

**100% EXOS**

# Physique

Obligatoire  
+ Spécialité

# T<sup>le</sup>S

**L'ENTRAÎNEMENT INTENSIF**

Plus de 240 exercices

- > progressifs
- > minutés
- > corrigés

Et des rappels de cours



HATIER

**% EXOS**

**100**

# Physique

Enseignements  
obligatoire  
et de spécialité

**T<sup>le</sup>S**

Nicolas Bruchon

Professeur à l'École supérieure d'optique de Lorraine  
et en classes préparatoires au lycée La Malgrange à Nancy



HATIER

Remerciements :

- à tous mes collègues pour leur aide ;
- à Guillaume Benoit pour la relecture de bon nombre d'exercices ;
- à Valérie Perthué des Éditions Hatier pour son travail ;
- à ma famille pour sa patience.

**Maquette :** Marie-Astrid Bailly-Maître

**Mise en page, schémas :** Compo-Méca

**Édition :** Frank Boulanger

---

© Hatier, Paris, janvier 2004

2-218-74478-3

Toute représentation, traduction, adaptation ou reproduction, même partielle, par tous procédés, en tous pays, faite sans autorisation préalable est illicite et exposerait le contrevenant à des poursuites judiciaires. Réf : loi du 11 mars 1957, alinéas 2 et 3 de l'article 41. Une représentation ou reproduction sans autorisation de l'éditeur ou du Centre Français d'exploitation du droit de Copie (20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris) constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code Pénal.

---

# Avant-propos

---

Le programme des enseignements obligatoire et de spécialité de Physique de la classe de Terminale S est ici découpé en 21 chapitres (les trois derniers étant consacrés à l'enseignement de spécialité) et six parties. L'ordre choisi est le plus classiquement utilisé par les professeurs et les manuels\*. Toutes ces parties sont relativement indépendantes les unes des autres.

## Les exercices

La difficulté des 240 exercices de cet ouvrage est symbolisée par un nombre d'étoiles :

- \* exercices d'application directe du cours (notions de base) ;
- \*\* exercices d'entraînement reposant les notions de base acquises ;
- \*\*\* exercices d'approfondissement qui font appel à un raisonnement plus complexe et/ou à des calculs plus poussés.

Dé plus, une indication sur la durée de réalisation des exercices vous est donnée.

Dans presque chaque chapitre se trouve un (ou plusieurs) exercice intitulé « LE CLASSIQUE ». Il s'agit à la fois de l'exercice qui comprend les notions les plus fréquemment utilisées et à la fois de celui que l'on retrouve le plus souvent en devoir ou à l'épreuve du baccalauréat. Il est essentiel de le maîtriser parfaitement.

## Rappels de cours et annexes

Les rappels de cours très complets reprennent les notions essentielles. Ils sont complétés par des annexes dont une sur l'analyse dimensionnelle. Ces rappels sont à connaître parfaitement, et l'élève est invité à personnaliser ses propres résumés sous forme de fiches.

## Méthode de travail

Dans tous les cas, il ne faut consulter les **corrigés** qu'après avoir réellement cherché la solution. La méthode consistant à lire une question,

---

\* Parfois la partie « nucléaire » (chapitres 4 et 5) est enseignée juste avant le chapitre « ouverture au monde quantique » (chapitre 17).

puis à regarder la solution quelques secondes plus tard, est sans aucune efficacité.

Il ne faut pas oublier que l'épreuve du baccalauréat consiste en la réalisation d'exercices en une **durée fixée**. Chaque exercice doit donc être fait au moins deux fois. La deuxième résolution vous assure de savoir faire les « questions type » très rapidement vous libérant du temps pour les questions plus complexes ou plus originales. Avec ce procédé, vous pouvez progresser de 10/20 à beaucoup plus (20/20 ?), alors que le fait de faire une seule fois un exercice ne vous permet guère de dépasser le 10/20, en général. Il est donc souhaitable de faire moins d'exercices, mais de les faire deux fois ou plus, de chercher d'autres méthodes..., en d'autres termes, de les approfondir.

Cela étant, la quantité totale de travail reste le gage principal de réussite.

### Remarque

La Physique utilise le génial outil que sont les Mathématiques. Mais derrière chaque relation se cache un phénomène qu'il faut comprendre et maîtriser. La Physique n'est pas un amas de formules !

- «  $E = m \cdot c^2$  » est connu de tous, mais que représente  $E$  ?
- L'énergie !
- Oui, mais l'énergie de quoi ?
- Et d'abord qu'est-ce qu'une énergie « physiquement parlant » ? De quelle masse parle-t-on ? Et s'il y a deux masses, laquelle faut-il considérer ? Que se passe-t-il si  $m$  augmente ? Est-ce (physiquement) logique ? Et si la masse devient nulle, qu'arrive-t-il ? Mais une masse peut-elle être nulle ?
- Autant de questions qu'il est légitime de se poser pour chaque formule !

Bon courage à tous.

L'auteur.

Proetudes.blogspot.com

**PROÉTUDES**

Surfer en toute confiance

---

# Sommaire

---

## PROPAGATION D'UNE ONDE – ONDES PROGRESSIVES

1 Ondes mécaniques progressives . . . . .	7
2 Ondes mécaniques progressives périodiques . . . . .	17
3 Modèle ondulatoire de la lumière . . . . .	29

## TRANSFORMATIONS NUCLÉAIRES

4 Décroissance radioactive . . . . .	45
5 Noyaux, masse, énergie . . . . .	59

## ÉVOLUTION DES SYSTÈMES ÉLECTRIQUES

6 Dipôle RC . . . . .	69
7 Dipôle RL . . . . .	93
8 Circuits RLC libres . . . . .	119

## ÉVOLUTION TEMPORELLE DES SYSTÈMES MÉCANIQUES

9 La mécanique de Newton . . . . .	135
10 Chute verticale d'un solide . . . . .	161
11 Mouvements de projectiles dans un champ de pesanteur uniforme . . . . .	177
12 Satellites et planètes . . . . .	191
13 Présentation de systèmes mécaniques oscillants . . . . .	205

14	Dispositif solide-ressort . . . . .	215
15	Phénomène de résonance . . . . .	229
16	Aspects énergétiques . . . . .	237
17	Ouverture au monde quantique . . . . .	255

## MESURE DU TEMPS

18	L'évolution temporelle des systèmes et la mesure du temps . . . . .	269
----	--	-----

## ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

19	Produire des images, observer . . . . .	271
20	Produire des sons, écouter . . . . .	299
21	Produire des signaux, communiquer . . . . .	319

## ANNEXES

	Analyse dimensionnelle . . . . .	340
	Rappels en électricité . . . . .	342
	Constantes, multiples et sous-multiples . . . . .	345
	Classification périodique des éléments chimiques . . . . .	346
	Formulaire de Chimie . . . . .	347
	Formulaire de Mathématiques . . . . .	348

## 1

# Ondes mécaniques progressives

## 1 GÉNÉRALITÉS

- **Onde mécanique** : phénomène de propagation d'une perturbation mécanique dans un milieu, sans transport de matière.
- **Célérité** : vitesse  $v$  de propagation de l'onde (elle est notée  $c$  pour la propagation de la lumière dans le vide) ;  $v$  s'exprime en  $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ .
- **Milieu non dispersif** : milieu pour lequel  $v$  ne dépend pas de la perturbation ni du lieu où elle est mesurée.
- **Onde longitudinale** : la perturbation est parallèle au sens de propagation de l'onde.

Exemple : onde sonore de compression / dilatation (ou onde de pression).

→ sens de la propagation



→ sens de la perturbation

- **Onde transversale** : la perturbation est perpendiculaire au sens de propagation de l'onde. Exemple : onde transmise par une corde.

→ sens de la propagation



↑ sens de la perturbation

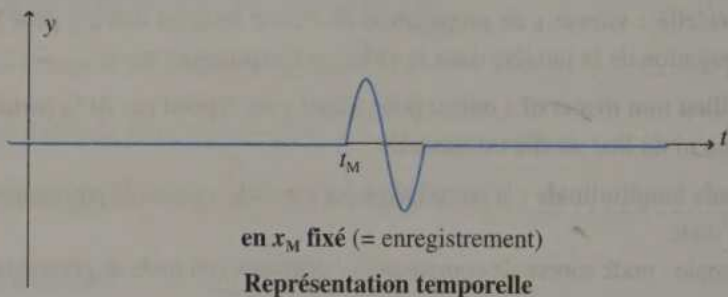
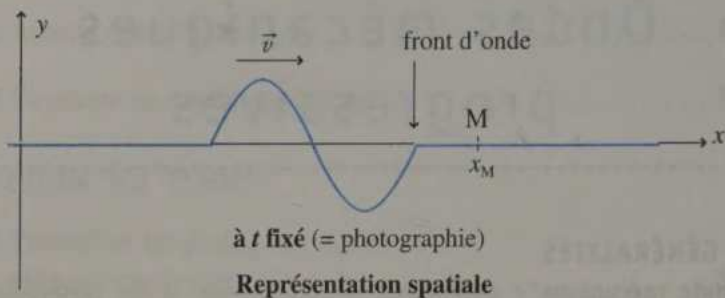
- **Onde à  $n$  dimension(s)** : onde qui se propage dans  $n$  dimension(s) à partir de sa source.

Exemples :  $n = 1$  : corde, laser, ... ;  $n = 2$  : surface d'un liquide, tissu agité, ... ;  $n = 3$  : haut-parleur, ampoule, ...

- Deux ondes peuvent se croiser sans se perturber (cf. exercice 5).

## II ONDES MÉCANIQUES PROGRESSIVES

### 1. Représentation spatiale et représentation temporelle



### 2. Relations

Une perturbation est reçue en M à  $t_M$  et en M' à  $t_{M'}$ .

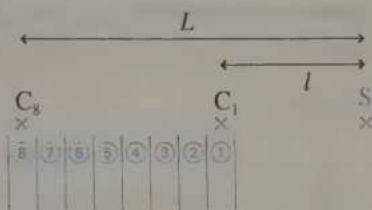
- La **vitesse** de la perturbation est alors :  $v = \frac{x_{M'} - x_M}{t_{M'} - t_M}$ .
- Si  $t_{M'} > t_M$ , alors  $\Delta t = t_{M'} - t_M$  est le **retard** du passage de la perturbation en M' par rapport à M.

## EXERCICES D'APPLICATION

## 1 DÉPART D'UN SPRINT

\* (5 min) ► P. 12

Le starter, qui donne le départ d'un 100 m, est placé en S, aligné avec les huit coureurs. Le coureur  $C_1$ , qui est au couloir ①, est le plus proche de S ; le coureur  $C_8$  est le plus éloigné de S.



Sachant que le chronomètre utilisé est précis au centième de seconde, calculer la durée que met le signal pour se propager de  $C_1$  en  $C_8$  et conclure.  
Données :  $l = 7,00$  m ;  $L = 15,40$  m ;  $v$  (son dans l'air) =  $340$  m · s<sup>-1</sup>.

## 2 L'ÉCHO

\* (5 min) ► P. 12

Sachant qu'une oreille moyenne distingue deux sons s'ils sont séparés par une durée d'au moins 0,10 s, à quelle distance d'un mur faut-il se placer pour distinguer l'écho ? (S'agit-il d'un maximum ou d'un minimum ?)

Donnée :  $v_{\text{son}} = 340$  m · s<sup>-1</sup> (dans l'air).

## 3 CONDUITE EN CUIVRE

\* (10 min) ► P. 12

On frappe une conduite en cuivre remplie d'eau. Un enregistreur situé à  $d = 200$  m analyse deux sons espacés de  $\Delta t = 9,34 \times 10^{-2}$  s.

1. Expliquer pourquoi il y a deux sons.
2. Calculer la célérité du son dans le cuivre sachant qu'elle est de  $1\,500$  m · s<sup>-1</sup> dans l'eau.

## 4 VRAI OU FAUX ?

\* (5 min) ► P. 12

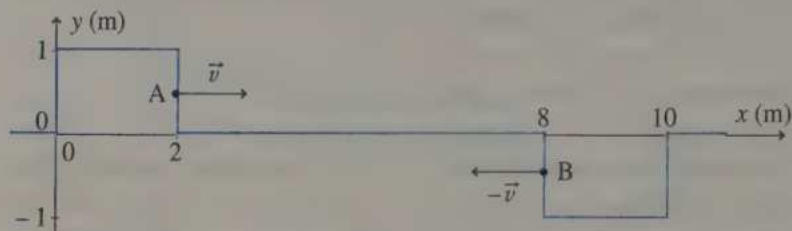
- a. La vitesse de propagation du son dans le vide est légèrement plus élevée que dans l'air, puisqu'il n'y a pas de « frottement ».
- b. Le Concorde volait à Mach 2,2, c'est-à-dire à 2,2 fois la vitesse de la lumière.
- c. Si une onde se propage le long d'un ressort (très grand), il s'agit nécessairement d'une onde longitudinale.
- d. On appelle onde mécanique le phénomène de propagation d'une perturbation mécanique dans un milieu, sans transport de matière.
- e. Une onde mécanique progressive ne peut être qu'à une ou deux dimension(s).

## EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

## 5 INTERFÉRENCES SIMPLES

\*\* (20 min) ► P. 13

Représenter, aux dates 3,00 s, 3,50 s, 4,00 s, 4,50 s et 5,00 s, les deux signaux suivants qui se propagent en sens inverse à la vitesse  $v = 1,00 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .



## 6 ÉCLAIR ET TONNERRE

\*\* (10 min) ► P. 14

Expliquer la règle suivante : « Pour mesurer la distance, en kilomètre, à laquelle se situe un orage, il suffit de compter le nombre de secondes qui s'écoulent entre l'éclair et le tonnerre, et de le diviser par 3 ».

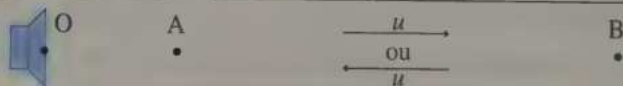
Pour cela, on exprimera d'abord la durée précédente en fonction des célérités du son et de la lumière, et de la distance  $d$  à laquelle a été émis l'éclair.

Données :  $v_L = v_{\text{Lumière}} \approx 3,0 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  ;  $v_S = v_{\text{Son}} \approx 3,4 \times 10^2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

## 7 VITESSE D'ÉCOULEMENT DE L'AIR

\*\* (10 min) ► P. 14

De l'air s'écoule dans une canalisation, à la vitesse  $u$ . Deux microphones sont placés en A et B, et un haut-parleur en O. Ces trois appareils sont de très faible dimension.



Un son est émis en O, et on mesure la durée  $\Delta t$  qui sépare le début de la détection en A de celle en B.

Résultats :

- si l'air s'écoule de A vers B :  $\Delta t_1 = 5,46 \times 10^{-2} \text{ s}$  (cas 1) ;
- si l'air s'écoule de B vers A :  $\Delta t_2 = 6,58 \times 10^{-2} \text{ s}$  (cas 2).

En déduire les vitesses  $u$  de l'air et  $v$  du son.

Donnée :  $AB = 20,00 \text{ m}$ .

## EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

### 8 CÉLÉRITÉ D'UNE CORDE \*\*\* (25 min) ► P. 14

La célérité d'une onde (transversale) qui se propagerait le long d'une corde de masse linéique  $\mu$  soumise à une tension  $T$  est :

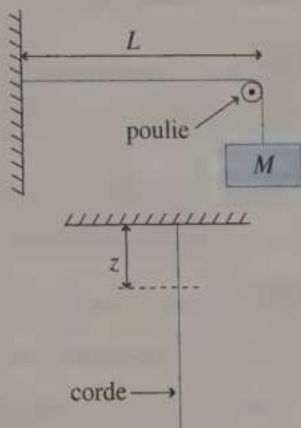
$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

Données :

$m$  (masse de la corde) = 50,0 g ;

$l$  (longueur de la corde) = 2,00 m ;

$g = 9,80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  ;  $M = 5,00 \text{ kg}$ .



1. Vérifier l'homogénéité de cette relation.

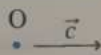
2. Calculer  $v$  pour le montage de la poulie ci-contre ( $M \gg m$ ).

3. Calculer  $v(z)$  pour le montage ci-contre et conclure (la corde pend librement).

### 9 EFFET DOPPLER ET RADAR \*\*\* (30 min) ► P. 15

Un signal, qui est une onde se déplaçant à la vitesse  $c$ , est émis à  $t = 0 \text{ s}$  en O pendant une durée  $\tau$ .

Un objet se déplaçant à la vitesse  $\vec{v}$  (cf. schéma ci-contre) reçoit le signal pendant une durée  $\tau'$ .



1. Exprimer  $\tau'$  en fonction de  $\tau$ ,  $v$  et  $c$ . Généraliser cette expression au cas où  $\vec{v}$  est de sens opposé.

2. Application : un radar envoie un signal de durée  $\tau = 1,000 \text{ ms}$  vers une voiture se déplaçant à la vitesse  $v$ , et récupérant un signal de durée  $\tau' = 0,870 \text{ ms}$ . En déduire  $v$ .

Donnée :  $c = 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

## CORRIGÉS

$$\boxed{1} \quad \Delta t = \frac{C_1 C_8}{v} = \frac{L-l}{v} \quad \text{A.N. : } \Delta t = \frac{15,4-7}{340} \approx 2,5 \times 10^{-2} \text{ s}$$

Cette valeur est supérieure à la précision du chronomètre : il faut donc en tenir compte.

Ainsi, dans les grandes compétitions, un haut-parleur est-il installé derrière chaque coureur (avec des longueurs de fils électriques identiques entre le starter et les haut-parleurs).

$\boxed{2}$  Soit  $d$  la distance entre le mur et l'observateur. La durée d'un aller et retour (distance  $2d$ ) du son est  $\Delta t = \frac{2d}{v}$ .

Il faut  $\Delta t > 0,1$  s, soit  $\frac{2d}{v} > 0,1$ , donc  $d > v \times 0,05 \approx 17$  m.

17 m est la distance minimale.

$\boxed{3}$  1. Le son se propage à des vitesses différentes dans l'eau et le cuivre.

2. Durées de propagation dans le cuivre :  $\Delta t_c = \frac{d}{v_c}$  et dans l'eau  $\Delta t_e = \frac{d}{v_e}$ .

Le son se déplaçant en général plus vite dans les métaux que dans l'eau :

$$\Delta t = \Delta t_e - \Delta t_c = \frac{d}{v_e} - \frac{d}{v_c} \quad \text{soit} \quad \frac{\Delta t}{d} = \frac{1}{v_e} - \frac{1}{v_c} \quad \text{d'où} \quad v_e = \frac{1}{\frac{1}{v_e} - \frac{\Delta t}{d}}$$

$$\text{A.N. : } v_e = \frac{1}{\frac{1}{1500} - \frac{0,0934}{200}} \approx 5010 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$\boxed{4}$  Toutes les propositions sont fausses sauf la d. qui est vraie.

a. Le son ne se propage pas dans le vide (car c'est une onde de pression, donc liée aux chocs des molécules de gaz).

b. Le Concorde volait à 2,2 fois la vitesse du son ( $340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ) et non la vitesse de la lumière ( $3,0 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ).

c. **Onde longitudinale**



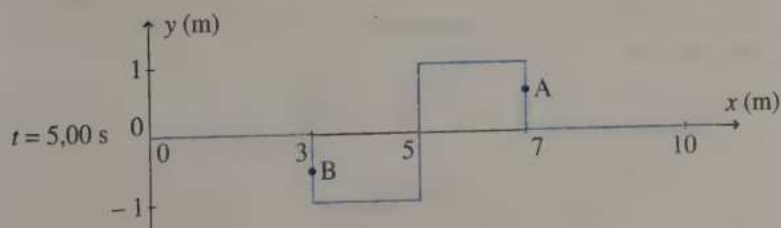
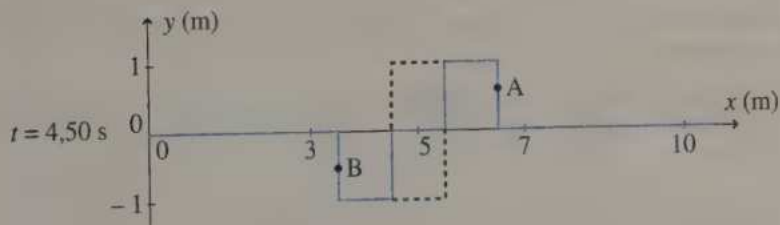
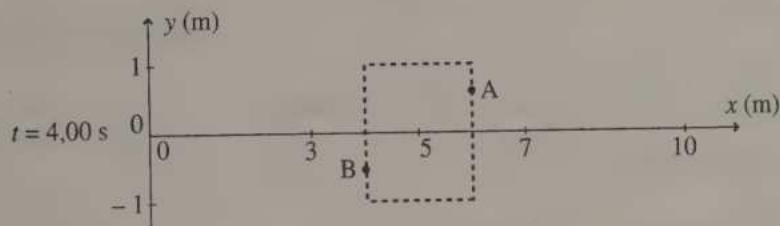
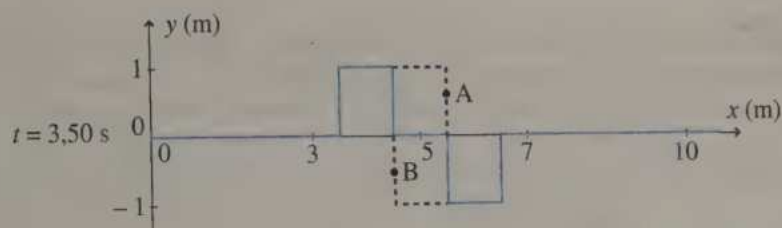
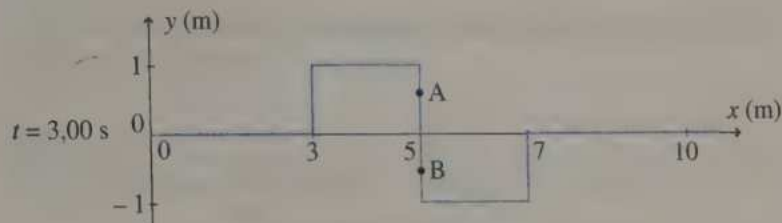
**Onde transversale**



e. Exemples :

- une dimension : corde vibrante ;
- deux dimensions : vagues à la surface de l'eau ;
- trois dimensions : son (dans l'espace !).

5 Il suffit de décaler (dans le bon sens) les deux signaux de  $d_i = t_i \times v$ , puis d'en faire la somme (les signaux seuls sont en pointillés, parfois masqués par le signal « total » en bleu).



**6** L'orage se trouvant à la distance  $d$  : si l'éclair a lieu à  $t = 0$  s, l'observateur perçoit la lumière à  $t_L = \frac{d}{v_L}$  et le son à  $t_S = \frac{d}{v_S}$ .

La durée séparant les deux événements est donc  $\Delta t = t_S - t_L = d \left( \frac{1}{v_S} - \frac{1}{v_L} \right)$ .

Comme  $v_L \gg v_S$  (très supérieure),  $\Delta t \approx \frac{d}{v_S}$ .

Si  $\Delta t$  est en seconde,  $d$  en km, alors  $v_S \approx 0,34 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$  et on obtient :

$$d(\text{km}) = v_S \times \Delta t(\text{s}) \approx 0,34 \times \Delta t(\text{s}), \text{ soit } d(\text{km}) \approx \frac{\Delta t(\text{s})}{3}.$$

**7** La vitesse d'écoulement du son par rapport au laboratoire est  $(v + u)$  dans le cas 1 et  $(v - u)$  dans le cas 2 (dans ce dernier cas,  $v > u$  sinon le son n'arrive pas en B, et de plus si on avait  $u > v$ , le mur du son serait atteint ...).

$$\begin{cases} \Delta t_1 = \frac{AB}{v+u} \\ \Delta t_2 = \frac{AB}{v-u} \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} v+u = \frac{AB}{\Delta t_1} \\ v-u = \frac{AB}{\Delta t_2} \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} v = \frac{AB}{2} \left( \frac{1}{\Delta t_1} + \frac{1}{\Delta t_2} \right) \\ u = \frac{AB}{2} \left( \frac{1}{\Delta t_1} - \frac{1}{\Delta t_2} \right) \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } v = \frac{20}{2} \left( \frac{1}{5,46 \times 10^{-2}} + \frac{1}{6,58 \times 10^{-2}} \right) \approx 335 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\text{et } u \approx 31,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

**8** 1. Équation aux dimensions, en remarquant que  $T$  est une force, donc homogène au poids ( $m \cdot g$ ) et que  $\mu = \frac{m}{l}$  ( $m$  : masse de la corde ;  $l$  : longueur de la corde) :

$$\left[ \frac{T}{\mu} \right] = \frac{[T]}{[\mu]} = \frac{[m \cdot g]}{\left[ \frac{m}{l} \right]} = \frac{[m] \cdot [g] \cdot [l]}{[m]} = [g] \cdot [l] = (\text{L} \cdot \text{T}^{-2}) \cdot \text{L} = \text{L}^2 \cdot \text{T}^{-2}$$

$$\text{donc } \left[ \sqrt{\frac{T}{\mu}} \right] = \sqrt{\left[ \frac{T}{\mu} \right]} = \sqrt{\text{L}^2 \cdot \text{T}^{-2}} = \text{L} \cdot \text{T}^{-1} = [v] \quad \text{C.Q.F.D.}$$

2. La tension est « créée » par la masse  $M$  ( $M \gg m$ , donc le poids de la corde est négligeable) :

$$T = M \cdot g \text{ et } \mu = \frac{m}{l} \text{ d'où } v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{M \cdot g \cdot l}{m}}$$

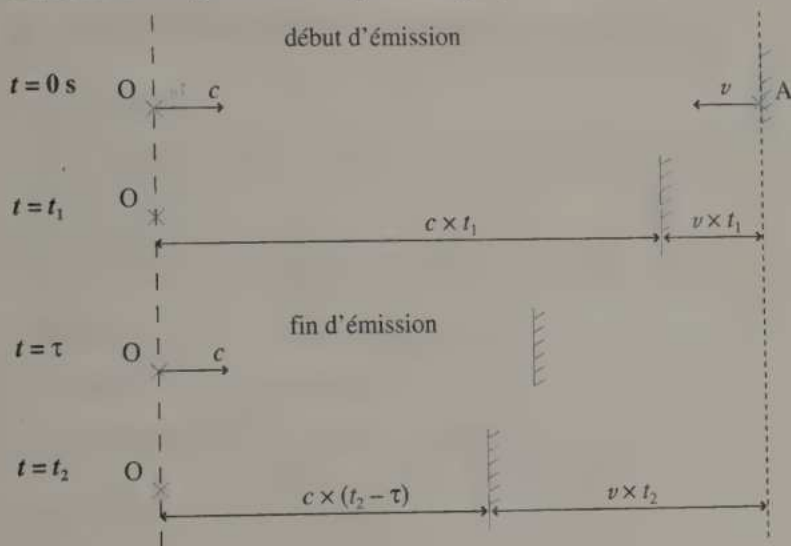
$$\text{A.N. : } v = \sqrt{\frac{5 \times 9,8 \times 2}{0,05}} \approx 44,3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

3. La tension est « créée » par la masse de la corde en dessous de  $z$ , donc de longueur  $(l - z)$ , de masse  $\mu \cdot (l - z)$ , de poids  $\mu \cdot (l - z) \cdot g = T$ .

$$\text{Soit } v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} = \sqrt{\frac{\mu(l-z)g}{\mu}}, \text{ d'où } v = \sqrt{(l-z)g}.$$

La propagation est plus rapide près du point d'attache ( $z = 0, v = \sqrt{l \cdot g}$ ) qu'en bas ( $z \approx l, v \approx 0$ ).

1. Soit  $t_1$  l'instant auquel le début du signal atteint l'objet, et  $t_2$  l'instant auquel la fin du signal atteint l'objet :  $\tau' = t_2 - t_1$ .



On a donc :  $c \times t_1 + v \times t_1 = OA = c \times (t_2 - \tau) + v \times t_2$ , soit :

$$\tau' = t_2 - t_1 = \frac{c}{c + v} \tau \quad (< \tau)$$

Si  $\vec{v}$  change de sens, alors il faut remplacer  $v$  par  $-v$ .

$$2. v = c \left( \frac{\tau}{\tau'} - 1 \right)$$

$$\text{A.N. : } v = 340 \left( \frac{10^{-3}}{0,87 \times 10^{-3}} - 1 \right) \approx 50,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \approx 183 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}.$$

Codes numériques enregistrés



## 2

# Ondes mécaniques progressives périodiques

## 1 ONDES PROGRESSIVES MÉCANIQUES PÉRIODIQUES

### 1. Cas général

- **Période temporelle ou période** : la plus petite **durée** non nulle qui sépare deux dates pour lesquelles la perturbation a la même valeur en un point donné.
- **Période spatiale** : la plus petite **distance** non nulle qui sépare deux points pour lesquels la perturbation a la même valeur (les deux points étant dans la même direction de propagation).

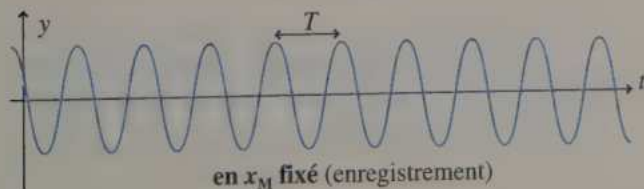
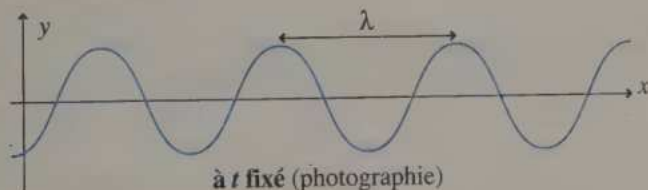
### 2. Cas des ondes sinusoïdales

- **Période temporelle ou période** :  $T$ , en seconde (s).
- **Période spatiale ou longueur d'onde** :  $\lambda$ , en mètre (m).
- **Fréquence** :  $\nu$  ou  $f$ , en hertz (Hz).
- **Célérité ou vitesse** :  $v$ , en  $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$  (ou  $c$  pour la lumière) :

$$v = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot \nu$$

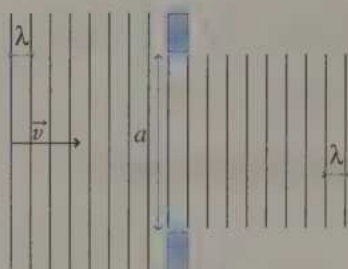
*Remarque* :  $T$  est la durée nécessaire à l'onde pour parcourir la distance  $\lambda$ .

- **Représentations** :

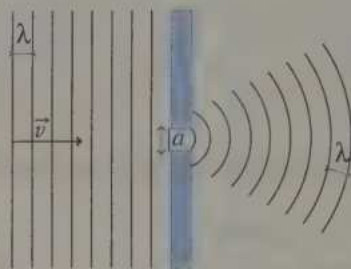


## II PHÉNOMÈNE DE DIFFRACTION

Une onde mécanique de longueur d'onde  $\lambda$  est diffractée (schéma ci-dessous) lors de son passage par une ouverture ou un obstacle de dimension caractéristique  $a$ , si  $a$  est du même ordre de grandeur que  $\lambda$  (soit un facteur 10 au maximum pour une onde mécanique, approximativement).



$a \gg \lambda$  : pas de diffraction



$a \sim \lambda$  : diffraction

## III PHÉNOMÈNE DE DISPERSION

Un milieu dispersif est un milieu dans lequel la vitesse  $v$  dépend de la fréquence  $\nu$  (ou de  $\lambda$  ou de  $T$ ) ; on a alors :  $v(\nu)$ .

## EXERCICES D'APPLICATION

## 1 ONDE PÉRIODIQUE NON SINUSOÏDALE

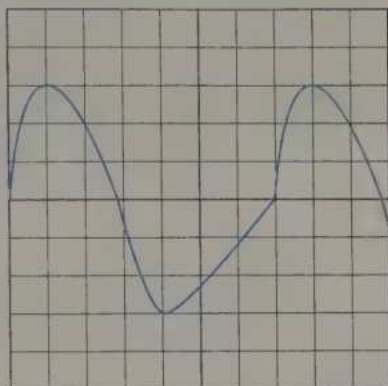
\* (10 min) ► P. 23

Le signal reçu par un microphone est visualisé sur l'écran d'un oscilloscope dont la vitesse de balayage est  $1 \text{ ms} \cdot \text{div}^{-1}$ .

1. En déduire sa période temporelle et sa période spatiale sachant que sa vitesse de propagation est  $v = 330 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

2. On suppose que l'enregistrement est réalisé dans l'eau.

Répondre aux mêmes questions sachant que  $v = 1\,500 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .



## 2 CÉLÉRITÉ VARIABLE

\* (5 min) ► P. 23

En mer, pour la houle en eau profonde (onde sinusoïdale progressive), on démontre que  $\lambda = \frac{g \cdot T^2}{2\pi}$  ( $g$  est l'accélération de la pesanteur).

1. Montrer que la célérité de cette onde dépend de sa fréquence.

2. Nommer ce phénomène.

## 3 TONNERRE ET CONCERT

\*\* (5 min ou 60 min) ► P. 23

1. Lorsque l'on entend le tonnerre, on perçoit un son aigu au début, grave ensuite (ce phénomène est appelé le roulement du tonnerre).

Expliquer pourquoi.

2. Le même phénomène doit s'appliquer dans une salle de concert : la mélodie jouée par l'orchestre devrait être totalement déformée.

Qu'en est-il ?

## 4 VRAI OU FAUX ?

\* (5 min) ► P. 23

a. Pour une corde vibrante, la longueur d'onde est la distance qui sépare deux positions successives d'élongation nulle.

b. La période est l'écart entre deux maxima consécutifs de l'élongation (pour une corde vibrante).

c. Une onde périodique est sinusoïdale.

- d. Une pierre lancée dans l'eau crée une onde périodique, mais pas nécessairement sinusoïdale.
- e. La longueur d'onde d'une onde diffractée ne varie que si l'ouverture (ou l'obstacle) diffractante a une dimension caractéristique du même ordre de grandeur que la longueur d'onde de l'onde incidente.
- f. Les ondes sonores et les ondes lumineuses sont du même type, seules leurs fréquences (périodes, célérités, longueurs d'onde) varient.
- g. Pendant une période temporelle ( $T$ ), une onde progresse d'une distance égale à  $v \times T$  (donc d'une longueur d'onde  $\lambda$ , dans le cas d'une onde sinusoïdale).

---

## EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

---

### 5 LE CLASSIQUE

\*\* (10 min) ► P. 24

Pour réaliser une échographie, on utilise un cristal qui, soumis à des impulsions électriques, vibre à la fréquence  $\nu = 5,0$  MHz. Ces vibrations sont transmises au patient qui est examiné où elles se propagent à la vitesse  $v = 1,5 \times 10^3$  m · s<sup>-1</sup> (ultrasons).

- De quel type d'onde s'agit-il (lumière, ...) ?
- Calculer la période et la longueur d'onde de cette onde sinusoïdale.
- Le cristal utilisé est de forme cylindrique, de diamètre  $d = 2,0$  cm et de hauteur  $h = 8,0$  cm.  
L'émission est-elle directive ou non ?
- On mesure la durée que met cette onde pour aller du côté droit du cerveau, se réfléchir sur la séparation des hémisphères et revenir au point de départ. On fait de même du côté gauche. Si les deux durées ne sont pas égales, que peut-on en déduire, malheureusement ?

### 6 ULTRASONS ET CHAUVÉ-SOURIS

\*\* (10 min) ► P. 24

Une chauve-souris détecte des obstacles en émettant, puis recevant par réflexion sur l'obstacle des ultrasons de fréquence 100 kHz.

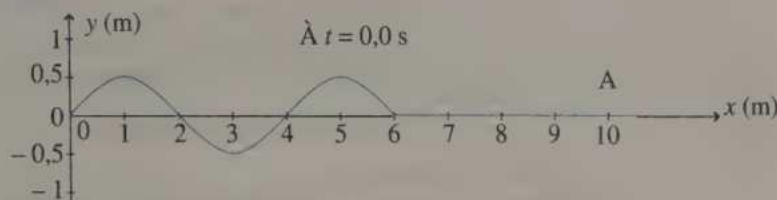
À quelle distance d'un obstacle doit-elle se trouver pour qu'il n'y ait pas d'interférences entre les brefs signaux qu'elle émet et ceux qu'elle reçoit, réfléchis par l'obstacle qu'elle va détecter ?

Données :  $v_{\text{son}} = 340$  m · s<sup>-1</sup> ; durée entre deux signaux émis :  $\Delta t \approx 100$  ms.

**7**  $y(x)$  ET  $y(t)$ 

\*\*\* (20 min) ► P. 24

Une onde sinusoïdale se propage suivant un axe  $Ox$  à la vitesse  $v = 2,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .



- Quelles sont les valeurs de :
  - $\lambda$  (longueur d'onde) ?
  - $y_m$  (amplitude) ?
  - $T$  (période) ?
  - $\nu$  (fréquence) ?
- Représenter  $y(x)$  à la date  $t = 2,5 \text{ s}$ .
- À quel moment l'onde atteint-elle le point A ?
- Représenter  $y(t)$  au point A.

## EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

**8** MAQUETTE ET DIFFRACTION

\*\*\* (10 min) ► P. 25

La maquette d'une zone urbaine à l'échelle  $1/150^e$  est utilisée pour étudier les nuisances sonores de la circulation routière.

On considère que les ondes sonores sinusoïdales émises par les véhicules, qui sont diffractées par les infrastructures, ont des fréquences comprises entre  $130 \text{ Hz}$  et  $5\,000 \text{ Hz}$ .

Quel type d'ondes faut-il utiliser pour étudier les problèmes de nuisances sonores dues à la diffraction ?

*Donnée* : domaine des fréquences audibles :  $20 \text{ Hz} - 20 \text{ kHz}$ .

**9** PROTECTION CONTRE LA HOULE

\*\*\* (10 min) ► P. 25

Pour protéger les bateaux de la houle, lorsqu'ils sont au port, une petite station balnéaire décide de construire un mur à l'entrée du port.

- Quelle largeur doit avoir l'entrée du port sachant que les vagues observées dans la région sont le plus souvent espacées d'environ  $6 \text{ m}$ .
- Proposer alors une géométrie acceptable pour le mur.

## 10 EXPRESSION DE LA PERTURBATION

\*\*\* (50 min) ► P. 26

Une onde progressive est décrite par :

$$y(x,t) = y_m \cos \left[ 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \right]$$

où  $y$  est la hauteur de la vague, ou une surpression, ...,

$x$  l'abscisse du point d'observation,

$t$  le temps,

$\lambda$  et  $T$  les périodes spatiales et temporelles,

et  $y_m$  une constante positive.

1. Quel intervalle décrit  $y$  ? En déduire le nom de  $y_m$ .
2. Soit deux points A et B qui ont la même valeur de  $y$  pour tout  $t$ .  
Quelle relation relie  $x_A$  et  $x_B$  ? Que peut-on dire de A et B ?
3. À  $t_1$  et  $t_2$ , les valeurs de  $y$  relevées en un point sont égales.  
Quelle relation existe-t-il entre  $t_1$  et  $t_2$  ?
4. Représenter :  $y(x, t = 0)$ ,  $y(x, t = \frac{T}{2})$ ,  $y(x = \frac{\lambda}{4}, t)$ .
5. Retrouver la formule de la vitesse  $v = \frac{\lambda}{T}$ .

Données :  $\lambda = 2,0$  m ;  $T = 1,0$  s.

## CORRIGÉS

1. La période, aussi appelée période temporelle, est la distance entre les deux maxima consécutifs, par exemple :  $T = 7,0 \text{ div} \times 1 \text{ ms} \cdot \text{div}^{-1} = 7,0 \text{ ms}$ .  
**Période spatiale** =  $v \times T = 330 \times (7 \times 10^{-3}) \approx 2,3 \text{ m}$ .

Le terme « longueur d'onde » ( $\lambda$ ) est réservé aux ondes sinusoïdales.

2. De même :

**Période** = période temporelle = 7,0 ms.

**Période spatiale** =  $v \times T = 1500 \times (7 \times 10^{-3}) \approx 10,5 \text{ m}$ .

$$1. v = \frac{\lambda}{T} = \frac{g \cdot T}{2\pi} = \frac{g}{2\pi} \times \frac{1}{v}$$

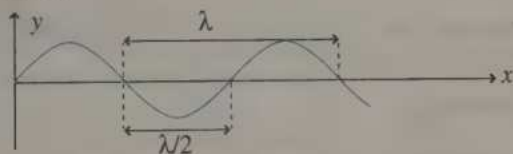
2.  $v$  dépend de  $\nu$  : c'est un phénomène de dispersion.

1. Les sons graves et aigus sont émis au même instant, mais ils ne se propagent pas à la même vitesse (les aigus allant plus vite) : c'est le **phénomène de dispersion**. La vitesse de propagation des ondes sonores dépend de leur fréquence.

2. Il en est de même dans une salle de concert, mais la distance n'est pas suffisante pour que la différence des durées de propagation soit perceptible.

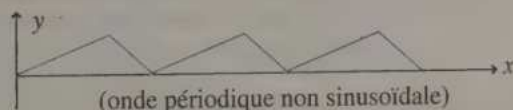
Toutes ces propositions sont fausses sauf la proposition g.

a. Non :



b. La période (ou période temporelle) est l'écart entre deux maxima successifs de la courbe  $y(t)$  pour une corde vibrante (et non  $y(x)$ , dans ce cas, il s'agit de la longueur d'onde ou période spatiale).

c. Contre exemple :



d. L'onde créée n'est pas périodique (et donc pas sinusoïdale).

e. La longueur d'onde est invariante par diffraction.

f. Les ondes sonores sont des ondes de pression (donc mécaniques), les ondes lumineuses des ondes électromagnétiques.

5 1. Les ultrasons sont des **ondes de pression**.

$$2. T = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{5 \times 10^6} = 2,0 \times 10^{-7} \text{ s} = \mathbf{0,20 \mu\text{s}}$$

$$\lambda = \nu \times T = \frac{\nu}{\nu} = \frac{340}{5 \times 10^6} = 6,8 \times 10^{-5} \text{ m} = \mathbf{68 \mu\text{m}}$$

3.  $d \gg \lambda$  ( $d$  est très supérieur à  $\lambda$ ) : il n'y a pas de diffraction, donc **l'émission est directive**.

4. Cela implique que **les milieux ne sont pas identiques**, ce qui peut s'expliquer par la présence d'une tumeur.

6 Pour qu'il n'y ait pas d'interférence, le son réfléchi doit être capté par la chauve-souris avant l'émission du second signal. À  $t = 0$  s, le premier signal est émis.

À  $t_r = \frac{2d}{\nu}$  (durée d'un aller et retour jusqu'à l'obstacle qui est à la distance  $d$ ),

ce signal est reçu.

À  $t_e = \Delta t$ , le second signal est émis.

Il faut  $t_r < t_e$ , soit  $\frac{2d}{\nu} < \Delta t$ , donc  $d < \frac{\nu \times \Delta t}{2}$ .

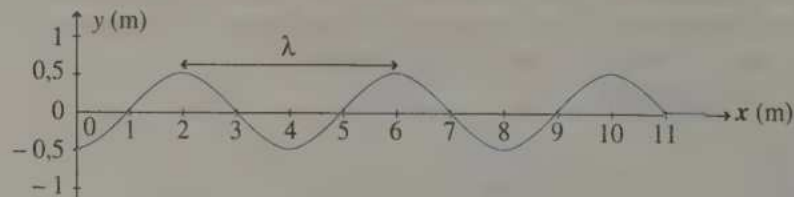
$$\text{A.N. : } d < \frac{340 \times (100 \times 10^{-3})}{2} = 17, \text{ donc } \mathbf{d < 17 \text{ m.}}$$

Le sonar des chauve-souris est très efficace et très complexe.

7 1.  $\lambda = \mathbf{4,0 \text{ m}}$  (distance entre deux maxima consécutifs, par exemple).  
 $y_m = \mathbf{0,50 \text{ m}}$  (obtenue par lecture graphique).

$$T = \frac{\lambda}{\nu} = \mathbf{2,0 \text{ s}} \text{ et } \nu = \frac{1}{T} = \mathbf{0,50 \text{ Hz.}}$$

2. À  $t = 2,5$  s, l'onde a progressé de  $\Delta x = \nu \times \Delta t = 2 \times (2,5 - 0) = 5,0$  m.



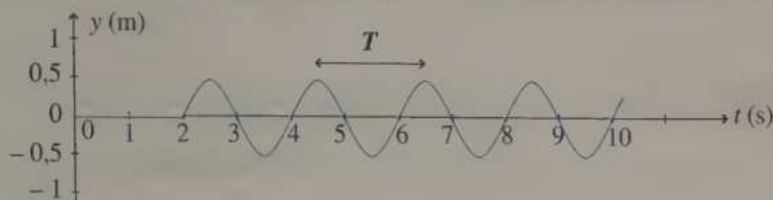
3. L'onde atteint le point A à  $t_A$  tel que :  $\frac{x_A - x(t=0)}{t_A - 0} = \nu$ .

$$\text{Soit : } t_A = \frac{x_A - x(t=0)}{\nu}, \text{ d'où } t_A = \frac{10 - 6}{2} = \mathbf{2,0 \text{ s.}}$$

( $x(t=0) = 6$  m est la position du front d'onde à  $t = 0$  s.)

4. Pour  $t < t_A$ , il n'y a aucun signal en A, d'où :  $y = 0$ .

Le signal apparaît à partir de  $t_A$  (signal positif pour  $t$  légèrement supérieur à  $t_A$ ).



8 On ne peut pas se protéger des ondes sonores dues à la circulation des véhicules (entre autres) en étant derrière un obstacle puisque, par diffraction, ces ondes « contournent » l'obstacle. Par exemple, en étant derrière un pilier de pont, on entend les véhicules, alors que le pilier devrait servir d'obstacle au son. Les ondes sonores (de longueur d'onde  $\lambda$ ) dues aux véhicules sont diffractées par les infrastructures réelles de dimension caractéristique  $a$ , donc  $a \sim \lambda$ .

Pour reproduire ce phénomène avec la maquette, les ondes à utiliser (de longueur d'onde  $\lambda'$ ) doivent être diffractées par les infrastructures de la maquette de dimension caractéristique  $a'$ , donc  $a' \sim \lambda'$ .

La maquette étant à l'échelle  $1/150^e$ , on a :  $\frac{a'}{a} = \frac{1}{150}$  d'où  $\frac{\lambda'}{\lambda} \approx \frac{1}{150}$  d'après ce qui précède, donc  $\frac{c/v'}{c/v} \approx \frac{1}{150}$  soit  $v' = v \times 150$ .

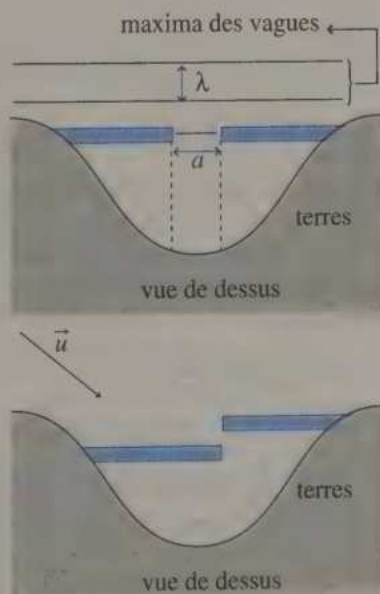
Comme  $v \in [130 \text{ Hz} ; 5\,000 \text{ Hz}]$ , on en déduit  $v' \in [19\,500 \text{ Hz} ; 750\,000 \text{ Hz}]$ . Ces fréquences sont justes supérieures aux fréquences audibles : **il faut utiliser des ultrasons.**

9 1. Le phénomène à éviter est celui de la diffraction pour lequel les vagues se répartiraient dans tout le port.

Il faut donc que  $a$  soit très différent de  $\lambda \approx 6 \text{ m}$ . En considérant un facteur 10 (il serait plus sûr de s'accorder un facteur 100), il faut que  $a > 10\lambda = 60 \text{ m}$ . Dans ce cas, l'ouverture est tellement large que la bande qui restera exposée aux vagues (schéma ci-contre en haut) sera trop importante pour un modeste port.

**Il n'est pas possible, avec une telle géométrie, de se protéger de ces vagues.**

2. La géométrie à adopter serait celle ci-contre en bas (en vérifiant que la



direction des vagues est le plus rarement celle de  $\vec{u}$ , sinon il faudrait changer l'orientation de l'ouverture).

**10** Revoir la résolution des équations du type  $\cos x = \cos a$ .

1.  $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$ , donc  $y \in [-y_m ; +y_m]$  ;  $y_m$  est l'amplitude de  $y$ .

2.  $y(x_A, t) = y(x_B, t)$ , donc  $\cos \left[ 2\pi \left( \frac{x_A}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \right] = \cos \left[ 2\pi \left( \frac{x_B}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \right]$

$$\begin{cases} 2\pi \left( \frac{x_A}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) = 2\pi \left( \frac{x_B}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) + k \cdot 2\pi & (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ 2\pi \left( \frac{x_A}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) = -2\pi \left( \frac{x_B}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) + k' \cdot 2\pi & (k' \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$x_A - x_B = k \cdot \lambda$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) : A et B sont en phase

ou

$x_A + x_B$  est une fonction de  $t$ , donc ne convient pas.

3.  $y(x, t_1) = y(x, t_2)$ , donc  $\cos \left[ 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \frac{t_1}{T} \right) \right] = \cos \left[ 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \frac{t_2}{T} \right) \right]$

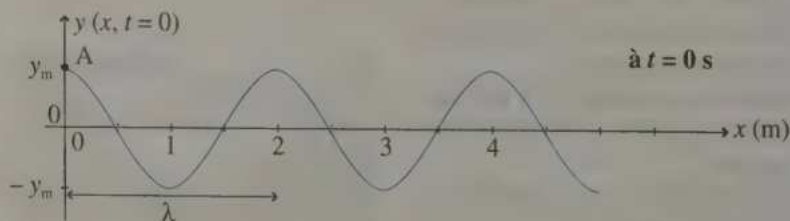
$$\begin{cases} 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \frac{t_1}{T} \right) = 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \frac{t_2}{T} \right) + k \cdot 2\pi & (k \in \mathbb{Z}) \\ \text{ou} \\ 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \frac{t_1}{T} \right) = -2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \frac{t_2}{T} \right) + k' \cdot 2\pi & (k' \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

$t_2 - t_1 = k \cdot T$  ( $k \in \mathbb{Z}$ )

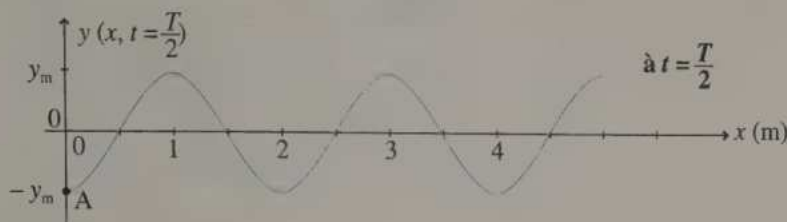
ou

$t_2 + t_1$  est une fonction de  $x$ , donc ne convient pas.

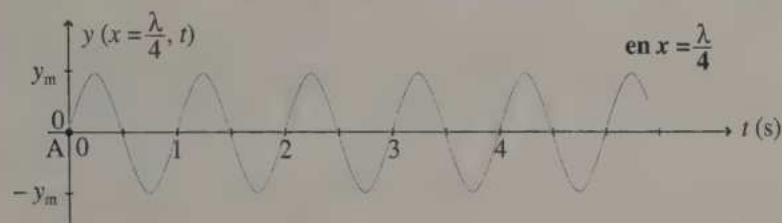
4.  $y(x, t = 0)$  : on place un point A :  $y(x = 0 ; t = 0) = y_m \times \cos 0 = y_m$  (par exemple), puis on trace une sinusoïde (par rapport à  $x$ ) avec  $\lambda = 2,0$  m :



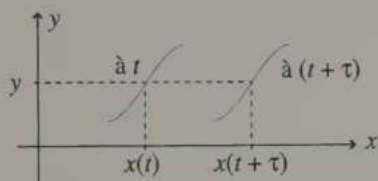
- $y(x, t = \frac{T}{2})$  : de même, on place A :  $y(x = 0 ; t = \frac{T}{2}) = y_m \times \cos \pi = -y_m$



- $y(x = 0, t)$  : on place un point A :  $y(x = \frac{\lambda}{4} ; t = 0) = y_m \times \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$  (par exemple), puis on trace une sinusoïde (**par rapport à T**) avec  $T = 1,0$  s



$$5. x = \lambda \left[ \frac{1}{2\pi} \cos^{-1} \left( \frac{y}{y_m} \right) + \frac{t}{T} \right]$$



Pendant  $\tau$ , l'onde se déplace de  $x(t)$  à  $x(t + \tau)$ , d'où :

$$v = \frac{x(t + \tau) - x(t)}{\tau}$$

$$= \frac{\lambda \left[ \frac{1}{2\pi} \cos^{-1} \left( \frac{y}{y_m} \right) + \frac{t + \tau}{T} \right] - \lambda \left[ \frac{1}{2\pi} \cos^{-1} \left( \frac{y}{y_m} \right) + \frac{t}{T} \right]}{\tau}$$

$$= \frac{\lambda}{T}$$

$$v = \frac{\lambda}{T} = 2,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$



## 3

# Modèle ondulatoire de la lumière

Dans un milieu transparent, les grandeurs seront repérées par l'indice «  $n$  » (exemple :  $c_n$ ).

## 1 ONDE LUMINEUSE MONOCHROMATIQUE


La lumière est une onde (électromagnétique) puisqu'elle peut être diffractée.

### 1. Définition

Une onde lumineuse monochromatique (« d'une seule couleur ») est caractérisée par sa fréquence unique (identique dans tout le milieu transparent) :  $\nu$  (ou  $f$ ). En pratique, l'onde est souvent caractérisée par sa longueur d'onde dans le vide :  $\lambda$ .

### 2. Couleurs associées

ultraviolet	violet	bleu	vert	jaune	orange	rouge	infrarouge
$\lambda$ (nm):	400	450	500	570	590	610	800

 Les valeurs indiquées sont approximatives, les limites précises ne sont pas définies.

### 3. Célérité, milieu transparent et indice


- Célérité (ou vitesse) dans le vide :  $c = 2,998 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .
- Un milieu dans lequel l'onde de longueur d'onde  $\lambda$  peut se propager est dit transparent à la longueur d'onde  $\lambda$  : sa vitesse est alors  $c_n$ .
- Indice d'un milieu transparent :  $n = \frac{c}{c_n} \geq 1$ .
- Exemples :

Milieu	vide	air (C.N.T.P.)*	eau	verres	diamant
$n$ (sans unité)	1	$\approx 1,000$	1,33	1,3 à 1,7	2,42

\* C.N.T.P. : Conditions Normales de Température et de Pression.

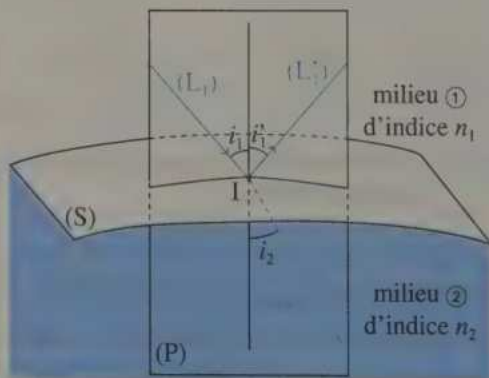
4. Caractéristiques de l'onde dans un milieu transparent

Grandeur (unité)	Dans le vide	Dans un milieu transparent
indice (-)	$n = 1$	$n \geq 1$
célérité ou vitesse ( $m \cdot s^{-1}$ )	$c$	$c_n = \frac{c}{n} \leq c$
longueur d'onde (m)	$\lambda$	$\lambda_n = \frac{\lambda}{n} \leq \lambda$
période (s)	$T$	$T_n = T$
fréquence (Hz)	$\nu$	$\nu_n = \nu$
relations	$\nu = \frac{1}{T}$ et $c = \frac{\lambda}{T}$	$\nu_n = \frac{1}{T_n}$ et $c_n = \frac{\lambda_n}{T_n}$

  $\lambda_{air} \approx \lambda$  car  $n_{air} \approx 1,00$ . On donne donc indifféremment  $\lambda_{air}$  ou  $\lambda$  ; c'est ce qui sera fait par la suite.


**II** RÉFLEXION ET RÉFRACTION D'UNE ONDE MONOCHROMATIQUE

- (S) surface de séparation
- $(L_1)$  rayon incident
- $(L'_1)$  rayon réfléchi
- $(L_2)$  rayon réfracté ou transmis
- I point d'incidence
- (P) plan d'incidence (plan contenant  $(L_1)$  et perpendiculaire à (S) en I)



**Lois de Descartes relatives :**

- à la réflexion :  $(L'_1) \in (P)$  et  $i_1 = i'_1$
- à la réfraction :  $(L_2) \in (P)$  et  $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ .

 Les angles sont mesurés par rapport à la normale à la surface.

## III DIFFRACTION D'UNE ONDE MONOCHROMATIQUE

### 1. Condition de diffraction

La dimension caractéristique  $a$  de l'ouverture ou de l'obstacle provoquant la diffraction doit être du même ordre de grandeur que  $\lambda$  (approximativement  $\frac{\lambda}{a} > 10^{-3}$ ), sinon le phénomène est négligeable :

$$a \sim \lambda \quad (\text{remplacer } \lambda \text{ par } \lambda_n \text{ dans un milieu transparent}).$$

### 2. Figures de diffraction

Le second écran est très éloigné de l'obstacle ( $D \gg a$ ).

La tache centrale est beaucoup plus intense que les autres : sa largeur angulaire totale est  $2\theta$  et sa largeur totale est  $l = 2D \tan \theta \approx 2D\theta$ .

Si  $\theta$ , qui est le demi-écart angulaire est faible, alors  $\theta$  (rad)  $\approx \frac{\lambda}{a}$ .

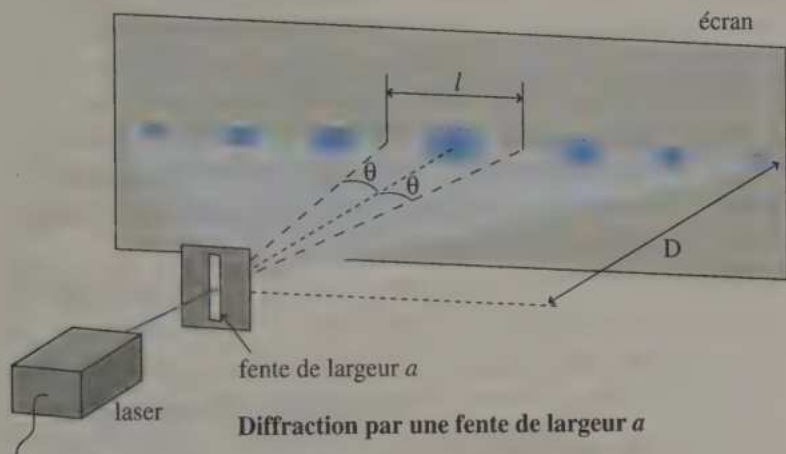


Figure de diffraction par une fente



Figure de diffraction par un fil

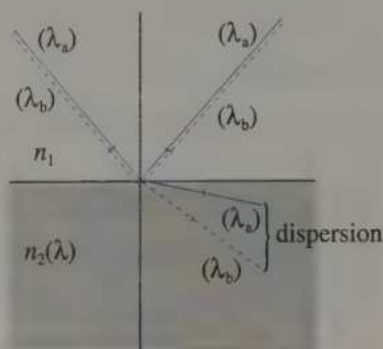
## TV ONDE LUMINEUSE POLYCHROMATIQUE

### 1. Définition

Une onde lumineuse polychromatique (« de plusieurs couleurs ») est composée de différentes longueurs d'onde.

### 2. Phénomène de dispersion

L'indice  $n(\lambda)$  d'un milieu dépend plus ou moins de la longueur d'onde. Avec une onde polychromatique, chaque valeur de  $n(\lambda)$  impose une valeur de l'angle de réfraction à l'interface entre deux milieux transparents : un faisceau polychromatique est alors dispersé en plusieurs rayons monochromatiques (figure ci-contre).



### 3. Diffraction

La figure de diffraction obtenue en lumière polychromatique est la superposition des figures de diffraction qui seraient obtenues avec chaque longueur d'onde prise séparément (chaque figure étant caractérisée par une valeur propre de  $\theta$  qui dépend de  $\lambda$ ).

Exemple avec deux longueurs d'onde :



Le centre de la figure est composé de taches de toutes les longueurs d'onde présentes.

**En lumière blanche** (phénomène d'**irisation**), toutes les longueurs d'onde visibles étant présentes, le centre de la figure apparaît alors blanc ; le reste de la figure étant trop confus, il n'est pas exploitable.

On prendra pour la célérité des ondes électromagnétiques dans le vide :

$$c = 2,998 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

## EXERCICES D'APPLICATION

### 1 LE COURS

\* (10 min) ► P. 39

1. Qu'est qu'une onde monochromatique ? une onde polychromatique ?
2. Donner l'intervalle de longueurs d'onde visible dans le vide (en nm, en  $\mu\text{m}$  et en m).

Les valeurs limites sont-elles définies avec précision ? Pourquoi ?

Comment se nomme les domaines adjacents ?

3. Qu'est-ce qu'un milieu transparent ?

4. Rappeler la définition de l'indice d'un milieu transparent. En déduire son unité.

Quelle est sa valeur limite ?

S'agit-il d'un minimum ou d'un maximum ? Expliquer pourquoi.

5. Énoncer les lois de Descartes relatives à la réflexion et la réfraction.

6. De quel paramètre dépend (plus ou moins) l'indice d'un milieu ?

Quel phénomène lié à la réfraction d'une onde polychromatique peut-on alors expliquer ?

Le nommer et le décrire.

### 2 ONDE D'UN LASER

\* (15 min) ► P. 39

La longueur d'onde du laser helium-néon (He-Ne) du lycée est  $\lambda = 633 \text{ nm}$  dans le vide.

1. Quelle est la particularité d'un laser en terme de longueur d'onde ?
2. À quelle couleur ce rayonnement correspond-il ?
3. Calculer la fréquence, la période et la célérité de cette onde dans le vide.
4. Calculer la longueur d'onde, la fréquence, la période et la célérité de cette onde dans l'air.
5. Reprendre la question 4. pour un verre d'indice  $n = 1,37$ .

### 3 RÉFLEXION ET RÉFRACTION

\* (5 min) ► P. 39

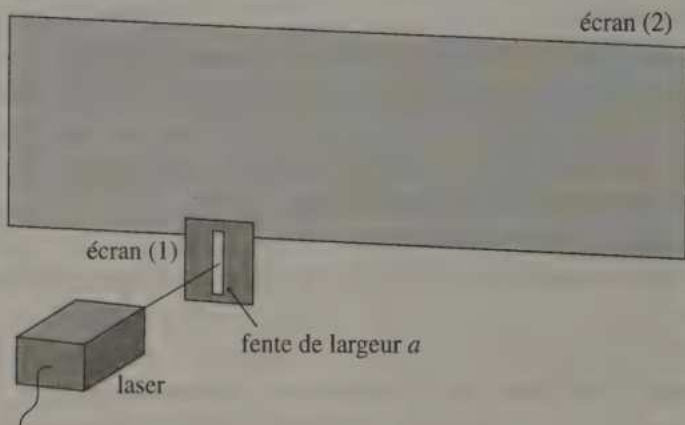
Un rayon monochromatique se propageant dans l'air d'indice 1,00, arrive au contact de la surface de l'eau supposée plane, d'indice 1,33. L'angle formé avec la surface est  $60,0^\circ$ .

1. Quelle est la particularité des rayons incident, réfléchi et réfracté ?
2. Calculer la valeur des angles de réflexion et de réfraction (en degré).

## 4 DIFFRACTION : LE CLASSIQUE

\* (15 min) ► P. 40

Un écran (1) est percé d'une fente de largeur  $a = 1,0 \times 10^{-5}$  m. Un laser de longueur d'onde  $\lambda = 488$  nm éclaire cette fente avec une incidence normale au plan. Un second écran (2), placé parallèlement au premier, à  $D = 1,0$  m de celui-ci, permet d'observer la figure de diffraction.



1. Rappeler les conditions d'observation de ce phénomène.
2. Représenter la figure que l'on observe sur le second écran.
3. Calculer la demi-largeur angulaire  $\theta$  de la tache principale, c'est-à-dire la largeur angulaire de la moitié de la tache principale.
4. Calculer la largeur  $l$  de la tache principale.
5. Que se passerait-il si on remplaçait la fente de l'écran (1) par un fil de même largeur ?

Représenter la figure que l'on observerait alors.

## 5 DURÉE DE PARCOURS

\*\* (20 min) ► P. 40

1. En une seconde, combien de tour(s) de la Terre une onde lumineuse peut-elle parcourir ?
2. Calculer la durée nécessaire à la lumière pour nous parvenir du Soleil (résultat en s, puis en min et s).
3. Que vaut une année-lumière en mètre ?
4. Calculer la durée nécessaire (en année) à une onde lumineuse pour parvenir de la nébuleuse d'Andromède située à 2,3 millions d'années-lumière. Peut-on être certain de l'état actuel de cette nébuleuse ?
5. Peut-on observer des galaxies situées à une distance supposée constante de 100 milliards d'années-lumière de la Terre ?

Données :  $R_{\text{Terre}} \approx 6\,370$  km ;  $d(\text{Soleil} - \text{Terre}) \approx 150 \times 10^6$  km.

## EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

**6 LASER « DICHROMATIQUE »** \*\* (15 min) ► P. 41

Un rayon laser constitué de deux longueurs d'onde  $\lambda_a$  et  $\lambda_b$  arrive de l'air d'indice  $n_{\text{air}} = 1,00$  sur une plaque de verre, sous une incidence  $i$ . Le verre est caractérisé par les indices  $n_a = n(\lambda_a) = 1,52$  et  $n_b = n(\lambda_b) = 1,50$ .

1. Si  $i = 10,0^\circ$ , qu'observe-t-on ?

Nommer ce phénomène et calculer la valeur des angles de réfraction.

2. Si  $i = 0,0^\circ$ , qu'observe-t-on ?

Calculer les durées nécessaires pour parcourir une distance  $l = 10,0$  km (dans une fibre optique supposée rectiligne et faite de ce verre, par exemple).

**7 DIFFRACTION ET LARGEUR DE FENTE** \*\* (10 min) ► P. 41

On utilise le montage diffractant de l'exercice 4.

On garde les valeurs  $\lambda = 488$  nm et  $D = 1$  m. Le faisceau laser est supposé cylindrique, de section circulaire (de rayon  $r = 3,0 \times 10^{-3}$  m), d'éclairement uniforme.

Calculer la largeur  $l$  de la tache centrale dans les cas suivants où la largeur de la fente  $a$  est égale à :

- $2,0 \times 10^{-2}$  m ;
- $4,0 \times 10^{-3}$  m ;
- $2,0 \times 10^{-5}$  m.

**8 DIFFRACTION EN LUMIÈRE BLANCHE** \*\* (10 min) ► P. 41

On utilise le montage avec les deux écrans de l'exercice 4. On garde les valeurs  $a = 1,0 \times 10^{-5}$  m et  $D = 1,0$  m. Le faisceau est constitué de lumière blanche.

1. Vérifier que la condition de diffraction est réalisée.

2. Décrire la figure observée et nommer ce phénomène.

Serait-elle utilisable pour estimer la largeur de la fente si cette dernière n'était pas connue ?

3. Que peut-on dire du centre de la figure ? Expliquer.

**9 RÉFRACTION** \*\* (5 min) ► P. 41

Un rayon monochromatique se propageant dans le vide arrive au contact d'une plaque de verre d'indice  $n$ . L'angle d'incidence est  $i$ . Démontrer que l'angle de réfraction est nécessairement inférieur à  $i$ .

**10** RELATION ENTRE  $n$  ET  $\lambda$ 

\*\* (20 min) ► P. 42

On mesure l'indice d'un verre pour différentes longueurs d'onde (dans du vide), afin de déterminer les coefficients  $A$  et  $B$  de la relation de Cauchy :

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2}$$

$\lambda$ (nm)	400	500	600	700	800
$n(\lambda)$	1,500	1,489	1,482	1,479	1,476

- Déterminer les unités de  $A$  et  $B$ .
- Expliquer pourquoi il ne faut pas étudier  $n$  en fonction  $\lambda$ , mais  $n$  en fonction  $\frac{1}{\lambda^2}$ .
- À l'aide d'une calculatrice, déterminer  $A$  et  $B$  par régression linéaire.
- En déduire  $n(633 \text{ nm})$ .

**11** DIFFRACTION DANS L'EAU

\*\* (5 min) ► P. 42

On utilise le montage diffractant de l'exercice 4, placé dans l'eau. Calculer la largeur  $l$  de la tache de diffraction.

## EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

**12** INDICE D'UN MÉLANGE DE GAZ

\*\* (5 min) ► P. 42

Dans les conditions normales de température et de pression (C.N.T.P.), pour une longueur d'onde donnée, on mesure les indices du diazote et du dioxygène.

On obtient respectivement 1,000 297 et 1,000 272. En déduire une approximation de l'indice de l'air dans les mêmes conditions.

**13** DIFFRACTION ET LONGUEUR D'ONDE

\*\*\* (20 min) ► P. 42

On utilise le montage diffractant de l'exercice 4. La nouvelle source (S) de fréquence  $f$  est située à  $d = 25 \text{ cm}$  du premier écran, lui-même situé à  $D = 50 \text{ cm}$  du second écran. La largeur de la fente est  $a$ .

1.  $\nu = 4,74 \times 10^{14} \text{ Hz}$  et  $a = 3,00 \text{ cm}$ .

Expliquer ce que l'on observe sur le second écran, et calculer la largeur  $l$  de la tache principale.

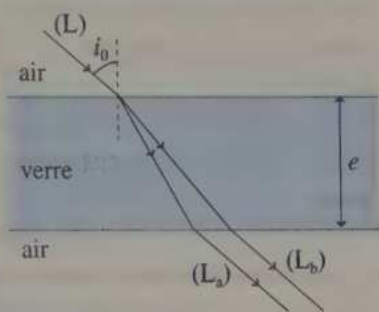
2.  $\nu = 1,10 \times 10^{11} \text{ Hz}$  et  $a = 3,00 \text{ cm}$ .

Répondre aux mêmes questions.

**14** DISPERSION DANS UNE LAME DE VERRE

\*\*\* (30 min) ► P. 43

Un faisceau laser (L) est constitué de deux longueurs d'onde  $\lambda_a$  et  $\lambda_b$ . Ce faisceau, se propageant dans l'air, arrive sur une plaque de verre, d'épaisseur  $e = 5,00$  mm, sous un angle  $i_0 = 30,0^\circ$  par rapport à la normale à la surface. On observe deux rayons émergeant de la plaque de verre :  $(L_a)$  et  $(L_b)$ .



Données :  $n_a = n(\lambda_a) = 1,52$  et  $n_b = n(\lambda_b) = 1,50$ .

1. Montrer que les trois rayons (L),  $(L_a)$  et  $(L_b)$  sont parallèles entre eux.
2. En déduire l'écart  $d$  entre les deux rayons parallèles émergents sous forme littérale (en fonction des données de l'énoncé), puis faire l'application numérique.

**19** RÉFRACTION LIMITE ET RÉFLEXION TOTALE

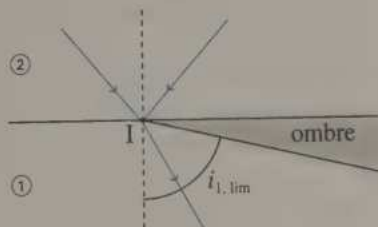
\*\*\* (40 min) ► P. 44

Soit deux verres (1) et (2), d'indices respectifs  $n_1 = 1,45$  et  $n_2 = 1,42$ . Un rayon lumineux se propage d'un milieu vers l'autre.

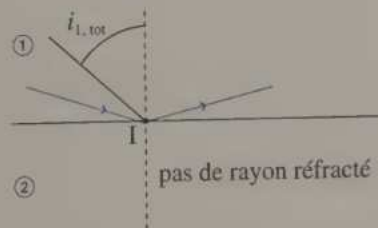
1. Le rayon incident se trouve dans le milieu (2).

Montrer qu'il existe une zone délimitée par l'angle  $i_{1, \text{lim}}$  (angle de réfraction limite) qui ne sera jamais éclairée.

Exprimer  $i_{1, \text{lim}}$  en fonction de  $n_1$  et  $n_2$  et calculer sa valeur.



2. Le rayon incident se trouve dans le milieu (1). Montrer qu'il existe une zone délimitée par l'angle  $i_{1, \text{tot}}$  (angle de réflexion totale) pour laquelle il n'y a pas de rayon réfracté.



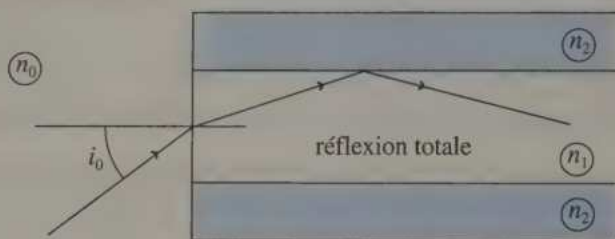
Montrer que  $i_{1, \text{tot}} = \sin^{-1}\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$ .

3. Une fibre optique est composée d'un cœur cylindrique en verre d'indice  $n_2$  enveloppé dans une gaine de verre d'indice  $n_1$ .

Pour que le rayon se propage le long de la fibre optique sans perdre d'énergie à chaque réflexion (sur plusieurs milliers de kilomètres), il faut se placer dans les conditions explicitées à la question 2..

Le rayon incident, initialement dans l'air d'indice  $n_0 = 1,00$ , va « attaquer » la fibre optique sous un angle d'incidence  $i_0$ , appelé angle d'ouverture.

Exprimer l'inégalité que doit satisfaire  $i_0$  en fonction de  $n_0$ ,  $n_1$  et  $n_2$  pour qu'il y ait réflexion totale dans le cœur de la fibre.



## CORRIGÉS

1. Une onde monochromatique (respectivement polychromatique) est une onde qui est caractérisée par une unique (respectivement plusieurs) longueur(s) d'onde.

$$2. [\approx 400 \text{ nm} ; \approx 800 \text{ nm}] = [\approx 0,4 \mu\text{m} ; \approx 0,8 \mu\text{m}] \\ = [\approx 4 \times 10^{-7} \text{ m} ; \approx 8 \times 10^{-7} \text{ m}].$$

Rappel :  $1 \text{ nm} = 10^{-9} \text{ m}$  et  $1 \mu\text{m} = 10^{-6} \text{ m}$ .

Les limites ne sont pas clairement définies (elles varient, entre autres, suivant chaque individu). Juste avant 400 nm, se trouvent les ultraviolets ; juste après 800 nm, les infrarouges.

3. Un milieu transparent à la longueur d'onde  $\lambda$  est un milieu dans lequel l'onde de longueur d'onde  $\lambda$  peut se propager.

$$4. n = \frac{c}{c_n}, \text{ sans unité, car } c \text{ et } c_n \text{ ont la même unité.}$$

$n_{\min} = 1$ , car  $c \geq c_n$  puisque le milieu transparent « ralentit » l'onde.

5. Cf. cours § II. Ne pas écrire seulement les deux égalités.

6.  $n$  dépend plus ou moins de  $\lambda$  : phénomène de dispersion (cf. cours § IV 2.).

2. 1. Un laser est en général monochromatique (ou ne possède que quelques longueurs d'onde).

$$2. \lambda = 633 \text{ nm} : \text{rouge.}$$

$$3. c = 3,00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \text{ (invariant)} ; T = \frac{\lambda}{c} = \frac{633 \times 10^{-9}}{3,0 \times 10^8} \approx 2,11 \times 10^{-15} \text{ s.}$$

$$v = \frac{1}{T} \approx 4,74 \times 10^{14} \text{ Hz.}$$

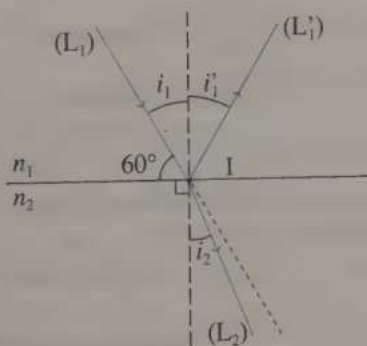
4. et 5.  $T_n = T$  et  $v_n = v$  (invariants, quel que soit le milieu)

$$\lambda_n = \frac{\lambda}{n} \text{ et } c_n = \frac{c}{n}$$

• Pour l'air :  $n \approx 1,00$ , donc  $\lambda_{\text{air}} \approx \lambda$  et  $c_{\text{air}} \approx c$ .

• Pour ce verre :  $\lambda_{\text{verre}} \approx 462 \text{ nm}$  et  $c_{\text{verre}} \approx 2,19 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

3



1. Ils sont coplanaires (dans le plan d'incidence, cf. cours).

2. **Attention** :  $i_1 = 90 - 60 = 30,0^\circ$  et calculatrice en mode degrés !

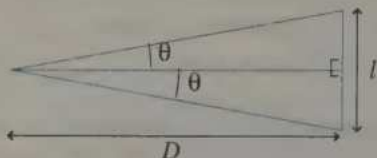
$$i_1' = i_1 = 30,0^\circ \text{ et } \sin i_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin i_1 \text{ (lois de Descartes).}$$

$$\text{A.N. : } \sin i_2 = \frac{1}{1,33} \sin(30^\circ) \approx 0,376, \text{ donc } i_2 \approx 22,1^\circ.$$

4. 1.  $\lambda$  doit être du même ordre de grandeur que  $a$  (facteur  $10^3$  approximativement). Ne pas confondre avec « environ égal à ».

$$3. \theta \approx \frac{\lambda}{a} \quad \text{A.N. : } \theta \approx \frac{488 \times 10^{-9}}{1 \times 10^{-5}} \approx 4,88 \times 10^{-2} \text{ rad.}$$

4. Vue de dessus.



$$\tan \theta = \frac{l/2}{D} \text{ donc } l = 2D \cdot \tan \theta \text{ (ou } 2D \cdot \theta, \text{ car } \theta \text{ est faible).}$$

$$\text{A.N. : } l = 2 \times 1 \times \tan(4,88 \times 10^{-2}) = 9,77 \times 10^{-2} \text{ m.}$$

5. Pour la même raison, on observerait une figure de diffraction très proche de la précédente.



$$5 \text{ D'une manière générale : } c = \frac{\text{distance}}{\text{durée}} = \frac{d}{\Delta t}.$$

$$1. \text{ Nombre de tour(s)} = \frac{1s}{\Delta t} = \frac{1s \times c}{d} = \frac{(1s) \times c}{2\pi R_T} \text{ (« 1s » est écrit pour l'unité).}$$

$$\text{A.N. : } \frac{1s \times (3 \times 10^8)}{2\pi (6\,370 \times 10^3)} \approx 7,5 \text{ (tours de la Terre en 1 s).}$$

$$2. \Delta t = \frac{d}{c} \quad \text{A.N. : } \Delta t = \left( \frac{150 \times 10^9}{3 \times 10^8} \right) \approx 500 \text{ s} = 480 \text{ s} + 20 \text{ s} = 8 \text{ min } 20 \text{ s.}$$

3. Une année-lumière est la distance parcourue en une année par la lumière :

$$1 \text{ a.l.} = c \times \Delta t = (2,998 \times 10^8) \times (365,25 \times 24 \times 3\,600) \approx 9,461 \times 10^{15} \text{ m.}$$

4. D'après la question 3., il faut **2,3 millions d'années** à l'onde lumineuse. Entre temps..., la nébuleuse a pu évoluer.

5. Pour parcourir une telle distance, il faut 100 milliards d'années à l'onde lumineuse.

L'univers n'ayant que 15 milliards d'années, **c'est impossible**.

**6** 1. On observe un phénomène de dispersion : deux faisceaux sont réfractés. D'après la seconde loi de Descartes :

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2 \text{ donc } \sin i_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin i_1 \text{ ou } i_2 = \sin^{-1} \left( \frac{n_1}{n_2} \sin i_1 \right).$$

A.N. : Pour  $\lambda_a$  :  $i_2 = \sin^{-1} \left( \frac{1}{1,52} \times \sin 10^\circ \right) \approx 6,56^\circ$ .

Pour  $\lambda_b$  :  $i_2 = \sin^{-1} \left( \frac{1}{1,50} \times \sin 10^\circ \right) \approx 6,65^\circ$ .

2. Avec  $i_1 = 0^\circ$ ,  $\sin i_1 = 0$ , donc  $i_2 = \sin^{-1}(0) = 0,0^\circ$  : il n'y a pas de déviation, donc dans ce cas particulier les deux rayons diffractés sont confondus.

$$\Delta t = \frac{l}{c_n} = \frac{l \cdot n}{c}$$

A.N. : Pour  $\lambda_a$  :  $\Delta t = \frac{10^4 \times 1,52}{2,998 \times 10^8} = 5,07 \times 10^{-5} \text{ s}$ .

Pour  $\lambda_b$  :  $\Delta t = \frac{10^4 \times 1,50}{2,998 \times 10^8} = 5,00 \times 10^{-5} \text{ s}$ .

**7** a. La fente est plus large que le faisceau. La largeur du faisceau est le diamètre de la tache :  $l = 2r = 6,0 \times 10^{-3} \text{ m}$ .

b. et c. Le faisceau « touche » les bords de la fente ( $a < 2r$ ).

b.  $\frac{\lambda}{a} = \frac{488 \times 10^{-9}}{4 \times 10^{-3}} \approx 1,2 \times 10^{-4} \ll 1$  (ou  $< 10^{-3}$ ) donc le phénomène de diffraction est négligeable, et la tache lumineuse correspond à l'ombre portée, c'est-à-dire à la largeur de la fente :  $l \approx a = 4,0 \times 10^{-3} \text{ m}$ .

c.  $\frac{\lambda}{a} = \frac{488 \times 10^{-9}}{2 \times 10^{-5}} \approx 2,4 \times 10^{-2}$  n'est pas très inférieur à 1 (ou  $> 10^{-3}$ )

donc il y a diffraction :  $l = 2 \times D \times \tan \theta = 2 \times D \times \tan \frac{\lambda}{a} \approx 2D \frac{\lambda}{a}$ .

A.N. :  $l = 2 \times 1 \times \frac{488 \times 10^{-9}}{2 \times 10^{-5}} \approx 4,9 \times 10^{-2} \text{ m}$  (4,9 cm).

**8** 1.  $\lambda \in [\approx 400 \text{ nm} ; \approx 800 \text{ nm}]$  en lumière blanche donc

$\frac{\lambda}{a} \in [\sim 4 \times 10^{-2} ; \sim 8 \times 10^{-2}]$ , donc  $\lambda$  est du même ordre de grandeur que  $a$  (facteur  $10^3$  ou  $10^{-3}$  près) : il y a diffraction.

2. et 3. Cf. cours (§ IV 3.) : cas de la lumière blanche.

**9**  $n \cdot \sin r = n_{\text{air}} \cdot \sin i = \sin i$  d'après la loi de la réfraction et car  $n_{\text{air}} = 1$  ( $r$  est l'angle de réfraction).

De plus  $n > 1$ , donc  $n \sin r > \sin r$ , donc  $\sin i > \sin r$ , donc  $i > r$ , car  $\sin x$  est une fonction croissante entre 0 et  $90^\circ$ .

10 1.  $n$  n'a pas d'unité, donc  $A$  et  $\frac{B}{\lambda^2}$  n'ont pas d'unité, donc  $B$  a la même unité que  $\lambda^2$  :  **$A$  est sans unité,  $B$  est en mètre carré ( $\text{m}^2$ ).**

2.  $n(\lambda)$  n'est pas une fonction affine, en revanche  $n\left(\frac{1}{\lambda^2}\right)$  est une fonction affine.

3. Il suffit donc de faire une « régression linéaire » sur  $\frac{1}{\lambda^2}$  et  $n$  : le coefficient directeur de la droite est  $B$ , l'ordonnée est  $A$ . Ne pas oublier de mettre  $\lambda$  en mètre. On obtient :  **$A = 1,468$  et  $B = 5,2 \times 10^{-15} \text{ m}^2$ .**

4.  $n(633 \text{ nm}) = 1,468 + \frac{5,2 \times 10^{-15}}{(633 \times 10^{-9})^2} = 1,481$ .

11 La relation  $l = 2D \cdot \frac{\lambda_{\text{eau}}}{a}$  reste valable, mais avec  $\lambda_{\text{eau}} = \frac{\lambda}{n_{\text{eau}}}$

donc  $l = 2D \frac{\lambda}{n_{\text{eau}} \times a}$ .

A.N. :  $l = 2 \times 1 \times \frac{(488 \times 10^{-9})}{1,33 \times (10^{-5})} = 7,3 \text{ cm}$ .

12 Sans renseignement, sachant que l'air contient 80 % de diazote ( $\text{N}_2$ ) et 20 % de dioxygène ( $\text{O}_2$ ), on suppose la relation de proportionnalité :

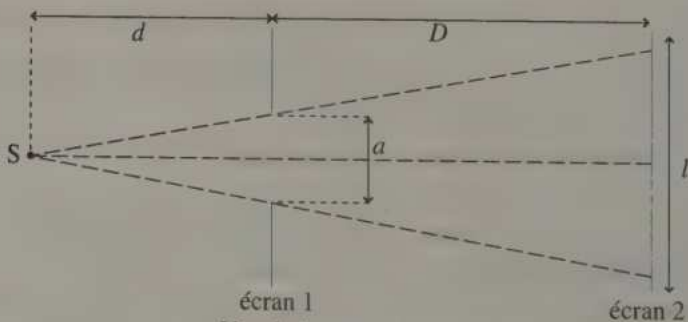
$$n_{\text{air}} = \frac{80}{100} n(\text{N}_2) + \frac{20}{100} n(\text{O}_2) \approx 1,000 292.$$

13 1.  $\frac{\lambda}{a} = \frac{c}{v \times a} = \frac{3 \times 10^8}{(4,74 \times 10^{14}) \times (3 \times 10^{-2})} \approx 2,1 \times 10^{-5} \ll 1$

ou  $\frac{\lambda}{a} < 10^{-3}$  (environ) : il n'y a pas de diffraction ; la figure correspond seulement à l'**ombre portée**.

Pour calculer la largeur de la tache, on applique le théorème de Thalès :

$$\frac{l/2}{a/2} = \frac{d+D}{d}, \text{ soit } l = a \times \frac{d+D}{d}.$$



écran 1  
écran 2  
Vue de dessus, en coupe

$$\text{A.N. : } l = \frac{(3 \times 10^{-2}) \times (7,5 \times 10^{-2})}{(2,5 \times 10^{-2})} = 9,0 \times 10^{-2} \text{ m.}$$

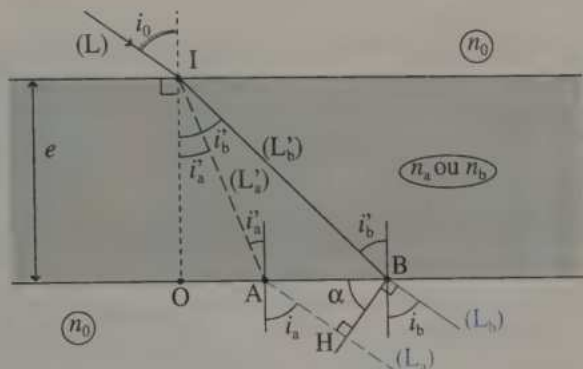
$$2. \frac{\lambda}{a} = \frac{c}{v \times a} = \frac{3 \times 10^8}{(1,1 \times 10^{11}) \times (3 \times 10^{-2})} = 0,091 : \lambda \text{ est du même ordre que } a, \\ \text{donc il y a diffraction.}$$

$$\text{Comme à l'exercice 4, on obtient } l = 2 D \frac{\lambda}{a} = 2 D \frac{c}{v \times a}.$$

$$\text{A.N. : } l = 2 \times 0,5 \times 0,091 = 9,1 \times 10^{-2} \text{ m.}$$

Il s'agit de micro-ondes, nécessitant un capteur adapté pour les détecter (invisibles à l'œil!).

14



1. On place les angles alternes-internes  $i'_a$  et  $i'_b$ .

$$\begin{aligned} n_0 \sin i_b &= n_b \sin i'_b \quad (\text{réfraction en B}) \\ &= n_0 \sin i_0 \quad (\text{réfraction en I de } (L'_b)) \\ &= n_a \sin i'_a \quad (\text{réfraction en I de } (L'_a)) \\ &= n_0 \sin i_a \quad (\text{réfraction en A}) \end{aligned}$$

donc  $n_0 \sin i_b = n_0 \sin i_0 = n_0 \sin i_a$ , soit  $i_b = i_0 = i_a$ .

D'où :  $(L)$ ,  $(L_a)$  et  $(L_b)$  sont parallèles entre eux.

$$2. \bullet \text{ Angle } (A, B, L_b) = \alpha + \frac{\pi}{2} = i_b + \frac{\pi}{2} \text{ donc } \alpha = i_b (= i_0).$$

$$\bullet \text{ Écart entre } (L_a) \text{ et } (L_b) : BH = AB \cdot \cos \alpha = AB \cdot \cos i_0.$$

$$\bullet AB = OB - OA = e \cdot \tan i'_b - e \cdot \tan i'_a.$$

$$\bullet i'_a = \sin^{-1} \left( \frac{n_0}{n_a} \sin i_0 \right) \text{ et } i'_b = \sin^{-1} \left( \frac{n_0}{n_b} \sin i_0 \right)$$

(réfraction de  $(L'_a)$  et  $(L'_b)$  en I, cf. 1.).

$$\bullet \text{ D'où : } BH = e \cdot \cos i_0 \left[ \tan \left( \sin^{-1} \left( \frac{n_0}{n_b} \sin i_0 \right) \right) - \tan \left( \sin^{-1} \left( \frac{n_0}{n_a} \sin i_0 \right) \right) \right]$$

$$BH = (5 \times 10^{-3}) \cos(30^\circ) \left[ \tan \left( \sin^{-1} \left( \frac{1}{1,50} \sin 30^\circ \right) \right) - \tan \left( \sin^{-1} \left( \frac{1}{1,52} \sin 30^\circ \right) \right) \right]$$

$$BH \approx 2,26 \times 10^{-5} \text{ m.}$$

**15** 1. •  $i_1 \geq i_{1, \text{lim}}$  est impossible : une partie de l'espace est donc toujours à l'ombre.

•  $\sin i_1 = \frac{n_2}{n_1} \sin i_2$  (par réfraction).

• La valeur maximale de  $i_1$  ( $i_{1, \text{lim}}$ ) est obtenue pour la valeur maximale de  $i_2$ , soit  $90^\circ$  :

$$\sin i_{1, \text{lim}} = \frac{n_2}{n_1} \sin 90^\circ = \frac{n_2}{n_1},$$

donc  $i_{1, \text{lim}} = \sin^{-1}\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$

A.N. :  $i_{1, \text{lim}} = \sin^{-1}\left(\frac{1,42}{1,45}\right) = 78,3^\circ$

2. Si  $i_1 \geq i_{1, \text{tot}}$ , il n'y a plus de rayon réfracté, d'où une réflexion totale.

•  $\sin i_1 = \frac{n_2}{n_1} \sin i_2$  (réfraction)

• La valeur minimale de  $i_1$  ( $i_{1, \text{tot}}$ ) donnant lieu à une réflexion totale est obtenue pour  $i_2 = 90^\circ$  ; comme précédemment, on obtient :

$$i_{1, \text{tot}} = \sin^{-1}\left(\frac{n_2}{n_1}\right) = 78,3^\circ$$

3. Réflexion totale en B (pour ne pas avoir de perte par réfraction) :

$$(90^\circ - i_1) \geq i_{1, \text{tot}}$$

$$\sin(90^\circ - i_1) \geq \sin i_{1, \text{tot}}$$

$$\cos i_1 \geq \frac{n_2}{n_1} \quad (\text{d'après 2.})$$

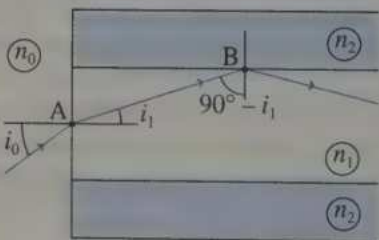
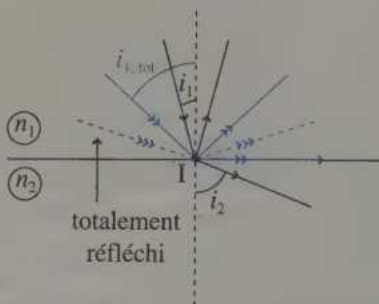
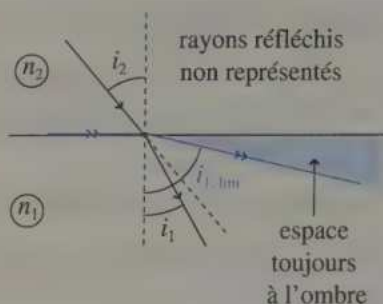
$$\sin i_1 = \sqrt{1 - \cos^2 i_1} \leq \sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}$$

$$n_1 \cdot \sin i_1 \leq n_1 \sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2} = \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

$$n_0 \cdot \sin i_0 \leq \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \quad (\text{réfraction en A})$$

$$i_0 \leq \sin^{-1}\left(\sqrt{\frac{n_1^2 - n_2^2}{n_0^2}}\right)$$

A.N. :  $i_0 \leq \sin^{-1}\sqrt{\frac{1,45^2 - 1,42^2}{1^2}} \approx 17,1^\circ$



## 4

# Décroissance radioactive

## NOYAU

### 1. Particules

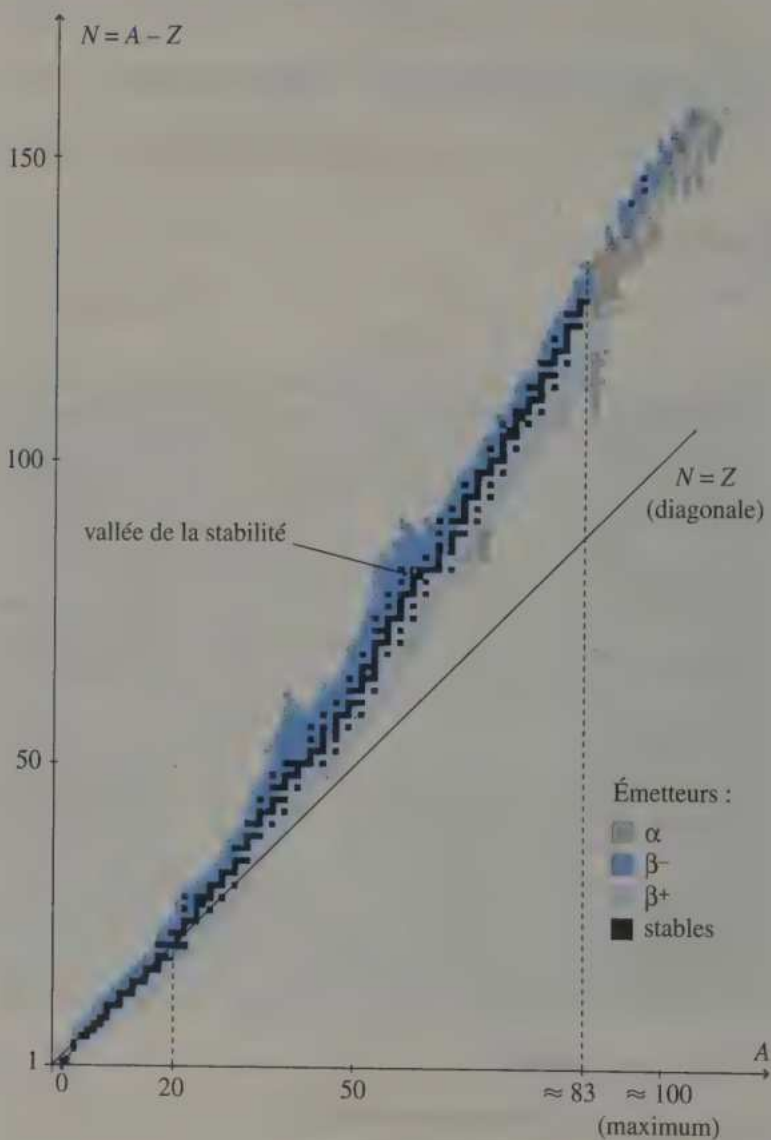
Nom	nucléon		électron
	proton	neutron	
Symbole	${}^1_1\text{p}$	${}^1_0\text{n}$	${}^0_{-1}\text{e}$
Charge	$+e$	$0$	$-e$
Masse	$m_p$	$\approx m_p$	$\ll m_p$
Nombre dans le noyau	$Z$	$N = A - Z$	$0$
	$A$		
Nombre dans l'atome	$Z$	$N = A - Z$	$Z$
	$A$		

### 2. Noyau (ou nucléide)

- Notation :  ${}^A_Z\text{X}$   $\left\{ \begin{array}{l} A = \text{nombre de nucléons} \\ Z = \text{nombre de charges} \end{array} \right.$
- La cohésion du noyau est assurée par l'interaction forte.
- ${}^A_Z\text{X}$  et  ${}^{A'}_Z\text{X}$  sont des isotopes : ils n'ont pas le même nombre de neutrons car  $A$  et  $A'$  diffèrent.

**ATTENTION :** certains énoncés donnent la masse du nucléide  ${}^A_Z\text{X}$ , d'autres la masse de l'atome correspondant (suivant utilisation).

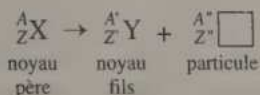
## 3. Stabilité des noyaux : diagramme de Segré



## 100 RÉACTIONS NUCLÉAIRES SPONTANÉES : RADIOACTIVITÉ

### 1. Radioactivité

Tout noyau instable (ou noyau radioactif ou radionucléide) évolue spontanément et de façon aléatoire, indépendamment des conditions extérieures (température, pression, ...), selon :



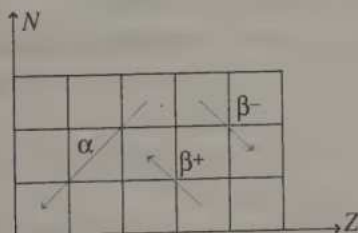
### 2. Lois de conservations

- Conservation du nombre de nucléons :  $A = A' + A''$ .
- Conservation du nombre de charges :  $Z = Z' + Z''$ .

### 3. Les différentes radioactivités

Émission	Réaction	Particule émise	Radioactivité
$\alpha$	${}^A_Z X \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2} Y + {}^4_2 \text{He}$	noyau d'hélium	naturelle / artificielle
$\beta^-$	${}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z+1} Y + {}^0_{-1} e$	électron	naturelle / artificielle
$\beta^+$	${}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z-1} Y + {}^0_1 e$	positon ou positron	artificielle
$\gamma$	${}^A_Z X^* \rightarrow {}^A_Z X + {}^0_0 \gamma$ (excité)	photon	naturelle / artificielle

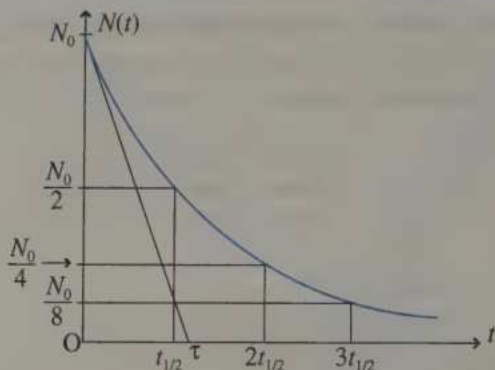
- Représentations sur le diagramme de Segré (sauf  $\gamma$ ).



- Les émissions  $\alpha$ ,  $\beta^-$ ,  $\beta^+$  sont souvent suivies d'émission  $\gamma$ .

## III LOI DE DÉCROISSANCE RADIOACTIVE

### 1. Nombre $N(t)$ de radionucléides



$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$  pour  $N_0$  radionucléides à  $t = 0$  s.

- $\lambda$  est la constante de désintégration ( $s^{-1}$ ).
- $\tau = \frac{1}{\lambda}$  est la constante de temps (s).
- $t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \tau \cdot \ln 2$  est la durée de demi-vie (s).
- $\lambda$ ,  $\tau$ ,  $t_{1/2}$  dépendent du type de radionucléides.

Après  $n \times t_{1/2}$ , il reste  $N_0 / 2^n$  radionucléides.

### 2. Activité : $A(t)$

$$A(t) = -\frac{dN(t)}{dt} = \lambda \cdot N(t) = A_0 \cdot e^{-\lambda t}$$

- $A_0 = \lambda \cdot N_0$  est l'activité initiale.
- Unité : le becquerel (Bq) ; 1 Bq correspond à une désintégration par seconde.

### 3. Évolution d'une population moyenne

- Expérimentalement, le nombre  $N$  de particules à la date  $t$  diminue de  $\Delta N$  pendant la durée  $\Delta t$ .
- Activité moyenne :  $A_{\text{moy}} = \frac{-\Delta N}{\Delta t} = \lambda \cdot N$ .
- Si  $\Delta t \ll t_{1/2}$ , alors  $A_{\text{moy}} \approx A(t)$ .

### 4. Application à la datation

Voir l'exercice 8, page 51.

## EXERCICES D'APPLICATION

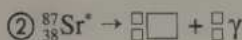
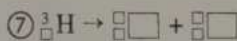
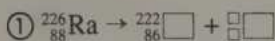
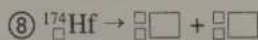
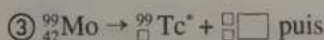
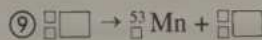
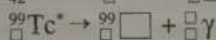
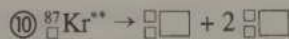
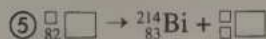
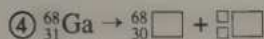
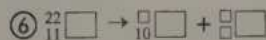
Dans les exercices où elle intervient, on utilisera la donnée suivante :

$$N_A = 6,022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

## 1 ÉCRITURE DE RÉACTIONS

\* (10 min) ► P. 53

À l'aide de la classification périodique des éléments, compléter les réactions suivantes et préciser le type de radioactivité auxquelles elles correspondent :

(émission  $\beta^-$ )(émission  $\alpha$ )(émission  $\beta^+$ )(2 émissions  $\gamma$ )

## 2 COMPOSITION ET RÉACTIVITÉ

\* (5 min) ► P. 53

1. Donner la composition du noyau  ${}_{3}^7\text{Li}$ , de l'atome correspondant, et de l'ion  $\text{Li}^+$ .

2. Des trois nucléides  ${}^5\text{Li}$ ,  ${}^7\text{Li}$  et  ${}^8\text{Li}$ , l'un est stable, un autre émetteur  $\beta^+$  et un autre  $\beta^-$ .

Préciser lesquels, puis écrire les réactions.

Que peut-on dire des trois nucléides  ${}^5\text{Li}$ ,  ${}^7\text{Li}$ ,  ${}^8\text{Li}$  ?

## 3 COMPOSITION ET TYPE DE RADIOACTIVITÉ

\* (5 min) ► P. 54

1. Donner la composition du noyau  ${}_{6}^{12}\text{C}$  et préciser son nombre de nucléons.

2. Quel(s) type(s) d'interaction assure(nt) la cohésion du noyau ? Expliquer.

3.  ${}_{6}^{14}\text{C}$  est instable : expliquer ce terme et écrire la réaction possible.

4. Même question avec  ${}_{6}^{10}\text{C}$ .

5. Peut-il exister un noyau de carbone émetteur  $\alpha$ , a priori ?

**4 LE CLASSIQUE**

\*\* (10 min) ► P. 54

Soit un radionucléide dont l'activité a diminué de 90 % en 2 h 40 min.

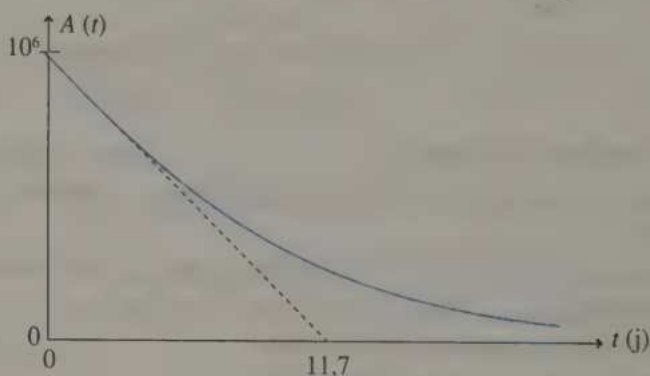
1. Calculer sa durée de demi-vie ainsi que sa constante de temps et la constante de désintégration.
2. Après quelle durée ne reste-t-il plus que 1,0 % de la quantité initiale (utiliser deux méthodes) ?
3. Après quelle durée ne reste-t-il plus que 3,0 % de la quantité initiale ?

## EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

**5 ACTIVITÉ DE L'IODE**

\*\* (15 min) ► P. 55

L'iode 131 est utilisée en médecine. Elle est radioactive  $\beta^-$ . Le graphe ci-dessous représente l'activité, en fonction du temps, d'un échantillon contenant de l'iode comme unique radioélément (on le suppose).



1. Quelle est l'unité de  $A$  ? À quoi correspond-elle ?
2. Mesurer la constante de temps  $\tau$ .  
En déduire les valeurs de  $\lambda$  (constante de désintégration) et  $t_{1/2}$  (durée de demi-vie).
3. Que vaut l'activité initiale  $A_0$  ?  
En déduire  $N_0$  le nombre initial de radionucléides.
4. Exprimer  $A(t)$ , puis  $N(t)$  en fonction de  $t$ ,  $A_0$  et  $\tau$ .
5. Calculer  $A$  et  $N$  pour  $t = 1,0$  an et conclure.

**6 ÉMISSIONS SIMULTANÉES**

\*\* (5 min) ► P. 55

Préciser les nombres de particules  $\alpha$  et  $\beta^-$  qui sont émises lors de la désintégration d'un noyau de  ${}^{238}_{92}\text{U}$  en  ${}^{206}_{82}\text{Pb}$ .

**7 FORMULE PRATIQUE**

\*\* (10 min) ► P. 56

1. Démontrer la formule pratique :

$$N(t) = \frac{N_0}{2^{\frac{t}{t_{1/2}}}}$$

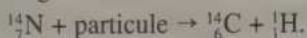
et expliquer pourquoi il suffit que  $t$  et  $t_{1/2}$  soient dans la même unité.

2. Application : calculer le pourcentage de radionucléides restant d'un échantillon d'iode  ${}^{131}\text{I}$  de demi-vie 8,0 j, après 8 jours, 16 jours, 32 jours et 1 an.

**8 DATATION AU  ${}^{14}\text{C}$  (CLASSIQUE)**

\*\* (15 min) ► P. 56

Les végétaux absorbent du  $\text{CO}_2$  par photosynthèse (ou par leurs racines, ...). Celui-ci est composé de  ${}^{12}\text{C}$  et de  ${}^{14}\text{C}$  ; le premier est stable, le second radioactif  $\beta^-$ . On suppose que la proportion de  ${}^{14}\text{C}$  par rapport au  ${}^{12}\text{C}$  est  $1,0 \times 10^{-12}$ ,  ${}^{14}\text{C}$  étant régénéré dans la haute atmosphère par la réaction :



1. Identifier la particule de l'équation précédente.
2. Écrire l'équation de la réaction que subit le carbone 14.
3. Expliquer pourquoi on peut dater certains vestiges par la mesure de l'activité du  ${}^{14}\text{C}$ .
4. Calculer l'âge maximal des objets identifiables par cette méthode en supposant que la proportion minimale de  ${}^{14}\text{C}$  mesurable soit de  $1,0 \times 10^{-15}$  par rapport au  ${}^{12}\text{C}$ .
5. Indiquer deux raisons qui expliquent qu'on n'utilise pas cette méthode pour mesurer l'âge de roches très anciennes.

Données :  $t_{1/2}({}^{14}\text{C}) = 5\,730$  ans.

**9 COMPARAISON D'ACTIVITÉS**

\*\* (20 min) ► P. 57

1. Comparer les activités initiales d'un milligramme de  ${}^{39}_{17}\text{Cl}$  (émetteur  $\beta^-$ ,  $t_{1/2} = 1$  h) et d'un kilogramme de  ${}^{113}_{48}\text{Cd}$  (émetteur  $\beta^-$ ,  $t_{1/2} = 9 \times 10^{15}$  ans).
2. Calculer les masses de radionucléides nécessaires pour obtenir une activité initiale de 1 GBq avec  ${}^{24}_{11}\text{Na}$ ,  ${}^{226}_{88}\text{Ra}$  et  ${}^{238}_{92}\text{U}$ .

Données :  $t_{1/2}({}^{24}_{11}\text{Na}) = 14,960$  h ;  $t_{1/2}({}^{226}_{88}\text{Ra}) = 1\,600$  ans ;

$t_{1/2}({}^{238}_{92}\text{U}) = 4,468 \times 10^9$  ans.

## EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

**30** DIFFÉRENTES LOIS DE DÉCROISSANCE RADIOACTIVE \*\*\* (15 min) ► P. 57

Soit un échantillon initialement constitué de  $N_0$  radionucléides de constante de désintégration  $\lambda$ .

On appelle  $N(t)$  le nombre de radionucléides,  $n(t)$  la quantité de matière,  $A(t)$  l'activité et  $m(t)$  la masse, à l'instant  $t$ .

Exprimer ces différentes grandeurs en fonction de  $\lambda$ ,  $t$  et de la valeur initiale de chaque grandeur.

Conclure.

**31** COURANT ÉLECTRIQUE ÉQUIVALENT \*\*\* (25 min) ► P. 57

$^{24}_{11}\text{Na}$  est radioactif  $\beta^-$ , de durée de demi-vie  $t_{1/2} = 15$  h.

Calculer la masse nécessaire de  $^{24}\text{Na}$  pour que le débit de l'émission initiale soit équivalent à un courant électrique de 0,10 mA.

