit le chiffre inscrit sur la face supérieure ».
L'ensemble E_1 des éventualités liées à cette expérience est tel que :

$$E_1 = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

Soit p_1 la probabilité définie sur $\mathcal{P}(E_1)$, relativement à cette expérience.
La probabilité de chaque événement élémentaire est égale à $\frac{1}{6}$.

• On fait deux fois cette même expérience.
— Ces deux expériences sont indépendantes.
— L'ensemble des éventualités lié aux deux lancers successifs est donc $E_1 \times E_1$.

Soit A l'événement « obtenir un chiffre pair au premier lancer » :

$$p_1(A) = \frac{1}{2}.$$

Soit B l'événement « obtenir un chiffre pair au deuxième lancer » :

$$p_1(B) = \frac{1}{2}.$$

Soit C l'événement « obtenir un chiffre impair au premier lancer » :

$$p_1(C) = \frac{1}{2}.$$

Soit D l'événement « obtenir un chiffre impair au deuxième lancer » :

$$p_1(D) = \frac{1}{2}.$$

— L'événement « obtenir une somme paire » est le sous-ensemble

$$(A \times B) \cup (C \times D).$$

— Les événements $(A \times B)$ et $(C \times D)$ sont incompatibles. (Justifier!)

— Soit p la probabilité définie sur $\mathcal{P}(E_1 \times E_1)$

$$\begin{aligned} p\left[(A \times B) \cup (C \times D)\right] &= p(A \times B) + p(C \times D) \\ &= p_1(A) \times p_1(B) + p_1(C) \times p_1(D) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Scanned by CamScanner

Exemple 2

Reprenons l'exemple 2 du paragraphe *a*) :

Supposons que la probabilité pour que l'élève A trouve la solution du problème soit 0,6; et que pour l'élève B la probabilité soit 0,5.

Quelle est la probabilité pour que personne ne trouve la solution?

• L'expérience $\mathcal{E}_1$ « l'élève A fait le problème » conduit à deux éventualités :

— « il trouve la solution ». Soit J_A cette éventualité;

— « il ne trouve pas la solution ». Soit F_A cette éventualité.

L'ensemble E_1 des éventualités liées à l'expérience $\mathcal{E}_1$ est donc :

$$E_1 = \{J_A, F_A\}.$$

Soit p_1 la probabilité définie sur $\mathcal{P}(E_1)$, relative à l'expérience $\mathcal{E}_1$, on a :

$$p_1(J_A) = 0{,}6; \quad p_1(F_A) = 1 - 0{,}6 = 0{,}4.$$

• De même pour l'expérience $\mathcal{E}_2$ « l'élève B fait le problème » :

$$E_2 = \{J_B, F_B\}; \quad p_2(J_B) = 0{,}5; \quad p_2(F_B) = 0{,}5.$$

• L'expérience $\mathcal{E}$ « l'élève A puis l'élève B font le problème » a pour ensemble d'éventualités $E_1 \times E_2$.

L'éventualité « personne ne trouve la solution » est le couple (F_A, F_B).

Soit p la probabilité définie sur $\mathcal{P}(E_1 \times E_2)$:

$$\begin{aligned} p\left[\{F_A\} \times \{F_B\}\right] &= p\left[(F_A, F_B)\right] \\ &= p_1(F_A) \times p_2(F_B) \\ &= 0{,}4 \times 0{,}5 \\ &= 0{,}20. \end{aligned}$$

c) Généralisation

• $x_1, x_2, \ldots, x_n$ étant n éléments d'un ensemble E, on dit que $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est un n-uplet d'éléments de E.

L'ensemble de ces n-uplets est noté : $\underbrace{E \times E \times \ldots \times E}_{n \text{ fois}}$

et pour alléger l'écriture, on le note : E^n.

• Soit p une probabilité définie sur $\mathcal{P}(E)$, on généralise la probabilité définie sur un produit cartésien en admettant que la probabilité du n-uplet $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est égale à :

$$p(x_1) \times p(x_2) \times \ldots \times p(x_n).$$

d) Schéma de Bernouilli

On appelle *épreuve de Bernouilli*, toute expérience ne conduisant qu'à deux éventualités (équiprobables ou non).

Scanned by CamScanner

Exemple 1

Dans un sac, il y a trois boules rouges et sept boules blanches. On tire une boule et on note sa couleur.

Désignons par B l'éventualité « on a tiré une boule blanche » et par R l'éventualité « on a tiré une boule rouge ».

L'ensemble E des éventualités est tel que : $E=\{R, B\}$.

Soit p_1 la probabilité définie sur $\mathcal{P}(E)$ relativement à l'expérience.

On a : $$p_1(R)=\frac{3}{10} \quad \text{et} \quad p_1(B)=\frac{7}{10}.$$

Exercices

Dans ce qui suit, vérifier que l'expérience conduit exactement à deux éventualités que l'on définira et trouver la probabilité de chacun des deux événements élémentaires :

1) On lance un dé cubique dont trois faces sont numérotées 1 et trois faces numérotées 5.

2) On lance un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6; l'expérience étant d'observer l'apparition du chiffre 3.

3) On joue à « pile ou face » avec une pièce de monnaie.

- **Schéma de Bernouilli**

Exemple 2

Dans un sac, il y a trois boules rouges et sept boules blanches. On tire cinq fois de suite une boule, en remettant à chaque tirage la boule tirée dans le sac, et on note à chaque tirage la couleur de la boule.

1) Quelle est la probabilité pour qu'on ait tiré une boule rouge aux premier, troisième, cinquième tirages; et une boule blanche aux deuxième et quatrième tirages?

2) Quelle est la probabilité pour qu'au cours de ces cinq tirages, on ait tiré exactement trois fois une boule rouge?

Remarque

Cette expérience est la répétition cinq fois de suite de l'expérience décrite dans l'exemple 1.

Ces répétitions sont faites de manière indépendante puisque l'on remet à chaque fois la boule tirée dans le sac.

1) L'événement décrit dans la question est l'événement élémentaire e de E^5 tel que :

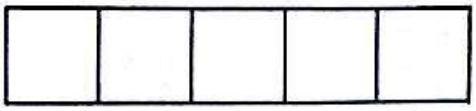
$$e=\{(R, B, R, B, R)\}.$$

Scanned by CamScanner

La probabilité du quintuplet e :

$$p_1(R)\times p_1(B)\times p_1(R)\times p_1(B)\times p_1(R)=[p_1(R)]^3\times[p_1(B)]^2$$
$$=\left[\frac{3}{10}\right]^3\times\left[\frac{7}{10}\right]^2$$
$$=\frac{1\,323}{100\,000}$$
$$=0{,}013.$$

2) Pour connaître le nombre d'événements élémentaires correspondant à cet événement, considérons le tableau suivant :



• Dès que l'on a inscrit dans trois de ces cinq cases la lettre R, les deux autres ont la lettre B, et on a obtenu un événement élémentaire correspondant à l'événement décrit.

Il y a donc autant d'événements élémentaires que de manières de disposer les trois lettres R dans les cinq cases c'est-à-dire : C_5^3.

• L'événement est donc constitué de dix événements élémentaires tous équiprobables et de probabilité égale à 0,013.

• La probabilité pour qu'au cours des cinq tirages on ait tiré exactement trois fois une boule rouge :

$$C_5^3[p_1(R)]^3\times[p_1(B)]^2=10\times0{,}013$$
$$=0{,}13.$$

• **Généralisation**

Soit | $\mathcal{E}$ une expérience conduisant à deux éventualités A et B.
E l'ensemble de ces éventualités.
p une probabilité définie sur $\mathcal{P}(E)$.

Supposons que l'expérience $\mathcal{E}$ soit répétée n fois ($n\geqslant 1$).

La probabilité pour que l'éventualité A se produise exactement k fois ($k\leqslant n$) lors des n répétitions de l'expérience $\mathcal{E}$ est égale à :

$$C_n^k\times[p(A)]^k\times[p(B)]^{n-k}$$

Remarque :

$$p(B)=1-p(A).$$

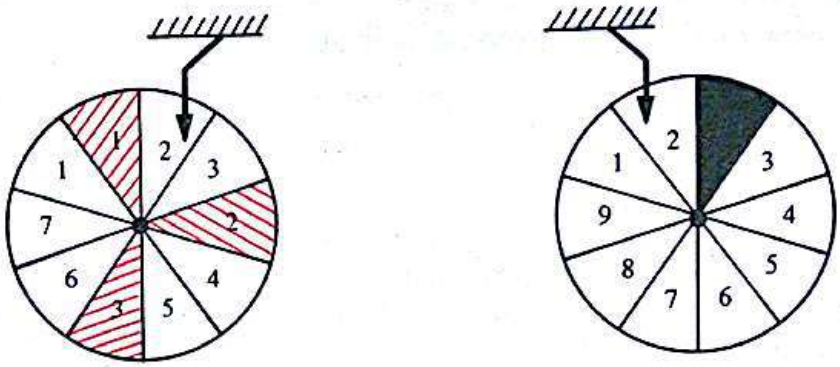
Scanned by CamScanner

3 Variables aléatoires

1) Définition

a) Exemple introductif

On considère le jeu suivant :
deux petites roues sont divisées chacune en dix secteurs égaux, comme l'indique la figure ci-dessous



La première roue a	trois secteurs rouges numérotés 1, 2, 3 sept secteurs blancs numérotés 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.
La deuxième roue a	un secteur noir neuf secteurs blancs numérotés 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

On fait tourner simultanément les deux roues autour de leurs axes et lorsqu'elles s'arrêtent, on observe pour chacune d'elle, le secteur placé sous la flèche :

— lorsque les deux roues s'arrêtent, l'une sur le rouge, l'autre sur le noir, le joueur gagne 3 000 francs;

— lorsque l'une seulement s'arrête sur un secteur blanc, le joueur gagne 1 500 francs;

— lorsque les deux roues s'arrêtent chacune sur un secteur blanc, le joueur gagne 500 francs.

• Désignons par :

— $\mathcal{E}_1$ l'expérience : « on fait tourner la première roue et lorsqu'elle s'arrête, on observe le secteur placé sous la flèche »;

— $\mathcal{E}_2$ l'expérience : « on fait tourner la deuxième roue et, lorsqu'elle s'arrête, on observe le secteur placé sous la flèche »;

— R_1, R_2, R_3, les trois secteurs rouges de la première roue;

— B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7, les sept secteurs blancs de la première roue;

— N, le secteur noir de la deuxième roue;

— B'_1, B'_2, B'_3, B'_4, B'_5, B'_6, B'_7, B'_8, B'_9 les neuf secteurs blancs de la deuxième roue.

Scanned by CamScanner

Soit E_1, l'ensemble des éventualités liées à l'expérience $\mathcal{E}_1$:

$$E_1 = \{R_1, R_2, R_3, B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7\}$$

Soit E_2, l'ensemble des éventualités liées à l'expérience $\mathcal{E}_2$:

$$E_2 = \{N, B'_1, B'_2, B'_3, B'_4, B'_5, B'_6, B'_7, B'_8, B'_9\}$$

L'ensemble E des éventualités liées au jeu est donc égal à :

$$E_1 \times E_2.$$

• Soit X l'application de E dans $\mathbb{R}$ qui à chaque élément e de E associe le gain du joueur

$$X : E \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$e \longmapsto X(e).$$

On a, par exemple :

$$X((B_2, B'_3)) = 500$$
$$X((R_3, N)) = 3\,000$$
$$X((B_7, N)) = 1\,500$$
$$X((R_1, B'_6)) = 1\,500$$

et : $$X(E) = \{500, 1\,500, 3\,000\}.$$

Cette application est appelée *variable aléatoire* définie sur E.

b) Définition

Soit | $\mathcal{E}$ une expérience conduisant à un nombre fini d'éventualités.
| E l'ensemble de ces éventualités.

On appelle **variable aléatoire** définie sur E, toute application de E dans $\mathbb{R}$.

2) Probabilité image

a) Retour à l'exemple introductif

• Pour chacune des deux roues, chaque secteur à la même « chance » d'être placé sous la flèche; les événements élémentaires liés aux expériences $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ sont donc équiprobables.

Soit p_1 la probabilité définie sur $\mathcal{P}(E_1)$ relativement à l'expérience $\mathcal{E}_1$.

La probabilité de chaque événement élémentaire est égale à $\frac{1}{10}$.

De même, p_2 désignant la probabilité définie sur $\mathcal{P}(E_2)$ relativement à l'expérience $\mathcal{E}_2$, la probabilité de chaque événement élémentaire est égale à $\frac{1}{10}$.

Les expériences $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ sont indépendantes.

Soit p la probabilité définie sur E (probabilité définie sur le produit cartésien $E_1 \times E_2$). (Voir leçon 2 4)-*b*).)

Scanned by CamScanner

On a, par exemple :

$$p(\{(R_3, N)\}) = p_1(R_3) \times p_2(N)$$
$$= \frac{1}{10} \times \frac{1}{10}$$
$$= \frac{1}{100}.$$

De même, chaque événement élémentaire de E a une probabilité égale à $\frac{1}{100}$. (Justifier.)

Quelle est la probabilité pour que les deux roues s'arrêtent l'une sur un secteur rouge, l'autre sur le secteur noir?

Soit A cet événement, on a :

$$A = \{R_1, R_2, R_3\} \times \{N\}$$

d'où :

$$p(A) = [p_1(R_1) + p_1(R_2) + p_1(R_3)] \times p_2(N)$$
$$= \frac{3}{10} \times \frac{1}{10}$$
$$= \frac{3}{100}$$
$$= 0{,}03.$$

De même :

Calculer la probabilité des événements

B : « Une roue seulement s'arrête sur un secteur blanc »

C : « Les deux roues s'arrêtent chacune sur un secteur blanc. »

• Considérons la variable aléatoire X

On a : $X(E) = \{500, 1\,500, 3\,000\}$.

Soit D' le sous-ensemble de $X(E)$ tel que :

$$D' = \{1\,500, 3\,000\}.$$

1) Quel est l'événement D de E tel que l'ensemble des images des éléments de D par l'application X soit égal à D'?

2) Quelle est la probabilité de l'événement D?

