REPUBLIQUE DU SENEGAL

Un Peuple-Un But-Une Foi

UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR

Faculté des sciences et technologies de l'éducation et de la formation

FASTEF

Licence

MAITRISE

MATH

Université Cheikh Anta Diop

FACULTE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION

Département de mathématiques

Année académique 20017-2018

Test d'entrée
Sections : F_1A et F_1B_1
Durée : 4 h

NB : *Il sera tenu compte, pour l'évaluation des copies, de la présentation et de la clarté des solutions proposées ainsi que de la rigueur dans les démarches entreprises.*

PARTIE 1 : ANALYSE (20pts)

L'objet de cet exercice est de calculer la valeur de $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\, dt$.

Pour tout entier naturel n, on note : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin[(2n+1)t]}{\sin(t)} dt$ et $J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin[(2n+1)t]}{t} dt$.

1. Justifiez que, pour tout entier naturel n, I_n et J_n sont bien définies.
2. Montrez que : $\forall n \geq 1, I_n - I_{n-1} = 0$. En déduire la valeur de I_n.
3. Soit φ une fonction de classe C^1sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$. Montrez, à l'aide d'une intégration par parties, que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t) \sin(2n+1)\, t\, dt$ tend vers 0.
4. Démontrez que la fonction h : $t \to \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin(t)}$ se prolonge en une fonction de classe C^1 sur $[0\,;\,1]$.
5. Déduisez en que lim $(J_n - I_n) = 0$.
6. Démontrer, en utilisant un changement de variables, que lim $J_n = I$.
7. Déduisez en a valeur de I.

PARTIE 2 : ALGEBRE (20 pts)

Exercice 1

1. Montrer que la fonction exponentielle de base e est un isomorphisme du groupe $(\mathbb{R}, +)$ vers le groupe $\left(\mathbb{R}_+^*, \times\right)$. (2 points)
2. Soit p un entier naturel. Démontrer que si p^2 est pair alors p est pair. (2 points)
3. Démontrer par l'absurde que $\log_3 2$ est un nombre irrationnel. (2 points)
4. Résoudre dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ l'équation 3x - 1 = 0. (2 points)
5. Démontrer que l'ensemble des translations muni de la loi o est un sous- groupe distingué du groupe des déplacements du plan. (2 points)

Exercice 2.

Dans chacun des cas suivants, dites si la phrase est vraie ou si elle est fausse et donner sa négation.

1. Toutes les applications du plan sont des transformations ou sont injectives. (2 points)
2. Soit E un ensemble. Alors $\forall (A,B) \in \left(P(E)\right)^2, A \not\subset B \Rightarrow B \subset A$ (2 points)
3. Soient x et y entiers naturels. $xy\ pair \Leftrightarrow (x\ pair\ ou\ y\ pair)$ (2 points)
4. Soient f et g deux fonctions numériques définies sur R. Alors

$[\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x)g(x) = 0] \Rightarrow [(\forall x \in \mathbb{R}\ f(x) = 0)\ ou\ (\forall x \in \mathbb{R}\ g(x) = 0)]$ (4 points)

PARTIE 3 : GEOMETRIE (20 pts)

On rappelle que dans le plan orienté, l'aire notée $\mathscr{A}(IJK)$, de tout triangle IJK est égale à $\frac{1}{2}\det(\overrightarrow{IJ}, \overrightarrow{IK})$ (et deux autres formules analogues par permutation circulaire).

Soit A, B, C un repère affine du plan affine euclidien orienté.

1. Démontrer que pour tout point M du plan, il existe deux nombres réels λ et μ tels que : $\overrightarrow{MC} = \lambda\overrightarrow{MA} + \mu\overrightarrow{MB}$.
2. Démontrer alors que $\det(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC})\overrightarrow{MA} + \det(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA})\overrightarrow{MB} + \det(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB})\overrightarrow{MC} = \vec{0}$.
3. En déduire que M est le barycentre de $(A, \mathscr{A}(MBC)), (B, \mathscr{A}(MCA)), (C, \mathscr{A}(MAB))$.
4. Application : Soit $C(O, R)$ le cercle circonscrit au triangle ABC, prouver que O est le barycentre de $(A, \sin 2\widehat{A}), (B, \sin 2\widehat{B}), (C, \sin 2\widehat{C})$.

PARTIE 4 : PROBABILITES (20 pts)

Une urne contient b boules blanches et r boules rouges indiscernables au toucher (b et r sont des entiers naturels dont au moins un est non nul).

On considère le protocole suivant :

« On tire une boule au hasard dans l'urne. Si elle est blanche, on la remet dans l'urne. Si elle est rouge, elle n'est pas remise dans l'urne et elle y est remplacée par une boule blanche, de sorte que le nombre N = b + r de boules dans l'urne reste constant. »

On répète le protocole de tirage jusqu'à l'obtention d'une boule blanche.

Partie A : On suppose que b = 2 et r = 3.

1. Modéliser cette expérience aléatoire à l'aide d'un arbre pondéré.
2. On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X et calculer son espérance E(X). Donner une interprétation de cette espérance.

Partie B : On suppose que b et r sont des entiers naturels non nuls quelconques.

Pour tout entier strictement positif n, on note A_n l'événement « la n-ième boule tirée est rouge ». On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.

1. Donner l'ensemble E des valeurs prises par X.
2. Pour k appartenant à E, exprimer l'événement (X = k) en fonction d'événements liés aux événements $A_1, A_2, \dots, A_k$.
3. Soit i un entier strictement positif et soient $B_1, \dots, B_i$ des événements liés à l'épreuve tels que: $P(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{i-1}) > 0$. Après avoir justifié l'existence des probabilités conditionnelles $P(B_2 / B_1)$, $P(B_3 / B_1 \cap B_2), \dots, P(B_i / B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{i-1})$, montrer que $P(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_i) = P(B1)\, P(B_2 / B_1) \dots P(B_i / B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{i-1})$.
4. a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

   b. Vérifier que : $P(X = r + 1) = \dfrac{r!}{N^r}$ et que, pour tout k compris entre 1 et r,

$$P(X = k) = \frac{r!}{(r-(k-1))!\,N^{k-1}} - \frac{r!}{(r-k)!\,N^k}.$$

5. a. Démontrer que, pour tout entier strictement positif n et tous réels $p_0, \dots, p_n$,

$$\sum_{k=1}^{n} k(p_{k-1} - p_k) = \sum_{k=0}^{n-1}(p_k) - np_n$$

   b. En déduire que l'espérance de X est donnée par : $E(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{r} C_r^k p_k \frac{k!}{N^k}$.

Université Cheikh Anta DIOP de Dakar
École Normale Supérieure
Dép. de Mathématiques

Concours 1998 d'entrée en F_1 A
Mathématiques(durée : 4 heures)

__Nota Bene__ : les candidats sont informés que, pour l'évaluation des copies, il sera tenu compte de la présentation, ainsi que de la clarté et de la rigueur des solutions proposées.

__Barème__ : Exercices n°2, 4, 5 et 7: 2 points chacun ; 3 points pour chacun des autres.

[illegible] 1 :

ABC est [illegible] On définit la suite des points $(G_n)_{n\in N}$ par :

$G_0 = A$; G_{n+1} est l'isobarycentre de G_n, B et C ;

1. montrer que les points G_n sont alignés ;
2. montrer qu'il existe une homothétie h dont on précisera le centre et le rapport telle que $\forall n \in N, h(G_n) = G_{n+1}$;
3. donner une relation entre $\overrightarrow{IG_n}$ et $\overrightarrow{IG_0}$; en déduire la position limite de G_0 lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 2 :

Les diagonales d'un quadrilatère convexe ABCD se coupent en I formant quatre angles ; α étant une des mesures de l'un de ces angles, démontrer que l'aire S de ABCD est : $S = \frac{1}{2} AC.BD.\sin\alpha$.

Exercice 3 :

Étant donnés deux réels a et b tels que $a < b$, on considère les segments $I = [a, b]$ et $J = [1-b, 1-a]$:

1. à quelles conditions a-t-on $I \cap J = \varnothing$?
2. à quelles conditions a-t-on $I \cap J \neq \varnothing$?
3. déterminer $I \cap J$.

Exercice 4 :
Calculer la valeur de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x)dx$.

Exercice 5 :

1. Prouver que le point de contact d'une tangente à la courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$ est le milieu du segment de tangente compris entre les axes de coordonnées ;
2. Le côté d'un carré croît à une vitesse constante v. Trouver la vitesse de variation du périmètre et de l'aire de ce carré à l'instant où le côté est égal à a.

T.S.V.P. ⟶

Exercice 6 :

E est un ensemble non vide. On considère $l : E \times E \longrightarrow \Re_+$ vérifiant :

a) $(\forall (x, y) \in E^2)$, $l(x, y) = l(y, x) \geq 0$;

b) $(\forall x, \in E)$, $l(x, x) = 0$;

c) $(\forall (x, y, z) \in E^3)$, $l(x, y) \leq l(x, z) + l(y, z)$.

Montrer que la relation R de E définie par $x R y \Leftrightarrow l(x, y) = 0$ est une relation d'équivalence et que l induit une distance sur E / R.