Donnée :  $e = 1,6 \times 10^{-19}$  C.

**32** ÉQUILIBRES SIMULTANÉS \*\*\* (30 min) ► P. 58

1. Du sodium  $^{23}\text{Na}$  est bombardé par un faisceau de neutrons de telle sorte que, chaque seconde,  $9,3 \times 10^9$  noyaux de  $^{23}\text{Na}$  se transforment en  $^{24}\text{Na}$ . Ce dernier est instable : un équilibre s'instaure et le nombre de  $^{24}\text{Na}$  devient constant.

Calculer ce nombre.

2. Le radium  $^{226}\text{Ra}$  se transforme en radon  $^{222}\text{Rn}$ , qui se transforme lui-même en polonium  $^{218}\text{Po}$ . Une masse de 0,20 g de radium est placée dans une enceinte et, après un certain temps, un équilibre s'installe et la masse de radon reste constante.

Calculer cette masse.

Données :

Isotope	$^{24}\text{Na}$	$^{23}\text{Na}$	$^{226}\text{Ra}$	$^{222}\text{Rn}$
$t_{1/2}$	15 h	stable	1 590 ans	3,8 j

## CORRIGÉS

1 Avec la classification périodique, on fait correspondre  $Z$  et le symbole (ex :  $Z = 3$  correspond à  ${}_3\text{Li}$ ).

Les particules émises sont :  ${}_2^4\text{He}$  ou  $\alpha$ ,  ${}_{-1}^0\text{e}$  ou  $\beta^-$ ,  ${}_1^0\text{e}$  ou  $\beta^+$ ,  ${}_0^0\gamma$  ou  $\gamma$ .

On applique la conservation du nombre de charges et du nombre de nucléons.

Le symbole \* correspond à un état excité (très excité pour \*\*), donc émission d'un  $\gamma$  (ou de deux  $\gamma$ ).

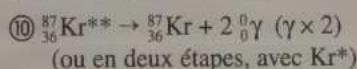
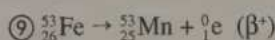
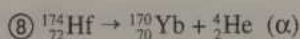
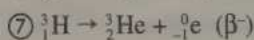
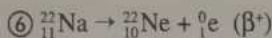
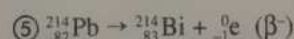
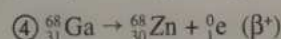
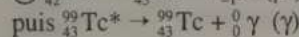
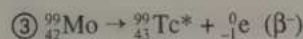
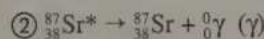
① (Explications détaillées)  ${}_{88}^{226}\text{Ra} \rightarrow {}_{86}^{222}\text{Rn} + \frac{1}{2} \square$  car  $Z = 86$  correspond à Rn

$$\begin{cases} \text{conservation de } A : 226 = 222 + A \\ \text{conservation de } Z : 88 = 86 + Z \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} A = 4 \\ Z = 2 \end{cases}$$

donc il s'agit d'une particule  $\alpha$ ,

d'où :  ${}_{88}^{226}\text{Ra} \rightarrow {}_{86}^{222}\text{Rn} + {}_2^4\text{He} (\alpha)$

De même :



2 1.  ${}_3\text{Li}$  :  $Z = 3$  et  $A = 7$  donc  $N = A - Z = 4$ .

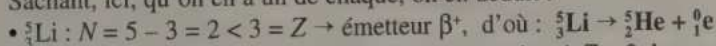
	Protons ( $Z$ )	Neutrons ( $N = A - Z$ )	Électrons(*)
Noyau (ou nucléide)	3	4	0
Atome	3	4	3
Ion ( $\text{Li}^+$ )	3	4	2

(\*) Un noyau n'a pas d'électron ; un atome est électriquement neutre, donc possède  $Z$  électrons ; un ion  $\text{X}^q$  vérifie :  $q = +Z - (\text{nombre d'électrons})$  ; donc ici :  $1 = 3 - n$  donc  $n = 2$ .

2. Pour  $Z$  faible ( $Z \leq 20$ ), on a approximativement la règle suivante :

$N > Z$  : émetteurs  $\beta^-$  ;  $N < Z$  : émetteurs  $\beta^+$  ;  $N \approx Z$  : stables.

Sachant, ici, qu'on en a un de chaque, on en déduit :



(on obtient  ${}_2^7\text{X}$  et on cherche l'élément correspondant à  $Z = 2$  dans une table, soit He) ;

- ${}^8_3\text{Li}$  :  $N = 8 - 3 = 5 > 3 = Z \rightarrow$  émetteur  $\beta^-$ , d'où :  ${}^8_3\text{Li} \rightarrow {}^8_4\text{Be} + {}^0_{-1}\text{e}$
- ${}^7_3\text{Li}$  : stable (par déduction, d'après l'énoncé).
- ${}^6_3\text{Li}$ ,  ${}^7_3\text{Li}$  et  ${}^8_3\text{Li}$  sont des isotopes (même  $Z$ ,  $Z = 3$  ici).

3

1.  ${}^{12}_6\text{C}$  : nombre de
- protons :  $Z = 6$
  - neutrons :  $N = A - Z = 12 - 6 = 6$
  - nucléons (protons + neutrons) =  $A = 12$ .

2. • L'interaction gravitationnelle est négligeable devant l'interaction électrostatique.

• L'interaction électrostatique est répulsive entre protons (de même charge non nulle) et inexistante entre neutron et neutron, ou neutron et proton (car le neutron n'est pas chargé).

• **Seule l'interaction forte explique la cohésion du noyau** (et elle n'agit qu'à très faible distance).

3.  ${}^{14}_6\text{C}$  va réagir (émission de particule  $\alpha$ ,  $\beta^+$ ,  $\beta^-$ ,  $\gamma$ ) afin d'acquiescer une structure plus stable.

Comme  $Z = 6$  est faible ( $Z \leq 20$ ) et  $N = A - Z = 14 - 6 = 8$  vérifie  $N > Z$ , le radionucléide sera émetteur  $\beta^-$  a priori :  ${}^{14}_6\text{C} \rightarrow {}^{14}_7\text{X} + {}^0_{-1}\text{e}$  ; à l'aide d'une table périodique, on trouve que  $Z = 7$  correspond à l'azote :  ${}^{14}_6\text{C} \rightarrow {}^{14}_7\text{N} + {}^0_{-1}\text{e}$ .

4.  ${}^{10}_6\text{C}$  : de même,  $N = 10 - 6 = 4$  et  $Z = 6$  donc  $N < 6$  : émission  $\beta^+$  (a priori) ;  ${}^{10}_6\text{C} \rightarrow {}^{10}_5\text{X} + {}^0_{+1}\text{e}$  donc  $Z = 5$  correspond au bore :  ${}^{10}_6\text{C} \rightarrow {}^{10}_5\text{B} + {}^0_{+1}\text{e}$ .

5. Les émetteurs sont émis en général par des atomes qui ont un nombre  $Z$  élevé ( $Z \geq 60$ ) : **C ne peut pas être un émetteur  $\alpha$**  (a priori).

4

1. Loi de décroissance radioactive :

$$N(t_1) = N_0 \cdot e^{-\lambda t_1} \text{ donc } \frac{N(t_1)}{N_0} = e^{-\lambda t_1} \text{ donc } \ln \frac{N(t_1)}{N_0} = -\lambda \cdot t_1$$

$$\text{donc } \lambda = -\frac{1}{t_1} \ln \frac{N(t_1)}{N_0} \text{ et } N(t_1) = 0,1 \times N_0$$

(90 % des nucléides ont disparu, il en reste 10 % soit  $0,1 \times N_0$ )

$$\text{d'où : } \frac{N(t_1)}{N_0} = 0,1.$$

$$\lambda = -\frac{1}{t_1} \ln 0,1 \quad (t_1 \text{ en s}).$$

$$\text{A.N. : } \lambda = -\frac{1}{2 \times 3\,600 + 40 \times 60} \ln 0,1 \approx 2,40 \times 10^{-4} \text{ s}^{-1}.$$

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = 2,89 \times 10^3 \text{ s } (\approx 48 \text{ min})$$

$$\tau = \frac{1}{\lambda} = 4,17 \times 10^3 \text{ s } (\approx 1 \text{ h } 09 \text{ min})$$



$$7 \quad 1. N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t} = N_0 e^{-\frac{\ln 2}{t_{1/2}} \cdot t} = N_0 (e^{\ln 2})^{-\frac{t}{t_{1/2}}} = N_0 \times 2^{-\frac{t}{t_{1/2}}}$$

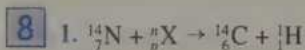
$$\text{soit } N(t) = \frac{N_0}{2^{\frac{t}{t_{1/2}}}} \quad \text{C.Q.E.D.}$$

Si  $t$  et  $t_{1/2}$  sont dans la même unité, alors  $\frac{t}{t_{1/2}}$  est adimensionnel, donc  $2^{\frac{t}{t_{1/2}}}$  peut se calculer (mais «  $2^{1^s}$  » ne veut rien dire !).

$$2. t_{1/2} = 8,0 \text{ j, on exprime } t \text{ en jours et alors } \frac{N}{N_0} = \frac{1}{2^{\frac{t(\text{jours})}{8}}}$$

$$\text{Exemple : } \frac{N}{N_0} (8 \text{ jours}) = \frac{1}{2^{\frac{8}{8}}} = \frac{1}{2^1} = 0,5 \text{ soit } 50 \%$$

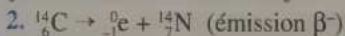
Durée (j)	8 = 8 × 1	16 = 8 × 2	32 = 8 × 4	365 (an)
Fraction	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2^2}$	$\frac{1}{2^4}$	$\frac{1}{2^{\frac{365}{8}}}$
Pourcentage	50 %	25 %	6,25 %	$1,8 \times 10^{-12} \%$



Conservation des nombres de charges et de nucléons :

$$14 + n = 14 + 1 \quad \text{et} \quad 7 + p = 6 + 1, \quad \text{soit } n = 1 \quad \text{et} \quad p = 0.$$

${}^1_0\text{X}$  est donc un neutron :  ${}^1_0\text{n}$ .



3. Lorsqu'un organisme vivant meurt, il arrête d'absorber du carbone. La quantité de  ${}^{12}\text{C}$  est constante puisqu'il est stable, en revanche  ${}^{14}\text{C}$  diminue (il est instable).

Le rapport  $\left[ \frac{N({}^{14}\text{C})}{N({}^{12}\text{C})} \right] = \alpha(t)$  vaut  $\alpha_0 = 10^{-12}$  à la mort de l'organisme, puis il décroît (loi de décroissance radioactive).

$$4. N({}^{14}\text{C})(t) = N({}^{14}\text{C})(t=0) \cdot e^{-\lambda \cdot t} \quad (\lambda \text{ de } {}^{14}\text{C}) \quad \text{et} \quad N({}^{12}\text{C}) = \text{cte}$$

$$\text{donc } \left[ \frac{N({}^{14}\text{C})}{N({}^{12}\text{C})} \right]_t = \left[ \frac{N({}^{14}\text{C})}{N({}^{12}\text{C})} \right]_{t=0} \cdot e^{-\lambda t}$$

$$\alpha(t) = \alpha_0 \cdot e^{-\lambda t} \quad \text{d'où} \quad t = -\frac{1}{\lambda} \ln \frac{\alpha(t)}{\alpha_0} = \frac{t_{1/2}}{\ln 2} \cdot \ln \frac{\alpha_0}{\alpha(t)}$$

$$\text{Avec } \alpha(t_{\max}) = \alpha_{\min}, \text{ on obtient : } t_{\max} = \frac{t_{1/2}}{\ln 2} \cdot \ln \frac{\alpha_0}{\alpha_{\min}}$$

$$\text{A.N. : } t_{\max} = \frac{5730}{\ln 2} \times \ln \frac{10^{-12}}{10^{-15}} \approx 57\,000 \text{ ans.}$$

5. Il ne s'agit pas d'être vivants, et elles ont beaucoup plus de 57 000 ans.

$$9 \quad 1. A_0 = \lambda \cdot N_0 = \left( \frac{\ln 2}{t_{1/2}} \right) (n_0 \cdot N_A) = \left( \frac{\ln 2}{t_{1/2}} \right) \cdot \left( \frac{m_0}{M} N_A \right) = (\ln 2 \cdot N_A) \cdot \left( \frac{m_0}{M \cdot t_{1/2}} \right)$$

( $n$  = quantité de matière (mol) et  $N$  = nombre de radionucléides)

$$\frac{A_0(\text{Cl})}{A_0(\text{Cd})} = \frac{m_0(\text{Cl}) M(\text{Cd}) t_{1/2}(\text{Cd})}{m_0(\text{Cd}) M(\text{Cl}) t_{1/2}(\text{Cl})}$$

(Unités : il suffit que les rapports soient adimensionnels).

$$\text{A.N. : } \frac{A_0(\text{Cl})}{A_0(\text{Cd})} = \frac{10^{-6}}{1} \times \frac{113}{39} \times \frac{(9 \times 10^{15} \times 365 \times 24)}{1} \approx 2,3 \times 10^{14}$$

L'activité initiale de Cl est environ  $10^{14}$  fois plus grande que celle de Cd.

$$2. \text{ D'après 1. : } m_0 = \frac{A_0 \cdot M \cdot t_{1/2}}{\ln 2 \cdot N_A}$$

$$m_0(^{24}\text{Na}) = \frac{10^9 \times (24 \times 10^{-3}) \times (14,96 \times 3\,600)}{\ln 2 \times (6,022 \times 10^{23})} = 3,1 \times 10^{-12} \text{ kg}$$

$$m_0(^{226}\text{Ra}) = 2,7 \times 10^{-5} \text{ kg ; } m_0(^{238}\text{U}) = 80 \text{ kg.}$$

$$10 \quad N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda t} \text{ (loi de décroissance radioactive)}$$

$$\frac{N(t)}{N_A} = \frac{N_0}{N_A} \cdot e^{-\lambda t} \text{ donc } n(t) = n_0 \cdot e^{-\lambda t} \text{ avec } n_0 = \frac{N_0}{N_A}$$

$$n(t) \cdot M = n_0 \cdot M \cdot e^{-\lambda t} \text{ donc } m(t) = m_0 \cdot e^{-\lambda t} \text{ avec } m_0 = n_0 \cdot M$$

$$-\frac{dN(t)}{dt} = -\frac{d}{dt} (N_0 \cdot e^{-\lambda t}) = -N_0 \cdot (-\lambda) \cdot e^{-\lambda t} = \lambda \cdot N_0 e^{-\lambda t}$$

$$\text{donc } A(t) = A_0 \cdot e^{-\lambda t} \text{ avec } A_0 = \lambda \cdot N_0$$

Conclusion :  $X(t) = X_0 \cdot e^{-\lambda t}$  où  $X$  est  $N$  ou  $n$  ou  $m$  ou  $A$ .

11  ${}_{11}^{24}\text{Na}$  est émetteur  $\beta^-$ , donc  ${}_{11}^{24}\text{Na}$  émet des électrons : ce déplacement d'électrons peut être assimilé à un courant électrique (s'ils sont « canalisés ») d'intensité  $I = \left| \frac{\Delta q}{\Delta t} \right|$  (la valeur absolue permet de s'affranchir du problème de l'orientation de  $I$  qui n'a pas d'intérêt ici).

$$I = \left| \frac{\Delta q}{\Delta t} \right| = \left| \frac{\Delta N \cdot (-e)}{\Delta t} \right| = e \left| \frac{\Delta N}{\Delta t} \right| = e \left| \frac{-\lambda \cdot N \cdot \Delta t}{\Delta t} \right| = e \cdot \lambda \cdot N = \frac{e \cdot \ln 2 \cdot N}{t_{1/2}}$$

et  $N = n \cdot N_A = \frac{m}{M} \cdot N_A$  ( $n$  est le « nombre de moles » ou la quantité de matière)

$$I = \ln 2 \times \frac{e \cdot m \cdot N_A}{M \cdot t_{1/2}}$$

Or  $m$  dépend de  $t$ , mais on cherche la quantité initiale, soit  $m = m_0$ , d'où :

$$m_0 = \frac{I \cdot t_{1/2} \cdot M}{\ln 2 \cdot N_A \cdot e}$$

A.N. :  $m_0 = \frac{10^{-4} \times (15 \times 3\,600) \times 24 \text{ (en g)}}{\ln 2 \times (6,022 \cdot 10^{23}) \times (1,6 \times 10^{-19})} = 1,9 \times 10^{-3} \text{ g.}$

**12** 1. • D'une part,  $^{24}\text{Na}$  disparaît selon  $\left[ \frac{dN(^{24}\text{Na})}{dt} \right]_{\text{réagissant}} = -\lambda \cdot N(^{24}\text{Na})$

• D'autre part,  $^{24}\text{Na}$  apparaît  $\left[ \frac{dN(^{24}\text{Na})}{dt} \right]_{\text{formé}} = 9,3 \times 10^9 = A_0$  (noyaux  $\cdot \text{s}^{-1}$ )

• À l'équilibre  $\left[ \frac{dN(^{24}\text{Na})}{dt} \right]_{\text{réagissant}} + \left[ \frac{dN(^{24}\text{Na})}{dt} \right]_{\text{formé}} = 0$

soit :  $\lambda \cdot N(^{24}\text{Na}) = A_0$  d'où  $N(^{24}\text{Na}) = \frac{A_0}{\lambda} = \frac{A_0 \cdot t_{1/2}}{\ln 2}$

A.N. :  $N(^{24}\text{Na}) = \frac{(9,3 \times 10^9) \times (15 \times 3\,600)}{\ln 2} \approx 7,2 \times 10^{14}$ .

2. • D'une part, Rn provenant de Ra, il se forme autant de Rn qu'il y a de Ra qui réagit :

$$\left[ \frac{dN(\text{Rn})}{dt} \right]_{\text{formé}} = - \left[ \frac{dN(\text{Ra})}{dt} \right]_{\text{réagissant}} = \lambda(\text{Ra}) \cdot N(\text{Ra}).$$

• D'autre part, Rn disparaît selon :  $\left[ \frac{dN(\text{Rn})}{dt} \right]_{\text{réagissant}} = -\lambda(\text{Rn}) \cdot N(\text{Rn})$

• À l'équilibre :  $\left[ \frac{dN(\text{Rn})}{dt} \right]_{\text{formé}} + \left[ \frac{dN(\text{Rn})}{dt} \right]_{\text{réagissant}} = 0$

soit  $\lambda(\text{Ra}) \cdot N(\text{Ra}) = \lambda(\text{Rn}) \cdot N(\text{Rn})$ .

Donc  $\left( \frac{\ln 2}{t_{1/2}(\text{Ra})} \right) \times \left( \frac{m(\text{Ra})}{M(\text{Ra})} N_A \right) = \left( \frac{\ln 2}{t_{1/2}(\text{Rn})} \right) \times \left( \frac{m(\text{Rn})}{M(\text{Rn})} N_A \right)$

d'où :  $m(\text{Rn}) = \frac{t_{1/2}(\text{Rn})}{t_{1/2}(\text{Ra})} \cdot \frac{M(\text{Rn})}{M(\text{Ra})} \cdot m(\text{Ra})$

A.N. :  $m(\text{Rn}) = \left( \frac{3,8}{1\,590 \times 365} \right) \times \left( \frac{222}{226} \right) \times (0,2 \times 10^{-3}) \approx 1,3 \times 10^{-9} \text{ kg.}$

*Remarque :*  $m(\text{Ra})$  a été calculée en supposant  $m(\text{Ra}) \approx \text{cte}$  car  $t_{1/2}(\text{Ra}) = 1\,590$  ans est très grande, donc  $m(\text{Ra})$  varie peu pendant la durée de l'expérience.

## 5

## Noyaux, masse, énergie

## 1 ÉQUIVALENCE MASSE-ÉNERGIE

## 1. Équivalence masse-énergie

Un système fermé dont la masse diminue de  $\Delta m = m_{\text{avant}} - m_{\text{après}}$  libère l'énergie :

$$\Delta E = \Delta m \cdot c^2$$

## 2. Énergie au repos et relation d'Einstein

L'énergie que libérerait une particule si sa masse était intégralement transformée en énergie est son énergie au repos :

$$E = m \cdot c^2$$

## 3. Unité de masse atomique (u)

Par définition :  $1 \text{ u} = \frac{1}{12} m(^{12}\text{C})$  (masse d'un atome de carbone)  
 $= 1,660\,54 \times 10^{-27} \text{ kg}$   
 $= 931,494 \text{ MeV} \cdot c^{-2}$

Particule	$m$ (kg)	$m$ (u)	$m$ (MeV $\cdot c^{-2}$ )
proton	$1,672\,622 \times 10^{-27}$	1,007 276	938,272
neutron	$1,674\,927 \times 10^{-27}$	1,008 665	939,565
électron	$9,109\,382 \times 10^{-31}$	0,000 549	0,510 999

Source : NIST (National Institut of Standards and Technology) 2003.

## 4. Utilisation des unités et relations (cf. ex. 8)

Énergie	=	Masse	×	$c^2$
$E$ (J)	=	$m$ (kg)	×	$(2,998 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1})^2$
$E$ (MeV)	=	$m$ (u)	×	(931,494 MeV/u)
$E$ (MeV)	=	$m$ (MeV $\cdot c^{-2}$ )	×	$c^2$ *

\* Pour être homogène à des MeV.

## II ÉNERGIES DE LIAISON D'UN NOYAU

### 1. Défaut de masse d'un noyau

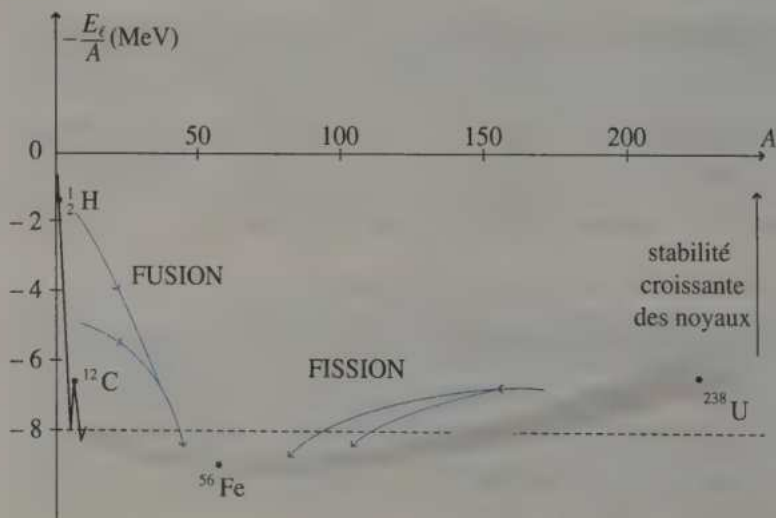
- $m$  (nucléons séparés)  $>$   $m$  (noyau = nucléons liés)
- $\Delta m$  = défaut de masse du noyau ( $>$  0)
  - =  $m(\text{nucléons séparés}) - m(\text{noyau})$
  - =  $[Z \cdot m_p + (A - Z)m_n] - m(^AZX)$
- $m(\text{atome}) = m(\text{noyau}) + Z \cdot m(\text{électron})$
- donc  $\Delta m = \Delta m(\text{noyau}) = \Delta m(\text{atome})$ .

### 2. Énergie de liaison d'un noyau

- $E_\ell = \Delta m \cdot c^2$
- $E_\ell$  est l'énergie à fournir au noyau pour séparer les nucléons.

### 3. Énergie de liaison par nucléon

- $\frac{E_\ell}{A}$  est l'énergie de liaison par nucléon (ou plutôt par nombre de nucléons), donc c'est l'énergie à fournir à chaque nucléon pour séparer tous les nucléons (chaque nucléon possédant l'énergie  $-\frac{E_\ell}{A}$ ).
- Courbe d'Aston :  $-\frac{E_\ell}{A}$  en fonction de  $A$



## 101 RÉACTIONS NUCLÉAIRES

### 1. Généralités

- Il existe deux types de réactions : les réactions spontanées ( $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ ) ou les réactions provoquées (fission et fusion).
- Au cours d'une réaction, il y a conservation de la charge électrique ( $Z$ ) et du nombre de nucléons ( $A$ ).
- La variation de la masse est :  $\Delta E = \Delta m \cdot c^2$ .

### 2. Fission et fusion (cf. courbe d'Aston)

	Fission	Fusion
Réaction	(1 noyau instable + $\frac{1}{2}n$ ) ↓ [2 noyaux stables (+ particule(s))]	(2 noyaux instables) ↓ [1 noyau stable (+ particule(s))]
Noyau(x) père(s)	$A \geq 200$	$A \leq 20$
Amorçage	choc avec un neutron lent	choc des 2 noyaux
Énergie libérée	$E_{\text{fission}} < E_{\text{fusion}}$ (à masses égales)	
Exemples	<ul style="list-style-type: none"> <li>• la fission est maîtrisée par l'homme</li> <li>• centrales nucléaires (fission contrôlée)</li> <li>[• bombe A (fission non contrôlée)]</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• la fusion n'est pas maîtrisée par l'homme</li> <li>• soleil, étoiles (fusion non contrôlée !)</li> <li>[• bombe H (fusion non contrôlée)]</li> </ul>
Avantages/ Inconvénients	<ul style="list-style-type: none"> <li>• combustible cher et dangereux (U, Pu)</li> <li>• production de déchets radioactifs</li> </ul>	<ul style="list-style-type: none"> <li>• combustible économique et stable (H, He...)</li> <li>• peu de production de déchets radioactifs</li> </ul>

## EXERCICES D'APPLICATION

Donnée :  $N_A = 6,022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

## 1 RECONNAÎTRE UNE RÉACTION

\* (5 min) ► P. 65

Reconnaitre le type des réactions suivantes et préciser si elles sont spontanées ou provoquées.

- ${}^2_1\text{H} + {}^3_1\text{H} \rightarrow {}^4_2\text{He} + {}^1_0\text{n}$
- ${}^{235}_{92}\text{U} + {}^1_0\text{n} \rightarrow {}^{94}_{39}\text{Y} + {}^{140}_{53}\text{I} + 2 {}^1_0\text{n}$
- ${}^{60}_{28}\text{Ni}^* \rightarrow {}^{60}_{28}\text{Ni} + {}^0_0\gamma$
- ${}^{30}_{15}\text{P} \rightarrow {}^{30}_{14}\text{Si} + {}^0_{-1}\text{e}$
- ${}^{238}_{92}\text{U} \rightarrow {}^{234}_{90}\text{Th} + {}^4_2\text{He}$
- ${}^{214}_{82}\text{Pb} \rightarrow {}^{214}_{83}\text{Bi} + {}^0_{-1}\text{e}$

## 2 ÉNERGIE DE LIAISON

\* (10 min) ► P. 65

Un noyau de béryllium ( ${}^{10}_4\text{Be}$ ) a pour masse 10,011 3 u.

- Donner sa composition.
- Calculer son défaut de masse.
- En déduire son énergie de liaison, puis son énergie de liaison par nucléon (en MeV et en J).
- Calculer la masse d'un atome de  ${}^{10}\text{Be}$  (en u).

Données :  $m_n = 1,008\ 66 \text{ u}$  ;

$m_p = 1,007\ 27 \text{ u}$  ;

$m_e = 0,000\ 55 \text{ u}$ .

## 3 ISOTOPES DE L'URANIUM

\* (5 min) ► P. 65

La masse atomique de l'uranium naturel (minerai) est 238,029 u, celle de  ${}^{235}\text{U}$  est 235,044 u et celle de  ${}^{238}\text{U}$  est 238,051 u.

Quel est le pourcentage de  ${}^{235}\text{U}$  dans l'uranium naturel ?

## 4 VARIATION RELATIVE DE MASSE

\*\* (5 min) ► P. 65

Calculer le pourcentage de masse que perd le système  $\{{}^{235}\text{U} + {}^1_0\text{n}\}$  lors de la fusion suivante :



Données :  $E_{\text{libérée}} = 160 \text{ MeV}$  ;

$m({}^{235}\text{U}) = 235,044 \text{ u}$  ;

$m({}^1_0\text{n}) = 1,000\ 87 \text{ u}$ .

## EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

**5 LE CLASSIQUE** \*\* (15 min) ► P. 66

Le radium ( $^{226}_{88}\text{Ra}$ ) se désintègre spontanément en radon ( $^{222}_{86}\text{Rn}$ ).

1. Écrire la réaction de désintégration et préciser son type.
2. Calculer la variation de masse  $\Delta m$  de cette réaction ( $\Delta m$  sera définie afin d'être positive) ainsi que la variation relative de masse.
3. En déduire l'énergie libérée par cette réaction, en MeV et en J.
4. Quelle énergie libèrerait un gramme de radium dans ces conditions ? Donner cette valeur en MeV et en J.

Données :  $m(\text{Ra}) = 226,025\ 40\ \text{u}$  (atome) ;

$m(\text{Rn}) = 222,017\ 57\ \text{u}$  (atome) ;

$m(^4_2\text{He}) = 4,002\ 60\ \text{u}$  (atome).

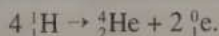
**6 VRAI OU FAUX ?** \*\* (5 min ou 60 min) ► P. 66

Que pensez-vous de ces trois propositions ?

1. L'énergie de liaison du  $^{30}\text{P}$  est 123 MeV.
2. L'énergie de liaison de  $^1\text{H}$  est 1,2 MeV.
3. 1 u est égal au douzième de la masse d'un noyau de  $^{12}\text{C}$ .

**7 SOLEIL ET FUSION** \*\* (15 min) ► P. 66

Le bilan de l'un des processus de fusion solaire peut s'écrire :



1. Calculer le défaut de masse (en u), puis l'énergie libérée (en MeV) pour produire un noyau d'hélium.

2. La puissance rayonnée par le Soleil est estimée à  $4,0 \times 10^{26}\ \text{W}$ .

En supposant que toute sa masse soit constituée uniquement de  $^1_1\text{H}$  et qu'elle ne serve qu'à cette unique réaction, calculer sa durée de vie.

Commenter le résultat.

Données :  $m(^1_1\text{H}) = 1,007\ 28\ \text{u}$  (noyau) ;

$m(^4_2\text{He}) = 4,001\ 51\ \text{u}$  (noyau) ;

$m(^0_1\text{e}) = 0,000\ 55\ \text{u}$  ;

masse du soleil :  $1,98 \times 10^{30}\ \text{kg}$ .

$$E = P \times \Delta t$$

$E$  est l'énergie (J) ;

$P$  est la puissance (W) ;

$\Delta t$  est la durée (s).

## EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

## 8 UNITÉS ET FORMULES

\*\* (25 min) ► P. 67

Dans cet exercice, on utilisera seulement les données ci-dessous.

1. En partant de la définition de l'unité atomique, redémontrer que :

$$1 \text{ u} = 1,660\,54 \times 10^{-27} \text{ kg.}$$

2. Redémontrer que :  $E \text{ (MeV)} = m \text{ (u)} \times 931,49$

puis que :  $1 \text{ u} = 931,49 \text{ MeV} \cdot c^{-2}$ .

3. En déduire la masse du proton en u, en  $\text{MeV} \cdot c^{-2}$ , et son énergie au repos en MeV.

Données :  $M \text{ (atome } ^{12}\text{C)} = 12,000\,00 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$  ;

$$N_A = 6,022\,14 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1} ;$$

$$e = 1,602\,18 \times 10^{-19} \text{ C} ;$$

$$c = 2,997\,92 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} ;$$

$$m_p = 1,672\,62 \times 10^{-27} \text{ kg.}$$

## 9 SOUS-MARIN NUCLÉAIRE


\*\*\* (20 min) ► P. 67

Le réacteur d'un sous-marin nucléaire fonctionne suivant la réaction, supposée unique :  $^{235}_{92}\text{U} + {}^1_0\text{n} \rightarrow {}^{94}_{38}\text{Sr} + {}^{140}_{54}\text{Xe} + 2 {}^1_0\text{n}$ .

Pour cela, il utilise de l'uranium enrichi qui contient 3,1 %, en masse, de  $^{235}\text{U}$ . Le rendement du réacteur est de 27 %, sa puissance 25 MW. Quelle masse d'uranium enrichi lui faut-il pour fonctionner pendant une année ?

Données :  $m({}^1_0\text{n}) = 1,008\,7 \text{ u}$  ;  $m(^{235}\text{U}) = 234,994\,2 \text{ u}$  ;

$m(^{94}\text{Sr}) = 93,915\,4 \text{ u}$  ;  $m(^{140}\text{Xe}) = 139,925\,2 \text{ u}$ .

  $E = P \times \Delta t$  (voir l'exercice 7).

## 10 UNE RELATION GÉNÉRALE

\*\*\* (30 min) ► P. 68



1. Montrer que :  $\sum_{\text{après}} E_\ell - \sum_{\text{avant}} E_\ell = -(m_{\text{après}} - m_{\text{avant}}) c^2$ .

2. À l'aide d'un diagramme énergétique simple, et en utilisant la définition de l'énergie de liaison, retrouver la relation précédente.

3. Vérifier cette relation pour la réaction :  $2 {}^2_1\text{H} \rightarrow {}^4_2\text{He}$ .

Données :  $E_\ell({}^2_1\text{H}) = 2,225 \text{ MeV}$  ;  $E_\ell({}^4_2\text{He}) = 28,295 \text{ MeV}$  ;

$m({}^2_1\text{H}) = 2,014\,10 \text{ u}$  ;  $m({}^4_2\text{He}) = 4,002\,60 \text{ u}$ .

## CORRIGÉS

1. Réaction entre deux noyaux légers  $\rightarrow$  fusion  $\rightarrow$  provoquée.  
 2. Réaction entre un noyau lourd et 1 neutron  $\rightarrow$  fission  $\rightarrow$  provoquée.  
 3. Désexcitation et formation de  ${}^0_0\gamma \rightarrow$  émission  $\gamma \rightarrow$  spontanée.  
 4. Formation de  ${}^0_1e \rightarrow$  émission  $\beta^+ \rightarrow$  spontanée.  
 5. Formation de  ${}^4_2\text{He} \rightarrow$  émission  $\alpha \rightarrow$  spontanée.  
 6. Formation de  ${}^0_{-1}e \rightarrow$  émission  $\beta^- \rightarrow$  spontanée.

*Remarque :* les réactions spontanées partent d'un unique élément, contrairement aux réactions provoquées (par des chocs, donc qui nécessitent au moins deux particules).

2. 1.  $Z = 4$  et  $N = A - Z = 10 - 4 = 6$  : **4 protons, 6 neutrons.**

$$2. \Delta m = [Z \cdot m_p + (A - Z) \cdot m_n] - m(\text{noyau})$$

$$\text{A.N. : } \Delta m = [4 \times 1,007\,27 + 6 \times 1,008\,66] - 10,011\,3 = 6,974 \times 10^{-2} \text{ u.}$$

$$3. E_\ell (\text{MeV}) = \Delta m (\text{u}) \times 931,5 = 64,96 \text{ MeV} = 1,041 \times 10^{-11} \text{ J}$$

$$\frac{E_\ell}{A} = \frac{E_\ell}{10} = 6,496 \text{ MeV} = 1,041 \times 10^{-12} \text{ J}$$

$$4. m(\text{atome}) = m(\text{noyau}) + Z \times m_e$$

$$\text{A.N. : } m(\text{atome}) = 10,011\,3 + 10 \times 0,000\,55 \approx 10,016\,8 \text{ u.}$$

3. Soit  $x$  le pourcentage de  ${}^{235}\text{U}$  dans l'uranium naturel (noté U)

$$m(\text{U}) = \frac{x}{100} m({}^{235}\text{U}) + \frac{100 - x}{100} m({}^{238}\text{U}).$$

$$\text{Soit : } x = 100 \times \frac{m(\text{U}) - m({}^{238}\text{U})}{m({}^{235}\text{U}) - m({}^{238}\text{U})}$$

$$\text{A.N. : } x = 100 \times \frac{238,029 - 238,051}{235,044 - 238,051} \approx 0,73 \text{ \%}.$$

4. Le pourcentage  $p$  à calculer est :

$$p = \frac{\Delta m}{m_{\text{initiale}}} \times 100 = \frac{E_{\text{lib}} (\text{MeV})/931,5}{m({}^{235}\text{U}) + m({}^1_0\text{n})} \times 100$$

où  $m$  s'exprime en u.

$$\text{A.N. : } p = \frac{160}{(235 + 1)} \times 100 = 7,3 \times 10^{-2} \% = 0,073 \text{ \%}.$$

**5** 1.  ${}^{226}_{88}\text{Ra} \rightarrow {}^{222}_{86}\text{Rn} + {}^4_2\text{He}$  (cf. ex. 1, chapitre 4) : **émission  $\alpha$**  (spontanée).


2.  $\Delta m > 0$  si  $\Delta m = m_{\text{avant}} - m_{\text{après}}$ .

On obtient :

$$\Delta m = m(\text{Ra}) - [m(\text{Rn}) + m({}^4_2\text{He})] = 5,23 \times 10^{-3} \text{ u.}$$

$$\text{Variation relative : } \frac{\Delta m}{m_{\text{avant}}} = \frac{\Delta m}{m(\text{Ra})} = 2,3 \times 10^{-5} \text{ (0,002 3 \%)}.$$

3.  $E_{\text{lib}} \text{ (MeV)} = \Delta m \text{ (u)} \times 931,5 = 4,87 \text{ MeV}$ , soit  $E_{\text{lib}} = 7,80 \times 10^{-13} \text{ J}$ .

 **Rappel : 1 MeV = 10<sup>6</sup> eV = 1,602 × 10<sup>-13</sup> J.**

4. Quantité de noyaux dans 1 g :  $N = n \text{ (mol)} \times N_A = \frac{m}{M} \times N_A$

$$E_{\text{tot}} = E_{\text{lib}} \times N = E_{\text{lib}} \cdot \frac{m}{M} N_A$$

$$\text{A.N. : } E_{\text{tot}} = E_{\text{lib}} \times \frac{10^{-3}}{(226 \times 10^{-3})} \times 6,022 \times 10^{23}$$

$$E_{\text{tot}} = 1,30 \times 10^{22} \text{ MeV} = 2,08 \times 10^9 \text{ J}$$

**6** 1.  $\frac{E_\ell}{A} = \frac{123}{30} \approx 4,1 \text{ MeV}$  par nucléon.

Or, si  $A > 12$ , on sait que  $\frac{E_\ell}{A} \approx 8 \text{ MeV}$  par nucléon.

Cette proposition est donc fausse.

2.  ${}^1_1\text{H}$  n'est constitué que d'un proton, donc  $m_{\text{noyau}} = m_p = m_{\text{nucléon(s)}}$  :

$E_\ell = 0$  et  $\frac{E_\ell}{A} = 0$ . Cette proposition est donc fausse.

3. Faux : 1 u est la masse d'un **atome** (et non d'un noyau) de  ${}^{12}\text{C}$ .

**7** 1.  $\Delta m = 4 \times m({}^1_1\text{H}) - [m({}^4_2\text{He}) + 2 m({}_+^0\text{e})]$

$$\text{A.N. : } \Delta m = 4 \times (1,007 28) - (4,001 51 + 2 \times 0,000 55) = 2,651 \times 10^{-3} \text{ u}$$

$$E_{\text{lib}} \text{ (MeV)} = \Delta m \text{ (u)} \times 931,5 = 24,69 \text{ MeV}$$

$$2. \Delta t = \frac{E}{P} = \frac{E_{\text{lib}} \times N}{P} \text{ avec } N = n \times N_A = \frac{m}{M} \times N_A, \text{ et } M = 4 \times M({}^1_1\text{H}).$$

$$\Delta t = \frac{E_{\text{lib}} \times m \times N_A}{4 \times M({}^1_1\text{H}) \times P}$$

$$\text{A.N. : } \Delta t = \frac{(24,7 \times 1,6 \times 10^{-13}) \times (1,98 \times 10^{30}) \times (6,022 \times 10^{23})}{(4 \times 0,001) \times (4 \times 10^{26})}$$

$$\approx 2,9 \times 10^{18} \text{ s} \approx 9,3 \times 10^{10} \text{ ans}$$

**Attention :**  $E$  est exprimée en J et  $M({}^1_1\text{H})$  en kg.

Commentaire : les réactions sont nombreuses et variées, ensuite d'autres réactions ont lieu, ...

$$\begin{aligned} 8 \quad 1. \quad 1 \text{ u} &= \frac{1}{12} m(\text{atome } ^{12}\text{C}) \\ &= \frac{1}{12} \times \frac{M(\text{atome } ^{12}\text{C})}{N_A} = \frac{1}{12} \times \frac{12,000\,00 \times 10^{-3}}{6,022\,14 \times 10^{23}} \end{aligned}$$

soit :  $1 \text{ u} = 1,660\,54 \times 10^{-27} \text{ kg}$

2.  $E \text{ (J)} = m \text{ (kg)} \times c^2$  devient :

$$E \text{ (MeV)} \times (1,6 \times 10^{-13}) = m \text{ (u)} \times (1,66 \times 10^{-27}) \times c^2$$

donc :

$$E \text{ (MeV)} = m \text{ (u)} \times \left[ \frac{(1,660\,54 \times 10^{-27}) \times (2,997\,92 \times 10^8)^2}{1,602\,18 \times 10^{-19}} \right] = m \text{ (u)} \times 931,49$$

Pour l'application numérique, on utilise les valeurs les plus précises données dans l'énoncé.

On en déduit que si  $m = 1 \text{ u}$ , alors  $E = 931,49 \text{ MeV}$ .

$$\text{Donc, comme } m = \frac{E}{c^2} : 1 \text{ u} = \frac{931,49 \text{ MeV}}{c^2} = 931,49 \text{ MeV} \cdot c^{-2}.$$

$$3. \quad m_p = \frac{1,672\,62 \times 10^{-27}}{1,660\,54 \times 10^{-27}} \text{ u} \approx 1,007\,27 \text{ u}$$

$$= 1,007\,27 \times 931,49 \text{ MeV} \cdot c^{-2} = 938,27 \text{ MeV} \cdot c^{-2}$$

$$E \text{ (MeV)} = m(\text{MeV} \times c^{-2}) \times c^2 = (938,27 \text{ MeV} \times c^{-2}) \times c^2 = 938,27 \text{ MeV}.$$

9 Défaut de masse de la réaction pour un noyau de  $^{235}\text{U}$  :

$$\Delta m = [m(^{235}\text{U}) + m(^1_0\text{n})] - [m(^{94}\text{Sr}) + m(^{140}\text{Xe}) + 2 m(^1_0\text{n})]$$

$$\text{soit } \Delta m = 0,144\,9 \text{ u} = 0,144\,9 \times (1,660\,54 \times 10^{-27}) \text{ kg} = 2,405 \times 10^{-28} \text{ kg}.$$

Soit  $\rho$  le rendement :

$$\rho = \frac{E \text{ (utile)}}{E \text{ (libérée)}} = \frac{P \times \Delta t}{(\Delta m \cdot c^2) \cdot N}$$

$N$  est le nombre de noyaux de  $^{235}\text{U}$  :

$$N = \frac{m(^{235}\text{U})}{M(^{235}\text{U})} \times N_A = \frac{[0,031 \times m(\text{U})]}{M(^{235}\text{U})} \times N_A$$

$$\text{d'où : } m(\text{U}) = \frac{P \times \Delta t \times M(^{235}\text{U})}{0,031 \times \Delta m \times c^2 \times N_A \times \rho}$$

A.N. :

$$\begin{aligned} m(\text{U}) &= \frac{(25 \times 10^6) \times (365 \times 24 \times 3\,600) \times (235 \times 10^{-3})}{0,031 \times (2,405 \times 10^{-28}) \times (3 \times 10^8)^2 \times (6,022 \times 10^{23}) \times 0,27} \\ &= 1,70 \times 10^3 \text{ kg}. \end{aligned}$$

10 1. Par conservation du nombre de charges et du nombre de nucléons :

$$Z_1 + Z_2 = Z_3 + Z_4 \text{ et } A_1 + A_2 = A_3 + A_4$$

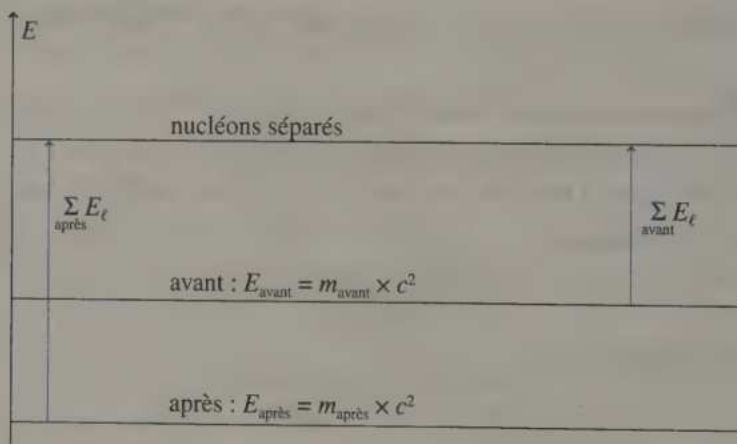
$$\begin{aligned} D &= \sum_{\text{après}} E_{\ell} - \sum_{\text{avant}} E_{\ell} \\ &= (E_{\ell_3} + E_{\ell_4}) - (E_{\ell_1} + E_{\ell_2}) \\ &= [(\Delta m_3 + \Delta m_4) - (\Delta m_1 + \Delta m_2)]c^2 \\ &= \{[Z_3 m_p + (A_3 - Z_3) m_n - m(X_3)] + [Z_4 m_p + (A_4 - Z_4) m_n - m(X_4)] \\ &\quad - [Z_1 m_p + (A_1 - Z_1) m_n - m(X_1)] - [Z_2 m_p + (A_2 - Z_2) m_n - m(X_2)]\}c^2 \\ &= \{(Z_3 + Z_4 - Z_1 - Z_2)(m_p - m_n) + (A_3 + A_4 - A_1 - A_2) m_n \\ &\quad + [m(X_1) + m(X_2) - m(X_3) - m(X_4)]\}c^2 \\ &= [m(X_1) + m(X_2) - m(X_3) - m(X_4)]c^2 \\ &= (m_{\text{avant}} - m_{\text{après}})c^2 \end{aligned}$$

donc : 
$$\sum_{\text{après}} E_{\ell} - \sum_{\text{avant}} E_{\ell} = -(m_{\text{après}} - m_{\text{avant}}) \times c^2$$

2.  $E_{\ell}$  est l'énergie à fournir à un noyau pour séparer ses nucléons. On a alors (diagramme réalisé pour  $m_{\text{après}} < m_{\text{avant}}$ ) :

$$\sum_{\text{après}} E_{\ell} - \sum_{\text{avant}} E_{\ell} = (m_{\text{avant}} - m_{\text{après}})c^2$$

ce qui revient au même.



$$\begin{aligned} 3. \quad \sum E_{\ell \text{ après}} - \sum E_{\ell \text{ avant}} &= E_{\ell}({}_2^4\text{He}) - 2 \times E_{\ell}({}_1^2\text{H}) \\ &= 28,295 - 2 \times 2,225 \\ &= 23,85 \text{ MeV} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (m_{\text{avant}} - m_{\text{après}}) \times c^2 &= (2 \times 2,01410 - 4,00260) \times 931,5 \\ &= 23,85 \text{ MeV} \end{aligned}$$

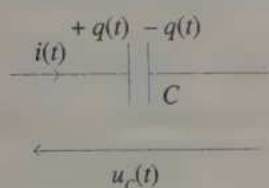
Donc : 
$$\sum E_{\ell \text{ après}} - \sum E_{\ell \text{ avant}} = (m_{\text{avant}} - m_{\text{après}}) \cdot c^2$$

## 6

## Dipôle RC

## I LE CONDENSATEUR

## 1. Représentation et relations en convention récepteur



$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \text{ et } q(t) = C \cdot u_c(t)$$

$$\text{donc } i(t) = C \cdot \frac{du_c(t)}{dt}$$

- $i(t)$  : débit de charges ou intensité du courant, en ampère (A).
- $u_c(t)$  : tension aux bornes du condensateur, en volt (V).
- $q(t)$  et  $-q(t)$  : charges des armatures du condensateur, en coulomb (C).
- $C$  : capacité du condensateur, en farad (F).

## 2. Énergie emmagasinée par le condensateur

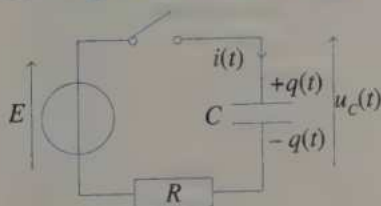
$$E_c(t) = \frac{1}{2} C \cdot u_c^2(t) = \frac{1}{2} \frac{q^2(t)}{C} \quad E_c(t) \text{ en joule (J)}$$

## 3. Remarques

- $q(t)$ ,  $u_c(t)$  et  $E_c(t)$  sont des **fonctions continues** dans la branche contenant  $C$ .
- Les armatures du condensateur sont séparées par un diélectrique (ou isolant électrique).

## II LE DIPÔLE RC

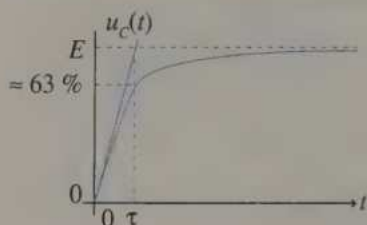
## 1. Charge d'un condensateur



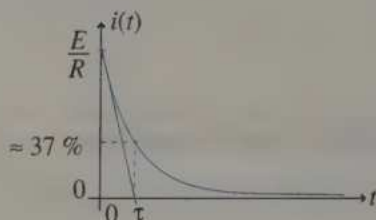
- Le condensateur est initialement déchargé :  $q(t=0) = 0$  C.
- À  $t = 0$  s, on ferme l'interrupteur.
- $\tau = R \cdot C$  : constante de temps du dipôle RC (en s).

$$\bullet \frac{du_c(t)}{dt} + \frac{u_c(t)}{\tau} = \frac{E}{\tau} \quad \text{d'où :}$$

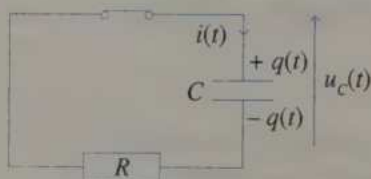
$$u_c(t) = E(1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$



$$i(t) = \frac{E}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$



## 2. Décharge d'un condensateur



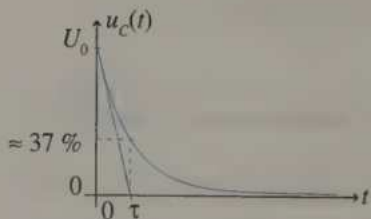
• Le condensateur est initialement chargé :  $u_c(t=0) = U_0 > 0$ .

• À  $t = 0$  s, on ferme l'interrupteur.

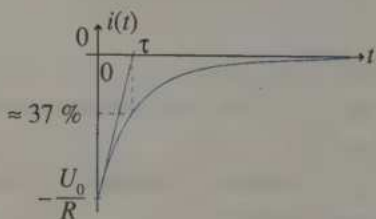
•  $\tau = R \cdot C$  : constante de temps du dipôle RC (en s).

$$\bullet \frac{du_c(t)}{dt} + \frac{u_c(t)}{\tau} = 0 \quad \text{d'où :}$$

$$u_c(t) = U_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$



$$i(t) = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{\tau}}$$



## 3. Remarques

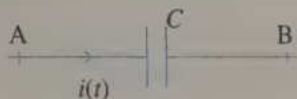
- Après une durée de l'ordre de  $5\tau$ , le régime permanent est atteint.
- $U_0 = E$  si le condensateur a été chargé avec un générateur de tension (de valeur  $E$ ).

## EXERCICES D'APPLICATION

## I GÉNÉRALITÉS

\* (15 min) ► P. 80

Soit le condensateur suivant, placé dans un circuit (non représenté) :



$i(t)$  : intensité du courant.

1. Représenter  $u_C(t)$ , la tension aux bornes du condensateur, en convention récepteur. Placer ensuite les charges  $q(t)$  et  $-q(t)$  avec l'orientation classiquement utilisée en cours.

2. Écrire les relations reliant :

a.  $u_C(t)$  et  $q(t)$  ;

b.  $i(t)$  et  $q(t)$  ;

c.  $u_C(t)$  et  $i(t)$ .

3. On suppose que, pendant une certaine durée, on a  $i = -0,123$  A.

a. Quel est alors le sens réel du courant : de A vers B ou de B vers A ?

b. Quelle est la nature des porteurs de charges qui se déplacent ?

c. Quel est alors le sens de déplacement des porteurs de charges ?

d. Peut-on dire que  $q(t)$  est constant ? Expliquer.

e. Peut-on dire que  $u_C(t)$  est constant ? Expliquer.

f. Représenter l'ampèremètre qui permettrait cette mesure (indiquer sa borne COM en particulier), sur le schéma de la question 1.

4. a. Représenter  $u_{AB}(t)$  ; écrire la relation entre  $u_{AB}(t)$  et  $u_C(t)$ .

b. Représenter  $i_{AB}(t)$ , qui est orienté de A vers B ; écrire la relation entre  $i_{AB}(t)$  et  $i(t)$ .

c. Représenter  $q_A(t)$ , la charge du côté de l'armature A, et  $q_B(t)$ , la charge du côté de l'armature B.

Écrire les relations entre :

$q_A(t)$  et  $q(t)$  ;  $q_B(t)$  et  $q(t)$  ;  $q_A(t)$  et  $i_{AB}(t)$  ;  $q_B(t)$  et  $i_{AB}(t)$ .

d. Écrire les relations entre  $u_{AB}(t)$  et  $q_A(t)$ , et entre  $u_{AB}(t)$  et  $q_B(t)$ .

5. Pourquoi les charges qui sont en excès sur une armature ne passent-elles pas directement, en traversant le condensateur, sur l'autre armature où elles sont en défaut ?

**2 COMPARAISON DE CIRCUITS**

\* (10 min) ► P. 80

Dans un premier circuit, un condensateur de capacité  $C$  est chargé sous une tension  $E$  constante, la résistance totale du circuit étant  $R$ . Dans un second circuit, c'est un condensateur de capacité  $C'$  qui est chargé sous une tension  $E' = \frac{E}{2}$ , la résistance totale du circuit étant  $R' = 2R$ .

Écrire l'expression de  $C'$  en fonction de  $C$ , pour que, *en fin de charge*, on ait :

- les mêmes charges portées par les armatures de  $C$  et  $C'$  ;
- les mêmes intensités dans les deux circuits ;
- la même énergie emmagasinée dans  $C$  et  $C'$  ;
- la même tension aux bornes de  $C$  et  $C'$  ;
- la même constante de temps lors des charges de  $C$  et  $C'$ .

Ces cinq questions sont indépendantes.

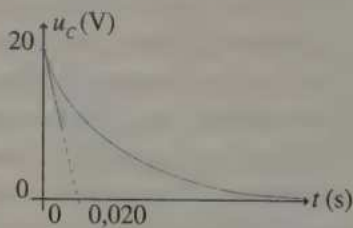
**3 ÉNERGIES LORS D'UNE DÉCHARGE**

\* (10 min) ► P. 81

La figure ci-contre représente les variations de la tension aux bornes d'un condensateur lors de sa décharge dans une résistance de valeur  $R = 20 \Omega$ .

Calculer les énergies maximale et minimale emmagasinées dans ce condensateur lors de sa décharge.

(On peut commencer par déterminer  $\tau$ , puis en déduire  $C$ .)

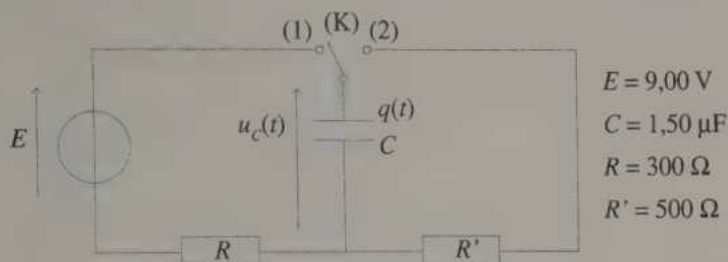
**4 CONSTANTE DE TEMPS D'UN CIRCUIT RC**

\* (10 min) ► P. 81

- Citer trois propriétés utilisant la constante de temps  $\tau$  d'un circuit RC soumis à un échelon de tension (circuit RC, dans le cas où l'on ferme l'interrupteur à  $t = 0$  s).
- Écrire la relation donnant la valeur de  $\tau$  en fonction des paramètres du circuit  $R$  et  $C$ .
- Montrer que  $\tau$  est homogène à une durée.
- Si la résistance totale du circuit RC double, que devient  $\tau$  ?

## 5 UTILISATION DE L'ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE \* (15 min) ► P. 81

1. Un condensateur est chargé dans le circuit suivant ; le commutateur (K) est basculé en position (1).



a. Écrire l'équation différentielle de la charge du condensateur, pour la fonction  $q(t)$ , en fonction des paramètres du circuit.

b. À l'aide d'un voltmètre, on constate qu'après une certaine durée,  $u_c(t)$  est une constante. En utilisant l'équation différentielle précédente, et sans l'intégrer, calculer la valeur limite de  $q(t)$ , notée  $q_1$ .

c. Préciser la durée approximative permettant d'avoir  $q(t) \approx \text{cte}$ .

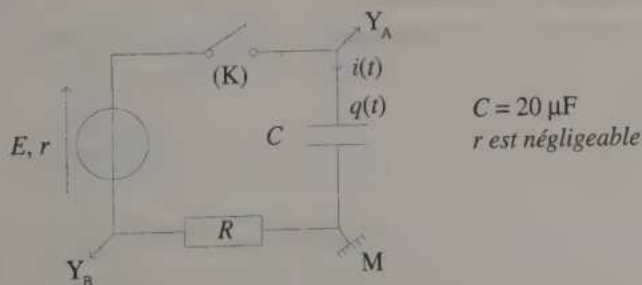
2. Le condensateur est à présent déchargé dans ce circuit, le commutateur (K) étant basculé en position (2).

La même observation étant faite, répondre aux mêmes questions que précédemment (la charge finale sera notée  $q_2$ ).

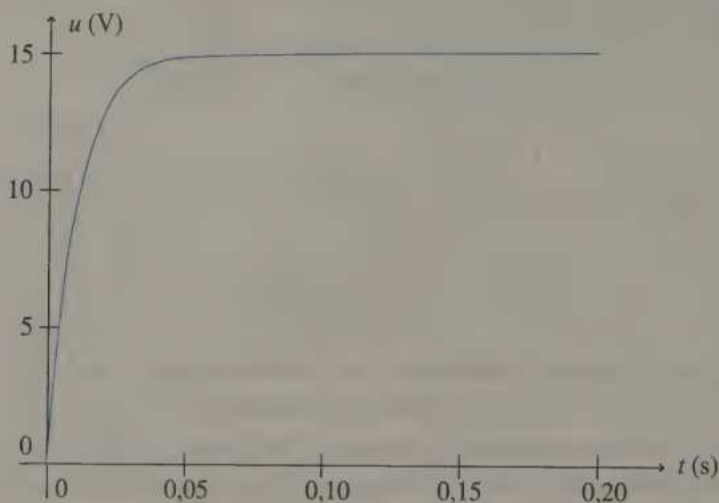
## EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

## 6 COURBE DE CHARGE \*\* (15 min) ► P. 82

On charge un condensateur initialement déchargé à l'aide du circuit suivant, en fermant l'interrupteur (K) à  $t = 0 \text{ s}$  :



On reproduit ci-dessous l'oscillogramme obtenu sur l'une des deux voies A ou B :

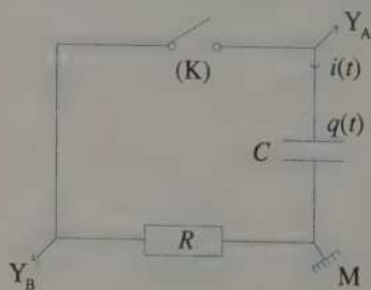


1. Quelle particularité présente l'oscilloscope utilisé ?
2. S'agit-il de la voie A ou de la voie B ? Justifier la réponse.
3. Lire la valeur de  $E$  en expliquant la méthode utilisée.
4. Lire, par deux méthodes, la valeur de la constante de temps.
5. Après avoir comparé les résultats avec plusieurs de vos camarades, indiquer la méthode qui semble la plus rigoureuse. Expliquer pourquoi.
6. En déduire la valeur  $R$ .
7. Tracer l'allure des oscillogrammes obtenus si l'on doublait :
  - a. la capacité du condensateur ;
  - b. la résistance totale ;
  - c. la f.e.m.  $E$  du générateur.

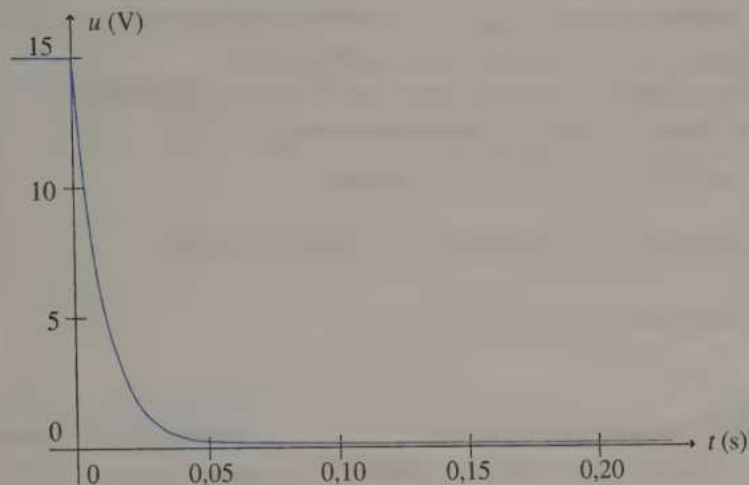
### **1** COURBE DE DÉCHARGE

\*\* (15 min) ► P. 83

Un condensateur, initialement sous  $U_0$ , est déchargé dans le circuit suivant en fermant l'interrupteur (K) à  $t = 0$  s :



Reprendre alors les questions de l'exercice précédent en remplaçant «  $E$  » par «  $U_0$  », avec l'oscillogramme ci-dessous :



### 8 CHARGE DE C : LE CLASSIQUE (1)

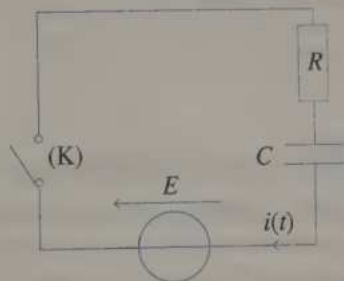
\*\* (40 min) ► p. 84

Un condensateur initialement déchargé est placé dans le circuit ci-contre.

Données :  $E = 12,0 \text{ V}$  ;

$R = 1,5 \times 10^2 \Omega$  ;  $C = 3,42 \text{ mF}$ .

À  $t = 0 \text{ s}$ , on ferme l'interrupteur (K).



- Placer  $q(t)$  et  $-q(t)$ , les charges du condensateur, et donner la relation reliant  $q(t)$  et  $i(t)$  étudiée en cours.
- Représenter les tensions  $u_C(t)$  et  $u_R(t)$ , respectivement aux bornes du condensateur et du conducteur ohmique, avec la convention récepteur.
- En appliquant la loi d'additivité des tensions, en déduire l'équation différentielle vérifiée par  $q(t)$ .
- Rappeler la propriété de la fonction  $q(t)$  (propriété mathématique). Donner l'explication physique qui a conduit à cette propriété mathématique.
- Vérifier que  $q(t) = Ae^{\alpha t} + B$  est solution de l'équation différentielle précédente, et en déduire les valeurs de  $B$  et  $\alpha$ .

6. En utilisant la propriété de la question 4., déterminer  $A$ , puis écrire  $q(t)$  en fonction de  $E$ ,  $R$ ,  $C$  et  $t$ .
7. En déduire  $u_C(t)$ ,  $i(t)$ ,  $u_R(t)$  en fonction des mêmes paramètres.
8. Représenter  $q(t)$ ,  $i(t)$ ,  $u_R(t)$ ,  $u_C(t)$ , et commenter chacune de ces courbes d'un point de vue physique (et non mathématique).
9. Que remarque-t-on quant aux signes de  $u_C(t)$  et  $i(t)$ ? Conclure.
10. Même question que la précédente pour  $u_R(t)$  et  $i(t)$ .
11. a. Calculer  $q_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} q(t)$ . Commenter.
- b. Calculer  $\frac{q(t)}{q_\infty}$  aux instants  $\tau = \frac{1}{-\alpha}$ ;  $4\tau$ ;  $5\tau$ . Conclure.
- c. À quel instant aura-t-on  $\frac{q(t)}{q_\infty} = 90\%$  ?

**9** DÉCHARGE DE  $C$  : LE CLASSIQUE (2) \*\* (40 min) ► P. 86

Le condensateur de l'exercice précédent étant chargé ( $q(t) = q_0 = C \cdot E$ ), on ouvre (K). On remplace le générateur par un fil de résistance négligeable, et on ferme l'interrupteur (K) à une date prise comme nouvelle origine des temps ( $t = 0$  s à cet instant, pour cet exercice).

Reprendre alors l'exercice précédent, en remplaçant dans la question 11.  $\frac{q(t)}{q_\infty}$  par  $\frac{q(t)}{q_0}$  et 0,9 par 0,1.

**10** LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES \*\* (20 min) ► P. 88

Un condensateur de capacité  $C$  est chargé dans un circuit comprenant un conducteur ohmique de résistance  $R$  et un générateur de tension de force électromotrice  $E$  et de résistance interne  $r$ .

1. Écrire l'équation différentielle caractérisant cette charge en utilisant les paramètres  $C$ ,  $E$ ,  $R$ ,  $r$ , d'une part, et la fonction suivante (et ses dérivées), d'autre part :

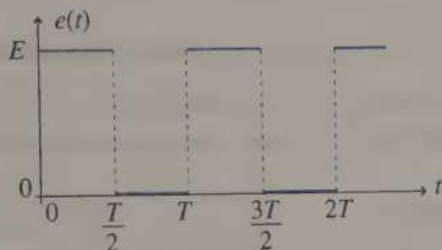
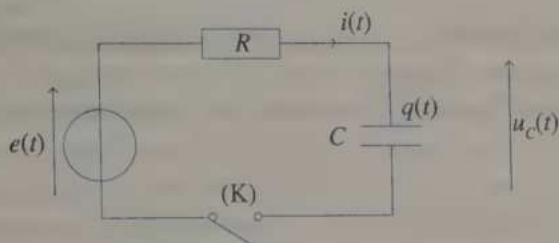
- $q(t)$ , la charge du condensateur ;
- $u_C(t)$ , la tension aux bornes du condensateur ;
- $i(t)$ , l'intensité dans le circuit ;
- $u_R(t)$ , la tension aux bornes de la résistance.

Remarque :  $q(t)$  et  $i(t)$  sont orientées classiquement (cf. Cours) ; de même pour  $u_R(t)$  et  $u_C(t)$  (c'est-à-dire en convention récepteur).

2. Comparer ces équations et conclure.

**11** GÉNÉRATEUR DE TENSION EN CRÉNEAUX \*\* (20 min) ► P. 88

Un condensateur est relié à un générateur de tension « en créneaux », de période  $T$  :



L'interrupteur est fermé à  $t = 0$  s, le condensateur étant initialement déchargé.

Données :  $C = 0,33$  mF ;  $E = 6,0$  V ;  $R = 3,0$  k $\Omega$ .

- Pour  $t \in [0 ; \frac{T}{2}]$ , expliquer pourquoi on peut considérer que l'étude de  $u_c(t)$  se ramène à celle de la charge d'un condensateur dans un circuit RC (soumis à un échelon de tension).  
Calculer alors la valeur minimale (approximative) de  $T$  qui permet de considérer que le régime permanent est atteint à la fin de cette période.
- Pour  $t \in [\frac{T}{2} ; T]$ , reprendre les questions précédentes, adaptées à la décharge du condensateur.
- Représenter alors  $u_c(t)$ , puis  $i(t)$  pour une durée de quelques périodes, si  $T = 20$  s.

## EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

**12** ERREUR À TROUVER \*\* (1 min ou 1 heure) ► P. 89

On lit sur la copie d'Ursule :

« L'équation différentielle de la charge d'un condensateur est :

$$\dot{q}(t) + \frac{q(t)}{R \cdot C} = \frac{E}{R}.$$

En cherchant une solution de la forme  $q(t) = Ae^{\omega t} + B$ , on trouve :

$$q(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{RC}} + C \cdot E.$$

On en déduit  $i(t) = \dot{q}(t) = -\frac{A}{R \cdot C} e^{-\frac{t}{RC}}$ . Sachant qu'initialement  $i(t=0) = 0$ ,

on obtient  $A = 0$ . Donc,  $i(t)$  est nul à tout instant ».

Il sait que sa conclusion est fautive : aidez-le à retrouver son erreur.

**13** CHARGE ET DÉCHARGE \*\*\* (15 min) ► P. 89

Un condensateur initialement déchargé est placé, pendant une durée  $\tau$  (constante de temps du circuit), dans un circuit de charge comprenant un générateur de tension  $E$  et un conducteur ohmique de résistance  $R$ . Il est ensuite déchargé à l'aide de la même résistance, pendant la même durée. Calculer son énergie à cet instant.

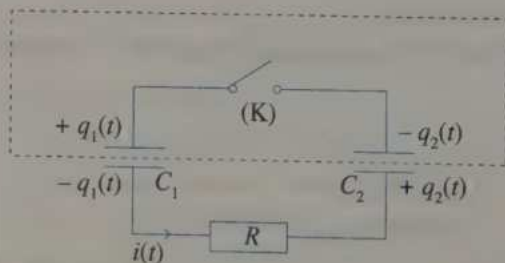
Données :  $E = 0,20 \text{ V}$  ;  $C = 30 \text{ nF}$  ;  $R = 0,10 \Omega$  (résistance de charge et de décharge).

**14** DÉCHARGE D'UN CONDENSATEUR DANS UN AUTRE \*\*\* (60 min) ► P. 89

À  $t = 0 \text{ s}$ , on ferme l'interrupteur du circuit ci-dessous.

Initialement, on avait  $q_1(t < 0) = Q = 2,0 \times 10^{-3} \text{ C}$  et  $q_2(t < 0) = 0 \text{ C}$ .

Données :  $C_1 = 100 \mu\text{F}$  ;  $C_2 = 300 \mu\text{F}$  ;  $R = 2,0 \times 10^5 \Omega$ .



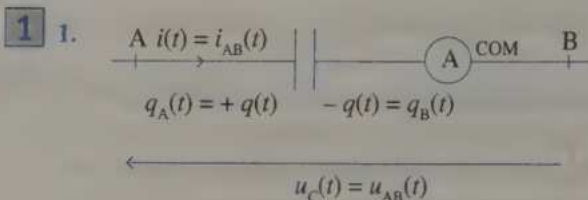
1. **a.** Écrire les relations liant  $q_1(t)$  et  $i(t)$ , puis  $q_2(t)$  et  $i(t)$ .
- b.** En déduire une relation entre les dérivées de  $q_1(t)$  et  $q_2(t)$ , puis entre  $q_1(t)$  et  $q_2(t)$  (sans dérivées).
2. **a.** Expliquer pourquoi la charge totale de la zone délimitée par les pointillés se conserve.
- b.** Retrouver alors la relation entre  $q_1(t)$  et  $q_2(t)$  obtenue en 1.b.
3. **a.** Écrire l'équation différentielle vérifiée par  $q_1(t)$ .
- b.** En déduire  $q_1(t)$ , puis  $q_2(t)$  en fonction de  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $R$ ,  $Q$  et  $t$ .
- c.** Décrire l'état final atteint par le système. Commenter.
4. **a.** Montrer que la variation d'énergie totale du circuit lors de cette décharge est :

$$\Delta E = -\frac{C_2 Q^2}{2C_1(C_1 + C_2)}$$

La calculer et commenter.

- b.** Que peut-on dire si  $R = 0$  ?

## CORRIGÉS



2.  $q(t) = C \cdot u_C(t)$  et  $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ , d'où  $i(t) = C \frac{du_C(t)}{dt}$

3. a.  $i(t) < 0$  et  $i(t)$  est dirigé de A vers B, donc le sens réel de  $i(t)$  (c'est-à-dire le sens dans lequel il serait positif) est de B vers A.

b. Les porteurs de charges sont des électrons.

c. Les électrons se déplacent dans le sens inverse du sens réel du courant, donc d'après a., de A vers B.

d. Si  $q(t) = \text{cte}$ , alors  $i(t) = 0$ ; donc  $q(t) \neq \text{cte}$ .

e.  $u_C(t) = \frac{q(t)}{C}$  donc  $u_C(t) \neq \text{cte}$ .

f. Cf. 1.

4. a. b. Cf. 1.

c. Cf. 1.  $i_{AB}(t) = i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{dq_A(t)}{dt} = -\frac{dq_B(t)}{dt}$

soit :  $i_{AB}(t) = \frac{dq_A(t)}{dt}$  et  $i_{AB}(t) = -\frac{dq_B(t)}{dt}$

d.  $-q_B(t) = q_A(t) = q(t) = C \cdot u_C(t) = C \cdot u_{AB}(t)$

soit :  $q_A(t) = C \cdot u_{AB}(t)$  et  $q_B(t) = -C \cdot u_{AB}(t)$

5. La présence du diélectrique (isolant électrique) entre les armatures du condensateur empêche leur libre circulation directe : les électrons doivent « faire le tour », en passant par le reste du circuit.

2 a.  $q'_m = q_m \Rightarrow C' \cdot E' = C \cdot E \Rightarrow C' \frac{E}{2} = C \cdot E \Rightarrow C' = 2C$ .

b.  $i'_m = 0$  et  $i_m = 0$  (fin de charge dans un circuit RC)  
donc  $i'_m = i_m$  quel que soit  $C'$ .

c.  $E_{C'm} = E_{C_m} \Rightarrow \frac{(q'_m)^2}{2C'} = \frac{q_m^2}{2C} \Rightarrow \frac{(C' \cdot E)^2}{2C'} = \frac{(C \cdot E)^2}{2C}$

$\Rightarrow C' \cdot E^2 = C \cdot E^2 \Rightarrow C' \left(\frac{E}{2}\right)^2 = C \cdot E^2 \Rightarrow C' = 4C$ .

d.  $u_{C'm} = u_{C_m} \Rightarrow E' = E \Rightarrow \frac{E}{2} = E \Rightarrow \text{impossible}$ .

e.  $\tau' = \tau \Rightarrow R' \cdot C' = R \cdot C \Rightarrow 2R \cdot C' = R \cdot C \Rightarrow C' = \frac{C}{2}$ .

3 Avec la méthode de la tangente, on lit  $\tau = 0,020$  s.

On en déduit  $C = \frac{\tau}{R}$ , puis  $E_C = \frac{C}{2} u_C^2$  et :

•  $E_{C, \min} = 0$  J (lorsque  $u_C = 0$ ) ;

•  $E_{C, \max} = \frac{C}{2} u_{C, \max}^2 = \frac{\tau}{2R} u_{C, \max}^2$ .

A.N. :  $E_{C, \max} = \frac{0,020}{2 \times 20} \times 20^2 = 0,20$  J.

4 1. ① À  $t = \tau$ ,  $q(t) = 63\% \times q_\infty = 0,63 C \cdot E$

② La tangente à l'origine à la courbe représentant  $q(t)$ , coupe l'asymptote horizontale  $q = q_\infty = C \cdot E$  en  $t = \tau$ .

③ À  $t = 4\tau$  ou  $5\tau$ ,  $q(t) \approx q_\infty$

2.  $\tau = R \cdot C$

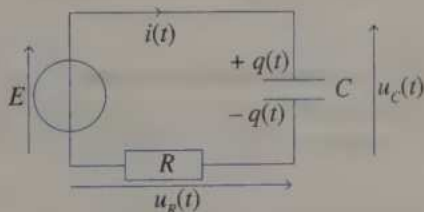
3. On utilise  $R = \frac{u}{i}$ ,  $C = \frac{q}{u}$  et  $i = \frac{dq}{dt}$ .

Équation aux dimensions :

$$[\tau] = [R] [C] = \frac{[u]}{[i]} \times \frac{[q]}{[u]} = \frac{[q]}{[dq]} = \frac{[q]}{[q]} [t] = T \quad \text{C.Q.F.D.}$$

4. Si  $R$  double, alors  $\tau$  double.

5 1. La maille de droite étant ouverte, aucun courant n'y circule, on ne considère donc que la maille de gauche :



a.  $u_R(t) + u_C(t) = E$  soit  $Ri(t) + \frac{q(t)}{C} = E$ , or comme  $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$  on a :

$$R \frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = E \quad (1)$$

b.  $u_C(t) = \text{cte}$ , donc  $q(t) = C \cdot u_C(t) = \text{cte} = q_1$ , après une certaine durée, donc

$$\frac{dq(t)}{dt} = 0 \text{ et (1) devient : } 0 + \frac{q_1}{C} = E, \text{ soit } q_1 = C \cdot E.$$

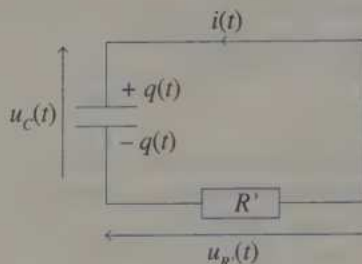
A.N. :  $q_1 = (1,5 \times 10^{-6}) \times 9 = 1,35 \times 10^{-5}$  C.

c. La durée d'établissement du régime permanent est d'environ  $4\tau$  ou  $5\tau$ .  
 $5\tau = 5R \cdot C$ .

A.N. :  $5\tau = 5 \times 300 \times (1,5 \times 10^{-6}) = 2,25 \times 10^{-3} \text{ s} = 2,25 \text{ ms}$ .

Soit **2 ms** puisque c'est une valeur très approximative.

2. On considère cette fois, la maille de droite :



a.  $u_{R'}(t) + u_L(t) = 0$  soit  $R' \cdot i(t) + \frac{q(t)}{C} = 0$  et avec  $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$

$$R' \cdot \frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = 0 \quad (2)$$

b.  $u_C(t) = \text{cte}$ , donc  $q(t) = C \cdot u_C(t) = \text{cte} = q_2$  et  $\frac{dq(t)}{dt} = 0$ .

Donc l'équation (2) devient :  $0 + \frac{q_2}{C} = 0$ , soit  $q_2 = 0 \text{ C}$ .

c. La durée d'établissement du régime permanent est d'environ  $5\tau' = 5R' \cdot C$ .

A.N. :  $5\tau' = 5 \times 500 \times (1,5 \times 10^{-6}) = 3,75 \times 10^{-3} \text{ s} = 3,75 \text{ ms}$

soit **4 ms** puisque c'est une valeur très approximative.

**6** 1. Il faut utiliser un **oscilloscope à mémoire** (ou un autre système d'acquisition, comme un ordinateur, avec l'électronique adéquat). Les oscilloscopes « classiques » ne fonctionnent qu'avec des phénomènes périodiques.

2. Il s'agit de la **voie A** (cf. Cours), avec  $u_{AM}(t) = \frac{q(t)}{C}$ .

S'il s'agissait de  $Y_B$ , en régime permanent ( $t \rightarrow \infty$ ),  $q(t) = \text{cte}$ ,

donc  $i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = 0$ , d'où  $u_{BM}(t \rightarrow \infty) = -R \cdot i(t)$  serait nulle.

3. Si  $t \rightarrow \infty$ , alors  $q(t) = \text{cte}$ , donc  $u_{BM} = -R \cdot i(t) = 0$ .

D'où la loi d'additivité des tensions :

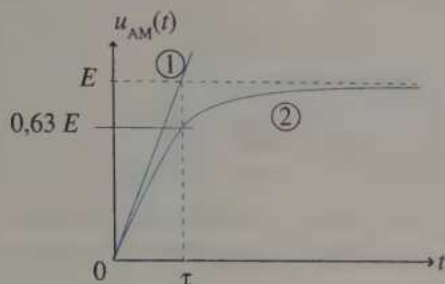
$u_{BM} + u_{MA} + u_{AB} = 0$  devient :

$$0 - u_{AM}(t \rightarrow \infty) + E = 0$$

Donc  $E = u_{AM}(t \rightarrow \infty)$ . On lit  $E \approx 15 \text{ V}$ .

4. ① Méthode de la tangente à l'origine qui coupe l'asymptote en  $t = \tau$ .

②  $u_C(t = \tau) = 63 \% \times u_C(t \rightarrow \infty) = 0,63 \times E \approx 9,5 \text{ V}$ .



On lit :  $\tau \approx 0,01 \text{ s}$

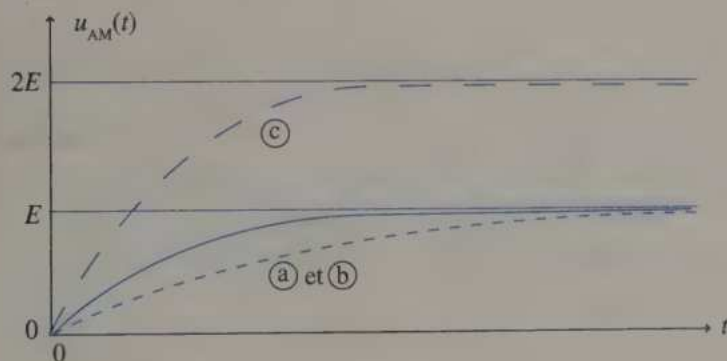
5. Le tracé de la tangente est toujours approximatif. La méthode des « 63 % » est préférable.

6.  $\tau = R \cdot C$  soit  $R = \frac{\tau}{C}$ .

A.N. :  $R = \frac{0,01}{20 \times 10^{-6}} = 5,00 \times 10^2 \Omega$ .

7. a. et b. Si  $R$  ou  $C$  double,  $\tau$  double.

c. Si  $E$  double, l'asymptote est  $u_C(t) = 2E$ .



7 1. Cf. exercice 6.

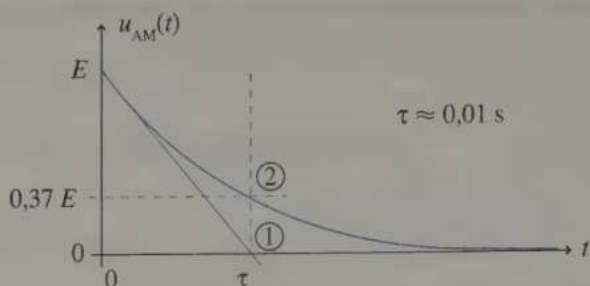
2. Sans générateur,  $u_{AM}(t) = u_{BM}(t)$ , donc l'oscillogramme représente les deux voies (qui n'en font qu'une :  $A \equiv B$ ).

3.  $U_0 = u_C(t=0) = u_{AM}(t=0) = 15 \text{ V}$  (par lecture graphique).

4. Comme à l'exercice 6 :

① tangente à l'origine ;

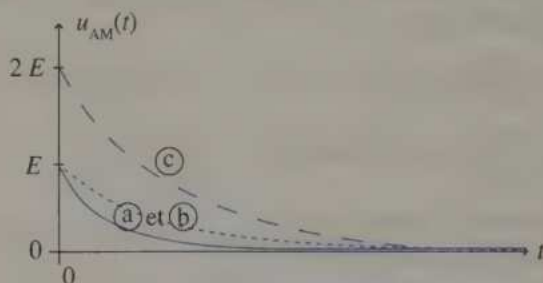
② méthode des « 37 % » ( $100 \% - 63 \% = 37 \%$ ).



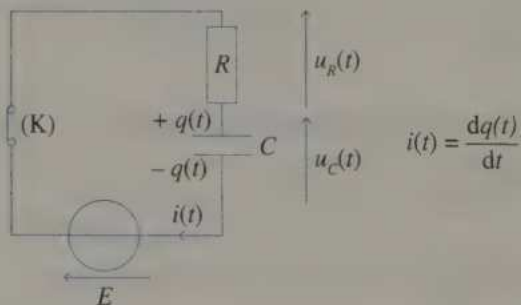
5. et 6. Cf. exercice 6. La méthode des « 37 % » est préférable.

7. a. et b. Cf. exercice 6.

c. La courbe part de la valeur  $2E$ .



3 1. et 2.



3.  $u_R(t) + u_C(t) = E$  soit  $Ri(t) + \frac{q(t)}{C} = E$  et, d'après la question 1. :

$$R \frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = E \quad (1)$$

4. •  $q(t)$  est une fonction continue de  $t$  (dans une branche avec  $C$ ),

•  $q(t)$  ne peut varier que de façon continue dans une branche avec un condensateur (fonction « sans saut ») : le condensateur doit se « remplir » progressivement.

5.  $q(t) = A \cdot e^{\alpha t} + B$  donc  $\frac{dq(t)}{dt} = A \cdot \alpha \cdot e^{\alpha t}$ ; (1) devient :

$$R \cdot A \cdot \alpha \cdot e^{\alpha t} + \frac{1}{C} (A \cdot e^{\alpha t} + B) = E$$

$$A \cdot e^{\alpha t} \left( R\alpha + \frac{1}{C} \right) + \left( \frac{B}{C} - E \right) = 0$$

fonction de  $t$                       fonction  
indépendante de  $t$

Cette égalité n'est possible, quel que soit  $t$ , que si ces deux termes sont nuls, et comme  $e^{\alpha t} \neq 0$  :

$$\begin{cases} R\alpha + \frac{1}{C} = 0 \\ \frac{B}{C} - E = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{1}{R \cdot C} \\ B = C \cdot E \end{cases}$$

$$i(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{RC}} + CE$$

6. Continuité de  $q(t)$  en  $t = 0$  :  $q(t = 0^-) = q(t = 0^+)$  soit :

$0 = A \cdot e^0 + C \cdot E$ , donc  $A = -C \cdot E$  et :

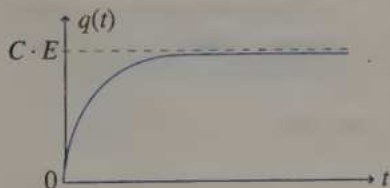
$$q(t) = C \cdot E \left( 1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) = C \cdot E \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \text{ avec } \tau = \frac{1}{R \cdot C}$$

$$7. u_c(t) = \frac{q(t)}{C} = E \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

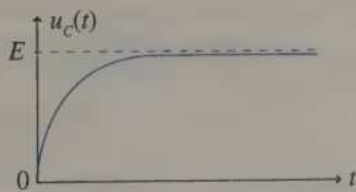
$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C \cdot E \left[ 0 - e^{-\frac{t}{RC}} \times \left( -\frac{1}{RC} \right) \right] = \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u_R(t) = R \cdot i(t) = E \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

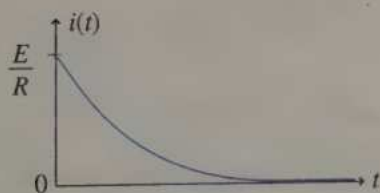
8. Allure des courbes :



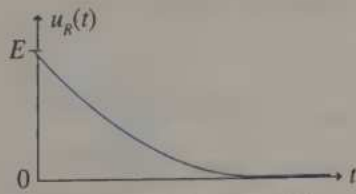
Le condensateur se « remplit ».



Mêmes variations que  $q(t)$ .



Le débit des charges diminue et s'annule à la fin du remplissage.



Mêmes variations que  $i(t)$   
car  $u_R = Ri$ .

9.  $u_C(t)$  et  $i(t)$  sont de même signe (positif), donc le condensateur se comporte bien comme la convention choisie (convention récepteur  $u_C(t)$  et  $i(t)$  étant de sens opposés) : **le condensateur se comporte comme un récepteur.**

10. Même remarque pour  $u_R(t)$  et  $i(t)$ . De plus, **une résistance se comporte toujours comme un récepteur.**

11. a.  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\frac{t}{\tau}} = 0$  (car  $\tau > 0$ ), donc  $q_{\infty} = C \cdot E = 4,10 \times 10^{-2} \text{ C}$ .

b.  $\frac{q(t)}{q_{\infty}} = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$ , d'où  $\frac{q(\tau)}{q_{\infty}} = 1 - \frac{1}{e} \approx 0,632$ ;  $\frac{q(4\tau)}{q_{\infty}} = 1 - \frac{1}{e^4} \approx 0,982$ ;

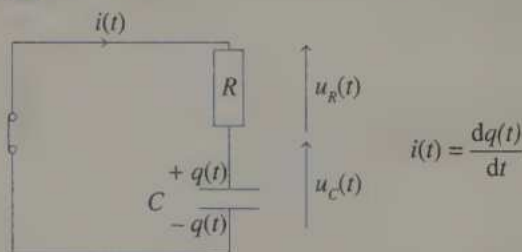
$\frac{q(5\tau)}{q_{\infty}} = 1 - \frac{1}{e^5} \approx 0,993$ .

c.  $\frac{q(t)}{q_{\infty}} = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} = 0,9$  soit  $e^{-\frac{t}{\tau}} = 0,1$ .

$-\frac{t}{\tau} = \ln 0,1$  et  $t = -\tau \ln 0,1 = -R \cdot C \cdot \ln 0,1$ .

A.N. :  $t = -150 \times (3,42 \times 10^{-3}) \ln 0,1 = 1,18 \text{ s}$ .

9 1. et 2.



3.  $u_R(t) + u_C(t) = 0$ , soit  $R \cdot i(t) + \frac{q(t)}{C} = 0$  et en utilisant la question 1. :

$$R \frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = 0 \quad (1)$$

4. Cf. exercice 8.

5. Comme à l'exercice 8, on obtient :  $A \cdot e^{\alpha t} \left( R\alpha + \frac{1}{C} \right) + \frac{B}{C} = 0$

$$\text{d'où :} \quad \begin{cases} R\alpha + \frac{1}{C} = 0 \\ \frac{B}{C} = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} \alpha = -\frac{1}{R \cdot C} \\ B = 0 \end{cases}$$

$$q(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{RC}}$$

6. Continuité de  $q(t)$  en  $t = 0$  (nouvelle origine des temps) :

$$q(t = 0^-) = q(t = 0^+), \text{ soit } q_0 = A \cdot e^0 \text{ donc } A = q_0.$$

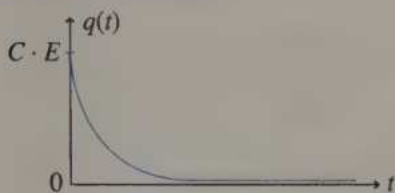
Or  $q_0$  correspond à  $q_m$  de l'exercice 8, soit  $q_0 = CE$ , d'où :

$$q(t) = C \cdot E \cdot e^{-\frac{t}{RC}} = C \cdot E \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \text{ avec } \tau = RC$$

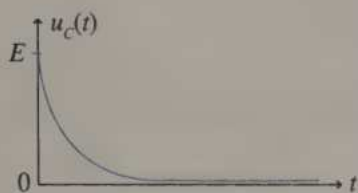
$$7. u_C(t) = \frac{q(t)}{C} = E \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}; \quad i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C \cdot E \cdot e^{-\frac{t}{RC}} \times \left(-\frac{1}{RC}\right) = -\frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

$$u_R(t) = R \cdot i(t) = -E \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

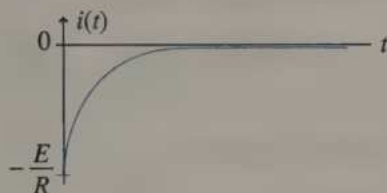
8. Allure des courbes :



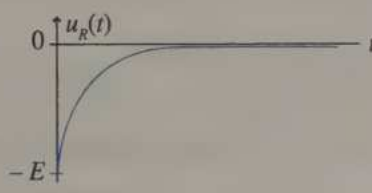
Le condensateur se « vide ».



Mêmes variations que  $q(t)$ .



Le débit d'électrons tend à s'annuler et est en sens inverse de la charge.



Mêmes variations que  $i(t)$ ,  
car  $u_R = R \cdot i$ .

9.  $u_C(t)$  et  $i(t)$  sont de signes opposés, donc le condensateur ne se comporte pas comme la convention choisie (convention récepteur,  $u_C(t)$  et  $i(t)$  étant de même sens) : **le condensateur se comporte comme un générateur.**

10. Cf. exercice 8. ( $u_R(t)$  et  $i(t)$  étant tous deux négatifs.)

11. a.  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\frac{t}{\tau}} = 0$  (car  $\tau > 0$ ), donc  $q_m = 0$ .

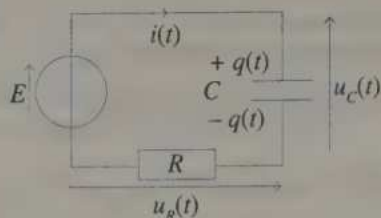
b.  $\frac{q(t)}{q_0} = e^{-\frac{t}{\tau}}$ , donc  $q(\tau) = \frac{1}{e} \approx 0,368$  ;

$q(4\tau) = \frac{1}{e^4} \approx 0,0183$  ;  $q(5\tau) = \frac{1}{e^5} \approx 0,00674$ .

c.  $\frac{q(t)}{q_0} = e^{-\frac{t}{\tau}} = 0,1$  soit  $t = -\tau \ln 0,1 = -R \cdot C \cdot \ln 0,1 = 1,18$  s.

Remarque : Avec la même résistance, les durées de charge et de décharge « à 90 % » sont les mêmes (si la charge perd 90 % de sa valeur initiale, elle est égale à 10 % de  $q_0$ ).

10



1. a.  $u_R(t) + u_C(t) = E$

$$R \cdot i(t) + \frac{q(t)}{C} = E \text{ et } i(t) = \frac{dq(t)}{dt}, \text{ soit : } R \frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = E$$

ou 
$$\frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{R \cdot C} = \frac{E}{R} \quad (1)$$

b.  $q(t) = C \cdot u_C(t)$ , d'où (en divisant par  $C$  ensuite) :

$$\frac{du_C(t)}{dt} + \frac{u_C(t)}{R \cdot C} = \frac{E}{R \cdot C} \quad (2)$$

c.  $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$  : il ne faut avoir que des dérivées de  $q(t)$  (et non  $q(t)$ ).

Dérivons (1) :  $\frac{d}{dt} \left( \frac{dq(t)}{dt} \right) + \frac{1}{R \cdot C} \frac{dq(t)}{dt} = 0$ , soit  $\frac{di(t)}{dt} + \frac{i(t)}{R \cdot C} = 0 \quad (3)$

d.  $i(t) = \frac{u_R(t)}{R}$ , donc (3) donne (en multipliant par  $R$  ensuite) :

$$\frac{du_R(t)}{dt} + \frac{u_R(t)}{R \cdot C} = 0$$

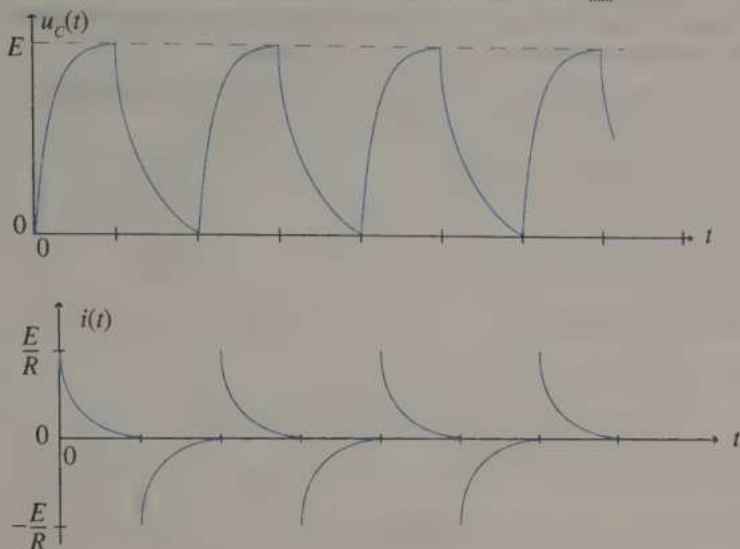
2. Toutes ces équations sont du type  $\frac{df(t)}{dt} + \frac{f(t)}{\tau} = \text{cte}$  (avec  $\tau = R \cdot C$ ), comme celles des circuits RL. Elles admettent des solutions de la forme :  $f(t) = Ae^{\alpha t} + B$  (on peut démontrer que  $\alpha = -\frac{1}{\tau}$  et  $B = \text{cte} \times \tau$  et que  $A$  dépend des conditions initiales et de la continuité en  $t = 0$  d'une de ces fonctions).

11 1. Si  $t \in \left[ 0; \frac{T}{2} \right]$ , alors  $e(t) = E$  et le générateur se comporte comme un générateur de tension constante dans un circuit RC, comme cela a été étudié en cours. Il faut que la durée d'établissement du régime permanent ( $4\tau$  ou  $5\tau$ ) soit inférieure à la durée pendant laquelle  $e(t) = E$ , soit  $5\tau < \frac{T}{2}$  donc  $T > 10\tau = 10R \cdot C$  ;  $T_{\min} = 10R \cdot C$ .

A.N. :  $T_{\min} = 10 \times (3 \times 10^3) \times (0,33 \times 10^{-3}) \approx 10 \text{ s}$ .

2. Mêmes remarques et résultats pour la décharge du condensateur.

3. On reprend alors les résultats du cours (puisque  $T > T_{\min}$ ) :



On vérifie que  $u_C(t)$  est une fonction continue de  $t$  dans le circuit RC.

12

Ursule a considéré que  $i(t)$  était une fonction continue, en écrivant  $i(t=0) = 0$ . C'est le cas en présence d'une bobine, mais ce n'est pas obligatoirement le cas avec un condensateur (en l'occurrence, ici, ce n'est pas le cas). Il aurait dû écrire la continuité de  $q(t)$  à  $t=0$  :  $q(t=0) = 0$ .

☞

Revoir les fonctions continues pour les différents circuits.

13

Après une durée  $\tau$ , la charge est  $q_1 = 63\% \times q_{\max} = 0,63 C \cdot E$ .

Après une décharge de durée  $\tau$ , la charge a diminué de 63% :

$$q_2 = 0,37 \times q_{\text{initiale}} = 0,37 \times q_1 = 0,37 \times 0,63 \times C \cdot E.$$

$$\text{L'énergie finale est donc : } E_{Cf} = \frac{q_2^2}{2C} = \frac{(0,37 \times 0,63 \times C \cdot E)^2}{2C}$$

$$\text{soit : } E_{Cf} = \frac{C}{2} (0,37 \times 0,63 \times E)^2$$

$$\text{A.N. : } E_{Cf} = \frac{30 \times 10^{-9}}{2} (0,37 \times 0,63 \times 0,20)^2 = 3,26 \times 10^{-11} \text{ J.}$$

14

$$1. \text{ a. } i(t) = \frac{dq_1(t)}{dt} \quad (1) \text{ et } i(t) = \frac{dq_2(t)}{dt} \quad (2)$$

$$\text{b. } \frac{dq_1(t)}{dt} = \frac{dq_2(t)}{dt}, \text{ d'où } q_1(t) = q_2(t) + \text{cte.}$$

$$\text{À } t = 0 \text{ s, l'égalité devient : } Q = 0 + \text{cte, donc } q_1(t) = q_2(t) + Q \quad (3).$$

2. a. Les charges ne peuvent pas traverser le diélectrique des condensateurs, (qui est un isolant électrique) donc la charge totale dans la partie délimitée par les pointillés est une constante :  $q_1(t) - q_2(t) = cte$ .

b. À  $t = 0$ , on obtient  $Q - 0 = cte$ , donc  $q_1(t) = q_2(t) + Q$  : on retrouve la relation du 1., souvent nommée « conservation de la charge ».

3. a. Loi d'additivité des tensions :

$$u_{C_1}(t) + u_{C_2}(t) + u_R(t) = 0$$

$$\frac{q_1(t)}{C_1} + \frac{q_2(t)}{C_2} + R \cdot i(t) = 0$$

Avec (1) et (3) on obtient :

$$\frac{q_1(t)}{C_1} + \frac{q_1(t) - Q}{C_2} + R \frac{dq_1(t)}{dt} = 0$$

$$\frac{dq_1(t)}{dt} + \frac{1}{R} \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right) q_1(t) = \frac{Q}{R \cdot C_2}$$

$$\frac{dq_1(t)}{dt} + \frac{q_1(t)}{\tau} = \frac{Q}{R \cdot C_2} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{\tau} = \frac{1}{R} \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \right)$$

b. D'après le cours (de mathématiques) l'équation  $\frac{df(t)}{dt} + af(t) = b$  admet comme solution  $f(t) = cte \times e^{-at} + \frac{b}{a}$ .

Ici,  $a = \frac{1}{\tau}$  et  $b = \frac{Q}{R \cdot C_2}$ , soit :

$$q_1(t) = cte \times e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{Q \cdot \tau}{R \cdot C_2} = cte \times e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{C_1 \cdot Q}{C_1 + C_2}$$

De plus  $q_1(t)$  est continue, donc  $q_1(t=0) = Q$ , donc  $Q = cte + \frac{C_1 \cdot Q}{C_1 + C_2}$ ,

$$\text{soit } cte = \frac{C_2 \cdot Q}{C_1 + C_2}.$$

$$\text{D'où : } q_1(t) = \frac{Q}{C_1 + C_2} \left( C_2 e^{-\frac{t}{\tau}} + C_1 \right)$$

$$\text{et : } q_2(t) = q_1(t) - Q = \frac{C_2 \cdot Q}{C_1 + C_2} \left( e^{-\frac{t}{\tau}} - 1 \right).$$

$$\text{c. État final : } \lim_{t \rightarrow \infty} q_1(t) = \frac{C_1 \cdot Q}{C_1 + C_2} = q_{1\infty}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} q_2(t) = \frac{-C_2 \cdot Q}{C_1 + C_2} = q_{2\infty}$$

La charge totale  $Q$  se répartit sur les deux condensateurs au prorata des valeurs des capacités  $C_1$  et  $C_2$ .

$$\begin{aligned}
 4. \text{ a. } \Delta E &= E_f - E_i \\
 &= (E_{C1} + E_{C2})_f - (E_{C1} + E_{C2})_i \\
 &= \left( \frac{q_1^2}{2C_1} + \frac{q_2^2}{2C_2} \right) - \left( \frac{Q^2}{2C_1} + 0 \right) \\
 &= \frac{Q^2}{2} \left[ \frac{C_1}{(C_1 + C_2)^2} + \frac{C_2}{(C_1 + C_2)^2} - \frac{1}{C_1} \right] \\
 &= \frac{Q^2}{2C_1(C_1 + C_2)^2} [C_1^2 + C_1 C_2 - (C_1 + C_2)^2] \\
 &= \frac{-C_2 \cdot Q^2}{2C_1(C_1 + C_2)}
 \end{aligned}$$

$$\text{A.N. : } \Delta E = \frac{-(300 \times 10^{-6})(2 \times 10^{-3})^2}{2(100 \times 10^{-6})(400 \times 10^{-6})} = -1,50 \times 10^{-2} \text{ J.}$$

$\Delta E < 0$ , le système cède de l'énergie au milieu extérieur (perdue par **effet Joule** dans la résistance).

**b.** Si  $R = 0$ ,  $\Delta E$  donne le même résultat. Toutefois, on ne sait pas comment cette énergie a pu disparaître puisqu'il n'y a plus de résistance : c'est une modélisation excessive.

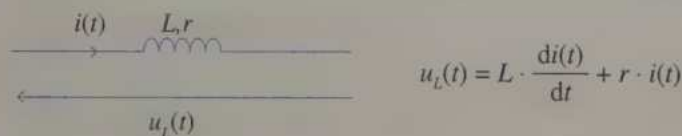


## 7

## Dipôle RL

## I LA BOBINE

## 1. Représentation et relation en convention récepteur



- $i(t)$  : débit de charge ou intensité du courant, en ampère (A).
- $u_L(t)$  : tension aux bornes de la bobine, en volt (V).
- $L$  : inductance de la bobine, en henry (H).
- $r$  : résistance interne de la bobine, en ohm ( $\Omega$ ).

## 2. Énergie emmagasinée par la bobine

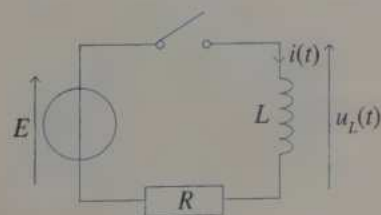
$$E_L(t) = \frac{1}{2} L \cdot i^2(t) \quad E_L(t) \text{ en joule (J)}$$

## 3. Remarques

- $i(t)$  et  $E_L(t)$  sont des **fonctions continues** dans la branche contenant  $L$ .
- Souvent, on considère que  $r$  est nulle (ce sera le cas dans le § II).
- La bobine s'oppose aux variations de courant du circuit où elle se trouve (ceci est dû aux phénomènes d'auto-induction).

## II DIPÔLE RL

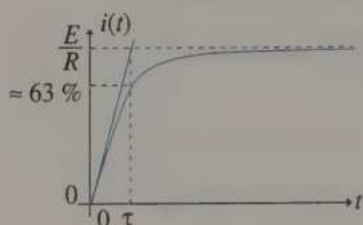
## 1. Établissement du courant



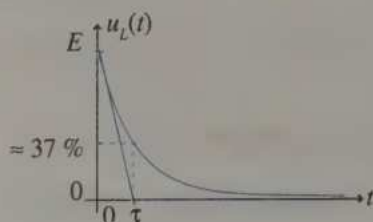
- Le courant est initialement nul :  $i(t=0) = 0$  A.
- À  $t = 0$  s, on ferme l'interrupteur.
- $\tau = \frac{L}{R}$  : constante de temps du dipôle RL (en s).

$$\bullet \frac{di(t)}{dt} + \frac{i(t)}{\tau} = \frac{E}{L} \quad \text{d'où :}$$

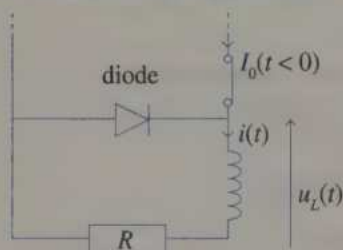
$$i(t) = \frac{E}{R} (1 - e^{-\frac{t}{\tau}})$$



$$u_L(t) = E \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$



## 2. Annulation du courant



- Le courant est initialement :

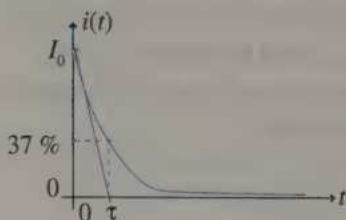
$$i(t=0) = I_0 > 0.$$

- À  $t = 0$  s, on ouvre l'interrupteur.

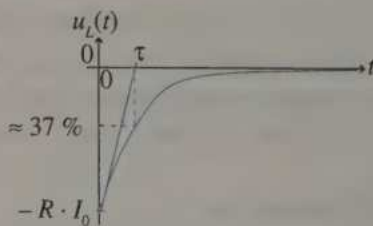
- $\tau = \frac{L}{R}$  : constante de temps du dipôle RL (en s).

$$\bullet \frac{di(t)}{dt} + \frac{i(t)}{\tau} = 0 \quad \text{d'où :}$$

$$i(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$



$$u_L(t) = -R \cdot I_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$



## 3. Remarques

- Après une durée de l'ordre de  $5\tau$ , le régime permanent est atteint.

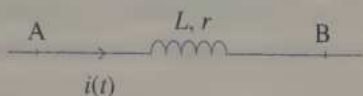
- $I_0 = \frac{E}{R}$  si le circuit où circule  $I_0$  ne comporte qu'un générateur de tension (de valeur  $E$ ).

## EXERCICES D'APPLICATION

## 1 GÉNÉRALITÉS

\* (15 min) ► P. 106

Soit la bobine ci-contre, placée dans un circuit (non représenté) :



- Représenter  $u_L(t)$ , la tension aux bornes de la bobine, en convention récepteur.
- Écrire la relation reliant  $u_L(t)$  et  $i(t)$ .
- On suppose que, pendant une certaine durée, on a  $i = -0,123$  A.
  - Quel est alors le sens réel du courant : de A vers B ou de B vers A ?
  - Quelle est la nature des porteurs de charges qui se déplacent ?
  - Quel est alors le sens de déplacement des porteurs de charges ?
  - Peut-on dire que  $u_L(t)$  est constante ? Expliquer.
  - Représenter (sur le schéma du 1.) l'ampèremètre qui permettrait cette mesure (indiquer sa borne COM en particulier).
- Représenter  $u_{AB}(t)$ . Écrire la relation entre  $u_{AB}(t)$  et  $u_L(t)$ .
  - Représenter  $i_{AB}(t)$ , qui est orienté de A vers B. Écrire la relation entre  $i_{AB}(t)$  et  $i(t)$ .
  - Écrire la relation entre  $u_{AB}(t)$  et  $i_{AB}(t)$ .
- Représenter le schéma équivalent de la bobine en faisant apparaître une inductance pure (c'est-à-dire sans résistance interne).
- Comment se comporte la bobine en régime permanent, c'est-à-dire lorsque  $i(t) = \text{cte}$  ? Par quoi peut-on alors la remplacer ?
- On suppose que  $r = 0 \Omega$ .  
À quelle(s) condition(s)  $|u_L(t)|$  sera-t-elle élevée ?
- Que se passe-t-il si on place un noyau de fer doux dans la bobine ?

## 2 COMPARAISON DE CIRCUITS

\* (10 min) ► P. 107

Dans un premier circuit, le courant est établi en présence d'une bobine d'inductance  $L$  et de résistance négligeable avec un générateur de tension constante  $E$  ; la résistance totale du circuit est  $R$ .

Dans un second circuit, c'est une bobine d'inductance  $L'$  qui est utilisée avec un générateur de tension  $E' = \frac{E}{2}$ , la résistance totale du circuit étant  $R' = 2R$ .

Écrire l'expression de  $L'$  en fonction de  $L$  pour que, en fin d'établissement de l'intensité, on ait :

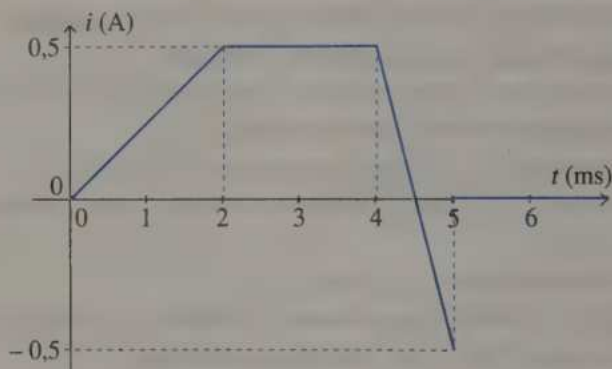
- la même intensité circulant dans  $L$  et  $L'$  ;
- la même énergie emmagasinée dans  $L$  et  $L'$  ;
- la même tension aux bornes de  $L$  et  $L'$  ;
- la même constante de temps lors des établissements de l'intensité dans  $L$  et  $L'$ .