On montre facilement que :

$$D = \{R_1, R_2, R_3\} \times \{N\} \cup \{B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6, B_7\} \times \{N\}$$
$$\cup \{R_1, R_2, R_3\} \times \{B'_1, B'_2, B'_3, B'_4, B'_5, B'_6, B'_7, B'_8, B'_9\}.$$

(Justifier!)

et :

$$p(D) = \frac{3}{10} \times \frac{1}{10} + \frac{7}{10} \times \frac{1}{10} + \frac{3}{10} \times \frac{9}{10}$$
$$= \frac{37}{100}$$
$$= 0{,}37.$$

Scanned by CamScanner

• Soit p' l'application de $\mathcal{P}(X(E))$ dans [0, 1] qui à chaque sous-ensemble F' de $X(E)$, associe la probabilité de l'événement F de E, constitué par les antécédents des éléments de F' par l'application X.

$$F = \{e \in E \mid X(e) \in F'\}.$$

On a donc, par exemple :

$$p'(D') = p(D) = 0{,}37.$$

De même :

1) Calculer : $p'(\{3\,000\})$
$p'(\{1\,500\})$
$p'(\{500\})$
ainsi que la somme de ces trois nombres réels.

2) Comparer $p'(D')$ et le nombre
$$p'(\{3\,000\}) + p'(\{1\,500\}).$$

On démontre et nous admettrons que p' est une probabilité sur $\mathcal{P}(X(E))$.
Elle est appelée *probabilité image* de la probabilité p par la variable aléatoire X.

b) Théorème et définition

Soit $\mathcal{E}$ une expérience conduisant à un nombre fini d'éventualités.
E l'ensemble de ces éventualités.
p une probabilité définie sur $\mathcal{P}(E)$.
X une variable aléatoire définie sur E.
$X(E)$ l'ensemble image de E par l'application X.

— L'application p' de $\mathcal{P}(X(E))$ dans l'intervalle [0, 1] qui, à chaque sous-ensemble F' de $X(E)$, associe la probabilité de l'événement F de E, dont les éléments sont les antécédents des éléments de F' par l'application X est une probabilité sur $\mathcal{P}(X(E))$.

— La probabilité p' est appelée **probabilité image** de la probabilité p par la variable aléatoire X.

Notations

— Soit x un élément de $X(E)$

$p'(x)$ est noté : $p(X = x)$; et lu :

« probabilité pour que la variable aléatoire X prenne la valeur x ».

— Soit F' un sous-ensemble de $X(E)$

$p'(F')$ est noté : $p(X \in F')$; et lu :

« probabilité pour que la variable aléatoire prenne les valeurs appartenant à F' ».

Dans le cas de l'exemple introductif, calculer :
$$p(X = 3\,000) \quad \text{et} \quad p(X \in \{500, 3\,000\}).$$

Scanned by CamScanner

3) Distribution et fonction de répartition d'une variable aléatoire

a) Définition 1

Soit | $\mathcal{E}$ une expérience conduisant à un nombre fini d'éventualités
E l'ensemble de ces éventualités
p une probabilité définie sur $\mathcal{T}(E)$
X une variable aléatoire définie sur E.

L'application f, de $\mathbb{R}$ dans l'intervalle [0, 1] définie par :

$$\begin{cases} \forall x \in X(E) \quad f(x) = p(X = x) \\ \forall x \in \mathbb{R} - X(E) \quad f(x) = 0 \end{cases}$$

est appelée **distribution** de la variable aléatoire X.

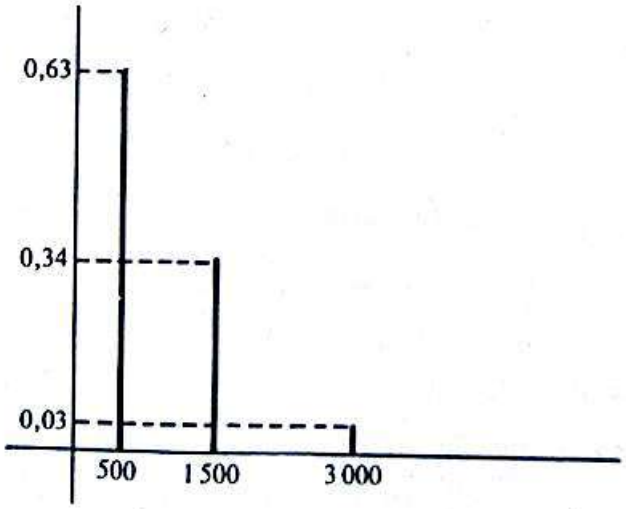
Exemple

Dans le cas de l'exemple introductif, la distribution de la variable aléatoire X est l'application f définie par :

$$\begin{cases} f(3\,000) = 0{,}03 \\ f(1\,500) = 0{,}34 \\ f(500) = 0{,}63 \\ \forall x \in \mathbb{R} - \{500,\ 1\,500,\ 3\,000\} \quad f(x) = 0. \end{cases}$$

Et par analogie avec les statistiques, cette application est représentée par un « diagramme en bâtons ».

valeurs prises par la variable aléatoire X	500	1 500	3 000
probabilité	0,63	0,34	0,03



Scanned by CamScanner

Remarque

On pourrait interpréter le tableau ci-dessus d'un point de vue statistique, en disant que sur environ 100 parties, un joueur PEUT ESPÉRER GAGNER.

— ENVIRON 63 fois la somme de 500 francs.

— ENVIRON 34 fois la somme de 1 500 francs.

— ENVIRON 3 fois la somme de 3 000 francs.

MAIS LE CARACTÈRE ALÉATOIRE du jeu peut faire que sur 100 parties effectives, un joueur peut gagner *par exemple* 93 fois la somme de 500 francs.

b) **Définition 2**

Soit | $\mathcal{E}$ une expérience conduisant à un nombre fini d'éventualités.
E l'ensemble de ces éventualités.
P une probabilité définie sur $\mathcal{P}(E)$.
X une variable aléatoire définie sur E.

L'application F, de $\mathbb{R}$ dans l'intervalle $[0, 1]$ définie par :

$$\begin{cases} F(x)=p(X\in\,]-\infty, x]\cap X(E)); & \text{si : }]-\infty, x]\cap X(E)\neq\varnothing \\ F(x)=0; & \text{si : }]-\infty, x]\cap X(E)=\varnothing \end{cases}$$

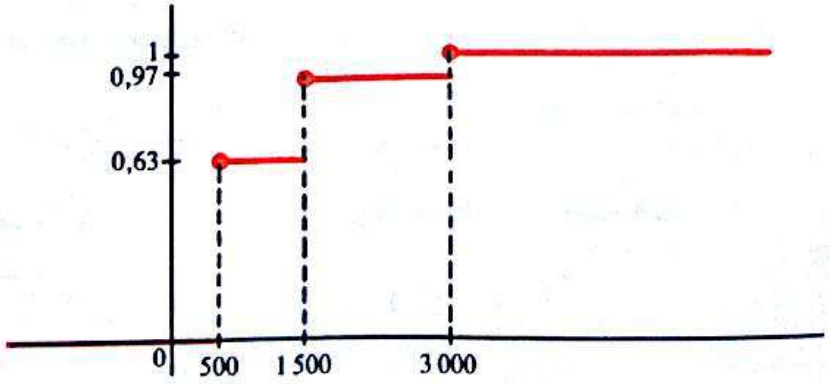
est appelée **fonction de répartition** de la variable aléatoire X.

Exemple

Dans le cas de l'exemple introductif, montrer que la fonction de répartition de la variable aléatoire X est définie par :

$$\begin{cases} \forall x\in\,]-\infty, 500[& F(x)=0 \\ \forall x\in[500, 1\,500[& F(x)=0{,}63 \\ \forall x\in[1\,500, 3\,000[& F(x)=0{,}97 \\ \forall x\in[3\,000, +\infty[& F(x)=1. \end{cases}$$

F est une fonction en escalier, croissante, analogue au diagramme cumulatif des fréquences pour la série statistique exposée en remarque du *a*).



Scanned by CamScanner

Remarque

F est aussi appelée *fonction cumulative* de la variable aléatoire X.

Notation

$F(x)$ est noté : $p(X<x)$
et lu : « probabilité pour que la variable aléatoire X prenne des valeurs inférieures ou égales à x ».

4) Espérance mathématique, variance, écart type d'une variable aléatoire

a) Retour à l'exemple introductif

Combien un joueur peut-il espérer gagner en moyenne par partie, en jouant un « grand nombre » de fois?

D'après la remarque faite au 3) *a*); un joueur peut ESPÉRER une moyenne de gain par partie en jouant 100 parties, égale à :

$$\frac{63\times 500+34\times 1\,500+3\times 3\,000}{100}$$

soit à : $500\times 0{,}63+1\,500\times 0{,}34+3\,000\times 0{,}03$

c'est-à-dire à : 915 francs.

Ce nombre est appelé *espérance mathématique* de la variable aléatoire X.

Remarque
Cette moyenne de gain a plus de chance d'être effectivement observée à condition que le joueur fasse un « très grand nombre de parties », car il est possible que sur cent parties (seulement...) le joueur gagne par exemple 93 fois la somme de 500 francs... ainsi, la moyenne observée par partie sur les cent parties serait « très » inférieure à 915 francs.

b) Définition

Soit | $\mathcal{E}$ une expérience conduisant à un nombre fini d'éventualités.
E l'ensemble de ces éventualités.
p une probabilité définie sur $\mathcal{P}(E)$
$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ l'ensemble image de E par X.

On appelle, **espérance mathématique** de la variable aléatoire X, le nombre réel noté $E(X)$ tel que :

$$E(X)=\sum_{i=1}^{n} x_i p(X=x_i).$$

Scanned by CamScanner

Remarque

Le nombre réel $E(X)$ est aussi appelé *valeur moyenne* de la variable aléatoire X et noté : $\overline{X}$.

c) Utilisation pratique de l'espérance mathématique d'une variable aléatoire

- Retour à l'exemple introductif.

1) Combien l'organisateur du jeu doit-il faire payer la partie pour ESPÉRER ne pas perdre d'argent sur un « grand nombre » de parties jouées?

2) Combien doit-il faire payer la partie pour ESPÉRER un bénéfice moyen de 100 francs par partie, après un « grand nombre » de parties jouées?

Soit | a le prix payé par un joueur pour une partie.
Y la variable aléatoire définie sur E qui à chaque partie associe le bénéfice de l'organisateur. (Un bénéfice négatif correspond à une perte pour l'organisateur...)

Montrer que : $Y(E)=\{a-500,\ a-1\,500,\ a-3\,000\}$

et que :
$$p(Y=a-500)=0{,}63$$
$$p(Y=a-1\,500)=0{,}34$$
$$p(Y=a-3\,000)=0{,}03.$$

Calculons $E(Y)$ en fonction de a :

$$E(Y)=0{,}63(a-500)+0{,}34(a-1\,500)+(0{,}03)(a-3\,000)$$
$$=a-915.$$

Conclusion

Pour que l'organisateur ne perde ni ne gagne de l'argent SUR UN GRAND NOMBRE DE PARTIES JOUÉES, il suffit que la valeur moyenne des bénéfices soit nulle :

$$E(Y)=0$$

d'où :
$$a=915.$$

Ainsi, en faisant payer 915 francs la partie l'organisateur peut ESPÉRER ne perdre ni ne gagner de l'argent SUR UN GRAND NOMBRE DE PARTIES JOUÉES.

Le jeu alors est *équitable.*

Calculer le prix minimum que le joueur doit payer par partie pour que l'organisateur puisse ESPÉRER un bénéfice moyen de 100 francs par partie, APRÈS UN GRAND NOMBRE DE PARTIES JOUÉES.

Scanned by CamScanner

d) Variance et écart type d'une variable aléatoire. Définition

Soit
- $\mathcal{E}$ une expérience conduisant à un nombre fini d'éventualités.
- E l'ensemble de ces éventualités.
- p une probabilité définie sur $\mathcal{P}(E)$.
- X une variable aléatoire définie sur E.
- $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ l'ensemble image de E par X.

On appelle **variance** de la variable aléatoire X le nombre réel noté $V(X)$ tel que :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 \times p(X = x_i)$$

On appelle **écart type** de la variable aléatoire X le nombre réel noté $\sigma(X)$ tel que :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}.$$

Exercice

Dans le cas de l'exemple introductif, calculer $V(X)$, $V(Y)$ puis $\sigma(X)$ et $\sigma(Y)$

a) lorsque le jeu est équitable

b) lorsque l'organisateur espère un bénéfice de 100 francs par partie.

Scanned by CamScanner

Exercices

Probabilité d'un événement

1 (2). On considère deux sacs :

— un sac rouge contenant une boule orange, une boule blanche et une boule verte;

— un sac jaune contenant une boule orange une boule blanche et une boule verte.
Soit $\mathcal{E}$ l'expérience :
« on tire au hasard une boule du sac rouge, on observe sa couleur; puis on tire une boule du sac jaune et on observe sa couleur ».
On suppose que les boules sont indiscernables au toucher.

1) *a*) Écrire en extension l'ensemble E des éventualités liées à cette expérience.

b) Vérifiez, en utilisant les résultats du chapitre sur le dénombrement, l'exactitude concernant le nombre des éventualités trouvé au *a*).

2) Soit p la probabilité définie sur $\mathcal{P}(E)$ relativement à l'expérience $\mathcal{E}$.

a) Quelle est la probabilité de chaque événement élémentaire?
On considère les événements

A : « les deux boules sont de même couleur ».

B : « la première boule tirée est blanche ».

C : « il y a au moins une boule verte parmi les deux boules tirées ».

b) Écrire en extension les événements A, B et C.

c) Calculer $p(A)$, $p(B)$ et $p(C)$.

d) Définir les événements $A \cap B$, $A \cup B$, $A \cap C$, $A \cup C$, $B \cap C$, $B \cup C$ en extension, puis si possible par une phrase simple du langage courant.

e) Calculer la probabilité de chacun de ces événements.

f) Parmi ces trois événements, y en a-t-il deux qui soient incompatibles?

2 (2). On considère un sac contenant 7 boules oranges, 5 boules blanches et 3 boules vertes indiscernables au toucher.
Soit $\mathcal{E}$ l'expérience :
« on tire au hasard et simultanément trois boules du sac et on observe les couleurs obtenues ».

1) Quel est le nombre d'éventualités liées à l'expérience $\mathcal{E}$? (les boules sont des objets physiquement distincts deux à deux!).

Soit p la probabilité définie sur l'ensemble des événements liés à l'expérience $\mathcal{E}$.

2) Quelle est la probabilité de l'événement A : « on a tiré trois boules de couleurs différentes »?

3) Quelle est la probabilité de l'événement B : « on a tiré au moins deux boules oranges »?