Exercice 7 :

Déterminer toutes les valeurs de l'entier naturel n pour que $n + 1$, $n + 3$, $n + 7$, $n + 9$, $n + 13$, $n + 15$ soient tous premiers (utiliser la congruence modulo 5).

Exercice 8 :

1) Trouver toutes les applications définies sur $\Re$ telles que :

$\forall (x, y) \in \Re^2$, $f(x) f(y) - f(xy) = x + y$ (1)

$f(0)=1$, $f(1)=2$, $x \to x$ et $y \to 1$ $\Rightarrow f(x) = x$

2) Trouver toutes les applications définies sur $\Re$ telles que :

$\forall (x, y) \in \Re^2$, $f(x+y) - f(x-y) = 4xy$ (2)

$f_k(x) = x^2 + k$, $k \in \mathbb{R}$

FIN

Université Cheikh Anta DIOP de Dakar
École Normale Supérieure.
Département de Mathématiques.

Concours 2000 d'entrée en F_1 A
Mathématiques (durée : 4 heures)

Nota Bene *: les candidats sont informés que, pour l'évaluation des copies, il sera tenu compte de la présentation, ainsi que de la clarté et de la rigueur des solutions proposées.*

Exercice 1 (3 points)

Déterminer toutes les valeurs de l'entier naturel n pour lesquelles n+1, n+3, n+7, n+9, n+13 et n+15 sont tous premiers. (On pourra utiliser la congruence modulo 5).

• Si n est impaire, • Si n est paire, • Si n = 4, • Si n ≥ 5

Exercice 2 (2 points)

Soient E et F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$ et f une application de E sur F qui vérifie : $\forall (x, y) \in E^2$, $f(x+y) = f(x)+f(y)$.
Montrer que si f est continue à l'origine 0_E alors f est linéaire.

① $f(0) = 0$
② $\forall n \in \mathbb{Z}, f(n$
③ $f(x) = f($

Exercice 3 (3 points)

Pour tout réel t on note E(t) la partie entière de t. On considère la fonction f définie sur $[0, 2\pi]$ par : $f(x) = \sin[xE(\frac{\pi}{x})]$ si $x \in]0, 2\pi]$ et $f(0) = 0$.

1) Etudier la continuité de f en 0.

2) Résoudre dans $[0, 2\pi]$ l'équation $E(\frac{\pi}{x}) = 0$ puis l'équation $E(\frac{\pi}{x}) = k$ où k est un entier naturel non nul. Expliciter f sur les intervalles $]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$ et $]\frac{\pi}{2}, \pi]$.

Exercice 4 (3 points)

1) Pour tout entier naturel n non nul on pose $U_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t}\, dt$.

   a) déterminer la limite de U_n en $+\infty$.

   b) Trouver un équivalent de U_n.

2) Quelle est la nature de l'intégrale $I = \displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t}\, dt$.

100

Exercice 5 (3 points)

(U_n) est une suite numérique ayant une limite quand n tend vers l'infini, P(n) une propriété dépendant de l'entier naturel n.
Pour démontrer que $\{ P(n) \Leftrightarrow [(U_n) \text{ converge}]\}$,
un candidat montre que
$[(U_n) \text{ converge}] \Rightarrow P(n)$, puis que
$[(|U_n| \text{ tend vers } +\infty) \Rightarrow \overline{P(n)}]$, $\overline{P(n)}$ étant la négation de la propriété P(n).
Le candidat a-t-il raison de procéder ainsi ? Justifier. (oui)

Exercice 6 (4 points)

1) Résoudre dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ l'équation : $x^2 + 5 = 0$. ($x^2 \equiv 2 [7]$, tableau) $x \equiv 3 [7]$ ou 4

2) Soient O un point fixé du plan (P) et G l'ensemble des rotations r_n de centre O et d'angle $n\frac{2\pi}{7}$; $n \in \mathbb{Z}$.

a) Montrer que $G = \{ r_n, n \in \{0,1,2,3,4,5,6\} \}$.

b) Montrer que G muni de la loi o est un groupe abélien.

c) On pose $r_n . r_m = r_{nm}$, n, m $\in \mathbb{Z}$. Montrer que (G, o , .) est un anneau commutatif.

d) Soit f l'application de Z dans G définie par : $n \rightarrow f(n) = r_n$. Montrer que f est un homomorphisme d'anneaux surjectif.

e) Montrer que G est isomorphe à $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, en déduire que G est un corps.

3) On pose $h = r_{n^2+7n+5}$.
Pour quelles valeurs de n, h est-elle égale à l'identité ?

Exercice 7 (2 points)

Soit f une fonction numérique à variable réelle définie et continue sur IR. Démontrer que l'ensemble des réels tels que f(x) est non nul est un ouvert de IR muni de la topologie usuelle.

Fin du sujet

Université Cheikh Anta Diop

FACULTE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION

Département de mathématiques
http://www.math-fastef.org/
fastef.departement-maths@ucad.edu.sn

Année académique 2015-2016

Durée : 4 heures

Concours d'entrée

Sections : F1A et F1B$_1$

Nota bene : *Il sera tenu compte, pour l'évaluation des copies, de la présentation et de la clarté des solutions proposées ainsi que de la rigueur dans les démarches entreprises.*

Partie 1 : Algèbre et Logique *(20 points)*

1°/ L'ensemble des translations muni de la loi o est-il un sous-groupe distingue du groupe des déplacements du plan ? (Justifier votre réponse). **(4 pts)**

2°/ L'ensemble des rotations du plan muni de la loi o est-il un sous-groupe du groupe des déplacements du plan ? (Justifier votre réponse). **(4 pts)**

3°/ P et Q étant deux assertions, dites si la proposition ci-après est vraie « Pour que $\neg(P \wedge Q)$ soit fausse il faut que l'une au plus des deux assertions P ou Q soit fausse ». (Justifier votre réponse). **(2 pts)**

4°/ La fonction ln (logarithme népérien) est-elle un isomorphisme de groupes ; un isomorphisme d'anneaux ? (Justifier votre réponse). **(2 pts)**

5°/ Dans le programme de seconde S le produit scalaire est définie comme suit :

« A, B et C sont trois points du plan, le produit scalaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ est le réel noté de $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$, tel que :

- si A=B alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$.
- si A≠B alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overline{AB} \times \overline{AH}$ où H est le projeté orthogonal de C sur (AB) ».

Rappeler la définition d'une forme bilinéaire et dites si le produit scalaire est une forme bilinéaire (Justifier votre réponse). **(4 pts)**

6°/ Deux étudiants Ngom et Touré discutent sur le sens de l'implication. On vous demande de préciser, parmi les affirmations qu'ils ont faites, celles qui sont correctes et de corriger les erreurs qu'ils auraient éventuellement commises. **(4 pts)**

-Ngom : « Pour que l'implication $(P \Rightarrow Q)$ soit vraie il suffit que l'une au moins des deux assertions soit vraie ».

-Touré : « Non, je ne suis pas d'accord. Vous pensez que la condition est suffisante mais cela n'est pas le cas. Elle est quand même nécessaire. »

Partie 3 : Probabilités-Statistique *(20 points)*

Exercice 1

On considère une série double (X, Y). On effectue un ajustement linéaire de Y en X par la méthode des moindres carrés. Soit Z la série des valeurs estimées de y à partir de la droite de régression de Y en X. On considère E la série des erreurs issues de l'estimation de Y par Z. On appelle R le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y.

1) Montrer que : Var (E) = Var (Y) - Var (Z).
2) En déduire que R appartient à [-1 ; 1].
3) *On estime que la corrélation entre X et Y est forte si la série des erreurs est au moins deux fois moins dispersée que celle de Y.*

En déduire un critère de décision pour une corrélation forte.

Exercice 2

1) De combien de façons différentes peut-on répartir équitablement 15 boules numérotées de 1 à 15 dans 5 urnes discernables ?
2) De combien façons peut-on les répartir de telle sorte que les boules numérotées 1 et 2 soient dans la même urne ?
3) De combien de façons différentes peut-on ranger p objets indiscernables dans n tiroirs numérotés de 1 à n. Chaque tiroir pouvant contenir de 0 à p objets ?

Partie 4 : Géométrie *(20 points)*

Soit ABC un triangle non plat dans un plan affine euclidien, A' le milieu de [BC], B' le milieu de [AC] et C' le milieu de [AB]. On désigne par G le centre de gravité du triangle ABC.