Les quatre questions sont indépendantes.

### 3 INDUCTION

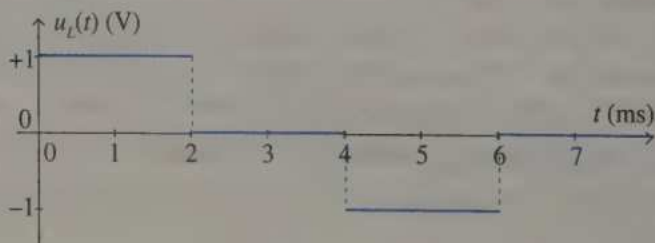
\* (15 min) ► P. 107

1. Une bobine d'inductance  $L = 0,10$  H est traversée par un courant d'intensité  $i(t)$  :



En négligeant la résistance interne  $r$  de la bobine, représenter la tension aux bornes de celle-ci en fonction du temps.

2. Réciproquement, on donne maintenant  $u_L(t)$ . En déduire  $i(t)$  sachant que  $i(t = 0) = 0$  A (on garde  $L = 0,10$  H).

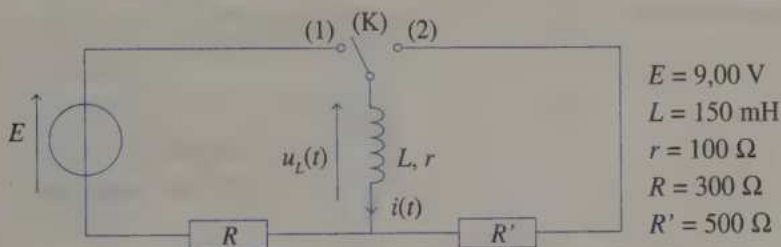


#### 4. CONSTANTE DE TEMPS D'UN CIRCUIT RL \* (10 min) ► P. 108

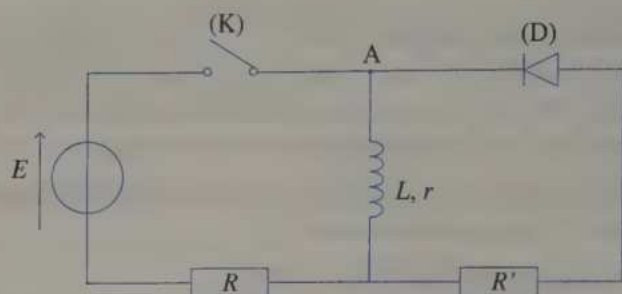
1. Citer trois propriétés utilisant la constante de temps  $\tau$  d'un circuit RL soumis à un échelon de tension (circuit RL, dans le cas où on ferme l'interrupteur à  $t = 0$ ). On néglige la résistance de la bobine.
2. Écrire la relation donnant la valeur de  $\tau$  en fonction des paramètres du circuit RL.
3. Montrer que  $\tau$  est homogène à une durée.
4. Si la résistance totale du circuit RL double, que devient  $\tau$ ? Comparer au circuit RC.

#### 5. UTILISATION D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE \* (20 min) ► P. 108

1. Le courant est établi dans le circuit suivant, le commutateur (K) étant basculé en position (1).



- a. Écrire l'équation différentielle de l'établissement du courant pour la fonction  $i(t)$  en fonction des paramètres du circuit.
  - b. À l'aide d'un ampèremètre, on constate qu'après une certaine durée,  $i(t)$  est une constante. En utilisant l'équation différentielle précédente, et sans l'intégrer, calculer cette valeur de  $i(t)$ , notée  $I_1$ .
  - c. Préciser la durée approximative permettant d'avoir  $i(t) \approx \text{cte}$ .
2. Le commutateur (K) est basculé très rapidement en position (2). La même observation étant faite, répondre aux mêmes questions que précédemment (l'intensité finale sera notée  $I_2$ ).
  3. a. Lorsque l'on bascule le commutateur de (1) en (2), on observe un phénomène gênant : le décrire et expliquer ce qui se passe au niveau énergétique.  
 b. Il est alors préférable d'utiliser le circuit ci-après. Expliquer son fonctionnement (tout particulièrement l'état de la diode dans les deux cas) et son intérêt.

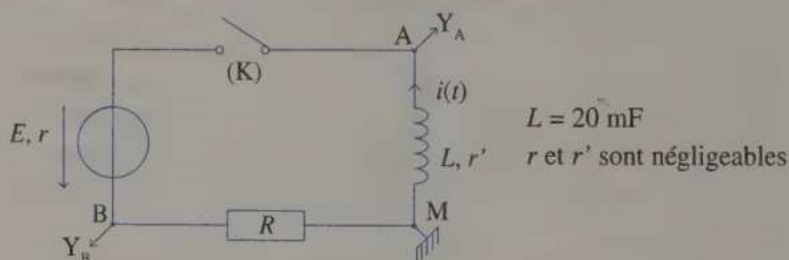


## EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

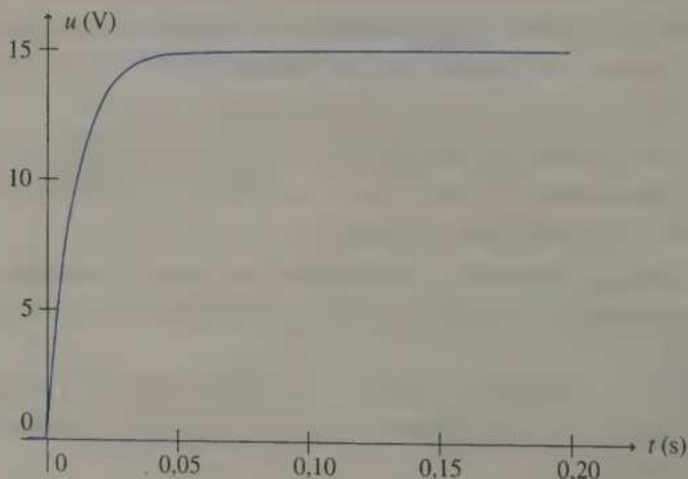
**6** COURBE DE CHARGE

\*\* (15 min) ► P. 110

Le courant est établi dans le circuit suivant. L'intensité du courant est initialement nulle et, à  $t = 0$  s, on ferme l'interrupteur (K).



On reproduit ci-dessous l'oscillogramme obtenu sur l'une des deux voies A ou B :



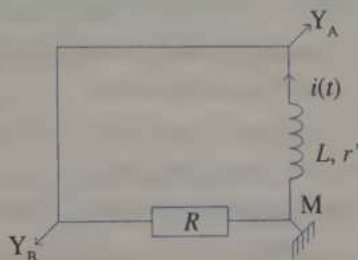
1. Quelle particularité présente l'oscilloscope utilisé ?
2. S'agit-il de la voie A ou de la voie B ? Justifier la réponse.
3. Lire la valeur de  $E$  en expliquant la méthode utilisée.
4. Lire, par deux méthodes, la valeur de la constante de temps.
5. Après avoir comparé les résultats avec plusieurs de vos camarades, indiquer la méthode qui semble la plus rigoureuse. Expliquer pourquoi.
6. En déduire la valeur de  $R$ .
7. Tracer l'allure des courbes obtenues si l'on doublait :
  - a. l'impédance de la bobine ;
  - b. la résistance totale ;
  - c. la f.e.m.  $E$  du générateur.

### 7 COURBE DE DÉCHARGE

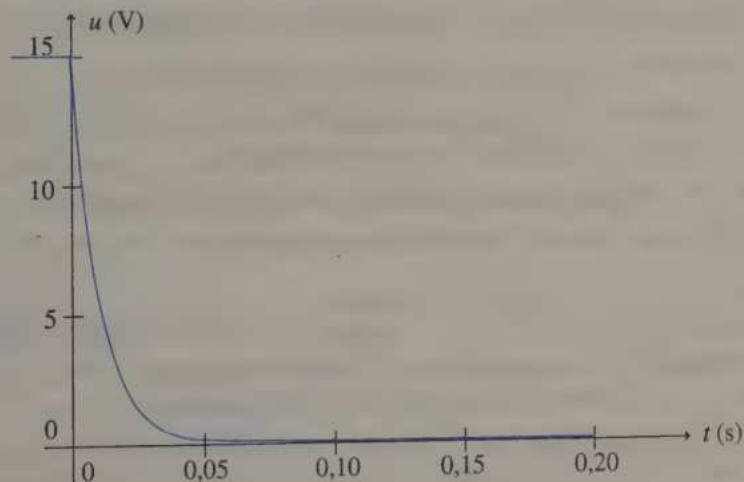
\*\* (15 min) ► P. 111

Une bobine est placée dans le circuit ci-contre.

À l'aide d'un montage non représenté, on produit une tension initiale  $U_0$  aux bornes du conducteur ohmique.

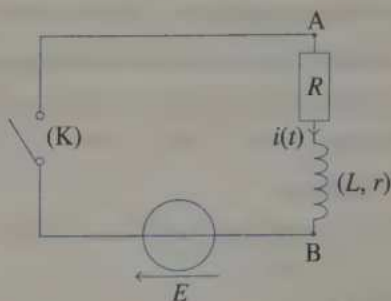


Répondre aux questions de l'exercice précédent en remplaçant  $E$  par  $U_0$  et en utilisant l'oscillogramme ci-dessous :



8 ÉTABLISSEMENT DE  $i$  : LE CLASSIQUE (1) \*\* (40 min) ► P. 111

Une bobine est placée dans le circuit ci-dessous :



Données :  $E = 12,0 \text{ V}$  ;  $R = 1,50 \times 10^2 \Omega$  ;  $L = 3,42 \times 10^{-1} \text{ H}$ .

À  $t = 0 \text{ s}$ , l'interrupteur (K) est fermé.

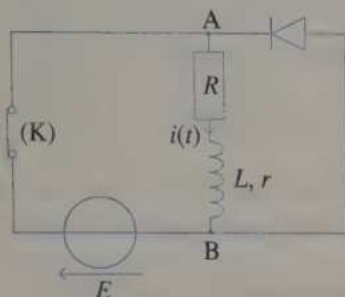
1. Représenter les tensions  $u_L(t)$  et  $u_R(t)$ , respectivement aux bornes de la bobine et du conducteur ohmique avec la convention récepteur.
2. En appliquant la loi d'additivité des tensions, en déduire l'équation différentielle vérifiée par  $i(t)$ .
3. Rappeler la propriété de la fonction  $i(t)$  (propriété mathématique) et donner l'explication physique qui a conduit à cette propriété mathématique (pour un circuit avec une bobine).
4. Vérifier que  $i(t) = A \cdot e^{\alpha t} + B$  est solution de l'équation différentielle précédente, puis en déduire les valeurs de  $B$  et  $\alpha$ .
5. En utilisant la propriété de la question 3., déterminer  $A$ , puis écrire  $i(t)$  en fonction de  $E$ ,  $R$ ,  $r$ ,  $C$  et  $t$ .

Dans la suite du problème, on supposera que  $r$  est négligeable.

6. En déduire  $u_L(t)$  et  $u_R(t)$  en fonction des mêmes paramètres.
7. Représenter  $i(t)$ ,  $u_R(t)$  et  $u_L(t)$ , puis commenter chacune de ces courbes d'un point de vue physique (et non mathématique).
8. Que remarque-t-on quant aux signes de  $u_L(t)$  et  $i(t)$  ? Conclure.
9. Même question que la précédente pour  $u_R(t)$  et  $i(t)$ .
10. a. Calculer  $i_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} i(t)$ . Commenter.
- b. Calculer  $\frac{i(t)}{i_\infty}$  aux instants  $\tau = \frac{L}{- \alpha}$  ;  $4\tau$  ;  $5\tau$ . Conclure.
- c. À quel instant aura-t-on  $\frac{i(t)}{i_\infty} = 0,9$  ?

**9 ANNULATION DE  $i$  : LE CLASSIQUE (2)** \*\*\* (40 min) ► P. 114

Le circuit de l'exercice précédent est complété comme indiqué ci-dessous :



Le régime permanent étant établi dans la maille de gauche (l'intensité du courant a la valeur  $i_0 = \frac{E}{r+R}$ ), on ouvre l'interrupteur (K).

On choisit cet instant comme nouvelle origine des dates.

Répondre alors aux questions de l'exercice 8 en remplaçant, dans la

question 10. :  $\frac{i(t)}{i_\infty}$  par  $\frac{i(t)}{i_0}$  et 0,9 par 0,1.

**10 LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES** \*\*\* (20 min) ► P. 115

Un bobine d'inductance  $L$  et de résistance négligeable est placée dans un circuit comprenant un conducteur ohmique de résistance  $R$  et un générateur de force électromotrice  $E$  et de résistance interne  $r$ .

1. Écrire l'équation différentielle caractérisant l'établissement du courant en utilisant les paramètres  $L, E, R$  et  $t$ , d'une part, et, d'autre part, la fonction :

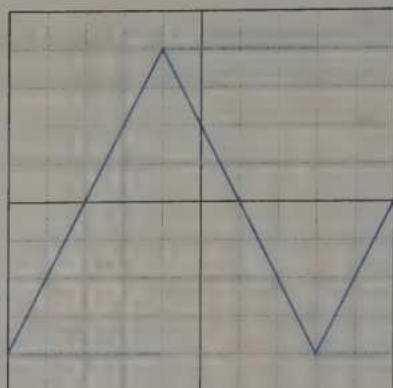
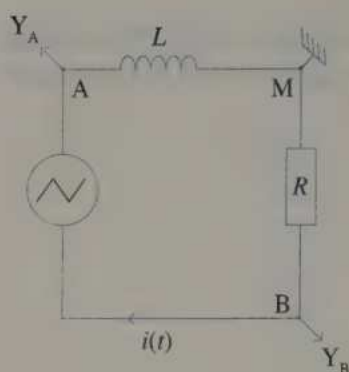
- $i(t)$ , intensité du courant dans le circuit ;
- $u_R(t)$ , tension aux bornes du conducteur ohmique ;
- $u_L(t)$ , tension aux bornes du condensateur.

Remarque :  $u_L(t)$  et  $u_R(t)$  seront orientées en convention récepteur.

2. Comparer ces équations, puis conclure.

**11 GÉNÉRATEUR DE TENSION EN TRIANGLES** \*\*\* (15 min) ► P. 116

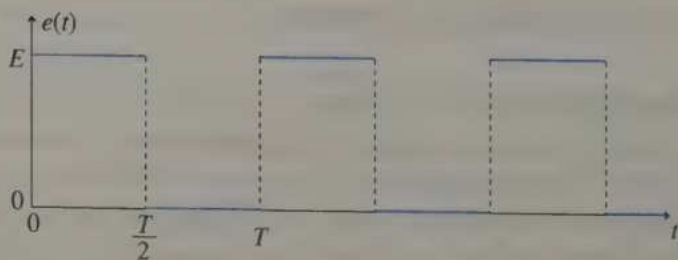
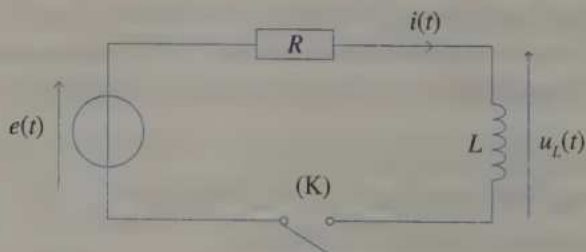
Une bobine de résistance négligeable et d'inductance  $L$  est montée en série avec un conducteur ohmique de résistance  $R = 2\,000\ \Omega$  et avec un générateur de tension triangulaire (les branchements sont indiqués sur le schéma ci-après à gauche). On obtient l'oscillogramme ci-après à droite.



1. Chercher la relation entre  $u_{AM}(t)$  et  $u_{BM}(t)$ .
2. Reconnaître les tensions sur l'oscillogramme.
3. En déduire la valeur de  $L$  sachant que :
  - en l'absence de générateur les deux courbes sont confondues avec la médiane horizontale de l'écran de l'oscilloscope ;
  - les sensibilités sont :
    - voie A : 1 V par division ;
    - voie B : 500 mV par division ;
    - base de temps : 0,1 ms par division.

### 12 GÉNÉRATEUR DE TENSION EN CRÉNEAUX \*\* (20 min) ► p. 117

Une bobine, de résistance négligeable, est reliée à un générateur de tension en créneaux, de période  $T$  :



L'interrupteur est fermé à  $t = 0$  s, la bobine n'étant parcourue par aucun courant initialement (circuit ouvert).

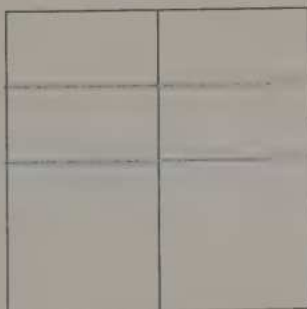
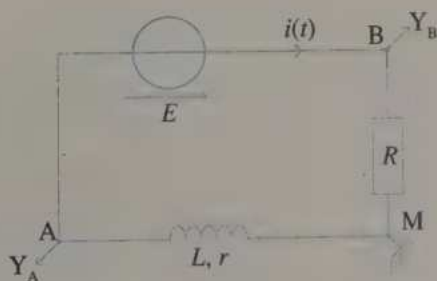
Données :  $L = 250$  mH ;  $E = 6,0$  V ;  $R = 50,0$   $\Omega$ .

1. Pour  $t \in [0 ; \frac{T}{2} [$ , expliquer pourquoi on peut considérer que l'étude de  $i(t)$  se ramène à celle de l'établissement du courant dans un circuit RL (soumis à un échelon de tension).  
Calculer alors la valeur minimale (approximative) de  $T$  qui permet de considérer que le régime permanent est atteint à la fin de cette période.
2. Pour  $t \in [\frac{T}{2} ; T [$ , reprendre les questions précédentes adaptées à l'annulation du courant.
3. Représenter alors  $i(t)$ , puis  $u_L(t)$  pour une durée de quelques périodes, si  $T = 0,10$  s.

## EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

### 13 UTILISATION DE L'OSCILLOSCOPE ≈ ≈ ≈ (15 min) ▶ P. 117

On considère le circuit RL suivant, relié à un oscilloscope, qui produit l'oscillogramme représenté ci-dessous, une fois le régime permanent atteint :



Sans le générateur, les deux lignes sont confondues avec la médiane horizontale de l'écran.

Démontrer que  $r = 0$ .

**14** ÉTABLISSEMENT ET ANNULLATION DE  $i$  \*\*\* (20 min) ► P. 118

Une bobine de résistance interne négligeable, initialement parcourue par aucun courant, est placée dans un circuit comprenant un générateur de tension  $E$  et un conducteur ohmique de résistance  $R$ , pendant une durée  $\tau$  (constante de temps du circuit). Elle est ensuite placée en série avec un conducteur ohmique de résistance identique pour que l'intensité qui la traverse s'annule. Lors du changement de circuit, comme le montage utilise un commutateur et non une diode (cf. exercice 5), 30 % de l'énergie est perdue.

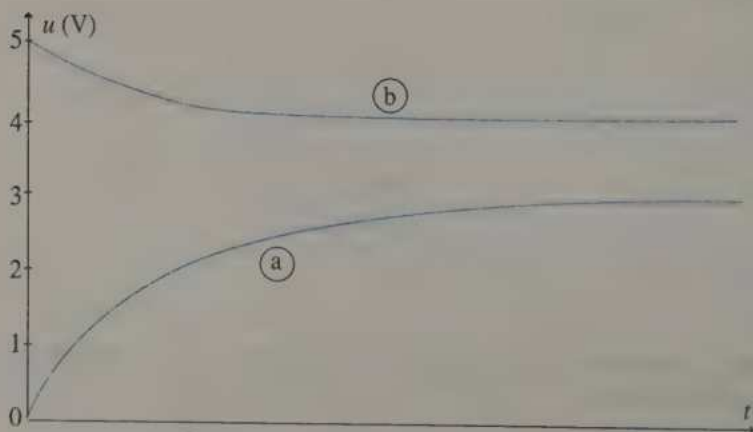
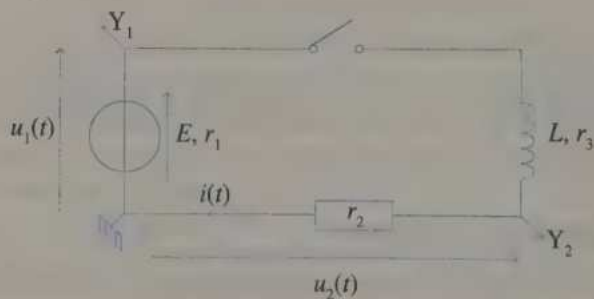
Calculer l'énergie accumulée dans la bobine après une durée  $\tau$ , après le changement de circuit.

Données :  $E = 0,20 \text{ V}$  ;  $L = 3,0 \text{ mH}$  ;  $R = 0,10 \Omega$ .

**15** AVEC TOUTES LES RÉISTANCES \*\*\* (30 min) ► P. 118

L'interrupteur du circuit ci-dessous est fermé à  $t = 0 \text{ s}$ . On obtient alors, à l'aide d'un ordinateur, le graphe ci-après des deux tensions  $u_1(t)$  et  $u_2(t)$ .

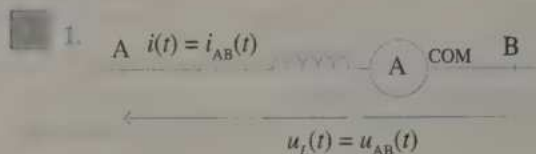
Donnée :  $r_2 = 2,0 \Omega$ .



## EXERCICES

1. Écrire  $u_1(t)$  et  $u_2(t)$  en fonction de  $i(t)$ .
2. Comment évoluent :  $i(t)$  ?  $u_1(t)$  ?  $u_2(t)$  ?  
En déduire, parmi les courbes (a) et (b), celle qui correspond à  $u_1(t)$  et celle qui correspond à  $u_2(t)$ .
3. À  $t = 0$  s, que vaut  $i(t)$  ?  
En déduire, par lecture graphique, la valeur de  $E$ .
4. Lorsque  $t$  tend vers l'infini, que valent  $i(t)$ ,  $u_1(t)$  et  $u_2(t)$  (notée respectivement  $i_\infty$ ,  $u_{1\infty}$  et  $u_{2\infty}$ ) ?  
En déduire  $r_3$ .
5. Calculer  $r_1$ .
6. Comment faut-il procéder pour en déduire  $L$  ?

## CORRIGÉS



$$u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} + r \cdot i(t).$$

3. a.  $i(t) < 0$  et  $i(t)$  est dirigé de A vers B, donc le sens réel de  $i(t)$  (c'est-à-dire le sens dans lequel il serait positif) est de B vers A.

b. Les porteurs de charges sont des électrons.

c. Les électrons se déplacent dans le sens inverse du sens réel du courant, donc d'après a., de A vers B.

d. Oui, car  $i(t) = \text{cte}$ , donc  $\frac{di(t)}{dt} = 0$  donc  $u_L(t) = r \cdot i(t) = \text{cte}$ .

e. Cf. 1.

4. a. Cf. 1. et  $u_{AB}(t) = u_L(t)$ .

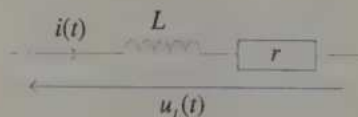
b. Cf. 1. et  $i_{AB}(t) = i(t)$ .

$$c. u_{AB}(t) = L \frac{di_{AB}(t)}{dt} + r \cdot i_{AB}(t).$$

$u_{AB}(t) = -u_{BA}(t)$  et  $i_{AB}(t) = -i_{BA}(t)$ , donc on a, par exemple,

$$u_{AB}(t) = -L \frac{di_{BA}(t)}{dt} - r \cdot i_{BA}(t).$$

5. Schéma équivalent :



6. Si  $i(t) = \text{cte}$ , alors  $\frac{di(t)}{dt} = 0$  et  $u_L(t) = r \cdot i(t)$  : la bobine se comporte comme un conducteur ohmique de résistance  $r$ . On peut alors la remplacer par un tel élément.

Si  $r \approx 0 \Omega$ , alors, en régime permanent, la bobine est équivalente à un simple fil conducteur (de résistance négligeable).

$$r = 0 \Omega, \text{ donc } |u_L(t)| = L \times \left| \frac{di(t)}{dt} \right| \text{ sera élevée si :}$$

- $L$  est élevée,
- $\left| \frac{di(t)}{dt} \right|$  est élevée,

donc si  $i(t)$  varie très rapidement.

8. La valeur de  $L$  augmente.

2.  $i'_{\infty} = i_{\infty} \Rightarrow \frac{E'}{R'} = \frac{E}{R} \Rightarrow \frac{E}{4R} = \frac{E}{R}$  ce qui est impossible.

2.  $E_{L,\infty} = E_{L,\infty} \Rightarrow \frac{L'}{2} (i'_{\infty})^2 = \frac{L}{2} (i_{\infty})^2 \Rightarrow L' \left(\frac{E'}{R'}\right)^2 = L \left(\frac{E}{R}\right)^2 \Rightarrow L' \left(\frac{E}{4R}\right)^2 = L \left(\frac{E}{R}\right)^2$   
 $\Rightarrow L' = 16 L.$

3.  $u_{L,\infty} = 0 \text{ V}$  et  $u_{L,\infty} = 0 \text{ V}$  (fin d'établissement du courant dans un circuit RL), donc  $u_{L,\infty} = u_{L,\infty}$  quel que soit  $L'$ .

4.  $\tau' = \tau \Rightarrow \frac{L'}{R'} = \frac{L}{R} \Rightarrow \frac{L'}{2R} = \frac{L}{R} \Rightarrow L' = 2 L.$

3. 1.  $u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$  ( $r$  est négligeable)

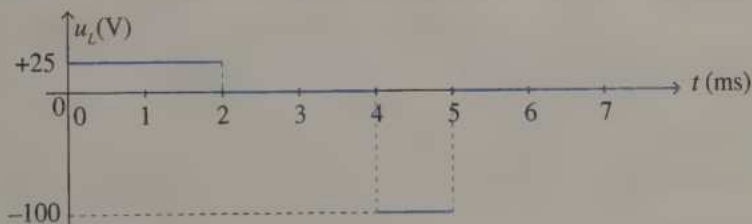
et pour un segment,  $u_L(t) = L \frac{\Delta i}{\Delta t}$  ( $\frac{\Delta i}{\Delta t}$  est le coefficient directeur du segment).

•  $t \text{ (ms)} \in [0 ; 2[ : u_L(t) = 0,1 \times \frac{0,5 - 0}{(2 - 0) \times 10^{-3}} = 25 \text{ V}.$

•  $t \text{ (ms)} \in [2 ; 4[ : i(t) = \text{cte}, \text{ donc } u_L(t) = 0 \text{ V}.$

•  $t \text{ (ms)} \in [4 ; 5[ : u_L(t) = 0,1 \times \frac{(-0,5) - (0,5)}{(5 - 4) \times 10^{-3}} = -100 \text{ V}.$

•  $t \text{ (ms)} \in [5 ; \infty [ : i(t) = \text{cte}, \text{ donc } u_L(t) = 0 \text{ V}.$



2.  $\frac{di(t)}{dt} = \frac{u_L(t)}{L} = \text{coefficient directeur de } i(t).$

On procède ainsi :

– on place  $i(t = 0 \text{ s}) = 0 \text{ A}$  ;

– sur chaque intervalle, on trace le segment de droite de coefficient directeur

$\frac{u_L(t)}{L} = \frac{\text{cte}}{L}$ . On part de la valeur de  $i(t)$  du début de l'intervalle

puisque  $u_L(t)$  est une fonction continue de  $t$  ;

– on calcule, pour :

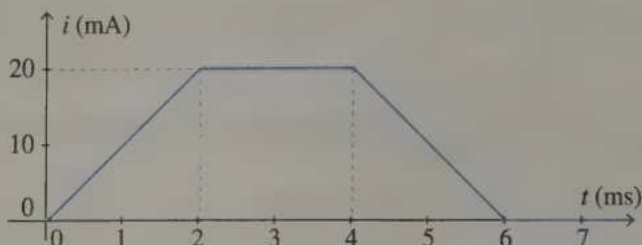
•  $t \text{ (ms)} \in [0 ; 2[ , \frac{u_L}{L} = \frac{1}{0,1} = 10 \text{ V} \cdot \text{H}^{-1}$

•  $t \text{ (ms)} \in [2 ; 4[ , \frac{u_L}{L} = \frac{0}{0,1} = 0 \text{ V} \cdot \text{H}^{-1}$

•  $t \text{ (ms)} \in [4 ; 6[ , \frac{u_L}{L} = \frac{-1}{0,1} = -10 \text{ V} \cdot \text{H}^{-1}$

$$\cdot t \text{ (ms)} \in [6; \infty[, \frac{u_L}{L} = \frac{1}{0,1} = 0 \text{ V} \cdot \text{H}^{-1};$$

– on obtient :



4. 1. ① À  $t = \tau$ ,  $i(t) = 0,63 \times i_{\infty} = 0,63 \frac{E}{R_{\text{totale}}}$ .

② La tangente à l'origine à la courbe représentant  $i(t)$  coupe l'asymptote horizontale d'équation  $i = i_{\infty} = \frac{E}{R}$  en  $t = \tau$ .

③ À  $t = 4\tau$  ou  $5\tau$ ,  $i(t) \approx i_{\infty}$ .

2.  $\tau = \frac{L}{R}$ .

3. On utilise  $R = \frac{u}{i}$  et  $L = \frac{u}{\frac{di}{dt}} = u \frac{dt}{di}$ .

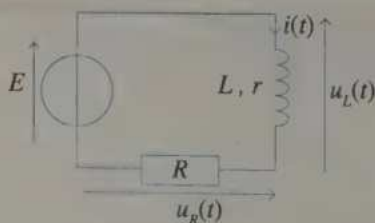
Équation aux dimensions :

$$[\tau] = \frac{[L]}{[R]} = \frac{[u] \frac{[dt]}{[di]}}{\frac{[u]}{[i]}} = \frac{\frac{[t]}{[i]}}{\frac{1}{[i]}} = [t] = \text{T} \quad \text{C.Q.F.D.}$$

4. Circuit RL :  $\tau = \frac{L}{R}$ , donc si  $R$  double,  $\tau$  est **divisée** par 2.

Circuit RC :  $\tau = RC$ , donc si  $R$  double,  $\tau$  est **multipliée** par 2.

5. 1. La maille de droite étant ouverte, aucun courant n'y circule, on ne considère donc que la maille de gauche :



a.  $u_L(t) + u_R(t) = E$ , soit  $L \cdot \frac{di(t)}{dt} + (r + R) i(t) = E$ . (1)

b.  $i(t) = I_1 = \text{cte}$  donc  $\frac{di(t)}{dt} = 0$  et l'équation (1) devient :

$$0 + (r + R) I_1 = E, \text{ soit } I_1 = \frac{E}{r + R}$$

A.N. :  $I_1 = 2,25 \times 10^{-2} \text{ A} = 22,5 \text{ mA}$ .

c. La durée d'établissement du régime permanent est d'environ  $4\tau$  ou  $5\tau$ .

$$5\tau = 5 \frac{L}{R_{\text{tot}}} = \frac{5L}{R + r}$$

$$\text{A.N. : } 5\tau = 5 \times \frac{150 \times 10^{-3}}{100 + 300} = 1,88 \times 10^{-3} \text{ s} = 1,88 \text{ ms ;}$$

soit **2 ms** puisque c'est une valeur très approximative.

2. On considère maintenant la maille de droite :

$$\text{a. } u_L(t) + u_{R'}(t) = 0$$

$$\text{soit } L \frac{di(t)}{dt} + (r + R') i(t) = 0 \quad (2)$$

b.  $i(t) = I_2 = \text{cte}$ , donc  $\frac{di(t)}{dt} = 0$  et

l'équation (2) devient :

$$0 + (r + R') I_2 = 0, \text{ soit } I_2 = 0 \text{ A.}$$

c. La durée d'établissement du régime permanent est d'environ :

$$5\tau = 5 \frac{L}{R_{\text{tot}}} = \frac{5L}{R' + r}$$

$$\text{A.N. : } 5\tau = 5 \times \frac{150 \times 10^{-3}}{100 + 500} \approx 1,25 \times 10^{-3} \text{ s} = 1,25 \text{ ms}$$

soit approximativement **1 ms**.

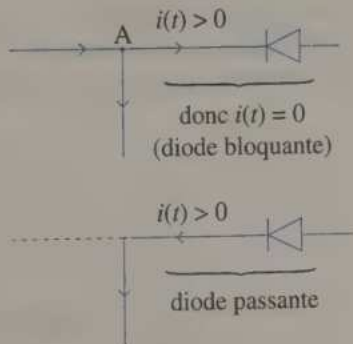
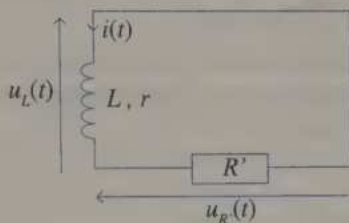
3. a. On observe des **étincelles** entre les armatures de (K), ce qui se traduit par une perte de l'énergie totale du circuit.

b. • (K) étant fermé, la **diode est bloquante** ( $i > 0$  est opposé au sens schématisé par la diode) donc aucun courant ne circule dans la maille de droite.

• (K) étant ouvert, aucun courant ne circule dans la maille de gauche. En revanche, dans la maille de droite, le courant peut circuler car la **diode est passante**.

• L'intérêt de ce second circuit est de ne pas provoquer d'étincelle, puisque  $i(t)$  est une fonction continue de  $t$  (il n'y a donc pas de perte d'énergie).

Dans le premier circuit, l'ouverture de (K) est incompatible avec la nécessaire continuité de  $i(t)$  dans la bobine, d'où la formation d'étincelle (le courant continue à « passer » dans l'air).



**6** 1. Il faut utiliser un **oscilloscope à mémoire** (ou un autre système d'acquisition, comme un ordinateur, avec l'électronique adéquat).

Les oscilloscopes « classiques » ne permettent de visualiser que des phénomènes périodiques.

2. Il s'agit de la **voie B** (cf. Cours), avec  $u_{BM}(t) = R \cdot i(t)$ .

S'il s'agissait de  $Y_A$ , en régime permanent ( $t \rightarrow \infty$ ), on aurait  $i(t) = \text{cte}$ , donc

$$L \cdot \frac{di}{dt} = 0, \text{ donc } u_{AM}(t \rightarrow \infty) \text{ serait nul.}$$

3. Si  $t$  tend vers l'infini, alors  $i = \text{cte}$ , donc  $u_{AM} = L \cdot \frac{di}{dt} = 0$ ,

d'où la loi d'additivité des tensions  $u_{BM} + u_{MA} + u_{AB} = 0$  devient :

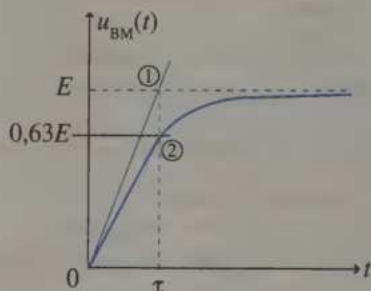
$$u_{BM}(t \rightarrow \infty) + 0 - E = 0 \text{ donc } E = u_{BM}(t \rightarrow \infty).$$

On lit  $E \approx 15 \text{ V}$ .

4. ① Méthode de la tangente à l'origine qui coupe l'asymptote en  $t = \tau$ .

$$\begin{aligned} \text{② } u_R(t = \tau) &= 0,63 \times u_R(t \rightarrow \infty) \\ &= 0,63 \times E \\ &\approx 9,5 \text{ V.} \end{aligned}$$

On lit  $\tau \approx 0,02 \text{ s}$ .



5. Le tracé de la tangente est toujours approximatif. La méthode des « 63 % » est préférable.

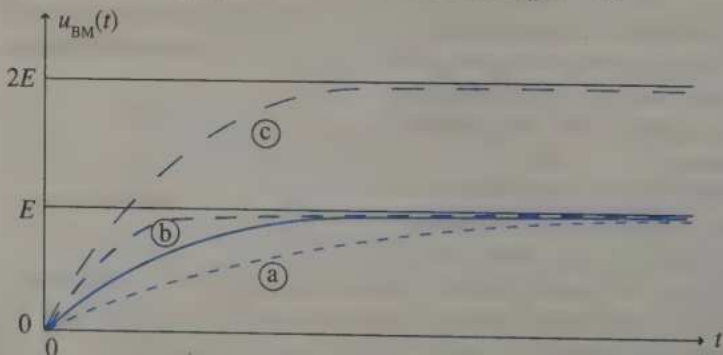
$$6. \tau = \frac{L}{R} \text{ soit } R = \frac{L}{\tau}.$$

$$\text{A.N. : } R = \frac{20 \times 10^{-3}}{0,02} \approx 1,0 \Omega.$$

7. a. Si  $L$  double,  $\tau$  double.

b. Si  $R$  double,  $\tau$  est divisée par 2.

c. Si  $E$  double, l'asymptote est la droite d'équation  $u_R(t) = 2E$ .



7 1. Cf. exercice 6.

2. Sans générateur,  $u_{BM}(t) = u_{AM}(t)$ ; donc l'oscillogramme représente les deux voies (qui n'en font qu'une :  $A \equiv B$ ).

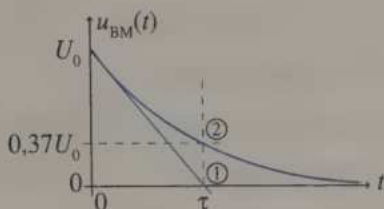
3.  $U_0 = u_R(t=0) = u_{BM}(t=0) = 15 \text{ V}$  (par lecture graphique).

4. Comme à l'exercice 6 :

① tangente à l'origine ;

② méthode des « 37 % » ( $100\% - 63\% = 37\%$ ).

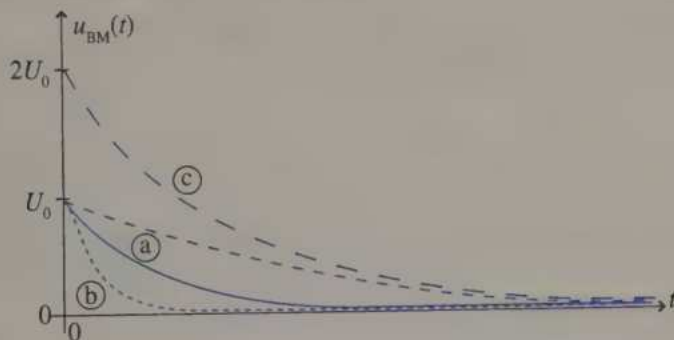
$\tau \approx 0,02 \text{ s}$ .



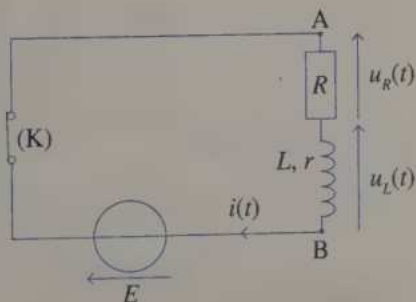
5. et 6. Cf. exercice 6.

7. a. et b. Cf. exercice 6.

Pour c. la courbe part de la valeur  $2U_0$ .



8 1.



$$2. u_L(t) + u_R(t) = E \text{ soit } [L \cdot \frac{di(t)}{dt} + ri(t)] + Ri(t) = E$$

$$\text{d'où } L \cdot \frac{di(t)}{dt} + (r + R) i(t) = E \quad (1).$$

3. •  $i(t)$  est une fonction continue de  $t$  (dans une branche avec  $L$ ).

•  $i(t)$  ne peut varier que de façon continue dans une branche avec une bobine (fonction « sans saut ») (l'explication est hors programme).

$$4. i(t) = A \cdot e^{\alpha t} + B \text{ donc } \frac{di(t)}{dt} = A \cdot \alpha \cdot e^{\alpha t}, \text{ d'où l'équation (1) :}$$

$$L \cdot A \cdot \alpha \cdot e^{\alpha t} + (r + R) (A \cdot e^{\alpha t} + B) = E$$

$$(A \cdot e^{\alpha t} [L \cdot \alpha + (r + R)] + [(r + R) B - E]) = 0.$$

fonction de  $t$       fonction indépendante de  $t$

Cette égalité n'est possible, quel que soit  $t$ , que si ces deux termes sont nuls,

$$\text{et comme } e^{\alpha t} \neq 0 : \begin{cases} L\alpha + (r + R) = 0 \\ (r + R)B - E = 0 \end{cases} \text{ soit } \begin{cases} \alpha = -\frac{r + R}{L} \\ B = \frac{E}{r + R} \end{cases}$$

$$i(t) = A \cdot e^{-\frac{(r+R)}{L}t} + \frac{E}{r+R}$$

5. Continuité de  $i(t)$  en  $t = 0$  :  $i(t = 0^-) = i(t = 0^+)$  soit :

$$0 = A \cdot e^0 + \frac{E}{r+R}, \text{ donc } A = -\frac{E}{r+R}$$

$$\text{d'où : } i(t) = \frac{E}{r+R} \left( 1 - e^{-\frac{(r+R)}{L}t} \right)$$

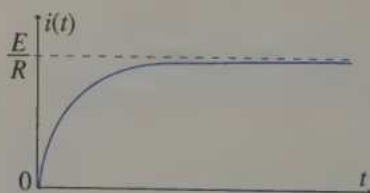
$$\text{Pour la suite, } r \approx 0 ; i(t) = \frac{E}{R} \left( 1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right) = \frac{E}{R} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \text{ avec } \tau = \frac{L}{R}.$$

$$6. u_R(t) = R \cdot i(t) = E \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)$$

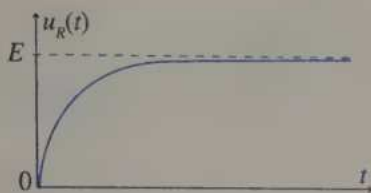
$$u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt} = L \frac{E}{R} \left[ 0 - e^{-\frac{t}{\tau}} \times \left( -\frac{1}{\tau} \right) \right] = E \cdot e^{-\frac{t}{\tau}} \left( \text{avec } \tau = \frac{L}{R} \right)$$

(On peut aussi utiliser  $u_L(t) = E - u_R(t)$ ).

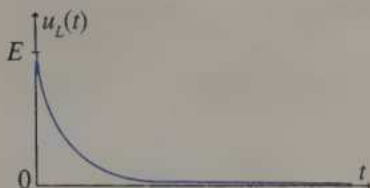
7. Allure des courbes :



L'intensité s'établit.



De même pour  $u_R = R \cdot i$



Le phénomène d'auto-induction s'estompe.

8.  $u_L(t)$  et  $i(t)$  sont de même signe, positif, donc la bobine se comporte comme la convention choisie : convention récepteur ( $u_L(t)$  et  $i(t)$  étant de sens opposés).

9. Même remarque pour  $u_R(t)$  et  $i(t)$ .

De plus, une résistance se comporte toujours comme un récepteur.

10. a.  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\frac{t}{\tau}} = 0$  (car  $\tau > 0$ ) donc  $i_{\infty} = \frac{E}{R} = 80,0 \text{ mA}$ .

b.  $\frac{i(t)}{i_{\infty}} = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$

d'où :

$$\frac{i(\tau)}{i_{\infty}} = 1 - \frac{1}{e} \approx 0,632$$

$$\frac{i(4\tau)}{i_{\infty}} = 1 - \frac{1}{e^4} \approx 0,982$$

$$\frac{i(5\tau)}{i_{\infty}} = 1 - \frac{1}{e^5} \approx 0,993$$

c.  $\frac{i(t)}{i_{\infty}} = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} = 0,9$  soit  $e^{-\frac{t}{\tau}} = 0,1$

$$-\frac{t}{\tau} = \ln 0,1 \text{ et } t = -\tau \cdot \ln 0,1 = -\frac{L}{R} \ln 0,1.$$

A.N. :  $t = -\frac{3,42 \times 10^{-1}}{1,50 \times 10^2} \times \ln 0,1 \approx 5,25 \times 10^{-3} \text{ s} = 5,25 \text{ ms}$ .

9 1. Comme on l'a vu à l'exercice 5, question 3. b., la diode est en configuration passante ( $i > 0$  dans le même sens), donc équivalente à un simple fil conducteur : on ne considère que la maille de droite :

$$2. u_L(t) + u_R(t) = 0,$$

$$\text{soit } L \frac{di(t)}{dt} + (r + R) i(t) = 0.$$

3. Cf. exercice 6.

4. Comme à l'exercice 6 (sans  $E$ ), on obtient :

$$A \cdot e^{\alpha t} [L\alpha + (r + R)] + (r + R) B = 0$$

$$\text{d'où } \begin{cases} L\alpha + (r + R) = 0 \\ (r + R) \cdot B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -\frac{r + R}{L} \\ B = 0 \end{cases}$$

$$i(t) = A \cdot e^{-\frac{r + R}{L} t}$$

5. Continuité de  $i(t)$  en  $t = 0$  s (nouvelle origine des temps) :

$$i(t = 0^-) = i(t = 0^+), \text{ soit } i_0 = A \cdot e^0 \text{ donc } A = i_0.$$

Or,  $i_0$  correspond à  $i_\infty$  de l'exercice 6, soit  $i_0 = \frac{E}{r + R}$  (en prenant en compte  $r$ ), d'où :

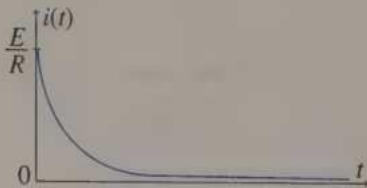
$$i(t) = \frac{E}{r + R} e^{-\frac{(r + R)}{L} t}$$

Pour la suite,  $r \approx 0$  :  $i(t) = \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{R}{L} t} = \frac{E}{R} \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$  avec  $\tau = \frac{L}{R}$ .

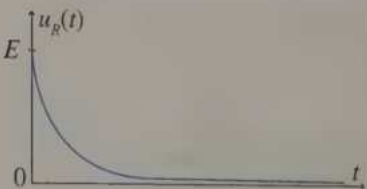
$$6. u_R(t) = R \cdot i(t) = E \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}.$$

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} \text{ ou } u_L(t) = -u_R(t) = -E \cdot e^{-\frac{t}{\tau}}$$

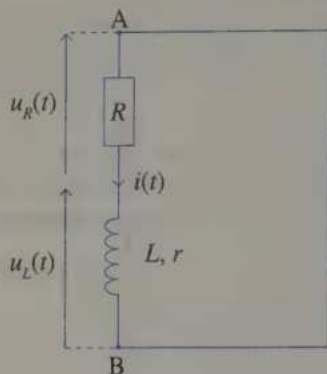
7.

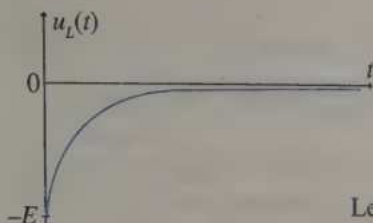


L'intensité s'annule.



De même pour  $u_R = R \cdot i$ .





Le phénomène d'auto-induction s'estompe.

8.  $u_L(t)$  et  $i(t)$  sont de signes opposés, donc la bobine ne se comporte pas comme la convention choisie (convention récepteur,  $u_L(t)$  et  $i(t)$  étant opposés) : la bobine se comporte comme un **générateur**.

9. Cf. exercice 6.

10. a.  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\frac{t}{\tau}} = 0$  (car  $\tau > 0$ ), donc  $i_\infty = 0$ .

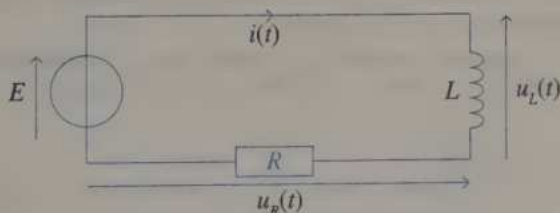
b.  $\frac{i(t)}{i_0} = e^{-\frac{t}{\tau}}$ , donc  $\frac{i(\tau)}{i_0} = \frac{1}{e} \approx 0,368$  ;  $\frac{i(4\tau)}{i_0} = \frac{1}{e^4} \approx 0,0183$  ;

$\frac{i(5\tau)}{i_0} = \frac{1}{e^5} \approx 0,00674$ .

c.  $\frac{i(t)}{i_0} = e^{-\frac{t}{\tau}} = 0,1$  soit  $t = -\tau \ln 0,1 = -\frac{L}{R} \ln 0,1 \approx 5,25$  ms.

🔧 Avec la même résistance  $R$ , les durées de l'établissement ou de l'annulation de l'intensité « à 90 % » sont les mêmes (si l'intensité perd 90 % de sa valeur initiale, elle est égale à 10 % de  $i_0$ ).

10



1. a.  $u_L(t) + u_R(t) = E$

$L \cdot \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) = E$  ou  $\frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L}i(t) = \frac{E}{L}$  (1)

b.  $i(t) = \frac{u_R(t)}{R}$  donc (1) donne (en multipliant par  $R$  ensuite) :

$\frac{du_R(t)}{dt} + \frac{R}{L}u_R(t) = \frac{R \cdot E}{L}$  (2)

$$c. u_L(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

Il ne faut avoir que des dérivées de  $i(t)$  (et non  $i(t)$  elle-même).

$$\text{Dérivons (1)} : \frac{d}{dt} \left( \frac{di(t)}{dt} \right) + \frac{R}{L} \frac{di(t)}{dt} = 0,$$

puis avec  $\frac{di(t)}{dt} = \frac{u_L(t)}{L}$  (en multipliant par  $L$  ensuite) :

$$\frac{du_L(t)}{dt} + \frac{R}{L} u_L(t) = 0 \quad (3)$$

2. Toutes ces équations sont du type  $\frac{df(t)}{dt} + \frac{f(t)}{\tau} = \text{cte}$  (avec  $\tau = \frac{L}{R}$ ), comme celles des circuits RC.

Elles admettent des solutions de la forme :  $f(t) = Ae^{\alpha t} + B$ .

(On démontre que  $\alpha = -\frac{1}{\tau}$  et  $B = \text{cte} \times \tau$  ;  $A$  dépend des conditions initiales et de la continuité en  $t = 0$  d'une de ces fonctions).

$$\begin{aligned} \boxed{11} \quad 1. u_{AM}(t) &= L \cdot \frac{di(t)}{dt} \\ &= L \cdot \frac{d}{dt} \frac{u_{MB}(t)}{R} \\ &= \frac{L}{R} \cdot \frac{d}{dt} (-u_{BM}(t)) \\ &= -\frac{L}{R} \cdot \frac{du_{BM}(t)}{dt} \end{aligned}$$

2.  $u_{AM}$  est l'opposée de la dérivée de  $u_{BM}$  (au facteur  $\frac{L}{R}$  près), donc  $u_{AM}$  est la **fonction en créneaux**,  $u_{BM}$  est la **fonction en triangles** (chaque segment ayant une dérivée de valeur constante).

De plus, si  $u_{BM}$  croît, sa dérivée est positive et  $u_{AM}$  est donc négative et réciproquement.

$$3. L = -R \cdot \frac{u_{AM}(t)}{\frac{du_{BM}(t)}{dt}}$$

Sur un intervalle où  $u_{AM} = \text{cte}$  et  $u_{BM}$  est de pente constante, on a :

$$L = -R \cdot \frac{u_{AM}}{\frac{\Delta u_{BM}}{\Delta t}}$$

A.N. : En prenant les deux extrémités d'un segment ascendant (par exemple),

$$\text{on obtient : } L = -2\,000 \, \Omega \times \frac{-4 \, \text{div} \times 1 \, \text{V} \cdot \text{div}^{-1}}{\frac{8 \, \text{div} \times 500 \times 10^{-3} \, \text{V} \cdot \text{div}^{-1}}{4 \, \text{div} \times 0,1 \times 10^{-3} \, \text{s} \cdot \text{div}^{-1}}} = \mathbf{0,80 \, H.}$$

**12** 1. Si  $t \in \left[0; \frac{T}{2}\right]$ , alors  $e(t) = E$  et le générateur se comporte comme

un générateur de tension constante dans un circuit RL, comme cela a été étudié en cours.

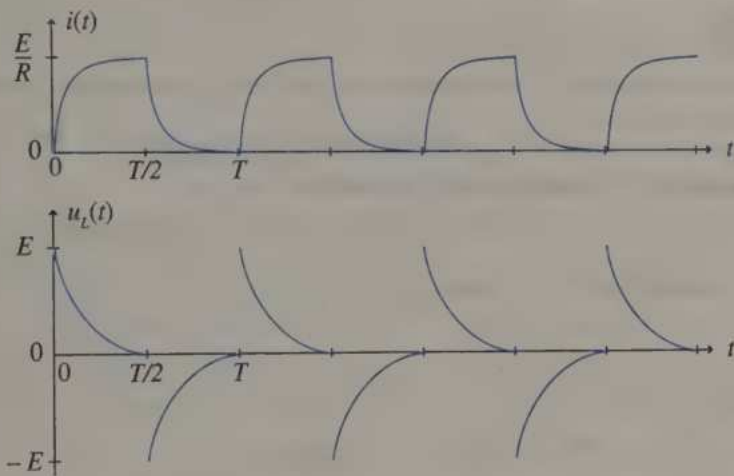
Il faut que la durée d'établissement du régime permanent ( $4\tau$  ou  $5\tau$ ) soit inférieure à la durée pendant laquelle  $e(t) = E$ .

Soit :  $5\tau < \frac{T}{2}$ , donc  $T > 10\tau = 10 \frac{L}{R}$  et  $T_{\min} = 10 \frac{L}{R}$ .

A.N. :  $T_{\min} = \frac{10 \times (250 \times 10^{-3})}{50} = 0,05 \text{ s}$  (approximativement).

2. Mêmes remarques et résultats pour l'annulation du courant (avec  $e(t) = 0$ ).

3. On reprend alors les résultats du cours (puisque  $T > T_{\min}$ ) :



(On vérifie que  $i(t)$  est une fonction continue de  $t$  dans le circuit RL.)

**13** En régime permanent  $i(t) = \frac{E}{r+R} = \text{cte}$ , donc  $\frac{di(t)}{dt} = 0$ , et alors

$u_{\text{BM}} = Ri(t) = \frac{RE}{r+R} \neq 0$  qui est représentée par l'horizontale du haut sur l'écran

(de valeur non nulle).

On en déduit  $u_{\text{AM}} = -u_{\text{MA}} = -\left(L \frac{di(t)}{dt} + ri(t)\right) = -\frac{r \cdot E}{r+R}$  qui est représentée par l'autre horizontale, de valeur nulle.

Donc  $-\frac{r \cdot E}{r+R} = 0$  d'où, nécessairement,  $r = 0 \Omega$ .

**14** L'intensité du courant après une durée  $\tau$  est  $i_1 = 0,63 \times i_{\max} = 0,63 \frac{E}{R}$ .

Après le basculement du commutateur, et après une durée  $\tau$ , l'intensité du courant est diminuée de 63 % :

$$i_2 = 0,37 \times i_{\text{initiale}} = 0,37 \times i_1 = 0,37 \times 0,63 \times \frac{E}{R}.$$

L'énergie finale est donc égale à :  $\frac{L}{2} i_2^2 = \frac{L}{2} \left( 0,37 \times 0,63 \times \frac{E}{R} \right)^2$

De plus, lors du basculement de l'interrupteur, 30 % de l'énergie a été perdue : il faut tenir compte d'un facteur multiplicateur de 0,7, soit :

$$E_{Lr} = \frac{L}{2} \left( 0,37 \times 0,63 \times \frac{E}{R} \right)^2 \times 0,7$$

A.N. :  $E_{Lr} = \frac{3 \times 10^{-3}}{2} \left( 0,37 \times 0,63 \times \frac{0,2}{0,1} \right)^2 \times 0,7 = 2,3 \times 10^{-4} \text{ J}.$

**15** 1.  $u_2(t) = r_2 \cdot i(t)$  et  $u_1(t) = E - r_1 \cdot i(t)$

2.  $i(t)$  augmente avec  $t$  (dans un circuit RL, on établit  $i(t)$  en fermant l'interrupteur à  $t = 0$  s).

On en déduit (d'après le 1.) que  $u_1(t)$  diminue et  $u_2(t)$  augmente.

**La courbe (a) correspond à  $u_2(t)$ , la courbe (b) à  $u_1(t)$ .**

3.  $i(t=0) = 0$  A (cf. Cours) donc  $u_1(t=0) = E = 5,0$  V (lecture graphique).

4. D'après le cours :  $i_{\infty} = \frac{E}{R_{\text{totale}}} = \frac{E}{r_1 + r_2 + r_3}$

D'où :  $u_{2\infty} = \frac{r_2 \cdot E}{r_1 + r_2 + r_3}$  et  $u_{1\infty} = E - \frac{r_1 \cdot E}{r_1 + r_2 + r_3} = \frac{E(r_2 + r_3)}{r_1 + r_2 + r_3}$

D'où :  $\frac{u_{1\infty}}{u_{2\infty}} = \frac{r_2 + r_3}{r_2} = 1 + \frac{r_3}{r_2}$ , soit  $r_3 = r_2 \left( \frac{u_{1\infty}}{u_{2\infty}} - 1 \right)$ .

Par lecture graphique (et avec  $r_2 = 2,0 \Omega$ ), on obtient :

$$r_3 = 2 \left( \frac{4}{3} - 1 \right) = \frac{2}{3} = 0,66 \Omega.$$

5.  $r_1 = \frac{E - u_1(t)}{i(t)} = \frac{E - u_1(t)}{u_2(t)} \times r_2$  (d'après le 1.)

Si  $t \rightarrow \infty$ , alors  $r_1 = \frac{E - u_{1\infty}}{u_{2\infty}} \times r_2$

A.N. :  $r_1 = \frac{5 - 4}{3} \times 2 = \frac{2}{3} = 0,66 \Omega.$

6. On utilise la méthode des 63 %, par exemple, avec une des deux courbes au choix et sa tangente associée pour lire  $\tau$ , puis :  $L = \tau \times R_{\text{tot}} = \tau \times (r_1 + r_2 + r_3)$ .

## 8

## Circuits RLC libres

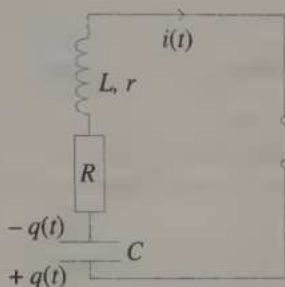
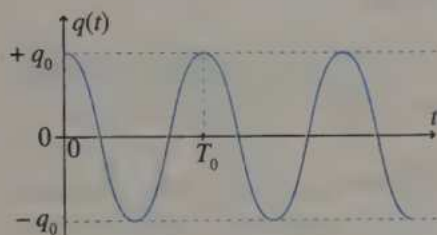
## I CIRCUITS RLC LIBRES

- Le condensateur est initialement chargé :

$$q(t=0 \text{ s}) = q_0 > 0.$$

- À  $t = 0 \text{ s}$ , on ferme l'interrupteur.

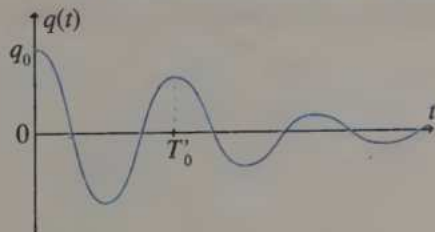
$$\bullet \frac{d^2q(t)}{dt^2} + \frac{R+r}{L} \frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{LC} = 0.$$

1<sup>er</sup> cas.  $(R+r) = 0$  : régime périodique

$$\bullet \frac{d^2q(t)}{dt^2} + \frac{q(t)}{LC} = 0 \text{ d'où :}$$

$$q(t) = q_0 \cdot \cos\left(2\pi \frac{t}{T_0}\right).^{(*)}$$

- Oscillations libres non amorties.
- $T_0 = 2\pi \sqrt{LC}$  est la période propre (en s).

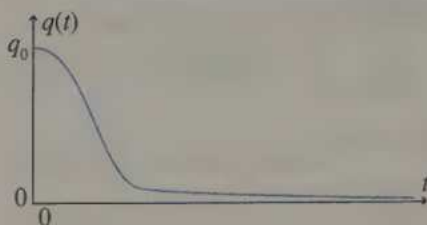
2<sup>e</sup> cas.  $(R+r)$  est faible : régime pseudo-périodique

- Oscillations libres amorties.
- $T'_0$  est la pseudo-période (en s).
- Si  $(R+r)$  est très faible, alors  $T'_0 \approx T_0$ .

(\*) Avec des conditions initiales différentes (hors programme), on aurait :

$$q(t) = q_m \cos\left(2\pi \frac{t}{T_0} + \varphi_0\right) \text{ ou } q(t) = q_m \sin\left(2\pi \frac{t}{T_0} + \varphi_0\right) \text{ où } q_m \geq 0 \text{ est l'amplitude,}$$

et  $\varphi_0$  est la phase à l'origine ( $\varphi_0$  est en rad et, en général,  $\varphi_0 \in ]-\pi; +\pi[$ )

3<sup>e</sup> cas.  $(R + r)$  est critique : régime critique

- C'est le régime qui atteint le plus rapidement le régime permanent.
- $R + r$  prend une valeur déterminée (résistance critique) qui dépend de  $L$  et  $C$  (formule hors programme).

4<sup>e</sup> cas.  $(R + r)$  est élevée : régime aperiodique

En pointillé :  
le régime critique.

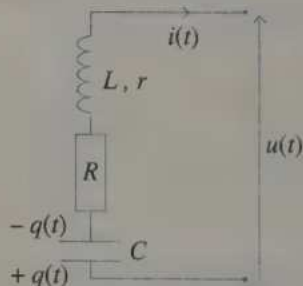
## ENTRETIEN DES OSCILLATIONS

Il faut un montage qui compense exactement les pertes par effet Joule dans les résistances  $R$  et  $r$ .

Exemple du montage à résistance négative :  $u(t) = -R_0 \cdot i(t)$ .

- En théorie, il faut :  $R_0 = R + r$  ;
- En pratique, il faut :  $R_0 \geq R + r$  (condition d'accrochage).

On obtient alors des régimes périodiques divers (oscillations quasi sinusoïdales, ...).



## EXERCICES D'APPLICATION

**1** FRÉQUENCE \* (5 min) ► P. 128

Un circuit LC a une fréquence de 1,30 MHz. La bobine qui le compose a une inductance de 2,20 mH.

Calculer la valeur de la capacité du condensateur.

**2** RÉGLAGE DE FRÉQUENCE \* (5 min) ► P. 128

Un circuit LC est constitué d'une bobine de résistance négligeable et d'un condensateur de capacité variable.

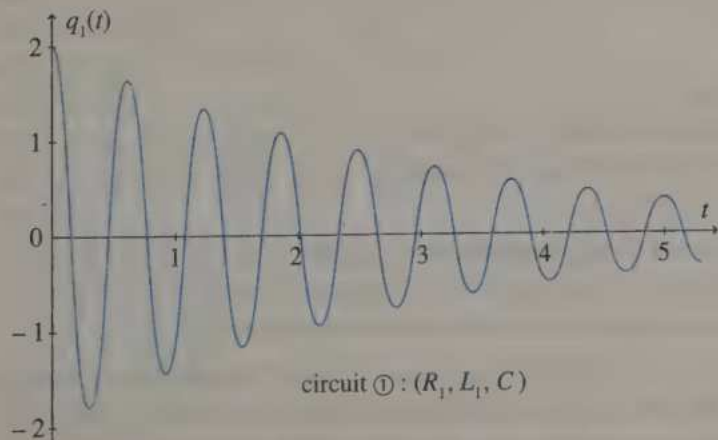
En partant d'un réglage donné, comment faut-il choisir la nouvelle valeur de  $C$  pour que la fréquence du circuit devienne la moitié de la fréquence initiale ?

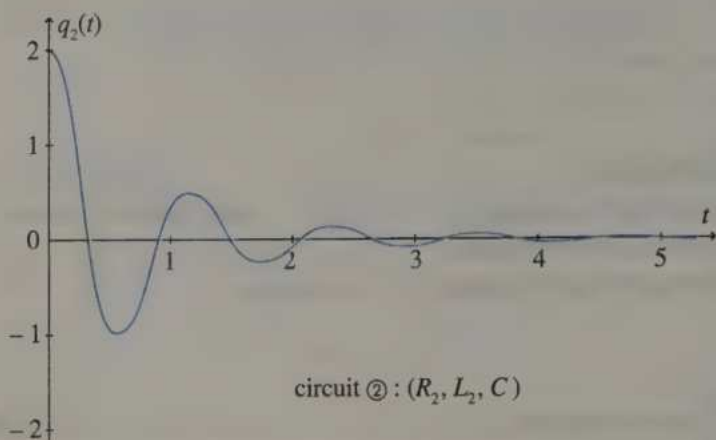
**3** COMPARAISON DE CIRCUITS \* (5 min) ► P. 128

On a représenté ci-dessous les graphes de la charge  $q(t)$  du condensateur de deux circuits :  $(R_1, L_1, C)$  et  $(R_2, L_2, C)$ .

Les échelles sont identiques mais arbitraires.

Comparer  $L_1$  et  $L_2$ , puis  $R_1$  et  $R_2$ .

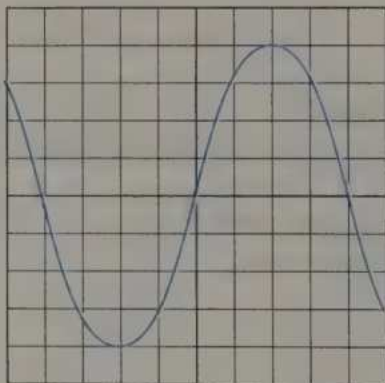




#### 4 OSCILLOGRAMME

\*\* (15 min) ► P. 128

L'oscillogramme ci-dessous est obtenu en branchant un oscilloscope aux bornes du condensateur d'un circuit LC de résistance négligeable.



Données :

- vitesse de balayage :  $2 \text{ ms} \cdot \text{div}^{-1}$  ;
- sensibilité verticale :  $0,5 \text{ V} \cdot \text{div}^{-1}$  ;
- $C = 150 \mu\text{F}$ .

1. Dédurre de la lecture directe du graphe :

- la période  $T_0$  du circuit ;
- la tension maximale aux bornes du condensateur.

2. Calculer la valeur de l'inductance  $L$ , l'énergie maximale aux bornes du condensateur, l'énergie du circuit, l'énergie maximale aux bornes de la bobine et la valeur maximale de l'intensité dans le circuit.

## EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

## 5 CIRCUIT LC : LE CLASSIQUE (1)

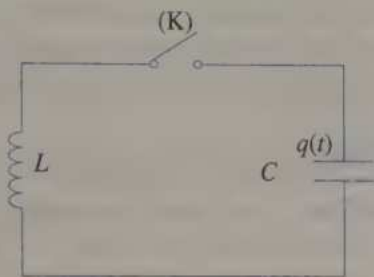
\*\* (45 min) ► P. 129

On considère le circuit ci-contre.  
 À  $t = 0$  s, on ferme l'interrupteur (K).  
 Juste avant de fermer (K), on mesure :

- $q(t = 0^-) = q_0 = 1,0 \times 10^{-6}$  C
- $i(t = 0^-) = 0,0$  A.

Données :

$L = 1,0$  mH et  $C = 0,40$   $\mu$ F.



1. a. Représenter sur le schéma, l'intensité  $i(t)$ , puis les tensions aux bornes de l'inductance  $u_L(t)$  et aux bornes du condensateur  $u_C(t)$  (on utilisera dans les deux cas la convention récepteur).

b. Pourrait-on représenter  $u_L(t)$  ou  $u_C(t)$  en premier, puis  $i(t)$  ?

2. a. Quelle relation existe-t-il entre  $u_L(t)$  et  $u_C(t)$  ?

Nommer la loi utilisée.

b. Quelle relation relie  $q(t)$  et  $i(t)$  ?

c. En déduire l'équation différentielle en  $q(t)$  qui régit le circuit (en fonction de  $t$ ,  $L$  et  $C$ ).

3. a. Montrer que  $q(t) = q_m \cdot \cos\left(2\pi \frac{t}{T_0} + \varphi\right)$  est une solution possible de l'équation de la question 2. c pour une valeur de  $T_0$  que l'on exprimera en fonction de  $L$  et  $C$  (on ne connaît donc pas, *a priori*, l'expression de  $T_0$  pour cette question).

b. Vérifier que  $T_0$  est homogène à une durée.

c. Exprimer  $q(t)$ , puis  $i(t)$  en fonction de  $t$ ,  $L$ ,  $C$  et  $q_0$  pour  $t \geq 0$  s en utilisant les conditions initiales (on rappellera les propriétés mathématiques des fonctions  $q(t)$  et  $i(t)$  utilisées ainsi que leurs conditions d'utilisation).

d. Exprimer numériquement  $q(t)$  et  $i(t)$  en fonction de  $t$ .

4. On appelle  $E_C(t)$  l'énergie accumulée dans le condensateur  $C$  et  $E_L(t)$  celle de l'inductance  $L$ .

a. Exprimer  $E_C(t)$  et  $E_L(t)$  en fonction de  $t$ ,  $L$ ,  $C$  et  $q_0$  pour  $t \geq 0$ .

b. Donner les expressions des périodes de  $E_C(t)$  et  $E_L(t)$  ; les comparer à  $T_0$ . Effectuer l'application numérique.

c. Exprimer l'énergie totale du circuit en fonction de  $E_C(t)$  et  $E_L(t)$ , puis en fonction des paramètres du circuit. Que remarque-t-on ?

Conclure (et effectuer l'application numérique).

5. Représenter :

a.  $q(t)$  et  $i(t)$  sur un même graphe ;

b.  $E_C(t)$ ,  $E_L(t)$  et  $E(t)$  sur un même graphe, placé sous le précédent, avec un axe des temps identique, pour pouvoir comparer les deux graphes.

c. Comparer les extrema des deux graphes.

## 6 CIRCUIT RLC : LE CLASSIQUE (2) \*\* (30 min) ► P. 131

À  $t = 0$  s, on ferme l'interrupteur d'un circuit ( $R, L, C$ ) série, composé d'une bobine ( $L = 1,0 \times 10^{-3}$  H et de résistance  $r$ ), d'un condensateur ( $C = 1,0 \times 10^{-6}$  F), et d'un conducteur ohmique de résistance  $R$ . Le condensateur a été préalablement chargé (totalement) sous une tension de 10 V.

1. Calculer la charge initiale du condensateur ( $q_0$ ).

2. Établir l'équation différentielle vérifiée par  $q(t)$ .

3. On suppose dans cette partie que la résistance ( $R + r$ ) est suffisamment faible pour que  $(R + r)i$  soit négligeable devant  $L \cdot \frac{di}{dt}$ .

a. Quel est le type de régime obtenu ? Calculer sa « caractéristique »  $T_0$ . Représenter succinctement le graphe  $q(t)$ .

b. Montrer  $q(t) = q_m \cos\left(2\pi \frac{t}{T_0} + \varphi\right)$  satisfait l'équation précédente.

c. Exprimer et calculer  $\varphi$  et  $q_m$ , en respectant les conventions  $q_m \geq 0$  et  $\varphi \in ]-\pi ; +\pi]$ .

d. Écrire numériquement  $q(t)$  en fonction de  $t$ .

4. On suppose dans cette partie que  $(R + r)$  n'est plus négligeable.

a. Représenter  $q(t)$  dans le cas où  $(R + r)$  est faible. Nommer ce régime. À quelle condition peut-on dire que sa caractéristique  $T'_0$ , que l'on nommera, est à peu près égale à  $T_0$  ?

b. Représenter  $q(t)$  dans le cas où  $(R + r)$  est très élevée. Nommer ce régime.

c. Représenter, sur le même diagramme que la question 4. b., le cas intermédiaire obtenu pour la valeur « limite » de  $R + r$  notée  $(R + r)_{\text{lim}}$ . Nommer ce cas.

Que se passerait-il si  $(R + r)$  avait une valeur légèrement supérieure à  $(R + r)_{\text{lim}}$  et si  $(R + r)$  avait une valeur légèrement inférieure ?

## 7 ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES

\*\* (10 min) ► P. 132

Un circuit comporte en série :

- une bobine d'inductance  $L$  et de résistance négligeable ;
- un condensateur de capacité  $C$  ;
- un conducteur ohmique de résistance  $R$  ;
- un interrupteur.

Le condensateur ayant été préalablement chargé, on ferme l'interrupteur.

1. Écrire l'équation différentielle caractérisant le fonctionnement du circuit en utilisant les paramètres  $L$ ,  $R$ ,  $C$  et  $t$ , et en prenant comme fonction :

- a.  $q(t)$       b.  $u_C(t)$       c.  $i(t)$       d.  $u_R(t)$       e.  $u_L(t)$ .

Remarque : Les orientations à utiliser sont celles définies en cours.

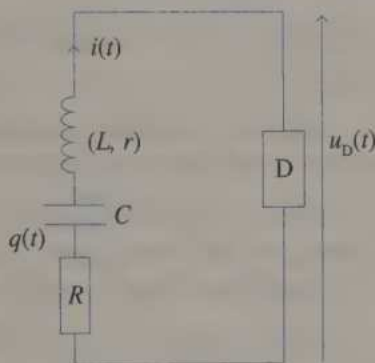
2. Comparer ces équations et conclure.

## 8 ENTRETIEN DES OSCILLATIONS

\*\* (15 min) ► P. 133

Un circuit est composé :

- d'une bobine d'inductance  $L = 10$  mH et de résistance interne  $r = 2,3 \Omega$  ;
- d'un condensateur de capacité  $C = 50$  nF ;
- d'un conducteur ohmique de résistance  $R = 20 \Omega$  ;
- d'un dipôle (D) inconnu ;
- de fils de connexions de résistance globale  $r' = 1,2 \Omega$ .



1. La tension  $u_D$  aux bornes de D est-elle orientée en convention récepteur ou en convention générateur ?

2. Déterminer l'équation différentielle en  $q(t)$  régissant le fonctionnement du circuit.

3. Rappeler l'équation différentielle en  $q(t)$  d'un circuit LC libre (c'est-à-dire sans générateur) et non amorti.

4. En supposant que l'équation obtenue à la question précédente soit caractéristique de tous les systèmes oscillants non amortis et harmoniques, dire à quoi doit être égal  $u_D$  pour que le régime obtenu ne soit pas amorti.

En donner une interprétation physique en terme énergétique. Donner son nom et le justifier.

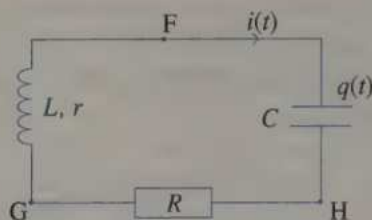
D peut-il être conçu avec un simple conducteur ohmique ? Expliquer.

## EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

## 9 OSCILLATIONS AMORTIES

\*\*\* (20 min) ► P. 133

Le circuit RLC ci-dessous, dont le condensateur a été initialement chargé sous une tension  $E = 12,0$  V, fonctionne en régime pseudo-périodique. Après  $10^4$  oscillations, il a perdu 90,0 % de son énergie initiale.



$$\begin{aligned} C &= 2,00 \text{ nF} \\ L &= 200 \text{ mH} \\ r &= 1,00 \text{ } \Omega \\ R &= 10,0 \text{ } \Omega \end{aligned}$$

- À quelle condition le régime de fonctionnement sera-t-il pseudo-périodique ?
- À quelle condition peut-on supposer que sa pseudo-période  $T'_0$  est à peu près égale à  $T_0$ , sa période propre ? Calculer alors  $T'_0$ .
- Expliquer pourquoi on peut considérer que, sur une durée d'une période, les deux extrema de la valeur de la charge du condensateur  $q(t)$ , sont sensiblement égaux en valeur absolue.
- Calculer la valeur de ces extrema lors de la  $10\,001^{\text{e}}$  oscillation. Calculer de même, les valeurs des extrema de l'intensité  $i(t)$  du courant pendant le même intervalle de temps.
- On souhaite visualiser l'allure des courbes  $q(t)$  et  $i(t)$  à l'aide d'un oscilloscope, par exemple.
  - Quelle particularité doit présenter l'appareillage utilisé ? Expliquer.
  - Indiquer les branchements à effectuer sur le schéma pour visualiser l'allure de ces deux courbes (bornes  $Y_A$ ,  $Y_B$ , masse M).
  - L'écran de l'oscilloscope présente généralement 10 divisions horizontales. Sachant que la vitesse de balayage est  $0,2 \text{ ms} \cdot \text{div}^{-1}$ , combien de pseudo-période(s) visualisera-t-on ?
  - Représenter très succinctement  $q(t)$  et  $i(t)$  sur un même graphe (pour un intervalle de temps de deux pseudo-périodes).

**10** BILAN ÉNERGÉTIQUE

\*\*\* (30 min) ► P. 134

Soit  $E_C(t)$  et  $E_L(t)$  les énergies accumulées dans le condensateur et dans la bobine d'un circuit RLC libre (c'est-à-dire sans générateur). Soit  $P_R(t)$ , la puissance dissipée par le conducteur ohmique de résistance  $R$ .

1. Le circuit échange-t-il de l'énergie avec le milieu extérieur ?  
Sous quelle forme ? Nommer ce phénomène et le composant concerné.
2. Le bilan énergétique peut s'écrire :

$$\frac{d}{dt}[E_C(t) + E_L(t)] = -P_R(t).$$

Donner une interprétation physique de cette équation.

3. En utilisant la relation précédente, retrouver l'équation différentielle en  $q(t)$  régissant le fonctionnement de ce circuit ( $q(t)$  est la charge du condensateur).

## CORRIGÉS

$$\boxed{1} \quad f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \text{ soit } f_0^2 = \frac{1}{4\pi^2 LC} \text{ et } C = \frac{1}{4\pi^2 L f_0^2}.$$

$$\text{A.N. : } C = \frac{1}{4\pi^2(2,20 \times 10^{-3}) \times (1,30 \times 10^6)^2} \\ = 6,81 \times 10^{-12} \text{ F} = \mathbf{6,81 \text{ pF}}.$$

$$\boxed{2} \quad \text{Pour la valeur } C : f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

$$\text{Pour la valeur } C' : f_0' = \frac{1}{T_0'} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC'}}.$$

$$\text{Si } f_0' = \frac{f_0}{2} \text{ alors } \frac{1}{2\pi\sqrt{LC'}} = \frac{1}{2 \times 2\pi\sqrt{LC}} \text{ d'où } C' = \mathbf{4C}.$$

$\boxed{3}$  On constate que :  $T_1' < T_2'$ , soit  $2\pi\sqrt{L_1 C} < 2\pi\sqrt{L_2 C}$ , donc  $L_1 < L_2$ .  
D'autre part,  $q(t=0)$  étant la même dans les deux circuits (l'énergie initiale y est donc la même), après une durée de 4 s, le circuit ② a dissipé presque toute son énergie, contrairement au circuit ①, donc  $R_2 > R_1$ .

$\boxed{4}$  1.  $T_0$  est déterminée par le nombre de division(s) entre deux valeurs nulles où la courbe est décroissante (par exemple), soit 8 divisions.

$$\text{Donc } T_0 = 8 \text{ div} \times 2 \text{ ms} \cdot \text{div}^{-1} = \mathbf{16 \text{ ms}} ; u_{C_{\max}} = 4 \text{ div} \times 0,5 \text{ V} \cdot \text{div}^{-1} = \mathbf{2,0 \text{ V}}.$$

$$2. T_0 = 2\pi\sqrt{LC} \text{ donc } L = \frac{T_0^2}{4\pi^2 C}.$$

$$\text{A.N. : } L = \frac{(16 \times 10^{-3})^2}{4\pi^2(150 \times 10^{-6})} = \mathbf{4,3 \times 10^{-2} \text{ H}}.$$

$$\bullet E_{C_{\max}} = \frac{C}{2} u_{C_{\max}}^2$$

$$\text{A.N. : } E_{C_{\max}} = \mathbf{3,0 \times 10^{-4} \text{ J}}.$$

$$\bullet E_{\text{tot}} = \text{cte} = E_{C_{\max}} + E_{L_{\min}} = E_{L_{\max}} + E_{C_{\min}}$$

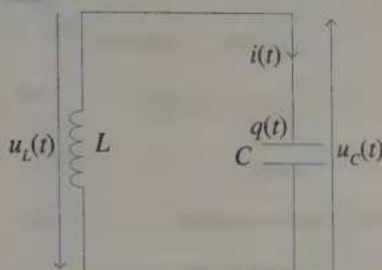
car il n'y a pas de perte (pas de conducteur ohmique).

$$\text{Avec } E_{L_{\min}} = 0 = E_{C_{\min}}, \text{ on obtient : } E_{L_{\max}} = E_{\text{tot}} = E_{C_{\max}} = \mathbf{3,0 \times 10^{-4} \text{ J}}.$$

$$\bullet E_{L_{\max}} = \frac{L}{2} i_{\max}^2 \text{ donc } i_{\max} = \sqrt{\frac{2E_{L_{\max}}}{L}}.$$

$$\text{A.N. : } i_{\max} = \mathbf{1,2 \times 10^{-1} \text{ A}}.$$

5 1. a.



b. Le seul cas qui poserait problème serait celui où l'on commencerait par tracer  $u_L(t)$  puisqu'il est nécessaire d'avoir :

- soit  $i(t)$  ( $u_L(t)$  est de sens opposé, car on est en convention récepteur),
- soit  $u_C(t)$  ( $u_L(t)$  de même sens, car  $C$  et  $L$  sont orientés en convention récepteur).

2. a.  $u_L(t) + u_C(t) = 0$  d'après la loi d'additivité des tensions.

b.  $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$ .

c. D'après 2.a. :  $L \cdot \frac{di(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = 0$ , soit  $L \cdot \frac{d^2q(t)}{dt^2} + \frac{q(t)}{C} = 0$ . (1)

3. a.  $q(t) = q_m \cos\left(2\pi \frac{t}{T_0} + \varphi\right)$

$$\frac{dq(t)}{dt} = -\frac{2\pi}{T_0} \cdot q_m \sin\left(2\pi \frac{t}{T_0} + \varphi\right) = i(t)$$

$$\frac{d^2q(t)}{dt^2} = -\frac{4\pi^2}{T_0^2} \cdot q_m \cos\left(2\pi \frac{t}{T_0} + \varphi\right)$$

Donc (1) devient  $\left(-\frac{4\pi^2 L}{T_0^2} + \frac{1}{C}\right) q_m \cos\left(2\pi \frac{t}{T_0} + \varphi\right) = 0$  quel que soit  $t$ , soit

$$T_0^2 = 4\pi^2 LC \text{ et } T_0 (> 0) = 2\pi\sqrt{LC}.$$

L'expression proposée est donc bien solution de l'équation différentielle.

A.N. :  $T_0 = 2\pi\sqrt{10^{-3} \times (0,4 \times 10^{-6})} = 1,26 \times 10^{-4} \text{ s.}$

b. 1<sup>re</sup> méthode :

$$[T_0] = [2\pi\sqrt{LC}] = [LC]^{1/2} = \left[\frac{L}{R} \times RC\right]^{1/2} = [\tau_L \cdot \tau_C]^{1/2} = (T^2)^{1/2} = T.$$

2<sup>e</sup> méthode :

On utilise :  $L = \frac{u}{\frac{di}{dt}}$  ;  $C = \frac{q}{u}$  ;  $\frac{q}{i} = t$ .

$$[T_0] = [2\pi\sqrt{LC}] = [LC]^{1/2} = \left(\frac{[u]}{\left[\frac{di}{dt}\right]} \frac{[q]}{[u]}\right)^{1/2} = \left([t] \frac{[q]}{[i]}\right)^{1/2} = (T^2)^{1/2} = T.$$

$$\begin{cases} q(t) \text{ est continue (présence de } C) \\ i(t) \text{ est continue (présence de } L) \end{cases} \quad \begin{cases} q(0) = q_0 \\ i(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_m \cos\varphi = q_0 & (1) \\ -\frac{2\pi}{T_0} q_m \sin\varphi = 0 & (2) \end{cases} \quad (\text{en général, on choisit } \varphi \in ]-\pi; +\pi])$$

D'après (2)  $\begin{cases} \varphi = 0 \text{ et } (1) \Rightarrow q_m = q_0 \geq 0 & \text{OUI} \\ \text{ou} \\ \varphi = \pi \text{ et } (1) \Rightarrow q_m = -q_0 \leq 0 & \text{NON (car il faut } q_m \geq 0) \end{cases}$

Donc  $q(t) = q_0 \cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)$  et  $i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{-q_0}{\sqrt{LC}} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)$ .

d.  $\frac{1}{\sqrt{LC}} = 5,0 \times 10^4$

$q(t) = 10^{-6} \cos(5 \times 10^4 \cdot t)$ ;  $i(t) = -5 \times 10^{-2} \sin(5 \times 10^4 \cdot t)$ .

4. a.  $E_C(t) = \frac{q^2}{2C} = \frac{q_0^2}{2C} \cdot \cos^2\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)$ .

$E_L(t) = \frac{L}{2} i^2 = \frac{L}{2} \frac{q_0^2}{LC} \cdot \sin^2\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)$ , soit  $E_L(t) = \frac{q_0^2}{2C} \cdot \sin^2\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right)$ .

b.  $f(t) = A \cos^2(B \cdot t + C)$  ou  $f(t) = A \sin^2(B \cdot t + C)$  admettent pour période

$T = \frac{\pi}{B}$ ; ici, on aura donc pour  $E_C(t)$  et pour  $E_L(t)$ :

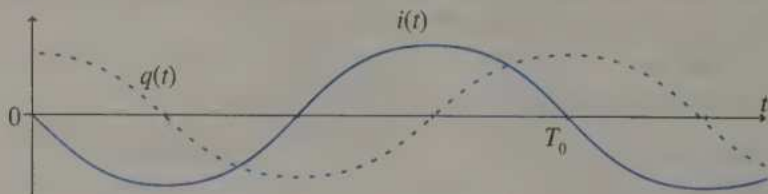
$T' = \frac{\pi}{\frac{1}{\sqrt{LC}}} = \pi \sqrt{LC}$ , soit  $T' = \frac{T_0}{2}$ . A.N.:  $T' = 6,28 \times 10^{-5}$  s.

c.  $E_{\text{tot}}(t) = E_C(t) + E_L(t) = \frac{q_0^2}{2C} \left[ \cos^2\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) + \sin^2\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) \right] = \frac{q_0^2}{2C}$ .

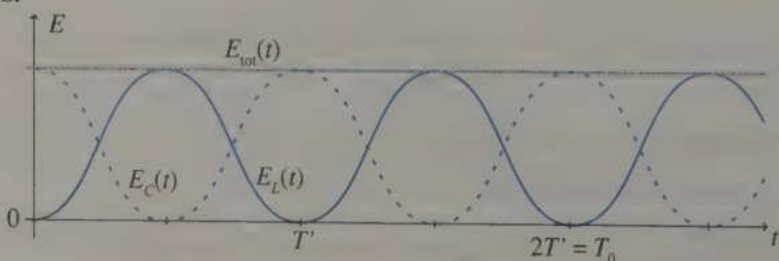
$E_{\text{tot}}(t) = \frac{q_0^2}{2C}$ . A.N.:  $E_{\text{tot}}(t) = \frac{(10^{-6})^2}{2 \times (0,4 \times 10^{-6})} = 1,25 \times 10^{-6}$  J.

$E_{\text{tot}} = \text{cte}$ : en l'absence de résistance, l'énergie totale du circuit se conserve.

5. a.



b.



c.  $E_C(t)$  est maximum lorsque  $E_L(t)$  est minimum (et nulle) et réciproquement.

1.  $q_0 = C \cdot E$  A.N. :  $q_0 = 1,0 \times 10^{-5} \text{ C}$ .

2. Loi d'additivité des tensions :  $u_L(t) + u_R(t) + u_C(t) = 0$

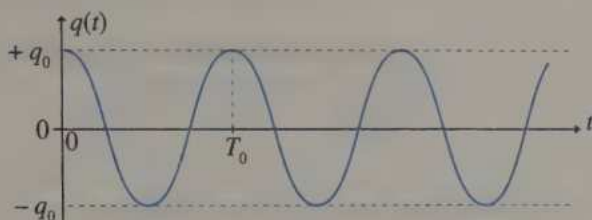
soit  $\left( L \cdot \frac{di(t)}{dt} + r \cdot i(t) \right) + R \cdot i(t) + \frac{q(t)}{C} = 0$ .

Avec  $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$  on obtient :  $L \cdot \frac{d^2q(t)}{dt^2} + (R+r) \frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = 0$  (1)

(avec les orientations classiques du cours).

3. a. Oscillations (libres) non amorties.

$T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$  A.N. :  $T_0 \approx 2,0 \times 10^{-4} \text{ s}$ .



b. L'équation est (avec  $R+r=0$ ) :  $L \cdot \frac{d^2q(t)}{dt^2} + \frac{q(t)}{C} = 0$  (2)

$q(t) = q_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$  d'où :

$\frac{dq(t)}{dt} = i(t) = -\frac{2\pi}{T_0} q_m \sin\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$  et  $\frac{d^2q(t)}{dt^2} = -\frac{4\pi^2}{T_0^2} \cdot q_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$ .

(2) devient :  $\left(-\frac{4\pi^2}{T_0^2} \cdot L + \frac{1}{C}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) = 0$  quel que soit  $t$ . CQFD.

terme nul car  $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$

c. La présence de  $C$  et de  $L$  implique la continuité de  $q(t)$  et de  $i(t)$  à  $t=0$  (entre autres).

$$\begin{cases} q(t=0) = q_0 = C \cdot E \\ i(t=0) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} q_m \cos\varphi = C \cdot E \\ -\frac{2\pi}{T_0} q_m \sin\varphi = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} q_m = \frac{C \cdot E}{\cos\varphi} \\ \sin\varphi = 0 \end{cases} \quad (3)$$

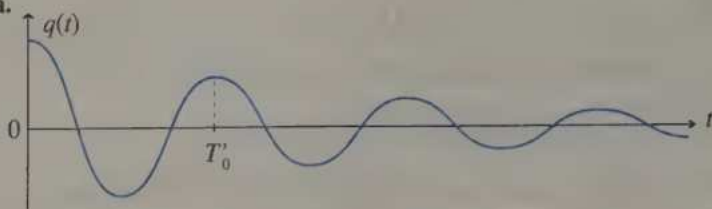
$$(4)$$

$\varphi \in ]-\pi; +\pi]$  donc (4) impose  $\begin{cases} \varphi = 0 \Rightarrow \text{avec (3)} q_m = C \cdot E > 0 \text{ (correct)} \\ \text{ou} \\ \varphi = \pi \Rightarrow \text{avec (3)} q_m = -C \cdot E < 0 \text{ (incorrect)} \end{cases}$

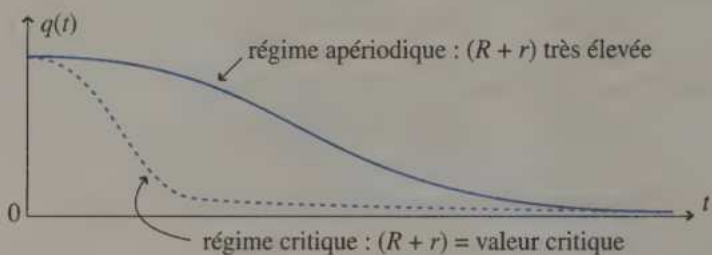
$\varphi = 0 \text{ (rad) et } q_m = q_0 = C \cdot E$

d.  $q(t) = q_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right) = 10^{-5} \cos(3,14 \times 10^4 t)$ .

4. a.

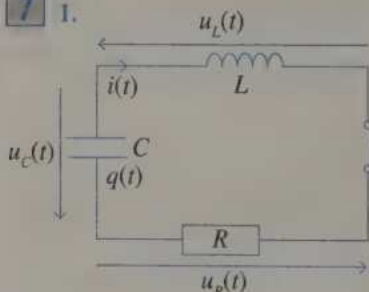


- Régime pseudo-périodique :  $(R+r)$  est faible.
  - $T_0 \approx T_0$  si  $(R+r)$  est « très » faible.
  - $T_0$  est la pseudo-période ( $T_0$  est la période propre).
- b. et c.



- Si  $(R+r)$  est à peine inférieure à  $(R+r)_{\text{critique}}$ , le système oscille très légèrement.
- Si  $(R+r)$  est à peine supérieure à  $(R+r)_{\text{critique}}$ , le système atteint l'équilibre au bout d'une durée à peine supérieure à celle observée en régime critique.

7 1.



a. Loi d'additivité des tensions :

$$u_L(t) + u_R(t) + u_C(t) = 0$$

$$L \frac{di(t)}{dt} + R i(t) + \frac{q(t)}{C} = 0 \quad (0)$$

et avec  $i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$  (en divisant par  $L$ )

$$\frac{d^2q(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{LC} = 0 \quad (1)$$

b. Avec  $q(t) = C \cdot u_C(t)$ , (1) devient (en divisant par  $C$ ) :

$$\frac{d^2u_C(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C(t)}{dt} + \frac{u_C(t)}{LC} = 0 \quad (2)$$

c. On dérive l'équation (0) :

$$L \frac{d^2i(t)}{dt^2} + R \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \frac{dq(t)}{dt} = 0, \text{ donc en divisant par } L :$$

$$\frac{d^2i(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{LC} i(t) = 0 \quad (3)$$

d. Avec  $i(t) = \frac{u_R(t)}{R}$ , (3) devient (en multipliant par  $R$ ) :

$$\frac{d^2 u_R(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_R(t)}{dt} + \frac{1}{LC} u_R(t) = 0 \quad (4)$$

e. On dérive l'équation (3) :

$$\frac{d^3 i(t)}{dt^3} + \frac{R}{L} \frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{1}{LC} \frac{di(t)}{dt} = 0.$$

Donc avec  $\frac{di(t)}{dt} = \frac{u_L(t)}{L}$ , on obtient (en multipliant par  $L$ ) :

$$\frac{d^2 u_L(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_L(t)}{dt} + \frac{1}{LC} u_L(t) = 0 \quad (5)$$

2. Toutes ces équations sont de la forme :

$$\frac{d^2 f(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{df(t)}{dt} + \frac{1}{LC} f(t) = 0.$$

8 1.  $u_D(t)$  et  $i(t)$  sont de sens opposés : **convention récepteur**.

2.  $u_L(t) + u_R(t) + u_r(t) + u_C(t) + u_D(t) = 0$  ( $u_r(t)$  est relatif aux fils de connexions).

$$\left[ L \cdot \frac{di(t)}{dt} + r i(t) \right] + R i(t) + r' i(t) + \frac{q(t)}{C} + u_D(t) = 0$$

$$L \cdot \frac{di(t)}{dt} + (R + r + r') i(t) + \frac{q(t)}{C} + u_D(t) = 0 \quad \text{et avec } i(t) = \frac{dq(t)}{dt} :$$

$$L \cdot \frac{d^2 q(t)}{dt^2} + (R + r + r') \frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} + u_D(t) = 0. \quad (1)$$

$$3. L \frac{d^2 q(t)}{dt^2} + \frac{q(t)}{C} = 0. \quad (2)$$

$$4. (1) - (2) \text{ donne : } u_D(t) = - (R + r + r') \frac{dq(t)}{dt} = - (R_{\text{totale}}) \cdot i(t).$$

Le dipôle D joue donc le rôle d'une *résistance négative* : il apporterait donc de l'énergie au circuit pour compenser les pertes dues à l'effet Joule dans  $R + r + r' = R_{\text{totale}}$ .

Un conducteur ohmique n'est jamais un générateur : il faut un montage plus complexe, avec des générateurs (des amplificateurs opérationnels, par exemple).

9 1. Il faut que  $(R + r)$  soit faible ( $(R + r) < R_{\text{critique}}$ ).

2. Si  $(R + r)$  est **très faible**, alors  $T_0' \approx T_0 = 2\pi\sqrt{LC} = 1,26 \times 10^{-4}$  s.

3. 90 % de l'énergie est perdue après  $10^4 = 10\,000$  oscillations.

Lors d'une oscillation, la perte moyenne est de 0,009 % donc négligeable.

Les deux extrema de  $q(t)$  ont de ce fait à peu près la même valeur absolue.

4. Lors de la 10 001<sup>e</sup> oscillation :

$$E_c = 10 \% \times E_c(\text{initiale}) = 0,1 \times \frac{q_0^2}{2C} = 0,1 \times \frac{(CE)^2}{2C} \text{ et } E_c = \frac{q_{\max}^2}{2C}$$

$$\text{D'où : } q_{\max} = \sqrt{0,1} \times CE \quad \text{A.N. : } q_{\max} = 7,6 \times 10^{-9} \text{ C.}$$

$$\text{De plus, } E_{C_{\max}} = E_{L_{\max}}, \text{ soit } \frac{q_{\max}^2}{2C} = \frac{L}{2} i_{\max}^2, \text{ donc } i_{\max} = \frac{q_{\max}}{\sqrt{LC}}.$$

$$\text{A.N. : } i_{\max} = 3,8 \times 10^{-4} \text{ A.}$$

5. a. Il faut un oscilloscope à mémoire ou un ordinateur avec un système d'acquisition, car le phénomène n'est pas périodique.

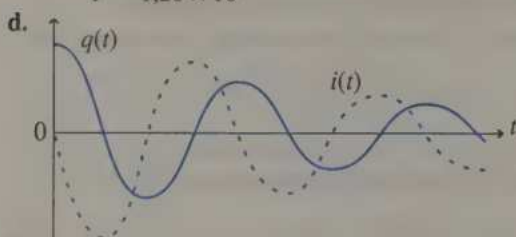
b. Masse en H ; Y<sub>A</sub> en F ; Y<sub>B</sub> en G. Ainsi :

• voie A :  $u_{\text{FH}} = u_c(t) = \frac{q(t)}{C}$  ; on visualise  $q(t)$  au facteur  $\frac{1}{C}$  près ;

• voie B :  $u_{\text{GH}} = -R i(t)$  ; on visualise  $i(t)$  au facteur  $(-R)$  près (on peut visualiser  $u_{\text{HG}} = R i(t)$  en affichant «  $-Y_B$  »).

c. Durée visualisable :  $10 \text{ div} \times 0,2 \text{ ms} \cdot \text{div}^{-1} = 2 \text{ ms} = \Delta t$ .

Donc :  $\frac{\Delta t}{T} = \frac{2 \times 10^{-3}}{1,26 \times 10^{-4}} \approx 16$ . Environ 16 pseudo-périodes sont visualisables.



(L'amortissement est volontairement exagéré.)

**10** 1. Le circuit cède de l'énergie au milieu extérieur sous forme de chaleur dissipée dans le conducteur ohmique (**effet Joule**).

2. L'énergie totale du circuit est  $E_{\text{tot}}(t) = E_c(t) + E_L(t)$ . Sa variation  $\frac{dE_{\text{tot}}(t)}{dt}$  est une puissance ( $P$ ) dissipée (signe  $-$ ) dans le conducteur ohmique ( $R$ ), soit :

$$\frac{d}{dt}[E_{\text{tot}}(t)] = -P_R, \text{ donc } \frac{d}{dt}[E_c(t) + E_L(t)] = -P_R(t).$$

$$3. E_c(t) = \frac{q^2(t)}{2C}; E_L(t) = \frac{L}{2} \dot{i}^2(t); P_R(t) = R \cdot i^2(t);$$

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{q^2(t)}{2C} + \frac{L}{2} \dot{i}^2(t) \right] = -R \cdot i^2(t)$$

$$\frac{2q(t)}{2C} \times \frac{dq(t)}{dt} + \frac{L}{2} 2\dot{i}(t) \frac{d\dot{i}(t)}{dt} + R\dot{i}^2(t) = 0 \text{ car } \frac{d(q^2)}{dt} = 2q \cdot \dot{q}$$

Avec  $\frac{dq(t)}{dt} = i(t)$  et en simplifiant par  $i(t)$ , on obtient :

$$\frac{q(t)}{C} + L \frac{d\dot{i}(t)}{dt} + Ri(t) = 0 \text{ soit } L \cdot \frac{d^2q(t)}{dt^2} + R \frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = 0.$$

## 9

## La mécanique de Newton

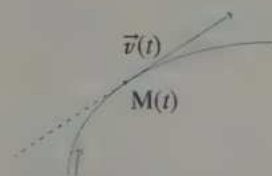
## 1 VITESSE ET ACCÉLÉRATION

## 1. Définitions

O est un point fixe,  $M(t)$  un point mobile.

• **Vecteur position** :  $\overline{OM}(t)$  (unité : m).

• **Vecteur vitesse** : 
$$\vec{v}(t) = \frac{d\overline{OM}(t)}{dt}$$

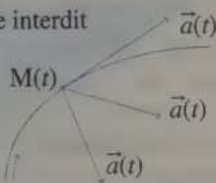


- direction : tangent à la trajectoire
- sens : celui du mouvement
- norme (vitesse) :  $v(t) = \|\vec{v}(t)\| \geq 0$
- unité :  $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$

• **Vecteur accélération** :

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\overline{OM}(t)}{dt^2}$$

espace interdit  
à  $\vec{a}(t)$



(exemples)

- direction : vers l'intérieur de la courbure
- sens : cf. § I 5.
- norme (accélération) :  $a(t) = \|\vec{a}(t)\| \geq 0$
- unité :  $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$

## 2. Valeurs moyennes

Enregistrements à des instants  $t_i$  ( $i \in \mathbb{N}$ )

• **Vecteur position** :  $\overline{OM}(t_i)$

• **Vecteur vitesse** :

$$\begin{aligned} \vec{v}(t_i) &= \frac{\overline{OM}(t_{i+1}) - \overline{OM}(t_{i-1})}{t_{i+1} - t_{i-1}} \\ &= \frac{\overline{M(t_{i-1})M(t_{i+1})}}{t_{i+1} - t_{i-1}} \end{aligned}$$

• **Vecteur accélération** : 
$$\vec{a}(t_i) = \frac{\vec{v}(t_{i+1}) - \vec{v}(t_{i-1})}{t_{i+1} - t_{i-1}}$$

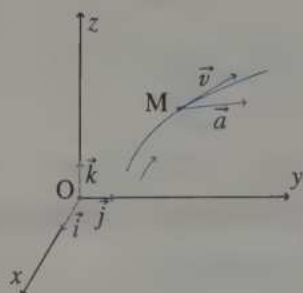
Par la suite, les grandeurs dépendant du temps, comme  $x(t)$ , seront en général notées  $x$  afin d'alléger l'écriture.

### 3. Repère cartésien

• Repère :  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

• Vecteur position :  $\overline{OM} \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases}$

L'équation de la trajectoire d'un mouvement dans le plan  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  ne fait intervenir que  $x$  et/ou  $y$  (mais pas  $t$ ).



• Vecteur vitesse :

$$\vec{v} \begin{cases} v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x} \\ v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y} \\ v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Vitesse : } v &= \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} \\ &= \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \end{aligned}$$

• Vecteur accélération :

$$\vec{a} \begin{cases} a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} = \dot{v}_x = \ddot{x} \\ a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} = \dot{v}_y = \ddot{y} \\ a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2} = \dot{v}_z = \ddot{z} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Accélération : } a &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \\ &= \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} \end{aligned}$$

Attention :  $v \geq 0$  et  $a \geq 0$ , mais  $a_x, a_y, \dots, v_x, \dots$  peuvent être négatifs !

### 4. Repère de Frenet (pour les mouvements plans)

• Repère :  $(M(t), \vec{t}(t), \vec{n}(t))$  ou  $(M, \vec{t}, \vec{n})$  ;

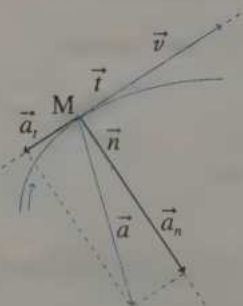
$\vec{t}$  est le vecteur tangent et  $\vec{n}$  le vecteur normal.

• Vecteur vitesse :  $\vec{v} = v \cdot \vec{t}$   $\vec{v} \begin{cases} v \\ 0 \end{cases}$

• Vecteur accélération :  $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$   
 $= a_t \vec{t} + a_n \vec{n}$




$$\vec{a} \begin{cases} a_t = \frac{dv}{dt} \\ a_n = \frac{v^2}{\rho} \end{cases} \quad (\rho \text{ est le rayon de courbure})$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$



## 5. Caractérisation des mouvements

- Description spatiale :
  - mouvement rectiligne  $\Leftrightarrow \rho = \infty \Leftrightarrow a_n = 0$ .
  - mouvement circulaire  $\Leftrightarrow \rho = \text{cte} = R = \text{rayon}$  du cercle trajectoire.
  - autres...
- Description temporelle :

	Mouvement accéléré	Mouvement uniforme	Mouvement retardé
Représentation			
Fonction $v(t)$	croissante	constante	décroissante
$a_t = \frac{dv}{dt}$	$> 0$	$= 0$	$< 0$
$ (\vec{v}, \vec{a}) $	$< \frac{\pi}{2}$	$= \frac{\pi}{2}$	$> \frac{\pi}{2}$
$\vec{v} \cdot \vec{a}$	$> 0$	$= 0$	$< 0$

- Mouvement uniformément accéléré ou retardé :  $a_t = \text{cte} \neq 0$ .
- Certains cours nomment mouvement accéléré tout mouvement pour lequel  $a_t \neq 0$ .
- Mouvement rectiligne uniforme  $\Leftrightarrow a = 0$ .
- Mouvement uniforme  $\Rightarrow a_t = 0$  mais  $a$  peut être non nul (si  $a_n \neq 0$ ).

## 6. Mouvements particuliers

L'indice 0 désigne la valeur initiale (à  $t = 0$  s) de la grandeur.

- Mouvement uniformément accéléré suivant un axe  $Ox$  :

$$\ddot{x} = \text{cte} = a_{0x}$$

$$\dot{x} = a_{0x} \cdot t + v_{0x}$$

$$x = a_{0x} \frac{t^2}{2} + v_{0x} t + x_0$$

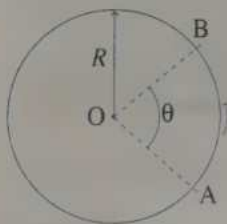
- Mouvement uniforme suivant un axe  $Ox$  :

$$\ddot{x} = 0$$

$$\dot{x} = \text{cte} = v_{0x}$$

$$x = v_{0x} \cdot t + x_0$$

• **Mouvement circulaire uniforme :**



$$\bullet \frac{d^2\theta}{dt^2} = \ddot{\theta} = 0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$\bullet v = \text{cte} = v_0 = R \cdot \omega_0 \text{ avec } \omega_0 : \text{vitesse angulaire (en rad} \cdot \text{s}^{-1}\text{)}.$$

$$\bullet \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2\pi f_0 = |\dot{\theta}| \begin{cases} T_0 : \text{période propre (s)} \\ f_0 : \text{fréquence propre (Hz)} \end{cases}$$

$$\bullet \widehat{AB} = R \cdot (\widehat{AOB}) = R \cdot |\theta|$$

• **Mouvement oscillant :** cf. Chapitre 14.

## II LOIS DE NEWTON

### 1. Référentiels galiléens

- Ce sont les référentiels dans lesquels peuvent s'appliquer les lois de Newton.
- Tout référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen est lui-même galiléen.
- Le référentiel héliocentrique est galiléen. Il en est de même du référentiel géocentrique et des référentiels terrestres si la durée de l'expérience n'excède pas 15 minutes environ.

### 2. Première loi de Newton (ou principe d'inertie)


$$\left. \begin{array}{l} \text{Solide isolé} \\ \text{(pas de force extérieure)} \\ \text{ou} \\ \text{Solide pseudo-isolé} \\ (\sum \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}) \end{array} \right\} \Leftrightarrow \vec{v}_G = \vec{c} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{G est immobile} \\ (\vec{v}_G = \vec{0}) \\ \text{ou} \\ \text{G a un mouvement rectiligne} \\ \text{uniforme } (\vec{v}_G = \vec{c} \neq \vec{0}) \end{array} \right.$$

### 3. Deuxième loi de Newton

- Pour un solide :  $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m \cdot \vec{a}_G$  (théorème du centre d'inertie)
- Pour un point matériel :  $\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}$  (principe fondamental de la dynamique)

### 4. Troisième loi de Newton (ou loi des actions réciproques)

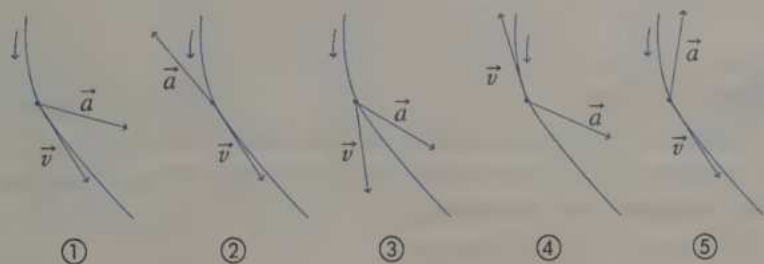
Si A et B interagissent entre eux, alors :  $\vec{F}_{A/B} = -\vec{F}_{B/A}$ .

 **Extrait du programme :** aucun développement quantitatif de l'application de la deuxième loi de Newton à des mouvements sur plan horizontal ou sur plan incliné n'est exigible.