4) *a*) Quel est l'événement contraire de l'événement C :
« on a tiré au moins une boule blanche »?

b) Calculer $p(C)$.

5) Les événements A et B sont-ils incompatibles? (justifier verbalement, puis par un calcul).

6) Même question que la 5) avec les événements A et C.

3 (2). Dans un sac, il y a 9 boules indiscernables au toucher :

— trois boules rouges numérotées 1, 2, 3;

— quatre boules vertes numérotées 4, 5, 6, 7.

— deux boules blanches numérotées 8, 9.

Soit $\mathcal{E}$ l'expérience :
« on tire au hasard et successivement trois boules que l'on place côte à côte sur une table, et on observe la couleur et le numéro de chaque boule ».

1) Définir en compréhension l'ensemble E des éventualités et trouver le nombre de ses éléments.
On considère la probabilité définie sur $\mathcal{P}(E)$, relativement à l'expérience $\mathcal{E}$.

2) Quelle est la probabilité des événements suivants :

a) « les trois boules sont rouges »?

b) « les trois boules sont de même couleur »?

c) « les trois boules sont de couleurs différentes »?

d) « il y a une boule blanche entre une rouge et une verte »?

3) Citer parmi les événements précédents, deux événements incompatibles. (Justifier verbalement.)

4 (2). On considère un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
Soit $\mathcal{E}$ l'expérience : « on lance deux fois de suite le dé et on lit successivement les deux chiffres obtenus sur sa face supérieure ».

Scanned by CamScanner

1) *a*) Définir en compréhension l'ensemble E des éventualités liées à l'expérience $\mathcal{E}$.

b) Trouver le nombre d'éventualités.
Soit p la probabilité définie sur $\mathcal{P}(E)$ relativement à l'expérience $\mathcal{E}$.

2) Quelle est la probabilité de chacun des événements suivants
A : « on obtient deux chiffres pairs »;
B : « on obtient au moins un chiffre pair »;
C : « on obtient au moins une fois le chiffre 1 »;
D : « on n'obtient aucun des événements précédents ».

3) *a*) Calculer $p(A \cap B)$, $p(A \cap C)$ et $p(B \cap C)$.

b) Y a-t-il parmi les événements A, B, C des événements incompatibles?

4) Montrer que les événements A, $B \cap \overline{A}$, $C \cap \overline{B}$ et D forment un système complet d'événements.

5) *a*) Soit p' l'application de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} \forall e \in A & p'(\{e\}) = 3r \\ \forall e \in B \cap \overline{A} & p'(\{e\}) = r \\ \forall e \in C \cap \overline{B} & p'(\{e\}) = 4r \\ \forall e \in D & p'(\{e\}) = 2r \end{cases}$$

Pout tout couple (F, G) d'événements incompatibles

$$p'(F \cup G) = p'(F) + p'(G)$$

où r est un nombre réel.
Pour quelle(s) valeur(s) de r, l'application p' est-elle une probabilité définie sur $\mathcal{P}(E)$?

b) Lorsque l'application p' est une probabilité définie sur $\mathcal{P}(E)$, les événements élémentaires sont-ils équiprobables? Peut-on dire que la probabilité p' est liée à l'expérience $\mathcal{E}$?

5 (2). 1) On considère un sac contenant 18 cartons :

3 cartons portent le chiffre 6.

3 cartons portent le chiffre 5.

3 cartons portent le chiffre 4.

3 cartons portent le chiffre 3.

3 cartons portent le chiffre 2.

3 cartons portent le chiffre 1.

Les cartons sont indiscernables au toucher. On considère l'expérience qui consiste à tirer au hasard et simultanément trois cartons du sac et à observer les chiffres inscrits.
Après avoir défini l'ensemble des éventualités liées à cette expérience, trouver la probabilité pour que l'on puisse former le nombre 421 à l'aide des trois cartons tirés.

2) On considère trois dés cubiques dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et l'expérience qui consiste à jeter simultanément ces trois dés et à lire les chiffres inscrits sur les faces supérieures.
Après avoir défini l'ensemble des éventualités liées à cette expérience, trouver la probabilité pour que l'on puisse former le nombre 421 à l'aide des trois chiffres obtenus.

6 (2). On considère un jeu de 32 cartes et l'expérience qui consiste à distribuer cinq cartes au hasard à un joueur et à observer les figures obtenues.

1) *a*) Définir en compréhension l'ensemble E des éventualités liées à cette expérience.

b) Combien cet ensemble a-t-il d'éléments?
On suppose que les cartes sont indiscernables au toucher et on considère la probabilité définie sur $\mathcal{P}(E)$ relativement à l'expérience considérée.

2) Trouver la probabilité des événements suivants :
A : « le joueur a exactement 3 cœurs »;
B : « le joueur a au moins un valet »;
C : « le joueur a exactement un roi »;
D : « le joueur n'a aucun roi ».

3) Trouver la probabilité des événements « A et B » puis « A ou B » (on pourra utiliser la propriété 4 du paragraphe 2) de la leçon 2).

4) — Que peut-on dire des événements C et D?

— Calculer la probabilité de l'événement « C ou D » (on utilisera la définition d'une probabilité).

7 (2). On considère un sac contenant dix boules indiscernables au toucher :
n boules sont noires (n étant un nombre entier naturel tel que : $0 \leqslant n \leqslant 10$)
les autres boules sont blanches.

On considère :

— l'expérience qui consiste à tirer au hasard et simultanément deux boules et à observer les couleurs obtenues;

— la probabilité définie sur l'ensemble des parties de l'ensemble des éventualités relativement à l'expérience considérée.

1) Soit l'événement
A_n : « les deux boules sont de couleurs différentes ».

a) Calculer en fonction de n la probabilité de cet événement.

Scanned by CamScanner

b) Étudier les variations de la fonction :

$$[0;\ 10] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{10x - x^2}{45}.$$

c) En déduire le nombre de boules de chaque couleur pour que la probabilité de l'événement A soit maximale.
Quelle est alors la valeur de cette probabilité?

d) Pouvait-on prévoir intuitivement ce résultat?

2) Soit les événements
B_n : « les deux boules sont noires ».
C_n : « les deux boules sont blanches ».

a) Calculer en fonction de n la probabilité de chacun de ces deux événements.

c) En déduire le nombre de boules de chaque couleur, pour que l'on ait autant de chances de tirer deux boules noires que de tirer deux boules blanches.
Quelle est alors la probabilité de chacun des événements B_n et C_n?

c) Pouvait-on prévoir intuitivement ce résultat?

3) Montrer que les événements A_n, B_n et C_n forment un système complet d'événements.

4) *a*) Combien faut-il de boules blanches au minimum pour que l'on ait au moins une chance sur deux de tirer deux boules blanches. (On dit qu'un événement a au moins une chance sur deux de se produire si sa probabilité est supérieure ou égale à $\frac{1}{2}$).

b) Combien faut-il de boules noires au minimum pour avoir au moins neuf chances sur dix de tirer deux boules noires?
(De même que dans le *a*), un événement a au moins neuf chances sur dix de se produire si sa probabilité est supérieure ou égale à $\frac{9}{10}$.)

8 On considère un sac contenant n boules blanches ($n \in \mathbb{N}^*$) et une boule noire, indiscernables au toucher.

1) Soit :

— $\mathcal{E}_1$ l'expérience : « on tire au hasard et simultanément deux boules et on observe les couleurs obtenues ».

— E_n l'ensemble des éventualités liées à l'expérience $\mathcal{E}_1$.

— P_n la probabilité définie sur $\mathcal{P}(E_n)$ relativement à l'expérience $\mathcal{E}_1$.

On considère les événements
A : « On a tiré la boule noire. »
B : « On a tiré deux boules blanches. »

a) Comparer les événements A et B;
calculer $P_n(A)$ puis $P_n(B)$ en fonction de n.

b) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad u_n = P_n(B).$$

- Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
- Cette suite a-t-elle une limite?
- Expliquer intuitivement ces résultats.

c) Combien faut-il placer de boules blanches au minimum dans le sac pour que l'on ait au moins 99 chances sur 100 de tirer deux boules blanches?

2) Soit :

— $\mathcal{E}_2$ l'expérience : « on tire au hasard une boule du sac, on observe sa couleur, on la remet dans le sac, puis on tire une deuxième boule du sac et on observe sa couleur ».

— F_n l'ensemble des éventualités liées à l'expérience $\mathcal{E}_2$.

— q_n la probabilité définie sur $\mathcal{P}(F_n)$ relativement à l'expérience $\mathcal{E}_2$.

On considère les événements A et B définis dans le 1).

a) Calculer $q_n(A)$ puis $q_n(B)$ en fonction de n.

b) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad v_n = q_n(B).$$

- Étudier les variations de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
- Cette suite a-t-elle une limite?
- Expliquer intuitivement ces résultats.

c) Combien faut-il placer de boules blanches au minimum pour que l'on ait 99 chances sur 100 (au moins) de tirer deux boules blanches. Comparer avec le *c*) du 1).

3) a) Dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J) représenter graphiquement

$$p :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \quad ;$$
$$x \longmapsto \frac{x-1}{x+1}$$
$$q :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{x^2}{(x+1)^2}.$$

b) En déduire une représentation graphique partielle des suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Scanned by CamScanner

c) Soit $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad W_n = v_n - u_n.$$

Montrer que $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite à termes positifs et interpréter ce résultat pour une comparaison des expériences $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$.

d) Combien faut-il mettre de boules blanches au minimum pour que la différence entre les probabilités de l'événement B dans les expériences $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ soit inférieure à $\frac{1}{100}$?

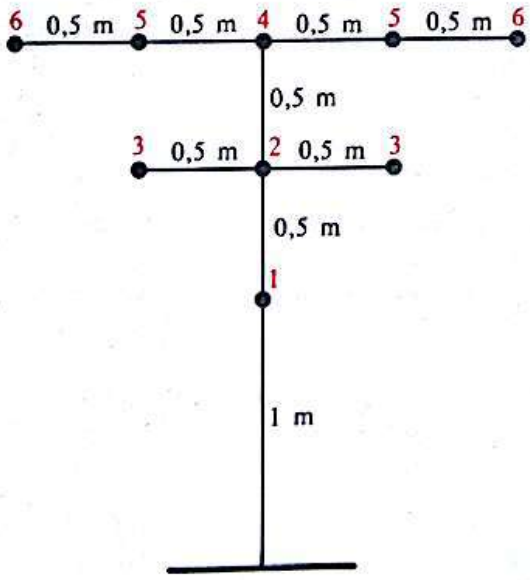
9 On considère un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et l'expérience qui consiste à jeter ce dé et à observer le chiffre inscrit sur sa face supérieure.
Cependant, ce dé a été truqué de telle sorte que l'on ait deux fois plus de chances d'obtenir la face numérotée 6, que d'obtenir les autres faces, qui, elles ont la même chance d'apparaître.

1) Définir en extension l'ensemble E des éventualités et trouver la probabilité de chaque événement élémentaire.

2) Quelle est la probabilité d'obtenir un chiffre pair?

3) Quelle est la probabilité d'obtenir un chiffre impair?

10



On considère 9 petits trous creusés dans le sol et espacés comme l'indique la figure ci-dessus.
Un joueur, muni d'une bille, se place à la limite du trait figurant au bas du dessin, lance la bille vers les trous, et lorsque la bille entre dans un trou, lit le chiffre inscrit en rouge à côté du trou.
On suppose que le joueur est suffisamment adroit pour que la bille atteigne un trou lorsqu'il la lance.

1) Définir en extension l'ensemble E des éventualités liées à cette expérience.

2) On suppose que la probabilité d'atteindre un trou choisi est proportionnelle à l'inverse de la distance séparant le joueur du trou.

a) Expliquer intuitivement le bien fondé de cette supposition.

b) Trouver la probabilité de chaque événement élémentaire.

3) Quelle est la probabilité pour que le joueur obtienne le chiffre 3?

4) Quelle est la probabilité pour que le joueur obtienne un chiffre strictement supérieur à 3?
Pour cette dernière question, on procédera de deux façons différentes :

— par un calcul direct de la probabilité demandée;

— en utilisant la probabilité de l'événement contraire.

Et on comparera les résultats obtenus.

11 Un parachutiste saute d'un avion et atterrit nécessairement sur un terrain déboisé de un hectare, entouré d'une forêt.
Dans ce terrain il y a :

— un espace cultivé rectangulaire ayant 50 mètres de longueur et 30 mètres de largeur;

— un plan d'eau formant un triangle rectangle isocèle de 100 mètres de côté;

— une cible circulaire de 20 mètres de diamètre, qui représente son objectif.

Définir en extension l'ensemble E des éventualités liées à cette expérience.
On suppose que la probabilité pour qu'il tombe sur une partie donnée du terrain est proportionnelle à l'aire de cette partie.

1) Calculer la probabilité de chaque événement élémentaire.

2) Quelle est la probabilité pour qu'il rate la cible, mais qu'il n'atterrisse ni dans l'espace cultivé, ni dans le plan d'eau?

3) Quelle est la probabilité pour qu'il atterrisse dans le plan d'eau ou dans l'espace cultivé?

12 (2). 1) Soit A, B, C trois sous-ensembles d'un ensemble E, d'intersection non vide deux à deux.

Scanned by CamScanner

Soit $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$ les sous-ensembles complémentaires respectivement des sous-ensembles A, B, C dans E.

a) En utilisant un diagramme de Venn, montrer les propriétés suivantes :

(1) $\overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$

(2) $\overline{A} \cup \overline{B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

(lois de Morgan).

b) Écrire plus simplement les sous-ensembles suivants : (utiliser des diagrammes de Venn)

(1) $(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})$

(2) $(A \cup B) \cap (\overline{A} \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$

(3) $A \cap (B \cup \overline{A})$

(4) $A \cup (\overline{B} \cap \overline{A})$

(5) $A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$

(6) $A \cap B \cap \overline{A}$.

2) Soit E un ensemble d'éventualités liées à une expérience $\mathcal{E}$.
Soit A, B, C trois événements de E, non incompatibles deux à deux.
Écrire, en utilisant les notations du 1), les événements suivants :

a) L'événement A est réalisé mais pas l'événement B ni l'événement C.

b) Les trois événements se réalisent simultanément.

c) Au moins deux des trois événements sont réalisés.

d) Aucun des trois événements n'est réalisé.

e) Au moins un des trois événements est réalisé.

f) Un seul des trois événements est réalisé.