1) Démontrer qu'il existe un unique cercle ($\mathcal{C}$) passant par les points A, B et C (*cercle circonscrit*). On désigne par O le centre de ce cercle. (4pts).
2) Démontrer que le triangle A'B'C' se déduit du triangle ABC par une homothétie h que l'on précisera. Quel est le centre de gravité du triangle A'B'C' ? (5pts)
3) Quelles sont les hauteurs du triangle A'B'C'? (3pts).
4) Démontrer que les hauteurs du triangle ABC sont sécantes au point $H = h^{-1}(O)$. (5pts)
5) Que peut-on dire des points H, G et O ? (3pts)

Partie 2 : Analyse *(20 points)*

Soit F la fonction numérique à variable réelle définie par : $F(x) = \int_x^{x^2} \frac{\ln(1+t^2)}{t} dt.$

1. Montrez que la fonction F est définie sur IR tout entier et est paire. (2 pts)
2. Montrez que F est dérivable sur IR puis calculez F(1) et F'(x). (3 pts)
3. Etudiez le sens de variation de F sur l'intervalle$]0; +\infty[$. (2 pts)
4. a) Donnez le développement limité à l'ordre 4 de F en 0 (2 pts)

   b) Montrez que le developpement limité de F à l'ordre 2 en 1 est : (2 pts)

$$F(x) = ln2 \cdot (x-1) + \left(\frac{1-ln2}{2}\right)(x-1)^2 + (x-1)^2 \varepsilon(x)$$

où$\varepsilon(x)$ tend vers 0 quand x tend vers 1.

5. Montrez que si x>0, on a $F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right) = 3(lnx)^2 = \int_x^{x^2} \frac{\ln t^2}{t} dt$ (2 pts)
6. a) Démontrez que pour tout réel x > 1, on a l'égalité suivante : (2 pts)

$$F(x) - 3(lnx)^2 = \int_x^{x^2} \frac{1}{t} ln\left(1 + \frac{1}{t^2}\right) dt$$

   b) Déduisez en, pour tout réel x > 1, l'encadrement suivant : (2 pts)

$$3(lnx)^2 \leq F(x) \leq 3(lnx)^2 + \frac{1}{2x^2}$$

   c) Que représente alors dire de la courbe de $f : x \to 3(lnx)^2$ pour la courbe de F ?

(1 pt)

7. Tracez la courbe de $x \to 3(lnx)^2$ puis celle de F dans un même repère. (2 pts)

Sidikh Fall 777943014

Université Cheikh Anta Diop

FACULTE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION

Département de mathématiques

http://www.math-fastef.org/

departement.maths.fastef@gmail.com

Année académique 2012-20

Durée : 4 heures

Test d'entrée

Sections : F1A et F1B,

Nota bene : *Il sera tenu compte, pour l'évaluation des copies, de la présentation et de la clarté des solutions proposées ainsi que de la rigueur dans les démarches entreprises.*

Partie 1 : Logique et algèbre

Exercice1 (13 points)

n°	*y étant une variable réelle. L'égalité ou l'inégalité i) est-elle*	REPONSE A *vraies pour au moins une valeur x de IR ?*	REPONSE B *vraies pour toutes les valeurs x de IR ?*	REPONSE C *fausse pour au moins une valeur x de IR ?*	REPONSE D *fausse pour toutes les valeurs x de IR ?*
1)	$xy+5x+5y+20=y$,	X			X
2)	$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$,				X
3)	$x=x+y$,	X		X	
4)	$(x-y)-7=x-y$,		X	X	
5)	$xy=x$,		X		X
6)	$2x+y-5<0$,	X	X		

Les propositions de solutions ci-dessus sont faites par un étudiant.

1) Pour chacune des réponses proposées par l'étudiant dites si elle est vraie ou fausse et justifier votre réponse?
2) Pour un n° donné, les réponses proposées par l'étudiant sont parfois incohérentes, quelles sont ces réponses et pourquoi sont elles incohérentes?
3) Certaines réponses, bien que fausses sont cohérentes, quelles sont ces réponses et pourquoi sont elles cohérentes?

Exercice 2 (7 points)

Soit $(G, .)$ un groupe et H un sous-groupe de G, la relation R définie par : $\forall a, b \in G$, $a R b \Leftrightarrow a^{-1} b \in H$.

1) Montrer que R est une relation d'équivalence ;
2) Montrer que la relation R est compatible avec la loi de G si et seulement si H est distingué.

Partie 2 : Analyse

On considère l'intégrale I et la somme S données par : $I = \int_0^1 \frac{\ln t}{t^2-1}\,dt$ et $S = \sum_0^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

L'objet de ce problème est de calculer l'intégrale I en l'identifiant à la somme S.

1. On rappelle l'identité d'Euler suivante : $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$
   a) Montrer alors que : $\sum_1^{\infty} \frac{1}{(2k)^2} = \frac{\pi^2}{24}$ **(1,5 pt)**
   b) En déduire que : $S = \frac{\pi^2}{8}$ **(1,5 pt)**
2. Prouver que l'intégrale I converge. **(3 pts)**
3. Montrer que, pour tout entier naturel k, l'intégrale $I_k = \int_0^1 t^k \ln t\, dt$ est convergente puis calculer I_k en fonction de k. **(3 pts)**
4. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a l'égalité suivante :
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2} = \int_0^1 \frac{\ln t}{t^2-1}\,dt - \int_0^1 \frac{t^{2n+2}\ln t}{t^2-1}\,dt.$$ **(3 pts)**
5. Montrer que la fonction $\left[t \mapsto \frac{t\ln t}{t^2-1}\right]$ est bornée sur $]0\,;1[$. **(3 pts)**
   (On pourra étudier les limites en 0 et en 1)
6. En déduire que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^{2n+2}\ln t}{t^2-1} = 0$. **(3 pts)**
7. Déterminer alors la valeur de I. **(2 pts)**

Partie 3: Géométrie

Dans tout l'exercice, étant donné un triangle non aplati ABC, on note a, b et c les longueurs respectives des côtés BC, CA et AB. On dira que ce triangle est de type $\mathcal{W}$ si ses médianes passant par A et B sont perpendiculaires.

1. Montrer qu'il existe des triangles ABC tels que l'on ait les relations: $c^2 = \frac{b^2}{2} = \frac{a^2}{3}$

   Établir qu'un tel triangle est rectangle en A et qu'il est de type $\mathcal{W}$.

2. On se fixe des points A et B et on considère l'ensemble Γ des points C tels que le triangle ABC soit de type $\mathcal{W}$.
   a. Déterminer l'ensemble des points G, isobarycentres de A, B et C, lorsque C décrit Γ.
   b. En déduire l'ensemble Γ.
   c. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par le rapport $\frac{b}{c}$.
   d. Représenter l'ensemble des points H, orthocentres des triangles ABC, lorsque C décrit Γ. (on se placera dans un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ tel que A et B aient pour coordonnées respectives $(-1,0)$ et $(1,0)$ et l'on déterminera une fonction f telle que l'ensemble des points H soit la réunion des deux courbes d'équations respectives $y = f(x)$ et $y = -f(x)$).

Université Cheikh Anta Diop

FACULTE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION

Département de mathématiques
http://www.math-fastef.org/
departement.maths.fastef@gmail.com

Année académique 2012-2013

Durée : 4 heures

Test d'entrée

Sections : F1A et F1B1

Nota bene : *Il sera tenu compte, pour l'évaluation des copies, de la présentation et de la clarté des solutions proposées ainsi que de la rigueur dans les démarches entreprises.*

Partie 1 : Logique et algèbre

Exercice1 (13 points)

n°	*y étant une variable réelle. L'égalité ou l'inégalité i) est-elle*	REPONSE A *vraies pour au moins une valeur x de IR ?*	REPONSE B *vraies pour toutes les valeurs x de IR ?*	REPONSE C *fausse pour au moins une valeur x de IR ?*	REPONSE D *fausse pour toutes les valeurs x de IR ?*
1)	$xy + 5x + 5y + 20 = y$,	X			X
2)	$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$,			X	X
3)	$x = x + y$,	X		X	
4)	$(x-y) - 7 = x - y$,		X	X	
5)	$xy = x$,		X		X
6)	$2x + y - 5 < 0$,	X	X		

Les propositions de solutions ci-dessus sont faites par un étudiant.

1) Pour chacune des réponses proposées par l'étudiant dites si elle est vraie ou fausse et justifier votre réponse?
2) Pour un n° donné, les réponses proposées par l'étudiant sont parfois incohérentes, quelles sont ces réponses et pourquoi sont elles incohérentes?
3) Certaines réponses, bien que fausses sont cohérentes, quelles sont ces réponses et pourquoi sont elles cohérentes?

Exercice 2 (7 points)

Soit $(G, .)$ un groupe et H un sous-groupe de G, la relation R définie par : $\forall a, b \in G$, $a R b \Leftrightarrow a^{-1} b \in H$.

1) Montrer que R est une relation d'équivalence ;
2) Montrer que la relation R est compatible avec la loi de G si et seulement si H est distingué.

3.

a. Montrer qu'un triangle ABC est de type $\mathcal{W}$ si, et seulement si, l'on a la relation :
(*) $a^2 + b^2 = 5c^2$

b. Étant donné des réels strictement positifs a, b et c vérifiant la relation (*), donner une condition nécessaire et suffisante portant sur le rapport $\frac{a}{b}$ pour que a, b et c soient les longueurs des côtés d'un triangle de type $\mathcal{W}$.

Partie 4 : Statistique

L'objet de l'exercice est de trouver le cardinal β_n de l'ensemble S_n des entiers strictement positifs, inférieurs à n et premiers avec n.