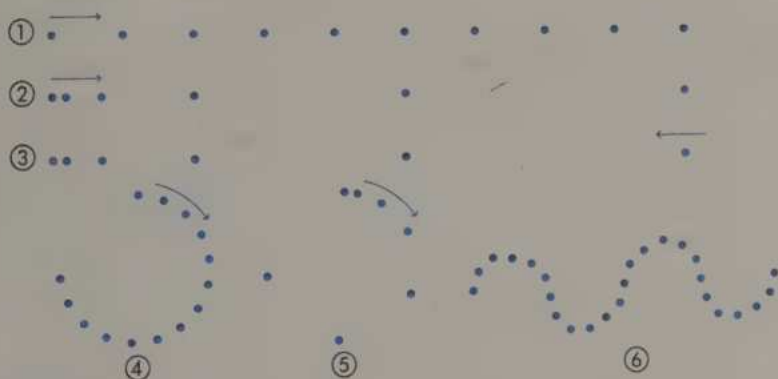
## EXERCICES D'APPLICATION

## 1 RECONNAÎTRE DES MOUVEMENTS \* (5 min) ► p. 148

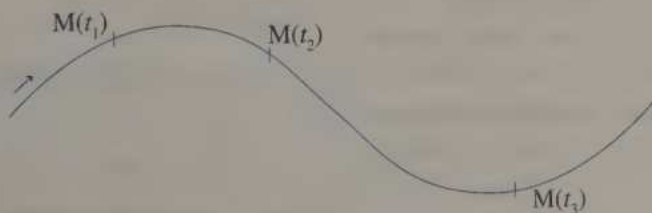
1. Préciser si les mouvements suivants d'un solide ponctuel sont accélérés, retardés ou autres, à l'instant  $t$  pour lequel on a représenté les vecteurs vitesse et accélération.



2. Donner les caractéristiques spatiales et temporelles des mouvements suivants d'un solide ponctuel éclairé par un stroboscope.



3. Placer les vecteurs  $\vec{n}$  et  $\vec{t}$  du repère de Frenet, aux dates indiquées, pour le mouvement suivant :



**2 MOUVEMENT CIRCULAIRE UNIFORME**

\* (10 min) ► P. 148

Un « disque vinyle 33 tr », placé sur la platine du tourne-disque, effectue un mouvement de rotation uniforme à raison de 33 tours par minute. Calculer :

- sa vitesse angulaire de rotation, sa période et sa fréquence ;
- la vitesse et les accélérations (normale, tangentielle et totale) d'un point de bord du disque (rayon  $R = 15$  cm).

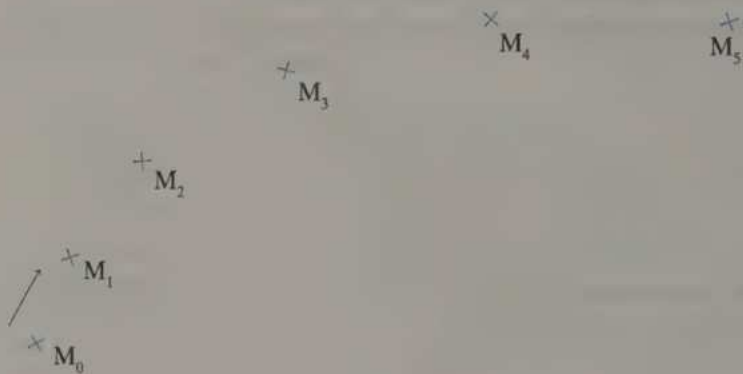
**3 VECTEURS MOYENS**

\* (10 min) ► P. 149

À l'aide d'un dispositif adéquat, les positions d'un mobile ponctuel ont été enregistrées à des dates séparées de  $\Delta t = 100$  ms. Le mouvement est plan, l'échelle est de 1/10. À l'instant  $t_1$ , G se trouve au point  $M_1$ , avec les vecteurs vitesse  $\vec{v}_1$  et accélération  $\vec{a}_1$ .

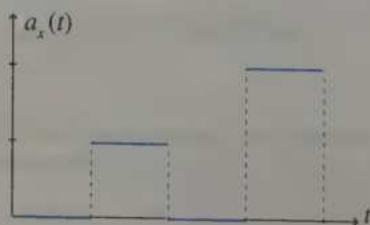
Calculer et construire  $\vec{v}_2$ ,  $\vec{v}_4$  et  $\vec{a}_3$ .

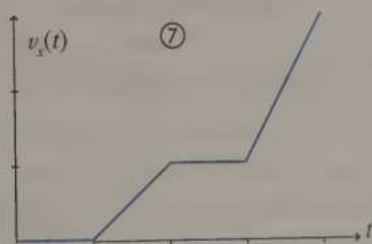
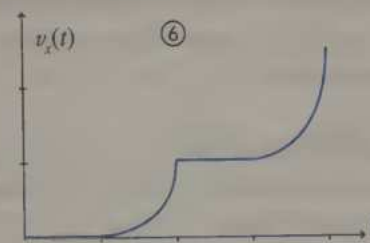
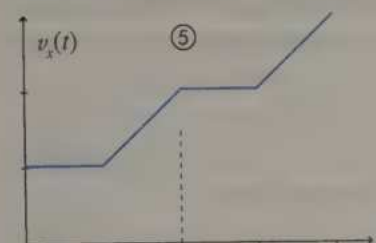
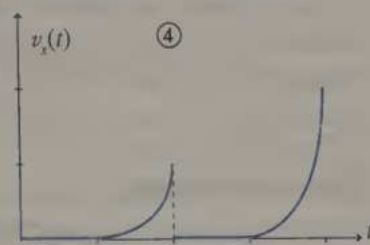
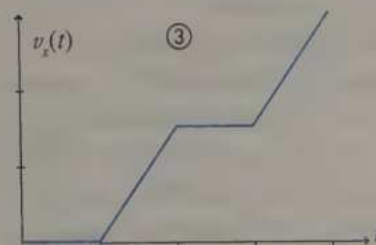
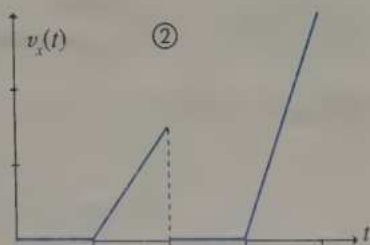
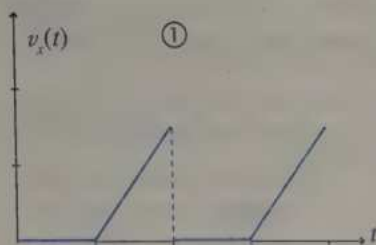
Échelles : 1 cm pour  $0,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  pour  $v$ , 1 cm pour  $2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  pour  $a$ .

**4 VITESSE ET ACCÉLÉRATION**

\* (10 min) ► P. 149

Un mobile ponctuel, évolue le long d'un axe  $Ox$ , sans choc. Il est initialement au repos. Connaissant le graphe  $a_x(t)$  ci-contre, en déduire  $v_x(t)$ , parmi les choix proposés ci-après.





### 5 ÉTUDE D'UN MOUVEMENT PLAN (1) \* (20 min) ► P. 150

Le vecteur position d'un mobile ponctuel est :

$$\overline{OM}(t) \begin{cases} x(t) = 2t + 4 \\ y(t) = 0 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

- Donner l'équation de sa trajectoire et la caractériser.
- Calculer  $\vec{v}$ ,  $v$ ,  $\vec{a}$ ,  $a$ ,  $a_t$ ,  $\rho$  et  $a_n$ . Caractériser alors le mouvement.
- Décrire son état à  $t = 3$  s.
- À quel instant passe-t-il en  $x(t) = 2$  m.

5. Représenter ce mouvement (en traçant sa trajectoire) et indiquer quelques vecteurs vitesse à différentes dates. Décrire ce mouvement.

**6** ÉTUDE D'UN MOUVEMENT PLAN (2) \* (20 min) ► P. 150

Le vecteur position d'un mobile ponctuel est :

$$\overline{OM}(t) \begin{cases} x(t) = 2t \\ y(t) = 4t - 2 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

1. Donner l'équation de sa trajectoire et la caractériser.
2. Calculer  $\vec{v}$ ,  $v$ ,  $\vec{a}$ ,  $a$ ,  $a_t$ ,  $\rho$  et  $a_n$ . Caractériser alors le mouvement.
3. Représenter ce mouvement (en traçant sa trajectoire) et indiquer quelques vecteurs vitesse à différentes dates. Décrire ce mouvement.

**7** LOCOMOTIVE ET WAGON \* (5 min) ► P. 151

Comparer les valeurs de la force exercée par une locomotive sur le premier wagon et de la force exercée par le premier wagon sur la locomotive dans les trois cas suivants : la vitesse du train augmente, diminue, reste constante.

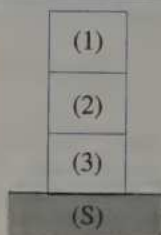
**8** CUBES SUPERPOSÉS \* (10 min) ► P. 151

Soit trois cubes (1), (2) et (3), posés l'un sur l'autre, l'ensemble repose sur le sol (S).

On note  $\vec{F}_{1/2}$  l'action de (1) sur (2), par exemple.

Calculer :  $F_{2/1}$ ,  $F_{3/2}$ ,  $F_{S/3}$ .

Données :  $m_1 = 100 \text{ g}$  ;  $m_2 = 200 \text{ g}$  ;  $m_3 = 400 \text{ g}$  ;  
 $g = 10,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

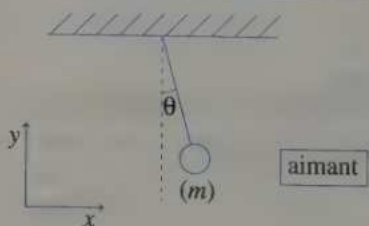


**9** PENDULE ET ÉQUILIBRE \* (10 min) ► P. 151

Une bille métallique de masse  $m$  est suspendue à un fil et attirée par un aimant. On mesure  $\theta = 10^\circ$  et  $m = 10 \text{ g}$ .

En déduire la valeur de la force exercée par l'aimant sur la bille par les deux méthodes suivantes :

- a. en utilisant la première loi de Newton (on projettera les forces sur les axes  $x$  et  $y$ ) ;
- b. en utilisant les relations trigonométriques existant dans le triangle rectangle constitué par les trois forces s'appliquant sur la bille.



**10 PATINEUR**

\* (5 min) ► P. 152

Un patineur, initialement immobile (sur la glace horizontale !), pousse avec ses bras sur un mur afin de se mettre en mouvement. On suppose négligeables les forces de frottement avec la glace.

Quelle est la propriété du système que représente le patineur en mouvement ? Que peut-on dire de son mouvement ?

**EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT****11 ESSAI AUTOMOBILE**

\* (10 min) ► P. 152

1. On peut lire dans une revue automobile, au sujet d'un véhicule : « 100 km/h départ arrêté en 7,5 s ».

Calculer l'accélération supposée constante que doit subir ce véhicule sur une route horizontale pour réaliser une telle performance.

2. Pour le même véhicule, on lit : « 1 000 m, départ arrêté en 27,0 s ».

Répondre à la même question.

3. Conclure.

**12 ÉTUDE D'UN MOUVEMENT PLAN**

\*\* (30 min) ► P. 152

Le vecteur position d'un mobile ponctuel est :

$$\overline{OM}(t) \begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = t^2 - 2t - 8 \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

1. Donner l'équation de sa trajectoire et la caractériser.

2. Calculer  $\vec{v}$ ,  $v$ ,  $\vec{a}$ ,  $a$  et  $a_t$ . Caractériser alors le mouvement.

3. Chercher la position et la vitesse au « sommet » de la trajectoire ainsi que la date à laquelle le mobile y passe.

4. Représenter la trajectoire, les vitesses à  $t = -1$  s, 1 s, 3 s.

Décrire le mouvement du mobile.

**13 ACCÉLÉRATION MOYENNE**

\*\* (10 min) ► P. 154

Calculer l'accélération moyenne, à  $t = 2$  s du mobile ponctuel, se déplaçant dans le plan Oxy, dont on a relevé les positions suivantes :

$t$ (s)	0	1	2	3	4
$x(t)$ (cm)	0,0	2,0	6,0	12,0	20,0
$y(t)$ (cm)	1,0	0,9	0,2	-1,7	-5,4

**14** ROTATION DE LA TERRE

\*\* (10 min) ► P. 154

Exprimer la vitesse  $v$  et l'accélération  $a$  d'un point de la surface de la Terre, de latitude  $\lambda$ , en fonction de son rayon  $R$  et de la valeur du jour sidéral  $T$  :

- dans le repère géocentrique ;
- dans un repère terrestre.

On effectuera l'application numérique pour un point de l'équateur, pour Paris ( $\lambda = 48^\circ$ ) et aux pôles (géographiques).

Données :  $R = 6\,380$  km et  $T = 23$  h 56 mn 04 s.

**15** FUSÉE AU DÉCOLLAGE

\*\* (5 min) ► P. 154

1. En supposant le référentiel terrestre galiléen, quelle est la valeur minimale de la poussée d'une fusée de 100 tonnes, au décollage ?

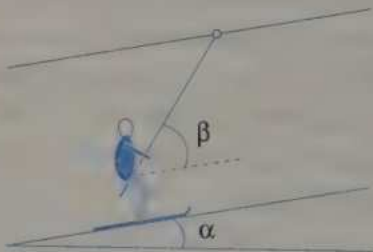
Donnée :  $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

2. Si cette poussée est constante, le mouvement sera-t-il uniformément accéléré ?

**16** TÉLESKI

\*\* (10 min) ► P. 155

Un skieur monte une pente régulière, inclinée de  $\alpha = 10^\circ$  par rapport à l'horizontale, tiré par la perche d'un téléski. La perche fait un angle  $\beta = 50^\circ$  par rapport à la piste. Le mouvement est rectiligne uniforme. Afin d'évaluer la valeur  $f$  de la force  $\vec{f}$  de frottement des skis sur la neige, on insère dans la perche un dynamomètre qui indique 324 N. La masse du skieur, avec son équipement, est  $m = 85$  kg.



- Expliquer pourquoi on peut appliquer la première loi de Newton.
- Écrire l'égalité vectorielle résultante de cette loi.
- Projeter cette égalité vectorielle sur un axe judicieusement choisi afin de calculer  $f$ .
- Exprimer  $f$  en fonction des données de l'énoncé.
- Calculer  $f$ .

**17 PENDULE DANS UN VÉHICULE** \*\*\* (5 min) ► P. 155

Pour mesurer l'accélération d'une voiture, supposée constante sur une trajectoire rectiligne, on utilise un pendule (masse ponctuelle  $m = 10$  g accrochée à l'extrémité d'un fil de masse négligeable) suspendu à l'intérieur du véhicule. Le pendule s'incline d'un angle  $\theta = 5,0^\circ$  que l'on suppose constant.

Calculer l'accélération du véhicule en utilisant un repère terrestre et/ou un repère lié au véhicule, puis conclure.

**18 FRONDE VERTICALE** \*\*\* (10 min) ► P. 155

Une fronde est constituée d'une masse  $m$  ponctuelle attachée à l'extrémité d'un fil de longueur  $l$ , l'ensemble tournant dans un plan vertical autour de l'autre extrémité du fil supposée fixe.

Le fil reste tendu. On suppose que la vitesse de rotation de la masse et du fil est constante.

Cette hypothèse vous paraît-elle réaliste ?

**19 ÉTUDE D'UN MOUVEMENT PLAN (2)** \*\*\* (30 min) ► P. 156

Le vecteur position d'un mobile ponctuel est :

$$\overrightarrow{OM}(t) \begin{cases} x(t) = 1 + 2 \cos t \\ y(t) = 2 \sin t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

1. Donner l'équation de sa trajectoire et la caractériser.
2. Calculer  $\vec{v}$ ,  $v$ ,  $\vec{a}$ ,  $a$ ,  $a_t$ ,  $\rho$  et  $a_n$ . Caractériser alors le mouvement.
3. Représenter la trajectoire et préciser le sens de parcours du mobile (on représentera quelques vecteurs vitesse).
4. Calculer la période et la vitesse angulaire du mouvement.

**20 AVION** \*\*\*\* (10 min) ► P. 156

On modélise un avion monomoteur en vol en supposant qu'il subit les quatre forces suivantes appliquées à son centre d'inertie  $G$  :

- $\vec{P}$ , son poids ;
- $\vec{F}$ , la force motrice (due à l'hélice, par exemple) appliquée dans l'axe longitudinal du fuselage, vers l'avant (donc approximativement horizontale si le vol est horizontal) ;
- $\vec{T}$ , la traînée, colinéaire à  $\vec{F}$ , de sens opposé, due à la résistance de l'air ;
- $\vec{R}$ , la réaction de l'air, ou portance, perpendiculaire à  $\vec{F}$  et au plan des ailes.

La trajectoire de G est horizontale, la vitesse de l'avion constante et  $m = 700 \text{ kg}$ . On note  $P$ ,  $F$ ,  $T$  et  $R$  les valeurs de  $\vec{P}$ ,  $\vec{F}$ ,  $\vec{T}$  et  $\vec{R}$ .

1. L'avion est en vol rectiligne.

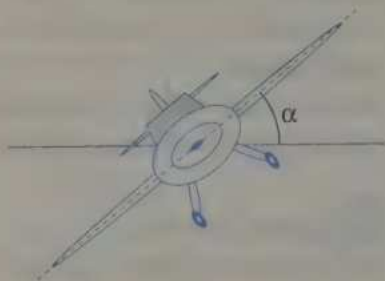
Calculer  $R$  et donner une relation reliant  $T$  et  $F$ .

2. L'avion vire. Pour cela, le plan des ailes est incliné d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale,  $\vec{F}$  et  $\vec{T}$  étant supposées toujours horizontales. Le mouvement est supposé circulaire uniforme.

Données : rayon du cercle trajectoire :  $r = 600 \text{ m}$  ;  $v = 200 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ .

a. Donner une relation entre  $T$  et  $F$ .

b. Exprimer  $\alpha$  et  $R$  en fonction de  $m$ ,  $v$ ,  $g$  et  $r$ . Calculer  $\alpha$  et  $R$ .



### 21 DISTANCE PARCOURUE

\*\*\* (40 min) ► P. 158

Un mobile ponctuel évolue, sans choc, le long d'un axe  $Ox$ .

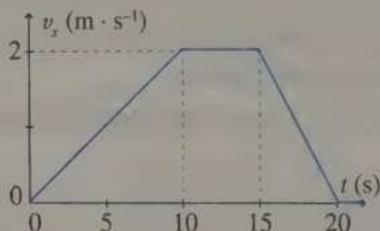
En utilisant le graphe  $v_x(t)$  ci-dessous, en déduire :

a.  $a_x(t)$  ;

b.  $v_x(t)$  ;

c.  $x(t)$ , puis la distance totale  $d$  parcourue (on prendra  $x(t = 0 \text{ s}) = 0 \text{ m}$ ) ;

d. la distance  $d$ , par une méthode directe, en intégrant  $dx = v_x(t) \cdot dt$ .



### 22 MOTO ET VOITURE

\*\*\* (30 min) ► P. 159

Lorsque le feu tricolore passe au vert, la voiture A, qui était immobile, accélère uniformément pendant 5,0 s, puis conserve sa vitesse. Une moto B, roulant à la vitesse constante de  $50 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ , la dépasse au moment où elle démarre ( $t = 0$ ). Les trajectoires sont rectilignes, la valeur de l'accélération initiale de la voiture est :  $a = 4,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

1. Pour  $t \in [0 ; 5 \text{ s}]$ , donner les équations horaires des deux véhicules.

La voiture rattrape-t-elle la moto ? ( $x_A = x_B = 0 \text{ m}$  à  $t = 0 \text{ s}$ ).

2. Mêmes questions pour  $t \geq 5 \text{ s}$ .

(Les applications numériques seront faites directement).

## EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

### 23 TRAINS MINIATURES

\*\*\* (10 min) ► P. 159

Deux trains miniatures  $T_1$  et  $T_2$  parcourent dans le même sens des trajectoires circulaires concentriques, de rayon  $R_1 = 0,50 \text{ m}$  et  $R_2 = 0,70 \text{ m}$ , avec des vitesses angulaires  $\omega_1 = 0,30 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  et  $\omega_2$ . Calculer  $\omega_2$ , sachant que les avants des deux trains et le centre des deux cercles sont alignés uniquement toutes les 50 secondes, en étant du même côté par rapport au centre.

### 24 ASCENSEUR

\*\*\* (40 min) ► P. 159

Trois personnes de masse totale 220 kg montent dans une cabine d'ascenseur de masse 130 kg à vide. L'ensemble évolue de la façon suivante, que ce soit lors d'une montée ou lors d'une descente :

1<sup>re</sup> phase : mouvement uniformément accéléré pendant la durée  $\Delta t = 3,0 \text{ s}$  ;

2<sup>e</sup> phase : mouvement uniforme à la vitesse  $v_0 = 1,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  ;

3<sup>e</sup> phase : mouvement uniformément décéléré pendant la durée  $\Delta t = 3,0 \text{ s}$ .

1. En négligeant les frottements, calculer la tension du fil lors des trois phases, d'une part lors d'une montée, d'autre part lors d'une descente.

2. Calculer la durée nécessaire à la montée d'une hauteur  $h = 10 \text{ m}$ .

Même question pour une descente.

On négligera les frottements et on prendra  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

## CORRIGÉS

1.  $\vec{v}$  doit être tangent à la trajectoire (③ impossible) et dans le sens du mouvement (④ impossible).

$\vec{a}$  doit être dirigé vers l'intérieur de la courbure (② impossible).

① est un mouvement accéléré car  $|(\vec{a}, \vec{v})| < \frac{\pi}{2}$

⑤ est un mouvement retardé car  $|(\vec{a}, \vec{v})| > \frac{\pi}{2}$

2. ① : mouvement rectiligne uniforme.

② : mouvement rectiligne accéléré (le stroboscope éclaire à intervalles de temps réguliers et la distance parcourue augmente).

③ : mouvement rectiligne retardé.

④ : mouvement circulaire uniforme.

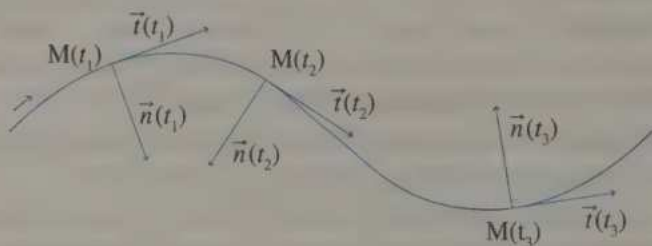
⑤ : mouvement circulaire accéléré.

⑥ : mouvement curviligne uniforme.

3.  $\vec{T}$  est tangent à la trajectoire, dans le sens du mouvement.

$\vec{n}$  est orthogonal à  $\vec{T}$ , vers l'intérieur de la courbure.

$\vec{n}$  et  $\vec{T}$  sont normés : ils ont donc la même « longueur ».



2 a. Vitesse de rotation :  $\omega = 33 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1} = 33 \times \frac{2\pi}{60} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} = 3,5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ .

Fréquence :  $f =$  nombre de phénomène(s) par seconde

$=$  nombre de tour(s) par seconde

$$= \frac{33}{60} = 0,55 \text{ Hz.}$$

Période :  $T = \frac{1}{f} = 1,8 \text{ s.}$

On peut aussi utiliser les relations  $\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot f$ .

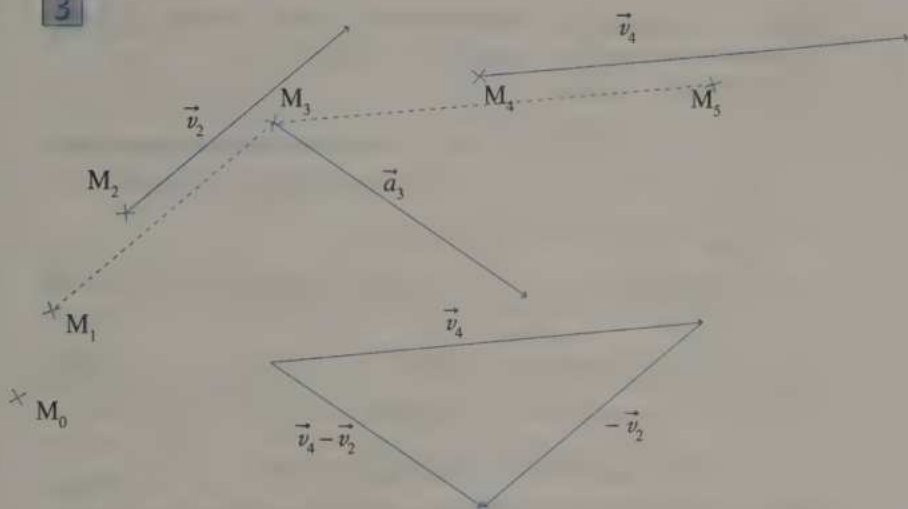
b.  $v = R\omega = 0,15 \times 3,46 = 0,52 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

$a_t = \frac{dv}{dt} = 0$  car  $v = \text{cte.}$

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(R\omega)^2}{R} = R\omega^2 = 0,15 \times 3,5^2 = 1,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = a_n = 1,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

3



On calcule les valeurs moyennes (faute de mieux) :

$$\bar{v}_2 \approx \frac{\overline{OM_3 - OM_1}}{t_3 - t_1} = \frac{\overline{M_1 M_3}}{2\Delta t} \quad \text{et} \quad v_2 \approx \frac{M_1 M_3}{2\Delta t} = \frac{0,38}{2 \times 0,1} = 1,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Sur le graphe,  $M_1 M_3$  correspond à 3,8 cm, donc  $M_1 M_3 = 38 \text{ cm} = 0,38 \text{ m}$ .

$$\bar{v}_4 = \frac{\overline{M_3 M_5}}{2\Delta t} \quad \text{et} \quad v_4 \approx \frac{M_3 M_5}{2\Delta t} = \frac{0,57}{2\Delta t} = 2,85 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

On en déduit, par construction graphique (décalée pour une meilleure lisibilité) :

$$\vec{a}_3 = \frac{\vec{v}_4 - \vec{v}_2}{t_4 - t_2} \quad \text{soit} \quad a_3 = \frac{3,2 \times 1/2}{2 \times 0,1} = 8,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

$\vec{a}_3$  est colinéaire à  $(\vec{v}_4 - \vec{v}_2)$ . Attention aux échelles !

4 Le mobile est initialement au repos :  $v_x(t=0) = 0$ , donc ⑤ ne convient pas. Il n'y a pas de choc, donc  $v_x(t)$  est une fonction continue du temps : ①, ② et ④ ne conviennent pas.

Lors des deuxième et quatrième phases,  $a_x = \text{cte} \neq 0$ , donc en intégrant on obtient  $v_x = a_x \cdot t + \text{cte}$  ( $v_x$  est une fonction affine) : ⑥ (et ④) ne conviennent pas.

Comme  $a_x$  (phase 4) =  $2 \times a_x$  (phase 2), la pente lors de la phase 4 doit être le double de celle de la phase 2 : donc ③ ne convient pas. Pendant les phases 1 et 3,  $a_x = 0$ , donc  $v_x = \text{cte}$  : ⑦ est le graphe recherché.

**5** 1.  $y = 0$  : la trajectoire est incluse dans l'axe  $Ox$  (et comme  $x(t)$  varie de  $-\infty$  à  $+\infty$ , le point décrit l'intégralité de l'axe  $Ox$ ).  
Le mouvement est rectiligne.

$$2. \bullet \vec{v} \begin{cases} \dot{x} = 2 \\ \dot{y} = 0 \end{cases} \quad v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = \text{cte} : \text{le mouvement est uniforme.}$$

$$\bullet \vec{a} \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \end{cases} \quad a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

$$\bullet a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d(2)}{dt} = 0, \text{ donc le mouvement est uniforme.}$$

$$\bullet \rho = \infty \text{ car le mouvement est rectiligne.}$$

$$\bullet a_n = \frac{v^2}{\rho} = 0 \text{ (le mouvement est rectiligne).}$$

D'après 1. et 2., le mouvement est rectiligne uniforme.

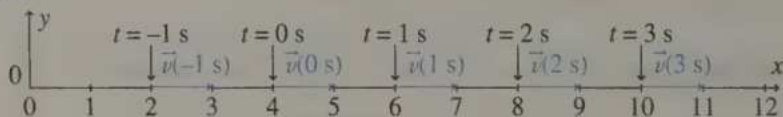
**3**  $a = 0$  suffit à conclure que le mouvement est rectiligne et uniforme.

$$3. \vec{OM}(3 \text{ s}) \begin{pmatrix} x(3 \text{ s}) = 10 \text{ m} \\ y(3 \text{ s}) = 0 \text{ m} \end{pmatrix} \quad \vec{v}(3 \text{ s}) \begin{pmatrix} 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \\ 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \end{pmatrix} \text{ et } v(3 \text{ s}) = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\vec{a}(3 \text{ s}) \begin{pmatrix} 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \\ 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \end{pmatrix} \text{ et } a(3 \text{ s}) = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$4. x(t) = 2, \text{ soit } 2t + 4 = 2, \text{ donc } t = -1 \text{ s.}$$

5.



Le mobile parcourt l'axe  $Ox$  vers la droite, à vitesse constante.

$$6. 1. t = \frac{x}{2}, \text{ d'où } y = 4 \left( \frac{x}{2} \right) - 2 = 2x - 2.$$

La trajectoire est la droite d'équation :  $y = 2x - 2$  (cf. graphique ci-après).

$$2. \bullet \vec{v} \begin{cases} \dot{x} = 2 \\ \dot{y} = 4 \end{cases} \quad v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = 2\sqrt{5} \approx 4,47 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = \text{cte (mouvement uniforme)}$$

$$\bullet \vec{a} \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \end{cases} \quad a = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2} = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \text{ (mouvement rectiligne uniforme)}$$

$$\bullet a_t = \frac{dv}{dt} = 0,$$

donc le mouvement est uniforme.

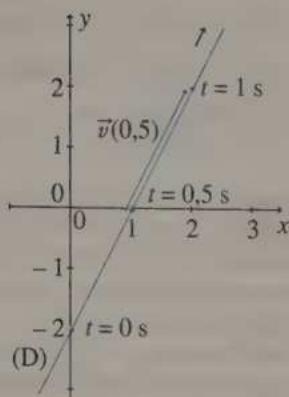
• Le mouvement est rectiligne,

donc  $\rho = \infty$ .

$$\bullet a_n = \frac{v^2}{\rho} = 0,$$

donc le mouvement est rectiligne.

**Ce mouvement est rectiligne uniforme.**



**7** D'après la troisième loi de Newton,  $F_{\text{locomotive/wagon}} = F_{\text{wagon/locomotive}}$  dans chaque cas.

**8** On applique la première loi de Newton aux différents systèmes, puis on projette sur un axe vertical ascendant :

• système {1} :  $\vec{F}_{2/1} + \vec{P}_1 = \vec{0}$  donc  $\vec{F}_{2/1} = -\vec{P}_1$  donc  $F_{2/1} = P_1 = m_1 g = 1,0 \text{ N}$ .

• système {2} :  $\vec{F}_{1/2} + \vec{F}_{3/2} + \vec{P}_2 = \vec{0}$

donc  $\vec{F}_{3/2} = -\vec{F}_{1/2} - \vec{P}_2 = \vec{F}_{2/1} - \vec{P}_2 = -\vec{P}_1 - \vec{P}_2$  ( $\vec{F}_{1/2} = -\vec{F}_{2/1}$  d'après la troisième loi de Newton), donc  $F_{3/2} = (m_1 + m_2)g = 3,0 \text{ N}$ .

• système {3} :  $\vec{F}_{2/3} + \vec{F}_{S/3} + \vec{P}_3 = \vec{0}$

donc  $\vec{F}_{S/3} = -\vec{F}_{2/3} - \vec{P}_3 = +\vec{F}_{3/2} - \vec{P}_3 = -(\vec{P}_1 + \vec{P}_2 + \vec{P}_3)$ ,

donc  $F_{S/3} = (m_1 + m_2 + m_3)g = 7,0 \text{ N}$ .

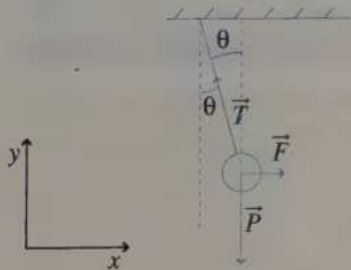
*Remarques :* •  $F_{2/1} = m_1 g$  peut paraître intuitif : cela n'est pas un raisonnement, de même pour  $F_{S/3} = (m_1 + m_2 + m_3)g$ .

•  $\vec{F}_{1/3}$  n'est pas à considérer puisque (1) n'est pas en contact avec (3).

**9** On considère le système : {bille} ; on l'étudie dans le référentiel terrestre galiléen.

a. Première loi de Newton (équilibre) :  $\vec{P} + \vec{T} + \vec{F} = \vec{0}$

( $\vec{T}$  : tension du fil,  $\vec{F}$  : force magnétique,  $\vec{P}$  : poids).



$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{F} = \vec{0}.$$

$$\text{sur Ox : } 0 - T \cdot \sin \theta + F = 0 \quad (1)$$

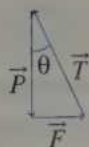
$$\text{sur Oy : } -m \cdot g + T \cdot \cos \theta + 0 = 0 \quad (2)$$

(2) donne  $T = \frac{m \cdot g}{\cos \theta}$  d'où (1) devient  $F = T \cdot \sin \theta = \frac{m \cdot g}{\cos \theta} \sin \theta = m \cdot g \cdot \tan \theta$

A.N. :  $T = 0,010 \times 9,8 \times \tan(10^\circ) = 1,7 \cdot 10^{-2} \text{ N}$ .

b.  $\vec{P} + \vec{T} + \vec{F} = \vec{0}$  d'où la figure :

et  $\tan \theta = \frac{F}{P} = \frac{F}{m \cdot g} \Rightarrow F = m \cdot g \cdot \tan \theta$ .



**10** Appliquons la deuxième loi de Newton au système que constitue le patineur :  $\vec{P} + \vec{R} = m \cdot \vec{a}$  ( $\vec{R}$  est la réaction de la glace ; elle est perpendiculaire au sol, car il n'y a pas de frottement). Par projection, on obtient :

$$\begin{cases} \text{horizontalement : } 0 + 0 = m \cdot \ddot{x} \\ \text{verticalement : } -m \cdot g + R = m \cdot \ddot{y} = 0 \end{cases}$$

car  $y = \text{cte}$  (G reste à la même hauteur) donc  $\ddot{y} = 0$ .

**Ne pas écrire  $-m \cdot g + R = 0$  sans explication, le fait que  $\vec{a} = \vec{0}$  est à expliquer.**

Donc  $\ddot{x} = 0$ , soit  $\dot{x} = \text{cte}$  (et  $\dot{y} = 0$  car  $y = \text{cte}$ ) :  $\vec{v}_G = \vec{c}_t$  et le mouvement est **rectiligne uniforme**. De plus,  $\vec{a} = \vec{0}$ , donc le système est **pseudo-isolé** (car  $\Sigma \vec{F}_{\text{ext}} = m \cdot \vec{a} = \vec{0}$ ).

**11** 1. Le véhicule subit une accélération constante  $a_x$ , le long de l'axe Ox :

$\ddot{x} = \text{cte} = a_x$ , donc  $\dot{x} = a_x t + \text{cte} = a_x t$  (car à  $t = 0 \text{ s}$ ,  $\dot{x} = v_x = 0$ ) donc  $a_x = \frac{\dot{x}}{t}$ .

A.N. :  $a_x = \frac{100 / 3,6}{7,5} \approx 3,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

2. On intègre l'équation précédente :  $x = a_x \frac{t^2}{2} + x_0$  donc  $a_x = \frac{2(x - x_0)}{t^2}$

( $x - x_0$  est la distance parcourue depuis  $t = 0 \text{ s}$ , soit 1 000 m).

A.N. :  $a_x = \frac{2 \times 1\,000}{(27)^2} \approx 2,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

3. Puisque l'on n'obtient pas le même résultat, il est légitime de penser que **l'accélération n'est pas constante**.

**12** 1.  $t = x$ , d'où  $y = x^2 - 2x - 8$  : le mobile a une **trajectoire parabolique** (d'axe Oy).

2. •  $\vec{v} \begin{cases} \dot{x} = 1 \\ \dot{y} = 2t - 2 \end{cases} \quad v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = \sqrt{1 + (2t - 2)^2} = \sqrt{4t^2 - 8t + 5}$

•  $\vec{a} \begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 2 \end{cases} \quad a = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$

•  $a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{8t - 8}{2\sqrt{4t^2 - 8t + 5}} = \frac{4(t - 1)}{\sqrt{4t^2 - 8t + 5}}$

$$\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

• Mouvement accéléré  $\Leftrightarrow a_t > 0 \Leftrightarrow t - 1 > 0 \Leftrightarrow t > 1$  s.

Le mobile est animé d'un mouvement parabolique :  $\begin{cases} \text{retardé, si } t < 1 \text{ s} \\ \text{accéléré, si } t > 1 \text{ s.} \end{cases}$

■ Pour savoir si le mouvement est accéléré ou retardé, on peut aussi examiner le signe du produit scalaire  $\vec{a} \cdot \vec{v}$ .

• Mouvement accéléré  $\Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{v} > 0 \Leftrightarrow 0 \times 1 + (2t - 2) \times 2 > 0 \Leftrightarrow t > 1$  s.

3. 1<sup>re</sup> méthode :

Le sommet de la parabole correspond (géométriquement) à  $\frac{dy}{dx} = 0$ , soit, en

dérivant l'équation de la trajectoire :  $2x - 2 = 0$ , donc  $x = 1$ .

On en déduit :  $y(x = 1) = 1^2 - 2 \times 1 - 8 = -9$ . Le « sommet » est S(1 ; -9).

Les équations horaires donnent :

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ t^2 - 2t - 8 = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 \\ (t - 1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = 1 \text{ s}$$

Le mobile passe en S à  $t = 1$  s.

On calcule alors :  $\vec{v}(t = 1) \Big|_0^1$  et  $v = \|\vec{v}\| = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

2<sup>e</sup> méthode :

Le sommet de la parabole correspond à la position extrême de  $y(t)$ , soit  $\dot{y}(t) = 0$  ce qui entraîne  $2t - 2 = 0$ , d'où  $t = 1$  s.

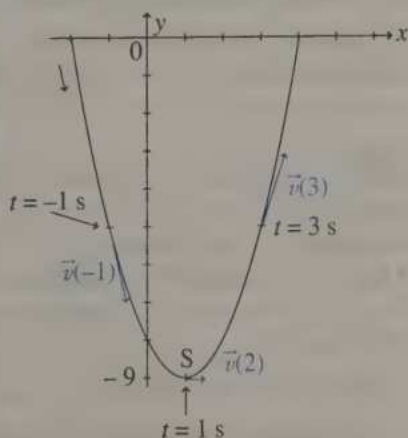
On en déduit alors :

$$\vec{OM}(t = 1 \text{ s}) \begin{cases} x = 1 \\ y = -9 \end{cases} \quad \vec{v}(t = 1 \text{ s}) \begin{cases} \dot{x} = 1 \\ \dot{y} = 0 \end{cases} \quad \text{et } v(t = 1 \text{ s}) = 1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

4.

$t$	$\vec{OM}(t)$	$\vec{v}(t)$
-1	(-1 ; -5)	(1 ; -4)
1	(1 ; -9)	(1 ; 0)
3	(3 ; -5)	(1 ; 4)

Le mobile parcourt la parabole en décélérant jusqu'en S, puis en accélérant après S.



13 Les indices correspondent aux dates (en s). On utilise les formules :

$$a_2 = \sqrt{a_{x2}^2 + a_{y2}^2}$$

$$a_{x2} = \frac{v_{x3} - v_{x1}}{t_3 - t_1} \quad \text{et} \quad a_{y2} = \frac{v_{y3} - v_{y1}}{t_3 - t_1}$$

$$v_{x3} = \frac{x_4 - x_2}{t_4 - t_2} \quad \text{et} \quad v_{x1} = \frac{x_2 - x_0}{t_2 - t_0} \quad \text{de même avec } y.$$

On obtient (attention,  $x$  doit être en m) :

$$v_{x1} = 3,0 \times 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}; \quad v_{x3} = 7,0 \times 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

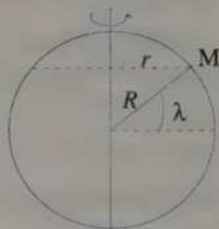
$$v_{y1} = -4,0 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}; \quad v_{y3} = -2,8 \times 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$a_{x2} = 2,0 \times 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}; \quad a_{y2} = -1,2 \times 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \quad \text{et} \quad a = 2,3 \times 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

14 a. Le mouvement est circulaire uniforme, le rayon étant la distance  $r$  représentée ci-contre :

$$r = R \cdot \cos \lambda \quad \text{et} \quad \omega = \frac{2\pi}{T} \quad (\text{vitesse angulaire})$$

$$\text{d'où : } v = r \omega = \frac{2\pi R}{T} \cos \lambda.$$



D'autre part, le mouvement est uniforme, donc :

$$a_t = 0 \quad \text{et} \quad a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{(r\omega)^2}{r} = r\omega^2 \quad \text{soit} \quad a = \frac{4\pi^2}{T^2} R \cdot \cos \lambda.$$

A.N. :

$\lambda$ ( $^\circ$ )	0 (équateur)	48 (Paris)	$\pm 90$ (poles)
$v$ ( $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ )	465	311	0,00
$a$ ( $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ )	$3,39 \times 10^{-2}$	$2,27 \times 10^{-2}$	0,00

(On convertit  $R$  et  $T$  dans les unités S.I. :  $R = 6,380 \times 10^6 \text{ m}$  et  $T = 86\,164 \text{ s}$ .)

b. Dans un repère terrestre, le point considéré est fixé, donc  $v = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  et  $a = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

15 1. Bilan des forces : poids  $\vec{P}$  et poussée  $\vec{F}$ . D'où, en appliquant la deuxième loi de Newton :  $\vec{P} + \vec{F} = m\vec{a}_G$ , et en projetant sur un axe vertical ascendant  $Oz$  :  $-mg + F = m\ddot{z}$ .

Il faut  $\ddot{z} > 0$  (pour que  $\dot{z} = v_z$  augmente « vers le haut »), donc  $F > mg$ .

A.N. :  $F \geq 10^5 \times 10 = 10^6 \text{ N}$  (en fait la poussée ne sert qu'à vaincre le poids, donc la gravité).

2. Par la suite, on a toujours  $\ddot{z} = \frac{F}{m} - g$ , mais la masse de la fusée diminue considérablement (90 % de la masse est constituée de comburant et

carburant), donc  $\dot{z}$  augmente : **le mouvement est toujours accéléré, mais non uniformément**. La même conclusion s'impose si l'on prend en compte la diminution de  $g$  avec l'altitude (cf. Chapitre 10).

**16** 1. Le centre d'inertie  $G$  a un mouvement rectiligne uniforme, on peut donc appliquer la première loi de Newton.

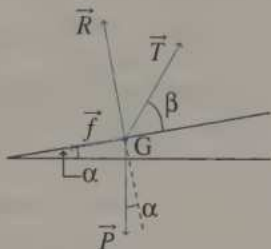
2.  $\vec{P} + \vec{R} + \vec{f} + \vec{T} = \vec{0}$  avec  $\vec{P}$ , le poids,  $\vec{f}$ , la force de frottements,  $\vec{T}$ , la tension de la perche et  $\vec{R}$ , la réaction du sol.

3. Ne connaissant pas la valeur de  $\vec{R}$ , on s'en affranchit en projetant la relation précédente, perpendiculairement à  $\vec{R}$ , donc parallèlement à la pente, d'où :

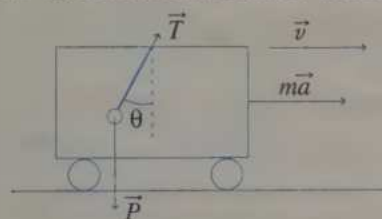
$$-m \cdot g \cdot \sin \alpha + 0 - f + T \cdot \cos \beta = 0.$$

$$4. f = T \cdot \cos \beta - m \cdot g \cdot \sin \alpha.$$

$$5. \text{A.N. : } f = 324 \cos(50^\circ) - 85 \times 9,8 \times \sin(10^\circ) \approx 63,6 \text{ N.}$$



**17** Dans le repère terrestre, le pendule étant fixe par rapport au véhicule, ils ont tous les deux la même accélération :

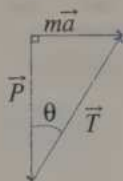


Le schéma ci-contre a été réalisé pour un mouvement accéléré et non retardé ; sinon prendre  $m\vec{a}$  opposé à  $\vec{v}$  et le pendule vers l'avant.

On a  $\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$ . Mais plutôt que de projeter suivant deux axes, on utilise le « triangle des forces » (méthode plus rapide) :

$$\tan \theta = \frac{m \cdot a}{P} = \frac{m \cdot a}{m \cdot g} = \frac{a}{g}, \text{ soit } a = g \cdot \tan \theta.$$

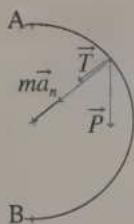
$$\text{A.N. : } a = 9,8 \cdot \tan(5^\circ) = 0,86 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$



**18** Pour une position différente de celle de A et B (schéma ci-contre), en étudiant le système = {masse}, on obtient :  $\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a} = m\vec{a}_n$  car  $v = \text{cte}$  et  $a_t = \frac{dv}{dt} = 0$ .

Or,  $m\vec{a}_n$  et  $\vec{T}$  sont colinéaires, mais  $\vec{P}$  n'est colinéaire ni à  $\vec{T}$  ni à  $m\vec{a}_n$ .

Cette relation est donc impossible : on ne peut avoir  $v = \text{cte}$ .



19 On utilise la relation :  $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ .

1. L'équation de la trajectoire est une relation avec  $x$  et/ou  $y$ , sans  $t$ .

$$\text{Le système est équivalent à } \begin{cases} \cos t = \frac{x-1}{2} \\ \sin t = \frac{y}{2} \end{cases} \text{ ou encore à } \left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1$$

$$\text{soit : } (x-1)^2 + (y-0)^2 = 2^2.$$

Cette équation est celle du cercle de centre  $A(1; 0)$  et de rayon  $R = 2$ .

$$2. \bullet \vec{v} \begin{cases} \dot{x} = -2\sin t \\ \dot{y} = 2\cos t \end{cases} \quad v = \|\vec{v}\| = \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t} = 2\sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Le mouvement est uniforme.

$$\bullet \vec{a} \begin{cases} \ddot{x} = -2\cos t \\ \ddot{y} = -2\sin t \end{cases} \quad a = \|\vec{a}\| = \sqrt{4\cos^2 t + 4\sin^2 t} = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

$$\bullet a_t = \frac{dv}{dt} = 0, \text{ donc le mouvement est uniforme.}$$

$$\bullet \rho = R = 2 \text{ (car le mouvement est circulaire).}$$

$$\bullet a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{2^2}{2} = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

•  $a \neq 0$  mais  $v = \text{cte}$  : pour juger de l'uniformité d'un mouvement, il faut se fier à  $a_t$  et non à  $a$  !

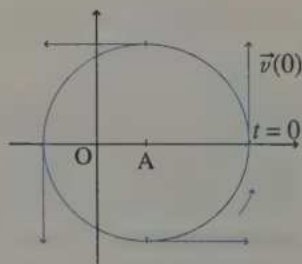
$$\bullet \text{On retrouve : } a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = \sqrt{0^2 + 2^2} = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

**Le mouvement est circulaire uniforme.**

3. Pour avoir le sens de parcours, il suffit de représenter un vecteur vitesse :

$$\vec{v}(t=0) \begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 2 \end{cases}$$

On en déduit le sens de parcours (schéma ci-contre) : c'est le sens trigonométrique ou sens direct.

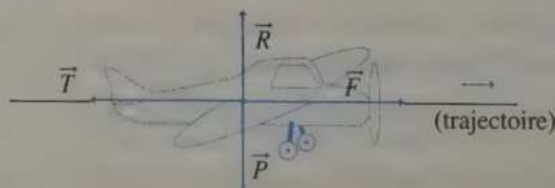


4.  $\cos t$  et  $\sin t$  ont pour période commune :

$$T = 2\pi \approx 6,3 \text{ s.}$$

$$\text{La vitesse angulaire est : } \omega = \frac{v}{R} = \frac{2}{2} = 1,0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

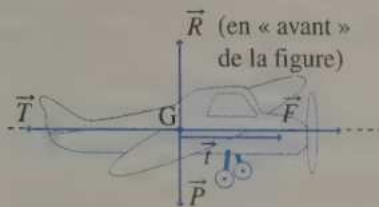
20 1. Projection dans le plan vertical :



La première loi de Newton, pour ce mouvement rectiligne uniforme donne :  $\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} + \vec{T} = \vec{0}$  donc par projection horizontale :  $0 + 0 + F - T = 0$ , soit  $F = T$  ( $F$  « compense » les pertes dues aux frottements sur l'air, soit  $T$ ).

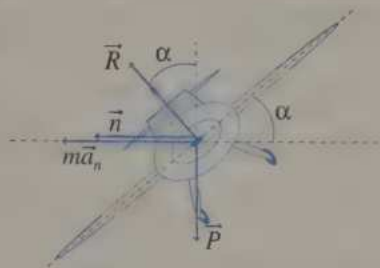
De même, par projection verticale :  $R = P = mg = 6,86 \times 10^3 \text{ N}$ .

2. Projection dans le plan vertical contenant l'axe longitudinal de l'avion :



$(\vec{i}, \vec{n})$  repère de Frenet

Projection dans le plan vertical perpendiculaire à l'axe longitudinal :



La deuxième loi de Newton (le mouvement n'est plus rectiligne) donne :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} + \vec{T} = m \cdot \vec{a}_G = m \cdot \vec{a}_n \quad (\text{car } v = \text{cte, donc } a_t = \frac{dv}{dt} = 0).$$

$\vec{a}_n$  est dirigé suivant le rayon de la trajectoire passant par G (donc  $\vec{a}_n$  est horizontale, voir le schéma).

a. On projette la relation précédente suivant  $\vec{i}$  :

$$0 + 0 + F - T = 0 \text{ soit } F = T \quad (1).$$

b. On projette la relation précédente suivant  $\vec{n}$  :

$$0 + R \cdot \sin \alpha + 0 + 0 = m \cdot a_n = m \frac{v^2}{r} \quad (2)$$

puis sur la verticale :

$$-m \cdot g + R \cdot \cos \alpha + 0 + 0 = m \ddot{z} = 0 \quad (3).$$

Avec (2) et (3), on obtient :

$$m \frac{v^2}{r} = R \cdot \sin \alpha = \frac{m \cdot g}{\cos \alpha} \cdot \sin \alpha = m \cdot g \cdot \tan \alpha \text{ soit } \tan \alpha = \frac{v^2}{g \cdot r}$$

$$\text{A.N. : } \alpha = \tan^{-1} \left( \left( \frac{200}{3,6} \right)^2 \times \frac{1}{9,8 \times 600} \right) = 28^\circ$$

$$\text{D'après (2) : } (R \cdot \sin \alpha)^2 = \left( m \frac{v^2}{r} \right)^2 \text{ et d'après (3) : } (R \cdot \cos \alpha)^2 = (m \cdot g)^2$$

$$\text{d'où : } (R \cdot \sin \alpha)^2 + (R \cdot \cos \alpha)^2 = \left( m \frac{v^2}{r} \right)^2 + (mg)^2$$

$$\text{soit : } R^2 (\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) = m^2 \left( \frac{v^4}{r^2} + g^2 \right), \text{ d'où } R = m \sqrt{\left( \frac{v^2}{r} \right)^2 + g^2}$$

$$\text{A.N. : } R \approx 7,75 \cdot 10^3 \text{ N}$$

**21** a.  $a_x = \frac{dv_x}{dt}$  est le coefficient directeur de  $v_x(t)$  si  $v_x$  est une fonction affine.

$$a_x = \frac{\Delta v_x}{\Delta t}$$

•  $0 \text{ s} < t < 10 \text{ s}$  :  $a_x = \frac{2-0}{10-0} = 0,20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

•  $10 \text{ s} < t < 15 \text{ s}$  :  $a_x = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  (droite horizontale pour  $v_x$ )

•  $15 \text{ s} < t < 20 \text{ s}$  :  $a_x = \frac{0-2}{5} = -0,40 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

•  $t > 20 \text{ s}$  :  $a_x = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

b. Pour chaque phase,  $a_x = \text{cte} = \frac{dv_x(t)}{dt}$  donc  $v_x(t) = a_x \cdot t + \text{cte}$ .

•  $0 \text{ s} \leq t \leq 10 \text{ s}$  :  $v_x(t) = 0,2 t + \text{cte}$  et  $v_x(t=0) = 0$ , donc  $\text{cte} = 0$ .  
 $v_x(t) = 0,2 t$ .

•  $10 \text{ s} \leq t \leq 15 \text{ s}$  :  $v_x(t) = 2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  (lecture directe).

•  $15 \text{ s} \leq t \leq 20 \text{ s}$  :  $v_x(t) = -0,4 t + \text{cte}$  et  $v_x(t=15^-) = v_x(t=15^+)$   
par continuité de  $v_x(t)$ , soit  $2 = -0,4 \times 15 + \text{cte}$ ,  
donc  $\text{cte} = +8$  et  $v_x(t) = -0,4 t + 8$ .

•  $t \geq 20$  :  $v_x(t) = 0$ .

*Remarque* : On vérifie la continuité de  $v_x(t)$  à  $t = 20 \text{ s}$  :

$$v_x(t=20^-) = -0,4 \times 20 + 8 = 0 \text{ et } v_x(t=20^+) = 0.$$

c. Pour chaque phase,  $v_x(t) = \frac{dx(t)}{dt}$ , donc  $x(t) = \int v_x(t) dt$ .

•  $0 \text{ s} \leq t \leq 10 \text{ s}$  :  $x(t) = \int 0,2 t dt = 0,1 t^2 + \text{cte} = 0,1 t^2$  car  $x(t=0) = 0$   
(d'après l'énoncé), donc  $x(t) = 0,1 t^2$ .

•  $10 \text{ s} \leq t \leq 15 \text{ s}$  :  $x(t) = \int 2 dt = 2 t + \text{cte}$  ; par continuité de  $x(t)$  à  $t = 10 \text{ s}$ , on écrit :  $x(t=10^-) = x(t=10^+)$  soit  $0,1 \times (10)^2 = 2 \times 10 + \text{cte}$  soit  $\text{cte} = -10$  et  $x(t) = 2 t - 10$ .

•  $15 \text{ s} \leq t \leq 20 \text{ s}$  :  $x(t) = \int (-0,4 t + 8) dt = -0,2 t^2 + 8 t + \text{cte}$  ; par continuité de  $x(t)$  à  $t = 15 \text{ s}$ , on écrit :  $x(t=15^-) = x(t=15^+)$ , soit  $2 \times (15) - 10 = -0,2 \times 15^2 + 8 \times 15 + \text{cte}$ , d'où  $\text{cte} = -55$ , et  $x(t) = -0,2 t^2 - 8 t - 55$ .

•  $t \geq 20 \text{ s}$  :  $x(t) = \text{cte}$  (arrêt)  
 $= x(t=20^-) = -0,2 \times 20^2 + 8 \times 20 - 55 = 25 \text{ m} = d$ .

d.  $v_x(t) = \frac{dx}{dt}$ , soit  $dx(t) = v_x(t) dt$ . On intègre entre  $t = 0 \text{ s}$  et  $t = 20 \text{ s}$  :

$$\int_{t=0}^{t=20} dx = \int_{t=0}^{t=20} v_x(t) dt \quad x(20 \text{ s}) - x(0 \text{ s}) \text{ est l'aire sous la courbe } v_x(t) \text{ ou l'aire du trapèze.}$$

$$d - 0 = \frac{\text{petite base} + \text{grande base}}{2} \times \text{hauteur} = \frac{5 + 20}{2} \times 2 = 25 ; d = 25 \text{ m.}$$

**22** 1. • Le mouvement de la moto est uniforme :  $\dot{x}_B = \text{cte} = \frac{50}{3,6} \approx 14 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , donc  $x_B = 14 t + \text{cte} = 14 t$  (car  $x_B = 0 \text{ m}$  à  $t = 0 \text{ s}$ ).

• Le mouvement de la voiture est uniformément accéléré :  $\ddot{x}_A = \text{cte} = 4,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ , donc :

$$(1) \dot{x}_A = 4 t + \text{cte} = 4 t \quad (\text{car } \dot{x}_A(t=0) = v_{x_A}(t=0) = 0)$$

et  $(2) x_A = 2 t^2 + \text{cte} = 2 t^2$  (car  $x_A = 0$  à  $t = 0$ ).

• La voiture rattrape la moto si  $x_A = x_B$ , soit  $2 t^2 = 14 t$ , donc pour  $t = 0 \text{ s}$  (c'est alors la moto qui double la voiture) ou pour  $t = 7 \text{ s} > 5 \text{ s}$  donc : **la voiture ne rattrape pas la moto pour  $t \in [0 ; 5 \text{ s}]$ .**

2. • Pour la moto, de même qu'au 1. :  $x_B = 14 t$ .

• Pour la voiture, le mouvement est uniforme :  $\dot{x}_A = \text{cte} = \dot{x}_A(t=5^-) = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  car  $\dot{x} = v_x$  est une fonction continue en l'absence de choc

$$(\dot{x}_A(t=5^+) = \dot{x}_A(t=5^-) = 4 \times 5 = 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \text{ d'après (1)}).$$

On en déduit  $x_A = 20 t + \text{cte}$ , or  $x_A$  est une fonction continue donc

$$x_A(t=5^-) = x_A(t=5^+), \text{ soit } 2 \times 5^2 = 20 \times 5 + \text{cte}, \text{ donc } \text{cte} = -50 : x_A = 20 t - 50.$$

Lorsque la voiture rattrape la moto, on a  $x_A = x_B$ , soit  $20 t - 50 = 14 t$ , donc  $t = 8,3 \text{ s} (> 5 \text{ s})$ .

**La voiture rattrape la moto à  $t = 8,3 \text{ s}$ .**

**23** Pendant  $\Delta t = 50 \text{ s}$ ,  $T_1$  a parcouru l'angle  $\theta_1 = \omega_1 \cdot \Delta t$  et  $T_2$  a parcouru l'angle  $\theta_2 = \omega_2 \cdot \Delta t$ .  $T_1$  et  $T_2$  se retrouvent à nouveau alignés, donc  $T_2$  a fait un tour de plus ou de moins que  $T_1$  :

$$\theta_2 = \theta_1 \pm 2 \pi \text{ donc } \omega_2 \cdot \Delta t = \omega_1 \cdot \Delta t \pm 2 \pi, \text{ soit } \omega_2 = \omega_1 \pm \frac{2 \pi}{\Delta t}$$

$$\text{A.N. : } \omega_2 = 0,3 \pm \frac{2 \pi}{50} = 0,43 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \text{ ou } 0,17 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

**24** 1. La deuxième loi de Newton appliquée au système {cabine + passagers} de masse totale  $m = 130 + 220 = 350 \text{ kg}$  donne :  $\vec{P} + \vec{T} = m \cdot \vec{a}$  soit  $\vec{T} = m \cdot \vec{a} - \vec{P}$ , donc, en projection sur un axe  $z$  ascendant :

$$T = m(a_z + g) \quad (T > 0, \text{ donc on utilise des valeurs absolues}).$$

• Phase 2 : Le mouvement est uniforme, donc  $a_z = 0$  et  $T = m \cdot g$ .

$$\text{A.N. : } T = 3,43 \times 10^3 \text{ N}.$$

• Phases 1 et 3 : Le mouvement est uniformément accéléré ou décéléré ce qui lui confère une variation de  $|\Delta v| = |v_0 - 0| = v_0$  pendant  $\Delta t$ , donc

$$|a_z| = \frac{|\Delta v|}{\Delta t} = \frac{v_0}{\Delta t}.$$

Il reste à déterminer le signe de  $a_z$  ; c'est un problème complexe qui dépend de deux paramètres : montée ou descente, accélération ou décélération. On procède ainsi : on représente  $\vec{v}$  (montée ou descente), puis  $\vec{a}$  par rapport  $\vec{v}$  (accélération ou décélération).

Les résultats sont résumés dans le tableau ci-dessous :

Phase	1	3
Mouvement	accéléré	décéléré
$\vec{v}$ et $\vec{a}$	de même sens	de sens opposés
Montée ( $\vec{v}$ ascendant)	$\vec{v} \uparrow \parallel \vec{a} \quad a_z > 0$	$\vec{v} \uparrow \perp \vec{a} \quad a_z < 0$
Descente ( $\vec{v}$ descendant)	$\vec{v} \downarrow \parallel \vec{a} \quad a_z < 0$	$\vec{v} \downarrow \perp \vec{a} \quad a_z > 0$

Conclusion :

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \text{ accélération en montée} \\ \bullet \text{ décélération en descente} \end{array} \right\} a_z > 0 \text{ donc } T = m \left( \frac{v_0}{\Delta t} + g \right) = 3,55 \times 10^3 \text{ N.}$$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \text{ accélération en descente} \\ \bullet \text{ décélération en montée} \end{array} \right\} a_z < 0 \text{ donc } T = m \left( -\frac{v_0}{\Delta t} + g \right) = 3,31 \times 10^3 \text{ N.}$$

2. Les phases 1 et 3 durent  $2\Delta t$  (secondes) ; la phase 2, à vitesse  $v_0$  constante, dure  $\frac{h'}{v_0}$  (secondes),  $h'$  étant la hauteur à parcourir. Il faut donc calculer la

hauteur dont est monté (ou descendu) l'ascenseur pendant les phases 1 et 3, soit  $h''$  (et on aura  $h' = h - 2h''$ ).

Prenons le cas d'une accélération (phase 1) en montée (vous pouvez vérifier qu'il en est de même, quant à leur durée, pour les trois autres cas répertoriés dans le tableau).

$$\ddot{z} = +\frac{v_0}{\Delta t} \text{ donc } \dot{z} = \frac{v_0}{\Delta t} \cdot t + \text{cte} = \frac{v_0}{\Delta t} \cdot t \text{ (car à } t = 0, \dot{z} = v_z = 0),$$

$$\text{donc } z = \frac{v_0}{\Delta t} \cdot \frac{t^2}{2} + z_0, \text{ d'où : } h'' = z(\Delta t) - z_0 = \frac{v_0}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta t^2}{2} = \frac{v_0 \cdot \Delta t}{2}.$$

On en déduit  $h' = h - 2h'' = h - v_0 \cdot \Delta t$  qui se parcourt pendant  $\frac{h'}{v_0} = \frac{h}{v_0} - \Delta t$ .

La durée totale du parcours est :

$$\left( \frac{h}{v_0} - \Delta t \right) + 2\Delta t = \frac{h}{v_0} + \Delta t.$$

$$\text{A.N. : Durée du parcours : } \frac{10}{1,0} + 3,0 = 13,0 \text{ s.}$$

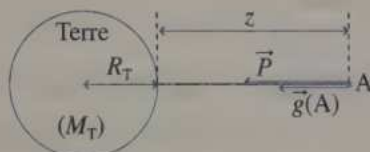
## 10

# Chute verticale d'un solide

## I FORCE ET CHAMP DE PESANTEUR

• Une masse  $m$ , située au point A d'altitude  $z \geq 0$ , est soumise à la force de pesanteur, ou poids :

$$\vec{P} = m \cdot \vec{g}(A).$$



$g$  est l'intensité du champ de pesanteur (en  $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ ).

• Si  $m$  est à l'extérieur de la Terre (c'est-à-dire si  $m$  n'est pas au fond d'un puits) et si l'on néglige les effets secondaires (rotation de la Terre, attraction de la Lune, ...), alors  $\vec{g}$  est dirigé vers le centre de la Terre. On a :

$$g(A) = g(z) = \frac{G \cdot M_T}{(R_T + z)^2} \quad \left\{ \begin{array}{l} \bullet G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2} \\ \bullet R_T \text{ et } M_T : \text{ rayon et masse de la Terre} \\ \bullet g(z=0) \approx 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}. \end{array} \right.$$

• On peut considérer que  $\vec{g}$  est à peu près uniforme (en valeur et direction) dans un volume de quelques dizaines de kilomètres de côté.

## II POUSSÉE D'ARCHIMÈDE

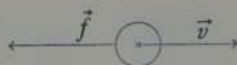
Tout corps plongé dans un fluide subit la poussée d'Archimède  $\vec{\Pi}$ , force verticale ascendante, de même valeur que le poids du volume de fluide déplacé ( $\vec{\Pi}$  s'applique au centre d'inertie du corps) :

$$\vec{\Pi} = -\rho_{\text{fluide}} \cdot V_{\text{immergé}} \cdot \vec{g} \quad \left\{ \begin{array}{l} \rho_{\text{fluide}} \text{ est la masse volumique} \\ \text{du fluide (en } \text{kg} \cdot \text{m}^{-3}\text{)} \\ V_{\text{immergé}} \text{ est le volume immergé} \\ \text{du corps (en } \text{m}^3\text{)} \end{array} \right.$$

Soit  $\rho$  la masse volumique du corps ; dans la pratique on néglige  $\vec{\Pi}$  si  $\rho_{\text{fluide}}$  est négligeable devant  $\rho$  :  $\rho_{\text{fluide}} \ll \rho$ .

### III FORCE DE FROTTEMENT

Tout corps se déplaçant dans un fluide avec le vecteur vitesse  $\vec{v}$  (relatif à son centre d'inertie) subit une force de frottement  $\vec{f}$ , opposée à  $\vec{v}$  :



$$\vec{f} = -\lambda(v) \cdot \frac{\vec{v}}{v}$$

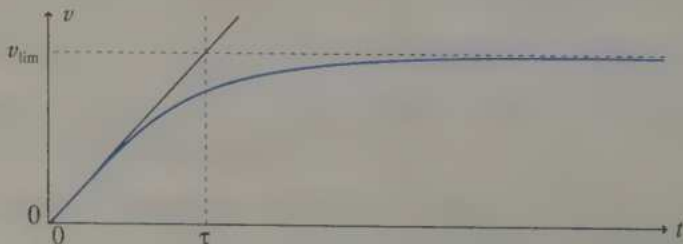
- $\frac{\vec{v}}{v}$  est un vecteur normé, de mêmes direction et sens que  $\vec{v}$ .
- $\lambda(v)$  est une fonction positive de  $v$  (donnée dans les exercices) qui est en général proportionnelle à  $v$  pour les faibles vitesses, à  $v^2$  pour les vitesses élevées.

### IV CHUTE LIBRE VERTICALE

- La chute libre verticale est le mouvement d'un corps de masse  $m$ , dont le vecteur vitesse initial  $\vec{v}_0$  est vertical, qui n'est soumis qu'à son poids (chute « libre »).
- $\vec{P} = m \cdot \vec{a}_G$ , soit  $\vec{g} = \vec{a}_G$  (relation à savoir projeter et intégrer).
- Le mouvement est vertical :  $x = 0 = y$  et  $z = -g \frac{t^2}{2} + v_{0z} t + z_0$  (si  $Oz$  est ascendant).

### V CHUTE VERTICALE : CAS GÉNÉRAL

- La chute verticale est le mouvement d'un corps de masse  $m$ , dont le vecteur vitesse initial  $\vec{v}_0$  est vertical, qui est soumis à d'autres forces que son poids (poussée d'Archimède, force de frottements, ...).
- $\vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{f} + \dots = m \cdot \vec{a}_G$  (relation à savoir projeter et intégrer).
- Le mouvement est vertical.
- Si  $\vec{v}_0 = \vec{0}$ , alors le mouvement est uniformément accéléré, puis il devient uniforme (régime asymptotique).



## VI MÉTHODE D'EULER

La méthode d'Euler est une résolution approchée d'une équation différentielle du type :

$$\frac{dv_z}{dt} = f(v_z)$$

Elle est utile lorsque la solution analytique est inconnue.

Des valeurs discrètes de  $v_z$  sont obtenues aux instants  $t_i$  séparés de  $\Delta t$  tels que :

$$t_i = i \times \Delta t \quad \text{avec } i \in \mathbb{N} \text{ et } \Delta t > 0.$$

$\Delta t$  est appelé « pas de la discrétisation ».

On utilise :  $\frac{dv_z}{dt}(t_i) \approx \frac{v_z(t_{i+1}) - v_z(t_i)}{\Delta t}$  et  $\frac{dv_z}{dt}(t_i) = f(v_z(t_i))$

- à  $t_0$ ,  $v_z(t_0)$  est connu
- à  $t_1$ ,  $v_z(t_1) = v_z(t_0) + \frac{dv_z}{dt}(t_0) \times \Delta t = v_z(t_0) + f(v_z(t_0)) \times \Delta t$
- ainsi de suite.

*Remarques :*

- La méthode est d'autant plus précise (mais longue) que  $\Delta t$  est petit.
- $a_z = \frac{dv_z}{dt}$
- Cf. exercice 8.

## EXERCICES D'APPLICATION

**1 PESANTEUR SUR TERRE** \* (10 min) ► P. 169

- Calculer le poids d'un homme de masse de 80,0 kg :
    - au pôle Nord au niveau de la mer ( $g = 9,832 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ ) ;
    - à l'équateur au niveau de la mer ( $g = 9,782 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ ) ;
    - au pied du Mont-Blanc (prendre  $R_T = 6\,375 \text{ km}$  et l'altitude 0 m) ;
    - au sommet du Mont-Blanc (4 807 m).
  - Conclure.
  - Calculer l'angle approximatif que font les champs de pesanteur en deux points distants de 30 km à la surface de la Terre, puis conclure.
- Données :  $M_T = 5,98 \times 10^{24} \text{ kg}$  ;  $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ S.I.}$

**2 POUSSÉE D'ARCHIMÈDE** \* (15 min) ► P. 169

Soit une sphère de rayon  $r = 10 \text{ cm}$ , de masse volumique  $\rho$ , immergée dans un fluide de masse volumique  $\rho_f$ . Soit  $\vec{k}$  le vecteur normé, vertical ascendant.

Soit  $\vec{P}$  le poids de la sphère et  $\vec{\Pi}$  la poussée d'Archimède que subit la sphère. Soit  $P$  et  $\Pi$  les valeurs de  $\vec{P}$  et  $\vec{\Pi}$  respectivement.

- Exprimer  $P$ , puis  $\vec{P}$  en fonction des données ci-dessus.
- Exprimer  $\Pi$ , puis  $\vec{\Pi}$ .
- Exprimer alors  $\vec{P} + \vec{\Pi}$ , puis sa norme  $\|\vec{P} + \vec{\Pi}\|$ .
- Afin de voir si  $\vec{\Pi}$  est négligeable devant  $\vec{P}$ , exprimer le rapport  $\frac{\Pi}{P}$ , puis le calculer et conclure, dans les cas suivants :
  - sphère de cuivre dans l'eau ;
  - sphère de cuivre dans l'air ;
  - bulle d'huile dans l'eau ;
  - goutte d'eau dans l'air ;
  - bulle d'hélium dans l'air (gaz supposés non miscibles) ;
  - bulle d'air dans l'eau.

Données :  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  ;  $\rho_{\text{Cu}} = 8,9 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  ;  $\rho_{\text{air}} = 1,2 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  ;  
 $\rho_{\text{huile}} = 0,85 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  ;  $\rho_{\text{He}} = 0,17 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  ;  $\rho_{\text{eau}} = 1,0 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

- En déduire une règle permettant de savoir quand on peut négliger  $\Pi$  ou  $P$  devant l'autre grandeur en comparant  $\rho_f$  et  $\rho$ , et en négligeant une grandeur devant une autre à 1 % près.

**3** CHUTE LIBRE

\* (15 min) ► P. 170

Une bille en acier, supposée ponctuelle, de masse  $m = 55$  g, est lâchée sans vitesse initiale d'une hauteur  $h = 10$  m à  $t = 0$  s. On néglige la poussée d'Archimède et la force de frottement.

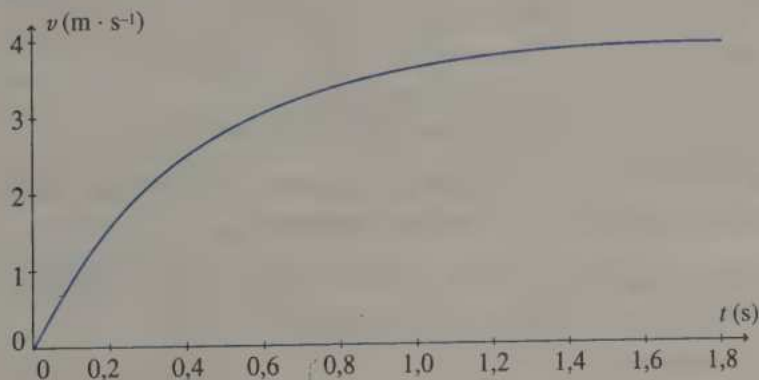
1. Appliquer la deuxième loi de Newton au système que constitue la bille (on prendra un axe  $Oz$  ascendant avec origine au niveau du sol).
2. En déduire  $\ddot{z}$ ,  $\dot{z}$ , puis  $z$ .
3. Calculer la durée de sa chute ainsi que sa vitesse lorsqu'elle arrive au sol.

**4** COEFFICIENT DE FROTTEMENT

\* (15 min) ► P. 170

Une bille de masse  $m = 120$  g tombe dans un fluide. On a enregistré sa vitesse  $v$  en fonction du temps (graphe ci-dessous).

1. Quelles sont les différentes phases du mouvement ?
2. Donner une valeur approximative du temps caractéristique  $\tau$ .
3. Quelle est la valeur limite de  $v$  (notée  $v_{\text{lim}}$ ) ?
4. En négligeant la poussée d'Archimède et en prenant  $\vec{f} = -k \cdot \vec{v}$  ( $k > 0$ ) comme force de frottement, montrer que l'équation différentielle satisfaite par  $v$  est :  $\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} v = g$ .
5. En déduire l'expression de  $v_{\text{lim}}$  en fonction de  $m$ ,  $k$  et  $g$ .
6. En utilisant les questions 3. et 5., calculer la valeur de  $k$  (et donner son unité).



## EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

**5** CHUTE LIBRE ET VITESSE INITIALE **\*\* (30 min) ► P. 171**

Une pierre, assimilée à une masse ponctuelle  $m$ , a un mouvement de chute libre verticale à partir de  $t = 0$  s, date à laquelle son altitude est  $z = h = 20,0$  m et son vecteur vitesse  $\vec{v}_0$  ( $v_0 = 5,00$  m · s<sup>-1</sup>).

Calculer l'altitude maximale de la pierre ainsi que la date et la vitesse de la pierre lorsqu'elle touche le sol (pour ces deux dernières grandeurs, seule la valeur numérique est demandée).

On examinera deux cas :

1<sup>er</sup> cas :  $\vec{v}_0$  est dirigé vers le bas ; 2<sup>e</sup> cas :  $\vec{v}_0$  est dirigé vers le haut.

L'axe Oz est vertical ascendant ;  $g = 9,80$  m · s<sup>-2</sup> ; les frottements seront négligés.

**6** ICEBERG **\*\* (10 min) ► P. 172**

Calculer la fraction de volume immergé d'un iceberg en supposant qu'il ne renferme pas d'air.

*Données :* masse volumique de l'eau de mer :  $\rho_e = 1,025 \times 10^3$  kg · m<sup>-3</sup> ;  
masse volumique de la glace :  $\rho_g = 0,908 \times 10^3$  kg · m<sup>-3</sup>.

**7** CHUTE DANS UN FLUIDE **\*\* (60 min) ► P. 172**

Une bille, de masse  $m$  et de rayon  $r$ , tombe dans un fluide. Elle subit des frottements du type :  $\vec{f} = -6 \pi \eta r \vec{v}$  (formule de Stokes).

On choisit un axe Oz vertical descendant.

$\rho$  et  $\rho_f$  sont les masses volumiques de la bille et du fluide.

1. Écrire l'équation différentielle en  $v(t)$  (norme de la vitesse de la bille) sous la forme  $\dot{v} + \frac{v}{\tau} = \frac{v_{\text{lim}}}{\tau}$ , puis exprimer  $\tau$  et  $v_{\text{lim}}$ .

2. Montrer que  $v(t) = A \cdot e^{\omega t} + B$  vérifie l'équation différentielle et la condition initiale, puis écrire  $v(t)$  en fonction de  $\tau$ ,  $v_{\text{lim}}$  et  $t$ .

3. En déduire :

- la valeur de  $v(t)$  en régime permanent ;
- la durée approximative  $\Delta t$  de l'établissement du régime permanent ;
- $v(t = \tau)$  SANS calcul ;
- l'allure de la courbe  $v(t)$  (en traçant la tangente à l'origine).

4. Tracer l'allure de  $v(t)$  pour :

- deux billes de même matière, de rayons différents, sur le même graphe.
- une bille d'acier dans l'air et dans l'eau, sur le même graphe.
- une bille d'acier et une de bois, dans l'air, sur le même graphe (en supposant que leur état de surface est le même).

5. Sachant que, pour une bille d'acier de 4,0 cm de diamètre,  $v_{\text{lim}} \approx 80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  dans l'air, en déduire  $\eta_{\text{air}}$  en précisant son unité.

Données :  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ ,  $\rho_{\text{acier}} \approx 7,2 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ ,  $\rho_{\text{air}} \approx 1,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

6.  $\eta_{\text{air}}$  est de l'ordre de  $10^{-5}$  unité S.I. On préconise pour des valeurs élevées de la vitesse de ne pas utiliser la formule de Stokes qui atteint ses limites. Qu'en pensez-vous ?

7. On reprend maintenant l'exercice avec une force de frottement  $\vec{f}$  telle que  $\vec{f} = -\frac{\rho_f}{2} C_x S \cdot v \cdot \vec{v}$ , où  $C_x$  est un coefficient que l'on va déterminer et  $S$  la section de la sphère (donc la surface du disque de rayon  $r$ ).

- Écrire l'équation différentielle, en  $v$ , du mouvement.
- Exprimer  $v_{\text{lim}}$  sans résoudre l'équation différentielle.
- En reprenant les données de la question 5., en déduire la valeur de  $C_x$  et préciser son unité.
- Théoriquement, pour une sphère :  $C_x \approx 0,45$ . Comparer cette valeur théorique à la valeur obtenue et conclure.

### 8 UTILISATION DE LA MÉTHODE D'EULER \*\* (30 min) ► P. 175

Pour résoudre la question 3., l'utilisation d'une calculatrice programmable ou d'un ordinateur est souhaitable.

Une bille métallique de rayon  $r = 1,05 \text{ cm}$  et de masse volumique  $\rho = 8,35 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$  est lâchée dans un liquide de masse volumique  $\rho_f = 1,12 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ . Les propriétés particulières de ce liquide ont montré que la valeur de la force de frottement est  $f = \lambda \cdot v^2$  avec  $\lambda = 0,531 \text{ S.I.}$  (bien que les vitesses atteintes ne soient pas très élevées).

1. Montrer que la deuxième loi de Newton conduit à la relation :

$$\frac{dv}{dt} = 8,49 - 13,1 v^2 \text{ (prendre } g = 9,81 \text{ S.I.)}$$

Données :  $g = 9,81 \text{ SI}$ .

- Vérifier que  $v_{\text{lim}} = 0,805 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .
- Utiliser la méthode d'Euler avec  $v(t_i)$ , pour  $t_i \in [0 ; 1,2 \text{ s}]$  avec un pas de  $0,025 \text{ s}$ . Vérifier que  $v_{\text{lim}}$  correspond au résultat du 2.
- Tracer  $v(t_i)$  et interpréter les deux régimes remarquables.

**D** PROFONDEUR D'UN Puits

\*\*\* (20 min) ► P. 176

Pour mesurer la profondeur d'un puits, Adrien laisse tomber une pierre du bord du puits et chronomètre la durée qui s'écoule jusqu'au moment où il entend le bruit de l'impact de la pierre au fond du puits (il a pris soin de placer son oreille à hauteur du bord du puits).

La durée mesurée est  $\Delta t = 2,6$  s.

Calculer la profondeur du puits.

*Données :*  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  ; célérité du son dans l'air :  $v = 340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

On négligera les frottements de l'air sur la pierre.

L'équation en  $h$  sera résolue numériquement.

## CORRIGÉS

1. a.  $P = m \cdot g = 80,0 \times 9,832 = 7,86(6) \times 10^2 \text{ N}$

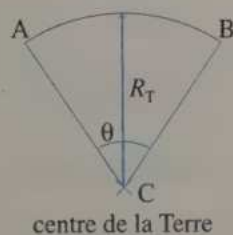
b.  $P = m \cdot g = 80,0 \times 9,782 = 7,82(6) \times 10^2 \text{ N}$

c.  $P = m \cdot g = m \frac{G \cdot M_T}{(R_T + z)^2} = 80,0 \times \frac{6,67 \times 10^{-11} \times 5,98 \times 10^{24}}{(6\,380 \times 10^3 + 0)^2}$   
 $= 7,83(9) \times 10^2 \text{ N}$

d.  $P = m \cdot g = m \frac{G \cdot M_T}{(R_T + z)^2} = 80,0 \times \frac{6,67 \times 10^{-11} \times 5,98 \times 10^{24}}{(6\,380 \times 10^3 + 4\,807)^2}$   
 $= 7,82(7) \times 10^2 \text{ N}$

e. Variations négligeables (inférieures à 1 %) sauf cas particulier.

2.



$$\tan \theta \approx \frac{AB}{R_T} \approx \frac{\widehat{AB}}{R_T} \quad \text{car } AB \ll R_T$$

$$\text{A.N. : } \theta = \tan^{-1} \frac{30 \times 10^3}{6\,380 \times 10^3} = 0,27^\circ$$

Le champ de pesanteur peut donc être considéré comme uniforme sur une distance de 30 km à la surface de la Terre.

2 1.  $P = m \cdot g = (\rho \cdot V)g = \rho \left( \frac{4}{3} \pi r^3 \right) g$  soit  $P = \frac{4}{3} \pi \rho \cdot g \cdot r^3$

et  $\vec{P} = -\frac{4}{3} \pi \rho \cdot g \cdot r^3 \vec{k}$  ( $\vec{P}$  est vertical et descendant)

2.  $\Pi$  est le poids du volume de fluide déplacé.

$$\Pi = m_f \cdot g = (\rho_f \cdot V)g = \frac{4}{3} \pi \rho_f \cdot g \cdot r^3$$

$$\vec{\Pi} = \frac{4}{3} \pi \rho_f \cdot g \cdot r^3 \vec{k} \quad (\vec{\Pi} \text{ est verticale et ascendante}).$$

$$3. \vec{P} + \vec{\Pi} = \frac{4}{3} \pi g \cdot r^3 (\rho_f - \rho) \vec{k} \quad \text{et } \|\vec{P} + \vec{\Pi}\| = \frac{4}{3} \pi g \cdot r^3 |\rho_f - \rho|$$

(dans le cas général, on ne sait pas si  $\rho \geq \rho_f$  ou  $\rho \leq \rho_f$ ).

$$4. \frac{\Pi}{P} = \frac{\rho_f}{\rho}$$

a. Cuivre dans l'eau :  $\frac{\Pi}{P} = \frac{1,0 \times 10^3}{8,9 \times 10^3} \approx 0,11$  ;  $\Pi$  est environ 10 fois plus faible que  $P$ , mais non négligeable.

b. Cuivre dans l'air :  $\frac{\Pi}{P} = \frac{1,2}{8,9 \times 10^3} \approx 1,3 \times 10^{-4}$  ;  $\Pi$  est négligeable devant  $P$ .

c. Huile dans l'eau :  $\frac{\Pi}{P} = \frac{1,0 \times 10^3}{0,85 \times 10^3} \approx 1,18$  ;  $\Pi$  et  $P$  sont du même ordre de grandeur.

d. Eau dans l'air :  $\frac{\Pi}{P} = \frac{1,2}{1,0 \times 10^3} \approx 1,2 \times 10^{-3}$  ;  $\Pi$  est négligeable devant  $P$ .

e. Hélium dans l'air :  $\frac{\Pi}{P} = \frac{0,17}{1,2} \approx 0,14$  (idem a.).

f. Air dans l'eau :  $\frac{\Pi}{P} = \frac{1,0 \times 10^3}{1,2} \approx 8,3 \times 10^2$  ;  $P$  est négligeable devant  $\Pi$ .

5. En négligeant à un facteur 100 près :

•  $\Pi$  est négligeable devant  $P$  si  $\rho_f \leq \frac{\rho}{100}$  ;

•  $P$  est négligeable devant  $\Pi$  si  $\rho \leq \frac{\rho_f}{100}$ .

**3** 1. et 2. La bille n'est soumise qu'à son poids, soit  $\vec{P} = m \cdot \vec{a}$  qui donne par projection verticale :  $-m \cdot g = m \cdot a_z = m \cdot \ddot{z}$ , soit  $\ddot{z} = -g$ .

On intègre :  $\dot{z} = -g \cdot t + \text{cte}$  ; or à  $t = 0$ ,  $\dot{z} = v_z = 0$  (vitesse initiale nulle), donc  $\text{cte} = 0$  et  $\dot{z} = -g \cdot t$ .

On intègre à nouveau :

$$z = -g \cdot \frac{t^2}{2} + \text{cte} ; \text{ or à } t = 0, z = h, \text{ donc } \text{cte} = h \text{ et } z = -g \frac{t^2}{2} + h.$$

3. La bille touche le sol à  $t = \tau$  :  $z(t = \tau) = 0$ , soit  $-g \frac{\tau^2}{2} + h = 0$  et  $\tau = \sqrt{\frac{2h}{g}}$

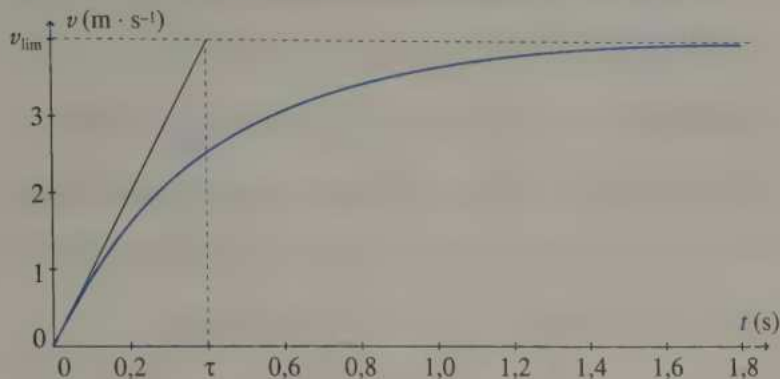
d'où  $\dot{z}(t = \tau) = -g \cdot \tau = -g \sqrt{\frac{2h}{g}} = -\sqrt{2g \cdot h}$ , donc  $v = |\dot{z}| = \sqrt{2g \cdot h}$ .

$$\text{A.N. : } \tau = \sqrt{\frac{2 \times 10}{9,8}} \approx 1,4 \text{ s} ; v = \sqrt{2 \times 9,8 \times 10} \approx 14 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

**4** 1. Régime initial ( $t < 5\tau$  environ) : mouvement accéléré.

Régime permanent ( $t > 5\tau$  environ) : mouvement uniforme.

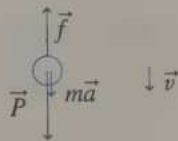
2.  $\tau \approx 0,4$  s, en utilisant la méthode de la tangente :



3. On lit (graphe ci-dessus) :  $v_{\text{lim}} \approx 4,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

4. Deuxième loi de Newton :  $\vec{P} + \vec{f} = m \cdot \vec{a}$

d'où : 
$$m \cdot g - k \cdot v = m \frac{dv}{dt}$$



(par projection sur un axe vertical descendant), soit :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{k}{m} v = g.$$

5. Si  $v \approx \text{cte} = v_{\text{lim}}$ ,  $\frac{dv}{dt} = 0$  et l'équation devient :  $0 + \frac{k}{m} v_{\text{lim}} = g$

soit : 
$$v_{\text{lim}} = \frac{m \cdot g}{k}$$

6. 
$$k = \frac{m \cdot g}{v_{\text{lim}}}$$

A.N. :  $k = \frac{0,120 \times 9,8}{4,0} \approx 0,29 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ , car  $[k] = \left[ \frac{m \cdot g}{v} \right] = \frac{\text{M} \cdot (\text{L} \cdot \text{T}^{-2})}{\text{L} \cdot \text{T}^{-1}} = \text{M} \cdot \text{T}^{-1}$ .

**5** Raisonnons d'abord dans le cas général :

- deuxième loi de Newton :  $\vec{P} = m \cdot \vec{a}$  ;
- projection sur la verticale (Oz ascendant) :  $-m \cdot g = m \cdot \ddot{z}$ , soit  $\ddot{z} = -g$  ;
- première intégration :  
 $\dot{z} = -gt \pm v_0$ , ainsi  $\dot{z}(t=0) = -v_0$  (1<sup>er</sup> cas) ou  $+v_0$  (2<sup>e</sup> cas) ;
- seconde intégration :  $z = -g \frac{t^2}{2} \pm v_0 \cdot t + h$ , ainsi  $z(t=0) = h$ .

1<sup>er</sup> cas :  $\vec{v}_0$  descendant («  $-v_0$  »)

- L'altitude maximale est atteinte à  $t = 0$  (puisque la masse « descend » ensuite) ; donc  $z_{\text{max}} = h = 20,0 \text{ m}$ .

- À  $t = \tau$ , la masse touche le sol :  $z(t = \tau) = 0$  donc  $-g \cdot \frac{\tau^2}{2} - v_0 \cdot \tau + h = 0$   
donc  $-\frac{9,8}{2} \tau^2 - 5\tau + 20 = 0$ , donc  $\tau (> 0) = 1,57$  s.

Sa vitesse est alors  $v = |\dot{z}(t = \tau)| = |-g \cdot \tau - v_0| = |-9,8 \times 1,57 - 5| = 20,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

**2<sup>e</sup> cas :**  $\vec{v}_0$  ascendant (« +  $v_0$  »)

- L'altitude maximale est atteinte à  $t = \tau'$  lorsque la masse fait demi-tour, donc lorsque  $\dot{z}(t = \tau') = 0$  ; d'où  $-g \cdot \tau' + v_0 = 0$  soit  $\tau' = \frac{v_0}{g}$ . On obtient alors

$$z_{\max} = z(t = \tau') = -\frac{g}{2} \left(\frac{v_0}{g}\right)^2 + v_0 \left(\frac{v_0}{g}\right) + h = \frac{v_0^2}{2g} + h = 21,3 \text{ m.}$$

- $z(t = \tau) = 0$ , donc  $-\frac{9,8}{2} \tau^2 + 5\tau + 10 = 0$ , donc  $\tau (> 0) = 2,59$  s.

Sa vitesse est alors  $v = |\dot{z}(t = \tau)| = |-g \tau + v_0| = |-9,8 \times 2,59 + 5| = 20,4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

*Remarque :*  $v$  (1<sup>er</sup> cas) =  $v$  (2<sup>e</sup> cas) se démontre aisément avec les théorèmes sur l'énergie (Cf. Chapitre 16, exercice 2) ; de même pour  $z_{\max}$ .

$$\begin{aligned} \tau \text{ (2<sup>e</sup> cas)} &= \text{durée (montée + redescente au point de départ)} \\ &+ \text{durée (point de départ jusqu'au sol)} \\ &= 2 \tau' + \tau \text{ (1<sup>er</sup> cas)} \end{aligned}$$

**6** On néglige la poussée d'Archimède de la partie émergée de l'iceberg (glace dans l'air).

Soit  $x$  la fraction de volume immergé,  $x \cdot V$  est le volume immergé.

Première loi de Newton :  $\vec{P} + \vec{\Pi} = \vec{0}$ , soit  $P = \Pi$  donc :

$$m_{\text{iceberg}} \times g = m \text{ (équivalente en eau de la partie immergée)} \times g$$

$\rho_g \times V = \rho_e \times V_{\text{immergé}} = \rho_e \times (x \cdot V)$ , d'où  $x = \frac{\rho_g}{\rho_e} \approx 0,89$  (seul 11 % de l'iceberg est visible).

**7** 1. Deuxième loi de Newton :  $\vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{f} = m \cdot \vec{a}$ .

$$\begin{array}{l} \vec{\Pi} \uparrow \vec{f} \downarrow \vec{g} \quad \vec{P} \text{ (poids)} = m \cdot \vec{g} = (\rho \cdot V) \vec{g} = \frac{4}{3} \pi r^3 \cdot \rho \cdot \vec{g} ; \\ \vec{P} \downarrow \vec{v} \quad \vec{\Pi} \text{ (poussée d'Archimède)} = -m_r \cdot \vec{g} = -\frac{4}{3} \pi r^3 \cdot \rho_r \cdot \vec{g} ; \end{array}$$

soit  $\frac{4}{3} \pi r^3 \cdot g (\rho - \rho_r) - 6 \pi \eta \cdot r \cdot \dot{z} = \frac{4}{3} \pi r^3 \cdot \rho \cdot \ddot{z}$  or  $v = |\dot{z}| = \dot{z}$  car  $\dot{z} > 0$  (la bille

descend dans le sens de  $z$ ) et  $\ddot{z} = \dot{v}$ , soit  $\dot{v} + \frac{9\eta}{2\rho \cdot r^2} v = \left(1 - \frac{\rho_r}{\rho}\right) g$  est de la forme

$$\dot{v} + \frac{v}{\tau} = \frac{v_{\text{lim}}}{\tau} \text{ avec } \tau = \frac{2\rho r^2}{9\eta} \text{ et } \frac{v_{\text{lim}}}{\tau} = \left(1 - \frac{\rho_r}{\rho}\right) g, \text{ soit } v_{\text{lim}} = \frac{2r^2 \cdot g}{9\eta} (\rho - \rho_r).$$

2.  $v(t) = Ae^{\alpha t} + B$  or  $v(t=0) = 0$ , donc  $0 = Ae^0 + B$ , soit  $B = -A$ .  
D'où  $v(t) = Ae^{\alpha t} - A$ ;  $\dot{v}(t) = \alpha \cdot Ae^{\alpha t}$ .

On remplace dans l'équation différentielle :  $\alpha \cdot Ae^{\alpha t} + \frac{1}{\tau} (Ae^{\alpha t} - A) = \frac{v_{\text{lim}}}{\tau}$

soit :  $Ae^{\alpha t} \left( \alpha + \frac{1}{\tau} \right) - \frac{1}{\tau} (A + v_{\text{lim}}) = 0$  valable pour tout  $t$  si :  $\alpha = -\frac{1}{\tau}$  et  $A = -v_{\text{lim}}$

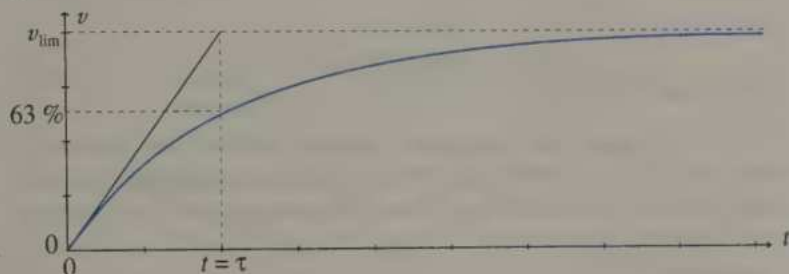
d'où : 
$$v(t) = v_{\text{lim}} \left( 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right).$$

3. a.  $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\frac{t}{\tau}} = 0$  (car  $\tau > 0$ ), donc  $\lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = v_{\text{lim}}$ .

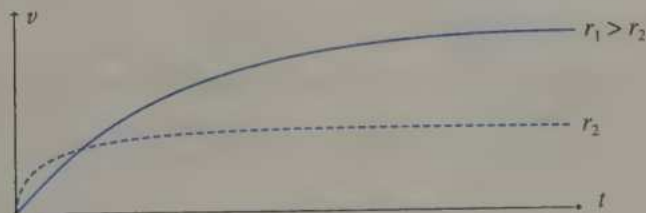
b. Par analogie avec les circuits RC et RL, le régime permanent est atteint après, environ  $\Delta t = 5\tau$ .

c. Avec la même analogie  $v(t = \tau) = 0,63 \times v_{\text{lim}}$ .

d.

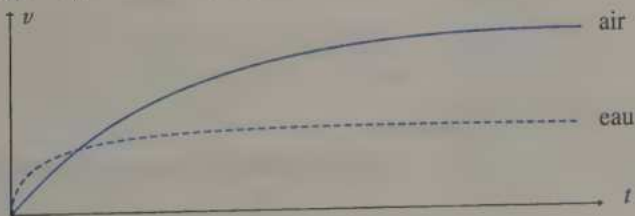


4. a.  $v_{\text{lim}}$  et  $\tau$  sont proportionnelles à  $r^2$  d'où, si  $r_1 > r_2$  :  $\begin{cases} v_{\text{lim}1} > v_{\text{lim}2} \\ \tau_1 > \tau_2 \end{cases}$

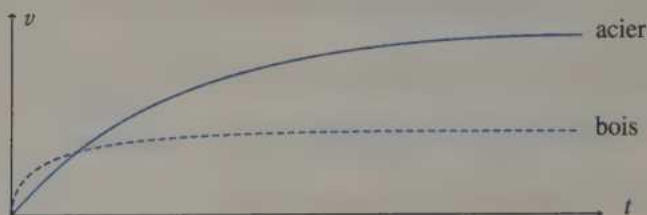


b.  $v_{\text{lim}}$  diminue avec  $\rho_f$  et avec  $\eta$ ,  $\tau$  diminue avec  $\eta$ .

Or  $\begin{cases} \rho_{\text{eau}} > \rho_{\text{air}} \\ \eta_{\text{eau}} > \eta_{\text{air}} \end{cases}$  donc  $\begin{cases} v_{\text{lim}}(\text{eau}) < v_{\text{lim}}(\text{air}) \\ \tau(\text{eau}) < \tau(\text{air}) \end{cases}$ .



c.  $\tau$  et  $v_{\text{lim}}$  augmentent avec  $\rho$  et  $\rho_{\text{acier}} > \rho_{\text{bois}}$ , donc  $\begin{cases} v_{\text{lim}}(\text{acier}) > v_{\text{lim}}(\text{bois}) \\ \tau(\text{acier}) > \tau(\text{bois}) \end{cases}$



$$5. v_{\text{lim}} = \frac{2r^2 \cdot g}{9\eta} (\rho - \rho_f), \text{ d'où } \eta = \frac{2r^2 \cdot g}{9v_{\text{lim}}} (\rho - \rho_f)$$

$$\text{A.N. : } \eta = \frac{2 \times (2 \times 10^{-2})^2 \times 9,8}{9 \times 80} (7,2 \times 10^3 - 1,3) = 7,8 \times 10^{-2} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\text{car } [\eta] = \left[ \frac{f}{6\pi r \cdot v} \right] = \frac{[P]}{[r \cdot v]} = \frac{[m \cdot g]}{[r \cdot v]} = \frac{M \cdot (L \cdot T^{-2})}{L \cdot (L \cdot T^{-1})} = M \cdot L^{-1} \cdot T^{-1}$$

6. L'ordre de grandeur de  $\eta$  obtenu ne correspond pas à sa valeur tabulée : il semble donc que **la formule de Stokes ne soit pas applicable ici**, car les vitesses atteintes devraient être trop élevées. (En pratique, avec la formule adéquate, l'équation différentielle n'est pas facilement intégrable à ce niveau de connaissance.)

$$7. \mathbf{a. } \vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{f} = m \cdot \vec{a} \Rightarrow \frac{4}{3} \pi r^3 \cdot g(\rho - \rho_f) - \frac{\rho_f}{2} C_x S \cdot v^2 = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho \dot{v} \text{ et } S = \pi r^2$$

$$\text{soit : } \dot{v} + \frac{3\rho_f \cdot C_x}{8\rho r} v^2 = \left(1 - \frac{\rho_f}{\rho}\right) g$$

b. En régime permanent  $v = v_{\text{lim}} = \text{cte}$  et  $\dot{v} = 0$ , donc l'équation devient :

$$0 + \frac{3\rho_f C_x}{8\rho r} v_{\text{lim}}^2 = \left(1 - \frac{\rho_f}{\rho}\right) g \text{ et } v_{\text{lim}} = \left[ \frac{8rg}{3C_x} \left(\frac{\rho}{\rho_f} - 1\right) \right]^{1/2}$$

$$\text{c. Avec b., on obtient : } C_x = \frac{8r \cdot g}{3v_{\text{lim}}^2} \left(\frac{\rho}{\rho_f} - 1\right)$$

$$\text{A.N. : } C_x = \frac{8 \times (2 \times 10^{-2}) \times 9,8}{3 \times (80)^2} \left(\frac{7200}{1,3} - 1\right) = 0,452 \text{ (sans unité)}$$

$$[C_x] = \left[ \frac{f}{\rho \cdot s \cdot v^2} \right] = \frac{[P]}{[\rho \cdot s \cdot v^2]} = \frac{[m \cdot g]}{[\rho \cdot s \cdot v^2]} = \frac{[\rho \cdot V \cdot g]}{[\rho \cdot s \cdot v^2]} = \frac{[V \cdot g]}{[s \cdot v^2]} = \frac{L^3(LT^{-2})}{L^2(LT^{-1})^2} = 1$$

( $C_x$  est un nombre sans dimension).

d. L'accord avec la théorie est excellent (même résultat avec deux chiffres significatifs).

8 1. Deuxième loi de Newton :  $\vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{f} = m \cdot \vec{a}$ , d'où par une projection sur Oz vertical descendant (avec  $v_z = v$  car  $v_z$  est toujours positive, la bille étant lâchée sans vitesse initiale, elle tombe, Oz étant orienté vers le bas) :

$$m \cdot g - m_f \cdot g - \lambda \cdot v^2 = m \frac{dv}{dt}, \text{ soit } \frac{dv}{dt} = -\frac{\lambda}{m} v^2 + \left(1 - \frac{m_f}{m}\right) g$$

( $\vec{f}$  est opposée à  $\vec{v}$ , donc  $\vec{f}$  est ascendante.)

$$\text{avec } \frac{m_f}{m} = \frac{\left(\frac{4}{3} \pi r^3\right) \rho_f}{\left(\frac{4}{3} \pi r^3\right) \rho} = \frac{\rho_f}{\rho}$$

$$\text{D'où : } \frac{dv}{dt} = \frac{-\lambda}{\frac{4}{3} \pi r^3 \cdot \rho} v^2 + \left(1 - \frac{\rho_f}{\rho}\right) g$$

$$\text{A.N. : } \frac{dv}{dt} = \frac{-0,531}{\frac{4}{3} \pi \times (0,0105)^3 \times 8350} \cdot v^2 + \left(1 - \frac{1120}{8350}\right) \times 9,81$$

$$\frac{dv}{dt} = -13,1 v^2 + 8,49.$$

2. Si  $v = v_{\text{lim}} = \text{cte}$ , alors  $\frac{dv}{dt} = 0$  et  $0 = -13,1 v_{\text{lim}}^2 + 8,49$  donne :

$$v_{\text{lim}} = \sqrt{\frac{8,49}{13,1}} \approx 0,805 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

3.  $t_i = i \times \Delta t = i \times 0,025$  (en s)

d'où :

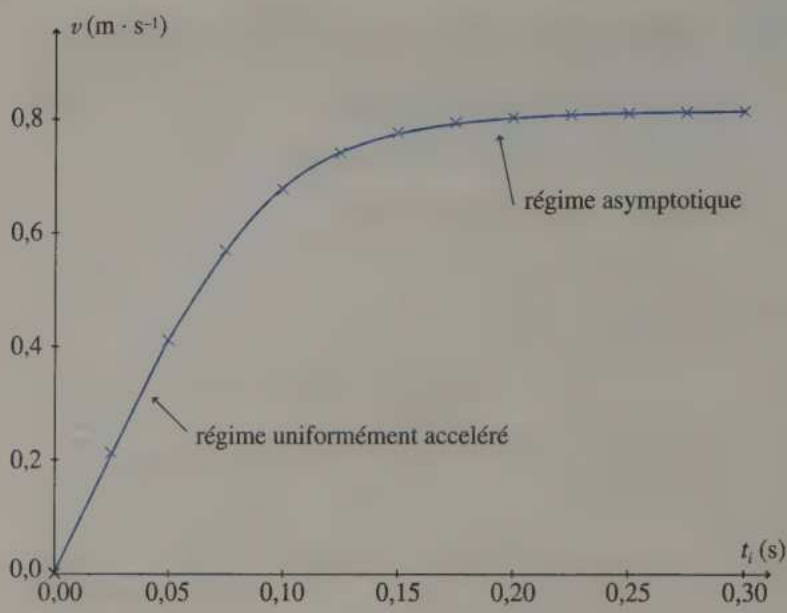
$$\begin{aligned} v(t_i) &= v(t_{i-1}) + \frac{dv}{dt}(t_{i-1}) \times \Delta t \\ &= v(t_{i-1}) + (-13,1 [v(t_{i-1})]^2 + 8,49) \times 0,025 \end{aligned}$$

avec, à  $t_0 = 0$ ,  $v(t_0) = 0$ .

On obtient le tableau ci-contre.

On lit :  $v_{\text{lim}} \approx 0,805 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

$i$	$t_i$	$v(t_i)$
0	0,000	0,000
1	0,025	0,212
2	0,050	0,410
3	0,075	0,567
4	0,100	0,674
5	0,125	0,737
6	0,150	0,772
7	0,175	0,789
8	0,200	0,797
9	0,225	0,801
10	0,250	0,803
11	0,275	0,804
12	0,300	0,805



**9** On considère un axe  $Oz$  vertical ascendant, l'origine étant le bord du puits.

Dans le cas d'un mouvement de chute libre on a :

$\ddot{z} = -g$  (cf. exercice 5), soit  $\dot{z} = -g \cdot t$  (vitesse initiale nulle),  
 et  $z = -g \frac{t^2}{2}$  (car  $z(t=0) = 0$ ).

Soit  $h$  la profondeur du puits : la durée de chute étant  $\Delta t_1$ , on a :

$z(t = \Delta t_1) = -h$ , soit  $-g \frac{\Delta t_1^2}{2} = -h$  et  $\Delta t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ .

Le son arrive depuis le fond du puits à l'oreille d'Adrien à la vitesse  $v = \frac{h}{\Delta t_2}$ ,  
 soit en une durée  $\Delta t_2 = \frac{h}{v}$ .

La durée totale mesurée par Adrien est donc :

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{h}{v}$$

A.N. :  $2,6 = \sqrt{\frac{2 \times h}{9,81}} + \frac{h}{340}$  d'où  $h \approx 31$  m.

## 11

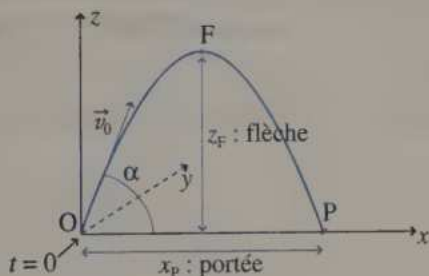
# Mouvement de projectiles dans un champ de pesanteur uniforme

## I CAS GÉNÉRAL

G est le centre d'inertie d'un projectile de masse  $m$ , soumis uniquement à son poids. D'après la deuxième loi de Newton :  $\vec{P} = m \vec{a}_G$ , soit  $\vec{a}_G = \vec{g}$ .

## II RÉOLUTION DANS UN CAS PARTICULIER

### 1. Description



- $\vec{v}_0$  est « dans » le plan  $(O, \vec{i}, \vec{k})$ .
- G est en O à  $t = 0$  s.

### 2. Accélération, vitesse, position

$$\vec{a}_G \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases} \quad \vec{v}_G \begin{cases} \dot{x} = v_0 \cos \alpha = \text{cte} \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = -g \cdot t + v_0 \cdot \sin \alpha \end{cases} \quad \vec{OG} \begin{cases} x = v_0 \cos \alpha \cdot t \\ y = 0 \\ z = -g \frac{t^2}{2} + v_0 \sin \alpha \cdot t \end{cases}$$

### 3. Équation de la trajectoire

$$z = \frac{-g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + \tan \alpha \cdot x$$

## 4. Point F

$$\vec{v}_G(t_F) \begin{vmatrix} v_0 \cos \alpha \\ 0 \\ \mathbf{0} \end{vmatrix} \quad \vec{OF} \begin{vmatrix} \frac{v_0^2}{2g} \sin(2\alpha) \\ 0 \\ \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha : \text{flèche} \end{vmatrix} \quad t_F = \frac{v_0}{g} \sin \alpha$$

## 5. Point P

$$\vec{v}_G(t_P) \begin{vmatrix} v_0 \cos \alpha \\ 0 \\ -v_0 \sin \alpha \end{vmatrix} \quad \vec{OP} \begin{vmatrix} \frac{v_0^2}{g} \sin(2\alpha) (= 2x_F) : \text{portée} \\ 0 \\ \mathbf{0} \end{vmatrix} \quad t_P = 2 \frac{v_0}{g} \sin \alpha (= 2 t_F)$$

$$v_P = v_0; x_F \text{ est maximal si } \alpha = \frac{\pi}{4} (= 45^\circ)$$

## 6. Remarques

- On doit savoir retrouver très vite ces résultats (cf. exercice 3).
- Les conditions initiales et repères peuvent être différents (cf. exercice 4, par exemple) : les résultats sont alors différents ! (les formules générales sont trop complexes).
- Projection du mouvement : uniforme sur Ox, retardé puis accéléré sur Oz.

## EXERCICES D'APPLICATION

## 1 ARTILLERIE LOURDE

\* (2 min) ► P. 184

Dans une immense plaine, une armée décide de bombarder les premières tranchées ennemies. Les obus ont une vitesse de  $200 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  à la sortie du canon.

En négligeant les frottements de l'air, dire à quelle distance de l'ennemi l'artillerie doit-elle se placer, en théorie (utiliser le formulaire).

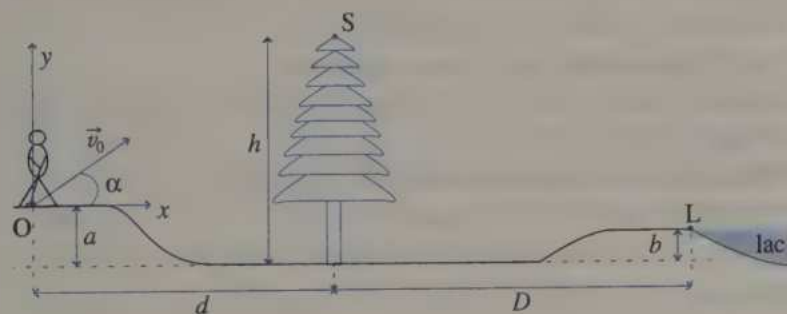
## 2 GOLF

\* (10 min) ► P. 184

Un joueur de golf frappe sa balle à la vitesse  $\vec{v}_0$ ; le club utilisé impose l'angle  $\alpha$  (schéma ci-dessous).