3) Soit p une probabilité définie sur $\mathcal{P}(E)$ (E étant l'ensemble des éventualités défini au 2)).
On suppose que :

$$p(A) = 0{,}6;\ p(B) = 0{,}4;\ p(C) = 0{,}3$$

$$p(A \cap B) = 0{,}2;\ p(B \cap C) = p(A \cap C) = 0{,}1$$

$$p(A \cap B \cap C) = 0{,}005.$$

a) Montrer que les événements E_1 et E_2 ci-dessous sont incompatibles. E_1 : « l'événement A est réalisé mais pas l'événement B ni l'événement C. »
E_2 : « l'événement A est réalisé ainsi que un au moins des deux événements B et C ».

b) Calculer $p(E_1 \cup E_2)$.

c) Calculer $p(E_1)$ *et* $p(E_2)$.

d) Calculer $p[A \cup (B \cap C)]$ et expliciter l'événement $A \cup (B \cap C)$ par une phrase du langage courant.

13 (2). On considère deux cabines téléphoniques placées côte à côte :

— la cabine C_1 est destinée uniquement à des communications nationales;

— la cabine C_2 peut en outre obtenir des communications internationales.

Une étude statistique sur la fréquentation de chacune de ces deux cabines a permis d'aboutir aux conclusions suivantes :

— la probabilité pour qu'une personne se présentant devant les deux cabines constate que la cabine C_1 est occupée est de 0,5;

— la probabilité pour que cette personne constate que la cabine C_2 est occupée est de 0,7;

— la probabilité pour que cette personne constate que les deux cabines sont occupées est de 0,3.

Soit A l'événement : « la personne constate que la cabine C_1 est occupée ».
Soit B l'événement : « la personne constate que la cabine C_2 est occupée ».

1) *a*) Définir l'événement $\overline{A}$ puis l'événement $\overline{B}$.

b) Quelles sont les probabilités respectives des événements $\overline{A}$ et $\overline{B}$?

2) *a*) En utilisant les événements A et B, définir l'événement C : « la personne constate qu'une au moins des deux cabines est occupée ».

b) Quelle est la probabilité de l'événement C?

3) Quelle est la probabilité pour que la personne constate que les deux cabines sont libres?

4) Quelle est la probabilité pour que la personne constate qu'une seulement des deux cabines est occupée?

5) Quelle est la probabilité pour que la personne constate qu'une au moins des deux cabines est libre?

6) Quelle est la probabilité pour que la personne puisse téléphoner à l'intérieur du pays?

PROBABILITÉ CONDITIONNELLE

14 (2). On considère un sac contenant :

— 3 boules blanches;

— 3 boules noires

indiscernables au toucher.
On tire au hasard et simultanément trois boules.

Scanned by CamScanner

Soit E l'ensemble des éventualités et p la probabilité définie sur $\mathcal{P}(E)$ relativement à l'expérience considérée.

1) Calculer la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « on obtient au moins une boule blanche ».
B : « on obtient au moins deux boules noires ».
C : « on obtient au moins une boule de chaque couleur ».

2) *a*) Définir l'événement « A et B » par une phrase du langage courant, la plus simple possible; puis calculer la probabilité de cet événement.

b) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins deux boules noires sachant qu'une au moins des boules est blanche? (On demande donc de calculer $p_A(B)$ et on a calculé $p(A \cap B)$ dans le *a*)...!)

3) Calculer $p(A \cap C)$ puis $p_A(C)$.

4) Calculer directement $p_B(C)$ et en déduire $p(B \cap C)$.

5) Parmi les événements A, B, C, y en a-t-il deux qui soient indépendants?

15 (2). On considère un jeu de 32 cartes et l'expérience qui consiste à tirer au hasard deux cartes simultanément et à observer les figures obtenues.
Soit E l'ensemble des éventualités liées à cette expérience et p la probabilité définie sur $\mathcal{P}(E)$ relativement à l'expérience considérée.
Soit les événements
A : « on a tiré au moins un cœur ».
B : « on a tiré deux as ».
C : « on a tiré exactement un cœur et une dame ».
D : « on a tiré au moins une carte rouge ».
F : « on a tiré deux cartes rouges ».
G : « on a tiré exactement un carreau ».
H : « on a tiré deux carreaux ».

Dans chacun des cas suivants :

— expliciter la probabilité demandée par une phrase du langage courant la plus simple possible;

— Calculer la probabilité demandée en ayant bien soin de choisir la méthode employée (calcul direct d'une probabilité conditionnelle ou calcul préliminaire de la probabilité de l'intersection des deux événements);

— dire si les deux événements considérés sont indépendants en justifiant l'affirmation par un calcul.

1) $p_A(B)$ 2) $p_A(C)$ 3) $p_A(D)$
4) $p_B(F)$ 5) $p_B(H)$ 6) $p_D(F)$
7) $p_D(H)$ 8) $p_F(H)$ 9) $p_A(G)$
10) $p_B(C)$ 11) $p_F(D)$ 12) $p_G(H)$.

16 (2). Une entreprise de fabrication de matériel électrique est dotée de trois machines A, B, C produisant des condensateurs.
La machine A assure 20 % de la production avec 5 % de condensateurs défectueux.
La machine B assure 30 % de la production avec 4 % de condensateurs défectueux.
La machine C assure 50 % de la production avec 1 % de condensateurs défectueux.

1) Quelle est la probabilité pour qu'un condensateur choisi au hasard :

a) soit défectueux et produit par la machine A?

b) soit défectueux et produit par la machine B?

c) soit défectueux et produit par la machine C?

d) soit défectueux?

2) On choisit au hasard un condensateur et on constate qu'il est défectueux.
Quelle est la probabilité :

a) pour qu'il provienne de la machine A?

b) pour qu'il provienne de la machine B?

c) pour qu'il provienne de la machine C?

3) On a mis au point un système de contrôle sur la totalité de la production; cependant ce système de contrôle peut commettre des erreurs. On a ainsi constaté que :

— si le condensateur est en état de marche, il est accepté avec une probabilité de 0,96;

— si le condensateur est défectueux, il est refusé avec une probabilité de 0,98.

a) Quel est le pourcentage de condensateurs défectueux sur la totalité de la production?

b) On choisit un condensateur au hasard après le système de contrôle. Quelle est la probabilité pour qu'il y ait eu une erreur de contrôle?

c) Quelle est la probabilité pour qu'un condensateur soit bon sachant qu'il a été refusé?

d) Quelle est la probabilité pour qu'un condensateur soit défectueux sachant qu'il a été accepté?

17 (2). On considère deux sacs, un rouge et un vert contenant chacun trois boules rouges et deux boules noires indiscernables au toucher et l'expérience qui consiste à tirer au hasard une boule du sac rouge, à en observer

Scanned by CamScanner

la couleur, à la mettre dans le sac vert, puis à tirer au hasard une boule du sac vert et à en observer la couleur.

1) Quelle est la probabilité :

a) de tirer une boule rouge du sac rouge?

b) de tirer une boule noire du sac rouge?

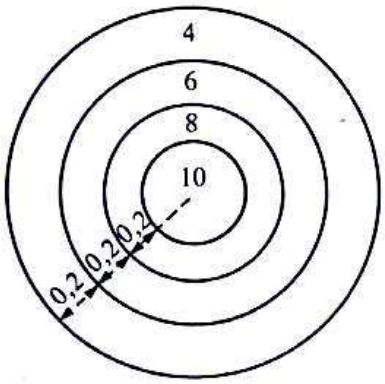
2) Quelle est la probabilité pour que la deuxième boule tirée

a) soit rouge?

b) soit noire?

3) Quelle est la probabilité pour que les deux boules tirées soient de même couleur?

18 (2).



On considère une cible de tir à l'arc de diamètre 1,60 m comme indiqué ci-dessus.
Un tireur atteint en moyenne cette cible huit fois sur dix tirs consécutifs.
Lorsque la flèche atteint la cible la probabilité d'atteindre une couronne est proportionnelle à l'aire de cette couronne et le tireur note alors le nombre de points inscrit dans la couronne où se trouve la flèche.

1) Quelle est la probabilité pour que le tireur atteigne la cible?

2) Quelle est la probabilité pour qu'il atteigne :

a) la couronne numérotée 4?

b) la couronne numérotée 6?

c) la couronne numérotée 8?

d) la couronne numérotée 10?

Comparer les probabilités calculées avec celles de l'exemple 2 de la leçon 2 paragraphe 2-*c*).

19 (2). Un sac contient dix boules indiscernables au toucher :

— quatre boules sont blanches,

— trois boules sont bleues,

— trois boules sont rouges.

Trois fois de suite, on tire au hasard trois boules simultanément, les boules n'étant pas remises dans le sac après chaque tirage.
i désignant un élément de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$, on considère l'événement :

T_i : « le $i^{\text{ième}}$ tirage est tricolore ».

(C'est-à-dire que l'on a obtenu une boule blanche, une boule bleue et une boule rouge au $i^{\text{ième}}$ tirage.)
Soit R l'événement : « la boule qui reste dans le sac après les trois tirages est blanche ».
On admettra que la probabilité de l'événement R est $\frac{4}{10}$.

1) a) Calculer la probabilité de l'événement T_1; puis la probabilité de l'événement T_2 sachant que l'événement T_1 est réalisé.

b) En déduire la probabilité de l'événement $T_1 \cap T_2$.

2) Calculer de même la probabilité de l'événement $T_1 \cap T_2 \cap T_3$.

3) *a*) Que peut-on dire de l'événement R, si l'événement $T_1 \cap T_2 \cap T_3$ est réalisé?
En déduire la probabilité de l'événement R sachant que l'événement $T_1 \cap T_2 \cap T_3$ est réalisé.

b) Calculer la probabilité pour que les trois tirages aient été tricolores sachant que la boule qui reste dans le sac après ces trois tirages est blanche.

(D'après baccalauréat.)

ÉPREUVES RÉPÉTÉES. SCHÉMA DE BERNOUILLI

20 (2). On considère un sac contenant cinq boules rouges, trois boules blanches, deux boules vertes, et l'expérience ε qui consiste à tirer au hasard et simultanément trois boules. On suppose que les boules sont indiscernables au toucher.

1) *a*) Quelle est la probabilité de tirer trois boules de même couleur?

b) Quelle est la probabilité de tirer trois boules de couleurs différentes?

c) Quelle est la probabilité de tirer exactement deux boules de même couleur?

2) On recommence trois fois de suite l'expérience $\mathcal{E}$, c'est-à-dire que l'on tire trois fois de suite simultanément trois boules, en remettant à chaque fois les trois boules tirées dans le sac.

a) Quelle est la probabilité pour que chacun des trois tirages soient unicolores? (c'est-à-

Scanned by CamScanner

dire que l'on tire trois fois de suite trois boules de même couleur).

b) Quelle est la probabilité pour que les trois tirages soient tricolores? (c'est-à-dire que l'on tire trois fois de suite trois boules de couleurs différentes).

c) Quelle est la probabilité pour que les deux premiers tirages soient tricolores et que le dernier soit unicolore?

d) Quelle est la probabilité pour qu'il y ait deux tirages tricolores et un tirage unicolore?

e) Quelle est la probabilité pour qu'il y ait trois tirages de natures différentes? (c'est-à-dire qu'il y en ait un qui soit tricolore, un autre qui soit unicolore et un autre qui ait exactement deux boules de même couleur).

21 (2). Un parcours sportif comporte trois épreuves successives :

1) le saut d'une haie,

2) le saut d'un ruisseau,

3) un grimper de corde en fin de parcours.
Chacune de ces trois épreuves est considérée comme indépendante des deux autres.
La probabilité pour qu'une personne voulant s'entraîner sur ce parcours sans préparation :

a) saute la haie sans la faire tomber est 0,6,

b) saute le ruisseau sans se mouiller les pieds est 0,4,

c) grimpe à la corde en allant jusqu'au bout est 0,3.

1) Quelle est la probabilité pour que le «sportif» arrive en fin de parcours avec les pieds mouillés?

2) Quelle est la probabilité pour que le «sportif» passe avec succès les deux premières épreuves mais échoue à la troisième?

3) Quelle est la probabilité pour que le «sportif» réussisse au moins deux épreuves sur les trois?

4) Quelle est la probabilité pour que le «sportif» fasse un parcours ne comportant qu'un seul échec?

5) Quelle est la probabilité pour que le «sportif» fasse un parcours sans faute?

22 (2). On considère deux jeux de trente-deux cartes indiscernables au toucher et l'expérience qui consiste à tirer au hasard une carte du premier jeu puis une carte d'un deuxième jeu et d'observer les figures obtenues.
Quelle est la probabilité de tirer un as et un cœur?

23 (2). On considère un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et l'expérience qui consiste à lancer ce dé et à observer le chiffre inscrit sur la face supérieure.

1) On lance le dé une seule fois.

a) Quelle est la probabilité d'obtenir un chiffre autre que le 6?

2) On lance le dé quatre fois de suite, quelle est la probabilité pour obtenir au moins une fois le chiffre 6 sur les quatre lancers?

3) Soit n un nombre entier naturel non nul. On lance le dé n fois de suite.

a) Calculer en fonction de n, la probabilité d'obtenir au moins une fois le chiffre 6 sur les n lancers.

b) Combien de fois, au minimum, faut-il lancer le dé pour que l'on ait au moins neuf chances sur dix d'obtenir au moins une fois le chiffre 6?

24 (2). Un sac contient cinq jetons numérotés de 1 à 5 indiscernables au toucher.
Soit $\mathcal{E}$ l'expérience qui consiste à tirer au hasard et simultanément trois jetons du sac, et à lire les chiffres inscrits sur ces trois jetons.

1) quelle est la probabilité pour que la somme des chiffres lus soit égale à 8?

2) On recommence cinq fois de suite cette expérience, en remettant les trois jetons dans le sac après chaque tirage.
Quelle est la probabilité pour qu'au cours de ces cinq expériences la somme des chiffres soit exactement deux fois égale à 8?

25 (2). Un autobus rencontre sur son trajet habituel sept feux tricolores de circulation.
Pour chacun de ces feux :

— le rouge dure 30 secondes;

— l'orange dure 10 secondes;

— le vert dure 20 secondes.

On suppose que chacun de ces sept feux tricolores est indépendant des autres et en état de marche.

1) Lorsque l'autobus se présente devant l'un de ces sept feux tricolores, quelle est la probabilité :

a) pour que le feu soit rouge?

b) pour que le feu soit vert?

c) pour que le feu soit orange?