1) On considère une épreuve d'univers Ω. Soit P une probabilité définie sur l'ensemble des parties de Ω.
   a) Soient A_1 et A_2 deux évènements indépendants. Montrer que $\overline{A_1}$ et A_2 sont indépendants
   b) **Généralisation :** Soient $A_1,\ldots, A_k$, k événements de Ω, mutuellement indépendants. Montrer que $\overline{A_1}$, $A_2,\ldots A_k$ sont indépendants.
   Montrer par récurrence que $\overline{A_1}, \overline{A_2},\ldots, \overline{A_k}$ sont indépendants.

Soit X une variable aléatoire sur Ω et prenant ses valeurs dans $\{1,2,\ldots,n\}$ de manière équiprobable, c'est-à-dire pour tout i =1,…, n, P(X=i)=1/n.

2) On considère A_1 l'évènement « X est multiple de 2 », et A_2 l'événement « X est multiple 5 »
   a) On suppose que n=100. Calculer les probabilités de A_1 et A_2. Les événements A_1 et A_2 sont-ils indépendants ?
   b) Supposons n=101, reprendre les questions du a) dans ce cas.

3) On suppose maintenant que la décomposition en produits de facteurs premiers de n s'écrit $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$, où les α_i sont des entiers supérieurs ou égaux à 1. Pour $1 \leq i \leq k$, A_i désigne l'événement « X est divisible par p_i ». Soit A l'événement « X est premier avec n ».
   a) Exprimer P(A) en fonction de n et de β_n.
   b) Montrer que $P(A_i)=1/p_i$, et que les A_i sont mutuellement indépendants..
   c) Exprimer A à l'aide des $\overline{A_i}$, en déduire que Card(S_n)= $n\prod_{i=1}^{k}(1-\frac{1}{p_i})$.

Université Cheikh Anta DIOP
Ecole Normale Supérieure
Département de Mathématiques

Concours 1999 d'entrée en F1 A
Mathématiques (durée : 4 heures)

<u>Nota Bene</u> : Les candidats sont informés que, pour l'évaluation des copies, il sera tenu compte de la présentation, ainsi que de la clarté et de la rigueur des solutions proposées.

<u>Barème</u> : Exercices n°2, 4, 5 et 7 : 2 points chacun ;
3 points pour chacun des autres.

<u>Exercice 1:</u>

Enoncer les négations des assertions suivantes:

A/

1°/ Dans toutes les sociétés, toutes les personnes respectent les enseignants.

2°/ Pour tout rectangle, tous les angles sont droits.

3°/ Pour tous réels a, b, c, $[(a > b$ et $b > c)$ implique $a > c]$.

4°/ Il existe des hommes immortels.

5°/ $\forall x \in \mathbb{R}, (x \in D_f \cap D_g) \Leftrightarrow (x \in D_{(f+g)})$.

B/

p, q, r sont des propositions. Sans dresser de table de vérité, donnez, en explicitant votre raisonnement, la valeur de vérité des propositions suivantes:

1°/ $(p \Rightarrow q) \vee (\bar{p} \Rightarrow q)$.

2°/ $(\overline{p \wedge \overline{(q \wedge r)}}) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \wedge r))$.

N.B. $\bar{p}$ désigne la négation de p.

<u>Exercice 2 :</u>

Soit ABC un triangle, on pose AB = 5, AC = 6, BC = 7. A' l'intersection de la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ et de (BC) et G le barycentre de {(A,7), (B,6), (C,5)}

a) Montrer que $\overrightarrow{A'C} = -\frac{6}{5}\overrightarrow{A'B}$.

b) Montrer que A', A et G sont alignés.

c) En déduire que G est le centre du cercle inscrit au triangle ABC

<u>Exercice 3 :</u>

On donne $f(x) = \left(\sum_{k=1}^{n} \sqrt{x^2 + 2kx + 1}\right) - \sqrt{n^2x^2 + 1}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.

2) Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

Exercice 4 :

On appelle diviseur strict d'un entier naturel tout diviseur de cet entier autre que l'entier lui-même.

1°/ Déterminer les diviseurs stricts de 220.

2°/ On appelle nombres amiables deux nombres entiers naturels tels que chacun d'eux soit égal à la somme des entiers naturels diviseurs stricts de l'autre. Vérifier que 220 et 280 sont amiables.

3°/

a) On appelle nombre parfait, un nombre amiable avec lui-même. Le nombre 220 est-il parfait ?

b) Déterminer un entier p, premier, tel que le nombre $2^4.p$ soit parfait.

c) Plus généralement, soient p un entier naturel premier et n un entier naturel quelconque. Quelle doit être l'expression de p en fonction de n pour que $2^n.p$ soit parfait.

4°/ Donner la liste des nombres parfaits de cette forme tels que $n \leq 10$.

Exercice 5 :

A est un point fixe. On désigne par Γ tout cercle "vu de A sous un angle de $\frac{\pi}{3}$", c'est-à-dire tel que si [AT] et [AT'] sont tangentes à Γ, le triangle ATT' est équilatéral.

1/ B étant un point donné, trouver le lieu des centres des cercles Γ passant par B ainsi que le lieu des points T et T'.

2°/ d étant une droite donnée, trouver le lieu des centres des cercles Γ tangents à la droite d.

Exercice 6 :

Trouver les nombres complexes z possédant la propriété suivante :

Il existe deux éléments n et p de $\mathbb{N}^*$ tels que $\begin{cases} z^n = 1 \\ (1+z)^p = 1 \end{cases}$

Exercice 7 :

Soit p un entier naturel premier

1°/ Si k est un entier naturel tel que $1 \leq k \leq p-1$, montrer que p divise C_p^k

2°/ En déduire que : $\forall (a,b) \in \mathbb{N}^2$, $(a+b)^p \equiv a^p + b^p$ modulo p.

3°/ Montrer que $n^p \equiv n$ modulo p.

4°/ Si n est non divisible par p, en déduire que $n^{p-1} \equiv 1$ modulo p. [illegible]

École Normale Supérieure
Département de Mathématiques
DAKAR

Concours d'entrée à l'École Normale Supérieure de Dakar
Section F1A : MATHÉMATIQUES
Octobre 1994

Durée : 4 heures

NB : les candidats sont informés qu'il sera tenu le plus grand compte de la présentation, ainsi que de la clarté et de la rigueur dans la rédaction des solutions.

EXERCICE N°1 : (1,5 point)

On considère une application f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et on note C sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ du plan.

On considère, dans le même repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ les courbes suivantes :

C_1 d'équation $y = f(|x|)$

C_2 d'équation $y = f(-x)$

C_3 d'équation $y = |f(x)|$

Expliquer comment obtenir C_1, C_2, C_3 à partir de C.

EXERCICE N°2 (2 points)

Résoudre dans $\mathbb{N}$ le système [illegible] $\equiv 1 [5]$ [illegible] $[5]$ [illegible]

EXERCICE N°3 (1,5 point)

Soit f une fonction réelle définie et continue sur $\mathbb{R}$. Démontrer que si f est périodique [illegible] alors f est bornée sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE N°4 (2 points)

Soit x un réel, donner dans chacun des cas l'ensemble des valeurs des expressions suivantes :

$A(x) = (x-3)(x+1)$ pour $|x| < 2$

$B(x) = (1-x)(2+x)$ pour $x \in]-2, -1[\cup]2, 5[$

$C(x) = \frac{3-x}{x+1}$ pour $x \in]-1, 3[$

EXERCICE N°5 (2,5 points)

Étant donné des réels a et b tels que a soit non nul, on considère l'ensemble $E_{a,b}$ des fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que : $\forall x \in \mathbb{R}$ $f'(x) = a f(x+b)$

1°/ Établir par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $f^{(n)}$ (dérivée n-ième de f) existe et exprimer $f^{(n)}(x)$ à l'aide de a, n et $f(x+nb)$

2°/ Montrer pour une valeur de b que l'on précisera en fonction de a, les fonctions g et h définies par $g(x) = \cos(ax)$ et $h(x) = \sin(ax)$ sont des éléments de $E_{a,b}$.

3°/ Soit $f \in E_{a,\frac{\pi}{2a}}$, on pose $\forall x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = f(x) - f(\frac{\pi}{2a})\sin(ax) - f(0)\cos(ax)$.

Montrer que $\varphi \in E_{a,\frac{\pi}{2a}}$ et que $\varphi(0) = \varphi'(0) = 0$

T.S.V.P

----------- (points)
On donne quatre points A, B, C, D non coplanaires de l'espace euclidien. A tout plan P de l'espace, on associe les distances des pts A, B, C et D à ce plan. Combien y a-t-il de plan pour lesquels ces quatre distances sont égales? justifier la réponse.

EXERCICE N°7 (2pts)

1°) Suivant que l'ensemble E représente $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$ donner, en la justifiant, la valeur de vérité de chacune des expressions suivantes :

a) $\forall x \in E, \exists y \in E, (x > 0 \Rightarrow x = y^2)$

b) $\forall x \in E, \forall y \in E, (x^2 = y^2 \Rightarrow x = y)$

c) $\exists x \in E((x^2 \leq 2)$ et $\forall y \in E, (y^2 \leq 2 \Rightarrow y \leq x))$

2°/ Enoncer ces résultats en langage courant.