On néglige les frottements.

1. Donner l'équation de la trajectoire de la balle. Effectuer l'application numérique.
2. La balle dépasse-t-elle le sapin ?
3. La balle tombe-t-elle dans le lac ?



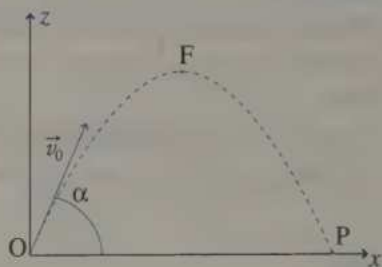
Données :  $a = 8,0 \text{ m}$  ;  $b = 4,0 \text{ m}$  ;  $h = 30 \text{ m}$  ;  $d = 43 \text{ m}$  ;  $D = 52 \text{ m}$  ;  
 $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  ;  $v_0 = 50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  ;  $\alpha = 35^\circ$ .

## EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

3 LE CLASSIQUE

\*\* (60 min puis 25 min) ► P. 184

Un projectile de masse  $m$  est repéré par les coordonnées de son centre d'inertie  $G(x(t); y(t); z(t))$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  lié à un référentiel terrestre supposé galiléen (l'expérience ne durant que quelques secondes). Le vecteur  $\vec{k}$  est vertical ascendant. Les frottements et la poussée d'Archimède sont négligés.



À  $t = 0$  s,  $G$  se trouve en  $O$ , animé d'une vitesse  $\vec{v}_0$  ( $\vec{v}_0 \in (O, \vec{i}, \vec{k})$  et  $(\vec{i}, \vec{v}_0) = \alpha$  avec  $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ ).

L'objet décrit une trajectoire que l'on souhaite étudier.

- Appliquer la deuxième loi de Newton au système formé par le projectile (pour  $t \geq 0$  s).
- En déduire :  $\vec{a}$ ,  $\vec{v}$  et  $\overline{OG}$  (détailler leurs coordonnées).
- Démontrer que le mouvement est plan et donner l'équation de sa trajectoire dans ce plan. Quel type de trajectoire est-ce ?
- Soit  $P$  le point défini par le schéma ci-dessus.
  - Quelle relation caractérise  $P$  (valeur particulière d'un de ces paramètres) ?
  - Exprimer  $t_p$  (date du passage en  $P$ ),  $\overline{OP}$ ,  $\vec{v}_p$  et  $(\vec{i}, \vec{v}_p)$ .
  - Comparer  $\vec{v}_0$  et  $\vec{v}_p$ .
  - $\vec{v}_0$  étant fixé, comment choisir  $\alpha$  pour avoir  $x_p$  maximal.
  - Comparer  $x_p$  pour  $\alpha$  et  $(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ .

Représenter l'allure des deux trajectoires.

- Soit  $F$  défini par le schéma ci-dessus.
  - Quelle relation caractérise  $F$  (valeur particulière d'un de ces paramètres) ?
  - Exprimer  $t_F$  (date du passage en  $F$ ),  $\overline{OF}$  et  $\vec{v}_F$ .
  - $\vec{v}_0$  étant fixé, comment choisir  $\alpha$  pour avoir  $z_F$  maximal ?
  - Comparer  $t_F$  et  $t_p$ ,  $x_F$  et  $x_p$ .
- Caractériser le mouvement avant, puis après  $F$ .

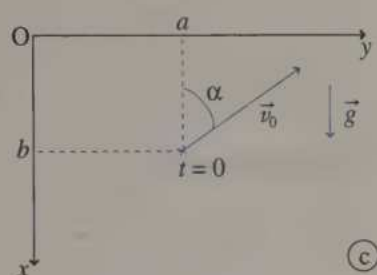
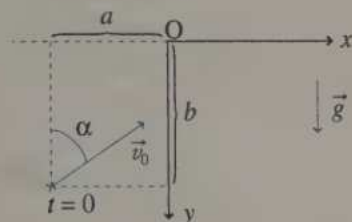
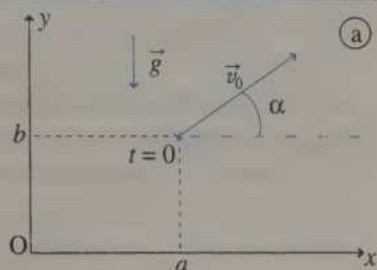
7. Application numérique : calculer la flèche et la portée, et préciser si le point A (0,50 ; 0,0 ; 0,67) appartient ou non à la trajectoire.

Données :  $m = 2,00 \text{ kg}$  ;  $v_0 = 5,00 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  ;  $\alpha = 60,0^\circ$  ;  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

8. Que deviendraient les réponses à toutes ces questions pour un projectile de masse différente ?

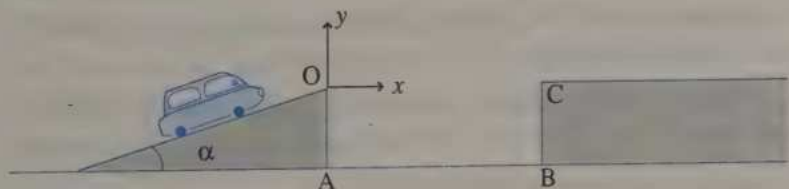
## 4 DIFFÉRENTES CONDITIONS INITIALES \*\* (40 min, puis 10 min) ► P. 187

Écrire dans le plan  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , les vecteurs position  $\vec{OM}(t)$  des chutes paraboliques d'un objet supposé ponctuel dans les cas (a), (b) et (c) (poussée d'Archimède et frottements négligés). Les angles ne sont pas orientés.



## 5 LE CASCADEUR \*\* (20 min) ► P. 188

Calculer l'angle  $\alpha$  du tremplin et la valeur de la vitesse  $v_0$  du centre d'inertie de la voiture du cascadeur qui souhaite atteindre le point C avec une vitesse parallèle au plateau (horizontal) en ce point.



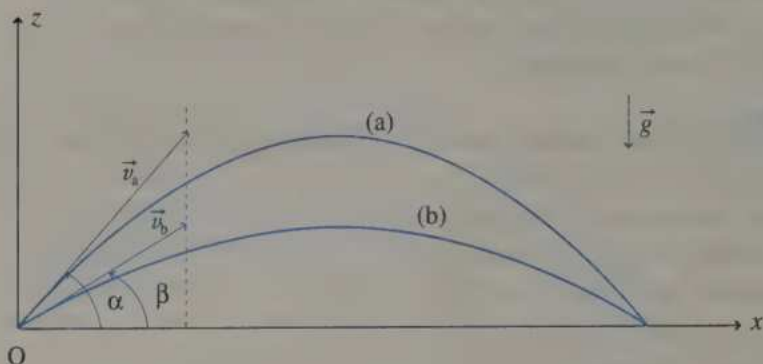
Données :  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  ;  $OA = 3,0 \text{ m}$  ;  $AB = 20 \text{ m}$  ;  $BC = 6,0 \text{ m}$  ;  $m = 850 \text{ kg}$ .

On utilisera le formulaire sans redémontrer les résultats du cours.  
En déduire sa vitesse en C.

## 6 COMPARAISON DE MOUVEMENT

\*\* (10 min) ► P. 188

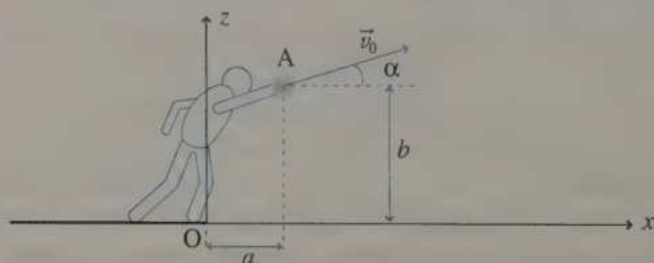
Les deux mouvements de projectiles suivants sont-ils réalistes ?



## EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

## 7 LANCEMENT DU POIDS

\*\* (30 min) ► P. 188



Un athlète lance le poids (de centre d'inertie  $G$ ) avec un vecteur vitesse initial dans le plan  $(Oxz)$  (schéma ci-dessus). On néglige les frottements et la poussée d'Archimède. À  $t = 0$  s,  $G$  est en  $A$ .

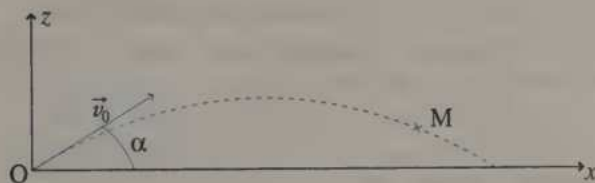
1. Appliquer la deuxième loi de Newton au système constitué du poids et en déduire  $\vec{a} = \vec{a}_G$ , le vecteur accélération du centre d'inertie du poids.
2. Montrer que le mouvement est plan.
3. En déduire  $\vec{v}_0 = \vec{v}$ , le vecteur vitesse de  $G$ , et  $\vec{OG}$ , le vecteur position de  $G$ .
4. Exprimer la distance  $d$  à laquelle retombe le poids en fonction de  $v_0$ ,  $\alpha$ ,  $g$ ,  $a$  et  $b$  (on suppose le poids ponctuel, c'est-à-dire que  $G$  touche le sol).

5. a. Expliquer succinctement pourquoi  $v_0$  doit être la plus grande possible.  
 b. Exprimer numériquement  $d(\alpha)$  en prenant  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ ,  $a = 0,60 \text{ m}$ ,  $b = 2,1 \text{ m}$  et  $v_0 = 13 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .  
 c. Rappeler la valeur de  $\alpha$  qui permet d'avoir  $x_p$  maximal, si P est à la même altitude que le point de lancement.  
 d. Calculer  $d$  pour  $\alpha = 45^\circ$  et  $41^\circ$ . Conclure.

**8** PARABOLE DE SÛRETÉ \*\*\* (30 min) ► p. 190

Un chasseur tire des balles avec son fusil. En négligeant les frottements de l'air, on souhaite savoir dans quelle partie de l'espace peuvent évoluer des oiseaux, sans risquer d'être touchés par les balles du chasseur dont le fusil communique une vitesse en sortie du canon, de valeur  $v_0 = 50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ . (On prendra  $g = 9,8 \text{ S.I.}$ )

Le chasseur et son fusil sont supposés ponctuels en O (de faibles dimensions par rapport aux trajectoires des balles). De plus, on admettra que, dans un premier temps,  $\vec{v}_0 \in (O, \vec{i}, \vec{k})$ .



- Soit  $M(x, 0, z)$  le point où se trouve l'oiseau à un instant donné. Écrire la condition d'appartenance de M à une trajectoire du projectile (utiliser les résultats du cours).
- Expliquer pourquoi  $\alpha$  est la seule variable du problème, une fois le point M fixé.
- Transformer la relation de la question 1. en une équation du deuxième degré en  $\tan \alpha$ , puis écrire la condition d'existence de solutions.
- En déduire que l'équation de la région qui limite la partie « sûre » du plan  $(O, \vec{i}, \vec{k})$  pour l'oiseau est :

$$z \leq \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2} x^2.$$

- Effectuer l'application numérique.  
 $M(200 ; 0 ; 60)$  est-il un point « risqué ? »
- Généraliser le résultat à tout l'espace.

## CORRIGÉS

**1** En plaine (terrain plat), on utilise la formule classique de la portée. L'artillerie doit être la plus éloignée possible des ennemis (c'est la guerre !), donc l'angle de tir est celui qui donne la portée maximale : l'angle est donc  $45^\circ$ .

L'artillerie se place (en théorie) face aux premières lignes ennemies, à la distance :

$$x_p = \frac{v_0^2 \sin(2\alpha)}{g} = \frac{200^2 \times 1}{9,8} \approx 4,1 \text{ km.}$$

**2** 1. Voir le cours.

$$y = \frac{-g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + \tan \alpha \cdot x \quad \text{A.N. : } y = -2,92 \times 10^{-3} x^2 + 0,700 x.$$

2. La cime du sapin S a pour abscisse  $x_s = d = 43 \text{ m}$ . Calculons l'altitude de la balle à cette abscisse :

$$y(d) = -2,92 \times 10^{-3} d^2 + 0,700 d = 24,7 \text{ m}$$

or  $y_s = h - a = 22 \text{ m} < y(d)$  : **la balle passe au-dessus du sapin.**

3. La rive du lac la plus proche du joueur a pour abscisse  $x_L = d + D = 95 \text{ m}$ . Calculons l'altitude de la balle à cette abscisse :

$$y(d + D) = -2,92 \times 10^{-3} (d + D)^2 + 0,700 d = 40,2 \text{ m}$$

Or  $y_L = b - a = -4 \text{ m} < y(d + D)$  : la balle n'a pas encore touché le sol.

**La balle tombera donc dans le lac.**

**3** 1.  $\Sigma \vec{F}_{\text{ext}} = m \vec{a}_G$ , soit  $\vec{P} = m \vec{a}_G$ .

2. On en déduit  $m \vec{g} = m \vec{a}_G$  soit  $\vec{a}_G = \vec{g}$ , donc, en notant  $\vec{a}$  au lieu de  $\vec{a}_G$  pour alléger l'écriture :

$$\vec{a} \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases} \quad \text{puis en intégrant :} \quad \vec{v} \begin{cases} \dot{x} = \text{cte} \\ \dot{y} = \text{cte} \\ \dot{z} = -g \cdot t + \text{cte} \end{cases}$$

$$\text{Or } \vec{v}(t=0) = \vec{v}_0 \begin{cases} v_0 \cos \alpha \\ 0 \\ v_0 \sin \alpha \end{cases} \quad (\text{cf. schéma}), \text{ d'où : } \vec{v} \begin{cases} \dot{x} = v_0 \cos \alpha \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = -g \cdot t + v_0 \sin \alpha \end{cases}$$

$$\text{On intègre à nouveau :} \quad \vec{OG} \begin{cases} x = v_0 \cos \alpha \cdot t + \text{cte} \\ y = \text{cte} \\ z = -g \frac{t^2}{2} + v_0 \sin \alpha \cdot t + \text{cte} \end{cases}$$

$$\text{Or } \vec{OG}(t=0) = \vec{0} \begin{cases} 0 \\ 0 \\ 0 \end{cases} \quad \text{soit :} \quad \vec{OG} \begin{cases} x = v_0 \cos \alpha \cdot t \\ y = 0 \\ z = -g \frac{t^2}{2} + v_0 \sin \alpha \cdot t \end{cases}$$

En résumé :

$$\vec{a} \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases} \quad \vec{v} \begin{cases} \dot{x} = v_0 \cos \alpha \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = -g \cdot t + v_0 \sin \alpha \end{cases} \quad (1) \quad \text{OG} \begin{cases} x = v_0 \cos \alpha \cdot t \\ y = 0 \\ z = -g \frac{t^2}{2} + v_0 \sin \alpha \cdot t \end{cases} \quad (2) \quad (3) \quad (4) \quad (5) \quad (6)$$

3. L'égalité (5) indique que le mouvement se déroule dans le plan  $(O, \vec{i}, \vec{k})$ .

(4) donne  $t = \frac{x}{v_0 \cos \alpha}$  et en remplaçant dans (6), on obtient l'équation de la

trajectoire dans  $(O, \vec{i}, \vec{k})$  :  $z = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + \tan \alpha \cdot x$ .


La trajectoire est parabolique.

4. a.  $z_p = 0$  (P est à l'altitude de O)

b. Avec (6), on obtient  $0 = -g \frac{t^2}{2} + v_0 \sin \alpha \cdot t = (-g \frac{t}{2} + v_0 \sin \alpha) t$ ,  
soit  $t = 0 = t_0$  ou  $t = 2 \frac{v_0}{g} \sin \alpha = t_p$ .

On remplace alors  $t_p$  par sa valeur dans  $\vec{v} = \vec{v}_p$  puis dans  $\text{OG} = \text{OP}$  :

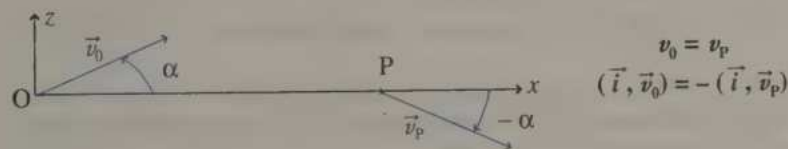
$$\vec{v}_p \begin{cases} \dot{x}_p = v_0 \cos \alpha \\ \dot{y}_p = 0 \\ \dot{z}_p = -v_0 \sin \alpha \end{cases} \quad \text{OP} \begin{cases} x_p = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\alpha) \\ y_p = 0 \\ z_p = 0 \end{cases}$$

  $\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cdot \cos \alpha$

c.

$$\vec{v}_p \begin{cases} v_0 \cos \alpha \\ 0 \\ -v_0 \sin \alpha \end{cases} \quad \text{ou} \quad \vec{v}_p \begin{cases} v_0 \cos(-\alpha) \\ 0 \\ v_0 \sin(-\alpha) \end{cases} \quad \text{et} \quad \vec{v}_0 \begin{cases} v_0 \cos \alpha \\ 0 \\ v_0 \sin \alpha \end{cases}$$

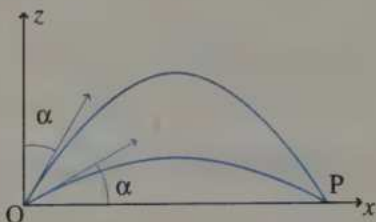
On voit donc que  $v_0 = v_p$  (c'est-à-dire  $\|\vec{v}_0\| = \|\vec{v}_p\|$ ), mais  $(\vec{i}, \vec{v}_0) = \alpha$  alors que  $(\vec{i}, \vec{v}_p) = -\alpha$  :



d.  $x_p = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\alpha)$  sera maximale ( $v_0$  et  $g$  étant fixées) si  $\sin(2\alpha)$  est maximal, soit  $\sin(2\alpha) = 1$  ; comme  $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ , alors  $0 \leq 2\alpha \leq \pi$ , d'où  $2\alpha = \frac{\pi}{2}$  et  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  ( $= 45^\circ$ ).

$$\begin{aligned}
 \text{e. } x_p \text{ (pour } \frac{\pi}{2} - \alpha) &= \frac{v_0^2}{g} \sin \left[ 2 \left( \frac{\pi}{2} - \alpha \right) \right] = \frac{v_0^2}{g} \sin (\pi - 2\alpha) = \frac{v_0^2}{g} \sin (2\alpha) \\
 &= x_p \text{ (pour } \alpha)
 \end{aligned}$$

Si l'on envoie le projectile avec un angle  $\alpha$  ou  $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ , il retombe au même point P ( $v_0$  ayant la même valeur).



5. a.  $\dot{z}_F = 0$  (en F, le projectile « arrête de monter » et commence à redescendre).

b. Avec (3), on obtient :  $0 = -g \cdot t_F + v_0 \sin \alpha$ , soit  $t_F = \frac{v_0}{g} \sin \alpha$ .

$$\text{On remplace alors dans } \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OF} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_F = \frac{v_0^2}{2g} \sin (2\alpha) \\ y_F = 0 \\ z_F = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha \end{array} \right.$$

$$\text{et on a, d'après la question a. : } \vec{v}_F \quad \left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_F = v_0 \cos \alpha \\ \dot{y}_F = 0 \\ \dot{z}_F = 0 \end{array} \right.$$

c.  $z_F = \frac{v_0^2}{g} \sin^2 \alpha$  est maximale ( $v_0$  et  $g$  étant fixées)

donc  $\sin^2 \alpha$  est maximal, soit  $\sin^2 \alpha = 1$  et  $\sin \alpha = \pm 1$ .

Or  $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ , donc  $\alpha = \frac{\pi}{2}$ .

Pour envoyer un objet le plus haut possible, il faut le lancer à la verticale !

d.  $x_p = 2x_F$  (symétrie de la parabole) ;

$t_p = 2t_F$  (la parabole est parcourue de « façon symétrique »).

6. Plusieurs méthodes sont possibles (cf. Cours du chapitre 9) pour démontrer que le mouvement est « retardé en montant », puis « accéléré en descendant ». Étudions le signe de  $\vec{a} \cdot \vec{v}$  :

$$\vec{a} \cdot \vec{v} = g^2 \cdot t - g v_0 \sin \alpha = g^2 \left( t - \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \right) = g^2 (t - t_F).$$

Le mouvement est accéléré si  $\vec{a} \cdot \vec{v} > 0$ , soit si  $t > t_F$ .

Si  $t < t_F$ , le mouvement est retardé ; si  $t > t_F$ , le mouvement est accéléré.

$$7. x_P = \frac{5^2}{9,81} \times \sin(120^\circ) = 2,21 \text{ m} ; z_F = \frac{5^2}{2 \times 9,81} \times \sin^2(60^\circ) = 0,96 \text{ m.}$$

$$\begin{aligned} z(x_A) &= -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x_A^2 + \tan \alpha \cdot x_A \\ &= -\frac{9,81}{2 \times 5^2 \times \cos^2 60^\circ} \times 0,5^2 + \tan 60^\circ \times 0,5 \\ &\approx 0,67 \text{ m} = z_A \end{aligned}$$

et  $y_A = 0$ , donc **A appartient à la trajectoire.**

8. Tous ces résultats sont indépendants de la masse (si l'on néglige les frottements). Mais, communiquer une vitesse  $v_0$  à une masse de 1 gramme ne demande évidemment pas le même effort que de communiquer la même vitesse à une masse d'une tonne !

Ensuite, une fois  $v_0$  atteinte pour  $\alpha$  fixé, les mouvements sont identiques.

4 Comme à l'exercice 3, on a  $\vec{a} = \vec{g}$ , soit, par intégration successive :

(a)

$$\vec{a} \begin{vmatrix} 0 \\ -g \end{vmatrix} \quad \text{donc } \vec{v} \begin{vmatrix} \text{cte} = v_0 \cdot \cos \alpha \\ -g \cdot t + \text{cte} = -g \cdot t + v_0 \cdot \sin \alpha \end{vmatrix} \quad \text{car } \vec{v}_0 \begin{vmatrix} v_0 \cdot \cos \alpha \\ v_0 \cdot \sin \alpha \end{vmatrix}$$

$$\text{d'où } \overline{\text{OM}} \begin{vmatrix} v_0 \cdot \cos \alpha \cdot t + \text{cte} \\ -g \frac{t^2}{2} + v_0 \cdot \sin \alpha \cdot t + \text{cte} \end{vmatrix} \quad \text{soit } \overline{\text{OM}} \begin{vmatrix} v_0 \cdot \cos \alpha \cdot t + a \\ -g \frac{t^2}{2} + v_0 \cdot \sin \alpha \cdot t + b \end{vmatrix}$$

$$\text{car } \overline{\text{OM}}_0 \begin{vmatrix} a \\ b \end{vmatrix}$$

(b)

$$\vec{a} \begin{vmatrix} 0 \\ +g \end{vmatrix} \quad \text{donc } \vec{v} \begin{vmatrix} \text{cte} = v_0 \cdot \sin \alpha \\ +g \cdot t + \text{cte} = +g \cdot t - v_0 \cdot \cos \alpha \end{vmatrix} \quad \text{car } \vec{v}_0 \begin{vmatrix} v_0 \cdot \sin \alpha \\ -v_0 \cdot \cos \alpha \end{vmatrix}$$

$$\text{d'où } \overline{\text{OM}} \begin{vmatrix} v_0 \cdot \sin \alpha \cdot t + \text{cte} \\ +g \frac{t^2}{2} - v_0 \cdot \cos \alpha \cdot t + \text{cte} \end{vmatrix} \quad \text{soit } \overline{\text{OM}} \begin{vmatrix} v_0 \cdot \sin \alpha \cdot t - a \\ +g \frac{t^2}{2} - v_0 \cdot \cos \alpha \cdot t + b \end{vmatrix}$$

$$\text{car } \overline{\text{OM}}_0 \begin{vmatrix} -a \ (a > 0) \\ b \end{vmatrix}$$

(c)

$$\vec{a} \begin{vmatrix} \hat{g} \\ 0 \end{vmatrix} \quad \text{donc } \vec{v} \begin{vmatrix} +g \cdot t + \text{cte} = +g \cdot t - v_0 \cdot \cos \alpha \\ \text{cte} = v_0 \cdot \sin \alpha \end{vmatrix} \quad \text{car } \vec{v}_0 \begin{vmatrix} -v_0 \cdot \cos \alpha \\ v_0 \cdot \sin \alpha \end{vmatrix}$$

$$\text{d'où } \overline{\text{OM}} \begin{vmatrix} +g \frac{t^2}{2} - v_0 \cdot \cos \alpha \cdot t + \text{cte} \\ v_0 \cdot \sin \alpha \cdot t + \text{cte} \end{vmatrix} \quad \text{soit } \overline{\text{OM}} \begin{vmatrix} +g \frac{t^2}{2} - v_0 \cdot \cos \alpha \cdot t + b \\ v_0 \cdot \sin \alpha \cdot t + a \end{vmatrix}$$

$$\text{car } \overline{\text{OM}}_0 \begin{vmatrix} b \\ a \end{vmatrix}$$

5 Si la vitesse est horizontale en C, alors C est le sommet de la parabole

(ou point F) donc :  $x_C = \frac{v_0^2}{2g} \sin(2\alpha)$  et  $y_C = \frac{v_0^2}{2g} \sin^2(\alpha)$ .

Or  $x_C = AB$  et  $y_C = BC - OA$ , d'où :

$$\begin{cases} \frac{v_0^2}{2g} \sin(2\alpha) = AB & (1) \\ \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha = BC - OA & (2) \end{cases} \quad \begin{cases} \frac{\sin^2 \alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{BC - OA}{AB} & (2) \\ v_0 = \sqrt{\frac{2g AB}{\sin(2\alpha)}} & (1) \end{cases}$$

avec  $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$ , on obtient :

$$\tan \alpha = \frac{2(BC - OA)}{AB} \quad \text{puis} \quad v_0 = \sqrt{\frac{2g AB}{\sin(2\alpha)}}$$

A.N. :  $\tan \alpha = \frac{2 \times (6 - 3)}{20}$  soit  $\alpha \approx 16,7^\circ$

et  $v_0 = \sqrt{\frac{2 \times 9,8 \times 20}{\sin(2 \times 16,7)}} \approx 26,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  ( $v_0 \approx 96 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ ).

On en déduit  $v_C = \sqrt{v_{x_C}^2 + v_{y_C}^2} = \sqrt{v_{x_C}^2 + 0^2} = |v_{x_C}| = v_0 \cdot \cos \alpha$  car  $v_x = \text{cte}$  d'après les équations du mouvement et  $v_{y_C} = 0$  car la vitesse est horizontale en C.

$$v_C = v_0 \cdot \cos \alpha$$

A.N. :  $v_C \approx 25,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

6 D'une part, les projections des vitesses initiales sont égales :

$$v_a \cdot \cos \alpha = v_b \cdot \cos \beta.$$

D'autre part, les portées sont les mêmes :  $\frac{v_a^2}{g} \sin(2\alpha) = \frac{v_b^2}{g} \sin(2\beta)$ .

$$\begin{cases} v_a \cos \alpha = v_b \cos \beta & (1) \\ v_a^2 \cdot 2 \sin \alpha \cos \alpha = v_b^2 \cdot 2 \sin \beta \cos \beta & (2) \end{cases}$$

$\frac{(2)}{(1)^2}$  donne :  $\tan \alpha = \tan \beta$ , soit  $\alpha = \beta$  sur  $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ , ce qui n'est pas le cas.

**Ces deux mouvements sont impossibles dans ces conditions.**

7 Questions 1., 2. et 3. (début) : cf. exercice 3 pour plus de détails.

1.  $\Sigma \vec{F}_{\text{ext}} = m \cdot \vec{a}_G$  donc  $\vec{P} = m \cdot \vec{a}_G$  donc  $m \cdot \vec{g} = m \cdot \vec{a}$  d'où :  $\vec{a} = \vec{g}$ .

2. et 3.

$$\vec{a} = \vec{g} \quad \text{donc} \quad \vec{a} \quad \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \vec{v} \quad \begin{cases} \dot{x} = \text{cte} \\ \dot{y} = \text{cte} \\ \dot{z} = -g \cdot t + \text{cte} \end{cases}$$

$$\text{Or } \vec{v}(t=0) \quad \begin{cases} v_0 \cdot \cos \alpha \\ 0 \\ v_0 \cdot \sin \alpha \end{cases} \quad \text{donc } \vec{v} \quad \begin{cases} \dot{x} = v_0 \cdot \cos \alpha \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = -g \cdot t + v_0 \cdot \sin \alpha \end{cases}$$

$$\text{d'où } \overrightarrow{OG} \begin{cases} x = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot t + \text{cte} \\ y = \text{cte} \\ z = -g \frac{t^2}{2} + v_0 \cdot \sin \alpha \cdot t + \text{cte} \end{cases}$$

$$\text{Or } \overrightarrow{OG}(t=0) = \overrightarrow{OA} \begin{cases} a \\ 0 \\ b \end{cases} \quad \text{donc } \overrightarrow{OG} \begin{cases} x = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot t + a & (1) \\ y = 0 \\ z = -g \frac{t^2}{2} + v_0 \cdot \sin \alpha \cdot t + b & (2) \end{cases}$$

$y = 0$ , donc la trajectoire est dans le plan  $(Oxz)$ .

4. Au niveau du sol (en P) :  $z_p = 0$ , soit  $0 = -g \frac{t^2}{2} + v_0 \cdot \sin \alpha \cdot t + b$  avec (2).

Le discriminant de cette équation du second degré est :

$$\Delta = v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha + 2g \cdot b > 0 \quad \text{et } t = \frac{-v_0 \cdot \sin \alpha \pm \sqrt{\Delta}}{-g} = \frac{+v_0 \cdot \sin \alpha \pm \sqrt{\Delta}}{g}$$

On garde la solution positive (car  $z > 0$ ), soit  $t_p = \frac{v_0 \cdot \sin \alpha + \sqrt{\Delta}}{g}$ .

(1) donne :  $d = x_p = v_0 \cdot \cos \alpha \cdot t_p + a$ , soit en factorisant par  $\frac{v_0^2}{g}$  :

$$d = \frac{v_0 \cdot \cos \alpha}{g} \left( v_0 \cdot \sin \alpha + \sqrt{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha + 2g \cdot b} \right) + a$$

5. a.  $d$  ne dépend de  $v_0$  que par des fonctions croissantes ( $v_0$ ,  $v_0^2$ , ...).  
 $d$  devant être le plus grand possible, il en est de même pour  $v_0$  (logique !).

b. On peut factoriser par  $v_0 \cdot \sin \alpha$  pour simplifier :

$$d = \frac{v_0^2 \cdot \cos \alpha \sin \alpha}{g} \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2g \cdot b}{v_0^2 \cdot \sin^2 \alpha}} \right) + a$$

$$d = \frac{13^2}{9,81} \times \cos \alpha \sin \alpha \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \times 9,81 \times 2,1}{13^2 \times \sin^2 \alpha}} \right) + 0,60$$

$$d \approx 17,2 \cos \alpha \sin \alpha \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{0,244}{\sin^2 \alpha}} \right) + 0,60$$

c.  $\alpha = 45^\circ$  (cf. exercice 3)

d.  $d(\alpha = 45^\circ) \approx 19,7(2)$  m et  $d(\alpha = 41^\circ) \approx 19,8(1)$  m.

L'optimisation de  $d$  se fait en fonction de  $\alpha$  (calculs fastidieux), mais le gain est minime. Il conviendrait plutôt d'optimiser  $a$ ,  $b$ ,  $v_0$  ou bien de tenir compte des frottements.

8 1.  $M(x, 0, z)$  appartient à la trajectoire d'une balle, donc :

$$z = -\frac{g}{2v_0^2 \cdot \cos^2 \alpha} x^2 + \tan \alpha \cdot x \quad (\text{équation de la trajectoire}).$$

2.  $v_0$  étant fixé, le chasseur ne peut que faire varier l'angle  $\alpha$ .

$$3. \frac{1}{\cos^2 \alpha} = 1 + \tan^2 \alpha, \text{ d'où } -\frac{g(1 + \tan^2 \alpha)}{2v_0^2} x^2 + \tan \alpha \cdot x - z = 0,$$

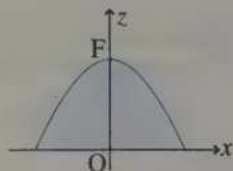
$$\text{soit } \frac{g \cdot x^2}{2v_0^2} \tan^2 \alpha - x \cdot \tan \alpha + \left( z + \frac{g \cdot x^2}{2v_0^2} \right) = 0.$$

Le discriminant doit être positif pour que  $M$  appartienne à la trajectoire de la balle, soit :  $(-x)^2 - 4 \left( \frac{g \cdot x^2}{2v_0^2} \right) \left( z + \frac{g \cdot x^2}{2v_0^2} \right) \geq 0$ .

$$4. \text{ On en déduit } \frac{2g}{v_0^2} \left( z + \frac{g \cdot x^2}{2v_0^2} \right) \leq 1$$

$$\text{soit } z \leq \frac{v_0^2}{2g} - \frac{g}{2v_0^2} \cdot x^2 \quad (\text{du type } z \leq A \cdot x^2 + B \text{ avec } A < 0)$$

Il s'agit de l'intérieur d'une parabole d'axe  $Oz$  (dite parabole de sûreté), de sommet de coordonnées  $x_F = 0$  et  $z_F = \frac{v_0^2}{2g}$  (c'est-à-dire,  $F$  dans le cas où  $\alpha = 90^\circ$ ).



$$5. \text{ A.N. : } z = \frac{50^2}{2 \times 9,8} - \frac{9,8}{2 \times 50^2} \cdot x^2 \approx 128 - 1,96 \times 10^{-3} x^2$$

puis  $z(x_M = 200) \approx 49,2 \text{ m} \leq 60 \text{ m} = z_M$  : pas de risque en  $M$ .

6. Le chasseur peut tourner autour de l'axe  $Oz$  : les oiseaux doivent donc voler à l'extérieur du volume limité par la rotation de la parabole précédente autour de  $Oz$  (paraboloïde de révolution).

## 12

## Satellites et planètes


## I RAPPELS

## 1. Mouvement circulaire uniforme

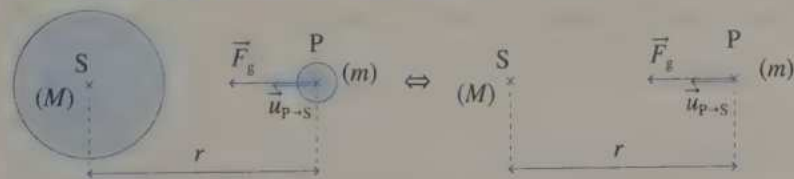
Revoir le chapitre 9, § I 6..

## 2. Référentiels et repères

Référentiel	Origine du repère	Axes du repère	Le repère est galiléen pour une durée d'étude inférieure à :
héliocentrique (unique)	centre du Soleil	dirigés vers trois étoiles fixes	quelques années
géocentrique (unique)	centre de la Terre	parallèles à ceux du repère héliocentrique	environ 15 min
terrestres (multiples)	un point fixe de la Terre	trois axes liés à la Terre	environ 15 min

 Dans le cas de mouvements de satellites et planètes, les référentiels seront toujours considérés comme galiléens.

## 3. Force de gravité pour des corps dont la répartition des masses est à symétrie sphérique



On obtient les mêmes résultats en considérant des masses ponctuelles.

$$\vec{F}_g = G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} \vec{u}_{P-S}$$

- $\vec{u}_{P-S}$  est normé, dirigé de P vers S
- $r$  est grand devant les dimensions des deux systèmes,
- $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$

## II LOIS DE KEPLER

Dans le référentiel héliocentrique :

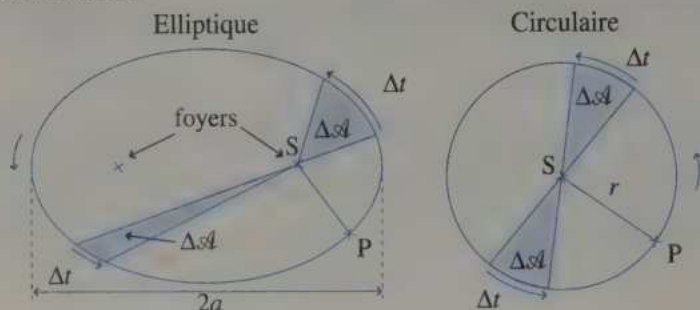
• **1<sup>er</sup> loi** : Le centre P d'une planète décrit autour du centre S du Soleil une trajectoire elliptique ou circulaire dont S occupe un des deux foyers de l'ellipse ou le centre du cercle.

• **2<sup>e</sup> loi** : L'aire  $\Delta\mathcal{A}$  balayée par le segment [SP] pendant une durée  $\Delta t$  fixée est une constante ( $\frac{\Delta\mathcal{A}}{\Delta t} = \text{cte}$ ).

• **3<sup>e</sup> loi** :  $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M_s} = \text{cte}$

$T$  : période du mouvement ;  $a$  :  $\left\{ \begin{array}{l} \text{longueur du demi grand axe (ellipse)} \\ \text{ou} \\ \text{rayon (cercle)} \end{array} \right.$

• **Mouvements :**



## III CAS PARTICULIERS DES MOUVEMENTS CIRCULAIRES UNIFORMES

### 1. Planète ou satellite en mouvement circulaire uniforme

Dans le repère de Frenet :  $\vec{F}_g = m \cdot \vec{a}$ , d'où :

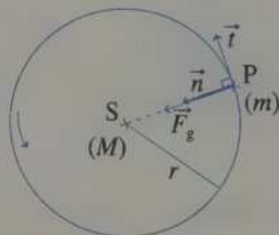
•  $a_t = 0$  donc  $v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}} = \text{cte}$  ;


•  $a_n = \frac{v^2}{r} = r \cdot \omega^2 = \frac{F_g}{m}$

( $\omega$  vitesse angulaire de rotation :  $v = r \cdot \omega$ ) ;

• dans ce cas,  $F_g$  est la force centripète ;

•  $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M}$



 Il faut savoir retrouver toutes ces relations (cf. ex. 5).

## 2. Cas des satellites géostationnaires

### (pour la Terre dans cet exemple)

- Satellite restant à la verticale d'un point de la surface de la Terre.
- Mouvement uniquement possible dans le plan équatorial.
- Période de révolution :  $T = T$  (jour sidéral)  $\approx 86\,164$  s ( $\approx 23$  h 56 min)
- Altitude :  $z \approx 35\,800$  km ; rayon de l'orbite :  $R_T + z \approx 42\,200$  km.
- Vitesse :  $v \approx 3\,080$  m  $\cdot$  s $^{-1}$ .

## 3. Définitions

- **État d'impesanteur** (cas d'un objet dans un satellite) : l'objet est soumis à la même accélération que le satellite, donc il reste immobile par rapport au satellite si l'objet l'était initialement.
- **État d'apesanteur** : l'objet n'est soumis à aucune force de pesanteur.
- **Période de révolution de la Terre** : durée d'une rotation autour du Soleil.
- **Période propre de la Terre** : durée d'une rotation autour de l'axe des pôles.

## EXERCICES D'APPLICATION

Dans les exercices, on utilisera, si nécessaire, les données suivantes :

$$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}.$$

$$\text{Masse de la Terre : } M_T = 5,98 \times 10^{24} \text{ kg.}$$

$$\text{Rayon de la Terre : } R_T = 6\,380 \text{ km.}$$

$$\text{Période de révolution de la Terre autour du Soleil : } T = 365,25 \text{ jours.}$$

$$\text{Période de rotation propre de la Terre : } T_S = 86\,164 \text{ s.}$$

### 1 MASSE DE SATURNE \* (5 min) ► P. 198

Titan est un satellite de Saturne qui décrit une trajectoire circulaire de rayon  $r = 1,22 \times 10^6$  km et de période  $T = 15,9$  jours.

En déduire la masse de Saturne.

### 2 CALCULS CLASSIQUES \* (15 min) ► P. 198

Un satellite terrestre de masse 87,3 kg a une trajectoire circulaire à une altitude de 205 km. En déduire :

- sa période de révolution et sa fréquence ;
- sa vitesse ;
- ses accélérations normale, tangentielle et totale ;
- la valeur de la force de gravité qu'il subit et celle de la force centripète.

### 3 LANCEMENT DE SATELLITE \* (15 min) ► P. 199

Le repère géocentrique est le repère d'étude. C désigne le centre de la Terre.

À 1 000 km d'altitude, au point A, une fusée met un satellite en orbite en lui communiquant un vecteur vitesse initial  $\vec{v}_0$ .

- Que se passe-t-il si  $\vec{v}_0 = \vec{0}$  ?
- Le satellite doit avoir un mouvement circulaire de centre C.
  - Quel est le plan de sa trajectoire ?
  - Quelle valeur doit-on imposer à l'angle  $(\vec{CA}, \vec{v}_0)$  ?
  - Que dire de son sens de rotation ?
  - Comment évolue la valeur de  $\vec{v}_0$  ?
  - Quelle doit être la valeur de  $\vec{v}_0$  ?
  - Quelle est la valeur de la période du mouvement ?
  - Quelle est l'influence de la masse  $m$  du satellite sur le mouvement ?

## EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

Pour les données numériques, voir la page 194.

#### 4 LUNE ET SATELLITE ARTIFICIEL \* (15 min) ► P. 199

Dans le référentiel géocentrique, la Lune a un mouvement supposé circulaire, de période  $T_0 = 27 \text{ j } 7 \text{ h } 44 \text{ min}$ . La distance Terre-Lune (définie de centre à centre et supposée constante) est  $d = 384\,000 \text{ km}$ .

1. Définir le repère géocentrique.
2. Calculer la masse de la Terre.
3. En déduire l'altitude  $z$  d'un satellite artificiel de la Terre qui aurait comme période  $T_0/100$  (exprimer  $z$  en fonction de  $d$  et  $R_T$ ).

#### 5 LE CLASSIQUE \*\* (30 min puis 10 min) ► P. 200

Un satellite de masse  $m$  décrit une trajectoire circulaire de rayon  $r$  dont le centre est confondu avec celui d'une planète (ou du Soleil) de masse  $M$ .

1. Appliquer la deuxième loi de Newton au système que constitue le satellite (on supposera que le référentiel d'étude est galiléen).
2. En utilisant le repère de Frenet que l'on représentera, projeter la relation précédente sur les deux axes et en déduire que le mouvement du satellite est uniforme, puis exprimer sa vitesse  $v$  en fonction de  $G$ ,  $M$  et  $r$ .
3. En déduire la troisième loi de Kepler (appliquée aux mouvements circulaires).

#### 6 SATELLITES GÉOSTATIONNAIRES \*\* (20 min) ► P. 200

Soit un satellite géostationnaire évoluant autour de la Terre de centre  $C$ , de masse  $M_T$ , de rayon  $R_T$ . Le satellite est supposé ponctuel, de masse  $m$ , et sa trajectoire est circulaire.

1. Rappeler la définition d'un satellite géostationnaire.
2. Montrer que  $C$  appartient nécessairement au plan de la trajectoire. En déduire que la trajectoire est dans le plan équatorial.
3. Quelle est la période  $T$  d'un tel satellite ?
4. Calculer alors le rayon  $r$  de son orbite et son altitude  $z$ .
5. En déduire sa vitesse  $v$  (en fonction de  $G$ ,  $M_T$  et  $T$ ) et la calculer.

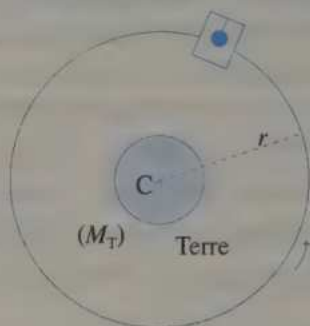
## EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

Pour les données numériques, voir la page 194.

**1** IMPESANTEUR

\*\* (20 min) ► P. 201

Soit une masse  $m$ , accrochée à un fil inextensible de masse négligeable, dans un vaisseau de masse  $M$  en mouvement circulaire uniforme, de rayon  $r$ , autour de la Terre. On utilise le référentiel géocentrique supposé galiléen. L'expérience se réalise, et la masse reste fixe par rapport à la cabine.

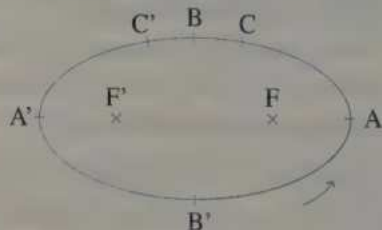


- On considère le système {vaisseau et pendule}. Écrire la deuxième loi de Newton (dans le repère de Frenet) ; l'accélération normale est notée  $\vec{a}_1$ .
- On considère le système {masse  $m$ }. Répondre à la même question (l'accélération normale est notée  $\vec{a}_2$ ).
- Que peut-on dire de  $a_1$  et  $a_2$  ?
- En déduire la valeur de la tension.
- Que se passe-t-il si l'on coupe le fil ?
- Comment s'appelle l'« état » dans lequel se trouve la masse.
- Appliquer la deuxième loi de Newton à la masse  $m$ , dans le référentiel lié au vaisseau, et conclure.

**2** TRAJECTOIRE ELLIPTIQUE

\*\* (5 min) ► P. 202

Un satellite terrestre a le mouvement elliptique ci-contre.



- Sachant que  $v_A > v_{A'}$  ( $v$  représente la vitesse) et que  $F$  et  $F'$  sont les foyers de l'ellipse, le centre de la Terre se trouve-t-il en  $F$  ou en  $F'$  ?
- Sachant que  $\widehat{CB} = \widehat{BC'}$ , le satellite mettra-t-il plus de temps pour aller de  $C$  en  $B$ , ou de  $B$  en  $C'$  ?
- La troisième loi de Kepler prend la forme suivante : 
$$\frac{T^2}{d^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot m}$$
 Que représentent  $d$  et  $m$  dans cette relation ?

**9 APHÉLIE ET PÉRIHÉLIE** \*\*\* (15 min) ► P. 202

Une comète a une trajectoire elliptique autour du Soleil, de période  $T = 17,3$  années, la distance minimale du centre du Soleil à la comète (périhélie) est  $r_p = 0,27$  U.A. (l'U.A., l'unité astronomique, est égale à la distance moyenne de la Terre au Soleil).

Sachant que la durée de révolution de la Terre autour du Soleil est  $T'$ , calculer la distance maximale du centre du Soleil à la comète (aphélie)  $r_A$  en fonction de  $T$ ,  $T'$ ,  $r_p$  et  $d =$  distance (Terre-Soleil).

Effectuer ensuite l'application numérique (donner  $r_A$  en U.A.).

**10 POINT D'ÉQUIGRAVITÉ** \*\* (20 min) ► P. 203

1. Déterminer la distance  $d$  séparant le centre de la Lune du point d'équi-gravité Terre-Lune (point où les vecteurs des forces de gravité dues aux deux astres sont opposés).

2. Même question pour la Terre et le Soleil. Conclure.

Données :

Astre	Masse (kg)	Rayon (km)	Distance à la Terre* (m)
Soleil	$1,98 \times 10^{30}$	$6,96 \times 10^5$	$1,50 \times 10^{11}$
Terre	$5,98 \times 10^{24}$	$6,38 \times 10^3$	0
Lune	$7,34 \times 10^{22}$	$1,74 \times 10^3$	$3,84 \times 10^8$

\* Distance entre centres.

**11 ASTÉROÏDE** \*\*\* (5 min) ► P. 204

Un petit astéroïde de masse 3,5 tonnes crée, à 1,0 km de son centre d'inertie, un champ de pesanteur de valeur  $2,3 \times 10^{-13} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

Vrai ou faux ?

**12 TEMPS DE PASSAGE** \*\*\* (10 min) ► P. 204

On néglige la rotation propre de la Terre.

Un satellite décrivant une orbite circulaire à une altitude de 750 km passe à la verticale de la ville A à  $t = 0$  s, puis de B à  $t = \tau$  s.

On donne  $\widehat{AB} = 500$  km (dans le plan et dans le sens de la trajectoire). Calculer  $\tau$ .

## CORRIGÉS

**1** • Troisième loi de Kepler :  $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M_s}$ , soit  $M_s = \frac{4\pi^2 r^3}{G \cdot T^2}$

A.N. :  $M_s = \frac{4\pi^2 (1,22 \times 10^9)^3}{6,67 \times 10^{-11} \times (15,9 \times 24 \times 3600)^2} = 5,70 \times 10^{26} \text{ kg}$

Remarque :  $T$  doit être exprimée en seconde.

**2** a. Troisième loi de Kepler :  $\frac{T^2}{(R_T + z)^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M_T}$  ( $R_T + z$  est le rayon de

la trajectoire circulaire du satellite), d'où :  $T = 2\pi \sqrt{\frac{(R_T + z)^3}{G \cdot M_T}}$

A.N. :  $T = 2\pi \sqrt{\frac{(6380 + 205) \times 10^3)^3}{(6,67 \times 10^{-11}) \times (5,98 \times 10^{24})}} = 5,32 \times 10^3 \text{ s} \approx 1 \text{ h } 29 \text{ min}$

•  $f = \frac{1}{T}$       A.N. :  $f = 1,88 \times 10^{-4} \text{ Hz}$

b.  $v = \frac{\text{périmètre}}{\text{période}} = \frac{2\pi (R_T + z)}{T}$  ou  $v = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{R_T + z}}$

A.N. :  $v = \sqrt{\frac{(6,67 \times 10^{-11}) \times (5,98 \times 10^{24})}{(6380 + 205) \times 10^3}} = 7,78 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

c.  $v = \text{cte}$  donc  $a_t = \frac{dv}{dt} = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

et  $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = a_n = \frac{v^2}{R_T + z} = \frac{G \cdot M_T}{(R_T + z)^2}$

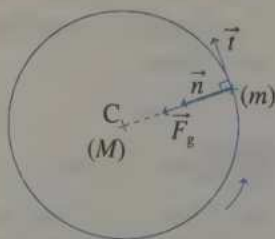
Autre méthode :

D'après la deuxième loi de Newton, on a  $\vec{F}_g = m \cdot \vec{a}$ , d'où, par projection sur la normale (schéma ci-contre) :  $F_g = m \cdot a_n$ , soit :

$$G \frac{mM_T}{(R_T + z)^2} = ma_n$$

d'où :  $a = a_n = \frac{G \cdot M_T}{(R_T + z)^2}$

A.N. :  $a = a_n = \frac{(6,67 \times 10^{-11}) (5,98 \times 10^{24})}{((6380 + 205) \times 10^3)^2} = 9,20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$



d.  $\vec{F}_g$  est la force centripète (c'est-à-dire suivant  $\vec{n}$ ), donc :  $F_g = G \frac{m \cdot M_T}{(R_T + z)^2}$

$$\text{A.N. : } F_g = 6,67 \times 10^{-11} \times \frac{87,3 \times (5,98 \times 10^{24})}{[(6\,380 + 205) \times 10^3]^2} \approx 803 \text{ N}$$

3. 1. Il s'agit alors d'une **chute verticale** (sans vitesse initiale) en direction de C : le satellite s'écrase sur le sol, à la verticale de A.

2. a. C appartenant toujours au plan de la trajectoire : le plan de la trajectoire contient A et C, et est parallèle à  $\vec{v}_0$  ( $\vec{v}_0$  est « dans » le plan).

b.  $\vec{v}_0$  est tangent à la trajectoire qui est circulaire, donc  $\vec{v}_0 \perp \vec{CA}$ .

c. Il y a évidemment **deux sens possibles** pour chaque cercle trajectoire.

d. Le mouvement est uniforme (cf. cours) :  $v_0 = \text{cte}$

$$\text{e. } \vec{v}_0 = \sqrt{\frac{G \cdot M_T}{R_T + z}} \quad \text{A.N. : } v_0 = \sqrt{\frac{(6,67 \times 10^{-11}) \times (5,98 \times 10^{24})}{(6\,380 + 1\,000) 10^3}} \approx 7\,350 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

f. Troisième loi de Kepler (par exemple) :

$$\frac{T^2}{(R_T + z)^3} = \frac{4 \pi^2}{G \cdot M_T} \quad \text{soit } T = 2\pi \sqrt{\frac{(R_T + z)^3}{G \cdot M_T}}$$

$$\text{A.N. : } T = 2\pi \sqrt{\frac{(6\,380 + 1\,000) 10^3)^3}{(6,67 \times 10^{-11}) \times (5,98 \times 10^{24})}} \approx 6,31 \times 10^3 \text{ s} = \mathbf{1 \text{ h } 45 \text{ min.}}$$

g. La masse  $m$  n'a **aucune influence** sur la trajectoire (néanmoins, il est d'autant plus facile de déposer, à une altitude donnée, un satellite que sa masse est faible).

4. 1. Le repère géocentrique a comme origine le centre de la Terre et les trois mêmes vecteurs de base que le repère héliocentrique.

**Attention** : ne pas confondre *référentiel* et *repère*, et bien savoir définir tous les repères et référentiels au programme.

$$2. \text{ Troisième loi de Kepler : } \frac{T_0^2}{d^3} = \frac{4 \pi^2}{G \cdot M_T} \quad \text{soit } M_T = \frac{4 \pi^2 d^3}{G \cdot T_0^2}$$

$$\text{A.N. : } M_T = \frac{4 \pi^2 (384 \times 10^6)^3}{(6,67 \times 10^{-11}) \times (2,36 \times 10^6)^2} \approx \mathbf{6,0 \times 10^{24} \text{ kg}}$$

$$\text{avec } T_0 = 27 \times 24 \times 3\,600 + 07 \times 3\,600 + 44 \times 60 = 2,36 \times 10^6 \text{ s.}$$

$$3. \frac{T_0^2}{d^3} = \frac{4 \pi^2}{G \cdot M_T} = \frac{(T_0/100)^2}{(R_T + z)^3} = \frac{T_0^2}{10^4 (R_T + z)^3}$$

$$\text{d'où : } (R_T + z)^3 = \frac{d^3}{10^4} \quad \text{et } z = \frac{d}{10^{4/3}} - R_T$$

$$\text{A.N. : } z = \frac{384 \times 10^6}{10^{4/3}} - 6\,380 \times 10^3 \approx 1,14 \times 10^7 \text{ m} = \mathbf{11\,400 \text{ km.}}$$

5 1. Seule la force de gravité intervient :  $\Sigma \vec{F}_{\text{ext}} = m \cdot \vec{a}_G$ , ( $G$  est le centre d'inertie du satellite), soit  $\vec{F}_g = m \cdot \vec{a}_G$ .

Remarque :  $m$  est la masse du système (et non  $M$ ).

2. Soit  $(\vec{t}, \vec{n})$  la base de Frenet :

$$\bullet \vec{F}_g = G \frac{m \cdot M}{r^2} \cdot \vec{n}$$

( $r$  est la distance entre les deux centres d'inertie des masses, qui est constante puisque le mouvement est circulaire) ;

$$\bullet \vec{a}_G = a_t \vec{t} + a_n \vec{n} = \frac{dv}{dt} \vec{t} + \frac{v^2}{r} \vec{n}$$

(cf. chapitre 9).

$$\bullet \vec{F}_g = m \cdot \vec{a}_G, \text{ s'écrit } (*) \quad \begin{pmatrix} 0 \\ G \frac{m \cdot M}{r^2} \end{pmatrix} = m \begin{pmatrix} \frac{dv}{dt} \\ \frac{v^2}{r} \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{ suivant } \vec{t} \\ \leftarrow \text{ suivant } \vec{n} \end{matrix}$$

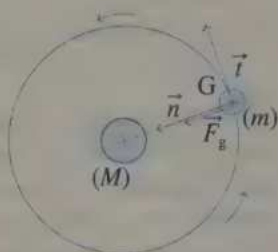
soit, par projection sur chaque axe :

$$\begin{cases} 0 = m \cdot \frac{dv}{dt} \\ G \cdot \frac{m \cdot M}{r^2} = m \cdot \frac{v^2}{r} \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} \frac{dv}{dt} = 0 \\ v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}} \end{cases} \quad \text{d'où } v = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}} = \text{cte}$$

3.  $v = \text{cte} = \frac{\text{longueur d'un tour}}{\text{durée d'un tour}} = \frac{\text{périmètre}}{\text{période}} = \frac{2\pi r}{T}$ , d'où d'après la question 2. :

$$\frac{2\pi r}{T} = \sqrt{\frac{G \cdot M}{r}} \quad \text{donc} \quad \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = \frac{G \cdot M}{r} \quad \text{soit} \quad \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M}$$

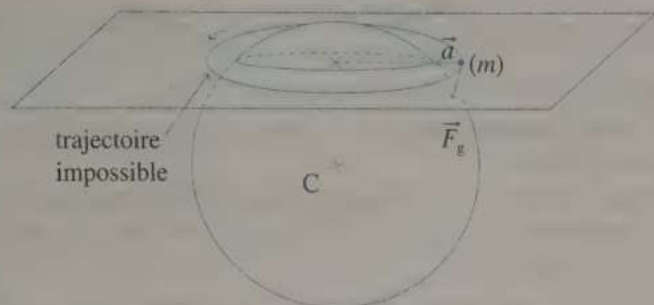
(\*) On peut aussi écrire :  $G \frac{m \cdot M}{r^2} \vec{n} = m \left( \frac{dv}{dt} \vec{t} + \frac{v^2}{r} \vec{n} \right)$



6 1. Un satellite géostationnaire est un satellite qui reste fixe (stationnaire) par rapport à un point de la surface de la Terre (géo).

2. Si  $C$  n'appartient pas au plan  $(P)$  de la trajectoire, alors :

- d'une part  $\vec{F}_g$  est dirigée du satellite vers  $C$ , donc  $\vec{F}_g$  n'est pas parallèle à  $(P)$  ;
- d'autre part  $\vec{a}$  est dirigé vers l'intérieur de la courbure (propriété de  $\vec{a}$ ), donc  $\vec{a}$  est parallèle à  $(P)$  ;
- enfin, la deuxième loi de Newton implique  $\vec{F}_g = m \cdot \vec{a}$ ,  $\vec{F}_g$  et  $\vec{a}$  doivent donc être colinéaires, ce qui n'est pas le cas (puisque l'un est parallèle au plan de la trajectoire, et l'autre pas).  **$C$  appartient donc au plan de la trajectoire.**



De plus, puisque le satellite est à la verticale d'un point de la surface de la Terre, il ne peut en être ainsi qu'à l'équateur (sinon le satellite serait au-dessus d'un point de l'hémisphère nord, puis sud : ce ne peut être le même point !) : **la trajectoire appartient au plan équatorial.**

3.  $T$  est la durée de rotation propre de la Terre, soit la durée du jour sidéral :

$$T = T_s \approx 86\,164 \text{ s.}$$

4. De la troisième loi de Kepler  $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M_T}$ , avec  $r = R_T + z$ , on tire :

$$r = \left( \frac{T_s^2 \cdot G \cdot M_T}{4\pi^2} \right)^{1/3} \text{ et } z = r - R_T.$$

$$\text{A.N. : } r = \left( \frac{86\,164^2 \times (6,67 \times 10^{-11}) \times (5,98 \times 10^{24})}{4\pi^2} \right)^{1/3} \approx 42\,200 \text{ km}$$

$$\text{et } z = 42\,200 - 6\,380 \approx 35\,800 \text{ km.}$$

$$5. v = \frac{2\pi r}{T_s} = \frac{2\pi}{T_s} \left( \frac{T_s^2 \cdot G \cdot M_T}{4\pi^2} \right)^{1/3} = \left( \frac{(2\pi)^3 T_s^2 \cdot G \cdot M_T}{T_s^3 \cdot 4\pi^2} \right)^{1/3}$$

$$\text{soit } v = \left( \frac{2\pi G \cdot M_T}{T_s} \right)^{1/3} \approx 3\,080 \text{ ms}^{-1}.$$

**7** 1.  $\vec{F}_g = (M + m) \vec{a}_1$ , soit en projetant sur  $\vec{n}$  :

$$G \frac{(m + M) M_T}{r^2} = (m + M) a_1 \text{ d'où : } a_1 = \frac{G \cdot M_T}{r^2} \text{ (} a_1 = 0 \text{ car le mouvement est uniforme).}$$

2. De même, avec la tension  $\vec{T}$  :  $\vec{F}_g + \vec{T} = m \cdot \vec{a}_2$ , soit  $G \frac{m \cdot M_T}{r^2} \pm T = m \cdot a_2$  (car on ne sait pas dans quel sens est  $\vec{T}$ ). De plus  $r$  est à peu près le même

$$\text{pour } m \text{ et } M : a_2 = \frac{GM_T}{r^2} \pm \frac{T}{m}$$

3.  $m$  est fixe par rapport à  $M$ , donc (avec  $G_1$  et  $G_2$  leurs positions) :

$\vec{CG}_1 = \vec{CG}_2 + \text{cte}$  et, en dérivant deux fois,  $\vec{a}_1 = \vec{a}_2$  (on peut écrire aussi directement :  $m$  est fixe par rapport à  $M$  donc  $\vec{a}_1 = \vec{a}_2$ ).

4. D'après 2., puis 3., puis 4. :  $\frac{GM_T}{r^2} \pm \frac{T}{m} = a_2 = a_1 = \frac{GM_T}{r^2}$  soit  $T = 0$  (N).

5. Il ne se passe **rien** ! ( $m$  reste fixe par rapport à  $M$ ).

6. C'est l'**état d'impesanteur** (et non d'apesanteur, ce qui signifierait qu'il n'y a pas de pesanteur).

7. On ne peut le faire, car **ce référentiel n'est pas galiléen**. Examinons ce que cela donnerait :  $\vec{T} + \vec{F}_g = m\vec{a} = \vec{0}$  (car  $m$  est fixe dans ce repère), soit  $T = F_g$ , ce qui est faux.

*Remarques* : • Si le fil a une autre direction, en projetant dans 1., on obtiendrait  $T = 0$  plus rapidement (en projetant sur  $\vec{r}$ , à un cosinus près).  
 • C'est le même état que subissent les objets ou les hommes qui « volent » dans ou autour des vaisseaux spatiaux.

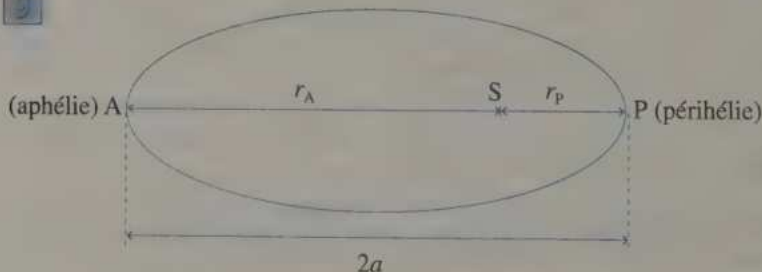
1. D'après la deuxième loi de Kepler (loi des aires), l'aire balayée par le segment [TS] (centre de la Terre-satellite) est une fonction constante (c'est-à-dire vitesse aréolaire constante) ; donc si  $v_A > v_{A'}$ , il faut que  $TA < TA'$ , donc **T est en F**.

2. Soit M un point de l'arc CB et M' un point de BC', alors  $FM < FM'$  donc  $v(M) > v(M')$  (d'après la loi des aires qui stipule que « pour balayer la même aire pendant la même durée avec un segment plus court, il faut que la vitesse soit plus élevée »), donc :

$$t(C \rightarrow B) < t(B \rightarrow C')$$

3.  $d = \frac{1}{2} AA'$  (demi-grand axe de l'ellipse)

$m$  est la masse de la Terre (masse de l'astre « qui attire »).



Troisième loi de Kepler :

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M_S} \text{ pour la comète et } \frac{T'^2}{d^3} = \frac{4\pi^2}{G \cdot M_S} \text{ pour la Terre,}$$

$$\text{soit } \frac{T^2}{a^3} = \frac{T'^2}{d^3} \text{ ou } a = \left(\frac{T}{T'}\right)^{2/3} d.$$

$$\text{Comme } 2a = r_A + r_P \text{ on en déduit : } r_A = 2d \left(\frac{T}{T'}\right)^{2/3} - r_P.$$

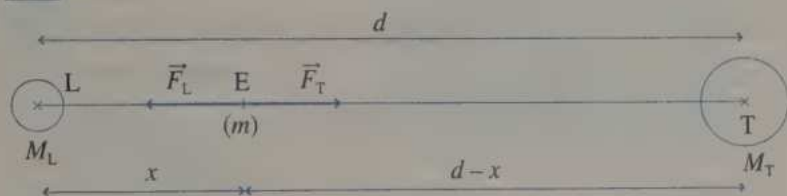
Si  $r_A$  et  $r_p$  sont en U.A., alors  $d$  doit l'être aussi.

$d = 1$  U.A. (par définition 1 U.A. = distance Terre-Soleil =  $d$ ).

De plus  $T$  et  $T'$  doivent être exprimées dans la même unité puisque  $\frac{T}{T'}$  doit être adimensionnel, il est donc possible de laisser  $T$  et  $T'$  en année :

$$\text{A.N. : } r_A = 2 \times 1 \left( \frac{17,3}{1} \right)^{2/3} - 0,27 \approx 13,1 \text{ U.A.}$$

**10** 1.



La masse  $m$  en E subit la force  $\vec{F}_L$  due à la Lune et  $\vec{F}_T$  due à la Terre.

Au point E d'équigravité :  $\vec{F}_L + \vec{F}_T = \vec{0}$  soit, en norme,  $F_L = F_T$ .

$$\text{D'où : } G \frac{m \cdot M_L}{x^2} = G \frac{m \cdot M_T}{(d-x)^2} \text{ donc } \left( \frac{d-x}{x} \right)^2 = \frac{M_T}{M_L}$$

$$\text{donc : } \frac{d}{x} - 1 = \pm \sqrt{\frac{M_T}{M_L}}. \text{ Or } d > x, \text{ donc } \frac{d}{x} > 1, \text{ donc } \frac{d}{x} - 1 > 0.$$

On garde la solution positive :

$$\frac{d}{x} = \sqrt{\frac{M_T}{M_L}} + 1 \text{ d'où : } x = \frac{d}{1 + \sqrt{\frac{M_T}{M_L}}}$$

$$\text{A.N. : } x = \frac{3,84 \times 10^8}{1 + \sqrt{\frac{5,98 \times 10^{24}}{7,34 \times 10^{22}}}} \approx 3,83 \times 10^7 \text{ m} = 38\,300 \text{ km}$$

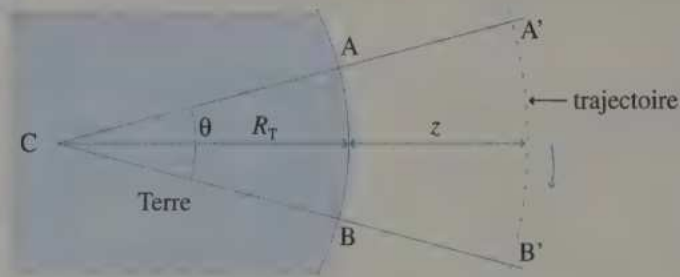
*Remarque :*  $x > R_L$  et  $d-x > R_T$  ; E est bien à l'extérieur de la Lune et de la Terre, sinon les formules des forces de gravités ne seraient pas valables.

$$2. \text{ M\^eme r\^esultat : } x = \frac{d}{1 + \sqrt{\frac{M_S}{M_T}}} \approx 2,60 \times 10^8 \text{ m} = 260\,000 \text{ km}$$

(on v\^erifie  $x > R_T$  et  $(d-x) > R_S$ ).

**11** Faux (a priori) : un astéroïde n'est pas à répartition de masse à symétrie sphérique (les astéroïdes ne sont pas sphériques, en général) : on ne peut pas appliquer  $g = \frac{G \cdot M_{\text{(astéroïde)}}}{d^2}$ .

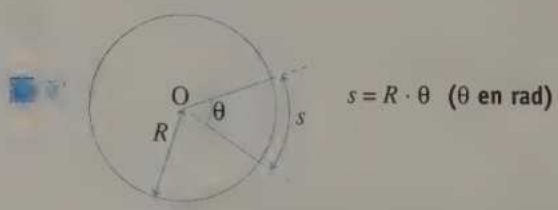
**12**



$$\tau = \frac{\widehat{A'B'}}{v} = \frac{(R_T + z) \times \theta}{\sqrt{\frac{G \cdot M_T}{R_T + z}}} = \frac{(R_T + z)^{3/2}}{\sqrt{G \cdot M_T}} \cdot \theta = \frac{(R_T + z)^{3/2}}{\sqrt{G \cdot M_T}} \cdot \frac{\widehat{AB}}{R_T}$$

$$\tau = \frac{(R_T + z)^{3/2}}{(G \cdot M_T)^{1/2}} \cdot \frac{\widehat{AB}}{R_T}$$

A.N. :  $\tau = \frac{[(6\,380 + 750)10^3]^{3/2} \times (500 \times 10^3)}{[(6,67 \times 10^{-11}) \times (5,98 \times 10^{24})]^{1/2} \times (6\,380 \times 10^3)}$   
 $\approx 74,7 \text{ s } (\approx 1 \text{ min } 15 \text{ s})$

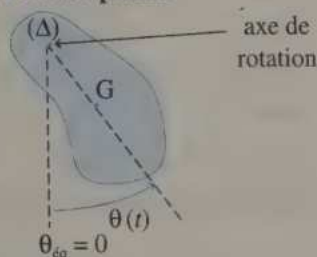


## 13

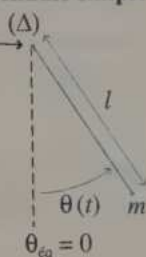
Présentation de systèmes  
mécaniques oscillants

## I LES DIFFÉRENTS OSCILLATEURS

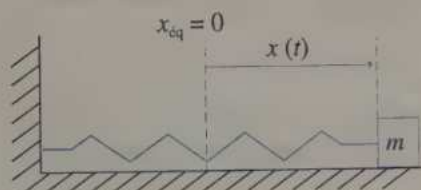
Pendule pesant



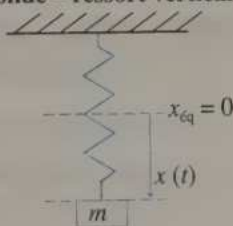
Pendule simple



Système solide - ressort horizontal



Système solide - ressort vertical

ressorts de constante de raideur  $k$  ( $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$ )

## II PÉRIODE PROPRE ET ISOCHRONISME

## 1. Pendules

• Pour les oscillations de faibles amplitudes ( $\theta_m \leq 15^\circ$ ), la période propre d'un pendule ne dépend pas de l'amplitude  $\theta_m$  du mouvement (**loi d'isochronisme** des petites oscillations).

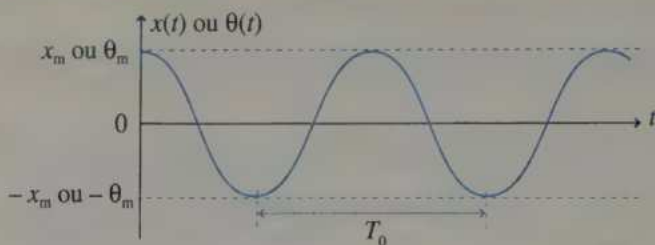
• Période propre d'un pendule simple :  $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$

## 2. Systèmes solide-ressort

Période propre :  $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$

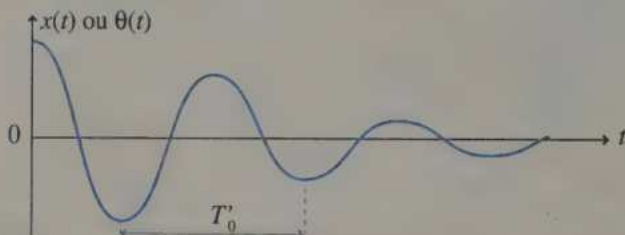
## III RÉGIMES DE FONCTIONNEMENT

### 1. Amortissement nul



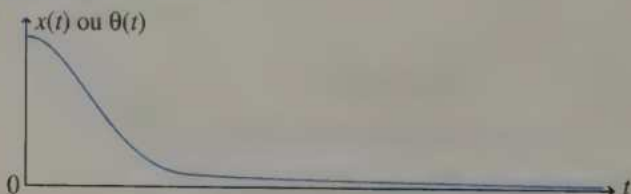
- Régime périodique de période propre  $T_0$ .
- Oscillateur harmonique (solutions sinusoidales).

### 2. Amortissement faible



- Régime pseudo-périodique de pseudo-période  $T'_0 > T_0$ .
- $T'_0 \approx T_0$  si l'amortissement est très faible.

### 3. Amortissement élevé



- Régime apériodique.

### 4. Remarques

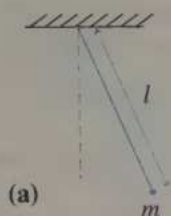
- Si la référence  $\theta = 0$  ne coïncide pas avec la position d'équilibre stable  $\theta_{eq}$ , alors il faut étudier  $\theta(t) - \theta_{eq}$  (écart à l'équilibre) ; de même avec  $x(t)$ .
- On peut aussi définir un régime critique dans certains cas seulement (frottements « fluides » par exemple) : voir le chapitre 8 sur les circuits RLC.

## EXERCICES D'APPLICATION

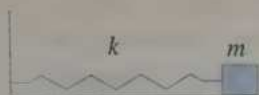
## GÉNÉRALITÉS

\* (5 min) ► P. 210

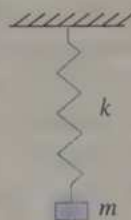
1. Calculer la période propre de chacun des trois montages suivants :



(a)



(b)



(c)

Données :  $m = 98 \text{ g}$  ;  $l = 98 \text{ cm}$  ;  $k = 9,8 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$  ;  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

Les frottements sont négligeables.

2. Les calculs précédents supposent réalisée une condition particulière pour l'un des trois systèmes : la nommer et l'énoncer.

## LIMITE DE L'ISOCRONISME

\* (10 min) ► P. 210

Pour un pendule simple, de façon plus précise que la formule classique, la période est donnée en fonction de l'amplitude  $\theta_m$  (en radian), par :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left( 1 + \frac{\theta_m^2}{16} \right)$$

Montrer que la formule du cours peut s'appliquer à moins de 1,0 % d'erreur relative si  $\theta_m$  est inférieur à  $23^\circ$  (limite d'application de l'isochronisme à 1 % près).L'erreur relative pour  $x$  est :  $\frac{x - x_{\text{réf}}}{x_{\text{réf}}}$  (à connaître !)

## PÉRIODE ET ALTITUDE

\*\* (10 min) ► P. 210

Au niveau de la mer, un pendule simple a comme période  $T_0$ .À quelle altitude sa période sera-t-elle supérieure de 1,0 % à  $T_0$  ?Données :  $R_T =$  rayon de la Terre  $\approx 6\,400 \text{ km}$ .

## EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

## 4 LE CLASSIQUE

\* (25 min puis 10 min) ► P. 210

1. Un pendule simple de masse ponctuelle oscille autour de sa position d'équilibre stable.

Sa position est repérée par l'angle  $\theta$  orienté.

a. Ne devrait-on pas repérer sa position par un écart angulaire plutôt que par un angle, d'après le cours ?

b. Pourquoi ne choisit-on pas comme réfé-

rence la position d'équilibre verticale « haute » (correspondant à  $\theta = 180^\circ$ ) ?

c. On suppose dans la suite que l'amplitude des oscillations est faible ( $\theta_m < 15^\circ$  par exemple) ; pourquoi ?

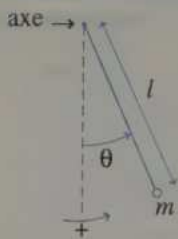
d. Tracer l'allure de la courbe  $\theta(t)$  (la valeur  $\theta(t=0)$  sera choisie au hasard) en supposant que l'amortissement est nul.

Que dire de la période propre de ce pendule ?

e. Répondre aux mêmes questions pour un amortissement faible (voire très faible).

f. Répondre aux mêmes questions pour un amortissement important.

2. Reprendre l'exercice dans le cas d'un système ressort-masse, horizontal, puis vertical.



## 5 ANALYSE DIMENSIONNELLE

\*\* (20 min) ► P. 211

1. Sans utiliser les formules du cours, mais uniquement l'analyse dimensionnelle, déterminer les coefficients  $\alpha$  et  $\beta$  tels que  $T_0 = a \cdot l^\alpha \cdot g^\beta$  soit la période d'un pendule simple ( $a$  est un nombre sans dimension),  $l$  est la longueur du fil,  $g$  la valeur du champ de pesanteur.

2. Répondre à la même question pour un système ressort-masse avec  $T_0 = a \cdot m^\alpha \cdot k^\beta$  ( $m$  est la masse et  $k$  la constante de raideur du ressort).

3. Reprendre le cas du pendule simple avec  $T_0 = a \cdot l^\alpha \cdot g^\beta \cdot m^\gamma$  où,  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  sont à déterminer.

## 6 RESSORT VERTICAL

\*\* (15 min) ► P. 212

Un ressort vertical s'allonge de 13,2 cm (à l'équilibre) lorsqu'on y suspend une masse.

Calculer la période propre du système masse-ressort ainsi constitué.

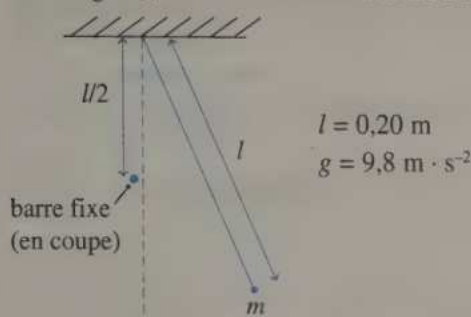
Donnée :  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

## EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

## 7 PENDULE ASYMÉTRIQUE

\*\*\* (25 min) ► P. 213

1. On utilise un pendule simple et on place, au niveau de la verticale du fil, à mi-hauteur, une barre fixe : ainsi, d'un côté de la verticale (à gauche sur la figure), seule la moitié inférieure du fil sert d'oscillateur.



En se plaçant dans les conditions de l'isochronisme des petites oscillations, calculer la période  $T$  des oscillations.

2. On reprend la question 1. en remplaçant  $l/2$  par  $l'$ .

Calculer la valeur de  $l'$  permettant d'avoir une période égale à 80 % de celle obtenue sans la barre.

3. Dans la question 2. peut-on remplacer 80 % par 40 % et obtenir un résultat censé ?

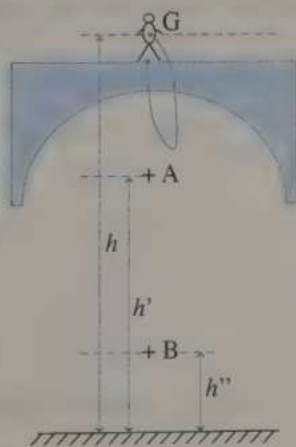
## 8 SAUT À L'ÉLASTIQUE

\*\*\* (30 min) ► P. 214

Mathieu saute à l'élastique d'une hauteur  $h = 100 \text{ m}$ . Au point A, à la hauteur  $h' = 80 \text{ m}$ , l'élastique commence à se tendre. Mathieu descend jusqu'en B, à la hauteur  $h'' = 64 \text{ m}$ .

En supposant, d'une part, qu'il remonte en G, à la même hauteur  $h$ , car il n'y a pas de perte énergétique et, d'autre part, que le mouvement est vertical, exprimer la période  $T_0$  de ce mouvement en fonction de  $h$ ,  $h'$ ,  $k$ ,  $g$  et  $m$ .

Données :  $k = 50 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ ;  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ ;  
 $m = 80 \text{ kg}$ .



## CORRIGÉS

$$\boxed{1} \quad 1. (a) \quad T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = 2\pi \sqrt{\frac{0,98}{9,8}} \approx 2,0 \text{ s.}$$

$$(b) \text{ et } (c) \quad T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{0,098}{9,8}} \approx 0,63 \text{ s.}$$

2. Il s'agit de la condition d'isochronisme des petites oscillations du pendule simple (cf. résumé du cours).

$$\boxed{2} \quad T = T_0 \left(1 + \frac{\theta_m^2}{16}\right) > T_0, \text{ d'où, à } 1\% \text{ près :}$$

$$\frac{T - T_0}{T_0} < 0,01 \Rightarrow \frac{\theta_m^2}{16} < 0,01 \Rightarrow \theta_m < 4 \times \sqrt{0,01} = 0,40 \text{ rad} \approx 23^\circ.$$

$\boxed{3}$  À l'altitude  $z$  :

$$g(z) = G \cdot \frac{M_T}{(R_T + z)^2}, \text{ d'où } T_0(z) = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g(z)}} = 2\pi(R_T + z) \sqrt{\frac{l}{G \cdot M_T}}.$$

Donc l'augmentation de 1 % de  $T_0$  s'écrit :  $T_0(z) = 1,01 \times T_0(z=0)$  ou

$$2\pi(R_T + z) \sqrt{\frac{l}{G \cdot M_T}} = 1,01 \times 2\pi(R_T + 0) \sqrt{\frac{l}{G \cdot M_T}}, \text{ soit } R_T + z = 1,01 R_T.$$

Donc :  $z = 0,01 \times R_T \approx 64 \text{ km.}$

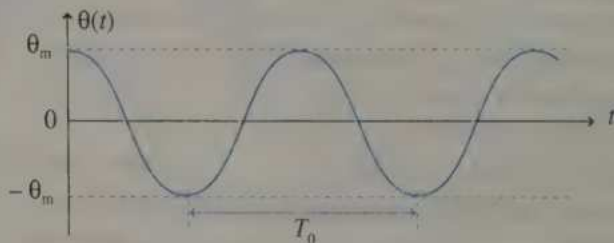
$\boxed{4}$  1. a. Effectivement, il faut repérer la position du pendule par  $(\theta(t) - \theta_{eq})$ , mais ici  $\theta_{eq} = 0$ , donc  $\theta(t) - \theta_{eq} = \theta(t)$ , ce qui revient donc au même.

b. En fait, ce n'est pas une position d'équilibre quelconque, mais une position d'équilibre **stable** qui sert de référence.

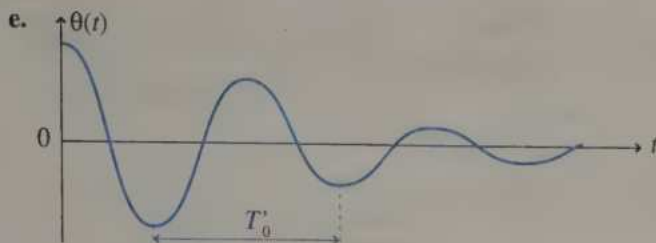
$\theta = 180^\circ$  correspond à une position d'équilibre instable.

c. Cette hypothèse est faite afin d'être dans les conditions d'isochronisme des oscillations (cf. cours) :  $T_0$  est alors indépendante de l'amplitude  $\theta_m$ .

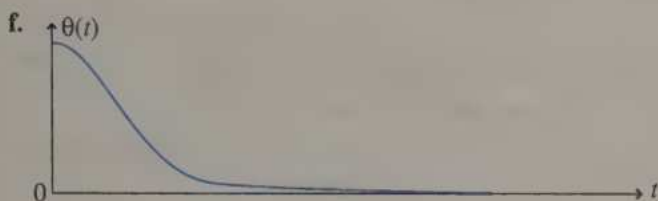
d.



$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \text{ (période propre)}$$



- Amortissement faible.
- Régime apériodique.
- $T'_0$  est la pseudo-période.
- $T'_0 \approx T_0$  si l'amortissement est très faible.



- Amortissement important.
- Régime apériodique (donc pas de période !).

2. Les réponses sont les mêmes dans les deux cas.

a. L'écart est  $x(t) - x_{\text{eq}} = x(t)$  si  $x_{\text{eq}} = 0$ .

b. Il n'existe qu'une seule position d'équilibre dans ces cas.

**Mais attention :** la position d'équilibre est confondue avec la position au repos seulement pour le système horizontal.

c. Condition inutile ici (mais il faut rester dans un domaine d'utilisation raisonnable du ressort : spires non jointives, ...).

d. e. f. Mêmes courbes et mêmes remarques en remplaçant  $\theta(t)$  par  $x(t)$  et  $T_0$  par  $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ .

3.  $[T_0] = [a \cdot l^\alpha \cdot g^\beta] = [l]^\alpha \cdot [g]^\beta$  ( $a$  est sans dimension),

d'où :  $T^1 = L^\alpha \cdot (L \cdot T^{-2})^\beta = L^{\alpha+\beta} \cdot T^{-2\beta}$

$$\text{soit : } \begin{cases} 1 = -2\beta \\ 0 = \alpha + \beta \end{cases} \quad \begin{cases} \beta = -\frac{1}{2} \\ \alpha = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{d'où : } T_0 = a \cdot l^{\frac{1}{2}} \cdot g^{-\frac{1}{2}} = a \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$2. \text{ Tout d'abord : } [k] = \frac{[\text{Force}]}{[\text{Allongement}]} = \frac{[\text{Poids}]}{L} = \frac{[m \cdot g]}{L} = \frac{M \cdot (L \cdot T^{-2})}{L} \\ = M \cdot T^{-2}$$

$$\text{puis } [T_0] = [a \cdot m^\alpha \cdot k^\beta] = [m]^\alpha \cdot [k]^\beta$$

$$\text{d'où } T^1 = M^\alpha \cdot (M \cdot T^{-2})^\beta = M^{\alpha+\beta} \cdot T^{-2\beta}$$

$$\text{soit : } \begin{cases} 1 = -2\beta \\ 0 = \alpha + \beta \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \beta = -\frac{1}{2} \\ \alpha = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{donc : } T_0 = a \cdot m^{\frac{1}{2}} \cdot k^{-\frac{1}{2}} = a \sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$3. [T_0] = [a \cdot l^\alpha \cdot g^\beta \cdot m^\gamma] = [l]^\alpha \cdot [g]^\beta \cdot [m]^\gamma$$

$$\text{soit : } T^1 = L^\alpha \cdot (L \cdot T^{-2})^\beta \cdot M^\gamma = L^{\alpha+\beta} \cdot T^{-2\beta} \cdot M^\gamma$$

$$\text{soit : } \begin{cases} 0 = \alpha + \beta \\ 1 = -2\beta \\ 0 = \gamma \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \beta = -\frac{1}{2} \\ \alpha = \frac{1}{2} \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

On obtient le même résultat qu'au 1., sans dépendance à la masse.

6

$$\text{À l'équilibre : } \Sigma \vec{F}_{\text{ext}} = \vec{0}$$

$$\vec{P} + \vec{F} = \vec{0}$$

$$P = F$$

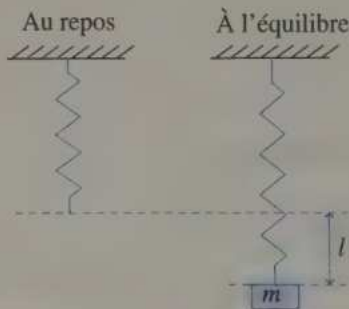
$$m \cdot g = k \cdot l \quad (1)$$

( $\|\vec{F}\| = k \times \text{allongement}$  est la valeur de la force de rappel).

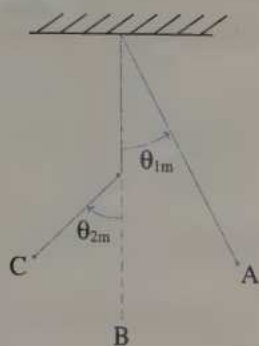
La période propre est  $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ , soit avec (1) :

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

$$\text{A.N. : } T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{0,132}{9,81}} \approx 0,729 \text{ s.}$$



7 1.



$$T_0 = \Delta t (B \rightarrow A \rightarrow B) + \Delta t (B \rightarrow C \rightarrow B)$$

$$= \frac{1}{2} T_{0,l} + \frac{1}{2} T_{0,l/2}$$

où  $T_{0,l}$  est la période propre d'un pendule de longueur  $l$  et  $T_{0,l/2}$  celle d'un pendule de longueur  $l/2$ )

$$T_0 = \frac{1}{2} 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} + \frac{1}{2} 2\pi \sqrt{\frac{l}{2g}}$$

$$T_0 = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left( 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

A.N. :  $T = \pi \sqrt{\frac{0,20}{9,8}} \left( 1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \approx 0,77 \text{ s.}$

2. De même :  $T'_0 = \frac{1}{2} T_{0,l} + \frac{1}{2} T_{0,l'}$

$$= \frac{1}{2} 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} + \frac{1}{2} 2\pi \sqrt{\frac{l-l'}{g}}$$

$$= \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{l'}{l}} \right)$$

On veut :

$$0,8 \times T_0 \text{ (pendule classique)} = T'_0 \text{ (période propre du pendule asymétrique)}$$

soit :  $0,8 \times 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} = \pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left( 1 + \sqrt{1 - \frac{l'}{l}} \right)$

$$1,6 = 1 + \sqrt{1 - \frac{l'}{l}}$$

$$0,36 = 1 - \frac{l'}{l}$$

$$l' = 0,64 l$$

A.N. :  $l' = 0,64 \times 0,2 \approx 0,13 \text{ m.}$

3.  $T'_0$  (période propre du pendule asymétrique)  $> \Delta t (B \rightarrow A \rightarrow B) = \frac{T_0}{2}$

Donc : la période du pendule asymétrique est nécessairement supérieure à 50 % de  $T_0$  ; il n'existe donc pas de valeur de  $l'$  permettant d'avoir une période égale à 40 % de celle obtenue sans la barre.

8 L'élastique se comporte comme un ressort, seulement entre A et B :

$$T = \Delta t_1 (A \rightarrow B \rightarrow A) + \Delta t_2 (A \rightarrow O \rightarrow A)$$

$$\Delta t_1 = \frac{1}{2} T_0 = \frac{1}{2} 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = \pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

et

$$\Delta t_2 = \Delta t (A \rightarrow O \rightarrow A) = 2 \times \Delta t (O \rightarrow A)$$

Pour une chute libre, avec  $v_0 = 0$  et  $z$  orienté vers le bas, on a :

$$\ddot{z} = g, \text{ soit } \dot{z} = g \cdot t, \text{ d'où } z = g \cdot \frac{t^2}{2} \quad (z(t=0) = 0).$$

Le temps de passage en A ( $z_A = h - h'$ ) est donc donné par :

$$h - h' = g \cdot \frac{t_A^2}{2} \text{ soit } t_A = \sqrt{\frac{2(h-h')}{g}} \text{ et } \Delta t(O \rightarrow A) = t_A - t_0 = \sqrt{\frac{2(h-h')}{g}} - 0$$

$$\text{et } T = \pi \sqrt{\frac{m}{k}} + 2 \times \sqrt{\frac{2(h-h')}{g}}$$

$$\text{A.N. : } T = \pi \sqrt{\frac{80}{50}} + 2 \times \sqrt{\frac{2(100-80)}{9,8}} \approx 8,0 \text{ s.}$$

## 14

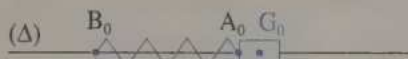
Dispositif  
solide-ressort

## I FORCE DE RAPPEL

1. Ressort d'axe fixe ( $\Delta$ )

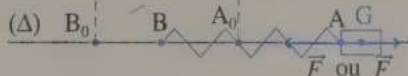
- Notations :
  - A : extrémité du ressort *attachée* à la masse
  - B : autre extrémité du ressort
  - G : centre d'inertie de la masse
  - indice 0 : position au repos
  - $k$  : constante de raideur du ressort (en  $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$ )

- Position de repos :  $\vec{F} = \vec{0}$



- Position quelconque :

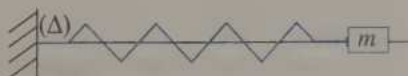
$$\vec{F} = k (\overline{AB} - \overline{A_0B_0})$$



## 2. Remarques

- Si B est fixe, alors :

$$\vec{F} = k \cdot \overline{AA_0} = k \cdot \overline{GG_0}$$

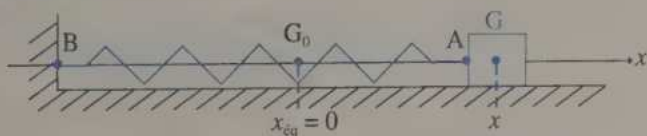


$\vec{F}$  est la force exercée par le ressort sur la masse.

- Tension du ressort : force exercée par la masse sur le ressort :  $\vec{T} = -\vec{F}$ .

## II ÉTUDE DES OSCILLATIONS

## 1. Dispositif



système = {masse  $m$ }

## 2. Cas général : oscillations libres amorties

- Équation différentielle du mouvement :

$$m \cdot \ddot{x} - f_x + k \cdot x = 0$$

$f_x$  est la valeur algébrique de la force de frottement.

## 3. Cas particulier : oscillations libres non amorties

- Équation différentielle du mouvement :

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot x = 0$$

(oscillateur harmonique)

- Solution :

$$x(t) = x_m \cdot \cos\left(2\pi \frac{t}{T_0} + \varphi_0\right)$$

$x_m \geq 0$  : amplitude (en m)

$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$  : période propre (en s)

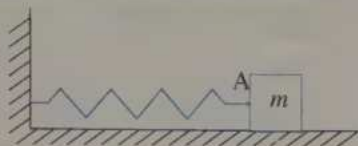
$\varphi_0$  : phase à l'origine des dates (en rad) (en général ;  $\varphi_0 \in ]-\pi ; +\pi[$ )

## EXERCICES D'APPLICATION

## 1 TENSION D'UN RESSORT

\* (5 min) ► P. 222

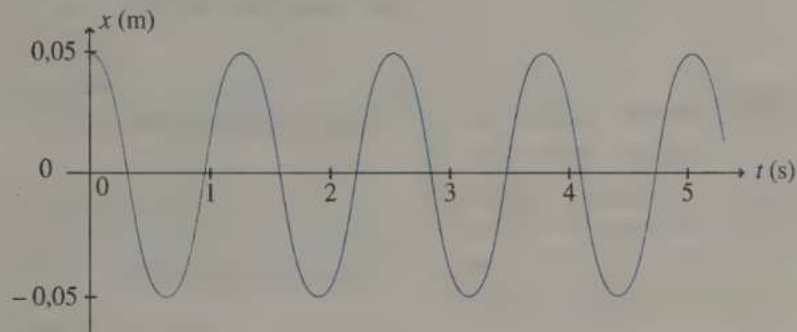
« La valeur de la force de rappel que subit  $m$  est inférieure à la valeur de la tension en A uniquement lorsque la masse se déplace vers la droite ».  
Vrai ou faux ?



## 2 COURBE D'OSCILLATION

\* (15 min) ► P. 222

Un système solide-ressort oscille horizontalement. On a enregistré l'abscisse de la position  $x(t)$  du centre d'inertie G de la masse ( $m = 2,5$  kg), repérée par rapport à la position au repos.



1. A priori, y a-t-il des frottements ? Comment nomme-t-on de telles oscillations ?
2. Quelle est la valeur de la période propre  $T_0$  de cet oscillateur ?
3. En déduire la valeur de la constante de raideur  $k$  du ressort.
4. Quelle est l'abscisse de la position initiale de G et sa vitesse initiale ?
5. Donner une équation de  $x(t)$ , le plus simplement possible (les longs calculs sont inutiles ici), sous forme numérique.

## 3 PÈSE-PERSONNE SUR LA LUNE

\*\* (15 min) ► P. 222

Quelle valeur de la masse indiquerait un pèse-personne si un individu de 84 kg montait dessus, sur la Lune ?

Donnée :  $g$  (Lune) =  $\frac{1}{6}$   $g$  (Terre)

Expliquer clairement votre raisonnement.

**4** ÉTUDE DU MOUVEMENT OSCILLANT

\*\* (20 min) ► P. 223

Soit le mobile ponctuel se déplaçant sur l'axe des abscisses et repéré par  $x(t) = 3 \cos(\pi t)$ .

1. Quelle est la trajectoire de ce mobile ?
2. Montrer que ce mouvement est périodique. Calculer sa période  $T$ . Montrer qu'il suffit d'étudier le mouvement sur  $[0 ; T]$ .
3. Calculer  $v_x = \dot{x}$ ,  $v$ ,  $a_x = \ddot{x}$  et  $a$ .
4. Préciser les points où  $v$  est maximale et ceux où  $a$  est maximale.
5. Préciser à quel moment le mouvement est accéléré ou retardé.
6. Représenter la trajectoire et schématiser les résultats précédents.

## EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

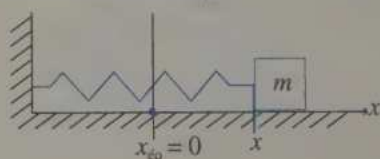
**5** LE CLASSIQUE

\*\* (60 min puis 30 min) ► P. 224

Soit le montage solide-ressort ci-contre (ressort de longueur  $l$  au repos et de constante de raideur  $k$ ) :

$$m = 100 \text{ g et } k = 40 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}.$$

La force de frottement est notée  $\vec{f}$ .



1. Appliquer la seconde loi de Newton au système constitué de la masse  $m$ .
2. Projeter cette relation horizontalement et en déduire l'équation différentielle du mouvement en  $x$ .
3. Montrer qu'en l'absence de frottement  $x(t) = x_m \cos\left(2\pi \frac{t}{T_0} + \varphi_0\right)$  est une solution possible et exprimer  $T_0$  ( $T_0 \geq 0$ ) en fonction des paramètres du montage (sans utiliser la formule connue).
4. On suppose qu'à  $t = 0$ , le ressort est lâché sans vitesse initiale de la position  $x_0 = +3 \text{ cm}$  : déterminer  $x_m$  et  $\varphi_0$  ( $x_m$  étant l'amplitude, on s'assurera que  $x_m \geq 0$ ),  $\varphi_0$  étant la phase à l'origine des dates, on choisira de préférence  $\varphi_0 \in ]-\pi ; +\pi[$ ).
5. Calculer la vitesse et l'accélération maximale de la masse.
6. Calculer la valeur maximale de la force de rappel.

### 6 DIFFÉRENTES CONDITIONS INITIALES \*\* (30 min) ► P. 225

On reprend le montage de l'exercice 5 et la solution

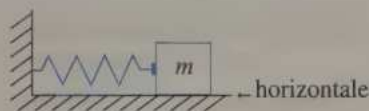
$$x(t) = x_m \cos\left(2\pi \frac{t}{T_0} + \varphi_0\right) \text{ avec } T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}, m = 100 \text{ g et } k = 40 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}.$$

On cherche  $x_m \geq 0$  et  $\varphi_0 \in ]-\pi; +\pi]$  pour les **conditions initiales** suivantes (on écrira aussi  $x(t)$  littéralement et numériquement) :

- le ressort est comprimé de 3 cm et lâché sans vitesse initiale ;
- la masse est lancée de sa position d'équilibre vers la droite avec une vitesse de  $1,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  ;
- le ressort est tendu de 3 cm et la masse est lancée avec une vitesse de  $0,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  vers la gauche (pour cette question, on fera directement l'application numérique).

### 7 CONTACT MASSE-RESSORT \*\* (10 min) ► P. 227

Un ressort est comprimé de 4 cm, puis lâché sans vitesse initiale. La masse ( $m = 200 \text{ g}$ ) qui y est accolée (elle n'est pas attachée au ressort) est ainsi propulsée vers la droite.



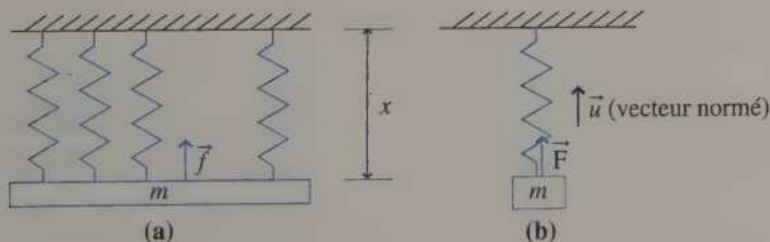
En négligeant les frottements, calculer la durée du contact entre la masse et le ressort.

Données :  $k$  (constante de raideur) =  $3,4 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$  et  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

### 8 RESSORT ÉQUIVALENT \*\* (15 min) ► P. 227

Soit les deux montages suivants :

- (a)  $n$  ressorts identiques de constante de raideur  $k$ , de longueur à vide  $l$ , reliés à une barre de masse  $m$  et créant la force de rappel  $\vec{f}$  ;
- (b) un ressort de constante de raideur  $K$ , de longueur à vide  $L$ , relié à une masse  $m$  et créant la force de rappel  $\vec{F}$ .



Exprimer  $L$  et  $K$  en fonction de  $l$ ,  $k$  et  $n$  afin que les systèmes soient équivalents, c'est-à-dire que  $\vec{F} = \vec{f}$  pour toutes valeurs de  $x$ .

## EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

## 9 RESSORT VERTICAL

\*\* (30 min) ► P. 227

Dans tout le problème, les frottements seront négligés.

La masse est ponctuelle.

1. Une masse  $m$ , suspendue à un ressort vertical, provoque une élongation  $a$ , à l'équilibre.

Trouver la relation reliant  $a$ ,  $m$ ,  $g$  et  $k$ , où  $k$  est la constante de raideur du ressort).

2. Ensuite, on étudie les oscillations de la masse autour de sa position d'équilibre.

Montrer que l'équation différentielle du mouvement est du type :

$$\ddot{x} + \alpha \cdot x = 0.$$

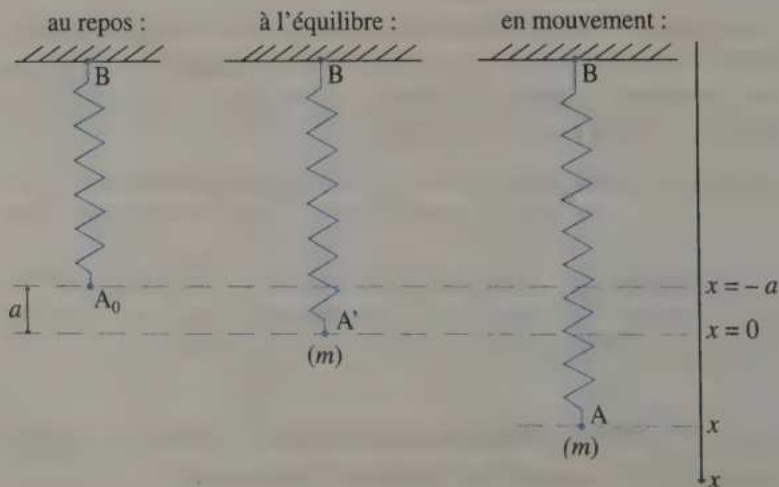
Déterminer  $\alpha$  en fonction de  $k$  et  $m$ .

3. Montrer que  $x(t) = A \cdot \cos\left(2\pi \frac{t}{T_0} + \varphi_0\right)$  est une solution possible, après avoir rappelé la formule de  $T_0$  ( $\varphi_0 \in ]-\pi ; +\pi[$ ).

4. Initialement, le ressort est allongé de la longueur  $d$  vers le bas, puis est lâché sans vitesse initiale ; en déduire  $x(t)$ .

5. Exprimer numériquement  $x(t)$  avec :

$$m = 50 \text{ g}, \quad k = 20 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}, \quad g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \text{ et } d = 4,0 \text{ cm}.$$



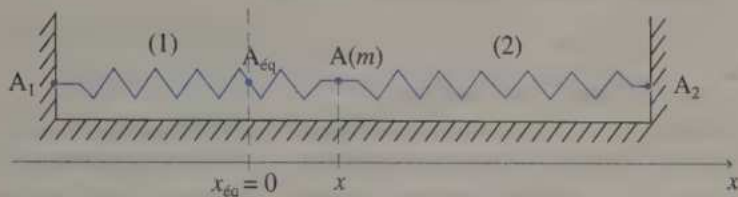
## 10 RESSORTS EN PARALLÈLE

\*\* (30 min) ► P. 228

Le montage ci-dessous est constitué :

- d'une masse  $m$  ponctuelle qui se déplace horizontalement entre  $A_1$  et  $A_2$ , sans frottement ;  $m$  est en  $A$  à la date  $t$  ;
- de deux ressorts (1) et (2), de constantes de raideur  $k_1$  et  $k_2$  et de longueurs à vide  $l_1$  et  $l_2$ .

On note  $l = A_1A_2$  et  $d = A_1A_{\text{éq}}$  ( $A_{\text{éq}}$  est la position de  $A$  à l'équilibre) et on supposera  $l > l_1 + l_2$  pour simplifier.



1. Chercher une relation entre  $d$ ,  $l$ ,  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $a_1$  et  $a_2$  en étudiant l'équilibre.
2. Écrire l'équation différentielle du mouvement sous la forme :

$$\ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0$$

et exprimer  $K$  en fonction de  $k_1$  et  $k_2$ .

## CORRIGÉS

**1** Faux :  $\vec{T}_A = \vec{F}$  (masse / ressort) et  $\vec{F}_{\text{rappel}} = \vec{F}$  (ressort / masse)  
donc  $\vec{T}_A = -\vec{F}_{\text{rappel}}$  d'après la troisième loi de Newton, et  $T_A = F_{\text{rappel}}$ .

**2** 1. L'amplitude est constante, la courbe n'est pas amortie : il n'y a pas de frottement. Ce sont des **oscillations libres non amorties**.

2.  $T_0$  (entre deux maxima, par exemple)  $\approx 1,3$  s

3.  $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$  donc  $k = \frac{4\pi^2 m}{T_0^2}$ . A.N. :  $k = \frac{4\pi^2 \times 2,5}{1,3^2} \approx 58 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$

4.  $x(t=0) = 0,050 \text{ m} = 5,0 \text{ cm}$  (lue)

$v_x(t=0) = \dot{x}(t=0)$  est le coefficient directeur de la tangente à  $t=0$  s. Or, celle-ci est horizontale, donc  $v_x(t=0) = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ , d'où :  $v = |v_x| = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

5. On sait que  $x(t)$  est une sinusoïde. Partant d'un maxima, on peut dire que  $x(t) = A \cdot \cos(\alpha t)$  (car  $\cos(\alpha t)$  est maximum à l'origine).

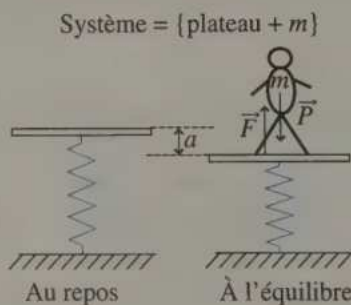
La période est  $\frac{2\pi}{\alpha} = T_0$  soit  $\alpha = \frac{2\pi}{T_0} \approx 4,8 \text{ s}$  et  $x(t=0) = A = 0,05 \text{ m}$ .

D'où :  $x(t) = 0,05 \cos(4,8 \times t)$ .

(Il est inutile de partir de  $x(t) = x_m \cos(2\pi \frac{t}{T_0} + \phi_0)$  et des conditions initiales... trop long ici).

**3** Un pèse-personne est schématisé par un plateau de masse nulle reposant sur un ressort de constante de raideur  $k$ . L'individu montant sur le plateau, la masse  $m$  (en fait son poids) provoque un abaissement du plateau de la hauteur  $a$ .

À l'équilibre,  $\vec{P} + \vec{F} = \vec{0}$  soit  $P = F$ , donc  $mg = k \cdot a$  d'où  $a = \frac{mg}{k}$ .



La masse lue ( $m_{\text{lue}}$ ) est proportionnelle à  $a$  :  $m_{\text{lue}} = \alpha \cdot a = \frac{\alpha \cdot m}{k} \cdot g$  ( $\alpha$  est une constante due à un système mécanique, électronique...).

Donc  $m_{\text{lue}}(\text{Lune}) = \frac{\alpha \cdot m}{k} \cdot g(\text{Lune}) = \frac{\alpha \cdot m}{k} \times \frac{1}{6} g(\text{Terre}) = \frac{1}{6} \frac{\alpha \cdot m}{k} \cdot g(\text{Terre})$   
 $= \frac{1}{6} m_{\text{lue}}(\text{Terre})$

D'où  $m_{\text{lue}}(\text{Lune}) = \frac{m}{6}$  (puisque  $m_{\text{lue}}(\text{Terre}) = m$ ).

A.N. :  $m_{\text{lue}}(\text{Lune}) \approx 14 \text{ kg}$ .

**4** Une masse est constante dans tout l'univers.

4. 1. Comme  $-1 \leq \cos(\pi t) \leq +1$ , alors  $x \in [-3; +3]$ .

La trajectoire est le segment  $[-3; +3]$  de l'axe des abscisses.

2.  $\cos(at + b)$  admet  $T = \frac{2\pi}{a}$  comme période.

D'où, ici :  $T = \frac{2\pi}{\pi} = 2 \text{ s}$  ;  $T = 2 \text{ s}$ .

Par définition de  $T$ , il suffit d'étudier le mouvement sur un intervalle de durée  $T$  : l'étude sur  $[0; T] = [0; 2 \text{ s}]$  suffit.

3.  $v_x = \dot{x} = -3\pi \sin(\pi t)$  ;  $v = |v_x| = 3\pi |\sin(\pi t)|$  ;  
 $a_x = \ddot{x} = -3\pi^2 \cos(\pi t)$  ;  $a = |a_x| = 3\pi^2 |\cos(\pi t)|$ .

4.  $v$  maximale  $\Rightarrow |\sin(\pi t)| = 1 \Rightarrow \sin(\pi t) = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} t = \frac{1}{2} = \frac{T}{4} \\ \text{ou} \\ t = \frac{3}{2} = \frac{3T}{4} \end{cases}$  sur  $[0; T]$

et  $v_{\max} = 3\pi$ .

$a_{\max}$   $\Rightarrow |\cos(\pi t)| = 1 \Rightarrow \cos(\pi t) = \pm 1 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \\ \text{ou} \\ t = 1 = \frac{T}{2} \end{cases}$  sur  $[0; T]$

et  $a_{\max} = 3\pi^2$ .