2) Quelle est la probabilité pour que l'autobus :

a) ne rencontre que des feux verts sur l'ensemble de son trajet?

Scanned by CamScanner

b) rencontre exactement trois feux verts sur l'ensemble de son trajet?

c) rencontre au moins un feu vert sur l'ensemble de son trajet?

3) L'autobus est obligé de s'arrêter lorsqu'un feu est rouge ou orange.

a) Quelle est la probabilité pour que l'autobus soit obligé de s'arrêter exactement cinq fois sur l'ensemble de son trajet (à cause des feux tricolores)?

b) Quelle est la probabilité pour que l'autobus soit obligé de s'arrêter au moins une fois sur l'ensemble de son trajet (à cause des feux tricolores)?

26 (2). A un test de sélection, des candidats doivent répondre à dix questions indépendantes les unes des autres.
Pour chaque question, ils doivent choisir parmi trois affirmations, celle qui est exacte.
Seront sélectionnés, les candidats qui auront donné au moins sept réponses exactes sur les dix.
Un candidat se présente en n'ayant pas du tout travaillé le programme de révision préparant à cette sélection. Il décide donc de répondre au hasard à chacune des dix questions posées.

1) Pour chaque question, quelle probabilité a-t-il de donner la réponse exacte?

2) Soit k un nombre entier naturel inférieur ou égal à 10.
Exprimer en fonction de k, la probabilité pour que ce candidat donne exactement k réponses exactes aux dix questions.

3) Calculer la probabilité pour que ce candidat donne :

a) uniquement des réponses fausses;

b) uniquement des réponses exactes;

c) au moins une réponse exacte.

4) Quelle est la probabilité pour qu'un tel candidat soit sélectionné?

N.B. (Les résultats seront donnés par une valeur approchée à 10^{-2} près par excès.)

(D'après baccalauréat.)

27 (2). Au réfectoire d'un internat, se trouvent six tables de cinq places chacune. Konan et Kouassi, deux internes, y prennent leurs repas. On suppose que les places sont prises au hasard.

1) Quelle est la probabilité pour que Konan et Kouassi soient assis à une même table au cours d'un certain repas?

2) Konan et Kouassi vont au réfectoire dix fois par semaine.
Calculer la probabilité pour qu'ils soient assis à une même table :

a) exactement trois fois dans la semaine;

b) au moins une fois dans la semaine.

(D'après baccalauréat.)

28 (2). La serrure d'un coffre est munie d'un dispositif portant les touches :

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 et *A*, *B*, *C*, *D*.

La porte du coffre s'ouvre lorsque l'on appuie dans l'ordre sur les trois chiffres puis les deux lettres, choisie par l'utilisateur du coffre, qui forment le code d'ouverture.
Les chiffres sont nécessairement distincts mais les lettres non.
Une personne se présente devant la porte du coffre et sait uniquement qu'il faut appuyer sur trois chiffres distincts puis deux lettres non nécessairement distinctes.

1) Quelle est la probabilité pour que cette personne ouvre la porte au premier essai dans chacun des cas suivants :

a) elle ignore le code d'ouverture;

b) elle se souvient uniquement que les trois chiffres du code sont pairs;

c) elle se souvient de plus que les deux lettres du code sont identiques.

2) La porte du coffre est équipée d'un système d'alarme qui se déclenche lorsque l'un des trois chiffres choisis ne figure pas sur la liste des chiffres du code.

a) Quelle est la probabilité pour que la personne qui ignore le code, déclenche l'alarme?

b) La personne tente quatre fois d'ouvrir le coffre à des intervalles de temps suffisants pour avoir oublié la combinaison sur laquelle elle avait appuyé la fois précédente.
Quelle est la probabilité pour qu'elle déclenche au moins une fois l'alarme?

Variables aléatoires. Exercices de baccalauréat

29 (3). On considère un sac contenant trois jetons indiscernables au toucher : un jeton rouge, un jeton noir et un jeton blanc.

Une personne a imaginé le jeu suivant :

• On tire au hasard un jeton

— si le jeton tiré est rouge, on gagne 2 points;

— si le jeton tiré est noir, on perd 1 point;

Scanned by CamScanner

— si le jeton tiré est blanc, la partie est terminée;
(ce jeton ne rapporte donc aucun point...).

• On effectue, avec la règle précédente, au maximum trois tirages successifs en remettant après chaque tirage le jeton dans le sac.

1) *a*) Quelle est la probabilité pour que la partie s'arrête au premier tirage?

b) Quelle est la probabilité pour que la partie s'arrête au deuxième tirage?

c) Quelle est la probabilité de pouvoir faire une partie comportant les trois tirages? (c'est le nombre maximum de tirages prévus par l'organisateur pour une partie).

2) Soit X la variable aléatoire qui a chaque partie associe la somme algébrique des points obtenus par le joueur.

a) E désignant l'ensemble des éventualités liées à l'expérience qui consiste à tirer successivement et au maximum trois jetons du sac (les tirages étant interrompus par le tirage d'un jeton blanc) et à observer successivement les couleurs obtenues; écrire l'ensemble E en extension.

b) Écrire $X(E)$ en extension.

c) Déterminer la distribution de cette variable aléatoire.

3) Un joueur est déclaré « gagnant » si la somme algébrique des points obtenus est strictement positive.
Quelle est la probabilité de gagner à ce jeu?

(D'après baccalauréat.)

30 (3). On considère deux dés cubiques :

— un dé rouge dont trois faces sont numérotées 0, deux faces sont numérotées 1 et une face est numérotée 2;

— un dé vert dont ces faces sont numérotées 1, 2, 3, 4, 5, 6.
On lance le dé rouge puis le dé vert et on lit successivement les chiffres inscrits sur les faces supérieures.
Soit E l'ensemble des éventualités liées à cette expérience. (On pourra considérer E comme le produit cartésien de deux ensembles que l'on précisera, les faces d'un dé étant des objets physiquement distincts.) Définir l'ensemble E en compréhension.
Soit X la variable aléatoire qui à chaque événement élémentaire associe le produit des chiffres obtenus.

1) *a*) Déterminer $X(E)$ en extension.

b) Quelle est la distribution de cette variable aléatoire?

2) *a*) Quelle est la probabilité pour que cette variable aléatoire prenne une valeur impaire?

b) On effectue cinq lancers successifs des deux dés (on recommence donc cinq fois de suite l'expérience décrite ci-dessus).
Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois un produit impair?

(D'après baccalauréat.)

31 (3). On considère un sac contenant quatre boules blanches et deux boules rouges indiscernables au toucher.
Une expérience consiste à tirer au hasard et simultanément trois boules du sac et à observer les couleurs obtenues.

1) Soit X la variable aléatoire qui à chaque expérience associe le nombre de boules rouges tirées.

a) Donner en extension l'ensemble image de l'ensemble des éventualités liées à l'expérience par la variable aléatoire X.

b) Quelle est la distribution de cette variable aléatoire?

c) Quelle est la probabilité de l'événement : « on a tiré au moins une boule rouge ».

2) On recommence quatre fois de suite l'expérience décrite dans l'énoncé, en remettant après chaque tirage les trois boules dans le sac.
Soit Y la variable aléatoire qui à chaque série de quatre expériences associe le nombre de fois où l'on a tiré au moins une boule rouge.
Quelle est la distribution de cette variable aléatoire?

3) Représenter graphiquement dans le plan muni d'un repère orthogonal, les fonctions de répartition de chacune de ces deux variables aléatoires.

32 (3). On considère un sac contenant quatre boules blanches et n boules noires (n étant un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2) indiscernables au toucher. On tire au hasard et simultanément deux boules du sac et on observe les couleurs obtenues. Pour chaque boule blanche tirée, on gagne 3 points et pour chaque boule noire, on perd 2 points. Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage simultané de deux boules, associe le gain algébrique du joueur.

Combien de boules noires faut-il placer dans le sac pour que ce jeu soit équitable?

Scanned by CamScanner

33 (3). Un joueur dispose d'une bille qu'il lance sur une surface plane dans laquelle sont creusés :

— un trou numéroté 1;

— deux trous numérotés 2;

— trois trous numérotés 3;

et ainsi de suite jusqu'à n trous numérotés n. (n étant un nombre entier naturel supérieur ou égal à 2).

On suppose que la probabilité pour que la bille tombe dans un trou donné est la même pour tous les trous.

1) Exprimer en fonction de n, le nombre total de trous.

2) Soit k un nombre entier naturel tel que :

$$1 \leqslant k \leqslant n$$

et P_k la probabilité pour que la bille tombe dans un trou numéroté k.
Calculer P_k, en fonction de n et k.

3) — Si la bille tombe dans un trou dont le numéro est pair, le joueur gagne 100 francs;

— Si la bille tombe dans un trou dont le numéro est impair, il perd 100 francs.
Soit X la variable aléatoire qui à chaque lancer de la bille associe le gain algébrique du joueur.

Quelle est la distribution de cette variable aléatoire dans les cas suivants :

a) n est un nombre entier naturel pair.

b) n est un nombre entier naturel impair.

4) Quel est le cas le plus intéressant pour le joueur?

34 (3). Un élève se rend à son lycée distant de trois kilomètres. Il fait ce trajet à bicyclette à la vitesse constante de 30 km/h.
Sur le parcours il rencontre cinq feux tricolores de signalisation. On suppose que chacun de ces cinq feux de signalisation est indépendant des autres et en état de marche.
Pour chacun de ces feux, la probabilité pour qu'il soit vert est $\frac{2}{3}$ et la probabilité pour qu'il soit rouge est $\frac{1}{3}$.
On admet qu'un feu rouge lui fait perdre une minute.

Soit T la variable aléatoire qui à chaque trajet associe le temps en minutes mis par l'élève pour rejoindre son lycée.

1) Quelle est la distribution de cette variable aléatoire?

2) L'élève part sept minutes avant le début de ses cours. Quelle est la probabilité pour qu'il arrive en retard?

3) *a*) Quelle est l'espérance mathématique de la variable aléatoire T?

b) Quelle est la durée moyenne du parcours?

(D'après baccalauréat.)

35 (3). Un match se déroule en trois manches et fait se rencontrer un joueur A et un joueur B.

1) Le joueur A remporte une manche avec la probabilité 0,6, si c'est la première ou bien s'il a gagné la précédente. Par contre il remporte la manche avec la probabilité 0,4 s'il a perdu la manche précédente.
On appelle événement élémentaire, la succession des trois résultats obtenus par ce joueur.

a) Calculer la probabilité de chacun des événements élémentaires.

b) Soit X la variable aléatoire qui à chaque match associe le nombre de manches gagnées par le joueur A.
Quelle est la distribution de cette variable aléatoire et calculer son espérance mathématique.

c) Le joueur gagne le match s'il remporte au moins deux manches.

Quelle est la probabilité pour que le joueur A perde le match?

2) Le joueur B remporte une manche avec la probabilité 0,5 indépendamment des autres manches.
Soit Y la variable aléatoire qui à chaque match associe le nombre de manches gagnées par le joueur B.

a) Quelle est la distribution de cette variable aléatoire et calculer son espérance mathématique.

b) Le joueur gagne un match s'il remporte au moins deux manches.

Quelle est la probabilité pour que le joueur B gagne le match?

36 (3). Deux personnes A et B jouent au jeu suivant :
on lance simultanément deux pièces de monnaie :

— Si on obtient deux faces, A a gagné.

— Si on obtient deux piles, B a gagné.

— Si on obtient pile et face, on relance les deux pièces.

Scanned by CamScanner

On suppose que pour chacune des deux pièces, la probabilité d'obtenir pile ou face est la même.

1) On note :

— A_1 la probabilité pour que le joueur A gagne au premier lancer;

— B_1 la probabilité pour que le joueur B gagne au premier lancer;

— C_1 la probabilité pour que la partie continue après le premier lancer.
Calculer A_1, B_1 et C_1.

2) Pour tout nombre entier naturel n, élément de $\mathbb{N}^*$, on note :

— A_n la probabilité pour que le joueur A gagne exactement après le $n^{\text{ième}}$ lancer;

— B_n la probabilité pour que le joueur B gagne exactement après le $n^{\text{ième}}$ lancer;

— C_n la probabilité pour que la partie continue après le $n^{\text{ième}}$ lancer.
Calculer A_n, B_n, C_n en fonction de n.

3) *a*) Calculer la probabilité P_n pour que le joueur A gagne au cours des n premiers lancers.

b) Calculer de même la probabilité Q_n pour que le joueur B gagne au cours des n premiers lancers.

c) Que vaut la somme $P_n + Q_n + C_n$? Expliquer ce résultat.

4) Calculer $\lim P_n$, $\lim Q_n$, $\lim C_n$.

(D'après baccalauréat.)

37 (3). Pour un certain échantillon de population, voici la répartition des principaux groupes sanguins :

	O	A
Rhésus +	37,0 %	38,1 %
Rhésus −	7,0 %	7,2

	B	AB
Rhésus +	6,2 %	2,8 %
Rhésus −	1,2 %	0,5 %

1) Quelle est la probabilité pour qu'une personne choisie au hasard dans cet échantillon de population ait un sang de facteur Rhésus − ?

2) Dix personnes prises au hasard dans cet échantillon de population donnent leur sang. Soit X la variable aléatoire qui à chaque choix des 10 personnes associe le nombre de personnes appartenant au groupe A.

Quelle est la distribution de cette variable aléatoire?

3) Pour une intervention chirurgicale, on doit avoir au moins trois personnes de groupe O et de facteur Rhésus +.
Dix personnes de l'échantillon de population se présentent mais ignorent leur groupe sanguin.

Quelle est la probabilité d'avoir au moins les trois donneurs nécessaires à l'intervention?

(D'après baccalauréat.)

38 (3). Un lot de bulbes de fleurs a un pouvoir germinatif de 80 %. (Cela veut dire que chaque bulbe produit une fleur avec une probabilité de 0,8, indépendamment des autres bulbes.) Chaque bulbe contient un des trois gènes r (rouge), b (blanc), j (jaune) qui détermine la couleur de la fleur future éventuelle. On suppose que la probabilité pour qu'un bulbe donné possède le gène r, b, j est respectivement 0,5; 0,1; 0,4; et ceci indépendamment des autres bulbes.

1) Quelle est la probabilité d'obtenir cinq fleurs en plantant cinq bulbes?