EXERCICE N°8 (1,5 points)

Soient A, B et C trois points distincts du plan orienté et :

S_A la similitude directe de centre A qui transforme B en C

S_B la similitude directe de centre B qui transforme C en A

S_C la similitude directe de centre C qui transforme A en B et soit $S = S_C \circ S_B \circ S_A$.

1°/ a) Déterminer l'image de B par S

b) Mq S est la symétrie centrale de centre B.

2°/ Soit $C' = S_B \circ S_A(C)$ et $C'' = S_C(C')$

Quelle est la position relative des pts B, C et C'' ?

En déduire que A est le milieu de [CC'] et placer les pts A, B, C, C' et C'' sur une figure.

EXERCICE N°9 (2pts)

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ déf par : $f(x) = ax + b + \sqrt{x^2 + x - 1}$

1°/ Démontrer que f est définie au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$

2°/ Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Déterminer a et b tels que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\frac{5}{2}$

b) En déduire que (C) admet deux asymptotes que l'on déterminera.

EXERCICE N°10 (2,5 points)

n étant un entier naturel, on note E l'espace vectoriel des polynômes en X à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 2n. On considère l'application linéaire f de E dans E définie par : $\forall P \in E$, $f(P) = Q$ avec $Q(X) = (X^2 - 1)P'(X) - 2(nX + a)P(X)$ où P' est le polynôme dérivé de P et $a \in \mathbb{R}$.

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f.

Partie 4 (20points): Epreuve proposée par M. THIOUNE

Exercice I

Soit ABC un triangle tel que $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}AB^2$.

On désigne par C' le projeté orthogonal de C sur(AB).

1) Préciser la droite à laquelle appartient le point C

2) Sachant que AB=3 et AC=2,

a. Calculer la mesure de l'angle géométrique $\widehat{BAC}$, puis construire le triangle ABC.

b. Calculer les longueurs CC' et BC

3) Calculer de deux manières différentes $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ et en déduire la mesure en degré 10^{-2} près de l'angle $\widehat{ABC}$.

Exercice II

1) [AB] est un segment de longueur non nulle.

a) Construis à l'aide de la règle non graduée et de l'equerre le milieu de [AB]

b) Enoncer la propriété utilisée.

2) $\widehat{ABC}$ est un angle non nul, O un point n'appartenant ni à la demi droite [BA) ni à la demi droite [BC).

a. Construire à l'aide de la règle et l'équerre un angle $x\widehat{O}y$ tel que $mes x\widehat{O}y = mes\widehat{ABC}$

b. Enoncer la propriété utilisée

Partie 2 (20points) : Epreuve proposée par Ablaye FAYE

I

On donne une droite(D) et un point sur A non situé sur (D). On considère le programme suivant de construction de la droite passant par (A) et perpendiculaire à (D).

- On marque un point I sur la droite (D) et on construit le cercle de centre I et de rayon IA; ce cercle coupe la droite (D) en B et C.
- On construit les demi-cercles de diamètre [AB] et [AC], situés dans le demi-plan de frontière (AC) et contenant I. Ces demi-cercles se coupent en H.

Explique pourquoi (AH) est la droite passant par A et perpendiculaire à (D)

II

On donne un triangle ABC, H l'orthocentre de triangle et G son centre de gravité. La médiatrice de [BC] coupe la droite (GH) en 0.

Utilise les données précédentes pour construire le cercle circonscrit au triangle ABC, uniquement à l'aide du compas.

Partie 3 (20points): Epreuve proposée par S. T. SALL

La répartition des chiffres d'affaires(en millions de F) de cent entreprises représentées au niveau d'une foire commerciale et ayant obtenu un chiffre d'affaires au moins égal à 10 millions, mais ne dépassant pas la barre des 25 millions a été la suivante.

C.A.	plus de 11	plus de 12.5	plus de 13	plus de 13.5	plus de 14	plus de 15	plus de 17	plus de 20
nombre	90	84	70	52	32	17	11	5

1) Représenter l'histogramme de la distribution
2) a) Calculer le chiffre d'affaires médian et interpréter sa valeur.

   b) Trouver une approximation du mode et donner sa signification.
3) Faire un nouveau tableau donnant les effectifs par classes d'amplitude 2000000F.

   a) Etudier alors la dispersion autour du chiffre d'affaires moyen m.

   d) Vérifier qu'au moins 75% des entreprises ont un chiffre d'affaires compris entre $m - 2\sigma$ et $m + 2\sigma$, où σ désigne l'écart type.

Université Cheikh Anta Diop

FACULTE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION

Département de mathématiques

Année académique 2012-2013

http://www.math-fastef.org/
fastef.departement-maths@ucad.edu.sn

Durée : 4 heures

[redacted]

Epreuve de pédagogie de la spécialité

Nota bene : *Les épreuves seront traitées sur des feuilles différentes.*

Il sera tenu compte, pour l'évaluation des copies, de la présentation ainsi que de la clarté et de la rigueur des solutions proposées.

Partie 1 (20points): Epreuve proposée par Bary

I

1) Soit un tétraèdre ABCD tel que BC = a, AD = 2a, les arêtes (BC) et (AD) étant orthogonales. Le plan P passant par un point E de [AC] et parallèle à (BC) et (AD) coupe les autres arêtes respectivement en F, G et H. Donner la nature du polygone EFGH.
2) On pose AE = α AC. Donner l'aire de EFGH en fonction de a et α.
3) Trouver la valeur de α pour laquelle cette aire est maximale, a étant fixé.

II Donner les valeurs de vérité des propositions suivantes justification à l'appui.

4) Dans l'espace, si deux droites sont orthogonales, toute droite orthogonale à l'une est parallèle à l'autre.
5) Dans l'espace, si deux droites sont orthogonales, tout plan orthogonal à l'une est parallèle à l'autre.
6) Dans l'espace, si deux droites sont orthogonales, tout plan parallèle à l'une est orthogonale à l'autre.
7) Dans l'espace, si deux plans sont perpendiculaires, toute droite parallèle à l'un est perpendiculaire à l'autre.
8) Dans l'espace, si deux plans sont perpendiculaires, tout plan parallèle à l'un est perpendiculaire à l'autre.
9) Dans l'espace, si deux plans sont perpendiculaires, tout plan perpendiculaire à l'un est parallèle à l'autre.

Université Cheikh Anta DIOP de Dakar
École Normale Supérieure.
Département de Mathématiques.

Concours 2000 d'entrée en F_1 A
Mathématiques (durée : 4 heures)

<u>Nota Bene</u> : les candidats sont informés que, pour l'évaluation des copies, il sera tenu compte de la présentation, ainsi que de la clarté et de la rigueur des solutions proposées.

Exercice 1 (3 points)

Déterminer toutes les valeurs de l'entier naturel n pour lesquelles n+1, n+3, n+7, n+9, n+13 et n+15 sont tous premiers. (On pourra utiliser la congruence modulo 5).

• Si n est impair, • Si n est pair, • Si n = 4, • Si n ≥ 5

Exercice 2 (2 points)

Soient E et F deux espaces vectoriels normés sur $\mathbb{R}$ et f une application de E sur F qui vérifie : $\forall (x, y) \in E^2$, $f(x+y) = f(x)+f(y)$.
Montrer que si f est continue à l'origine 0_E alors f est linéaire.

(1) $f(0) = 0$
(2) $\forall n \in \mathbb{Z}$, $f(nx$ ...
(3) $f(x) = f(x$ ...
$f(rx) = rf$ ...
(4) $f(\lambda x) = \lambda f($ ...

Exercice 3 (3 points)

Pour tout réel t on note E(t) la partie entière de t. On considère la fonction f définie sur [0, 2π] par : $f(x) = \sin[xE(\frac{\pi}{x})]$ si $x \in]0, 2\pi]$ et $f(0) = 0$.

1) Etudier la continuité de f en 0.

2) Résoudre dans [0, 2π] l'équation $E(\frac{\pi}{x}) = 0$ puis l'équation $E(\frac{\pi}{x}) = k$ où k est un entier naturel non nul. Expliciter f sur les intervalles $]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$ et $]\frac{\pi}{2}, \pi]$

Exercice 4 (3 points)

1) Pour tout entier naturel n non nul on pose $U_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin t|}{t} dt$

   a) déterminer la limite de U_n en $+\infty$;
   b) Trouver un équivalent de U_n .

2) Quelle est la nature de l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{|\sin t|}{t} dt$

Exercice 5 (3 points)

(U_n) est une suite numérique ayant une limite quand n tend vers l'infini. P(n) une propriété dépendant de l'entier naturel n.
Pour démontrer que { P(n) ⇔ [(U_n) converge]} ,
un candidat montre que
[(U_n) converge] ⇒ P(n) , puis que
[($|U_n|$ tend vers $+\infty$) ⇒ $\overline{P(n)}$], $\overline{P(n)}$ étant la négation de la propriété P(n).
Le candidat a-t-il raison de procéder ainsi ? Justifier. (oui)

Exercice 6 (4 points)

1) Résoudre dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ l'équation : $x^2+5=0$. ($x^2 \equiv 2\,[7]$, [illegible]) $x \equiv 3\,[7]$ ou $x \equiv 4\,[7]$
2) Soient O un point fixé du plan (P) et G l'ensemble des rotations r_n de centre O et d'angle $n\frac{2\pi}{7}$; $n \in \mathbb{Z}$.

   a) Montrer que G = { r_n, $n \in \{0,1,2,3,4,5,6\}$ }.

   b) Montrer que G muni de la loi o est un groupe abélien.

   c) On pose $r_n * r_m = r_{nm}$, n, m ∈ Z. Montrer que (G, o , *) est un anneau commutatif.

   d) Soit f l'application de Z dans G définie par n ↦ f(n) = [illegible]. Montrer que f est un homomorphisme d'anneaux surjectif.

   e) Montrer que G est isomorphe à [illegible], et en déduire que G est un corps.