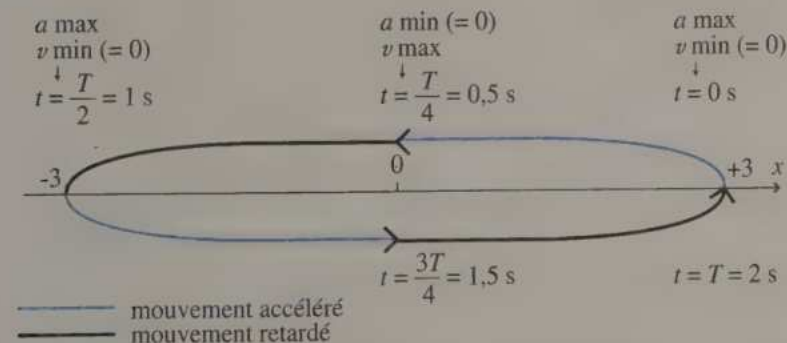
Sur  $[0; 2]$  :  $v_{\max} = 3\pi$  pour  $t = \frac{T}{4}$  et  $\frac{3T}{4}$

$a_{\max} = 3\pi^2$  pour  $t = 0$  et  $\frac{T}{2}$

5.  $v = 3\pi |\sin(\pi t)|$  :  $v$  croît si  $|\sin(\pi t)|$  croît, donc :

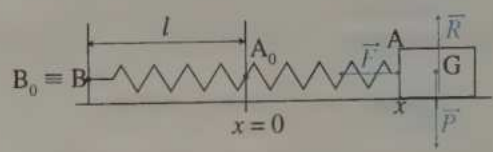
sur  $[0; \frac{1}{2}] = [0; \frac{T}{4}]$  et sur  $[1; \frac{3}{2}] = [\frac{T}{2}; \frac{3T}{4}]$   $v$  augmente ; le mouvement est accéléré (il est retardé le reste du temps).

6.



Les traits sont décalés par rapport à l'axe pour une meilleur lecture.

1.



$\vec{f}$  est horizontale est apposée à  $\vec{v}$  (donc vers la gauche ou vers la droite)  
 $\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} + \vec{f} = m \cdot \vec{a}$  ( $\vec{F}$  est la force de rappel du ressort).

2. Projection horizontale :  $0 + 0 + F_x + f_x = m \cdot a_x$   
 avec  $\vec{F} = k \overline{AA_0} = k(0 - x)\vec{i} = -kx\vec{i}$  et  $a_x = \ddot{x} \left( = \frac{d^2x}{dt^2} \right)$   
 d'où  $-kx + f_x = m\ddot{x}$  soit  $m\ddot{x} - f_x + kx = 0$ .

**☞** Pour des frottements dits fluides,  $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$  ( $\lambda > 0$ ) donc,  $f_x = -\lambda\dot{x}$  et l'équation serait :  $m\ddot{x} + \lambda\dot{x} + kx = 0$ .

3. En l'absence de frottement ( $f_x = 0$ ), l'équation est  $m\ddot{x} + kx = 0$  (1)

$$x = x_m \cos\left(2\pi \frac{t}{T_0} + \varphi_0\right) \Rightarrow \dot{x} = \frac{-2\pi x_m}{T_0} \sin\left(2\pi \frac{t}{T_0} + \varphi_0\right) \Rightarrow$$

$$\ddot{x} = -\frac{4\pi^2}{T_0^2} x_m \cos\left(2\pi \frac{t}{T_0} + \varphi_0\right) \text{ et en remplaçant dans (1) :}$$

$$\left(-\frac{4\pi^2 m}{T_0^2} + k\right) x_m \cos\left(2\pi \frac{t}{T_0} + \varphi_0\right) = 0 \text{ soit } -\frac{4\pi^2 m}{T_0^2} + k = 0$$

donc  $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \approx 0,31 \text{ s}$ . Ainsi, la solution proposée convient.

$$4. \begin{cases} x(t=0) = x_0 > 0 \\ \dot{x}(t=0) = v_x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_m \cos \varphi_0 = x_0 \\ -\frac{2\pi x_m}{T_0} \sin \varphi_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_m = \frac{x_0}{\cos \varphi_0} \\ \sin \varphi_0 = 0 \end{cases}$$

$$\sin \varphi_0 = 0 \text{ et } \varphi_0 \in ]-\pi; +\pi] \Rightarrow \begin{cases} \varphi_0 = 0 \Rightarrow x_m = x_0 > 0 \\ \text{ou} \\ \varphi_0 = \pi \Rightarrow x_m = -x_0 < 0 \text{ incorrecte} \end{cases}$$

On retient donc :  $x_m = x_0 = 0,03 \text{ m}$  et  $\varphi_0 = 0 \text{ rad}$

$$\text{donc } x(t) = x_0 \cos\left(2\pi \frac{t}{T_0}\right) = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \cdot t\right)$$

$$5. \bullet v = |\dot{x}| = \left| -\sqrt{\frac{k}{m}} x_0 \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) \right| \text{ de valeur maximale } v_{\max} = \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot x_0$$

(lorsque  $\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) = \pm 1$ ).

$$\text{A.N. : } v_{\max} = 0,60 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

$$\bullet a = |\ddot{x}| = \left| -\frac{k}{m} x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) \right| \text{ de valeur maximale } a_{\max} = \frac{k}{m} \cdot x_0.$$

$$\text{A.N. : } a_{\max} = 12 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} v_x = \dot{x} \\ a_x = \ddot{x} \end{array} \right. \quad \text{mais} \quad \left\{ \begin{array}{l} v = |v_x| = |\dot{x}| \\ a = |a_x| = |\ddot{x}| \end{array} \right.$$

6. D'après le 2. :  $F_x = m \cdot a_x$ , d'où  $F = m \cdot a$  (en valeur absolue) et  $F_{\max} = m \cdot a_{\max} = k \cdot x_0$ .

$$\text{A.N. : } F_{\max} = 1,2 \text{ N}.$$

$$6 \quad x(t) = x_m \cos\left(2\pi \frac{t}{T_0} + \varphi_0\right) = x_m \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \varphi_0\right)$$

$$\dot{x}(t) = -x_m \sqrt{\frac{k}{m}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \varphi_0\right)$$

a.

$$\begin{cases} x(t=0) = x_0 = -0,03 < 0 \\ \dot{x}(t=0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_m \cos \varphi_0 = x_0 < 0 \\ -x_m \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \varphi_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_m \cos \varphi_0 = x_0 & (1) \\ \sin \varphi_0 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow \begin{cases} \varphi_0 = 0 & \text{et alors (1)} \Rightarrow x_m = x_0 < 0 \text{ impossible car } x_m > 0 \\ \text{ou} \\ \varphi_0 = \pi & \text{et alors (1)} \Rightarrow -x_m = x_0 < 0 \Rightarrow x_m = -x_0 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_m = -x_0 \\ \varphi_0 = \pi \end{cases} \Rightarrow x(t) = -x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \pi\right) \text{ or } \cos(\alpha + \pi) = -\cos \alpha$$

$$\text{soit } x(t) = x_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) = -0,03 \cos(20 t).$$

$$\text{b. } \begin{cases} x(t=0) = 0 \\ \dot{x}(t=0) = \dot{x}_0 = 1,0 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_m \cos \varphi_0 = 0 \\ -x_m \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \varphi_0 = \dot{x}_0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos \varphi_0 = 0 & (1) \\ x_m \sin \varphi_0 = -\sqrt{\frac{m}{k}} \dot{x}_0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Rightarrow \begin{cases} \varphi_0 = \frac{\pi}{2} \text{ et } (2) \Rightarrow x_m = -\sqrt{\frac{m}{k}} \dot{x}_0 < 0 \text{ impossible car } x_m > 0 \\ \text{ou} \\ \varphi_0 = -\frac{\pi}{2} \text{ et } (2) \Rightarrow x_m = \sqrt{\frac{m}{k}} \dot{x}_0 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_m = \sqrt{\frac{m}{k}} \dot{x}_0 \\ \varphi_0 = -\frac{\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow x(t) = +\sqrt{\frac{m}{k}} \dot{x}_0 \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\text{or } \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \sin \alpha$$

$$\text{soit : } x(t) = \sqrt{\frac{m}{k}} \dot{x}_0 \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) = 0,05 \sin(20 t)$$

c.

$$\begin{cases} x(t=0) = +0,03 \\ \dot{x}(t=0) = -0,8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_m \cos \varphi_0 = +0,03 \\ -x_m \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \varphi_0 = -0,8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_m \cos \varphi_0 = +0,03 \quad (1) \\ x_m \sin \varphi_0 = 0,04 \quad (2) \end{cases}$$

$$\text{car } \sqrt{\frac{k}{m}} = 0,05, \text{ d'où } (1)^2 + (2)^2 \Rightarrow x_m^2 (\cos^2 \varphi_0 + \sin^2 \varphi_0) = 0,03^2 + 0,04^2 \\ = 2,5 \times 10^{-3}$$

$$\text{soit } x_m (> 0) = \sqrt{2,5 \times 10^{-3}} = 0,05 \text{ m.}$$

$$\text{Or : } \begin{cases} \cos \varphi_0 > 0 \\ \sin \varphi_0 > 0 \\ \varphi_0 \in ]-\pi ; +\pi [ \end{cases} \quad \text{donc } \varphi_0 \in ]0 ; \frac{\pi}{2} [$$

$$\text{Enfin } \frac{(2)}{(1)} \Rightarrow \tan \varphi_0 = \frac{4}{3} \Rightarrow \varphi_0 \approx 0,93 \text{ rad si } \varphi_0 \in ]0 ; \frac{\pi}{2} [$$

(avec la calculatrice)

$$\begin{cases} x_m = 0,05 \text{ m} \\ \varphi_0 \approx 0,93 \text{ rad} \end{cases} \quad x(t) \approx 0,05 \cos(20 t + 0,93)$$

Soit R l'extrémité droite du ressort. La vitesse du système solide-ressort augmente entre les instants  $t = 0$  (ressort comprimé) et  $t = \frac{T_0}{4}$  (passage par la position d'équilibre), puis diminue juste ensuite.

À  $t = \frac{T_0}{4}$ , la masse a la même vitesse que le point R, mais, n'étant soumise à aucun frottement, elle va continuer à cette vitesse  $v_{\max}$  (mouvement uniforme). R « ralentissant », il n'y a plus contact.

D'où la durée du contact :  $\frac{T_0}{4} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{k}} \approx 0,38 \text{ s}$ .

•  $\vec{f} = \Sigma \vec{f}$  (1 ressort) =  $n \times \vec{f}$  (1 ressort) =  $nk(x-l)\vec{u}$   
 ( $x-l$ ) est l'allongement par rapport à l'équilibre

$$\bullet \vec{F} = K(x-L)\vec{u}$$

$$\bullet \vec{f} = \vec{F} \Rightarrow nk(x-l) = K(x-L) \Rightarrow x(nk-K) + (KL-nkl) = 0$$

Cette relation est vérifiée pour tout  $x$  si, et seulement si :

$$\begin{cases} nk - K = 0 \\ KL - nkl = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} K = n \cdot k \\ L = l \end{cases}$$

On dit que  $n$  ressorts identiques en parallèle sont équivalents à un seul de même longueur à vide et de constante de raideur  $k_{\text{eq}} = n \cdot k$ .

1. Première loi de Newton :  $\vec{P} + \vec{F} = \vec{0}$ ,  
 d'où en projection verticale :  $+mg + F_x = 0$ .

$$\text{Or } \vec{F} = k \overline{AA_0},$$

$$\text{d'où } F_x = k[x(A_0) - x(A')] = k(-a-0) = -ka$$

$$\text{donc : } \quad \quad \quad mg = ka \quad (1)$$

2. Deuxième loi de Newton :

$$\vec{P} + \vec{F} = m\vec{a}, \text{ d'où en projection verticale : } +mg + F_x = ma_x = m\ddot{x}.$$

$$\text{Or } \vec{F} = k \overline{AA_0}, \text{ d'où } F_x = k[x(A_0) - x(A)] = k(-a-x) = -ka - kx$$

$$\text{donc } mg - ka - kx = m\ddot{x} \text{ soit } -kx = m\ddot{x} \text{ en utilisant (1).}$$

$$\text{Il reste } \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \text{ soit } \alpha = \frac{k}{m}.$$

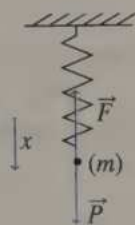
$$3. T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \text{ donc } x(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi_0\right)$$

$$\text{et } \dot{x}(t) = -A\sqrt{\frac{k}{m}} \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi_0\right).$$

$$\text{D'où } \ddot{x}(t) = -A\frac{k}{m} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi_0\right) = -\frac{k}{m}x \text{ donc } \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0.$$

L'équation est vérifiée.

Remarque : On peut aussi calculer l'expression  $\ddot{x} + \frac{k}{m}x$  et aboutir à 0.



$$4. \begin{cases} x(t=0) = d \\ \dot{x}(t=0) = v_x(t=0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A \cos \varphi_0 = d \\ -A \sqrt{\frac{k}{m}} \sin \varphi_0 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{d}{\cos \varphi_0} \\ \sin \varphi_0 = 0 \end{cases}$$

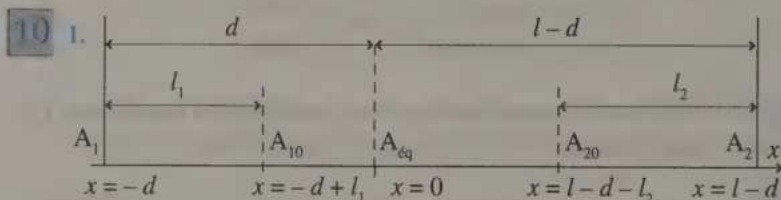
$$\begin{cases} \varphi_0 = 0 \Rightarrow A = d \Rightarrow x(t) = d \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) \\ \text{ou} \\ \varphi_0 = \pi \Rightarrow A = -d \Rightarrow x(t) = -d \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \pi\right) = d \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right) \end{cases}$$

Remarques : •  $\cos(\alpha + \pi) = -\cos \alpha$  (rappel)

• Aucune condition n'est imposée sur  $A$ , contrairement à  $x_m$  qui est l'amplitude, donc qui doit être positive.

•  $x(t) = d \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right)$

5.  $x(t) = 0,04 \cos(20t)$ .



Première loi de Newton (à l'équilibre) :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{0}.$$

En projetant sur  $Ox$ , on obtient :  $0 + 0 + F_{1x} + F_{2x} = 0$ .

$$k_1 (\overline{A_{eq} A_{10}}) + k_2 (\overline{A_{eq} A_{20}}) = 0$$

$$k_1 [x(A_{10}) - x(A_{eq})] + k_2 [x(A_{20}) - x(A_{eq})] = 0$$

$$k_1 [(l_1 - d) - 0] + k_2 [(l - d - l_2) - 0] = 0 \quad (1)$$

2. Deuxième loi de Newton :  $\vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = m \cdot \vec{a}$ .

$$k_1 (\overline{A A_{10}}) + k_2 (\overline{A A_{20}}) = m \cdot \ddot{x}$$

$$k_1 [x(A_{10}) - x(A)] + k_2 [x(A_{20}) - x(A)] = m \cdot \ddot{x}$$

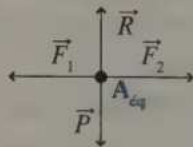
$$k_1 [(l_1 - d) - x] + k_2 [(l - d - l_2) - x] = m \cdot \ddot{x}$$

$$k_1 (l_1 - d) + k_2 (l - d - l_2) - x(k_1 + k_2) = m \cdot \ddot{x}$$

$$= 0 \text{ d'après (1)}$$

D'où :  $\ddot{x} + \frac{(k_1 + k_2)}{m} x = 0$  qui est de la forme :

$$\ddot{x} + \frac{K}{m} x = 0 \quad \text{avec } K = k_1 + k_2.$$



## 15

Phénomène  
de résonance

## I OSCILLATIONS FORCÉES

excitateur de  
période  $T$  réglable  
(ex : moteur, ...)

+

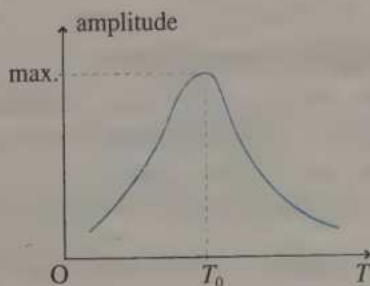
résonateur de  
période propre  $T_0$  fixée  
(ex : pendule, ressort + masse, ...)



oscillations forcées du résonateur  
avec la période  $T$  de l'excitateur

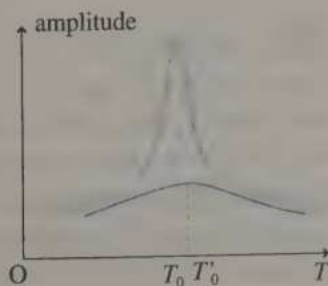
## II PHÉNOMÈNE DE RÉSONANCE

- L'amplitude des oscillations dépend de la période  $T$  de l'excitateur (voir la courbe de résonance en amplitude ci-contre).
- L'amplitude est maximale lorsque  $T \approx T_0$ .



## III INFLUENCE DE L'AMORTISSEMENT

- Amortissement faible :  
résonance aiguë —
- Amortissement élevé :  
résonance floue —
- $T'_0$  est légèrement supérieure à  $T_0$ .



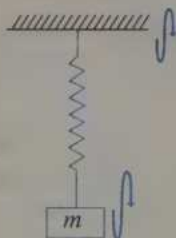
## EXERCICES D'APPLICATION

**1** SISMOGRAPHE

\* (5 min) ► P. 233

Un sismographe (très simplifié) est constitué d'une masse  $m$  suspendue à un ressort très sensible de constante de raideur  $k = 0,4 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ .

Lors d'une secousse sismique de période  $T \approx 1 \text{ s}$ , le sismographe doit réagir avec une amplitude maximale.



1. De quel type d'oscillations s'agit-il ?
2. Quel phénomène se passe-t-il lors d'un tremblement de Terre ? Expliquer.
3. Quelle valeur doit avoir  $m$  ?

**2** EFFONDREMENT DE PONTS

\* (5 min) ► P. 233

En 1850, le pont en pierre enjambant la Maine, à Angers, s'effondra au passage d'une armée marchant au pas.

En 1840, le pont suspendu de Tacoma-Narrows (États-Unis) fut détruit sous l'effet de violentes bourrasques.

1. Expliquer le phénomène dans chaque cas.
2. Proposer une méthode pour y remédier.

**3** LA CERISE DANS LE BOL

\*\* (5 min) ► P. 233

Ursule laisse tomber une cerise initialement posée sur le bord de son bol vide. Il observe des oscillations amorties de pseudo-période  $T'_0 \approx 0,5 \text{ s}$ .

Après cela, il va ranger son bol, la cerise étant toujours dedans.

Quel intervalle de temps doit-il éviter entre chaque pas pour ne pas risquer de faire tomber la cerise hors du bol ?

En déduire la période de la marche à éviter.

## EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

**4** VIBRATIONS DUES À UNE PERCEUSE \* (5 min) ► P. 233

Le père Lachignole utilise sa perceuse pour faire un trou dans son plancher. Le lustre de la voisine d'en dessous risque-t-il d'osciller avec son amplitude maximale sachant qu'on l'assimile à un pendule de longueur 1,0 m ?

**5** MALADE EN VOITURE \*\*\* (10 min) ► P. 234

Données :

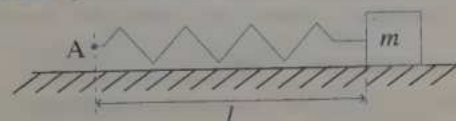
- période du pas (lors d'une marche)  $\approx 0,8$  s ;
- période propre de l'appareil digestif d'un adulte  $\approx 1,0$  s ;
- période propre du cerveau d'un adulte  $\approx 0,50$  s.

Sachant que les amortisseurs d'un véhicule doivent avoir une période propre comprise entre 0,4 et 1,1 s pour amortir (!) au mieux les défauts de la route, expliquer pourquoi l'on essaie de les concevoir avec une période propre de 0,8 s.

**6** ÉQUILIBRAGE DES ROUES \*\*\* (15 min) ► P. 234

Un automobiliste change une roue de son véhicule sans la faire équilibrer par son garagiste (l'équilibrage consiste à placer le centre d'inertie de la roue exactement sur son axe de rotation). Il sent alors son volant vibrer lorsqu'il roule à approximativement  $50 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ .

1. Sachant que le diamètre des roues est de 57 cm, calculer la période propre du volant.
2. Il change cette fois les quatre roues (de diamètre 50 cm). L'une d'entre elles présente le même défaut que précédemment. Quelle sera maintenant sa vitesse de conduite (en  $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$ ) lorsque son volant vibrera ?

**7** COURBE DE RÉSONANCE \*\*\* (10 min) ► P. 234

$$m = 100 \text{ g}$$

$$k = 40,0 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

On enregistre la valeur  $x(t) = l(t) - l_0$  d'un ressort ( $l$  : longueur ;  $l_0$  : longueur à vide) en fonction du temps, l'extrémité A de ce ressort oscillant horizontalement avec une période  $T$  réglable.

1. Représenter succinctement  $x(t)$  pour une valeur de  $T$  fixée. Faire figurer l'amplitude  $x_m$ .
2. Pour différentes valeurs de  $T$ , on trace la courbe correspondante, et on note, chaque fois,  $x_m$ . Ensuite, on représente le graphe  $x_m = f(T)$ . Donner l'allure de ce graphe et le commenter.  
Placer la valeur  $T_0$  de la période propre et la valeur correspondante  $x_m(T_0)$ .
3. Comment cette courbe et ses valeurs particulières évoluent-elles si le support est plus rugueux (donc s'il y a plus de frottements) ?

## EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

### 8 SUR UNE PISTE D'ESSAI

\*\*\* (20 min) ► P. 235

Une voiture roule sur une piste d'essai pour suspension dont le profil est  $z = 0,05 \sin(0,63x)$  ( $z$  est vertical,  $x$  est horizontal, dans le sens de la route,  $x$  et  $z$  sont exprimés en mètre). La masse de la voiture et du pilote est de 1200 kg, chaque roue ayant une masse de 5 kg.

1. Si l'amortissement de la voiture est faible, calculer la valeur de la vitesse « à éviter ». On assimilera chaque amortisseur à un ressort de constante de raideur  $k = 6000 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ .
2. Que devient la situation avec 80 L de carburant en plus, trois passagers de 80 kg à bord et 40 kg de bagages ?

Donnée :  $\rho$  (essence)  $\approx 700 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ .

### 9 FREINAGE ET RÉSONANCE

\*\*\* (30 min) ► P. 236

On arrête le moteur d'un véhicule, lancé à  $v_0 = 72 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ , à  $t = 0 \text{ s}$  et en  $x = 0 \text{ m}$ .

Il parcourt  $d = 200 \text{ m}$  avant de s'immobiliser, la décélération étant supposée uniforme et la trajectoire rectiligne. Une de ses roues, de diamètre  $D = 50 \text{ cm}$ , est mal équilibrée et produit des vibrations.

Autour de quelle abscisse  $X$ , le rétroviseur de période propre  $T_0 = 0,20 \text{ s}$  vibrera-t-il ? (On exprimera  $X$  en fonction des données de l'énoncé.)

## CORRIGÉS

1. Le sol tremble à la période  $T \approx 1$  s, « forçant » la masse à osciller à la même période : il s'agit d'**oscillations forcées**.

2. L'amplitude des oscillations sera maximale à la résonance, c'est-à-dire lorsque  $T \approx T_0$  (période propre du pendule).

$$3. T \approx T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad \text{soit} \quad m = \frac{k \cdot T_0^2}{4\pi^2}.$$

$$\text{A.N. : } m = \frac{0,4 \times (1)^2}{4\pi^2} \approx 1,0 \times 10^{-2} \text{ kg} = \mathbf{10 \text{ g}}.$$

1. Dans les deux cas, la période de l'excitateur (armée et bourrasques), était égale à la période propre du pont (celle que l'on aurait enregistré en mesurant les vibrations de l'ouvrage après l'avoir soumis à un choc violent : chute d'une masse importante sur le pont, par exemple). Les ponts rentrèrent en résonance : l'amplitude de leurs oscillations fut si importante, qu'ils dépassèrent leur limite de rupture.

- 2. • Les armées ne marchent pas au pas lorsqu'elles passent sur des ponts.
- Les ponts suspendus ont la forme d'une aile d'avion inversée, ce qui les « plaque » en position basse en cas de bourrasques.

1.  $T_0 \approx T_0$  (période propre) si l'amortissement n'est pas trop grand. Pour éviter la résonance, donc l'amplitude maximale des oscillations qui ferait sortir la cerise du bol (dramatique !), il faut éviter que la durée  $\Delta t$  entre deux pas soit du même ordre que  $T_0$ , donc :  $\Delta t \neq T_0 \approx T_0' = \mathbf{0,5 \text{ s}}$ . La période de la marche étant constituée de deux pas (le même pied touche le sol), Ursule doit s'imposer :  $T$  (marche)  $\neq 2\Delta t = 2T_0 \approx \mathbf{1 \text{ s}}$ .

L'amplitude maximale est atteinte à la résonance, donc lorsque :  
 $T$  (excitateur) =  $T$  (résonateur) soit lorsque  $T$  (perceuse) =  $T$  (lustre),

$$\text{d'où :} \quad \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

(avec  $\omega$  = vitesse de rotation de la perceuse et  $l$  longueur du pendule).

De cette relation, on déduit :

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}} = \sqrt{\frac{9,8}{1}} \approx 3,1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} = \frac{3,1}{2\pi} \times 60 \approx \mathbf{30 \text{ tr} \cdot \text{min}^{-1}}.$$

Une perceuse tourne beaucoup plus vite (en général de l'ordre de centaines ou milliers de  $\text{tr} \cdot \text{min}^{-1}$ ).

**L'amplitude maximale ne sera donc pas atteinte.**

5  $T$  (amortisseur)  $\in [0,4 \text{ s} ; 1,1 \text{ s}]$

- Si  $T$  est proche de 0,4 s, donc de 0,5 s, le cerveau entre en résonance, provoquant un « mal de tête ».
- Si  $T$  est proche de 1,1 s, donc de 1,0 s, l'appareil digestif entre en résonance, provoquant un « mal de cœur ».
- Si  $T$  est éloigné (relativement) des deux valeurs précédentes, donc proche de 0,8 s, le corps d'un adulte n'est pas dérangé, puisque c'est une période naturelle : celle du pas.

Les enfants, en pleine croissance, ont des fréquences propres différentes. En général, leur système digestif a une fréquence propre voisine de celle des amortisseurs, provoquant souvent le phénomène de résonance, ce qui peut les rendre malade en voiture.

6 1. Soit  $T$  la période de la roue et  $v$  la vitesse de la voiture, qui est aussi la vitesse d'un point de la circonférence de la roue (s'il ne glisse pas) :

$$v = \frac{\text{périmètre}}{\text{période}} = \frac{2\pi R}{T} = \frac{\pi D}{T}, \text{ soit } T = \frac{\pi D}{v}.$$

Lorsque le volant vibre, il y a résonance :

$$T(\text{excitateur}) = T(\text{résonateur}), \text{ d'où } T(\text{roue}) = T(\text{volant}), \text{ soit } \frac{\pi D}{v} = T_0$$

et donc  $T_0 = \frac{\pi D}{v}$ .

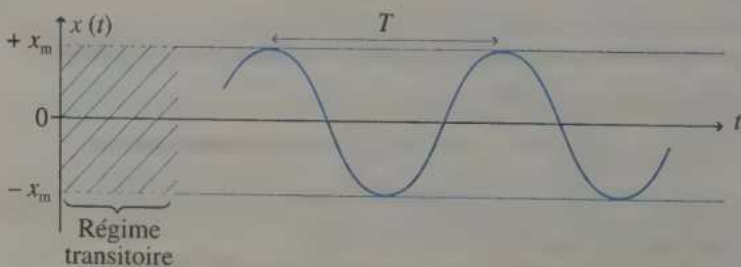
$$\text{A.N. : } T_0 = \frac{\pi \times 0,57}{\left(\frac{50}{3,6}\right)} = 0,13 \text{ s}$$

$$2. \text{ De même : } T_0 = \frac{\pi D'}{v'} \text{ donc } v' = \frac{\pi D'}{T_0} = \frac{\pi D'}{\frac{\pi D}{v}}, \text{ soit } v' = v \frac{D'}{D}.$$

$$\text{A.N. : } v' = 50 \times \frac{0,50}{0,57} \approx 44 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}.$$

( $v$  étant en  $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$ ,  $v'$  l'est aussi).

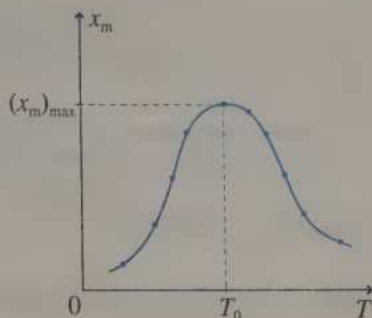
7 1.



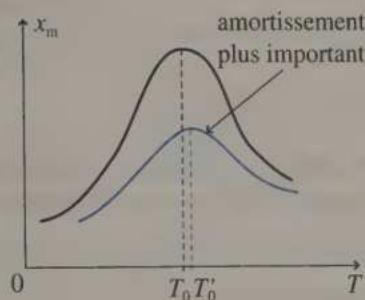
2.  $x_m$  est maximale lorsque  $T = T_0$  :  
 $x_m(T_0) = (x_m)_{\max}$  ; c'est le phénomène  
 de résonance. La courbe est appelée  
 courbe de résonance en amplitude  
 d'allongement.

$$T_0 \text{ (ou période propre)} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

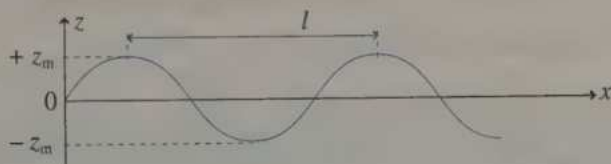
$$\text{A.N. : } T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{0,1}{40}} = 0,31 \text{ s.}$$



3. La résonance se produirait à une  
 période légèrement plus élevée et  
 l'amplitude maximale serait moins  
 élevée (résonance plus floue, ou  
 moins aiguë).



8 1. La route a le profil suivant :



$$\text{avec } z = z_m \sin\left(2\pi \frac{x}{l}\right), \text{ donc } \frac{2\pi}{l} = 0,63, \text{ soit } l = \frac{2\pi}{0,63}.$$

La période  $T$  qui sépare le passage de la voiture entre deux maxima est sensiblement égale à  $\frac{l}{v}$  (on assimile  $l$  à la longueur de la route entre deux maxima consécutifs car  $z_m = 5 \text{ cm}$  est faible).

$$\text{La période propre de la voiture est } T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m_{\text{totale}}}{k_{\text{total}}}}$$

avec  $m_{\text{totale}} = m_{\text{voiture}} - 4m_{\text{roues}}$  (les 4 roues n'oscillent pas !)

et  $k_{\text{total}} = 4k$  (4 ressorts en parallèle).

Enfin, à la résonance :

$$T = T_0, \text{ soit } \frac{l}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{m_v - 4m_r}{4k}} \text{ d'où : } v = \frac{2}{0,63} \times \sqrt{\frac{k}{m_v - 4m_r}}.$$

$$\text{A.N. : } v = \frac{2}{0,63} \sqrt{\frac{6\,000}{1\,200 - 4 \times 5}} \approx 7,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \approx \mathbf{26 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}}.$$

$$\begin{aligned} 2. \text{ De même, avec } m_{\text{totale}} &= m_v - 4m_r + \rho \times V + m_{\text{bagages}} + 3m_{\text{passagers}} \\ &= 1\,200 - 4 \times 5 + 700 \times 80 \times 10^{-3} + 40 + 3 \times 80 \\ &= 1516 \text{ kg,} \end{aligned}$$

on obtient :  $v \approx \mathbf{23 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}}$ .

9 D'une part, comme à l'exercice 6 :

$$T_0 = T_{\text{voiture}} = \frac{\pi D}{v_{x,r}} \left\{ \begin{array}{l} D : \text{diamètre des roues} \\ v_{x,r} : \text{vitesse de la voiture à la résonance} \end{array} \right.$$

$$\text{soit : } v_{x,r} = \frac{\pi \cdot D}{T_0} \quad (1)$$

D'autre part, la voiture a un mouvement rectiligne uniformément décéléré, avec  $v_x(t=0) = v_0$  et  $x(t=0) = 0$  m.

$$a_x = \ddot{x} = \text{cte} < 0, \text{ donc } v_x = \dot{x} = a_x t + v_0, \text{ d'où } x = a_x \frac{t^2}{2} + v_0 t + x_0 = a_x \frac{t^2}{2} + v_0 t.$$

Éliminons  $t$  entre  $v_x$  et  $x$  :  $t = \frac{v_x - v_0}{a_x}$ , d'où :

$$x = \frac{a_x}{2} \left( \frac{v_x - v_0}{a_x} \right)^2 + v_0 \left( \frac{v_x - v_0}{a_x} \right) = \frac{v_x - v_0}{2a_x} (v_x + v_0) \quad (2)$$

Lorsque le véhicule s'arrête, donc pour  $x = d$  et  $v_x = 0$ , on a :

$$(2) \text{ implique } d = \frac{0 - v_0}{2a_x} (0 + v_0) \text{ soit } a_x = -\frac{v_0^2}{2d},$$

d'où (2) devient :

$$x = \frac{v_x - v_0}{-\frac{v_0^2}{2d}} (v_x + v_0) = \frac{d(v_0 - v_x)(v_x + v_0)}{v_0^2} = \frac{d(v_0^2 - v_x^2)}{v_0^2} = d \left( 1 - \frac{v_x^2}{v_0^2} \right)$$

et, avec (1), on obtient :

$$X = x(v_x = v_{x,r}) = d \left[ 1 - \left( \frac{\pi D}{T_0 \cdot v_0} \right)^2 \right]$$

$$\text{A.N. : } X = 200 \left[ 1 - \left( \frac{\pi \times 0,50}{0,2 \times \left( \frac{72}{3,6} \right)} \right)^2 \right] \approx \mathbf{170 \text{ m.}}$$

## 16

## Aspects énergétiques

Le travail et l'énergie s'expriment en joule (J).

## I TRAVAIL D'UNE FORCE

## 1. Travail élémentaire d'une force

$$\bullet \delta W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

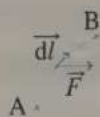
$d\vec{l}$  est le déplacement élémentaire du point d'application de  $\vec{F}$  (« infiniment petit »).



## 2. Travail d'une force entre A et B

$$\bullet W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \int_A^B \delta W(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{l}$$

A et B sont les points d'application de  $\vec{F}$ .



## 3. Travail moteur, résistant ou nul

Travail	$W_{A \rightarrow B}(\vec{F})$	$\vec{F}$	si $\vec{F} = \vec{c}t\acute{e}$
moteur	$> 0$	favorise le déplacement	$ (\vec{F}, \overline{AB})  < \frac{\pi}{2}$
nul	$= 0$	est sans influence sur le déplacement	$ (\vec{F}, \overline{AB})  = \frac{\pi}{2}$
résistant	$< 0$	s'oppose au déplacement	$ (\vec{F}, \overline{AB})  > \frac{\pi}{2}$

**4. Travail d'une force constante**

Si  $\vec{F} = \text{cte}$  entre A et B, alors :

$$\bullet W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \overline{AB} = F \cdot AB \cdot \cos(\vec{F}, \overline{AB})$$

**5. Travail du poids (dans un champ de pesanteur uniforme)**

$$\bullet W_{A \rightarrow B}(\vec{P}) = m \cdot g (z_A - z_B)$$

A et B sont les positions de G (centre d'inertie).

L'axe Oz est vertical ascendant (si Oz est descendant, prendre l'opposé).

**6. Travail de la force de rappel d'un ressort (une extrémité est fixe)**

$$\bullet W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \frac{k}{2} (x_A^2 - x_B^2) = -W_{A \rightarrow B}(\vec{T})$$

$x$  est l'allongement du ressort ( $x = 0$  au repos).

A et B sont les positions de l'extrémité mobile du ressort.

$\vec{F}$  (force de rappel) =  $-\vec{T}$  (tension du ressort) ; cf. § I 2., chapitre 14.

**II ÉNERGIES****1. Énergie cinétique**

$$\bullet \text{Énergie cinétique d'un solide en translation : } E_C = \frac{1}{2} m \cdot v_G^2$$

$$\bullet \text{Énergie cinétique d'une masse ponctuelle : } E_C = \frac{1}{2} m \cdot v^2$$

**2. Énergie potentielle de pesanteur**

$$\bullet E_{pp} = m \cdot g [z_G - z_G(\text{réf})] \text{ pour le système \{masse + Terre\}}$$

Le champ de pesanteur est uniforme.

L'axe Oz est vertical ascendant (si Oz est descendant, prendre l'opposé).

Pour une masse ponctuelle, l'indice « G » est inutile.

$$\bullet E_{pp}(B) - E_{pp}(A) = -W_{A \rightarrow B}(\vec{P})$$

$\vec{P}$  est le poids.

**3. Énergie potentielle élastique**

$$\bullet E_{pe} = \frac{1}{2} k \cdot x^2 \text{ pour le système \{ressort\}.}$$

$x$  est l'allongement du ressort ( $x = 0$  au repos).

En fait,  $E_{pe} = \frac{1}{2} k \cdot x^2 + \text{cte}$ , mais on pose  $\text{cte} = 0$  comme le préconise le nouveau programme.

$$\bullet E_{PE}(B) - E_{PE}(A) = -W_{A \rightarrow B}(\vec{F})$$

$\vec{F}$  est la force de rappel du ressort.

#### 4. Énergie mécanique

$$\bullet E_M = E_C + \Sigma E_p \quad (\Sigma E_p \text{ est la somme des énergies potentielles du système}).$$

### APPLICATION AU PROJECTILE ET AU DISPOSITIF SOLIDE-RESSORT

#### 1. Énergie mécanique

• Cas d'un projectile dans un champ de pesanteur uniforme :

$$E_M = E_C + E_{PP} \text{ pour le système \{masse + Terre\}.}$$

• Cas d'un dispositif solide-ressort horizontal :

$$E_M = E_C + E_{PE} \text{ pour le système \{masse + ressort\}.}$$

Le cas du ressort non horizontal est hors programme.

#### 2. Conservation ou non de l'énergie mécanique

• Cas général :  $E_M(B) - E_M(A) = \Sigma W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{ext})$

$\vec{F}_{ext}$  désigne des forces extérieures au système à l'exception :

– du poids, dans le cas d'un projectile ;

– de la tension, dans le cas d'un ressort.

En général  $\Sigma W_{A \rightarrow B}(\vec{F}_{ext})$  désigne le travail des forces de frottements.

• Cas particulier d'une absence de frottement et de force extérieure :

$$E_M(B) = E_M(A) \text{ ou } \Delta E_M = 0 \text{ ou } \Delta E_C = -\Delta E_p$$

donc le système est isolé et :

$$E_M = cte = E_{C \min} + E_{P \max} = E_{C \max} + E_{P \min}$$

Mécanique des solides

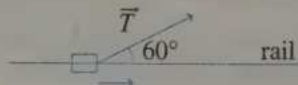
Pour tous les exercices, sauf indication contraire, on prendra  $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

## EXERCICES D'APPLICATION

### 1 CALCULS DE TRAVAUX (1) \* (10 min) ► P. 246

1. *SANS CALCULATRICE*, calculer le travail :

- du poids d'une masse de 1,0 kg qui monte d'une hauteur de 10 cm ;
  - de la tension d'un ressort de raideur  $k = 200 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$  qui passe de la position de repos à un allongement de 10 cm ;
  - d'une force de frottement de 0,5 N qui parcourt une distance de 1,0 m dans un sens, puis dans l'autre ;
  - de la tension d'un câble d'intensité 2,0 N qui tire sur 1,0 m une masse en faisant un angle de  $60^\circ$  avec la trajectoire (cf. schéma) ;
  - de la tension du fil d'un pendule, de longueur 2,0 m, dont l'élongation angulaire varie de  $\theta = 0,0^\circ$  (position d'équilibre) à  $\theta = 60^\circ$ .
2. Préciser si ces travaux sont moteurs, résistants ou nuls.



### 2 CHUTE LIBRE VERTICALE \* (15 min) ► P. 246

Une masse ponctuelle ( $m = 200 \text{ g}$ ) est envoyée vers le haut avec une vitesse  $v_0 = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

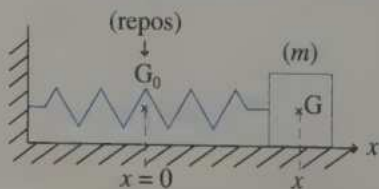
En l'absence de frottement, calculer (*SANS CALCULATRICE*) :

- la hauteur dont elle est montée ;
- sa vitesse lorsqu'elle repasse par le point de lancement ;
- sa vitesse à  $a$  mètres en dessous du point de lancement.

Données :  $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  ;  $a = 15 \text{ m}$ .

### 3 SYSTÈME SOLIDE-RESSORT \* (10 min) ► P. 247

Le système masse-ressort horizontal ci-contre, oscille sans frottement. Initialement, la masse  $m$  a été déplacée de 3,00 cm vers la gauche, de sa position au repos, et lancée avec une vitesse de  $0,50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  vers la droite.



Données :  $k = 18,0 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$  ;  $m = 150 \text{ g}$ .

1. Exprimer l'énergie mécanique du système solide-ressort en fonction de  $m$ ,  $k$ ,  $x$  (repérée par rapport à la position au repos) et  $v$  (vitesse).
2. Que peut-on dire de  $E_M$  ?
3. En déduire l'amplitude  $x_m$  des oscillations, puis l'amplitude  $v_m$  de la vitesse.

#### 4 BILLE EN CHUTE LIBRE

\* (15 min) ► P. 247

Une bille de masse  $m = 50$  g est lâchée sans vitesse initiale ( $v_i = 0$ ) d'une hauteur  $h = 20$  m par rapport au sol.

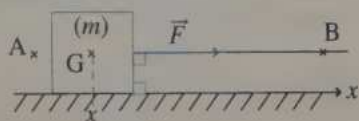
1. Calculer sa vitesse lorsqu'elle arrive au sol en l'absence de frottements.
2. La vitesse mesurée au niveau du sol est  $v_f = 16,1$  m · s<sup>-1</sup>.

En déduire le travail des forces de frottements, puis estimer la valeur de la force de frottement en supposant celle-ci constante.

#### 5 CALCULS DE TRAVAUX (2)

\*\* (15 min) ► P. 248

Une tige rigide, de masse négligeable, déplace une masse  $m$  de centre d'inertie  $G$ , le long d'un axe horizontal.



$G$  est repéré par son abscisse  $x$  et se déplace de  $A$  ( $x = 0$ ) à  $B$  ( $x = d$ ).

1. Calculer le travail de  $A$  à  $B$ , du poids  $\vec{P}$ , de la force de traction  $\vec{F}$  d'intensité constante et de la réaction  $\vec{R}$  du sol.
2. Calculer le travail de la force de frottements  $\vec{f}$  dans les cas suivants (sans utiliser le théorème de l'énergie mécanique) :

- a.  $f = \text{cte} = 2$  N ;
- b. le mouvement est uniforme ;
- c.  $f$  dépend de l'état de surface qui est variable :

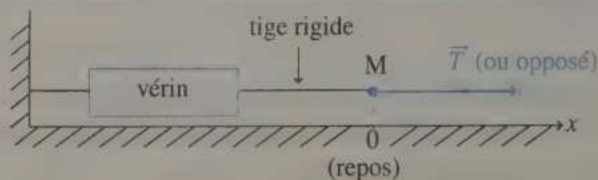
$$f = ax + b \text{ avec } a = 0,1 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1} \text{ et } b = 0,2 \text{ N.}$$

Données :  $g = 9,8$  m · s<sup>-2</sup> ;  $d = 5,0$  m ;  $m = 2,5$  kg ;  $F = 2,7$  N.

## EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

## 6 TRAVAIL D'UN VÉRIN

\*\* (10 min) ► P. 249



La tension du vérin ci-dessus est  $\vec{T} = T(x) \cdot \vec{i}$ , avec  $T(x) = -F \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{2x_m}\right)$  et  $F > 0$

Le point M où s'applique la tension est repéré par son abscisse  $x$  ( $x = 0$  au repos) telle que  $x \in [-x_m; +x_m]$  ( $x_m =$  amplitude).

Exprimer  $W_{A \rightarrow B}(\vec{T})$  en fonction de  $F$ ,  $x_m$ ,  $x_A$  et  $x_B$ .

Application numérique (SANS CALCULATRICE) :  $x_A = 0$  ;  $x_B = x_m = 5,0$  cm ;  $F = \pi \times 10^5$  N.

## 7 PLANEUR

\*\* (30 min) ► P. 249

Un planeur et son pilote (masse totale :  $m = 310$  kg) volent à vitesse constante ( $v_0 = 110$  km · h<sup>-1</sup>) en air calme.

1. Calculer le travail  $W_0$  des forces de frottements lorsque le planeur descend de 2 200 m d'altitude à 700 m.

2. La finesse du planeur est de 38 (la finesse est le nombre de kilomètre(s) parcouru(s) horizontalement pour une perte d'altitude de 1 km en air calme). Calculer l'intensité de la force de frottements.

On exposera clairement les hypothèses faites et les raisons de leurs choix.

3. Dans une « pompe » (courant ascendant qui permet au planeur de prendre de l'altitude), le planeur monte de 700 m à 2 200 m d'altitude.

En supposant que  $W(\vec{f}) = W_0$ , estimer le travail  $W_a$  fourni par la force des courants ascendants au système (planeur + pilote + Terre).

## 8 GRAPHES ÉNERGÉTIQUES (1)

\*\* (25 min) ► P. 250

Un dispositif solide-ressort horizontal est caractérisé par la masse  $m$  du solide et la constante de raideur  $k$  du ressort.

La position du centre d'inertie de la masse est repérée par son abscisse  $x$  ( $x = 0$  au repos) telle que  $x \in [-x_m; +x_m]$  ( $x_m =$  amplitude).

Les frottements sont supposés inexistantes.

1. a. Exprimer l'énergie potentielle élastique  $E_{PE}$  en fonction de  $k$  et  $x$ , puis représenter  $E_{PE}(x)$  succinctement.

b. Exprimer l'énergie mécanique  $E_M$  en fonction de  $k$  et  $x_m$ , puis représenter  $E_M(x)$  sur le graphe précédent.

c. Exprimer l'énergie cinétique  $E_C$  en fonction de  $m$  et  $\dot{x}$ .

Peut-on représenter facilement  $E_C(x)$  ?

Proposer alors une méthode pour lire  $E_C(x)$  sur le graphe précédent.

2. On suppose que  $x(t) = x_m \cos\left(2\pi \frac{t}{T_0}\right)$  (donc  $\varphi_0$ , la phase à l'origine, est nulle).

a. Donner la formule de  $T_0$  en fonction de  $k$  et  $m$ . Comment appelle-t-on  $T_0$  ?

b. Exprimer  $x(t)$  et  $\dot{x}(t)$  en fonction de  $x_m$ ,  $k$ ,  $m$  et  $t$ .

c. En déduire  $E_{PE}(t)$ ,  $E_C(t)$ ,  $E_M(t)$  et les représenter (succinctement) sur trois graphes distincts.

d. Sur le graphe de  $E_{PE}(t)$ , indiquer comment lire  $E_C(t)$  et  $E_M(t)$ .

## 9 GRAPHES ÉNERGÉTIQUES (2)

\*\*\* (25 min) ► P. 251

À  $t = 0$  s, le centre d'inertie  $G$  d'une bille de masse  $m$  est en  $z = h > 0$ , avec une vitesse initiale nulle. L'axe  $Oz$  est vertical ascendant,  $z$  étant la cote de  $G$ . Ensuite, la bille est en chute libre (dans le vide par exemple).

1. a. Exprimer l'énergie potentielle de pesanteur  $E_{pp}$  ( $z_{réf} = 0$ ) en fonction de  $m$ ,  $g$  et  $z$ , puis représenter succinctement  $E_{pp}(z)$ .

b. Exprimer l'énergie mécanique  $E_M$  en fonction de  $m$ ,  $g$  et  $h$ , puis représenter  $E_M(z)$  succinctement sur le graphe précédent.

c. Exprimer l'énergie cinétique  $E_C$  en fonction de  $m$  et  $\dot{z}$ .

Peut-on représenter facilement  $E_C(z)$  ?

Proposer alors une méthode pour lire  $E_C(z)$  sur le graphe précédent, pour  $z > 0$ .

2. On reprend  $z(t) = -g \frac{t^2}{2} + h$  (chapitre 11).

a. Exprimer  $E_{pp}(t)$ ,  $E_M(t)$  et  $E_C(t)$  en fonction de  $g$ ,  $m$ ,  $h$  et  $t$ , puis représenter succinctement ces trois graphes.

b. Sur le graphe de  $E_{pp}(t)$ , indiquer comment lire  $E_C(t)$  et  $E_M(t)$ , pour

$t \leq \sqrt{\frac{2h}{g}} = \tau$  (instant auquel  $z = 0$ ).

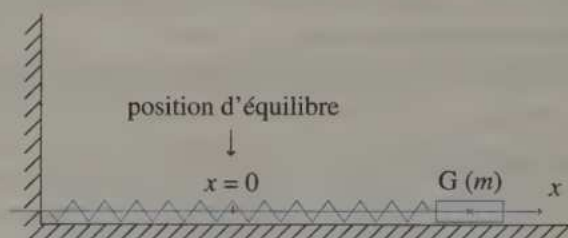
## EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

**10** ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE D'UN OSCILLATEUR \*\* (30 min) ► P. 252

Un système solide-ressort oscille rectilignement et horizontalement.

Le ressort a une masse négligeable et une constante de raideur  $k$ .

La masse  $m$  est repérée par l'abscisse  $x$  de son centre d'inertie  $G$ ,  $x$  étant nul au repos (en  $G_0$ ).



1. Les frottements sont négligés.

a. Exprimer l'énergie mécanique  $E_M$  du système {masse + ressort} en fonction de  $x$ ,  $\dot{x}$ ,  $m$  et  $k$ .

b. Comment  $E_M$  varie-t-elle avec  $t$  ?

c. Calculer  $\frac{dE_M}{dt}$  et retrouver l'équation différentielle régissant ce mouvement.

2. Les frottements ne sont pas négligés et on suppose que la masse est ponctuelle.

a. L'expression de  $E_M$  diffère-t-elle de celle du 1.a. ?

b. Comment  $E_M$  varie-t-elle avec  $t$  ?

c. Exprimer la variation de  $E_M$  entre  $G_0$  et  $G$  en utilisant le théorème de l'énergie mécanique (on appelle  $\vec{f}$  la force de frottement).

d. Montrer que le travail élémentaire de  $\vec{f}$  est :  $dW(\vec{f}) = +f_x \cdot dx$ .

e. Calculer  $\frac{dE_M}{dt}$  et retrouver l'équation différentielle régissant ce mouvement.

On admettra que :  $\frac{d}{dt} \left( W_{G_0 \rightarrow G}(\vec{f}) \right) = \frac{dW(\vec{f})}{dt}$ .

**11** PENDULE SIMPLE

\*\*\* (30 min) ► P. 253

Un pendule simple, constitué d'une masse  $m = 200 \text{ g}$  et d'un fil de longueur  $l = 0,60 \text{ m}$ , oscille dans un plan vertical.

La position  $G$  de la masse ponctuelle est repérée par l'angle  $\theta$  (cf. schéma).

On néglige les frottements. On admettra que pour le système {pendule + support + Terre}, l'énergie mécanique est  $E_M = E_C + E_{pp}$ .

On choisit comme référence de l'énergie potentielle de pesanteur ( $E_{pp}$ ) l'altitude de  $G_0$ .

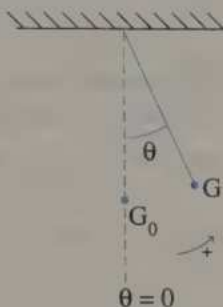
1. Montrer que  $E_{pp} = m \cdot g \cdot l (1 - \cos \theta)$ .

2. Calculer l'amplitude des élongations et de la vitesse de  $G$  si le pendule est envoyé de la position  $\theta_i = -30^\circ$  avec une vitesse  $v_i = 1,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$  dans le sens positif.

3. a. Exprimer  $E_M$  en fonction de  $m$ ,  $l$ ,  $g$ ,  $\theta$  et  $\dot{\theta}$ .

b. Retrouver l'équation différentielle régissant le mouvement du pendule  $l\ddot{\theta} + g \sin \theta = 0$  en partant du calcul de  $\frac{dE_M}{dt}$ .

c. Simplifier cette expression dans le cas où  $\theta$  est faible.

 $\theta = 0$ **12** CHUTE VERTICALE AVEC FROTTEMENT

\*\*\* (30 min) ► P. 254

Une masse ponctuelle  $m = 200 \text{ g}$  est lancée vers le haut avec une vitesse  $v_0 = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

En supposant la force de frottement verticale, d'intensité constante  $f = 0,50 \text{ N}$ , calculer (SANS CALCULATRICE) :

- la hauteur dont elle est montée ;
- sa vitesse quand elle repasse par le point de lancement.

Données :  $g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$  ;  $\sqrt{\frac{3}{5}} \approx 0,77$ .

## CORRIGÉS

1. a.  $W(\vec{P}) = m \cdot g (z_i - z_f) = -m \cdot g \cdot h$  où  $z_i$  et  $z_f$  sont respectivement les hauteurs initiale et finale.

A.N. :  $W(\vec{P}) = -1 \times 9,8 \times 0,1 \approx -0,98 \text{ J}$

b.  $W(\vec{T}) = \frac{1}{2} k (x_f^2 - x_i^2) = \frac{1}{2} k \cdot l^2$  (car  $x_f = l$  et  $x_i = 0$ )

$W(\vec{T}) = \frac{k}{2} l^2$  A.N. :  $W(\vec{T}) = \frac{200}{2} \times (0,1)^2 = 1,0 \text{ J}$

c.  $W(\vec{f}) = W_{A \rightarrow B}(\vec{f}) + W_{B \rightarrow A}(\vec{f})$   
 $= \vec{f} \cdot \vec{AB} + \vec{f}' \cdot \vec{BA}$   
 $= \vec{f} \cdot \vec{AB} + (-\vec{f}) \cdot (-\vec{AB})$   
 $= 2\vec{f} \cdot \vec{AB}$

$= 2f \times AB \cdot \cos(\vec{f}, \vec{AB})$  avec  $(\vec{f}, \vec{AB}) = \pi$

$W(\vec{f}) = -2f \cdot AB$

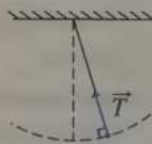
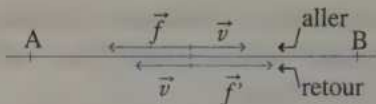
A.N. :  $W(\vec{f}) = -2 \times 0,5 \times 1,0 = -1,0 \text{ J}$

d.  $W(\vec{T}) = \vec{T} \cdot \vec{AB}$  (car  $\vec{T}$  est un vecteur constant)

$W(\vec{T}) = T \cdot AB \cos(\vec{T}, \vec{AB})$

A.N. :  $W(\vec{T}) = 2 \times 1,0 \times \cos 60^\circ = 1,0 \text{ J}$

e.  $\vec{T}$  est orthogonal à la trajectoire circulaire, donc  $W(\vec{T}) = 0 \text{ (J)}$



2. • Travaux moteurs ( $> 0$ ) : questions b. et d.

• Travaux résistants ( $< 0$ ) : question a. et c.

• Travaux nuls ( $= 0$ ) : question e.

2 Soit A le point de départ et B un point quelconque de la trajectoire. En l'absence de frottement, le théorème de l'énergie mécanique donne :

$E_M(B) - E_M(A) = 0$  soit  $E_c(B) + E_{pp}(B) = E_c(A) + E_{pp}(A)$

donc  $\frac{1}{2} m \cdot v_B^2 + m \cdot g (z_B - z_{ref}) = \frac{1}{2} m \cdot v_A^2 + m \cdot g (z_A - z_{ref})$

d'où  $\frac{v_B^2}{2} + g \cdot z_B = \frac{v_A^2}{2} + g \cdot z_A$  ou encore  $v_B^2 - v_A^2 = 2g(z_A - z_B)$  (1)

a. Si B est le point d'altitude maximale, alors  $v_B = 0$  et, d'après (1) :

$$z_B - z_A = \frac{v_A^2}{2g}$$

A.N. :  $z_B - z_A = \frac{10^2}{2 \times 10} = 5,0 \text{ m}$

b. Si  $z_B = z_A$ , alors (1) devient :  $v_B = v_A = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

c. Si  $z_B = z_A - a$ , alors (1) devient :  $v_B^2 = v_A^2 + 2g(z_A - z_B) = v_A^2 + g \cdot a$

d'où :  $v_B = \sqrt{v_A^2 + 2g \cdot a}$

A.N. :  $v_B = \sqrt{10^2 + 20 \times 15} \approx 20 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

**3** 1.  $E_M = E_C + E_{PP} = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2$

2.  $E_M = \text{cte}$  (en l'absence de frottement)

3.  $E_M = \text{cte} = E_M$  (lorsque  $x = \pm x_m$ ) =  $E_M$  (lorsque  $v = v_m$ ) =  $E_M$  ( $t = 0$ )

soit  $\frac{1}{2} m \times 0^2 + \frac{1}{2} k \cdot x_m^2 = \frac{1}{2} m v_m^2 + \frac{1}{2} k \times 0^2 = \frac{1}{2} m \cdot v_0^2 + \frac{1}{2} k \cdot x_0^2$

(car si  $x = \pm x_m$ , alors  $v = 0$  et si  $v = v_m$ , alors  $x = 0$ ).

D'où :  $x_m = \sqrt{x_0^2 + \frac{m}{k} v_0^2}$  et  $v_m = \sqrt{v_0^2 + \frac{k}{m} x_0^2}$

A.N. :  $x_m = \sqrt{(-0,03)^2 + \frac{0,150}{18} \times 0,5^2} \approx 5,5 \times 10^{-2} \text{ m}$

et  $v_m = \sqrt{0,5^2 + \frac{18}{0,150} \times 0,03^2} \approx 0,60 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

**4** 1. Théorème de l'énergie mécanique en l'absence de frottement :

$$E_M(f) - E_M(i) = 0, \text{ soit } \left[ \frac{1}{2} m \cdot v_f^2 + m \cdot g(z_f - z_{\text{ref}}) \right] - \left[ \frac{1}{2} m \cdot v_i^2 + m \cdot g(z_i - z_{\text{ref}}) \right] = 0$$

$$v_f = \sqrt{2g(z_i - z_f)} \text{ car } v_i = 0 \text{ et, comme } z_i - z_f = h, v_f = \sqrt{2g \cdot h}$$

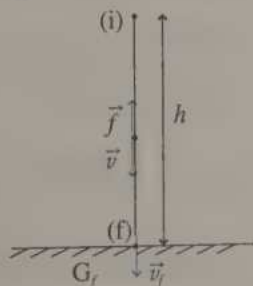
A.N. :  $v_f = \sqrt{2 \times 9,8 \times 20} \approx 19,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

2. De même, en présence de frottement :

$$E_M(f) - E_M(i) = W_{i \rightarrow f}(\vec{f})$$

donc :  $W_{i \rightarrow f}(\vec{f}) = m \left( \frac{v_f^2}{2} - gh \right)$

A.N. :  $W_{i \rightarrow f}(\vec{f}) = 0,05 \times \left( \frac{16,1^2}{2} - 9,8 \times 20 \right) \approx -3,3 \text{ J}$ .



Si  $\vec{f}$  est constante, alors :

$$W_{i \rightarrow f}(\vec{f}) = \vec{f} \cdot \overrightarrow{G_i G_f} = f \times G_i G_f \times \cos(\vec{f}, \overrightarrow{G_i G_f}) = f \cdot h \cdot \cos \pi$$

(avec  $G_i$  et  $G_f$  positions initiale et finale), soit :

$$W_{i \rightarrow f}(\vec{f}) = -f \cdot h = m \left( \frac{v_f^2}{2} - g \cdot h \right) \text{ d'où } f = m \left( g - \frac{v_f^2}{2h} \right).$$

$$\text{A.N. : } f = 0,05 \left( 9,8 - \frac{16,1^2}{2 \times 20} \right) \approx 0,17 \text{ N.}$$

**5** 1. • Le mouvement est horizontal, donc  $\vec{P} \perp \overrightarrow{AB}$ , d'où  $W_{A \rightarrow B}(\vec{P}) = \vec{P} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ .

•  $\vec{R}$  est perpendiculaire à la trajectoire, donc  $\vec{R} \perp \overrightarrow{AB}$ , d'où  $W_{A \rightarrow B}(\vec{R}) = \vec{R} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ .

•  $\vec{F}$  est une force constante, donc :

$$\text{donc } W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB} = F \cdot AB \cdot \cos(\vec{F}, \overrightarrow{AB}) = F \cdot d \cdot \cos 0 = F \cdot d.$$

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{R}) = W_{A \rightarrow B}(\vec{P}) = 0 \text{ (J)} ; W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = F \cdot d = 13,5 \text{ J.}$$

2. a.  $\vec{f}$  est une force constante, donc :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{f}) = \vec{f} \cdot \overrightarrow{AB} = f \cdot AB \cdot \cos(\vec{f}, \overrightarrow{AB}) = f \cdot d \cdot \cos \pi = -f \cdot d$$

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{f}) = -f \cdot d = -10 \text{ J.}$$

b. Le mouvement est uniforme donc, d'après la première loi de Newton :

$$\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} + \vec{f} = \vec{0}.$$

En projection horizontale,  $0 + 0 + F - f = 0$ , soit  $F = f = 2,7 \text{ N}$ .

Donc  $\vec{f}$  est constante (mêmes direction et sens). On raisonne comme au 2. a. pour le reste :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{f}) = -f \cdot d = -F \cdot d = -13,5 \text{ J.}$$

c.  $\vec{f}$  est une force variable, donc  $W_{A \rightarrow B}(\vec{f}) = \int_A^B \vec{f} \cdot d\vec{l}$ .

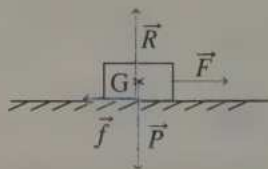
Or le déplacement se fait selon Ox, donc  $d\vec{l} = dx \cdot \vec{i}$  ; de plus :  $\vec{f} = -f(x) \cdot \vec{i}$ , d'où :

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{f}) = \int_A^B (-f(x) \cdot \vec{i}) \cdot (dx \vec{i})$$

$$= - \int_A^B f(x) dx = - \int_{x=x_A}^{x=x_B} (ax + b) dx = - \left[ a \frac{x^2}{2} + bx \right]_{x=0}^{x=d}$$

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{f}) = - \left( a \frac{d^2}{2} + b \cdot d \right)$$

$$\text{A.N. : } W_{A \rightarrow B}(\vec{f}) = - \left( 0,1 \times \frac{5^2}{2} + 0,2 \times 5 \right) = -2,25 \text{ N.}$$



## 6 • Déplacement élémentaire

Comme M se déplace parallèlement à Ox, on a  $d\vec{l} = dx \cdot \vec{i}$ .

$$\begin{aligned} \bullet W_{A \rightarrow B}(\vec{T}) &= \int_A^B \vec{T} \cdot d\vec{l} \\ &= \int_A^B \left( -F \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{2x_m}\right) \vec{i} \right) \times (dx \cdot \vec{i}) \\ &= \int_A^B -F \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2x_m} x\right) dx \quad \text{car } \vec{i} \cdot \vec{i} = 1 \\ &= \left[ F \frac{2x_m}{\pi} \cos\left(\frac{\pi}{2x_m} \cdot x\right) \right]_{x=x_A}^{x=x_B} \end{aligned}$$

$$W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \frac{2F \cdot x_m}{\pi} \left[ \cos\left(\frac{\pi x_B}{2x_m}\right) - \cos\left(\frac{\pi x_A}{2x_m}\right) \right]$$

$$\text{A.N. : } W_{A \rightarrow B}(\vec{F}) = \frac{2(\pi \times 10^5) \times (5 \times 10^{-2})}{\pi} \left( \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos(0) \right) = -10^4 \text{ J.}$$

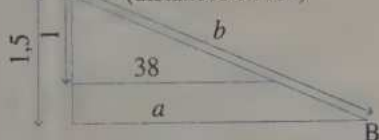
7 1. Théorème de l'énergie mécanique entre le point initial A et le point final B :

$$\begin{aligned} W_0 &= W_{A \rightarrow B}(\vec{f}) \\ &= E_M(B) - E_M(A) \\ &= \left[ \frac{1}{2} m \cdot v_B^2 + m \cdot g (z_B - z_{\text{ref}}) \right] - \left[ \frac{1}{2} m \cdot v_A^2 + m \cdot g (z_A - z_{\text{ref}}) \right] \\ &= m \cdot g (z_B - z_A) \quad \text{car } v_A = v_B = \text{cte.} \end{aligned}$$

$$W_0 = m \cdot g (z_B - z_A)$$

$$\text{A.N. : } W_0 = +310 \times 9,8 (700 - 2200) = -4,6 \times 10^6 \text{ J.}$$

2. A (distances en km)



$$\bullet \frac{38}{a} = \frac{1}{1,5} \text{ soit } a = 1,5 \times 38 = 57 \text{ km.}$$

$$\bullet b = \sqrt{1,5^2 + 57^2} \approx 57,0(2) \text{ km.}$$

Comme la vitesse est constante, la force de frottement doit être constante, donc :

$$W_0 = W_{A \rightarrow B}(\vec{f}) = \vec{f} \cdot \overrightarrow{AB} = f \cdot AB \cdot \cos(\vec{f}, \overrightarrow{AB}) = f \cdot AB \cos \pi = -f \cdot AB,$$

car  $\vec{f}$  est opposé à  $\overrightarrow{AB}$ , d'où :

$$f (\text{à } 110 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}) = -\frac{W_0}{AB}$$

$$\text{A.N. : } f = -\frac{4,6 \times 10^6}{57 \times 10^3} \approx -80 \text{ N.}$$

3. Théorème de l'énergie mécanique (de B vers A) :

$$E_M(A) - E_M(B) = W(\vec{f}) + W(\text{ascendant})$$

$$-W_0 \text{ (d'après 1.)} = W_0 + W_a, \text{ soit : } W_a = -2W_0 \approx 9,1 \times 10^6 \text{ J.}$$

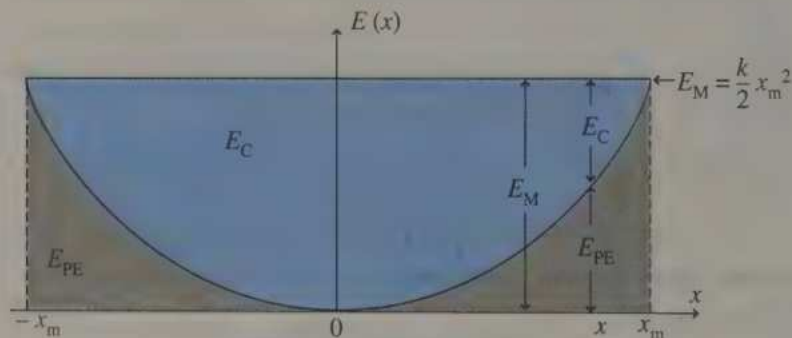
8 I. a.  $E_{PE} = \frac{1}{2} k \cdot x^2$  (voir le graphe ci-dessous).

b.  $E_M = \text{cte}$  (pas de frottement) =  $E_{PE}(\text{max}) + E_C(\text{min}) = \frac{1}{2} k \cdot x_m^2 + \frac{1}{2} m \cdot 0^2$   
soit  $E_M = \frac{1}{2} k \cdot x_m^2 = \text{cte}$  (graphe ci-dessous).

$$c. E_C = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} m \cdot \dot{x}^2.$$

Ne connaissant pas  $\dot{x}$  en fonction de  $x$ , on ne peut pas représenter  $E_C(x)$  (a priori).

Mais  $E_M = \text{cte} = E_C + E_{PE}$ , d'où  $E_C = E_M - E_{PE}$  (graphe ci-dessous).



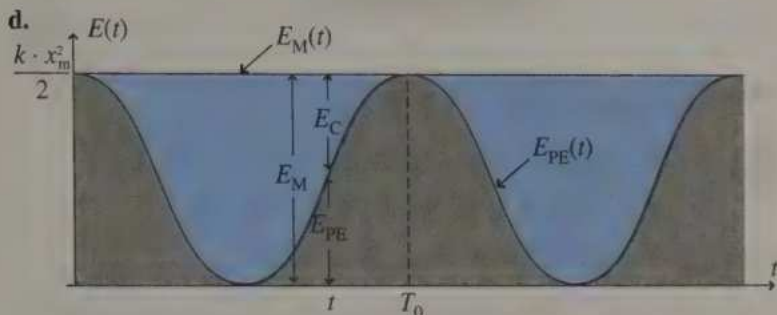
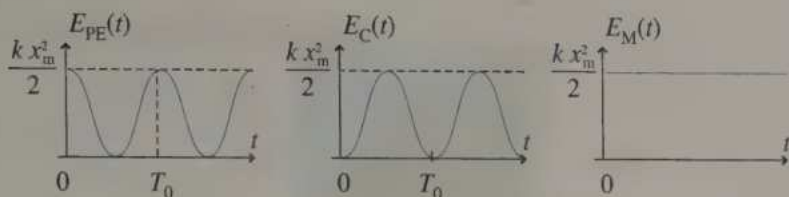
2. a.  $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$ , période propre.

b.  $x(t) = x_m \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right)$  et en dérivant :  $\dot{x}(t) = -\sqrt{\frac{k}{m}} x_m \sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right)$

$$c. E_{PE} = \frac{1}{2} k \cdot x^2 = \frac{k \cdot x_m^2}{2} \cos^2\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right)$$

$$E_C = \frac{1}{2} m \cdot \dot{x}^2 = \frac{k \cdot x_m^2}{2} \sin^2\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t\right)$$

$$E_M = E_{PE} + E_C = \frac{k \cdot x_m^2}{2} = \text{cte} \text{ (avec } \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1).$$



De même, on en déduit  $E_C(t)$  par :  $E_C(t) = E_M - E_{PP}(t)$ .

9 1. a.  $E_{PP} = m \cdot g \cdot z$   
car  $z_{\text{réf}} = 0$  (graphe ci-contre).

b.  $E_M = \text{cte}$  (pas de frottement)  
 $= E_{PP}(t=0) + E_C(t=0)$   
 $= m \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} m \cdot v_0^2$

Or,  $v_0 = 0$ , donc :  
 $E_M = m \cdot g \cdot h = \text{cte}$   
(graphe ci-contre).

c.  $E_C = \frac{1}{2} m \cdot v^2 = \frac{1}{2} m \cdot \dot{z}^2$

Ne connaissant pas  $\dot{z}$  en fonction de  $z$ , a priori, on ne peut pas représenter  $E_C(z)$  (a priori).

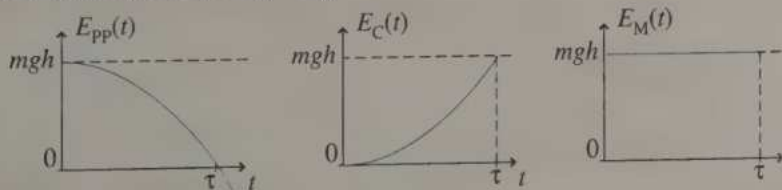
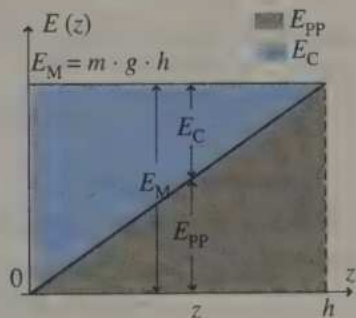
Mais,  $E_M = \text{cte} = E_C + E_{PP}$ , d'où  $E_C = E_M - E_{PP}$  (graphe ci-dessus).

2. a.  $E_{PP} = -\frac{m \cdot g^2}{2} t^2 + m \cdot g \cdot h$

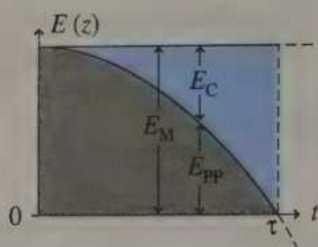
$E_M = m \cdot g \cdot h = \text{cte}$ .

$E_C = \frac{m}{2} \dot{z}^2 = \frac{m}{2} (-g \cdot t)^2$  donc  $E_C = +\frac{m \cdot g^2}{2} t^2$

(On vérifie que :  $E_C + E_{PP} = E_M$ ).



b.



De même, on en déduit  $E_C(t) = E_M - E_{PE}(t)$ .

10 1. a. Pour le système {masse + ressort} :

$$E_M = E_C + E_{PE} = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + \frac{1}{2} k \cdot x^2$$

(on vérifie que  $x$  a pour référence la position au repos)

soit :

$$E_M = \frac{1}{2} m \cdot \dot{x}^2 + \frac{1}{2} k \cdot x^2.$$

b. En l'absence de frottement,  $E_M$  se conserve :  $E_M = \text{cte}$ .

c. D'après b.,  $\frac{dE_M}{dt} = 0$  soit  $\frac{1}{2} m \times 2 \dot{x} \cdot \ddot{x} + \frac{1}{2} k \times 2 x \cdot \dot{x} = 0$ ,

car  $\frac{d(u^2)}{dt} = 2u \frac{du}{dt} = 2u\dot{u}$ , d'où  $m\ddot{x} + kx = 0$

2. a. Même expression qu'en 1. a.

b. En présence de frottements,  $E_M$  diminue.

c. Théorème de l'énergie mécanique entre  $G_0$  et  $G$  :

$$E_M(G) - E_M(G_0) = W_{G_0 \rightarrow G}(\vec{f}).$$

d.  $dW(\vec{f}) = \vec{f} \cdot d\vec{l} = (+f_x \vec{i}) \cdot (+dx \vec{i}) = +f_x \cdot dx$

( $d\vec{l} = dx \vec{i}$  car  $m$  se déplace selon  $x$ )

d'où :  $dW(\vec{f}) = +f_x \cdot dx$ .

e.  $\frac{dE_M}{dt} = \frac{d}{dt} [E_M(G_0) + W_{G_0 \rightarrow G}(\vec{f})]$  d'après c.

$$= \frac{d}{dt} [W_{G_0 \rightarrow G}(\vec{f})] \text{ car } E_M(G_0) = \text{cte}$$

$$= \frac{dW(\vec{f})}{dt} \text{ d'après l'indication de l'énoncé}$$

$$= +f_x \frac{dx}{dt}$$

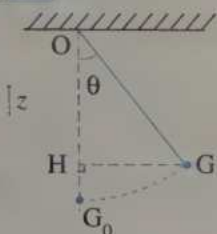
$$= +f_x \cdot \dot{x} \text{ car } \dot{x} = \frac{dx}{dt}$$

De plus,  $\frac{dE_M}{dt}$  donne le même résultat qu'en 1. c., donc :

$$\frac{1}{2} m \times 2 \dot{x} \cdot \ddot{x} + \frac{1}{2} k \times 2 x \cdot \dot{x} = + f_x \cdot \dot{x}, \text{ et en divisant par } \dot{x} :$$

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot x = + f_x, \text{ soit } m \cdot \ddot{x} - f_x + k \cdot x = 0. \quad \text{C.Q.F.D.}$$

11 l.



$$\begin{aligned} E_{pp} &= m \cdot g (z(G) - z(\text{réf})) \\ &= m \cdot g (z(G) - z(G_0)) \text{ (d'après l'énoncé)} \\ &= m \cdot g \cdot G_0H \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Or } G_0H &= G_0O - OH = l - l \cos \theta = l (1 - \cos \theta) \\ \text{d'où : } E_{pp} &= m \cdot g \cdot l (1 - \cos \theta) \end{aligned}$$

2.  $E_M = \text{cte}$  en l'absence de frottements, donc :

$$E_M(\text{initiale}) = E_C(i) + E_{pp}(i) = E_C(\text{max}) + E_{pp}(\text{min}) = E_C(\text{min}) + E_{pp}(\text{max})$$

$$\frac{m}{2} v_1^2 + m \cdot g \cdot l (1 - \cos \theta_1) = \frac{m}{2} v_m^2 + 0 = 0 + m \cdot g \cdot l (1 - \cos \theta_m)$$

car la vitesse est maximale en  $\theta = 0$  ( $\Rightarrow E_{pp} = 0$ ) et  $\theta$  est maximal lorsque  $v = 0$  ( $\Rightarrow E_C = 0$ ).

$$\frac{v_1^2}{2} + g \cdot l (1 - \cos \theta_1) = \frac{v_m^2}{2} = g \cdot l (1 - \cos \theta_m)$$

$$\text{d'où : } v_m = \sqrt{v_1^2 + 2g \cdot l (1 - \cos \theta_1)} \quad \text{et} \quad \cos \theta_m = \cos \theta_1 - \frac{v_1^2}{2g \cdot l}$$

$$\text{A.N. : } v_m = \sqrt{1^2 + 2 \times 9,8 \times 0,6 (1 - \cos(-30^\circ))}$$

$$v_m \approx 1,6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$\theta_m = \cos^{-1} \left( \cos(-30^\circ) - \frac{1^2}{2 \times 9,8 \times 0,6} \right)$$

$$\theta_m \approx 39^\circ$$

3. a.  $E_M = E_C + E_{pp} = \frac{1}{2} m \cdot v^2 + m \cdot g \cdot l (1 - \cos \theta)$  et  $v = l \cdot |\dot{\theta}|$ , donc :

$$E_M = \frac{m}{2} l^2 \cdot \dot{\theta}^2 + m \cdot g \cdot l (1 - \cos \theta)$$

b. En l'absence de frottement,  $E_M = \text{cte}$  donc  $\frac{dE_M}{dt} = 0$

$$\text{soit } \frac{m}{2} l^2 \times 2 \dot{\theta} \cdot \ddot{\theta} + m \cdot g \cdot l (0 + \sin \theta \cdot \dot{\theta}) = 0 \quad \left( \text{rappel : } \frac{d(u^2)}{dt} = 2u \frac{du}{dt} \right)$$

$$\text{d'où : } l \ddot{\theta} + g \sin \theta = 0.$$

c. Si  $\theta$  est faible, alors  $\sin \theta \approx \theta$  et  $l \ddot{\theta} + g \theta = 0$ .

**12** Soit A le point de départ et B un point quelconque de la trajectoire.

En présence de frottements, le théorème de l'énergie mécanique donne :

$$E_M(B) - E_M(A) = W_{A \rightarrow B}(\vec{f})$$

donc  $[E_c(B) + E_{pp}(B)] - [E_c(A) + E_{pp}(A)] = W_{A \rightarrow B}(\vec{f})$

$$\text{soit } \left[ \frac{1}{2} m \cdot v_B^2 + m \cdot g (z_B - z_{\text{réf}}) \right] - \left[ \frac{1}{2} m \cdot v_A^2 + m \cdot g (z_A - z_{\text{réf}}) \right] = W_{A \rightarrow B}(\vec{f})$$

$$\text{et finalement : } \frac{v_B^2}{2} + g \cdot z_B - \frac{v_A^2}{2} - g \cdot z_A = \frac{1}{m} W_{A \rightarrow B}(\vec{f})$$

a. Si B est le point d'altitude maximale alors  $v_B = 0$

$$\text{et } W_{A \rightarrow B}(\vec{f}) = \vec{f} \cdot \overrightarrow{AB} = f \cdot AB \cdot \cos(\vec{f}, \overrightarrow{AB}) = f \cdot AB \cdot \cos \pi \\ = -f \cdot AB = -f(z_B - z_A)$$

(car  $\vec{f} = \overrightarrow{cté}$  de A à B)

$$\text{d'où : } g(z_B - z_A) - \frac{v_A^2}{2} = -\frac{f}{m}(z_B - z_A)$$

$$\text{soit : } z_B - z_A = \frac{v_A^2}{2 \left( g + \frac{f}{m} \right)} \quad (1)$$

$$\text{A.N. : } z_B - z_A = \frac{10^2}{2 \left( 10 + \frac{0,5}{0,2} \right)} = \frac{100}{2 \times 12,5} = 4,0 \text{ m}$$

b. Appliquons la même formule entre B et A'.

On obtient (avec  $v_B = 0$  également) :

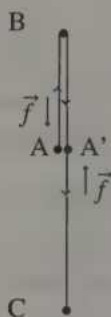
$$g(z_A' - z_B) + \frac{v_A'^2}{2} = \frac{1}{m} W_{B \rightarrow A'}(\vec{f}) = -\frac{f}{m} \cdot BA' = -\frac{f}{m}(z_B - z_A')$$


$$\text{soit } z_A' - z_B = \frac{v_A'^2}{2 \left( -g + \frac{f}{m} \right)} \quad (2)$$

$$(1) + (2) \text{ avec } z_A = z_A' \text{ devient : } 0 = \frac{v_A^2}{2 \left( g + \frac{f}{m} \right)} + \frac{v_A'^2}{2 \left( -g + \frac{f}{m} \right)}$$

$$\text{d'où : } v_A' = v_A \sqrt{\frac{m \cdot g - f}{m \cdot g + f}}$$

$$\text{A.N. : } v_A' = 10 \times \sqrt{\frac{0,2 \times 10 - 0,5}{0,2 \times 10 + 0,5}} = 10 \times \sqrt{\frac{1,5}{2,5}} = 10 \times \sqrt{\frac{3}{5}} \approx 7,7 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$



 On vérifie que si  $f = 0$  (pas de frottement), (1) est identique à la relation obtenue à l'exercice 2.

## 17

# Ouverture au monde quantique

Unités :  $1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19} \text{ J}$  ;  $1 \text{ MeV} = 1,6 \times 10^{-13} \text{ J}$

## LIMITES DE LA MÉCANIQUE DE NEWTON

Interaction gravitationnelle

Interaction électrostatique

$$\begin{array}{ccc} (M) & \vec{F}_g(m) & \\ & \longleftarrow & \\ & O & A \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} (Q) & \vec{F}_e(q) \text{ ou } \vec{F}_c & \\ & \longleftarrow & \\ & O & A \end{array}$$

Force

$$(m) \text{ subit } \vec{F}_g = -G \frac{m \cdot M}{OA^2} \vec{u}_{O \rightarrow A}$$

$$(q) \text{ subit } \vec{F}_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \cdot Q}{OA^2} \vec{u}_{O \rightarrow A}$$

$$\|\vec{u}_{O \rightarrow A}\| = 1$$

$$\|\vec{u}_{O \rightarrow A}\| = 1$$

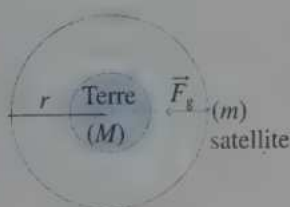
$$G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ S.I.}$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx 9,0 \times 10^9 \text{ S.I.}$$

(dans le vide)

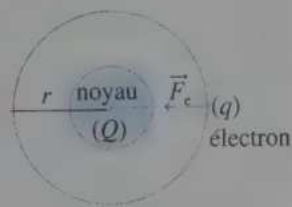
Application  
aux mouvements circulaires

Satellites



$r$  quelconque

Électrons



$r$  quantifié ( $\neq$  quelconque)  
 $\Rightarrow$  limitation de la mécanique  
de Newton

## III OUVERTURE AU MONDE QUANTIQUE

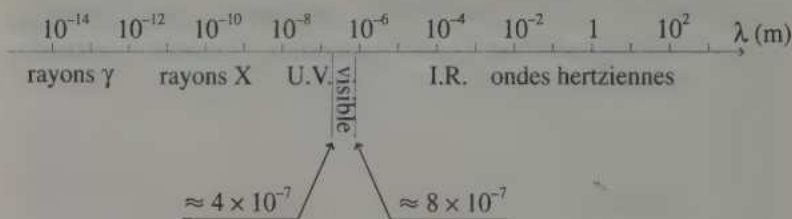
### 1. Le photon

C'est une particule, ou corpuscule (optique corpusculaire), associée à un rayonnement (optique ondulatoire) :

- masse : nulle
- charge électrique : nulle
- vitesse (ou célérité) :  $c$  dans le vide (cf. chapitre 3)
- énergie :  $E = h \cdot \nu = \frac{h \cdot c}{\lambda}$ 

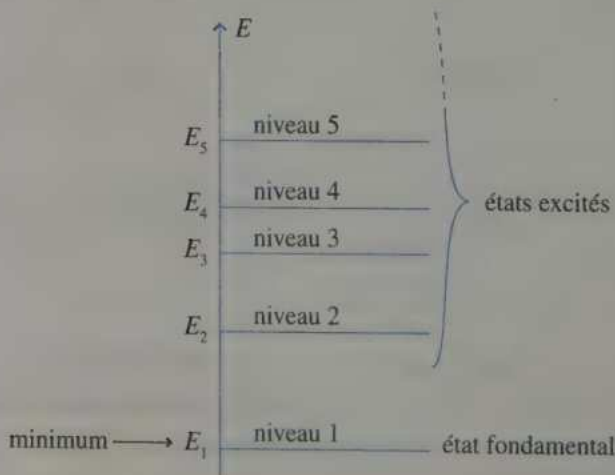
$$\left\{ \begin{array}{l} h : \text{constante de Planck } (h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}) \\ \nu, \lambda \text{ et } c : \text{fréquence, longueur d'onde} \\ \text{et célérité du rayonnement associé} \end{array} \right.$$

• domaines des rayonnements :



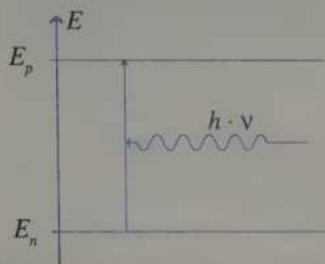
### 2. Quantification de l'énergie

Les noyaux, les atomes et les molécules sont des systèmes dont l'énergie est quantifiée :  $E$  ne peut prendre que certaines valeurs  $E_i$ .

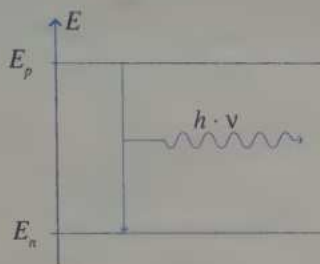


### 3. Quantification des échanges d'énergie


Absorption d'un photon :



Émission d'un photon



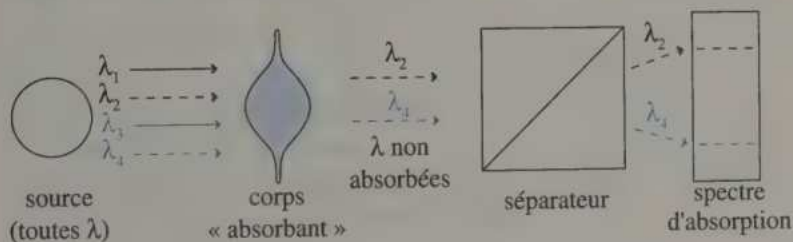
Dans les deux cas :  $E_p - E_n = h \cdot \nu$  (ou  $|\Delta E| = h \cdot \nu$ )

 Des transitions identiques peuvent avoir lieu sans photon, par choc, par exemple : ce sont des transitions non radiatives.

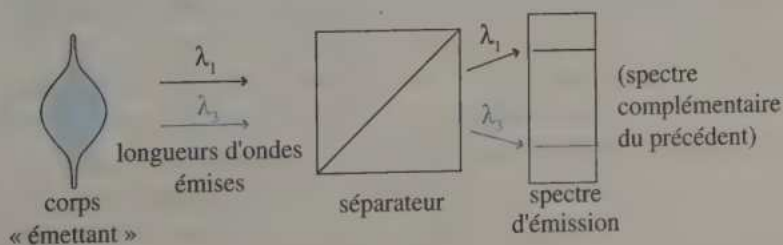
### 4. Spectrométrie

Un spectre est un graphe ou une image visualisant les différentes radiations émises par un corps.

• Spectre d'absorption :



• Spectre d'émission :



## 5. Applications à différents édifices

Édifice	Diagramme	Ordre de grandeur de $\Delta E$	Rayonnement associé
noyau		quelques MeV	$\gamma$
atome		quelques keV (électrons « internes »)	X
		quelques eV (électrons « externes »)	U.V. ou visible
molécule		quelques meV (effets de vibrations, rotations, ...)	I.R. (ou micro-onde)

Dans tout ce chapitre, on utilisera les données suivantes :

$$h = 6,626 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s} ; c = 2,998 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} ; e = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C} ;$$

$$G = 6,672 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2} ; \epsilon_0 = 8,854 \times 10^{-12} \text{ A}^2 \cdot \text{s}^4 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{m}^{-3} ;$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8,988 \times 10^9 \text{ S.I.}$$

## EXERCICES D'APPLICATION

### 1 INTERACTIONS ÉLECTROSTATIQUE ET GRAVITATIONNELLE \* (10 min) ► P. 263

La distance qui sépare deux noyaux d'oxygène ( $^{16}_8\text{O}$ ) d'une molécule de dioxygène est  $d = 0,146 \text{ nm}$  (les noyaux étant supposés ponctuels).

1. Calculer la valeur des forces d'interaction électrostatique entre les deux noyaux. Sont-elles attractives, répulsives ou autres ?
2. Répondre aux mêmes questions avec l'interaction gravitationnelle.
3. Comparer la valeur de ces deux forces et conclure.

Données :  $m_n \approx m_p \approx 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ .

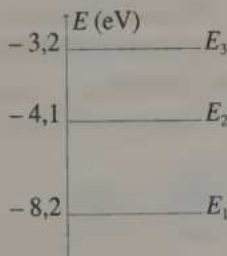
### 2 ABSORPTION ET ÉMISSION \* (10 min) ► P. 263

1. Déterminer les longueurs d'onde émises par la désexcitation de l'atome dont le diagramme énergétique est celui ci-contre sachant que son énergie initiale est  $E_3$ .

Préciser le domaine auquel appartient chaque rayonnement.

2. On suppose, cette fois, que l'énergie de l'atome ne peut excéder  $E_3$ .

Quelles doivent être les longueurs d'onde de photons incidents pour que l'atome puisse les absorber ?



### 3 ATOME DE LITHIUM \* (10 min) ► P. 264

1. L'atome de lithium (Li), dans son premier état excité ( $E_2 = -3,54 \text{ eV}$ ), émet une radiation de longueur d'onde  $\lambda = 670,3 \text{ nm}$  lorsqu'il se désexcite. En déduire l'énergie de l'état fondamental (en eV).

2. Le même atome, pour passer au niveau supérieur  $E_3$ , doit absorber un photon de fréquence  $\nu = 3,69 \times 10^{14} \text{ Hz}$ .

Déterminer  $E_3$  (en eV).

**4 LASER PULSÉ** \*\*\* (5 min) ► P. 264

Un laser à  $\text{CO}_2$ , utilisé en médecine, émet pendant 0,20 ms, une impulsion d'énergie 0,50 J et de longueur d'onde 10,6  $\mu\text{m}$ .

Calculer le nombre de photons émis pendant une impulsion.

**5 FORMULE PRATIQUE** \* (10 min) ► P. 264

En utilisant la bibliographie pour obtenir quatre chiffres significatifs, démontrer la formule numérique donnant l'énergie d'un photon en fonction de sa longueur d'onde :  $E \text{ (eV)} = \frac{1240}{\lambda \text{ (nm)}}$ .

Préciser l'unité de la constante « 1240 ».

## EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

**6 LIAISON CHIMIQUE** \*\*\* (10 min) ► P. 264

L'énergie nécessaire à la rupture de la liaison Cl-Cl du dichlore est d'environ 2,6 eV.

- Calculer la valeur limite de la longueur d'onde permettant de rompre une telle liaison.
- S'agit-il d'une valeur maximale ou minimale ?
- Les stations de radio émettant en fréquence modulée (FM) risquent-elles de provoquer la rupture des molécules de  $\text{Cl}_2$  ? (On prendra une fréquence FM moyenne égale à 100 MHz pour le calcul.)

**7 LE CLASSIQUE** \*\*\* (40 min) ► P. 265

Les niveaux d'énergie d'un atome d'hydrogène sont donnés par :

$$E_n = -\frac{E_0}{n^2}, \text{ avec } E_0 = +13,6 \text{ eV}, n \in \mathbb{N}, 1 \leq n \leq 8.$$

Les longueurs d'onde seront exprimées en nm.

- Montrer que la transition électronique entre le niveau  $n$  et le niveau  $p > n$  correspond à une longueur d'onde  $\lambda$  telle que  $\frac{1}{\lambda} = k \left( \frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2} \right)$ .

Calculer la valeur de la constante  $k$  et préciser son unité.

- Le spectre d'émission de l'atome d'hydrogène donne une série de raies (dite série de PASCHEN) qui correspond au retour vers le niveau 3.
  - Décrire le montage permettant de visualiser ce spectre.

b. Calculer les différentes longueurs d'onde de cette série (on prendra  $k = 1,0974 \times 10^7 \text{ S.I.}$ )

c. À quel(s) domaine(s) ces raies appartiennent-elles ?

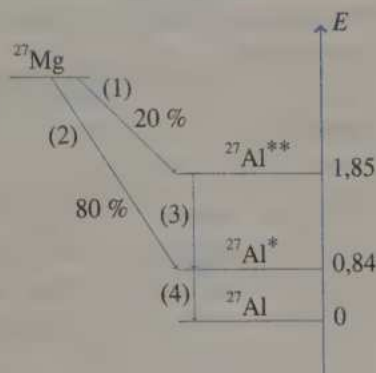
3. Calculer les valeurs minimale et maximale des longueurs d'onde.

4. Expliquer comment procéder pour savoir si  $\lambda = 4,651 \mu\text{m}$  est ou non une valeur possible de la série de PFUND qui correspond à une émission avec un retour au niveau 5 (à préciser).

### 8 ÉNERGIE NUCLÉAIRE

\*\*\* (15 min) ► P. 266

Le magnésium  $^{27}_{12}\text{Mg}$  se désintègre en  $^{27}_{13}\text{Al}$  suivant le schéma énergétique ci-contre.



1. Compléter le diagramme en indiquant le type des désintégrations, l'unité de l'énergie et la signification des symboles \*.

2. Quelles particules sont associées aux désintégrations (3) et (4) ? Calculer leurs fréquences.

3. Calculer (en MJ) l'énergie libérée par la désintégration d'un milligramme de  $^{27}\text{Mg}$  en  $^{27}\text{Al}$  sous forme de rayonnement.

Donnée :  $N_A = 6,022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

## EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

### 9 SÉRIE DE BALMER DE L'HYDROGÈNE

\*\*\* (30 min) ► P. 267

Les raies *visibles* du spectre d'émission de l'hydrogène forment la série de raies de BALMER. Elles correspondent à la transition d'un niveau  $n$  vers un niveau  $p$  fixé ( $n, p \in \mathbb{N}^*$ ,  $n \neq p$ ;  $n, p \leq 8$ ).

Sachant que l'énergie d'un niveau  $n$  est  $E_n = -\frac{E_0}{n^2}$  ( $E_0 = +13,6 \text{ eV}$ ), déterminer  $p$ .

(On prendra 350 nm et 750 nm comme limites du visible.)

## 10 IONISATION

\*\*\* (30 min) ► P. 267

L'énergie d'un atome d'hydrogène au niveau  $n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) est :

$$E_n = -\frac{E_0}{n^2} \quad \text{avec } E_0 = 13,6 \text{ eV pour } {}_1\text{H}.$$

1. Comment s'appelle le niveau  $n = 1$  ? les niveaux correspondant à  $n > 1$  ?
2. On considère que  $n$  varie de 1 à 8 (valeurs entières) ou que  $n = \infty$ .

Expliquer succinctement pourquoi ce dernier état correspond à l'ionisation.

3. Calculer la longueur d'onde minimale d'un photon permettant d'ioniser l'atome d'hydrogène initialement dans son état  $n = 1$  (énergie de première ionisation). Refaire le même calcul pour  $n = 2$ .

4. Un photon, de longueur d'onde 70 nm, est absorbé par un atome d'hydrogène dans son état le plus stable.

Calculer la vitesse de l'électron éjecté (en supposant que le noyau reste immobile).

Donnée :  $m(e^-) = 9,11 \times 10^{-31}$  kg.

5. Exprimer l'énergie  $I$  de première ionisation d'un hydrogénoïde (atome ou ion à un seul électron, soit  ${}_1\text{H}$ ,  ${}_2\text{He}^+$ ,  ${}_3\text{Li}^{2+}$ , ...) en fonction de  $E_0$  et  $Z$  sachant que l'énergie d'un hydrogénoïde au niveau  $n$  est :

$$E_n = -E_0 \left( \frac{Z}{n} \right)^2 \quad (Z \text{ est le numéro atomique}),$$

et conclure.

## 11 FLUORESCENCE

\*\*\* (5 min) ► P. 268

Lorsque l'on éclaire certaines matières, en général organiques, avec une longueur d'onde  $\lambda$ , celles-ci émettent un rayonnement de longueur d'onde  $\lambda' > \lambda$ . Ce phénomène est appelé fluorescence. C'est le cas de tee-shirts en coton blanc qui, éclairés par de la « lumière noire », en fait des U.V. ( $\lambda \approx 360$  nm), en boîtes de nuit, émettent une lumière bleutée ( $\lambda' \approx 460$  nm).

Interpréter ce phénomène en terme de diagramme énergétique sachant qu'il y a deux transferts non radiatifs.

## CORRIGÉS

1. Les deux forces ont même valeur car, d'après la troisième loi de Newton :  $F_{1/2} = F_{2/1}$ .

$$F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|q_1 \cdot q_2|}{d^2} \text{ or } q_1 = q_2 = Z \cdot e \text{ (Z protons de charge } +e\text{).}$$

$$F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Z \cdot e}{d} \right)^2$$

$$\text{A.N. : } F_e = (9,0 \times 10^9) \times \left( \frac{8 \times (1,6 \times 10^{-19})}{0,146 \times 10^{-9}} \right)^2 \approx 6,9 \times 10^{-7} \text{ N.}$$

Ces forces sont répulsives (car les charges sont de même signe).

2. De même avec  $m_1 = m_2 = Z \cdot m_p + (A - Z)m_n \approx A \cdot m_p$  (car  $m_p \approx m_n$ ) et

$$\text{comme } F_g = G \frac{m_1 \cdot m_2}{d^2} \text{ on obtient : } F_g = G \cdot \left( \frac{A \cdot m_p}{d} \right)^2.$$

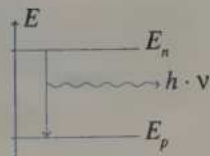
$$\text{A.N. : } F_g = (6,67 \times 10^{-11}) \times \left( \frac{16 \times (1,67 \times 10^{-27})}{0,146 \times 10^{-9}} \right)^2 = 2,23 \times 10^{-42} \text{ N.}$$

Les forces de gravité sont toujours **attractives**.

$$3. \frac{F_e}{F_g} \approx 3,1 \times 10^{35} \text{ donc } F_g \text{ est négligeable devant } F_e.$$

2 1. Désexcitation de  $E_n$  vers  $E_p$ , avec  $n > p$  :

$$E_n - E_p = h \cdot \nu_{n \rightarrow p} = \frac{h \cdot c}{\lambda_{n \rightarrow p}} \Rightarrow \lambda_{n \rightarrow p} = \frac{h \cdot c}{E_n - E_p} \text{ (} n > p\text{).}$$



A.N. : (On exprime les énergies en joule et non en électron-volt (eV).)

$$\lambda_{3 \rightarrow 2} = \frac{h \cdot c}{E_3 - E_2} = \frac{(6,626 \times 10^{-34}) \times (3 \times 10^8)}{[(-3,2) - (-4,1)] \times (1,6 \times 10^{-19})}$$

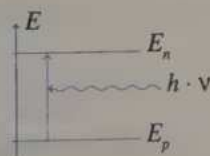
$$= 1,38 \times 10^{-6} \text{ m} = 1380 \text{ nm (I.R.)}$$

$$\lambda_{3 \rightarrow 1} = 2,48 \times 10^{-7} \text{ m} = 248 \text{ nm (U.V.)} ; \lambda_{2 \rightarrow 1} = 3,03 \times 10^{-7} \text{ m} = 303 \text{ nm (U.V.)}$$

2. Les absorptions se font « en sens inverse » :

$$\lambda_{p \rightarrow n} = \lambda_{n \rightarrow p} \text{ (sans dépasser } E_3, \text{ d'après l'énoncé).}$$

$$\lambda_{2 \rightarrow 3} = 1380 \text{ nm} ; \lambda_{1 \rightarrow 3} = 248 \text{ nm} ; \lambda_{1 \rightarrow 2} = 303 \text{ nm.}$$




$$\boxed{3} \quad 1. E_2 - E_1 = h\nu_{2 \rightarrow 1} = \frac{h \cdot c}{\lambda_{2 \rightarrow 1}} \quad \text{d'où } E_1 = E_2 - \frac{h \cdot c}{\lambda_{2 \rightarrow 1}}$$

$$\text{A.N. : } E_1 = -3,54 - \left[ \frac{(6,626 \times 10^{-34}) \times (3 \times 10^8)}{670,3 \times 10^{-9}} \right] \times \frac{1}{1,6 \times 10^{-19}} = -5,39 \text{ eV}$$

$$2. E_3 - E_2 = h\nu_{2 \rightarrow 3} \quad \text{d'où } E_3 = E_2 + h\nu_{2 \rightarrow 3}$$

$$\text{A.N. : } E_3 = -3,54 + \frac{(6,626 \times 10^{-34}) \times (3,69 \times 10^{14})}{1,6 \times 10^{-19}} = -2,01 \text{ eV}$$

 Dans les deux cas, le facteur  $\frac{1}{1,6 \times 10^{-19}}$  correspond à la conversion : joule  $\rightarrow$  electron-volt.

$\boxed{4}$   $N$  photons ont une énergie totale  $E_{\text{tot}} = N \times E$  (1 photon).

$$E_{\text{tot}} = N \cdot (h \cdot \nu) = N \frac{h \cdot c}{\lambda}, \quad \text{soit : } N = \frac{E_{\text{tot}} \cdot \lambda}{h \cdot c}$$

$$\text{A.N. : } N = \frac{0,50 \times (10,6 \times 10^{-6})}{(6,626 \times 10^{-34}) \times (3 \times 10^8)} = 2,7 \times 10^{19}$$

$\boxed{5}$   $E = \frac{h \cdot c}{\lambda}$  et  $E(\text{J}) = e \times E(\text{eV})$  et  $\lambda(\text{m}) = \lambda(\text{nm}) \times 10^{-9}$ , d'où :

$$e \times E(\text{eV}) = \frac{h \cdot c}{\lambda(\text{nm}) \times 10^{-9}} \quad \text{soit } E(\text{eV}) = \frac{1}{\lambda(\text{nm})} \times \frac{h \cdot c}{e \times 10^{-9}}$$

$$\frac{h \cdot c}{e \times 10^{-9}} = \frac{(6,626\,075 \times 10^{-34}) \times (2,997\,925 \times 10^8)}{(1,602\,177 \times 10^{-19}) \times 10^{-9}} \approx 1\,239,84 \approx 1\,240$$

« 1 240 » a la même unité que  $E(\text{eV}) \times \lambda(\text{nm})$ , soit : eV · nm.

$$E(\text{eV}) = \frac{1\,240(\text{eV} \cdot \text{nm})}{\lambda(\text{nm})} \quad \text{C.Q.F.D.}$$

$\boxed{6}$  1. et 2. La liaison Cl-Cl rompt si  $E(\text{photon}) \geq E(\text{chimique})$ , soit si

$$\frac{h \cdot c}{\lambda} \geq E_{\text{chim}} \quad \text{donc si } \lambda \leq \frac{h \cdot c}{E_{\text{chim}}}$$

$$\text{A.N. : } \lambda \leq \frac{(6,626 \times 10^{-34}) \times (3 \times 10^8)}{2,6 \times (1,6 \times 10^{-19})} = 4,77 \times 10^{-7} \text{ m} = 477 \text{ nm.}$$

Il s'agit d'une valeur maximale (plus  $\lambda$  est faible, plus  $E$  est élevée).

$$3. \lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{3 \times 10^8}{100 \times 10^6} = 3,0 \text{ m} \gg 4,77 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

Il n'y a aucun risque, évidemment !

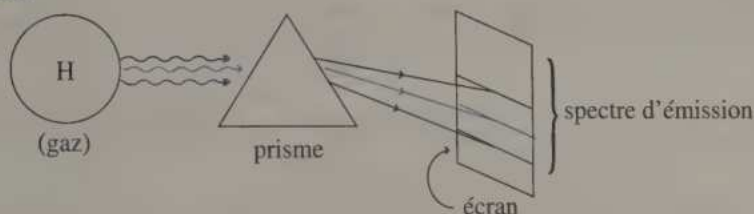
7 1.  $E_p - E_n = h \cdot \nu = h \frac{c}{\lambda}$  (et non  $E_n - E_p$  qui est négatif), soit :

$$\left(\frac{-E_0}{p^2}\right) - \left(\frac{-E_0}{n^2}\right) = \frac{h \cdot c}{\lambda} \text{ d'où } \frac{1}{\lambda} = \frac{E_0}{h \cdot c} \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2}\right) = k \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2}\right) \text{ donc } k = \frac{E_0}{h \cdot c}.$$

$$\text{A.N. : } k = \frac{13,6 \times 1,6 \times 10^{-19} \text{ (en J)}}{(6,626 \times 10^{-34}) \times (3 \times 10^8)} = 1,09 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$$

Unité :  $n$  et  $p$  sont sans unité, donc l'unité de  $k$  est celle de  $\frac{1}{\lambda}$  :  $k$  s'exprime en  $\text{m}^{-1}$ .

2. a.



Un échantillon de dihydrogène gazeux, chauffé à une certaine température, émet des rayonnements de différentes longueurs d'onde. Les rayons sont séparés par dispersion avec un prisme, par exemple.

Il suffit de mesurer chaque longueur d'onde ensuite (spectromètre) ou de photographier un écran pour visualiser les raies du domaine visible.

b. L'émission se fait vers un niveau inférieur et  $p > n$ , donc de  $p$  vers  $n = 3$  :

$$\frac{1}{\lambda} = k \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{p^2}\right)$$

$p$	4	5	6	7	8
$\lambda$ (nm)	1874,6	1281,4	1093,5	1004,7	954,32

c. Elles appartiennent à l'infrarouge (et même l'infrarouge proche).

$$3 \cdot \lambda_{\min} \Rightarrow \left(\frac{1}{\lambda}\right)_{\max} \Rightarrow \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2}\right)_{\max} \Rightarrow \begin{cases} n_{\min} = 1 \\ p_{\max} = 8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\lambda_{\min}} = k \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{8^2}\right) = \frac{63}{64} k.$$

$$\Rightarrow \lambda_{\min} = \lambda_{8-1} = \frac{64}{63 k} \approx 92,57 \text{ nm}$$

$$\bullet \lambda_{\max} \Rightarrow \left(\frac{1}{\lambda}\right)_{\min} \Rightarrow \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{p^2}\right)_{\min} \Rightarrow \begin{cases} n_{\max} \\ p_{\min} \\ \text{et toujours } n < p \end{cases}$$

$n$  est donc juste plus petit que  $p$ , donc  $n = p - 1$  : la méthode la plus rapide consiste à essayer tous les couples  $(n, p)$  possibles, c'est-à-dire :  $(1, 2)$ ;  $(2, 3)$ ; ... ;  $(7, 8)$ . On peut aussi remarquer que si  $\frac{1}{n^2}$  et  $\frac{1}{p^2}$  sont faibles, leur différence sera faible aussi, donc il faut  $n$  et  $p$  les plus grands possibles :  $n = 7$  et  $p = 8$ .

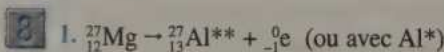
(On peut aussi s'amuser à optimiser  $\lambda = f(p)$  ou  $f(n)$ , avec  $n = p - 1$  dans la relation du 1.)

$$\frac{1}{\lambda_{\max}} = k \left( \frac{1}{7^2} - \frac{1}{8^2} \right) = k \times \frac{15}{3136} \Rightarrow \lambda_{\max} = \frac{3\,136}{15\,k} = 19\,051 \text{ nm.}$$

$$4. n = 5 \Rightarrow \frac{1}{\lambda} = k \left( \frac{1}{5^2} - \frac{1}{p^2} \right) \Rightarrow p = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{5^2} - \frac{1}{k\lambda}}}$$

$$\text{A.N. : } p = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{25} - \frac{1}{(1,0974 \times 10^7) \times (4,651 \times 10^{-6})}}} \approx 7,0001$$

On considère donc que  $p \in \mathbb{N}$  : il s'agit de la transition  $7 \rightarrow 5$ .



(1) et (2) sont des émissions  $\beta^-$ , (3) et (4) des émissions  $\gamma$ , le symbole \* désigne des noyaux excités ( $\text{Al}^{**}$  est plus excité, donc plus énergétique, que  $\text{Al}^*$ ).

$E$  est en MeV (car il s'agit de noyaux et non d'atomes).

2. Il s'agit de photons d'énergie  $\Delta E = h\nu \Rightarrow \nu = \frac{\Delta E}{h}$  ( $\Delta E$  en J).

$$\text{A.N. : } \nu_3 = \frac{(1,85 - 0,84) \times 1,60 \times 10^{-13}}{6,626 \times 10^{-34}} = 2,44 \times 10^{20} \text{ Hz ;}$$

$$\nu_2 = \frac{(0,84 - 0) \times 1,60 \times 10^{-13}}{6,626 \times 10^{-34}} = 2,03 \times 10^{20} \text{ Hz.}$$

3.  $m = 10^{-3}$  g contient  $n = \frac{m}{M}$  moles, soit  $N = n \cdot \mathcal{N}_A$  noyaux.