2) *a*) Quelle est la probabilité pour qu'un bulbe planté produise une fleur rouge?

b) On plante cinq bulbes et on appelle X la variable aléatoire qui à chaque plantation de cinq bulbes, associe le nombre de fleurs rouges obtenues.

Quelle est la distribution de cette variable aléatoire?
Calculer son espérance mathématique.

3) *a*) Quelle est la probabilité pour qu'un bulbe planté produise une fleur blanche?

b) Soit n un nombre entier naturel supérieur ou égal à 1 et P_n la probabilité de n'obtenir aucune fleur blanche après avoir planté n bulbes. Calculer P_n en fonction de n.

c) Combien de bulbes faut-il planter au minimum pour obtenir au moins une fleur blanche avec une probabilité supérieure à 0,95?

(D'après baccalauréat.)

Scanned by CamScanner

Problèmes de synthèse

(D'après Baccalauréat)

Problème 1

Le but de ce problème est d'étudier la possibilité de « remplacer sur un intervalle I la représentation graphique d'une fonction numérique par sa tangente en un de ses points dont l'abscisse appartient à I afin de calculer une intégrale et d'évaluer l'erreur commise ».

Soit la fonction numérique

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto (2-x)e^x.$$

1) Étudier le sens de variation de f et tracer sa représentationn graphique (C) dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), l'unité graphique étant 2 cm.
On précisera les tangentes à (C) aux points d'abscisse 0 et 2. On désigne par (D) et (D') ces tangentes.

2) On se propose d'étudier la position de (C) par rapport à (D).
Pour cela on considère la fonction

$$g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto 2+x-(2-x)e^x.$$

b) Étudier le signe de g''; en déduire le signe de g' puis le signe de g.

c) Interpréter géométriquement les résultats obtenus.

3) A l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale I définie par :

$$I = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (2-x)e^x \, dx$$

et donner une valeur approchée de I à 10^{-4} près.

4) On considère l'intégrale J définie par :

$$J = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} (x+2)\,dx,$$

obtenue en remplaçant (C) par (D) sur l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.
Calculer J et interpréter géométriquement la valeur obtenue.
Calculer $J-I$ à 10^{-4} près.

5) On se propose de fournir une justification théorique de ce dernier résultat.

a) On suppose que : $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Prouver alors que :

$$0 \leqslant e^x - 1 < x\sqrt{e}.$$

En déduire que : $0 \leqslant g''(x) - x \leqslant x^2\sqrt{e}$
et par deux intégrations successives montrer que :

$$0 \leqslant g(x) - \frac{x^3}{6} \leqslant \frac{x^4}{12}\sqrt{e}.$$

b) On suppose que : $x \in \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$.

Prouver par une méthode analogue que :

$$0 \leqslant g(x) - \frac{x^3}{6} \leqslant \frac{x^4}{12}.$$

c) En déduire que :

$$J - I = \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \left[g(x) - \frac{x^3}{6}\right] dx$$

$$0 \leqslant J - I \leqslant 2 - 10^{-3}.$$

Comparer cette estimation avec la valeur de $J-I$ trouvée au 4).

Problème 2

On considère les fonctions numériques

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \ln(1+x) \qquad g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x - \frac{x^2}{2}$$

$$h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{3}.$$

I 1) Pour chacune de ces trois fonctions numériques, donner l'ensemble de définition, calculer les limites, calculer la dérivée et donner le tableau de variation.

2) On désigne par (C_f), (C_g), (C_h) les représentations graphiques respectives des fonctions f, g, h dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) où l'unité graphique est 4 cm.

a) Donner une équation de la tangente à (C_f) au point d'abscisse 0.

II 1) On se propose de comparer les fonctions f et g pour un élément x de $\mathbb{R}_+$.

a) Montrer que la fonction $f-g$ est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

b) Vérifier que : $(f-g)(0) = 0$.

c) Comparer $f(x)$ et $g(x)$ pour un élément x de $\mathbb{R}_+$.

Scanned by CamScanner

2) En utilisant une démarche analogue au II 1), comparer les fonctions f et h pour un élément x de $\mathbb{R}_+$.

3) *a*) En utilisant les inégalités démontrées au II 1) et II 2) trouver un encadrement de $\ln(1,1)$ par deux nombres décimaux d'ordre 3, consécutifs.

b) Même question pour $\ln(1,21)$.

4) Tracer avec soin les courbes (C_f), (C_g), (C_h) sur un même dessin.
On représentera également leurs tangentes respectives aux points d'abscisses 0.

III 1) Calculer l'aire de la partie D du plan limitée par la courbe (C_f), la droite (OI), les droites d'équations $(x=0)$ et $(x=1)$, en utilisant une intégration par parties.

2) *a*) Prouver que la restriction de f à $\mathbb{R}_+$ est une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$.

b) Donner l'expression de la bijection réciproque de $f/\mathbb{R}_+$ et la représenter graphiquement dans le plan muni du repère (O, I, J).

Problème 3

I On considère la fonction numérique

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{x^2-7x+10}{(x+1)^2}$$

d'ensemble de définition D_f.

1) Trouver trois nombres réels a, b, c tels que :

$$\forall x \in D_f \quad f(x) = a + \frac{b}{x+1} + \frac{c}{(x+1)^2}.$$

2) Étudier le sens de variation de f et tracer sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), l'unité graphique étant 1 cm.

3) Soit la fonction numérique

$$F :]-1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \int_0^x f(t)\,dt.$$

a) Exprimer $F(x)$ en fonction de x.

b) Étudier le sens de variation de F et donner son tableau de variations (le tracé de la représentation graphique de F n'est pas demandée).

4) Calculer l'aire de la partie D du plan limitée par la représentation graphique de f, la droite (OI), les droites d'équations

$$x=2 \quad \text{et} \quad x=5.$$

II Yao propose à Diallo le jeu suivant :
Un sac contient n boules noires ($n \in \mathbb{N}^*$) et une boule blanche, indiscernables au toucher.

— Diallo tire une boule au hasard, note sa couleur, la remet dans le sac, puis tire au hasard une deuxième boule et note sa couleur. (Les deux tirages sont supposés indépendants.)

— Si les deux boules tirées sont noires Yao doit donner 100 francs à Diallo.

— Si les deux boules tirées sont blanches, Yao doit donner 1 000 francs à Diallo.

— Si les deux boules tirées sont de couleurs différentes Diallo doit donner 350 francs à Yao.

Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage de deux boules associe le gain algébrique de Diallo.

1) Trouver la distribution de X ainsi que son espérance mathématique, en fonction de n.

2) Pour quelle(s) valeur(s) de n, ce jeu est-il équitable?

3) Pour quelle(s) valeur(s) de n, ce jeu peut-il rapporter le plus d'argent à Yao?

Problème 4

L'étude de la croissance des végétaux a conduit à construire des modèles mathématiques de cette croissance. L'objet du problème est de comparer les résultats donnés par deux modèles; aux résultats expérimentaux dans un cas particulier : celui de la croissance de la racine d'un plant de fève.

A L'unité de longueur choisie est le millimètre et l'unité de temps est le jour.
Les mesures effectuées sur ce plant sont données dans le tableau ci-dessous : t désigne le temps et y la longueur de la racine :

t	0	2	4	6	8	9	10
y	1	4	37	59	80	82	83

Dans le plan muni d'un repère orthogonal (O, I, J), construire l'ensemble G_1 des points dont les coordonnées sont (t, y).
Unité graphique sur (OI) : 2 cm.
Unité graphique sur (OJ) : 0,2 cm.

B Dans les modèles considérés, t et y sont des nombres réels positifs et y est fonction de t, on l'appellera « fonction de croissance »

$$y : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+, \quad t \longmapsto y(t).$$

Scanned by CamScanner

1) Dans le modèle dit de Blackmann, on suppose que la fonction de croissance est dérivable et qu'à chaque instant la « vitesse de croissance » est proportionnelle à la longueur de la racine avec 0,9 comme coefficient de proportionnalité.

On a donc : $\forall t \in \mathbb{R}_+ \quad y'(t) = 0{,}9y(t)$.

a) Trouver la fonction f, solution de cette équation différentielle, vérifiant la condition initiale du tableau A .

b) Construire sur le même graphique que celui utilisé dans la partie A , la représentation graphique (G_2) de la fonction f.

c) Calculer l'abscisse du point d'intersection de (G_2) avec la droite d'équation $(y = 80)$.

Quelle critique peut-on formuler en comparant (G_1) et (G_2)?

2) Dans le modèle dit de Robertson, on suppose que y et t sont tels que :

$$(1) \qquad \ln\left(\frac{y}{85-y}\right) = 0{,}9\,(t-5).$$

Soit h la fonction numérique définie par :

$$h(y) = 5 + \frac{9}{10}\ln\left(\frac{y}{85-y}\right).$$

(h est obtenue à partir de (1), en exprimant t en fonction de y).

a) Étudier le sens de variation de h et démontrer que l'équation :

$$y \in \mathbb{R}, \quad h''(y) = 0$$

admet une solution y_0 que l'on calculera.

b) Construire la tangente à la courbe (Γ), représentation graphique de h, au point $\Omega(y_0,\ h(y_0))$.
Montrer que Ω est centre de symétrie pour la courbe (Ω).
Construire la courbe (Γ).

c) Justifier le fait que h admet une application réciproque g, que l'on définira comme étant la fonction de croissance du modèle de Robertson.

d) Étudier le sens de variation de g et construire sa représentation graphique (G_3) en utilisant le même graphique que dans la partie A.

e) Comparer (G_1) et (G_3). Quelle critique peut-on formuler?

3) Calculer la moyenne des écarts absolus entre les valeurs expérimentales de y et les valeurs prédites par chacun des deux modèles. En déduire le modèle le plus adapté.

Problème 5

A 1) Trouver la solution de l'équation différentielle :

$$h' + 2h = 0,$$

qui prend la valeur $\frac{1}{4}$ au point O.

2) Étudier la fonction

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad x \longmapsto \frac{1}{4}e^{-2x}$$

et construire sa représentation graphique (C) dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J), l'unité graphique étant 4 cm.

3) *a*) Démontrer que f est une bijection de $\mathbb{R}^+$ sur $\mathbb{R}$.
Soit f^{-1} la bijection réciproque de f.

Donner le tableau de variations de f^{-1} et construire sa représentation graphique (C') sur le même graphique que celui utilisé dans le 2).

b) Donner l'expression de $f^{-1}(x)$.

4) Calculer l'aire de la partie du plan limitée par les droites d'équation

$$x = 0, \quad y = 0, \quad y = 0, \quad y = -\frac{1}{2}$$

et la courbe (C').

B 1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite arithmétique de raison r et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = f(u_n).$$

a) Démontrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera en fonction de r, la raison q.

b) Discuter suivant les valeurs de r, la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et retrouver ces résultats à partir de l'étude faite de la fonction f.

c) Calculer en fonction de u_0, r et n la somme $S_{0,n}$ définie par :

$$S_{0,n} = v_0 + v_1 + \ldots + v_n;$$

et discuter suivant les valeurs de r, la limite de la suite $(S_{0,n})_{n\in\mathbb{N}}$.

En déduire la limite de la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad F_n = f(0) + f(1) + f(1) + \ldots + f(n).$$

2) On considère la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad w_n = \int_0^n f(x)\,dx.$$

a) Calculer w_n en fonction de n et donner une interprétation géométrique de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Scanned by CamScanner

Démontrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers une limite que l'on calculera.

b) Soit $(S'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite numérique définie par :

$$\forall n\in\mathbb{N} \quad S'_n = w_0 + w_1 + \ldots + w_n - \frac{n}{8}.$$

Trouver la limite de la suite $(S'_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Problème 6

Le but des deux premières parties est d'étudier la fonction numérique de la variable réelle définie par :

$$f(x) = 2\ln(1+x^2) - \frac{1}{x}$$

où ln désigne le logarithme népérien.
Pour étudier cette fonction f, il est utile de connaître les variations d'une fonction auxiliaire g; c'est l'objet de la première partie.
La troisième partie permet de déterminer l'aire d'un domaine-plan $\mathcal{D}$ précisé ultérieurement.

I Soit g la fonction numérique de la variable réelle définie par :

$$g(x) = 4x^3 + x^2 + 1.$$

1) Étudier les variations de cette fonction.

2) En déduire que l'équation :

$$g(x) = 0$$

admet dans $\mathbb{R}$ une solution unique négative. On la notera α.

3) Calculer $g\left(-\frac{3}{4}\right)$ et $g\left(-\frac{1}{2}\right)$. Montrer que α appartient à l'intervalle $\left]-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}\right[$. (On ne cherchera pas à calculer α de façon plus précise.)

4) En déduire le signe de $g(x)$.

II Soit f la fonction numérique de la variable réelle définie par :

$$f(x) = 2\ln(1+x^2) - \frac{1}{x}.$$

1) Trouver l'ensemble de définition de la fonction f et les limites de f.

2) *a*) Démontrer que f est dérivable et continue en tout point de son ensemble de définition.

b) Calculer $f'(x)$ et montrer que le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$. En déduire que f admet un minimum relatif en α.

c) Dresser le tableau de variation de f. (On notera $f(\alpha)$ l'image de α par f, sans le calculer pour l'instant.)

3) Soit (Γ) la représentation graphique de f dans un repère orthonormé (O, I, J). On désigne par R ce repère.

a) Montrer que (Γ) admet une asymptote parallèle à l'axe des ordonnées.

b) Tracer (Γ) dans le repère R (unité graphique : 1 cm), en admettant que :

$$\alpha \simeq -0{,}72.$$

III 1) Soit la fonction h : $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \tan x$

où tan désigne la fonction tangente.

a) Montrer que h est une bijection de $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right]$ sur un intervalle $[a, b]$ à préciser et qu'elle admet une bijection réciproque h^{-1}, pue l'on ne cherchera pas à expliciter.

b) Calculer $h^{-1}(\sqrt{3})$ et $h^{-1}(1)$.

c) Montrer que h^{-1} est dérivable sur $[a, b]$ et que :

$$\forall x\in[a, b] \quad (h^{-1})'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

d) Soit : $I = \int_1^{\pi} \frac{dx}{1+x^2}$.

Démontrer que : $I = \frac{\pi}{12}$.

2) On pose : $J = \int_1^{\pi} \ln(1+x^2)\,dx$.

Par une intégration par parties, montrer que J s'exprime en fonction de I. On pourra remarquer que :

$$\frac{x^2}{1+x^2} = 1 - \frac{1}{1+x^2}.$$

En déduire la valeur de J.