3) On pose h = [illegible]

Pour quelles valeurs de n, h est-elle égale à l'identité ?

Exercice 7 (2 points)

Soit f une fonction numérique à variable réelle définie et continue sur IR. Démontrer que l'ensemble des réels tels que f(x) est non nul est un ouvert de IR muni de la topologie usuelle.

Fin du sujet

Université Cheikh Anta DIOP de Dakar
École Normale Supérieure
Dép. de Mathématiques

Concours 1998 d'entrée en F_1 A
Mathématiques(durée : 4 heures)

Nota Bene : les candidats sont informés que, pour l'évaluation des copies, il sera tenu compte de la présentation, ainsi que de la clarté et de la rigueur des solutions proposées.

Barème : Exercices n°2, 4, 5 et 7: 2 points chacun ; 3 points pour chacun des autres.

Exercice 1 :

ABC est un triangle. On définit la suite des points $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$G_0 = A$; G_{n+1} est l'isobarycentre de G_n, B et C ;

1. montrer que les points G_n sont alignés ;
2. montrer qu'il existe une homothétie h dont on précisera le centre et le rapport telle que : $\forall n\in\mathbb{N}$, $h(G_n) = G_{n+1}$;
3. donner une relation entre $\overrightarrow{IG_n}$ et $\overrightarrow{IG_{n+1}}$; en déduire la position limite de G_n lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 2 :

Les diagonales d'un quadrilatère [illegible] ABCD [illegible]

étant une des mesures de l'un de ces angles, démontrer que l'aire S de ABCD est $S = \frac{1}{2}$ [illegible] BD.sinα.

Exercice 3 :

Étant donnés deux réels a et b tels que $a < b$, on considère les segments $I = [a, b]$ et $J = [1 + b, 1 - a]$:

1. à quelles conditions a-t-on $I \cap J = \varnothing$?
2. à quelles conditions a-t-on $I \cap J \neq \varnothing$?
3. déterminer $I \cap J$.

Exercice 4 : Calculer la valeur de $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1 + \tan x)dx$.

Exercice 5 :

1. Prouver que le point de contact d'une tangente à la courbe d'équation $y = \frac{1}{x}$ est le milieu du segment de tangente compris entre les axes de coordonnées ;
2. Le côté d'un carré croît à une vitesse constante v. Trouver la vitesse de variation du périmètre et de l'aire de ce carré à l'instant où le côté est égal à a.

T.S.V.P.

Exercice 6 :

E est un ensemble non vide. On considère $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$, vérifiant :

a) $\left(\forall (x, y) \in E^2\right)$, $f(x, y) = f(y, x) \geq 0$;

b) $\left(\forall x \in E\right)$, $f(x, x) = 0$;

c) $\left(\forall (x, y, z) \in E^3\right)$, $f(x, y) \leq f(x, z) + f(y, z)$;

Montrer que la relation R de E définie par $x R y \Leftrightarrow f(x, y) = 0$ est une relation d'équivalence et que f induit une distance sur E / R.

Exercice 7 :

Déterminer toutes les valeurs de l'entier naturel n pour que $n + 1$, $n + 3$, $n + 7$, $n + 9$, $n + 13$, $n + 15$ soient tous premiers (utiliser la congruence modulo 5).

Exercice 8 :

1) Trouver toutes les applications définies sur $\mathbb{R}$ telles que :
$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x) f(y) - f(x y) = x + y$; (1)

$f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $x \to x$ et $y \to 1$
$\Rightarrow f(x) = x + 1$

2) Trouver toutes les applications définies sur $\mathbb{R}$ telles que :
$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $f(x + y) - f(x - y) = 4 x y$ (2)

$f_k(x) = x^2 + k$, $k \in \mathbb{R}$

FIN

Université Cheikh Anta Diop

FACULTE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES
DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION

Département de mathématiques
http://www.math-fastef.org/
fastef.departement-maths@ucad.edu.sn

Année académique 2013-2014

Durée : 4 heures

Test d'entrée

Sections : F1A et F1B$_1$

Nota bene : *Il sera tenu compte, pour l'évaluation des copies, de la présentation et de la clarté des solutions proposées ainsi que de la rigueur dans les démarches entreprises.*

Partie 1 : Algèbre et Logique

Exercice 1 (1[illegible] points)

Soient O un point fixé d'un plan P et G l'ensemble des rotations de centre O et d'angle $n\dfrac{2\pi}{13}$, $n \in Z$.

a) Montrer que $G = \{ r(O, n\dfrac{2\pi}{13}), n \in \{ 0,1,...,12\} \}$.

b) Montrer que G muni de la loi o est un groupe abélien.

c) Soit f l'application de Z dans G définie par : $n \to f(n) = r(O, n\dfrac{2\pi}{13})$, montrer que f est un homomorphisme de groupe surjectif. En déduire que G est isomorphe à Z / 13Z.

Exercice 2 (8 points)

Dans chacun des cas suivants, dites si la proposition est vraie, justifiez votre réponse et donnez la négation.

1) Soit C_1 l'ensemble des points dont les coordonnées (x, y) vérifient la relation $y = \dfrac{\sin(x)}{x}$, la proposition : quelque soit le réel a positif, il existe un point M_0 (x_0, y_0) de C_1 tel que, quelque soit le point M(x, y) de C_1, si $x > x0$ alors $|y| \leq a$.
2) Soit C_2 l'ensemble des points dont les coordonnées (x, y) vérifient la relation $y = e^x$, la proposition : quelque soit la droite (L) parallèle à l'axe des abscisses, il existe un point M_0 (x_0, y_0) de C_2 tel que, quelque soit $x > x0$, le point M(x, y) de C_2 est au dessus de (L)
3) Soit (D_1) la droite d'équation $x = -2$; on pose $E = F = IR$ et $R(x, y) : M(x, y) \in (D_1)$. La proposition : $(\forall x)(\exists y)R(x, y)$;
4) Soit (D_2) la droite d'équation : $y = -2$; on pose $E = F = IR$ et $R(x, y) : M(x, y) \notin (D_2)$. La proposition : $(\forall y)(\exists x)R(x, y)$;

97

Partie 2 : Analyse (20 points)

On considère la fonction F définie par $F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

1. Montrer que $F(x)$ existe pour tout réel x appartenant à l'intervalle]0 ; +∞[
2. Montrer que F est de classe C^1 sur]0 ; +∞[puis calculer sa dérivée F'(x) sur cet intervalle
3. Calculer la limite en 0^+ puis la limite en +∞ de F.
4. On cherche un équivalent ~~un équivalent~~ de $F(x)$ lorsque x tend vers 0^+

   a) Montrer qu'il existe une constante C (C > 0) tel que : $\forall x \in]0; 1]$, $\left|\int_x^1 \frac{e^{-t}}{t} dt + \ln x\right| \leq C$. (On pourra écrire $\ln x$ sous la forme d'une intégrale.)

   b) En déduire que $F(x)$ est équivalent à $-\ln x$ lorsque x tend vers 0^+.

5. On cherche un équivalent un équivalent de $F(x)$ lorsque x tend vers +∞.

   a) Montrer que pour tout réel $x > 0$, l'intégrale $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt$ est convergente

   b) Montrer que pour tout réel $x > 0$, $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t^2} dt \leq \frac{F(x)}{x}$.

   c) A l'aide d'une intégration par parties, déduire que F(x) est équivalent à $\frac{e^{-x}}{x}$ lorsque x tend vers + ∞

Partie 3 : Statistique (20 points)

Exercice 1 :

On dispose d'une machine qui emplit automatiquement des paquets de chips dont le poids X varie entre 38 et 48 grammes. On prélève un échantillon de la production ; après pesée, on obtient le tableau suivant :

X en gramme	Moins de 39	Moins de 40.5	Moins de 41	Moins de 41.5	Moins de 42	Moins de 43	Moins de 45	Moins de 48
Nombre de paquets	6	56	82	122	158	186	198	200

Tracer un histogramme, calculer le poids médian et étudier la dispersion autour du poids moyen

Exercice 2 :

On lance un dé cubique rouge et un dé cubique noir ; tous deux équilibrés, chacun a ses faces numérotées de 1 à 6. Lorsqu'ils retombent on observe les chiffres inscrits sur les deux faces supérieures des dés.

Calculer les probabilités que l'on obtienne :

1) un 3 avec le dé rouge sachant que la somme des points est 6 .
2) un nombre pair avec le dé rouge sachant que la somme des points est 6 .
3) un nombre pair avec le dé rouge sachant que la somme des points est au plus 6 .
4) au moins un nombre pair sachant que la somme des points est au plus 10.