En ne considérant que les rayonnements (désintégrations (3) et (4)), 20 % du magnésium libère 1,85 MeV et 80 % libère 0,84 MeV (d'après le schéma de l'énoncé).

$$E(\text{rayonnement}) = \frac{m}{M} \mathcal{N}_A \times (0,2 \times 1,85 + 0,8 \times 0,84)$$

$$\begin{aligned} \text{A.N. : } E(\text{rayonnement}) &= \frac{10^{-3}}{27} \times (6,022 \times 10^{23}) \times (0,2 \times 1,85 + 0,8 \times 0,84) \\ &= 2,32 \times 10^{19} \text{ MeV} = 3,72 \text{ MJ.} \end{aligned}$$

**3** 1 MJ =  $10^6$  J et  $M({}^{27}\text{Mg}) \approx 27 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

9 • Émission de  $n$  vers  $p$ , donc  $n > p$  :  
donc  $8 \geq n > p \geq 1$  donc  $2 \leq n \leq 8$  (1)

$$\bullet E_n - E_p = \frac{h \cdot c}{\lambda} \text{ d'où } \left( -\frac{E_0}{n^2} \right) - \left( -\frac{E_0}{p^2} \right) = \frac{h \cdot c}{\lambda}$$

$$\text{soit } \frac{1}{\lambda} = \frac{E_0}{h \cdot c} \left( \frac{1}{p^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (2)$$

• Limites du rayonnement visible en (m) :  $350 \times 10^{-9} \leq \lambda \leq 750 \times 10^{-9}$ .

$$\Rightarrow \frac{1}{3,5 \times 10^{-7}} \geq \frac{1}{\lambda} \geq \frac{1}{7,5 \times 10^{-7}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3,5 \times 10^{-7}} \geq \frac{E_0}{h \cdot c} \left( \frac{1}{p^2} - \frac{1}{n^2} \right) \geq \frac{1}{7,5 \times 10^{-7}} \quad (\text{d'après (2)})$$

$$\frac{h \cdot c}{3,5 \times 10^{-7} \times E_0} + \frac{1}{n^2} \geq \frac{1}{p^2} \geq \frac{h \cdot c}{7,5 \times 10^{-7} \times E_0} + \frac{1}{n^2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{h \cdot c}{3,5 \times 10^{-7} \times E_0} + \frac{1}{n^2}}} \leq p \leq \frac{1}{\sqrt{\frac{h \cdot c}{7,5 \times 10^{-7} \times E_0} + \frac{1}{n^2}}}$$

$$= p_{\min} \qquad \qquad \qquad = p_{\max}$$

•  $p_{\min}$  est obtenu pour la plus petite valeur de  $n$  donc 2 ; et  $p_{\max}$  pour  $n_{\max} = 8$ .

$$p_{\min} = \frac{1}{\sqrt{\frac{(6,626 \times 10^{-34}) \times (3 \times 10^8)}{(3,5 \times 10^{-7}) \times (13,6 \times 1,6 \times 10^{-19})} + \frac{1}{2^2}}} \approx 1,4$$

de même, pour  $p_{\max}$  on remplace 3,5 par 7,5 et  $2^2$  par  $8^2$  dans la formule ci-dessus ; d'où  $p_{\max} \approx 2,7$ .

•  $p \in \mathbb{N}$  et  $1,4 \leq p \leq 2,7$  donc  $p = 2$

La série de Balmer correspond aux émissions vers le niveau 2 (pour l'hydrogène).

10 1.  $n = 1$  : niveau fondamental ;  $n > 1$  : niveaux excités.

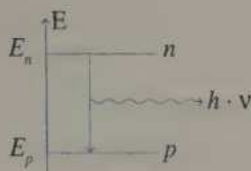
2.  $E_n$  augmente avec  $n$ , donc si  $n$  tend vers l'infini,  $E_n$  tend vers son maximum.

On peut considérer que cela correspond à « l'arrachement » de l'unique électron : **H est ionisé** ( $H \rightarrow H^+ + e^-$ ).

(En fait, on montre que le rayon de l'orbite de l'électron tend vers l'infini.)

$$3. E_{(\text{ionisé})} - E(n=1) = h \cdot \nu = \frac{h \cdot c}{\lambda} \quad \text{et} \quad E_{\text{ionisé}} = E_n (n \rightarrow \infty) = 0$$

$$\text{d'où : } 0 - \left( -\frac{E_0}{1^2} \right) = h \frac{c}{\lambda} \quad \text{soit} \quad \lambda = \frac{h \cdot c}{E_0}$$



$$\text{A.N. : } \lambda = \frac{(6,626 \times 10^{-34}) \times (3 \times 10^8)}{13,6 \times 1,6 \times 10^{-19}} \approx 91,4 \text{ nm.}$$

$$\text{Avec } n = 2 : \lambda = 2^2 \times \frac{h \cdot c}{E_0} = 365 \text{ nm.}$$

4. L'excès d'énergie met en mouvement l'électron en lui communiquant une certaine énergie cinétique.

Bilan énergétique :

$$E \text{ (avant absorption)} = E \text{ (après absorption)}$$

d'où :

$$E \text{ (photon)} + E \text{ (atome état } n = 1) = E \text{ (atome ionisé : } n \rightarrow \infty) + E_C \text{ (électron)}$$

$$\text{soit : } \frac{h \cdot c}{\lambda} + \frac{-E_0}{1^2} = 0 + \frac{1}{2} m \cdot v^2 \text{ ou } v = \sqrt{\frac{2}{m} \left( \frac{h \cdot c}{\lambda} - E_0 \right)}$$

A.N. :

$$v = \sqrt{9,11 \times 10^{-31} \times \left( \frac{(6,626 \times 10^{-34}) \times (3 \times 10^8)}{70 \times 10^{-9}} - 13,6 \times (1,6 \times 10^{-19}) \right)}$$

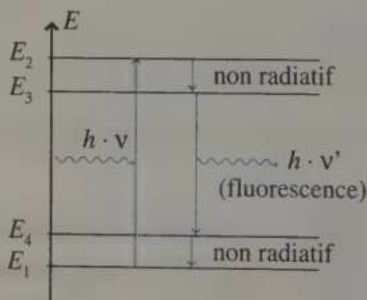
$$\approx 1,2 \times 10^6 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

$$5. I = E(n \rightarrow \infty) - E(n \rightarrow 0) = 0 - \left( -E_0 \left( \frac{Z}{n} \right)^2 \right) \text{ d'où } I = E_0 \left( \frac{Z}{n} \right)^2$$

Si  $Z$  augmente, alors  $I$  augmente : la force électrostatique que subit l'électron externe augmente, car la charge du noyau augmente avec  $Z$  ( $Q = +Z \cdot e$ ).

Il est de plus en plus difficile d'arracher un électron.

**11.** Les molécules des fibres du tee-shirt sont initialement dans l'état  $E_1$ . Elles passent à l'état  $E_2 > E_1$  en absorbant un photon U.V. de la lampe. Elles redescendent au niveau  $E_3$  par un transfert non radiatif par exemple (élévation de température des fibres), puis au niveau  $E_4$  par émission d'un photon, puis au niveau  $E_1$  par un autre transfert non radiatif.



$$\text{On a : } E_2 - E_1 > E_3 - E_4 \text{ soit } h \cdot v > h \cdot v' \text{ donc } \frac{c}{\lambda} > \frac{c}{\lambda'} \text{ d'où } \lambda' > \lambda.$$

La fluorescence a toujours lieu à une longueur d'onde plus élevée que l'excitation.

## 18

---

# L'évolution temporelle des systèmes et la mesure du temps

---

Cette partie du programme ne comporte **aucune connaissance théorique ou compétence exigible nouvelle**.

Ce chapitre est considéré comme une révision de fin d'année, autour de la mesure du temps. Il est aussi l'occasion d'ouvrir un certain nombre de débats autour de la notion de temps : nécessité ou non d'une mesure précise du temps, notion de « succession temporelle », perception psychologique du temps et temps de la physique, ... dans la mesure où le temps vous le permet avant l'examen !

## I DOMAINES À RÉVISER

### 1. Comment mesurer une durée ?

- À partir d'une décroissance radioactive (cf. chapitre 4).
- À partir de phénomènes périodiques : oscillateurs électriques entretenus (cf. chapitre 8), mouvement des astres (cf. chapitre 12), horloge à balancier (cf. chapitre 14), horloges atomiques (cf. II ci-dessous), ...

### 2. Mesurer une durée pour déterminer une longueur

- À partir de la propagation d'une onde mécanique (cf. chapitres 1 et 2).
- À partir de la propagation d'une onde lumineuse (cf. chapitre 3).
- Définition du mètre à partir de la seconde (cf. II ci-dessous).
- Le mètre et le pendule battant la seconde (cf. chapitre 14).
- Histoire de la mesure des longitudes...

### 3. Mesurer une durée pour déterminer une vitesse

- Mesure de la célérité du son (cf. chapitre 1).
- Mesure de la célérité de la lumière (cf. chapitre 3) ...

## II DÉFINITIONS DE LA SECONDE ET DU MÈTRE

### 1. Définition de la seconde

À l'origine, la seconde était définie comme la fraction  $1/86\,400$  du jour solaire moyen. La définition du « jour solaire moyen » était laissée aux astronomes, mais elle ne présentait pas toutes les garanties d'exactitude par suite des irrégularités de la rotation de la Terre.


En 1967-68 fut adoptée la définition actuelle : « La seconde est la durée de  $9\,192\,631\,770$  périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133 ( $^{133}\text{Cs}$ ) au repos, à  $0\text{ K}$ . »

### 2. Définition du mètre

Le mètre est défini à partir de la seconde : « Le mètre est la longueur du trajet parcouru dans le vide par la lumière pendant une durée de  $1/299\,792\,458$  de seconde. »

## 19

# Produire des images, observer

 Cette partie du programme nécessite une connaissance parfaite du cours : la maîtrise des constructions est un gage de réussite à l'examen !

## I FORMATION D'UNE IMAGE

### 1. Système optique quelconque

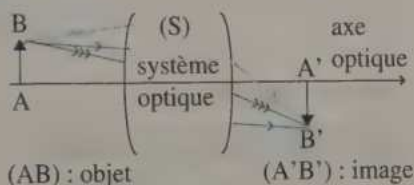
• **Construction :**

voir le schéma ci-contre.

• **Représentation :**

$$(AB) \xrightarrow{(S)} (A'B')$$

$$\text{• Grandissement : } \gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$$

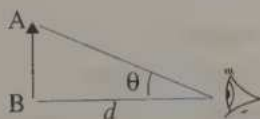


(AB) : objet

(A'B') : image

• **L'image est**  $\begin{cases} \text{agrandie } (|\gamma| > 1) \text{ ou rétrécie } (|\gamma| < 1) \\ \text{droite } (\gamma > 0) \text{ ou renversée } (\gamma < 0) \end{cases}$

• **Diamètre apparent :** angle  $\theta$  maximal sous lequel l'œil voit un objet (AB). Si l'objet est à distance finie, alors  $d = d_m$  (distance minimale de mise au point correspondant au *punctum proximum* ;  $d_m = 0,25$  m pour un œil normal).



• **Objet à l'infini :** les rayons incidents ( $A_\infty, B_\infty, \dots$ ) sont parallèles.

• **Image à l'infini :** les rayons émergents ( $A'_\infty, B'_\infty, \dots$ ) sont parallèles.

• **Cercle oculaire** (pour les instruments d'optique ayant un diaphragme d'entrée) : c'est le disque perpendiculaire à l'axe, situé après le système optique, dont la densité d'éclairage est maximale (donc l'endroit où il est souhaitable de placer l'œil). Il correspond à l'image du diaphragme d'entrée.

• **Conditions de Gauss** (conditions permettant d'obtenir une image nette et non déformée) : les rayons incidents sont peu inclinés par rapport à l'axe optique et ne traversent que la partie du système optique proche de l'axe.

## 2. Lentille convergente

### • Modélisation :

O : centre optique ;

F : foyer objet ;

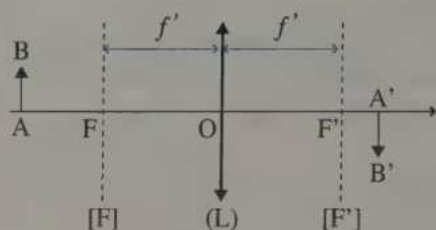
[F] plan focal objet ;

F' : foyer image ;

[F'] plan focal image ;

$f' = OF = OF'$  : distance focale (en m) ;

$C = \frac{1}{f'}$  : vergence (en dioptrie,  $\delta$ ).



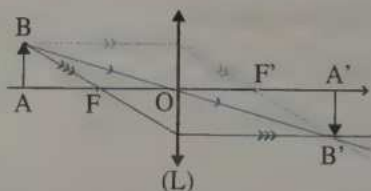
### • Formules :

de conjugaison  $\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{f'}$  et du grandissement  $\gamma = \frac{A'B'}{AB} = \frac{OA'}{OA}$

### • Rayons remarquables :

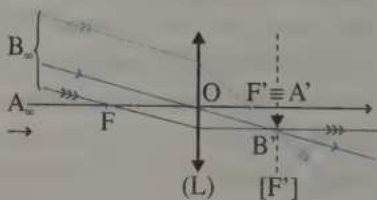
#### Règle Rayon incident Rayon émergent

- (a) parallèle à l'axe passe par F'
- (b) passe par F parallèle à l'axe
- (c) passe par O même direction



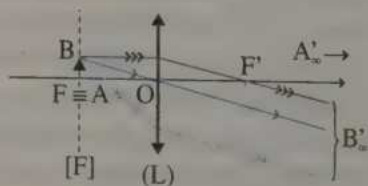
### • Règle (d) :

Un objet à l'infini ( $A_\infty B_\infty$ ) a une image dans le plan focal image [F']  $\Leftrightarrow$  Des rayons incidents parallèles émergent en se croisant dans le plan focal image.



### • Règle (e) :

Un objet dans le plan focal objet [F] a une image à l'infini ( $A'_\infty B'_\infty$ )  $\Leftrightarrow$  Des rayons incidents se croisant dans le plan focal objet émergent parallèlement.



### 3. Miroir sphérique convergent (concave)

#### • Modélisation :

C : centre du miroir sphérique ;

S : sommet du miroir sphérique ;

F  $\equiv$  F' : foyer (objet ou image) ;

[F]  $\equiv$  [F'] (plan focal objet ou image) ;

$f$  distance focale (en m) ;

$R$  rayon du miroir sphérique (en m) ;

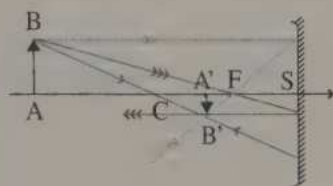
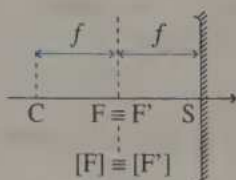
$C$  vergence (en dioptrie,  $\delta$ ) ;

$$f = CF = FS = \frac{SC}{2} = \frac{R}{2} \quad \text{et} \quad C = \frac{1}{f}$$

#### • Rayons remarquables :

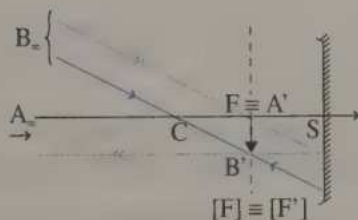
##### Règle Rayon incident Rayon émergent

- |   |                   |                     |
|---|-------------------|---------------------|
| Ⓐ | parallèle à l'axe | ↳ passe par F       |
| Ⓑ | ↳ passe par F     | ↳ parallèle à l'axe |
| Ⓒ | ↳ passe par C     | ↳ même direction    |



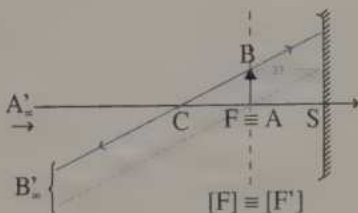
#### • Règle Ⓐ :

Un objet à l'infini ( $A_{\infty}B_{\infty}$ ) a une image dans le plan focal [F]  $\equiv$  [F']  $\Leftrightarrow$  Des rayons incidents parallèles sont réfléchis en se croisant dans le plan focal image.



#### • Règle Ⓑ :

Un objet dans le plan focal [F]  $\equiv$  [F'] a une image à l'infini ( $A'_{\infty}B'_{\infty}$ )  $\Leftrightarrow$  Des rayons incidents se croisant dans le plan focal sont réfléchis parallèlement.

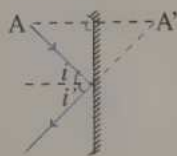


### 4. Miroir plan (rappel)

• Un objet A et son image A' sont symétriques par rapport au plan du miroir.

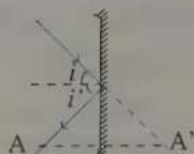
#### • Règle Ⓕ :

Un faisceau incident passant par A est réfléchi en un faisceau dont le prolongement passe par A' (ce qui revient à appliquer la loi sur la réflexion).



• Règle (g) :

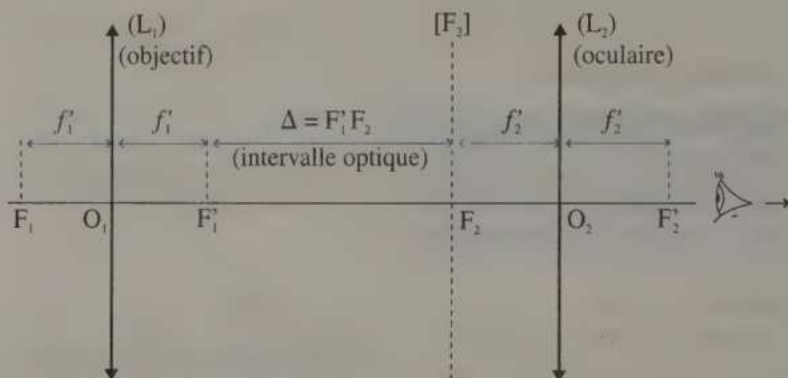
Réciproquement, un faisceau incident qui passerait par  $A'$  sans miroir est réfléchi en un faisceau qui passe par  $A$ .



## II QUELQUES INSTRUMENTS D'OPTIQUE

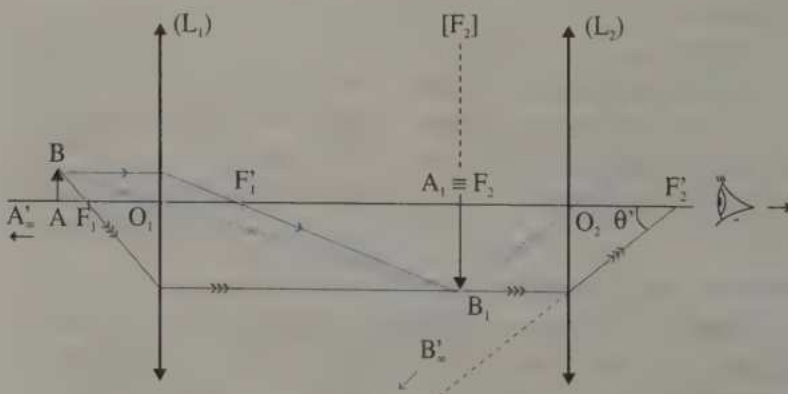
### 1. Le microscope

• Modélisation :



Il faut y ajouter le condenseur situé avant  $(L_1)$ , miroir sphérique qui permet de concentrer la lumière pour mieux éclairer l'objet à observer.

• Construction graphique (pour un œil normal, sans accommodation) :



$$\bullet (AB) \xrightarrow{(L_1)} (A_1B_1) \xrightarrow{(L_2)} (A'B') \\ [F_2] \quad \infty$$

- **Grandissement et grossissements :**

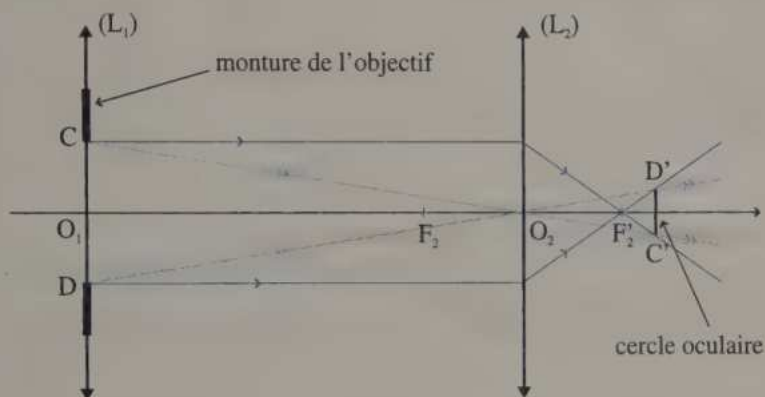
Grandissement de l'objectif :  $|\gamma_1| = \frac{\Delta}{f_1}$ .

Grossissement standard de l'oculaire :  $G_2 = \frac{d_m}{f_2} = \frac{0,25}{f_2} = \frac{1}{4f_2}$

Grossissement standard du microscope :

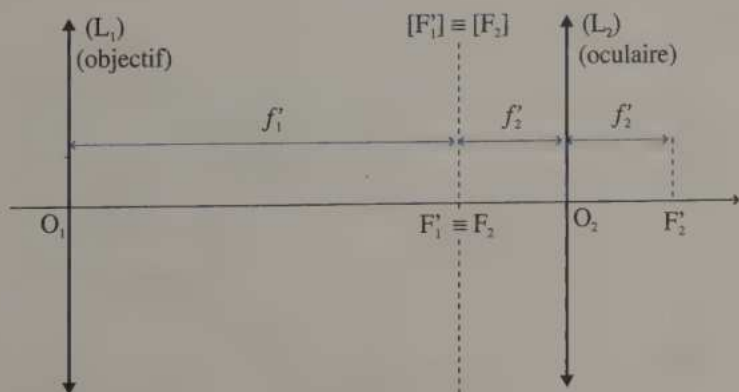
$G = \frac{\theta'}{\theta} = |\gamma_1| \cdot G_2 = \frac{\Delta}{4f_1 f_2}$  ( $\theta$  est le diamètre apparent).

- **Cercle oculaire** (on aurait pu aussi tracer les rayons  $CF_2$  et  $DF_2$  qui émergent de  $(L_2)$  parallèlement à l'axe, en passant respectivement par  $C'$  et  $D'$ ) :

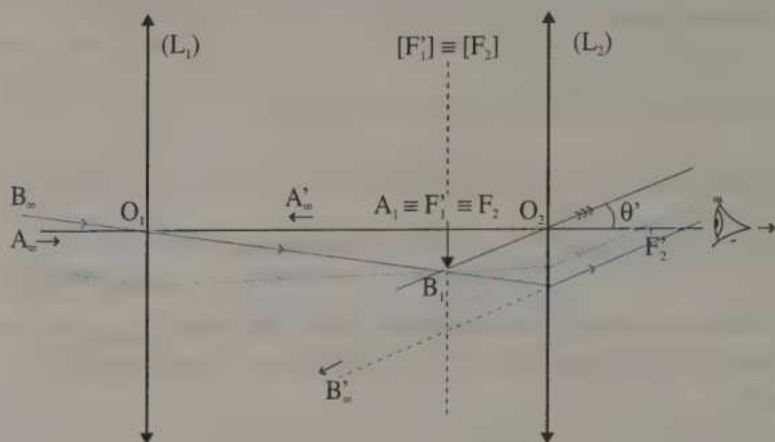


## 2. La lunette astronomique (afocale)

- **Modélisation :**



- Construction graphique (pour un œil normal, sans accommodation) :



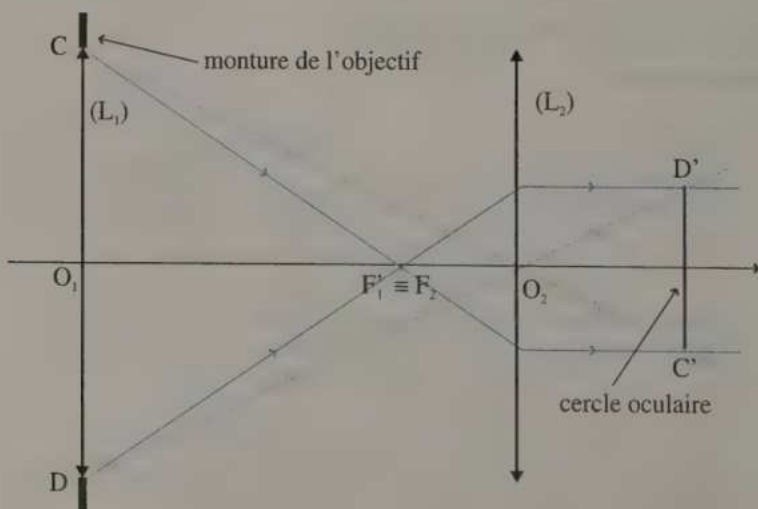
$$\bullet (AB) \xrightarrow{(L_1)} (A_1 B_1) \xrightarrow{(L_2)} (A' B')$$

$$\infty \quad [F'_1] \equiv [F_2] \quad \infty$$

- Grossissement standard de la lunette afocale :

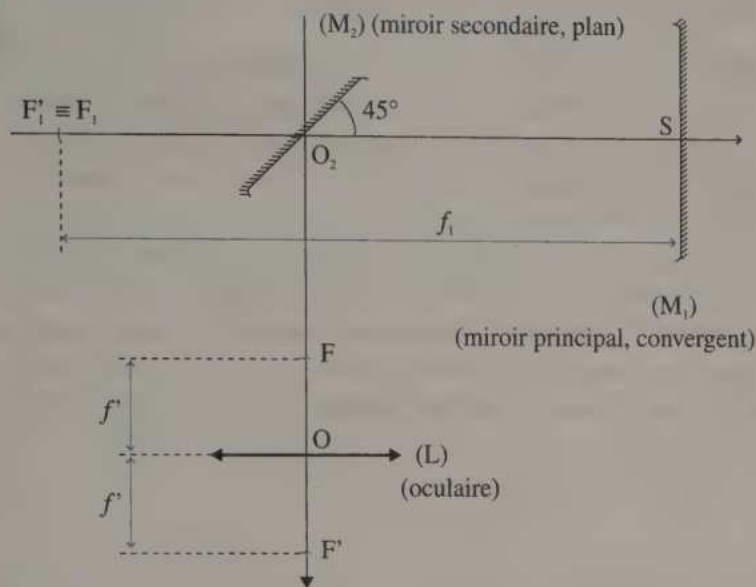
$$G = \frac{\theta'}{\theta} = \frac{f'_1}{f_2} \quad (\theta \text{ diamètre apparent}).$$

- Cercle oculaire :



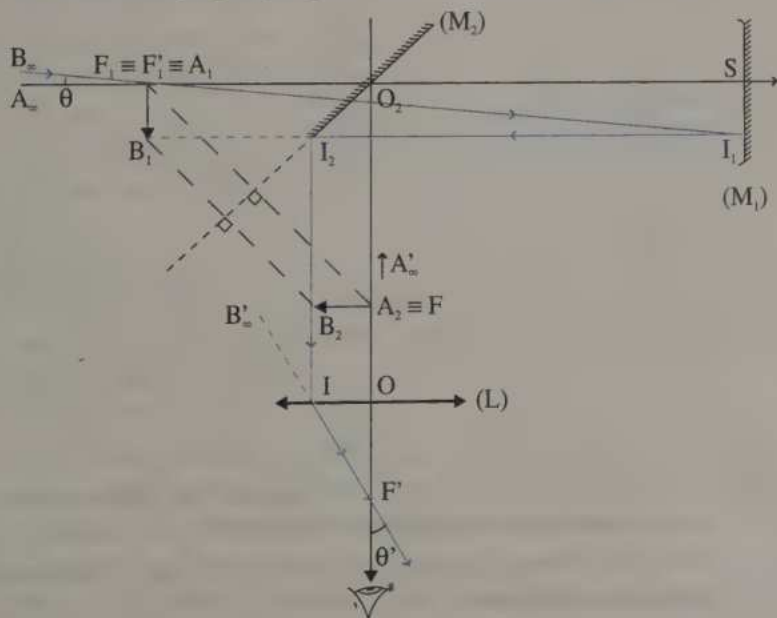
### 3. Le télescope de Newton (afocal)

#### • Modélisation :



• Télescope afocal, donc  $OO_2 + O_2S = f_1 + f'$

• Construction graphique (pour un œil normal, sans accommodation) :



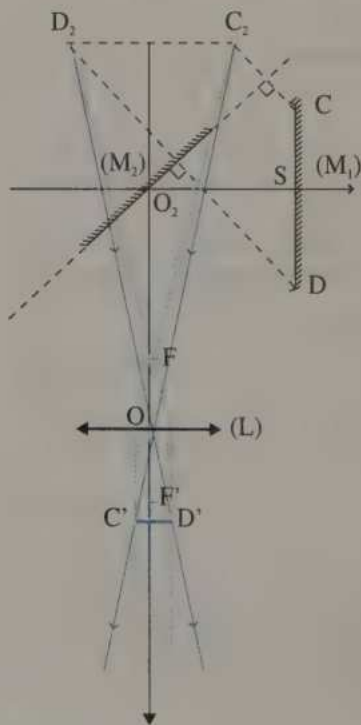
Les rayons incidents passent bien évidemment au-dessus ou en dessous de  $(M_2)$ , mais le rayon tracé  $(B_\infty)$  est celui qui permet la construction la plus claire (pour les autres, voir l'exercice 8).

$$\bullet (AB) \xrightarrow{(M_1)} A_1B_1 \xrightarrow{(M_2)} A_2B_2 \xrightarrow{(L)} A'B' \\ \infty \quad [F'_1] \equiv [F_1] \quad [F] \quad \infty$$

• **Grossissement standard du télescope :**

$$G = \frac{\theta'}{\theta} = \frac{f_1}{f'} \quad (\theta \text{ diamètre apparent}).$$

• **Cercle oculaire :** On commence par tracer l'image  $C_2D_2$  par le miroir secondaire  $(M_2)$  des bords CD du miroir principal  $(M_1)$  (sans prendre en compte les arrondis de la schématisation). Là aussi, d'autres constructions utilisant d'autres rayons sont possibles :



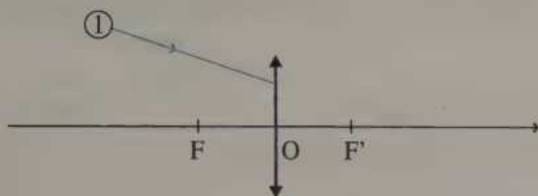
- En général, afin de simplifier les problèmes, les ordres de grandeurs ne correspondent pas à ceux de la réalité.
- Les calculs sont effectués en cm, sauf cas particuliers (calculs de vergences, par exemple).

## EXERCICES D'APPLICATION

**1** TRACÉ DE RAYON POUR UNE LENTILLE \* (10 min) ► P. 285

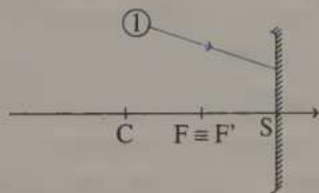
Compléter le tracé du rayon ① :

- en utilisant des rayons parallèles à ① (deux méthodes) ;
- en utilisant des rayons coupant ① dans le plan focal objet (deux méthodes) ;
- en envisageant un objet fictif, judicieusement choisi, et son image.

**2** TRACÉ DE RAYON POUR UN MIROIR \* (10 min) ► P. 286

Compléter le tracé du rayon ① :

- en utilisant des rayons parallèles à ① (deux méthodes) ;
- en utilisant des rayons coupant ① dans le plan focal objet (deux méthodes) ;
- en envisageant un objet fictif, judicieusement choisi, et son image.

**3** LENTILLE SIMPLE \* (10 min) ► P. 287

Un objet (AB) de taille 1,0 cm est placé 5,0 cm avant le centre optique O d'une lentille convergente, de distance focale 2,0 cm ((AB) est perpendiculaire à l'axe optique).

- Calculer la vergence de la lentille et préciser son unité.
- Construire l'image (A'B') de (AB) en utilisant les trois rayons « classiques ». Mesurer alors  $\overline{A'B'}$  et  $\overline{OA'}$ .
- Retrouver  $\overline{OA'}$  et  $\overline{AB}$  par le calcul.
- Calculer le grandissement  $\gamma$ . Que peut-on dire de l'image ?
- Nommer et rappeler les conditions d'utilisation des formules précédentes.

## 4 MIROIR SPHÉRIQUE SIMPLE

\* (10 min) ► P. 287

Répondre aux questions de l'exercice précédent pour un miroir sphérique concave, le centre  $O$  étant remplacé par le centre  $C$  du miroir sphérique et  $f'$  étant remplacée par  $f$ .

Pour la question 3., on donne la relation de conjugaison pour ce miroir :

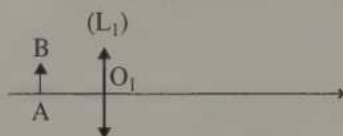
$$\frac{1}{CA'} + \frac{1}{CA} = \frac{1}{f} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}}$$

## EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

## 5 MICROSCOPE : LE CLASSIQUE (1)

\*\* (30 min) ► P. 288

Un objet  $(AB)$  est observé au microscope :



Données :  $f_1 = 4,0$  cm ;  $f_2 = 5,0$  cm ;  $\Delta$  est l'intervalle optique,  $\Delta = 16,0$  cm ;  $\overline{AB} = 2,0$  mm.

$A$  est situé 5,0 cm avant  $O_1$ .

On utilise les notations :  $(AB) \xrightarrow{(L_1)} (A_1B_1) \xrightarrow{(L_2)} (A'B')$

- Schématiser le microscope sans considération d'échelle. Indiquer les points et les distances caractéristiques.
- Calculer  $\overline{O_1A_1}$ ,  $\overline{A_1B_1}$  et  $\gamma_1$  (grandissement de la première lentille), puis caractériser l'image  $(A_1B_1)$ .
- Calculer  $\overline{O_2A_1}$  et en déduire la position de  $(A'B')$ .
- Construire  $(A'B')$  en partant de  $(AB)$  sans utiliser les résultats précédents (pour plus de clarté, les tailles de  $(AB)$ ,  $(A_1B_1)$  et  $(A'B')$  seront multipliées par 10).
- Calculer  $\theta'$  (angle sous lequel est vu  $(A'B')$  par un œil normal situé en  $F_2'$ ) et  $\theta$  (diamètre apparent de l'objet) en prenant  $d_m = 0,25$  m ainsi que  $G = \frac{\theta'}{\theta}$  le grossissement.
- Le diamètre de l'objectif est  $(CD)$  :  $CD = 3,0$  mm.  
Calculer la position et le diamètre du cercle oculaire. Préciser son intérêt et le construire (sans considération d'échelle).

**6 MICROSCOPE MAL RÉGLÉ** \*\* (15 min) ► P. 290

On reprend le microscope de l'exercice précédent, le même objet, qui est situé maintenant 6,0 cm avant  $O_1$ , et les mêmes notations.

- Calculer  $\overline{O_1A_1}$ ,  $\overline{A_1B_1}$ ,  $\overline{O_2A_1}$ ,  $\overline{O_2A'}$  et  $\overline{A'B'}$ , puis conclure.
- Construire ( $A'B'$ ) (comme à l'exercice précédent, les objets et images seront 10 fois plus grands).

On pourra aussi choisir une autre échelle (1:2 par exemple).

**7 LUNETTE ASTRONOMIQUE : LE CLASSIQUE (2)** \*\* (30 min) ► P. 291

Un objet ( $AB$ ) à l'infini est observé sous un angle  $\theta = 2,0^\circ$  avec une lunette astronomique **afocale**.

Données :  $f'_1 = 40,0$  cm et  $f'_2 = 10,0$  cm.

On utilise les notations :  $(AB) \xrightarrow{(L_1)} (A_1B_1) \xrightarrow{(L_2)} (A'B')$

- Quelle est la caractéristique d'une lunette afocale ?
- Schématiser la lunette sans considération d'échelle. Indiquer les points et les distances caractéristiques.
- Calculer  $\overline{O_1A_1}$  et  $\overline{A_1B_1}$ .
- En déduire la position de ( $A'B'$ ).
- Construire ( $A'B'$ ) en partant de ( $AB$ ) sans utiliser les résultats précédents (pour plus de clarté, les angles seront différents des valeurs précédentes, seul le rapport  $f'_1/f'_2 = 4$  sera respecté).
- Calculer  $\theta'$  (angle sous lequel est vu ( $A'B'$ ) par un œil normal situé en  $F'_2$ ) et  $G = \frac{\theta'}{\theta}$  le grossissement.
- Le diamètre de l'objectif est ( $CD$ ) :  $CD = 5,0$  cm.  
Calculer la position et le diamètre du cercle oculaire. Préciser son intérêt, et le construire (sans considération d'échelle).

**8 TÉLESCOPE DE NEWTON : LE CLASSIQUE (3)** \*\* (30 min) ► P. 292

Un objet ( $AB$ ) à l'infini est observé sous un angle  $\theta = 2,0^\circ$  avec un télescope de Newton **afocal**.

Données :  $f_1 = 60$  cm ;  $f' = 6,0$  cm ;  $O_2S = 50$  cm.

On utilise les notations :  $(AB) \xrightarrow{(M_1)} (A_1B_1) \xrightarrow{(M_2)} (A_2B_2) \xrightarrow{(L)} (A'B')$

- Quelle est la caractéristique d'un télescope afocal ?
- Schématiser ce télescope, sans considération d'échelle. Indiquer les points et les distances caractéristiques.
- Calculer  $\overline{SA_1}$  et  $\overline{A_1B_1}$ .

4. En déduire la position de (A'B').
5. Construire (A'B') en partant de (AB) sans utiliser les résultats précédents (pour plus de clarté, les valeurs des angles seront différentes des valeurs précédentes).
6. Calculer  $\theta'$  (angle sous lequel est vu (A'B')) par un œil normal situé en  $F_2'$  et  $G = \frac{\theta'}{\theta}$  le grossissement.
7. Le diamètre de l'objectif est (CD) :  $CD = 12$  cm.  
Calculer la position et le diamètre du cercle oculaire. Préciser son intérêt et le construire (sans considération d'échelle).
8. Donner le rayon et la vergence du premier miroir.

### 9 ŒIL MYOPE ET LUNETTE FOCALE \*\* (5 min) ► P. 293


Un œil myope ne peut accommoder pour une image à l'infini, mais peut accommoder jusqu'à une distance  $d_m < 25$  cm (par exemple, il verra nettement une image si elle est située à une distance comprise entre 13 cm et 50 cm de son centre optique).

Que peut-on dire d'un œil myope qui regarde dans l'oculaire d'une lentille afocale, sans correction (c'est-à-dire sans lunette de vue ni lentille de contact) ?

### 10 LATITUDE DE MISE AU POINT \*\*\* (30 min) ► P. 293

La latitude de mise au point pour un microscope est la distance qui sépare les deux positions extrêmes où peut être placé un objet pour que son image soit nette.

Calculer cette latitude pour un microscope caractérisé par  $f_1' = 1,0$  cm,  $\Delta = 18,0$  cm,  $f_2' = 5,0$  cm, utilisé par un œil emmétrope (ou œil normal) qui peut voir une image nette de  $d_m = 25,0$  cm (punctum proximum) à l'infini (punctum remotum). Conclure.

 Les calculs peuvent être effectués au fur et à mesure.

### 11 OBSERVATION D'UNE ÉTOILE \*\*\* (10 min) ► P. 294

Une étoile de dimension caractéristique  $5 \times 10^6$  km, située à 10,3 a.l. (année-lumière) de la Terre, est observée à l'aide d'une lunette afocale ( $f_1' = 15,0$  m et  $f_2' = 4,0$  cm).

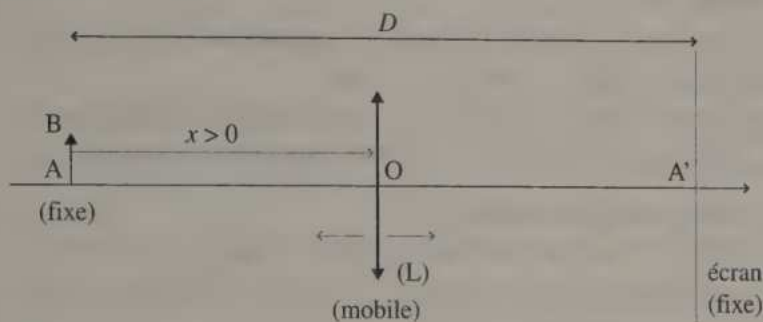
Sachant que le pouvoir séparateur d'un œil normal (angle minimal permettant de distinguer deux objets séparés par cet angle d'observation) est  $\varepsilon \approx 3 \times 10^{-4}$  rad, peut-on observer les détails de cette étoile ?

Quel est l'intérêt de cette lunette ?

## EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

**12 FOCOMÉTRIE : MÉTHODE DE BESSEL** \*\*\* (15 min) ► P. 294

Un objet lumineux (AB) forme une image à travers une lentille (L), de distance focale  $f'$ , qui se projette sur un écran distant de  $D$ .



1. Établir l'équation du second degré que vérifie  $x$ , en fonction de  $D$  et  $f'$ .
2. Exprimer en fonction de  $f'$ , la valeur minimale de  $D$ , notée  $D_{\min}$ , qui permet d'obtenir une image nette sur l'écran.
3.  $D$  étant fixée, on déplace la lentille de  $x = 0$  à  $x = D$ . Pour deux valeurs de  $x$ , notées  $x_1$  et  $x_2$ , on observe une image nette sur l'écran. En déduire l'expression de  $f'$  en fonction de  $D$  et de  $d = x_2 - x_1$  (on posera  $x_2 \geq x_1$ ).
4. Application numérique : calculer  $f'$  pour  $x_1 = 0,300$  cm,  $x_2 = 0,700$  cm et  $D = 1,00$  m.

**13 CHAMP D'UNE LUNETTE** \*\*\* (10 min) ► P. 295

Le champ  $a$  d'une lunette afocale est la taille maximale (perpendiculairement à l'axe optique) de l'objet qui peut être observé entièrement, l'objet étant situé à la distance  $d$  de l'objectif. Le champ est en général limité par la dimension de l'oculaire (de rayon  $r$ ).

1. Montrer que plus le grossissement  $G$  est important, plus le champ est faible pour  $f'_2$  fixée (on exprimera  $a$  en fonction de  $G$ ,  $r$ ,  $d$  et  $f'_2$ ).
2. Calculer  $a$  pour  $d = 10$  km,  $G = 300$ ,  $r = 4,0$  mm et  $f'_2 = 2,0$  cm.
3. Effectuer de nouveau ce calcul pour  $G = 100$ .

**14 FORMULES DES LENTILLES ET MIROIRS** \*\*\* (30 min) ► P. 295**1. Lentille convergente**

Un objet (AB) est situé avant le foyer objet d'une lentille convergente et a pour image (A'B').

a. Tracer la marche du rayon ① issu de A et passant par O (centre optique), puis la marche du rayon ② issu de A et parallèle à l'axe afin d'obtenir (A'B').

b. En utilisant le rayon ①, exprimer le grandissement  $\gamma$  en fonction de  $\overline{OA'}$  et  $\overline{OA}$  (utiliser le théorème de Thalès).

c. En utilisant le rayon ② et la question précédente, en déduire la relation de conjugaison reliant  $\overline{OA'}$ ,  $\overline{OA}$  et  $f'$  (utiliser le théorème de Thalès).

**2. Miroir sphérique concave**

Procéder de même avec un miroir sphérique concave, le point O étant remplacé par le centre C du miroir, et  $f'$  par  $f = \frac{R}{2}$  (R est le rayon du miroir).

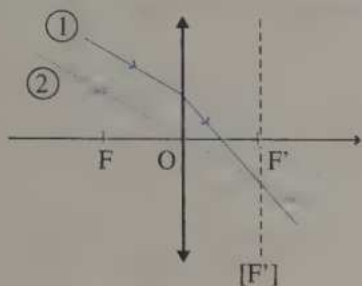
**15 OPTIMISATION D'UN TÉLESCOPE** \*\*\* (20 min) ► P. 297

Dans cet exercice, on se réfère aux figures du cours relatives au télescope (paragraphe II 3.).

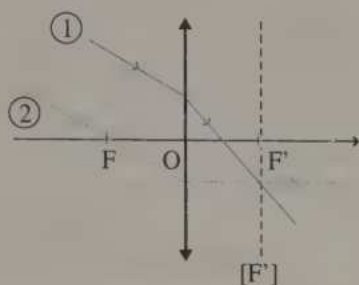
- Démontrer que, pour un télescope afocal :  $OO_2 + O_2S = f' + f_1$ .
- Expliquer pourquoi  $OO_2$  doit être supérieure à une certaine distance, que l'on explicitera.
- Exprimer pourquoi  $F_1O_2$  doit être la plus faible possible.
- Commenter, très simplement, les conditions énoncées dans les questions 2. et 3., pour les grands télescopes, pour lesquels  $f' \ll f_1$ .

## CORRIGÉS

- 1 a.** On trace un rayon ② parallèle au rayon ① étudié dont le chemin est connu (règle (b) ou (c)). Sachant que ① et ② se coupent dans le plan focal image  $[F']$  (règle (d)), on complète ① :

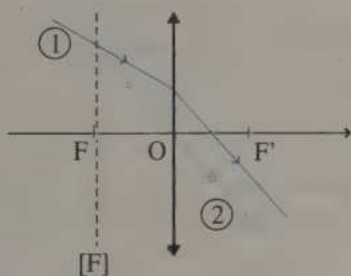


Règles (c) et (d)

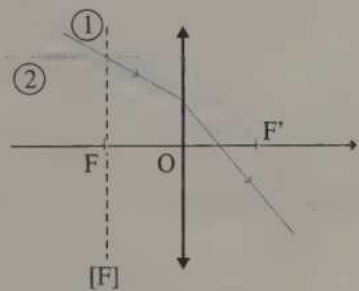


Règles (b) et (d)

- b.** On trace un rayon ②, qui coupe le rayon étudié ① dans le plan focal objet  $[F]$ , dont le chemin est connu (règle (a) ou (c)). Sachant que ① et ② sont parallèles après la lentille (règle (e)), on complète ① :

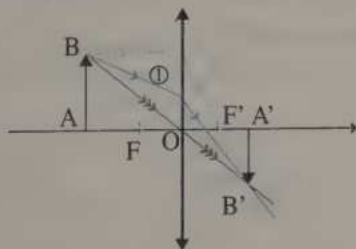


Règles (c) et (e)



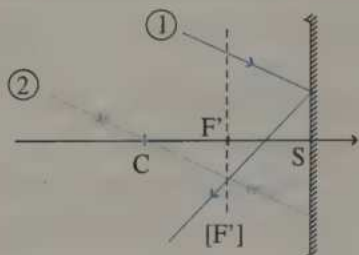
Règles (a) et (e)

- c.** On imagine un objet  $(AB)$  dont l'extrémité  $B$  est traversée par ① ; on construit l'image  $(A'B')$  de  $(AB)$  (règles (a), (b), (c)) et on complète ① sachant qu'il passe aussi par  $B'$ .

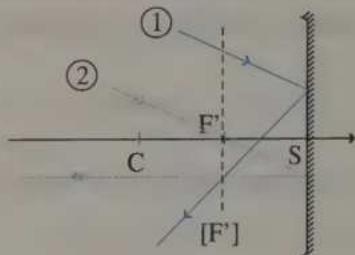


**2** Pour un miroir sphérique,  $F \equiv F'$ .

a. On trace un rayon ② parallèle au rayon ① étudié dont le chemin est connu (règle (b) ou (c)). Sachant que ① et ② se coupent dans le plan focal image  $[F']$  (règle (d)), on complète ① :

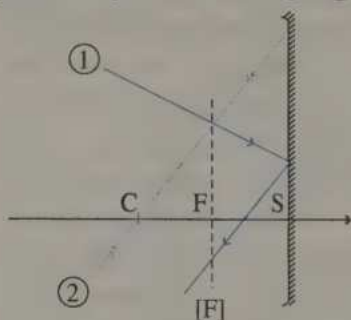


Règles (c) et (d)

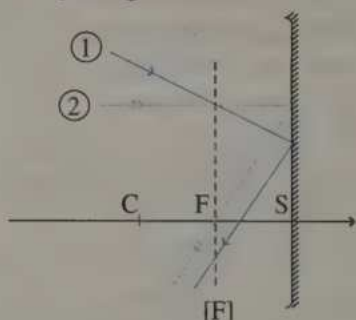


Règles (b) et (d)

b. On trace un rayon ②, qui coupe le rayon ① dans le plan focal objet  $[F]$ , dont le chemin est connu (règle (a) ou (c)). Sachant que ① et ② sont parallèles après le miroir (règle (e)), on complète ① :

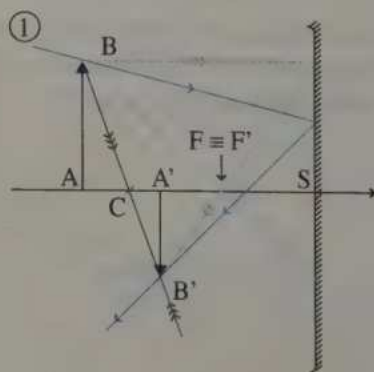


Règles (c) et (e)



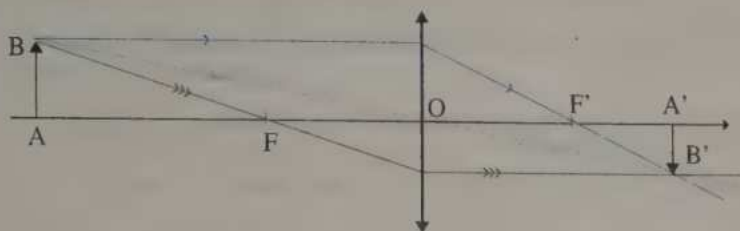
Règles (a) et (e)

c. On imagine un objet (AB) dont l'extrémité B est traversée par ① ; on construit l'image (A'B') de (AB) (règles (a), (b) et (c)) et on complète ① sachant qu'il passe aussi par B'.



$$3 \quad 1. C = \frac{1}{f'} = \frac{1}{2 \times 10^{-2}} = 50 \delta \quad (\delta : \text{dioptrie})$$

2. Règles (a), (b) et (c), avec  $AO = 5,0 \text{ cm}$ ;  $FO = 2,0 \text{ cm}$ ;  $AB = 1,0 \text{ cm}$ .



On lit  $\overline{OA'} \approx +3,3 \text{ cm}$  et  $\overline{A'B'} \approx 0,7 \text{ cm}$ .

$$3. \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \quad \text{soit} \quad \frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{f'} + \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{\overline{OA} + f'}{\overline{OA} \times f'}$$

$$\text{d'où : } \overline{OA'} = \frac{\overline{OA} \times f'}{\overline{OA} + f'}$$

$$\text{A.N. : } \overline{OA'} = \frac{(-5) \times (2)}{-5 + 2} = \frac{10}{3} \approx 3,3 \text{ cm.}$$

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{f'}{\overline{OA} + f'}$$

$$\text{d'après ce qui précède, soit } \overline{A'B'} = \overline{AB} \times \frac{f'}{\overline{OA} + f'}$$

$$\text{A.N. : } \overline{A'B'} = 1 \times \frac{2}{-5 + 2} = -\frac{2}{3} \approx -0,67 \text{ cm.}$$

Tous les calculs sont effectués en cm, donc les résultats sont en cm, SAUF les calculs de vergence (car  $1 \delta = 1 \text{ m}^{-1}$ ).

$$4. \gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} \quad \text{ou} \quad \gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$$

$$\text{A.N. : } \gamma = -\frac{2}{3} = -0,67.$$

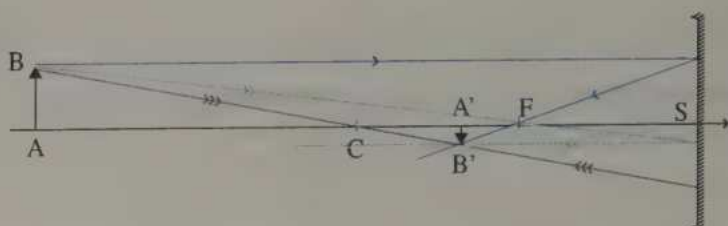
$\gamma < 0$ , donc l'image est **renversée**, et  $|\gamma| < 1$ , donc l'image est **plus petite** que l'objet : on le voit sur la construction.

5. **Conditions de Gauss** : les rayons font un angle faible par rapport à l'axe optique et ne traversent que la partie proche de l'axe du système optique.

$$4 \quad 1. C = \frac{1}{f} = \frac{1}{2 \times 10^{-2}} = 50 \delta \quad (\delta : \text{dioptrie})$$

2. Règles (a), (b) et (c), avec  $AC = 5,0 \text{ cm}$ ;  $f = FS = 2,0 \text{ cm}$  ( $= CF$ );

$AB = 1,0 \text{ cm}$ .



On mesure  $CA' \approx 1,4$  cm et  $A'B' \approx 0,3$  cm.

3. Comme à l'exercice précédent :  $\frac{1}{CA'} + \frac{1}{CA} = \frac{1}{f}$

donc  $\overline{CA'} = \frac{\overline{CA} \times f}{CA - f}$  et  $\overline{A'B'} = \overline{AB} \times \frac{\overline{CA'}}{CA} = \frac{f}{CA - f} \times \overline{AB}$ .

A.N. :  $\overline{CA'} = \frac{(-5) \times (2)}{(-5) - (2)} = +\frac{10}{7} \approx 1,43$  cm

et  $\overline{A'B'} = \frac{2}{(-5) - (2)} \times (1) = -\frac{2}{7} \approx -0,29$  cm.

4.  $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$  ou  $\frac{\overline{CA'}}{CA}$

A.N. :  $\gamma = -\frac{2}{7} = -0,29$ .

$\gamma < 0$  et  $|\gamma| < 1$  : l'image est renversée et réduite.

5. Cf. exercice 3., question 5.

**5** 1. Voir le cours, paragraphe II 1. : Modélisation.

2. Relation de conjugaison :  $\frac{1}{O_1A_1} - \frac{1}{O_1A} = \frac{1}{f'_1}$

soit  $\frac{1}{O_1A_1} = \frac{1}{O_1A} + \frac{1}{f'_1} = \frac{\overline{O_1A} + f'_1}{\overline{O_1A} \times f'_1}$  et  $\overline{O_1A_1} = \frac{\overline{O_1A} \times f'_1}{\overline{O_1A} + f'_1}$

A.N. :  $\overline{O_1A_1} = \frac{(-5) \times 4}{-5 + 4} = 20$  cm.

$\gamma_1 = \frac{\overline{O_1A_1}}{\overline{O_1A}}$

A.N. :  $\gamma_1 = \frac{20}{-5} = -4,0$ .

$\overline{A_1B_1} = \gamma_1 \times \overline{AB}$

A.N. :  $\overline{A_1B_1} = 4 \times 0,2 = 0,80$  cm.

$\gamma_1 < 0$  et  $|\gamma_1| > 1$  : l'image est renversée et agrandie.

$$3. \overline{O_2 A_1} = \overline{O_2 F_2} + \overline{F_2 F_1} + \overline{F_1 O_1} + \overline{O_1 A_1}$$

$$\text{soit } \overline{O_2 A_1} = -f_2' - \Delta - f_1' + \overline{O_1 A_1}.$$

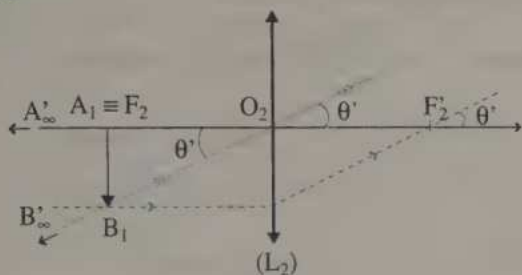
$$\text{A.N. : } \overline{O_2 A_1} = -5 - 16 - 4 + 20 = -5 \text{ cm.}$$

$\overline{O_2 A_1} = -f_2'$  donc  $A_1 \in [F_2]$  (plan focal objet de  $(L_2)$ ), donc l'image de  $(A_1 B_1)$  par  $(L_2)$  est à l'infini :  $(A'_\infty B'_\infty)$ .

4. Voir le cours, paragraphe II 1. : Construction graphique.

On a  $A_1 O_1 = 5 \text{ cm}$ ,  $F_1 O_1 = O_1 F_1' = 4 \text{ cm}$ ,  $F_1' F_2 = 16 \text{ cm}$ ,  $F_2 O_2 = O_2 F_2' = 5 \text{ cm}$  et, pour les objets et images (taille  $\times 10$  pour la lisibilité),  $AB = 2 \text{ cm}$  et  $A_1 B_1 = 8 \text{ cm}$ .

5.



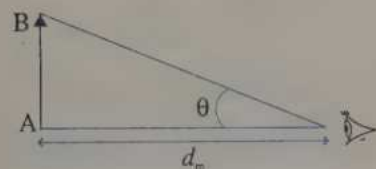
$$\theta' \approx \tan \theta'$$

$$= \frac{A_1 B_1}{O_2 A_1}$$

$$= \frac{A_1 B_1}{f_2'}$$

$$\text{A.N. : } \theta' \approx \frac{0,8}{5}$$

$$= 0,16 \text{ rad.}$$



$$\theta \approx \tan \theta = \frac{AB}{d_m}$$

$$\text{A.N. : } \theta \approx \frac{0,2}{25} = 8,0 \times 10^{-3} \text{ rad.}$$

$$G = \frac{\theta'}{\theta} = \frac{0,16}{8,0 \times 10^{-3}} = 20.$$

6. Construction : Voir le cours, paragraphe II 1. : Cercle oculaire.

Relation de conjugaison (pour  $(L_2)$ ) : soit  $I \equiv O_1$  le milieu de  $[CD]$ , qui a pour image  $I'$  le milieu de  $[C'D']$  :

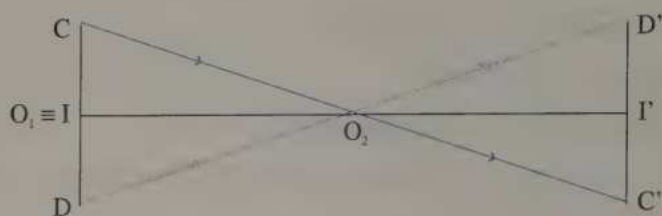
$$\frac{1}{O_2 I'} - \frac{1}{O_2 I} = \frac{1}{f_2'} \quad \text{soit} \quad \overline{O_2 I'} = \frac{\overline{O_2 I} \times f_2'}{\overline{O_2 I} + f_2'}$$

$$\text{avec } \overline{O_2 I} = \overline{O_2 F_2} + \overline{F_2 F_1} + \overline{F_1 O_1} = -(f_2' + \Delta + f_1')$$

$$\text{A.N. : } \overline{O_2 I'} = -\frac{(-25) \times 5}{-25 + 5} = 6,25 \text{ cm.}$$

**Le cercle oculaire est situé à 6,25 cm à droite de  $O_2$ .**

Pour calculer le diamètre du cercle oculaire, on peut utiliser  $\gamma_2$  avec  $\overline{O_2 I}$  et  $\overline{O_2 I'}$ . Mais il est plus rapide d'utiliser le théorème de Thalès (ce qui revient au même au niveau des calculs).



$$C'D' = 2 C'I' = 2 \frac{O_2 I'}{O_2 I} \times CI = \frac{O_2 I'}{O_2 I} \times CD$$

$$\text{A.N. : } C'D' = \frac{6,25}{25} \times 0,3 = 7,5 \times 10^{-2} \text{ cm.}$$

C'est le disque où l'intensité lumineuse est maximale.

6 1.  $\overline{O_1 A_1}$  : Même formule :  $\overline{O_1 A_1} = \frac{\overline{O_1 A} \times f'_1}{\overline{O_1 A} + f'_1} = \frac{-6 \times 4}{-6 + 4} = 12,0 \text{ cm.}$

$$\overline{A_1 B_1} : \text{Même formule : } \overline{A_1 B_1} = \frac{\overline{O_1 A_1}}{\overline{O_1 A}} \times \overline{AB} = \frac{12}{-6} \times 0,2 = -0,40 \text{ cm.}$$

$\overline{O_2 A_1}$  : Même formule :

$$\overline{O_2 A_1} = -f'_2 - \Delta - f'_1 + \overline{O_1 A_1} = -5 - 16 - 4 + 12 = -13,0 \text{ cm.}$$

$$\overline{O_2 A'} : \frac{1}{\overline{O_2 A'}} - \frac{1}{\overline{O_2 A_1}} = \frac{1}{f'_2}$$

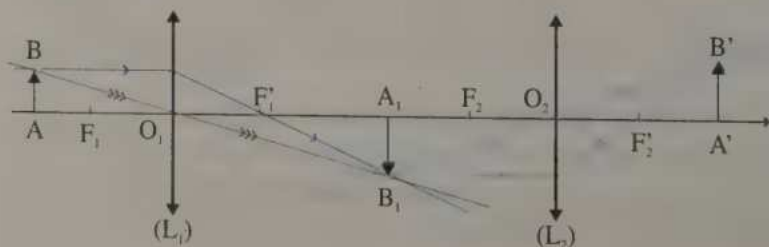
$$\text{soit } \overline{O_2 A'} = \frac{\overline{O_2 A_1} \times f'_2}{\overline{O_2 A_1} + f'_2} = \frac{(-13) \times 5}{-13 + 5} = +8,13 \text{ cm.}$$

$$\overline{A'B'} : \gamma_2 = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{A_1 B_1}} = \frac{\overline{O_2 A'}}{\overline{O_2 A_1}}$$

$$\text{soit } \overline{A'B'} = \overline{A_1 B_1} \times \frac{\overline{O_2 A'}}{\overline{O_2 A_1}} = -0,4 \times \frac{(+8,13)}{(-13)} = +0,25 \text{ cm.}$$

**Conclusion :**  $\overline{O_2 A'} > \overline{O_2 F'_2} = f'_2 = 5 \text{ cm}$ , donc l'œil ne peut observer cette image (puisqu'elle se forme après l'œil placé en  $F'_2$ ). De plus, un œil normal placé en  $F'_2$  ne peut voir ( $A'B'$ ) que si  $\overline{F'_2 A'} \in ]-\infty; -25 \text{ cm}]$ .

2. Construction :



7. 1.  $F'_1 \equiv F_2$  ou bien  $\overline{O_1 O_2} = f'_1 + f'_2$ .

2. Voir le cours, paragraphe II 2. : Modélisation.

3. Le rayon (AB) venant de l'infini ( $A_\infty B_\infty$ ), il converge dans le plan focal image de ( $L_1$ ), soit  $[F'_1]$  :  $\overline{O_1 A_1} = f'_1 = 40$  cm.

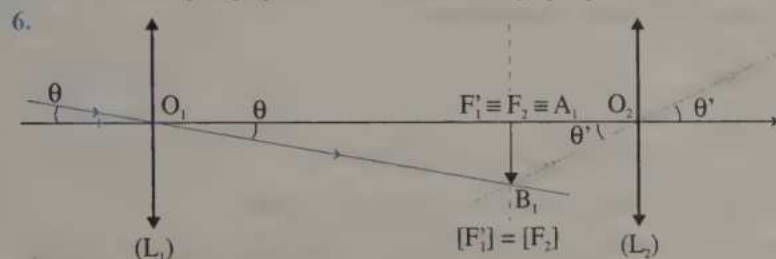
On utilise le rayon passant par O (donc non dévié) pour calculer  $A_1 B_1$  : (voir la figure de la question 6.).

$$\theta \approx \tan \theta = \frac{A_1 B_1}{O_1 A_1} = \frac{A_1 B_1}{f'_1} \text{ soit } A_1 B_1 \approx f'_1 \times \theta \text{ (}\theta \text{ en rad) ou } A_1 B_1 = f'_1 \times \tan \theta$$

$$\text{A.N. : } A_1 B_1 \approx 40 \times \left(2 \times \frac{\pi}{180}\right) = 1,40 \text{ cm ou } A_1 B_1 = 40 \times \tan(2^\circ) = 1,40 \text{ cm.}$$

4.  $\overline{O_2 A_1} = \overline{O_2 O_1} + \overline{O_1 A_1} = -(f'_1 + f'_2) + f'_1 = -f'_2$  donc  $A_1$  est dans le plan focal objet de ( $L_2$ ), donc son image ( $A'B'$ ) est à l'infini : ( $A'_\infty B'_\infty$ ).

5. Voir le cours, paragraphe II 2. : Construction graphique.



$$\theta' \approx \tan \theta' = \frac{A_1 B_1}{O_2 A_1} = \frac{f'_1 \times \tan \theta}{f'_2} \approx \frac{f'_1}{f'_2} \times \theta \text{ donc } \theta' = \theta \times \frac{f'_1}{f'_2}$$

(Cette relation est valable pour  $\theta$  en rad, puisque l'on utilise les approximations

$\theta \approx \tan \theta$ . Mais, comme  $\theta$  (rad) =  $\frac{\pi}{180} \theta$  (°), elle peut aussi s'exprimer en degré).

$$\text{A.N. : } \theta' = 2 \times \frac{40}{10} = 8,0^\circ = 0,14 \text{ rad.}$$

$$G = \frac{\theta'}{\theta} = \frac{f'_1}{f'_2} = 4,0.$$

7. Voir le cours, paragraphe II 2. : Cercle oculaire.

Relation de conjugaison (pour ( $L_2$ )) : soit  $I \equiv O_1$ , le milieu de [CD], qui a pour image  $I'$ , le milieu de [ $C'D'$ ] :

$$\frac{1}{\overline{O_2 I'}} - \frac{1}{\overline{O_2 I}} = \frac{1}{f'_2} \text{ soit } \overline{O_2 I'} = \frac{\overline{O_2 I} \times f'_2}{\overline{O_2 I} + f'_2}$$

$$\text{avec } \overline{O_2 I} = \overline{O_2 F_2} + \overline{F_2 I} = \overline{O_2 F_2} + \overline{F_1 O_1} = -f'_2 - f'_1$$

$$\text{soit } \overline{O_2 I'} = (f'_2 + f'_1) \frac{f'_2}{f'_1} \text{ (après simplification)}$$

$$\text{A.N. : } \overline{O_2 I'} = (10 + 40) \times \frac{10}{40} = 12,5 \text{ cm.}$$

$C'D'$  s'obtient avec le théorème de Thalès (cf. ex. 5, question 6.) :

$$C'D' = \frac{O_2 I'}{O_2 I} \times CD = \frac{f_2'}{f_1} \times CD$$

$$\text{A.N. : } C'D' = \frac{10}{40} \times 5 = 1,25 \text{ cm.}$$

C'est le disque où l'intensité lumineuse est maximale.

8. 1. L'image de  $F_1 \equiv F_1'$  par le plan ( $M_2$ ) est confondue avec  $F_1$ , ou bien  $OO_2 + O_2 S = f_1 + f_1'$ .

2. Voir le cours, paragraphe II 3. : Modélisation.

3. Le rayon ( $AB$ ) venant de l'infini ( $A_\infty B_\infty$ ), il converge dans le plan focal de ( $M_1$ ), soit  $[F_1]$  ou  $[F_1']$  :  $SA_1 = f_1 = 60 \text{ cm.}$

$\theta \approx \tan \theta$  (angle faible)

$$= \tan \widehat{A_1 I_1 B}$$
 (angles correspondants)

$$= \frac{A_1 B_1}{A_1 S}$$

$$= \frac{A_1 B_1}{f_1}$$

d'où  $A_1 B_1 \approx f_1 \times \theta$  ( $\theta$  en rad !) ou  $A_1 B_1 = f_1 \times \tan \theta$

$$\text{A.N. : } A_1 B_1 \approx 60 \times \left(2 \times \frac{\pi}{180}\right) \approx 2,1 \text{ cm} \text{ ou } A_1 B_1 = 60 \times \tan(2^\circ) \approx 2,1 \text{ cm.}$$

4.  $A_1$  a pour symétrique  $A_2$  par ( $M_2$ ) qui est dans le plan focal objet de ( $L$ ), donc l'image  $A'$  par ( $L$ ) est à l'infini (rappel : le télescope est afocal). De même, pour  $B_1$  et  $B'$  : ( $A'_\infty B'_\infty$ ).

5. Voir le cours paragraphe II 3. : Construction graphique.

6.  $\theta' \approx \tan \theta'$  (angle faible)

$$= \frac{A_2 B_2}{OA_2}$$
 dans  $OA_2 B_2$

$$= \frac{A_1 B_1}{f'}$$

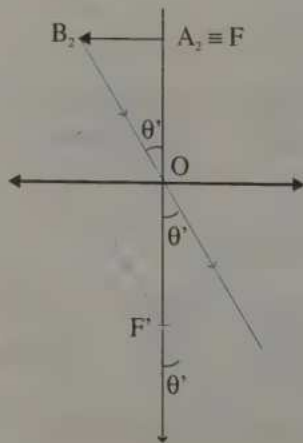
car  $A_1 B_1 = A_2 B_2$   
(symétrique par un miroir plan)

$$\theta' = \frac{f_1 \times \theta}{f'}$$
 d'après la question précédente

$$\text{d'où } G = \frac{\theta'}{\theta} = \frac{f_1}{f'}$$

$$\text{A.N. : } \theta' = \frac{60}{6} \times 2^\circ = 20^\circ = 0,35 \text{ rad}$$

$$\text{et } G = \frac{60}{6} = 10.$$



7. Soit  $I_2$  le milieu de  $[C_2D_2]$  ( $C_2$  et  $D_2$  sont représentés sur la figure du paragraphe II 3. du cours : Cercle oculaire). (Ne pas confondre avec les notations de la question 3.)

$$OI_2 = OF + FO_2 + O_2I_2 = f' + \underbrace{F_1O_2 + O_2S}_{\text{images par } (M_2)} = f' + F_1S = f' + f_1$$

images par  $(M_2)$

d'où (relation de conjugaison), l'image  $I'$  de  $I_2$  par  $(L)$  vérifie :

$$\frac{1}{OI'} - \frac{1}{OI_2} = \frac{1}{f'} \quad \text{soit} \quad \overline{OI'} = \frac{f' \times \overline{OI_2}}{f' + \overline{OI_2}} = \frac{f'(-f' - f_1)}{f' - f' - f_1} = \frac{f'(f' + f_1)}{f_1}$$

Le grandissement donne :  $\gamma = \frac{\overline{C'D'}}{\overline{C_2D_2}} = \frac{\overline{OI'}}{\overline{OI_2}}$

$$\text{soit} \quad \overline{C'D'} = \overline{C_2D_2} \times \frac{\overline{OI'}}{\overline{OI_2}} = \overline{CD} \times \frac{f'}{f' + \overline{OI_2}} = \overline{CD} \times \frac{f'}{f' - (f' + f_1)}$$

$$\overline{C'D'} = \overline{CD} \times \frac{f'}{f_1}$$

$$\text{A.N. : } \overline{OI'} = \frac{6 \times (6 + 60)}{60} = 6,6 \text{ cm ; } \overline{C'D'} = 12 \times \frac{6}{60} = 1,2 \text{ cm.}$$

8. Vergence :  $C = \frac{1}{f_1} = \frac{1}{0,60} = 1,67 \text{ δ. } (f_1 \text{ est exprimée en mètre ici !)}$

$$\text{Rayon : } R = 2 \times f_1 = 1,20 \text{ m} = 120 \text{ cm.}$$

9 L'image d'un objet à l'infini par une lunette afocale est à l'infini : l'œil myope ne peut accommoder à l'infini, l'image qu'il voit est floue.

### 10 Punctum remotum (P.R.)

• Si  $(A'B')$  est au punctum remotum de l'œil normal situé en  $F_2'$ , cela signifie que  $A'$  et  $B'$  sont à l'infini, donc que  $A_1$  et  $B_1$  sont dans le plan focal objet de  $(L_2)$  :  $A_1 \equiv F_2$ .

$$\text{On en déduit : } \overline{O_2A_1} = \overline{O_1F_1} + \overline{F_1A_1} = f_1' + F_1F_2 = f_1' + \Delta$$

• Relation de conjugaison de  $(L_1)$  :  $\frac{1}{O_1A_1} - \frac{1}{O_1A} = \frac{1}{f_1'}$ , soit :

$$\overline{O_1A} = \frac{f_1' \times \overline{O_1A_1}}{f_1' - \overline{O_1A_1}} = -\frac{f_1'(f_1' + \Delta)}{\Delta} = -\frac{1 \times (1 + 18)}{18} = -\frac{19}{18} = (\overline{O_1A})_{\text{P.R.}}$$

Comme on le verra par la suite, ces calculs demandent une grande précision ; il est donc utile de garder les résultats sous forme de fraction.

**Punctum proximum (P.P.)**

• Si (A'B') est au punctum proximum de l'œil normal situé en  $F_2'$ , alors  $\overline{AF_2'} = +d_m = +25$  cm, donc  $\overline{O_2A'} = \overline{O_2F_2'} + \overline{F_2'A'} = f_2' - d_m = -20,0$  cm.

• Relation de conjugaison de ( $L_2$ ) :  $\frac{1}{O_2A'} - \frac{1}{O_2A_1} = \frac{1}{f_2'}$ ,

$$\text{soit : } \overline{O_2A_1} = \frac{f_2' \times \overline{O_2A'}}{f_2' - \overline{O_2A'}} = \frac{5 \times (-20)}{5 - (-20)} = -4,0 \text{ cm.}$$

•  $\overline{O_1A_1} = \overline{O_1F_1'} + \overline{F_1'F_2'} + \overline{F_2'O_2} + \overline{O_2A_1} = f_1' + \Delta + f_2' + \overline{O_2A_1} = 20,0$  cm.

• Relation de conjugaison de ( $L_1$ ) :  $\frac{1}{O_1A_1} - \frac{1}{O_1A} = \frac{1}{f_1'}$ ,

$$\overline{O_1A} = \frac{f_1' \times \overline{O_1A_1}}{f_1' - \overline{O_1A_1}} = \frac{1 \times 20}{1 - 20} = -\frac{20}{19} = (\overline{O_1A})_{PP}$$

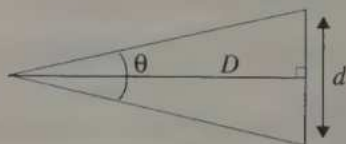
**Latitude de mise au point :**

$$l = \left| (\overline{O_1A})_{PP} - (\overline{O_1A})_{PR} \right| = \left| \left( -\frac{20}{19} \right) - \left( -\frac{19}{18} \right) \right| = \frac{1}{342} \approx 2,9 \times 10^{-3} \text{ cm} = 2,9 \times 10^{-5} \text{ m.}$$

La mise au point du microscope nécessite l'utilisation d'une vis micrométrique.

$$\boxed{11} \quad \theta' = G \times \theta = \left( \frac{f_1'}{f_2'} \right) \times \left( \frac{d}{D} \right)$$

$$\text{car } \frac{\theta}{2} \approx \tan \frac{\theta}{2} = \frac{d/2}{D} \text{ donc } \theta \approx \frac{d}{D}$$



A.N. : Une année lumière est la distance parcourue par la lumière en une année : 1 a.l. =  $c \times \Delta t$  (1 an).

$$\theta' = \frac{15,00}{0,04} \times \frac{(5 \times 10^9)}{10,3 \times [(3 \times 10^8) \times (365 \times 24 \times 3\,600)]} \approx 1,9 \times 10^{-4} \text{ rad}$$

(distances en m)

$\theta' < \varepsilon$ , donc on ne voit qu'un point (aucun détail a fortiori).

La lunette sert de **collecteur de lumière**. Sans lunette, il ne serait peut-être pas possible d'observer cette étoile (car trop peu lumineuse).

$$\boxed{12} \quad 1. \frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{f'} \text{ soit } \frac{1}{D-x} - \frac{1}{-x} = \frac{1}{f'}$$

$$\text{d'où : } x^2 - D \cdot x + D \cdot f' = 0.$$

2. Cette équation admet des solutions si son discriminant est positif :

$$\Delta > 0 \Rightarrow D^2 - 4D \cdot f' > 0 \Rightarrow D - 4f' > 0 \Rightarrow D > 4f'.$$

On a donc  $D_{\min} = 4f'$


3. On résout l'équation précédente :

$$x_1 = \frac{D - \sqrt{\Delta}}{2} = \frac{D - \sqrt{D^2 - 4D \cdot f'}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{D + \sqrt{D^2 - 4D \cdot f'}}{2}$$

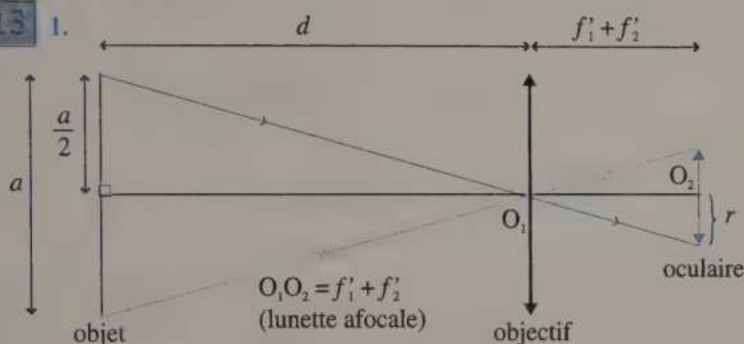
Il faut faire apparaître  $d = x_2 - x_1$ .

$$d = x_2 - x_1 = \sqrt{D^2 - 4D \cdot f'}, \quad \text{d'où} \quad d^2 = D^2 - 4D \cdot f' \quad \text{et} \quad f' = \frac{D^2 - d^2}{4D}$$

$$4. \text{ A.N. : } f' = \frac{1^2 - (0,700 - 0,300)^2}{4 \times 1} \approx 0,210 \text{ m} = 21,0 \text{ cm.}$$

  $D > 4 f'$  est vérifiée.

13



Théorème de Thalès :  $\frac{\frac{a}{2}}{r} = \frac{d}{f_1 + f_2}$ , soit  $a = \frac{2r \cdot d}{f_1 + f_2} = \frac{2r \cdot d}{f_2 \left( \frac{f_1}{f_2} + 1 \right)}$

$$a = \frac{2r \cdot d}{f_2 \cdot (G + 1)} \quad (G = \frac{f_1}{f_2} \text{ pour une lunette afocale})$$

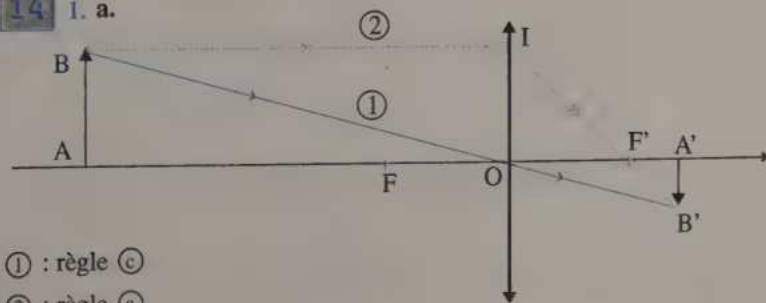
Si  $G$  augmente, alors  $a$  diminue.

$$2. \text{ A.N. : } a = \frac{2 \times (4 \times 10^{-3}) \times (10^4)}{(2 \times 10^{-2}) \times (300 + 1)}; \quad a \approx 13,3 \text{ m.}$$

3. Si  $G = 100$ , alors  $a \approx 39,6 \text{ m.}$

14

1. a.



① : règle (c)

② : règle (a)

b. Avec le théorème de Thalès :

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} \text{ et } \gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} \text{ (par définition), donc } \gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}.$$

c.  $\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$  (d'après b.).

$$= \frac{\overline{A'B'}}{\overline{OI}}$$

$$= \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}} \text{ (d'après le théorème de Thalès (rayon } \textcircled{2}\text{))}$$

$$= \frac{\overline{F'O} + \overline{OA'}}{\overline{F'O}} \text{ (d'après la relation de Chasles)}$$

$$= 1 + \frac{\overline{OA'}}{\overline{F'O}}$$

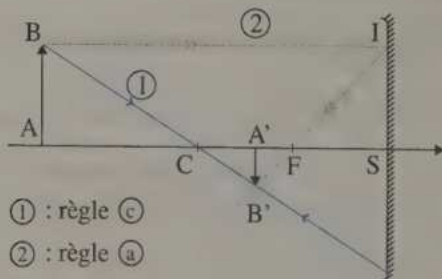
$$= 1 - \frac{\overline{OA'}}{f'} \text{ (car } f' = \overline{OF'})$$

et en divisant chaque membre par  $\overline{OA'}$ , on obtient :

$$\frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{f'}, \text{ soit :}$$

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$$

2. a.



L'énoncé précise que A est avant F, mais les formules suivantes se généralisent.

b.  $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}}$  (théorème de Thalès)

$$\begin{aligned}
 \text{c. } \frac{\overline{CA'}}{CA} &= \frac{\overline{A'B'}}{AB} \quad (\text{d'après le 1.}) \\
 &= \frac{\overline{A'B'}}{SI} \\
 &= \frac{\overline{FA'}}{FS} \quad \text{théorème de Thalès (rayon ②)} \\
 &= \frac{\overline{FC} + \overline{CA'}}{FS} \\
 &= \frac{-f + \overline{CA'}}{+f} \quad \text{car } f = \overline{FS} = -\overline{FC} \left( = \frac{R}{2} \right) \\
 &= -1 + \frac{\overline{CA'}}{f} \quad \text{puis en divisant tout par } \overline{CA'} :
 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{CA} = -\frac{1}{CA'} + \frac{1}{f} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{CA'} + \frac{1}{CA} = \frac{1}{f}$$

$$15 \quad 1. \bullet \quad OO_2 + O_2S = (OA_2 + A_2O_2) + (F_1S - F_1O_2) \quad (1)$$

•  $OA_2 = OF = f'$  car  $A_2 \in [F]$  (plan focal objet de (L))

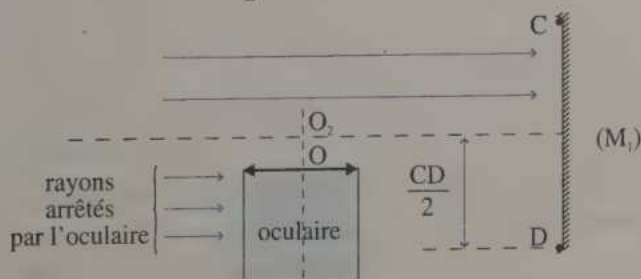
•  $A_2O_2 = A_1O_2$  par symétrie par  $(M_2)$   
 $= O_2F_1$  car  $A_1 \in [F_1]$  (plan focal de  $(M_1)$ )

•  $F_1S = f_1$

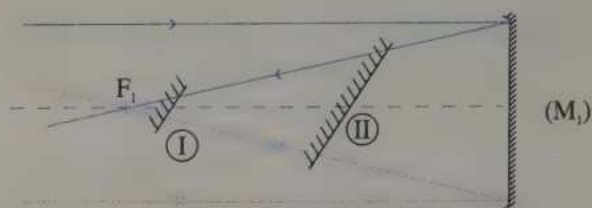
• La relation (1) devient :

$$OO_2 + O_2S = (f' + O_2F_1) + (f_1 - F_1O_2) \quad \text{soit} \quad OO_2 + O_2S = f' + f_1$$

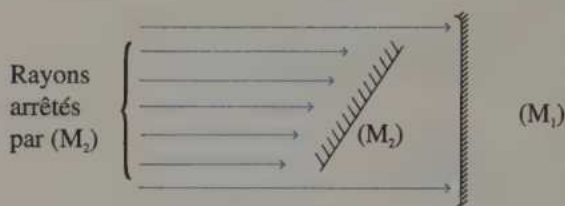
2. Si  $O_2O < \frac{CD}{2}$  (rayon de la « partie éclairée de  $(M_1)$  »), alors une partie de la lumière incidente n'atteindra pas  $(M_1)$  à cause de la présence de l'oculaire ; il faut :  $O_2O > \frac{CD}{2}$ .



3.



On voit que lorsque le miroir  $(M_2)$  est en position ②, il doit être plus grand que lorsqu'il est en position ① afin d'intercepter tous les rayons réfléchis par  $(M_1)$ . Mais dans ce cas (position ②), beaucoup de rayons incidents n'atteignent pas  $(M_1)$ , car ils sont interceptés par  $(M_2)$  : l'image n'est plus assez lumineuse.



$F_1 O_2$  doit être la plus faible possible, car  $O_2$  doit être le plus proche possible de  $F_1$ .

4. Il faut trouver un **compromis** entre les réponses aux questions 3. et 4. !

## 20

# Produire des sons, écouter

En acoustique, les fréquences sont généralement notées  $f$  au lieu de  $\nu$ .

## I PRODUCTION DE SONS PAR UN INSTRUMENT DE MUSIQUE

Il faut un système mécanique vibrant (corde de violon, ...) et un système assurant le couplage avec l'air (caisse de résonance du violon, ...).

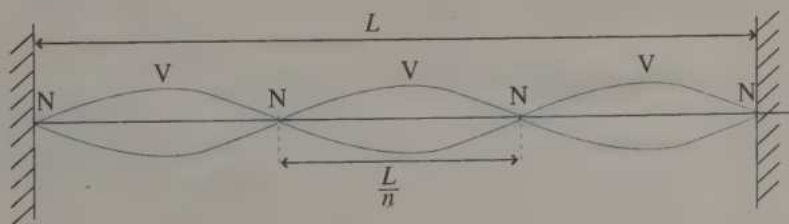
## II MODES PROPRES DE VIBRATION

### 1. Vibration d'une corde tendue entre deux points fixes

#### • Oscillations forcées

– La corde, qui est excitée à la fréquence  $f_n$ , vibre suivant un **unique mode** propre de vibration.

– La figure observée est une succession de  $n$  fuseaux de longueur  $\frac{L}{n}$  ( $L$  longueur de la corde) avec des nœuds (N) de vibration et des ventres (V) de vibration et un nœud à chaque extrémité.



Le mode fondamental correspond à  $n = 1$  et le mode harmonique de rang  $n$  correspond à  $n > 1$ .

Pour observer le mode de rang  $n$ , la fréquence de vibration doit nécessairement être  $f_n = n \cdot f_1$ ,  $f_1$  étant la fréquence du fondamental ( $n = 1$ ).

De plus,  $f_n$  dépend de  $L$  (cf. § III).

### • Oscillations libres

– La corde, qui est d'abord pincée ou frottée ou frappée, vibre ensuite librement selon **plusieurs modes** propres de vibration qui se superposent (le fondamental et les harmoniques) de façon complexe.

– La figure observée est complexe, avec toujours un nœud à chaque extrémité.

### 2. Vibration d'une colonne d'air

Mêmes remarques que pour la corde (§ II 1.) transposées aux ondes de pression, avec les modifications suivantes :

– pour un tuyau ouvert à chaque extrémité (clarinette avec sa hanche, ...), il y a un ventre de chaque côté et  $n$  fuseaux ( $n$  est un entier non nul comme pour la corde) ;

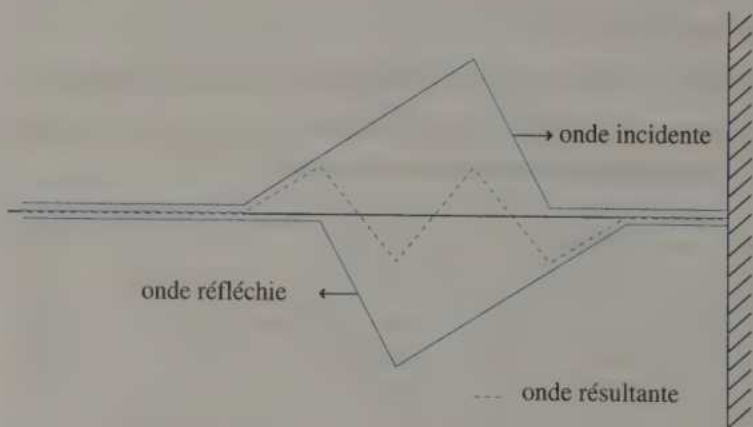
– pour un tuyau fermé à une extrémité et ouvert à l'autre (biseau de tuyau d'orgue, ...), il y a un ventre du côté ouvert et un nœud du côté fermé, et  $(n - 0,5)$  fuseaux ( $n$  est un entier impair).

## III RÉFLEXION DES ONDES

### 1. Sur un obstacle fixe

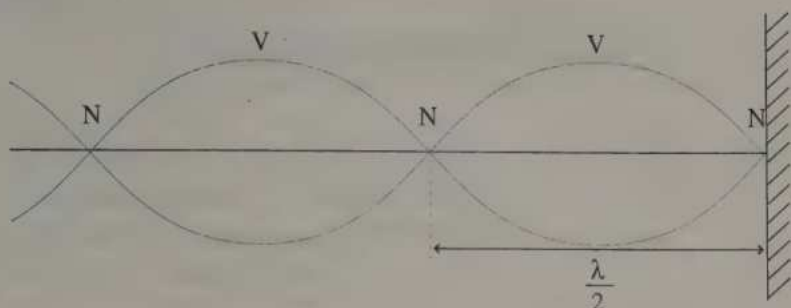
#### • Cas général

– L'onde réfléchie correspond à l'onde incidente avec un changement de signe et de sens (figure ci-dessous) :



– L'onde résultante est la superposition des ondes incidente et réfléchie (voir le schéma de l'exercice 1).

• **Cas particulier** d'une onde incidente sinusoïdale de fréquence  $f$ , de longueur d'onde  $\lambda$ , se propageant à la vitesse  $v = \lambda \cdot f$  : l'onde résultante est stationnaire, c'est une succession de fuseaux de longueurs  $\frac{\lambda}{2}$ .



## 2. Sur deux obstacles fixes

• **Cas général** : l'onde résultante est périodique de période  $T = \frac{2L}{v}$ .

• **Cas particulier** d'une onde incidente sinusoïdale : l'onde résultante est stationnaire et périodique,  $n$  fuseaux sont observables (cf. figure du § II 1.), donc :

$$L = n \frac{\lambda_n}{2} \quad \text{et} \quad f_n = n \frac{v}{2L} = n \cdot f_1 \quad \text{avec} \quad v = \lambda_n \cdot f_n$$

## 3. Vibration d'une colonne d'air

Les résultats précédents se transposent à la colonne d'air d'un tuyau ouvert ou fermé, avec quelques variantes (cf. exercice 5).

# TV ACCOUSTIQUE MUSICALE ET PHYSIQUE DES SONS

## 1. Grandeurs acoustiques

•  $I = \frac{P}{S}$   $\left\{ \begin{array}{l} I : \text{intensité acoustique à travers une surface (W} \cdot \text{m}^{-2}) \\ P : \text{puissance traversant la surface (W)} \\ S : \text{surface traversée (m}^2) \end{array} \right.$

•  $L = 10 \log_{10} \frac{I}{I_0}$   $\left\{ \begin{array}{l} L : \text{niveau sonore (dB}_A, \text{ décibel acoustique)} \\ I : \text{intensité acoustique (W} \cdot \text{m}^{-2}) \\ I_0 = 10^{-12} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \text{ est l'intensité de référence} \end{array} \right.$

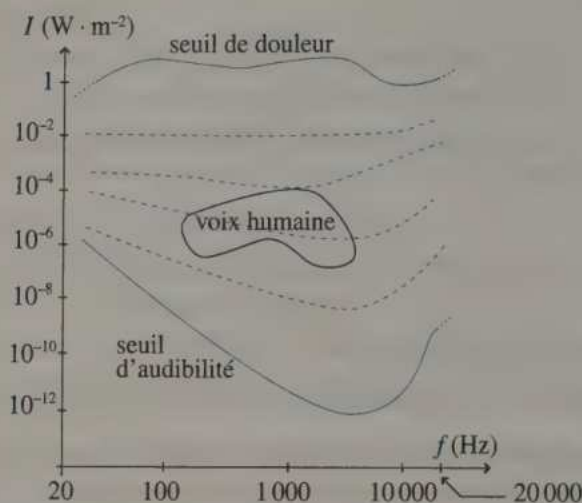
Rappels :  $\log_{10} x = \frac{\ln x}{\ln 10} = \log x$        $\log 10^x = x = 10^{\log x}$

$\log a \cdot b = \log a + \log b$        $\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$

## 2. Fréquences audibles et sensibilité d'une oreille moyenne

• Fréquences audibles : de 20 Hz à 20 000 Hz.

• Courbes d'égal sensation sonore pour une oreille moyenne (courbe de Fletcher et Munson ci-après).

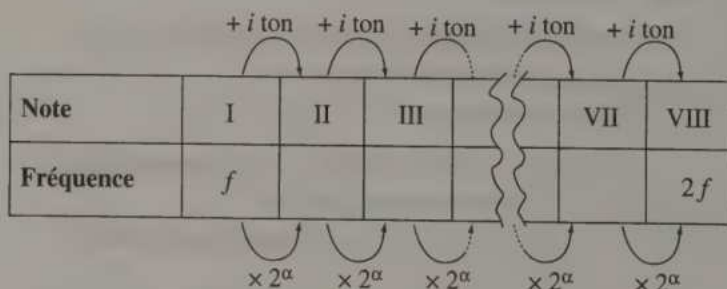


### 3. Caractéristiques d'un son

Un son est caractérisé, d'une part, par sa hauteur, qui est la fréquence du mode fondamental et, d'autre part, par son timbre, qui dépend de l'évolution temporelle de l'intensité de chaque harmonique (« transitoires d'attaque et d'extinction ») : voir le schéma de l'exercice 3.

### 4. Gamme tempérée

- Une octave est composée de 8 notes, soit 5 tons et 2 demi-tons.



$i = 1$  et  $\alpha = \frac{1}{6}$ , SAUF entre *mi-fa* et *si-do* où  $i = \frac{1}{2}$  et  $\alpha = \frac{1}{12}$ .

- Si I est le  $do_2$ , alors VIII est le  $do_3$ .
- Plus la fréquence est élevée, plus le son est aigu.
- $f(la_3) = 440$  Hz.

Seule la gamme de do majeur est étudiée

## EXERCICES D'APPLICATION

## 1 CONSTRUCTION D'UNE ONDE RÉFLÉCHIE

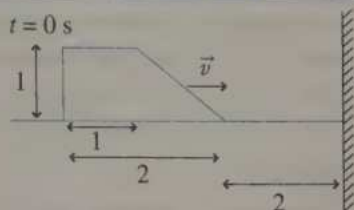
\* (10 min) ► P. 309

Une onde se propage à la vitesse  $\vec{v}$  de valeur  $v = 1,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

Représenter l'onde aux instants :

$t = 2,0 \text{ s}$  ;  $t = 3,0 \text{ s}$  ;  $t = 4,0 \text{ s}$ .

Sur le schéma, les distances sont en mètre.



## 2 LE CLASSIQUE

\* (20 min) ► P. 310

Une corde de longueur  $L = 50,0 \text{ cm}$  oscille entre deux extrémités, grâce à une excitation sinusoïdale de fréquence  $440 \text{ Hz}$ .

On remarque alors quatre fuseaux. Sa tension  $\vec{F}$  a une valeur  $F = 20 \text{ N}$ .

On donne  $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$ , où  $v$  est la vitesse de l'onde et  $\mu$  la masse linéique de la corde.

1. Quel dispositif est-il nécessaire d'avoir pour entendre un son émis par la vibration de cette corde ?
2. Quelle serait la note correspondant à ce son ?
3. Calculer la fréquence  $f_4$  de ce son, sa longueur d'onde  $\lambda_4$  et en déduire les valeurs de  $v$ , puis de  $\mu$ .
4. Combien la corde présente-t-elle de nœud(s) et de ventre(s) de vibration ? Quelle distance sépare un nœud et un ventre consécutifs ?
5. À quelle fréquence doit-on soumettre la corde pour qu'elle oscille avec le mode fondamental ?
6. À quelle fréquence doit-on soumettre la corde pour voir 3 fuseaux ?
7. La corde est pincée puis lâchée afin qu'elle oscille seule : quelle(s) est (sont) sa (ses) fréquence(s) d'oscillation ?
8. Pour entendre la note correspondant à  $f' = 392 \text{ Hz}$ , avec toujours 4 fuseaux et la même tension, quelle longueur  $L'$  la corde devrait-elle avoir ?

## 3 ÉVOLUTION D'UN SON

\* (5 min) ► P. 310

Une tôle suspendue sur laquelle on frappe produit un son a priori grave, puis aigu (les enfants l'imitent en prononçant avec une bonne intonation un long « boing »). Expliquer ce phénomène.

## EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

## 4 NIVEAU SONORE

\*\* (25 min) ► P. 311

1. Comparer les puissances sonores  $P_A$  et  $P_B$  ainsi que les intensités sonores  $I_A$  et  $I_B$  de deux lave-vaisselle A et B de niveaux sonores  $L_A = 50 \text{ dB}_A$  et  $L_B = 53 \text{ dB}_A$ .
2. Qu'en serait-il de deux aspirateurs A et B tels que  $L_A = 71 \text{ dB}_A$  et  $L_B = 74 \text{ dB}_A$  ?
3. Généraliser les résultats précédents.
4. Quel est le niveau sonore de  $2^n$  appareils identiques, chacun ayant un niveau sonore  $L$  ? En déduire le niveau sonore de huit aspirateurs caractérisés par  $L = 70 \text{ dB}_A$ .
5. Combien faudrait-il d'aspirateurs de niveau sonore  $L = 71 \text{ dB}_A$  fonctionnant simultanément pour atteindre celui d'une discothèque ( $L' \approx 92 \text{ dB}_A$ ) ?

## 5 CORDES, TUYAUX OUVERTS ET FERMÉS

\*\* (20 min) ► P. 311

1. **Corde.** Une corde de longueur  $L$ , tendue et attachée à ses deux extrémités, est le siège d'ondes stationnaires.
  - a. Représenter les vibrations de la corde pour le mode fondamental et les deux premiers harmoniques.
  - b. Exprimer  $\lambda_n$  (longueur d'onde du mode  $n$ ) en fonction de  $n$  et  $L$ .
  - c. En déduire  $f_n$  (fréquence du mode  $n$ ) en fonction de  $f_1$ .
2. **Tuyau ouvert.** Le tuyau ouvert d'un instrument de musique (trompette par exemple) présente des ventres de vibration à chaque extrémité une fois les ondes stationnaires (de pression) établies.  
 $L$  étant la longueur du tuyau, répondre aux questions du 1.
3. **Tuyau fermé** (à une extrémité). Même question qu'au 2. sachant qu'il y a un nœud et un ventre de vibration aux extrémités (clarinette, ...).
4. Quelle est l'hypothèse faite dans chaque question c. ?

## 6 HARMONIQUES AUDIBLES

\*\* (15 min) ► P. 312

La note la plus aiguë que puisse jouer un piano est le  $do_7$ .

1. Sachant que le  $la_3$  a pour fréquence 440,0 Hz, vérifier que celle du  $do_7$  est 4 186 Hz (dans la gamme tempérée).
2. Combien d'harmonique(s) une oreille « idéale » entend-elle lorsque cette note est jouée ?

**7** GAMME TEMPÉRÉE

\*\* (20 min) ► P. 313

Calculer les fréquences des notes comprises entre le  $la_2$  et le  $la_4$  de la gamme tempérée sachant que :

- elles sont séparées par deux octaves ;
- le  $la_4$  est plus aigu que le  $la_2$  ;
- et  $f(la_3) = 440,0$  Hz (intermédiaire entre  $la_4$  et  $la_2$ ).

Expliquer clairement la méthode et les calculs.

**8** REPÉRER UNE BREBIS

\*\*\* (15 min) ► P. 313

*LA CALCULATRICE N'EST PAS AUTORISÉE.*

Dans une plaine, une cloche accrochée au cou d'une brebis émet un son de fréquence  $f$  et de puissance sonore  $P$ .

1. On peut entendre la brebis jusqu'à la distance maximale  $d = 1,0$  km. Calculer la puissance  $P$  du son émis par la cloche ainsi que la distance  $l$  en-dessous de laquelle le son devient dangereux pour le tympan.

Donnée :  $f = 2,0$  kHz.

2. On conserve la valeur de  $P$  obtenue à la question précédente, mais on étudie l'effet d'une nouvelle cloche émettant un son de fréquence  $f' = 100$  Hz. Exprimer alors  $d'$  (distance maximale d'audition de la cloche) en fonction des données de l'énoncé, puis conclure.

Données :

$f$	$I_a$ (audibilité)	$I_d$ (douleur)
$f' = 100$ Hz	$I'_a \approx 10^{-10} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$	$I'_d \approx I_d$
$f = 2,0$ kHz	$I_a \approx 10^{-12} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$	$I_d \approx 1,0 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$

**9** MESURE D'UNE PROFONDEUR

\*\* (20 min) ► P. 314

Pour mesurer la profondeur d'un lac ou d'un océan, un bateau utilise un sonar fixé sur son fond.

Le sonar émet des sons qui se réfléchissent sur le fond du lac (on admet qu'il s'agit d'un ventre de vibration) ; un capteur situé au niveau du sonar enregistre alors l'amplitude de l'onde résultante.

Pour la fréquence  $f = 1\,100$  Hz, le capteur enregistre un maximum ; le maximum suivant est enregistré pour  $f' = 1\,150$  Hz.

En déduire la profondeur du lac.

Donnée :  $v$  (son dans l'eau) =  $1\,500 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ .

**10** LES CORDES DU VIOLONCELLE

\*\*\* (30 min) ► P. 314

La corde du violoncelle qui correspond au  $re_2$  (146,8 Hz) a une longueur de 112,0 cm ; sa longueur utile (entre le sillet et le chevalet) est 70,0 cm, sa masse 4,40 g.

- Donner la fréquence et la longueur d'onde de son mode fondamental et de ses trois premiers harmoniques. Reconnaître le second harmonique.
- Calculer la célérité  $v$  de l'onde.
- On veut jouer le  $mi_2$ .
  - Donner la fréquence correspondant au  $mi_2$ .
  - De quelle distance faut-il raccourcir la corde ?
- On excite cette corde avec un vibreur à la fréquence 146,8 Hz. Représenter sur un schéma l'aspect de la corde, préciser son nombre de nœuds et de ventres de vibration ainsi que la distance qui les sépare.
- Préciser le(s) mode(s) audible(s) lorsque la note est jouée. Indiquer la hauteur du son. Comparer au mode de vibration de la question 4.
- Représenter l'évolution temporelle des différents harmoniques (allures) dans les cas suivants :
  - excitation par le vibreur de la question 4. ;
  - utilisation d'un archer ;
  - utilisation en *pizzicato* (terme italien signifiant « corde pincée »).
- Sachant que  $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$  où  $\mu$  est la masse linéique (masse divisée par sa longueur) et  $F$  sa tension (notée  $F$  pour ne pas confondre avec la période), calculer  $F$ .
- Quelle serait la hauteur du son obtenu en exerçant une tension quatre fois plus importante ?  
Quel serait aussi le risque encouru ? Reconnaître cette note.

## EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

**11** VARIATION SUR UN VIOLON

\*\*\* (10 min) ► P. 316

Un violon possède quatre cordes de 32,4 cm de longueur.

L'une d'entre elles émet la note  $mi_4$  (plus aiguë que le  $la_3$  de fréquence 440 Hz), comme mode fondamental.

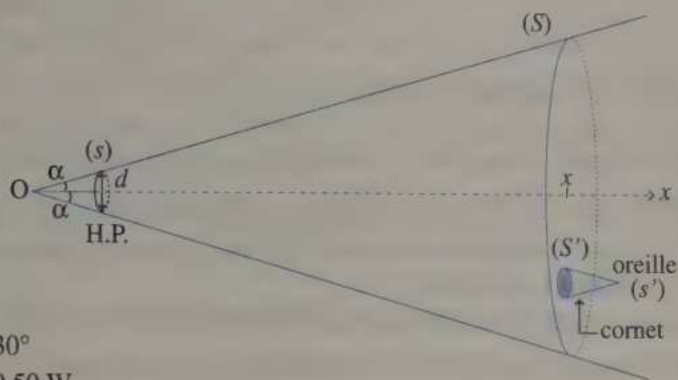
Que se passe-t-il si le violoniste exerce une légère pression à 10,8 cm du sillet (qui correspond à l'extrémité de la corde) ?

## 12 HAUT-PARLEUR ET CORNET

\*\*\* (30 min) ► P. 316

Un haut-parleur de diamètre  $d$  émet un son de puissance  $P$ .

Pour simplifier, on suppose que la puissance sonore est uniformément répartie sur les disques de même axe que la membrane du haut-parleur.



$$\alpha = 30^\circ$$

$$P = 0,50 \text{ W}$$

$$d = 16 \text{ cm}$$

$$s' = 0,70 \text{ cm}^2$$

$$S' = 30 \text{ cm}^2$$

$$I_0 = 1,0 \times 10^{-12} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$$

1. Calculer l'intensité et le niveau sonores sur la membrane du haut-parleur.
2. Exprimer, en fonction de  $x$  et des données de l'énoncé, l'intensité et le niveau sonores sur la surface  $(S)$  (écrire  $L(x) = \alpha + \beta \log x$ ).
3. Un cornet est une sorte de cône qui était utilisé par les malentendants : la surface au niveau de la plus grande extrémité est  $S'$ , et est  $s'$  à l'autre ( $s'$  correspond à la surface du tympan).  
Exprimer l'intensité et le niveau sonores au niveau du tympan ; les comparer à ceux obtenus sans utiliser le cornet.

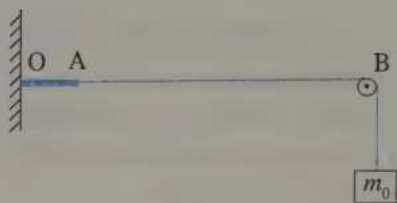
## 13 CORDE DE MELDE

\*\*\* (30 min) ► P. 317

Un vibreur est constitué d'une corde tendue de A vers B, s'appuyant sur une poulie, et d'une lame métallique OA excitée par un électroaimant alimenté par un courant de fréquence  $f_0$ .

$$\text{Données : } g = 9,80 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} ; \text{OA} = 8,00 \text{ cm} ; \text{AB} = 1,00 \text{ m} = L ;$$

$$f_0 = 20,0 \text{ Hz} ; m_{\text{corde}} = m = 6,00 \text{ g} ; l_{\text{corde}} = 1,20 \text{ m} = l.$$



$$v = v_{\text{corde}} = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$$

$F$  = tension de la corde

$\mu$  = masse linéique de la corde

1. Vérifier l'homogénéité de la relation  $v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$ .
  2. Montrer que la fréquence de vibration de la lame est  $f = 40,0$  Hz.
  3. Montrer que la vitesse des ondes dans la lame est  $v_0 = 12,8$  m · s<sup>-1</sup>.
  4. Montrer que la valeur de  $m_0$  pour que la vitesse des ondes dans la corde soit  $v = 20,0$  m · s<sup>-1</sup> est 0,200 g.  
Est-il alors possible d'obtenir des ondes stationnaires dans la corde ?
  5. Quelle valeur  $m_0$  doit-elle avoir pour qu'on observe un fuseau ?
- Donnée :* la tension maximale de la corde est  $F_{\text{max}} = 20 \pm 5$  N.

## CORRIGÉS

1

Méthode :

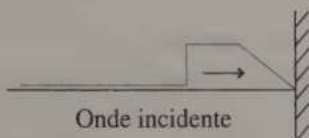
a. On représente l'onde incidente traduite de  $\Delta l = v \times \Delta t$ .

b. Si une partie de l'onde est « à droite » du mur, alors elle est réfléchié : on trace son symétrique par rapport à l'axe de propagation, puis on effectue une symétrie par rapport au mur.

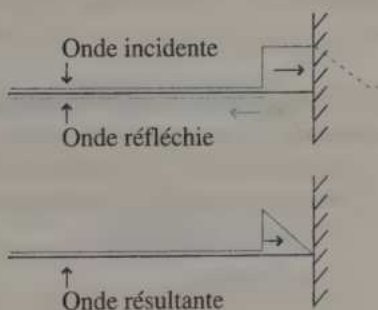
c. Si l'onde incidente et l'onde réfléchié se superposent, l'onde résultante est la somme des deux.

Pour la suite, les règles à appliquer (a, b ou c) sont citées.

•  $t = 2,0 \text{ s}$ ,  $\Delta l = 2,0 \text{ m}$  : règle a.



•  $t = 3,0 \text{ s}$ ,  $\Delta l = 3,0 \text{ m}$  : règles a, b et c.



•  $t = 4,0 \text{ s}$ ,  $\Delta l = 4,0 \text{ m}$  : règles a et b.



2. 1. On doit disposer d'un système assurant le couplage avec l'air (grande plaque pouvant vibrer d'un des deux côtés de la corde, par exemple).

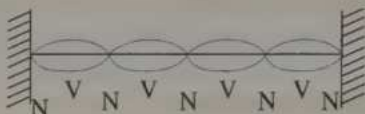
2. Le  $la_3$  correspond à la fréquence de 440 Hz.

3.  $f_4 = 440 \text{ Hz}$ ;  $L = n \times \frac{\lambda_4}{2}$  où  $n$  est le nombre de fuseaux, soit :

$$\lambda_4 = \frac{2L}{n} = \frac{2 \times 0,5}{4} = 0,25 \text{ m.}$$

$$v = \lambda_4 \cdot f_4 = 0,25 \times 440 = 110 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

$$\mu = \frac{F}{v^2} = \frac{20}{110^2} = 1,65 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^{-1}.$$

4.  4 ventres (V) et 5 nœuds (N)  
distance (N - V) =  $\frac{\lambda}{4} = 6,25 \text{ cm}$ .

$$5. f_1 = \frac{f_4}{4} = 110 \text{ Hz.}$$

$$6. f_3 = 3 \times f_1 = 330 \text{ Hz.}$$

7.  $f_1$  et ses harmoniques :  $f_2 = 220 \text{ Hz}$ ,  $f_3$ ,  $f_4$ ,  $f_5 = 550 \text{ Hz}$ , ...

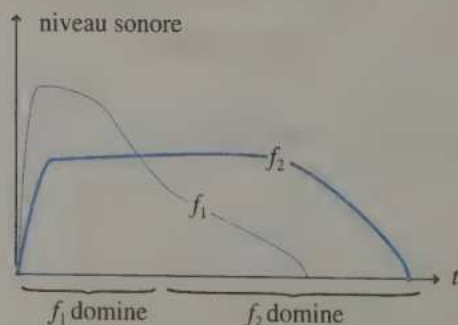
$$8. f'_4 = n \cdot f_1 = n \cdot \frac{v}{2L}, \text{ soit } L' = \frac{n \cdot v}{2f'_4} = \frac{4 \times 110}{2 \times 392} = 0,56 \text{ m.}$$

Il faudrait aussi que la fréquence d'excitation soit 392 Hz.