3) Soit $\mathcal{D}$ le domaine plan défini par :

$$\mathcal{D} = \{M(x, y);\ 1 \leqslant x \leqslant \sqrt{3} \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}.$$

Calculer l'aire du domaine $\mathcal{D}$ et en donner une mesure en cm^2 à 10^{-2} près.

Problème 7

L'objet de ce problème est la résolution de l'équation :

$$(E_1) \qquad x\in\mathbb{R}_+^*, \quad x^{10} = (1{,}1)^x.$$

A 1) Étudier brièvement le sens de variation des fonctions f et g de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$ définies respectivement par :

$$f(x) = x^{10}; \quad g(x) = (1{,}1)^x.$$

Scanned by CamScanner

2) Le plan étant muni d'un repère orthonormé, représenter graphiquement les restrictions de f et g à l'intervalle [0; 1]. (Unité graphique : 5 cm.)

3) On pose : $d(x)=(1{,}1)^x-x^{10}$.

a) Calculer $d(1)$ et donner une valeur approchée à 10^{-2} près $d(1{,}1)$.

b) Établir que l'équation (E_1) admet au moins une solution α qui appartient à l'intervalle [1; 1,1].

B Soit l'équation :

$$(E_2) \qquad x\in\mathbb{R}_+^*, \quad x=\frac{10\ln(x)}{\ln(1{,}1)}.$$

1) Établir que, résoudre (E_1) équivaut à résoudre (E_2).

2) Étudier le sens de variation de la fonction φ de $\mathbb{R}_+^*$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(x)=\frac{10\ln(x)}{\ln(1{,}1)}.$$

3) Le plan étant muni d'un repère orthonormé, représenter graphiquement la fonction φ. (Unité graphique : 0,1 mm.)

4) Résoudre l'inéquation :

$$x\in\mathbb{R}_+^*, \quad \varphi'(x)<1.$$

φ' étant la fonction dérivée de φ.

5) On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0=105 \\ u_{n+1}=\varphi(u_n). \end{cases}$$

a) Calculer les sept premiers termes de la suite (u_n).

b) Montrer que la suite (u_n) est croissante.

c) Comparer $\varphi(700)$ et 700.
En déduire que la suite (u_n) est majorée par 700.

d) Montrer que la suite (u_n) converge vers un nombre réel β qui est solution de l'équation (E_2).

C 1) Soit l'équation :

$$(E_3) \qquad x\in\mathbb{R}_+^*, \quad x\ln(1{,}1)-10\ln(x)=0.$$

Montrer que résoudre l'équation (E_1) équivaut à résoudre l'équation (E_3).

2) Étudier le sens de variation de la fonction ψ de $\mathbb{R}_+^*$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$\psi(x)=x\ln(1{,}1)-10\ln(x).$$

3) Le plan étant muni d'un repère orthonormé, représenter graphiquement la fonction ψ. (Unité graphique : 0,02 cm.)

On désigne par (Γ) cette représentation graphique.

4) Montrer que l'équation (E_3) admet une solution unique β comprise entre 685 et 686.

5) Donner une équation de la droite (T), tangente à (Γ) en un point d'abscisse x_n $(x_n\geqslant 105)$.
Calculer l'abscisse x_{n+1} du point de (T) ayant une ordonnée nulle.

6) On pose :

$$x_0=685{,}5 \quad \text{et} \quad x_{n+1}=x_n-\frac{\psi(x_n)}{\psi'(x_n)}.$$

Trouver à l'aide de la calculatrice, le plus petit des nombres entiers n tels que :

$$|x_n-x_{n-1}|<10^{-2}.$$

Quelle est alors la valeur de x_n correspondante?

DEVOIR 1

Exercice 1

1) Démontrer par récurrence la propriété :

$$\forall n\in\mathbb{N}^* \quad \frac{1}{n!}<\frac{1}{2^{n-1}}.$$

2) Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par :

$$U_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}.$$

a) Déduire de la question 1) que cette suite est majorée par le nombre 3.

b) Montrer qu'elle est convergente et donner un encadrement à 0,5 près de sa limite.

Exercice 2

On pose :

$$a=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}(1+i).$$

1) Calculer le module du nombre complexe $(a-1)$.

2) On pose : $z_0=1$,
et pour tout nombre entier n supérieur à 1 :

$$z_n=a^n.$$

Soit M_n le point d'affixe z_n.

Placer dans le plan muni d'un repère (O, I, J) orthonormé, les points M_0, M_1, M_2, M_3, M_4, M_5, M_6, M_7. (Unité graphique : 4 cm.)

Scanned by CamScanner

3) Soit pour tout nombre entier n supérieur ou égal à 1 :

$$u_n = |z_n - z_{n-1}|.$$

Vérifier que :

$$u_n = |a|^{n-1} \times |a-1|.$$

Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme u_1 et la raison.

4) *a*) Calculer la somme S_n définie par :

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n.$$

b) Calculer S_7 et en donner une interprétation géométrique.

c) Calculer si elle existe, la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Problème

A Soit f l'application de $[0, +\infty[$ vers $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

1) Étudier le sens de variation de f. On pourra remarquer que :

$$f(x) = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}.$$

2) Montrer que f est une bijection de $[0, +\infty[$ sur $[0, 1[$.

3) On appelle g l'application reciproque de f. Expliciter $g(x)$

pour : $x \in [0, 1[$.

4) Préciser la tangente à l'origine pour chacune des représentations graphiques de f et g. Tracer ces courbes dans un même repère orthonormé (O, I, J) en prenant 10 cm pour unité graphique.

B 1) On définit l'application φ_1 de $[0, 1[$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi_1(x) = x + \frac{x^2}{3} - \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Étudier le sens de variation de φ_1 et déhuire que :

$$\forall x \in [0; 1[\quad \varphi_1(x) \leqslant 0.$$

2) On définit l'application φ_2 de $[0; 1[$ vers $\mathbb{R}$ par :

$$\varphi_2(x) = \frac{1}{2} \ln \frac{(1+x)}{1-x} - x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{4}.$$

Étudier le sens de variation de φ_2 et en déduire que :

$$\forall x \in \left[0, \frac{2}{5}\right] \quad \varphi_2(x) \leqslant 0.$$

3) En déduire l'encadrement pour tout élément x de $\left[0, \frac{2}{5}\right]$:

$$x + \frac{x^3}{3} \leqslant \frac{1}{2} \ln \frac{(1+x)}{1-x} \leqslant x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{4}.$$

C L'objet de cette partie est de calculer :

$$\int_0^{\frac{2}{5}} g(x)\,dx$$

par deux méthodes différentes. Soit I cette intégrale.

Première méthode :

1) On pose : $\alpha = g\left(\frac{2}{5}\right)$.

Calculer α à 10^{-4} près.

2) En utilisant les représentations graphiques de la partie A , notamment la symétrie des deux nombres par rapport à la droite d'équation $(y = x)$ montrer que :

$$I = \frac{2}{5}\alpha - \int_0^{\alpha} f(x)\,dx.$$

3) Calculer : $\int_0^{\alpha} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}\,dx.$

4) En déduire une valeur approchée de I en utilisant la valeur approchée de α.

Deuxième méthode :

Utiliser l'ensemble trouvé dans la 3e question de la partie B pour déterminer un encadrement de :

$$\int_0^{\frac{2}{5}} \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right).$$

Vérifier ainsi la concordance des résultats obtenus par ces deux méthodes.

DEVOIR 2

Exercice 1

Un match se déroule en trois manches et fait se rencontrer un joueur A et un joueur B.

1) Le joueur A remporte une manche avec la probabilité 0,6 si c'est la première ou bien s'il a gagné la précédente. Par contre il remporte la manche avec la probabilité 0,4 s'il a perdu la manche précédente. On appelle événement élémentaire la succession des trois résultats obtenus par ce joueur.

a) Calculer la probabilité de chacun des événements élémentaires.

Scanned by CamScanner

b) Soit X la variable aléatoire qui à chaque match associe le nombre de manches gagnées par le joueur A.
Quelle est la distribution de cette variable aléatoire et calculer son espérance mathématique?

c) Le joueur gagne le match s'il remporte au moins deux manches. Quelle est la probabilité pour que le joueur A perde le match?

2) Le joueur B remporte une manche avec la probabilité 0,5 indépendamment des autres manches.
Soit Y la variable aléatoire qui à chaque match associe le nombre de manches gagnées par le joueur B.

a) Quelle est la distribution de cette variable aléatoire et calculer son espérance mathématique?

b) Le joueur gagne un match s'il remporte au moins deux manches. Quelle est la probabilité pour que le joueur B gagne le match?

Exercice 2

1) On considère la suite réelle (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = a \\ u_{n+1} = u_n^2 - 2u_n + 2 \quad (\text{pour } n \in \mathbb{N}). \end{cases}$$

a) Déterminer les valeurs de a pour lesquelles la suite (u_n) est stationnaire.

b) On pose : $a = +3$.
Calculer : u_1, u_2, u_3, u_4.

c) Montrer que pour tout n, on a :

$$u_n - 1 > 0.$$

2) On considère la suite réelle (v_n) définie pour tout nombre entier naturel n par :

$$v_n = \lg_2(u_n - 1).$$

a) Montrer que cette suite est géométrique; en donner le premier terme et la raison.

b) Exprimer v_n en fonction de n; en déduire une expression de u_n en fonction de n.

N.B. Le symbole $\lg_2$ désigne la fonction logarithme en base deux.

Problème

Soit la fonction numérique f de la variable réelle x définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ f(x) = 2x - |x| \ln(x^2)$$
$$f(0) = 0.$$

I *a*) Écrire l'expression de $f(x)$:
pour tout x élément de $\mathbb{R}_-^*$,
puis pour tout x élément de $\mathbb{R}_+^*$.

b) Calculer $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x)$ et $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x)$.
La fonction f est-elle continue au point 0?

c) f admet-elle une limite lorsque x tend vers $-\infty$, lorsque x tend vers $+\infty$? (On pourra mettre x en facteur dans l'expression de $f(x)$.)

d) Calculer la fonction dérivée de f pour tout x élément de $\mathbb{R}_-^*$ et pour tout x élément de $\mathbb{R}_+^*$.
La fonction f est-elle dérivable au point 0?

e) Donner la tableau de variation de la fonction f.

2) Soit (C) la représentation graphique de la fonction f, dans un plan P, muni d'un repère (O, I, J).

a) Calculer les abscisses des points d'intersection de (C) avec la droite (OI).

b) Tracer la courbe (C) en prenant pour unité graphique 4 cm.

II Dans tout ce qui suivra on appellera (C_1) l'arc de la courbe (C), ensemble des points du plan P dont les coordonnées vérifient :

$$x \in \mathbb{R}^+ \quad \boxed{\text{et}} \quad y = f(x)$$

et (C_2) l'arc de la courbe (C), ensemble des points du plan P dont les coordonnées vérifient :

$$x \in \mathbb{R}^- \quad \boxed{\text{et}} \quad y = f(x).$$

1) On envisage l'application (T) de P dans P qui à tout point m d'affixe z associe le point M d'affixe Z tel que :

$$Z = -e^2 \bar{z},$$

$\bar{z}$ étant le nombre complexe conjugué de z.

a) x, y, X, Y étant les réels tels que :

$$z = x + iy \quad \text{et} \quad Z = X + iY.$$

Déterminer x et y en fonction de X et Y.

b) Si s est la symétrie orthogonale d'axe (OJ), démontrer que :

$$T = T' \circ s.$$

T' étant une application de P dans P dont on précisera les éléments.

c) Démontrer que : $T(C_2) = (C_1)$.

2) On envisage l'application S de P dans P qui à tout point m de coordonnées x et y associe le point M dont les coordonnées X et Y vérifient :

$$X = -x \quad \text{et} \quad Y = -4x + y.$$

a) Déterminer l'ensemble des points invariants par l'application S. Démontrer que, lorsque m et M sont distincts, la droite (mM) conserve une direction fixe.
Quelle est la nature de l'application S?

Scanned by CamScanner

b) Quel est le transformé, par S, de l'arc (C_1)? de l'arc (C_2)?

III 1) Soit (Δ) la droite d'équation : $y = 2x$. Déterminer les points communs de (C) et (Δ).

2) a et b étant deux nombres réels tels que :

$$-1 < 0 < a < 1,$$

calculer par une intégration par parties I_1 et I_2 définie par :

$$I_1 = \int_a^1 x \ln(x)\, dx \quad \text{et} \quad I_2 = \int_{-1}^0 x \ln(-x)\, dx.$$

3) Déterminer l'aire $\mathcal{A}_1(a)$ de l'ensemble des points du plan dont les coordonnées (x, y) vérifient :

$$\begin{cases} a \leqslant x \leqslant 1 \\ 2x \leqslant y \leqslant f(x) \end{cases}$$

l'aire $\mathcal{A}_2(b)$ de l'ensemble des points du plan dont les coordonnées (x, y) vérifient :

$$\begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant b \\ 2x \leqslant y \leqslant f(x) \end{cases}$$

[a et b étant les nombres réels précisés au 2)].

4) Calculer $\lim\limits_{\substack{a \to 0 \\ a>0}} \mathcal{A}_1(a)$ et $\lim\limits_{\substack{b \to 0 \\ b<0}} \mathcal{A}_1(b)$.
Comparer les résultats obtenus.

DEVOIR 3

Exercice 1

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{R}}$ la suite numérique définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ \forall n \in \mathbb{N} \quad u_n - 2u_{n+1} = 2n + 3. \end{cases}$$

1) *a*) Trouver un nombre réel b pour que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$v_n = u_n + bn - 1,$$

soit une suite géométrique.

b) En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = \frac{1}{2^n} - 2n + 1.$$

2) Soit S_n le nombre réel défini par :

$$S_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n.$$

a) Calculer S_n en fonction de n.

b) Calculer la plus petite valeur de n pour que :

$$S_n > 1{,}9999.$$

3) Soit T_n le nombre réel défini par :

$$T_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n.$$

a) Calculer T_n en fonction de n.

b) T_n admet-il une limite?

Exercice 2

Soit P le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) et A le point d'affixe $2i$.
Soit ϕ l'application de $P - \{A\}$ dans P qui a un point M de coordonnées (x, y) et d'affixe $z (z = x + iy)$, associe le point M' de coordonnées (X, Y) et d'affixe $Z (Z = X + iY)$ telle que :

$$Z = \frac{z+1}{z-2i}.$$

1) Montrer que tout point de P, sauf un point B que l'on précisera, a un antécédent unique par l'application ϕ.