Partie 4: Géométrie (20 points)

Exercice 1:

Les isométries planes s'écrivent, en nombres complexes, comme indiqué dans le tableau suivant

	1	2	3	4
écriture en nombres complexes	$z \longmapsto z+b$	$z \longmapsto az+b$ $\lvert a\rvert = 1$ $a \neq 1$	$z \longmapsto a\bar{z}+b$ $\lvert a\rvert = 1$ $a\bar{b}+b=0$	$z \longmapsto a\bar{z}+b$ $\lvert a\rvert = 1$ $a\bar{b}+b \neq 0$

Dire dans chaque cas quelle est la nature de l'isométrie en donnant ses éléments caractéristiques.

Exercice 2 :

(La« fonction scalaire» de Leibniz) C'est le nom traditionnel de la fonction F [illegible] par le système de points pondérés $((A_1, \alpha_1), \dots, (A_k, \alpha_k))$ et qui, au point M de l'espace affine euclidien E, associe le scalaire $F(M) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i MA_i^{\,2}$

1) On suppose que la somme $\sum \alpha_i$ est nulle. Montrer qu'il existe un vecteur fixe $\vec{v}$ tel que, pour tout point M' de E,

   $F(M') = F(M) + 2\overrightarrow{MM'}.\vec{v}$

2) Si la somme $\sum \alpha_i$ n'est pas nulle, on appelle G le barycentre du système. Vérifier que : $F(M) = F(G) + (\sum \alpha_i)\, MG^2$.

3) ***Applications***. On se donne un nombre réel k. Déterminer, selon les valeurs de k,

   - l'ensemble des points M vérifiant l'équation $MA^2 + MB^2 = k$,
   - l'ensemble des points M vérifiant l'équation $MA^2 - MB^2 = k$,
   - l'ensemble des points M vérifiant l'équation $\frac{MA}{MB} = k$.

Université Cheikh Anta Diop

FACULTE DES SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE L'EDUCATION ET DE LA FORMATION

Département de mathématiques
http://www.math-fastef.org/
departement.maths.fastef@gmail.com

Année académique 2012-2013

Durée : 4 heures

Test d'entrée

Sections : F1A et F1B$_1$

Nota bene : *Il sera tenu compte, pour l'évaluation des copies, de la présentation et de la clarté des solutions proposées ainsi que de la rigueur dans les démarches entreprises.*

Partie 1 : Logique et algèbre

Exercice1 (13 points)

n°	*y étant une variable réelle. L'égalité ou l'inégalité i) est-elle*	REPONSE A *vraies pour au moins une valeur x de IR ?*	REPONSE B *vraies pour toutes les valeurs x de IR ?*	REPONSE C *fausse pour au moins une valeur x de IR ?*	REPONSE D *fausse pour toutes les valeurs x de IR ?*
1)	$xy+5x+5y+20 = y$,	X			X
2)	$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$,			X	X
3)	$x = x + y$,	X		X	
4)	$(x-y) - 7 = x-y$,		X	X	
5)	$xy = x$,		X		X
6)	$2x+y-5 < 0$,	X	X		

Les propositions de solutions ci-dessus sont faites par un étudiant.

1) Pour chacune des réponses proposées par l'étudiant dites si elle est vraie ou fausse et justifier votre réponse?
2) Pour un n° donné, les réponses proposées par l'étudiant sont parfois incohérentes, quelles sont ces réponses et pourquoi sont elles incohérentes?
3) Certaines réponses, bien que fausses sont cohérentes, quelles sont ces réponses et pourquoi sont elles cohérentes?

Exercice 2 (7 points)

Soit (G, .) un groupe et H un sous-groupe de G, la relation R définie par : $\forall a, b \in G$, $a R b \Leftrightarrow a^{-1} b \in H$.

1) Montrer que R est une relation d'équivalence ;
2) Montrer que la relation R est compatible avec la loi de G si et seulement si H est distingué.

9H

Partie 2 : Analyse

On considère l'intégrale I et la somme S données par : $I = \int_0^1 \frac{lnt}{t^2-1}\,dt$ et $S = \sum_0^\infty \frac{1}{(2n+1)^2}$.

L'objet de ce problème est de calculer l'intégrale I en l'identifiant à la somme S.

1. On rappelle l'identité d'Euler suivante : $\sum_1^\infty \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$
   a) Montrer alors que : $\sum_1^\infty \frac{1}{(2k)^2} = \frac{\pi^2}{24}$ **(1,5 pt)**
   b) En déduire que : $S = \frac{\pi^2}{8}$ **(1,5 pt)**
2. Prouver que l'intégrale I converge. **(3 pts)**
3. Montrer que, pour tout entier naturel k, l'intégrale $I_k = \int_0^1 t^k\, lnt\, dt$ est convergente puis calculer I_k en fonction de k. **(3 pts)**
4. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, on a l'égalité suivante :
$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(2k+1)^2} = \int_0^1 \frac{lnt}{t^2-1}\,dt - \int_0^1 \frac{t^{2n+2}lnt}{t^2-1}dt.$$ **(3 pts)**
5. Montrer que la fonction $\left[t \to \frac{t^2 lnt}{t^2-1}\right]$ est bornée sur $[0\,;1]$. **(3 pts)**
   (On pourra étudier les limites en 0 et en 1)
6. En déduire que $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \frac{t^{2n+2}lnt}{t^2-1} = 0$. **(3 pts)**
7. Déterminer alors la valeur de I. **(2 pts)**

Partie 3: Géométrie

Dans tout l'exercice, étant donné un triangle non aplati ABC, on note a, b et c les longueurs respectives des côtés BC, CA et AB. On dira que ce triangle est de type $\mathcal{W}$ si ses médianes passant par A et B sont perpendiculaires.

1. Montrer qu'il existe des triangles ABC tels que l'on ait les relations: $c^2 = \frac{b^2}{2} = \frac{a^2}{3}$.

   Établir qu'un tel triangle est rectangle en A et qu'il est de type $\mathcal{W}$.

2. On se fixe des points A et B et on considère l'ensemble Γ des points C tels que le triangle ABC soit de type $\mathcal{W}$.
   a. Déterminer l'ensemble des points G, isobarycentres de A, B et C, lorsque C décrit Γ.
   b. En déduire l'ensemble Γ.
   c. Déterminer l'ensemble des valeurs prises par le rapport $\frac{b}{c}$.
   d. Représenter l'ensemble des points H, orthocentres des triangles ABC, lorsque C décrit Γ. (on se placera dans un repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ tel que A et B aient pour coordonnées respectives $(-1, 0)$ et $(1, 0)$ et l'on déterminera une fonction f telle que l'ensemble des points H soit la réunion des deux courbes d'équations respectives $y = f(x)$ et $y = -f(x)$).

95

3.

a. Montrer qu'un triangle ABC est de type $\mathcal{W}$ si, et seulement si, l'on a la relation :

$(*) \quad a^2 + b^2 = 5c^2$

b. Étant donné des réels strictement positifs a, b et c vérifiant la relation $(*)$, donner une condition nécessaire et suffisante portant sur le rapport $\frac{a}{b}$ pour que a, b et c soient les longueurs des côtés d'un triangle de type $\mathcal{W}$.

Partie 4 : Statistique

L'objet de l'exercice est de trouver le cardinal β_n de l'ensemble S_n des entiers strictement positifs, inférieurs à n et premiers avec n.

1) On considère une épreuve d'univers Ω. Soit P une probabilité définie sur l'ensemble des parties de Ω.

a) Soient A_1 et A_2 deux évènements indépendants. Montrer que $\overline{A_1}$ et A_2 sont indépendants

b) **Généralisation : Soient** $A_1, \ldots, A_k$, k événements de Ω, mutuellement indépendants. Montrer que $\overline{A_1}$, $A_2, \ldots A_k$ sont indépendants.

Montrer par récurrence que $\overline{A_1}, \overline{A_2}, \ldots, \overline{A_k}$ sont indépendants.

Soit X une variable aléatoire sur Ω et prenant ses valeurs dans $\{1,2,\ldots,n\}$ de manière équiprobable, c'est-à-dire pour tout $i = 1, \ldots, n$, $P(X=i)=1/n$.

2) On considère A_1 l'évènement « X est multiple de 2 », et A_2 l'événement « X est multiple 5 »

a) On suppose que n=100. Calculer les probabilités de A_1 et A_2. Les événements A_1 et A_2 sont-ils indépendants ?

b) Supposons n=101, reprendre les questions du a) dans ce cas.

3) On suppose maintenant que la décomposition en produits de facteurs premiers de n s'écrit $n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$, où les α_i sont des entiers supérieurs ou égaux à 1. Pour $1 \le i \le k$, A_i désigne l'événement « X est divisible par p_i ». Soit A l'événement « X est premier avec n ».

a) Exprimer P(A) en fonction de n et de β_n.

b) Montrer que $P(A_i)=1/p_i$, et que les A_i sont mutuellement indépendants..

c) Exprimer A à l'aide des $\overline{A_i}$, en déduire que $\mathrm{Card}(S_n) = n\prod_{i=1}^{k}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)$.