3. Un son est constitué du mode fondamental de fréquence  $f_1$  et d'harmoniques de fréquences  $f_n = n \cdot f_1 > f_1$  ( $n > 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ), donc plus aigus que le fondamental.

Or, les évolutions des différents modes sont variables.

Supposons ici, pour simplifier, que le son soit constitué uniquement du fondamental ( $f_1$ ) et de l'harmonique  $f_2 = 2 \cdot f_1$  (plus aigu). Le fondamental s'atténue vite alors qu'il prédominait au début, expliquant ce phénomène : **transitoires d'attaques et d'extinctions différents**.



$$1. \frac{L}{10} = \log\left(\frac{I}{I_0}\right) \text{ d'où } 10^{\frac{L}{10}} = 10^{\log\left(\frac{I}{I_0}\right)} = \frac{I}{I_0}$$

$$\text{donc } \frac{I_B}{I_A} = \frac{10^{\frac{L_B}{10}}}{10^{\frac{L_A}{10}}} = 10^{\frac{L_B - L_A}{10}} \text{ et de plus } \frac{I_B}{I_A} = \frac{P_B/S}{P_A/S} = \frac{P_B}{P_A}$$

$$\text{soit } \frac{I_B}{I_A} = \frac{P_B}{P_A} = 10^{\frac{L_B - L_A}{10}}$$

$$\text{A.N. : } \frac{I_B}{I_A} = \frac{P_B}{P_A} = 10^{\frac{53 - 50}{10}} \approx 2,0.$$

2. Résultats identiques car  $(L_B - L_A)$  vaut toujours  $3 \text{ dB}_A$ .

3. Généralisation : si le niveau sonore d'un appareil est plus élevé de  $3 \text{ dB}_A$  que celui d'un autre, alors sa puissance et son intensité sonores sont les doubles de celles du second appareil.

4. La puissance totale des appareils est  $P_{\text{tot}} = 2^n \times P$  (où  $P$  est la puissance d'un appareil).

$$\text{D'où } I_{\text{tot}} = \frac{P_{\text{tot}}}{S} = 2^n \times \frac{P}{S} = 2^n \times I \text{ (} I \text{ est l'intensité d'un appareil)}$$

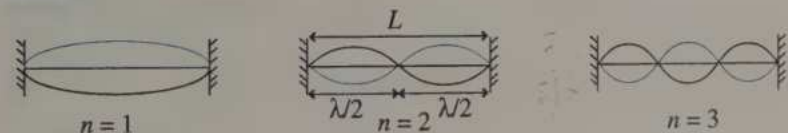
$$\text{et } L_{\text{tot}} = 10 \log I_{\text{tot}} = 10 \log (2^n \times I) = 10 \log 2^n + 10 \log I = n \times 10 \log 2 + L$$

$$\text{soit } L_{\text{tot}} \approx 3n + L \text{ (car } 10 \times \log 2 \approx 3,0).$$

$$\text{A.N. : } 8 = 2^3 \text{ aspirateurs : } L_{\text{tot}} = 3 \times 3 + 70 = 79 \text{ dB}_A.$$

$$5. n = \frac{L_{\text{tot}} - L}{3} = \frac{92 - 71}{3} \approx 7; \text{ il faut donc } 2^7 = 128 \text{ aspirateurs.}$$

5 1. a.



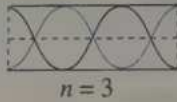
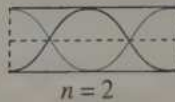
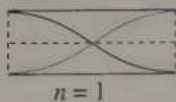
b. Pour le mode  $n$ , chacun des  $n$  fuseau(x) a pour largeur  $\frac{\lambda_n}{2}$ , la longueur totale étant  $L$  :

$$L = n \times \frac{\lambda_n}{2}, \text{ soit } \lambda_n = \frac{2L}{n}.$$

$$\text{c. } \lambda_n = \frac{v}{f_n} \text{ (} v \text{ est la vitesse de l'onde), d'où } \frac{v}{f_n} = \frac{2L}{n}, \text{ soit } f_n = \frac{n \cdot v}{2L}.$$

$$\text{Pour } n = 1, f_1 = \frac{v}{2L}, \text{ soit } f_n = n \cdot f_1.$$

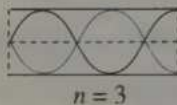
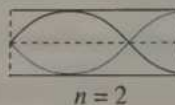
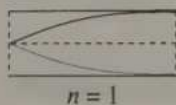
2. a.



b. et c. Pour le mode  $n$ , il y a  $(n-1)$  fuseau(x) + 2 demi-fuseaux à chaque extrémité, soit  $n$  fuseaux au total : de même qu'aux 1. b. et c. :

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad \text{et} \quad f_n = n \cdot f_1$$

3. a.



b. Pour le mode  $n$ , il y a  $(n-1)$  fuseau(x) de largeur  $\frac{\lambda_n}{2}$  et un demi-fuseau de largeur  $\frac{1}{2} \times \frac{\lambda_n}{2} = \frac{\lambda_n}{4}$ , la longueur totale étant  $L$ .

$$L = (n-1) \frac{\lambda_n}{2} + \frac{\lambda_n}{4} \quad \text{soit} \quad L = (2n-1) \frac{\lambda_n}{4}$$

c.  $\lambda_n = \frac{v}{f_n}$  d'où  $f_n = (2n-1) \frac{v}{4L}$  et pour  $n=1$ ,  $f_1 = \frac{v}{4L}$

soit  $f_n = (2n-1) \cdot f_1$  (ou  $f_n = k \cdot f_1$  avec  $k$  impair).

4.  $v$  ne dépend pas de  $f$  (ou  $\lambda$ ) : le milieu est supposé non dispersif.

6 1. Les  $la_3$  et  $la_6$  sont séparés par 3 octaves correspondant chacune à un facteur 2 en terme de fréquence, donc :  $f(la_6) = f(la_3) \times 2^3$ .  
Entre le  $la_6$  et le  $si_6$ , il y a 1 ton et, entre le  $si_6$  et le  $do_7$ , il y a un demi ton, soit 3 demi-tons au total correspondant chacun à un facteur  $2^{\frac{1}{12}}$  en terme de fréquence, donc :

$$f(do_7) = f(la_6) \times \left(2^{\frac{1}{12}}\right)^3, \text{ soit :}$$

$$\text{soit : } f(do_7) = f(la_4) \times 2^3 \times \left(2^{\frac{1}{12}}\right)^3$$

$$f(do_7) = f(la_4) \times 2^{\frac{13}{4}} = 4\,186 \text{ Hz.}$$

2. Fréquences des harmoniques :  $f_n = n \cdot f_1 = n \cdot f(do_7)$  ( $n \in \mathbb{N}$ ,  $n > 1$ ).

Pour être audible, il faut que  $f_n$  soit inférieure à 20 000 Hz,

d'où  $n < \frac{20\,000}{f(do_7)} \approx 4,8$  donc  $n = 2, 3$  ou 4 (1 est le fondamental), donc **trois**

**harmoniques sont audibles.**

7 Une octave comporte 8 notes, donc 7 intervalles, 5 de un ton et 2 de un demi-ton (*mi-fa* et *si-do*) ; soit 12 demi-tons. Les fréquences des notes extrêmes d'une octave sont dans le rapport 2 ; donc deux notes séparées par un demi-ton ont un rapport de fréquence de  $2^{\frac{1}{12}}$  et deux notes séparées par un ton ont un rapport de fréquence de  $(2^{\frac{1}{12}})^2 = 2^{\frac{1}{6}}$ .

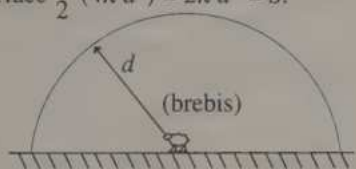
En définitive, on part de  $f(la_3) = 440,0$  Hz (connue). On « monte » vers  $f(la_4)$  (le  $la_4$  étant plus aigu que le  $la_3$ , est la fréquence plus élevée) en multipliant par  $2^{\frac{1}{6}}$  la fréquence précédente ( $2^{\frac{1}{12}}$  entre *mi-fa* et *si-do*).

On vérifie qu'une octave ( $la_3 - la_2$ ) correspond à un facteur 2. De même de  $la_3$  vers  $la_2$ , en divisant au lieu de multiplier.

Note	$la_3$	si	do	ré	mi	fa	sol	$la_4$
f(Hz)	440,0	493,9	523,3	587,3	659,3	698,5	784,0	880,0

Note	$la_2$	si	do	ré	mi	fa	sol	$la_3$
f(Hz)	220,0	246,9	261,6	293,7	329,6	349,2	392,0	440,0

8 1. Le son est diffusé dans une plaine, donc dans une demi-sphère de rayon  $d$ , de surface  $\frac{1}{2} (4\pi d^2) = 2\pi d^2 = S$ .



La puissance étant conservée, l'intensité sonore  $I$  à la distance  $d$  est :

$$I = \frac{P}{S} = \frac{P}{2\pi d^2} = I_a \text{ (seuil d'audibilité)}, \text{ d'où } P = I_a \times 2\pi d^2.$$

$$\text{A.N. : } P = 10^{-12} \times 2 \times \pi \times (10^3)^2 = 6,3 \times 10^{-6} \text{ W.}$$

À la distance  $l$ , on atteint le seuil de douleur :

$$I_d = \frac{P}{2\pi l^2} = \frac{I_a \times 2\pi d^2}{2\pi l^2} = I_a \times \frac{d^2}{l^2} \text{ soit } l = d \times \sqrt{\frac{I_a}{I_d}}$$

$$\text{A.N. : } l = 10^3 \times \sqrt{\frac{10^{-12}}{1}} = 1,0 \times 10^{-3} \text{ m} = 1,0 \text{ mm}$$

Cette cloche ne présente donc pas de danger.

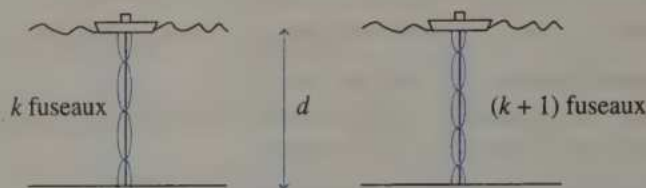
$$2. \text{ De même } I'_a = \frac{P}{2\pi d'^2} = \frac{I_a \cdot 2\pi d^2}{2\pi d'^2} = I_a \frac{d^2}{d'^2} \text{ et } d' = d \times \sqrt{\frac{I_a}{I'_a}}$$

$$\text{A.N. : } d' = 10^3 \times \sqrt{\frac{10^{-12}}{10^{-10}}} = 10^3 \times 10^{-\frac{2}{2}} = 100 \text{ m.}$$

La première cloche est préférable.

**9** Un système d'onde stationnaire s'établit avec un ventre de vibration au fond du lac (d'après l'énoncé) et au niveau du bateau (maximum d'amplitude). Ces deux ventres sont distants de  $k \cdot \frac{\lambda}{2}$  avec  $k \in \mathbb{N}^*$  ( $k$  est le nombre de fuseaux).

Pour la fréquence  $f' > f$ ,  $\lambda' = \frac{v}{f'} < \lambda$ , il y aura un fuseau de plus, soit  $(k+1)$  :



$$d = k \cdot \frac{\lambda}{2} = (k+1) \cdot \frac{\lambda'}{2}, \text{ soit } \frac{k}{2} \cdot \frac{v}{f} = \frac{(k+1)}{2} \cdot \frac{v}{f'} \text{ donc } k = \frac{f}{f' - f}$$

$$\text{et } d = k \cdot \frac{\lambda}{2} = \frac{k}{2} \cdot \frac{v}{f}, \text{ donc } d = \frac{v}{2(f' - f)}$$

$$\text{A.N. : } d = \frac{1\,500}{2 \times (1\,150 - 1\,100)} = 15 \text{ m.}$$

Remarque : On vérifie que  $k \in \mathbb{N}$  ( $k = 22$ ).

**10** 1. Les modes de rang  $n$  ont pour longueurs d'onde  $\lambda_n = \frac{2L}{n}$  et pour fréquence  $f_n = n \cdot f_1$  avec  $L = 0,700$  et  $f_1 = 146,8$  Hz. Le (mode) fondamental correspond à  $n = 1$  :

$n$	Nom	$\lambda_n$ (m)	$f_n$ (Hz)
1	fondamental	1,40	146,8
2	1 <sup>er</sup> harmonique	0,700	293,6
3	2 <sup>e</sup> harmonique	0,467	440,4 $\Rightarrow la_3$
4	3 <sup>e</sup> harmonique	0,350	587,2

$$2. v = \lambda_1 \times f_1 \text{ (ou } \lambda_n \times f_n) \text{ avec } \lambda_1 = 2L : v = 2L \cdot f_1 = 206 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

3. a. La  $mi_2$  est un ton (soit deux demi-tons) au-dessus du  $ré_2$  :

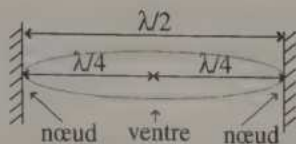
$$f(mi_2) = f(ré_2) \times \left[2^{\frac{1}{12}}\right]^2 = f(ré_2) \times 2^{\frac{1}{6}} = 164,8 \text{ Hz.}$$

b. En mode fondamental ( $n = 1$ )  $f(mi_2) = \frac{v}{2L'}$  ( $L'$  est la nouvelle longueur),  
soit  $L' = \frac{v}{2 f(mi_2)}$ .

Il faut raccourcir la corde de  $L - L' = L - \frac{v}{2f(mi_2)}$ .

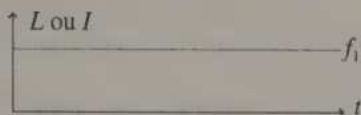
$$\text{A.N. : } L - L' = 0,70 - \frac{206}{2 \times 164,8} = 7,5 \times 10^{-2} \text{ m} = 7,5 \text{ cm.}$$

4. Le vibreur impose des oscillations forcées, donc la **fréquence est unique** ; c'est celle du fondamental avec  $n = 1$  ( $n$  est le nombre de fuseau(x)).

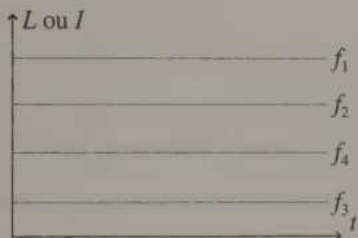


5. Lorsque la note est jouée, le **mode fondamental et les harmoniques sont audibles**, contrairement à la question 4. où seul le mode fondamental est audible (mais la représentation est complexe, dépendant aussi de l'importance relative des différents modes).

6. a. Vibreur : 1 fréquence, le son est entretenu (voir graphe ci-contre).

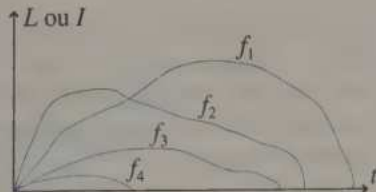


b. Archer : plusieurs fréquences (l'archer frotte la corde, à la façon d'une rape sur un matériau, mais plus délicatement !), les sons sont entretenus.



Par exemple : (voir graphe ci-contre).

c. Pincée (pizzicato) : plusieurs fréquences, les sons ne sont pas entretenus. Par exemple :



7.  $v^2 = \frac{F}{\mu}$  et  $\mu = \frac{m}{l}$  où  $l$  est la longueur totale :  $F = \frac{v^2 \cdot m}{l}$ .

$$F = \frac{206^2 \times (4,4 \times 10^{-3})}{1,12} = 166 \text{ N.}$$

8.  $\sqrt{\frac{F}{\mu}} = v = \lambda \cdot f_n = \frac{2L}{n} \cdot f_n$  soit  $f_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{F}{\mu}}$ . La hauteur d'un son est donnée

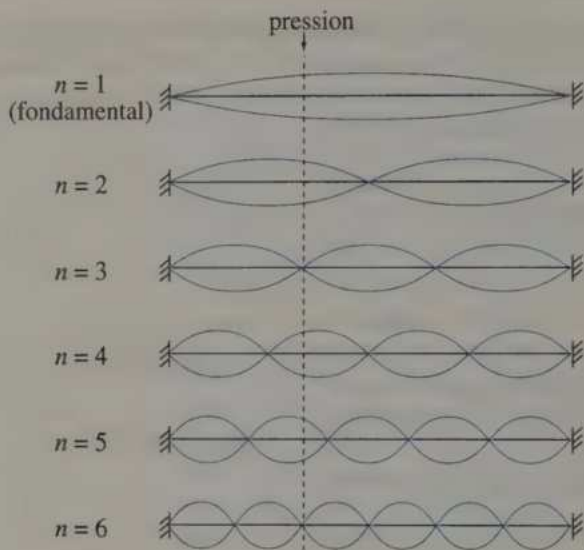
par son fondamental, soit  $n = 1$ , donc  $f_1 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{F}{\mu}}$  (1)

Si  $F$  devient  $F' = 4F$ , alors  $f_1$  devient  $f'_1$  :  $f'_1 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{F'}{\mu}} = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{4F}{\mu}}$  (2)

(1) et (2) donnent  $\frac{f'_1}{f_1} = 2$  soit  $f'_1 = 2f_1 = 293,6 \text{ Hz}$  (ré<sub>3</sub>)

(car un facteur 2 en fréquence correspond à une octave)  
Mais, avec une telle tension, **la corde risque de casser !**

**11** La corde vibre suivant plusieurs modes «  $n$  » qui se superposent :



Le fait d'appliquer une légère pression à 10,8 cm d'une extrémité, soit au tiers de la longueur (au niveau des pointillés sur le schéma), va limiter les vibrations des modes qui présentent une grande amplitude de mouvement à ce niveau, mais va favoriser les modes qui présentent un nœud à ce niveau : modes de rang 3, 6, 9, ...

Comme en général, un son ne contient que les 4 ou 5 premiers modes (ou harmoniques), seul **l'harmonique de rang 3 est renforcé**.

**12** 1.  $I = \frac{P}{s} = \frac{P}{\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2}$  soit  $I = \frac{4P}{\pi d^2}$

A.N. :  $I = \frac{4 \times 0,5}{\pi \cdot 0,16^2} \approx 24,9 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ .

$L = 10 \log \left( \frac{I}{I_0} \right) = 134 \text{ dB}_A$  ( $I_0 = 10^{-12} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$ ).

$$2. I(x) = \frac{P}{S} = \frac{4P}{\pi D^2} \text{ où } D = 2x \cdot \tan \alpha \text{ est le diamètre de (S).}$$

$$I(x) = \frac{P}{\pi x^2 \cdot \tan^2 \alpha}$$

$$\text{A.N. : } I(x) = \frac{0,5}{\pi \tan^2(30^\circ)} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{0,48}{x^2}$$

$$L(x) = 10 \log \left( \frac{I}{I_0} \right) = 10 \log \frac{P}{\pi x^2 \cdot \tan^2 \alpha \cdot I_0}$$

$$\text{soit } L(x) = 10 \log \frac{P}{\pi \tan^2 \alpha \cdot I_0} - 20 \log x$$

$$\log \left( \frac{A}{x^2} \right) = \log A - \log x^2 = \log A - 2 \log x$$

$$\text{A.N. : } L(x) = 10 \log \left( \frac{0,5}{\pi \tan^2(30^\circ) \times 10^{-12}} \right) - 20 \log x = 117 - 20 \log x$$

$$3. I(s') = \frac{P(s')}{s'}$$

$$= \frac{P(S')}{s'} \text{ car la puissance se conserve entre (S') et (s')}$$

$$= \frac{I(S') \cdot S'}{s'}$$

$$I(s') = \frac{I(S) \cdot S'}{s'} \text{ car } S' \text{ est une partie de } S, \text{ donc } I(S') = I(S).$$

Comme  $S' > s'$ ,  $I(s') > I(S)$

$$\text{A.N. : } I(s') = \left( \frac{30 \times 10^{-4}}{0,70 \times 10^{-4}} \right) I(S) = 42,9 I(S).$$

$$L(s') = 10 \log \left( \frac{I(s')}{I_0} \right) = 10 \log \frac{I(S) \cdot S'}{I_0 \cdot s'} = 10 \log \frac{I(S)}{I_0} + 10 \log \frac{S'}{s'}$$

$$\text{soit } L(s') = L(x) + 10 \log \frac{S'}{s'} \text{ car } I(x) = I(S) = I(S')$$

$$\text{A.N. : } L(s') = L(x) + 16,3 \text{ (} L(s') > L(x)\text{).}$$

Grâce au cornet, on entend mieux le son.

$$13 \quad 1. [F] = [\text{force}] = [\text{poids}] = [m \cdot g] = M \times (L \times T^{-2}) \text{ et } [\mu] = \left[ \frac{m}{l} \right] = M \cdot L^{-1}$$

$$\text{d'où } \left[ \sqrt{\frac{F}{\mu}} \right] = \left( \frac{[F]}{[\mu]} \right)^{1/2} = \left( \frac{M \cdot L \cdot T^{-2}}{M \cdot L^{-1}} \right)^{1/2} = (L^2 \cdot T^{-2})^{1/2} = L \cdot T^{-1} = [v] \text{ C.Q.F.D.}$$

2. La lame est attirée par l'électroaimant, que celui-ci soit un pôle Nord ou Sud magnétique (cf. cours de Première), donc pour les valeurs extrêmes du courant, sans tenir compte de son sens, soit deux fois par période du courant :

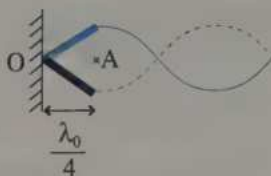
$$f = 2f_0 = 40,0 \text{ Hz.}$$

3. La lame décrit un quart de longueur d'onde en positions extrêmes (cf. schéma) ; donc :

$$\lambda_0 = 4 \times \text{OA}$$

$$\text{et } v_0 = \lambda_0 \cdot f_0 = 4 \times \text{OA} \times f_0.$$

$$\text{A.N. : } v_0 = 4 \times 0,08 \times 40 = \mathbf{12,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}}$$



$$4. v^2 = \frac{F}{\mu} = \frac{m_0 \cdot g}{\frac{m}{l}} = \frac{m_0}{m} \cdot g \cdot l$$

$$\text{donc } m_0 = m \times \frac{v^2}{g \cdot l}$$

$$\text{A.N. : } m_0 = (6 \times 10^{-3}) \times \frac{20^2}{9,8 \times 1,2} \approx \mathbf{0,204 \text{ kg.}}$$

Pour obtenir des ondes stationnaires, il faut  $AB = L = n \cdot \frac{\lambda_n}{2} = n \cdot \frac{v}{2f_n}$

soit  $n = \frac{2Lf_n}{v}$  doit appartenir à  $\mathbb{N}^*$ .

$$\text{A. N. : } n = \frac{2 \times 1 \times 40}{20} = 4,00 \in \mathbb{N}.$$

**La corde oscille en mode d'ondes stationnaires (4 fuseaux).**

$$5. v = \frac{2f_n \cdot L}{n} \text{ et } v^2 = \frac{F}{\mu} = \frac{m_0}{m} \cdot g \cdot l, \text{ soit } m_0 = \frac{4m \cdot f_n^2 \cdot L^2}{n^2 \cdot g \cdot l}$$

$$\text{A.N. : } m_0 = \frac{4 \times (6 \times 10^{-3}) \times 40^2 \times 1^2}{1^2 \times 9,8 \times 1,2} = \mathbf{3,27 \text{ kg}}$$

$F = m_0 \cdot g = 32,0 \text{ N} > F_{\text{max}}$  : la corde casse, c'est donc impossible.

## 21

# Produire des signaux, communiquer

## 1 ONDES ÉLECTROMAGNÉTIQUES

### 1. Les différents types d'ondes électromagnétiques

Différents paramètres (cf. chapitre 3, § I) caractérisent une onde électromagnétique, comme sa fréquence ( $f$  ou  $\nu$ ) ou sa longueur d'onde  $\lambda$ . Les ondes électromagnétiques peuvent être classées suivant ces paramètres : cf. chapitre 17, § II.1.

### 2. Les ondes (électromagnétiques) hertziennes

- Elles se propagent plus ou moins bien : très bien dans l'air, moyennement dans le béton, pas du tout dans les métaux.
- Elles peuvent être réfléchies par l'ionosphère (grandes ondes, GO) ou non (fréquence modulée, FM).
- Leur vitesse de propagation dans l'air (de l'ordre de  $3 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ) est nettement supérieure à celle des ondes de pression (de l'ordre de  $340 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ).

### 3. Émission et réception par des antennes

Une antenne émettrice transforme un signal électrique sinusoïdal qui lui est transmis, en une onde électromagnétique de même fréquence.

Une antenne réceptrice transforme l'onde électromagnétique sinusoïdale qu'elle reçoit, en un signal électrique de même fréquence.

### 4. Utilisation pour la transmission de signaux

Les ondes hertziennes permettent de transmettre de nombreux signaux (conversations, enregistrements vidéo, données informatiques, ...), rapidement, sur de très grandes distances, sans support à installer (pas de « câble »), en utilisant des antennes de tailles raisonnables. Certaines ondes hertziennes peuvent couvrir toute la surface du globe (cf. § I. 2.).

## II TRANSMISSION D'UN SIGNAL


### 1. Signal

- Un signal élémentaire est une tension du type :

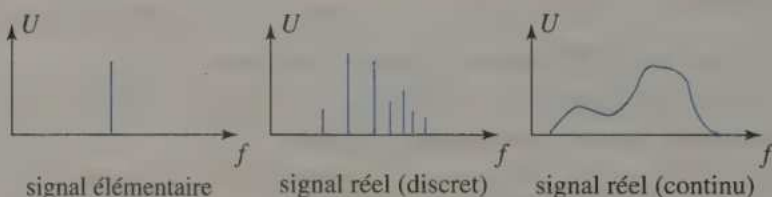
$$u(t) = U \cos(2\pi \cdot f \cdot t + \varphi_0),$$

où :

- $U \geq 0$  est l'amplitude (en volt, V) ;
- $f > 0$  est la fréquence du signal (en hertz, Hz) ;
- $\varphi_0$  est la phase à l'origine des dates (en radian, rad).

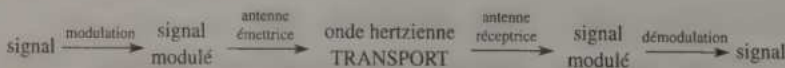
 On peut utiliser la fonction sinus au lieu de la fonction cosinus en adaptant la valeur de  $\varphi_0$ .

- Un signal réel est une somme (continue ou discrète) de signaux élémentaires.
- Le spectre en fréquence d'un signal est la représentation de  $U$  en fonction de  $f$  :




### 2. Modulation du signal : intérêt et principe

- L'onde électromagnétique produite directement par le signal n'est pas une onde hertzienne (fréquence trop faible), donc elle est non « transportable » (cf. § I. 4).
- Il faut alors utiliser une tension de fréquence hertzienne, dite porteuse, qui est modulée par le signal à transmettre. Le signal modulé ainsi obtenu est donc hertzien. Il est émis par l'antenne (émettrice), et peut alors être transporté, puis reçu par une autre antenne (réceptrice), et enfin démodulé afin de reconstituer le signal initial.



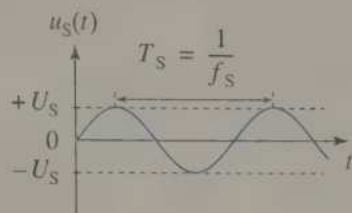
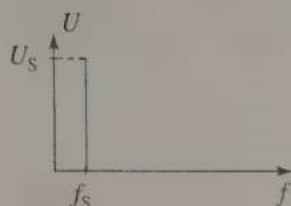
- Les paramètres pouvant être modulés sont soit l'amplitude, soit la fréquence, soit la phase.

 Seule la modulation en amplitude est au programme.

### iii MODULATION DU SIGNAL

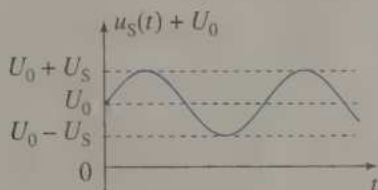
Signal à transporter (ou tension modulante) :

$$u_S(t) = U_S \cos(2\pi \cdot f_S \cdot t)$$



• **1<sup>re</sup> étape** : addition de la tension continue ou tension de décalage  $U_0$  (en V). Le signal devient :

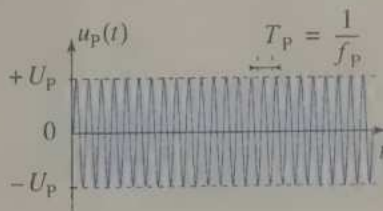
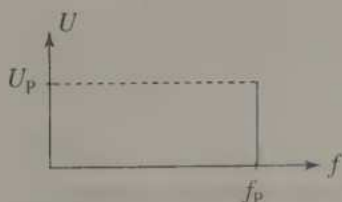
$$u_S(t) + U_0 = U_S \cos(2\pi \cdot f_S \cdot t) + U_0$$



• **2<sup>e</sup> étape** : multiplication par la tension de la porteuse.

La tension de la porteuse ou signal à moduler est :

$$u_P(t) = U_P \cos(2\pi \cdot f_P \cdot t)$$



Un multiplieur, permet de multiplier  $u_S(t) + U_0$  par  $u_P(t)$ , au coefficient  $k$  près (en  $V^{-1}$ ). Le signal devient alors  $u_M(t)$ , la tension modulée :

$$u_M(t) = k \cdot (u_S(t) + U_0) \cdot u_P(t) \quad (1)$$

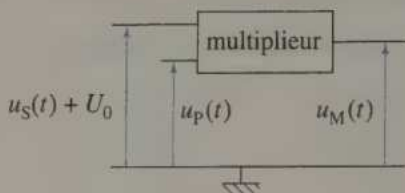
$$= A [m \cdot \cos(2\pi \cdot f_S \cdot t) + 1] \cos(2\pi \cdot f_P \cdot t) \quad (2)$$

$$= A \cdot \cos(2\pi \cdot f_P \cdot t) + \frac{A \cdot m}{2} \cos[2\pi(f_P - f_S)t] + \frac{A \cdot m}{2} \cos[2\pi(f_P + f_S)t] \quad (3)$$

$$m = \frac{U_S}{U_0} = \frac{U_{\max} - U_{\min}}{U_{\max} + U_{\min}} \text{ est le}$$

taux de modulation (sans unité) ;  
il faut  $m < 1$  afin d'éviter le phénomène de surmodulation (cf. exercice 9) ;

$$A = k \cdot U_P \cdot U_0 \text{ (unité : V).}$$

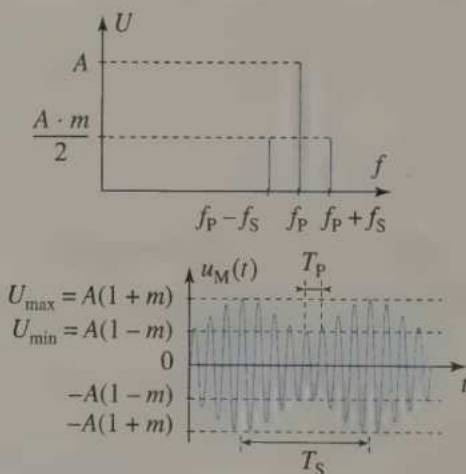


les calculs précédents sont à connaître parfaitement.

L'égalité (1) illustre l'utilisation du multiplieur.

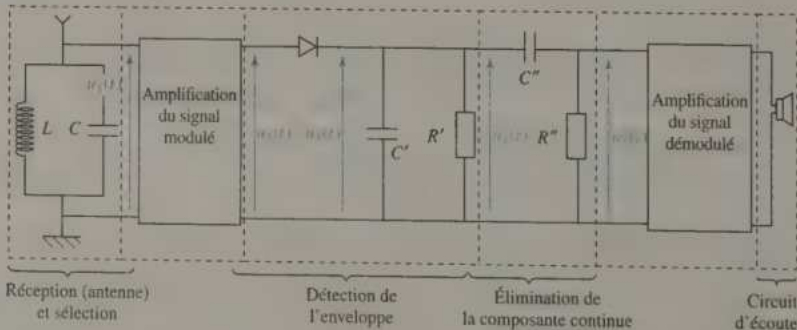
L'égalité (2) illustre le principe de la modulation en amplitude : l'amplitude de la tension modulée  $u_M(t)$  est une fonction affine de la tension modulante  $u_S(t)$ .

L'égalité (3) montre que  $u_M(t)$  est la somme de trois sinusoïdes, de fréquences  $f_P$ ,  $f_P - f_S$  et  $f_P + f_S$  (cf. spectre ci-dessous).



#### IV DÉMODULATION DU SIGNAL

##### • Schéma de principe



• **1<sup>re</sup> étape** : réception et sélection du signal

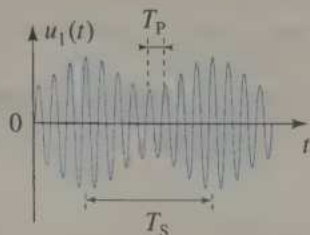
L'antenne reçoit les ondes électromagnétiques et les transmet au circuit d'accord.

Le **circuit LC parallèle** est un **filtre passe-bande** (cf. V) pour la tension, et ne laisse passer que les signaux des fréquences proches de

$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L \cdot C}}$ . On « accordera » donc le

circuit sur  $f_p = f_0$ , de façon à récupérer le signal  $u_1(t)$  de fréquences  $f_p, f_p - f_s$  et  $f_p + f_s$

(avec  $T_p = \frac{1}{f_p}$  et  $T_s = \frac{1}{f_s}$ ).

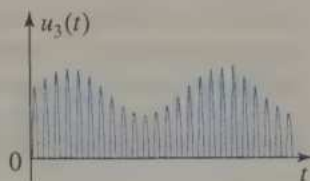


• **2<sup>e</sup> étape** : amplification du signal modulé

La tension  $u_2(t)$  est identique à la tension  $u_1(t)$ , seule la valeur de l'amplitude est augmentée, afin de mieux exploiter le signal  $u_1(t)$  qui est très faible.

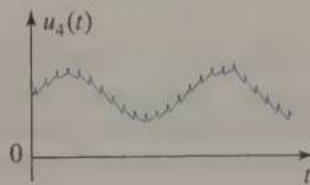
• **3<sup>e</sup> étape** : détection de l'enveloppe

D'une part la **diode** ne laisse passer le courant que lorsqu'elle est passante (cf. annexes, rappels d'électricité). Le signal obtenu  $u_3(t)$  est alors celui représenté ci-contre.



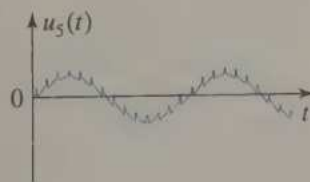
D'autre part, le condensateur du **circuit RC parallèle** se charge lorsque  $u_3(t)$  augmente, puis se décharge lorsque  $u_3(t)$  diminue (cf. chapitre 7). Afin que la courbe  $u_4(t)$  des décharges successives ressemble à l'enveloppe de  $u_3(t)$ , il faut :

$T_s > \tau' \gg T_p$ , avec  $\tau' = R' \cdot C'$  (cf. exercice 5).



• **4<sup>e</sup> étape** : élimination de la composante continue

Le **circuit RC série** se comporte comme un **filtre passe-haut** qui ne laisse « passer » que les hautes fréquences », supérieures à  $\frac{1}{\tau''} = \frac{1}{R'' \cdot C''}$ . La tension  $u_4(t)$  étant approximativement la somme d'une sinusoïde de fréquence  $f_s$  et d'une tension



constante ou continue (donc de fréquence nulle), cette dernière est éliminée. Il faut donc que  $f_s \gg \frac{1}{R'' \cdot C''}$ . Le signal obtenu est alors  $u_5(t)$ , représenté ci-dessus.

- 5<sup>e</sup> étape : amplification avant utilisation

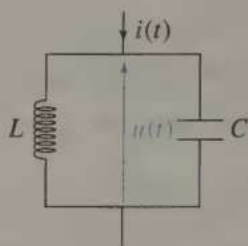
La tension  $u_s(t)$  est amplifiée pour pouvoir être écoutée, par exemple.

- 6<sup>e</sup> étape : circuit d'écoute

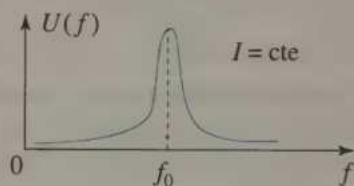
Dans le cas d'une onde radio, il s'agit de haut-parleurs.

### V COMPLÉMENT : LE CIRCUIT LC PARALLÈLE, CIRCUIT D'ACCORD

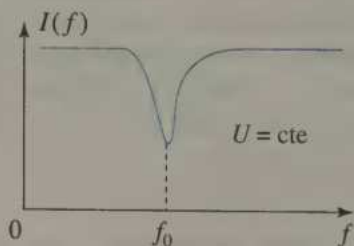
Soit le circuit LC parallèle représenté ci-contre.  $u(t)$  et  $i(t)$  sont la tension et l'intensité sinusoïdales de fréquence  $f$ , et d'amplitudes respectives  $U$  et  $I$ .



- En faisant varier la fréquence  $f$  tout en maintenant  $I$  constant,  $U$  varie. Le circuit se comporte alors comme un **filtre passe-bande** pour  $U(f)$ , centré autour de la fréquence  $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L \cdot C}}$ .



- En faisant varier la fréquence  $f$  tout en maintenant  $U$  constant,  $I$  varie. Le circuit se comporte alors comme un **circuit bouchon** pour  $I(f)$ , centré autour de la fréquence  $f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{L \cdot C}}$ .



## EXERCICES D'APPLICATION

## 1 LECTURE DE SPECTRE

\* (10 min) ► P. 330

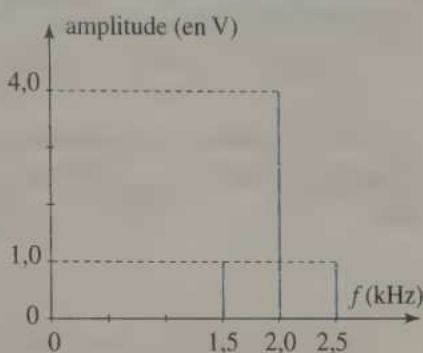
Le spectre ci-contre est celui d'un signal modulé en amplitude.

L'amplitude du signal porteur est  $U_p = 2,0$  V, et le coefficient du multiplieur est  $k = 0,15$  V<sup>-1</sup>.

1. En déduire :

- les fréquences des signaux modulant et porteur ;
- l'amplitude du signal modulant ;
- la valeur de la tension continue  $U_0$ .

2. Y a-t-il surmodulation ?



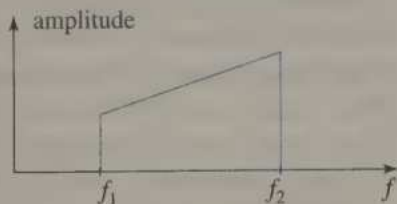
## 2 SPECTRE DE SIGNAL COMPLEXE

\* (5 min) ► P. 330

Le spectre ci-contre est celui d'un signal complexe.

Il est utilisé pour moduler un signal de fréquence  $f_p$  ( $f_p \gg f_s$ ).

Représenter l'allure du spectre du signal modulé.



## 3 OSCILLOGRAMME

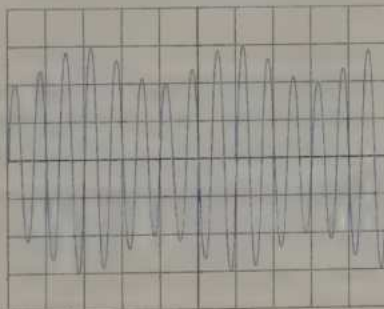
\* (15 min) ► P. 331

L'oscillogramme ci-contre est celui d'un signal modulé  $u(t)$ , avec comme sensibilité  $0,2$  V  $\cdot$  div<sup>-1</sup> et  $5$  ms  $\cdot$  div<sup>-1</sup>.

Le coefficient du multiplieur est  $k = 0,050$  V<sup>-1</sup> et la tension continue  $U_0 = 2,0$  V.

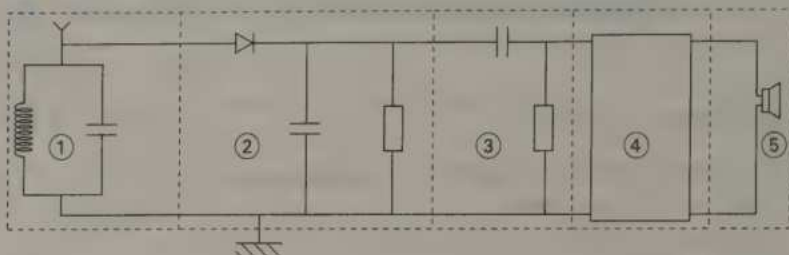
En déduire :

- les fréquences des signaux modulant et porteur ;
- la valeur du taux de modulation ;
- la valeur des amplitudes des signaux modulant et porteur.



#### 4 CIRCUIT DE DÉMODULATION

\* (5 min) ► P. 332



1. Donner la nature des différentes parties de ce circuit de démodulation.
2. En principe, il existe un autre élément : préciser sa place, son rôle et son nom.

## EXERCICES D'ENTRAÎNEMENT

#### 5 DÉTECTION D'ENVELOPPE

\*\* (15 min) ► P. 332

1. Représenter le montage détecteur d'enveloppe, utilisé pour démoduler un signal (non surmodulé). Préciser le rôle de chacune des deux parties.
2. Représenter l'allure du signal modulé, puis l'allure du signal après le premier composant, puis l'allure de l'enveloppe obtenue.
3. Dans cette question, on étudie le rôle de la seconde partie du montage.
  - a. Rappeler l'allure de la courbe de décharge d'un condensateur dans un circuit  $RC$  (tracer  $u_C(t)$ ).
  - b. Expliquer en quoi la condition  $T_p \ll RC$  permet de se ramener au cas cité en a.
  - c. Expliquer en quoi la seconde condition  $RC < T_S$  permet de détecter l'enveloppe.
  - d. Représenter les signaux obtenus dans les cas  $RC < T_p \ll T_S$ ,  $T_p \ll RC < T_S$  et  $T_p \ll T_S < RC$ .

#### 6 ÉLIMINATION DE LA COMPOSANTE CONTINUE

\*\* (10 min) ► P. 334

1. Représenter le montage utilisé lors de la démodulation d'un signal, pour éliminer la composante continue.
2. Représenter le graphe de la tension à l'entrée de ce montage  $u_3(t)$  (après la détection d'enveloppe), de façon très succincte, et celui de la tension à la sortie du montage  $u_4(t)$ .

- Quelle relation existe-t-il entre les caractéristiques ( $R, L, C, \dots$ ) de ce montage et la fréquence  $f_S$  de la tension  $u_3(t)$  ?
- Que dire de la fréquence  $f$  de la tension  $u_4(t)$  ?
- Donner un nom à un tel montage, et le justifier.

### 7 CIRCUIT D'ACCORD

\*\* (15 min) ► P. 334

On utilise le circuit  $LC$  parallèle suivant. On note :

$$i(t) = I \cos(2\pi f t + \varphi)$$

$$u(t) = U \cos(2\pi f t + \varphi')$$

- On fixe  $I$  ( $I = \text{cte}$ ) et on fait varier  $f$ . Représenter l'allure de  $U(f)$ . Exprimer la valeur de la fréquence remarquable  $f_0$ .

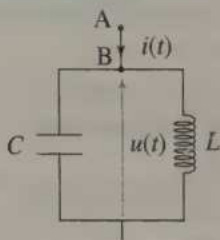
Nommer ce type de circuit.

- On fixe  $U$  ( $U = \text{cte}$ ) et on fait varier  $f$ . Représenter l'allure de  $I(f)$ . Exprimer la valeur de la fréquence remarquable  $f'_0$ .

Nommer ce type de circuit.

- La partie AB est une antenne, sensible à la longueur d'onde  $\lambda = 1\,852$  m (France Inter).

- En déduire la fréquence associée.
- Expliquer le phénomène observé, et faire l'analogie avec une des deux premières questions.
- $L = 5,00$  mH. Sur quelle valeur faut-il régler  $C$  pour capter cette station radio ?



### 8 LE CLASSIQUE

\*\* (20 min) ► P. 335

Répondre au QCM suivant, en expliquant vos choix, et SANS CALCULATRICE. On souhaite transmettre puis recevoir le signal  $u_S(t) = 1,2 \times \cos(6,3 \times 10^2 t)$ , en volt.

- Choisir la valeur de la tension continue (ou tension de décalage) :

a.  $U_0 = 0,80$  V      b.  $U_0 = 1,2$  V      c.  $U_0 = 1,6$  V

- Choisir la fréquence de la porteuse :

a.  $f_p = 10^{-2}$  Hz      b.  $f_p = 10^2$  Hz      c.  $f_p = 10^6$  Hz

- Choisir la longueur de l'antenne réceptrice, si l'on utilise une antenne « quart d'onde ».

a.  $l = 25$  m      b.  $l = 50$  m      c.  $l = 75$  m

- Choisir la valeur de la capacité du circuit d'accord, sachant que l'on utilise une inductance de valeur  $L = 25$  mH.

a.  $C = 1,0$   $\mu$ F      b.  $C = 1,0$  nF      c.  $C = 1,0$  pF

5. Choisir le composant qu'il est nécessaire d'utiliser avant le détecteur d'enveloppe.
- a. une diode                      b. un transistor                      c. une bobine
6. Choisir la valeur de la capacité à associer au conducteur ohmique (de résistance  $R = 1,0 \text{ k}\Omega$ ) du détecteur d'enveloppe.
- a.  $C = 1,0 \text{ }\mu\text{F}$                       b.  $C = 1,0 \text{ nF}$                       c.  $C = 1,0 \text{ pF}$
7. Le filtre passe-haut doit laisser passer plutôt les fréquences :
- a.  $f \geq 1 \text{ Hz}$                       b.  $f \geq 10^2 \text{ Hz}$                       c.  $f \geq 10^4 \text{ Hz}$   
 b.  $f \leq 1 \text{ Hz}$                       e.  $f \leq 10^2 \text{ Hz}$                       f.  $f \leq 10^4 \text{ Hz}$
8. Cet exemple correspond au :
- a. téléphone portable      b. poste de radio                      c. autre

**9 SURMODULATION**

\*\* (10 min) ► P. 335

1. Tracer l'allure d'un signal modulé et préciser le domaine du paramètre associé dans les trois cas suivants :
- a. sans surmodulation      b. avec modulation                      c. dans le cas limite.
2. Représenter le signal obtenu en sortie du détecteur d'enveloppe dans les trois cas précédents, et commenter. On supposera la condition  $T_p \ll \tau < T_s$  réalisée.

---

## EXERCICES D'APPROFONDISSEMENT

---

**10 BANDES DE FRÉQUENCES ET SIGNAUX COMPLEXES**

\*\* (5 min) ► P. 336

Trois signaux complexes ①, ② et ③ occupent respectivement les intervalles de fréquences  $I_1 = [500 ; 1\ 500]$ ,  $I_2 = [1\ 000 ; 2\ 500]$  et  $I_3 = [1\ 000 ; 4\ 000]$  (fréquences en Hz). Les signaux modulés occupent l'intervalle de fréquences  $I = [f ; f + \Delta f]$ .

Calculer la valeur minimale de  $\Delta f$ .

**11 EXPRESSION NUMÉRIQUE DE  $u_M$** 

\*\*\* (20 min) ► P. 337

Soit  $u_M(t)$ , l'expression d'une tension modulée en amplitude, en volt :

$$u_M(t) = 0,167 \cos(1,89 \times 10^6 t) [25,2 + 13,9 \cos(9,62 \times 10^4 t)].$$

- Calculer la fréquence  $f_s$  et l'amplitude  $U_s$  de la tension du signal à transmettre.
- Calculer la fréquence  $f_p$  et l'amplitude  $U_p$  de la porteuse.
- Calculer le taux de modulation  $m$ . Y a-t-il surmodulation ?

- Récrire  $u_M(t)$  sous la forme d'une somme de trois fonctions sinusoïdales, puis représenter le spectre de  $u_M(t)$ .
- Donner l'expression de la tension enveloppe de  $u_M(t)$ , notée  $u_E(t)$ , obtenue en sortie du détecteur d'enveloppe.
- En déduire l'expression de la tension  $u_F(t)$ , tension finale obtenue après le filtre passe-haut. Conclure.

Données :  $k = 0,132 \text{ V}^{-1}$  (coefficient caractéristique du multiplieur) ;  
 $U_0 = 2,50 \text{ V}$  (tension de décalage).

### 12 ENCOMBREMENT DES BANDES DE FRÉQUENCES (5 min) ► P. 338

Reprendre l'exercice 10 avec les signaux ① et ②, caractérisés cette fois par  $I_1 = [500 ; 1\,500]$ ,  $I_2 = [2\,000 ; 4\,000]$  (en Hz).

### 13 MÉTHODE (CLASSIQUE) DU TRAPÈZE (20 min) ► P. 338

La voie X d'un oscilloscope enregistre la tension d'un signal :  
 $u_S(t) = U_S \cos(2\pi f_S t)$ .

La voie Y d'un oscilloscope enregistre la tension modulée :

$u_M(t) = k \times (u_S(t) + U_0) \times u_P(t)$  où  $u_P(t) = U_P \cos(2\pi f_P t)$  est la tension de la porteuse.

On pose  $A = k \cdot U_0 \cdot U_P$  et on appelle  $m$  le taux de modulation ( $m < 1$ ).

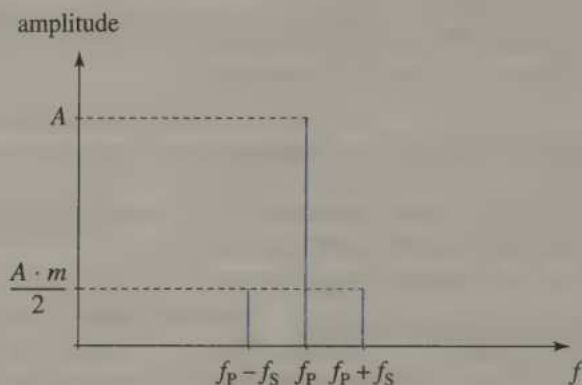
- Représenter succinctement l'écran de l'oscilloscope lorsque X est le seul mode activé.
- Représenter succinctement l'écran de l'oscilloscope lorsque Y est le seul mode activé, après avoir écrit  $u_M(t)$  sous la forme d'une fonction sinusoïdale, dont l'amplitude est elle-même une fonction sinusoïdale de  $t$ .
- L'oscilloscope est en mode X-Y, c'est-à-dire que Y est représentée en fonction de X :  $Y(X)$ . Expliquer clairement pourquoi l'on observe une figure inscrite dans un trapèze, et représenter succinctement cette figure.
- Montrer que la mesure des deux hauteurs du trapèze ( $h$  et  $H$ ) permet d'avoir accès à  $m$ . Pour cela exprimer  $m$  en fonction de  $h$  et  $H$ .
- À quelle contrainte est soumise la méthode précédente ? Qu'en serait-il dans le cas contraire ?

### 14 MODULATION SANS PORTEUSE (5 min) ► P. 339

Comment moduler un signal afin qu'il n'ait plus de porteuse (*id est* :  $f_P$  n'apparaît plus dans le spectre) ?

## CORRIGÉS

1. Le spectre d'un signal modulé est :



Par lecture graphique, on en déduit :

a.  $f_p = 2,0 \text{ kHz}$  et  $f_s = (f_p + f_s) - f_p = 2,5 - 2,0 = 0,5 \text{ kHz}$ .

b.  $1,0 = \frac{A \cdot m}{2} = \frac{1}{2}(k \cdot U_p \cdot U_0) \cdot \frac{U_s}{U_0} = \frac{1}{2}k \cdot U_p \cdot U_s$  d'où :

$$U_s = \frac{2 \times 1,0}{k \cdot U_p}$$

A.N. :  $U_s = \frac{2 \times 1,0}{0,15 \times 2} \approx 6,7 \text{ V}$ .

c.  $4,0 = A = k \cdot U_p \cdot U_0$  d'où  $U_0 = \frac{4,0}{k \cdot U_p}$ .

A.N. :  $U_0 = \frac{4,0}{0,15 \times 2} \approx 13 \text{ V}$ .

2.  $m = \frac{U_s}{U_0} = 0,50$  donc  $m < 1$  : il n'y a pas surmodulation.

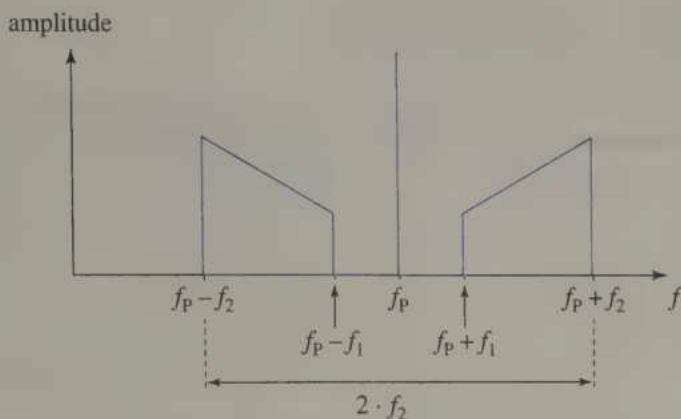
2. Chaque valeur d'une fréquence  $f_s \in [f_1 ; f_2]$  se « transforme » en trois valeurs :  $f_p$ ,  $f_p + f_s$ ,  $f_p - f_s$ .

La première valeur va donner un « pic », commun à toutes les valeurs de  $f_s$ .

La deuxième valeur va donner un trapèze, identique au précédent («  $+f_s$  ») translaté de la valeur  $f_p$  («  $+f_p$  »).

La troisième valeur va donner un trapèze symétrique par rapport à Oy du précédent («  $-f_s$  ») et translaté de la valeur  $f_p$  («  $+f_p$  »).

On obtient le spectre suivant :



**3 a.** La largeur de l'écran représente

$\Delta t = (10 \text{ divisions}) \times (5 \text{ ms} \cdot \text{div}^{-1}) = 5,0 \times 10^{-2} \text{ s}$ , mais aussi 2,5 oscillations de  $u_s(t)$  et 15 oscillations de  $u_p(t)$  :

$$f_s = \frac{1}{T_s} = \frac{1}{\frac{\Delta t}{2,5}} = \frac{2,5}{5 \times 10^{-2}} = 50 \text{ Hz}$$

$$f_p = \frac{1}{T_p} = \frac{1}{\frac{\Delta t}{15}} = \frac{15}{5 \times 10^{-2}} = 300 \text{ Hz.}$$

**b.**  $m = \frac{U_{\max} - U_{\min}}{U_{\max} + U_{\min}}$   $U_{\max}$  et  $U_{\min}$  étant les extrema de la courbe  $u_1(t)$  qui est la sinusoïde qui passe par les maxima de  $u(t)$  (cf. formulaire, § III).

$$\left. \begin{aligned} U_{\max} &= (3 \text{ div}) \times (0,2 \text{ V} \cdot \text{div}^{-1}) = 0,6 \text{ V} \\ U_{\min} &= (2 \text{ div}) \times (0,2 \text{ V} \cdot \text{div}^{-1}) = 0,4 \text{ V} \end{aligned} \right\} \text{d'où } m = \frac{0,6 - 0,4}{0,6 + 0,4} = 0,2.$$

**Il n'y a pas surmodulation ce qui se voit d'après l'oscillogramme, et ce qui est confirmé par la valeur de  $m$ , inférieure à 1.**

$$\text{c. } U_{\max} = A(1+m) = k \cdot U_p \cdot U_0(1+m) \text{ d'où } U_p = \frac{U_{\max}}{k \cdot U_0 \cdot (1+m)}$$

$$m = \frac{U_s}{U_0} \text{ d'où } U_s = m \cdot U_0$$

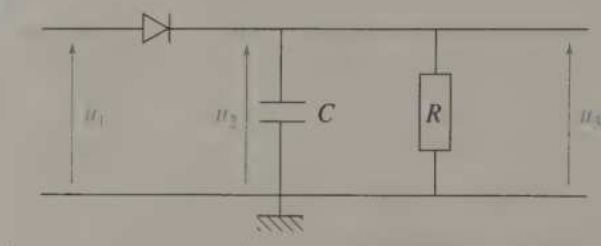
$$\text{A.N. : } U_p = \frac{0,6}{0,05 \times 2 \times (1+0,2)} = 5,0 \text{ V et } U_s = 0,2 \times 2 = 0,40 \text{ V.}$$

- 4 1. ① est le circuit d'accord et l'antenne.  
 ② est le montage détecteur d'enveloppe.  
 ③ élimine la composante continue.  
 ④ amplifie le signal pour l'envoyer à ⑤.  
 ⑤ est le circuit d'écoute (haut-parleur).

2. Le signal reçu par l'antenne est très faible. Il faut l'amplifier avant le détecteur d'enveloppe : on place un amplificateur entre ① et ②.

5

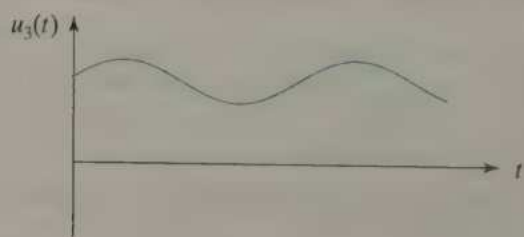
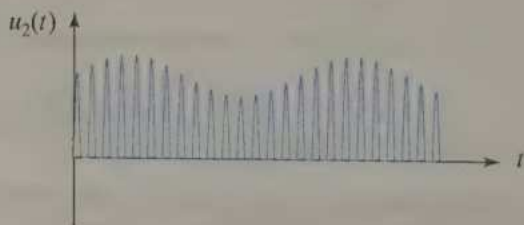
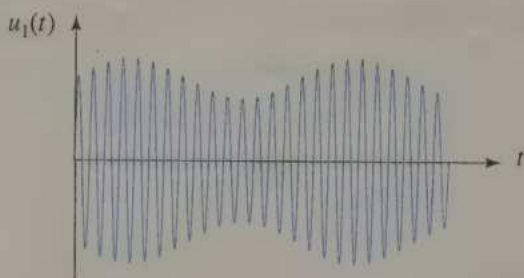
1.



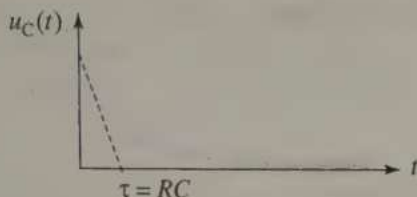
1<sup>re</sup> partie : redressement

2<sup>e</sup> partie : détection d'enveloppe

2.



3. a.



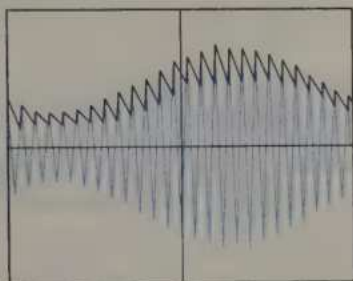
b. Si  $T_p \ll RC$ , alors l'annulation du signal est très rapide : on peut considérer que le condensateur se vide comme dans un courant  $RC$  (cf. chapitre 7), d'où une courbe de décharge similaire.



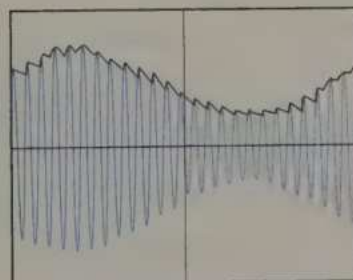
—  $u_2(t)$   
 - - - - enveloppe théorique  
 —  $u_3(t)$

c. Si  $RC > T_s$ , alors le condensateur se décharge trop lentement : cf. 3. d. il faut donc  $RC < T_s$  pour que  $u_3$  « recolle » à  $u_2$  et représente son enveloppe.

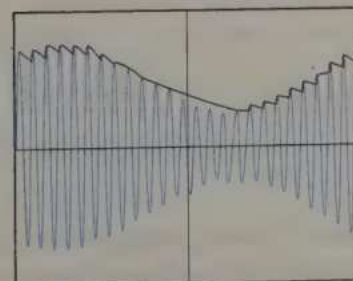
d.



(a)  $RC < T_p \ll T_s$ .



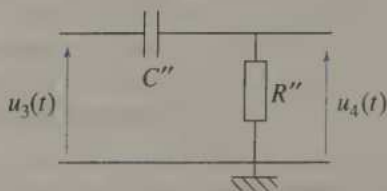
(b)  $T_p \ll RC < T_s$ .



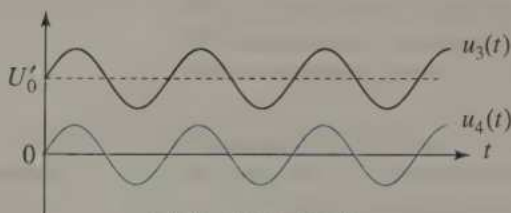
(c)  $T_p \ll T_s < RC$ .

6

1.



2.

 $u_3(t)$  : cf. exercice 5

3. Il faut que  $\tau'' \gg T_S$  soit  $R''C'' \gg \frac{1}{f_S}$ .

4.  $u_4(t) = u_3(t) - U'_0$  ( $U'_0$  est la tension continue à éliminer)

$u_4(t)$  et  $u_3(t)$  ont la même fréquence :  $f = f_S$ .

5. Ce montage est un **filtre passe-haut** : il laisse passer les fréquences « hautes », mais élimine les fréquences basses et, entre autres,  $f = 0$  Hz qui correspond à la tension continue.

7 1. Le circuit se comporte comme un **filtre passe-bande** : il laisse passer la bande de fréquences autour de

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

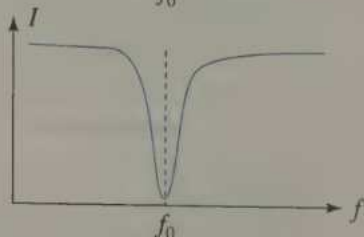
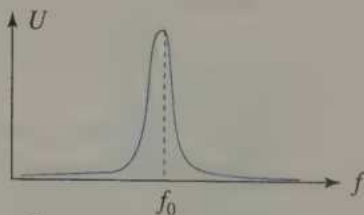
2. Le circuit se comporte comme un **circuit bouchon** : il « bouche » le passage des fréquences autour de

$$f'_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = f_0$$

3. a.  $f = \frac{c}{\lambda}$

A.N. :

$$f = \frac{3 \times 10^8}{1852} = 1,62 \times 10^5 \text{ Hz} = 162 \text{ kHz.}$$



b. L'antenne est soumise aux ondes électromagnétiques de fréquence 162 kHz : le circuit se comporte comme un filtre passe-bande, comme à la

question 2. L'ensemble se comporte alors comme un générateur de tension sinusoïdale et d'amplitude constante.

$$c. C = \frac{1}{4\pi^2 L f_0^2}$$

$$\text{A.N.: } C = \frac{1}{4\pi^2 (5 \times 10^{-3}) \times (1,62 \times 10^5)^2} = 1,93 \times 10^{-10} \text{ F.}$$

8. 1. Pour ne pas avoir de surmodulation, il faut que  $m = \frac{U_s}{U_0} < 1$  donc  $U_0 > U_s = 1,2 \text{ V} \rightarrow$  réponse (c).

2.  $2\pi f_s = 6,3 \times 10^2$  soit  $f_s = \frac{6,3 \times 10^2}{2\pi} \approx \frac{6,3 \times 10^2}{6,3} = 10^2 \text{ Hz}$  et il faut que  $f_p > f_s \rightarrow$  réponse (c).

$$3. l = \frac{\lambda}{4} = \frac{c}{4f_p} = \frac{3 \times 10^8}{4 \times 10^6} = \frac{300}{4} = 75 \text{ m} \rightarrow$$
 réponse (c).

☞  $\lambda$  correspond à  $f_p$  et non à  $f_s$  !

$$4. f_p = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \text{ soit}$$

$$C = \frac{1}{4\pi^2 L f_p^2} \approx \frac{1}{4 \times 10 \times (25 \times 10^{-3}) \times (10^6)^2} = 10^{-12} \text{ F} \rightarrow$$
 réponse (c)

5. Cf. cours  $\rightarrow$  réponse (a).

$$6. \text{ Il faut que } T_s > \tau \gg T_p \text{ soit } \frac{1}{f_s} > RC \gg \frac{1}{f_p}$$

$$\text{d'où } \frac{1}{R \cdot f_s} > C \gg \frac{1}{R \cdot f_p} \text{ donc } \frac{1}{10^3 \times 10^2} > C \gg \frac{1}{10^3 \times 10^6}$$

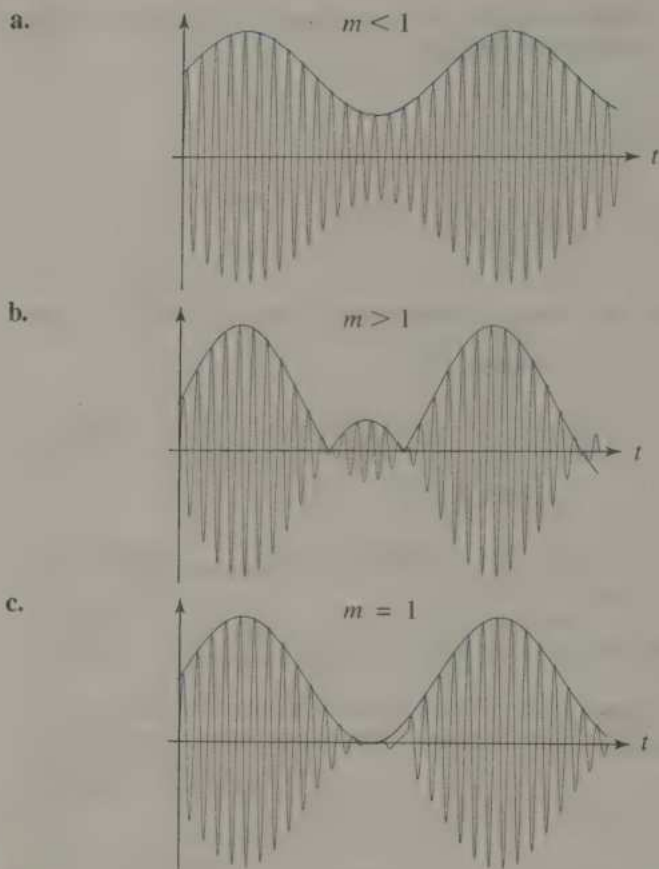
$$10^{-5} > C \gg 10^{-9} \rightarrow$$
 réponse (a).


7. Un « filtre passe-haut » laisse passer les hautes fréquences (donc élimine la composante continue assimilée à une fréquence nulle) : relation du type  $f > \text{cte}$ . Le but étant de laisser passer la fréquence du signal, soit  $f_s = 10^2 \text{ Hz}$ , avec une certaine marge  $\rightarrow$  réponse (a).


8. D'après la question 3. la taille de l'antenne est 75 m !  $\rightarrow$  réponse (c).

9. 1. Courbes en gris    2. Courbes en bleu (approximativement)

Avec le minimum pour la courbe bleue  $= A \cdot (1 - m)$ , on obtient :



 Par simplification, l'enveloppe a été représentée pour la question 2, sachant en fait qu'il s'agit d'une enveloppe approximative (cf. exercice 5).

 **Commentaire :** le signal initial n'est obtenu à nouveau que si  $m \leq 1$ . En pratique, si  $m = 1$ , la zone où la courbe bleue est nulle risque de poser quelques difficultés (imprécisions).

**10** Comme on l'a vu à l'exercice 2, le signal de fréquence maximale  $f_{\max}$  occupera, une fois modulé, un intervalle de fréquences de largeur  $\Delta f = 2f_{\max}$ .

Pour que les trois signaux modulés ne se superposent pas, il faut une largeur totale de bande :  $\Delta f \geq \Delta f_1 + \Delta f_2 + \Delta f_3$  (avec 3 valeurs de  $f_p$ ).

Si l'on souhaite que  $\Delta f$  soit le plus faible possible, alors les domaines de fréquences modulées seront adjacents, et la relation précédente devient une égalité.

$$\Delta f = 2(f_{1, \max} + f_{2, \max} + f_{3, \max}).$$

$$\text{A.N. : } \Delta f = 2 \times (1\,500 + 2\,500 + 4\,000) = 16\,000 \text{ Hz.}$$

**11** 1. et 2. Écrivons  $u_M(t)$  sous la forme :

$$k \cdot U_P \cdot U_0 \cos(2\pi f_P t) \left[ 1 + \frac{U_S}{U_0} \cos(2\pi f_S t) \right]$$

en factorisant par 25,2 pour faire apparaître le « 1 » dans le crochet.

$$\begin{aligned} u_M(t) &= 0,167 \times 25,2 \cos(1,89 \times 10^6 t) \left[ 1 + \frac{13,9}{25,2} \cos(9,62 \times 10^4 t) \right] \\ &= 4,21 \cos(1,89 \times 10^6 t) [1 + 0,552 \cos(9,62 \times 10^4 t)]. \end{aligned}$$

Par identification, et en utilisant les données, on obtient :

$$\begin{cases} k \cdot U_P \cdot U_0 = 4,21 \\ 2\pi f_P = 1,89 \times 10^6 \\ \frac{U_S}{U_0} = 0,552 \\ 2\pi f_S = 9,62 \times 10^4 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} U_P = 12,8 \text{ V} \\ f_P = 3,01 \times 10^5 \text{ Hz} \\ U_S = 1,38 \text{ V} \\ f_S = 1,53 \times 10^4 \text{ Hz} \end{cases}$$

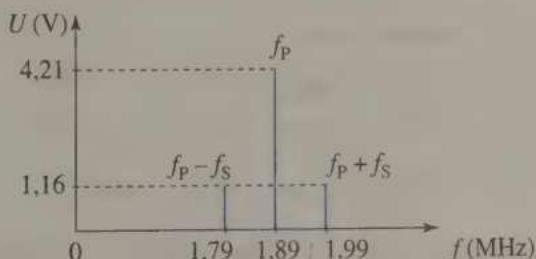
3.  $m = \frac{U_S}{U_0} = 0,552$ ;  $m < 1$  donc il n'y a pas surmodulation.

4. On utilise :  $\cos a \cdot \cos b = \frac{1}{2} [\cos(a+b) + \cos(a-b)]$

$$u_M(t) = 4,21 \cos(1,89 \times 10^6 t) + 2,32 \cos(1,89 \times 10^6 t) \cos(9,62 \times 10^4 t)$$

$$\begin{aligned} u_M(t) &= 4,21 \cos(1,89 \times 10^6 t) + 1,16 \cos(1,99 \times 10^6 t) \\ &\quad + 1,16 \cos(1,79 \times 10^6 t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_M(t) &= 4,21 \cos(2\pi f_P t) + 1,16 \cos[2\pi(f_P + f_S)t] \\ &\quad + 1,16 \cos[2\pi(f_P - f_S)t] \end{aligned}$$



5. L'enveloppe de la tension modulée est l'amplitude de la sinusoïde de fréquence  $f_S$  : elle est égale à la fonction qui multiplie  $\cos(2\pi f_S t) = \cos(1,89 \times 10^6 t)$ , soit  $u_E(t) = 0,167 [25,2 + 13,9 \cos(9,62 \times 10^4 t)]$

$$u_E(t) = 4,21 + 2,32 \cos(9,62 \times 10^4 t).$$

6. Le filtre passe-haut élimine la composante continue (4,21 V) donc

$$u_F(t) = 2,32 \cos(9,62 \times 10^4 t) = U_F \cdot \cos(2\pi f_S t).$$

On retrouve bien une sinusoïde de même fréquence que celle du signal.

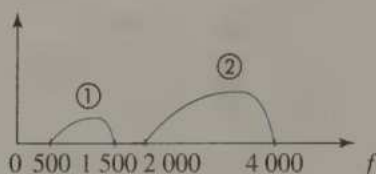
(Remarque :  $U_F = U_S \times U_P \times k$ ).

**12** D'après l'exercice 11, il faut  $\Delta f = 2(f_{1, \max} + f_{2, \max})$

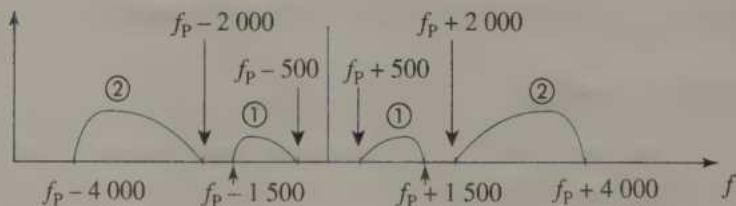
soit  $\Delta f = 2 \times (1\,500 + 4\,000) = 11\,000$  Hz.

Mais, supposons que la même porteuse de fréquence  $f_p$  soit utilisée pour les deux signaux. D'après l'exercice 2, les spectres des signaux modulant et modulé sont :

signal modulant :



signal modulé :



On voit donc qu'il n'y a pas superposition : il suffit de choisir ici,  $\Delta f = 2f_{2, \max} = 2 \times 4\,000 = 8\,000$  Hz.

**13** 1.  $u_S(t) = U_S \cos(2\pi f_S t) \rightarrow$  cf. écran 1.

$$\begin{aligned}
 2. \quad u_M(t) &= k \cdot (u_S(t) + U_0) \times u_P(t) \\
 &= k \cdot [U_S \cos(2\pi f_S t) + U_0] \times [U_P \cos(2\pi f_P t)] \\
 &= k \cdot U_0 \cdot U_P \left[ \frac{U_S}{U_0} \cos(2\pi f_S t) + 1 \right] \times \cos(2\pi f_P t) \\
 &= A [m \cos(2\pi f_S t) + 1] \times \cos(2\pi f_P t) \rightarrow \text{cf. écran 2.}
 \end{aligned}$$

$$3. \quad u_M(t) = A \left[ m \frac{u_S(t)}{U_S} + 1 \right] \times \cos(2\pi f_P t)$$

$$\text{soit } u_M(u_S) = \left[ \underbrace{\frac{A \cdot m}{U_S} u_S + A}_{\text{amplitude, fonction linéaire de } u_S} \right] \times \cos(2\pi f_P t)$$

amplitude, fonction linéaire de  $u_S$

- Comme  $\cos(2\pi f_p t)$  varie entre  $-1$  et  $+1$ , la courbe de  $u_M(u_S)$  est comprise entre les droites d'équations :  $y(u_S) = \frac{A \cdot m}{U_S} u_S + A$  et

$$y(u_S) = -\left[\frac{A \cdot m}{U_S} u_S + A\right].$$

- Comme  $\cos(2\pi f_s t)$  varie entre  $-1$  et  $+1$ ,  $u_S(t)$  varie entre  $-U_S$  et  $+U_S$ .
- $u_M(t)$  est donc une sinusoïde inscrite dans un trapèze  $\rightarrow$  cf. écran 3.

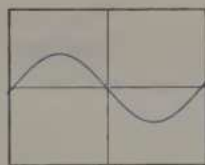
$$\begin{aligned} 4. \quad h &= y_B - y_{B'} = \left[\frac{A \cdot m}{U_S}(-U_S) + A\right] - \left[-\frac{A \cdot m}{U_S}(-U_S) - A\right] \\ &= 2A(1 - m) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H &= y_C - y_{C'} = \left[\frac{A \cdot m}{U_S}(+U_S) + A\right] - \left[-\frac{A \cdot m}{U_S}(+U_S) - A\right] \\ &= 2A(1 + m) \end{aligned}$$

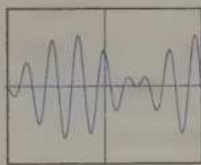
$$\text{d'où } \frac{h}{H} = \frac{1-m}{1+m} \text{ donc } h(1+m) = H(1-m) \text{ puis } m = \frac{H-h}{H+h}.$$

5. Cette méthode (appelée méthode du trapèze !) permet de calculer facilement  $m$ , avec un oscilloscope. Elle a été décrite ci-dessus, dans le cas où  $m < 1$ .

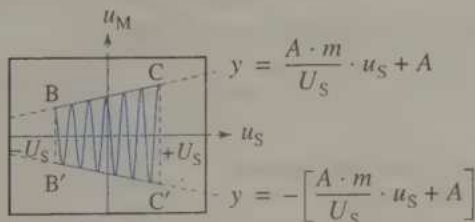
Si  $m > 1$ , le trapèze serait « croisé » :



Écran 1



Écran 2




Écran 3

- 14** L'amplitude du terme en  $f_p$  du spectre du signal modulé est  $A = k \cdot U_p \cdot U_0$ . Il suffit de choisir  $U_0 = 0 \text{ V}$  ( $k=0$  ou  $U_p=0$  annulerait tout le signal, puisque les termes correspondant à  $f_p \pm f_s$  seraient nuls aussi).

## ANALYSE DIMENSIONNELLE

### Dimension

Grandeur	Longueur	Temps	Masse	Intensité électrique	Température	Quantité de matière	Intensité lumineuse
Dimension	L	T	M	I	$\Theta$	N	J
Unité S.I. associée et symbole	mètre (m)	seconde (s)	kilogramme (kg)	ampère (A)	kelvin (K)	mole (mol)	candela (cd)

 On dit aussi d'une grandeur sans dimension (ou adimensionnelle), qu'elle est de dimension 1. Exemple :  $[e] = 1$ .

### Équation aux dimensions

L'équation aux dimensions d'une grandeur physique est son expression en fonction des sept dimensions.

Toute grandeur physique  $u$  peut donc se mettre sous la forme :  $[u] = L^a \cdot T^b \cdot M^c \cdot I^d \cdot \Theta^e \cdot N^f \cdot J^g$  avec  $a, b, c, d, e, f, g \in \mathbb{R}$ .

### Règles de calculs

Les règles suivantes, qui se généralisent, sont présentées pour des positions  $x$  et  $x'$ , une durée  $t$ , et pour un nombre  $\alpha$  sans dimension :

$$[x] = L, \quad [t] = T, \quad [\alpha] = 1.$$

- Addition et soustraction

Elles ne sont possibles que pour deux grandeurs de même dimension ; on a alors :  $[x + x'] = [x] = [x'] = L$ , mais  $x + t$  n'a pas de signification.

- Multiplication et division de deux grandeurs

$$[x \cdot t] = [x] \cdot [t] = L \cdot T \quad \text{et} \quad \left[ \frac{x}{t} \right] = \frac{[x]}{[t]} = L \cdot T^{-1}.$$

- Grandeur élevée à une puissance

$$[x^\alpha] = [x]^\alpha = L^\alpha.$$

- Multiplication d'une grandeur par un nombre adimensionnel

$$[\alpha \cdot x] = [\alpha] \cdot [x] = 1 \cdot L = L.$$

- Différentielle et dérivée d'une grandeur

$$[dx] = [x] = L, \quad [dt] = [t] = T,$$

$$\left[ \frac{dx}{dt} \right] = \frac{[dx]}{[dt]} = \frac{[x]}{[t]} = L \cdot T^{-1}$$

$$\text{et } \left[ \frac{d^2x}{dt^2} \right] = \frac{[d^2x]}{[dt^2]} = \frac{[dx]}{[dt]^2} = \frac{[x]}{[t]^2} = L \cdot T^{-2}.$$

- Le radian est une unité sans dimension :  $[\theta \text{ (rad)}] = 1$ .
- Les fonctions  $\sin u$ ,  $\cos u$ ,  $\tan u$ ,  $\ln u$ ,  $e^u = \exp(u)$  ne sont définies que si la grandeur  $u$  est sans dimension.
- Deux grandeurs égales ont même dimension.

Exemple d'un mouvement de chute libre  $\left( z = \frac{1}{2}g \cdot t^2 \right) : [z] = \left[ \frac{1}{2}g \cdot t^2 \right]$ .

- Deux grandeurs de même « type » ont même dimension. Exemple du poids et d'une force de frottement :  $[P] = [f]$ .

### Exemple

Quelle est la dimension de la constante de Planck  $h$  ?

$$\begin{aligned} [h] &= \left[ \frac{E}{\nu} \right] \text{ car } E = h \cdot \nu \text{ (cf. chapitre 17)} \\ &= \frac{[E]}{[\nu]} \\ &= \frac{[E_C]}{\left[ \frac{1}{T} \right]} \text{ car } E \text{ et } E_C \text{ sont deux énergies et car } \nu = \frac{1}{T} \\ &= [E_C] \cdot [T] \\ &= \left[ \frac{1}{2}m \cdot v^2 \right] \cdot [T] \text{ car } E_C = \frac{1}{2}m \cdot v^2 \\ &= \left[ \frac{1}{2} \right] \cdot [m] \cdot [v^2] \cdot [T] \\ &= \left[ \frac{1}{2} \right] \cdot [m] \cdot [v]^2 \cdot [T] \\ &= 1 \cdot M \cdot (L \cdot T^{-1})^2 \cdot T \text{ car } [v] = \left[ \frac{x}{t} \right] = \frac{[x]}{[t]} = \frac{L}{T} = L \cdot T^{-1} \\ &= M \cdot L^2 \cdot T^{-1}. \end{aligned}$$

En conclusion :  $[h] = M \cdot L^2 \cdot T^{-1}$ .

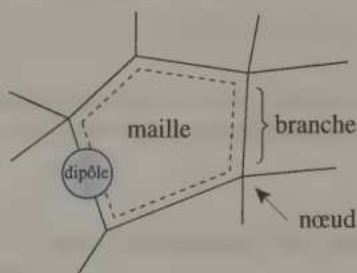
## RAPPELS EN ÉLECTRICITÉ

- Les grandeurs dépendant du temps sont notées en lettres minuscules dans la mesure du possible, par opposition à celles qui ne dépendent pas du temps, notées en lettres majuscules.

Exemple :  $u$  dépend du temps

$U = \text{cte}$  ne dépend pas du temps.

### Vocabulaire



### Différence de potentiels ou tension

- Définition :  $u_{AB} = V_A - V_B$  en volt (V)  
 $V_A$  et  $V_B$  sont les potentiels électriques (en volt, V) aux points A et B.

- Relations :

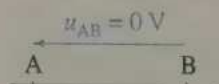
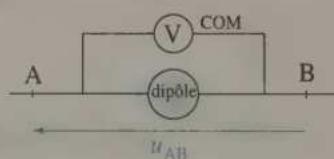
$$u_{AB} = -u_{BA} \text{ et } u_{AB} + u_{BC} = u_{AC}.$$

- Mesure directe avec un voltmètre en parallèle (de très grande résistance).
- Loi d'additivité des tensions (ou « loi des mailles ») :

$$\sum_{\text{dans 1 maille}} \pm u = 0 \text{ V} \quad (+ \text{ si le sens de description, arbitrairement choisi, de la maille est le même que celui de } u, - \text{ sinon}).$$

- Aux bornes d'un fil conducteur parfait :

$$u_{AB} = 0 \text{ V}.$$

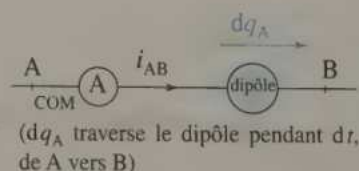


### Intensité

- Définition :  $i_{AB} = \frac{dq_A}{dt}$  en ampère (A).

- Relations :  $i_{AB} = -i_{BA}$  et si  $i > 0$ , les électrons se déplacent en sens inverse de  $i$ .

- Mesure directe avec un ampèremètre en série (de très faible résistance).



- Loi d'additivité des intensités (ou « loi des nœuds ») :

$$\sum_{\text{à un nœud}} \pm i = 0 \text{ A} \quad (+ \text{ si } i \text{ arrive sur le nœud, } - \text{ si } i \text{ part du nœud}).$$

- Un fil qui « n'arrive sur rien » vérifie  $i = 0 \text{ A}$  (en régime permanent).

$$i = 0 \text{ A} \rightarrow \bullet$$

### Puissance instantanée aux bornes d'un dipôle

- $\mathcal{P}$  s'exprime en watt (W).

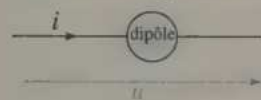
- Orientation récepteur



$\mathcal{P} = u \cdot i > 0$ , si le dipôle se comporte bien comme un récepteur.

$\mathcal{P} = u \cdot i < 0$ , si le dipôle se comporte comme un générateur.

- Orientation générateur

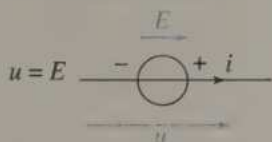


$\mathcal{P} = u \cdot i > 0$ , si le dipôle se comporte bien comme un générateur.

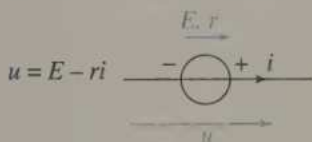
$\mathcal{P} = u \cdot i < 0$ , si le dipôle se comporte comme un récepteur.

### Source de courant continu

- Source de tension, idéale :



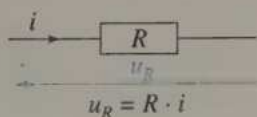
- Source de tension, réelle :



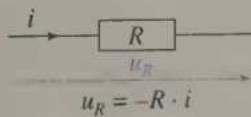
### Conducteur ohmique

- Un conducteur ohmique est caractérisé par la valeur de sa résistance  $R$ , en ohm ( $\Omega$ ).

- Si  $R$  est orienté en convention récepteur

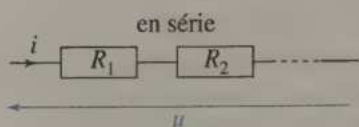


- Si  $R$  est orienté en convention générateur

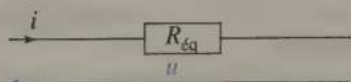


- Un conducteur ohmique se comporte toujours comme un récepteur. Il disperse de l'énergie sous forme de chaleur (effet Joule), avec une puissance  $\mathcal{P}_R = R \cdot i^2$ .

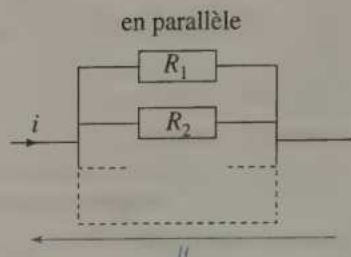
• Résistances équivalentes



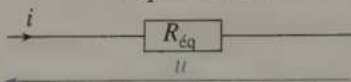
est équivalent à :



avec  $R_{\text{eq}} = R_1 + R_2 + \dots$

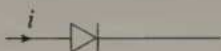


est équivalent à :



avec  $\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots$

Diode jonction



- Si  $i > 0$ , alors la diode est passante, donc équivalente à un interrupteur fermé.
- Si  $i < 0$ , alors la diode est bloquante, donc équivalente à un interrupteur ouvert.

Proétudes.blogspot.com

**PROÉTUDES**


Surfer en toute confiance

## CONSTANTES, MULTIPLES ET SOUS-MULTIPLES

## Constantes physiques fondamentales

	Notation	Valeur approchée (avec 3 chiffres significatifs)	Valeur plus précise	Dimension
Constante de gravitation	$G$	$6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$	$6,673 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$	$\text{L}^3 \cdot \text{M}^{-1} \cdot \text{T}^{-2}$
Permittivité du vide	$\epsilon_0$	$8,85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$	$8,854 187 817 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$	$\text{L}^3 \cdot \text{M}^{-1} \cdot \text{T}^4 \cdot \text{I}^2$
Célérité de la lumière dans le vide	$c$	$3,00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$	$2,997 924 58 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$	$\text{L} \cdot \text{T}^{-1}$
Constante de Planck	$h$	$6,63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$	$6,626 068 76 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$	$\text{L}^2 \cdot \text{M} \cdot \text{T}^{-1}$
Constante d'Avogadro	$N_A$	$6,02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$	$6,022 141 99 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$	$\text{N}^{-1}$
Charge élémentaire	$e$	$1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$	$1,602 176 462 \times 10^{-19} \text{ C}$	$\text{T} \cdot \text{I}$

[Source : NIST (National Institut of Standards and Technology) 2003.]



$$\bullet \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9,0 \times 10^9 \text{ m} \cdot \text{F}^{-1}$$

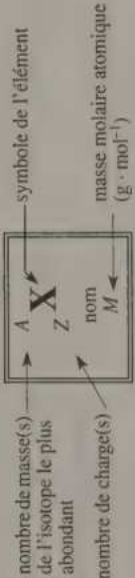
Pour les masses et les énergies des particules élémentaires, cf. chapitre 5.

## Multiples et sous-multiples

Facteur	$10^{+12}$	$10^{+9}$	$10^{+6}$	$10^{+3}$	$10^{+2}$	$10^{+1}$	$10^{-1}$	$10^{-2}$	$10^{-3}$	$10^{-6}$	$10^{-9}$	$10^{-12}$	$10^{-15}$
Symbole	T	G	M	k	h	da	d	c	m	$\mu$	n	p	f
Préfixe	téra	giga	méga	kilo	hecto	déca	déci	centi	milli	micro	nano	pico	femto

CLASSIFICATION PÉRIODIQUE DES ÉLÉMENTS CHIMIQUES

$^1_1\text{H}$ hydrogène 1,0		$^4_2\text{He}$ hélium 4,0		$^9_4\text{Be}$ béryllium 9,0		$^{20}_{10}\text{Ne}$ néon 20,2		$^{40}_{18}\text{Ar}$ argon 39,9		$^{84}_{36}\text{Kr}$ krypton 83,8		$^{132}_{54}\text{Xe}$ xénon 131,3		$^{222}_{86}\text{Rn}$ radon =222			
$^7_3\text{Li}$ lithium 6,9		$^{12}_6\text{C}$ carbone 12,0		$^{14}_7\text{N}$ azote 14,0		$^{16}_8\text{O}$ oxygène 16,0		$^{19}_9\text{F}$ fluor 19,0		$^{35}_{17}\text{Cl}$ chlore 35,5		$^{79}_{35}\text{Br}$ brome 79,9		$^{127}_{53}\text{I}$ iode 126,9		$^{210}_{85}\text{At}$ astate =210	
$^{11}_5\text{B}$ bore 10,8		$^{12}_6\text{C}$ carbone 12,0		$^{14}_7\text{N}$ azote 14,0		$^{16}_8\text{O}$ oxygène 16,0		$^{19}_9\text{F}$ fluor 19,0		$^{35}_{17}\text{Cl}$ chlore 35,5		$^{79}_{35}\text{Br}$ brome 79,9		$^{127}_{53}\text{I}$ iode 126,9		$^{210}_{85}\text{At}$ astate =210	
$^{23}_{11}\text{Na}$ sodium 23,0		$^{28}_{14}\text{Si}$ silicium 28,1		$^{31}_{15}\text{P}$ phosphore 31,0		$^{32}_{16}\text{S}$ soufre 32,1		$^{35}_{17}\text{Cl}$ chlore 35,5		$^{40}_{18}\text{Ar}$ argon 39,9		$^{80}_{36}\text{Se}$ sélénium 79,0		$^{130}_{54}\text{Xe}$ xénon 131,3		$^{222}_{86}\text{Rn}$ radon =222	
$^{39}_{19}\text{K}$ potassium 39,1		$^{40}_{20}\text{Ca}$ calcium 40,1		$^{51}_{23}\text{V}$ vanadium 50,9		$^{52}_{24}\text{Cr}$ chrome 52,0		$^{55}_{25}\text{Mn}$ manganèse 54,9		$^{56}_{26}\text{Fe}$ fer 55,8		$^{64}_{30}\text{Zn}$ zinc 65,4		$^{130}_{52}\text{Te}$ télure 127,6		$^{210}_{84}\text{Po}$ polonium =209	
$^{85}_{37}\text{Rb}$ rubidium 85,5		$^{88}_{38}\text{Sr}$ strontium 87,6		$^{93}_{41}\text{Nb}$ niobium 92,9		$^{98}_{42}\text{Mo}$ molybdène 95,9		$^{101}_{43}\text{Tc}$ technétium 98,9		$^{102}_{44}\text{Ru}$ ruthénium 101,1		$^{107}_{47}\text{Ag}$ argent 107,9		$^{127}_{51}\text{Sb}$ antimoine 121,7		$^{210}_{83}\text{Bi}$ bismuth 209,0	
$^{133}_{55}\text{Cs}$ césium 132,9		$^{138}_{56}\text{Ba}$ baryum 137,3		$^{181}_{73}\text{Ta}$ tantalum 180,9		$^{184}_{74}\text{W}$ tungstène 183,9		$^{187}_{75}\text{Re}$ rénium 186,2		$^{192}_{76}\text{Os}$ osmium 190,2		$^{197}_{79}\text{Au}$ or 197,0		$^{209}_{83}\text{Bi}$ bismuth 209,0		$^{210}_{84}\text{Po}$ polonium =209	
$^{223}_{87}\text{Fr}$ francium =223		$^{226}_{88}\text{Ra}$ radium =226,0		$^{227}_{89}\text{Ac}$ actinium =227		$^{232}_{90}\text{Th}$ thorium =232,0		$^{237}_{93}\text{Np}$ néptunium =237		$^{244}_{94}\text{Pu}$ plutonium =244		$^{247}_{96}\text{Cm}$ curium =247		$^{251}_{98}\text{Cf}$ californium =251		$^{259}_{102}\text{No}$ nobélium =259	
$^{232}_{88}\text{Ra}$ radium =226,0		$^{238}_{92}\text{U}$ uranium =238,0		$^{243}_{95}\text{Am}$ américium =243		$^{244}_{96}\text{Pu}$ plutonium =244		$^{247}_{96}\text{Cm}$ curium =247		$^{251}_{98}\text{Cf}$ californium =251		$^{257}_{100}\text{Fm}$ fermium =257		$^{260}_{103}\text{Lr}$ lawrencium =260		$^{260}_{103}\text{Lr}$ lawrencium =260	
$^{140}_{58}\text{Ce}$ cérium 140,1		$^{142}_{60}\text{Nd}$ néodyme 144,2		$^{152}_{62}\text{Sm}$ samarium 150,4		$^{158}_{64}\text{Gd}$ gadolinium 157,2		$^{164}_{66}\text{Dy}$ dysprosium 162,5		$^{166}_{68}\text{Er}$ erbium 167,3		$^{174}_{70}\text{Yb}$ ytterbium 173,0		$^{175}_{71}\text{Lu}$ lutetium 175,0		$^{175}_{71}\text{Lu}$ lutetium 175,0	
$^{141}_{59}\text{Pr}$ praseodyme 140,9		$^{146}_{61}\text{Pm}$ prométhium =145		$^{152}_{62}\text{Sm}$ samarium 150,4		$^{158}_{64}\text{Gd}$ gadolinium 157,2		$^{164}_{66}\text{Dy}$ dysprosium 162,5		$^{166}_{68}\text{Er}$ erbium 167,3		$^{174}_{70}\text{Yb}$ ytterbium 173,0		$^{175}_{71}\text{Lu}$ lutetium 175,0		$^{175}_{71}\text{Lu}$ lutetium 175,0	
$^{231}_{91}\text{Pa}$ protactinium =231,0		$^{237}_{93}\text{Np}$ néptunium =237		$^{243}_{95}\text{Am}$ américium =243		$^{244}_{96}\text{Pu}$ plutonium =244		$^{247}_{96}\text{Cm}$ curium =247		$^{251}_{98}\text{Cf}$ californium =251		$^{257}_{100}\text{Fm}$ fermium =257		$^{260}_{103}\text{Lr}$ lawrencium =260		$^{260}_{103}\text{Lr}$ lawrencium =260	
$^{232}_{90}\text{Th}$ thorium =232,0		$^{238}_{92}\text{U}$ uranium =238,0		$^{243}_{95}\text{Am}$ américium =243		$^{244}_{96}\text{Pu}$ plutonium =244		$^{247}_{96}\text{Cm}$ curium =247		$^{251}_{98}\text{Cf}$ californium =251		$^{257}_{100}\text{Fm}$ fermium =257		$^{260}_{103}\text{Lr}$ lawrencium =260		$^{260}_{103}\text{Lr}$ lawrencium =260	
		Lanthanides															
		Actinides															



## FORMULAIRE DE CHIMIE

- les unités sont celles classiquement utilisées en chimie.
- $1 \text{ L} = 1 \text{ dm}^3 = 10^{-3} \text{ m}^3$ .

### Notations

- $N$  : nombre d'entités (noyaux, atomes, molécules, ions, ...), sans unité ;
- $m$  : masse, en gramme (g) ;
- $V$  : volume, en litre (L) ;
- $N_A$  : constante d'Avogadro, en inverse de mole ( $\text{mol}^{-1}$ ).

### Grandeurs

- Quantité de matière, en mole (mol) :  $n = \frac{N}{N_A}$ .
- Masse molaire, en gramme par mole ( $\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$ ) :  $M = \frac{m}{n}$ .
- Masse volumique en gramme par litre ( $\text{g} \cdot \text{L}^{-1}$ ) :  $\rho = \frac{m}{V}$ .
- Concentration molaire d'une espèce X en solution, en mole par litre ( $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$ ) :  $[X] = \frac{n}{V(\text{solution})}$ .
- Densité, sans unité :

$$d = \frac{\rho}{\rho(\text{référence})} = \frac{m(\text{pour un volume donné})}{m(\text{référence pour le même volume})}$$

$$\rho(\text{référence}) = \begin{cases} \rho(\text{eau}), \text{ pour les liquides et solides } \approx 10^3 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1} \\ \rho(\text{air}), \text{ pour les gaz } \approx 29 \text{ g} \cdot \text{L}^{-1} \text{ (dans les CNTP)} \end{cases}$$

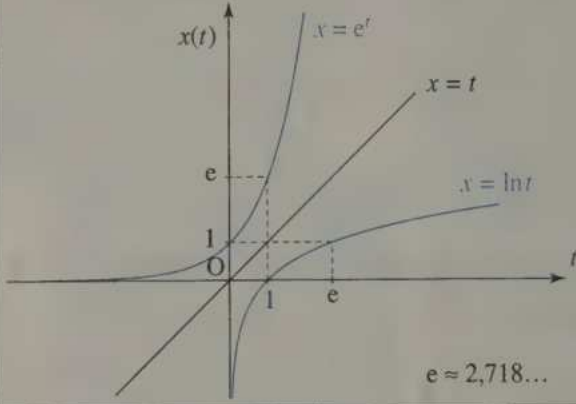
(CNTP : Conditions Normales de Température et de Pression).

### Comparaison entre les unités utilisées en Chimie et celles du Système International

Grandeur	masse	volume	quantité de matière
Unité utilisée en chimie	g	L	mol
Unité du Système International (S.I.)	kg	$\text{m}^3$	mol

## FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

### Fonction logarithme népérien et fonction exponentielle

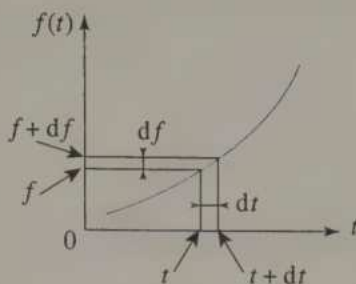
Fonctions	$\ln t$	$e^t = \exp(t)$
Conséquence	si $t \in \mathbb{R}_+^*$ et $x \in \mathbb{R}$ , alors $x = \ln t \Leftrightarrow t = e^x$	
Graphes	 <p style="text-align: right;"><math>e \approx 2,718\dots</math></p>	
Domaines	$\mathcal{D}_{\ln} = \mathbb{R}_+^*$	$\mathcal{D}_{\exp} = \mathbb{R}$
Variations	strictement croissante	strictement croissante
Signes	$t < 1 \Leftrightarrow \ln t < 0$ $t = 1 \Leftrightarrow \ln t = 0$ $t > 1 \Leftrightarrow \ln t > 0$	$e^t > 0$
Valeurs	$\ln 1 = 0 \quad \ln e = 1$	$e^0 = 1 \quad e^1 = e$
Relations	$\ln(t \cdot t') = \ln t + \ln t'$	$e^{t+t'} = e^t \cdot e^{t'}$
	$\ln(t^a) = a \cdot \ln t$	$(e^t)^{t'} = e^{t \cdot t'}$
	$\ln\left(\frac{1}{t'}\right) = -\ln t'$	$e^{-t'} = \frac{1}{e^{t'}}$
	$\ln\left(\frac{t}{t'}\right) = \ln t - \ln t'$	$e^{t-t'} = \frac{e^t}{e^{t'}}$
Limites	$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} \ln t = -\infty$	$\lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0$
	$\lim_{t \rightarrow +\infty} \ln t = +\infty$	$\lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = +\infty$

Pour le logarithme décimal, voir chapitre 20, p. 301.

## Dérivées

## • Écriture

$$\dot{f}(t) = \frac{df}{dt} \leftarrow \begin{array}{l} \text{variation de } f \\ \text{durée} \end{array}$$



## • Calculs

$f(t)$	$\frac{df(t)}{dt} = \dot{f}(t)$
cte	0
$t^n$	$nt^{n-1}$
$\sqrt{t}$ ( $= t^{1/2}$ )	$\frac{1}{2\sqrt{t}}$
$\ln t$	$\frac{1}{t}$
$e^t$	$e^t$
$\sin t$	$\cos t$
$\cos t$	$-\sin t$
$\tan t$	$1 + \tan^2 t = \frac{1}{\cos^2 t}$

Opération	$\frac{d(\text{opération})}{dt}$
$f + g$	$\dot{f} + \dot{g}$
$a \cdot f$ ( $a = \text{cte}$ )	$a \cdot \dot{f}$
$f \cdot g$	$\dot{f} \cdot g + f \cdot \dot{g}$
$\frac{1}{g}$	$-\frac{\dot{g}}{g^2}$
$\frac{f}{g}$	$\frac{\dot{f} \cdot g - f \cdot \dot{g}}{g^2}$
$f(g)$	$\dot{f}(g) \cdot \dot{g}$

(pour alléger l'écriture,  $f(x)$  est notée  $f$ )

- Extremum :  $f(t)$  admet un extremum local en  $t_0 \Leftrightarrow \frac{df(t)}{dt}$  s'annule et change de signe en  $t_0$ .

## Intégrales

## • Définition

$$\int_{t_0}^{t_1} \dot{f}(t) dt = f(t_1) - f(t_0)$$

## • Formules

$$\int_{t_0}^{t_1} f(t) dt + \int_{t_1}^{t_2} f(t) dt = \int_{t_0}^{t_2} f(t) dt \quad \int_{t_0}^{t_1} f(t) dt = -\int_{t_1}^{t_0} f(t) dt$$

$$\int_{t_0}^{t_1} [f(t) + g(t)] dt = \int_{t_0}^{t_1} f(t) dt + \int_{t_0}^{t_1} g(t) dt$$

$$\int_{t_0}^{t_1} k \cdot f(t) dt = k \cdot \int_{t_0}^{t_1} f(t) dt \quad (k = \text{cte}).$$

## Développements limités

Si  $|t| \ll 1$  ( $|t|$  est « très petit » devant 1), alors :

$$\begin{cases} \cos t \approx 1 - \frac{t^2}{2} \\ \sin t \approx t \\ \tan t \approx t \end{cases} \quad \begin{cases} \ln(1+t) \approx t \\ e^t \approx 1+t \\ (1+t)^n \approx 1+nt \end{cases}$$

## Équations différentielles

Équation	$\frac{df(t)}{dt} + a \cdot f(t) = b$ ( $a, b \in \mathbb{R}$ )	$\frac{d^2f(t)}{dt^2} + a^2 \cdot f(t) = 0$ ( $a \in \mathbb{R}$ )
Solution	$f(t) = k \cdot e^{-a \cdot t} + \frac{b}{a}$ avec $k \in \mathbb{R}$	$f(t) = f_m \cdot \cos(a \cdot t + \varphi_0)$ avec $f_m, \varphi_0 \in \mathbb{R}$
Conditions particulières	1 au maximum	2 au maximum

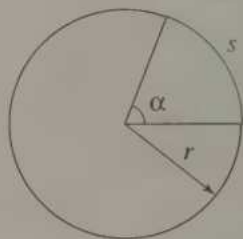
## Trigonométrie

• Unités d'angles :  $\frac{\alpha(\text{rad})}{2\pi} = \frac{\alpha(\text{deg})}{360} = \frac{\alpha(\text{r})}{1}$

• Angle et cercle

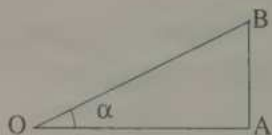
Si  $0 \leq \alpha \leq 2\pi$ , alors :

$$\begin{cases} s = \alpha \cdot R \text{ longueur d'arc de cercle } (\alpha \text{ en rad}) \\ P = 2\pi R \text{ périmètre} \end{cases}$$



• Angle et triangle rectangle (pour  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ )

$$\cos \alpha = \frac{OA}{OB}; \quad \sin \alpha = \frac{AB}{OB}; \quad \tan \alpha = \frac{AB}{OA}$$



• Définitions et formules générales

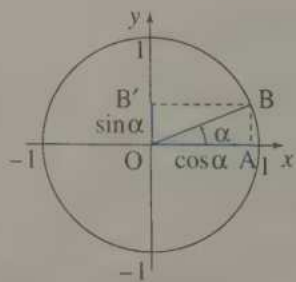
Dans le cercle trigonométrique de centre O et de rayon  $OB = 1$ , pour l'angle  $\alpha$  orienté :

$$\sin \alpha = \overline{OB'} = \overline{AB} \quad \text{et} \quad \cos \alpha = \overline{OA}$$

$$-1 \leq \sin \alpha \leq 1 \quad \text{et} \quad -1 \leq \cos \alpha \leq 1$$

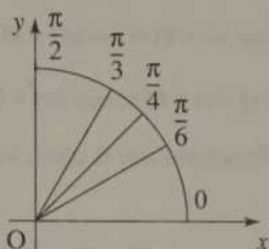
$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$



## • Valeurs particulières

$\alpha =$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0



## • Formules de duplication

$$\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1 = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha.$$

## • Formules de changement d'angles

$$\begin{cases} \sin(\alpha + 2\pi) = \sin(\alpha) \\ \cos(\alpha + 2\pi) = \cos(\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(-\alpha) = -\sin(\alpha) \\ \cos(-\alpha) = +\cos(\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(\pi + \alpha) = -\sin(\alpha) \\ \cos(\pi + \alpha) = -\cos(\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(\pi - \alpha) = +\sin(\alpha) \\ \cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = +\cos(\alpha) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin(\alpha) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = +\cos(\alpha) \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = +\sin(\alpha) \end{cases}$$

## • Transformations de produits en sommes

$$\cos\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)]$$

$$\sin\alpha \cdot \sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)]$$

$$\sin\alpha \cdot \cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)].$$

## • Équations trigonométriques

$$\cos t = \cos\alpha \Rightarrow \begin{cases} t = \alpha + k \cdot 2\pi & (k \in \mathbb{Z}) \\ t = -\alpha + k' \cdot 2\pi & (k' \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

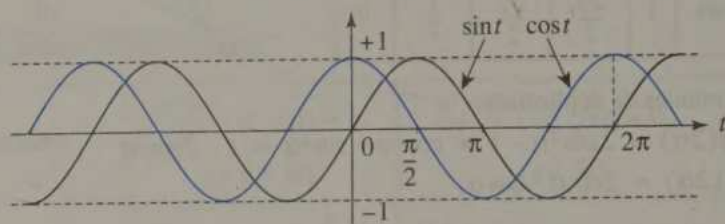
$$\sin t = \sin\alpha \Rightarrow \begin{cases} t = \alpha + k \cdot 2\pi & (k \in \mathbb{Z}) \\ t = \pi - \alpha + k' \cdot 2\pi & (k' \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

• Fonctions trigonométriques

$\sin(at + b)$  et  $\cos(at + b)$  admettent comme période  $T = \frac{2\pi}{a}$ .

$\sin^2(at + b)$  et  $\cos^2(at + b)$  admettent comme période  $T = \frac{\pi}{a}$ .

Fonctions  $\sin t$  et  $\cos t$  : voir graphe ci-dessous ;



## Vecteurs

Soit  $\vec{a} (a_x, a_y, a_z)$  et  $\vec{b} (b_x, b_y, b_z)$

• Produit scalaire :

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z = \|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$$

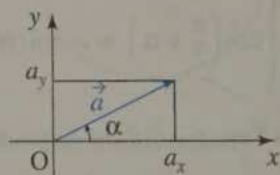
• Norme :  $\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ .

• Vecteur unitaire (ou normé) :  $\|\vec{a}\| = 1$ .

• Vecteur nul :  $\|\vec{a}\| = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$ .

• Coordonnées du vecteur  $\vec{a}$  du plan  $Oxy$  :

$$\vec{a} \begin{pmatrix} a_x = a \cdot \cos \alpha \\ a_y = a \cdot \sin \alpha \end{pmatrix}$$



## Équation de cercle dans le plan

Équation du cercle de centre  $A(x_A, y_A)$  et de rayon  $R \geq 0$  :

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = R^2$$

## Volumes (V), surfaces (S), périmètres (P)

Boule :  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

Sphère :  $S = 4\pi R^2$

Disque :  $S = \pi R^2$

Cercle :  $P = 2\pi R$

# 100% EXOS

# 100%

## Physique T<sup>l</sup>es

### Obligatoire + Spécialité

Avec plus de 240 exercices progressifs et minutés, **100 % Exos** offre un **entraînement intensif** sur mesure, toute l'année.

Chaque chapitre propose une démarche progressive avec :

- **Des rappels de cours** pour réviser l'essentiel rapidement.
- **Des exercices d'application** pour maîtriser les notions simples du cours.
- **Des exercices d'entraînement** pour se préparer **au bac** et réussir toutes ses interros.
- **Des exercices d'approfondissement** pour viser la mention et l'entrée **en classe prépa**.
- **Des corrigés** rédigés en détail pour se perfectionner.

**Un maximum d'entraînement pour un maximum de réussite**

Dans la collection 100% EXOS :

Maths T<sup>l</sup>es **Obligatoire**

Maths T<sup>l</sup>es **Spécialité**

Physique T<sup>l</sup>es **Obligatoire + Spécialité**

Chimie T<sup>l</sup>es **Obligatoire + Spécialité**

Maths T<sup>l</sup>es **Obligatoire + Spécialité**

REVENDEZ  
VOS LIVRES TOUTE L'ANNÉE

**GIBERT JEUNE**

PLACE SAINT-MICHEL  
& STRASBOURG-ST-DENIS

Prix NET  
**NEUF**  
**11,90€**

HATIER  
110609

TLE S PHYSIQUE  
06-03-20 FONDS

9  782218  744785

[www.editions-hatier.fr](http://www.editions-hatier.fr)