2) Calculer X et Y en fonction de x et y.

3) Quel est l'ensemble E_1, des points M, tels que Z soit un nombre réel?

4) Quel est l'ensemble E_2 des points M, tels que Z ait pour argument $\frac{\pi}{2}$?

5) Représenter E_1 et E_2 dans le plan, en utilisant deux couleurs différentes.

Problème

A Soit f la fonction numérique définie par :

$$f(x) = 1 - x - 2 \ln(x).$$

1) Étudier le sens de variation de f et donner son tableau de variations.

2) f admet-elle une asymptote oblique lorsque x tend vers $+\infty$?

3) Résoudre l'équation :

$$x \in \mathbb{R}_+^*, \ 1 - x - 2 \ln(x) = 0.$$

4) Étudier le signe de $f(x)$ lorsque x est élément de $\mathbb{R}_+^*$.

B Soit g la fonction numérique définie par :

$$g(x) = \frac{x + \ln(x)}{x^2}.$$

1) Étudier le sens de variation de g et donner son tableau de variations. (On pourra dans cette question, utiliser la partie A .)

2) Montrer que l'équation :

$$x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g(x) = 0;$$

admet une seule solution dans l'intervalle $[0{,}1; 1]$.
Trouver un encadrement de la solution à 10^{-1} près.

3) Construire $(\mathcal{C})$, la représentation graphique de la fonction g.
(Unité graphique : 4 cm.)

Scanned by CamScanner

4) *a*) Quelle est la fonction dérivée de la fonction :

$$\begin{aligned}\mathbb{R}_+^* &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto \frac{-1-\ln(x)}{x}?\end{aligned}$$

b) En déduire une primitive de la fonction g sur $]0, +\infty[$.

c) Calculer l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe $(\mathcal{C})$, l'axe (OI), la droite d'équation $(x=1)$ et la droite d'équation $(x=e)$.

c) Soit $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite numérique définie par :

$$u_n = \frac{n+\ln(n)}{n^2}.$$

1) *a*) Quel est le sens de variation de cette suite?

b) Est-elle convergente? Si oui, quelle est sa limite?
Trouver le nombre entier naturel ρ tel que pour tout ρ strictemment supérieur à ρ

$$|u_n| < 10^{-3}$$

(on pourra utiliser le fait que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad \ln(n) < n).$$

DEVOIR 4

Exercice 1

1) Trouver trois nombres réels a, b, c, vérifiant pour tout nombre entier naturel n et pour tout nombre réel positif t :

$$\frac{1}{t(t^n+1)} = \frac{at^{-1}+b}{t^n+1} + \frac{c}{t}.$$

2) Donner une primitive sur $]0, +\infty[$ de la fonction f définie par :

$$f_n(t) = \frac{1}{t(t^n+1)}.$$

Démontrer que :

$$\int_1^2 f_n(t)\,dt = \ln\left(\sqrt{\frac{2^{n+1}}{2^n+1}}\right).$$

3) Au moyen de la technique d'intégration par parties calculer :

$$\int_1^2 \frac{t^{n-1}\ln(t)}{(t^n+1)^2}\,dt.$$

Exercice 2

Soit l'application

$$\begin{aligned}\varphi : \mathbb{C}-\{-1, 1\} &\longrightarrow \mathbb{C}\\ z &\longmapsto \frac{2z}{z^2-1}.\end{aligned}$$

1) Montrer que pour tout nombre réel θ, élément de $]0, \pi[$, le nombre complexe $\varphi(\cos\theta + i\sin\theta)$ est imaginaire pur.
Trouver son module et son argument principal.

2) Soit $\bar{z}$ le nombre complexe conjugué de z.

a) Montrer que :

$$\varphi(z) = \frac{2z(\bar{z}^2-1)}{|z^2-1|^2}.$$

b) On pose :

$$z = x+iy \quad \text{et} \quad 2z(\bar{z}^2-1) = X+iY$$

où x, y, X, Y sont des nombres réels.
Calculer X et Y en fonction de x et y.

c) Le plan est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
Trouver l'ensemble des points M du plan, d'affixe z, tels que $\varphi(z)$ soit un nombre imaginaire pur.

3) Résoudre l'équation :

$$z \in \mathbb{C}, \quad \varphi(z) = \frac{i}{2}.$$

Problème

A Soit les deux fonctions

$$\begin{aligned}f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto x^2+1-\ln(x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto -x^2+1-\ln(x).\end{aligned}$$

1) Étudier les limites de f et g.

2) Étudier le sens de variation de f et g et donner leurs tableaux de variations.

3) Calculer $g(1)$ et donner le signe de $f(x)$ et $g(x)$ suivant les valeurs de x appartenant aux ensembles de définition respectifs de f et g.

B Soit les fonctions

$$\begin{aligned}F : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto x+\frac{\ln(x)}{x}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}G : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}\\ x &\longmapsto -x+\frac{\ln(x)}{x}.\end{aligned}$$

1) Étudier le sens de variation des fonctions F et G et donner leurs tableaux de variations.

2) Dans le plan muni d'un repère orthonormé (O, I, J) (unité graphique : 2 cm) on appelle (C) la représentation graphique de F et (Γ) celle de G.

a) Étudier la position relative des courbes (Γ) et (C).

Scanned by CamScanner

b) Montrer que (C) et (Γ) admettent chacune une asymptote en $+\infty$, dont on donnera une équation.
Étudier la position relative de chacune des courbes par rapport à son asymptote.

c) Tracer les courbes (C) et (Γ) dans le même repère.

C Soit α un nombre réel appartenant à $]0, 1[$. Calculer l'aire A_α de l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que :

$$\begin{cases} \alpha \leqslant x \leqslant 1 \\ G(x) \leqslant y \leqslant F(x) \end{cases}$$

et calculer : $\lim\limits_{\alpha \to 0} A_\alpha$.

2) Soit β un nombre réel strictement supérieur à 1. Calculer l'aire A_β de l'ensemble des points du plan dont les coordonnées (x, y) vérifient :

$$\begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant \beta \\ -x \leqslant y \leqslant G(x) \end{cases}$$

et calculer : $\lim\limits_{\beta \to +\infty} A_\beta$.

D 1) Montrer que F est une bijection d'un intervalle H vers un intervalle K que l'on précisera. Donner le tableau de variations de F^{-1} et représenter F^{-1} dans le même repère que précédemment (couleur différente).

Soit (C') la courbe obtenue.

2) *a*) Calculer :

$$\int_1^2 F(x)\,dx.$$

b) Quelle est l'abscisse du point de (C') dont l'ordonnée est 2?

c) Utiliser le *a*) et le *b*) pour calculer l'aire de l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan dont les coordonnées vérifient :

$$\begin{cases} 1 \leqslant x \leqslant 2 + \dfrac{1}{2}\ln(2) \\ 0 < y < F^{-1}(x). \end{cases}$$

Scanned by CamScanner

INDEX

A

Affixe (d'un point, d'un vecteur) 73
Ajustement linéaire 226
Aléatoire 245
Argument d'un nombre complexe 79
Argument principal 79
Axe focal (d'une ellipse) 142
Axe focal (d'une hyperbole) 156
Axe non focal (d'une ellipse) 142
Axe non focal (d'une hyperbole) 156

B

Base canonique (de R^2) 17
Bohomme d'Ampère 22

C

Carré scalaire 20
Centre (d'une ellipse) 142
Centre (d'une hyperbole) 156
Cercle directeur (d'une ellipse) 144
Cercle directeur (d'une hyperbole) 158
Coefficient de corrélation linéaire 236
Combinaison linéaire 4
Conique à centre 168
Conjugué d'un nombre complexe 68
Corrélation linéaire 234
Covariance 229

D

Directrice d'une parabole 172
Distance focale (d'une ellipse) 142
Distance focale (d'une hyperbole) 156
Distribution (d'une variable aléatoire) 270
Droite de régression (ou des moindres carrés) 230

E

Écart-type 274
Effectif du couple ..... 219 - 222
Ellipse 141
Epreuve de Bernouilli 263
Équation réduite d'une ellipse 147
d'une hyperbole 161
d'une parabole 176
Espérance mathématique 272
Éventualité 246
Événement, (élémentaire, impossible) 246
Événements équiprobables 249
Événements contraires 247
Événements incompatibles 248
Événements indépendants 260
Extérieur d'une ellipse 152
d'une hyperbole 167
d'une parabole 181

F

Fonction de répartition 271
Forme algébrique (d'un nombre complexe) 64
Forme trigonométrique (d'un nombre complexe) 80
Formule du Binôme de Newtone 67
Formule de Moivre 87
Foyers d'une ellipse 142
Foyers d'une hyperbole 157
Foyer d'une parabole 172

G

Grand axe (d'une ellipse) 143

H

Hyperbole 156
Hyperbole équilatère 165

I

Intérieur d'une ellipse 152
d'une hyperbole 167
d'une parabole 181

M

Matrice complète (associée à un système) 34
Matrice du second membre (d'un système) 33
Matrice des coefficients (d'un système) 33
Maximisation (d'un bénéfice) 50
Méthode de Gauss 37
Minimisation (d'un prix) 51
Module d'un nombre complexe 75
Moyenne d'une série statistique 232

N

Nombre complexe 62
Nombre imaginaire pur 64
Norme d'un vecteur 10
Nuage de points 224

O

Orientation de l'espace 23

P

Parabole 172
Paramètre (d'une parabole) 172
Partie réelle (d'un nombre complexe) 64
Partie imaginaire (d'un nombre complexe) 64
Petit axe (d'une ellipse) 143
Probabilité d'un événement 250

Scanned by CamScanner

Probabilité conditionnelle 257
Probabilité-image 269
Produit mixte 29
Produit scalaire 18
Produit vectoriel 24

R

Racine $n^{ième}$ (d'un nombre complexe) 91

S

Schéma de Bernouilli 264
Série statistique double 222
Séries statistiques marginales 220
Sommets d'une ellipse 143
d'une hyperbole 157
d'une parabole 172
Système complet d'événements 248

T

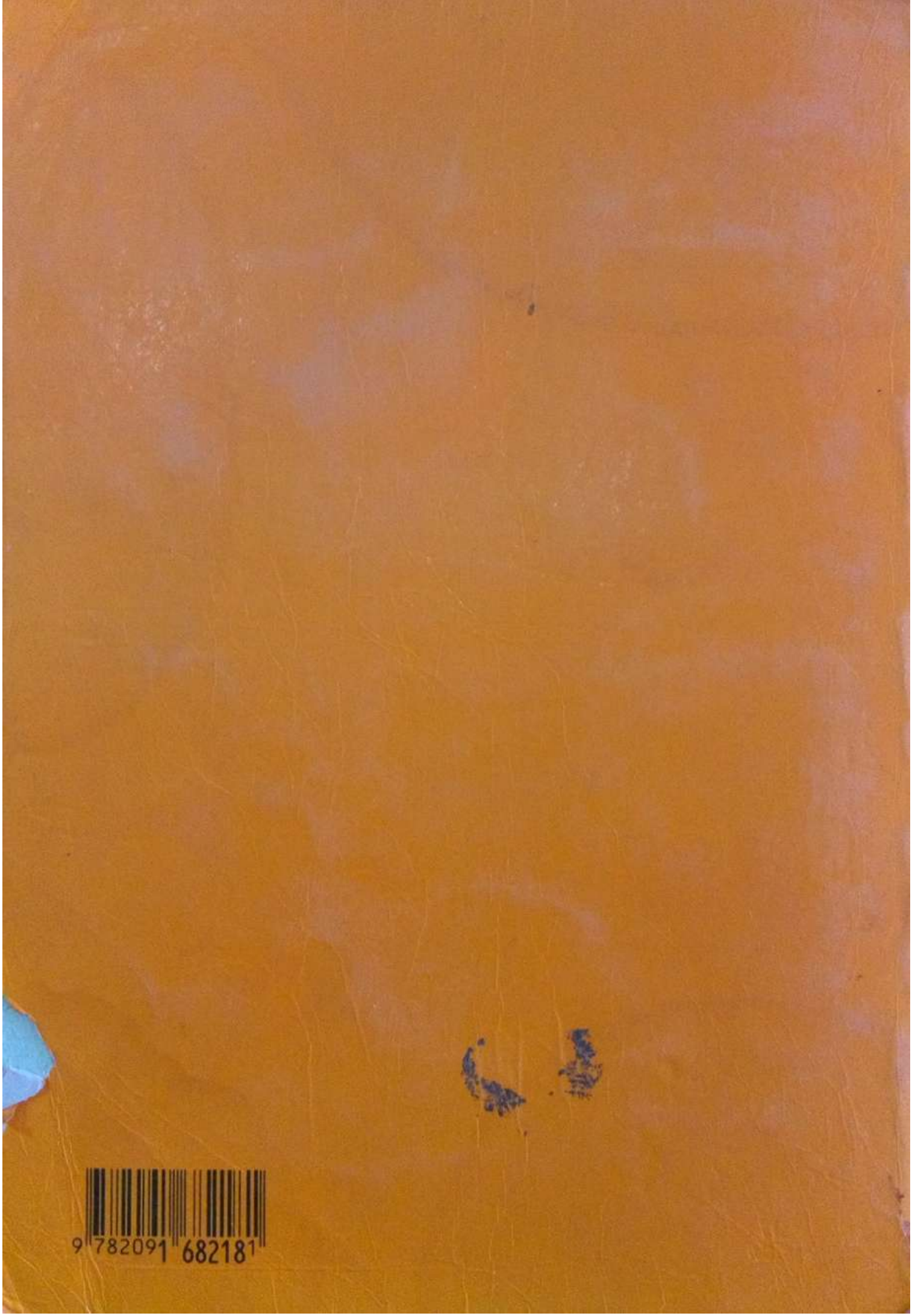
Triangle de Pascal 211

V

Variable aléatoire 267
Variance ..... 229 - 274
Vecteurs colinéaires 5
coplanaires 6
orthogonaux 21
Vecteur unitaire 21
Vecteur image (d'un nombre complexe) 72

Achevé d'imprimer 1er trimestre 1991
sur les Presses Spéciales de la
Société Européenne Des Arts Graphiques
5, rue de Pontoise
75005 Paris
Imprimé en Italie
Numéro d'Éditeur : 10003457

Scanned by CamScanner



Scanned by CamScanner