96

Ecole Normale Superieure
Departement de Mathematiques
DAKAR

Concours d'entrée à l'Ecole Normale Superieure de Dakar
Section F1A : MATHEMATIQUES
Octobre 1994

Durée : 4 heures

NB : Les candidats sont informés qu'il sera tenu le plus grand compte de la presentation, ainsi que de la clarté et de la rigueur dans la redaction des solutions.

EXERCICE N°1 : (1,5 point)

On considère une application f de $\mathbb{R}$ ds $\mathbb{R}$ et on note C sa courbe representative ds un repère orthonormal $(O, \vec{u}, \vec{v})$ du plan.
On considère, dans le même repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$ les courbes svtes :
C_1 d'eqt : $y = f(|x|)$
C_2 d'eqt : $y = f(-x)$
C_3 d'eqt : $y = |f(x)|$
Expliquer comment obtenir C_1, C_2 et C_3 à partir de C.

EXERCICE N°2 (2 points)

Resoudre dans $\mathbb{N}$ l'eqt : $8(n-5)^5 - n^2 + 4n - 24 \equiv 0[5]$ $\quad n \equiv 1[5]$ ou $n \equiv 3[5]$ tableau

EXERCICE N°3 (1,5 point)

Soit f une fonction reelle definie et continue sur $\mathbb{R}$. Demontrer que si f est periodique de periode T alors f est bornée sur $\mathbb{R}$.

EXERCICE N°4 (2 points)

Soit x un reel, trouver dans chacun des cas l'ens des valeurs des expressions svtes :
$A(x) = (x-3)(x+1)$ pour $|x| < 2$
$B(x) = (1-x)(2+x)$ pour $x \in]-2, -1[\cup]2, 3[$
$C(x) = \frac{3-x}{x+1}$ pour $x \in]-1, 3[$

EXERCICE N°5 (2,5 points)

Etant donné les reels a et b tq a soit non nul, on considère l'ensemble $E_{a,b}$ des fonctions f derivables sur $\mathbb{R}$ tq : $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = a f(x+b)$

1°/ Etablir par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ $f^{(n)}$ (dérivée nième de f) existe et exprimer $f^{(n)}(x)$ à l'aide de a, n et $f(x+nb)$

2°/ Mtq pour une valeur de b que l'on précisera en fonction de a, les fonctions g et h déf par $g(x) = \cos(ax)$ et $h(x) = \sin(ax)$ sont des elmts de $E_{a,b}$.

3°/ Soit $f \in E_{a,\frac{\pi}{2a}}$, on pose : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\Phi(x) = f(x) - f\left(\frac{\pi}{2a}\right)\sin(ax) - f(0)\cos(ax)$.
Mtq $\Phi \in E_{a,\frac{\pi}{2a}}$ et que $\Phi(0) = \Phi'(0) = 0$

TSVP

On donne quatre points A, B, C, D non coplanaires de l'espace euclidien. A tout plan P de l'espace, on associe les distances des pts A, B, C et D à ce plan. Combien y a-t-il de plan pour lesquels ces quatre distances sont égales ? justifier la réponse.

EXERCICE N°7 (2pts)

1°) Suivant que l'ensemble E représente $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$ donner, en la justifiant, la valeur de vérité de chacune des expressions suivantes :

a) $\forall x \in E, \exists y \in E, (x > 0 \Rightarrow x = y^2)$

b) $\forall x \in E, \forall y \in E, (x^2 = y^2 \Rightarrow x = y)$

c) $\exists x \in E((x^2 \leq 2)$ et $\forall y \in E, (y^2 \leq 2 \Rightarrow y \leq x))$

2°) Enoncer ces résultats en langage (non formalisé.

EXERCICE N°8 (1,5 points)

Soient A, B et C trois points distincts du plan orienté et :

S_A la similitude directe de centre A qui transforme B en C

S_B la similitude directe de centre B qui transforme C en A

S_C la similitude directe de centre C qui transforme A en B et soit $S = S_C o S_B o S_A$.

1°/ a) Déterminer l'image de B par S

b) Mq S est la symétrie centrale de centre B.

2°/ Soit $C' = S_B \circ S_A(C)$ et $C'' = S_C(C')$

Quelle est la position relative des pts B, C et C'' ?

En déduire que A est le milieu de $[CC']$ et placer les pts A, B, C, C' et C'' sur une figure.

EXERCICE N°9 (2pts)

Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ ds $\mathbb{R}$ def par : $f(x) = ax + b + \sqrt{x^2 + x - 1}$

1°) Démontrer que f est définie au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$

2°/ Soit (C) la courbe représentative de f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Déterminer a et b tels que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -\frac{5}{2}$

b) En déduire que (C) admet deux asymptote que l'on déterminera.

EXERCICE N°10 (2,5 points)

n étant un entier naturel, on note E l'espace vectoriel des polynomes en X à coefficients réels de degré inférieur ou égal à $2n$. On considère l'application linéaire f de E dans E définie par : si $P \in E$, $f(P) = Q$ avec $Q(X) = (X^2 - 1) P'(X) - 2(nx + a) P(X)$ où P' est le polynome dérivé de P et $a \in \mathbb{R}$.

Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de f.

Université Cheikh Anta DIOP
Ecole Normale Supérieure
Département de Mathématiques

Concours 1999 d'entrée en F_1 A
Mathématiques (durée : 4 heures)

Nota Bene : Les candidats sont informés que, pour l'évaluation des copies, il sera tenu compte de la présentation, ainsi que de la clarté et de la rigueur des solutions proposées.

Barème : Exercices n°2, 4, 5 et 7 : 2 points chacun ;
3 points pour chacun des autres.

Exercice 1:

Enoncer les négations des assertions suivantes:

A/

1°/ Dans toutes les sociétés, toutes les personnes respectent les enseignants.
2°/ Pour tout rectangle, tous les angles sont droits.
3°/ Pour tous réels a, b, c, $[(a > b \text{ et } b > c) \text{ implique } a > c]$.
4°/ Il existe des hommes immortels.
5°/ $\forall x \in \mathbb{R}, (x \in D_f \cap D_g) \Leftrightarrow (x \in D_{(f+g)})$.

B/

p, q, r sont des propositions. Sans dresser de table de vérité, donnez, en explicitant votre raisonnement, la valeur de vérité des propositions suivantes:

1°/ $(p \Rightarrow q) \vee (\bar{p} \Rightarrow q)$.

2°/ $(\overline{p \wedge \overline{(q \wedge r)}}) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \wedge r))$.

N.B. $\bar{p}$ désigne la négation de p.

Exercice 2 :

Soit ABC un triangle, on pose AB= 5, AC= 6, BC= 7, A' l'intersection de la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ et de (BC) et G le barycentre de {(A,7), (B,6), (C,5)}.

a) Montrer que $\overline{A'C} = -\frac{6}{5}\overline{A'B}$.

b) Montrer que A', A et G sont alignés.

c) En déduire que G est le centre du cercle inscrit au triangle ABC.

Exercice 3 :

On donne $f(x) = \left(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{x^2 + 2kx + 1}\right) - \sqrt{n^2x^2 + 1}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

101

Exercice 4 :

On appelle diviseur strict d'un entier naturel tout diviseur de cet entier autre que l'entier lui-même.

1°/ Déterminer les diviseurs stricts de 220.

2°/ On appelle nombres amiables deux nombres entiers naturels tels que chacun d'eux soit égal à la somme des entiers naturels diviseurs stricts de l'autre. Vérifier que 220 et 280 sont amiables.

3°/

a) On appelle nombre parfait, un nombre amiable avec lui-même. Le nombre 220 est-il parfait ?

b) Déterminer un entier p, premier, tel que le nombre $2^4.p$ soit parfait.

c) Plus généralement, soient p un entier naturel premier et n un entier naturel que [illegible]. Quelle doit-être l'expression de p en fonction de n pour que $2^n.p$ soit parfait [illegible]

4°/ Donner la liste des nombres parfaits de cette forme tels que $n \leq 10$.

Exercice 5 :

A est un point fixe. On désigne par Γ tout cercle "vu de A sous un angle de $\frac{\pi}{3}$ ", c'est-à-dire tel que si [AT] et [AT'] sont tangentes à Γ , le triangle ATT' est équilatéral.

1/ B étant un point donné, trouver le lieu des centres des cercles Γ passant par B ainsi que le lieu des points T et T'.

2°/ d étant une droite donnée, trouver le lieu des centres des cercles Γ tangents à la droite d.

Exercice 6 :

Trouver les nombres complexes z possédant la propriété suivante :

Il existe deux éléments n et p de N* tels que $\begin{cases} z^n = 1 \\ (1+z)^p = 1 \end{cases}$

Exercice 7 :

Soit p un entier naturel premier

1°/ Si k est un entier naturel tel que $0 < k < p$, montrer que p divise C_p^k.

2°/ En déduire que : $\forall (a,b) \in N^2$, $(a+b)^p \equiv a^p + b^p$ modulo p.

3°/ Montrer que $n^p \equiv n$ modulo p. récurrence

4°/ Si n est non divisible par p, en déduire que $n^{p-1} \equiv 1$ modulo p.